UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADO:

"TEOREMA DEL RESIDUO Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES"

PRESENTADO POR:

GARCIA ANDRADE, DAMARIS ELIZABETH
VASQUEZ VASQUEZ, RUDIS BLADIMIR

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

DOCENTE DIRECTOR:

MSc. JORGE ALBERTO MARTINEZ GUTIERREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, NOVIEMBRE DE 2014

SAN MIGUEL EL SALVADOR CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

ING. MARIO ROBERTO NIETO LOVO
RECTOR

MS.D ANA MARIA GLOWER DE ALVARADO
VICE RECTORA ACADEMICA

DRA. ANA LETICIA ZAVALETA DE AMAYA
SECRETARIA GENERAL

LIC. FRANCISCO CRUZ LETONA
FISCAL GENERAL

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

LIC. CRISTOBAL HERNAN RIOS BENITEZ

DECANO

LIC. CARLOS ALEXANDER DIAZ

VICE-DECANO

LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNANDEZ

SECRETARIO

Índice

de contenido

Páginas

INTRODUCCION

El presente trabajo de tesis se realiza orientado en el Análisis Complejo el cual es una de las ramas clásicas de las matemáticas que tiene sus raíces un poco antes del siglo XIX, con el propósito de facilitar al lector nuestra investigación previamente se desarrolla teoría preliminar introduciendo una recopilación de conceptos básicos, propiedades fundamentales de funciones; teoremas de vital importancia que están especialmente enfocados en el análisis complejo, también se presenta como la serie de Laurent es similar a la serie de Taylor excepto cuando la función no es holomorfa en un punto el teorema de Taylor ya no es aplicable en ese punto, además el comportamiento de los punto que hacen que la función no sea holomorfa los cuales son llamados puntos singulares por lo tanto la función admite una representación en serie de Laurent que nos permitirá asimismo caracterizar los diferentes tipos de singularidades aisladas de la función, además estableceremos la relación que existe entre el residuo y la serie de Laurent.

Por otra parte el teorema de Cauchy nos afirma que la integral de una función que es holomorfa sobre y en el interior de un camino cerrado es siempre cero. Sin embargo al extender el teorema a funciones con singularidades aislada las hipótesis del teorema ya no se cumplen, por lo que el valor de la integral no resulta en general igual a cero sino que cada singularidad aporta un término el cual es el residuo de la función en el punto singular, este resultado está contemplado en unos de los teorema más importante del análisis complejo llamado el Teorema del Residuo del que se presentan dos enunciados que se diferencian con respecto a su camino y su índice.

El Teorema del Residuo solo lo aplicaremos cuando el número de puntos singulares es finito dejamos abierta la posibilidad para futuras investigaciones cuando el número de puntos singulares sea infinito.

Finalmente El teorema del residuo nos permitirá hacer uso del cálculo de residuos para evaluar integrales de funciones cuyas trayectorias encierran varias singularidades independientemente de cualquier tipo de singularidad ya sea polo, removibles o esenciales, por lo cual conoceremos algunas de sus aplicaciones en el capítulo III al cálculo de integrales donde se han seleccionado varios tipos de ellos como integrales definidas , integrales impropias también se conocerán aplicaciones como el Teorema de Rouché; el Principio del Argumento y sumas de Series.

CAPITULO I

1. TEORIA PRELIMINAR

1.1 HISTORIA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos es un tema que ha sido muy poco estudiado en las distintas etapas de la educación, tanto a nivel básico y diversificado e incluso en la universidad. Al estudiar los números complejos nos damos cuenta que es un sistema muy importante, porque integra varias ramas de la matemática como lo son la trigonometría, la geometría y el álgebra, entonces resulta bastante interesante indagar un poco más acerca de este tema, comenzando por su historia.

Isaac Asimov en su libro "De los números y su historia", relata una historia en la que un profesor de Sociología en su clasificación de la humanidad agrupó a los matemáticos entre los místicos junto con los poetas y los teólogos, ya que para él los matemáticos son místicos porque creen en números que no tienen realidad, para explicarlo dijo lo siguiente, "La raíz cuadrada de menos uno no tiene existencia los matemáticos lo llaman imaginario, pero de alguna manera mística creen que tiene alguna clase de existencia", la verdad es que no hay nada de místico en ellos, son tan reales como cualquier otro.

Los números complejos fueron ignorados al inicio por ser para la mayoría un poco extraños y difíciles de representar, al comienzo los hombres solamente aceptaban los números naturales por ser los más adecuados para contar objetos que comúnmente se consideran como unidades.

Sin embargo al medir magnitudes como la longitud o el peso las fracciones se hicieron imprescindibles, los egipcios y babilonios se las arreglaron para elaborar métodos que les permitieron operar con fracciones.

Los griegos descubrieron que había cantidades definidas que no podían ser expresadas como cocientes de números enteros, la noción de número se extiende más allá ya que los griegos no aceptaban que hubiera números menores que el cero. Los números complejos aparecen entre las soluciones de las ecuaciones cuadráticas que generan raíces cuadradas de números negativos los cuales no poseen soluciones reales, los matemáticos griegos que conocían métodos geométricos de resolución, consideraban estos problemas irresolubles, el surgimiento de los números complejos no se debió solo a la imposibilidad de resolver algunas ecuaciones cuadráticas, sino que viene también de las ecuaciones cúbicas, más adelante con el surgimiento del álgebra durante la edad media, el concepto de número se amplía para manipular ecuaciones, desligadas de la geometría.

Leonhar Euler matemático y físico suizo intentó comprender qué eran realmente los números complejos y en su "Vollständige Auleitung zur Algebra" (Introducción Completa al Algebra) que apareció primero en Rusia en 1768-1769 y en Alemania en 1770, que es el mejor texto de álgebra del siglo XVIII dice: "Puesto que todos los números concebibles son mayores que cero, menores que cero o iguales a cero, está claro que las raíces cuadradas de números negativos no pueden ser incluidas entre los números posibles (reales).

En consecuencia debemos decir que son números imposibles y esta circunstancia nos lleva al concepto de tales números que por su naturaleza son imposibles y ordinariamente se les llama **imaginarios o ideales**, porque existen sólo en la imaginación".

En 1777 Leonhar Euler introdujo el símbolo (por imaginario), que después se adoptó de manera general, de modo que podemos escribir, **"*i* "** para expresar la raíz cuadrada de cualquier número negativo, cualquier número que combine unidades reales e imaginarias se denomina "complejo".

Comienza el apartado de “Variable Compleja” con una introducción histórica que permite comprender las dificultades que los matemáticos han ido encontrando y resolviendo hasta que la variable compleja se ha convertido en lo que hoy.

Esta introducción requiere distintas lecturas, quizás, una al principio, pero al ir avanzando en el estudio de la variable compleja se aconseja volver de nuevo a leerlo, pues entonces se estará en condiciones de comprender el interés y la importancia de algunos resultados.

El análisis complejo es una herramienta extremadamente poderosa con un gran número de aplicaciones prácticas de forma inesperada a la solución de los problemas físicos.

Por ejemplo, los caminos de integración, nos facilitan el trabajo al momento de calcular integrales, mediante la investigación de las singularidades de la función en las regiones del plano complejo cercano y entre los límites de la integración.

El que una función compleja sea diferenciable en el sentido complejo tiene consecuencias mucho más fuertes que la diferenciabilidad usual en los reales, por ejemplo toda función holomorfa se puede representar como una serie de potencias en algún disco abierto donde la serie converge a la función, si la serie de potencias converge en todo el plano complejo se dice que la función es entera. En particular, las funciones holomorfas son infinitamente diferenciables, un hecho que es notablemente diferente de lo que ocurre en las funciones reales diferenciables. La mayoría de las funciones elementales como, polinomios, la función exponencial y las funciones trigonométricas son holomorfas.

1.1.1 Funciones de Variables Compleja

La teoría de las funciones de variable compleja se puede considerar como se observa al analizar su azarosa historia, uno de los milagros de la matemática

La derivabilidad de una función real en un abierto solo implica, en general que esta tenga derivada en los punto del abierto; Sin embargo en el campo complejo basta que una función sea derivable en un conjunto abierto para que sea infinitamente derivable en dicho conjunto.

La condición de la derivabilidad es más fuerte en el campo complejo, puesto que se deben cumplirse las condiciones de Cauchy Riemann, pero entonces se verifican otras relaciones: las funciones como transformaciones son conformes (es decir son funciones que preservan ángulos, en el caso más común la función está entre dominios del plano complejo), sus funciones componentes son armónicas ya que verifican la relación de Laplace son desarrollables en serie de potencias tiene función primitiva, la integral a lo largo de un camino cerrado es nula entre otras propiedades.

La teoría moderna de las funciones de variable compleja ha tenido cuatro fundadores: Carl Friedrich Gauss (1777-1855); Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Bernhard Riemann (1826-1866) y Karl Weierstrass (1815 -1897).

Carl Friedrich Gauss no ejerció influencia en su tiempo por no haber publicado nada y haberse encontrado sus manuscrito mucho tiempo después de su muerte, cada uno de los otros tres matemáticos siguió un camino diferente, Cauchy impuso algunas condiciones restrictivas para que dicha funciones tengan derivadas continuas, su teoría reposa sobre un teorema muy importante relativo a las integrales complejas y sobre toda la noción de residuo. Esta teoría contiene inicialmente los planteamientos geométricos de Riemann y los aritméticos de Weierstrass.

La imagen geométrica jugó un papel predominante en Riemann, una función compleja era para Riemann una ley por medio de la cual las superficies se puede transformar y su objetivo fue el de representar estas transformaciones y analizarlas.

Weierstrass se preocupó por el desarrollo en series de potencia de la función dentro de su círculo de convergencia, que puede prolongarse mediante la prolongación holomorfa, todo resultaba para él como una consecuencia de la teoría de series y esta teoría estaba establecida sobre bases sólidas. Los primeros desarrollos en serie de las funciones elementales aparecieron en el siglo XVII.

Taylor utilizó las fórmulas de interpolación de Gregory-Newton para tener en 1712 la fórmula que lleva su nombre y obtener el desarrollo en serie de potencia de una función, cuyas propiedades se probaron por procedimientos algebraicos.

Los analistas se habituaron así, a lo largo del siglo XVIII a manipular sin diferencia argumentos reales y complejos no solo en expresiones racionales sino incluso en la función exponencial o en las funciones trigonométricas.

1.1.2 Cauchy y la Variable Compleja

Cauchy estudio con precisión la convergencia de una serie de potencias resaltando la existencia del radio de convergencia, y también el problema recíproco, la posibilidad de desarrollar localmente en serie de potencia una función holomorfa, siendo el radio de convergencia la distancia del centro a la singularidad más próxima.

Figura 1.1.1: Augustin Louis Cauchy

Además Cauchy Escribió:"Memorie sur les integrales definies prises entre des limites imaginaires" ("Memoria de las integrales definidas tomado entre los límites imaginarios") auténtico el punto de partida de las integrales curvilíneas, donde aparece el concepto de variación continua de las curvas que hoy se conoce por homotopía y el caso en el que la función se "vuelve infinita" en puntos de un rectángulo de lados paralelos a los ejes, hasta 1850 Cauchy no consideró otras singularidades que los polos.

Introdujo la noción de residuo en "Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitesimal" ("En un nuevo tipo de cálculo similar al cálculo infinitesimal") dando en una nota posterior la fórmula de los residuos para un rectángulo.

Estableció la fórmula integral que llevo el nombre de "Teorema integral de Cauchy" y las desigualdades de Cauchy de las que se sigue de forma inmediata el Teorema de Liouville, esencial en el estudio de las funciones enteras.

Una extensión importantes de estos resultados se debe a Pierre Alphonse Laurent (1813-1854) quien consideró funciones holomorfas definidas sobre coronas circulares (anillos) y llegó al desarrollo conocido con su nombre que es el punto de partida del estudio de las singularidades esenciales.

Como ya se ha indicado Cauchy no presentó jamás una visión general de su teoría que fue elaborada en distintas memorias e innumerables notas publicadas en Comtes Rendues (Recuentos emitidos).

Alrededor de 1844 Joseph Liouville (1809-1882) en sus clases impartidas en el Collége France (colegio de Francia) dedicadas a funciones periódicas, intentó establecer una exposición sistemática de las funciones de variable compleja.

La obra de Cauchy sobre funciones complejas es muy extensa, Cauchy podía haber escrito un libro sobre este tema pero nunca lo hizo. Los primeros que hicieron esta labor fueron Charles Auguste Briot y Jean-Claude Bouquet ambos matemáticos franceses.

1.2 EL CAMPO $\mathbb{C}$ DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Una característica importante del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es que tiene una clase positiva $\mathbb{R}^+$, que define el orden canónico en $\mathbb{R}$ que por ser compatible con las operaciones tiene, entre otras, la propiedad de que para toda a^2es un positivo y por lo tanto no existe un número real x que satisfaga la ecuación polinómica $x^2 + 1 = 0$, para resolver este tipo de ecuaciones es necesario construir un campo en el que existiera un numero imaginario i que satisficiera la ecuación $x^2 + 1 = 0$, que fuera una extensión de $\mathbb{R}$.

En la época en que surgió este problema no se conocía el teorema que asegura que para todo campo K y todo polinomio $f(x)$ no constante, con coeficientes en K , existe una extensión de K en la que el polinomio tiene al menos una raíz, teorema que valida la construcción, que resulta más natural y que la hubiera librado de las objeciones injustificadas que en su momento se hicieron y que se referían al invento de los números imaginarios.

1.2.1 Forma binómica de un número complejo

El símbolo usual (x, y) para representar pares ordenados no es conveniente para representar el número complejo (x, y). Para ello, observa que:

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$$
$$(x, 0)(y, 0) = (xy, 0)$$

Esto indica que los números complejos de la forma $(x, 0)$ se comportan respecto a la suma y la multiplicación de números complejos exactamente de la misma forma que lo hacen los números reales respecto a la suma y multiplicación propias. En términos más precisos, $\mathbb{R} \times \{0\}$ es un subcampo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$.

Por esta razón, en las operaciones con números complejos podemos sustituir los complejos del tipo $(x, 0)$ por el número real *x*. Es decir, hacemos la identificación $(x, 0) = x$ con dicha identificación el producto $x(u, v)$ tiene dos posibles interpretaciones:

- Producto del escalar real *x* por el vector (u, v) (estructura vectorial de$\mathbb{R}^2$)
- Producto del complejo $(x, 0)$ por el complejo (u, v). Pero ambos coinciden y son iguales a (xu, xv).

El número complejo $(0,1)$ lo representaremos por i y lo llamaremos **unidad imaginario**

Con ello tenemos que

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

Ahora podemos escribir

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0,1)(y, 0) = x + iy$$

Una expresión de la forma $z = x + iy$ la **expresión binómica** del número complejo (x, y) donde *x* es la parte real e *y* es la parte imaginaria del número complejo, se escribe $Re(z)$ e $Im(z)$ para representar las partes real e imaginaria de *z*.

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si y solamente si $a = c$ y $b = d$, consideramos los números reales como el subconjunto del conjunto de los números complejos con $b = 0$.

En este caso por ejemplo, los números complejos $0 + bi$ representa el número real 0. Si $a = 0$, el número complejo $0 + bi$ o bi se llama un numero imaginario puro.

Los números reales $\mathbb{R}$ tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden, ambas estructuras están armoniosamente relacionadas, pero en $\mathbb{C}$ no hay nada parecido, podemos definir relaciones de orden en $\mathbb{C}$, pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica.

En efecto, si suponemos que $\leq$ es una relación de orden en $\mathbb{C}$ compatible con su estructura algebraica, como $i \neq 0$ habría de ser $0 < i^2 = -1$ (esto todavía no es contradictorio porque pudiera ocurrir que la relación $\leq$ no respetara el orden de $\mathbb{R}$), pero también $0 < 1^2 = 1$, luego $0 < 1 + (-1) = 0$ y eso es contradictorio; por tanto, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo es por ello que no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden.

1.2.2 Fundamentos Axiomáticos del sistema de números complejo

Desde el punto de vista estrictamente lógico, es convenientes definir un número complejo como pareja ordenada $z = (x, y)$ de números reales $x \; e \; y$ sometida a ciertas definiciones operacionales.

1.2.2.1 Igualdad.

Dos números complejos $z_1 \;\; y \;\; z_2$ se dicen que son **iguales** si tienen iguales las partes real e imaginaria. Es decir:

Si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ entonces

$$z_1 = z_2 \quad \text{Si y solo si } x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2$$

1.2.2.2 Suma.

Si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ entonces

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

1.2.2.3 Producto.

Si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ entonces

$$z_1 . z_2 = (x_1, y_1) . (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

En particular, $(x, 0) + (0, y) = (x + 0, 0 + y)$ y $(0, 1)(y, 0) = (0.y - 1.0, y.1 + 0.0)$

$$(x, 0) + (0, y) = (x , y) \qquad (0, 1)(y, 0) = (0, y).$$

Luego tenemos que el número complejo:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1). (y, 0).$$

Por lo tanto el conjunto de los números complejos es, en consecuencia, una Extensión natural de los números reales.

Varias propiedades de la suma y el producto de numero complejos coinciden con la de los números reales. Mostramos las más básicas:

1.2.2.4 Leyes conmutativas.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 , \quad z_1 z_2 = z_2 z_1 .$$

1.2.2.5 Leyes asociativas.

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

1.2.2.6 Leyes distributivas.

$$z(z_1+z_2)=zz_1+zz_2,$$

1.2.2.7 Identidades.

La identidad aditiva 0 = (0, 0) y la identidad multiplicativa 1 = (1, 0) satisfacen que:

$$z+0=z \quad \textbf{y} \quad z.1=z$$

1.2.2.8 Inversos.

Cada número complejo z tiene un inverso aditivo (-z) y, si z ≠0 un inverso multiplicativo z^{-1} que satisface

$$z+(-z)=(-z)+z=(0,0) \text{ y } zz^{-1}=z^{-1}z=1.$$

1.2.2.9 Demostración de las leyes planteadas.

Si $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$ y $z_3=(x_3,y_3)$

1.2.2.9.1 Ley conmutativa para la suma:

$$z_1+z_2=(x_{1,}y_1)+(x_{2,}y_2)=(x_1+x_{2,}y_1+y_2)=(x_2+x_{1,}y_2+y_1)=(x_{2,}y_2)+(x_{1,}y_1)=z_2+z_1$$

Por lo tanto se cumple la ley conmutativa para la adición.

1.2.2.9.2 Ley conmutativa para el producto:

$$\begin{aligned} z_1z_2=(x_{1,}y_1)(x_{2,}y_2)=(x_1x_2-y_1y_{2,}y_1x_2+x_1y_2)&=(x_2x_1-y_2y_{1,}x_2y_1+y_2x_1)\\ &=(x_2x_1-y_2y_{1,}y_2x_1+x_2y_1)\\ &=(x_{2,}y_2)(x_{1,}y_1)=z_2z_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la ley conmutativa para el producto.

1.2.2.9.3 Ley asociativa para la suma:

$$(z_1+z_2)+z_3=((x_1,y_1)+(x_2,y_3))+(x_3,y_3)=(x_1+x_2,y_1+y_2)+(x_3,y_3)=(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)$$
$$=(x_1+(x_2+x_3),y_1+(y_2+y_3))=(x_1,y_1)+(x_2+x_3,y_2+y_3)$$
$$=(x_1,y_1)+((x_2,y_2)+(x_3,y_3))=z_1+(z_2+z_3).$$

Por lo tanto cumple la ley asociativa para la suma.

1.2.2.9.4 Ley asociativa para el producto

$$(z_1z_2)z_3=((x_1,y_1)(x_2,y_3))(x_3,y_3)=(x_1x_2-y_1y_2,y_1x_2+x_1y_2)(x_3,y_3)$$

$$=((x_1x_2-y_1y_2)x_3-(y_1x_2+x_1y_2)y_3,x_3(y_1x_2+x_1y_2)+(x_1x_2-y_1y_2)y_3)$$
$$=((x_1x_2x_3-y_1y_2x_3)-(y_1x_2y_3+x_1y_2y_3),(x_3y_1x_2+x_3x_1y_2)+(x_1x_2y_3-y_1y_2y_3))$$
$$=(x_1x_2x_3-y_1y_2x_3-y_1x_2y_3-x_1y_2y_3,x_3y_1x_2+x_3x_1y_2+x_1x_2y_3-y_1y_2y_3)$$
$$=(x_1x_2x_3-x_1y_2y_3-y_1y_2x_3-y_1x_2y_3,x_3y_1x_2-y_1y_2y_3+x_3x_1y_2+x_1x_2y_3)$$
$$=(x_1(x_2x_3-y_2y_3)-y_1(y_2x_3+x_2y_3),y_1(x_3x_2-y_2y_3)+x_1(x_3y_2+x_2y_3))$$
$$=(x_1,y_1)(x_2x_3-y_2y_3,x_3y_2+x_2y_3)$$
$$=(x_1,y_1)((x_2,y_2)(x_3,y_3))=z_1(z_2z_3).$$

1.2.3 Operaciones fundamentales con números complejos

Al efectuar operaciones con números complejos podemos proceder como en el álgebra de números reales, reemplazando i^2 por -1.

1.2.3.1 Adición.

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i.$$

1.2.3.2 Sustracción

$$(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=(a-c)+(b-d)i\ .$$

1.2.3.3 Multiplicación.

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

1.2.3.4 División.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

1.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

Es usual interpretar el número complejo $x + iy$ como el vector del plano (x, y) y, en ese sentido, se habla del plano complejo.

El eje horizontal recibe el nombre de **eje real**, y el eje vertical recibe el nombre de **eje imaginario.**

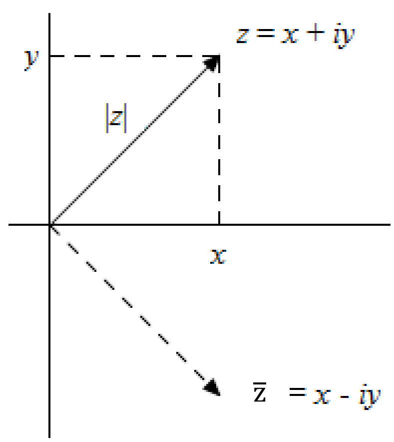


Figura 1.3.1

Definición 1.3.1.

El conjugado complejo, o conjugado de un numero complejo $z = x + yi$ es $\bar{z} = x - yi$.

Definición 1.3.2.

Valor absoluto o módulo de un numero complejo $x + yi$ esta denotado como $|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Observa que $\sqrt{x^2 + y^2}$ está definido sin ambigüedad; es la raíz cuadrada del número real no negativo $x^2 + y^2$.
Geométricamente $\overline{z}$ es sencillamente la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia euclídea del punto (x, y) a $(0,0)$ o, también, la longitud o norma euclídea del vector (x, y) **(Figura 1.3.1).**

Definición 1.3.3.

La **distancia** entre dos números complejos z y w se define como $|z - w|$.

La representación gráfica de la suma puede verse en la **figura 1.3.2**. Dos números complejos $z = x + iy$ y $w = u + iv$ determinan un paralelogramo cuya diagonal es $z + w$.

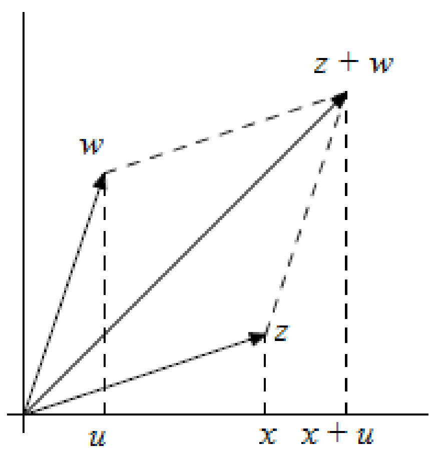


Figura 1.3.2

1.4 DESIGUALDAD TRIANGULAR

Las propiedades de los módulos y los conjugado hacen posible deducir algebraicamente la desigualdad triangula, que proporciona una cota superior al módulo de la suma de dos números complejos.

Una identidad importante que relaciona el conjugado de un número complejo con su módulo es la igualdad $|z|^2 = z\,\bar{z}$ que se deduce directamente de la definición de módulo de un número complejo, y que se ha hecho notar antes, permite utilizar el producto complejo para trabajar con módulos y es de gran utilidad. La usaremos para probar que para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$. Notar que $|z| = Re\, z \iff z \in \mathbb{R}_0^+$.

Demostraremos que:

a) $|zw| = |z||w|$ y

b) $|z + w| \leq |z| + |w|$

a) Basta observar que $|zw|$ y $|z||w|$ son números no negativos cuyos cuadrados coinciden, pues;

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zwzw = z\bar{z}\,w\overline{w} = |z|^2\,|w|^2 = (|z||w|)^2. \blacksquare$$

b) Es suficiente probar que $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$. En efecto:

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} \\
&= (z + w)(\bar{z} + \overline{w}) \\
&= z\bar{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \bar{z}w \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2\,Re(z\overline{w}) \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|Re\,(z\overline{w})| \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\bar{w}|$$
$$= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|$$
$$= (|z| + |w|)^2.$$

Por tanto $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$, lo que se quería probar ■

1.5 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

La identidad de Euler, indica que cuando θ es un número real, tenemos

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\, sen\, \theta \qquad \textbf{[1.1]}$$

Demostración:

Para demostrar la fórmula de Euler empleemos el desarrollo en serie de potencia de la función $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, suponiendo que es válido para cuando la variable x es un numero complejo z.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Si tomamos $z = i\,\theta$. Nos queda:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots$$

$$= 1 + i\frac{\theta}{2!} + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + i\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - i\,\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \cdots$$

Agrupando tenemos:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + ..\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)$$

Estos son los desarrollos de $\cos\theta$ y $sen\ \theta$ respetivamente, así que

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\ sen\ \theta$. Lo que se quería demostrar ■

Ahora bien, si cambiamos el signo de θ en la expresión anterior, obtenemos

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\ sen(-\theta) = \cos\theta - i\ sen\ \theta \qquad \textbf{[1.2]}$$

Sumando las ecuaciones **[1.1]** y **[1.2]** obtenemos la expresión real

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

O bien, finalmente,

$$cos\ \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \textbf{[1.3]}$$

Si en lugar de sumar estas ecuaciones, restamos **[1.2]** de la ecuación **[1.1], se** habría obtenido:

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\ sen\ \theta$$

Es decir ,

$$sen\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \textbf{[1.4]}$$

Nótese que:

$$sen\,(-z) = -sen\ z \quad \text{y} \quad \cos(-z) = \cos z$$

Asimismo cuando y es cualquier número real, podemos usar las funciones hiperbólicas

$$\mathrm{sen\,y} = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \qquad y \qquad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

Para escribir,

$$sen\ (iy) = i\ senh\ y \quad \text{y} \quad \cos\ (iy) = \cosh y$$

Las otras cuatros funciones trigonométicas se define en términos del seno y coseno por las relaciones usuales:

$$\tan z = \frac{sen\,\theta}{\cos\theta} \quad ; \quad \text{ctg}\ z = \frac{\cos\theta}{sen\,\theta} \quad ; \quad \sec z = \frac{1}{\cos\theta} \quad ; \quad \text{cosec}\, z = \frac{1}{sen\,\theta}$$

1.6 DEFINICIONES PRELEMINARES

Definición 1.6.1.

Una **Curva o arco de curva** es una aplicación continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, tal que a un número real t le corresponda un numero complejo $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones reales y continuas en $[a,b]$. Hay que distinguir entre la curva y su imagen (también llamada traza o soporte) que denotaremos por $\gamma^* = \gamma\big[[a,b]\big]$, por ser γ una función continua la imagen es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Al punto $\gamma(a)$ se le llama punto inicial de la curva γ y a $\gamma(b)$ punto final. Ambos reciben el nombre de extremos de la curva.

Definición 1.6.2.

Una **curva es cerrada** cuando sus extremos coinciden, esto es $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definición 1.6.3.

Una curva es un arco **simple** o **arco de Jordan** si no se corta así mismo; esto es, γ es simple cuando se cumple que $z(t_1) \neq z(t_2)$ si $t_1 \neq t_2$. ver **Figura 1.6.1.**

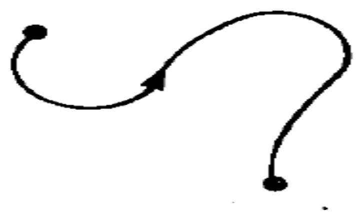


Figura 1.6.1

Definición1.6.4.

Diremos que una **curva es regular** si la aplicación que la define es derivable con derivada continua esto es, es de clase C^1. **(Figura 1.6.2)**

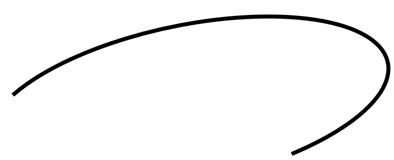


Figura 1.6.2

Definición 1.6.5.

Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es regular a trozos, que tambien la llamaremos **camino,** si existe una partición de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ de manera que $\gamma^* = \gamma\big[[t_{k-1}, t_k]\big]$ es regular para $1 \leq k \leq n$.

Definicion 1.6.6.

Una **curva es cerrada simple** o **curva de Jordan** si es cerrada y simple excepto en los extremos a y b . **(Figura 1.6.3).**

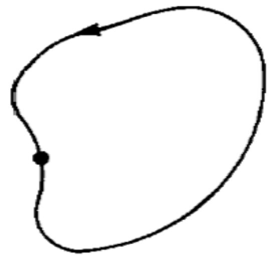


Figura 1.6.3

Definición 1.6.7.

Llamaremos **curva opuesta,** de una curva dada $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, y denotaremos por $-\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ a la curva definida por

$$(-\gamma)(t) = \gamma(b + a - t)$$

Se trata de una curva que tiene la misma razón que γ pero la recorre en sentido contrario, esto es, el punto inicial de $-\gamma$ es el punto final de γ y viceversa.

Definición 1.6.8.

Dada dos curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ con $\gamma(b) = \sigma(c)$, definimos una nueva curva que llamaremos **yuxtaposición** de γ y σ o también suma de γ y σ , y la notaremos por $\gamma + \sigma$, como

$$(\gamma + \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(t), & si\ a \leq t \leq b \\ \sigma(c - b + t), & si\ b \leq t \leq b + d - c \end{cases}$$

Geométricamente se trata de pegar las imágenes de γ y σ juntas, de ahí que se exige que con $\gamma(b) = \sigma(c)$, esto es, que podamos pegarlas de forma continua. Evidentemente en los puntos de unión entre una curva y otra puede que no haya derivabilidad.

Definición 1.6.9.

Se llama **entorno (o vecindad)** de radio r, de un punto z_0 al conjunto de todos los puntos z tales que $|z - z_0| < r$ donde r es cualquier número positivo dado **(Figura 1.6.4).**

$$|z - z_0| < r$$

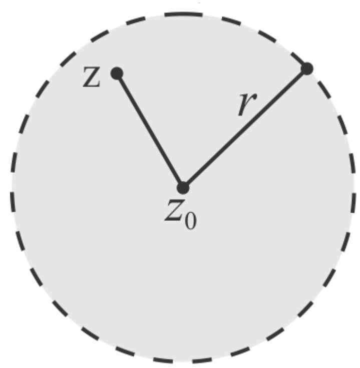


Figura 1.6.4

Definición 1.6.10.

Un punto $\boldsymbol{z_0}$ se llama un **punto interior** de un conjunto S si podemos encontrar una vecindad de $\boldsymbol{z_0}$ cuyos puntos pertenecen todos al conjunto S

Definición 1.6.11.

Un conjunto es **abierto** cuando todos sus puntos son interiores.

Definición 1.6.12.

Un punto z_0 es llamado un **punto de acumulación** de un conjunto S, si cada vecindad de z_0 contiene al menos un punto de S distinto de z_0.

Definición 1.6.13.

Un conjunto S **es acotado** si existe un número real positivo R tal que toda z en S satisfaga $|z| < \text{R}$. Si esta condición no se cumple decimos que S es **no acotado.**

Definición 1.6.14.

Un conjunto es **compacto,** si es cerrado y acotado.

Definición 1.6.15.

Un conjunto S es **conexo** si no puede ser representado como unión disjunta de dos conjuntos abiertos y no vacíos tales que ninguno de ellos contenga puntos fronteras del otro.

Definición 1.6.16.

Un **dominio** es un conjunto conexo abierto.

Definición 1.6.17.

Una **Región** es un dominio con todos, algunos o ninguno de sus puntos fronteras.

Definición 1.6.18.

Una región G se llama **simplemente conexa** si cualquier curva simple cerrada contenida en G encierra solo puntos de G.

Definición 1.6.19.

Una región es **múltiplemente conexa** si es una región con agujeros. **(Figura 1.6.5)**

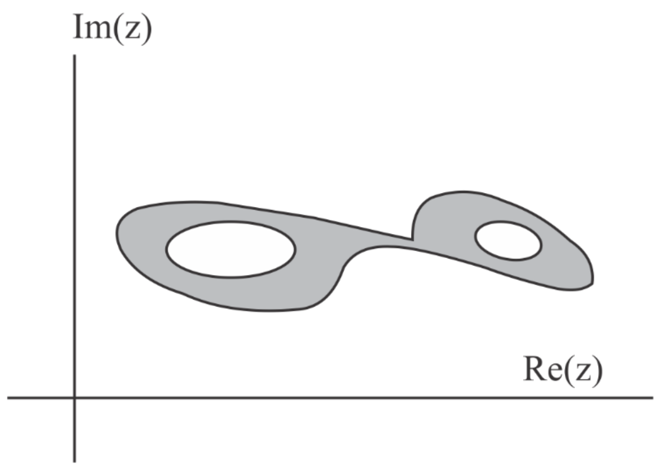


Figura 1.6.5

Definición 1.6.20.

Si los puntos de un conjunto S se pueden poner en correspondencia uno a uno con los números naturales 1, 2,3… (Aplicación biyectiva), se dice que el conjunto S es **numerable**. En caso contrario se dice que es no numerable.

Definición 1.6.21.

Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$. Una función $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en Ω si es derivable en todos los puntos de Ω. En tal caso está definida la Función $f':\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ que a cada punto le asigna su derivada. Diremos que f es **holomorfa** en un punto z si es holomorfa en un entorno de z.

Definición 1.6.22.

Un disco de radio ε y centro z_0 se denomina **disco abierto** cuando no incluye los puntos de la frontera del disco lo expresamos así $D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Definición 1.6.23.

Un disco de radio ε y centro z_0 se denomina **disco cerrado** cuando incluye los puntos de la frontera de dicho disco **(Ver Figura 1.6.6)**. Lo expresamos así

$$\overline{D}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

$\overline{D}(z_0, \varepsilon)$

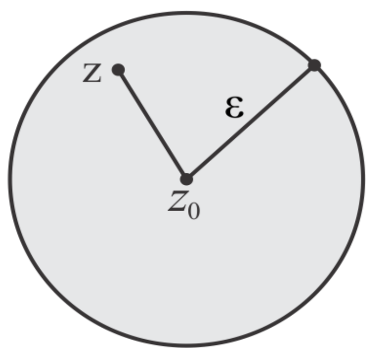


Figura 1.6.6

Definición 1.6.24.

Llamaremos **entorno reducido** de radio *r* de un número complejo z_0 al conjunto:

$$D'(z_0, r) = A(z_0, 0, r) = D(z_0, r) \setminus \{z_0\}.$$ **(Figura 1.6**

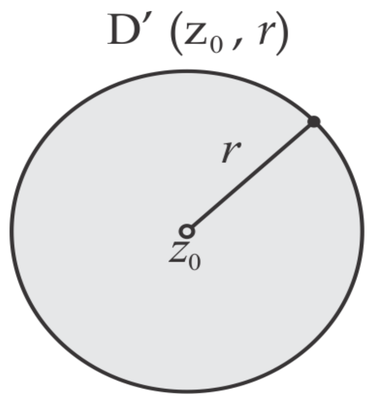


Figura 1.6.7

En estos términos, un punto z_0 es una singularidad aislada de una función f si f está definida (y es holomorfa) en un entorno reducido de z_0 pero no en z_0.

Definición 1.6.25.

La **serie** determinada por una sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ de números complejos es la serie $\sum_{n=1}^{k} a_n$

La serie $\sum_{n=1}^{k} a_n$ es **convergente** si la sucesión de las sumas parciales $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ converge.

Una condición necesaria (no suficiente) para que la serie $\sum_{n=1}^{k} a_n$ sea **convergente** es que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ .Cuando una serie no converge se dice que es divergente.

Definición 1.6.26.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie real de los modulo $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Definición 1.6.27.

Diremos que dos integrales impropias tienen el **mismo carácter**, y lo representamos por " $\sim$ ", si son simultáneamente convergentes, divergentes o oscilantes.

Definición 1.6.28.

Los subconjuntos cerrados de conjuntos compactos son compactos.

Definición 1.6.29.

Si un conjunto es finito entonces es cerrado.

1.7 TEOREMAS BASICOS

El siguiente teorema, es enunciado, omitiendo su respectiva demostración dado que se requiere más teoría que no se considera en el presente trabajo.

Teorema 1.7.1.

Una curva de Jordán divide al plano complejo en dos Regiones o dominios (abiertos conexos), una de ellas es acotado y diremos que es el interior a la curva.

Teorema 1.7.2. (Teorema de Morera)

Si f es continua en un dominio D simplemente conexo. Si $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$ para todo camino cerrado $\gamma \in$ D, entonces f es holomorfa.

Demostración:

Como Si $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$, $\oint_{C} f(w)dw$ es independiente de cualquier camino C que empiece en z_1 y acabe en z. Entonces podemos definir la función

$$F(z) = \int_{z_1}^{z} f(w)\, dw \;.$$

De donde se infiere $F'(z) = f(z)$ y luego como la derivada de una función holomorfa es holomorfa, así f es holomorfa. ■

Teorema 1.7.3.

Sea $f : [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, t]$ para todo $t \geq a$ y sea $b \geq a$. Entonces

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \;\sim\; \int_{b}^{+\infty} f(x)dx$$

Demostración:

Como

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{t} f(x)dx \right) = \int_{a}^{b} f(x)dx + \lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)dx$$

El límite de la izquierda es finito, infinito o no existe si el límite de la derecha es finito, infinito o no existe respectivamente. Y viceversa. Como se deseaba demostrar ■

Teorema 1.7.4. (Teorema de comparación de integrales impropias)

Sean $f, g: [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables en $[a,t]$ para todo $t \geq a$ y supongamos que existe $b>a$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq b$.

Entonces:

a) Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ tambien converge

b) Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ tambien diverge.

Demostración:

Por el **Teorema 1.7.3**

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \sim \int_b^{+\infty} f(x)dx \quad \text{y} \quad \int_a^{+\infty} g(x)dx \sim \int_b^{+\infty} g(x)dx$$

Luego basta probarlo $[b,+\infty)$.

a) Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, $G(t) = \int_b^{t} g(x)\,dx$ está acotado superiormente.

Por ser $0 \leq f(x) \leq g(x)$, se tendrá que

$$F(t) = \int_b^t f(x)dx \leq \int_b^t g(x)dx = G(t)$$

Luego F(t) está acotada superiormente y $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ es convergente

b) Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge también lo es $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ y, por tanto $F(t) = \int_b^t f(x)dx$ no está acotado superiormente. Como $F(t) \leq G(t)$, G no está acotada superiormente y $\int_b^{+\infty} g(x)dx$ es divergente, luego $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es divergente. ■

1.8 ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES

Si $f(z)$ y $g(z)$ son integrables a lo largo de un camino γ, entonces

a) $\int_\gamma \left(f(z) + g(z)\right) dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \int_\gamma g(z)\, dz$

b) $\int_{\gamma+\psi} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \int_\psi f(z)\, dz$

c) $\int_\gamma \mathrm{K} f(z)\, \mathrm{dz} = \mathrm{K}\int_\gamma f(z)\, \mathrm{dz}$ con K una constante real o compleja

d) $\int_{-\gamma} f(z)\, \mathrm{dz} = -\int_\gamma f(z)\, dz$

e) Para cualquier constante no negativa M tal que los valores de f sobre γ y L la longitud de γ satisfaga $|f(z)| \leq ML$, se deduce que el modulo del valor de la integral de f a lo largo de γ no supera a ML:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq ML.$$

1.9 SERIES DE POTENCIAS

Las series de potencias son un tipo particular de series de especial importancia pues cualquier función holomorfa puede representarse por medio de términos del tipo

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Veamos entonces las propiedades que cumplen las series de potencia:

a) $S(z)$ puede integrarse termino a termino es decir

$$\int_{\gamma} f(z) S(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} f(z)(z - z_0)^n\, dz$$

Donde $f\ (z)$ es una función continua en γ.

b) En particular si $f\ (z)\ =\ 1$ de acuerdo con la propiedad anterior tenemos que

$$\int_{\gamma} \mathrm{S(z)}\, dz = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} (\mathrm{z} - \mathrm{z}_0)^{\mathrm{n}}\, dz = 0$$

Como el resultado anterior es válido para todo camino γ, por el teorema de Morera deducimos que S es holomorfa en toda la región de definición.

c) $S(z)$ Puede derivarse termino a termino

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

d) dos series pueden sumarse y restarse, asimismo pueden multiplicarse y dividirse.

El siguiente resultado sobre integrales curvilíneas y convergencia uniforme resulta útil en muchas ocasiones.

Teorema 1.9.1.

Sea ϕ un arco y $\{f_n\}_{n=1}$ una sucesión de funciones continuas sobre $\phi *$ que converge uniformemente a una función f.

Entonces existe

$$\lim_n \int_\varphi f_n(z)\,dz = \int_\varphi f_n(z)\,dz$$

Observación:

Denotaremos por $\phi *$ a la imagen del arco descrito en el Teorema.

Demostración:

Notar que la función f es continua por ser limite uniforme de funciones continuas.

Sea $\epsilon > 0$. Existe un numero natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $\left| f(z) - f_n(z) < \epsilon/(L(\varphi) + 1) \right|$ para todo z ϵ ϕ^*.

Entonces

$$\sup\left\{\left| f(z) - f_n(z) \right| / z\epsilon\phi^*\right\} \leq (L(\phi) + 1)$$

Y por consiguiente,

$$\left| \int_\varphi f(z)dz - \int_\varphi f_n(z)dz \right| = \left| \int_\varphi \left(f(z) - f_n(z)\right) dz \right| \leq \frac{L(\phi)\varepsilon}{L(\phi)+1} < \varepsilon$$

Esto completa la prueba. ■

Lema 1.9.2. (Recubrimiento de una Región)

Sea f holomorfa en una region cerrada **R** constituida por los puntos interiores a un camino cerrado simple positivamente orientado γ junto con los puntos del propio γ. Para todo numero positivo ε, la region **R** puede ser recubierta con un numero finito de cuadrados parciales, indicados por $j = 1,2,\dots,n$ tales que en cada uno de ellos hay un punto fijo z_j para el cual la desigualdad

$$\left|\frac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j}\right| < \varepsilon \qquad (z \neq z_j) \qquad \textbf{[1.5]}$$

Se satisface para todos los demas puntos de ese cuadro o cuadrado parcial.

Demostracion:

Primeramente consideremos la posibilidad de que en el recubrimiento contruido exista algun cuadrado o cuadrado parcial en que no exista un tal punto z_j.

Si esa subregion es un cuadrado, contruimos cuatro cuadrados mas pequeños uniendo los puntos medios de sus lados opuestos (**Figura.1.9.1**).

Si la subregion es un cuadrado parcial, hacemos lo mismo y descartamos las porciones que quedan fuera de la region **R.** Si en alguna de estas subregiones no existe un punto z_j que haga valida la desigualdad **[1.5]** para todos los demas puntos de ella distintos de z, construimos cuadrados todavia mas pequeños, etc.

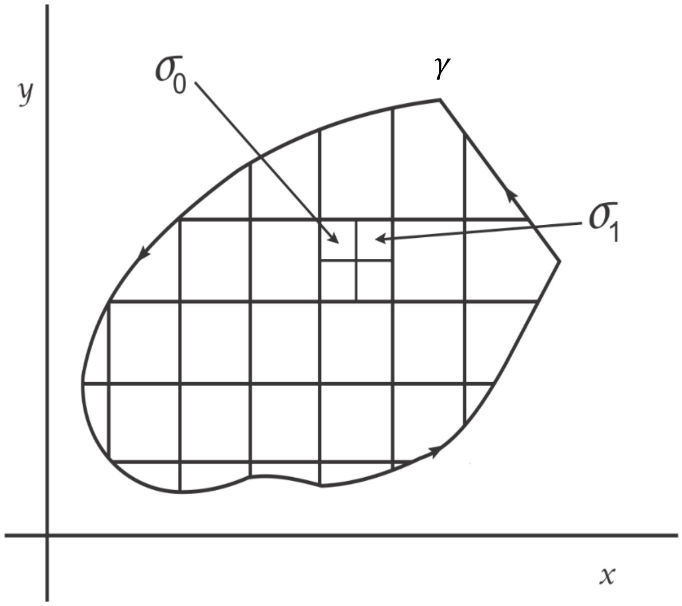


Figura.1.9.1

Haciendo esto con cada una de las subregiones originales que lo requiera, encontraremos tras un número finito de pasos que podemos recubrir la region **R** con una colección de cuadrados y cuadrados parciales en los que el lema es cierto.

Supongamos, por otro lado, que los deseados puntos z_j no existen tras subdividir una de las subregiones dadas un número finito de veces. Sea σ_0 esa subregion, si es un cuadrado, y sea σ_0 el cuadrado completo del que forma parte, en caso de que se trate de un cuadrado parcial. Tras subdividir σ_0 al menos uno de los cuatro cuadrados nuevos, denotemoslo por σ_1, debe de contener puntos de **R** pero no un apropiado z_j. Entonces subdividimos σ_1 y continuamos de esta manera.

Puede suceder que tras la subdivisión de un cuadrado σ_{k-1} (k = 1,2,…), sea posible elegir más de uno de los subcuadrados. Para especificar una elección tomamos como σ_k el que está más abajo, y si hay varios en pie de igualdad el que está más ala izquierda.

Dada la forma en que se ha construida la sucesión infinita

$$\sigma_o, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \dots. \qquad \textbf{[1.6]}$$

De cuadrados encajados, es fácil probar que hay un punto z_0 común a todos los σ_k; además, cada uno de estos cuadrados contiene puntos de **R** aparte del z_0. Recuérdese que los tamaños de los cuadrados de la sucesión eran decrecientes y nótese que cualquier δ entorno $|z - z_0| < \delta$ de z_0 contiene tales cuadrados cuando sus diagonales miden menos que δ. Todo δ entorno $|z - z_0| < \delta$ contiene, por tanto, puntos de **R** distintos de z_0, y eso significa que z_0 es un punto de acumulación de **R.** como es **R** es cerrada, se sigue que z_0 es un punto de **R.**

La función f es holomorfa en **R** y en particular en z_0. En consecuencia, existe $f'(z_0)$.De acuerdo con la definición de derivada, para cada ε positivo existe un δ entorno $|z - z_0| < \delta$ tal que la desigualdad

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

Se satisface para todos los puntos de ese camino distintos de z_0. Pero el camino $|z - z_0| < \delta$ contiene un cuadrado σ_k cuando el entero **K** es lo bastante grande como para que la diagonal de ese cuadrado mida menos que δ (**Figura 1.9.2**).

Así pues z_0 sirve como un punto z_j en **[1.5]** para la subregión constituida por el cuadrado σ_k ó una parte de σ_k. En contra de la manera que se elaboró la sucesión **[1.6],** por tanto, no es necesario subdividir σ_k. Llegamos así a una contradicción, y la demostración del lema queda terminada. ■

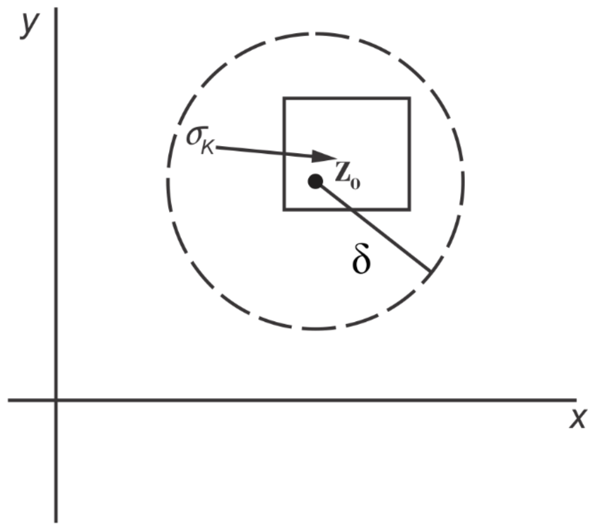


Figura 1.9.2

Teorema 1.9.3. (Teorema de Cauchy para un camino cerrado simple)

Si una función f es holomorfa en todos los puntos interiores a un camino cerrado simple y sobre los puntos de γ, entonces

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

Demostración:

Dado un número ε positivo arbitrario consideremos el recubrimiento R de **lema 1.9.2 (Recubrimiento de una región)**. Definimos sobre la j- ésimo cuadrado o cuadrado parcial la siguiente función, donde z_j es el punto de esa subregión que aparecería en el enunciado del lema:

$$\delta_j(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) & si \quad z \neq z_j \\ 0 & si \quad z = z_j \end{cases} \qquad \textbf{[1.7]}$$

Por la desigualdad **[1.5]** del **Lema 1.9.2** (Recubrimiento de una región)

$$\left|\delta(z_j(z)\right| < \varepsilon \qquad \textbf{[1.8]}$$

En todos los puntos z de la subregión sobre la que $\delta_j(z)$ está definida. Así mismo la función $\delta_j(z)$ es continua en la subregión, ya que $f(z)$ lo es y

$$\lim_{z \to z_j} \delta_j(z) = f'(z_j) - f'(z_j) = 0$$

A continuación, sea γ_j $(j = 1,2,\dots,n)$ los caminos orientados positivamente de los cuadrados (o cuadrados parciales) anteriores que recubren R.

A la vista de **[1.7],** el valor de f en un punto z sobre cualquier γ_j particular se puede escribir

$$f(z) = f(z_j) - z_j f'(z_j)z + (z - z_j)\delta_j(z);$$

Y eso significa que

$$\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \left[f(z_j) - z_j f'(z_j)\right]\int_{\gamma_j} dz + f'(z_j)\int_{\gamma_j} z\,dz + \int_{\gamma_j} (z - z_j)\,\delta_j(z)\,dz \qquad \textbf{[1.9]}$$

Pero

$$\int_{\gamma_j} dz = 0 \quad y \quad \int_{\gamma_j} z\,dz = 0$$

Ya que la función 1 y z admiten primitiva en todo el plano complejo. De modo que la ecuación **[1.9]** se reduce a

$$\int_{\gamma_j} f(z)dz = \int_{\gamma_j} (z - z_j)\delta_j(z)dz \qquad (j = 1,2,\dots n) \qquad \textbf{[1.10]}$$

La suma de las n integrales de la izquierda en las ecuaciones **[1.10]** se puede escribir

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$$

Ya que las dos integrales a lo largo del camino común a cualquier par de subregiones adyacente se cancelan entre sí, porque están orientadas en sentido opuesto en cada una de ellas **(Figura 1.9.3).** Solo sobreviven las integrales a lo largo de los arcos que forman parte de γ. Luego, debido a que las ecuaciones **[1.10].**

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} (z - z_j)\, \delta_j(z)dz$$

Y por tanto

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| = \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{\gamma_j} (z - z_j)\, \delta_j(z)dz \right| \qquad \textbf{[1.11]}$$

Usamos ahora la propiedad **1.8 d)** de las integrales, para hallar una cota superior a cada valor absoluto de la derecha en la desigualdad **[1.11].** A tal efecto, recordemos primero que a cada γ_j coinciden entera o parcialmente con el camino de un cuadrado.

En cualquiera de los dos casos, sea s_j la longitud de un lado del cuadrado, como en la $j - ésima$ integral tanto la variable z como el punto z_j están en ese cuadrado,

$$|z - z_j| \leq \sqrt{2s_j}.$$

Entonces, por la desigualdad **[1.8]** sabemos que cada integrando de la derecha en **[1.11]** cumple la condición

$$|(z - z_j)\delta_j(z)| < \sqrt{2s_j\varepsilon}. \qquad \textbf{[1.12]}$$

En cuanto a la longitud de γ_i,es $4s_j$si γ_i es el camino de un cuadrado.

En ese caso, sea A_j es el área del cuadrado completo, encontramos que

$$\left| \int_{\gamma_j} (z - z_j)\delta_j(z)dz \right| < \sqrt{2s_j\varepsilon 4s_j} = 4\sqrt{2A_j\varepsilon}. \quad \textbf{[1.13]}$$

Si γ_j es el camino de un cuadrado parcial, su longitud no excede de $4s_j + L_j$, donde L_j es la longitud de aquella parte de γ_j que al mismo tiempo parte de γ.

De nuevo, denotamos por A_j el área del cuadrado completo, encontramos que

$$\left| \int_{\gamma_j} (z - z_j)\delta_j(z)dz \right| < \sqrt{2s_j\varepsilon(4s_j + L_j)} < 4\sqrt{2A_j\varepsilon} + \sqrt{2}\, SL_j\varepsilon, \quad \textbf{[1.14]}$$

Donde S es la longitud de un lado de algún cuadrado que encierra todo el camino γ así como a todos los cuadrados del recubrimiento original R **(Figura 1.9.3).**Nótese que la suma de todos los A_j no supera a S^2.

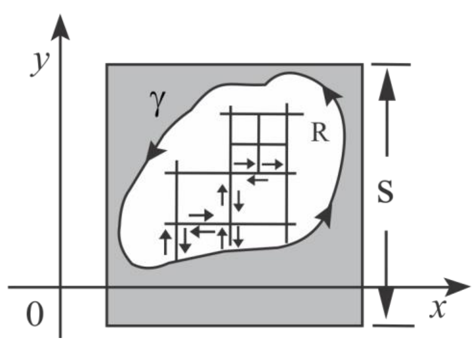


Figura 1.9.3

Si L denota la longitud de γ , se desprende ahora de la desigualdad **[1.11], [1.13] y [1.14]** que

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| < \left(4\sqrt{2S^2} + \sqrt{2}\,SL\right)\varepsilon.$$

Como el valor de ε es arbitrario, podemos escogerlo de manera que el lado derecho de esta última desigualdad sea tan pequeño como queramos.

El lado izquierdo, que es independiente de ε, ha de ser, por consiguiente, igual a cero, y la afirmación $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ queda probada. Esto completa la demostración del teorema de Cauchy.■

El teorema de Cauchy admite la siguiente extensión relativa a dominios simplemente conexos.

Teorema 1.9.4. (Teorema de Cauchy extendido a dominios simplemente conexos)

Si una función f es holomorfa en un dominio simplemente conexo G, entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \qquad \textbf{[1.15]}$$

Para todo camino cerrado γ contenido en G.

Demostracion:

En efecto, si γ es simple y esta contenida en G, la funcion f es holomorfa en todo punto interior de γ y en todo punto de γ ; y el **Teorema 1.9.3** (**Teorema de cauchy para caminos simples)** asegura la validez de **[1.15].**

Ademas si γ es cerrado pero intersecta consigo mismo un numero finitos de veces, consta de un numero finito de caminos cerrados simples como ilustra la **Figura 1.9.4**, aplicando el **Teorema 1.9.3** a cada uno de estos caminos cerrados simples obtenemos el resultado deseado para γ. ∎

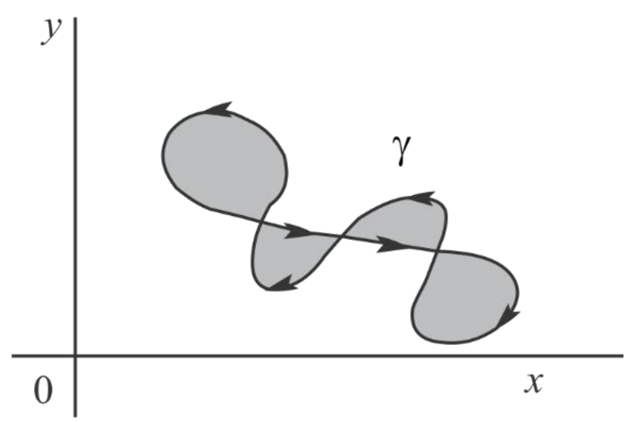


Figura 1.9.4

También el Teorema de Cauchy se puede, asimismo, extender de modo que admita integrales a lo largo del camino de un dominio múltiplemente conexo.

Teorema 1.9.5.

Supongamos que

a) γ es un camino cerrado simple, con orientación positiva.

b) γ_k (k = 1, 2,3,…, n) denota un número finito de caminos cerrados simples, orientados positivamente, interiores a γ y cuyos interiores no tienen puntos en común. (**Figura 1.9.5**).

Si una función f es holomorfa en la región cerrada formada por los puntos interiores a γ o del propio γ, excepto los puntos interiores a cada γ_k entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_k} f(z)dz = 0 \qquad \textbf{[1.16]}$$

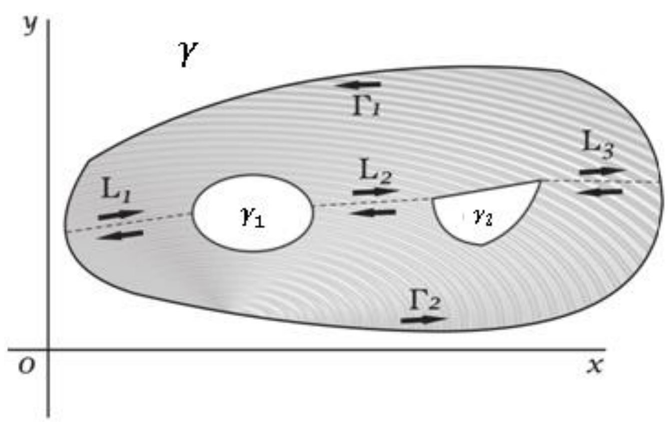


Figura 1.9.5

Demostración

Para probarlo introducimos un camino poligonal L_1 formado por un numero finito de segmentos rectos unidos entre sí, que conecte el camino exterior γ con el camino interior γ_1, introducimos otro camino poligonal L_2 que una γ_1 con γ_2 y continuamos así con L_{n+1} conectando γ_n con γ.

Como se ha indicado mediantes las flechas de medias punta en la **Figura 1.9.5,** se pueden formar dos caminos cerrados simples Γ_1 y Γ_2 consistente cada uno en caminos poligonales L_k o L_{-k} y fragmentos de γ y de γ_k , y orientado de manera que los puntos encerrados por ellos queden a la izquierda. Ahora podemos aplicar a f el **Teorema 1.9.3** (**Teorema de cauchy para caminos simples)** sobre Γ_1 y Γ_2, y la suma de las integrales sobre esos caminos resulta cero. Como las integrales en dirección opuesta a lo largo de cada L_k se cancelan, solo quedan las integrales a lo largo de γ y de γ_k ; y se concluye que

$$\int_{\gamma} f(z)dz + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_k} f(z)dz = 0 \blacksquare$$

Corolario 1.9.6.

Sean γ_1 y γ_2 caminos cerrados simples positivamente orientados, donde γ_2 es interior a γ_1 **(Figura 1.9.6).** Si una función f es holomorfa en la región cerrada que forman esos caminos y los puntos situados entre ellos, entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

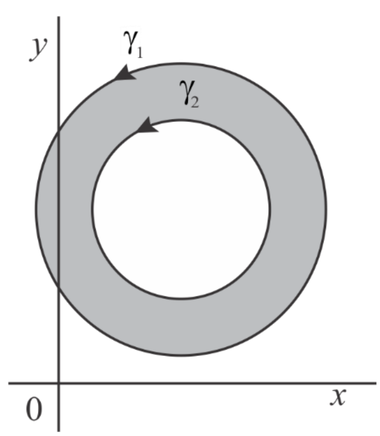


Figura 1.9.6

Teorema 1.9.7. (Fórmula Integral de Cauchy)

Sea $f\ (z)$ holomorfa en el interior y en los puntos de un camino cerrado simple γ , orientado positivamente. Si z_0 es un punto interior a γ .
Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Es decir, la función en z_0, esta relacionada con la función en γ, este es un resultado muy importante en variable compleja.

Se puede utilizar este resultado para calcular integrales si lo ponemos como

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi\, i\ f(z_0) \qquad \textbf{[1.17]}$$

Demostración:

Al ser f continua en z_0, a cada ε, por pequeño que sea, le corresponde un δ tal que $\left| f\ (z) - f\ (z_0)\right| < \varepsilon$ Siempre que $|z - z_0| < \delta$, elijamos ahora un numero positivo ρ menor que δ y tan pequeño que en el circulo positivamente orientado $|z - z_0| < \rho$, denotado γ_0 en la (**Figura 1.9.7)**, sea interior a γ.

Entonces

$$\left| f\ (z) - f\ (z_0)\right| < \varepsilon \quad \text{Siempre que } |z - z_0| = \rho. \qquad \textbf{[1.18]}$$

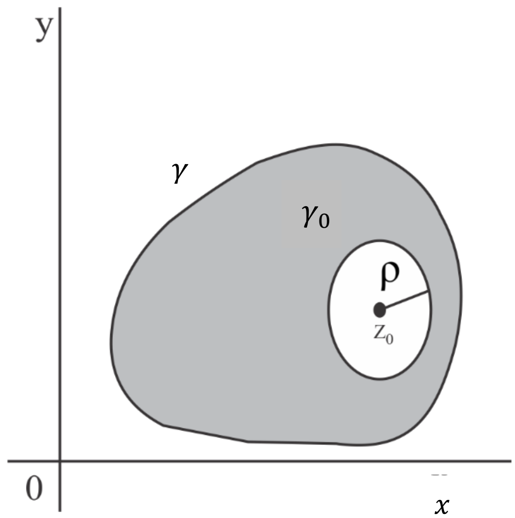


Figura 1.9.7

Puesto que la función $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ es holomorfa en la región cerrada formada por γ y γ_0 y los puntos entre ellos, sabemos por el **Corolario 1.9.6** que

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

Lo que nos permite escribir

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z-z_0} = \int_{\gamma_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \qquad \textbf{[1.19]}$$

Ahora bien

$$\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$$

Y por tanto la ecuación **[1.19]** se convierte en

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0) = \int_{\gamma_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \qquad \textbf{[1.20]}$$

Refiriéndonos a **[1.18]** y observando que la longitud de γ_0 es $2\pi\rho$, podemos aplicar la propiedad **1.8. d)** de las integrales

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \right| < \frac{\varepsilon}{\rho}\, 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

En vista de la ecuación **[1.20]**, tenemos,

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0) \right| < 2\pi\varepsilon.$$

Como el lado izquierdo de esta desigualdad es una constante no negativa menor que un número positivo arbitrariamente pequeño, debe ser cero, y en consecuencia la ecuación **[1.17]** es válida y el teorema está demostrado. ■

En el siguiente ejemplo se muestra bajo qué condiciones es aplicable la formula Integral de Cauchy.

Ejemplo 1.9.8.

En las siguientes figuras se muestra bajo qué circunstancias es aplicable la formula

Integral de Cauchy.

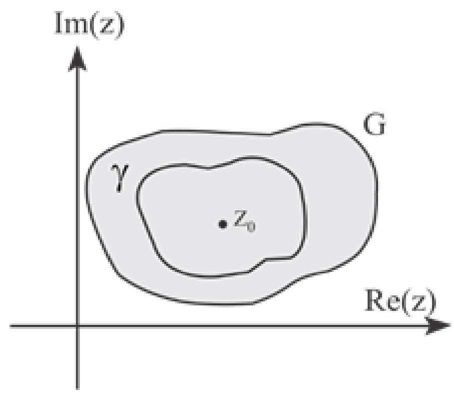
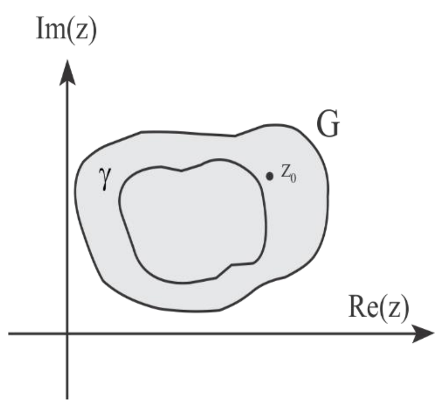


Figura 1.9.8

El punto z_0 está dentro de γ

Si se aplica fórmula de Cauchy



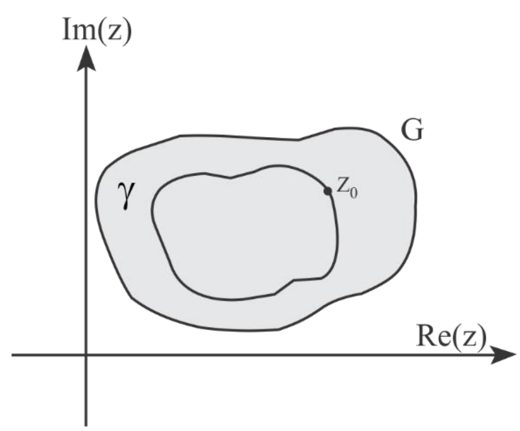


Figura1.9.9

El punto z_0 no está

dentro de γ

Figura 1.9.10

El punto z_0 esta

en el borde de γ

No se aplica la fórmula de Cauchy

1.10 SERIES DE TAYLOR

Teorema 1.10.1.

Sea f una función holomorfa en un disco abierto $|z - z_0| < R_0$ centrado en z_0 y de radio R_0 (ver **Figura 1.10.1**). Entonces en todo punto z de ese disco $f(z)$ admite la representación en serie de potencia.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < R_0) \qquad \textbf{[1.21]}$$

Donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 1,2,...) \qquad \textbf{[1.22]}$$

Es decir, esta serie de potencias converge a $f(z)$ cuando $|z - z_0| < R_0$.

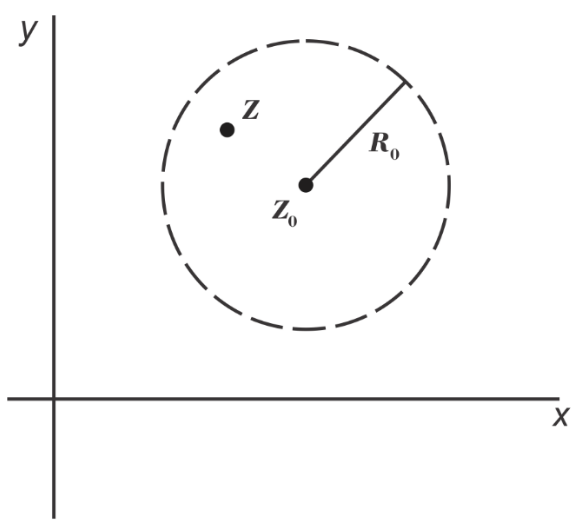


Figura 1.10.1

Este es el desarrollo de $f(z)$ en serie de Taylor en torno al punto z_0. Es la familiar serie de Taylor del cálculo, adaptada a funciones de una variable compleja.

Hagamos notar que, con el convenio de que $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$ y $0! = 1$

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + ... \qquad \textbf{[1.23]}$$

Obsérvese además que cuando f es entera, el radio R_0 del disco puede tomarse arbitrariamente grande. En estas circunstancias, la serie converge a $f(z)$ en todo punto z del plano finito, y la condición de validez se convierte en $|z - z_0| < \infty$.

Demostración

Demostraremos primero el teorema con $z_0 = 0$; la demostración para el caso de z_0 arbitrario será consecuencia inmediata. Para empezar, sea C_0 cualquier circulo positivamente orientado $|z| = r_0$ contenido en el disco $|z| < R_0$, pero lo bastante grande como para que el punto z sea interior a él **(Figura 1.10.2).**

Se aplica entonces El **Teorema 1.9.7. (Fórmula Integral de Cauchy)**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)}{s - z} ds \qquad \textbf{[1.24]}$$

Ahora bien

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s}\left[\frac{1}{1 - (z/s)}\right]$$

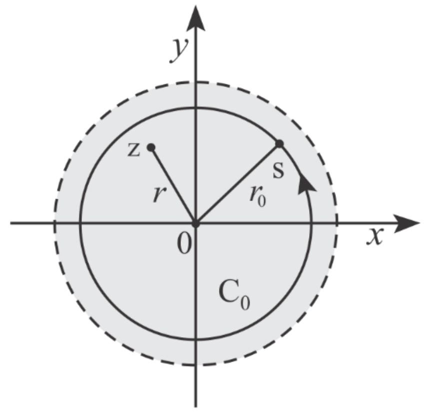


Figura 1.10.2

Haciendo uso de la identidad

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \qquad (z \neq 1),$$

Obtenemos

$$\frac{1}{1-c} = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{N-1} + \frac{c^N}{1-c} \qquad (N = 1,2,\ldots)$$

Cuando c es cualquier número complejo distinto de la unidad.

Por tanto

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s}\left[1 + \left(\frac{z}{s}\right) + \left(\frac{z}{s}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z}{s}\right)^{N-1} + \frac{(z/s)^N}{1-(z/s)}\right]$$

Y en consecuencia

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} z + \frac{1}{s^3} z^2 + \ldots + \frac{1}{s^N} z^{N-1} + z^N \frac{1}{(s-z)s^N}$$

A continuación, multiplicamos esta ecuación por $f(s)/(2\pi i)$, e integrando cada uno de sus miembros a lo largo de C_0 respecto de s. A la vista de **[1.24]** y de que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(s)}{s^{n+1}}ds=\frac{f^{(n)}(n)}{n!} \qquad (n = 0,1,2,\ldots),$$

Podemos escribir el resultado como sigue:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{f^{(N-1)}(0)}{(N-1)!}z^{N-1} + \rho_N(z)\,, \qquad \textbf{[1.25]}$$

Donde

$$\rho_N(z)=\frac{z^N}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(s)}{(s-z)s^N}ds \qquad \textbf{[1.26]}$$

Supongamos que $|z| = r$. Entonces, si s es un punto de C_0,

$$|s - z| \geq \big||s| - |z|\big| = r_0 - r.$$

Así pues, si M denota el valor máximo de $|f(s)|$ sobre C_0; luego

$$\lim_{N\to\infty}\rho_N(z)=0$$

Luego vemos de la ecuación **[1.25]** que

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\ldots \qquad \textbf{[1.27]}$$

En el disco abierto $|z| < R_0$. Esto es,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n \qquad (|z| < R_0) \qquad \textbf{[1.28]}$$

Este caso especial de la serie **[1.21]** en que z_0 = 0se llama una **Serie de Maclaurin.**

Supongamos ahora que f es como en el enunciado del teorema, donde el disco de radio R_0 esta centrado en un punto arbitrario z_0. Como f es holomorfa cuando $|z - z_0| < R_0$, la función compuesta $f(z + z_0)$ es holomorfa cuando $|(z + z_0) - z_0| < R_0$.

Pero esta condición no es sino $|z| < R_0$, y se llamamos g$(z) =$ $f(z + z_0)$ la holomorfia de g en el disco $|z| < R_0$ asegura la existencia de una representación en serie de Maclaurin:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad (|z| < R_0)$$

Es decir

$$f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad (|z| < R_0)$$

Finalmente, sustituyendo z por $z - z_0$ en esta ecuación y en su condición de validez, llegamos a la deseada representación en serie de Taylor para f (z) en torno al punto z_0. ■

1.11 SERIES DE LAURENT

Si una función no es holomorfa en un punto z_0 no podemos aplicar el teorema de Taylor en ese punto. No obstante, es posible hallar una representación en serie para f (z) que contenga tanto potencias positivas como negativas de $(z - z_0)$ esta es llamada serie Laurent.

Teorema 1.11.1.

Dada una serie de la forma

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^{-n}$$

Existe un $r \geq 0$ de modo que la serie converge absoluta y casi uniformemente en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0|>0\}$ a una función holomorfa y diverge en $D(z_0,r)$ (admitiendo la posibilidad $r=+\infty$, en cuyo caso la serie diverge en todo $\mathbb{C}$).

Demostración:

Consideremos la serie de potencia

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$$

Sea R ≥ 0 tal que g converge absoluta y casi uniformemente a una función holomorfa en el disco $D(0,R)$ y diverge en el complementario del disco cerrado. Sea $r=1/R$ (entendiendo que $1/{+\infty}\ =0\ y\ 1/0=+\infty$).

Sea $A=\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0|>r\}$. La función $h\colon \mathbb{C}\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ dada por $h(z)=1/(z-z_0)$ es biyectiva y holomorfa (en particular continua). Además biyectiva el abierto A con disco $D(0,R)$.

La función $h \circ g$ es, pues, una función holomorfa en A y viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^{-n}$$

Por lo tanto la serie f converge en A. Análogamente se ve que si f convergería en un punto z tal que $|z - z_0| < r$ entonces g convergería en un punto $z' = h(z)$ tal que $|z'| > R$.

Finalmente, si K es un compacto contenido en A, entonces $h[K]$ es un compacto contenido en $D(0, R)$ y g converge uniformemente en $h[K]$. De aquí se sigue que f converge uniformemente en K. ■

Teorema 1.11.2. (Teorema de Laurent)

Sea f una función holomorfa en un dominio anular $R_1 < |z - z_0| < R_2$ y sea γ cualquier camino cerrado simple en torno de z_0, orientado positivamente, contenido en ese dominio (**Figura 1.11.1**). Entonces, en todo punto z de ese dominio, $f(z)$ admite la representación en serie.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad (R_1 < |z - z_0| < R_2) \qquad \textbf{[1.29]}$$

Donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad (n = 0, 1, \ldots) \qquad \textbf{[1.30]}$$

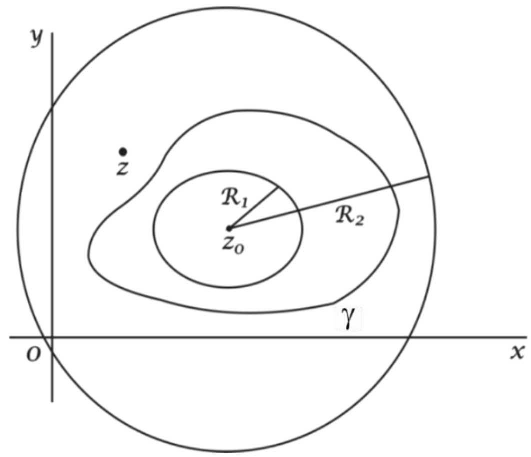


Figura 1.11.1

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz \qquad (n = 1,2,\ldots) \qquad \textbf{[1.31]}$$

El desarrollo de **[1.29]** se suele escribir

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad (R_1 < |z-z_0| < R_2) \qquad \textbf{[1.32]}$$

Donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad \textbf{[1.33]}$$

Cualquiera de las dos formas **[1.29]** o **[1.32],** se llama una Serie de Laurent. Nótese que el integrando en **[1.31]** se puede escribir $f\ (z)(z-z_0)^{n-1}$. Así es claro que cuando f es holomorfa en el disco $|\ z-z_0\ | <$ R2 , este integrando lo es también. Por tanto todos los coeficiente b_n son ceros y como

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0,1,2 \ldots)$$

El desarrollo de **[1.29]** se reduce a una serie de Taylor centrada en z_0.

Sin embargo si f no es holomorfa en z_0 pero lo es en el resto del disco $|z - z_0| < R_2$, él radio R_1 puede tomarse arbitrariamente pequeño.

La representación **[1.29]** es válida entonces para $0 < |z - z_0| < R_2$. Análogamente si f es holomorfa en todo el plano finito exterior al círculo $|z - z_0| = R_1$, la condición de validez es $R_1 < |z - z_0| < \infty$.

Teorema 1.11.3. (Desigualdad de Cauchy)

Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie convergente en $D(z_0, R)$ y sea

$M(r) = \sup\{ |f(z)| : z \in \partial D(z_0, r)\}$ para $0 < r < R$. Entonces $|a_n| \leq M(r)/r^n$.

Demostración:

Por el teorema de Taylor (**Teorema 1.10.1)** y la unicidad del desarrollo en serie nos dan que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $n = 1,2,...$ y por **Teorema 1.9.7 (Fórmula Integral de Cauchy)** resulta que

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi i} 2\pi r \frac{M(r)}{r^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n}$$

Por lo tanto

$|a_n| \leq \dfrac{M(r)}{r^n}$. Como se deseaba demostrar.■

Teorema 1.11.4. (Teorema de Liouville)

Toda función entera y acotada es constante.

Demostración:

Sea f una función entera y supongamos que $|f(z)| < M$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
Sea $r > 0$ y sea $M(r) = \sup\{|f(z)| : z \in \partial D(z_0, r)\}$. Obviamente $M(r) \leq M$ para todo $r > 0$.

Desarrollamos f en serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ **Teorema 1.11.3 (desigualdad de Cauchy)** nos da que $|a_n| \leq M(r)/r^n \leq M/r^n$, pero $n \geq 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} M/r^n = 0$, luego $a_n = 0$ para $n \geq 1$, luego $f(z) = a_0$ es constante. ■

Teorema 1.11.5. (Teorema de Cauchy para Triángulos)

Sea f una función holomorfa en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo de vértices a, b, c contenido en Ω, esto es,

$$\Delta(a,b,c) = \{\mu a + \lambda b + \gamma c : \mu + \lambda + \gamma = 1 : \mu, \lambda, \gamma \geq 0\} \subset \Omega$$

Entonces

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\, dz = 0$$

Demostración:

Llamemos $\gamma = [a,b,c,a], \Delta = \Delta(a,b,c)$ $e\ I = \int_\gamma f(w)\,dw$. El objetivo es probar que $I = 0$ para esto consideramos los puntos medios de los lados

$$a' = \frac{b+c}{2} \qquad b' = \frac{a+c}{2} \qquad c' = \frac{a+b}{2}$$

Podemos escribir I en la forma

$$I = \int_\gamma f(w)\,dw = \int_{[a',b',c',a'],} f(w)\,dw + \int_{[a',b',c',a'],} f(w)\,dw + \int_{[a',b',c',a'],} f(w)\,dw + \int_{[a',b',c',a'],} f(w)\,dw$$

Esta igualdad es cierta ya que hay caminos (los interiores a los triángulos) que están recorridos en direcciones opuestas luego las respectivas integrales se anulan

(**Ver Figura 1.11.2**) si llamamos J_1, J_2, J_3, J_4 a estas cuatro integrales, I_1 a una de las integrales de mayor módulo de entre ellas, y $\gamma_1 = [a_1,b_1,c_1,a_1]$ al camino de I_1, tenemos

$$|I| \le 4\,|I_1|$$

Repitiendo el mismo argumento para el triángulo $\Delta_1 = \Delta(a_1,b_1,c_1)$ obtenemos una sucesión de triángulos.

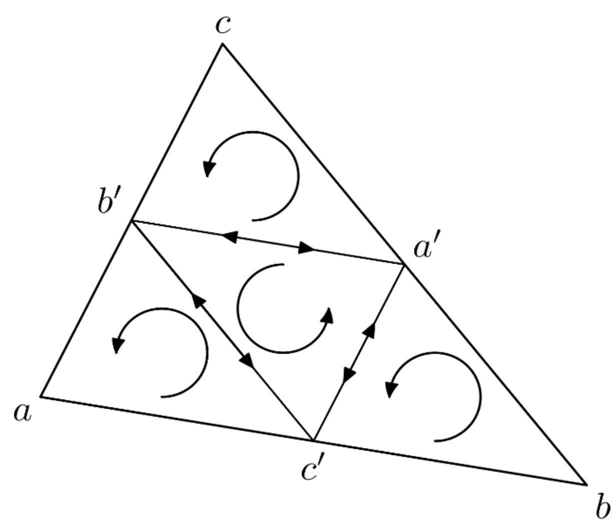


Figura 1.11.2

y poligonales $\gamma_n = [a_n, b_n, c_n, a_n]$ con la propiedad de que $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$

$$diámetro(\Delta_n) \subset \frac{1}{2} diámetro(\Delta_{n-1}) = \frac{1}{2^n} diámetro(\Delta)$$

$$\ell(\gamma_n) = \frac{1}{2}\ell(\gamma_{n-1}) = \frac{1}{2^n}\ell(\gamma)$$
$$|I_{n-1}| \leq 4|I_n|$$

Sea $\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ (existe puesto que estamos considerando la intersección de una sucesión decreciente de cerrados no vacíos con una sucesión de diámetros convergente a cero en una espacio métrico completo).

Claramente $\alpha \in \Delta(a,b,c) \subset \Omega$ pongamos $p(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha)$ que es una función polinómica y por tanto tiene primitiva; luego $\int_{\gamma_n} p(z)dz = 0$.

Podemos escribir por tanto

$$\mathrm{I_n} = \int_{\gamma_n} \mathrm{f(z)dz} = \int_{\gamma_n} \left(\mathrm{f(z)} - \mathrm{f}(\alpha) - \mathrm{f}'(\alpha)(\mathrm{z} - \alpha)\right)\mathrm{dz}$$

Dado $\varepsilon > 0$, por la derivabilidad de f en α existe un $\delta > 0$ de forma que $D(\alpha, \delta) \subset \Omega$ y para $z \in D(\alpha, \delta)$ se cumple que

$$|f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z - \alpha)| \le \varepsilon |z - \alpha|$$

Si $diámetro(\Delta_n) < \delta$ entonces $\Delta_n \subset D(\alpha, \delta)$.

Tenemos por tanto

$$\begin{aligned}
|I| &\le 4^n |I_n| \, \ell(\gamma_n) máx\{ |f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z - \alpha)| : z \in \gamma_n^* \} \\
&\le 4^n \, \ell(\gamma_n) \varepsilon \, máx\{ |z - \alpha| : z \in \gamma_n^* \} \\
&\le 4^n \, \varepsilon \ell(\gamma_n) \, diámetro(\Delta_n) \\
&= 4^n \, \varepsilon \frac{1}{2^n} \ell(\gamma_n) \, diámetro(\Delta_n) = \varepsilon \ell(\gamma_n) \, diámetro(\Delta_n)
\end{aligned}$$

De donde se deduce que $|I| = 0$ sin más que hacer tender ε a cero. Por tanto $I = 0$ como queríamos probar. ■

CAPITULO II

2. TEOREMA DEL RESIDUO

2.1 CADENAS E INDICE DE CICLOS

En lo que sigue nos va a interesar integrar en varios caminos al mismo tiempo por lo que es conveniente introducir la terminología de "**cadenas**".

Definición 2.1.1.

Una **cadena** es combinación lineal formal con coeficientes enteros de caminos, es decir, una expresión de la forma

$$\varphi = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + \ldots + m_n\gamma_n.$$

Donde cada γ_i es un camino y cada m_i es un entero. El símbolo "+" que hemos escrito en la expresión anterior no representa a la suma de funciones ni la yuxtaposición de caminos, es una manera de decir que la cadena φ está formada por varios caminos.

Ejemplo 2.1.2.

Considere la cadena

$$\varphi = C\,(0,1) + C\,(i,\, 2) - 2C\,(1 + i,\, 1\,/\,2).$$

Que está formada por tres circunferencias, la última de ellas considerada dos veces y recorrida en sentido contrario.

Se define además la imagen de φ, que notaremos φ^*, como

$$\varphi^* = \gamma_1{}^* \cup \gamma_2{}^* \cup \ldots . \cup \gamma_n{}^*$$

Para integrar una función sobre una cadena se integra la función sobre cada uno de los caminos que forman la cadena y se suman dichas integrales

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$$

Dadas dos cadenas

$$\varphi = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + \ldots + m_n\gamma_n \ \text{ y } \ \psi = k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + \cdots + k_p\sigma_p$$

Entonces la suma es otra cadena compuesta por todos los caminos que forman a φ y todos los caminos que forman a ψ.

$$\varphi + \psi = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + \ldots + m_n\gamma_n + k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + \cdots + k_p\sigma_p$$

Evidentemente se cumple que la integral a lo largo de la suma de las cadenas, es igual a la suma de las integrales de cada cadena.

$$\int_{\varphi+\psi} f(z)dz = \int_{\varphi} f(z)dz + \int_{\psi} f(z)dz$$

Como caso particular de cadenas tenemos los **ciclos.**

Definición 2.1.3.

Un **ciclo** es una cadena formada por caminos cerrados.

En el ejemplo anterior φ era un ciclo debido a que estaba formado por circunferencia.

Definición 2.1.4.

Un **cero** de una función holomorfa f es un número complejo a que cumple la condición $f(a) = 0$.

Definición 2.1.5. (Multiplicidad de un cero)

Un número complejo a es un cero simple de f, o un cero de multiplicidad 1 de f, si f puede escribirse como

$$f(z) = (z - a)g(z)$$

Donde g es una función holomorfa para la cual $g(a)$ no es cero.

En general, la multiplicidad del cero de f en a es el entero positivo n para el cual existe una función holomorfa g que cumple

$$f(z) = (z - a)^n g(z) \quad \text{con} \quad g(z) \neq 0$$

Definición 2.1.6.

Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camino cerrado y z un punto que no está en su imagen. Se define el índice del punto z respecto del camino γ como

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z}\, dw$$

2.1.7 Propiedades de los índices

Si γ es un camino cerrado (ver **Figura 2.1.1**) y $z_0 \in \mathbb{C}/\gamma^*$ se tiene que:

1) $\mathrm{I}(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$

2) *si* γ es un camino cerrado simple

a) $\mathrm{I}(\gamma, z_0)$ es constante en cada una de las componentes conexas en la que el camino divide al plano.

b) $\mathrm{I}(\gamma, z_0) = 0$ si z_0 pertenece a la componente conexa no acotada

c) $\mathrm{I}(\gamma, z_0) = \pm 1$ si z_0 pertenece a la componente conexa acotada.

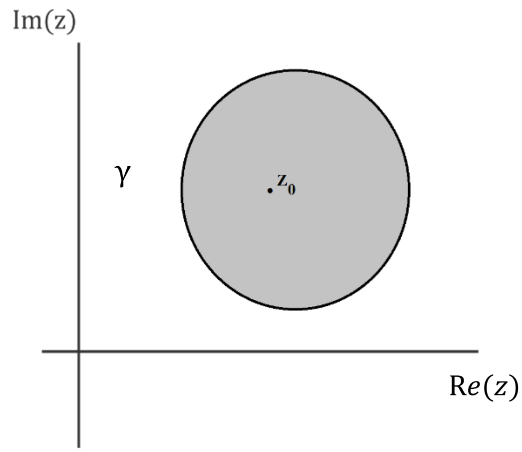


Figura 2.1.1

3) Sean Γ, ψ , ciclos y sea z_0 un punto que no pertenece a la imagen Γ, ψ respectivamente se tiene que:

$a)$ $\mathrm{I}(\Gamma + \psi,\ z_0) = \mathrm{I}(\Gamma,\ z_0) + \mathrm{I}(\psi,\ z_0)$

b) $\mathrm{I}(\Gamma - \psi,\ z_0) = \mathrm{I}(\Gamma,\ z_0) - \mathrm{I}(\psi,\ z_0)$

Nota: En el inciso 2c) $\mathrm{I}(\gamma, z_0) = \pm 1$, se aclara que el índice del punto z_0 respecto del camino γ, dependerá del sentido en que el camino rodee al punto, teniendo en cuenta que el sentido será positivo si lo rodea en sentido contrario a las agujas del reloj y negativo en caso contrario.

Definición 2.1.8.

Si Γ es un ciclo el **índice de un punto** $z \notin \Gamma^*$ (Γ^* es la imagen del ciclo) respecto a Γ es la suma de los índices del punto z respecto a cada uno de los caminos cerrados que forman ciclo.

$$\mathrm{I}(\Gamma, z) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \mathrm{I}(\gamma_i, z)$$

Definición2.1.9.

Dado un ciclo Γ la función $z \rightarrow \mathrm{I}(\Gamma, z)$ es constante en componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ y es igual a cero en la componente conexa no acotada.

Nota: Cuando mencionamos componentes conexas nos referimos a las componentes que cumplen las mismas propiedades de conjuntos conexos los cuales han sido definidos en el capítulo 1, **Definición 1.6.15.**

Definición 2.1.10.

Dos cadenas Γ, ψ se llaman **equivalentes** si para toda función f continua en $\Gamma^* \cup \psi^*$ se verifica que

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = \int_{\psi} f(z)\, dz$$

Definición 2.1.11.

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y un ciclo Γ en Ω. diremos que Γ es **nulhomólogo** respecto de Ω si el índice de todo punto que no esté en Ω respecto de Γ es cero:

$$\mathrm{I}(\Gamma, z) = 0, \quad \text{Para todo} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Nota: En el siguiente lema denotaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ al conjunto de las funciones holomorfas en Ω.

Lema 2.1.12.

Dado un abierto Ω, una cadena Γ y una función continua F: Ω x Γ* ⟶ ℂ, definimos

$$h(z) = \int_{\Gamma} F(z,w)dw \qquad \text{Para todo} \quad z \in \Omega$$

Entonces h es continua en Ω.

Si además para cada $w \in$ Γ* la función $F_w: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $F_w(z) = F(z, w)$ es holomorfa en Ω, entonces $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Demostración:

Sea $z_0 \in \Omega$ y sea $\{ z_n\}$ una sucesión de puntos de Ω convergente a z_0.

Tenemos que

$$|h(z_n) - h(z_0)| = \left| \int_{\Gamma} F(z,w) - F(z_0, w)\, dw \right| \leq \ell(\Gamma)\text{Máx}\{|F(z_n,w) - F(z_0, w)|: w \in \Gamma^*\}$$

Como el conjunto K= $\{z_n: n \in \mathbb{N} \cup \{z_0\}\}$ x Γ* es compacto (productos de compactos), F es uniformemente continua en K. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$tal que si $|z - z'| < \delta$ y $|w - w'| < \delta$ entonces $|F(z,w) - F(z', w')| < \varepsilon$.

Sea ahora n_0 tal que para $n \geq n_0$ es $|z - z_0| < \delta$. Entonces tenemos que $|F(z_n,w) - F(z_0, w)| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ y para todo $w \in \Gamma^*$, por lo que

$$|h(z_n) - h(z_0)| \leq \ell(\Gamma)\varepsilon$$

Para todo $n \geq n_0$. Luego $\{ h(z_n) \to h(z_0) \}$ lo que prueba la continuidad de h en z_0 y por ser este punto arbitrario obtenemos la continuidad en Ω.

Para la segunda afirmación apliquemos el **Teorema 1.7.2. (Teorema de Morera)**. Tomemos un triángulo $\triangle\,(a,b,c) \subset \Omega$.

Tenemos

$$\int_{[a,b,c,a]} h(z)dz = \int_{[a,b,c,a]} \left[\int_{\Gamma} \mathrm{F}(z,w)dw \right] dz \overset{(*)}{=} \int_{\Gamma} \left[\int_{[a,b,c,a]} \mathrm{F}(z,w)dz \right] dw = \int_{\Gamma} 0\, dw = 0$$

Ya que $\mathrm{F}_w(z) = \mathrm{F}\,(z,w)$ es holomorfa en Ω luego, por **Teorema 1.11.5 (Teorema de Cauchy para Triángulos)** la integral a lo largo de la frontera de un triángulo contenida en Ω es nula.

Resta justificar la permutación de las integrales en (*), por la linealidad de la integral basta probarla para dos caminos $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad \sigma\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ cualesquiera

$$\int_{\sigma} \left[\int_{\gamma} \mathrm{F}(z,w)dw \right] dz = \int_{c}^{d} \left[\int_{a}^{b} \mathrm{F}(\sigma(s), \gamma(t))\gamma'(t)\, dt \right] \sigma'(s)ds$$

$$= \int_{a}^{b} \left[\int_{c}^{d} \mathrm{F}(\sigma(s), \gamma(t))\sigma'(s)ds \right] \gamma'(t)dt = \int_{\gamma} \left[\int_{\sigma} \mathrm{F}(z,w)dz \right] dw$$

Con lo cual el lema queda demostrado. ■

Teorema 2.1.13. (Teorema de Cauchy y formula integral de Cauchy para ciclos)

Sea Ω un abierto en ℂ , Γ un ciclo en Ω nulhomólogo respecto de Ω. Entonces para toda función holomorfa, f , en Ω se verifica:

I) $\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{dz} = 0$

II) $f(\mathrm{z})\,\mathrm{I}(\Gamma, \mathrm{z}) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{w-z} dw$, para todo $\mathrm{z} \in \Omega \setminus \Gamma^*$

Demostración:

Definimos F: Ω x $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$\mathrm{F}(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & z \neq w \\ f'(z) & z = w \end{cases}$$

Sabemos que F así definida es continua en Ω x Ω. Fijado $w \in \Omega$, es claro que $\mathrm{F}_w \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{ w \})$. Pero F_w es continua en Ω luego F_w es holomorfa en Ω.

Ahora definimos h: $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$h = \int_\Gamma F(z,w)\,\mathrm{d}w \qquad\qquad (z\in\Omega)$$

Por el **lema 2.1.12** $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Consideremos el conjunto $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*: \mathrm{I}(\Gamma, z) = 0\}$ que es abierto por ser unión de componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. La hipótesis de que Γ es nulhomólogo respecto a Ω nos dice que $\mathbb{C} \setminus \Omega \subseteq \Omega_0$ y por tanto $\Omega \cup \Omega_0 = \mathbb{C}$.

Sea $\qquad\qquad \mathrm{F}_0: \Omega_0 \text{ x } \Gamma^* \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(z, w) \to \mathrm{F}_0(z,w) = \frac{f(w)}{w-z}$$

F_0 está bien definida ya que $w - z \neq 0$ por ser $\Omega_0 \cap \Gamma^* = \emptyset$ y además es continua fijado $w \in \Gamma^*$, $\mathrm{F}_{w0} \in \mathcal{H}(\Omega_0)$ ya que se trata de una función racional

Sea

$$h_0(z) = \int_\Gamma F_0(z,w)\,\mathrm{dw} = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Aplicando el **lema 2.1.12** obtenemos que $h_0 \in \mathcal{H}(\Omega_0)$. Por ultimo definimos

$$\varphi(z)=\begin{cases} h(\mathrm{z}) & \mathrm{z}\in\Omega \\ h_0(\mathrm{z}) & \mathrm{z}\in\Omega_0 \end{cases}$$

Veamos que φ está bien definida, es decir, si $z \in \Omega \cup \Omega_0$ entonces $h(z) = h(z_0)$ pero esto es cierto ya que si $z \in \Omega \cup \Omega_0$ entonces $z \notin \Gamma^*$ y

$$h(\mathrm{z})=\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z)\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\,\mathrm{I}(\Gamma(\Gamma\,,2\pi\, i = h_0(z)$$

Ya que $z \in \Omega_0$ y por tanto $\mathrm{I}(\Gamma,\mathrm{z}) = 0$. Concluimos que φ es entera ya que es holomorfa en $\Omega \cup \Omega_0 = \mathbb{C}$.

Sea $\mathrm{R} > 0$ tal que $|w| < \mathrm{R}$ para cualquier $w \in \Gamma^*$. Si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $|z| > \mathrm{R}$, entonces z está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ y, por tanto, está en Ω_0.

Luego

$$\varphi(z)=\mathrm{h}_0(z)=\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Poniendo $\mathrm{M} = \text{máx}\,\{|f(w)|: w \in \Gamma^*\}$, y teniendo en cuenta que $|w - z| \geq |z| - \mathrm{R}$

Para todo $w \in \Gamma^*$, tenemos que

$$|\varphi| \leq \ell(\Gamma)\,\frac{M}{|Z|-\mathrm{R}}$$

Tomando límite para $z \longrightarrow \infty$ deducimos que el $\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = 0$. Lo cual implica que φ está acotada. El **Teorema 1.11.4 (Teorema de Liouville),** fuerza a que φ sea constante pero dicha constante debe de ser cero. Obtenemos por tanto que $h(z) = 0$ para toda $z \in \Omega$. Tomemos un punto $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ entonces

$$0=\mathrm{h}(z)=\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(\mathrm{z})\,\mathrm{I}(\Gamma\,,\mathrm{z})2\pi\, i$$

Despejando obtenemos la formula integral de Cauchy:

$$f(\mathrm{z})\,\mathrm{I}(\Gamma, \mathrm{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

Por otra parte si tomamos $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$ y aplicamos a la función $g(\mathrm{z}) = (z - a) f(z)$, que es holomorfa en Ω, lo que acabamos de probar para f en el punto a obtenemos

$$0 = g(a)\mathrm{I}(\Gamma, \mathrm{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{(w-a)f(w)}{w-a}\, dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(w)\, dw$$

Despejando obtenemos el Teorema de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\mathrm{w})\, dw = 0$$

Así el teorema queda demostrado.■

Definición 2.1.14.

Dos ciclos Γ, ψ en un abierto Ω se dicen **homológicamente equivalentes** respecto de Ω si se verifica que

$$\mathrm{I}(\Gamma, z) = \mathrm{I}(\psi, z) \qquad \text{Para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

El teorema de Cauchy afirma que si Γ, ψ son ciclos en un abierto Ω, homológicamente equivalentes respecto de Ω, entonces

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\psi} f(z)dz \qquad \text{Para toda función } f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Este teorema permite reducir el cálculo de integrales de funciones holomorfas sobre caminos cerrados al cálculo de integrales sobre circunferencias.

El siguiente ejemplo es ilustrativo de lo anterior.

Ejemplo 2.1.15.

Sea el abierto Ω el plano complejo $\mathbb{C}$ al que le hemos quitado tres puntos a, b, c. Pretendemos calcular la integral de una función holomorfa en Ω a lo largo del camino Γ que se presenta en la **Figura 2.1.2.**

Solución:

Teniendo en cuenta que el índice de los puntos $a, b\ y\ c$ respecto Γ es el número de veces que Γ los rodea (teniendo en cuenta que el sentido es positivo si los rodea en sentido contrario a las agujas del reloj) la **Figura 2.1.2** nos muestra que:

$$\mathrm{I}(\Gamma, a) = 1, \qquad \mathrm{I}(\Gamma, b) = 2, \qquad \mathrm{I}(\Gamma, c) = -1$$

Consideremos las circunferencias $C(a,\rho)$, $C(b,\rho)$ y $C(c,\rho)$ que se presentan en la **Figura 2.1.2.** y formemos el ciclo

$$\psi = C(a,\rho) + 2C(b,\rho) - C(c,\rho)$$

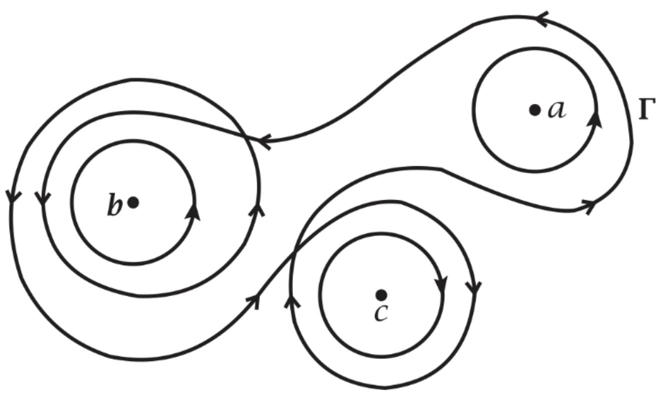


Figura 2.1.2

El ciclo Γ es homológicamente equivalente al ciclo ψ respecto de Ω. El teorema de cauchy nos dice que en estas condiciones para cualquier función holomorfa en Ω, f se cumple que

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\psi} f(z)dz = \int_{C(a,\rho)} f(z)dz + 2\int_{C(b,\rho)} f(z)\,dz - \int_{C(c,\rho)} f(z)\,dz$$

De esta forma hemos reducido el cálculo de la integral de cualquier función holomorfa sobre el camino Γ a tres integrales sobre circunferencias.

Observa que podemos tomar los radios de estas circunferencias arbitrariamente pequeños. Esto nos dice que es el comportamiento de f en un entorno reducido de los puntos a,b,c.El que determina el valor de la integral de f sobre cualquier camino cerrado.

2.2 CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES

Definición 2.2.1.

Un punto z_0 se llama un **punto singular** de la función f si f no es holomorfa en z_0 pero es holomorfa en algún punto de todo entorno de z_0. Un punto singular se dice que es **aislado** **(**singularidad aislada**)** si**,** además existe un entorno punteado $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ de z_0 en el que f es holomorfa.

Definición 2.2.2.

El punto singular z_0 llamado una **singularidad removible** de $f(z)$ si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe.

Además las **Singularidades removibles** Son aquellas donde es posible asignar a $f(z_0)$ un número complejo; de tal forma que $f(z)$ se vuelve holomorfa en $|z - z_0| < R$.

Definición 2.2.3.

Si $z = z_0$ es una singularidad aislada de f, se dice que es un **polo** si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Definición 2.2.4.

Una singularidad aislada es **esencial** si no es removibles ni polos. En este caso, f (z) no tiene límite cuando $z \to z_0$.

Si una función f tiene un punto singular aislado z_0, entonces f puede representarse por una serie de Laurent.

2.3 DETERMINACIÓN DE SINGULARIDADES UTILIZANDO EL ORDEN

Ahora usaremos la serie de Taylor y la serie de Laurent para introducir el concepto de orden de una singularidad aislada mucho más profunda que el mero hecho de saber que f no está definida en tal punto.

Definición 2.3.1.

Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en Ω para cada punto $z_0 \in \Omega$ definimos el **orden** de z_0 en f como el mínimo natural n tal que el coeficiente *n-ésimo* de la serie de Taylor de f alrededor de z_0 es no nulo lo representaremos por $\mathrm{o}(f, z_0)$.

Si todos los coeficientes de la serie de Taylor son nulos convendremos en que $\mathrm{o}(f, z_0) = +\infty$.

Obviamente $\mathrm{o}(f, z_0) = +\infty$ si y solo si f es idénticamente nula en un entorno de z_0. Si Ω es conexo esto ocurre si y solo si f es la función constante 0. Cuando el orden es finito la situación viene descrita por el teorema siguiente.

Teorema 2.3.2.

Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y sea z_0 un punto de Ω tal que $\mathrm{o}(f, z_0) = n < +\infty$. Entonces existe una única función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$.Además $g(z_0) \neq 0$ y, recíprocamente si tenemos una descomposición de la forma $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ para un cierto n y una cierta función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z_0) \neq 0$, necesariamente $n = \mathrm{o}(f, z_0)$ En particular $f(z_0) = 0$ si y solo si o $(f, z_0) > 0$.

Demostración:

Si o $(f, z_0) = n < +\infty$ entonces la serie de Taylor de f en z_0 es de la forma

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n} = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^k$$

La función $f(z)/(z - z_0)^n$ es holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$, pero en un entorno de z_0 coincide con la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^k$, que también es holomorfa en z_0 luego podemos extenderla a una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ para $z \in \Omega$ y $g(z_0) = a_n \neq 0$.

La unicidad de g se debe a que si $f(z) = (z - z_0)^n g(z) = f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ para dos funciones g, $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces g y h coinciden en $\Omega \setminus \{z_0\}$, y por continuidad también coinciden en z_0.

Por otra parte si $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$, entonces la serie de Taylor de g alrededor de z_0 será de la forma $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, donde $a_0 = g(z_0) \neq 0$.

Por lo tanto en un entorno de z_0 se cumple

$$f(z) = (z - z_0)^n \, g(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+n}$$

Luego esta es la serie de Taylor de f en z_0 y el menor coeficiente no nulo es n-ésimo, con lo que así $o(f, z_0) = n$. ■ Cuando $o(f, z_0) = n > 0$ se dice que z_0 es un cero de orden n de la función f. el teorema anterior justifica que el concepto de un cero de una función holomorfa coincide con la multiplicidad de una raíz cuando la función es un polinomio, y nos permite comenzar la factorización de las funciones holomorfas siguiendo el proceso que se aplica a los polinomios.

Teorema 2.3.3.

Sean f y g funciones holomorfas en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$

a) $o(f \; g, z_0) = o(f, z_0) + o(g, z_0)$
b) si o $o(g, z_0) \leq o(f, z_0) < \infty$ entonces f/g se puede extender a una función holomorfa en un entorno de z_0 y $o(f/g, z_0) = o(f, z_0) - o(g, z_0)$.
c) Sea $\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ que converge casi uniformemente en un abierto a una función holomorfa. Entonces

$$o\left(\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right) = \sum_{k=n}^{\infty} o(f_n(z), z_0)$$

Observación: Notar que la serie es finita ya que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones holomorfas es finita.

Demostración:

$$\text{o}(f, z_0) = m \;\; y \;\; \text{o}(g, z_0) = n \qquad\qquad f(z) = (z - z_0)^m u(z),$$

$g(z) = (z - z_0)^m v(z)$

Para ciertas funciones $u \; y \; v$ tales que $u(z_0) \neq 0 \neq v(z_0)$, cosecuentemente

$fg(\text{z}) = (z - z_0)^{m+n} (uv)(z)$ Luego por **Teorema 2.3.2** tenemos que $\text{o}(fg, z_0) = m + n$

$$\Rightarrow \text{o}(fg, z_0) = \text{o}(f, z_0) + \text{o}(g, z_0)$$

Si alguno de los órdenes es infinito entonces es claro que fg se anula en un entorno de z_0 y la afirmación sigue siendo válida conviniendo $+\infty + n = +\infty$.

b) consideramos las mismas factorizaciones de $f \;\; y \; g$. Entonces para $z \neq z_0$ tenemos que $\left(f/g\right)(z) = (z - z_0)^{m-n} \; (u/v)(z)$, pero la función de la izquierda es holomorfa en un entorno de z_0 y $(u/v)(z_0) \neq 0$.

c) por **Observación** existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $f_n(z_0) \neq 0$, es decir $o(f_n, z_0) = 0$. Entonces

$$\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=0}^{n_0} f_n(z). \prod_{n=n_0}^{\infty} f_n(z) \quad \text{y} \quad \text{o}\left(\prod_{n=n_0}^{\infty} o(f_n(z), z_0)\right) = 0$$

Aplicando el apartado **a)** varias veces concluimos que

$$\text{o}\left(\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right) = \sum_{n=0}^{n_0} o(f_n(z), z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} o(f_n(z), z_0)$$

Como se deseaba demostrar.■

Definición 2.3.4.

Sea z_0 una singularidad aislada de una función holomorfa f y sea

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Su desarrollo de Laurent alrededor de z_0. Llamaremos orden de z_0 al mínimo entero n tal que $a_n \neq 0$, entendiendo que el orden es $-\infty$ si hay coeficientes no nulos arbitrariamente pequeños y que el orden es $+\infty$ si todos los coeficientes son nulos. Lo representamos por o (f , z_0).

Observemos que si $o(f, z_0) \geq 0$, entonces la serie de Laurent de f en z_0 es en realidad una serie de potencias, la cual determina una función holomorfa en un entorno de z_0 (incluido este).

Por consiguiente si extendemos f a z_0 mediante $f(z_0) = a_0$ la extensión es holomorfa en z_0 y su serie de Taylor en z_0 coincide con la serie de Laurent de f en el mismo punto.

En particular el orden de la extensión en el sentido de la **Definición 2.3.1** coincide con el orden de f en el sentido de la **Definición 2.3.4** Notemos que la extensión es única pues para que sea holomorfa es necesario que f (z_0) sea el límite de f en z_0.

Definición 2.3.5.

Si z_0 es una singularidad aislada de una función f tal que $o(f, z_0) \geq 0$ se dice que z_0 es una **singularidad evitable**.

Definición 2.3.6.

Si z_0 es una singularidad aislada de una función f tal que $\mathrm{o}(f, z_0) \geq -n < 0$, diremos que f tiene un **polo** de orden n z_0.

Definición 2.3.7.

Una singularidad aislada z_0 de una función es **esencial** si $\mathrm{o}(f, z_0) = -\infty$.

El teorema siguiente da varios criterios útiles para reconocer a una singularidad evitable o removible.

Teorema 2.3.8.

Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y sea z_0 una singularidad aislada de f . Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) z_0 es una singularidad evitable de f **.**

b) f se puede extender a una función holomorfa en $\Omega \cup \{z_0\}$.

c) Existe $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

d) f está acotada en un entorno reducido de z_0.

e) $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) \Longrightarrow \lim_{z \longrightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$

Demostración:

Por la **Definición 2.2.2** vemos claramente que ***a)*** **⇒b)** además al extenderse f a una función holomorfa implica que el limite existe, es decir ***b)*** **⇒c)** luego si el limite existe se sabe que f va a estar acotada en un entorno reducido de z_0, así pues ***c)*** **⇒d)** además ***d)*** **⇒*e)*** es análoga a las anteriores implicaciones **.**

La única implicación que no es trivial ***e*) ⇒*a*).** Consideramos la serie de Laurent para de f en z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Tenemos que existe

$$\lim_{z \to z_o} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+1} = 0$$

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+1}$ define una función holomorfa en un entorno de z_0, y su límite en z_0 es cero. En consecuencia también existe

$$\lim_{z \to z_o} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^{n+1} = \lim_{z \to z_o} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n+1} = 0$$

La última serie converge en un entorno reducido de z_0, luego converge en $\mathbb{C} \backslash \{z_0\}$ y en consecuencia la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{n-1}$ tiene radio de convergencia $+\infty$, es decir, converge en todo $\mathbb{C}$. Mediante un cambio de variable en límite anterior llegamos a que

$$\lim_{z \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{n-1} = 0$$

Luego la función entera definida por la serie está acotada. Por **Teorema 1.11.4 (Teorema de Liouville)** ha de ser constante. Concretamente es nula, pues tiene límite es cero. Esto prueba que todos los coeficientes a_n para $n < 0$ de la serie de Laurent de f en z_0 son nulos luego o(f , z_0)≥ 0 y la singularidad es evitable de donde se concluye que ***e*) ⇒*a*).** Por tanto la prueba queda completada. ■

2.3.9 Parte principal de una función

Hemos visto en el capítulo 1 que si una función f tiene un punto singular aislado z_0, puede representarse por una serie de Laurent.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{b_n}{(z-z_0)^n} \qquad \textbf{[2.1]}$$

En un dominio $0<|z-z_0|<R_2$, centrado en ese punto.

La porción de la serie que contiene potencias negativas de $z-z_0$ se llama **parte principal de una *f*** en z_0 ahora usaremos la parte principal para distinguir entre los tres tipos de punto singular aislado visto (singularidades esenciales, polos y singularidades evitables). El comportamiento cerca de z_0 es fundamentalmente diferente en cada caso.

2.4. CRITERIOS PARA CONOCER LAS SINGULARIDADES MEDIANTE EL DESARROLLO DE LA SERIE DE LAURENT

Criterio 1:

Si la parte principal de f en z_0 contiene al menos un término no nulo, pero el número de tales términos es finito, existe un m tal que

$$b_m \neq 0 \qquad \text{y} \qquad b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$$

Esto es, el desarrollo **[2.1]** adopta la forma

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{b_m}{(z-z_0)m} \qquad \textbf{[2.2]}$$

$0<|z-z_0|<R_2$. Donde $b_m \neq 0$.

Así llegamos a la siguiente definición

Definición 2.4.1. (Polo de orden *m*)

Decimos que una función tiene un **polo de orden m** en z_0 si la potencia más negativa de $(z - z_0)$ que aparece en la parte principal de su desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto singular z_0 es m.

Ejemplo 2.4.2.

Encontrar las singularidades de la siguiente función

$$f(z) = \frac{senh\, z}{z^4}$$

Solución:

$$\frac{senh\, z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{5!}z + \frac{1}{7!}z^3 + \dots \qquad (0 < |z| < \infty)$$

Tiene en $z = 0$ un polo de orden 3.

Criterio 2:

Cuando la parte principal de su desarrollo de Laurent de una función f alrededor del punto singular aislado z_0 contiene un número infinitos de términos no nulos diremos que esa función posee una singularidad **esencial**.

Criterio 3:

Si todos los coeficientes b_n de la parte principal de f en un punto singular aislado z_0 son cero, el punto z_0 se llama **punto singular evitable** de f . En tal caso, la serie de Laurent **(Ecuación [1.28])** contiene solo potencias no negativas de $z - z_0$ y la serie es de echo una serie de potencias.

Nótese que en un punto singular evitable es siempre cero. Si definimos $f\,(z)$ en z_0 como a_0, la función pasa a ser holomorfa en z_0

2.5 RESIDUOS

Definición 2.5.1.

Si $f(z)$ una función holomorfa sobre un camino simple cerrado γ y en todo punto del interior de γ, salvo z_0, representamos el residuo *de* f *en* z_0, por $\text{Res}[f(z), z_0]$

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz \qquad \textbf{[2.3]}$$

2.5.2 Relación entre $\text{Res}[f(z), z_0]$ y una serie de Laurent para $f(z)$

Debido a que z_0 es un punto singular aislado de $f(z)$, podemos desarrollar esta función en serie de Laurent alrededor de z_0.

$$f(z) = \ldots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0)^1 + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

$$0 < z - z_0 < \mathbf{R} \qquad \textbf{[2.4]}$$

Esta serie converge a $f(z)$ en todo punto (excepto en z_0) del interior de un circulo de radio **R** centrado en z_0, es decir en una vecindad punteada de z_0.

Ahora bien, para evaluar $Res[f(z), z_0]$ por medio de la ecuación **[2.4]** tomamos como γ un circulo de radio r centrado en z_0. Hagamos $r < R$ lo que implica que podemos representar $f(z)$ en la ecuación **[2.3]** por medio de la serie de Laurent de la ecuación **[2.4]** y luego integrar termino a término.

Así,

$$\text{R}\boldsymbol{es}[\boldsymbol{f}(z), \boldsymbol{z}_0] = \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \oint_{|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0| = \boldsymbol{r}} \sum_{\boldsymbol{n}=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0)^{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{dz}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint_{|z-z_0|=r} a_n (z-z_0)^n \, dz \qquad \textbf{[2.5]}$$

Haciendo uso de la ecuación

$$\oint_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n \, dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases} \qquad \textbf{[2.6]}$$

Así todas las integrales del lado derecho de la ecuación **[2.5]** vale cero salvo la que corresponde a $n = -1$.

Tenemos que

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = a_{-1} \qquad \textbf{[2.7]}$$

El resultado expresado por esta ecuación es de gran importancia por tanto obtenemos la siguiente definición.

Definición 2.5.3.

Si z_0 es una singularidad aislada de una función holomorfa f, se llama residuo *de* f *en* z_0, y se representa por $\operatorname{Res}[f(z), z_0]$ al coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent de f *en* z_0 .

Es particularmente adecuado aplicar el término residuo a las ecuaciones **[2.3]** y **[2.7]** Cuando en la ecuación **[2.5]** se usa una serie de Laurent válida y la integración se lleva a cabo término a término queda únicamente un coeficiente particular de la serie.

2.6 DETERMINACIÓN DEL RESIDUO

2.6.1 Determinación del residuo de polos

En esta sección vamos a dar a conocer ciertos criterios que nos facilitaran el trabajo al momento de calcular el residuo de una función. Para ello si sabemos que ciertas funciones $f(z)$ tiene un polo en z_0, existe un método directos para calcular el residuo de la función en este punto sin necesidad de obtener un desarrollo de Laurent alrededor de z_0. Si conocemos de qué orden es el polo, el cálculo resulta aún más sencillo.

Cuando $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0, $\varphi(z-z_0)^m f(z)$ tiene el siguiente desarrollo en serie de Taylor alrededor de z_0

$$\varphi(z)=\varphi(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-(m-1)}(z-z_0)+...+a_0(z-z_0)^m+... \qquad \textbf{[2.8]}$$

Supongamos que $f(z)$ tiene un polo simple en $z=z_0$. En tal caso m=1. Por lo tanto,

$$\varphi(z)=a_{-1}+a_0(z-z_0)+a_0(z-z_0)^2+... \qquad \textbf{[2.9]}$$

De ello obtenemos que el residuo a_{-1} es igual a

$$\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]$$. Llegamos al criterio I

Criterio I

Si $f(z)$ tiene un polo de orden 1 en $z = z_0$, entonces

$$\operatorname{Res}[\,f(z)\,,\,z_0\,] = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)\,f(z)] \qquad \textbf{[2.10]}$$

Ahora supongamos que $f(z)$ tiene un polo de orden 2 en $z = z_0$. Tenemos entonces, por la ecuación **[2.8]**

$$\varphi(z) = a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + \ldots$$

Notamos que

$$\frac{d\varphi}{dz} = a_{-1} + 2a_0(z - z_0) + \ldots$$

De modo que

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z - z_0)^2\, f(z)\right]$$

De donde obtenemos el criterio I

Criterio II

Si $f(z)$ tiene un polo de orden 2 en $z = z_0$,

$$\operatorname{Res}[\,f(z), z_0\,] = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z - z_0)^2\, f(z)\right] \qquad \textbf{[2.11]}$$

Este método puede generalizarse, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.6.1.1.

Sea f una función holomorfa con un polo de orden m en un punto z_0. Entonces

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0) f(z)]$$

Demostración:

Si $f(z)$ tiene un polo z_0 de orden m, entonces la serie de Laurent es

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots \qquad \textbf{[2.12]}$$

Entonces multiplicando ambos lados por $(z - z_0)^m$, tenemos

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \ldots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + \ldots \qquad \textbf{[2.13]}$$

Esto representa la serie de Taylor entorno a $z = z_0$ de la función holomorfa de la izquierda.

Diferenciando ambos lados $m - 1$ veces con respecto a z, tenemos

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\} = (m-1)!\,a_{-1} + m(m-1)\ldots 2a_0(z-z_0) + \ldots$$

De tal modo haciendo $z \to z_{0,}$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\} = (m-1)!\,a_{-1}$$

Por tanto

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0) f(z)]$$

Como se deseaba demostrar.■

Y así obtenemos el criterio III.

Criterio III

Si $f(z)$ tiene un polo de orden *m* en $z = z_0$, entonces

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0) f(z)] \qquad \textbf{[2.14]}$$

El criterio I y criterio II son casos particulares del criterio III tomando *m* = 1 y *m* = 2 respectivamente.

Si sabemos de qué orden es el polo de $f(z)$ en z_0 la ecuación **[2.14]** proporciona directamente el valor del residuo.

El problema de determinar el residuo de un cociente de la forma $f(z) = \dfrac{g(z)}{f(z)}$ en polo de primer orden es tan frecuente que deduciremos una formula especial para este caso.

Supongamos que $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 y que $g(z_0) \neq 0$. Así, $h(z)$ tiene un cero de primer orden en z_0. Aplicando el criterio I,

$$\operatorname{Re}s[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \right]$$

Que da la forma indeterminada $0/0$.

Utilizando la regla de $L'Hopital$, obtenemos

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(z-z_0)g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z-z_0)g'(z)+g(z)}{h'(z)} = \frac{g(z)}{h'(z)}$$

Como $h(z)$ tiene un cero de orden 1 en z_0, $h'(z_0) \neq 0$. Podemos resumir este procedimiento de la siguiente manera.

Criterio IV (polo de orden uno removible o simple)

El residuo de $f(z) = g(z)/h(z)$ es un polo simple, donde $g(z_0) \neq 0, h(z_0) = 0$, esta dada por

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \qquad \textbf{[2.15]}$$

A continuación se resolverán algunos ejemplos en donde podemos aplicar los criterios para calcular residuos que hemos mencionado.

Ejemplo 2.6.1.2.

Encontrar los residuos de $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$

$f(z)$ Tiene un polo doble en $z = -1$, orden $m = 2$ y polos simples en $z = \pm 2i$

Solución:

<u>El residuo en $z = -1$ es</u>

Utilizando el criterio II

$$\text{Res}[f(z),-1] = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right]$$

$$= \lim_{z\to -1}\left[\frac{(z^2+4)(2z-2)-(z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2}\right] = -\frac{14}{25}$$

<u>El residuo en $z = 2i$</u>

Utilizando el criterio I

$$Res\,[f(z),2i] = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left[(z-2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2\left(z^2+4\right)}\right]$$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left[(z-2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)}\right]$$

$$= \frac{-4-4i}{(2i+1)^2(-4i)} = \frac{7+i}{25}$$

<u>El residuo en $z = -2i$</u>

$$\text{Res}[f(z),-2i] = \lim_{z\to -2i} \frac{d}{dz}\left[(z+2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right] = \lim_{z\to -2i} \frac{d}{dz}\left[(z+2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)}\right]$$

$$= \frac{-4+4i}{(-2i+1)^2(-4i)} = \frac{7-i}{25}$$

Ejemplo 2.6.1.3.

Determine el residuo de $f(z)=\dfrac{e^z}{(z^2+1)z^2}$ en todos los polos.

Solución

Factorizando el denominador de $f(z)$

$$(z^2+1)z^2=0 \implies (z^2+1)=0 \quad o \quad z^2=0 \Rightarrow z=0$$

$$\Rightarrow z^2=-1$$

$$\Rightarrow z=\sqrt{-1} \implies \boldsymbol{z=\pm i}$$

$$f(z)=\frac{e^z}{(z+i)(z-i)z^2} \quad = \quad f(z)=\frac{e^z}{(z^2+1)z^2}$$

En donde la función tiene polos en $z=\pm i$ y un polo de orden 2 en $z=0$.

El criterio 1 nos permite obtener el residuo en i

$$\text{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^z}{(z+i)(z-i)z^2}$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{e^z}{(z+i)z^2}$$

$$\Rightarrow \text{Re}\,s[f(z),i]=\frac{e^i}{(i+i)i^2} \Rightarrow \text{Re}\,s[f(z),i]=\frac{e^i}{(2i)i^2}$$

El residuo en $-i$ podría calcularse de manera similar pero haremos uso del criterio IV. Tomando $g(z)=e^z/z^2$, (que es distinto de cero en $-i$)

Y $h(z)=z^2+1$ de tal manera que $h'(z)=2z$.

Tenemos que

$$\Rightarrow Res[f(z),-i]=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}s[f(z),-i]=\frac{e^{-i}\big/-i^2}{2i}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}s[f(z),-i]=\frac{e^{-i}}{2i}$$

El residuo en $z=0$ se calcula por medio del criterio II de la siguiente manera

$$\operatorname{Re}s[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[(z-0)^2\,\frac{e^z}{(z^2+1)z^2}\right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}s[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\,\frac{z^2e^z}{(z^2+1)z^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}s[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\,\frac{e^z}{(z^2+1)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}s[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{e^z(z^2+1)-2ze^z}{(z^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}s[f(z),0]=1$$

Ejemplo 2.6.1.4.

Determinar el residuo $f(z)=e^z\csc^2 z=\dfrac{e^z}{sen^2 z}$

Solución:

Tiene polos dobles en $z=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\ldots,$ o sea $z=m\pi$ donde $m=0,\pm\pi,\pm 2\pi\ldots$

El residuo en $z = m\pi$ es

$$\text{Res}[f(z), m\pi] = \lim_{z \to m\pi} \frac{d}{dz}\left[(z - m\pi)^2 \frac{e^z}{sen^2 z}\right]$$

$$= \lim_{z \to m\pi} \frac{e^z\left[(z - m\pi)^2 sen\, z + 2(z - m\pi) sen\, z - 2(z - m\pi)^2 \cos z\right]}{sen^3 z}$$

Haciendo $z - m\pi = u$ o $z = u + m\pi$ este límite se puede escribir

$$\Rightarrow \lim_{u \to 0} e^{u+m\pi}\left(\frac{u^2 sen u + 2u sen u - 2u^2 cos\, u}{sen^3 u}\right) = e^{m\pi}\left(\lim_{u \to 0} \frac{u^2 sen u + 2u sen u - 2u^2 cos\, u}{sen^3 u}\right)$$

El límite entre llaves se puede obtener utilizando la regla de $L'Hopital$. Sin embargo, es más fácil observar primero que:

$\lim_{u \to 0} \frac{sen^3 u}{u^3} = \lim_{u \to 0}\left(\frac{sen\, u}{u}\right)^3 = 1$ y de este modo escribir el límite como

$$= e^{m\pi}\left(\lim_{u \to 0} \frac{u^2 sen u + 2u sen u - 2u^2 cos\, u}{sen^3 u} \cdot \frac{sen^3 u}{u^3}\right)$$

$$= e^{m\pi}\left(\lim_{u \to 0} \frac{u^2 sen u + 2u sen u - 2u^2 \cos u}{u^3}\right) \qquad (**)$$

$$= e^{m\pi}$$

Utilizando la regla del $L'Hopital$ varias veces. Al calcular este límite, en lugar de derivar varias veces, pueden utilizarse los desarrollos en serie de

$sen u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \ldots$ $\qquad$ $cos\, u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots$; De $(**)$

$$e^{m\pi}\left(\lim_{u\to 0}\frac{u^2 senu+2usenu-2u^2\cos u}{u^3}\right)$$

$$=e^{m\pi}\left(\lim_{u\to 0}\frac{u^2\left(u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}+\ldots\right)+2u\left(u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}+\ldots\right)-2u^2\left(1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}+\ldots\right)}{u^3}\right)$$

$$=e^{m\pi}\lim_{u\to 0}\frac{u^2\left(u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}+\ldots\right)+2u\left(u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}+\ldots\right)-2u^2\left(1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}+\ldots\right)}{u^3}$$

$$=e^{m\pi}\lim_{u\to 0}\frac{u^3\left[\left(1-\frac{u^2}{3!}+\frac{u^4}{5!}+\ldots\right)+\left(-\frac{2u}{3!}+\frac{u^3}{5!}+\ldots\right)-\left(\frac{2u}{2!}+\frac{u^3}{4!}+\ldots\right)\right]}{u^3}=e^{m\pi}$$

Observación: Existen casos en el cual no es evidente el orden de un polos.

Como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6.1.5.

Determine el residuo de la función $f(z)=\frac{senh\,z}{z^4}$

Solución:

La función parece tener un polo de orden 4 en $z=0$; sin embargo, si escribimos

$$f(z)=\frac{g(z)}{z^4} \qquad g(z)=senh\,z$$

Comprobamos que $g(0)=senh\ 0=0$, luego el polo no es de orden 4.

Para averiguar correctamente el orden desarrollamos en serie $senh\, z$ alrededor se $z = 0$:

$$sen\, h = z + \frac{z^3}{6} + ... = z\left(1 + \frac{z^2}{6} + ...\right) = z\phi(z)$$

Donde $\phi(z) = 1 \neq 0$. Así que

$$f(z) = \frac{z\phi(z)}{z^4} = \frac{\phi(z)}{z^3}$$

Y entonces queda claro que el polo es de orden 3. Para calcular el residuo podemos aplicar el criterio III

$$\Rightarrow \operatorname{Re} s[f(z), 0] = \lim_{z \to 0} \frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\left[(z-0)^3 \frac{\phi(z)}{z^3}\right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} s[f(z), 0] = \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 \frac{\phi(z)}{z^3}\right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} s[f(z), 0] = \lim_{z \to 0} \frac{\phi''(z)}{2!} \Rightarrow \operatorname{Re} s[f(z), 0] = \frac{1/3}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 2.6.1.6.

Determine el residuo de la función $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z - 1)}$

Solución:

En $z = z_0$ hay un polo, pero no es simple, porque si escribimos $f\,(z) = g(z)/z$, la función $g(z)$ tiene un polo en $z = 0$. En este caso partimos de

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + ...$$

De donde

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots = z\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots\right)$$

Y por tanto

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2} \qquad g(z) = \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots}$$

Que es correcta porque $g(z) = 1 \neq 0$. Se trata de un polo de orden 2.

En cuanto al residuo, como

$$g'(z) \frac{\frac{1}{2} + \frac{z}{3} + \ldots}{\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots\right)^2} \Rightarrow g'(0) = -\frac{1}{2}$$

Por criterio II

$$\Rightarrow \text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 \frac{g(z)}{z^2}\right]$$

$$\Rightarrow \text{Re}\,s[f(z), 0] = \lim_{z \to 0} - \frac{\frac{1}{2} + \frac{z}{3} + \ldots}{\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots\right)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Re}\,s[f(z), 0] = -\frac{1}{2}$$

2.6.2 Determinación del Residuo de singularidades removibles

Ejemplo 2.6.2.1.

Calcular el residuo de La función $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$

Solución:

Tiene en z$=0$ una singularidad evitable, pues

$$\lim_{z\to 0} z\ \frac{1-\cos z}{z}=\lim_{z\to 0}\ \frac{d/dz\ (1-\cos z)}{d/dz\quad z}=\lim_{z\to 0}\frac{sen\, z}{1}=0$$

Para calcular residuo utilizando el criterio II

$$\mathrm{R}es[\,f(z)\,,0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[(z-0)^2\,\frac{1-\cos z}{z^2}\quad\right]=\lim_{z\to 0} sen\, z=0$$

Ejemplo 2.6.2.2.

Encuentre el residuo de la función $f(z)=\dfrac{\mathrm{z}}{\operatorname{sen} z}$

Solución:

Las singularidades de la función f son $z=k\pi$.

Se distingue dos casos

<u>Si $z=0$:</u>

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{z}}{\operatorname{sen} z}=1$$

Entonces $z=0$ es una singularidad evitable.

Si $\underline{z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} - \{0\}}$

$$\lim_{z \to k\pi} \frac{(z - k\pi)z}{\text{sen } z} = \lim_{z \to 0} \frac{d/dz\,(z^2 - k\pi z)}{d/dz\ (\text{sen } z)}$$

$$= \lim_{z \to k\pi} \frac{2z - k\pi}{\cos z}$$

$$= \begin{cases} -k\pi \neq 0 & si\ k\ es\ impar \\ k\pi \neq 0 & si\ k\ es\ par \end{cases}$$

Luego son polos de orden 1 en $z = \pi k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\text{sen } z = (-1)^k sen(z - k\pi) = (-1)^k \left[(z - k\pi) + \frac{(z - k\pi)^2}{2!} - \frac{(z - k\pi)^3}{3!} + \ldots \right]$$

Como $sen\ (z - \pi k) = (-1)^k\ sen\ z$

$$\text{Res}[f(z), k\pi] = \lim_{z \to k\pi} \frac{(z - k\pi)z}{\text{sen } z}$$

$$= \lim_{z \to k\pi} \frac{(z - k\pi)z}{sen(z - k\pi)/(-1)^k}$$

$$= \lim_{z \to k\pi} \frac{[(-1)^k (z - k\pi)z]}{[sen(z - k\pi)]}$$

$$= \lim_{z \to k\pi} \frac{d/dz[(-1)^k (z - k\pi)z]}{d/dz[sen(z - k\pi)]}$$

$$= \lim_{z \to k\pi} \frac{(-1)^k (2z - k\pi)}{\cos(z - k\pi)}$$

$$= (-1)^k k\pi .$$

2.6.3 Determinación Del Residuo De Singularidades Esenciales

Definición 2.6.3.1.

Si el punto z_0 es una singularidad esencial, el residuo se calcula desarrollando la función en serie de Laurent en torno a z_0. El residuo es el coeficiente correspondiente a la potencia de exponente -1.

A continuación se presentan algunos ejemplos de singularidades esenciales de funciones y además se calculan sus respectivos residuos.

Ejemplo 2.6.3.2.

Encuentre las singularidades de la siguiente función y obtenga su correspondiente residuo:

$$f(z) = sen\frac{1}{z}$$

Solución:

Vemos claramente que en $z = 0$ es una singularidad Esencial ya que si aplicamos limite a f(z) cuando $z \to 0$ el limite no existe. Se sabe que f(z) en serie de potencias se puede escribir de la siguiente manera:

$$sen\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad |z| < \infty$$

Entonces sustituyendo z por $\frac{1}{z}$ en la serie

$$sen\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad |z| < \infty$$

Obtenemos la serie de Laurent

$$sen\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} \qquad 0<|z|<\infty$$

$$sen\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{z}\right)^3+\ldots$$

$$\Rightarrow \quad sen\frac{1}{z} = \frac{1}{z}-\frac{1}{6z^3}+\ldots$$

Aplicando **definición 2.6.3.1** de una singularidad esencial: Res [f(z), 0] = 1.

Ejemplo 2.6.3.3.

Encuentre las singularidades de la siguiente función y obtén su correspondiente residuo.

$$f(z)= (z-3)sen\frac{1}{z+2}$$

Solución:

De donde Vemos claramente que en z = -2 es una singularidad Esencial ya que si aplicamos limite a f(z) el limite no existe. Ahora, se sabe que $sen\ (z)$ en serie de potencias se puede escribir de la siguiente manera:

$$sen\, z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \qquad |z|<\infty$$

Entonces sustituyendo z por $\frac{1}{z+2}$ en la serie, obtenemos

$$sen\, z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \qquad |z|<\infty$$

Obtenemos la serie de Laurent

$$sen\frac{1}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n+1} \qquad 0<|z|<\infty$$

$$sen\frac{1}{(z+2)} = \left(\frac{1}{z+2}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{z+2}\right)^3+...$$

Ahora multiplicando por (z−3) a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$(z-3)sen\frac{1}{(z+2)} = (z-3)\left[\frac{1}{(z+2)}-\frac{1}{6(z+2)^3}+...\right]$$

$$=\left[(z+2)-5\right]\left[\frac{1}{(z+2)}-\frac{1}{6(z+2)^3}+...\right]$$

$$=(z+2)\left[\frac{1}{(z+2)}-\frac{1}{6(z+2)^3}+...\right]-5\left[\frac{1}{(z+2)}-\frac{1}{6(z+2)^3}+...\right]$$

$$=1-\frac{1}{6(z+2)^2}+...-\frac{5}{(z+2)}+\frac{5}{6(z+2)^3}-...$$

$$\Rightarrow (z-3)sen\frac{1}{(z+2)} = 1-\frac{5}{(z+2)}-\frac{1}{6(z+2)^2}+\frac{5}{6(z+2)^3}+...$$

Aplicando **definición 2.6.3.1** de una singularidad esencial;

$$\operatorname{Re}s[f(z),-2]=-5$$

2.7 TEOREMA DEL RESIDUO

Si una función f tiene solo un número finito de puntos singulares interiores a un camino cerrado simple dado γ . El siguiente teorema del residuo es un enunciado preciso del hecho de que si además f es holomorfa sobre γ , y γ se recorre en sentido positivo(es decir en sentido contrario a las agujas del reloj), el valor de la integral de f a lo largo de γ es $2\pi i$ veces la suma de los residuos en esos punto singulares, y además el **índice** del camino cerrado simple alrededor de los puntos que se encuentren dentro de la componente conexa acotada es igual a uno según la **Propiedad 2.1.7 c).**

Teorema 2.7.1. (Teorema del residuo para caminos cerrados simples)
Sea γ un camino cerrado simple y sea $f\,(z)$ una función holomorfa sobre γ y en todo punto de su interior, excepto en las singularidades aisladas $z_1, z_2,..., z_n$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz = \text{Res}\,[\,f\,(z), z_1] + Res\,[\,f\,(z), z_2\,] + \cdots + \text{Res}\,[\,f\,(z), z_n\,]$$

Que puede escribirse de manera más compacta como

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{R}es[\,f(z)\,,z_k\,]$$

Demostración:

Por hipótesis se tiene que $f\,(z)$ es holomorfa sobre γ y en su interior excepto en las singularidades. Comenzaremos por rodear cada una de las singularidades del interior de γ. Por círculos $C_1, C_2,..., C_n$ que no tienen intersección con γ ni se intersectan entre si como se muestra a continuación. (**Figura 2.7.1**)

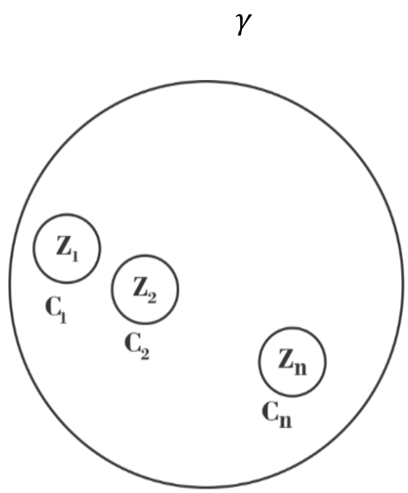


Figura 2.7.1

Luego trazamos una serie de trayectorias, indicadas en la **Figura 2.7.2** por las líneas punteadas que conectan los círculos $C_1, C_2, ..., C_n$

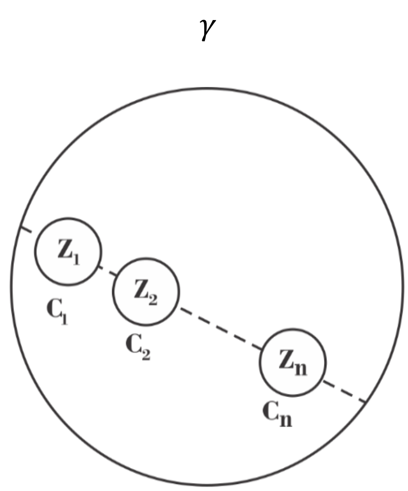


Figura 2.7.2

Además por ser γ un camino cerrado o curva cerrada simple suave a trozos es decir es un arco que consiste en un número finitos de arcos suaves unidos por sus extremos, podemos entonces definir dos caminos simples cerrados C_U y C_L como se muestra en la **Figura 2.7.3**.

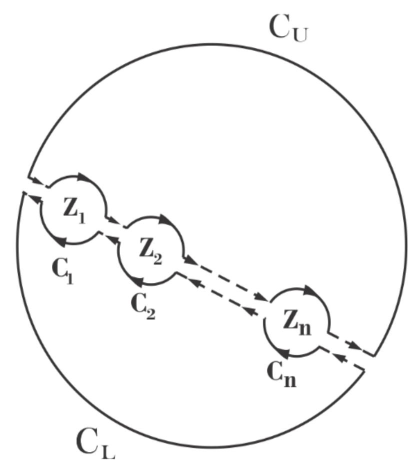


Figura 2.7.3.

Dado que $f(z)$ es holomorfa sobre γ y en todo su interior esto implica que $f(z)$ es holomorfa sobre los círculos C_U, C_L y en sus interiores por lo tanto por. Teorema 1.9.3 (Teorema de Cauchy para un camino cerrado simple) se tiene

$$\oint_{C_U} f(z)dz = 0 \quad ; \quad \oint_{C_L} f(z)dz = 0$$

Implica que al multiplicar a ambos lados por $\frac{1}{2\pi i}$ se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_U} f(z)dz = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_L} f(z)dz = 0$$

Ahora sumemos estas dos expresiones:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_U} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_L} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_U} f(z)dz + \oint_{C_L} f(z)dz\right] = 0 \qquad \textbf{[2.16]}$$

Obsérvese que las porciones de la integral sobre C_U que corresponden a las líneas punteadas se cancelan exactamente en las porciones de la integral sobre C_L a lo largo de estas mismas líneas. Esto se debe a que las correspondientes integraciones se efectúan en sentidos opuestos lo que queda al lado derecho de la ecuación **[2.16]** es la suma de la integral de f (z) alrededor de γ en sentido positivo (es decir en el sentido opuesto a las manecillas del reloj) más las integrales alrededor de $C_1, C_2, ..., C_n$ En el sentido negativo.

Por lo tanto

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{\gamma} f(z)dz + \oint_{C_1, C_2, ..., C_n} f(z)dz\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{\gamma} f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + ... + \oint_{C_n} f(z)dz\right] = 0$$

Esta expresión puede reordenarse de la manera siguiente

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z)dz + ... + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z)dz + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} f(z)dz \qquad \textbf{[2.17]}$$

Donde ahora todas las integraciones se llevan a cabo en sentido positivo, las integrales del lado derecho de la ecuación **[2.17]** están calculadas alrededor de sendas singularidades aisladas y son, por tanto, numéricamente iguales al residuo de f (z) evaluada en la singularidad correspondiente. Así,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z)dz + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} f(z)dz$$

$$= \operatorname{Re}s[f(z), z_1] + \operatorname{Re}s[f(z), z_1] + \ldots + \operatorname{Re}s[f(z), z_n]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}s[f(z), z_n]$$

Luego $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}s[f(z), z_n]$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $2\pi i$ obtenemos la ecuación deseada

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}s[f(z), z_k]$$

Como se deseaba demostrar. ■

Como caso particular de la **definición 2.5.1** tenemos la siguiente definición**.**

Definición 2.7.2.

Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, a un punto de Ω y sea f una función holomorfa en $\Omega\backslash\{ a \}$ supongamos que el disco cerrado $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ ver **Figura 2.7.4** . Se define el ***residuo de*** f en a como

$$\mathrm{Res}[f(z),a] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} f(z)\,dz$$

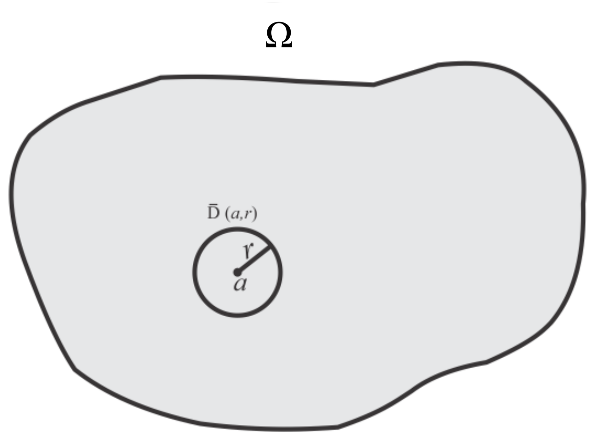


Figura 2.7.4

Observa que la integral en esta definición no depende de r pues si consideramos otro disco $\overline{D}(a,s) \subset \Omega$, el ciclo $\Gamma = C(a,r) - C(a,s)$ es nulhomólogo respecto a $\Omega \backslash\{ a \}$ y, como f es una función holomorfa en $\Omega\backslash\{ a \}$.

El **Teorema 2.1.13** inciso **I)** nos muestra que

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

Es decir

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{C(a,r)-C(a,s)} f(z)\,dz = \int_{C(a,r)} f(z)\,dz - \int_{C(a,s)} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{C(a,r)} f(z)\,\mathrm{dz} = \int_{C(a,s)} f(z)\,\mathrm{dz}$$

El siguiente teorema del residuo es una generalización al **Teorema 2.7.1** hacemos usos de los ciclos e índices.

Teorema 2.7.3. (Teorema del residuo para ciclos)
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $S \subset \Omega$ un conjunto de puntos aislados en Ω, es decir, $S' \cap \Omega = \emptyset$ y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus S$. si Γ es un ciclo en Ω nulhomólogo respecto a Ω entonces

a) El conjunto $\{ a \in S: \; I(\Gamma, a) \neq 0\}$ es finito

b) $\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in S} \mathrm{Res}[f(z), a]\, I(\Gamma, a)$

Demostración:

La demostración del teorema consiste en construir otro ciclo ψ formados por circunferencias centradas en los puntos singulares de f, de forma que $\Gamma - \psi$ sea un ciclo nulhomólogo respecto de $\Omega \setminus S$ y en esta situación aplicar **Teorema 2.1.13. (Teorema de Cauchy y formula integral de Cauchy para ciclos)** inciso I).

En primer lugar veamos que la suma anterior es finita, es decir que $I(\Gamma, a) = 0$ salvo para un numero finito de puntos $a \in S$. Consideremos el abierto (unión de componentes conexas $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$) $\boldsymbol{\Omega_0} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : I(\Gamma, z) = 0\}$. Por la hipótesis de que Γ es nulhomólogo respecto de Ω tenemos que $\boldsymbol{\Omega_0} \supseteq \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Sea

$$K= \mathbb{C}\setminus \mathbf{\Omega_0} = \Gamma^* \cup \{z\in \mathbb{C}\setminus \Gamma^* : I(\Gamma, z) \neq 0\}$$

Tenemos que $K\subset \Omega$ y K es cerrado (como complemento de un abierto) y acotado (por que no corta a la componente no acotada de $\mathbb{C}\setminus \Gamma^*$) luego es compacto. Con lo cual $S \cap K = \{a \in S: I(\Gamma, a) \neq 0\}$ es un conjunto finito, ya que en otro caso tendría un punto de acumulación que, por compacidad debería quedarse en K lo que implicaría que $S' \cap \Omega \neq \emptyset$ en contradicción con la hipótesis.

Lo anterior nos asegura que $S \cap K = \{a \in S: I(\Gamma, a) \neq 0\}$ es finito luego podemos enumerarlo $S \cap K = \{a_1, a_2, ..., a_q\}$ lo que justifica que la suma en el anunciado es una suma con un número finito de términos distintos de cero.

Centremos en cada uno de los puntos a_k un disco contenido en Ω y que no contenga a otros puntos de S.

Para ello sea $\rho > 0$ de forma que $\overline{D}(a_k, \rho) \subset \Omega$ y $\overline{D}(a_k, \rho) \cap S = \{a_k\}$ para $k = 1,.., q$ para cada k sea $m_k = I(\Gamma, a_k)$ y sea $\tau_k = m_k C(a_k, \rho)$. Consideremos el ciclo $\psi = \sum_{j=1}^{k} \tau_j$.

A continuación probaremos que el ciclo $\Gamma - \psi$ es nulhomólogo respecto a $\Omega \setminus S$, esto es, para $z \notin \Omega \setminus S$ se verifica que $I(\Gamma - \psi, z) = 0$.

Distinguimos varios casos:

- Si $z \notin \Omega$ entonces $I(\Gamma, z) = 0$ por hipótesis y además $z \notin \overline{D}(a_k, \rho)$ para $1\leq k \leq q$ luego $I(\tau_k, z) = 0$, $1\leq k \leq q$, de donde $I(\psi, z) = 0$ para cada k. concluimos que $I(\Gamma - \psi, z) = 0$.

- $z \in S$ tenemos dos posibilidades :

  - $z \neq a_k$ para $1 \leq k \leq q$ en cuyo caso $\mathrm{I}(\Gamma, z) = 0$ y además $z \notin \overline{D}(a_k, \rho)$ para $1 \leq k \leq q$ por construcción, luego también $\mathrm{I}(\tau_k, z) = 0$ para cada k. concluimos de nuevo que $\mathrm{I}(\Gamma - \psi, z) = 0$.

  - $z = a_j$ para cierta j. entonces $\mathrm{I}(\Gamma, a_j) = m_j$, y por definición, $\mathrm{I}(\tau_j, a_j) = m_j$ y $\mathrm{I}(\tau_k, a_j) = 0$ para $k \neq j$ ya que $a_j \notin \overline{D}(a_k, \rho)$ para $k \neq j$.

Luego tenemos

$$\mathrm{I}(\Gamma - \psi, z) = \mathrm{I}(\Gamma, z) - \mathrm{I}(\psi, z) = m_j - \mathrm{I}(\tau_j, a_j) = m_j - m_j = 0$$

Hemos justificado así que el ciclo $\Gamma - \psi$ es nulhomólogo respecto del abierto $\Omega \setminus S$.

Aplicamos ahora el **Teorema 2.1.13** inciso **I)** a dicho abierto para el ciclo $\Gamma - \psi$ y a la función $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$ y obtenemos que

$$0 = \int_{\Gamma - \psi} f(z)\,\mathrm{dz} = \int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{dz} - \int_{\psi} f(z)\,\mathrm{dz}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{dz} = \int_{\psi} f(z)\,\mathrm{dz}$$

$$= \int_{\sum_{j=1}^{q} \tau_j} f(z)\,dz$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \int_{\tau_j} f(z)\,dz$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \int_{m_j C(a_j,\rho)} f(z)\,\mathrm{dz} = \sum_{j=1}^{q} m_j \int_{C(a_j,\rho)} f(z)\,dz$$

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}[f(z), a_j]\,\mathrm{I}(\Gamma, a_j)$$

$$= 2\pi i \sum_{a \in S} \mathrm{Res}[f(z), a]\,\mathrm{I}(\Gamma, a)$$

Donde se concluye que

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in S} \mathrm{Res}[f(z), a]\,\mathrm{I}(\Gamma, a)$$

Como queríamos probar. ■

El siguiente ejemplo es una aplicación del Teorema del residuo cuando el camino es cerrado simple.

Ejemplo 2.7.4.

Utilicemos el teorema del residuo para calcular la integral: $\int_{\gamma} \frac{5z-2}{z(z-1)}\,\mathrm{dz}$

Cuando γ es el círculo $|z| = 2$, positivamente orientado ver **Figura 2.7.5.**

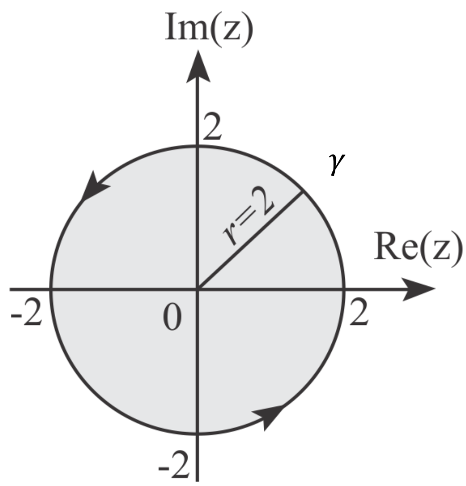


Figura 2.7.5.

Solución:

Dado que la singularidad se dará cuando $z(z-1)=0$ esto implica que $\mathrm{z}=0$ ó $z=1$ asi el integrando tiene las singularidades en $\mathrm{z}=0$ y $z=1$ ambas interiores a γ ver **Figura 2.7.6**

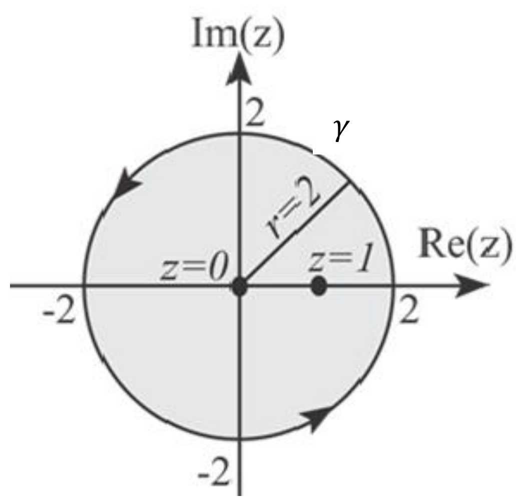


Figura 2.7.6

Podemos encontrar los residuos los cuales son $\text{Res}[\,f(z),0]$ y $\text{Res}[\,f(z),1]$.

Gracias a la serie de Maclaurin se tiene que:

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots \qquad\qquad (|z|<1)$$

En primer lugar escribimos, para el dominio $0<|z|<1$. El desarrollo de Laurent es decir cuando centramos el disco en $z=0$.

$$\frac{5z-2}{z(z-1)}=\left(\frac{5z-2}{z}\right)\left(\frac{1}{(z-1)}\right)$$

$$=\left(\frac{5z-2}{z}\right)\left(-\frac{1}{(1-z)}\right)$$

$$=\left(\frac{5z-2}{z}\right)\left(-[1+z+z^2+\ldots]\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{5z-2}{z}\right)\left(-[1+z+z^2+\ldots]\right)=\left(5-\frac{2}{z}\right)\left(-1-z-z^2-\ldots\right)$$

$$=5\left(-1-z-z^2-\ldots\right)-\frac{2}{z}\left(-1-z-z^2-\ldots\right)$$

$$=-5-5z-5z^2-\ldots+\frac{2}{z}+2z+2z^2+\ldots$$

$$=\frac{2}{z}-3-3z-2z^2+\ldots$$

Por tanto $\quad \dfrac{5\mathrm{z}-2}{\mathrm{z}(\mathrm{z}-1)}=\dfrac{2}{z}-3-3z-2z^2+\ldots$

Del integrando concluimos que Res[f (z),0]=2

(Ya que el coeficiente de $(z-z_0)^{-1}$que en nuestro caso es z_0= 0 en el desarrollo de la serie de Laurent es 2)

A continuación en la singularidad $z=1$ observamos que cuando $0<|\mathrm{z}-1|<1$.

$$\frac{5\mathrm{z}-2}{\mathrm{z}(\mathrm{z}-1)}=\left(\frac{5\mathrm{z}-5+3}{(\mathrm{z}-1)}\right)\left(\frac{1}{(\mathrm{z}+1-1)}\right)$$

$$=\left(\frac{5(z-1)+3}{(z-1)}\right)\left(\frac{1}{(1+(z-1)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{5\mathrm{z}-2}{\mathrm{z}(\mathrm{z}-1)}=\left(5+\frac{3}{(z-1)}\right)\left(\frac{1}{(1-[-(z-1)]}\right)$$

$$=\left(5+\frac{3}{(z-1)}\right)\left(1+[-(z-1)]+[-(z-1)]^2+\ldots\right)$$

$$=\left(5+\frac{3}{(z-1)}\right)\left(1-(z-1)-(z-1)^2-\ldots\right)$$

$$=\quad 5\left(1-(z-1)-(z-1)^2-\ldots\right)+\frac{3}{(z-1)}\left(1-(z-1)-(z-1)^2-\ldots\right)$$

$$=5-5(z-1)-5(z-1)^2-\ldots+\frac{3}{(z-1)}-3-3(z-1)-\ldots$$

$$=5-5(z-1)-5(z-1)^2-\ldots+\frac{3}{(z-1)}-3-3(z-1)-\ldots$$

El coeficiente de $\frac{1}{(z-1)} = (z-1)^{-1}$ en el desarrollo en serie de Laurent válido para

$0 < |z-1| < 1$,es, por tanto 3.

Así $\operatorname{Re}s[f(z),1] = 3$ y luego aplicando el **Teorema 2.7.1**

Se obtiene

$$\therefore \qquad \int_{\gamma} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i\left[\operatorname{Re}s[f(z),0] + \operatorname{Re}s[f(z),1]\right] = 2\pi i[2+3] = 10\pi i$$

CAPITULO III

3. APLICACIONES DEL TEOREMA DEL RESIDUO

3.1 APLICACIONES DEL TEOREMA DEL RESIDUO AL CÁLCULO DE INTEGRALES

Las aplicaciones más importantes del Teorema del residuo es el cálculo de ciertos tipos de integrales reales. La idea básica es relacionar esas integrales reales con otras integrales sobre un camino cerrado en el plano complejo, evaluar esta última mediante residuos y utilizar el resultado para deducir el valor de la primera. Seleccionamos algunos tipos de integrales a lo que se le puede aplicar la técnica con éxito.

3.1.1 INTEGRALES DEL TIPO $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt$

Suponemos que R es una función racional de dos variables continua en la circunferencia unidad la idea para calcular esta integral por él método de los residuos es convertirla en una integral sobre C(0,1) (disco unidad ver **Figura 3.1**) de una función compleja que también va a ser racional.

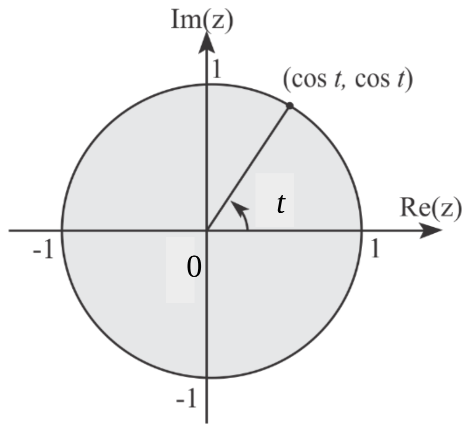


Figura 3.1

Parametrizando la trayectoria del disco unidad se tiene que $z = \cos t + isen\ t = e^{it}$.
Además por las igualdades **[1.3]** y **[1.4] sección 1.5 Capitulo 1** se tiene que

$$cos\, t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{y} \quad sen\, t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Esto implica que

$$sen\, t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2\, i}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad cos\, t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$dz = iz\, dt \ \Rightarrow \frac{dz}{zi} = dt$$

Por tanto se verifica que

$$\int_{C(0.1)} R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]\frac{1}{\mathrm{iz}}\mathrm{dz} = \int_0^{2\pi} \mathrm{R}\left(cos\ t\ , sen\ t\right)dt$$

En consecuencia, si notamos $f(z) = R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\frac{1}{iz}$, tenemos que $f(z)$ es una función racional por las que sus únicas singularidades aisladas son polos, para calcular la integral solo nos interesan los polos que están dentro del disco unidad. Supongamos que estos son $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$.

El **teorema 2.7.3** del residuo nos dice que

$$\int_0^{2\pi} R(sent, cost)dt = 2\pi\, i \sum_{j=1}^{q} Res\left[f(z), z_j\right] \mathrm{I}\left(C(0,1), z_j\right)$$

Pero dado que el análisis se hace en torno a C (0,1), es claro que el número de vueltas del disco unidad alrededor de cualquier z_j es 1 es decir $\mathrm{I}(\mathrm{C}\ (0,1)\ , z_j) = 1$ para j = 1,…, q. así la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\int_0^{2\pi} R(sent, cost)dt = 2\pi\, i \sum_{j=1}^{q} Res\left[f(z), z_j\right]$$

Como aplicación de este tipo de integrales se tienen los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.1.1.1.

Calcular la integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos t}\, dt$

Solución:

Para calcular la integral por el método de residuos tenemos que convertirla en una integral sobre C (0,1), para ello haremos la parametrización $z = e^{it}$ además tenemos $dz = i\, e^{it}\ dt = iz\, dt$ lo que implica que $dt = dz / iz$.

Además $\cos t = \left(\dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

Por lo tanto obtenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\cos t}\, dt = \int_{C(0,1)} \frac{1}{5 + 2\dfrac{z^2+1}{z}} \frac{1}{\mathrm{i}z}\, \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{C(0,1)} \frac{1}{2z^2 + 5z + 2}\, \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{C(0,1)} \frac{1}{(2z+1)(z+2)}\, \mathrm{d}z$$

Tenemos que $f(z)$ es una función racional por lo que sus únicas posibles singularidades son polos.

Los polos de $\dfrac{1}{(2z+1)(z+2)}$ se obtiene resolviendo $(2z+1)(z+2) = 0$ y están dadas por

$$2z + 1 = 0 \Rightarrow z_0 = -\frac{1}{2} \quad , \quad z + 2 = 0 \Rightarrow z_1 = -2$$

Esta función tiene dos polos simples en z_0 y z_1 Solamente $z_0 = -1/2$ está dentro de C (0,1) **Figura 3.2.**

Calculamos el residuo en z_0 mediante el **criterio I** de la sección **2.6.1**

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(2z+1)(z+2)}, -\frac{1}{2}\right] = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left[\frac{(z + 1/2)}{(2z+1)(z+2)}\right]$$

$$= \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left[\frac{(2z+1)}{2(2z+1)(z+2)}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \left[\frac{(2z+1)}{2(2z+1)(z+2)} \right] = \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{1}{(2z+4)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(2z+1)(z+2)}, -\frac{1}{2} \right] = \frac{1}{3}$$

Por tanto

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{5+2\frac{z^2+1}{z}} \frac{1}{iz} \, dz = \frac{1}{i} 2\pi \, i \operatorname{Re} s\left[\frac{1}{(2z+1)(z+2)}, -\frac{1}{2} \right] = \frac{2\pi}{3}$$

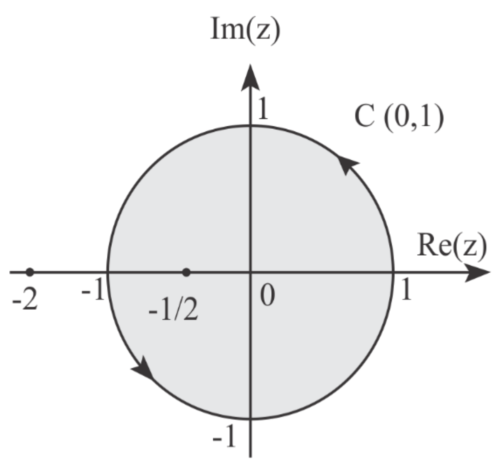


Figura 3.2

Ejemplo 3.1.1.2.

Mostrar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+b\,sent} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}.\quad si \quad a>|\mathrm{b}|$.

Solución:

Sea $z = e^{it}$.

Además $sen\,t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \dfrac{z-z^{-1}}{2i}$, $dt = dz/iz$.

Sustituyendo obtenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+b\,sent} = \int_{C(0,1)} \frac{dz/iz}{a+b\,(z-z^{-1})/2i}$$

$$= \int_{C(0,1)} \frac{2iz\ \ dz}{iz(2aiz+bz^2-b)}$$

$$= \int_{C(0,1)} \frac{2\ \ dz}{bz^2+2aiz-b}$$

Donde C(0,1) es el disco de radio uno con centro en el origen.

Los polos de $\dfrac{2}{bz^2+2aiz-b}$ se obtienen resolviendo $bz^2+2aiz-b=0$ y están dadas por

$$z = \frac{-2ai \pm \sqrt{(2ai)^2-4(b)(-b)}}{2b} = \frac{-2ai \pm \sqrt{-4a^2+4b^2}}{2b} = \frac{-ai \pm \sqrt{a^2-b^2}\ \ i}{b}$$

Por tanto,

$$z_1 = \frac{-ai + \sqrt{a^2 - b^2}\, i}{b}, \quad z_2 = \frac{-ai - \sqrt{a^2 - b^2}\, i}{b}$$

$$\left| \frac{-ai + \sqrt{a^2 - b^2}\, i}{b} \right| = \left| \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{\sqrt{a^2 - b^2} + a} \right| = \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2} + a} \right| < 1 \qquad \text{si } a > |\mathrm{b}|$$

Solamente $z_1 = \frac{-ai + \sqrt{a^2 - b^2}\, i}{b}$ está dentro de C (0,1), debido a que

$z_2 = \frac{-ai - \sqrt{a^2 - b^2}\, i}{b}$,no está dentro de C (0,1),debido a que

$$\left| \frac{-ai - \sqrt{a^2 - b^2}\, i}{b} \right| = \left| \frac{-\sqrt{a^2 - b^2} - a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - a}{\sqrt{a^2 - b^2} - a} \right| = \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2} - a} \right| > 1 \quad \text{ya que } a > |\,\mathrm{b}\,|$$

Calculamos el residuo en z_1, utilizando la regla de L´ Hopital.

$$\mathrm{Res}\left[\frac{2}{\mathrm{bz}^2 + 2\mathrm{aiz} - \mathrm{b}}, z_1 \right] = \lim_{z \to z_1} \left[(z - z_1) \frac{2}{\mathrm{bz}^2 + 2\mathrm{aiz} - \mathrm{b}} \right]$$

$$= \lim_{z \to z_1} \left[\frac{d/dz \quad 2z - 2z_1}{d/dz \quad \mathrm{bz}^2 + 2\mathrm{aiz} - \mathrm{b}} \right]$$

$$= \lim_{z \to z_1} \frac{2}{2bz + 2ai}$$

$$= \frac{1}{bz_1 + ai} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}\, i}$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+b\,sent} = 2\pi\, i\, Res\left[\frac{2}{bz^2+2aiz - b}, z_1\right]$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+b\,sent} = 2\,\pi\, i\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}\,i}\right) = \frac{2\,\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$, el valor buscado.

Ejemplo 3.1.1.3.

Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3-2\,cost+sent}$

Solución:

Sea $z = e^{it}$. Entonces

$$sent = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}, \qquad \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z-z^{-1}}{2}, \quad dz = iz\,dt$$

de modo que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dt}}{3-2\cos t+\mathrm{sent}} = \int_{C(0,1)} \frac{dz/iz}{3-2(z+z^{-1})/2+(z-z^{-1})/2i}$$

$$= \int_{C(0,1)} \frac{2dz}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}$$

Donde C(0,1) es el disco de radio uno y con centro en el origen.

Los polos de $\dfrac{2dz}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}$ son los polos simples

$$z=\frac{-6i\pm\sqrt{(6i)^2-4(1-2i)(-1-2i)}}{2(1-2i)}=\frac{6i\pm\sqrt{-16}}{2(1-2i)}=\frac{-6i\pm 4i}{2(1-2i)}$$

$$z_0=\frac{-6i+4i}{2(1-2i)}=\left(\frac{-i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}\right)=\frac{2-i}{5} \quad , \quad z_1=\frac{-6i-4i}{2(1-2i)}=\left(\frac{-5i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}\right)=2-i$$

Solamente $z_0=\dfrac{2-i}{5}$ está dentro de C (0,1) ver **Figura 3.3**.

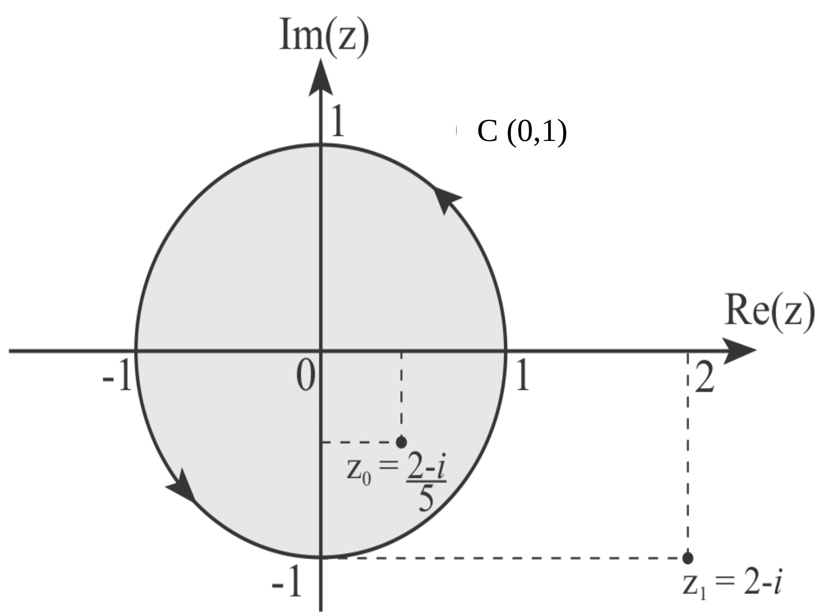


Figura 3.3

Calcularemos el residuo en $z_0 = \dfrac{2-i}{5}$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{2}{(1-2i)z^2+6iz-1+2i}, z_0\right] = \lim_{z\to z_0}\left[(z-(4-2i)/5)\frac{2}{(1-2i)z^2+6iz-1+2i}\right]$$

Aplicando L'Hopital

$$\operatorname{Res}\left[\frac{2}{(1-2i)z^2+6iz-1+2i}, z_0\right] = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{d/dz \quad 2z-(4-2i)/5}{d/dz \quad (1\text{-}2\mathrm{i})\mathrm{z}^2+6iz-1-2i}\right]$$

$$= \lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{(1\text{-}2\mathrm{i})\mathrm{z}+3i}\right] = \frac{1}{2i}$$

Por el **Teorema 2.7.1** del residuo obtenemos el resultado

$$\int_{C(0,1)} \frac{2dz}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i} = 2\pi\, i \ \operatorname{Res}\left[\frac{2}{(1-2i)z^2+6iz-1+2i}, z_0\right]$$

$$= 2\,\pi\, i\left(\frac{1}{2i}\right) = \pi$$

Por lo tanto $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{2dz}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i} = \pi$.

3.1.2 INTEGRALES DEL TIPO $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

En este caso suponemos que:

a) P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.

b) grado (Q) ≥ grado (P) +2.

c) Q (x) ≠ 0 para todo $x \in \mathbb{R}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{dx} = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[\frac{P(x)}{Q(x)}, z_j\right]$$

Demostración:

Para ello vamos aplicar el teorema del residuo a la función $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ en el abierto $\Omega = \mathbb{C}$. Sea Γ la poligonal $\Gamma(\alpha, \beta, \rho) = [-\alpha, \beta, \beta + i\rho, -\alpha + i\rho, -\alpha]$ donde α , β y ρ son números positivos que tomamos suficientemente grandes para que todo los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior queden en el interior del rectángulo Γ de modo que $\mathrm{I}\left(\Gamma_{(\alpha,\beta,\rho)}, z_j\right) = 1$ para $1 \leq j \leq q$.

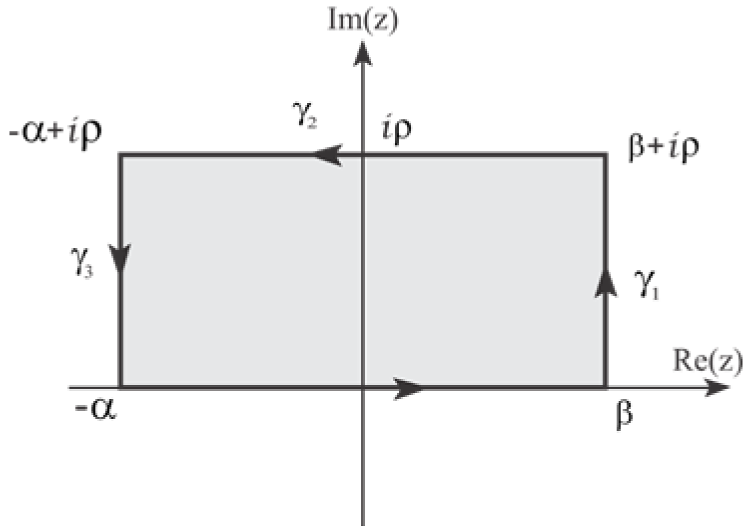


Figura 3.4

El **Teorema 2.7.3** del residuo nos dice que

$$\int_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho)} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right] \qquad \textbf{[3.1]}$$

El lado derecho de la **igualdad [3.1]** es independiente de α, β y ρ. Por tanto, será suficiente para nuestro propósito probar que cuando α, β y ρ tiende hacia $+\infty$ se verifica que

$$\int_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho)} \frac{P(z)}{Q(z)}dz \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

Por la hipótesis sobre los grados de los polinomios P y Q, se tiene que existe un número $K > 0$ tal que $|z| \geq K$ y $M > 0$ tal que, $|z^2F(z)|$ está acotada por la constante M en todos los puntos del semiplano superior que no estén en el interior de $\Gamma(\alpha,\beta,\rho)$.

Por tanto se cumple que

$$|z| \geq \mathrm{K} \Rightarrow |f(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{\mathrm{M}}{|z|^2} \qquad \textbf{[3.2]}$$

En lo que sigue suponemos que α, β y ρ son mayores que K.

Ahora sea $\gamma_1 = [\beta, \beta + i\rho]$, $\gamma_2 = [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]$, $\gamma_3 = [-\alpha + i\rho, -\alpha]$; **(Figura 3.4)** y notamos $I_k = \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$. Tenemos

$$2\pi i \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right] = \int_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + I_1 + I_2 + I_3$$

Así

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right] - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \right| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \qquad \textbf{[3.3]}$$

Acotamos ahora I_1. Para $z \in [\beta, \beta + i\rho]^*$ tenemos que $z = \beta + it$ para $t \in [0, \rho]$. Además, como es $\beta > K$ será $|z| \geq K$ por lo que, en virtud de la desigualdad **[3.2]** se tiene que

$$|f(z)| = |f(\beta + it)| \leq \frac{M}{\beta^2 + t^2}$$

Por tanto,

$$|I_1| = \left| \int_0^{\rho} f(\beta + it)\, i\, dt \right| \leq \int_0^{\rho} |f(\beta + it)|\, dt \leq \int_0^{\rho} \frac{M}{\beta^2 + t^2} dt = \frac{M}{\beta}\left[\arctan\frac{t}{\beta}\right]_{t=0}^{t=\rho} \leq \frac{M}{\beta}\frac{\pi}{2} = \frac{M\pi}{2\beta}$$

Acotamos ahora I_3. Para $z \in [-\alpha + i\rho, -\alpha]^*$ tenemos que $z = \alpha + it$ para $t \in [0, \rho]$ Además, como es $\alpha > k$ será $|z| \geq k$ por lo que, en virtud de la **desigualdad [3.1]** se tiene que

$$|f(z)| = |f(-\alpha + it)| \leq \frac{M}{\alpha^2 + t^2}$$

Por tanto,

$$|I_3| = \left| \int_0^\rho f(-\alpha + it)\, dt \right| \leq \int_0^\rho f(-\alpha + it)\, dt \leq \int_0^\rho \frac{M}{\alpha^2 + t^2}\, dt = \frac{M}{\alpha}\left[\arctan \frac{t}{\alpha}\right]_{t=0}^{t=\rho} \leq \frac{M}{\alpha}\frac{\pi}{2} = \frac{M\pi}{2\alpha}$$

Por últimos, para acotar I_2, para $z \in [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]^*$ tenemos, por ser $\rho > k$, que $|z| \geq k$ por lo que, en virtud de la **desigualdad [3.1]** Se tiene que $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$. Por tanto

$$|I_2| = \left| \int_{[\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]} f(z)\, dz \right| \leq \int_{-\alpha}^{\beta} |f(t + i\rho)|\, dt \leq \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{M}{t^2 + \rho^2} \leq (\alpha + \beta)\frac{M}{\rho^2}$$

En vista de **[3.3]** y de la acotaciones anteriores se tiene que

$$2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right] - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \leq \frac{M\pi}{2\beta} + \frac{M\pi}{2\alpha} + (\alpha + \beta)\frac{M}{\rho^2} \qquad \textbf{[3.4]}$$

Como en la desigualdad **[3.4]** la parte de la izquierda no depende para nada de ρ podemos fijar α y β y tomar límite $\rho \to +\infty$ con lo que obtenemos

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right] - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \right| \leq \frac{\pi}{2}\left(\frac{M}{\beta} + \frac{M}{\alpha}\right) \qquad \textbf{[3.5]}$$

Tomando ahora límite para $\alpha \to +\infty$ y $\beta \to +\infty$ en la expresión **[3.5]** de la derecha, se obtiene que la función $\dfrac{p(x)}{Q(x)}$ es impropiamente integrable en $\mathbb{R}$ y además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right]$$

Lo que se quería demostrar ■

Como aplicación de este tipo de integrales se tienen los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.1.2.1.

Calcular la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$

Solución:

Sea $P(z) = z^2 - z + 2$ y sea $Q(z) = z^4 + 10z^2 + 9$.

Para encontrar los ceros de $P(z)$ hacemos $P(z) = 0 \Rightarrow z^2 - z + 2 = 0$

Luego los ceros de $P(z)$ son:

$$z_1 = \frac{1 + 7i}{2} \qquad y \qquad z_2 = \frac{1 - 7i}{2}$$

Para encontrar los ceros de $Q(z)$ hacemos $Q(z) = 0 \Rightarrow z^4 + 10z^2 + 9 = 0$

Factorizando $Q(z)$ obtenemos

$$Q(z) = z^4 + 10z^2 + 9 = (z^2 + 9)(z^2 + 1) = (z + 3i)(z - 3i)(z + i)(z - i) = 0$$

Luego los ceros de $Q(z)$ son:

$$z_1 = 3i \quad z_2 = i \ ; \ z_3 = -3i \ ; \quad z_4 = -i$$

Notamos que los ceros de $P(z)$ no coinciden con los ceros de $Q(z)$, luego, los polos de la función $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ son los ceros de $Q(z)$.

Luego los polos buscados son $z_1 = 3i,\ z_2 = i$ ya que son estos los que se encuentran en el semiplano superior.

Calculando el residuo para $z_1 = 3i$ por medio de **criterio I** ecuación **[2.10]**

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9}, 3i\right] = \lim_{z \to z_1}\left[(z - 3i)\frac{z^2 - z + 2}{(z + 3i)\,(z - 3i)\,(z^2 + 1)}\right]$$

$$= \lim_{z \to z_1} \frac{z^2 - z + 2}{(z + 3i)\ (z^2 + 1)}$$

$$= \frac{7 + 3i}{48i}$$

Calculando el residuo para $z_2 = i$ por medio de **criterio I** ecuación **[2.10]**

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9}, i\right] = \lim_{z \to z_2}\left[(z - i)\frac{z^2 - z + 2}{(z^2 + 9)\,(z + i)\ (z - i)}\right]$$

$$= \lim_{z \to z_2} \frac{z^2 - z + 2}{(z^2 + 9)\ (z + i)}$$

$$= \frac{1 - i}{16i}$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx = 2\pi\, i\left(\operatorname{Re}s\left[\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}, 3i\right] + \operatorname{Re}s\left[\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}, i\right]\right)$$

$$= 2\pi\, i\left[\frac{7+3i}{48i} + \frac{1-i}{16i}\right]$$

$$= 2\pi\, i\left[\frac{7+3i+3-3i}{48}\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{10}{48}\right] = \frac{20\pi}{48} = \frac{5\pi}{12}$$

Ejemplo 3.1.2.2.

Calcular la integral. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$

Solución:

Suponemos que $a > 0$ y $b > 0$ son distintos. La función que integramos tiene dos polos simples en el semiplano superior en los puntos ia, ib.

Calculamos el residuo para ia, por **criterio I** ecuación **[2.10].**

$$Res\left[\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ia\right] = \lim_{z\to ia}\left[(z-ia)\frac{1}{(z-ia)(z+ia)(z^2+b^2)}\right]$$

$$= \lim_{z\to ia}\left[\frac{1}{(z+ia)(z^2+b^2)}\right] = \frac{1}{2ia(b^2-a^2)}.$$

Calculamos el residuo para ib , por **criterio I,** ecuación **[2.10]**

$$Res\left[\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ib\right] = \lim_{z\to ib}\left[(z-ib)\frac{1}{(z^2+a^2)(z-ib)(z+ib)}\right]$$

$$= \lim_{z\to ib}\left[\frac{1}{(z^2+a^2)(z+ib)}\right]$$

$$= \frac{1}{2ib(a^2-b^2)}$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}dx = 2\pi i\ Res\left[\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)\left(z^2+b^2\right)}, ia\right] + 2\pi i\ Res\left[\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)\left(z^2+b^2\right)}, ib\right]$$

$$= 2\pi\, i\left(\frac{1}{2ia(b^2-a^2)} + \frac{1}{2ib(a^2-b^2)}\right)$$

$$= \frac{\pi}{ab\,(a+b)}.$$

Por tanto $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{\pi}{ab\,(a+b)}$ ■

3.1.3 INTEGRALES DEL TIPO $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{Bmatrix} \cos \lambda x \\ \operatorname{sen} \lambda x \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$

En este caso suponemos que

1) $\mathrm{F(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$ es el cociente de dos funciones polinómicas P y Q sin factores comunes y $\lambda \geq 0$.
2) $F(1/z)$ tiene un cero al menos de orden 2 en $z = 0$, esto es grado (Q)≥ grado (P) +2.
3) $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{Bmatrix} cos\lambda x \\ sen\lambda x \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} Re \\ Im \end{Bmatrix} 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_j \right]$$

Demostración:

Para este propósito vamos a aplicar el teorema del residuo a la función $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}$. Sea γ la curva cerrada que se obtiene al tomar el segmento de recta $(R, -R)$ (donde R es el radio del semicírculo $z = Re^{it}$) sobre el eje real seguido del semicírculo $z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$. Puesto que F(z) es el cociente de polinomio, sus polos y por ende los $F(z)e^{i\lambda z}$, ocurren solo en los ceros del denominador y así se obtienen un numero finitos de polos. Sí R se escoge suficientemente grande, todos los polos de F(z) que estén en el semiplano superior se localizaran en el interior de γ .

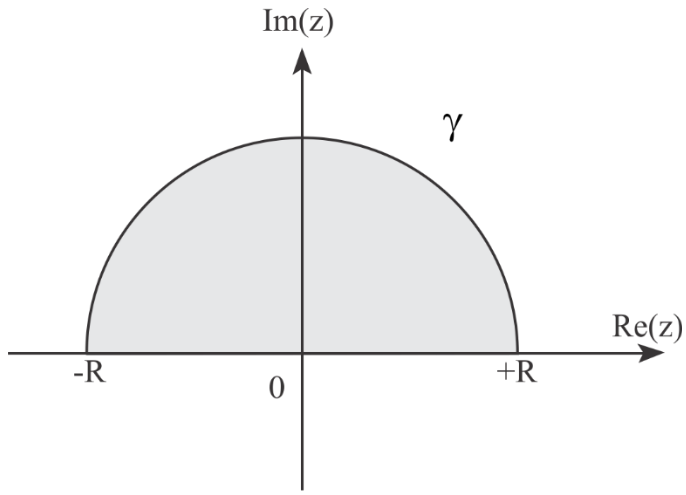


Figura 3.5

Entonces, el teorema del residuo **Teorema 2.7.1** implica que

$$2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[F(z)\, e^{i\lambda z}, z_j\right] = \int_{\gamma} F(z)\, e^{i\lambda z}\, dz$$

$$= \int_{-R}^{R} F(z)\, e^{i\lambda x}\, dx + \int_{0}^{\pi} F\left(R\, e^{it}\right) e^{i\lambda R e^{it}}\; i\, R\, e^{it} dt$$

Por hipótesis **2)**, $\left|z^2 F(z)\right|$ está acotada por una constante M en todos los puntos del semiplano superior que no estén en el interior de γ.

Así

$$\left|\int_0^{\pi} F\left(Re^{it}\right)e^{i\lambda Re^{it}} \; iRe^{it}dt\right| \leq \int_0^{\pi}\left|F\left(Re^{it}\right)e^{i\lambda Re^{it}} \; iRe^{it}\right| dt$$

$$= \int_0^{\pi}\left|F\left(Re^{it}\right)e^{i\lambda R\cos t - \lambda R \operatorname{sen} t} \; iRe^{it}\right| dt$$

$$\leq \frac{M}{R}\int_0^{\pi} e^{-\lambda R \operatorname{sen} t}\, dt$$

$$\leq \frac{M\pi}{R}$$

Ya que $e^{-\lambda R \operatorname{sen} t} \leq 1$. por el **Teorema 1.7.4** capítulo 1 de comparación de integrales impropias del cálculos se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos\lambda x\, dx \;, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\operatorname{sen}\lambda x\, dx \;; \qquad \lambda \geq 0$$

Ambas convergen. Cuando $R \to \infty$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{i\lambda x}\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[F(z)e^{i\lambda z}, z_j\right] \qquad \lambda \geq 0$$

De donde se sigue el resultado al tomar las partes reales e imaginarias de ambos lados. Lo que se quería demostrar ■

3.1.4 INTEGRALES DEL TIPO $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\lambda x}\, dx$

En este caso suponemos que:

1) P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes y $\lambda > 0$

2) Grado $(Q) \geq$ Grado$(P)+1$.

3) $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\lambda x} dx = 2\pi\, \mathrm{i} \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_j\right]$$

Demostración:

Para ello vamos a aplicar el teorema del residuo a la función $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}$ en el abierto $\Omega = \mathbb{C}$.

Consideremos la poligonal $\Gamma(\alpha, \beta, \rho) = [-\alpha, \beta, \beta + i\rho, -\alpha + i\rho, -\alpha]$ ver **Figura 3.6** donde α , β y ρ son números positivos que tomamos suficientemente grandes para que todo los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior queden en el interior del rectángulo Γ de modo que $\mathrm{I}\left(\Gamma_{(\alpha,\beta,\rho)}, z_j\right) = 1$ para $1 \leq j \leq q$.

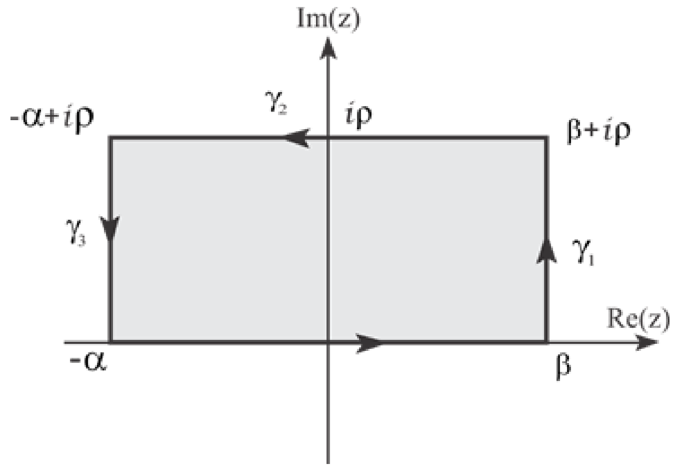


Figura 3.6

El **Teorema 2.7.3** del residuo nos dice que

$$\int_{\Gamma(\alpha.\beta,\rho)} \frac{p(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[\frac{p(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_j\right] \qquad \textbf{[3.6]}$$

El lado derecho de la **igualdad [3.6]** es independiente de α, β y ρ. Por tanto será suficiente para nuestro propósito probar que cuando α, β y ρ tiende hacia $+\infty$ se verifica que

$$\int_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho)} \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)} dz \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx$$

Por la hipótesis sobre los grados de los polinomios P y Q se tiene que existen números $K > 0 \; y \; M > 0$ tales que

$$|z| \geq k \Rightarrow \left|\frac{p(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{|z|} \qquad \textbf{[3.7]}$$

En lo que sigue suponemos que α, β y ρ son mayores que K

Ahora $\gamma_1 = [\beta,\beta+i\rho]$, $\gamma_2=[\beta+i\rho,-\alpha+i\rho]$, $\gamma_3=[-\alpha+i\rho,-\alpha]$ **(Figura 3.6)** y notamos $I_k = \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$. Tenemos

$$2\pi i\sum_{j=1}^{q}\mathrm{Res}\left[\frac{p(z)}{Q(z)}e^{i\lambda z},z_j\right] = \int_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho)}\frac{e^{i\lambda z}P(z)}{Q(z)}dz = \int_{-\alpha}^{\beta}\frac{e^{i\lambda x}P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x + I_1 + I_2 + I_3$$

Así

$$\left|2\pi i\sum_{j=1}^{q}Res\left[\frac{p(z)}{Q(z)}e^{i\lambda z},z_j\right] - \int_{-\alpha}^{\beta}\frac{e^{i\lambda x}P(x)}{Q(x)}dx\right| \le |I_1| + |I_2| + |I_3| \qquad \textbf{[3.8]}$$

Acotamos ahora I_1. Para $z\in[\beta,\beta+i\rho]^*$ tenemos que $z=\beta+it$ para $t\in[0,\rho]$. Además, como es $\beta>k$ será $|z|\ge k$ por lo que, en virtud de la **desigualdad [3.7]** se tiene que

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{P(\beta+it)}{Q(\beta+it)}\right| \le \frac{M}{|\beta+it|} \le \frac{M}{\beta}$$

Además $\left|e^{i\lambda(\beta+it)}\right| = e^{-\lambda t}$. Por tanto,

$$|I_1| = \left|\int_0^{\rho} f(\beta+it)i\,dt\right| \le \int_0^{\rho}|f(\beta+it)|\,dt \le \int_0^{\rho}\frac{\mathrm{M}e^{-\lambda t}}{\beta}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{M}}{\beta}\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_{t=0}^{t=\rho} = \frac{\mathrm{M}}{\beta}\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda} \le \frac{\mathrm{M}}{\beta\lambda}$$

Acotamos ahora I_3. Para $z \in [-\alpha + i\rho, -\alpha]^*$ tenemos que $z = -\alpha + it$ para $t \in [0, \rho]$. Además, como es $\alpha > k$ será $|z| \geq k$ por lo que, en virtud de la **desigualdad [3.7]** se tiene que

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{P(-\alpha + it)}{Q(-\alpha + it)}\right| \leq \frac{M}{|-\alpha + it|} \leq \frac{M}{\alpha}$$

Además $\left|e^{i\lambda(-\alpha + it)}\right| = e^{-\lambda t}$. Por tanto,

$$|I_3| = \left|\int_0^{\rho} f(-\alpha + it)i\, dt\right| \leq \int_0^{\rho} |f(-\alpha + it)|\, dt \leq \int_0^{\rho} \frac{Me^{-\lambda t}}{\alpha} dt = \frac{M}{\alpha}\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_{t=0}^{t=\rho} = \frac{M}{\alpha}\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \leq \frac{M}{\alpha\lambda}$$

Por último, para acotar I_2, para $z \in [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]^*$ tenemos, por ser $\rho > k$, que $|z| \geq k$ por lo que, en virtud de la **desigualdad [3.7],** Se tiene que $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{\rho}$.

Además para $z \in [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]^*$ es $\operatorname{Im} z = \rho$, por tanto $\left|e^{i\lambda z}\right| = e^{-\lambda\rho}$. Deducimos que

$$|I_2| = \left|\int_{[\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]} f(z)dz\right| \leq \int_{-\alpha}^{\beta} |f(t + i\rho)|\, dt \leq \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{Me^{-\lambda\rho}}{\rho} dt = (\alpha + \beta)\frac{M}{\rho}e^{-\lambda\rho}$$

En vista de **[3.8]** y de la acotaciones anteriores se tiene que

$$\left|2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[\frac{p(z)}{Q(z)}e^{i\lambda z}, z_j\right] - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\lambda x}P(x)}{Q(x)} dx\right| \leq \frac{M}{\beta\lambda} + \frac{M}{\alpha\lambda} + (\alpha + \beta)\frac{M}{\rho}e^{-\lambda\rho} \qquad \textbf{[3.9]}$$

Como en la desigualdad **[3.9]** la parte de la izquierda no depende para nada de ρ podemos fijar α y β y tomar límite $\rho \to +\infty$ con lo que, teniendo en cuenta que $\lambda > 0$, obtenemos

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_j \right] - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\lambda x} P(z)}{Q(x)} dx \right| \leq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{M}{\beta} + \frac{M}{\alpha} \right) \qquad \textbf{[3.10]}$$

Tomando ahora límite para $\alpha \to +\infty$ y $\beta \to +\infty$ en la expresión de la derecha **[3.10]**, se obtiene que la función $\dfrac{e^{i\lambda x} p(x)}{Q(x)}$ es impropiamente integrable en ℝ y además.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_j \right] \qquad \textbf{[3.11]}$$

Que es lo que se quería demostrar■

Como aplicación de este tipo de integrales se tienen los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.1.4.1.

Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \ sen\, \pi\, x}{x^2 + 2x + 5} dx$

Solución:

Considerar $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z\, e^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz$ donde γ es el camino de la **Figura 3.5**

Consideramos la función compleja

$$f\,(z) = \frac{z\,e^{i\,\pi\,z}}{z^2+2z+5} \;=\frac{ze^{i\pi\,z}}{(z\text{-}(\text{-}1+2i))(z-(-1-2\,i))}$$

Tiene polos simples en z $=\ -1\pm 2i$ pero solamente z $=-1+2i$ esta dentro de γ.

El residuo en z $=-1+2i$ es

$$\operatorname{Res}\left[\frac{ze^{i\,\pi\,z}}{z^2+2z+5},\,\text{-}1+2i\right] = \lim_{z\to -1+2i}\left\{(z+1-2i)\,\frac{ze^{i\,\pi\,z}}{z^2+2z+5}\right\}$$

$$= \lim_{z\to -1+2i}\left\{\frac{(z+1-2i)ze^{i\pi z}}{(z+1-2i)(z+1+2i)}\right\}$$

$$= \lim_{z\to -1+2i}\left\{\frac{ze^{i\pi z}}{(z+1+2i)}\right\}$$

$$=\frac{(-1+2i)\,e^{i\,\pi\,(-1+2i)}}{(-1+2i+1+2i)}$$

$$=\frac{(-1+2i)e^{-i\pi}e^{-2\pi}}{4i}$$

Entonces

$$\int_\gamma \frac{z\,e^{i\,\pi\,z}}{z^2+2z+5}\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{ze^{i\,\pi\,z}}{z^2+2z+5},\,\text{-}1+2i\right]$$

$$=2\pi i(-1+2i)\left(\frac{e^{-i\pi-2\pi}}{4i}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-2i)e^{-2\pi}$$

Ejemplo 3.1.4.2

Pruebe que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,sen\,a\,x}{x^2+b^2} = \frac{\pi}{2}e^{-ab} \qquad \forall a>0\,,\ b>0$

Solución:

La hipótesis de que $P\ y\ Q$ son funciones polinómicas sin factores comunes y $\lambda > 0$ y grado $(Q) \geq$ grado$(\mathrm{P})+1$ se cumple. Dado que el integrando es par, podemos utilizar la igualdad **[3.11]**.

Sea $sen\,az = e^{iaz}$ y $f(\mathrm{z}) = \dfrac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}$ factorizando $f(z)$ para encontrar los polos.

$$f(z) = \frac{z\,e^{iaz}}{z^2+b^2} = \frac{z\,e^{iaz}}{(z+ib)(z-ib)}$$

Ya que $-ib$, no está en el semiplano superior, el polo a considerar es ib y su residuo es

$$\mathrm{Re}\,s\left[\frac{z\,e^{iaz}}{z^2+b^2}\right] = \lim_{z\to \mathrm{ib}}\left[(z-ib)\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to \mathrm{ib}}\left[(z-ib)\frac{ze^{iaz}}{(z+ib)(z-ib)}\right]$$

$$= \lim_{z\to ib}\left[\frac{ze^{iaz}}{(z+ib)}\right] = \frac{ibe^{ia(ib)}}{2ib} = \frac{e^{-ab}}{2}$$

Tenemos entonces que: $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,sen\,ax}{x^2+b^2} = \mathrm{Im}\left(2\pi\,i\,\mathrm{Res}\left[\frac{z\,e^{iaz}}{z^2+b^2}, bi\right]\right) = \pi\,e^{-ab}$

El integrando como una función par tenemos: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,sen\,ax}{x^2+b^2} = \frac{\pi\,e^{-ab}}{2}$ que es lo que queríamos probar ■

3.1.5 INTEGRALES DEL TIPO $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} \mathrm{sen}(\lambda x) dx$

En este caso suponemos que

1) P y Q son funciones polinómicas con coeficientes reales sin factores comunes y $\lambda > 0$
2) Grado $(Q) \geq$ Grado $(\mathrm{P}) + 2$.
3) $Q(x)$ tiene ceros simples en puntos del eje que coinciden con ceros de la función $sen(\lambda x)$.

   En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior y $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en eje real, se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} sen(\lambda x) \mathrm{d}x = Im\left(2\pi\, i \sum_{j=1}^{q} Res\left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_j \right] + \pi\, i \sum_{j=1}^{p} Res\left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, x_j \right] \right)$$

Demostración:

Para aprender el procedimiento que se sigue con este tipo de integrales es suficiente considerar el caso en que $x = 0$ es el único cero que Q tiene en el eje real. Supondremos en lo que sigue que Q tiene un cero simple en $x = 0$ y $Q(x) \neq 0$ para $x \neq 0$.

La forma de proceder es muy parecida al tipo **de integrales 3.1.4** con una pequeña diferencia y es que ahora consideramos el camino de integración $\Gamma(\alpha,\beta,\rho\ ,\varepsilon)$ es decir a diferencia de la poligonal anterior **Figura 3.7** que consideraba a $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ este camino considera la semicircunferencia γ_ε que puede verse en la **figura 3.7** (si Q tuviera más ceros en el eje real habría que rodear cada uno de ellos con una semicircunferencia al igual que se ha hecho con $x=0$)

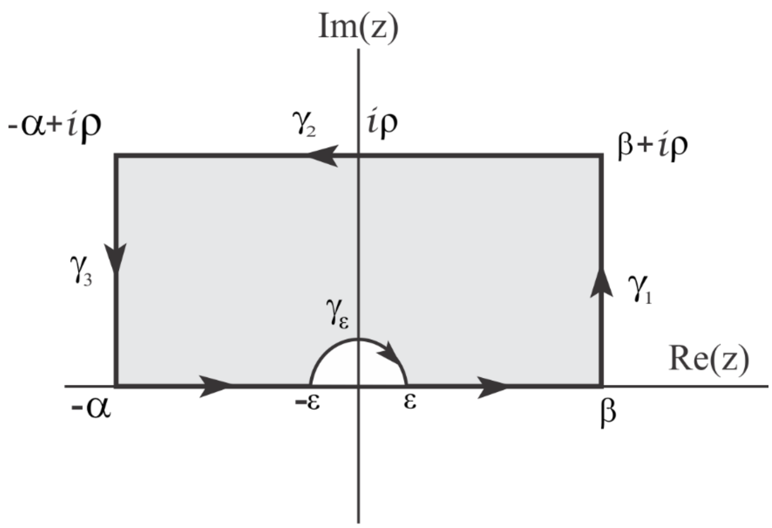


Figura 3.7

Considerando la función $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\lambda z}$ y teniendo en cuenta que $\mathrm{I}\left(\Gamma_{(\alpha,\beta,\rho,\varepsilon)},0\right)=0$

El **Teorema 2.7.3** del residuo nos dice que

$$\int_{\Gamma(\alpha.\beta,\rho,\varepsilon)} \frac{e^{i\lambda z}p(z)}{Q(z)}dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{q} Res\left[\frac{p(z)}{Q(z)}e^{i\lambda z},z_j\right]$$

Las acotaciones que hemos obtenido en el **tipo de integral anterior** en los segmentos γ_1, γ_2 y γ_3 sigue siendo válida por lo que obtenemos fácilmente la siguiente acotación análoga a la **acotación [3.10].**

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[f(z), z_j\right] - \int_{-\alpha}^{-\varepsilon} f(x)dx - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz - \int_{\varepsilon}^{\beta} f(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{M}{\beta} + \frac{M}{\alpha}\right)$$

Tomando ahora límite para $\alpha \to +\infty$ y $\beta \to +\infty$ en la expresión de la derecha, se obtiene.

$$2\pi\pi \sum_{j=1}^{q} Res\left[f(z), z_j\right] - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\, dx \qquad \textbf{[3.12]}$$

Sea $w = Res\left[f(z), 0\right] = \lim_{z \to 0} z\ f(z)$. Teniendo en cuenta el sentido de recorrido de $\gamma\varepsilon$ tenemos que

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz + \pi i w = -\int_{0}^{\pi}\left(f\left(\varepsilon e^{it}\right) - \frac{w}{\varepsilon e^{it}}\right) i\varepsilon i^{\ it}\ dt$$

Como

$$\left| f\left(\varepsilon e^{it}\right) - \frac{w}{\varepsilon e^{it}}\right| = \frac{1}{\varepsilon}\left|\varepsilon e^{it} f\left(\varepsilon e^{it}\right) - w\right|$$

Deducimos que

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz + \pi i w \right| \leq \int_{0}^{\pi} \left|\varepsilon e^{it} f\left(\varepsilon e^{it}\right) - w\right| dt \leq \pi\ max\left\{ \left|zf(z) - w\right| : \left|z\right| = \varepsilon \right\}$$

Y como $\lim_{z \to 0}\left(z\ f(z) - \mathrm{w}\right) = 0$ se sigue que cuando $\varepsilon \to 0$.

Hemos probado así $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = -\pi i w = -\pi i\ Res\left[f(z),0\right]$

Teniendo en cuenta la **igualdad [3.12]** página anterior deducimos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx\right) = 2\pi i\sum_{j=1}^{q} Res\left[f(z),z_j\right] + \pi i\ Res\left[f(z),0\right] \qquad \textbf{[3.13]}$$

Tomando ahora parte imaginaria y teniendo en cuenta que P y Q tienen coeficiente reales

$$\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx\right) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{P(x)}{Q(x)}sen(\lambda x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}sen(\lambda x)dx$$

Y teniendo en cuenta también que la función $x \to \dfrac{sen(\lambda x)P(x)}{Q(x)}$ es continua en $x = 0$ sin más que definirla en 0 igual a $Res\left[f(z),0\right]$ por lo que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{P(x)}{Q(x)}sen(\lambda x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}sen(\lambda x)dx\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}sen(\lambda x)dx$$

Concluimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}sen(\lambda x) = Im\left(2\pi i\sum_{j=1}^{q} Res\left[f(z),z_j\right] + \pi\, i Res\left[f(z),0\right]\right)$$

Lo que se quería demostrar■

3.1.6 INTEGRALES DEL TIPO $\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\lambda x}\, dx$

Para este tipo de integrales suponemos las siguientes hipótesis:

1) P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes $\lambda > 0$.
2) grado $(Q) \geq$ grado$(P)+1$.
3) $Q(x)$ tiene ceros simples en puntos del eje real.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior y $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en eje real, entonces se verifica que

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\lambda x}\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[\frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\lambda z}, z_j\right] + \pi i \sum_{j=1}^{p} Res\left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, x_j\right] \quad \textbf{[3.14]}$$

Las letras "V.P." se leen valor principal de Cauchy. Explicaremos lo que esto significa. Supongamos, sin pérdida de generalidad que Q tiene un cero simple en $x = 0$ y $Q(x) \neq 0$ para $x \neq 0$. El método que hemos usado anteriormente se aplica exactamente igual hasta llegar a la **igualdad [3.13]**. La dificultad ahora es que la función $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}$ no es continua en los ceros reales de Q y la integral impropia

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\lambda x} dx$ no existe.

Todo lo que podemos obtener en este caso es lo que afirma la **igualdad [3.13]:**

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx\right) = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[f(z), z_j\right] + \pi i\, Res\left[f(z), 0\right]$$

El valor del límite de la izquierda de esta igualdad se llama valor principal de Cauchy de la integral impropia y se representa por V.P.$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\lambda x} dx$. En consecuencia, podemos afirmar que

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[f(z), z_j\right] + \pi i \, Res\left[f(z), 0\right]$$

Naturalmente, si Q tuviera dos ceros simples reales $a < b$ el valor principal de la integral vendría dado por el límite siguiente:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{b+\varepsilon}^{-\infty} f(x)\, dx \right) = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} Res\left[f(z), z_j\right] + \pi i \, Res\left[f(z), a\right] + Res\left[f(z), b\right]$$

Observa que tomando parte real o imaginaria en la **igualdad [3.13]** obtenemos respectivamente, en la hipótesis de que los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ tengan coeficientes reales, las integrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\lambda x)\, dx$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\lambda x)\, dx$.

Tengamos en cuenta que alguna de estas integrales pueden ser convergente si los ceros de $Q(z)$ en el eje real coinciden con ceros de $\cos(x)$ o con ceros de $\operatorname{sen}(x)$. ■

Como aplicación de este tipo de integrales se tiene el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.6.1.

Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(\pi x)}{x^4 - 1}$

Solución:

Se trata de una integral real con ceros reales en el denominador, los puntos -1 y 1, que coinciden con los ceros del numerador ya que sen $(-\pi)$ = sen(π) = 0.

Considerando la identidad $e^{i(\lambda x)} = \cos(\lambda x) + isen\,(\lambda x)$, la **aplicación 3.1.5** integrales del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\lambda x)\,dx$ y tomando ahora la parte imaginaria teniendo en cuenta que P y Q tienen coeficiente reales se garantiza la siguiente igualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\operatorname{sen}(\pi x)}{x^4 - 1}\,dx = Im \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,e^{i\,\pi x}}{x^4 - 1}$$

Consideremos la función compleja

$$f(z) = \frac{ze^{i\,\pi z}}{z^4 - 1} = \frac{ze^{i\,\pi z}}{(z-1)(z+1)(z^2+1)}$$

Esta función tiene como singularidades los ceros de su denominador, que son los puntos -1, 1, $-i, i$. Entonces, sabemos que el valor principal de Cauchy de la última integral anterior vale

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,sen(\pi x)}{x^4 - 1}\,dx = 2\pi i\left[Res\left[f(z), z = i\right] + Res\left[f(z), z = -1\right] + Res\left[f(z), z = 1\right]\right]$$

Calculemos estos residuos. Las tres singularidades son polos simples.(el residuo de la función con respecto a la singularidad $-i$ no se calcula ya que esta singularidad no se encuentra en el semiplano superior)

Calculando el residuo para $z_0 = i$. Aplicando L'Hopital

$$\operatorname{Re}s\left[f(z), z_0\right] = \lim_{z \to z_0}\left\{\frac{z^2 e^{i\pi z} - i\, z\, e^{i\pi z}}{\left(z^4 - 1\right)}\right\}$$

$$= \lim_{z \to z_0}\left\{\frac{2ze^{i\pi z} + i\pi\, z\, e^{i\pi z} - i\, e^{i\pi z} + e^{i\pi z}}{4z^3}\right\} = \frac{e^{-\pi}}{4}$$

Calculando el residuo para $z_1 = -1$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_1\right] = \lim_{z \to z_1}\left\{(z+1)\frac{ze^{i\pi\pi}}{(z-1)(z+1)\left(z^2+1\right)}\right\}$$

$$= \frac{-e^{i\pi}}{-4}$$

$$= \frac{\cos\pi + i sen\pi}{4} \quad = \frac{-1}{4}$$

Calculando el residuo para $z_2 = 1$

$$\operatorname{Re}s\left[f(z), z_2\right] = \lim_{z \to z_2}\left\{(z-1)\frac{ze^{i\pi z}}{(z-1)(z+1)\left(z^2+1\right)}\right\}$$

$$= \frac{e^{i\pi}}{4}$$

$$= \frac{\cos\pi + i sen\pi}{4} = \frac{-1}{4}$$

Luego tenemos

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\, sen(\pi\, x)}{x^4 - 1}dx = 2\pi\, i\left(-\frac{e^{-\pi}}{4}\right) + \pi\, i\left(\frac{-1}{4}\right) + \pi\, i\left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\, sen(\pi\, x)}{x^4 - 1}dx = \operatorname{Im}\left(\frac{\pi\, i\,(e^{-\pi} - 1)}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}(e^{-\pi} - 1). \blacksquare$$

3.2 PRINCIPIO DEL ARGUMENTO Y TEOREMA DE ROUCHÉ

3.2.1 Relación entre Ceros y Polos de orden *m*

Si f es una función holomorfa en z_0, entonces es holomorfa en algún entorno $|z - z_0| < R_0$ de z_0 ; y sabemos que por el teorema de Taylor que

$$f(z) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < R_0) \qquad \textbf{[3.15]}$$

Donde $a_0 = f(z_0)$ y $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $n = 1,2,...$ si, además $f(z_0) = 0$ pero existe un entero positivo m tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ y todas las derivadas de órdenes inferiores se anulan en z_0, se dice que f tiene en z_0 un cero de orden *m* en este caso el desarrollo **[3.15]** se convierte en:

$$f(z) = (z - z_0)^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < R_0) \qquad \textbf{[3.16]}$$

Donde $a_m \neq 0$. Como las series de potencias son convergentes representan siempre funciones holomorfas entonces se deduce que

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \qquad \textbf{[3.17]}$$

Donde $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n$ y además g es holomorfa en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Supongamos, por otra parte, que existe un entero positivo *m* tal que una función dada *f* se puede escribir en la forma de **[3.17]** donde g es holomorfa y no nula en z_0.

Entonces existe un entorno $|z - z_0| < R_0$ de z_0 en el que

$$f(z) = g(z)(z - z_0)^m + \frac{g'(z_0)}{1!}(z - z_0)^{m+1} + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0)^{m+2} + \ldots$$

Y, ya que ésta representación en serie de Taylor de *f*, se sigue que $\frac{g^{(m)}(z_0)}{m!} = g(z_0) \neq 0$ y que $f(z)$ y todas sus derivadas de orden menor que m se anulan en z_0. Esto demuestra que la **ecuación [3.17],** con las condiciones impuestas sobre la función g, puede usarse como caracterización alternativa de los ceros de orden *m.*

Los ceros y polos de orden m están estrechamente vinculados. En efecto ahora podemos probar que cuando dos funciones P y Q son holomorfas en un punto z_0*, y* $P(z_0) \neq 0$, el cociente $\frac{P(z)}{Q(z)}$ tiene un polo de orden ***m*** en z_0 si y solo si Q tiene un cero de orden m ahí.

La verificación de esta afirmación es fácil y se basa en las dos observaciones siguientes relativas a dos nuevas funciones $\phi(z)$ y $g(z)$, con propiedades a determinar

a) $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$, entonces $Q(z) = (z - z_0)^m \frac{P(z)}{\phi(z)}$

b) $Q(z) = (z - z_0)^m g(z)$, entonces $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)/g(z)}{(z - z_0)^m}$

Primero, supongamos que $\frac{P(z)}{Q(z)}$ tiene un polo de orden *m en* z_0, en cuyo caso tiene la forma indicada en *a*).Como $\phi(z)$ es holomorfa y no nula en z_0, lo mismo es cierto para el cociente $\frac{P(z)}{\phi(z)}$ en a); luego Q tiene un cero de orden m en z_0, b) nos muestra que z_0 es un polo de orden m del cociente $\frac{P(z)}{Q(z)}$.

Ejemplo 3.2.2.

Sean las funciones enteras $P(z) = 1$ y $Q(z) = z\,(e^z - 1)$. Puesto que

$$Q(0) = Q'(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad Q''(0) = 2 \neq 0$$

Q tiene un cero de orden 2 en el punto $z = 0$. Por lo tanto, el cociente

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{z(e^z - 1)}$$

Tiene un polo de orden 2 en $z = 0$.

Nos ocuparemos ahora de varios resultados sobre funciones holomorfas que se deducen del Teorema del residuo y proporcionan herramientas útiles para el estudio de los ceros de una función holomorfa. En lo que sigue vamos a considerar funciones cuyas únicas singularidades son polos.

Definición 3.2.3. (Funciones Meromorfas)
Diremos que una función f es meromorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ si las posibles singularidades de f en Ω son polos, es decir existe un conjunto de puntos $P \subset \Omega$ de puntos aislados en Ω tal que f es holomorfa en $\Omega \setminus P$ y f tiene un polo en cada punto de P.

Nota: Denotaremos por $\mathcal{M}(\Omega)$ al conjunto de las funciones meromorfas en Ω.

La palabra "meromorfa" significa "de forma racional" (la terminología viene del Griego clásico "meros", que significa parte, en contrapunto a "holos", que significa todo.) por qué las funciones meromorfas se comportan de forma parecida a las funciones racionales. De hecho los ejemplos más inmediatos de funciones meromorfas son las funciones racionales las cuales son funciones meromorfas en $\mathbb{C}$.

Naturalmente, por la **Definición 1.6.21 capitulo 1** toda función holomorfa es también meromorfa. Más aun el cociente f/g de dos funciones holomorfas en un abierto Ω, En el supuesto que g no es idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω, es una función meromorfa en Ω.

Teorema 3.2.4.

Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en Ω y sea $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ El conjunto de los ceros de f en Ω. Las siguientes propiedades son equivalentes

(a) El conjunto $Z(f)$ tiene un punto de acumulación en Ω, es decir $Z'(f) \cap \Omega \neq \emptyset$.

(b) Existe un punto $a \in \Omega$ tal que $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(c) f es la función constante cero en Ω.

Demostración:

(*a*)⇒ (b) por la hipótesis hay algún punto $a \in Z'(f) \cap \Omega$, sea $\rho > 0$ tal que $D(a, \rho) \subset \Omega$. Existe una sucesión de puntos $a_n \in D(a, \rho)$ con $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{ a_n \} \longrightarrow a$

El teorema de Taylor afirma que

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad \text{para todo } z \in D(a, \rho)$$

Siendo $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad n = 1,2,\ldots$

En primer lugar, por la continuidad de f tenemos que $f(a) = \lim_{n\to\infty}\{f(a_n)\} = 0$.

Volvemos a escribir la serie teniendo en cuenta que $f(a) = 0$ y dividimos la función por $z - a$ con lo que

$$\frac{f(z)}{z-a} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-1} \qquad \text{para todo } z \in D(a,\rho) \setminus \{a\}$$

Sea $g_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-1}$, función que es holomorfa en (a,ρ) y $g_1(a) = 0$

Con ello $\frac{f(z)}{z-a} = a_1 + g_1(z)$

Evaluando en a_n obtenemos $0 = a_1 + g_1(z)$ y, tomando limites deducimos que $0 = a_1 + \lim_{n\to\infty} g_1(a_n) = a_1 + g_1(a) = a_1$ .Hemos obtenido $a_1 = 0$.

Si aplicamos inducción sobre k.

Suponiendo $a_j = 0$ para $j = 1,\ldots, k$, podemos escribir

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = a_{k+1} + \sum_{j=k+2}^{\infty} a_j (z-a)^{j-k-1} \qquad \text{Para todo } z \in D(a,\rho) \setminus \{a\}$$

Nuevamente llamaremos $g_{k+1}(z) = \sum_{j=k+2}^{\infty} a_j (z-a)^{j-k-1}$.

Evaluemos la igualdad anterior en $z = b_n$ y tomamos límites para obtener

$$0 = a_{k+1} + \lim_{n\to\infty} g_{k+1}(b_n) = a_{k+1}$$

Luego $a_{k+1} = 0$ y, por inducción concluimos que $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ como queríamos probar.

(b)$\Rightarrow$ **(c)** Llamemos A= $\{z\in\Omega: f^{(k)}(z) = 0$, para todo $k\in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$. A no es vacío por hipótesis y es inmediato que A es cerrado relativo a Ω puesto que es intersección de cerrados relativos

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty}\left\{z \in \Omega : f^{(k)}(z) = 0\right\}$$

Sea $a \in A$ y tomemos $\rho > 0$ tal que $D(a, \rho) \subset \Omega$. El **Teorema 1.10.1 capítulo 1** de Taylor afirma que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \text{para todo } z \in D(a,\rho)$$

Luego $f(z) = 0$ para todo $z \in D(a,\rho)$ con lo cual $f^{(n)}(z) = 0$ para todo $z \in D(a,\rho)$ y para cualquier $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Esto último implica que $D(a,\rho) \subset A$.

Luego A es abierto. Por conexidad A= Ω. ***(c)***$\Rightarrow$ ***(a)*** Es evidente.

Así se ha demostrado el teorema. ■

A continuación enunciamos uno de los teoremas más útiles de la teoría de funciones holomorfas. Este teorema afirma, en particular, que los valores de una función holomorfa en un dominio están determinados de forma única por los valores que dicha función toma en los puntos de una sucesión que converja a un punto del dominio.

Además es un resultado muy importante que utilizaremos para demostración del **Teorema (Principio de identidad para funciones Meromorfas).** Que trabajaremos más adelante.

Teorema 3.2.5. (Principio de identidad para funciones holomorfas)

Si dos funciones holomorfas en un dominio Ω coinciden en un subconjunto de Ω que tiene algún punto de acumulación en Ω entonces dichas funciones coinciden en Ω.

Demostración:

Sean f, $g \in \mathcal{H}$ (Ω) donde Ω es un dominio. Hagamos $h = f - g$. La hipótesis nos dice que $Z(h)' \cap \Omega \neq \emptyset$ y, por el resultado anterior, h es idénticamente nula, esto es $f(z) = g(z)$ para $z \in \Omega$. Y esto completa la demostración ■

Corolario 3.2.6.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función no idénticamente nula en Ω. Sea $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ El conjunto de los ceros de f en Ω. Entonces:

(i) todo punto de $Z(f)$ es un punto aislado de $Z(f)$

(ii) $Z(f)$ es numerable.

Demostración:

(i) as hipótesis implican por el **Teorema 3.2.5** (Principio de identidad para funciones holomorfas) que $Z(f)$ no tiene ningún punto de acumulación en Ω, lo que implica que todo punto de $Z(f)$ es un punto aislado de $Z(f)$.

(ii) Basta tener en cuenta que todo abierto en $\mathbb{C}$ es unión numerable de compactos y que si K es un compacto contenido en Ω entonces el conjunto $Z(f) \cap K$ es finito. Y como la intersección de conjuntos finitos es finito esto implica que $Z(f)$ es finito y por lo tanto numerable como se deseaba demostrar ■

El siguiente teorema es un caso particular de la **Teorema 3.2.5.** Este resultado permite extender para funciones meromorfas las propiedades de los ceros de las funciones holomorfas. En particular, los ceros de una función meromorfa y no idénticamente nula, *f,* en un dominio, Ω, son un conjuntos de puntos aislados en Ω.

Teorema 3.2.7. (Principio de identidad para funciones Meromorfas)
Una función meromorfa en un dominio cuyos ceros tienen algún punto de acumulación en el dominio es idénticamente nula.

Demostración:
Sea Ω un dominio y f una función meromorfa en Ω. Notemos que $Z(f)$ el conjunto de los ceros y $P(f)$ el conjunto de los polos de f en Ω. Como $P(f)$ es un conjunto de puntos aislados en Ω el conjunto $\Omega_1 = \Omega \setminus P(f)$ es abierto.
Supongamos que $Z(f)$ tiene algún punto de acumulación en Ω, es evidente que un punto de acumulación de ceros también es un cero de f por lo que, en la hipótesis hecha, deberá ser $Z'(f) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ como f es holomorfa en Ω_1, si probamos que dicho conjunto es un dominio, el principio de identidad para funciones holomorfas implicara que $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega_1$, pero es claro que tiene que ser $P(f) = \emptyset$, por tanto, habremos probado que f es idénticamente nula en Ω.

Supongamos que $\Omega_1 = A \cup B$ siendo A y B conjuntos abiertos distintos del conjunto vacío tales que $A \cap B = \emptyset$. La idea es extender esta partición de Ω_1 a una partición por abiertos de Ω. Para ello definimos los conjuntos
$\hat{A} = A \cup \{z \in P(f) : \exists r>0,\ D(z,r)\setminus\{z\} \subset A\}$; $\hat{B} = B \cup \{z \in P(f) : \exists r > 0,\ D(z,r)\setminus\{z\} \subset B\}$. Es inmediato que ambos conjuntos son abiertos. Además si $z \in P(f)$ por ser $P(f)$ un conjunto de puntos aislados en Ω, hay algún $r>0$ tal que $D(z,r) \subset \Omega$ y $D(z,r) \cap P(f) = \{z\}$.

El conjunto $D(z,r)\setminus\{z\}$ está contenido en Ω_1, y como dicho conjunto es conexo, deberá ocurrir de que o bien está contenido en A o bien está contenido en B ya que hemos supuesto $A\cap B = \emptyset$.

En consecuencia $\hat{A} \cup \hat{B} = \Omega$ y $\hat{A}\cap \hat{B}=\emptyset$. Como Ω es un dominio alguno de ellos deber ser vacío, y por tanto algunos de los conjuntos A o B tiene que ser vacío. ■

En consecuencia si a es un cero de f existe un Disco $D(z,r) \subset \Omega$ tal que f es holomorfa en $D(z,r)$ y, por tanto, el concepto de orden de un cero para funciones holomorfas se aplica con igual significado para funciones meromorfas.

En particular se verifica el siguiente resultado.

Corolario 3.2.8.
Sea f una función meromorfa en un abierto Ω y supongamos que f tiene en $a \in \Omega$ un cero de orden m. Entonces existe una función g meromorfa en Ω cuyos polos son los mismos de f tal que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^m g(z)$ para todo $z \in \Omega$ que no sea polo de f.

Definición 3.2.9. (derivada logarítmica)
Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω. Definimos la derivada logarítmica de f como la función f'/f meromorfa en Ω.

Teorema 3.2.10.
Sea z_0 una singularidad aislada de orden $k \neq 0$ de una función. Entonces z_0 es un polo simple de f'/f y Res $(f'/f, z_0) = k$

Demostración:

Hipótesis: z_0 es una singularidad aislada de orden k

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+k} \qquad \text{Para} \qquad 0<|z-z_0|<r$$

Donde $a_0 \neq 0$, ahora derivando a f se tiene $f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+k)(z-z_0)^{n+k-1}$.

En el mismo entorno reducido.

Así

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+k} = (z-z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^k g(z)$$

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+k)(z-z_0)^{n+k-1} = (z-z_0)^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^{k-1} h(z)$$

Donde las funciones g(z) y $h(z)$ son holomorfas y no nulas en z_0. En concreto

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0(z-z_0)^0 + a_1(z-z_0)^1 + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

$$= a_0 + a_1(z-z_0)^1 + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Así $g(z_0)=a_0$

También

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)\,a_n\,(z-z_0)^n=(0+k)\,a_0+(1+k)\,a_1(z-z_0)^1+(2+k)\,a_2(z-z_0)^2+\ldots$$

$$=ka_0+(1+k)a_1(z-z_0)^1+(2+k)a_2(z-z_0)^2+\ldots$$

Así $h(z_0)=ka_0$.

Por consiguiente

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{(z-z_0)^{k-1}h(z)}{(z-z_0)^k\,g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)}\,\frac{h(z)}{g(z)}$$

Se indefine en $z=z_0$ es decir $\frac{f'(z)}{f(z)}\to\infty$ cuando $z\to z_0$

Así $\frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene un polo simple en $z=z_0$.

El residuo es:

$$\operatorname{Res}\left[{}^{f'}\!/_{f},z_0\right]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\left(\frac{1}{(z-z_0)}\,\frac{h(z)}{g(z)}\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{h(z)}{g(z)}=\frac{ka_0}{k}=k$$

Como se quería demostrar. ■

Teorema 3.2.11. (Principio del Argumento Generalizado)

Sea Ω un dominio, f una función meromorfa no idénticamente nula en Ω y g una función holomorfa en Ω. Sea $P(f)$ el conjunto de los polos y $Z(f)$ el conjunto de los ceros de f en Ω.

Para $b\in P(f)$ denotaremos como $n(b)$ el orden del polo de f en b, y para $a\in Z(f)$ denotaremos como $m(a)$ el orden del cero de f en a. Si Γ es un ciclo en $\Omega\backslash P(f)\cup Z(f)$ que es nulhomólogo con respecto a Ω se verifica que:

- El conjunto $\{ w\in P(f)\cup Z(f) : I(\Gamma,w) \neq 0 \}$ es finito
- $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\,dz = \sum_{a\in Z(f)} I(\Gamma,a)m(a)g(a) - \sum_{b\in P(f)} I(\Gamma,b)n(b)g(b) \qquad \textbf{[3.18]}$$

Demostración:

Sea $S = P(f)\cup Z(f)$ que es un conjunto de puntos aislados en Ω. Aplicamos el Teorema del Residuo a la función

$$h(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}g(z) \qquad\qquad (z\in\Omega\backslash S)$$

que es holomorfa en $\Omega\backslash S$.

Dicho teorema nos muestra que el conjunto $\{w\in S : I(\Gamma,w)\neq 0\}$ es finito y además

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} h(z)dz = \sum_{w\in S} I(\Gamma,w)\,\mathrm{Res}[h(z),w]$$

$$= \sum_{w\in P(f)\cup Z(f)} I(\Gamma,w)\,\mathrm{Res}[h(z),w]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \mathrm{h(z)dz} = \sum_{a\in Z(f)} \mathrm{I}(\Gamma,a)Res[h(z),a] + \sum_{b\in P(f)} \mathrm{I}(\Gamma,\mathrm{b})Res[h(z),b] \qquad \textbf{[3.19]}$$

Calculemos los residuos. Si $a \in \mathrm{Z}(f)$ hay un disco $\mathrm{D}(a,r) \subset \Omega$ tal que $\mathrm{D}(a,r) \cap \mathrm{S} = \{a\}$. Por tanto, existe una función $\varphi \in \mathcal{H}(\mathrm{D}(a,r))$ tal que $\varphi(a) \neq 0$ $f(z) = (z-a)^{m(a)}\varphi(z)$ para todo $z \in \mathrm{D}(a,r)$.

Por tanto

$$f'(z) = m(a)(z-a)^{m(a)-1}\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)$$

Y en consecuencia

$$h(z) = \frac{m(a)}{(z-a)}g(z) + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}g(z) \qquad z \in \mathrm{D}(a,r) \setminus \{a\}$$

Deducimos por el **criterio 1 para la determinación de residuo** que él $\lim_{z\to a}(z-a)h(z) = m(a)g(a)$ lo que implica que $\mathrm{Re}\,s[h(z),a] = m(a)g(a)$.

Si $b \in \mathrm{P}(f)$, entonces existe un disco $\mathrm{D}(b,r) \subset \Omega$ tal que $\mathrm{D}(a,r) \cap \mathrm{S} = \{b\}$. Por caracterización de los polos sabemos que hay una función ψ holomorfa en $\mathrm{D}(b,r)$ con $\psi(b) \neq 0$ tal que $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z-b)^{n(b)}}$ para todo $z \in \mathrm{D}(b,r) \setminus \{b\}$. Tomando r suficientemente pequeño podemos suponer que $\psi(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathrm{D}(b,r)$.

Tenemos que

$$f(z) = -n(b)\frac{\psi(z)}{(z-b)^{n(b)+1}} + \frac{\psi^{'}(z)}{(z-b)^{n(b)}}$$

Por tanto

$$h(z) = \frac{f\,'(z)}{f(z)}g(z)$$

$$h(z) = \frac{f\,'(z)}{f(z)}g(z) = \frac{\psi(z)}{\psi'(z)}g(z) + \frac{-n(b)}{(z-b)}g(z)\ .$$

Y deducimos por **criterio 1 para la determinación de residuo** que $\lim_{z\to b}(z-b)h(z) = -n(b)g(b)$, lo que implica que $\operatorname{Re}s[h(z),b] = -n(b)g(b)$

Así de ecuación **[3.19],** se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} h(z)dz = \sum_{a\in Z(f)} \mathrm{I}(\Gamma,a)Res[h(z),a] + \sum_{b\in P(f)} \mathrm{I}(\Gamma,b)Res[h(z),b]$$

$$= \sum_{a\in Z(f)} \mathrm{I}(\Gamma,a)m(a)g(a) + \sum_{b\in \mathrm{P}(f)} \mathrm{I}(\Gamma,\mathrm{b})\,[-n(\mathrm{b})g(\mathrm{b})]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} h(z)dz = \sum_{a\in Z(f)} \mathrm{I}(\Gamma,a)\,m(a)g(a) - \sum_{\mathrm{b}\in P(f)} \mathrm{I}(\Gamma,\mathrm{b})\,n(\mathrm{b})\,g(\mathrm{b})$$

Y ya que $h(z) = \frac{f\,'(z)}{f(z)}g(z)$ Por lo tanto se concluye que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} \frac{f\,'(z)}{f(z)}g(z)\,dz = \sum_{a\in Z(f)} \mathrm{I}(\Gamma,a)m(a)g(a) - \sum_{b\in P(f)} \mathrm{I}(\Gamma,b)\,n(b)\,g(b)$$

Como se quería demostrar.■

Teorema 3.2.12. (Principio del Argumento)

Sea Ω un dominio, f una función meromorfa no idénticamente nula en Ω y Γ un ciclo en Ω nulhomólogo respecto a Ω y que no pasa por ningún polo ni por ningún cero de f. Supongamos, además que para todo $z \in \Omega \backslash \Gamma^*$ se verifica que $I(\Gamma, z) \in \{0,1\}$ y definamos $U = \{z \in \Omega \backslash \Gamma^* : I(\Gamma, z) = 1\}$.

Entonces

$$I(f \circ \Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0 - N_p$$

Donde N_0 representa el número de ceros de f en U y N_P es el número de polos en U contando cada cero y cada polo tantas veces como su orden. En particular si f es holomorfa en Ω y Γes un camino cerrado, se tiene que

$$I(f \circ \Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0$$

Es decir, el número de ceros (contando cada cero tantas veces como su orden) de f en U (el "interior" de Γ) es igual al número de veces que el camino f o Γ rodea el origen

Demostración:

Si particularizamos la igualdad **[3.18]** tomando como g la función constante $g(z) = 1$ obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z(f)} I(\Gamma, a) m(a) - \sum_{b \in P(f)} I(\Gamma, b)\, n(b)$$

Si ahora suponemos que para toda $z \in \Omega$ es $I(\Gamma, z) = 0$ ó $I(\Gamma, z) = 1$ y definamos el conjunto $U = \{z \in \Omega \backslash \Gamma^* : I(\Gamma, z) = 1\}$, podemos escribir la igualdad en la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{dz} = \sum_{a\in Z(f)\cup U} m(a) - \sum_{b\in P(f)\cup U} n(b)$$

$$= \text{números de ceros de } f \text{ en U} - \text{números de polos de } f \text{ en U}$$

$$= \quad N_0 - N_p \qquad \textbf{[3.20]}$$

Veamos ahora que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{dz} = \mathrm{I}(f\circ\Gamma,0)$$

Es suficiente probar esta igualdad para un camino cerrado $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$.

Por la definición de integral a lo largo de un camino tenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{dz} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a}^{b}\frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)d\mathrm{t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{dz}{z} = \mathrm{I}(f\circ\gamma,0) \qquad \textbf{[3.21]}$$

Así de ecuaciones **[3.20]** y **[3.21]** se cumple que

$$\mathrm{I}(f\circ\Gamma,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{dz} = N_0 - N_p$$

En el caso particular, cuando f es holomorfa implica que $N_P = 0$.

De donde se cumple que $\mathrm{I}(f\circ\Gamma,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{dz} = N_0 - N_p$

Como se deseaba demostrar ■

Teorema 3.2.13. (Teorema de Rouché)

Sea Ω un dominio acotado, f y g funciones holomorfas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Supongamos que

$$|f(z)-g(z)| < |f(z)|+|g(z)| \qquad (z \in \mathrm{Fr}\Omega) \qquad \textbf{[3.22]}$$

Para toda z en la frontera de Ω. Entonces, contando cada cero tantas veces como su orden, se verifica que f y g tienen el mismo número de ceros Ω.

Demostración:

Observa que la desigualdad **[3.22]** implica que ni f ni g pueden anularse en la frontera de Ω. Dicha desigualdad, y la continuidad de f y g en $\overline{\Omega}$, implican que ni f ni g pueden ser idénticamente nulas en Ω. Por el principio de la de identidad y por ser $\overline{\Omega}$ compacto, deducimos que el número de ceros de f y g en Ω es finito.

Sea

$$\mathrm{K} = \{z \in \overline{\Omega} : |f(z)-g(z)| = |f(z)|+|g(z)|\}$$

Ya que $\mathrm{K} \subset \overline{\Omega}$ es claro que K es un conjunto finito ya que solo toma aquellos puntos de $\overline{\Omega}$ que cumplen la igualdad descrita, por **definición 1.6.29** (sección 1.6 capítulo 1) implica que K es cerrado y por **definición 1.6.28** (sección 1.6 capítulo 1) y por ser K subconjunto de $\overline{\Omega}$ implica que K es un conjunto compacto. Además, en virtud de la desigualdad **[3.22]** se tiene que $\mathrm{K} \subset \Omega$. Es evidente que los ceros de f y de g están en K.

Sea Γ el ciclo que nos proporciona el lema anterior para el compacto K en el abierto Ω. Sea $\mathrm{U} = \{z \in \Omega \backslash \Gamma^{*} : \mathrm{I}(\Gamma, z) = 1\}$. Sabemos que $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$ por lo que los ceros de f y de g en Ω están todos en U.

Por el principio del argumento deducimos que.

$$N_0(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \qquad \text{(Números de ceros de } f \text{ en } \Omega \text{ contando multiplicidades)}$$

$$N_0(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz \qquad \text{(Números de ceros de } g \text{ en } \Omega \text{ contando multiplicidades)}$$

Para $z \in \Omega \backslash K$ se verifica que

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

Lo que, según sabemos, en virtud de la desigualdad **[3.22]**, equivale a que $\frac{g(z)}{f(z)} \notin \mathbb{R}_0^-$.

En consecuencia la función $\varphi : \Omega \backslash K \to \mathbb{C}$. Definida por $\varphi(z) = \log\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right) \quad z \in \Omega \backslash K$

es holomorfa en $\Omega \backslash K$.

Puesto que

$$\varphi'(z) = \frac{\left(f'(z)g(z) - f(z)g'(z)\right)g(z)}{g^2(z)f(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Resulta que φ es una primitiva en $\Omega \backslash K$ de la función $\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}$ y, por tanto, la integral de dicho función en cualquier ciclo en $\Omega \backslash K$ es cero.

En particular

$$\int_\Gamma \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right)dz = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right)dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = 0$$

$$\int_{\Gamma}\left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right)dz = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz$$

$$\Rightarrow N_0(f) = N_0(g)$$

Como se deseaba demostrar■.

Los siguientes ejemplos son una aplicación del teorema anterior que acabamos de demostrar.

Ejemplo 3.2.14.

Encuentre el número de raíces de la ecuación $z^4 + 5z + 1 = 0$ situada en el interior del círculo $|z| = 1$

Solución:

Sea $f(z) = 5z$ y $g(z) = z^4 + 5z + 1$.

Entonces por la desigualdad del triángulo

$$|g(z) - f(z)| \leq |z|^4 + 1 < |5z| = |f(z)| \qquad \text{Sobre } |z|=1.$$

Como $f(z)$ tiene un cero en el interior de $|z| = 1$, también $g(z)$ lo tendrá.

Por otra parte si $f(z) = z^4$, se tiene

$$|5z + 1| \leq 11 < 16 = |z|^4.$$

Así $g(z)$ tiene cuatro ceros en el interior $|z| = 2$ tres de los cuales se encuentra en el anillo $1 < |z| < 2$ ya que no hay ceros sobre $|z| = 1$.

Ejemplo 3.2.15.

Encuentre el número de raíces de la ecuación $7z^3 - 5z^2 + 4z - 2 = 0$ en el disco $|z| \leq 1$

Solución:

Si se multiplica la ecuación $7z^3 - 5z^2 + 4z - 2 = 0$ por $z+1$ se obtiene

$$7z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z - 2 = 0$$

Si se hace

$$f(z) = 7z^4 \text{ y } \quad g(z) = 7z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z - 2,$$

Luego por la desigualdad del triángulo, se tiene que

$$|f(z) - g(z)| = |7z^4 - 7z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z - 2|$$

$$= |2z^3 - z^2 + 2z - 2|$$

$$\leq 2|z|^3 + |z|^2 + 2|z| + 2 < |g(z)|$$

Siempre y cuando $|z| = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Por ende, $g(z)$ tiene cuatro raíces en $|z| \leq 1$, lo cual implica que la ecuación original tiene tres raíces en el disco unitario cerrado.

3.3 APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL RESIDUO PARA SUMAR SERIES

Las aplicaciones del teorema de los residuos para sumar series se basan en la siguiente idea. Supongamos que f es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathrm{P}(f)$ donde $\mathrm{P}(f)$ es un conjunto finito de puntos que son polos de *f*. Admitiremos la posibilidad de que algún polo de f sea un número entero. Sea g una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ que en cada número entero tiene un polo simple. Γ_n un camino cerrado que rodee a los enteros $\{-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n\}$ y a los polos de f una sola vez dejando fuera a los demás enteros. Teniendo en cuenta que si k es un entero que no es polo de f se verifica que $\mathrm{Res}\,[f(z)\,g(z), k] = f(k)\,\mathrm{Res}\,[g(z), k]$, el teorema de los residuos nos menciona que

$$\int_{\Gamma_n} f(z)g(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{k\in \mathrm{Z} \\ k\notin \mathrm{P}(f)}} \mathrm{Res}[f(z)g(z),k]\,\mathrm{I}(\Gamma_n,k) + 2\pi i \sum_{w\in \mathrm{P}(f)} \mathrm{Res}[f(z)g(z),w]\,\mathrm{I}(\Gamma_n,k)$$

$$= 2\pi i \sum_{\substack{k=-n \\ k\notin \mathrm{P}(f)}}^{n} f(k)\,\mathrm{Res}[g(z),k] + 2\pi i \sum_{w\in \mathrm{P}(f)} \mathrm{Res}[f(z)g(z),w]$$

Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_n} f(z)g(z)dz = 0 \qquad \textbf{[3.23]}$$

Entonces obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ k\notin \mathrm{P}(f)}}^{n} f(k)\,\mathrm{Res}[g(z),k] = -\sum_{w\in \mathrm{P}(f)} \mathrm{Res}[f(z)g(z),w] \qquad \textbf{[3.24]}$$

Las elecciones usuales para la función g son

$$g(z) = \frac{\pi}{sen\,\pi z}\cos\pi z = \pi \cot g\pi z \quad ; \quad g(z) = \frac{\pi}{sen\,\pi z} = \pi\,\mathrm{cosec}\pi z$$

Funciones que tienen polos simples en los enteros siendo

$$\mathrm{Res}[\pi \cot g\pi\, z, k] = 1 \ , \quad \mathrm{Res}[\pi\, \mathrm{cosec}\pi\, z\, z, k] = (-1)^k \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Particularizando para estos casos la igualdad **[3.24],** suponiendo que se cumpla la condición **[3.23],** obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ k\notin \mathrm{P}(f)}}^{n} f(k) = -\sum_{w\in \mathrm{P}(f)} \mathrm{Res}[\pi\, f(z) \cot g\pi\, z, w] \qquad \textbf{[3.25]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ k\notin \mathrm{P}(f)}}^{n} (-1)^k f(k) = -\sum_{w\in \mathrm{P}(f)} \mathrm{Res}[\pi\, f(z)\, \mathrm{cosec}\pi\, z, w] \qquad \textbf{[3.26]}$$

A continuación vamos a imponer a la función f condiciones suficientes para que se cumpla la condición **[3.23]** para dichas elecciones de la función g.

Como camino de integración Γ_n vamos a tomar la poligonal (es un cuadrado)

$$\Gamma_n = [(n+\frac{1}{2})(-1-i)\, , (n+\frac{1}{2})(1-i)\ \ , (n+\frac{1}{2})(1+i)\, , (n+\frac{1}{2})(-1+i)\, , (n+\frac{1}{2})(-1-i)]$$

Teorema 3.3.1:

Para todo $z \in \Gamma_n^*$ (ver **Figura 3.8)** se verifica que $|\text{cotg } \pi z| < 2$ y $|\text{cosec } \pi z| < 2$

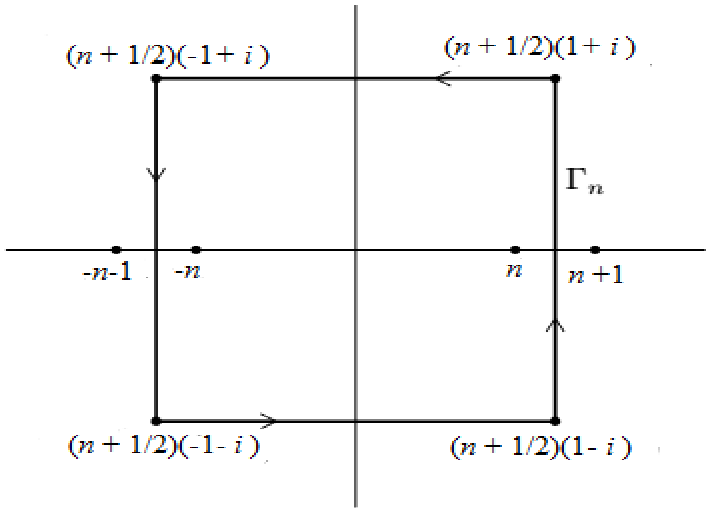


Figura 3.8

Demostración:

Supongamos que $z = n + \frac{1}{2} + iy$. Entonces

$$\cot g\,(\pi z) = i\,\frac{e^{2\pi iz}+1}{e^{2\pi iz}-1} = i\,\frac{e^{2\pi i-2\pi y}+1}{e^{2\pi i-2\pi y}-1}$$

$$\operatorname{cos}ec\,(\pi z) = \frac{2i}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}} = \frac{2ie^{i\pi z}}{e^{i\pi z}-1} = \frac{2ie^{in(\pi+1/2)-\pi y}}{e^{\pi i-2\pi y}-1}$$

Por lo que

$$|\cot g\,(\pi z)| = \frac{1-e^{-2\pi y}}{1+e^{-2\pi y}} < 1$$

$$|\cos ec(\pi z)| = \frac{2e^{-\pi y}}{1+e^{-\pi y}} < 2$$

Análogamente si $z = x + i\left(n + \frac{1}{2}\right)$ se obtiene que

$$|\cot g(\pi z)| \leq \frac{1+e^{-\pi(2n+1)}}{1-e^{-\pi(2n+1)}} < \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} < 2$$

$$|\cos ec(\pi z)| \leq \frac{2e^{-\pi(n+1/2)}}{1-e^{-\pi(n+1/2)}} < \frac{2e^{-\pi/2}}{1-e^{-\pi}} < 1$$

Teniendo en cuenta que $\cot g\, z$ y $\cos ec\, z$ son funciones impares, estas cotas también son válidas para los otros dos lados de Γ_n^* así la demostración que completa.■

Teorema 3.3.2:

Se verifica que $\int_{\Gamma_n} \frac{\cot g(\pi z)}{z}\, dz = \int_{\Gamma_n} \frac{\cos ec(\pi z)}{z}\, dz = 0$

Demostración:

En efecto, como las funciones $\frac{\cot g(\pi z)}{z}$ y $\frac{\cos ec(\pi z)}{z}$ son pares y tienen un polo de orden dos en cero, deducimos que su residuo en cero es igual a 0.Los residuos en los demás polos se anulan dos a dos porque

$$\mathrm{R}es\left(\frac{\cot g(\pi z)}{z}, k\right) = \frac{1}{k} \quad , \ \mathrm{R}es\left(\frac{\cos ec(\pi z)}{z}, k\right) = \frac{(-1)^k}{k}$$

Y en consecuencia sus integrales en Γ_n son anuladas en virtud del teorema del residuo.

Teorema 3.3.3.

Supongamos que hay números M > 0 y R > 0 tales que para |z| ≥ R se verifica que |z *f* (z)|≤ M. Entonces se verifica que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n} f(z)\cot g\,(\pi\, z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n} f(z)\operatorname{cosec}(\pi\, z)dz = 0$$

Demostración:

Supongamos $h(z)=\frac{f(1/z)}{z}$. La hipótesis echa implica que h está acotada en el disco D(0,1/R) y, por tanto, h es regular en 0. Definiendo $h(0)=\lim_{z\to 0} h(z)$, se tiene que h es holomorfa en el disco D(0,1/R) por lo que podemos escribir

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad\qquad z \in \mathrm{D}(0,1/\mathrm{R})$$

Deducimos que

$$f(1/z)-c_0 z = z^2\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} \qquad\qquad z \in \mathrm{D}(0,1/\mathrm{R})\setminus\{0\}$$

Como la función $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$ es continua en D(0,1/R) deducimos que está acotado en compactos. Por tanto existe K > 0 tal que $\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n\right| \leq$ K para todo $z \in \overline{\mathrm{D}}(0,1/2\mathrm{R})$.

Deducimos que

$$\left|f(z)-\frac{c_0}{z}\right| \leq \frac{\mathrm{K}}{|z|^2} \qquad\qquad |z| \geq 2\mathrm{R} \qquad\qquad \textbf{[3.27]}$$

Tenemos en virtud del **Teorema 3.3.2** que

$$\int_{\Gamma_n} \cot g\,(\pi\, z)\, f(z)\, dz = \int_{\Gamma_n} \cot g\,(\pi\, z)\left(f(z) - \frac{c_0}{z}\right) dz + c_0 \int_{\Gamma_n} \cot g\,(\pi\, z) dz = \int_{\Gamma_n} \cot g\,(\pi\, z)\left(f(z) - \frac{c_0}{z}\right) dz$$

Por el **Teorema 3.3.1** y la desigualdad **[3.27]**, deducimos que para n >2R se verifica que

$$\left| \int_{\Gamma_n} \cot g\,(\pi\, z)\, f(z)\, dz \right| = \left| \int_{\Gamma_n} \cot g\,(\pi\, z)\left(f(z) - \frac{c_0}{z}\right) dz \right| \leq \frac{2\,\mathrm{K}}{(n+1/2)^2} 8(n+1/2)$$

La misma acotación es válida cambiando $\cot g\,(\pi\, z)$ por $\cos ec\,(\pi\, z)$. De esta acotación se sigue la afirmación del enunciado.■

3.3.4 SERIES DEL TIPO $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$

Suponemos para este caso que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.
2. grado $(Q) \geq$ grado $(P) + 2$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomios Q se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ \mathrm{Q}(k)\neq 0}}^{n} \frac{\mathrm{P(k)}}{\mathrm{Q(k)}} = -\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Re} s\left(\pi \operatorname{cotg}(\pi z) \frac{\mathrm{P(z)}}{\mathrm{Q(z)}}, z_j \right) \qquad \textbf{[3.28]}$$

Esto es consecuencia directa de los resultados anteriores pues en la hipótesis hechas se verifican que $\lim_{z\to\infty} z \frac{p(z)}{Q(z)} = \mathrm{L} \in \mathbb{C}$ y por tanto se satisface la hipótesis del **Teorema 3.3.3,** es interesante observar que la existencia del límite en **[3.28]** no implica que la serie sea convergente.

Naturalmente, que la serie $\sum_{\substack{k\in Z\\ Q(k)\neq 0}} \frac{P(k)}{Q(k)}$ sea convergente quiere decir que existe el límite

$$\lim_{\substack{q\to\infty\\ p\to\infty}} \sum_{\substack{k=-p\\ Q(k)\neq 0}}^{q} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

Por otra parte, la condición $\text{grado}(Q)\geq \text{grado}(P)+2$ garantiza la convergencia absoluta de la serie

Ejemplo 3.3.4.1.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k^2+\alpha^2} = -\operatorname{Res}\left(\pi cotg\pi z \frac{1}{z^2+\alpha^2}, i\alpha\right) - \operatorname{Res}\left(\pi cotg\pi z \frac{1}{z^2+\alpha^2}, -i\alpha\right)$$

$$= \frac{\pi}{\alpha} \frac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}$$

Como la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{k^2+\alpha^2}$ es convergente tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k^2+\alpha^2} = 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}$$

Donde se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha} \frac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} - \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

En virtud del criterio de Weierstrass, la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+\alpha^2}$ es uniformemente convergente para $\alpha \in \mathbb{R}$, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}$$

Donde el último limite puede calcularse por la regla de L'Hopital.

3.3.5 SERIE DEL TIPO $\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$

Suponemos para este caso que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.
2. grado $(Q) \geq$ grado $(\mathrm{P})+1$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomios Q se verifica que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\ Q(k)\neq 0}}^{n}(-1)^k\,\frac{P(k)}{Q(k)} = -\sum_{j=1}^{q}\mathrm{Res}\left(\pi cotg(\pi z)\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) \qquad \textbf{[3.29]}$$

Ejemplo 3.3.5.1.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\ k\neq 0}}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\mathrm{Res}\left(\pi\, cosec(\pi z)\frac{1}{z^2}, 0\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}z^3\left(\pi\, cosec(\pi z)\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{\pi^2}{6}$$

De donde se sigue que : $\sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^k}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\ k\neq 0}}^{q}\frac{(-1)^k}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

CONCLUSION

El presente trabajo de tesis se realizó con el propósito de documentar y dar a conocer los conceptos fundamentales y algunas aplicaciones del Teorema del residuo desde el enfoque del análisis complejo que surge de la necesidad de que en la mayoría de libros no se detalla a profundidad la importancia del teorema, para ello nos auxiliamos de diferentes libros, sitios web y de esa manera introducimos la teoría preliminar que nos permitió comprender los resultados que se obtuvieron a lo largo de la investigación.

Para analizar y trabajar el teorema del residuo se necesitó tener conocimiento de residuo de una función respecto a un punto singular, por tanto en el capítulo II se listó una serie de criterios para facilitar el cálculo de residuos.

Dentro de las conclusiones que se pudieron obtener, encontramos que es imposible aplicar el teorema de Cauchy para caminos cerrados que encierran puntos singulares, como consecuencia el Teorema del residuo da solución a este tipo de problemáticas.

Para lograr el propósito de esta tesis en el capítulo III se muestra la importancia que tiene el Teorema del Residuo el cual radica en la utilidad para resolver una buena cantidad de integrales que son muy difíciles de calcular en cálculo de variable real y que se facilitan mediante el teorema en el cálculo de variable compleja. Además hay otras aplicaciones como lo es el Principio del Argumento el cual relaciona el número de ceros y el número de polos de una función que se encuentran en el interior de un camino cerrado y el Teorema de Rouché que relaciona el número de ceros de dos funciones holomorfas en la misma región. Finalmente tenemos las aplicaciones del Teorema del Residuo para sumar series que relacionan el número de polos con el número de enteros en el interior de un camino cerrado.

BIBLIOGRAFIA

- Curso de Análisis Complejo Francisco Javier Pérez González Departamento de Análisis Matemático Universidad de Granada junio 2004.
- Carlos Ivorra Castillo (Funciones de Variable Compleja con Aplicaciones a la Teoria de Números)
- William R. Derrick (Variable Compleja con Aplicaciones).
- Murray R. Spiegel (Variable Compleja).
- Ruel V. Churchill / James Ward Brown (Variable Compleja y Aplicaciones).
- http://personal.us.es/contreras/t10residuos.pdf (Visitado febrero 2014).
- http://www2.caminos.upm.es/departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Analisis%20matematico/Temas/C05_Residuos.pdf (Visitado febrero 2014).
- http://intermat.fciencias.unam.mx/variable.pdf (Visitado febrero 2014).
- Variable Compleja con Aplicaciones - David Wunsch.
- Variable Compleja José Darío Sánchez Hernandez.