UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

SECCIÓN DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADO:

“GRUPOS TOPOLÓGICOS”

PRESENTADO POR:

RUDY WILFREDO PÉREZ MARTÍNEZ,

NOÉ SALVADOR CHICAS ROMERO,

JOHNNY OSWALDO GÓMEZ TORRES

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

DOCENTE DIRECTOR:

MSc. MARCELINO MEJÍA GONZÁLEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, JULIO 2015

SAN MIGUEL **EL SALVADOR** **CENTROAMÉRICA**

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

ING. MARIO ROBERTO NIETO LOVO

RECTOR

MS.D ANA MARIA GLOWER DE ALVARADO

VICE-RECTORA ACADEMICA

DRA. ANA LETICIA ZAVALETA DE AMAYA

SECRETARIA GENERAL

LIC. FRANCISCO CRUZ LETONA

FISCAL GENERAL

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

LIC. CRISTOBAL HERNAN RIOS BENITEZ

DECANO

LIC. CARLOS ALEXANDER DIAZ

VICE-DECANO

LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNADEZ

SECRETARIO

Agradecimientos

Queremos expresar nuestros más sinceros agradecimientos primeramente a Dios y en segundo lugar a nuestro Doncente Asesor **MSc. Marcelino Mejía González** por haber aceptado apoyarnos y dirigirnos, por brindarnos su tiempo y esfuerzo sin esperar algo a cambio, por sus consejos y observaciones en todo este tiempo.

También agradecemos a nuestros padres, amigos y todas aquellas personas que de una u otra forma nos ayudaron en el transcurso de nuestra carrera que culminamos con esta tesis.

Ademas queremos agradecer a todos aquellos docentes que nos proporcionaron sus conocimientos y sabiduria, algunos de ellos a parte de ser grandes maestros fueron muy buenos amigos que nos ayudandonos a crecer no solo de manera academica sino también de manera personal. Agradecimientos especiales a **MSc. Jorge Alberto Martínez** quien siempre nos apoyó e impulsó a esforzarnos en cada paso de nuestra carrera, a **Lic. Pedro Flores Sánchez** que con sus consejos y opiniones nos ayudo a mejorar en muchos aspectos, a estos dos últimos también por haber revisado nuetro trabajo y finalmente a **Lic. Ulises Lizama** por orientarnos en la parte metodológica del trabajo.

Sin todas las personas antes mencionadas quizá este trabajo no se hubiese realizado, así que solo nos queda decir gracias por su ayuda incondicional.

Introducción

Álgebra y Topología, dos ramas fundamentales de las matemáticas, juegan roles complementarios. Topología estudia continuidad y convergencia y provee un fragmento general al concepto de límite. Por su parte Álgebra estudia las clases de operaciones y provee bases para algoritmos y cálculo.

Por estas diferencias naturales, Álgebra y Topología por lo general tiende a desarrollarse independientemente, no entran en contactodirecto una con la otra. Sin embargo, en aplicaciones de alto nivel de las matemáticas, tales como Análisis Funcional, Sistemas Dinámicos, Teoría de Representaciones, y otras, Topología y Álgebra entran e contacto más natural.

Muchos de los objetos más importantes de las matemáticas representan una mezcla de Álgebra y Estructuras Topológicas. Espacios topológicos de funciones, grupos topológicos y campos topológicos, son objetos de esta clase. Las reglas que describen la relación entre una topología y una operación algebraica son como siempre transparentes y naturales- las operaciones continuas, conexidad ó separabilidad. Sin embargo, los métodos de estudios desarrollados en álgebra y en topología no se hace una mezcla fácilmente, y es porque actualmente existen muy pocos libros sistemáticos en Álgebra Topológica, probablemente, los cuales no pueden calificarse como un razonable libro de textos completo para estudiantes y fuentes de referencia para instructores.

Como su nombre lo indinca, un Grupo topológico es un grupo en el que se define una topología de tal forma que se relacione con las operacciones en un grupo: se pide que las operacciones de tomar inverso y multiplicación sean continuas.

Las ideas, conceptos y construcciones a las que se llega cuando Álgebra y Topología entran en contacto son muchas tal que es imposible incluirlas todas ellas en un simple trabajo. En este caso se estudiará la parte de grupos topológicos. Esto puede caracterizarse como el estudio de conexiones entre propiedades topológicas en la presencia de una estructura algebraica (grupos) propiamente relacionada a la Topología. Mencionamos acá algunos de los primeros matemáticos contribuidores a la teoría de grupos topológicos, tales como A. D. Alexandroff, N. Bourbaki, M. I. Graev, S. Kakutani, E. van Kampen, A. N. Kolmogorov, A. A. Markov.

En este trabajo lo que primordialmente se pretende es dar a conocer teoría concerniente a los grupos topológicos ya que en nuestro país, a lo largo de la carrera de Licenciatura en Matemáticas, es una parte de las matemáticas que no se da a conocer, y no solamente en nuestro país sino que en muchas partes del mundo. Así que presentamos las definiciones y propiedades más importantes sobre los **Grupos Topológicos**, propiedades topológicas como lo son: compacidad, conexidad, métricas, entre otras construcciones sobre **Grupos Topológicos.**

Este trabajo consta de dos capítulos. En el capítulo 1 se presentan definiciones y hechos generales sobre la teoría de Álgebra Abstracta y Topología General. Las caracteristicas de grupos compactos, localmente compactos, las propiedades de conexidad en grupos, el producto de grupos, y metrazibilidad se establece en el capítulo 2, que también contiene tanto el Primer Teorema de grupos como el Segundo Teorema de grupo.

Y para todos aquellos lectores interesados en las matemáticas al final del trabajo presentamos una bibliografía en la cual se encuentran libros muy interesantes que contienen teoría sobre los Grupos Topológicos. Además se encuentran libros de Topología General y libros sobre Teoría de Grupos para los que aún no han tomado un curso básico de Topología General ó Álgebra Abstracta.

Índice general

Agradecimientos I

Introducción II

1. Preliminares 1

1.1. Teoría de Grupos 1

1.2. Espacios Topológicos 28

2. Grupos Topológicos 62

2.1. Definición de un grupo topológico 62

2.2. Vecindades de la Identidad en Grupos Topológicos 71

2.3. Subgrupos, Conjuntos abiertos y Clausuras 85

2.4. Grupos Topológicos Cocientes 107

2.5. Grupos Productos 128

2.6. Propiedades de Grupos Topológicos que Involucran Conexidad 137

2.7. Prenormas en Grupos Topológicos, Metrizabilidad 146

Bibliografía 166

Índice Alfabético 167

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Teoría de Grupos

En esta sección presentamos un breve estudio de una de las partes fundamentales del álgebra abstracta, como lo es el concepto de **grupo**, el cual nos permite describir conceptos de gran importancia en toda estructura algebraica, como homomorfismos, grupos cocientes, etc., y se dan algunos resultados importantes sobre los isomorfismos.

Antes de comenzar con la definición de lo que es un grupo, recordemos las siguientes definiciones:

Definición 1.1 *Una* **función** *o* **transformación** *o* **aplicación** ϕ *de un conjunto* $\mathbf{S}$ *en un conjunto* $\mathbf{T}$ *es una regla que asigna a cada elemento* s *de* $\mathbf{S}$ *exactamente un elemento* t *de* $\mathbf{T}$. *Se dice que* ϕ *transforma* s *en* t *(ó que* ϕ *lleva* s *en* t*) y que* ϕ *transforma o lleva* $\mathbf{S}$ *en* $\mathbf{T}$. *Esto último lo representaremos simbólicamente por* $\phi : \mathbf{S} \to \mathbf{T}$.

Para indicar que ϕ lleva $s \in \mathbf{S}$ en $t \in \mathbf{T}$ usaremos la notación más conocida

$$\phi(s) = t.$$

Definición 1.2 *Sean* $\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{U}$, *conjuntos cualesquiera, además sean* $\sigma : \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ *y* $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbf{U}$ *Entonces la composición de* σ *y* φ *(llamada también producto) es la aplicación* $\varphi \circ \sigma : \mathbf{S} \to \mathbf{U}$ *definida por*

$$(\varphi \circ \sigma)(s) = \varphi(\sigma(s))$$

para todo $s \in \mathbf{S}$

En la definición $\varphi \circ \sigma$ se lee, efectué primero σ y luego sígase con φ.

Definición 1.3 *Una* **operación binaria** *en un conjunto cualquiera* $\mathbf{A}$ *es una aplicación*

$$\alpha : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}.$$

En otras palabras una operación binaria es una regla que asigna a cada par ordenado (a, b) de elementos de $\mathbf{A}$ otro elemento de $\mathbf{A}$, $\alpha(a, b)$.

Normalmente para una operación binaria, $\alpha : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, se elige un símbolo $*$ y así escribir $\alpha(a, b) = a * b$.

Ahora damos la definición de un grupo

Definición 1.4 *Un **grupo*** $(\mathbf{G}, *)$ *es un conjunto* $\mathbf{G}$, *junto con una operación binaria* $*$ *en* $\mathbf{G}$, *tal que se satisfacen los axiomas:*

1. *La operación binaria* $*$ *es asociativa.*

2. *Existe un elemento* e *en* $\mathbf{G}$ *tal que* $e * x = x * e = x$ *para todas las* $x \in \mathbf{G}$.*(Este elemento* e *es un **elemento identidad** para* $*$ *en* $\mathbf{G}$.*)*

3. *Para cada* a *en* $\mathbf{G}$ *existe un elemento* a' *en* $\mathbf{G}$ *con la propiedad de que*

$$a' * a = a * a' = e.$$

(El elemento a' *es un **inverso de*** a ***respecto a*** $*$.*)*

Recuérdese que una **operación binaria** $*$ **en un conjunto,** es una regla que asigna a cada par ordenado de elementos de un conjunto, algún elemento del mismo conjunto. Por esta razón en la definición de grupo no incluimos el axioma de que $\mathbf{G}$ **sea cerrado bajo la operación** $*$.

Notación 1.1 *Observe que el grupo no sólo es un conjunto* $\mathbf{G}$. *Sino que es un grupo* $(\mathbf{G}, *)$ *que consta de dos entidades, el conjunto* $\mathbf{G}$ *y la operación binaria* $*$ *en* $\mathbf{G}$. *Denotar al grupo por el símbolo de conjunto* $\mathbf{G}$ *es incorrecto lógicamente, sin embargo conforme se avance en la teoría se usará la notación* $\mathbf{G}$ *en lugar de* $(\mathbf{G}, *)$. *Algunas veces se utilizará la notación* $(\mathbf{G}, *)$ *por razones de claridad.*

Teorema 1.1 *Si* $\mathbf{G}$ *es un grupo con una operación binaria* $*$, *entonces las* ***leyes de cancelación izquierda y derecha*** *se cumplen en* $\mathbf{G}$, *es decir,* $a * b = a * c$ *implica* $b = c$ *y* $b * a = c * a$ *implica* $b = c$ *para* $a, b, c \in \mathbf{G}$.

Prueba. Supongamos que $b * a = c * a$. Entonces, por 3 de la Definición 1.4, existe $a' \in \mathbf{G}$ y

$$(b * a) * a' = (c * a) * a'.$$

Por la ley asociativa

$$b * (a * a') = c * (a * a').$$

Por la definición de a' en 3 de la Definición 1.4 $a * a' = e$, luego

$$b * e = c * e.$$

Por la definición de e en 2 de la Definición 1.4

$$b = c.$$

De forma similar, de $a * b = a * c$ podemos deducir que $b = c$ multiplicando por a' por la izquierda y usando los axiomas de grupo. ■

El inverso de un elemento $x \in \mathbf{G}$ lo denotaremos por x^{-1}.

Definición 1.5 *Un grupo* $\mathbf{G}$ *es* **abeliano** *si su operación binaria* $*$ *es conmutativa. Esto es,*

$$\forall a, b \in \mathbf{G}, a * b = b * a.$$

En el resto del documento escribiremos $a \cdot b$ ó ab para indicar $a * b$.

Definición 1.6 *Llamamos* **orden** *de grupo* $\mathbf{G}$, *denotado por* $o(\mathbf{G})$, *al número de elementos de que posee* $\mathbf{G}$. *Cuando* $o(\mathbf{G})$ *es finito decimos que* $\mathbf{G}$ *es un* **grupo finito.**

Veamos algunas operaciones binarias que dan grupos y otras que no dan grupos.

Ejemplo 1.1 *Los conjuntos* $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, *el conjunto de números enteros, el conjunto de números racionales, el conjunto de números reales y el conjunto de números complejos, con la operación suma,* $+$, *son cada uno un grupo, con identidad,* $e = 0$.

Ejemplo 1.2 *Los* $\mathbb{Q}-\{0\}, \mathbb{R}-\{0\}, \mathbb{C}-\{0\}$, *con la operación producto,* $\cdot$, *son grupos, con identidad,* $e = 1$.

Ejemplo 1.3 *El conjunto* $\mathbb{Z}^+$ *con la operación* $+$ *no es un grupo. Porque no existe un elemento identidad para* $+$ *en* $\mathbb{Z}^+$.

Teorema 1.2 *Si* $\mathbf{G}$ *es un grupo, entonces*

a) para todo $a \in \mathbf{G}, (a^{-1})^{-1} = a$,

b) para $a, b \in \mathbf{G}, (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

Prueba. Para la parte a) tenemos que $(a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = e = a \cdot a^{-1}$, entonces por la ley de cancelación derecha (Teorema 1.1), podemos cancelar a^{-1} a ambos lados y obtenemos $(a^{-1})^{-1} = a$.

Para la parte b) tenemos:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) &= a \cdot ((b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1}), && \text{Ley asociativa} \\ &= a \cdot (e \cdot a^{-1}), && \text{Propiedad del elemento inverso} \\ &= a \cdot a^{-1}, && \text{Propiedad del elemento identidad} \\ &= e && \text{Propiedad del elemento inverso} \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} (b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) &= b \cdot ((a^{-1} \cdot a) \cdot b), && \text{Ley asociativa} \\ &= b^{-1} \cdot (e \cdot b), && \text{Propiedad del elemento inverso} \\ &= b^{-1} \cdot b, && \text{Propiedad del elemento identidad} \\ &= e && \text{Propiedad del elemento inverso} \end{aligned}$$

luego

$$(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = (b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b)$$

por lo tanto, por la definición de inverso tenemos que $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

■

Aveces tenemos grupos contenidos en grupos mayores. Por ejemplo, el grupo $\mathbb{Z}$ bajo la suma está contenido en le grupo $\mathbb{Q}$ bajo la suma, el cual a su vez está contenido en el grupo $\mathbb{R}$ bajo la suma.

Definición 1.7 *Si* $\mathbf{H}$ *es un subconjunto de un grupo* $\mathbf{G}$ *cerrado bajo la operación de grupo de* $\mathbf{G}$ *y es él mismo un grupo bajo esta operación inducida, entonces* $\mathbf{H}$ *es un* **subgrupo de G.**

Note de que no todo subconjunto de un grupo es un subgrupo, por ejemplo: $\mathbb{Z}$, el conjunto de números enteros y $\mathbb{Q}^+$, el conjunto de números racionales, son subconjunto de $\mathbb{R}$, el conjunto de números reales, sabemos que $\mathbb{R}$ con la operación $+$, es un grupo, en este caso $\mathbb{Z}$ es un subgrupo, pero $\mathbb{Q}^+$ con esta operación no es un subgrupo. Además también note que $\mathbf{G}$ mismo es un subgrupo, pues es un subconjunto de el mismo; también el subconjunto formado por solo la identidad, $\{e\}$, es subgrupo de $\mathbf{G}$, estos subgrupos son llamados **subgrupos triviales.** Los subgrupos entre estos dos extremos, es decir, los subgrupos diferentes a $\mathbf{G}$ y $\{e\}$, son llamados **subgrupos no triviales.**

Además note que si $\mathbf{H}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$, y $\mathbf{K}$ es un subgrupo de $\mathbf{H}$, entonces $\mathbf{K}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$.

Por ejemplo: con la operación suma, $+$, $\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{Q}$ el cual es un subgrupo de $\mathbb{R}$.

Teorema 1.3 *Un conjunto* $\mathbf{H}$ *de un grupo* $\mathbf{G}$ *es un subgrupo de* $\mathbf{G}$ *si y sólo si*

1. $\mathbf{H}$ *es cerrado bajo la operación binaria de* $\mathbf{G}$;
2. *la identidad* e *de* $\mathbf{G}$ *está en* $\mathbf{H}$;
3. *para todos los* $a \in \mathbf{H}$ *es cierto que* $a^{-1} \in \mathbf{H}$ *también.*

Prueba.

($\Rightarrow$) Si $\mathbf{H}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$, por la definición de subgrupo (Definición 1.7) $\mathbf{H}$ es cerrado bajo la operación de $\mathbf{G}$, además, como $\mathbf{H}$ mismo es un grupo, e está en $\mathbf{H}$, y para todo $a \in \mathbf{H}$ existe $a^{-1} \in \mathbf{H}$.

($\Leftarrow$) Si $\mathbf{H}$ es un subconjunto de $\mathbf{G}$ que satisface (1)-(3), entonces por la propiedad (1) $\mathbf{H}$ es cerrado bajo la operación de $\mathbf{G}$, además como la ley asociativa se verifica en $\mathbf{G}$, por lo que también se verifica en el subconjunto $\mathbf{H}$, por último de la propiedad (3) para todo $x \in \mathbf{H}$, también $x^{-1} \in \mathbf{H}$ y por la propiedad (1) $\mathbf{H}$ es cerrado, así $xx^{-1} \in \mathbf{H}$ pero $xx^{-1} = e$, por definición de inverso, luego $e \in \mathbf{H}$ y por tanto $\mathbf{H}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$.

■

Ejemplo 1.4 *$n\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros múltiplos de n, con la operación $+$, es un subgrupo de $\mathbb{Z}$.*

Ejemplo 1.5 *Sea $\mathbb{S}$ el conjunto de números complejos de módulo 1, es decir,*

$$|a + bi| = 1,$$

con la multiplicación tenemos:

1. $e = 1 \in \mathbb{S}$,
2. *Si $a + bi, c + di \in \mathbb{S}$, entonces $|a + bi| = 1$ y $|c + di| = 1$. Como*

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
|(ac - bd) + (ad + bc)i| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\
&= \sqrt{(ac)^2 - 2acbd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2adbc + (bc)^2} \\
&= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(d^2 + c^2)} \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)(d^2 + c^2)} \\
&= \sqrt{(1)(1)} \\
&= \sqrt{1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

luego $(a+bi)(c+di) \in \mathbb{S}$.

3. *El inverso de* $a+bi$ *está definido por* $\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$ *luego*

$$\begin{aligned}\left|\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right| &= \sqrt{(\frac{a}{a^2+b^2})^2 + (\frac{-b}{a^2+b^2})^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{1} + \frac{(-b)^2}{1}}, \text{ ya que } a^2+b^2 = 1 \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &= 1.\end{aligned}$$

así $\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i \in \mathbb{S}$.

Por lo tanto, por el Teorema 1.3, $\mathbb{S}$ *es un subgrupo de* $\mathbb{C}$.

Recordemos que:

Definición 1.8 *Una relación binaria,* $\sim$, *sobre un conjunto* $\mathbf{A}$ *se dice que es una* **relación de equivalencia** *si para* $a, b, c \in \mathbf{A}$ *se cumple:*

1) $a \sim a$, **propiedad reflexiva**;

2) $a \sim b$ *implica* $b \sim a$, **propiedad simétrica**;

3) $a \sim b$ *y* $b \sim c$ *implica* $a \sim c$, **propiedad transitiva.**

Ahora tenemos la siguiente definición:

Definición 1.9 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo,* $\mathbf{H}$ *un subgrupo de* $\mathbf{G}$ *para* $a, b \in \mathbf{G}$ *decimos que* a **es congruente con** b *mód* $\mathbf{H}$, *estos es* $a \equiv b$ *mód* $\mathbf{H}$, *si* $a^{-1}b \in \mathbf{H}$.

Lema 1.1 *La relación* $a \equiv b$ *mód* $\mathbf{H}$ *es una relación de equivalencia.*

Prueba. Debemos mostrar la tres propiedades de la Definición 1.8:

1. Como $\mathbf{H}$ es un subgrupo, $e \in \mathbf{H}$ pero por la Definición 1.4 $a^{-1}a = e, \forall a \in \mathbf{G}$ así, por la Definición 1.8, $a \equiv a$ mód $\mathbf{H}$.

2. Sean $a, b \in \mathbf{G}$ tal que $a \equiv b \text{ mód } \mathbf{H}$, entonces $a^{-1}b \in \mathbf{H}$, por la Definición 1.8. Como $\mathbf{H}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$, $(a^{-1}b)^{-1} \in \mathbf{H}$, pero

$$\begin{aligned}(a^{-1}b)^{-1} &= (b)^{-1}(a^{-1})^{-1}\\ &= b^{-1}a,\end{aligned}$$

así $b^{-1}a \in \mathbf{H}$, por lo tanto $b \equiv a \text{ mód } \mathbf{H}$.

3. Sean $a, b, c \in \mathbf{G}$ tal que $a \equiv b \text{ mód } \mathbf{H}$ y $b \equiv c \text{ mód } \mathbf{H}$, entonces $a^{-1}b \in \mathbf{H}$ y $b^{-1}c \in \mathbf{H}$, como $\mathbf{H}$ es un subgrupo tenemos $(a^{-1}b)(b^{-1}c) \in \mathbf{H}$, pero

$$\begin{aligned}(a^{-1}b)(b^{-1}c) &= a^{-1}(bb^{-1})c\\ &= a^{-1}ec\\ &= a^{-1}c,\end{aligned}$$

así $a^{-1}c \in \mathbf{H}$, de donde $a \equiv c \text{ mód } \mathbf{H}$.

■

Definición 1.10 *Si* $\mathbf{H}$ *es un subgrupo de* $\mathbf{G}$, *y* $a \in \mathbf{G}$, *entonces*

$$\mathbf{H}a = \{ha | h \in \mathbf{H}\} \quad y \quad a\mathbf{H} = \{ah | h \in \mathbf{H}\}.$$

A $\mathbf{H}a$ *se le llama* **clase lateral derecha** *de* $\mathbf{H}$ *en* $\mathbf{G}$. *y a* $a\mathbf{H}$ *se le llama* **clase lateral izquierda.**

Lema 1.2 *Para todo* $a \in \mathbf{G}$,

$$a\mathbf{H} = \{x \in G | a \equiv x \text{ mód } H\}.$$

Prueba. Sea $[a] = \{x \in \mathbf{G} | a \equiv x \text{ mód } \mathbf{H}\}$. Sea $x \in a\mathbf{H}$,

$$\begin{aligned}x \in a\mathbf{H} &\Rightarrow x = ah, h \in \mathbf{H}; \text{ por definición de } a\mathbf{H}\\ &\Rightarrow a^{-1}x = a^{-1}ah = h \in \mathbf{H}, \text{ multiplicando ambos lados por la izquierda } a^{-1}\\ &\Rightarrow a \equiv x \text{ mód } \mathbf{H}\\ &\Rightarrow x \in [a].\end{aligned}$$

Luego $a\mathbf{H} \subset [a]$

Sea ahora $y \in [a]$,

$$\begin{aligned} y \in [a] &\Rightarrow a \equiv y \text{ mód } \mathbf{H}, \text{ por definición de } [a] \\ &\Rightarrow a^{-1}y \in \mathbf{H} \\ &\Rightarrow a^{-1}y = h, \text{ para algún } h \in \mathbf{H} \\ &\Rightarrow y = aa^{-1}y = ah, h \in \mathbf{H} \\ &\Rightarrow y \in a\mathbf{H}. \end{aligned}$$

Luego $[a] \subset a\mathbf{H}$. Y por lo tanto $a\mathbf{H} = [a]$ ■

Sea $x \in a\mathbf{H} \cap b\mathbf{H}$, como $\mathbf{H}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$ tenemos:

$$\begin{aligned} x \in aH \cap b\mathbf{H} &\Longleftrightarrow x \in a\mathbf{H} \wedge x \in b\mathbf{H} \\ &\Longleftrightarrow x \in [a] \wedge x \in [b] \\ &\Longleftrightarrow a \equiv x \text{ mód } \mathbf{H} \wedge b \equiv x \text{ mód } \mathbf{H}, \\ &\Longleftrightarrow a^{-1}x \in \mathbf{H} \wedge b^{-1}x \in \mathbf{H}, \\ &\Longleftrightarrow x^{-1}a = (a^{-1}x)^{-1} \in \mathbf{H} \wedge x^{-1}b = (b^{-1}x) \in \mathbf{H}, \\ &\Longleftrightarrow (a^{-1}x)(x^{-1}b) \in \mathbf{H} \wedge (b^{-1}x)(x^{-1}a) \in \mathbf{H}, \\ &\Longleftrightarrow a^{-1}b = (a^{-1}x)(x^{-1}b) \in \mathbf{H} \wedge b^{-1}a = (b^{-1}x)(x^{-1}a) \in \mathbf{H}, \\ &\Longleftrightarrow b \in [a] \wedge a \in [b] \\ &\Longleftrightarrow [a] = [b] \\ &\Longleftrightarrow a\mathbf{H} = b\mathbf{H} \end{aligned}$$

Esto prueba que *dos clases laterales izquierdas de* $\mathbf{H}$ *en* $\mathbf{G}$ *o son idénticas o no tienen elementos en común.* Las clases laterales derechas cumplen también con esta propiedad.

El siguiente lema nos dice que entre dos clases laterales izquierdas de un subgrupo $\mathbf{H}$, existe una correspondencia biyectiva.

Lema 1.3 *Hay una correspondencia biyectiva entre dos clases laterales izquierdas cualesquiera de* $\mathbf{H}$ *en* $\mathbf{G}$.

Prueba. Si $a\mathbf{H}$ y $b\mathbf{H}$ son dos clases laterales, definimos

$$\gamma : a\mathbf{H} \to b\mathbf{H}$$

como sigue

$$\gamma(ah) = bh, ah \in a\mathbf{H}.$$

Para probar que γ es sobreyectiva tenemos, si $x \in b\mathbf{H}$, entonces $x = bh, h \in \mathbf{H}$ así

$$x = bh = \gamma(ah),$$

luego γ es sobreyectiva.

Sea ahora $ah_1, ah_2 \in a\mathbf{H}$ tal que $\gamma(ah_1) = \gamma(ah_2)$, entonces $bh_1 = bh_2$, por la ley de cancelación izquierda tenemos que $h_1 = h_2$, luego $ah_1 = ah_2$, y por tanto γ es inyectiva. Con lo que se concluye que γ es biyectiva. ■

Definición 1.11 *Si* $\mathbf{H}$ *es un subgrupo de* $\mathbf{G}$, *el* **índice** *de* $\mathbf{H}$ *en* $\mathbf{G}$ *es el número de clases lateral derechas de* $\mathbf{H}$ *en* $\mathbf{G}$.

El índice de $\mathbf{H}$ en $\mathbf{G}$ es representado por $i_{\mathbf{G}}(\mathbf{H})$.

Para un grupo G podemos definir tres aplicaciones. Éstas son dadas en la siguiente definición.

Definición 1.12 *Si* $\mathbf{G}$ *es un grupo, la aplicación* $i : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ *definida por*

$$i(x) = x^{-1},$$

es llamada **inversión.** *Además para todo* $a \in \mathbf{G}, {}_a\lambda, \lambda_a : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, *definidas por*

$${}_a\lambda(x) = ax \;\; e \;\; \lambda_a(x) = xa.$$

Son llamadas **traslación izquierda y traslación derecha** *, respectivamente, de* $\mathbf{G}$ *por* a.

Como se vio en la Definición 1.10, si $\mathbf{H}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$ y $a \in \mathbf{G}$, entonces $\mathbf{H}a$ consiste en todos los elementos de la forma ha donde $h \in H$. Generalizamos esto. Si $\mathbf{H}$ y $\mathbf{K}$ son dos subgrupos de $\mathbf{G}$, sea $\mathbf{HK} = \{x \in \mathbf{G} | x = hk, h \in \mathbf{H}, k \in \mathbf{K}\}$.

Lema 1.4 HK *es un subgrupo de* $\mathbf{G}$ *si y sólo si* $\mathrm{HK} = \mathrm{KH}$.

Prueba.

$(\Rightarrow)$ $\mathbf{HK}$ es un subgrupo de $\mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{HK} = \mathbf{KH}$. Debemos probar que $\mathbf{HK} \subset \mathbf{KH}$ y que $\mathbf{KH} \subset \mathbf{HK}$. Para $\mathbf{HK} \subset \mathbf{KH}$, si $x \in \mathbf{HK}$, entonces $x = hk, h \in \mathbf{H}$ y $k \in \mathbf{K}$, como $\mathbf{HK}$ es un subgrupo $x^{-1} \in \mathbf{HK}$, si $x^{-1} = h_1k_1, h_1 \in \mathbf{H}, k_1 \in \mathbf{K}$ tenemos que $h_1^{-1} \in \mathbf{H}, k_1^{-1} \in \mathbf{K}$, ya que $\mathbf{H}$ y $\mathbf{K}$ son subgrupos, y así

$$\begin{aligned} x &= (x^{-1})^{-1} \\ &= (h_1k_1)^{-1} \\ &= k_1^{-1}h_1^{-1} \in \mathbf{KH} \end{aligned}$$

luego $\mathbf{HK} \subset \mathbf{KH}$.

Para $\mathbf{KH} \subset \mathbf{HK}$. sea $x \in \mathbf{KH}$, entonces $x = kh, k \in \mathbf{K}$ y $h \in \mathbf{H}$. Como $\mathbf{H}$ y $\mathbf{K}$ son subgrupos tenemos que $h^{-1} \in \mathbf{H}$ y $k^{-1} \in \mathbf{K}$ y así $h^{-1}k^{-1} \in \mathbf{HK}$, además $(h^{-1}k^{-1})^{-1} \in \mathbf{HK}$, ya que $\mathbf{HK}$ es un subgrupo, luego

$$\begin{aligned} x &= kh \\ &= (k^{-1})^{-1}(h^{-1})^{-1} \\ &= (h^{-1}k^{-1})^{-1} \in \mathbf{HK} \end{aligned}$$

y así $\mathbf{KH} \subset \mathbf{HK}$. Por lo tanto $\mathbf{HK} = \mathbf{KH}$.

$(\Leftarrow)$ $\mathbf{HK} = \mathbf{KH} \Rightarrow \mathbf{HK}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$. La hipótesis $\mathbf{HK} = \mathbf{KH}$, significa que $hk = k_1h_1$ para $h, h_1 \in \mathbf{H}, k, k_1 \in \mathbf{K}$ (no necesariamente $h = h_1$ y $k = k_1$).

Sean $x, y \in \mathbf{HK}$. Entonces $x = hk$ y $y = h_2k_2$ así

$$\begin{aligned} xy &= (hk)(h_2k_2) \\ &= h(kh_2)k_2 \\ &= h(h_3k_3)k_2, \quad \text{con } kh_2 = h_3k_3 \\ &= (hh_3)(k_3k_2) \in \mathbf{HK}, \quad \text{ya que } hh_3 \in \mathbf{H}, k_3k_2 \in \mathbf{K}. \end{aligned}$$

Así $\mathbf{HK}$ es cerrado. Además tenemos que

$$x^{-1} = (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in \mathbf{KH} = \mathbf{HK},$$

luego $x^{-1} \in \mathbf{HK}$. Y por tanto $\mathbf{HK}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$.

■

El caso especial interesante es cuando $\mathbf{G}$ es abeliano, pues en este caso

$$\mathbf{HK} = \mathbf{KH}.$$

Como consecuencia tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.1 *Si* $\mathbf{H}$ *y* $\mathbf{K}$ *son subgrupos de un grupo abeliano* $\mathbf{G}$, *entonces* $\mathbf{HK}$ *es un subgrupo de* $\mathbf{G}$.

Prueba. Bajo la hipótesis que $\mathbf{G}$ es abeliano tenemos

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{HK} &\Longleftrightarrow x = hk \\ &\Longleftrightarrow x = kh \\ &\Longleftrightarrow x \in \mathbf{KH} \end{aligned}$$

luego $\mathbf{HK} = \mathbf{KH}$. Por tanto, por el Lema 1.4, $\mathbf{HK}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$. ■

Es un tributo recordar al gran genio Evaristides Galois, quién fue el primero en reconocer que aquellos subgrupos para los cuales las clases laterales derechas e izquierdas coinciden, son subgrupos distinguidos. Vamos a definir esta clase especial de subgrupos de una forma diferente pero que es equivalente al expresado en las observaciones anteriores.

Definición 1.13 *Un subgrupo* $\mathbf{N}$ *de* $\mathbf{G}$ *se dice que es un* ***subgrupo normal*** *de* $\mathbf{G}$ *si para toda* $g \in G$ *y toda* $n \in \mathbf{N}, gng^{-1} \in \mathbf{N}$.

Proposición 1.1 *Sea* $g\mathbf{N}g^{-1} = \{gng^{-1} | n \in \mathbf{N}\}$, *entonces* $\mathbf{N}$ *es un subgrupo normal de* $\mathbf{G}$ *si y sólo si* $g\mathbf{N}g^{-1} \subset \mathbf{N}$ *para todo* $g \in \mathbf{G}$.

Prueba.

($\Rightarrow$) Sea $gng^{-1} \in g\mathbf{N}g^{-1}$, ya que por hipótesis $\mathbf{N}$ es un subgrupo normal, tenemos que $gng^{-1} \in \mathbf{N}$, según la Definición 1.13, así $g\mathbf{N}g^{-1} \subset \mathbf{N}$ para todo $g \in \mathbf{G}$.

($\Leftarrow$) Por hipótesis $g\mathbf{N}g^{-1} \subset \mathbf{N}$ para todo $g \in \mathbf{G}$, entonces tenemos para $n \in \mathbf{N}$,

$$gng^{-1} \in g\mathbf{N}g^{-1} \subset \mathbf{N},$$

por lo tanto $gng^{-1} \in \mathbf{N}$, y así, según la Definición 1.13, $\mathbf{N}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$.

■

Lema 1.5 $\mathbf{N}$ *es un subgrupo normal de* $\mathbf{G}$ *si y sólo si* $g\mathbf{N}g^{-1} = \mathbf{N}, \forall g \in \mathbf{G}$

Prueba.

($\Leftarrow$) Si $g\mathbf{N}g^{-1} = \mathbf{N}, \forall g \in \mathbf{G}$, entonces $\mathbf{N}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$.

Ya que $g\mathbf{N}g^{-1} = \mathbf{N}, \forall g \in \mathbf{G}$ entonces $g\mathbf{N}g^{-1} \subset \mathbf{N}$ y así por lo anterior esto implica que $\mathbf{N}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$.

($\Rightarrow$) Si $\mathbf{N}$ es normal en $\mathbf{G}$, entonces para $g \in \mathbf{G}, g\mathbf{N}g^{-1} \subset \mathbf{N}$ y

$$g^{-1}\mathbf{N}g = g^{-1}\mathbf{N}(g^{-1})^{-1} \subset \mathbf{N}.$$

Pero como $g^{-1}\mathbf{N}g \subset \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= g(g^{-1}\mathbf{N}g)g^{-1} \\ &\subset g\mathbf{N}g^{-1} \\ &\subset \mathbf{N}, \end{aligned}$$

de donde $\mathbf{N} = g\mathbf{N}g^{-1}$.

■

Ahora volvemos al problema de la igualdad de las clases laterales izquierdas y clases laterales derechas.

Lema 1.6 *El subgrupo* $\mathbf{N}$ *de* $\mathbf{G}$ *es un subgrupo normal de* $\mathbf{G}$ *si y sólo si toda clase lateral izquierda de* $\mathbf{N}$ *en* $\mathbf{G}$ *es una clase lateral derecha de* $\mathbf{N}$ *en* $\mathbf{G}$.

Prueba.

$(\Rightarrow)$ Por hipótesis $\mathbf{N}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$, entonces para $g \in \mathbf{G}$

$$\begin{aligned} g\mathbf{N}g^{-1} &= \mathbf{N} \\ (g\mathbf{N}g^{-1})g &= \mathbf{N}g \\ g\mathbf{N}(g^{-1}g) &= \mathbf{N}g \\ g\mathbf{N}e &= \mathbf{N}g \\ g\mathbf{N} &= \mathbf{N}g \end{aligned}$$

Esto significa que la clase lateral izquierda $g\mathbf{N}$ es la clase lateral derecha $\mathbf{N}g$.

$(\Leftarrow)$ Si $g\mathbf{N} = \mathbf{N}g, \forall g \in \mathbf{G}$, entonces

$$\begin{aligned} g\mathbf{N} &= \mathbf{N}g \\ g\mathbf{N}g^{-1} &= (\mathbf{N}g)g^{-1} \\ g\mathbf{N}g^{-1} &= \mathbf{N}(gg^{-1}) \\ g\mathbf{N}g^{-1} &= \mathbf{N}e \\ g\mathbf{N}g^{-1} &= \mathbf{N} \end{aligned}$$

y por el Lema 1.5, $\mathbf{N}$ es un subgrupo normal en $\mathbf{G}$.

■

Ya hemos definido lo que entendemos por $\mathbf{HK}$ siempre que $\mathbf{H}, \mathbf{K}$ son subgrupos de $\mathbf{G}$. Podemos extender esta definición a subconjuntos arbitrarios, lo cual hacemos de la manera siguiente,

Definición 1.14 *Para dos subconjuntos cualesquiera* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *de* $\mathbf{G}$, *definimos el* **producto** $\mathbf{AB}$ *por*

$$\mathbf{AB} = \{x \in \mathbf{G} | x = ab, a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}.$$

Además definimos

$$\mathbf{A}^{-1} = \{a^{-1} | a \in \mathbf{A}\}.$$

Como un caso particular, si $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{H}$ tenemos

$$\mathbf{HH} = \{h_1h_2 | h_1, h_2 \in \mathbf{H}\} \subset \mathbf{H}$$

ya que $\mathbf{H}$ es cerrado con respecto a la multiplicación. Pero $\mathbf{HH} \supset \mathbf{H}e = \mathbf{H}$ ya que $e \in \mathbf{H}$. Luego $\mathbf{HH} = \mathbf{H}$.

Abreviamos $\mathbf{HH}$ como $\mathbf{H}^2, \mathbf{HHH}$ como $\mathbf{H}^3$, etc. Similarmente, $\mathbf{H}^{-2}$ es una sustitución para $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}^{-1}$, etc.

Proposición 1.2 *Sea* $\mathbf{H}$ *un subconjunto de un grupo* $\mathbf{G}$, *entonces para cada* $x \in \mathbf{G}$, *tenemos*

$$(x\mathbf{H})^{-1} = \mathbf{H}^{-1}x^{-1}.$$

Prueba. Tenemos que

$$\begin{aligned} y \in (x\mathbf{H})^{-1} &\iff y^{-1} \in x\mathbf{H} \\ &\iff y^{-1} = xh, h \in \mathbf{H} \\ &\iff (y^{-1})^{-1} = (xh)^{-1}, h \in \mathbf{H} \\ &\iff y = h^{-1}x^{-1}, h \in \mathbf{H} \\ &\iff y \in \mathbf{H}^{-1}x^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(x\mathbf{H})^{-1} = \mathbf{H}^{-1}x^{-1}.$$

■

Lema 1.7 *Sean* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *subconjuntos de un conjunto dado* $\mathbf{G}$, *si* $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ *y* $x \in \mathbf{C}$, *entonces* $x\mathbf{A} \subset \mathbf{CB}$.

Prueba. Sea $y \in x\mathbf{A}$,

$$\begin{aligned} y \in x\mathbf{A} &\Rightarrow y = xa, a \in \mathbf{A} \\ &\Rightarrow y = xa, x \in \mathbf{C}, a \in \mathbf{B}, \text{ ya que } \mathbf{A} \subset \mathbf{B}, \end{aligned}$$

luego $y \in \mathbf{CB}$, por lo tanto $x\mathbf{A} \subset \mathbf{CB}$. ■

Definición 1.15 *A un subconjunto* $\mathbf{A}$ *de* $\mathbf{G}$ *se le llama* **simétrico** *si* $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$. *En particular un subgrupo* $\mathbf{H}$ *de* $\mathbf{G}$, *es llamado* **simétrico** *si* $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}$.

Lema 1.8 *Un subgrupo* $\mathbf{N}$ *es un subgrupo normal de* $\mathbf{G}$ *si y sólo si el producto de dos clases laterales izquierdas de* $\mathbf{N}$ *en* $\mathbf{G}$ *es de nuevo una clase lateral izquierda de* $\mathbf{N}$ *en* $\mathbf{G}$.

Prueba. Supongamos que $\mathbf{N}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$ y que $a, b \in \mathbf{G}$. Consideremos $(a\mathbf{N})(b\mathbf{N})$; como $\mathbf{N}$ es normal en $\mathbf{G}$, $a\mathbf{N} = \mathbf{N}a$, y por tanto

$$\begin{aligned} a\mathbf{N}b\mathbf{N} &= a(\mathbf{N}b)\mathbf{N} \\ &= a(b\mathbf{N})\mathbf{N} \\ &= (ab)\mathbf{N}\mathbf{N} \\ &= ab\mathbf{N}. \end{aligned}$$

■

Definición 1.16 *Sea* $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ *el conjunto de todas las clases laterales izquierdas de* $\mathbf{N}$ *en* $\mathbf{G}$, *definido por* $\mathbf{G}/\mathbf{N} = \{x\mathbf{N} | x \in \mathbf{G}\}$, *esto es, donde* $\mathbf{G}$ *es un grupo y* $\mathbf{N}$ *es un subgrupo normal de* $\mathbf{G}$.

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.4 *Si* $\mathbf{G}$ *es un grupo y* $\mathbf{N}$ *un subgrupo normal de* $\mathbf{G}$, *entonces* $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ *es también un grupo. Se le llama* **grupo cociente** *o* ***grupo factor*** *de* $\mathbf{G}$ *por* $\mathbf{N}$.

Prueba. Usemos el producto de subconjuntos de $\mathbf{G}$ para que nos suministre un producto en $\mathbf{G}/\mathbf{N}$.

1. $X, Y \in \mathbf{G}/\mathbf{N}$ implica $XY \in \mathbf{G}/\mathbf{N}$; pues, si $X = a\mathbf{N}, Y = b\mathbf{N} \in \mathbf{G}/\mathbf{N}$ para algunos $a, b \in \mathbf{G}$, tenemos

$$XY = a\mathbf{N}b\mathbf{N} = ab\mathbf{N} \in \mathbf{G}/\mathbf{N}.$$

2. $X, Y, Z \in \mathbf{G}/\mathbf{N}$ implica $X = a\mathbf{N}, Y = b\mathbf{N}, Z = c\mathbf{N}$ con $a, b, c \in \mathbf{G}$, y, por tanto,

$$\begin{aligned}
(XY)Z &= (a\mathbf{N}b\mathbf{N})c\mathbf{N} \\
&= (ab)\mathbf{N}c\mathbf{N} \\
&= (ab)c\mathbf{N} \\
&= a(bc)\mathbf{N} && \text{(pues } \mathbf{G} \text{ es asociativo)} \\
&= a\mathbf{N}(bc\mathbf{N}) \\
&= \mathbf{N}a(b\mathbf{N}c\mathbf{N}) \\
&= X(YZ)
\end{aligned}$$

y por tanto el producto en $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ satisface la ley asociativa.

3. Considérese el elemento $\mathbf{N} = e\mathbf{N} \in \mathbf{G}/\mathbf{N}$. Si $X \in \mathbf{G}/\mathbf{N}, X = a\mathbf{N}, a \in \mathbf{G}$, entonces

$$\begin{aligned}
X\mathbf{N} &= a\mathbf{N}e\mathbf{N} \\
&= ae\mathbf{N} \\
&= a\mathbf{N} \\
&= X
\end{aligned}$$

de igual manera $\mathbf{N}X = X$. Por tanto $e\mathbf{N}$ es un elemento identidad para $\mathbf{G}/\mathbf{N}$.

4. Supongamos $X = a\mathbf{N} \in \mathbf{G}/\mathbf{N}$ (donde $a \in \mathbf{G}$); es claro que $a^{-1}\mathbf{N} \in \mathbf{G}/\mathbf{N}$ y

$$\begin{aligned}
a\mathbf{N}a^{-1}\mathbf{N} &= aa^{-1}\mathbf{N} \\
&= e\mathbf{N}.
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
a^{-1}\mathbf{N}a\mathbf{N} &= a^{-1}a\mathbf{N} \\
&= e\mathbf{N}.
\end{aligned}$$

De donde $a^{-1}\mathbf{N}$ es el inverso de $a\mathbf{N}$ en $\mathbf{G}/\mathbf{N}$.

Por lo tanto $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ es un grupo. ■

Ejemplo 1.6 *Sea* $\mathbf{G}$ *el grupo aditivo de los enteros (el grupo que con la adición como operación forman los enteros) y sea* $\mathbf{N}$ *el conjunto de todos los múltiplos de 3, es decir,* $\mathbf{N} = \{t|t = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$. *Como la operación en* $\mathbf{G}$ *es la adición, escribiremos las clases laterales de* $\mathbf{N}$ *en* $\mathbf{G}$ *como* $a + \mathbf{N}$ *el lugar de escribirlas como* $a\mathbf{N}$. *Consideremos las tres clases laterales* $\mathbf{N}, 1 + \mathbf{N}, 2 + \mathbf{N}$. *Afirmamos que estas son todas las clases laterales de* $\mathbf{N}$ *en* $\mathbf{G}$. *Pues dada* $a \in \mathbf{G}, a = 3b + c$ *donde* $b \in \mathbf{G}$ *y* $c = 0, 1, 2$ *(*c *es el resto en la división de* a *por* 3*). Por tanto,*

$$\begin{aligned} a + \mathbf{N} &= 3b + c + \mathbf{N} \\ &= c + (3b + \mathbf{N}) \\ &= c + \mathbf{N} \end{aligned}$$

ya que $3b \in \mathbf{N}$. *Así pues, toda clase lateral es, como afirmábamos, o* $\mathbf{N}$, *o* $1 + \mathbf{N}$, *o* $2 + \mathbf{N}$, *y* $\mathbf{G}/\mathbf{N} = \{\mathbf{N}, 1 + \mathbf{N}, 2 + \mathbf{N}\}$. *Pero ¿cómo sumamos elementos de* $\mathbf{G}/\mathbf{N}$*? La fórmula* $a\mathbf{N}b\mathbf{N} = ab\mathbf{N}$ *se convierte en este caso en:*

$$(1 + \mathbf{N}) + (2 + \mathbf{N}) = 3 + \mathbf{N} = \mathbf{N}$$

ya que $3 \in N$;

$$\begin{aligned} (2 + \mathbf{N}) + (2 + \mathbf{N}) &= 4 + \mathbf{N} \\ &= 1 + 3 + \mathbf{N} \\ &= 1 + \mathbf{N}, \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Teorema 1.5 *Todo subgrupo de un grupo abeliano es un subgrupo normal.*

Prueba. Si $\mathbf{H}$ es un subgrupo de un grupo abeliano $\mathbf{G}$, entonces para todas las $g \in \mathbf{G}$ y $h \in \mathbf{H}$ tenemos

$$\begin{aligned} g^{-1}hg &= g^{-1}gh \\ &= eh \\ &= h. \end{aligned}$$

Así $\mathbf{H} = g^{-1}\mathbf{H}g$ y por definición este $\mathbf{H}$ es normal. ■

Ahora tratamos la idea común en todos los aspectos del álgebra moderna, tal idea es la noción de homomorfismo. Con ello se indica una aplicación de un sistema algebraico a un sistema algebraico análogo que preserva la estructura. En cuanto a grupos se refiere, esta idea se da en la siguiente definition.

Definición 1.17 *Una aplicación ϕ de un grupo $\mathbf{G}$ en un grupo $\mathbf{K}$ se dice que es un* ***homomorfismo*** *si para $a, b \in \mathbf{G}$ cualesquiera siempre se tiene $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.*

Nótese que en el primer miembro de esta relación, es decir, en el término $\phi(ab)$, el producto ab se calcula en $\mathbf{G}$ usando el producto de elementos de $\mathbf{G}$, mientras que en el segundo miembro de la relación, es decir, en el término $\phi(a)\phi(b)$, el producto es el elemento en $\mathbf{K}$.

Ejemplo 1.7 *Sea $\mathbf{G}$ un grupo, la aplicación definida por $\phi(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{G}$ es un homomorfismo de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{G}$. Pues para $x, y \in \mathbf{G}$, tenemos*

$$\phi(xy) = xy = \phi(x)\phi(y).$$

con $\phi(x)\phi(y) \in \mathbf{G}$.

Proposición 1.3 *Sean $\phi : \mathbf{G} \to \mathbf{F}$ y $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{H}$ homomorfismo, entonces la composición*

$$\varphi \circ \phi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$$

es un homomorfismo.

Prueba. Sean $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$, entonces

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \phi)(g_1 g_2) &= \varphi(\phi(g_1 g_2)) \\ &= \varphi(\phi(g_1)\phi(g_2)) \\ &= \varphi(\phi(g_1))\varphi(\phi(g_2)) \\ &= (\varphi \circ \phi)(g_1)(\varphi \circ \phi)(g_2)\end{aligned}$$

por lo tanto $\varphi \circ \phi$ es un homomorfismo. ■

Lema 1.9 *Supongamos que* $\mathbf{G}$ *es un grupo y que* $\mathbf{N}$ *es un subgrupo normal de* $\mathbf{G}$; *definimos la aplicación* ϕ *de* $\mathbf{G}$ *en* $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ *por*

$$\phi(x) = x\mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{G}.$$

Entonces, ϕ *es un homomorfismo de* $\mathbf{G}$ *sobre* $\mathbf{G}/\mathbf{N}$.

Prueba. Si $X \in \mathbf{G}/\mathbf{N}$, entonces $X = y\mathbf{N}, y \in \mathbf{G}$, así

$$X = y\mathbf{N} = \phi(y)$$

luego ϕ es sobreyectiva. Ahora para $x, y \in \mathbf{G}$ tenemos

$$\begin{aligned} \phi(xy) &= xy\mathbf{N} \\ &= x\mathbf{N}y\mathbf{N} \\ &= \phi(x)\phi(y) \end{aligned}$$

esto muestra que ϕ es un homomorfismo. ∎

Lema 1.10 *Si* ϕ *es un homomorfismo de* $\mathbf{G}$ *en* $\mathbf{F}$, *entonces:*

1. $\phi(e_{\mathbf{G}}) = e_{\mathbf{F}}$, *el elemento identidad de* $\mathbf{F}$;
2. $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}, \forall x \in \mathbf{G}$.

Prueba.

1. para esta parte tenemos

$$\begin{aligned} \phi(x)e_{\mathbf{F}} &= \phi(x) \\ &= \phi(xe_{\mathbf{G}}) \\ &= \phi(x)\phi(e_{\mathbf{G}}) && \text{propiedad de homomorfismo} \end{aligned}$$

luego $\phi(x)e_{\mathbf{F}} = \phi(x)\phi(e_{\mathbf{G}})$ aplicando las propiedades de cancelación obtenemos $\phi(e_{\mathbf{G}}) = \phi(e_{\mathbf{F}})$.

2. Para esta parte, tenemos por la parte 1 que

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{F}} &= \phi(e_{\mathbf{G}}) \\ &= \phi(xx^{-1}) \\ &= \phi(x)\phi(x^{-1}), \end{aligned}$$

así tenemos que en $\mathbf{F}, e_{\mathbf{F}} = \phi(x)\phi(x^{-1})$, esto es, $\phi(x^{-1})$ es el inverso de $\phi(x)$ en $\mathbf{F}$, luego $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$.

■

Proposición 1.4 *Para cualquier homomorfismo* $\phi : \mathbf{G} \to \mathbf{F}$, *la imagen*

$$\phi(\mathbf{A}) = \{\phi(x) | x \in \mathbf{A}\}$$

de un subgrupo $\mathbf{A}$ *de* $\mathbf{G}$ *es un subgrupo de* $\mathbf{F}$, *y la imagen inversa*

$$\phi^{-1}(\mathbf{B}) = \{x \in \mathbf{G} | \phi(x) \in \mathbf{B}\}$$

de un subgrupo $\mathbf{B}$ *de* $\mathbf{F}$ *es un subgrupo de* $\mathbf{G}$.

Prueba. Sean $u, v \in \phi(\mathbf{A})$. Por definición de $\phi(\mathbf{A})$, existen $g_1, g_2 \in \mathbf{A}$ tales que $\phi(g_1) = u$ y $\phi(g_2) = v$. Como $\mathbf{A}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$, tenemos que g_1g_2, g_1^{-1} y $e_{\mathbf{G}}$ están en $\mathbf{A}$. Puesto que ϕ es un homomorfismo, esto implica que

$$uv = \phi(g_1)\phi(g_2) = \phi(g_1g_2) \in \phi(\mathbf{A}),$$

$$u^{-1} = \phi(g_1)^{-1} = \phi(g_1^{-1}) \in \phi(\mathbf{A}),$$

$$e_{\mathbf{F}} = \phi(e_{\mathbf{G}}) \in \phi(\mathbf{A}).$$

Por tanto $\phi(\mathbf{A})$ es un subgrupo.

Para la otra parte tenemos, sean $g_1, g_2 \in \phi^{-1}(\mathbf{B})$. Por definición de $\phi^{-1}(\mathbf{B})$, tenemos

$$\phi(g_1), \phi(g_2) \in \mathbf{B}.$$

Como ϕ es un homomorfismo y $\mathbf{B}$ un subgrupo de $\mathbf{F}$, tenemos

$$\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) \in \mathbf{B},$$

$$\phi(g_1^{-1}) = \phi(g_1)^{-1} \in \mathbf{B},$$

$$\phi(e_G) = e_F \in \mathbf{B}.$$

Luego, por la definición de $\phi^{-1}(\mathbf{B})$, lo anterior implica que $g_1g_2, g_1^{-1}, e_{\mathbf{G}}$ están en $\phi^{-1}(\mathbf{B})$. Y por lo tanto $\phi^{-1}(\mathbf{B})$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$. ■

Definición 1.18 *Si ϕ es un homomorfismo de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{F}$, el* **núcleo** *o* **Kernel** *de $\phi, \mathbf{K}_\phi$, se define por* $\mathbf{K}_\phi = \{x \in \mathbf{G} | \phi(x) = e_{\mathbf{F}}, e_{\mathbf{F}}\}$.

En términos del Lema 1.4 el núcleo de ϕ lo podemos describir como sigue: si el subgrupo $\mathbf{B}$ de $\mathbf{F}$ es el subgrupo trivial $\{e_{\mathbf{F}}\}$, la imagen inversa $\phi^{-1}(\{e_{\mathbf{F}}\}) = \mathbf{K}_\phi$.

Como se puede observar del Lema 1.10 que $\mathbf{K}_\phi$ es no vacío, pues $e \in \mathbf{K}_\phi$.

Lema 1.11 *Si ϕ es un homomorfismo de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{F}$ de núcleo $\mathbf{K}$, entonces $\mathbf{K}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$.*

Prueba. Probemos que $\mathbf{K}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$. Sean $x, y \in \mathbf{K}$, como $\mathbf{K}$ es el núcleo de ϕ, entonces $\phi(x) = e_{\mathbf{F}}$ y $\phi(y) = e_{\mathbf{F}}$, ya que ϕ es un homomorfismo tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(xy) &= \phi(x)\phi(y) \\ &= e_{\mathbf{F}}e_{\mathbf{F}} \\ &= e_{\mathbf{F}}, \end{aligned}$$

luego $xy \in \mathbf{K}$. Por tanto $\mathbf{K}$ es cerrado. Además

$$\begin{aligned} \phi(x^{-1}) &= \phi(x)^{-1} \\ &= e_{\mathbf{F}}^{-1} \\ &= e_{\mathbf{F}}, \end{aligned}$$

luego si $x \in \mathbf{K}$, también $x^{-1} \in \mathbf{K}$, que $e_{\mathbf{G}} \in \mathbf{K}$ es obvio, pues $\phi(e_{\mathbf{G}}) = e_{\mathbf{F}}$, por tanto $\mathbf{K}$ es un subgrupo.

Ahora debemos probar que $\mathbf{K}$ es normal en $\mathbf{G}$. Sean $k \in \mathbf{K}$, y $g \in \mathbf{G}$, entonces como ϕ es un homomorfismo tenemos

$$\begin{aligned}
\phi(gkg^{-1}) &= \phi(g)\phi(k)\phi(g^{-1}), \text{ ya que } \phi \text{ es un homomorfismo} \\
&= \phi(g)e_{\mathbf{F}}\phi(g)^{-1}, \text{ ya que } k \in K, \text{ el núcleo de} G \\
&= (\phi(g)e_{\mathbf{F}})\phi(g)^{-1}, \text{ ley asociativa} \\
&= \phi(g)\phi(g)^{-1}, \text{ propiedad del elemento identidad} \\
&= \phi(gg^{-1}), \text{ ya que } \phi \text{ es un homomorfismo} \\
&= \phi(e_{\mathbf{G}}), \text{ propiedad del elemento inverso} \\
&= e_{\mathbf{F}}
\end{aligned}$$

luego $gkg^{-1} \in \mathbf{K}$. Por lo tanto, por la definición de subgrupo normal (Definición 1.13), $\mathbf{K}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$. ■

Definición 1.19 *Un homomorfismo ϕ de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{F}$ se dice que:*

a. es un **Monomorfismo** *si ϕ es inyectiva;*

b. es un **Epimorfismo** *si ϕ es sobreyectiva;*

c. es un **Isomorfismo** *si ϕ es un epimorfimo y un monomorfismo.*

Un homomorfismo $h : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ se dice que es un **Endomorfismo**. *Los endomorfismo biyectivos de $\mathbf{G}$ son los* **Automorfismos**.

Definición 1.20 *Dos grupos $\mathbf{G}, \mathbf{F}$ si dice que son* **Isomorfos** *si existe un Isomorfismo de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{F}$. En este caso escribimos $\mathbf{G} \approx \mathbf{F}$.*

Cuando dos grupos son Isomorfos, entonces, en cierto sentido, son iguales. Sólo difieren en que sus elementos se denominan en forma distinta. El Isomorfismo nos da la clase de esta diferencia de denominación, y con ella, conociendo un determinado cálculo en uno de los grupos podemos realizar el cálculo análogo en el otro.

Lema 1.12 *Un homomorfismo ϕ de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{F}$ con núcleo $\mathbf{K}_\phi$ es un Monomorfismo de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{F}$ si y sólo si $\mathbf{K}_\phi = \{e_\mathbf{G}\}$.*

Prueba.

($\Rightarrow$) ϕ es un Monomorfismo de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{F}$, entonces $\mathbf{K}_\phi = \{e\}$. Como ϕ es un homomorfismo,

$$\phi(e_\mathbf{G}) = e_\mathbf{F}.$$

Por tanto

$$e_\mathbf{G} \in \mathbf{K}_\phi = \phi^{-1}(\{e_\mathbf{F}\}).$$

Puesto que ϕ es monomorfismo, la imagen inversa, $\phi^{-1}(e_\mathbf{F})$, de $e_\mathbf{F}$ en $\mathbf{F}$ no puede tener más de un elemento en $\mathbf{G}$. Por ello, $\mathbf{K}_\phi = \{e_\mathbf{G}\}$

($\Leftarrow$) $\mathbf{K}_\phi = \{e\}$, entonces ϕ es un Monomorfismo de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{F}$. Sean $x, y \in \mathbf{G}$ tal que $\phi(x) = \phi(y)$. Como ϕ es un homomorfismo tenemos

$$\begin{aligned}\phi(xy^{-1}) &= \phi(x)\phi(y^{-1})\\ &= \phi(x)\phi(y)^{-1}\\ &= e_\mathbf{F},\end{aligned}$$

así $xy^{-1} \in \mathbf{K}_\phi = \{e\}$, entonces $xy^{-1} = e$, esto implica que $x = y$. Por lo tanto ϕ es un monomorfismo.

■

Este corolario nos proporciona una técnica para probar que dos grupos son isomorfos. Primero encontramos un Isomorfismo de uno sobre el otro, y luego probamos que el núcleo de este homomorfismo consiste solamente en el elemento identidad.

El siguiente teorema es de gran importancia ya que establece que el grupo cociente $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ es isomorfo a $\mathbf{F}$, donde $\mathbf{K}$ es el núcleo de el homomorfismo entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{F}$.

Teorema 1.6 (Primer Teorema de Isomorfismo) *Sea ϕ un homomorfismo de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{F}$ que es un epimorfimo con núcleo $\mathbf{K}$. Entonces $\mathbf{G}/\mathbf{K} \approx \mathbf{F}$*

Prueba. Por el Lema 1.9 sabemos que existe un epimorfimo $\mu : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{K}$ tal que $\mu(g) = g\mathbf{K}$, y ya que $\phi : \mathbf{G} \to \mathbf{F}$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathbf{F} \\
\mathbf{G}/\mathbf{K} \arrow[ur, dashed, "\Psi"] &
\end{tikzcd}$$

Así podemos definir $\Psi : \mathbf{G}/\mathbf{K} \to \mathbf{F}$ por $\Psi(g\mathbf{K}) = \phi(g)$. Probemos que Ψ esta bien definida, si $g\mathbf{K} = g'\mathbf{K}$, entonces $g = g'k, k \in \mathbf{K}$, y ya que $\mathbf{K}$ es el núcleo de ϕ tenemos

$$\begin{aligned}
\phi(g) &= \phi(g'k) \\
&= \phi(g')\phi(k) \\
&= \phi(g')e_F \\
&= \phi(g'),
\end{aligned}$$

esto implica que para $X = g\mathbf{K} = g'\mathbf{K} \in \mathbf{G}/\mathbf{K}$ y así

$$\begin{aligned}
\Psi(X) &= \Psi(g\mathbf{K}) \\
&= \phi(g) \\
&= \phi(g') \\
&= \Psi(g'\mathbf{K}),
\end{aligned}$$

luego Ψ está bien definida.

Probemos que Ψ es un epimorfimo. Si $f \in \mathbf{F}$, entonces, ya que ϕ es epimorfimo, $f = \phi(g), g \in \mathbf{G}$, luego $f = \phi(g) = \Psi(g\mathbf{K})$. Por tanto Ψ es un epimorfimo.

Para probar que Ψ es un monomorfismo, debemos mostrar que si $\mathbf{N}_\Psi$ es el núcleo de Ψ entonces $\mathbf{N}_\Psi = \mathbf{K}$, ya que $\mathbf{K}$ es el elemento identidad en $\mathbf{G}/\mathbf{K}$. Tenemos, si $gK \in \mathbf{N}_\Psi$, entonces

$$\Psi(g\mathbf{K}) = e_{\mathbf{F}} = \phi(g),$$

y así $g \in \mathbf{K}$, el núcleo de ϕ, así, ya que $\mathbf{K}$ es un subgrupo $g\mathbf{K} = \mathbf{K}$. Luego Ψ es un monomorfismo, y por lo tanto un isomorfismo, y $\mathbf{G}/\mathbf{K} \approx \mathbf{F}$. $\blacksquare$

El teorema 1.6 nos dice, en forma precisa, qué grupos podemos esperar se aparezcan como imágenes homomórficas de un grupo dado. Éstos deben puede expresarse en forma $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ donde $\mathbf{K}$ es normal en $\mathbf{G}$. Pero, según el lema 1.9, para cualquier subgrupo normal $\mathbf{N}$ de $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ es una imagen homomórficas de $\mathbf{G}$. Así pues, existe una correspondencia biyectiva entre las imágenes homomórficas de $\mathbf{G}$ y los subgrupos normales de $\mathbf{G}$.

Ejemplo 1.8 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, *la aplicación del grupo aditivo de los números reales sobre el grupo multiplicativo de números complejos con* $|z| = 1, z \in \mathbb{C}$, *definida por*

$$f(t) = e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + \operatorname{sen}(2\pi t)i.$$

Esta aplicación es un homomorfismo con núcleo $\mathbb{Z}$. *Para verificarlo tenemos:*

a. Sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\begin{aligned} f(t_1 t_2) = f(t_1 + t_2) &= e^{2\pi i(t_1+t_2)} \\ &= e^{2\pi it_1 + 2\pi it_2} \\ &= e^{2\pi it_1} e^{2\pi it_2} \\ &= f(t_1)f(t_2). \end{aligned}$$

Luego f *es un homomorfismo.*

b. Sea $t \in$ *ker* f, *entonces*

$$f(t) = \cos(2\pi t) + \operatorname{sen}(2\pi t)i = 1.$$

Esto implica que debemos tener $\cos(2\pi t) = 1$ *y* $\operatorname{sen}(2\pi t) = 0$, *y para que esto se verifique debe ser* $t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$. *Es decir ker* $f = \mathbb{Z}$, *Por lo tanto según el Teorema 1.6,* $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx \mathbb{S}$.

Definición 1.21 *Un grupo se dice que es* **simple** *si no tiene imágenes homomórficas distintas de las triviales, es decir si no tiene subgrupos normales no triviales.*

En relación a los grupos que son homomorfos tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.7 (Segundo Teorema de Isomorfismo) *Sea ϕ un homomorfismo el cual es un epimorfimo de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{F}$ de núcleo $\mathbf{K}$, y sea $\mathbf{H}$ un subgrupo normal de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{N} = \{x \in \mathbf{G} | \phi(x) \in \mathbf{H}\}$. Entonces $\mathbf{G}/\mathbf{N} \approx \mathbf{F}/\mathbf{H}$. O lo que es equivalente $\mathbf{G}/\mathbf{N} \approx (\mathbf{G}/\mathbf{K})/(\mathbf{N}/\mathbf{K})$.*

Prueba. Por el lema 1.9 sabemos que existe un homomorfismo β de $\mathbf{F}$ sobre $\mathbf{F}/\mathbf{H}$ definido por $\beta(f) = f\mathbf{H}, f \in F$. Definimos la aplicación $\psi : \mathbf{G} \to \mathbf{F}/\mathbf{H}$ por

$$\psi(g) = \phi(g)\mathbf{H}, \forall g \in \mathbf{G}.$$

Vemos que ψ es un epimorfimo, pues si $f \in \mathbf{F}$, $f = \phi(g)$ para algún $g \in \mathbf{G}$, ya que ϕ es un epimorfimo, de modo que el elemento $f\mathbf{H}$ de $\mathbf{F}/\mathbf{H}$ puede ser representado como $\phi(g)\mathbf{H} = \psi(g)$.

Si $a, b \in \mathbf{G}$ según la definición de la aplicación ψ tenemos que $\psi(ab) = \phi(ab)\mathbf{H}$. Pero, como ϕ es un homomorfismo, $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Luego

$$\begin{aligned}
\psi(ab) &= \phi(ab)\mathbf{H}, && \text{definición de } \psi \\
&= \phi(a)\phi(b)\mathbf{H}, && \phi \text{ es homomorfismo} \\
&= \phi(a)\mathbf{H}\phi(b)\mathbf{H} \\
&= \psi(a)\psi(b).
\end{aligned}$$

Así pues hemos probado que ψ es un homomorfismo de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{F}/\mathbf{H}$.

Sea ahora $\mathbf{T}$ el núcleo de ψ, es decir, $\mathbf{T} = \{x \in \mathbf{G} | \psi(x) = \mathbf{H}\}$, ya que $\mathbf{H}$ es el elemento identidad de $\mathbf{F}/\mathbf{H}$, y sea $x \in \mathbf{T}$, tenemos

$$\begin{aligned}
x \in \mathbf{T} &\Rightarrow \psi(x) = \mathbf{H}, \text{por definición de núcleo} \\
&\Rightarrow \phi(x)\mathbf{H} = \mathbf{H}, \text{por la definición de } \psi \\
&\Rightarrow \phi(x) \in \mathbf{H} \\
&\Rightarrow x \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

así $\mathbf{T} \subset \mathbf{N}$. Además si $x \in \mathbf{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{N} &\Rightarrow \phi(x) \in \mathbf{H} \\ &\Rightarrow \phi(x)\mathbf{H} = \mathbf{H} \\ &\Rightarrow \psi(x) = \mathbf{H}, \text{por la definición de } \psi \\ &\Rightarrow x \in \mathbf{T}. \end{aligned}$$

así $\mathbf{N} \subset \mathbf{T}$. Por lo tanto $\mathbf{T} = \mathbf{N}$. Luego ψ es un homomorfismo de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{F}/\mathbf{H}$ de núcleo $\mathbf{N}$. Por lo tanto, por el Teorema 1.6 $\mathbf{G}/\mathbf{N} \approx \mathbf{F}/\mathbf{H}$. ■

1.2. Espacios Topológicos

El concepto de espacio topológico no solo se restringe al estudio de la recta de números reales, del espacio euclídeo, del estudio de las funciones continuas. En esta sección se define el concepto de espacio topológico y se estudiaran algunas formas para construir una topología sobre un conjunto, para hacerlo un espacio topológico. También consideraremos conceptos fundamentales que tienen que ver con espacios topológicos.

A lo largo de muchos años de las primeras décadas del siglo XX varios matemáticos -Hausdorff, Fréchet entre otros- propusieron definiciones distintas, pero se tuvo que esperar para que los matemáticos establecieran la definición que sería más apro-piada. La definición adoptada finalmente puede parecer un poco abstracta, pero a medida en que se trabaje con las distintas formas de construir espacios topológicos, se tendrá una mejor impresión de lo que significa el concepto.

Definición 1.22 *Una* **topología** *sobre un conjunto* $\mathbf{X}$ *es una colección* $\mathcal{T}$ *de subconjuntos de* $\mathbf{X}$ *con las propiedades siguientes:*

(1) $\emptyset$ *y* $\mathbf{X}$ *están en* $\mathcal{T}$.

(2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ *está en* $\mathcal{T}$.

(3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ *está en* $\mathcal{T}$.

Un conjunto $\mathbf{X}$ *para el que se ha definido una topología* $\mathcal{T}$ *se llama* **espacio topológico.**

Hablando con propiedad, un espacio topológico es un par ordenado $(\mathbf{X}, \mathcal{T})$, formado por un conjunto $\mathbf{X}$ y una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathbf{X}$, pero en ocasiones se omitirá hacer mención especifica de $\mathcal{T}$ si no existe confusión.

Definición 1.23 *Si* $\mathbf{X}$ *es un espacio topológico con una topología* $\mathcal{T}$*, diremos que un subconjunto* $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{X}$ *es un* **conjunto abierto** *de* $\mathbf{X}$ *si* $\mathbf{U}$ *pertenece a la colección* $\mathcal{T}$*.*

Con esta terminología, se puede decir que un espacio topológico es un conjunto $\mathbf{X}$ junto a una colección de subconjuntos de $\mathbf{X}$, llamados *conjuntos abiertos*, tales que $\emptyset$ y $\mathbf{X}$ son abiertos, y tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertos.

Ejemplo 1.9 *Si* $\mathbf{X} = \{a, b, c\}$*, un conjunto de tres elementos. Entonces podemos definir las siguientes topologías:*

1. $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b\}, \{b, c\}\}$.
2. $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset\}$
3. $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

Se pueden formar otras topologías sobre $\mathbf{X}$ *con solo permutar* a, b *y* c*.*

En el ejemplo anterior se puede observar que incluso un conjunto de tres elementos puede tener varias topología distintas. Pero observar también de que no toda colección de subconjuntos de $\mathbf{X}$ es una topología sobre $\mathbf{X}$. Por ejemplo $\{\mathbf{X}, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ y $\{\mathbf{X}, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ son colecciones de subconjuntos de X, sin embargo no son topologías sobre $\mathbf{X}$. Pues, en la primera colección $\{a\} \bigcup \{b\} = \{a, b\}$ no está en dicha colección, por lo que la segunda propiedad de la definición de topología (Definición 1.22) no se verifica. Y en la segunda colección no se cumple la tercera propiedad de la definición de topología, pues $\{a, b\} \bigcap \{b, c\} = \{b\}$ no está en dicha colección.

Ejemplo 1.10 *Si* $\mathbf{X}$ *es un conjunto cualquiera, la colección de todos los subconjuntos de* $\mathbf{X}$ *es una topología sobre* $\mathbf{X}$ *y es denominada* **topología discreta.** *La colección compuesta por* $\mathbf{X}$ *y* $\emptyset$ *únicamente es también una topología sobre* $\mathbf{X}$ *y se denomina* **topología indiscreta** *o* **topología trivial**

Una topología muy importante es la siguiente

Ejemplo 1.11 *Sea* $\mathbf{X}$ *un conjunto y sea* $\mathcal{T}_f = \{\mathbf{U}|\mathbf{X}-\mathbf{U}$ *es finito o es todo* $\mathbf{X}\}$*. Entonces* $\mathcal{T}_f$ *es una topología sobre* $\mathbf{X}$*, llamada* **topología de los complementos finitos.** *Pues*

1. *Tanto* $\mathbf{X}$ *como* $\emptyset$ *están en* $\mathcal{T}_f$*, puesto que* $\mathbf{X}-\mathbf{X}$ *es finito y* $\mathbf{X}-\emptyset$ *es todo* $\mathbf{X}$.

2. *Si* $\{\mathbf{U}_\alpha\}$ *es una familia indexada de elementos no vacíos de* $\mathcal{T}_f$*, tenemos que*

$$\mathbf{X}-\bigcup \mathbf{U}_\alpha = \bigcap(\mathbf{X}-\mathbf{U}_\alpha).$$

   Puesto que cada $\mathbf{X}-\mathbf{U}_\alpha$ *es finito tenemos que el conjunto* $\bigcap(\mathbf{X}-\mathbf{U}_\alpha)$ *es finito. Y por tanto* $\bigcup \mathbf{U}_\alpha$ *está en* $\mathcal{T}_f$.

3. *Si* $\mathbf{U}_1,\cdots,\mathbf{U}_n$ *son elementos no vacíos de* $\mathcal{T}_f$*, tenemos*

$$\mathbf{X}-\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{U}_i = \bigcup_{i=1}^{n}(\mathbf{X}-\mathbf{U}_i)$$

   puesto que cada conjunto $\mathbf{X}-\mathbf{U}_i$ *es finito, se tiene que* $\bigcup_{i=1}^{n}(\mathbf{X}-\mathbf{U}_i)$ *es finito, pues es la unión finita de conjuntos finitos. Y por tanto* $\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{U}_i$ *está en* $\mathcal{T}_f$

Definición 1.24 *Supongamos que* $\mathcal{T}$ *y* $\mathcal{T}'$ *son dos topologías sobre un conjunto dado* $\mathbf{X}$*. Si* $\mathcal{T}'\supset\mathcal{T}$*, diremos que* $\mathcal{T}'$ *es* **más fina***; si* $\mathcal{T}'$ *contiene propiamente a* $\mathcal{T}$*, diremos que* $\mathcal{T}'$ *es* **estrictamente más fina** *que* $\mathcal{T}$*. También diremos que* $\mathcal{T}$ *es* **más gruesa** *que* $\mathcal{T}'$*, o* **estrictamente más gruesa***, en ambas situaciones. Diremos que* $\mathcal{T}$ *es* **comparable** *con* $\mathcal{T}'$ *si* $\mathcal{T}'\supset\mathcal{T}$ *ó* $\mathcal{T}\supset\mathcal{T}'$.

Algunas veces se utiliza una terminología diferente para el concepto anterior. Si $\mathcal{T}'\supset\mathcal{T}$ algunas veces se dirá que $\mathcal{T}'$ es **más grande** que $\mathcal{T}$, y que $\mathcal{T}$ es **más pequeña** que $\mathcal{T}'$.

En cada uno de los ejemplos anteriores, se puede especificar la topología mediante la descripción de la colección complementa $\mathcal{T}$ de todo los conjuntos abiertos. Pero en general, esto es muy complicado. En la mayoría de los casos, es más factible especificarla con una colección más pequeña de subconjuntos de $\mathbf{X}$ que es capaz de definir dicha topología.

Definición 1.25 *Si* $\mathbf{X}$ *es un conjunto, una* **base** *para una topología sobre* $\mathbf{X}$ *es una colección* $\mathscr{B}$ *de subconjuntos de* $\mathbf{X}$ *(llamados* **elementos básicos***) tales que:*

(1) Para cada $x \in \mathbf{X}$, existe al menos un elemento básico $\mathbf{B}$ que contiene a x.

(2) Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$, entonces existe un elemento básico $\mathbf{B}_3$ que contiene a x y tal que $\mathbf{B}_3 \subset \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2$.

Si $\mathscr{B}$ satisface las dos condiciones de la definición anterior, se define la **topología $\mathcal{T}$ generada por $\mathscr{B}$** como sigue:

Definición 1.26 *Un elemento básico $\mathbf{U}$ de $\mathbf{X}$ se dice que es abierto en $\mathbf{X}$ (esto es, un elemento de $\mathcal{T}$), si para cada $x \in \mathbf{U}$, existe un elemento básico $\mathbf{B} \in \mathscr{B}$ tal que $x \in \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \subset \mathbf{U}$. Noté que cada elemento básico es así mismo un elemento de $\mathcal{T}$.*

En cuanto a la terminología de la Definición 1.26 los matemáticos utilizan una terminología especial. La frase "$\mathbf{U}$ es un conjunto abierto que contiene a x", se abrevia como "$\mathbf{U}$ es un **entorno** o **vecindades** de x."

Para un punto x en $\mathbf{X}$ definimos una base en x o base local como sigue:

Definición 1.27 *Sea $\mathbf{X}$ un espacio topológico y $x \in \mathbf{X}$. Se dice que $\mathscr{B}_x$ es una* **base local** *ó* **base de entornos** *en x si y sólo si dado un abierto $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$ con $x \in \mathbf{U}$ existe $\mathbf{B} \in \mathscr{B}_x$ tal que $x \in \mathbf{B} \subset \mathbf{U}$.*

Otra forma de describir la topología generada por una base es la siguiente:

Lema 1.13 *Sea $\mathbf{X}$ un conjunto y $\mathscr{B}$ una base para una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathbf{X}$. Entonces $\mathcal{T}$ es igual a la colección de todas la uniones de elementos de $\mathscr{B}$.*

Prueba. Como la colección de elementos de $\mathscr{B}$, también son elementos de $\mathcal{T}$. Puesto que $\mathcal{T}$ es una topología, la unión de dichos elementos pertenece a $\mathcal{T}$. Recíprocamente, dado $\mathbf{U} \in \mathcal{T}$, elijamos para cada $x \in \mathbf{U}$ un elemento $\mathbf{B}_x$ de $\mathscr{B}$ tal que $x \in \mathbf{B}_x \subset \mathbf{U}$. Entonces $\mathbf{U} = \bigcup_{x \in \mathbf{U}} \mathbf{B}_x$, por lo que $\mathbf{U}$ es igual a la unión de elementos de $\mathscr{B}$. ■

Lo anterior establece que cada abierto $\mathbf{U}$ en $\mathbf{X}$ puede escribirse como unión de elementos básicos. Aunque esta expresión para $\mathbf{U}$ no es única. Así, el uso del término "base" en topología difiere grandemente de su uso en álgebra lineal, donde la ecuación que expresa un vector dado como combinación lineal de los vectores de la base es única.

Se ha descrito dos formas de llegar, a partir de una base, a la topología que genera. Pero dada una topología ¿Cómo llegamos a una base de ésta? Aquí está un método de obtener una base dada una topología.

Lema 1.14 *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio topológico. Supongamos que* $\mathscr{C}$ *es una colección de conjuntos abiertos de* $\mathbf{X}$ *tal que, para cada conjunto abierto* $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$ *y cada* $x \in \mathbf{U}$, *existe un elemento* $\mathbf{C} \in \mathscr{C}$ *tal que* $x \in \mathbf{C} \subset \mathbf{U}$. *Entonces* $\mathscr{C}$ *es una base para la topología de* $\mathbf{X}$.

Prueba. Primeramente debemos probar que $\mathscr{C}$ es una base. Para la primera condición: dado $x \in \mathbf{X}$, ya que $\mathbf{X}$ es un conjunto abierto, por hipótesis, existe un elemento $\mathbf{C} \in \mathscr{C}$ tal que $x \in \mathbf{C} \subset \mathbf{X}$.

Para la segunda condición, sea $x \in \mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$, donde $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2 \in \mathscr{C}$. Puesto que $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$ son abiertos, lo es también $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$. Luego, por hipótesis, existe un elemento $\mathbf{C}_3 \in \mathscr{C}$ tal que $x \in \mathbf{C}_3 \subset \mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$.

Ahora sea $\mathcal{T}$ la colección de conjuntos abiertos de $\mathbf{X}$. Debemos probar que la topología $\mathcal{T}'$ generada por $\mathscr{C}$ coincide con la topología $\mathcal{T}$. Si $\mathbf{U} \in \mathcal{T}$ y si $x \in \mathbf{U}$, entonces, por hipótesis, existe un elemento $\mathbf{C} \in \mathscr{C}$ tal que $x \in \mathbf{C} \subset \mathbf{U}$. Así pues, por definición, $\mathbf{U} \in \mathcal{T}'$. Recíprocamente, si $\mathbf{W} \in \mathcal{T}'$, entonces $\mathbf{W}$, es igual a una unión de elementos de $\mathscr{C}$. Puesto que cada elemento de $\mathscr{C}$ pertenece a $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ es una topología, $\mathbf{W} \in \mathcal{T}$. ■

A continuación se definen algunas topologías muy interesantes sobre la recta real $\mathbb{R}$.

Definición 1.28 *Si* $\mathscr{B}$ *es la colección de todos los intervalos abiertos en* $\mathbb{R}$,

$$(a, b) = \{x | a < x < b\},$$

la topología generada por $\mathscr{B}$ *es denominada* **topología usual** *sobre* $\mathbb{R}$. *Cuando se estudie* $\mathbb{R}$ *siempre lo supondremos dotada con esta topología, a menos que se diga lo contrario. Si* $\mathscr{B}$ *es la colección de todos los intervalos semiabiertos del tipo*

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\} \text{ donde } a < b,$$

la topología generada por $\mathscr{B}'$ *se llama* **topología del límite inferior** *sobre* $\mathbb{R}$. *Cuando* $\mathbb{R}$ *esté dotada de la topología de límite inferior, lo denotaremos* $\mathbb{R}_l$. *Y finalmente, sea* $\mathbf{K}$ *el conjunto de todos los números de la forma* $1/n$, *para* $n \in \mathbb{Z}_+$, *y sea* $\mathscr{B}''$ *la colección de todos los intervalos abiertos* (a, b), *junto con todos los conjuntos de la forma* $(a,b)-\mathbf{K}$. *La topología generada por* $\mathscr{B}''$ *se llamará la* **K-topología** *sobre* $\mathbb{R}$. *Denotaremos a* $\mathbb{R}$ *por* $\mathbb{R}_{\mathbf{K}}$ *cuando* $\mathbb{R}$ *esté dotada de esta topología.*

Sabemos que una topología generada por medio de una base $\mathscr{B}$ la podemos describir mediante uniones arbitrarias de elementos de $\mathscr{B}$, pero si comenzamos con una colección dada de conjuntos y tomamos intersecciones finitas de ellos además de uniones arbitrarias ¿qué ocurre? Esto nos lleva a la siguiente definición

Definición 1.29 *Una* **subbase** $\mathcal{S}$ *para una topología sobre* $\mathbf{X}$ *es una colección de subconjuntos de* $\mathbf{X}$ *cuya unión es igual a* $\mathbf{X}$. *La* **topología generada por la subbase** $\mathcal{S}$ *se define como la colección* $\mathcal{T}$ *de todas la uniones de intersecciones finitas de elementos de* $\mathcal{S}$.

Supongamos ahora que $\mathbf{X}$ es un conjunto con una relación de orden simple $<$. Dados dos elementos a y b existen cuatro subconjuntos de $\mathbf{X}$ que se llaman **intervalos** determinados por a y b. Y son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= \{x|a<x<b\},\\
(a,b] &= \{x|a<x\leq b\},\\
[a,b) &= \{x|a\leq x<b\},\\
[a,b] &= \{x|a\leq x\leq b\}.
\end{aligned}
$$

Cuando $\mathbf{X}=\mathbb{R}$ esta notación es bastante familiar, pero estos son intervalos en un conjunto cualquiera ordenado. A un conjunto del primer tipo se le denomina **intervalo abierto**, y uno del cuarto tipo se le denomina **intervalo cerrado**, y los conjuntos del segundo y tercer tipo se les denomina **intervalos semiabiertos.** El uso del término “abierto” en esta relación sugiere que los intervalos abiertos en $\mathbf{X}$ deberían convertirse en conjuntos abiertos cuando se introduzca una topología sobre $\mathbf{X}$.

Definición 1.30 *Sea* $\mathbf{X}$ *un conjunto, con más de un elemento, con una relación de orden simple. Sea* $\mathscr{B}$ *la colección de todos los conjuntos de los tipos siguientes:*

(1) Todos los intervalos abiertos (a,b) *en* $\mathbf{X}$.

(2) Todos los intervalos de la forma $[a_0, b)$, *donde* a_0 *es el mínimo (si existe) de* $\mathbf{X}$.

(3) Todos los intervalos de la forma $(a, b_0]$, *donde* b_0 *es el máximo (si existe) de* $\mathbf{X}$.

La colección $\mathscr{B}$ *es una base para una topología sobre* $\mathbf{X}$, *que se denomina* **topología del orden.**

Si $\mathbf{X}$ no tiene elemento mínimo, conjuntos del tipo (2) no existen, y si $\mathbf{X}$ no tiene elemento máximo, no existen conjuntos de tipo (3).

Si tenemos un subconjunto de un espacio topológico $\mathbf{X}$, ¿cómo definimos una topología para este subconjunto? La respuesta se nos da la siguiente definición.

Definición 1.31 *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio topológico con una topología* $\mathcal{T}$. *Si* $\mathbf{Y}$ *es un subconjunto de* $\mathbf{X}$, *la colección*

$$\mathcal{T}_{\mathbf{Y}} = \{\mathbf{Y} \cap \mathbf{U} | \mathbf{U} \in \mathcal{T}\}$$

es una topología sobre $\mathbf{Y}$, *denominada* **topología de subespacio** *o* **topología relativa.** *Con esta topología* $\mathbf{Y}$ *se denomina* **subespacio** *de* $\mathbf{X}$; *sus conjuntos abierto son todas las intersecciones de conjuntos abiertos con* $\mathbf{Y}$.

$\mathcal{T}_Y$ es una topología. Pues $\emptyset, \mathbf{Y} \in \mathcal{T}_{\mathbf{Y}}$, ya que

$$\emptyset = \mathbf{Y} \cap \emptyset \ \text{ e } \ \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \cap \mathbf{X}$$

donde $\emptyset, \mathbf{X} \in \mathcal{T}$. Las otras dos propiedades para una topología se deducen de

$$(\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{Y}) \cap \cdots \cap (\mathbf{U}_n \cap \mathbf{Y}) = (\mathbf{U}_1 \cap \cdots \cap \mathbf{U}_n) \cap \mathbf{Y},$$
$$\bigcup_{\alpha \in J} (\mathbf{U}_\alpha \cap \mathbf{Y}) = \left(\bigcup_{\alpha \in J} \mathbf{U}_\alpha \right) \cap \mathbf{Y}.$$

Definición 1.32 *Si* $\mathbf{Y}$ *es un subespacio de* $\mathbf{X}$, *diremos que un conjunto* $\mathbf{U}$ *es* **abierto en** $\mathbf{Y}$ *(o abierto relativo a* $\mathbf{Y}$*) si pertenece a la topología de* $\mathbf{Y}$; *esto implica, en particular, que es un subconjunto de* $\mathbf{Y}$. *Diremos que* $\mathbf{U}$ *es* **abierto en** $\mathbf{X}$ *si pertenece a la topología de* $\mathbf{X}$.

Un caso especial es el que cada conjunto abierto en $\mathbf{Y}$ es también abierto en $\mathbf{X}$.

Ejemplo 1.12 *Sea $\mathbf{Y} = [0,1]$ un subconjunto de $\mathbb{R}$. La topología de subespacio tiene como base todos los conjuntos de la forma $\mathbf{Y} \cap (a,b)$, donde (a,b) es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Dicho conjunto es de una de las siguientes formas:*

$$\mathbf{Y} \cap (a,b) = \begin{cases} (a,b) & \textit{si } a \textit{ y } b \textit{ están en } \mathbf{Y} \\ [0,b) & \textit{si solamente } b \textit{ está en } \mathbf{Y} \\ (a,1] & \textit{si solamente } a \textit{ está en } \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \textit{ o } \emptyset & \textit{si ni } a \textit{ ni } b \textit{ están en } \mathbf{Y}. \end{cases}$$

Por definición, estos conjuntos son abiertos en $\mathbf{Y}$. Pero conjuntos del segundo y tercer tipo son no abiertos en el espacio $\mathbb{R}$

Es oportuno en estos momentos introducir algunos conceptos básicos asociados a espacios topológicos. Tales como *conjunto cerrado, clausura y punto límite.* Así éstas nos conducirán a la consideración de un axioma para espacios topológicos llamado *axioma de Hausdorff.*

Definición 1.33 *Un subconjunto $\mathbf{A}$ de un espacio topológico $\mathbf{X}$ se dice que es* **cerrado** *si el conjunto $\mathbf{X} - \mathbf{A}$ es abierto.*

Ejemplo 1.13 *El subconjunto $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ es cerrado. El subconjunto $[a,+\infty)$ es cerrado. Ahora*

$$\mathbb{R} - [a,b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$$

no es abierto en $\mathbb{R}$, por tanto $[a,b)$ no es ni abierto ni cerrado $\mathbb{R}$.

La colección de conjuntos cerrados tienen similares propiedades a las satisfechas por los conjuntos abiertos de un espacio $\mathbf{X}$. Estas son:

(1) $\emptyset$ y $\mathbf{X}$ son cerrados.

(2) Las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas.

(3) Las uniones finitas de conjuntos cerrados son cerradas.

Definición 1.34 *Si* $\mathbf{Y}$ *es un subespacio de* $\mathbf{X}$, *diremos que un conjunto* $\mathbf{A}$ *es* **cerrado en** $\mathbf{Y}$ *si* $\mathbf{A}$ *es un subconjunto de* $\mathbf{Y}$ *y si* $\mathbf{A}$ *es cerrado en la topología de subespacio de* $\mathbf{Y}$ *(esto es, si* $\mathbf{Y}-\mathbf{A}$ *es abierto en* $\mathbf{Y}$*).*

Un conjunto $\mathbf{A}$ que es cerrado en el subespacio $\mathbf{Y}$ puede ser cerrado o no en el espacio complemento $\mathbf{X}$. Como fue el caso con los conjuntos abiertos, exista un criterio para ver si $\mathbf{A}$ es cerrado en $\mathbf{X}$.

Definición 1.35 *Sea* $\mathbf{A}$ *un subconjunto de un espacio topológico* $\mathbf{X}$, *el* **interior** *de* $\mathbf{A}$ *es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en* $\mathbf{A}$, *y la* **clausura** *de* $\mathbf{A}$ *es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a* $\mathbf{A}$.

El interior de $\mathbf{A}$ se denota por **Int** $\mathbf{A}$ y la clausura de $\mathbf{A}$ se denota mediante $\overline{\mathbf{A}}$. La definición de la clausura de un conjunto no nos da un método para encontrar las clausuras de conjuntos específicos, puesto que la colección de todos los conjuntos cerrados en $\mathbf{X}$, como la colección de todos los conjuntos abiertos, es frecuentemente demasiado grande para trabajar.

Definición 1.36 *Decimos que un conjunto* $\mathbf{A}$ **interseca** *a un conjunto* $\mathbf{B}$ *si la intersección*

$$\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\neq\emptyset$$

Con esta última definición podemos describir la clausura de un conjunto como sigue:

Teorema 1.8 *Sea* $\mathbf{A}$ *un subconjunto de un espacio topológico* $\mathbf{X}$.

(a) Entonces $x\in\overline{\mathbf{A}}$ *si, y sólo si, cada conjunto abierto* $\mathbf{U}$ *que contiene a* x *interseca a* $\mathbf{A}$.

(b) Suponiendo que la topología de $\mathbf{X}$ *está dada por una base, entonces* $x\in\overline{\mathbf{A}}$ *si, y sólo si, cada elemento básico* $\mathbf{B}$ *que contiene a* x *interseca a* $\mathbf{A}$.

Prueba.

(a) Por contra-recíproco, esta expresión es equivalente a: $x\notin\overline{\mathbf{A}}$ si y sólo si, $\exists$U abierto talque $x\in\mathbf{U}$ y $\mathbf{A}\cap\mathbf{U}=\emptyset$.

$\Rightarrow$ $x \notin \overline{\mathbf{A}}$, entonces el conjunto $\mathbf{U} = \mathbf{X} - \overline{\mathbf{A}}$ es abierto tal que $x \in \mathbf{X} - \overline{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{U} \cap \mathbf{A} = \emptyset$.

$\Leftarrow$ Si $\exists$U abierto tal que $x \in \mathbf{U}$ y $\mathbf{U} \cap \mathbf{A} = \emptyset$, entonces $\mathbf{X} - \mathbf{U}$ es un conjunto cerrado tal que $\mathbf{A} \subset \mathbf{X} - \mathbf{U}$. Entonces

$$\overline{\mathbf{A}} \subset \overline{\mathbf{X} - \mathbf{U}} = \mathbf{X} - \mathbf{U}$$

pero $x \notin \mathbf{X} - \mathbf{U}$, por tanto $x \notin \overline{\mathbf{A}}$.

(b) Para esta parte considerando que cada elemento básico $\mathbf{B}$ es un conjunto abierto la demostración es similar a las prueba de la parte (a).

■

Existe otro forma de describir la clausura de un conjunto, que necesita del concepto de punto límite.

Definición 1.37 *Si $\mathbf{A}$ es un subconjunto de un espacio topológico $\mathbf{X}$ y si $x \in \mathbf{X}$, diremos que x es* **punto límite** *(o de "acumulación) de $\mathbf{A}$ si cada entorno de x interseca a $\mathbf{A}$ en algún punto distinto del propio x.*

Dicho de otra forma, x es un punto límite de $\mathbf{A}$ si pertenece a la clausura de $\mathbf{A} - \{x\}$. El punto x puede pertenecer o no a $\mathbf{A}$, para esta definición no importa.

La clausura y los puntos límites se relacionan como sigue: Si $\mathbf{A}$ es un subconjunto de un espacio topológico $\mathbf{X}$ y $\mathbf{A}'$ el conjunto de todos los puntos límites de $\mathbf{A}$. Entonces

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cup \mathbf{A}'$$

Proposición 1.5 *Un subconjunto de un espacio topológico es cerrado si, y sólo si, contiene a todos sus puntos límites.*

Prueba. El conjunto $\mathbf{A}$ es cerrado si, y sólo si, $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}$, y esto último se cumple si, y sólo si, $\mathbf{A}' \subset \mathbf{A}$. ■

En un espacio topológico arbitrario, se dice que una sucesión $x_1, x_2, \cdots$ de puntos del espacio $\mathbf{X}$ **converge** al punto x de $\mathbf{X}$ siempre que, para cada entorno $\mathbf{U}$ de x, exista un entorno positivo N tal que $x_n \in \mathbf{U}$ para todo $n \geq N$.

Definición 1.38 *Un espacio topológico* $\mathbf{X}$ *se denomina* **espacio de Hausdorff** *si para cada par* x_1, x_2 *de puntos distintos de* $\mathbf{X}$, *existen entornos* U_1 *y* U_2 *de* x_1 *y* x_2, *respectivamente, que son disjuntos.*

Cada conjunto con un número finito de puntos en un espacio de Hausdorff es cerrado. Pues, si x es un punto de $\mathbf{X}$ distinto de x_0, entonces x y x_0, por ser $\mathbf{X}$ de Hausdorff, estos dos puntos tienen entornos disjuntos $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$, respectivamente. Puesto que $\mathbf{U}$ no interseca a $\{x_0\}$, el punto x no puede pertenecer a la clausura del conjunto $\{x_0\}$. Así pues, la clausura de $\{x_0\}$ es el propio $\{x_0\}$, por lo que es cerrado. Por tanto cada conjunto unipuntual es cerrado, lo cual es suficiente para probar el teorema.

La condición de que los conjuntos con un número finito de puntos sean cerrados es de hecho más débil que la condición de Hausdorff. La recta real $\mathbb{R}$, por ejemplo, con la topología de los complementos finitos no es un espacio de Hausdorff, pero si es un espacio en el que los conjuntos con un número finito de puntos son cerrados. La condición de que los conjuntos con un número finito de puntos sean cerrados se de denomina **axioma** $\mathbf{T_1}$.

Si la sucesión x_n de puntos del espacio de Hausdorff $\mathbf{X}$ converge al punto x de $\mathbf{X}$, escribiremos $x_n \to x$, y diremos que x es el **límite** de las sucesión x_n.

Ahora se presenta una generalización del concepto *continuidad* de una función, estudiada en cálculo.

Definición 1.39 *Sean* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *espacios topológicos. Una función* $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *se dice que es* **continua** *si para cada subconjunto abierto* $\mathbf{V} \in \mathbf{Y}$, *el conjunto* $f^{-1}(\mathbf{V})$ *es un subconjunto abierto de* $\mathbf{X}$.

La continuidad de una función no depende únicamente de la propia función f, sino también de las topologías especificadas para su dominio y recorrido. Así pues, podemos decir que f es continua *relativa* a las topologías específicas sobre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

Ejemplo 1.14 *Si tenemos a* $\mathbb{R}$ *el conjunto de números reales con la topología usual, y a* $\mathbb{R}_l$ *el mismo conjunto con la topología del límite inferior. Sea*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$$

la función identidad:

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces la función f es no continua, pues para $[a,b) \in \mathbb{R}_l$ abierto, ya que

$$f(x) = x = f^{-1}(x),$$

tenemos

$$f^{-1}([a,b)) = [a,b)$$

el cual no es abierto en $\mathbb{R}$. Por otro lado, la función identidad

$$g : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$$

es continua, pues para $(a,b) \in \mathbb{R}$ abierto, tenemos

$$f^{-1}((a,b)) = (a,b)$$

es abierto en $\mathbb{R}_l$.

Teorema 1.9 *Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ espacios topológicos; sea $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Entonces son equivalentes:*

(1) f continua.

(2) Para cada subconjunto $\mathbf{A}$ de $\mathbf{X}$, se tiene que $f(\overline{\mathbf{A}}) \subset \overline{f(\mathbf{A})}$.

(3) Para cada conjunto cerrado $\mathbf{B}$ de Y, el conjunto $f^{-1}(\mathbf{B})$ es cerrado en $\mathbf{X}$.

(4) Para cada $x \in \mathbf{X}$ y cada entorno (vecindad) $\mathbf{V}$ de $f(x)$, existe un entorno $\mathbf{U}$ de x tal que $f(\mathbf{U}) \subset \mathbf{V}$.

Si se cumple la condición (4) para el punto x de $\mathbf{X}$ diremos que f es **continua en el punto** x.

Prueba.

$(1) \Rightarrow (2)$ Sea $z \in f(\overline{\mathbf{A}})$, entonces $z = f(x)$, para algún $x \in \overline{\mathbf{A}}$, sea $\mathbf{V}$ un entorno de z, entonces $f^{-1}(\mathbf{V})$ es un conjunto abierto de X, ya que f es continua, tal que $x \in f^{-1}(\mathbf{V})$ por lo que, según (a), Teorema 1.8, $\exists y \in f^{-1}(\mathbf{V}) \cap \mathbf{A}$. Entonces

$$\exists f(y) \in f(f^{-1}(\mathbf{V}) \cap \mathbf{A}) = f(f^{-1}(\mathbf{V})) \cap f(\mathbf{A}) = \mathbf{V} \cap f(\mathbf{A}),$$

y $z = f(x) \in \mathbf{V}$, por tanto, según (a), Teorema 1.8, $z = f(x) \in \overline{f(\mathbf{A})}$. Y así $f(\overline{\mathbf{A}}) \subset \overline{f(\mathbf{A})}$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Sea $\mathbf{B}$ un conjunto cerrado de Y, entonces $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$. Para probar que $f^{-1}(\mathbf{B})$ es cerrado, mostraremos que $\overline{f^{-1}(\mathbf{B})} = f^{-1}(\mathbf{B})$. Tenemos $f^{-1}(\mathbf{B}) \subset \overline{f^{-1}(\mathbf{B})}$, por definición de clausura de un conjunto.

Para la otra inclusión, $\overline{f^{-1}(\mathbf{B})} \subset f^{-1}(\mathbf{B})$. Sea $x \in \overline{f^{-1}(\mathbf{B})}$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) \in f(\overline{f^{-1}(\mathbf{B})}) &\subset \overline{f(f^{-1}(\mathbf{B}))}, \text{ por la hipótesis (2)} \\ &\subset \overline{\mathbf{B}}, \\ &= \mathbf{B}, \text{ ya que } \mathbf{B} \text{ es cerrado.} \end{aligned}$$

esto implica que $x \in f^{-1}(\mathbf{B})$. Luego $\overline{f^{-1}(\mathbf{B})} \subset f^{-1}(\mathbf{B})$. Por lo tanto

$$\overline{f^{-1}(\mathbf{B})} = f^{-1}(\mathbf{B}).$$

$(3) \Rightarrow (1)$ Sea $\mathbf{V}$ un conjunto abierto de $\mathbf{Y}$. Entonces $\mathbf{B} = \mathbf{Y} - \mathbf{V}$ es cerrado, y

$$f^{-1}(\mathbf{B}) = f^{-1}(\mathbf{Y}) - f^{-1}(\mathbf{V}) = \mathbf{X} - f^{-1}(\mathbf{V}).$$

Ya que por hipótesis $f^{-1}(\mathbf{B})$ es un conjunto cerrado de $\mathbf{X}$, tenemos que $f^{-1}(\mathbf{V})$ es abierto en $\mathbf{X}$. Por lo tanto f es continua.

$(1) \Rightarrow (4)$ Sea $x \in \mathbf{X}$ y sea $\mathbf{V}$ un entorno de $f(x)$. Entonces el conjunto $\mathbf{U} = f^{-1}(\mathbf{V})$ es tal que $x \in \mathbf{U}$ y $f(\mathbf{U}) = f(f^{-1}(\mathbf{V})) \subset \mathbf{V}$.

$(4) \Rightarrow (1)$ Sea $\mathbf{V}$ un conjunto abierto de Y y $x \in f^{-1}(\mathbf{V})$, entonces $f(x) \in \mathbf{V}$ por lo que, por hipótesis, $\exists \mathbf{W}$ abierto tal que $x \in \mathbf{W}$ y $f(\mathbf{W}) \subset \mathbf{V}$. Entonces $\mathbf{W} \subset f^{-1}(\mathbf{V})$. Así $f^{-1}(\mathbf{V})$ puede escribirse como unión de conjuntos abiertos $\mathbf{W}$, por lo tanto es abierto.

■

Definición 1.40 *Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ espacios topológicos; sea $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ una biyección. Si la función f y la función inversa*

$$f^{-1} : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$$

son continuas ambas, entonces f se dice que es un **homeomorfismo.**

Que f^{-1} sea continua significa que, para cada conjunto abierto $\mathbf{U}$ de $\mathbf{X}$, la imagen inversa de $\mathbf{U}$ mediante $f^{-1}:\mathbf{Y}\to\mathbf{X}$ es abierta en $\mathbf{Y}$. Pero $(f^{-1})^{-1}(\mathbf{U})=f(\mathbf{U})$, es decir, la *imagen inversa* de $\mathbf{U}$ mediante la aplicación f^{-1} es igual a la *imagen* de $\mathbf{U}$ mediante la aplicación f. Así, otro forma de definir un homeomorfismo es decir que un una correspondencia biyectiva $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ tal que $f(\mathbf{U})$ es abierto si, y sólo si, $\mathbf{U}$ es abierto.

Así pues un homeomorfismo $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ proporciona una correspondencia biyectiva, no sólo entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, sino entre las colecciones de conjuntos abiertos de $\mathbf{X}$ y las de $\mathbf{Y}$. Esto nos da como resultado de que, cualquier propiedad de $\mathbf{X}$ que se exprese en términos de la topología de $\mathbf{X}$ nos da, vía la correspondencia f, la propiedad correspondiente para el espacio $\mathbf{Y}$. Tal propiedad de $\mathbf{X}$ se denomina **propiedad topológica** de $\mathbf{X}$.

En álgebra moderna se estudia los llamados *isomorfismos* entre objetos algebraicos como los grupos o anillos. Estos isomorfismos son correspondencias biyectivas que respetan la estructura algebraica implicada. En topología el concepto análogo es el de *homeomorfismo* que es una correspondencia biyectiva que conserva la estructura topológica implicada.

Definición 1.41 *Sea* $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ *una aplicación continua inyectiva, donde* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *son espacios topológicos. Sea* $\mathbf{Z}$ *el conjunto* $f(\mathbf{X})$, *considerado como un subespacio de* $\mathbf{Y}$; *entonces, la función*

$$f':\mathbf{X}\to\mathbf{Z}$$

obtenida al restringir el rango de f, *es biyectiva. Si ocurre que* f' *es un homeomorfismo de* $\mathbf{X}$ *con* $\mathbf{Z}$, *decimos que la aplicación*

$$f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$$

es un **embebimiento topológico,** *de* $\mathbf{X}$ *en* $\mathbf{Y}$.

Las formas de construir funciones continuas en espacios topológico, son similares a las formas de construir funciones continuas en análisis.

Teorema 1.10 *Si* $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}$ *son espacios topológicos.*

(1) $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ *definida por*

$$f(x)=y_0,\forall x\in\mathbf{X},$$

entonces f es continua.

(2) la función inclusión $j : \mathbf{A} \to \mathbf{X}$, donde $\mathbf{A}$ es un subespacio de $\mathbf{X}$, definida por $j(a) = a$, es continua.

(3) Si $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ y $g : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ son continuas, entonces $g \circ f : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}$ es continua.

(4) Si $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es continua, $\mathbf{Z}$ es un subespacio de $\mathbf{Y}$ tal que $f(\mathbf{X}) \subset \mathbf{Z}$, entonces la función $g : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}$, obtenida al restringir el rango de f, es continua. Si $\mathbf{Z}$ es un espacio con $\mathbf{Y}$ como subespacio, entonces la función $h : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}$, obtenida al extender el recorrido de f, es continua.

(5) Si $f : \mathbf{A} \to \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ es dada por la ecuación

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Entonces f es continua si, y sólo si las funciones

$$f_1 : \mathbf{A} \to \mathbf{X} \ \ y \ \ f_2 : \mathbf{A} \to \mathbf{Y}$$

son continuas.

Prueba.

(1) Sea $f(x) = y_0, \forall x \in \mathbf{X}$ y sea $\mathbf{V}$ un conjunto abierto en $\mathbf{Y}$, entonces

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} \mathbf{X}, & \text{si } y_0 \in \mathbf{V} \\ \emptyset, & \text{si } y_0 \notin \mathbf{V} \end{cases}$$

en cualquiera de los dos casos $f^{-1}(V)$ es abierto, por lo tanto f es continua.

(2) Sea $\mathbf{U}$ un conjunto abierto de $\mathbf{X}$, entonces $j^{-1}(\mathbf{U}) = \mathbf{A} \cap \mathbf{U}$ que es abierto en el subespacio $\mathbf{A}$, por lo tanto j es continua.

(3) Sea $\mathbf{W}$ un conjunto abierto en $\mathbf{Z}$, entonces $g^{-1}(\mathbf{W})$ es abierto en $\mathbf{Y}$ y así $f^{-1}(g^{-1}(\mathbf{W}))$ es un conjunto abierto en $\mathbf{X}$, ya que tanto f como g son continuas, pero

$$f^{-1}(g^{-1}(\mathbf{W})) = (f^{-1} \circ g^{-1})(\mathbf{W}) = (g \circ f)^{-1}(\mathbf{W})$$

por lo tanto $f \circ g$ es continua.

(4) Sean $\pi_1 : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, y $\pi_2 : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$ definidas por

$$\pi_1[(x,y)] = x, (x,y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \text{ y } \pi_2[(x,y)] = y, (x,y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$$

las aplicaciones proyecciones sobre el primer y segundo factor, respectivamente. Para estas aplicaciones tenemos que: si $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son abiertos, entonces

$$\pi_1^{-1}(\mathbf{U}) = \mathbf{U} \times Y \text{ y } \pi_2^{-1}(\mathbf{V}) = \mathbf{X} \times \mathbf{V}$$

son abiertos, por lo que tanto π_1 y π_2 son continuas. Así tenemos que: para $a \in \mathbf{A}$,

$$\pi_1(f(a)) = \pi_1[(f_1(a), f_2(a))] = f_1(a) \text{ y } \pi_2(f(a)) = \pi_2[(f_1(a), f_2(a))] = f_2(a),$$

entonces f es continua, implica que f_1 y f_2 son continuas, ya que son composiciones de funciones continuas.

Contrariamente, sea $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ es un conjunto abierto en $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$,

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) &\iff f(a) \in \mathbf{U} \times \mathbf{V} \\ &\iff f_1(a) \in \mathbf{U} \wedge f_2(a) \in \mathbf{V} \\ &\iff a \in f_1^{-1}(\mathbf{U}) \wedge a \in f_2^{-1}(\mathbf{V}) \\ &\iff a \in f_1^{-1}(\mathbf{U}) \cap f_2^{-1}(\mathbf{V}). \end{aligned}$$

Luego $f^{-1}(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = f_1^{-1}(\mathbf{U}) \cap f_2^{-1}(\mathbf{V})$, como f_1 y f_2 son funciones continuas $f_1^{-1}(\mathbf{U})$ y $f_2^{-1}(\mathbf{V})$ son conjuntos abiertos y por lo tanto $f^{-1}(\mathbf{U} \times \mathbf{V})$ es abierto, ya que es la intersección de dos conjuntos abiertos.

■

Lema 1.15 *Sea $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ una aplicación continua y cerrada, $\mathbf{B} \subset \mathbf{Y}$ y $\mathbf{U} \in \mathcal{T}_{\mathbf{X}}$ tal que*

$$f^{-1}(\mathbf{B}) \subset \mathbf{U},$$

entonces existe $\mathbf{V} \in \mathcal{T}_{\mathbf{Y}}$ tal que $\mathbf{B} \subset \mathbf{V}$ y $f^{-1}(\mathbf{V}) \subset \mathbf{U}$.

Prueba. Sea $\mathbf{U}$ abierto en $\mathbf{X}$, entonces $\mathbf{X} - \mathbf{U}$ es cerrado en $\mathbf{X}$, como f es una aplicación cerrada, tenemos que $f(\mathbf{X} - \mathbf{U})$ es cerrado en $\mathbf{Y}$, entonces $\mathbf{V} = \mathbf{Y} - f(\mathbf{X} - \mathbf{U})$ es abierto en $\mathbf{Y}$. Si

$$f^{-1}(\mathbf{B}) \subset \mathbf{U},$$

entonces $\mathbf{B} \subset \mathbf{V}$, puesto que si $y \in \mathbf{B}$, entonces $f^{-1}(y) \subset \mathbf{U}$ ó equivalentemente

$$f^{-1}(y) \cap (\mathbf{X} - \mathbf{U}) = \emptyset$$

y luego

$$y = f(f^{-1}(y)) \in \mathbf{Y} - f(\mathbf{X} - \mathbf{U}) = \mathbf{V}.$$

Además,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbf{V}) &= f^{-1}(\mathbf{Y} - f(\mathbf{X} - \mathbf{U})) \\ &= \mathbf{X} - f^{-1}(f(\mathbf{X} - \mathbf{U})) \\ &= \mathbf{X} - (\mathbf{X} - \mathbf{U}) \\ &= \mathbf{U}. \end{aligned}$$

■

En las siguientes definiciones se dan topologías sobre productos cartesianos

$$\mathbf{X}_1 \times \cdots \times \mathbf{X}_n \text{ y } \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \cdots$$

donde cada $\mathbf{X}_i$ es un espacio topológico.

Definición 1.42 *Sea $\mathscr{A}$ una colección no vacía de conjuntos. Una* **función indexante** *para $\mathscr{A}$ es una función sobreyectiva f de un* **conjunto de índices** $\mathbf{J}$, *en $\mathscr{A}$. La familia $\mathscr{A}$, con la función indexante f, se le llama* **familia indexada de conjuntos.** *Dado $\alpha \in \mathbf{J}$, representamos $f(\alpha)$ por $\mathbf{A}_\alpha$. Y denotamos la familia indexada mediante*

$$\{\mathbf{A}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{J}}$$

que se lee "la familia de todos los $\mathbf{A}_\alpha$, cuando α recorre $\mathbf{J}$". En ocasiones solamente escribiremos $\{\mathbf{A}_\alpha\}$.

Definición 1.43 *Sea* $\mathbf{J}$ *un conjunto de índices. Dado un conjunto cualquiera* $\mathbf{X}$, *definimos una* $\mathbf{J}-$**upla** *de elementos de* $\mathbf{X}$ *como una función*

$$\mathbf{x} : \mathbf{J} \to \mathbf{X}.$$

Si α *es un elemento de* $\mathbf{J}$, *denotamos el valor de* $\mathbf{x}$ *en* α *mediante* x_α *en lugar de* $\mathbf{x}(\alpha)$; *lo llamaremos la* $\alpha-$*ésima* **coordenada** *de* $\mathbf{x}$. *Y denotaremos a la función* $\mathbf{x}$ *mediante el símbolo*

$$(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{J}}$$

Y denotaremos al conjunto de todas las $\mathbf{J}-$*uplas de elementos de* $\mathbf{X}$ *por* $\mathbf{X}^{\mathbf{J}}$.

Definición 1.44 *Sea* $\{\mathbf{A}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{J}}$ *una familia de conjuntos indexada y sea* $\mathbf{X} = \bigcup_{\alpha\in J} \mathbf{A}_\alpha$. *El* **producto cartesiano** *de esta familia indexada, denotado por*

$$\prod_{\alpha\in J} \mathbf{A}_\alpha,$$

se define como el conjunto de todas la $\mathbf{J}-$*uplas* $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{J}}$ *de elementos de* $\mathbf{X}$ *tales que* $x_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha$ *para cada* $\alpha \in \mathbf{J}$. *Esto es, es el conjunto de todas las funciones*

$$\mathbf{x} : \mathbf{J} \to \bigcup_{\alpha\in J} \mathbf{A}_\alpha$$

tales que $\mathbf{x}(\alpha) \in \mathbf{A}_\alpha$ *para cada* $\alpha \in \mathbf{J}$.

En ocasiones se denota el producto simplemente por $\prod \mathbf{A}_\alpha$, y a su elemento general por (x_α), si se sobreentiende el conjunto de índices.

Definición 1.45 *Sea* $\{\mathbf{X}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{J}}$ *una familia indexada de espacios topológicos. Tome-mos como base para la topología sobre el espacio producto*

$$\prod_{\alpha\in\mathbf{J}} \mathbf{X}_\alpha$$

la colección de todos los conjuntos de la forma

$$\prod_{\alpha\in\mathbf{J}} \mathbf{U}_\alpha,$$

donde $\mathbf{U}_\alpha$ *es abierto en* $\mathbf{X}_\alpha$, *para cada* $\alpha \in \mathbf{J}$. *La topología generada por esta base se denomina* **topología por cajas**

Definición 1.46 *Sea*

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in \mathbf{J}} \mathbf{X}_\alpha \to \mathbf{X}_\beta$$

la función que asigna a cada elemento del espacio producto su coordenada $\beta-$ésima,

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{J}}) = x_\beta;$$

se denomina **aplicación proyectiva** *asociada con el índice β.*

Teorema 1.11 *La función proyectiva*

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in \mathbf{J}} \mathbf{X}_\alpha \to \mathbf{X}_\beta$$

es sobreyectiva y continua.

Prueba. Sea $x_\beta \in \mathbf{X}_\beta$, entonces $x_\beta = \pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{J}})$ para algún $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{J}} \in \prod_{\alpha \in \mathbf{J}} \mathbf{X}_\alpha$, por lo tanto π_β es sobreyectiva.

Ahora, sea $\mathbf{U}_\beta$ abierto en $\mathbf{X}_\beta$, entonces

$$\pi_\beta^{-1}(\mathbf{U}_\beta) = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \cdots \times \mathbf{U}_\beta \cdots \times \mathbf{X}_\alpha \times \cdots ,$$

es abierto. Por lo tanto π_β es continua. ■

Cuando $\mathbf{J} = \{1, 2\}$, del Teorema 1.11, se tiene que $\pi_1 : \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \to \mathbf{X}_1$ es continua, puesto que $\pi_1^{-1}(\mathbf{U}_1) = \mathbf{U}_1 \times \mathbf{X}_2$ es abierto en $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$.

Definición 1.47 *Denotemos por $\mathcal{S}$ a la colección*

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(\mathbf{U}_\beta) | \mathbf{U}_\beta \textit{ es abierto en } \mathbf{X}_\beta\}$$

y denotamos por $\mathcal{S}$ a la unión de esas colecciones,

$$\mathcal{S} \bigcup_{\beta \in \mathbf{J}} \mathcal{S}_\beta.$$

La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ se denomina **topología producto.** *En esta topología, $\prod_{\alpha \in \mathbf{J}} \mathbf{X}_\alpha$ se denomina* **espacio producto.**

Teorema 1.12 *La topología por cajas sobre $\prod \mathbf{X}_\alpha$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod \mathbf{U}_\alpha$, donde $\mathbf{U}_\alpha$ es abierto en $\mathbf{X}_\alpha$ para cada α. La topología producto sobre $\prod \mathbf{X}_\alpha$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod \mathbf{U}_\alpha$, donde $\mathbf{U}_\alpha$ es abierto en $\mathbf{X}_\alpha$ para cada α y $\mathbf{U}_\alpha$ es igual a $\mathbf{X}_\alpha$ excepto para un número finito de valores de α.*

Prueba. Sea $x \in \prod \mathbf{X}_\alpha$, ya que cada $\mathbf{X}_\alpha$ es abierto, tenemos un básico

$$\mathbf{B} = \prod \mathbf{X}_\alpha,$$

tal que $x \in \mathbf{B}$, así se cumple la primera condición de una base.

Ahora sean

$$\mathbf{B}_1 = \prod \mathbf{U}_\alpha \text{ y } \mathbf{B}_2 = \prod \mathbf{V}_\alpha$$

dos básicos. Si $x \in \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2$, entonces

$$x \in \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2 = \prod \mathbf{U}_\alpha \bigcap \prod \mathbf{V}_\alpha.$$

pero

$$\prod \mathbf{U}_\alpha \bigcap \prod \mathbf{V}_\alpha = \prod (\mathbf{U}_\alpha \cap \mathbf{V}_\alpha).$$

Luego $x \in \prod (\mathbf{U}_\alpha \cap \mathbf{V}_\alpha) \subset \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2$, esto es, justamente la segunda condición de una base.

Por tanto los conjunto $\prod \mathbf{U}_\alpha$ donde $\mathbf{U}_\alpha$ es abierto en $\mathbf{X}_\alpha$ forma una base para $\prod \mathbf{X}_\alpha$. ■

Si la topología sobre cada espacio $\mathbf{X}_\alpha$ está dada por una subbase $\mathcal{B}$. La colección de todos los conjuntos de la forma

$$\prod_{\alpha \in \mathbf{J}} \mathbf{B}_\alpha,$$

donde $\mathbf{B}_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para cada α, es una base para la topología por cajas sobre $\prod_{\alpha \in \mathbf{J}} \mathbf{X}_\alpha$.

La colección de todos los conjuntos de la misma forma, donde $\mathbf{B}_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para un conjunto finito de índices α y $\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{X}_\alpha$ para todos los índices restantes, servirá como base para la topología producto $\prod_{\alpha \in J} \mathbf{X}_\alpha$.

Ejemplo 1.15 *Considerando el espacio euclídeo $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$. Sabemos que una base para $\mathbb{R}$ es la colección de intervalos abiertos de la forma (a, b), así, una base para la topología de $\mathbb{R}^n$ consiste en todos los productos de la forma*

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

En este caso las topologías por cajas y productos coinciden en $\mathbb{R}^n$.

El producto de espacios topológico cumple lo siguiente:

(1) Si $\mathbf{A}_\alpha$ un subespacio de $\mathbf{X}_\alpha$, para cada $\alpha \in J$. Entonces $\prod \mathbf{A}_\alpha$ es un subespacio de $\prod \mathbf{X}_\alpha$ si en ambos productos está dada la topología por cajas, o si en ambos productos está dada la topología producto.

(2) Si cada espacio $\mathbf{X}_\alpha$ es un espacio de Hausdorff, entonces $\prod \mathbf{X}_\alpha$ es un espacio de Hausdorff en las topologías por cajas y producto.

(3) Si $\{\mathbf{X}_\alpha\}$ una familia indexada de espacios topológicos y sea
$\mathbf{A}_\alpha \subset \mathbf{X}_\alpha$ para cada α. Si $\prod \mathbf{X}_\alpha$ está dotado de la topología por cajas o producto, entonces

$$\prod \overline{\mathbf{A}}_\alpha = \overline{\prod \mathbf{A}_\alpha}.$$

Definir una topología en términos de una distancia es un método más para dotar de una topología a un conjunto. Así tenemos lo siguiente:

Definición 1.48 *Una* **distancia** *en un conjunto* $\mathbf{X}$ *es una función*

$$d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$$

satisfaciendo las propiedad siguientes:

(1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$; *la igualdad se da si, y sólo si,* $x = y$.

(2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$.

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$. *(Desigualdad triangular).*

Definición 1.49 *Dado* $\epsilon > 0$, *al conjunto*

$$\mathbf{B}_d(x, \epsilon) = \{y | d(x, y) < \epsilon\}$$

de todos los puntos y *cuya distancia a* x *es menor que* ϵ, *se le denomina* **bola de radio** ϵ **centrada en** $\mathbf{x}$.

Algunas veces $\mathbf{B}_d(x,\epsilon)$ se escribirá simplemente $\mathbf{B}(x,\epsilon)$.

Definición 1.50 *Si d es una distancia en el conjunto $\mathbf{X}$, entonces la colección de todas las bolas $\mathbf{B}_d(x,\epsilon)$ de radio ϵ, para $x \in X$ y $\epsilon > 0$, es una base para una topología sobre X, denominada* **topología métrica** *inducida por d. Además la colección de todas las bolas $\mathbf{B}_d(x, \frac{1}{n})$ para $n \in \mathbf{I}$ donde $\mathbf{I}$ es un conjunto de índices y $x \in \mathbf{X}$, es una base para la topología de $\mathbf{X}$.*

Ejemplo 1.16 *Sobre los números reales $\mathbb{R}$ la distancia usual está definida por*

$$d(x,y) = |x-y|.$$

La topología inducida por esta distancia en la misma que la topología del orden: cada elemento (a,b) básico para la topología del orden es un elemento básico para la topología métrica, pues

$$(a,b) = \mathbf{B}(x,\epsilon)$$

donde $x = (a+b)/2$ y $\epsilon = (b-a)/2$. Y recíprocamente, cada bola $\mathbf{B}(x,\epsilon)$ de radio ϵ es igual a un intervalo abierto. Pues, es el intervalo $(x-\epsilon, x+\epsilon)$.

Definición 1.51 *Si $\mathbf{X}$ es un espacio topológico, se dice que $\mathbf{X}$ es* **metrizable** *si existe una distancia d en el conjunto $\mathbf{X}$ que induce la topología de $\mathbf{X}$. Un* **espacio métrico** *es un espacio metrizable $\mathbf{X}$ junto a una distancia específica d que da la topología de $\mathbf{X}$.*

La metrizabilidad de un espacio depende solamente de la topología del espacio en cuestión, pero no, en general, de las propiedades que implica una distancia específica para $\mathbf{X}$. Pues en un espacio topológico se puede hacer la definición siguiente:

Definición 1.52 *Sea $\mathbf{X}$ un espacio métrico con una distancia d. Un subconjunto $\mathbf{A}$ de $\mathbf{X}$ se dice que está* **acotado** *si existe algún número M tal que*

$$d(a_1,a_2) \leq M$$

para todo par a_1, a_2 de puntos de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{A}$ es un conjunto acotado y no vacío, el **diámetro** *de $\mathbf{A}$ se define como el número*

$$\textit{diám}\ \mathbf{A} = \sup\{d(a_1,a_2) | a_1, a_2 \in \mathbf{A}\}.$$

La acotación de un conjunto no es una propiedad topológica, porque depende de la distancia particular d que se use para $\mathbf{X}$. Pues, si $\mathbf{X}$ es un espacio métrico con distancia d, entonces existe una distancia $\overline{d}$ que da la topología de $\mathbf{X}$, relativa a la cual *cada* subconjunto de $\mathbf{X}$ está acotado.

Definición 1.53 *Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ espacios topológicos y sea $p : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p se dice que es una* **aplicación cociente** *siempre que un subconjunto $\mathbf{U}$ de $\mathbf{Y}$ es abierto en $\mathbf{Y}$ si, y sólo si, $p^{-1}(\mathbf{U})$ es abierto en $\mathbf{X}$.*

Otra manera de describir una aplicación cociente es la siguiente: diremos que un subconjunto $\mathbf{C}$ de $\mathbf{X}$ es **saturado** (respecto a p) si $\mathbf{C}$ contiene a cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$ al que interseca. Así $\mathbf{C}$ es saturado si es igual a la imagen inversa completa de un subconjunto de $\mathbf{Y}$. Decir que p es una aplicación cociente es equivalente a decir que p es continua y p asocia conjuntos abiertos *saturados* de $\mathbf{X}$ con conjuntos abiertos de $\mathbf{Y}$.

Definición 1.54 *Una aplicación*

$$f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$$

se dice que es una **aplicación abierta** *si para cada conjunto abierto $\mathbf{U}$ de $\mathbf{X}$, el conjunto $f(\mathbf{U})$ es abierto en $\mathbf{Y}$. Se dice que es una* **aplicación cerrada** *si para cada conjunto cerrado $\mathbf{A}$ de $\mathbf{X}$, el conjunto $f(\mathbf{A})$ es cerrado en $\mathbf{Y}$.*

De la definición se sigue que si $p : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es una aplicación continua sobreyectiva que es abierta o cerrada, entonces p es una aplicación cociente.

Definición 1.55 *Si $\mathbf{X}$ es un espacio, $\mathbf{A}$ un conjunto y $p : \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ es una aplicación sobreyectiva, entonces existe exactamente una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathbf{A}$ relativa a la cual p es una aplicación cociente; se denomina* **topología cociente** *inducida por p.*

Ejemplo 1.17 *Sea p la aplicación de la recta real $\mathbb{R}$ sobre el conjunto de tres elemento $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$ definida por*

$$p(x) = \begin{cases} a & \textit{si } x > 0 \\ b & \textit{si } x < 0 \\ c & \textit{si } x = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

La topología sobre $\mathbf{A}$ *inducida por* p *es*

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbf{A}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Definición 1.56 *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio topológico y sea* $\mathbf{X}^*$ *una partición de* $\mathbf{X}$ *es subconjuntos disjuntos cuya unión es* $\mathbf{X}$. *Sea* $p : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ *la aplicación sobreyectiva que lleva cada punto de* $\mathbf{X}$ *al elemento de* $\mathbf{X}^*$ *que lo contiene. En la topología cociente inducida por* p, *el espacio* $\mathbf{X}^*$ *se denomina* **espacio cociente** *de* $\mathbf{X}$.

Por último definiremos las propiedades de conexidad y compacidad para espacios topológicos.

Definición 1.57 *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio topológico. Una* **separación** *de* $\mathbf{X}$ *es un par* $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ *de abiertos disjuntos no triviales de* $\mathbf{X}$ *cuya unión es* $\mathbf{X}$. *El espacio* $\mathbf{X}$ *se dice que es conexo si no existe una separación de* $\mathbf{X}$.

Definición 1.58 *Una* **componente** *de un espacio topológico es un subconjunto conexo que está propiamente contenido en ningún otro subconjunto conexo.*

Otro modo de dar la anterior definición de conexión es:

Proposición 1.6 *Un espacio* $\mathbf{X}$ *es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos abiertos de* $\mathbf{X}$ *que son abiertos y cerrados en* $\mathbf{X}$ *son el vacío y el propio* $\mathbf{X}$.

Prueba.

($\Rightarrow$) Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ subconjuntos propios abiertos y cerrados de $\mathbf{X}$ donde ambos son distintos de vacíos, entonces $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, por lo cual $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son una separación de $\mathbf{X}$, esto es una contradicción, ya que por hipótesis $\mathbf{X}$ es conexo, por lo cual $\mathbf{A} = \emptyset$ ó $\mathbf{B} = \emptyset$. Por lo tanto los únicos subconjuntos propios abiertos y cerrados son $\emptyset$ y el mismo $\mathbf{X}$.

($\Leftarrow$) Por hipótesis los únicos subconjuntos propios de $\mathbf{X}$ son $\emptyset$ y $\mathbf{X}$, entonces por definición $\mathbf{X}$ es conexo.

■

Para subespacio topológicos existe una manera alternativa para formular la definición de conexión.

Definición 1.59 *Si* $\mathbf{Y}$ *es un subespacio de* $\mathbf{X}$, *una* **separación** *de* $\mathbf{Y}$ *es un par* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *de conjuntos no vacíos y disjuntos tal que* $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ *de modo que ninguno de ellos contiene puntos límites del otro. El espacio* $\mathbf{Y}$ *es conexo si no existe una separación de* $\mathbf{Y}$.

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ es una separación de $\mathbf{Y}$. Entonces $\mathbf{A}$ es abierto y cerrado en $\mathbf{Y}$. En $\mathbf{Y}$ tenemos $\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{Y}$ donde $\overline{\mathbf{A}}$ es la adherencia de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{X}$. Como $\mathbf{A}$ es cerrado en $\mathbf{Y}$, $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{Y}$, esto equivale a tener $\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B} = \emptyset$. Como $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cup \mathbf{A}'$, $\mathbf{B}$ no contiene puntos límites de $\mathbf{A}$.

Ahora si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son conjuntos disjuntos no vacíos tal que $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, y ninguno de los cuales contiene puntos límites del otro. Entonces $\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B} = \emptyset$ y $\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}} = \emptyset$; así, $\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{Y} = \mathbf{A}$ y $\overline{\mathbf{B}} \cap \mathbf{Y} = \mathbf{B}$. Luego, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son cerrados en $\mathbf{Y}$ y, como $\mathbf{A} = \mathbf{Y} - \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{Y} - \mathbf{A}$ también tenemos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son abiertos en $\mathbf{Y}$.

Ejemplo 1.18 *Si* $\mathbf{X}$ *es un conjunto de dos elementos dotado de la topología indiscreta. Es evidente que no existe una separación de* $\mathbf{X}$, *luego* $\mathbf{X}$ *es conexo.*

Teorema 1.13 *La unión de una colección de subespacios conexos de* $\mathbf{X}$ *que tiene un punto en común es conexa.*

Prueba. Sea $\{\mathbf{A}_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de un espacio $\mathbf{X}$ y sea $x \in \cap \mathbf{A}_\alpha$. Hagamos $\mathbf{T} = \cup \mathbf{A}_\alpha$, supongamos que $\mathbf{T} = \mathbf{C} \cup \mathbf{D}$ es una separación($\mathbf{C}, \mathbf{D}$ son no vacíos) de $\mathbf{T}$. El punto $x \in C$ o $x \in \mathbf{D}$, si $x \in \mathbf{C}$, como $\mathbf{A}_\alpha$ es conexo, tenemos $\mathbf{A}_\alpha \subset \mathbf{C}$ o $\mathbf{A}_\alpha \subset \mathbf{D}$, esta última posibilidad no puede suceder, pues $x \in \mathbf{A}_\alpha$ y $x \in \mathbf{C}$. Por tanto, $\mathbf{A}_\alpha \subset \mathbf{C}$ para cada α y así $\bigcup \mathbf{A}_\alpha \subset \mathbf{C}$, esto contradice el hecho de que $\mathbf{D}$ es no vacío. ■

Teorema 1.14 *La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es un espacio conexo.*

Prueba. Sea $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ una aplicación continua y sea $\mathbf{X}$ conexo, debemos mostrar que el espacio imagen $\mathbf{Z} = f(\mathbf{X})$ es conexo. Ya que la aplicación obtenida al restringir el rango f al espacio $\mathbf{Z}$ es continua, es suficiente considerar una aplicación continua y sobreyectiva $g : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}$. Sea $\mathbf{Z} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ una separación de $\mathbf{Z}$ en dos conjuntos no vacíos disjuntos y abiertos en $\mathbf{Z}$. Entonces $g^{-1}(\mathbf{A})$ y $g^{-1}(\mathbf{B})$ son conjuntos disjuntos cuya unión es $\mathbf{X}$, además son abiertos no vacíos en $\mathbf{X}$, ya que g es continua sobreyectiva. Luego, constituyen una separación de $\mathbf{X}$, esto contradice la hipótesis de que $\mathbf{X}$ era conexo. ■

Teorema 1.15 *El producto cartesiano finito de espacios conexos es conexo.*

Prueba. Por inducción tenemos. Sean $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ dos espacio conexos, sea $a \times b \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. $\mathbf{X} \times b$ es conexo, ya que es homeomorfa a $\mathbf{X}$, además $a \times \mathbf{Y}$ es conexo, ya que es homeomorfa a $\mathbf{Y}$. Así, cada espacio

$$\mathbf{T}_a = (\mathbf{X} \times b) \cup (a \times \mathbf{Y})$$

es conexo ya que es la unión de dos espacios conexos que tienen el punto en común $a \times b$. Ya que

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \bigcup_{a \in \mathbf{X}} \mathbf{T}_a$$

como todos los $\mathbf{T}_a$ tiene el punto $a \times b$ en común, $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ es conexo.

Supongamos que $\mathbf{X}_1 \times \cdots \mathbf{X}_{n-1}$, es conexo, probemos que $\mathbf{X}_1 \times \cdots \mathbf{X}_n$ es conexo. Ya que

$$\mathbf{X}_1 \times \cdots \times \mathbf{X}_n$$

es homeomorfo a $(\mathbf{X}_1 \times \cdots \times \mathbf{X}_{n-1}) \times \mathbf{X}_n$, y este último es conexo, pues es el producto de dos espacios conexo. Tenemos que $\mathbf{X}_1 \times \cdots \mathbf{X}_n$ es conexo. ■

La noción de compacidad no nos es tan familiar como la de conexión. Desde los inicios de la topología, se ha admitido que el intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real gozaba de una cierta propiedad que era crucial en la demostración de teoremas tales como el teorema del valor máximo y el teorema de la continuidad uniforme. Normalmente, se pensaba que esta propiedad crucial del intervalo cerrado era el hecho de que cualquier subconjunto infinito de puntos de $[a, b]$tenia un punto límite y fue esta propiedad la que en principio recibió el nombre de compacidad. La definición que presentamos esta en términos más generales; de hecho, en términos de cubrimientos del espacio por conjuntos abiertos.

Definición 1.60 *Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio $\mathbf{X}$ se dice que* **cubre** $\mathbf{X}$, *o que es un* **cubrimiento** *de* $\mathbf{X}$, *si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con $\mathbf{X}$. Se dice que $\mathcal{A}$ es un* **cubrimiento abierto** *de $\mathbf{X}$ si es un cubrimiento de $\mathbf{X}$ formado por conjuntos abiertos de $\mathbf{X}$.*

Definición 1.61 *Un espacio $\mathbf{X}$ se dice que es* **compacto** *si de cada cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de $\mathbf{X}$ podemos extraer una subcolección finita que también cubre $\mathbf{X}$.*

En los espacio compactos se cumple propiedades similares a las propiedades en espacios conexos, estas son:

Teorema 1.16 *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio compacto. Entonces todo subespacio cerrado* $\mathbf{K}$ *de* $\mathbf{X}$ *es compacto.*

Prueba. Sea $\mathscr{U} = \{\mathbf{U}_i\}_{i\in\mathbf{J}}$ un cubrimiento abierto de $\mathbf{K}$, como $\mathbf{K}$ es cerrado tenemos que

$$\mathscr{L} = \mathbf{U} \cup \{\mathbf{X} - \mathbf{K}\}$$

es un recubrimiento abierto de $\mathbf{X}$. Ya que $\mathbf{X}$ es compacto, existe un subrecubrimiento finito

$$\{\mathbf{X} - \mathbf{K}, \mathbf{U}_1, \cdots, \mathbf{U}_n\}$$

de $\mathbf{X}$, entonces

$$\mathbf{K} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{U}_n$$

y así existe un subrecubrimiento finito de $\mathbf{K}$, por lo tanto $\mathbf{K}$ es compacto. ■

Teorema 1.17 *Sean* $\mathbf{X}$ *es compacto y* $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *una aplicación continua, entonces* $f(\mathbf{X})$ *es compacto. Si además* $\mathbf{Y}$ *es Hausdorff, entonces* f *es cerrada.*

Prueba. Sea $\mathscr{U} = \{\mathbf{U}_i\}_{i\in\mathbf{J}}$ un recubrimiento de $f(\mathbf{X})$, como f es continua, tenemos que $\{f^{-1}(\mathbf{U}_i)\}_{i\in\mathbf{J}}$ es un recubrimiento de $\mathbf{X}$, y como $\mathbf{X}$ es compacto, existe un subconjunto finito $\mathbf{F} \subset \mathbf{J}$ tal que

$$\mathbf{X} = \bigcup_{i\in\mathbf{F}} f^{-1}(\mathbf{U}_i),$$

entonces

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= f\left(\bigcup_{i\in\mathbf{F}} f^{-1}(\mathbf{U}_i)\right) \\ &= \bigcup_{i\in\mathbf{F}} f(f^{-1}(\mathbf{U}_i)) \\ &= \bigcup_{i\in\mathbf{F}} \mathbf{U}_i, \end{aligned}$$

así existe un subrecubrimiento finito de $f(\mathbf{X})$, y por lo tanto $f(\mathbf{X})$ es compacto. ■

Corolario 1.2 *Sea $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ una aplicación continua de $\mathbf{X}$ sobre $\mathbf{Y}$, si $\mathbf{A}$ es un subconjunto de $\mathbf{X}$ tal que $\overline{\mathbf{A}}$ es compacto, entonces $\overline{f(\mathbf{A})}$ es compacto.*

Prueba. Si $\overline{\mathbf{A}}$ es compacto, entonces por el Teorema 1.17 $f(\overline{\mathbf{A}})$ es compacto, y por lo tanto también $\overline{f(\overline{\mathbf{A}})}$ es compacto. Esto implica que $\overline{f(\mathbf{A})}$ es compacto. ■

Lema 1.16 *Sea $\mathbf{G}$ un conjunto y sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ subconjuntos de $\mathbf{G}$. Entonces $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$ si y sólo si $\mathbf{A} \subset \mathbf{G} - \mathbf{B}$ ó $\mathbf{B} \subset \mathbf{G} - \mathbf{A}$.*

Prueba.

($\Rightarrow$) Supongamos que $x \in \mathbf{A}$,

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{A} &\Rightarrow x \notin \mathbf{B}, \text{ ya que } \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset \\ &\Rightarrow x \in \mathbf{G} - \mathbf{B}, \end{aligned}$$

luego $\mathbf{A} \subset \mathbf{G} - \mathbf{B}$.

Ahora supongamos que $x \in \mathbf{B}$,

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{B} &\Rightarrow x \notin \mathbf{A}, \text{ ya que } \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset \\ &\Rightarrow \mathbf{G} - \mathbf{A}, \end{aligned}$$

luego $\mathbf{B} \subset \mathbf{G} - \mathbf{A}$.

($\Rightarrow$) *a*) Probamos primero que $\mathbf{A} \subset \mathbf{G} - \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$. Por contradicción, supongamos que $\mathbf{A} \subset \mathbf{G} - \mathbf{B}$ y que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$. Sea $x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$,

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B} &\Rightarrow x \in \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{B} \\ &\Rightarrow x \notin \mathbf{G} - \mathbf{B}, \end{aligned}$$

pero por hipótesis $\mathbf{A} \subset \mathbf{G} - \mathbf{B}$, así que $x \in \mathbf{A} \subset \mathbf{G} - \mathbf{B}$, esto es una contradicción. Por lo tanto $\mathbf{A} \subset \mathbf{G} - \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$.

b) Ahora probemos que $\mathbf{B} \subset \mathbf{G} - \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$. Por contradicción, supongamos que $\mathbf{B} \subset \mathbf{G} - \mathbf{A}$ y que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$. Sea $x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$,

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B} &\Rightarrow x \in \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{B} \\ &\Rightarrow x \notin \mathbf{G} - \mathbf{A} \end{aligned}$$

pero por hipótesis $\mathbf{B} \subset \mathbf{G} - \mathbf{A}$, así que $x \in \mathbf{B} \subset \mathbf{G} - \mathbf{A}$, esto es una contradicción. Por lo tanto $\mathbf{B} \subset \mathbf{G} - \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$.

■

Teorema 1.18 *Si* $\mathbf{Y}$ *es compacto, entonces la proyección* $\pi_1 : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ *es una aplicación cerrada.*

Prueba. Sea $\mathbf{C}$ cerrado en $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, vamos a probar que $\mathbf{X} - \pi_1(\mathbf{C})$ es abierto Si $x \in \mathbf{X} - \pi_1(\mathbf{C})$, entonces $\{x\} \times \mathbf{Y} \cap \mathbf{C} = \emptyset$, luego $(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y} - \mathbf{C}, \forall y \in \mathbf{Y}$. Como $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} - \mathbf{C}$ es abierto, entonces existen abiertos $\mathbf{U}_x^y$ y $\mathbf{V}_y$ tal que $x \in \mathbf{U}_x^y$ y $y \in \mathbf{V}_y$ y $(x, y) \in \mathbf{U}_x^y \times \mathbf{V}_y \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y} - \mathbf{C}$. La familia $\{\mathbf{U}_x^y \times \mathbf{V}_y\}_{y \in \mathbf{Y}}$ es un cubrimiento de $\{x\} \times \mathbf{Y}$, como Y es compacto y $\{x\} \times \mathbf{Y}$ es homeomorfo a $\mathbf{Y}$ tenemos que $\{x\} \times \mathbf{Y}$ es compacto, por lo que existe un subrecubrimiento finito

$$\{\mathbf{U}_x^{y_1} \times \mathbf{V}_{y_1}, \cdots \mathbf{U}_x^{y_n} \times \mathbf{V}_{y_n}\}$$

de $\{x\} \times \mathbf{Y}$. Entonces

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_x^{y_1} \cap \cdots \cap \mathbf{U}_x^{y_n}$$

es un abierto tal que $x \in \mathbf{U}$ y $\mathbf{U} \cap \pi_1(\mathbf{C}) = \emptyset$, esto implica, según Lema 1.16, que

$$\mathbf{U} \subset \mathbf{X} - \pi_1(\mathbf{C}),$$

es decir,

$$\mathbf{X} - \pi_1(\mathbf{C}) = \bigcup \mathbf{U}.$$

Por lo que $\mathbf{X} - \pi_1(\mathbf{C})$ es abierto y por lo tanto $\pi_1(\mathbf{C})$ es cerrado. ■

Lema 1.17 *Sea* $\mathbf{Y}$ *compacto,* $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}, \mathbf{U}$ *abierto en* $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ *tal que* $\mathbf{A} \times \mathbf{Y} \subset \mathbf{U}$, *entonces existe un abierto* $\mathbf{V}$ *en* $\mathbf{X}$ *tal que* $\mathbf{A} \times \mathbf{Y} \subset \mathbf{V} \times \mathbf{Y} \subset \mathbf{U}$.

Prueba. Como $\pi_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \times \mathbf{Y}$ y pi_1 es cerrada se sigue del Teorema 1.15 que existe un abierto $\mathbf{V}$ en $\mathbf{X}$ tal que $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$ y $\mathbf{V} \times \mathbf{Y} = \pi_1^{-1} \subset \mathbf{U}$. ■

Teorema 1.19 *El producto finito de espacios compactos es compacto si y sólo si cada uno de los espacios es compacto.*

Prueba. La prueba se hará por inducción.

Para el caso cuando $n = 2$,

($\Rightarrow$) Sea $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ compacto, entonces como $\pi_1 : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ y $\pi_2 : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$, por Teorema 1.11, son aplicaciones continuas, y por Teorema 1.17, $\mathbf{X} = \pi_1(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ y $\mathbf{Y} = \pi_2(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$, son compactos.

($\Leftarrow$) Sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ compactos y sea $\mathscr{U} = \{\mathbf{U}_i\}_{i \in \mathbf{J}}$ un cubrimiento de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Dado $x \in \mathbf{X}$, ya que $\mathbf{Y}$ es compacto y $\{x\} \times \mathbf{Y}$ es homeomorfo con $\mathbf{Y}$, tenemos que $\{x\} \times \mathbf{Y}$ es compacto, esto implica que existe un subrecubrimiento finito $\{\mathbf{U}_1, \cdots \mathbf{U}_n\}$. Sea

$$\mathbf{U}_x = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{U}_i,$$

entonces por Lema 1.17 existen un abierto V_x tal que

$$\{x\} \times \mathbf{Y} \subset \mathbf{V}_x \times \mathbf{Y} \subset \mathbf{U}_x.$$

Como $\mathbf{X}$ es compacto y $\mathbf{X} = \bigcup_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{V}_x$, existe un subrecubrimiento finito de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, pero cada $\mathbf{V}_{x_i} \times \mathbf{Y} \subset \mathbf{U}_{x_i}$ y así cada $\mathbf{U}_{x_i}$ es la unión finita de elementos de $\mathscr{U}$, por lo tanto $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ es compacto.

Ahora supongamos que $\prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{X}_i$ es compacto, probaremos que $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i$ es compacto.

Como

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i = (\prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{X}_i) \times \mathbf{X}_n,$$

entonces $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i$ es el producto de dos espacio compacto, el caso para cuando $n = 2$ implica que $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i$ es compacto.

Por lo tanto el producto finito de espacios compactos es compacto. ■

Lema 1.18 *Si* $\mathbf{Y}$ *es un espacio compacto de un espacio Hausdorff* $\mathbf{X}$ *y* $x_0 \notin \mathbf{Y}$, *entonces existen abiertos disjuntos* $\mathbf{U}$ *y* $\mathbf{V}$ *de* $\mathbf{X}$ *conteniendo a* x_0 *y a* $\mathbf{Y}$ *respectivamente.*

Ahora damos la definición de un espacio localmente compacto.

Definición 1.62 *Un espacio* $\mathbf{X}$ *se dice que es* **localmente compacto** *si todo punto de* $\mathbf{X}$ *tiene una vecindad* $\mathbf{U}$ *tal que* $\overline{\mathbf{U}}$ *es compacto, como subespacio de* $\mathbf{X}$

Los espacios localmente cumplen con las propiedades mencionadas anteriormente para espacios compactos.

Definición 1.63 *Si* $\mathbf{Y}$ *es un espacio compacto y de Hausdorff y* $\mathbf{X}$ *es un subespacio propio de* $\mathbf{Y}$ *tal que* $\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{Y}$, *entonces se dice que* $\mathbf{Y}$ *es* **compactificación** *de* $\mathbf{X}$. *Si* $\mathbf{Y} - \mathbf{X}$ *consiste en un único punto, entonces* $\mathbf{Y}$ *se denomina* **compactificación** *de un punto de* $\mathbf{X}$.

Ejemplo 1.19 *El cubrimiento de* $\mathbb{R}$ *por intervalos abiertos*

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) | n \in \mathbb{Z}\}$$

no contiene ninguna subcolección finita que cubra $\mathbb{R}$. *Por tanto, la recta real* $\mathbb{R}$ *no es compacta.*

En general, resulta complicado decidir cuándo un espacio dado es compacto o no. Si $\mathbf{Y}$ un subespacio de $\mathbf{X}$. Entonces $\mathbf{Y}$ es compacto si, y sólo si, cada cubrimiento de $\mathbf{Y}$ por abiertos de $\mathbf{X}$ contiene una subcolección finita que cubre $\mathbf{Y}$.

Definición 1.64 *Una colección* $\mathcal{C}$ *de subconjuntos de* $\mathbf{X}$ *se dice que tiene la* **propiedad de la intersección finita** *si cada subcolección finita*

$$\{\mathbf{C}_1, \cdots, \mathbf{C}_n\}$$

de $\mathcal{C}$ *tiene intersección no vacía, es decir,* $\mathbf{C}_1 \cap \cdots \cap \mathbf{C}_n$ *es no vacía.*

Un criterio formulado en términos de conjuntos cerrados en lugar de abiertos, para decidir si un espacio es o no compacto. Es el siguiente:

Si $\mathbf{X}$ un espacio topológico. Entonces $\mathbf{X}$ es compacto si, y sólo si, para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en $\mathbf{X}$ con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección

$$\bigcap_{\mathbf{C}\in\mathcal{C}} \mathbf{C}$$

es no vacía.

Teorema 1.20 *Sea $\mathbf{X}$ un espacio topológico Hausdorff, entonces $\mathbf{X}$ es localmente compacto si y sólo si dado $x \in \mathbf{X}$ y un entorno $\mathbf{U}$ de x, existe un entorno $\mathbf{V}$ de x tal que $\overline{\mathbf{V}}$ es compacto y $\overline{\mathbf{V}} \subset \mathbf{U}$.*

Prueba.

($\Leftarrow$) Por hipótesis, dado $x \in \mathbf{X}$ existe un entorno $\mathbf{V}$ de x tal que $\overline{\mathbf{V}}$ es compacto y $\overline{\mathbf{V}} \subset \mathbf{U}$, y ya que $\mathbf{V} \subset \overline{\mathbf{V}}$, según la Definición 1.62, esto implica que $\mathbf{X}$ es compacto.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathbf{X}$ es localmente compacto, sea $x \in \mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ un entorno de x. Consideramos la compactificación por un punto $\mathbf{Y}$ de $\mathbf{X}$, y sea $\mathbf{C} = \mathbf{Y} - \mathbf{U}$, entonces $\mathbf{C}$ es cerrado en $\mathbf{Y}$, así, según Teorema 1.16, $\mathbf{C}$ es un subespacio compacto $\mathbf{Y}$, aplicando el Lema 1.18, elegimos abiertos disjuntos $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ conteniendo a x y $\mathbf{C}$, respectivamente. Entonces $\overline{\mathbf{V}}$ en $\mathbf{Y}$ es compacto y además $\overline{\mathbf{V}} \cap \mathbf{C} = \emptyset$, así $\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$. Que es lo que se quería demostrar.

■

Ahora definimos los llamados axiomas de numerabilidad y separabilidad. Para los cuales se requerir del concepto siguiente.

Definición 1.65 *Sea $\mathbf{X}$ un espacio topológico, $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$, se dice que $\mathbf{A}$ es* **denso** *en $\mathbf{X}$ si y sólo, si $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{X}$, esto es, la clausura de $\mathbf{A}$ es todo el espacio $\mathbf{X}$.*

La siguiente definición describe lo que se entiende por el primer axioma de numerabilidad.

Definición 1.66 *Un espacio topológico $\mathbf{X}$ se dice que tiene una* **base numerable en** *x si existe una colección numerable (contable) $\mathscr{B}$ de entornos de x tales que cada entorno de x contiene al menos a uno de los elementos de $\mathscr{B}$. Un espacio que tiene una base numerable en cada uno de sus puntos se dice que satisface el* **primer axioma de numerabilidad,** *que es* **1AN,** *o que es* **uno-numerable (uno-contable).**

Sea $\mathbf{X}$ un espacio metrizable, entonces existe una métrica d tal que la colección de todas las bolas $\mathbf{B}_d(x, \frac{1}{n})$ donde $x \in \mathbf{X}$ y n es un número entero positivo, es una base para la topología de $\mathbf{X}$(Definición 1.50), además como el conjunto de los enteros positivos es contable tenemos que $\mathbf{B}_d(x, \frac{1}{n})$ es una base contable en cada $x \in \mathbf{X}$. Esto significa que:

Todo espacio metrizable es 1-contable.

Definición 1.67 *Si un espacio topológico $\mathbf{X}$ tiene una base numerable para su topología, entonces se dice $\mathbf{X}$ satisface el* **segundo axioma de numerabilidad,** *que es* **2AN***, o que es* **dos-numerable (dos-contable).**

Luego de haber definido el primer y segundo axioma de numerabilidad, tenemos el axioma de separación

Definición 1.68 *Un espacio topológico $\mathbf{X}$ se dice que es* **separable** *si tiene un subconjunto denso numerable.*

Definición 1.69 *A un espacio topológico $\mathbf{X}$ se le denomina*

(1) un **espacio**$-\mathbf{T}_0$*, si para todo par de puntos distintos $x, y \in \mathbf{X}$ existe un conjunto abierto $\mathbf{U}$ tal que o $x \in \mathbf{U}, y \notin \mathbf{U}$ ó $y \in \mathbf{U}, x \notin \mathbf{U}$;*

(2) un **espacio**$\mathbf{T}_1$ *si para todo par de puntos distintos $x, y \in \mathbf{X}$ existen conjuntos abiertos $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tal que $x \in \mathbf{U}, y \notin \mathbf{U}$ y $y \in \mathbf{V}, x \notin \mathbf{V}$;*

(3) un **espacio**$-T_2$ *(o, espacio Hausdorff), si para todo par de puntos $x, y \in X$ existen conjuntos abiertos disjuntos $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ tal que $x \in \mathbf{U}$ y $y \in \mathbf{V}$.*

Además

(4) un espacio$-T_0$ es llamado un **espacio**$-T_3$ *(o, espacio regular), si para todo $x \in \mathbf{X}$ y todo conjunto conjunto abierto $x \in \mathbf{U}$ en $\mathbf{X}$ existe un conjunto abierto $\mathbf{V}$ tal que $x \in \mathbf{V} \subseteq \overline{\mathbf{V}} \subseteq \mathbf{U}$;*

(5) *un espacio*$-T_0$ $\mathbf{X}$ *es llamado un* **espacio**$-T_{3,5}$ *(ó, un espacio de Tychonov), si para todo* $x \in \mathbf{X}$ *y todo conjunto abierto* $x \in \mathbf{U}$ *en* $\mathbf{X}$ *existe una función continua*

$$f : \mathbf{X} \to [0,1]$$

tal que $f(x) = 1$ *y* $f(y) = 0$ *para todo* $y \in \mathbf{X}$ *y* $y \notin \mathbf{U}$;

(6) *un espacio*$-T_0$ X *es llamado un* **espacio**$-T_4$ *(ó, un espacio normal), si para todo par de conjuntos cerrados disjuntos* $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathbf{X}$ *existe un par de conjuntos abiertos disjuntos* $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ *en* $\mathbf{X}$ *tal que* $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{U}$ *y* $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{V}$.

Capítulo 2

Grupos Topológicos

La teoría de grupos topológicos es uno de los ejemplos más interesantes donde interactúan dos áreas distintas de las matemáticas; la teoría de grupos y la topología general. A través de esta última se incorpora también otra rama fundamental, como lo es la teoría de conjuntos.

Sabemos que un grupo $\mathbf{G}$ es un conjunto de objetos con una operación binaria $*$ tal que $*$ es asociativa, en $\mathbf{G}$ existe un elemento identidad, y que para $a \in \mathbf{G}, a^{-1} \in \mathbf{G}$. Por otra parte un espacio topológico es un conjunto $\mathbf{X}$, con una colección $\mathcal{T}$, de subconjuntos de $\mathbf{X}$, tal que $\emptyset, \mathbf{X} \in \mathcal{T}$, además las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ están en $\mathcal{T}$. Así pues parece bastante obvio decir que un grupo topológico es un conjunto $\mathbf{G}$ que es un grupo, con una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbf{G}$, pero la definición de grupo topológico requiere además que las aplicaciones

$$* : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G} \;\text{ e }\; i : \mathbf{G} \to \mathbf{G},$$

definidas por $*((x, y)) = x * y$ e $i(x) = x^{-1}$, respectivamente, sean continuas. Por lo que definimos lo que entenderemos por grupo topológico como sigue.

2.1. Definición de un grupo topológico

Comenzamos con la siguiente definición de un grupo topológico.

Definición 2.1 *Sea $\mathbf{G}$ un conjunto que es un grupo y también un espacio topológico. Suponga que:*

(a) la función $f : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ definida por $f(x, y) = xy$ es continua,

(b) la función $i : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ definida por $i(x) = x^{-1}$ es continua.

Entonces $\mathbf{G}$ *es llamado un* **grupo topológico.**

El término “grupo topológico” significará “ grupo topológico que es un espacio topológico T_0,”[1] si no es así será específicamente establecido.

Según el Teorema 1.9 $[(1) \Rightarrow (4)]$, que la función f de la Definición 2.1, sea continua implica que, para todo $(x, y) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}$ y cada vecindad $\mathbf{U}$ de $f(x, y)$, existen vecindades $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ de x e y, respectivamente, tal que

$$f(\mathbf{V} \times \mathbf{W}) \subset \mathbf{U}.$$

Pero ya que $f(x, y) = xy$, tenemos $f(\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \mathbf{VW}$, por lo tanto

$$\mathbf{VW} \subset \mathbf{U}.$$

Además, según el mismo, Teorema 1.9 $[(1) \Rightarrow (4)]$, la continuidad de la función i de la Definición 2.1 implica que, para todo $x \in \mathbf{G}$ y cada vecindad $\mathbf{U}$ de $i(x)$, existe una vecindad $\mathbf{V}$ de x tal que

$$i(\mathbf{V}) \subset \mathbf{U}.$$

Pero ya que $i(x) = x^{-1}, i(\mathbf{V}) = \mathbf{V}^{-1}$ así tenemos

$$\mathbf{V}^{-1} \subset \mathbf{U}.$$

Ejemplo 2.1 *Sea $\mathbf{G}$ el grupo aditivo $\mathbb{R}$ con la topología de límite inferior, entonces $\mathbf{G}$ no es un grupo topológico. Sabemos que x^{-1} es $-x$, así $i : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ se define como $i(x) = -x$, ahora un básico*[2]*, en la topología de límite inferior es de la forma $[a, b), a < b$. Además tenemos que $i^{-1} = i$, entonces*

$$i^{-1}([a, b)) = i([a, b)) = (-b, -a]$$

pero este último no es un elemento básico en la topología de límite inferior. Por lo que i es no continua.

[1] Ver Definición 1.69

[2] Ver Definición 1.25

Ejemplo 2.2 *El grupo aditivo $\mathbb{R}$ con la topología usual es un grupo topológico. Sabemos que x^{-1} es $-x$, la continuidad de $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es clara, ya que dado un básico (a, b) en $\mathbb{R}$, tenemos*

$$i^{-1}((a, b)) = (-b, -a)$$

es básico para la topología usual sobre $\mathbb{R}$, así i es continua. La continuidad de

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \textit{ tal que } f[(x, y)] = xy,$$

se sigue del hecho de que la suma en $\mathbb{R}$ es continua, pues en este caso $xy = x + y$.

Ejemplo 2.3 *Sea $\mathbf{G}$ un grupo arbitrario y sea $\mathcal{T}$ la familia de todos los subconjuntos de $\mathbf{G}$, es decir, la topología discreta de $\mathbf{G}$. Con esta topología, $\mathbf{G}$ es un grupo topológico. Nos referiremos a $\mathbf{G}$, en tal caso, como un grupo discreto.*

Ejemplo 2.4 *Sea $\mathbf{G}$ un grupo arbitrario y sea $\mathcal{T}$ la colección que consiste de $\emptyset$ y $\mathbf{G}$ solamente. Entonces $\mathbf{G}$ es un grupo topológico (excepto en el caso trivial en el cual $\mathbf{G}$ es igual a $\{e\}$).*

La topología del ejemplo 2.4 será muy poco usada en lo que sigue.

Teorema 2.1 *Sea $\mathbf{G}$ un grupo topológico. Para $a \in \mathbf{G}$, la traslación izquierda y la traslación derecha de a son homeomorfismo de $\mathbf{G}$. La aplicación de tomar inversos es también un homeomorfismo.*

Prueba. Según la Definición 1.12, para $a \in \mathbf{G}$,

$${}_a\lambda \ \text{ e } \ \lambda_a : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$$

son las traslaciones izquierda y derecha de a, respectivamente. Definidas por

$${}_a\lambda(x) = ax \ \text{ y } \ \lambda_a(x) = xa.$$

Probaremos primeramente que la traslación izquierda es un homeomorfismo. Para ello debemos probar que ${}_a\lambda(x)$ y ${}_a\lambda^{-1}(x)$ son continuas, definamos la aplicación

$$h : \mathbf{G} \to \mathbf{G} \times \mathbf{G}, \ \text{ por } \ h(x) = (h_1(x), h_2(x)) = (a, x).$$

Ya que tanto la función constante

$$h_1 : \mathbf{G} \to \mathbf{G} \text{ definida por } h_1(x) = a$$

y la función identidad

$$h_2 : \mathbf{G} \to \mathbf{G} \text{ definida por } h_2(x) = x$$

son continuas. Por el Teorema 1.10, numeral (5), tenemos que $h(x)$ es continua. Ahora si hacemos la composición

$$f \circ h : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$$

de $h(x)$ con la aplicación $f(x, y)$ de la Definición 2.1, que es continua, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(f \circ h)(x) &= f(h(x)), \text{ por definición de composición de funciones} \\
&= f[(a, x)], \text{ por definición de } h(x) \\
&= ax
\end{aligned}$$

Así pues ${}_a\lambda = f \circ h$, ya que la composición de dos aplicaciones continuas es continua, Teorema 1.10, numeral (3), tenemos que ${}_a\lambda(x)$ es continua.

Ahora definamos $p : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ por $p(x) = a^{-1}x$ así tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
({}_a\lambda \circ p)(x) &= {}_a\lambda(p(x)), \text{ definición de composición de funciones} \\
&= {}_a\lambda(a^{-1}x), \text{ por definición de } p(x) \\
&= a(a^{-1}x), \text{ definición de } {}_a\lambda(x) \\
&= (aa^{-1})x, \text{ propiedad asociativa} \\
&= ex, \text{ propiedad del inverso} \\
&= x, \text{ propiedad de la identidad.}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(p \circ_a \lambda)(x) &= p({}_a\lambda(x)), \text{ definición de composición de funciones}\\ &= p(ax), \text{ definición de } {}_a\lambda(x)\\ &= a^{-1}(ax), \text{ por definición de } p(x)\\ &= (a^{-1}a)x, \text{ propiedad asociativa}\\ &= ex, \text{ propiedad del inverso}\\ &= x, \text{ propiedad de la identidad.}\end{aligned}$$

Luego ${}_a\lambda \circ p = I_d = p \circ_a \lambda$ donde I_d es la aplicación identidad en $\mathbf{G}$, lo cual implica que

$$p(x) =_a \lambda^{-1}(x).$$

Para probar que ${}_a\lambda^{-1}$ es continua definimos

$$g : \mathbf{G} \to \mathbf{G} \times \mathbf{G} \text{ por } g(x) = (g_1(x), g_2(x)) = (a^{-1}, x).$$

Ya que tanto función constante

$$g_1 : \mathbf{G} \to \mathbf{G} \text{ definida por } g_1(x) = a^{-1}$$

y la función identidad

$$g_2 : \mathbf{G} \to \mathbf{G} \text{ definida por } g_2(x) = x$$

son continuas. Por el Teorema 1.10, numeral (5), tenemos que $g(x)$ es continua.

Así $g \circ f : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, donde $f(x, y)$ es la aplicación de la Definición 2.1, esta definida como sigue

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)), \text{ definición de composición de funciones}\\ &= f[(a^{-1}, x)], \text{ definición de } g(x)\\ &= a^{-1}x, \text{ definición de} f(x, y)\end{aligned}$$

Luego ${}_a\lambda^{-1}(x) = (f \circ g)(x)$, y ya que la composición de dos aplicaciones continuas es continua, Teorema 1.10, numeral (3), tenemos que ${}_a\lambda^{-1}(x)$ es continua. Con lo cual tenemos que ${}_a\lambda(x)$ y ${}_a\lambda^{-1}(x)$ son continuas, por tanto ${}_a\lambda(x)$ es un homeomorfismo.

Ahora probaremos que λ_a es un homeomorfismo, para ello debemos probar que λ_a y λ_a^{-1} son continuas, definamos la aplicación

$$h : \mathbf{G} \to \mathbf{G} \times \mathbf{G}, \text{ por } h(x) = (h_1(x), h_2(x)) = (x, a).$$

Ya que la función identidad $h_1 : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ definida por $h_1(x) = x$ y la función constante $h_2 : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ definida por $h_2(x) = a$ son continuas. Por el Teorema 1.10, numeral (5), tenemos que $h(x)$ es continua. Si hacemos la composición

$$f \circ h : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$$

de $h(x)$ con la aplicación $f(x, y)$ de la Definición 2.1, que es continua, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (f \circ h)(x) &= f[h(x)], \text{ definición de composición de funciones} \\ &= f[(x, a)], \text{ definición de } h(x) \\ &= xa, \text{ definición de } f(x, y). \end{aligned}$$

Así pues $\lambda_a(x) = (f \circ h)(x)$, y ya que la composición de dos aplicaciones continuas es continua, Teorema 1.10, numeral (3), tenemos que $\lambda_a(x)$ es continua.

Ahora definamos $p : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ por $p(x) = xa^{-1}$ así tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (\lambda_a \circ p)(x) &= \lambda_a(p(x)), \text{ definición de composición de funciones} \\ &= \lambda_a(xa^{-1}), \text{ definición de } p(x) \\ &= (xa^{-1})a, \text{ definición de } \lambda_a(x) \\ &= x(a^{-1}a), \text{ propiedad asociativa} \\ &= xe, \text{ propiedad del inverso} \\ &= x, \text{ propiedad del elemento identidad.} \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
(p \circ \lambda_a)(x) &= p(\lambda_a(x)), \text{ definición de composición de funciones}\\
&= p(xa), \;\; \text{definición de } \lambda_a(x)\\
&= (xa)a^{-1}, \;\; \text{definición de } p(x)\\
&= x(aa^{-1}), \;\; \text{propiedad asociativa}\\
&= xe, \;\; \text{propiedad del inverso}\\
&= x, \;\; \text{propiedad del elemento identidad.}
\end{aligned}
$$

Luego $\lambda_a \circ p = I_d = p \circ \lambda_a$ donde I_d es la aplicación identidad en $\mathbf{G}$, por lo que $p(x) = \lambda_a^{-1}(x)$.

Para probar que $\lambda_a^{-1}(x)$ es continua definimos

$$g : \mathbf{G} \to \mathbf{G} \times \mathbf{G} \text{ por } g(x) = (g_1(x), g_2(x)) = (x, a^{-1}).$$

Ya que la función identidad $g_1 : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ definida por $g_1(x) = x$ y la función constante $g_2 : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ definida por $g_2(x) = a^{-1}$ son continuas. Por el Teorema 1.10, numeral (5), tenemos que $g(x)$ es continua. Así tenemos $g \circ f : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, donde $f(x, y)$ es la aplicación de la Definición 2.1, esta definida como sigue

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f[g(x)], \text{ definición de composición de funciones}\\
&= f[(x, a^{-1})], \text{ definición de } g(x)\\
&= xa^{-1}, , \text{ definición de } f(x, y).
\end{aligned}
$$

Luego $\lambda_a^{-1}(x) = (f \circ g)(x)$, y ya que la composición de dos aplicaciones continuas es continua, Teorema 1.10, numeral (3), tenemos que $\lambda_a^{-1}(x)$ es continua. Con lo cual tenemos que $\lambda_a(x)$ y $\lambda_a^{-1}(x)$ son continuas, por tanto $\lambda_a(x)$ es un homeomorfismo.

Por último probaremos que la aplicación $i : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, definida por $i(x) = x^{-1}$ es un homeomorfismo. Como G es un grupo topológico $i(x)$ es continua por definición de grupo topológico (Definición

2.1), además tenemos que

$$\begin{aligned}(i \circ i)(x) &= i(i(x)), \text{ definición de composición de funciones}\\ &= i(x^{-1}), \text{ definición de } i(x)\\ &= (x^{-1})^{-1},, \text{ definición de } i(x)\\ &= x.\end{aligned}$$

Luego $i \circ i = Id$, la función identidad, así $i(x) = i^{-1}(x)$, y como $i(x)$ es continua, $i^{-1}(x)$ también lo es. Por tanto, i es un homeomorfismo. ■

Corolario 2.1 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico. La aplicación* $p : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, *definida por*

$$p(x) = axa^{-1}$$

es un homeomorfismo.

Prueba. Sabemos por el Teorema 2.1, que las traslaciones izquierda y derecha son aplicaciones continuas de $\mathbf{G}$ en si mismo, así tenemos que $\lambda_{a^{-1}} \circ_a \lambda : G \to G$, definada como

$$\begin{aligned}(\lambda_{a^{-1}} \circ_a \lambda)(x) &= \lambda_{a^{-1}}({}_a\lambda(x))\\ &= \lambda_{a^{-1}}(ax)\\ &= axa^{-1}.\end{aligned}$$

Así $p(x) = (\lambda_{a^{-1}} \circ_a \lambda)(x)$, debemos probar que tanto $p(x)$ como $p^{-1}(x)$ son continuas. Ya que la composición de dos aplicaciones continuas es continua, Teorema 1.10, numeral (3), tenemos que $p(x)$ es continua.

Ahora debemos probar que $p^{-1}(x)$ es continua, para ello tenemos que

$$\begin{aligned}p^{-1} &= (\lambda_{a^{-1}} \circ_a \lambda)^{-1}\\ &=_a \lambda^{-1} \circ \lambda_{a^{-1}}^{-1}.\end{aligned}$$

ya que tanto $\lambda_{a^{-1}}^{-1}$ como ${}_a\lambda^{-1}$ son continuas, y ya que la composición de dos aplicaciones continuas es continua, Teorema 1.10, numeral (3), tenemos que $p^{-1}(x)$ es continua. Por tanto $p(x)$ es un homeomorfismo. ■

Definición 2.2 *Un subconjunto* $\mathbf{C}$ *de* $\mathbf{G}$ *es* **convexo** *si* $x, y \in \mathbf{C}$ *y* $x < z < y$ *siempre implica* $z \in \mathbf{C}$.

Otros ejemplos de grupos topológicos son los siguientes

Ejemplo 2.5 (Grupos ordenados) *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo con más de un elemento que es linealmente ordenado por la relación* $<$, *escrito* $x < y$ *o* $y < x$ *para* $x, y \in \mathbf{G}$. *supóngase también que* $x < y \wedge a \in \mathbf{G}$ *implica* $ax < ay \wedge xa < ya$. *Para* $a, b \in \mathbf{G}$ *tal que* $a < b$, *sea*

$$]a, b[= \{x \in \mathbf{G} | a < x < b\}.$$

Sea la familia de todos los conjuntos $]a, b[$ *una base para topología en* $\mathbf{G}$; *note que* $\mathbf{G}$ *no tiene elemento máximo ni mínimo, así que*

$$\mathbf{G} = \bigcup \{]a, b[| a < b\}.$$

Entonces $\mathbf{G}$ *es un grupo topológico* T_0.

Para mostrar que $i : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, dada por $i(x) = x^{-1}$ es continua. Debemos mostrar que para $]a, b[$ abierto

$$i^{-1}(]a, b[) = i(]a, b[) =]b^{-1}, a^{-1}[$$

es un conjunto abierto. Para ello lo que tenemos que mostrar es que si $a < b$, entonces $b^{-1} < a^{-1}$. Sean $a, b \in \mathbf{G}$ tal que $a < b$, como $\mathbf{G}$ es un grupo $a^{-1}, b^{-1} \in \mathbf{G}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow aa^{-1} < ba^{-1}, \text{ por la suposición en el ejemplo} \\ &\Rightarrow e < ba^{-1} \\ &\Rightarrow b^{-1}e < b^{-1}ba^{-1}, \text{ por la suposición en el ejemplo} \\ &\Rightarrow b^{-1} < ea^{-1} = a^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo que $]b^{-1}, a^{-1}[$ es un conjunto abierto. Y por lo tanto $i(x)$ es continua.

Ahora probaremos que la multiplicación es continua, tenemos que mostrar que para todo punto $(x, x) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}$, y cada vecindad $]l, f[$ de $f(x, x)$, existe una vecindad $]c, d[$ de x tal que

$$f(]c, d[\times]c, d[) \subset]l, f[$$

ya que $f(]c,d[\times]c,d[)=]c^2,d^2[$, entonces $]c^2,d^2[\subset]l,f[$, esto es, $c^2<l$ y $d^2<f$, haciendo $l=e$ el elemento identidad, entonces tendríamos $e<d^2<f$, por lo que es suficiente probar que si $a>e$ y existe algún x para el cual $e<x<a$, entonces existe un $b>e$ tal que $b^2\leq a$. Si $x^2\leq a$, hacemos $b=x$.

Si $x^2>a$, hacemos $b=ax^{-1}$. Entonces otra vez $b^2\leq a$, porque

$$b^2=ax^{-1}ax^{-1}>a$$

implica que $x^{-1}ax^{-1}>e$ y por tanto $a>x^2$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto la multiplicación en $\mathbf{G}$ es continua, y así $\mathbf{G}$ es un grupo topológico T_0.

Ejemplo 2.6 *Consideremos un conjunto bien ordenado* $\mathbf{S}$. *Sea* $\mathbf{G}$ *el conjunto de todas las funciones de valor real definidas en* $\mathbf{S}$. *Para* $f,g\in\mathbf{G}$ *y* $s\in\mathbf{S}$, *sea*

$$(f+g)(s)=f(s)+g(s).$$

Entonces $\mathbf{G}$ *es un grupo aditivo abeliano. Escribimos* $f>g$ *si para algún* $s_0\in\mathbf{S}$, *tenemos*

$$f(s_0)>g(s_0)\quad y\quad f(s)=g(s)$$

para todo $s<s_0$. *Entonces* $\mathbf{G}$ *es un grupo ordenado. Con la topología descrita en el Ejemplo 2.5,* $\mathbf{G}$ *es un grupo topológico no discreto.*

Si $\mathbf{S}$ tiene un elemento extremo l, entonces existe una base en $\mathbf{0}$(la función idénticamente 0) consistiendo de intervalos $]-g_t,g_t[$ donde

$$g_t(s)=0 \text{ si } s<l \text{ y } g_t(l)=t, t>0.$$

Si $\mathbf{S}$ no tiene elemento extremo pero tiene un subconjunto contable, entonces existe una base contable en $\mathbf{0}$.

2.2. Vecindades de la Identidad en Grupos Topológicos

Si $\mathbf{G}$ es un grupo topológico y $g\in\mathbf{G}$ denotamos por $\mathscr{U}_g$ la base[3], de todas las vecindades del elemento g de $\mathbf{G}$. Cuando no haya confusión escribiremos solamente $\mathscr{U}$. De estas bases, la base $\mathscr{U}_e$

[3] ver Definición 1.27

que se obtiene cuando $g = e$ el elemento identidad de $\mathbf{G}$ es de vital importancia.

Teorema 2.2 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico, y sea* $\mathscr{U}$ *una base para la identidad* e *de* $\mathbf{G}$. *Entonces las familias*

$$\{x\mathbf{U}\} \;\; y \;\; \{\mathbf{U}x\},$$

donde x *recorre todos los elementos de* $\mathbf{G}$ *y* $\mathbf{U}$ *recorre todos los elementos de* $\mathscr{U}$, *son bases de* G.

Prueba. Probemos primeramente que $\{x\mathbf{U}\}$ es una base para $\mathbf{G}$. Sea $\mathbf{W}$ cualquier subconjunto abierto no vacío de $\mathbf{G}$, y a cualquier elemento de $\mathbf{W}$. Ya que la traslación izquierda de $\mathbf{G}$ por a^{-1},

$$_{a^{-1}}\lambda : \mathbf{G} \to \mathbf{G}, \;\; \text{definida por} \;\; _{a^{-1}}\lambda(x) = a^{-1}x$$

es un homeomorfismo (Teorema2.1), tenemos que $a^{-1}\mathbf{W} =_{a^{-1}} \lambda(\mathbf{W})$ es un conjunto abierto. Como $a \in \mathbf{W}$, se tiene que $e = a^{-1}a \in a^{-1}\mathbf{W}$. Como $\mathscr{U}$ es una base para e, existe un $\mathbf{U} \in \mathscr{U}$ tal que

$$e \in \mathbf{U} \subset a^{-1}\mathbf{W}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} a\mathbf{U} &\subset a(a^{-1}\mathbf{W}), \;\; \text{multiplicando por } a \\ &= (aa^{-1})\mathbf{W}, \;\; \text{propiedad asociativa} \\ &= e\mathbf{W}, \;\; \text{propiedad del inverso} \\ &= \mathbf{W}, \;\; \text{propiedad del elemento identidad} \end{aligned}$$

Así $\mathbf{W}$ es una unión de conjuntos abiertos $a\mathbf{U}$, así, por el Lema 1.13, $\{x\mathbf{U}\}$ es una base para $\mathbf{G}$,

Ahora probemos que $\{\mathbf{U}x\}$ es una base para $\mathbf{G}$. Sea $\mathbf{V}$ cualquier subconjunto abierto no vacío de $\mathbf{G}$, y sea a un elemento de $\mathbf{V}$. Ya que la traslación derecha de $\mathbf{G}$ por a^{-1}

$$\lambda_{a^{-1}} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}, \quad \text{definida por} \;\; \lambda_{a^{-1}}(x) = xa^{-1},$$

es un homeomorfismo (Teorema 2.1), tenemos que $\mathbf{V}a^{-1} = \lambda_{a^{-1}}(\mathbf{V})$ es un conjunto abierto. Como $a \in \mathbf{V}$, se tiene que $e = aa^{-1} \in \mathbf{V}a^{-1}$. Como $\mathscr{U}$ es una base en e, existe un $\mathbf{U} \in \mathscr{U}$ tal que

$e \in \mathbf{U} \subset \mathbf{V}a^{-1}$. Por lo que

$$\begin{aligned}\mathbf{U}a &\subset (\mathbf{V}a^{-1})a, \text{ multiplicando por } a\\ &= \mathbf{V}(a^{-1}a), \text{ propiedad asociativa}\\ &= \mathbf{V}e, \text{ propiedad del inverso}\\ &= \mathbf{V}, \text{ propiedad del elemento identidad.}\end{aligned}$$

Así $\mathbf{V}$ es una unión de conjuntos abiertos $\mathbf{U}a$, así por el Lema 1.13, $\{\mathbf{U}x\}$ es una base de $\mathbf{G}$. ■

Corolario 2.2 *Supóngase que un subgrupo* $\mathbf{H}$ *de un grupo topológico* $\mathbf{G}$ *contiene un subconjunto abierto no vacío de* $\mathbf{G}$. *Entonces* $\mathbf{H}$ *es abierto en* $\mathbf{G}$.

Prueba. Sea $\mathbf{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$. Para todo $a \in \mathbf{H}$, ya que la traslación derecha de $\mathbf{G}$ por a^{-1}

$$\lambda_{a^{-1}} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}, \quad \text{definida por } \lambda_{a^{-1}}(x) = xa^{-1},$$

es un homeomorfismo (Teorema 2.1), el conjunto $\mathbf{U}a = \lambda_a(\mathbf{U})$ es abierto en $\mathbf{H}$, pero como $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$, $\mathbf{U}a$ es abierto en $\mathbf{G}$. Por lo que, el conjunto

$$\mathbf{H} = \bigcup_{a \in \mathbf{H}} \mathbf{U}a$$

es la unión de conjuntos abiertos y por lo tanto $\mathbf{H}$ es un conjunto abierto en $\mathbf{G}$. ■

El siguiente hecho es usado frecuentemente.

Proposición 2.1 *Sea* $f : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ *un homomorfismo de grupos topológicos. Si* f *es continua en el elemento identidad* $e_{\mathbf{G}}$ *de* $\mathbf{G}$, *entonces* f *es continua.*

Prueba. Sea $x \in \mathbf{G}$ un elemento arbitrario, y sea $\mathbf{W}$ una vecindad de $y = f(x)$ en $\mathbf{H}$. Ya que la traslación izquierda de $\mathbf{H}$ por y

$${}_y\lambda : \mathbf{H} \to \mathbf{H}, \quad \text{definida por } {}_y\lambda(x) = yx,$$

es un homeomorfismo de $\mathbf{H}$ sobre si mismo (Teorema 2.1), existe una vecindad $\mathbf{V}$ del elemento identidad $e_{\mathbf{H}}$ tal que

$$_y\lambda(\mathbf{V}) \subset \mathbf{W},$$

pero $_y\lambda(\mathbf{V}) = y\mathbf{V}$ así que

$$y\mathbf{V} \subset \mathbf{W}.$$

Ya que f es continua en e_G, para alguna vecindad $\mathbf{U}$ de $e_{\mathbf{G}}$ tenemos que $f(\mathbf{U}) \subset \mathbf{V}$ en $\mathbf{H}$. De nuevo, Ya que la traslación izquierda de $\mathbf{G}$ por x

$$_x\lambda : \mathbf{G} \to \mathbf{G}, \quad \text{definida por} \ \ _x\lambda(t) = xt,$$

es un homeomorfismo de $\mathbf{G}$ sobre si mismo (Teorema 2.1), el conjunto $x\mathbf{U} =_x \lambda(\mathbf{U})$ es una vecindad de x en $\mathbf{G}$, y ya que f es un homomorfismo, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x\mathbf{U}) &= f(x)f(\mathbf{U}), \ \ \text{ya que } f \text{ es un homomorfismo} \\ &= yf(\mathbf{U}), \ \ \text{ya que } y = f(x) \\ &\subset y\mathbf{V}, \ \ \text{ya que } f(\mathbf{U}) \subset \mathbf{V} \\ &\subset \mathbf{W}, \ \ \text{ya que } y\mathbf{V} \subset \mathbf{W}. \end{aligned}$$

Luego, f es continua en cada punto $x \in \mathbf{G}$. Por lo tanto f es una función continua es continua. ■

Definición 2.3 *Un espacio* $\mathbf{X}$ *se dice* **homogéneo** *si para cada* $x \in \mathbf{X}$ *y cada* $y \in \mathbf{X}$, *existe un homeomorfismo* f *del espacio* $\mathbf{X}$ *sobre sí mismo tal que* $f(x) = y$.

Del Teorema 2.1 se obtiene el resultado siguiente

Corolario 2.3 *Todo grupo topológico* $\mathbf{G}$ *es un espacio homogéneo.*

Prueba. Tomemos elementos cualesquiera $x, y \in \mathbf{G}$ ya que $\mathbf{G}$ es un grupo tenemos que $x^{-1} \in \mathbf{G}$, así $z = x^{-1}y \in \mathbf{G}$. Entonces

$$\begin{aligned}\lambda_z(x) &= xz \\ &= x(x^{-1}y) \\ &= (xx^{-1})y \\ &= ey \\ &= y.\end{aligned}$$

Ya que la traslación izquierda de $\mathbf{G}$ por z

$${}_z\lambda : \mathbf{G} \to \mathbf{G}, \quad \text{definida por } {}_z\lambda(x) = zx,$$

es un homeomorfismo de $\mathbf{G}$ sobre si mismo (Teorema 2.1), el espacio $\mathbf{G}$ es homogéneo. ■

La siguiente definición esta dada para un conjunto cualquiera.

Definición 2.4 *Una familia $\mathscr{E}$ de subconjuntos no vacíos de un conjunto $\mathbf{X}$ es llamado un* **prefiltro** *en $\mathbf{X}$ si $\mathbf{X} \in \mathscr{E}$, y para cada colección finita $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_n$ de elementos de $\mathscr{E}$, existe $B \in \mathscr{E}$ tal que*

$$\mathbf{B} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i.$$

Si, además, de $\mathbf{A} \in \mathscr{E}$ y $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{X}$ se sigue que $\mathbf{B} \in \mathscr{E}$, entonces $\mathscr{E}$ es llamada un **filtro** *en $\mathbf{X}$.*

Damos la siguiente condición llamada **condición** (t): *para cada $\mathbf{U} \in \mathscr{F}_e$ y cada $x \in \mathbf{U}$, existe $\mathbf{V} \in \mathscr{F}_e$ tal que $\mathbf{V}x \subset \mathbf{U}$.*

Supongamos que $\mathbf{G}$ es un grupo. Nos preguntamos, ¿Cuáles restricciones en el prefiltro $\mathscr{F}_e$ garantizan que la aplicación de tomar inversos sea continua? ¿Cuáles de las condiciones son necesarias para hacer que la operación de multiplicación sea mutuamente continua?

Las respuesta a estas cuestiones no son completamente claras. Por ejemplo, no es suficiente requerir que todos los elementos de $\mathscr{F}_e$ sean conjuntos simétricos (esto es, que satisfacen la condición $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$) para seguirse que la aplicación de tomar inversos sea continua. También no es suficiente asumir que para cada $\mathbf{U} \in \mathscr{F}_e$ exista $\mathbf{V} \in \mathscr{F}_e$ tal que $\mathbf{V}^2 \subset \mathbf{U}$ para hacer que la operación producto sea mutuamente continua, siempre en presencia de la condición (t).

Dado un grupo $\mathbf{G}$, ¿cuáles son las propiedades de una base en la identidad e de $\mathbf{G}$? La respuesta esta en el siguiente resultado.

Teorema 2.3 *Sea $\mathbf{G}$ un grupo topológico y $\mathscr{U}$ una base en la identidad e de $\mathbf{G}$. Entonces:*

I) *para todo $\mathbf{U} \in \mathscr{U}$, existe un elemento $\mathbf{V} \in \mathscr{U}$ tal que $\mathbf{V}^2 \subset \mathbf{U}$;*

II) *para todo $\mathbf{U} \in \mathscr{U}$, existe un elemento $\mathbf{V} \in \mathscr{U}$ tal que $\mathbf{V}^{-1} \subset \mathbf{U}$;*

III) *para todo $\mathbf{U} \in \mathscr{U}$ y todo $x \in \mathbf{U}$, existe $\mathbf{V} \in \mathscr{U}$ tal que $\mathbf{V}x \subset \mathbf{U}$;*

IV) *para todo $\mathbf{U} \in \mathscr{U}$ y $x \in \mathbf{G}$. existe $\mathbf{V} \in \mathscr{U}$ tal que $x\mathbf{V}x^{-1} \subset \mathbf{U}$;*

V) *para $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathscr{U}$, existe $\mathbf{W} \in \mathscr{U}$ tal que $\mathbf{W} \subset \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$;*

VI) $\{e\} = \bigcap_{\mathbf{U} \in \mathscr{U}} \mathbf{U}$.

Prueba.

I) Como $\mathbf{G}$ es un grupo topológico, Definición 2.1,, la aplicación $f : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, definida por $f[(x,y)] = xy$, es continua, entonces, por el Teorema 1.9 $[(1) \Rightarrow (4)]$, para $e \in \mathbf{G}$ y para cada vecindad $\mathbf{U}$ de

$$f(e,e) = e \cdot e = e,$$

existe una vecindad $\mathbf{V}$ de e tal que $f(\mathbf{V} \times \mathbf{V}) \subset \mathbf{U}$ pero como

$$\begin{aligned} f(\mathbf{V} \times \mathbf{V}) &= \mathbf{V}\mathbf{V} \\ &= \mathbf{V}^2. \end{aligned}$$

Obtenemos $\mathbf{V}^2 \subset \mathbf{U}$.

II) Como $\mathbf{G}$ es un grupo topológico, Definición 2.1, la aplicación de tomar inversos $i : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, definida por $i(x) = x^{-1}$, es continua, entonces, por el Teorema 1.9 $[(1) \Rightarrow (4)]$, para $e \in \mathbf{G}$ y cada vecindad $\mathbf{U}$ de

$$i(e) = e^{-1} = e,$$

existe una vecindad $\mathbf{V}$ de e tal que $i(\mathbf{V}) \subset \mathbf{U}$, pero

$$i(\mathbf{V}) = \mathbf{V}^{-1}$$

así obtenemos que

$$\mathbf{V}^{-1} \subset \mathbf{U}.$$

III) Por el Teorema 2.1, la traslación derecha de $\mathbf{G}$ por x, esto es λ_x, es continua, entonces, por el Teorema 1.9 [$(1) \Rightarrow (4)$], para $e \in \mathbf{G}$ y cada vecindad $\mathbf{U}$ de

$$\lambda_x(e) = ex = x,$$

existe una vecindad $\mathbf{V}$ de e tal que $\lambda_x(\mathbf{V}) \subset \mathbf{U}$, ya que

$$\lambda_x(\mathbf{V}) = \mathbf{V}x$$

tenemos que

$$\mathbf{V}x \subset \mathbf{U}.$$

IV) Por el Corolario 2.1, sabemos que la aplicación $p : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, definida por $p(x) = axa^{-1}$ es continua, entonces, por el Teorema 1.9 [$(1) \Rightarrow (4)$], para $e \in \mathbf{G}$ y cada vecindad $\mathbf{U}$ de

$$\begin{aligned} p(e) &= xex^{-1} \\ &= xx^{-1} \\ &= e, \end{aligned}$$

existe una vecindad $\mathbf{V}$ de e tal que $p(\mathbf{V}) \subset \mathbf{U}$ y ya que

$$p(\mathbf{V}) = x\mathbf{V}x^{-1}$$

obtenemos que

$$x\mathbf{V}x^{-1} \subset \mathbf{U}.$$

V) Sean $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ vecindad de la identidad e, ya que $e \in \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$, entonces, por la segunda condición de la definición de base, Definición 1.25, existe $\mathbf{W} \in \mathscr{U}$, $e \in \mathbf{W}$ tal que $\mathbf{W} \subset \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

VI) Sea $\mathbf{W} = \bigcap_{\mathbf{U}\in\mathscr{U}} \mathbf{U}$, ya que $\mathscr{U}$ es una base en e, tenemos que $e \in \mathbf{W}$, supóngase que $x \in \mathbf{W}$ con $x \neq e$, pero $\mathbf{G}$, el grupo topológico es un espacio T_0, así $x \notin \mathbf{W}$, luego

$$\begin{aligned}\{e\} &= \mathbf{W} \\ &= \bigcap_{\mathbf{U}\in\mathscr{U}} \mathbf{U}.\end{aligned}$$

■

Lema 2.1 *Sean* $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ *subconjunto de un grupo* $\mathbf{G}$ *y sean* $a, b \in \mathbf{G}$, *entonces* $\mathbf{U}a\mathbf{V}b \subset \mathbf{W}ab$ *si y sólo si* $\mathbf{U}(a\mathbf{V}a^{-1}) \subset \mathbf{W}$

Prueba.

($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned}\mathbf{U}a\mathbf{V}b \subset \mathbf{W}ab &\Rightarrow (\mathbf{U}a\mathbf{V}b)b^{-1} \subset (\mathbf{W}ab)b^{-1} \\ &\Rightarrow (\mathbf{U}a\mathbf{V})bb^{-1} \subset (\mathbf{W}a)bb^{-1} \\ &\Rightarrow (\mathbf{U}a\mathbf{V})e \subset (\mathbf{W}a)e \\ &\Rightarrow \mathbf{U}a\mathbf{V} \subset \mathbf{W}a \\ &\Rightarrow (\mathbf{U}a\mathbf{V})a^{-1} \subset (\mathbf{W}a)a^{-1} \\ &\Rightarrow \mathbf{U}(a\mathbf{V}a^{-1}) \subset \mathbf{W}(aa^{-1}) \\ &\Rightarrow \mathbf{U}(a\mathbf{V}a^{-1}) \subset \mathbf{W}e \\ &\Rightarrow \mathbf{U}(a\mathbf{V}a^{-1}) \subset \mathbf{W}\end{aligned}$$

($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(a\mathbf{V}a^{-1}) \subset \mathbf{W} &\Rightarrow \mathbf{U}(a\mathbf{V}a^{-1})a \subset \mathbf{W}a \\ &\Rightarrow \mathbf{U}(a\mathbf{V}a^{-1}a) \subset \mathbf{W}a \\ &\Rightarrow \mathbf{U}(a\mathbf{V}a^{-1}a) \subset \mathbf{W}a \\ &\Rightarrow \mathbf{U}a\mathbf{V} \subset \mathbf{W}a \\ &\Rightarrow \mathbf{U}a\mathbf{V}b \subset \mathbf{W}ab\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{U}a\mathbf{V}b \subset \mathbf{W}ab \Longleftrightarrow \mathbf{U}(a\mathbf{V}a^{-1}) \subset \mathbf{W}$ ■

Teorema 2.4 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico y* $\mathscr{U}$ *una base en la identidad* e *de* $\mathbf{G}$ *que cumple las condiciones I)-VI) del Teorema 2.3. Entonces la familia*

$$\mathcal{T} = \{W|\textit{para cada } x \in \mathbf{W}, \exists \mathbf{U} \in \mathscr{U} \;\; \textit{tal que } \mathbf{U}x \subset \mathbf{W}.\}$$

es una topología para $\mathbf{G}$. *Con esta topología* $\mathbf{G}$ *es un grupo topológico.*

Prueba.

(1) Probemos que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbf{G}$.

a) Para cada $x \in \mathbf{G}, \exists \mathbf{U} \in \mathscr{U}$ tal que $\mathbf{U}x \subset \mathbf{G}$. Por lo que $\mathbf{G} \in \mathcal{T}$, además también $\emptyset \in \mathcal{T}$.

b) Sea $\mathbf{I}$ un conjunto de índices y sea $\mathbf{A} = \cup_{i\in\mathbf{I}}\mathbf{W}_i$ donde cada $\mathbf{W}_i \in \mathcal{T}, i \in \mathbf{I}$. Entonces para cada $x \in \mathbf{A}, x \in \mathbf{W}_i, i \in \mathbf{I}, \exists \mathbf{U}_i \in \mathscr{U}$ tal que $\mathbf{U}_i x \subset W_i$. Entonces

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbf{I}}\mathbf{U}_i\right)x = \bigcup_{i\in\mathbf{I}}(\mathbf{U}_i x) \subset \bigcup_{i\in\mathbf{I}}\mathbf{W}_i$$

Como cada $\mathbf{U} \in \mathscr{U}, \cup_{i\in\mathbf{I}}U_i \in \mathscr{U}$, por lo tanto $\mathbf{A} \in \mathcal{T}$.

c) Ahora asumamos que $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2 \in \mathcal{T}$, y hacemos $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$. Debemos probar que $\mathbf{W} \in \mathcal{T}$. Tomemos cualquier $x \in \mathbf{W}$, por la definición de $\mathcal{T}$, existen $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ en $\mathscr{U}$ tal que $\mathbf{U}_1 x \subset \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{U}_2 x \subset \mathbf{W}_2$. Por V) tenemos, que existe $\mathbf{U} \in \mathscr{U}$ tal que $\mathbf{U} \subset \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{U}x &\subset (\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2)x \\ &\subset \mathbf{U}_1 x \cap \mathbf{U}_2 x \\ &\subset \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 \\ &= \mathbf{W}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{W} \in \mathcal{T}$.

a),b) y c) muestran que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbf{G}$.

(2) Probamos que la multiplicación en $\mathbf{G}$ es continua con respecto a la topología $\mathcal{T}$.

Sean a y b elementos arbitrarios de $\mathbf{G}$, y sea $\mathbf{Q}$ cualquier elemento de $\mathcal{T}$ tal que $ab \in \mathbf{Q}$. Entonces existe $\mathbf{W} \in \mathscr{U}$ tal que $\mathbf{W}ab \subset \mathbf{Q}$. Para todo $(a, b) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}$, ya que cada $\mathbf{W}ab$ es una vecindad de $ab = f(a, b)$, y para $\mathbf{U} \in \mathscr{U}$ y $\mathbf{V} \in \mathscr{U}$, $\mathbf{U}a$ es una vecindad de a y $\mathbf{V}b$ es una vecindad de b, como $\mathbf{U}a\mathbf{V}b = f(\mathbf{U}a \times \mathbf{V}b)$. Así que para probar (2), es suficiente mostrar que

$$\mathbf{U}a\mathbf{V}b \subset \mathbf{W}ab$$

pero según el Lema 2.1, esto es equivalente a mostrar que $\mathbf{U}(a\mathbf{V}a^{-1}) \subset \mathbf{W}$.

Ahora veamos como podemos elegir $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ en $\mathscr{U}$. Primero aplicamos I) del Teorema 2.3, para elegir $\mathbf{U} \in \mathscr{U}$ tal que $\mathbf{U}^2 \subset \mathbf{W}$. Después de esto, usamos IV) del Teorema 2.3 para elegir $\mathbf{V} \in \mathscr{U}$ tal que $a\mathbf{V}a^{-1} \subset \mathbf{U}$. Entonces, por la elección de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(a\mathbf{V}a^{-1}) &\subset \mathbf{U}^2 \\ &\subset \mathbf{W} \end{aligned}$$

lo cual implica que $\mathbf{U}aVb \subset \mathbf{W}ab$, por Lema 2.1. Así, según el Teorema 1.9 [$(4) \Rightarrow (1)$], la multiplicación en $\mathbf{G}$ es continua. En particular, todas las traslaciones derechas de $\mathbf{G}$, λ_a, son continuas, y el espacio $\mathbf{G}$ es homogéneo.

(3) Por ultimo probemos que la función que toma elementos inversos, i, de $\mathbf{G}$ en sí mismo definida por $i(x) = x^{-1}$ es continua con respecto a las topología $\mathcal{T}$.

Ya que

$$i^{-1}(\mathbf{U}) = i(\mathbf{U}) = \mathbf{U}^{-1}.$$

Para probar (3), es suficiente verificar que $\mathbf{U}^{-1} \in \mathcal{T}$, con $\mathbf{U} \in \mathcal{T}$ Tomemos un punto arbitrario $x \in \mathbf{U}^{-1}$, así III) del Teorema 2.3 implica que $\mathbf{V}x^{-1} \subset \mathbf{U}$ para algún $\mathbf{V} \in \mathscr{U}$. Aplicando II) del Teorema 2.3 elegimos $\mathbf{W} \in \mathscr{U}$ tal que $\mathbf{W}^{-1} \subset \mathbf{V}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{-1}x^{-1} &\subset \mathbf{V}x^{-1} \\ &\subset \mathbf{U}, \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} x\mathbf{W} &= (x^{-1})^{-1}(\mathbf{W}^{-1})^{-1} \\ &= (\mathbf{W}^{-1}x^{-1})^{-1} \\ &\subset \mathbf{U}^{-1}. \end{aligned}$$

y ya que $x\mathbf{W}$ es una vecindad abierta de x en $\mathbf{G}$, concluimos que $\mathbf{U}^{-1}$ es un elemento de $\mathcal{T}$. Esto prueba (3).

Por lo tanto $\mathbf{G}$ es un grupo topológico. ■

Teorema 2.5 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico, y sea* $\mathscr{U}$ *una familia de subconjuntos de* $\mathbf{G}$ *satisfaciendo las condiciones I)-VI) del Teorema 2.3. Entonces la familia*

$$\mathscr{B}_{\mathscr{U}} = \{\mathbf{U}a | a \in \mathbf{G}, \mathbf{U} \in \mathscr{U}\}$$

es una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathscr{U}}$ *en* $\mathbf{G}$. *Con esta topología,* $\mathbf{G}$ *es un grupo topológico, y la familia*

$$\{a\mathbf{U} | a \in \mathbf{G}, \mathbf{U} \in \mathscr{U}\}$$

también es una base para la misma topología en $\mathbf{G}$.

Prueba. Sea $\mathbf{W}$ abierto en $\mathbf{G}$, es decir, $\mathbf{W} \in \mathcal{T}$, entonces para cada $x \in \mathbf{W}, \exists \mathbf{U} \in \mathscr{U}$ tal que $\mathbf{U}x \subset \mathbf{W}$. Como $e \in \mathbf{U}, x \in \mathbf{U}x$, por lo que para cada $x \in \mathbf{W}, \exists \mathbf{U}x \in \mathscr{B}_{\mathscr{U}}$ tal que $x \in \mathbf{U}x \subset \mathbf{W}$, esto implica que, $\mathbf{W} = \bigcup \mathbf{U}x$ donde $\mathbf{U}x$ es abierto y según Lema 1.14, $\mathscr{B}_{\mathscr{U}}$ es una base.

Finalmente VI) y la homogenuidad de $\mathbf{G}$ implica que la topología $\mathcal{T}$ satisface el Axioma de separación T_1. Esto finaliza la prueba del teorema. ■

Como un subconjunto $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}$ es simétrico si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$, tenemos en particular la definición siguiente:

Definición 2.5 *Una vecindad* $\mathbf{U}$ *se dice que es* **simétrica** *si* $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}$.

Lema 2.2 *Sea* $\mathbf{U}$ *una vecindad de* e. *Si* $\mathbf{V} = \mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{-1}$, *entonces* $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}$.

Prueba. Sea $x \in \mathbf{V}$,

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{V} &\Rightarrow x \in \mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{-1} \\ &\Rightarrow x \in \mathbf{U} \wedge x \in \mathbf{U}^{-1} \\ &\Rightarrow x^{-1} \in \mathbf{U}^{-1} \wedge x^{-1} \in (\mathbf{U}^{-1})^{-1} = \mathbf{U} \\ &\Rightarrow x^{-1} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{-1} \\ &\Rightarrow x \in (\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{-1})^{-1} = \mathbf{V}^{-1}. \end{aligned}$$

Luego $\mathbf{V} \subset \mathbf{V}^{-1}$.

Sea ahora $x \in \mathbf{V}^{-1}$,

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{V}^{-1} &\Rightarrow x = v^{-1}, v \in \mathbf{V} = \mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{-1} \\ &\Rightarrow x^{-1} = v \in \mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{-1} \\ &\Rightarrow x^{-1} \in \mathbf{U} \wedge x^{-1} \in \mathbf{U}^{-1} \\ &\Rightarrow x \in \mathbf{U}^{-1} \wedge x \in \mathbf{U} \\ &\Rightarrow x \in \mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Luego $\mathbf{V}^{-1} \subset \mathbf{V}$. Y por lo tanto $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}$. ■

Teorema 2.6 *Todo grupo topológico* $\mathbf{G}$ *tiene una base abierta en* e *consistiendo de vecindades* $\mathbf{U}$ *tal que* $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1}$ *[esto es, vecindades simétricas].*

Prueba. Para una vecindad arbitraria $\mathbf{U}$ de e, sea $\mathbf{V} = \mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{-1}$. Entonces, por el Lema 2.2, $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}$, $\mathbf{V}$ es una vecindad de e, y $\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$, esto implica que $\mathbf{U}$ es la unión de vecindad simétricas $\mathbf{V}$. Por lo tanto, según el Lema 1.14, estas vecindades forman una base. ■

Corolario 2.4 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico. Para toda vecindad* $\mathbf{U}$ *de* $e, \exists \mathbf{V}$ *vecindad de* e *tal que* $\overline{\mathbf{V}} \subset \mathbf{U}$.

Prueba. Sea $\mathbf{V}$ una vecindad simétrica, es decir $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{-1}$, de e tal que $\mathbf{V}^2 \subset \mathbf{U}$. Si $x \in \overline{\mathbf{V}}$, entonces, por el Teorema 1.8, $\exists x\mathbf{V}$ vecindad de x tal que

$$(x\mathbf{V}) \cap \mathbf{V} \neq \emptyset.$$

Sea $b \in x\mathbf{V} \cap \mathbf{V}$, así tenemos:

$$\begin{aligned} b \in x\mathbf{V} \cap \mathbf{V} &\Rightarrow b \in x\mathbf{V} \wedge b \in \mathbf{V} \\ &\Rightarrow b = xv, v \in \mathbf{V} \wedge b \in \mathbf{V} \\ &\Rightarrow bv^{-1} = xvv^{-1} = x \\ &\Rightarrow x = bv^{-1} \in \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} &= \mathbf{V}\mathbf{V}, \text{ ya que } \mathbf{V} = \mathbf{V}^{-1} \\ &= \mathbf{V}^2 \\ &\subset \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Luego $x \in \mathbf{U}$ y por lo tanto $\overline{\mathbf{V}} \subset \mathbf{U}$. ∎

Recordemos que un espacio regular es Hausdorff si es un espacio T_0

Teorema 2.7 *Sea $\mathbf{G}$ un grupo topológico-T_0. Entonces $\mathbf{G}$ es regular y por lo tanto Hausdorff.*

Prueba. Por el Corolario 2.4, $\mathbf{G}$ satisface el axioma de regularidad en e, y por el Teorema 2.1, $\mathbf{G}$ satisface el axioma de regularidad en todo punto, por lo que $\mathbf{G}$ es un espacio regular y como por hipótesis $\mathbf{G}$ es un espacio T_0, esto implica que $\mathbf{G}$ es un espacio de Hausdorff. ∎

Teorema 2.8 *Sea $\mathbf{G}$ un grupo topológico, sea $\mathbf{U}$ cualquier vecindad de e, y sea $\mathbf{F}$ cualquier subconjunto compacto de $\mathbf{G}$. Entonces existe una vecindad $\mathbf{V}$ de e tal que*

$$x\mathbf{V}x^{-1} \subset \mathbf{U}, \forall x \in \mathbf{F}.$$

Prueba. Por la condición (I) del Teorema 2.3, para toda vecindad simétrica $\mathbf{V}$ de e, existe una vecindad simétrica $\mathbf{W}$, de e tal que $\mathbf{W}^2 \subset \mathbf{V}$ además por la condición (II) del Teorema 2.3, existe una vecindad $\mathbf{W}$ tal que $\mathbf{W}^{-1} \subset \mathbf{V}$, luego

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^2\mathbf{W}^{-1} &\subset \mathbf{V}\mathbf{V} \\ \mathbf{W}^2\mathbf{W} &\subset \mathbf{V}^2, \text{ ya que } \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W} \\ \mathbf{W}^3 &\subset \mathbf{V}^2. \end{aligned}$$

y por la condición (I) del Teorema 2.3, tenemos que $\mathbf{V}^2 \subset \mathbf{U}$, así tenemos una vecindad simétrica $\mathbf{W}$ tal que $\mathbf{W}^3 \subset \mathbf{U}$.

Ya que

$$\mathbf{F} \subset \bigcup_{x \in \mathbf{F}} \mathbf{W}x$$

y $\mathbf{F}$ es compacto, existe $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$\mathbf{F} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{W}x_k.$$

Sea

$$\mathbf{V} = \bigcap_{k=1}^{n} x_k^{-1}\mathbf{W}x_k.$$

Como cada $x_k^{-1}\mathbf{W}x_k$ es una vecindad de e también $\mathbf{V}$ es una vecindad de e, y $x_k\mathbf{V}x_k^{-1} \subset \mathbf{W}$ para $k = 1, \cdots, n$. Si $y \in \mathbf{F}$, entonces $y \in \mathbf{W}x_k$ para algún k,
$k = 1, \cdots, n$. Así $y = wx_k$ para algún $w \in \mathbf{W}$, y por tanto

$$\begin{aligned} y\mathbf{V}y^{-1} &= wx_k\mathbf{V}(wx_k)^{-1}, \text{ sustituyendo } y = wx_k \\ &= wx_k\mathbf{V}x_k^{-1}w^{-1} \\ &= w(x_k\mathbf{V}x_k^{-1})w^{-1}, \text{ propiedad asociativa} \\ &\subset w\mathbf{W}w^{-1}, \text{ ya que } x_k\mathbf{V}x_k^{-1} \subset \mathbf{W} \\ &\subset \mathbf{WWW}, \text{ ya que } w \in \mathbf{W} \\ &= \mathbf{W}^3 \\ &\subset \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $y\mathbf{V}y^{-1} \subset \mathbf{U}, \forall y \in \mathbf{F}$ ■

Ejemplo 2.7 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo y sea* $\mathscr{F}$ *una familia de subgrupos invariantes de* $\mathbf{G}$ *cerrados bajo la formación de intersecciones finitas y tal que*

$$\{e\} = \bigcap \mathscr{F}.$$

Entonces la familia de todos los conjuntos de la forma $\mathbf{H}x$*, donde* $\mathbf{H} \in \mathscr{F}$*, es una topología* $\mathcal{T}$ *en* $\mathbf{G}$*. Esto se sigue inmediatamente del Teorema 2.5. Con esta topología,* $\mathbf{G}$ *es cero-dimensional. De hecho,* *cada* $\mathbf{H} \in \mathscr{F}$ *es tanto abierto como cerrado así el complemento de* $\mathbf{H}$ *es la unión de clases disjuntas de* $\mathbf{H}$.

2.3. Subgrupos, Conjuntos abiertos y Clausuras

En esta sección, damos unos métodos de formar nuevos grupos topológicos de un grupo topológico dado. Describimos aquí las propiedades simples de las familias de abiertos, cerrados en grupos topológicos, las forman una base solida para la construcción del álgebra topológica.

En lo que sigue usaremos el resultados siguiente:

Proposición 2.2 *Para conjuntos* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C}$ *cualesquiera de un grupo* $\mathbf{G}$, *tenemos* $\mathbf{AB} \cap \mathbf{C} = \emptyset$ *si y sólo, si* $\mathbf{A} \cap \mathbf{CB}^{-1} = \emptyset$.

Prueba.

(I) $\mathbf{AB} \cap \mathbf{C} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{CB}^{-1} = \emptyset$.

Por contradicción, supongamos que $\mathbf{A} \cap \mathbf{CB}^{-1} \neq \emptyset$, entonces existe un $x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{CB}^{-1}$, así

$$
\begin{aligned}
x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{CB}^{-1} &\Rightarrow x \in \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{CB}^{-1} \\
&\Rightarrow x \in \mathbf{A} \wedge x = cb^{-1},\ c \in \mathbf{C}, b \in \mathbf{B} \\
&\Rightarrow x \in \mathbf{A} \wedge xb = cb^{-1}b,\ c \in \mathbf{C}, b \in \mathbf{B} \\
&\Rightarrow x \in \mathbf{A} \wedge xb = ce,\ c \in \mathbf{C}, b \in \mathbf{B} \\
&\Rightarrow x \in \mathbf{A} \wedge xb = c,\ c \in \mathbf{C}, b \in \mathbf{B} \\
&\Rightarrow c \in \mathbf{AB} \wedge c \in \mathbf{C} \\
&\Rightarrow c \in \mathbf{AB} \cap \mathbf{C} \\
&\Rightarrow \mathbf{AB} \cap \mathbf{C} \neq \emptyset.
\end{aligned}
$$

Esto contradice el hecho de que $\mathbf{AB} \cap \mathbf{C} = \emptyset$. Por lo tanto $\mathbf{A} \cap \mathbf{CB}^{-1} = \emptyset$.

(II) $\mathbf{A} \cap \mathbf{CB}^{-1} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{AB} \cap \mathbf{C} = \emptyset$.

Por contradicción, supongamos que $\mathbf{AB} \cap \mathbf{C} \neq \emptyset$, entonces existe un $y \in \mathbf{AB} \cap \mathbf{C}$, así

$$\begin{aligned} y \in \mathbf{AB} \cap \mathbf{C} &\Rightarrow y \in \mathbf{AB} \wedge y \in \mathbf{C} \\ &\Rightarrow y = ab, a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B} \wedge y \in \mathbf{C} \\ &\Rightarrow yb^{-1} = abb^{-1}, a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B} \wedge y \in \mathbf{C} \\ &\Rightarrow yb^{-1} = ae, a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B} \wedge y \in \mathbf{C} \\ &\Rightarrow yb^{-1} = a, a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B} \wedge y \in \mathbf{C} \\ &\Rightarrow a \in \mathbf{CB}^{-1} \wedge a \in \mathbf{A} \\ &\Rightarrow a \in \mathbf{A} \cap \mathbf{CB}^{-1} \\ &\Rightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{CB}^{-1} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Esto contradice el hecho de que $\mathbf{A} \cap \mathbf{CB}^{-1} = \emptyset$. Por lo tanto $\mathbf{AB} \cap \mathbf{C} = \emptyset$.

■

Teorema 2.9 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico,* $\mathbf{F}$ *un subconjunto compacto de* $\mathbf{G}$*, y* $\mathbf{P}$ *un subconjunto cerrado de* $\mathbf{G}$ *tal que* $\mathbf{F} \cap \mathbf{P} = \emptyset$*. Entonces existe una vecindad abierta* $\mathbf{V}$ *del elemento identidad* e *tal que* $\mathbf{FV} \cap \mathbf{P} = \emptyset$ *y* $\mathbf{VF} \cap \mathbf{P} = \emptyset$*.*

Prueba. Como por Teorema 2.1, las traslaciones izquierda de $\mathbf{G}$ por x, esto es ${}_x\lambda$, son continuas, podemos elegir, para todo $x \in \mathbf{F}$, una vecindad abierta $\mathbf{V}_x$ de e en $\mathbf{G}$ tal que

$$x\mathbf{V}_x \cap \mathbf{P} = \emptyset,$$

esto es $x\mathbf{V}_x \subset \mathbf{G} - \mathbf{P}$(Lema 1.16). Usando la continuidad de la multiplicación en $\mathbf{G}$, podemos también tomar una vecindad abierta $\mathbf{W}_x$ de e tal que $\mathbf{W}_x^2 \subset \mathbf{V}_x$. Los conjuntos $x\mathbf{W}_x$, con $x \in \mathbf{F}$, cubren el conjunto compacto $\mathbf{F}$, así existe un conjunto finito $\mathbf{C} \subset \mathbf{F}$ tal que $\mathbf{F} \subset \bigcup_{x \in \mathbf{C}} x\mathbf{W}_x$. Hagamos

$$\mathbf{V}_1 = \bigcap_{x \in \mathbf{C}} \mathbf{W}_x.$$

Debemos mostrar que $\mathbf{FV_1} \cap \mathbf{P} = \emptyset$, ya que $\mathbf{FV_1} \cap \mathbf{P} = \emptyset$ si y solo si $y\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{P} = \emptyset, \forall y \in \mathbf{F}$, así que lo que necesitamos es verificar que $y\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{P} = \emptyset$, para cada $y \in \mathbf{F}$.

Para ello, dado un elemento $y \in \mathbf{F}$, podemos encontrar $x \in \mathbf{C}$ tal que $y \in x\mathbf{W}_x$. Entonces

$$\begin{aligned} y\mathbf{V}_1 &\subset x\mathbf{W}_x\mathbf{V}_1, \quad \text{por Lema 1.7} \\ &\subset x\mathbf{W}_x\mathbf{W}_x, \quad \text{ya que } \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{W}_x, \forall x \in \mathbf{C} \\ &= x\mathbf{W}_x^2 \\ &\subset x\mathbf{V}_x, \quad \text{ya que } \mathbf{W}_x^2 \subset \mathbf{V}_x \\ &\subset \mathbf{G} - \mathbf{P}, \end{aligned}$$

luego $y\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{G} - \mathbf{P}$, lo cual implica, según Lema 1.16, que $y\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{P} = \emptyset$ para todo $y \in \mathbf{F}$. Esto implica que $\mathbf{F}\mathbf{V_1} \cap \mathbf{P} = \emptyset$. Con un procedimiento similar usando la traslación derecha de $\mathbf{G}$, por x, podemos encontrar una vecindad $\mathbf{V}_2$ de e en $\mathbf{G}$ que satisfaga $\mathbf{V}_2\mathbf{F} \cap \mathbf{P} = \emptyset$.

Haciendo $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$, ya que

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2) = \mathbf{F}\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{F}\mathbf{V}_2$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{V} \cap \mathbf{P} &= \mathbf{F}(\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2) \cap \mathbf{P} \\ &= (\mathbf{F}\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{F}\mathbf{V}_2) \cap \mathbf{P} \\ &= (\mathbf{F}\mathbf{V}_2 \cap \mathbf{F}\mathbf{V}_1) \cap \mathbf{P} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{V}_2 \cap (\mathbf{F}\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{P}) \\ &= \mathbf{F}\mathbf{V}_2 \cap \emptyset, \quad \text{ya que } \mathbf{F}\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{P} = \emptyset \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Además, ya que

$$(\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2)\mathbf{F} = \mathbf{V}_1\mathbf{F} \cap \mathbf{V}_2\mathbf{F}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{VF} \cap \mathbf{P} &= (\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2)\mathbf{F} \cap \mathbf{P} \\
&= (\mathbf{V}_1\mathbf{F} \cap \mathbf{V}_2\mathbf{F}) \cap \mathbf{P} \\
&= \mathbf{V}_1\mathbf{F} \cap (\mathbf{V}_2\mathbf{F} \cap \mathbf{P}) \\
&= \mathbf{V}_1\mathbf{F} \cap \emptyset, \ \text{ ya que } \mathbf{V}_2\mathbf{F} \cap \mathbf{P} = \emptyset \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Por lo tanto encontramos una vecindad $\mathbf{V}$, tal que $\mathbf{VF} \cap \mathbf{P} = \emptyset$ y $\mathbf{FV} \cap \mathbf{P} = \emptyset$. ■

Teorema 2.10 *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *subconjuntos de un grupo topológico* G*. Entonces tenemos:*

(I) $(\overline{\mathbf{A}})(\overline{\mathbf{B}}) \subset \overline{(\mathbf{AB})}$;

(II) $(\overline{\mathbf{A}})^{-1} = \overline{(\mathbf{A}^{-1})}$, $\mathbf{A}$ *simétrico;*

(III) $x\overline{\mathbf{A}}y = \overline{(x\mathbf{A}y)}$;

Si $\mathbf{G}$ *es un grupo topológico-*T_0*, entonces también tenemos:*

(IV) *si* $ab = ba$ *para todo* $a \in \mathbf{A}$ *y* $b \in \mathbf{B}$*, entonces* $ab = ba$ *para todo* $a \in \overline{\mathbf{A}}$ *y* $b \in \overline{\mathbf{B}}$.

Prueba.

(I) Supóngase que $x \in \overline{\mathbf{A}}$, $y \in \overline{\mathbf{B}}$, y que $\mathbf{U}$ es cualquier vecindad de e. Entonces existe una vecindad $\mathbf{V}$ de e tal que $(x\mathbf{V})(y\mathbf{V}) \subset xy\mathbf{U}$. Como $x \in \overline{\mathbf{A}}$, entonces, por Teorema 1.8, literal (a), $\exists x\mathbf{V}$ vecindad de x, tal que

$$\mathbf{A} \cap x\mathbf{V} \neq \emptyset.$$

Además, como $y \in \overline{\mathbf{B}}$, entonces,Teorema 1.8, literal (a), $\exists y\mathbf{V}$ vecindad de y tal que

$$\mathbf{B} \cap y\mathbf{V} \neq \emptyset.$$

Sea $a \in x\mathbf{V} \cap \mathbf{A}$, entonces $a \in \mathbf{A} \wedge a \in x\mathbf{V}$, y sea $b \in \mathbf{B} \cap y\mathbf{V}$, entonces $b \in \mathbf{B} \wedge b \in y\mathbf{V}$, así $ab \in \mathbf{AB} \wedge ab \in x\mathbf{V}y\mathbf{V}$, luego

$$ab \in \mathbf{AB} \cap x\mathbf{V}y\mathbf{V} \subset xy\mathbf{U}.$$

Esto implica que, por el Teorema 1.8, literal (a), $xy \in \overline{\mathbf{AB}}$. Por lo tanto

$$(\overline{\mathbf{A}})(\overline{\mathbf{B}}) \subset \overline{\mathbf{AB}}.$$

(II) Sea $x \in (\overline{\mathbf{A}})^{-1}$, y sea $\mathbf{V}$ cualquier vecindad de e. Como $x \in (\overline{\mathbf{A}})^{-1}$, entonces

$$x^{-1} \in ((\overline{\mathbf{A}})^{-1})^{-1} = \overline{\mathbf{A}},$$

entonces, por el Teorema 1.8, literal (a), existe una vecindad $x^{-1}\mathbf{V}$ de x^{-1} tal que

$$x^{-1}\mathbf{V} \cap \mathbf{A} \neq \emptyset.$$

Sea $a \in x^{-1}\mathbf{V} \cap A$,

$$\begin{aligned}
a \in x^{-1}\mathbf{V} \cap \mathbf{A} &\Rightarrow a \in x^{-1}\mathbf{V} \wedge a \in \mathbf{A} \\
&\Rightarrow a^{-1} \in (x^{-1}\mathbf{V})^{-1} = \mathbf{V}^{-1}(x^{-1})^{-1} \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = \mathbf{V}^{-1}x \\
&\qquad \text{como } \ a^{-1} \in \mathbf{A}^{-1} \\
&\Rightarrow a^{-1} \in \mathbf{V}^{-1}x \wedge a^{-1} \in \mathbf{A}^{-1} \\
&\Rightarrow a^{-1} \in \mathbf{V}^{-1}x \cap \mathbf{A}^{-1} \\
&\Rightarrow \mathbf{V}^{-1}x \cap \mathbf{A}^{-1} \neq \emptyset,
\end{aligned}$$

y ya que $\mathbf{V}^{-1}x$ es una vecindad de x, por el Teorema 1.8, literal (a), tenemos que $x \in \overline{\mathbf{A}^{-1}}$, luego $(\overline{\mathbf{A}})^{-1} \subset \overline{\mathbf{A}^{-1}}$.

Además, si $x \in \overline{\mathbf{A}^{-1}}$, entonces, por el Teorema 1.8, literal (a), $\exists x\mathbf{V}$ vecindad de x tal que

$$x\mathbf{V} \cap \mathbf{A}^{-1} \neq \emptyset.$$

Sea $a \in x\mathbf{V} \cap \mathbf{A}$,

$$\begin{aligned}
a \in x\mathbf{V} \cap \mathbf{A} &\Rightarrow a \in x\mathbf{V} \wedge a \in \mathbf{A} \\
&\Rightarrow a^{-1} \in (x\mathbf{V})^{-1} = \mathbf{V}^{-1}x^{-1} \quad \wedge a^{-1} \in (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \\
&\Rightarrow a^{-1} \in \mathbf{V}^{-1}x^{-1} \quad \wedge a^{-1} \in \mathbf{A} \\
&\Rightarrow a^{-1} \in \mathbf{V}^{-1}x^{-1} \cap \mathbf{A} \\
&\Rightarrow \mathbf{V}^{-1}x^{-1} \cap \mathbf{A} \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

ya que $\mathbf{V}^{-1}x^{-1}$ es una vecindad de x^{-1}, entonces por el Teorema 1.8, literal (a), se tiene que $x^{-1} \in \overline{\mathbf{A}}$ esto implica que

$$x = (x^{-1})^{-1} \in (\overline{\mathbf{A}})^{-1}.$$

Luego $\overline{\mathbf{A}^{-1}} \subset \overline{\mathbf{A}}^{-1}$. Por lo tanto

$$(\overline{\mathbf{A}})^{-1} = \overline{\mathbf{A}^{-1}}.$$

(III) Mostremos primero que la aplicación $p : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, definada por $p(a) = xay$ es un homeomorfismo, notemos que

$$\begin{aligned}({}_x\lambda \circ \lambda_y)(a) &=_x \lambda(\lambda_y(a)) \\ &=_x \lambda(ay) \\ &= xay = p(a),\end{aligned}$$

entonces $p =_x \lambda \circ \lambda_y$, ya que tanto la traslación izquierda de $\mathbf{G}$ por $x,_x \lambda$ como la traslación derecha de $\mathbf{G}$ por y, λ_y son homeomorfismo, por lo cual p es la composición de dos homeomorfismo, esto implica que p es un homeomorfismo.

Así tenemos que

$$\begin{aligned}x\overline{\mathbf{A}}y &= p(\overline{\mathbf{A}}) \\ &= \overline{p(\mathbf{A})} \\ &= \overline{x\mathbf{A}y}\end{aligned}$$

Por lo tanto $x\overline{\mathbf{A}}y = \overline{x\mathbf{A}y}$.

(IV) Suponga que $ab = ba$ para todo $a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}$. La aplicación $p : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, definida por $p[(a,b)] = aba^{-1}b^{-1}$ es continua. Pues, sabemos que la aplicación $f : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ de la definición 2.1 y la traslación derecha de $\mathbf{G}$ por $a^{-1}b^{-1}$, $\lambda_{a^{-1}b^{-1}}$, son continuas. Tenemos que $p = \lambda_{a^{-1}b^{-1}} \circ f$, así p es continua, ya que es la composición de dos aplicaciones continuas.

Ahora bien como $\{e\}$ es cerrado por el Teorema 2.7, deducimos que

$$\mathbf{H} = \{(a,b) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G} | aba^{-1}b^{-1} = e\}$$

es cerrado. Así $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \subset \mathbf{H}$ y $\overline{(\mathbf{A} \times \mathbf{B})} = \overline{\mathbf{A}} \times \overline{\mathbf{B}}$. Así, tenemos $\overline{\mathbf{A}} \times \overline{\mathbf{B}} \subset \mathbf{H}$. Esto implica que si $(a,b) \in \overline{\mathbf{A}} \times \overline{\mathbf{B}}$ entonces

$$\begin{aligned} aba^{-1}b^{-1} = e &\Rightarrow aba^{-1}b^{-1}b = eb \\ &\Rightarrow aba^{-1}e = b \\ &\Rightarrow aba^{-1} = b \\ &\Rightarrow aba^{-1}a = ba \\ &\Rightarrow abe = ba \\ &\Rightarrow ab = ba. \end{aligned}$$

Esto es, $ab = ba$ para todo $a \in \overline{\mathbf{A}}, b \in \overline{\mathbf{B}}$.

■

Corolario 2.5 *Si* $\mathbf{H}$ *es un subgrupo, o subgrupo normal de un grupo topológico* $\mathbf{G}$, *entonces* $\overline{\mathbf{H}}$ *es también un subgrupo, o subgrupo normal, respectivamente, de* $\mathbf{G}$. *Si* $\mathbf{G}$ *es un grupo topológico-*T_0 *y* $\mathbf{H}$ *un subgrupo abeliano de* $\mathbf{G}$, *entonces* $\overline{\mathbf{H}}$ *es también un subgrupo abeliano.*

Prueba. Si $\mathbf{H}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$, entonces $\mathbf{HH} \subset \mathbf{H}$, esto implica que $(\overline{\mathbf{H}})(\overline{\mathbf{H}}) \subset \overline{\mathbf{H}}$. Por el Teorema 2.10 (I) tenemos que

$$(\overline{\mathbf{H}})(\overline{\mathbf{H}}) \subset \overline{\mathbf{HH}}.$$

Esto significa que si $x, y \in \overline{H}$, entonces $xy \in (\overline{\mathbf{H}})(\overline{\mathbf{H}}) \subset \overline{\mathbf{HH}}$, luego $xy \in \overline{\mathbf{H}}$ y por lo tanto el producto en $\overline{\mathbf{H}}$ es cerrado.

Además si $\mathbf{H}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$, entonces $\mathbf{H}^{-1} \subset \mathbf{H}$, esto implica que $\overline{\mathbf{H}^{-1}} \subset \overline{\mathbf{H}}$. Por el Teorema 2.10 (II), tenemos

$$(\overline{\mathbf{H}})^{-1} = \overline{\mathbf{H}^{-1}} \subset \overline{\mathbf{H}},$$

esto significa que si $x \in \overline{\mathbf{H}}$, entonces $x^{-1} \in (\overline{\mathbf{H}})^{-1} \subset \overline{\mathbf{H}}$, luego $x^{-1} \in \overline{\mathbf{H}}$. Si hemos probado que $\overline{\mathbf{H}}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$.

Si $\mathbf{H}$ es un subgrupo normal, entonces,por el Lema 1.5 $\mathbf{H} = a\mathbf{H}a^{-1}, \forall a \in \mathbf{G}$, luego, por el Teorema 2.10 (III),

$$a\overline{\mathbf{H}}a^{-1} = \overline{a\mathbf{H}a^{-1}} \subset \overline{\mathbf{H}},$$

así que $\overline{\mathbf{H}}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$.

Finalmente, si $\mathbf{H}$ un subgrupo abeliano de $\mathbf{G}$, entonces $ab = ba, \forall a, b \in \mathbf{H}$. Sea $\mathbf{H} = \mathbf{AB}$, con $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ subconjuntos de $\mathbf{G}$, entonces, por el Teorema 2.10 (I),

$$(\overline{\mathbf{A}})(\overline{\mathbf{B}}) \subset \overline{(\mathbf{AB})} = \overline{\mathbf{H}},$$

además, por Teorema 2.10 (IV), si $ab = ba, \forall a \in \mathbf{A}, \forall b \in \mathbf{B}$, entonces

$$ab = ba, \forall a \in \overline{\mathbf{A}}, \forall b \in \overline{\mathbf{B}},$$

por tanto, $\overline{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{AB}}$ es un subgrupo abeliano. ■

En los grupos topológicos existe una relación intima entre los conjuntos de la forma $\mathbf{AU}$, donde $\mathbf{U}$ es abierto y la operación clausura.

Proposición 2.3 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico, tal que* $\forall a \in \mathbf{G}$ *la traslación izquierda de* $a,_a\lambda$*, es continua. Entonces, para todo subconjunto* $\mathbf{A}$ *de* $\mathbf{G}$ *y toda vecindad* $\mathbf{U}$ *del elemento identidad* e*,*

$$\overline{\mathbf{A}} \subset \mathbf{AU}.$$

Prueba. Sea $x \in \overline{A}$ y sea $\mathbf{V}$ una vecindad de e tal que $\mathbf{V}^{-1} \subset \mathbf{U}$. Entonces, por el Teorema 1.8, existe $x\mathbf{V}$ tal que $x \in x\mathbf{V}$ y $\mathbf{A} \cap x\mathbf{V} \neq \emptyset$. Sea $a \in \mathbf{A} \cap x\mathbf{V}$,

$$\begin{aligned} a \in \mathbf{A} \cap x\mathbf{V} &\Rightarrow a \in \mathbf{A} \wedge a \in x\mathbf{V} \\ &\Rightarrow a = xv, \text{ para algún } v \in \mathbf{V} \\ &\Rightarrow av^{-1} = xvv^{-1} = xe = x \\ &\Rightarrow x = av^{-1}, v^{-1} \in \mathbf{V}^{-1}; \end{aligned}$$

luego $x \in \mathbf{AV}^{-1} \subset \mathbf{AU}$. Si $x \in \mathbf{AU}$ y por lo tanto $\overline{\mathbf{A}} \subset \mathbf{AU}$. ■

Un enunciado similar es valido para grupos topológicos con traslación derecha de a, λ_a, continua.

Teorema 2.11 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico con identidad* e. $\mathbf{F}$ *un subconjunto compacto de* $\mathbf{G}$, *y* $\mathbf{U}$ *un subconjunto abierto de* $\mathbf{G}$ *tal que* $\mathbf{F} \subset \mathbf{U}$. *Entonces existe una vecindad* $\mathbf{V}$ *de* e *tal que*

$$(\mathbf{FV}) \cup (\mathbf{VF}) \subset \mathbf{U}.$$

Si $\mathbf{G}$ *es localmente compacto, entonces* $\mathbf{V}$ *puede elegirse tal que* $\overline{(\mathbf{FV}) \cup (\mathbf{VF})}$ *sea compacto.*

Prueba. Para cada $x \in \mathbf{F}$, existen unas vecindades $\mathbf{W}_x$ de e tal que $x\mathbf{W}_x \subset \mathbf{U}$ y $\mathbf{V}_x$ de e tal que $\mathbf{V}_x^2 \subset \mathbf{W}_x$. Como

$$\mathbf{F} \subset \bigcup_{x \in \mathbf{F}} x\mathbf{V}_x = \mathbf{FV}_x,$$

y ya que $\mathbf{F}$ es compacto existen $x_1, \cdots x_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$\mathbf{F} \subset \bigcup_{k=1}^{n} x_k \mathbf{V}_{x_k}.$$

Sea

$$\mathbf{V}_1 = \bigcap_{k=1}^{n} \mathbf{V}_{x_k}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{FV}_1 &\subset \left(\bigcup_{k=1}^{n} x_k \mathbf{V}_{x_k}\right)\mathbf{V}_1 \\
&\subset \left(\bigcup_{k=1}^{n} x_k \mathbf{V}_{x_k}\right)\mathbf{V}_{x_k}, \quad \text{ya que } \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_{x_k}, k = 1, \cdots, n \\
&\subset \left(\bigcup_{k=1}^{n} x_k \mathbf{V}_{x_k}\mathbf{V}_{x_k}\right) \\
&\subset \bigcup_{k=1}^{n} x_k \mathbf{V}_{x_k}^2 \\
&\subset \bigcup_{k=1}^{n} x_k \mathbf{W}_{x_k}, \quad \text{ya que } \mathbf{V}_{x_k}^2 \subset \mathbf{W}_{x_k} \\
&\subset \mathbf{U}.
\end{aligned}$$

Similarmente, existe una vecindad $\mathbf{V}_2$ de e tal que $\mathbf{V}_2\mathbf{F} \subset \mathbf{U}$. Con $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$, obtenemos $(\mathbf{FV}) \cup (\mathbf{VF}) \subset \mathbf{U}$. Si $\mathbf{G}$ es localmente compacto, entonces, por Teorema 1.20, $\mathbf{V}$ puede elegirse tal que $\overline{\mathbf{V}}$ sea compacto. Del Teorema 2.14 se sigue que $\mathbf{F}(\overline{\mathbf{V}})$ es cerrado y compacto. Como $\mathbf{FV} \subset \mathbf{F}\overline{\mathbf{V}}$ y $\mathbf{F}\overline{\mathbf{V}}$ es cerrado, tenemos $\overline{\mathbf{FV}} \subset \mathbf{F}\overline{\mathbf{V}}$, y por tanto $\overline{\mathbf{FV}}$ es compacto. De forma similar, $\overline{\mathbf{VF}}$ es compacto, así que $\overline{(\mathbf{FV}) \cup (\mathbf{VF})}$ es compacto. ■

Teorema 2.12 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico, tal que* $\forall a \in \mathbf{G}$ *la traslación izquierda de* a, ${}_a\lambda$, *es continua, y* $\mathscr{B}_e$ *una base del espacio* $\mathbf{G}$ *en elemento identidad* e. *Entonces, para todo subconjunto* $\mathbf{A}$ *de* $\mathbf{G}$,

$$\overline{\mathbf{A}} = \bigcap_{\mathbf{U} \in \mathscr{B}_e} \mathbf{AU}.$$

Prueba. De la Proposición 2.3, tenemos que $\overline{\mathbf{A}} \subset \mathbf{AU}$, por lo que $\overline{\mathbf{A}} \subset \bigcap_{\mathbf{U} \in \mathscr{B}_e} \mathbf{AU}$.

Para demostrar que $\bigcap_{\mathbf{U} \in \mathscr{B}_e} \mathbf{AU} \subset \overline{\mathbf{A}}$, tenemos que verificar que si $x \in \mathbf{AU}$ para todo $\mathbf{U} \in \mathscr{B}_e$, entonces $x \in \overline{\mathbf{A}}$, por su contra-reciproco esto es equivalente a mostrar que $x \notin \overline{\mathbf{A}}$, entonces existe $\mathbf{U} \in \mathscr{B}_e$ tal que $x \notin \mathbf{AU}$. Si $x \notin \overline{\mathbf{A}}$, existe una vecindad abierta $\mathbf{W}$ de e tal que $(x\mathbf{W}) \bigcap \mathbf{A} = \emptyset$. Tomamos $\mathbf{U} \in \mathscr{B}_e$ satisfaciendo la condición $\mathbf{U}^{-1} \subset \mathbf{W}$. Entonces $x\mathbf{U}^{-1} \bigcap \mathbf{A} = \emptyset$, la Proposición 2.2, implica que $\{x\} \cap \mathbf{A}(\mathbf{U}^{-1})^{-1} = \{x\} \cap \mathbf{AU} = \emptyset$, entonces $x \notin \mathbf{AU}$. Por lo tanto

$$\overline{\mathbf{A}} = \bigcap_{\mathbf{U} \in \mathscr{B}_e} \mathbf{AU}.$$

■

Similarmente, la ecuación

$$\overline{\mathbf{A}} = \bigcap_{\mathbf{U} \in \mathscr{B}_e} \mathbf{UA}$$

se satisface para grupos topológicos con traslación derecha de a, λ_a, continua.

Teorema 2.13 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico. La clausura* $\overline{\{e\}}$ *de* $\{e\}$ *en* $\mathbf{G}$ *es un subgrupo normal cerrado de* $\mathbf{G}$ *y es el subgrupo más pequeño cerrado de* $\mathbf{G}$. *La clausura de un punto* $a \in \mathbf{G}$ *es la clase* $a\overline{\{e\}} = \overline{\{e\}}a$.

Prueba. Por el Corolario 2.5, $\overline{\{e\}}$ es un subgrupo normal cerrado de $\mathbf{G}$. Esta claro que es el subgrupo cerrado mas pequeño de $\mathbf{G}$. Ya que la traslación izquierda es un homeomorfismo, la clausura de $\{a\}$ es $a\overline{\{e\}}, \forall a \in \mathbf{G}$. Por tanto, como $\{e\}$ es un subgrupo normal, tenemos $a\overline{\{e\}} = \overline{\{e\}}a$. ■

En el resultado siguiente obtenemos una aplicación continua que usaremos en el Teorema 2.14.

Lema 2.3 *La aplicación* $q : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ *definida por* $q(x) = x^{-1}a, a \in G$ *es continua.*

Prueba. Por la definición de un grupo topológico (Definición 2.1) sabemos que la aplicación de tomar inversos es continua y por Teorema 2.1, la traslación derecha por $a, a \in \mathbf{G}$ es continua, esto es, $i(x) = x^{-1}$ y $\lambda_a(x) = xa$, y tenemos que

$$\begin{aligned} q(x) &= ({}_a\lambda \circ i)(x) \\ &=_a \lambda(i(x)) \\ &=_a \lambda(x^{-1}) \\ &= x^{-1}a, \end{aligned}$$

ya que la composición de dos aplicaciones continuas es continua (Teorema 1.10, numeral (3)) tenemos que $q(x)$ es continua. ■

Proposición 2.4 *Para conjuntos* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C}$ *cualesquiera de un grupo* $\mathbf{G}$, *tenemos* $\mathbf{AB} \cap \mathbf{C} = \emptyset$ *si, y sólo si* $\mathbf{B} \cap \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \emptyset$.

Prueba.

(I) $\mathbf{AB} \cap \mathbf{C} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{B} \cap \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \emptyset$.

Por contradicción, supongamos que $\mathbf{B} \cap \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \neq \emptyset$, entonces existe un $x \in \mathbf{B} \cap \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$, así

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{B} \cap \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} &\Rightarrow x \in \mathbf{X} \wedge x \in \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \\ &\Rightarrow x \in \mathbf{X} \wedge x = a^{-1}c,\ c \in \mathbf{C}, a \in \mathbf{A} \\ &\Rightarrow x \in \mathbf{X} \wedge ax = aa^{-1}c,\ c \in \mathbf{C}, a \in \mathbf{A} \\ &\Rightarrow x \in \mathbf{X} \wedge ax = ce,\ c \in \mathbf{C}, a \in \mathbf{A} \\ &\Rightarrow x \in \mathbf{X} \wedge ax = c,\ c \in \mathbf{C}, a \in \mathbf{A} \\ &\Rightarrow c \in \mathbf{AB} \wedge c \in \mathbf{C} \\ &\Rightarrow c \in \mathbf{AB} \cap \mathbf{C} \\ &\Rightarrow \mathbf{AB} \cap \mathbf{C} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Esto contradice el hecho de que $\mathbf{AB} \cap \mathbf{C} = \emptyset$. Por lo tanto $\mathbf{B} \cap \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \emptyset$.

(II) $\mathbf{B} \cap \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{AB} \cap \mathbf{C} = \emptyset$.

Por contradicción, supongamos que $\mathbf{AB} \cap \mathbf{C} \neq \emptyset$, entonces existe un $y \in \mathbf{AB} \cap \mathbf{C}$, así

$$\begin{aligned} y \in \mathbf{AB} \cap \mathbf{C} &\Rightarrow y \in \mathbf{AB} \wedge y \in \mathbf{C} \\ &\Rightarrow y = ab, a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B} \wedge y \in \mathbf{C} \\ &\Rightarrow a^{-1}y = a^{-1}ab, a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B} \wedge y \in \mathbf{C} \\ &\Rightarrow a^{-1}y = eb, a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B} \wedge y \in \mathbf{C} \\ &\Rightarrow a^{-1}y = b, a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B} \wedge y \in \mathbf{C} \\ &\Rightarrow a \in \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \wedge b \in \mathbf{B} \\ &\Rightarrow b \in \mathbf{B} \cap \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ &\Rightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{CB}^{-1} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Esto contradice el hecho de que $\mathbf{A} \cap \mathbf{CB}^{-1} = \emptyset$. Por lo tanto $\mathbf{AB} \cap \mathbf{C} = \emptyset$.

■

Teorema 2.14 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico y* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *subconjuntos de* $\mathbf{G}$.

(I) Si $\mathbf{A}$ *es abierto y* $\mathbf{B}$ *es arbitrario, entonces* $\mathbf{AB}$ *y* $\mathbf{BA}$ *son abiertos.*

(II) Si $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son compactos, entonces* $\mathbf{AB}$ *es compacto.*

(III) Si $\mathbf{A}$ *es cerrado y* $\mathbf{B}$ *es compacto, entonces* $\mathbf{AB}$ *y* $\mathbf{BA}$ *son cerrados.*

(IV) Si $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son cerrados,* $\mathbf{AB}$ *no necesariamente es cerrado.*

Prueba.

(I) Probemos primero que

$$\mathbf{AB} = \bigcup_{b \in \mathbf{B}} \mathbf{A}b.$$

a) Sea $x \in \mathbf{AB}$,

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{AB} &\Rightarrow x = ab, a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B} \\ &\Rightarrow x \in \mathbf{A}b, \text{ para algún } b \in \mathbf{B} \end{aligned}$$

así $x \in \bigcup_{b \in \mathbf{B}} \mathbf{A}b$, luego $\mathbf{AB} \subset \bigcup_{b \in \mathbf{B}} \mathbf{A}b$.

b) Sea $x \in \bigcup_{b \in \mathbf{B}} \mathbf{A}b$,

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{b \in \mathbf{B}} \mathbf{A}b &\Rightarrow x \in \mathbf{A}b, \text{ para algún } b \in \mathbf{B} \\ &\Rightarrow x = ab, a \in \mathbf{A} \\ &\Rightarrow x \in \mathbf{AB}. \end{aligned}$$

Luego $\bigcup_{b \in \mathbf{B}} \mathbf{A}b \subset \mathbf{AB}$.

Por a) y b) tenemos que

$$\mathbf{AB} = \bigcup_{b \in \mathbf{B}} \mathbf{A}b.$$

Ahora probemos que $\mathbf{AB}$ es abierto. Como

$$\mathbf{AB} = \bigcup_{b \in \mathbf{B}} \mathbf{A}b.;$$

ya que si $\mathbf{A}$ es abierto, también lo es $\mathbf{A}b$ para todo $b \in \mathbf{B}$. Así que $\mathbf{AB}$ es la unión de conjuntos abiertos y por tanto es abierto.

Similarmente para $\mathbf{BA}$. Tenemos que

$$\mathbf{BA} = \bigcup_{b \in \mathbf{B}} b\mathbf{A}.;$$

si $\mathbf{A}$ es abierto, también lo es $b\mathbf{A}$ para todo $b \in \mathbf{B}$. Así $\mathbf{BA}$ es la unión de conjuntos abiertos, por tanto es abierto.

(II) Para probar que $\mathbf{AB}$ es compacto tenemos, por hipótesis que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son compactos, entonces, por Teorema 1.19, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es un subconjunto compacto de $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$. Como por Definición 2.1, la función $f(x, y) = xy$ es continua y ya que $\mathbf{AB} = f(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, el Teorema 1.17, implica que $\mathbf{AB}$ es compacto. Por lo tanto $\mathbf{AB}$ es compacto.

(III) Supongamos que $\mathbf{A}$ es cerrado y $\mathbf{B}$ es compacto. Tomemos cualquier punto $d \notin \mathbf{AB}$, esto implica que $\mathbf{AB} \cap \{d\} = \emptyset$. Entonces por el Proposición 2.4 $\mathbf{B} \cap \mathbf{A}^{-1}\{d\} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A}^{-1}d = \emptyset$. Por el Lema 2.3 la aplicación $q(x) = x^{-1}d$, es continua, entonces por Teorema 1.17,

$$\mathbf{A}^{-1}d = q(\mathbf{A})$$

es compacto, por tanto, por el Teorema 2.9, existe una vecindad abierta $\mathbf{U}$ de e tal que

$$\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{U} \cap \mathbf{B} = \emptyset.$$

Se sigue de la Proposición 2.4, que $d\mathbf{U} \cap \mathbf{AB} = \emptyset$. Como $d\mathbf{U}$ es una vecindad de d, concluimos que $d \notin \overline{\mathbf{AB}}$. Por lo tanto $\mathbf{AB}$ es cerrado en $\mathbf{G}$.

(IV) Para esta afirmación mostraremos que no necesariamente $(\overline{\mathbf{A}})(\overline{\mathbf{B}}) = \overline{\mathbf{AB}}$. La inclusión

$$(\overline{\mathbf{A}})(\overline{\mathbf{B}}) \subset \overline{\mathbf{AB}},$$

es verdadera por Teorema 2.10.

Sea $x \in \overline{\mathbf{AB}}$, entonces $\exists x\mathbf{W}$ tal que $x \in x\mathbf{W} \wedge x\mathbf{W} \cap \mathbf{AB} \neq \emptyset$. Sea $y \in x\mathbf{W} \cap \mathbf{AB}$,

$$\begin{aligned} y \in x\mathbf{W} \cap \mathbf{AB} &\Rightarrow y \in x\mathbf{W} \wedge y \in \mathbf{AB} && (2.1)\\ &\Rightarrow y = xw, w \in \mathbf{W} \wedge y = ab, a\mathbf{A}, b \in \mathbf{B} && (2.2)\\ &\Rightarrow a = yb^{-1} = xwb^{-1} && (2.3)\\ &\Rightarrow a \in x\mathbf{W}b^{-1} && (2.4)\\ &\Rightarrow a \in x\mathbf{W}b^{-1} \cap \mathbf{A} && (2.5)\\ &\Rightarrow a \in \overline{\mathbf{A}}. && (2.6)\end{aligned}$$

de (2.2) $b = a^{-1}y = a^{-1}xw$, esto implica que $b \in a^{-1}x\mathbf{W}$, así $b \in a^{-1}x\mathbf{W} \cap \mathbf{B}$, por tanto $b \in \overline{\mathbf{B}}$. Pero no necesariamente $x = ab$. Por lo tanto tenemos que no necesariamente $\overline{\mathbf{AB}} \subset (\overline{\mathbf{A}})(\overline{\mathbf{B}})$.

■

Como ejemplo de la última afirmación del Teorema 2.14 tenemos el siguiente:

Ejemplo 2.8 *En el grupo aditivo $\mathbb{R}$, consideremos los conjuntos cerrados $\mathbb{Z}$ y $\alpha\mathbb{Z}$ donde α es cualquier número irracional. El conjunto $\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ consiste de todos los números $m+\alpha n$, donde m y n son enteros. Este es un subconjunto denso y no cerrado de $\mathbb{R}$ (es actualmente un subgrupo).*

Teorema 2.15 *Sea $\mathbf{G}$ un grupo topológico y $\mathbf{H}$ un subgrupo de $\mathbf{G}$. Con la topología relativa como un subespacio de $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ es un grupo topológico.*

Prueba. Por definición de un grupo topológico (Definición 2.1), tenemos que la función

$$f : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}, \quad \text{definida por } \ f(x, y) = xy$$

es continua, entonces $f : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{G}$ es continua, luego por el Teorema 1.10, $f : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ es continua. Además, por Definición 2.1, $i : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ definida por $i(x) = x^{-1}$ es continua, por lo que $i : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ es continua, por Teorema 1.10. Por tanto por Definición 2.1 $\mathbf{H}$ es un grupo topológico. ■

Teorema 2.16 *Un subgrupo $\mathbf{H}$ de un grupo topológico $\mathbf{G}$ es abierto si y sólo, si el interior es no vacío. Todo subgrupo $\mathbf{H}$ abierto de $\mathbf{G}$ es cerrado.*

Prueba. Supóngase que $\mathbf{H}$ tiene un punto interior. Entonces existe una vecindad $\mathbf{U}$ de e en $\mathbf{G}$ tal que $x\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$. Para todo $y \in \mathbf{H}$, tenemos entonces

$$\begin{aligned} y\mathbf{U} &= ye\mathbf{U} \\ &= yx^{-1}x\mathbf{U} \\ &\subset yx^{-1}\mathbf{H}, \text{ ya que } x\mathbf{U} \subset \mathbf{H} \\ &= \mathbf{H}, \ \text{ ya que } y, x^{-1} \in \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Luego $y\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$, esto implica que

$$\mathbf{H} = \bigcup_{x \in \mathbf{H}} y\mathbf{U},$$

como $y\mathbf{U}$, es abierto, tenemos que $\mathbf{H}$ es abierto.

Si $\mathbf{H}$ es abierto, entonces por definición de abierto, todo punto de $\mathbf{H}$ es un punto interior.

Si $\mathbf{H}$ es un subgrupo abierto de $\mathbf{G}$, entonces

$$\mathbf{G} - \mathbf{H} = \bigcup\{x\mathbf{H} | x \notin \mathbf{H}\}.$$

Cada conjunto $x\mathbf{H}$ es abierto, y así $\mathbf{G} - \mathbf{H}$ es abierto; esto implica que $\mathbf{H}$ es cerrado en $\mathbf{G}$. ■

Definición 2.6 *Suponga que* $\mathbf{U}$ *es una vecindad del elemento identidad de un grupo topológico* $\mathbf{G}$. *Un subconjunto* $\mathbf{A}$ *de* $\mathbf{G}$ *se llama* $\mathbf{U}-$**disjunto** *si para cualesquiera* $a, b \in \mathbf{A}$ *tal que* $a \neq b$, *tenemos* $b \notin a\mathbf{U}$,

Lema 2.4 *Sea* $\mathbf{U}$ *y* $\mathbf{V}$ *vecindades abiertas del elemento identidad en un grupo topológico* $\mathbf{G}$ *tal que* $\mathbf{V}^4 \subset \mathbf{U}$ *y* $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}$. *Si un subconjunto* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{G}$ *es* $\mathbf{U}-$*disjunto, entonces la familia de conjuntos abiertos* $\{a\mathbf{V} | a \in \mathbf{A}\}$ *es discreta en* $\mathbf{G}$.

Prueba. Supongamos que el subconjunto $\mathbf{A}$ es $\mathbf{U}-$disjunto. Verificaremos que, para todo $x \in \mathbf{G}$ la vecindad abierta $x\mathbf{V}$ de x intersecta a más de un elemento de la familia $\{a\mathbf{V} | a \in \mathbf{A}\}$. Supóngase lo contrario que, para algún $x \in \mathbf{G}$ existen elementos distintos $a, b \in \mathbf{A}$ tal que

$$x\mathbf{V} \cap a\mathbf{V} \neq \emptyset \;\text{ y }\; x\mathbf{V} \cap b\mathbf{V} \neq \emptyset.$$

Entonces sea $z \in x\mathbf{V} \cap a\mathbf{V}$ sea $y \in x\mathbf{V} \cap b\mathbf{V}$,

$$\begin{aligned}
z \in x\mathbf{V} \cap a\mathbf{V} &\Rightarrow z \in x\mathbf{V} \wedge z \in a\mathbf{V} \\
&\Rightarrow z = xv_1, v_1 \in \mathbf{V} \wedge z = av_2, v_2 \in \mathbf{V} \\
&\Rightarrow x^{-1}z = x^{-1}xv_1 = v_1, v_1 \in \mathbf{V} \wedge z = av_2, v_2 \in \mathbf{V} \\
&\Rightarrow x^{-1}z = x^{-1}av_2 = v_1, v_1, v_2 \in \mathbf{V} \\
&\Rightarrow x^{-1}av_2v_2^{-1} = v_1v_2^{-1}, v_1, v_2 \in \mathbf{V} \\
&\Rightarrow x^{-1}a = v_1v_2^{-1} \in \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{V} = \mathbf{V}^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
y \in x\mathbf{V} \cap a\mathbf{V} &\Rightarrow y \in x\mathbf{V} \wedge y \in b\mathbf{V} \\
&\Rightarrow y = xv_1, v_1 \in \mathbf{V} \wedge y = bv_2, v_2 \in \mathbf{V} \\
&\Rightarrow y = xv_1, v_1 \in \mathbf{V} \wedge b^{-1}y = b^{-1}bv_2 = v_2, v_2 \in \mathbf{V} \\
&\Rightarrow b^{-1}y = b^{-1}xv_1 = v_2, v_1, v_2 \in \mathbf{V} \\
&\Rightarrow b^{-1}xv_1v_1^{-1} = v_2v_1^{-1}, v_1, v_2 \in \mathbf{V} \\
&\Rightarrow b^{-1}x = v_2v_1^{-1} \in \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{V} = \mathbf{V}^2
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
(b^{-1}x)(x^{-1}a) &= b^{-1}(xx^{-1})a \\
&= b^{-1}a \in \mathbf{V}^2\mathbf{V}^2 = \mathbf{V}^4 \subset \mathbf{U}.
\end{aligned}$$

Esto implica que $b^{-1}a \in \mathbf{U}$, es decir, $b^{-1}a = u, u \in \mathbf{U}$, esto es $a = bb^{-1}a = bu, u \in \mathbf{U}$, por lo que $a \in b\mathbf{U}$, así contradice la suposición que el conjunto $\mathbf{A}$ es $\mathbf{U}-$disjunto.

Por lo tanto $\{a\mathbf{V}|a \in \mathbf{A}\}$ es discreta en $\mathbf{G}$ si $\mathbf{A}$ es $\mathbf{U}-$disjunto. ■

Teorema 2.17 *Sea $\mathscr{A}$ una familia de vecindades de e en un grupo topológico $\mathbf{G}$ tal que:*

(I) *para cada $\mathbf{U} \in \mathscr{A}$, existe un $\mathbf{V} \in \mathscr{A}$ tal que $V^2 \subset \mathbf{U}$;*

(II) *para cada $\mathbf{U} \in \mathscr{A}$, existe un $\mathbf{V} \in \mathscr{A}$ tal que $\mathbf{V}^{-1} \subset \mathbf{U}$;*

(III) *para $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathscr{A}$ existe $\mathbf{W} \in \mathscr{A}$ tal que $\mathbf{W} \subset \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$;*

Sea $\mathbf{H} = \cap\{\mathbf{U}|\mathbf{U} \in \mathscr{A}\}$. Entonces $\mathbf{H}$ es un subgrupo cerrado de $\mathbf{G}$. Es más,

(IV) *si para todo $\mathbf{U} \in \mathscr{A}$ y $x \in \mathbf{G}$, existe un $\mathbf{V} \in \mathscr{A}$ tal que $x\mathbf{V}x^{-1} \subset \mathbf{U}$, entonces $\mathbf{H}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$.*

Prueba. Sean que $x, y \in \mathbf{H}$ y sea $\mathbf{U} \in \mathscr{A}$. Sea $\mathbf{V} \in \mathscr{A}$ tal que $\mathbf{V}^2 \subset \mathbf{U}$. Entonces si $x, y \in \mathbf{V}$, tenemos que $xy \in \mathbf{V}^2 \subset \mathbf{U}$. Por tanto $xy \in \mathbf{H}$, esto es, la operación producto en $\mathbf{H}$ es cerrada.

Además, sea $\mathbf{V}\mathscr{A}$, tal que $\mathbf{V}^{-1} \subset \mathbf{U}$, entonces si $x \in \mathbf{V}$, tenemos que $x^{-1} \in \mathbf{V}^{-1} \subset \mathbf{U}$ por tanto $x^{-1} \in \mathbf{H}$ para $x \in \mathbf{H}$. Esto prueba que $\mathbf{H}$ es un subgrupo.

Para ver que $\mathbf{H}$ es cerrado, sea a cualquier elemento de $\mathbf{G}$ tal que $a \notin \mathbf{H}$. Entonces $a \in \mathbf{U}$ para algún $\mathbf{U} \in \mathscr{A}$. Sean $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \in \mathscr{A}$ tal que

$$\mathbf{V}_1^2 \subset \mathbf{U}, \mathbf{V}_2^{-1} \subset \mathbf{V}_1 \text{ y } \mathbf{V} \subset \mathbf{V}_1 \bigcap \mathbf{V}_2;$$

entonces $\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}$. Observemos que $(a\mathbf{V}) \bigcap \mathbf{V} \neq \emptyset$, implica $a \in \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}$, sea $x \in (a\mathbf{V}) \bigcap \mathbf{V}$,

$$\begin{aligned} x \in (a\mathbf{V}) \bigcap \mathbf{V} &\Rightarrow x \in a\mathbf{V} \wedge x \in \mathbf{V} \\ &\Rightarrow x = av, v \in \mathbf{V} \wedge x \in \mathbf{V} \\ &\Rightarrow xv^{-1} = avv^{-1} = a \in \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}. \end{aligned}$$

Luego $a \in \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}$, por lo tanto si $(a\mathbf{V}) \bigcap \mathbf{V} \neq \emptyset$, tenemos $a \in \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} \subset \mathbf{U}$, esto implica que $a \in \mathbf{H}$, lo cual es una contradicción por que habíamos supuesto que $a \notin \mathbf{H}$. Por tanto tenemos $a \in a\mathbf{V} \subset \mathbf{G} - \mathbf{H}$, esto es, $\mathbf{G} - \mathbf{H} = \bigcup a\mathbf{V}$ y como cada $a\mathbf{V}$ es abierto tenemos que $\mathbf{G} - \mathbf{H}$ es abierto. Por lo tanto $\mathbf{H}$ es cerrado.

Suponga que el numeral (IV) es verdadero y sea $a \in \mathbf{H}$ y $x \in \mathbf{G}$. Para $\mathbf{U} \in \mathscr{A}$, sea $\mathbf{V} \in \mathscr{A}$ tal que $x\mathbf{V}x^{-1} \subset \mathbf{U}$. Entonces para $a \in \mathbf{V}$,

$$xax^{-1} \in x\mathbf{V}x^{-1} \subset \mathbf{U},$$

entonces $xax^{-1} \in \mathbf{U}$, como $\mathbf{U} \in \mathscr{A}$ es arbitrario y por definición $\mathbf{H} = \cap\{\mathbf{U}|\mathbf{U} \in \mathscr{A}\}$, se tiene que $xax^{-1} \in \mathbf{H}$.

Por tanto $\mathbf{H}$ es un subgrupo normal (Definición 1.13). ■

Como un pequeño complemento al Teorema 2.17, tenemos en el siguiente teorema, el cual nos da métodos para generar subgrupos abiertos y cerrados a partir de vecindades de e.

Teorema 2.18 *Sea $\mathbf{U}$ cualquier vecindad simétrica de e en un grupo topológico $\mathbf{G}$. Entonces el conjunto*

$$\mathbf{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{U}^n$$

es un subgrupo abierto y cerrado de $\mathbf{G}$.

Prueba. Sea $x, y \in \mathbf{L}$, si $x \in \mathbf{U}^k$ y $y \in \mathbf{U}^l$, entonces $xy \in \mathbf{U}^k\mathbf{U}^l = \mathbf{U}^{k+l} \subset \mathbf{L}$ por lo que el producto en $\mathbf{L}$ es cerrado, además si $x \in \mathbf{L}, x \in \mathbf{U}^k$ entonces

$$\begin{aligned} x^{-1} \in (\mathbf{U}^k)^{-1} &= \mathbf{U}^{-k} \\ &= \mathbf{U}^k, \text{ ya que } \mathbf{U} \text{ es simétrica} \\ &\subset \mathbf{L} \end{aligned}$$

Por tanto $\mathbf{L}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$ y como $\mathbf{L}$ es la unión contable de abierto, por definición de topología $\mathbf{L}$ es abierto y por el Teorema 2.16, $\mathbf{L}$ es cerrado. Por lo tanto $\mathbf{L}$ es un subgrupo abierto y cerrado de $\mathbf{G}$. ■

Definición 2.7 *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio topológico y* $x \in \mathbf{X}$. *Diremos que el punto* x *es* **punto aislado** *si existe una vecindad* $\mathbf{U}$ *de* x *tal que* $\mathbf{X} \cap \mathbf{U} = \{x\}$.

La Definición 2.7 implica que si todo punto x es aislado entonces $\{x\} = \mathbf{X} \cap \mathbf{U}$ es abierto ya que tanto $\mathbf{X}$ como $\mathbf{U}$ es abierto, por lo tanto conjunto unipuntual $\{x\}$ es abierto. Como todo subconjunto $\mathbf{A}$ de $\mathbf{X}$ es la unión de $\{x\}$, tenemos que todo subconjunto $\mathbf{A}$ es abierto, así tenemos la siguiente definición

Definición 2.8 *Un espacio topológico es* **discreto** *si, y sólo si todo punto* $x \in \mathbf{X}$ *es un punto aislado.* **discreto**.

Teorema 2.19 *Un subgrupo* $\mathbf{H}$ *de un grupo topológico* $\mathbf{G}$ *es discreto si y sólo, si tiene un punto aislado.*

Prueba.

(⇒) Si $\mathbf{H}$ es discreto, entonces por la Definición 2.8 todo punto es aislado. Por lo tanto si $\mathbf{H}$ es discreto entonces tiene un punto aislado.

(⇐) Supóngase que $x \in \mathbf{H}$ y que x es aislado en la topología relativa de $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$. Entonces, existe una vecindad $\mathbf{U}$ de e en $\mathbf{G}$ tal que $(x\mathbf{U}) \cap \mathbf{H} = \{x\}$. Entonces para un elemento arbitrario

$y \in \mathbf{H}$, tenemos

$$\begin{aligned}(y\mathbf{U}) \cap \mathbf{H} &= ((ye)\mathbf{U}) \cap \mathbf{H} \\ &= (y(x^{-1}x)\mathbf{U}) \cap \mathbf{H} \\ &= (yx^{-1}(x\mathbf{U})) \cap \mathbf{H} \\ &= yx^{-1}((x\mathbf{U}) \cap \mathbf{H}) \\ &= yx^{-1}\{x\}, \text{ ya que } (x\mathbf{U}) \cap \mathbf{H} = \{x\} \\ &= \{yx^{-1}x\} \\ &= \{ye\} \\ &= \{y\}.\end{aligned}$$

Por tanto todo punto de $\mathbf{H}$ es aislado, por lo tanto, según la Definición 2.8 tenemos que $\mathbf{H}$ es discreto.

■

Teorema 2.20 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico y* $\mathbf{H}$ *un subgrupo de* $\mathbf{G}$ *tal que* $\overline{\mathbf{U}} \cap \mathbf{H}$ *es cerrado en* G *para alguna vecindad* $\mathbf{U}$ *de* e *en* $\mathbf{G}$. *Entonces* $\mathbf{H}$ *es cerrado.*

Prueba. Por definición de clausura tenemos que $\mathbf{H} \subset \overline{\mathbf{H}}$.

Para la otra inclusión, sea $x \in \overline{\mathbf{H}}$, sea $\mathbf{U}$ una vecindad de e en $\mathbf{G}$ tal que $\overline{\mathbf{U}} \cap \mathbf{H}$ es cerrado en $\mathbf{G}$. Sea $\mathbf{V}$ una vecindad simétrica de e en $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{V}^2 \subset \mathbf{U}$ y sea $x_\alpha, \alpha \in \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ un conjunto de índices) una sucesión en $\mathbf{H}$ tal que x_α converge a x. Como, por Corolario 2.5, $\overline{\mathbf{H}}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$, tenemos que $x^{-1} \in \overline{\mathbf{H}}$, como $\mathbf{V}x^{-1}$ es vecindad de $x^{-1}, \mathbf{V}x^{-1} \cap \mathbf{H} \neq \emptyset$. Sea $y \in \mathbf{V}x^{-1} \cap \mathbf{H}$. Si existe un $\alpha_0 \in \mathbf{I}$ tal que $x_\alpha \in x\mathbf{V}$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Por lo tanto, si $\alpha \geq \alpha_0$, tenemos

$$\begin{aligned}yx_\alpha \in (\mathbf{V}x^{-1})(x\mathbf{V}) &= \mathbf{V}(x^{-1}x)\mathbf{V} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{V} = \mathbf{V}^2 \\ &\subset \mathbf{U}\end{aligned}$$

y por tanto $yx_\alpha \in \overline{\mathbf{U}} \cap \mathbf{H}$. Dado que $\{yx_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{I}}, \alpha \geq \alpha_0$ converge a yx_α y como $\overline{\mathbf{U}} \cap \mathbf{H}$ es cerrado, tenemos que $yx \in \overline{\mathbf{U}} \cap \mathbf{H}$. Dado que $x = y^{-1}yx \in \mathbf{H}$, tenemos que $\overline{\mathbf{H}} \subset \mathbf{H}$, y por lo que $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$, esto es, $\mathbf{H}$ es cerrado. ■

Teorema 2.21 *Todo subgrupo discreto* $\mathbf{H}$ *de un grupo topológico-*T_0 *es cerrado.*

Prueba. Como $\mathbf{H}$ es discreto si todos sus puntos son aislado, tenemos que e es un punto aislado de $\mathbf{H}$, entonces, existe una vecindad $\mathbf{U}$ de e en $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{U} \cap \mathbf{H} = \{e\}$. Por el Corolario 2.4, existe una vecindad $\mathbf{V}$ de e tal que $\overline{\mathbf{V}} \subset \mathbf{U}$. Entonces $\overline{\mathbf{V}} \cap \mathbf{H} = \{e\}$, la cual es cerrado ya que, por el Teorema 2.7, $\mathbf{G}$ es Hausdorff. Así el Teorema 2.20, implica que $\mathbf{H}$ es cerrado. ■

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 2.21.

Teorema 2.22 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico-*T_0 *y* $\mathbf{H}$ *un subgrupo de* $\mathbf{G}$ *que es localmente compacto en la topología relativa. Entonces* H *es cerrado.*

Prueba. Sea $\mathbf{U}$ una vecindad de e en $\mathbf{G}$ tal que $\overline{\mathbf{U}} \cap \mathbf{H}$ es compacto como un subconjunto de $\mathbf{H}$, y por consiguiente como un subconjunto de $\mathbf{G}$. Como $\mathbf{G}$ es Hausdorff, $\overline{\mathbf{U}} \cap \mathbf{H}$ es cerrado. Por lo tanto por el Teorema 2.20, $\mathbf{H}$ es cerrado. ■

Definición 2.9 *Un grupo topológico* $\mathbf{G}$ *se dice que es* **compacta-mente generado** *si contiene un subconjunto compacto* $\mathbf{F}$ *para el cual el subgrupo generado por* $\mathbf{F}$ *es* $\mathbf{G}$; *esto es,*

$$\mathbf{G} = \{e\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbf{F} \cup \mathbf{F}^{-1})^n.$$

Teorema 2.23 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico localmente compacto. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) $\mathbf{G}$ *es compacta-mente generado;*

(II) existe un subconjunto abierto $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{G}$ *tal que* $\overline{\mathbf{U}}$ *es compacto y* $\mathbf{U}$ *genera* $\mathbf{G}$;

(III) existe una vecindad $\mathbf{U}$ *de* e *en* $\mathbf{G}$ *tal que* $\overline{\mathbf{U}}$ *es compacto y* $\mathbf{U}$ *genera* $\mathbf{G}$.

Prueba. $(III) \Rightarrow (II)$ Sea $\mathbf{U}$ una vecindad de e tal que $\overline{\mathbf{U}}$ es compacto y

$$\mathbf{G} = \{e\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbf{U} \cup \mathbf{U}^{-1})^n.$$

Como toda vecindad $\mathbf{U}$ de e es un subconjunto abierto de $\mathbf{G}$ tenemos que existe $\mathbf{U}$ subconjunto abierto de $\mathbf{G}$ tal que $\overline{\mathbf{U}}$ es compacto y

$$\mathbf{G} = \{e\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbf{U} \cup \mathbf{U}^{-1})^n.$$

$(II) \Rightarrow (I)$ Sea $\mathbf{U}$ un subconjunto abierto de $\mathbf{G}$ tal que $\overline{\mathbf{U}}$ es compacto y

$$\mathbf{G} = \{e\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbf{U} \cup \mathbf{U}^{-1})^n.$$

Como $\mathbf{U} \subset \overline{\mathbf{U}}$, tenemos que

$$\mathbf{G} = \{e\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbf{U} \cup \mathbf{U}^{-1})^n \subset \{e\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{\mathbf{U}} \cup \overline{\mathbf{U}}^{-1})^n.$$

Además tenemos que $\{e\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{\mathbf{U}} \cup \overline{\mathbf{U}}^{-1})^n \subset \mathbf{G}$. Por lo que

$$\mathbf{G} = \{e\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbf{U} \cup \mathbf{U}^{-1})^n = \{e\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{\mathbf{U}} \cup \overline{\mathbf{U}}^{-1})^n.$$

Por lo tanto $\mathbf{G}$ es compactamente generado.

$(I) \Rightarrow (III)$ Supóngase que $\mathbf{G}$ es compacta-mente generado; sea $\mathbf{F}$ un subconjunto compacto de $\mathbf{G}$ que genera a $\mathbf{G}$. Entonces $\mathbf{F} \cup \{e\}$ es compacto, y por Teorema 2.11 existe un conjunto abierto $\mathbf{U}$ conteniendo $\mathbf{F} \cup \{e\}$ tal que $\overline{\mathbf{U}}$ es compacto. Entonces $\mathbf{U}$ genera $\mathbf{G}$.

■

Teorema 2.24 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo localmente compacto con identidad* e *y sea* $\mathbf{F}$ *cualquier subconjunto compacto de* $\mathbf{G}$. *Entonces existe un subgrupo cerrado y abierto compacta-mente generado de* $\mathbf{G}$ *conteniendo* $\mathbf{F}$.

Prueba. Como $\mathbf{F} \cup \{e\}$ es compacto, el Teorema 2.11 implica que existe un conjunto abierto $\mathbf{U}$ conteniendo $\mathbf{F} \cup \{e\}$ tal que $\overline{\mathbf{U}}$ es compacto. Por lo tanto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbf{U} \cup \mathbf{U}^{-1})^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{\mathbf{U}} \cup (\overline{\mathbf{U}})^{-1})^n$$

es un conjunto compacta-mente generado, y por el Teorema 2.18, es un subgrupo abierto y cerrado de $\mathbf{G}$. ■

2.4. Grupos Topológicos Cocientes

Como en la teoría de grupos puramente algebraica, los subgrupos de grupos topológicos juegan un rol esencial en la formación de imágenes homomórficas. Las propiedades de los subgrupos en cuestión también jugaran una parte importante en nuestras construcciones. Ahora tomamos en consideración los homomorfismos continuos de grupos topológicos y como son usados para obtener subgrupos normales.

Definición 2.10 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico, y sea* $\mathbf{H}$ *un subgrupo de* $\mathbf{G}$. *Sea* $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ *la aplicación natural definida por* $\varphi(x) = x\mathbf{H}$. *Definimos una topología* $\mathcal{T}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$ *para* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *por la siguiente regla: un subconjunto* $\{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\}$ *de* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *está en* $\mathcal{T}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$ *si y sólo, si*

$$\varphi^{-1}(\{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\})$$

es abierto en $\mathbf{G}$, *donde* $\mathbf{X} \subset \mathbf{G}$. *En otras palabras,* $\{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\}$ *es abierto si y sólo, si*

$$\bigcup_{x \in \mathbf{X}} x\mathbf{H} = \mathbf{X}\mathbf{H}$$

es abierto en $\mathbf{G}$.

Observemos que $\{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\} = \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\mathbf{H}\}$. Si $Y \in \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\}$, entonces

$$\begin{aligned} Y &= x\mathbf{H}, \ \ x \in \mathbf{X} \\ &= xe\mathbf{H} \\ &= x\mathbf{H}, \ \ \text{con} \ \ x = xe \in \mathbf{X}\mathbf{H} \end{aligned}$$

luego $Y \in \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\mathbf{H}\}$, por tanto $\{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\} \subset \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\mathbf{H}\}$.

Además si $Y \in \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\mathbf{H}\}$, entonces

$$\begin{aligned} Y &= x\mathbf{H}, \ \ x \in \mathbf{X}\mathbf{H} \\ &= x_1h_1\mathbf{H}, \ \ x_1 \in \mathbf{X}, h_1 \in \mathbf{H} \\ &= x_1\mathbf{H}, \ \ x_1 \in \mathbf{X} \end{aligned}$$

luego $Y \in \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\}$, por lo que $\{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{XH}\} \subset \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\}$. Por lo tanto

$$\{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\} = \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{XH}\}.$$

Como $\{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{X}\} = \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{XH}\}$ se sigue que todo conjunto abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ tiene la forma $\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}$ donde $\mathbf{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathbf{G}$. Así $\mathcal{T}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$ consiste de todos los conjuntos de la forma $\{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{U}\}$ donde $\mathbf{U}$ es abierto.

Sea $a\mathbf{H} \in \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{U}\}$ donde $\mathbf{U}$ es abierto en $\mathbf{G}$ y $a \in \mathbf{U}$, como $\mathbf{U}$ es abierto con $a \in \mathbf{U}$, por la Definición 1.26, existe un básico $\mathbf{B} \in \mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ es la base para $\mathbf{G}$, tal que $a \in \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \subset \mathbf{U}$, por tanto dado un abierto $\{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{U}\}$ en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ tal que $a\mathbf{H} \in \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{U}\}$ existe $\{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{B}\} \in \mathscr{B}_{a\mathbf{H}}$ tal que

$$a\mathbf{H} \in \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{B}\} \subset \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{U}\},$$

por la Definición 1.27, esto significa que los conjuntos de la forma $\{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{U}\}$ donde $\mathbf{U}$ es abierto en $\mathbf{G}$ y $a \in \mathbf{U}$ forman una base en cada punto $a\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}/\mathbf{H}$.

Teorema 2.25 *La familia $\mathcal{T}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$ es una topología para $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Sobre esta topología, la aplicación natural φ de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es continua, y $\mathcal{T}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$ es la topología más fuerte en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ sobre la cual la aplicación φ es continua.*

Prueba. Sea $\mathbf{I}$ un conjunto de índices y sea $\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}_i\}_{i\in\mathbf{I}}$ una familia de subconjuntos abiertos de $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ donde cada $\mathbf{U}_i$ es abierto en $\mathbf{G}$. Entonces

$$\bigcup_{i\in\mathbf{I}}\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}_i\} = \{u\mathbf{H}|u \in \cup_{i\in\mathbf{I}}\mathbf{U}_i\}$$

es abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ ya que $\cup_{i\in\mathbf{I}}\mathbf{U}_i$ es abierto en $\mathbf{G}$.

Similarmente, sea $\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de subconjuntos abiertos de $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ donde cada $\mathbf{U}_i$ es abierto en $\mathbf{G}$. Entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n}\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}_i\} = \{u\mathbf{H}|u \in \cap_{i=1}^{n}\mathbf{U}_i\}$$

es abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ ya que $\cap_{i=1}^{n}\mathbf{U}_i$ es abierto en $\mathbf{G}$.

Además como $\mathbf{G}/\mathbf{H} = \{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{G}\}$ y ya que $\mathbf{G}$ es abierto $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ están en $\mathcal{T}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$, también $\emptyset$ esta en $\mathcal{T}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$, y por lo tanto $\mathcal{T}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$ es una topología en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$.

Para mostrar que $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ es continua, consideremos $\phi : \mathbf{G}/\mathbf{H} \to \mathbf{G}$ la aplicación definida por $\phi(x\mathbf{H}) = x$, así tenemos

$$\begin{aligned}(\phi \circ \varphi)(x) &= \phi(\varphi(x)) \\ &= \phi(x\mathbf{H}) \\ &= x,\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \phi)(x\mathbf{H}) &= \varphi(\phi(x\mathbf{H})) \\ &= \phi(x) \\ &= x\mathbf{H}\end{aligned}$$

por lo que $\phi = \varphi^{-1}$. Ahora bien, si $\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}$ es abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}) &= \phi(\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}) \\ &= \mathbf{U}\end{aligned}$$

el cual es abierto en $\mathbf{G}$. Por tanto φ es continua. ■

Definición 2.11 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico y* $\mathbf{H}$ *un subgrupo cerrado de* $\mathbf{G}$. *Entonces el espacio* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *definido en el Teorema 2.25, es llamado el* **espacio de clases laterales izquierdas** *de* $\mathbf{G}$ *con respecto a* $\mathbf{H}$. *Similarmente, si* $\mathbf{G}$ *es un grupo topológico, podemos definir el* **espacio de clases laterales derechas** *denotado por* $\mathbf{H} \setminus \mathbf{G}$ *y definido como*

$$\mathbf{H} \setminus \mathbf{G} = \{\mathbf{H}x|x \in \mathbf{G}\}$$

cuya topología esta determinada por el requisito que la aplicación canónica $p : \mathbf{G} \to \mathbf{H} \setminus \mathbf{G}$, *donde* $p(x) = \mathbf{H}x$ *para cada* $x \in \mathbf{G}$, *sea cociente.*

El espacio topológico $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es llamado **espacio cociente** de $\mathbf{G}$ por $\mathbf{H}$. Ahora hacemos una lista de hechos acerca de $\mathbf{G}/\mathbf{H}$.

Teorema 2.26 *La aplicación natural φ de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es una aplicación abierta.*

Prueba. Si $\mathbf{U}$ es un subconjunto abierto, entonces, por el Teorema 2.14, $\mathbf{UH}$ es abierto y por tanto

$$\varphi(\mathbf{U}) = \mathbf{UH} = \bigcup_{u\in\mathbf{U}} u\mathbf{H}$$

es abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. ■

La aplicación natural φ de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ no necesita ser una aplicación cerrada: $\varphi(\mathbf{A})$ puede ser no cerrado en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ para subconjuntos cerrados $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}$. El grupo aditivo $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, proveen un ejemplo. Toda clase $x+\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ contiene un número $x-[x]$ ($[x]$ es la parte entera de x) y no otro número en $[0,1)$. Así $[0,1)$ puede tomarse como el espacio $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La topología impuesta en $[0,1)$ como un modelo del espacio $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es el siguiente. Una base abierta consistiendo de todos los conjuntos (α,β) donde $0<\alpha<\beta<1$ y todos los conjuntos $[0,\alpha)\cup(\beta,1)$ donde $0<\alpha<\beta<1$. Ahora sea

$$\mathbf{A} = \left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \cdots, n+2^{-n}, \cdots\right\}.$$

Entonces el conjunto $\mathbf{A}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ pero $\varphi(\mathbf{A}) \subset [0,1)$ es el conjunto $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\}$ el cual no es cerrado.

En vista de este ejemplo, tenemos el siguiente teorema de mucho interés.

Teorema 2.27 *Si $\mathbf{G}$ es un grupo topológico y $\mathbf{H}$ es un subgrupo compacto de $\mathbf{G}$, entonces la aplicación natural φ de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es una aplicación cerrada.*

Prueba. Sea $\mathbf{A}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbf{G}$, entonces $\mathbf{G}-\mathbf{A}$ es un subconjunto abierto. Mostremos que $\mathbf{G}/\mathbf{H}-\varphi(\mathbf{A})$ es abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Sea $x\in\mathbf{G}-\mathbf{A}$, entonces $x\in\mathbf{G}$ y $x\notin\mathbf{A}$, así

$$x\mathbf{H} \notin \varphi(\mathbf{A}) = \{x\mathbf{H} | x\in\mathbf{A}\} = \{x\mathbf{H}|x\in\mathbf{AH}\};$$

entonces $x\notin\mathbf{AH}$. Como $\mathbf{A}$ es cerrado y por hipótesis $\mathbf{H}$ es compacto, por Teorema 2.14, tenemos que $\mathbf{AH}$ es cerrado , y por ser $\mathbf{AH}$ cerrado, tenemos que $\mathbf{AH}=\overline{\mathbf{AH}}$, como $x\notin\mathbf{AH}, x\notin\overline{\mathbf{AH}}$, esto implica que existe una vecindad $\mathbf{U}$ de x tal que $\mathbf{U}\cap(\mathbf{AH})=\emptyset$. Ya que φ es una aplicación abierta, $\varphi(\mathbf{U}) = \{u\mathbf{H}|u\in\mathbf{U}\}$ es un es un conjunto abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ talque $x\mathbf{H}\in\{u\mathbf{H}|u\in\mathbf{U}\}$, y como $x\mathbf{H}\notin\varphi(\mathbf{A})$, obtenemos $\{u\mathbf{H}|u\in\mathbf{U}\}\cap\varphi(\mathbf{A})=\emptyset$, el Lema 1.16 implica que

$$\{u\mathbf{H}|u\in\mathbf{U}\}\subset\mathbf{G}-\varphi(\mathbf{A}),$$

entonces

$$\mathbf{G}/\mathbf{H} - \varphi(\mathbf{A}) = \bigcup\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}$$

y como cada $\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}$ es abierto, tenemos que $\mathbf{G}/\mathbf{H} - \varphi(\mathbf{A})$ es abierto. Por lo tanto φ es una aplicación cerrado ■

Teorema 2.28 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico,* $\mathbf{H}$ *un subgrupo de* $\mathbf{G}$, *y* $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ *vecindades de* e *en* $\mathbf{G}$ *tal que* $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$. *Sea* φ *la aplicación natural de* $\mathbf{G}$ *sobre* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. *Entonces*

$$\overline{\varphi(\mathbf{V})} \subset \varphi(\mathbf{U}).$$

Prueba. Sea $x\mathbf{H} \in \overline{\varphi(\mathbf{V})}$ en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Entonces $\{vx\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\}$ es una vecindad de $x\mathbf{H}$ tal que $\{vx\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\} \cap \varphi(\mathbf{V}) \neq \emptyset$. Sea $z \in \{vx\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\} \cap \varphi(\mathbf{V})$,

$$\begin{aligned} Z \in \{vx\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\} \cap \varphi(\mathbf{V}) &\Rightarrow Z \in \{vx\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\} \wedge Z \in \varphi(\mathbf{V}) = \{v\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\} \\ &\Rightarrow Z = v_1x\mathbf{H}, v_1 \in \mathbf{V} \wedge Z = v_2\mathbf{H}, v_2 \in \mathbf{V} \\ &\Rightarrow v_1x\mathbf{H} = v_2\mathbf{H}, v_1, v_2 \in \mathbf{V} \\ &\Rightarrow v_1^{-1}v_1x\mathbf{H} = v_1^{-1}v_2\mathbf{H}, v_1, v_2 \in \mathbf{V} \\ &\Rightarrow x\mathbf{H} = v_1^{-1}v_2\mathbf{H}, v_1, v_2 \in \mathbf{V}; \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} x\mathbf{H} = v_1^{-1}v_2\mathbf{H} \in \{v_1^{-1}v_2\mathbf{H}|v_1^{-1}v_2 \in \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\} &= \{w\mathbf{H}|w \in \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\}, \text{ con } w = v_1^{-1}v_2 \\ &\subset \{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}, \quad \text{ya que } \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V} \subset \mathbf{U} \\ &= \varphi(\mathbf{U}). \end{aligned}$$

Luego $x\mathbf{H} \in \varphi(\mathbf{U})$.

Por lo tanto

$$\overline{\varphi(\mathbf{V})} \subset \varphi(\mathbf{U}).$$

■

Teorema 2.29 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico y* $\mathbf{H}$ *un subgrupo de* $\mathbf{G}$*. Para cada* $a \in \mathbf{G}$ *sea* ${}_a\psi : \mathbf{G}/\mathbf{H} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ *de* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *sobre sí mismo, definido por*

$$ {}_a\psi(x\mathbf{H}) = (ax)\mathbf{H}, \quad \textit{para todo } \; x\mathbf{H} \in \mathbf{G}/\mathbf{H}. $$

Entonces ${}_a\psi$ *es un homeomorfismo de* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$*. Así* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *es un espacio homogéneo.*

Prueba. Sean $x\mathbf{H}, y\mathbf{H} \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$ tal que ${}_a\psi(x\mathbf{H}) =_a \psi(yH)$, entonces

$$ \begin{aligned} {}_a\psi(x\mathbf{H}) &=_a \psi(y\mathbf{H}) \\ (ax)\mathbf{H} &= (ay)\mathbf{H} \\ a^{-1}(ax)\mathbf{H} &= a^{-1}(ay)\mathbf{H} \\ (a^{-1}ax)\mathbf{H} &= (a^{-1}ay)\mathbf{H} \\ (ex)\mathbf{H} &= (ey)\mathbf{H} \\ x\mathbf{H} &= y\mathbf{H}. \end{aligned} $$

Esto prueba que ${}_a\psi$ es un monomorfismo.

Por otra parte, si $a, x \in \mathbf{G}$, tenemos que $ax \in \mathbf{G}$, sea $ax\mathbf{H} \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$, entonces

$$ \begin{aligned} ax\mathbf{H} &= (ax)\mathbf{H} \\ &=_a \psi(x\mathbf{H}). \end{aligned} $$

para algún $x\mathbf{H} \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$, así que ${}_a\psi$ es un epimorfismo, y por lo tanto un isomorfismo.

Además si $x\mathbf{H} \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$, entonces

$$ \begin{aligned} ({}_a\psi \circ_{a^{-1}} \psi)(x\mathbf{H}) &=_a \psi({}_{a^{-1}}\psi(x\mathbf{H})) \\ &=_a \psi((a^{-1}x)\mathbf{H}) \\ &= (aa^{-1}x)\mathbf{H} \\ &= (ex)\mathbf{H} \\ &= x\mathbf{H}. \end{aligned} $$

y

$$
\begin{aligned}
({}_{a^{-1}}\psi \circ_a \psi)(x\mathbf{H}) &=_{a^{-1}} \psi({}_a\psi(x\mathbf{H})) \\
&=_{a^{-1}} \psi((ax)\mathbf{H}) \\
&= (a^{-1}ax)\mathbf{H} \\
&= (ex)\mathbf{H} \\
&= x\mathbf{H}.
\end{aligned}
$$

así ${}_a\psi \circ_{a^{-1}} \psi = Id =_{a^{-1}} \psi \circ_a \psi$, donde Id es la función identidad de $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, por lo que ${}_a\psi^{-1} =_{a^{-1}} \psi$. Para mostrar que ${}_a\psi$ es un homeomorfismo solo necesitamos probar que ${}_a\psi$ es una aplicación abierta. Sea

$$\{u\mathbf{H}|u \in U\}$$

un subconjunto abierto de $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, donde $\mathbf{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathbf{G}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
{}_a\psi(\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}) &= \{au\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\} \\
&= \{v\mathbf{H}|v \in a\mathbf{U}\}, \text{ con } v = au
\end{aligned}
$$

es abierto, ya que $a\mathbf{U}$ es abierto en $\mathbf{G}$. Por lo tanto ${}_a\psi$ es un homeomorfismo. ■

Proposición 2.5 *Suponga que* $\mathbf{G}$ *es un grupo topológico,* $\mathbf{H}$ *es un subgrupo cerrado de* $\mathbf{G}, \varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ *la aplicación cociente natural de* $\mathbf{G}$ *sobre el espacio cociente izquierdo* $\mathbf{G}/\mathbf{H}, a \in \mathbf{G},_a \lambda : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ *es la traslación izquierda de* $\mathbf{G}$ *por* a *(esto es,* ${}_a\lambda(x) = ax$ *para cada* $x \in \mathbf{G}$*), y* ${}_ah : \mathbf{G}/\mathbf{H} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ *es la traslación izquierda de* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *por* a *(esto es,* ${}_ah(x\mathbf{H}) = ax\mathbf{H}$ *para cada* $a\mathbf{H} \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$*). Entonces* ${}_a\lambda$ *y* ${}_ah$ *son homeomorfismo de* $\mathbf{G}$ *y* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$*, respectivamente, y* $\varphi \circ_a \lambda =_a h \circ \varphi$*.*

Prueba. Por el Teorema 2.1, ${}_a\lambda$ y ${}_ah$ son homeomorfismo. Si $x \in \mathbf{G}$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
(\varphi \circ_a \lambda)(x) &= \varphi({}_a\lambda(x)) \\
&= \varphi(ax) \\
&= ax\mathbf{H},
\end{aligned}
$$

además,

$$\begin{aligned}({}_a h \circ \varphi)(x) &=_a h(\varphi(x)) \\ &=_a h(x\mathbf{H}) \\ &= ax\mathbf{H}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi \circ_a \lambda =_a h \circ \varphi$. ■

Teorema 2.30 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico y* $\mathbf{H}$ *un subgrupo de* $\mathbf{G}$. *Entonces*

(I) $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *es un espacio discreto si y sólo, si* $\mathbf{H}$ *es abierto en* $\mathbf{G}$.

(II) Si $\mathbf{H}$ *es cerrado, entonces* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *es un espacio regular y por tanto un espacio Hausdorff.*

(III) Si $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *es un espacio-*T_0, *entonces* $\mathbf{H}$ *es cerrado y* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *es un espacio regular.*

Prueba.

(I) ($\Leftarrow$) Si $\mathbf{H}$ es abierto en $\mathbf{G}$, entonces $a\mathbf{H}$ es abierto en $\mathbf{G}$ para todo $a \in \mathbf{G}$, y además tenemos que $\varphi^{-1}(\{a\mathbf{H}\}) = a\mathbf{H}$ es abierto en $\mathbf{G}$ para todo punto $a\mathbf{H} \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$. Esto es, todo punto de $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es un conjunto abierto, y por tanto todo subconjunto de $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es abierto, por lo tanto $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es discreto.

($\Rightarrow$) Si $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es discreto, entonces el conjunto $\{\mathbf{H}\}$ es abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, y por lo tanto tenemos que $\varphi^{-1}(\{\mathbf{H}\}) = \mathbf{H}$ es abierto en $\mathbf{G}$.

(II) Si $\mathbf{H}$ es cerrado en $\mathbf{G}$. Entonces $a\mathbf{H}$ es cerrado en $\mathbf{G}$ para todo $a \in \mathbf{G}$, y

$$\mathbf{G}/\mathbf{H} - a\mathbf{H} = \bigcup\{x\mathbf{H} | x\mathbf{H} \neq a\mathbf{H}\}$$

es abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Esto implica que el complemento de cada conjunto $\{a\mathbf{H}\}$ en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Por tanto cada punto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es un conjunto cerrado. Esta propiedad es equivalente a el axioma de separación T_1. Esto y el Teorema 2.28 implica que $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es regular.

(III) Si $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es un espacio T_0. Entonces por el Teorema 2.28, es también un espacio T_1, así que el conjunto $\{x\mathbf{H}|x\mathbf{H} \neq \mathbf{H}\}$ es abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Esto implica que

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}/\mathbf{H} - (\cup\{x\mathbf{H}|x\mathbf{H} \neq \mathbf{H}\})$$

es cerrado en $\mathbf{G}$.

■

Teorema 2.31 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo compacto (localmente compacto Hausdorff) y sea* $\mathbf{H}$ *un subgrupo de* $\mathbf{G}$. *Entonces el espacio* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *es compacto (localmente compacto).*

Prueba.

(I) Si $\mathbf{G}$ es compacto, como por el Teorema 2.25, la aplicación natural φ de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es continua, y ya que $\mathbf{G}/\mathbf{H} = \varphi(\mathbf{G})$, entonces, por Teorema 1.17, $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es compacto.

(II) Supongamos que $\mathbf{G}$ es localmente compacto, entonces $a \in \mathbf{G}$ tiene una vecindad $\mathbf{U}$ tal que $\overline{\mathbf{U}}$ es compacto, como $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ es continua, tenemos por el Teorema 1.17 que $\varphi(\overline{\mathbf{U}})$ es compacto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Como $\mathbf{U} \subset \overline{\mathbf{U}}$, se tiene que $\varphi(\mathbf{U}) \subset \varphi(\overline{\mathbf{U}})$; además como $\mathbf{G}$ es Hausdorff, se tiene que $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es Hausdorff, entonces por el Teorema 1.17 tenemos que $\varphi(\overline{\mathbf{U}})$ es cerrado, y $\overline{\varphi(\mathbf{U})} \subset \varphi(\overline{\mathbf{U}})$, entonces por el Corolario 1.2 $\overline{\varphi(\mathbf{U})}$ es compacto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Por lo tanto, para todo $\varphi(a)$ tenemos una vecindad $\varphi(\mathbf{U})$ tal que $\overline{\varphi(\mathbf{U})}$ es compacto, esto es $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es localmente compacto (Definición 1.16).

Suponga que $\mathbf{G}$ es localmente compacto, y que $\mathbf{U}$ es una vecindad de e en $\mathbf{G}$ tal que $\overline{\mathbf{U}}$ es compacto. Entonces $\varphi(\mathbf{U})$ tiene clausura compacta en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Como por el Teorema 2.29, $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es homogéneo, entonces $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es localmente compacto. ■

Ahora especificamos la construcción de una topología en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ en el caso en el cual $\mathbf{H}$ es un subgrupo normal, así que $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es un grupo.

Teorema 2.32 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico y* $\mathbf{H}$ *un subgrupo normal de* $\mathbf{G}$. *Sea el grupo cociente* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *con una topología como en la Definición 2.10. Entonces* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *es un grupo topológico. También* *la aplicación natural φ de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es un homomorfismo continuo abierto de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. El grupo $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es discreto si y sólo, si $\mathbf{H}$ es abierto y es un grupo T_0 (y por tanto regular) si y sólo, si $\mathbf{H}$ es cerrado.*

Prueba. Aplicando el Teorema 2.4, probamos que $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es un grupo topológico, probando que la familia de vecindades de $\mathbf{H}$ (la identidad) en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ satisface las condiciones (I)-(V), del Teorema 2.3.

Sea $\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}$ una vecindad arbitraria de $\mathbf{H}$ en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, donde $\mathbf{U}$ es una vecindad de e en $\mathbf{G}$. Por Teorema 2.3(I) existe una vecindad $\mathbf{V}$ de e en $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{V}^2 \subset \mathbf{U}$. Entonces $\{v\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\}$ es abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ y, además,

$$\begin{aligned} \{v\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\}^2 &= \{v\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\} \cdot \{v\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\} \\ &= \{v\mathbf{H}v\mathbf{H} = vv\mathbf{H}|v^2 \in \mathbf{V}^2\} \\ &\subset \{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}. \end{aligned}$$

Por tanto el Teorema 2.3(I) se satisface en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ y la topología $\mathcal{T}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$.

Sea $\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}$ una vecindad arbitraria de $\mathbf{H}$ en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, donde $\mathbf{U}$ es una vecindad de e en $\mathbf{G}$. Por Teorema 2.3(II) existe una vecindad $\mathbf{V}$ de e en $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{V}^{-1} \subset \mathbf{U}$. Entonces $\{v\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\}$ es abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ y, además,

$$\begin{aligned} \{v\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\}^{-1} &= \{y\mathbf{H}|y \in \mathbf{V}^{-1}\} \\ &\subset \{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}. \end{aligned}$$

Por tanto el Teorema 2.3(II) se satisface en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ y la topología $\mathcal{T}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$.

Verificamos el Teorema 2.3(III) para $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Otra vez sea $\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}$ una vecindad arbitraria de $\mathbf{H}$, donde $\mathbf{U}$ es una vecindad de e en $\mathbf{G}$, y sea $u_0\mathbf{H}$ un elemento arbitrario de $\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}$. Por Teorema 2.3(III), existe una vecindad $\mathbf{V}$ de e en $\mathbf{G}$ tal que $u_0\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$, entonces $\{v\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\}$ es una vecindad de la identidad $\mathbf{H}$ en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, y

$$\begin{aligned} u_0 \cdot \{v\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\} &= \{u_0v\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\} \\ &\subset \{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}. \end{aligned}$$

Esto es justamente el Teorema 2.3(III) para $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ y la topología $\mathcal{T}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$.

Para verificar el Teorema 2.3(IV) para $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ y la topología $\mathcal{T}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$, observemos que

$$\begin{aligned} x\mathbf{H}\cdot\{v\mathbf{H}|v\in\mathbf{V}\}\cdot(x\mathbf{H})^{-1} &= \{xvx^{-1}\mathbf{H}|v\in\mathbf{V}\} \\ &= \{xvx^{-1}\mathbf{H}|xvx^{-1}\in x\mathbf{V}x^{-1}\}. \end{aligned}$$

Sea $z\mathbf{H}\in x\mathbf{H}\cdot\{v\mathbf{H}|v\in\mathbf{V}\}\cdot(x\mathbf{H})^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} z\mathbf{H} &= x\mathbf{H}v\mathbf{H}(x\mathbf{H})^{-1} \\ &= x\mathbf{H}v\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1}x^{-1} \\ &= x\mathbf{H}v\mathbf{H}\mathbf{H}x^{-1},\ \text{ya que } \mathbf{H} \text{ es un subgrupo} \\ &= (x\mathbf{H}v\mathbf{H})x^{-1}\mathbf{H},\ \text{ya que } \mathbf{H} \text{ es normal} \\ &= (xv\mathbf{H})x^{-1}\mathbf{H} \\ &= xvx^{-1}\mathbf{H} \end{aligned}$$

esto implica que $z\mathbf{H}\in\{xvx^{-1}\mathbf{H}|v\in\mathbf{V}\}$. Luego

$$x\mathbf{H}\cdot\{v\mathbf{H}|v\in\mathbf{V}\}\cdot(x\mathbf{H})^{-1}\subset\{xvx^{-1}\mathbf{H}|v\in\mathbf{V}\}=\{xvx^{-1}\mathbf{H}|xvx^{-1}\in x\mathbf{V}x^{-1}\}$$

Además si $z\mathbf{H}\in\{xvx^{-1}\mathbf{H}|v\in\mathbf{V}\}$, entonces

$$\begin{aligned} z\mathbf{H} &= xvx^{-1}\mathbf{H}, v\in\mathbf{V} \\ &= (xv\mathbf{H})x^{-1}\mathbf{H}, v\in\mathbf{V} \\ &= (x\mathbf{H}v\mathbf{H})x^{-1}\mathbf{H}, v\in\mathbf{V} \\ &= (x\mathbf{H}v\mathbf{H})\mathbf{H}x^{-1}, v\in\mathbf{V}, \text{ya que } \mathbf{H} \text{ es normal} \\ &= x\mathbf{H}v\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1}x^{-1}, v\in\mathbf{V} \\ &= x\mathbf{H}v\mathbf{H}(x\mathbf{H})^{-1}, v\in\mathbf{V}, \end{aligned}$$

esto implica que $z\mathbf{H}\in x\mathbf{H}\cdot\{v\mathbf{H}|v\in\mathbf{V}\}\cdot(x\mathbf{H})^{-1}$. Luego

$$\{xvx^{-1}\mathbf{H}|v\in\mathbf{V}\}\subset x\mathbf{H}\cdot\{v\mathbf{H}|v\in\mathbf{V}\}\cdot(x\mathbf{H})^{-1}$$

Por tanto

$$x\mathbf{H}\cdot\{v\mathbf{H}|v\in\mathbf{V}\}\cdot(x\mathbf{H})^{-1}=\{xvx^{-1}\mathbf{H}|v\in\mathbf{V}\}$$

Ahora sea $\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}$ una vecindad arbitraria de $\mathbf{H}$ en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, donde $\mathbf{U}$ es una vecindad de e en $\mathbf{G}$. Por el Teorema 2.3(IV) existe una vecindad $\mathbf{V}$ de e en $\mathbf{G}$ tal que $x\mathbf{V}x^{-1} \subset \mathbf{U}$. Entonces $\{v\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\}$ es abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ y, además,

$$\begin{aligned} x\mathbf{H} \cdot \{v\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\} \cdot (x\mathbf{H})^{-1} &= \{xvx^{-1}\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}\} \\ &= \{xvx^{-1}\mathbf{H}|xvx^{-1} \in x\mathbf{V}x^{-1}\} \\ &\subset \{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el Teorema 2.3(IV) se satisface para $\mathbf{G}/\mathbf{H}$.

Para la propiedad (V) del Teorema 2.3, sean $\{u\mathbf{H}|u \in \mathbf{U}\}$ y $v\mathbf{H}|v \in \mathbf{V}$ vecindades arbitrarias de $\mathbf{H}$ en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, donde $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ son una vecindades de e en $\mathbf{G}$. Por el Teorema 2.3(V) existe una vecindad $\mathbf{W}$ tal que $\mathbf{W} \subset \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Entonces $\{w\mathbf{H}|w \in \mathbf{W}\}$ es abierto en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, además

$$\{w\mathbf{H}|w \in \mathbf{W}\} \subset \{y\mathbf{H}|y \in \mathbf{U} \cap \mathbf{V}\}$$

Por lo tanto el Teorema 2.3(V) se satisface para $\mathbf{G}/\mathbf{H}$.

Además por el Teoremas 2.26 se sigue que $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ es una aplicación abierta, y por Teorema 2.25, φ es un homomorfismo continuo, por lo tanto φ es un homomorfismo continuo abierto.

Por ultimo $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es discreto si y sólo si $\mathbf{H}$ es abierto en $\mathbf{G}$ (Teorema 2.30, numeral (I)). Si $\mathbf{H}$ es cerrado, entonces $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es un regular y por tanto Hausdorff, por otro lado si $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es T_0, entonces por Teorema 2.7 $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es regular y por Teorema 2.30 numeral (III) $\mathbf{H}$ es cerrado. ■

En la siguiente teorema, comparamos dos grupos dados de acuerdo a la medida de sus kernels

Teorema 2.33 *Suponga que* $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ *y* $\mathbf{K}$ *son grupos y que* $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ *y* $\psi : \mathbf{G} \to \mathbf{K}$ *son homomorfismos tal que* $\psi(\mathbf{G}) = \mathbf{K}$ *y ker* $\psi \subset$ *ker* φ*. Entonces existe un homomorfismo* $f : \mathbf{K} \to \mathbf{H}$ *tal que* $\varphi = f \circ \psi$*. Además si,* $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{K}$ *son grupos topológicos, y* φ *y* ψ *son continuas, y para cada vecindad* $\mathbf{U}$ *de la identidad* $e_{\mathbf{H}}$ *en* $\mathbf{H}$ *existe una vecindad* $\mathbf{V}$ *de la identidad* $e_{\mathbf{K}}$ *en* $\mathbf{K}$ *tal que* $\psi^{-1}(\mathbf{V}) \subset \varphi^{-1}(\mathbf{U})$*, entonces* f *es continua.*

Prueba. Definimos $f : \mathbf{K} \to \mathbf{H}$ por $f(k) = \varphi(a), a \in \mathbf{G}$ tal que $k = \psi(a)$, f esta bien definida ya que φ esta bien definida. Y si $k_1, k_2 \in \mathbf{K}$ entonces

$$\begin{aligned} f(k_1k_2) &= \varphi(ab), ab \in \mathbf{G} \\ &= \varphi(a)\varphi(b), \text{ ya que } \varphi \text{ es un homomorfismo} \\ &= f(k_1)f(k_2) \end{aligned}$$

por lo que f es un homomorfismo. Además si $k \in \mathbf{K} = \psi(\mathbf{G})$, entonces existe $a \in \mathbf{G}$ tal que $k = \psi(a)$, luego

$$f(k) = f(\psi(a)) = \varphi(a).$$

Y por lo tanto $\varphi = f \circ \psi$.

Mostremos la continuidad de f. Supóngase que $\mathbf{U}$ es una vecindad de $e_{\mathbf{H}}$ en $\mathbf{H}$. Por nuestra suposición, existe una vecindad $\mathbf{V}$ de $e_{\mathbf{K}}$ en $\mathbf{K}$ tal que $\mathbf{W} = \psi^{-1}(\mathbf{V}) \subset \varphi^{-1}(\mathbf{U})$. Entonces

$$f(\mathbf{V}) = \varphi(\mathbf{W}) \subset \mathbf{U},$$

esto es, f es continua en la identidad de $\mathbf{K}$. Por la Proposición 2.1, f es continua. ■

Corolario 2.6 *Sean $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ y $\psi : \mathbf{G} \to \mathbf{K}$ homomorfismos continuos de grupos topológicos $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ y $\mathbf{K}$ tal que $\psi(\mathbf{G}) = \mathbf{K}$ y ker $\psi \subset$ ker φ. Si el homomorfismo ψ es abierto, entonces existe un homomorfismo continuo $f : \mathbf{K} \to \mathbf{H}$ tal que $\varphi = f \circ \psi$.*

Prueba. De la Teorema 2.33 se sigue que existe el homomorfismo $f : \mathbf{K} \to \mathbf{H}$ que satisface $\varphi = f \circ \psi$. Mostramos que f es continua, tomamos un conjunto abierto arbitrario $\mathbf{V}$ en $\mathbf{H}$. Entonces $f^{-1}(\mathbf{V}) = \psi(\varphi^{-1}(\mathbf{V}))$. Como φ es continua y ψ es abierta, concluimos que el conjunto $f^{-1}(\mathbf{V})$ es abierto en $\mathbf{K}$. Por tanto, f es continua. ■

El Teorema 2.32 permite hablar a efecto que toda imagen homomórfica continua abierta de un grupo topológico puede realizarse como grupos topológicos $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ con la topología $\mathcal{T}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$.

Definición 2.12 *Dos grupos topológicos $\mathbf{G}, \widetilde{\mathbf{G}}$ se dice que son* **topológicamente isomorfos** *si existe una aplicación $f : \mathbf{G} \to \widetilde{\mathbf{G}}$ la cual es un isomorfismo de grupos y homeomorfismo.*

Sobre una interpretación estricta de la Definición 2.12, dos grupos podrían llamarse topológicamente isomorfos si existen dos aplicaciones de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{H}$, un isomorfismos de grupo y el otro un homeomorfismo.

Proposición 2.6 *Sean* $\mathbf{G}$ *y* $\mathbf{H}$ *grupos topológicos y* $f : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ *un isomorfismo topológico de* $\mathbf{G}$ *sobre* $\mathbf{H}$. *Si* $\mathbf{G}_0$ *es un subgrupo normal cerrado de* $\mathbf{G}$ *y* $\mathbf{H}_0 = f(\mathbf{G}_0)$, *entonces los cocientes* $\mathbf{G}/\mathbf{G}_0$ *y* $\mathbf{H}/\mathbf{H}_0$ *son topológicamente isomorfismos. El isomorfismo correspondiente* $\Phi : \mathbf{G}/\mathbf{G}_0 \to \mathbf{H}/\mathbf{H}_0$ *esta dado por*

$$\Phi(x\mathbf{G}_0) = f(x)\mathbf{H}_0, \;\; \textit{donde } x \in \mathbf{G}.$$

Prueba. Sean $\varphi_1 : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{G}_0$ y $\varphi_2 : \mathbf{H} \to \mathbf{H}/\mathbf{H}_0$ los homomorfismos naturales.

Mostramos que Φ es un homomorfismo, sean $x\mathbf{G}_0, z\mathbf{G}_0 \in \mathbf{G}/\mathbf{G}_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\Phi(x\mathbf{G}_0 z\mathbf{G}_0) &= \Phi(xz\mathbf{G}_0) \\
&= f(xz)\mathbf{H}_0 \\
&= f(x)f(z)\mathbf{H}_0, \text{ ya que } f \text{ es un homomorfismo} \\
&= f(x)\mathbf{H}_0 f(z)\mathbf{H}_0 \\
&= \Phi(x\mathbf{G}_0)\Phi(z\mathbf{G}_0).
\end{aligned}$$

Luego Φ es un homomorfismo.

Si $y\mathbf{H}_0 \in \mathbf{H}/\mathbf{H}_0$, entonces $y\mathbf{H}_0 = \Phi(x\mathbf{G}_0)$ para algún $x\mathbf{G}_0 \in \mathbf{G}/\mathbf{G}_0$ por lo que Φ es un epimorfismo. Además

$$\begin{aligned}
y\mathbf{H}_0 &= \varphi_2(f(x)) \\
&= \Phi(x\mathbf{G}_0) \\
&= \Phi(\varphi_1(x)).
\end{aligned}$$

Por lo que $\varphi_2 \circ f = \Phi \circ \varphi_1$. Como f, φ_1 y φ_2 son homomorfismos continuos abiertos, tenemos que Φ es un homomorfismo continuo abierto.

Sea $\mathbf{K}_\Phi$ el núcleo de Φ, observemos que $\mathbf{K}_\Phi = \{\mathbf{G_0}\}$ donde $\mathbf{G}_0$ es el elemento identidad de $\mathbf{G}/\mathbf{G}_0$.

Como Φ es un homomorfismo $\Phi(\mathbf{G}_0) = \mathbf{H}_0$ el elemento identidad de $\mathbf{H}/\mathbf{H}_0$, por lo que $\mathbf{G}_0 \in \mathbf{K}_\Phi$, luego $\{\mathbf{G}_0\} \subset \mathbf{K}_\Phi$.

Ahora sea $x\mathbf{G}_0 \in \mathbf{K}_\Phi$,

$$\begin{aligned} x\mathbf{G}_0 \in \mathbf{K}_\Phi &\Rightarrow \Phi(x\mathbf{G}_0) = \mathbf{H}_0 \\ &\Rightarrow f(x)\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0 \\ &\Rightarrow f(x) \in \mathbf{H}_0 \\ &\Rightarrow x \in \mathbf{G}_0, \ \text{ ya que } \mathbf{H}_0 = f(\mathbf{G}_0) \\ &\Rightarrow x\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}_0 \\ &\Rightarrow x\mathbf{G}_0 \in \{\mathbf{G}_0\} \end{aligned}$$

luego $\mathbf{K}_\Phi \subset \{\mathbf{G}_0\}$, por lo tanto $\mathbf{K}_\Phi = \{\mathbf{G}_0\}$, esto implica, según la Proposición 1.12, que Φ es un monomorfismo.

Por lo tanto hemos probado que Φ es un isomorfismo topológico. ■

EL próximo resultado es conocido como el *primer teorema de isomorfismo.*

Teorema 2.34 (Primer Teorema de Isomorfismo) *Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ grupos topológicos con elemento identidad $e_\mathbf{G}$ y $e_\mathbf{H}$, respectivamente, y sea f el homomorfismo continuo abierto de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{H}$. Entonces el kernel (núcleo) $\mathbf{N} = f^{-1}(e_\mathbf{H})$ de f es un subgrupo invariante (subgrupo normal) de $\mathbf{G}$, y $f^{-1}(y)$ con $y \in \mathbf{H}$ coincide con las clases de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{G}$. La aplicación $\Phi : \mathbf{G}/\mathbf{N} \to \mathbf{H}$ la cual asigna a una clase $x\mathbf{N}$ el elemento $f(x) \in \mathbf{H}$, esto es $\Phi(x\mathbf{N}) = f(x)$, es un isomorfismo topológico.*

Prueba. Por el **Primer Teorema de Isomorfismo** para grupos, Teorema 1.6, Φ es un isomorfismos de grupos.

Sea $\mathbf{U}$ un subconjunto abierto cualquiera de $\mathbf{H}$, como f por hipótesis, es continua, y por Teorema 2.26 φ es una aplicación abierta, además ya que $\Phi^{-1} = \varphi \circ f^{-1}$, tenemos

$$\Phi^{-1}(\mathbf{U}) = \varphi(f^{-1}(\mathbf{U}))$$

es un subconjunto abierto de $\mathbf{G}/\mathbf{N}$, Por lo que Φ es continua.

Ahora si $\{x\mathbf{N}|x \in \mathbf{U}\}$, donde $\mathbf{U}$ es abierto en $\mathbf{G}$, es un subconjunto abierto de $\mathbf{G}/\mathbf{N}$, entonces, ya que $\Phi = f \circ \varphi^{-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(\{x\mathbf{N}|x \in \mathbf{U}\}) &= f(\varphi^{-1}(\{x\mathbf{N}|x \in \mathbf{U}\})) \\ &= f(\mathbf{U}),\end{aligned}$$

ya que por hipótesis f es abierta, $f(\mathbf{U})$ es abierto en $\mathbf{H}$, por lo que $\Phi(\{x\mathbf{N}|x \in \mathbf{U}\})$ es abierto en $\mathbf{H}$, por tanto Φ^{-1} es continua.

Luego, ya que tanto Φ^{-1} como Φ son continuas, Φ es un homeomorfismo y por lo tanto Φ es un isomorfismo topológico. ■

EL contenido de el Teorema 2.34 es que $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es topológicamente isomorfismo a $\mathbf{H}$ si y sólo, si el homomorfismo f de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{H}$ es continuo y abierto ($\mathbf{N} = f^{-1}(e_{\mathbf{H}})$). Así $\mathbf{H}$ puede ser reconstruido no sólo como un grupo sino como también un espacio topológico de $\mathbf{G}$ y el kernel $f^{-1}(e_{\mathbf{H}})$ proveniente que q es un homomorfismo continuo abierto. Un ejemplo simple muestra que estas restricciones de q son necesarias. Considerar el grupo aditivo $\mathbb{R}$ con la topología discreta $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, y sea q la función identidad i de $\mathbb{R}$ sobre si mismo. $\mathbb{R}$ tiene muchas topología sobre las cuales es un grupo topológico. La aplicación i es un homomorfismo de grupo (de hecho es un isomorfismo) y es continua como aplicación de $\mathbb{R}$ con la topología $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ sobre $\mathscr{R}$ con cualquier otra topología τ. Sería abierto, por tanto, sólo si $\mathcal{T} = \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Así existen muchos homomorfismos continuos (de hecho automorfismos) de $\mathbb{R}$ que no podrían reconstruirse simplemente de la topología dada y el kernel del homomorfismo.

Presentamos, en conexión con el Teorema 2.34, la siguiente condición suficiente para que un homomorfismo continuo de grupos topológicos sea abierta.

Proposición 2.7 *Sea $q : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ un homomorfismo continuo de grupos topológicos. Supóngase que la imagen $q(\mathbf{U})$ contiene un conjunto abierto en $\mathbf{H}$, para cada vecindad $\mathbf{U}$ del elemento identidad $e_{\mathbf{G}}$ en $\mathbf{G}$. Entonces el homomorfismo q es abierto.*

Prueba. Primero aclaramos que el elemento identidad $e_{\mathbf{H}}$ está en el interior de $q(\mathbf{U})$, para cada vecindad abierta $\mathbf{U}$ de $e_{\mathbf{G}}$ en $\mathbf{G}$. Realmente, elegimos una vecindad $\mathbf{V}$ de $e_{\mathbf{G}}$ tal que $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$. Por nuestra suposición, $q(\mathbf{V})$ contiene un conjunto no vacío $\mathbf{W}$ en $\mathbf{H}$. Entonces $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}$ es una vecindad abierta de $e_{\mathbf{H}}$, y tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W} &\subset q(\mathbf{V})^{-1}q(\mathbf{V})\\ &= q(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V})\\ &\subset q(\mathbf{U}).\end{aligned}$$

Elegimos un elemento arbitrario $y \in q(\mathbf{U})$, donde $\mathbf{U}$ es un conjunto abierto no vacío arbitrario en $\mathbf{G}$. Podemos encontrar $x \in \mathbf{U}$ con $q(x) = y$ y una vecindad abierta $\mathbf{V}$ de $e_{\mathbf{G}}$ en $\mathbf{G}$ tal que $x\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$. Sea $\mathbf{W}$ una vecindad abierta de $e_{\mathbf{H}}$ con $\mathbf{W} \subset q(\mathbf{V})$. Entonces el conjunto $y\mathbf{W}$ contiene a y, es abierto en $\mathbf{H}$, y

$$y\mathbf{W} \subset q(x\mathbf{V}) \subset q(\mathbf{U}).$$

Esto implica que

$$q(\mathbf{U}) = \bigcup y\mathbf{W}$$

como cada $y\mathbf{W}$ es abierto, tenemos que $q(\mathbf{U})$ es abierto. Por lo tanto q es un homomorfismo abierto.

■

El siguiente resultado es conocido como el *segundo teorema de isomorfismo*. Es frecuentemente usado en situaciones que involucran grupos cocientes.

Teorema 2.35 (Segundo Teorema de Isomorfismo) *Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ grupos topológicos con elemento identidad $e_{\mathbf{G}}$ y $e_{\mathbf{H}}$, respectivamente; sea $f : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ un homomorfismo continuo abierto de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{H}$. Sea $\mathbf{H}_0$ un subgrupo normal cerrado de $\mathbf{H}, \mathbf{G}_0 = f^{-1}(\mathbf{H}_0)$, y $\mathbf{N} = f^{-1}(e_{\mathbf{H}})$. Entonces los grupo $\mathbf{G}/\mathbf{G}_0, \mathbf{H}/\mathbf{H}_0$ y $(\mathbf{G}/\mathbf{N})/(\mathbf{H}/\mathbf{N})$ son topológicamente isomorfos.*

Prueba. Sea ψ la aplicación natural de $\mathbf{H}$ sobre $\mathbf{H}/\mathbf{H}_0$. Por el Teorema 2.32, ψ es un homomorfismo continuo abierto y por tanto $\psi \circ f$ es un homomorfismo continuo abierto de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{H}/\mathbf{H}_0$ con núcleo $\mathbf{G}_0 = f^{-1}(\mathbf{H}_0)$. Por tanto, por el Teorema 2.34, $\mathbf{H}/\mathbf{H}_0$ es topológicamente isomorfo con $\mathbf{G}/\mathbf{G}_0$.

Como, por el Teorema 2.34, la aplicación $\Phi(x\mathbf{N}) = f(x)$ es un isomorfismo topológico de $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ sobre $\mathbf{H}$ y observemos que $\Phi(\mathbf{G}_0/\mathbf{N}) = \mathbf{H}_0$.

Sea cualquier $y \in \mathbf{H}_0$, entonces para algún $g_0 \in \mathbf{G}_0$,

$$y = f(g_0) = \Phi(g_0\mathbf{N}) \in \Phi(\mathbf{G}_0/\mathbf{N}).$$

Luego $\mathbf{H}_0 \subset \Phi(\mathbf{G}_0/\mathbf{N})$.

Además, sea $y \in \Phi(\mathbf{G}_0/N)$, entonces

$$\begin{aligned} y \in \Phi(\mathbf{G}_0/\mathbf{N}) &\Rightarrow y = \Phi(g_0\mathbf{N}) = f(g_0), \text{ para algún } g_0 \in \mathbf{G}_0 \\ &\Rightarrow y = f(g_0) \in f(\mathbf{G}_0) = f(f^{-1}(\mathbf{H}_0)) = \mathbf{H}_0 \\ &\Rightarrow g_0 = f^{-1}(f(g_0)) \in \mathbf{G}_0 = f^{-1}(f(\mathbf{G}_0)) = f^{-1}(\mathbf{H}_0) \\ &\Rightarrow y = f(g_0) \in f(f^{-1}(\mathbf{H}_0)) = \mathbf{H}_0. \end{aligned}$$

Luego $\Phi(\mathbf{G}_0/\mathbf{N}) \subset \mathbf{H}_0$, y por lo tanto $\Phi(\mathbf{G}_0/\mathbf{N}) = \mathbf{H}_0$.

Por lo tanto, aplicando la Proposición 2.6, tenemos que $\mathbf{G}/\mathbf{G}_0$ y $(\mathbf{G}/\mathbf{N})/(\mathbf{H}/\mathbf{N})$ son topológicamente isomorfos. ■

Probamos un teorema más en cocientes de grupos topológicos y isomorfismos topológicos conocido como el *tercer teorema de isomorfismo*

Teorema 2.36 (Tercer Teorema de Isomorfismo) *Supóngase que* $\mathbf{G}$ *es un grupo topológico.* $\mathbf{H}$ *es un subgrupo invariante cerrado de* $\mathbf{G}$, *y* $\mathbf{M}$ *es cualquier subgrupo topológico de* $\mathbf{G}$. *Entonces el grupo cociente* $\mathbf{MH}/\mathbf{H}$ *es topológicamente isomorfo a el subgrupo* $\varphi(\mathbf{M})$ *del grupo topológico* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, *donde* $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ *es el homomorfismo cociente natural.*

Prueba. Primeramente observemos que $\mathbf{MH} = \varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{M}))$.

Sea $x \in \mathbf{MH}$,

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{MH} &\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(xh) = (mh)\mathbf{H}, m \in \mathbf{M}, h \in \mathbf{H} \\ &\Rightarrow \varphi(x) \in \varphi(\mathbf{M}) \\ &\Rightarrow x = \varphi^{-1}(\varphi(x)) \in \varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{M})). \end{aligned}$$

Luego $\mathbf{MH} \subset \varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{M}))$.

Además, sea $x \in \varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{M}))$,

$$\begin{aligned}
x \in \varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{M})) &\Rightarrow \varphi(x) \in \varphi(\mathbf{M}) = \{m\mathbf{H} | m \in \mathbf{M}\} \\
&\Rightarrow \varphi(x) \in \{m\mathbf{H} | m \in \mathbf{M}\} = \{m\mathbf{H} | m \in \mathbf{MH}\} \\
&\Rightarrow x\mathbf{H} = m\mathbf{H}, m \in \mathbf{M} \\
&\Rightarrow xh_1 = mh_2, h_1, h_2 \in \mathbf{H}, m \in \mathbf{M} \\
&\Rightarrow xh_1h_1^{-1} = mh_2h_1^{-1}, h_1, h_2 \in \mathbf{H}, m \in \mathbf{M} \\
&\Rightarrow x = mh, h = h_2h_1^{-1} \in \mathbf{H}, m \in \mathbf{M} \\
&\Rightarrow x \in \mathbf{MH}.
\end{aligned}$$

Luego $\varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{M})) \subset \mathbf{MH}$. Por lo tanto $\varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{M})) = \mathbf{MH}$

Ya que φ es abierta y continua, la restricción $\Psi : \mathbf{MH} \to \varphi(\mathbf{M})$ de φ a $\mathbf{MH}$ es una aplicación abierta continua de $\mathbf{MH}$ sobre $\varphi(\mathbf{M})$. Como $\mathbf{M}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$ y φ es un homomorfismo de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, por la Proposición 1.4 tenemos que $\varphi(\mathbf{M})$ y $\mathbf{MH}$ son subgrupos de los grupos $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ y $\mathbf{G}$, respectivamente, y Ψ es un homomorfismo de $\mathbf{MH}$ sobre $\varphi(\mathbf{M})$. Sea e el elemento identidad de $\mathbf{G}$. Entonces, $\Psi^{-1}(\Psi(e)) = \varphi^{-1}(\varphi(e)) = \mathbf{H}$, esto es, el núcleo de Ψ es $\mathbf{H}$. Ahora se sigue del Primer Teorema de Isomorfismo que los grupos topológicos $\mathbf{MH}/\mathbf{H}$ y $\varphi(\mathbf{M})$ son topológicamente isomorfismos. ■

Concluimos esta sección, probando dos enunciados en conexión del cardinal invariante de un grupo topológico $\mathbf{G}$ con el cardinal invariante de un subgrupo cerrado $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ y el espacio cociente $\mathbf{G}/\mathbf{H}$.

Teorema 2.37 *Supóngase que $\mathbf{G}$ es un grupo topológico, $\mathbf{H}$ es un subgrupo cerrado de $\mathbf{G}, \mathbf{X}$ es un subespacio de $\mathbf{G}, \varphi$ es el homomorfismo natural de $\mathbf{G}$ sobre el espacio $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, y $\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{X})$. Suponga también que el espacio $\mathbf{H}$ y el subespacio $\mathbf{Y}$ de $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ son $1-$contable. Entonces $\mathbf{X}$ es también $1-$contable.*

Prueba. Por la Proposición 2.5, podemos asumir que e de $\mathbf{G}$ está en $\mathbf{X}$, verificaremos que $\mathbf{X}$ es $1-$contable en e. Como $\mathbf{H}$ es $1-$contable, fijemos una sucesión de vecindades simétricas abiertas $\mathbf{W}_n$ de e en $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{W}_{n+1}^2 \subset \mathbf{W}_n$, para cada $n \in \mathbf{I}$, y $\{\mathbf{W}_n \cap \mathbf{H} | n \in \mathbf{I}\}$ es una base para el espacio $\mathbf{H}$ en e. También como $\mathbf{Y}$ es $1-$contable fijamos una sucesión de vecindades abiertas $\mathbf{U}_n$ de e en $\mathbf{G}$ tal

que $\{\varphi(\mathbf{U}_n)\cap\mathbf{Y}|n\in\mathbf{I}\}$ es una base para el espacio $\mathbf{Y}$ en $\varphi(e)$. Ahora hacemos $\mathbf{B}_{i,j}=\mathbf{W}_i\cap\mathbf{U}_j\cap\mathbf{X}$, para $i,j\in\mathbf{I}$. Para finalizar la prueba, es suficiente establecer la siguiente afirmación:
La familia $\eta=\{B_{i,j}|i,j\in I\}$ es una base para $\mathbf{X}$ en e.

Cada $\mathbf{B}_{i,j}$ es abierto en $\mathbf{X}$ y contiene e. Mostraremos que algún elemento de η está contenido en $\mathbf{O}$. Tomamos cualquier vecindad $\mathbf{O}$ de e en G, entonces existe una vecindad abierta $\mathbf{V}$ de e en $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{V}^2\subset\mathbf{O}$. Elegimos $m\in\mathbf{I}$ tal que $\mathbf{W}_m\cap\mathbf{H}\subset\mathbf{V}$. Además, existe $k\in\mathbf{I}$ tal que

$$\varphi(\mathbf{U}_k)\cap\mathbf{Y}\subset\varphi(\mathbf{V}\cap\mathbf{W}_{m+1}).$$

Verifiquemos que

$$\mathbf{B}_{m+1,k}\subset O.$$

Tomamos cualquier

$$z\in\mathbf{B}_{m+1,k}=\mathbf{W}_{m+1}\cap\mathbf{U}_k\cap\mathbf{X}.$$

Entonces, como

$$\varphi(z)\in\varphi(\mathbf{U}_k)\cap\mathbf{Y}\subset\varphi(\mathbf{V}\cap\mathbf{W}_{m+1}),$$

tenemos que

$$z\in\mathbf{U}_k\cap\mathbf{X}\subset(\mathbf{V}\cap\mathbf{W}_{m+1})\mathbf{H}.$$

Por tanto, como

$$\mathbf{W}_{m+1}^2\subset\mathbf{W}_m \text{ y } z\in\mathbf{W}_{m+1}=\mathbf{W}_{m+1}^{-1},$$

tenemos que $z\notin\mathbf{W}_{m+1}(\mathbf{G}-\mathbf{W}_m)$. Por lo que, $z\in(\mathbf{V}\cap\mathbf{W}_{m+1})(\mathbf{H}\cap\mathbf{W}_m)$. Como $\mathbf{W}_m\cap\mathbf{H}\subset\mathbf{V}$, obtenemos

$$(\mathbf{V}\cap\mathbf{W}_{m+1})(\mathbf{H}\cap\mathbf{W}_m)\subset\mathbf{V}\mathbf{V}=\mathbf{V}^2\subset\mathbf{O},$$

esto implica que $z\in\mathbf{O}$. Así, $\mathbf{B}_{m+1,k}\subset\mathbf{O}$, y η es una base para $\mathbf{X}$ en e. Como η es contable, se sigue que $\mathbf{X}$ es $1-$contable en e. ■

Corolario 2.7 (N.Ya. Vilenkin) *Supóngase que* $\mathbf{G}$ *es un grupo topológico y* $\mathbf{H}$ *es un subgrupo cerrado de* $\mathbf{G}$. *Si el espacio* $\mathbf{H}$ *y* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *son* $1-$*contable, entonces el espacio* $\mathbf{G}$ *es también* $1-$*contable.*

Prueba. Como $\mathbf{G}/\mathbf{H}=\varphi(\mathbf{G})$ y por hipótesis $\mathbf{H}$ es un subgrupo cerrado de $\mathbf{G}$, además $\mathbf{H}$ y $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ son $1-$contable, entonces, por Teorema 2.37, $\mathbf{G}$ es $1-$contable. ■

Lema 2.5 *Suponga que* $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *es una aplicación continua abierta de un espacio* $\mathbf{X}$ *sobre un espacio* $\mathbf{Y}, x \in \mathbf{X}, \mathbf{B} \subset \mathbf{Y}$ *y* $f(x) \in \overline{\mathbf{B}}$. *Entonces* $x \in \overline{f^{-1}(\mathbf{B})}$. *En particular,* $\overline{f^{-1}(\mathbf{B})} = f^{-1}(\overline{\mathbf{B}})$.

Prueba. Sea $y = f(x)$ y sea $\mathbf{U}$ una vecindad abierta de x. Entonces $f(\mathbf{U})$ es una vecindad abierta de y. Por lo tanto, $f(\mathbf{U}) \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$ y por tanto, $\mathbf{U} \cap f^{-1}(\mathbf{B}) \neq \emptyset$.

Probemos la igualdad $\overline{f^{-1}(\mathbf{B})} = f^{-1}(\overline{\mathbf{B}})$. Sea $x \in f^{-1}(\overline{\mathbf{B}})$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\overline{\mathbf{B}}) &\Rightarrow f(x) \in \overline{\mathbf{B}} \\ &\Rightarrow x \in \overline{f^{-1}(\mathbf{B})}, \quad \text{por la parte anterior} \end{aligned}$$

así tenemos $f^{-1}(\overline{\mathbf{B}}) \subset \overline{f^{-1}(\mathbf{B})}$.

Sea ahora $x \in \overline{f^{-1}(\mathbf{B})}$, entonces existe una vecindad $\mathbf{U}$ de x tal que $\mathbf{U} \cap f^{-1}(\mathbf{B}) \neq \emptyset$ esto implica $f(\mathbf{U}) \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$, donde $f(\mathbf{U})$ es una vecindad de $f(x)$, entonces $f(x) \in \overline{\mathbf{B}}$, esto es $x \in f^{-1}(\overline{\mathbf{B}})$. Luego $\overline{f^{-1}(\mathbf{B})} \subset f^{-1}(\overline{\mathbf{B}})$, Por lo tanto

$$\overline{f^{-1}(\mathbf{B})} = f^{-1}(\overline{\mathbf{B}}).$$

■

Teorema 2.38 *Suponga que* $\mathbf{G}$ *es un grupo topológico y* $\mathbf{H}$ *es un subgrupo cerrado de* $\mathbf{G}$. *Si el espacio* $\mathbf{H}$ *y* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *son separables, entonces el espacio* $\mathbf{G}$ *es también separable.*

Prueba. Sea φ el homomorfismo natural de $\mathbf{G}$ sobre el espacio cociente $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Como $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es separable, podemos fijar un subconjunto denso contable $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Ya que $\mathbf{H}$ es separable y todo clase $x\mathbf{H}$ es homeomorfa a $\mathbf{H}$, podemos fijar un subconjunto denso contable $\mathbf{M}_y$ de $\varphi^{-1}(y)$, para cada $y \in \mathbf{B}$. Ponemos

$$\mathbf{M} = \bigcup \{\mathbf{M}_y | y \in \mathbf{B}\}.$$

Entonces $\mathbf{M}$ es un subconjunto contable de $\mathbf{G}$ y $\mathbf{M}$ es denso en $\varphi^{-1}(\mathbf{B})$. Como φ es una aplicación abierta de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, se sigue del Lema 2.5 que

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\mathbf{B}) &= \varphi^{-1}(\overline{\mathbf{B}}) \\ &= \varphi^{-1}(\mathbf{G}/\mathbf{H}) \\ &= \mathbf{G}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbf{M}$ es denso en $\mathbf{G}$ y $\mathbf{G}$ es separable. ■

Teorema 2.39 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico. Entonces* $\mathbf{G}/\overline{\{e\}}$ *es un grupo Hausdorff. Si* f *es cualquier homomorfismo continuo de* $\mathbf{G}$ *en un grupo-*T_0, $\widetilde{\mathbf{G}}$ *con identidad* $\widetilde{e}$, *entonces*

$$f^{-1}(\widetilde{e}) \supset \overline{\{e\}}.$$

Si f *es también abierto, entonces* $\widetilde{\mathbf{G}}$ *es la imagen de un homomorfismo continuo abierto de* $\mathbf{G}/\overline{\{e\}}$

Prueba. Como, por Teorema 2.13 $\overline{\{e\}}$ es un subgrupo normal cerrado de $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}/\overline{\{e\}}$, por Teorema 2.30 es un grupo T_1 y por tanto, por Teorema 2.7, un grupo Hausdorff. Ahora $f^{-1}(\widetilde{e})$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$ y es cerrado ya que f es continua. Por tanto tenemos $f^{-1}(\widetilde{e}) \supset \overline{\{e\}}$. Finalmente, si f es un homomorfismo continuo abierto, $\widetilde{\mathbf{G}}$ es topológicamente isomorfo con $\mathbf{G}/f^{-1}(\widetilde{e})$. Por el Segundo Teorema de Isomorfismo, $\mathbf{G}/f^{-1}(\widetilde{e})$ es topológicamente isomorfo con $\mathbf{G}/\overline{\{e\}}/(f^{-1}(\widetilde{e})/\overline{\{e\}})$, el cual es una imagen homeomorfa de $\mathbf{G}$, por el Teorema 2.32. ■

2.5. Grupos Productos

En esta sección se verán métodos de construir grupos topológicos con la formación de productos Cartesianos. Éste es un proceso muy importante, el cual frecuentemente hace posible reducir problemas complicados concernientes a grupos topológicos a problemas más simples.

Teorema 2.40 *Suponga que* $\{\mathbf{G}_\alpha|\alpha \in \mathbf{I}\}$ *es una familia de grupos topológicos,* e_α *es el elemento neutro de* $\mathbf{G}_\alpha$ *para cada* $\alpha \in \mathbf{I}$,

$$\mathbf{G} = \prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{G}_\alpha$$

es el producto Cartesiano de los conjuntos G_α, *con la topología producto de Tychonoff (es decir, la topología producto en* $\mathbf{G}$*) y la operación producto definida coordenadas por coordenadas. Entonces* $\mathbf{G}$ *es también un grupo topológico, con elemento identidad* $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$; *éste grupo topológico* $\mathbf{G}$ *es llamado el* **producto topológico** *o* **producto directo** *de la familia* $\{\mathbf{G}_\alpha|\alpha \in \mathbf{I}\}$

Prueba.

(I) Probemos que la aplicación de tomar inverso es continua.

Sea $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ un elemento arbitrario de $\mathbf{G}$ y $\mathbf{O}$ una vecindad de $x^{-1} = i(x)$ en $\mathbf{G}$, esto es, $x^{-1} = (x_\alpha^{-1})_{\alpha\in\mathbf{I}}$. Como $\mathbf{G}$ tiene la topología producto de Tychonoff, podemos encontrar pares distintos de elementos $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ del conjunto de índices $\mathbf{I}$ una vecindad $\mathbf{W}_{\alpha_k}$ del punto x_{α_k} en el grupo $\mathbf{G}_{\alpha_k}$, para cada $k = 1, \cdots, n$ tal que

$$\mathbf{W} = \prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{W}_\alpha \subset \mathbf{O},$$

donde $\mathbf{W}_\alpha = \mathbf{W}_{\alpha_k}$ si $\alpha = \alpha_k$ para algún $k \leq n$, y $\mathbf{W}_\alpha = \mathbf{G}_\alpha$ en otro caso.

Como cada $\mathbf{G}_{\alpha_k}$ es un grupo topológico, existen vecindades $\mathbf{U}_{\alpha_k}$ de x_{α_k} tal que $\mathbf{U}_{\alpha_k}^{-1} \subset \mathbf{W}_{\alpha_k}$. También, ponemos

$$\mathbf{U}_\alpha = \mathbf{W}_\alpha$$

para cada $\alpha \in \mathbf{I} - \{\alpha_1 \cdots, \alpha_n\}$. Entonces

$$\mathbf{U} = \prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{U}_\alpha$$

es vecindades de x en el grupo topológico $\mathbf{G}$. Esto implica que

$$\begin{aligned} i(\mathbf{U}) &= \mathbf{U}^{-1} \\ &= \prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{U}_\alpha^{-1} \\ &\subset \mathbf{W} \subset \mathbf{O}. \end{aligned}$$

El Teorema 1.9[$(4) \Rightarrow (1)$], implica que la aplicación de tomar inversos i es continua.

(II) Probemos que el producto en $\mathbf{G}$ es continuo.

Sea $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ y sea $y = (y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ elementos arbitrarios de $\mathbf{G}$ y $\mathbf{O}$ una vecindad de

$$z = xy = f(x, y)$$

en $\mathbf{G}$. Si $z = (z_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$, entonces, $z_\alpha = x_\alpha y_\alpha$ para cada $\alpha \in \mathbf{I}$. Como $\mathbf{G}$ tiene la topología producto de Tychonoff, podemos encontrar pares distintos de elementos $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ del conjunto de índices $\mathbf{I}$ y una vecindad $\mathbf{W}_{\alpha_k}$ del punto z_{α_k} en el grupo $\mathbf{G}_{\alpha_k}$, para cada $k = 1, \cdots, n$ tal que

$$\mathbf{W} = \prod_{\alpha \in \mathbf{I}} \mathbf{W}_\alpha \subset \mathbf{O},$$

donde $\mathbf{W}_\alpha = \mathbf{W}_{\alpha_k}$ si $\alpha = \alpha_k$ para algún $k \leq n$, y $\mathbf{W}_\alpha = \mathbf{G}_\alpha$ en otro caso.

Como cada $\mathbf{G}_{\alpha_k}$ es un grupo topológico, existen vecindades $\mathbf{U}_{\alpha_k}$ y $\mathbf{V}_{\alpha_k}$ de x_{α_k} y y_{α_k}, respectivamente, en $\mathbf{G}_{\alpha_k}$ tal que $\mathbf{U}_{\alpha_k}\mathbf{V}_{\alpha_k} \subset \mathbf{W}_{\alpha_k}$. También, ponemos

$$\mathbf{U}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha = \mathbf{W}_\alpha$$

para cada $\alpha \in \mathbf{I} - \{\alpha_1 \cdots, \alpha_n\}$. Entonces

$$\mathbf{U} = \prod_{\alpha \in \mathbf{I}} \mathbf{U}_\alpha \text{ y } \mathbf{V} = \prod_{\alpha \in \mathbf{I}} \mathbf{V}_\alpha$$

son vecindades de x y y, respectivamente, en el grupo producto $\mathbf{G}$. Entonces

$$\mathbf{UV} \subset \mathbf{W} \subset \mathbf{O}.$$

El Teorema 1.9[$(4) \Rightarrow (1)$] implica que el producto en $\mathbf{G}$ es continua.

Por lo tanto, $\mathbf{G}$ es un grupo topológico. ■

Una prueba alternativa del Teorema 2.40 es: Para toda $\alpha \in \mathbf{I}$ sea $p_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \times \mathbf{G}_\alpha \to \mathbf{G}_\alpha$ la operación producto en el grupo $\mathbf{G}_\alpha$, y $p : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ la operación producto en $\mathbf{G}$. Claramente, la aplicación p puede representarse como el producto Cartesiano de las aplicaciones p_α. Se sigue que p es continua. Similarmente, la aplicación de tomar inversos en $\mathbf{G}$ es le producto Cartesiano de las operaciones inversas en el grupo $\mathbf{G}_\alpha$. Por tanto, la aplicación de tomar inversos en $\mathbf{G}$ es también continua, y $\mathbf{G}$ es un grupo topológico con elemento identidad e.

En esta sección nos referiremos al producto directo escribiendo $\mathbf{G}$ el lugar de $\prod \mathbf{G}_\alpha$, además nos referimos a la identidad de $\mathbf{G}$ solamente con e.

Teorema 2.41 *El grupo $\mathbf{G}$ es un grupo-T_0 si y sólo, si cada $\mathbf{G}_\alpha$ es un grupo-T_0. $\mathbf{G}$ es compacto si y sólo, si cada $\mathbf{G}_\alpha$ es compacto. Finalmente, el grupo $\mathbf{G}$ es localmente compacto si y sólo, si todos los grupos $\mathbf{G}_\alpha$ son localmente compactos y todos excepto un número finito de ellos son compactos.*

Prueba. Como cada $\mathbf{G}_\alpha$ es un espacio topológico, y además ya que el producto de espacios compactos es compacto. Entonces $\mathbf{G}$ es compacto. Ya que el producto de espacios topológicos localmente compactos, también es localmente compacto, por tanto tenemos que $\mathbf{G}$ es localmente compacto si y solo si $\mathbf{G}_\alpha$ es localmente compacto. ■

Teorema 2.42 *El grupo $\mathbf{G}$ es Abeliano si y sólo, si todos los grupos $\mathbf{G}_\alpha$ son Abeliano.*

Prueba.

$(\Leftarrow)$ si cada $\mathbf{G}_\alpha$ es Abeliano, entonces $\mathbf{G}$ es abeliano.

Sean $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ y $y = (y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ en $\mathbf{G}$, donde $x_\alpha, y_\alpha \in \mathbf{G}_\alpha$. Como el producto en $\mathbf{G}$ está definido coordenadas por coordenadas tenemos:

$$\begin{aligned}
xy &= (x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}(y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}\\
&= (x_\alpha y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}, \text{ por definición del producto en } \mathbf{G}\\
&= (y_\alpha x_\alpha)_{\alpha\in I}, \text{ ya que } G_\alpha \text{ es Abeliano}\\
&= (y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}\\
&= yx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{G}$ es abeliano.

$(\Rightarrow)$ $\mathbf{G}$ es Abeliano, entonces cada $\mathbf{G}_\alpha$ es Abeliano.

Sean $x, y \in \mathbf{G}$ y sea $x_\alpha, y_\alpha \in \mathbf{G}_\alpha$, entonces

$$\begin{aligned}
xy &= yx, \text{ ya que } \mathbf{G} \text{ es Abeliano}\\
(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}(y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}} &= (y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}, \text{ por definición del producto en } \mathbf{G},\\
(x_\alpha y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}} &= (y_\alpha x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}},
\end{aligned}$$

así $x_\alpha y_\alpha = y_\alpha x_\alpha \in \mathbf{G}_\alpha$, por lo tanto cada $\mathbf{G}_\alpha$ es Abeliano.

■

Teorema 2.43 *Sea $\mathbf{A}_\alpha$ un subconjunto de $\mathbf{G}_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbf{I}$. Entonces si $\mathbf{A}_\alpha$ es un subgrupo o subgrupo normal de $\mathbf{G}_\alpha$ se sigue que $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{A}_\alpha$ es un subgrupo o subgrupo normal, respectivamente, de $\mathbf{G}$.*

Prueba.

1) Sea $\mathbf{A}_\alpha$ es un subgrupo de $\mathbf{G}_\alpha$, $e_{\mathbf{A}_\alpha} \in \mathbf{A}_\alpha$, así $e = (e_{\mathbf{A}_\alpha})_{\alpha\in\mathbf{I}} \in \prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{A}_\alpha$

2) Sea $x, y \in \prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{A}_\alpha$, entonces

$$\begin{aligned} xy &= (x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}(y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}, x_\alpha, y_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha \\ &= (x_\alpha y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}, x_\alpha y_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha, \text{ ya que } \mathbf{A}_\alpha \text{ subgrupo de } \mathbf{G}_\alpha \end{aligned}$$

luego $xy \in \prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{A}_\alpha$, y por tanto $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{A}_\alpha$ es cerrado.

3) Sea $x \in \prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{A}_\alpha$,

$$\begin{aligned} x \in \prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{A}_\alpha &\Rightarrow x_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha \\ &\Rightarrow x_\alpha^{-1} \in \mathbf{A}_\alpha, \text{ ya que } \mathbf{A}_\alpha \text{ es un subgrupo} \\ &\Rightarrow y = (x_\alpha^{-1})_{\alpha\in\mathbf{I}} \in \prod \mathbf{A}_\alpha \end{aligned}$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} xy &= (x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}(x_\alpha^{-1})_{\alpha\in\mathbf{I}} \\ &= (x_\alpha x_\alpha^{-1})_{\alpha\in\mathbf{I}} \\ &= (e_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, según el Teorema 1.3, $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{A}_\alpha$ es subgrupo de $\mathbf{G}$.

Nos falta probar que si $\mathbf{A}_\alpha$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}_\alpha$, entonces $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{A}_\alpha$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$. Si $\mathbf{A}_\alpha$ es subgrupo normal de $\mathbf{G}_\alpha$, entonces, por el Lema 1.5,

$$g_\alpha \mathbf{A}_\alpha g_\alpha^{-1} = \mathbf{A}_\alpha, \forall g_\alpha \in \mathbf{G}_\alpha,$$

luego

$$\begin{aligned}\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{A}_\alpha &= \prod_{\alpha\in\mathbf{I}} g_\alpha\mathbf{A}_\alpha g_\alpha^{-1}, \forall g_\alpha\in\mathbf{G}_\alpha\\ &= g\left(\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{A}_\alpha\right)g^{-1}, \forall g\in\mathbf{G}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Lema 1.5, $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{A}_\alpha$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$. ■

Ahora definimos la llamada aplicación proyectiva para grupos topológicos.

Teorema 2.44 *Sea*

$$\pi_\beta : \mathbf{G}\to\mathbf{G}_\beta$$

la función que asigna a cada elemento del espacio producto su coordenada $\beta-$ésima,

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{J}}) = x_\beta;$$

se denomina **aplicación proyectiva** *asociada con el índice β. Entonces π_β es un homomorfismo continuo abierto. El núcleo consiste de todos los $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{J}}\in\mathbf{G}$ tal que*

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{J}}) = e_\beta.$$

Prueba. Por el Teorema 1.11, π_β es una aplicación continua.

Sean $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{J}}, (y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{J}}\in\mathbf{G}$, entonces

$$\begin{aligned}\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{J}}(y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{J}}) &= \pi_\beta((x_\alpha y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{J}})\\ &= x_\beta y_\beta\\ &= \pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in J})\pi_\beta((y_\alpha)_{\alpha\in J}).\end{aligned}$$

Luego π_β es un homomorfismo.

Sea $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{U}_\alpha$ abierto en $\mathbf{G}$, donde $\mathbf{U}_\alpha$ es abierto en $\mathbf{G}_\alpha, \alpha\in\mathbf{I}$, entonces

$$\pi_\beta\left(\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{U}_\alpha\right) = \mathbf{U}_\beta$$

es abierto en $\mathbf{G}_\beta$, luego π_β es una aplicación abierta.

Por lo tanto π_β es un homomorfismo continuo abierto, y por lo tanto un homeomorfismo. ■

Teorema 2.45 *Para cada $\alpha \in \mathbf{I}$, sea $\mathbf{H}_\alpha$ un subgrupo de $\mathbf{G}_\alpha$. Consideremos los dos espacios topológicos*

$$\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha/\mathbf{H}_\alpha) \;\; y \;\; \prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha)/\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{H}_\alpha).$$

Sea ϕ la aplicación del primer espacio dentro del segundo definida por

$$\begin{aligned}\phi[(x_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}] &= (x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{H}_\alpha \\ &= \prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(x_\alpha\mathbf{H}_\alpha).\end{aligned}$$

Entonces ϕ (la llamada aplicación natural del primer espacio en el segundo) es un homomorfismo. Si cada uno de los $\mathbf{H}_\alpha$ es un subgrupo normal, así que ambos espacios son grupos, ϕ es un isomorfismo. Así, en este caso,

$$\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha/\mathbf{H}_\alpha) \;\; y \;\; \prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha)/\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{H}_\alpha).$$

Son topológicamente isomorfos.

Prueba. Probemos que ϕ es sobreyectiva. Sea $y \in \prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha)/\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{H}_\alpha)$, entonces

$$y = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{H}_\alpha = \phi[(x_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}], (x_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}} \in \prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha/\mathbf{H}_\alpha).$$

Por lo que ϕ es sobreyectiva.

Para probar que ϕ es inyectiva tenemos: Si $(x_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}, (y_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}} \in \prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{G}_\alpha/\mathbf{H}_\alpha$ tal que

$$\phi[(x_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}] = \phi[(y_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}],$$

entonces

$$\begin{aligned}\phi[(x_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}] &= \phi[(y_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}] \\ (x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{H}_\alpha &= (y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{H}_\alpha \\ \prod_{\alpha\in\mathbf{I}}x_\alpha\mathbf{H}_\alpha &= \prod_{\alpha\in\mathbf{I}}y_\alpha\mathbf{H}_\alpha,\end{aligned}$$

por lo que $(x_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}} = (y_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$, esto muestra que ϕ es inyectiva.

Considerar ahora un conjunto abierto en $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha/\mathbf{H}_\alpha)$ de la forma

$$\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\{x_\alpha\mathbf{H}_\alpha|x_\alpha\in\mathbf{U}_\alpha\}$$

donde cada $\mathbf{U}_\alpha$ es abierto en $\mathbf{G}_\alpha$, excepto un número finito de $\mathbf{U}_\alpha$ son diferentes de $\mathbf{G}_\alpha$. Entonces

$$\phi\left[\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\{x_\alpha\mathbf{H}_\alpha|x_\alpha\in\mathbf{U}_\alpha\}\right]=\left\{\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}[x_\alpha\mathbf{H}_\alpha]|(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}\in\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{U}_\alpha\right\}$$

es abierto en $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha)/\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{H}_\alpha)$, luego ϕ^{-1} es continua.

Además, si $\left\{\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}[x_\alpha\mathbf{H}_\alpha]|(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}\in\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{U}_\alpha\right\}$ es abierto en $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha)/\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{H}_\alpha)$, entonces tenemos que

$$\phi^{-1}\left[\left\{\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}[x_\alpha\mathbf{H}_\alpha]|(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}\in\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{U}_\alpha\right\}\right]=\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\{x_\alpha\mathbf{H}_\alpha|x_\alpha\in\mathbf{U}_\alpha\}$$

el cual es abierto en $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha/H_\alpha)$ de esta forma, también ϕ es continua. Por lo tanto ϕ es un homeomorfismo.

Si cada $\mathbf{H}_\alpha$ es un subgrupo normal, entonces por el Teorema 1.4 $\mathbf{G}_\alpha/\mathbf{H}_\alpha$ es un grupo, y $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha/\mathbf{H}_\alpha)$ también es un grupo. Además, por el Teorema 2.43, si $\mathbf{H}_\alpha$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}_\alpha$, también $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{H}_\alpha$ es un subgrupo normal de $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{G}_\alpha$, luego, por el Teorema 1.4, $\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{G}_\alpha/\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{H}_\alpha$ es un grupo.

Por último, sean $(x_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}},(y_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}\in\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha/\mathbf{H}_\alpha)$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\phi[(x_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}(y_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}]&=\phi[(x_\alpha y_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}]\\&=(x_\alpha y_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{H}_\alpha\\&=(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{H}_\alpha\cdot(y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}\mathbf{H}_\alpha\\&=\phi[(x_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}]\phi[(y_\alpha\mathbf{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}]\end{aligned}$$

Esto muestra que ϕ es un homomorfismo, y por lo tanto un isomorfismo. Luego

$$\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha/\mathbf{H}_\alpha)\approx\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{G}_\alpha)/\prod_{\alpha\in\mathbf{I}}(\mathbf{H}_\alpha).$$

■

Supóngase que dado un grupo topológico $\mathbf{X}$ y una colección de subgrupos normales $\{\mathbf{N}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{I}}$, de $\mathbf{X}$. ¿Sobre qué condiciones podemos asegurar que $\mathbf{X}$ es topológicamente isomorfo con el producto directo de los subgrupos $\mathbf{N}_\alpha$? Consideremos primero la siguiente condición. Sea $\mathbf{G} = \prod_{\alpha\in\mathbf{I}} \mathbf{G}_\alpha$, y para cada $\alpha_0 \in \mathbf{I}$, sea

$$\widetilde{\mathbf{G}}_{\alpha_0} = \mathbf{G}_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha\neq\alpha_0} \{e_\alpha\}.$$

Cada $\widetilde{\mathbf{G}}_{\alpha_0}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$, y es cerrado si y sólo, si todos los $\mathbf{G}_\alpha, \alpha \neq \alpha_0$, son grupos-$T_0$. Si α_0 y α_1 son dos índices distintos en $\mathbf{I}$, entonces todo elemento de $\widetilde{\mathbf{G}}_{\alpha_0}$ conmutan con todo elemento de $\widetilde{\mathbf{G}}_{\alpha_1}$. Cada conjunto producto $\widetilde{\mathbf{G}}_{\alpha_1}, \widetilde{\mathbf{G}}_{\alpha_2}, \cdots, \widetilde{\mathbf{G}}_{\alpha_n}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$; $(\widetilde{\mathbf{G}}_{\alpha_1}\widetilde{\mathbf{G}}_{\alpha_2}\cdots\widetilde{\mathbf{G}}_{\alpha_n}) \cap \{(e_\alpha)\}$ si α es diferente de $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$; y la unión de todos los subgrupos $\widetilde{\mathbf{G}}_{\alpha_1}\widetilde{\mathbf{G}}_{\alpha_2}\cdots\widetilde{\mathbf{G}}_{\alpha_n}$ es denso en $\mathbf{G}$.

Si $\mathbf{I}$ es finito, es decir $\mathbf{I} = \{1, 2, \cdots, m\}$, entonces $\mathbf{G} = \widetilde{\mathbf{G}}_1\widetilde{\mathbf{G}}_2\cdots\widetilde{\mathbf{G}}_m$. Afortunadamente, si $\mathbf{I} = \{1, 2, \cdots, m\}$, y si $\widetilde{\mathbf{U}}_\alpha$ es una vecindad de (e_α) en $\widetilde{\mathbf{G}}_\alpha$ (topología relativa) para $\alpha = 1, 2, \cdots, m$, entonces el conjunto producto $\widetilde{\mathbf{U}}_1\widetilde{\mathbf{U}}_2\cdots\widetilde{\mathbf{U}}_m$ contiene una vecindad de (e_α) en $\mathbf{G}$.

Ahora podemos prestarle atención a la cuestión formulada anteriormente. Para el caso general, donde $\mathbf{X}$ tiene un número infinito de subgrupos que satisfacen la condición establecida para los subgrupos $\mathbf{G}_\alpha$ existen serias dificultades y no sabemos una forma de construir $\mathbf{X}$ como un producto directo. Para el caso de un número finito de subgrupos una respuesta satisfactoria a nuestra pregunta es dada en el siguiente teorema.

Teorema 2.46 *Sea $\mathbf{X}$ un grupo topológico, y sean $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \cdots, \mathbf{N}_m$ subgrupos normales de $\mathbf{X}$ con las siguientes propiedades:*

(I) $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2\cdots\mathbf{N}_m = \mathbf{X}$;

(II) $(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2\cdots\mathbf{N}_k) \cap \mathbf{N}_{k+1} = \{e\}, k = 1, \cdots, m-1$;

(III) *si $\mathbf{S}_j$ es una vecindad de e en $\mathbf{N}_j$, para $j = 1, 2, \cdots, m$, entonces $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\cdots\mathbf{S}_m$ contiene una vecindad de e en $\mathbf{X}$.*

Entonces $\mathbf{X}$ es topológicamente isomorfo con el producto directo

$$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 \times \cdots \times \mathbf{N}_m.$$

Prueba. Las condiciones (I) y (II) implican que $\mathbf{X}$ es isomorfo con el producto directo $\mathbf{N}_1 \times N_2 \times \cdots \mathbf{N}_m$: todo $x \in \mathbf{X}$ puede ser escrito precisamente en una forma como un producto $x_1 x_2 \cdots x_m$, donde $x_i \in \mathbf{N}_i (i = 1, 2, \cdots m)$. Todo elemento de $\mathbf{N}_i$ conmuta con todo elemento de $\mathbf{N}_k (k \neq i; i = 1, 2, \cdots, m; k = 1, 2, \cdots, m)$. Así $(x_1 x_2 \cdots, x_m)(y_1 y_2 \cdots, y_m) = x_1 y_1 x_2 y_2 \cdots, x_m y_m$. Se sigue que la aplicación φ de $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 \times \cdots \times \mathbf{N}_m$ sobre $\mathbf{X}$ definida por $\varphi[(x_1, x_2 \cdots, x_m)] = x_1 x_2 \cdots x_m$ es un isomorfismo. La continuidad de φ esta dada por la continuidad de la multiplicación en $\mathbf{X}$: si $x_1, x_2, \cdots, x_m$ son suficientemente cercanos a e, entonces $x_1 x_2 \cdots x_m$ es arbitrariamente cercano a e. La continuidad de φ^{-1} es garantiza por la hipótesis (III). Luego $\mathbf{X}$ es topológicamente isomorfo con $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 \times \cdots \times \mathbf{N}_m$. ■

2.6. Propiedades de Grupos Topológicos que Involucran Conexidad

En esta sección, damos algunas propiedades elementales de los grupos topológicos que dependen de la conexidad o dis-conexidad de los grupos considerados como espacios topológicos. Como la conexidad es una propiedad puramente topológica, los resultados de esta sección tienen análogo en teoría de grupos como topología.

Definición 2.13 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico con elemento neutro* e. *La* **componente conexa** *o, simplemente,* **componente** *de* $\mathbf{G}$ *es la unión de todos los subconjuntos conexos de* $\mathbf{G}$ *conteniendo* e. *Entonces la unión de cualquier familia de subespacio conexos conteniendo un punto dado es conexa, la componente conexa de* G *puede ser descrita como el subespacio conexo más grande de* $\mathbf{G}$ *que contiene* e, *además toda componente de la identidad es cerrada.*

Los siguientes tres teoremas describen la componente del elemento identidad.

Teorema 2.47 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico y sea* $\mathbf{C}$ *la componente de la identidad* e. *Entonces* $\mathbf{C}$ *es un subgrupo normal cerrado de* $\mathbf{G}$.

Prueba. Sea $\mathbf{C}$ la componente de $\mathbf{G}$, y sea i la aplicación de tomar inversos que es un homomorfismo en $\mathbf{G}$ (Teorema 2.1), entonces según Definición 2.13

$$\mathbf{C} = \bigcup_j \mathbf{B}_j;$$

donde cada $\mathbf{B}_j$ es conexo y $e \in \mathbf{B}_j$, entonces

$$\begin{aligned} i(\mathbf{C}) &= i(\bigcup_j \mathbf{B}_j) \\ &= \bigcup_j i(\mathbf{B}_j) \\ &= \bigcup_j \mathbf{B}_j^{-1} \end{aligned}$$

donde por Teorema 1.14 cada $\mathbf{B}_j^{-1}$ es conexo, por ser i un homeomorfismo, como $e \in \mathbf{B}_j$, tenemos que

$$i(e) = e^{-1} = e \in \mathbf{B}_j^{-1};$$

por lo cual

$$\bigcup_j \mathbf{B}_j^{-1}$$

es la unión de todos los conjuntos conexos que contiene a e, y como $i : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ entonces $i(\mathbf{C})$ es la componente de $\mathbf{G}$ y por ello $i(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$, esto implica que $\mathbf{C}^{-1} \subset \mathbf{C}$. Si a es cualquier punto de $\mathbf{C}$, entonces también $a^{-1} \in \mathbf{C}$.

Además como la traslación izquierda de $\mathbf{G}$ por a, es un homeomorfismo (Teorema 2.1), tenemos que $a\mathbf{C} =_a \lambda(\mathbf{C})$ es un conjunto conexo conteniendo e, y también $a\mathbf{C} \subset \mathbf{C}$. Así

$$a\mathbf{C} \subset \mathbf{C}^2 \subset \mathbf{C},$$

así que $\mathbf{C}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$.

Para ver que $\mathbf{C}$ es normal, por Corolario 2.1, la aplicación $\lambda : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, definida por

$$\lambda(x) = axa^{-1}, a \in \mathbf{G}$$

es un homeomorfismo, entonces por el Teorema 1.14, $a\mathbf{C}a^{-1} = \lambda(\mathbf{C})$ es un conjunto conexo conteniendo e, así que $a\mathbf{C}a^{-1} \subset \mathbf{C}$. Por tanto $\mathbf{C}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$. Como todas componentes en espacio topológico, $\mathbf{C}$ es cerrado. ■

Teorema 2.48 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico y sea* $\mathbf{C}$ *la componente de la identidad en* $\mathbf{G}$. *Entonces para todo* $a \in \mathbf{G}$

$$a\mathbf{C} = \mathbf{C}a$$

es la componente de a.

Prueba. La traslación izquierda de $\mathbf{G}$ por $a,_a \lambda$, es un homeomorfismo (Teorema 2.1), entonces por el Teorema 1.14, $_a\lambda(\mathbf{C}) = a\mathbf{C}$ es un conjunto conexo conteniendo a, por el Teorema 2.47, $\mathbf{C}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$, así que por el Lema 1.6 $a\mathbf{C} = \mathbf{C}a$. ■

Teorema 2.49 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico y sea* $\mathbf{C}$ *la componente de la identidad en* $\mathbf{G}$. *Entonces* $\mathbf{G}/\mathbf{C}$ *es un grupo Hausdorff totalmente disconexo.*

Prueba. En virtud del Teorema 2.48 y el Teorema 2.32, lo único que necesitamos es mostrar que la componente de la identidad $\mathbf{C}$ de $\mathbf{G}/\mathbf{C}$ es $\mathbf{C}$ mismo. Sea $\mathbf{X} \subset \mathbf{G}$, y sea $\{x\mathbf{C}|x \in \mathbf{X}\}$ cualquier subconjunto de $\mathbf{G}/\mathbf{C}$ conteniendo propiamente a $\{\mathbf{C}\}$.

Mostraremos que $\{x\mathbf{C}|x \in \mathbf{X}\}$ es disconexo en $\mathbf{G}/\mathbf{C}$. Sea φ la aplicación natural de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{G}/\mathbf{C}$ y sea $\mathbf{A}$ cualquier subconjunto de $\mathbf{G}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{A} \cap (\mathbf{XC})) &= \varphi(\mathbf{A}) \cap \varphi(\mathbf{XC}) \\ & \varphi(\mathbf{A}) \cap \{x\mathbf{C}|x \in \mathbf{X}\}. \end{aligned}$$

Entonces el conjunto $\mathbf{XC}$ contiene propiamente $\mathbf{C}$, y así es disconexo[4], esto es

$$\mathbf{XC} = (\mathbf{U} \cap (\mathbf{XC})) \cup (\mathbf{V} \cap (\mathbf{XC})),$$

donde $(\mathbf{U} \cap (\mathbf{XC})) \cap (\mathbf{V} \cap (\mathbf{XC})) = \emptyset$, ni uno de los conjuntos es vacío, y $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ son abiertos en $\mathbf{G}$. Así

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{XC}) &= \varphi((\mathbf{U} \cap (\mathbf{XC})) \cup (\mathbf{V} \cap (\mathbf{XC}))) \\ \{x\mathbf{C}|x \in \mathbf{X}\} &= (\varphi(\mathbf{U}) \cap \{x\mathbf{C}|x \in \mathbf{X}\}) \cup (\varphi(\mathbf{V}) \cap \{x\mathbf{C}|x \in \mathbf{X}\}), \end{aligned}$$

[4]Ver Pág 1.58

donde $\varphi(\mathbf{U})$ y $\varphi(\mathbf{V})$ son abiertos en $\mathbf{G}/\mathbf{C}$, ya que φ es una aplicación abierta.

Para $x \in \mathbf{X}$, tenemos

$$x\mathbf{C} = (\mathbf{U} \cap (x\mathbf{C})) \cup (\mathbf{V} \cap (x\mathbf{C})).$$

Ya que $x\mathbf{C}$ es conexo, o $x\mathbf{C} \subset \mathbf{U} \cap (X\mathbf{C})$ o $x\mathbf{C} \subset \mathbf{V} \cap (\mathbf{XC})$. Consecuentemente $\mathbf{U} \cap (\mathbf{XC})$ y $\mathbf{V} \cap (\mathbf{XC})$ son uniones de clases laterales de $\mathbf{C}$, y así tienen imágenes disjuntas bajo φ. Por tanto

$$(\varphi(\mathbf{U}) \cap \{x\mathbf{C}|x \in \mathbf{X}\}) \cap (\varphi(\mathbf{V}) \cap \{x\mathbf{C}|x \in \mathbf{X}\}) = \emptyset,$$

esto significa que $\{x\mathbf{C}|x \in \mathbf{X}\}$ es disconexo. Lo que prueba el teorema. ■

El siguiente es un hecho simple.

Teorema 2.50 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico,* $\mathbf{C}$ *la componente conexa de* e, *y* $\mathbf{U}$ *cualquier vecindad de* e. *Entonces*

$$\mathbf{C} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{U}^n;$$

en particular, si $\mathbf{G}$ *es conexo entonces*

$$\mathbf{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{U}^n.$$

Prueba. Sea $\mathbf{V}$ una vecindad simétrica de e tal que $\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$. Entonces por el Teorema 2.18, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{V}^n$ es abierto y cerrado. Como $\mathbf{C}$ es conexo, tenemos

$$\mathbf{C} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{V}^n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{U}^n.$$

■

Los siguientes dos teoremas muestran como construir subgrupos compactos abiertos en ciertos grupos topológicos.

Teorema 2.51 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico y sea* $\mathbf{U}$ *una vecindad*[5] *compacta de la identidad* e. *Entonces* $\mathbf{U}$ *contiene un subgrupo* $\mathbf{H}$ *de* $\mathbf{G}$ *que es compacto, abierto, y cerrado.*

[5] Recalcamos que las vecindades son conjuntos abiertos.

Prueba. Como $\mathbf{U} \subset \mathbf{U}, \mathbf{U}$ es compacto, y $\mathbf{U}$ es abierto, podemos aplicar el Teorema 2.11 para obtener una vecindad simétrica $\mathbf{V}$ de e y aplicando el Teorema 2.6 podemos elegir $\mathbf{V}$ tal que

$$\mathbf{UV} \cup \mathbf{VU} \subset \mathbf{U}$$

así $\mathbf{UV} \subset \mathbf{U}$. Y tenemos

$$\mathbf{V} = e\mathbf{V} \subset \mathbf{UV} \subset \mathbf{U}$$

y por tanto

$$\mathbf{V}^2 \subset \mathbf{UV} \subset \mathbf{U}.$$

Continuando con inducción finita en n, tenemos

$$\mathbf{V}^n = \mathbf{V}^{n-1}V \subset \mathbf{UV} \subset \mathbf{U} \text{ para } n = 3, 4, \cdots .$$

Hacemos

$$\mathbf{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{V}^n,$$

por el Teorema 2.18 obtenemos que $\mathbf{H}$ es abierto y cerrado. ■

Teorema 2.52 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo compacto y* $\mathbf{U}$ *una vecindad cerrada de la identidad* e. *Entonces* $\mathbf{U}$ *contiene un subgrupo normal* $\mathbf{N}$ *abierto y cerrado de* $\mathbf{G}$. *El grupo* $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ *es finito.*

Prueba. Por el Teorema 2.51, $\mathbf{U}$ contiene un subgrupo $\mathbf{H}$ compacto, abierto y cerrado. Sea

$$\mathbf{N} = \bigcap_{x \in \mathbf{G}} x\mathbf{H}x^{-1},$$

probemos que $\mathbf{N}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$.

Sea $y \in \mathbf{G}$, entonces

$$\begin{aligned}
y\mathbf{N}y^{-1} &= y(\bigcap_{x \in \mathbf{G}} x\mathbf{H}x^{-1})y^{-1} \\
&= \bigcap_{x \in \mathbf{G}} yx\mathbf{H}x^{-1}y^{-1} \\
&= \bigcap_{x \in \mathbf{G}} yx\mathbf{H}(yx)^{-1} \\
&= \bigcap_{x \in \mathbf{G}} t\mathbf{H}t^{-1}, t = yx \\
&= \mathbf{N}
\end{aligned}$$

por tanto $\mathbf{N}$ es un subgrupo normal.

Además para cada $x \in \mathbf{G}$, $\mathbf{N} \subset x\mathbf{H}x^{-1}$, entonces

$$
\begin{aligned}
x^{-1}\mathbf{N} &\subset x^{-1}x\mathbf{H}x^{-1} \\
x^{-1}\mathbf{N} &\subset e\mathbf{H}x^{-1} = \mathbf{H}x^{-1} \\
x^{-1}\mathbf{N}x &\subset \mathbf{H}x^{-1}x \\
x^{-1}\mathbf{N}x &\subset \mathbf{H}e = \mathbf{H}
\end{aligned}
$$

por lo que $\mathbf{N} \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{U}$.

Por el Teorema 2.8, existe una vecindad de e tal que $x^{-1}\mathbf{V}x \subset \mathbf{H}$ para todo $x \in \mathbf{G}$. Esto es, $\mathbf{V} \subset x\mathbf{H}x^{-1}$ para todo $x \in \mathbf{G}$, así que $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}$. Esto muestra que $\mathbf{N}$ es abierto, por el Teorema 2.16. Como $\mathbf{N}$ es abierto, por el Teorema 2.30, $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ es discreto, y como $\mathbf{G}$ es compacto, por el Teorema 2.31, $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ es compacto. Por lo tanto $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ es finito. ∎

Los Teoremas 2.51 y 2.52 muestran que ciertos grupos localmente compactos contienen pequeños subgrupos arbitrario abierto y compacto[6].

Teorema 2.53 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo totalmente disconexo o* $0-$*dimensional que es localmente compacto (compacto). Entonces toda vecindad de la identidad* e *contiene un subgrupo abierto compacto (normal abierto compacto).*

Prueba. Si $\mathbf{G}$ es totalmente disconexo, es T_1 y por tanto Hausdorff, por el Teorema 2.7. Si $\mathbf{U}$ es cualquier vecindad de e, entonces $\mathbf{U}$ contiene una vecindad abierta y cerrada, la cual es compacta si $\overline{\mathbf{U}}$ es compacta. Aplicando el Teorema 2.51 y el Teorema 2.52, $\mathbf{U}$ contiene un subgrupo compacto abierto. ∎

El Teorema 2.53 produce una nueva descripción de la componente de la identidad en grupos localmente compactos.

Teorema 2.54 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo localmente compacto y sea* $\mathbf{C}$ *la componente de la identidad en* $\mathbf{G}$. *Entonces* $\mathbf{C}$ *es la intersección de todos los subgrupos abiertos de* $\mathbf{G}$.

[6]Decimos que un grupo topológico contiene pequeños subconjuntos arbitrarios de un tipo dado si toda vecindad de la identidad contiene tales subconjunto.

Prueba. Por el Teorema 2.16, todo subgrupo abierto es cerrado y como también contiene e, debe contener la componente conexa $\mathbf{C}$ de e. Así $\mathbf{C}$ está contenida en la intersección de todos los subgrupos abiertos de $\mathbf{G}$. Ahora sea x cualquier elemento de $\mathbf{G}$ tal que $x \notin \mathbf{C}$. Considere el grupo cociente $\mathbf{G}/\mathbf{C}$, el cual es totalmente disconexo, por el Teorema 2.49, y localmente compacto, por el Teorema 2.31. Por el Teorema 2.53, existe un subgrupo compacto abierto $\{u\mathbf{C}|u \in \mathbf{U}\}$ de $\mathbf{G}/\mathbf{C}$ que no contiene el elemento $x\mathbf{C}$ de $\mathbf{G}/\mathbf{C}$. Podemos tomar una vecindad $\mathbf{U}$ de e en $\mathbf{G}$. Entonces $\mathbf{UC}$ es un subgrupo abierto de $\mathbf{G}$ no conteniendo x. ■

Corolario 2.8 *La siguientes afirmaciones acerca de un grupo* $\mathbf{G}$ *localmente compacto son equivalentes:*

(I) $\mathbf{G}$ *es conexo;*

(II) $\mathbf{G}$ *no tiene subgrupos propios abiertos;*

(III) *para toda vecindad* $\mathbf{U}$ *de* e, *tenemos*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{U}^n = \mathbf{G}$$

Prueba.

$(I) \Leftrightarrow (II)$ Según la Proposición 1.6, $\mathbf{G}$ es conexo si y sólo, si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de $\mathbf{G}$ son $\emptyset$ y el mismo $\mathbf{G}$. Por tanto, $\mathbf{G}$ es conexo si y sólo, si no tiene subgrupos propios abiertos, ya que, por Teorema 2.16, todo subgrupo de un grupo topológico abierto es cerrado .

$(I) \Rightarrow (III)$ Si $\mathbf{G}$ es localmente compacto y conexo, entonces, según Teorema 2.50,

$$\mathbf{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{U}^n.$$

$(III) \Rightarrow (II)$ Sea $\mathbf{U}$ una vecindad de e compacta, entonces según Teorema 2.53, $\mathbf{U}$ contiene un subgrupo abierto $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$. Como $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}, \mathbf{H}^3 = \mathbf{H}$, y así sucesivamente $\mathbf{H}^n = \mathbf{H}$, entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{H}^n = \mathbf{H}.$$

Además como $\mathbf{H}$ es abierto tenemos que $\mathbf{H}$ es una vecindad de e, entonces por hipótesis

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{H}^n = \mathbf{H},$$

esto es $\mathbf{H} = \mathbf{G}$. Por lo tanto $\mathbf{G}$ no tiene subgrupos abiertos propios.

■

Teorema 2.55 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo localmente compacto* $0-$*dimensional y sea* $\mathbf{H}$ *un subgrupo cerrado de* $\mathbf{G}$. *Entonces* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *es* $0-$*dimensional.*

Prueba. Sea $\mathbf{U}$ una vecindad de e en $\mathbf{G}$. Por el Teorema 2.53, $\mathbf{U}$ contiene un subgrupo compacto abierto $\mathbf{L}$ de $\mathbf{G}$. Por la Definición 2.10, el conjunto $\{x\mathbf{H}|x \in \mathbf{L}\}$ es abierto y cerrado en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ porque es un subconjunto compacto del espacio Hausdorff $\mathbf{G}/\mathbf{H}$(Teorema 2.30). Así $\mathbf{H}$ en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ tiene una pequeña vecindad abierta y cerrada. Como $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es homogéneo, se sigue que $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es $0-$dimensional.

■

Teorema 2.56 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo localmente compacto y sea* $\mathbf{C}$ *la componente de la identidad* e *en* $\mathbf{G}$. *Sea* f *un homomorfismo continuo abierto de* $\mathbf{G}$ *a un grupo-*T_0, $\widetilde{\mathbf{G}}$, *y sea* $\widetilde{\mathbf{C}}$ *la componente de la identidad* $\widetilde{e}$ *en* $\widetilde{\mathbf{G}}$. *Entonces* $\overline{f(\mathbf{C})} = \widetilde{\mathbf{C}}$.

Prueba. Como $\mathbf{C}$ es conexo y f es abierto, tenemos que $f(\mathbf{C})$ es conexo y por tanto cerrado, así $\overline{f(\mathbf{C})}$ es conexo (ya que si $\mathbf{A}$ es conexo, entonces también lo es $\overline{\mathbf{A}}$), tenemos $\overline{f(\mathbf{C})} \subset \widetilde{\mathbf{C}}$. Por el Teorema 2.47, $\overline{f(\mathbf{C})}$ es un subgrupo normal cerrado de $\widetilde{\mathbf{G}}$, y $\mathbf{H} = f^{-1}(\overline{f(\mathbf{C})})$ es un subgrupo normal cerrado de $\mathbf{G}$ conteniendo $\mathbf{C}$. Por el segundo teorema de isomorfismo (Teorema 2.35), $\widetilde{\mathbf{G}}/\overline{f(\mathbf{C})}$ es topológicamente isomorfo con $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Por el mismo teorema(Teorema 2.35), $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es topológicamente isomorfo con $(\mathbf{G}/\mathbf{C})/(\mathbf{H}/\mathbf{C})$. Como por el Teorema 2.49, $\mathbf{G}/\mathbf{C}$ es totalmente disconexo, Hausdorff, y por Teorema 2.31 es localmente compacto, $\mathbf{G}/\mathbf{C}$ es $0-$dimensional. Es fácil verificar que $\mathbf{H}/\mathbf{C}$ es un subgrupo normal cerrado de $\mathbf{G}/\mathbf{C}$. Por lo tanto, por el Teorema 2.55, $(\mathbf{G}/\mathbf{C})/(\mathbf{H}/\mathbf{C})$ es $0-$dimensional y Hausdorff, por tanto totalmente disconexo. Esto es, $\widetilde{\mathbf{G}}/\overline{f(\mathbf{C})}$ es totalmente disconexo. $\{\widetilde{x}\overline{f(\mathbf{C})}|\widetilde{x} \in \widetilde{\mathbf{C}}\}$ es conexa en $\widetilde{\mathbf{G}}/\overline{f(\mathbf{C})}$, pues es la imagen continua de un conjunto conexo $\widetilde{\mathbf{C}}$, Por lo tanto tenemos

$$\{\widetilde{x}\overline{f(\mathbf{C})}|\widetilde{x} \in \widetilde{\mathbf{C}}\} = \{\overline{f(\mathbf{C})}\},$$

y así $\widetilde{\mathbf{C}} \subset \overline{f(\mathbf{C})}$. ■

Corolario 2.9 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo localmente compacto y sea* $\mathbf{C}$ *la componente de la identidad* e *en* $\mathbf{G}$. *Sea* f *un homomorfismo continuo abierto de* $\mathbf{G}$ *a un grupo-*T_0, $\widetilde{\mathbf{G}}$, *y sea* $\widetilde{\mathbf{C}}$ *la componente de la identidad* $\widetilde{e}$ *en* $\widetilde{\mathbf{G}}$. *Si*

$$f^{-1}(\widetilde{e}) \subset \mathbf{C} \;\; o \;\; \mathbf{C} \subset f^{-1}(\widetilde{e}),$$

entonces

$$f(\mathbf{C}) = \widetilde{\mathbf{C}}.$$

Prueba. Si $f^{-1}(\widetilde{e}) \subset \mathbf{C}$, entonces

$$f^{-1}(\widetilde{e}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}$$

y si $\mathbf{C} \subset f^{-1}(\widetilde{e})$, entonces

$$f^{-1}(\widetilde{e}) \cdot \mathbf{C} = f^{-1}(\widetilde{e}),$$

respectivamente, y por tanto es un subgrupo cerrado de $\mathbf{G}$ en cualquiera de los casos. Como

$$f^{-1}(f(\mathbf{C})) = \mathbf{C} = f^{-1}(\widetilde{e}) \cdot \mathbf{C},$$

tenemos

$$\widetilde{\mathbf{G}} - f(\mathbf{C}) = f(\widetilde{\mathbf{G}} - (f^{-1}(\widetilde{e}) \cdot \mathbf{C}))$$

así que $\widetilde{\mathbf{G}} - f(\mathbf{C})$ es abierto en $\widetilde{\mathbf{G}}$. Así $f(\mathbf{C})$ es cerrado en $\widetilde{\mathbf{G}}$, por lo que el Teorema 2.56 implica que $f(\mathbf{C}) = \widetilde{\mathbf{C}}$. ■

Teorema 2.57 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico y sea* $\mathbf{H}$ *un subgrupo de* $\mathbf{G}$. *Si* $\mathbf{H}$ *y* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *son conexos, entonces* $\mathbf{G}$ *es conexo.*

Prueba. Supongamos por contradicción que $\mathbf{G} = \mathbf{U} \cup \mathbf{V}$ donde $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son conjuntos no vacíos disjuntos y $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es conexo. Como $\mathbf{H}$ es conexo, cada clase de $\mathbf{H}$ es o un subgrupo de $\mathbf{U}$ o un subgrupo de $\mathbf{V}$. Así la relación

$$\begin{aligned}\mathbf{G}/\mathbf{H} &= \{x\mathbf{H} | x\mathbf{H} \subset \mathbf{U}\} \bigcup \{x\mathbf{H} | x\mathbf{H} \subset \mathbf{V}\} \\ &= \{x\mathbf{H} | x \in \mathbf{U}\} \bigcup \{x\mathbf{H} | x \in \mathbf{V}\}\end{aligned}$$

expresa a $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ como la unión de conjuntos abiertos disjuntos. Esto contradice la hipótesis que $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es conexo ■

Para terminar esta sección tenemos lo siguiente:

Proposición 2.8 *La componente de la identidad en un subgrupo normal es un subgrupo normal.*

Prueba. Sea $\mathbf{C}$ la componente conexa de la identidad e en el subgrupo normal $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$. Como por Corolario 2.1, la aplicación $\lambda : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, definida por $\lambda(x) = axa^{-1}, a \in \mathbf{G}$ es un homeomorfismo entonces por el Teorema 1.14. Para todo $a \in \mathbf{G}, a\mathbf{C}a^{-1} = \lambda(\mathbf{C})$ es un conjunto conexo y

$$x\mathbf{C}x^{-1} \subset x\mathbf{H}x^{-1} \subset \mathbf{H}.$$

Como $\mathbf{H}$ es normal en $\mathbf{G}$ y como $\mathbf{C}$, por la Definición 2.13, es la unión de todos los conjuntos conexos que continen a e; tenemos que $x\mathbf{C}x^{-1} \subset \mathbf{C}$.

Además, como

$$\mathbf{C} = \bigcup_j \mathbf{B}_j,$$

donde $\mathbf{B}_j$ es conexo y contiene la identidad e, entonces

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{C}) &= \lambda(\bigcup_j \mathbf{B}_j) \\ &= \bigcup_j \lambda(\mathbf{B}_j) \\ &= \bigcup_j x\mathbf{B}_j x^{-1}. \end{aligned}$$

es la componente conexa de e, y como $\mathbf{C}$ es la componente también de e, obtenemos $\mathbf{C} \subset x\mathbf{C}x^{-1}$. Por lo que $x\mathbf{C}x^{-1} = \mathbf{C}$, luego $\mathbf{C}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$.

■

2.7. Prenormas en Grupos Topológicos, Metrizabilidad

En esta sección definimos lo que es una prenorma, tal definición es la equivalente a la definición de una norma en espacios topológicos. Y damos algunos resultados sobre grupos topológicos metrizables. Además consideramos prenormas continuas.

Definición 2.14 *Sea $\mathbf{G}$ un grupo, con elemento identidad e, sea N una función de valor real en $\mathbf{G}$. Llamamos a N una* **prenorma** *si, para todo $x, y \in \mathbf{G}$, se satisfacen las siguientes condiciones:*

(PN1) $N(e) = 0$;

(PN2) $N(xy) \leq N(x) + N(y)$;

(PN3) $N(x^{-1}) = N(x)$.

Una prenorma con la propiedad adicional, $N(x) = 0$ si y sólo si $x = e$ se le llama una **norma**. Note que los valores de una prenorma son reales necesariamente no negativo, esto se da en la siguiente proposición:

Proposición 2.9 *Si N es una prenorma en $\mathbf{G}$, entonces $N(x) \geq 0$ para cada $x \in \mathbf{G}$, esto es, N es no negativa.*

Prueba. Realmente, como $e = xx^{-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= N(e) \text{ por la condición (PN1)} \\ &= N(xx^{-1}) \\ &\leq N(x) + N(x^{-1}) \text{ por la condición (PN2)} \\ &= N(x) + N(x) \text{ por la condición (PN3)} \\ &= 2N(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto $N(x) \geq 0$. ■

Las normas definidas en un espacio vectorial son obviamente normas de el grupo abeliano subyacente. Toda prenorma N genera una premétrica d_N en $\mathbf{G}$ definida por

$$d_N[(x, y)] = N(x^{-1}y).$$

Esta premétrica es invariante por la izquierda en el sentido que

$$d_N[(ax, ay)] = d_N[(x, y)], \forall a, x, y \in \mathbf{G}.$$

Reciprocamente, toda premétrica invariante por la izquierda en $\mathbf{G}$ da una prenorma de $\mathbf{G}$ definida por $N_d(x) = d(x, e)$. Obviamente, esta prenorma genera la premétrica invariante por la izquierda original d. Esto define una correspondencia biyectiva entre prenormas N y premétricas invariantes por la izquierda d_N.

Supongamos que d_N es una métrica, entonces

(I) Para $e \in \mathbf{G}$,

$$\begin{aligned} N(e) &= N(x^{-1}x) \\ &= d_N(x, x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(II) Sean $x, y \in \mathbf{G}$, entonces

$$\begin{aligned} N(xy) &= d_N(x^{-1}, y) \\ &\leq d_N(x^{-1}, e) + d_N(e, y) \\ &= d_N(x^{-1}, e) + d_N(y, e) \\ &= N(x^{-1}) + N(y) \\ &= N(x) + N(y). \end{aligned}$$

(III) Sea $x \in \mathbf{G}$, entonces

$$\begin{aligned} N(x) &= d_N(x, e) \\ &= d_N(x^{-1}x, x^{-1}e) \\ &= d_N(e, x^{-1}) \\ &= d_N(x^{-1}, e) \\ &= N(x^{-1}). \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que N es una prenorma.

Recíprocamente, supongamos que N es una prenorma

(I) Sean $x, y \in \mathbf{G}$, entonces

$$\begin{aligned} d_N(x,y) &= N(x^{-1},y) \\ &= N(z), z = x^{-1}y \in \mathbf{G} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(II) Sean $x, y \in \mathbf{G}$, entonces

$$\begin{aligned} d_N(x,y) &= N(x^{-1}y) \\ &= N((x^{-1}y)^{-1}) \\ &= N(y^{-1}x) \\ &= d_N(y,x). \end{aligned}$$

(III) Sean $x, y, z \in \mathbf{G}$, entonces

$$\begin{aligned} d_N(x,z) &= N(x^{-1}z) \\ &= N(x^{-1}(yy^{-1})z) \\ &= N((x^{-1}y)(y^{-1}z)) \\ &\leq N(x^{-1}y) + N(y^{-1}z) \\ &= d_N(x,y) + d_N(y,z). \end{aligned}$$

Así tenemos que d_N es una métrica y por lo tanto d_N es una métrica si y sólo si N es una prenorma.

Proposición 2.10 *Si N es una prenorma en un grupo $\mathbf{G}$, entonces*

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x^{-1}y)$$

para cualesquiera x e y en $\mathbf{G}$.

Prueba. Sean $x, y \in \mathbf{G}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} N(y) &= N(y^{-1}), \ \text{ por (PN3)} \\ &= N(y^{-1}(xx^{-1})) = N((y^{-1}x)x^{-1}) \\ &\leq N(y^{-1}x) + N(x^{-1}), \ \text{ por (PN2)} \\ &= N(x^{-1}y) + N(x), \ \text{por (PN3) y } \ N(y^{-1}x) = N((y^{-1}x)^{-1}) = N(x^{-1}y). \end{aligned}$$

Esto implica que $-N(x^{-1}y) \leq N(x) - N(y)$.

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned} N(x) &= N(x^{-1}), \ \text{ por (PN3)} \\ &= N(x^{-1}yy^{-1}) = N((x^{-1}y)y^{-1}) \\ &\leq N(x^{-1}y) + N(y^{-1}), \ \text{ por (PN2)} \\ &= N(x^{-1}y) + N(y), \ \text{ por (PN3).} \end{aligned}$$

Lo cuál implica que $N(x) - N(y) \leq N(x^{-1}y)$. Por lo tanto, tenemos

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x^{-1}y).$$

■

La siguiente afirmación nos dice que toda multiplicación escalar de una prenorma con un número real no negativo, da como resultado una prenorma.

Proposición 2.11 *Si N es una prenorma en un grupo $\mathbf{G}$ y α es número real no negativo, entonces la función αN en $\mathbf{G}$ definida por la fórmula*

$$(\alpha N)(x) = \alpha(N(x)),$$

para cada $x \in \mathbf{G}$, es una prenorma en $\mathbf{G}$.

Prueba.

1) Para $e \in \mathbf{G}$ tenemos:

$$(\alpha N)(e) = \alpha(N(e)) = \alpha(0) = 0;$$

2) Para $x, y \in \mathbf{G}$ tenemos:

$$\begin{aligned}(\alpha N)(xy) &= \alpha(N(xy)); \text{ por la definición de } (\alpha N)(x)\\ &\leq \alpha(N(x)+N(y)); \text{ por la condición (PN2)}\\ &= \alpha(N(x))+\alpha(N(y)),\\ &= (\alpha N)(x)+(\alpha N)(y);\end{aligned}$$

3) Además para $x^{-1} \in \mathbf{G}$ tenemos:

$$\begin{aligned}(\alpha N)(x^{-1}) &= \alpha(N(x^{-1}))\\ &= \alpha(N(x))\\ &= (\alpha N)(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\alpha N)(x)$ es una prenorma, ya que satisface las tres condiciones de una prenorma (Definición 2.14). ■

Proposición 2.12 *Para cualquier prenorma N en un grupo $\mathbf{G}$, el conjunto*

$$\mathbf{Z}_N = \{x \in \mathbf{G} | N(x) = 0\}$$

es un subgrupo de $\mathbf{G}$.

Prueba. Si $x \in \mathbf{Z}_N$, entonces $N(x) = 0$. Por lo tanto, $N(x^{-1}) = 0$, lo cual implica que $x^{-1} \in \mathbf{Z}_N$. Sean $x, y \in \mathbf{Z}_N$. Entonces

$$0 \leq N(xy) \leq N(x) + N(y) = 0,$$

lo cual implica que $N(xy) = 0$ y $xy \in \mathbf{Z}_N$. Además $e \in \mathbf{Z}_N$ ya que $N(e) = 0$. Por lo tanto $\mathbf{Z}_N$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$. ■

Proposición 2.13 *La suma de dos prenormas en un grupo $\mathbf{G}$ es una prenorma en $\mathbf{G}$.*

Prueba. Sean N_1, N_2 dos prenormas en $\mathbf{G}$, definamos

$$(N_1 + N_2)(x) = N_1(x) + N_2(x), \forall x \in \mathbf{G},$$

entonces

1) para $e \in \mathbf{G}$, tenemos

$$(N_1 + N_2)(e) = N_1(e) + N_2(e) = 0 + 0 = 0.$$

2) para $x, y \in \mathbf{G}$, tenemos

$$\begin{aligned}(N_1 + N_2)(xy) &= N_1(xy) + N_2(xy), \text{ por la definición de } N_1 + N_2\\ &\leq (N_1(x) + N_1(y)) + (N_2(x) + N_2(y)), \text{ por la condición (PN2)}\\ &= (N_1(x) + N_2(x)) + (N_1(y) + N_2(y)), \text{ asociando términos}\\ &= (N_1 + N_2)(x) + (N_1 + N_2)(y).\end{aligned}$$

y

3) para $x^{-1} \in \mathbf{G}$, tenemos

$$\begin{aligned}(N_1 + N_2)(x^{-1}) &= N_1(x^{-1}) + N_2(x^{-1})\\ &= N_1(x) + N_2(x)\\ &= (N_1 + N_2)(x).\end{aligned}$$

Estas tres propiedades implican que la suma de dos prenormas, es una prenorma. ■

Existe un método muy simple para construir prenormas en un grupo $\mathbf{G}$. Este se describe en el siguiente lema:

Lema 2.6 *Sea f una función de valor real acotada en un grupo $\mathbf{G}$. Entonces la función N_f en $\mathbf{G}$, definida por la formula*

$$N_f(x) = \sup\{|f(yx) - f(y)| \; |y \in \mathbf{G}\},$$

para cada $x \in \mathbf{G}$, es una prenorma en $\mathbf{G}$.

Prueba. Tenemos que:

1)

$$\begin{aligned}N_f(e) &= \sup\{|f(ye) - f(y)| \;\; |y \in \mathbf{G}\}\\ &= \sup\{|f(y) - f(y)| = 0 \;\; |y \in \mathbf{G}\}\\ &= 0.\end{aligned}$$

2) Sean $x, y \in \mathbf{G}$, entonces

$$
\begin{aligned}
N(xy) &= \sup\{|f(zxy) - f(z)| \ |z \in \mathbf{G}\} \\
&= \sup\{|f(zxy) - f(zx) + f(zx) - f(z)| \ |z \in \mathbf{G}\} \\
&\leq \sup\{|f(zxy) - f(zx)| + |f(zx) - f(z)| \ |z \in \mathbf{G}\} \\
&\leq \sup\{|f(zxy) - f(zx)| \ |z \in \mathbf{G}\} + \sup\{|f(zx) - f(z)| \ |z \in \mathbf{G}\} \\
&\leq \sup\{|f(zxy) - f(zx)| \ |z \in \mathbf{G}\} + N_f(x) \\
&= \sup\{|f(ty) - f(t)| \ |t \in \mathbf{G}\} + N_f(x), \ \text{ con } \ t = zx \\
&= N_f(y) + N_f(x) = N_f(x) + N_f(y).
\end{aligned}
$$

3) Si $x \in \mathbf{G}$, entonces

$$
\begin{aligned}
N_f(x^{-1}) &= \sup\{|f(yx^{-1}) - f(y)| \ |y \in \mathbf{G}\} \\
&= \sup\{|f(z) - f(zx)| \ |z \in \mathbf{G}\}, \ \text{ con } \ z = yx^{-1} \\
&= \sup\{|f(zx) - f(z)| \ |z \in \mathbf{G}\} \\
&= N_f(x).
\end{aligned}
$$

Esto prueba que $N_f(x) = \sup\{|f(yx) - f(y)| \, |y \in \mathbf{G}\}$, para cada $x \in \mathbf{G}$, es una prenorma. ■

En general una prenorma no necesita ser continua.

Proposición 2.14 *Una prenorma N en un grupo topológico $\mathbf{G}$ es continua si y sólo, si para cada número positivo ϵ existe una vecindad $\mathbf{U}$ del elemento identidad e tal que $N(x) < \epsilon$, para cada $x \in \mathbf{U}$.*

Prueba.

($\Rightarrow$) Si N es continua, entonces es continua en la identidad e de G, es decir, si $\epsilon > 0$, entonces existe $\mathbf{U} \in \mathscr{U}$ tal que para cualquier $x \in \mathbf{U}$ se tiene

$$|N(x) - N(e)| < \epsilon.$$

Como $N(e) = 0$ tenemos, entonces

$$\begin{aligned} |N(x) - N(e)| &= |N(x) - 0| \\ &= |N(x)| \\ &= N(x) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Suponga que z es cualquier punto de $\mathbf{G}$, y ϵ es un número positivo. Tomamos una vecindad $\mathbf{U}$ de e tal que $N(x) < \epsilon$ para cada $x \in \mathbf{U}$. El conjunto $\mathbf{V} = z\mathbf{U}$ es una vecindad de z. Tomamos cualquier $y \in z\mathbf{U}$. Entonces $z^{-1}y \in \mathbf{U}$, y por lo tanto, $N(z^{-1}y) < \epsilon$. De la Proposición 2.10 se sigue que

$$|N(z) - N(y)| < \epsilon.$$

■

Ahora vamos a mostrar como construir prenormas continuas en un grupo topológico $\mathbf{G}$. La importancia de la construcción es el hecho que nos provee con una muy rica familia de prenormas continuas en cualquier grupo topológico.

Definición 2.15 *Si N es una prenorma en un grupo $\mathbf{G}$, definimos la* **bola unitaria** *de N como el conjunto*

$$\mathbf{B}_N(1) = \{x \in \mathbf{G} | N(x) < 1\}.$$

*También definimos una N-**bola** de radio ϵ, como el conjunto*

$$\mathbf{B}_N(\epsilon) = \{x \in \mathbf{G} | N(x) < \epsilon\},$$

donde ϵ es un número positivo.

Claramente, si N es una prenorma continua, entonces la bola unitaria $\mathbf{B}_N$ es un subconjunto abierto de $\mathbf{G}$. Los conjuntos $\mathbf{B}_N(\epsilon)$ son abiertos también cuando N es una prenorma continua.

Lema 2.7 *Sea $\{\mathbf{U}_n | n \in \mathbf{I}\}$ una sucesión de vecindades simétricas abiertas de la identidad e en grupo topológico $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{U}_{n+1}^2 \subset \mathbf{U}_n$, para cada $n \in \mathbf{I}$. Entonces existe una prenorma N en $\mathbf{G}$ tal que se satisface la siguiente condición:*

(PN4) $\{x \in \mathbf{G} | N(x) < 1/2^n\} \subset \mathbf{U}_n \subset \{x \in \mathbf{G} | N(x) < 2/2^n\}$.

Por tanto esta prenorma N es continua. Si, además, los conjuntos $\mathbf{U}_n$ son invariantes, entonces la prenorma N en $\mathbf{G}$ puede elegirse que satisfaga

$$N(xyx^{-1}) = N(y)$$

para todo $x, y \in \mathbf{G}$.

Prueba. Hagamos $\mathbf{V}(1) = \mathbf{U}_0 = \{x \in \mathbf{G} | N(x) < \frac{1}{2^0}\} = \{x \in \mathbf{G} | N(x) < 1\}$, fijando $n \in \mathbf{I}$, y asumamos que las vecindades abiertas $\mathbf{V}(m/2^n)$ de e están definidas para cada $m = 1, 2, \cdots, 2^n$. Hacemos entonces

$$\mathbf{V}(1/2^{n+1}) = \mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}(2m/2^{n+1}) = \mathbf{V}(m/2^n), \text{ para } m = 1, \cdots, 2^n,$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{V}((2m+1)/2^{n+1}) &= \mathbf{V}(m/2^n) \cdot \mathbf{U}_{n+1} \\ &= \mathbf{V}(m/2^n) \cdot \mathbf{V}(1/2^{n+1}), \end{aligned}$$

para cada $m = 1, 2, \cdots 2^n - 1$. Estas definen vecindades abiertas $\mathbf{V}(r)$ de e para todo número racional $r \leq 1$. También hacemos $\mathbf{V}(m/2^n) = \mathbf{G}$ cuando $m > 2^n$. De estas definiciones se sigue la siguiente condición:

(p) $\mathbf{V}(m/2^n) \cdot \mathbf{V}(1/2^n) \subset \mathbf{V}((m+1)/2^n)$, para todos los enteros $m > 0$ y $n \geq 0$.

Si $m + 1 > 2^n$ (p) es verdadera. Consideremos el caso cuando $m < 2^n$. Probaremos (p) por inducción en n.

Si $n = 1$, entonces el único valor posible de m es también 1, y tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(1/2) \cdot \mathbf{V}(1/2) &= \mathbf{U}_1^2 \\ &\subset \mathbf{U}_0 \\ &= \mathbf{V}(1). \end{aligned}$$

Asumamos que (p) es verdadera para n. Verificaremos que también es verdadera para $n+1$. Si m es par, entonces dentro de la fórmula (p), $\mathbf{V}((2m+1)/2^{n+1})$ el cual esta definido.

Asumamos que $0 < m = 2k+1 < 2^{n+1}$, para algún entero k. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(m/2^n) \cdot \mathbf{V}(1/2^{n+1}) &= \mathbf{V}((2k+1)/2^n) \cdot \mathbf{U}_{n+1} \\
&= \mathbf{V}(k/2^n) \cdot \mathbf{U}_{n+1} \cdot \mathbf{U}_{n+1} \\
&= \mathbf{V}(k/2^n) \cdot \mathbf{U}_{n+1}^2 \subset \mathbf{V}(k/2^n) \cdot \mathbf{U}_n \\
&= \mathbf{V}(k/2^n) \cdot \mathbf{V}(1/2^n).
\end{aligned}$$

Pero por la hipótesis inductiva, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(k/2^n) \cdot \mathbf{V}(1/2^n) &\subset \mathbf{V}((k+1)/2^n) \\
&= \mathbf{V}((2k+2)/2^{n+1}) \\
&= \mathbf{V}((m+1)/2^{n+1}),
\end{aligned}$$

lo cual completa la prueba de (p).

Ahora definamos una función de valor real f en $\mathbf{G}$ como sigue:

$$f(x) = \text{ínf}\{r > 0 | x \in \mathbf{V}(r)\},$$

para cada $x \in \mathbf{G}$. La función f está bien definida, como $x \in \mathbf{V}(2) = \mathbf{G}$, para cada $x \in \mathbf{G}$. De la condición (p) se sigue que si r y s son números racionales positivos tal que $0 < r < s \leq 1$, entonces $\mathbf{V}(r) \subset \mathbf{V}(s)$. Así, tenemos:

1) Si $f(x) < r$, entonces $x \in \mathbf{V}(r)$.

entonces f es una función no negativa, acotada superiormente por 2. Por lo tanto, por el Lema 2.6, la función N definida por la fórmula

$$N_f(x) = \sup\{|f(yx) - f(y)| \; | y \in \mathbf{G}\},$$

para cada $x \in \mathbf{G}$, es una prenorma en $\mathbf{G}$.

Mostramos que N satisface la condición (PN4). Note que $N(e) = 0$. Asumamos que

$$N(x) < 1/2^n,$$

para algún $x \in \mathbf{G}$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= |f(ex) - f(e)| \\ &\leq N(x) \\ &< 1/2^n, \end{aligned}$$

lo cual implica, por I), que $x \in \mathbf{V}(1/2^n) = \mathbf{U}_n$. Esto prueba la primera parte de (p), es decir, que

$$\{x \in \mathbf{G} | N(x) < 1/2^n\} \subset \mathbf{U}_n.$$

Probemos la segunda parte de (p), la cual implica la continuidad de N. Sea x cualquier punto en $\mathbf{V}(1/2^n)$. Esta claro que, para cualquier punto $y \in \mathbf{G}$ existe un entero positivo k tal que

$$(k-1)/2^n \leq f(y) < k/2^n.$$

Entonces $y \in \mathbf{V}(k/2^n)$, por I). Como $x \in \mathbf{V}(1/2^n)$ y $x^{-1} \in \mathbf{V}(1/2^n)$, se sigue que yx e yx^{-1} están en

$$\mathbf{V}(k/2^n)V(1/2^n) \subset \mathbf{V}((k+1)/2^n).$$

Por lo tanto,

$$f(xy) \leq (k+1)/2^n \wedge f(yx^{-1}) \leq (k+1)/2^n.$$

De estas y la desigualdad $(k-1)/2^n \leq f(y)$ obtenemos:

$$f(yx) - f(y) \leq 2/2^n \wedge f(yx^{-1}) - f(y) \leq 2/2^n.$$

Sustituyendo yx por y en la ultima desigualdad, obtenemos: $f(y) - f(yx) \leq 2/2^n$. Junto a la desigualdad previa, esto implica que

$$|f(yx) - f(y)| \leq 2/2^n,$$

para cada $y \in \mathbf{G}$. Por lo tanto $N(x) \leq 2/2^n$.

Finalmente, suponga que los conjuntos $\mathbf{U}_n$ son invariantes (normales), esto es, para todo $x \in \mathbf{G}$ y $n \in \mathbf{I}$, se tiene $x\mathbf{U}_n x^{-1} = \mathbf{U}_n$. Como el producto finito de conjuntos invariantes es invariante, se sigue que el conjunto $\mathbf{V}_r$ es también invariante para cada número racional $0 < r < 1$. De nuevo, esto implica que $f(xyx^{-1}) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbf{G}$. Por lo tanto, dado los elementos $x, y \in \mathbf{G}$, obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} N(xyx^{-1}) &= \sup_{z\in\mathbf{G}} |f(zxyx^{-1}) - f(z)| \\ &= \sup_{z\in\mathbf{G}} |f(x^{-1}zxy) - f(z)| \\ &= \sup_{z\in\mathbf{G}} |f(ty) - f(xtx^{-1})| \\ &= \sup_{z\in\mathbf{G}} |f(ty) - f(t)| = N(y), \end{aligned}$$

donde $t = x^{-1}zx$. La segunda linea en la igualdades anteriores la escribimos, usando el hecho que la aplicación $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ definida por $\varphi(z) = x^{-1}zx$ para cada $z \in \mathbf{G}$ es una biyección de $\mathbf{G}$ sobre si mismo. ■

El siguiente teorema es debido al matemático ruso Andréi Andréyevich Markov, conocido comúnmente como Andréi Markov.

Teorema 2.58 (A.A. Markov) *Para cada vecindad abierta $\mathbf{U}$ de la identidad e de un grupo topológico, existe una prenorma continua N en $\mathbf{G}$ tal que la bola unitaria $\mathbf{B}_N$ esta contenida en $\mathbf{U}$.*

Prueba. Usando los axiomas de un grupo topológico, podemos construir una sucesión de vecindades abiertas $\{\mathbf{U}_n | n \in \mathbf{I}\}$ de identidad e en $\mathbf{G}$ que satisface la condición del Lema 2.7 y tal que $\mathbf{U}_0 = U$. Tomamos la prenorma N que satisfaga la condición (PN4) del Lema 2.7. Entonces N es continua y la bola unitaria $\mathbf{B}_N$ de N está contenida en $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}$. ■

Sea $\mathbf{G}$ un grupo topológico con identidad e y $\mathscr{N}_s(e)$ la familia de vecindades simétricas de e en $\mathbf{G}$. Para un elemento $\mathbf{V} \in \mathscr{N}_s(e)$, definimos tres subconjuntos $\mathbf{M}^l_{\mathbf{V}}, \mathbf{M}^r_{\mathbf{V}}$ y $\mathbf{M}_{\mathbf{V}}$ de $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ como sigue:

$$\mathbf{M}^l_{\mathbf{V}} = \{(g, h) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G} | g^{-1}h \in \mathbf{V}\}, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{M}^r_{\mathbf{V}} = \{(g, h) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G} | gh^{-1} \in \mathbf{V}\}, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{V}} = \mathbf{M}^l_{\mathbf{V}} \cap \mathbf{M}^r_{\mathbf{V}}. \tag{2.9}$$

Denotamos por $\Delta_{\mathbf{G}}$ la diagonal de $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$, esto es, el conjunto $\Delta_{\mathbf{G}} = \{(x, x) | x \in \mathbf{G}\}$.

Definición 2.16 *A un subconjunto* $\mathbf{B}$ *de* $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ *se le denomina* **simétrico** *si* $(y, x) \in \mathbf{B}$ *para cada* $(x, y) \in \mathbf{B}$.

Denotamos por $\mathscr{D}_{\mathbf{G}}$ la familia de subconjuntos simétricos de $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$. Es decir:

$$\mathscr{D}_{\mathbf{G}} = \{\mathbf{W} \subset \mathbf{G} \times \mathbf{G} | \mathbf{W} = \mathbf{W}^{-1}\}.$$

Hacemos:

$$\mathscr{V}^l_{\mathbf{G}} = \{\mathbf{D} \in \mathscr{D}_{\mathbf{G}} | \mathbf{M}^l_{\mathbf{V}} \subset \mathbf{D} \text{ para algún } \mathbf{V} \in \mathscr{N}_s(e)\}, \tag{2.10}$$

$$\mathscr{V}^r_{\mathbf{G}} = \{\mathbf{D} \in \mathscr{D}_{\mathbf{G}} | \mathbf{M}^r_{\mathbf{V}} \subset \mathbf{D} \text{ para algún } \mathbf{V} \in \mathscr{N}_s(e)\}, \tag{2.11}$$

$$\mathscr{V}_{\mathbf{G}} = \{\mathbf{D} \in \mathscr{D}_{\mathbf{G}} | \mathbf{M}_{\mathbf{V}} \subset \mathbf{D} \text{ para algún } \mathbf{V} \in \mathscr{N}_s(e)\}. \tag{2.12}$$

Definición 2.17 *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo topológico. Una función* f *de valor real en* $\mathbf{G}$ *es llamada* **uniformemente continua por la izquierda** *si para cada* $\epsilon > 0$, *existe* $\mathbf{U} \in \mathscr{V}^l_{\mathbf{G}}$ *tal que*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

donde $(x, y) \in \mathbf{U}$. *Similarmente,* f *es* **uniformemente continua por la derecha** *si para cada* $\epsilon > 0$, *existe* $\mathbf{U} \in \mathscr{V}^r_{\mathbf{G}}$ *tal que*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

donde $(x, y) \in \mathbf{U}$.

Definición 2.18 *Un grupo topológico* $\mathbf{G}$ *se denomina* **uniformemente Tychonoff por la izquierda** *si para toda vecindad abierta* $\mathbf{V}$ *del elemento identidad* e, *existe una función continua uniformemente por la izquierda* f *tal que*

$$f(e) = 0 \ \ y \ \ f(x) \geq 1,$$

para cada $x \in \mathbf{G} - \mathbf{V}$. *Similarmente, se define la uniformidad Tychonoff por la derecha. Esta claro que, si* $\mathbf{G}$ *es uniformemente Tychonoff por la izquierda (o derecha), entonces* $\mathbf{G}$ *es un espacio Tychonoff. Finalmente, si para toda vecindad abierta* $\mathbf{V}$ *del elemento identidad* e *en el grupo topológico* $\mathbf{G}$, *existe una función de valor real* f *en* $\mathbf{G}$ *que satisface* $f(e) = 0$ *y* $f(x) \geq 1$ *para cada* $x \in \mathbf{G} - \mathbf{V}$ *la cual es uniformemente continua por la izquierda y derecha simultáneamente, entonces* $\mathbf{G}$ *se denomina* **uniformemente Tychonoff.**

Teorema 2.59 *Todo grupo topológico* $\mathbf{G}$ *es uniformemente Tychonoff.*

Prueba. Sea $\mathbf{U}$ una vecindad abierta de la identidad e en $\mathbf{G}$. Por el teorema de Markov(Teorema 2.58), existe una prenorma continua N en G tal que $\mathbf{B}_N \subset \mathbf{U}$. Entonces tenemos $N(x) = 0$ y $N(x) \geq 1$ para cada $x \in \mathbf{G} - \mathbf{U}$. Como toda prenorma continua es uniformemente continua por la izquierda y por la derecha, $\mathbf{G}$ es uniformemente Tychonoff. ■

Una importante aplicación del Lema 2.7 es el siguiente teorema debido a los matemáticos Garrett Birkhoff y Shizou Kakutani el primero de Estados unidos y el segundo de Japón.

Teorema 2.60 (S. Kakutani, G. Birkhoff) *Un grupo topológico* $\mathbf{G}$ *es metrizable si y sólo, si es* $1-$*contable.*

Prueba.

($\Rightarrow$) Todo espacio metrizable es 1-contable. [7]

($\Leftarrow$) $\mathbf{G}$ es $1-$contable, entonces $\mathbf{G}$ es metrizable. En el punto e del espacio $\mathbf{G}$ fijamos una base contable $\{\mathbf{W}_n | n \in \mathbf{I}\}$. Por inducción, obtenemos una sucesión $\{\mathbf{U}_n | n \in \mathbf{I}\}$ de vecindades simétricas abiertas de e tal que

$$\mathbf{U}_n \subset \mathbf{W}_n \text{ y } \mathbf{U}_{n+1}^2 \subset \mathbf{U}_n,$$

para cada $n \in \mathbf{I}$. Esta sucesión es también una base de $\mathbf{G}$ en e. Por el Lema 2.7, existe una prenorma continua N en G tal que $\mathbf{B}_N(1/2^n) \subset \mathbf{U}_n$ para cada $n \in \mathbf{I}$. Se sigue que los conjuntos abiertos $\mathbf{B}_N(1/2^n)$ también forman una base de $\mathbf{G}$ en e.

Ahora, para $x, y \in \mathbf{G}$ arbitrarios, hacemos $\rho_N(x, y) = N(xy^{-1})$. Mostraremos que ρ_N es una métrica en G que genera la topología original de $\mathbf{G}$. Esta claro que

$$\rho_N(x, y) = N(xy^{-1}) \geq 0,$$

para todo $x, y \in \mathbf{G}$. Además

$$\rho_N(x, x) = N(xx^{-1}) = 0,$$

[7] Ver Pág. 60

para cada $x \in \mathbf{G}$. Ahora asuma que $\rho_N(x, y) = 0$. Entonces

$$xy^{-1} \in \mathbf{B}_N(1/2^n) \subset \mathbf{U}_n,$$

para cada $n \in \mathbf{I}$. Como $\{e\} = \bigcap_{n \in \mathbf{I}} \mathbf{U}_n$, se sigue que $xy^{-1} = e$, esto es, $x = y$.

Verifiquemos la desigualdad triangular. Tomemos tres punto cualesquiera $x, y,$ y z en $\mathbf{G}$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\rho_N(x, z) &= N(xz^{-1}) \\
&= N(xy^{-1}yz^{-1}) \\
&\leq N(xy^{-1}) + N(yz^{-1}) \\
&= \rho_N(x, y) + \rho_N(y, z).
\end{aligned}$$

Así, ρ_N es una métrica en $\mathbf{G}$.

Note que la métrica ρ_N es invariante por la derecha, esto es equivalente a tener,

$$\rho_N(x, y) = \rho_N(xz, yz)$$

para todo $x, y, z \in \mathbf{G}$. Realmente,

$$\begin{aligned}
\rho_N(xz, yz) &= N(xzz^{-1}y^{-1}) \\
&= N(xy^{-1}) \\
&= \rho_N(x, y).
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{B}_N(\epsilon)$ es obviamente la vecindad$-\rho_N$ esférica de e de radio ϵ, se sigue que la vecindad$-\rho_N$ esférica de cualquier punto x de $\mathbf{G}$ de radio ϵ es precisamente el conjunto $\mathbf{B}_N(\epsilon)x$. Tomamos cualquier $x \in \mathbf{G}$. Como el conjunto $\mathbf{B}_N(1/2^n)x$ constituye una base de $\mathbf{G}$ en x, esto es, la vecindad$-\rho_N$ esférica de e de radio $1/2^n$ de una base del espacio $\mathbf{G}$ en el punto x. Así, la métrica ρ_N genera la topología original del espacio $\mathbf{G}$, esto es, $\mathbf{G}$ es metrizable.

■

Un complemento al Teorema 2.60 es el siguiente:

Corolario 2.10 *Todo grupo topológico* $1-$*contable* $\mathbf{G}$ *admite una métrica derecha invariante* ρ *y una métrica izquierda invariante* λ *ambas generan la topología original de* $\mathbf{G}$.

Prueba. Tomamos una prenorma continua N en $\mathbf{G}$ como en la prueba del Teorema 2.60 y ponemos

$$\rho(x,y) = N(xy^{-1}) \text{ y } \lambda(x,y) = N(x^{-1}y), \forall x, y \in \mathbf{G}.$$

Como mostramos anteriormente, ρ es una métrica invariante en $\mathbf{G}$ que genera la topología de $\mathbf{G}$. Como la aplicación de tomar inversos en $\mathbf{G}$ es un homeomorfismo de $\mathbf{G}$ sobre si mismo, un argumento similar es valido para λ. ■

Teorema 2.61 *Todo grupo topológico Abeliano* $\mathbf{G}$ *es topológicamente isomorfo a un subgrupo del producto de alguna familia de grupos topológicos Abelianos metrizables.*

Prueba. Sea $\mathbf{U}$ una vecindad abierta del elemento identidad e de $\mathbf{G}$. De acuerdo con el Teorema 2.58, podemos fijar una prenorma $N_{\mathbf{U}}$ en $\mathbf{G}$ tal que la bola unitaria con respecto a $N_{\mathbf{U}}$ esta contenida en $\mathbf{U}$.

Hacemos $\mathbf{H}_{\mathbf{U}} = \{x \in \mathbf{G} | N_{\mathbf{U}}(x) = 0\}$. Como $N_{\mathbf{U}}$ es continua, $\mathbf{H}_{\mathbf{U}}$ es cerrado en G. De las condiciones (PN1),(PN2) y (PN3) se sigue que $\mathbf{H}_{\mathbf{U}}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$. Como $\mathbf{G}$ es Abeliano, se sigue que el conjunto cociente $\mathbf{G}_{\mathbf{U}} = \mathbf{G}/\mathbf{H}_{\mathbf{U}}$ es un grupo Abeliano. Denotamos por $f_{\mathbf{U}}$ el homomorfismo cociente natural de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{G}_{\mathbf{U}}$, y definimos una función $P_{\mathbf{U}}$ es el grupo $\mathbf{G}_{\mathbf{U}}$ como sigue:

$$P_{\mathbf{U}}(y) = N_{\mathbf{U}}(x),$$

donde x es cualquier elemento de $f_{\mathbf{U}}^{-1}(y)$. Obviamente, $P_{\mathbf{U}}(y)$ no depende de la elección de x en $f_{\mathbf{U}}^{-1}(y)$. Entonces $P_{\mathbf{U}}$ es una prenorma en el grupo $\mathbf{G}_{\mathbf{U}}$, y $P_{\mathbf{U}}(y) = 0$ si y sólo si y es el elemento identidad $e_{\mathbf{U}}$ de $\mathbf{G}_{\mathbf{U}}$.

Se sigue de las condiciones (PN1),(PN2) y (PN3) que las bolas$-1/n$ con respecto a la prenorma $P_{\mathbf{U}}$ forman una base de la topología $\mathcal{T}_{\mathbf{U}}$ en $\mathbf{G}_{\mathbf{U}}$ con respecto a la cual $\mathbf{G}_{\mathbf{U}}$ es un grupo topológico y la función $f_{\mathbf{U}}$ es continua. También esta claro que la preimagen de la bola-1 con respecto a $P_{\mathbf{U}}$ esta contenida en $\mathbf{U}$. Note que $\mathbf{G}_{\mathbf{U}}$ es $1-$contable y, por lo tanto metrizable.

Por el tipo de argumento Tychonoff, se sigue que el producto diagonal de las funciones $f_{\mathbf{U}}$, donde $\mathbf{U}$ recorre sobre una familia básica $\mathscr{B}$ de vecindades abiertas de e en el grupo $\mathbf{G}$, es un isomorfismo topológico de G sobre un subgrupo del producto $\prod_{\mathbf{U}\in\mathscr{B}}\mathbf{G_U}$. Como todo $\mathbf{G_U}$ es un grupo Abeliano, esto completa el argumento. ■

El teorema 2.60 tiene una aplicación importante en grupos cocientes.

Corolario 2.11 *Suponga que f es un homomorfismo continuo abierto de un grupo topológico metrizable sobre un grupo topológico $\mathbf{H}$. Entonces $\mathbf{H}$ es también metrizable.*

Prueba. Como f es abierta y continua, y el espacio $\mathbf{G}$ es $1-$contable, el espacio $\mathbf{H}$ es también $1-$contable. Por tanto, por el Teorema 2.60, $\mathbf{H}$ es metrizable. ■

Existe una generalización del Corolario 2.11 a espacios cocientes de grupos topológicos metrizables:

Proposición 2.15 *Sea $\mathbf{H}$ un subgrupo cerrado de un grupo topológico metrizable $\mathbf{G}$. Entonces el espacio cociente $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es también metrizable.*

Prueba. Por el Corolario 2.10, existe una métrica invariante por la derecha d en $\mathbf{G}$ la cual genera la topología de $\mathbf{G}$. Para puntos arbitrarios $x, y \in \mathbf{G}$, definimos un número $\rho(x\mathbf{H}, y\mathbf{H})$ por la regla:

$$\rho(x\mathbf{H}, y\mathbf{H}) = \operatorname{ínf}\{d(xh_1, yh_2)|h_1, h_2 \in \mathbf{H}\}.$$

Como d es invariante por la derecha, tenemos que $\rho(x\mathbf{H}, y\mathbf{H}) = d(x, y\mathbf{H}) = d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbf{G}$. La función ρ es simétrica:

$$\begin{aligned}
\rho(y\mathbf{H}, x\mathbf{H}) &= d(y, x\mathbf{H}) \\
&= \operatorname*{ínf}_{h\in\mathbf{H}} d(y, x\mathbf{H}) \\
&= \operatorname*{ínf}_{h\in\mathbf{H}} d(yh^{-1}, x) \\
&= \operatorname*{ínf}_{h\in\mathbf{H}} d(x, yh^{-1}) \\
&= d(x, y\mathbf{H}) \\
&= \rho(x\mathbf{H}, y\mathbf{H}).
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{H}$ es cerrado en $\mathbf{G}$, también tenemos que

$$\rho(x\mathbf{H}, y\mathbf{H}) = d(x, y\mathbf{H}) = 0$$

si y sólo si $x \in y\mathbf{H}$, esto es, $x\mathbf{H} = y\mathbf{H}$. Verifiquemos que la función ρ en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ satisface la desigualdad triangular y, por tanto ρ es una métrica.

Suponga que x, y, z son puntos arbitrarios de $\mathbf{G}$ y $\epsilon > 0$ es un número real. Por la definición de ρ, podemos encontrar $h_1, h_2 \in \mathbf{H}$ tal que

$$\rho(x\mathbf{H}, y\mathbf{H}) < d(x, yh_1) + \epsilon/2 \ \text{ y } \ \rho(yH, zH) < d(y, zh_2) + \epsilon/2.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\rho(x\mathbf{H}, z\mathbf{H}) &\leq d(x, zh_2h_1) \\
&\leq d(x, yh_1) + d(x, zh_2h_1) \\
&= d(x, yh_1) + d(y, zh_2) \\
&< \rho(x\mathbf{H}, y\mathbf{H}) + \rho(y\mathbf{H}, z\mathbf{H}) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ es un número positivo arbitrario, la desigualdad anterior implica que

$$\rho(x\mathbf{H}, z\mathbf{H}) \leq \rho(x\mathbf{H}, y\mathbf{H}) + \rho(y\mathbf{H}, z\mathbf{H}).$$

Así, ρ es una métrica.

Para finalizar la prueba, tenemos que mostrar que ρ genera la topología del espacio cociente $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Para $x \in \mathbf{G}$ y $\epsilon > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
O_\epsilon(x) &= \{y \in \mathbf{G} | d(x, y) < \epsilon\} \ \text{ y} \\
\mathbf{B}_\epsilon(x\mathbf{H}) &= \{y\mathbf{H} | y \in \mathbf{G}, \rho(x\mathbf{H}, y\mathbf{H}) < \epsilon\}.
\end{aligned}$$

Denotemos por π la aplicación cociente de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{G}/\mathbf{H}, \pi(x) = x\mathbf{H}$ para cada $x \in \mathbf{G}$. Se sigue de la definición de la métrica ρ que $\pi(O_\epsilon(x)) = \mathbf{B}_\epsilon(x\mathbf{H})$ para todo $x \in \mathbf{G}$ y $\epsilon > 0$. Como los conjuntos $O_\epsilon(x)$ forman una base para $\mathbf{G}$ y la aplicación $\pi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ es continua y abierta, concluimos que los conjuntos $\mathbf{B}_\epsilon(x\mathbf{H})$ constituyen una base para la topología original del espacio $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. ■

Definición 2.19 *Supóngase que* $\mathbf{H}$ *es un subgrupo invariante cerrado de un grupo topológico* $\mathbf{G}$, *y* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *es el correspondiente grupo cociente. Entonces* $\mathbf{G}$ *es llamado una* **extensión** *del grupo* $\mathbf{H}$ *por* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$.

Así tenemos el siguiente resultado del matemático ruso Naum Yakovlivich Vilenkin.

Corolario 2.12 (N. Ya. Vilenkin) *Supóngase que* G *es un grupo topológico, y* H *un subgrupo metrizable cerrado de* G, *tal que el cociente* G/H *es primero-contable. Entonces* G *es también metrizable.*

Prueba. Por el Corolario 2.7, el espacio G es $1-$contable. Y por el Corolario 2.11, G admite una métrica, por lo tanto es metrizable. ■

Bibliografía

[1] Demetrio Stojanoff, Un curso de topología, 2009.

[2] Vern Paulsen, An introduction to the theory of topogical groups and their representations.

[3] Hewit E., Ross K.A, Abstract Harmonic analysis vol 1, Structure of topogical groups.

[4] Juan Horváth, Introducción a la topología general, Washington D.C., 1969.

[5] Dikran Dikranjas, Introduction to topogical groups.

[6] T. W. Körner, Topological groups, 2008.

[7] Prof. Marta Macho Stadler, Topología general, 2002

[8] James R. Munkres, Topología, 2° edición.

[9] John B. Fraleigh. Algebra Abstracta,Primer curso.

[10] Nathan Jacobson, Basic Algebra I.

[11] I.N. Herstein, Algebra Moderna.

[12] Alexander Arhangel'skii, Mikhail Tkachenko, Topological Groups and Realative Structure

Índice alfabético

$N-$bola, 154
$\mathbf{K}-$topología sobre $\mathbb{R}$, 33
$\mathbf{U}-$disjunto, 100
Índice de un subgrupo, 10

Abierto en subespacio $\mathbf{Y}$ de espacio $\mathbf{X}$, 34
Abierto en un espacio $\mathbf{X}$, 34
Acotamiento, 49
Aplicación cerrada, 50
Aplicación proyectiva, 46, 133
Aplicación abierta, 50
Aplicación cociente, 50
Aplicación inversión, 10
Automorfismo, 23
Axioma T_1, 38

Base numerable en un punto, 59
Base para una topología, 30
Bola, 48
Bola unitaria, 154

Clase lateral derecha, 8
Clase lateral izquierda, 8
Clausura de un conjunto, 36
Componente, 51
Componente conexa de grupo, 137
Conjunto abierto, 29
Conjunto cerrado, 35
Conjunto cerrado en un subespacio, 36
Conjunto conexo, 70
Conjunto denso, 59
Conjunto saturado, 50
Conjunto simétrico, 159
Cubrimiento, 53
Cubrimiento abierto, 53

Distancia, 48
Dos-numerable o dos-contable, 60

Elemento básico, 30
Embebimiento Topológico, 41
Endomorfismo, 23
Entorno de un punto, 31
Epimorfismo, 23
Espacio cociente, 109
Espacio compacto, 53
Espacio de clases laterales, 109

Espacio discreto, 103
Espacio homogéneo, 74
Espacio localmente compacto en un punto, 58
Espacio métrico, 49
Espacio metrizable, 49
Espacio producto, 46
Espacio separable, 60
Espacio$-T_0$, 60
Espacio$-T_1$, 60
Espacio$-T_2$, 60
Espacio$-T_3$, o, espacio regular, 60
Espacio$-T_4$, o, espacio normal, 61
Espacio$-T_{3,5}$, o, espacio de Tychonov, 61
Espacios topológico, 29
Extensión de un grupo, 164

Familia indexada de conjuntos, 44
Función, 1
Función continua, 38
Función continua en un punto, 39
Función uniformemente continua, 159

Grupo, 2
Grupo abeliano, 3
Grupo cociente, 16
Grupo finito, 3
Grupo simple, 27
Grupo topológico, 63
Grupo topológico compacta-mente generado, 105
Grupos isomorfos, 23
Grupos topológicamente isomorfos, 119

Homeomorfismo, 40
Homomorfismo de grupo, 19

Interior de un conjunto, 36
Intersecar, 36
Intervalo, 33
Intervalo abierto, 33
Intervalo cerrado, 33
Intervalos semiabiertos, 33
Isomorfismo, 23

J-upla, 45

Límite de una sucesión, 38

Monomorfismo, 23

Núcleo de un homomorfismo, 22

Operación binaria, 2
Orden de un grupo, 3

Prefiltro, 75
Prenorma, 147
Primer axioma de numerabilidad, 59
Producto cartesiano, 45
Producto de conjuntos, 14
Producto directo, 128
Propiedad de la intersección finita, 58
Propiedad topológica, 41
Punto aislado, 103

Punto límite o de acumulación, 37

Segundo axioma de numerabilidad, 60
Separación de un espacio topológico, 51
Subbase de una topología, 33
Subespacio, 34
Subgrupo, 5
Subgrupo normal, 12
Subgrupo simétrico, 16
Sucesión convergente, 37

Topología, 28
Topología del orden, 34
Topología cociente, 50
Topología de complementos finitos, 30
Topología de subespacio o topología relativa, 34
Topología del límite inferior sobre $\mathbb{R}$, 32
Topología discreta, 29
Topología estrictamente más fina, 30
Topología estrictamente más gruesa, 30
Topología generada por una base, 31
Topología generada por una subbase, 33
Topología indiscreta o trivial, 29
Topología más fina, 30
Topología más grande, 30
Topología más gruesa, 30
Topología más pequeña, 30
Topología métrica, 49
Topología por cajas, 45
Topología producto, 46
Topología usual sobre $\mathbb{R}$, 32
Topologías comparables, 30
Traslación izquierda y derecha, 10

Uniformemente Tychonoff, 159
Uno-numerable o uno-contable, 59