

**Universidad de El Salvador**

*Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, Escuela de Matemática*



**ÓRBITAS ORDENADAS DEL MAPEO SHIFT,  
RAÍZ CUADRADA Y LA ESCALERA DEL  
DIABLO**

por

**Jorge Geovanny Ramos Avelar**

Asesor interno:

**Martín Enrique Guerra Cáceres**

Asesor externo:

**Dr. Ángel Cano Cordero**

Septiembre 2015

**AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**

**RECTOR INTERINO**

**Lic. José Luis Argueta Antillón**

**VICERRECTOR ADMINISTRATIVO INTERINO**

**Ing. Carlos Armando Villalta**

**SECRETARIA GENERAL**

**Dra. Ana Leticia de Amaya**

**AUTORIDADES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

**DECANO**

**Lic. Mauricio Hernán Lovo Córdoba**

**VICEDECANO**

**Lic. Carlos Antonio Quintanilla Aparicio**

**SECRETARIA**

**Licda. Damaris Melany Herrera Turcios**

**DIRECTOR DE ESCUELA DE MATEMÁTICA**

**Dr. José Nerys Funes Torres**

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>V</b>
<b>2. Metodología</b>	<b>VII</b>
<b>3. Capítulo 1</b>	<b>1</b>
3.1. Órbitas del mapeo Shift, $\sigma$ .	1
<b>4. Capítulo 2</b>	<b>19</b>
4.1. Enunciado de teoremas principales.	19
<b>5. Capítulo 3</b>	<b>21</b>
5.1. Proposiciones y lemas . . . . .	21
<b>6. Capítulo 4. Demostración de los teoremas.</b>	<b>42</b>
6.1. Demostración teorema 1 . . . . .	42
6.2. Demostración teorema 2 . . . . .	43
6.3. Demostración teorema 3 . . . . .	44
6.4. Demostración teorema 4 . . . . .	44

*A nadie...*  
*por estar siempre a mi lado!!!*

*A todos...*  
*por estar cuando debieron!!!*

# 1. Introducción

Nuestro principal objetivo en este trabajo será seguir el artículo [1] en el que consideran una órbita del “mapeo doblamiento”, shift  $\sigma : t \rightarrow 2t$  en  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (este es el mapeo cuadrático cuando pensamos a  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  como el círculo unitario en el plano complejo). Llamaremos a un subconjunto cerrado  $A$  de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  ordenado bajo  $\sigma$  si  $A$  es invariante (esto es  $\sigma(A) = A$ ) y si  $\sigma$  preserva el orden cíclico de los puntos de  $A$ .

Tales conjuntos tienen asignado un *número de rotación*, que lo llamamos así porque se parece mucho al que definimos en homeomorfismos del círculo, otra manera de ver el número de rotación es tomar la expansión decimal de cualquier  $t$  en  $A$  y luego calcular la frecuencia con la cual el dígito '1' se produce en esta expansión binaria (así lo veremos en la parte 1 de este trabajo). En este trabajo nos preocuparemos por dar una clasificación completa de los subconjuntos  $A$  que cumplen con ser ordenados, explícitamente daremos un algoritmo para su construcción, algunas propiedades de teoría de números, una generalización de la noción de orden y una caracterización del orden de todos los puntos alrededor de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Mostraremos en la capítulo 1 que un subconjunto cerrado  $A$  de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , invariante bajo  $\sigma$ , es ordenado si y sólo si esta contenido en cualquier intervalo cerrado de longitud  $\frac{1}{2}$ . Luego seguiremos un método práctico para encontrar los conjuntos ordenados, iterando el mapeo 'dividir a la mitad' (o raíz cuadrada)  $\sigma^{-1} : t \rightarrow \frac{t}{2}$  restringido a cualquier intervalo fijo  $I_\theta = [\frac{\theta}{2}, \frac{(\theta+1)}{2}) \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  de longitud  $1/2$ , arrancando la iteración en un punto arbitrario  $t_0$ . Como es evidente a partir de un experimento simple en el ordenador (y que luego demostraremos) cualquier órbita de  $\sigma^{-1}$  construida de esta manera converge rápidamente a un atractor  $A_\theta$  y que depende solamente de  $\theta$  y no en el punto inicial elegido, y más aun es ordenada bajo la shift  $\sigma$ .

Probaremos que los atractores  $A_\theta$  con las restricciones de  $\sigma^{-1}$  a los intervalos  $I_\theta$  son los únicos subconjuntos cerrados de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  los cuales son invariantes bajo shift  $\sigma$  y que también preserva el orden bajo  $\sigma$ .

Mostraremos también, que si  $A_\theta$  tiene un número de rotación racional  $p/q$ , entonces  $A_\theta$  es uno de los tres conjuntos  $A_+^{p/q}$ ,  $A_-^{p/q}$ ,  $A^{p/q}$  el cual solo depende de  $p/q$ , por otro lado si el número de rotación es irracional  $\nu$ , entonces,  $A_\theta = A^\nu$  es un Cantor, el cual solo depende de  $\nu$ . Daremos algoritmos explícitos para la construcción de los conjuntos  $A_\pm^{p/q}$  y  $A^\nu$  tanto cuando tengamos números de rotación racionales como irracionales, incluyendo algoritmos basados en el desarrollo en fracciones continuas.

Luego veremos la gráfica que asigna a cada  $I_\theta$  el número de rotación (bajo  $\sigma$ ) del conjunto  $A_\theta$  es la *Escalera del diablo*. Es decir un mapeo es débilmente continuo y monótono de el intervalo en

si mismo, el cual es localmente constante en un conjunto de medida completa pero que globalmente no es constante. En la parte horizontal (que es un conjunto de medida completa) corresponde a los números de rotación  $p/q$  en el extremo izquierdo de la gráfica para el valor de  $p/q$  el atractor  $A_\theta$  para  $\sigma^{-1}$  es  $A_-^{p/q}$  y el del lado derecho es  $A_+^{p/q}$  y entre ellos esta  $A^{p/q}$ .

Como ya lo hemos mencionado, el teorema 3 (el algoritmo escalera) está estrechamente relacionado con la construcción mecánica de Hedlund y Morse, pero como un corolario seremos capaces de presentar en el teorema 4 algoritmos explícitos para la construcción de  $\theta_{\pm}^{\frac{p}{q}}$  (los puntos finales del paso  $\frac{p}{q}$  en la escalera del diablo), basado en el desarrollo en fracciones continuas de  $\frac{p}{q}$ . En el límite de la secuencia convergente de una fracción continua de un irracional  $\nu$  tienen la misma expresión para  $\theta^\nu$  como lo obtuvo por primera vez Veerman (a lo que calificó de ampliación secuencias). Como corolarios de estos algoritmos obtenemos dos nuevos resultados, primero un algoritmo explícito para las fracciones continuas de  $\theta_{\pm}^{nu}$  ( $\nu$  racional) y  $\theta^\nu$  ( $\nu$  irracional) en términos de la expansión de la fracción continua de  $\nu$ , y en segundo lugar, un nuevo teorema de Douady, que si  $\nu$  es irracional entonces  $\theta^\nu$  es trascendental.

## 2. Metodología

El presente trabajo de investigación se desarrollarán las siguientes etapas:

**Revisión Bibliográfica:** En esta etapa se hizo una búsqueda exhaustiva de libros, artículos, revistas, problemas resueltos sobre el tema y artículos a los que se hace referencia.

**Demostración de los principales resultados:** Esta etapa se divide en dos partes: la primera son un grupo de lemas y proposiciones que nos facilitaran la segunda parte, es decir, la demostración de 4 teoremas que es el objetivo principal del trabajo.

**Contenido propuesto:** El trabajo se divide en cuatro capítulos:

*Capítulo I:* Haremos aquí una introducción de las principales deficiones de la teofía que nos facilite el entendimiento de los teoremas principales.

*Capítulo II:* Se enuncian los teoremas principales, objeto de este trabajo.

*Capítulo III:* Se demuestran los lemas y las proposiciones que nos permitan demostrar los cuatro teoremas importantes.

*Capítulo IV:* Se demuestran los cuatro teoremas, haciendo uso de los lemas y proposiciones de capítulo III.

### 3. Capítulo 1

#### 3.1. Órbitas del mapeo Shift, $\sigma$ .

En esta sección nuestro principal objetivo será definir el número de rotación para mapeos que preservan el orden y dar propiedades para comprender de mejor manera lo que necesitaremos hacer en nuestro trabajo. Esta definición será trascendental en el desarrollo de nuestro trabajo ya que de la comprensión de ésta, dependerá el entendimiento de los primeros cuatro teoremas. Continuaremos en esta sección las ideas básicas de [1] y de [4]. Comencemos definiendo qué es un mapeo de grado 1.

**Definición 1.** Diremos que un mapeo no decreciente  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es de grado uno si

$$F(x + 1) = F(x) + 1, \quad y \quad F(x) < F(y) \quad \text{para } x < y \quad (1)$$

Por definición los mapeos de grado uno son siempre crecientes. Veamos un ejemplo a continuación:

**Ejemplo 1.** Definamos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un mapeo, dado de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ (x - 2)^2 + 2 & \text{si, } 2 < x \leq 3 \\ (x - 1)^2 + 1 & \text{si, } 1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si, } 0 < x \leq 1 \\ (x + 1)^2 - 1 & \text{si, } -1 < x \leq 0 \\ (x + 2)^2 - 2 & \text{si, } -2 < x \leq -1 \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (2)$$

Básicamente hemos tomado la parábola  $f(x) = x^2$  y la hemos desplazado una unidad hacia arriba y una hacia la derecha para construir la siguiente rama. Esto nos asegura que sea creciente. Así sucesivamente, hacemos copias hacia arriba. Hacia abajo es el mismo proceso y también con éste se garantiza que sea creciente en todo punto.



Ahora notemos que si tomamos  $y \in \mathbb{R}$ , entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n < y \leq n + 1$  de tal manera que  $f(y) = (y - n)^2 + n$ . Así que, como  $n + 1 \leq y + 1 \leq n + 2$ , se cumplirá que

$$\begin{aligned} f(y + 1) &= (y + 1 - (n + 1))^2 + (n + 1) \\ &= (y - n)^2 + n + 1 \\ &= f(y) + 1 \end{aligned}$$

que es precisamente la condición de que el mapeo sea de grado 1.

La figura 1 muestra la gráfica de este mapeo.

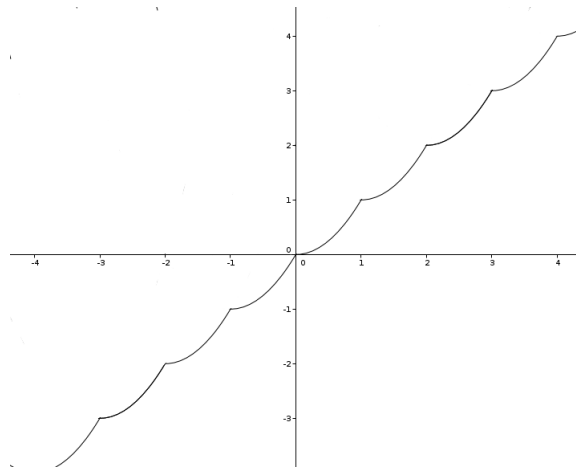


Figura 1: Mapeo de grado 1

En el siguiente lema veremos unas características particulares de los mapeos de grado uno, que nos ayudarán mucho a la hora de trabajar con ellos.

**Lema 1.** *Cualquier iteración de un mapeo estrictamente monótono de grado uno es un mapeo estrictamente monótono de grado uno. Además, el mapeo  $F_*(x) = F(x) - x$  es periódico con periodo 1 y satisface  $|F_*(x) - F_*(y)| < 1$ .*

**Demostración.**

Sea  $F$  estrictamente creciente de grado 1, es decir,  $F(x + 1) = F(x) + 1$  entonces demostremos que  $F^n(x + 1) = F^n(x) + 1$ . Por inducción:

Si  $n = 1$  es evidente por la hipótesis.

Suponemos cierto para  $n = k$ . Ahora demostremos que se cumple para  $n = k + 1$ .

Entonces  $F^{k+1}(x+1) = F(F^k(x+1)) = F(F^k(x)+1)$  y si hacemos  $y = F^k(x)$  tendremos que  $F(y+1) = F(y)+1 = F(F^k(x))+1 = F^{k+1}(x)+1$  como deseábamos demostrar.

Veamos, además que el mapeo  $F_*(x) = F(x) - x$  es de periodo uno.

$$F_*(x+1) = F(x+1) - (x+1) = F(x) - x = F_*(x)$$

En efecto el periodo de  $F_*$  es uno.

Ahora demostraremos que  $|F_*(x) - F_*(y)| < 1$ . Lo primero es comprobar que  $F_*(x+n) = F_*(x)$  lo cual es fácil de demostrar por inducción, ya que para  $n = 1$  es evidente. Asumimos cierto para  $n = k$ , es decir,  $F_*(x+k) = F_*(x)$ . Entonces,

$$F_*(x+(k+1)) = F_*(y+1) = F_*(y) = F_*(x+k) = F_*(x)$$

Lo demostramos primero para  $0 < x - y < 1$ ; en este caso podemos ver que  $y < x$  y  $x < y+1$  y como  $F$  es un levantamiento de grado 1 tendremos que  $F(y) < F(x)$  y  $F(x) < F(y+1) = F(y)+1$ , es decir,  $0 < F(x) - F(y)$  y  $F(x) - F(y) < 1$ , cumpliéndose la desigualdad  $0 < F(x) - F(y) < 1$  siempre que  $0 < x - y < 1$ .

Ahora verifiquémoslo para  $x, y$  cualesquiera. Sea  $x \in (a, a+1)$  con  $a \in \mathbb{Z}$  y supongamos que  $x < y$ . Tomemos  $y = \delta + n$  donde  $\delta \in (a, a+1)$  y  $n \in \mathbb{Z}$ , es decir,  $0 < F(x) - F(\delta) < 1$ . Veamos que  $|F_*(x) - F_*(y)| = |F_*(x) - F_*(\delta + n)| = |F_*(x) - F_*(\delta)|$ , pero,

$$F_*(x) - F_*(\delta) = F(x) - F(\delta) - (x - \delta)$$

o lo que es lo mismo

$$F_*(x) - F_*(\delta) + (x - \delta) = F(x) - F(\delta)$$

y como  $0 < F(x) - F(\delta) < 1$  tenemos que

$$0 < F_*(x) - F_*(\delta) + (x - \delta) < 1$$

así que reescribiendo tenemos que

$$-1 < -(x - \delta) < F_*(x) - F_*(\delta) < 1 - (x - \delta) < 1$$

de donde obtenemos el resultado deseado.

□

Ahora, veremos como podemos usar mapeos de grado 1 para analizar lo que ocurre en los mapeos de  $\mathbb{T}$  en  $\mathbb{T}$ . Para relacionarlos explicaremos el concepto de levantamiento.

**Definición 2.** Sea  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  un mapeo ( $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ). Diremos que  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un levantamiento de  $f$  si es de grado uno y además hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & & \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T} & & \\
 \pi & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \pi \\
 & & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & & \\
 & & F & & 
 \end{array} \tag{3}$$

Es decir, que  $f(\pi(x)) = \pi(F(x))$ , donde  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$  es tal que  $\pi(x) = e^{2\pi i x}$ .

Es claro que la condición de ser un levantamiento de un mapeo de  $\mathbb{T}$  no es única, de tal manera que no se garantiza la unicidad del levantamiento.

Ahora veremos el caso particular de los mapeos de  $\mathbb{T}$  que llamaremos mapeos que preservan el orden y sobre los cuales centraremos nuestro trabajo. Primero necesitamos comprender qué significa tener un orden en el círculo, ya que debido a que los elementos ahí son complejos y en estos no existe un orden.

Entonces lo que haremos es considerar para cada elemento del círculo un representante en  $[0, 1)$ . Tal representante será escogido como la imagen inversa del elemento en  $\mathbb{T}$  bajo  $\pi$  en la rama  $[0, 1)$ . Esto debido a que el mapeo  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ , con  $\pi(x) = e^{2\pi i x}$ , es sobreyectivo, pero restringido a las ramas de la forma  $[n, n+1)$  se obtiene biyectividad entre elementos, para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . En particular escogemos la rama  $[0, 1)$  y se seguirá manteniendo la biyectividad.

A partir de aquí al decir  $x \in \mathbb{T}$  nos referiremos a que  $x \in [0, 1)$  y haremos la identificación del representante con una tilde sobre el valor del que es representado. Por ejemplo, el representante de  $x$  será  $\tilde{x}$  y el de  $f(x)$  es  $\widetilde{f(x)}$ ;

Con las aclaraciones anteriores podemos tener una idea natural de un orden en  $\mathbb{T}$ , que sería trasladar el orden de  $[0, 1)$ . Veamos primero la definición de ser ordenados en  $\mathbb{T}$ .

**Definición 3.** Dada la terna  $(x, y, z) \in \mathbb{T}$  con elementos distintos 2 a 2 diremos que mantiene el orden en el círculo si la terna  $(x, y, z)$  aparece en ese orden en el sentido de las manecillas del reloj.

Notemos que fijada una referencia, el lugar donde aparezcan estos números en  $\mathbb{T}$  nos puede llevar a pensar que existe un orden diferente (ver figura 2). Sin embargo, la definición no contempla un punto de referencia y de este modo la terna  $(x, y, z)$  es equivalente a las ternas  $(y, z, x)$  y  $(z, x, y)$  que mantienen el orden en el círculo.

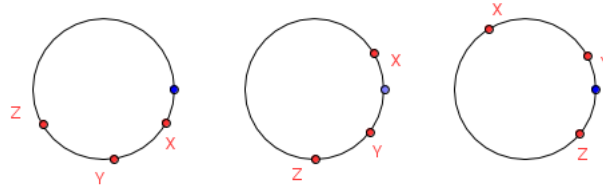


Figura 2: Orden cíclico de las agujas de reloj.

Notemos ahora que para efectos de cálculos matemáticos y demostraciones, la definición anterior no es muy conveniente, así que daremos el siguiente concepto de orden cíclico y veremos que es equivalente al concepto de la definición 3.

**Definición 4.** Dada la terna  $(x, y, z) \in \mathbb{T}$ , con elementos distintos 2 a 2 diremos que mantiene el orden en el círculo si y sólo si se cumple la desigualdad

$$(\tilde{x} - \tilde{y})(\tilde{x} - \tilde{z})(\tilde{y} - \tilde{z}) > 0$$

Recordemos que las tildes sobre las letras son los representantes en  $[0, 1)$  de los respectivos valores en  $\mathbb{T}$ .

En el caso en que la desigualdad anterior sea negativa diremos que se invierte el orden cíclico.

Las definiciones que acabamos de estudiar son equivalentes y esto se demuestra en el siguiente teorema

**Teorema 1.** Las definiciones 3 y 4 son equivalentes.

**Demostración.**

Supongamos que se cumple  $(\tilde{x} - \tilde{y})(\tilde{x} - \tilde{z})(\tilde{y} - \tilde{z}) > 0$ . Esto ocurre si los factores están en alguno de los siguientes casos:

Caso 1: Todos los factores son positivos. Esto sucede si y sólo si se cumple lo siguiente en  $[0, 1)$ :  $\tilde{x} > \tilde{y}$ ,  $\tilde{x} > \tilde{z}$  y  $\tilde{y} > \tilde{z}$ . Es decir,  $\tilde{z} < \tilde{y} < \tilde{x}$ , que cuando los recorremos en el círculo es un caso de la definición, de hecho es el que encontramos en el orden  $(z, y, x)$ .

Caso 2: El primero es positivo y los otros dos negativos. esto se cumplirá si y sólo si  $\tilde{x} > \tilde{y}$ ,  $\tilde{x} < \tilde{z}$  y  $\tilde{y} < \tilde{z}$  o lo que es lo mismo, que  $\tilde{y} < \tilde{x} < \tilde{z}$ , que también es un equivalente en la definición.

Caso 3: Los dos primeros son negativos y el tercero es positivo. Esto se cumplirá si y sólo si  $\tilde{x} < \tilde{y}$ ,  $\tilde{x} < \tilde{z}$  y  $\tilde{y} > \tilde{z}$  o lo que es lo mismo que  $\tilde{x} < \tilde{z} < \tilde{y}$ , que también es un equivalente en la definición.

Caso 4: El primero y el tercero son negativos y el segundo es positivo. Esto es si y sólo si  $\tilde{x} < \tilde{y}$ ,  $\tilde{x} > \tilde{z}$  y  $\tilde{y} < \tilde{z}$ , pero notemos que este caso no puede suceder.

Supongamos que se cumple el orden cíclico. Podemos ver en la Figura 3 que esto sucede con claridad.

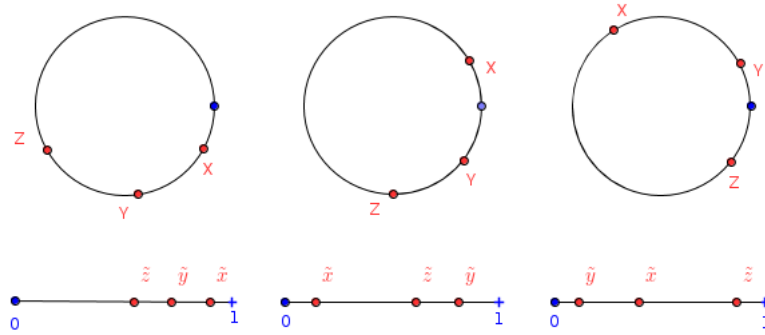


Figura 3: Los respectivos representantes de  $(x, y, z)$  en  $[0, 1)$ .

Veamos que los representantes están ordenados en el círculo bajo la definición 3. De la Figura 3 se obtienen las siguientes posibles tres desigualdades:  $\tilde{z} < \tilde{y} < \tilde{x}$ ,  $\tilde{x} < \tilde{z} < \tilde{y}$ , y  $\tilde{y} < \tilde{x} < \tilde{z}$ . En los tres casos es fácil comprobar que se verifica la desigualdad

$$(\tilde{x} - \tilde{y})(\tilde{x} - \tilde{z})(\tilde{y} - \tilde{x}) > 0$$

Que concluye la demostración.

□

Ahora necesitamos saber cuándo un mapeo va a preservar el orden. Nos gustaría que sucediera algo parecido a lo ya mencionado en las definiciones anteriores, es decir, que aparezcan en el mismo orden en el cual aparecen sus preimágenes. Por eso la siguiente definición resulta muy natural.

**Definición 5.** Sea  $f : A \subset \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  diremos que  $f$  preserva el orden en  $A$  si  $f(x), f(y), f(z)$  mantienen el mismo orden cíclico que  $x, y, z$ , o explotan en un mismo punto.

La siguiente definición es casi automática y el sentido de ella es dotarnos de una fórmula matemática para que sea usada a la hora de hacer demostraciones con mapeos que preservan el orden y que ha sido tomada de [5]. Pero antes de usarla, debemos demostrar que es equivalente a la definición anterior.

**Definición 6.** Sea  $f : A \subset \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  diremos que  $f$  preserva el orden en  $A$  si

$$\frac{(f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})) (f(\tilde{x}) - f(\tilde{z})) (f(\tilde{y}) - f(\tilde{z}))}{(\tilde{x} - \tilde{y}) (\tilde{x} - \tilde{z}) (\tilde{y} - \tilde{z})} \geq 0$$

Nótese que esta definición contempla la igualdad. En la definición (4) dada en [5], este caso no es estudiado. Analizemos esta situación

Tomemos un orden cualquiera de los elementos  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ , Por ejemplo,  $\tilde{z} < \tilde{y} < \tilde{x}$  y supongamos que  $f$  preserva el orden entonces, pueden suceder las tres posibilidades siguientes:  $f(\tilde{z}) \leq f(\tilde{y}) \leq f(\tilde{x})$ ,  $f(\tilde{y}) \leq f(\tilde{x}) \leq f(\tilde{z})$  y  $f(\tilde{x}) \leq f(\tilde{z}) \leq f(\tilde{y})$ , donde los elementos que cumplen la desigualdad son los representantes de sus respectivos valores en  $\mathbb{T}$ , es decir, son elementos de  $[0, 1)$ . Entonces, en el primer caso, cuando  $f(\tilde{z}) \leq f(\tilde{y}) \leq f(\tilde{x})$ , se verifica  $\frac{f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})}{\tilde{x} - \tilde{y}} \geq 0$ , y también,  $\frac{f(\tilde{x}) - f(\tilde{z})}{\tilde{x} - \tilde{z}} \leq 0$  y  $\frac{f(\tilde{y}) - f(\tilde{z})}{\tilde{y} - \tilde{z}} \leq 0$ , es decir,

$$\frac{(f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})) (f(\tilde{x}) - f(\tilde{z})) (f(\tilde{y}) - f(\tilde{z}))}{(x - y) (\tilde{y} - \tilde{z}) (\tilde{x} - \tilde{z})} \geq 0$$

Es importante señalar que el igual, del mayor o igual, en la ecuación anterior proviene del hecho de que los numeradores pueden ser 0, es decir los valores bajo  $f$  son iguales. El análisis anterior lo podemos hacer para las tres desigualdades, pero el interés de este párrafo es sólo ver que el análisis se puede hacer desde un punto de vista de casos. Aunque como sabemos esto no es una demostración rigurosa pero nos da la idea de lo que esta ocurriendo. Sin más, pasamos a la demostración de la equivalencia de las dos definiciones anteriores.

**Teorema 2.** Las definiciones 5 y 6, que nos dicen cuándo un mapeo preserva el orden, son equivalentes.

### Demostración

Supongamos que se cumple la desigualdad de la definición 6, entonces el signo del producto de los numeradores es igual al signo del producto de los denominadores, lo que indica que tienen el mismo orden cíclico, ya sea que preserven el orden o que lo inviertan.

Ahora supongamos que se cumple la definición 5. Entonces vemos que esto significa que  $(\tilde{x} - \tilde{y})(\tilde{x} - \tilde{z})(\tilde{y} - \tilde{x})$  y  $(f(\tilde{x}) - f(\tilde{y}))(f(\tilde{x}) - f(\tilde{z}))(\tilde{y} - f(\tilde{x}))$  tienen el mismo signo lo que implica que el cociente deberá ser positivo, con lo cual demostramos la desigualdad de 6.

□

Un buen ejemplo de lo que sucede lo podemos ver en la Figura 4.

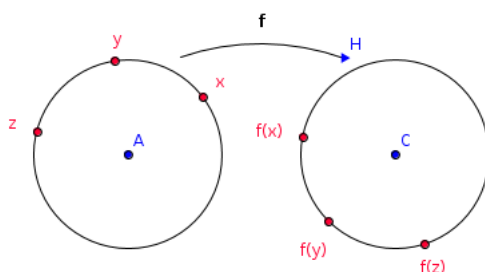


Figura 4: Se preserva el orden.

Veamos un ejemplo de un mapeo que preserve el orden:

**Ejemplo 2.** Sea  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  tal que  $f(x) = e^{\frac{\pi^2}{2}ix}$ .

Veamos que si  $x = e^{2\pi i\theta}$ ; donde  $\theta$  es el ángulo que forma la recta que une los puntos  $(0, 0)$  y  $x$  con la función  $f(x) = e^{\frac{\pi^2}{2}i} \cdot e^{2\pi i\theta} = e^{2\pi i(\theta + \pi/4)}$ . Podemos deducir que el mapeo  $f$  lo que hace es sumar  $\pi/4$  al argumento de  $x$ .

Recordemos ahora que todo valor en  $\mathbb{T}$  tiene como imagen inversa bajo la del mapeo  $\pi$  un único valor en  $[0, 1)$  el cual es el argumento del valor en  $\mathbb{T}$ . Lo que implica que si tomamos  $x, y, z \in \mathbb{T}$ , tendremos que  $f(\tilde{x}) = \tilde{x} + \frac{\pi}{4}$ ,  $f(\tilde{y}) = \tilde{y} + \frac{\pi}{4}$  y  $f(\tilde{z}) = \tilde{z} + \frac{\pi}{4}$ , así que obtenemos lo siguiente,

$$\frac{(\tilde{x} + \frac{\pi}{4} - (\tilde{y} + \frac{\pi}{4}))(\tilde{x} + \frac{\pi}{4} - (\tilde{z} + \frac{\pi}{4}))(\tilde{y} + \frac{\pi}{4} - (\tilde{z} + \frac{\pi}{4}))}{(\tilde{x} - \tilde{y})(\tilde{x} - \tilde{z})(\tilde{y} - \tilde{z})} = 1 \geq 0$$

que implica que  $f$  preserva el orden.

Veremos en el siguiente lema, la relación entre los mapeos que preservan el orden y sus respectivos levantamientos.

**Lema 2.** Sea  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  un mapeo y  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un levantamiento de  $f$ . Si  $F$  es monótona no decreciente, entonces,  $f$  preserva el orden.

### Demostración

Tomemos tres puntos ordenados en  $\mathbb{T}$ , digamos  $\{x, y, z\}$ . Es decir, si  $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$  son los representantes en  $[0, 1)$  bajo el mapeo  $\pi$ , se cumple que  $(\tilde{x} - \tilde{y})(\tilde{x} - \tilde{z})(\tilde{y} - \tilde{z}) > 0$ . Además sabemos que esto nos garantiza una de tres posibles maneras de encontrar  $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$  en  $[0, 1)$ , las cuales veremos a continuación junto al hecho de que  $F$  es monótona no decreciente. Se deduce de manera directa que  $F$  cumple las siguientes condiciones:

$$\tilde{z} < \tilde{y} < \tilde{x} \quad \Rightarrow \quad F(\tilde{z}) \leq F(\tilde{y}) \leq F(\tilde{x}) \quad (4)$$

$$\tilde{y} < \tilde{z} < \tilde{x} \quad \Rightarrow \quad F(\tilde{y}) \leq F(\tilde{z}) \leq F(\tilde{x}) \quad (5)$$

$$\tilde{y} < \tilde{x} < \tilde{z} \quad \Rightarrow \quad F(\tilde{y}) \leq F(\tilde{x}) \leq F(\tilde{z}) \quad (6)$$

En los tres casos anteriores podemos ver que la desigualdad siguiente se cumple

$$\frac{(F(\tilde{x}) - F(\tilde{y}))}{(\tilde{x} - \tilde{y})} \frac{(F(\tilde{x}) - F(\tilde{z}))}{(\tilde{x} - \tilde{z})} \frac{(F(\tilde{y}) - F(\tilde{z}))}{(\tilde{y} - \tilde{z})} \geq 0$$

Lo único que nos faltaría demostrar para que la prueba este completa es que  $F(\tilde{x})$ ,  $F(\tilde{y})$  y  $F(\tilde{z})$  son los representantes de  $f(x)$ ,  $f(y)$  y  $f(z)$  respectivamente. Como  $\pi(\tilde{x}) = x$ ,  $\pi(\tilde{y}) = y$  y  $\pi(\tilde{z}) = z$  y además que  $F$  es un levantamiento de  $f$  obtenemos las siguientes tres ecuaciones:

$$f(x) = f(\pi(\tilde{x})) = \pi(F(\tilde{x}))$$

$$f(y) = f(\pi(\tilde{y})) = \pi(F(\tilde{y}))$$

$$f(z) = f(\pi(\tilde{z})) = \pi(F(\tilde{z}))$$

Lo cual demuestra que los valores son los representantes, como queríamos ver.

□

Veamos que un mapeo definido en un subconjunto  $\mathbb{A}$  de  $\mathbb{T}$  y que preserve el orden se puede extender a un mapeo definido en todo  $\mathbb{T}$  y que también preserve el orden. Esto se ve con claridad en el siguiente lema.



**Lema 3.** Sea  $A$  un subconjunto de  $\mathbb{T}$ , entonces todo mapeo  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{T}$  que preserva el orden, se puede extender a un mapeo  $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  que también preserva el orden.

**Demostración.**

La idea básica es demostrar que se puede construir un mapeo  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sea monótono no decreciente y usando el lema 2 ya estará demostrado. Esta idea la seguimos de [1].

Escojamos  $a \in \mathbb{A}$ , y sean  $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ , a los representantes de  $a$  y  $b$  respectivamente: donde  $b = f(a)$ . Es decir,  $\pi(\tilde{a}) = a$  y  $\pi(\tilde{b}) = b$ . Ahora definamos el mapeo  $\tilde{F} : [\tilde{a}, \tilde{a} + 1] \rightarrow [\tilde{b}, \tilde{b} + 1]$  de tal manera que,  $\tilde{F}(\tilde{a}) = \tilde{b}$  y  $\tilde{F}(\tilde{a} + 1) = \tilde{b} + 1$ . La asignación que hemos hecho hasta este momento la podemos estudiar con detalle en la figura 5

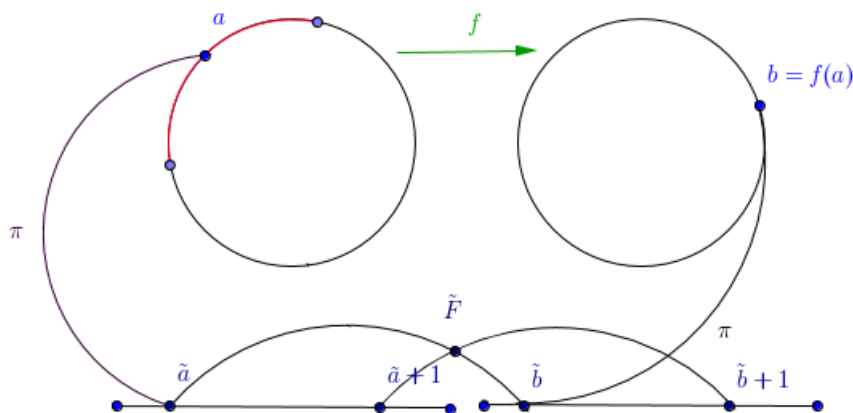


Figura 5: Extensión de un mapeo que preserva el orden

Sólo nos queda extender  $\tilde{F}$  a los valores intermedios del conjunto de partida y de llegada, con la consideración de que no hay una manera única de hacer este proceso. De hecho, la manera de hacerlo será seguir una idea que usaremos más adelante; las ideas básicas son las siguientes:

1. Si  $x = \pi(\tilde{x}) \in \mathbb{A}$  y  $f(x) \neq b$ , entonces definiremos a  $\tilde{F}(\tilde{x})$  como el único representante de  $f(x)$  en  $(\tilde{b}, \tilde{b} + 1)$ . Si  $x \in \mathbb{A}$  ( $x \neq a$ ) y  $f(x) = b$  entonces definimos  $\tilde{F}(\tilde{x})$  así:
  - $\tilde{F}(\tilde{x}) = \tilde{b} + 1$ , si hay un  $\pi(\tilde{y}) = y \in \mathbb{A}$  con  $\tilde{x} > \tilde{y}$  y  $f(y) \neq b$ .
  - $\tilde{F}(\tilde{x}) = \tilde{b}$ .
2. Si  $x \in \mathbb{T} - \mathbb{A}$  es un punto límite de puntos  $\tilde{x}_i \in \mathbb{A}$  con  $\tilde{x}_i < \tilde{x} \in [\tilde{a}, \tilde{a} + 1)$ , entonces, definimos  $\tilde{F}(\tilde{x}) = \lim \tilde{F}(\tilde{x}_i)$ , donde  $\tilde{F}(\tilde{x}_i)$  está definida como en 1 por ser elementos de  $\mathbb{A}$ .



**Teorema 3.** Sea  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  un mapeo que preserva el orden y sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un levantamiento de  $f$ , entonces existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

**Demostración.**

Fijemos un entero  $n \in \mathbb{Z}$  y definamos  $F_{(n)}(x) = F^n(x) - x$ . Por el lema 1, aplicado a  $x$  y a 0, tendremos que

$$|F_{(n)}(x) - F_{(n)}(0)| \leq 1$$

o equivalentemente

$$F_{(n)}(0) - 1 \leq F^n(x) - x = F_{(n)}(x) \leq F_{(n)}(0) + 1 \quad (7)$$

Ahora, si seguimos el anterior razonamiento aplicado a los puntos  $x = y, F^n(y), \dots, F^{(m-1)n}(y)$  en la ecuación 7 tenemos que

$$\begin{array}{rcl} F_{(n)}(0) - 1 & \leq & F^n(y) - y = F_{(n)}(y) & \leq & F_{(n)}(0) + 1 \\ F_{(n)}(0) - 1 & \leq & F^n(F^n(y)) - F^n(y) = F_{(n)}(F^n(y)) & \leq & F_{(n)}(0) + 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ F_{(n)}(0) - 1 & \leq & F^n(F^{(m-1)n}(y)) - F^{(m-1)n}(y) = F_{(n)}(F^{(m-1)n}(y)) & \leq & F_{(n)}(0) + 1 \end{array} \quad (8)$$

Sumando todas las ecuaciones de (8) tendremos lo siguiente:

$$m(F_{(n)}(0) - 1) \leq F^{nm}(y) - y \leq m(F_{(n)}(0) + 1) \quad (9)$$

que dividiendo por  $mn$  tenemos:

$$\frac{F_{(n)}(0) - 1}{n} \leq \frac{F^{nm}(y) - y}{nm} \leq \frac{F_{(n)}(0) + 1}{n} \quad (10)$$

y si ahora la dividimos ecuación (7) por  $n$  y la restamos de la ecuación anterior tendremos:

$$-\frac{2}{n} \leq \frac{F^{nm}(y) - y}{nm} - \frac{F^n(x) - x}{n} \leq \frac{2}{n}$$

o lo que es lo mismo que:

$$\left| \frac{F^{nm}(y) - y}{nm} - \frac{F^n(x) - x}{n} \right| \leq \frac{2}{n} \quad (11)$$

Podemos hacer un proceso equivalente al anterior para obtener lo siguiente

$$\left| \frac{F^{nm}(y) - y}{nm} - \frac{F^n(x) - x}{m} \right| \leq \frac{2}{m} \quad (12)$$

Y uniendo estas dos desigualdades tenemos

$$\left| \frac{F^m(y) - y}{m} - \frac{F^n(x) - x}{n} \right| \leq \frac{2}{m} + \frac{2}{n} \quad (13)$$

Lo que significa que esta sucesión es de Cauchy, y por lo tanto, el límite converge, es decir, existe.

□

Ahora ya podemos definir el número de rotación y lo haremos como sigue:

**Definición 7.** Sea  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  una función que preserva el orden y sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un levantamiento de  $f$ , entonces, llamaremos número de rotación al límite definido anteriormente y lo denotaremos como  $\tau(F)$ , es decir,

$$\tau(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

Hay que demostrar dos propiedades de este número, las cuales harán que éste sea invariante. La primera es que el cálculo de éste no depende del elemento que se tome y la segunda es que el cálculo del número de rotación no depende del levantamiento que tomemos. Esto quiere decir que el número de rotación es un invariante del mapeo  $f$  que preserva el orden. Demostremos el siguiente teorema:

**Teorema 4.** Sea  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  un mapeo que preserva el orden y sean  $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos levantamientos de  $f$ , entonces

$$1. \left| \frac{F^n(y) - y}{n} - \frac{F^n(x) - x}{m} \right| \leq \varepsilon$$

$$2. \tau(F) = \tau(G)$$

**Demostración.**

En el primero bastará aplicar a la ecuación (7) para  $x = y$  y obtenemos

$$F_{(n)}(0) - 1 \leq F^n(y) - y = F_{(n)}(y) \leq F_{(n)}(0) + 1 \quad (14)$$

y si en el proceso de la prueba anterior a la ecuación (10) le restamos (14) dividida por  $n$  obtenemos

$$\left| \frac{F^{nm}(y) - y}{nm} - \frac{F^n(y) - y}{n} \right| \leq \frac{2}{n} \quad (15)$$

y siguiendo la prueba del teorema anterior llegamos a

$$\left| \frac{F^m(y) - y}{m} - \frac{F^n(x) - x}{n} \right| \leq \frac{2}{m} + \frac{2}{n} \quad (16)$$

y si ahora hacemos  $m = n$  tendremos que

$$\left| \frac{F^n(y) - y}{n} - \frac{F^n(x) - x}{n} \right| \leq \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = \frac{4}{n} \quad (17)$$

La segunda parte la demostraremos usando el hecho de que si  $F$  y  $G$  son levantamientos de  $f$  entonces  $f(\pi(x)) = \pi(F(x))$  y  $f(\pi(x)) = \pi(G(x))$  de donde deducimos que  $\pi(F(x)) = \pi(G(x))$  que implica que  $F$  y  $G$  difieren por una constante, es decir, que  $F(x) = G(x) + k$  y es fácil probar por inducción que

$$F^n(x) = G^n(x) + k$$

Si ahora restamos  $x$  a ambos lados y dividimos entre  $n$  luego reordenamos tenemos que

$$\frac{F^n(x) - x}{n} = \frac{G^n(x) - x}{n} - \frac{k}{n}$$

Y si ahora tomamos el límite cuando  $n$  va a infinito, obtenemos lo que deseamos.

□

Nuestra intención en el desarrollo de este trabajo será comprender la dinámica del mapeo  $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  tal que para  $x \in \mathbb{A}$  tenemos que  $f(x) = x^2$ , y que si consideramos los representantes en  $\mathbb{R}$ , el levantamiento sería  $F : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  tal que  $\theta \rightarrow F(\theta) = 2\theta \pmod{1}$ , al cual llamamos

mapeo ‘Shift’ debido a que las propiedades dinámicas de ambos son equivalentes. Además que los conjuntos  $\mathbb{A}$  cumplen con la condición de ser  $\sigma$ -invariantes, es decir,  $\sigma(\mathbb{A}) = \mathbb{A}$ .

La siguiente proposición nos caracterizará por completo los conjuntos  $\mathbb{A}$  de  $\mathbb{T}$  que preservan el orden bajo.

**Proposición 1.** *El mapeo  $\sigma_{\mathbb{A}}$  preserva el orden si y sólo si  $\mathbb{A}$  es un subconjunto de un semicírculo cerrado ( $\sigma_{\mathbb{A}}$  denota al conjunto de las iteraciones de los elementos de  $\mathbb{A}$  bajo  $\sigma$ ).*

### Demostración

Veamos que si  $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \in \mathbb{A}$  están contenidos en un semicírculo como  $\sigma$  sólo dobla en ángulo caerán en el otro semicírculo en el mismo orden, es decir,  $2\theta_1 < 2\theta_2 < 2\theta_3$  y eso para todo los valores de  $\mathbb{A}$ . Por lo tanto,  $\sigma$  preserva el orden en  $\mathbb{A}$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\sigma$  preserva el orden en  $\mathbb{A}$  y no está contenido en un semicírculo y tomamos  $(a, b, c)$ , cada uno en  $\mathbb{A}$  de tal manera que no estén en el mismo semicírculo, entonces  $(a, b + 1/2, c)$  estará en el mismo semicírculo, como se ve en la figura 7.

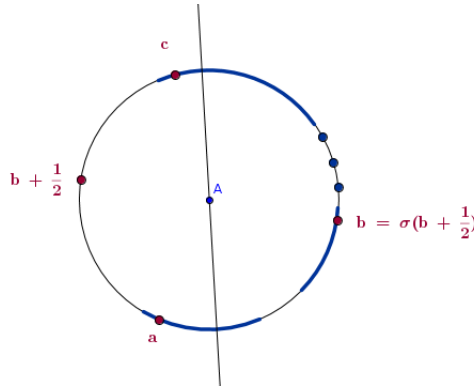


Figura 7: Orden cíclico de  $(a, b, c)$  y  $(a, b + \frac{1}{2}, c)$

En la Figura 7 podemos ver que  $(a, b, c)$  y  $(a, b + 1/2, c)$  tienen órdenes cíclicos diferentes. Si  $(a, b + 1/2, c)$  están en el mismo semicírculo, preservan el orden, es decir,

$$\frac{(\sigma(a) - \sigma(b + \frac{1}{2}))(\sigma(a) - \sigma(c))(\sigma(b + \frac{1}{2}) - \sigma(c))}{(a - (b + \frac{1}{2}))((b + \frac{1}{2}) - c)(a - c)} \geq 0$$

y si consideramos además,

$$(\sigma(a), \sigma(b + 1/2), \sigma(c)) = (\sigma(a), \sigma(b) + 1, \sigma(c)) = (\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c))$$

Deducimos que

$$\frac{(\sigma(a) - \sigma(b))(\sigma(a) - \sigma(c))(\sigma(\frac{1}{2}) - \sigma(c))}{(a - (b + \frac{1}{2}))((b + \frac{1}{2}) - c)(a - c)} \geq 0$$

Veamos que  $\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)$  tienen el mismo orden cíclico que  $(a, b + 1/2, c)$  que tiene orden cíclico diferente que  $(a, b, c)$ . Es decir,  $\sigma$  no preservaría el orden.

□

**Ejemplo 3.** Analicemos los subconjuntos  $\mathbb{A}$  de  $\mathbb{T}$  que cumplen con estar contenidos en un semicírculo, que  $\sigma(\mathbb{A}) = \mathbb{A}$ , es decir, que sean invariantes y además contengan al 0.

Veamos que  $\mathbb{A}_1 = \{0\}$  es un conjunto invariante ya que al duplicarse el ángulo 0, nos devuelve el ángulo 0 y  $0 \in [0, \frac{1}{2}]$  es decir, preserva el orden.

Otros conjuntos que también contienen al 0, serán el conjunto  $\mathbb{A}_2 = \{0\} \cup \{\frac{1}{2^n}\}_{n>0}$  y el  $\mathbb{A}_3 = \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{2^n}\}_{n>0}$ .

En ambos casos  $\mathbb{A}_2 \subset [0, \frac{1}{2}]$   $\mathbb{A}_3 \subset [0, 1 - \frac{1}{2}]$  y por la proposición anterior estos son dos conjuntos que preservan el orden.

Estos son los únicos conjuntos que están contenidos en un semicírculo, que además contienen al 0 y que los tres tienen número de rotación 0. A estos conjuntos los llamaremos más tarde, en la notación del teorema 1,  $\mathbb{A}^0, \mathbb{A}_+^0$  y  $\mathbb{A}_-^0$ .

A continuación daremos una forma cómoda de escoger la sucesión de elementos sobre  $\mathbb{R}$  que se necesitan a la hora de calcular el número de rotación.

**Corolario 1** (Un camino para calcular el número de rotación). Sea  $\mathbb{A}$  contenido en un semicírculo y  $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}$ . Para  $x_0 \in \mathbb{A}$ , sea  $x_n = \sigma^n(x_0)$ ,  $n \geq 0$  y sea  $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}$ , el cual es el único número que cumple  $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$  y  $0 \leq \tilde{x}_0 \leq 1$ . Inductivamente, tomemos  $\tilde{x}_n \in \mathbb{R}$ , el cual es el único número que cumple  $\pi(\tilde{x}_n) = x_n$  y  $0 \leq \tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1} \leq 1$ , entonces

$$\nu_{\mathbb{A}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{n}$$

### Demostración.

La demostración se sigue de la definición de número de rotación y del hecho de que el cálculo de éste no depende del levantamiento que se tome.

□

Esta es una forma muy accesible de calcular el número de rotación para mapeos que preservan el orden definidos sobre conjuntos contenidos en un semicírculo. Es por esto que a continuación damos una forma de escoger el  $\tilde{x}_n$  a partir de  $\tilde{x}_{n-1}$ . Veamos que si  $\tilde{x}_0$  lo escribimos como número binario, entonces,  $\tilde{x}_n$  se obtiene a partir de  $\tilde{x}_{n-1}$  siguiendo las dos reglas del siguiente lema:

**Lema 4** (Forma de escoger los  $\tilde{x}_n$  con un levantamiento conveniente). *Sea  $\mathbb{A}$  contenido en un semicírculo y  $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}$ . Para  $x_0 \in \mathbb{A}$ , sea  $x_n = \sigma^n(x_0)$ ,  $n \geq 0$  y sea  $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}$ , que es el único número que cumple  $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$  y  $0 \leq \tilde{x}_0 \leq 1$ . Si escribimos  $\tilde{x}_0$  en desarrollo binario,  $\tilde{x}_n$  se calcula iterativamente de la siguiente forma:*

- i) *Desplazamos a la izquierda los valores de la parte fraccionaria del número  $\tilde{x}_n$ .*
- ii) *Agregamos el desbordamiento (0 ó 1) a la parte entera.*

**Demostración.**

Bastará ver que  $0 \leq \tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1} \leq 1$ . Con ello ya estaremos en condiciones del corolario anterior, pero, esto es fácil de solucionar usando el hecho de que la órbita está contenida en un semicírculo y ya que la distancia entre ellos será menos de 1/2 al aplicarle ‘shift’ en los elementos de  $\mathbb{R}$  la diferencia será menos de 1 que es lo que nos interesa.

□

Notemos que  $\tilde{x}_n$  obtiene como información importante la acumulación de los primeros  $n$  de 1's que hay en el desarrollo binario de  $x_0$  y el número de rotación  $\nu_{\mathbb{A}}$  nos proporciona la frecuencia con que el dígito 1 aparece en esta expresión.

Con el siguiente ejemplo se pretende aclarar mejor la nota anterior.

**Ejemplo 4.** *Sea  $\mathbb{A} = \{ \frac{5}{31}, \frac{10}{31}, \frac{20}{31}, \frac{9}{31}, \frac{18}{31} \}$ , es fácil ver que  $\mathbb{A} \subset [ \frac{5}{31}, \frac{5}{31} + \frac{1}{2} ]$ .*





## 4. Capítulo 2

### 4.1. Enunciado de teoremas principales.

**Teorema 5.** a) Para cada  $\nu \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  existe un único subconjunto mínimo cerrado  $\sigma$ -invariante que llamaremos  $A^\nu \subset \mathbb{T}$  y el cual tendrá número de rotación  $\nu$ . Además:

i) Si  $\nu \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ,  $A^\nu$  es finito y consiste en una sola  $\sigma$ -órbita periódica.

ii) Si  $\nu \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$ ,  $A^\nu$  es un conjunto de Cantor y consiste en la clausura de la  $\sigma$ -órbita de un punto recurrente.

b) Para cada  $\nu$  el conjunto  $A^\nu$  tiene medida cero y dimensión de Hausdorff cero.

c) Para cada  $\nu \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  existen dos conjuntos máximos  $\sigma$ -invariante  $A_-^\nu$  y  $A_+^\nu$ , con número de rotación  $\nu$  y además  $A^\nu = A_-^\nu + A_+^\nu$ .

**Teorema 6.** a) Para cada  $\mu \in ]0, \frac{1}{2}[$  el semicírculo  $C_\mu = [\mu, \mu + \frac{1}{2}]$  contiene un único conjunto minimal cerrado  $\sigma$ -invariante  $A_\mu$ .

b) El gráfico del número de rotación  $\nu$  correspondiente a  $A_\mu$ , como una función de  $\mu$  es la Escalera del Diablo. En particular,  $\nu$  es racional excepto en un conjunto de valores de  $\mu$ , los cuales tienen clausura de medida cero y dimensión de Hausdorff cero.

**Teorema 7.** Algoritmo para  $A^\nu$

a) para cada  $\nu \neq 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  existe un único par de racionales  $0 < \theta_\nu^- < \theta_\nu^+ < 1$  (Construidos algorítmicamente), tal que:

i)  $\theta_\nu^-$  y  $\theta_\nu^+$  son puntos adyacentes de la  $\sigma$ -órbita  $A^\nu$

ii)  $\frac{\theta_\nu^-}{2}$  y  $\frac{\theta_\nu^+}{2}$  se encuentran en  $A^\nu$  y  $A^\nu \subset [\frac{\theta_\nu^-}{2}, \frac{\theta_\nu^+}{2} + \frac{1}{2}]$ . Si  $\nu = \frac{p}{q}$  en su forma reducida, el intervalo  $[\frac{\theta_\nu^-}{2}, \frac{\theta_\nu^+}{2} + \frac{1}{2}]$  tiene longitud  $\frac{2^q - 1}{2^q - 1}$ .

b) Para cada  $\nu \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$ , existe un único número real  $0 < \theta_\nu < 1$  tal que:

i)  $\theta_\nu$  está en  $A^\nu$  y es una  $\sigma$ -órbita densa en  $A^\nu$

ii)  $\frac{\theta_\nu}{2}$  y  $\frac{\theta_\nu}{2} + \frac{1}{2}$  se encuentran en  $A^\nu$  y  $A^\nu \subset [\frac{\theta_\nu}{2}, \frac{\theta_\nu}{2} + \frac{1}{2}]$ .

c) Si  $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2$  con  $\nu_1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  y  $\nu_0, \nu_2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$  entonces  $\theta_{\nu_0} < \theta_{\nu_1}^- < \theta_{\nu_1}^+ < \theta_{\nu_2}$ .

**Teorema 8.** *Trascendencia de  $\theta_\nu$ ,  $\nu \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$ :*

a) Si  $\nu \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$  no es de tipo constante,  $\theta_\nu$  es Liouville

b) Si  $\nu \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$  es de tipo constante, entonces:

i) Si  $\nu$  no es noble, entonces  $\theta_\nu$  no es 3-diofántico

ii) Si  $\nu$  es noble, entonces  $\theta_\nu$  no es  $\beta$ -diofántico, para  $\beta = 2 + \gamma - \epsilon$  donde  $\gamma = 1,618\dots$  es el número áureo y  $\epsilon$  es cualquier número positivo real.

Entonces por el Teorema de Roth es trascendental para todo  $\nu \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$

Recordemos que  $\nu$  se dice que es de tipo constante si la secuencia de números enteros  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  provienen de la expansión en fracción continua de  $\nu = l/(a_1 + l/(a_2 + \dots))$  está acotada. y se dice que es noble  $a_n = 1$  para todos los  $n$  suficientemente grande. Por ejemplo, el número áureo es noble.

## 5. Capítulo 3

### 5.1. Proposiciones y lemas

En esta sección probaremos proposiciones y lemas que nos facilitarán la demostración de los teoremas principales del capítulo anterior. Empezemos recordando una particular forma de trabajar con los elementos de  $\mathbb{T}$  y recordemos que topológicamente  $\mathbb{T}$  es isomorfo a  $[0, 1)$ , por lo tanto la siguiente definición resulta natural.

**Definición 8.** Sea  $x \in \mathbb{T}$ , A  $x$  le podemos asociar la cadena  $(\epsilon_1(x), \epsilon_2(x), \dots, \epsilon_j(x), \dots)$  de tal manera que  $\epsilon_j \in \{1, 0\}$  y estos provienen de la escritura en binario de  $x$ , es decir, se cumple que:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon_i(x)}{2^i}$$

Hay que mencionar que esta definición nos traslada los elementos de  $\mathbb{T}$  a elementos de  $\Sigma_2$ , un espacio métrico compuesto de cadenas de 0's y 1's, pasando por  $[0, 1)$ , cuya distancia será la que definimos a continuación

**Definición 9.** Si  $x = (\epsilon_1(x), \epsilon_2(x), \dots, \epsilon_j(x), \dots)$  y  $y = (\epsilon_1(y), \epsilon_2(y), \dots, \epsilon_j(y), \dots)$

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\epsilon_i(x) - \epsilon_i(y)|}{2^i}$$

Omitiremos la demostración de que la función definida anteriormente es una distancia.

Notemos, en cuanto a la definición, que a cada número en  $\mathbb{T}$  le asigna una cadena infinita que proviene del desarrollo binario del número  $x$ . Sin embargo no necesariamente la expansión binaria de un número es infinita, por cuanto si tiene desarrollo binario finito se rellenará con  $\epsilon_i(x) = 0$ . Además, a cada  $x$  le podemos asignar otra cadena, compuesta de enteros y la cual se definirá a continuación

**Definición 10.** Sea  $x \in \mathbb{T}$  y  $(\epsilon_1(x), \epsilon_2(x), \dots, \epsilon_j(x), \dots)$  su cadena asociada.

A  $x$  le podemos asociar la cadena de enteros

$$(p_1(x), p_2(x), \dots, p_j(x), \dots)$$

donde  $p_j(x) = \epsilon_1(x) + \epsilon_2(x) + \dots + \epsilon_j(x)$

A continuación analizaremos un ejemplo, que nos ayudará a comprender las definiciones dadas anteriormente

**Ejemplo 5.** Sea  $x = 0,703125$ , es fácil ver que la cadena asociada por el desarrollo binario de este número es  $(101101000\dots)$ , es decir que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon_i(x)}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$$

Ahora veamos que la cadena de enteros que se puede asignar es  $(11233444\dots)$ , y notemos la siguiente propiedad

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i(x)}{2^{i+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{64} + \sum_{i=6}^{\infty} \frac{4}{2^{i+1}}$$

En la ecuación anterior, la serie es geométrica y converge a  $\frac{1}{2^4}$  y si calculamos ahora el valor, éste es  $\frac{45}{64} = 0,703125$

De la última propiedad del ejemplo anterior podemos concluir la siguiente proposición.

**Proposición 2.** Sea  $x \in \mathbb{T}$  y  $(\epsilon_1(x), \epsilon_2(x), \dots, \epsilon_j(x), \dots)$  su cadena asociada por la expansión binaria y

$$(p_1(x), p_2(x), \dots, p_j(x), \dots)$$

la cadena de enteros asociada, entonces

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon_i(x)}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i(x)}{2^{i+1}}$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i(x)}{2^{i+1}} &= \frac{p_1(x)}{2^2} + \frac{p_2(x)}{2^3} + \dots + \frac{p_n(x)}{2^{n+1}} + \dots \\
&= \frac{\epsilon_1(x)}{2^2} + \frac{\epsilon_1(x) + \epsilon_2(x)}{2^3} + \dots + \frac{\epsilon_1(x) + \epsilon_2(x) + \dots + \epsilon_n(x)}{2^{n+1}} + \dots \\
&= \epsilon_1(x) \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) + \epsilon_2(x) \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right) + \dots + \epsilon_n(x) \left( \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots \right) + \dots \\
&= \epsilon_1(x) \frac{1}{2} + \epsilon_2(x) \frac{1}{4} + \dots + \epsilon_n(x) \frac{1}{2^n} + \dots \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon_i(x)}{2^i} = x
\end{aligned}$$

□

A continuación se presenta una interesante comparación en tres espacios diferentes  $\Sigma_2$ ,  $S^1$  y  $[0, 1]$ . Debemos hacer esta aclaración debido a que los usamos indiferentemente. Sabemos que  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ , el mapeo ‘shift’,  $f : S^1 \rightarrow S^1$  tal que  $f(z) = z^2$  (vemos al círculo como subconjunto de  $\mathbb{C}$ ) y  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que  $g(\theta) = 2\theta \pmod{1}$ . Analicemos que la dinámica de estos tres mapeos es equivalente, lo que quiere decir que analizar la dinámica de uno de ellos es analizar la dinámica de cualquiera de los otros dos mapeos.

Si tomamos  $x \in [0, 1]$  se puede escribir su expansión así

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$$

donde  $a_i \in \{0, 1\}$ .

Ahora notemos que a este número  $x$  le podemos asignar la cadena  $(a_1 a_2 \dots)$  que es una cadena de  $\Sigma_2$ , es decir, que a cada elemento de  $[0, 1]$  le podemos asignar una cadena de  $\Sigma_2$ , pero también, a cada cadena le podemos asignar un número de  $[0, 1]$  aunque en este caso la asignación no es única. Por ejemplo, la cadena  $(1010111 \dots)$  y  $(1011000 \dots)$  representan el mismo número. En efecto, veamos que

$$x = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{11}{16}$$

y si aplicamos lo mismo a la otra cadena veremos que

$$y = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \sum_{i=4}^{\infty} \frac{0}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{11}{16}.$$

Aunque no afecta la dinámica es importante decir que de lo anterior se deduce que hay al menos dos cadenas que representan el mismo número

Ahora tomemos el número

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$$

al cual le podemos asignar la cadena  $(a_1 a_2 a_3 \dots)$ .

Y ahora apliquemos la función  $g$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2 \frac{a_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i-1}} = a_1 + \frac{a_2}{2^1} + \frac{a_3}{2^2} + \dots = a_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i-1}}.$$

Recordemos que este mapeo lo que hace es multiplicar el número por dos módulo uno. Entonces veamos que si  $a_0$  es 0 ó 1 en ambos casos la expresión que quedará para  $g(x)$  será

$$g(x) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}$$

donde  $b_i = a_{i+1}$ .

Entonces, a este último número le podemos asignar la cadena  $(b_1 b_2 b_3 \dots)$  que es la misma que la cadena  $(a_2 a_3 a_4 \dots)$ , es decir, que aplicar el mapeo doblar el ángulo en  $[0, 1]$  es lo mismo que aplicar la 'shift' en  $\Sigma_2$ .

Ahora mostraremos que aplicar el mapeo elevar al cuadrado en  $S^1$  es lo mismo que doblar el ángulo. Veamos que si tomamos un elemento en el círculo  $x = e^{2\pi i \theta}$ , donde  $\theta \in [0, 1]$ , elevando  $x$  al cuadrado obtenemos que

$$x^2 = (e^{2\pi i \theta})^2 = e^{2\pi i (2\theta)}$$

es decir, que en realidad lo que hemos hecho es duplicar el ángulo, lo cual es lo que queríamos comprobar.

Ahora que nos hemos trasladado a las secuencias de 0's y 1's conviene dar su equivalente en  $\sigma_2$ . Este mapeo también lo llamaremos 'shift' y se define a continuación.

**Definición 11.** Sea  $x = (\epsilon_1(x), \epsilon_2(x), \dots, \epsilon_j(x), \dots)$  definimos el mapeo 'shift' como  $\sigma : (\Sigma_2 \rightarrow$

$\Sigma_2$  tal que

$$\sigma(x) = (\epsilon_2(x), \epsilon_3(x), \dots, \epsilon_j(x), \dots)$$

Notemos que lo que hace este mapeo es borrar el primer elemento de la cadena y desplazar los demás una posición. Bajo este mapeo el elemento  $x = (\epsilon_1(x), \epsilon_2(x), \dots, \epsilon_j(x), \dots)$  tiene dos preimágenes que son:

$$\frac{x}{2} = (0, \epsilon_1(x), \epsilon_2(x), \dots, \epsilon_j(x), \dots) \text{ y } \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = (1, \epsilon_1(x), \epsilon_2(x), \dots, \epsilon_j(x), \dots)$$

El siguiente Lema nos será muy útil en la demostración de los resultados siguientes debido a que nos da una caracterización de las cadenas que están contenidas en un semicírculo.

**Lema 5.** *Sea  $O_x$  la  $\sigma$ -órbita del punto  $x$ , para  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  y la cadena  $\epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}, \dots, \epsilon_{i_k}$ . Si  $O_x$  está contenido en el semicírculo  $C_{\frac{x}{2}}$ , entonces no puede aparecer en el desarrollo binario de  $\frac{x}{2}$  ni de  $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$  con dos ceros, uno en cada extremo y a la vez la misma cadena pero con dos unos en los extremos, es decir, no va aparecer en ninguno el siguiente trozo de cadena*

$$\dots, 0, \epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}, \dots, \epsilon_{i_k}, 0, \dots, 1, \epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}, \dots, \epsilon_{i_k}, 1, \dots$$

**Demostración** Supongamos que no se cumple, entonces, tenemos que existen  $m, n$  que hacen que se cumpla lo siguiente

$$\frac{x}{2} = (0, \epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}, \dots, \epsilon_{i_k}, \dots)$$

$$\sigma^m\left(\frac{x}{2}\right) = (0, \epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}, \dots, \epsilon_{i_k}, 0, \dots)$$

$$\sigma^n\left(\frac{x}{2}\right) = (1, \epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}, \dots, \epsilon_{i_k}, 1, \dots)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = (0, \epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}, \dots, \epsilon_{i_k}, \dots)$$

Entonces, veamos que



$$\begin{aligned}
d(\sigma^m(\frac{x}{2}), \sigma^n(\frac{x}{2})) &= \frac{|0-1|}{2} + \frac{|\epsilon_{i_1} - \epsilon_{i_1}|}{2^2} + \dots + \frac{|0-1|}{2^{k+2}} + \dots \\
&\geq \frac{1}{2} + \frac{|0-1|}{2^{k+2}} \\
&> \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

y además  $d(\frac{x}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ , lo que implica que  $\sigma^m(\frac{x}{2})$  ó  $\sigma^n(\frac{x}{2})$  debe de estar fuera de  $C_{\frac{x}{2}}$  y, por lo tanto, contradice el hecho de que la órbita está contenida en  $C_{\frac{x}{2}}$ .

□

Veamos que si  $k = 0$ , esto quiere decir que en la expansión binaria de  $\frac{x}{2}$  o de  $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$  no pueden aparecer 00 y 11 a la vez.

A cada elemento  $x \in \mathbb{T}$  le podemos asignar ahora una cadena de 0's y 1's de la cual podemos definir una escalera de la siguiente manera:

**Definición 12.** Consideremos los puntos  $(j, p_j(x))_{j \geq 1}$ , la escalera para  $x$  está definida por:

- i Si  $p_{j+1}(x) = p_j(x)$ , es decir,  $\epsilon_{j+1}(x) = 0$ , los puntos  $(j, p_j(x))$  y  $(j+1, p_{j+1}(x))$  son unidos por un segmento horizontal.
- ii Si  $p_{j+1}(x) = p_j(x) + 1$  los puntos son unidos por un segmento horizontal seguidos de un segmento vertical.

Toda secuencia de números enteros que cumpla  $0 \leq p_{j+1} - p_j \leq 1$  para todo  $j$  es inducido por un número  $x \in \mathbb{T}$ .

Veamos en la Figura 8, la escalera asociada a  $x$ , tomado del ejemplo 5.

Recordemos que en este trabajo nos interesan los conjuntos  $\mathbb{A} \subset \mathbb{T}$  tal que  $\sigma(\mathbb{A}) = \mathbb{A}$ , es decir, son  $\sigma$ -invariantes. Ya hemos demostrado que para que se cumpla la condición necesaria y suficiente es necesario que  $\mathbb{A}$  esté contenido en un semicírculo y la siguiente proposición nos da un equivalente a la hora de trabajar con cadenas.

**Proposición 3.** Sea  $x \in \mathbb{T}$  y sea  $O_x$  la órbita hacia adelante de  $x$ .

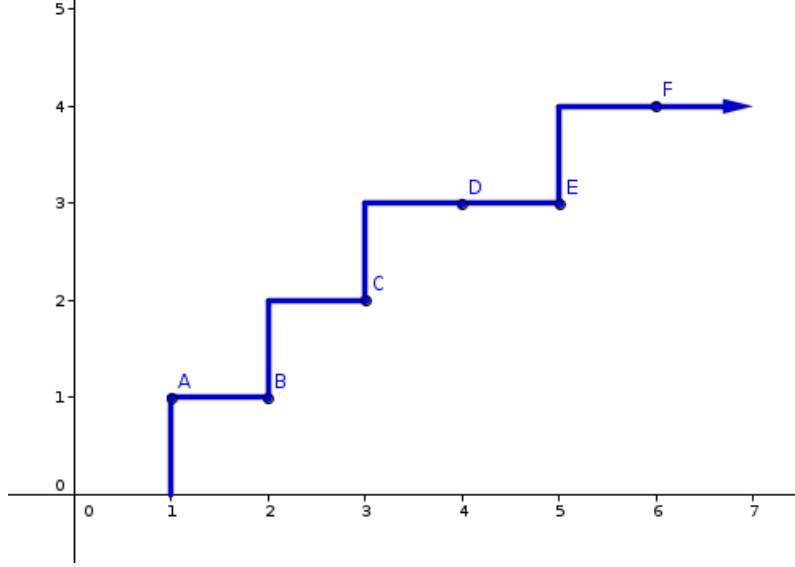


Figura 8: Escalera asociada a  $x = 0,703125$ .

i) La órbita está contenida en el semicírculo  $C_{\frac{x}{2}} = [\frac{x}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{2}]$  si y sólo si se satisface la siguiente condición

$$\forall k \geq 1, \forall l \geq 1, \quad p_k\left(\frac{x}{2}\right) + p_l\left(\frac{x}{2}\right) \leq p_{k+l}\left(\frac{x}{2}\right) \leq p_k\left(\frac{x}{2}\right) + p_l\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \quad (18)$$

ii) Si se satisface (18), entonces  $\sigma|_{O_x}$  tiene número de rotación  $\nu_x = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p_j(x/2)}{j}$  y la escalera  $\{p_j(x/2)\}$  satisface

$$\forall j \geq 1, \quad p_j\left(\frac{x}{2}\right) \leq j\nu_x \leq p_j\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \quad (19)$$

### Demostración

Supongamos que  $O_x \subset C_{x/2}$ . Definamos

$$s_{k,l} = p_{k+l}\left(\frac{x}{2}\right) - p_k\left(\frac{x}{2}\right) - p_l\left(\frac{x}{2}\right)$$

donde,  $x = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_j, \dots)$  y  $\frac{x}{2} = (0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots)$ .

Ahora veamos que

$$p_{k+l}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_k + \epsilon_{k+1} + \dots + \epsilon_{k+l-1}$$

$$-p_k\left(\frac{x}{2}\right) = 0 - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \dots - \epsilon_{k-1}$$

$$-p_l\left(\frac{x}{2}\right) = 0 - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \dots - \epsilon_{l-1}$$

Ahora restamos la primera ecuación de las otras dos de la siguiente forma: si a la primera le resto la segunda, la primera pierde los primeros  $k - 1$  elementos, y si reordenamos los anterior tendremos que

$$s_{k,l} = \epsilon_k + (\epsilon_{k+1} - \epsilon_1) + (\epsilon_{k+2} - \epsilon_2) + (\epsilon_{k+l-1} - \epsilon_{l-1})$$

De lo anterior concluimos que

$$s_{k,l} = \epsilon_k + \sum_{j=1}^{l-1} (\epsilon_{k+j} - \epsilon_j) \quad (20)$$

Si demostramos que  $0 \leq s_{k,l} \leq 1$ , habremos terminado la primera parte de la prueba, esto para  $\forall k \geq 1$  y  $\forall l \geq 1$ .

Para esto usaremos el lema 5 aplicado para  $k = 0$  que nos dice que no pueden haber en el desarrollo binario de  $\frac{x}{2}$  y de  $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$  dos ceros juntos ni dos unos juntos. Esto nos servirá mucho para la demostración, que haremos por inducción sobre  $l$ . Hay que demostrar que para  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq s_{k,l} \leq 1$  y

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } s_{k,l} = 0, \text{ entonces } \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{k+l} = \epsilon_l \quad \text{y } s_{k,l} = 0 \\ \acute{o} \\ \epsilon_{k+l} = 1, \epsilon_l = 0 \quad \text{y } s_{k,l} = 1 \end{array} \right. \\ \text{Si } s_{k,l} = 1, \text{ entonces } \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{k+l} = \epsilon_l \quad \text{y } s_{k,l} = 1 \\ \acute{o} \\ \epsilon_{k+l} = 0, \epsilon_l = 1 \quad \text{y } s_{k,l} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (21)$$

En efecto, si  $l = 1$ ,  $s_{k,1} = \epsilon_k$ , es decir  $0 \leq s_{k,1} \leq 1$  y recordemos que

$$s_{k,l+1} = \epsilon_k + \sum_{i=1}^l (\epsilon_{k+i} - \epsilon_i) = s_{k,l} + (\epsilon_{k+l} - \epsilon_l)$$

Ahora, por lo anterior  $s_{k,2} = s_{k,1} + (\epsilon_{k+1} - \epsilon_1)$ , es decir, si  $s_{k,1} = \epsilon_k = 0$ , entonces puede

ocurrir que  $\epsilon_{k+1} = \epsilon_1$ . En este caso  $s_{k,2} = 0$ . Si no son iguales, entonces, supongamos que  $\epsilon_{k+1} = 1$  y  $\epsilon_1 = 0$ , tendremos que  $s_{k,2} = 1$ . Falta ver el caso en que  $\epsilon_{k+1} = 0$  y  $\epsilon_1 = 1$ , pero este no puede suceder ya que si sucediera, tendríamos que la cadena  $\sigma^k(\frac{x}{2}) = (\epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \dots)$  tendrá dos ceros juntos ( $\epsilon_k = \epsilon_{k+1} = 0$ ) y  $\frac{x}{2} = (1, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2, \dots)$ , tendría dos unos juntos, lo que contradice el lema 5. Lo anterior se resume en

$$\text{Si } s_{k,1} = 0, \text{ entonces } \begin{cases} \epsilon_{k+1} = \epsilon_1 & \text{y } s_{k,2} = 0 \\ \text{ó} \\ \epsilon_{k+1} = 1, \epsilon_l = 0 & \text{y } s_{k,2} = 1 \end{cases}$$

La otra parte de la ecuación (21), aplicada a  $l = 1$  se demuestra de manera análoga por lo que la omitiremos.

Supongamos que  $0 \leq s_{k,j-1} \leq 1$  y que la ecuación (21) se cumple para  $1 \leq j < l$ , es decir

$$\begin{aligned} \text{Si } s_{k,l-1} = 0, \text{ entonces } & \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{k+l-1} = \epsilon_{l-1} \quad \text{y } s_{k,l} = 0 \\ \text{ó} \\ \epsilon_{k+l-1} = 1, \epsilon_{l-1} = 0 \quad \text{y } s_{k,l} = 1 \end{array} \right\} \\ \text{Si } s_{k,l-1} = 1, \text{ entonces } & \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{k+l-1} = \epsilon_{l-1} \quad \text{y } s_{k,l} = 1 \\ \text{ó} \\ \epsilon_{k+l-1} = 0, \epsilon_{l-1} = 1 \quad \text{y } s_{k,l} = 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

Tenemos que demostrar que para  $j = l$  se cumple que  $0 \leq s_{k,l} \leq 1$  y la ecuación (21) aplicado a  $j = l$ , es decir,

$$\begin{aligned} \text{Si } s_{k,l} = 0, \text{ entonces } & \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{k+l} = \epsilon_l \quad \text{y } s_{k,l+1} = 0 \\ \text{ó} \\ \epsilon_{k+l} = 1, \epsilon_l = 0 \quad \text{y } s_{k,l+1} = 1 \end{array} \right\} \\ \text{Si } s_{k,l} = 1, \text{ entonces } & \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{k+l} = \epsilon_l \quad \text{y } s_{k,l+1} = 1 \\ \text{ó} \\ \epsilon_{k+l} = 0, \epsilon_l = 1 \quad \text{y } s_{k,l+1} = 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

Entonces, la desigualdad  $0 \leq s_{k,l} \leq 1$  se deduce de aplicar (21) a  $j = l - 1$ . Si  $s_{k,l} = 0$ , recordando la ecuación  $s_{k,l+1} = s_{k,l} + (\epsilon_{k+l} - \epsilon_l)$ , y usando la hipótesis de inducción de la ecuación (22) tenemos que puede suceder que  $\epsilon_{k+l-1} = \epsilon_{l-1}$  ó  $\epsilon_{k+l-1} = 0$  y  $\epsilon_{l-1} = 1$ . La primera no me restringe ningún valor para  $\epsilon_{k+l}$  ni para  $\epsilon_l$ , pero la segunda me dice que  $\epsilon_{k+l} = 1$  y  $\epsilon_l = 0$  ó son iguales. Si son iguales  $s_{k,l+1} = s_{k,l} = 0$  y el caso en que son distintos  $s_{k,l+1} = 1$ . Esto es la primera parte de la ecuación (23). La segunda parte de ésta necesita un análisis análogo por lo que

lo omitiremos.

Ahora supongamos que se cumple (18) para  $O_x$ . Queremos demostrar que  $O_x \subset [\frac{x}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{2}]$ . Supongamos que no se cumple, y sea  $\sigma^k(\frac{x}{2})$  el primer elemento de la órbita que cae fuera del intervalo cerrado y consideremos lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} &= (0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_l, \dots) \\ \sigma^k(\frac{x}{2}) &= (\epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_{k+l}, \dots) \\ \frac{x}{2} + \frac{x}{2} &= (1, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_l, \dots)\end{aligned}$$

Además, notemos que si consideramos  $l$  de tal manera que sea el primer elemento de la expansión que cumpla que  $\epsilon_{k+l} \neq \epsilon_l$  obtendremos la siguiente igualdad

$$s_{k,l+1} = \epsilon_k + (\epsilon_{k+l} - \epsilon_l) \tag{24}$$

el cual tiene dos opciones: La primera cuando  $\epsilon_k = 0$ , como se cumple  $s_{k,l} = \epsilon_k = 0$  y por la ecuación (22) tenemos que  $\epsilon_{k+l-1} = 1$  y  $\epsilon_{l-1} = 0$  lo que implica, por el hecho de que no pueden haber dos ceros ni dos unos juntos, que  $\epsilon_{k+l} = 0$  y  $\epsilon_l = 1$ , lo que nos da como resultado por (24), que  $s_{k,l+1} = -1$  (contradiciendo (21)). El otro caso es si  $\epsilon_k = 1$  entonces, por el mismo razonamiento,  $s_{k,l} = \epsilon_k = 1$  que implica que por la ecuación (22)  $\epsilon_{k+l-1} = 0$  y  $\epsilon_{l-1} = 1$  de donde, por la razón de que no pueden haber dos ceros ni dos unos juntos, deducimos que  $\epsilon_{k+l} = 1$  y  $\epsilon_l = 0$  y así concluimos por la ecuación (24) que  $s_{k,l+1} = 2$  que también contradice (21). Por lo tanto  $O_x \subset [\frac{x}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{2}]$ .

La parte (ii) la veremos en dos pasos: La primera es ver que el número de rotación

$$\nu_x = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p_j(\frac{x}{2})}{j}$$

Para esto hay que comprobar que la sucesión de elementos  $p_j(x/2)$  satisface las condiciones del corolario 4, con  $\mathbb{A} = O_x$ .

Entonces,  $O_x$  contenido en un semicírculo cerrado por hipótesis, y por esto y la proposición 1 tenemos que  $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}$ . Ahora veamos que  $(p_j(x/2))_{j \geq 1}$  satisface:

- a) Desplazamos a la izquierda los valores de la parte fraccionaria del número  $\tilde{x}_n$ .
- b) Agregamos el desbordamiento (0 ó 1) a la parte entera.

Bastará con observar la forma en que hemos definido los elementos de esta sucesión.

La segunda parte de ii) la demostraremos por inducción sobre  $j$ . Para ello consideremos  $\frac{x}{2} = (0, \epsilon_1, \epsilon, \dots)$ .

Así, si  $j = 1$ , tendremos que  $p_1(\frac{x}{2}) = 0$  y entonces  $0 \leq 1 \cdot \nu_x \leq 1$  es evidente.

Supongamos ahora que se cumple para  $j = k$ , es decir,  $p_k(\frac{x}{2}) \leq k \cdot \nu_x \leq p_k(\frac{x}{2} + 1)$  y demostraremos que se cumple para  $j = k + 1$

$$\begin{aligned} p_{k+1}(\frac{x}{2}) &= p_{k+1}(\frac{x}{2}) + \epsilon_{k+1} \\ &\leq j\nu_x + \epsilon_{k+1} \\ &\leq p_k(\frac{x}{2}) + 1 + \epsilon_{k+1} \\ &= p_{k+1}(\frac{x}{2}) + 1 \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

□

La condición (19) de la proposición anterior nos define dos extremos de la escalera. El primer valor es donde  $p_j(\frac{x}{2})$  siempre toma el valor más grande y el segundo cuando toma el valor más pequeño. denotemos estas dos cadenas por  $(j, p_j^+)$  y  $(j, p_j^-)$  respectivamente.

**Definición 13.** *El algoritmo que define las cadenas  $(j, p_j^+)$  y  $(j, p_j^-)$  es el siguiente:*

- $p_j^+ = p_j^- = [j\frac{p}{q}]$ , si  $j$  no es múltiplo de  $q$ .
- $p_j^+ = kp$  y  $p_j^- = kp - 1$ , si  $j = kq$ . para  $k \in \mathbb{N}$

**Ejemplo 6.** *Tomemos el número  $x = \frac{5}{31}$  y calculemos los  $p_j^+$ , y además hay que calcular  $p_j^-$ , entonces:*

$$p_1^+ = p_1^- = \left[1\frac{5}{31}\right] = 0$$

*esto mismo ocurre para  $j = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  tendremos también que*

$$p_j^+ = p_j^- = \left[1\frac{5}{31}\right] = 0$$

desde  $j=\{7,8,9,10, 11, 12\}$

$$p_j^+ = p_j^- = \left[1 \frac{5}{31}\right] = 1$$

y as'isucesivamente podemos ir encontrando los valores de  $p_j^-$  y  $p_j^+$  teniendo cuidado cuando  $j = 31$  ya que  $p_{31}^+ = 5$  y  $p_{31}^- = 4$

Veamos que las siguientes propiedades elementales las cumplen las escaleras que hemos definido anteriormente.

**Lema 6.** Sean  $(j, p_j^+)$  y  $(j, p_j^-)$  las cadenas definidas anteriormente, entonces

- (I) (a)  $p_{q+k}^+ = p_q^+ + p_k^+$ ,  $p_{q+k}^- = p_q^- + p_k^- - 1$ .  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  
 (b)  $\epsilon_j^+ = p_{j+1}^+ - p_j^+ = \epsilon_{q+j}^+$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon_{q-1}^+ = 1$ ,  $\epsilon_q^+ = 0$   
 $\epsilon_j^- = \epsilon_{q+j}^-$ ,  $\forall j$ ,  $\epsilon_{q-1}^- = 0$ ,  $\epsilon_q^- = 1$   
 (c)  $\epsilon_j^+ = \epsilon_j^-$ ,  $\forall j = \{1, 2, \dots, q-2\}$

(II) (a)  $\exists j_1 \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ , tal que,  $j_1 \frac{p}{q} - p_{j_1}^- = \frac{1}{q}$

$$\exists j_2 \in \{1, 2, \dots, q-1\}, \text{ tal que, } j_2 \frac{p}{q} - p_{j_2}^+ = 1 - \frac{1}{q}, \quad j_1 + j_2 = q$$

- (b)  $\forall k \in \{1, 2, \dots, q-1\} p_{j_1+k}^- = p_{j_1}^- + p_k^-$   
 $\forall k \in \{1, 2, \dots, q-1\} p_{j_2+k}^+ = p_{j_2}^+ + p_k^+ + 1$ .

### **Demostración.**

Primero demostramos (I), literal (a). Para eso hay dos caso: El primero en que  $k = mq$ , entonces,

$$p_{q+k}^+ = p_{q(1+m)}^+ = (1+m)p = p + mp = p_q^+ + p_k^+$$

y

$$p_{q+k}^- = p_{q(1+m)}^- = (1+m)p + 1 = p + (mp - 1) = p - 1 + 1 = p_q^- + p_k^-$$

La igualdad última se deduce de  $p_q^- + 1 = p$ . Para el segundo caso, suponemos que  $k$  no es múltiplo de  $q$  entonces tendremos que

$$p_{q+k}^+ = [(q+k)\frac{p}{q}] = [p + k\frac{p}{q}] = p + [k\frac{p}{q}] = p_q^+ + p_k^+$$

Además,

$$p_{q+k}^- = [(q+k)\frac{p}{q}] = [p + k\frac{p}{q}] = p + [k\frac{p}{q}] = p_q^- + 1 + p_k^-$$

Sustituyendo la última igualdad  $p_q^- + 1 = p$ , se demuestra.

Para mostrar (I), literal (b), veamos que  $\epsilon_j^+ = p_{j+1}^+ - p_j^+$  y con esto calculemos

$$\epsilon_{q+j}^+ = p_{q+j+1}^+ - p_{q+j}^+ = p_q^+ + p_{j+1}^+ - (p_q^+ + p_j^+) = \epsilon_j^+$$

Por la misma razón,

$$\epsilon_{q+j}^- = p_{q+j+1}^- - p_{q+j}^- = p_q^- + p_{j+1}^- + 1 - (p_q^- + p_j^- + 1) = \epsilon_j^-$$

Ahora veamos que

$$p_q^+ - p_{q-1}^+ = p - [(q-1)\frac{p}{q}] = -[-\frac{p}{q}] = -(-1) = 1$$

Además,

$$\epsilon_{q-1}^+ = p_q^+ - p_{q-1}^+ = p - [(q-1)\frac{p}{q}] = -[-\frac{p}{q}] = -(-1) = 1$$

$$\epsilon_q^+ = p_{q-1}^+ - p_q^+ = [(q+1)\frac{p}{q}] - p = [\frac{p}{q}] = 0$$

$$\epsilon_{q-1}^- = p_q^- - p_{q-1}^- = p - 1 - [(q-1)\frac{p}{q}] = -1 - [-\frac{p}{q}] = 0$$

$$\epsilon_q^- = p_{q+1}^+ - p_q^+ = [(q+1)\frac{p}{q}] - p + 1 = 1$$

Por último, para demostrar (c) si  $j = \{1, 2, \dots, q-2\}$  y considerando que como  $p_{j+1}^+ = p_{j+1}^-$  y  $p_j^+ = p_j^-$  tenemos que  $\epsilon_j^- = \epsilon_j^+$ . Esto demostraría (I), literal (c).

Demostremos ahora (II), literal (a). Para esto hay que resolver la ecuación  $j_1\frac{p}{q} - p_{j_1}^- = \frac{1}{q}$ , que reescribiendo tenemos  $p_{j_1} - qp_{j_1}^- = 1$ . Es una ecuación diofántica que se puede resolver de manera equivalente resolviendo



$$pj_1 \equiv 1 \pmod{q}$$

y como  $p$  y  $q$  son primos relativos debe existir  $j_1 \in \{1, 2, \dots, q-1\}$  que sea solución a la ecuación, es decir, en un sistema completo de restos módulo  $q$ , sin el 0. Como  $p$  es primo con  $q$  ahí debe haber un valor de  $j_1$  que deje resto 1 al multiplicar por  $p$ , aunque no es el único. Los demás valores solución son múltiplos del valor que cumple, así que no se toman en cuenta. De manera equivalente la otra ecuación habrá que solucionar la siguiente ecuación:

$$pj_2 \equiv q-1 \pmod{q}$$

o lo que es lo mismo,

$$pj_2 \equiv -1 \pmod{q}$$

Por las razones expuestas anteriormente, existe un valor para  $j_2$  en  $\{1, 2, \dots, q-1\}$  que deja resto  $-1$

Ahora veamos que  $pj_1 \equiv 1 \pmod{q}$  y  $pj_2 \equiv -1 \pmod{q}$  al sumar ambas tenemos que  $p(j_1 + j_2) \equiv 0 \pmod{q}$  y esto implica que  $q|p(j_1 + j_2)$  y por el hecho de que  $(p, q) = 1$  y  $j_1 + j_2 \leq 2q - 2$ , deducimos que  $j_1 + j_2 = q$ .

Solo nos falta demostrar la última parte de este lema, (II), literal (b),

□

El lema anterior nos proporciona las propiedades básicas de las escaleras que generan  $(j, p_j^+)$  y  $(j, p_j^-)$ . Como ya sabemos, estas dan origen a dos números que definimos a continuación.

**Definición 14.** Sea  $\frac{p}{q}$  un racional (reducido), con  $0 < \frac{p}{q} < 1$ . Definimos  $\theta_{p/q}^+$  y  $\theta_{p/q}^-$  de la siguiente manera:

$$\theta_{\frac{p}{q}}^+ = (\overline{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{q-2}, 1, 0})$$

y

$$\theta_{\frac{p}{q}}^- = (\overline{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{q-2}, 0, 1})$$

Donde las barras denotan que el bloque de símbolos que está bajo ellas se repite infinitas veces.

Las propiedades que nos interesan de ese par de números las veremos en la siguiente proposición.

**Proposición 4.** Sea  $\frac{p}{q}$  un racional (reducido), con  $0 < \frac{p}{q} < 1$ , entonces  $\theta_{p/q}^-$  y  $\theta_{p/q}^+$ , los números asociados a las escaleras  $p_j^-$  y  $p_j^+$  respectivamente, cumplen que

(i)  $0 < \theta_{p/q}^- < \theta_{p/q}^+ < 1$  (ambos racionales), tal que,  $\theta_{p/q}^\pm$  satisface la condición (18) y las órbitas de  $\theta_{p/q}^\pm$  tienen número de rotación  $\frac{p}{q}$ .

(ii) La  $\sigma$ -órbita de  $\theta_{p/q}^-$  y de  $\theta_{p/q}^+$  coinciden, son  $q$ -periódicas y están contenidas en el intervalo  $[\theta_{p/q}^-/2, (\theta_{p/q}^- + 1)/2]$

(iii)  $\theta_{p/q}^+ - \theta_{p/q}^- = \frac{1}{(2^q - 1)}$ . Además,  $\theta_{p/q}^+$  tiene numerador par y  $\theta_{p/q}^-$  tiene numerador impar.

### Demostración

Demostremos primero (i). Para ello escojamos los números asociados a  $\frac{p}{q}$  en la definición 13,

$$\theta_{\frac{p}{q}}^+ = (\overline{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{q-2}, 1, 0})$$

y

$$\theta_{\frac{p}{q}}^- = (\overline{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{q-2}, 0, 1})$$

Notemos que en las posiciones  $(q-1)$  y  $(q)$ , de cada una de las cadenas asociadas a  $\frac{p}{q}$ , tienen un 1 y la otra un 0 y en la otra viceversa lo que hace que  $\theta_{p/q}^+$  sea más grande que  $\theta_{p/q}^-$ . Por lo tanto,  $0 < \theta_{p/q}^- < \theta_{p/q}^+ < 1$ .

Recordemos que  $\theta_{p/q}^+$  y  $\theta_{p/q}^-$  son los respectivos números asociados a las cadenas que generan  $(j, p_j^+)$  y  $(j, p_j^-)$  respectivamente. Así las órbitas de ambos tendrán número de rotación  $\nu$ .

Lo único que nos quedaría demostrar es que satisface la condición (18), aunque eso se sigue de la forma en que los hemos definidos. Sólo nos queda demostrar la unicidad de estas cadenas.

Para demostrar ii) debemos primero demostrar que  $\sigma^{j_1}(\theta_{p/q}^-) = \theta_{p/q}^+$  y  $\sigma^{j_2}(\theta_{p/q}^+) = \theta_{p/q}^-$ . Para esto basta ver que  $\epsilon_{j_1+k}^+ = \epsilon_k^+$  y esto lo haremos usando el resultado de II) literal b)

$$\begin{aligned} \epsilon_{j_1+k} &= p_{j_1+k+1} - p_{j_1+k} \\ &= p_{j_1+k+1} - p_{j_1+k} \\ &= p_{j_1} + p_{k+1} - (p_{j_1} + p_k) \\ &= p_{k+1} + p_k \\ &= \epsilon_k \end{aligned}$$

De donde podemos seguir que  $\epsilon_{j_1+k}^+ = \epsilon_k^+ = \epsilon_k^-$ , es decir,  $\sigma^{j_2}(\theta_{p/q}^+) = \theta_{p/q}^-$ . Por un argumento similar tendremos que  $\sigma^{j_1}(\theta_{p/q}^-) = \theta_{p/q}^+$ . Lo anterior demuestra que las órbitas de  $\theta_{p/q}^+$  y  $\theta_{p/q}^-$  coinciden, que es  $q$ -periódica.

Notemos que como satisfacen (18) se cumple que

$$\text{Orb}(\theta_{p/q}^-) \subset \left[ \frac{\theta_{p/q}^-}{2}, \frac{\theta_{p/q}^-}{2} + \frac{1}{2} \right]$$

y

$$\text{Orb}(\theta_{p/q}^+) \subset \left[ \frac{\theta_{p/q}^+}{2}, \frac{\theta_{p/q}^+}{2} + \frac{1}{2} \right]$$

Pero como las órbitas coinciden tendremos que éstas debe de estar contenidas en la intersección, es decir:

$$\text{Orb}(\theta_{p/q}^\pm) \subset \left[ \frac{\theta_{p/q}^+}{2}, \frac{\theta_{p/q}^-}{2} + \frac{1}{2} \right]$$

Ahora demostremos iii), haciendo la siguiente resta:

$$\begin{aligned} \theta_{p/q}^+ - \theta_{p/q}^- &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{iq-1}} - \frac{1}{2^{iq}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{iq}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^q} - \frac{1}{(2^q)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2^q}} \\ &= \frac{\frac{1}{2^q}}{1 - \frac{1}{2^q}} \\ &= \frac{1}{2^q - 1} \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 7** (Aplicación de la proposición). Si tomamos  $\nu = \frac{2}{5}$  entonces tendremos lo siguiente:

$$\frac{\theta_{\frac{2}{5}}^+}{2} = (\overline{0, 0, 1, 0, 1}) = \frac{5}{31}, \quad \frac{\theta_{\frac{2}{5}}^+}{2} = (\overline{0, 1, 0, 1, 0}) = \frac{10}{31},$$

$$\frac{\theta_{\frac{2}{5}}^-}{2} = (\overline{0, 0, 1, 0, 0, 1}) = \frac{9}{62}, \quad \frac{\theta_{\frac{2}{5}}^-}{2} = (\overline{0, 1, 0, 0, 1}) = \frac{9}{31}$$

Con  $j_1 = 3$  y  $j_2 = 2$ . Además la  $\sigma$ -órbita es  $\{\frac{5}{31}, \frac{10}{31}, \frac{20}{31}, \frac{9}{31}, \frac{18}{31}\} \subset [\frac{5}{31}, \frac{20}{31}]$ .

Los lemas y proposiciones anteriores se han encargado de trabajar con conjuntos que están compuestos por órbitas que tienen número de rotación racional, sin embargo, las escaleras que hemos generado pueden tener  $\nu$ , número de rotación, que sea irracional. La siguiente proposición trata de aplicar lo que hemos realizado hasta ahora con órbitas con número de rotación irracional.

**Proposición 5.** Sea  $\nu \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ,  $0 < \nu < 1$ .

- (i) Hay un único número real  $0 < \theta_\nu < 1$  tal que,  $\frac{\theta_\nu}{2}$  satisface la condición (18) y la órbita de  $\theta_\nu$  tiene número de rotación  $\nu$ .
- (ii) La  $\sigma$ -órbita de  $\theta_\nu$  está contenida en el semicírculo  $[\frac{\theta_\nu}{2}, \frac{\theta_\nu}{2} + \frac{1}{2}]$ .
- (iii)  $\theta_\nu$  es recurrente bajo  $\sigma$ .

**Demostración** Sea  $\nu \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , recordemos que en la construcción de  $\theta_{p/q}^+$  y  $\theta_{p/q}^-$  en (14) usamos el hecho de que los extremos de la ecuación (19) generan dos escaleras distintas descritas por ambos extremos de ésta. El número  $\theta_\nu$  será tomado de la misma ecuación considerando que  $0 < j\nu - p_j < 1$ . De ahí que  $p_j$  es la parte entera de  $j\nu$ , de modo que los  $p_j$  los tomaremos de esta manera. Evidentemente, por cómo hemos tomado nuestra escalera, se satisface la condición la condición de 18, y por lo tanto se cumplen los literales i) y ii).

Para demostrar iii), tenemos que recordar que un punto  $\theta_\nu$  es recurrente si y sólo si dado un abierto  $(a, b)$  que contenga a  $\theta_\nu$ , existe algún  $l$  para el cual  $\sigma^l(\theta_\nu) \in (a, b)$ . Para demostrar esto basta notar que las cadenas que están en un intervalo  $(a, b)$  tienen los primeros  $k$  dígitos iguales. Por lo tanto, sólo hay que demostrar que  $\sigma^l(\theta_\nu)$  tiene un bloque de  $k$  dígitos que coinciden con los primeros  $k$  de  $\theta_\nu$ . En otras palabras, hay que probar que  $\epsilon_{l+j} = \epsilon_j$ .

Para ello definamos el siguiente conjunto: Sea  $k \in \mathbb{N}$  y sea

$$m_k = \max_{j=1, \dots, k+1} (j\nu - p_j) \quad \text{con} \quad 0 < m_k < 1.$$

La secuencia  $\{j\nu - p_j\}$  es densa en  $[0, 1]$ , es decir existe  $l$  tal que  $0 < l\nu - p_l < 1 - m_k$ .

Así que para  $j = 1, 2, \dots, k+1$ , y de las desigualdades

$$\begin{aligned} 0 < j\nu - p_j < m_k, \\ 0 < (l+j)\nu - (p_l - p_j) < 1, \end{aligned}$$

podemos deducir que  $p_{l+j} = p_l + p_j$  o lo que es lo mismo, que  $\epsilon_{l+j} = \epsilon_j$  completando la demostración.

□

En la proposición siguiente daremos un algoritmo para calcular  $\theta_\nu^\pm$ . Utilizando la expansión en fracciones continuas de  $\nu$ , aunque antes revisaremos una consecuencia del algoritmo de la escalera.

**Lema 7.** Sean  $a/b$  y  $a'/b'$  (simplificados) racionales adyacentes (esto es  $a/b - a'/b' = 1$ ), entonces las expresiones binarias de  $\theta_\nu^-$  y  $\theta_\nu^+$  coinciden en  $b + b' - 2$  lugares.

**Demostración:**

Se deduce de la proposición 6 la cual nos da el algoritmo de la creación de  $\theta_{a/b}^+$  y  $\theta_{a'/b'}^-$  y usando el hecho que  $\theta_{a'/b'}^-$  (respectivamente  $\theta_{a/b}^+$ ) tiene expresión binaria periódica de período  $b'$  (respectivamente  $b$ ) y que

$$\sigma^b(\theta_{a'/b'}^-) = \theta_{a/b}^+ \quad \sigma^{b'}(\theta_{a/b}^+) = \theta_{a'/b'}^-.$$

□

Tomemos una secuencia (finita o infinita) de enteros positivos, digamos  $(a_1, a_2, \dots)$  y definamos la secuencia de racionales siguiente:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_1}, \quad \dots, \quad \frac{p_j}{q_j} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_j}}}$$

si  $a_{j+1} \neq 0$  tendremos que:

$$\begin{aligned} q_{j+1} &= q_{j-1} + a_{j+1}q_j, & q_0 &= 1, & q_1 &= a_1 \\ p_{j+1} &= p_{j-1} + a_{j+1}p_j, & q_0 &= 1, & q_1 &= a_1 \end{aligned}$$

esto implica que tenemos dos secuencias de fracciones continuas que son adyacentes. Esto implica que existen dos subsecuencias de las ecuaciones anteriores; podemos deducir, entonces, que existen dos subsecuencias monótonas definidas por la siguiente ecuación:

$$\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_{2j}}{q_{2j}} < \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

**Proposición 6.** *i) La expresión binaria para  $\theta_{p_j/q_j}^-$  ( $j$  par) y  $\theta_{p_j/q_j}^+$  ( $j$  impar) pueden obtenerse de la siguiente manera:*

$$\theta_{p_0/q_0}^+ = \theta_0^+ = \bar{0},$$

$$\theta_{p_1/q_1}^+ = \theta_{1/a_1}^+ = \underbrace{\overline{00 \cdots 01}}_{a_1 \text{ digitos}}, \quad \text{así} \quad \theta_{p_1/q_1}^+ = \frac{1}{2^{q_1}-1},$$

$$\theta_{p_2/q_2}^+ = \underbrace{\overline{d_1 d_1 \cdots d_1 1}}_{a_2 \text{ digitos}}, \quad \text{así} \quad \theta_{p_2/q_2}^+ = \frac{k_2}{2^{q_2}-1}, \quad \text{donde} \quad k_2 = 1 + 2^{a_1} + \cdots + 2^{(a_2-1)a_1}.$$

Inductivamente  $\theta_{p_j/q_j}^+$  ( $j$  par) y  $\theta_{p_j/q_j}^-$  ( $j$  impar) son definidos por  $\bar{d}_j$ , donde

$$d_j = \underbrace{d_{j-1} \cdots d_{j-1}}_{a_j} d_{j-2}.$$

ii)

$$\theta_{p_{2j+1}/q_{2j+1}}^+ - \theta_{p_{2j}/q_{2j}}^+ = \frac{1}{(2^{q_{2j}} - 1)(2^{q_{2j-1}} - 1)}$$

y

$$\theta_{p_{2j-1}/q_{2j-1}}^- - \theta_{p_{2j}/q_{2j}}^- = \frac{1}{(2^{q_{2j}} - 1)(2^{q_{2j}} - 1)}$$

### **Demostración de la proposición anterior.**

i) Del lema 6 y de la definición 14 podemos ver que  $\theta_{1/a_1}^+ = \bar{d}_1 = \underbrace{\overline{00 \cdots 01}}_{a_1}$ ; ahora si aplicamos inducción y el lema 7 obtenemos la demostración de i).

Ahora para probar ii) para  $j=1$  tenemos que:

$$\theta_{p_1/q_1}^- - \theta_{p_2/q_2}^- = \bar{d}_1 - \bar{d}_2, \quad d_2 = d_1 d_1 \cdots d_1 0.$$

con:

$$\bar{d}_1 = \frac{1}{2^{q_1} - 1}, \quad \bar{d}_2 = \frac{2^{q_2}}{2^{q_2} - 1} \sum_{j=1}^{a_2} \frac{1}{2^{q_1 j}} = \frac{2^{q_2} - 2}{(2^{q_1} - 1)(2^{q_2} - 1)}$$

En general podemos seguir los pasos anteriores y aplicar inducción para obtener el resultado de ii).

□

**Ejemplo 8.** Calculemos  $\theta_{2/5}^+$  y  $\theta_{2/5}^-$ . Para esto veamos que

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$$

de donde podemos deducir

$$(2, 2) \begin{cases} \theta_0^+ = 0 \\ \theta_{1/2}^+ = \overline{01} \\ \theta_{2/5}^+ = \overline{01010} \end{cases} \quad (2, 1, 1) \begin{cases} \theta_0^- = 0 \\ \theta_{1/2}^- = \overline{01} \\ \theta_{1/3}^- = \overline{010} \\ \theta_{2/5}^- = \overline{01001} \end{cases}$$

**Corolario 2.** (Como calcular  $\theta_\varphi^-$  para  $\varphi = p/q$ .)

Sea  $\varphi$  un racional, con un desarrollo de fracciones continuas finito, digamos  $(a_1, a_2, \dots, a_r = 1)$ , entonces

$$\begin{cases} \text{Si } r \text{ impar} \begin{cases} \theta_\varphi^+ = \theta_{p_r/q_r}^+ & \text{y aplicando la proposici3n anterior} \\ \theta_\varphi^- = 2^{q_r-1} \theta_{p_r/q_r}^+ \end{cases} \\ \text{Si } r \text{ par} \begin{cases} \theta_\varphi^- = \theta_{p_r/q_r}^- & \text{y aplicando la proposici3n anterior} \\ \theta_\varphi^+ = 2^{q_r-1} \theta_{p_r/q_r}^- \end{cases} \end{cases}$$

De aca ya podemos calcular los respectivos  $\theta_{p/q}^\pm$  con  $p/q$  racional, en el siguiente corolario veremos como calcular  $\theta_\varphi^-$  cuando  $\varphi$  es irracional.

**Corolario 3.** Como computar  $\theta_\varphi^-$  para  $\varphi \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$ .

Si  $\varphi \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$  tiene un desarrollo en fracciones continuas infinito, con todos sus elementos positivos, entonces

i)

$$\theta_{\frac{p_{2j}}{q_{2j}}}^+ < \theta_\varphi < \theta_{\frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}}^-$$

y  $\theta_\varphi$  será el límite común de las dos secuencias.

ii) la secuencia  $(A_1, A_2, \dots, A_j, \dots)$  de enteros positivos del desarrollo de la fracción continua de  $\theta_n$  viene dada por:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2^{q_1} - 1 \\ &\vdots \\ A_{j+1} &= 2^{q_j - a} \frac{2^{a_{j+1}q_j} - 1}{2^{q_j} - 1} \end{aligned}$$



## 6. Capítulo 4. Demostración de los teoremas.

En esta capítulo usaremos las demostraciones hechas en el capítulo anterior y vamos a demostrar los 4 teoremas principales.

### 6.1. Demostración teorema 1

- (a) (i) Si  $\nu \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , entonces por la proposición 4 la  $\sigma$ -órbita de  $\theta_\nu^\pm$  es finita, periódica y por lo tanto cerrado, y entonces minimal. Además estas tienen número de rotación  $\nu$ . Por lo tanto,  $A^\nu$  cumple las condiciones de (i).

(ii) Si  $\nu \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$ , por la proposición 5  $A^\nu$  es la clausura de la  $\sigma$ -órbita del punto recurrente  $\theta^\nu$  definido en esa proposición. Así para demostrar que  $A^\nu$  es minimal con número de rotación  $\nu$ , bastara ver que  $\sigma(A^\nu) = A^\nu$ ; además, dado cualquier abierto (definimos los abiertos en base a la distancia dada anteriormente) este no solo contiene puntos del conjunto y por lo tanto no tiene puntos interiores; también  $\theta_\nu$  es denso en  $A^\nu$  esto como lo verificamos en la demostración de la proposición 5. Solo falta verificar que  $A^\nu$  sea cerrado para que este sea un Cantor, en efecto  $A^\nu = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} [\sigma^i(\nu), \sigma^i(\nu)]$ . Por lo tanto,  $A^\nu$  es un conjunto de Cantor.

La unicidad del conjunto  $A^\nu$  en ambos casos se demuestra usando las proposiciones 3, 4 y 5 las cuales demuestran unicidad de la escalera asignada a cada  $\nu$ .

- (b) Si  $A^\nu$  es finito es evidente. Supongamos ahora que  $\nu \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$  y notemos que  $\sigma$  es inyectivo en  $A^\nu$  excepto para los puntos  $\theta_\nu/2$  y  $\theta_\nu + \frac{1}{2}$ . Si quitamos todos los puntos de la forma  $\sigma^-$  del punto  $\theta^\nu/2$  y definimos el conjunto  $\hat{A}^\nu = A^\nu - \{\bigcup_{n \geq 0} \sigma^-(\theta^\nu/2)\}$ . Obtenemos que el conjunto  $\hat{A}^\nu$  es biyectivo en si mismo mediante  $\sigma$  entonces veamos que  $m(\sigma(\hat{A}^\nu)) = 2m(\hat{A}^\nu)$  y la única forma que esto suceda es que  $m(\hat{A}^\nu) = 0$  ya que  $\hat{A}^\nu$  esta acotado. Entonces como  $A^\nu = \hat{A}^\nu \cup \{\bigcup_{n \geq 0} \sigma^-(\theta^\nu/2)\}$  y ambos conjuntos son disjuntos y además el de el lado derecho es contable y por lo tanto  $m(A^\nu) = 0$ , la demostración que la dimensión de haudorff es equivalente solo que al aplicar la medida tendria que  $m_d(\sigma(\hat{A}^\nu)) = 2m_d(\hat{A}^\nu)$  esto  $d > 0$  y por lo tanto la dimensión de Hausdorff es 0.

- (c) Si tomamos a  $\mu \in ]\theta_\nu^-/2, \theta_\nu^+/2[$ , solo existe un subconjunto  $\sigma$  invariante en  $C_{[\mu, \mu + \frac{1}{2}]}$  el cual es  $A^\nu$ , esto por lo que trabajamos en la demostración de la proposición 4. Ahora notemos que en  $\mu = \theta_\nu^-/2$  le podemos agregar a  $A_\nu$  el punto  $\theta_\nu^-/2$  asi como todas las imagenes inversas de esta que estan en  $C_\mu$ . Esto nos da un conjunto maximal que denotamos por  $A_\nu^-$ .

Un proceso similar usamos para crear el  $A_+^\nu$  la diferencia es que ahora agregamos a  $A_\nu$  el punto  $\theta_\nu^-/2 + \frac{1}{2}$  así como todas las imágenes inversas de este punto que están en  $C_\mu$ . En el caso de ser irracional  $\theta_\nu^-/2$  y  $\theta_\nu^-/2 + \frac{1}{2}$  ya están en  $A_\nu$ , por lo que el conjunto satisface las condiciones deseadas y además es maximal.

□

## 6.2. Demostración teorema 2

Ya que cada semicírculo  $C_\mu = [\mu, \mu + \frac{1}{2}]$  contiene algunos  $A_\nu$ , tendremos que

$$[0, \frac{1}{2}] = \bigcup_{\substack{\nu \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \nu \neq 0}} I_\nu \cup \bigcup_{\nu \in (\mathbb{R}-\mathbb{Q})/\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\theta_\nu}{2} \right\} \quad (25)$$

donde  $I_\nu = [\theta_\nu^-/2, \theta_\nu^- + \frac{1}{2}]$

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Q} \cap ]0, 1[} m(I_\nu) = \frac{1}{2} \sum_{0 < p/q < 1} \frac{1}{2^q - 1}$$

donde la suma de la derecha toma todos los valores  $p/q$  en forma reducida.

Debemos demostrar que si tomamos  $\mu$  y calculamos el número de rotación  $\nu$  de los conjuntos que se genera con la órbita de  $\theta_\mu$ ; Si graficamos los pares  $(\mu, \nu)$  hay que demostrar que eso es la escalera del diablo.

Recordemos que las condiciones para que una función sea una Escalera del diablo son:

1. Continua.
2. Monotona
3. Localmente constante en los conjuntos de medida completa, pero sin ser globalmente constante.
4. No es diferenciable en ningún punto.

Demostremos que esta función es continua, Para esto basta tomar dos valores cercanos, digamos  $\mu$  y  $\mu + \epsilon$  y recordemos que estas cumplen que existe un  $n$  tal que  $d(\mu, \mu + \epsilon) < \frac{1}{2^n}$  esto indica que el desarrollo binario de ambos números coincide en los primeros  $n$  elementos, lo que quiere decir que, como el número de rotación es promedio de 1's que aparecen en el desarrollo binario, estos números de rotación estarán cerca y por lo tanto la función así definida será continua.

Para demostrar 2. basta hacer notar que las cadenas que les asignamos a los elementos de  $[0, 1]$  son crecientes, entonces el número de rotación serán respectivamente mayor o igual entre dos cadenas cualquiera.

En la demostración de 3 la dificultad está en ver como son los conjuntos de medida completa, que ya vimos en la ecuación 25 y por la proposición 4 no importa el  $\nu$  que tome ahí todas las orbitas tendran número de rotación fija y por lo tanto, la función será constante. Ahora globalmente no es constante, porque ya vimos al demostrar 2 que es monótona y por tanto, no es globalmente constante.

Por lo tanto, es esta función de la escalera del diablo.

Falta por demostrar que el conjunto de los números de rotación son todos racionales exepcto en un conjunto de valores que tiene clausura de medida cero y dimensin de Hausdorff cero.

□

### 6.3. Demostración teorema 3

- (a) Debemos demostrar que para cada  $\nu \neq 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  existe un único par de racionales  $0 < \theta_\nu^- < \theta_\nu^+ < 1$  y los cuales se definen en el literal (i) de la proposición 4, los cuales también satisfacen que son adyacentes en la  $\sigma$ -orbita de  $A^\nu$  con lo cual probamos el literal (i) de este teorema. Para demostrar el literal (ii) ocupamos el literal (ii) del teorema ocupamos de la proposición 4 la que explicitamente demuestra lo que deseamos.
- (b) El literal (i) y ii) se sigue directamente de la proposición 5.
- (c) Se sigue directamente de la demostración de la proposición 4

□

### 6.4. Demostración teorema 4

Sea  $\nu \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , entonces por el corolario 3 de la proposición 5, podemos escribir a

$$\theta_\nu = \lim_{j \rightarrow \infty} \theta_{p_{2j}/q_{2j}}^+ = \lim_{j \rightarrow \infty} \theta_{p_{2j+1}/q_{2j+1}}^+,$$

donde  $\{p_j/q_j\}_{j \geq 1}$  es la secuencia de racionales que resulta de truncar la fracción continua correspondiente a  $\nu$ .

$$\theta_{p_{2j}/q_{2j}}^+ = \frac{k_{2j}}{2^{q_{2j}} - 1}, \quad \theta_{p_{2j+1}/q_{2j+1}}^- = \frac{k_{2j+1}}{2^{q_{2j+1}} - 1}, \quad \theta_{p_{2j}/q_{2j}}^+ < \theta_\varphi < \theta_{p_{2j+1}/q_{2j+1}}^-$$

y usando las ecuaciones anteriores podemos deducir que:

$$\left| \theta_\nu - \frac{k_j}{2^{q_j} - 1} \right| \leq \frac{k_j}{(2^{q_j} - 1)(2^{q_{j+1}} - 1)} < \frac{4}{2^{q_j + q_{j+1}} - 1},$$

donde  $q_{j+1} = q_{j-1} + a_{j+1}q_j$  y  $\left( \nu = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \right)$

Con lo anterior demostremos cada literal del teorema (4):

- (a) Si  $\{a_j\}_{j \geq 1}$  no es acotada y si tomamos cualquier  $c > 0$  y tomando la última desigualdad tendremos que existe una sucesión de racionales digamos  $\{N_k/D_k\}_{k \geq 1}$  los cuales satisfacen que

$$\left| \theta_\nu - \frac{N_k}{D_k} \right| < \frac{c}{D_k^k},$$

y por lo tanto  $\theta_\nu$  es Liouville.

- (b) (i) Si  $\{a_j\}_{j \geq 1}$  es acotada pero infinitos de los elementos del desarrollo en fracciones continuas de  $\nu$  son mayores que 1, entonces existe una subsucesión de  $a_j \geq 2$  y usando la misma desigualdad podemos llegar a que para  $c > 0$  existe una sucesión de racionales  $\{N_k/D_k\}_{k \geq 1}$  la cual cumple que:

$$\left| \theta_\nu - \frac{N_k}{D_k} \right| < \frac{c}{D_k^3},$$

esto indica que  $\theta_\nu$  no es 3-diofántico.

- (ii) Si  $a_j = 1$  para  $j$  suficientemente grande, entonces tendremos que  $q_{j+1} = q_{j-1} + q_j$  y también

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{q_{j-1}/q_j}{=} \gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \sim 0,618.$$

o lo que es lo mismo

$$\left| \theta_\nu - \frac{K_j}{2^{q_j} - 1} \right| < \frac{4}{2^{q_j + q_{j-1}}},$$

Es decir,

$$\left| \theta_\nu - \frac{N_j}{D_j} \right| < \frac{4}{D_j^{2+\gamma-\epsilon}},$$

Entonces para  $c > 0$ ,  $\epsilon > 0$  y  $j$  suficientemente grande tendremos que  $\theta_\nu$  no es  $(2 + \gamma - \epsilon)$ -Diofántico.

□

**Ejemplo 9.** Tomemos el número de oro y calculemos su desarrollo en fracciones continuas

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

con esto tendremos que

$$\frac{p_1}{q_1} = 1 \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{2} \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{2}{3} \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{3}{5}, \dots,$$

y por lo tanto

$$\theta_{1/2}^- = \overline{1}, \quad \theta_{1/2}^+ = \overline{10}, \quad \theta_{2/3}^- = \overline{101}, \quad \theta_{2/3}^+ = \overline{10110} \quad .$$

Esta secuencia puede ser calculada por la regla de sustitución  $1 \rightarrow 10$  y  $0 \rightarrow 0$ .

## Referencias

- [1] Shaun Bullett and Pierrerre Sentenac, Ordered orbits of the shift, square roots, and the devil's staircase.(1993), Math. Proc. Camb. Phil. Soc, 115
- [2] Robert L. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems Second Edition, (1989), Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- [3] James R. Munkres TOPOLOGY Second Edition (2000), Prentice Hall Inc.
- [4] V. S. Kozyakin, "Discontinuous order preserving circle maps vs circle homeomorphisms.", Boole centre for reserarch in informatics, University college cork-national University of Ireland, cork, Preprint, 11/2003, mayo 2003
- [5] V. S. Kozyakin, "Sturmian sequences generated by order preserving circle maps."Boole centre for reserarch in informatics, University college cork-national Universitu of Ireland, cork, Preprint, 12/2003, mayo 2003
- [6] Whitold Hurewicz, Henry Wallman; Dimension Theory, (1941)