

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
SECCION MATEMATICA**



TRABAJO DE GRADO:
“CONICAS EN GEOMETRIA PROYECTIVA”

PRESENTADO POR:
HERNANDEZ PEREZ, JOSE ALFREDO
TREJO MONTIEL, MANUEL BERNARDO

PARA OPTAR AL GRADO DE:
LICENCIADO EN MATEMATICA

DOCENTE DIRECTOR:
MSc. JORGE ALBERTO MARTINEZ GUITIERREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, MARZO DE 2015

SAN MIGUEL

EL SALVADOR

CENTROAMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

ING. MARIO ROBERTO NIETO LOVO

RECTOR

MS.D ANA MARIA GLOWER DE ALVARADO

VICE-RECTORA ACADEMICA

DRA. ANA LETICIA ZA VALETA DE AMAYA

SECRETARIA GENERAL

LIC. FRANCISCO CRUZ LETONA

FISCAL GENERAL

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

LIC. CRISTOBAL HERNAN RIOS BENITEZ
DECANO

LIC. CARLOS ALEXANDER DIAZ
VICE-DECANO

LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNANDEZ
SECRETARIO

Agradecimientos

A DIOS TODO PODEROSO:

Por permitir mi existencia, darme sabiduría y hacer realidad el esfuerzo de todos estos años de estudio.

A MI MADRE:

OLGA PÉREZ ORTÍZ, quien ha sido el pilar fundamental en mi vida y por darme mucho amor y sobre todo sabios consejos que orientan el camino de mi vida.

A MI PADRE:

GENARO LUCIO HERNANDEZ, por haberme apoyado en todos los momentos de mi vida y por darme mucho amor y sobre todo sabios consejos que orientan el camino de mi vida.

A MIS HERMANOS:

ERICK YOVANI, JACKELIN LISSETH, YESICA ESMERALDA, quienes me dieron apoyo y aliento en los momentos difíciles de mi vida, quienes depositaron su confianza en mi triunfo.

AL PERSONAL DOC. Y ADMIN. DE LA SECCION DE MATEMATICA:

Todos los docentes que dieron su aporte a mi desarrollo académico, especialmente a MSc. JORGE ALBERTO MARTINEZ, Quien me brindó su amistad y apoyo durante la carrera. MSc. MARCELINO MEJIA y Prof. FRANCISCO MADRID, por su amistad. Lic. MARIA OLGA QUINTANILLA, M.Est. MARIA DEL TRANSITO GUTIERREZ, mi agradecimiento por guiarme y ayudarme y corregirme. A todos que en muchas ocasiones, y de manera desinteresada, tuvieron que sacrificar su tiempo para dedicarlo a orientarme tanto académicamente como moralmente.

A MIS AMIGOS Y COMPAÑEROS Y DEMAS PERSONAS:

Por brindarme en todo momento sus amistad cinsera. A personas y seres queridos que compartieron e hicieron posible este triunfo dandome su apoyo, cariño y amor.

José Alfredo Hernández Pérez

Agradecimientos

A DIOS TODO PODEROSO:

Primeramente quiero Agradecer al Ser Supremo el haberme concedido el don de la vida, la capacidad intelectual para poder superar todos los desafíos académicos y permitirme culminar mi preparación académica universitaria y a la vez le dedico este triunfo comprometiéndome a ser una profesional integro e integral.

A MI FAMILIA:

que estuvo conmigo en todo momento; a Mamá CONCEPCION MARIA MONTIEL CARCAMO: gracias por fomentar la alegría y la humildad, a Papá MANUEL BERNARDO TREJO JOYA: gracias por enseñarme a ser perseverante para alcanzar las metas, a todos mis hermanos YURI, MAITH, ROMEO y hermanas ROCIO, GLENDA, JANCY, JOHANA, que me ayudaron incondicionalmente durante todos mis estudios, sobre todo por haber creído siempre en mí. Familia: Gracias, porque nunca me faltó su apoyo, sus consejos cuando los necesité, ustedes fueron la fuente de motivación diaria que me impulsó a continuar, a pesar de los sacrificios que implicó mi carrera: la convivencia familiar y los lazos de amor que en momentos se vieron afectados por la distancia, pero siempre tuve la certeza de ese amor incondicional.

AL PERSONAL DOC. Y ADMIN. DE LA SECCION DE MATEMATICA:

que han puesto a disposición sus conocimientos, experiencias, apoyo y esfuerzos, especialmente a Lic. MARIA OLGA QUINTANILLA, M.Est. MARIA DEL TRANSITO GUTIERREZ, que nos orientaron y motivaron en este proceso, y a MSc. JORGE ALBERTO MARTINEZ que desde los inicios de mi carrera me brindó su ayuda y amistad incondicional.

A MIS AMIGOS Y COMPAÑEROS:

Por brindarme en todo momento sus amistad cinsera en especial a Blanca Leonor Hernández Alfaro que será siempre alguien especial en mi vida.

Manuel Bernardo Trejo Montiel

Índice general

Introducción	I
1. Historia de la Geometría Proyectiva y Conceptos Básicos	1
1.1. Reseña Historica	1
1.2. Conceptos Fundamentales	6
1.3. La línea proyectiva	17
2. Axiomas Básicos y Desarrollo de la Geometría Proyectiva	22
2.1. Axiomas de la geometría proyectiva	22
2.2. Dualidad y Algunas Consecuencias	25
2.3. Conjuntos Armónicos	30
2.4. Proyectividades	37
2.5. Coordenadas Homogéneas	43
2.6. Ecuaciones Para Transformaciones P.	50
2.7. Proyectividades Especiales	64
3. Construcción de Cónicas	69
3.1. Cónicas	69
3.2. Construcción de cónicas	78
4. Conclusión	91
5. Bibliografía	93

Introducción

La geometría proyectiva es una área de la matemática relativamente nueva y por ello el material bibliográfico disponible en la biblioteca no es mucho, ya que, si bien es cierto se encuentra bastante material en internet, este no suele tener la claridad necesaria para estudiantes que recién se inician en los estudios de dicha área o aficionados que muestren interés por las nuevas posibilidades que este tipo de geometría no euclidiana ofrece. Es por ello que se pretende, que el presente trabajo sirva de apoyo a futuras investigaciones en dicha área

La geometría proyectiva es una rama de la geometría que estudia los objetos lineales (puntos, líneas, planos, hiperplanos, etcétera) y como se intersectan. Estos objetos son estudiados en espacios que tiene más puntos que los espacios usuales (que el plano R^2 y el espacio tridimensional R^3), estos espacios son llamados espacios proyectivos.

Esta rama de la matemática tiene muchas extensiones pero son poco exploradas o nuevas en la matemática y no desarrollada durante el estudio de la carrera de Licenciatura En Matemática, es por ello que tomamos la iniciativa de documentar por una parte y dar a conocer un poco de esta área en nuestra investigación. El presente trabajo está enfocado principalmente en cónicas así como su construcción en el área de geometría proyectiva.

Para ello en el abordaje de la investigación empezaremos con una pequeña reseña histórica de cómo surgió esta rama de la matemática, luego, algunos conceptos y axiomas básicos de la geometría proyectiva así como el concepto de dualidad el cual es una idea básica de la geometría proyectiva, la cual no aparece en geometría euclidiana.

También estudiaremos las propiedades y su objeto de estudio y por qué la hace diferente a la geometría analítica así como también dar los principales axiomas y teoremas, también definiremos las proyectividades y las cónicas en geometría proyectiva y hacer la construcción de algunas de ellas.

Capítulo 1

Historia de la Geometría

Proyectiva y Conceptos Básicos

1.1. Reseña Historica

La geometría proyectiva nace a raíz de los esfuerzos realizados por los artistas del Renacimiento para representar de manera más realista el mundo que les rodeaba. En el caso concreto de la pintura, esta se había caracterizado hasta entonces por el uso de cierta simbología que llevaba implícita una clara desconexión de las obras con el mundo real. La ilustración de temas bíblicos era la principal finalidad de la pintura en el periodo medieval, los fondos de la obras solían ser dorados para sugerir que las escenas correspondían a alguna región celestial, las figuras eran más simbólicas que realistas y las formas solían ser planas y sin naturalidad. El gran problema al que se enfrentaron los pintores del Renacimiento era como plasmar el mundo tridimensional real en un lienzo bidimensional.



Figura 1.1: “Ultima cena Edad Media”



Figura 1.2: “Ultima cena Renacimiento”

La clave para resolver esta cuestión fue la interpretación de una propiedad fundamental de la visión monocular, (es la observación de los objetos a través de un solo ojo) debida principalmente a Leone Battista Alberti (1404 – 1472). Los pintores, que eran arquitectos e ingenieros y los mejores matemáticos del siglo *XV*, lograron expresar la distancia, el espacio, la masa, el volumen y los efectos visuales en sus lienzos. Principales precursores de la geometría proyectiva:

- Leonardo Da Vinci (1452-1519)
- Rafael Sanzio (1483-1520)
- Alberto Durero (1471-1528)
- Gerard Desargues (1591-1661)
- Blaise Pascal (1623-1662)

La teoría de perspectiva se extendió considerablemente a principios del siglo *XVII* por un pequeño grupo de matemáticos franceses, entre los que se encontraba Gerard Desargues (1591 – 1661), el cual inducido por las necesidades crecientes de los artistas y arquitectos de crear una teoría más profunda de la perspectiva, publicó en París en 1639, un trabajo de las secciones cónicas que aprovechó la idea de las proyecciones, trabajo que ha sido reconocido como uno de los clásicos en el desarrollo de la geometría proyectiva, aunque al publicarse fue opacado por el auge de la geometría analítica introducida por Descartes dos años antes.

El impulso definitivo a la geometría proyectiva fue dado por Jean Victor Poncelet (1788 – 1867), oficial del ejército de Napoleón, que como prisionero de guerra en Rusia, y sin libros en la mano, planteó su gran obra sobre geometría proyectiva, que, después de su libertad publicó en París en 1822. El trabajo de Desargues, de Poncelet y de sus seguidores, condujo a clasificar las propiedades geométricas en dos categorías: las propiedades métricas, en las que intervienen las medidas de las

distancias y de los ángulos, y las propiedades descriptivas, en las que solo se trata la relación de las posiciones de los elementos geométricos entre sí. Una propiedad métrica es, por ejemplo, el teorema de Pitágoras que dice que “el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de sus dos catetos”.

Como ejemplo de propiedad descriptiva, o de posición, podemos mencionar el del hexágono místico” de Pascal: Si un hexágono se inscribe en una cónica, entonces los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos están alineados”.

La distinción entre los dos tipos de propiedades geométricas, al menos en el caso de figuras planas, se aclaran más cuando se considera el hecho de que las propiedades descriptivas no se alteran cuando se somete a la figura a una proyección, en tanto que las métricas pueden no verificarse ya cuando se proyecta la figura. Así, al proyectar de un plano a otro, un triángulo cualquiera no sigue siendo necesariamente el mismo triángulo, de modo que la relación pitagórica en un triángulo rectángulo no se verifica siempre en la figura proyectada; el teorema de Pitágoras es, pues, un teorema métrico. Por el contrario, en el caso del teorema de Pascal, un hexágono inscrito en una cónica se proyecta en un hexágono inscrito en una cónica y los puntos alineados se proyectan en puntos alineados y, en consecuencia, el teorema se conserva; el teorema de Pascal es un teorema descriptivo.

EL PROBLEMA DEL PINTOR

En el renacimiento se fué haciendo claro que un dibujo “realista” de una escena cotidiana se logra proyectando desde un “foco” (ojo hipotético) sobre el lienzo. Es decir, a cada punto, x digamos, de la escena le corresponde un punto en el lienzo, Π digamos, al tomar la recta que pasa por el foco y x e intersectarla con Π . La razón por la que los cuadros dibujados con esta técnica nos parece “realista” es que si se le observa desde el foco, la imagen que se percibe es casi idéntica (en teoría idéntica viendo con un solo ojo) que la escena original. Y si lo vemos desde otro punto cualquiera,

nuestro cerebro se encarga de adaptarlo para recrear la tridimensionalidad que se plasmó en el lienzo. Cómo lo hace, es algo propio de los pintores, pero que es un hecho que sabe hacerlo, y muy bien, se demuestra observando que de dos imágenes planas obtenidas bajo el mismo principio (las imágenes que se proyectan en la retina) nos dá una idea muy clara del espacio tridimensional que habitamos. Los pintores renacentistas desarrollaron técnicas para dibujar con este principio, "métodos de la perspectiva" las llamaron, que incluyen el uso de "puntos de fuga". Como veremos más adelante estos puntos no son otra cosa que "puntos al infinito" que, al desarrollar la geometría proyectiva, se pueden tratar como puntos cualesquiera.

Uno de los principales teoremas primitivos y descubrimientos de la geometría proyectiva es el teorema de "Desargues" famoso teorema sobre triángulos "Si dos triángulos están en perspectiva desde un punto, lo están también desde una línea." que lo veremos detenidamente más adelante.

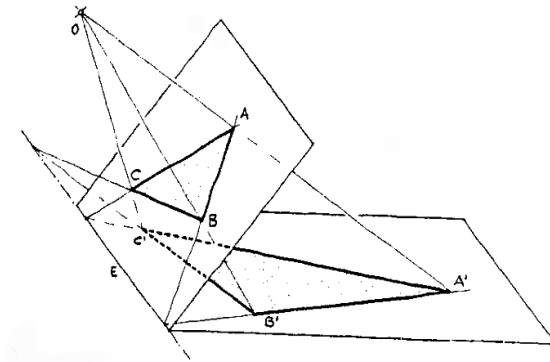


Figura 1.3: Teorema de Desargues

La geometría proyectiva es aquella que trata las propiedades que se conservan bajo proyecciones. Tiene aplicaciones en visión artificial, funcionamiento de cámaras, reconstrucción de imágenes bidimensionales en tres dimensiones, etc...Es la geometría asociada al modo en que el ojo humano percibe el mundo...

1.2. Conceptos Fundamentales

La geometría proyectiva es una de las geometrías modernas introducidas a principios del siglo *XIX*. La geometría euclidiana es un caso especial de la geometría proyectiva en el sentido de que el grupo de nociones euclidianas es un subgrupo del grupo de las transformaciones proyectivas.

En el presente trabajo se utilizan los dos grupos de transformaciones y un conjunto de axiomas para presentar lo que se podría describir como un mini curso en geometría proyectiva. El énfasis está en el desarrollo de una geometría más general que la geometría euclidiana o la geometría de similitudes. El concepto de un grupo de transformaciones proyectivas y el estudio de las propiedades invariantes bajo este conjunto de transformaciones son las ideas centrales. La geometría proyectiva incluye muchos conceptos matemáticos no conocidos en geometrías anteriores, y cuenta con más aplicaciones prácticas de lo que se podría esperar.

En geometría analítica ordinaria, se utiliza la proyección de un segmento en un eje. Como se ilustra en la figura 1.4. \overline{AB} se proyecta sobre el eje x dejando caer perpendiculares $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$. Aunque \overline{AB} y $\overline{A'B'}$ no suelen ser iguales, una correspondencia uno a uno es establecida por la proyección entre los puntos en los dos segmentos.

Otro uso conocido de la palabra proyección está en conexión con un proyector de imágenes en movimiento.

Aquí, la imagen de la película se proyecta en la pantalla, como se sugiere por la figura 1.5 .a) . Debería ser evidente que las imágenes en la película y en la pantalla serán similares el uno al otro, ya que la forma se mantiene invariable, mientras que el tamaño cambia de manera uniforme. Para la figura.b), sin embargo, la imagen en la pantalla se distorsionará porque la película y la pantalla no son paralelas. Las figuras ya no son similares, y ya no es evidente que las propiedades de las figuras permanezcan sin cambios. Incluso las relaciones de distancias ya no son invariantes.

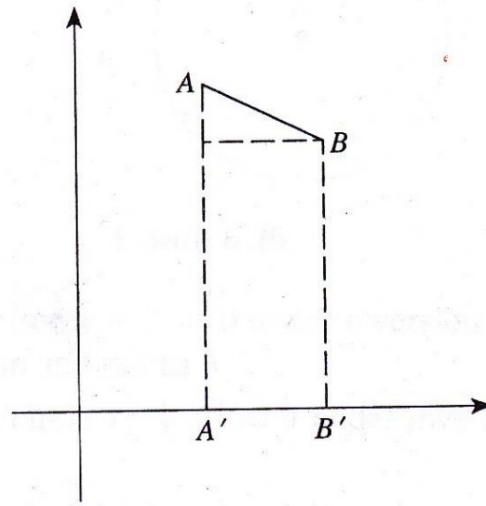


Figura 1.4

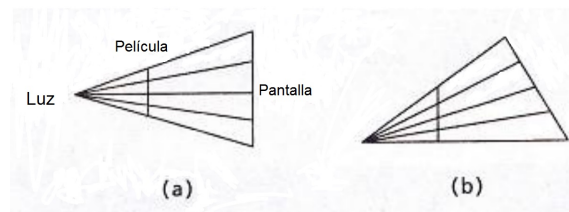


Figura 1.5

Definición 1.2.1: La perspectiva es un sistema que permite representar tres dimensiones sobre una superficie plana de dos dimensiones; por lo tanto, es una simulación de lo visible de la naturaleza que permite figurar el efecto volumétrico de los objetos, colocados éstos, a su vez, en un ambiente de falsa profundidad.

En otras palabras es el arte de representar los objetos en la forma y la disposición con que se aparecen a la vista. También, como el conjunto de objetos que se visualizan desde el punto de vista del espectador.

Mediante esta técnica, los artistas proyectan la ilusión de un mundo tridimen-

sional en una superficie de dos dimensiones. La perspectiva nos ayuda a crear una sensación de profundidad, de espacio que retrocede.

La figura 1.6 también puede sugerir la relación entre la proyección y el concepto de perspectiva, como se usa en el arte. Muchos pintores famosos, particularmente durante el Renacimiento, trataron de utilizar las ideas matemáticas para ayudar a crear la ilusión de profundidad en una pintura. Una idea utilizada fue pensar en la posición de los objetos en la pintura como está determinado por el punto de intersección de la tela y de la línea desde el ojo hasta el objeto, como se ilustra en la figura 1.6 .

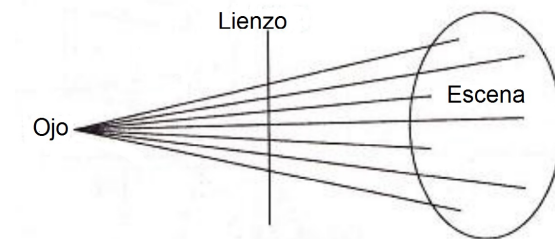


Figura 1.6

Un segundo uso de la geometría para dar una ilusión de profundidad en una pintura se llama perspectiva lineal. Que consiste en que las líneas paralelas que van de más cerca a más lejos, convergen en un punto de fuga, lo que crea una ilusión de profundidad.

Este concepto incluye el principio de que las líneas paralelas parecen converger a medida que se alejan del observador. Por ejemplo, vías del tren parecen encontrarse en la línea del horizonte. Los artistas utilizan esta idea por tener líneas paralelas (en la escena real) convergen en uno o más puntos de fuga en la pintura. Un ejemplo famoso de una pintura con un punto de fuga es la Última Cena de Leonardo da Vinci, se muestra en la figura 1.7 .

Las figuras 1.8a y 1.8b muestran esquemas en los que el punto de fuga no es en

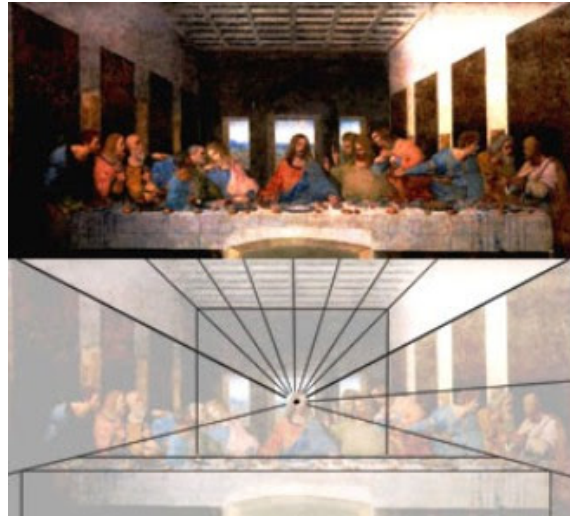


Figura 1.7

el centro. Nosotros deberíamos ser capaces de localizar este punto en cada caso.

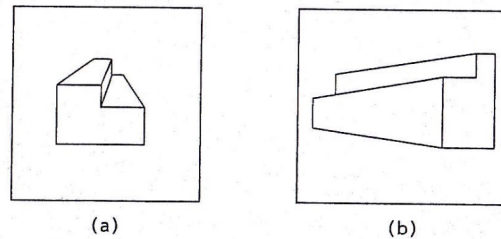


Figura 1.8

Definición 1.2.2: La totalidad de puntos sobre una de las líneas del plano, la llamaremos un haz de puntos.

Definición 1.2.3: La totalidad de líneas sobre uno de los puntos del plano, la llamaremos un haz de líneas.

La figura 1.9.a muestra un haz de puntos y la figura 1.9.b muestra un haz de

línea.

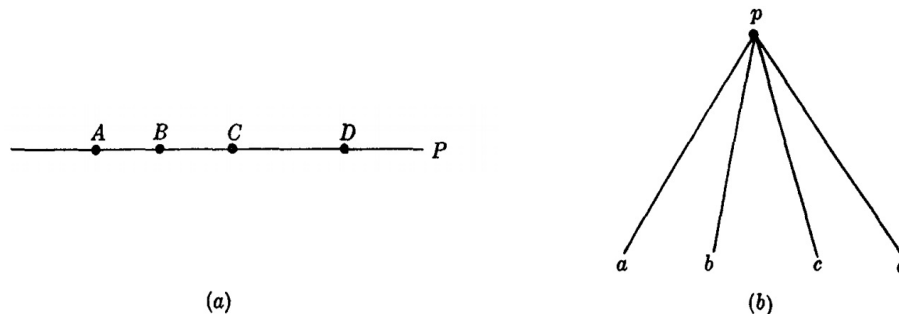


Figura 1.9

Se dice que entre los elementos de dos haces hay una correspondencia uno a uno, si existe una regla que asocia a cada elemento de un haz (del primero), un único elemento de otro (del segundo), y recíprocamente, asocia cada elemento del segundo un único elemento del primero. En una correspondencia de este tipo entre dos haces (entre dos figuras de cualquier clase), a cada elemento y su asociado se les llaman elementos correspondientes (homologos). Un ejemplo un poco trivial es la correspondencia que asocia cada elemento de una figura dada, con el mismo, lo que llamamos identidad.

Consideremos en la figura 1.10 el haz de línea $P(a, b, c, d, \dots)$ cortada por cualquier línea p que no esté sobre P . Una correspondencia uno a uno entre el haz de línea y el haz de puntos resultante (sobre p), se establece automáticamente por la relación “sobre”. En efecto, a cada elemento del haz de línea sobre P , se le asocia un único punto, o sea, el punto del haz de puntos sobre P , que está sobre la línea. Además, esta asociación entre punto y línea es reversible, es decir, a cada elemento del haz de puntos sobre P que está sobre el punto. Observe que esta correspondencia se indica mejor si se usa la misma letra (minúscula y mayúscula) para denotar cualquier línea y el punto asociada a ella.

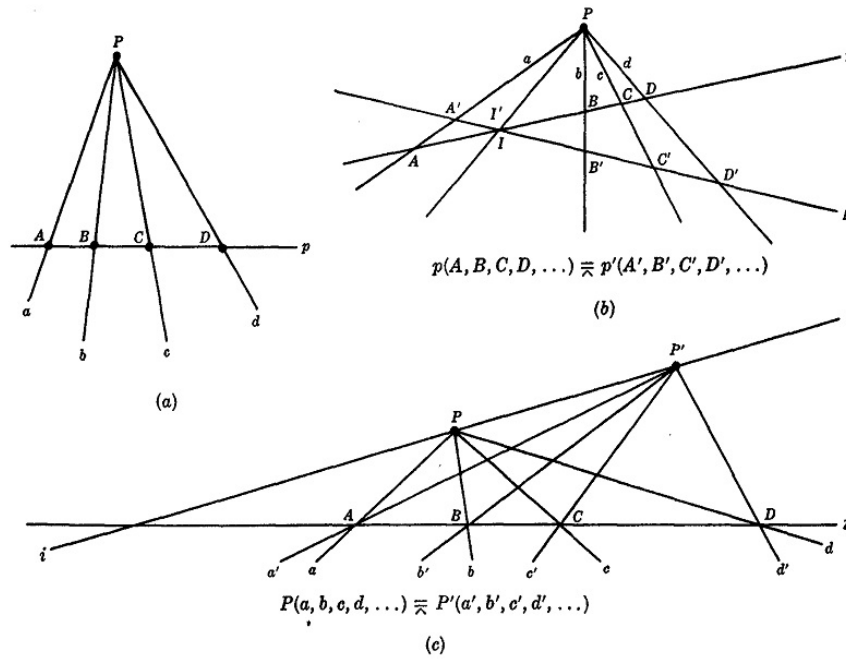


Figura 1.10

La correspondencia uno a uno descrita anteriormente la llamamos una perspectiva y la indicamos escribiendo

$$P(a, b, c, d, \dots) \bar{\bar{\wedge}} p(A, B, C, D, \dots)$$

Definición 1.2.4: Si el haz de líneas P cortada por cualquier línea p que no esta en P diremos que el haz de líneas P es perspectivo con el haz de puntos p .

Decimos que el haz de líneas $P(a, b, c, d, \dots)$ es perspectivo con el haz de puntos $p(A, B, C, D, \dots)$ y observamos que

$$P(a, b, c, d, \dots) \bar{\bar{\wedge}} p(A, B, C, D, \dots)$$

También implica

$$p(A, B, C, D, \dots) \bar{\bar{\wedge}} P(a, b, c, d, \dots)$$

Para distinguir este tipo de perspectiva de otras, aun no introducidas, la llamaremos una perspectiva elemental.

Consideremos en la figura 1.10b el haz de línea $P(a, b, c, d, \dots)$ cortado por dos líneas distintas p y p' de las cuales ninguna esta sobre P . De las anteriores discusiones se sigue que dos perspectividades elementales

$$P(a, b, c, d, \dots) \bar{\bar{\wedge}} p(A, B, C, D, \dots)$$

y

$$P(a, b, c, d, \dots) \bar{\bar{\wedge}} p'(A', B', C', D', \dots)$$

Quedan establecidas. Por ser reversibles estas perspectividades, las podemos combinar como sigue.

$$p(A, B, C, D, \dots) \bar{\bar{\wedge}} P(a, b, c, d, \dots) \bar{\bar{\wedge}} p'(A', B', C', D', \dots)$$

Está claro ahora que hemos establecido una correspondencia uno a uno entre los haces de puntos sobre p y p' (A y A' , B y B' , C y C' , ...) en la cual cada punto del haz sobre p y su asociado p' determinan una sola línea del haz sobre P . Sustituimos ahora la sucesión anterior de perspectividad elemental por

$$p(A, B, C, D, \dots) \stackrel{P}{\bar{\bar{\wedge}}} p'(A', B', C', D', \dots)$$

(léase: el haz de puntos $p(A, B, C, D, \dots)$ es perspectivo por medio del punto P con el haz de puntos $p'(A', B', C', D', \dots)$, o los haces de puntos $p(A, B, C, D, \dots)$ y $p'(A', B', C', D', \dots)$ son perspectivos desde el punto P). El punto P es llamado el centro de perspectividad. De este modo tenemos la siguiente definición:

Definición 1.2.5 : Dos haces de puntos sobre líneas distintas p y p' son perspectivos desde un punto P si existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de los haces y si las uniones de puntos correspondientes están sobre P .

En la perspectividad anterior, el punto en común a p y p' desempeña un papel único. Denotaremos este punto por I , como un punto sobre p y por I' como un punto

sobre p' . Entonces el correspondiente de I es $I = I'$ y a I lo llamaremos un punto invariante o auto-correspondiente de la perspectiva.

Una perspectiva entre dos haces de líneas sobre puntos distintos (más adelante notaremos que es el dual de una perspectiva entre dos haces de puntos sobre líneas distintas) se define como sigue

Definición 1.2.6: Dos haces de líneas $P(a, b, c, d, \dots)$ y $P'(a', b', c', d', \dots)$ sobre puntos distintos se dice que son perspectiva de la línea p , si existe una correspondencia biunívoca entre los dos haces y si las correspondientes intersecciones de las líneas están sobre p .

Esta perspectiva se ilustra en la figura 1.10c anterior , se indica escribiendo

$$P(a, b, c, d, \dots) \stackrel{p}{\wedge} P'(a', b', c', d', \dots)$$

En este caso a la línea p la llamamos eje de perspectiva.

Una perspectiva la hemos definido como una correspondencia biunívoca entre dos haces puntuales sobre líneas distintas, tal que las líneas que unen puntos correspondientes están sobre el punto P_1 .

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1) \stackrel{p_1}{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2)$$

Una perspectiva puede ser también considerada como un cierto tipo de transformación, es decir, un procedimiento para pasar de un conjunto de puntos sobre p_1 al conjunto de puntos sobre p_2 , o un medio de pasar el conjunto de puntos sobre p_1 al conjunto sobre p_2 .

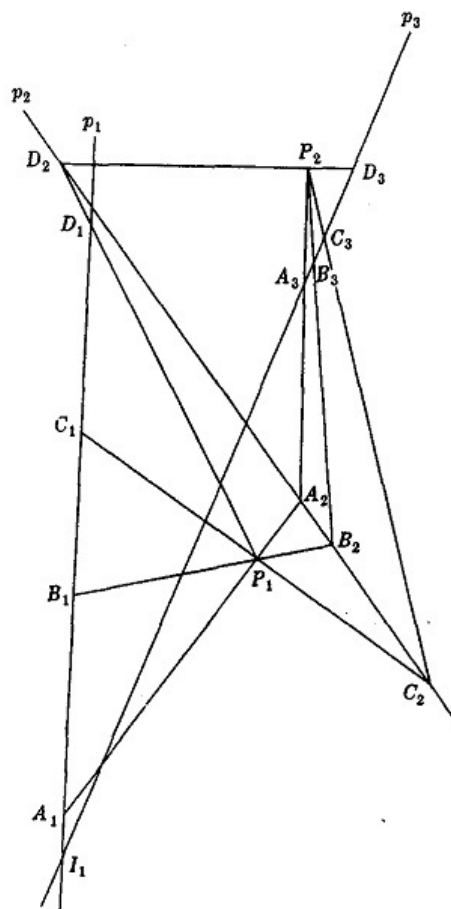


Figura 1.11

Considérese ahora una segunda perspectividad

$$p_2(A_2, B_2, C_2, D_2) \stackrel{p_2}{\wedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3)$$

Por medio del cual pasamos del conjunto de puntos sobre p_2 al conjunto de puntos sobre otra línea p_3 . El efecto de las dos perspectividades utilizadas sucesivamente figura 1.11, es una transformación por medio de la cual pasamos del conjunto de puntos sobre p_1 al conjunto de puntos sobre p_3 . Por lo general, la nueva transformación no será una perspectividad.

Para comprobar esto, solo necesita unir los puntos correspondientes A_1 y A_3 , B_1 y

B_3, C_1 y C_3, D_1 y D_3, \dots de la figura y verificar que estas líneas no son concurrentes o verificar que $I_1 = p_1.p_3$ no es invariante bajo la transformación. Tal correspondencia biunívoca entre los dos haces es llamada una correspondencia proyectiva o transformación proyectiva y se denota por

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1) \bar{\wedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3)$$

Así tenemos la siguiente definición:

Definición 1.2.7 : Una correspondencia uno a uno entre dos haces de puntos se dice que es proyectiva, siempre que la correspondencia sea la resultante de una sucesión de perspectivas. Más brevemente, tal correspondencia es llamada una proyectividad.

La figura 1.12 ilustra una proyectividad entre dos haces de puntos sobre líneas distintas $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1) \bar{\wedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3)$ Definida por la sucesión de perspectivas $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1) \xrightarrow{p_1} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2) \xrightarrow{p_2} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3) \xrightarrow{p_3} p_4(A_4, B_4, C_4, D_4)$ Similarmente, una proyectividad

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1) \bar{\wedge} p_n(A_n, B_n, C_n, D_n)$$

Puede establecerse por una sucesión de perspectivas

$$p_1 \xrightarrow{p_1} p_2 \xrightarrow{p_2} p_3 \xrightarrow{p_3} \dots \xrightarrow{p_{n-1}} p_n$$

Con la única restricción de que P_i no este sobre p_i y p_{i+1} no este sobre P_i . Observemos inmediatamente que:

- 1) Una perspectiva entre dos haces de puntos es un caso especial de una proyectividad entre haces; el recíproco, sin embargo, no es verdadero.

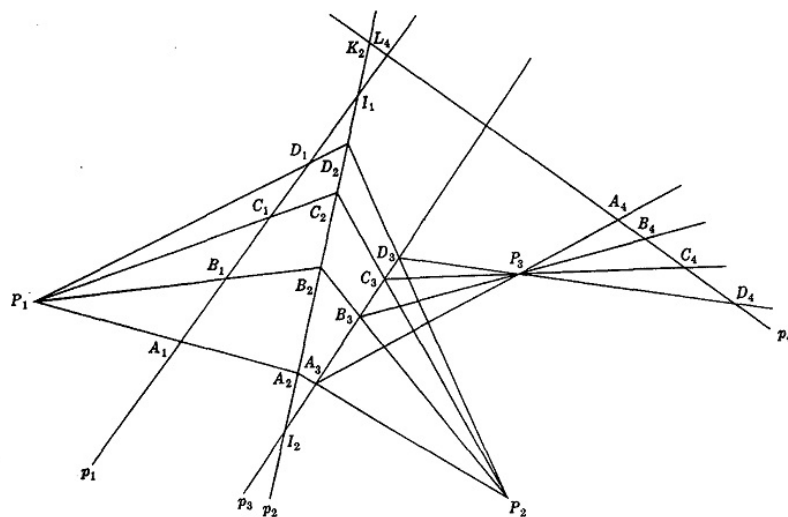


Figura 1.12

- 2) La proyectividad $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1) \bar{\wedge} p_n(A_n, B_n, C_n, D_n)$ es reversible, es decir, $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1) \bar{\wedge} p_n(A_n, B_n, C_n, D_n)$ implica

$$p_n(A_n, B_n, C_n, D_n) \bar{\wedge} p_1(A_1, B_1, C_1, D_1)$$

La sucesión de perspectivas que establecen

$$p_n(A_n, B_n, C_n, D_n) \bar{\wedge} p_1(A_1, B_1, C_1, D_1)$$

siendo $p_1 \bar{\wedge} p_2 \bar{\wedge} p_3 \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} p_{n-1}$ escrita en orden inverso.

El concepto de perspectiva también puede extenderse a tres dimensiones.

Definición 1.2.8: Los conjuntos de puntos en dos planos son perspectiva, si los pares de puntos correspondientes están alineados con un punto fijo que no pertenece en ambos planos. El punto fijo se llama centro del perspectiva.

La figura 1.13 muestra una perspectiva que involucra polígonos

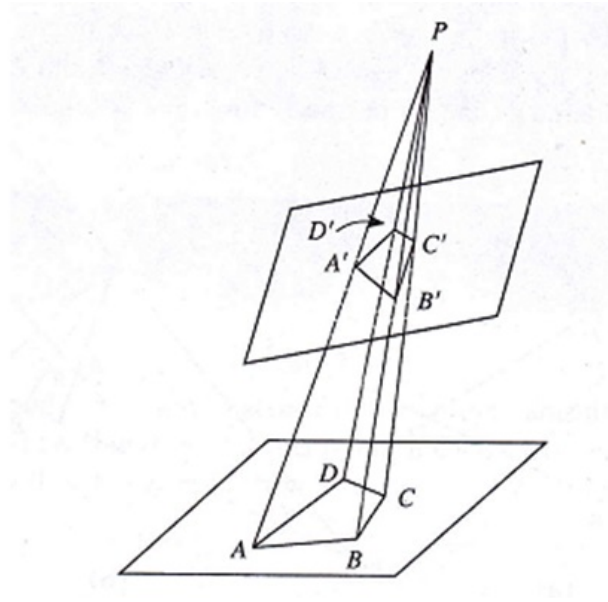


Figura 1.13

1.3. La línea proyectiva

En un plano ordinario, tómesese cualquier línea q y cualquier punto O que no está sobre q figura 1.14. Por O pásese una línea p que intercepte a q en P . Si suponemos que p rota en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj alrededor de O , entonces P se moverá a lo largo de q en la dirección indicada por la flecha. Cuando p toma la posición OA el punto P aparece nuevamente (pero sobre el otro extremo de q) y, moviéndose en la dirección indicada por la flecha recorre el resto de q . Así, aunque el movimiento de p alrededor de O es continuo, es decir, sin saltos, el movimiento de P a lo largo de q no lo es. Ahora, si hubiéramos empezado con un plano proyectivo, cada posición de p determinaría un punto sobre q . Así, cuando p gira alrededor de O , la línea proyectiva q es trazada por el movimiento continuo de p y debemos concluir:

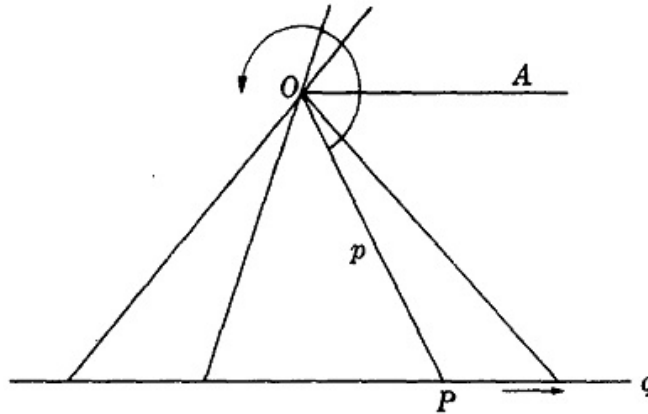


Figura 1.14

Una línea proyectiva se comporta como si fuera cerrada.

El lector no intentara formar mentalmente un dibujo de una línea recta cerrada. Sin embargo, con el propósito de indicar otras distinciones entre líneas proyectivas y ordinarias, consideraremos un círculo o una elipse como modelo de línea proyectiva figura 1.15a, y la misma curva quitándole uno de sus puntos como modelo de línea ordinaria figura 1.15b.

Usando la figura 1.15b es evidente que cualquier punto A sobre una línea ordinaria la divide en dos segmentos, y otro punto B sobre uno de los segmentos es suficiente para distinguirlo del otro segmento. Usando la figura 1.15a, se ve que para separar a la línea proyectiva en dos segmentos son necesarios dos puntos A y B ; y otro punto C sobre uno de los segmentos, es entonces suficiente para distinguir este segmento de otro.

Una segunda forma para describir esta diferencia entre la línea ordinaria y la línea proyectiva es como sigue: sobre una línea ordinaria hay exactamente un camino partiendo de uno de sus puntos A a otro de sus puntos B ; sobre una línea proyectiva,

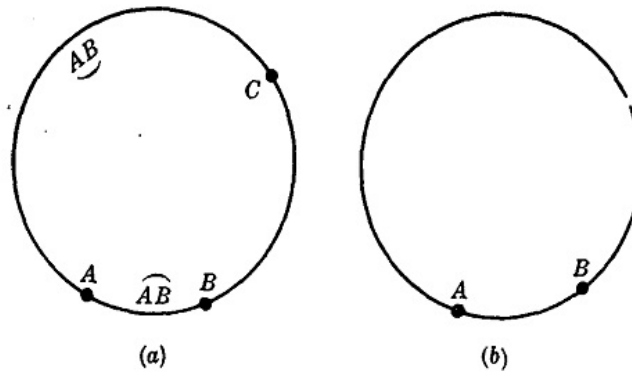


Figura 1.15

uno puede seguir uno de los dos caminos $\overset{\sim}{AB}$ O \widehat{AB} moviéndose desde un punto A a otro B .

Consideremos ahora una línea proyectiva y sobre ella marquemos cuatro de sus puntos (se suponen diferentes) A, B, C, D . Considerando la posición del par C, D con respecto al par A, B , existen dos casos:

- (1) el par C, D Caen sobre uno de los segmentos en los cuales el par A, B separa la línea Figura 1.16a.
- (2) los puntos C, D caen por separado sobre uno de los segmentos en los cuales el par A, B separa la línea Figura 1.16b.

En el último caso decimos que el par de puntos A, B es separado por el par C, D de este modo, si A, B, C, D Son puntos distintos sobre una línea proyectiva, el par A, B es separado por el par C, D , siempre que el punto C este en uno de los segmentos $\overset{\sim}{AB}$ O \widehat{AB} y el punto D este sobre el otro segmento. Otra forma de expresar esto es diciendo: si A, B, C, D son puntos distintos sobre una línea proyectiva, el par A, B es separado por C, D siempre que no sea posible moverse a lo largo de la línea de A a B , sin encontrarse alguna de los puntos del par C, D . Se sigue inmediatamente que si el par C, D separa al par A, B entonces el par A, B separa el par C, D .

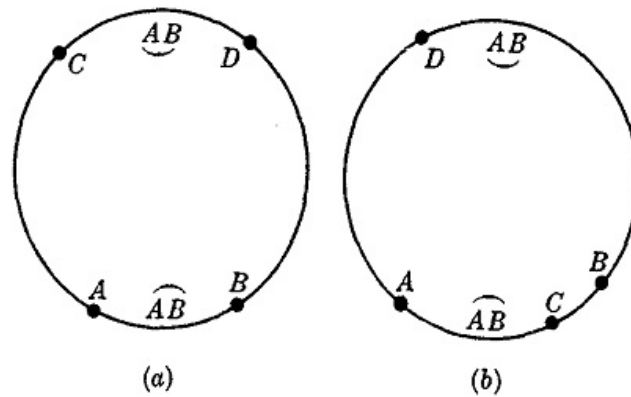


Figura 1.16

Consideremos en la Figura 1.17 el par a, b y simbolicemos por \widetilde{ab} O \widehat{ab} las dos partes en que ellas separan el plano. Sin mayor dificultad establecemos: si a, b, c, d son líneas coplanares distintas sobre un punto Q , decimos que el par a, b es separado por el par c, d siempre que la línea c caiga en una de las partes y la línea d en la otra (más adelante veremos que es el dual en el plano proyectivo de una línea proyectiva q , con cuatro puntos distintos A, B, C, D marcado sobre ella).

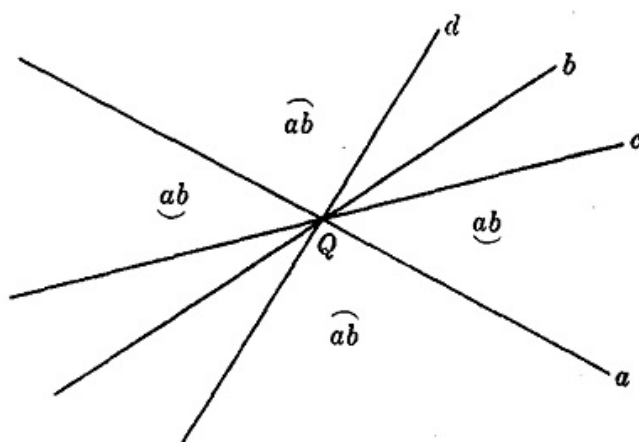


Figura 1.17

Capítulo 2

Axiomas Básicos y Desarrollo de la Geometría Proyectiva

2.1. Axiomas Básicos de la geometría proyectiva

Los axiomas para la geometría proyectiva son más simple que los axiomas de la geometría euclidiana. El siguiente conjunto de axiomas (los primeros cinco de estos se adaptan de una serie que aparece en Coxeter, geometría proyectiva) se basa en los términos primitivos punto, línea, y la relacion de incidencia. La idea intuitiva de incidencia es simplemente la idea de “encontrar”, “contener”ó “intersecar”, por ejemplo, el axioma 1 significa que dos puntos distintos se encuentran en una sola línea. Axioma 2 significa que cualesquiera dos líneas tienen por lo menos un punto en común. Los nuevos términos utilizados en el axioma 4 se explicarán después de la declaración de los axiomas.

Definición 2.1.1: Un cuadrángulo completo es un conjunto de cuatro puntos (vértices) en un plano, de los cuales tres no son colineales, y las líneas que unen estos vértices estan en pares.

Los axiomas de la geometría proyectiva:

1. Dos puntos distintos cualesquiera inciden en una sola línea.
2. Dos líneas coplanares cualesquiera son incidentes en por lo menos un punto.
3. Existen cuatro puntos de los cuales tres de ellos no son colineales.
4. Los tres puntos diagonales de un cuadrángulo completo no pueden ser colineales.
5. Si una proyectividad deja invariante tres puntos distintos de una línea, entonces deja invariante cada una de ellas.
6. No todos los puntos son coplanares (no están en el mismo plano).
7. Dos planos distintos cualesquiera tienen por lo menos dos puntos en común.

Un cuadrángulo completo se muestra en la figura 2.1 el cuadrángulo completo $ABCD$ tiene tres pares de lados opuestos, \overline{AB} y \overline{CD} , \overline{AD} y \overline{BC} y \overline{AC} y \overline{BD} . Lados opuestos se intersectan. Los lados opuestos son dos líneas, una determinada

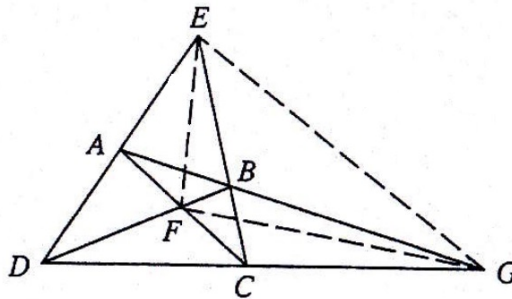


Figura 2.1

por cualquiera de los dos vértices y el otro determinado por los vértices restantes de

el cuadrángulo completo. Por ejemplo, los vértices A y C determinan un lado, por lo que el lado opuesto es la línea determinada por los dos vértices restantes, B y D . Los lados opuestos de un cuadrángulo completo se encuentran de dos en dos, en tres puntos distintos de los vértices (puntos E, F, G , de la figura 2.1). Estos tres puntos son los puntos diagonales del cuadrángulo completo, tal como se utiliza en el axioma 4. Las líneas punteadas en la figura 2.1 son los lados del triángulo en diagonal, cuyos vértices son los puntos diagonales.

Muchos de los axiomas de la geometría proyectiva parecen ser los mismos de la geometría euclidiana, y esto es correcto. Uno que no es el mismo, y sin embargo es responsable de dar a la geometría proyectiva su estructura característica es el Axioma 2. El significado de este axioma se muestra en la figura 2.2 siguiente.

\overline{AB} y \overline{CD} tienen un obvio punto de intersección, pero \overline{AC} y \overline{BD} no muestran un

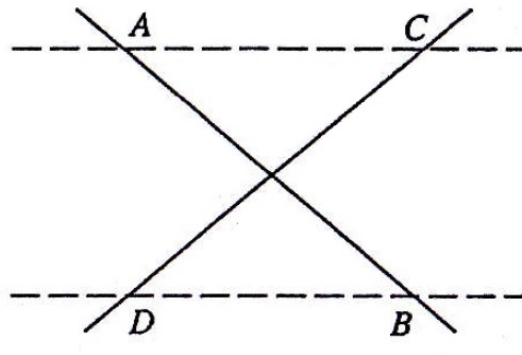


Figura 2.2

punto de intersección, parecen ser paralelas. La consecuencia del axioma sin embargo, es que cualquier dos líneas de un plano, incluso aquellos que, como \overline{AC} y \overline{BD} pueden reunirse en un punto. Es decir, no existen líneas paralelas en geometría proyectiva. En la geometría Euclidiana, cualquier punto del plano Euclidiano es un punto ordinario. Dos líneas paralelas no tienen un punto en común. En el plano euclidiano extendido, las líneas paralelas se dice que se encuentran en puntos ideales ó puntos

del infinito. Decir que dos líneas se reúnen en un punto ideal en el plano euclidiano extendido es solo otra manera de decir que las líneas son paralelas en el plano ordinario. El plano euclidiano extendido consiste en la unión del plano ordinario y sus puntos ideales.

En los planos y espacios de geometría proyectiva, los puntos ideales pierden su característica especial, y el paralelismo no puede ocurrir. Podemos pensar de manera intuitiva de la geometría proyectiva como derivados de la geometría de el plano euclidiano extendido a través de la eliminación de cualquier distinción entre los puntos reales e ideales. Los puntos A , B , C , en la figura 1.3 podrían fácilmente ser puntos ideales como puntos reales. En la figura 1.1, los lados opuestos podrían encontrarse o unirse en los puntos ideales ó en los puntos reales. El paralelismo ya no existe, y la geometría proyectiva se muestra como una geometría más general y la geometría ordinaria como un caso especial.

2.2. Dualidad y Algunas Consecuencias

El concepto de dualidad, es una idea básica de la geometría proyectiva, que no aparece en la geometría euclidiana. En la geometría euclidiana, dos puntos siempre determinan exactamente una línea, pero dos líneas en el mismo plano no siempre determinan un punto (ya que pueden ser paralelas).

En la geometría proyectiva, por otro lado, esta excepción ha sido eliminada. En Geometría Proyectiva el punto y la recta se denominan *elementos duales*. Trazar una recta que pase por un punto, o señalar un punto sobre una recta, son *operaciones duales*. Dos figuras son duales si una puede deducirse de la otra reemplazando cada elemento y operación por el elemento y operación duales.

Una comparación de las declaraciones de “dos puntos determinan una línea” y “dos líneas determinan un punto”, con respecto a un plano, muestra que uno puede pasar de una definición a la otra mediante el intercambio de las palabras puntos y líneas. Este es un ejemplo de plano dual. Para los conjuntos de puntos en el plano proyectivo (el plano de la geometría proyectiva), toda declaración sigue siendo cierta cuando se cambian las palabras punto y línea, también sigue siendo cierto si se intercambian los pares de palabras, tales como colineales y concurrentes. Por ejemplo, el dual de la expresión “tres puntos colineales” es “tres líneas concurrentes”.

El conjunto de axiomas de la geometría proyectiva tiene su correspondiente dual que son axiomas o teoremas. Axiomas 1 y 2 implican conceptos duales. El dual del axioma 3 es el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1: Existen cuatro líneas de las cuales tres no son concurrentes.

Demostración: Sea A , B , C , y D cuatro puntos como se muestra en la figura 2.3. De los cuales tres de ellos no son colineales. Por el axioma 1, estos cuatro puntos determinan las cuatro líneas \overline{AB} , \overline{AD} , \overline{CD} , y \overline{BC} . Tres de estas líneas no pueden ser concurrentes respetando los axiomas 1 y 2. •

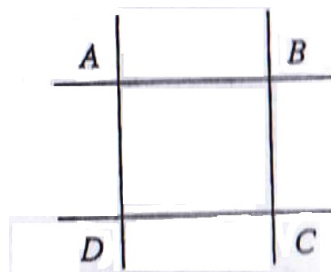


Figura 2.3

Los axiomas 3 y 4 también implican conceptos duales. El plano dual del axiomas 4 introduce una nueva terminología que debe ser explicado.

Definición 2.2.1: Un cuadrilátero completo es un conjunto de cuatro líneas (que se llaman lados) tres no concurrentes y los puntos de intersección de estas líneas están en pares (véase la Figura 2,4).

El dual del axioma 4 establece que las tres líneas diagonales de un cuadrilátero completo nunca son concurrentes. La definición de un cuadrilátero completo es el dual del cuadrángulo completo.

Las propiedades del cuadrilátero completo pueden ser estudiadas como el dual de

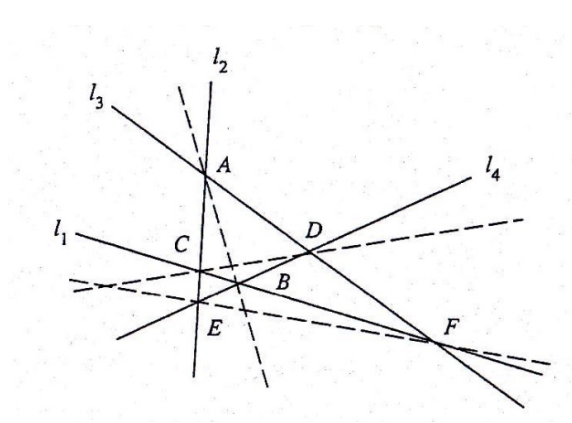


Figura 2.4

las propiedades correspondientes del cuadrángulo completo. Los seis puntos de intersección de las cuatro líneas dadas son en tres conjuntos de vértices opuestos. En la figura 2.3, A y B son vértices opuestos, como lo son también C con D y E con F . Las líneas que unen los vértices opuestos son líneas diagonales, y la figura formada por las tres líneas diagonales es la Diagonal Trilateral. En la geometría proyectiva, se acostumbra a hablar de un triángulo como autodual, ya que incluyen ambos tanto los vértices y los lados, y utilizamos triángulo diagonal tanto para el cuadrángulo completo como para el cuadrilátero completo.

El dual de axioma 4 implica que las líneas punteadas en la figura 2.4 no pueden ser

concurrentes. Esto debería ser fácil de ver, porque si fueran concurrentes, entonces los tres puntos diagonales del cuadrángulo $ABCD$ serían colineales, contradiciendo el axioma 4.

Cerramos el tema de dualidad con unos de los primitivos y mayores descubrimientos de Desargues en la geometría proyectiva, como lo es su famoso teorema de triángulos.

Teorema 2.2.2: "Teorema de Desargues". Si dos triángulos están en perspectiva desde un punto, lo están también desde una línea.

A diferencia de la mayoría de los teoremas de la geometría, el teorema de Desargues es más fácil de probar tomando dos triángulos en planos diferentes que tomar los dos triángulos en el mismo plano.

Desde el principio de la dualidad, también se ha establecido el dual del teorema de Desargues.

Teorema 2.2.3: Si dos triángulos están en perspectiva desde una línea, también lo están desde un punto.

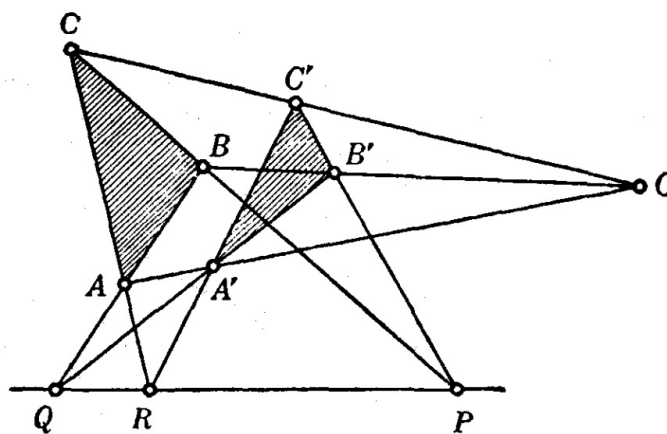


Figura 2.5

El dual del teorema de Desargues es también su contrario. Esto no es habitual, pero tampoco es un caso único.

La demostración de este teorema se puede construir apartir de dos triángulos en el mismo plano y de dos triángulos en difetentes planos daremos acá solo una de las dos, trabajaremos con dos triángulos en diferentes planos.

Demostración: Asumimos que tenemos dos triángulos en diferentes planos, como se muestra en la figura 2.6.

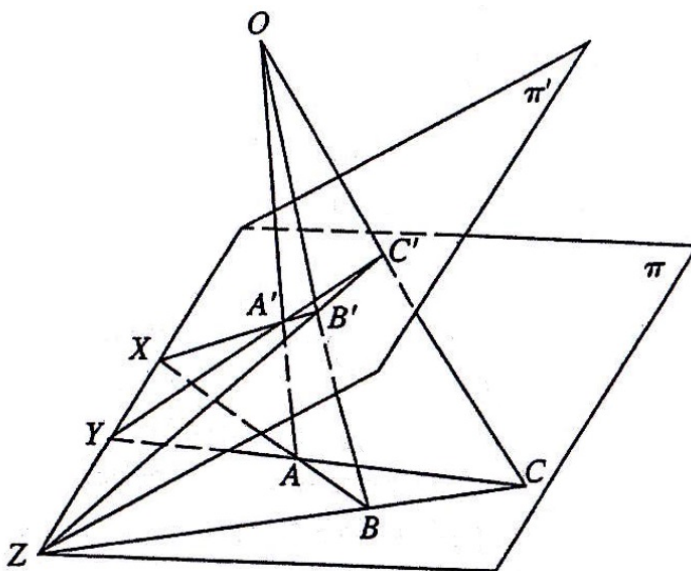


Figura 2.6

Desde O : B', C', B, C están sobre un plano, y las líneas \overline{BC} y $\overline{B'C'}$ deben reunirse en un punto, y este punto debe ser un punto Z que está sobre la línea de intersección de los dos planos π y π' .

De manera similar, O, A', C', A, C determinan un plano, y las líneas \overline{AC} y $\overline{A'C'}$ se reunirán en un punto Y sobre la línea de intersección de π y π' . De igual forma las líneas \overline{AB} y $\overline{A'B'}$, se reunirán sobre la misma línea de intersección de π y π' , así $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ están en perspectiva de una línea formada por los puntos

X, Y, Z . •

2.3. Conjuntos Armónicos

Conjuntos armónicos son conjuntos especiales de cuatro puntos o líneas que tienen una gran importancia en la geometría proyectiva. Dado un cuadrángulo completo que consiste de cuatro puntos y seis líneas, en una línea arbitraria del plano se intersectan los seis lados en seis puntos distintos. Este conjunto de seis puntos, no necesariamente todas distintas, se denomina conjunto de puntos cuadrangulares. La Figura 2.7 muestra un cuadrángulo completo $ABCD$ y el conjunto de puntos cuadrangulares E, F, G, H, I, J . El teorema de Desargues se puede utilizar para mostrar que cada punto del conjunto cuadrangular puede determinarse únicamente si se conocen los otros cinco, donde G y H , E y J , F e I están en lados opuestos del nuevo cuadrángulo.

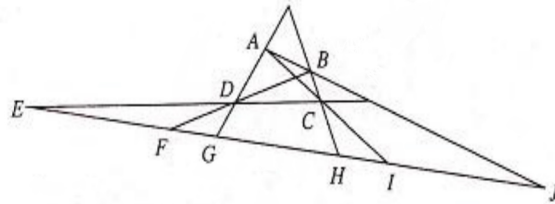


Figura 2.7

Definición 2.3.1: Un conjunto de puntos armónicos, o un haz armónico de puntos, es un conjunto de puntos cuadrangulares formados por los cuatro puntos de intersección de los lados de un cuadrilátero completo con una recta que pasa por dos puntos diagonales.

La figura 2.8 muestra un conjunto de puntos armónicos, $EFXY$, que consiste en

los cuatro puntos de intersección de los lados del cuadrilátero completo $ABCD$, con una línea que pasa por los puntos diagonales X e Y . El teorema 2,3,1 mostrará que tres de los puntos (si se combina adecuadamente) determinan de forma única el cuarto punto del conjunto armónico.

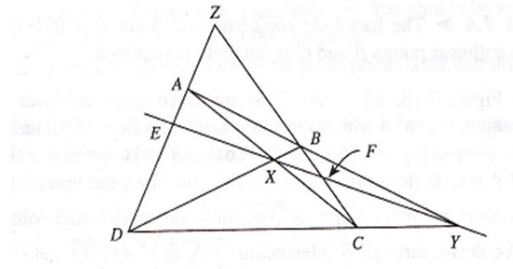


Figura 2.8

La figura 2.9 muestra tres conjuntos de puntos armónicos determinados por el cuadrángulo completo $ABCD$. Los cuatro puntos $NFIG$ son un conjunto de puntos armónicos sobre la línea que pasa por los puntos diagonales F y G . De manera similar, los cuatro puntos $LEMG$ son un conjunto de puntos armónicos sobre la línea que pasa por los puntos diagonales E y G , mientras que los puntos $EJFK$ son un conjunto armónico sobre la línea que pasa por los puntos E y F . En cada caso, dos de los cuatro puntos de el conjunto armónico son puntos diagonales, y los otros dos puntos están en los lados que pasan por el tercer punto diagonal. Una notación especial para conjuntos armónicos destaca esta distinción entre los dos pares de puntos en el conjunto.

Por ejemplo, $H(FG, NI)$ indica el conjunto armónico compuesto por los cuatro puntos F, G y N, I . Un par, ya sea FG o NI , indican los dos puntos diagonales, mientras que los otros dos puntos son los puntos de intersección de las líneas del cuadrángulo

atravez del tercer punto diagonal. El mismo conjunto armónico podría ser indicado por: $H(FG, IN)$; $H(GF, NI)$ o $H(GF, IN)$.

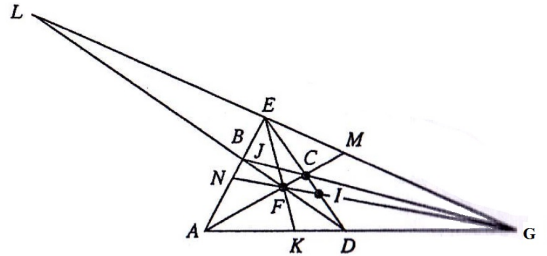


Figura 2.9

En la notación $H(FG, NI)$, N es el conjugado armónico de I con respecto a F y G . Cada punto del conjunto armónico es el conjugado armónico del otro miembro de su par con respecto a los otros pares de puntos. Así El axioma 4 especifica que los tres puntos diagonales de el cuadrángulo completo no son colineales, un punto y su conjugado armónico deben ser puntos distintos, por lo que hay almenos cuatro puntos en cada línea en una Geometría proyectiva.

Los cuatro puntos de un conjunto armónico no todos pueden estar situados de forma independiente. Una declaración de la dependencia se da en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1: El conjugado armónico de un punto A con respecto a otros dos puntos colineales dados B y C se determina de forma única.

Demostración: En la figura 2.10, sean B, A, C cualquiera de los tres puntos colineales. Un conjugado armónico D de A con respecto a B y C , $H(BC, AD)$, Se puede encontrar mediante la construcción del cuadrángulo completo $EFGH$ de modo que B y C son dos puntos de la diagonal, y A con D se encuentran sobre las líneas através del tercer punto diagonal. Por lo tanto se puede hacer eligiendo cualquier punto F no en \overleftrightarrow{AB} y la conexión de F y los puntos A, B, C . Una línea puede ser dibujada

através de B intersectando \overleftrightarrow{FA} en H y \overleftrightarrow{FC} en G . Dejemos que \overleftrightarrow{CH} interseque a \overleftrightarrow{BF} en E . luego \overleftrightarrow{EG} interseca a \overleftrightarrow{AB} en D el punto deseado.

El hecho de que D es único es algo no muy difícil de probar. Asumimos como en la figura 2.10, que un segundo cuadrángulo $E'F'G'H'$ se a construido como antes, comenzando con la elección de F' como un punto que no está en \overleftrightarrow{AB} y también distinto de F . Esto es para demostrar que $\overleftrightarrow{E'G'}$ interseca a \overleftrightarrow{AB} en D .

Los triángulos FGH y $F'G'H'$ están en perspectiva de la línea \overleftrightarrow{AB} , y por lo tanto, están en perspectiva del punto J por el inverso del Teorema de Desargues's. Los triángulos FEH y $F'E'H'$ son también perspectivos de la línea \overleftrightarrow{AB} y son también perspectivos de el mismo punto J , así $EE'J$ son colineales. Esto significa que los triángulos FEG y $F'E'G'$ son perspectiva de J y, por el teorema de Desargues's, son perspectiva de una línea. Esta línea es \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{EG} y $\overleftrightarrow{E'G'}$ deben encontrarse en un punto D sobre \overleftrightarrow{AB} ; así, el conjugado armónico de A con respecto a B y C es un punto único. •

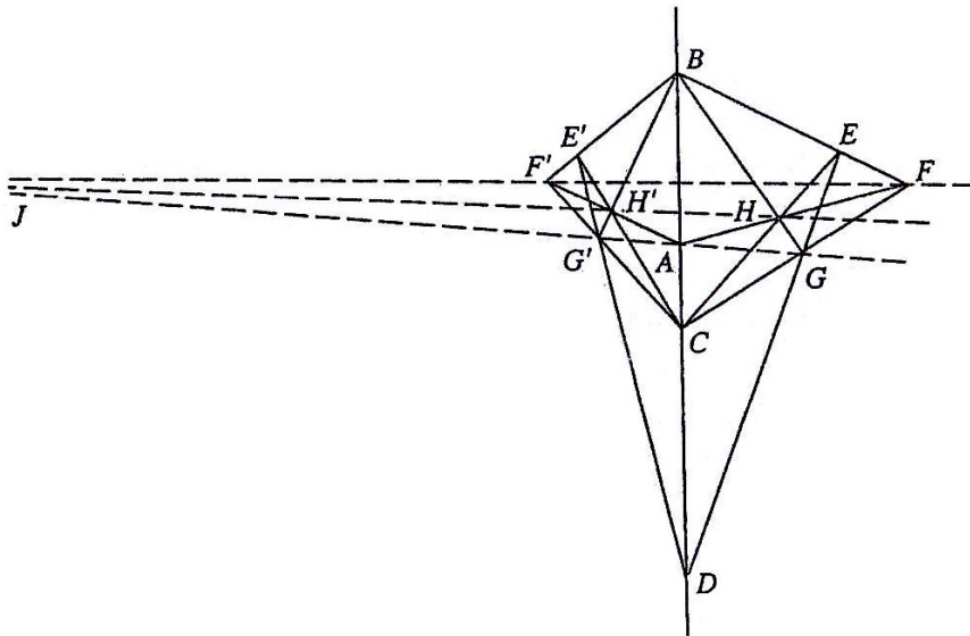


Figura 2.10

El dual de la definición de un conjunto de puntos armónico es la definición de un conjunto de líneas armónicas.

Definición 2.3.2: Un conjunto armónico de líneas, o haz armónico de líneas, es un conjunto de cuatro líneas concurrentes de tal manera que dos de ellas son líneas diagonales de un cuadrilátero completo y las otras dos pasan por los dos vértices que intersectan la tercera línea diagonal.

En la figura 2.11, si a, b, c y d son los lados del cuadrilátero, con e, f, g las líneas diagonales. Un conjunto de líneas armónicas es $H(eg, hi)$.

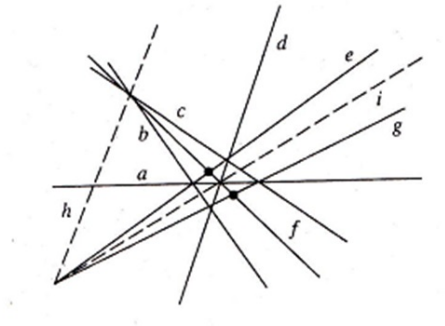


Figura 2.11

Teorema 2.3.2: La propiedad armónica se conserva bajo proyectividades.

Demostración: Una proyectividad es una sucesión finita de perspectividades, así, es suficiente demostrar que la propiedad armónica se conserva en una sola perspectividad. Para demostrar que esto es así consiste en probar dos afirmaciones por separadas:

- a. El conjunto de líneas que se unen a cualquier punto no colineal a los cuatro

puntos de un conjunto armónico de puntos es un conjunto armónico de líneas.

- b. El conjunto de puntos de intersección de las cuatro líneas de un conjunto armónico con cualquier línea no a través de el punto de concurrencia de las líneas (el centro del has) es un conjunto armónico de puntos.

Puesto que las dos afirmaciones son duales, demostrar una será suficiente. Demostraremos la primera afirmación. En la figura 2.12, dejamos a $H(AB, CD)$ ser cualquier conjunto armónico de puntos, con O cualquier punto no colineal. Tenemos que mostrar $H(\overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD})$. La existencia del conjunto de puntos armónicos implica la existencia de un cuadrángulo completo $O E F G$, con A y B dos puntos diagonales y C con D puntos en línea a través del tercer punto diagonal. Pero $\overleftrightarrow{GF}, \overleftrightarrow{AE}, \overleftrightarrow{AB}$ y \overleftrightarrow{GE} son los cuatro lados de un cuadrilátero completo. \overleftrightarrow{AO} y \overleftrightarrow{OB} son líneas diagonales, mientras \overleftrightarrow{OC} y \overleftrightarrow{OD} son líneas a través de los otros dos vértices, F y D , que no se encuentran en la tercera línea diagonal. Esto implica $H(\overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD})$. •

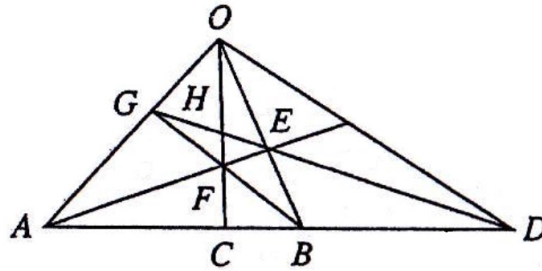


Figura 2.12

El símbolo para una perspectiva, $ABCD \stackrel{s}{\sim} A'B'C'D'$, indica que S es el centro de perspectiva donde A y A' , B y B' ... son puntos correspondientes. El símbolo $ABCD \stackrel{\pi}{\sim} A'B'C'D'$ indica una proyectividad en el cuál AA' , BB' ,... son puntos correspondientes.

Definición 2.3.3: El conjunto de todos los puntos armónicamente relacionados con tres puntos colineales distintos es una red de puntos armónicos.

Figura 2.13 muestra apenas algunos de los puntos en la red armónica determinada por los puntos A, B, C . los conjuntos armónicos son $H(AF_2, CF_3)$, $H(AF_3, F_2F_4)$, $H(F_1F_3, F_2F_4)$.

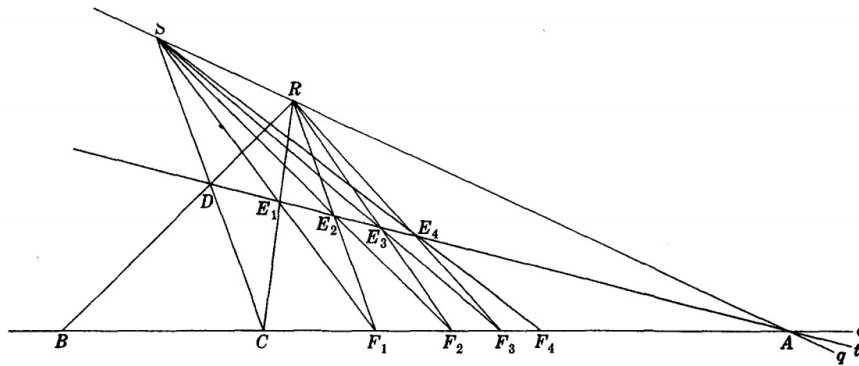


Figura 2.13

2.4. Projectividades

Recordemos que una Projectividad, se define como una secuencia finita de perspectivas, es una transformación, ya que es una asignación uno a uno de puntos. La inversa de una Projectividad es una Projectividad, y el producto de dos projectividades es una Projectividad; por lo tanto, el siguiente teorema es verdadero.

Teorema 2.4.1: El conjunto de todas las projectividades para los que el producto se define en un plano constituye un grupo de transformaciones.

Teorema 2.4.2: Teorema fundamental. Una Projectividad entre los conjuntos de puntos en dos líneas en un plano se determina de forma única por tres puntos colineales y sus imágenes.

Demostración: "Se determina de forma única" significa que no puede haber dos transformaciones diferentes que trazan los tres puntos a sus imágenes dadas. La imagen de cada punto X se fija como uno cierto punto por la información dada. La prueba es indirecta (por contradicción), asumimos, como se ilustra en la figura 2.14, que $ABCX \bar{\wedge} A'B'C'X'$ y $ABCX \bar{\wedge} A'B'C'X''$, con X' y X'' puntos distintos.

Entonces $A'B'C'X' \bar{\wedge} ABCX \bar{\wedge} A'B'C'X''$ y $A'B'C'X' \bar{\wedge} A'B'C'X''$. Pero en esta

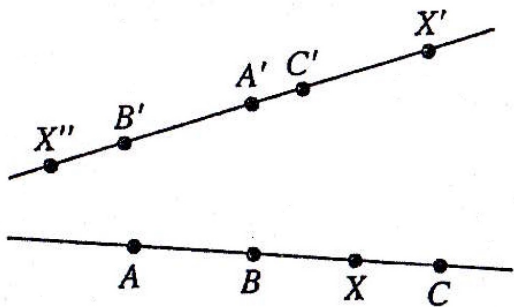


Figura 2.14

última projectividad, los puntos A' , B' y C' son fijos. Por el axioma 5, todos los

demás puntos de la línea también deben fijarse. El supuesto de que X' y X'' son distintos contradice el axioma, por lo X' y X'' deben ser idénticos. •

Mientras que el teorema fundamental de la geometría proyectiva es muy importante desde un punto de vista teórico, aun no proporciona todavía un método constructivo para determinar realmente pares adicionales de los puntos correspondientes en una proyectividad. Uno de estos métodos se basa en establecer una secuencia mínima de perspectivas para la proyectividad.

Teorema 2.4.3: Tres puntos distintos A, B, C sobre una línea puede proyectarse en tres puntos distintos cualesquiera A', B', C' como una segunda línea por medio de una secuencia de, a lo sumo dos perspectivas.

Desmostración: En la figura 2.15, supongamos que A, B, C, A', B', C' representa los seis puntos dados. Elegir un centro de perspectiva distinto de A o A' en $\overleftrightarrow{AA'}$ y una línea l (que no contiene B', C') mediante A' . Entonces los puntos B'' y C'' se determinan en l para que $ABC \stackrel{s}{\bar{\wedge}} A'B''C''$. La intersección de $\overleftrightarrow{C'C''}$ y $\overleftrightarrow{B'B''}$ determina los puntos S' tal que $A'B''C'' \stackrel{s}{\bar{\wedge}} A'B'C'$, así $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$. •

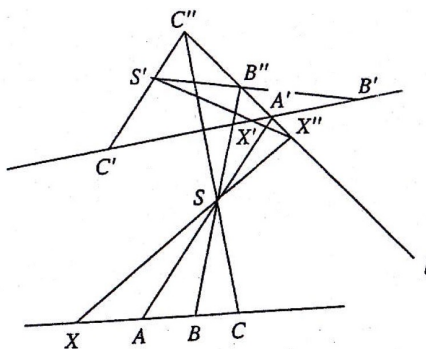


Figura 2.15

Dado cualquier punto X en \overleftrightarrow{AB} , X'' y X' se pueden encontrar mediante el uso

de las perspectivas ya definidas.

Ejemplo 1: Encontrar la imagen del punto D en la proyectividad establecida entre A, B, C y $A'B'C'$. En la figura 2,16a.

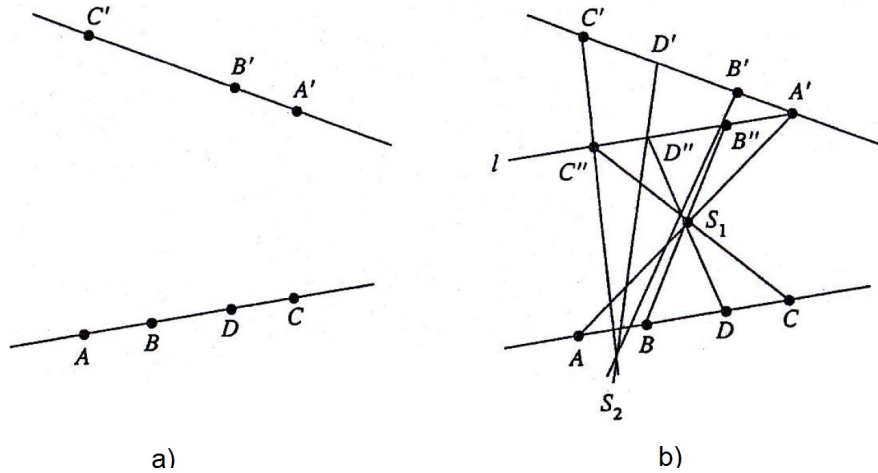


Figura 2.16

Figura 2.16b muestra la solución determinada por la configuración de las dos perspectivas $ABC \stackrel{s_1}{\wedge} A'B''C''$ y $A'B''C'' \stackrel{s_2}{\wedge} A'B'C'$.

Si los seis puntos dados todos se encuentran en la misma línea, se requiere una perspectiva extra. Si uno de los puntos dados es su propia imagen en la proyectividad, entonces la proyectividad es una perspectiva.

Los puntos correspondientes en una proyectividad no están en general, en perspectiva desde un punto, ni son las líneas correspondientes en una perspectiva proyectiva de una línea. Pero proyectivamente tienen puntos o líneas que son algo análogos a los centros y ejes de perspectiva.

Teorema 2.4.4: Una Proyectividad entre dos conjuntos de puntos en dos líneas distintas determina una tercera línea llamada el eje de Proyectividad, o eje de homología, que contiene las intersecciones del cruce que une a todos los pares de puntos correspondientes (ver figura 2.17).

Este teorema es a menudo llamado el teorema de Pappus, ya que Pappus de Alejandría, fué quien probó la versión euclidiana alrededor de 300 AD.

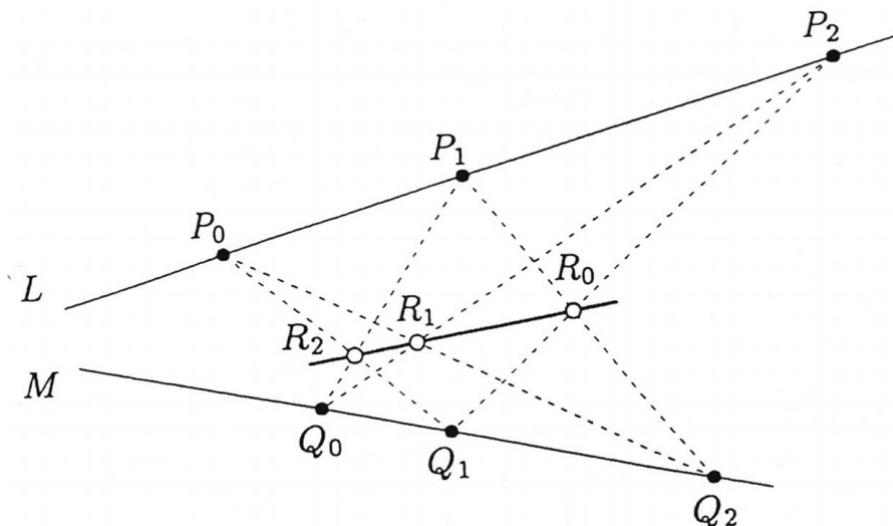


Figura 2.17: Teorema de Pappus

Definición 2.4.1: El cruce que une a dos pares de puntos, como A, A' y B, B' , son $\overleftrightarrow{AB'}$ y $\overleftrightarrow{BA'}$.

Desmostración: Para demostrar el teorema 2.4.4, se debe demostrar que el eje es único y que todas las intersecciones del cruce que une son colineales. Esto se puede lograr, mostrando que el eje es independiente de las elecciones de los puntos. Véase la figura 2.18a . Ya que existe una proyectividad entre los puntos de l_1 , y l_2 , $(\overleftrightarrow{A'A}, \overleftrightarrow{A'B}, \overleftrightarrow{A'C} -) \bar{\bar{}} (ABC -) \bar{\bar{}} (A'B'C' -) \bar{\bar{}} (\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{AB'}, \overleftrightarrow{AC'} -)$, de modo que

$$(\overleftrightarrow{A'A}, \overleftrightarrow{A'B}, \overleftrightarrow{A'C}) \bar{\wedge} (\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{AB'}, \overleftrightarrow{AC'}).$$

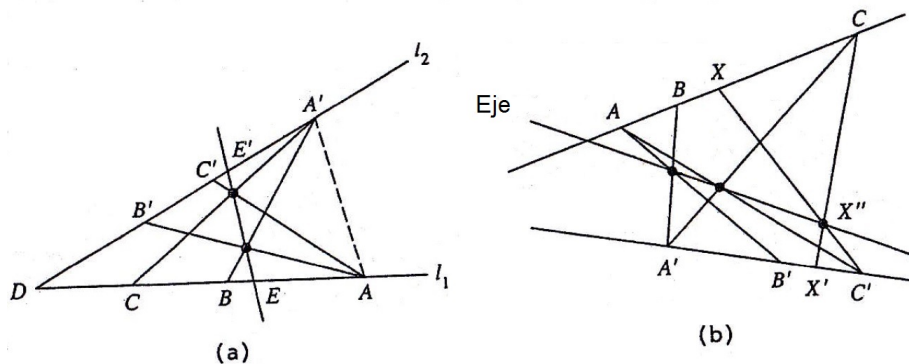


Figura 2.18

En esta proyectividad, $A'A$ es una línea correspondiente de sí misma, por lo que la proyectividad es equivalente a una perspectividad cuya línea pasa a través de la intersección de $\overleftrightarrow{A'B}$ y $\overleftrightarrow{AB'}$, $\overleftrightarrow{A'C}$, y $\overleftrightarrow{AC'}$ y así sucesivamente.

Si otro par de puntos, como B, B' , por ejemplo, hubiesen sido tomado como los centros de los haces proyectivos, en lugar de A, A' , el mismo eje de la proyectividad habría sido determinado. Esto es cierto porque, en cualquier caso, el eje siempre pasa a través de las dos imágenes del punto en común de las dos líneas. En la figura 2.18, si E' es la imagen de D considerado como punto en l_1 , y si E es la imagen de D considerada como un punto en l_2 , entonces para los dos pares de puntos B, B' y D, E' , la unión de cruces se encuentra en E' en el eje de la proyectividad. Para los dos pares de puntos B, B' y D, E , la unión de cruces se encuentra en E en el eje de la proyectividad. •

Este eje de proyectividad puede ser usado para construir pares adicionales de puntos correspondientes en una proyectividad, como se muestra en el siguiente ejemplo. En la figura 2.18b, supongamos que una proyectividad se determina por los pares

de puntos dados A, A', B, B', C, C' . El eje de proyectividad puede ser determinado por la intersección de la union de cruces $\overleftrightarrow{AC'}$, $\overleftrightarrow{A'C}$ y $\overleftrightarrow{AB'}$, $\overleftrightarrow{A'B}$. Si X representa cualquiera de los cuatro puntos en \overleftrightarrow{AB} . Ahora $\overleftrightarrow{XC'}$ corta el eje de proyectividad en el punto X'' , y $\overleftrightarrow{CX''}$ se encuentran $\overleftrightarrow{A'C'}$ en el punto requerido X' sobre $\overleftrightarrow{A'C'}$. Tenga en cuenta que esta construcción sólo utiliza una regla.

Los duales de los teoremas ya presentados en esta sección son interesantes por derecho propio. Las pruebas que se establezcan dependerán del concepto de dualidad, a pesar de que los teoremas se podrian demostrar directamente.

Teorema 2.4.5: Dual del teorema fundamental (Teorema 2.4.2). Una proyectividad entre los conjuntos de líneas en dos puntos en un plano está determinada por tres líneas concurrentes y sus imágenes.

Teorema 2.4.6: Dual del teorema 2.4.4. Una Proyectividad entre dos conjuntos de líneas en dos puntos distintos determina un tercer punto. El punto definido anteriormente es llamado el centro de proyectividad, o el centro de homología, que esta en la unión de las intersecciones de las líneas correspondientes.

El teorema 2.4.6 se ilustra en la figura 2.19 . Las líneas a, b, c y a', b', c' dadas. El punto X es la intersección de a y b' , el punto Y es la intersección de a' y b , de modo que \overleftrightarrow{XY} pasa a través de S , el cual es el centro de proyectividad. Del mismo modo, c y b' se encuentran en W , y c' y b se reúnen en Z , de modo que S esta en \overleftrightarrow{WZ} .

El centro de proyectividad se puede utilizar para la construcción de pares adicionales de pares de líneas correspondientes en una proyectividad. En la figura 2.19 , suponga que se da d . Las líneas d y a' se reúnen en P . la línea a se reúne con d' en el punto Q en \overleftrightarrow{PS} . La línea que conecta Q y el punto de concurrencia de a', b', c' es la línea deseada d' .

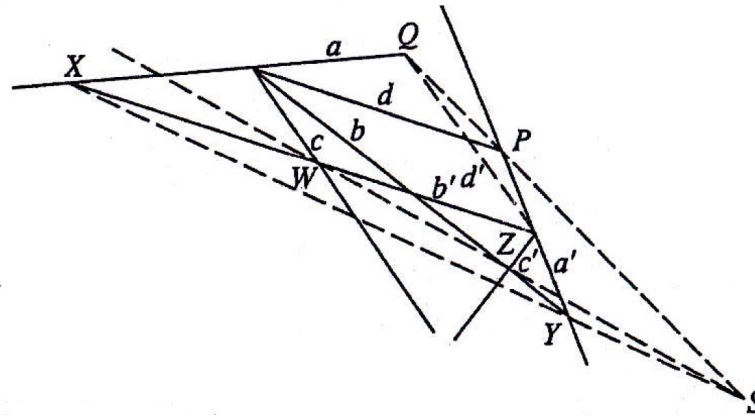


Figura 2.19

2.5. Coordenadas Homogéneas

El sistema de coordenadas cartesianas de geometría ordinaria no es suficiente para la geometría proyectiva, ya que se incluyen los puntos ideales; por lo tanto, se necesita un sistema más general de las coordenadas.

Antes de una presentación formal del sistema de coordenadas de la geometría proyectiva, llamada coordenada homogénea, es importante ver intuitivamente cómo los dos sistemas de coordenadas se relacionan. En una dimensión, una línea de números para la geometría del plano euclidiano extendido se muestra en la figura 2.20a) y líneas de números para la geometría proyectiva, se muestran en la figura 2.20b-d). En la figura 2.20a), el punto con coordenadas infinito se indica como un punto extra con propiedades especiales. Pero en la geometría proyectiva, el punto con coordenada infinito puede estar en cualquier lugar en la línea, y se considera un punto ordinario. Así, un nuevo sistema de coordenadas debe ser establecido de tal manera que otro punto al infinito se pueda utilizar.

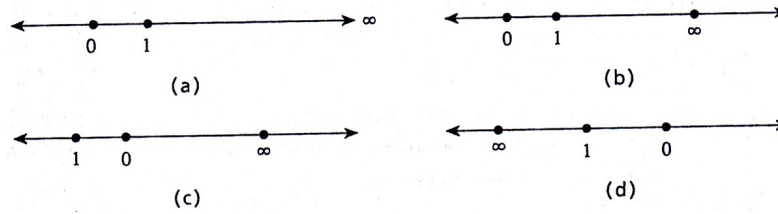


Figura 2.20

La figura 2.21a muestra que el área de trabajo del sistema de coordenadas cartesianas ordinaria con puntos E y F indicados como “puntos al infinito”. Figura 2.21a puede ser proyectada en la figura 2.21b. Con los correspondiente elementos indicados por la primera posición. Los puntos ideales E' y F' no son puntos más especiales y $\overleftrightarrow{E'F'}$ es la línea ideal. Los puntos en el primer cuadrante de la figura 2.21a son proyectadas sobre los puntos en el interior del triángulo $A'E'F'$.

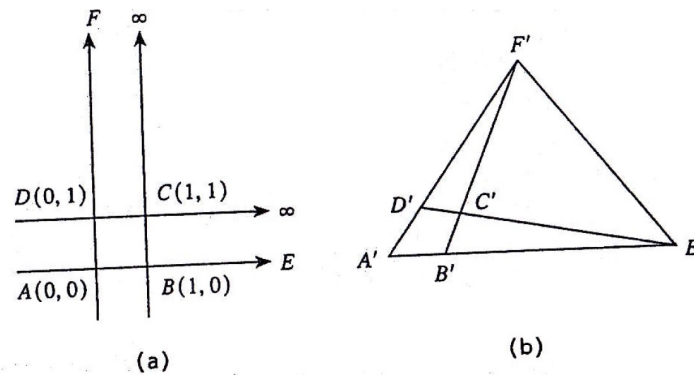


Figura 2.21

Las coordenadas homogéneas deben ser definidas de tal forma que podamos distinguir un número infinito de puntos ideales y todavía no requiere cualquier restricción en el modo de que estos puntos son manejados. La sustitución:

$$x = \frac{x_1}{x_2}, y = \frac{x_2}{x_3} \text{ con } x_3 \neq 0$$

relaciona los puntos ordinarios euclidianos con coordenadas (x, y) a los correspondientes puntos en el plano proyectivo con coordenadas homogéneas (x_1, x_2, x_3) . Por

ejemplo, $(2, 3)$ llega a ser $(2, 3, 1)$ tomando $x_3 = 1$ y aplicando la ecuación anterior ; $(3, 4, 5)$ es el mismo punto como $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. Para puntos ideales, la restricción $x_3 \neq (0)$ deberá ser quitada, y el paso es preparado para una aproximación más formal. Las coordenadas homogéneas de puntos en el plano fueron introducidos alrededor de 1830 por Julius plücker (1801-1868).

Definición 2.5.1: En la geometría proyectiva analítica, un punto es una terna ordenada (x_1, x_2, x_3) , no todos cero, en el entendido de que la notación (ax_1, ax_2, ax_3) representa el mismo punto que (x_1, x_2, x_3) para cualquiera a que no sea cero.

Por ejemplo $(3, 1, 2)$ y $(6, 2, 4)$ hacen referencia al mismo punto en coordenadas homogéneas. Una línea en coordenadas homogéneas es definida dualmente como una terna ordenada $[x_1, x_2, x_3]$, con la convención de que $[ax_1, ax_2, ax_3]$, hacen referencia a la misma línea para cualquier elemento a distinto de cero. Por ejemplo:

$$[3, 2, 7] \text{ y } [1, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}]$$

Son dos nombres para la misma línea. Un punto x esta en una línea X si y solo si

$$X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 = 0$$

Esa condición puede escribirse como producto punto de vectores

$$[X_1, X_2, X_3] \cdot [x_1, x_2, x_3] = 0$$

Por ejemplo el punto $(2, 3, 0)$ está sobre la línea $[3, -2, 0]$, ya que

$$(2)(3) + (3)(-2) + (0)(0) = 0$$

La condición en el párrafo previo es la generalización de la condición para puntos que están sobre una línea en la geometría analítica euclidiana. Si x_3 y X_3 son el conjunto igual a 1, la condición se reduce a $X_1x_1 + X_2x_2 + (1)(1) = 0$. Entonces si X_1 es un conjunto equivalente a $\frac{a}{c}$ y X_2 es un conjunto equivalente a $\frac{b}{c}$, la condición se reduce a

$$\left(\frac{a}{c}\right)x_1 + \left(\frac{b}{c}\right)x_2 + (1)(1) = 0 \text{ ó } ax_1 + bx_2 + c = 0$$

Pero esta es la condición para que (x_1, x_2) esté sobre la línea euclidiana

$$ax + bx + c = 0$$

Por ejemplo, la ecuación de la línea $[2, -5, 7]$ es $2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0$. Dualmente la ecuación del punto $(3, 1, 2)$ es $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Los puntos no tienen ecuación en la geometría analítica euclidiana, pero en la dualidad en el plano proyectivo deberá prepararse para el estudio en coordenadas homogéneas.

Es ahora posible relacionar la definición de coordenadas homogéneas a la figura 2.21 anterior, redefiniendo los desarrollos intuitivos en términos de relación. Estudiar la figura 2.22 cuidadosamente, notando que las coordenadas homogéneas de cada punto con relación a las coordenadas cartesianas de los correspondientes puntos de la figura 2.21a.

En la figura 2.22, no es difícil determinar las ecuaciones de las líneas y relacionarlas con sus correspondientes líneas en geometría euclidiana. Las relaciones son dadas por:

$$\overleftrightarrow{A'E'}, x_2 = 0$$

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{A'F'}, x_1 &= 0 \\ \overleftrightarrow{E'F'}, x_3 &= 0 \\ \overleftrightarrow{B'C'}, x_1 - x_3 &= 0 \\ \overleftrightarrow{D'C'}, x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden ser derivadas formalmente de la condición

$$X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 = 0$$

Para un punto que esta sobre la línea, la sustitución de coordenadas de los dos puntos sobre una línea y entonces resolviendo el conjunto de ecuaciones simultaneas. Por ejemplo, por $\overleftrightarrow{C'D'}$,

$$\begin{aligned}X_2 + X_3 &= 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 &= 0\end{aligned}$$

Sea $X_3 = 1$: luego,

$$\begin{aligned}X_2 &= -1 \\ X_1 &= 0\end{aligned}$$

Y la ecuación $-x_2 + x_3 = 0$ ó $x_2 - x_3 = 0$ para la líneas dadas, las ecuaciones pueden también ser derivadas intuitivamente simplemente examinando las coordenadas para observar un patrón.

Ejemplo 2: Dada las coordenadas homogéneas del punto de intersección de

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

Ya que las líneas no son paralelas en el sentido euclidiano, $x_3 \neq 0$. Sea $x_3 = 1$; entonces $x_1 + x_2 = 1$, $x_2 = -2$ y $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$. el punto de intercepción es $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)$.

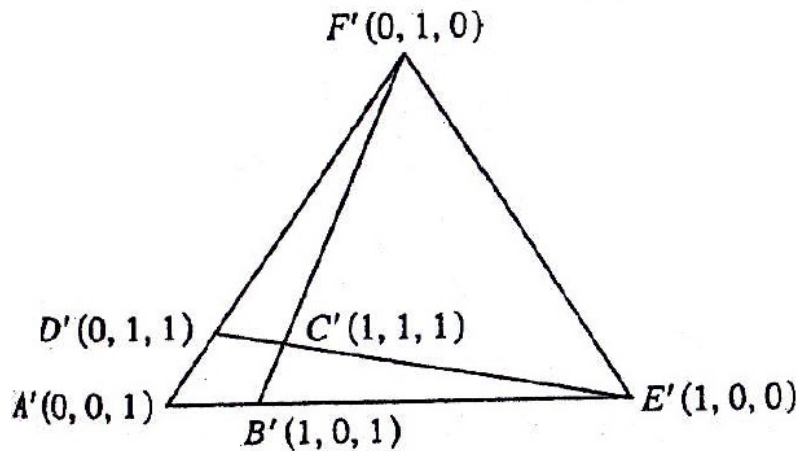


Figura 2.22

Debemos entender que el triángulo en la figura 2.22 no incluye el plano proyectivo completo solo la parte correspondiente al primer cuadrante. Los puntos $A'E'F'$ son vértices de los que es llamado el triángulo fundamental, mientras C' , con coordenadas $(1, 1, 1)$ es llamado el punto unidad.

El procedimiento por el cual las coordenadas son encontradas por puntos adicionales en el plano proyectivo es basado en el concepto de red armónica. Este proceso está ilustrado por la línea $x_2 = 0$ en la figura 2.23 . El punto $(2, 0, 1)$ es definido como el conjugado armónico de $(0, 0, 1)$ con respecto a $(1, 0, 1)$ y $(1, 0, 0)$.

El punto puede ser construido con una regla como se explicó en la sección 2.4. Las series de construcciones pueden ser realizadas al demostrar que $(3, 0, 1)$ es el conjugado armónico de $(1, 0, 1)$ con respecto a $(2, 0, 1)$ y $(1, 0, 0)$. También $(\frac{1}{2}, 0, 1)$ es el conjugado armónico de $(1, 0, 0)$ con respecto a $(0, 0, 1)$ y $(1, 0, 1)$. El procedimiento puede continuarse para puntos con coordenadas negativas. Por ejemplo $(-1, 0, 1)$ es la conjugada armónica de $(1, 0, 1)$ con respecto a $(0, 0, 1)$ y $(1, 0, 0)$. No todos los puntos estan sobre la línea, pero todos aquellos en la red armónica determinados por los tres puntos iniciales pueden ser construidos.

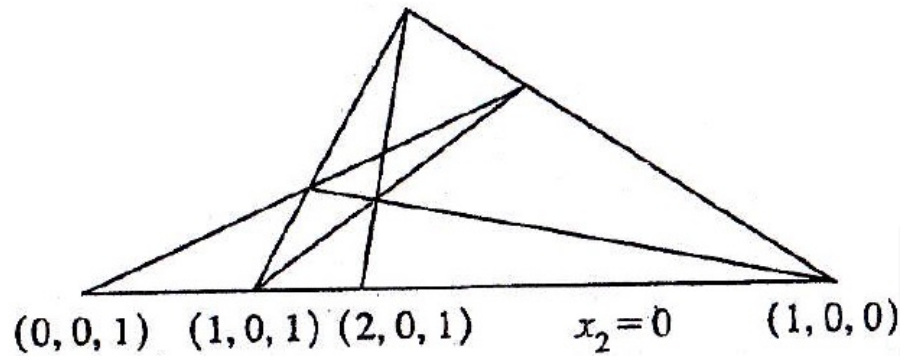


Figura 2.23

Los Planos de Desargues y Pappus, con una estructura algebraica basada en las coordenadas homogéneas para puntos, son importantes clases de planos, proyectivos. Por ejemplo la geometría de los cuatro puntos y la geometría finita de Desargues surgen de las figuras familiares ahora para el lector siguiendo el estudio de la geometría proyectiva en ese punto.

Las coordenadas homogéneas juegan un papel importante en gráficos por computadora, la cual da a la geometría proyectiva una nueva y mayor aplicación práctica. Recuerdese que los gráficos convencionales son usados en este capítulo por las matrices y que ellos pueden diferir de lo que usted ha estudiado en álgebra lineal. Sabemos que una traslación no puede ser representada como una matriz de 2×2 . Pero, con el uso de coordenadas homogéneas, pueden ser representadas como una matriz 3×3 . Por ejemplo una traslación de 2 unidades en dirección positiva para X y 3 unidades

en dirección positiva para Y puede ser representados por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ya que

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 & y+3 & 1 \end{pmatrix}$$

las matrices de 2×2 corresponden a una matriz de 3×3 con el mismo efecto para coordenadas homogéneas, con un 1 en la esquina inferior derecha.

Por ejemplo la transformación $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ representa un cambio en la dirección y está dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para coordenadas homogéneas.

2.6. Ecuaciones Para Transformaciones Proyectivas

En geometría proyectiva, las líneas rectas se transforman en líneas rectas, por lo que el conjunto de ecuaciones para las transformaciones proyectivas es un conjunto de tres ecuaciones lineales simultáneas relacionando las coordenadas homogéneas de

punto a las coordenadas homogéneas de su imagen.

Tres puntos $(x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2, y_3); (z_1, z_2, z_3)$ son colineales si y solo si existen tres números a, b, c , no todos cero, tal que $ax_i + by_i + cz_i = 0$. Esto significa que cualquier punto en una línea es una combinación lineal de otros dos puntos distintos en la línea. Por ejemplo, el punto $(8, 13, 23)$ está en la misma línea que los puntos $(1, 2, 4)$ y $(2, 3, 5)$, ya que

$$(2)(1) + (3)(2) + (-1)(8) = 0$$

$$(2)(2) + (3)(3) + (-1)(13) = 0$$

$$(2)(4) + (3)(5) + (-1)(23) = 0$$

En el ejemplo, $a = 2, b = 3, c = -1$.

Tres de los cuatro puntos básicos $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$ no son colineales. Estos cuatro puntos pueden ser transformados por una transformación proyectiva en cuatro puntos no colineales d, e, f y $(d + e + f)$ cuyas coordenadas son

$$(d_1, d_2, d_3)$$

$$(e_1, e_2, e_3)$$

$$(f_1, f_2, f_3)$$

y

$$(d_1 + e_1 + f_1, d_2 + e_2 + f_2, d_3 + e_3 + f_3)$$

Estas transformaciones se pueden lograr mediante la siguiente correspondencia

$$x'_1 = d_1x_1 + e_1x_2 + f_1x_3$$

$$x'_2 = d_2x_1 + e_2x_2 + f_2x_3$$

$$x'_3 = d_3x_1 + e_3x_2 + f_3x_3$$

Este conjunto de ecuaciones transforma cualquier otro punto (k, l, m) en un punto cuyas coordenadas están dadas por las ecuaciones

$$x'_1 = d_1k + e_1l + f_1m$$

$$x'_2 = d_2k + e_2l + f_2m$$

$$x'_3 = d_3k + e_3l + f_3m$$

Los nuevos puntos pueden ser indicados por $(dk + el + fm)$. Estos nos muestra que las coordenadas son referidas a los puntos d, e, f en lugar de los vértices originales del triángulo fundamental. Esto se hace más claro por el hecho de que (k, l, m) podría haber sido indicado por los coeficientes en la expresión

$$([k.1] + [l.1] + [m.1])$$

Las ecuaciones lineales dadas son las ecuaciones simultáneas buscadas para representar las transformaciones proyectivas. Ellas proporcionan una correspondencia uno a uno de los puntos en el plano proyectivo. Se preserva la colinialidad de los puntos

Teorema 2.6.1: Un conjunto de ecuaciones que representan una transformación proyectiva es de la forma:

$$\theta x'_1 = d_1x_1 + e_1x_2 + f_1x_3$$

$$\theta x'_2 = d_2x_1 + e_2x_2 + f_2x_3$$

$$\theta x'_3 = d_3x_1 + e_3x_2 + f_3x_3$$

El parámetro θ se utiliza debido a cualquier múltiplo de las coordenadas homogéneas resultaría otro nombre para el mismo punto. Se entiende que el determinante de los coeficientes no es cero.

La prueba de uno y la incorporación de dos teoremas adicionales ayudaran a establecer que el teorema 2.6.1 contemple una transformación proyectiva por que mantienen propiedades proyectivas invariantes.

Teorema 2.6.2: Una transformación en el plano es una transformación proyectiva si transforma una línea proyectivamente.

Desmostración: En la figura 2.24, sean m y m' las líneas dadas con la transformación proyectiva y l y l' cualquier otro par de líneas correspondientes. Si X y X' representan puntos correspondientes en l y l' , con A y B cualesquiera otros dos puntos distintos que no esten en las cuatro líneas. XAY se transforma en $X'BY'$, y puesto que Y e Y' son proyectivamente relacionadas, la siguiente cadena muestra la conexión de la proyectividad l y l' :

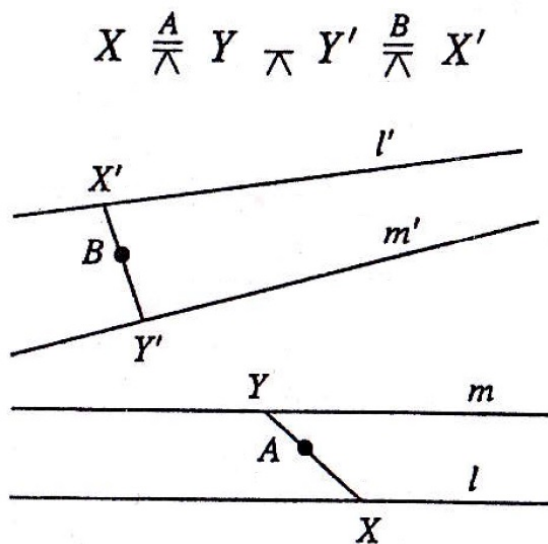


Figura 2.24

Las coordenadas homogéneas para tres puntos en una línea se pueden elegir de manera que sean (x_1, x_2) , (y_1, y_2) y $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. A continuación, se puede demostrar que el conjugado armónico del tercer punto con respecto a los dos primeros tiene las coordenadas $(x_1 - y_1, x_2 - y_2)$. Por ejemplo, el conjugado armónico de $(4, 3)$

con respecto a $(1,1)$ y $(3,2)$ es $(-2,-1)$.

La verdad de esta afirmación se puede explicar, usando la notación de la figura 2.25. Si $A = (x_1, x_2)$, $B = (y_1, y_2)$, $C = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, y $F = (z_1, z_2)$. Entonces $E = (z_1 + x_1, z_2 + x_2)$. H es la intersección de \overleftrightarrow{FC} y \overleftrightarrow{EB} , y tiene coordenadas $(x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2)$. G , en tanto \overleftrightarrow{AH} como \overleftrightarrow{FB} , tiene unas coordenadas $(z_1 + y_1, z_2 + y_2)$. Finalmente, D esta en \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{EG} . Sus coordenadas deben satisfacer la ecuación $x_i + ky_i = (x_i + z_i) + l(y_i + z_i)$ para los mismos valores de k y l . Pero i debe ser igual a un negativo para eliminar z_i , dicho recurso $x_i + ky_i = x_i - y_i$, y k equivale a un negativo. Por lo tanto, las coordenadas de D son $(x_1 - y_1, x_2 - y_2)$.

La generalización del concepto de conjunto armónico es una idea de la razón doble de cuatro puntos.

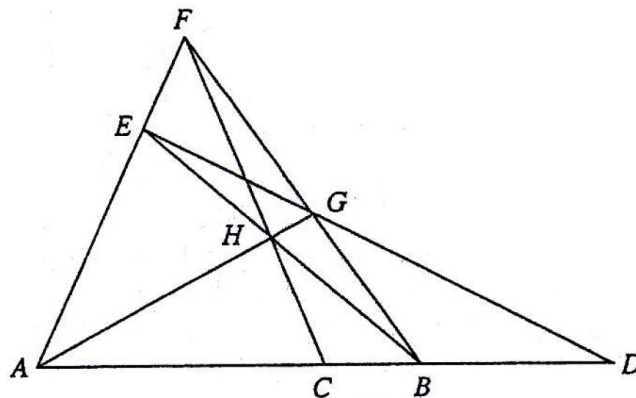


Figura 2.25

Definición 2.6.1: La razón doble r de cuatro puntos colineales es el número r donde las coordenadas de los cuatro puntos se escriben en la forma (x_1, x_2) , (y_1, y_2) , $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $(rx_1 + y_1, rx_2 + y_2)$.

Por ejemplo, la razón doble para $A(2, 3)$, $B(5, 6)$, $C(7, 9)$, $D(9, 12)$, por la definición es 2, ya que $9 = (2 \cdot 2) + 5$ y $12 = (2 \cdot 3) + 6$.

En lugar de utilizar la definición de proyectividad dada anteriormente, se puede calcular la razón doble como una razón de razones, si $H(AB, CD)$ es un conjunto armónico, como en la figura 2.26a, entonces $(AC/CD)/(AD, DB)$. Esta razón de razones es un caso específico de razón doble. Así en geometría euclidiana un conjunto armónico de puntos consiste de los puntos finales del segmento y dos puntos que dividen el segmento internamente y externamente en la misma razón.

En la figura 2.26b, los cuatro puntos no son puntos armónicos. En este caso, la razón doble denotada (AB, CD) , todavía se define como $(AC/CD)/(AD, DB)$, pero los valores es un número diferente de -1 . La notación de la razón doble muestra cómo se cambian los puntos. La razón doble puede tener cualquier número como su valor.



Figura 2.26

Ejemplo 3: Encontrar el valor numerico de (AC, BD) En la figura 2.27.

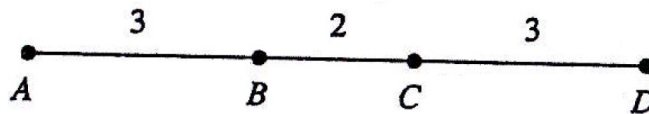


Figura 2.27

$$(AC, BD) = \frac{(AB/BD)}{(AD, DC)} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{8}{3}} = -\frac{9}{16}$$

Ejemplo 4: Use los puntos del ejemplo anterior y encuentre los valores numericos de (AB, CD)

$$(AC, BD) = \frac{(AB/BD)}{(AD, DC)} = \frac{25}{16}$$

La razón doble y los casos especiales de los conjuntos armónicos es el concepto asociado con cuatro puntos en una línea proyectiva. Si la razón doble (AB, CD) es negativa, los pares A, B Y C, D se dicen que son independiente entre sí, como en la figura 2.26a. Separación en geometría proyectiva es un término más general que toma lugar “en medio de” intuitivamente, si un par de puntos separa a otro, no se puede llegar de un punto del primer par al segundo punto de ese par por cualquier camino largo de la línea sin encontrarse con uno u otro de los puntos del segundo conjunto. El concepto “ en medio de “ ya no es adecuado ya que hay dos caminos de A a B a lo largo de la línea: por tanto, no significaría nada decir C esta entre A y B si está en el segmento que los une.

Teorema 2.6.3 : La razón doble de cuatro puntos es invariante bajo la proyección.

Demostración: Para demostrar esto, bajemos desde P la perpendicular que encuentra a r en H . Haciendo caso omiso de los signos, tenemos

$$(A, B; C, D) = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}} = \frac{\frac{\frac{1}{2}HP.AC}{\frac{1}{2}HP.BC}}{\frac{\frac{1}{2}HP.AD}{\frac{1}{2}HP.BD}} = \frac{\frac{area\Delta APC}{area\Delta BPC}}{\frac{area\Delta APD}{area\Delta BPD}} = \frac{\frac{\frac{1}{2}AP.CPsen\angle APC}{\frac{1}{2}BP.CPsen\angle BPC}}{\frac{\frac{1}{2}AP.DPsen\angle APD}{\frac{1}{2}BP.DPsen\angle BPD}} = \frac{\frac{sen\angle APC}{sen\angle BPC}}{\frac{sen\angle APD}{sen\angle BPD}}$$

lo que realmente hemos probado es

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \pm \frac{sen\angle APC}{sen\angle BPC} \frac{sen\angle BPD}{sen\angle APD} \quad (1)$$

Ahora bajamos desde P la perpendicular que encuentra la línea s en K y repitiendo el anterior argumento tenemos

$$(A', B'; C', D') = \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{B'D'}{A'D'} = \pm \frac{sen\angle APC}{sen\angle BPC} \frac{sen\angle BPD}{sen\angle APD} \quad (2)$$

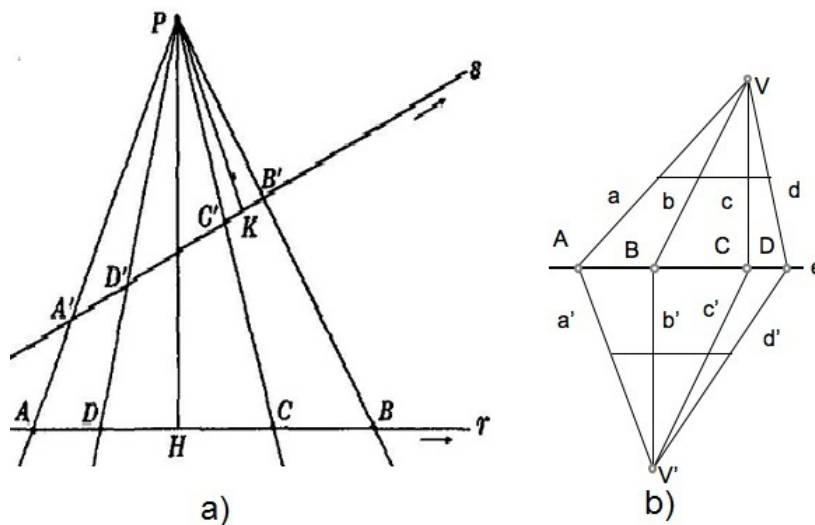


Figura 2.28

Para completar la prueba cuando los puntos están marcados como en la figura 2.28, es necesario mostrar que los símbolos de los miembros de la derecha de las dos ecuaciones anteriores (1) y (2) son iguales.

Fijamos una orientación con respecto a P de tal manera que el ángulo APC , generado al rotar la línea AP en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, alrededor de P , hasta que coincida con CP , es positivo. Entonces el ángulo APD es positivo mientras los ángulos BPC y BPD generados por la rotación de BP en sentido del movimiento de las agujas del reloj alrededor de P , son negativos. Como una consecuencia encontramos que $\frac{AC}{BC}$ y $\pm \frac{\text{sen} \angle APC}{\text{sen} \angle BPC}$, lo mismo que $\frac{BD}{AD}$ y $\frac{\text{sen} \angle BPD}{\text{sen} \angle APD}$, tienen el mismo. Además, esta igualdad de signos es independiente de la orientación sobre p y la orientación con respecto a P . Por esto, el signo es + en los dos miembros de la derecha de (1) y (2) y por tanto

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

como se queria demostrar •.

Teorema 2.6.4: Una transformación que preserva la razón doble de cuatro puntos alineados es una transformación proyectiva.

Demostración: Sean tres rectas l, l', l'' , necesitamos demostrar que l y l'' se relacionan proyectivamente, sean 4 puntos a, b, c, d en l , A, B, C, D en l' y a', b', c', d' en l'' figura 2.28b, por teorema anterior podemos formar la siguiente sucesion de perspectividade

$$a, b, c, d \bar{\bar{\wedge}} A, B, C, D \bar{\bar{\wedge}} a', b', c', d'$$

por lo que

$$a, b, c, d \bar{\wedge} a', b', c', d'$$

como se deseaba probar •.

El teorema 2.6.3 y el teorema 2.6.4 pueden ser utilizados por la línea $x_1 = 0$. El conjunto de ecuaciones simultaneas dado en el teorema 2.6.1 transforma un punto $(0, x_2, x_3)$ de $x_1 = 0$ en $(e_1x_2 + f_1x_3, f_2x_2 + f_2x_3, e_3x_2 + f_3x_3)$. Los cuatro puntos $(0, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, x_2, x_3)$ tienen una razón doble de x_2/x_3 , ya que

$$(0, x_2, x_3) = (0, \frac{x_2}{x_3}, 1)$$

Se puede verificar que los cuatro puntos se proyectan en puntos con la misma razón doble. Ya que los cuatro conjuntos de coordenadas elegidos pueden representar cualquiera de los cuatro puntos de la línea, la línea se transforma proyectivamente.

Ahora se ha establecido que cada transformación proyectiva en el plano proyectivo tiene ecuaciones de la forma

$$x'_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

$$x'_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$$

$$x'_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

Con la condición que el determinante de los coeficientes

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

No sean cero. Como una ecuación matricial, este conjunto de ecuaciones se puede interpretar como.

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Recordar que los casos especiales de esta matriz general se mostraron previamente.

Por ejemplo, cada matriz semejante es de la forma.

$$\begin{pmatrix} a_1 & \pm(-a_2) & 0 \\ a_2 & \pm(a_1) & 0 \\ a_3 & a_4 & 1 \end{pmatrix}$$

Con $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, y cada movimiento en un plano tiene la misma forma con $a_1^2 + a_2^2 = 1$.

La aplicación de la transformación de matrices con coordenadas homogéneas en tres dimensiones son importantes en gráficos por computadora, particularmente en ingeniería aplicada. Las matrices 4×4 pueden ser divididas en sus matrices que demuestran el efecto de diversos elementos.

Submatriz A 3×3 Escalamiento, cizallar, rotación, reflexión

Submatriz B 1×3 Traslado

Submatriz C 3×1 Dibujo en perspectiva

Submatriz D 1×1 Escala total

Se da primero el ejemplo que implica elementos en su matriz A .

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Local escala}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ cizalla}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Reflexión sobre plano } z = 0$$

La siguiente matriz muestra cómo se utiliza un valor a la submatriz D para la escala general

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ Escala total}$$

La siguiente ecuación muestra cómo se utiliza los elementos en la submatriz B para realizar una transformación en tres dimensiones:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobaremos que esta matriz de transformación transforma cualquier punto $(x, y, z, 1)$ en $(x + 2, y + 3, z + 4, 1)$.

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 & y + 3 & z + 4 & 1 \end{pmatrix}$$

El único concepto que no es ilustrado hasta ahora es el uso de elementos no nulos de una sub matriz C para dar un dibujo en perspectiva. Para tres dimensiones el dibujo de una caja, tal como se muestra en la figura 2.29a las líneas paralelas en el objeto original permanecen paralelas en el dibujo por otro lado, los dibujos en perspectiva en el arte y redacción, la líneas que son paralelas converge en el original en el dibujo en unos puntos denominados puntos de fuga. Y las líneas originalmente paralelas a un solo eje de coordenadas converge, el resultado de una perspectiva de un punto. Si las líneas originalmente paralelas a uno de los dos ejes de coordenadas convergen, el resultado es una perspectiva de dos puntos, y si las líneas originalmente paralelas a los ejes coordenadas convergen, el resultado es una perspectiva de tres puntos, ejemplo de estos tres tipos de dibujo se muestra en la figura 2.29b-d

Las matrices de transformación para transformar una caja en una figura con pares de bordes reunidos en uno o más puntos de fuga tiene uno o más elementos distintos

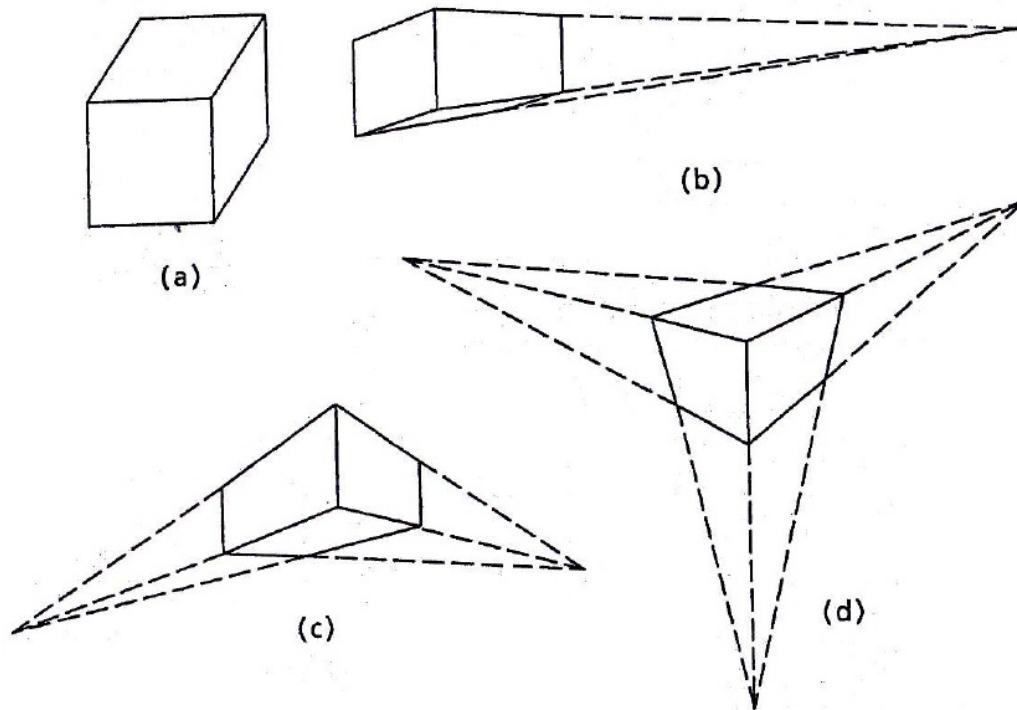


Figura 2.29

de cero en la submatriz C , por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hace que las líneas paralelas al eje Z se reúnan en el punto $(0, 0, \frac{1}{3}, 1)$. Ejemplos de matrices para las perspectivas de dos y de tres puntos son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un ejemplo práctico adicional de matrices en tres dimensiones en geometría proyectiva son las proyecciones axonométricas utilizados en ingeniería. Axonometrías se utilizan para producir varios objetos de dos dimensiones. Debido a que causan un cambio de dimensión, axonometrías técnicamente son asignaciones en lugar de transformaciones, y el determinante de la matriz es cero, por lo que no hay inversa.

la matriz para una proyección axonométrica se puede considerar el producto de otras dos matrices. La primera es un transformación usada para girar o traducir, y la segunda es una proyección de la figura completa en un plano particular, llamado plano de visión. Dos ejemplos son los siguientes

Ejemplo 6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz resulta en una proyección sobre el plano $z = 2$ que pueden verificar que ningún punto se transforma en $(x, y, 2, 1)$, y por lo tanto, todos los puntos de imagen están en el plano $z = 2$. También se debe comprobar que el determinante de la matriz es cero.

Ejemplo 7:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz resulta en una rotación de 90 grados alrededor del eje x , entonces una proyección sobre el plano $z = 0$.

2.7. Projectividades Especiales

En esta sección consideramos algunos casos especiales de proyectividades en una y dos dimensiones.

Una proyectividad unidimensional de puntos de una línea cambia el nombre de los puntos en la misma línea.

Definición 2.7.1: Una proyectividad unidimensional es llamada elíptica, parabólica o hiperbólica si el número de puntos invariantes es cero, uno, o, dos, respectivamente. Si hay tres puntos invariantes, la Proyectividad es la transformación de identidad.

El teorema fundamental de la geometría proyectiva se puede utilizar para mostrar que:

- 1 Una proyectividad hiperbólica se determina únicamente cuando se dan dos puntos invariantes y otra serie de puntos correspondientes.
- 2 Una Proyectividad parabólica se determina únicamente cuando se dan su punto invariante y otros dos conjuntos de puntos correspondientes.

Esta segunda afirmación se comprenderá mejor al probar el siguiente teorema.

Teorema 2.7.1: Una proyectividad parabólica está únicamente determinada cuando se dan sus puntos invariantes y otro conjunto de puntos correspondientes.

Desmostración: En la figura 2.30, vamos a dar una proyectividad parabólica, con el punto A invariante y cualquier otro par de puntos correspondiente B y B' . Un punto arbitrario S puede ser elegido de modo que $ABB' \stackrel{S}{\wedge} ACC'$, donde A, C, C' están en una línea l a través de A no conteniendo S . Sea A el segundo centro de perspectiva S' puede ser elegido de modo que el $ACC' \stackrel{S'}{\wedge} A'B'C''$. La imagen de cualquier otro punto D en \overleftrightarrow{AB} se puede encontrar mediante el uso de las dos

perspectividades establecidas. De lo que se ha dicho hasta ahora, no se ha demostrado que la proyectividad parabólica se estableció en efecto, en lugar de hiperbólica. Es decir, para un cierto punto D en la línea AB , los dos perspectivas podrían resultar en D como la imagen, dando un segundo punto invariante. Para que esto suceda, D, S y S' deben estar alineados, una situación que puede evitarse con sólo insertar la restricción de que S y S' se encuentran en la misma línea que pasa por A . •

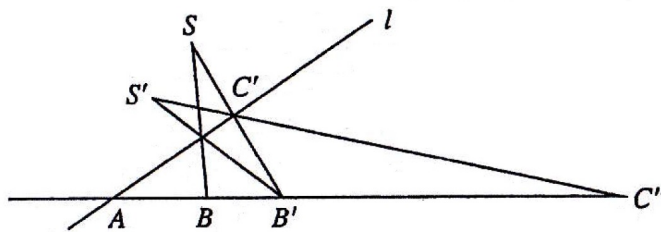


Figura 2.30

Algunas proyectividades especiales son periódicas en el sentido de que resultará en la transformación identidad después de un número finito de aplicaciones repetidas.

Definición 2.7.2: Una proyectividad de período n es la que debe repetirse n veces antes de que los primeros resultados en la transformación de la identidad.

Definición 2.7.3: Una involución es una proyectividad de período dos.

Se puede ver intuitivamente que la involución unidimensional simplemente intercambia pares de puntos. El siguiente teorema establece una condición mínima para que una proyectividad sea una involución.

Teorema 2.7.2: Una Proyectividad unidimensional que intercambia un par de puntos distintos es una involución.

Desmostración: En la figura 2.31, sean ABX cualesquiera tres puntos colineales distintos dados, con $A'B'Y$ sus imágenes en una proyectividad que intercambia A y B . Estos seis puntos determinan una proyectividad única que puede ser representado por estas perspectividades:

$$ABXY \stackrel{F}{\bar{\wedge}} EDXG \stackrel{A}{\bar{\wedge}} FCYG \stackrel{D}{\bar{\wedge}} BAYX$$

, así $ABXY \bar{\wedge} BAYX$. esta proyectividad intercambia todos los pares arbitrarios de puntos XY y es una involución. •

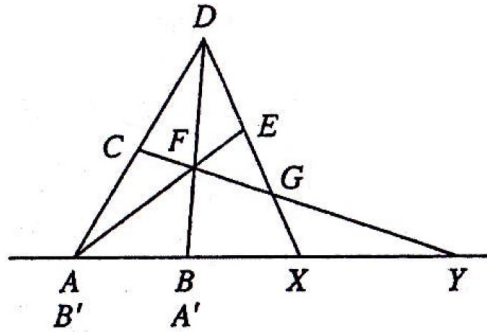


Figura 2.31

Se han mencionado algunas transformaciones unidimensionales especiales y transformaciones unidimensionales todavía están involucrados en la discusión de la geometría proyectiva del plano. Una proyectividad bidimensional transforma cada conjunto de proyectividades unidimensionales. Es decir, una transformación proyectiva de dos dimensiones puede implicar cada punto del plano, pero cada línea en el plano se transforma en otra línea, de modo que una proyectividad se establece por los puntos en las dos líneas.

Teorema 2.7.3: Una transformación proyectiva de dos dimensiones que deja a las cuatro líneas invariantes de un cuadrilátero completo es la transformación identidad.

Como se ilustra en la figura 2.32 para el cuadrilátero a, b, c, d , los seis vértices se encuentran tres en cada línea, y estos vértices son puntos invariantes. Hay una proyectividad entre dos lados correspondientes, y cada punto en estos lados debe ser invariante ya que tres pares lo son. Cualquier otra línea en el plano cumple con los lados de este cuadrilátero en puntos invariantes, por lo que hay tres puntos invariantes, y cada punto en que debe ser invariante, por lo que la transformación es la identidad.

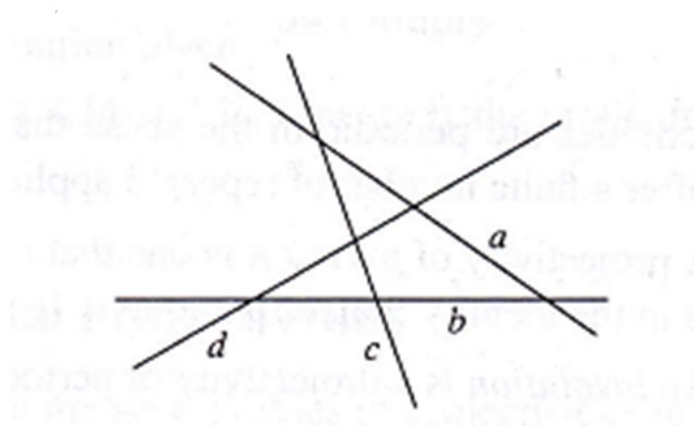


Figura 2.32

Muchos tipos especiales de proyectividades bidimensionales incluyen una relación de dos triángulos dados en perspectiva, llamada perspectiva de colineación. Es decir, los dos triángulos son imágenes bajo una proyectividad y son también la perspectiva. El punto y la línea de perspectiva son el centro y el eje de la transformación. El caso especial para el que el centro se encuentra en el eje se denomina euforía, mientras que todas las otras transformaciones de este tipo son homologías. Un caso

especial es una homología en la que el conjugado armónico del centro con respecto a los pares de puntos correspondientes es el eje. Esta transformación se denomina una homología armónica y es ilustrada por el ejemplo de la figura 2.33. Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son perspectiva desde el punto S y la línea l . Además, el conjugado armónico de S con respecto a los pares de vértices correspondientes está en la línea l . Por ejemplo, S es el conjugado armónico de S' con respecto a A y A' .

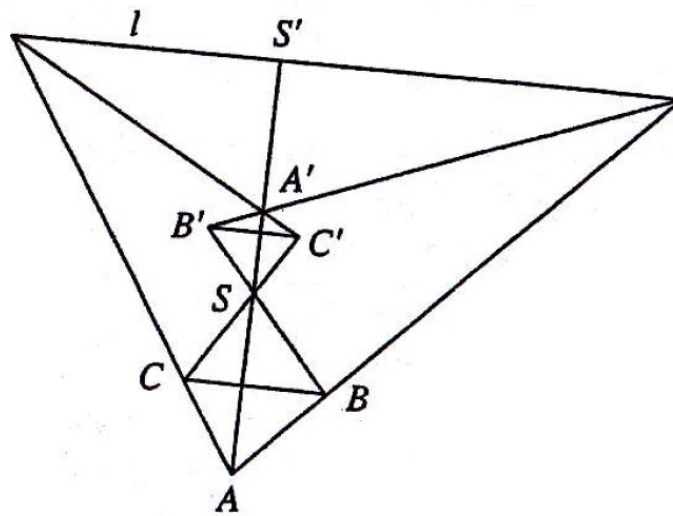


Figura 2.33

Si se les da el eje central, los pares de puntos correspondientes en una homología armónica se pueden determinar, ya que son conjugados armónicos con respecto al centro y un punto colineal en el eje. Este tipo de transformación es del período dos, ya que al repetir el resultado se obtendrá la identidad. De hecho, se puede establecer que cada transformación bidimensional de período dos es una homología armónica.

Capítulo 3

Construcción de Cónicas

3.1. Cónicas

Las diferentes cónicas de la Geometría Euclidea pueden ser descritas todas como secciones de conos de dos capas. Como se ilustra en la figura 3.1. Desde un punto de vista diferente, la figura 3.1 muestra que un círculo puede ser proyectada en una elipse (figura 3.1a), una parábola (figura 3.1b), o una hipérbola (figura 3.1c) pero también un punto, una recta, y un par de rectas que se cortan. Estas últimas secciones cónicas se llaman, en general, degeneradas; ya que las cónicas no degeneradas son aquellas equivalentes a la circunferencia bajo transformaciones proyectivas (e incluso perspectivas).

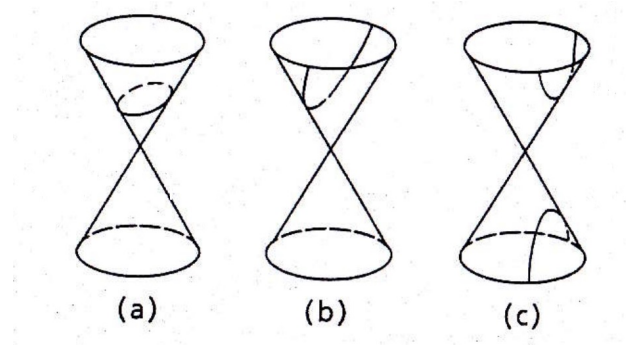


Figura 3.1

Podríamos estar pensando que la geometría proyectiva de las cónicas es bastante complicada. Al contrario, si olvidamos las diferencias entre circunferencias, elipses, hipérbolas, y parábolas, somos capaces de concentrarnos en sus propiedades comunes y tener un conocimiento más profundo de ellos. La propiedad de ser una cónica es invariante bajo el grupo de transformaciones proyectivas, pero la propiedad de ser una elipse, una parábola, o una hipérbola no lo es. Como consecuencia de la equivalencia proyectiva de las cónicas, cualquier resultado de naturaleza proyectiva que podamos demostrar para la circunferencia, valdrá también para todas las cónicas.

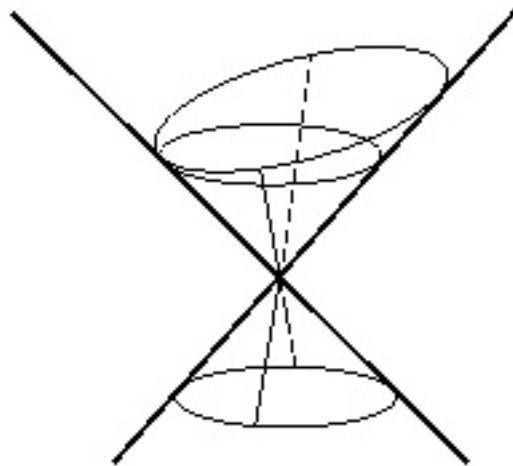


Figura 3.2: Todas las cónicas no degeneradas son proyectivamente equivalentes.

Las primeras definiciones escritas aquí son acreditadas a Jacob Steiner, un matemático Suizo que escribió (en 1832) sobre división armónica y secciones cónicas en geometría proyectiva; las definiciones son usadas ya que enfatizan claramente la relación entre cónicas y proyectividades ya estudiadas. La distinción que no es tan familiar entre la hipérbola (figura 3.3c), la parábola (figura 3.3b) y la elipse (figura 3.3a) depende de que la recta en el infinito sea una secante, una tangente o no corte a la curva.

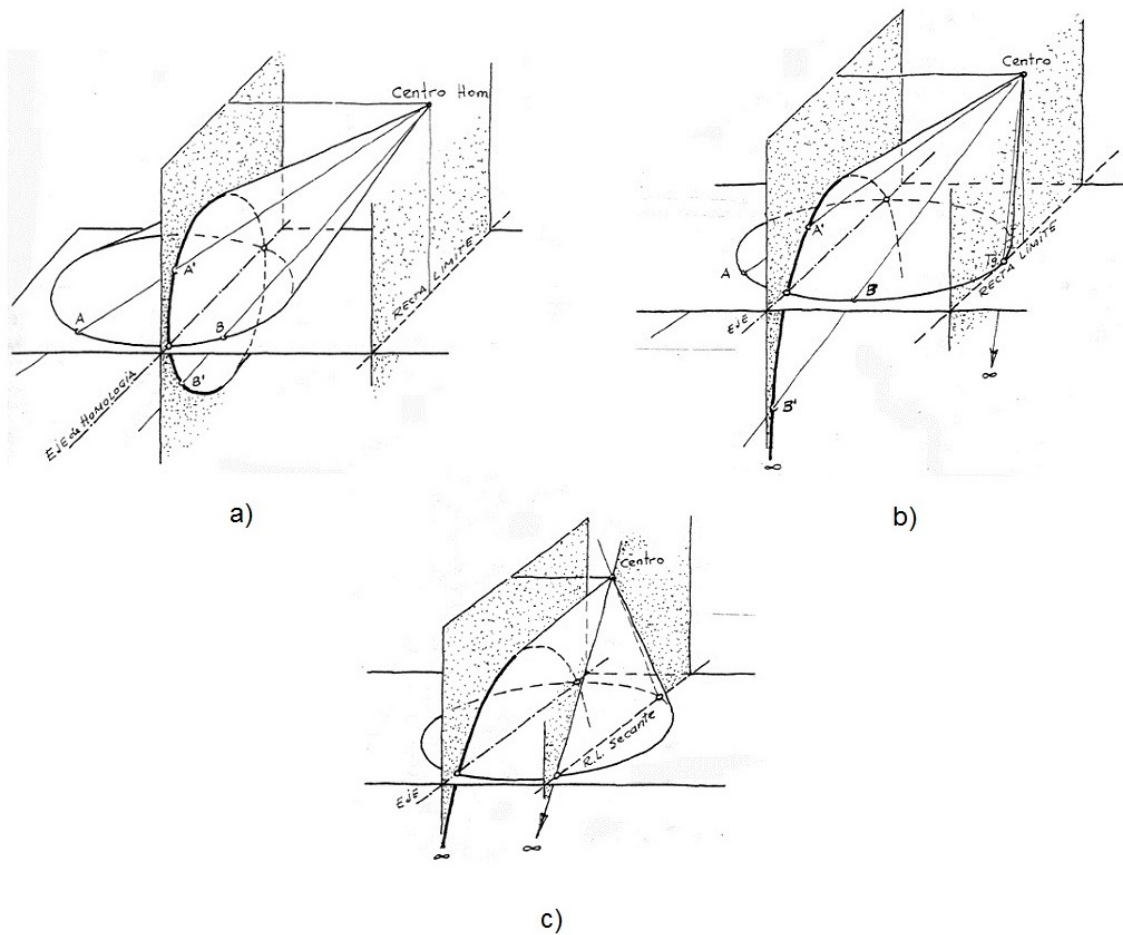


Figura 3.3

En las definiciones, de haces de líneas que son conjuntos de líneas concurrentes, y haces de puntos que son conjuntos de puntos colineales.

Definición 3.1.1: Un punto cónico es el conjunto de puntos que son intersecciones de líneas correspondientes en dos haces de líneas proyectivamente relacionados en el mismo plano.

Definición 3.1.2: Una línea cónica es el conjunto de las líneas que unen los puntos correspondientes en dos haces de puntos proyectivamente relacionados en el mismo plano.

Sera bueno reflexionar sobre estas notables definiciones. Observese que en varias figuras anteriores en este trabajo se han incluido puntos en una cónica, aunque el texto no ha llamado la atención sobre el hecho.

La figura 3.4a y b muestran un punto cónico y una línea cónica, con las conexiones entre ellos y las proyectividades que determinan. En la figura 3.4a A y B son los centros de los dos haces relacionados proyectivamente, C, D, E, F puntos de intersección de las líneas correspondientes de modo que la proyectividad es indicada por:

$$(\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{AE}, \overleftrightarrow{AF} - \underset{\wedge}{-} \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{BE}, \overleftrightarrow{BF}, -)$$

En la figura 3.4b, a y b son líneas con dos rangos de puntos proyectivamente re-

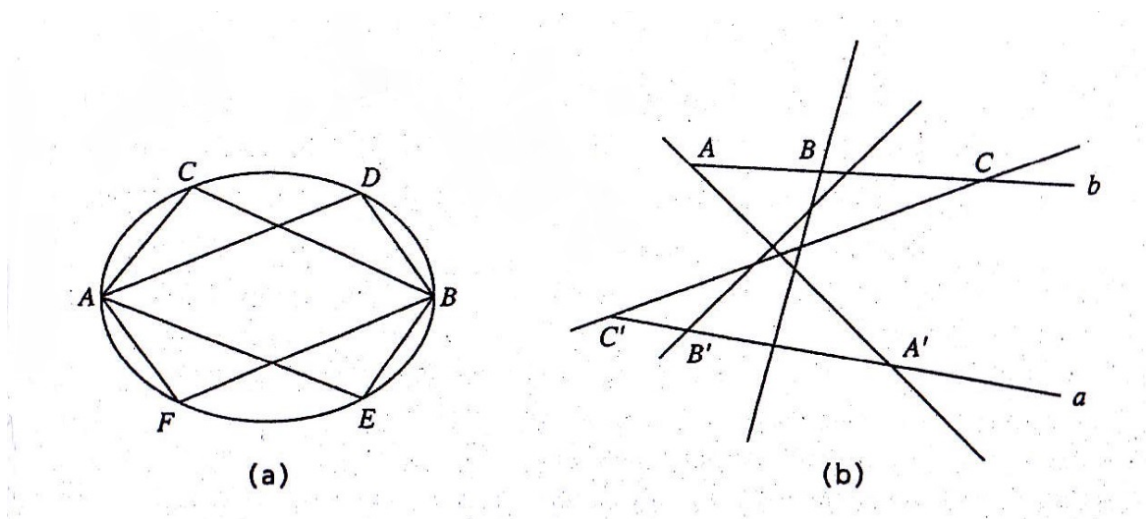


Figura 3.4

lacionados $A, A'; B, B'; C, C'$ son pares de puntos correspondientes de modo que la proyectividad es indicada por: $(A, B, C - \underset{\wedge}{-} A', B', C' -)$

Dos teoremas establecidos y probados para los puntos de cónicas indican propiedades adicionales:

Teorema 3.1.1: Los centros de los haces de líneas, del punto cónico de la definición de proyectividad son también puntos de la cónica.

Demostración: En la figura 3.5, si A y B son los centros dados. Si \overleftrightarrow{AB} es considerada como una de las líneas en el has con centro A , entonces su correspondiente línea m es una de las líneas del has con centro B . Las dos líneas se cruzan o intersectan en B , un punto en la cónica. Del mismo modo, A está en \overleftrightarrow{AB} , considerada como una línea a través de B , y en su correspondiente línea l a través de A . •

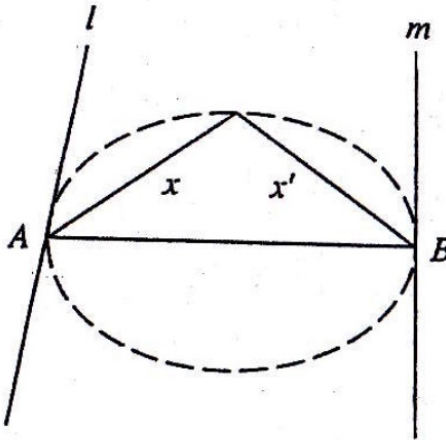


Figura 3.5

Definición 3.1.3: Una tangente a un punto cónico es una línea en el plano de la cónica que tiene exactamente un punto en común con la cónica.

Teorema 3.1.2: las líneas correspondientes a la línea común de los dos haces de líneas de la determinación de un punto cónico son las tangentes en los centros de los dos haces de líneas.

Demostración: En la figura 3.5, cada línea x atravéz de A tiene dos puntos en común con la cónica, A y la intersección de x y su línea correspondiente. Pero por el teorema 3.1.1, cuando x' es \overleftrightarrow{AB} considerado como una línea a través de B , entonces x y x' se cortan en A , así x debe ser la tangente l . •

Un segundo enfoque para definir cónicas en geometría proyectiva requiere la introducción de nuevos conceptos. Hasta este punto, las proyectividades se han definido de tal manera que se emparejan puntos con puntos y líneas con líneas. Una colineación puede ser definida como una transformación de punto a punto o línea a línea que conserva incidencia.

Definición 3.1.4: Una colineación proyectiva es una colineación que transforma todo has o rango proyectivamente.

Es posible generalizar la definición para incluir la correspondencia entre los puntos y líneas. El tipo original de proyectividad es una colineación, y el tipo más reciente introducido ahora es una correlación. El conjunto de ecuaciones que representan una correlación tendría la misma forma que para la colineación. En una correlación, un elemento y su dual se corresponden. Por lo tanto, la imagen de un cuadrángulo completo es un cuadrilátero completo.

Definición 3.1.5: La correlación proyectiva de particular interés aquí es una correlación de periodo dos, la cual es llamada Polaridad.

Definición 3.1.5.1: Un punto cónico es el conjunto de puntos auto-correspondientes en una polaridad hiperbólica.

Algunas Propiedades del punto cónico

1. Se puede utilizar cualquier punto del punto cónico como centros de haces pro-

yectivos que lo generan.

2. Un punto cónico queda determinado de manera única por cinco cualesquiera de sus puntos.
3. Tres pares distintos de un punto cónico nunca son colineales.
4. Cinco puntos distintos, tres de los cuales no son colineales, determinan una sola cónica puntual.
5. Sobre todo punto de una cónica puntual hay una y solo una tangente a la cónica puntual.

Desmostración 1. Sean $ABCEF$ los puntos de un punto cónico, si tomamos dos puntos distintos cualesquiera y los hacemos nuestros centros, sean tres líneas de cada centro e intersectamos en tres de los puntos cualesquiera que no sean los haces ahora por el teorema fundamental esta proyectividad es única. Por lo tanto cualquiera puede ser centros de haces de línea en el punto cónico.

2. Por teorema fundamental toda proyectividad es única si conocemos tres puntos y sus imágenes ahora pero necesitamos los haces de línea que los generan y por teorema 3.1 pertenecen a la cónica por lo tanto necesitamos cinco puntos en total.

3. La prueba será por contradicción. Si tres puntos son colineales entonces los tres puntos pueden pertenecer a una línea X por propiedad uno cualquier punto B de esta línea se puede tomar como uno de los centros por definición sea H otro centro cualquiera distinto de B de la definición de punto cónico sabemos que son las intersecciones de las líneas de dos centros de dos haces de línea pero por definición de una perspectividad de dos haces de línea sabemos que son uno a uno por lo que llegamos a una contradicción por lo que tres puntos no son colineales.

Algunas Propiedades de la línea cónica:

1. Cinco líneas distintas, tres de las cuales no son concurrentes, determinan una línea cónica única.
2. Sobre toda línea de una línea cónica hay uno y solo un punto de contacto con línea cónica.

Este tema concluye con dos importantes teoremas, duales el uno del otro, que le dan una propiedad adicional a cualquier cónica.

Definición 3.1.6: Un hexágono simple es un conjunto de seis puntos en un plano, hay tres alineados, y las líneas que los unen están en un orden determinado.

Para un hexágono con vértices consecutivos A, B, C, D, E, F , lados opuestos son \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{DE} , \overleftrightarrow{BC} y \overleftrightarrow{EF} , \overleftrightarrow{CD} y \overleftrightarrow{AF} . Esta definición permite hexágonos en el que los lados opuestos se cruzan (intersectan) dentro de la cónica.

Teorema 3.1.3: “El Teorema De Pascal” Si un hexágono simple se inscribe en un punto cónico, las intersecciones de los tres pares de lados opuestos son colineales.

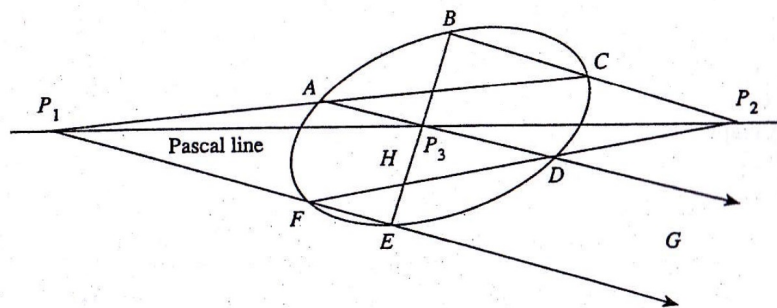


Figura 3.6

Demostración: Si $ACBEFD$ en la figura 3.6 representa cualquier hexagono simple inscrito. Los pares de lados opuestos son \overleftrightarrow{AC} y \overleftrightarrow{EF} , \overleftrightarrow{CB} y \overleftrightarrow{FD} , \overleftrightarrow{BE} y \overleftrightarrow{DA} . Los puntos de intersección son P_1, P_2, P_3 . Se requiere mostrar que estos tres puntos son colineales. El método para demostrar que estos tres puntos son colineales es mostrar que dos de estos puntos corresponden a una perspectiva y el tercero es el centro de esta.

Dos puntos A y B pueden ser escogidos como centros de haces de líneas en una proyectividad determinando la cónica. También hay una proyectividad establecida en \overleftrightarrow{EF} y \overleftrightarrow{FD} teniendo en cuenta los puntos de intersección de estas dos líneas y los pares de líneas correspondientes en la anterior proyectividad. Esto significa que si \overleftrightarrow{AD} y \overleftrightarrow{EF} se encontraran o cruzarían en G , \overleftrightarrow{BE} y \overleftrightarrow{FD} se cruzarían en H , Entonces $P_1EFG \underset{\wedge}{-} P_2HFD$. Estos dos conjuntos de puntos tienen su elemento en común auto correspondiente F , y que están relacionados por una perspectiva. El centro de esta perspectiva es P_3 , lo que implica que P_1 y P_2 están en una línea a través de P_3 , como se deseaba demostrar. •

Los seis vertices de un hexágono simple determinan 60 diferentes hexágonos, encontrados mediante la conexión de los puntos en diferentes órdenes. Cada uno de estos hexágonos a su vez tiene una diferente línea de pascal. Las 60 líneas de Pascal asociados con los seis puntos dados sobre una cónica son conocidas como Hexágono Místico de Pascal.

El teorema de Pascal fue probado por Blaise Pascal (1623 – 1662), pero su dual no se demostró hasta mucho más tarde, por C.J. Brianchon (1785 – 1864), después del desarrollo del concepto de dualidad.

Teorema 3.1.4: “El Teorema de Brianchon’s” Si las seis líneas de un hexágono simples son líneas de una línea cónica, entonces las tres líneas que unen pares de vértices opuestos del hexágono son concurrentes.

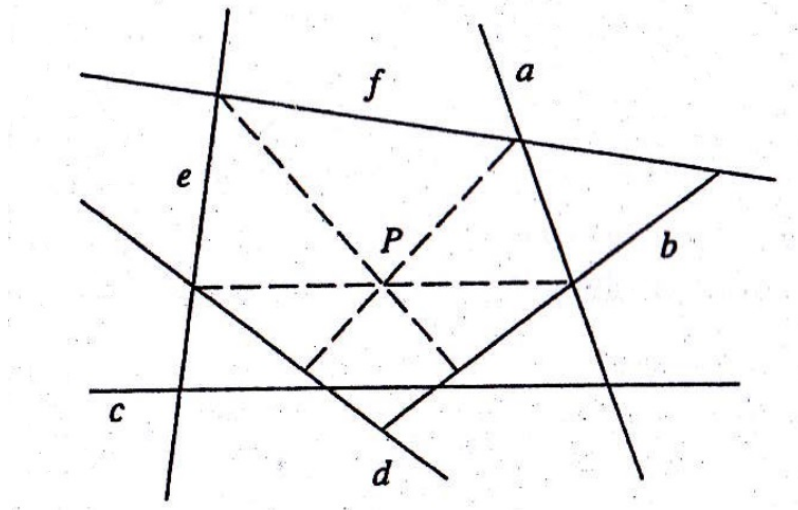


Figura 3.7

Si las seis líneas consecutivas son a, b, c, d, e, f , entonces los vértices opuestos son puntos de intersección de a, b y d, e ; b, c y e, f ; c, d y f, a . La figura 3.7 ilustra el teorema. El punto de concurrencia P es llamado un punto Brianchon.

3.2. Construcción de cónicas

Ya que las cónicas se han definido en términos de proyectividades, cualquier número de puntos o líneas en una cónica se puede construir usando sólo una regla, si se da información suficiente para determinar una proyectividad. Este procedimiento se analizará a través de ejemplos.

Ejemplo 1: Dado cinco puntos en un punto cónico, construir los otros puntos.

Solución: Sean A, B, C, D, E en la figura 3.8 se ilustran los cinco puntos dados. Elegimos dos de estos, A y D , como centros de los haces de líneas para un proyecti-

vidad. Los pares de líneas correspondientes se encuentran en B, C, E . Las líneas en el centro A del haz b, c, e, \dots , y líneas en el haz con el centro D son b', c', e', \dots en la figura 3.8.

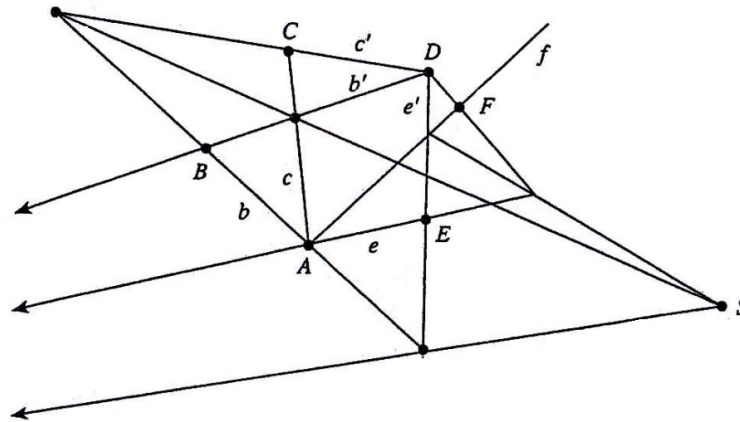


Figura 3.8

Las líneas que unen las intersecciones de la unión de cruces determinan S , el centro de homología.

Sea f otra línea a través de A . Ya que f' y ef' deben reunirse en S , f' puede ser construido. La intersección de f y f' es el punto F , que es uno de los puntos requeridos.

La figura 3.9 muestra los puntos de una parábola y una hipérbola como intersecciones de correspondientes líneas de proyectividades de dos puntos en la cónica.

Ejemplo 2: Dado cuatro puntos sobre una cónica y la tangente en uno de ellos, construir otro punto del punto cónico.

Solución: Si los puntos A, B, C, D y una línea tangente a se dan como en la figura 3.10, la proyectividad puede ser determinada por los tres pares de líneas que se muestran en la figura 3.10a. La unión de cruces $a'b$ y $b'a$ (véase la figura 3.10b),

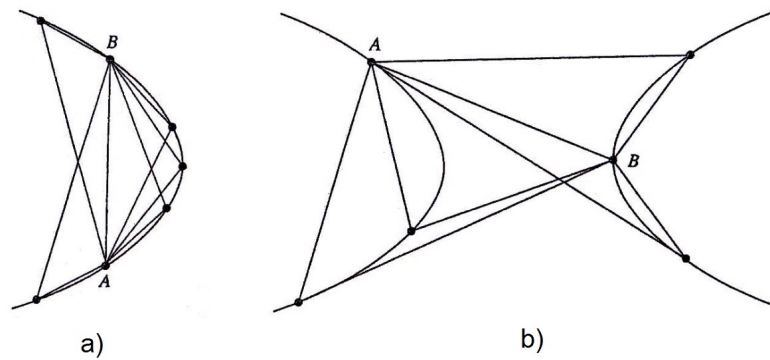


Figura 3.9

ambos se encuentran en a , por lo que el centro de proyectividad está en la tangente. Un segundo par de unión de cruces bc' y cb' determinara la línea e . El centro de proyectividad es el punto de intersección de a y e .

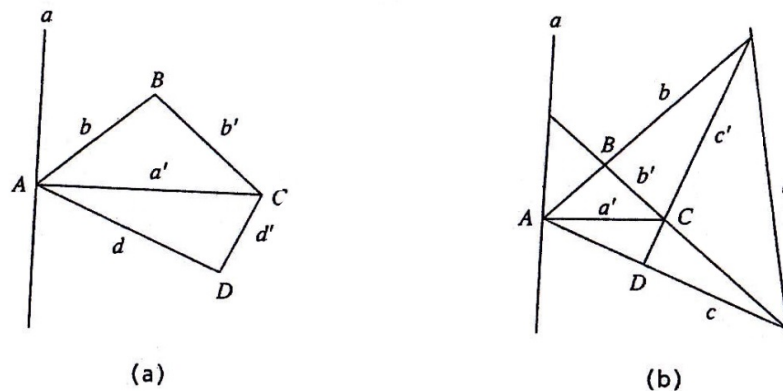


Figura 3.10

Ejemplo 3: Dado un triángulo ABC y un punto X sobre la recta BC ,

- (a) Inscribir una parábola en los lados del triángulo de manera que X sea el punto de tangencia con la recta BC .
- (b) Demostrar que si Y, Z son los puntos de tangencia con los lados CA, AB y X', Y', Z' son los simétricos de X, Y, Z respecto de los puntos medios

de BC, CA, AB entonces las rectas AX', BY', CZ' son paralelas al eje de la parábola.

- (c) Las rectas isogonales de AX', BY', CZ' , es decir las rectas simétricas de estas rectas respecto de las bisectrices interiores AI, BI y CI , son concurrentes en el foco de la parábola.

Antes de retomar el ejemplo 3 necesitaremos realizar 5 construcciones.

El siguiente teorema es el recíproco del teorema de pascal

Definición 3.2.1: Si los vértices de un hexágono son tales que los puntos de intersección de los lados opuestos están alineados, entonces los vértices están sobre una misma cónica.

Este teorema recíproco resuelve un problema de construcción muy útil: La construcción de una cónica conociendo cinco puntos. Es por ello que la mayoría de los programas informáticos de geometría dinámica incluyen esta herramienta de construcción, y solo esa, ya que los restantes problemas de construcción de cónicas se pueden reducir a éste.

Construcción 1: Dados cinco puntos A, B, C, D, E , hallar un sexto punto F que este en la misma cónica que los cinco primeros.

Solución: Hagamos $U = AB \cap DE$ y tomemos un punto arbitrario V sobre BC . A continuación hagamos $W = UV \cap CD$ y $F = AW \cap EV$. Tenemos que $U = AB \cap DE$, $V = BC \cap EF$ y $W = CD \cap FA$ están alineados, y aplicando el teorema recíproco del teorema de Pascal, los puntos A, B, C, D, E, F están sobre una

misma cónica.

Haciendo coincidir dos lados consecutivos AT y TB del hexágono $ATBCDE$ en uno solo y sustituyendo el vértice desaparecido T por el punto de contacto, obtenemos que

En todo pentágono circunscrito a una cónica, la recta que une un vértice con el punto de contacto del lado opuesto, y las diagonales que unen los otros vértices no consecutivos, son tres rectas que concurren en un mismo punto.

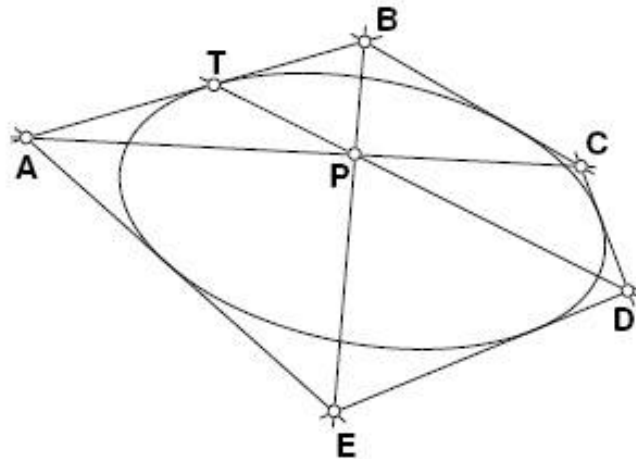


Figura 3.11: Teorema de Brianchon aplicado al pentágono.

La Figura 3.11 es útil a la hora de construir, por ejemplo, con un programa de geometría dinámica, una cónica que sea tangente a cinco rectas, ya que permite hallar los puntos de contacto.

Construcción 2: Dado un pentágono, hallar los puntos de contacto de sus lados con la cónica tangente a ellos.

Solución: Dado el pentágono $ABCDE$, para hallar el punto de tangencia T sobre

la recta AB , basta hallar el punto de Brianchon $P = AC \cap BE$ y luego $T = DP \cap AB$.

Siguiendo el mismo proceso, podemos considerar un hexágono $ATBSCD$ circunscrito a una cónica en el que los lados AT y TB se han hecho coincidir, convirtiéndose T en el punto de tangencia, y lo mismo les ha ocurrido a los lados BS y SC (Figura 3.12). En este caso tenemos:

En todo cuadrilátero circunscrito a una cónica, si se toman los puntos de contacto de dos lados que se cortan en un vértice, la recta de unión de este con su opuesto y las de unión de los puntos de contacto con los otros dos vértices son tres rectas que concurren en un mismo punto.

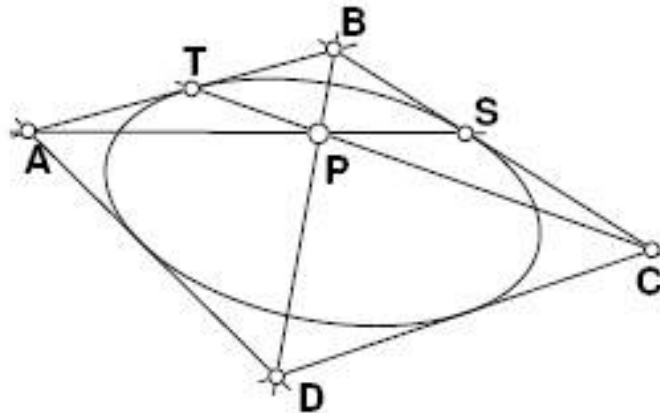


Figura 3.12: cuadrilátero (I).

De la misma forma, si en el hexágono circunscrito a una cónica $ATBCUD$ hacemos coincidir AT y TB , y CU y UD , y T y U se convierten en puntos de tangencia (Figura 3.13), tenemos en todo cuadrilátero circunscrito a una cónica, las dos dia-

gonales y las rectas que unen los puntos de contacto de lados opuestos son cuatro rectas que concurren en un punto.

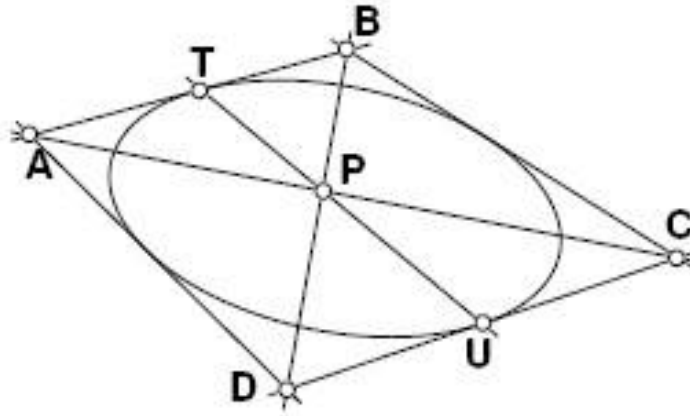


Figura 3.13: cuadrilátero (II).

Las Figura 3.12 y la Figura 3.13 también conducen a construcciones sencillas, en este caso de los puntos de tangencia de un cuadrilátero con una cónica tangente a sus lados, cuando conocemos uno de esos puntos de tangencia.

Construcción 3: Construir todos los puntos de tangencia de una cónica con un cuadrilátero, dados los cuatro lados y un punto sobre uno de ellos.

Solución: Dado el cuadrilátero $ABCD$ y conocido el punto de tangencia T sobre el lado AB , para hallar el punto de tangencia S sobre el lado contiguo BC , hallamos el punto de Brianchon $P = BD \cap CT$ y a continuación hallamos $S = AP \cap BC$ (Figura 3.12). Para hallar el punto de tangencia U sobre el lado CD opuesto, hallamos la intersección de las diagonales $P = AC \cap BD$ y luego Hallamos $U = TP \cap CD$ (Figura 3.13).

Construcción 4: Dados un triángulo ABC , un punto X sobre BC y una recta que corta a AB y AC en los puntos M y N , trazar la cónica que es tangente a los lados del triángulo y a la recta MN , siendo X el punto de tangencia con BC .

Solución: Trazar la cónica significa para nosotros obtener cinco puntos de la misma, ya que con ellos, bien de forma manual con el teorema de Pascal, o bien usando un programa de geometría dinámica, podremos hallar tantos como queramos.

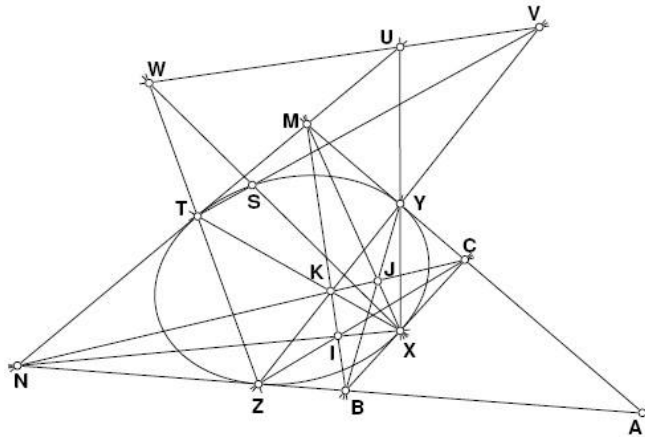


Figura 3.14: Cónica con cuatro tangentes y un punto sobre una de ellas.

Usando la Construcción 3, trazamos las diagonales BM y CN del cuadrilátero $BCMN$ figura 3.14, que se cortan en K . La intersección $T = XK \cap MN$ nos da el punto de tangencia sobre la recta MN . Asimismo hallamos el punto de intersección $I = BM \cap XN$ y el punto de tangencia sobre la recta AB estará en el punto $Z = CI \cap AB$. De la misma forma hallamos $J = CN \cap XM$ e $Y = BJ \cap AC$, el punto de tangencia con AC .

En este momento tenemos cuatro puntos X, Y, Z, T sobre la cónica que queremos construir. Para construir un quinto punto usamos el teorema de Pascal (**Construcción 1**).

Consideremos, por ejemplo, el pentágono $XYZTT$. Siguiendo Construcción 1, hallamos $U = XY \cap TT = XY \cap MN$. A continuación tomamos un punto V cualquiera sobre YZ y hallamos $W = UV \cap ZT$. El recíproco del teorema de Pascal nos asegura que el punto $S = XW \cap TV$ esta sobre la cónica.

Construcción 5: Dados un triángulo ABC y un punto X sobre BC , trazar una parábola que es tangente a los lados del triángulo, siendo X el punto de contacto con la recta BC .

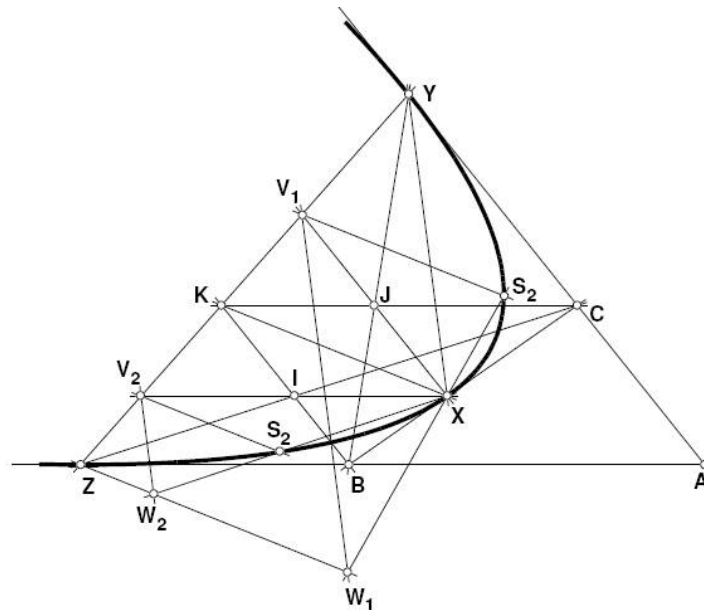


Figura 3.15: Parábola con tres tangentes y un punto sobre una de ellas.

Solución: Una parábola es una cónica que es tangente a la recta del infinito. Por tanto esta construcción es un caso particular de la Construcción 4 en el que la recta MN es la recta del infinito. Siendo M, N, T y U puntos del infinito, las rectas BM y CN se convierten en las paralelas por B y C a las rectas AC y AB , respectivamente figura 3.15. Su intersección nos da el punto K . Hallando la intersección I de las paralelas por B y X a las rectas AC y AB , respectivamente y luego la intersección

$Z = CI \cap AB$ obtenemos el punto de tangencia con la recta AB . De la misma forma, hallando la intersección J de las paralelas por C y X a las rectas AB y AC , respectivamente, y luego la intersección $Y = BJ \cap AC$, obtenemos el punto de tangencia con la recta AC .

En este momento solo tenemos sobre el papel tres puntos de la parábola, los puntos de tangencia X, Y y Z . El punto T que era visible en la Figura 3.14 es ahora un punto del infinito, concretamente el punto del infinito de la recta XK , que será por tanto paralela al eje de la parábola. Para hallar más puntos ordinarios de la parábola, recurrimos a la Construcción 1, que usa el teorema de Pascal. El punto U de la Figura 3.14 ahora es también un punto del infinito, el punto del infinito de la recta XY . Para cualquier punto V sobre la recta YZ , la recta UV es la primer paralela por V a la recta XY . Por otro lado, ahora las rectas XK y ZT son paralelas, es decir, la recta ZT es la segunda recta paralela a por Z a XK . Estas dos paralelas se cortan en un punto W . Según la Construcción 1, la paralela por V a XK y la recta XW se cortarán sobre un punto S de la parábola buscada. En la Figura 7 se ha hecho esta construcción para dos puntos V_1 y V_2 de la recta YZ , obteniendo dos puntos S_1 y S_2 de la parábola, que con X, Y, Z hacen el total de cinco puntos.

Ahora ya podemos ya podemos retomar el ejemplo 3 y dar una solución: (a) Inscribir una parábola en los lados del triángulo de manera que X sea el punto de tangencia con la recta BC lo cual a quedado resuelto con la Construcción 5. (b) Sea $X = (0 : v : w)$ y calculemos los puntos que intervienen en el enunciado. La recta paralela por B a CA es $x + z = 0$ y la recta paralela por C a AB es $x + y = 0$. Ambas rectas se cortan en el punto $K = (-1 : 1 : 1)$. La recta paralela por X a CA es $v(x + z) - wy = 0$, que corta a $CK : x + y = 0$ en $J = (-v : v : v + w)$. De igual forma obtenemos el punto $I = (-w : v + w : w)$ de la Figura 3,15, resultando que sus trazas son los puntos $Y = (-v : 0 : v + w)$ y $Z = (-w : v + w : 0)$. Si $X = (0 : v : w)$ ello quiere decir que $BX : XC = w : v$, y el simétrico X' respecto

del punto medio de BC (que se llama conjugado isotómico de X respecto de BC), cumplirá $BX : XC = v : w$, y entonces $X' = (0 : w : v)$. De igual forma tendremos los puntos $Y' = (v + w : 0 : -v)$ y $Z' = (v + w : -w : 0)$. Basta ahora tener en cuenta que las rectas

$$XK : (v - w)x - wy + vz = 0,$$

$$AX' : vy - wz = 0,$$

$$BY' : vx + (v + w)z = 0,$$

$$CZ' : wx + (v + w)y = 0,$$

comparten el punto del infinito $(-v - w : w : v)$, y recordar que XK es paralela al eje de la parábola, para obtener que AX' , BY' y CZ' son paralelas al eje de la parábola.

(c) Consideremos, para fijar ideas, una parábola en posición horizontal con foco $F = (a, 0)$ y ecuación $y^2 = 4ax$, estando el eje de la parábola en la dirección del eje x .

Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto fuera de la parábola figura 3.16. Si sustituimos en la ecuación de la parábola la ecuación $y = y_0 + m(x - x_0)$ de una recta cualquiera que pasa por P resulta una ecuación de segundo grado en x cuyo discriminante es $16a(x_0m^2 - y_0m + a)$, lo cual indica que las pendientes m_M y m_N de las rectas tangentes PM y PN son las soluciones de la ecuación $x_0m^2 - y_0m + a = 0$, y por tanto cumplen:

$$m_M + m_N = \frac{y_0}{x_0}, m_M \Delta m_N = \frac{a}{x_0}.$$

Por otro lado, la pendiente de la recta PF que une el punto P con el foco F es

$$m_F = \frac{-y_0}{a - x_0}. \quad (1)$$

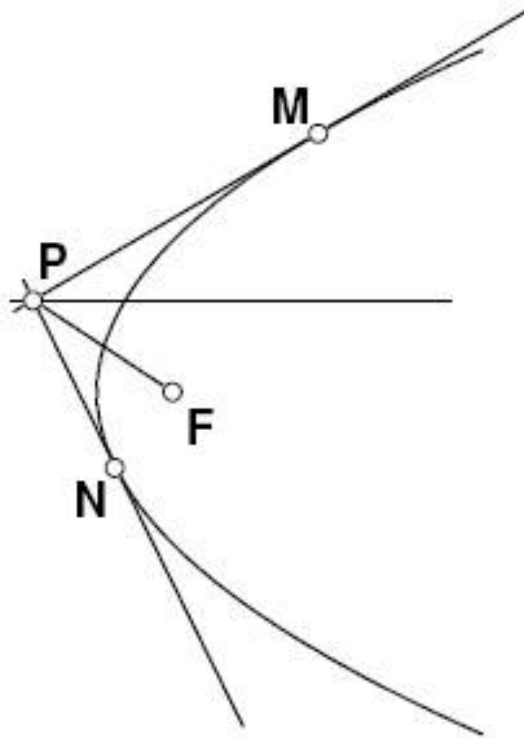


Figura 3.16: Propiedad isogonal de la parábola.

Queremos comprobar que el ángulo que forman las rectas PF y PN es el mismo que forma la recta PM con la horizontal. Usando la formula de las tangentes, esto se expresa

$$\frac{m_F - m_N}{1 + m_F m_N} = m_M \iff m_F = m_N + m_M + m_F m_M m_N$$

$$\iff m_F = \frac{m_M + m_N}{1 - m_M m_N} = \frac{\frac{y_0}{x_0}}{1 - \frac{a}{x_0}} = \frac{y_0}{x_0 - a}$$

, lo cual coincide con (1).

Por tanto, hemos demostrado que si desde un punto trazamos las dos tangentes a una parábola, al trazar la recta paralela por ese punto al eje de la parábola, su simétrica respecto de la bisectriz del ángulo formado por las tangentes pasará por el

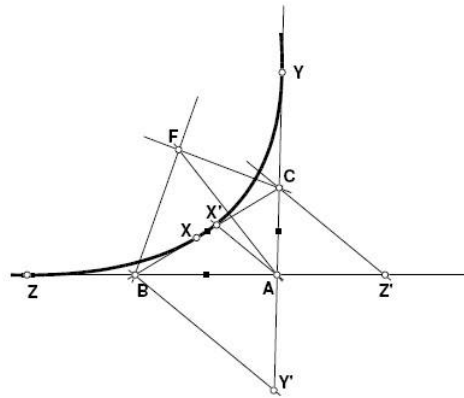


Figura 3.17: Las tres isogonales concurren en el foco.

foco de la parábola.

Como las rectas AX' , BY' y CZ' son paralelas al eje de la parábola, sus simétricas respecto de las correspondientes bisectrices AI , BI y CI pasarán por el foco de la parábola, y por tanto serán concurrentes en ese punto figura 3.17.

Conclusión

Este Trabajo concluye con la presentación de la geometría proyectiva como una geometría más general que incluye la geometría euclidiana como un caso especial. En este trabajo se ha encontrado un estudio de la geometría proyectiva desde parte de su historia hasta algunas aplicaciones como lo son coordenadas homogéneas y sus aplicaciones en graficación por computadora, así como también construcciones con sólo una regla y transformación proyectivas. Hemos estudiado los axiomas básicos teoremas y algunas de las propiedades invariantes en geometría, es decir, propiedades que se mantienen tanto en la geometría euclidiana como en la geometría proyectiva.

El trabajo muestra un pequeño estudio sobre las cónicas en geometría proyectiva, que nos hace ver que todas las propiedades de la elipse, parábola o hipérbola son equivalentes bajo proyecciones, entonces podemos olvidarnos de las diferencias que hay entre ellas y tener un conocimiento mas profundo de las cónicas. Cualquier resultado de la naturaleza proyectiva que podamos demostrar para la circunferencia, valdrá también para todas las cónicas.

Existe mucha más teoría sobre esta área para que interesados en seguir conociendo mas puedan hacer sus aportaciones y mejorar este material, ya que esperamos que este sirva como introducción y base para muchos que esten inclinados en hacer futuras investigaciones en la geometría proyectiva.

Bibliografía

- James R. Smart: Geometría Moderna (Cuarta Edición) San José State University.
- Frank Ayres, JR., Ph.D.: Teoria y Problemas de Geometría Proyectiva.
- Luis Ugarte Vilumbrales: Geometría Proyectiva Plana, Universidad de Zaragoza.
- Geometría Proyectiva. Ángel Montesdeoca. 2004
- Geometry Revisited, H.S.M. Coxeter. University of Toronto, S.L. Greitzer Rieger University. "The mathematical Association of America".
- <http://www.matem.unam.mx/~rgomez/geometria/Capitulo6.pdf>
- <http://cms.dm.uba.ar/materias/1erCuat2007/geometria/Apunte-4.pdf>