

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA



Universidad de El Salvador

Hacia la libertad por la cultura

TRABAJO DE GRADO:

“Método Gráfico para establecer el campo de pendientes de una Ecuación Diferencial.”

PRESENTADO POR:

Arias Ortiz, Israel.

Romero Vásquez, Juan Antonio.

Vásquez Hernández, Francisco Javier.

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

DOCENTE DIRECTOR:

LIC. JOSE ANTONIO HERNANDEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, AGOSTO DE 2015

SAN MIGUEL EL SALVADOR CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

ING. MARIO ROBERTO NIETO LOVO

RECTOR

MS.D ANA MARIA GLOWER DE ALVARADO

VICE RECTORA ACADEMICA

DRA. ANA LETICIA ZA VALETA DE AMAYA

SECRETARIA GENERAL

LIC. FRANCISCO CRUZ LETONA

FISCAL GENERAL

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

LIC. CRISTOBAL HERNAN RIOS BENITEZ

DECANO

LIC. CARLOS ALEXANDER DIAZ

VICE-DECANO

LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNANDEZ

SECRETARIO

Agradecimientos

A mi **DIOS** todo poderoso creador del cielo y la tierra por ayudarme en todos mis momentos y darme la sabiduría. En situaciones muy difíciles que he vivido en esta trayectoria de mi carrera él ha sido mi principal ayuda y nunca me ha desamparado y todo lo que he logrado es porque ha sido su gran voluntad y misericordia y a él sea toda gloria y toda honra para siempre.

A mi familia por brindarme su apoyo, a mi mamá Marta Ortiz de Arias que es muy especial para mí por darme su apoyo moral y económico, a mi papá José Tomas Arias Flores por darme todo su apoyo. También agradezco a mi tía Oneyda Noemi Ortiz que es una persona especial que ha sido parte de mi formación académica con su ayuda económica, a mi tío Rene Hipólito Ortiz por su ayuda económica.

También al licenciado José Antonio Hernández por dedicar su tiempo para ser nuestro asesor de este trabajo y que con todo gusto estuvo en cada momento para corregir nuestros errores, por sus consejos. A las licenciadas María Olga Quintanilla de Lovo, Sonia del Carmen Martínez de López por ser parte de nuestra formación académica y por formar parte de nuestro trabajo de grado.

A los licenciados/as Williams Noé Merlón Juárez, Tobías Humberto Martínez, José Fredy Vásquez, Jorge Alberto Martínez, Santiago Alberto Ulloa, María del Transito Gutiérrez.

Finalmente a mis compañeros Francisco Javier Vásquez Hernández, Juan Antonio Romero Vásquez, que han sido parte del grupo en este trabajo.

“Por qué lo insensato de Dios es más sabio que los hombres, y lo débil de Dios es más fuerte que los hombres.” 1 Corintios 1:25

Israel Arias Ortiz

Agradecimientos

A Dios todo poderoso: por darme la vida, la fortaleza, la confianza y la sabiduría a él de debo todo y le doy las gracias por haberme dado este triunfo que con amor se lo dedico a Dios.

A mi familia por haberme apoyado en todo momento especialmente a mi papá Andrés Vásquez Romero y a mi madre Rosa Romero por darme todo el apoyo económico y moral a mis hermanos, a mi abuelito Leonilo Romero Reyes y a mi abuelita Calixtra Vásquez de Romero (Q.E.P.D) a mis tíos a mis primos por darme todo el apoyo que necesite durante este proceso que hice durante toda mi carrera.

Especialmente a mi esposa Rosa Mirian Argueta Vásquez que me ha apoyado incondicionalmente me ha brindado cariño, paciencia, consejo, amistad, de su sabiduría y de su amor en todo momento desde que la conocí, a la familia de ella por brindarme apoyo cuando más lo necesite

A mi asesor: José Antonio Hernández por darme la orientación, la motivación, los consejos y la amistad que me brindo durante todo este tiempo.

A los licenciados/as: William Merlos Juárez, María Olga Quintanilla de Lovo, Sonia del Carmen Martínez de López, Jorge Alberto Martínez Gutiérrez, Pedro Flores Sánchez, Oscar Rolando Montesinos, Santiago Alberto Ulloa, Francisco Madrid (Q.E.P.D), Agustín Vega y a José Enry García por brindarme su apoyo y sus conocimientos.

A mis compañeros de tesis: Israel Arias Ortiz y Francisco Javier Vásquez Hernández por brindarme apoyo, paciencia y comprensión durante todo este tiempo.

Juan Antonio Romero Vásquez

Agradecimientos

A Dios todo poderoso: por brindarme la vida, la fortaleza, la confianza y la sabiduría durante estos años de estudio que me permiten culminar con esta nueva etapa de la vida.

A mis padres: por su apoyo, consejos y sacrificios durante estos años ya que han sido parte fundamental de mi vida les agradezco en gran manera por todo lo que han hecho por mi formación profesional.

A mis hermanos por su apoyo y en gran manera especial a mi hermano José gracias por todo hermano que sin tu ayuda no sería posible este logro te lo agradezco ya que me apoyaste en lo económico que es lo principal en estas áreas de formación académica.

A mis tíos y abuelos por sus consejos y aportes económicos que cuando los necesite ahí estaban con toda la intención de ayudarme gracias por todo lo que han hecho por mí.

A mi docente asesor José Antonio Hernández gracias por su orientación, motivación y amistad y apoyo durante todo este tiempo.

A los docentes de la UES que me impartieron clases conocimientos y enseñanzas y me formaron durante estos años de estudio en especial a los licenciados Jorge Alberto Martínez, Tobías Humberto Martínez, Williams Noé merlos, Santiago Alberto Ulloa por la formación académica, consejos y amistad, así como los aportes a este trabajo de graduación a las licenciadas María Olga Quintanilla, María del Transito Gutiérrez y Sonia del Carmen Martínez gracias por brindarme su amistad y por ser parte de este trabajo de grado.

A mis compañeros de tesis por poder culminar con este trabajo, y además por su amistad durante los años de estudio que nos permite culminar con este trabajo de grado.

Francisco Javier Vásquez Hernández

Índice

de contenido

	Páginas
INTRODUCCION	1
ANTECEDENTES	1
JUSTIFICACIÓN	3
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	4
OBJETIVOS.....	5
CAPÍTULO I.....	6
ANÁLISIS GRÁFICO DE SOLUCIONES EXPLÍCITAS E IMPLÍCITAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES	6
1.2 CAMPOS DE PENDIENTES.....	29
1.3 CAMPO DE ISOCLINAS Y SOLUCIONES GRÁFICAS	42
1.3.1 <i>Campo de isoclinas y soluciones gráficas para las ecuaciones de primer orden.....</i>	42
1.3.2 <i>Campo de pendientes y soluciones gráficas para algunas ecuaciones de segundo orden.....</i>	53
1.4 FUNCIONES Y EXPANSIONES EN SERIES DE POTENCIAS	56
1.5 ECUACIONES DIFERENCIALES AUTÓNOMAS.....	59
1.6 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES.	69
1.7 COMPORTAMIENTO CUALITATIVO DE SOLUCIONES UTILIZANDO LÍNEAS DE FASE.....	71
1.8 DEFINICIONES Y PROPIEDADES.....	77
EJERCICIOS I.....	82
CAPÍTULO II	84
MÉTODOS NUMÉRICOS.	84
2.1 USO DE LA RECTA TANGENTE PARA APROXIMAR LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL	84
2.2 MÉTODO DE EULER.....	87
2.3 MÉTODO DE EULER MEJORADO.....	96
2.4 MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA.....	104
2.5 METODOS MULTIPASOS.....	116
2.6 ECUACIONES Y SISTEMAS DE ORDEN SUPERIOR	127
2.7 PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA DE SEGUNDO ORDEN	150
2.8 APROXIMACIÓN A LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL MEDIANTE MÉTODOS NUMÉRICOS YA QUE NO ES POSIBLE RESOLVERLA ANALÍTICAMENTE.	157
EJERCICIOS II.....	165
CAPÍTULO III.....	169
APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES	169
3.1 EJEMPLOS	169

EJERCICIOS III	214
ANEXOS	216
CONCLUSIÓN.....	225
RECOMENDACIONES.....	228
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	229

INTRODUCCION

El presente trabajo de graduación se realiza orientado en el área de ecuaciones diferenciales, enfocándose así principalmente en el método gráfico para establecer el campo de pendientes de una ecuación diferencial y también en métodos de aproximaciones numéricas para aproximar la solución de una ecuación diferencial. En el capítulo I de este trabajo se comienza presentando ejemplos básicos en los cuales se aplican conceptos fundamentales de cálculo como monotonía, concavidad, simetría etc. En ocasiones se pueden encontrar ecuaciones diferenciales que no se puede encontrar ni inventar un método para resolverlas analíticamente, pero en sí misma una ecuación diferencial puede darnos información concreta del comportamiento de las curvas de sus soluciones, por lo que se presenta el análisis por medio del cálculo diferencial luego se procede haciendo el análisis por medio de campos de pendientes e isoclinas. Estas opciones permiten determinar de una manera aproximada, como es una curva solución sin resolver realmente la ecuación. Además para estos casos se hará uso de programas computacionales para tener una mejor exactitud del campo de pendientes y sus respectivas curvas solución en algún determinado intervalo.

En la mayoría de casos para la solución de una ecuación diferencial se acostumbra a desarrollar algunos procedimientos para obtener soluciones explícitas e implícitas. Pero una ecuación diferencial puede tener una solución aun cuando no se pueda obtenerla analíticamente. Así que en el capítulo II se presentan algunos métodos con el cual se puede encontrar una solución aproximada de la ecuación diferencial numéricamente donde la ecuación diferencial se utiliza como el principio básico de un algoritmo para aproximar la solución desconocida. El primer método numérico que se presenta es el método de Euler y el segundo es el método de Euler mejorado, donde este presenta una forma para encontrar la solución aproximada más exacta que el método de Euler, el otro método es el de Runge-Kutta de cuarto orden, aunque existes métodos de Runge-Kutta de distintos órdenes, el método de Runge-Kutta presenta una forma más precisa que el método de Euler y que el método de Euler mejorado, para obtener la solución aproximada para un ecuación diferencial. Además se presenta el método multipasos de Adams-Bashforth-Moulton este método utiliza primeramente la condición inicial con la cual inicia la ecuación diferencial y los primeros tres pasos y_1 , y_2 y y_3 son encontrados con el método de Runge-Kutta de cuarto orden, teniendo en

cuenta los pasos anteriores se procede a calcular los valores de los diferentes pasos para obtener el valor de y_n . En este capítulo II también se resuelven sistemas de ecuaciones partiendo de una ecuación diferencial de segundo orden para crear un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden utilizando los métodos de Euler y de Runge-Kutta de cuarto orden y por último se trabaja el método de las diferencias finitas este último método consiste en resolver una ecuación diferencial de segundo orden con valores en la frontera, al aplicar la fórmula que se genera con este método se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que al resolverlas permitirán conocer los valores reales buscados.

En el capítulo III se Presentan algunas aplicaciones tanto para el campo de pendientes como para las isoclinas y para todos los métodos que se trabajaron en el capítulo II. Y por último para finalizar se anexan ejemplos que explican detalladamente los pasos a realizar para el uso de los programas computacionales Maple y Geogebra para el desarrollo de las gráficas y soluciones de algunos problemas resuelto en el transcurso del desarrollo de los capítulos.

ANTECEDENTES

Las Ecuaciones Diferenciales sirven como modelo matemático para el estudio de problemas que surgen en disciplinas muy diversas. Desde sus comienzos han contribuido de manera muy notable a solucionar muchas cuestiones y a interpretar numerosos fenómenos de la naturaleza. Su origen histórico es inseparable de sus aplicaciones a las ciencias físicas, química e ingeniería ya que para resolver muchos problemas significativos se requiere la determinación de una función que debe satisfacer una ecuación en la que aparece su derivada.

En la historia de las ecuaciones diferenciales se pueden considerar cinco etapas donde cada una marca un avance definitivo. La primera etapa iría desde los inicios hasta 1820 cuando Cauchy publica su teorema de existencia, que da inicio a la segunda etapa que marca la edad del rigor. La tercera comienza en 1870 con M.S.Lie(1842 – 1899) y la aplicación de la teoría de grupos continuos a las ecuaciones diferenciales, particularmente aquellos de la dinámica de Hamilton-Jacobi. La cuarta comienza en 1880 con el trabajo de E.Picard(1856 – 1941) su teorema de existencia. La construcción de las ecuaciones diferenciales es análoga a la teoría de las ecuaciones algebraicas de Galois. La última etapa comienza en 1930 de donde el análisis se hace más general.

La resolución del problema de valor inicial daría la solución general, esto se debe a Cauchy que en 1824 tuvo la idea básica del método de las aproximaciones sucesiva mejoradas por Peano en 1890, presentado en forma más moderna y general en 1890 por Picard(1856 – 1941), y en 1894 Lindelöf. Considera Cauchy la integral equivalente $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(z, y(z)) \cdot dz$ y la analiza por el método que hoy se conoce como el de las poligonales de Euler, aunque entonces él no lo conocía.

Se debe a Euler el procedimiento numérico de resolución de ecuaciones diferenciales. Se fija en el método de las isóclinas $f(x, y) = constante$, para obtener valores de x dados elige rectas verticales sobre las que se calculan pendientes, introduciendo así el método de las poligonales de Euler como una simplificación del método de las isóclinas en 1820, Cauchy desarrollo entre 1820 y 1830 en sus cursos de la escuela politécnica de París, los conocidos métodos que permiten probar la existencia de las soluciones del problema de valor inicial $y' = f(x, y); y(x_0) = y_0$ que hoy se denomina problema de Cauchy. Es interesante analizar las

dificultades que se encontraban en la solución de ecuaciones que hoy se consideran elementales, así como los logros que alcanzados. A finales del siglo XVII se conocían muchos de los métodos elementales de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, y se dirigió la atención hacia las ecuaciones diferenciales de orden superior.

Las ecuaciones diferenciales encontraron un gran número de aplicaciones durante la segunda mitad del siglo XVIII, su estudio llegó a ser una de las disciplinas matemáticas más importantes debido a su utilización como herramienta fundamental en el campo científico y por la gran cantidad de problemas prácticos que con ellas se podían resolver.

JUSTIFICACIÓN

El tema de investigación fue elegido por la importancia que este posee en diversas áreas, más que todo en el área de ecuaciones diferenciales donde es posible plantear un modelo matemático para resolver factores o circunstancias que se presenten a la hora de resolver una ecuación diferencial.

El objetivo es dar a conocer la importancia de como a través de las ecuaciones diferenciales se han podido describir muchos fenómenos que inciden en la vida diaria. Las ecuaciones diferenciales constituyen la herramienta matemática más común en la formulación precisa de las leyes de la naturaleza y otros fenómenos descritos por una relación entre una función y sus derivadas.

Además este texto servirá de apoyo bibliográfico a estudiantes que quieran incursionarse en el estudio de los diferentes métodos gráficos en el área de ecuaciones diferenciales.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este trabajo de graduación se aborda el tema del “método gráfico para establecer el campo de pendientes de una ecuación diferencial” con el fin de aportar a las ecuaciones diferenciales ya que en los curso de ecuaciones diferenciales que se imparte en la carrera de Licenciatura en Matemática poco se toma en cuenta esta área lo que son el campo de pendientes e isoclinas que permiten ver el comportamiento de la solución de una ecuación diferencial y los diferentes métodos numéricos que se utilizan tanto para aproximar la solución de una ecuación diferencial de primer orden como una ecuación diferencial de segundo orden esta última llevándola a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, lo que se pretende con este trabajo es incentivar al estudiante o docente para que pueda tomar en cuenta con más importancia al momento de impartir sus cursos de ecuaciones diferenciales, este tema es de gran importancia ya que se pueda analizar el comportamiento de una curva solución de una ecuación diferencial y las características, que muchas veces no se pueden encontrar ni inventar un método para resolver analíticamente. Para el desarrollo de estos métodos que sirven para analizar el comportamiento geométrico de la solución de la ecuación diferencial se hará uso del potencial del cálculo y la tecnología adecuada, se explicara cómo se usan los programas utilizados durante todo el trabajo, el objetivo es detallar cada paso para que al lector se le pueda facilitar entenderle. Las estrategias que se utilizan en este trabajo servirán al estudiante para que pueda analizar adecuadamente las soluciones de una ecuación diferencial.

OBJETIVOS.

General:

- Investigar la teoría para establecer campos de pendientes de una ecuación diferencial.
- Elaborar un documento en el que se presenten nociones fundamentales de cómo encontrar campos de pendientes de una ecuación diferencial aplicando algunos métodos.

Específicos:

- Mostrar conceptos fundamentales de ecuaciones diferenciales y cálculo
- Presentar la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales a partir de la utilización de métodos gráficos y software
- Dar a conocer las ecuaciones diferenciales autónomas y su incursión en los sistemas dinámicos entre otros
- Utilizar algunos métodos numéricos que permiten obtener la aproximación de la solución de la ecuación diferencial
- Conocer algunos ejemplos de aplicación mediante los métodos numéricos.

CAPÍTULO I

ANÁLISIS GRÁFICO DE SOLUCIONES EXPLÍCITAS E IMPLÍCITAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

“En este capítulo se desarrollan métodos gráficos para analizar ecuaciones diferenciales ordinarias que aprovechen completamente la potencia del cálculo y la tecnología adecuada. El objetivo de este capítulo se obtendrá cuando se aborden los diferentes temas desde los puntos de vista gráfico, numérico y analítico. Debido a que en cada una de estas perspectivas en ocasiones proporcionan información incompleta, siempre es necesario comparar la consistencia de los resultados, y así se puede obtener mayor seguridad de lo que se está tratando de resolver. Las estrategias de este capítulo facilitarán adecuadamente el análisis de las soluciones de una ecuación diferencial, incluso cuando no resulte posible expresar analíticamente dichas soluciones.

Este capítulo expone algunos puntos de vista al abordar las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

La primera sección comienza con una breve introducción y ejemplos, que presuponen un conocimiento de las antiderivadas para determinar el comportamiento de las soluciones de $\frac{dy}{dx} = f(x)$ encontrando la solución explícita. Además se descubre que existe una gran riqueza de información acerca del comportamiento de tales soluciones si se toma en cuenta la ecuación diferencial misma. Posteriormente las siguientes dos secciones ilustran las técnicas gráficas, incluyendo los campos de pendientes y las isoclinas. Estas técnicas con frecuencia permiten descubrir muchas propiedades de la solución de una ecuación diferencial específica simplemente mediante el análisis de la ecuación diferencial desde un punto de vista gráfico. Además este capítulo aborda una discusión de las series de Taylor, que son especialmente útiles cuando las soluciones están dadas por integrales que no tienen antiderivadas simples.

Por otra parte se abordan las ecuaciones diferenciales autónomas, que son importantes por dos razones prácticas: se les emplea en la descripción de muchas situaciones, y sus propiedades constituyen el fundamento para abordar problemas más complejos. Y por último se hace un resumen completo de definiciones y teoremas utilizados durante el desarrollo de las secciones.

El propósito de este capítulo es ilustrar los enfoques gráfico, numérico y analítico en el conocido campo de las antiderivadas. Se asegura de que se cuente con fundamentos firmes en estas áreas de manera que resulte posible captar con facilidad las nuevas ideas de los dos capítulos siguientes.”⁽¹⁾

1.1 SOLUCIONES GRÁFICAS USANDO LA POTENCIA DEL CÁLCULO

“Desde que los conceptos del cálculo fueron formulados por Newton, Leibniz y otros en el siglo XVII, se han estado utilizando las ecuaciones diferenciales para describir muchos fenómenos que inciden en nuestras vidas. Las ecuaciones diferenciales constituyen la herramienta matemática más común en la formulación precisa de las leyes de la naturaleza y otros fenómenos descritos por una relación entre una función y sus derivadas. En este capítulo se verán algunos ejemplos de tales relaciones. Definida sencillamente, una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una sola derivada. De este modo, muchas ecuaciones diferenciales se resuelven en cursos introductorios de cálculo, quizás sin que nadie sugiera.”⁽¹⁾

Se comienza con un ejemplo familiar

Ejemplo 1.1 parábolas

“Graficar las soluciones explícitas para tres diferentes valores de la constante arbitraria C de la siguiente ecuación diferencial. $\frac{dy}{dx} = y' = x^3$.”⁽¹⁾

Solución.

⁽¹⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICIÓN, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, México (teoría extraída de la pág.1 y 2 y el ejemplo desarrollado es el ejercicio 1 literal a) que aparece en la pág. 6)

Primeramente se hace el análisis gráfico de la supuesta solución $y(x)$ de $y' = x^3$, en el intervalo $(-\infty, +\infty)$. Entonces se desean encontrar los puntos críticos haciendo $\frac{dy}{dx} = 0$ que equivalentemente es $x^3 = 0$, de donde se obtiene el único punto crítico $x = 0$. La tabla 1 resume el valor de prueba para los dos intervalos determinados a partir del punto crítico.

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -2$	$x = 3$
Signo de $f'(x)$	$f'(-2) = -8 < 0$	$f'(3) = 27 > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente

Tabla 1 Criterio crecimiento y decrecimiento para la supuesta solución $y(x)$.

En la tabla 1 se observa que la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x^3$, es decreciente en el intervalo $-\infty < x < 0$ y creciente en el intervalo $0 < x < \infty$.

Para encontrar la concavidad se hace de la siguiente manera derivando nuevamente a $y' = x^3$ y se tiene $y'' = 3x^2$. Debido a que la segunda derivada de y es siempre positiva, de modo que y tiene concavidad hacia arriba en todo momento. Si la supuesta solución $y(x)$ es decreciente para x en $(-\infty, 0)$ y creciente para $(0, +\infty)$ entonces se induce que no hay punto de inflexión porque no hay cambio de concavidad.

Anteriormente se ha hecho mención de $y(x)$ la cual es la antiderivada más general de la función x^3 , ¿cómo se hace para encontrar $y(x)$?

Se hace resolviendo la ecuación diferencial $y' = x^3$. Por integración a ambos lados.

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int x^3 dx$$

$$\int dy = \int x^3 dx$$

$$y(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$$

Debido a que cualquier antiderivada de x^3 , puede ser escrita como

$$y(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$$

Donde C es una constante arbitraria, parece razonable llamar a $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$ las soluciones de la ecuación diferencial $y' = x^3$. Como consecuencia la constante arbitraria C , establece un número infinito de soluciones, es decir una solución diferente para cada valor asignado a la constante arbitraria C , las cuales tienen un nombre especial que se denominara familia de soluciones. En este caso se comprueba solo para tres valores de la constante arbitraria C . La figura 1.1 muestra las tres soluciones de la familia de soluciones, en los que se puede notar que el papel de la constante arbitraria C es determinar la posición vertical de las gráficas. Las tres soluciones de esta ecuación diferencial tienen la misma forma general, y cualquiera de dos soluciones diferirán entre sí por una traslación vertical. De esta manera, dos soluciones diferentes no se intersectaran. Es decir una traslación vertical se obtiene a partir de los valores de la contante arbitraria C .

Para comenzar a graficar las tres soluciones de la ecuación diferencial $y' = x^3$ se tomaran los valores específicos para la constante arbitraria C en este caso se seleccionan $C = -1, 0, 1$. Con estos valores de la constante arbitraria C se graficaran las soluciones $y(x) = \frac{1}{4}x^4 - 1$, $y(x) = \frac{1}{4}x^4$ y $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1$. La tabla 2 resume algunos valores específicos que se toman para la variable x , con estos valores se observa el comportamiento gráfico de las soluciones de la ecuación diferencial como se muestra en la figura 1.1.

x	$y(x) = \frac{1}{4}x^4 - 1$	$y(x) = \frac{1}{4}x^4$	$y(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1$
-2	$y(-2) = 3$	$y(-2) = 4$	$y(-2) = 5$
-1	$y(-1) = -\frac{3}{4}$	$y(-1) = \frac{1}{4}$	$y(-1) = \frac{5}{4}$
0	$y(0) = -1$	$y(0) = 0$	$y(0) = 1$
1	$y(1) = -\frac{3}{4}$	$y(1) = \frac{1}{4}$	$y(1) = \frac{5}{4}$
2	$y(2) = 3$	$y(2) = 4$	$y(2) = 5$

Tabla 2 Valores encontrados al evaluar en la solución $y(x)$.

La figura 1.1 muestra el comportamiento gráfico de las tres soluciones de la ecuación diferencial $y' = x^3$ dibujadas a mano.

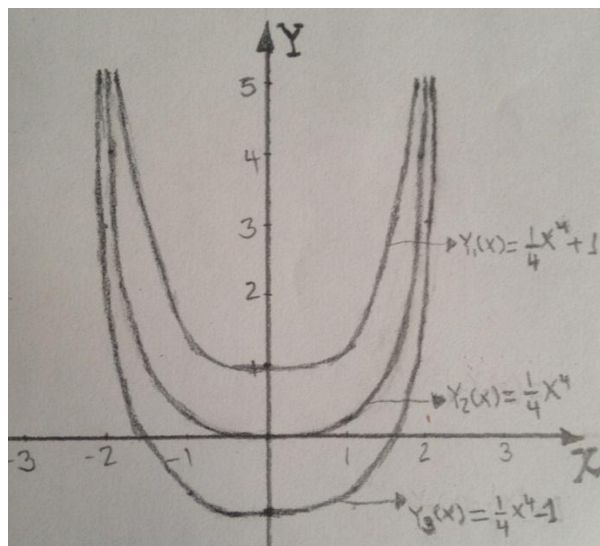


Figura 1.1 Comportamiento geométrico de tres soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x^3$ dibujadas a mano.

Basándose en la figura 1.1, se pueden formular las siguientes preguntas:

1. **Monotonía.** ¿Dónde son crecientes las soluciones y donde son decrecientes las soluciones?
2. **Concavidad.** ¿Dónde tienen concavidad hacia arriba las soluciones y donde tienen concavidad hacia abajo las soluciones?
3. **Simetría.** ¿existen algunas simetrías?
4. **Singularidades.** ¿es posible que una curva solución no este definida?
5. **Unicidad.** ¿se intersectan algunas soluciones?

Respuesta a las preguntas anteriores

1. **Monotonía.** La figura 1.1 muestra que las soluciones de la ecuación diferencial $y' = x^3$ están definidas para todos los valores de x en $I = (-\infty, +\infty)$. De modo que las soluciones $y = y(x)$ crecen en el intervalo $0 < x < \infty$ y decrecen en el intervalo de $-\infty < x < 0$. En la figura 1.2 se observa el comportamiento de crecimiento y decrecimiento de las soluciones de la ecuación diferencial $y' = x^3$.

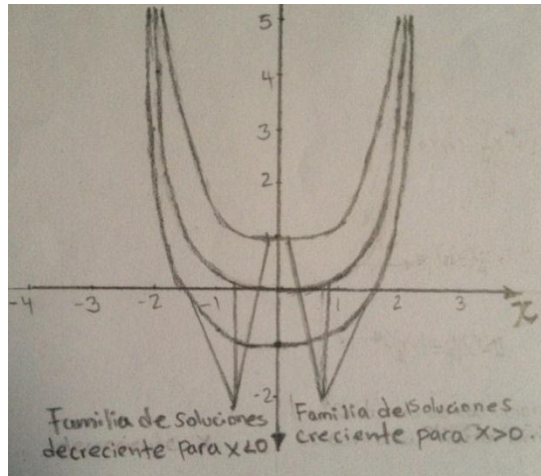


Figura 1.2 Familia de soluciones crecientes y decrecientes para tres distintos valores de C para $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$.

- 2. Concavidad.** Puesto que $y'' = 3x^2$ es una expresión polinómica que está definida para todos los valores de $x \in (-\infty, +\infty)$. De modo que la segunda derivada de y siempre es positiva y de esta manera se puede decir que y tiene concavidad hacia arriba en los intervalos $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$. En conclusión las soluciones de y' representadas por y tienen concavidad hacia arriba en todo momento, geoméricamente se puede ver en la figura 1.3

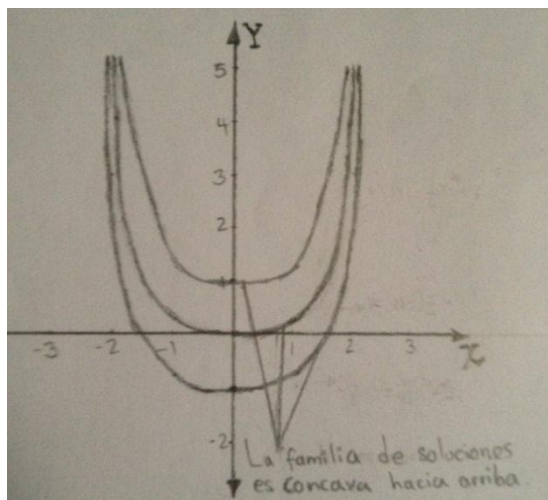


Figura 1.3 Familia de soluciones y concavidad hacia arriba para tres distintos valores de C para $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$.

- 3. Simetría.** Ahora bien, si se sustituye x por $-x$ en $\frac{dy}{dx} = x^3$ resulta

$$\frac{dy}{-dx} = (-x)^3 = -x^3$$

Entonces la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x^3$ permanece sin ningún cambio así se concluye que la familia de soluciones es simétrica a través de eje y , obsérvese la figura 1.4. Si se sustituye a y por $-y$ en $\frac{dy}{dx} = x^3$ se obtiene $\frac{-dy}{dx} = x^3$, lo que se verifica que no es simétrica con respecto al eje x . Y si se sustituye x por $-x$ y y por $-y$ en $\frac{dy}{dx} = x^3$ resulta $\frac{-dy}{-dx} = (-x)^3$, de lo anterior se a verificado que $\frac{dy}{dx} = -x^3$ no es simétrica con respecto al origen, lo que se concluye que la familia de curvas solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x^3$ es simétrica a lo largo del eje y . Geométricamente se muestra en la figura 1.4.

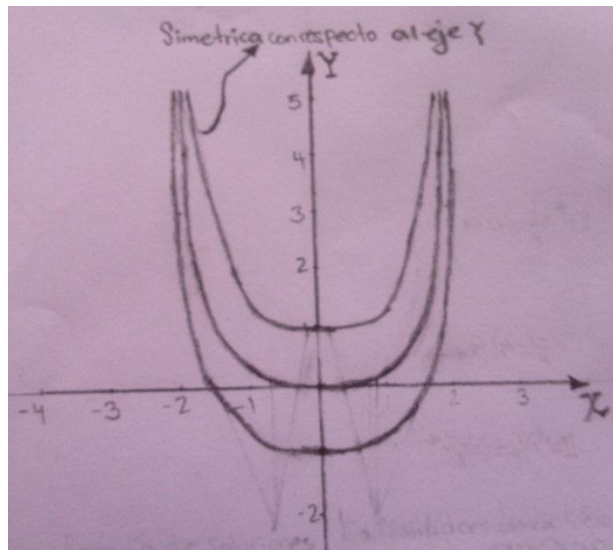


Figura 1.4 Familia de soluciones simétrica con respecto al eje y .

4. **Singularidades.** En virtud de que el lado derecho de $\frac{dy}{dx} = x^3$ está definido para todos los valores de x se concluye que en $\frac{dy}{dx} = x^3$ no existe singularidad.
5. **Unicidad.** Si dice que dos soluciones se intersectan cuando existe un punto en común es decir (x_0, y_0) a través del cual dos soluciones distintas pasan. Ahora supóngase que en $y' = x^3$ pasan las soluciones llamadas $y_1(x)$ y $y_2(x)$. Debido a que y_1 como y_2 son soluciones de $y' = x^3$ se puede llamar a y_1 como y_2 de la siguiente forma $y'_1 = x^3$ y $y'_2 = x^3$, de manera que puede decirse que $y'_1 = y'_2$ o bien $y'_1 - y'_2 = 0$. Si se integra ambos lados se obtiene:

$$\int (y'_1 - y'_2) dx = \int 0 dx$$

$$\int \frac{dy_1}{dx} dx - \int \frac{dy_2}{dx} dx = 0 \int dx$$

$$\int dy_1 - \int dy_2 = 0 \int dx$$

$$y_1(x) - y_2(x) = 0 \cdot x + C$$

$$y_1(x) - y_2(x) = C$$

El hecho de que $y_0 = y_1(x_0)$ y $y_0 = y_2(x_0)$ requiere que $C = 0$ de modo que $y_1(x) = y_2(x)$. En otras palabras, las dos curvas $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son una y la misma. Esto significa que solamente una solución de $y' = x^3$ puede pasar a través de cualquier punto (x_0, y_0) . Otra manera de expresar esto es que una solución de la ecuación diferencial $y' = x^3$ que pasa por cualquier punto dado es única, es decir que dos soluciones no se intersectan. Gráficamente se muestra en la figura 1.5.

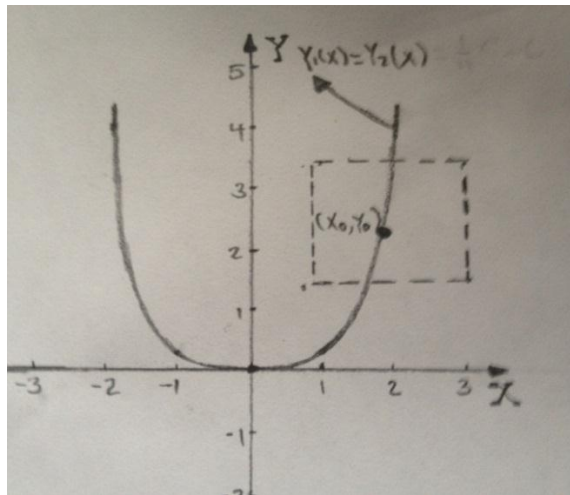


Figura 1.5 Prueba de unicidad para dos soluciones de $y' = x^3$

De lo visto anteriormente, si se especifica que la Solución $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$, de la ecuación diferencial $y' = x^3$ debe pasar a través del punto $p = (1,1)$, el valor de la constante arbitraria C sería: $C = \frac{3}{4}$. Esto da la solución particular $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}$. Sin embargo, la gráfica de la solución $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}$ en el intervalo $0 < x < \infty$ es continua, mientras que cualquier solución particular debe ser continua. Debido a que el punto inicial $p = (1,1)$ se localiza en la rama derecha de $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}$. Geométricamente se muestra en la figura 1.6.

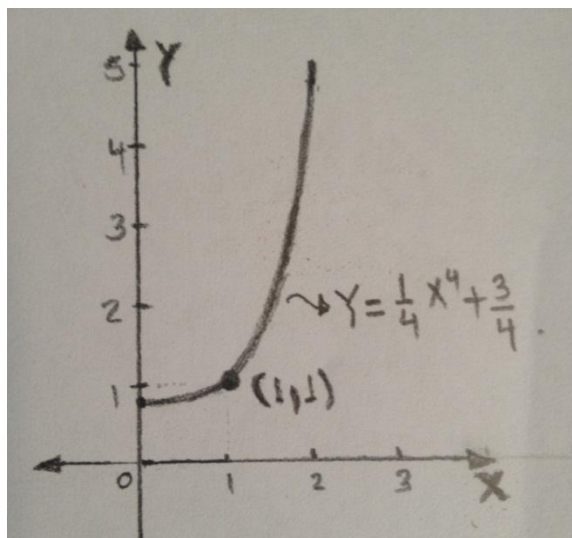


Figura 1.6 Solución de la ecuación diferencial $y' = x^3$ que pasa por el punto $(1,1)$.

Ejemplo 1.2 función trigonométrica

“Graficar las soluciones explícitas para tres diferentes valores de la constante arbitraria C de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y' = \cos(x)$, en el intervalo de $[-\pi, \pi]$.”⁽²⁾

Solución.

Se hace el análisis gráfico en el intervalo $-\pi < x < \pi$ puesto que de $-3\pi < x < -\pi$, $-5\pi < x < -3\pi$ etc ó $\pi < x < 3\pi$, $3\pi < x < 5\pi$ y se comporta igual. Se desea encontrar los puntos críticos y para encontrar los puntos críticos se hace primeramente $\frac{dy}{dx} = 0$ y se obtiene que $\cos(x) = 0$, los puntos críticos para $\cos(x) = 0$ son: $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. La tabla 3 resume el valor de prueba para los dos intervalos determinados para estos puntos críticos.

⁽²⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICIÓN, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, México (el ejemplo desarrollado es el ejercicio 1 literal c) que aparece en la pág. 6)

Intervalo	$-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$
Valor de prueba	$x = \frac{-3\pi}{4}$	$x = 0$	$x = \frac{3\pi}{4}$
Signo de $f'(x)$	$f'\left(\frac{-3\pi}{4}\right) < 0$	$f'(0) > 0$	$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$
conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente

Tabla 3 Criterios de crecimiento y decrecimiento para $y(x)$.

En la tabla 3 se verifica por sustitución que la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$ es decreciente para el intervalo $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$, creciente para el intervalo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ y es decreciente para el intervalo $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Para encontrar la concavidad se hace de la siguiente manera, se deriva nuevamente $y' = \cos(x)$ y se obtiene $\frac{d^2y}{dx^2} = -\text{sen}(x)$, si se hace $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ entonces $\text{sen}(x) = 0$, de aquí se encuentra que los puntos de inflexión son: $x = -\pi, 0, \pi$. La tabla 4 resume el valor de prueba para los tres intervalos determinados para estos tres puntos de inflexión. Los puntos de inflexión sirven para hacer el análisis de concavidad para $y(x)$.

Intervalo	$-\pi < x < 0$	$0 < x < \pi$
Valor de prueba	$x = -\frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$
Signo de $f''(x)$	$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0$	$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$
conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo

Tabla 4 Criterios de concavidad para las soluciones $y(x)$ para la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$.

En la tabla 4 muestra que la soluciones $y(x)$ de la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$ son cóncavas hacia arriba para el intervalo $-\pi < x < 0$ y cóncavas hacia abajo en el intervalo de $0 < x < \pi$.

¿Cómo se hace para encontrar la solución $y(x)$ de la ecuacion diferencial?, para encontrar a $y(x)$ se hace resolviendo la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$. Por integración a ambos lados.

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int \cos(x) dx$$

$$\int dy = \int \cos(x) dx$$

$$y(x) = \text{sen}(x) + C$$

Debido a que cualquier antiderivada de $\cos(x)$, puede ser escrita como

$$y(x) = \text{sen}(x) + C$$

Donde C es una constante arbitraria de integración, parece razonable llamar a $y(x) = \text{sen}(x) + C$ las soluciones de la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$. Como consecuencia de la constante arbitraria C , se tiene un número infinito de soluciones, una diferente para cada elección de la constante arbitraria C las cuales llamadas conjunto familia de soluciones. En este caso el ejercicio nos pide solo para tres valores de la constante arbitraria C . La figura 1.7 muestra las tres graficas de la familia de soluciones, donde puede notar que el papel de la constante arbitraria C es determinar la posición vertical. Las tres soluciones de esta ecuación diferencial tienen la misma forma general, y cualquiera dos soluciones diferirán entre sí por una traslación vertical. De esta manera, dos soluciones diferentes no se intersectaran. Es decir una traslación vertical se obtiene a partir de los valores de la contante arbitraria C .

Para comenzar a graficar las tres soluciones de la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$ se tomaran los valores específicos para la constante arbitraria C en este caso se seleccionan $C = -1, 0, 1$. Con estos valores de la constante arbitraria C se graficaran las soluciones $y(x) = \text{sen}(x) - 1$, $y(x) = \text{sen}(x)$ y $y(x) = \text{sen}(x) + 1$. La tabla 5 resume algunos valores específicos que se toman para la variable x , con estos valores se observa el comportamiento gráfico de las soluciones de la ecuación diferencial como se muestra en la figura 1.7.

x	$y(x) = \text{sen}(x) - 1$	$y(x) = \text{sen}(x)$	$y(x) = \text{sen}(x) + 1$
$-\pi$	$y(-\pi) = -1$	$y(-\pi) = 0$	$y(-\pi) = 1$
$-\frac{\pi}{2}$	$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$	$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$	$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
0	$y(0) = -1$	$y(0) = 0$	$y(0) = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$
π	$y(\pi) = -1$	$y(\pi) = 0$	$y(\pi) = 1$

Tabla 5 Valores encontrados al evaluar en la solución particular de la ecuación diferencial $y(x)$.

La figura 1.7 muestra el comportamiento gráfico de las tres soluciones de la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$ dibujadas a mano.

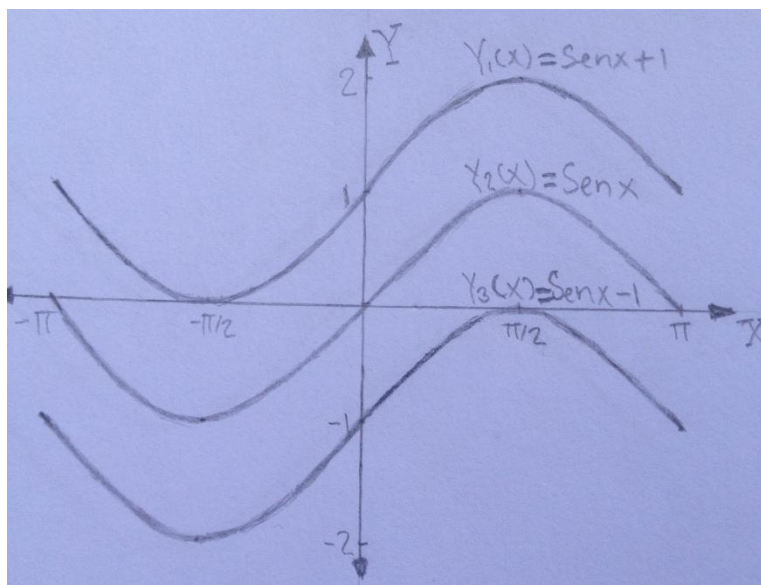


Figura 1.7 Gráfica de tres soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$ dibujadas a mano

Basándose en la figura 1.7, surgen las siguientes preguntas:

- 1. Monotonía.** ¿Dónde son crecientes las soluciones y donde son decrecientes las soluciones?
- 2. Concavidad.** ¿Dónde tienen concavidad hacia arriba las soluciones y donde tienen concavidad hacia abajo las soluciones?
- 3. Simetría.** ¿existen algunas simetrías?

4. **Singularidades.** ¿es posible que una curva solución no está definida?
5. **Unicidad.** ¿se intersectan algunas soluciones?

Respuesta a las preguntas anteriores

1. **Monotonía.** Se observa en la figura 1.7 que las tres soluciones de la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$ están definida para todos los valores de $x \in (-\infty, +\infty)$. En este caso se toma solamente el intervalo de $[-\pi, \pi]$ para realizar el análisis de las tres soluciones. De modo que las soluciones $y = y(x)$ son decrecientes en el intervalo de $(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ y creciente en el intervalo de $(-\pi/2, \pi/2)$. Geométricamente se muestran las tres soluciones en la figura 1.8

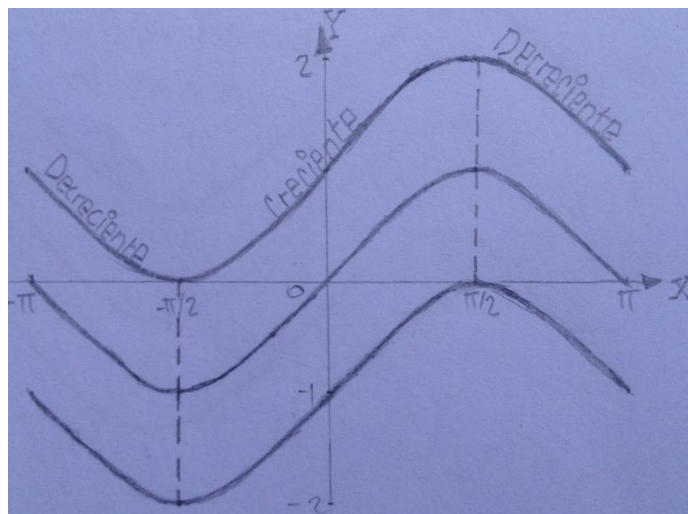


Figura 1.8 Familia de soluciones crecientes y decrecientes para tres distintos valores de C para $y(x) = \text{sen}(x) + C$.

2. **Concavidad.** Puesto que $y'' = -\text{sen}(x)$ está definida para todos los valores de $x \in (-\infty, +\infty)$. En este caso se toma el intervalo de $[-\pi, \pi]$, de modo que $y'' = -\text{sen}(x)$ es igual a cero cuando $x = -\pi, 0, \pi$ los cuales son puntos inflexión de $y(x)$. Por lo que las soluciones son Cóncavas hacia arriba en $[-\pi, 0]$ y Cóncavas hacia abajo en $[0, \pi]$. Geométricamente se muestra en la figura 1.9.

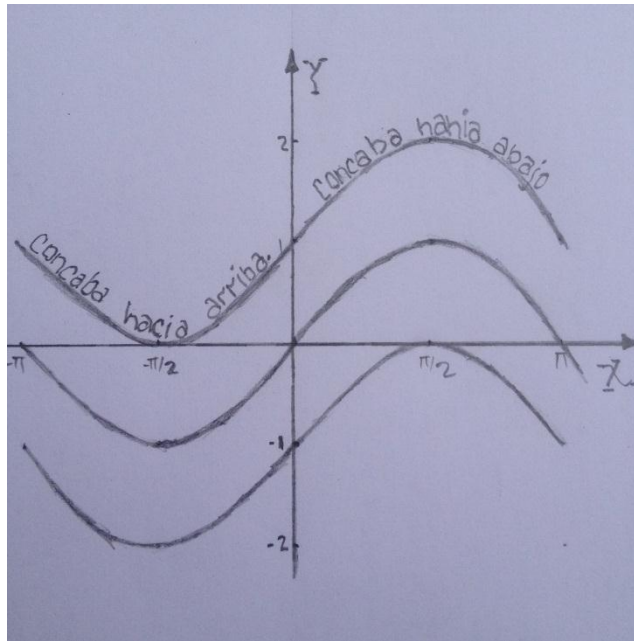


Figura 1.19. Familia de soluciones concavidad hacia arriba y hacia abajo.

3. **Simetría.** Al sustituir $-y$ por y en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$ se obtiene $\frac{-dy}{dx} = \cos(x)$ la cual no es simétrica con respecto al eje x . Al sustituir $-x$ por x en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$ se obtiene $\frac{dy}{-dx} = \cos(-x) = \cos(x)$ por lo que no es simétrica con respecto al eje y . Ahora bien si se sustituye simultáneamente x por $-x$ y también a y por $-y$ en $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$ quedaría: $\frac{-dy}{-dx} = \cos(-x)$ de aquí se tiene $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$. Puede observarse que la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$ permanece sin ningún cambio así se puede concluir que la familia de soluciones es simétrica con respecto al origen. Gráficamente se muestra en la figura 1.10 al ver la figura 1.10 parece no ser simétrica con respecto al origen, pero en realidad es simétrica con respecto al origen ya que hacer una traslación vertical y recordando que una gráfica es simétrica con respecto al origen si permanece sin cambios cuando se gira 180 grados con respecto al origen.

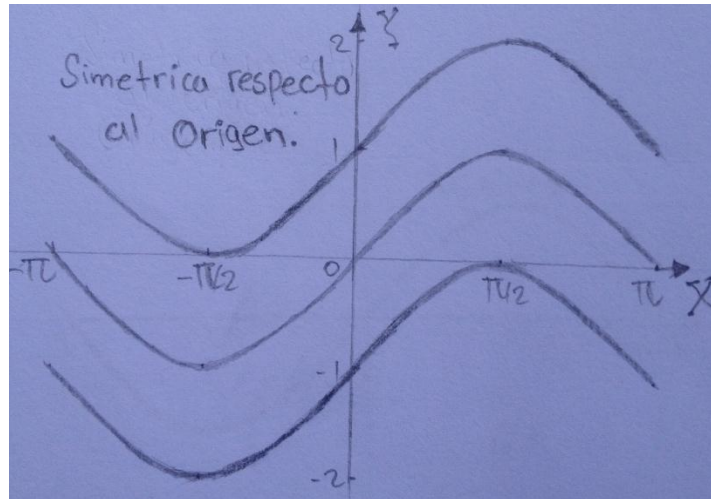


Figura 1.10 Familia de soluciones simétrica con respecto al eje y .

- 4. Singularidades.** En virtud de que el lado derecho de $y' = \cos(x)$ está definido para todos los valores de x de modo que se concluye que en $y' = \cos(x)$ no existe singularidad.
- 5. Unicidad.** Se dice de que dos soluciones se intersectan cuando existe un punto en común entre dos soluciones es decir (x_0, y_0) a través del cual las dos soluciones distintas pasan. Ahora suponga que en $y' = \cos(x)$ pasan las soluciones llamadas $y_1(x)$ y $y_2(x)$. Debido a que y_1 como y_2 son soluciones de $y' = \cos(x)$ se puede llamar a y_1 como y_2 de la siguiente forma $y'_1 = \cos(x)$ y $y'_2 = \cos(x)$, de manera que puede decirse que $y'_1 = y'_2$ o bien $y'_1 - y'_2 = 0$ integrando a ambos lados quedaría:

$$\int (y'_1 - y'_2) dx = \int 0 dx$$

$$\int \frac{dy_1}{dx} dx - \int \frac{dy_2}{dx} dx = 0 \int dx$$

$$\int dy_1 - \int dy_2 = 0 \int dx$$

$$y_1(x) - y_2(x) = 0 \cdot x + C$$

$$y_1(x) - y_2(x) = C$$

El hecho de que $y_0 = y_1(x_0)$ y $y_0 = y_2(x_0)$ requiere que $C = 0$ de modo que $y_1(x) = y_2(x)$. En otras palabras, las dos curvas $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son una y la misma. Esto significa que solamente una solución de $y' = \cos(x)$ puede pasar a través de cualquier punto (x_0, y_0) . Otra manera de expresar esto es que una solución de la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$ que pasa

por cualquier punto dado es única, es decir que dos soluciones no se intersectan. Gráficamente se muestra en la figura 1.11.

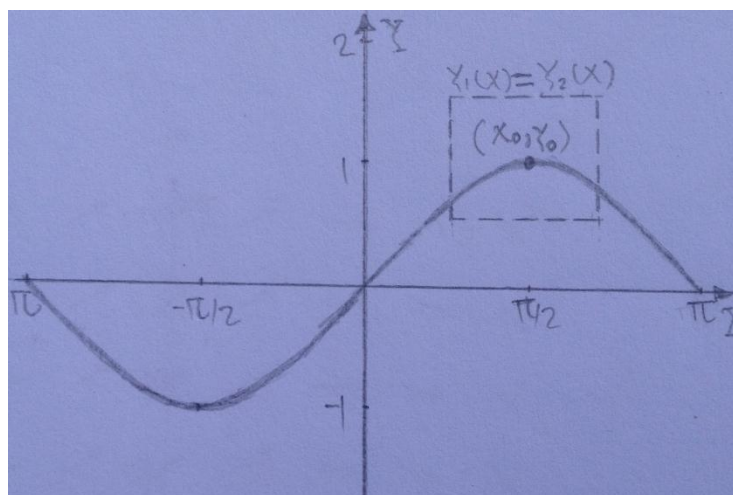


Figura 1.11 Familia de soluciones y prueba de unicidad para ecuación diferencial $y' = \cos(x)$.

De lo visto anteriormente, si se especifica que la solución $y(x) = \text{sen}(x) + C$, de la ecuación diferencial debe pasar a través del punto $(0,0)$, el valor de la constante arbitraria C sería $C = 0$. Esto da la solución particular $y(x) = \text{sen}(x) + 0$. Sin embargo, la gráfica $y(x) = \text{sen}(x)$ de la solución particular que pasa a través de $(0,0)$ es $y(x) = \text{sen}(x)$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$ la solución graficada es continua, mientras que cualquier solución particular debe ser continua. Debido a que el punto inicial $(0,0)$ se localiza en origen de $y(x) = \text{sen}(x)$. La gráfica se muestra en la figura 1.12.

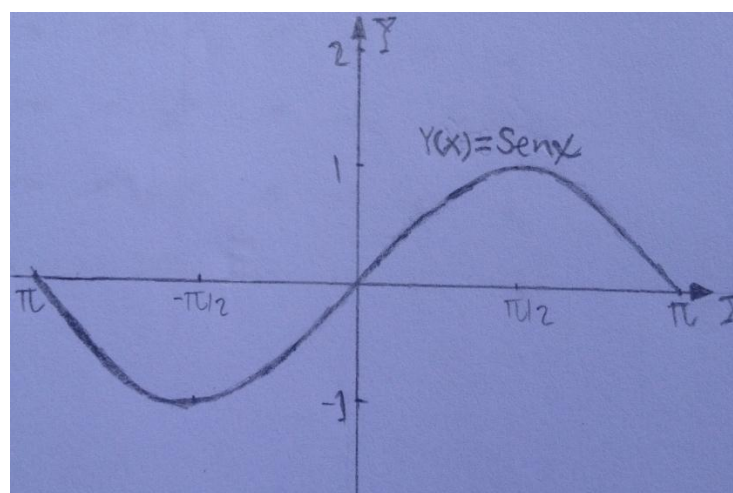


Figura 1.12 Solución que pasa por el punto $(0,0)$ para la ecuación diferencial $y' = \cos x$.

Comentarios

“Estos son dos de muchos ejemplos de ecuaciones diferenciales que abarca el cálculo. Todos los problemas donde aparece la integral indefinida (o antiderivada) de una función $f(x)$, podrían haberse abordado tratando de encontrar $y(x)$ como una solución de

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Las soluciones de $\frac{dy}{dx} = f(x)$ tienen la forma de

$$y(x) = \int f(x)dx + C,$$

Donde $\int f(x)dx$ es cualquier antiderivada específica de $f(x)$. La constante arbitraria C indica que se tiene un número infinito de soluciones, relacionadas entre si por una traslación vertical.

Las ecuaciones $\frac{dy}{dx} = x^3$, $\frac{dy}{dx} = \cos x$ y $\frac{dy}{dx} = f(x)$, se conocen como ecuaciones diferenciales de primer orden, debido a que la primera derivada es la derivada de mayor orden que aparece en cada ecuación. Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una ecuación que contiene a lo más a la primera derivada de una función desconocida. Si y , la función desconocida, es una función de x , entonces la ecuación diferencial de primer orden se escribe como:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Donde $f(x, y)$ es una función de las dos variables x y y .

Comentarios acerca de las ecuaciones diferenciales de primer orden

- El miembro derecho de $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ puede contener a x y y explícitamente, por ejemplo $x^2 + y^2$. Sin embargo, en este capítulo se considera el caso en el que $f(x, y)$ es una función de x solamente.
- Si y es una función de x , se dice que x es la variable independiente y y , la variable dependiente.

Previamente se advirtió que $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$, $y(x) = \sin x + C$ y $y(x) = \int f(x)dx + C$, son soluciones de $\frac{dy}{dx} = x^3$, $\frac{dy}{dx} = \cos x$ y $\frac{dy}{dx} = f(x)$, respectivamente, se sabe esto porque si se derivan estas funciones y se sustituyen los resultados en la ecuación diferencial correspondiente, se obtiene una identidad. Estas soluciones se conocen como funciones explícitas porque la variable dependiente y , está expresada en términos de la variable independiente x . Una solución explícita de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, es una función $y = y(x)$, con una derivada en un intervalo $a < x < b$, la cual satisface idénticamente la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.⁽³⁾

Escribiendo soluciones en la forma de integrales

“Existe otra manera de expresar la solución de $\frac{dy}{dx} = x^3$ cuando se especifica un punto inicial, como (x_0, y_0) . Entonces se hace uso del hecho de que $\int_{x_0}^x f(t)dt$ la cual es una antiderivada de $f(x)$, cuya solución en $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$ también puede expresarse como:

$$y(x) = \int_{x_0}^x t^3 dt + C$$

Si x_0 y x tienen el mismo signo. Si se sustituye $x = x_0$ en $y(x) = \int_{x_0}^x t^3 dt + C$, se utiliza la condición inicial $y(x_0) = y_0$, y el hecho de que $\int_{x_0}^{x_0} t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 \Big|_{x_0}^{x_0} = \frac{1}{4}x_0^4 - \frac{1}{4}x_0^4 = 0$, se obtiene y_0 como el valor de C . Así $y(x) = \int_{x_0}^x t^3 dt + C$ puede escribirse en la forma:

$$y(x) = \int_{x_0}^x t^3 dt + y_0.$$

De este ejemplo se observa que la solución explícita del problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $y(x_0) = y_0$ puede escribirse en la forma:

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt + y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt + y_0$$

⁽³⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICIÓN, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, México (teoría extraída de la pág. 3, 4 y 5)

Si $f(t)$ está acotada para t entre x_0 y x . Esta forma de la solución es particularmente útil cuando resulta imposible evaluar la integral en términos de funciones conocidas. Se demuestra este hecho en el ejemplo siguiente.”⁽³⁾

Ejemplo 1.3: La función error

“Una función importante, empleada de manera extensa en las aplicaciones de la teoría de probabilidades y procesos de difusión, es la solución de la ecuación diferencial. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, restringida a las condiciones iniciales $y(0) = 0$.”⁽⁴⁾

Las soluciones explícitas de

$$y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Pueden expresarse

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C$$

La forma habitual de evaluar la constante arbitraria C de modo que $y(0) = 0$ se satisfaga consiste en sustituir $x = 0$ y $y = 0$ en la solución $y(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C$ y resolverla para la constante arbitraria C . Sin embargo, la integral en $y(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C$ no puede expresarse en términos de funciones conocidas, de manera que esta forma habitual de evaluar la constante arbitraria C no funciona. Para superar este problema se cambia la forma de la solución a la que expresa $y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0$, se recurre al hecho de que $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$ para obtener:

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Esta solución explícita se conoce como la función de error, y se le denota por lo regular mediante $\text{erf}(x)$; es decir,

⁽⁴⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICIÓN, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, México (ejemplo extraído de la pág. 5)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Puede preguntarse, cómo determinar la gráfica de esta función a partir de su expresión en $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Una manera consistiría en construir una tabla de valores de $(x, \operatorname{erf}(x))$ mediante algún método numérico de aproximación de integrales para valores específicos de x . Sin embargo, las técnicas numéricas requieren una cantidad considerable de cálculos para graficar suficientes puntos con el fin de obtener una gráfica confiable.

Se utiliza a continuación la regla de Simpson en $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, para crear la tabla 6.

La fórmula general de Simpson es:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Además, cuando $n \rightarrow \infty$, el lado derecho tiende a $\int_a^b f(x) dx$.

Se utiliza esta fórmula para encontrar el valor cuando $x = 0.5$ para $n = 16$ es decir se forman 16 subintervalos y redondeando las respuestas a 3 cifras decimales.

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} e^{-t^2} dt &= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) \left(\frac{0.5-0}{3(16)}\right) \left(e^{-(0)^2} + 4e^{-\left(\frac{0.5}{16}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{1}{16}\right)^2} + 4e^{-\left(\frac{3}{32}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{1}{8}\right)^2} \right. \\ &\quad + 4e^{-\left(\frac{5}{32}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{3}{16}\right)^2} + 4e^{-\left(\frac{7}{32}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{1}{4}\right)^2} + 4e^{-\left(\frac{9}{32}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{5}{16}\right)^2} \\ &\quad \left. + 4e^{-\left(\frac{11}{32}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{3}{8}\right)^2} + 4e^{-\left(\frac{13}{32}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{7}{16}\right)^2} + 4e^{-\left(\frac{15}{32}\right)^2} + e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} e^{-t^2} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{96}\right) (1 + 3.996 + 1.992 + 3.965 + 1.969 + 3.903 + 1.931 + 3.813 \\ &\quad + 1.879 + 3.696 + 1.814 + 3.554 + 1.738 + 3.391 + 1.651 + 3.211 \\ &\quad + 0.77) \end{aligned}$$

$$\int_0^{0.5} e^{-t^2} dt = 0.52$$

Y de igual forma se hace para encontrar los valores de $x = 0, x = 1, x = 1.5, x = 2$. Se presenta en la tabla 6

x	$y(x)$
0.0	0.000
0.5	0.520
1.0	0.843
1.5	0.966
2.0	0.995

Tabla 6 Regla de Simpson para $erf(x)$

Las figuras 1.13 y 1.14 muestran el comportamiento en el plano xy de los puntos encontrados a través de la regla de Simpson, de $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

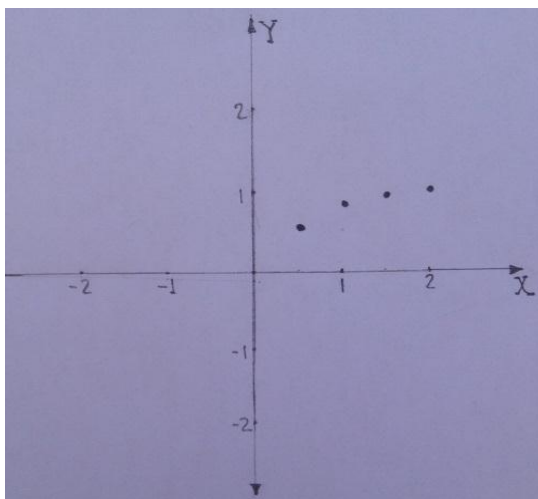


Figura 1.13 Gráfica de $y = erf(x)$ y valores numéricos dibujados a mano.

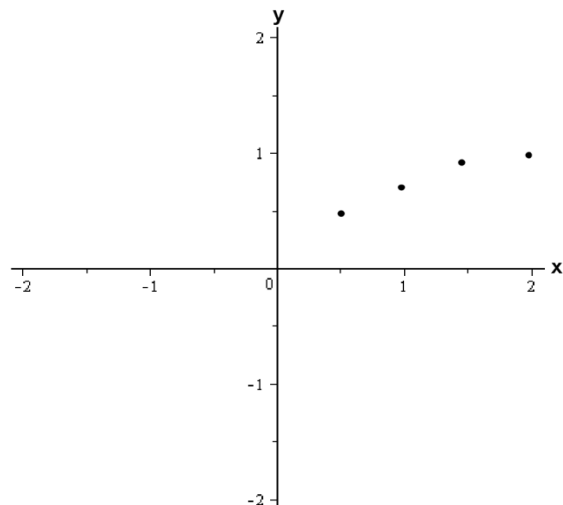


Figura 1.14 Gráfica de $y = erf(x)$ y valores numéricos dibujados con software.

De manera semejante se pueden hacer las siguientes preguntas como se hizo en los dos ejemplos anteriores:

- 1. Monotonía.** ¿Dónde son crecientes las soluciones y donde decrecientes las soluciones?
- 2. Concavidad.** ¿Dónde tienen concavidad hacia arriba las soluciones y donde tienen concavidad hacia abajo las soluciones?
- 3. Simetría.** ¿existen algunas simetrías?
- 4. Singularidades.** ¿es posible que una curva solución no está definida?

5. Unicidad. ¿se intersectan algunas soluciones?

1. Monotonía. La figura 1.15 muestra que las soluciones de la ecuación diferencial $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ están definidas para todos los valores de x en el intervalo $(-\infty, +\infty)$. De modo que todas las soluciones son crecientes.

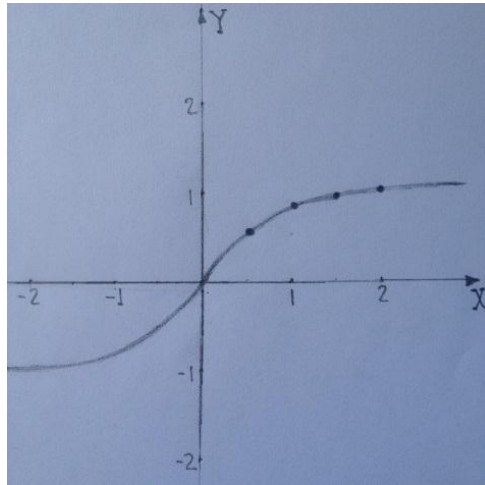


Figura 1.15 Soluciones crecientes para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ dibujada a mano.

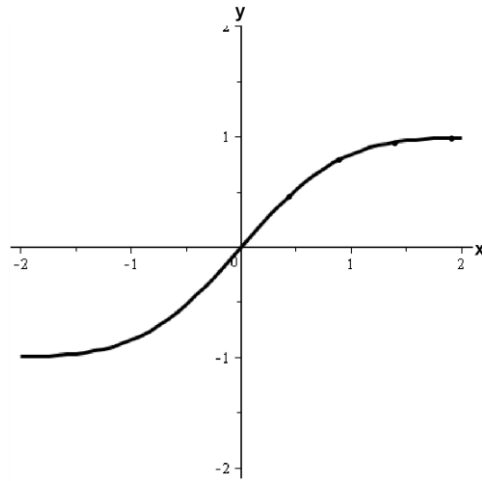


Figura 1.16 Soluciones crecientes para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ dibujada con software.

2. Concavidad. Si diferenciamos a $y' = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}$ con respecto a x , se obtiene: $y'' = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}$. De aquí se aprecia que $y'' > 0$ cuando $x < 0$ y que $y'' < 0$ cuando $x > 0$. Así, todas las soluciones tienen concavidad hacia arriba cuando $x < 0$ y concavidad hacia abajo cuando $x > 0$. Gráficamente se muestra en la figura 1.17.

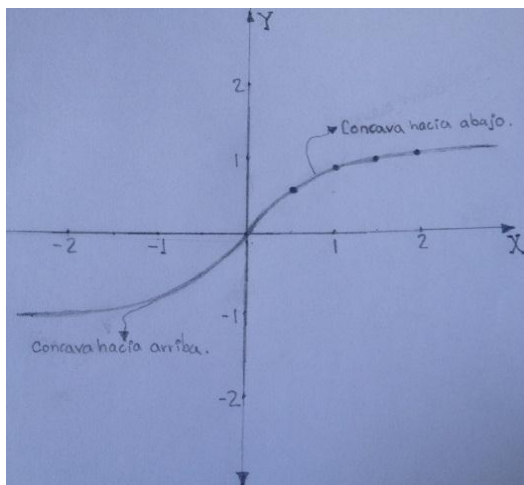


Figura 1.17 Criterio de concavidad para $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ dibujada a mano.

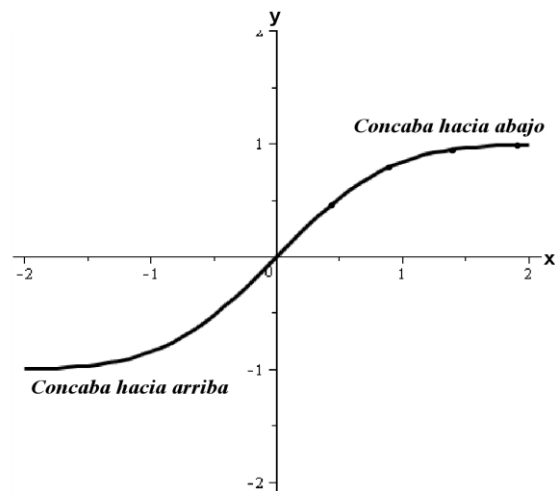


Figura 1.18 Criterio de concavidad para $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ dibujada con software.

3. Simetría. Si se reemplaza x por $-x$ en ambos lados de $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, quedaría: $-\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ de aquí se aprecia que el miembro derecho queda inalterado, pero el miembro izquierdo cambia de signo. De manera que la familia de soluciones no es simétrica a través del eje y . Si se reemplaza y por $-y$ en $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, se obtendría $-\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ de aquí se aprecia que el miembro derecho queda inalterado, pero el miembro izquierdo cambia de signo. De manera que la familia de soluciones no es simétrica a través del eje x . No obstante, si se reemplaza de manera simultánea x por $-x$, y y por $-y$, en $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$. Entonces se obtiene: $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ de nueva cuenta. De modo que la familia de soluciones de $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ queda sin cambios tras el intercambio de x por $-x$, y y por $-y$. Esto significa que la familia de soluciones es simétrica con respecto al origen. Gráficamente se muestra en la figura 1.19. Al observar la figura 1.19 parece no ser simétrica con respecto al origen, pero en realidad es simétrica con respecto al origen ya que al hacer una traslación vertical y recordando que una gráfica es simétrica con respecto al origen si permanece sin cambios cuando se gira 180 grados con respecto al origen. La parte del lado izquierdo de la figura 1.19 se obtiene por reflexividad ya que solo es posible encontrar la parte derecha.

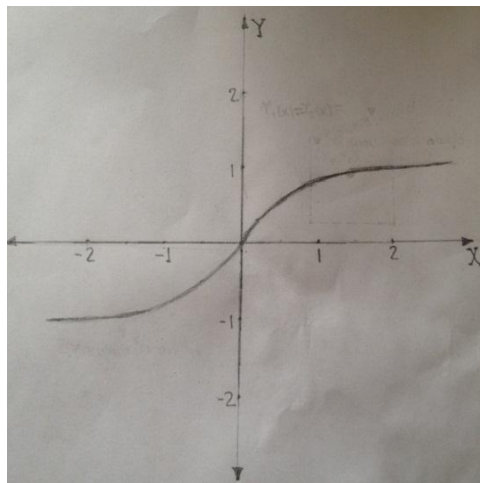


Figura 1.19 Comportamiento simétrico de la curva solución de $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ dibujada a mano.

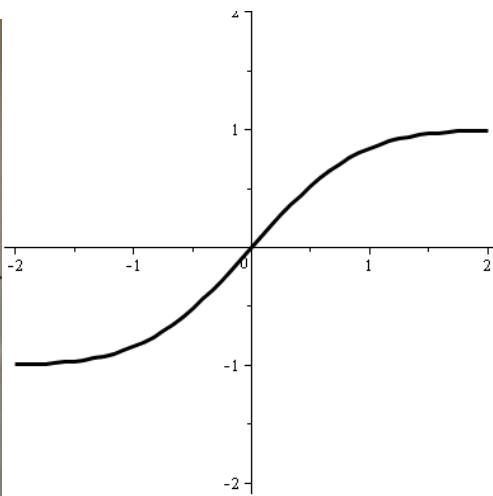


Figura 1.20 Comportamiento simétrico de la curva solución de $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ dibujada con software.

3. Singularidades. No hay aquí puntos obvios donde la derivada pudiera dejar de existir.

4. Unicidad. Se dice que dos soluciones se intersectan si existe un punto en común es decir (x_0, y_0) a través del cual dos soluciones distintas pasan. Ahora supóngase que en $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ pasan las soluciones llamadas $y_1(x)$ y $y_2(x)$. Debido a que y_1 como y_2 son soluciones de $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$. Se puede llamar a y_1 como y_2 de la siguiente forma $y'_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ y $y'_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, de manera que puede decirse que $y'_1 = y'_2$ o bien $y'_1 - y'_2 = 0$. Integrando a ambos lados daría:

$$\begin{aligned} \int (y'_1 - y'_2) dx &= \int 0 dx \\ \int \frac{dy_1}{dx} dx - \int \frac{dy_2}{dx} dx &= 0 \int dx \\ \int dy_1 - \int dy_2 &= 0 \int dx \\ y_1(x) - y_2(x) &= 0 \cdot x + C \\ y_1(x) - y_2(x) &= C \end{aligned}$$

El hecho de que $y_0 = y_1(x_0)$ y $y_0 = y_2(x_0)$ requiere que $C = 0$ de modo que $y_1(x) = y_2(x)$. En otras palabras, las dos curvas $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son una y la misma. Esto significa que solamente una solución de $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$. Puede pasar a través de cualquier punto (x_0, y_0) . Otra manera de expresar es que una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ que pasa por cualquier punto dado es única. Esto lleva a la conclusión de que las soluciones no se pueden intersectar.

1.2 Campos de Pendientes

“En la sección anterior se pudo ver que con la ayuda de técnicas del cálculo, es posible obtener una gran cantidad de información cualitativa acerca de las soluciones de $y' = f(x)$ a partir de los signos de la primera y segunda derivadas. Sin embargo todavía hay información en la ecuación diferencial, porque, además del signo, también proporciona la magnitud de la pendiente en cada punto de una curva solución.

Como trazar el campo de pendientes para $y' = f(x, y)$

Procedimiento

- ✓ Seleccione una ventana rectangular en el plano xy en el cual visualizar el campo de pendientes.
- ✓ Subdivida la región rectangular en un cuadrículado de puntos (x, y) igualmente espaciados. El número de puntos en la dirección x y la dirección y puede ser diferente.
- ✓ En cada uno de estos puntos (x, y) determine el valor numérico de $f(x, y)$ y dibuje un segmento de recta corto en (x, y) con pendiente $f(x, y)$.⁽⁵⁾

Ejemplo 1.4 Función polinómica

Construir el campo de pendientes y dibujar tres curvas solución para la ecuación diferencial $y' = x^3$

Solución.

Para construir el campo de pendientes, a partir de la ecuación diferencial $y' = x^3$. Se considera la región rectangular donde x varía en el intervalo de $-5 \leq x \leq 5$ e y varía en el intervalo de $-5 \leq y \leq 5$ en el plano xy , se calculan valores de la función $f(x, y)$ sobre 121 puntos en esa región. Por ejemplo en el punto $(x, y) = (1, 1)$, tenemos $f(x, y) = f(1, 1) = 1^3 = 1$, por tanto se esboza un pequeño segmento de línea con pendiente 1 con centro en el punto $(1, 1)$ en el plano xy . La pendiente numérica $m = x^3$ para todos los puntos (x, y) considerados, aparece en la intersección del renglón horizontal x y la columna vertical y de la tabla 7. Entonces para bosquejar el campo de pendientes de todos los 121 puntos se usa la función $f(x, y)$ para calcular las pendientes apropiadas.

⁽⁵⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICIÓN, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, México (teoría extraída de la pág. 12)

$y \backslash x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	-125	-125	-125	-125	-125	-125	-125	-125	-125	-125	-125
-4	-64	-64	-64	-64	-64	-64	-64	-64	-64	-64	-64
-3	-27	-27	-27	-27	-27	-27	-27	-27	-27	-27	-27
-2	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
3	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27
4	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64
5	125	125	125	125	125	125	125	125	125	125	125

Tabla 7 Resultado de evaluar valores en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x^3$.

Se explica de una forma más detallada como graficar una pendiente tomando en cuenta su inclinación y su dirección. Cuando se evalúa el punto (1,1) en la ecuación diferencial $y' = x^3$ se obtiene que la pendiente $m = 1$. Luego se procede a graficar el segmento de recta corto con centro en el punto (1,1) y con una inclinación de 45 grados, representando con la flecha en dirección hacia arriba como se muestra en la figura 1.21.

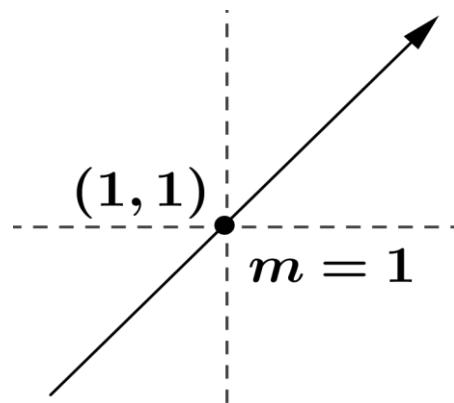


Figura 1.21 Inclinación de 45 grados cuando la pendiente $m = 1$.

Cuando se evalúa el punto $(-1, 1)$ en la ecuación diferencial se obtiene que la pendiente $m = -1$, de igual forma se procede a graficar el segmento de recta corto con centro en el punto $(-1, 1)$ y con una inclinación de 135 grados con la flecha en dirección hacia abajo como se muestra en la figura 1.22.

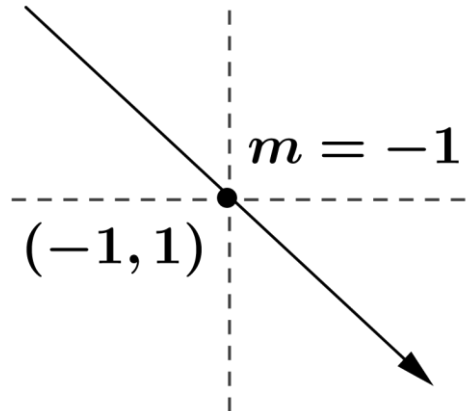


Figura 1.22 Inclinación de 135 grados cuando la pendiente $m = -1$

Al evaluar el punto $(0, 0)$ en la ecuación diferencial se tiene que la pendiente $m = 0$ y se grafica el segmento de recta en $(0, 0)$ con una inclinación de 0 grados, es decir un segmento de recta corto horizontal como se muestra en la figura 1.23.

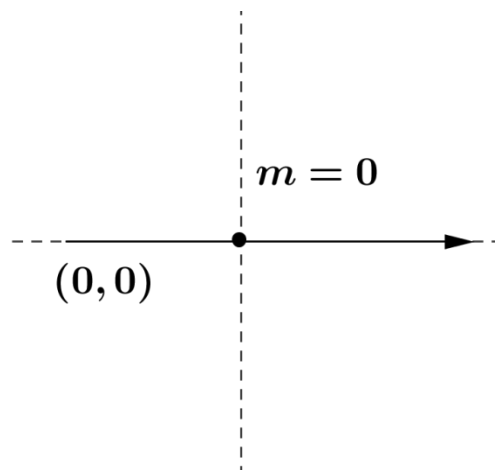


Figura 1.23 Inclinación de 0 grados cuando la pendiente $m = 0$

Al evaluar el punto $(0,2)$ en la ecuación diferencial se tiene que la pendiente $m = 0$ y se grafica el segmento de recta en $(0,2)$ con una inclinación de 0 grados, es decir un segmento de recta corto horizontal como se muestra en la figura 1.24.

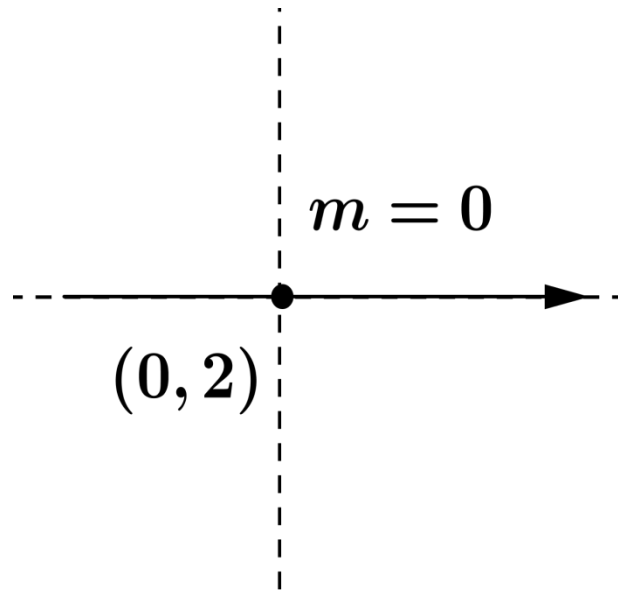


Figura 1.24 Inclinación de 0 grados cuando la pendiente $m = 0$

Cuando la pendiente $m > 1$ la inclinación tiende a ser vertical y entre más mayor sea la pendiente m más se aproximara su ángulo a 90 grados, es decir el segmento corto de recta va subiendo de derecha a izquierda y cuando el valor de la pendiente $m = 0$ su inclinación tiende a ser horizontal. Por último cuando la pendiente $m < -1$ la inclinación tiende a ser vertical, es decir cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente m mayor será su inclinación.

Teniendo en cuenta lo que se ha hecho anteriormente se procede a graficar los puntos $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0,0)$ y $(0,2)$, con la pendiente y la inclinación de su segmento corto de recta respectivo, en la región rectangular de puntos (x, y) igualmente espaciados como se muestran gráficamente en la figura 1.25.

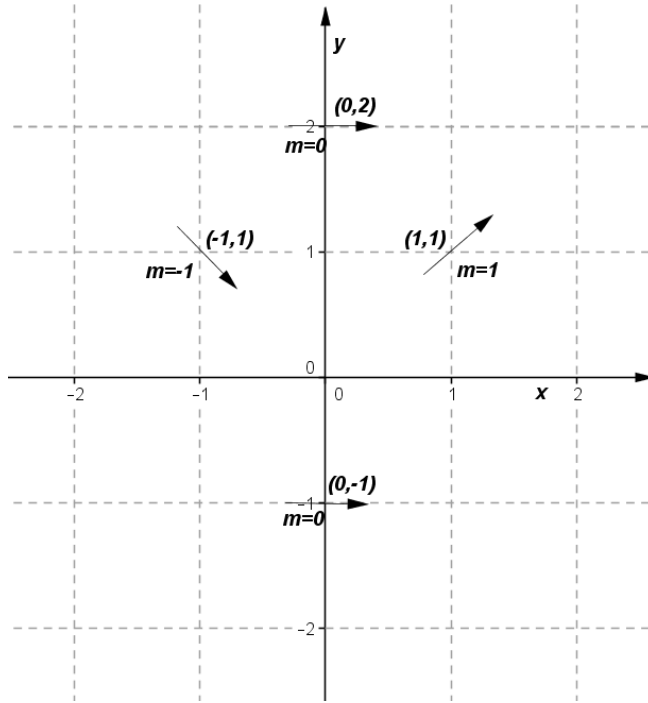


Figura 1.25 Inclinación de la pendiente $m = x^3$ para los puntos $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, -1)$

En la figuras 1.26 y 1.27 se muestran los 121 puntos graficados con su respectiva pendiente y la inclinación de su segmento corto de recta.

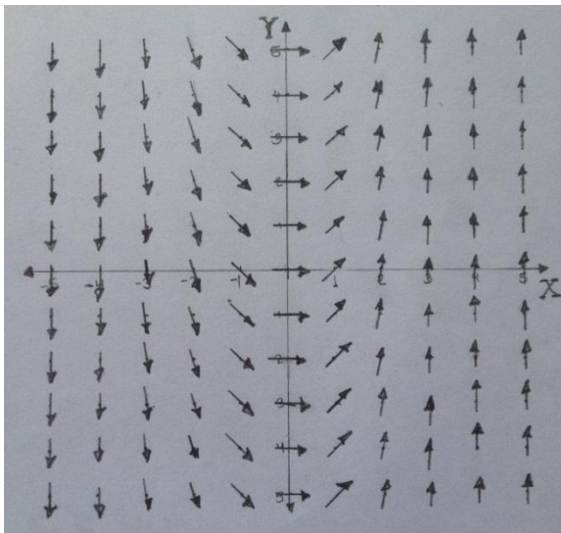


Figura 1.26 Campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = x^3$ dibujada a mano.

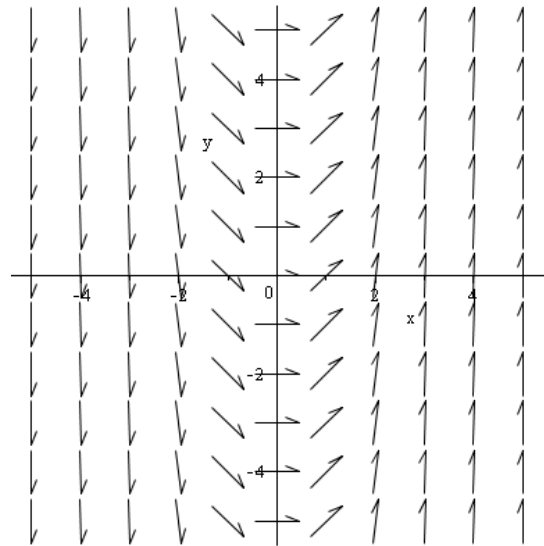


Figura 1.27 Campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = x^3$ dibujada con software.

“Cómo trazar a mano curvas solución a partir del campo de pendientes de $y' = f(x, y)$

1. Trace el campo de pendientes de $y' = f(x, y)$
2. Comience en un punto inicial y colocar allí un puntito. Si el puntito cae sobre un segmento de recta corto, la pendiente de la curva solución se localiza en ese punto. De lo contrario, estímesese el valor de la pendiente de la tangente en ese punto examinando las pendientes cercanas. Este valor muestra la dirección del campo de pendientes en ese punto
3. Avance en esta dirección una distancia corta hacia la derecha. Coloque un puntito en el punto donde termine.
4. Ajuste su dirección de tal modo que sea consistente con la dirección del campo de pendientes en la vecindad del punto donde se quiere terminar.
5. Repita pasos 3 y 4 la cantidad de veces que sea necesaria, uniendo los puntos con una curva
6. Comience con un nuevo punto inicial, y regrésese al paso 2.”⁽⁶⁾

Dibujo de las curvas solución de la ecuación diferencial $y' = x^3$. Para trazar a mano una curva solución en la gráfica del campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = x^3$, se comienza en algún punto; por ejemplo, donde ya se ha trazado una tangente corta. Como la solución será una función diferenciable, la línea cercana a cada punto resulta ser una buena aproximación de la gráfica. Así, se puede proceder avanzando con una corta distancia hacia la derecha en la dirección indicada por la tangente y posteriormente observar el aspecto del campo de pendientes allí. Luego se ajusta la dirección de la curva para que cambie de manera consistente en el campo de pendientes.

Antes de generar una curva, en las figuras 1.28 y 1.29 se muestra y se hace la comparación de dos campo de pendientes, obsérvese que en la primer figura muestra un campo de pendientes desordenado que no da la dirección para poder generar una curva integral en cambio en la segunda figura, a simple vista se puede ver que cada pendiente del campo va generando una dirección que facilita para poder generar una curva de una solución particular de la ecuación diferencial.

⁽⁶⁾Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICION, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, MEXICO (teoría extraída de la pág. 14)

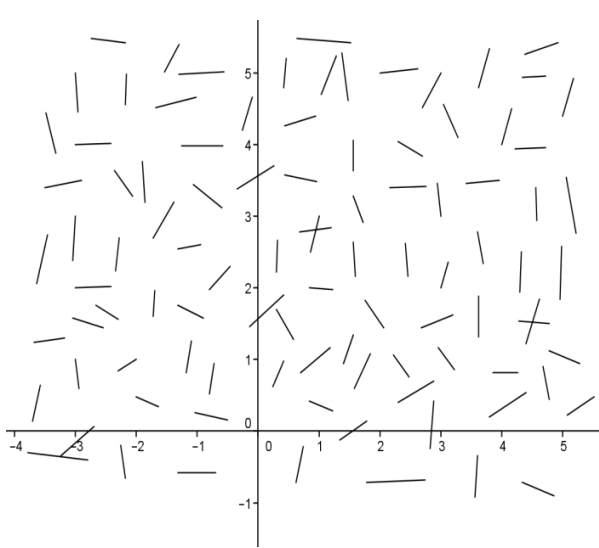


Figura 1.28 Campo de pendiente desordenado.

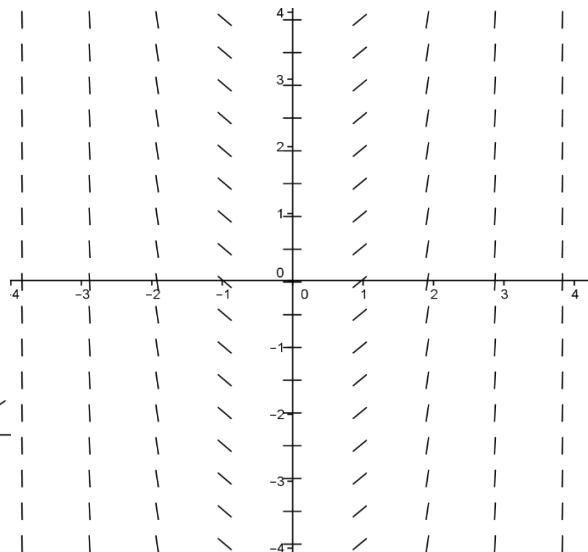


Figura 1.29 Campo de pendiente que facilita generar una curva.

Ahora se genera la curva solución que pasa a través del punto $(0,1)$. Conforme se mueve hacia la derecha a partir de este punto, la curva cambia su inclinación horizontal de tal manera que la pendiente aumenta continuamente. Esto da como resultado la curva que se muestra en las figuras 1.30 y 1.31 (notar que la curva solución que se obtiene posee concavidad hacia arriba). Las figuras 1.30 y 1.31 también muestran otras curvas solución dibujadas a mano, cada una con diferentes puntos de intersección con y .

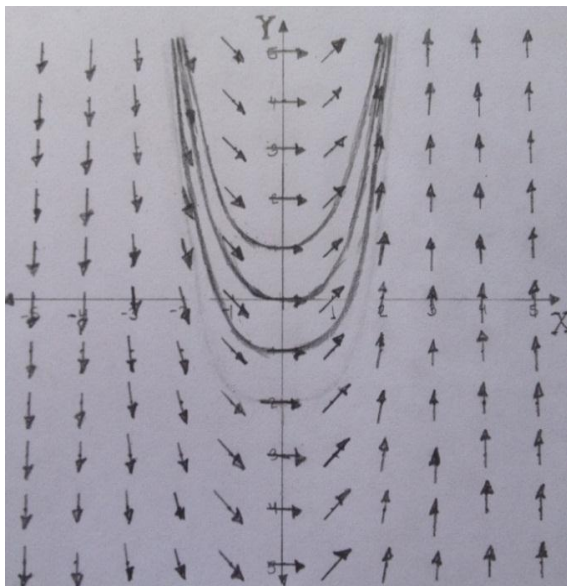


Figura 1.30 Campo de pendientes y curvas solución de la ecuación diferencial $y' = x^3$ dibujada a mano.

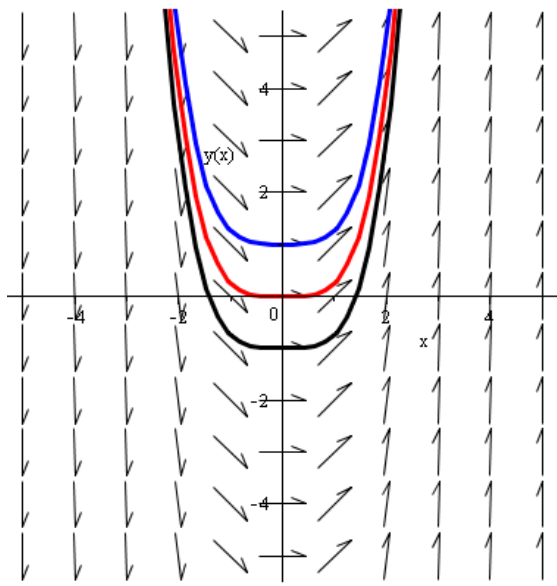


Figura 1.31 Campo de pendientes y curvas solución de la ecuación diferencial $y' = x^3$ dibujada a software.

Ejemplo 1.5 función trigonométrica. Construir el campo de pendientes y dibujar tres curvas solución para la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$.

Solución.

Para construir el campo de pendientes, a partir de la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$. Se considera la región rectangular donde x varia en el intervalo de $-\pi \leq x \leq \pi$ e y varia en el intervalo de $-2 \leq y \leq 2$ en el plano xy , se calculan valores de la función $f(x, y)$ sobre 99 puntos en esa región. Por ejemplo en el punto $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, 0)$, se tiene $f(x, y) = f(\frac{\pi}{2}, 0) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, por tanto se emboza un pequeño segmento corto de recta con pendiente 0 con centro en el punto $(0, \frac{\pi}{2})$. La pendiente numérica $m = \cos(x)$ aparece en la intersección del renglón horizontal x y la columna vertical y de la tabla 8. Entonces para bosquejar el campo de pendientes de todos los 99 puntos se usa la función $f(x, y)$ para calcular las pendientes apropiadas.

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	-2	-1.6	-1.2	-0.8	-0.4	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2
$-\pi$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Tabla 8 Resultado de valores evaluados en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \cos x$.

En la figuras 1.32 y 1.33 se muestran los 99 graficados con su respectiva pendiente y la inclinación de su segmento corto de recta.

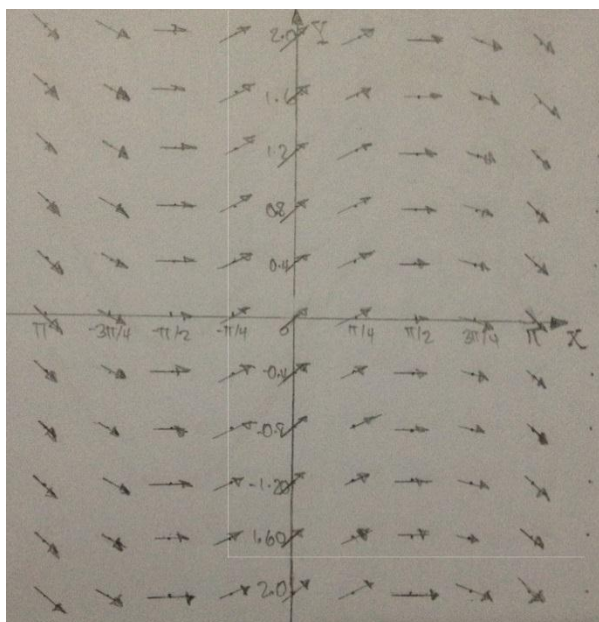


Figura 1.32 Campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = \cos x$ dibujada a mano.

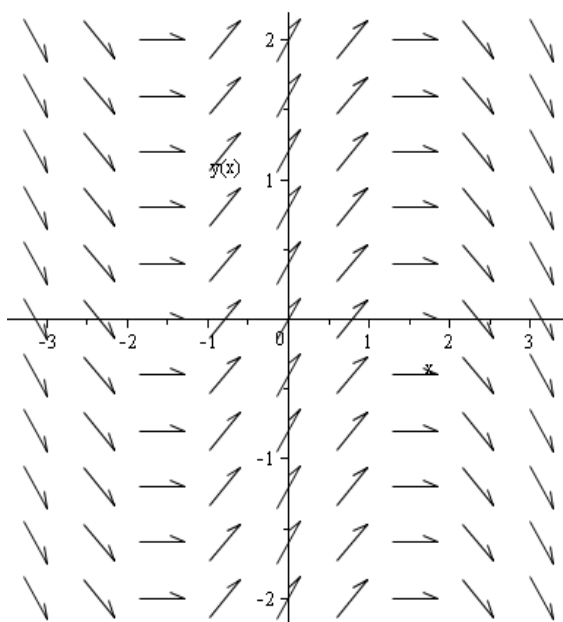


Figura 1.33 Campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = \cos x$ dibujada con software.

Dibujo de las curvas solución de la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$. Para trazar a mano una curva solución en la gráfica del campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$, se comienza en algún punto; por ejemplo, donde ya se ha trazado una tangente corta. Como la solución será una función diferenciable, la línea cercana a cada punto resulta ser una buena aproximación de la gráfica. Así, se puede proceder avanzando con una corta distancia hacia la derecha en la dirección indicada por la tangente y posteriormente observar el aspecto del campo de pendientes allí. Luego se ajusta la dirección de la curva para que cambie de manera consistente en el campo de pendientes.

Las figuras 1.34 y 1.35 muestran tres curvas solución dibujadas a mano y a través de software, cada una con diferentes puntos de intersección con y .

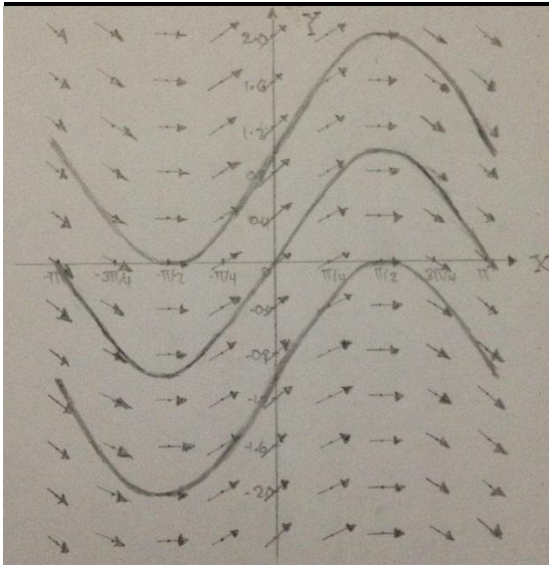


Figura 1.34 Campo de pendientes y tres de curvas solución para la ecuación diferencial $y' = \cos x$ dibujada a mano.

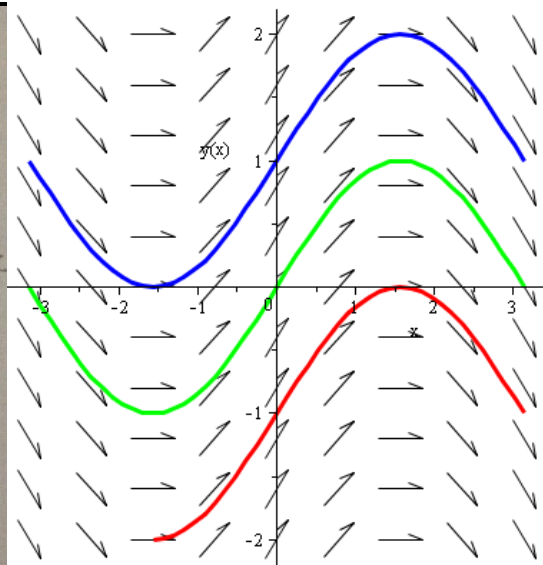


Figura 1.35 Campo de pendientes y tres de curvas solución para la ecuación diferencial $y' = \cos x$ dibujada con software.

Ejemplo 1.6: La función error

En este ejemplo se requiere trazar una curva solución de un problema de valor inicial y en el que no se encuentra una solución explícita en términos de funciones conocidas el problema de valor inicial que genera la función error.

$$y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad y(0) = 0$$

Solución.

Como se busca la solución de esta ecuación diferencial que comienza en el punto $(0, 0)$, se desea construir el campo de pendientes que incluya el punto $(0, 0)$. Entonces para construir el campo de pendientes, a partir de $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$. Se considera la región rectangular donde x varía en el intervalo de $-2 \leq x \leq 2$ e y varía en el intervalo de $-2 \leq y \leq 2$ en el plano xy , se calculan valores de la función $f(x, y)$ sobre 121 puntos en esa región. Por ejemplo en el punto $(x, y) = (0, 0)$, se tiene $f(x, y) = f(0, 0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(2)^2} = 1.13$, por tanto se emboza un pequeño segmento de línea con pendiente 1.13 con centro en el punto $(0, 0)$. La pendiente numérica $m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ aparece en la intersección del renglón horizontal x y la columna

vertical y de la tabla 9. Entonces para bosquejar el campo de pendientes de todos los 121 puntos se usa la función $f(x, y)$ para calcular las pendientes apropiadas.

$\begin{array}{l} y \\ \backslash \\ x \end{array}$	-2	-1.6	-1.2	-0.8	-0.4	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2
-2	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
-1.6	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
-1.2	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27
-0.8	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59
-0.4	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96
0	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13
0.4	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96
0.8	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59
1.2	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27
1.6	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
2	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02

Tabla 9 Resultado de valores evaluados en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

El campo de pendientes que incluye al punto $(0, 0)$, se muestran en las figuras 1.36 y 1.37

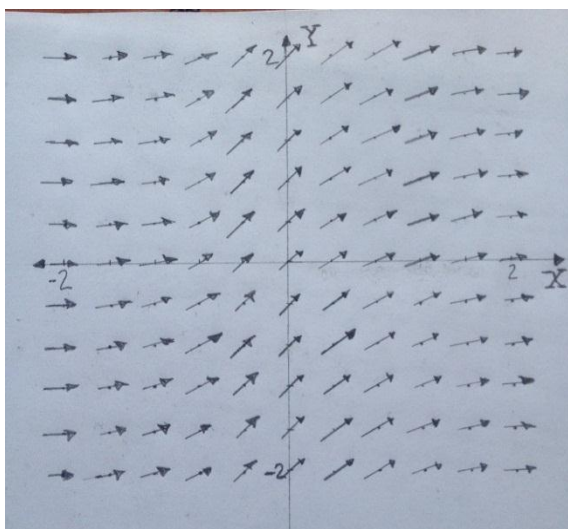


Figura 1.36 Campo de pendiente para la ecuación diferencial $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ dibujada a mano

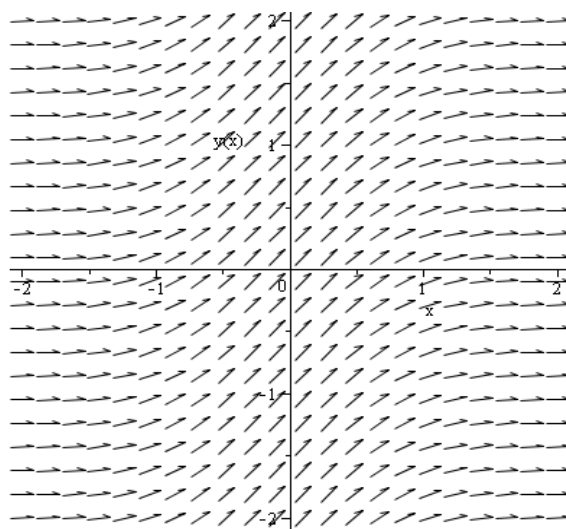


Figura 1.37 Campo de pendiente para la ecuación diferencial $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ dibujada con software

Como era de esperarse, el campo de pendientes indica que la curva solución que pasa a través de $(0,0)$ es creciente en todas partes, con la concavidad hacia arriba cuando $x < 0$ y es cóncava hacia abajo cuando $x > 0$. También se observa que el campo de pendientes parece ser simétrico a con respecto al origen. Las figuras 1.38 y 1.39 muestran una curva solución dibujada para la ecuación diferencial $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ que pasa a través del origen.

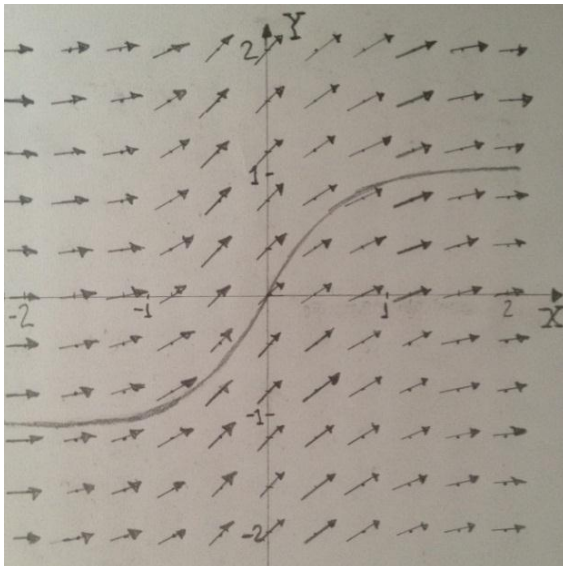


Figura 1.38 Campos de pendientes y curva solución para la ecuación diferencial $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ dibujada a mano.

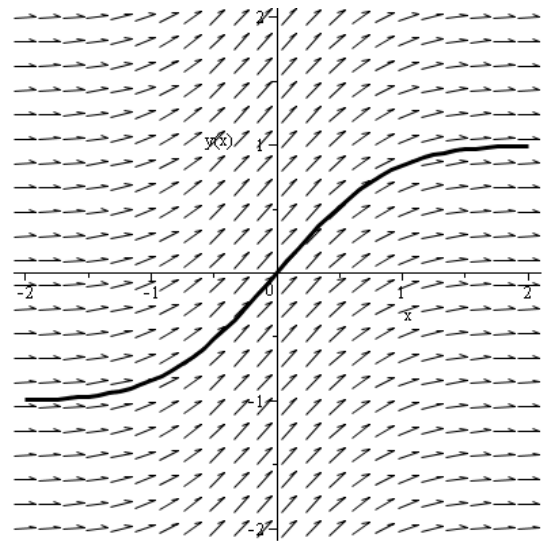


Figura 1.39 Campos de pendientes y curva solución para la ecuación diferencial $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ dibujada con software.

Las figuras 1.40 y 1.41 ilustran el campo de pendientes, con valores numéricos encontrados con regla de Simpson y una curva solución. Notar la coincidencia entre la curva solución y la gráfica de los valores numéricos. Además se muestra el campo de pendientes y una curva solución dibujada a mano. Véase la tabla 6 para los valores numéricos.

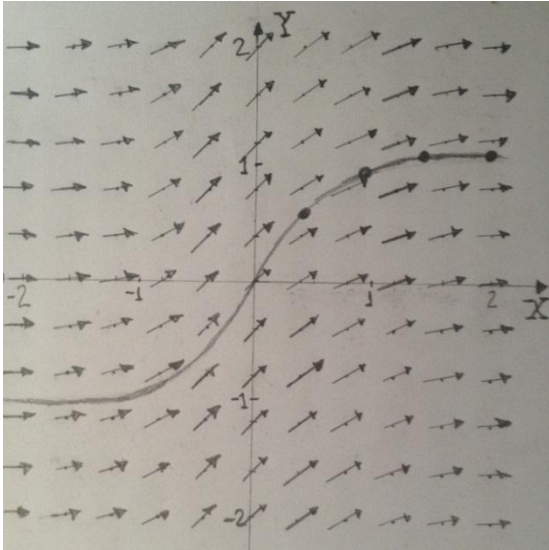


Figura 1.40 Campos de pendientes y curva solución para la ecuación diferencial $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ dibujada a mano y puntos encontrados anteriormente con la regla de Simpson.

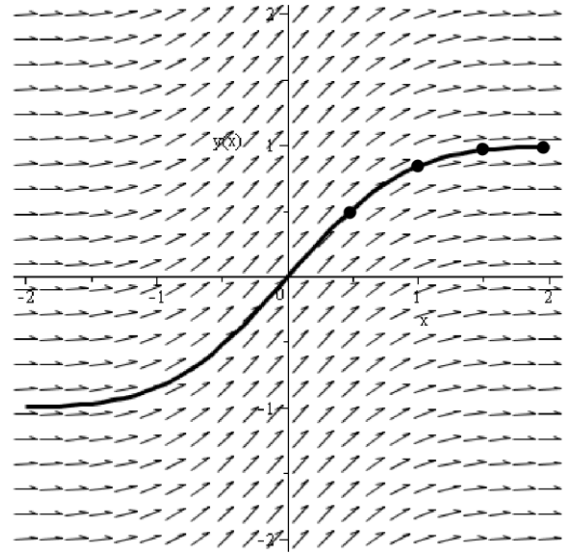


Figura 1.41 Campos de pendientes y curva solución para la ecuación diferencial $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ dibujada con software y puntos encontrados anteriormente con la regla de Simpson.

1.3 Campo de Isoclinas y Soluciones Gráficas

1.3.1 Campo de isoclinas y soluciones gráficas para las ecuaciones de primer orden

En esta sección se estudiara el concepto de campo pendientes de una manera diferente, para obtener propiedades adicionales de las curvas solución a partir de la ecuación diferencial.

“se considera la ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$$

Donde la función del lado derecho $f(x, y)$, depende tanto de la variable independiente x como de la variable dependiente y . Se podría pensar en integrar ambos lados de $y' = f(x, y)$ con respecto de x , y por tanto escribir $y(x) = \int f(x, y(x)) dx + C$. Sin embargo, este enfoque no conduce a la solución de la ecuación diferencial, porque la integral indicada involucra la misma función $y(x)$ desconocida; por tanto, no puede ser evaluada explícitamente. En realidad no existen procedimientos directos para resolver una ecuación diferencial general explícitamente.

Existe un camino geométrico sencillo para obtener las soluciones de una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ dada. En cada punto (x, y) del plano xy el valor de $f(x, y)$ determina una

pendiente $m = f(x, y)$. Una solución de una ecuación diferencial es simplemente una función derivable cuya gráfica $y = y(x)$ tiene su “pendiente correcta” en cada punto $(x, y(x))$ a través de la cual pasa, esto es $y'(x) = f(x, y(x))$, por lo tanto, una **curva solución** de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, la gráfica de la solución de la ecuación es simplemente una curva en el plano xy cuya línea tangente en cada punto (x, y) tiene pendiente $m = f(x, y)$. Por ejemplo, la figura 1.42 muestra una curva solución de una ecuación diferencial $y' = x - y$ junto con su línea tangente en tres puntos típicos.

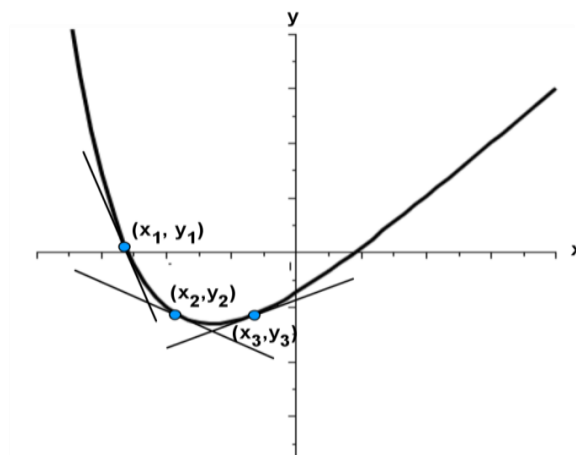


Figura 1.42 Curva solución para la ecuación diferencial $y' = x - y$ junto con las líneas tangentes

- Pendiente $m_1 = x_1 - y_1$ en el punto (x_1, y_1)
- Pendiente $m_2 = x_2 - y_2$ en el punto (x_2, y_2)
- Pendiente $m_3 = x_3 - y_3$ en el punto (x_3, y_3) .

Esto, desde el punto de vista geométrico, sugiere un método gráfico para obtener soluciones aproximadas de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. A través de cada grupo representativo de puntos (x, y) en el plano se obtiene un segmento lineal corto que tiene una pendiente propia $m = f(x, y)$. Un campo de isoclinas sugiere visualmente la forma de las curvas solución de la ecuación diferencial. A través de cada punto, una curva solución debe tender en alguna dirección de tal manera que su línea tangente sea paralela cercanamente al entorno de segmentos lineales del campo de isoclinas. Comenzando en cualquier punto inicial (x, y) , puede intentar trazarse a mano una curva solución aproximada que permita trazar su

camino a través del campo de isoclinas siguiendo los segmentos de línea visibles tan cerradamente como sea posible.”⁽⁷⁾

“Como trazar a mano isóclinas para $y' = f(x, y)$

1. Establezca $f(x, y) = m$, donde m es una constante.
2. Obtener valores diferentes para m , para cada valor de m intentar resolver $f(x, y) = m$ para y en términos de x y m , o para x en términos de y y m . Si no resulta posible, intentar identificar las curvas definidas implícitamente por $f(x, y) = m$. Esto de la isoclina correspondiente a la pendiente m .
3. Para cada valor de m , graficar la isoclina correspondiente a la pendiente m .
4. Si se construyen campos de pendientes a mano, dibuje segmentos de rectas cortos con pendiente m que crucen la isoclina apropiada.”⁽⁸⁾

Ejemplo 1.7: función polinómica

Campo de Isoclina para ecuación diferencial $y' = x^3$

Solución.

El campo de pendientes de la diferencial $y' = x^3$ se ve ilustrado en la figura 1.26. El objetivo es verificar que este campo de pendientes es razonable.

La isoclina correspondiente a la pendiente m esta dada por: $x^3 = m$, de aquí se tiene que $x = \sqrt[3]{m}$, el cual es una línea vertical a través del punto $(\sqrt[3]{m}, 0)$. Todas las curvas solución de $y' = x^3$ tendrán la misma pendiente, m , cuando crucen la isoclina para el valor de x . Por ejemplo, las curvas solución de $y' = x^3$ tendrán una pendiente de $m = 1$ cuando $x = 1$, la figura 1.43 muestra la recta vertical $x = 1$ y sobre ella la pendiente en el centro de los puntos $(1, -1), (1, -2), (1, -3), (1, -4), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)$ y $(1, 4)$

⁽⁷⁾ C.HENRY EDWARDS, DAVID E PENNEY. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, cómputo y modelado. Cuarta edición (Teoría extraída de la pág. 19 y 20)

⁽⁸⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICION, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, MEXICO (teoría extraída de la pág. 18).

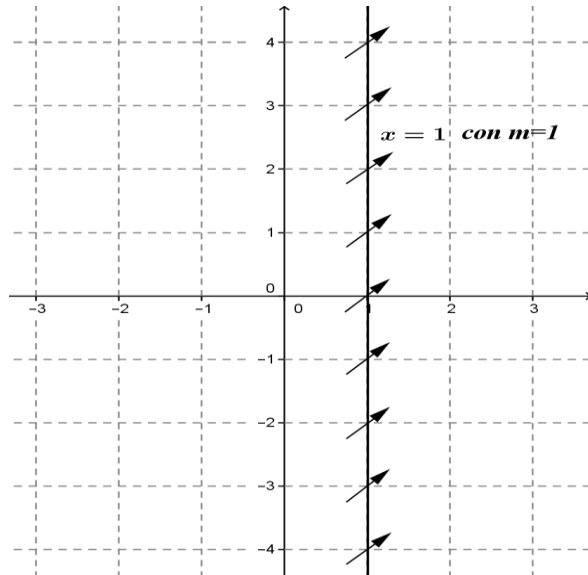


Figura 1.43 Pendiente $m = 1$ para la línea vertical $x = 1$ en los puntos $(1, -1), (1, -2), (1, -3), (1, -4), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)$ y $(1, 4)$

De igual forma se hace para otros valores, se tendrá una pendiente $m = 8$ cuando la línea vertical sea $x = 2$, una pendiente de $m = -1$ cuando la línea vertical sea $x = -1$, una pendiente de $m = -8$ cuando la línea vertical sea $x = -2$, una pendiente $m = 0$ cuando $x = 0$. Las figuras 1.44 y 1.45 son consistente con esta información, que muestra isoclinas para $m = \pm 8, m = \pm 1$ y $m = 0$.

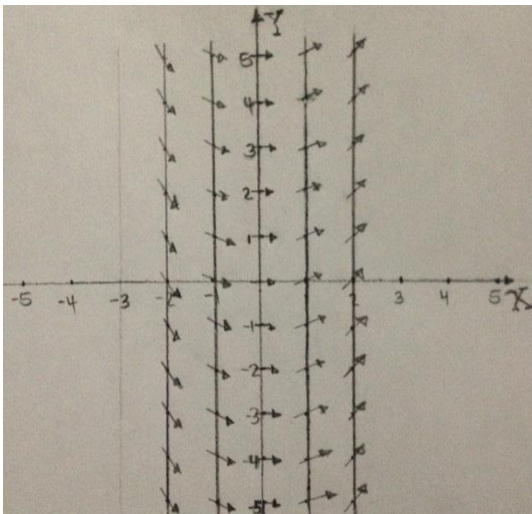


Figura 1.44 Isoclinas $m = \pm 8, m = \pm 1$ y $m = 0$ y campo de pendientes para $y' = x^3$ dibujados a mano

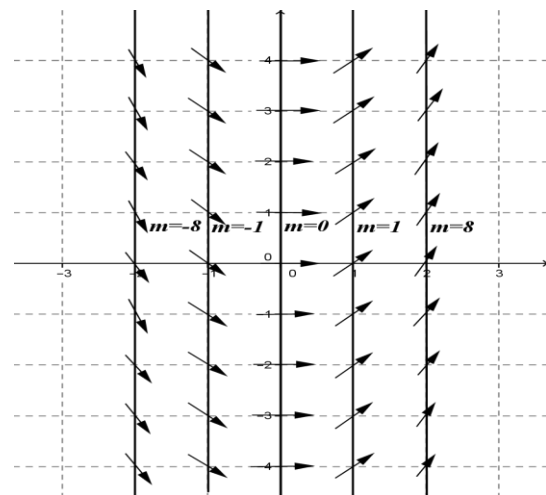


Figura 1.45 Isoclinas $m = \pm 8, m = \pm 1$ y $m = 0$ y campo de pendientes para $y' = x^3$ dibujados con software

Las figura 1.46 y 1.47 muestran las isoclinas $m = \pm 8, m = \pm 1$ y $m = 0$ y curvas solución correspondientes.

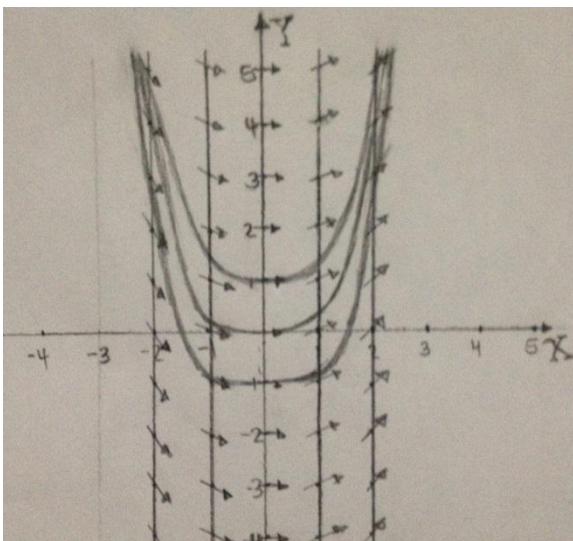


Figura 1.46 Isoclinas $m = \pm 8, m = \pm 1$ y $m = 0$, campo de pendientes y curvas solución para $y' = x^3$ dibujadas a mano.

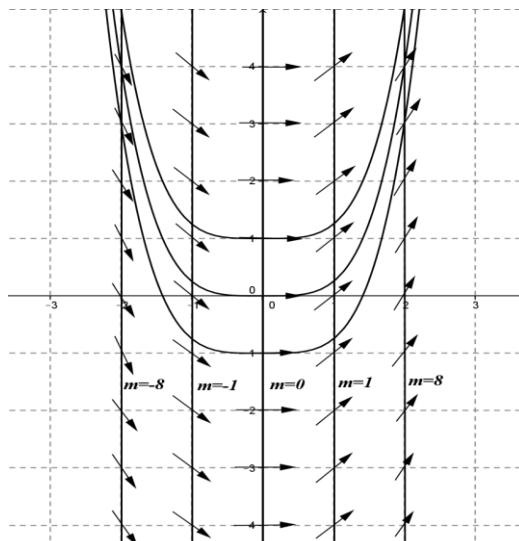


Figura 1.47 Isoclinas $m = \pm 8, m = \pm 1$ y $m = 0$, campo de pendientes y curvas solución para $y' = x^3$ dibujadas con software.

Ejemplo 1.8 Función trigonométrica

Encontrar el campo de isoclinas para la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$ en el intervalo de $[-\pi, \pi]$.

Solución.

La isoclina correspondiente a la pendiente m esta dada por: $\cos(x) = m$, de donde se tiene que $x = \cos^{-1}(m)$, el cual es una línea vertical a través del punto $(\cos^{-1}(m), 0)$. De la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$. Todas las curvas solución de $y' = \cos(x)$ tendrán la misma pendiente, m , cuando crucen la isoclina para el valor de x . Por ejemplo, las curvas solución de $y' = \cos(x)$ tendrán una pendiente de $m = -1$ cuando $x = -\pi$, una pendiente de $m = 0$ cuando $x = -\frac{\pi}{2}$, una pendiente de $m = 1$ cuando $x = 0$, una pendiente de $m = 0$ cuando la línea vertical sea $x = \frac{\pi}{2}$ y una pendiente de $m = -1$ cuando la línea vertical sea $x = \pi$. Las figuras 1.48 y 1.49 son consistentes con esta información, que muestra isoclinas para $m = -1, m = 0$ y $m = 1$.

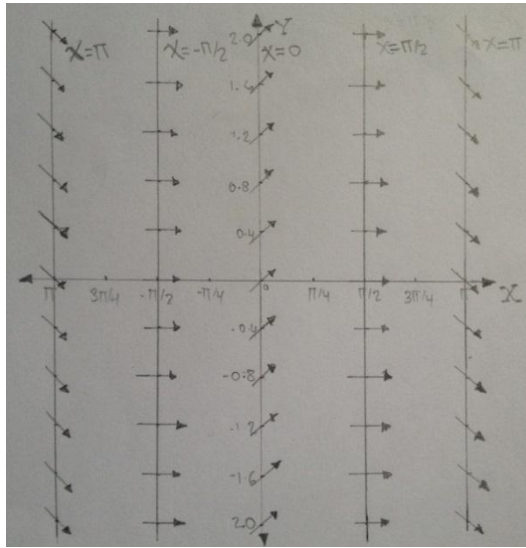


Figura 1.48 Campo de isoclinas $m = -1, 0, 1$ y campo de pendientes para $y' = \cos x$ dibujados a mano.

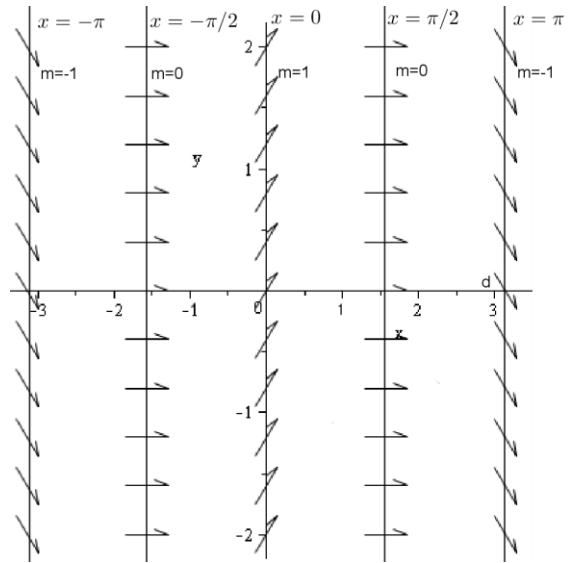


Figura 1.49 Campo de isoclinas $m = -1, 0, 1$ y campo de pendientes para $y' = \cos x$ dibujados con software.

Las figura 1.50 y 1.51 muestran las isoclinas y curvas solución correspondientes $m = -1, m = 0$ y $m = 1$.

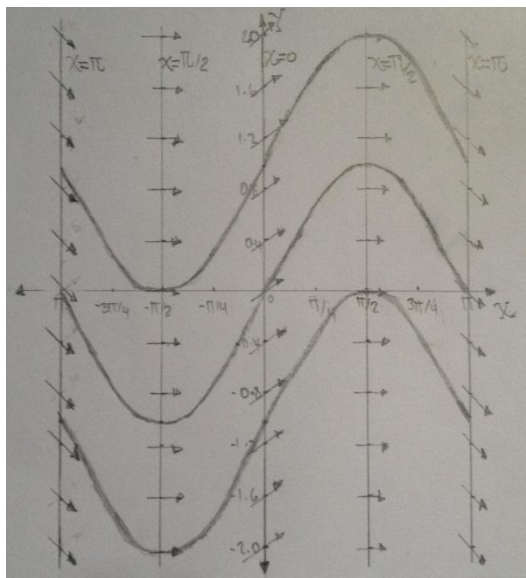


Figura 1.50 Isoclinas $m = -1, m = 0$ y $m = 1$, campo de pendientes y curvas solución para $y' = \cos x$ dibujadas a mano.

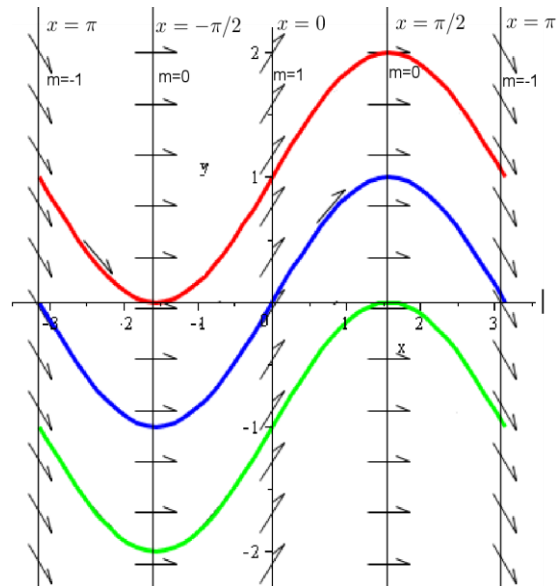


Figura 1.51 Isoclinas $m = -1, m = 0$ y $m = 1$, campo de pendientes y curvas solución para $y' = \cos x$, dibujadas con software.

Ejemplo 1.9 La función error

Encontrar el campo de isoclinas para la ecuación diferencial que dio origen a la función error $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

Solución.

La isoclina correspondiente a la pendiente m esta dada por: $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = m$. Esta condición garantiza que no haya isoclinas para pendientes $m \leq 0$ o pendientes para $m > 2/\sqrt{\pi} \approx 1.128$. Si se resuelve $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = m$ para x se obtiene:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = m \Rightarrow e^{-x^2} = m \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \ln e^{-x^2} = \ln m \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow x^2 = \ln \left[\frac{2}{m\sqrt{\pi}} \right] \Rightarrow x = \pm \sqrt{\ln \left[\frac{2}{m\sqrt{\pi}} \right]}$$

como ecuación de la isoclina correspondiente a la pendiente m . En la tabla 10 se muestran las pendientes $m = 0.1, 0.3, 0.7$ y además un valor x correspondientes a las isoclinas $x = \pm 1.55, \pm 1.15$ y ± 0.69 . Todos estos valores se ilustran en las figuras 1.52 y 1.53.

$y \backslash x$	-2	-1.55	-1.15	-0.69	-0.4	0	0.4	0.69	1.15	1.55	2
-2	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
-1.55	0.09	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
-1.15	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30
-0.69	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70
-0.4	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96
0	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13
0.4	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96
0.69	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70
1.15	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30
1.55	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
2	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02

Tabla 10 Resultado de valores evaluados en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

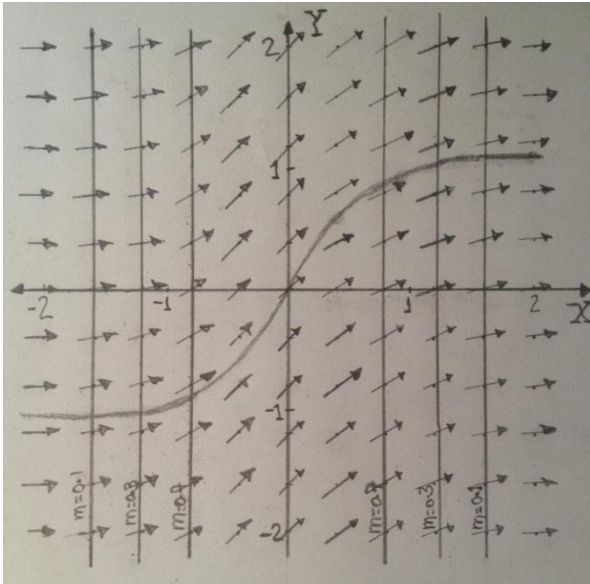


Figura 1.52: Isoclinas para $(m = 0.1, 0.3, 0.7)$, campo de pendiente y curva solución para $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ dibujados a mano.

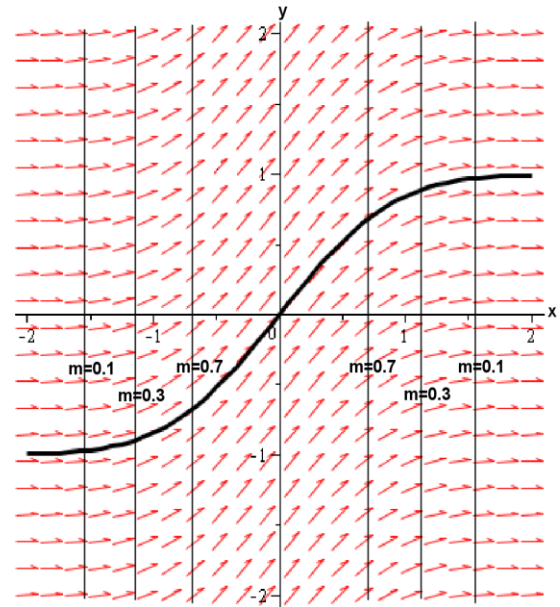


Figura 1.53: Isoclinas para $(m = 0.1, 0.3, 0.7)$, campo de pendiente y curva solución para $y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ dibujado con software.

Ejemplo 1.10: Aplicar el método de las isoclinas

“Aplicando el método de las isoclinas, trazaremos las curvas integrales o curvas solución de la ecuación diferencial $y' = 2x - y$.”⁽⁹⁾

Solución.

Para obtener las ecuaciones de las isoclinas, se hace $y' = m$. Se tiene: $2x - y = m$, o bien $y = 2x - m$. Las isoclinas son rectas paralelas. Cuando la constante $m = 0$, se obtiene la isoclina $y = 2x$. Esta recta divide al plano xy en dos partes, en cada una de las cuales la derivada y' tiene un mismo signo.

Las curvas integrales, representadas por y se cortan con la recta $y = 2x$, pasando de la región de decrecimiento de la función y a la región de crecimiento de la misma. Por lo tanto, en esta recta se encuentran los puntos extremales de las curvas integrales o curvas solución, que son los puntos mínimos. Considerar otras dos isoclinas.

$$m = -1, \quad y = 2x + 1$$

⁽⁹⁾ Kiseliov, A., Krasnov, M., Makarenko G. 1984, Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, cuarta edición, Editorial MIR Moscú (el ejemplo desarrollado es un ejercicio propuesto ejercicio 55 de la pág.24).

Y

$$m = 1, \quad y = 2x - 1.$$

Las pendientes $m = -1$ y $m = 1$, trazadas a las curvas integrales en los puntos de intersección con las isoclinas, forman con el eje x ángulos de 135° y 45° . Hállese ahora la segunda derivada de la ecuación diferencial $y' = 2x - y$ y sería $y'' = 2 - y'$, si se sustituye $y' = 2x - y$ en la segunda derivada, se tendría $y'' = 2 - 2x + y$, si se hace $y'' = 0$, se obtiene la recta $y = 2x - 2$ la cual es la isoclina para $m = 2$, a la vez es una curva integral o curva solución, de lo que puede convencerse sustituyendo en la ecuación diferencial. La isoclina $y = 2x$, en la que se encuentran los puntos mínimos de las curvas integrales o curvas solución, está situada sobre la isoclina $y = 2x - 2$, por lo cual, las curvas integrales que pasan por debajo de la isoclina $y = 2x - 2$ no tienen puntos extrémales.

La recta $y = 2x - 2$ divide el plano xy en dos partes, en una de las cuales (la que está situada sobre la recta) $y'' > 0$, y por lo tanto, las curvas integrales tienen dirigidas hacia arriba sus concavidades, y en la otra parte de la región $y'' < 0$, y por consiguiente, las curvas integrales tienen sus concavidades dirigidas hacia abajo. Como las curvas integrales no se cortan con la recta $y = 2x - 2$, ésta no es el lugar geométrico de los puntos de inflexión. Las curvas integrales de la ecuación diferencial dada no tienen puntos de inflexión.

También se consideraran las pendiente m para $m = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y de esta manera se obtienen las isoclinas de las curvas solución correspondientes a estas pendientes $y = 2x + 3, y = 2x + 2, y = 2x + 1, y = 2x, y = 2x - 1, y = 2x - 2$ y $y = 2x - 3$. Al ver realizado el análisis a la ecuación diferencial $y' = 2x - y$, permite trazar aproximadamente las isoclinas como se muestran en las figuras 1.54 y 1.55.

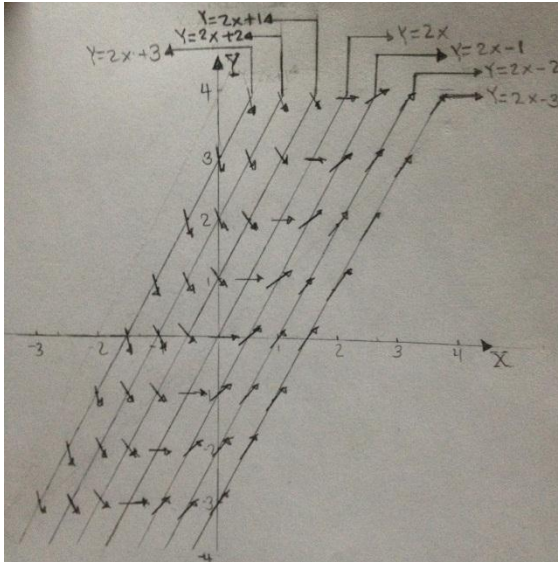


Figura 1.54 Campo de isoclinas para ecuación diferencial $y' = 2x - y$ dibujadas a mano.

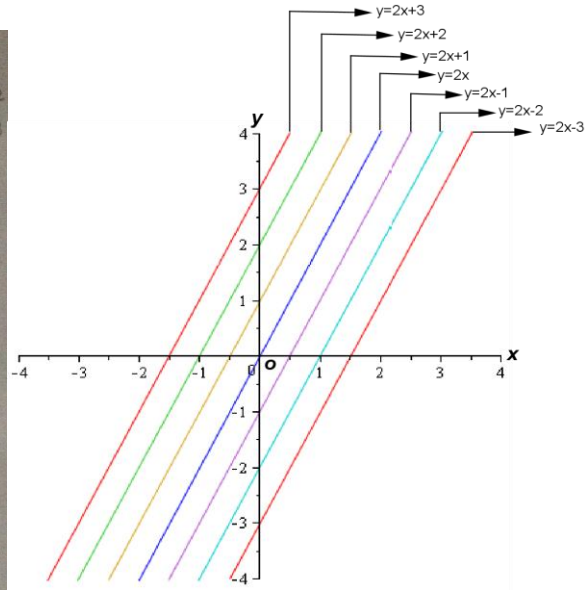


Figura 1.55 Campo de isoclinas para ecuación diferencial $y' = 2x - y$ dibujadas con software.

También el análisis de la ecuación diferencial $y' = 2x - y$, permite trazar aproximadamente la familia de las curvas solución como se muestran en las figuras 1.56 y 1.57.

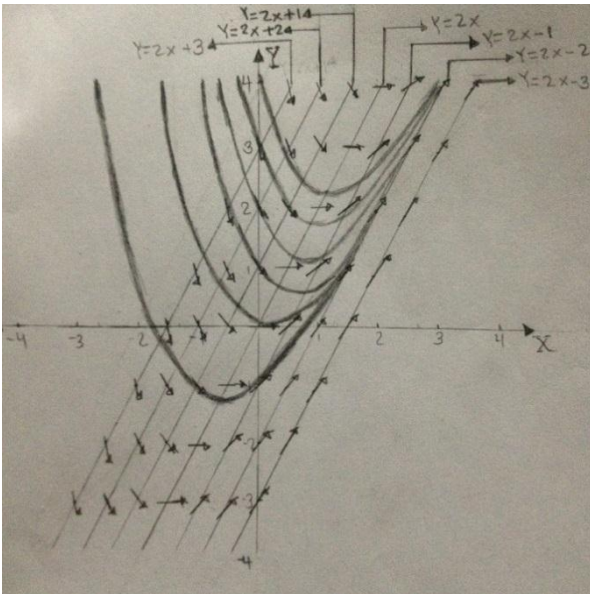


Figura 1.56 Campo de isoclinas y familia de curvas solución para la ecuación diferencial $y' = 2x - y$ dibujadas a mano.

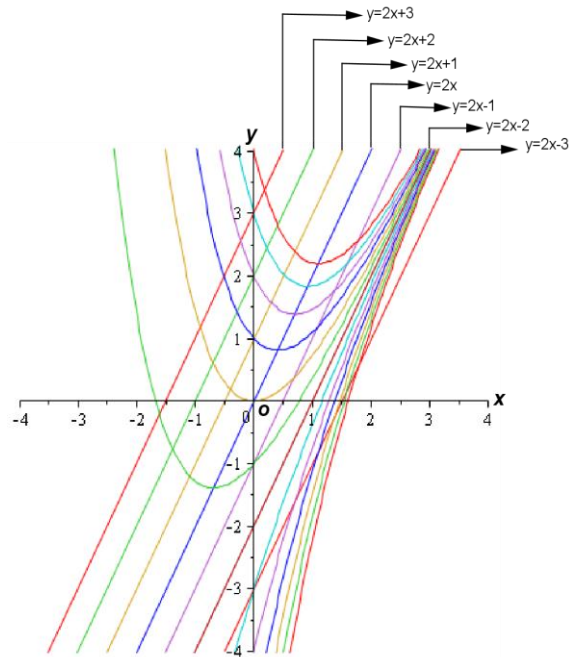


Figura 1.57 Campo de isoclinas y familia de curvas solución para la ecuación diferencial $y' = 2x - y$ dibujadas con software.

Comentarios sobre las isóclinas

- Para cualquier m particular, la isoclina correspondiente a la pendiente m puede componerse de más de una curva.
- A la isoclina correspondiente a la pendiente m también se le conoce como isoclina para la pendiente m .
- Si $f(x, y)$ no incluye a y , las isoclinas son líneas verticales.
- En el caso general en que $f(x, y)$ depende tanto de x como de y , las isoclinas pueden no ser rectas, por ejemplo, si $f(x, y) = x^2 + y^2$ entonces las isoclinas $x^2 + y^2 = m$ son círculos con centro en el origen y radio \sqrt{m} .

Para resumir los resultados hallados hasta ese punto, agrupamos algunas **observaciones generales acerca de las ecuaciones diferenciales de la forma especial $y' = f(x)$** .

Resumen

- Todas las soluciones son explícitas.
- Una vez que se ha encontrado un miembro de la familia de soluciones, otros miembros de la familia pueden generarse a partir de este miembro mediante traslaciones verticales.
- Si $y' = f(x)$ permanece sin cambios después de sustituir x por $-x$, entonces la familia de soluciones es simétrica a lo largo del eje y .
- Si $y' = f(x)$ permanece sin cambios después de la sustitución simultánea de y por $-y$, y de x por $-x$, entonces la familia de soluciones es simétrica con respecto al origen.
- Para el caso en que $y' = f(x)$, todas las isoclinas son rectas verticales; es decir, paralelas al eje y .⁽¹⁰⁾

⁽¹⁰⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICION, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, MEXICO (teoría extraída de la pág. 19 y 20)

1.3.2 Campo de pendientes y soluciones gráficas para algunas ecuaciones de segundo orden

“El método de las isoclinas se emplea también para la resolución de algunas ecuaciones de segundo orden. Tales son las ecuaciones que se pueden reducir a las de primer orden, por ejemplo las ecuaciones de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(\frac{dx}{dt}, x\right) = 0 \quad (1.1)$$

Se agrega una nueva variable $v = \frac{dx}{dt}$. Entonces, $\frac{d^2x}{dt^2} = v \frac{dv}{dx}$ y la ecuación (1) toma la forma de

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(v, x)}{v} \quad (1.2)$$

Esta es una ecuación de primer orden en la que x es la variable independiente. Para su solución se puede aplicar el método de isoclinas.

Se interpreta la variable x como el desplazamiento de un punto del sistema y $\frac{dx}{dt} = v$ como su velocidad.

El plano de las variables x, v se llama plano fásico. Por consiguiente, la ecuación (1.2) determina la velocidad como función del desplazamiento.

Construyendo el campo de las isoclinas para la ecuación (1.2) se puede trazar la curva solución una vez dado el punto inicial (x_0, v_0) . Esta representación gráfica de la velocidad v como función del desplazamiento x : $v = v(x)$, se llama cuadro fásico. Las curvas del plano x, v que representan esta dependencia funcional se denominan trayectorias fásicas. Los valores instantáneos de x y v son coordenadas del punto de la trayectoria fásica. Este último se denomina punto representativo. Con el tiempo, el punto representativo se desplaza por la trayectoria fásica. Observar que la velocidad positiva suscita con el tiempo un aumento del desplazamiento. En efecto, en virtud de la sustitución $v = \frac{dx}{dt}$, para $v > 0$, se tiene $\frac{dx}{dt} > 0$, lo cual significa que al aumentar t también aumenta x . Por lo tanto, en la mitad superior del plano fásico, en donde $v > 0$, el punto representativo tiene que moverse de izquierda a derecha, mientras que en la mitad inferior del plano, en donde $v < 0$, de derecha a izquierda.

Por consiguiente, el movimiento por la trayectoria fásica se efectúa en dirección de las agujas del reloj.”⁽¹¹⁾

Ejemplo 1.11. Campo de Isoclinas para Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

“Trazar las trayectorias fásicas para la siguiente ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$.”⁽¹¹⁾

Solución.

Utilizando la sustitución $v = \frac{dx}{dt}$, observar que se obtiene la ecuación diferencial de la forma

$$v \frac{dv}{dt} + v + x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{-x - v}{v}$$

Se ha transformado la ecuación diferencial de orden dos a una ecuación diferencial de orden uno. Para construir el campo de pendientes, a partir de la ecuación diferencial $\frac{dv}{dt} = \frac{-x-v}{v}$. Se considera la región rectangular donde x varia en el intervalo de $-5 \leq x \leq 5$ e v varia en el intervalo de $-5 \leq v \leq 5$ en el plano fásico xv , se calculan valores de la función $f(x, v)$ sobre 121 puntos en esa región fásica. $m = \frac{-x-v}{v}$. Aparece en la intersección del renglón horizontal x y la columna vertical v de la tabla 11. Entonces para bosquejar el campo de pendientes de todos los 121 puntos se usa la función $f(x, v)$ para calcular las pendientes apropiadas.

⁽¹¹⁾ Kiseliiov, A., Krasnov, M., Makarenko G. 1984, Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, cuarta edición, Editorial MIR Moscú (Teoría extraída de la pág.137-138 y el ejemplo desarrollado es el ejercicio 55 propuesto en la pág. 139).

$v \backslash x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	-2	-2.25	-2.66	-3.5	-6	-	4	1.5	0.66	0.25	0
-4	-1.8	-2	-2.33	-3	-5	-	3	1	0.33	0	-0.2
-3	-1.6	-1.75	-2	-2.5	-4	-	2	0.5	0	-0.25	-0.4
-2	-1.4	-1.5	-1.66	-2	-3	-	1	0	-0.33	-0.5	-0.6
-1	-1.2	-1.25	-1.33	-1.5	-2	-	0	-0.5	-0.66	-0.75	-0.8
0	-1	-1	-1	-1	-1	-	-1	-1	-1	-1	-1
1	-0.8	-0.75	-0.66	-0.5	0	-	-2	-1.5	-1.33	-1.25	-1.2
2	-0.6	-0.5	-0.33	0	1	-	-3	-2	1.66	-1.5	-1.4
3	-0.4	-0.25	0	0.5	2	-	-4	-2.5	-2	-1.75	-1.6
4	-0.2	0	0.33	1	3	-	-5	-3	-2.33	-2	-1.8
5	0	0.25	0.66	1.5	4	-	-6	-3.5	-2.66	-2.25	-2

Tabla 11 Resultado de valores evaluados en la ecuación diferencial $\frac{dv}{dt} = \frac{-x-v}{v}$.

Una vez obteniendo esos valores se utilizan para establecer una idea aproximada del campo de pendientes de $v' = \frac{-x-v}{v}$ (como se muestran en las figuras 1.58 y 1.59)

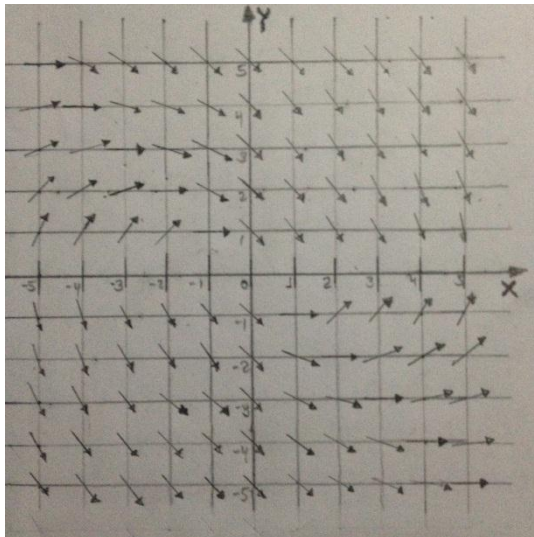


Figura 1.56 Campo de pendientes de la ecuación diferencial de segundo orden $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$ dibujado a mano.

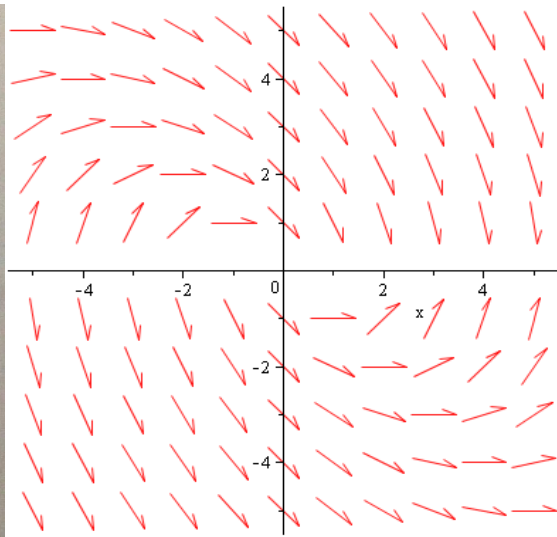


Figura 1.57 Campo de pendientes de la ecuación diferencial de segundo orden $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$ dibujado con software.

Teniendo el campo de isoclinas correspondiente, las figura 1.60 y 1.61 presentan las curvas soluciones trazadas, que pasan por los puntos $(0, 1)$, $(0,0.4)$, $(-2,-4)$, $(0, -1.5)$. De aquí se concluye que este campo de isoclinas estará tan cercano como sea posible. En cada punto se observa que las curvas ilustradas tienden en la dirección indicada por los segmentos de líneas en el campo de isoclinas.

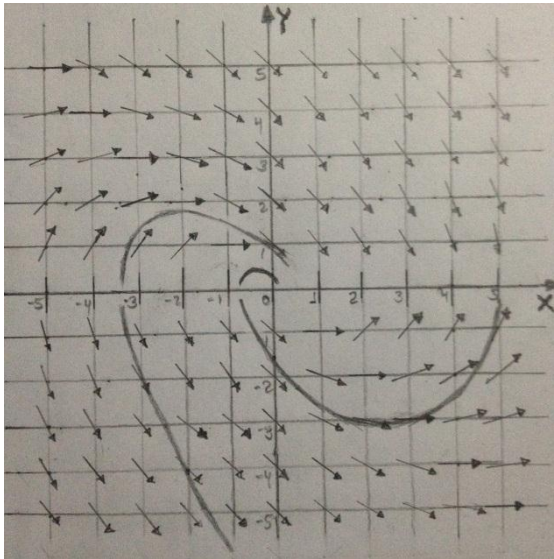
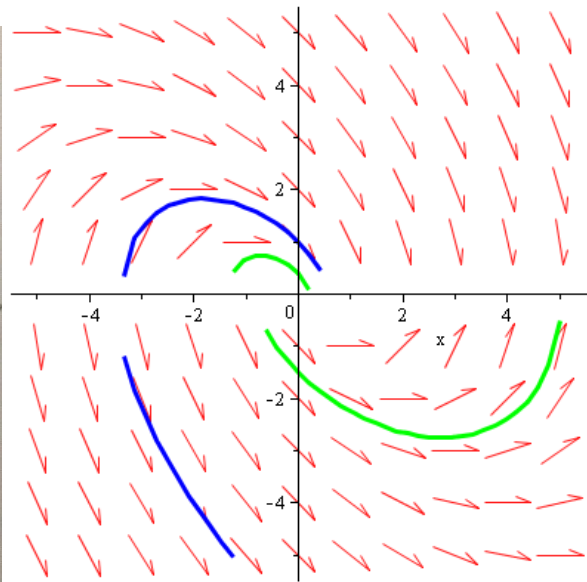


Figura 1.60 Campo de pendientes y curvas solución para $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$ dibujado a mano.

Figura



1.61 Campo de pendientes y curvas solución para $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$ dibujados con software.

1.4 Funciones y Expansiones en Series de Potencias

“En este capítulo se han desarrollado métodos para trazar curvas solución de $y' = f(x)$ que pasen a través de puntos específicos. Si resultaba imposible descubrir una antiderivada en términos de funciones conocidas, todavía se podría escribir la solución explícita.

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt + y_0$$

que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Evaluar $y(x)$ para valores específicos de x de esta expresión requiere una aproximación numérica de la integral definida.

Sin embargo, existe una expresión alternativa de esta solución explícita que toma la forma de una serie infinita. Para obtener una expresión de este tipo, se desarrolla en integrando $f(t)$

en una serie de Taylor y posteriormente se integran las potencias resultantes de t término a término.⁽¹²⁾

Ejemplo 1.12 La función error

Para ilustrar el procedimiento anterior, considerar la función error definida por $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Solución.

Recordando que la función e^x tiene la expansión en serie de Taylor de la siguiente forma:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad (1.3)$$

Válida para toda x . Si se reemplaza x por $-t^2$ en (1.3), se encuentra

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{10}}{5!} + \dots, \quad (1.4)$$

Lo que, cuando se integra de 0 a x , da como resultado

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x \frac{t^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}. \quad (1.5)$$

Combinando (1.3) y (1.5), se ve que la función error puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} \text{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \dots \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Válida para toda x . Esta es una representación alternativa de la función error.

El primer término del miembro derecho de (1.6), que se denota

⁽¹²⁾Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICION, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, MEXICO (teoría extraída de la pág. 22)

$$P_1(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x,$$

Es el polinomio de Taylor de grado uno para $\text{erf}(x)$. La suma de los primeros dos términos en el lado derecho de (1.6), que denota $P_3(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$

proporciona el polinomio de Taylor de grado tres para $\text{erf}(x)$, y así sucesivamente la figura 1.62 muestra los polinomios de grado uno, tres, cinco hasta once, es decir los restantes polinomios de grado cinco, siete nueve y once se muestran a continuación:

$$P_5(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right)$$

$$P_9(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216}\right)$$

$$P_7(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42}\right)$$

$$P_{11}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \frac{x^{11}}{1320}\right)$$

Nótese como la gráfica de la función error emerge gradualmente como curva común a estas gráficas. Parece que $\text{erf}(x)$ estuviera atrapada por las otras curvas. También adviértase que cerca del origen, $\text{erf}(x)$ se comporta como el primer término en la serie de Taylor (1.6). Gráficamente se muestran estos polinomios en la figura 1.62

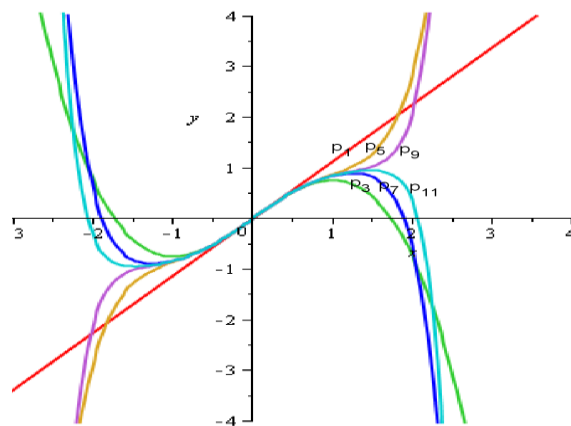


Figura 1.62 La función error atrapada por sus polinomios de Taylor $P_1(x), P_3(x), P_5(x), \dots, P_{11}(x)$.

1.5 Ecuaciones Diferenciales Autónomas

“En esta sección se analizarán las ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma $\frac{dy}{dx} = f(y)$ en las que el miembro derecho de $\frac{dy}{dx} = f(y)$ depende solamente de la variable independiente y . Este tipo de ecuaciones son importantes por dos razones prácticas: se les emplea en la descripción de muchas situaciones, y sus propiedades constituyen el fundamento para abordar problemas más complejos.

Uno de los objetivos de esta sección consiste en mostrar cómo aplicar las técnicas de las secciones anteriores para comprender plenamente el comportamiento cualitativo y cuantitativo de las soluciones de las ecuaciones diferenciales autónomas. Estas diferentes técnicas son necesarias debido a que la aplicación de un solo método (entre ellos las soluciones analíticas).

En las secciones anteriores se observó que solamente una solución de $y' = f(x)$ puede pasar a través de un punto específico (x_0, y_0) si $f(x)$ es continua. Estas condiciones garantizan que las curvas solución no se intersectarán. Se necesita saber que restricciones imponer sobre $f(x)$ para que las curvas solución de $\frac{dy}{dx} = f(y)$ no se intersecten. De este modo, se necesita un teorema de existencia y unicidad para problemas de valor inicial asociados con $\frac{dy}{dx} = f(y)$. El teorema se encuentra definido, y su significado es bastante obvio cuando se dibujan a mano curvas solución con la ayuda de la información que no ofrecen los campos de pendientes. Las soluciones de equilibrio y el análisis de fase son nuevos temas que abarca esta sección con el fin de ayudar a determinar las propiedades de las curvas solución $y' = f(y)$.”⁽¹³⁾

⁽¹³⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICIÓN, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, México (teoría extraída de la pág. 27 y el ejercicio resuelto es extraído de la guía de ejercicios 4 propuesto en la pág. 35)

Ejemplo 1.13 Ecuación diferencial autónoma

“Resolver la ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$ calculando los siguientes literales.”⁽¹³⁾

- a) Establecer criterios de monotonía, concavidad, simetría, singularidad.
- b) Encontrar la solución analítica.
- c) Graficar el campo de pendientes y curvas soluciones de la ecuación diferencial.
- d) Graficar una familia de isóclinas y curvas soluciones de la ecuación diferencial.

Solución.

- a) Establecer criterios de monotonía, concavidad, simetría, singularidad.

1. Monotonía.

Se desea encontrar primeramente los puntos críticos y para ello se hace $\frac{dy}{dx} = 0$, equivalentemente a $y^2 - 1 = 0$ y se tienen los valores críticos $y = 1$ e $y = -1$. Así la tabla 12 resume el valor de prueba para los tres intervalos determinados para estos puntos críticos.

Intervalo	$-\infty < y < -1$	$-1 < y < 1$	$1 < y < \infty$
Valor de prueba	$y = -2$	$y = 0$	$y = 2$
Signo de $f'(y)$	$f'(-2) = 3$	$f'(0) = -1$	$f'(2) = 3$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Creciente

Tabla 12 Criterio de crecimiento y decrecimiento para las soluciones de la ecuación diferencial autónoma $y' = y^2 - 1$.

A partir de la tabla 12, las soluciones de la ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$ están definidas para todos los valores de y . De modo que las soluciones $y = y(x)$ son crecientes para el intervalo $-\infty < y < -1$, y decrecientes, para el intervalo de $-1 < y < 1$ y crecientes para el intervalo $1 < y < \infty$, Como se muestra en la figura 1.63.

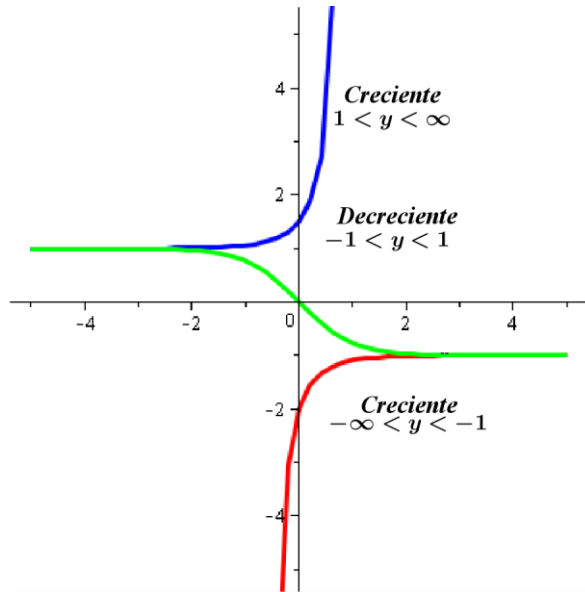


Figura 1.63 Soluciones crecientes y decrecientes para la ecuación diferencial autónoma $y' = y^2 - 1$ dibujada con software.

2. Concavidad. Ahora se analizará el criterio de concavidad, para ello se necesita derivar nuevamente a la ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$

$$y'' = 2yy' - 0$$

$$y'' = 2y(y^2 - 1)$$

$$y'' = 2y^3 - 2y$$

Se analiza que $y'' = 2y^3 - 2y$ está definida para todos los valores de y . Haciendo $y'' = 0$ se obtienen los puntos de inflexión $y = -1, 0, 1$

La tabla 13 resume la prueba para los siguientes intervalos determinados para los puntos de inflexión encontrados.

Intervalo	$-\infty < y < -1$	$-1 < y < 0$	$0 < y < 1$	$1 < y < \infty$
Valor de prueba	$y = -2$	$y = 1$	$y = 0.5$	$y = 2$
Sig. de $f''(x)$	$y'' = -20 < 0$	$y'' = 2 > 0$	$y'' = -2 < 0$	$y'' = 20 > 0$
Conclusión	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Tabla 13 Criterio de concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo para las soluciones de la ecuación diferencial autónoma $y' = y^2 - 1$.

De la tabla 13 se analiza que las soluciones de la ecuación diferencial son cóncavas hacia abajo en el intervalo $-\infty < y < -1$, son cóncavas hacia arriba en el intervalo $-1 < y < 0$, es

cóncava hacia abajo en el intervalo $0 < y < 1$ y es cóncava hacia arriba para el intervalo de $1 < y < \infty$. Geométricamente se observa en la figura 1.64.

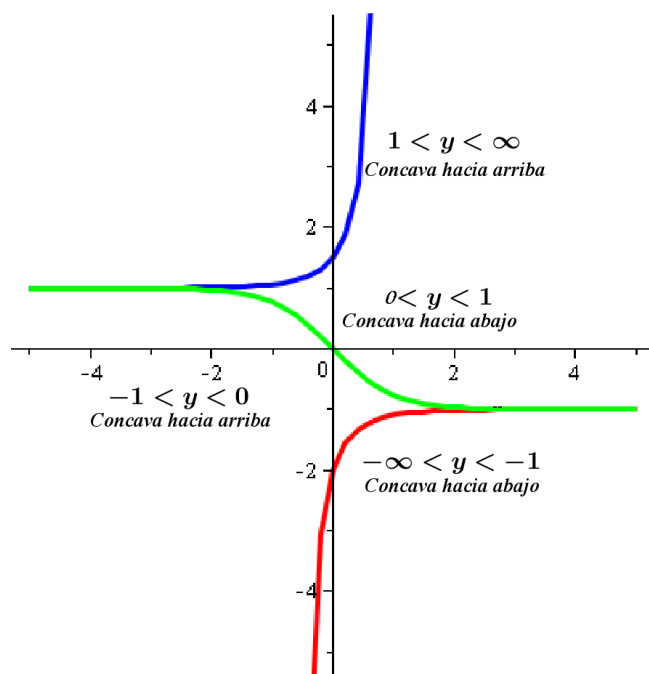


Figura 1.64 Soluciones cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo para la ecuación diferencial autónoma $y' = y^2 - 1$ dibujada con software.

- 3. Simetría.** Ahora bien si se sustituye y por $-y$ en $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ se obtendría $\frac{-dy}{dx} = y^2 - 1$, con esto se demuestra que $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ no es simétrica con respecto al eje x , ahora qué pasaría si se sustituye x por $-x$ en $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ nos quedaría $\frac{dy}{-dx} = y^2 - 1$ con esto lo que demuestra que $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ no es simétrica con respecto al eje y . Si se sustituye simultáneamente x por $-x$ y y por $-y$ en $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ se obtiene $\frac{-dy}{-dx} = (-y)^2 - 1$ o equivalentemente $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$, lo que demuestra que $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ es simétrica con respecto al origen. Así se concluye que la familia de soluciones es simétrica con respecto al origen, que geoméricamente puede observarse en la figura 1.65.

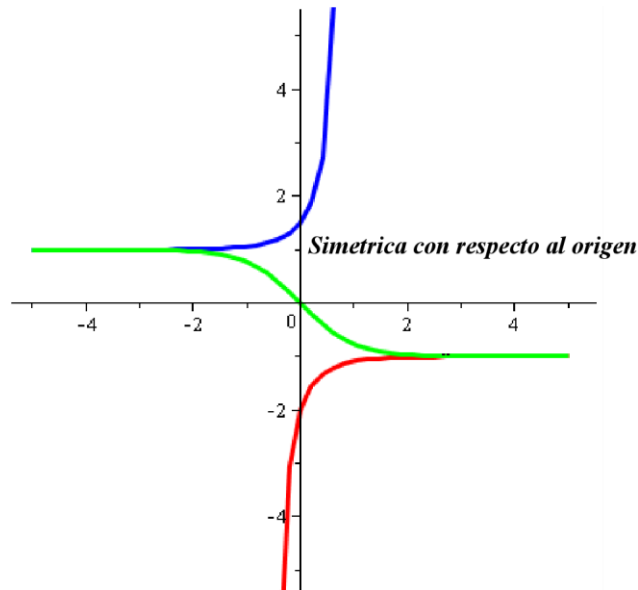


Figura 1.65 Simetría con respecto al origen de la ecuación diferencial autónoma $y' = y^2 - 1$.

4. Singularidades. En virtud de que el lado derecho de $y' = y^2 - 1$ está definido para todos los valores de y de modo que se puede concluir que en $y' = y^2 - 1$ no existe singularidad.

5. Unicidad. Este apartado se analizara profundamente en la siguiente sección.

b) Encontrar la solución analítica.

Solución.

Primero se buscan los puntos donde $y' = 0$

$$0 = y^2 - 1 \leftrightarrow y = 1 \text{ ó } y = -1$$

Obteniéndose los dos puntos de equilibrio $y(x) = 1 \forall x \in \mathbf{R}$ e $y(x) = -1 \forall x \in \mathbf{R}$.

Ahora encontrar la solución general. Como la ecuación y' es de variables separadas, se tiene:

$$\frac{y'}{y^2 - 1} = 1 \Rightarrow \int \frac{y'}{y^2 - 1} dx = \int 1 dx = x + C,$$

$$\int \frac{1}{y^2 - 1} dy = x + C$$

y separando en fracciones parciales

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{(y - 1)(y + 1)} = \frac{A}{y - 1} + \frac{B}{y + 1}$$

De modo que $1 = A(y + 1) + B(y - 1)$

De aquí se obtienen los valores de A y B

$$A = \frac{1}{2}, \quad y \quad B = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{(y - 1)(y + 1)} = \frac{\frac{1}{2}}{y - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{y + 1}$$

$$\frac{1}{y^2 - 1} = dx \text{ ó } \left[\frac{\frac{1}{2}}{y - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{y + 1} \right] dy = dx$$

Integrando se obtiene

$$\int \left[\frac{\frac{1}{2}}{y - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{y + 1} \right] dy = \int dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y + 1} = \int dx$$

$$\frac{1}{2} \ln |y - 1| - \frac{1}{2} \ln |y + 1| = x + C$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y - 1}{y + 1} \right| = x + C \text{ ó } \ln \left| \frac{y - 1}{y + 1} \right| = 2x + 2C$$

$$\left| \frac{y - 1}{y + 1} \right| = e^{2(x+C)} = e^{2C} e^{2x}$$

Donde C es una constante real arbitraria. Luego, sacando el valor absoluto

$$\frac{y - 1}{y + 1} = \pm e^{2C} e^{2x}, \quad k = \pm e^{2C}$$

De aquí se obtiene finalmente para toda constante k real no nula.

$$y(x) = \frac{1 + ke^{2x}}{1 - ke^{2x}}$$

c) Graficar el campo de pendientes y curvas soluciones de la ecuación diferencial.

Para construir el campo de pendientes, a partir de la ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$. Se considera la región rectangular donde x varía en el intervalo de $-5 \leq x \leq 5$ e y varía en el intervalo de $-5 \leq y \leq 5$ en el plano xy , se calculan valores de la función $f(x,y)$ sobre 121 puntos en esa región. Por ejemplo en el punto $(x,y) = (1,1)$, tenemos $f(x,y) = f(1,1) = 1^2 - 1 = 0$, por tanto se emboza un pequeño segmento de línea con pendiente 0 con centro en el punto $(1,1)$ en el plano xy . La pendiente numérica $m = y^2 - 1$ para todos los puntos (x,y) considerados, aparece en la intersección del renglón horizontal x y la columna vertical y de la tabla 14. Entonces para bosquejar el campo de pendientes de todos los 121 puntos se usa la función $f(x,y)$ para calcular las pendientes apropiadas

$y \backslash x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15	24
-4	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15	24
-3	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15	24
-2	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15	24
-1	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15	24
0	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15	24
1	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15	24
2	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15	24
3	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15	24
4	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15	24
5	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15	24

Tabla. 14 Resultados de los valores evaluados en la ecuación diferencial autónoma $y' = y^2 - 1$

Luego de encontrar el valor de las pendientes del conjunto de puntos, se grafica cada segmento corto de recta en cada uno de los puntos como se muestra en las figuras 1.66 y 1.67.

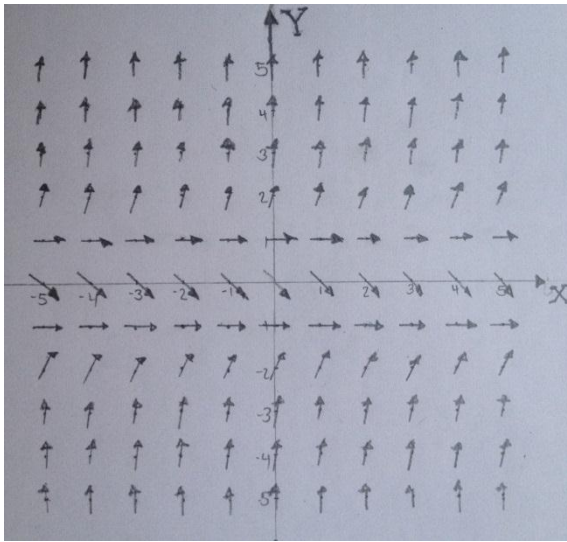


Figura 1.66 Campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ dibujado a mano.

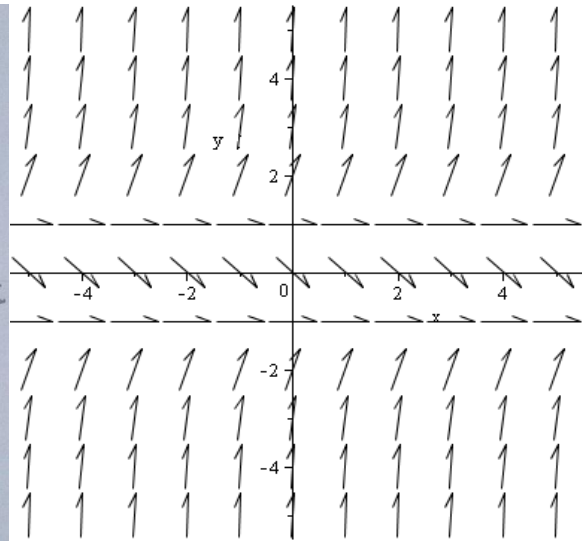


Figura 1.67 Campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ dibujado con software.

Las siguientes figuras 1.68 y 1.69, muestran una curva solución de ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ que pasan por los valores iniciales $y(-1) = 1/2, y(0) = 0, y(0) = -2$.

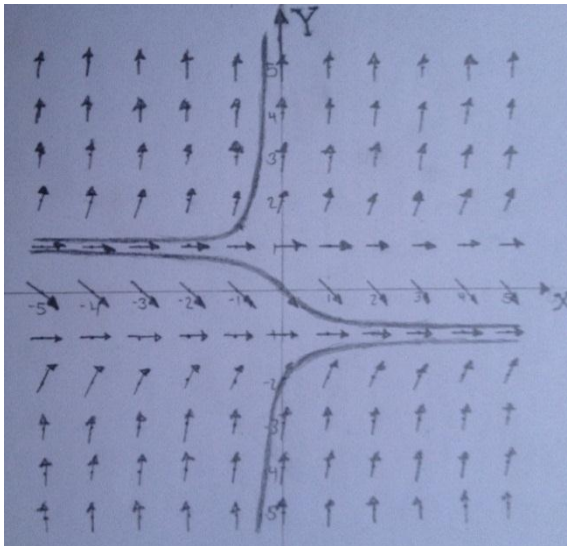


Figura 1.68 Curva solución y campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ dibujado a mano.

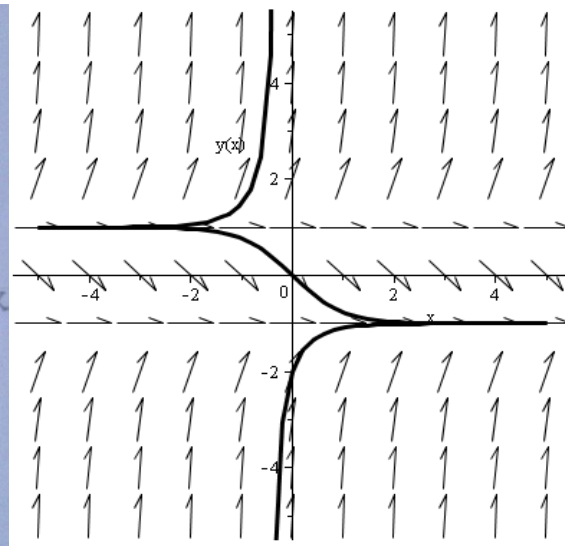


Figura 1.69 Curva solución y campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ dibujado con software.

d) **Isoclinas y curvas soluciones de la ecuación diferencial autónoma $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$**

Solución.

La isocлина correspondiente a la pendiente m esta dada por: $m = y^2 - 1$, de donde se tiene que $y = \pm\sqrt{m+1}$, el cual es una línea horizontal a través del punto $(0, \pm\sqrt{m+1})$. Todas las curvas solución de $y' = y^2 - 1$ tendrán la misma pendiente, m , cuando crucen la isocлина para el valor de x . Por ejemplo, las curvas solución de $y' = y^2 - 1$ tendrán una pendiente de $m = 0$ cuando $y = \pm 1$, tendrán una pendiente de $m = 1$ cuando $y = \pm\sqrt{2}$ y tendrán una pendiente de $m = 3$ cuando $y = \pm 2$. La figura 1.70 y 1.71 es consistente con esta información, que muestra isoclinas para $m = 0$, $m = 1$ y $m = 3$.

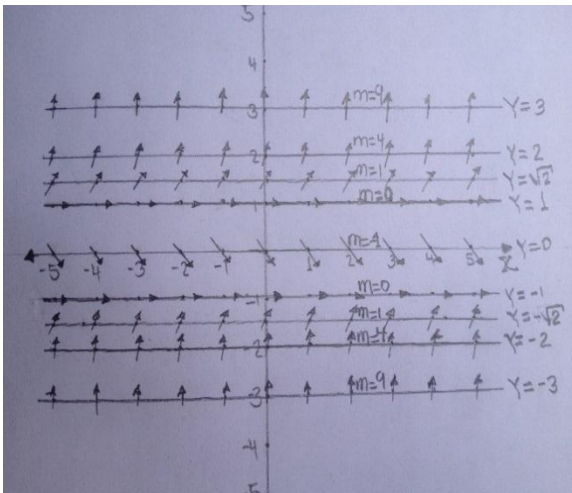


Figura 1.70 Isoclinas $m = 0$, $m = 1$ y $m = 3$ correspondientes a $y = \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm 2$ dibujas a mano.

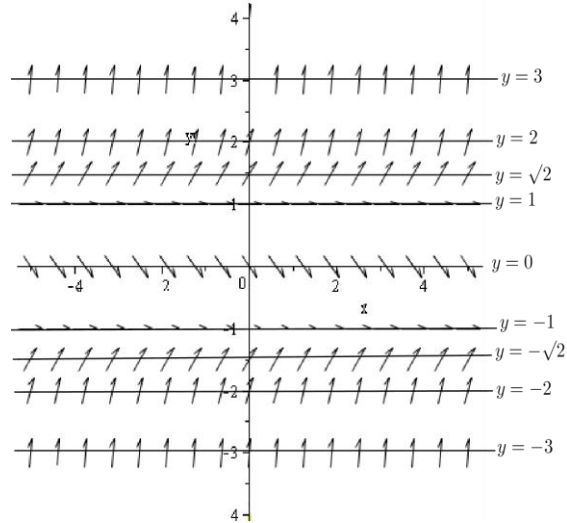


Figura 1.71 Isoclinas $m = 0$, $m = 1$ y $m = 3$ correspondientes a $y = \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm 2$ dibujas con software.

En las figuras 1.72 y 1.73, se muestran curvas solución sobre el campo de isoclinas y su respectivo campo de pendientes.

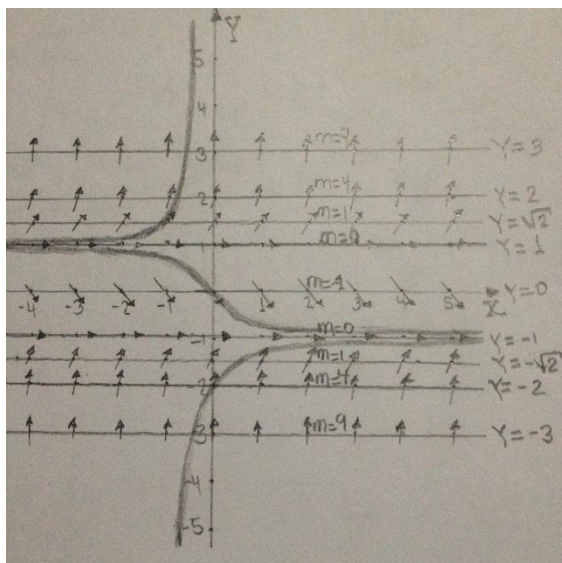


Figura 1.72 Isoclinas $m = 0$, $m = 1$ y $m = 3$ correspondientes a $y = \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm 2$, campo de pendientes y curva solución dibujas a mano.

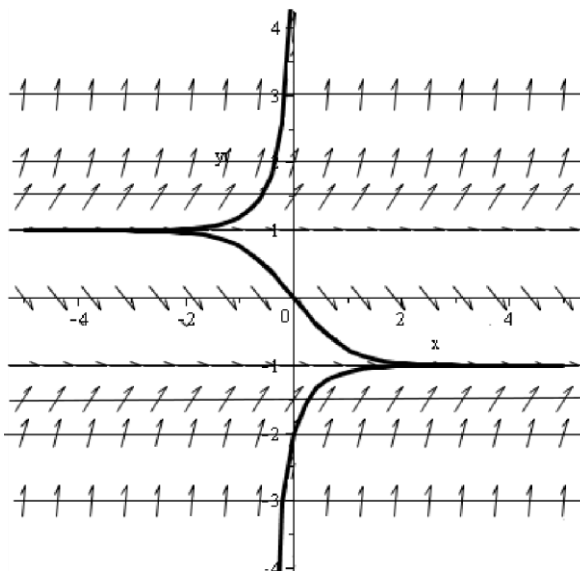


Figura 1.73 Isoclinas $m = 0$, $m = 1$ y $m = 3$ correspondientes a $y = \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm 2$, campo de pendientes y curva solución dibujas con software.

Ahora se obtendrán en un solo plano xy el comportamiento único de curvas solución de la ecuación diferencial autónoma $y' = y^2 - 1$. Como se ilustra en la figura 1.74.

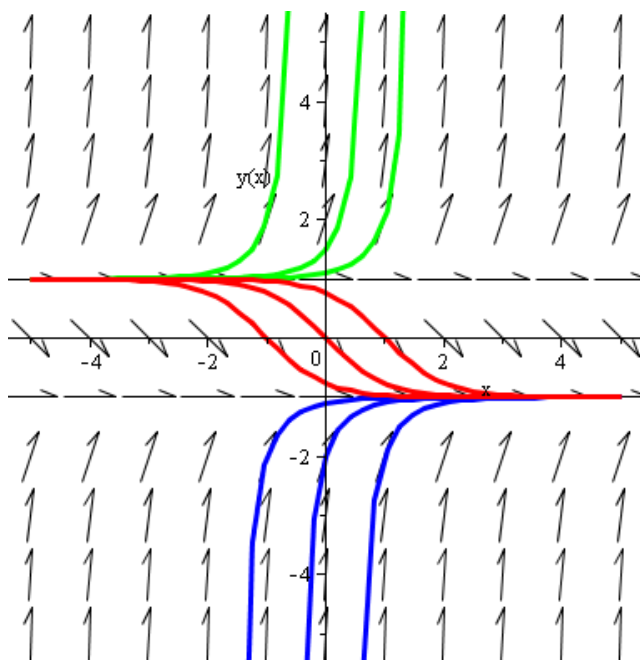


Figura 1.74 Campo de pendientes y familia de curvas solución de la ecuación diferencial autónoma $y' = y^2 - 1$ dibujada con software.

1.6 Existencia y unicidad de las soluciones.

En muchas ocasiones el análisis gráfico de una ecuación diferencial quizás no muestre todo acerca de las soluciones de una ecuación diferencial. Esto conduce a una discusión sobre las condiciones iniciales y a la unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial. La unicidad garantiza que las diferentes soluciones no se intersecten.

“El teorema de existencia y unicidad. Si $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ están definidas y son continuas en una región rectangular finita que contenga el punto (x_0, y_0) en su interior, entonces la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ tiene una solución única que pasa a través del punto $y(x_0) = y_0$. Esta solución está definida para todo x para la cual la solución permanezca en el rectángulo. Gráficamente se muestra en la figura 1.75.”⁽¹⁴⁾

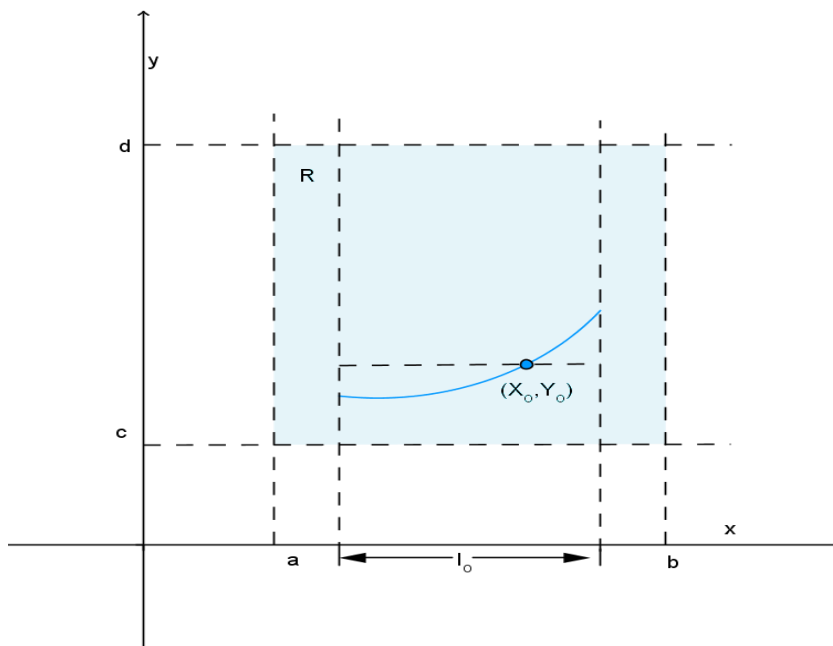


Figura 1.75. Análisis geométrico del teorema de existencia y unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales

⁽¹⁴⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICIÓN, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, México (teorema extraído de la pág. 56)

“Como analizar si existen soluciones únicas de $y' = f(x, y)$

1. Confirme que $f(x, y)$ sea continua en la vecindad de (x_0, y_0) .
2. Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}$, que puede ser una función tanto de x como de y . Verifique que esta función sea continua en la vecindad de (x_0, y_0) .
3. Si los pasos 1 y 2 se confirman, entonces existe una única solución a través de (x_0, y_0) , válida para todos los puntos en las cercanías de (x_0, y_0) . Si cualquiera de los pasos 1 o 2 falla, puede o no puede existir una solución, y si existe una, puede o no ser única.”⁽¹⁵⁾

Ejemplo 1.14. Ecuación diferencial autónoma

Considerar nuevamente la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ con la condición inicial $y(0) = 0$.

Solución

Se tiene que tanto $f(x, y) = y^2 - 1$ como su antiderivada $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^3 - 2$, son continuas en la vecindad $(0, 0)$, así que no se anticipa ningún problema de no-unicidad. Gráficamente se ilustra en la figura 1.76.

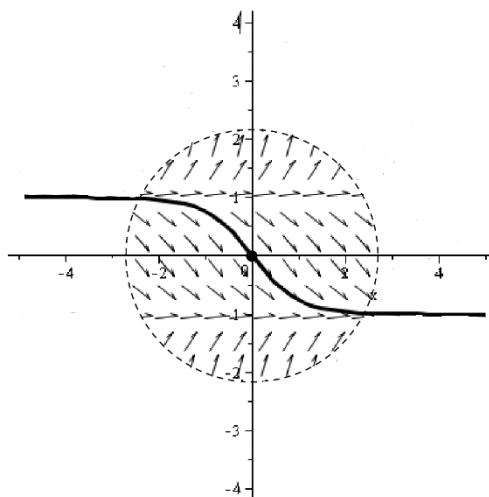


Figura. 1.76 Criterio de unicidad para la ecuación diferencial autónoma $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ con la condición inicial $y(0) = 0$

⁽¹⁵⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICION, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, MEXICO (teoría extraída de la pág. 57)

1.7 Comportamiento Cualitativo de Soluciones utilizando Líneas de Fase

“Existe otra manera de analizar ecuaciones diferenciales autónomas, aplicando lo que se conoce como **análisis de línea de fase**. Este método no ofrece una solución explícita, pero proporciona dar el comportamiento cualitativo de las soluciones con muy pocos cálculos. La clave de esta técnica es el teorema de existencia y unicidad, el cual garantiza que las soluciones no pueden intersectarse.”⁽¹⁶⁾

Ejemplo 1.15 Ecuación diferencial autónoma

“Determinar los puntos de equilibrio y línea de fase de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$.”⁽¹⁷⁾

Solución.

Como es habitual, primeramente se hallan las soluciones de equilibrio de $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$, las cuales son $y(x) = 1$ y $y(x) = -1$. Del teorema de existencia y unicidad se sabe que ninguna otra curva solución puede cruzarse con cualquiera de estas soluciones. Teniendo en cuenta estos puntos de equilibrios la tabla 15 proporciona más detalles.

Intervalo	$-\infty < y < -1$	$-1 < y < 1$	$1 < y < \infty$
Valor de prueba	$y = -2$	$y = 0$	$y = 2$
Signo de $f'(y)$	$f'(-2) = 3$	$f'(0) = -1$	$f'(2) = 3$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Creciente

Tabla 15 Criterio de monotonía para las soluciones de la ecuación diferencial autónoma $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$.

En la tabla 15 se puede observar que $f(y)$ es negativo si $-1 < y < 1$ mientras que $f(y)$ es positivo si $y < -1$ o $1 < y$. Se puede dibujar la línea de fase colocando puntos en los puntos de equilibrio $y = 1$ y $y = -1$. Para $-1 < y < 1$ se colocan flechas señalando hacia abajo o izquierda por que $f(y) < 0$, y para $y < -1$ o $y > 1$, se colocan flechas señalando hacia arriba o derecha por que $f(y) > 0$, como se muestra geoméricamente en la figura 1.77.

⁽¹⁶⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICION, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, MEXICO (teoría extraída de la pág. 65)

⁽¹⁷⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICIÓN, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, México (ejercicio extraído de la guía de ejercicios 4 propuesto en la pág. 35)

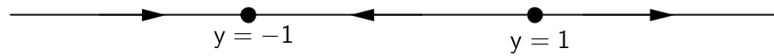


Figura 1.77 Análisis de fase para la ecuación diferencial autónoma $y' = y^2 - 1$.

Si se compara la línea de fase con el campo de pendientes, se ve que la primera contiene toda la información acerca de las soluciones de equilibrio y de si las soluciones son crecientes o decrecientes. Geométricamente muestra en la figura 1.78.

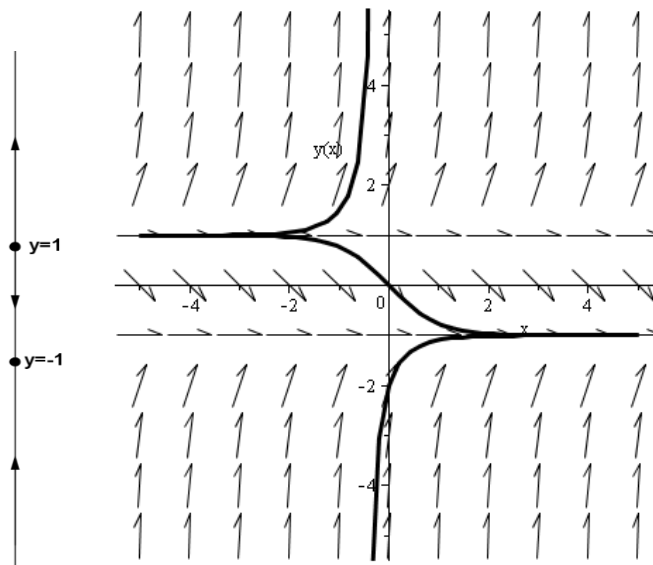


Figura 1.78 Comportamiento de similaridad de diagrama de fase, el campo de pendientes y curva solución para la ecuación diferencial autónoma $y' = y^2 - 1$.

Ejemplo 1.16 Líneas de fase

“Determinar los puntos críticos y el esquema de fase de la ecuación diferencial autónoma de primer orden dado. Clasifique cada punto crítico como asintóticamente estable, inestable o semiestable. Dibuje a mano curvas solución típicas en las regiones del plano xy determinadas por las gráficas de las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial autónoma $\frac{dy}{dx} = y(2 - y)(4 - y)$.”⁽¹⁸⁾

Solución.

⁽¹⁸⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (el ejemplo desarrollado es el ejercicio 26 que aparece propuesto en la pág.43).

Encontrar primeramente las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial las cuales son $y(x) = 0, y(x) = 2, y(x) = 4$. Por el teorema de existencia y unicidad puede confirmarse que ninguna otra solución puede cruzarse con cualquiera de estas soluciones. Se enfocara en las cuatro regiones formadas por estas soluciones de equilibrio donde los valores de y están dados de la forma $y < 0, 0 < y < 2, 2 < y < 4$ finalmente $4 < y$.

Se utilizara el criterio de la primera derivada para detallar de mejor forma el esquema de fase de la ecuación diferencial ver la tabla 16.

Intervalo	$y < 0$	$0 < y < 2$	$2 < y < 4$	$y > 4$
Valor de prueba	$y = -1$	$y = 1$	$y = 3$	$y = 5$
Signo de $f'(x)$	$y' = -15 < 0$	$y' = 3 > 0$	$y' = -3 < 0$	$y' = 15 > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

Tabla 16. Criterio de crecimiento y decrecimientos para las soluciones de la ecuación diferencial autónoma $\frac{dy}{dx} = y(2 - y)(4 - y)$

1. En $y < 0$. Si $y < 0$, entonces sustituyendo un valor de y menor que cero en $\frac{dy}{dx} = y(2 - y)(4 - y)$ donde $y' < 0$, de modo que en esta región y es una función decreciente de x . Si $y(x) < 0$ para cualquier valor de x , entonces, a medida que se incrementa x , y se aleja de la solución de equilibrio $y(x) = 0$.
2. En $0 < y < 2$. se puede observar que si evalúa un valor de y dentro de este intervalo en y' se obtiene que $y' > 0$, entonces la solución $y(x)$ será una función creciente de x . No puede intersectar $y(x) = 2$.
3. En $2 < y < 4$. Se puede ver que si se evalúa un valor de y dentro de este intervalo en y' se tiene que $y' < 0$, entonces se puede decir que $y(x)$ es una función decreciente de x en esta región y no puede intersectar a $y(x) = 2$.
4. En $y > 4$. Si $y > 4$, entonces sustituyendo un valor y mayor que 4 en y' se obtiene que $y' > 0$, de modo que y es creciente de x en esta región. A medida que se incrementa x , y se aleja de la solución de equilibrio $y(x) = 4$

Puede expresarse este hecho gráficamente trazando una línea recta horizontal para representar los valores de y e identificar las soluciones de equilibrio mediante los puntos 0, 2 y 4, llamados PUNTOS DE EQUILIBRIO. Entonces en las cuatro regiones $y < 0, 0 < y < 2,$

$2 < y < 4$, $y > 4$. Se colocan flechas para indicar si una solución $y(x)$ se aleja o se acerca a la solución de equilibrio en su frontera, a medida va aumentando x . Por ejemplo para el caso obsérvese que $y < 0$, entonces y se aleja de la solución de equilibrio $y = 0$ por lo cual indicamos con flechas que apuntan a la izquierda. De esta forma se realiza el procedimiento para los demás casos como se muestra geoméricamente en la figura 1.79. Llamada la LINEA FASE.

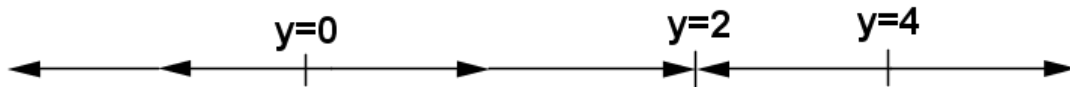


Figura 1.79 Análisis de línea de fase para la ecuación diferencial autónoma $y' = y(2 - y)(4 - y)$ dibujada con software

Que $y = 0$ sea una solución de equilibrio inestable se caracteriza por flechas en cada extremo del punto de equilibrio, cada una apunta lejos de él. Las flechas que apuntan hacia un punto de equilibrio indican una solución de equilibrio estable, en este caso $y = 2$.

Luego para poder dibujar algunas de sus curvas solución hay que encontrar los puntos de concavidad de la función para poder tener una mejor idea del comportamiento de las curvas y presentar de una forma más detallada, geoméricamente se muestra en la figura 1.80.

Se obtiene la segunda derivada de la ecuación diferencial autónoma $\frac{dy}{dx} = y(2 - y)(4 - y)$ para encontrar los puntos de concavidad y nos queda: $y'' = 3y^2y' - 12yy' + 8y'$

$$y'' = 3y^2(y^3 - 6y^2 + 8y) - 12y(y^3 - 6y^2 + 8y) + 8(y^3 - 6y^2 + 8y)$$

$$y'' = 3y^5 - 30y^4 + 104y^3 - 144y^2 + 64y$$

Luego aplicando división sintética y la fórmula cuadrática para poder encontrar los puntos de inflexión.

Y queda que los puntos de inflexión son $y = 4, 3.15, 2, 0.84, 0$. Ver el resumen de cada intervalo de evaluación en la tabla 17

Intervalo	$y < 0$	$0 < y < 0.84$	$0.84 < y < 2$	$2 < y < 3.15$	$3.15 < y < 4$	$y > 4$
Valor de prueba	$y = -1$	$y = 0.5$	$y = 1$	$y = 3$	$y = 3.5$	$y = 5$
Signo de y''	$y'' = -345 < 0$	$y'' = 7.22 > 0$	$y'' = -3 < 0$	$y'' = 3 > 0$	$y'' = -7.2 < 0$	$y'' = 345 > 0$
Conclusión	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava arriba

Tabla 17. Criterio de concavidad para las soluciones de la ecuación diferencial autónoma $\frac{dy}{dx} = y(2 - y)(4 - y)$.

Los datos encontrados muestran una forma más detallada y segura la idea para poder graficar ciertas curvas en el plano correspondientes a la ecuación diferencial $y' = y(2 - y)(4 - y)$. Si se compara la línea de fase con el campo de pendientes se ve que la primera contiene toda la información acerca de las soluciones de equilibrio y del criterio de la monotonía. Geométricamente se pueden observar en la figura 1.80 y la figura 1.81.

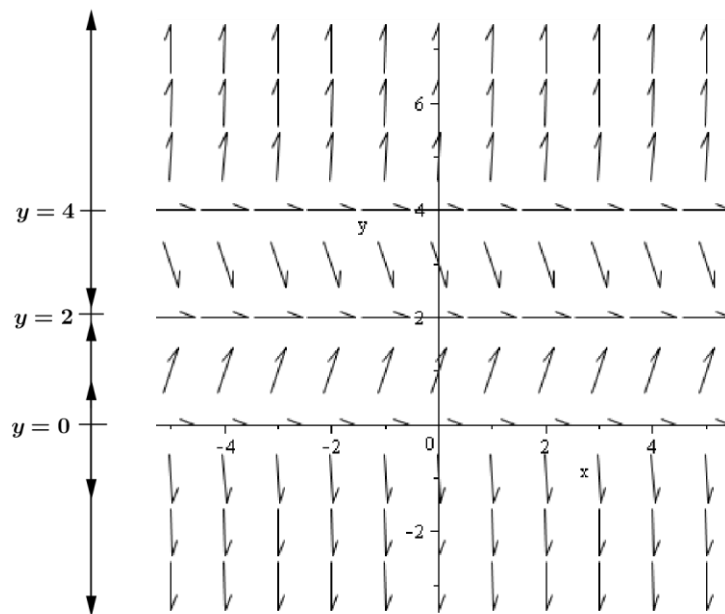


Figura 1.80 Comportamiento de similitud del diagrama de línea fase y el campo de pendientes de la ecuación diferencial autónoma $y' = y(2 - y)(4 - y)$.

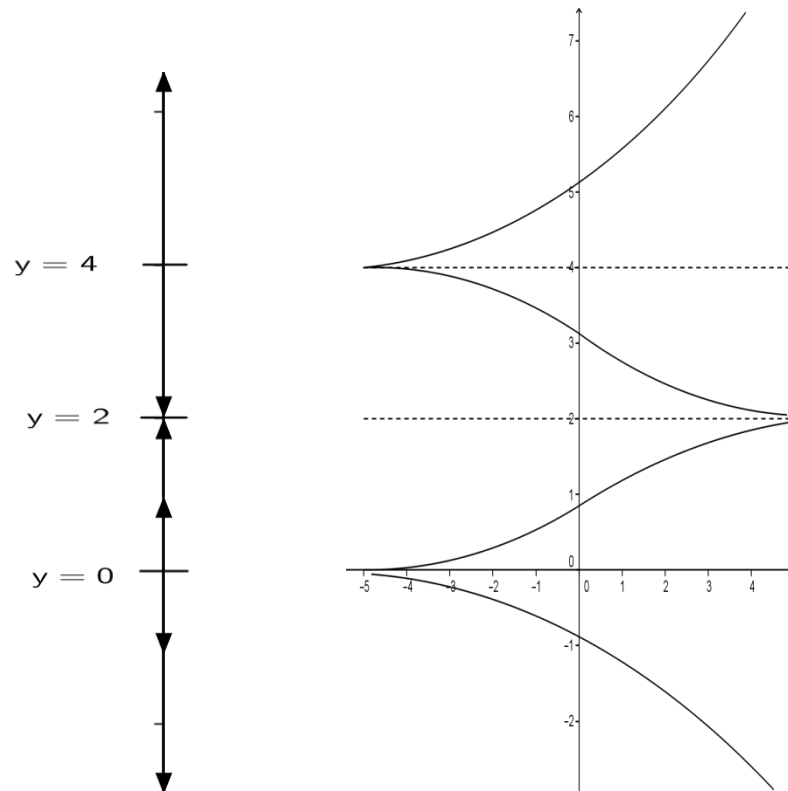


Figura 1.81. Diagrama de línea fase y algunas curvas solución de la ecuación diferencial autónoma $y' = y(2 - y)(4 - y)$ dibujada con software.

Ahora se resumen algunas ideas acerca de las líneas de fase.

“Resumen

- Una manera simple de construir la línea de fase para $y' = f(y)$ consiste en trazar la gráfica de $f(y)$ como una función de y , tomando y como el eje horizontal.
 - a) Los puntos de equilibrio se encuentran donde la gráfica de $f(y)$ cruza el eje y por lo tanto, que identifique estos puntos sobre el eje y .
 - b) Los valores de y para los cuales $f(y) > 0$ se encuentran donde la función y es creciente. Identifique esas regiones sobre el eje y con flechas que apuntan hacia la derecha.
 - c) Los valores de y para los cuales $f(y) < 0$ se encuentran donde la función y es decreciente. Identifique esas regiones sobre el eje y con flechas que apuntan hacia la izquierda.
 - d) El eje y es ahora la línea fase.

- Otra manera de concebir la línea de fase consiste en imaginarse las curvas solución proyectadas sobre el eje y . Si se imagina lo que se observa hacia abajo del eje x desde $x = \infty$, y posteriormente se proyectan las direcciones de todas las curvas solución sobre el eje y , se podrían caracterizar las propiedades de estas soluciones con flechas a lo largo del eje vertical. Al girar esta línea 90 grados.”⁽¹⁹⁾

1.8 Definiciones y Propiedades

A partir del desarrollo de todos los ejemplos vistos anteriormente en cada subtema se construyen las siguientes definiciones y propiedades:

Definición 1.1 Ecuación Diferencial (ED)

“Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial (ED)**. En otras palabras se llama Ecuación Diferencial a una ecuación que liga la variable independiente x , la función incógnita $y = y(x)$ y sus derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$, es decir, una ecuación de la forma $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.”⁽²⁰⁾

Definición 1.2: Familia de soluciones

Cuando se resuelve una ecuación diferencial de primer orden $G(x, y, y') = 0$, normalmente se obtiene una solución que contiene una sola constante arbitraria o parámetro c . Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto $F(x, y, c) = 0$ de soluciones llamado **familia de soluciones uniparamétrica**. Al resolver una ecuación diferencial de orden n , $G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ buscamos una **familia de soluciones n-paramétrica** $F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$. Esto significa que una sola ecuación diferencial puede tener un número infinito de soluciones correspondiendo a un número ilimitado de elecciones de los parámetros. Una solución de una ecuación diferencial que está libre de la elección de parámetros se llama **solución particular**.

⁽¹⁹⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICION, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, MEXICO (teoría extraída de la pág. 67)

⁽²⁰⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (Definición extraída de la pág. 2)

Definición 1.3: Traslación vertical

Si se obtiene la función $y = f(x) + K$

- a) Si $K > 0$ la función se traslada hacia arriba
- b) Si $K < 0$ la función se traslada hacia abajo

Definición 1.4: Traslación Horizontal

La gráfica de $y = f(x + h)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada hacia la derecha si h es negativa y desplazada hacia la izquierda si h es positiva. De manera que, la gráfica de $y = f(x + h)$ se puede obtener de la gráfica de $y = f(x)$ al trasladar horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$, h unidades hacia la izquierda si h es positiva y h unidades hacia la derecha si h es negativa.

Definición 1.5: Orden de una ecuación diferencial

“El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación diferencial.”⁽²¹⁾

Definición 1.6 Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden

“Es una ecuación que contiene a lo más la primera derivada de una función desconocida. Si y , la función desconocida, es una función de x , entonces la ecuación diferencial de primer orden se escribe

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Donde $f(x, y)$ es una función de dos variables x y y .”⁽²²⁾

Definición 1.7 “Solución explícita de una Ecuación Diferencial Ordinaria de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

⁽²¹⁾ Spieguel, Murray R., 1994, ecuaciones diferenciales aplicadas, tercera edición, editorial PROGRAMAS EDUCATIVOS S. A. Calz. de Chabacano 65 local A Col. Asturias Del. Cuauhtémoc, México, D. F. (teoría extraída de la pág. 8

⁽²²⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICIÓN, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, México (Definición extraída de la pág. 3)

es una función $y = y(x)$, con una derivada en un intervalo $a < x < b$, la cual satisface idénticamente la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.⁽²³⁾

Definición 1.8 problema de valor inicial

“Un problema de valor inicial es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de la variable independiente. Tales condiciones se llaman **condiciones iniciales**.”⁽²⁴⁾

Definición 1.9 Crecimiento y decrecimiento de una función

Crecimiento/decrecimiento. La interpretación de la derivada $\frac{dy}{dx}$ como una función que da la pendiente juega el papel principal en la construcción de un campo direccional. A continuación se usará contundente propiedad de la primera derivada, es decir, si $\frac{dy}{dx} > 0$ ó $(\frac{dy}{dx} < 0)$ para toda x en un intervalo I , entonces una función derivable $y = y(x)$ es creciente (o decreciente) en I .

Definición 1.10 Monotonía

Una función es monótona en un intervalo si es creciente en todo el intervalo, o bien es decreciente en todo el intervalo.

Definición 1.11 Concavidad

Sea f derivable en un intervalo abierto I . La gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I si f' es creciente en el intervalo y cóncava hacia abajo en I si f' es decreciente en el intervalo.

Definición 1.12 Simetría

- La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje y si al sustituir x por $-x$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.

⁽²³⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICIÓN, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, México (Definición extraída de la pág. 4)

⁽²⁴⁾ Spiegel, Murray R., 1994, ecuaciones diferenciales aplicadas, tercera edición, editorial PROGRAMAS EDUCATIVOS S. A. Calz. de Chabacano 65 local A Col. Asturias Del. Cuauhtémoc, México, D. F. (Definiciones extraídas de la pág. 8)

- La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje x si al sustituir y por $-y$ en la ecuación se obtiene un ecuación equivalente.
- La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al origen si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación se obtiene un ecuación equivalente.

Definición 1.13 Singularidad

Una función $f(x)$ es singular en $x = a$ si el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe.

Definición 1.14 Unicidad

La “unicidad” significa que para todas las “ x ” hay un solo resultado, o dicho de otro modo a cada valor de “ x ” le corresponde un solo punto en la curva.

Definición 1.15 asíntota horizontal

La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de a gráfica de f si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

Definición 1.16 Campo de direccional o campo de pendientes

“Es una colección formada por segmentos cortos de rectas recibe el nombre de **campo de pendientes** de la ecuación diferencial, ya que proporciona un segmento corto de la línea tangente a la curva solución por cada punto seleccionado.”⁽²⁵⁾

Definición 1.17 Curva solución de una ecuación diferencial ordinaria

“La gráfica de una solución φ de una Ecuación Diferencial Ordinaria se llama **curva solución**. Puesto que φ es una función derivable, es continua en su intervalo de definición I . Puede haber diferencia entre la gráfica de la función φ y la gráfica de la solución φ . Es decir, el dominio de la función φ no necesita ser igual al intervalo de definición I (o dominio) de la solución φ .”⁽²⁶⁾

Definición 1.18 Campo de Isoclinas

⁽²⁵⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICIÓN, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, México (definición extraída de la pág. 12)

⁽²⁶⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (Definición extraída de la pág. 5)

“Una isoclina es una curva compuesta por lo puntos, de los elementos de una familia de curvas, en donde las tangentes tienen la misma inclinación (la misma pendiente)

Es otras palabras una isoclina correspondiente a la pendiente m de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ es la curva caracterizada por la ecuación $f(x, y) = m$.”(27)

Definición 1.19 Polinomio de Taylor

Si f tiene n derivadas en c , entonces el polinomio

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^n(c)}{n!}(x - c)^n$$

Se llama **polinomio de Taylor de grado n para f en el punto c**

Definición 1.20 Ecuación Diferencial autónoma de primer orden

“Una ecuación diferencial autónoma de primer orden es una ecuación de la forma $y' = f(y)$ donde $f(y)$ es una función dada continua.”(28)

Definición 1.21 Puntos de equilibrio o soluciones estacionarias

“Se llama punto de equilibrio o solución estacionaria de una ecuación diferencial a una solución $y(x) = a$ constante para todo $x \in R$. Es decir las soluciones estacionarias o puntos de equilibrio son aquellas cuyas gráficas son rectas horizontales.”(30)

Definición 1.22 Solución de equilibrio de una ecuación diferencial

“Sea la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ una ecuación que tenga una solución de equilibrio, es decir, una solución de la forma $y(x) = constante$. Una solución de equilibrio se denomina ESTABLE si todas las soluciones de la ecuación diferencial que parten acerca de

(27) Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICIÓN, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, México (definición extraída de la pág. 18)

(28) Catsigeras, Eleonora., 2013, Ecuaciones Diferenciales Autónomas y Estabilidad de los Puntos de Equilibrio complemento sobre ecuaciones diferenciales para los cursos de cálculo, notas para el curso de cálculo II de la facultad de ingeniería AV. Herrera y Reissig, Montevideo. Uruguay. (Definición y proposición extraídas de la pág. 1 y 2).

esta solución de equilibrio permanecen cercanas a dicha solución de equilibrio a medida que $x \rightarrow \infty$. Una solución de equilibrio es INESTABLE si todas las otras soluciones de la ecuación diferencial que parten de las cercanías de esta solución de equilibrio se alejan de esta solución de equilibrio a medida que $x \rightarrow \infty$. Si una solución de equilibrio no es ni estable ni inestable, recibe el nombre de SEMIESTABLE.”⁽²⁹⁾

Ejercicios I

“Reproduzca el campo direccional dado generado por computadora. Después dibuje a mano, una curva solución aproximada que pase por cada uno de los puntos indicados en los siguientes ejercicios.”⁽³⁰⁾

$$1) \frac{dy}{dx} = 1 - xy$$

$$a) y(0) = 0, b) y(-1) = 0, c) y(2) = 2, d) y(0) = -4$$

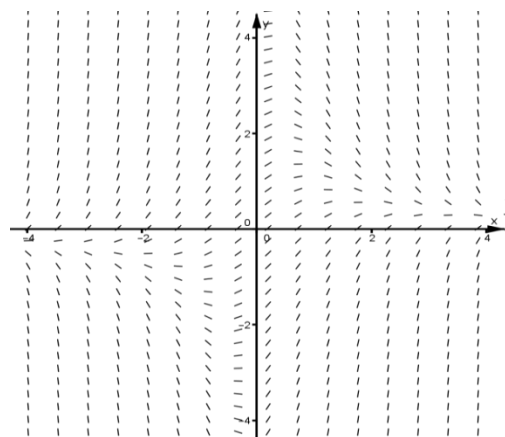


Figura 1.82 Campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 1 - xy$.

$$2) \frac{dy}{dx} = e^{-0.01xy^2}$$

$$a) y(-6) = 0 \qquad b) y(0) = 1$$

$$c) y(0) = -4 \qquad d) y(8) = -4$$

⁽²⁹⁾ Lomen, David., Lovelock, David, 2000, Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos, PRIMERA EDICIÓN, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, México (definición y teorema extraídos de la pág. 34, 61)

⁽³⁰⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (ejercicios propuestos en la pág.41).

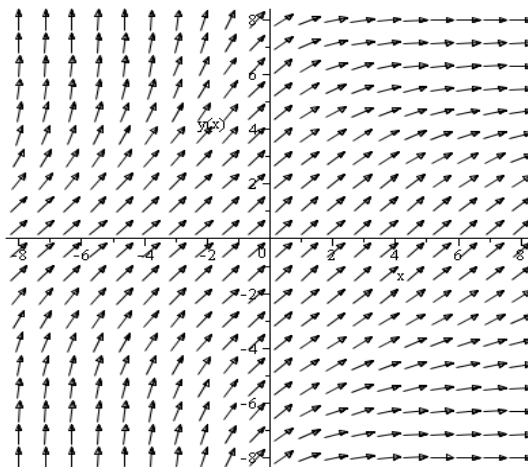


Figura 1.83 Campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 1 - xy$.

“En los problemas 3 y 4 utilice primero el método del ejemplo 1.4 a fin de construir un campo de isóclinas para la ecuación diferencial dada. Luego trace la curva solución correspondiente a la condición inicial dada. Finalmente, use esta curva solución para estimar el valor deseado de la solución $y(x)$.

3) $y' = x + y, \quad y(0) = 0; y(-4) = ?$

4) $y' = y - x, \quad y(4) = 0; y(-4) = ?$

En los problemas 5 y 6 son como los problemas 3 y 4, pero use ahora un sistema de algebra en computadora para graficar e imprimir un campo de pendientes de la ecuación diferencial dada. Si lo desea (y sabe cómo), puede revisar su trazo manual de la curva solución graficándola con la computadora.”⁽³¹⁾

5) $y' = x^2 + y^2 - 1, \quad y(0) = 0; y(2) = ?$

6) $y' = x + \frac{1}{2}y^2, y(-2) = 0; y(2) = ?$

⁽³¹⁾ C.HENRY EDWARDS, DAVID E PENNEY. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, cómputo y modelado. Cuarta edición (Ejercicios extraídos de la pág. 28 y 29).

CAPÍTULO II

MÉTODOS NUMÉRICOS.

“Aun cuando se pueda demostrar que la solución de una ecuación diferencial exista, no siempre es posible expresarla en forma explícita o implícita. En muchos casos hay que conformarse con una aproximación de la solución. Si la solución existe, se representa por un conjunto de puntos en el plano cartesiano. En este capítulo se continúa investigando la idea básica de cómo utilizar la ecuación diferencial para construir un algoritmo para aproximar las coordenadas y de los puntos de la curva solución real. El interés en este capítulo se enfoca principalmente en los problemas de valores iniciales (PVI). Los procedimientos numéricos a desarrollarse para las ecuaciones diferenciales de primer orden se generalizarán de una manera natural para sistemas de ecuaciones de primer orden y por tanto se pueden aproximar soluciones de una ecuación superior remodelándola como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Este capítulo concluye con un método numérico para aproximar soluciones de una ecuación diferencial de problemas con valores en la frontera lineales de segundo orden”.⁽³²⁾

2.1 Uso de la recta tangente para aproximar la solución de una ecuación diferencial

“En esta sección se va desarrollar únicamente el más sencillo de los métodos numéricos, un método que utiliza la idea de que se puede usar una recta tangente para aproximar los valores de una función en una pequeña vecindad del punto de tangencia.

Suponer que el problema con valores iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

⁽³²⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (pequeña introducción extraída de la pág.339).

tiene una solución. Una manera de aproximar esta solución es usar rectas tangentes. Por ejemplo, sea que $y(x)$ denote la solución incógnita para el problema con valores iniciales $\frac{dy}{dx} = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$. Esta ecuación diferencial es un problema de valor inicial que se puede resolver directamente por un método considerado para resolver ecuaciones diferenciales; no obstante, aún se pueden encontrar valores numéricos aproximados de la solución incógnita $y(x)$. En concreto, suponer que se desea conocer el valor de $y(1.50)$. El problema de valor inicial tiene una solución y como el flujo del campo de pendientes de la ecuación diferencial que se muestra geoméricamente en la figura 2.1b sugiere, una curva solución debe tener una forma similar a la curva que se muestra en azul.

El campo de pendientes de la figura 2.1b se generó con elementos lineales que pasan por puntos de una malla de coordenadas enteras. Puesto que la curva solución pasa por el punto inicial $(1, 5)$, el elemento lineal en este punto es una recta tangente con pendiente dada por $f(1, 5) = 2(1) - 3(5) + 1 = -12$. Como se muestra en la figura 2.1b y el “zoom in” (acercamiento) de la figura 2.1a, cuando x está cerca de 1, los puntos en la curva solución están cerca de los puntos de la recta tangente (el elemento lineal). Utilizando el punto $(1, 5)$, la pendiente $f(1, 5) = -12$ y la forma punto pendiente de una recta, se encuentra que una ecuación de la recta tangente es $y = L(x)$, donde $L(x) = -12x + 17$ esta última ecuación se llama **linealización** de $y(x)$ en $x = 1$, que se puede utilizar para aproximar los valores dentro de una pequeña vecindad de $x = 1$. Si $y_1 = L(x_1)$ denota la coordenada y en la recta tangente y $y(x_1)$ es la coordenada y de la curva solución correspondiente a una coordenada x , x_1 que está cerca de $x = 1$, entonces $y(x_1) \approx y_1$. Si se elige, $x_1 = 1.1$, entonces $y_1 = L(1.1) = -12(1.1) + 17 = 3.8$, entonces $y(1.1) \approx 3.8$.⁽³³⁾

El campo de pendientes se genera a partir de los valores evaluados en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x - 3y + 1$, donde x varía en el intervalo $-5 \leq x \leq 5$ e y varía en el intervalo de $-5 \leq y \leq 5$ en el plano xy , se calculan valores de la función $f(x, y)$ y se grafican los 121 puntos que se obtienen al hacer la evaluación. Por ejemplo en el punto $(x, y) = (1, 1)$, tiene que $f(x, y) = f(1, 1) = 2(1) - 3(1) + 1 = 0$, por tanto se emboza un

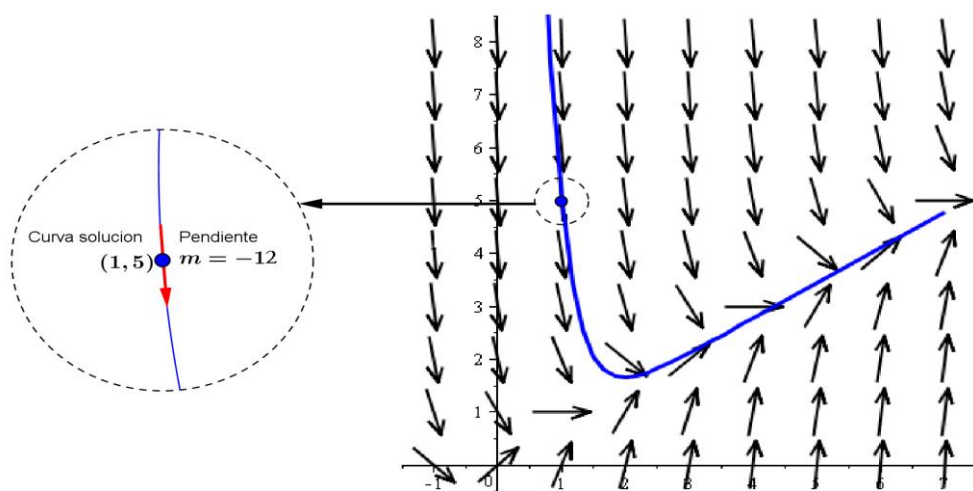
⁽³³⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (el ejemplo resuelto es el ejercicio 1 que aparece en la guía 2.6 de la pág.79 y la teoría aparece en la pág. 75 y 76).

pequeño segmento corto de recta con pendiente $m = 0$ y centro en el punto $(1,1)$. La pendiente numérica $m = 2x - 3y + 1$ aparece en la intersección del renglón horizontal x y la columna vertical y de la tabla 18.

$y \backslash x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	6	3	0	-3	-6	-9	-12	-15	-18	-21	-24
-4	8	5	2	-1	-4	-7	-10	-13	-16	-19	-22
-3	10	7	4	1	-2	-5	-8	-11	-14	-17	-20
-2	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12	-15	-18
-1	14	11	8	5	2	-1	-4	-7	-10	-13	-16
0	16	13	10	7	4	1	-2	-5	-8	-11	-14
1	18	15	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12
2	20	17	14	11	8	5	2	-1	-4	-7	-10
3	22	19	16	13	10	7	4	1	-2	-5	-8
4	24	21	18	15	12	9	6	3	0	-3	-6
5	26	23	20	17	14	11	8	5	2	-1	-4

Tabla 18 Resultado de valores evaluados en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x - 3y + 1$.

Geoméricamente se representa el campo de pendientes en la figura 2.1b dibujado a software:



a) Elemento lineal en $(1, 5)$.

b) Campo de pendientes y curva solución para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x - 3y + 1$.

Figura 2.1 Amplificación de una vecindad del punto $(1,5)$

2.2 Método de Euler

“Para generalizar el procedimiento que se acaba de ilustrar, se usa la linealización de una solución incógnita $y(x)$ de $y' = f(x, y)$ sujeta a $y(x_0) = y_0$ en $x = x_0$:

$$L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

La gráfica de esta linealización es una recta tangente a la gráfica de $y = y(x)$ en el punto (x_0, y_0) . Ahora hacemos que h sea un incremento positivo del eje x , como se muestra en la figura 2.2. Entonces, sustituyendo x por $x_1 = x_0 + h$ en la ecuación $L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$, se obtiene:

$$L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_0 + h - x_0) \quad \text{o} \quad y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0),$$

Donde $y_1 = L(x_1)$, el punto (x_1, y_1) en la recta tangente es una aproximación del punto $(x_1, y(x_1))$ sobre la curva solución. Por supuesto, la precisión de la aproximación $L(x_1) \approx y(x_1)$ o $y_1 \approx y(x_1)$ depende fuertemente del tamaño del incremento de h . Normalmente se debe elegir este **tamaño de paso** para que sea “razonablemente pequeño”. Ahora se repite el proceso usando una segunda “recta tangente” en (x_1, y_1) . Identificando el nuevo punto inicial como (x_1, y_1) en lugar de (x_0, y_0) del análisis anterior, se obtiene una aproximación $y_2 \approx y(x_2)$ correspondiendo a dos pasos de longitud h a partir de x_0 , es decir, $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2 \cdot h$, y

$$y(x_2) = y(x_0 + 2h) = y(x_1 + h) \approx y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1).$$

Continuando de esta manera, se ve que y_1, y_2, y_3, \dots , se puede definir sucesivamente mediante la fórmula general iterativa:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (n \geq 0)$$

donde $x_n = x_0 + n \cdot h$, y $n = 0, 1, 2, \dots$ este procedimiento de uso sucesivo de las “rectas tangentes” se llama **Método de Euler**. Geométricamente se muestra en la figura 2.2

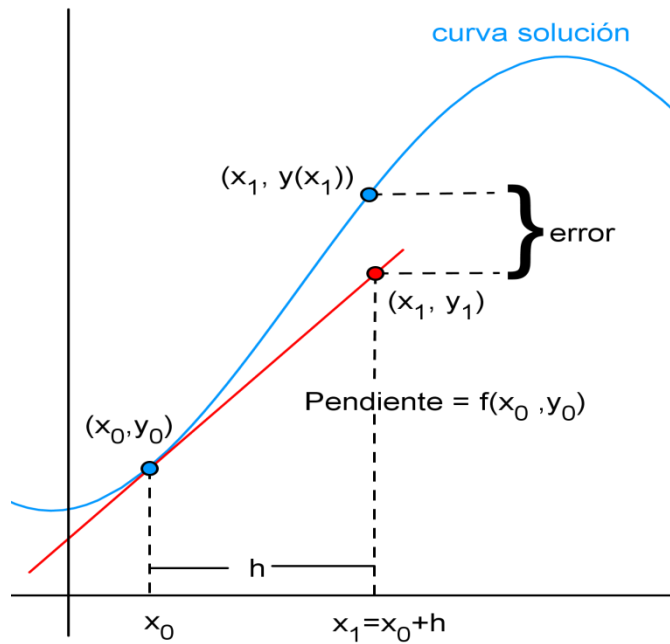


Figura 2.2 Aproximación de $y(x_1)$ usando una recta tangente.

Ejemplo 2.1: Método de Euler

“Utilizar el método de Euler para obtener una aproximación del valor indicado para la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3y + 1, \quad y(1) = 5$$

Primero con tamaño de paso $h = 0.1$ y después con tamaño de paso $h = 0.05$ para aproximar $y(1.50)$ ”.⁽³⁴⁾

Solución.

Con la identificación $f(x, y) = 2x - 3y + 1$ y $h = 0.1$ la ecuación $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$ se convierte en:

⁽³⁴⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (el ejemplo resuelto es el ejercicio 1 que aparece en la guía 9.1 de la pág.34). Todos los pasos que faltan están desarrollados en el disco de evidencia de trabajo.

$$y_{n+1} = y_n + (0.1)[2x_n - 3y_n + 1] = y_n + 0.2x_n - 0.3y_n + 0.1 = 0.2x_n + 0.7y_n + 0.1$$

Entonces para $x_0 = 1, y_0 = 5.0000$ y $n = 0$ se encuentra:

$$y(1.10) \approx y_1 = 0.2(1) + 0.7(5.0000) + 0.1 = 0.2 + 3.5 + 0.1 = 3.8000$$

.

.

.

Por último para $x_4 = 1.4, y_4 = 2.0582$ y $n = 4$ se encuentra:

$$y(1.50) \approx y_5 = 0.2(1.4) + 0.7(2.0582) + 0.1 = 0.28 + 1.4407 + 0.1 = 1.82074$$

Como ya se ha visto, es una estimación del valor $y(1.50)$. Sin embargo, si se usa el paso de tamaño mas pequeño $h = 0.05$, le toma dos pasos alcanzar $x = 1.1$.

Con tamaño de paso $h = 0.05$ y $f(x_n, y_n) = 2x_n - 3y_n + 1$ sustituyendo en la fórmula iterativa $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$, ($n \geq 0$) se obtiene:

$$y_{n+1} = y_n + (0.05)[2x_n - 3y_n + 1] = x_n + 0.85y_n + 0.05$$

Iniciando con $n = 0, x_0 = 1$, y $y_0 = 5.0000$, se tiene la primera iteración:

$$y(1.05) \approx y_1 = 0.1(1) + 0.85(5.0000) + 0.05 = 0.1 + 4.25 + 0.05 = 4.4000$$

Para $n = 1, x_1 = 1.05$, y $y_1 = 4.4000$ se tiene la segunda iteración:

$$y(1.10) \approx y_2 = 0.1(1.05) + 0.85(4.4000) + 0.05 = 0.105 + 3.7400 + 0.05 = 3.8950$$

.

.

.

Por último para $x_9 = 1.45, y_9 = 2.055715995$ y $n = 9$ se encuentra:

$$y(1.50) \approx y_{10} = 0.1(1.45) + 0.85(2.055715995) + 0.05 = 0.145 + 1.747358596 + 0.05 \\ = 1.9423585$$

Se observa que cuando el h es más pequeño la aproximación es más cercana a la solución real.

Se resuelve la ecuación diferencial para comparar los resultados reales con los resultados encontrados con el método de Euler

Solución.

Se resuelve la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x - 3y + 1$ utilizando el factor integrante $e^{\int(3)dx} = e^{3x}$, al multiplicar esta ecuación diferencial por este factor integrante quedaría:

$$e^{3x} \frac{dy}{dx} + 3e^{3x}y = (2x + 1)e^{3x} \text{ es la misma que resolver } \frac{d}{dx}(e^{3x}y) = (2x + 1)e^{3x}$$

Integrando a ambos lados se obtiene:

$$e^{3x}y = \int (2x + 1)e^{3x} dx \rightarrow e^{3x}y = 2\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) + \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Luego despejando y se tiene:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + Ce^{-3x}$$

Utilizando la condición inicial $y(1) = 5$ para encontrar la constante arbitraria C .

$$5 = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} + Ce^{-3} \rightarrow C = \frac{38}{9}e^3$$

La solución analítica de la ecuación diferencial $y' = 2x - 3y + 1$ con la condición inicial $y(1) = 5$ es:

$$y(x) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + \frac{38}{9}e^{-3(x-1)}$$

Encontrando el valor real para $y(1.5)$

$$y(1.5) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}(1.5) + \frac{38}{9}e^{-3(1.5-1)} = \frac{1}{9} + 1 + \frac{38}{9}e^{-1.5} \approx 2.053216232$$

“El error absoluto se define como

$$|\text{valor real} - \text{valor aproximado}|$$

El error relativo y el error porcentual son, respectivamente

$$\frac{\text{error absoluto}}{|\text{valor real}|} \quad \text{y} \quad \frac{\text{error absoluto}}{|\text{valor real}|} \times 100$$

Los errores relativos porcentuales crecen dramáticamente.”⁽³⁵⁾

Las tablas 19 y 20 muestran los valores encontrados con el método de Euler con tamaños de pasos $h = 0.1$ y $h = 0.05$ con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real.

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% Error relativo
1.00	5.0000	5.0000	0.0000	0.0000
1.10	3.8000	3.972343598	0.172343598	4.338587379
1.20	2.9800	3.228315797	0.248315797	7.691806273
1.30	2.4260	2.69440523	0.26840523	9.961576195
1.40	2.0582	2.316153339	0.257953339	11.13714428
1.50	1.82074	2.053216232	0.232476232	11.32254014

Tabla 19 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 0.1$ para el método de Euler

⁽³⁵⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (Teoría extraída de la pág. 78)

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% Error relativo
1.00	5.0000	5.0000	0.0000	0.0000
1.05	4.4000	4.445211456	0.045211456	1.017082234
1.10	3.8950	3.972343598	0.077343598	1.947052064
1.15	3.47075	3.569985529	0.099235529	2.779717962
1.20	3.1151375	3.228315797	0.113178297	3.505800055
1.25	2.817866875	2.938881	0.121014125	4.117693945
1.30	2.570186844	2.69440523	0.124218386	4.610234
1.35	2.364658817	2.488626052	0.123967235	4.981352458
1.40	2.194959995	2.316153339	0.121193344	5.232526792
1.45	2.055715995	2.172347767	0.116631772	5.368927286
1.50	1.942358596	2.053216232	0.110857636	5.399218761

Tabla 20 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 0.05$ para el método de Euler

Las figuras 2.3 y 2.4 muestran la curva solución de la ecuación diferencial y los puntos de aproximación encontrados mediante el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.1$ y $h = 0.05$ respectivamente.

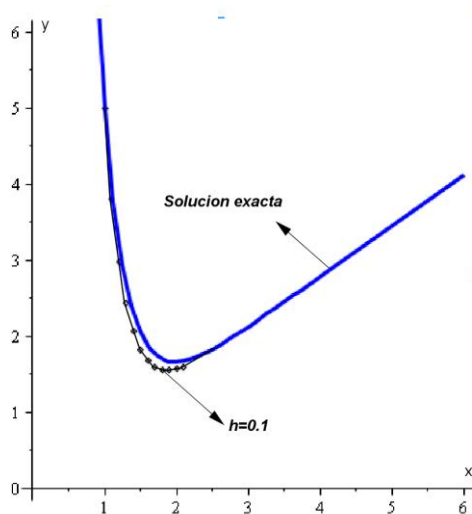


Figura 2.3 Solución exacta y aproximación a la curva solución mediante la visualización de puntos encontrados con el método de Euler con tamaño de paso de $h = 0.1$.

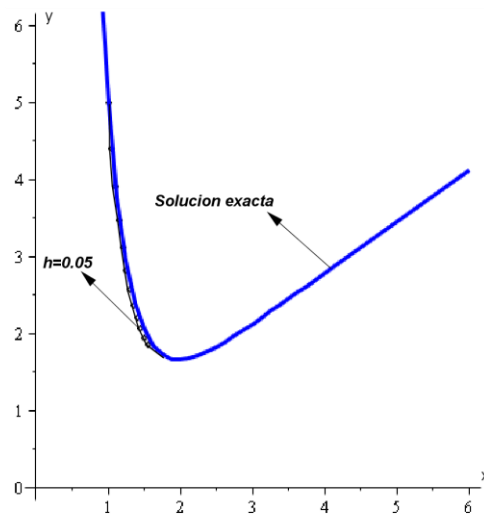


Figura 2.4 Solución exacta y aproximación a la curva solución mediante la visualización de puntos encontrados con el método de Euler con tamaño de paso de $h = 0.05$.

“ERRORES EN LOS MÉTODOS NUMÉRICOS Al elegir y usar un método numérico para la solución de un problema con valores iniciales, se debe estar consciente de las distintas fuentes de error. Para ciertas clases de cálculos, la acumulación de errores podría reducir la precisión de una aproximación al punto de hacer inútil el cálculo. Por otra parte, dependiendo del uso dado a una solución numérica, una precisión extrema podría no compensar el trabajo y la complicación adicionales.

Una fuente de error que siempre está presente en los cálculos es el **error de redondeo**. Este error es resultado del hecho de que cualquier calculadora o computadora puede presentar números usando sólo un número finito de dígitos. Una manera de reducir el efecto de redondeo es reducir el número de cálculos. Otra técnica en una computadora es usar aritmética de doble precisión para comprobar los resultados. En general, el error de redondeo es impredecible y difícil de analizar y se desprecia en el análisis siguiente, por lo que sólo se investigara el error introducido al usar una fórmula o algoritmo para aproximar los valores de la solución.

ERRORES DE TRUNCAMIENTO PARA EL MÉTODO DE EULER En la sucesión de valores y_1, y_2, y_3, \dots generados de $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$, ($n \geq 0$), usualmente el valor de y_1 no concuerda con la solución real en x_1 , en particular, $y(x_1)$, porque el algoritmo sólo da una aproximación de línea recta a la solución. Véase figura 2.2. El error se llama **error de truncamiento local, error de fórmula o error de discretización**. Este ocurre en cada paso, es decir, si se supone que y_n es precisa, entonces y_{n+1} tendrá error de truncamiento.

Para deducir una fórmula para el error de truncamiento local del método de Euler, se usa la fórmula de Taylor con residuo. Si una función $y(x)$ tiene $k + 1$ derivadas que son continuas en un intervalo abierto que contiene a a y a x , entonces

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{x - a}{1!} + \dots + y^{(k)}(a) \frac{(x - a)^k}{k!} + y^{(k+1)}(c) \frac{(x - a)^{k+1}}{(k + 1)!},$$

Donde c es algún punto entre a y x . Al establecer $k = 1, a = x_n$ y $x = x_{n+1} = x_n + h$, se obtiene:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n) \frac{(x_n + h) - x_n}{1!} + y''(c) \frac{(x_n + h - x_n)^{1+1}}{(1 + 1)!}$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n) \frac{x_n + h - x_n}{1!} + y''(c) \frac{(x_n + h - x_n)^2}{2!}$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n) \frac{h}{1!} + y''(c) \frac{(h)^2}{2!}$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n) \frac{h}{1!} + y''(c) \frac{h^2}{2!}$$

o

$$y(x_{n+1}) = \underbrace{y_n + h \cdot f(x_n, y_n)}_{y_{n+1}} + y''(c) \frac{h^2}{2!}.$$

El método de Euler $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$, ($n \geq 0$) es la última fórmula sin el último término; por tanto, el error de truncamiento local en y_{n+1} es:

$$y''(c) \frac{h^2}{2!}, \text{ donde } x_n < c < x_{n+1}.$$

Usualmente se conoce el valor de c , por tanto no se puede calcular el error **exacto**, pero un límite superior en el valor absoluto del error es $M \frac{h^2}{2!}$, donde $M = \max_{x_n < x < x_{n+1}} |y''(x)|$.

Al analizar los errores que surgen del uso de métodos numéricos, es útil usar la notación $O(h^n)$. Para definir este concepto, se denota con $e(h)$ el error en un cálculo numérico dependiendo de h . Entonces se dice que $e(h)$ es de orden h^n , denotado con $O(h^n)$, si existe una constante C y un entero positivo n tal que $|e(h)| \leq Ch^n$ para h suficientemente pequeña. Por lo que el error de truncamiento local para el método de Euler es $O(h^2)$. Se observa que, en general, si $e(h)$ en un método numérico es del orden h^n y h se reduce a la mitad, el nuevo error es más o menos $C(h/2)^n = Ch^n/2^n$; es decir, el error se redujo por un factor de $1/2^n$.

Ejemplo 2.2 Límite para errores de truncamiento local

“Considere el problema con valores iniciales $y' = 2x - 3y + 1, y(1) = 5$. La solución analítica es

$$y(x) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + \frac{38}{9}e^{-3(x-1)}.$$

- Encuentre una fórmula en la que intervengan c y h para el error de truncamiento local en el n -ésimo paso si se usa el método de Euler.
- Encuentre un límite para el error de truncamiento local en cada paso si se usa $h = 0.1$ para aproximar $y(1.50)$.
- Aproxime $y(1.50)$ con $h = 0.1$ y $h = 0.05$ con el método de Euler.
- Calcule los errores del c).⁽³⁶⁾

Solución.

- De la solución $y = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + \frac{38}{9}e^{-3(x-1)}$ se obtiene $y'' = 38e^{-3(x-1)}$ por lo que el error de truncamiento es:

$$y''(c) \frac{h^2}{2} = 38e^{-3(c-1)} \frac{h^2}{2} = 19e^{-3(c-1)} h^2$$

donde c esta entre x_n y $x_n + h$.

- En particular, para $h = 0.1$ se puede obtener un límite superior en el error de truncamiento local para y_1 al reemplazar c por 1.1:

$$19e^{-3(1.1-1)}(0.1)^2 = 19e^{-3(0.1)}(0.01) = 19(0.74081822)(0.01) = 0.1407$$

De la tabla 2 se observa que el error después del primer paso es 0.1724, mayor que el valor dado por el límite.

De igual forma, se puede obtener un límite para el error de truncamiento de cualquiera de los cinco pasos que se muestran en la tabla 2 al reemplazar c por 1.50 (este valor de c da el valor más grande de $y''(c)$ de cualquiera de los pasos y puede ser demasiado generoso para los primeros pasos). Al hacer esto se obtiene:

$$\begin{aligned} 19e^{-3(1.50-1)}(0.1)^2 &= 19e^{-3(0.50)}(0.01) = 19e^{-1.50}(0.01) \\ &= 19(0.22313016)(0.01) = 0.0424 \end{aligned}$$

Como un límite o cota inferior para el error de truncamiento local en cada paso

Observar que si h se reduce a 0.05, entonces el límite de error es 0.010598682, casi un cuarto del valor que se encontró anteriormente. Esto es de esperarse porque el error de truncamiento local para el método de Euler es $O(h^2)$.

⁽³⁶⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (teoría extraída de la pág.340 y 341 el ejemplo desarrollado es el ejercicio 17 que aparece en la pág. 344).

- c) La aproximación de $y(1.5)$ con $h = 0.1$ usando el método de Euler es $y_5 \approx y(1.5) = 1.82074$ y la aproximación de $y(1.5)$ con $h = 0.05$ usando el método de Euler es $y_{10} \approx y(1.5) = 1.942358596$.
- d) Puesto que la solución real de $y(1.5)$ es 2.053216232, el error para $h = 0.1$ es:

$$|\text{valor real} - \text{valor aproximado}| = |2.053516232 - 1.82074| = |0.232476232| = 0.232476232$$

y el error para $h = 0.05$ es:

$$|\text{valor real} - \text{valor aproximado}| = |2.053216232 - 1.942358596| = |0.110857636| = 0.110857636.$$

En el análisis anterior se supone que el valor de y_n fue exacto en el cálculo de y_{n+1} pero no lo es porque contiene errores de truncamiento local de los pasos anteriores. El error total en y_{n+1} es una acumulación de errores en cada uno de los pasos previos. Este error total se llama **error de truncamiento global**.

2.3 Método de Euler mejorado

“El método numérico definido por la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2} \quad (1.7)$$

donde

$$y_{n+1}^* = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (1.8)$$

Se conoce comúnmente como el **método de Euler mejorado**. Para calcular y_{n+1} para $n = 0, 1, 2, \dots$ de (1.7), se debe, en cada paso, usar primero el método de Euler (1.8) para obtener una estimación inicial y_{n+1}^* . Por ejemplo, con $n = 0$, usando (1.8) se obtiene $y_1^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$, y después, conociendo este valor, se usa (1.7) para obtener

$y_1 = y_0 + h \cdot \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2}$, donde $x_1 = x_0 + h$. Estas ecuaciones se representan con facilidad. En la figura 2.5 se observa que $m_0 = f(x_0, y_0)$ y $m_1 = f(x_1, y_1^*)$ son pendientes de las rectas trazadas con la línea continua que pasan por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1^*) , respectivamente. Tomando un promedio de estas pendientes, es decir,

$$m_{prom} = \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2},$$

se obtiene la pendiente de las rectas paralelas inclinadas.

Con el primer paso, más que avanzar a lo largo de la recta que pasa por (x_0, y_0) con pendiente $f(x_0, y_0)$ al punto con coordenada y_1^* obtenida por el método de Euler, se avanza a lo largo de la recta punteada de color rojo que pasa por (x_0, y_0) con pendiente m_{prom} hasta llegar a x_1 . Al examinar la figura parece posible que y_1 sea una mejora de y_1^* .

En general, el método de Euler mejorado es un ejemplo de un **método de predicción-corrección**. El valor de y_{n+1}^* dado por (1.8) predice un valor $y(x_n)$, mientras que y_{n+1} definido por la fórmula (1.7) corrige esta estimación.

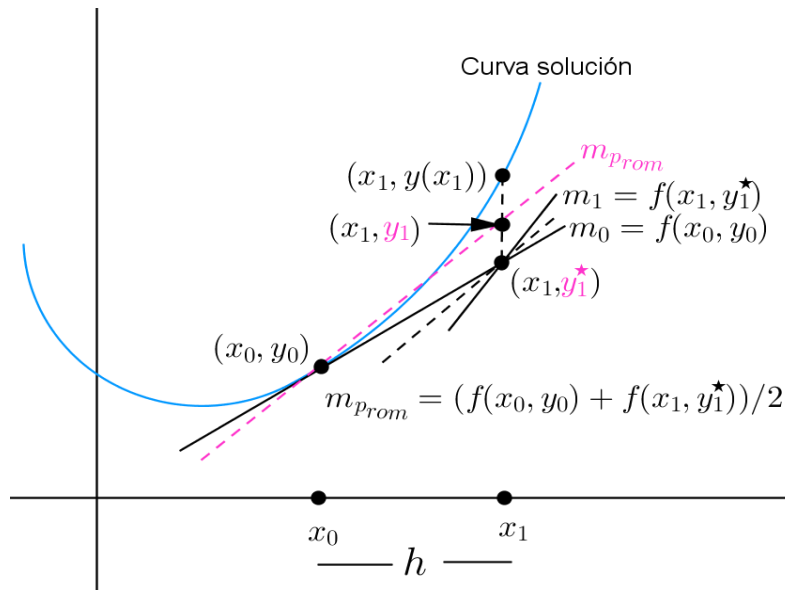


Figura 2.5 La pendiente de la recta roja punteada es el promedio de m_0 y m_1 .

Ejemplo 2.3 Método de Euler mejorado

“Use el método de Euler mejorado para obtener una aproximación al valor indicado. Primero use $h = 0.1$ y después $h = 0.05$ para aproximar el valor de $y(1.50)$ de la solución de la ecuación diferencial $y' = 2x - 3y + 1$, con la condición inicial $y(1) = 5$.”⁽³⁷⁾

Solución.

Con $f(x_n, y_n) = 2x_n - 3y_n + 1$ y $h = 0.1$ (1.8) se convierte en:

$$y_{n+1}^* = y_n + 0.1(2x_n - 3y_n + 1) = y_n + 0.2x_n - 0.3y_n + 0.1 = 0.2x_n + 0.7y_n + 0.1$$

Con $x_0 = 1, y_0 = 5.0000$, $f(x_n, y_n) = 0.2x_n + 0.7y_n + 0.1$ y $n = 0$, primero se calcula (1.8)

$$y_1^* = 0.2(1) + 0.7(5.0000) + 0.1 = 0.2 + 3.5 + 0.1 = 3.8000$$

Se usa este último valor en (1.7) junto con $x_1 = 1 + h = 1 + 0.1 = 1.1$

$$y(1.10) \approx y_1 = y_0 + (0.1) \frac{1}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)] = 5 + 0.05[f(1, 5) + f(1.1, 3.8000)]$$

$$y(1.10) \approx y_1 = 5 + 0.05[2(1) - 3(5.0000) + 1 + 2(1.1) - 3(3.8000) + 1]$$

$$y(1.10) \approx y_1 = 5 + 0.05[2 - 15 + 1 + 2.2 - 11.4 + 1] = 5 + 0.05[-20.2] = 5 + (-1.01) \\ = 5 - 1.01 = 3.9900$$

.

.

.

Con $x_4 = 1.4, y_4 = 2.345111614$, $f(x_n, y_n) = 0.2x_n + 0.7y_n + 0.1$ y $n = 4$, se calcula (2)

$$y_5^* = 0.2(1.4) + 0.7(2.345111614) + 0.1 = 0.28 + 1.64157813 + 0.1 = 2.02157813$$

⁽³⁷⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (La teoría es extraída de pág. 342 y 343 el ejemplo resuelto es el ejercicio 1 que aparece en la guía 9.1 de la pág.344). Todos los pasos que faltan están desarrollados en el disco de evidencia de trabajo.

$$x_5 = 1 + 5(0.1) = 1 + 0.5 = 1.5$$

$$y(1.50) \approx y_5 = y_4 + (0.1) \frac{1}{2} [f(x_4, y_4) + f(x_5, y_5^*)]$$

$$y(1.50) \approx y_5 = 2.345111614 + 0.05[f(1.4, 2.345111614) + f(1.5, 2.02157813)]$$

$$y(1.50) \approx y_5 = 2.345111614$$

$$+ 0.05[2(1.4) - 3(2.345111614) + 1 + 2(1.5) - 3(2.02157813) + 1]$$

$$y(1.5) \approx y_5 = 2.345111614 + 0.05[2.8 - 7.035334842 + 1 + 3 - 6.064734389 + 1]$$

$$y(1.50) \approx y_5 = 2.345111614 + 0.05[-5.300069321]$$

$$= 2.345111614 + (-0.265003461) = 2.345111614 - 0.265003461$$

$$= 2.080108152$$

Con $f(x_n, y_n) = 2x_n - 3y_n + 1$ y $h = 0.05$ **(1.8)** se convierte en:

$$y_{n+1}^* = y_n + 0.05(2x_n - 3y_n + 1) = y_n + 0.1x_n - 0.15y_n + 0.05 = 0.1x_n + 0.85y_n + 0.05$$

Con $x_0 = 1, y_0 = 5.0000$, $f(x_n, y_n) = 0.1x_n + 0.85y_n + 0.05$ y $n = 0$, primero se calcula **(1.8)**

$$y_1^* = 0.1(1) + 0.85(5.0000) + 0.05 = 0.1 + 4.25 + 0.05 = 4.4000$$

$$x_1 = 1 + 1(0.05) = 1 + 0.05 = 1.05$$

$$y(1.05) \approx y_1 = y_0 + (0.05) \frac{1}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)]$$

$$y(1.05) \approx y_1 = 5.0000 + 0.025[f(1, 5.0000) + f(1.05, 4.4000)]$$

$$y(1.05) \approx y_1 = 5.0000 + 0.025[2(1) - 3(5.0000) + 1 + 2(1.05) - 3(4.4000) + 1]$$

$$y(1.1) \approx y_1 = 5.0000 + 0.025[2 - 15 + 1 + 2.1 - 13.2 + 1]$$

$$y(1.05) \approx y_1 = 5.0000 + 0.025[-22.1] = 5.0000 + (-0.5525) = 5.0000 - 0.5525 \\ = 4.4475$$

•
•
•

Con $x_9 = 1.45, y_9 = 2.178567082, f(x_n, y_n) = 0.2x_n + 0.7y_n + 0.1$ y $n = 9$, se calcula
(2)

$$y^*_{10} = 0.1(1.45) + 0.85(2.178567082) + 0.05 = 0.145 + 1.85178202 + 0.05 \\ = 2.04678202$$

$$x_{10} = 1 + 10(0.05) = 1 + 0.50 = 1.50$$

$$y(1.5) \approx y_{10} = y_9 + (0.05) \frac{1}{2} [f(x_9, y_9) + f(x_{10}, y^*_{10})]$$

$$y(1.5) \approx y_{10} = 2.178567082 + 0.025[f(1.45, 2.178567082) + f(1.5, 2.04678202)]$$

$$y(1.5) \approx y_{10} = 2.178567082 \\ + 0.025[2(1.45) - 3(2.178567082) + 1 + 2(1.5) - 3(2.04678202) + 1]$$

$$y(1.5) \approx y_{10} = 2.178567082 + 0.025[2.9 - 6.535701246 + 1 + 3 - 6.14034606 + 1]$$

$$y(1.5) \approx y_{10} = 2.178567082 + 0.025[-4.776047306] \\ = 2.178567082 + (-0.119401182) = 2.178567082 - 0.119401182 \\ = 2.059165899$$

Las tablas 21 y 22 muestran los valores encontrados con el método de Euler mejorado con tamaños de pasos $h = 0.1$ y $h = 0.05$ con sus respectivos errores absoluto y relativo y la comparación con el valor real.

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% Error relativo
1.00	5.0000	5.0000	0.0000	0.0000
1.10	3.9900	3.972343598	0.017656402	0.444483251
1.20	3.25455	3.228315797	0.026234203	0.812628151
1.30	2.72363975	2.69440523	0.02923452	1.085008286
1.40	2.345111614	2.316153339	0.028958275	1.250274518
1.50	2.080108152	2.053216232	0.02689192	1.309746123

Tabla 21 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 0.1$ para el método de Euler mejorado

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% Error relativo
1.00	5.0000	5.0000	0.0000	0.0000
1.05	4.4475	4.445211456	0.002288544	0.051483355
1.10	3.976284375	3.972343598	0.003940777	0.09920534
1.15	3.575074918	3.569985529	0.005089389	0.14560493
1.20	3.234158273	3.228315797	0.005842476	0.180975975
1.25	2.945168813	2.938881	0.006287813	0.213952623
1.30	2.70090164	2.69440523	0.00649641	0.241107385
1.35	2.495151537	2.488626052	0.006525485	0.262212355
1.40	2.322574261	2.316153339	0.006420922	0.277223528
1.45	2.178567082	2.172347767	0.006219315	0.286294629
1.50	2.059165899	2.053216232	0.005949667	0.289773035

Tabla 22 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 0.05$ para el método de Euler mejorado

La figura 2.6 muestra la curva solución de la ecuación diferencial y los puntos de aproximación encontrados mediante el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.1$ y la figura 2.7 muestra un “zoom” para la visualización de estos puntos respectivamente.

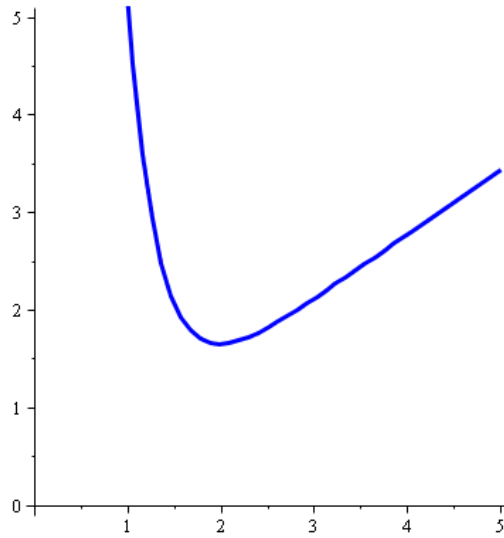


Figura 2.6 Solución exacta y aproximación a la curva solución mediante la visualización de puntos encontrados con el método de Euler mejorado con tamaño de paso $h = 0.1$.

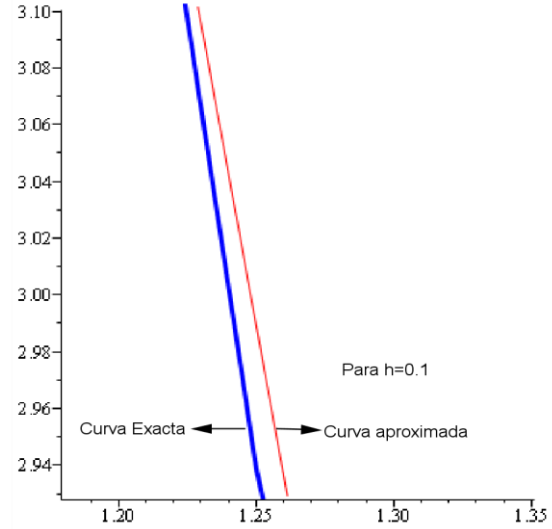


Figura 2.7 “Zoom” para la visualización de puntos encontrados con el método de Euler mejorado con tamaño de paso $h = 0.1$.

La figura 2.8 muestra la curva solución de la ecuación diferencial y los puntos de aproximación encontrados mediante el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.05$ y la figura 2.9 muestra un “zoom” para la visualización de estos puntos respectivamente.

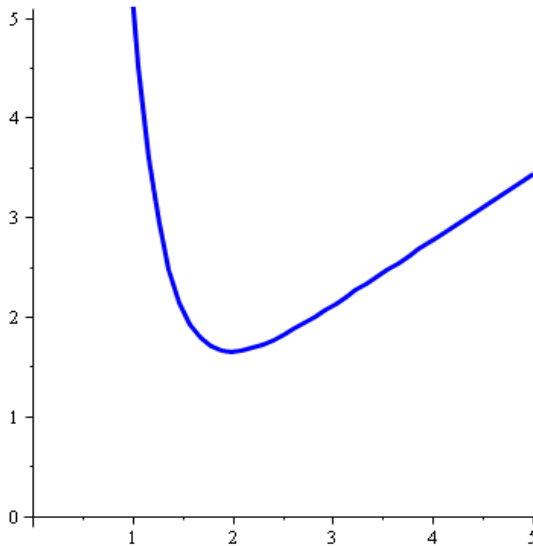


Figura 2.8 Solución exacta y aproximación a la curva solución mediante la visualización de puntos encontrados con el método de Euler mejorado con tamaño de paso $h = 0.05$.

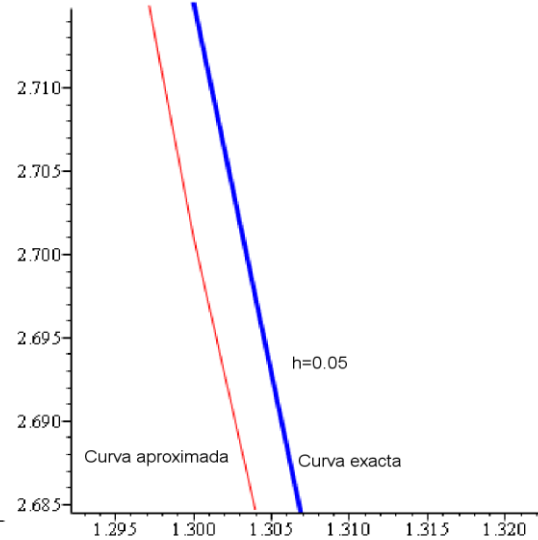


Figura 2.9 “Zoom” para la visualización de puntos encontrados con el método de Euler mejorado con tamaño de paso de $h = 0.05$.

“Errores de Truncamiento para el Método de Euler Mejorado. El error de truncamiento local para el método de Euler mejorado es $O(h^3)$. La deducción de este resultado es similar a la deducción del error de truncamiento local para el método de Euler

Ejemplo 2.4 Limite para errores de truncamiento local para el método de Euler mejorado

Considerar el problema con valores iniciales $y' = 2x - 3y + 1, y(1) = 5$. La solución analítica es

$$y(x) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + \frac{38}{9}e^{-3(x-1)}.$$

- Encuentre una fórmula en la que intervengan c y h para el error de truncamiento local en el n -ésimo paso si se usa el método de Euler mejorado.
- Encuentre un límite para el error de truncamiento local en cada paso si se usa $h = 0.1$ para aproximar $y(1.5)$, para el método de Euler mejorado.
- Aproxime $y(1.5)$ con $h = 0.1$ y $h = 0.05$ con el método de Euler mejorado.
- Calcule los errores del c). ”⁽³⁸⁾

Solución.

- De la solución $y = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + \frac{38}{9}e^{-3(x-1)}$ obtenemos $y''' = -114e^{-3(x-1)}$ por lo que el error de truncamiento es:

$$\left| y'''(c) \frac{h^3}{6} \right| = \left| -114e^{-3(c-1)} \frac{h^3}{6} \right| = 114e^{-3(c-1)} \frac{h^3}{6} = 19h^3e^{-3(c-1)}$$

Donde c esta entre x_n y $x_n + h$.

- En particular, para $h = 0.1$ se puede obtener un límite superior en el error de truncamiento local para y_1 al reemplazar c por 1.1:

$$19e^{-3(1.1-1)}(0.1)^3 = 19e^{-3(0.1)}(0.01) = 19(0.74081822)(0.001) = 0.014075546$$

De la tabla 4 se observa que el error después del primer paso es,0.0176 mayor que el valor dado por el límite.

⁽³⁸⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (el ejemplo resuelto es el ejercicio 1 que aparece en la guía 9.1 de la pág.344).

De igual forma, se puede obtener un límite para el error de truncamiento de cualquiera de los cinco pasos que se muestran en la tabla 4 al reemplazar c por 1.50 (este valor de c da el valor más grande de $y'''(c)$ de cualquiera de los pasos y puede ser demasiado generoso para los primeros pasos). Al hacer esto se obtiene:

$$\begin{aligned} 19e^{-3(1.50-1)}(0.1)^3 &= 19e^{-3(0.50)}(0.001) = 19e^{-1.50}(0.001) \\ &= 19(0.22313016)(0.001) = 0.0004239473 \end{aligned}$$

Como un límite o cota inferior para el error de truncamiento local en cada paso. Puesto que el error de truncamiento para el método de Euler mejorado es $O(h^3)$, el error de truncamiento global es $O(h^2)$. Esto se puede ver en el ejemplo 2.3 cuando el tamaño de paso se reduce a la mitad de $h = 0.1$ a $h = 0.05$, en el error absoluto en $x = 1.50$ se reduce de 0.02689192 a 0.005949667, una reducción de aproximadamente $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

c) La aproximación de $y(1.50)$ con $h = 0.1$ usando el método de Euler Mejorado es $y_5 \approx y(1.50) = 2.080108152$ y La aproximación de $y(1.50)$ con $h = 0.1$ usando el método de Euler mejorado es $y_{10} \approx y(1.50) = 2.059165899$.

d) Puesto que la solución real de $y(1.50)$ es 2.053216232, el error para $h = 0.1$ es:

$$\begin{aligned} |\text{valor real} - \text{valor aproximado}| &= |2.0532160232 - 2.080108152| = \\ &= |-0.02689192| = 0.02689192 \end{aligned}$$

Y el error para $h = 0.05$ es:

$$\begin{aligned} |\text{valor real} - \text{valor aproximado}| &= |2.053216232 - 2.059165899| \\ &= |-0.005949667| = 0.005949667 \end{aligned}$$

2.4 Métodos de Runge-Kutta

“Uno de los procedimientos numéricos más populares, así como más preciso, usado para obtener soluciones aproximadas para un problema con valores iniciales $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ es el **método de Runge-Kutta de cuarto orden**. Como el nombre lo indica, existen métodos de Runge-Kutta de diferentes órdenes:

En esencia, los métodos de Runge-Kutta son generalizados de la fórmula básica de Euler $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$ en la que la función pendiente f se reemplaza por un promedio ponderado en el intervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$. Es decir,

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \overbrace{(w_1 k_1 + w_2 k_2 + \dots + w_m k_m)}^{\text{promedios ponderados}} \quad (1.9)$$

Aquí los w_i , $i = 1, 2, \dots, m$, son constantes que generalmente satisfacen $w_1 + w_2 + \dots + w_m = 1$, y cada k_i , $i = 1, 2, \dots, m$, es la función f evaluada en un punto seleccionado (x, y) para el que $x_n \leq x \leq x_{n+1}$. Veremos que las k_i se definen recursivamente. El número m se llama el **orden** del método. Observar que al tomar $m = 1$ y $w_1 = 1$ y $k_1 = f(x_n, y_n)$, se obtiene la conocida fórmula de Euler $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$. Por esta razón, se dice que el método de Euler es un **método de Runge-Kutta de primer orden**.

El promedio en (1.9) no se forma a la fuerza, pero los parámetros se eligen de que (1.9) concuerda con un polinomio de Taylor de grado m . Si una función $y(x)$ tiene $k + 1$ derivadas que son continuas en un intervalo que contiene a a y a x , entonces se puede escribir:

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{x-a}{1!} + y''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + y^{(k+1)}(c) \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!},$$

Donde c es algún número entre a y x . Si se reemplaza a por x_n y x por $x_{n+1} = x_n + h$, entonces la fórmula anterior se convierte en:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + h \cdot y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \dots + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(c),$$

Donde c es ahora un número entre x_n y x_{n+1} . Cuando $y(x)$ es una solución de $y' = f(x, y)$ en el caso $k = 1$ y el residuo $\frac{1}{2} h^2 y''(c)$ es pequeño, vemos que un polinomio de Taylor $y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot y'(x_n)$ de grado uno concuerda con la fórmula de aproximación del método de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_n = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

Método de Runge-Kutta de segundo orden. Para ilustrar (1.9), el procedimiento consiste en encontrar constantes o parámetros, w_1, w_2, α y β tal que la fórmula:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot (w_1 k_1 + w_2 k_2)$$

Donde

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1)$$

Concuerta con un polinomio de Taylor de grado dos. Es suficiente decir que esto se puede hacer siempre que las constantes satisfagan:

$$w_1 + w_2 = 1, \quad w_2 \alpha = \frac{1}{2}, \quad w_2 \beta = \frac{1}{2}.$$

Este es un sistema algebraico de tres ecuaciones con cuatro incógnitas y tiene un número infinito de soluciones:

$$w_1 = 1 - w_2, \quad \alpha = \frac{1}{2w_2}, \quad \beta = \frac{1}{2w_2}.$$

Donde $w_2 \neq 0$. Por ejemplo la elección de $w_2 = \frac{1}{2}$ produce $w_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ y, por lo tanto $y_{n+1} = y_n + h \cdot (w_1 k_1 + w_2 k_2)$ se convierte en

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot (k_1 + k_2)$$

donde $k_1 = f(x_n, y_n)$ y $k_2 = f(x_n + h, y_n + h k_1)$.

Puesto que $x_n + h = x_{n+1}$ y $y_n + h \cdot k_1 = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$ se reconoce el resultado anterior como el método de Euler mejorado.

En vista de que $w_2 \neq 0$ se puede elegir de modo arbitrario en $w_1 = 1 - w_2$, $\alpha = \frac{1}{2w_2}$, $\beta = \frac{1}{2w_2}$, hay muchos posibles métodos de Runge-Kutta de segundo orden.

Método de Runge-Kutta de cuarto orden. Un procedimiento de Runge-Kutta de cuarto orden consiste en determinar parámetros de modo que la fórmula:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot (w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4)$$

Donde

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 h k_1) \\
 k_3 &= f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 h k_1 + \beta_3 h k_1) \\
 k_4 &= f(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 h k_1 + \beta_5 h k_2 + \beta_6 h k_3)
 \end{aligned}$$

Concuerta con un polinomio de Taylor de grado cuatro. Esto da como resultado un sistema de 11 ecuaciones con 13 incógnitas. El conjunto de valores usado con más frecuencia para los parámetros produce el siguiente resultado:

$$\left. \begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 &\text{donde} \\
 k_1 &= f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h k_1\right) \\
 k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h k_2\right) \\
 k_4 &= f(x_n + h, y_n + h k_3)
 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Mientras, que las otras fórmulas de cuarto orden se deducen con facilidad, el algoritmo resumido en (1.10) que es muy usado y reconocido como una invaluable herramienta de cálculo se denomina el método de Runge-Kutta de cuarto orden o método clásico de Runge-Kutta. De aquí en adelante, se ha de considerar a (1.10), cuando se use la abreviatura RK4.

Se aconseja tener cuidado con las fórmulas (1.10); observar que k_2 depende k_1 , k_3 depende de k_2 y k_4 depende de k_3 . También, k_2 y k_3 implican aproximaciones a la pendiente en el punto medio $x_n + \frac{1}{2}h$ en el intervalo definido por $x_n \leq x \leq x_{n+1}$.⁽³⁹⁾

⁽³⁹⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (Teoría extraída de las páginas 345 y 346, el ejemplo resuelto es el ejercicio 3 que aparece en la guía 9.2 de la pág.348). Todos los pasos que faltan están desarrollados en el disco de evidencia de trabajo.

Ejemplo 2.5 Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden

“Usar el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.1$ y $h = 0.05$ para obtener una aproximación del valor indicado de la ecuación diferencial $y' = 2x - 3y + 1, y(1) = 5$, para encontrar la aproximación de $y(1.50)$.”⁽⁹⁾

Solución.

Con $f(x_n, y_n) = 2x_n - 3y_n + 1$, para la primera iteración partimos de que

$$h = 0.1, n = 0, x_0 = 1 \text{ y } y_0 = 5.0000 \text{ en (1.10)}$$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = 2(1) - 3(5.0000) + 1 = 2 - 15 + 1 = -12$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) = 2\left(1 + (0.5)(0.1)\right) - 3\left(5.0000 + (0.5)(0.1)(-12)\right) + 1 \\ &= 2(1.05) - 3(4.4) + 1 = 2.1 - 13.2 + 1 = -10.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_2\right) = 2\left(1 + (0.5)(0.1)\right) - 3\left(5.0000 + (0.5)(0.1)(-10.1)\right) + 1 \\ &= 2(1.05) - 3(4.4950) + 1 = 2.1 - 13.4850 + 1 = -10.3850 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = 2(1 + 0.1) - 3(5 + (0.1)(-10.3850)) + 1 \\ &= 2(1.1) - 3(3.9615) + 1 = 2.2 - 11.8845 + 1 = -8.6845 \end{aligned}$$

$$y(1.10) \approx y_1 = 5 + \frac{0.1}{6}(-12 + 2(-10.1) + 2(-10.3850) + (-8.6845))$$

$$y(1.10) \approx y_1 = 5 + \frac{0.1}{6}(-12 - 20.2 - 20.77 - 8.6845)$$

$$y(1.10) \approx y_1 = 5 + \frac{0.1}{6}(-61.6545)$$

$$y(1.10) \approx y_1 = 5 - 1.027575$$

$$y(1.10) \approx y_1 = 3.972425$$

•
•
•

Quinta iteración con $n = 4$, $x_4 = 1.4$ y $y_4 = 2.316285726$

$$\begin{aligned} k_1 = f(x_4, y_4) &= 2(1.4) - 3(2.316285727) + 1 = 2.8 - 6.948857178 + 1 \\ &= -3.148857178 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 = f\left(x_4 + \frac{1}{2}h, y_4 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ &= 2(1.4 + (0.5)(0.1)) - 3(2.316285726 + (0.5)(0.1)(-3.148857178)) \\ &+ 1 = 2(1.45) - 3(2.158842867) + 1 = 2.9 - 6.476528601 + 1 \\ &= -2.576528601 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 = f\left(x_4 + \frac{1}{2}h, y_4 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ &= 2(1.4 + (0.5)(0.1)) - 3(2.316285726 + (0.5)(0.1)(-2.576528601)) \\ &+ 1 = 2(1.45) - 3(2.187459296) + 1 = 2.9 - 6.562377888 + 1 \\ &= -2.662377888 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 = f(x_4 + h, y_4 + hk_3) \\ &= 2(1.4 + 0.1) - 3(2.316285726 + (0.1)(-2.662377888)) + 1 \\ &= 2(1.5) - 3(2.050047937) + 1 = 3 - 6.150143812 + 1 \\ &= -2.150143812 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(1.50) \approx y_5 &= 2.316285726 + \frac{0.1}{6}(-3.148857178 + 2(-2.576528601) \\ &+ 2(-2.662377888) + (-2.150143812)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(1.50) \approx y_5 &= 2.316285726 + \frac{0.1}{6}(-3.148857178 - 5.153057202 - 5.324755776 \\ &- 2.150143812) \end{aligned}$$

$$y(1.50) \approx y_5 = 2.316285726 + \frac{0.1}{6}(-15.77681397)$$

$$y(1.50) \approx y_5 = 2.316285726 - 0.262946899$$

$$y(1.50) \approx y_5 = 2.053338827$$

Con $f(x_n, y_n) = 2x_n - 3y_n + 1$, para la primera iteración partimos de que

$h = 0.05$, $n = 0$, $x_0 = 1$ y $y_0 = 5.0000$ en **(1.10)**

$$k_1 = f(x_0, y_0) = 2(1) - 3(5.0000) + 1 = 2 - 15.0000 + 1 = -12$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ &= 2\left(1 + (0.5)(0.05)\right) - 3\left(5.0000 + (0.5)(0.05)(-12)\right) + 1 \\ &= 2(1.025) - 3(4.7000) + 1 = 2.05 - 14.1000 + 1 = -11.0500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ &= 2\left(1 + (0.5)(0.05)\right) - 3\left(5.0000 + (0.5)(0.05)(-11.0500)\right) + 1 \\ &= 2(1.025) - 3(4.723750) + 1 = 2.05 - 14.17125 + 1 = -11.12125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = 2(1 + 0.05) - 3(5.0000 + (0.05)(-11.12125)) + 1 \\ &= 2(1.05) - 3(4.4439375) + 1 = 2.1 - 13.3318125 + 1 = -10.2318125 \end{aligned}$$

$$y(1.05) \approx y_1 = 5.0000 + \frac{0.05}{6}(-12 + 2(-11.0500) + 2(-11.12125) + (-10.2318125))$$

$$y(1.05) \approx y_1 = 5.0000 + \frac{0.05}{6}(-12 - 22.1000 - 22.2425 - 10.2318125)$$

$$y(1.05) \approx y_1 = 5.0000 + \frac{0.05}{6}(-66.5743125)$$

$$y(1.05) \approx y_1 = 5.0000 - 0.554785937$$

$$y(1.05) \approx y_1 = 4.445214063$$

•
•
•

Decima iteración con $n = 9, x_9 = 1.45$ y $y_9 = 2.172354833$

$$\begin{aligned} k_1 = f(x_9, y_9) &= 2(1.45) - 3(2.172354833) + 1 = 2.90 - 6.517064499 + 1 \\ &= -2.617064499 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 = f\left(x_9 + \frac{1}{2}h, y_9 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ &= 2(1.45 + (0.5)(0.05)) - 3(2.172354833 + (0.5)(0.05)(-2.617064499)) \\ &+ 1 = 2(1.475) - 3(2.106928221) + 1 = 2.95 - 6.320784663 + 1 \\ &= -2.370784663 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 = f\left(x_9 + \frac{1}{2}h, y_9 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ &= 2(1.45 + (0.5)(0.05)) - 3(2.172354833 + (0.5)(0.05)(-2.370784663)) \\ &+ 1 = 2(1.475) - 3(2.113085216) + 1 = 2.95 - 6.339255648 + 1 \\ &= -2.389255648 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 = f(x_9 + h, y_9 + hk_3) \\ &= 2(1.45 + 0.05) - 3(2.172354833 + (0.05)(-2.389255648)) + 1 \\ &= 2(1.50) - 3(2.052892051) + 1 = 3.00 - 6.158676153 + 1 \\ &= -2.158676152 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(1.50) \approx y_{10} &= 2.172354833 + \frac{0.05}{6}(-2.617064499 + 2(-2.370784663) \\ &+ 2(-2.389255648) + (-2.158676152)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(1.50) \approx y_{10} &= 2.172354833 + \frac{0.05}{6}(-2.617064499 - 4.741569326 - 4.778511296 \\ &- 2.158676152) \end{aligned}$$

$$y(1.50) \approx y_{10} = 2.172354833 + \frac{0.05}{6}(-14.29582127)$$

$$y(1.50) \approx y_{10} = 2.172354833 - 0.119131843$$

$$y(1.50) \approx y_{10} = 2.053222989$$

Las tablas 23 y 24 muestran los valores encontrados con el método RK4 con tamaños de pasos $h = 0.1$ y $h = 0.05$ con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real.

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% Error relativo
1.00	5.0000	5.0000	0.0000	0.0000
1.10	3.972425	3.972343598	0.000081402	0.002049218
1.20	3.228436406	3.228315797	0.000120609	0.003735972
1.30	2.694539256	2.69440523	0.000134026	0.004974233
1.40	2.316285726	2.316153339	0.000132387	0.005715813
1.50	2.053338827	2.053216232	0.000122595	0.005970876

Tabla 23 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 0.1$ para el método de RK4

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% Error relativo
1.00	5.0000	5.0000	0.0000	0.0000
1.05	4.445214063	4.445211456	0.000002607	0.000058647
1.10	3.972348085	3.972343598	0.000004487	0.000112955
1.15	3.569991322	3.569985529	0.000005793	0.000162269
1.20	3.228322445	3.228315797	0.000006648	0.000205927
1.25	2.938888153	2.938881	0.000007153	0.000243391
1.30	2.694412618	2.69440523	0.000007388	0.000274197
1.35	2.488633470	2.488626052	0.000007418	0.000298076
1.40	2.316160636	2.316153339	0.000007297	0.000315048
1.45	2.172354833	2.172347767	0.000007066	0.00032527
1.50	2.053222989	2.053216232	0.000006757	0.000329093

Tabla 24 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 0.05$ para el método de RK4

La figura 2.10 muestra la curva solución de la ecuación diferencial y los puntos de aproximación encontrados mediante el método de RK4 con tamaño de paso $h = 0.1$ y la figura 2.11 muestra un “zoom” para la visualización de estos puntos respectivamente.

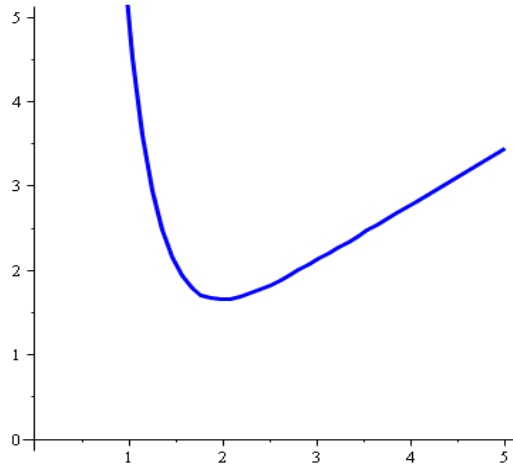


Figura 2.10 Solución exacta y aproximación a la curva solución mediante la visualización de puntos encontrados con el método de RK4 con tamaño de paso $h = 0.1$.

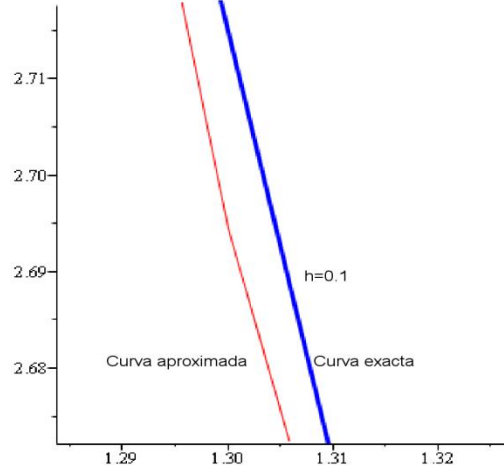


Figura 2.11 “Zoom” para la visualización de puntos encontrados con el método de RK4 con tamaño de paso $h = 0.1$.

La figura 2.12 muestra la curva solución de la ecuación diferencial y los puntos de aproximación encontrados mediante el método de RK4 con tamaño de paso $h = 0.05$ y la figura 2.13 muestra un “zoom” para la visualización de estos puntos respectivamente.

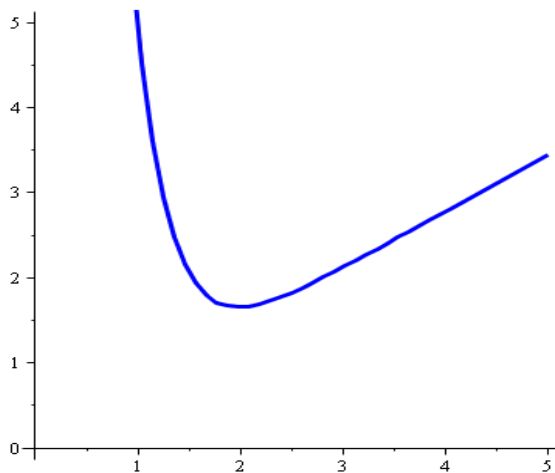


Figura 2.12 Solución exacta y aproximación a la curva solución mediante la visualización de puntos encontrados con el método de RK4 con tamaño de paso $h = 0.05$.

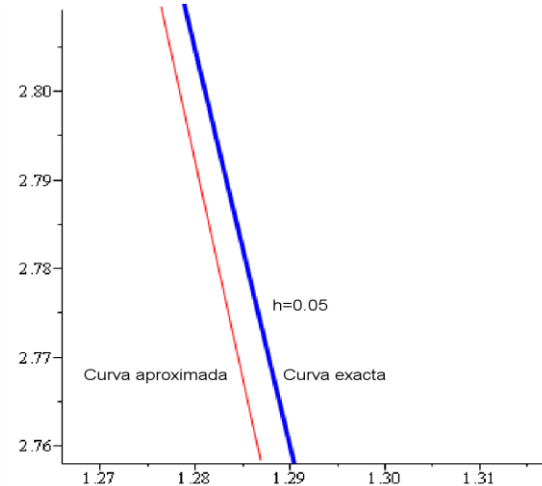


Figura 2.13 “Zoom” para la visualización de puntos encontrados con el método de RK4 con tamaño de paso $h = 0.05$.

Al examinar las tablas 23 y 24 se encuentra que el método de Runge-Kutta de cuarto orden es popular. En las tablas 25 y 26 se comparan los resultados al aplicar los métodos de Euler, Euler mejorado y de Runge-Kutta de cuarto orden del problema con valores iniciales $y' = 2x - 3y + 1, y(1) = 5$ con tamaño de paso $h = 0.1$ y $h = 0.05$.

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4	Valor real
1.00	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000
1.10	3.8000	3.9900	3.972425	3.972343598
1.20	2.9800	3.25455	3.228436406	3.228315797
1.30	2.4260	2.72363975	2.694539256	2.69440523
1.40	2.0582	2.345111614	2.316285726	2.316153339
1.50	1.82074	2.345111614	2.053338827	2.053216232

Tabla 25 Comparación de métodos numéricas con $h = 0.1$

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4	Valor real
1.00	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000
1.05	4.4000	4.4475	4.445214063	4.445211456
1.10	3.8950	3.976284375	3.972348085	3.972343598
1.15	3.47075	3.575074918	3.569991322	3.569985529
1.20	3.1151375	3.234158273	3.228322445	3.228315797
1.25	2.817866875	2.945168813	2.938888153	2.938881
1.30	2.570186844	2.70090164	2.694412618	2.69440523
1.35	2.364658817	2.495151537	2.488633470	2.488626052
1.40	2.194959995	2.322574261	2.316160636	2.316153339
1.45	2.055715995	2.178567082	2.172354833	2.172347767
1.50	1.942358596	2.059165899	2.053222989	2.053216232

Tabla 26 Comparación de métodos numéricos con tamaño de paso $h = 0.05$

Al examinar los cálculos que se han hecho anteriormente se encuentra que el método de Runge-Kutta de cuarto orden es popular. Si todo lo que se desea es una precisión de cuatro decimales, es innecesario usar un tamaño de h más pequeño.

“Errores de truncamiento para el método de RK4 en la sección 2.2 y 2.3 vimos que los errores de truncamiento globales para el método de Euler y el método de Euler mejorado son, respectivamente, $O(h)$ y $O(h^2)$. Debido a que la primera ecuación en (1.10) concuerda con un polinomio de Taylor de cuarto grado, el error de truncamiento global para este método es $\frac{y^{(5)}(c)h^5}{5!}$ o $O(h^5)$, y así el error de truncamiento global es $O(h^4)$. Ahora es evidente por qué el método de Euler, el método de Euler mejorado y (1.10) son métodos de primero, segundo y cuarto orden, respectivamente.”⁽⁴⁰⁾

Ejemplo 2.6 Límite para errores de truncamiento locales para el método de RK4

“Considere el problema con valores iniciales $y' = 2x - 3y + 1, y(1) = 5$. La solución analítica es

$$y(x) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + \frac{38}{9}e^{-3(x-1)}.$$

- Encuentre una fórmula en la que intervengan c y h para el error de truncamiento local en el n -ésimo paso si se emplea el método RK4
- calcule un límite para el error de truncamiento local en cada paso si se usa $h = 0.1$ para aproximar $y(1.50)$.
- Aproxime $y(1.50)$ con el método de RK4 con $h = 0.1$ y $h = 0.05$. Será necesario considerar más de seis cifras para ver el efecto de reducir el tamaño de paso.”⁽⁹⁾

Solución.

- De la solución $y = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + \frac{38}{9}e^{-3(x-1)}$ se obtiene: $y^{(5)} = -1026e^{-3(x-1)}$ por lo que el error de truncamiento es:

$$\left| y^{(5)}(c) \frac{h^5}{120} \right| = \left| -1026e^{-3(c-1)} \frac{h^5}{120} \right| = 1026e^{-3(c-1)} \frac{h^5}{120} = 8.55h^5e^{-3(c-1)}$$

Donde c esta entre x_n y $x_n + h$.

- Por lo que con $c = 1.5$, se obtiene un límite de:

⁽⁴⁰⁾Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (Teoría extraída de la pág. 437, el ejemplo resuelto es el ejercicio 3 que aparece en la guía 9.2 de la pág.348)

$$8.55e^{-3(1.5-1)}(0.1)^5 = 8.55e^{-3(0.5)}(0.00001) = 8.55e^{-1.50}(0.00001) \\ = 0.000019077$$

Es el error de truncamiento para cada uno de los cinco pasos cuando $h = 0.1$. Observar en la tabla 23 el error en y_1 es mucho menor que este límite en la tabla 27 se presentan las aproximaciones a la solución del problema con valores iniciales en $x = 1.50$ que se obtienen con el método de RK4. Al calcular el valor de la solución analítica en $x = 1.50$, se puede encontrar el error en estas aproximaciones. Debido a que el método es tan preciso, se deben usar muchos decimales en la solución numérica para ver el efecto de reducir a la mitad el tamaño de paso. Observar que cuando h se reduce a la mitad, de $h = 0.1$ a $h = 0.05$, el error se divide entre un factor de $2^4 = 16$, como se esperaba.

h	Aproximación	Error
0.1	2.053338827	1.22595×10^{-4}
0.05	2.053222989	6.757×10^{-6}

Tabla 27 método de Runge-Kutta de cuarto orden

c) La aproximación de $y(1.50)$ con $h = 0.1$ usando el método de RK4 $y_5 \approx y(1.50) = 2.053338827$ y La aproximación de $y(1.50)$ con $h = 0.05$ usando el método de RK4 es $y_{10} \approx y(1.50) = 2.053222989$

d) Puesto que la solución real de $y(1.50)$ es 2.053216232, el error para $h = 0.1$ es:

$$|\text{valor real} - \text{valor aproximado}| = |2.053216232 - 2.053338827| = \\ |-0.000122595| = 0.000122595$$

Y el error para $h = 0.05$ es:

$$|\text{valor real} - \text{valor aproximado}| = |2.053216232 - 2.053222989| \\ = |-0.00000229896757| = 0.000006757$$

2.5 METODOS MULTIPASOS

“Los métodos de Euler, Euler mejorado y Runge-Kutta son ejemplos de métodos de un **solo paso** o **de inicio**. En estos métodos cada valor sucesivo y_{n+1} se calcula sólo con base en la información acerca del valor precedente inmediato y_n . Por otro lado, los **métodos multipasos** o **continuos** usan los valores de los diferentes pasos calculados para obtener el

valor de y_{n+1} . Hay un gran número de fórmulas de métodos multipasos para aproximar soluciones de ED, pero como no se tiene la intención de estudiar el extenso campo de procedimientos numéricos, sólo consideraremos uno de estos métodos.

METODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON El método multipasos que se analiza en esta sección se llama **método de Adams-Bashforth-Moulton** de cuarto orden. Al igual que el método de Euler mejorado es un método de **predicción-corrección**, es decir, se emplea una fórmula para predecir un valor y_{n+1}^* , que a su vez se usa para obtener un valor corregido y_{n+1} . La predicción en este método es la fórmula de Adams-Bashforth:

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{24} [55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}] \quad (1.11)$$

$$y'_n = f(x_n, y_n)$$

$$y'_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$y'_{n-2} = f(x_{n-2}, y_{n-2})$$

$$y'_{n-3} = f(x_{n-3}, y_{n-3})$$

Para $n \geq 3$. Después de sustituye el valor de y_{n+1}^* en la corrección de Adams-Moulton

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}) \quad (1.12)$$

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^*).$$

Observe que la fórmula (1.11) requiere conocer los valores de y_0, y_1, y_2 , y y_3 para obtener y_4 . Por supuesto, el valor de y_0 es la condición inicial dada. El error de truncamiento local del método de Adams-Bashforth-Moulton es (h^5) , los valores de y_1, y_2 , y y_3 se calculan generalmente con un método con la misma propiedad de error, tal como el método de Runge-Kutta de cuarto orden.”⁽⁴¹⁾

⁽⁴¹⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (Teoría extraída de las páginas 350 y 451, el ejemplo resuelto es el ejercicio 3 que aparece en la guía 9.3 de la pág.353). Todos los pasos que faltan están desarrollados en el disco de evidencia de trabajo.

Ejemplo 2.7 Método de Adams-Bashforth-Moulton

“Usar el método de Adams-Boshforth-Moulton para aproximar $y(1.50)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales dado use $h = 0.1$ y $h = 0.1$ el método RK4 para calcular y_1, y_2, y_3 ; $y' = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$.”⁽¹⁰⁾

Solución.

Con un tamaño de paso de $h = 0.1$, $y(1.5)$ se aproxima por y_4 . En principio se emplea el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $x_0 = 1, y_0 = 5.0000$ y $h = 0.1$ para obtener:

$$y_1 = 3.972425, \quad y_2 = 3.228436406, \quad y_3 = 2.694539256.$$

Con las identificaciones $x_0 = 1, x_1 = 1.10, x_2 = 1.20, x_3 = 1.30$ y $f(x, y) = 2x - 3y + 1$.

Se encuentra

$$y'_0 = f(x_0, y_0) = f(1, 5) = 2(1) - 3(5.0000) + 1 = 2 - 15 + 1 = -12$$

$$\begin{aligned} y'_1 &= f(x_1, y_1) = f(1.10, 3.972425) = 2(1.10) - 3(3.972425) + 1 \\ &= 2.20 - 11.917275 + 1 = -8.717275 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_2 &= f(x_2, y_2) = f(1.20, 3.228436406) = 2(1.20) - 3(3.228436406) + 1 \\ &= 2.40 - 9.685309218 + 1 = -6.285309218 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_3 &= f(x_3, y_3) = f(1.30, 2.694539256) = 2(1.30) - 3(2.694539256) + 1 \\ &= 2.60 - 8.083617768 + 1 = -4.483617768 \end{aligned}$$

Con estos valores anteriores entonces la predicción **(1.11)** es

$$y_4^* = y_3 + \frac{0.1}{24} (55y'_3 - 59y'_2 + 37y'_1 - 9y'_0)$$

$$\begin{aligned}
y_4^* &= 2.694539256 \\
&+ \frac{0.1}{24} (55(-4.483617768) - 59(-6.285309218) + 37(-8.717275) \\
&- 9(-12)) \\
&= 2.694539256 \\
&+ \frac{0.1}{24} (-246.5989772 - (-370.8332439) + (-322.539175) + 108) \\
&= 2.694539256 \\
&+ \frac{0.1}{24} (-246.5989772 + 370.8332439 - 322.539175 + 108) \\
&= 2.694539256 + \frac{0.1}{24} (-90.3049083) = 2.694539256 - 0.376270451 \\
&= 2.318268805
\end{aligned}$$

Para usar la corrección (1.12), primero se necesita

$$\begin{aligned}
y_4' &= f(x_4, y_4^*) = f(1.40, 2.318268805) = 2(1.4) - 3(2.318268805) + 1 \\
&= 2.80 - 6.954806415 + 1 = -3.154806415
\end{aligned}$$

Por último, usando (1.12) se obtiene

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24} (9y_4' + 19y_3' - 5y_2' + y_1')$$

$$\begin{aligned}
y_4 &= 2.694539256 \\
&+ \frac{0.1}{24} (9(-3.154806415) + 19(-4.483617768) - 5(-6.285309218) \\
&+ (-8.717275)) \\
&= 2.694539256 \\
&+ \frac{0.1}{24} (-28.39325774 - 85.18873759 + 31.42654609 - 8.717275) \\
&= 2.694539256 + \frac{0.1}{24} (-90.87272424) = 2.694539256 - 0.378636351 \\
&= 2.315902905
\end{aligned}$$

Para la quinta iteración se necesita

$$y_4' = f(x_4, y_4) = f(1.4, 2.315902905) = 2(1.4) - 3(2.315902905) + 1$$

$$= 2.8 - 6.947708715 + 1 = -3.147708715$$

$$y_3' = f(x_3, y_3) = f(1.30, 2.694539256) = 2(1.30) - 3(2.694539256) + 1$$

$$= 2.60 - 8.083617768 + 1 = -4.483617768$$

$$y_2' = f(x_2, y_2) = f(1.20, 3.228436406) = 2(1.20) - 3(3.228436406) + 1$$

$$= 2.40 - 9.685309218 + 1 = -6.285309218$$

$$y_1' = f(x_1, y_1) = f(1.10, 3.972425) = 2(1.10) - 3(3.972425) + 1$$

$$= 2.20 - 11.917275 + 1 = -8.717275$$

Con estos valores anteriores entonces la predicción **(1.12)** es

$$y_5^* = y_4 + \frac{0.1}{24} (55y_4' - 59y_3' + 37y_2' - 9y_1')$$

$$y_5^* = 2.318268805$$

$$+ \frac{0.1}{24} (55(-3.147708715) - 59(-4.483617768) + 37(-6.285309218)$$

$$- 9(-8.717275))$$

$$= 2.318268805$$

$$+ \frac{0.1}{24} (-173.1239793 - (-264.5334483) + (-232.5564411)$$

$$+ 78.455475)$$

$$= 2.318268805$$

$$+ \frac{0.1}{24} (-173.1239793 + 264.5334483 - 232.5564411 + 78.455475)$$

$$= 2.318268805 + \frac{0.1}{24} (-62.6914971) = 2.318268805 - 0.261214571$$

$$= 2.057054234$$

Para usar la corrección **(1.12)**, primero se necesita

$$y_5' = f(x_5, y_5^*) = f(1.50, 2.057054234) = 2(1.50) - 3(2.057054234) + 1$$

$$= 3.00 - 6.171162702 + 1 = -2.171162702$$

Por último, usando **(1.12)** se obtiene:

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{24}(9y'_5 + 19y'_4 - 5y'_3 + y'_2)$$

$$\begin{aligned} y_5 &= 2.318268805 \\ &+ \frac{0.1}{24}(9(-2.171162702) + 19(-3.147708715) - 5(-4.483617768) \\ &+ (-6.285309218)) \\ &= 2.318268805 \\ &+ \frac{0.1}{24}(-19.54046432 - 59.80646559 + 22.41808884 - 6.285309218) \\ &= 2.318268805 + \frac{0.1}{24}(-63.21415029) = 2.318268805 - 0.263392292 \\ &= 2.054876512 \end{aligned}$$

Trabajando con $h = 0.05$

Con un tamaño de paso de $h = 0.05$, $y(1.50)$ se aproxima por y_4 . En principio se emplea el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $x_0 = 1$, $y_0 = 5.0000$ y $h = 0.05$ para obtener:

$$y_1 = 4.445214063, \quad y_2 = 3.972348085, \quad y_3 = 3.569991322.$$

Con las identificaciones $x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$, $x_2 = 1.10$, $x_3 = 1.15$ y $f(x, y) = 2x - 3y + 1$.

Se encuentra

$$y'_0 = f(x_0, y_0) = f(1, 5) = 2(1) - 3(5.0000) + 1 = 2 - 15 + 1 = -12$$

$$\begin{aligned} y'_1 &= f(x_1, y_1) = f(1.05, 4.445214063) = 2(1.05) - 3(4.445214063) + 1 \\ &= 2.10 - 13.33564219 + 1 = -10.23564219 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_2 &= f(x_2, y_2) = f(1.10, 3.972348085) = 2(1.10) - 3(3.972348085) + 1 \\ &= 2.20 - 11.91704426 + 1 = -8.71704425 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_3 &= f(x_3, y_3) = f(1.15, 3.569991322) = 2(1.15) - 3(3.569991322) + 1 \\ &= 2.30 - 10.70997397 + 1 = -7.40997396 \end{aligned}$$

Con estos valores anteriores entonces la predicción (**1.11**) es

$$y_4^* = y_3 + \frac{0.05}{24}(55y'_3 - 59y'_2 + 37y'_1 - 9y'_0)$$

$$\begin{aligned}
y_4^* &= 3.569991322 \\
&+ \frac{0.05}{24} (55(-7.409973966) - 59(-8.717044255) + 37(-10.23564219) \\
&- 9(-12)) \\
&= 3.569991322 \\
&+ \frac{0.05}{24} (-407.5485681 - (-514.305611) + (-378.718761) + 108) \\
&= 3.569991322 \\
&+ \frac{0.05}{24} (-407.5485681 + 514.305611 - 378.718761 + 108) \\
&= 3.569991322 + \frac{0.05}{24} (-163.9617181) = 3.569991322 - 0.341586912 \\
&= 3.228404409
\end{aligned}$$

Para usar la corrección (1.12), primero se necesita

$$\begin{aligned}
y_4' &= f(x_4, y_4^*) = f(1.20, 3.228404409) = 2(1.20) - 3(3.228404409) + 1 \\
&= 2.40 - 9.685213228 + 1 = -6.285213228
\end{aligned}$$

Por último, usando (1.12) se obtiene

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24} (9y_4' + 19y_3' - 5y_2' + y_1')$$

$$\begin{aligned}
y_4 &= 3.569991322 \\
&+ \frac{0.05}{24} (9(-6.285213228) + 19(-7.409973966) - 5(-8.717044255) \\
&+ (-10.23564219)) \\
&= 3.569991322 \\
&+ \frac{0.05}{24} (-56.56691905 - 140.7895054 + 43.58522128 - 10.23564219) \\
&= 3.569991322 + \frac{0.05}{24} (-164.0068453) = 3.569991322 - 0.341680927 \\
&= 3.228310394
\end{aligned}$$

•
•

Cálculo de la última iteración

$$\begin{aligned} y'_9 &= f(x_9, y_9) = f(1.45, 2.172321223) = 2(1.45) - 3(2.172321223) + 1 \\ &= 2.90 - 6.516963669 + 1 = -2.616963669 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_8 &= f(x_8, y_8) = f(1.40, 2.316128083) = 2(1.40) - 3(2.316128083) + 1 \\ &= 2.80 - 6.948384249 + 1 = -3.148384249 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_7 &= f(x_7, y_7) = f(1.35, 2.488603196) = 2(1.35) - 3(2.488603196) + 1 \\ &= 2.70 - 7.465809589 + 1 = -3.765809589 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_6 &= f(x_6, y_6) = f(1.30, 2.694386215) = 2(1.30) - 3(2.694386215) + 1 \\ &= 2.60 - 8.083158645 + 1 = -4.483158645 \end{aligned}$$

Con estos valores anteriores entonces la predicción **(1.11)** es

$$y_{10}^* = y_9 + \frac{0.05}{24} (55y'_9 - 59y'_8 + 37y'_7 - 9y'_6)$$

$$\begin{aligned} y_{10}^* &= 2.172321223 \\ &+ \frac{0.05}{24} (55(-2.616963669) - 59(-3.148384249) + 37(-3.765809589) \\ &- 9(-4.483158645)) \\ &= 2.172321223 \\ &+ \frac{0.05}{24} (-143.9330018 - (-185.7546707) + (-139.3349548) \\ &+ 40.34842781) \\ &= 2.172321223 \\ &+ \frac{0.05}{24} (-143.9330018 + 185.7546707 - 139.3349548 + 40.34842781) \\ &= 2.172321223 + \frac{0.05}{24} (-57.16485809) = 2.172321223 - 0.119093454 \\ &= 2.053227769 \end{aligned}$$

Para usar la corrección **(1.12)**, primero se necesita

$$y'_{10} = f(x_{10}, y_{10}^*) = f(1.50, 2.053227769) = 2(1.50) - 3(2.053227769) + 1$$

$$= 3.00 - 6.159683307 + 1 = -2.159683307$$

$$y_{10} = y_9 + \frac{h}{24}(9y'_{10} + 19y'_9 - 5y'_8 + y'_7)$$

$$y_{10} = 2.172321223$$

$$+ \frac{0.05}{24}(9(-2.159683307) + 19(-2.616963669) - 5(-3.148384249)$$

$$+ (-3.765809589))$$

$$= 2.172321223$$

$$+ \frac{0.05}{24}(-19.43714976 - 49.72230971 + 15.74192125 - 3.765809589)$$

$$= 2.172321223 + \frac{0.05}{24}(-57.18334782) = 2.172321223 - 0.119131974$$

$$= 2.053189248$$

La tabla 28 muestra los resultados utilizando los tres primeros pasos con el método de RK4, y los siguientes pasos utilizando predictor y corrector del método de Adams-Bashforrth-Moulton con tamaño de paso $h = 0.1$ comparado con el valor real.

x_n	y_n	Adams-Bashforrth-Moulton	Valor real
1.00	5.0000	Condición inicial	5.0000
1.10	3.972425000	Runge-Kutta	3.972343598
1.20	3.228436406	Runge-Kutta	3.228315797
1.30	2.694539256	Runge-Kutta	2.69440523
	2.318268805	Predictor	
1.40	2.315902905	Corrector	2.316153339
	2.057054234	Predictor	
1.50	2.052776776	Corrector	2.053216232

Tabla 28 Resultado encontrados con el método Adams-Bashforrth-Moulton con tamaño de paso $h = 0.1$

La tabla 29 muestra los resultados utilizando los tres primeros pasos con el método de RK4, y los siguientes pasos utilizando predictor y corrector del método de Adams-Bashforth-Moulton con tamaño de paso $h = 0.05$ comparado con el valor real.

x_n	y_n	Adams-Bashforth-Moulton	RK4	Valor real
1.00	5.0000	Condición inicial	5.0000	5.0000
1.05	4.445214063	Runge-Kutta	4.445214063	4.445211456
1.10	3.972348085	Runge-Kutta	3.972348085	3.972343598
1.15	3.569991322	Runge-Kutta	3.569991322	3.569985529
	3.228404409	Predictor		
1.20	3.228310394	Corrector	3.228322445	3.228315797
	2.938950793	Predictor		
1.25	2.938867606	Corrector	2.938888153	2.938881
	2.694455411	Predictor		
1.30	2.694386215	Corrector	2.694412618	2.69440523
	2.488663617	Predictor		
1.35	2.488603196	Corrector	2.488633470	2.488626052
	2.31618009	Predictor		
1.40	2.316128083	Corrector	2.316160636	2.316153339
	2.172365974	Predictor		
1.45	2.172321223	Corrector	2.172354833	2.172347767
	2.053227769	Predictor		
1.50	2.053189248	Corrector	2.053222989	2.053216232

Tabla 29 Resultados encontrados con el método Adams-Bashforth-Moulton con tamaño de paso $h = 0.05$

Las figuras 2.14 y 2.15 muestran la curva solución de la ecuación diferencial y los puntos de aproximación encontrados mediante el método de Adams-Bashforth-Moulton con tamaño de paso $h = 0.1$ y $h = 0.05$

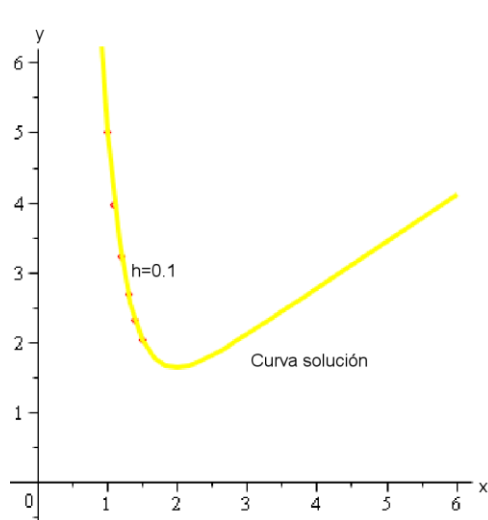


Figura 2.14 Solución exacta y aproximación a la curva solución mediante la visualización de puntos encontrados con el método de Adams-Bashforth-Moulton con tamaño de pasos $h = 0.1$.

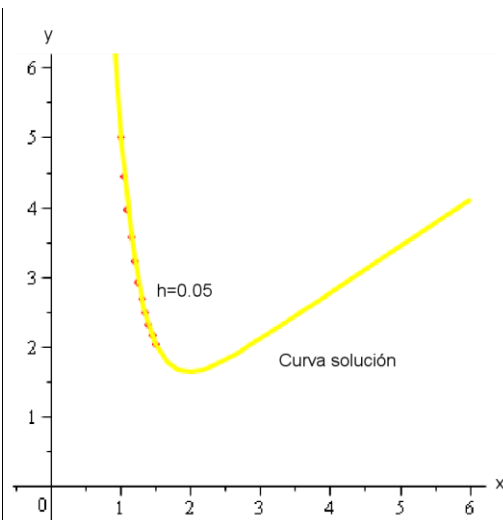


Figura 2.15 Solución exacta y aproximación a la curva solución mediante la visualización de puntos encontrados con el método de Adams-Bashforth-Moulton con tamaño de pasos $h = 0.05$.

“ESTABILIDAD DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS. Una consideración importante al usar métodos numéricos para aproximar la solución de un problema con valores iniciales es la estabilidad del método. En términos simples, un método numérico es **estable** si cambios pequeños en la condición inicial dan como resultado solo cambios pequeños en la solución calculada. Se dice que un método numérico es **inestable** si no es estable. La razón por la cual las consideraciones de estabilidad son importantes es que en cada paso después del primero de una técnica numérica esencialmente se empieza otra vez con un nuevo problema con valores iniciales, donde la condición inicial es el valor solución aproximado calculado en el paso anterior. Debido a la presencia del error de redondeo, es casi seguro que este valor varíe al menos un poco respecto al valor verdadero de la solución. Además el error de redondeo, otra fuente común de error ocurre en la condición inicial; en aplicaciones físicas los datos con frecuencia se obtienen con mediciones imprecisas.

Un posible método para detectar inestabilidad en la solución numérica de un problema con valores iniciales específico es comparar las soluciones aproximadas obtenidas cuando se emplean tamaños de paso reducidos. Si el método es inestable, el error puede aumentar en realidad con tamaños de paso más pequeños. Otra forma de comprobar la inestabilidad, es observar lo que sucede con las soluciones cuando se perturba un poco la condición inicial (por ejemplo, cambiar $y(0) = 1$ a $y(0) = 0.999$).

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LOS MÉTODOS MULTIPASOS. Intervienen muchas consideraciones en la elección de un método para resolver de forma numérica de una ecuación diferencial. Los métodos de un solo paso, en particular el RK4, se eligen debido a su precisión y al hecho de que son fáciles de programar. Sin embargo, una desventaja importante es que el lado derecho de la ecuación diferencial se debe evaluar muchas veces en cada paso. Por ejemplo, el método RK4 requiere cuatro evaluaciones de función para cada paso. Por otro lado, si se han calculado y almacenado las evaluaciones de función del paso anterior, un método multipasos requiere solo una nueva evaluación de función para cada paso. Esto puede originar grandes ahorros de tiempo y reducir costos.

Como ejemplo, resolver en forma numérica $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ usando n pasos con el método de Runge-Kutta de cuarto orden requiere $4n$ evaluaciones de la función. El método multipasos de Adams-Bashforth-Moulton requiere 16 evaluaciones de la función para el iniciador de cuarto orden de Runge-Kutta y $n - 4$ para los n de Adams-Bashforth-Moulton, lo que da un total de $n + 12$ evaluaciones de la función para este método. En general, el método de multipasos de Adams-Bashforth requiere poco más de un cuarto del número de evaluaciones de función necesarias para el método RK4. Si se complica la evaluación de $f(x, y)$, el método multipasos será más eficaz.

Otro asunto relacionado con los métodos multipasos es cuántas veces se debe repetir en cada paso la fórmula de corrección de Adams-Bashforth-Moulton. Cada vez que se usa la corrección, se hace otra evaluación de la función y por tanto se incrementa la precisión a expensas de perder una ventaja del método multipasos. En la práctica, la corrección se calcula una vez y si se cambia el valor de y_{n+1} por una cantidad grande, se reinicia todo el problema con un tamaño de paso más pequeño.”⁽⁴²⁾

2.6 Ecuaciones y Sistemas de Orden Superior

“Hasta ahora, nos hemos concentrado en técnicas numéricas que se pueden usar para aproximar la solución de un problema con valores iniciales de primer orden $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. Para aproximar la solución de un problema con valores iniciales de segundo orden, se debe expresar una ecuación diferencial de segundo orden como un sistema

⁽⁴²⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (teoría extraída de la pág.352).

de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Para hacer esto, se comienza escribiendo la ecuación diferencial de segundo orden en la forma normal al despejar y'' en términos x , y y y' .

Un problema de valores iniciales de segundo orden es el siguiente

$$y'' = g(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = u_0 \quad (1.13)$$

Se puede expresar como un problema de valores iniciales para un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Si $y' = u$, la ecuación diferencial en (1.13) se convierte en el sistema

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= g(x, y, u) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Puesto que $y'(x_0) = u(x_0)$, las condiciones iniciales correspondientes para (1.14) son

$$y(x_0) = y_0, u(x_0) = u_0$$

El sistema (1.14) se puede resolver de forma numérica mediante la simple aplicación de un método numérico a cada ecuación diferencial de primer orden en el sistema, el **método de Euler** aplicado al sistema (1.14) sería.⁽⁴³⁾

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hu_n \\ u_{n+1} &= u_n + h \cdot g(x_n, y_n, u_n). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ejemplo 2.8 Sistema de ecuaciones de orden superior usando el método de Euler

“Usar el método de Euler para aproximar $y(0.2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$ y $h = 0.1$.

Encontrar la solución analítica del problema y comparar el valor real de $y(0.2)$ con y_2 .”⁽¹²⁾

⁽⁴³⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (teoría extraída de la pág. 353, el ejemplo resuelto es el ejercicio 1 que aparece en la guía 9.4 de la pág.357).

Solución.

La ecuación diferencial es equivalente al sistema siempre cuando se hace $y' = u$ entonces la segunda derivada sería: $y'' = u'$ de modo que sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene el siguiente sistema:

$$y' = u$$

$$u' = 4u - 4y$$

Por lo que $y_{n+1} = y_n + h \cdot u_n$ y $u_{n+1} = u_n + h \cdot g(x_n, y_n, u_n)$ se convierten en

$$y_{n+1} = y_n + hu_n$$

$$u_{n+1} = u_n + h[4u_n - 4y_n].$$

Usando el tamaño de paso $h = 0.1$, $y_0 = -2$ y $u_0 = 1$, se obtiene:

$$y(0.10) \approx y_1 = y_0 + (0.1)u_0 = -2 + (0.1)(1) = -2 + 0.1 = -1.90$$

$$\begin{aligned} y'(0.10) \approx u_1 &= u_0 + (0.1)[4u_0 - 4y_0] = 1 + (0.1)[4(1) - 4(-2)] = 1 + (0.1)[4 + 8] \\ &= 1 + (0.1)[12] = 1 + 1.2 = 2.2 \end{aligned}$$

$$y(0.20) \approx y_2 = y_1 + (0.1)u_1 = -1.90 + (0.1)(2.2) = -1.90 + 0.22 = -1.6800$$

$$\begin{aligned} y'(0.20) \approx u_2 &= u_1 + (0.1)[4u_1 - 4y_1] = 2.2 + (0.1)[4(2.2) - 4(-1.90)] \\ &= 2.2 + (0.1)[8.8 + 7.6] = 2.2 + (0.1)[16.4] = 2.2 + 1.64 = 3.8400 \end{aligned}$$

En otras palabras $y(0.2) = -1.6800$ y $y'(0.2) = 3.8400$

Encontrando la solución analítica de $y'' - 4y + 4 = 0$ $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$

Utilizando la ecuación auxiliar $am^2 + bm + c = 0$

$$m^2 - 4m + 4 = (m - 2)(m - 2) = 0,$$

De donde $m = 2$. Usando la fórmula que se utiliza para la solución de ecuaciones diferenciales de forma general $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$ se tiene: $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

Encontrando el valor de las constantes arbitrarias primeramente Sustituyendo $y(0) = -2$ $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$ se obtiene: $c_1 = -2$ y con la otra condición inicial $y'(0) = 1$ y dado que $c_1 = -2$ se encuentra que $c_2 = 5$

La solución de la ecuación diferencial $y'' - 4y + 4 = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = -2, y'(0) = 1$ es $y(x) = -2e^{2x} + 5xe^{2x}$:

El valor real de $y(0.2)$ sería: $y(0.2) \approx -2e^{2(0.2)} + 5(0.2)e^{2(0.2)} = -1.491824698$

La tabla 30 muestra el valor aproximado de la ecuación diferencial $y'' - 4y + 4 = 0$ $y(0) = -2, y'(0) = 1$ encontrado con el método de Euler comparado con el valor real para $y(0.2)$.

h	Método Euler	Valor real	Error
0.1	-1.6800	-1.491824698	0.188175302

Tabla 30 Comparación del valor aproximado con el valor real y error absoluto para el tamaño de paso $h = 0.1$

Gráficamente se muestra la solución de la ecuación diferencial con valores iniciales en la figura 2.16.

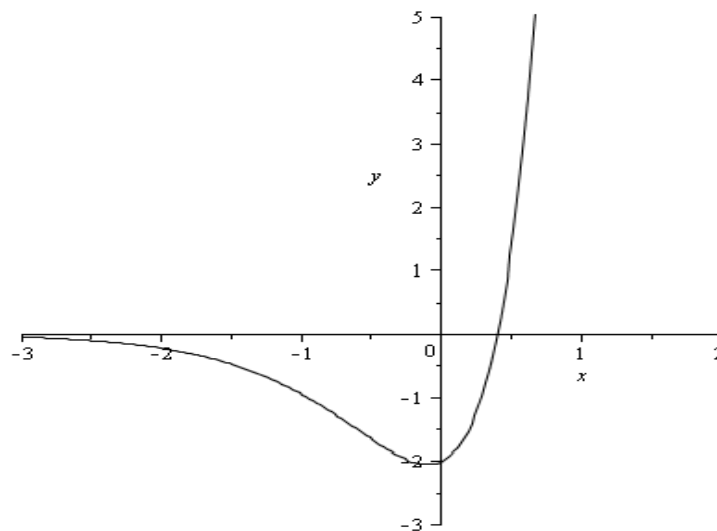


Figura 2.16 Curva solución de la ecuación diferencial de segundo orden $y'' - 4y' + 4y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = -2, y'(0) = 1$.

“Mientras que el método de Runge-Kutta de cuarto orden o método de RK4, sería

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Donde

$$m_1 = u_n$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hm_1, u_n + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$m_2 = u_n + \frac{1}{2}hk_1$$

$$m_3 = u_n + \frac{1}{2}hk_2$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hm_2, u_n + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$m_4 = u_n + hk_3$$

$$k_1 = f(x_n, y_n, u_n)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hm_3, u_n + hk_3)$$

En general se puede expresar cada ecuación diferencial de n –ésimo orden $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden usando las sustituciones $y = u_1, y' = u_2, y'' = u_3, \dots, y^{(n-1)} = u_n$.”⁽⁴⁴⁾

Ejemplo 2.9 Sistema de ecuaciones de orden superior usando el método de Runge-Kutta

“Usando el método de RK4 del sistema que se genera de la ecuación diferencial dada. Primero utilice $h = 0.2$ y después $h = 0.1$ en el problema $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 1$. Compare el valor real con y_2 .”⁽¹³⁾

Solución.

En términos de la sustitución de $y' = u$, la ecuación es equivalente para el sistema

$$y'' = u'$$

⁽⁴⁴⁾Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (teoría extraída de la pág. 353 y 354, el ejemplo resuelto es el ejercicio 3 que aparece en la guía 9.4 de la pág.357).

De modo que

$$u' = 4u - 4y$$

El sistema seria:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = 4u - 4y \end{cases}$$

Con las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

Iniciando con $n = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = -2$, $u_0 = 1$ y $h = 0.2$

$$m_1 = u_0$$

$$m_1 = 1$$

$$k_1 = f(x_0, y_0, u_0) = f(0, -2, 1) = 4(1) - 4(-2) = 4 + 8 = 12$$

$$m_2 = u_0 + \frac{1}{2}h \cdot k_1$$

$$m_2 = 1 + \frac{1}{2}(0.2)(12)$$

$$m_2 = 1 + 1.2$$

$$m_2 = 2.2$$

$$k_2 = f\left(0 + \frac{1}{2}(0.2), -2 + \frac{1}{2}(0.2)(1), 1 + \frac{1}{2}(0.2)(12)\right)$$

$$k_2 = f(0.1, -2 + 0.1, 1 + 1.2)$$

$$k_2 = f(0.1, -1.9, 2.2)$$

$$k_2 = 4(2.2) - 4(-1.9)$$

$$k_2 = 8.8 + 7.6$$

$$k_2 = 16.4$$

$$m_3 = 1 + \frac{1}{2}(0.2)(16.4)$$

$$m_3 = 1 + 1.64$$

$$m_3 = 2.64$$

$$k_3 = f\left(0 + \frac{1}{2}(0.1), -2 + \frac{1}{2}(0.2)(2.2), 1 + \frac{1}{2}(0.2)(16.4)\right)$$

$$k_3 = f(0.1, -2 + 0.22, 1 + 1.64)$$

$$k_3 = f(0.1, -1.78, 2.64)$$

$$k_3 = 4(2.64) - 4(-1.78)$$

$$k_3 = 10.56 + 7.12$$

$$k_3 = 17.68$$

$$m_4 = 1 + (0.2)(17.68)$$

$$m_4 = 4.536$$

$$k_4 = f\left(0 + \frac{1}{2}(0.2), -2 + (0.2)(2.64), 1 + (0.2)(17.68)\right)$$

$$k_4 = f(0.1, -2 + 0.528, 1 + 3.536)$$

$$k_4 = f(0.1, -1.472, 4.536)$$

$$k_4 = 4(4.536) - 4(-1.472)$$

$$k_4 = 18.144 + 5.888$$

$$k_4 = 24.032$$

$$y(0.20) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$y(0.20) \approx y_1 = -2 + \frac{0.2}{6}(1 + 2(2.2) + 2(2.64) + 4.536)$$

$$y(0.20) \approx y_1 = -2 + \frac{0.2}{6}(1 + 4.4 + 5.28 + 4.536)$$

$$y(0.20) \approx y_1 = -2 + \frac{0.2}{6}(15.216)$$

$$y(0.20) \approx y_1 = -2 + 0.5072$$

$$y(0.20) \approx y_1 = -1.4928$$

$$y'(0.2) \approx u_1 = u_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y'(0.2) \approx u_1 = 1 + \frac{0.2}{6}(12 + 2(16.4) + 2(17.68) + 24.032)$$

$$y'(0.2) \approx u_1 = 1 + \frac{0.2}{6}(12 + 32.8 + 35.36 + 24.032)$$

$$y'(0.2) \approx u_1 = 1 + \frac{0.2}{6}(104.1920)$$

$$y'(0.2) \approx u_1 = 1 + 3.4731$$

$$y'(0.2) \approx u_1 = 4.473066667$$

Para la otra parte cuando $h = 0.1$

Iniciando con $n = 0, x_1 = 0, y_0 = -2, u_0 = 1$ y $h = 0.1$

$$m_1 = 1$$

$$k_1 = f(x_0, y_0, u_0) = f(0, -2, 1) = 4(1) - 4(-2) = 4 + 8 = 12$$

$$m_2 = u_0 + \frac{1}{2}h \cdot k_1$$

$$m_2 = 1 + \frac{1}{2}(0.1)(12)$$

$$m_2 = 1 + 0.6$$

$$m_2 = 1.60$$

$$k_2 = f\left(0 + \frac{1}{2}(0.1), -2 + \frac{1}{2}(0.1)(1), 1 + \frac{1}{2}(0.1)(12)\right)$$

$$k_2 = f(0.05, -2 + 0.05, 1 + 0.6)$$

$$k_2 = f(0.05, -1.95, 1.6)$$

$$k_2 = 4(1.6) - 4(-1.95)$$

$$k_2 = 6.4 + 7.8$$

$$k_2 = 14.2$$

$$m_3 = 1 + \frac{1}{2}(0.1)(14.2)$$

$$m_3 = 1 + 0.71$$

$$m_3 = 1.71$$

$$k_3 = f\left(0 + \frac{1}{2}(0.1), -2 + \frac{1}{2}(0.1)(1.6), 1 + \frac{1}{2}(0.1)(14.2)\right)$$

$$k_3 = f(0.05, -2 + 0.08, 1 + 0.71)$$

$$k_3 = f(0.05, -1.92, 1.71)$$

$$k_3 = 4(1.71) - 4(-1.92)$$

$$k_3 = 6.84 + 7.68$$

$$k_3 = 14.54$$

$$m_4 = 1 + (0.1)(14.52)$$

$$m_4 = 2.452$$

$$k_4 = f(0 + (0.1), -2 + (0.1)(1.71), 1 + (0.1)(14.52))$$

$$k_4 = f(0.1, -2 + 0.171, 1 + 1.452)$$

$$k_4 = f(0.1, -1.829, 2.452)$$

$$k_4 = 4(2.452) - 4(-1.829)$$

$$k_4 = 9.808 + 7.316$$

$$k_4 = 17.124$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$y(0.10) \approx y_1 = -2 + \frac{0.1}{6}(1 + 2(1.6) + 2(1.71) + 2.452)$$

$$y(0.10) \approx y_1 = -2 + \frac{0.1}{6}(1 + 3.2 + 3.42 + 2.452)$$

$$y(0.10) \approx y_1 = -2 + \frac{0.1}{6}(10.070)$$

$$y(0.10) \approx y_1 = -2 + 0.167833333$$

$$y(0.10) \approx y_1 = -1.832166667$$

$$u_1 = u_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y'(0.10) \approx u_1 = 1 + \frac{0.1}{6}(12 + 2(14.2) + 2(14.52) + 17.124)$$

$$y'(0.10) \approx u_1 = 1 + \frac{0.1}{6}(12 + 28.4 + 29.04 + 17.124)$$

$$y'(0.10) \approx u_1 = 1 + \frac{0.1}{6}(86.564)$$

$$y'(0.10) \approx u_1 = 1 + 1.442733333$$

$$y'(0.10) \approx u_1 = 2.442733333$$

Se hará otra iteración más para ver el comportamiento de la solución

Para $n = 1$, $x_1 = 0.1$, $y_1 = -1.832166667$, $u_1 = 2.442733333$ y $h = 0.1$

$$m_1 = u_1$$

$$m_1 = 2.442733333$$

$$k_1 = f(x_1, y_1, u_1) = f(0.1, -1.832166667, 2.442733333)$$

$$\begin{aligned} &= 4(2.442733333) - 4(-1.832166667) = 9.770933332 + 7.328666667 \\ &= 17.0996 \end{aligned}$$

$$m_2 = u_1 + \frac{1}{2}h \cdot k_1$$

$$m_2 = 2.4427 + \frac{1}{2}(0.1)(17.0996)$$

$$m_2 = 2.442733333 + 0.85498$$

$$m_2 = 3.297713333$$

$$k_2 = f\left(0.1 + \frac{1}{2}(0.1), -1.832166667 + \frac{1}{2}(0.1)(2.442733333), 2.4427 + \frac{1}{2}(0.1)(17.0996)\right)$$

$$k_2 = f(0.15, -1.832166667 + 0.122136666, 2.442733333 + 0.85498)$$

$$k_2 = f(0.15, -1.710030001, 3.297713333)$$

$$k_2 = 4(3.297713333) - 4(-1.710030001)$$

$$k_2 = 13.19085333 + 6.8490120004$$

$$k_2 = 20.03097333$$

$$m_3 = 2.442733333 + \frac{1}{2}(0.1)(20.0309733)$$

$$m_3 = 2.442733333 + 1.001548667$$

$$m_3 = 3.444282$$

$$k_3 = f\left(0.1 + \frac{1}{2}(0.1), -1.832166667 + \frac{1}{2}(0.1)(3.297713333), 2.442733333 + \frac{1}{2}(0.1)(20.03097333)\right)$$

$$k_3 = f(0.15, -1.832166667 + 0.164885666, 2.442733333 + 1.001548667)$$

$$k_3 = f(0.15, -1.667281001, 3.444282)$$

$$k_3 = 4(3.444282) - 4(-1.667281001)$$

$$k_3 = 13.777128 + 6.669124004$$

$$k_3 = 20.446252$$

$$m_4 = 2.442733333 + (0.1)(20.446252)$$

$$m_4 = 2.442733333 + 2.0446252$$

$$m_4 = 4.487358533$$

$$k_4 = f(0.1 + 0.1, -1.832166667 + (0.1)(3.444282), 2.442733333 + (0.1)(20.446252))$$

$$k_4 = f(0.2, -1.832166667 + 0.3444282, 2.442733333 + 2.0446252)$$

$$k_4 = f(0.2, -1.4876775, 4.487358533)$$

$$k_4 = 4(4.4872768) - 4(-1.48767775)$$

$$k_4 = 17.94943413 + 5.950953868$$

$$k_4 = 23.900388$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$y(0.20) \approx y_2 = -1.832166667 + \frac{0.1}{6}(2.442733333 + 2(3.297713333) + 2(3.444282) + 4.487358533)$$

$$y(0.20) \approx y_2 = -1.832166667 + \frac{0.1}{6}(2.442733333 + 6.595426666 + 6.888564 + 4.487358533)$$

$$y(0.20) \approx y_2 = -1.832166667 + \frac{0.1}{6}(20.41408253)$$

$$y(0.20) \approx y_2 = -1.832166667 + 0.340234708$$

$$y(0.20) \approx y_2 = -1.491931959$$

$$u_2 = u_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y'(0.2) \approx u_2 = 2.442733333 + \frac{0.1}{6}(17.0996 + 2(20.03097333) + 2(20.446252) + 23.900388)$$

$$y'(0.2) \approx u_2 = 2.442733333 + \frac{0.1}{6} (17.0996 + 40.06194666 + 40.892504 + 23.900388)$$

$$y'(0.2) \approx u_2 = 2.442733333 + \frac{0.1}{6} (121.9544387)$$

$$y'(0.2) \approx u_2 = 2.442733333 + 2.032573978$$

$$y'(0.2) \approx u_2 = 4.475307311$$

La tabla 31 muestra el valor aproximado de la ecuación diferencial $y'' - 4y + 4 = 0$ $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$ encontrado con el método RK4 comparado con el valor real para $y(0.2)$.

h	Método RK4	Valor real	error
0.1	-1.491931959	-1.491824698	0.000107261
0.2	-1.4928	-1.491824698	0.000975302

Tabla 31 Comparación de resultados con tamaño de pasos $h = 0.1$ y $h = 0.2$

Gráficamente se muestra la solución de la ecuación diferencial con valores iniciales en la figura 2.17.

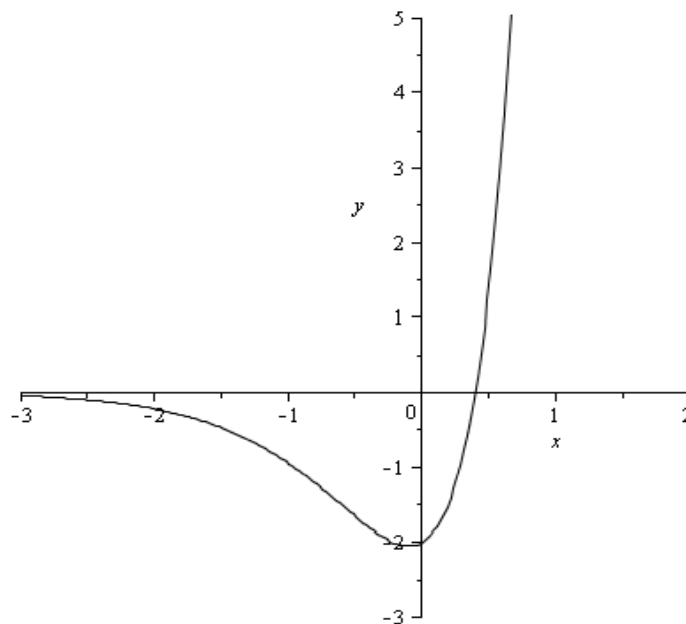


Figura 2.17 Curva solución de la ecuación diferencial de segundo orden $y'' - 4y' + 4y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.

“SISTEMAS REDUCIDAS A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN. Usando un procedimiento similar al que se acaba de describir para ecuaciones de segundo orden, se reduce un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior a un sistema de ecuaciones de primer orden, determinando primero la derivada de orden superior de cada variable dependiente y después haciendo las sustituciones apropiadas para las derivadas de orden menor.”⁽⁴⁵⁾

“Solución numérica de un sistema. La solución de un sistema de la forma

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Se puede aproximar con una versión del método de Euler, de Runge-Kutta adaptada al sistema. Por ejemplo, el método de RK4 aplicado al sistema

$$x' = f(t, x, y)$$

$$y' = g(t, x, y)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0,$$

Se parece a:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

Donde

⁽⁴⁵⁾Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (teoría extraída de la pág. 354).

$$m_1 = f(t_n, x_n, y_n)$$

$$m_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hm_1, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$m_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hm_2, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$m_4 = f(t_n + h, x_n + hm_3, y_n + hk_3)$$

$$k_1 = g(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_2 = g\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hm_1, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = g\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hm_2, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = g(t_n + h, x_n + hm_3, y_n + hk_3).^{(46)}$$

Ejemplo 2.10 Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden para Sistema de Ecuaciones Diferenciales

“Usar el método de RK4 para aproximar $x(0.2)$ y $y(0.2)$. Primero use $h = 0.2$ y después $h = 0.1$. Use un programa de solución numérica y $h = 0.1$ para trazar la gráfica de la solución en una vecindad de $t = 0$. ”⁽¹⁵⁾

Para el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x$$

$$x(0) = 6, y(0) = 2$$

⁽⁴⁶⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (teoría extraída de la pág. 355 y 356, el ejemplo resuelto es el ejercicio 7 que aparece en la guía 9.4 de la pág.357).

Solución:

Utilizando operadores diferenciales el sistema de ecuaciones diferenciales anteriores se convierte en

$$Dx = 2x - y$$

$$Dy = x$$

Despejando y de $Dx = 2x - y$ se obtiene:

$$y = 2x - Dx$$

De modo que

$$Dy = 2Dx - D^2x$$

Como $Dy = x$ sustituyendo en $Dy = 2Dx - D^2x$ se obtiene:

$$D^2x - 2Dx + x = 0 \rightarrow (D^2 - 2D + 1)x = 0 \rightarrow (D - 1)^2 = 0 \rightarrow D = 1$$

La solución encontrada para $\frac{dx}{dt} = 2x - y$ es:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

Por otra parte se necesita encontrar $y(t)$, despejando x de $Dx = 2x - y$ y sustituyendo $Dy = x$ se obtiene:

$$D^2y - 2Dy + y = 0 \rightarrow (D^2 - 2D + 1)y = 0 \rightarrow (D - 1)(D - 1) = 0 \rightarrow D = 1$$

La solución encontrada para $\frac{dy}{dt} = x$ es:

$$y(t) = (c_1 - c_2)e^t + c_2 t e^t$$

Utilizando las condiciones iniciales $x(0) = 6$ y $y(0) = 2$ se encuentra que el valor para las constantes arbitrarias es $c_1 = 6$ y $c_2 = 4$. Por lo tanto las soluciones particulares del sistema de ecuaciones diferenciales son:

$$x(t) = 6e^t + 4te^t$$

$$y(t) = 2e^t + 4te^t$$

El valor real para $x(0.2)$ es:

$$x(0.2) = 6e^{0.2} + 4(0.2)e^{0.2} = 8.305538755$$

El valor real para $y(0.2)$ es:

$$y(0.2) = 2e^{0.2} + 4(0.2)e^{0.2} = 3.419927723$$

Usando el método de RK4 para aproximar $x(0.2)$ y $y(0.2)$. Usando tamaño de paso $h = 0.2$

A continuación se muestran los cálculos de x_1 y y_1 con tamaños de paso $h = 0.2$ con las identificaciones $f(t, x, y) = 2x - y$, $g(t, x, y) = x$, $t_0 = 0$, $x_0 = 6$, $y_0 = 2$

$$m_1 = f(t_0, x_0, y_0) = f(0, 6, 2) = 2(6) - 2 = 10$$

$$k_1 = g(t_0, x_0, y_0) = g(0, 6, 2) = 6$$

$$\begin{aligned} m_2 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}hm_1, y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ &= f\left(0 + (0.5)(0.2), 6 + (0.5)(0.2)(10), 2 + (0.5)(0.2)(6)\right) = f(0.1, 7, 2.6) \\ &= 2(7) - 2.6 = 14 - 2.6 = 11.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= g\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}hm_1, y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ &= g\left(0 + (0.5)(0.2), 6 + (0.5)(0.2)(10), 2 + (0.5)(0.2)(6)\right) = g(0.1, 7, 2.6) \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_3 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}hm_2, y_0 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ &= f\left(0 + (0.5)(0.2), 6 + (0.5)(0.2)(11.4), 2 + (0.5)(0.2)(7)\right) = f(0.1, 7.14, 2.7) \\ &= 2(7.14) - 2.7 = 14.28 - 2.7 = 11.58 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= g\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}hm_2, y_0 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ &= g\left(0 + (0.5)(0.2), 6 + (0.5)(0.2)(11.4), 2 + (0.5)(0.2)(7)\right) \\ &= g(0.1, 7.14, 2.7) = 7.14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_4 &= f(t_0 + h, x_0 + hm_3, y_0 + hk_3) = f(0 + 0.2, 6 + (0.2)(11.58), 2 + (0.2)(7.14)) \\
&= f(0.2, 8.316, 3.428) = 2(8.316) - 3.428 = 16.632 - 3.428 = 13.204
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= g(t_0 + h, x_0 + hm_3, y_0 + hk_3) = g(0 + 0.2, 6 + (0.2)(11.58), 2 + (0.2)(7.14)) \\
&= g(0.2, 8.316, 3.428) = 8.316
\end{aligned}$$

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$x(0.20) \approx x_1 = 6 + \frac{0.2}{6}(10 + 2(11.4) + 2(11.58) + 13.204)$$

$$x(0.20) \approx x_1 = 6 + \frac{0.2}{6}(10 + 22.8 + 23.16 + 13.204)$$

$$x(0.20) \approx x_1 = 6 + \frac{0.2}{6}(69.164)$$

$$x(0.20) \approx x_1 = 6 + 2.305466667$$

$$x(0.20) \approx x_1 = 8.305466667$$

$$y(0.20) \approx y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y(0.20) \approx y_1 = 2 + \frac{0.2}{6}(6 + 2(7) + 2(7.14) + 8.316)$$

$$y(0.20) \approx y_1 = 2 + \frac{0.2}{6}(6 + 14 + 14.28 + 8.316)$$

$$y(0.20) \approx y_1 = 2 + \frac{0.2}{6}(42.596)$$

$$y(0.20) \approx y_1 = 2 + 1.419866667$$

$$y(0.20) \approx y_1 = 3.419866667$$

A continuación se muestran los cálculos de x_1 , y_1 , x_2 y y_2 , con tamaños de paso $h = 0.1$ con las identificaciones $f(t, x, y) = 2x - y$, $g(t, x, y) = x$, $t_0 = 0$, $x_0 = 6$, $y_0 = 2$

Iniciando con $n = 0$, $t_0 = 0$, $x_0 = 6$, $y_0 = 2$ y $h = 0.1$

$$m_1 = f(t_0, x_0, y_0) = f(0, 6, 2) = 2(6) - 2 = 10$$

$$k_1 = g(t_0, x_0, y_0) = g(0, 6, 2) = 6$$

$$\begin{aligned} m_2 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}hm_1, y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ &= f\left(0 + (0.5)(0.1), 6 + (0.5)(0.1)(10), 2 + (0.5)(0.1)(6)\right) \\ &= f(0.05, 6.5, 2.3) = 2(6.5) - 2.3 = 13 - 2.3 = 10.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= g\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}hm_1, y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ &= g\left(0 + (0.5)(0.1), 6 + (0.5)(0.1)(10), 2 + (0.5)(0.1)(6)\right) \\ &= g(0.05, 6.5, 2.3) = 6.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_3 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}hm_2, y_0 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ &= f\left(0 + (0.5)(0.1), 6 + (0.5)(0.1)(10.7), 2 + (0.5)(0.1)(6.5)\right) \\ &= f(0.05, 6.535, 2.325) = 2(6.535) - 2.325 = 13.07 - 2.325 = 10.745 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= g\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}hm_2, y_0 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ &= g\left(0 + (0.5)(0.1), 6 + (0.5)(0.1)(10.7), 2 + (0.5)(0.1)(6.5)\right) \\ &= g(0.05, 6.535, 2.325) = 6.535 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_4 &= f(t_0 + h, x_0 + hm_3, y_0 + hk_3) = f(0 + 0.1, 6 + (0.1)(10.745), 2 + (0.1)(6.535)) \\ &= f(0.1, 7.0745, 2.6535) = 2(7.0745) - 2.6535 = 14.149 - 2.6535 \\ &= 11.4955 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= g(t_0 + h, x_0 + hm_3, y_0 + hk_3) = g(0 + 0.1, 6 + (0.1)(10.745), 2 + (0.1)(6.535)) \\ &= g(0.1, 7.0745, 2.6535) = 7.0745 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$x(0.10) \approx x_1 = 6 + \frac{0.1}{6}(10 + 2(10.7) + 2(10.745) + 11.4955)$$

$$x(0.10) \approx x_1 = 6 + \frac{0.1}{6}(10 + 21.4 + 21.49 + 11.4955)$$

$$x(0.10) \approx x_1 = 6 + \frac{0.1}{6}(64.3855)$$

$$x(0.10) \approx x_1 = 6 + 1.073091667$$

$$x(0.10) \approx x_1 = 7.073091667$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y(0.10) \approx y_1 = 2 + \frac{0.1}{6}(6 + 2(6.5) + 2(6.535) + 7.0745)$$

$$y(0.10) \approx y_1 = 2 + \frac{0.1}{6}(6 + 13 + 13.07 + 7.0745)$$

$$y(0.10) \approx y_1 = 2 + \frac{0.1}{6}(39.1445)$$

$$y(0.10) \approx y_1 = 2 + 0.652408333$$

$$y(0.10) \approx y_1 = 2.652408333$$

Para $n = 1$, $t_1 = 0.10$, $x_1 = 7.073091667$, $y_1 = 2.652408333$ y $h = 0.1$ se tiene

$$\begin{aligned} m_1 &= f(t_1, x_1, y_1) = f(0.1, 7.073091667, 2.652408333) \\ &= 2(7.073091667) - 2.652408333 = 11.493775 \end{aligned}$$

$$k_1 = g(t_1, x_1, y_1) = g(0.1, 7.073091667, 2.652408333) = 7.073091667$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, x_1 + \frac{1}{2}hm_1, y_1 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\
&= f(0.1 + (0.5)(0.1), 7.073091667 \\
&\quad + (0.5)(0.1)(11.493775), 2.652408333 + (0.5)(0.1)(7.073091667)) \\
&= f(0.15, 7.647780417, 3.006062913) = 2(7.647780417) - 3.006062913 \\
&= 15.29556083 - 3.006062913 = 12.28949792
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= g\left(t_1 + \frac{1}{2}h, x_1 + \frac{1}{2}hm_1, y_1 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\
&= g(0.1 + (0.5)(0.1), 7.073091667 + (0.5)(0.1)(11.493775), 2.65240833 \\
&\quad + (0.5)(0.1)(7.073091)) = g(0.15, 7.647780417, 3.00606288) \\
&= 7.647780417
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_3 &= f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, x_1 + \frac{1}{2}hm_2, y_1 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\
&= f(0.1 + (0.5)(0.1), 7.073091667 \\
&\quad + (0.5)(0.1)(12.28949792), 2.65240833 + (0.5)(0.1)(7.647780417)) \\
&= f(0.15, 7.687566563, 3.034797351) \\
&= 2(7.687566563) - 3.034797351 = 15.37513313 - 3.034797351 \\
&= 12.34033578
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= g\left(t_1 + \frac{1}{2}h, x_1 + \frac{1}{2}hm_2, y_1 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\
&= g(0.1 + (0.5)(0.1), 7.073091667 \\
&\quad + (0.5)(0.1)(12.28949792), 2.65240833 + (0.5)(0.1)(7.647780417)) \\
&= g(0.15, 7.687566563, 7.034797351) = 7.687566563
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_4 &= f(t_1 + h, x_1 + hm_3, y_1 + hk_3) \\
&= f(0.1 + 0.1, 7.073091667 + (0.1)(12.34033578), 2.65240833 \\
&\quad + (0.1)(7.687566563)) = f(0.2, 8.307125245, 3.421164986) \\
&= 2(8.307125245) - 3.421164986 = 16.61425049 - 3.421164986 \\
&= 13.1930855
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= g(t_1 + h, x_1 + hm_3, y_1 + hk_3) \\
&= g(0.1 + 0.1, 7.073091667 + (0.1)(12.34033578), 2.65240833 \\
&\quad + (0.1)(7.687566563)) = g(0.2, 8.307125245, 3.421164986) \\
&= 8.307125245
\end{aligned}$$

$$x_2 = x_1 + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$\begin{aligned}
x(0.20) \approx x_2 &= 7.073091667 \\
&\quad + \frac{0.1}{6}(11.493775 + 2(12.28949792) + 2(12.34033578) + 13.1930855)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(0.20) \approx x_2 &= 7.073091667 \\
&\quad + \frac{0.1}{6}(11.493775 + 24.57899584 + 24.68067156 + 13.1930855)
\end{aligned}$$

$$x(0.20) \approx x_2 = 7.073091667 + \frac{0.1}{6}(73.9465279)$$

$$x(0.20) \approx x_2 = 7.073091667 + 1.232442132$$

$$x(0.20) \approx x_2 = 8.305533799$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\begin{aligned}
y(0.20) \approx y_2 &= 2.652408333 \\
&\quad + \frac{0.1}{6}(7.073091667 + 2(7.647780417) + 2(7.687566563) \\
&\quad + 8.307125245)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(0.20) \approx y_2 &= 2.652408333 \\
&\quad + \frac{0.1}{6}(7.073091667 + 15.29556083 + 15.37513313 + 8.307125245)
\end{aligned}$$

$$y(0.20) \approx y_2 = 2.652408333 + \frac{0.1}{6}(46.05091087)$$

$$y(0.20) \approx y_2 = 2.652408333 + 0.767515181$$

$$y(0.20) \approx y_2 = 3.419923514$$

Gráficamente se muestran las dos soluciones $x(t) = 6e^t + 4te^t$, $y(t) = 2e^t + 4te^t$ del sistema de ecuaciones diferenciales $x' = 2x - y$, $y' = x$ con la condición inicial $x(0) = 6, y(0) = 2$, en la figura 2.18

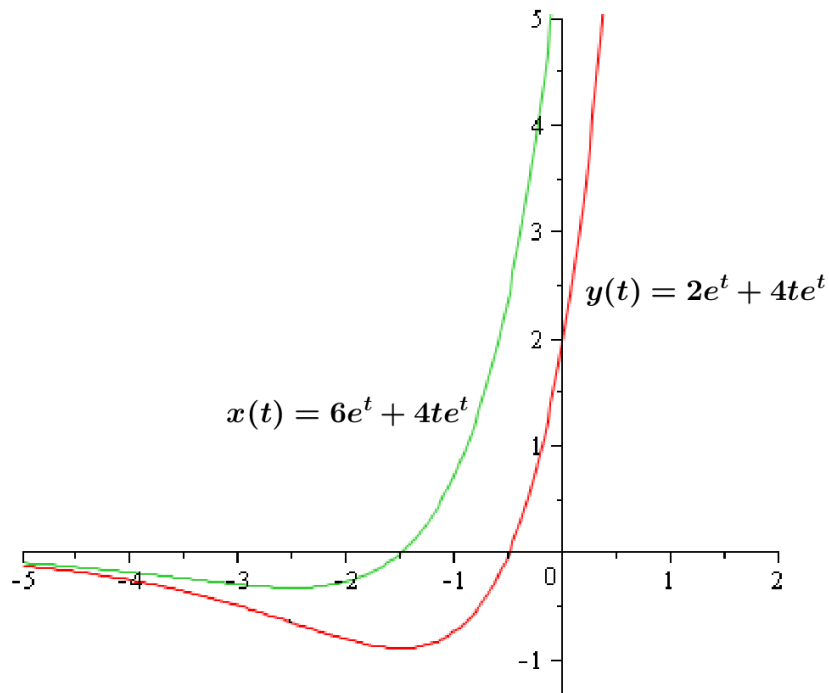


Figura 2.18 Soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales $x(0) = 6, y(0) = 2$

La tabla 32 muestra el valor aproximado de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = 2x - y$ con la condición inicial $x(0) = 6$ encontrado con el método RK4 con tamaños de pasos $h = 0.1$ y $h = 0.2$ comparado con el valor real para $x(0.2)$.

h	Método de RK4	Valor real	error
0.1	8.305533799	8.305538755	0.000004956
0.2	8.305466667	8.305538755	0.000072088

Tabla 32 Aproximación del valor real de $x(0.2)$ con el método de RGK con tamaño de pasos $h = 0.1$ y $h = 0.2$.

La tabla 33 muestra el valor aproximado de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = x$ con la condición inicial $y(0) = 2$ encontrado con el método RK4 con tamaños de pasos $h = 0.1$ y $h = 0.2$ comparado con el valor real para $y(0.2)$.

h	Método de RK4	Valor real	error
0.1	3.419923514	3.419927723	0.000004209
0.2	3.419866667	3.419927723	0.000061056

Tabla 33 Aproximación del valor real de $y(0.2)$ con el método de RK4 con tamaño de pasos $h = 0.1$ y $h = 0.2$.

2.7 Problemas con valores en la Frontera de Segundo Orden

“En la sección anterior vimos como aproximar la solución de un problema con valores iniciales de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = u_0.$$

En esta sección se tratan dos métodos para encontrar una solución aproximada de un **problema con valores en la frontera de segundo orden**

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

A diferencia del procedimiento utilizado en los problemas con valores iniciales de segundo orden, en los métodos para los problemas con valores en la frontera de segundo orden no requiere escribir la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Aproximaciones por diferencias finitas el desarrollo en serie de Taylor centrado en el punto a , de una función $y(x)$ es:

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{x-a}{1!} + y''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + y'''(a) \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots,$$

Si se hace $h = x - a$, entonces el renglón anterior es igual a

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{h}{1!} + y''(a) \frac{h^2}{2!} + y'''(a) \frac{h^3}{3!} + \dots$$

Para el análisis posterior es conveniente volver a escribir la última expresión en las dos formas alternativas:

$$y(x + h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} + y'''(x)\frac{h^3}{6} + \dots \quad (1.16)$$

y

$$y(x - h) = y(x) - y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} - y'''(x)\frac{h^3}{3} + \dots \quad (1.17)$$

Si h es pequeña, podemos despreciar los términos que implican a h^4, h^5, \dots puesto que estos valores son despreciables. En realidad, si se ignoran todos los términos con h^2 y superiores, y resolviendo (1.16) y (1.17), respectivamente, para $y'(x)$ se obtienen las aproximaciones siguientes para la primera derivada:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} [y(x + h) - y(x)] \quad (1.18)$$

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} [y(x) - y(x - h)]. \quad (1.19)$$

Restando (1.16) y (1.17) se obtiene

$$y'(x) = \frac{1}{2h} [y(x + h) - y(x - h)]. \quad (1.20)$$

Por otro lado, si se ignoran los términos con h^3 y superiores, entonces al sumar (1.16) y (1.17) se obtiene una aproximación de la segunda derivada $y''(x)$:

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} [y(x + h) - 2y(x) + y(x - h)]. \quad (1.21)$$

Los lados derechos de (1.18), (1.19), (1.20) y (1.21) se llaman **cocientes de diferencias**.

Las expresiones

$$y(x + h) - y(x), \quad y(x) - y(x - h), \quad y(x + h) - y(x - h),$$

y

$$y(x + h) - 2y(x) + y(x - h)$$

Se llaman **diferencias finitas**. En particular, $y(x + h) - y(x)$ recibe el nombre de **diferencia hacia adelante**, $y(x) - y(x - h)$ es una **diferencia hacia atrás** y tanto $y(x + h) - y(x - h)$ como $y(x + h) - 2y(x) + y(x - h)$ se llaman **diferencias centrales**. Los resultados que se presentan en (1.20) y (1.21) se llaman **aproximaciones por diferencias centrales** de las derivadas y' y y'' .

Método de diferencias finitas ahora considere un problema lineal con valores en la frontera de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (1.22)$$

Suponga que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ representa una partición regular del intervalo $[a, b]$, es decir $x_i = a + ih$, donde $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ y $h = (b - a)/n$.

$$x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \dots, \quad x_{n-1} = a + (n - 1)h$$

Se llaman **puntos de malla interiores** del intervalo $[a, b]$. Si hacemos

$$y_i = y(x_i), \quad P_i = P(x_i), \quad Q_i = Q(x_i) \quad y \quad f_i = f(x_i)$$

y si y'' y y' en (1.22) se reemplazan por las aproximaciones de diferencias centrales (1.20) y (1.21), se obtiene:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + P_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + Q_i y_i = f_i$$

o después de simplificar

$$\left(1 + \frac{h}{2}P_i\right)y_{i-1} + (-2 + h^2Q_i)y_i + \left(1 - \frac{h}{2}P_i\right)y_{i+1} = h^2f_i. \quad (1.23)$$

La última ecuación se conoce como **ecuación de diferencias finitas** y es una aproximación a la solución de la ecuación diferencial. Permite aproximar la solución $y(x)$ de (1.22) en los puntos de mallas interiores x_1, x_2, \dots, x_{n-1} del intervalo $[a, b]$. Si i toma los valores de $1, 2, \dots, n - 1$ en (1.23), se obtienen $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas y_1, y_2, \dots, y_{n-1} .

Considere que se conocen y_0 y y_n porque son las condiciones prescritas en la frontera $y_0 = y(x_0) = y(a) = \alpha$ y $y_n = y(x_n) = y(b) = \beta$.⁽⁴⁷⁾

En el ejemplo 2.11 se considera un problema con valores en la frontera para el que se pueden comparar los valores aproximados con los valores reales de una solución explícita.

Ejemplo 2.11 Uso de método de diferencias finitas

“Use el método de diferencias finitas y el valor indicado de n la solución del problema con valores en la frontera, $y'' + 2y' + y = 5x$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $n = 5$. ”⁽¹⁶⁾

Solución.

En este problema de valor en la frontera se identifica que, $P(x) = 2$; $Q(x) = 1$, $f(x) = 5x$ y

$h = \frac{(1-0)}{5} = \frac{1}{5} = 0.20$; y así (1.23) se convierte en:

$$\left(1 + \frac{0.20}{2}(2)\right)y_{i+1} + (-2 + (0.2)^2(1))y_i + \left(1 - \frac{0.2}{2}(2)\right)y_{i-1} = (0.2)^2 5x_i$$

$$1.2y_{i+1} - 1.96y_i + 0.8y_{i-1} = 0.2x_i$$

los puntos interiores son

$$x_1 = 0 + 0.20 = 0.2$$

$$x_2 = 0 + 2(0.2) = 0.4$$

$$x_3 = 0 + 3(0.2) = 0.6$$

$$x_4 = 0 + 4(0.2) = 0.8$$

Para $i = 1, \dots, 4$, $y_0 = 0$ y $y_5 = 0$ se obtiene el siguiente sistema:

$$1.2y_2 - 1.96y_1 + 0.8y_0 = 0.04$$

$$1.2y_3 - 1.96y_2 + 0.8y_1 = 0.08$$

$$1.2y_4 - 1.96y_3 + 0.8y_2 = 0.12$$

⁽⁴⁷⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (teoría extraída de la pág. 358 y 359, el ejemplo resuelto es el ejercicio 3 que aparece en la guía 9.5 de la pág.361).

$$1.2y_5 - 1.96y_4 + 0.8y_3 = 0.16$$

Resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas mediante matrices, sabiendo que $y_0 = 0$ y $y_5 = 0$ se obtiene:

$$\begin{cases} 1 & 0 & 0 & 0 & = & -0.225850676 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & = & -0.335556105 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & = & -0.330841189 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & = & -0.216669873 \end{cases}$$

De donde la solución del sistema es:

$$y_1 = -0.225850676, y_2 = -0.335556105, y_3 = -0.330841189 \text{ y } y_4 = -0.216669873 ,$$

Se va encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + y = 5x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Solución.

Paso 1

Se resuelve primero la ecuación homogénea asociada $y'' + 2y' + y = 0$. Utilizando la ecuación auxiliar $am^2 + bm + c = 0$ escribiendo la ecuación en la forma $m^2 + 2m + 1 = 0 \rightarrow (m + 1)^2 = 0 \rightarrow m = -1$ la solución general sería: $y_c = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$

Paso 2

Una solución particular que también es de la forma de un polinomio de grado 1 del lado derecho es:

$$y_p = Ax + B$$

Se busca determinar coeficientes específicos para A, B para los cuales y_p es una solución de $y'' + 2y' + y = 5x, y(0) = 0, y(1) = 0$. Sustituyendo y_p y las derivadas

$$y'_p = A \quad \text{y} \quad y''_p = 0$$

En la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 5x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$, se obtiene

$$y_p'' + 2y_p' + y_p = 0 + 2A + Ax + B = 5x$$

Como se supone que la última ecuación es una identidad los coeficientes de los exponentes semejantes a x deben ser iguales $A = 5$ y $2A + B = 0 \rightarrow B = -10$.

Así una solución particular es:

$$y_p = 5x - 10$$

Paso 3

La solución general de la ecuación dada es

$$y(x) = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 5x - 10$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = 0$

$$0 = c_1 - 10 \rightarrow c_1 = 10$$

y la condición en la frontera $y(1) = 0$ y $c_1 = 10$

$$c_1 e^{-1} + c_2 e^{-1} + 5 - 10 = 0 \rightarrow 10e^{-1} + c_2 e^{-1} = 5 \rightarrow c_2 \approx 3.591409142$$

una solución del problema con valores en la frontera es:

$$y = 10e^{-x} + 3.591409142xe^{-x} + 5x - 10$$

Por lo tanto los valores reales de esta solución son los siguientes:

$$y(0.20) \approx 10e^{-0.20} + 3.591409142(0.20)e^{-0.20} + 5(0.20) - 10 = -0.224613046$$

$$y(0.40) = 10e^{-0.40} + 3.591409142(0.40)e^{-0.40} + 5(0.40) - 10 = -0.333842123$$

$$y(0.60) = 10e^{-0.60} + 3.591409142(0.60)e^{-0.60} + 5(0.60) - 10 = -0.329279362$$

$$y(0.80) = 10e^{-0.80} + 3.591409142(0.80)e^{-0.80} + 5(0.80) - 10 = -0.215731039$$

La precisión de las aproximaciones en este ejemplo se pueden mejorar usando un valor más pequeño de h . Por supuesto, usar un valor más pequeño de h requiere de resolver un sistema más grande de ecuaciones.

La tabla 34 muestra el valor aproximado del problema con valores en la frontera $y'' + 2y' + y = 5x$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. Encontrado con el método de las diferencias finitas comparado con el valor real.

x_n	Método de diferencias finitas	Valor real	error
0.00	0.0000	0.0000	0.0000
0.20	-0.225850676	-0.224613046	0.00123763
0.40	-0.335556105	-0.333842123	0.001713982
0.60	-0.330841189	-0.329279362	0.001561827
0.80	-0.216669873	-0.215731039	0.000938834
1.00	0.0000	0.0000	0.0000

Tabla 34 Aproximación de valores reales comparados con los encontrados con el método de las diferencias finitas.

Gráficamente se muestra la curva solución de la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 5x$ $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, en la figura 2.19

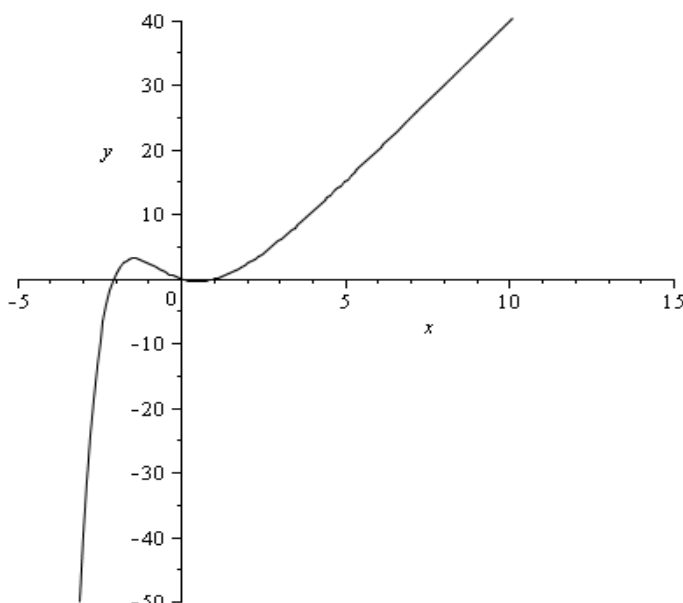


Figura 2.19 Curva solución de la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 5x$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$

2.8 Aproximación a la solución de una ecuación diferencial mediante métodos numéricos ya que no es posible resolverla analíticamente.

El ejemplo 2.12 la ecuación diferencial no se puede resolver analíticamente por eso se recurre a los métodos numéricos para encontrar una aproximación de la solución.

Ejemplo 2.12 Solución de la ecuación diferencial mediante métodos numéricos

“Considere el problema con valores iniciales $y' = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2, y(2) = 4$. Utilizar los métodos siguientes para obtener una aproximación de $y(2.50)$ usando $h = 0.1$ ”⁽⁴⁸⁾

- a) Método de Euler
- b) Método de Euler Mejorado
- c) Método de Runge-Kutta de cuarto orden
- d) Método de Adams-Bashforth-Moulton

Solución.

- a) Método de Euler

Con la identificación de $f(x, y) = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$, la ecuación $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$.

Se convierte en $y_{n+1} = y_n + h \cdot (0.1\sqrt{y_n} + 0.4x_n^2)$

Iniciando con $n = 0, h = 0.1, x_0 = 2, y_0 = 4$ se obtiene:

$$\begin{aligned}y(2.10) \approx y_1 &= y_0 + 0.1(0.1\sqrt{y_0} + 0.4x_0^2) = 4 + 0.1(0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2) \\ &= 4 + 0.1(0.1(2) + 0.4(4)) = 4 + 0.1(1.8) = 4 + 0.18 = 4.1800\end{aligned}$$

.
.
.

Por ultimo para $n = 4, h = 0.1, x = 2.40, y_4 = 4.824393432$ se encuentra:

⁽⁴⁸⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (el ejemplo está resuelto solo con el método de Euler en la pág.77).

$$\begin{aligned}
y(2.50) &\approx y_5 = y_4 + 0.1(0.1\sqrt{4.824393432} + 0.4(2.40)^2) \\
&= 4.824393432 + 0.1(0.1\sqrt{4.82393432} + 0.4(5.76)) \\
&= 4.824393432 + 0.1(0.1(2.196451684) + 2.304) \\
&= 4.824393432 + 0.1(2.523645019) = 4.824393432 + 0.252364501 \\
&= 5.076757933
\end{aligned}$$

b) Método de Euler Mejorado

Usar el método de Euler mejorado para obtener el valor aproximado de $y(2.5)$ para la solución de problema con valores iniciales $y' = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$, $y(2) = 4$ y $h = 0.1$

$$\begin{aligned}
y^*_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = y_0 + h \cdot f(2,4) = 4 + (0.1)(0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2) \\
&= 4 + (0.1)((0.1)(2) + 0.4(4)) = 4 + (0.1)(0.2 + 1.6) = 4 + (0.1)(1.8) \\
&= 4 + 0.18 = 4.1800
\end{aligned}$$

$$x_1 = 2 + h = 2 + 0.1 = 2.10$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y^*_1)]$$

$$y(2.10) \approx y_1 = 4 + \frac{0.1}{2} [f(2,4) + f(2.10,4.8)]$$

$$y(2.10) \approx y_1 = 4 + \frac{0.1}{2} [0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2 + 0.1\sqrt{4.18} + 0.4(2.10)^2]$$

$$y(2.10) \approx y_1 = 4 + \frac{0.1}{2} [1.8 + 1.968450483]$$

$$y(2.10) \approx y_1 = 4 + \frac{0.1}{2} [3.768450483]$$

$$y(2.10) \approx y_1 = 4 + 0.188422524$$

$$y(2.10) \approx y_1 = 4.188422524$$

.

.

.

Para $x_4 = 2.40, y_4 = 4.860698120, f(x_4, y_4) = 0.1\sqrt{y_4} + 0.4x_4^2 y$ $h = 0.1$

$$\begin{aligned}y_5^* &= y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 4.860698120 + (0.1)[f(2.40, 4.860698120)] \\&= 4.860698120 + (0.1)[(0.1)\sqrt{4.860698120} + (0.4)(2.40)^2] \\&= 4.860698120 + (0.1)[2.52446991] = 4.860698120 + 0.252446991 \\&= 5.113145111\end{aligned}$$

$$x_5 = 2 + 5(0.1) = 2 + 0.5 = 2.50$$

$$y_5 = y_4 + \frac{0.1}{2} [f(x_4, y_4) + f(x_5, y_5^*)]$$

$$y(2.50) \approx y_5 = 4.860698120 + \frac{0.1}{2} [f(2.4, 4.8566) + f(2.5, 5.113145111)]$$

$$y(2.50) \approx y_5 = 4.860698120$$

$$+ \frac{0.1}{2} [0.1\sqrt{4.860698120} + 0.4(2.40)^2 + 0.1\sqrt{5.113145111} + 0.4(2.50)^2]$$

$$y(2.50) \approx y_5 = 4.860698120 + \frac{0.1}{2} [2.52446991 + 2.726122646]$$

$$y(2.50) \approx y_5 = 4.860698120 + \frac{0.1}{2} [5.250592556]$$

$$y(2.50) \approx y_5 = 4.860698120 + 0.262529627$$

$$y(2.50) \approx y_5 = 5.123227748$$

c) Método de Runge-Kutta de cuarto orden

Usar el método de RK4 con $h = 0.1$ para obtener una aproximación de $y(2.50)$ para la solución de la ecuación diferencial $y' = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$, $y(2) = 4$

Solución.

Iniciando con $x_0 = 2, y_0 = 4$, $h = 0.1$ y $f(x_0, y_0) = 0.1\sqrt{y_0} + 0.4x_0^2$ se tiene:

$$k_1 = f(2, 4) = 0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2 = 0.1(2) + 0.4(4) = 0.2 + 1.6 = 1.8000$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) = f(2 + (0.5)(0.1), 4 + (0.5)(0.1)(1.800)) \\
&= f(2 + 0.05, 4 + 0.09) = f(2.05, 4.09) = 0.1\sqrt{4.09} + 0.4(2.05)^2 \\
&= 0.202237484 + 1.681 = 1.883237484
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_2\right) = f(2 + (0.5)(0.1), 4 + (0.5)(0.1)(1.883237484)) \\
&= f(2 + 0.05, 4 + 0.094161874) = f(2.05, 4.094161874) \\
&= 0.1\sqrt{4.094161874} + 0.4(2.05)^2 = 0.202340353 + 1.681 \\
&= 1.883340354
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = f(2 + 0.1, 4 + 0.1(1.883340354)) = f(2.1, 4.188334035) \\
&= 0.1\sqrt{4.188334035} + 0.4(2.1)^2 = 0.204654197 + 1.764 = 1.968654197
\end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y(2.10) \approx y_1 = 4 + \frac{0.1}{6}(1.800 + 2(1.883237484) + 2(1.883340354) + 1.968654197)$$

$$y(2.10) \approx y_1 = 4 + \frac{0.1}{6}(1.800 + 3.766474968 + 3.766680708 + 1.968654197)$$

$$y(2.10) \approx y_1 = 4 + \frac{0.1}{6}(11.30180987)$$

$$y(2.10) \approx y_1 = 4 + 0.188363497$$

$$y(2.10) \approx y_1 = 4.188363498$$

.

.

.

Por ultimo para $h = 0.1, x_4 = 2.4, y_4 = 4.860462714$ y $f(x_4, y_4) = 0.1\sqrt{y_4} + 0.4x_4^2$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_4, y_4) = f(2.4, 4.860462714) = 0.1\sqrt{4.860462714} + 0.4(2.4)^2 \\
 &= 0.220464571 + 2.304 = 2.524464571
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_2 &= f\left(x_4 + \frac{1}{2}h, y_4 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\
 &= f\left(2.4 + (0.5)(0.1), 4.860462714 + (0.5)(0.1)(2.524464571)\right) \\
 &= f(2.45, 4.986685943) = 0.1\sqrt{4.986685943} + 0.4(2.45)^2 \\
 &= 0.223308887 + 2.401 = 2.624308887
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_3 &= f\left(x_4 + \frac{1}{2}h, y_4 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\
 &= f\left(2.4 + (0.5)(0.1), 4.860462714 + (0.5)(0.1)(2.624308887)\right) \\
 &= f(2.45, 4.991678158) = 0.1\sqrt{4.991678158} + 0.4(2.45)^2 \\
 &= 0.223420638 + 2.401 = 2.624420638
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_4 &= f(x_4 + h, y_4 + hk_3) = f(2.4 + 0.1, 4.860462714 + 0.1(2.624420638)) \\
 &= f(2.5, 5.122904778) = 0.1\sqrt{5.122904778} + 0.4(2.5)^2 \\
 &= 0.226338348 + 2.50 = 2.726338348
 \end{aligned}$$

$$y_5 = y_4 + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\begin{aligned}
 y(2.50) &\approx y_5 = 4.860462714 \\
 &\quad + \frac{0.1}{6}(2.524464571 + 2(2.624308887) + 2(2.624420638) \\
 &\quad + 2.726338348)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(2.50) &\approx y_5 = 4.860462714 \\
 &\quad + \frac{0.1}{6}(2.524464571 + 5.248617774 + 5.248841276 + 2.726338348)
 \end{aligned}$$

$$y(2.50) \approx y_5 = 4.860462714 + \frac{0.1}{6}(15.74826197)$$

$$y(2.50) \approx y_5 = 4.860462714 + 0.262471032$$

$$y(2.50) \approx y_5 = 5.122933747$$

d) Método de Adams-Bashforth-Moulton

Solución.

Con un tamaño de paso de $h = 0.1$, para aproxima a y_4 . En principio se emplea el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $x_0 = 2, y_0 = 4$ y $h = 0.1$ para obtener:

$$y_1 = 4.188363498, y_2 = 4.394007953, y_3 = 4.617764176$$

Con las identificaciones $x_0 = 2, x_1 = 2.10, x_2 = 2.20, x_3 = 2.30$ y $f(x, y) = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$ se encuentra:

$$y'_0 = f(x_0, y_0) = f(2, 4) = 0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2 = 1.8000$$

$$\begin{aligned} y'_1 &= f(x_1, y_1) = f(2.1, 4.188363498) = 0.1\sqrt{4.188363498} + 0.4(2.1)^2 \\ &= 0.204654916 + 1.764 = 1.968654916 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_2 &= f(x_2, y_2) = f(2.2, 4.394007953,) = 0.1\sqrt{4.394007953} + 0.4(2.2)^2 \\ &= 0.209618891 + 1.936 = 2.145618891 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_3 &= f(x_3, y_3) = f(2.3, 4.617764176) = 0.1\sqrt{4.617764176} + 0.4(2.3)^2 \\ &= 0.214889836 + 2.116 = 2.330889836 \end{aligned}$$

Con los valores anteriores entonces la fórmula predicción es

$$y_4^* = y_3 + \frac{0.1}{24} (55(2.330889836) - 59(2.145618891) + 37(1.968654916) - 9(1.800))$$

$$y_4^* = 4.617764176 + \frac{0.1}{24} (128.198941 - 126.5915146 + 72.84023189 - 16.2)$$

$$y_4^* = 4.617764176 + \frac{0.1}{24} (58.24765829)$$

$$y_4^* = 4.617764176 + 0.242698576$$

$$y_4^* = 4.860462752$$

Para usar la corrección, primero se necesita

$$\begin{aligned} y'_4 &= f(x_4, y_4^*) = f(2.4, 4.860462752) = 0.1\sqrt{4.860462752} + 0.4(2.4)^2 \\ &= 0.220464572 + 2.304 = 2.524464572 \end{aligned}$$

$$y_4 = y_3 + \frac{0.1}{24} (9y_4' + 19y_3' - 5y_2' + y_1')$$

$$y_4 = 4.617764176$$

$$+ \frac{0.1}{24} (9(2.524464572) + 19(2.330889836) - 5(2.145618891) + 1.968654916)$$

$$y_4 = 4.617764176$$

$$+ \frac{0.1}{24} (22.72018115 + 44.28690688 - 10.72809446 + 1.968654916)$$

$$y_4 = 4.617764176 + \frac{0.1}{24} (58.24764849)$$

$$y_4 = 4.617764176 + 0.242698535$$

$$y_4 = 4.860462711$$

En la tabla 35 se comparan los resultados al aplicar los métodos de Euler, Euler mejorado, Runge-Kutta de cuarto orden y el método Adams-Bashforth-Moulton, del problema con valores iniciales $y' = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$, $y(2) = 4$ con tamaño de paso $h = 0.1$ para la aproximación de $y(2.50)$.

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4	Adams-Bashforth-Moulton
2.00	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
2.10	4.1800	4.188422524	4.188363498	4.188363498
2.20	4.376845048	4.394125882	4.394007953	4.394007953
2.30	4.591365959	4.617940895	4.617764176	4.617764176
2.40	4.824393432	4.860698120	4.860462714	4.860462711
2.50	5.076757933	5.123227748	5.122933747	5.122933742

Tabla 35 Comparación de métodos numéricos con tamaño de paso $h = 0.1$.

Las figuras 2.20, 2.21, 2.22 y 2.23 muestran la curva solución de la ecuación diferencial y los puntos de aproximación encontrados mediante el método Euler, Euler mejorado, RK4 y de Adams-Bashforth-Moulton con tamaño de paso $h = 0.1$.

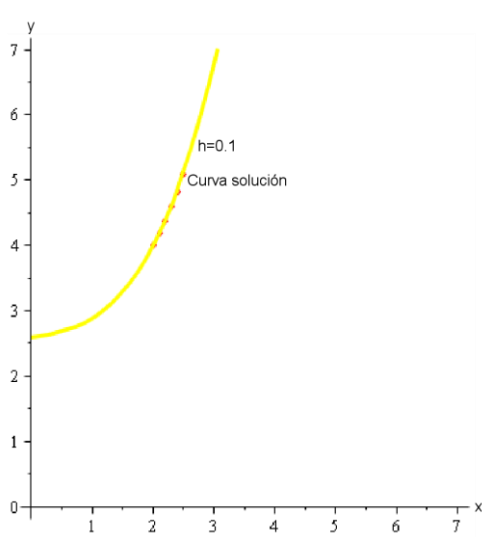


Figura 2.20 Solución exacta y aproximación a la curva solución mediante la visualización con el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.1$.

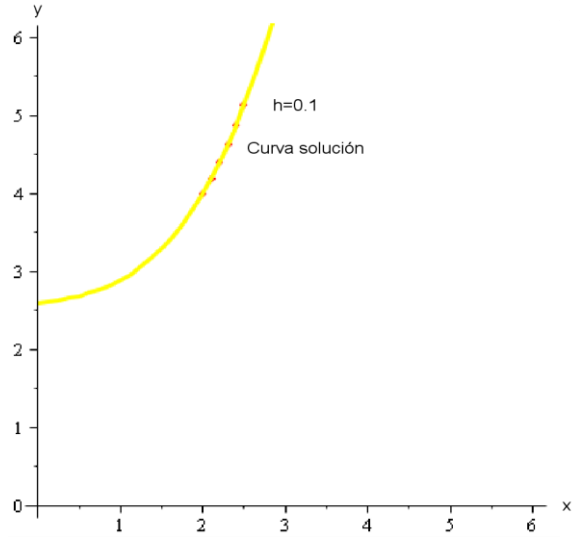


Figura 2.21 Solución exacta y aproximación a la curva solución mediante la visualización con el método de Euler mejorado con tamaño de paso $h = 0.1$.

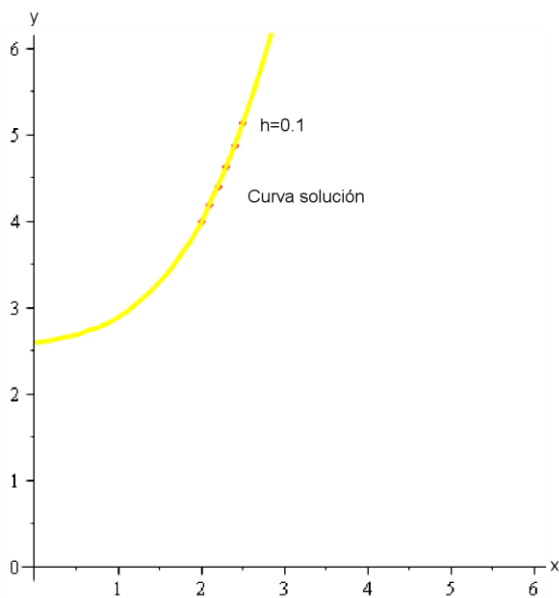


Figura 2.22 Solución exacta y aproximación a la curva solución mediante la visualización con el método de RK4 con tamaño de paso $h = 0.1$.

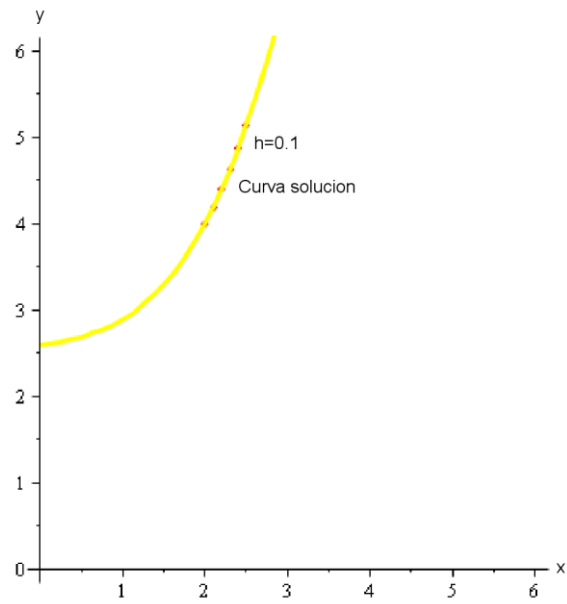


Figura 2.23 Solución exacta y aproximación a la curva solución mediante la visualización con el método de Adams-Bashforth-Moulton con tamaño de paso $h = 0.1$.

Ejercicios II

1. “Comprobar analíticamente que la solución de la ecuación diferencial $y' = 1 + y^2$ con la condición inicial $y(0) = 0$ es: $y(x) = \tan(x)$, además comprobar que el valor real $y(0.50)$ es: $y(0.50) = 0.5463024898$ por ultimo utilizar los métodos de Euler, Euler mejorado, el método RK4 y el método de Adams-Bashforth-Moulton con tamaño de pasos $h = 0.1$ y $h = 0.05$ para comprobar los valores que aparecen en las siguientes tablas.”⁽⁴⁹⁾

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
0.00	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.1000	0.1005000000	0.1003345891
0.20	0.2010	0.2030353270	0.2027098782
0.30	0.3050401	0.3098137856	0.3093360393
0.40	0.4143450463	0.4234083462	0.4227929928
0.50	0.5315132280	0.5470243005	0.5463023075

Tabla 36 Comparación de métodos numéricos con $h = 0.1$.

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
0.00	0.0000	0.00000	0.0000
0.05	0.0500	0.5006250000	0.5004170577
0.10	0.100125	0.1003760963	0.1003346669
0.15	0.1506262508	0.1511970986	0.1511352105
0.20	0.2017606642	0.2027921508	0.2027100258
0.25	0.2537960325	0.2554439597	0.2553419098
0.30	0.3070166538	0.3094577433	0.3093362370
0.35	0.3617296151	0.3651687234	0.3650284817
0.40	0.4182720308	0.4229510714	0.4227932060
0.45	0.4770196054	0.4832288423	0.4830550543
0.50	0.5383969906	0.5464896138	0.5463024814

Tabla 37 Comparación de métodos numéricos con $h = 0.05$.

⁽⁴⁹⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (Ejercicio 3 que aparece en la guía 9.1 de ejercicios pág.344). Todos los pasos que faltan están desarrollados en el disco de evidencia de trabajo.

2. “Comprobar analíticamente que la solución de la ecuación diferencial $y' = (x + y - 1)^2$ con la condición inicial $y(0) = 2$ es: $y(x) = -x + 1 + \tan\left(\frac{1}{4}\pi + x\right)$, además comprobar que el valor real $y(0.50)$ es: $y(0.50) = 3.908223450$ por ultimo utilizar los métodos de Euler, Euler mejorado, el método RK4 y el método de Adams-Bashforth-Moulton con tamaño de pasos $h = 0.1$ y $h = 0.05$ para comprobar los valores que aparecen en las siguientes tablas. En cada paso que se realiza comparar el valor aproximado con el valor real.”⁽⁵⁰⁾

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
0.00	2.0000	2.0000	2.0000
0.10	2.1000	2.122000000	2.123048914
0.20	2.2440	2.304904563	2.308496167
0.30	2.4525136	2.585838781	2.595754160
0.40	2.759643992	3.037784037	3.064899687
0.50	3.226050209	3.825414562	3.907820425

Tabla 38 Comparación de métodos numéricos con $h = 0.1$.

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
0.00	2.0000	2.0000	2.0000
0.05	2.0500	2.055250000	2.055355603
0.10	2.110500	2.122775838	2.123048902
0.15	2.183765512	2.205551613	2.206087867
0.20	2.272712034	2.307546854	2.308497619
0.25	2.381156071	2.434185501	2.435796252
0.30	2.514189577	2.593082816	2.595764601
0.35	2.678753768	2.795277729	2.799746231
0.40	2.884545861	3.057395884	3.064959126
0.45	3.145503351	3.405674912	3.418874581
0.50	3.482335233	3.884015508	3.908197466

Tabla 39 Comparación de métodos numéricos con $h = 0.05$.

⁽⁵⁰⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (Ejercicio 11 que aparece en la guía 9.1 pág.344). Todos los pasos que faltan están desarrollados en el disco de evidencia de trabajo.

3. “Utilizar el método de Adams-Bashforth-Moulton para aproximar $y(1.0)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valores iniciales dado. Primero utilizar $h = 0.2$ y después utilizar $h = 0.1$. Usar el método de RK4 para calcular y_1, y_2 y y_3 $y' = 1 + y^2$ con la condición inicial $y(0) = 0$. (Ayuda para resolver el problema se debe comprobar utilizando el método de RK4 que los valores para y_1, y_2 y y_3 son los primeros tres que aparecen en la tabla 39 después de la condición inicial, además se debe calcular el predictor para luego encontrar el corrector).”⁽⁵¹⁾

x_n	x_n	Adams-Bashforth-Moulton
0.00	0.0000	Condición inicial
0.20	0.2027074080	Runge-Kutta
0.40	0.4227889927	Runge-Kutta
0.60	0.6841334017	Runge-Kutta
0.80	1.029636625	Corrector
1.00	1.557351691	Corrector

Tabla 39 Aproximación encontrada con el método de Adams-Bashforth-Moulton con tamaño de paso $h = 0.1$.

x_n	y_n	Adams-Bashforth-Moulton
0.00	0.0000	Condición inicial
0.10	0.1003345891	Runge-Kutta
0.20	0.2027098782	Runge-Kutta
0.30	0.3093360393	Runge-Kutta
0.40	0.4227980812	Corrector
0.50	0.5463149061	Corrector
0.60	0.6841610509	Corrector
0.70	0.8423318827	Corrector
0.80	1.029714204	Corrector
0.90	1.260288002	Corrector
1.00	1.557625581	Corrector

Tabla 40 Aproximación encontrada con el método de Adams-Bashforth-Moulton con tamaño de paso $h = 0.05$.

⁽⁵¹⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (Ejercicio 5 que aparece en la guía 9.3 de la pág.353). Todos los pasos que faltan están desarrollados en el disco de evidencia de trabajo.

4 “Usar finitas el método de las diferencias finitas y el valor indicado de n para aproximar la solución de los problemas con valores en la frontera

$$y'' - 10y' + 25y = 1, y(0) = 1, y(1) = 0; n = 5$$

(Sugerencia identificar que $P(x) = -10$, $Q(x) = 25$, $f(x) = 1$ y $h = \frac{(1-0)}{5} = 0.20$ con estos valores la ecuación de diferencias finitas es $-y_i + 2y_{i-1} = 0.04$).⁽⁵²⁾

⁽⁵²⁾ Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (Ejercicio 4 que aparece en la guía 9.5 de la pág.361). Todos los pasos que faltan están desarrollados en el disco de evidencia de trabajo.

CAPÍTULO III

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

3.1 Ejemplos

Las ecuaciones diferenciales son una parte muy importante del análisis matemático y modelan innumerables procesos de la vida real. Una ecuación diferencial es una relación, válida en cierto intervalo, entre una variable y sus derivadas sucesivas. Su resolución permite estudiar las características de los sistemas que modelan y una misma ecuación puede describir procesos correspondientes a diversas disciplinas. Las ecuaciones diferenciales tienen numerosas aplicaciones a la ciencia y a la ingeniería, de modo que los esfuerzos de los científicos se dirigieron en un principio, a la búsqueda de métodos de resolución y de expresión de las soluciones en forma adecuada. De este modo, los primeros métodos de resolución fueron los algebraicos y los numéricos. Los primeros permiten expresar la solución en forma exacta, como $y = f(x)$, una función de la variable independiente, y los segundos tienen como objetivo calcular valores que toma la solución en una serie de puntos. Al conjunto de estos valores se lo denomina solución numérica. La necesidad de recurrir a métodos alternativos a los algebraicos obedece a que, con la excepción de unos cuantos casos más o menos sencillos, la gran mayoría de las ecuaciones diferenciales no puede ser resuelta satisfactoriamente en forma exacta. Por otra parte, la implementación de técnicas numéricas eficientes requiere previamente el estudio cualitativo de las soluciones. Asimismo, los métodos numéricos, que se plantearan en este capítulo son los ya mencionados métodos isoclinas, Euler, Euler Mejorado, Runge-Kutta de cuarto orden, Adams-Bashforth-Moulton, esto con el fin de obtener la respectiva aproximación a la curva solución real de la ecuación diferencial en cuestión, así se desarrollaran las comparaciones de los métodos numéricos mencionados para observar cual resulte ser el más eficiente en la aproximación numérica y su respectiva comparación con el valor real como los cálculos de los errores absolutos y relativo porcentual .

Ejemplo 3.1 Ejemplo de aplicación a las isoclina

“Suponga que la población de venados $P(t)$ en un pequeño bosque satisface la ecuación $\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2$. Construir un campo de isoclina y una curva solución apropiada para dar respuesta a las siguientes preguntas: si hay 25 venados en el tiempo $t = 0$, y t es medido en meses, ¿Cuánto tiempo le tomara duplicarse a esta población? ¿Cuál será la población límite de venados?”⁽⁵³⁾

Solución

Se debe encontrar primeramente en que tiempo t la población de venados será igual 50. La figura 3.1 muestra un campo de isoclina para la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2$. Junto a la curva solución correspondiente al valor inicial $P(0) = 25$ que es la población inicial de venados. Al observar la figura 3.1 que la población es de 50 venados cuando el tiempo t es mayor que 60 meses. Un valor más exacto se obtiene encontrando la solución de la ecuación diferencial

$\frac{dP}{dt} = \frac{9}{400}P - \frac{3}{10000}P^2$, utilizando variable separable:

$$\frac{dP}{\frac{3}{400} \left(3P - \frac{P^2}{25} \right)} = dt$$

$$\int \frac{dP}{\frac{3}{400} \left(3P - \frac{P^2}{25} \right)} = \int dt$$

$$\frac{3}{400} \int \frac{1}{3P - \frac{P^2}{25}} dP = t \quad (*)$$

⁽⁵³⁾ C.Henry, Edwards, David, E. Penney, 2009, Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera, cuarta edición, PEARSON EDUCACIÓN, México, 2009, ISBN: 978-970-26-1285-8, Área: Matemáticas, Formato: 11x27cm, paginas 824 (el ejemplo de aplicación es el ejercicio 26 propuesto que se encuentra en la pág. 29). La solución de los métodos numéricos para este problema se encuentran en el disco llamado Evidencia de Trabajo.

Aplicando fracciones parciales al miembro de la izquierda de las ecuaciones anteriores

$$\frac{1}{3P - \frac{P^2}{25}} = \frac{1}{75 - P^2}$$

$$\frac{1}{3P - \frac{P^2}{25}} = \frac{25}{75P - P^2}$$

$$\frac{1}{3P - \frac{P^2}{25}} = \frac{25}{P(75 - P)}$$

$$\frac{25}{P(75 - P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{75 - P}$$

$$\frac{25}{P(75 - P)} = \frac{A(75 - P) + BP}{P(75 - P)}$$

$$25 = 75A - AP + BP$$

Luego se igualan las ecuaciones obtenidas con las fracciones parciales

$$75A = 25 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

Así se sustituye el valor de $A = \frac{1}{3}$, $-A + B = 0$ se obtiene:

$$-\frac{1}{3} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

Luego integrando en el lado izquierdo se tiene

$$\int \frac{1}{3P - \frac{P^2}{25}} dP = \frac{1}{3} \int \frac{dP}{P} + \frac{1}{3} \int \frac{dP}{75 - P}$$

$$\int \frac{1}{3P - \frac{P^2}{25}} dP = \frac{1}{3} \ln|P| - \frac{1}{3} \ln|75 - P| + \ln|C|$$

Se vuelve nuevamente a la ecuación (*)

$$\left(\frac{400}{3}\right) \left[\frac{1}{3} \ln P - \frac{1}{3} \ln |75 - P| + \ln |C| \right] = t$$

$$\ln \left[\left(\frac{P}{75 - P} \right) \cdot C \right] = \frac{9t}{400}$$

$$e^{\ln \left[\left(\frac{P}{75 - P} \right) \cdot C \right]} = e^{\frac{9t}{400}}$$

$$\frac{C \cdot P}{75 - P} = e^{\frac{9t}{400}}$$

$$C \cdot P = (75 - P)e^{\frac{9t}{400}}$$

$$C \cdot P = 75e^{\frac{9t}{400}} - Pe^{\frac{9t}{400}}$$

$$C \cdot P + Pe^{\frac{9t}{400}} = 75e^{\frac{9t}{400}}$$

$$P \left(C + e^{\frac{9t}{400}} \right) = 75e^{\frac{9t}{400}}$$

$$P(t) = \frac{75e^{\frac{9t}{400}}}{C + e^{\frac{9t}{400}}}$$

Luego usando la condición inicial $P(0) = 25$ encontrar la constante arbitraria C

$$25 = \frac{75}{C + 1} \Rightarrow 25(C + 1) = 75 \Rightarrow C + 1 = \frac{75}{25} \Rightarrow C + 1 = 3 \Rightarrow C = 2$$

Sustituyendo $C = 2$ y dividiendo entre $e^{\frac{9t}{400}}$ el lado derecho de $P(t) = \frac{75e^{\frac{9t}{400}}}{C + e^{\frac{9t}{400}}}$ se obtiene:

$$P(t) = \frac{75}{1 + 2e^{(-9/400)(t)}}$$

Despejando t se encuentra que el tiempo más exacto cuando $P(t) = 50$ la población de venados se duplica.

$$\frac{75}{1 + 2e^{(-9/400)(t)}} = 50 \Rightarrow \frac{25}{100} = e^{(-9/400)(t)}$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{25}{100} \right) = \ln e^{(-9/400)(t)} \Rightarrow \ln \left(\frac{25}{100} \right) = \frac{-9t}{400} \Rightarrow t \approx 61.6$$

De la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = \frac{9}{400}P - \frac{3}{10000}P^2$, se observa que 0 y 75 son puntos de equilibrio de la ecuación, así que las soluciones de equilibrio son $P(t) = 0$ y $P(t) = 75$. Por lo que se puede observar que en el campo de isocline de la figura 3.1 estos dos valores representan asíntotas horizontales de toda la curva solución. Notar que la curva solución que pasa por el punto inicial $P(0) = 25$ tiene asíntota a la línea horizontal $P = 75$. Esto implica que para la población inicial de 25 venados a medida transcurra el tiempo se acercara a la población límite de 75 venados es decir $P = 75$ cuando $t \rightarrow \infty$.

En conclusión en $t = 61.61$ meses la población de venados se duplicara y la población límite es de 75 venados.

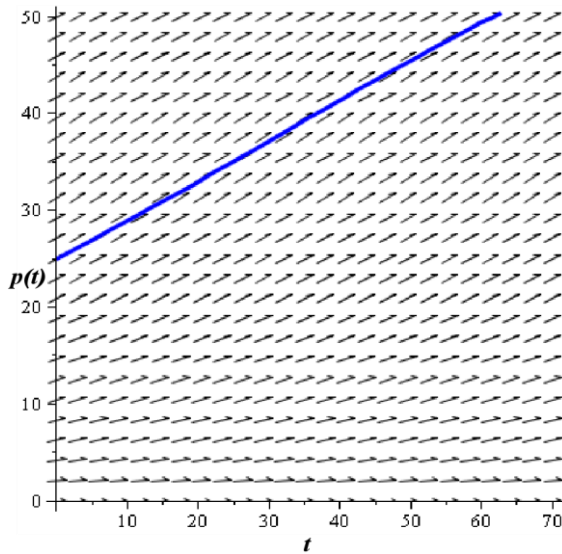


Figura 3.1 Representación de la duplicación de venados mediante el campo de pendientes e isoclinas dibujadas con software.

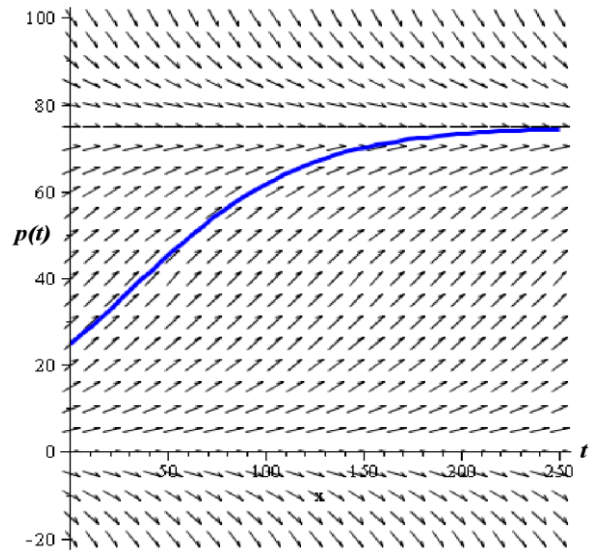


Figura 3.2 Representación de la duplicación de venados mediante el campo de pendientes e isoclinas y curva solución dibujados con software.

Ejemplo 3.2 Ejemplo de aplicación del método de Euler

Suponga que en un pequeño bosque la población de venados $P(t)$, inicialmente de 25 Individuos, satisface la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2$$

(Con t en meses). Aplicar el método de Euler con el fin de aproximar la solución para 10 años, primero con un tamaño de paso $h = 1$ y después con $h = 0.5$, redondeando los valores aproximados de P a tres cifras decimales, ¿Qué porcentaje de la población límite de 75 venados se obtiene después de 5 años? ¿Después de 10 años?.

Solución.

Utilizando el método de Euler con un tamaño paso de $h = 1$ para seguir la trayectoria del crecimiento de la población de venados en intervalos de meses, se aplica la fórmula iterativa del método de Euler se resolverá la primer y la última iteración.

La fórmula general es de la siguiente forma

$$F(t_n, P_n) = 0.0225P_n - 0.0003P_n^2.$$

Desde luego que se tienen las condiciones iniciales para el desarrollo de este problema los cuales son los siguientes. Con $t_0 = 0$ y $P_0 = 25$ y $F(t_0, P_0) = 0.0225P_0 - 0.0003P_0^2$. La fórmula iterativa de Euler lleva a los siguientes valores:

$$P_1 = P_0 + h \cdot (t_0, P_0) = 25 + (1)(0.0225(25) - 0.0003(25)^2) = 25.375$$

•
•
•

$$\begin{aligned} P_{60} &= P_{59} + h \cdot (t_{59}, P_{59}) \\ &= 49.00664881 + (1)(0.0225(49.00664881) - 0.0003(49.00664881)^2) \\ &= 49.38880292 \end{aligned}$$

La tabla 41 muestra los valores encontrados con el método de Euler con tamaño de pasos $h = 1$ y con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 5 años.

t_n	P_n	Valor Real	Error Absoluto	% Error Relativo
0.00	25.00000000	25.00000000	0.00000000	0.000000000
1.00	25.37500000	25.37639561	0.00139561	0.005499638
2.00	25.75277031	25.75553905	0.00276874	0.010750075
3.00	26.13324609	26.13736353	0.00411744	0.015753080
4.00	26.51636016	26.52179992	0.00543976	0.020510523
5.00	26.90204306	26.90877683	0.00673377	0.025024437
6.00	27.29022305	27.29822060	0.00799755	0.029296964
7.00	27.68082619	27.69005541	0.00922922	0.033330449
8.00	28.07377634	28.08420324	0.01042690	0.037127277
9.00	28.46899523	28.48058403	0.01158880	0.040690176
10.00	28.86640252	28.87911560	0.01271308	0.044021708
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
59.00	49.00664881	49.01068460	0.00403579	0.00823451
60.00	49.38880292	49.39147981	0.00267689	0.00541974

Tabla 41 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 1$ para el método de Euler.

Ahora partimos con el otro tamaño de paso $h = 0.5$ el cual nos sugiere el problema para ello aplicaremos la fórmula iterativa del método de Euler para la primera y última iteración, con el tamaño de paso de $h = 0.5$ lo que se hace es que por este tamaño de paso nos indica que por cada mes toca aplicar esta fórmula iterativa en dos ocasiones o sea que por cada año toca hacer 24 iteraciones con el tamaño de paso mencionado.

$$P_1 = P_0 + h \cdot (t_0, P_0) = 25 + (0.5)(0.0225(25) - 0.0003(25)^2) = 25.1875$$

•
•
•

$$\begin{aligned}
 P_{60} &= P_{59} + h \cdot (t_{59}, P_{59}) \\
 &= 49.19984636 + (0.5)(0.0225(49.19984636) - 0.0003(49.19984636)^2) \\
 &= 49.39025090
 \end{aligned}$$

La tabla 42 muestra los valores encontrados con el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.5$ con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 5 años.

t_n	P_n	Valor Real	Error Absoluto	% Error Relativo
0.00	25.00000000	25.00000000	0.00000000	0.000000000
0.50	25.187500000	25.18785024	0.00035024	0.001390511
1.00	25.37569785	25.37639561	0.00069776	0.002749641
1.50	25.56458554	25.56562797	0.00104243	0.004077466
2.00	25.75415492	25.75553905	0.00138413	0.005374106
2.50	25.94439769	25.94612043	0.00172274	0.006639682
3.00	26.13530540	26.13736353	0.00205813	0.007874283
3.50	26.32686946	26.32925964	0.00239018	0.009078037
4.00	26.51908113	26.52179992	0.00271879	0.010251151
4.50	26.71193154	26.71497536	0.00304382	0.011393684
5.00	26.90541168	26.90877683	0.00336515	0.012505770
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
59.50	49.19984636	49.20141637	0.00157001	0.003190985
60.00	49.39025090	49.39147981	0.00122891	0.002488101

Tabla 42 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 0.5$ para el método de Euler.

La tabla 43 muestra los valores encontrados con el método de Euler con tamaño de pasos $h = 1$ y con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 10 años.

t_n	P_n	Valor Real	Error Absoluto	% Error Relativo
0.00	25.00000000	25.00000000	0.00000000	0.000000000
1.00	25.37500000	25.37639561	0.00139561	0.005499638
2.00	25.75277031	25.75553905	0.00276874	0.010750075
3.00	26.13324609	26.13736353	0.00411744	0.015753080
4.00	26.51636016	26.52179992	0.00543976	0.020510523
5.00	26.90204306	26.90877683	0.00673377	0.025024437
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
119.00	66.00213834	65.93583081	0.066307528	0.100563726
120.00	66.18030177	66.11360287	0.066698898	0.100885287

Tabla 43 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 1$ para el método de Euler.

La tabla 44 muestra los valores encontrados con el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.5$ con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 10 años.

t_n	P_n	Valor Real	Error Absoluto	% Error Relativo
0.00	25.00000000	25.00000000	0.00000000	0.000000000
0.50	25.187500000	25.18785024	0.00035024	0.001390511
1.00	25.37569785	25.37639561	0.00069776	0.002749641
1.50	25.56458554	25.56562797	0.00104243	0.004077466
2.00	25.75415492	25.75553905	0.00138413	0.005374106
2.50	25.94439769	25.94612043	0.00172274	0.006639682
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
119.50	66.05831036	66.02509716	0.03321320	0.050303901
120.00	66.14691130	66.11360287	0.03330843	0.050380600

Tabla 44 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 0.5$ para el método de Euler

Las siguientes figuras muestran el comportamiento de la ecuación diferencial mediante el método de Euler.

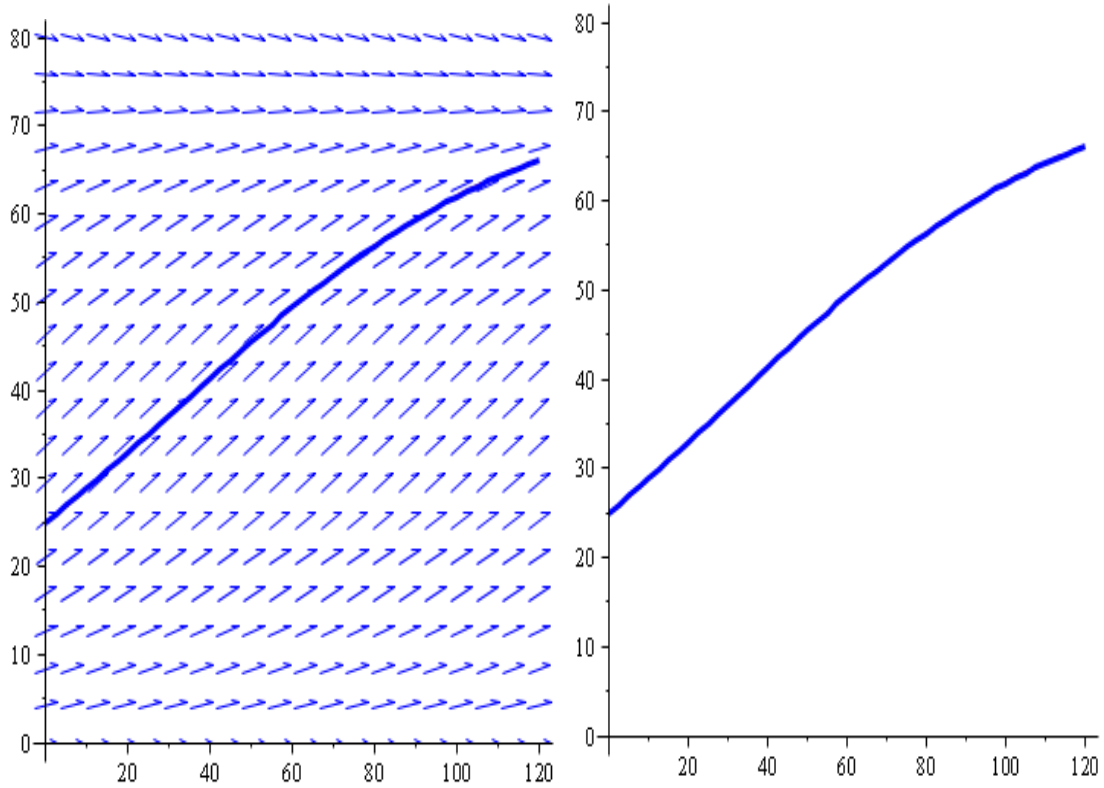


Figura 3.3 y 3.4 Curva solución de la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2$

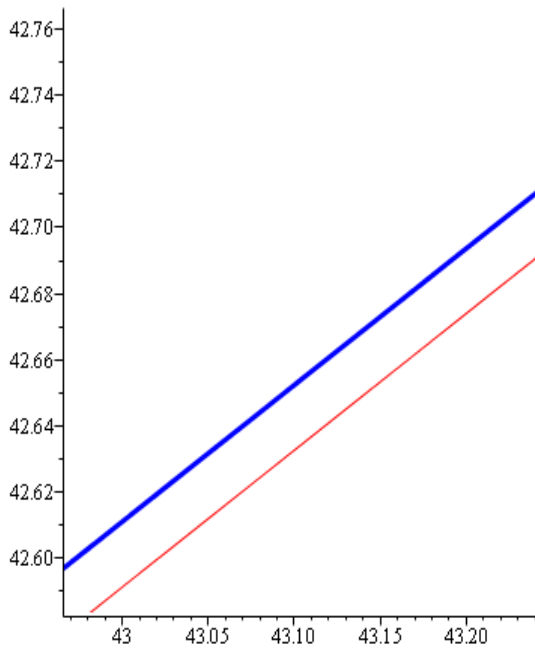


Figura 3.5 Acercamiento a la curva solución mediante Euler

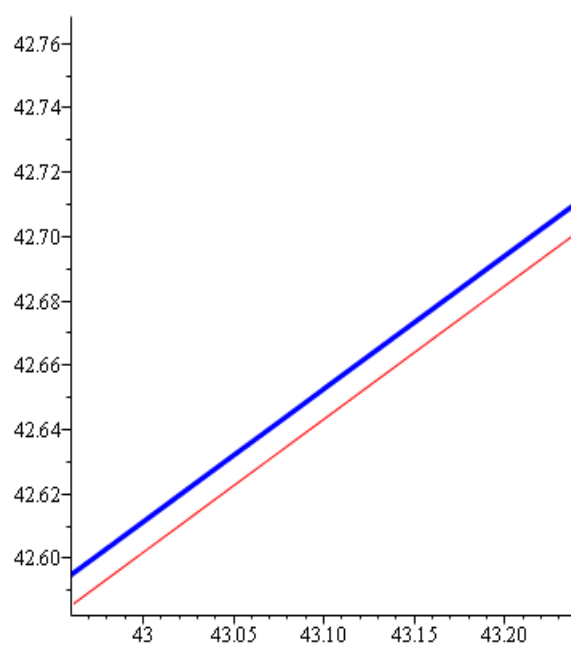


Figura 3.6 Acercamiento a la curva solución mediante un

zoom

Ejemplo 3.3 Ejemplo de aplicación del método de Euler Mejorado

Suponga que en un pequeño bosque la población de venados $P(t)$, inicialmente de 25 Individuos, satisface la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2$$

(Con t en meses). Aplicar el método de Euler Mejorado con el fin de aproximar la solución para 10 años, primero con un tamaño de paso $h = 1$ y después con $h = 0.5$, redondeando los valores aproximados de P a tres cifras decimales, ¿Qué porcentaje de la población límite de 75 venados se obtiene después de 5 años? ¿Después de 10 años?.

Solución.

Utilizando el método de Euler mejorado con un tamaño paso de $h = 1$ para seguir la trayectoria del crecimiento de la población de venados en intervalos de meses, dando la muestra sólo para la primer y la última iteración.

La fórmula general es de la siguiente forma

$$F(t_n, P_n) = 0.0225P_n - 0.0003P_n^2.$$

Desde luego que se tienen las condiciones iniciales para el desarrollo de este problema los cuales son los siguientes. Con $t_0 = 0$ y $P_0 = 25$ y $F(t_0, P_0) = 0.0225P_0 - 0.0003P_0^2$. La fórmula iterativa de Euler mejorado lleva a los siguientes valores:

$$U_1 = P_0 + h \cdot f(t_0, P_0) = 25 + (1)(0.0225(25) - 0.0003(25)^2) = 25.375$$

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + h \cdot \left(\frac{1}{2}\right) [f(t_0, P_0) + f(t_1, U_1)] \\ &= 25 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot [0.0225(25) - 0.0003(25)^2 + 0.0225(25.375) - 0.0003(25.375)^2] \\ &= 25.37638516 \end{aligned}$$

•
•
•

$$\begin{aligned}U_{60} &= P_{59} + h \cdot (t_{59}, P_{59}) \\ &= 49.01015886 + (1)(0.0225(49.01015886) - 0.0003(49.01015886)^2) \\ &= 49.39228873\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{60} &= P_{59} + h \cdot \left(\frac{1}{2}\right) [f(t_{59}, P_{59}) + f(t_{60}, U_{60})] \\ &= 49.01015886 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot [0.0225(49.01015886) - 0.0003(49.01015886)^2 \\ &\quad + 0.0225(49.39228873) - 0.0003(49.39228873)^2] \\ &= 49.39094732\end{aligned}$$

Continuando de esta manera se puede llegar a encontrar la población aproximada de venados dentro de los primeros 5 años, con paso $h = 1$ con tiempo t en meses, tenemos que se realizan 60 iteraciones.

La tabla 45 muestra los valores encontrados con el método de Euler Mejorado con tamaño de paso $h = 1$ con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 5 años.

t_n	P_n	Valor Real	Error Absoluto	% Error Relativo
0.00	25.00000000	25.00000000	0.00000000	0.00000000
1.00	25.37638516	25.37639561	0.00001045	0.000041180
2.00	25.75551816	25.75553905	0.00002089	0.000011080
3.00	26.13733220	26.13736353	0.00003133	0.000119866
4.00	26.52175817	26.52179992	0.00004175	0.000157417
5.00	26.90872467	26.90877683	0.00005216	0.00019384
6.00	27.29815806	27.2982206	0.00006254	0.000229099
7.00	27.68998251	27.69005541	0.00007290	0.000263271
8.00	28.08412002	28.08420324	0.00008322	0.000296323
9.00	28.48049051	28.48058403	0.00009352	0.000328364
10.00	28.87901184	28.8791156	0.00010376	0.00035929
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
59.00	49.01015886	49.01068460	0.00052574	0.001072704
60.00	49.39094732	49.39147981	0.00053249	0.001078100

Tabla 45 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 1$ para el método de Euler mejorado.

Ahora partimos con el otro tamaño de paso $h = 0.5$ el cual nos sugiere el problema para ello aplicaremos la fórmula iterativa del método de Euler mejorado para el primer y último paso iterativo, con el tamaño de paso de $h = 0.5$ lo que se hace es que por este tamaño de paso nos indica que por cada mes toca aplicar esta fórmula iterativa en dos ocasiones o sea que por cada año toca hacer 24 iteraciones con el tamaño de paso mencionado.

$$U_1 = P_0 + h \cdot (t_0, P_0) = 25 + (0.5)(0.0225(25) - 0.0003(25)^2) = 25.1875$$

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + h \cdot \left(\frac{1}{2}\right) [f(t_0, P_0) + f(t_1, U_1)] \\ &= 25 + (0.5) \left(\frac{1}{2}\right) \cdot [0.0225(25) - 0.0003(25)^2 + 0.0225(25.1875) \\ &\quad - 0.0003(25.1875)^2] \\ &= 25.1878 \end{aligned}$$

•
•
•

$$\begin{aligned} U_{60} &= P_{59} + h \cdot (t_{59}, P_{59}) \\ &= 49.20128409 + (0.5)(0.0225(49.20128409) - 0.0003(49.20128409)^2) \\ &= 49.39168358 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{60} &= P_{59} + h \cdot \left(\frac{1}{2}\right) [f(t_{59}, P_{59}) + f(t_{60}, U_{60})] \\ &= 49.20128409 + (0.5) \left(\frac{1}{2}\right) \cdot [0.0225(49.20128409) - 0.0003(49.20128409)^2 \\ &\quad + 0.0225(49.39168358) - 0.0003(49.39168358)^2] \\ &= 49.39134668 \end{aligned}$$

Cuando se tiene el paso de $h = 0.5$ y tiempo t en meses se realizan 120 iteraciones, de esta forma se llega a que en 5 años la población aproximada es de 49.391 venados donde representa el 65% de la población de saturación de 75 venados.

La tabla 46 muestra los valores encontrados con el método de Euler Mejorado con tamaño de paso $h = 0.5$ con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 5 años.

t_n	P_n	Valor Real	Error Absoluto	% Error Relativo
0.00	25.00000000	25.00000000	0.00000000	0.00000000
0.50	25.18784893	25.18785024	0.00000131	0.000005200
1.00	25.37639298	25.37639561	0.00000263	0.000010363
1.50	25.56562403	25.56562797	0.00000394	0.000015411
2.00	25.75553380	25.75553905	0.00000525	0.000020383
2.50	25.94611387	25.94612043	0.00000656	0.000025283
3.00	26.13735566	26.13736353	0.00000787	0.000030110
3.50	26.32925047	26.32925964	0.00000917	0.000034828
4.00	26.52178944	26.52179992	0.00001048	0.000039514
4.50	26.71496357	26.71497536	0.00001179	0.000044132
5.00	26.90876373	26.90877683	0.00001310	0.000048683
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
59.50	49.20128409	49.20141637	0.00013228	0.000268854
60.00	49.39134668	49.39147981	0.00013313	0.000269540

Tabla 46 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 0.5$ para el método de Euler mejorado.

De igual forma cuando transcurren 10 años y el paso $h = 1$ tenemos y tiempo t en meses tenemos que el número de iteraciones será de 120, luego cuando $h = 0.5$ al pasar 10 años tenemos que con la fórmula iterativa de Euler mejorado se realizan 240 iteraciones, de esta

manera llegamos a que en 10 años la población aproximada es de 66.113 de venados que representa el 88% de la población de saturación.

La tabla 47 muestra los valores encontrados con el método de Euler Mejorado con tamaño de paso $h = 1$ con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 10 años.

t_n	P_n	Valor Real	Error Absoluto	% Error Relativo
0.00	25.00000000	25.00000000	0.00000000	0.00000000
1.00	25.37638516	25.37639561	0.00001045	0.000041180
2.00	25.75551816	25.75553905	0.00002089	0.000011080
3.00	26.13733220	26.13736353	0.00003133	0.000119866
4.00	26.52175817	26.52179992	0.00004175	0.000157417
5.00	26.90872467	26.90877683	0.00005216	0.00019384
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
119.00	65.93512571	65.93583081	0.00070510	0.001069373
120.00	66.11289938	66.11360287	0.00070349	0.001064062

Tabla 47 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 1$ para el método de Euler mejorado.

La tabla 48 muestra los valores encontrados con el método de Euler Mejorado con tamaño de paso $h = 0.5$ con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 10 años.

t_n	P_n	Valor Real	Error Absoluto	% Error Relativo
0.00	25.00000000	25.00000000	0.00000000	0.00000000
0.50	25.18784893	25.18785024	0.00000131	0.000005200
1.00	25.37639298	25.37639561	0.00000263	0.000010363
1.50	25.56562403	25.56562797	0.00000394	0.000015411
2.00	25.75553380	25.75553905	0.00000525	0.000020383
2.50	25.94611387	25.94612043	0.00000656	0.000025283
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
119.50	66.02492178	66.02509716	0.00017538	0.000265626
120.00	66.11342769	66.11360287	0.00017518	0.000264968

Tabla 48 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 0.5$ para el método de Euler mejorado.

En conclusión se puede observar que con ambos tamaños de paso $h = 1$ y $h = 0.5$ la población aproximada después de 5 años es de 49.391 venados, después de 10 años es de 66.113 venados.

En la figura 3.7 muestra la curva solución y curva de aproximación con $h = 1$ y $h = 0.5$ de la ecuación $\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2$ donde se puede observar gráficamente que dependiendo del tiempo transcurrido así el crecimiento de la población de venados va en aumento acercándose a el número límite de 75 venados, donde está representado con una asíntota horizontal en la curva solución.

A simple vista no se pueden observar las curvas aproximadas para lo hacemos un acercamiento y se muestran en la figura 3.7 y 3.8. Para que se pueda ver más, detalladamente.

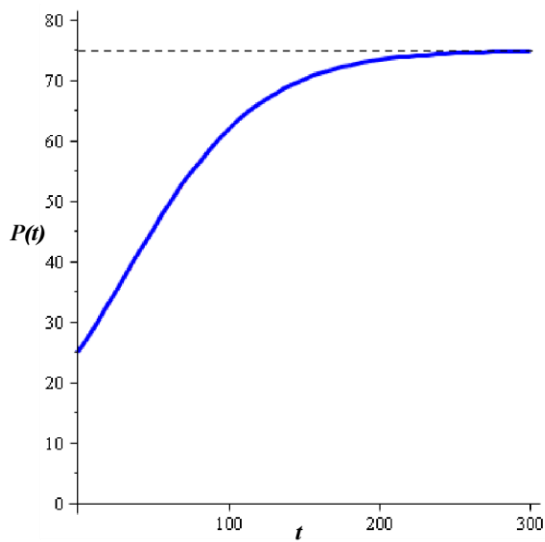


Figura 3.7 Curva solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2$$

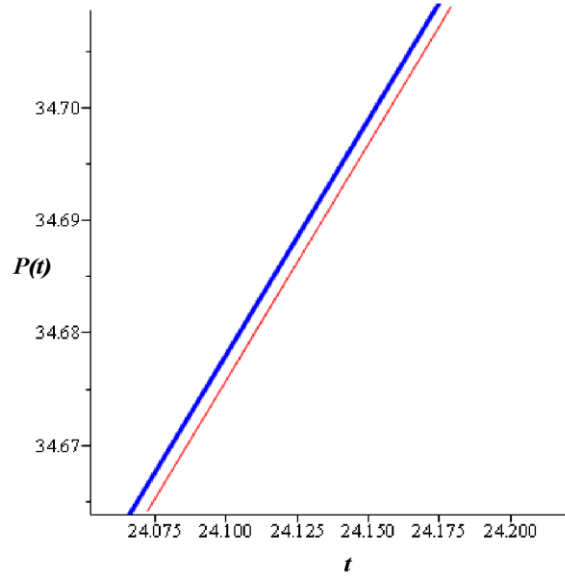


Figura 3.8 Acercamiento a la curva solución mediante el método de Euler mejorado

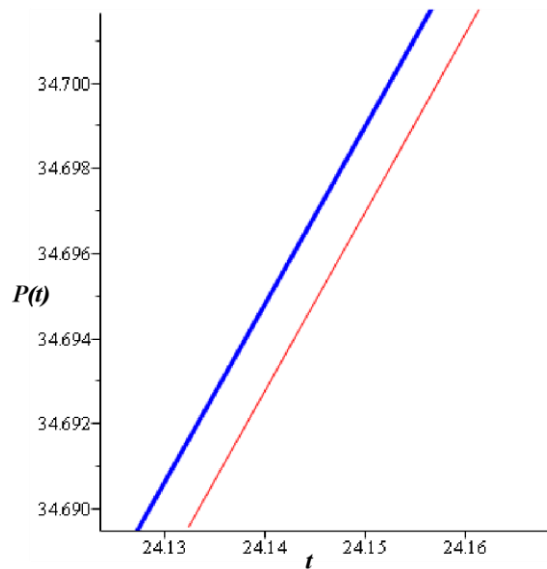


Figura 3.9 Acercamiento a la curva solución mediante un zoom

Ejemplo 3.4. Problema de aplicación usando el método de Runge-Kutta

Suponga que en un pequeño bosque una población de venados $P(t)$, inicialmente de 25 individuos, satisface la ecuación logística $\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2$ (con t en meses). Aplicar el método de Runge-Kutta con el fin de aproximar la solución para 10 años, primero con un tamaño de paso $h = 6$ y luego $h = 3$, redondeando los valores aproximados de P a 4 cifras decimales. ¿Qué porcentaje de la población límite de 75 venados se alcanza después de 5 años? ¿Después de 10 años?

Solución.

Utilizando el método de Runge-Kutta con un tamaño de paso $h = 6$ para seguir la trayectoria del crecimiento de la población de venados en intervalos de meses, primeramente se resolverá para la primera y última iteración. El valor de $h = 6$ indica que por cada año se emplea la fórmula iterativa del método de Runge-Kutta en dos ocasiones así con las condiciones iniciales planteadas se tiene lo siguiente, entonces $f(t_n, P_n) = 0.0225P_n - 0.0003P_n^2$.

Primera iteración con $h = 6$, $t_0 = 0$, $P_0 = 25$ y $f(t_0, P_0) = 0.0225P_0 - 0.0003P_0^2$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, P_0) = 0.0225P - 0.0003P^2 = 0.0225(25) - 0.0003(25)^2 = 0.5625 - 0.1875 \\ &= 0.375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, P_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ &= 0.0225(25 + (0.5)(6)(0.375)) - 0.0003(25 + (0.5)(6)(0.375))^2 \\ &= 0.0225(26.125) - 0.0003(682.515625) = 0.5878125 - 0.204754687 \\ &= 0.383057812 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, P_0 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ &= 0.0225(25 + (0.5)(6)(0.383057812)) \\ &\quad - 0.0003(25 + (0.5)(6)(0.383057812))^2 \\ &= 0.0225(26.14917344) - 0.0003(683.7792715) \\ &= 0.588356402 - 0.205133781 = 0.38322262 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= f(t_0 + h, P_0 + hk_3) \\
&= 0.0225(25 + (6)(0.38322262)) - 0.0003(25 + (6)(0.38322262))^2 \\
&= 0.0225(27.29933573) - 0.0003(745.2537311) \\
&= 0.614235053 - 0.223576119 = 0.390658934
\end{aligned}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$P_1 = 25 + \frac{6}{6}(0.375 + 2(0.383057812) + 2(0.38322262) + 0.390658934)$$

$$P_1 = 25 + \frac{6}{6}(0.375 + 0.766115626 + 0.766445242 + 0.390658934)$$

$$P_1 = 25 + (2.29821980)$$

$$P_1 = 27.29821980$$

•
•
•

Ultima iteración con $h = 6$, $t_9 = 54$, $P_9 = 47.06856379$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_9, P_9) = 0.0225(47.06856379) - 0.0003(47.06856379)^2 \\
&= 1.059042685 - 0.664634909 = 0.394407776
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(t_9 + \frac{1}{2}h, P_9 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\
&= 0.0225(47.06856379 + (0.5)(6)(0.394407776)) \\
&\quad - 0.0003(47.06856379 + (0.5)(6)(0.394407776))^2 \\
&= 0.0225(48.25178712) - 0.0003(2,328.23496) \\
&= 1.08566521 - 0.698470488 = 0.387194722
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= f\left(t_9 + \frac{1}{2}h, P_9 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\
&= 0.0225(47.06856379 + (0.5)(6)(0.387194722)) \\
&\quad - 0.0003(47.06856379 + (0.5)(6)(0.387194722))^2 \\
&= 0.0225(48.23014796) - 0.0003(2,326.147172) \\
&= 1.085178329 - 0.697844151 = 0.387334178
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= f(t_{10}, P_9 + hk_3) \\
&= 0.0225(47.06856379 + (6)(0.387334178)) \\
&\quad - 0.0003(47.06856379 + (6)(0.387334178))^2 \\
&= 0.0225(49.39256886) - 0.0003(2,439.625858) \\
&= 1.111332799 - 0.731887757 = 0.379445042
\end{aligned}$$

$$P_{10} = P_9 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$P_{10} = 47.06856379$$

$$+ \frac{6}{6}(0.394407776 + 2(0.387194722) + 2(0.387334178) + 0.379445042)$$

$$P_{10} = 47.06856379 + (0.394407776 + 0.774389444 + 0.774668356 + 0.379445042)$$

$$P_{10} = 47.06856379 + 2.322910618$$

$$P_{10} = 49.39147441$$

De esta manera iterativa se continúa para encontrar los demás valores de P y encontrar el número aproximado de la población de venados dentro de 5 años con tamaño de paso $h = 6$,

La tabla 49 muestra los valores encontrados con el método de RK4 con tamaño de paso $h = 6$ con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 5 años.

t_n	P_n	Valor Real	Error Absoluto	% Error Relativo
0.00	25.0000000	25.0000000	0.00000000	0.000000000
6.00	27.29821980	27.2982206	0.0000008	0.000002931
12.00	29.68229124	29.68229274	0.0000015	0.000005053
18.00	32.13431251	32.13431462	0.00000211	0.000006566
24.00	34.63408697	34.63408961	0.00000264	0.000007622
30.00	37.15974659	37.15974971	0.00000312	0.000008638
36.00	39.68849714	39.68850069	0.00000355	0.000008944
42.00	42.19743282	42.19743676	0.00000394	0.000009337
48.00	44.66435942	44.66436381	0.00000439	0.000009828
54.00	47.06856379	47.06856864	0.00000485	0.000010304
60.00	49.39147441	49.39147981	0.00000540	0.000010933

Tabla 49 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 6$ para el método KK4.

Con ello con los distintos valores de h se llega que en 5 años la población estimada de venados será de 49.39147441

Así ahora se procede a calcular las iteraciones para el valor de $h = 3$, para ello se resolverán la primera y la última iteración. Cabe mencionar que para el tamaño de paso $h = 3$ indica que por cada año se emplea la fórmula iterativa del Método de Runge-Kutta en 4 ocasiones, luego se procede a calcular las iteraciones correspondientes mencionadas.

$$\text{Con } h = 3, t_0 = 0, P_0 = 25 \text{ y } f(t_0, P_0) = 0.0225P_0 - 0.0003P_0^2$$

Primera iteración

$$k_1 = f(t_0, P_0) = 0.0225P - 0.0003P^2 = 0.0225(25) - 0.0003(25)^2 = 0.5625 - 0.1875 = 0.375$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, P_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\
&= 0.0225(25 + (0.5)(3)(0.375)) - 0.0003(25 + (0.5)(3)(0.375))^2 \\
&= 0.0225(25.5625) - 0.0003(653.4414063) \\
&= 0.57515625 - 0.196032421 = 0.379123829
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, P_0 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\
&= 0.0225(25 + (0.5)(3)(0.379123829)) \\
&\quad - 0.0003(25 + (0.5)(3)(0.379123829))^2 \\
&= 0.0225(25.56868574) - 0.0003(653.7576906) \\
&= 0.575295429 - 0.196127307 = 0.379168122
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= f(t_1, P_0 + hk_3) \\
&= 0.0225(25 + (3)(0.379168122)) - 0.0003(25 + (3)(0.379168122))^2 \\
&= 0.0225(26.13750437) - 0.0003(683.1691345) \\
&= 0.588093848 - 0.204950740 = 0.383143108
\end{aligned}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$P_1 = 25 + \frac{3}{6}(0.375 + 2(0.379123829) + 2(0.379168122) + 0.383143108)$$

$$P_1 = 25 + \frac{1}{2}(0.375 + 0.758247658 + 0.758336244 + 0.383143107)$$

$$P_1 = 25 + \frac{1}{2}(2.274727009)$$

$$P_1 = 25 + 1.137363505$$

$$P_1 = 26.13736350$$

.

.

.

Ultima iteración Con $h = 3$, $t_{19} = 57$, $P_{19} = 48.24124756$

$$k_1 = f(t_{19}, P_{19}) = 0.0225P - 0.0003P^2 = 0.0225(48.24124756) - 0.0003(48.24124756)^2 \\ = 1.08542807 - 0.698165389 = 0.387262681$$

$$k_2 = f\left(t_{19} + \frac{1}{2}h, P_{19} + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ = 0.0225(48.24124756 + (0.5)(3)(0.387262681)) \\ - 0.0003(48.24124756 + (0.5)(3)(0.387262681))^2 \\ = 0.0225(48.82214158) - 0.0003(2,383.601509) \\ = 1.098498186 - 0.715080452 = 0.383417733$$

$$k_3 = f\left(t_{19} + \frac{1}{2}h, P_{19} + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ = 0.0225(48.24124756 + (0.5)(3)(0.383417733)) \\ - 0.0003(48.24124756 + (0.5)(3)(0.383417733))^2 \\ = 0.0225(48.81637416) - 0.0003(2,383.038386) \\ = 1.098368419 - 0.714911515 = 0.383456903$$

$$k_4 = f(t_{20}, P_{19} + hk_3) \\ = 0.0225(48.24124756 + (3)(0.383456903)) \\ - 0.0003(48.24124756 + (3)(0.383456903))^2 \\ = 0.0225(49.39161827) - 0.0003(2,439.531955) \\ = 1.111311411 - 0.731859586 = 0.379451825$$

$$P_{20} = P_{19} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$P_{20} = 48.24124756 \\ + \frac{3}{6}(0.387262681 + 2(0.383417733) + 2(0.383456903) + 0.379451825)$$

$$P_{20} = 48.24124756 + \frac{1}{2}(0.387262681 + 0.766835466 + 0.766913806 + 0.379451825)$$

$$P_{20} = 48.24124756 + \frac{1}{2}(2.300463778)$$

$$P_{20} = 48.24124756 + 1.150231889$$

$$P_{20} = 49.39147945$$

La tabla 50 muestra los valores encontrados con el método de RK4 con tamaño de paso $h = 3$ con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 5 años.

Como se puede observar se necesita de 20 iteraciones para obtener los valores ya que por cada año se calcula 4 iteraciones y en este caso se requiere de 4 por cada año o sea en total son 20.

t_n	P_n	Valor Real	Error Absoluto	% Error Relativo
0.00	25.0000000	25.00000000	0.00000000	0.000000000
3.00	26.13736350	26.13736353	0.00000003	0.000000114
6.00	27.29822055	27.2982206	0.00000005	0.000000183
9.00	28.48058395	28.48058403	0.00000008	0.000000280
12.00	29.68229265	29.68229274	0.00000009	0.000000303
15.00	30.90102496	30.90102508	0.00000012	0.000000388
18.00	32.13431449	32.13431462	0.00000013	0.000000407
21.00	33.37956866	33.37956881	0.000000153	0.000000458
24.00	34.63408945	34.63408961	0.000000158	0.000000456
27.00	35.89509612	34.89509631	0.000000185	0.000000531
30.00	37.15974951	37.15974971	0.000000196	0.000000527
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
57.00	48.24124756	48.24124789	0.00000033	0.000000684
60.00	49.39147945	49.39147981	0.00000036	0.000000728

Tabla 50 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 3$ para el método de RK4.

La tabla 51 muestra los valores encontrados con el método de RK4 con tamaño de paso $h = 6$ con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 10 años.

t_n	P_n	Valor Real	Error Absoluto	% Error Relativo
0.00	25.0000000	25.0000000	0.0000000	0.00000000
6.00	27.29821980	27.2982206	0.0000008	0.000002931
12.00	29.68229124	29.68229274	0.0000015	0.000005053
18.00	32.13431251	32.13431462	0.00000211	0.000006566
24.00	34.63408697	34.63408961	0.00000264	0.000007622
30.00	37.15974659	37.15974971	0.00000312	0.000008638
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
114.00	65.00042702	65.00043889	0.000011867	0.000018257
120.00	66.11359048	66.11360287	0.000012391	0.000018742

Tabla 51 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 6$ para el método de RK4

La tabla 52 muestra los valores encontrados con el método de RK4 con tamaño de paso $h = 3$ con sus respectivos errores absoluto, relativo y la comparación con el valor real esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 10 años.

Para este tamaño de paso se requiere de la elaboración de 40 pasos de la fórmula iterativa del método de RK4.

t_n	P_n	Valor Real	Error Absoluto	% Error Relativo
0.00	25.0000000	25.0000000	0.00000000	0.000000000
3.00	26.13736350	26.13736353	0.00000003	0.000000114
6.00	27.29822055	27.2982206	0.00000005	0.000000183
9.00	28.48058395	28.48058403	0.00000008	0.000000280
12.00	29.68229265	29.68229274	0.00000009	0.000000303
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
117.00	65.57107626	65.57107702	0.000000758	0.000000011
120.00	66.11360209	66.11360287	0.000000781	0.000000011

Tabla 52 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 3$ para el método RK4.

De igual manera utilizando el mismo procedimiento después de 10 años con paso $h = 6$ y $h = 3$ y tiempo t en meses, aplicando la fórmula iterativa de Runge-Kutta llegamos a que el número de la población aproximada es de 66.11360209 venados. En conclusión se tiene que con tamaños de paso $h = 6$ y $h = 3$, población aproximada después de 5 años es de 49.39147945 venados (66% de la población de saturación de 75 venados); después de 10 años es de 66.11360209 venados (88% de la población de saturación de 75 venados).

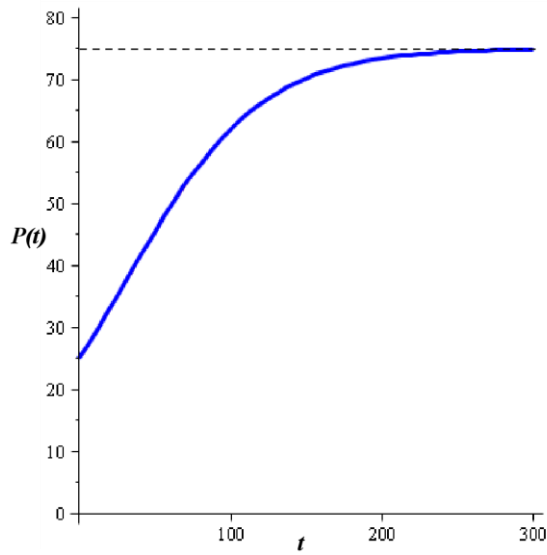


Figura 3.10 Curva original de $\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2$ y la curva aproximada no sé ve por exactitud del método de Runge-Kutta

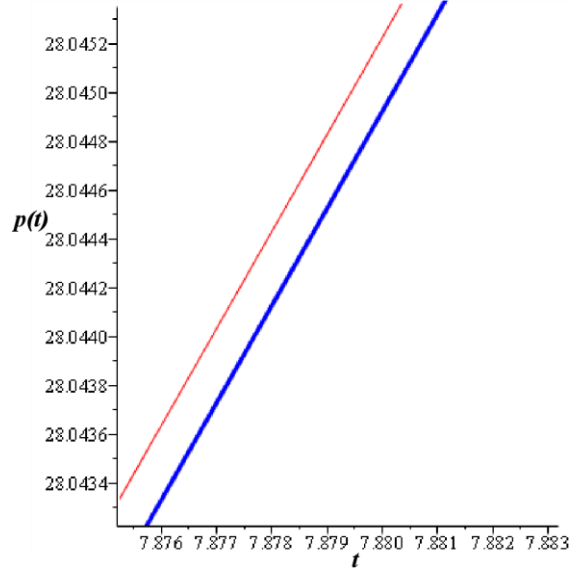


Figura 3.11 Zoom para ver de una forma más clara geoméricamente la comparación de las aproximaciones cuando han transcurrido 5 años

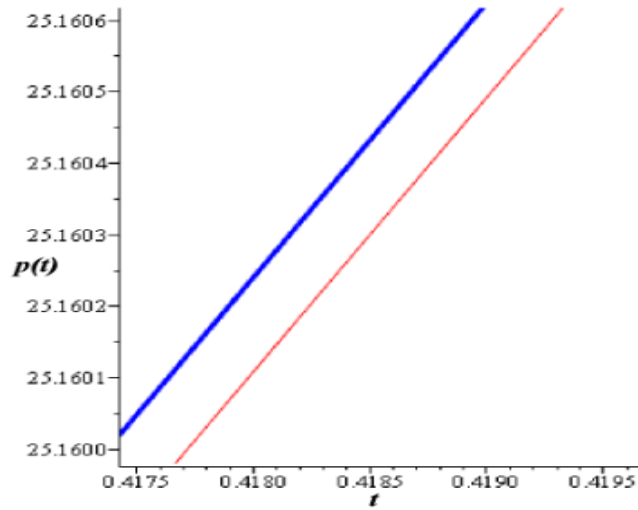


Figura 3.12 Zoom para ver de una forma más clara geoméricamente la comparación de las aproximaciones cuando han transcurrido 10 años

Ejemplo 3.5. Problema de aplicación usando el Método de Adams-Bashforth-Moulton

Suponga que en un pequeño bosque una población de venados $P(t)$, inicialmente de 25 individuos, satisface la ecuación logística $\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2$ (con t en meses). Aplicar Método de Adams-Bashforth-Moulton con el fin de aproximar la solución para 10 años, primero con un tamaño de paso $h = 6$ y luego $h = 3$, redondeando los valores aproximados de P a 4 cifras decimales. ¿Qué porcentaje de la población límite de 75 venados se alcanza después de 5 años? ¿Después de 10 años? El método RK4 para calcular P_0, P_1, P_2, P_3 ;

Solución.

Aplicando el método multipasos de Adams-Bashforth-Moulton de cuarto orden para ello requerimos de los cálculos de P_0, P_1, P_2, P_3 . Obtenidos anteriormente por medio del empleo del Método de Runge-Kutta de cuarto orden cabe mencionar que para este método al igual que el Método de Euler Mejorado es un método de predicción-corrección, Se resuelve la primer y ultima iteración del método.

$$P_0 = 25, \quad P_1 = 27.29821980, \quad P_2 = 29.68229124, \quad P_3 = 32.13431251.$$

$$P'_0 = f(t_0, P_0) = f(0, 25) = 0.0225(25) - 0.0003(25)^2 = 0.375$$

$$P'_1 = f(t_1, P_1) = f(6, 27.29821980) = 0.0225(27.29821980) - 0.0003(27.29821980)^2 \\ = 0.390652104$$

$$P'_2 = f(t_2, P_2) = f(12, 29.68229124) = 0.0225(29.68229124) - 0.0003(29.68229124)^2 \\ = 0.403540028$$

$$P'_3 = f(t_3, P_3) = f(18, 32.13431251) = 0.0225(32.13431251) - 0.0003(32.13431251)^2 \\ = 0.413237819$$

Con estos valores anteriores entonces la predicción es

$$P_4^* = P_3 + \frac{6}{24} (55P'_3 - 59P'_2 + 37P'_1 - 9P'_0)$$

$$\begin{aligned}
P_4^* &= 32.13431251 \\
&+ \frac{6}{24}(55(0.413237819) - 59(0.403540028) + 37(0.390652104) \\
&- 9(0.375)) \\
&= 32.13431251 \\
&+ \frac{6}{24}(22.72808005 - 23.80886165 + 14.45412785 - 3.375) \\
&= 32.13431251 + \frac{6}{24}(9.99834625) = 32.13431251 + 2.499586563 \\
&= 34.63389907
\end{aligned}$$

Para usar la corrección, primero se necesita

$$\begin{aligned}
P_4' &= f(t_4, P_4^*) = f(24, 34.63389907) = 0.0225(34.63389907) - 0.0003(34.63389907)^2 \\
&= 0.419410639
\end{aligned}$$

Por último, se obtiene

$$P_4 = P_3 + \frac{h}{24}(9P_4' + 19P_3' - 5P_2' + P_1')$$

$$\begin{aligned}
P_4 &= 32.13431251 \\
&+ \frac{6}{24}(9(0.419410639) + 19(0.413237819) - 5(0.403540028) \\
&+ (0.390652104)) \\
&= 32.13431251 \\
&+ \frac{6}{24}(3.774695751 + 7.851518561 - 2.01770014 + 0.390652104) \\
&= 32.13431251 + \frac{6}{24}(9.999166276) = 32.13431251 + 2.499791569 \\
&= 34.63410408
\end{aligned}$$

.

.

.

Ultima iteración.

$$\begin{aligned} P'_9 &= f(t_9, P_9) = f(54,47.06868686) = 0.0225(47.06868686) - 0.0003(47.06868686)^2 \\ &= 0.394407069 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_8 &= f(t_8, P_8) = f(48,44.66446501) = 0.0225(44.66446501) - 0.0003(44.66446501)^2 \\ &= 0.406476132 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_7 &= f(t_7, P_7) = f(42,42.19751702) = 0.0225(42.19751702) - 0.0003(42.19751702)^2 \\ &= 0.41525500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_6 &= f(t_6, P_6) = f(36,39.68855808) = 0.0225(39.68855808) - 0.0003(39.68855808)^2 \\ &= 0.420438064 \end{aligned}$$

Con estos valores anteriores entonces la predicción es

$$P_{10}^* = P_9 + \frac{6}{24} (55P'_9 - 59P'_8 + 37P'_7 - 9P'_6)$$

$$\begin{aligned} P_{10}^* &= 47.06868686 \\ &+ \frac{6}{24} (55(0.394407069) - 59(0.406476132) + 37(0.41525500) \\ &- 9(0.420438064)) \\ &= 47.06868686 \\ &+ \frac{6}{24} (21.69238880 - 23.98209179 + 15.36443500 - 3.783942576) \\ &= 47.06868686 + \frac{6}{24} (9.290789434) = 47.06868686 + 2.322697359 \\ &= 49.39138422 \end{aligned}$$

Para usar la corrección primero se necesita

$$\begin{aligned} P'_{10} &= f(t_{10}, P_{10}^*) = f(60,49.39138422) \\ &= 0.0225(49.39138422) - 0.0003(49.39138422)^2 = 0.379453494 \end{aligned}$$

Por último, usando se obtiene:

$$P_{10} = P_9 + \frac{h}{24} (9P'_{10} + 19P'_9 - 5P'_8 + P'_7)$$

$$\begin{aligned}
P_{10} &= 47.06868686 \\
&+ \frac{6}{24}(9(0.379453494) + 19(0.394407069) - 5(0.406476132) \\
&+ (0.41525500)) \\
&= 47.06868686 \\
&+ \frac{6}{24}(3.415081446 + 7.493734311 - 2.03238066 + 0.41525500) \\
&= 47.06868686 + \frac{6}{24}(9.291690097) = 47.06868686 + 2.322922524 \\
&= 49.39160938
\end{aligned}$$

La tabla 53 contiene las iteraciones que se obtienen al aplicar el Método de Adams-Bashforth-Moulton con el tamaño de paso $h = 6$, además. Como se puede observar para aplicar este método se necesita primeramente de la condición inicial luego así los primeros tres paso de la formula iterativa del método de Runge-Kutta de cuarto orden para con ellos aplicar el desarrollo de la fórmula iterativa y con ellos se obtendrá el primer valor que se le llama predicción y así el siguiente valor que se le llama corrección.

t_n	P_n	Adams-Bashforth-Moulton	Valor Real
0.00	25.00000000	Condición inicial	25.00000000
6.00	27.29821980	Runge-Kutta	27.29822060
12.00	29.68229124	Runge-Kutta	29.68229274
18.00	32.13431251	Runge-Kutta	32.13431462
	34.63389907	Predictor	
24.00	34.63410408	Corrector	34.63408961
	37.15952542	Predictor	
30.00	37.15978453	corrector	37.15974971
	39.68826095	predictor	
36.00	39.68855808	corrector	39.68850069
	42.19720397	Predictor	
42.00	42.19751702	corrector	42.19743676
	44.66415965	Predictor	
48.00	44.66446501	Corrector	44.66436381
	47.06841205	Predictor	
54.00	47.06868686	Corrector	47.06856864
	49.39138422	Predictor	
60.00	49.39160938	Corrector	49.39147981

Tabla 53 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 6$ para el método Adams-Bashforth-Moulton.

Con ello con los distintos valores de h se llega que en 5 años la población estimada de venados será de 49.39147441. Lo que es equivalente a un porcentaje de la población límite de venados en el tiempo estimado del 66%.

Luego se toma el siguiente tamaño de paso $h = 3$

Para ello se hace uso del Método de Adams-Bashforth-Moulton para ello se necesita de los valores de P_0, P_1, P_2, P_4 . Obtenidos con el método RK4 así con ello se harán los cálculos para encontrar la predicción y la corrección de dicho método. Se hace el desarrollo para observar el comportamiento del método luego se sigue aplicando la fórmula iterativa del método de

multipasos para con ello llegar a calcular las iteraciones para los 5 años requeridos que se plantean y con ello se obtiene el porcentaje deseado.

$$P_0 = 25 \quad P_1 = 26.13736350, \quad P_2 = 27.29822055, \quad P_3 = 28.48058395.$$

$$P'_0 = f(t_0, P_0) = f(0, 25) = 0.0225(25) - 0.0003(25)^2 = 0.375$$

$$P'_1 = f(t_1, P_1) = f(3, 26.13736350) = 0.0225(26.13736350) - 0.0003(26.13736350)^2 \\ = 0.383142147$$

$$P'_2 = f(t_2, P_2) = f(6, 27.29822055) = 0.0225(27.29822055) - 0.0003(27.29822055)^2 \\ = 0.390652108$$

$$P'_3 = f(t_3, P_3) = f(9, 28.48058395) = 0.0225(28.48058395) - 0.0003(28.48058395)^2 \\ = 0.39747004$$

Con estos valores anteriores entonces la predicción es

$$P_4^* = P_3 + \frac{3}{24} (55P'_3 - 59P'_2 + 37P'_1 - 9P'_0)$$

$$P_4^* = 28.48058395 \\ + \frac{3}{24} (55(0.39747004) - 59(0.390652108) + 37(0.383142147) \\ - 9(0.375)) \\ = 28.48058395 \\ + \frac{3}{24} (21.8608522 - 23.04847437 + 14.17625944 - 3.375) \\ = 28.48058395 + \frac{3}{24} (9.61363727) = 28.48058395 + 1.201704659 \\ = 29.6822886$$

Para usar la corrección, primero se necesita

$$P'_4 = f(t_4, P_4^*) = f(12, 29.68228861) = 0.0225(29.68228861) - 0.0003(29.68228861)^2 \\ = 0.403540016$$

Por último, se obtiene

$$P_4 = P_3 + \frac{h}{24}(9P'_4 + 19P'_3 - 5P'_2 + P'_1)$$

$$P_4 = 28.48058395$$

$$+ \frac{3}{24}(9(0.403540016) + 19(0.39747004) - 5(0.390652108)$$

$$+ (0.383142147))$$

$$= 28.48058395$$

$$+ \frac{3}{24}(3.631860149 + 7.55193076 - 1.95326054 + 0.383142147)$$

$$= 28.48058395 + \frac{3}{24}(9.613672516) = 28.48058395 + 1.201709065$$

$$= 29.68229301$$

.

.

.

Ultima iteración

$$P'_{19} = f(t_{19}, P_{19}) = f(57, 48.24124756)$$

$$= 0.0225(48.24124756) - 0.0003(48.24124756)^2 = 0.38726268$$

$$P'_{18} = f(t_{18}, P_{18}) = f(54, 47.06856833)$$

$$= 0.0225(47.06856833) - 0.0003(47.06856833)^2 = 0.39440775$$

$$P'_{17} = f(t_{17}, P_{17}) = f(51, 45.87552390)$$

$$= 0.0225(45.87552390) - 0.0003(45.87552390)^2 = 0.400830179$$

$$P'_{16} = f(t_{16}, P_{16}) = f(48, 44.66436352)$$

$$= 0.0225(44.66436352) - 0.0003(44.66436352)^2 = 0.406476568$$

Con estos valores anteriores entonces la predicción es

$$P_{20}^* = P_{19} + \frac{6}{24}(55P'_{19} - 59P'_{18} + 37P'_{17} - 9P'_{16})$$

$$\begin{aligned}
P_7^* &= 48.24124756 \\
&+ \frac{3}{24} (55(0.38726268) - 59(0.39440775) + 37(0.400830179) \\
&- 9(0.406476568)) \\
&= 48.24124756 \\
&+ \frac{3}{24} (21.2994474 - 23.27005725 + 14.83071662 - 3.658289112) \\
&= 48.24124756 + \frac{3}{24} (9.201817388) = 48.24124756 + 1.150227174 \\
&= 49.39147473
\end{aligned}$$

Para usar la corrección primero se necesita

$$\begin{aligned}
P'_{20} &= f(t_{20}, P_{20}^*) = f(60, 49.39147473) \\
&= 0.0225(49.39147473) - 0.0003(49.39147473)^2 = 0.379452848
\end{aligned}$$

Por último, usando se obtiene:

$$P_{20} = P_{19} + \frac{h}{24} (9P'_{20} + 19P'_{19} - 5P'_{18} + P'_{17})$$

$$\begin{aligned}
P_{20} &= 48.24124756 \\
&+ \frac{3}{24} (9(0.379452848) + 19(0.38726268) - 5(0.39440775) \\
&+ (0.400830179)) \\
&= 48.24124756 \\
&+ \frac{3}{24} (3.415075632 + 7.35799092 - 1.97203875 + 0.400830179) \\
&= 48.24124756 + \frac{3}{24} (9.201857981) = 48.24124756 + 1.150232248 \\
&= 49.39147981
\end{aligned}$$

La tabla 54 muestra los valores encontrados con el Método multipasos de Adams-Bashforth-Moulton con tamaño de paso $h = 3$. con sus respectivas predicciones y correcciones esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 5 años.

t_n	P_n	Adams-Bashforth-Moulton	Valor Real
0.00	25.00000000	Condición inicial	25.00000000
3.00	26.13736350	Runge-Kutta	26.13736353
6.00	27.29822055	Runge-Kutta	27.29822060
9.00	28.48058395	Runge-Kutta	28.48058403
	29.6822886	Predictor	
12.00	29.68229301	Corrector	29.68229274
	30.90102030	Predictor	
15.00	30.90102576	corrector	30.90102508
	32.13430935	predictor	
18.00	32.13431580	corrector	32.13431462
	33.37956318	Predictor	
21.00	33.37957054	corrector	33.37956881
	34.63408379	Predictor	
24.00	34.63409195	Corrector	44.66436381
⋮	⋮	⋮	⋮
	49.39138018	Predictor	
60.00	49.39138422	Corrector	49.39147981

Tabla 54 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 3$ para el método de Adams-Bashforth-Moulton.

Las tabla 55 y 56 muestran los valores encontrados con el Método de Adams-Bashforth-Moulton con tamaño de paso $h = 3, h = 6$ con sus respectivas predicciones y correcciones esto para cuando la población límite de venados se obtiene después de 10 años.

t_n	P_n	Adams-Bashforth-Moulton	Valor Real
0.00	25.00000000	Condición inicial	25.00000000
6.00	27.29821980	Runge-Kutta	27.29822060
12.00	29.68229124	Runge-Kutta	29.68229274
18.00	32.13431251	Runge-Kutta	32.13431462
	34.63389907	Predictor	
24.00	34.63410408	Corrector	34.63408961
	37.15952542	Predictor	
30.00	37.15978453	corrector	37.15974971
	39.68826095	predictor	
36.00	39.68855808	corrector	39.68850069
	42.19720397	Predictor	
42.00	42.19751702	corrector	42.19743676
⋮	⋮	⋮	⋮
	66.11375194	Predictor	
120	66.11360685	Corrector	66.11360287

Tabla 55 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 6$ para el método Adams-Bashforth-Moulton

t_n	P_n	Adams-Bashforth-Moulton	Valor Real
0.00	25.00000000	Condición inicial	25.00000000
3.00	26.13736350	Runge-Kutta	26.13736353
6.00	27.29822055	Runge-Kutta	27.29822060
9.00	28.48058395	Runge-Kutta	28.48058403
	29.6822886	Predictor	
12.00	29.68229301	Corrector	29.68229274
	30.90102030	Predictor	
15.00	30.90102576	corrector	30.90102508
	34.63408379	Predictor	
24.00	34.63409195	Corrector	44.66436381
⋮	⋮	⋮	⋮
	66.11370775	Predictor	
60.00	66.11360878	Corrector	49.39147981

Tabla 56 Cálculo de errores con tamaño de paso $h = 3$ para el método Adams-Bashforth-Moulton.

En las siguientes figuras se observa la curva solución del Método Adams-Bashforth-Moulton y sus aproximaciones respectivas con los distintos tamaños de paso de $h = 3, h = 6$.

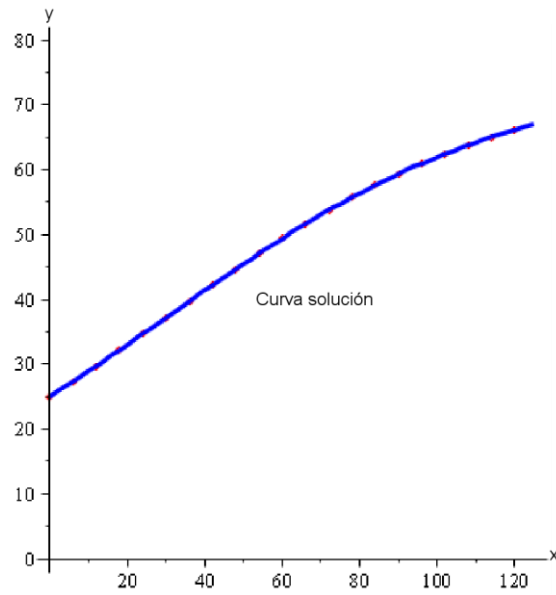


Figura 3.13 Curva solución de la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2, h = 6$.

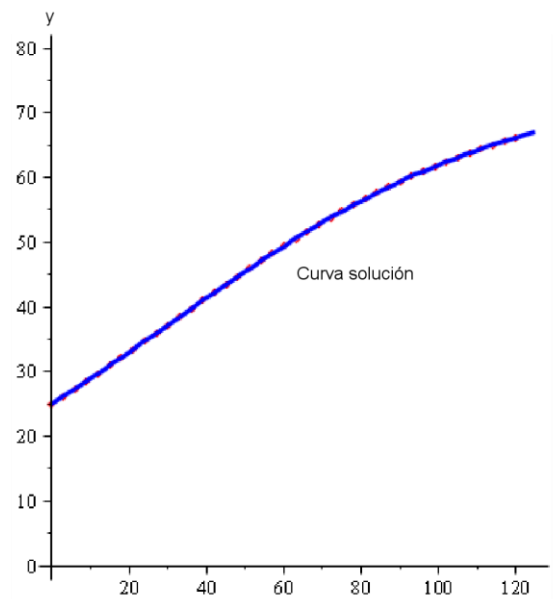


Figura 3.14 Curva solución de la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2, h = 3$.

Ejemplo 3.6. Aplicación al método de diferencias finitas

“El potencial electrostático u entre dos esferas concéntricas de radio $r = 1$ y $r = 4$ se determina a partir de

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0 \quad u(1) = 50, \quad u(4) = 100.$$

Utilizar el método de las diferencias finitas con $n = 6$ para aproximar la solución de este problema con valores en la frontera.”⁽⁵⁴⁾

Solución

En este problema de valor en la frontera se identifica que, $P(r) = \frac{2}{r}$; $Q(r) = 0$, $f(r) = 0$ y $h = \frac{(4-1)}{6} = \frac{3}{6} = 0.50$, entonces la ecuación de diferencias finitas se convierte en:

$$\left(1 + \frac{0.50}{2} \left(\frac{2}{r_i}\right)\right) u_{i+1} + (-2 + (0.50)^2(0)) u_i + \left(1 - \frac{0.50}{2} \left(\frac{2}{r_i}\right)\right) u_{i-1} = (0.50)^2(0)$$

De donde se obtiene:

$$\left(1 + \frac{0.50}{r_i}\right) u_{i+1} - 2u_i + \left(1 - \frac{0.50}{r_i}\right) u_{i-1} = 0$$

los puntos interiores son

$$r_1 = 1 + 0.50 = 1.50$$

$$r_2 = 1 + 2(0.50) = 2.0$$

$$r_3 = 1 + 3(0.50) = 2.50$$

$$r_4 = 1 + 4(0.50) = 3.0$$

$$r_5 = 1 + 5(0.50) = 3.5$$

⁽⁵⁴⁾Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (El ejemplo desarrollado es el ejercicio 12 que aparece en la guía 9.5 de la pág.361).

Para $i = 1, \dots, 5$, $u_0 = 50$ y $u_6 = 100$ se obtiene:

$$\frac{4}{3}u_2 - 2u_1 + \frac{2}{3}u_0 = 0$$

$$\frac{5}{4}u_3 - 2u_2 + \frac{3}{4}u_1 = 0$$

$$\frac{6}{5}u_4 - 2u_3 + \frac{4}{5}u_2 = 0$$

$$\frac{7}{6}u_5 - 2u_4 + \frac{5}{6}u_3 = 0$$

$$\frac{8}{7}u_6 - 2u_5 + \frac{6}{7}u_4 = 0$$

El sistema de ecuaciones anteriores es equivalente a:

$$4u_2 - 6u_1 + 2u_0 = 0$$

$$5u_3 - 8u_2 + 3u_1 = 0$$

$$6u_4 - 10u_3 + 4u_2 = 0$$

$$7u_5 - 12u_4 + 5u_3 = 0$$

$$8u_6 - 14u_5 + 6u_4 = 0$$

Al resolver el sistema de ecuaciones anteriores y con el hecho de que $u_0 = 50.0000$,

$u_6 = 100.0000$ se obtiene:

$u_1 = 72.22222222$, $u_2 = 83.33333333$, $u_3 = 90.00000000$, $u_4 = 94.44444444$ y

$$u_5 = 97.61904762$$

La precisión de las aproximaciones en este ejemplo se pueden mejorar usando un valor más pequeño de h . Por supuesto, usar un valor más pequeño de h requiere de resolver un sistema más grande de ecuaciones.

La solución general de la ecuación dada es

$$u(r) = c_1 r^{-1} + c_2$$

Aplicando la condición inicial $u(1) = 50$

$$50 = c_1 + c_2$$

y la condición en la frontera $u(4) = 100$

$$100 = \frac{c_1}{4} + c_2$$

Al resolver el sistema de ecuaciones

$$50 = c_1 + c_2$$

$$100 = \frac{c_1}{4} + c_2$$

Se encuentra que $c_1 = \frac{-200}{3}$ y $c_2 = \frac{350}{3}$ una solución del problema con valores en la frontera es:

$$u(r) = \frac{-200}{3}r^{-1} + \frac{350}{3}$$

Por lo tanto los valores reales de esta solución son los siguientes:

$$u(1.50) \approx \frac{-200}{3}(1.50)^{-1} + \frac{350}{3} = 72.22222222$$

$$u(2.00) \approx \frac{-200}{3}(2.00)^{-1} + \frac{350}{3} = 83.33333333$$

$$u(2.50) \approx \frac{-200}{3}(2.50)^{-1} + \frac{350}{3} = 90.00000000$$

$$u(3.00) \approx \frac{-200}{3}(3.00)^{-1} + \frac{350}{3} = 94.44444444$$

$$u(3.50) \approx \frac{-200}{3}(3.50)^{-1} + \frac{350}{3} = 97.61904762$$

La tabla 41 muestra el valor aproximado del problema con valores en la frontera

$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0$ $u(1) = 50$, $u(4) = 100$. Encontrado con el método de las diferencias finitas comparado con el valor real.

r_n	Método de diferencias finitas	Valor real	Error absoluto
1.00	50.00000000	50.00000000	0.00000000
1.50	72.22222222	72.22222222	0.00000000
2.00	83.33333333	83.33333333	0.00000000
2.50	90.00000000	90.00000000	0.00000000
3.00	94.44444444	94.44444444	0.00000000
3.50	97.61904762	97.61904762	0.00000000
4.00	100.00000000	100.00000000	0.00000000

Tabla 57 Aproximación de valores reales comparados con los encontrados con el método de las diferencias finitas

Gráficamente se muestra la curva solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0$, $u(1) = 50$, $u(4) = 100$ en la figura 3.15

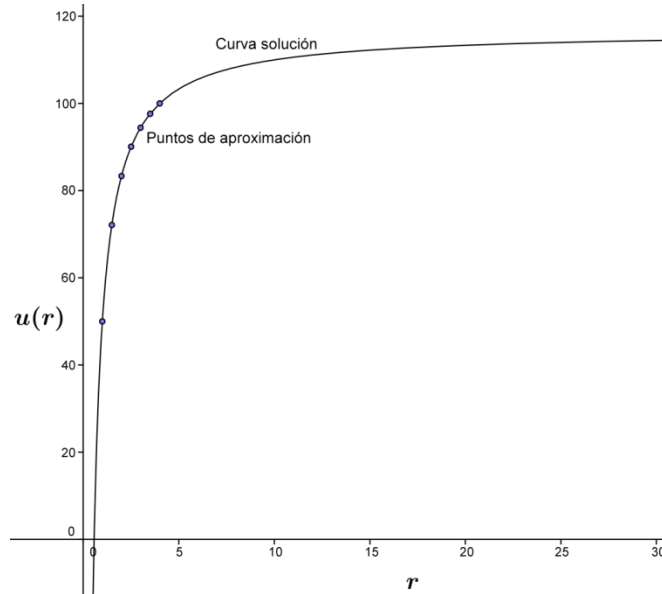


Figura 3.15 Curva solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0$, $u(1) = 50$, $u(4) = 100$

Ejercicios III⁵⁵

- 1) Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, entonces la velocidad v de una masa m que se deja caer desde cierta altura se determina de

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k > 0.$$

Sea $v(0) = 0$, $k = 0.125$, $m = 5 \text{ slugs}$ y $g = 32 \text{ pies/s}^2$.

- a) Use EL método de RK4 con $h = 1$ para aproximar la velocidad $v(5)$.

Sugerencia: $v(2) = 32.93898006$, $v(4) = 35.55032705$.

- b) Utilice un programa de solución numérica para trazar la gráfica solución del PVI en el intervalo $[0,6]$

Sugerencia: utilizar programa computacional Maple.

- c) Utilice la separación de variables para resolver el PVI y luego determine el valor real $v(5)$.

$$\text{sugerencia: } v(t) = \frac{16\sqrt{5}(e^{\sqrt{3.2}t} - 1)}{(e^{\sqrt{3.2}t} + 1)}$$

- 2) Un modelo matemático para el área A (en cm^2) que ocupa una colonia de bacterias (*B. dendroides*) esta dada por

$$\frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A).$$

Suponga que el área inicial es 0.24cm^2 .

- a) Use el método RK4 con $h = 0.5$ para completar la siguiente tabla:

t (dias)	1	2	3	4	5
A (observado)	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
A (aproximado)					

Sugerencia: $A(3) = 36.46180136$, $A(5) = 49.16578494$.

⁵⁵ (55) Zill, Dennis G., 2009, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Novena Edición, Editorial Progreso, S. A. de C. V. Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera Delegación C. P.06400, México, D. F. (Ejercicio 13 y 14 que aparece en la guía 9.2 de la pág.348, 349). Todos los pasos que faltan están desarrollados en el disco de evidencia de trabajo.

- b) Use un programa de solución numérica para trazar la gráfica de solución del problema con valores iniciales. Calcule los valores $A(1), A(2), A(3), A(4)$ y $A(5)$ de la gráfica.

Sugerencia: utilizar programa computacional Maple.

- c) Use la separación de variables para resolver el problema con valores iniciales y calcular los valores reales $A(1), A(2), A(3), A(4)$ y $A(5)$.

$$\left[\text{sugerencia: } A(t) = \frac{2.128}{0.0432 + 8.8235e^{-2.128t}} \right]$$

Anexos

En este apartado se presenta como hacer el uso de los programas computacionales maple y Geogebra para hacer el desarrollo de la gráfica y solución analítica de una ecuación diferencial. A demás se explicara cómo se utiliza Maple para realizar el desarrollo de los métodos de aproximación, como Euler, Euler mejorado, Runge-Kutta.

Ejemplo 1. Explicaremos los paso a hacer para graficas algunas curvas soluciones de la solución general $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$, de $\frac{dy}{dx} = x^3$ a través del programa de Maple.

Desarrollo:

Al abrir el programa se nos mostrara la pantalla de la siguiente manera:

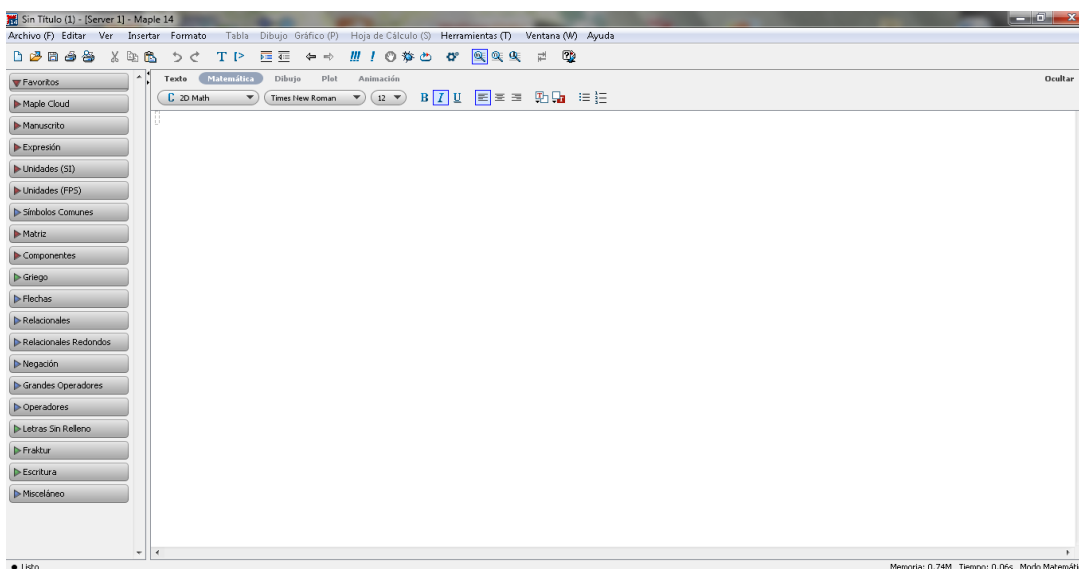


FIGURA 1.a)

Luego el primer paso a hacer es definir el comando *with* y los paquete *plots* y *DEtools* y lo escribimos de la forma *with(plots)* y *with(DEtools)*, estas opción nos detallara algunas funciones que se pueden utilizar para trabajar con ecuaciones diferenciales. Es de tener en cuenta que a la hora de escribir los comando este seleccionada la opción Matemática para no tener mayores problemas, luego se mostrara de la siguiente forma:

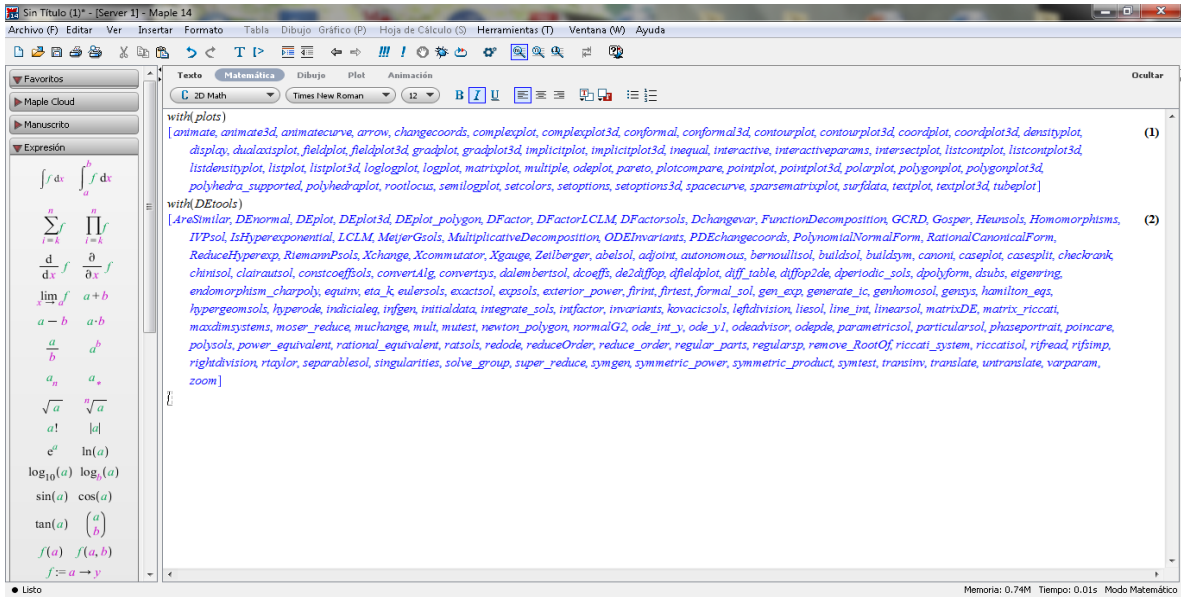


FIGURA 1.b)

Luego nombramos la función $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$, con cualquier nombre acá por ejemplo lo nombraremos "sol" como se muestra en la figura 1.c).

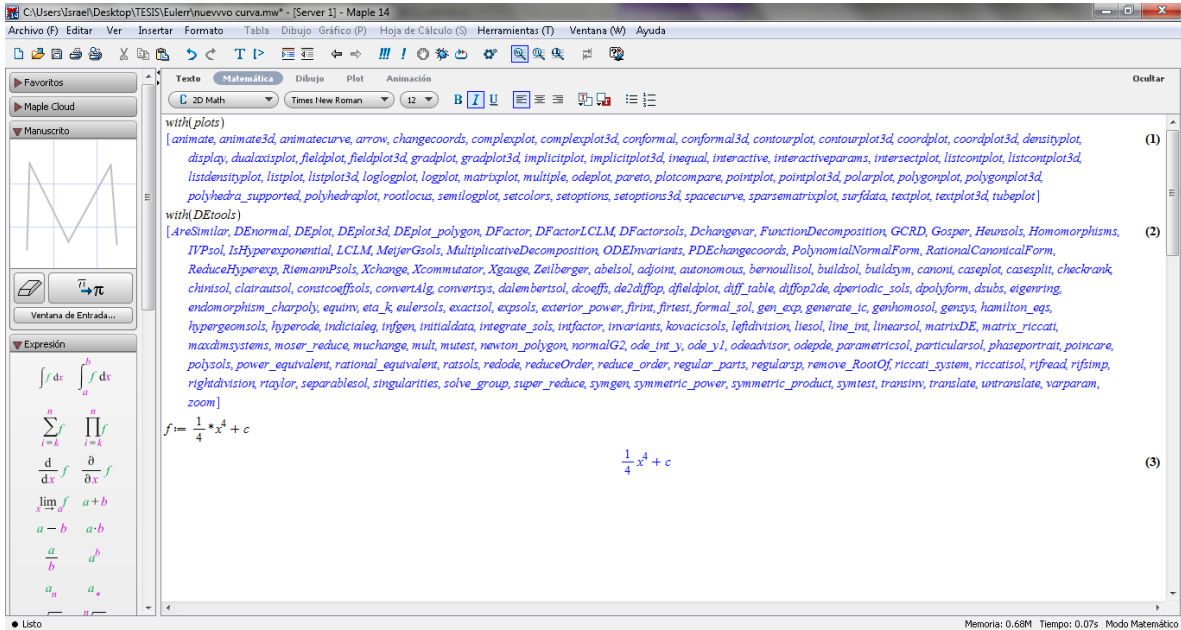


FIGURA 1.c).

También como es una familia de curvas se debe definir el rango para c , en este caso lo definiremos de la forma $c = -1 \dots 1$, utilizaremos la función seq la cual nos generara el número de curvas definidas es decir $familia := [seq(sol, c = -1 \dots 1)]$, nos proporciona el conjunto de curvas $\{\frac{1}{4}x^4 - 1, \frac{1}{4}x^4, \frac{1}{4}x^4 + 1\}$, como se muestra la figura 1.d)

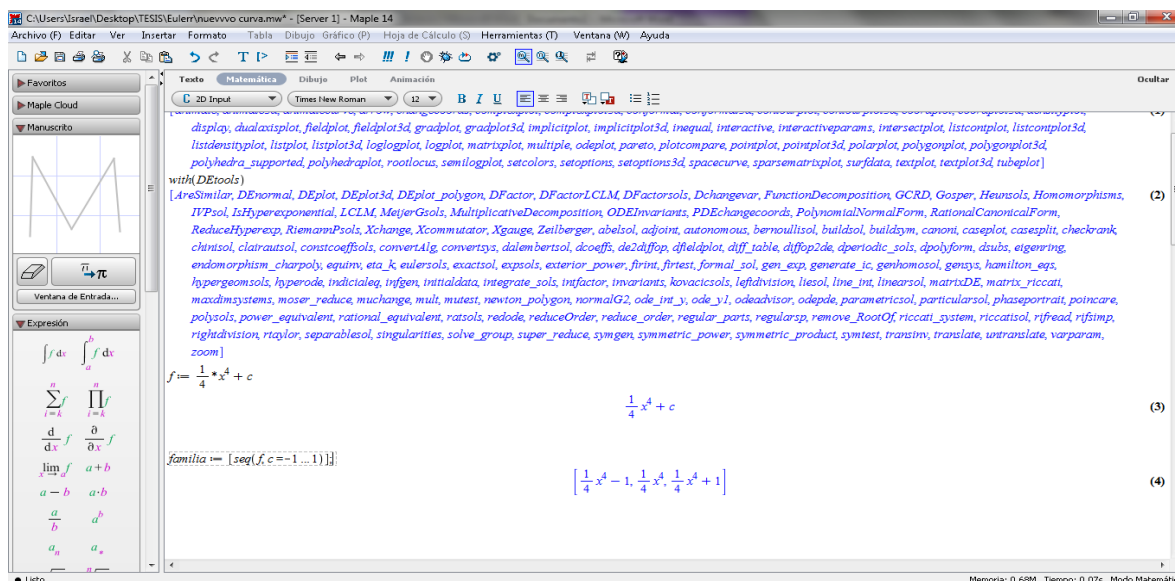


FIGURA 1.d)

Luego utilizamos la función $plot$ definiendo los rangos de las coordenadas x e y , para generar las curvas en el plano y nos queda de la siguiente manera como se muestra en la figura 1.e).

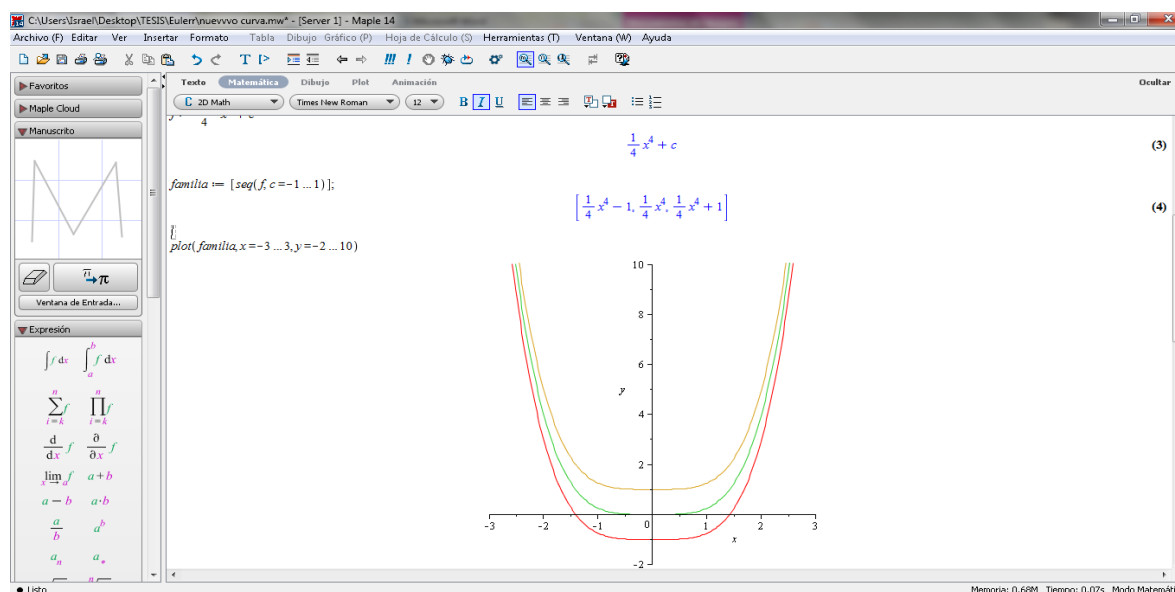


FIGURA 1.e)

Ejemplo 2. Explicaremos detalladamente los pasos a realizar para generar un campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = x^3$

Desarrollo:

Los primeros pasos no se muestran, ya están hechos en el ejemplo anterior. Después de haber definido los comandos *with* y los paquetes *plots* y *DEtools* definimos a la ecuación diferencial como $ED3 := x^3$ donde “y” siempre la reescribiremos de la forma $y(x)$. Escribimos la función *DEplot* y entre paréntesis escribimos el nombre con el que está definido la ecuación diferencial, definimos los límites de los ejes de las coordenadas, además definimos el intervalo para definir el número de pendientes, en este caso será 11×11 y se utiliza la función *dirfield* se escribe de la forma $dirfield = [11, 11]$ y otras funciones mas como se muestra en la figura 2.

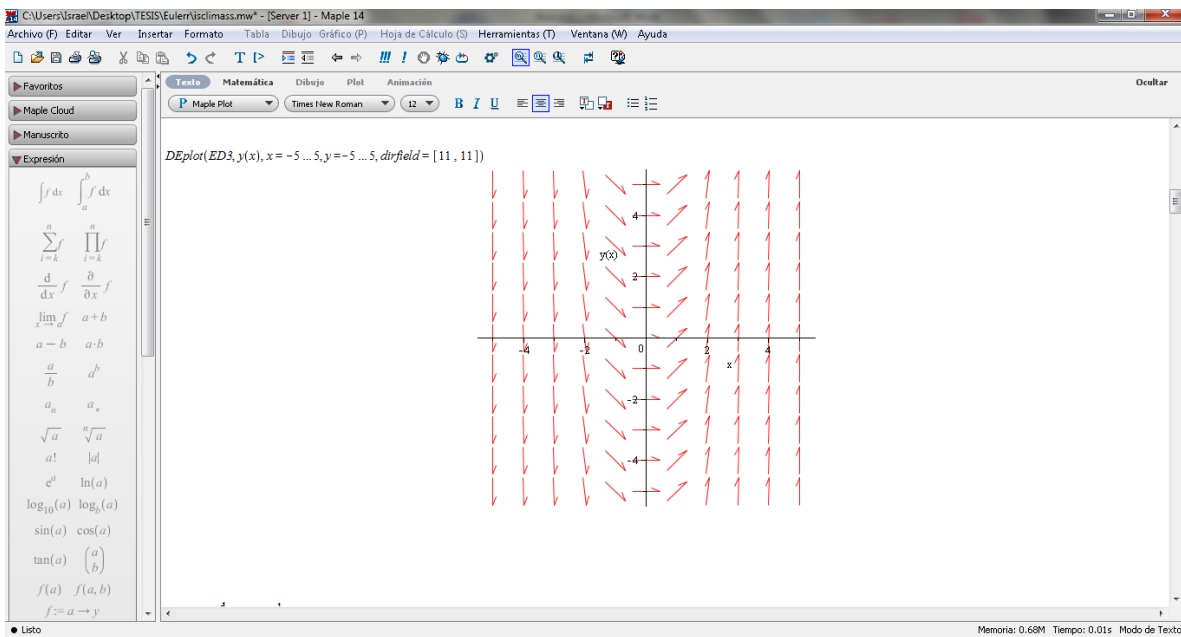


FIGURA 2.

Ejemplo 3. Desarrollaremos los pasos a realizar para generar el campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = x^3$ y los pasos para como poder generar las curvas soluciones que pasan por los puntos $(0,-1)$, $(0,0)$, $(0,1)$

Desarrollo:

Después de haber definido los comandos *with* y los paquetes *plots* y *DEtools* definimos a la ecuación diferencial como $ED3 := x^3$. Escribimos la función *DEplot* y entre paréntesis escribimos el nombre con el que está definida la ecuación diferencial, definimos los límites de los ejes de las coordenadas, los valores iniciales para mostrar las curvas soluciones, los límites para el número rectas en el campo de pendientes y otras funciones más como lo muestra la figura 3.

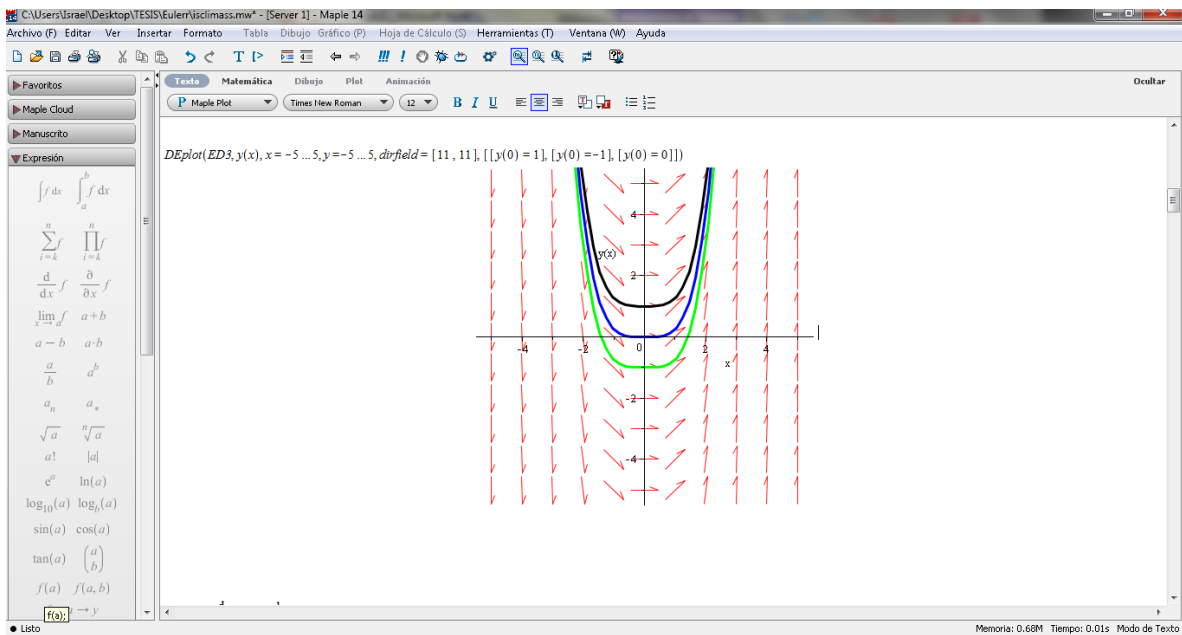


FIGURA 3.

Ejemplo 4. Explicaremos los pasos en Maple para realizar las aproximaciones del método de Euler para de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3y + 1, \quad y(1) = 5$$

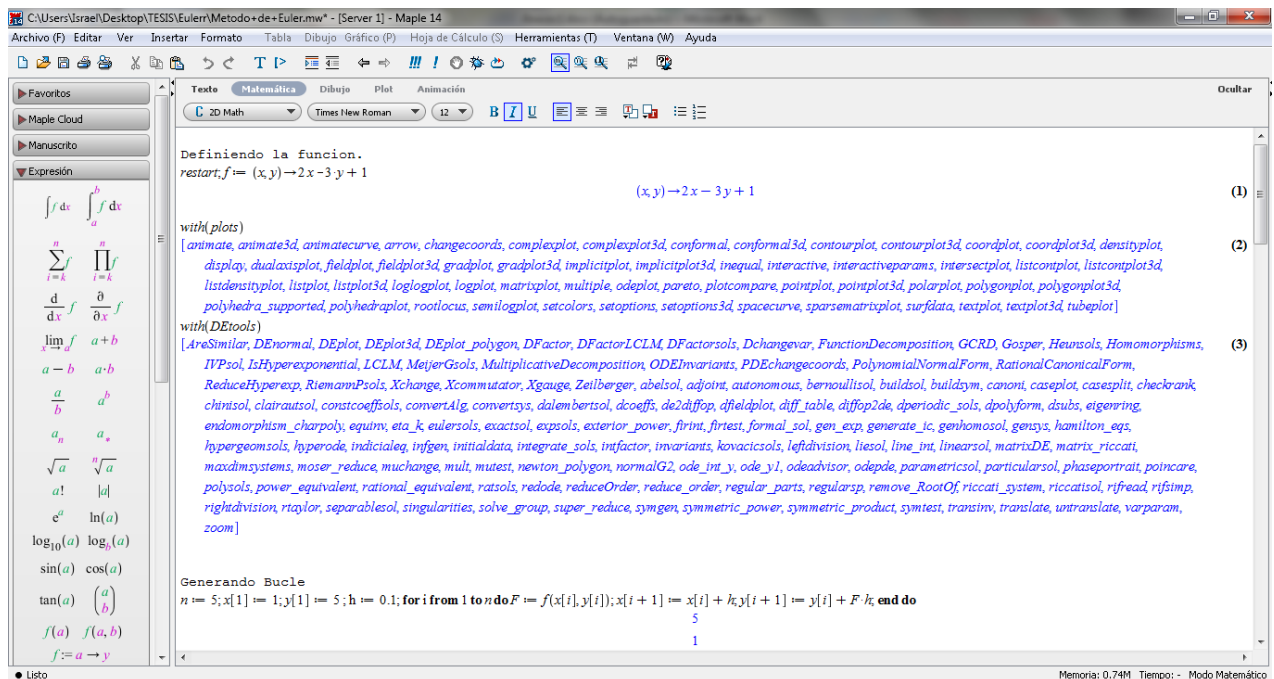
Primero con tamaño de paso $h = 0.1$ y después con tamaño de paso $h = 0.05$ para aproximar $y(1.50)$

Desarrollo:

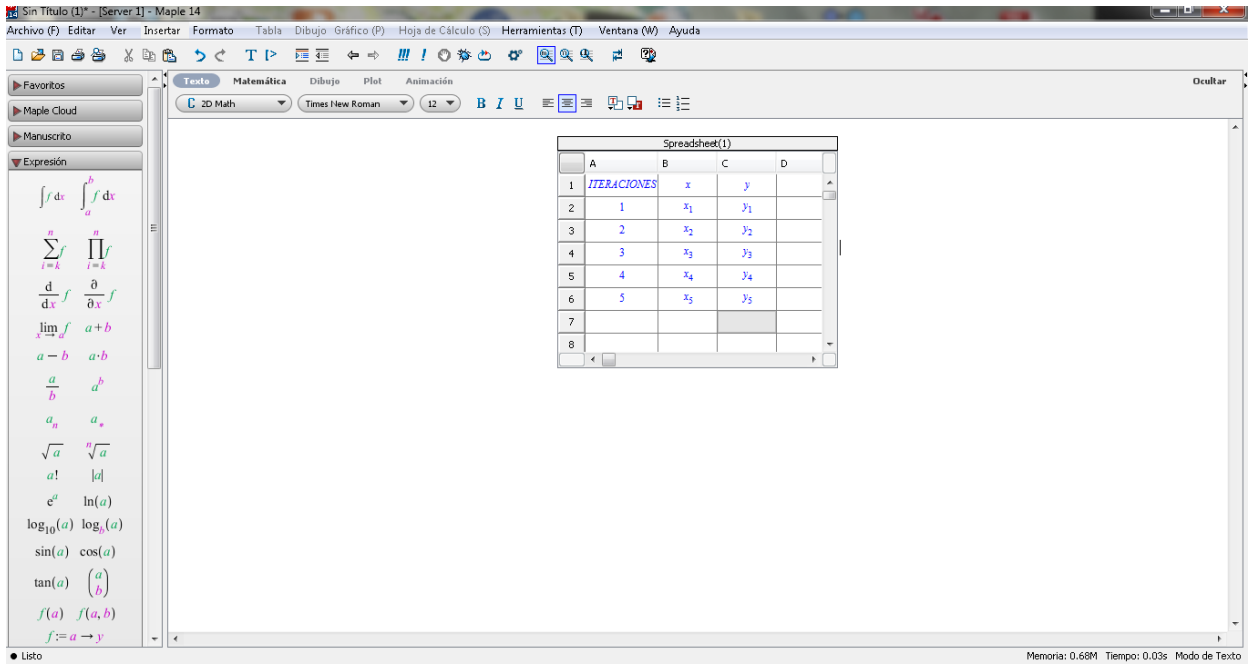
Para empezar se toma en cuenta el número de iteraciones, en este caso será 5 por lo que le asignamos $n = 5$, también el valor inicial $y(1) = 5$ de la forma $x[1] = 1$ y $y[1] = 5$. Y se aplica la fórmula del método de Euler, y queda de la forma:

```
n := 5; x[1] := 1; y[1] := 5; h := 0.1; for i from 1 to n do F
    := f(x[i], y[i]); x[i + 1] := x[i] + h; y[i + 1] := y[i] + F·h;
end do
```

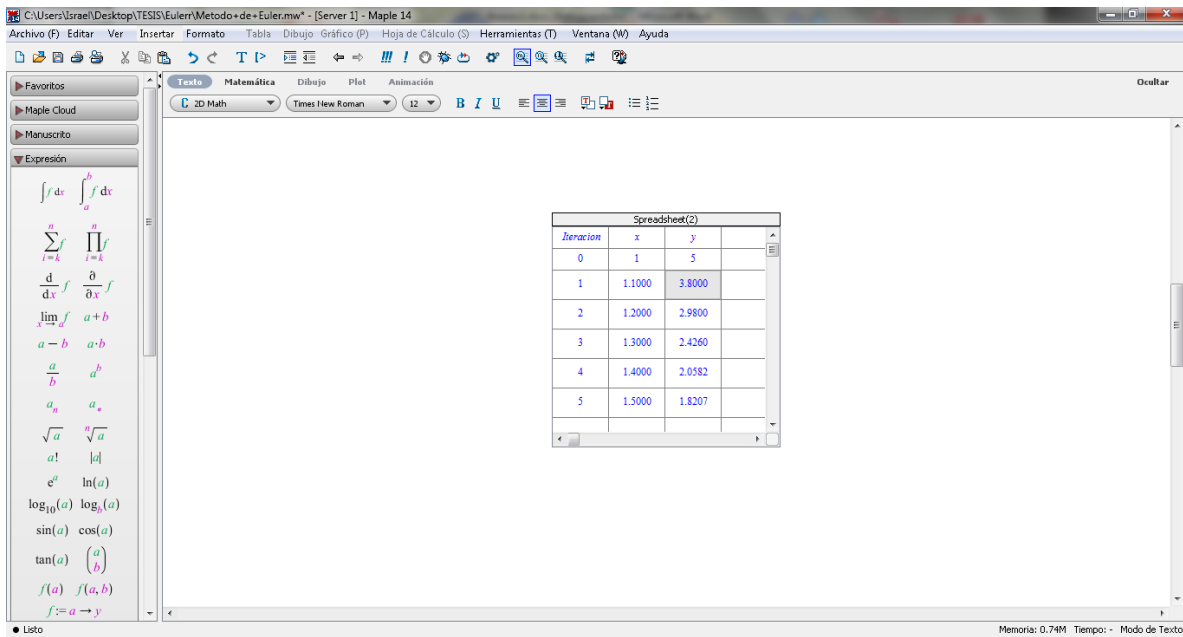
Entonces en el programa queda de la siguiente forma:



Luego se procede a llenar la tabla con los valores aproximados: ubicándose en la opción insertar, luego se elige la opción Hoja de cálculo, además para los valores dependientes de x desde el primer hasta el último valor se le asigna $x[1], \dots, x[n]$ y para los valores de y de igual forma $y[1], \dots, y[n]$ y queda de la forma:



Luego elegimos una casilla, clic derecho y se selecciona la opción evaluar todo y queda con los valores aproximados de la forma:



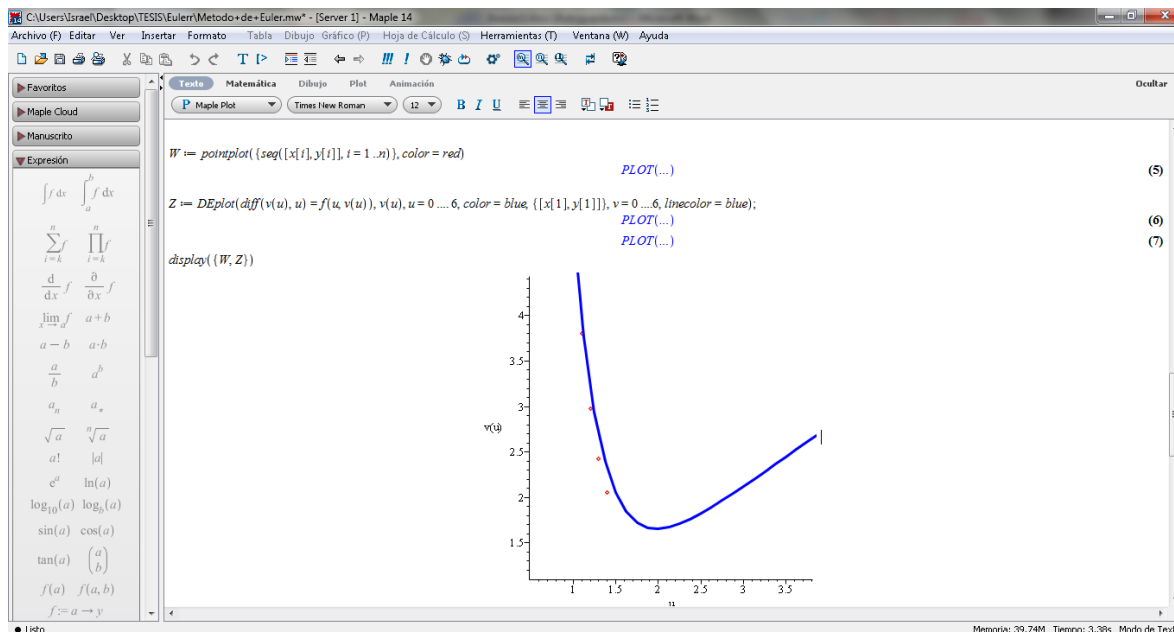
Luego para graficar los puntos aproximados encontrados, se utilizaran los paquetes *pointplot* y *seq* y se escribe de la forma:

$$W := \text{pointplot}(\{\text{seq}([x[i], y[i]], i = 1 .. n)\}, \text{color} = \text{red})$$

Además se definen los límites de los ejes, color, etc.

$$Z := \text{DEplot}(\text{diff}(v(u), u) = f(u, v(u)), v(u), u = 0 \dots 6, \text{color} = \text{blue}, \{[x[1], y[1]]\}, v = 0 \dots 6, \text{linecolor} = \text{blue});$$

Para imprimir la imagen se utiliza el paquete *Display* quedando:



Conclusión

El presente trabajo de graduación se realizó con el propósito de documentar y dar a conocer sobre los campos de pendientes, isóclinas, métodos numéricos y algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales mediante los métodos numéricos desde el enfoque gráfico y numérico esto surge debido a la necesidad de que en la mayoría de los libros no se detalla a profundidad, para ellos nos auxiliaremos de diferentes libros, sitios web y programas computacionales y de esta manera introducimos la teoría preliminar que nos permitió comprender los resultados que se obtuvieron a lo largo de la investigación.

Para analizar y trabajar sobre los métodos gráficos como lo es el campo direccional o campo de pendientes y las isóclinas se necesitó tener conocimiento de pendiente de una ecuación diferencial, ecuaciones diferenciales autónomas de primer y segundo grado, así como la existencia y la unicidad de dichas ecuaciones conceptos de cálculo como lo es el comportamiento de una gráfica esto se detalla en el capítulo I además se hace uso del software para los métodos gráficos tales como lo son maple y Geogebra para dar una presentación más exacta de los problemas resueltos.

En el capítulo II se dieron a conocer los métodos numéricos tales como Euler, Euler mejorado, Runge-Kutta de cuarto orden, el método de Adams-Bashforth-Moulton, los métodos de Euler y de Runge-Kutta de cuarto orden para ecuaciones diferenciales de segundo orden transformándola a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y el método de las diferencias finitas este último método consiste en resolver una ecuación diferencial de segundo orden con valores en la frontera transformando el resultado que se obtiene al aplicar la fórmula de este método a un sistema de ecuaciones lineales para poder obtener la aproximación del valor real, cabe destacar que estos métodos nos proporcionan soluciones numéricas.

Además en el capítulo III se mostraran aplicaciones al método de las isóclinas así como aplicaciones a los métodos numéricos desarrollados en el capítulo II, para una mayor comprensión.

Para concluir se agregaron anexos con el propósito de explicar detalladamente los pasos realizados en los programas Maple y Geogebra para la generación de las soluciones, aproximaciones y generaciones de curvas de problemas resueltos en cada uno de los capítulos.

Recomendaciones

Luego de haber terminado el trabajo de graduación, se tienen las siguientes recomendaciones:

- Que los docentes que imparten el curso de ecuaciones diferenciales tomen a más profundidad el tema de campo de pendientes.
- Que el lector utilice programas distintos de Maple y Geogebra para desarrollar cada grafica de cada ejemplo resuelto.
- A estudiantes egresados que realicen trabajo de graduación puedan realizar su trabajo en esta área y que este trabajo le sirva de guía.
- Al lector a desarrollar los ejercicios propuestos al final de cada capítulo.

Referencias bibliográficas

- David Lomen, David Lovelock, Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos (primera edición, México 2000).
- A.Kiseliov, M.Krasnov, G.Makarenko, Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- Paul Blanchard, Robert L. Devaney, Glen R. Hall, Ecuaciones Diferenciales (Boston University).
- Alvaro Tejero Cantero, Pablo Ruiz Muzquiz, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- William E.Boyce, Richard C.Diprima, Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la frontera (Cuarta Edición).
- Martin Braun, Ecuaciones de Primer Orden (New York, Julio de 1976).
- C. Henry Edwards, David E. Penney, Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. (Cuarta edición).
- <http://www.fing.edu.uy/~eleonora/Recopilacion/Archivos/NotasEnsenanza/Calcu2EcDifComplEstabilidad.pdf>
- Murray R Spiegel, Ecuaciones Diferenciales Aplicadas (Tercera Edicion).
- M.MOLERO, A.SALVADOR, T.MENARGUEZ, L.GARMENDIA, 2007, Análisis Matemático para Ingeniería, primera edición, editor Pearson Prantice, idioma castellano, ISBN-10: 8483223465, ISBN-13: 978-8483223468, ASIN B007EUQ4203
- C.Henry, Edwards, David, E. Penney, 2009, Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera, cuarta edición , PEARSON EDUCACIÓN, México, 2009, ISBN: 978-970-26-1285-8, Área: Matemáticas, Formato: 11x27cm, paginas 824
- Catsigeras, Eleonora., 2013, Ecuaciones Diferenciales Autónomas y Estabilidad de los Puntos de Equilibrio complemento sobre ecuaciones diferenciales para los cursos de cálculo, notas para el curso de cálculo II de la facultad de ingeniería AV. Herrera y Reissig, Montevideo. Uruguay

