UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

SECCION DE MATEMATICAS

TRABAJO DE GRADO:

“TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BANACH Y ALGUNAS APLICACIONES”

PRESENTADO POR:

BLANCA ESTELA LÓPEZ VÁSQUEZ

JOSÉ CARLOS CISNEROS MARTÍNEZ

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

DOCENTE DIRECTOR:

LIC. JOSÉ FREDY VASQUEZ

CUIDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, NOVIEMBRE DE 2014

SAN MIGUEL EL SALVADOR CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

ING. MARIO ROBERTO NIETO LOVO

RECTOR

MS. D ANA MARIA GLOWER DE ALVARADO

VICE-RECTORA ACADEMICA

DRA. ANA LETICIA ZAVALETA DE AMAYA

SECRETARIA GENERAL

LIC. FRANCISCO CRUZ LETONA

FISCAL GENERAL

FACULTAD MULTICIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

LIC. CRISTOBAL HERNAN RIOS BENITEZ

DECANO

LIC. CARLOS ALEXANDER DIAZ

VICE-DECANO

LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNÁNDEZ

SECRETARIO

Contenido

INTRODUCCIÓN

La matemática es una ciencia que a partir de notaciones básicas y a través del razonamiento lógico, estudia las propiedades y relaciones entre entes abstractos (números, figuras geométricas, símbolos). Los matemáticos buscan patrones, formulan nuevas conjeturas e intentan alcanzar alguna respuesta a un determinado fenómeno mediante rigurosas deducciones; estas les permiten establecer axiomas y definiciones, apropiados para dicho fin. Es en la matemática donde las otras ciencias se apoyan para lograr diversos estudios, si se busca en el amplio repertorio de teoría de la matemática es posible encontrar muchas aplicaciones a otras ciencias, desde las que involucran ecuaciones lineales hasta ecuaciones diferenciales e integrales, en algunas ocasiones no es tan sencillo encontrar una solución (si es que existe) a determinada ecuación, por ello es necesario valerse de alguna teoría matemática adicional, una de estas es la teoría del punto fijo y con ello el teorema del punto fijo de Banach, que es aplicable en algún tipo especial de sucesiones; el uso de la teoría del punto fijo es común tanto en ciencias aplicadas (economía, ingeniería, informática) como en ciencias fundamentales (física, química, biología). Por ejemplo: en física su uso se da en dinámica estructural y vibración de una cuerda; otro en el análisis de sistemas dinámicos, que tiene numerosas aplicaciones (en el estudio de modelos de población, modelos caóticos, por ejemplo); también es importante en el estudio de métodos iterativos utilizados en el cálculo numérico. En algunos problemas de Ingeniería y Biología, e incluso determinados fractales son puntos fijos de ciertas contracciones. Por lo que, el teorema del punto fijo de Banach es un instrumento utilizado en el estudio de algunos temas en áreas muy diversas. En el trabajo a realizar, se abordará este tema, el cual será dividido en tres capítulos; en el primero se presentarán componentes básicos de cálculo: limite, continuidad, valor medio, convergencia; topología: espacios métricos; ecuaciones diferenciales ordinarias; entre otros; en el segundo la definición de punto fijo, algunas condiciones para que sea único, el principio de contracción de Banach y su interpretación geométrica, por último, en el tercer capítulo se mostrarán algunas aplicaciones para los sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrables y otras. Se ha mostrado así una descripción básica acerca del contenido de la investigación y en lo que sigue se mostrarán los antecedentes donde se hace una breve reseña histórica del tema y se describe si ya se han llevado a cabo investigaciones anteriores ya sea del mismo o de otros similares a este, seguidamente se abordan los motivos por los cuales se hace la investigación y se describen los objetivos que se pretenden alcanzar.

1. Antecedentes y Justificación.

1.1 Antecedentes.

En la investigación de la ciencia matemática uno de sus principales objetivos es resolver problemas matemáticos, con el tiempo, los investigadores se han encontrado con diferentes ecuaciones que presentan dificultades para descubrir una solución, si existe. Se deben formar, por tanto, dos categorías “problemas con solución” y ”problemas sin solución”; algunas veces, para una determinada situación es difícil saber en qué categoría clasificarlo, puesto que el no encontrar una solución no implica que esta no exista; en algunas ocasiones es posible crear un modelo matemático y con ello se logra establecer que un problema puede resolverse, pero como ya ha sido mencionado anteriormente podría resultar muy difícil encontrar una solución o establecer que ésta existe, para ello se recurre a métodos creados por matemáticos, uno de ellos es el Teorema del Punto Fijo de Banach, que fue surgiendo posterior a diferentes estudios realizados por grandes matemáticos.

El primer y más sencillo teorema del punto fijo es el teorema de Bolzano, 1817, de los valores intermedios de funciones continuas reales. Cauchy, en un artículo publicado en 1835, utilizó un método de aproximaciones sucesivas para dar un teorema de existencia para algunos tipos generales de ecuaciones diferenciales, para los que no se tenían soluciones explícitas. Picard, en 1890, utilizó métodos de aproximaciones sucesivas para garantizar la existencia de soluciones de algunas ecuaciones diferenciales con ciertas condiciones de frontera. En 1922, Banach demostró, en su tesis doctoral, el teorema del punto fijo que hoy lleva su nombre, y que también se conoce como Principio de la Aplicación Contractiva.

Algunos de los resultados sobre existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales, soluciones de sistemas con infinitas ecuaciones e incógnitas, existencia de funciones implícitas, métodos numéricos, existencia de fractales, medidas invariantes, existencia de subespacios invariantes, etc., pueden ser obtenidos como consecuencia de teoremas del punto fijo.

En Análisis Numérico se trata este interesante contenido de manera muy superficial, esto lleva a la idea de realizar un trabajo en el cual se exponga este llamativo tema de manera un tanto más profunda.

1.2 Justificación.

El matemático polaco Banach probó un teorema que aseguraba las condiciones apropiadas para la existencia y unicidad de un punto fijo. Su resultado es llamado el teorema del punto fijo de Banach o el principio de contracción de Banach. Este teorema provee una teoría para encontrar la solución de una gran variedad de aplicaciones. Algunos de los resultados sobre existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales, soluciones de sistemas con infinitas ecuaciones e incógnitas, existencia de funciones implícitas, métodos numéricos, etc. pueden ser obtenidos como consecuencia de teoremas del punto fijo.

Dado lo anteriormente expuesto se ha elegido “El teorema del punto fijo de Banach y algunas aplicaciones” como tema de investigación; se efectúa con la finalidad de presentar la teoría y algunas aplicaciones del punto fijo, y más ampliamente del teorema del punto fijo de Banach.

Consideramos que el trabajo interesante; toda la teoría expuesta, está dirigida a establecer la existencia de una solución para una determinada ecuación o problema (si es que esta existe), asimismo tendrá una secuencia lógica para obtener de manera practica la asimilación del tema, por lo que se partirá de conceptos, teoremas y propiedades que serán la base de la teoría que posteriormente se expondrá, haciéndolo de lo especifico a lo general; se pretende sea de interés para las personas a quienes concierna conocer elementos de este tópico, obteniéndose precisamente como beneficio el recordar o extender las nociones referentes a este tema, por consiguiente, se logre adquirir conocimiento de su importancia y la utilidad que este presenta dadas las múltiples aplicaciones que posee.

2. Objetivos.

2.1 Generales:

- Investigar la teoría del punto fijo y algunas aplicaciones del Teorema del Punto Fijo de Banach.
- Elaborar un documento en el que se presenten algunas aplicaciones y la teoría del punto fijo.

2.2 Específicos:

- Mostrar la utilidad de los conceptos básicos de Cálculo, Algebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales y Topología en problemas de aplicación.
- Referir otros enunciados y demostraciones de teoremas del punto fijo.
- Presentar la interpretación geométrica del Teorema del Punto Fijo de Banach.
- Dar a conocer algunas de las aplicaciones del Teorema del Punto Fijo de Banach en ecuaciones diferenciables, integrales y sistemas dinámicos entre otros.

3. Metodología de la Investigación.

3.1 Sistema de Hipótesis.

La investigación que se va a llevar a cabo es de tipo no experimental, por lo cual no se formulará un cuerpo de hipótesis.

3.2 Diseño Metodológico.

El estudio a realizarse es, El Teorema del Punto Fijo de Banach y algunas aplicaciones, siendo éste de tipo no experimental, puesto que no se manipula ningún sujeto o variable, solamente se observa el fenómeno o problema así como ha ido sucediendo.

En la investigación referente al Punto Fijo de Banach se desarrollarán algunas aplicaciones en ciertas áreas y se observará cuál ha sido su perfeccionamiento a través del tiempo, por lo que el problema se estudiará del presente al pasado, es decir en forma retrospectiva.

Por lo antes mencionado, no se utilizará ningún instrumento de recolección de datos (encuesta, entrevista, formulario, etc.), ya que la información que se usará es de tipo bibliográfica.

4. Cronograma de Actividades.

Actividades	Año 2013																																							
	Febrero				Marzo				Abril				Mayo				Junio				Julio				Agosto				Septiembre				Octubre				Noviembre			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Elección del tema																																								
Búsqueda de Asesores e inscripción del Proyecto																																								
Búsqueda de Bibliografía																																								
Elaboración del Perfil y Protocolo de Investigación																																								
Revisión de Protocolo																																								
Corrección del Protocolo																																								
Exposición oral No 1																																								
Elaboración de Cap. I y Cap. II																																								
Revisión de Cap. I y Cap. II																																								
Corrección de Cap. I y Cap. II																																								
Exposición oral No 2																																								
Elaboración de Cap. III																																								
Revisión de Cap. III																																								
Corrección del Cap. III																																								
Exposición oral No 3																																								
Entrega del Informe Final																																								

5. Bibliografía.

- Héctor Méndez Lango A, Introducción a los Sistemas Dinámicos Discretos (versión preliminar).
- José Rosales Ortega, Sistemas Dinámicos Elementales, Instituto tecnológico de Costa Rica.
- Mónica Clapp, Introducción al Análisis Real, Universidad Nacional Autónoma de México, 2012.
- Igsil Augusto Dávila, Teoría del Punto Fijo para un par de funciones, Universidad de Los Andes, 2006.
- Wilmer Eduardo Barrera Yayes, Algunos Teoremas del Punto Fijo para funciones T-Contracciones, Universidad de Los Andes, 2010.
- Julio Román Loayza Cerrón, Aplicaciones del Teorema del Punto Fijo de Banach, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2006.
- Richard L. Burden , J. Douglas Faires, Análisis Numérico
- Ron Larson, Bruce H. Edwards, Calculo 1.
- James R. Munkres, Topología.
- Ma. Concepcion Fuente Florencia, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, 1979.

CAPITULO I: Preliminares

i) Cálculo.

1.1 Funciones, Límites y Continuidad.

Definición 1.1.1: Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en el número a mismo. El **límite de *f(x)*** conforme x se aproxima a a es L, lo que se escribe como: $\lim_{x\to a} f(x) = L$; si la siguiente proposición es verdadera:

Dada cualquier $\varepsilon > 0$, no importa cuan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que:

Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Teorema 1.1.1: Limite de una función lineal.

Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces $\lim_{x\to a}(mx + b) = ma + b$.

Teorema 1.1.2: Limite de una función constante.

Si c es una constante, entonces para cualquier número a: $\lim_{x\to a} c = c$.

Teorema 1.1.3: Limite de la función identidad.

$$\lim_{x\to a} x = a.$$

Teorema 1.1.4: Limite de un múltiplo escalar.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to a} kf(x) = kL$.

Teorema 1.1.5: Limite de la suma y de la diferencia de dos funciones.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$.

Teorema 1.1.6: Limite de la suma y de la diferencia de *n* funciones.

Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$,…, $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces $\lim_{x \to a}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n$.

Teorema 1.1.7: Limite del producto de dos funciones.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x \to a}[f(x) \,.\, g(x)\,] = LM$.

Teorema 1.1.8: Limite de la *n*-ésima potencia de una función.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y *n* es cualquier número entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a}[f(x)]^n = L^n.$$

Teorema 1.1.9: Limite del cociente de dos funciones.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$.

Teorema 1.1.10: Limite de la raíz *n*-ésima de una función.

Si *n* es un número entero positivo y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ con la restricción de que si *n* es par L > 0.

Teorema 1.1.11:

Si a es cualquier número real diferente de cero, entonces $\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$.

Definición 1.1.2: Sea *f* una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. Conforme x se aproxima a a, ***f(x)* crece sin límite**, lo cual se escribe como: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Si para cualquier número N > 0 existe $\delta > 0$ tal que:

Si 0 < |*x* - a | < δ, entonces *f(x)* > N.

Definición 1.1.3: Sea *f* una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. Conforme *x* se aproxima a a, ***f(x)* decrece sin límite**, lo cual se escribe como: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Si para cualquier número N < 0 existe $\delta > 0$ tal que:

Si 0 < |*x* - a | < δ, entonces *f(x)* < N.

Definición 1.1.4: Se dice que la función *f* **es continua en el número *a*** si y sólo si se satisface las tres condiciones siguientes:

1. *f(a)* existe.
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definición 1.1.5: Se dice que una función es **continua en un intervalo abierto** si y sólo si es continua en cada número del intervalo abierto.

Definición 1.1.6: Se dice que la función es **continua por la derecha** en el número a si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. *f(a)* existe.
2. $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Definición 1.1.7: Se dice que la función *f* es **continua por la izquierda** en el número a si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. *f(a)* existe.
2. $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Definición 1.1.8: Se dice que una función, cuyo dominio contiene al intervalo cerrado [*a*, *b*], es **continua en el intervalo [*a, b*]** si y sólo si es continua en el intervalo abierto (*a*, *b*), así como continua por la derecha en *a* y continua por la izquierda en *b*.

Definición 1.1.9 (límites al infinito):

Sea L un número real.

1. La expresión $\lim_{x\to\infty} f(x)$ = L significa que para cada ε > 0 existe un M > 0 tal que | *f(x)* - *L*|< ε siempre que *x* > M.
2. La expresión $\lim_{x\to\infty} f(x)$ = L significa que para cada ε > 0 existe un N < 0 tal que |*f(x)* - *L*| < ε siempre que *x* < N.

Nota: La expresión $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ también se puede denotar como $f(x) \to L$.

Teorema 1.1.11:

Si *r* es un número racional positivo y *c* es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

Además, si x^r se define cuando x < 0, entonces $\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = 0$.

Ejemplo 1.1.1:

Calcular $\lim_{t\to 8} \frac{2t^3 + \sqrt[3]{t^2} - 528}{10}$.

Solución:

$\lim_{t\to 8} \frac{2t^3+\sqrt[3]{t^2}-528}{10} = \frac{1}{10} \lim_{t\to 8}\left[2t^3 + \sqrt[3]{t^2} - 528\right]$ por Teorema 1.1.4

$= \frac{1}{10}\left[2 \lim_{t\to 8} t^3 + \lim_{t\to 8} \sqrt[3]{t^2} - \lim_{t\to 8} 528\right]$ por Teoremas 1.1.4 y 1.1.6

$$= \frac{1}{10}\left[2\lim_{t\to 8} t^3 + \sqrt[3]{\lim_{t\to 8} t^2} - \lim_{t\to 8} 528\right]$$ por Teorema 1.1.10

$$= \frac{1}{10}\left[2(8^3) + \sqrt[3]{8^2} - 528\right]$$ por Teoremas 1.1.8 y 1.1.2

$$= \frac{1}{10}(1024 + 4 - 528) = 50.$$

Ejemplo 1.1.2:

Calcular $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+4}{(x-2)(x-3)}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{\lim_{x\to 1}(3x^2+4)}{\lim_{x\to 1}[(x-2)(x-3)]}$$ por Teorema 1.1.9

$$= \frac{\lim_{x\to 1}(3x^2) + \lim_{x\to 1} 4}{\left[\lim_{x\to 1}(x-2)\right]\left[\lim_{x\to 1}(x-3)\right]}$$ por Teoremas 1.1.5 y 1.1.7

$$= \frac{3\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 4}{\left[\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 2\right]\left[\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 3\right]}$$ por Teoremas 1.1.4 y 1.1.5

$$= \frac{3(1^2) + 4}{[1-2][1-3]}$$ por Teoremas 1.1.8, 1.1.2 y 1.1.3

$$= \frac{3+4}{(-1)(-2)} = \frac{7}{2}.$$

1.2 Derivada y Diferenciación.

Definición 1.2.1: La **derivada de la función** ***f*** es aquella función, denotada por $f^{'}$, tal que su valor en un número x del dominio de f esta dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{si este limite existe.}$$

Definición 1.2.2 (Fórmula alternativa de la derivada): La derivada de f en c es:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Obsérvese que la existencia del límite de esta forma alternativa requiere que los limites unilaterales:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existan y sean iguales. Estos límites laterales se denominan **derivada por la izquierda y por la derecha**, respectivamente.

Teorema 1.2.1:

Si una función f es diferenciable en un número x_1, entonces f es continua en x_1.

Teorema 1.2.2: Diferenciación de una constante.

Si c es una constante y si $f(x) = c$, entonces $f^{'}(x) = 0$.

Teorema 1.2.3: Diferenciación de potencias.

Si n es un número entero positivo y si $f(x) = x^n$, entonces $f^{'}(x) = nx^{n-1}$.

Teorema 1.2.4: Diferenciación para el producto de una función por una constante.

Si f es una función, c es una constante y g es la función definida por $g(x) = cf(x)$ y si $f^{'}(x)$ existe, entonces $g^{'}(x) = c\, f^{'}(x)$.

Teorema 1.2.5: Diferenciación para la suma o resta.

Si *f* y *g* son funciones y si *h* es la función definida por $h(x) = f(x) \pm g(x)$ y si $f'(x), g'(x)$ existen, entonces $h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

Teorema 1.2.6: Diferenciación para el producto.

Si *f* y *g* son funciones y si *h* es la función definida por $h(x) = f(x).\ g(x)$ y si $f'(x), g'(x)$ existen, entonces $h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)\, f'(x)$.

Teorema 1.2.7: Diferenciación para el cociente.

Si *f* y *g* son funciones y si *h* es la función definida por $h(x) = f(x)/g(x)$, donde $g(x) \neq 0$ y si $f'(x), g'(x)$ existen, entonces $h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Teorema 1.2.8: Diferenciación de potencias.

Si $f(x) = x^{-n}$, donde $-n$ es un número entero negativo y $x \neq 0$, entonces $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

Teorema 1.2.9: Regla de la cadena.

Si $y = f(u)$ es una función derivable de *u* y además $u = g(x)$ es una función derivable de *x*, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable de *x*, de forma que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 1.2.1:

Mediante la fórmula alternativa para limites (Definición 1.2.2), calcular $f'(3)$ dado que $f(x) = x^3 - 12x$.

Solución:

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x^3-12x-\left(3^3-12(3)\right)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x^3-12x+9}{x-3}$$

$$= lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(x^2+3x-3\right)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3}\left(x^2 + 3x - 3\right)$$

$$= 3^2 + 3(3) - 3$$

$$= 15.$$

Ejemplo 1.2.2:

Calcular $f'(x)$ dado que $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+5x}$.

Solución:

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(3x-1)\right]\left[x^2+5x\right]-[3x-1]\left[\frac{d}{dx}\left(x^2+5x\right)\right]}{(x^2+5x)^2} \quad \text{por Teorema 1.2.7}$$

$$= \frac{\left[3\frac{d}{dx}(x)-\frac{d}{dx}(1)\right]\left[x^2+5x\right]-[3x-1]\left[\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+5\frac{d}{dx}(x)\right]}{\left(x^2+5x\right)^2} \quad \text{por Teoremas 1.2.5 y 1.2.4}$$

$$= \frac{[3(1)-0]\left[x^2+5x\right]-[3x-1][2x+5(1)]}{(x^2+5x)^2} \quad \text{por Teoremas 1.2.2 y 1.2.3}$$

$$= \frac{3\left[x^2+5x\right]-[3x-1][2x+5]}{(x^2+5x)^2}$$

$$= \frac{3x^2+15x-6x^2-15x+2x+5}{(x^2+5x)^2} \quad \text{multiplicando}$$

$= \frac{-3x^2+2x+5}{(x^2+5x)^2}$ simplificando.

Ejemplo 1.2.3:

Calcular $g'(t)$ dado que $g(t) = \frac{-7}{(2t-3)^2}$.

Solución:

$g(t) = \frac{-7}{(2t-3)^2} = -7(2t-3)^{-2}$ reescribiendo $g(t)$.

Sea $u(t) = 2t - 3$ de manera que $g(u) = -7u^{-2}$.

Así utilizando la regla de la cadena (Teorema 1.2.9) se tiene:

$$g'(t) = \frac{dg}{du}\frac{du}{dt}$$

$$= \left[\frac{d}{du}(-7u^{-2})\right]\left[\frac{d}{dt}(2t-3)\right]$$

$= [-7(-2u^{-3})](2)$ derivando

$= 28u^{-3}$ sustituyendo $u = 2t - 3$

$$= 28(2t-3)^{-3}$$

$$= \frac{28}{(2t-3)^3} .$$

Definición1.2.3:

Se dice que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **continuamente diferenciable** en x_0 si cada una de las derivadas parciales $D_i f^i(x)$ existe en una región abierta alrededor de x_0 y es continua alrededor de x_0.

1.3 Valores Extremos.

Definición 1.3.1: Sea f definida sobre un intervalo I que contiene a c.

1- $f(c)$ es el **mínimo** de f si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en I.

2- $f(c)$ es el **máximo** de f si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en I.

Teorema 1.3.1 (Teorema de valor medio):

Sea f una función tal que:

1. Es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. Es diferenciable en el intervalo abierto (a, b).

Entonces existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ejemplo 1.3.1:

Es posible observar que la funcion $f(x) = x^2 + 1$ tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo cerrado [-1, 2] (Figura 1.3.1a), pero no tiene un maximo en el intervalo abierto (-1, 2) (Figura 1.3.1b).

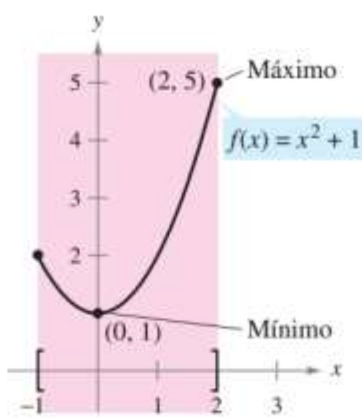


Figura 1.3.1a

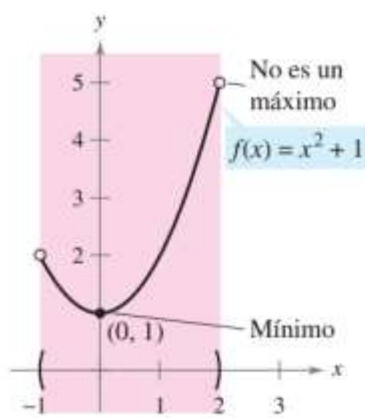


Figura 1.3.1b

1.4 Integral Definida e Integración.

Definición 1.4.1: Se dice que una función F es una **antiderivada o primitiva de *f***, en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Teorema 1.4.1:

1. $\int dx = \text{x} + \text{C}.$
2. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$
3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$
5. $\int e^x dx = e^x + C.$
6. $\int \ln x\, dx = \frac{1}{x} + C.$

Definición 1.4.2: Sea f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea Δ una partición de $[a, b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ donde Δx_i es el ancho del i-ésimo subintervalo. Si c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ , \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

se denomina una **suma de Riemann** de f para la partición Δ.

Definición 1.4.3: Si f es una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la **integral definida de *f*** de a a b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, está dada por:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Definición 1.4.4: Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces ***f* es integrable** en $[a, b]$. Es decir $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Teorema 1.4.2:

Si $a > b$ y $\int_b^a f(x)dx$ existe, entonces $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Teorema 1.4.3:

Si *f(a)* existe, entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Teorema 1.4.4:

Si k es cualquier constante, entonces $\int_a^b kdx = k(b - a)$.

Teorema 1.4.5:

Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si k cualquier constante, entonces $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 1.4.6:

Si las funciones f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Teorema 1.4.7:

Si la función f es integrable en los intervalos cerrados $[a, b]$, $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, donde $a < c < b$.

Teorema 1.4.8:

Si las funciones f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Teorema 1.4.9 (Teorema del valor medio para integrales):

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Definición 1.4.5: Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el **valor promedio de *f*** en $[a, b]$ es $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$.

Teorema 1.4.10 (Primer teorema fundamental del cálculo):

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea x cualquier número de $[a, b]$. Si F es la función definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ entonces } F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

$$\text{si y sólo si } \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (2)$$

(si $x = a$, la derivada en (2) puede ser una derivada por la derecha , y si $x = b$, puede ser una derivada por la izquierda).

Teorema 1.4.11 (Segundo teorema fundamental del cálculo):

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea g una función tal que

$$g'(x) = f(x) \qquad (3)$$

para toda x en $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

(si $x = a$, la derivada en (3) puede ser una derivada por la derecha y si $x = b$, la derivada en (3) puede ser una derivada por la izquierda).

Teorema 1.4.12 (Fórmula de integración por partes):

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \qquad (4)$$

De forma alternativa:

Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$, entonces $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$ de modo que (4) se transforma en

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Ejemplo 1.4.1:

Calcule $\int\left(x^2 + \sqrt{x} + 2\right)dx$.

Solución:

$\int\left(x^2 + \sqrt{x} - 2\right)dx = \int x^2dx + \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - 2\int\ dx$ por Teoremas 1.4.1.2 y 1.4.1.3

$= \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{\left(\frac{1}{2}+1\right)}}{\frac{1}{2}+1} - 2(x) + C$ por Teoremas 1.4.1.1 y 1.4.1.4

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + C.$

Ejemplo 1.4.2:

Calcular $\int_0^1 xe^x dx$.

Solución:

Utilizando la fórmula de integración por partes (Teorema 1.4.12), sea:

$u = x \quad \Rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx \quad \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \quad \Rightarrow v = e^x$ (Teorema 1.4.1.5).

Luego:

$\int_0^1 xe^x dx = xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= (xe^x - e^x)|_0^1$ por Teorema 1.4.1.5

$= (e - e) - (0 - 1)$ por Teorema 1.4.11

$= 1.$

1.5 Integrales Dobles.

Teorema 1.5.1:

Sea *f* una función de dos variables y continua en una región cerrada R del plano *xy* tal que *f(x, y)* ≥ 0 para todo (*x*, *y*) de R. Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido S que tiene la región R como su base y cuya altura es *f(x, y)* unidades en el punto (*x*, *y*) de R, entonces

$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\, \Delta_i A = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

Teorema 1.5.2:

Si *c* es una constante y la función *f* es integrable en una región cerrada R, entonces *cf* es integrable en R y

$$\iint_R c\, f(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA.$$

Teorema 1.5.3:

Si las funciones *f* y *g* son integrables en una región cerrada R, entonces la función $f \pm g$ es integrable en R y

$$\iint\limits_{R} [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint\limits_{R} f(x,y)\, dA \pm \iint\limits_{R} g(x,y)\, dA.$$

Teorema 1.5.4:

Si las funciones *f* y *g* son integrables en una región cerrada R y además $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) de R, entonces:

$$\iint\limits_{R} f(x,y)\, dA \geq \iint\limits_{R} g(x,y)\, dA.$$

Teorema 1.5.5:

Suponga que la función *f* es continua en la región cerrada R y que la región R se compone de dos subregiones R_1 y R_2 que no tienen puntos en común excepto algunos puntos en parte de sus fronteras. Entonces:

$$\iint\limits_{R} f(x,y)\, dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y) dA.$$

Teorema 1.5.6 (Teorema del valor medio para integrales dobles):

Si $f(x\ y)$ es continua sobre el rectángulo R con área A(R), entonces existe un punto (a, b) en el interior de R tal que

$$\iint_R f(x,y)dA = f(a,b)A(R).$$

Ejemplo 1.5.1:

Calcule el volumen de la región sólida acotada por el plano $z = 2 - x - 2y$ y por los tres planos coordenados.

Solución:

La Figura 1.5.1.a ilustra el sólido y la Figura 1.5.1.b muestra la base en el plano *xy*.

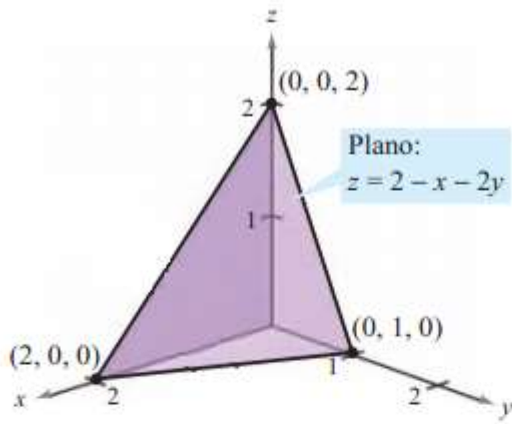


Figura 1.5.1.a

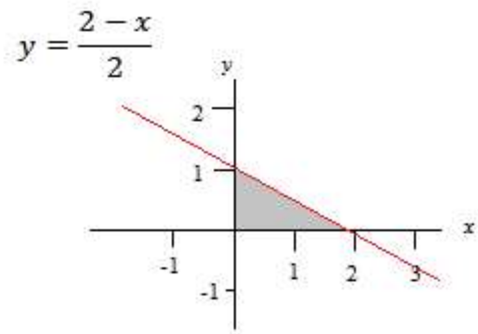


Figura 1.5.1.b

Por lo tanto:

$$V = \iint_R f(x,y)\, dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{1-\frac{1}{2}x} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[(2y - xy - y^2)\Big|_0^{1-\frac{1}{2}x} \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{4}x^2 - x + 1 \right] dx$$

$$= \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \Big|_0^2$$

$$= \frac{8}{12} - \frac{4}{2} + 2 - 0 - 0 - 0 = \frac{2}{3}.$$

Así, el volumen del solido es $\frac{2}{3}u^3$.

1.6 Sucesiones y Series Infinitas

Definición 1.6.1: Una **sucesión finita** $\{a_n\}$ con elementos pertenecientes a un conjunto S, se define como una función $f : \{1, 2, 3,\ldots, n\} \rightarrow S$ y en ese caso el elemento a_k corresponde a *f(k)*.

Ejemplo 1.6.1:

La sucesión de números primos menores que 10: {2, 3, 5, 7}, corresponde a la función $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{P}$ (donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de números primos) definida por $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$, $f(4) = 7$.

Definición 1.6.2: Una sucesión $\{a_n\}$ tiene **limite L** si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número N > 0 tal que si n es un número entero y si $n > N$ entonces, $|a_n - L| < \varepsilon$, y se escribe $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$.

Definición 1.6.3: Una sucesión $\{a_n\}$ es **convergente** cuando existe y es finito $\lim_{n\to\infty} a_n$. Si dicho límite es infinito, la sucesión es **divergente**, y si no existe, la sucesión es **oscilante**.

Teorema 1.6.1:

Si a_n y b_n son sucesiones convergentes y c es una constante, entonces:

1. La sucesión constante $\{c\}$ tiene a c como su límite.
2. $\lim_{n\to+\infty} ca_n = c\lim_{n\to+\infty} a_n$.
3. $\lim_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \pm \lim_{n\to+\infty} b_n$.
4. $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to+\infty} a_n)(\lim_{n\to+\infty} b_n)$.
5. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n}$ $, si$ $\lim_{n\to+\infty} b_n \neq 0$ y cada $b_n \neq 0$.

Definición 1.6.4: Si $\{a_n\}$ es una sucesión infinita, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ es una **serie infinita**.

Definición 1.6.5: Dada una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ la **n-ésima suma parcial** está dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a S, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge a S**.

Definición 1.6.6: El limite S se llama **suma de la serie**.

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Si $\{S_n\}$ diverge, entonces la serie **diverge**.

Definición 1.6.7: La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots, \qquad a \neq 0$$

es llamada **serie geométrica** de razón r.

Teorema 1.6.2 (Convergencia de una Serie Geométrica):

Una serie geométrica de razón r diverge si $|r| \geq 1$. Si $0 < |r| < 1$, entonces la serie converge a la suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \qquad 0 < |r| < 1.$$

Definición 1.6.8: Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, se dice que es **absolutamente convergente**. Si una serie es convergente, pero no es absolutamente convergente, se dice entonces que es **condicionalmente convergente**.

Teorema 1.6.3:

Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Teorema 1.6.4 (Criterio de la Razón):

Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie infinita para la cual cada a_n es diferente de cero:

1. Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, entonces la serie es absolutamente convergente.
2. Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ o si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, la serie es divergente.
3. Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, no se puede concluir nada acerca de la convergencia a partir de este criterio.

Ejemplo 1.6.1:

Verifique si $a_n = \frac{5n^2}{n^2+2}$ es convergente.

Solución:

Para que a_n sea convergente debe existir y ser finito $\lim_{n\to\infty} a_n$, de esta forma

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{n^2+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{n^2+2}\left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right)$$ multiplicando por un 1 conveniente.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{1+\frac{2}{n^2}}$$ simplificando.

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 5}{\lim_{n\to\infty} 1+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}$$ aplicando Teoremas de límites.

$= \frac{5}{1+0}$ aplicando Teoremas de límites.

$= 5.$

Por lo que a_n es convergente.

Ejemplo 1.6.2:

Calcule $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \cdots$.

Solución:

Para encontrar el término general de la serie:

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \cdots = 3 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) + \cdots$$

$$= 3 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2^2}\right) + 3\left(\frac{1}{2^3}\right) + \cdots$$

$$= 3 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

La serie resultante es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$, como $0 < \left|\frac{1}{2}\right| < 1$ la serie es convergente (Teorema 1.6.2); así

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6.$$

Ejemplo 1.6.3:

Determine la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Solución:

Utilizando el criterio de la razón (Teorema 1.6.4) se tiene:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2^{n+1})(n!)}{(2^n)(n+1)!}\right]$$

$$= lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2^n)(2)(n!)}{(2^n)(n+1)(n!)}\right]$$

$$= lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2)}{(n+1)}\right]$$

$$= 0.$$

Puesto que 0 < 1, se concluye la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ converge.

ii) Algebra Lineal.

2.1 Conceptos Básicos.

Definición 2.1.1: Sean *m* y *n* enteros positivos. Una **matriz *m x n*** es una matriz de la siguiente forma, donde cada a_{ij} es un número real.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Las matrices se representan por letras mayúsculas A, B, C,…, etc...

Una matriz de *m* filas y *n* columnas se dice que es una matriz de orden *m x n*, y esto también se denota así: $A_{m \times n}$. El primer índice se refiere siempre al número de filas y el segundo al número de columnas.

2.2 Tipos de matrices

- Matriz fila: Es una matriz de orden *1x n*, $A = (a_{11} \ \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$.
- Matriz columna: Es una matriz de orden *m x 1*, $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$.
- Matriz nula: Es aquella que tiene todos los términos nulos,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

- Matriz simétrica: Una matriz es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$, para todos los valores de i y j.

- Matriz identidad: Es aquella que posee unos en los términos a_{ij} para $i = j$, y ceros en las posiciones restantes.

2.3 Determinantes

A toda matriz cuadrada A_n le asociamos un número denominado determinante de A, det A ó |A| simbolizado así;

$$det\, A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinante de una matriz de orden 2:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11})(a_{22}) - (a_{12})(a_{21}).$$

Determinante para una matriz de orden 3:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11})(a_{22})(a_{33}) - (a_{11})(a_{23})(a_{32}) - (a_{12})(a_{21})(a_{33}) + (a_{12})(a_{23})(a_{31}) + (a_{13})(a_{21})(a_{32}) - (a_{13})(a_{22})(a_{31}).$$

Determinante para una matriz de orden n:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, se llama menor complementario de un elemento a_{ij} y se denota m_{ij} al determinante de la matriz de orden *n-1* que resulta de suprimir en A la fila *i* y la columna *j*. Se denomina adjunto de un elemento a_{ij} y se denota A_{ij} , al producto del menor complementario m_{ij} de a_{ij} por el signo que resulte de calcular $(-1)^{i+j}$.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$.

El valor del determinante de una matriz A es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea de A por sus respectivos adjuntos.

Es decir elegida una fila *i*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

ó

Elegida una columna j

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Ejemplo 2.1.1:

Calcule det A, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

A fin de facilitar el proceso, se fijará la cuarta columna para calcular el determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= [(-1)^{1+4}](0)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + [(-1)^{2+4}](1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ [(-1)^{3+4}](2)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + [(-1)^{4+4}](0)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + [(2)(1)(-1) - (2)(0)(3) - (1)(1)(-1) + (1)(0)(1) + (3)(1)(3)$$

$$- (3)(1)(1)] - 2[(2)(2)(-1) - (2)(4)(3) - (1)(1)(-1) + (1)(4)(1)$$

$$+ (3)(1)(3) - (3)(2)(1)] + 0$$

$$= 5 - 2(-20)$$

$$= 45.$$

iii) Ecuaciones Diferenciales.

3.1 Conceptos Básicos y Terminología.

Definición 3.1.1: Una **ecuación diferencial** es una ecuación matemática que expresa una relación entre las variables en consideración y sus derivadas.
Las ecuaciones diferenciales se clasifican según su orden, según su grado y según el tipo de derivada que aparece en ellas.

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que esté presente en la ecuación.

El **grado** de una ecuación diferencial es el exponente máximo de la derivada de mayor orden que esté presente en la ecuación.

Según el tipo de derivada que contienen, las ecuaciones diferenciales se clasifican en ordinarias y parciales. Las **ecuaciones ordinarias** contienen una sola variable independiente, respecto de la cual se toman las derivadas; las **ecuaciones parciales** contienen dos o más variables independientes, con respecto a las cuales se toman las derivadas parciales que aparecen.
Ejemplos:

a) $\frac{dy}{dx} = x^2 + 7$ es ordinaria de primer orden, primer grado.

b) $\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = e^x$ es ordinaria de tercer orden, primer grado.

c) $x\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 = 0$ es ordinaria de cuarto orden, segundo grado.

d) $\frac{\partial^2F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2F}{\partial y^2} = 0$ es parcial de segundo orden, primer grado.

Una **solución (integral o primitiva)** de una ecuación diferencial es una relación funcional entre las variables que aparecen en dicha ecuación; esta relación no contiene derivadas o diferenciales y satisface la ecuación diferencial dada en un dominio específico.

Se consideran varios tipos de soluciones: la general, la particular y la singular.
La **solución general** de una ecuación diferencial de orden *n* es una función que contiene *n* constantes arbitrarias. Esta solución general representa una familia de curvas, cuyos miembros se obtienen asignando valores particulares a las constantes, es decir encontrando **soluciones particulares** de la ecuación diferencial dada. Una **solución singular** es aquella que no se puede obtener como solución particular de la solución general de la ecuación.

Un **problema de valores iníciales** está formado por una ecuación diferencial cuya solución debe satisfacer ciertas condiciones dadas en un punto. Estas condiciones reciben el nombre de **condiciones iníciales**. Con frecuencia la variable independiente denota el tiempo, y las condiciones iníciales están dadas en un instante fijo t = 0. La solución describe el comportamiento de la variable dependiente posterior a este instante; de aquí proviene el nombre de condiciones iníciales.
La resolución de un problema de valores iníciales consiste en encontrar la solución general de la ecuación diferencial y determinar los valores de las constantes mediante las condiciones iníciales.

3.2 Ecuación Diferencial de una Familia de Curvas.

Si se tiene la ecuación de una familia de curvas, se puede obtener su ecuación diferencial mediante la eliminación de las constantes (o parámetros) y esto se obtiene aislando la constante en un miembro de la ecuación y derivando. También se puede eliminar la constante derivando la ecuación dada, tantas veces como constantes arbitrarias tenga, y se resuelve el sistema formado con la ecuación original.

Ejemplo 3.2.1:

Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es $y = C_1 \cos(x + C_2)$.

Solución:

$y = C_1 \cos(x + C_2) \Rightarrow y' = -C_1 \operatorname{sen}(x + C_2)$.

$y'' = -C_1 \cos(x + C_2)$.

de donde $\quad y'' + y = 0$.

3.3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Variable Separable.

Si de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado es: $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$ podemos expresarla en la forma:

$$M(x)\, dx + N(y)\, dy = 0 \qquad (1)$$

donde M es una función sólo de x y N es una función sólo de y, entonces a la ecuación (1) se le denomina: **ecuación diferencial ordinaria de variable separable** y la solución general se obtiene por integración directa, es decir:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

donde C es la constante de integración.

Ejemplo 3.3.1:

Resolver: $x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2}y' = 0$.

Solución:

La ecuación diferencial se expresa:

$$x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0$$

separando las variables

$$\frac{1}{\left(\sqrt{1+y^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}\right)}\left(x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy\right)=\left(\frac{1}{\left(\sqrt{1+y^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}\right)}\right)(0)$$

$$\frac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)}dx+\frac{y}{\left(\sqrt{1+y^2}\right)}dy=0$$

integrando

$$\int\frac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)}dx+\int\frac{y}{\left(\sqrt{1+y^2}\right)}dy=C$$

de donde:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C.$$

3.4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Reducibles a Variable Separable.

Las ecuaciones diferenciales de la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c) \qquad (2)$$

donde *a*, *b* y *c* son constantes, no son de variable separable.

Para resolver estas ecuaciones diferenciales, se transforma en una ecuación diferencial de variable separable, mediante la sustitución: $z = ax + by + c$, de donde $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right)$ que al reemplazar en la ecuación (2), se obtiene una nueva ecuación diferencial, que es de variable separable.

Es decir $\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right)=f(z)$ de donde $\frac{dz}{dx}=a+bf(z)$, separando la variable $\frac{dz}{a+bf(z)}=dx$ que es una ecuación de variable separable.

Ejemplo 3.4.1:

Resolver: $(x+y)^2y'=a^2$.

Solución:

Sea z = x + y $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$ reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$z^2\left(\frac{dz}{dx}-1\right)=a^2.$$

separando las variables

$$z^2\frac{dz}{dx}-z^2=a^2$$

$$z^2dz-z^2dx=a^2dx$$

$$z^2dz=z^2dx+a^2dx$$

$$z^2dz=(z^2+a^2)dx$$

$$\frac{z^2dz}{z^2+a^2}=dx$$

$$\int\frac{z^2dz}{z^2+a^2}=\int dx$$

$$z-a\left(tan^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)\right)=x+C$$

de donde

$$(x+y)-a\left(tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right)\right)=x+C$$

simplificando

$$\frac{y-C}{a}=tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right)$$

$$tan\left(\frac{y-C}{a}\right)=\frac{x+y}{a}$$

$$x+y=a\ tan\left(\frac{y}{a}+k\right).$$

3.5 Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Definición 3.5.1: Se dice que la función *f(x, y)* es homogénea de grado k en x e y, sí y sólo sí, cumple la siguiente condición:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k f(x,y).$$

Ejemplo 3.5.1:

La ecuación $f(x,y)=x^2y-4y^3$ es homogénea de grado 3 en x e y puesto que

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2(\lambda y) - 4(\lambda y)^3 = \lambda^3 x^2 y - 4\lambda^3 y^3 = \lambda^3(x^2 y - 4y^3) = \lambda^3 f(x,y).$$

Definición 3.5.2: Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de primer grado de la forma:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

es homogénea si M y N son funciones homogéneas del mismo grado en *x* e *y*.

Solución de una ecuación diferencial homogénea:

Considérese una ecuación diferencial ordinaria homogénea.

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \qquad (3)$$

entonces $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k M(x,y)$ y $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k N(x,y)$ (4)

Haciendo: $\lambda = \frac{1}{x}$ en la ecuación (3) se obtiene:

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^k} M(x,y) \Rightarrow M(x,y) = x^k M\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$M(x,y) = x^k M\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^k M(1,u) = x^k \varphi(u)$, donde $u = \frac{y}{x}$

es decir $M(x,y) = x^k \varphi(u), \ u = \frac{y}{x}$ (5)

$$N\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^k} N(x,y) \Rightarrow N(x,y) = x^k N\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$N(x,y) = x^k N\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^k N(1,u) = x^k \psi(u), u = \frac{y}{x}$

es decir $N(x,y) = x^k \psi(u), \ u = \frac{y}{x}$ (6)

como $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$ (7)

reemplazando (5), (6), (7) en (3) se tiene:

$$x^k \varphi(u) dx + x^k \psi(u)(u\, dx + x\, du) = 0$$

simplificando

$$\varphi(u) dx + \psi(u)(u\, dx + x\, du) = 0$$

agrupando y separando las variables:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(u)}{\varphi(u) + u\psi(u)} du = 0$$

que es una ecuación diferencial de variable separable.

Análogamente se hace para $\lambda = \frac{1}{y},\ u = \frac{x}{y}$.

Ejemplo 3.5.2:

Resolver: $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$.

Solución:

Sea $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$, reemplazando en la ecuación diferencial.

$$(x^2 + 3x^2u + x^2u^2)dx - x^2(u\,dx + x\,du) = 0$$

simplificando $$x^2(u^2 + 2u + 1)dx - x^3du = 0$$

para $x \neq 0$:

$$(u^2 + 2u + 1)dx - x\,du = 0$$

separando las variables

$$(u+1)^2dx - x\,du = 0$$

$$\frac{1}{x(u+1)^2}\quad((u+1)^2dx - x\,du) = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{du}{(u+1)^2} = 0$$

integrando:

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{du}{(u+1)^2} = C$$

$$\ln x + \frac{x}{y+x} = C.$$

3.6 Ecuaciones Diferenciales Reducibles a Homogéneas.

Las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right) \qquad (8)$$

No son homogéneas, porque tanto en el numerador como en el denominador aparecen dos constantes c y c', estas constantes se pueden eliminar mediante una traslación, transformando a la ecuación (8) en una ecuación diferencial homogénea, para esto consideremos las ecuaciones:

$$L_1: ax + by + c = 0 \qquad y \qquad L_2: a'x + b'y + c' = 0 \tag{9}$$

De donde el punto de intercepción es (h, k). Si trasladamos el origen de coordenadas al punto (h, k) las ecuaciones de (9) se transforman en:

$az' + bw = 0$ y $a'z + b'w = 0$ y haciendo $x = z + h$, $y = w + k$

de donde $dx = dz$, $dy = dw$, se tiene de (8)

$$\frac{dw}{dz} = f\left(\frac{az + bw}{a' + b'\left(\frac{w}{z}\right)}\right) = F\left(\frac{w}{z}\right)$$

que es una ecuación diferencial homogénea.

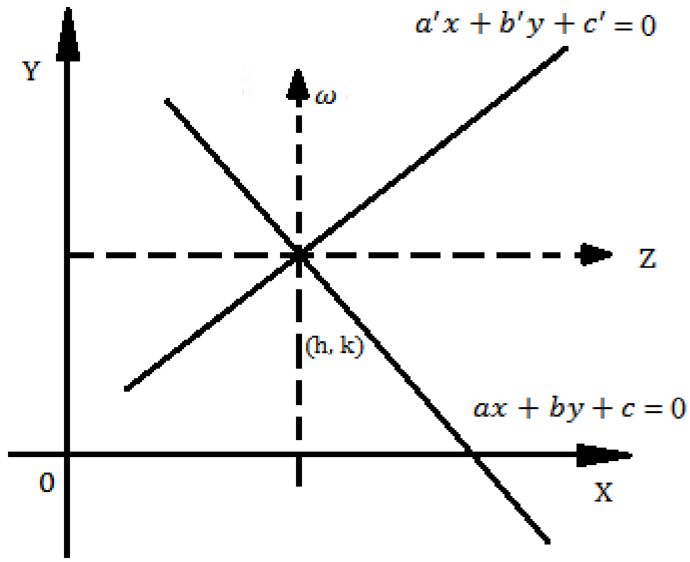
Cuando $L_1: ax + by + c = 0$; $L_2: a'x + b'y + c' = 0$ son paralelos no se aplica este método, sin embargo:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \lambda \Rightarrow a = \lambda a', b = \lambda b'$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right) = f\left(\frac{\lambda(a'x + b'y) + c}{a'x + b'y + c'}\right) = g(a_2x + b_2y)$$

que es una ecuación diferencial reducible a variable separable.



Observación:

Otra forma de transformar a una ecuación diferencial homogénea, las ecuaciones diferenciales que no son homogéneas, es mediante la sustitución de la variable y = Z*, ocurriendo esto cuando todos los términos de la ecuación son del mismo grado, atribuyendo el grado 1 a la variable x, el grado α a la variable y, y el grado α -1 a la derivada $\frac{dy}{dx}$. Además se puede transformar a homogénea mediante sustituciones adecuadas de acuerdo al problema.

Ejemplo 3.6.1:

Resolver: $(x - 4y - 9)dx + (4x + y - 2)dy = 0$.

Solución:

Sea $L_1: x - 4y - 9 = 0$ $\quad y \quad$ $L_2: 4x + y - 2 = 0$,

como $L_1 \nparallel L_2 \Rightarrow \exists p(h,k) \in L_1 \cap L_2$, y para esto se resuelve el sistema:

$$x - 4y - 9 = 0 \qquad , \qquad 4x + y - 2 = 0$$

de donde $x = 1$, $y = -2$, es decir P(1, -2).

Consideremos $x = z + 1$, $y = w - 2$, además $dx = dz$, $dy = dw$.

Reemplazando en la ecuación diferencial dada

$(z - 4w)dz + (4z + w)dw = 0$ (1)

que es una ecuación diferencial homogénea.

Sea $z = uw \Rightarrow dz = u\, dw + w\, du$ (2)

reemplazando (2) en (1) y simplificando:

$$(u^2 + 1)dw + (u - 4)w\, du = 0.$$

Separando variables

$$\frac{dw}{w} + \frac{u-4}{u^2+1} du = 0$$

$$\int \frac{dw}{w} + \int \frac{u-4}{u^2+1} du = C$$

$$\ln w^2(u^2 + 1) - 8 \tan^{-1} u = k \qquad (3)$$

como $z = uw$.

$u = \frac{z}{w} = \frac{x-1}{y+2}$ reemplazando en (3)

$$\ln[((x-1)^2 + (y+2)^2)] - 8\ \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{y+2}\right) = k.$$

iv) Topología.

4.1 Conceptos Básicos.

Definición 4.1.1: Una **distancia** o **métrica** en un conjunto X es una función d: X x X $\to \mathbb{R}$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

(1) d(x, y) ≥ 0 para todos x, $y \in$ X; la igualdad se da si, y sólo si, $x = y$.

(2) d(x, y) = d(y, x) para todos x, $y \in$ X.

(3) (Desigualdad triangular) d(x, y) + d(y, z) $\geq$ d(x, z) para todos x, y, $z \in$ X.

Definición 4.1.2: Dado $x = (x_1, x_2 \ldots x_n)$ en $\mathbb{R}^n$, se definen la **norma** de x mediante la ecuación:

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

y la **distancia euclídea** d sobre $\mathbb{R}^n$ por la ecuación:

$$d(x,y) = \|x-y\| = [(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

La **distancia del máximo** sobre $\mathbb{R}^n$ se define por:

$$d(x,y) = \underset{i=1,\dots,n}{máx} |x_i - y_i|.$$

Definición 4.1.3: Si (Y, d) es un espacio métrico, es posible definir una distancia en el conjunto A(X, Y) de las aplicaciones acotadas de X en Y por la ecuación:

$$\rho(f,g) = sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

esta distancia se conoce como **distancia del supremo**.

Definición 4.1.4: Un **espacio métrico** es un conjunto no vacio sobre el cual se ha definido una métrica o función distancia.

Se denotará a los espacios métricos con el par (M, d), donde M es un conjunto no-vacio y d es una métrica en M.

Ejemplo 4.1.1:

$\mathbb{R}^n$ con la distancia euclídea es un espacio métrico; en particular para $\mathbb{R}^2$, tomando los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ la distancia está dada por $d(P,Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.

Ejemplo 4.1.2:

Dado un conjunto no vacio cualquiera *X* se define la métrica discreta *d* en X mediante

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$$

Por lo que (X, *d*) es un espacio métrico; (X, *d*) es llamado **espacio métrico discreto**.

4.2 Sucesiones.

Definición 4.2.1: Sea $\{x_n\}$ una sucesión en (M, d).

Se dice que $\{x_n\}$ es una **sucesión de Cauchy** en M si dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, m, n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

En este caso lo denotamos por

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n\,, x_m) = 0.$$

Teorema 4.2.1: Propiedades de las sucesiones convergentes.

1. El límite de una sucesión convergente es único.
2. Toda sucesión convergente es acotada.
3. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ en (M, d) entonces $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

Teorema 4.2.2: Propiedades de las sucesiones Cauchy.

1. Toda sucesión convergente es de Cauchy.
2. Toda sucesión de Cauchy es acotada.
3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en (M, d). Si toda subsucesión de $\{x_n\}$ converge a x entonces $\{x_n\}$ converge a x.

Definición 4.2.2: Se dice que el espacio métrico (M, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy en M es convergente a un punto de M.

Teorema 4.2.3: Sea (M, d) un espacio métrico completo entonces $\{x_n\} \subset M$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si $\{x_n\}$ es convergente en M.

Definición 4.2.3: Sean (M, d) y (N, p) espacios métricos y $T: M \to N$ una función. Entonces T es una función:

1. Continua en el punto $x \in M$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si, $y \in M$ y $d(x, y) < \delta \Rightarrow p(T(x), T(y)) < \varepsilon$.
2. Continua en M, si T es continua para todo $x \in M$.

Definición 4.2.4: Sean (M, d) y (N, p) espacios métricos y T: M → N una función. Se dice que T es **uniformemente continua**, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\, x, y \in M$ y $d(x, y) < \delta \Rightarrow p(T(x), T(y)) < \varepsilon$.

Teorema 4.2.4: Sean (M, d) y (N, p) espacios métricos y T: M → N una función. Si T es uniformemente continua, entonces T es continua.

Ejemplo 4.2.1:

$\mathbb{R}$ es completo. Este hecho se sigue del llamado axioma de completitud de los números reales:

Sea $S \neq \emptyset$ un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ acotado por arriba. Entonces S tiene un supremo.

Ejemplo 4.2.2:

Un espacio métrico discreto es completo. De hecho, toda sucesión de Cauchy en un espacio discreto es eventualmente constante, y por tanto converge.

Ejemplo 4.2.3:

Considérese el espacio métrico ($\mathbb{Q}$, *d*) de los números racionales (*d* representa la métrica usual de $\mathbb{R}$); la sucesión dada por:

$x_0 = 1.4,\quad x_1 = 1.41,\quad x_2 = 1.414,\quad x_3 = 1.4142,\quad x_4 = 1.41421, \ldots$

de números con una cantidad finita de decimales es un sucesión de Cauchy.

4.3 Espacios topológicos.

Definición 4.3.1: Una **topología** sobre un conjunto X es una colección T de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

(1) $\emptyset$ y X están en T.

(2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de T está en T.

(3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de T está en T.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología T se llama **espacio topológico**.

Definición 4.3.2: Si X es un espacio topológico con una topología T, diremos que un subconjunto U de X es un **conjunto abierto** de X si U pertenece a la colección T.

Definición 4.3.3: Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es **cerrado** si el conjunto X - A es abierto.

Definición 4.3.4: Dado un espacio métrico M, una **bola abierta** centrada en $a \in$ M y de radio $r \in \mathbb{R}^+$, es el conjunto

$$B(a, r) = \{x \in M / \ d(x, a) < r\} \subset M.$$

Definición 4.3.5: Dado un espacio métrico M, una **bola cerrada** centrada en $a \in$ M y de radio $r \in \mathbb{R}^+$, es el conjunto

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in M / \ d(x, a) \leq r\} \subset M.$$

Definición 4.3.6: Una **vecindad** de un punto *x* es un conjunto abierto que contiene a *x*.

Definición 4.3.7: Una colección A de subconjuntos del espacio X se dice que **cubre** X, o que es un **cubrimiento** de X, si la unión de los elementos de A coincide con X.

Definición 4.3.8: Un espacio X se dice que es **compacto** si de cada cubrimiento abierto A de X podemos extraer una subcolección finita que también cubre X.

Teorema 4.3.1: Supóngase que K es un conjunto compacto y F un conjunto cerrado en un espacio topológico X. Si F $\subset$ K, entonces F es compacto.

Ejemplo 4.3.1:

Sea el conjunto X = {a, b, c}; es posible definir muchas topologías sobre este conjunto, por ejemplo el conjunto T = {X, ∅, {a, b}, {b}, {b, c}} es una de estas topologías; el elemento {a, b} es abierto ({a, b} ∈ T); el elemento ∅ es cerrado (X - ∅ = X y X es abierto); {a, b} es una vecindad de {b}.

Ejemplo 4.3.2:

Si X es un conjunto cualquiera, la colección de todos los subconjuntos de X es una topología sobre X y se denomina **topología discreta**. La colección compuesta únicamente por X y ∅ es también una topología sobre X, llamada **topología indiscreta o topología trivial**.

Ejemplo 4.3.3:

La recta real ℝ no es compacta, pues el cubrimiento de ℝ por intervalos abiertos

$$A = \{(n, n+2) | n \in \mathbb{Z}^{+}\}$$

no contiene ninguna subcolección finita que cubra a ℝ.

CAPITULO II: Teorema del punto fijo de Banach.

Introducción.

El hombre, como ser racional, ha realizado extraordinarias construcciones en su anhelo de entender el mundo y de ponerlo a su servicio. Una de las más ricas, tanto en su sutileza, potencia, complejidad, belleza, elegancia, durabilidad y flexibilidad, de tremendo impacto y de inimaginable totalidad, es la del edificio matemático.

Inicialmente como una colección de procedimientos técnicos, indispensables en cuestiones relacionadas con la actividad cotidiana y con la más especializada, las Matemáticas se vieron transformadas en un poderoso instrumento de análisis de las relaciones entre los objetos creados por su propia actividad y de las existentes entre los elementos conceptuados en la exploración de la naturaleza.

El origen de la teoría métrica del punto fijo, descansa en el método de aproximaciones sucesivas para poder probar la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Este método está ligado a matemáticos de siglo XIX como Picard, sin embargo es el matemático polaco Stefan Banach quien obtuvo un planteamiento general de las ideas que subyacían. El teorema del punto fijo de Banach, conocido generalmente como principio de contracción de Banach que aparece en forma explícita en la tesis de Banach de 1922 donde fue usado para establecer la existencia de una solución de una ecuación integral. Desde entonces por su simplicidad y utilidad, ha llegado a ser uno de los resultados más utilizados en la resolución de problemas de existencia en muchas ramas del Análisis.

A continuación se desarrollará una noción de lo relativo al teorema del punto fijo de Banach y su interpretación geométrica, tomando en cuenta conceptos básicos como lo son las orbitas de puntos de una función y las B-contracciones entre otros, luego se estudiarán algunas condiciones para que una función tenga un único punto fijo.

2.1 Conceptos básicos.

Definición 2.1.1: Sea M un conjunto no-vacio y T: M $\to$ M una aplicación cualquiera. Un punto $x \in$ M se llama **Punto Fijo** de T si T(x) = x.

Se denotará por F_T al conjunto de puntos fijos de la aplicación T, es decir:

$F_T = \{x \in M: T(x) = x\}$.

Los puntos fijos de una función f son aquellos en donde su gráfico interseca a la línea $y = x$.

Ejemplo 2.1.1:

Encontrar los puntos fijos de la función $g(x) = x^2 - 6$.

Solución:

Para encontrar un punto fijo debe de cumplirse la definición 2.1.1, esto es: $g(x) = x$.

De donde:

$$x^2 - 6 = x.$$

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0.$$

$$x = -2, 3.$$

Así, $x = -2$ y $x = 3$ son puntos fijos de $g(x)$.

Definición 2.1.2: Sea (X, d) un espacio métrico y S: X → X una aplicación. Para $x \in$ X, la **órbita de *x*** se define como el conjunto: $O_S(x) = \{x, S(x), S^2(x), \dots, S^n(x), \dots\}$.

Si x es un punto fijo, la órbita de x consta de un único elemento. Por otro lado, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = x$, y además $f^j(x) \neq x$, para cada $0 < j < k$, entonces x es un **punto periódico** de f y su periodo es precisamente k. Si x es un punto periódico de periodo $k \in \mathbb{N}$ entonces, la órbita de x consta exactamente de k elementos.

Ejemplo 2.1.1:

Para la aplicación $f(x) = x$ todos los puntos son puntos fijos, y para $f(x) = -x$, $x = 0$ es un punto fijo y todos los puntos restantes son puntos periódicos de periodo 2:

$\forall\, x \neq 0$: $f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(-x) = -(-x) = x$.

Para determinar los puntos fijos de $f(x)$, se resuelve $f(x) = x$; para calcular los puntos periódicos de periodo n debe resolverse $f^n(x) = x$ por lo que puede volverse una tarea bastante tediosa.

Ejemplo 2.1.2:

Determinar los puntos periódicos de periodo 2 de la función $f(x) = 1 - x^2$.

Solución:

Para ello se resuelve: $f^2(x) = x$.

Así:

$$f(1 - x^2) = x$$

$$1 - (1 - x^2)^2 = x$$

$$-x^4 + 2x^2 = x$$

Para la ecuación anterior x = 0 es una solución, encontremos otras posibles soluciones para $x \neq 0$.

$$-x^3 + 2x = 1$$

$$-x^3 + 2x - 1 = 0$$

Resolviendo esta ecuación se obtienen: $x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Las orbitas de las soluciones son:

$$O_f(0) = \{0, f(0), f^2(0), f^3(0), \dots\} = \{0, 1, f(1), f^2(1), \dots\} = \{0, 1, 0, f(0), \dots\}$$

$$= \{0,1,0,1,0,1, \dots\} = \{0,1\}.$$

$$O_f(1) = \{1, f(1), f^2(1), f^3(1), \dots\} = \{1,0, f(0), f^2(0), \dots\} = \{1, 0, 1, f(1), \dots\}$$

$$= \{1,0,1,0,1, \dots\} = \{1,0\}.$$

$$O_f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), f^2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), f^3\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \dots\right\}$$

$$= \left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

$$O_f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right), f^2\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right), f^3\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right), \dots\right\}$$

$$= \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Por lo cual $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ no son puntos periódicos pues, son puntos fijos; mientras $x = 0$ y $x = 1$ son puntos periódicos de periodo 2.

Definición 2.1.4: Sean (M, d) y (N, ρ) espacios métricos y T: M → N una función.

Se dice que T es una **aplicación Lipschitziana** si existe una constante $\alpha \geq 0$ tal que:

$$\rho(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y), \qquad \forall\, x, y \in M.$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "d"'] & & N \arrow[dl, "\rho"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

El menor número α para el cual se cumple la desigualdad anterior se denomina constante de Lipschitz de T.

Ejemplo 2.1.3:

Considérese la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$, f es una aplicación Lipschitziana.

Para probarlo basta observar que:

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \big||x| - |y|\big| \leq 1 \cdot |x - y| = 1 \cdot d(x, y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2.1.4:

La aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, no es una aplicación Lipschitziana.

La prueba será por reducción al absurdo.

Supóngase que f es aplicación Lipschitz en $\mathbb{R}$ para alguna constante $L > 0$.

Entonces:

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| \leq L \cdot d(x, y) = L|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Como la aplicación f es derivable en $\mathbb{R}$, utilizando la fórmula alternativa para la derivada en el punto x (definición 1.2.2) se obtiene:

$\lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Luego: $|f'(x)| = \lim_{y \to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} = \lim_{y \to x} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$

Por otro lado

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \Rightarrow \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L$$

$$\Rightarrow \lim_{y \to x} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq L \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Lo cual es imposible, pues la derivada no está acotada:

$$\lim_{|x| \to \infty} |\, f'(x)| = 2 \lim_{|x| \to \infty} |x| = +\infty.$$

Definición 2.1.5: Sea (M, d) un espacio métrico, una función T: M → M se dice que es una **Contracción** (α-contracción, contracción de Banach, B-contracción) si existe α ∈ [0,1) tal que:

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) \ \ \forall x, y \in M.$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "d"'] & & M \arrow[dl, "d"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.1.5:

Pruebe que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(\cos x)$ es un contracción.

Solución:

Se tiene que: $f'(x) = (sen(\cos x))sen\, x.$

Además:

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow sen(-1) \leq sen(\cos x) \leq sen(1).$

$\Rightarrow -sen(1) \leq sen(\cos x) \leq sen(1).$

$\Rightarrow |sen\,(\cos x)| \leq sen\,(1) = c < 1.$

Luego:

$-1 \leq sen\, x \leq 1 \Rightarrow |sen\, x| \leq 1.$

$\Rightarrow |sen(\cos x)|\,|sen\, x| \leq |sen(\cos x)|\, 1.$

$\Rightarrow |f'(x)| = |sen(\cos x)\, sen\, x| \leq |sen(\cos x)| \leq h.$

Por Teorema del valor medio se tiene que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$ existe $c \in (x, y)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \Rightarrow f(x) - f(y) = f'(c)(x-y).$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(c)||(x-y)| \leq h|x-y|.$$

Por tanto f es contracción.

Teorema 2.1.1: Sean (M, d) y (N, ρ) espacios métricos. Si T: (M, d) → (N, ρ) es aplicación Lipschitziana, entonces T es continua.

Demostración: Sea $c > 0$ una constante de Lipschitz para T. Entonces, dada $\varepsilon > 0$ para $\delta = \frac{\varepsilon}{c} > 0$, se cumple que:

$$\rho(T(x), T(x_0)) \leq cd(x, x_0) < \varepsilon \quad si\ d(x, x_0) < \frac{\varepsilon}{c} = \delta.$$

Por tanto, T es continua.

■

Teorema 2.1.2: Sean (M, d) y (N, ρ) espacios métricos y T: M → N una función Lipschitziana, entonces T es uniformemente continua.

Demostración:

Como T es una función Lipschitziana, existe una constante $\alpha \geq 0$; verificando que:

$$\rho(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall\, x, y \in M. \qquad \text{(a)}$$

De modo que, si P_0 es la constante de Lipschitz se cumple:

$$P_0 = sup\left\{\frac{\rho(T(x), T(y))}{d(x, y)} : x, y \in M, x \neq y\right\}.$$

De la desigualdad (a) se deduce que, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta > 0$ de forma que $\delta\alpha < \epsilon$, se tendrá $\rho(T(x), T(y)) \leq \epsilon$, siempre que $x, y \in$ M verifiquen $d(x, y) < \delta$. Por tanto: T es uniformemente continua.

■

Definición 2.1.6: Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico M. Se dice que $\{x_n\}$ es una **sucesión α-contracción** si existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad (2.1)$$

Lema 2.1.1: Sea $\{x_n\}$ una sucesión α-contracción en M entonces $\{x_n\}$ es Cauchy en M.

Demostración:

Observemos que de (2.1) se tiene que:

$$d(x_2, x_1) \leq \alpha d(x_1, x_0).$$

$$d(x_3, x_2) \leq \alpha d(x_2, x_1) \leq \alpha[\alpha d(x_1, x_0)] = \alpha^2 d(x_1, x_0).$$

$$d(x_4, x_3) \leq \alpha d(x_3, x_2) \leq \alpha[\alpha^2 d(x_1, x_0)] = \alpha^3 d(x_1, x_0).$$

Por inducción se obtiene:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad (2.2)$$

Sean n, m ∈ ℕ tal que m > n

Por desigualdad triangular tenemos que:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m)$$

aplicando nuevamente la desigualdad triangular se obtiene

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_m)$$

utilizando la desigualdad triangular en un total de m-1 veces se tiene:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

luego, aplicando (2.2) en cada miembro derecho de esta desigualdad, se tiene

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) + \alpha^{n+1} d(x_1, x_0) + \cdots + \alpha^{m-1} d(x_1, x_0)$$

por lo tanto,

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0)[1 + \alpha \, + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1-n}]$$

tomando k = m-1-n tenemos

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k} \alpha^i$$

como $\sum_{i=0}^{k} \alpha^i \leq \frac{1}{1-\alpha}$ por ser una serie geométrica de razón α, entonces

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_1, x_0) \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

por otra parte como α ∈ (0, l) y k+1 = m-n > 0 entonces α^n convergen a 0, de esta forma:

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) \leq \lim_{m,n\to\infty} d(x_1, x_0) \frac{\alpha^n}{1-\alpha} = 0 \qquad (i)$$

Además, por definición de métrica se tiene: $d(x_n, x_m) \geq 0$

de donde

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) \geq 0 \qquad (ii)$$

Se deduce de (*i*) y (*ii*):

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

luego, por la definición 1.4.2.1 $\{x_n\}$ es de Cauchy.

■

Lema 2.1.2: Sea $\{x_n\}$ una sucesión α-contracción en un espacio métrico completo (M, d) entonces $\{x_n\}$ converge a un punto de M.

Demostración:

Por el lema 2.1.1 $\{x_n\}$ es de Cauchy y como (M, d) es un espacio métrico completo, por el teorema 1.4.2.3 se tiene que $\{x_n\}$ converge a un punto de M.

■

2.2 Teorema del Punto Fijo de Banach.

Teorema 2.2.1: Sean (X, d) un espacio métrico completo y S: X → X una B-contracción.

Entonces se tiene que:

i) Para todo $x_0 \in$ X y $x_n = S^n(x_0)$, existe $z \in$ X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = z$.

ii) $F_S = \{z\}$.

iii) $d(x_n, z) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$.

iv) $d(x_{n+1}, z) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n+1}, x_n)$.

v) $d(x_{n+1}, z) \leq \alpha d(x_n, z)$.

Demostración i)

Sea $x_0 \in$ X y consideremos la sucesión:

$$x_1 = S(x_0),\ \ x_2 = S(x_1),\ \ x_3 = S(x_2),\ \ x_4 = S(x_4), \dots, x_{n+1} = S(x_n) \qquad (2.3)$$

Es decir, $x_n = S^n(x_0)$. Mostremos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Para ello, usando (2.3) y el hecho de que S es una B-contracción se tiene:

$$d(x_1, x_2) = d\big(S(x_0), S(x_1)\big) \leq \alpha d(x_0, x_1).$$

$$d(x_2, x_3) = d\big(S(x_1), S(x_2)\big) \leq \alpha^2 d(x_0, x_1).$$

$$d(x_3, x_4) = d\big(S(x_2), S(x_3)\big) \leq \alpha^3 d(x_0, x_1).$$

$$d(x_4, x_5) = d\big(S(x_3), S(x_4)\big) \leq \alpha^4 d(x_0, x_1).$$

Así, de manera inductiva se tiene la siguiente desigualdad:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1), \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad (2.4).$$

Ahora, sean m, n $\in$ $\mathbb{N}$ y supongamos que m $\geq$ n $\geq$ 1 es decir, existe h $\in \mathbb{N}$ tal que m = n + h.

Entonces:

$$d(x_n, x_{n+h}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \cdots + d(x_{n+h-1}, x_{n+h}).$$

$$\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + \alpha^{n+2} d(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{n+h-1} d(x_0, x_1).$$

$$= \alpha^n d(x_0, x_1)[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^{h-1}].$$

$$= \alpha^n d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{h-1} \alpha^i.$$

$$\leq \alpha^n d(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha}.$$

$$= \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x_0, x_1) \qquad (2.5)$$

Como $\alpha < 1$ entonces (2.5) converge a cero cuando $n \to \infty$, esto implica que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

En vista de que el espacio X es completo se tiene que existe $z \in$ X tal que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z.$$

■

Demostración ii)

Dado que S es una aplicación continua entonces:

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S(x_n) = S(\lim_{n\to\infty} x_n) = S(z).$$

Esto implica que $z \in F_S$.

Unicidad:

Supongamos que existe: y $\in$ X tal que $S(y) = y$.

Entonces:

$d(z, y) = d(S(z), S(y)) \leq \alpha d(z, y)$ (S es B-contracción)

$\Rightarrow d(z, y) \leq \alpha d(z, y)$ ($a < 1$)

$\Rightarrow (1 - a)d(z, y) \leq 0$ (despejando)

$\Rightarrow d(z, y) \leq \frac{0}{1-\alpha} = 0$

Así, por definición de métrica se tiene: z = y.

■

Demostración iii)

De (2.5) se tiene que:

$d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$. (2.6)

Luego, como $\lim_{m\to\infty} x_m = z$ y la función d es continua, se deduce de (2.6);

$d(x_n, z) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$.

■

Demostración iv)

Para toda n ∈ ℕ se tiene:

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d\big(S(x_n), S(x_{n+1})\big) \leq \alpha d(x_n, x_{n+1}).$$

$$\begin{aligned} d(x_{n+2}, x_{n+3}) &= d\big(S(x_{n+1}), S(x_{n+2})\big) \leq \alpha d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \alpha[\alpha d(x_n, x_{n+1})] \\ &= \alpha^2 d(x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

$$d(x_{n+3}, x_{n+4}) = d\big(S(x_{n+2}), S(x_{n+3})\big) \leq \alpha d(x_{n+2}, x_{n+3})$$
$$\leq \alpha[\alpha^2 d(x_n, x_{n+1})] = \alpha^3 d(x_n, x_{n+1}).$$

$$d(x_{n+4}, x_{n+5}) = d\big(S(x_{n+3}), S(x_{n+4})\big) \leq \alpha d(x_{n+3}, x_{n+4}) \leq \alpha[\alpha^3 d(x_n, x_{n+1})]$$
$$= \alpha^4 d(x_n, x_{n+1}).$$

Así, de manera general:

$$d(x_{n+m}, x_{n+m+1}) \leq \alpha^m d(x_n, x_{n+1}) \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N} \qquad (2.7)$$

Luego, para m ≥ 1:

$$d(x_{n+1}, x_{n+m+1}) \leq d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \cdots + d(x_{n+m}, x_{n+m+1}).$$

$$\leq \alpha d(x_n, x_{n+1}) + \alpha^2 d(x_n, x_{n+1}) + \alpha^3 d(x_n, x_{n+1}) + \cdots +$$
$$\alpha^m d(x_n, x_{n+1}).$$

$$= \alpha d(x_n, x_{n+1})[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^{m-1}].$$

$$= \alpha d(x_n, x_{n+1}) \textstyle\sum_{i=0}^{m-1} \alpha^i.$$

$$\leq \alpha d(x_n, x_{n+1}) \tfrac{1}{1-\alpha}.$$

$$= \tfrac{\alpha}{1-\alpha} d(x_n, x_{n+1}).$$

Así:

$$d(x_{n+1}, x_{n+m+1}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_n, x_{n+1}) \qquad (2.8)$$

Luego, tomando m → ∞ en (2.8) se tiene:

$$d(x_{n+1}, z) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_n, x_{n+1}) \qquad (2.9)$$

■

Demostración v)

$d(x_{n+1}, z) = d(S(x_n), S(z)) \leq \alpha d(x_n, z)$ (S es B-contracción)

■

Ejemplo 2.2.1:

Sean M espacio métrico completo y f: M→ M una función tal que, para un cierto $p \in \mathbb{N}$, $f^p = f \circ f \circ f \ldots \circ f$ (p factores) es una contracción en M.

Entonces f posee un único punto fijo $a \in$ M.

Prueba:

Como f^p es una contracción en un espacio métrico completo, en virtud del teorema del punto fijo de Banach existe un único $a \in$ M tal que $f^p(a) = a$, entonces:

$f(f^p(a)) = f(a) \Rightarrow f^{p+1}(a) = f(a).$

$\Rightarrow f^p(f(a)) = f(a).$

$\Rightarrow f(a)$ es un punto fijo de f^p.

Como el punto fijo de f^p es único, implica que $f(a) = a$.

■

2.3 Interpretación geométrica del Teorema del Punto Fijo de Banach.

Para enunciar el Teorema del punto fijo de Banach para el caso en el que el espacio métrico es $\mathbb{R}$, bajo la métrica usual, se empleará una generalización del Ejemplo 2.1.5:

Sea T: $[a, b] \rightarrow [a, b]$ una función diferenciable en $[a, b]$ tal que:

$$|T'(x)| \leq k < 1$$

para algún $k \in \mathbb{R}$. Entonces por el teorema del valor medio tenemos, que para cualesquiera $x, y \in [a, b]$ existe $c \in\,]a, b[$ tal que:

$$T(x) - T(y) = T'(c)(x - y),$$

entonces

$$|T(x) - T(y)| = |T'(c)||x - y| \leq k|x - y| \qquad k > 0.$$

Por lo tanto, T es una contracción en $[a, b]$.

De esta forma se tiene el siguiente enunciado:

"Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$ y g: $[a, b] \to [a, b]$ una función diferenciable tal que:

$$|g'(x)| \leq k < 1, \quad x \in [a, b].$$

Entonces:

i) Existe un único $x \in [a, b]$ punto fijo de g.
ii) Para cualquiera $x_0 \in [a, b]$ la sucesión iterada $x_n = g(x_{n-1})$; n = 1,2,... converge a x".

Para interpretar geométricamente el T.P.F.B. para el caso real, observemos que el ítem i) nos dice que $x = g(x)$ es decir si $y_1 = x$ es la función identidad y $y_2 = g(x)$ entonces el punto fijo x es un punto en el cual $y_1 = y_2$, es decir, $(x, g(x)) = (x, x)$ es la intersección de las gráficas de y_1 y y_2.

Para poder observar el comportamiento geométrico del T.P.F.B. en el plano, asumiremos que con la función continua g pueda ocurrir uno de los siguientes dos casos; que g sea creciente o que g sea decreciente. En ambos casos, como se observa en las Figuras 2.3.A y 2.3.B, obtendremos una curva llamada **quebrada iterada** y una **espiral hacia adentro** respectivamente.

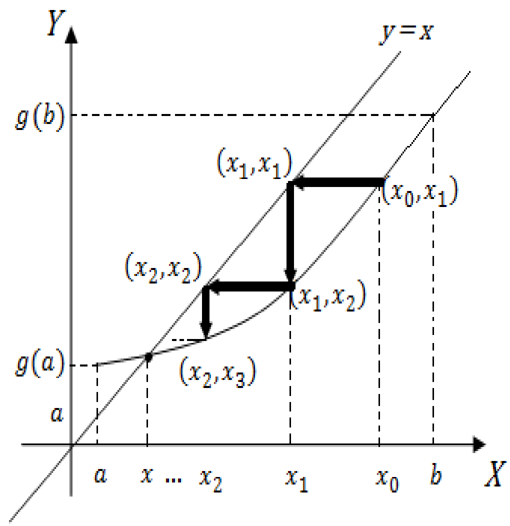


Figura 2.3.A

La función g es creciente es posible obtener una curva llamada **quebrada iterada** al acercarnos al punto fijo.

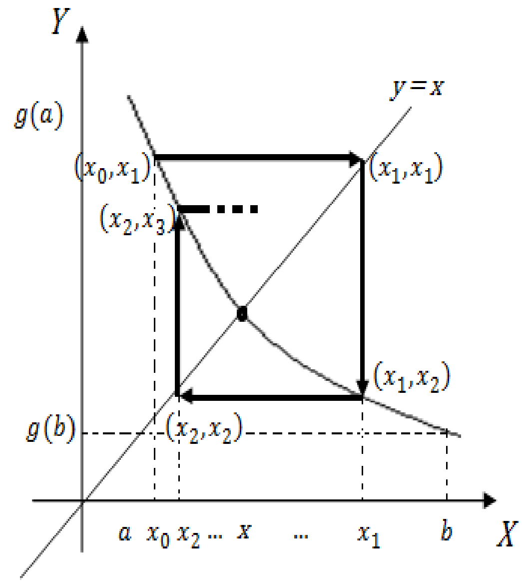


Figura 2.3.B

La función g es decreciente es posible obtener una curva llamada **espiral hacia adentro** al acercarnos al punto fijo.

Teorema 2.3.1:

Si T es una contracción, T es uniformemente continua.

Demostración:

Como T es una contracción, entonces T es una aplicación Lipschitziana y por tanto uniformemente continua (Teorema 2.1.2).

■

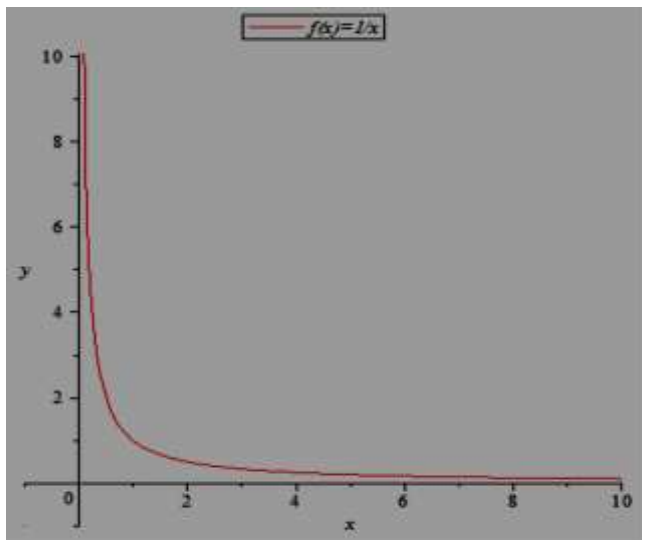
Observaciones:

1- En el Teorema 2.3.1 se vio que toda contracción es uniformemente continua, y por lo tanto continua. Ahora se plantea la siguiente interrogante:

¿Toda función continua es una contracción?

Para comprobar esto:

Defínase la función $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ por $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$, obsérvese su grafica



de donde es claro que *f* es continua en $\mathbb{R}_0^+$.

Supóngase que *f* es una contracción en $\mathbb{R}_0^+$, entonces por definición se tiene que para *x*, *y* arbitrarios ($x, y \in \mathbb{R}_0^+$); se cumple:

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

siempre que $0 \leq \alpha < 1$.

En particular reemplácese $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{5}$ en la desigualdad anterior y se obtiene:

$$\left| f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(\frac{1}{5}\right) \right| \leq \alpha \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right|.$$

$$|3-5| \leq \alpha \left|\frac{2}{15}\right|.$$

$$|2| \leq \alpha \left|\frac{2}{15}\right|.$$

$$15 \leq \alpha \quad (\rightarrow\leftarrow)$$

pues $0 \leq \alpha < 1$. Por lo tanto *f* no es una contracción en $\mathbb{R}_0^+$.

En consecuencia: **Una función continua no necesariamente es una contracción**.

2- En la Figura 2.3.C se muestra la gráfica de g en el caso cuando no se cumple la condición $|g'(x)| \leq k < 1$, es decir g no es una contracción en $[a, b]$. Esto desaparece la conclusión ii), por tanto existe el punto fijo, pero no tenemos convergencia de la sucesión iterada al punto fijo *x*.

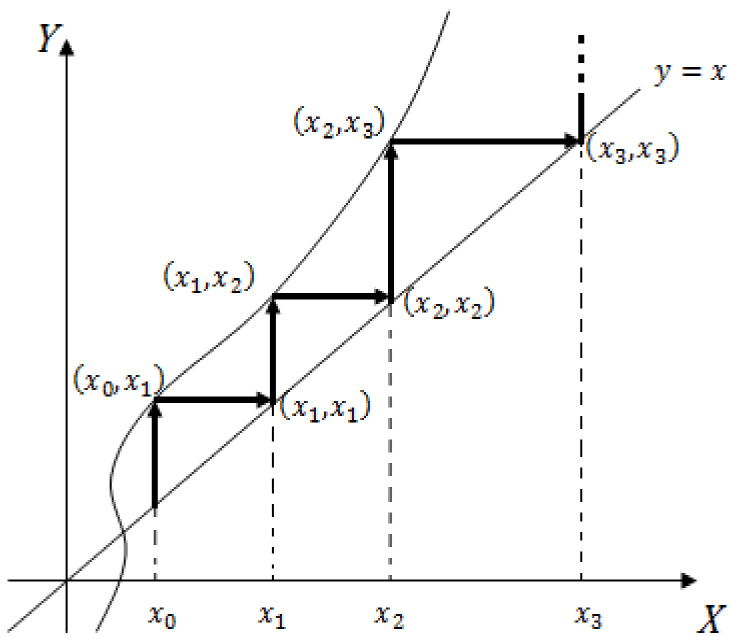


Figura 2.3.C

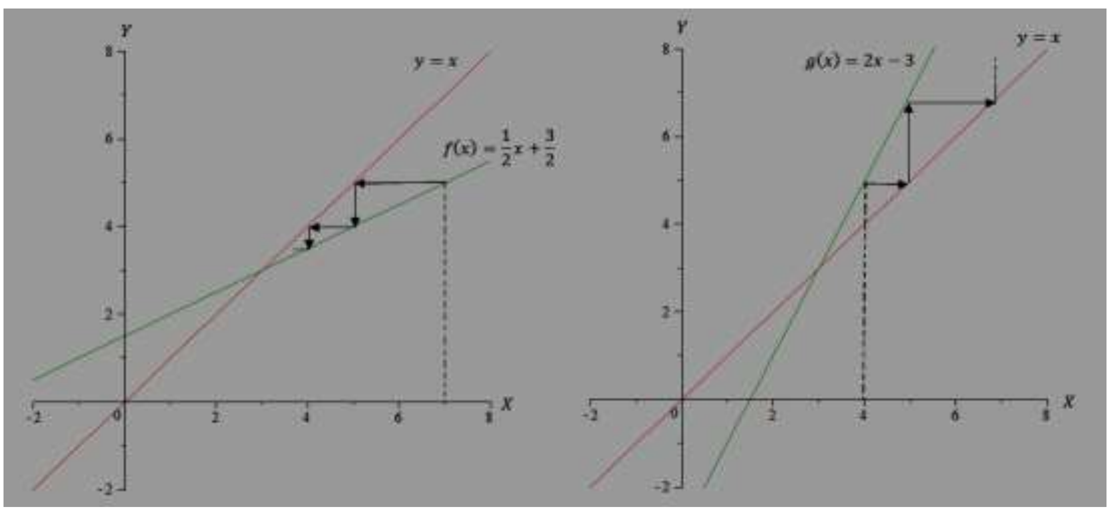
Para ilustrar mejor esto, véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3.1:

Sea las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2x - 3$.

Como $f(3) = g(3) = 3$, $x = 3$ es punto fijo de f y g; pero es claro que f es una contracción, puesto que $f'(x) = \frac{1}{2} \leq 1$, mientras la función g no lo es, ya que $g'(x) = 2 \nleq 1$.

Obsérvese sus respectivas graficas junto con la ilustración de las sucesiones iteradas:



3- En la Figura 2.3.D se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, se tiene el espacio métrico completo $\mathbb{R}$, pero no tenemos punto fijo, además f no es una contracción en $\mathbb{R}$.

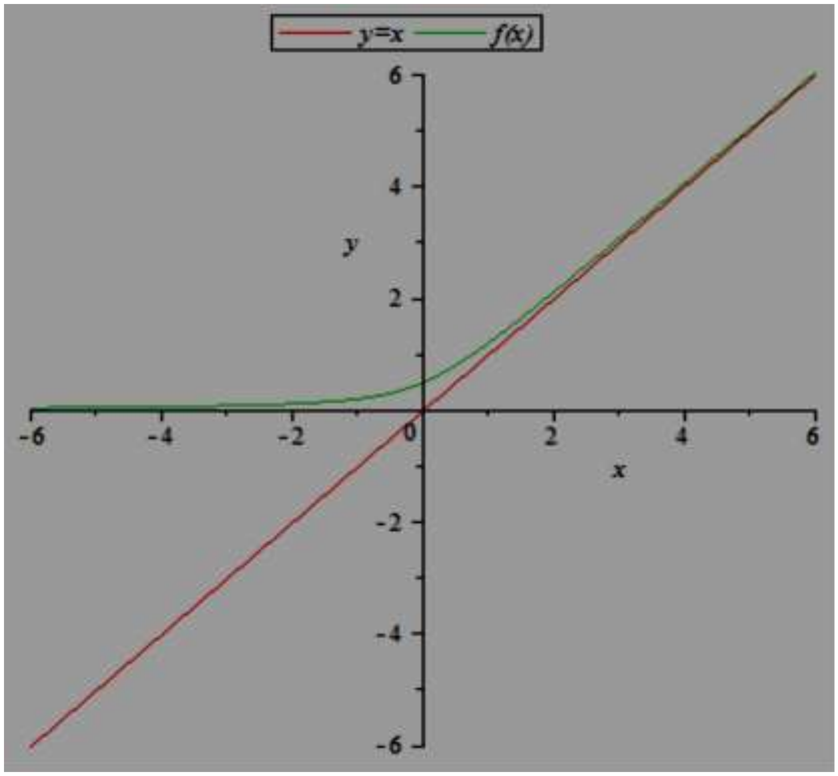


Figura 2.3.D

4- De las observaciones 2 y 3, se puede concluir que el Teorema del punto fijo para $\mathbb{R}$ sólo se cumple si se tiene las hipótesis dadas, la carencia de una de ellas, colapsa sus conclusiones.

5- Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3.2: Obsérvese que si $X \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y la aplicación f: $X \rightarrow X$ cumple para arbitrarios $x, y \in X$ con $x \neq y$, con la condición

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

Entonces f posee un único punto fijo en X.

Solución:

Sea $a \in X$ el punto donde la función continua $\varphi: X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = |x - f(x)|$$

posee su mínimo en $c = |a - f(a)|$.

- Si fuese $c \neq 0$, entonces se tendría $a \neq f(a)$, de donde

  $$\left|f(a) - f\big(f(a)\big)\right| < |a - f(a)|$$

  es decir, se tendría $\varphi\big(f(a)\big) < c$.

  Lo cual es una contradicción. Por tanto $c = 0$.

  Implicando que $a = f(a)$, es decir; a es un punto fijo de f en X.

- Si fuese $a = f(a)$ y $b = f(b)$ con $a \neq b$ resultaría

  $$|a - b| = |f(a) - f(b)| < |a - b|$$

  lo cual es absurdo. Por tanto a es el único punto fijo de f en X.

Con esto surge la siguiente pregunta:

¿Si X no es compacto y verifica la desigualdad $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, $\boldsymbol{f}$ poseerá un punto fijo en X?

Para comprobar esto:

$\mathbb{R}$ no es un compacto. Luego considérese la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

¿ f verifica la condición $|f(x) - f(y)| < |x - y|$?

Para arbitrarios $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, se tiene:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)\right|.$$

$$= \left|\frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + y^2}\ )\right|.$$

$$= \frac{1}{2}\left|(x - y) + (\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + y^2}\ )\right|.$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(|x - y| + \left|\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + y^2}\right|\right).$$

$$= \frac{1}{2}\left(|x - y| + \left|\left(\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + y^2}\right)\left(\frac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2}}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2}}\right)\right|\right).$$

$$= \frac{1}{2}\left(|x - y| + \left|\frac{(1 + x^2) - (1 + y^2)}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2}}\right|\right).$$

$$= \frac{1}{2}\left(|x - y| + \left|\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2}}\right|\right).$$

$$= \frac{1}{2}\left(|x - y| + \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2}}\right).$$

$$= \frac{1}{2}\left(|x - y| + \frac{|(x - y)(x + y)|}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2}}\right).$$

$$= \frac{1}{2}\left(|x - y| + \frac{|x - y||x + y|}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2}}\right).$$

$$= \frac{1}{2}|x - y|\left(1 + \frac{|x+y|}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Probaremos para arbitrarios x, $y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, que:

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}} < 1. \qquad \textbf{(2)}$$

Si se acepta este resultado, se tiene:

$$|x+y| < \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}.$$

$$|x+y|^2 < (\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2})^2.$$

$$x^2 + 2xy + y^2 < (1+x^2) + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} + (1+y^2).$$

$$2xy < 2 + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

$$xy < 1 + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

$$(xy-1)^2 < (\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)})^2.$$

$$x^2y^2 - 2xy + 1 < (1+x^2)(1+y^2).$$

$$x^2y^2 - 2xy + 1 < 1 + y^2 + x^2 + x^2y^2.$$

$$-2xy < y^2 + x^2.$$

$$-x^2 - 2xy - y^2 < 0.$$

$$x^2 + 2xy + y^2 > 0.$$

$$(x+y)^2 > 0.$$

Invirtiendo los pasos, se verifica la desigualdad (2)

Obsérvese que para cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, se descarta que:

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}} = 1$$

pues si en particular tomando $x = 0$ y $y = 1$ se obtiene:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1$$

lo cual es absurdo.

Todo lo anterior lo reemplazamos en (1), por lo cual f verifica la condición $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

¿ f posee punto fijo en $\mathbb{R}$?

Supóngase que f posee un punto fijo en $\mathbb{R}$, luego por definición se tiene que existe un $w \in \mathbb{R}$, tal que:

$$f(w) = w.$$

$$\frac{1}{2}\left(w + \sqrt{1+w^2}\right) = w.$$

$$w + \sqrt{1+w^2} = 2w.$$

$$\sqrt{1+w^2} = w.$$

$$(\sqrt{1+w^2})^2 = w^2.$$

$$1 + w^2 = w^2.$$

$$1 = 0 \quad \text{Absurdo!}$$

Nótese además que se cumple:

$$w < f(w).$$

Si esto es cierto:

$$w < \frac{1}{2}\left(w + \sqrt{1+w^2}\right).$$

$$2w < w + \sqrt{1 + w^2}.$$

$$w < \sqrt{1 + w^2}.$$

$$w^2 < \left(\sqrt{1 + w^2}\right)^2.$$

$$w^2 < 1 + w^2.$$

$$0 < 1.$$

Invirtiendo los pasos se prueba: $w < f(w)$.

Con lo cual f no posee punto fijo en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto:

Si X no es compacto y verifica la desigualdad $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, $\boldsymbol{f}$ no necesariamente poseerá un único punto fijo en X.

Para fijar ideas, obsérvese nuevamente la Figura 2.3.D de donde claramente se puede ver que las pruebas que se hicieron analíticamente son correctas.

Resaltemos que en esta demostración, se ha desarrollado un procedimiento alternativo de prueba a lo mostrado en el Ejemplo 2.3.2.

2.4 Algunas condiciones para que una función tenga un único punto fijo.

Teorema 2.4.1: Sea (M, d) un espacio métrico completo, T: M → M una función y $0 \leq \alpha < 1$ tal que para cada x, $y \in$ M se tiene que:

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, T(x)) \qquad (2.10)$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Sea $x_0 \in$ M un punto arbitrario.

Definimos una sucesión $\{x_n\} \subset$ M por, x_n = T(x_{n-1}), n = 1,2,... Ahora aplicando (2.10) se tiene:

$$d(x_1, x_2) = d(T(x_0), T(x_1)) \leq \alpha d(x_0, T(x_0))$$

así,

$$d(x_1, x_2) \leq \alpha d(x_0, x_1) \Rightarrow d(x_2, x_1) \leq \alpha d(x_1, x_0)$$

por otro lado,

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), T(x_2)) \leq \alpha d(x_1, T(x_1))$$

de esta manera,

$$d(x_2, x_3) \leq \alpha d(x_1, x_2) \Rightarrow d(x_3, x_2) \leq \alpha d(x_2, x_1)$$

luego, por inducción:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

así, por el lema 2.1.2 existe z $\in$ M tal que $x_n \rightarrow$z.

Véase que z es un punto fijo de T,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(x_n, T(z))$$

por lo tanto,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(z))$$

aplicando (2.10)

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + \alpha d(x_{n-1}, T(x_{n-1}))$$

tomando limite cuando n $\rightarrow \infty$ se obtiene

$$d(z, T(z)) \leq d(z, z) + \alpha d(z, T(z))$$

$$d(z, T(z)) \leq \alpha d(z, T(z))$$

luego,

$$d(z, T(z)) - \alpha d(z, T(z)) \leq 0$$

$$(1 - \alpha) d(z, T(z)) \leq 0$$

como $0 \leq \alpha < 1$ entonces $d(z, T(z)) \leq 0$ por lo tanto

$$T(z) = z.$$

Veamos que z es el único punto fijo de T.

En efecto, supongamos que $T(z^*) = z^*$ y $T(z) = z$ así,

$$d(z, z^*) = d(T(z), T(z^*)) \leq \alpha d(z, T(z)) = \alpha d(z, z) = 0$$

luego, $z = z^*$.

■

Corolario 2.4.1:

Sea (M, d) un espacio métrico completo, $T: M \rightarrow M$ una función y $0 \leq \alpha < 1$ tal que para cada $x, y \in M$ se satisface (2.10).

Si $y = T(x)$, entonces se tiene el Teorema del punto fijo de Banach.

Demostración:

Por la condición (2.10):

$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, T(x)) \Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$ (por hipótesis $y = T(x)$).

Por lo anterior se cumple la definición de B-contracción y además se cumple que (M, d) es un espacio métrico completo, con lo cual se tendrían las hipótesis del Teorema del punto fijo de Banach.

■

Teorema 2.4.2: Sea un espacio métrico completo, T: M → M una función y $0 \leq \alpha < 1$ tal que para cada $x, y \in M$ se tiene que:

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(y, T(y)) \qquad (2.11)$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario.

Defínase una sucesión $\{x_n\} \subset M$ por, $x_n = T(x_{n-1})$, n = 1,2,... Ahora aplicando (2.11):

$$d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1) = d(T(x_1), T(x_0)) \leq \alpha d(x_0, T(x_0))$$

así,

$$d(x_1, x_2) \leq \alpha d(x_0, x_1) \Rightarrow d(x_2, x_1) \leq \alpha d(x_1, x_0)$$

por otro lado,

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), T(x_2)) \leq \alpha d(x_2, T(x_2))$$

de esta manera,

$$d(x_2, x_3) \leq \alpha d(x_2, x_1) \Rightarrow d(x_3, x_2) \leq \alpha d(x_2, x_1)$$

luego, por inducción se obtiene

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

así, por el lema 2.1.2 existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$.

Veamos que z es un punto fijo de T,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(x_n, T(z))$$

por lo tanto,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(z))$$

aplicando (2.11)

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + \alpha d(z, T(z))$$

tomando limite cuando $n \to \infty$

$$d(z, T(z)) \leq d(z, z) + \alpha d(z, T(z))$$

$$d(z, T(z)) \leq \alpha d(z, T(z))$$

luego,

$$d(z, T(z)) - \alpha d(z, T(z)) \leq 0$$

$$(1 - \alpha) d(z, T(z)) \leq 0$$

como $0 \leq \alpha < 1$, entonces $d(z, T(z)) \leq 0$ por lo tanto

$$T(z) = z.$$

Véase que z es el único punto fijo de T.

En efecto, supongamos que $T(z^*) = z^*$ y $T(z) = z$ así,

$$d(z, z^*) = d(T(z), T(z^*)) \leq \alpha d(z^*, T(z^*)) = \alpha d(z^*, z^*) = 0$$

luego, $z = z^*$.

■

Teorema 2.4.3 (Teorema de Kannan):

Sea (M, d) un espacio métrico completo, T: M → M una función y $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ tal que para cada x, $y \in$ M se tiene que:

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] \qquad (2.12)$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Sea $x_0 \in$ M un punto arbitrario.

Definiendo una sucesión $\{x_n\} \subset$ M por, $x_n = T(x_{n-1})$, n = 1,2,... Ahora aplicando (2.12):

$$d(x_{n+1}, x_n) = d\big(T(x_n), T(x_{n-1})\big) \leq \alpha\big[d\big(x_n, T(x_n)\big) + d\big(x_{n-1}, T(x_{n-1})\big)\big] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n+1}) + \alpha d(x_{n-1}, x_n)$$

así,

$$d(x_{n+1}, x_n) - \alpha d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n)$$

$$d(x_{n+1}, x_n) - \alpha d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n)$$

$$(1 - \alpha) d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} d(x_n, x_{n-1}) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Como $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$

$\alpha < \frac{1}{2} \;\Rightarrow 2\alpha < 1.$

$\Rightarrow \alpha + \alpha < 1.$

$\Rightarrow \alpha < 1 - \alpha.$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha} < 1.$

Luego, por el lema 2.1.2 existe $z \in$ M tal que $x_n \to z$.

Veamos que z es un punto fijo de T,

$$d\big(z, T(z)\big) \leq d(z, x_n) + d(x_n, T(z))$$

por lo tanto,

$$d\big(z, T(z)\big) \leq d(z, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(z))$$

por (2.12) se tiene:

$$d\big(z, T(z)\big) \leq d(z, x_n) + \alpha\big[d\big(z, T(z)\big) + d(x_{n-1}, T(x_{n-1}))\big]$$

de esta manera,

$$d\big(z, T(z)\big) \leq d(z, x_n) + \alpha d\big(z, T(z)\big) + \alpha d(x_{n-1}, x_n)$$

luego,

$$d\big(z, T(z)\big) - \alpha d\big(z, T(z)\big) \leq d(z, x_n) + \alpha d(x_{n-1}, x_n)$$

$$(1 - \alpha) d\big(z, T(z)\big) \leq d(z, x_n) + \alpha d(x_{n-1}, x_n)$$

haciendo n $\to \infty$

$$(1 - \alpha) d\big(z, T(z)\big) \leq 0$$

como0 $\leq \alpha < \frac{1}{2}$, entonces, d(z, T(z)) $\leq$ 0 así,

$$T(z) = z.$$

Veamos que z es el único punto fijo de T.

En efecto, supongamos que $T(z^*) = z^*$ y $T(z) = z$ así,

$$d(z, z^*) = d(T(z), T(z^*)) \leq \alpha[d(z, T(z)) + d(z^*, T(z^*))] = \alpha[d(z, z) + d(z^*, z^*)] = 0$$

luego, $z = z^*$.

■

Teorema 2.4.4 (Teorema de Chatterjea):

Sea (M, d) un espacio métrico completo, y T: M → M una función para la cual existe $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ tal que:

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha[d(x, T(y)) + d(y, T(x))] \quad \forall\, x, y \in M \qquad (2.13)$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario.

Definimos una sucesión $\{x_n\} \subset M$ por, $x_n = T(x_{n-1})$, n = 1, 2, ...

Ahora aplicando (2.13):

$$d(x_{n+1}, x_n) = d\big(T(x_n), T(x_{n-1})\big) \leq \alpha\big[d\big(x_n, T(x_{n-1})\big) + d\big(x_{n-1}, T(x_n)\big)\big] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_n) + \alpha d(x_{n-1}, x_{n+1})$$

Así,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_{n+1})$$

Usando desigualdad triangular

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]$$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \alpha d(x_n, x_{n+1})$$

$$d(x_{n+1}, x_n) - \alpha d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n)$$

$$d(x_{n+1}, x_n) - \alpha d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n)$$

$$(1-\alpha) d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n)$$

$$d(x_n, x_{n+1},) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_n, x_{n-1}) \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Como $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$

$$\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha < 1$$

$$\Rightarrow \alpha + \alpha < 1$$

$$\Rightarrow \alpha < 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha} < 1$$

Luego, por el lema 2.1.2 existe $z \in$ M tal que $x_n \rightarrow z$.

Véase que z es un punto fijo de T,

$$d\big(z, T(z)\big) \leq d(z, x_n) + d(x_n, T(z))$$

por lo tanto,

$$d\big(z, T(z)\big) \leq d(z, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(z))$$

por (2.13) se tiene:

$$d\big(z, T(z)\big) \leq d(z, x_n) + \alpha\Big[d\big(x_{n-1}, T(z)\big) + d(z, T(x_{n-1}))\Big]$$

de esta manera,

$$d\big(z, T(z)\big) \leq d(z, x_n) + \alpha d\big(x_{n-1}, T(z)\big) + \alpha d(z, x_n)$$

haciendo n → ∞ se obtiene

$$d\big(z, T(z)\big) \leq \alpha d\big(z, T(z)\big)$$

$$d\big(z, T(z)\big) - \alpha d\big(z, T(z)\big) \leq 0$$

$$(1 - \alpha) d\big(z, T(z)\big) \leq 0$$

como$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, entonces, $d(z, T(z)) \leq 0$ así,

$$T(z) = z.$$

Véase que z es el único punto fijo de T.

En efecto, supongamos que $T(z^*) = z^*$ y $T(z) = z$ así,

$$d(z, z^*) = d(T(z), T(z^*)) \leq \alpha[d(z, T(z^*)) + d(z^*, T(z))]$$

$$= \alpha[d(z, z^*) + d(z^*, z)]$$

$$= 2\alpha\, d(z, z^*)$$

de donde, $$d(z, z^*) \leq 2\alpha\, d(z, z^*)$$

así, $$d(z, z^*) - 2\alpha\, d(z, z^*) \leq 0$$

$$(1 - 2\alpha) d(z, z^*) \leq 0$$

por tanto $d(z, z^*) \leq 0$, luego, $z = z^*$.

■

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de los teoremas 2.2.1 y 2.4.1.

Teorema 2.4.5: Sea (M, d) un espacio métrico completo, T: M $\rightarrow$ M una función y $0 \leq \alpha < 1$ tal que para cada x, $y \in$ M se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. $d(T(x),T(y)) \leq \alpha d(x, y)$.
2. $d(T(x),T(y)) \leq \alpha d(x, T(x))$.
3. $d(T(x),T(y)) \leq \alpha d(y, T(y))$.
4. $d(T(x),T(y)) \leq \frac{\alpha}{2}[d(x, T(y)) + d(y, T(x))]$.

entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Si se cumple la condición 1, es posible aplicar el Teorema del punto fijo de Banach (Teorema 2.2.1) con lo cual T tiene un único punto fijo.

Si se cumple la condición 2, es posible aplicar el Teorema 2.4.1, con lo cual T tiene un único punto fijo.

Si se cumple la condición 3, es posible aplicar el Teorema 2.4.2, con lo cual T tiene un único punto fijo.

Si se cumple la condición 4:

$0 \leq \alpha < 1 \;\Rightarrow \frac{0}{2} \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow 0 \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$

Por tanto

$$\frac{\alpha}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

De esta forma es posible aplicar el Teorema 2.4.4, con lo cual T tiene un único punto fijo.

∎

Teorema 2.4.6 (Teorema de S. Riech):

Sea (M, d) un espacio métrico completo, T: M → M una función y a, b, c $\in \mathbb{R}_0^+$, $(a + b + c) < 1$ tal que para cada $x, y \in$ M se tiene que:

$$\mathrm{d}(\mathrm{T}(x), \mathrm{T}(y)) \leq a\mathrm{d}(x, \mathrm{T}(x)) + b\mathrm{d}(y, \mathrm{T}(y)) + c\mathrm{d}(x, y) \qquad (2.14)$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Sea $x_0 \in$ M un punto arbitrario y consideremos una sucesión $\{x_n\} \subset$ M definida por, $x_n = \mathrm{T}^n(x_0)$, n = 1, 2,... Ahora aplicando (2.14) para $x = \mathrm{T}^n(x_0)$ e $y = \mathrm{T}^{n-1}(x_0)$ se tiene

$$d\left(T\big(T^n(x_0)\big), T\big(T^{n-1}(x_0)\big)\right)$$
$$\leq ad\left(T^n(x_0), T\big(T^n(x_0)\big)\right) + bd\left(T^{n-1}(x_0), T\big(T^{n-1}(x_0)\big)\right)$$
$$+cd(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0))$$

por lo tanto,

$$d\left(T\big(T^n(x_0)\big), T\big(T^{n-1}(x_0)\big)\right) \leq ad\left(T\big(T^{n-1}(x_0)\big), T\big(T^n(x_0)\big)\right)$$
$$+bd\left(T^{n-1}(x_0), T\big(T^{n-1}(x_0)\big)\right) + cd\Big(T\big(T^{n-1}(x_0)\big), T^{n-1}(x_0)\Big).$$

$$d\left(T\big(T^n(x_0)\big), T\big(T^{n-1}(x_0)\big)\right) - ad\left(T\big(T^n(x_0)\big), T\big(T^{n-1}(x_0)\big)\right)$$
$$\leq bd\left(T^{n-1}(x_0), T\big(T^{n-1}(x_0)\big)\right) + cd\left(T^{n-1}(x_0), T\big(T^{n-1}(x_0)\big)\right).$$

$$(1-a)d\left(T\left(T^{n}(x_0)\right),T\left(T^{n-1}(x_0)\right)\right)\leq (b+c)d\left(T^{n-1}(x_0),T\left(T^{n-1}(x_0)\right)\right).$$

$$d\left(T\left(T^{n}(x_0)\right),T\left(T^{n-1}(x_0)\right)\right)\leq \frac{(b+c)}{(1-a)}d\left(T^{n-1}(x_0),T\left(T^{n-1}(x_0)\right)\right).$$

$$d\left(T^{n+1}(x_0),T^{n}(x_0)\right)\leq \frac{(b+c)}{(1-a)}d\left(T^{n-1}(x_0),T^{n}(x_0)\right).$$

$$d\left(T^{n+1}(x_0),T^{n}(x_0)\right)\leq \frac{(b+c)}{(1-a)}d\left(T^{n}(x_0),T^{n-1}(x_0)\right).$$

luego, por definición de la sucesión se obtiene

$$d(x_{n+1},x_n)\leq \frac{b+c}{1-a}d(x_n,x_{n-1}).$$

Como $(a + b + c) < 1$

$(a + b + c) < 1 \Rightarrow b + c < 1 - a.$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{1-a} < 1.$$

Luego, por el lema 2.1.2 existe $z \in$ M tal que $x_n \to z$.

Véase que z es un punto fijo de T,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(x_n, T(z))$$

por lo tanto,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(z))$$

por (2.14),

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + a\,d(x_{n-1},T(x_{n-1})) + b\,d(z, T(z)) + c\,d(x_{n-1}, z)$$

$$d(z, T(z)) - b\,d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + a\,d(x_{n-1},T(x_{n-1})) + c\,d(x_{n-1}, z)$$

$$(1 - b)\, d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + a d(x_{n-1}, x_n) + c d(x_{n-1}, z)$$

haciendo $n \to \infty$, se obtiene

$$(1 - b) d(z, T(z)) \leq 0$$

como $(a + b + c) < 1$ entonces, $d(z, T(z)) \leq 0$ luego,

$$T(z) = z.$$

Véase la unicidad.

Supóngase que $T(z^*) = z^*$ y $T(z) = z$ así,

$$d(z, z^*) = d(T(z), T(z^*)) \leq a d(z, T(z)) + b d(z^*, T(z^*)) + c d(z, z^*)$$

$$d(z, z^*) \leq a d(z, z) + b d(z^*, z^*) + c d(z, z^*)$$

$$d(z, z^*) \leq c d(z, z^*)$$

$$d(z, z^*) - c d(z, z^*) \leq 0$$

$$(1- c) d(z, z^*) \leq 0$$

de esta manera,

$$z = z^*.$$

■

Corolario 2.4.2: Sea (M, d) un espacio métrico completo.

Si tomamos en la condición (2.14), $a = b = 0$ entonces obtenemos el Teorema del punto fijo de Banach.

Demostración:

La condición (2.14) es:

$d(T(x), T(y)) \leq a d(x, T(x)) + b d(y, T(y)) + c d(x, y)$.

$a = b = 0 \Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq 0 d(x, T(x)) + 0 d(y, T(y)) + c d(x, y)$

$\Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq c d(x, y)$

Además por hipótesis $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ y $(a + b + c) < 1$; tomando $a = b = 0$ se deduce $0 \leq c < 1$.

Por lo que se cumple la definición de B-contracción y además se cumple que (M, d) es un espacio métrico completo, con lo cual se tendrían las hipótesis del Teorema del punto fijo de Banach.

■

Corolario 2.4.3: Sea (M, d) un espacio métrico completo.

Tomando en la condición (2.14), $a = b$ y $c = 0$ entonces obtenemos el Teorema 2.4.3.

Demostración:

La condición (2.14) es:

$d(T(x), T(y)) \leq a d(x, T(x)) + b d(y, T(y)) + c d(x, y)$.

$a = b$ y $c = 0 \Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq a d(x, T(x)) + a d(y, T(y)) + 0 d(x, y)$.

$\Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq a d(x, T(x)) + a d(y, T(y))$.

$\Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq a[d(x, T(x)) + d(y, T(y))]$.

Además por hipótesis a, b, $c \in \mathbb{R}_0^+$ y $(a + b + c) < 1$; tomando $a = b$ y $c = 0$ se obtiene:

$(a + b + c) < 1 \Rightarrow (a + a + 0) < 1.$

$\Rightarrow 2a < 1.$

$\Rightarrow a < \frac{1}{2}.$

Por lo cual $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ y como (M, d) un espacio métrico completo, se tendrían las hipótesis de Teorema 2.4.3.

■

Teorema 2.4.7 (Teorema de Rus):

Sea (M, d) un espacio métrico completo, T: M → M una función y a, $b \in \mathbb{R}_0^+$, $(a + 2b) < 1$ tal que para cada $x, y \in$ M se tiene que:

$$d(T(x),T(y)) \leq a d(x, y) + b[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] \qquad (2.15)$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración:

La demostración es análoga a la del teorema 2.4.6 ya que escribimos la condición (2.15) de la siguiente manera

$$d(T(x), T(y)) \leq a d(x, y) + b d(x, T(x)) + b d(y, T(y))$$

y $\quad a + b + b = a + 2b < 1.$

■

Teorema 2.4.8 (Teorema de Hardy-Rogers):

Sea (M, d) un espacio métrico completo, T: M → M una función y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}_0^+$, $\alpha = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$ tal que para cada $x, y \in$ M se tiene que:

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha_1 d(x, T(x)) + \alpha_2 d(y, T(y)) + \alpha_3 d(x, T(y)) + \alpha_4 d(y, T(x)) + \alpha_5 d(x, y) \quad (2.16)$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Sea $x_0 \in$ M un punto arbitrario y consideremos una sucesión $\{x_n\} \subset$ M definida por, $x_n = T^n(x_0)$, n = 1,2,... Ahora aplicando (2.16) para $x = T^n(x_0)$ e $y = T^{n-1}(x_0)$ se tiene,

$$\begin{aligned} d\big(T\big(T^n(x_0)\big), T(T^{n-1}(x_0))\big) \\ &\leq \alpha_1 d(T^n(x_0), T(T^n(x_0))) + \alpha_2 d(T^{n-1}(x_0), T(T^{n-1}(x_0))) \\ &+ \alpha_3 d(T^n(x_0), T(T^{n-1}(x_0))) + \alpha_4 d(T^{n-1}(x_0), T(T^n(x_0))) \\ &+ \alpha_5 d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} d\big(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)\big) \\ &\leq \alpha_1 d\big(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)\big) + \alpha_2 d\big(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)\big) \\ &+ \alpha_3 d\big(T^n(x_0), T^n(x_0)\big) + \alpha_4 d\big(T^{n-1}(x_0), T^{n+1}(x_0)\big) \\ &+ \alpha_5 d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\big(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)\big) \\ &\leq \alpha_1 d\big(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)\big) + \alpha_2 d\big(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)\big) \\ &+ \alpha_3 d\big(T^n(x_0), T^n(x_0)\big) + \alpha_4 d\big(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)\big) \\ &+ \alpha_4 d\big(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)\big) + \alpha_5 d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)). \end{aligned}$$

$$d\big(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)\big) - \alpha_1 d\big(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)\big) - \alpha_4 d\big(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)\big)$$
$$\leq +\alpha_2 d\big(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)\big) + \alpha_4 d\big(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)\big)$$
$$+ \alpha_5 d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)).$$

$$d\big(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)\big) - \alpha_1 d\big(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)\big) - \alpha_4 d\big(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)\big)$$
$$\leq \alpha_2 d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)) + \alpha_4 d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0))$$
$$+ \alpha_5 d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)).$$

$$(1 - \alpha_1 - \alpha_4) d\big(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)\big) \leq (\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5) d\big(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)\big).$$

$$d\big(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)\big) \leq \frac{(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)}{(1 - \alpha_1 - \alpha_4)} d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)).$$

Usando la definición de sucesión:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)}{(1 - \alpha_1 - \alpha_4)} d(x_n, x_{n-1}).$$

Como $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$ entonces $\frac{(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)}{(1-\alpha_1-\alpha_4)} < 1$.

Luego, por el lema 2.1.2 existe $z \in$ M tal que $x_n \to z$.

Véase que z es un punto fijo de T,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(x_n, T(z))$$

por lo tanto,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(z))$$

por (2.16):

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_n) + \alpha_1 d(x_{n-1},T(x_{n-1})) + \alpha_2 d(z,T(z)) + \alpha_3 d(x_{n-1},T(z)) + \alpha_4 d(z,T(x_{n-1})) + \alpha_5 d(x_{n-1},z).$$

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_n) + \alpha_1 d(x_{n-1},T(x_{n-1})) + \alpha_2 d(z,T(z)) + \alpha_3 d(x_{n-1},z) + \alpha_3 d(z,T(z)) + \alpha_4 d(z,T(x_{n-1})) + \alpha_5 d(x_{n-1},z).$$

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_n) + \alpha_1 d(x_{n-1},T(x_{n-1})) + \alpha_2 d(z,T(z)) + \alpha_3 d(x_{n-1},z) + \alpha_3 d(z,T(z)) + \alpha_4 d(z,T(x_{n-1})) + \alpha_5 d(x_{n-1},z),$$

haciendo $n \to \infty$

$$d(z, T(z)) \leq \alpha_1 d(z, T(z)) + \alpha_2 d(z, T(z)) + \alpha_3 d(z, T(z)) + \alpha_4 d(z, T(z)).$$

$$d(z, T(z)) - \alpha_1 d(z, T(z)) - \alpha_2 d(z, T(z)) - \alpha_3 d(z, T(z)) - \alpha_4 d(z, T(z)) \leq 0.$$

$$(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4) d(z, T(z)) \leq 0,$$

como $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$, entonces, $d(z, T(z)) \leq 0$ así,

$$T(z) = z.$$

Véase la unicidad para z.

Supóngase que $T(z^*) = z^*$ y $T(z) = z$ así, por (2.16):

$$d(z, z^*) = d(T(z),T(z^*)) \leq \alpha_1 d(z, T(z)) + \alpha_2 d(z^*,T(z^*)) + \alpha_3 d(z, T(z^*)) + \alpha_4 d(z^*, T(z)) + \alpha_5 d(z, z^*).$$

$$d(z, z^*) \leq \alpha_1 d(z, z) + \alpha_2 d(z^*, z^*) + \alpha_3 d(z, z^*) + \alpha_4 d(z^*, z) + \alpha_5 d(z, z^*).$$

$$d(z, z^*) \leq \alpha_3 d(z, z^*) + \alpha_4 d(z^*, z) + \alpha_5 d(z, z^*).$$

$$d(z, z^*) - \alpha_3 d(z, z^*) - \alpha_4 d(z, z^*) - \alpha_5 d(z, z^*) \leq 0.$$

$$(1 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5) d(z, z^*) \leq 0,$$

como $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$ entonces, $d(z, z^*) \leq 0$, luego, $z = z^*$.

■

Corolario 2.4.4: Sea (M, d) un espacio métrico completo.

Si tomamos en la condición (2.16), $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ entonces obtenemos el Teorema del punto fijo de Banach.

Demostración:

De la condición (2.16):

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha_1 d(x, T(x)) + \alpha_2 d(y, T(y)) + \alpha_3 d(x, T(y)) + \alpha_4 d(y, T(x)) + \alpha_5 d(x, y).$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \Rightarrow d(T(x), T(y)) &\leq 0d(x, T(x)) + 0d(y, T(y)) + 0d(x, T(y)) \\ &\quad + 0d(y, T(x)) + \alpha_5 d(x, y) \\ \Rightarrow d(T(x), T(y)) &\leq \alpha_5 d(x, y) \end{aligned}$$

Además por hipótesis $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}_0^+$, $\alpha = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$; tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ se deduce $0 \leq \alpha_5 < 1$. Por lo que se cumple la definición de B-contracción y además se cumple que (M, d) un espacio métrico completo, con lo cual se tendrían las hipótesis del Teorema del punto fijo de Banach.

■

Corolario 2.4.5: Sea (M, d) un espacio métrico completo.

Tomando en la condición (2.16), $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ entonces obtenemos el Teorema 2.4.1.

Demostración:

De la condición (2.16):

$d(T(x), T(y)) \leq \alpha_1 d(x, T(x)) + \alpha_2 d(y, T(y)) + \alpha_3 d(x, T(y)) + \alpha_4 d(y, T(x)) + \alpha_5 d(x, y).$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0 \Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq \alpha_1 d(x, T(x)) + 0d(y, T(y)) + 0d(x, T(y)) + 0d(y, T(x)) + 0d(x, y).$$

$$\Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq \alpha_1 d(x, T(x)).$$

Además por hipótesis $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}_0^+$, $\alpha = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$; tomando $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ se deduce $0 \leq \alpha_1 < 1$ y como (M, d) un espacio métrico completo se tendrían las hipótesis del Teorema 2.4.1.

■

Corolario 2.4.6: Sea (M, d) un espacio métrico completo.

Si tomamos en la condición (2.16), $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ entonces obtenemos el Teorema 2.4.6.

Demostración:

De la condición (2.16):

$d(T(x), T(y)) \leq \alpha_1 d(x, T(x)) + \alpha_2 d(y, T(y)) + \alpha_3 d(x, T(y)) + \alpha_4 d(y, T(x)) + \alpha_5 d(x, y).$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = 0 \Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq \alpha_1 d(x, T(x)) + \alpha_2 d(y, T(y)) + 0d(x, T(y)) + 0d(y, T(x)) + \alpha_5 d(x, y).$$

$$\Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq \alpha_1 d(x, T(x)) + \alpha_2 d(y, T(y)) + \alpha_5 d(x, y).$$

Además por hipótesis $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}_0^+$, $\alpha = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$; tomando $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ se deduce $0 \leq (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5) < 1$ y como (M, d) un espacio métrico completo se tendrían las hipótesis del Teorema 2.4.6.

■

Corolario 2.4.7: Sea (M, d) un espacio métrico completo.

Considerando en la condición (2.16) $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ y $\alpha_1 = \alpha_2$ entonces obtenemos el Teorema 2.4.3.

Demostración:

De la condición (2.16):

$d(T(x), T(y)) \leq \alpha_1 d(x, T(x)) + \alpha_2 d(y, T(y)) + \alpha_3 d(x, T(y)) + \alpha_4 d(y, T(x)) + \alpha_5 d(x, y).$

$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ y $\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq \alpha_1 d(x, T(x)) + \alpha_1 d(y, T(y)).$

$$\Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq \alpha_1 [d(x, T(x)) + d(y, T(y))].$$

Además por hipótesis $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}_0^+$, $\alpha = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$; tomando $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ y $\alpha_1 = \alpha_2$ se tiene:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 < 1 \ \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_1 + 0 + 0 + 0 < 1.$

$$\Rightarrow 2\alpha_1 < 1.$$

$$\Rightarrow \alpha_1 < \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \alpha_1 < \frac{1}{2}.$$

Como (M, d) un espacio métrico completo se tendrían las hipótesis del Teorema 2.4.3.

■

Teorema 2.4.9: Sea (M, d) un espacio métrico completo, y T: M → M una función para la cual existen a, b, $c \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $(a + 2b + 2c) < 1$ y

$$d(T(x),T(y)) \leq a d(x, y) + b[d(y, T(x)) + d(y, T(y))] + c[d(x, T(y)) + d(y, T(x))] \qquad (2.17)$$

$\forall\, x, y \in M$ entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Este teorema es una consecuencia del teorema anterior 2.4.8; ya que se escribe la condición (2.17) de la siguiente forma:

$$d(T(x),T(y)) \leq a d(x, y) + b d(y, T(x)) + b d(y, T(y)) + c d(x, T(y)) + c d(y, T(x))$$

y $a + b + b + c + c = (a + 2b + 2c) < 1$.

■

Teorema 2.4.10: Sea (M, d) un espacio métrico completo, y T: M → M una función para la cual existen a, $b \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $(a + 2b) < 1$ y

$$d(T(x),T(y)) \leq a \text{ máx}\{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y))\} + b[d(x, T(y)) + d(y, T(x))] \qquad (2.18)$$

$\forall\, x, y \in M$ entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Sea $A = \text{máx}\{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y))\}$.

Caso 1: $A = d(x, y)$.

Si $A = d(x, y)$ entonces de la condición (2.18):

$$d(T(x),T(y)) \leq a d(x, y) + b[d(x, T(y)) + d(y, T(x))].$$

$$\Rightarrow d(T(x),T(y)) \leq a d(x, y) + b d(x, T(y)) + b d(y, T(x)).$$

$$\Rightarrow d(T(x),T(y)) \leq 0 d(x, T(x)) + 0 d(y, T(y)) + b d(x, T(y)) + b d(y, T(x)) + a d(x, y).$$

Luego aplicando el Teorema 2.4.8 se concluye que T tiene un único punto fijo.

Caso 2: $A = d(x, T(x))$.

Si $A = d(x, T(x))$ entonces de la condición (2.18):

$d(T(x),T(y)) \leq a d(x, T(x)) + b[d(x, T(y)) + d(y, T(x))]$.

$\Rightarrow d(T(x),T(y)) \leq a d(x, T(x)) + b d(x, T(y)) + b d(y, T(x))$.

$\Rightarrow d(T(x),T(y)) \leq a d(x, T(x)) + 0 d(y, T(y)) + b d(x, T(y)) + b d(y, T(x)) + 0 d(x, y)$.

Luego aplicando el Teorema 2.4.8 se concluye que T tiene un único punto fijo.

Caso 3: $A = d(y, T(y))$.

Si $A = d(y, T(y))$ entonces de la condición (2.18):

$d(T(x),T(y)) \leq a d(y, T(y)) + b[d(x, T(y))+d(y, T(x))]$.

$\Rightarrow d(T(x),T(y)) \leq a d(y, T(y)) + b d(x, T(y)) + b d(y, T(x))$.

$\Rightarrow d(T(x),T(y)) \leq 0 d(x, T(x)) + a d(y, T(y)) + b d(x, T(y)) + b d(y, T(x)) + 0 d(x, y)$.

Luego aplicando el Teorema 2.4.8 se concluye que T tiene un único punto fijo.

■

Teorema 2.4.11: Sea (M, d) un espacio métrico completo, y $T: M \to M$ una función para la cual existe $a \in [0, \frac{1}{2})$ tal que:

$$d(T(x), T(y)) \leq a \text{ máx}\{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y)), \tfrac{1}{2}[d(x, T(y)) + d(y, T(x))]\} \quad (2.19)$$

$\forall x, y \in M$ entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Sea A = máx{d(x, y), d(x, T(x)),d(y, T(y)),$\frac{1}{2}$ [d(x,T(y))+d(y, T(x)]}.

Caso 1: A = d(x, y).

Si A = d(x, y) entonces de la condición (2.19):

d(T(x),T(y)) ≤ ad(x, y).

Es decir que T es una contracción ya que $a \in [0, \frac{1}{2})$.

Luego aplicando el Teorema 2.2.1 (Teorema del punto fijo de Banach) se concluye que T tiene un único punto fijo.

Caso 2: A = d(x, T(x)).

Si A = d(x, T(x)) entonces de la condición (2.19):

d(T(x), T(y)) ≤ ad(x, T(x)) .

Luego aplicando el Teorema 2.4.1 y se concluye que T tiene un único punto fijo.

Caso 3: A = d(y, T(y)).

Si A = d(y, T(y)) entonces de la condición (2.19):

d(T(x),T(y)) ≤ ad(y, T(y)) .

Luego aplicando el Teorema 2.4.2 y se concluye que T tiene un único punto fijo.

Caso 4: A = $\frac{1}{2}$[d(x, T(y) + d(y, T(x)].

Si A = $\frac{1}{2}$[d(x, T(y) + d(y, T(x)] entonces de la condición (2.19):

d(T(x),T(y)) ≤ $\frac{a}{2}$ [d(x, T(y) + d(y, T(x)]   (a)

Luego, $0 \leq a < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{a}{2} < \frac{1}{4}$.

Sea $a_1 = \frac{a}{2}$

de la condición (a):

$$d(T(x),T(y)) \leq a_1[d(x, T(y) + d(y, T(x)]$$

por otro lado: $a_1 \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow a_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

Luego aplicando el Teorema 2.4.4 se concluye que T tiene un único punto fijo

■

Teorema 2.4.12: Sea (M, d) un espacio métrico completo, y T: M → M una función tal que existe $a \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $a < 1$ y

$$d(T^2(x), T(y)) \leq a d(x, T(y)) \ \forall\, x, y \in M \qquad (2.20)$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Sea $x_0 \in$ M un punto arbitrario y consideremos una sucesión $\{x_n\} \subset$ M definida por, $x_n = T(x_{n-1})$, n = 1,2,... Ahora aplicando (2.20) para $x = x_{n-1}$ y $y = x_{n-1}$:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) = d(T^2(x_{n-1}), T(x_{n-1})) \leq ad(x_{n-1}, T(x_{n-1}))$$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq ad(x_{n-1}, T(x_{n-1}))$$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq ad(x_{n-1}, x_n)$$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq ad(x_n, x_{n-1}) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Luego, por el lema 2.1.2 existe $z \in$ M tal que $x_n \to z$.

Demuéstrese que z es un punto fijo de T, para ello estímese

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{n+1}) + d(x_{n+1},T(z)) = d(z,x_{n+1}) + d(T(x_n),T(z))$$

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{n+1}) + d(T^2(x_{n-1}),T(z)) \leq d(z,x_{n+1}) + ad(x_{n-1},T(z))$$

por lo tanto,

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{n+1}) + ad(x_{n-1},T(z))$$

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{n+1}) + a[d(x_{n-1},z) + d(z,T(z))]$$

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{n+1}) + ad(x_{n-1},z) + ad(z,T(z))$$

$$d(z,T(z)) - ad(z,T(z)) \leq d(z,x_{n+1}) + ad(x_{n-1},z)$$

$$(1-a)d(z,T(z)) \leq d(z,x_{n+1}) + ad(x_{n-1},z)$$

de esta manera haciendo n $\rightarrow \infty$

$$(1-a)d\big(z,T(z)\big) \leq 0.$$

Luego, T(z) = z.

Para la unicidad, supóngase que existe otro punto fijo, es decir,

T(z*) = z* para z* ∈ M y probemos que z = z*. En efecto,

$$d(z, z^*) = d(T(z),T(z^*)) = d(T^2(z),T(z^*)) \leq ad(z, T(z^*)) = ad(z, z^*)$$

$$d(z, z^*) \leq ad(z, z^*)$$

$$d(z, z^*) - ad(z, z^*) \leq 0$$

$$(1-a)d(z, z^*) \leq 0$$

así, z = z*. De esta manera se tiene que T tiene un único punto fijo.

■

Teorema 2.4.13: Sea (M, d) un espacio métrico completo, y T: M → M una función para la cual existe $a \in [0,1)$ tal que:

$$d\big(T(x),T(y)\big) \leq a\,\frac{d\big(x,T(x)\big)d\big(x,T(y)\big)+d\big(y,T(y)\big)d\big(y,T(x)\big)}{d\big(x,T(y)\big)+d\big(y,T(x)\big)} \qquad (2.21)$$

$\forall x, y \in$ M entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Sea $x_0 \in$ M un punto arbitrario y consideremos una sucesión $\{x_n\} \subset$ M definida por, $x_n = T(x_{n-1})$, n = 1,2,... Ahora aplicando (2.21) para $x = x_n$ y $y = x_{n-1}$ se tiene,

$$d\big(T(x_n),T(x_{n-1})\big) \leq a\,\frac{d\big(x_n,T(x_n)\big)d\big(x_n,T(x_{n-1})\big)+d\big(x_{n-1},T(x_{n-1})\big)d\big(x_{n-1},T(x_n)\big)}{d\big(x_n,T(x_{n-1})\big)+d\big(x_{n-1},T(x_n)\big)}.$$

$$d(x_{n+1},x_n) \leq a\,\frac{d(x_n,x_{n+1})d(x_n,x_n)+d(x_{n-1},x_n)d(x_{n-1},x_{n+1})}{d(x_n,x_n)+d(x_{n-1},x_{n+1})}.$$

$$d(x_{n+1},x_n) \leq a\,\frac{d(x_{n-1},x_n)d(x_{n-1},x_{n+1})}{d(x_{n-1},x_{n+1})}.$$

$$d(x_{n+1},x_n) \leq ad(x_{n-1},x_n).$$

$$d(x_{n+1},x_n) \leq ad(x_n,x_{n-1}).$$

Luego, por el lema 2.1.2 existe $z \in$ M tal que $x_n \to z$.

Véase que z es un punto fijo de T,

$d(z, T(z)) \leq d(z,x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T(z)) = d(z,x_{n+1}) + d(T(x_n),T(z))$

Además

$$d\big(T(x_n),T(z)\big) \leq a\,\frac{d\big(x_n,T(x_n)\big)d\big(x_n,T(z)\big)+d\big(z,T(z)\big)d\big(z,T(x_n)\big)}{d\big(x_n,T(z)\big)+d\big(z,T(x_n)\big)}$$

$$d\big(x_{n+1},T(z)\big) \leq a\frac{d(x_n,x_{n+1})d\big(x_n,T(z)\big)+d\big(z,T(z)\big)d(z,x_{n+1})}{d\big(x_n,T(z)\big)+d(z,x_{n+1})}$$

Por tanto:

$$d\big(z,T(z)\big) \leq d(z,x_{n+1}) + a\frac{d(x_n,x_{n+1})d\big(x_n,T(z)\big)+d\big(z,T(z)\big)d(z,x_{n+1})}{d\big(x_n,T(z)\big)+d(z,x_{n+1})}$$

haciendo n $\rightarrow \infty$

$$d\big(z,T(z)\big) \leq a\frac{0}{d\big(z,T(z)\big)}$$

$$d\big(z,T(z)\big) \leq 0$$

luego T(z) = z.

Para la unicidad, supóngase que existe otro punto fijo, es decir,

T(z*) = z* para z*∈M y probemos que z = z*. En efecto,

$$d(z,z^*) = d\big(T(z),T(z^*)\big) \leq a\frac{d\big(z,T(z)\big)d\big(z,T(z^*)\big)+d\big(z^*,T(z^*)\big)d\big(z^*,T(z)\big)}{d\big(z,T(z^*)\big)+d\big(z^*,T(z)\big)}$$

por lo tanto

$$d(z,z^*) \leq a\frac{d(z,z)d(z,z^*)+d(z^*,z^*)d(z^*,z)}{d(z,z^*)+d(z^*,z)}$$

$$d(z,z^*) \leq a\frac{0}{d(z,z^*)+d(z^*,z)}$$

$$d(z,z^*) \leq 0$$

Así, z = z*.

De esta manera T tiene un único punto fijo.

■

2.5 Teorema del Punto Fijo para Operadores de Banach.

Definición 3.5.1: Sea la aplicación S: X → X. Se dice que S es un **operador de Banach** si existe $h \in (0, 1)$ tal que:

$$d\big(S(x), S^2(x)\big) \leq hd\big(x, S(x)\big), \qquad \forall\, x \in X.$$

Definición 3.5.2: Sea (X, d) un espacio métrico, S: X → X una aplicación y x, $q \in$ X.

Una función G: X → ℝ es **S-orbitalmente semicontinua inferiormente en *q*** para cualquier sucesión $\{x_n\} \subseteq O_s(x)$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = q$ implica que $G(q) \leq \lim_{n\to\infty} \inf G(x_n)$.

Teorema 3.5.1 (Teorema del punto fijo para operadores de Banach):

Sea (X, d) un espacio métrico completo y $0 \leq h < 1$. Supóngase que existe $x \in$ X tal que:

$$d(S(y), S^2(y)) \leq d(y, S(y)) \qquad (1)$$

para todo $y \in O_s(x)$. Entonces

- i- $\lim_{n\to\infty} S^n(x) = q$ existe.
- ii- $d(S^n(x), q) \leq \frac{h^n}{1-h} d\big(x, S(x)\big)$.
- iii- q es un punto fijo de S si, y solo si $G(x) = d\big(x, S(x)\big)$ es S-orbitalmente semicontinua inferiormente en q.

Demostración i):

Sea $x \in X$ tal que $d(S(y), S^2(y)) \leq d(y, S(y))$ para todo $y \in O_S(x)$.

Para $y = S(x)$ y usando la definición de operador de Banach para S:

$$d\big(S\big(S(x)\big), S^2\big(S(x)\big)\big) \leq hd\big(S(x), S^2(x)\big)$$

luego, empleando nuevamente la definición de operador de Banach para S, se tiene:

$$hd\big(S(x), S^2(x)\big) \leq h\left(hd\big(x, S(x)\big)\right) = h^2 d\big(x, S(x)\big).$$

De forma análoga se utiliza la definición de operador de Banach para la aplicación S en:

$$d\big(S^3(x), S^4(x)\big) = d\left(S\big(S^2(x)\big), S^2\big(S^2(x)\big)\right) \leq hd\big(S^2(x), S^3(x)\big)$$

luego, utilizando lo que ya se ha demostrado para $d\big(S^2(x), S^3(x)\big)$:

$$hd\big(S^2(x), S^3(x)\big) \leq h\big[h^2 d\big(x, S(x)\big)\big] = h^3 d\big(x, S(x)\big).$$

Así, de manera inductiva

$$d(S^n(x), S^{n+1}(x)) \leq h^n d\big(x, S(x)\big) \qquad (2)$$

A continuación demostremos que la sucesión $\{S^n(x)\}$es de Cauchy.

En efecto, sean $n, p \in \mathbb{N}(n < p)$ entonces aplicando la desigualdad triangular:

$$d(S^n(x), S^{n+p}(x)) \leq d(S^n(x), S^{n+1}(x)) + d(S^{n+1}(x), S^{n+2}(x)) + \cdots$$

$$\ldots + d(S^{n+p-1}(x), S^{n+p}(x)).$$

Luego por la parte anterior:

$$d(S^n(x), S^{n+p}(x)) \leq h^n d(x, S(x)) + h^{n+1} d(x, S(x)) + \cdots + h^{n+p-1} d(x, S(x))$$

$$\leq h^n d(x, S(x))[1 + h + h^2 + \cdots + h^{p-1}].$$

$$\leq h^n d\big(x, S(x)\big) \sum_{i=0}^{p-1} h^i.$$

$$\leq h^n d\big(x, S(x)\big) \left[\frac{1}{1-h}\right].$$

$$= \frac{h^n}{1-h} d\big(x, S(x)\big).$$

$$d(S^n(x), S^{n+p}(x)) \leq \tfrac{h^n}{1-h} d\big(x, S(x)\big) \qquad (3)$$

De (3) $\{S^n(x)\}$ es sucesión de Cauchy y como X es completo, existe $q \in$ X tal que $\lim_{n\to\infty} S^n(x) = q$.

Así, $\lim_{n\to\infty} S^n(x) = q$.

■

Demostracion ii):

Cuando p → ∞ en la desigualdad (3):

$$d(S^n(x), q) \leq \frac{h^n}{1-h} d\big(x, S(x)\big).$$

■

Demostracion iii):

"⇒"

Supóngase que $S(q) = q$ y sea $\{x_n\} \subseteq O_S(x)$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = q$, entonces

G(q) = d(q, S(q)) = d(q, q) = 0 y lim inf $G(x_n) \geq 0$ por tanto,

$$\liminf G(x_n) \geq G(q)$$

“⇐”

$$
\begin{aligned}
G(q) = d\big(q, S(q)\big) &\leq \liminf G(x_n) = d(x_n, S(x_n)) \\
&\leq d\big(S^n(x), S^{n+1}(x)\big) \\
&\leq h^n d\big(x, S(x)\big) \\
&< \varepsilon \qquad \text{aplicando (2).}
\end{aligned}
$$

Y esta ultima desigualdad se cumple para n suficientemente grande.

Esto implica que $S(q) = q$.

■

CAPITULO III: Algunas aplicaciones del Teorema del Punto Fijo de Banach.

Como ya se ha mencionado en los capítulos anteriores el teorema del punto fijo de Banach cuenta con muchas aplicaciones, en este apartado se verán algunas de las más sencillas, no por ello menos importantes; dentro de las cuales se tratan algunas referentes a los sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones integrales y ecuaciones diferenciales ordinarias; al final de este capítulo se muestran algunos ejemplos de la teoría anteriormente desarrollada, a fin de ilustrar algunas propiedades.

3.1 Sistema de Ecuaciones Lineales.

El Teorema del punto fijo de Banach tiene importantes aplicaciones en los métodos de iteración para resolver sistemas de ecuaciones lineales y proporciona suficientes condiciones para la convergencia y cota de error.

Consideremos el espacio euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ y el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = y_i \ ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

que en notación matricial es

$$y = Ax$$

Donde $A = [a_{ij}]$ es una matriz $n\, x\, n$, $x = [x_i]$ y $y = [y_i]$ son matrices $n\, x\, 1$. Notemos que el problema de resolver $y = Ax$ se puede reemplazar por el problema equivalente de encontrar los puntos fijos del operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por:

$$T(x) = (I - A)x + y;$$

ya que, si x es punto fijo de $T(x)$:

$$T(x) = x$$

$$(I - A)x + y = x$$

$$Ix - Ax + y = x$$

$$x - Ax + y = x$$

$$- Ax + y = 0$$

$$Ax - Ax + y = Ax + 0$$

$$0 + y = Ax + 0$$

$$y = Ax$$

Luego, hacemos

$$B = (I - A) = [b_{ij}]$$

la cual es una matriz $n\ x\ n$ real fija(I es la matriz identidad $n\ x\ n$), es decir , tenemos

$T(x) = Bx + y.$

¿Bajo qué condiciones T es una contracción en $\mathbb{R}^n$? La respuesta a esta pregunta depende de la elección de la métrica en $\mathbb{R}^n$ con la que se va a trabajar. Dediquémonos a encontrar tales condiciones.

Sean $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v, v_2, \dots, v_n)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ $u, v, p, q \in \mathbb{R}^n$ y supongamos que $p = T(u)$ (i.e. $p = T(u) = Bu + y$) y $q = T(v)$ (i.e. $q = T(v) = Bv + y$).

- Con la métrica del máximo , tenemos

$$d\ (T(u)\ ,T(v)) = d\ (p\ ,q) = \max_i |p_i - q_i|$$

$$= \max_i \left| \left(\left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, u_j \right] + y_i \right) - \left(\left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ v_j \right] + y_i \right) \right|$$

$$= \max_i \left| \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, u_j \right] - \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ v_j \right] + y_i - y_i \right|$$

$$= \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, u_j - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ v_j \right|$$

$$= \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \,(u_j - v_j) \right|$$

$$\leq \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| \left| (u_j - v_j) \right| \right)$$

$$\leq \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \right) \left(\max_i |u_j - v_j| \right)$$

$$= \lambda \, d(u\,, v).$$

Entonces, para que T sea una contracción en $\mathbb{R}^n$ debemos exigir que

$$\lambda = \max_i \textstyle\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1. \qquad \textbf{(3.1)}$$

- Con la métrica de la suma, tenemos

$$d(T(u)\,, T(v)) = d(p\,, q) = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \left(\left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, u_j \right] + y_i \right) - \left(\left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, v_j \right] + y_i \right) \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, u_j \right] + y_i - \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, v_j \right] - y_i \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, u_j - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, v_j \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \, (u_j - v_j \,) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} (u_j - v_j \,) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| \left| (u_j - v_j \,) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \left| (u_j - v_j \,) \right| \right)$$

$$\leq \left(\max_{i} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |u_j - v_j| \right)$$

$$= \lambda \, d(u \,, v)$$

Así, el operador T es una contracción en $\mathbb{R}^n$ si.

$$\lambda = \max_i \textstyle\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1. \qquad \textbf{(3.2)}$$

- Por último, considerando la métrica euclidiana, tenemos

$$[d(T(u) \,, T(v))]^2 = [d(p \,, q)]^2 = \sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j \right] + y_i \right) - \left(\left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_j \right] + y_i \right) \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}u_j\right] + y_i - \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}v_j\right] - y_i\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}u_j - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}v_j\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(u_j - v_j)\right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {b_{ij}}^2\right)[d(u,v)]^2$$

i.e. $d(Tu\,,Tv) \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b^2{}_{ij}}\right) d(u\,,v)\,;u\,,v \in \mathbb{R}^n$

(en la desigualdad anterior hemos utilizado la desigualdad de schwartz).

Análogamente a lo hecho antes, aquí exigimos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b^2{}_{ij} < 1. \qquad \textbf{(3.3)}$$

Y con esto tenemos que T es una contracción en $\mathbb{R}^n$

Así, en el caso en el que cualquiera de las tres condiciones encontradas es cumplida, tenemos por el Teorema del punto fijo de Banach que existe un y solo un $x = (x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ punto fijo del operador T donde $x_i = \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j\right] + y_i$, y por tanto solución del sistema de ecuaciones lineales algebraicas considerado.

Las aproximaciones sucesivas para hallar la solución aproximada tienen la forma

$$\begin{cases} x^{(0)} = \left(x^0{}_1\,, x^0{}_2\,, \dots, x^0{}_n\right) \\ x^{(1)} = \left(x^1{}_1\,, x^1{}_2\,, \dots, x^1{}_n\right) \\ \vdots \\ x^{(k)} = \left(x^k{}_1\,, x^k{}_2\,, \dots, x^k{}_n\right) \\ \vdots \end{cases} \qquad \textbf{(3.4)}$$

Donde

$$x^k{}_i = \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x^{k-1}{}_j\right] + y_i \qquad \textbf{(3.5)}$$

Teorema 3.1.1:

Si un sistema $y = Ax$ de n ecuaciones lineales con n incognitas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (las componentes de x), siendo A la matriz $n\,x\,n$; x , y , matrices $n\,x\,1$, satisface cualquiera de las tres condiciones obtenidas (3.1), (3.2), (3.3), este tiene una única solución x. Esta solución puede ser obtenida como el límite de una sucesión iterada dada por

$$x^{(k)} = [T(x)]^{(k-1)} ; k = 1,2, \ldots$$

con la relación (3.4) donde cada $x^{(k)}$ es calculada usando la igualdad (3.5), siempre que $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ es dado.

Observemos que cualquiera de las tres condiciones encontradas implica que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Con esto tenemos la seguridad de que $\det(A - I) \neq 0$.

Notemos además que, si A es simétrica; es decir $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i , j = 1, 2, \ldots, n$.

Entonces la constante resultante en la métrica del máximo es igual a la constante de la métrica de la suma; pero si A no es simétrica, entonces ambos valores; no son necesariamente iguales.

Observemos también que si $| a_{ij}| < \frac{1}{n}$ (en este caso las tres condiciones se cumplen), entonces el Método de las Aproximaciones Sucesivas (M.A.S o T.A.C. o T.P.F.B) es aplicable; y si $| a_{ij}| = \frac{1}{n}$ (es este caso todas las tres suman 1) el M.AS. no es aplicable.

Además mencionemos, que las soluciones aproximadas de (3.1) también pueden ser halladas por otros dos métodos standard, la iteración de Jacobi, la cual es mayormente de interés teórico y la iteración de Gauss – Seidel.

Ejemplo 3.1.1:

Consideremos el conjunto de ecuaciones algebraicas

$$\begin{cases} \frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 = -1 \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 2 \\ -\frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{15}x_2 + \frac{3}{4}x_3 = 3 \end{cases}$$

Para aplicar el Teorema de la Aplicación Contractante (T.A.C) primero rescribimos la ecuación de arriba en la forma

$$x = Bx + y$$

y entonces se probará que $\max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1$

Una representación es dada por

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - 1 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + 2 \\ x_3 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{2}{15}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 3 \end{cases}$$

i.e matricialmente tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{15} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para $i = 1,2,3$ calcúlese lo siguiente:

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{3} |b_{1j}| , \sum_{j=1}^{3} |b_{2j}| , \sum_{j=1}^{3} |b_{3j}| \right\}$$

$$= \max\{|b_{11}| + |b_{12}| + |b_{13}|, |b_{21}| + |b_{22}| + |b_{23}|, |b_{31}| + |b_{32}| + |b_{33}|\}$$
$$= \max\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{4}+\frac{2}{15}+\frac{1}{4}\right\}$$

$$= \max\{0.95, 0.91\overline{6}, 0.6\overline{3}\} = 0.95 < 1.$$

Luego, claramente la condición $\max_i \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}| < 1$ se verifica.

El esquema iterativo puede ser usado para obtener la solución aproximada. Por ejemplo, con la suposición inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)$, obtenemos

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

$$x^{(1)} = (-1, 2, 3)$$

$$x^{(2)} = (0.55, 0.25, 3.76667)$$

$$x^{(3)} = (0.176667, 1.158333, 4.112500)$$

$$x^{(4)} = (0.642625, 0.644653, 4.226736)$$

$$x^{(5)} = (0.507535, 0.922640, 4.303294)$$

$$\vdots$$

$$x^{(10)} = (0.641659, 0.835535, 4.360547)$$

$$\vdots$$

$$x^{(19)} = (0.639519, 0.841889, 4.362843)$$

$$x^{(20)} = (0.639559, 0.841833, 4.362843).$$

Como ejemplo del uso de la ecuación (3.4) y teniendo en cuenta (3.5) se muestra como se obtuvo $x^{(1)}$

$$x^{(0)} = (0, 0, 0) = \left(x^{(0)}{}_1, x^{(0)}{}_2, x^{(0)}{}_3\right)$$

$$x^{(1)} = \left(x^{(1)}{}_1, x^{(1)}{}_2, x^{(1)}{}_3\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{3} b_{1j}x^{(0)}{}_j + y_1, \quad \sum_{j=1}^{3} b_{2j}x^{(0)}{}_j + y_2, \sum_{j=1}^{3} b_{3j}x^{(0)}{}_j + y_3\right)$$

$$= \left(b_{11}x^{(0)}{}_1 + b_{12}x^{(0)}{}_2 + b_{13}x^{(0)}{}_3 + y_1 , \quad b_{21}x^{(0)}{}_1 + b_{22}x^{(0)}{}_2 + b_{23}x^{(0)}{}_3 + y_2, \quad b_{31}x^{(0)}{}_1 + b_{32}x^{(0)}{}_2 + b_{33}x^{(0)}{}_3 + y_3 \right)$$

$$= \left(\frac{1}{5} \times 0 + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0 - 1 , \frac{1}{3} \times 0 - \frac{1}{3} \times 0 - \frac{1}{4} \times 0 + 2 , \frac{1}{4} \times 0 + \frac{2}{15} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0 \right)$$

$$= (-1 ,2 ,3).$$

Y de forma análoga podemos obtener cualquier otro $x^{(k)}$.

Naturalmente, cualquier otra suposición inicial puede ser usada. El número de iteraciones que se requiere para asegurar la convergencia depende de la suposición inicial. La solución exacta es x = (0.639548, 0.841853, 4.362845).

Otras aplicaciones prácticas:

Damos dos ejemplos de aplicación del T.P.F.B a los métodos numéricos en el primero resolvemos una ecuación lineal y en el segundo resolvemos una ecuación no lineal.

Ejemplo 3.1.2:

Probaremos que la ecuación

$$x = \arctan(x) + 1 ; x \in \mathbb{R}$$

Tiene una única solución en $[1, +\infty[$, la cual aproximaremos con siete dígitos significativos.

En efecto, sea $Y = [1, +\infty[$ y definimos $f : Y \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \arctan(x) + 1 ; \ x \in Y$$

nótese que $f(Y) \subset Y$ ya que $f(Y) = f([1, +\infty[) = \left[\frac{\pi}{4} + 1, +\infty\right[\subset [1, +\infty[= Y$. Sea $X = (Y , ||)$ donde $||$ denota la métrica euclidiana la cual es $d = ((x_1 - y_1)^2)^{\frac{1}{2}}$, X resulta ser un espacio métrico completo (por ser cerrado).

Para todo $x \in X$,

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Entonces por el Teorema del punto fijo de Banach; existe un único punto fijo $\overline{x} \in X$, que es la única solución del sistema dado.

Para obtener la solución aproximada con la aproximación pedida es necesario utilizar la desigualdad iii) del Teorema del punto fijo de Banach [para el punto fijo z se cumple $d(x_n, z) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$], reemplazando $\alpha = \frac{1}{2}$ se obtiene:

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} |x_0 - x_1| = \frac{1}{2^{n-1}} |x_0 - x_1|$$

i.e

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |x_0 - x_1|.$$

En particular se toma $x_0 = 1$, por un proceso iterativo resultado de la interpretación geométrica del T.P.F.B.,

$x_1 = f(x_0) = f(1) = \arctan(1) + 1 = \frac{\pi}{4} + 1 = 1.7853982$

Reemplazando en la desigualdad anterior tenemos

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Permitiéndonos seguidamente calcular $\overline{x}$ con la aproximación exigida, en este caso

$x_{11} = 2.1322677$ esto es $\overline{x} = 2.1322677$

Comprobemos esto, efectuando el proceso iterativo

$$x_1 = f(x_0) = \tan^{-1}(1) + 1 = 1.7853982$$

$$x_2 = f(x_1) = \tan^{-1}(1.7853982) + 1 = 2.0602325$$

$$x_3 = f(x_2) = \tan^{-1}(2.0602325) + 1 = 2.1189113$$

$$x_4 = f(x_3) = \tan^{-1}(2.1189113) + 1 = 2.1298472$$

$$x_5 = f(x_4) = \tan^{-1}(2.1298472) + 1 = 2.1318309$$

$$x_6 = f(x_5) = \tan^{-1}(2.1318309) + 1 = 2.1321890$$

$$x_7 = f(x_6) = \tan^{-1}(2.1321890) + 1 = 2.1322535$$

$$x_8 = f(x_7) = \tan^{-1}(2.1322535) + 1 = 2.1322652$$

$$x_9 = f(x_8) = \tan^{-1}(2.1322651) + 1 = 2.1322673$$

$$x_{10} = f(x_9) = \tan^{-1}(2.1322673) + 1 = 2.1322676$$

$$x_{11} = f(x_{10}) = \tan^{-1}(2.1322676) + 1 = 2.1322677$$

Ejemplo 3.1.3:

Considérese la ecuación algebraica no lineal

$x^3 - x - 1 = 0\,, x \in \mathbb{R}$.

Esta ecuación tiene tres raíces, una de las cuales está entre 1 y 2. Obsérvese que para $x \in X = [1\,, 2]$, existen varias formas de escribir dicha ecuación en la forma x = T(x), por ejemplo

$$T_1(x) = x^3 - 1\,, T_2(x) = \sqrt[3]{(1+x)}\,, T_3(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Se probará que alguna de estas aplicaciones es una contracción, para T_2:

$$T_2'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$$

sea 1 < c < 2 (recuérdese X = [1, 2]), luego:

1 < c < 2 $\Rightarrow (1+1)^2 < (c+1)^2 < (2+1)^2$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{4}}{3} < \frac{\sqrt[3]{(1+c)^2}}{3} < \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+c)^2}} < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

$$\Rightarrow T_2'(x) < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} = 0.2100.$$

Entonces T_2 es una contracción en el subconjunto $X = [1\,,2]$, con constante de contracción α = 0.21 < 1.

Usando el método de las aproximaciones sucesivas para determinar la única raíz de T_2 en X, iniciando el proceso iterativo con $x_0 = 1$, se obtiene:

$$x_1 = T_2(x_0) = T_2(1) = (1+1)^{\frac{1}{3}} = 1.2599$$

$$x_2 = T_2(x_1) = T_2(1.2599) = (1+1.2599)^{\frac{1}{3}} = 1.3123$$

$$x_3 = T_2(x_2) = T_2(1.3123) = (1+1.3123)^{\frac{1}{3}} = 1.3224$$

$$x_4 = T_2(x_3) = T_2(1.3224) = (1+1.3224)^{\frac{1}{3}} = 1.3243$$

$$x_5 = T_2(x_4) = T_2(1.3243) = (1+1.3243)^{\frac{1}{3}} = 1.3246$$

$$x_6 = T_2(x_5) = T_2(1.3246) = (1+1.3246)^{\frac{1}{3}} = 1.3247$$

$$x_7 = T_2(x_6) = T_2(1.3247) = (1+1.3247)^{\frac{1}{3}} = 1.3247.$$

Así, la raíz, con cuatro cifras significativas, se obtiene en la séptima iteración.

3.2 Ecuaciones integrales.

El estudio de las ecuaciones integrales constituye uno de los capítulos más importantes del análisis matemático. Muchos problemas de análisis conducen al estudio de ecuaciones integrales y muchos de los métodos del análisis funcional fueron inicialmente desarrollados en el estudio de las ecuaciones integrales.

Tipos de ecuaciones integrales:

Históricamente la primera ecuación integral que fue estudiada, fue la ecuación de Abel.

$$y(t) = \int_{t^0}^{t} \frac{x(s)}{(t-s)^{\propto}} ds\,, \qquad 0 < \propto < 1$$

Damos a continuación otros ejemplos familiares de ecuaciones integrales:

La ecuación

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, x(s))ds$$

cuya solución es solución de la ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t, x)$$

Con condición inicial

$$x(t_0) = x_0 \ .$$

Entre los tipos más comunes de ecuaciones integrales se mencionan:

- La ecuación integral de Fredholm de primera clase

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

- La ecuación de Fredholm de segunda especie.

$$y(t) = x(t) - \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

- La ecuación de Volterra de primera especie

$$y(t) = \int_a^t K(t, s)x(s)ds$$

- La ecuación de Volterra de segunda especie

$$y(t) = x(t) - \lambda \int_a^t K(t, s)x(s)ds$$

En estos ejemplos la incógnita es la función $x: [a\,, b] \to \mathbb{C}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, donde $y: [a\,, b] \to \mathbb{C}$ y $K: [a\,, b] \times [a\,, b] \to \mathbb{C}$ son funciones dadas, a K se denomina **núcleo** de la ecuación integral, sujeta a ciertas restricciones (por ejemplo ser función continua, medible y acotada, etc.) Las ecuaciones del tipo de Fredholm también pueden ser estudiadas sobre un espacio X. También K , x e y pueden ser tomadas como funciones a valores vectoriales, por ejemplo, a valores en $\mathbb{C}^n$.

Cuando el núcleo K no es una funcion continua decimos que la ecuación integral tiene **núcleo singular**. El ejemplo más importante de este tipo de núcleo es cuando X es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y

$$K(t\,, s) = \frac{A(t\,, s)}{\|t - s\|^{\alpha}}$$

Con $\alpha < n$, A es acotada (y, eventualmente continua para $t \neq s$); cuando $\alpha < \frac{n}{2}$ decimos que la singularidad es **débil**.

Las ecuaciones de convolución son otro tipo importante de ecuaciones integrales

Definición3.2.1:

La función h de $C(I)$ x $C(I)$, donde $C(I)$ es el conjunto de funciones continuas en el intervalo I=[0, +∞[dada por:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

se conoce como la **convolución** de f y g.

Ejemplo3.2.1:

Calcule la convolución de $f(t) = Sen(t),\ g(t) = e^t$.

Solución:

Usando la definición e integrando por partes, se tiene:

$$Sen(t) * e^t = \int_0^t Sen(t-\tau)[e^\tau]\, d\tau$$

$$= Sen(t-\tau)e^\tau + \int_0^t e^\tau Cos(t-\tau)\, d\tau$$

$$= Sen(t-\tau)e^\tau + Cos(t-\tau)e^\tau - \int_0^t e^\tau Sen(t-\tau)\, d\tau$$

$$2\int_0^t e^\tau Sen(t-\tau)\, d\tau = Sen(t-\tau)e^\tau + Cos(t-\tau)e^\tau$$

$$\int_0^t e^\tau Sen(t-\tau)\, d\tau = \left.\frac{Sen(t-\tau)e^\tau + Cos(t-\tau)e^\tau}{2}\right|_0^t$$

$$= \left.\frac{e^\tau\,[Sen(t-\tau) + Cos(t-\tau)]}{2}\right|_0^t$$

$$= \frac{e^t - Sen(t) - \cos(t)}{2}\ .$$

Ahora daremos aplicaciones del T.P.F.B. a la solución de ecuaciones integrales.

Teorema 3.2.1:

Consideremos la ecuación integral de Fredholm de segunda especie

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_a^b K(t\,,s\,)x(s)ds$$

donde $K: [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ es continua y es tal que $|K(t\,,s)| \le M$ para todo $t,s \in [a,b]$.

Entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, dada $y \in C([a,b], \mathbb{C})$ existe una única función $x \in C([a,b], \mathbb{C})$ que es la solución de la ecuación integral.

Demostración:

Sea $X = C([a,b], \mathbb{C})$ el espacio de las funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{C}$, el cual se sabe es un espacio métrico completo con la métrica

$$d(f,g) = sup_{a \leq t \leq b}|f(t) - g(t)|$$

y defínase la aplicación $T: X \rightarrow X$ por

$$(Tx)(t) = y(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds \ , t \in [a,b].$$

Un punto fijo de T es evidentemente una solución, puesto que $x(t)$ es solución de la ecuación integral y recíprocamente.

Afirmación 1: $T(x) \in X$.

En efecto; supóngase que $t, t_0 \in [a,b]$ tal que $t \rightarrow t_0$.

$$|(Tx)(t) - (Tx)(t_0)|$$

$$= \left|\left(y(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds\right) - \left(y(t_0) + \lambda \int_a^b K(t_0,s)x(s)ds\right)\right|$$

$$= \left|y(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds - y(t_0) - \lambda \int_a^b K(t_0,s)x(s)ds\right|$$

$$= \left|\left(y(t) - y(t_0)\right) + \lambda \left(\int_a^b K(t,s)x(s)ds - \int_a^b K(t_0,s)x(s)ds\right)\right|$$

$$= \left|\left(y(t) - y(t_0)\right) + \lambda \left(\int_a^b x(s)(K(t,s) - K(t_0,s))ds\right)\right|$$

$$\leq |y(t) - y(t_0)| + |\lambda| \left|\int_a^b |x(s)||K(t,s) - K(t_0,s)|\, ds\right|$$

Se quiere probar que

$$(Tx)(t) \rightarrow (Tx)(t_0), x \in X$$

Para esto obsérvese que:

- Como $y \in C([a,b],\mathbb{C})$ i.e. y es una función continua en $[a,b]$, y desde que $t \rightarrow t_0$ tenemos $y(t) \rightarrow y(t_0)$ lo que implica $|y(t) - y(t_0)| \rightarrow 0$.
- Como $x \in C([a,b],\mathbb{C})$ entonces x es una función continua en $[a,b]$, y siendo $[a,b]$ un compacto, x resulta acotada en $[a,b]$, i.e. existe $M > 0$ tal que $|x(t)| \leq M, t \in [a,b]$.
- Como la función K es continua sobre el compacto $[a,b] \times [a,b]$, entonces K resulta ser uniformemente continua, por lo tanto dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $|t - t_0| < \delta$ tenemos

$$|K(t,s) - K(t_0,s)| < \frac{\varepsilon}{|b-a|\, M|\lambda|}, s \in [a,b]$$

Con estos resultados, se consigue la siguiente desigualdad

$$|(Tx)(t) - (Tx)(t_0)| \leq |y(t) - y(t_0)| + |\lambda|M|b-a| \frac{\varepsilon}{|b-a|M|\lambda|}$$

De donde es claro que $(Tx)(t) \rightarrow (Tx)(t_0),\ x \in X$.

Por lo tanto $T(x) \in X$.

Afirmación 2: T es una contracción en X siempre que $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$.

En efecto; dados $u\,,v\ \in X$

$$|(Tu)(t) - (Tv)(t)|$$

$$= \left|\left(y(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)u(s)ds\right) - \left(y(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)v(s)ds\right)\right|$$

$$= \left|\lambda\int_a^b K(t,s)u(s)ds - \lambda\int_a^b K(t,s)v(s)ds + y(t) - y(t)\right|$$

$$= \left|\lambda\int_a^b K(t,s)[u(s) - v(s)]ds\right|$$

$$\leq |\lambda|\int_a^b |K(t,s)||u(s) - v(s)|ds$$

$$\leq |\lambda|\int_a^b M|u(s) - v(s)|ds$$

$$= |\lambda|M\int_a^b |u(s) - v(s)|ds$$

$$\leq |\lambda|M sup_{a\leq t\leq b}|u(s) - v(s)|\int_a^b ds\ ;\ t \in [a,b]\,, u,v \in X$$

i.e. $|(Tu)(t) - (Tv)(t)| \leq |\lambda|\,(b-a)M\|u - v\|;\ t \in [a,b], u, v \in X$

$$\|Tu - Tv\| \leq \propto \|u - v\|, u, v \in X$$

Luego T es una contraccion en X con constante de contracción $\propto = |\lambda|(b-a)M < 1$; la conclusión de este teorema sigue del T.P.F.B.

■

Teorema 3.2.2:

Sea $K:[a,b]\times[a,b]\times\mathbb{C}\ \rightarrow\ \mathbb{C}$ una funcion continua, lipschitziana en relación a la ultima variable i.e. existe $M>0$ tal que:

$$|K(t,s,r_1)-\ K(t,s,r_2)|\ \leq M|r_1-\ r_2|.$$

Para arbitrarios $t,s\ \in\ [a,b]$ y $r_1,r_2\in\mathbb{C}$. Entonces dado $y\ \in C([a,b],\mathbb{C})$ existe una única $x\ \in C([a,b],\mathbb{C})$ solución de la ecuación integral de Volterra de segunda especie

$$x(t)=\ y(t)+\lambda\int_a^t K(t,s,x(s))\,ds.$$

Demostración:

Sea el espacio métrico completo $X=\ C([a,b],\mathbb{C})$ y definimos $T:X\rightarrow X$ por

$$(Tx)(t)=\ y(t)+\lambda\int_a^t K(t,s,x(s))\,ds\ ,t\in[a,b].$$

Es evidente que un punto fijo de T es solución de la ecuación integral y recíprocamente.

Afirmación 1: $T(x)\in X$

En efecto; para arbitrarios $t,t_0\in[a,b]$, supongamos que $t\ \rightarrow\ t_0$.

$$|(Tx)(t)-(Tx)(t_0)|$$

$$=\ \left|\left(y(t)+\lambda\int_a^t K\big(t,s,x(s)\big)\,ds\right)-\left(y(t_0)+\lambda\int_a^{t_0}K\big(t_0,s,x(s)\big)\,ds\right)\right|$$

$$=\ \left|\big(y(t)-\ y(t_0)\big)+\ \lambda\left(\int_a^t K\big(t,s,x(s)\big)\,ds-\ \int_a^{t_0}K\big(t_0,s,x(s)\big)\,ds\ \right)\right|$$

$$\leq|y(t)-\ y(t_0)|+\ |\lambda|\left|\int_a^t K\big(t,s,x(s)\big)\,ds-\ \int_a^{t_0}K\big(t_0,s,x(s)\big)\,ds\ \right|.$$

Ahora supóngase que $t\geq\ t_0$;

Esto implica

$$\int_{a}^{t_0} K\big(t_0, s, x(s)\big)\, ds = \int_{a}^{t} K\big(t_0, s, x(s)\big)\, ds - \int_{t_0}^{t} K\big(t_0, s, x(s)\big)\, ds.$$

Reemplazando esta desigualdad en la desigualdad anterior, y luego agrupando adecuadamente

$$|y(t) - y(t_0)| + |\lambda| \left|\int_a^t \left|K\big(t, s, x(s)\big) - K\big(t_0, s, x(s)\big)\right| ds\right| + \left|\int_{t_0}^t \left|K\big(t_0, s, x(s)\big)\right| ds\right|$$

El objetivo es probar que:

$$(Tx)(t) \to (Tx)(t_0)\,, x \in X.$$

Para esto observemos que:

- Como $y \in C([a,b], \mathbb{C})$ i.e. y es una función continua en $[a,b]$, y desde que $t \to t_0$ se tiene $y(t) \to y(t_0)$ lo que implica $|y(t) - y(t_0)| \to 0$.
- Como K es una función continua sobre el compacto $[a,b] \times [a,b] \times x([a,b])$ entonces K resulta ser uniformemente continua en $[a,b] \times [a,b] \times x([a,b])$, lo que implica que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $|t - t_0| < \delta$ de donde $\left|K\big(t, s, x(s)\big) - K\big(t_0, s, x(s)\big)\right| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda||b-a|}$, $\big(s, x(s)\big) \in [a,b] \times x([a,b])$.
- Si K es una función continua sobre el compacto $\{t_0\} \times [a,b] \times x([a,b])$, K resulta acotada en $\{t_0\} \times [a,b] \times x([a,b])$, entonces existe $N > 0$ tal que $|K(t_0, s, x(s))| \leq N$ para todo $\big(s, x(s)\big) \in [a,b] \times x([a,b])$.

Con estos resultados, ocurre la siguiente desigualdad:

$$|(Tx)(t) - (Tx)(t_0)| \leq |y(t) - y(t_0)| + |\lambda||b-a| \frac{\varepsilon}{|\lambda||b-a|} + N|t - t_0|.$$

De donde es claro que

$$(Tx)(t) \to (Tx)(t_0).$$

Para todo $x \in X$. Por lo tanto, concluimos que la afirmación 1 es valida i.e. $T(x) \in X$.

Afirmación 2: Existe $m \geq 1$ tal que T^m es una contracción en X.

En efecto; se demostrará inicialmente que dados $u, v \in X$ y $t \in [a, b]$ se cumple

$$|(T^n u)(t) - (T^n v)(t)| \leq \frac{|\lambda|^n M^n (t-a)^n}{n!} \|u - v\|. \qquad \textbf{(3.6)}$$

La demostración es hecha por inducción matemática.

Para $n = 1$ el resultado es inmediato, es decir

$$|(T\,u)(t) - (T\,v)(t)| \leq \frac{|\lambda|\,M\,(t-a)}{1!} \|u - v\|$$

Admitiendo el resultado para n se demuestra para $n + 1$.

$$|(T^{n+1}u)(t) - (T^{n+1}v)(t)| = |T(T^n u)(t) - T(T^n v)(t)|$$

$$= \left| \left(y(t) + \lambda \int_a^t K[t, s, (T^n u)(s)]\, ds \right) - \left(y(t) + \lambda \int_a^t K[t, s, (T^n v)(s)]\, ds \right) \right|$$

$$= \left| \lambda \int_a^t \{K[t, s, (T^n u)(s)] - K[t, s, (T^n v)(s)]\}\, ds \right|$$

$$\leq |\lambda| \int_a^t |K[t, s, (T^n u)(s)] - K[t, s, (T^n v)(s)]|\, ds$$

$\leq |\lambda| \int_a^t M|(T^n u)(s) - (T^n v)(s)|\, ds$; Por hipótesis $|K(t,s,r_1) - K(t,s,r_2)| \leq M|r_1 - r_2|$

$$\leq |\lambda| \int_a^t M \frac{|\lambda|^n M^n (s-a)^n}{n!} \|u - v\|\, ds$$

$$= \frac{|\lambda|^{n+1} M^{n+1} (t-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|u - v\|.$$

Luego (3.6) es cierto, además de (3.6)

$$|(T^n u)(t) - (T^n v)(t)| \leq \frac{|\lambda M(t-a)|^n}{n!} d(u,v); \ \ u,v \in X \ y \ t \in [a,b] \, ,$$

Pero aun más,

$$\frac{|\lambda M(t-a)|^n}{n!} \leq \frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!}$$

Lo que implica

$$|(T^n u)(t) - (T^n v)(t)| \leq \frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!} d(u,v); \ \ u,v \in X \ y \ t \in [a,b] \, ,$$

Entonces

$$sup_{a \leq tb} \, |(T^n u)(t) - (T^n v)(t)| \leq \frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!} d(u,v); \ \ u,v \in X.$$

Por lo tanto

$$d(T^n u, T^n v) \leq \frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!} d(u,v); \ \ u,v \in X.$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea

$$a_n = \frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!} \ .$$

Ahora utilizamos el criterio de la razón para sucesiones de números reales:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|\lambda M(b-a)|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(|\lambda M(b-a)|^{n+1})(n!)}{(|\lambda M(b-a)|^n)((n+1)!)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda M(b-a)|}{n+1} = 0 < 1.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!}=0.$$

Por lo tanto $\left\{\frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!}\right\}$ converge, luego sigue por definición de límite de sucesiones de números reales que:

Dado $0<\varepsilon<1$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n>n_0$, se tiene $\frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!}<\ \varepsilon\ <1$.

Con lo que se verifica la afirmación 2. Entonces tomando $m=\ n_0$, para que exista $m\ \geq 1$ tal que T^m es una contracción en $C([a,b],\mathbb{C})=X$. Y la conclusión de este teorema sigue del Teorema del punto fijo de Banach.

■

Ejemplo 3.2.2:

Considere la ecuación integral:

$$x(t)=\ y(t)+\lambda\int_a^t K(t,s,x(s))\,ds$$

$$f(t)=1+\int_0^t\frac{sen(t-s)}{1+s^2}ds$$

Se tiene que g es continua en I(para cualquier $T>0$), se prueba que k satisface la condición de Lipschitz en la tercera variable. Sean y,z entonces:

$$|K(t,s,y)-K(t,s,z)|=\left|\frac{sen(t-s)}{1+y^2}-\frac{sen(t-s)}{1+z^2}\right|$$

$$=\left|\frac{(sen(t-s))(1+z^2)-(sen(t-s))(1+y^2)}{(1+y^2)(1+z^2)}\right|$$

$$=\left|\frac{(sen(t-s))\big((1+z^2)-(1+y^2)\big)}{(1+y^2)(1+z^2)}\right|$$

$$\leq \left|\frac{y^2 - z^2}{(1+y^2)(1+z^2)}\right|$$

$$\leq \left|(y-z)\frac{y+z}{(1+y^2)(1+z^2)}\right|$$

$$\leq 2|y-z|.$$

Puesto que se verifican las siguientes desigualdades:

$$|y| \leq |(1+y^2)(1+z^2)|$$

$$|z| \leq |(1+y^2)(1+z^2)|$$

Luego la ecuación posee una única solución continua.

Observación:

Hacemos $\lambda = 1$ en la ecuación integral de fredholm de segunda especie, y tenemos

$$x(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds \quad \textbf{(3.7)}$$

Teorema 3.2.3:

Supóngase que $K: [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una funcion continua tal que satisface

$$sup_{a\leq t\leq b}\left\{\int_a^b |K(t,s)|ds\right\} < 1.$$

Y $y : [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Entonces existe una y solo una función continua $x : [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface la ecuación (3.7).

Demostración:

Considérese el espacio normado $X = C([a,b],\mathbb{C})$ el cual con la métrica uniforme $\| \|_\infty$ es completo; y defínase la aplicación $T : X \rightarrow X$ por

$$x \mapsto T(x).$$

$$(Tx)(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

Análogamente a lo hecho en la afirmación 1 del teorema 3.2.2 se prueba que $T(x) \in X$.

Veamos que T es una contracción en X. Para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ bajo la métrica del supremo

$$\begin{aligned}
\|Tx_1 - Tx_2\| &= sup_{a\le t\le b}|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| \\
&= sup_{a\le t\le b}\left|\left(y(t) + \int_a^b K(t,s)x_1(s)ds\right) - \left(y(t) + \int_a^b K(t,s)x_2(s)ds\right)\right| \\
&= sup_{a\le t\le b}\left|\int_a^b K(t,s)x_1(s)ds - \int_a^b K(t,s)x_2(s)ds\right| \\
&= sup_{a\le t\le b}\left|\int_a^b K(t,s)(x_1(s) - x_2(s))ds\right| \\
&\le sup_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)||x_1(s) - x_2(s)|\,ds \\
&\le \|x_1 - x_2\|\, sup_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\,ds \le c\|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Es decir

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \le c\|x_1 - x_2\|_\infty \quad ; x_1, x_2 \in X.$$

Siempre que $c = sup\left\{\int_a^b |K(t,s)|\,ds\right\} < 1.$

Luego T es una contracción en $C([a,b],\mathbb{C}) = X$, y la afirmación de este teorema sigue del T.P.F.B.

■

Dado un $x_0 \in C([a,b],\mathbb{C})$. El T.P.F.B nos permite obtener el punto fijo x como un límite

$$x = \lim_{n\to\infty} T^n x_0 \ . \qquad \textbf{(3.8)}$$

Es interesante reinterpretar este límite como una serie. La aplicación

$K : C([a,b],\mathbb{C}) \ \to \ C([a,b],\mathbb{C})$ definida por

$$k(x) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

Esta aplicación es denominada operador de Fredholm, y la función k es llamada el nucleo de K.

La ecuación integral (3.7) puede ser reescrita como

$$(I-k)x = y. \qquad \textbf{(3.9)}$$

Donde I es el operador identidad. La aplicación T(donde $T(x) = x$) esta definida por

$T(x) = y + kx$, lo que implica que

$$\begin{aligned} T^n(x_0) \ &= \ T^{n-1}(Tx_0) = T^{n-1}(y + kx_0) = y + kT^{n-1}(x_0) \\ &= y + kT^{n-2}(Tx_0) = y + kT^{n-2}(y + kx_0) \\ &= y + k(y + kT^{n-2}x_0) = y + k(y + kT^{n-3}(Tx_0)) \\ &= y + k(y + k(y + \cdots + k(y + kx_0)) \ ) \end{aligned}$$

$T^n(x_0) = y + ky + \cdots + k^n y + k^{n+1}x_0$.

Usando la ecuación (3.8)

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n+1} k^i y = \sum_{n=0}^{\infty} k^n y$$

Por otro lado de (3.9) tenemos

$$x = (I - k)^{-1} y \, ,$$

Entonces de las dos igualdades anteriores

$$(I - k)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \qquad \textbf{(3.10)}$$

Esta serie es llamada serie de Neumann. El uso de sumas parciales de esta serie para aproximar a la inversa se llama aproximación de Born. Explícitamente

$$x(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} k^n y\right)(t) = (y + ky + k^2 y + \cdots)(t)$$

$$= y(t) + (ky)(t) + (k^2 y)(t) + \cdots$$

$$= y(t) + \int_a^b K(t,s) y(s) ds + (k(ky))(t) + \ldots$$

$$= y(t) + \int_a^b K(t,s) y(s) ds + \int_a^b K(t,s)((ky)(s))\, ds + \ldots$$

$$= y(t) + \int_a^b K(t,s) y(s) ds + \int_a^b K(t,s)(\int_a^b K(s,r) y(r) dr)\, ds + \cdots$$

$$x(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s) y(s) ds + \int_a^b \int_a^b K(t,s) K(s,r) y(r) dr ds + \cdots$$

La serie de neumann es similar a la serie geométrica. De hecho, la igualdad (3.10) es realmente una serie geométrica que es absolutamente convergente con respecto a determinada norma del operador cuando $\|k\|_\infty < 1$. Esto explica porque no necesitamos imponer ninguna condición sobre y para que la ecuación $sup_{a \le t \le b} \left\{\int_a^b |K(t,s)| ds\right\} < 1$ sea una condición que asegure que $(I - k)$ es invertible y depende solo de la función k.

Ejemplo 3.2.3:

Encontrar la solución de la ecuación integral $u(x) = e^x + \frac{1}{e}\int_0^1 u(y)dy$.

Por el método de aproximaciones sucesivas y en la forma de la serie neuman.

Solución:

Sea $K(x, y) = 1,\ f(x) = e^x\ , b - a = 1\ , M = 1\ , \lambda = \frac{1}{e}$.

Podemos observar que $|\lambda| = \frac{1}{M(a-b)},\ \frac{1}{e} < \frac{1}{1\cdot 1} < 1$.

1- Iteración

Sea $u_0(x) = e^x$

$$u_1(x) = e^x + \frac{1}{e}\int_0^1 u_0(y)dy = e^x + \frac{1}{e}\int_0^1 e^y\, dy = e^x + \frac{1}{e}[e^x]_0^1 = e^x + 1 - \frac{1}{e}$$

$$u_2(x) = e^x + \frac{1}{e}\int_0^1 u_1(y)dy = e^x + \frac{1}{e}\int_0^1 \left(e^y + 1 - \frac{1}{e}\right)dy = e^x + 1 - \frac{1}{e^2}$$

…

$$u_n(x) = e^x + \frac{1}{e}\int_0^1 u_{n-1}(y)dy = e^x + 1 - \frac{1}{e^n}$$

A continuación, la solución de la ecuación integral es el límite de la iteración

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[e^x + 1 - \frac{1}{e^n}\right] = e^x + 1.$$

3.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición3.3.1: Sean $\Omega \subset \mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{C}$ y $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$. Se dice que una función continuamente diferenciable

$$u: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$$

es una **solución** de la ecuación diferencial ordinaria

$$y' = f(t, y) \qquad \textbf{(3.11)}$$

si para todo $t \in [c, d]$ tenemos que

$$(t, u(t)) \in \Omega \text{ y } u'(t) = f\big(t, u(t)\big).$$

Proposición 3.3.1:

Sea $(t_0, y_0) \in \Omega$. La condición necesaria y suficiente para que $u: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ continua con$\big(t, u(t)\big) \in \Omega$, para todo $t \in [c,\ d]$ sea solución de la ecuación diferencial (3.11) satisfaciendo $u(t_0) = y_0$, es que u sea solución continua de la ecuación integral:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big) ds. \qquad \textbf{(3.12)}$$

Demostración:

Como f y u son continuas, la función $[c, d] \rightarrow f\big(t, u(t)\big)$ para $t \in [c, d], f\big(t, u(t)\big) \in \mathbb{C}$, también lo es; luego, aplicando el teorema fundamental del cálculo se obtiene lo que se quería probar.

Teorema 3.3.1: (Teorema de existencia de Cauchy para ecuaciones diferenciales)

Sean $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\text{x}\mathbb{C}$ y $f: [t_0 - a, t_0 + a]\text{x}B_b[y_0] \subset \mathbb{R}\text{x}\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua y Lipschitziana en la segunda variable ($B_b[y_0]$ *denota una bola cerrada de centro* y_0), esto es, existe L ∈ $\mathbb{R}^+$ tal que

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|; t \in [t_0 - a, t_0 + a], z_1, z_2 \in B_b[y_0] \qquad \textbf{(3.13)}$$

Entonces existe a^* con $0 < a^* < a$ tal que la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$ tiene una única solución *u* definida en $[t_0 - a^*, t_0 + a^*]$ satisfaciendo que $u(t_0) = y_0$.

Demostración:

Obsérvese que *f* está definida en un dominio compacto, entonces siendo *f* continua, *f* es acotada, es decir, existe M > 0 tal que $|f(t, y)| < M$ para $(t, y) \in [t_0 - a, t_0 + a]\text{x}B_b[y_0]$.

Si M = 0, entonces *f* = 0, y la afirmación es trivial.

Tomando

$$a^* = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}. \qquad \textbf{(3.14)}$$

Para simplificar la notación, supóngase que se tiene $a \leq \frac{b}{M}$, es decir $a = a^*$.

Recuérdese que $X = C^*([t_0 - a, t_0 + a], B_b[y_0])$ dotado de la métrica del supremo

$$d(u, v) = \|u - v\| = Sup_{t \in [t_0 - a, t_0 + a]}\{|u(t) - v(t)|\}$$

es un espacio métrico completo.

Sea *u* ∈ X, defínase Tu: $[t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{C}$ por

$$(Tu)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds.$$

Tu es continua. De (3.14) se tiene que para todo *t* con $|t - t_0| \leq a$.

$$|(Tu)(t) - y_0| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, u(s))| ds\right| \leq M|t - t_0| \leq Ma \leq b.$$

Entonces $Tu \in$ X.

Por otro lado para cualesquiera u, $v \in$ X

$$|(Tu)(t) - (Tv)(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) ds - \int_{t_0}^{t} f(s, v(s)) ds\right|$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds\right|$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} L|u(s) - v(s)| ds\right|$$

$$\leq Sup_{t \in [t_0 - a, t_0 + a]}\{|u(t) - v(t)|\}|t - t_0|.$$

Es decir

$$|(Tu)(t) - (Tv)(t)| \leq L\|u - v\||t - t_0|. \qquad \textbf{(3.15)}$$

Además de esto, existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que T^m es una contracción en X, pues, para u, $v \in$ X se tiene:

$$|(T^m u)(t) - (T^m v)(t)| \leq \frac{L^m |t - t_0|^m}{m!} \|u - v\|. \qquad \textbf{(3.16)}$$

En efecto, para arbitrarios u, $v \in$ X y para todo t con $|t - t_0| \leq a$

$$|(T^2 u)(t) - (T^2 v)(t)| = |T(Tu)(t) - T(Tv)(t)|$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} f(s, Tu(s)) ds - \int_{t_0}^{t} f(s, Tv(s)) ds\right|$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} [f(s, Tu(s)) - f(s, Tv(s))] \, ds\right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \left| f\big(s, Tu(s)\big) - f\big(s, Tv(s)\big) \right| ds \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} L |Tu(s) - Tv(s)| \, ds \right|$$

$$\leq L^2 \|u - v\| \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0| \, ds \right| \quad \text{de } \mathbf{(3.15)}$$

$$\leq L^2 \|u - v\| \left. \frac{|s - t_0|^2}{2} \right|_{t_0}^{t}$$

$$\leq L^2 \|u - v\| \frac{|t - t_0|^2}{2} \ .$$

Es decir

$$|(T^2u)(t) - (T^2v)(t)| \leq L^2 \|u - v\| \frac{|t - t_0|^2}{2!}; \;\; u, v \in X$$

De manera general

$$|(T^{m+1}u)(t) - (T^{m+1}v)(t)| \leq |(T^m u)(t) - (T^m v)(t)| \; L \; \frac{|t - t_0|}{2!}; \;\; u, v \in X$$

De donde resulta (3.16).

Como $|t - t_0| \leq a$ tomando el supremo en (3.16), se cumple

$$\|T^m u - T^m v\| \leq \frac{L^m a^m}{m!} \|u - v\|.$$

Para cada $m \in \mathbb{Z}^+$, sea

$$u_m = \frac{(La)^m}{m!}$$

Luego, utilizando el criterio de la razón para sucesiones de números reales

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{u_{m+1}}{u_m}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{(La)^{m+1}}{(m+1)!}}{\frac{(La)^m}{m!}}\right| = (La)\lim_{m\to\infty}\left|\frac{1}{m+1}\right| = 0 < 1$$

Entonces

$$\lim_{m\to\infty} u_m = \lim_{m\to\infty}\frac{(La)^m}{m!} = 0,$$

por lo tanto $\left(\frac{(La)^m}{m!}\right)_{m\geq 1}$ converge, luego sigue por definición de limite de sucesiones de números reales que:

Dado $0 < \varepsilon < 1$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ se cumple $\left|\frac{(La)^m}{m!}\right| < \varepsilon < 1$.

Entonces basta tomar $m = n_0$ para concluir que existe $m \geq 1$ tal que T^m es una contracción en $X = C^*([t_0 - a, t_0 + a], B_b[y_0])$; así por el T.P.F.B. se deduce que T tendrá un único punto fijo, el cual es la solución de la ecuación integral **(3.12)** y por tanto la solución de la ecuación diferencial **(3.11)**.

3.4 Ejemplos de menor rigor.

Ejemplo 3.4.1:

Sea $I = [1\,,4]$ y $f\colon\ I \to I$ tal que $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f(2) = 4$, $f(4) = 1$, y lineal en cada intervalo [*n*, *n+1*] para *n* = 1, 2, 3.

Encuentre los puntos fijos de f y compruebe que los puntos *x* = 1, 2, 3, 4 son de periodo 4.

Solución:

Primeramente, es posible escribir la función *f* como una función seccionada, para ello:

Tomando $(1, 3), (2, 4)$, pendiente $= 1$.

Usando ecuación punto pendiente $y = x + 2$.

Tomando $(2, 4), (3, 2)$, pendiente $= -2$.

Usando ecuación punto pendiente $y = -2x + 8$.

Tomando $(3, 4), (4, 1)$, pendiente $= -1$.

Usando ecuación punto pendiente $y = -x + 5$.

Por lo tanto

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; 1 \leq x < 2 \\ -2x + 8 & ; 2 \leq x < 3 \\ -x + 5 & ; 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Para encontrar los puntos fijos de *f*, se tiene:

$x + 2 = x \Rightarrow 2 = 0$, f no tiene puntos fijos en $[1, 2]$.

$-2x + 8 = x \Rightarrow x = \frac{8}{3}$, f tiene punto fijo $\left(nótese\ que\ \frac{8}{3} \in [2, 3[\ \right)$.

$-x + 5 = x \Rightarrow x = \frac{5}{2}$, este no es un punto fijo de f puesto que $\frac{5}{2} \notin [3, 4]$.

Esto puede apreciarse de mejor forma en la siguiente figura donde se muestra la grafica de *f* :

Figura 3.1.1

Los puntos son 1, 2 ,3 ,4 son de periodo 4, ya que:

$$f^4(1) = f\left(f\left(f\big(f(1)\big)\right)\right) = f\left(f\big(f(3)\big)\right) = f\big(f(2)\big) = f(4) = 1$$

$$f^4(2) = f\left(f\left(f\big(f(2)\big)\right)\right) = f\left(f\big(f(4)\big)\right) = f\big(f(1)\big) = f(3) = 2$$

$$f^4(3) = f\left(f\left(f\big(f(3)\big)\right)\right) = f\left(f\big(f(2)\big)\right) = f\big(f(4)\big) = f(1) = 3$$

$$f^4(4) = f\left(f\left(f\big(f(4)\big)\right)\right) = f\left(f\big(f(1)\big)\right) = f\big(f(3)\big) = f(2) = 4$$

Ejemplo 3.4.2:

Sea $f: [0,1] \to [0,1]$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ;si\ 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & ;si\ \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Encuéntrese los puntos fijos de f y los puntos de periodo 2 y periodo 3.

Solución:

Para encontrar los puntos fijos de *f*, se tiene:

$2x = x \ \Rightarrow x = 0$, f tiene punto fijo $\left(0 \in [0, \frac{1}{2}[\right)$.

$2(1-x) = x \ \Rightarrow x = \frac{2}{3}$, f tiene punto fijo $\left(\frac{2}{3} \in]\frac{1}{2}, 1]\right)$.

Por lo cual, los puntos fijos de f son $x = 0$, $x = \frac{2}{3}$; esto se aprecia en la grafica de f mostrada en la siguiente figura:

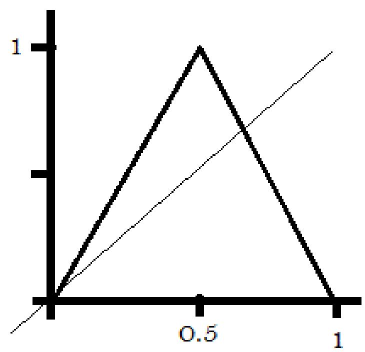


Figura 3.1.2

Luego, para encontrar $f^2(x)$:

$$f^2(x) = \begin{cases} 2(2\mathrm{x}) & ; \text{si } 0 \leq 2\mathrm{x} \leq \dfrac{1}{2} \\ 2(1-(2\mathrm{x})) & ; \text{ si } \dfrac{1}{2} < 2x \leq 1 \\ 2(2(1-\mathrm{x})) & ; \text{ si } 0 \leq 2(1-\mathrm{x}) \leq \dfrac{1}{2} \\ 2\left(1-\left(2(1-\mathrm{x})\right)\right) & ; \text{si} \dfrac{1}{2} < 2(1-\mathrm{x}) \leq 1 \end{cases}$$

Operando las expresiones algebraicas

$$f^2(x) = \begin{cases} 4\mathrm{x} & ; \text{si } 0 \le \mathrm{x} \le \frac{1}{4} \\ 2 - 4\mathrm{x} & ; \text{si } \frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2} \\ 4 - 4\mathrm{x} & ; \text{si } \frac{3}{4} \le \mathrm{x} \le 1 \\ -2 + 4\mathrm{x} & ; \text{si } \frac{1}{2} < x \le \frac{3}{4} \end{cases}$$

Finalmente reordenando según los intervalos y adecuando las desigualdades (esto no alteraría a $f^2(x)$ puesto se conserva el mismo valor en el intervalo siguiente) se obtiene:

$$f^2(x) = \begin{cases} 4\mathrm{x} & ; \text{si } 0 \le \mathrm{x} \le \frac{1}{4} \\ 2 - 4\mathrm{x} & ; \text{si } \frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2} \\ -2 + 4\mathrm{x} & ; \text{si } \frac{1}{2} < x \le \frac{3}{4} \\ 4 - 4\mathrm{x} & ; \text{si } \frac{3}{4} < x \le 1 \end{cases}$$

Con ello se pueden encontrar los puntos de periodo 2, para esto:

$4x = x \;\Rightarrow\; 4x - x = 0 \;\Rightarrow x = 0.$

$2 - 4x = x \;\Rightarrow\; -4x - x = -2 \;\Rightarrow x = \frac{2}{5}\,.$

$4 - 4x = x \;\Rightarrow -4x - x = -4 \;\Rightarrow x = \frac{4}{5}\,.$

$-2 + 4x = x \;\Rightarrow\; 4x - x = 2 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{3}\,.$

Los puntos obtenidos son: $x = 0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$, pero $x = 0\,, \frac{2}{3}$ son puntos fijos, así los únicos puntos de periodo 2 serán: $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}$.

La figura 3.1.3 muestra la grafica de $f^2(x)$.

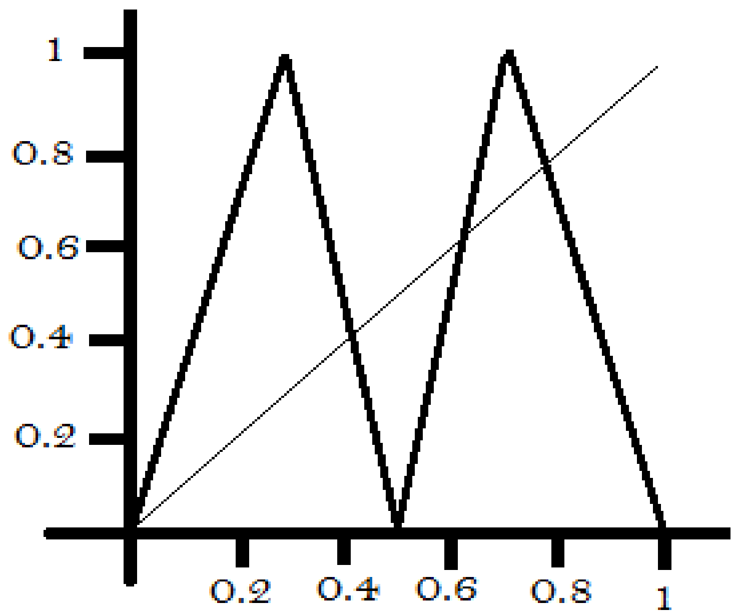


Figura 3.1.3

Para calcular $f^3(x)$, se sigue el mismo procedimiento, esto es:

$$f^3(x) = \begin{cases} 4(4x) & ; \text{si } 0 \leq 4x \leq \frac{1}{4} \\ 2-4(4x) & ; \text{si } \frac{1}{4} < 4x \leq \frac{1}{2} \\ -2+4(4x) & ; \text{si } \frac{1}{2} < 4x \leq \frac{3}{4} \\ 4-4(4x) & ; \text{si } \frac{3}{4} < 4x \leq 1 \\ 4(2-4x) & ; \text{si } 0 \leq 2-4x \leq \frac{1}{4} \\ 2-4(2-4x) & ; \text{si } \frac{1}{4} < 2-4x \leq \frac{1}{2} \\ -2+4(2-4x) & ; \text{si } \frac{1}{2} < 2-4x \leq \frac{3}{4} \\ -2+4(2-4x) & ; \text{si } \frac{3}{4} < 2-4x \leq 1 \\ 4(-2+4x) & ; \text{si } 0 \leq -2+4x \leq \frac{1}{4} \\ 2-4(-2+4x) & ; \text{si } \frac{1}{4} < -2+4x \leq \frac{1}{2} \\ -2+4(-2+4x) & ; \text{si } \frac{1}{2} < -2+4x \leq \frac{3}{4} \\ 4-4(-2+4x) & ; \text{si } \frac{3}{4} < -2+4x \leq 1 \\ 4(4-4x) & ; \text{si } 0 \leq 4-4x \leq \frac{1}{4} \\ 2-4(4-4x) & ; \text{si } \frac{1}{4} < 4-4x \leq \frac{1}{2} \\ -2+4(4-4x) & ; \text{si } \frac{1}{2} < 4-4x \leq \frac{3}{4} \\ 4-4(4-4x) & ; \text{si } \frac{3}{4} < 4-4x \leq 1 \end{cases}$$

Simplificando y reordenando estas expresiones (recuérdese que también se han adecuado las desigualdades), se tiene:

$$f^3(x) = \begin{cases} 16\text{x} & ;\text{si } 0 \leq \text{x} \leq \dfrac{1}{16} \\ 2 - 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{1}{16} < x \leq \dfrac{2}{16} \\ -2 + 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{2}{16} < x \leq \dfrac{3}{16} \\ 4 - 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{3}{16} < x \leq \dfrac{4}{16} \\ -4 + 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{4}{16} < x \leq \dfrac{5}{16} \\ 6 - 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{5}{16} < x \leq \dfrac{6}{16} \\ -6 + 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{6}{16} < \text{x} \leq \dfrac{7}{16} \\ 8 - 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{7}{16} < x \leq \dfrac{8}{16} \\ -8 + 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{8}{16} < x \leq \dfrac{9}{16} \\ 10 - 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{9}{16} < x \leq \dfrac{10}{16} \\ -10 + 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{10}{16} < x \leq \dfrac{11}{16} \\ 12 - 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{11}{16} < x \leq \dfrac{12}{16} \\ -12 + 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{12}{16} < x \leq \dfrac{13}{16} \\ 14 - 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{13}{16} < x \leq \dfrac{14}{16} \\ -14 + 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{14}{16} < x \leq \dfrac{15}{16} \\ 16 - 16\text{x} & ;\text{si } \dfrac{15}{16} < x \leq \dfrac{16}{16} \end{cases}$$

De donde:

$$x = 0 \qquad ; \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{16} \text{ (es punto fijo)}$$

$$x = \frac{2}{17} \qquad ; \frac{1}{16} < x \leq \frac{2}{16}$$

$$x = \frac{2}{15} \quad ; \text{si } \frac{2}{16} < x \leq \frac{3}{16}$$

$$x = \frac{4}{17} \quad ; \text{si } \frac{3}{16} < x \leq \frac{4}{16}$$

$$x = \frac{4}{15} \quad ; \text{si } \frac{4}{16} < x \leq \frac{5}{16}$$

$$x = \frac{6}{17} \quad ; \text{si } \frac{5}{16} < x \leq \frac{6}{16}$$

$$x = \frac{6}{15} \quad ; \text{si } \frac{6}{16} < x \leq \frac{7}{16}$$

$$x = \frac{8}{17} \quad ; \text{si } \frac{7}{16} < x \leq \frac{8}{16}$$

$$x = \frac{8}{15} \quad ; \text{si } \frac{8}{16} < x \leq \frac{9}{16}$$

$$x = \frac{10}{17} \quad ; \text{si } \frac{9}{16} < x \leq \frac{10}{16}$$

$$x = \frac{2}{3} \qquad ; \text{si } \frac{10}{16} < x \leq \frac{11}{16} \text{ (es punto fijo)}$$

$$x = \frac{12}{17} \quad ; \text{si } \frac{11}{16} < x \leq \frac{12}{16}$$

$$x = \frac{12}{15} \quad ; \text{si } \frac{12}{16} < x \leq \frac{13}{16}$$

$$x = \frac{14}{17} \quad ; \text{si } \frac{13}{16} < x \leq \frac{14}{16}$$

$$x = \frac{14}{15} \quad ; \text{si } \frac{14}{16} < x \leq \frac{15}{16}$$

$$x = \frac{16}{17} \quad ; \text{si } \frac{15}{16} < x \leq 1$$

Con estos resultados podemos comprobar que existen 14 puntos de periodo 3; la grafica de $f^3(x)$ es la que se muestra a continuación:

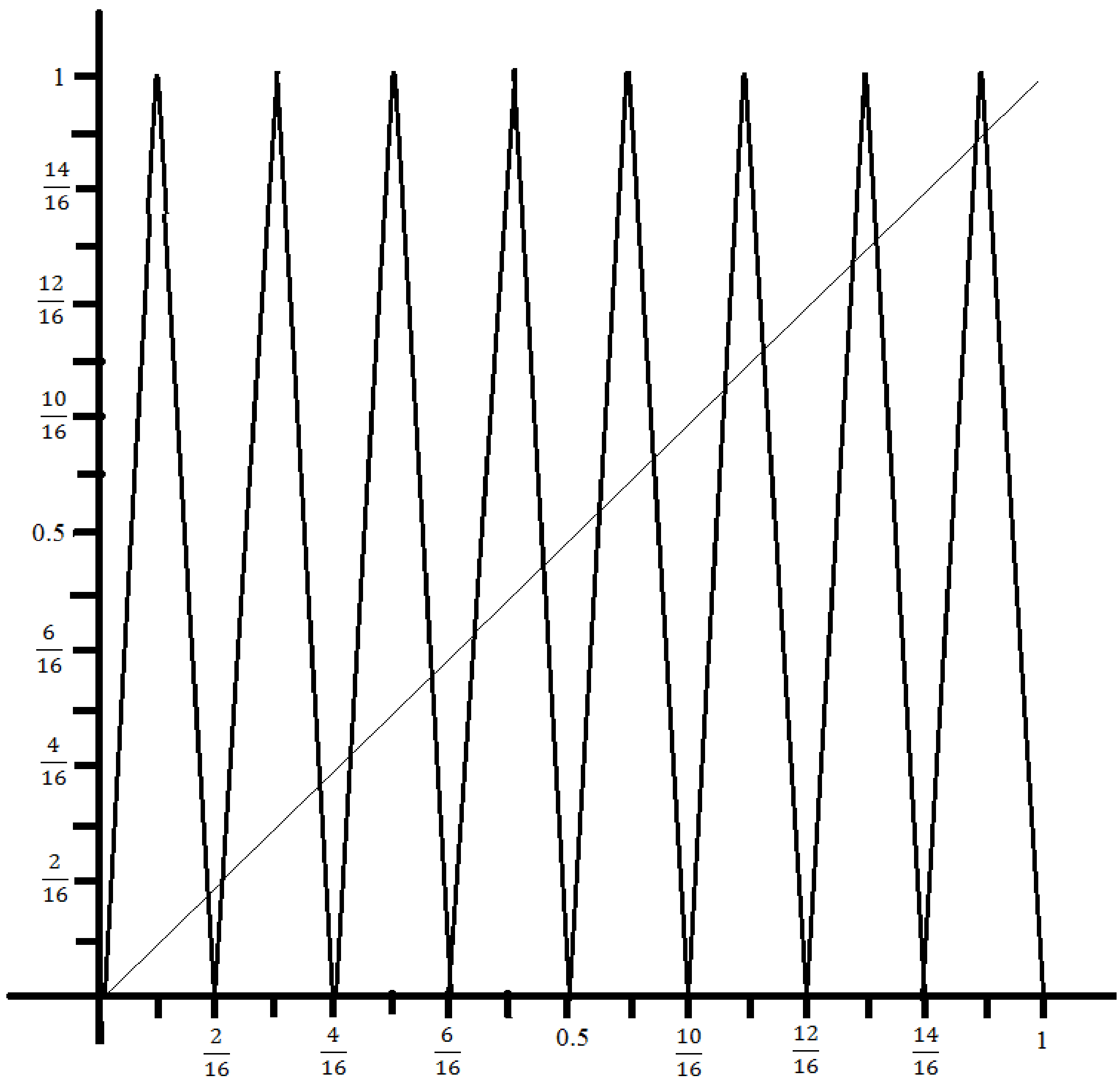


Figura 3.1.4

Ejemplo 3.4.3:

Considérese $f : I \to I$ donde $I = \mathbb{R}^+$ y

$$f(x) = \begin{cases} 3x & si\ 0 \le x < \frac{1}{3} \\ -3x + 2 & si\ \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & si\ \frac{2}{3} \le x \le 1 \\ f(x-1) + 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Grafique la función f y encuéntrese los puntos fijos y los puntos periódicos de periodo 2.

Solución:

Calculemos los puntos fijos de esta función, para ello:

$$\begin{array}{cc} 3x = x & si\ 0 \le x < \frac{1}{3} \\ -3x + 2 = x & si\ \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ 3x - 2 = x & si\ \frac{2}{3} \le x \le 1 \\ f(x-1) + 1 = x & si\ x > 1 \end{array}$$

Resolviendo las primeras 3 ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{array}{cc} x = 0 & si\ 0 \le x < \frac{1}{3} \\ x = \dfrac{1}{2} & si\ \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ x = 1 & si\ \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{array}$$

Para la cuarta ecuación:

$$f(x-1) + 1 = \begin{cases} 3(x-1) + 1 & si\ 0 \le x - 1 < \frac{1}{3} \\ [-3(x-1) + 2] + 1 & si\ \frac{1}{3} \le x - 1 < \frac{2}{3} \\ [3(x-1) - 2] + 1 & si\ \frac{2}{3} \le x - 1 \le 1 \\ f(f(x-1) - 1) + 1 + 1 & f(x-1) - 1 > 1 \end{cases}$$

Para simplificar la última desigualdad se debe componer la función infinitas veces; entonces para entender el comportamiento de dicha función se tomarán los valores para los cuales $x \leq 2$, es decir:

$$f(x-1)+1=\begin{cases} 3x-2 & si\ 1 \leq x < \frac{4}{3} \\ -3x+6 & si\ \frac{4}{3} \leq x < \frac{5}{3} \\ 3x-4 & si\ \frac{5}{3} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

De donde

$$\begin{aligned} 3x-2=x & \quad si\ 1 \leq x < \tfrac{4}{3} \\ -3x+6=x & \quad si\ \tfrac{4}{3} \leq x < \tfrac{5}{3} \\ 3x-4=x & \quad si\ \tfrac{5}{3} \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} x=1 & \quad si\ 1 \leq x < \tfrac{4}{3} \\ x=\tfrac{3}{2} & \quad si\ \tfrac{4}{3} \leq x < \tfrac{5}{3} \\ x=2 & \quad si\ \tfrac{5}{3} \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Por lo cual $f(x)$ tiene 5 puntos fijos, estos son $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

Esto puede apreciarse en la siguiente grafica:

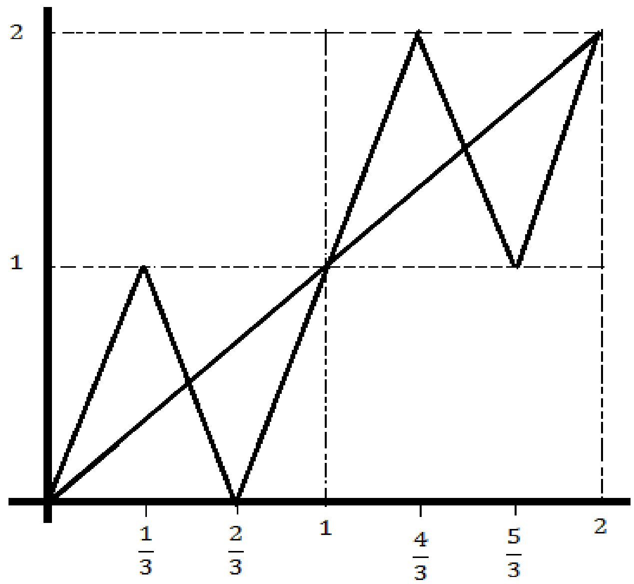


Figura 3.1.5

Ahora encontremos los puntos periódicos de periodo 2, para ello:

$$f^2(x) = f[f(x)] = \begin{cases} 3x \ \ si\ 0 \leq 3x < \frac{1}{3} \\ 3(-3x+2) \ \ si\ 0 \leq -3x+2 < \frac{1}{3} \\ 3(3x-2) \ \ si\ 0 \leq 3x-2 < \frac{1}{3} \\ -3[3x]+2 \ \ si\ \frac{1}{3} \leq 3x < \frac{2}{3} \\ -3[-3x+2]+2 \ \ si\ \frac{1}{3} \leq -3x+2 < \frac{2}{3} \\ -3[3x-2]+2 \ \ si\ \frac{1}{3} \leq 3x-2 < \frac{2}{3} \\ 3[3x]-2 \ \ si\ \frac{2}{3} \leq 3x < 1 \\ 3[-3x+2]-2 \ \ si\ \frac{2}{3} \leq -3x+2 < 1 \\ 3[3x-2]-2 \ \ si\ \frac{2}{3} \leq 3x-2 < 1 \\ 3[3x-2]-2 \ \ si\ 1 \leq 3x-2 < \frac{4}{3} \\ 3[-3x+6]-2 \ \ si\ 1 \leq -3x+6 < \frac{4}{3} \\ 3[3x-4]-2 \ \ si\ 1 \leq 3x-4 < \frac{4}{3} \\ -3[3x-2]+6 \ \ si\ \frac{4}{3} \leq 3x-2 < \frac{5}{3} \\ -3[-3x+6]+6 \ \ si\ \frac{4}{3} \leq -3x+6 < \frac{5}{3} \\ -3[3x-4]+6 \ \ si\ \frac{4}{3} \leq 3x-4 < \frac{5}{3} \\ 3[3x-2]-4 \ \ si\ \frac{5}{3} \leq 3x-2 \leq 2 \\ 3[-3x+6]-4 \ \ si\ \frac{5}{3} \leq -3x+6 \leq 2 \\ 3[3x-4]-4 \ \ si\ \frac{5}{3} \leq 3x-4 \leq 2 \end{cases}$$

Simplificando y reordenando estas expresiones se obtiene:

$$f^2(x) = \begin{cases} 3x \ \ si\ 0 \leq x < \frac{1}{9} \\ -9x+2 \ \ si\ \frac{1}{9} \leq x < \frac{2}{9} \\ 9x-2 \ \ si\ \frac{2}{9} \leq x < \frac{3}{9} \\ -9x+4 \ \ si\ \frac{3}{9} \leq x < \frac{4}{9} \\ 9x-4 \ \ si\ \frac{4}{9} \leq x < \frac{5}{9} \\ -9x+6 \ \ si\ \frac{5}{9} \leq x < \frac{6}{9} \\ 9x-6 \ \ si\ \frac{6}{9} \leq x < \frac{7}{9} \\ -9x+8 \ \ si\ \frac{7}{9} \leq x < \frac{8}{9} \\ 9x-8 \ \ si\ \frac{8}{9} \leq x < 1 \\ 9x-8 \ \ si\ 1 \leq x < \frac{10}{9} \\ -9x+12 \ \ si\ \frac{10}{9} \leq x < \frac{11}{9} \\ 9x-10 \ \ si\ \frac{11}{9} \leq x < \frac{12}{9} \\ -9x+14 \ \ si\ \frac{12}{9} \leq x < \frac{13}{9} \\ 9x-12 \ \ si\ \frac{13}{9} \leq x < \frac{14}{9} \\ -9x+16 \ \ si\ \frac{14}{9} \leq x < \frac{15}{9} \\ 9x-14 \ \ si\ \frac{15}{9} \leq x < \frac{16}{9} \\ -9x+18 \ \ si\ \frac{16}{9} \leq x < \frac{17}{9} \\ 9x-16 \ \ si\ \frac{17}{9} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Luego, para encontrar los puntos de periodo dos, se igualan estas ecuaciones a la variable *x*, resolviendo se consigue:

$$x = 0 \;\; si \; 0 \leq x < \frac{1}{9} \, (punto \; fijo \; de \; f)$$
$$x = \frac{1}{5} \;\; si \, \frac{1}{9} \leq x < \frac{2}{9}$$
$$x = \frac{1}{4} \, si \, \frac{2}{9} \leq x < \frac{3}{9}$$
$$x = \frac{2}{5} \;\; si \, \frac{3}{9} \leq x < \frac{4}{9}$$
$$x = \frac{1}{2} \;\; si \, \frac{4}{9} \leq x < \frac{5}{9} \, (punto \; fijo \; de \; f)$$
$$x = \frac{3}{5} \;\; si \, \frac{5}{9} \leq x < \frac{6}{9}$$
$$x = \frac{3}{4} \;\; si \, \frac{6}{9} \leq x < \frac{7}{9}$$
$$x = \frac{4}{5} \;\; si \, \frac{7}{9} \leq x < \frac{8}{9}$$
$$x = 1 \;\; si \, \frac{8}{9} \leq x < 1 \;\; (no \; pertence \; al \; intervalo)$$
$$x = 1 \;\; si \; 1 \leq x < \frac{10}{9} \, (punto \; fijo \; de \; f)$$
$$x = \frac{6}{5} \;\; si \, \frac{10}{9} \leq x < \frac{11}{9}$$
$$x = \frac{5}{4} \;\; si \, \frac{11}{9} \leq x < \frac{12}{9}$$
$$x = \frac{7}{5} \;\; si \, \frac{12}{9} \leq x < \frac{13}{9}$$
$$x = \frac{3}{2} \;\; si \, \frac{13}{9} \leq x < \frac{14}{9} \, (punto \; fijo \; de \; f)$$
$$x = \frac{8}{5} \;\; si \, \frac{14}{9} \leq x < \frac{15}{9}$$
$$x = \frac{7}{4} \;\; si \, \frac{15}{9} \leq x < \frac{16}{9}$$
$$x = \frac{9}{5} \;\; si \, \frac{16}{9} \leq x < \frac{17}{9}$$
$$x = 2 \;\; si \, \frac{17}{9} \leq x \leq 2 \; (punto \; fijo \; de \; f)$$

Por lo que la función f tiene 12 puntos de periodo 2; La grafica de $f^2(x)$ es la siguiente

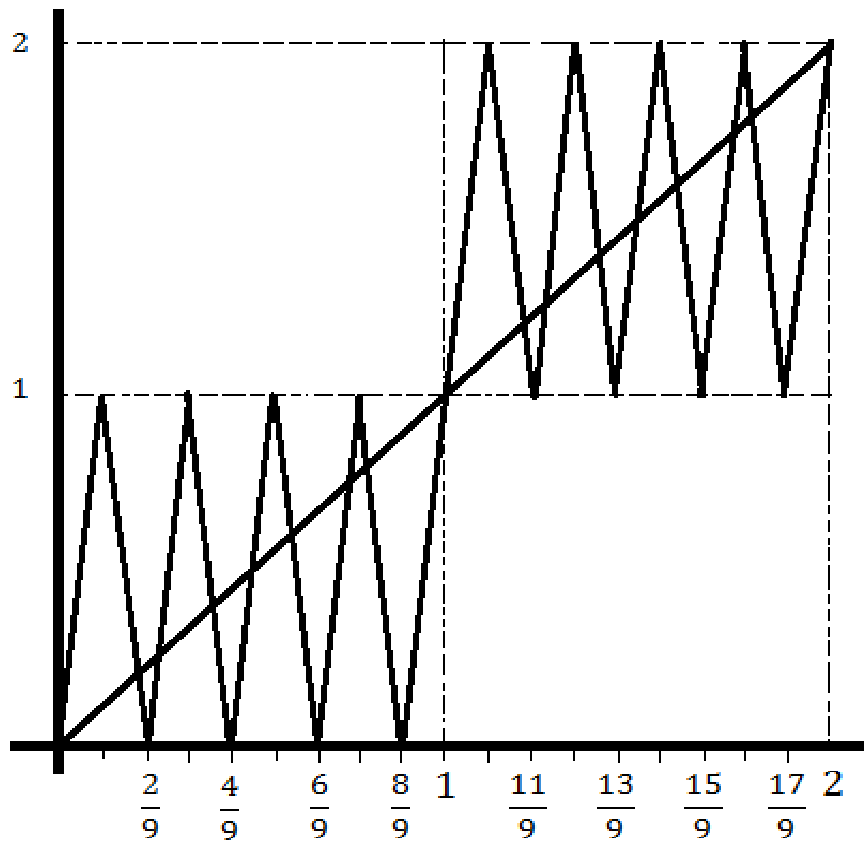


Figura 3.1.6