

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA



Universidad de El Salvador
Hacia la libertad por la cultura

PROYECTO TITULADO:

MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN MULTIVARIABLE

PARA OPTAR AL GRADO DE:
LICENCIADA EN MATEMÁTICA

Estudiantes:

Glenda Marcela Hernández Rodríguez. *Carné:* HR09002

Evelin Marleny León León. *Carné:* LL10028

Asesor: MSc. Carlos Ernesto Gámez Rodríguez.

Ciudad Universitaria, Mayo de 2016

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR INTERINO:

Licenciado Luis Argueta Antillón

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO INTERINO:

Ingeniero Carlos Villalta

SECRETARIA GENERAL:

Doctora Ana Leticia Zavaleta

FISCAL GENERAL:

Licenciada Nora Beatríz Meléndez

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

Licenciado Mauricio Hernán Lovo Córdoba

VICE-DECANO:

Licenciado Carlos Atonio Quintanilla Aparicio

SECRETARIA:

Licenciada Damaris Melany Herrera Turcios

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR DE ESCUELA:

Doctor José Nerys Funes Torres

ASESOR:

Master Carlos Ernesto Gámez Rodríguez

Dedicatoria

A nuestro Padres, Maura, Carmen, Margarita y Terencio

por su incondicional apoyo, amor y comprensión.

Agradecimientos

A Dios, por protejernos durante todo nuestro camino y darnos fuerzas para superar obstáculos y dificultades a lo largo de nuestros estudios.

A nuestros padres, por que ellos estuvieron a nuestro lado brindándonos su apoyo y sus consejos.

A nuestros hermanos, Gloria, Cindy, Carmen, Roxana y Bladimir; por su alegría, ayuda y palabras de aliento.

A nuestros amigos, Arcenio, Wilner, Victoria, Jenny, Cindy, Cecy, Sandra, July, Esmeralda, Wendy, Angela, Ely, Karen, Silvia, Jacky, Yanci, Luis, Ulices, Oscar, Carlos, Andrés I, Guillermo, Javi y Henry; por su amistad sincera y trabajo en equipo.

A nuestro Asesor, MSc. Carlos Gámez; por su dedicación, apoyo, esfuerzo y disponibilidad de tiempo en cada aspecto de este trabajo.

A nuestro jurado, Doc. Simón Peña, MSc. Porfirio Armando Rodríguez Rodríguez, por su dedicación, revisiones y correcciones de este trabajo.

Índice

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 6 |
| 1.1. Metodología | 8 |
| 2. Interpolación en dos dimensiones | 9 |
| 2.1. Funciones Bivariadas | 9 |
| 2.2. Método Vecino más Cercano | 10 |
| 2.3. Método Bilineal | 16 |
| 2.4. Método Bi-cúbico | 24 |
| 2.5. Método de Barnes | 28 |
| 2.6. Remuestreo Lanczos. | 31 |
| 2.7. Triangulación de Delaunay. | 33 |
| 2.8. Método de Bezier | 36 |
| 2.9. Método IDW | 39 |
| 2.10. Método Kriging | 41 |
| 3. Comparación entre métodos | 45 |
| 3.1. Comparación Visual | 45 |
| 3.2. Comparación Matemática | 48 |
| 4. Conclusiones | 52 |
| Bibliografía | 53 |

1. Introducción

En la ingeniería y en cualquier ciencia, es común contar con un conjunto de datos (valores discretos) a lo largo de un comportamiento continuo. Sin embargo, en muchas ocasiones se requiere tener conocimiento de una estimación en puntos entre los valores discretos. En la termodinámica se utilizan tablas de vapor que relacionan la presión y el volumen específico a una temperatura particular. En los negocios se cuenta con información de número de piezas vendidas y la ganancia obtenida. Determinar el volumen específico a una presión diferente de los datos que se tienen, poder calcular la ganancia obtenida con un número de piezas vendidas se puede obtener interpolando los datos obtenidos.

Un problema clásico de la matemática, se plantea al querer calcular el valor de una función en un punto cuando no se conoce la función o incluso cuando la función no es elemental, conociéndose únicamente una serie de puntos. La resolución aproximada del problema consiste en encontrar una función fácil de construir y de evaluar, que coincide con la función objeto del problema con los datos que se disponen. Se dice que la función así construida interpola a la función dada con respecto a los datos.

En el presente trabajo se hará una investigación sobre algunos métodos de interpolación en dos dimensiones. La palabra interpolación significa pasar una curva por un conjunto dado de puntos. En la actualidad existen diferentes tipos de interpolación que nos ayuda a encontrar una función que mejor se ajuste a la función o serie de puntos dados.

La investigación inicia realizando un estudio breve sobre las funciones bivariadas, seguidamente, se estudia con mayor detalle los métodos: vecino más cercano, bilineal y bicúbico. Luego se muestra un resumen sobre los siguientes métodos: Barnes, distancia inversa, Kriging, Bezier, por mencionar algunos. Nuestra investigación finaliza haciendo una comparación entre algunos de los métodos estudiados.

Resumen

Para el estudio de la interpolación multidimensional es recomendable tener conocimientos previos sobre la interpolación en una dimensión para poder comprender con mayor facilidad la interpolación en más dimensiones. La interpolación multivariable o la interpolación espacial es la interpolación sobre funciones de más de una variable, nuestro estudio está enfocado en la interpolación en dos dimensiones, por lo cual se estudiará el método del vecino más cercano, el método bilineal, y el método bicúbico.

Además se abordará de manera superficial el estudio de otros métodos como lo son: Las funciones bivariadas, el método de la distancia inversa, el método de Barnes, método de Kriging, entre otros. También se realiza la comparación entre algunos de los métodos mencionados anteriormente, utilizando los programas octave/matlab, para así determinar que método es mejor para interpolar.

1.1. Metodología

A continuación se describen los aspectos importantes de la metodología del presente trabajo de investigación:

1. Tipo de investigación

Este proyecto de investigación tiene las características siguientes:

- Bibliográfico, porque se ha hecho una extensa recopilación de libros impresos y de libros obtenidos por Internet para contar con el suficiente material que cubra las necesidades del estudio. El objetivo es compilar coherentemente la información más útil y destacada del tema.
- Descriptivo, ya que se pretende estudiar a detalle la teoría preliminar y del tema en sí.

2. Forma de Trabajo.

Se tendrán reuniones periódicas con el asesor del trabajo para tratar los diferentes aspectos de la investigación como estudiar y discutir la teoría, tratar los diferentes aspectos del trabajo escrito y de las presentaciones.

3. Exposiciones

Se realizarán dos exposiciones

- Primera exposición: presentación del perfil del trabajo de investigación.
- Segunda exposición: presentación final del trabajo de investigación.

2. Interpolación en dos dimensiones

2.1. Funciones Bivariadas

Los métodos para interpolar funciones de una variable por polinomios se extienden a algunos casos de funciones de dos o más variables. Un caso importante se produce cuando una función $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ ha de aproximarse en un rectángulo. Esto nos lleva a lo que se conoce como interpolación tensor-producto. Supongamos que el rectángulo es el producto cartesiano de dos intervalos: $[a, b] \times [\alpha, \beta]$. Es decir, las variables x e y de ejecución en los intervalos $[a, b]$, y $[\alpha, \beta]$, respectivamente. Seleccione n nodos x_i en $[a, b]$, y defina los polinomios de Lagrange

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (1 \leq i \leq n)$$

Del mismo modo, seleccionamos m nodos y_i en $[\alpha, \beta]$ y definimos

$$\bar{\ell}_i(y) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \quad (1 \leq i \leq m)$$

Entonces la función

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \ell_i(x) \bar{\ell}_j(y)$$

es un polinomio en dos variables que interpola f en los puntos de la cuadrícula (x_i, y_j) .

Hay nm puntos de interpolación. La prueba de la propiedad de interpolación es bastante simple porque $\ell_i(x_q) = \delta_{iq}$ y $\bar{\ell}_i(y_p) = \delta_{ip}$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} P(x_q, y_p) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \ell_i(x_q) \bar{\ell}_j(y_p) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \delta_{iq} \delta_{jp} = f(x_q, y_p) \end{aligned}$$

El mismo procedimiento se puede utilizar con interpolantes spline (o de hecho cualquier otro tipo de función).[2]

2.2. Método Vecino más Cercano

Interpolación del vecino más cercano (también conocido como interpolación proximal o, en algunos contextos, el muestreo de punto) es un método sencillo de interpolación multivariante en una o más dimensiones.

El algoritmo del vecino más cercano selecciona el valor del punto más cercano y no tiene en cuenta los valores de los puntos vecinos en absoluto, rindiendo un interpolador por tramos constante. El algoritmo es muy sencillo de implementar y es de uso general (por lo general junto con mipmapping ¹) en tiempo real 3D para seleccionar valores de color de una textura de superficie.

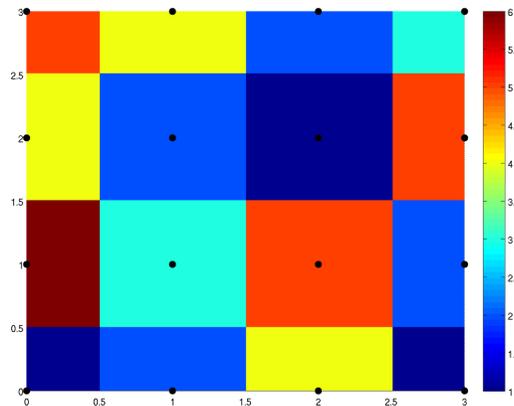


Figura 2.1: Interpolación vecino más cercano en una rejilla uniforme

¹El mipmapping se utiliza para que la textura de la imagen no pixelen (se vean cuadraditos) y se suavicen.

Búsqueda del Vecino más Cercano

La búsqueda del vecino más cercano (NNS ²), también conocido como búsqueda de proximidad, búsqueda de similitud o la búsqueda del punto más cercano, es un problema de optimización para encontrar el punto más cercano (o más similar) a una serie de puntos dados. Formalmente, el problema de búsqueda del vecino más cercano se define como sigue: dado un conjunto S de puntos en un espacio M y q un punto de consulta que pertenece a M el problema consiste en encontrar el punto más cercano de S para q .

Se han propuesto diversas soluciones al problema NNS como por ejemplo: la búsqueda lineal, el espacio de partición, búsqueda radial, por mencionar algunos. La calidad y la utilidad de los algoritmos son determinados por la complejidad de tiempo de las consultas, así como la complejidad del espacio que se tiene. Para varias dimensiones el problema de la búsqueda del vecino más cercano simplemente no es polinomial.

La búsqueda lineal

La solución más simple al problema NNS es calcular la distancia desde el punto de consulta para todos los demás puntos en la base de datos, hacer el seguimiento de la “mejor hasta ahora” (ver figura 2.2). Este algoritmo, a veces referido como el enfoque ingenuo, tiene un tiempo de ejecución de $O(dN)$ donde N es la cardinalidad de S y d es la dimensionalidad de M . La memoria que necesitamos para resolver este problema no es mucha, simplemente necesitamos memoria para almacenar la base de datos de los puntos que se tienen; si se necesitan otras variables, además de la base de datos, no ocuparán mucho espacio por lo que no se considera como un problema en este caso.

²Nearest neighbor search (NNS)

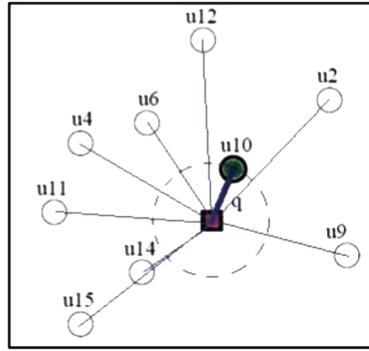


Figura 2.2: Devuelve el elemento más cercano a q en U .

La búsqueda ingenua en los espacios de dimensiones superiores puede superar otros enfoques. Búsqueda ingenua puede, en promedio, superar a los enfoques de distribución de los espacios en los espacios de dimensiones superiores.

La conexión al diagrama de Voronoi

Para un conjunto dado de puntos en el espacio, un diagrama de Voronoi es una descomposición del espacio en celdas, una para cada punto dado, de manera que en cualquier lugar en el espacio, el punto dado más cercano es el interior de la celda. Esto es equivalente a la interpolación del vecino más cercano, asignando el valor de la función en el punto dado a todos los puntos dentro de la celda. (Veáse figura 2.2)

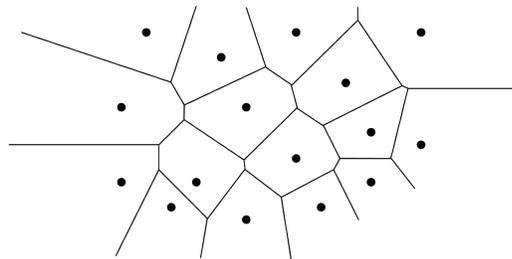


Figura 2.3: Diagrama de Voronoi

El algoritmo de Fortune

El algoritmo de Fortune es un algoritmo de línea de barrido para generar un diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos en un plano utilizando un tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$. Fue publicado originalmente por Steven Fortune en 1986 en su artículo "Un algoritmo sweepline para los diagramas de Voronoi."

Descripción del algoritmo de Fortune

El algoritmo mantiene tanto una línea de barrido y una línea de varado, la cual ambas se mueven a través del plano a medida que el algoritmo avanza. La línea de barrido es una línea recta, que es posible que, por convención, suponemos que es vertical y moviéndose de izquierda a derecha a través del plano. En cualquier momento durante el algoritmo, los puntos de entrada a la izquierda de la línea de barrido se han incorporado en el diagrama de Voronoi, mientras que los puntos a la derecha de la línea de barrido no se han considerado todavía. La línea de varado no es una línea, sino una curva a trozos complicada a la izquierda de la línea de barrido, compuesto por piezas de parábolas; se divide la porción del plano en el que el diagrama de Voronoi puede ser conocido, independientemente de lo que otros puntos pueden ser derecha de la línea de barrido, del resto del plano. Para cada punto de la izquierda de la línea de barrido, se puede definir una parábola de puntos equidistantes a partir de ese punto y de la línea de barrido; la línea de varado es el límite de la unión de estas parábolas. A medida que la línea de barrido avanza, los vértices de la línea de varado, en el que se cruzan dos parábolas, trazan los bordes del diagrama de Voronoi. La línea de varado progresa manteniendo cada base de la parábola exactamente a medio camino entre los puntos de barrido inicialmente sobre la línea de barrido, y la nueva posición de la línea de barrido. (Veáse figura 2.3).

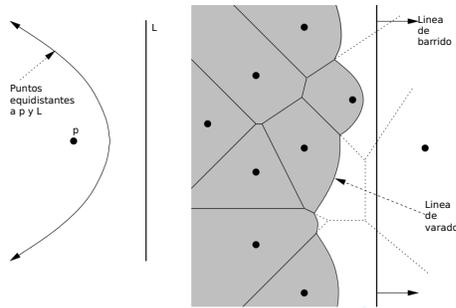


Figura 2.4: Observe que sólo se calcula la parte del diagrama de Voronoi que se encuentra por encima de la línea de varado. La posición de la línea de barrido mantiene la intersección del diagrama de Voronoi con la línea de varado.

El algoritmo mantiene como estructuras de datos un árbol de búsqueda binaria que describe la estructura combinatoria de la línea de varado, y una cola de prioridad lista de posibles eventos futuros que podrían cambiar la estructura de la línea de varado. Estos eventos incluyen la adición de otra parábola a la línea de varado (cuando la línea de barrido cruza otro punto de entrada) y la eliminación de una curva de la línea de varado (cuando la línea de barrido se hace tangente a un círculo a través de unos tres puntos de entrada cuyo parábolas forman segmentos consecutivos de la línea de varado). Cada uno de estos eventos puede ser priorizado por la coordenada x de la línea de barrido en el punto que se produce el evento. El propio algoritmo entonces consiste en retirar repetidamente el próximo evento de la cola de prioridad, la búsqueda de los cambios que el evento provoca en la línea de varado, y la actualización de las estructuras de datos.

Como hay $O(n)$ eventos en proceso (estando cada uno asociado con alguna característica del diagrama Voronoi) y $O(\log n)$ tiempo para procesar un evento (cada uno compuesto de un número constante de operaciones árbol de búsqueda y cola de prioridad binarios) el tiempo total es $O(n \log(n))$.

Código

A continuación se presenta una parte del código de la función `interp2` de Octave, la cual

nos da como resultado una interpolación utilizando el método del vecino más cercano.

```
elseif (strcmp (method, "nearest"))
ii = (XI - X(xidx) >= X(xidx + 1) - XI);
jj = (YI - Y(yidx) >= Y(yidx + 1) - YI);
idx = sub2ind (size (Z), yidx+jj, xidx+ii);
ZI = Z(idx);
```

Ejemplo 1. Dada la función $z(x, y) = \sin(2x)(x^2 - xy + y^2)$ se hará una interpolación utilizando el método del vecino más cercano. Además obtendremos su representación gráfica. (Veáse figura 2.4).

```
%ejemploInterp2.m
%ejemplo usando interp2 de octave opción método del vecino más
    cercano
%declarar la función multivariable
fun=@(x,y)( sin(2*x).*(x.^2-x.*y+y.^2) );
%parámetros
a=2; h1=0.5; h2=0.01;
%grafica de función interpolada
[X0,Y0]=meshgrid(-a:h1:a);
Zexacto=fun(X0,Y0);
%valores a interpolar
[X1,Y1]=meshgrid(-a:h2:a);
ZI=interp2(X0,Y0,Zexacto,X1,Y1,"nearest");
%dibuja la función interpolada
surf(ZI)
```

Representación gráfica.

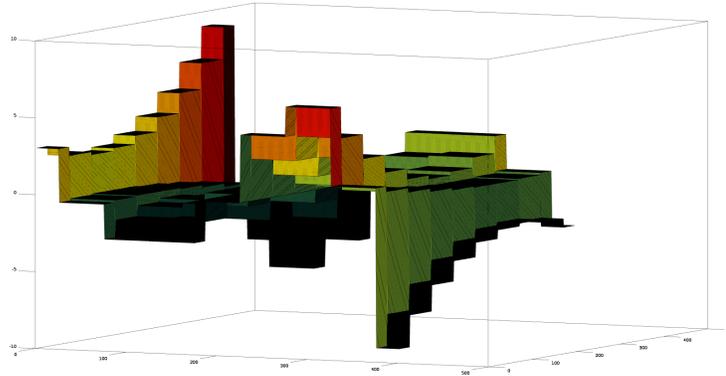


Figura 2.5: Gráfica de la función $\sin(2x)(x^2 - xy + y^2)$ utilizando el método del vecino más cercano

2.3. Método Bilineal

En matemáticas, la interpolación bilineal es una extensión de la interpolación lineal para interpolar funciones de dos variables (por ejemplo, x e y) sobre una rejilla rectilínea 2D. (Veáse la figura 2.5)

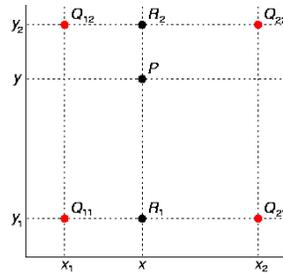


Figura 2.6: Los cuatro puntos rojos muestran los puntos de datos y el punto P es el punto en el que queremos interpolar.

La idea clave es realizar la interpolación lineal primero en una dirección, y luego de nuevo en la otra dirección. Aunque cada paso es lineal en los valores de muestra y en la posición, la interpolación en su conjunto no es lineal, sino más bien cuadrática en la ubicación de la muestra.

Algoritmo

Supongamos que queremos encontrar el valor de la función desconocida f en el punto (x, y) .

Se supone que conocemos el valor de f en los cuatro puntos $Q_{11} = (x_1, y_1)$, $Q_{12} = (x_1, y_2)$, $Q_{21} = (x_2, y_1)$, y $Q_{22} = (x_2, y_2)$.

Primero hacemos interpolación lineal en la dirección x . Esto produce

$$f(x, y_1) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21})$$

$$f(x, y_2) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22})$$

Procedemos interpolando en la dirección y para obtener la estimación deseada:

$$f(x, y) \approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x, y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(x, y_2)$$

$$\approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21}) \right) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22}) \right)$$

$$= \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} [f(Q_{11})(x_2 - x)(y_2 - y) + f(Q_{21})(x - x_1)(y_2 - y)$$

$$+ f(Q_{12})(x_2 - x)(y - y_1) + f(Q_{22})(x - x_1)(y - y_1)]$$

$$= \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \begin{bmatrix} x_2 - x & x - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(Q_{11}) & f(Q_{12}) \\ f(Q_{21}) & f(Q_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 - y \\ y - y_1 \end{bmatrix}$$

Nótese que vamos a llegar al mismo resultado si la interpolación se realiza en primer lugar a lo largo de la dirección y y luego a lo largo de la dirección x .

Algoritmo alternativo

Una forma alternativa de escribir la solución al problema de interpolación es

$$f(x, y) \approx a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

Dónde los coeficientes se encuentran resolviendo el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_1 & y_2 & x_1y_2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(Q_{11}) \\ f(Q_{12}) \\ f(Q_{21}) \\ f(Q_{22}) \end{bmatrix}$$

Si se prefiere una solución en términos de $f(Q)$, entonces podemos escribir

$$f(x, y) \approx b_{11}f(Q_{11}) + b_{12}f(Q_{12}) + b_{21}f(Q_{21}) + b_{22}f(Q_{22}).$$

Donde los coeficientes se encuentran resolviendo

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_1 & y_2 & x_1y_2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \end{bmatrix}^{-1} \right)^T \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \end{bmatrix}$$

Cuadrado unitario

Si elegimos un sistema de coordenadas en el que los cuatro puntos donde f es conocido son $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$, entonces la fórmula de interpolación se simplifica a

$$f(x, y) \approx f(0, 0)(1-x)(1-y) + f(1, 0)x(1-y) + f(0, 1)(1-x)y + f(1, 1)xy.$$

O de forma equivalente, en las operaciones de la matriz:

$$f(x, y) \approx \begin{bmatrix} 1-x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-y \\ y \end{bmatrix}$$

No lineal

Al contrario de lo que sugiere su nombre, la interpolación bilineal no es lineal; pero es el producto de dos funciones lineales.

Alternativamente, el interpolador puede ser escrito como

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 a_{ij}x^i y^j = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy$$

dónde

$$a_{00} = f(0, 0)$$

$$a_{10} = f(1, 0) - f(0, 0)$$

$$a_{01} = f(0, 1) - f(0, 0)$$

$$a_{11} = f(1, 1) + f(0, 0) - (f(1, 0) + f(0, 1))$$

En ambos casos, el número de constantes (cuatro) se corresponde con el número de puntos de datos, donde se da f . El interpolador es lineal a lo largo de líneas paralelas a cualquiera de los ejes x o y , lo que es equivalente, si x o y son constantes. A lo largo de cualquier otra línea recta, el interpolador es cuadrática. Sin embargo, incluso si la interpolación no es lineal en la posición (x e y), que es lineal en la amplitud, como es evidente a partir de las ecuaciones anteriores: todo coeficiente b_j , $j = 1..4$, son proporcionales al valor de la función $f(,)$.

El resultado de la interpolación bilineal es independiente de qué eje se interpola primero y cuál segundo. Si hubiéramos realizado primero la interpolación lineal en la dirección y y luego en la dirección x , la aproximación resultante sería la misma. [7]

Aplicación en el procesamiento de imágenes

En visión por computadora y procesamiento de imágenes, la interpolación bilineal es una de las técnicas básicas de remuestreo.

En el mapeo de texturas, que también se conoce como el filtrado bilineal o mapeo de textura bilineal, y que puede ser utilizado para producir una imagen razonablemente realista. Un promedio ponderado de los atributos (color, alfa, etc.) de los cuatro que rodean texels³ se calcula y se aplica al píxel de la pantalla. Este proceso se repite para cada píxel que constituye el objeto de ser texturizado.

Cuando una imagen necesita ser ampliado, cada píxel de la imagen original necesita ser

³Un texel es la unidad mínima de una textura aplicada a una superficie, usada en gráficos por computador.

movido en una dirección determinada sobre la base de la constante de escala. Sin embargo, cuando la ampliación de una imagen por un factor de escala no integral, hay píxeles (es decir, huecos) que no se asignan valores de los píxeles correspondientes. En este caso, esos agujeros deberían asignarse valores RGB o escala de grises adecuadas para que la imagen de salida no tenga píxeles no valorados.

La interpolación bilineal se puede utilizar cuando la transformación de la imagen perfecta con coincidencia píxel a píxel es imposible, por lo que uno puede calcular y asignar los valores de intensidad correspondientes a los píxeles. A diferencia de otras técnicas de interpolación, como la interpolación del vecino más cercano y la interpolación bicúbica, la interpolación bilineal utiliza sólo los 4 valores del píxel más cercano que se encuentran en direcciones diagonales de un píxel dado, con el fin de encontrar los valores de intensidad de color correspondientes de ese píxel.

La interpolación bilineal considera la zona más cercana 2x2 de valores de píxel conocidos al rededor de los píxeles desconocidos en la ubicación del ordenador. A continuación, toma un promedio ponderado de estos 4 píxeles para llegar a su valor final, interpolado. El peso de cada uno de los 4 valores de píxeles se basa en la distancia de píxeles del ordenador (en el espacio 2D) de cada uno de los puntos conocidos.

Ejemplo 2. Calcular el valor de intensidad en el píxel que se encuentra en la fila 20.2, columna 14.5.

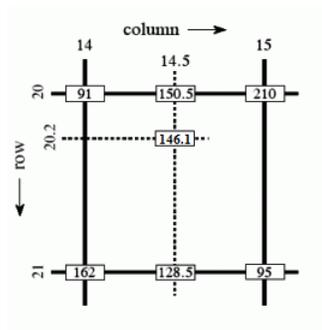


Figura 2.7: Interpolación bilineal en los valores de escala de grises.

Solución: Como se observa en la figura el valor de intensidad se puede calcular interpolando primero linealmente entre los valores en la columna 14 y 15 en cada una de las filas 20 y 21, dando

$$I_{20,14.5} = \frac{15-14.5}{15-14} (91) + \frac{14.5-14}{15-14} (210) = 150.5$$

$$I_{21,14.5} = \frac{15-14.5}{15-14} (162) + \frac{14.5-14}{15-14} (95) = 128.5$$

y luego interpolar linealmente entre estos valores, dando

$$I_{20.2,14.5} = \frac{21-20.2}{21-20} (150.5) + \frac{20.2-20}{21-20} (128.5) = 146.1$$

Este algoritmo reduce parte de la distorsión visual causada por el cambio de tamaño de una imagen a un factor de zoom no integral, a diferencia de la interpolación del vecino más cercano, lo que hará que algunos píxeles aparezcan más grandes que otros en la imagen redimensionada.

Código

Al igual que en el método anterior lo siguiente es una parte del código de la función `interp2` de Octave, para la interpolación bilineal.

```
if (strcmp (method, "linear"))
## each quad satisfies the equation
z(x,y)=a+b*x+c*y+d*xy
##
## a-b
## | |
## c-d
a = Z(1:(zr - 1), 1:(zc - 1));
b = Z(1:(zr - 1), 2:zc) - a;
c = Z(2:zr, 1:(zc - 1)) - a;
d = Z(2:zr, 2:zc) - a - b - c;

## scale XI, YI values to a 1-spaced grid
```

```
Xsc = (XI - X(xidx)) ./ (diff (X)(xidx));
Ysc = (YI - Y(yidx)) ./ (diff (Y)(yidx));

## Get 2D index.
idx = sub2ind (size (a), yidx, xidx);
## We can dispose of the 1D indices at this point to save memory.
clear xidx yidx;

## apply plane equation
ZI = a(idx) + b(idx).*Xsc + c(idx).*Ysc + d(idx).*Xsc.*Ysc;
```

Ejemplo 3. Tomando la función dada en el ejemplo 1 se hará la interpolación de dicha función usando el método bilineal.

```
ZI=interp2(X0,Y0,Zexacto,X1,Y1,"linear");
surf(ZI)
```

Representación gráfica.

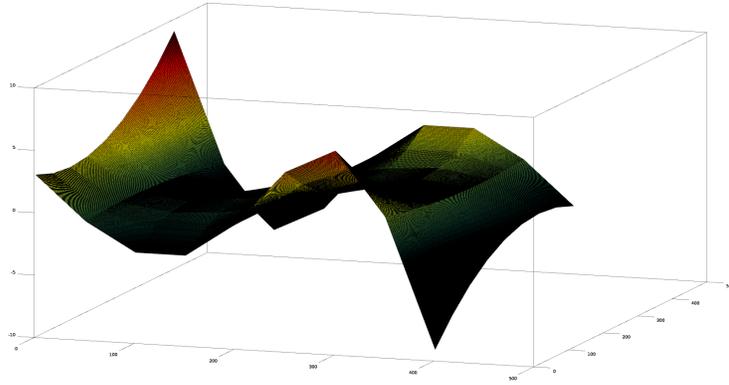


Figura 2.8: Gráfica de la función $\sin(2x)(x^2 - xy + y^2)$ utilizando el método bilineal

Ejemplo 4. Supongamos que queremos interpolar en $[0, 1] \times [0, 1]$. Dada la matriz $z = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; hallar la función $f(x, y)$ que pasa por estos puntos.

Solución: Dado que estamos interpolando en el cuadrado unitario se tiene que:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \begin{bmatrix} x_2 - x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 - y \\ y \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 - x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - y \\ y \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 - x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2y - 1 \\ 4y + 1 \end{bmatrix} \\
 &== 2x - 2y + 6xy - 1
 \end{aligned}$$

2.4. Método Bi-cúbico

En matemáticas, la interpolación bicúbica es una extensión de la interpolación cúbica para interpolar puntos de datos en una malla regular de dos dimensiones. La superficie interpolada es más suave que las superficies correspondientes obtenidas por interpolación bilineal o la interpolación del vecino más cercano. La interpolación bicúbica se puede lograr utilizando polinomios de Lagrange, splines cúbicos, o algoritmo de convolución cúbica.

En el procesamiento de imágenes, la interpolación bicúbica se elige a menudo sobre la interpolación bilineal o del vecino más cercano para el remuestreo de imagen, cuando la velocidad no es importante. En contraste con la interpolación bilineal, que sólo toma en cuenta 4 píxeles (2×2), la interpolación bicúbica considera 16 píxeles (4×4). Si se utiliza interpolación bicúbica la interpolación es más suave y tienen menos artefactos de interpolación.

Supongamos que los valores de la función f y las derivadas f_x , f_y y f_{xy} son conocidas en las cuatro esquinas $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$ en el cuadrado unitario. La superficie interpolada puede entonces ser escrita.

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j$$

El problema de interpolación consiste en determinar los 16 coeficientes a_{ij} . Correspondiente de $p(x, y)$ con los valores de la función produce cuatro ecuaciones,

1. $f(0, 0) = p(0, 0) = a_{00}$
2. $f(1, 0) = p(1, 0) = a_{00} + a_{10} + a_{20} + a_{30}$
3. $f(0, 1) = p(0, 1) = a_{00} + a_{01} + a_{02} + a_{03}$
4. $f(1, 1) = p(1, 1) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij}$

Del mismo modo, ocho ecuaciones para las derivadas en la dirección de x y la dirección de y

1. $f_x(0, 0) = p_x(0, 0) = a_{10}$
2. $f_x(1, 0) = p_x(1, 0) = a_{10} + 2a_{20} + 3a_{30}$
3. $f_x(0, 1) = p_x(0, 1) = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}$
4. $f_x(1, 1) = p_x(1, 1) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij}i$
5. $f_y(0, 0) = p_y(0, 0) = a_{01}$
6. $f_y(1, 0) = p_y(1, 0) = a_{01} + a_{11} + a_{21} + a_{31}$
7. $f_y(0, 1) = p_y(0, 1) = a_{01} + 2a_{02} + 3a_{03}$
8. $f_y(1, 1) = p_y(1, 1) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}j$

Y cuatro ecuaciones para la derivada cruzada xy .

1. $f_{xy}(0, 0) = p_{xy}(0, 0) = a_{11}$
2. $f_{xy}(1, 0) = p_{xy}(1, 0) = a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31}$
3. $f_{xy}(0, 1) = p_{xy}(0, 1) = a_{11} + 2a_{12} + 3a_{13}$
4. $f_{xy}(1, 1) = p_{xy}(1, 1) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}ij$

donde en las expresiones anteriores se han utilizado las siguientes identidades,

$$p_x(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} i x^{i-1} y^j$$

$$p_y(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x^i j y^{j-1}$$

$$p_{xy}(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} i x^{i-1} j y^{j-1}.$$

Este procedimiento produce una superficie $p(x, y)$ en el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ la cual es continua y con derivadas continuas. La interpolación bicúbica en una cuadrícula de tamaño arbitrariamente regular se puede lograr mediante un conjunto de parches de dichas superficies, asegurando que los instrumentos derivados corresponden en los límites.

La agrupación de los parámetros desconocidos a_{ij} en un vector,

$$\alpha = [a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{01}, a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{02}, a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{03}, a_{13}, a_{23}, a_{33}]^T$$

y dejar

$$x = [f(0, 0), f(1, 0), f(0, 1), f(1, 1), f_x(0, 0), f_x(1, 0), f_x(0, 1), f_x(1, 1), f_y(0, 0), f_y(1, 0), f_y(0, 1), f_y(1, 1), f_{xy}(0, 0), f_{xy}(1, 0), f_{xy}(0, 1), f_{xy}(1, 1)]^T$$

el sistema anterior de ecuaciones se puede reformular en una matriz para la ecuación lineal $A\alpha = x$. La inversa de la matriz da la ecuación lineal más útil $A^{-1}x = \alpha$ permite que α pueda calcularse rápida y fácilmente, donde:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & -9 & -9 & 9 & 6 & 3 & -6 & -3 & 6 & -6 & 3 & -3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & -3 & -3 & 3 & 3 & -4 & 4 & -2 & 2 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & -4 & -2 & 4 & 2 & -3 & 3 & -3 & 3 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -4 & 4 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

No puede haber otra forma de matriz concisa de 16 coeficientes

$$\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & f_y(0,0) & f_y(0,1) \\ f(1,0) & f(1,1) & f_y(1,0) & f_y(1,1) \\ f_x(0,0) & f_x(0,1) & f_{xy}(0,0) & f_{xy}(0,1) \\ f_x(1,0) & f_x(1,1) & f_{xy}(1,0) & f_{xy}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

o

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & f_y(0,0) & f_y(0,1) \\ f(1,0) & f(1,1) & f_y(1,0) & f_y(1,1) \\ f_x(0,0) & f_x(0,1) & f_{xy}(0,0) & f_{xy}(0,1) \\ f_x(1,0) & f_x(1,1) & f_{xy}(1,0) & f_{xy}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

donde

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix},$$

Encontrar las derivadas de los valores de la función

Si las derivadas son desconocidas por lo general son aproximadas a partir de los valores de la función en los puntos vecinos de las esquinas del cuadrado unitario, por ejemplo, usando diferencias finitas.

Para encontrar cualquiera de las derivadas individuales, f_x o f_y , utilizando ese método, encontrar la pendiente entre los dos puntos de alrededor en el eje apropiado. Por ejemplo, para calcular f_x para uno de los puntos, encontramos $f(x, y)$ para los puntos de la izquierda y derecha del punto de búsqueda y calculamos su pendiente, y lo mismo para f_y .

Para calcular la derivada cruzada, f_{xy} , tomamos la derivada en ambos ejes, uno a la vez. Por ejemplo, se puede calcular primero f_x (derivada de x) de los puntos encima y por debajo del punto de búsqueda, luego, calculamos f_y en esos valores para obtener el valor de $f_{xy}(x, y)$ para el punto de destino. También se puede hacer en dirección opuesta, en primer lugar calcular f_y y luego f_x , los dos resultados son equivalentes.

En los bordes de la base de datos, cuando falta algunos de los puntos circundantes, los

puntos que faltan pueden aproximarse mediante uno de una serie de métodos. Un método simple y común es asumir que la pendiente desde el punto hasta el punto de destino existente continúa sin más cambios, y usando esto para calcular un valor hipotético para el punto que falta.[7]

Ejemplo 5. Interpolación bicúbica utilizando la función `interp2` de octave.

```
ZI=interp2(X0,Y0,Zexacto,X1,Y1,"cubic");
surf(ZI)
```

Representación gráfica.

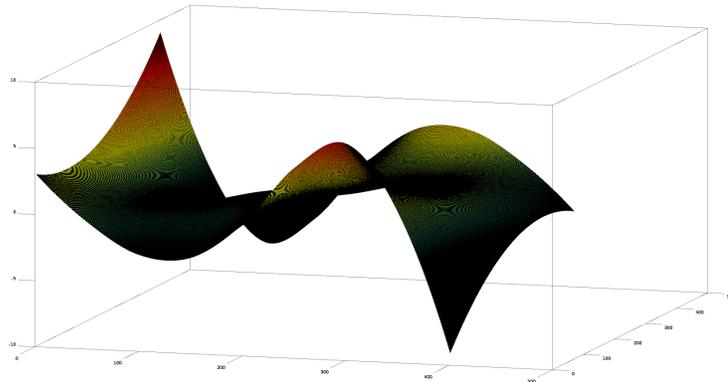


Figura 2.9: Gráfica de la función $\sin(2x)(x^2 - xy + y^2)$ utilizando el método bicúbico

2.5. Método de Barnes

Interpolación Barnes, el nombre de Stanley L. Barnes, es la interpolación de puntos de datos no estructurados a partir de un conjunto de mediciones de una función desconocida

en dos dimensiones en una función analítica de dos variables. Un ejemplo de una situación en la que el esquema de Barnes es importante es en los pronósticos meteorológicos, donde las mediciones se realizan allí donde las estaciones de monitoreo pueden estar situados, las posiciones, los que se ven limitados por la topografía. Tal interpolación es esencial en la visualización de datos, por ejemplo, en la construcción de gráficos de contorno u otras representaciones de superficies analíticas.

Barnes propuso un esquema de objetivo para la interpolación de dos dimensiones de datos usando un esquema de múltiples pasadas. Esto proporciona un método de interpolación de presiones a nivel del mar a través de todos los Estados Unidos de América, produciendo un cuadro sinóptico en todo el país utilizando estaciones de monitoreo dispersas. Los investigadores han mejorado posteriormente el método Barnes para reducir el número de parámetros necesarios para el cálculo del resultado interpolado, aumentando la objetividad del método.

El método construye una cuadrícula de tamaño determinado por la distribución de los dos puntos de datos dimensionales. En el uso de esta red, los valores de la función se calculan en cada punto de la cuadrícula. Para ello, el método utiliza una serie de funciones gaussianas, dada una ponderación de la distancia con el fin de determinar la importancia relativa de cualquier medida dada en la determinación de los valores de la función. Pasos de corrección, entonces, se hacen para optimizar los valores de la función, por cuenta de la respuesta espectral de los puntos interpolados.

Método

A continuación se describe el método de interpolación utilizado en un multi-pass Barnes de interpolación.

Primero paso

Para un punto dado de la rejilla i, j la función de interpolación $g(x_i, y_i)$ se aproxima por primera vez a la ponderación inversa de los puntos de datos. Para hacer esto como valores

de ponderación se asigna a cada uno de Gauss para cada punto de la rejilla, de tal manera que

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{r_m^2}{\kappa}\right)$$

dónde κ es un parámetro de atenuación que controla la anchura de la función de Gauss. Este parámetro se controla por la característica de separación de datos, para un radio de corte gaussiano fijo $w_{ij} = e^{-1}$ dando Δn tal que:

$$\kappa = 5.052 \left(\frac{2\Delta n}{\pi}\right)^2.$$

La interpolación inicial para la función de los valores medidos $f_k(x, y)$ entonces se convierte en:

$$g_0(x_i, y_j) = \frac{\sum_k w_{ij} f_k(x, y)}{\sum_k w_{ij}}$$

Segundo paso.

La corrección para la siguiente pasada a continuación, utiliza la diferencia entre el campo observado y los valores interpolados en los puntos de medición para optimizar el resultado:

$$g_1(x_i, y_j) = g_0(x_i, y_j) + \sum (f(x, y) - g_0(x, y)) \exp\left(-\frac{r_m^2}{\gamma\kappa}\right).$$

Vale la pena observar que los pasos de corrección sucesivos se pueden utilizar con el fin de lograr un mejor acuerdo entre la función interpolada y los valores medidos en los puntos experimentales.

Selección de parámetros

Aunque se describe como un método objetivo, hay muchos parámetros que controlan el campo interpolado. La elección de Δn , la rejilla de separación Δx y γ influyen en el resultado final. Directrices para la selección de estos parámetros se han sugerido, sin embargo, los valores finales utilizados son libres de ser elegido dentro de estas directrices.

La separación de datos utilizado en el análisis, Δn se puede elegir ya sea mediante el cálculo de la verdadera separación entre puntos espaciados de datos experimental, o por el uso de una aleatoriedad espacial completa supuesto, dependiendo del grado de agrupamiento en los datos observados. El parámetro de suavizado γ está restringido a ser de entre 0,2 y 1,0. Por razones de integridad de interpolación, Δx se sostiene para ser restringido entre 0,3 y 0,5. [8]

2.6. Remuestreo Lanczos.

Remuestreo Lanczos y filtrado Lanczos son dos aplicaciones de una fórmula matemática. Puede ser utilizado como un filtro de paso bajo o se utiliza para interpolar suavemente el valor de una señal digital entre sus muestras. Una muestra es un valor o un conjunto de valores en un punto en el tiempo y / o espacio.

En el procesamiento de señales, el muestreo es la reducción de una señal continua a una señal discreta. Una señal discreta o de tiempo discreto de la señal es una serie de tiempo que consiste en una secuencia de cantidades. En otras palabras, una serie de tiempo es una función sobre un dominio de números enteros. Un ejemplo común es la conversión de una onda de sonido (una señal continua) a una secuencia de muestras (una señal de tiempo discreto).

Remuestreo Lanczos se usa típicamente para aumentar la velocidad de muestreo de una señal digital, o para cambiar por una fracción del intervalo de muestreo, por ejemplo, para cambiar el tamaño o rotar una imagen .

Fórmula de interpolación.

Para definir la fórmula de interpolación de Remuestreo de Lanczos se utiliza el núcleo de Lanczos definido por

$$L(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{a \sin(\pi x) \sin(\pi x/a)}{\pi^2 x^2} & \text{si } 0 < |x| < a \\ 0 & \text{Otro caso.} \end{cases}$$

El parámetro a es un número entero positivo, típicamente 2 o 3, que determina el tamaño del núcleo. (Veáse figura 2.9).

Dada una señal unidimensional con muestras s_i , para valores enteros de i el valor interpolado $S(x)$ de un argumento arbitrario real x se obtiene por la convolución discreta de las muestras con el núcleo de Lanczos.

$$S(x) = \sum_{i=\lfloor x \rfloor - a + 1}^{\lfloor x \rfloor + a} s_i L(x - i)$$

donde a es el parámetro de tamaño de filtro y $\lfloor x \rfloor$ es la función mayor entero. Los límites de esta suma son tales que el núcleo es cero fuera de ellos.

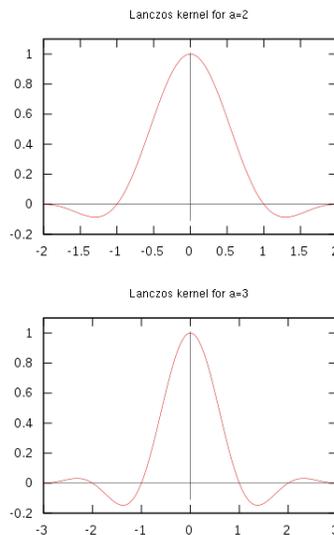


Figura 2.10: Núcleos de Lanczos para los casos $a = 2$ y $a = 3$.

Propiedades.

Mientras que el parámetro a es un número entero positivo, el núcleo Lanczos es continuo en

todas partes, y su derivada está definida y es continua en todas partes (incluso en $x = \pm a$, en donde ambas funciones sin van a cero). Por lo tanto, la señal $S(x)$ será continua, con derivada continua.

El núcleo de Lanczos es cero en todo argumento entero x , excepto en $x = 0$, donde tiene el valor 1. Por lo tanto, la señal reconstruida exactamente interpola las muestras dadas: tendremos $S(x) = s_i$ para cada argumento entero $x = i$.

El núcleo de Lanczos en dos dimensiones es simplemente el producto de dos núcleos unidimensionales:

$$L(x, y) = L(x) L(y)$$

Dada una señal bidimensional s_{ij} que se define en los puntos enteros (i, j) del plano (por ejemplo, intensidades de los píxeles de una imagen digital), la función reconstruida es

$$S(x, y) = \sum_{i=\lfloor x \rfloor - a + 1}^{\lfloor x \rfloor + a} \sum_{j=\lfloor y \rfloor - a + 1}^{\lfloor y \rfloor + a} s_{ij} L(x - i) L(y - j).$$

Cuando se remuestrea una señal de dos dimensiones en puntos regularmente espaciados (x, y) , se puede ahorrar algo de cálculo por remuestreo de toda la señal a lo largo de un solo eje, a continuación, el remuestreo de la señal de dos dimensiones resultante a lo largo del otro eje.[8]

2.7. Triangulación de Delaunay.

En las matemáticas y la geometría computacional, una triangulación de Delaunay para un conjunto P de puntos en un plano es una triangulación DT (P) ⁴, de tal manera que ningún punto P está dentro de la circunferencia circunscrita de cualquier triángulo en DT (P) .

En geometría, una triangulación es una subdivisión de un objeto plano en forma de triángulos. Triangulaciones de Delaunay maximizan el ángulo mínimo de todos los ángulos de los triángulos en la triangulación; tienden a evitar los triángulos estrechos.

⁴Delaunay triangulation (DT)

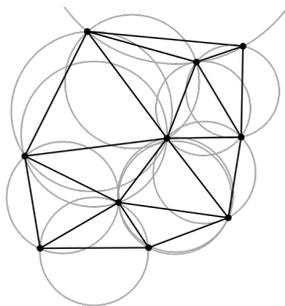
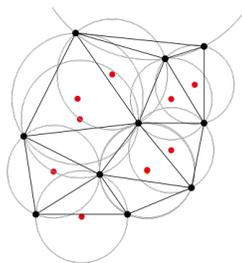


Figura 2.11: Triangulación de Delaunay

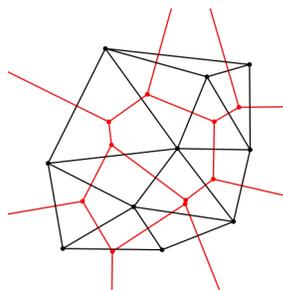
Para un conjunto de puntos en la misma línea no hay una triangulación de Delaunay (la noción de triangulación es degenerado para este caso). Para cuatro o más puntos en el mismo círculo (por ejemplo, los vértices de un rectángulo) la triangulación de Delaunay no es único: cada uno de los dos posibles triangulaciones que dividen el cuadrilátero en dos triángulos satisface la "condición de Delaunay", es decir, el requisito de que las circunferencias circunscritas a los triángulos tienen interiores vacíos.

Relación con el diagrama de Voronoi

La triangulación de Delaunay de un conjunto discreto de puntos P en la posición general se corresponde con el grafo dual del diagrama de Voronoi de P . Casos especiales incluyen la existencia de tres puntos en una línea y cuatro puntos sobre el círculo.



La triangulación de Delaunay con todas las circunferencias circunscritas y sus centros (en rojo).



Conexión de los centros de las circunferencias circunscritas produce el diagrama de Voronoi (en rojo).

d-dimensiones Delaunay.

Para un conjunto P de puntos en el espacio euclidiano de dimensión d , una triangulación

de Delaunay es una triangulación $DT(P)$, de tal manera que ningún punto P está dentro de la circun-hiperesfera de cualquier simplex en $DT(P)$. En geometría, un simplex es una generalización de la noción de un triángulo o tetraedro a arbitrarias dimensiones.

El problema de encontrar la triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos en el espacio euclidiano d -dimensional puede ser convertido en el problema de encontrar la envolvente convexa de un conjunto de puntos $(d + 1)$ en espacios de dimensión n , dando a cada punto P una coordenada adicional igual a $|p|^2$ teniendo el lado inferior de la envolvente convexa, y el mapeo de vuelta al espacio d -dimensional mediante la eliminación de la última coordenada. A medida que la envolvente convexa es única, también lo es la triangulación, asumiendo que todas las facetas de la envolvente convexa son simplex. Facetas no simplex sólo se producen cuando $d + 2$ de los puntos originales se encuentran en la misma d -hiperesfera, es decir, los puntos no están en posición general.

Algoritmo.

Muchos algoritmos de computación de las triangulaciones de Delaunay se basan en operaciones rápidas para detectar cuando un punto está dentro del círculo circunscrito de un triángulo y una estructura de datos eficiente para almacenar los triángulos y los bordes. En dos dimensiones, una manera de detectar si el punto D está situado en la circunferencia circunscrita de A, B, C es evaluar el determinante

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_x^2 + A_y^2 & 1 \\ B_x & B_y & B_x^2 + B_y^2 & 1 \\ C_x & C_y & C_x^2 + C_y^2 & 1 \\ D_x & D_y & D_x^2 + D_y^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x - D_x & A_y - D_y & (A_x^2 - D_x^2) + (A_y^2 - D_y^2) \\ B_x - D_x & B_y - D_y & (B_x^2 - D_x^2) + (B_y^2 - D_y^2) \\ C_x - D_x & C_y - D_y & (C_x^2 - D_x^2) + (C_y^2 - D_y^2) \end{vmatrix} > 0$$

Cuando A, B y C están ordenados en un sentido antihorario, este determinante es positivo si y sólo si D se encuentra dentro de la circunferencia circunscrita.

Aplicaciones.

Para el modelado del terreno u otros objetos, dado un conjunto de puntos de muestra, la triangulación de Delaunay da un buen conjunto de triángulos para su uso como polígonos en el modelo. En particular, la triangulación de Delaunay evita triángulos estrechos (ya que tienen grandes circunferencias circunscritas en comparación con su área).

Triangulaciones de Delaunay se pueden utilizar para determinar la densidad o la intensidad de los puntos de muestreos por medio de la DTFE ⁵ (El estimador de campo teselación Delaunay).

Triangulaciones de Delaunay a menudo se utilizan para construir mallas para el espacio-discreto como solucionadores del método de elementos finitos y el método de volumen finito de simulación física, debido a la garantía del ángulo y porque los algoritmos de triangulación rápida han sido desarrollados.[8]

2.8. Método de Bezier

Superficies de Bézier son un tipo especial de spline matemático utilizado en gráficos por computadora, diseño aislado por computadoras y modelaje en elementos finitos. Como una curva de Bézier, una superficie de Bézier se define por un conjunto de puntos de control.

Similar a la interpolación en muchos aspectos, una diferencia clave es que una superficie, en general no pasa a través de los puntos centrales de control; más bien, se "alarga" hacia ellos, como si cada una fuera una fuerza de atracción. Son visualmente intuitivos, y para muchas aplicaciones, matemáticamente conveniente.

Dada una superficie de Bézier de grado (n, m) se define por un conjunto de $(n + 1)(m + 1)$ puntos de control $k_{i,j}$. Al trazar el cuadrado unidad en una superficie lisa, continua incrustado dentro de un espacio de la misma dimensionalidad como $\{k_{i,j}\}$. Por ejemplo, si k son todos los puntos en un espacio de cuatro dimensiones, a continuación, la superficie estará dentro de un espacio de cuatro dimensiones.

⁵Delaunay tessellation field estimator (DTFE)

Una superficie de Bézier de dos dimensiones se puede definir como una superficie paramétrica donde la posición de un punto P como una función de coordenadas paramétricas u, v es dada por:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) k_{i,j}$$

evaluado sobre el cuadrado unidad, donde

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

es un polinomio de Bernstein.

Algunas propiedades de las superficies de Bézier:

- Una superficie de Bézier se transformará en la misma forma que sus puntos de control bajo todas las transformaciones lineales y traslaciones.
- Todos los $u = v = \text{constantes}$ y líneas constantes en el espacio (u, v) , y, en particular, en los cuatro bordes del cuadrado unitario deformado (u, v) son curvas de Bézier.
- Una superficie de Bézier estará completamente dentro de la envolvente convexa de sus puntos de control, y por lo tanto también completamente adentro de su cuadro acotado de los puntos de control en cualquier sistema coordenado cartesiano.
- Los puntos en la parte correspondientes a las esquinas del cuadrado unitario deformado coinciden con cuatro de los puntos de control.
- Sin embargo, una superficie de Bézier generalmente no pasa a través de sus otros puntos de control.

Generalmente, el uso más común de las superficies de Bézier son unas redes de parches bicúbicos (donde $m = n = 3$). La geometría de una de estas partes bicúbicas es por lo tanto

definida completamente por un conjunto de 16 puntos de control. Éstos son típicamente unidos para formar una superficie B-spline de una manera similar a las curvas de Bézier se interconectan para formar una curva B-spline ⁶.

Superficies de Bézier más simples son formadas como esas partes bicuadráticas ($m = n = 2$), o triángulos de Bézier .

Superficies de Bézier en gráficos por computadora

Una cuadrícula de una parte de Bézier son superiores a las cuadrículas de los triángulos como representación de superficies lisas, ya que son mucho más compactas, más fácil de manipular, y tienen propiedades de continuidad mejores. Además, otras superficies paramétricas comunes, tales como esferas y cilindros pueden ser bien aproximadas por un número relativamente pequeño de parches de Bézier cúbicos.

Sin embargo, la cuadrícula de parches de Bézier son más difíciles de generar directamente. Un problema con los parches de Bézier es que el calcular sus intersecciones con las líneas es difícil, haciéndolos un poco extraños para el trazado de rayos u otras técnicas geométricas directas las cuales no utilizan técnicas de subdivisión o aproximaciones sucesivas. Ellos también son difíciles de combinar directamente con algoritmos de perspectiva de proyección.

Por esta razón, la cuadrícula de parches Bézier son, en general, eventualmente descompuestas en cuadrículas de triángulos lisos por generadores 3D. En generación de alta calidad, la subdivisión se ajusta para que sea tan fina que las líneas fronteras de las triangulaciones individuales no se pueden ver. Para evitar una apariencia poligonal o distorsionada, detalles finos son aplicados a superficies de Bézier en ese momento utilizando mapas de texturas, mapas de bultos y otras técnicas de sombreado a píxelado.

Un parche de Bézier de grado (m, n) puede ser construido de dos triángulos de Bézier de

⁶B-spline es una función spline que tiene el mínimo soporte con respecto a un determinado grado, suavidad y partición del dominio.

Se denomina soporte de una función al conjunto de puntos donde la función no es cero, o a la cerradura de ese conjunto.

grado $m + n$, o de una triangulación única de Bézier de grado $m + n$, con dominio de entrada que es un cuadrado en lugar de como un triángulo .

Un triángulo de Bézier de grado m podría también ser construido a partir de una superficie de Bézier de grado (m, m) , con los puntos de control de tal forma que uno de los bordes también es aplastado en un punto, o con el dominio de entrada que es un triángulo en lugar de un cuadrado. [8]

2.9. Método IDW ⁷

Ponderación de Distancia Inversa

Es un método matemático de interpolación que usa una función inversa de la distancia, parte del supuesto que las cosas que están más cerca son más parecidas, por lo tanto tiene más peso e influencia sobre el punto a estimar. Matemáticamente se expresa como:

$$Z(S_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Z(S_i)$$

En el cual $Z(S_0)$ es el valor a predecir, N es el número de muestras alrededor del punto a predecir, λ_i son los pesos asignados a cada punto vecino y $Z(S_i)$ son los valores medidos. Los pesos de los puntos vecinos están dados por:

$$\lambda_i = \frac{d_{i0}^{-P}}{\sum_{i=1}^N d_{i0}^{-P}}$$

En el cual d es la distancia entre el lugar de predicción (S_0) y el lugar muestral (S_i); P es un factor de reducción de pesos, cuyo valor se encuentra minimizando el error cuadrático medio o error de predicción. [5]

Ejemplo 6. Dado los siguientes valores se desea estimar $Z(0.5, 0.5)$ utilizando el método de ponderación de distancia inversa con $P = 2$.

⁷Inverse Distance Weighting (IDW)

| i | (S_i) | $Z(S_i)$ |
|-----|---------|----------|
| 1 | (0, 0) | -2 |
| 2 | (1, 0) | 5 |
| 3 | (0, 2) | 3 |
| 4 | (1, 1) | -1 |

Sol: Primero calculamos las distancias entre (S_0) y los (S_i) para $i = 1, 2, 3, 4$

$$d_{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d_{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d_{30} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$d_{40} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

con

$$\sum_{i=1}^N d_{i0}^{-p} = \frac{32}{5}$$

por lo que

$$\begin{aligned} Z(0.5, 0.5) &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i Z(S_i) \\ &= \frac{5}{32} (d_{10}^{-2}(-2) + d_{20}^{-2}(5) + d_{30}^{-2}(3) + d_{40}^{-2}(-1)) \\ &= \frac{5}{32} \left(-4 + 10 + \frac{6}{5} - 2 \right) \\ &= \frac{5}{32} \left(\frac{26}{5} \right) \\ &= \frac{13}{16} \simeq 0.81 \end{aligned}$$

Por lo que la estimación de $Z(0.5, 0.5)$ es aproximadamente 0.81.

2.10. Método Kriging

Kirging es una colección de técnicas generadas de regresión lineal para minimizar una varianza de estimación definida en un modelo a priori de covarianza. Es considerado el mejor estimador lineal insesgado: lineal porque es una combinación lineal ponderada de los datos; y es insesgado porque el error de estimación tendrá una media igual a cero; es el mejor en el sentido de error de varianza mínima para un modelo dado de covarianza/variograma.

Clasificación de los diferentes tipos de Kriging

1. Según la forma del estimador

Lineales:

- Simple
- Ordinario
- Universal
- Residual

No lineales:

- Disyuntivo
- Indicador
- Probabilístico

2. Según el soporte de la medición de los datos

Puntual

En bloques

3. Kriging paramétrico y no paramétrico

Paramétrico:

- Multigaussiano
- Disyuntivo
- Lognormal

No paramétrico:

- Simple
- Ordinario
- Universal
- Residual
- Indicador
- Probabilístico

Ecuaciones del Estimador de Kriging

Supóngase que se dispone de valores muestrados $Z(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ y deseamos estimar un valor de la característica observada en el panel $Z(v)$, la cual está dada por una combinación lineal $Z(x_i)$, es decir.

$$Z^*(v) = \lambda_i Z(x_i)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

donde $Z^*(v)$ es el valor estimado y λ_i son los pesos de kriging, de modo que los λ_i sean obtenidos de tal forma que proporcione un estimador insesgado $E[Z^*(v) - Z(v)] = 0$ y de varianza mínima $\text{Var}[Z^*(v) - Z(v)]$.

Método Kriging Simple

Supóngase que hay una variable regionalizada estacionaria con media m , y covarianza conocida y sea $Z(x)$ la variable de interés medida en el sitio x , donde m está dado por

$$m = E[Z(x)].$$

El estimador y el sistema a resolver para encontrar los pesos λ_i y los valores estimados para $Z^*(x_i)$ está dada por

Estimador :

$$Z^*(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) + m \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right).$$

Sistema:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i C(x_i, x_j) = C(x_j, v) \quad j = 1, \dots, n$$

Varianza de Kriging:

$$\sigma^2 = C(v, v) - \sum_{i=1}^n \lambda_i C(x_i, x_j)$$

Método Kriging Ordinario

Suponga que se hacen mediciones de la variable de interés Z en los puntos x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ de la región de estudio, es decir se tienen realizaciones de las variables $Z(x_1), \dots, Z(x_n)$ y se desea predecir $Z(v)$, en el punto v donde no hubo medición. En esta circunstancia, el método Kriging ordinario propone que el valor de la variable puede predecirse como una combinación lineal de las n variables aleatorias así:

$$Z^*(v) = \lambda_1 Z(x_1) + \lambda_2 Z(x_2) + \lambda_3 Z(x_3) + \dots + \lambda_n Z(x_n)$$

es decir

$$Z^*(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i).$$

A continuación se muestra el estimador y el sistema a resolver para encontrar los pesos λ_i y $Z^*(v)$

En términos de la covarianza

Estimador:

$$Z^*(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)$$

Sistema:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i C(x_i, x_j) - \mu = C(x_i, v) & i, j = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Varianza de Kriging:

$$\sigma^2 = C(v, v) - \sum_{i=1}^n \lambda_i C(x_i, v) + \mu$$

Ecuación del Kriging ordinario en forma matricial

De forma análoga al sistema de ecuación de Kriging ordinario podemos representar el sistema de ecuaciones del Kriging en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{k1} \\ \sigma_{k2} \\ \vdots \\ \sigma_{kn} \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $\sigma_{k1} = \sigma_{x_i v} = C(x_i, v)$.

Este sistema de ecuaciones tiene solución única sí y solo sí la matriz es no singular, lo cual se cumple cuando la matriz de covarianza es estrictamente definida positiva, esto se puede garantizar si se usan modelos de función de covarianzas definidas positivas y no

se incluyen puntos duplicados. Es decir, no se puede usar una muestra donde la función aleatoria tome dos valores distintos en un mismo punto.

Al sistema Kriging es necesario hacerle algunas observaciones:

- El Kriging, el cual es un estimador imparcial, es también un interpolador, es decir, para iguales soportes de observación v_α ($\alpha = 1, \dots, n$) y de estimación v , y los valores real Z_α y estimado Z^* son iguales, además de que la varianza de Kriging σ_k^2 es cero.
- Las expresiones del sistema Kriging y de la varianza de Kriging son completamente generales, es decir, son aplicables a cualquiera que sean los soportes de observación y estimación y el modelo estructural empleado. [6]

3. Comparación entre métodos

3.1. Comparación Visual

Gráfica de la función original

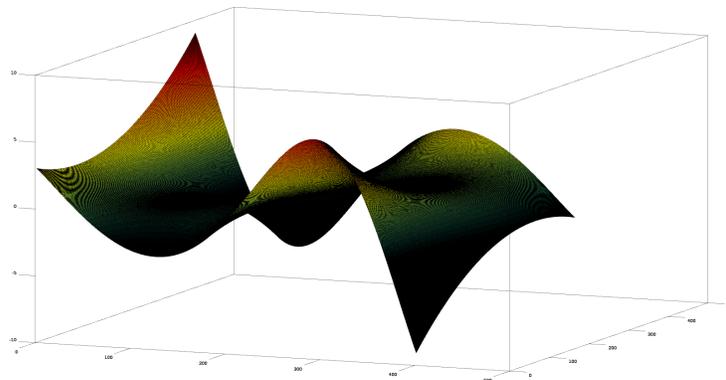


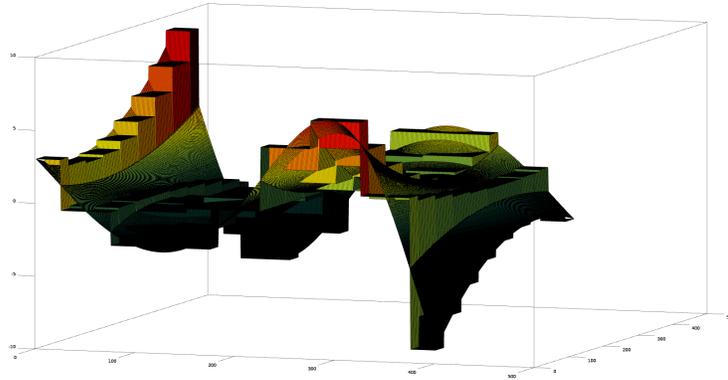
Figura 3.1: $f_1(x, y) = \sin(2x)(x^2 - xy + y^2)$

Las siguientes líneas de código generan la gráfica de la función original y la gráfica de la función interpolada utilizando interpolación Vecino más Cercano. Para los métodos Bilineal y Bicúbico es de manera similar solamente cambiamos el método de interpolación a utilizar.

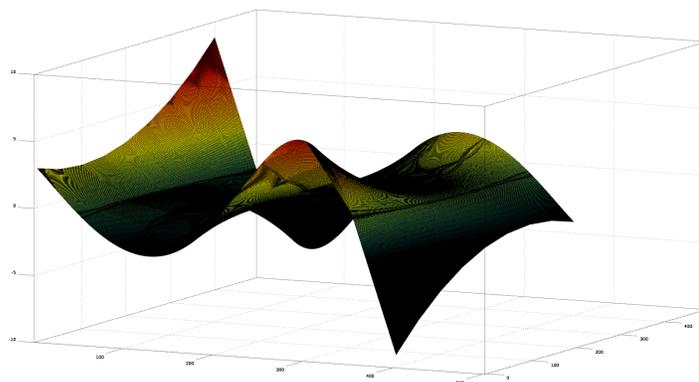
código

```
%graficas.m
%declarar la función multivariable
fun=@(x,y)( sin(2*x).*(x.^2-x.*y+y.^2) );
%parámetros
a=2; h1=0.5; h2=0.01;
%grafica de función interpolada
[X0,Y0]=meshgrid(-a:h1:a);
Zexacto=fun(X0,Y0);
%valores a interpolar
[X1,Y1]=meshgrid(-a:h2:a);
ZI=interp2(X0,Y0,Zexacto,X1,Y1,"nearest");
%gráfica de función real
[X,Y]=meshgrid(-a:h2:a);
Z=fun(X,Y);
figure; hold on
surf(Z);
surf(ZI);
hold off
```

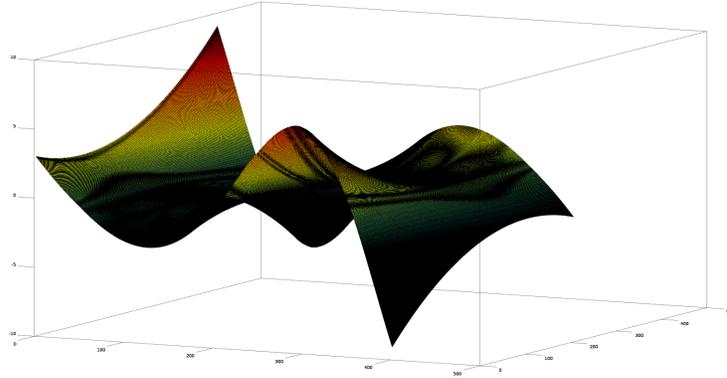
Gráfica de la función original y Vecino más Cercano



Gráfica de la función original y Bilineal



Gráfica de la función original y Bicúbico



3.2. Comparación Matemática

Para realizar la comparación entre algunos de los métodos estudiados anteriormente utilizaremos la siguiente fórmula para encontrar el error de aproximación.

$$\text{error} = \int_A (f(x, y) - \text{aproximación}(x, y))^2 dx dy$$

Con las siguientes líneas de comandos se calculará el error de aproximación para la función $f_1(x, y) = \sin(2x)(x^2 - xy + y^2)$, así como también, tomaremos el tiempo que se tarda en realizar los cálculos para luego determinar que método es mejor en base a el error y el tiempo.

```
%errordeestimacion.m
%Calcularemos el error de estimación para los métodos vecino más
    cercano, bilineal y bicúbico mediante la doble integral con la
    función dblquad contenida en Matlab.
%Calculamos el volumen de la función real
aa=2;
fun01 = @(x,y) sin(2*x).*(x.^2-x.*y+y.^2);
valorIntegral=dblquad(fun01,0,2*aa,0,2*aa)
valorIntegral =
```

19.3373

```
%LA FUNCIÓN DE INTERPOLACIÓN DEFINIDA
```

```
[X0,Y0]=meshgrid(0:.01:2*aa);
```

```
%valores exactos
```

```
Zexacto=fun01(X0,Y0);
```

```
%CALCULA EL ERROR Y EL TIEMPO QUE SE TARDA CADA MÉTODO
```

```
%MÉTODO DEL VECINO MÁS CERCANO
```

```
%Calcula el error de aproximación y el tiempo que se tarda con el  
comando tic toc.
```

```
tic
```

```
errorVecino=dblquad(@(x,y)(fun(x,y)-interp2(X0,Y0,Zexacto,x,y,'  
nearest'))).^2,0,2*aa,0,2*aa)
```

```
toc
```

```
errorVecino =
```

```
0.0147
```

```
Elapsed time is 34.369820 seconds.
```

```
%MÉTODO BILINEAL
```

```
%Calcula el error de aproximación y el tiempo que se tarda con el  
comando tic toc.
```

```
tic
```

```
errorBilineal=dblquad(@(x,y)(fun01(x,y)-interp2(X0,Y0,Zexacto,x,y,  
, 'bilinear'))).^2,0,2*aa,0,2*aa)
```

```
toc
```

```
errorBilineal =
```

```
6.0479e-07
```

```
Elapsed time is 0.098126 seconds.
```

```
%MÉTODO BICÚBICO
%Calcula el error de aproximación y el tiempo que se tarda con el
    comando tic toc.
tic
errorBicubico=dblquad(@(x,y)(fun01(x,y)-interp2(X0,Y0,Zexacto,x,y
    ,'bicubic')).^2,0,2*aa,0,2*aa)
toc
errorBicubico =
    5.4234e-12
Elapsed time is 0.134261 seconds.
```

Para verificar cual método es mejor utilizaremos la siguiente fórmula

$$M = \frac{1}{\text{error} \times t}$$

donde t es el tiempo en segundos que se tarda el programa en realizar los cálculos y $error$ es el error de aproximación. Notemos que para valores grandes de $error$ y t , M se hace pequeño, y para valores pequeños de $error$ y t , M se hace más grande. Por lo tanto entre mayor sea el valor de M el método utilizado para interpolar es mejor.

Con la siguiente línea de comando calculamos M para cada método.

```
>> Mvecino=1/errorVecino*34.369820
Mvecino =
    2.3426e+03
>> Mbilinear=1/errorBilinear*0.098126
Mbilinear =
    1.6225e+05
>> Mbicubico=1/errorBicubico*0.134261
Mbicubico =
```

2.4756e+10

De forma análoga podemos realizar los cálculos anteriores para las siguientes funciones

1. $f_2(x, y) = 3(1-x)^2 \exp(-x^2 - (y+1)^2) - 10\left(\frac{x}{5} - x^3 - y^5\right) \exp(-x^2 - y^2) - \frac{1}{3} \exp(-(x+1)^2 - y^2)$
2. $f_3(x, y) = \sin(xy)$

cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla.

| Función | Método | error de aprox. | tiempo(s) | M |
|-------------|----------|-----------------|-----------|---------------------|
| $f_1(x, y)$ | Nearest | 0.0147 | 34.369820 | 2.3426e + 03 |
| | Bilineal | 6.0479e - 07 | 0.098126 | 1.6225e + 05 |
| | Bicubic | 5.4234e - 12 | 0.134261 | 2.4756e + 10 |
| $f_2(x, y)$ | Nearest | 0.0033 | 12.945274 | 3.8946e + 03 |
| | Bilineal | 4.1251e - 07 | 0.089482 | 2.3289e + 05 |
| | Bicubic | 4.2608e - 12 | 0.109025 | 2.7367e + 10 |
| $f_3(x, y)$ | Nearest | 2.1380e - 04 | 0.139932 | 654.5057 |
| | Bilineal | 8.5321e - 09 | 0.089371 | 1.0475e + 07 |
| | Bicubic | 3.1617e - 14 | 0.183531 | 5.8047e + 12 |

Observamos que entre los métodos comparados el mayor valor de M se obtiene cuando se utiliza interpolación Bicúbica por lo cual podemos concluir que para interpolar una función es mejor el método Bicúbico en comparación al método bilineal y al método vecino más cercano.

4. Conclusiones

- El diagrama de Voronoi es una herramienta que se puede utilizar en la interpolación del vecino más cercano, ya que asigna el valor de la función en el punto dado a todos los puntos dentro de la celda.
- En la interpolación bilineal construyen y evalúan dos funciones lineales de interpolación, una para cada dirección del plano.
- La interpolación bicúbica hace uso de más datos, los resultados son generalmente más suaves.
- Para el remuestreo de imágenes es más recomendable utilizar la interpolación bicúbica sobre la interpolación bilineal o del vecino más cercano.
- Para la interpolación en dos dimensiones podemos hacer uso de funciones como `Interp2` y `dblquad` contenidas en Octave y Matlab.
- Al hacer las comparaciones se observó que el método bicúbico es el mejor interpolador entre los métodos Vecino más Cercano y Bilineal.
- En el método de Bezier una superficie, en general, no pasa a través de los puntos centrales de control; más bien, se "alarga" hacia ellos, como si cada una fuera una fuerza de atracción.

Bibliografía

- [1] Burden, Richard L., and J. Douglas. Faires. *Numerical Analysis*. 9th ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Pub., 2010. Print.
- [2] Kincaid, David, and E. Ward Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. 6th ed. Providence: American Mathematical Society, 2009. Print.
- [3] Young, Matt. "The Stone-Weierstrass Theorem." *Bundles of Topological Vector Spaces and Their Duality Lecture Notes in Mathematics (2006)*: 39-43. Section14.pdf. Queensu. Web. 28 Jan. 2016.
- [4] Pinzón, Wilson Jairo. "Some Interpolation Methods to Generate a Digital Increase Model." *Revista De Topografía Azimut (n.d.)*: n. pag. AZIMUT 2.indb. Udistrital. Web. 24 Nov. 2015.
- [5] Diego Murillo, Irene Ortega, Juan David Carrillo, Andrés Pardo, and Jeiser Rendón. "Comparación De Método De Interpolación Para La Generación De Mapas De Ruido En Entornos Urbanos." *Ing. USBMed, Vol. 3 (Enero-Junio 2012)*: n. pag. 2012. Web. 22 Apr. 2016.
- [6] Martín A. Díaz Viera. "Geoestadística Aplicada." (n.d.): n. pag. Instituto De Geofísica Y Astronomía, CITMA, Cuba, 2002. Web. 02 May 2016.
- [7] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. "Numerical Recipes in Fortran 77, The Art of Scientific Computing, Second Edition, Volume 1 of Fortran Numerical Recipes." N.p., 1992. Web. 09 May 2016.
- [8] "Multivariate Interpolation." Wikipedia. Wikimedia Foundation, n.d. Web. 16 Nov. 2015.