

*UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA  
ESCUELA DE MATEMÁTICA*



TRABAJO DE GRADUACIÓN:

Un modelo tipo predador - presa para la dinámica de población del mosquito *Aedes aegypti* con control químico y control biológico

PRESENTADO POR:

*Br. José Luis López Amaya*

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

*Licenciado en Matemática*

ASESOR:

*MSc. Martín Enrique Guerra Cáceres*

*Ciudad Universitaria, 09 de diciembre de 2011*

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
Autoridades Universitarias 2011 - 2015



Ing. Mario Roberto Nieto Lovo  
RECTOR

Maestra Ana María Glower de Alvarado  
VICERRECTOR ACADÉMICO

Lic. Salvador Castillo  
VICERRECTOR ADMINISTRATIVO INTERINO

Dra. Ana Leticia de Amaya  
SECRETARIA GENERAL

Lic. Nelson Boanerges López Carrillo  
FISCAL GENERAL INTERINO

Licda. Claudia María Melgar de Zambrana  
DEFENSOR DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA  
MSc. Martín Enrique Guerra Cáceres  
DECANO

Lic. Ramón Arístides Paz Sánchez  
VICEDECANO

Doc. José Nerys Funes  
DIRECTOR DE ESCUELA DE MATEMÁTICA

*UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR*  
*FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA*  
*ESCUELA DE MATEMÁTICA*



TRABAJO DE GRADUACIÓN:

Un modelo tipo predador - presa para la dinámica de población del mosquito *Aedes aegypti* con control químico y control biológico

PRESENTADO POR:

*Br. José Luis López Amaya*

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

*Licenciado en Matemática*

ASESOR:

*MSc. Martín Enrique Guerra Cáceres*



# Agradecimientos

A mi madre y mis hermanos por su apoyo y cariño.

Al MSc. Martín Enrique Guerra Cáceres por sus enseñanzas.

A mis amigos que me apoyaron y animaron a continuar.



# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Desarrollo de un modelo tipo predador - presa para la dinámica de población del mosquito <i>Aedes aegypti</i> con control químico y control biológico</b>	<b>1</b>
1.1. Biología del mosquito <i>Aedes aegypti</i> . . . . .	1
1.2. Estrategias de control del mosquito . . . . .	5
1.2.1. Medidas de control químico . . . . .	6
1.2.2. Medidas de control biológico . . . . .	9
1.3. Deducción del modelo matemático para la población del mosquito <i>Aedes aegypti</i> . . . . .	12
1.3.1. Modelo matemático sin ningún tipo de control . . . . .	13
1.3.2. Modelo matemático con control químico . . . . .	14
1.3.3. Modelo matemático con control biológico . . . . .	15
1.3.4. Modelo matemático control integrado . . . . .	15
<b>2. Análisis del modelo para la dinámica de población del mosquito con estrategias de control</b>	<b>19</b>
2.1. Soluciones de equilibrio . . . . .	20
2.2. Linealización y análisis de estabilidad . . . . .	24
2.2.1. Matriz de linealización . . . . .	25
2.2.2. Análisis de estabilidad de los equilibrios sin depredación ( $D = 0$ ) . . . . .	25
2.2.3. Análisis de estabilidad de los equilibrios con depredación ( $D = K_D$ ) . . . . .	29

2.3. Interpretación del análisis de estabilidad en base al modelo . . . . .	31
<b>3. Resultados numéricos del modelo para la dinámica de población del mosquito con estrategias de control</b>	<b>37</b>
3.1. Los parámetros del modelo para las simulaciones . . . . .	37
3.2. Simulaciones para los umbrales de crecimiento natural . . . . .	38
3.3. Simulaciones con medidas de control . . . . .	39
3.3.1. Aplicando control sobre los huevos . . . . .	39
3.3.2. Aplicando control químico sobre las larvas . . . . .	42
3.3.3. El control de los mosquitos adultos . . . . .	44
3.3.4. La aparición del control biológico, la depredación de las larvas del mosquito . . . . .	46
3.3.5. Control químico de la población de mosquitos . . . . .	52
3.3.6. Control integral de la población de mosquitos . . . . .	53
<b>4. Conclusiones del modelo para la dinámica de población del mosquito con estrategias de control</b>	<b>57</b>
<b>Apéndice</b>	<b>58</b>
<b>A. Análisis de las raíces de la ecuación cuadrática <math>x^2 + ax + b = 0</math></b>	<b>61</b>
<b>B. Método de linealización de Lyapunov y el Teorema de Hartman-Grobman</b>	<b>67</b>
<b>C. Criterio de Routh - Hurwitz</b>	<b>69</b>
<b>D. Código utilizado para las simulaciones en MatLab</b>	<b>75</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>



# Índice de cuadros

1.1. Clasificación científica del mosquito <i>Aedes aegypti</i> . . . . .	2
1.2. Clasificación científica del BTi. . . . .	6
2.1. Variables del modelo para la dinámica de poblacional del mosquito <i>Aedes aegypti</i> con control químico y biológico. . . . .	20
2.2. Parámetros del modelo para la dinámica de población del mosquito <i>Aedes aegypti</i> con control químico y biológico. . . . .	20
2.3. Resumen de estabilidad de las soluciones de equilibrio para el modelo (2.2). . . . .	29
2.4. Interpretación de los términos involucrados en el umbral de crecimiento poblacional del mosquito con control biológico y control químico. . . . .	32
2.5. Distintas expresiones para el umbral de crecimiento de población del mosquito con diferentes medidas de control. . . . .	33
3.1. Valores de los parámetros del modelo para la dinámica de población del mosquito <i>Aedes aegypti</i> con control químico y biológico. . . . .	38
3.2. Resumen para las soluciones de equilibrio, signo y comportamiento cualitativo, en función del parámetro $\beta$ , con $\beta \in (0, 1)$ . . . . .	50



# Índice de figuras

1.1. Ciclo de desarrollo del <i>Aedes aegypti</i> . . . . .	2
1.2. Larva de mosquito <i>Aedes aegypti</i> . . . . .	3
1.3. Pupa del mosquito <i>Aedes aegypti</i> . . . . .	4
1.4. Mosquito <i>Aedes aegypti</i> adulto. . . . .	4
1.5. Gold Fish ( <i>Carassius auratus auratus</i> ). . . . .	9
1.6. Guppy Salvaje ( <i>Poecilia reticulata</i> ) . . . . .	10
1.7. <i>Gambusia affinis</i> . . . . .	10
1.8. Tilapia. . . . .	10
1.9. Larva de <i>Toxorhynchites rutilus</i> . . . . .	11
1.10. <i>Mesocyclops pehpeiensis</i> . . . . .	12
1.11. <i>Megacyclops viridis</i> . . . . .	12
1.12. Grupo de hormigas <i>Tapinoma melanocephalum</i> . . . . .	13
1.13. Esquema sencillo de una ovitrampa. . . . .	16
3.1. Comportamiento de la población de mosquitos con un umbral de $\psi(0, 0, 0, 0) = 1.9364$ . . . . .	39
3.2. Mayor mortalidad en los adultos. . . . .	39
3.3. Tasa mayor de inviabilidad en los huevos. . . . .	39
3.4. Mayor mortalidad en larvas. . . . .	40
3.5. Evolución de la población de mosquitos aplicando control en los huevos, $\alpha = 0.25$ . . . . .	41
3.6. Comparación del crecimiento de la población sin control y con control en los huevos, $\alpha = 0.25$ . . . . .	41
3.7. Evolución de la población de mosquitos aplicando control en los huevos, $\alpha = 0.45$ . . . . .	41

3.8. Comparación del crecimiento de la población sin control y con control en los huevos, $\alpha = 0.45$ .	41
3.9. Evolución de la población de mosquitos aplicando control en los huevos, $\alpha = 0.93637$ .	42
3.10. Evolución de la población de mosquito aplicando control en los huevos, $\alpha = 0.95$ .	42
3.11. Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico en las larvas, $\rho = 0.25$ .	43
3.12. Comparación del crecimiento de la población sin control y con control químico en las larvas, $\rho = 0.25$ .	43
3.13. Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico de las larvas, $\rho = 0.55$ .	43
3.14. Comparación del crecimiento de la población sin control y con control químico de las larvas, $\rho = 0.55$ .	43
3.15. Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico de las larvas, $\rho = 0.93637$ .	44
3.16. Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico de las larvas, $\rho = 0.96$ .	44
3.17. Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico en los adultos, $\delta = 0.05$ .	45
3.18. Comparación del crecimiento de la población sin control y con control químico en los adultos, $\delta = 0.05$ .	45
3.19. Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico en los adultos, $\delta = 0.09$ .	46
3.20. Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico en los adultos, $\delta = 0.093637$ .	46
3.21. Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico en los adultos, $\delta = 0.25$ .	46
3.22. Gráfica de $\bar{L}_1$ como función de $\beta \in (0, 1)$ .	48
3.23. Gráfica de $\bar{L}_2$ como función de $\beta \in (0, 1)$ .	48
3.24. Gráfico de $c_4$ para $\bar{L}_1$ .	49
3.25. Gráfico de $c_4$ para $\bar{L} = \bar{L}_2$ .	49
3.26. Evolución de la población de mosquitos aplicando control biológico en las larvas, $\beta = 0.001$ , la evolución de la población sin control y con control es muy similar, pues el control es muy poco efectivo.	51
3.27. Evolución de la población de mosquitos aplicando control biológico en las larvas, $\beta = 0.002$ .	51
3.28. Evolución de la población de mosquitos aplicando control biológico sobre las larvas, $\beta = 0.4$ .	52
3.29. Comparación del crecimiento de la población sin control y con control biológico sobre los mosquitos, $\beta = 0.4$ .	52
3.30. Evolución de la población de mosquitos aplicando control biológico sobre las larvas, $\beta = 0.6$ .	52
3.31. Comparación del crecimiento de la población sin control y con control biológico sobre los mosquitos, $\beta = 0.6$ .	52

3.32. Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico, $\psi(0.25, 0.25, 0, 0.05) = 0.71$ . . .	53
3.33. Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico, $\psi(0.25, 0.25, 0, 0.1) = 0.53$ . . .	53
3.34. Evolución de la población de mosquitos aplicando control integral, $\psi(0.25, 0.25, 0.001, 0.05) = 0.60$ . . .	54
3.35. Evolución de la población de mosquitos aplicando control integral, $\psi(0.25, 0.25, 0.1, 0.1) = 0.02$ . . .	54
3.36. Evolución de la población de mosquitos aplicando control integral, $\psi(0.25, 0.25, 0.001, 0.05) = 0.60$ . . .	54
3.37. Evolución de la población de mosquitos aplicando control integral, $\psi(0.25, 0.25, 0.1, 0.1) = 0.02$ . . .	54
3.38. Evolución de la población de mosquitos aplicando control integral temporal con perdida de fuerza en las medidas, $\psi(0.25, 0.25, 0.1, 0.1) = 0.02$ . . . . .	55



# Introducción

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS, 2000) la fiebre por dengue y la fiebre hemorrágica <sup>1</sup> por dengue son un problema de salud pública a las cuales dos quintas partes de la población mundial se encuentran en riesgo. Las principales medidas de prevención y control han sido la fumigación masiva de insecticidas dirigida contra los mosquitos adultos (adulticidas) y la aplicación de larvicidas (control químico). Sin embargo, a pesar de que dichas medidas reducen rápidamente la población de mosquitos adultos y eliminan un 90 % de la población de larvas en un criadero, su efecto es sólo transitorio pues no afectan la generación de nuevos mosquitos. En efecto, los registros estadísticos demuestran un avance del mosquito a pesar de las campañas de fumigación y aplicación de larvicidas (OMS, 2000). Por otra parte Hernández y García (2000) señalan que hay factores negativos asociados con el control químico de las poblaciones de mosquitos, a saber:

1. Falta de especificidad: Los plaguicidas<sup>2</sup> no son específicos para un determinado organismo, por tanto, al fumigar se elimina junto con el *Aedes aegypti* a una gama amplia de otros organismos, cuya evaluación usualmente no se hace. Entre estos organismos pueden desaparecer algunos de los enemigos naturales de los mosquitos, como microcrustáceos de agua dulce, insectos depredadores como larvas de libélulas y de toxorhynchites, lo cual conduce a un desequilibrio ecológico que favorece a los mosquitos que se desea eliminar.
2. Selección de cepas resistentes: Involucra resistencia tanto a los adulticidas y larvicidas, por ejemplo, en un estudio realizado en República Dominicana se encontró que los mosquitos eran resistentes a DDT, malation, Propurur, permetrina y deltametrin e incluso la sensibilidad al abate había sido reducida.
3. Efectos nocivos para la salud: Las nubes de insecticidas han sido asociadas con problemas de salud, aunque se dice que los insecticidas modernos son prácticamente inocuos para los humanos y animales domésticos.
4. Costo: Otro de los factores negativos del empleo masivo de insecticidas es el factor económico, ya que implica la erogación de sumas extraordinariamente elevadas, lo cual contrasta con el costo destinado a la educación y participación comunitaria. Al lado del costo *per se* del producto químico deben incluirse otros rubros como máquinas, combustible, salarios, etc.

En consecuencia, algunos epidemiólogos han conjeturado que una vez que el *Aedes aegypti* se ha establecido en un territorio no es posible erradicarlo (Hernández, 2000). Entonces se habla solo de medidas de control, pero no de eliminación, pues eso aparentemente no se puede lograr. Este fenómeno es debido a que una baja en la población de larvas es compensada por una mayor sobrevivencia de las larvas restantes. Es más, Hernández (2000) señala que uno de los factores más importantes en la mortalidad de las larvas es la presión que su propia

---

<sup>1</sup>En Ecuador se ha prohibido la comercialización de antiinflamatorios no esteroides (AINES), medicamentos de uso público que agravan los cuadros clínicos virales y pueden llevar a los pacientes a un cuadro hemorrágico.

<sup>2</sup>Los insecticidas se siguen aplicando por varios motivos, entre los que sobresale la presión de las comunidades que solo ven el efecto inmediato de un decrecimiento de la población de mosquitos posfumigación; por otra parte, ella es una buena medida política, pues muestra una acción dinámica de las autoridades de salud y, aunque no funcione, se sigue repitiendo, posiblemente por ese impacto político.

población ejerce en los criaderos debida al consumo de nutrientes cuando la población es alta. Por tanto, las estrategias de prevención, control y erradicación del dengue tradicionales se han complementado con mejores opciones: el control biológico y las campanas de educación y participación de la comunidad en la eliminación de criaderos.

La participación comunitaria implica involucrar a las comunidades en los planes de lucha contra el mosquito, creando conciencia en la población sobre la necesidad de participar activamente y no solo de comportarse como espectadores de las acciones emprendidas por las autoridades de salud. Para el control biológico se cuenta con una gama amplia de organismos que actúan como enemigos naturales de las larvas de *Aedes aegypti*, que incluye *Bacillus thuringiensis*, *Bacillus esphaericus*, copépedos, plenarias, nemátodos, peces de agua dulce y tortugas, entre otros. En particular, la facilidad de reproducir en grandes cantidades los copépedos los señala como uno de los elementos que facilita la coordinación de medidas de control biológico y participación comunitaria (Hernández, 2000).

En el Salvador, en el municipio de Santo Tomas del departamento de San Salvador, conjuntamente con la OPS, el Ministerio de Salud y la Alcaldía del Municipio, se reporta la siembra del árbol NIM (*Azadirachta indica*)<sup>3</sup> como una acción para combatir el zancudo transmisor del dengue que incluya métodos biológicos.

El empleo conjunto de todas las medidas y estrategias de ataque se llama manejo integral del dengue. Por ejemplo, mediante el manejo integral de todas las alternativas de control, girando en torno a la participación comunitaria, se logró la erradicación del *Aedes aegypti* en una comunidad de Vietnam en la cual se había establecido desde hacía 20 años (Nam, Yen, Kay, Marten y Reid, 1998).

En este contexto, con el objeto de estudiar y controlar la compleja dinámica de la enfermedad, todos los métodos de estudio tienen cabida sean clínicos, epidemiológicos, biológicos o matemáticos. En particular, y en sintonía con los propósitos del presente trabajo, se han desarrollado interesantes investigaciones en las cuales se analiza la dinámica del comportamiento de la población del mosquito *Aedes aegypti* transmisor del dengue haciendo uso de la metodología de la modelación matemática.

En el presente trabajo se plantea y estudia un modelo descrito con ecuaciones diferenciales ordinarias para determinar la dinámica del mosquito *Aedes aegypti* cuando se considera la adopción de estrategias de control químico y control biológico del vector.

En el capítulo I, se describe la biología del mosquito, se explican distintas medidas de control químico y control biológico, y se deduce un modelo matemático que toma en cuenta dichas medidas de control. Entre las medidas de control químico se encuentran el uso de larvicidas y adulticidas o insecticidas. Y entre las medidas de control biológico se consideran el uso de depredadores naturales de las larvas del mosquito, como peces, micro crustáceos, etc.

En el capítulo II, se hace el análisis cualitativo del modelo matemático con las herramientas matemáticas básicas de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, específicamente se utilizan el método de Linealización de Lyapunov y el Teorema de Hartman-Grobman.

En el capítulo III, se hace uso de software especializado para realizar algunas simulaciones del comportamiento de las soluciones del modelo.

Y finalmente, en el capítulo IV, se presentan las conclusiones y recomendaciones.

---

<sup>3</sup><http://new.paho.org/els>, revisado en abril 2011.



# Capítulo 1

## Desarrollo de un modelo tipo predador - presa para la dinámica de población del mosquito *Aedes aegypti* con control químico y control biológico

En este Capítulo se presentan las principales características del mosquito *Aedes aegypti*, sus etapas de desarrollo y descripción de su comportamiento en cuanto a hábitos de alimentación. También se desarrolla una discusión de los métodos de control del mosquito, tanto biológicos como químicos. Luego se establece un modelo matemático que describe la dinámica de la población del mosquito bajo cuatro escenarios distintos: 1) no se aplica ningún tipo de control, 2) se aplica alguna estrategia de control químico, 3) se aplica alguna estrategia de control biológico y 4) se aplican dos estrategias simultáneamente: una biológica y otra química.

### 1.1. Biología del mosquito *Aedes aegypti*

A continuación, siguiendo a Montero (2009) se presentan las principales características biológicas del mosquito *Aedes aegypti*.

Este mosquito, de origen africano, fue introducido en América a principios del siglo XX. Es una especie diseminada por el hombre a través del transporte de sus adultos, huevos, larvas en barcos, aviones o transportes terrestres. El Cuadro 1.1 muestra la clasificación científica del mosquito<sup>1</sup>.

El científico cubano Carlos Juan Finlay descubrió que este mosquito es el agente transmisor de la fiebre amarilla y presentó sus resultados por primera vez en la Conferencia Internacional de Sanidad, celebrada en Washington DC, el 18 de febrero de 1881. Sus declaraciones fueron objeto de burlas por parte de médicos estadounidenses, sin embargo, ellos trataron de exponer estos descubrimientos como desarrollados en su país.

---

<sup>1</sup>En 2005 estudios moleculares llevaron a reclasificar *Stegomyia* como género, cambiando algunos autores el nombre del mosquito por *Stegomyia aegypti* al igual que se hizo con el *Aedes albopictus* que pasó a ser denominado homológamente *Stegomyia albopicta*; sin embargo, estos estudios han sido muy discutidos, de forma que actualmente el nombre usado de forma mayoritaria es el de *Aedes aegypti*, como exigen a partir de diciembre de 2005 los editores de las revistas científicas más importantes del sector.

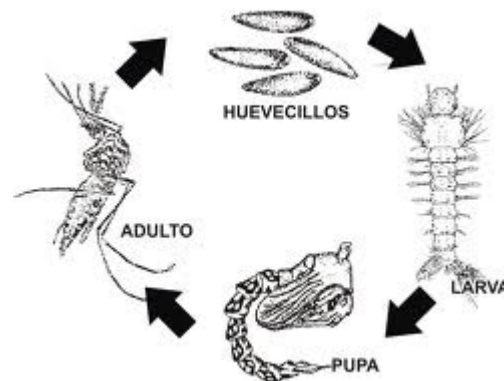
Cuadro 1.1: Clasificación científica del mosquito *Aedes aegypti*.

Reino	Animalia
Filo	Arthropoda
Clase	Insecta
Orden	Diptera
Familia	Culicidae
Género	Aedes
Subgénero	Stegomyia

Sus hábitos son netamente antropófilos y domésticos, con radicación de criaderos en la vivienda humana o en sus alrededores. Depósitos de agua ubicados en objetos o construcciones como: neumáticos, baterías viejas, recipientes de todo tipo, botellas, floreros y piletas, entre otros, le sirven al *Aedes aegypti* para establecer sus criaderos. Prefieren agua limpia, con bajo tenor orgánico y de sales disueltas. La puesta de huevos la realizan en la superficie del recipiente en la interface agua - aire.

El ciclo completo del *A. aegypti*, de huevo a adulto, se completa en óptimas condiciones de temperatura ( $25^{\circ}\text{C}$  a  $29^{\circ}\text{C}$ ) y alimentación en 10 días. Las hembras hematófagas poseen hábitos de alimentación diurnos en cercanías a los domicilios humanos.

El mosquito *Aedes aegypti* es un insecto de metamorfosis completa (holometabolía). Durante su desarrollo ontogénico pasan por los estados de huevo, larva, pupa y adulto.

Figura 1.1: Ciclo de desarrollo del *Aedes aegypti*.

**Huevo:** Mide aproximadamente 1 milímetro de longitud, en forma de cigarro, son más limpios que los huevos de la mayoría de las especies que se crían en recipientes. En el momento de postura son blancos, pero muy rápidamente adquieren un color negro brillante. Son fecundados durante la postura y el desarrollo embrionario se completa en 48 horas si el ambiente es húmedo y cálido, pero puede prolongarse hasta cinco días con temperaturas más baja. Eclosionan en un lapso de 2 a 3 días. Con posterioridad a ese periodo, los huevos son capaces de resistir desecación y temperaturas extremas con sobrevividas de 7 meses a un año.

Una vez completado el desarrollo embrionario, un porcentaje reducido de huevos pueden resistir largos períodos de desecación, y pueden prolongarse por más de un año en algunas ocasiones. La capacidad de resistencia a la desecación es uno de los principales obstáculos para el control del mosquito y ésta condición, además, permite transportarlos a grandes distancias en recipientes secos.



Figura 1.2: Larva de mosquito *Aedes aegypti*.

**Larva:** Las larvas que emergen inician un ciclo de 4 estadios larvales, son exclusivamente acuáticas y como la mayoría de los insectos holometábolos la fase larval es el período de mayor alimentación y crecimiento. Pasan la mayor parte del tiempo alimentándose de material orgánico sumergido o acumulado en las paredes y el fondo del recipiente, para lo cual utilizan las cerdas bucales en forma de abanico. Se asemejan a otras larvas de mosquitos por la cabeza y el tórax ovoides y el abdomen de 9 segmentos. El segmento posterior (anal) del abdomen tiene 4 branquias lobuladas para la regulación osmótica y un sifón, para la respiración en la superficie del agua.

La posición de reposo en el agua es casi vertical. En cuanto al desplazamiento acuático, lo hacen con un movimiento serpenteante característico. Son fotosensibles (sensibles a la luz), desplazándose hacia el fondo del recipiente, aún cuando son perturbados. La duración del desarrollo larval depende de la temperatura, la disponibilidad de alimentos y la densidad de larvas en el recipiente. En condiciones óptimas, con temperaturas de 25C a 29C, el período desde la eclosión hasta la pupación puede ser de 5 a 7 días, pero comúnmente dura de 7 a 14 días.

Los tres primeros estadios se desarrollan rápidamente, mientras que el cuarto demora más tiempo con mayor aumento de tamaño y peso. En condiciones rigurosas (baja temperatura, escasez del alimento) el cuarto estadio larval puede prolongarse por varias semanas, hasta 7 meses, previo a su transformación en pupa.

Son incapaces de resistir temperaturas inferiores a 10C, superiores a 45C, impidiéndose a menos de 13C su pasaje a estadio pupal.

Las larvas de *Aedes aegypti* pueden diferenciarse a simple vista de las larvas de otras especies por su sifón más corto que el de la mayoría de los otros culícidos.

**Pupa:** Las pupas no se alimentan, presentan un estado de reposo donde se producen importantes modificaciones anatómico - fisiológicas hasta la aparición de los adultos. Reaccionan inmediatamente a estímulos externos tales como vibración y se desplazan activamente por todo el recipiente. Se mantienen en la superficie del agua debido a su flotabilidad y ésta propiedad facilita la emergencia del insecto adulto.

El período pupal dura de 1 a 3 días en condiciones favorables, con temperaturas entre 28C y 32C. Las variaciones extremas de temperatura pueden dilatar este período.

La pupa tiene en la base del tórax un par de tubos respiratorios o trompetas que atraviesan la superficie del



Figura 1.3: Pupa del mosquito *Aedes aegypti*.

agua y permiten la respiración. En la base del abdomen poseen un par de remos, paletas o aletas natatorias que sirven para el nadar.



Figura 1.4: Mosquito *Aedes aegypti* adulto.

**Adulto:** Al emerger de la pupa, el insecto adulto permanece en reposo permitiendo el endurecimiento del exoesqueleto y las alas. Dentro de las 24 horas siguiente a la emergencia pueden aparearse iniciándose la etapa reproductora del insecto. El sonido emitido por el batido de las alas de las hembras durante el vuelo atrae al macho hacia ella, pero una vez que la hembra ha tenido su alimentación sanguínea ocurren pocos apareamientos, porque ella debe batir sus alas con mayor rapidez para compensar el aumento de peso y este aumento en la frecuencia del movimiento de las alas no es atractivo para los mosquitos machos.

El apareamiento en general se realiza durante el vuelo pero en algunas ocasiones se lleva a cabo en una superficie horizontal o vertical. Al aparearse, el macho sujeta el ápice del abdomen de la hembra con su terminalia e inserta su edeago dentro del receptáculo genital de la hembra, la bolsa copulatriz de la hembra se llena de espermatozoides, el que pasa a la espermateca en uno o dos minutos. Esa inseminación es suficiente para fecundar todos los huevos que la hembra produce durante toda su vida.

Los mosquitos hembras son las únicas que succionan sangre. Las hembras vuelan en sentido contrario al viento, siguiendo los olores y gases emitidos por el huésped. Cuando están cerca utilizan estímulos visuales para localizar al huésped mientras sus receptores táctiles y térmicos los guían hacia el sitio de alimentación. Esta alimentación sanguínea es necesaria como fuente de proteína para el desarrollo de los huevos. La alimentación sanguínea y la postura se llevan a cabo principalmente durante el día, especialmente durante las primeras horas o a la media mañana y a media tarde o al anochecer.

Las hembras también se alimentan de jugos de plantas. Generalmente, después de cada alimentación sanguínea se desarrolla un lote de huevos, pero si el mosquito es perturbado antes de estar completamente lleno de sangre puede alimentarse con sangre más de una vez entre cada postura. Si una hembra completa su alimentación (2 o 3 mg de sangre) desarrollará y pondrá aproximadamente 200 huevos, dispersos en distintos lugares. La hembra tiende a depositar sus huevos en varios lugares y no en un solo lugar. Hay un umbral de distensión del estómago que estimula el desarrollo de los ovarios, por eso el período entre alimentación sanguínea y postura es de 3 días en condiciones óptimas de temperatura; la hembra puede alimentarse de sangre nuevamente el mismo día que pone el huevo.

La oviposición generalmente, se produce hacia el final de la tarde, la hembra grávida es atraída hacia recipientes oscuros o sombreados con paredes duras, sobre las que deposita sus huevos y prefiere aguas relativamente limpias con poco contenido de materia orgánica. Los huevos son pegados a las paredes del recipiente en la zona húmeda a pocos milímetros de la superficie del agua. La distribución de los huevos en varios recipientes asegura la viabilidad de la especie. La posición de los huevos a pocos milímetros de la superficie del agua permite que éstos maduren, y en la próxima lluvia, al subir el nivel de agua del recipiente, los huevos eclosionan en el momento de contacto con el líquido.

El macho se distingue de la hembra por sus antenas plumosas y sus palpos más largos. Sus partes bucales no están adaptadas para chupar sangre, procuran su alimento de carbohidratos como el néctar de las plantas.

En cuanto a la capacidad de vuelo del *A. aegypti* Montero (2009) establece que por lo general una hembra adulta no sobrepasa los 50 m de distancia de vuelo durante su vida, y a menudo permanece en la misma casa o lugar donde emergió siempre que disponga de huéspedes y sitios de reposo y de postura adecuados.

Es rara una dispersión de vuelo más de 100 m pero se ha demostrado que una hembra grávida puede volar hasta 3 km en busca de un lugar para poner sus huevos si no encuentra cerca sitios apropiados. Los machos se dispersan menos que las hembras.

## 1.2. Estrategias de control del mosquito

Se mencionan a continuación algunas de las medidas de control que se utilizan ya sean estas estrategias químicas, insecticidas (adulticidas), o estrategias biológicas, un predador natural de algún estado del desarrollo del mosquito en su fase acuática.

El diseño de estas estrategias necesita ser pensado en función de distintos escenarios de acuerdo a las características de la situación entomológica local. Estos escenarios plantean, márgenes de intervención que tiendan a la eliminación de los factores que permiten la instalación de la población del mosquito y acciones abarcativas que, en caso de situaciones de emergencia, permitan limitar los brotes de mosquitos y minimizar las consecuencias sanitarias.

### 1.2.1. Medidas de control químico

Entre las estrategias de control químico se encuentran los larvicidas y los adulticidas. Los larvicidas<sup>2</sup> están diseñados específicamente para atacar las larvas de los mosquitos en recipientes con agua, aunque también pueden eliminar otros organismos; mientras que los adulticidas atacan a una variedad más amplia de insectos, pudiendo llegar a darse el caso de afectar además a la población humana; En menor medida, algunos larvicidas también son tóxicos para los humanos. Entre los larvicidas más utilizados se tienen:

- ***Bacillus thuringhiensis var israelensis*** (BTi). Es un entomopatógeno que produce una proteína (principio activo) sumamente tóxica para las larvas del mosquito pero de muy baja toxicidad para mamíferos, aves, peces e insectos adultos. Su clasificación taxonómica se muestra en la Cuadro 1.2.1.

Cuadro 1.2: Clasificación científica del BTi.

Reino	Procariote
Filo	II Firmicutes
Clase	I Firmibacteria
Orden	Eubacterias
Familia	Bacillaceae
Género	Bacillus
Especie	<i>Bacillus thuringhiensis var israelensis</i>

Debe aplicarse en las primeras horas de la mañana pues los rayos solares producen su desactivación en poco tiempo. Además en algunos espejos de agua precipita al fondo también en forma rápida. Se presenta en suspensión acuosa o también en anillos de liberación constante. La aplicación debe ser 19 gotas por metro cuadrado. La residualidad de este producto depende de su formulación.

Si bien no se ha observado toxicidad aguda en el ser humano se aconseja precaución con aquellas terceras personas que padecen trastornos oculares o respiratorios previos.

El BTi es diferente a otros agentes de control por su alto grado de especificidad, seguridad ambiental y compatibilidad con otras formas químicas o biológicas de control, propiedad del mejor bioinsecticida. Algunos estudios muestran que el BTi es más efectivo para el control de *Aedes aegypti* en comparación con el Temefos, incluso en la época de lluvias, demostrando ser un método alternativo y operacional en los programas de control vectorial (Hernández, da Costa y Montero, 2010). Según estudios de Rodríguez, Menéndez, García, Díaz, Sánchez y Gato (2006) la presencia de BTi no afecta la oviposición del *Aedes aegypti*, es más, los resultados sugieren que en la naturaleza los recipientes que contienen estos controladores biológicos<sup>3</sup> pudieran constituir sitios para la oviposición de hembras grávidas de *Aedes aegypti*, lo que tendría implicaciones positivas en su eficacia para controlar este vector.

- **Temefos**. Es un organofosforado incluido en la categoría IV de toxicidad de la Organización Mundial de la Salud (OMS). Es el químico que más se usó en salud pública para este tipo de tratamiento dado su bajo costo y su eficacia, pero la aparición de resistencia, la contaminación ambiental y su potencial toxicidad para otros animales y para el ser humano ha propiciado la búsqueda de alternativas con mayor grado de seguridad. Su residualidad es de aproximadamente 60 días, la OMS considera seguro su uso respetándose la dilución de 1 ppm<sup>4</sup>, es decir, 1mg/l. Toda vez que sea posible se desestimará su utilización en aguas que sean de bebida para animales y personas.

<sup>2</sup>Algunos larvicidas son bacterias entomopatógenas o derivados de compuestos biológicos, que acá se consideran como control químico, ya que para el control biológico se busca que sea un depredador de alguna fase del desarrollo del mosquito.

<sup>3</sup>El estudio evaluaba la conducta de oviposición de hembras grávidas de *Aedes aegypti* en presencia de los agentes biológicos: *Macrocyclops albidus* o *Bacillus thuringiensis var. israelensis* (BTi) en condiciones de laboratorio.

<sup>4</sup> una parte de temefos en un millón de partes de agua = 1 ppm

Un problema que se afronta cuando se utiliza el temefos es la capacidad de las larvas de *Aedes aegypti* de desarrollar altos niveles de resistencia a temefos después de una intensa presión de selección, esto se debe a su uso intenso en algunas regiones (Alvarez, Briceño y Oviedo, 2006; Rodríguez, Bisset, Pérez, Ramos y Risco, 2006).

- **Metoprene.** Es un mimético de hormona juvenil y como tal un poderoso destructor de larvas de mosquitos así como de otros insectos acuáticos y con toxicidad demostrada para crustáceos. Además de ser inodoro e insípido y se considera inocuo para el tratamiento del agua potable. Se ha utilizado con buenos efectos en Tailandia, Indonesia y Venezuela. Es de importancia saber que es más eficaz sobre las larvas que están en las últimas etapas del desarrollo y sobre las pupas siendo su efecto evitar la emergencia de los adultos. Una aclaración importante es que cuando se usa un regulador de crecimiento es factible encontrar larvas en un recipiente tratado pero ello no indica una falla en el tratamiento.

El producto ha sido clasificado por la OMS en categoría III para toxicidad dérmica y IV para inhalatoria. Han sido descritos incidentes con gatos por la Agencia Ambiental de Estados Unidos (EPA, por sus siglas en inglés) aunque sin concluir si la toxicidad provenía del principio activo o de alguno de los excipientes. El Metoprene, como el BTi, se degrada rápidamente con los rayos solares.

Tanto el Temephos (abate), respetándose la dilución de 1ppm, es decir, 1mg/l, como el BTi son larvicidas para control de mosquitos aprobados por la OMS, para su utilización en agua de consumo humano. El abate no debe ser utilizado en peceras, en ese caso puede aplicarse BTi.

Se han mencionado los mecanismos para controlar las larvas ahora se mencionaran algunos de los insecticidas que se utilizan para el control del mosquito adulto, en el mercado es posible encontrar una amplia variedad de insecticidas para uso casero, pero solo se consideran los insecticidas que son utilizados por las autoridades de salud para el control del vector cuando se presentan las epidemias de dengue o cuando se inician los programas de prevención del brote de mosquitos.

Los insecticidas juegan un papel central en el control de vectores de enfermedades tales como mosquitos, moscas, pulgas, piojos, chinches, etc. En 1955 la OMS propuso la erradicación global de una de las enfermedades más prevalentes transmitidas por vectores, la malaria, con el uso de rociados residuales intradomiciliares de DDT. Sin embargo la euforia por los insecticidas terminó pronto y en 1976 la OMS revirtió su concepto de erradicación a control de la malaria. Los cambios en la política se debieron a la aparición de la resistencia al DDT en un gran número de mosquitos vectores. En 1975 la OMS reportó que una población de 256 millones de personas vivían en áreas donde la resistencia a DDT y/o los BHC (Bifenil Poli Clorinados) mermaron los esfuerzos para el control de la malaria (Flores, Badii y Ponce, 2001).

Flores (2001) señala que los problemas de resistencia continuaron con la rotación a nuevos insecticidas, tales como los organofosforados, carbamatos y piretroides. La resistencia se ha desarrollado a cada uno de los grupos toxicológicos insecticidas, incluyendo microbiales y reguladores del desarrollo de los insectos. Se espera que la resistencia a insecticidas sea directamente afectada por la reemergencia de enfermedades infecciosas, y donde la resistencia no ha contribuido a la emergencia de enfermedades se espera que amenace el control de la enfermedad. Flores enfatiza que un cuidadoso análisis de la información reciente acerca de resistencia de vectores (por ejemplo, la base de datos de la OMS y los registros de los programas de control de enfermedades) muestran que el efecto de la resistencia en los esfuerzos del control son aún desconocidos. Muchos reportes de resistencia de especies vectores están basados en un simple punto geográfico de un país.

Desde hace milenios los hombres utilizan sustancias como cenizas, azufre, compuestos arsenicales, tabaco molido, cianuro de hidrógeno, compuestos de mercurio, zinc y plomo, etc. para luchar contra los insectos. Forman el grupo de los llamados insecticidas de la 1ª generación. Son productos en general muy tóxicos, poco efectivos en la lucha contra la plaga y muy persistentes en el ambiente (hasta 50 años). Hoy día se usan muy poco y bastantes de ellos están prohibidos por su excesiva toxicidad.

Los avances de la ciencia y de la industria química hicieron posible la aparición de mejores insecticidas que se suelen denominar de la 2ª generación. Son un variado conjunto de moléculas que se clasifican en grupos según su estructura química. Las tres familias más importantes son los organoclorados (clorocarbonados), los organofosfatos y los carbamatos.

- **Organoclorados** (DDT, aldrin, endrin, lindano, etc.) son tóxicos, su persistencia en el ambiente sin ser destruidos llega a ser de años y se bioacumulan, es decir, van aumentando su concentración al ir ascendiendo en la cadena trófica.
- **Organofosfatos** (malation, paration, etc.) son poco persistentes (días) y se eliminan en la orina. Muy tóxicos para el hombre, tanto como los más conocidos venenos como son el arsénico, la estricnina o el cianuro. Fueron desarrollados a partir del gas nervioso preparado por los alemanes en la 2ª Guerra Mundial. Se usan mucho en agricultura.
- **Carbamatos** (por ejemplo el carbaril, de nombre comercial Servin; o el propoxur, llamado Baygon, etc.) son poco persistentes (días) y se eliminan en la orina. Son poco tóxicos para el hombre pero menos eficaces en su acción como pesticidas que los organofosfatos. Se usan menos en agricultura y más en interiores, como insecticidas caseros, etc.

El caso del DDT resulta especialmente interesante de analizar por ser muy representativo de los pros y contras de los insecticidas, especialmente de los más antiguos. Su potencial ecotóxico reside en que mata a los insectos por contacto, afectando su sistema nervioso. Es muy soluble en las grasas y en disolventes orgánicos, y prácticamente insoluble en agua. Su acción no es selectiva, su aplicación provoca no sólo la muerte inmediata y masiva del insecto plaga, sino también la de insectos benéficos y a mediano y largo plazo la de infinidad de otros organismos (peces, aves y mamíferos).

En el siglo XX fue utilizado con intensidad como insecticida pero, tras una campaña mundial que alegaba que este compuesto se acumulaba en las cadenas tróficas y ante el peligro de contaminación de los alimentos, se prohibió su uso. El 15 de septiembre de 2006 la OMS anunció que el insecticida volverá a ser parte de su programa para erradicar la malaria fumigando el interior de residencias y matar así a los mosquitos que transmiten la malaria. Estudios científicos muestran que la utilización del DDT en interiores asociado a mosquiteras sí es efectivo y no presenta los peligros para la vida salvaje y la ineffectividad a medio plazo que su uso indiscriminado como biocida sí tiene en cultivos.

Sin embargo, el Programa de Naciones Unidas para el Medio Ambiente (PNUMA) planteó en mayo de 2005 en la primera reunión del Convenio de Estocolmo sobre Contaminantes Orgánicos Persistentes la eliminación de 12 compuestos considerados "plaguicidas y productos químicos industriales peligrosos que pueden matar a la gente, producir daños en el sistema nervioso e inmunitario, provocar cáncer y desórdenes reproductivos, así como perturbar el desarrollo normal de lactantes y niños", entre los cuales se encuentra el DDT, cuyas características entran en la clasificación de: "altamente tóxicos; son estables y persistentes y tienen una duración de décadas antes de degradarse; se evaporan y se desplazan a largas distancias a través del aire y el agua, y se acumulan en el tejido adiposo de los seres humanos y las especies silvestres" (PNUMA, 2007).

Los efectos adversos para la salud de los animales del DDT incluyen fallos en la reproducción y en el desarrollo, posibles efectos en el sistema inmunitario y muertes difundidas de aves salvajes después de rociar el DDT. Como sucede con muchos insecticidas organoclorados, el mayor objetivo de la exposición aguda al DDT es el sistema nervioso. La administración a largo plazo del DDT ha dado lugar en los animales a efectos hepáticos, renales e inmunitarios.

No se pretende hacer una gran explicación sobre los agentes químicos utilizados para el control de vector *Aedes aegypti*, sino solamente mencionar algunos de los químicos más usados y algunas de sus características.





Figura 1.5: Gold Fish (*Carassius auratus auratus*).

### 1.2.2. Medidas de control biológico

Los estudios sobre control biológico de vectores se presentan como una alternativa al uso de plaguicidas, cuyo uso indiscriminado ha favorecido la aparición, propagación e incremento constante de la resistencia de los mosquitos a estos plaguicidas, así como también han causado contaminación del ambiente, destrucción de la fauna benéfica (enemigos naturales), y el subsecuente desequilibrio del ecosistema. Estos elementos han contribuido al resurgimiento de plagas, y a esto se suman los reportes sobre la presencia de residuos tóxicos en productos alimenticios, elevándose así los costos de los programas de control como se ha mencionado en la Sección 1.2.1.

Esta situación ha ocasionado que la popularidad de los métodos químicos decaiga y se promuevan soluciones alternativas a través del empleo de agentes de control biológico, estrategia que crece rápidamente como herramienta en la lucha contra los vectores o agentes transmisores de enfermedades de importancia en el campo de la salud pública. Este método tiene como ventajas, un bajo costo de investigación y desarrollo, no tóxico, específico hacia organismos blanco, bajo riesgo para el operador y poco impacto ambiental.

Diversos países, como Estados Unidos, Brasil, México y Cuba, entre otros, incluyen en su arsenal para el control vectorial, bioplasmas de producción de nemátodos parásitos de mosquitos y plantas de aplicación y cría de especies de peces larvívoros con demostrada efectividad en el control vectorial (García y González, 1986).

Algunos de los métodos utilizados son:

- **Peces larvívoros.** Constituyen uno de los más eficaces para el control de las plagas de dípteros hematófagos. En Cuba han sido utilizados con resultados satisfactorios en diversos criaderos naturales y artificiales (Hernández y Marques, 2006). Su uso racional y su aplicación no dependen de la cría masiva de organismos en el laboratorio, ni de la introducción de individuos ajenos a los criaderos naturales que puedan dañar el ecosistema y en particular al hombre. Entre los más usados están:
  - Gold Fish (*Carassius auratus auratus*). Valero et al. (2006) observan que el *Carassius auratus auratus* tiene una mayor actividad en el consumo de larvas sobre el Guppy Salvaje (*Poecilia reticulata*).
  - Guppy Salvaje (*Poecilia reticulata*) Hernández et al. (2006) señala que su eficacia generalmente se ha demostrado en criaderos naturales, y son escasos los trabajos publicados sobre el uso de los peces en recipientes donde se necesita mantener agua recogida, no obstante la importancia de estos, debido a que son utilizados por los mosquitos que se reproducen cerca de las viviendas como sucede con *Aedes aegypti*. Además menciona que no sólo es efectivo en el control de las larvas, sino que en ausencia de ellas resiste largos períodos de inanición, o se alimenta de microorganismos o desechos fecales, como sucede con otras especies de peces larvívoros.



Figura 1.6: Guppy Salvaje (*Poecilia reticulata*)

- *Gambusia affinis*. De acuerdo con estudios realizados estos peces son capaces de comer hasta 30 larvas de *Aedes aegypti* por día<sup>5</sup>.



Figura 1.7: *Gambusia affinis*.

- Tilapia. Con una siembra mínima de dos crías de tilapia, en una pila con agua, se reduce la reproducción de los zancudos transmisores del dengue<sup>6</sup>.



Figura 1.8: Tilapia.

---

<sup>5</sup> Fuente: <http://www.docsalud.com/articulo/418/siembran-peces-que-devoran-larvas-de-mosquito-del-dengue>, consultado julio 2011

<sup>6</sup>[http://www.mag.gob.sv/index.php?option=com\\_content&view=article&catid=1:noticias-ciudadano&id=311:combaten-zancudo-con-siembra-de-tilapia-en-puerto-de-la-libertad&Itemid=77](http://www.mag.gob.sv/index.php?option=com_content&view=article&catid=1:noticias-ciudadano&id=311:combaten-zancudo-con-siembra-de-tilapia-en-puerto-de-la-libertad&Itemid=77), consultado julio 2011.

Acción realizada en el municipio de La Libertad, departamento de La Libertad, El Salvador en el año 2010 en el marco de la celebración del día internacional de la lucha contra el dengue, por el Ministerio de Agricultura y Ganadería (MAG), a través del Centro de Desarrollo de la Pesca y la Acuicultura (CENDEPESCA)



Figura 1.9: Larva de *Toxorhynchites rutilus*

Duarte, Castillo, Rodríguez, Santander y González (2009) plantean que los peces larvívoros son una excelente opción en el control del crecimiento de los hábitat de mosquitos, asimismo, afirman que los peces larvívoros constituyen una opción muy eficaz para controlar esas temibles plagas, causantes cada año de la muerte de millones de personas.

- ***Toxorhynchites rutilus***. Mosquitos del género *Toxorhynchites*, cuyas hembras no consumen sangre, han atraído la atención porque sus larvas depredadoras consumen las larvas de otras especies de mosquitos, algunos de ellos vectores. Es una especie nativa de Norte América, criada y liberada previamente para control de mosquitos. El impacto que producen, las liberaciones experimentales de este depredador, en reducir el número de otro mosquitos durante períodos prolongados fue relativamente pequeño comparado a las reducciones de *Aedes aegypti* (Lounibos y Campos, 2002), esto indica que para el control del *Aedes aegypti* es mas efectivo.
- **Copépodos**. Los Copepoda (en castellano Copépodos), son crustáceos de tamaño muy pequeño, muchas veces microscópicos, que se encuentran abundantemente, tanto en agua dulce como salada. La gran mayoría nada libremente; sin embargo algunas especies se han convertido en parásitas. Muchas de estas últimas conservan un aspecto similar al de las formas libres al tiempo que otros han llegado al extremo de perder sus características de crustáceo e incluso de artrópodos. En los últimos años se realizaron varios estudios acerca del uso de copépodos (Copepoda: Cyclopoidae) como depredadores de *Aedes aegypti*, indicando que estos animales tienen un potencial grande para el control de zancudos. Los copépodos sobreviven dentro de los criaderos del mosquito y pueden reducir un 95-100 % de las larvas durante varios meses (Castillo, Valdés, Piquero y Fernandez, 2008). Se presentan experiencias de varios países en el control biológico del mosquito *Aedes aegypti* mediante el uso de copépodos (*Mesocyclops* ssp). Esta alternativa de control es relativamente barata y de fácil adaptación siempre y cuando la comunidad, particularmente las amas de casa, colabore activamente en las acciones de mantenimiento y vigilancia de los contenedores de agua donde habitan estos depredadores naturales (ibíd).

Al igual que los peces se tiene una amplia variedad de copépodos que se utilizan para el control de las larvas del *Aedes aegypti*, se mencionan a continuación algunos de los mas comunes, que no solo se usan para el *Aedes aegypti*, sino que también para otros mosquito:

- *Mesocyclops pehpeiensis*,
- *Macrocyclops albidus*,
- *Megacyclops viridis*,
- *Megacyclops latipes*, etc.



Figura 1.10: *Mesocyclops pehpeiensis*.



Figura 1.11: *Megacyclops viridis*.

Estas son algunas de las maneras de como se controla la población de larvas por medio de depredadores naturales de los mosquitos, con la ventaja que el mosquito no adquiere resistencia al control como sucede con algunos controles químicos.

Además se tienen investigaciones sobre el control que se puede realizar a los huevos del *Aedes aegypti* por medio de hormigas, mas específicamente *Tapinoma melanocephalum* (Hymenoptera: Formicidae)(Pérez et al., 2004), aunque la investigación se realizo en un insectario, los resultados evidencian el papel depredador de la hormiga *Tapinoma melanocephalum* sobre los huevos del *Aedes aegypti*, la mayor depredación se daba sobre los huevos recién puestos, posteriormente se podría considerar para el control del vector en campos abiertos.

### 1.3. Dedución del modelo matemático para la población del mosquito *Aedes aegypti*

En esta Sección se desarrollará un modelo matemático para la dinámica de población del mosquito *Aedes aegypti* bajo diferentes escenarios de control. Para la elaboración del modelo en primera instancia se considerara que la población no está sometida a ningún tipo de control. En un segundo momento se considera que la población es atacada por un esfuerzo de control que será el control químico, por medio de larvicidas e insecticidas, lo que conduce a modificar las ecuaciones del modelo sin ningún control. Luego, se considera la acción de un control biológico, lo que conduce a una nueva modificación del primer modelo. Finalmente se establece un modelo en el



Figura 1.12: Grupo de hormigas *Tapinoma melanocephalum*.

que se considera la acción simultanea de dos estrategias de control: una química y otra biológica.

### 1.3.1. Modelo matemático sin ningún tipo de control

Para el desarrollo del modelo se consideran los estadios donde es posible aplicar algún tipo de control a la población de mosquitos. De acuerdo a lo señalado en las Secciones 1.2.1 y 1.2.2, se tienen medidas de control para los estadios de larva y adulto, que son los más comunes en los diferentes modelos matemáticos. Sin embargo, a pesar de que las medidas de control sobre los huevos son poco comunes (por ejemplo, considérese el control de huevos por medio de hormigas o la ovitrampa), en este trabajo también se considera el estadio huevo. En principio, entre las variables que se utilizaran se tienen:

Número de huevos en el tiempo $t$	$H(t)$
Número de larvas en el tiempo $t$	$L(t)$
Número de adultos en el tiempo $t$	$A(t)$ .

Para la ecuación que rige el número de huevos se sigue el planteamiento de Marín, Muñoz, Toro y Restrepo (2007), aunque ahí se considera una ecuación que representa los estados inmaduros del mosquito (huevo, larva y pupa). Se supone una capacidad de soporte del medio para los huevos dada por  $K_H$ , y una tasa de oviposición intrínseca a la población de mosquitos dada por  $\phi$ , que representa el número promedio de huevos puesto por una hembra gravida. Recuérdese que una sola copulación es necesaria para que una hembra quede fértil de por vida. Además de considerar los parámetros de la tasa de inviabilidad de huevos,  $\mu_H$ , que representa el número promedio de huevos que no logra llegar al estadio de larva, y la tasa de cambio del estadio de huevo a larva dado por  $\gamma_H$ , teniendo finalmente la ecuación

$$H' = \phi A \left( 1 - \frac{H}{K_H} \right) - \mu_H H - \gamma_H H. \quad (1.1)$$

En cuanto al numero de larvas se sabe que estas tienen una cantidad dependiendo del número de huevos que logren llegar al estado de larva, el término  $\gamma_H H$  de la ecuación (1.1). Como no se considera en este momento ningún tipo de control, los demás parámetros involucrados en la ecuación de cambio del número de larvas son

la tasa de muerte de las larvas,  $\mu_L$ , y la tasa de crecimiento de larvas a mosquitos maduros  $\gamma_L$ , teniendo

$$L' = \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L. \quad (1.2)$$

Finalmente para los adultos solo se considera la tasa intrínseca de mortalidad dada por  $\mu_A$ . Así el cambio está dado por

$$A' = \gamma_L L - \mu_A A. \quad (1.3)$$

Con lo que se obtiene un modelo para la dinámica de población del mosquito *Aedes aegypti* sin ningún tipo de control, con restricción únicamente en el numero de huevos que soporta el medio, dado por

$$\begin{aligned} H' &= \phi A \left(1 - \frac{H}{K_H}\right) - \mu_H H - \gamma_H H \\ L' &= \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L \\ A' &= \gamma_L L - \mu_A A. \end{aligned} \quad (1.4)$$

El trabajo que viene en las próximas Secciones consiste en modificar el modelo (1.4) adecuando términos que representen una medida de control de la población en distintos estados de su desarrollo.

### 1.3.2. Modelo matemático con control químico

Conociendo el modelo del crecimiento poblacional del mosquito *Aedes aegypti* sin ningún esfuerzo de control, se plantea ahora la adopción de medidas de control químico en las etapas de larva y adulto, es decir, se considera el uso de larvicidas y adulticidas. Ello obliga a modificar las ecuaciones (1.2) y (1.3), en las cuales se describe el cambio en el numero de larvas y adultos respectivamente. Para el control químico algunos autores (Duque y Navarro-Silva, 2006) definen una tasa constantes de efectividad asociada al larvicida. Esteva et al (2010) toma una tasa en función del tiempo, considerando que el control del mosquito se realiza en periodos favorables para el brote de una epidemia de dengue; ambas tasas son proporcionales al número de larvas en el instante  $t$ . En este modelo se sigue el enfoque de una tasa constante, denotada por  $\rho$ , teniendo así que el termino asociado con la efectividad del larvicida es  $\rho L$ , que representa el número de larvas afectadas por el larvicida, con lo cual la ecuación (??) se modifica en

$$L' = \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L - \rho L. \quad (1.5)$$

Para el control del adulto por medio de insecticidas Marín et al. (2007) considera una tasa constante para la mortalidad causada por la aplicación del insecticida, y similar al control de las larvas Esteva et al. (2010) toma una tasa en función del tiempo. Otra vez se toma una tasa constante para las efectividad del insecticida que se designara por  $\delta$ , siendo  $\delta A$  el número de mosquitos adultos erradicados por el insecticida. Luego la ecuación (1.3) se transforma en la ecuación

$$A' = \gamma_L L - \mu_A A - \delta A. \quad (1.6)$$

Por lo tanto, se tiene un modelo con el cual se controla la población del mosquito con medios químicos dado por las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} H' &= \phi A \left(1 - \frac{H}{K_H}\right) - \mu_H H - \gamma_H H \\ L' &= \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L - \rho L \\ A' &= \gamma_L L - \mu_A A - \delta A. \end{aligned} \quad (1.7)$$

### 1.3.3. Modelo matemático con control biológico

En cuanto al control biológico se tienen diferentes maneras de atacar a las larvas del mosquito por medio de un depredador natural (ver sección 1.2.2). En este sentido, hay varios modelos matemáticos con control biológico del mosquito que consideran sistemas tipo depredador - presa, donde el depredador es el organismo seleccionado para realizar el control del mosquito.

Al modelo que se tiene para la dinámica de población del mosquito se agregará una ecuación más que será para la dinámica del depredador,  $D$ , para su dinámica se sigue a Marín et al. (2007) que describe al depredador con un crecimiento logístico con capacidad de carga del medio dada por  $K_D$  y tasa de crecimiento  $\omega$ , es decir

$$D' = \omega D \left( 1 - \frac{D}{K_D} \right) \quad (1.8)$$

En cuanto a la dinámica de las larvas, Mosquera y Perea (2006) plantean una interacción entre las larvas y el depredador similar al modelo clásico de Lotka – Volterra, es decir, una tasa constante de depredación; mientras que Duque, Muñoz y Navarro – Silva (2004) y Marín et al. (2007) plantean una interacción dada por una función de Holling tipo I. Por tanto, sabiendo además las características del modelo clásico depredador – presa se aleja de la realidad, se modela la interacción de los depredadores con las presas mediante una función de Holling tipo I dada por

$$\frac{\beta LD}{L + \eta}$$

donde  $\beta$  es la tasa de depredación. Así la ecuación (1.2) se modifica de la manera siguiente

$$L' = \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L - \frac{\beta LD}{L + \eta}. \quad (1.9)$$

El parámetro  $\eta$  que representa la constante media de saturación, es decir, es el parámetro que controla la depredación, pues al no tenerse individuos para consumir el depredador baja su ritmo de depredación.

Por lo tanto, el modelo para la dinámica de población del mosquito con control biológico, incluyendo la dinámica del depredador, se describe por el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{aligned} H' &= \phi A \left( 1 - \frac{H}{K_H} \right) - \mu_H H - \gamma_H H \\ L' &= \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L - \frac{\beta LD}{L + \eta} \\ A' &= \gamma_L L - \mu_A A \\ D' &= \omega D \left( 1 - \frac{D}{K_D} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

### 1.3.4. Modelo matemático control integrado

Además de las medidas de control químico y biológico, se pueden considerar medidas de control cultural, como por ejemplo, el método de control de la ovitrampa. Este método consiste en colocar alrededor de un lugar donde los mosquitos tiendan a depositar sus huevos un baso, ó un contenedor de agua adecuado, y una pieza de madera la que deberá quedar parcialmente sumergida en el agua, pues recuérdese que los mosquitos colocan sus huevos en la interfaz agua-aire, luego de un día se retira la pieza de madera y se elimina adecuadamente o se sana por medio de algún químico para poder ser reutilizada en la trampa, esta medida tiene un gran implicación de la población y se puede tomar como medida cultural.

Estas ovitrampas han sido usadas desde 1965 en la vigilancia del *Aedes aegypti*, como un instrumento para determinar la distribución del mosquito, para medir la fluctuación estacional de las poblaciones y para evaluar la eficacia de la aplicación de insecticidas (Vargas, 2002).

La base científica de las ovitrampas consiste en que las hembras grávidas de *Aedes aegypti* deben localizar sitios para ovipositar, ya que esta especie coloca los huevos individualmente en las superficies de las paredes internas y por encima del nivel del agua en receptáculos naturales o artificiales (ibíd). Varios tipos de materiales han sido usados para confeccionar las ovitrampas tales como jarras de vidrio, plástico y metal. También se usan diferentes tipos de ovitrampas con materiales adherentes que han sido diseñadas para estudios de dispersión del mosquito y adaptadas para los programas en América Latina ya que su coste es mínimo.

Esta medida requiere de una participación más activa de la población, pues las ovitrampas deben de tener un control diario, ya que de lo contrario se volverían nuevos criaderos para el mosquito y se tendría un efecto inverso al deseado.

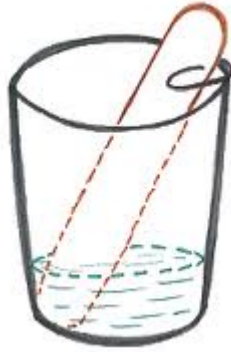


Figura 1.13: Esquema sencillo de una ovitrampa.

Suponiendo que la tasa de efectividad de la ovitrampa es constante y esta dada por  $\alpha$ , la ecuación (1.1), que representa la dinámica de los huevos, se convierte en

$$H' = \phi A \left(1 - \frac{H}{K_H}\right) - \mu_H H - \gamma_H H - \alpha H. \quad (1.11)$$

Por tanto un modelo que integra medidas de control químicas, biológicas y culturales es el siguiente

$$\begin{aligned} H' &= \phi A \left(1 - \frac{H}{K_H}\right) - \mu_H H - \gamma_H H - \alpha H \\ L' &= \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L - \rho L - \frac{\beta L D}{L + \eta} \\ A' &= \gamma_L L - \mu_A A - \delta A \\ D' &= \omega D \left(1 - \frac{D}{K_D}\right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

La región de sentido biológico, es decir, la región donde los valores de las variables del modelo tienen sentido pues recuérdese que se tiene una situación real para una población y no se pueden tener poblaciones negativas, dada por

$$\Omega = \{(H, L, A, D) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq H \leq K_H, L \geq 0, A \geq 0, 0 \leq D \leq K_D\} \quad (1.13)$$



El trabajo en los siguientes capítulos se centra en estudiar el comportamiento cualitativo del modelo en las cercanías de los puntos de equilibrio que se encuentren en la región  $\Omega$ . Entre las herramientas que se utilizan destacan el método de Linealización de Lyapunov y el Teorema de Hartman - Grobman. Específicamente se caracteriza la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio y se realizan algunas simulaciones numéricas para observar el comportamiento de las soluciones del modelo.



## Capítulo 2

# Análisis del modelo para la dinámica de población del mosquito con estrategias de control

Una de las técnicas básicas en la modelación matemática consiste en usar un sistema de ecuaciones diferenciales para describir un fenómeno natural y estudiar cualitativamente la dinámica del modelo a fin de corroborar teóricamente si el modelo responde al comportamiento del fenómeno que se está estudiando. En algunos casos es posible incorporar datos reales y simular por medio de software especializado los resultados. Por ejemplo, para describir la dinámica de población del mosquito *Aedes aegypti* con estrategias de control, se considera el modelo siguiente .

$$\begin{aligned}H' &= \phi A \left(1 - \frac{H}{K_H}\right) - \mu_H H - \gamma_H H - \alpha H \\L' &= \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L - \rho L - \frac{\beta L D}{L + \eta} \\A' &= \gamma_L L - \mu_A A - \delta A \\D' &= \omega D \left(1 - \frac{D}{K_D}\right)\end{aligned}\tag{2.1}$$

definido en la región de sentido biológico

$$\Omega = \{(H, L, A, D) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq H \leq K_H, L \geq 0, A \geq 0, 0 \leq D \leq K_D\},$$

donde las variables y parámetros están dados en los Cuadros 2.1 y 2.2, respectivamente.

El estudio del comportamiento del sistema (2.1) se hace desde un enfoque cuantitativo y cualitativo, calculando los puntos críticos o soluciones de equilibrio del sistema y analizando el comportamiento cualitativo de las soluciones alrededor de estos, mediante el método de linealización de Lyapunov y el Teorema de Hartman - Grobman.

## 2.1. Soluciones de equilibrio

En el modelo (2.1) se considera la aplicación de medidas de control químico (adulticidas y larvicidas), control biológico (un depredador natural de las larvas del mosquito) y una medida cultural (que puede ser la ovitrampa o la colaboración de la población para la eliminación de criaderos del mosquito) para la erradicación de la población de mosquitos. En el cuadro 2.1 se muestran las variables utilizadas en el modelos y en el cuadro 2.2 se muestran los respectivos parámetros.

Cuadro 2.1: Variables del modelo para la dinámica de poblacional del mosquito *Aedes aegypti* con control químico y biológico.

Número de huevos en el tiempo $t$	$H$
Número de larvas en el tiempo $t$	$L$
Número de adultos en el tiempo $t$	$A$
Número de depredadores en el tiempo $t$	$D$

Cuadro 2.2: Parámetros del modelo para la dinámica de población del mosquito *Aedes aegypti* con control químico y biológico.

Parámetros entomológicos del mosquito	
Tasa de oviposición intrínseca del mosquito	$\phi$
Tasa de inviabilidad de los huevos	$\mu_H$
Capacidad máxima del medio para los huevos	$K_H$
Tasa de transformación de huevo a larva	$\gamma_H$
Tasa de mortalidad natural de las larvas	$\mu_L$
Tasa de transformación de larva a adulto	$\gamma_L$
Tasa de mortalidad natural de los adultos	$\mu_A$
Parámetros del control de la población	
Tasa de efectividad del control en los huevos	$\alpha$
Tasa de efectividad del larvicida	$\rho$
Tasa de depredación	$\beta$
Tasa media de saturación	$\eta$
Tasa de efectividad del adulticida	$\delta$
Tasa de crecimiento natural del depredador	$\omega$
Capacidad máxima del medio para el depredador	$K_D$

Se observa que la última ecuación de (2.1) está desacoplada y además corresponde a un modelo de crecimiento logístico cuyas soluciones de equilibrio son

$$D = 0 \quad \text{y} \quad D = K_D.$$

Sustituyendo la solución  $D=0$  en el modelo (2.1) se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 H' &= \phi A \left(1 - \frac{H}{K_H}\right) - \mu_H H - \gamma_H H - \alpha H \\
 L' &= \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L - \rho L \\
 A' &= \gamma_L L - \mu_A A - \delta A.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Mientras que para  $D = K_D$ , se obtiene

$$\begin{aligned} H' &= \phi A \left(1 - \frac{H}{K_H}\right) - \mu_H H - \gamma_H H - \alpha H \\ L' &= \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L - \rho L - \frac{\beta L K_D}{L + \eta} \\ A' &= \gamma_L L - \mu_A A - \delta A. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Las soluciones de equilibrio de (2.2) son las soluciones del sistema

$$0 = \phi \bar{A} \left(1 - \frac{\bar{H}}{K_H}\right) - \mu_H \bar{H} - \gamma_H \bar{H} - \alpha \bar{H} \quad (2.4)$$

$$0 = \gamma_H \bar{H} - \gamma_L \bar{L} - \mu_L \bar{L} - \rho \bar{L} \quad (2.5)$$

$$0 = \gamma_L \bar{L} - \mu_A \bar{A} - \delta \bar{A} \quad (2.6)$$

Al despejar  $\bar{A}$  en (2.6) y  $\bar{L}$  en (2.5) se obtiene

$$\bar{A} = \frac{\bar{L} \gamma_L}{\delta + \mu_A} \quad (2.7)$$

$$\bar{L} = \frac{\bar{H} \gamma_H}{\rho + \gamma_L + \mu_L}. \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.8) en (2.7)

$$\bar{A} = \frac{\gamma_L \gamma_H \bar{H}}{(\mu_A + \delta)(\gamma_L + \mu_L + \rho)} \quad (2.9)$$

y luego sustituyendo en (2.4)

$$\begin{aligned} \frac{\phi \gamma_L \gamma_H \bar{H}}{(\mu_A + \delta)(\gamma_L + \mu_L + \rho)} \left(1 - \frac{\bar{H}}{K_H}\right) - (\mu_H + \gamma_H + \alpha) \bar{H} &= 0 \\ \bar{H} \left( \frac{\phi \gamma_L \gamma_H}{(\mu_A + \delta)(\gamma_L + \mu_L + \rho)} \left(1 - \frac{\bar{H}}{K_H}\right) - (\mu_H + \gamma_H + \alpha) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

De (2.10) se obtiene dos valores para  $\bar{H}$ , uno de ellos  $\bar{H} = 0$ , el cual corresponde al punto de equilibrio trivial  $\bar{H} = \bar{L} = \bar{A} = 0$  ó  $P_0 = (0, 0, 0)$ , donde no existen mosquitos, y el no trivial asociado a

$$\bar{H} = K_H \left(1 - \frac{(\mu_A + \delta)(\mu_H + \gamma_H + \alpha)(\gamma_L + \mu_L + \rho)}{\phi \gamma_L \gamma_H}\right). \quad (2.11)$$

Sea

$$\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) = \frac{\phi \gamma_L \gamma_H}{(\mu_A + \delta)(\mu_H + \gamma_H + \alpha)(\gamma_L + \mu_L + \rho)} \quad (2.12)$$

con este cambio se tiene una expresión para  $\bar{H}$ , en el equilibrio no trivial, cuando  $D = 0$

$$\begin{aligned} \bar{H} &= K_H \left(1 - \frac{1}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)}\right) \\ \bar{H} &= \frac{K_H}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} (\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) - 1) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Así los puntos de equilibrio del sistema (2.2) son el trivial  $P_0^0 = (0, 0, 0)$  y el equilibrio no trivial  $P_1^0 = (\bar{H}, \bar{L}, \bar{A})$ <sup>1</sup> donde

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \frac{K_H}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} (\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) - 1) \\ \bar{L} &= \frac{\gamma_H}{\rho + \gamma_L + \mu_L} \bar{H} \\ \bar{A} &= \frac{\gamma_L \gamma_H}{(\mu_A + \delta)(\gamma_L + \mu_L + \rho)} \bar{H}\end{aligned}\tag{2.14}$$

Se observa que el signo de  $\bar{A}$  y  $\bar{L}$  dependen del signo de  $\bar{H}$ . Así

**Teorema 2.1.1 (Positividad de la solución no trivial del modelo (2.2).)**

La solución no trivial del modelo (2.2), que describe la dinámica de población del mosquito *Aedes aegypti* con control químico, es positiva si

$$(\mu_A + \delta)(\mu_H + \gamma_H + \alpha)(\gamma_L + \mu_L + \rho) < \phi \gamma_L \gamma_H,\tag{2.15}$$

es decir,

$$\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) > 1.\tag{2.16}$$

Para interpretar la condición (2.15) (ó (2.16)), Se observa que en el lado derecho,  $\phi \gamma_H \gamma_L$ , aparece el producto de las tasa de oviposición, las tasas de cambio de huevo a larva y de larva a adulto, mientras que en el lado izquierdo aparece el producto de la suma de los parámetros que intervienen en cada uno de los estados. Por tanto, el producto de las tasas ingreso a cada clase tiene que ser mayor que el producto de las tasas a las cuales abandonan su clase respectiva.

De manera semejante las soluciones de equilibrio para el sistema (2.3), se obtienen al resolver el sistema

$$0 = \phi \bar{A} \left(1 - \frac{\bar{H}}{K_H}\right) - \mu_H \bar{H} - \gamma_H \bar{H} - \alpha \bar{H}\tag{2.17}$$

$$0 = \gamma_H \bar{H} - \gamma_L \bar{L} - \mu_L \bar{L} - \rho \bar{L} - \frac{\beta \bar{L} K_D}{\bar{L} + \eta}\tag{2.18}$$

$$0 = \gamma_L \bar{L} - \mu_A \bar{A} - \delta \bar{A}\tag{2.19}$$

Al despejar  $\bar{H}$  en (2.17) y  $\bar{A}$  en (2.19) se obtiene, respectivamente

$$\bar{H} = \frac{\phi K_H \bar{A}}{\phi \bar{A} + K_H(\alpha + \gamma_H + \mu_H)},\tag{2.20}$$

$$\bar{A} = \frac{\gamma_L \bar{L}}{\delta + \mu_A}.\tag{2.21}$$

Al sustituir (2.21) en (2.20) así

$$\bar{H} = \frac{\phi K_H \gamma_L \bar{L}}{\phi \gamma_L \bar{L} + K_H (\delta + \mu_A) (\alpha + \gamma_H + \mu_H)}.\tag{2.22}$$

<sup>1</sup>El superíndice hace referencia al valor que toma la variable  $D$ , o valor de equilibrio para  $D$ .

Y al sustituir (2.22) en (2.18) se obtiene

$$\begin{aligned} \gamma_H \left( \frac{\phi K_H \gamma_L \bar{L}}{\phi \gamma_L \bar{L} + K_H (\delta + \mu_A) (\alpha + \gamma_H + \mu_H)} \right) - \left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\bar{L} + \eta} \right) \bar{L} &= 0 \\ \left( \frac{\phi \gamma_H K_H \gamma_L}{\phi \gamma_L \bar{L} + K_H (\delta + \mu_A) (\alpha + \gamma_H + \mu_H)} - \left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\bar{L} + \eta} \right) \right) \bar{L} &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

De (2.23) se obtiene nuevamente la solución trivial  $\bar{H} = \bar{L} = \bar{A} = 0$ , teniendo a  $P_0^{K_D}$  como solución de equilibrio. Ahora para determinar la solución no trivial, se tendrán dos valores para  $\bar{L}$ , los cuales deben ser necesariamente valores reales positivos.

Resolviendo ahora para el valor no trivial

$$\begin{aligned} \frac{\phi \gamma_H K_H \gamma_L}{\phi \gamma_L \bar{L} + K_H (\delta + \mu_A) (\alpha + \gamma_H + \mu_H)} - \left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\bar{L} + \eta} \right) &= 0 \\ \frac{\phi \gamma_H K_H \gamma_L}{\phi \gamma_L \bar{L} + K_H (\delta + \mu_A) (\alpha + \gamma_H + \mu_H)} &= \left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\bar{L} + \eta} \right) \\ (\bar{L} + \eta) (\phi \gamma_H \gamma_L K_H) &= [(\bar{L} + \eta) (\gamma_L + \mu_L + \rho) + \beta K_D] [K_H (\gamma_H + \mu_H + \alpha) (\mu_A + \delta) + \phi \gamma_L \bar{L}] \\ 0 &= \bar{L}^2 [\phi \gamma_L (\gamma_L + \mu_L + \rho)] + \bar{L} [(\gamma_H + \mu_H + \alpha) (\gamma_L + \mu_L + \rho) (\mu_A + \delta) K_H \\ &+ \eta \phi \gamma_L (\gamma_L + \mu_L + \rho) \beta K_D \phi \gamma_L - \phi \gamma_H \gamma_L K_H] + \eta K_H (\gamma_H + \mu_H + \alpha) \\ &(\gamma_L + \mu_L + \rho) (\mu_A + \delta) + \beta K_D K_H (\gamma_H + \mu_H + \alpha) (\mu_A + \delta) - \eta \phi K_H \gamma_H \gamma_L. \end{aligned}$$

Esta última ecuación se puede describir como

$$\begin{aligned} \bar{L}^2 [\phi \gamma_L (\gamma_L + \mu_L + \rho)] + \bar{L} \left[ \frac{\phi \gamma_H \gamma_L K_H}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} + \eta \phi \gamma_L (\gamma_L + \mu_L + \rho) + \beta \phi \gamma_L K_D - \phi \gamma_L \gamma_H K_H \right] + \frac{\eta \phi \gamma_H \gamma_L K_H}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} \\ + \frac{\beta \phi \gamma_H \gamma_L K_D K_H}{(\gamma_L + \mu_L + \rho) \psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} - \eta \phi \gamma_H \gamma_L K_H = 0, \end{aligned}$$

o como

$$\bar{L}^2 + a\bar{L} + b = 0 \quad (2.24)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \eta + \frac{\gamma_H K_H}{\gamma_L + \mu_L + \rho} \left( \frac{1}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} + \frac{\beta K_D}{\gamma_H K_H} - 1 \right) \\ b &= \frac{\gamma_H K_H}{\gamma_L + \mu_L + \rho} \left( \frac{\eta}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} - \eta + \frac{\beta K_D}{(\gamma_L + \mu_L + \rho) \psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Así las soluciones son

$$\bar{L}_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{y} \quad \bar{L}_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (2.26)$$

Ahora para asegurar que estos valores están en la región de sentido biológico, se tienen las siguientes condiciones

**Teorema 2.1.2 (Número de soluciones de equilibrio del modelo (2.3).)**

Dado el modelo (2.3), que describe la dinámica de población del mosquito *Aedes aegypti* con control biológico, las soluciones de equilibrio no triviales del modelo dependerán de las condiciones de los valores de  $a$  y  $b$ , dados en (2.25), así:

- Si  $b < 0$ , se tiene que  $\bar{L}_1 < 0$  y  $\bar{L}_2 > 0$ ;
- Si  $b > 0$  y  $a^2 - 4b \geq 0$ , entonces  $\bar{L}_1 \bar{L}_2 > 0$ , pero si  $a < 0$  son negativos y si  $a > 0$  son positivos;

donde las soluciones que se presentan son  $P_1^{K_D}$  y  $P_2^{K_D}$ , asociados a  $\bar{L}_1$  y  $\bar{L}_2$ , respectivamente, dados por  $P_1^{K_D} = (\bar{H}, \bar{L}_1, \bar{A})$  y  $P_2^{K_D} = (\bar{H}, \bar{L}_2, \bar{A})$ , donde

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \frac{\phi K_H \gamma_L \bar{L}}{\phi \gamma_L \bar{L} + K_H (\delta + \mu_A) (\alpha + \gamma_H + \mu_H)} \\ \bar{L} &= \bar{L}_1 \text{ y/ó } \bar{L}_2, \text{ (según corresponda)} \\ \bar{A} &= \frac{\gamma_L \bar{L}}{\delta + \mu_A},\end{aligned}\tag{2.27}$$

y para  $\bar{L}_1, \bar{L}_2$

$$\bar{L}_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{y} \quad \bar{L}_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

La prueba de este resultado no es mas que el análisis de las raíces de la ecuación cuadrática (Ver Apéndice A).

En resumen, en ambos casos para los valores de equilibrio de  $D$ , aparecen la solución de equilibrio trivial, lo cual significa que no hay ni depredadores ni mosquitos. En el otro caso los depredadores se mantienen en su población máxima  $K_D$ , y los mosquitos se extinguen. Además, se presenta el equilibrio  $P_1^0$  dado en (2.14),

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \frac{K_H}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} (\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) - 1) \\ \bar{L} &= \frac{\gamma_H}{\rho + \gamma_L + \mu_L} \bar{H} \\ \bar{A} &= \frac{\gamma_L \gamma_H}{(\mu_A + \delta)(\gamma_L + \mu_L + \rho)} \bar{H}.\end{aligned}$$

Y cuando  $D = K_D$  se presentan uno o dos equilibrios distintos del trivial, dependiendo del valor de  $a$  y  $b$ , los que serían en su momento  $P_1^{K_D}$  y  $P_2^{K_D}$  con coordenadas dadas en (2.49), solamente cambiando el valor de  $\bar{L}$  según corresponda a la situación de los valores de  $a$  y  $b$  presentados en (2.25).

## 2.2. Linealización y análisis de estabilidad del modelo alrededor de los puntos de equilibrio

A continuación se calcula la matriz de linealización del modelo (2.1), siguiendo el *método de linealización de Lyapunov* (Ver Apéndice B). En primero lugar, ese calculo se hace en general. Luego evalúa cada uno de los puntos de equilibrio obtenidos en la sección 2.1 y se estudia la estabilidad en cada solución de equilibrio.



### 2.2.1. Matriz de linealización

El modelo que se ha planteado para la dinámica de población del mosquito con estrategias de control dado por las ecuaciones (2.1),

$$\begin{aligned} H' &= \phi A \left(1 - \frac{H}{K_H}\right) - \mu_H H - \gamma_H H - \alpha H \\ L' &= \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L - \rho L - \frac{\beta L D}{L + \eta} \\ A' &= \gamma_L L - \mu_A A - \delta A \\ D' &= \omega D \left(1 - \frac{D}{K_D}\right) \end{aligned}$$

Al tener en cuenta el desacoplamiento de la última ecuación, las entradas de la matriz jacobiana se obtienen calculando las siguientes derivadas parciales

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial H}{\partial H} = -\frac{\phi A}{K_H} - (\mu_H + \gamma_H + \alpha), & \frac{\partial H}{\partial L} = 0, & \frac{\partial H}{\partial A} = \phi \left(1 - \frac{H}{K_H}\right); \\ \frac{\partial L}{\partial H} = \gamma_H, & \frac{\partial L}{\partial L} = -(\gamma_L + \mu_L + \rho) - \frac{\beta D \eta}{(L + \eta)^2}, & \frac{\partial L}{\partial A} = 0; \\ \frac{\partial A}{\partial H} = 0, & \frac{\partial A}{\partial L} = \gamma_L, & \frac{\partial A}{\partial A} = -(\mu_A + \delta). \end{array} \right.$$

Así finalmente la matriz jacobiana que se utilizara para hacer el estudio cualitativo alrededor de cada una de las soluciones de equilibrio,  $(\bar{H}, \bar{L}, \bar{A})$ , es

$$\mathcal{M}(\bar{H}, \bar{L}, \bar{A}) = \begin{pmatrix} -\frac{\phi \bar{A}}{K_H} - (\mu_H + \gamma_H + \alpha) & 0 & \phi \left(1 - \frac{\bar{H}}{K_H}\right) \\ \gamma_H & -(\gamma_L + \mu_L + \rho) - \frac{\beta D \eta}{(\bar{L} + \eta)^2} & 0 \\ 0 & \gamma_L & -(\mu_A + \delta) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

### 2.2.2. Análisis de estabilidad de los equilibrios sin depredación ( $D = 0$ )

Ahora se estudia el comportamiento cualitativo de las soluciones de equilibrio para el caso  $D = 0$ .

Al evaluar  $P_0^0 = (0, 0, 0)$  en  $\mathcal{M}$  se obtiene

$$\mathcal{M}(P_0^0) = \begin{pmatrix} -(\gamma_H + \mu_H + \alpha) & 0 & \phi \\ \gamma_H & -(\gamma_L + \mu_L + \rho) & 0 \\ 0 & \gamma_L & -(\mu_A + \delta) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Cuyo polinomio característico es

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{M}(P_0^0) - \mathbb{I}\lambda) &= \begin{vmatrix} -(\gamma_H + \mu_H + \alpha) - \lambda & 0 & \phi \\ \gamma_H & -(\gamma_L + \mu_L + \rho) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma_L & -(\mu_A + \delta) - \lambda \end{vmatrix} \\
&= -[(\gamma_H + \mu_H + \alpha) + \lambda][(\gamma_L + \mu_L + \rho + \lambda)(\mu_A + \delta + \lambda)] + \phi\gamma_H\gamma_L \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Haciendo un poco de álgebra, este polinomio puede escribirse como

$$\begin{aligned}
&\lambda^3 + \lambda^2[\gamma_H + \mu_H + \alpha + \gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta] + \lambda[(\gamma_L + \mu_L + \rho)(\mu_A + \delta) + (\gamma_H + \mu_H + \alpha)(\gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta)] \\
&\quad + (\gamma_H + \mu_H + \alpha)(\gamma_L + \mu_L + \rho)(\mu_A + \delta) - \phi\gamma_H\gamma_L \\
= &\lambda^3 + \lambda^2[\gamma_H + \mu_H + \alpha + \gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta] + \lambda \left[ \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} \left( \frac{1}{\gamma_H + \mu_H + \alpha} + \frac{1}{\gamma_L + \mu_L + \rho} + \frac{1}{\mu_A + \delta} \right) \right] \\
&\quad + \phi\gamma_H\gamma_L \left[ \frac{1}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} - 1 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Llamando

$$\begin{aligned}
a_1 &= \gamma_H + \mu_H + \alpha + \gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta, \\
b_1 &= \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} \left( \frac{1}{\gamma_H + \mu_H + \alpha} + \frac{1}{\gamma_L + \mu_L + \rho} + \frac{1}{\mu_A + \delta} \right), \\
c_1 &= \phi\gamma_H\gamma_L \left[ \frac{1}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} - 1 \right]
\end{aligned}$$

entonces el polinomio característico se escribe

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + b_1\lambda + c_1 = 0.$$

Para determinar la estabilidad de la solución  $P_0^0$  se hace uso del criterio de Routh - Hurwitz (Ver Apéndice C), es decir, si se cumple que  $a_1 > 0$ ,  $c_1 > 0$  y  $a_1b_1 - c_1 > 0$  entonces  $P_0^0$  es estable. Es de observar que las condición  $a_1 > 0$  es satisfecha, faltando ver las condiciones  $c_1 > 0$  y  $a_1b_1 - c_1 > 0$  que se puede reescribir como  $a_1b_1 > c_1$ . La condición  $c_1 > 0$  es equivalente a

$$\begin{aligned}
\phi\gamma_H\gamma_L \left[ \frac{1}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} - 1 \right] &> 0 \\
\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) &< 1
\end{aligned} \tag{2.30}$$

ahora la condición  $a_1b_1 > c_1$ , al realizar el producto  $a_1b_1$  se tiene

$$\begin{aligned}
a_1b_1 &= [\gamma_H + \mu_H + \alpha + \gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta] \left[ \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} \left( \frac{1}{\gamma_H + \mu_H + \alpha} + \frac{1}{\gamma_L + \mu_L + \rho} + \frac{1}{\mu_A + \delta} \right) \right] \\
&= [\gamma_H + \mu_H + \alpha + \gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta] [(\gamma_L + \mu_L + \rho)(\mu_A + \delta) + (\gamma_H + \mu_H + \alpha)(\gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta)] \\
&= \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} + (\gamma_L + \mu_L + \rho)^2(\mu_A + \delta) + (\gamma_L + \mu_L + \rho)(\mu_A + \delta)^2 + \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} \\
&\quad + (\gamma_L + \mu_L + \rho)^2(\gamma_H + \mu_H + \alpha) + (\gamma_H + \mu_H + \alpha)^2(\gamma_L + \mu_L + \rho) + \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} + (\gamma_H + \mu_H + \alpha)^2(\mu_A + \delta) \\
&\quad + (\gamma_H + \mu_H + \alpha)(\mu_A + \delta)^2 \\
&= \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} \left[ 3 + \frac{\gamma_L + \mu_L + \rho}{\gamma_H + \mu_H + \alpha} + \frac{\mu_A + \delta}{\gamma_H + \mu_H + \alpha} + \frac{\gamma_L + \mu_L + \rho}{\mu_A + \delta} + \frac{\gamma_H + \mu_H + \alpha}{\gamma_L + \mu_L + \rho} + \frac{\gamma_H + \mu_H + \alpha}{\mu_A + \delta} + \frac{\mu_A + \delta}{\gamma_L + \mu_L + \rho} \right] \\
&> \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} (1 - \psi(\alpha, \rho, 0, \delta))
\end{aligned} \tag{2.31}$$

observese que en (2.31) no es necesario que  $\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) > 1$  para que esta condición sea satisfecha, por lo cual para que  $P_0^0$  sea estable únicamente es necesario que  $c_1 > 0$ , es decir (2.30).

Con lo que se establece

**Teorema 2.2.1**

Si  $\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) < 1$  el equilibrio trivial,  $P_0^0$ , del sistema (2.2) es asintóticamente estable.

Ahora se continua con el equilibrio no trivial sin depredación,  $P_1^0$ , dado en (2.14),

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \frac{K_H}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} (\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) - 1) \\ \bar{L} &= \frac{\gamma_H}{\rho + \gamma_L + \mu_L} \bar{H} \\ \bar{A} &= \frac{\gamma_L \gamma_H}{(\mu_A + \delta)(\gamma_L + \mu_L + \rho)} \bar{H}\end{aligned}$$

al evaluar en  $\mathcal{M}$ , (2.28), se obtiene la matriz de linealización en  $P_1^0$

$$\mathcal{M}(P_1^0) = \begin{pmatrix} -\frac{\phi \bar{A}}{K_H} - (\mu_H + \gamma_H + \alpha) & 0 & \phi \left(1 - \frac{\bar{H}}{K_H}\right) \\ \gamma_H & -(\gamma_L + \mu_L + \rho) & 0 \\ 0 & \gamma_L & -(\mu_A + \delta) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

que tiene como polinomio característico

$$\begin{aligned}\det(\mathcal{M}(P_1^0) - \mathbb{I}\lambda) &= \begin{vmatrix} -\frac{\phi \bar{A}}{K_H} - (\mu_H + \gamma_H + \alpha) - \lambda & 0 & \phi \left(1 - \frac{\bar{H}}{K_H}\right) \\ \gamma_H & -(\gamma_L + \mu_L + \rho) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma_L & -(\mu_A + \delta) - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\left[\frac{\phi}{K_H} \bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha + \lambda\right] [(\gamma_L + \mu_L + \rho + \lambda)(\mu_A + \delta + \lambda) + \gamma_H \gamma_L \phi \left(1 - \frac{\bar{H}}{K_H}\right)] \\ &= \lambda^3 + \lambda^2 \left[\frac{\phi}{K_H} \bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha + \gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta\right] \\ &\quad + \lambda \left[(\gamma_L + \mu_L + \rho)(\mu_A + \delta) + (\gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta) \left(\frac{\phi}{K_H} \bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha\right)\right] \\ &\quad + \gamma_H \gamma_L \phi \left(\frac{\bar{H}}{K_H} - 1\right) + \left(\frac{\phi}{K_H} \bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha\right) [(\gamma_L + \mu_L + \rho)(\mu_A + \delta)] \\ &= 0\end{aligned}$$

haciendo

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{\phi}{K_H} \bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha + \gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta \\ b_2 &= (\gamma_L + \mu_L + \rho)(\mu_A + \delta) + (\gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta) \left(\frac{\phi}{K_H} \bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha\right) \\ c_2 &= \gamma_H \gamma_L \phi \left(\frac{\bar{H}}{K_H} - 1\right) + \left(\frac{\phi}{K_H} \bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha\right) [(\gamma_L + \mu_L + \rho)(\mu_A + \delta)]\end{aligned}$$

se puede reescribir el polinomio característico como

$$\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + b_2 \lambda + c_2 = 0 \quad (2.33)$$

Obsérvese que  $c_2$  se puede escribir como

$$c_2 = \gamma_H \gamma_L \phi \left[ \frac{\bar{H}}{K_H} - 1 + \frac{\bar{A}}{K_H} \frac{\phi}{(\gamma_H + \mu_H + \alpha)\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} + \frac{1}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} \right] \quad (2.34)$$

Nuevamente al usar el criterio Routh - Hurwitz sobre (2.33),  $a_2 b_2 > c_2$  y  $c_2 > 0$ ,

La condición  $c_2 > 0$  es equivalente a

$$\begin{aligned} \gamma_H \gamma_L \phi \left[ \frac{\bar{H}}{K_H} - 1 + \frac{\phi \bar{A}}{K_H (\gamma_H + \mu_H + \alpha) \psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} + \frac{1}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} \right] &> 0 \\ \bar{H} \psi(\alpha, \rho, 0, \delta) + \frac{\phi}{(\gamma_H + \mu_H + \alpha)} \bar{A} + K_H &> K_H \psi(\alpha, \rho, 0, \delta) \end{aligned}$$

sustituyendo  $\bar{A}$  y  $\bar{H}$  dados en (2.14),

$$\left[ \frac{K_H(\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) - 1)}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} \right] \psi(\alpha, \rho, 0, \delta) + \frac{\phi}{(\gamma_H + \mu_H + \alpha)} \left[ \frac{K_H(\gamma_H + \mu_H + \alpha)}{\phi} (\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) - 1) \right] + K_H > K_H \psi(\alpha, \rho, 0, \delta)$$

es decir

$$\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) > 1. \quad (2.35)$$

Ahora para  $a_2 b_2$  se puede describir como

$$\begin{aligned} a_2 b_2 &= \left[ (\gamma_L + \mu_L + \rho)(\mu_A + \delta) + (\gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta) \left( \frac{\phi}{K_H} \bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha \right) \right] \\ &\quad \left[ \frac{\phi}{K_H} \bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha + \gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta \right] \\ &= \frac{3\phi\gamma_H\gamma_L}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} + \frac{\gamma_H\gamma_L\bar{A}}{K_H\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} \left[ \frac{3}{\gamma_H + \mu_H + \alpha} + \frac{2}{\mu_A + \delta} + \frac{2}{\gamma_L + \mu_L + \rho} \right] \\ &+ \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} \left[ \frac{\gamma_L + \mu_L + \rho}{\gamma_H + \mu_H + \alpha} + \frac{\mu_A + \delta}{\gamma_H + \mu_H + \alpha} + \frac{\gamma_H + \mu_H + \alpha}{\mu_A + \delta} + \frac{\mu_A + \delta}{\gamma_L + \mu_L + \rho} + \frac{\gamma_H + \mu_H + \alpha}{\gamma_L + \mu_L + \rho} \right] \\ &+ \frac{\phi}{K_H} \bar{A} [(\gamma_L + \mu_L + \rho)^2 + (\mu_A + \delta)^2] + \left( \frac{\phi}{K_H} \bar{A} \right)^2 (\gamma_L + \mu_L + \rho + \mu_A + \delta) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$> \gamma_H \gamma_L \phi \left[ \frac{\bar{H}}{K_H} - 1 + \frac{\bar{A}}{K_H} \frac{\phi}{(\gamma_H + \mu_H + \alpha)\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} + \frac{1}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} \right] \quad (2.37)$$

Obsérvese que la expresión dada para  $a_2 b_2$  en (2.36) es claramente mayor que la expresión que representa a  $c_2$  presenta en (2.34).

Dando como resultado

### **Teorema 2.2.2**

El equilibrio no trivial,  $P_1^0$ , del modelo (2.2) es asintóticamente estable si  $\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) > 1$ .

Concluyendo este apartado se tiene el resumen en el Cuadro 2.3 para el modelo sin presencia del depredador, o sin control biológico.

$\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)$	$< 1$	$> 1$
$P_0^0$	estable	inestable
$P_1^0$	inestable	estable

Cuadro 2.3: Resumen de estabilidad de las soluciones de equilibrio para el modelo (2.2).

### 2.2.3. Análisis de estabilidad de los equilibrios con depredación ( $D = K_D$ )

Ahora corresponde el análisis a las soluciones de equilibrio cuando se presenta el depredador en su capacidad máxima, es decir  $D = K_D$ , ó el estudio del comportamiento cualitativo del modelo (2.3) alrededor de las soluciones de equilibrio.

Iniciando nuevamente con la solución trivial,  $P_0^{K_D} = (0, 0, 0)$ , evaluando éste en (2.28) para tener la matriz de linealización en los alrededores de  $P_0^{K_D}$

$$\mathcal{M}(P_0^{K_D}) = \begin{pmatrix} -(\mu_H + \gamma_H + \alpha) & 0 & \phi \\ \gamma_H & -\left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta}\right) & 0 \\ 0 & \gamma_L & -(\mu_A + \delta) \end{pmatrix}$$

Siguiendo la técnica de análisis de las soluciones de equilibrio se calcula el polinomio característico de  $\mathcal{M}(P_0^{K_D})$

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{M}(P_0^{K_D}) - \mathbb{I}\lambda) &= \begin{vmatrix} -(\mu_H + \gamma_H + \alpha) - \lambda & 0 & \phi \\ \gamma_H & -\left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta}\right) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma_L & -(\mu_A + \delta) - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -[(\gamma_H + \mu_H + \alpha) + \lambda] \left[ \left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta} + \lambda\right) (\mu_A + \delta + \lambda) \right] + \phi \gamma_L \gamma_H \\ &= \lambda^3 + \lambda^2 \left( \gamma_H + \mu_H + \alpha + \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta} + \mu_A + \delta \right) \\ &\quad + \lambda \left[ (\gamma_H + \mu_H + \alpha) \left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta}\right) + \left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta}\right) (\mu_A + \delta) \right] \\ &\quad + (\gamma_H + \mu_H + \alpha) \left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta}\right) (\mu_A + \delta) - \phi \gamma_H \gamma_L \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir

$$\det(\mathcal{M}(P_0^{K_D}) - \mathbb{I}\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 a_3 + \lambda b_3 + c_3 = 0 \quad (2.38)$$

donde

$$\begin{aligned} a_3 &= \left( \gamma_H + \mu_H + \alpha + \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta} + \mu_A + \delta \right) \\ b_3 &= \left[ (\gamma_H + \mu_H + \alpha) \left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta}\right) + \left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta}\right) (\mu_A + \delta) \right] \\ c_3 &= (\gamma_H + \mu_H + \alpha) \left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta}\right) (\mu_A + \delta) - \phi \gamma_H \gamma_L \end{aligned} \quad (2.39)$$

Si siguiendo los mismos pasos dados en (2.12) para calcular  $\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)$ , se puede obtener la expresión general siguiente para  $\psi(\alpha, \rho, \beta, \delta)$ . En la sección 2.3 se aborda el significado y aplicaciones de esta expresión.

Así

$$\psi(\alpha, \rho, \beta, \delta) = \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{(\gamma_H + \mu_H + \alpha) \left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta} \right) (\mu_A + \delta)}. \quad (2.40)$$

Con (2.40), es posible describir  $c_3$  como

$$c_3 = \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\psi(\alpha, \rho, \beta, \delta)} (1 - \psi(\alpha, \rho, \beta, \delta))$$

nótese que si

$$\psi(\alpha, \rho, \beta, \delta) < 1 \quad (2.41)$$

entonces  $c_3 > 0$ .

Para terminar de aplicar el criterio de Routh - Hurwitz falta ver la condición que  $a_3 b_3 > c_3$ , esta condición es fácil de comprender si se calcula  $a_3 b_3$ ,

$$\begin{aligned} a_3 b_3 &= \left[ (\gamma_H + \mu_H + \alpha) \left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta} \right) + \left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta} \right) (\mu_A + \delta) \right] \\ &\quad \left( \gamma_H + \mu_H + \alpha + \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta} + \mu_A + \delta \right) \\ &= \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\psi(\alpha, \rho, \beta, \delta)} \left[ 3 + \frac{\gamma_H + \mu_H + \alpha}{\mu_A + \delta} + \frac{\gamma_H + \mu_H + \alpha}{\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta}} + \frac{\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta}}{\gamma_H + \mu_H + \alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta}}{\mu_A + \delta} + \frac{\mu_A + \delta}{\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta}} + \frac{\mu_A + \delta}{\gamma_H + \mu_H + \alpha} \right] \\ &> \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\psi(\alpha, \rho, \beta, \delta)} (1 - \psi(\alpha, \rho, \beta, \delta)) = c_3. \end{aligned}$$

Por lo tanto

### **Teorema 2.2.3**

Si  $\psi(\alpha, \rho, \beta, \delta) < 1$  el equilibrio trivial,  $P_0^{K_D}$ , del sistema (2.3) es asintóticamente estable.

Ahora se estudia el equilibrio no trivial,  $P^{K_D}$ , evaluando este punto de equilibrio en (2.28)

$$\mathcal{M}(P^{K_D}) = \begin{pmatrix} -\frac{\phi\bar{A}}{K_H} - (\mu_H + \gamma_H + \alpha) & 0 & \phi \left( 1 - \frac{\bar{H}}{K_H} \right) \\ \gamma_H & -(\gamma_L + \mu_L + \rho) - \frac{\beta\eta K_D}{(\bar{L} + \eta)^2} & 0 \\ 0 & \gamma_L & -(\mu_A + \delta) \end{pmatrix}$$

Con polinomio característico

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{M}(P^{K_D}) - \mathbb{I}\lambda) &= \begin{vmatrix} -\frac{\phi\bar{A}}{K_H} - (\mu_H + \gamma_H + \alpha) - \lambda & 0 & \phi\left(1 - \frac{\bar{H}}{K_H}\right) \\ \gamma_H & -(\gamma_L + \mu_L + \rho) - \frac{\beta\eta K_D}{(\bar{L} + \eta)^2} - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma_L & -(\mu_A + \delta) - \lambda \end{vmatrix} \\
&= -\left[\frac{\phi}{K_H}\bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha + \lambda\right] \left[\left(\gamma_L + \mu_L + \alpha + \frac{\beta\eta K_D}{(\bar{L} + \eta)^2} + \lambda\right)(\mu_A + \delta + \lambda)\right] \\
&\quad + \phi\gamma_H\gamma_L\left(1 - \frac{\bar{H}}{K_H}\right) \\
&= \lambda^3 + \lambda^2 \left[\frac{\phi}{K_H}\bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha + \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta\eta K_D}{(\bar{L} + \eta)^2} + \mu_A + \delta\right] \\
&\quad + \lambda \left[\left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta\eta K_D}{(\bar{L} + \eta)^2}\right)(\mu_A + \delta) + \left(\frac{\phi}{K_H}\bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha\right)(\mu_A + \delta)\right] \\
&\quad + \left(\frac{\phi}{K_H}\bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha\right)\left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta\eta K_D}{(\bar{L} + \eta)^2}\right) - \phi\gamma_H\gamma_L\left(1 - \frac{\bar{H}}{K_H}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\phi}{K_H}\bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha\right)\left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta\eta K_D}{(\bar{L} + \eta)^2}\right)(\mu_A + \delta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

tomando

$$\begin{aligned}
a_4 &= \left[\frac{\phi}{K_H}\bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha + \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta\eta K_D}{(\bar{L} + \eta)^2} + \mu_A + \delta\right] \\
b_4 &= \left[\left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta\eta K_D}{(\bar{L} + \eta)^2}\right)(\mu_A + \delta) + \left(\frac{\phi}{K_H}\bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha\right)(\mu_A + \delta)\right] \\
&\quad + \left(\frac{\phi}{K_H}\bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha\right)\left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta\eta K_D}{(\bar{L} + \eta)^2}\right) \\
c_4 &= -\phi\gamma_H\gamma_L\left(1 - \frac{\bar{H}}{K_H}\right) + \left(\frac{\phi}{K_H}\bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha\right)\left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta\eta K_D}{(\bar{L} + \eta)^2}\right)(\mu_A + \delta)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

se tiene el polinomio característico

$$\lambda^3 + a_4\lambda^2 + b_4\lambda + c_4 = 0 \tag{2.43}$$

Para aplicar el criterio de Routh - Hurwitz únicamente basta observar que  $c_4 > 0$ . De manera que

**Teorema 2.2.4**

Los equilibrios  $P^{K_D} = (\bar{H}, \bar{L}, \bar{A})$ , del modelo (2.3), serán asintóticamente estable si

$$\left(\frac{\phi}{K_H}\bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha\right)\left(\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta\eta K_D}{(\bar{L} + \eta)^2}\right)(\mu_A + \delta) - \phi\gamma_H\gamma_L\left(1 - \frac{\bar{H}}{K_H}\right) > 0.$$

### 2.3. Interpretación del análisis de estabilidad en base al modelo

En las secciones 2.1 y 2.2 se han calculado cada una de las soluciones de equilibrio y su correspondiente linealización para estudiar el comportamiento cualitativo de las soluciones. Sin embargo, no se ha mencionado ninguna consecuencia de ello en la dinámica de la población del mosquito. Además de las expresiones (2.12) y (2.40) que se han establecido sin dar mayor explicación sobre su utilización o importancia.

En esta sección, por tanto, se interpretan estos resultados a la luz del modelo de población del mosquito *Aedes aegypticon* diferentes medidas de control de población.

Obsérvese que la función  $\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)$ , (2.12), es un caso particular de la función  $\psi(\alpha, \rho, \beta, \delta)$ , (2.40), tomando  $\beta = 0$ . Teniendo este hecho a la vista, se pasa a lo que es la interpretación del significado de esta función.

La función

$$\psi(\alpha, \rho, \beta, \delta) = \frac{\phi\gamma_L\gamma_H}{(\gamma_H + \mu_H + \alpha) \left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta} \right) (\mu_A + \delta)}$$

representa el *umbral de crecimiento poblacional del mosquito con control biológico (depredación) y control químico*. Este umbral indica el número promedio de mosquitos adultos producidos por un mosquito, la interpretación de los términos involucrados en esta función se presentan en el cuadro 2.4.

Cuadro 2.4: Interpretación de los términos involucrados en el umbral de crecimiento poblacional del mosquito con control biológico y control químico.

$\mu_A + \delta$	Total de mosquitos adultos
$\frac{\phi}{(\mu_A + \delta)}$	Numero promedio de huevecillos producidos por un mosquito hembra
$\gamma_H + \mu_H + \alpha$	Total de huevecillos
$\frac{\gamma_H}{(\gamma_H + \mu_H + \alpha)}$	Probabilidad de paso al estado larvario
$\gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta}$	Numero total de larvas
$\frac{\gamma_L}{\left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta} \right)}$	Probabilidad de paso estado maduro (adulto)

Conociendo ahora el significado de cada una de las expresiones involucradas en el umbral es posible entender su importancia en el desarrollo de la discusión de los resultados del modelo. Recuérdese que las condiciones establecidas en la sección 2.2 están dadas en función de valor umbral, además de permitir identificar cuales medidas de control se están aplicando a la población de mosquitos. Así  $\psi(0, 0, 0, 0)$  representa el *umbral de crecimiento natural de la población del mosquito ó umbral de crecimiento de la población del mosquito sin ningún control*, mientras  $\psi(\alpha, 0, 0, 0)$  significaría que únicamente se están aplicando medidas de control cultural, es decir, evitar los criaderos de mosquito y/ó el uso de la ovitrampa,  $\psi(0, \rho, 0, 0)$  se estaría utilizando nada mas la medida de control sobre las larvas, la mas común en el país es la abatización, y en el caso de que únicamente se recurra a la fumigación se tendrá el valor umbral representado por  $\psi(0, 0, 0, \delta)$ , estos umbrales se observaran en los casos donde el control se realiza solamente en uno de los estados de desarrollo del mosquito.

Las medidas integradas estarán representadas por los umbrales mostrados en el Cuadro 2.5.

A partir de estos valores umbrales se determinan criterios óptimos sobre las medidas de control, es decir, se determina cuando la aplicación de una medida de control causa el impacto buscado sobre la población de mosquitos, y estableciendo que medidas son mas efectivas en el combate del mosquito *Aedes aegypti*.

En la sección 2.2 se establece que los equilibrios  $P_0^0$ ,  $P_1^0$ ,  $P_0^{D\kappa}$  y  $P^{D\kappa}$  son estables si  $a_1 b_1 > c_1$ ,  $a_2 b_2 > c_2$ ,



---



---

$\psi(\alpha, \rho, 0, 0)$	control en huevos y larvas con control químico;
$\psi(\alpha, 0, \beta, 0)$	control en huevos y larvas con control biológico;
$\psi(\alpha, 0, 0, \delta)$	control en huevos y adultos con control químico;
$\psi(0, \rho, \beta, 0)$	control total sobre larvas, es decir control químico y biológico;
$\psi(0, \rho, 0, \delta)$	control químico sobre larvas y adultos;
$\psi(0, 0, \beta, \delta)$	control biológico en larvas y químico en adultos;
$\psi(\alpha, \rho, \beta, 0)$	control en huevos y control total sobre las larvas;
$\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)$	control químico sobre todos los estados del mosquito;
$\psi(\alpha, 0, \beta, \delta)$	control en huevos, además de control biológico sobre larvas y químico sobre adultos;
$\psi(0, \rho, \beta, \delta)$	control total sobre larvas y control químico en adultos, químico - biológico;
$\psi(\alpha, \rho, \beta, \delta)$	control integral sobre todos los estados de la población de mosquitos.

---



---

Cuadro 2.5: Distintas expresiones para el umbral de crecimiento de población del mosquito con diferentes medidas de control.

$a_3b_3 > c_3$  y  $a_4b_4 > c_4$ , respectivamente. Por tanto, aplicando el criterio de Routh - Hurwitz, en cada caso la condición suficiente es  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ ,  $c_3 > 0$  y  $c_4 > 0$ .

En la sección 2.2.2 se analizó el caso del control de la población del mosquito sin control biológico y se presentaron los siguientes Teoremas

**Teorema 2.3.1**

Si  $\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) < 1$  el equilibrio trivial,  $P_0^0$ , del sistema (2.2) es asintóticamente estable.

**Teorema 2.3.2**

Si  $\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) > 1$  el equilibrio de coexistencia,  $P_1^0$  dado en (2.14), del sistema (2.2) es asintóticamente estable.

De los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2 se pueden obtener las condiciones para cada uno de los controles implementados en la población del mosquito. La condición dada en el Teorema 2.3.1 extermina la población, lo que es inadecuado desde el punto de vista biológico, aunque las matemáticas lo permitan.

Ahora se jugará con las diferentes formas del umbral mostradas en el cuadro 2.5, y el Teorema 2.3.1 para dar algunas condiciones sobre los parámetros que muestren la efectividad del control químico.

Considérese el umbral de crecimiento de la población del mosquito con control cultural  $\rho = \beta = \delta = 0$  y  $\alpha \neq 0$ , es decir  $\psi(\alpha, 0, 0, 0)$ , así

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha, 0, 0, 0) &= \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\mu_A(\gamma_H + \mu_H + \alpha)(\gamma_L + \mu_L)} < 1 \\
&\frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\mu_A(\gamma_L + \mu_L)} < \gamma_L + \mu_L + \alpha \\
(\gamma_L + \mu_L) \left( \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{\mu_A(\gamma_H + \mu_H)(\gamma_L + \mu_L)} - 1 \right) &< \alpha \\
(\gamma_H + \mu_H)(\psi(0, 0, 0, 0) - 1) &< \alpha
\end{aligned} \tag{2.44}$$

De donde se obtiene que  $\alpha > 0$  si  $\psi(0, 0, 0, 0) > 1$ .

La condición (2.44) es llamada *criterio de control sobre los huevos del mosquito*.

De manera semejante, a partir de los umbrales con una sola medida de control, sin incluir el control biológico,

y del Teorema 2.3.1, teniéndose los criterios siguientes

$$(\gamma_L + \mu_L)(\psi(0, 0, 0, 0) - 1) < \rho \quad (2.45)$$

*criterio de control químico sobre las larvas del mosquito, y*

$$\mu_A(\psi(0, 0, 0, 0) - 1) < \delta \quad (2.46)$$

*criterio de control químico sobre los mosquitos adultos.*

De ambos criterio se deduce que  $\psi(0, 0, 0, 0) > 1$ . Se observa que la efectividad de las medidas de control depende del umbral de crecimiento natural de la población del mosquito. Y en efecto, estas medidas se inician cuando la población de mosquitos comienza a crecer demasiado y molesta a los humanos, ya sea por picaduras o peligro de desatar una epidemia de dengue, clásico ó hemorrágico, paludismo u otras enfermedades asociadas con este vector.

Obsérvese que si no se aplica ninguna medida de control, de las ecuaciones (2.14)

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{K_H}{\psi(\alpha, \rho, 0, \delta)} (\psi(\alpha, \rho, 0, \delta) - 1) \\ \bar{L} &= \frac{\gamma_H}{\rho + \gamma_L + \mu_L} \bar{H} \\ \bar{A} &= \frac{\gamma_L \gamma_H}{(\mu_A + \delta)(\gamma_L + \mu_L + \rho)} \bar{H}, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{K_H}{\psi(0, 0, 0, 0)} (\psi(0, 0, 0, 0) - 1) \\ \bar{L} &= \frac{\gamma_H}{\gamma_L + \mu_L} \bar{H} \\ \bar{A} &= \frac{\gamma_L \gamma_H}{\mu_A(\gamma_L + \mu_L)} \bar{H}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

De manera que, además del equilibrio trivial, existe un equilibrio no trivial (en sentido biológico) siempre que  $\psi(0, 0, 0, 0) > 1$ .

Al analizar la estabilidad de ambos equilibrios (trivial y no trivial) se obtienen resultados similares a los obtenidos de los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2, en los casos del equilibrio trivial y no trivial, (2.47), respectivamente, asociados al sistema (1.4),

$$\begin{aligned} H' &= \phi A \left( 1 - \frac{H}{K_H} \right) - \mu_H H - \gamma_H H \\ L' &= \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L \\ A' &= \gamma_L L - \mu_A A. \end{aligned}$$

Obsérvese que los criterios (2.44), (2.45) y (2.46), así como el criterio (2.50) el cual se establece más adelante, son los únicos que se pueden dar implícitamente. Por ejemplo, el *criterio de control químico*, que es uno de los criterios que se busca en este trabajo, esta dado por

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \rho, 0, \delta) &< 1 \\ \frac{\phi \gamma_H \gamma_L}{(\gamma_H + \mu_H + \alpha)(\gamma_L + \mu_L + \rho)(\mu_A + \delta)} &< 1 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Para continuar con la discusión de los resultados obtenidos del análisis de estabilidad del modelo, a continuación se procede a interpretar los resultados en el caso que se presente control biológico ó depredación, dando los equivalentes de los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2.

**Teorema 2.3.3**

Si  $\psi(\alpha, \rho, \beta, \delta) < 1$  el equilibrio trivial,  $P_0^{K_D}$ , del sistema (2.3) es asintóticamente estable.

**Teorema 2.3.4 (Número de soluciones de equilibrio del modelo (2.3))**

Dado el modelo (2.3), que describe la dinámica de población del mosquito *Aedes aegypti* con control biológico, las soluciones de equilibrio no triviales del modelo dependerán de las condiciones de los valores de  $a$  y  $b$ , dados en (2.25), así:

- Si  $b < 0$ , se tiene que  $\bar{L}_1 < 0$  y  $\bar{L}_2 > 0$ ;
- Si  $b > 0$  y  $a^2 - 4b \geq 0$ , entonces  $\bar{L}_1 \bar{L}_2 > 0$ , pero si  $a < 0$  son negativos y si  $a > 0$  son positivos;

donde las soluciones que se presentan son  $P_1^{K_D}$  y  $P_2^{K_D}$ , asociados a  $\bar{L}_1$  y  $\bar{L}_2$ , respectivamente, dados por  $P_1^{K_D} = (\bar{H}, \bar{L}_1, \bar{A})$  y  $P_2^{K_D} = (\bar{H}, \bar{L}_2, \bar{A})$ , donde

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \frac{\phi K_H \gamma_L \bar{L}}{\phi \gamma_L \bar{L} + K_H (\delta + \mu_A) (\alpha + \gamma_H + \mu_H)} \\ \bar{L} &= \bar{L}_1 \text{ y/ó } \bar{L}_2, \text{ (según corresponda)} \\ \bar{A} &= \frac{\gamma_L \bar{L}}{\delta + \mu_A},\end{aligned}\tag{2.49}$$

y para  $\bar{L}_1, \bar{L}_2$

$$\bar{L}_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{y} \quad \bar{L}_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

teniéndose como resultado para estos equilibrios que

**Teorema 2.3.5**

Los equilibrios  $P^{K_D} = (\bar{H}, \bar{L}, \bar{A})$ , del modelo (2.3), serán asintóticamente estable si

$$\left( \frac{\phi}{K_H} \bar{A} + \gamma_H + \mu_H + \alpha \right) \left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta \eta K_D}{(\bar{L} + \eta)^2} \right) (\mu_A + \delta) - \phi \gamma_H \gamma_L \left( 1 - \frac{\bar{H}}{K_H} \right) > 0.$$

El último criterio de control que se obtiene del valor umbral  $\psi(0, 0, \beta, 0)$  y el Teorema 2.3.3, es decir,

$$\begin{aligned}\psi(0, 0, \beta, 0) &< 1 \\ \frac{\phi \gamma_H \gamma_L}{(\gamma_H + \mu_H) \left( \gamma_L + \mu_L + \frac{\beta K_D}{\eta} \right) \mu_A} &< 1 \\ \frac{\eta (\gamma_L + \mu_L)}{K_D} (\psi(0, 0, 0, 0) - 1) &< \beta\end{aligned}\tag{2.50}$$

siempre con  $\psi(0, 0, 0, 0) > 1$ . Esta expresión se conoce como *criterio de control biológico sobre las larvas del mosquito*.

Con este último criterio explícito se establecen otros criterios importantes para el control de la población del mosquito, a saber: *criterio de control total sobre las larvas del mosquito*,  $\psi(0, \rho, \beta, 0)$ ,

$$\psi(0, \rho, \beta, 0) = \frac{\phi \gamma_H \gamma_L}{(\gamma_H + \mu_H) \left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta} \right) \mu_A} < 1\tag{2.51}$$

además del *criterio de control químico - biológico*

$$\psi(0, \rho, \beta, \delta) = \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{(\gamma_H + \mu_H) \left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta} \right) (\mu_A + \delta)} < 1 \quad (2.52)$$

y el *criterio de control integral*

$$\psi(\alpha, \rho, \beta, \delta) = \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{(\gamma_H + \mu_H + \alpha) \left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta} \right) (\mu_A + \delta)} < 1 \quad (2.53)$$

## Capítulo 3

# Resultados numéricos del modelo para la dinámica de población del mosquito con estrategias de control

Conocido el modelo para la dinámica de población del mosquito *Aedes aegypti* con diferentes estrategias de control, descrito por las ecuaciones,

$$\begin{aligned}H' &= \phi A \left(1 - \frac{H}{K_H}\right) - \mu_H H - \gamma_H H - \alpha H \\L' &= \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L - \rho L - \frac{\beta L D}{L + \eta} \\A' &= \gamma_L L - \mu_A A - \delta A \\D' &= \omega D \left(1 - \frac{D}{K_D}\right),\end{aligned}$$

y las respectivas soluciones estacionarias, a continuación se realiza algunas simulaciones usando el software, MatLab. Los objetivos los objetivos que se persiguen son, por una parte, conocer de manera gráfica el comportamiento de las soluciones del modelo, es decir, la evolución en el tiempo de la población de mosquitos y, por otra parte, el efecto de la combinación de las distintas medidas de control en esa evolución.

### 3.1. Los parámetros del modelo para las simulaciones

En el Cuadro 3.1<sup>1</sup>. Se presentan los distintos valores, hipotéticos, que toman cada uno de los parámetros del modelo para las simulaciones. Se toman umbrales de crecimiento natural que sean mayores, menores e iguales a uno, para luego agregar las medidas de control y apreciar el cambio en la evolución de la población con la aplicación de medidas de control.

Al observar los valores de los parámetros entomológicos se tiene que el umbral de crecimiento natural es mayor que 1 solo cuando las  $\gamma_H$ ,  $\gamma_L$  y  $\mu_A$  toman valores altos; el umbral de crecimiento es menor que 1 cuando las tasas de mortalidad en cada estado son altas. Por tanto, se tomaran valores para los parámetros de control que estén alrededor del valor necesario para aumentar la tasa de mortalidad en cada estado.

<sup>1</sup>Los parámetros entomológicos de la primera columna son obtenidos de Duque, Muñoz y Navarro - Silva, 2004.

Cuadro 3.1: Valores de los parámetros del modelo para la dinámica de población del mosquito *Aedes aegypti* con control químico y biológico.

Parámetros entomológicos del mosquito				
$\phi$	0.3	0.3	0.3	0.3
$K_H$	10000	10000	10000	10000
$\gamma_H$	0.714	0.314	0.714	0.714
$\mu_H$	0.286	0.686	0.286	0.286
$\gamma_L$	0.904	0.904	0.404	0.904
$\mu_L$	0.096	0.096	0.596	0.096
$\mu_A$	0.1	0.1	0.1	0.25
$\psi(0, 0, 0, 0)$	1.9364	0.85157	0.86537	0.77455
Parámetros del control de la población				
$\alpha$	0.25	0.45	0.93637	0.95
$\rho$	0.25	0.55	0.93637	0.96
$\beta$	0.001	0.002	0.4	0.6
$\delta$	0.05	0.09	0.093637	0.25
Parámetros del depredador				
$K_D$	100			
$\eta$	0.2125			

### 3.2. Simulaciones para los umbrales de crecimiento natural

A partir de los parámetros en el Cuadro 3.1, es posible realizar algunas simulaciones del modelo. Se inicia con el modelo sin ninguna medida de control, y luego se estudia el efecto que tienen las medidas de control.

En la Figura 3.1 se muestra el comportamiento de la población de mosquitos con un umbral de crecimiento natural  $\psi(0, 0, 0, 0) = 1.9364$  y poblaciones iniciales de 30 huevos, 15 larvas y 100 adultos,  $(30, 15, 100)$ . En el gráfico se observa claramente que la población se estabiliza en el equilibrio no trivial  $(4836, 3453, 31213)$ <sup>2</sup>. Este efecto de estabilización de la población es debido a la restricción en el número de huevos que puede soportar el medio,  $K_H$ ; además es interesante observar que el incremento poblacional se da alrededor de 30 días, este hecho es importante pues las medidas de control se aplican después de que la población de mosquitos es demasiado molesta para los humanos.

En las Figuras 3.2, 3.3 y 3.4, se observa la evolución de la población cuando la tasa de paso al siguiente estado (ó muerte) es mayor que la tasa de ingreso a su clase, estos casos la población tiende a desaparecer, es decir las soluciones tienden al equilibrio trivial,  $(0, 0, 0)$ , el cual es asintóticamente estable. Obsérvese que todas las simulaciones tienen la misma población inicial,  $(30, 15, 100)$ , y no se ha introducido ninguna medida de control.

<sup>2</sup>Los resultados se aproximan a valores enteros, pues se está modelando una población y las cantidades de individuos sólo pueden ser valores enteros.

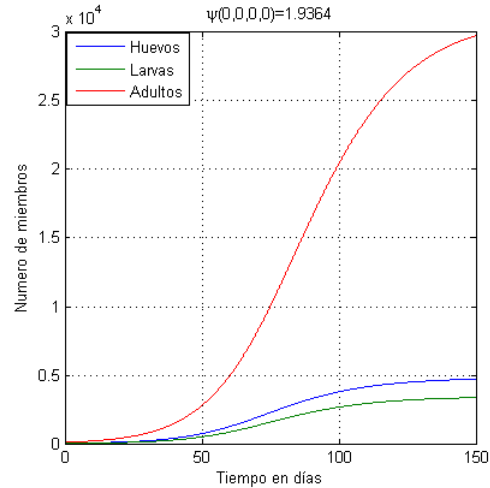


Figura 3.1: Comportamiento de la población de mosquitos con un umbral de  $\psi(0, 0, 0, 0) = 1.9364$ .

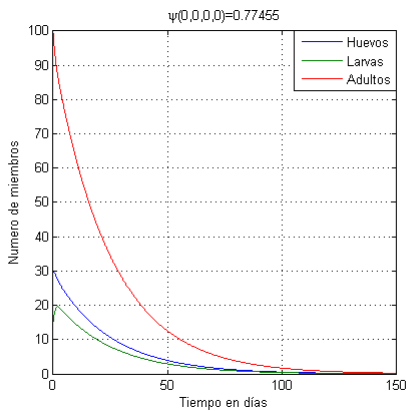


Figura 3.2: Mayor mortalidad en los adultos.

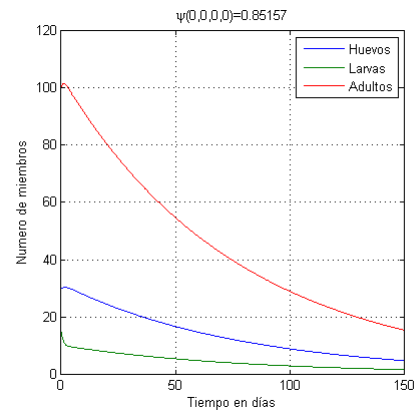


Figura 3.3: Tasa mayor de inviabilidad en los huevos.

### 3.3. Simulaciones con medidas de control

En esta sección se parte de una alta población de mosquitos adultos y con el fin de controlar la población se aplican medidas de control que tienen en cuenta el umbral de crecimiento natural mayor que uno y se irán aplicando las medidas individuales, es decir, estado por estado, y ver cómo afecta al desarrollo de la población a partir del momento en que es implementada la medida de control, luego se aplicaran medidas conjuntas, no solo en un estado, hasta llegar finalmente al control integral de la población de mosquitos.

#### 3.3.1. Aplicando control sobre los huevos

En este apartado se jugará con el parámetro  $\alpha$  que representa las medidas de control al nivel del estado de huevo. Entre las medidas que se pueden aplicar están la ovitrampa, la liberación de aguas estancadas, entre otras. De las discusiones previas se sabe que el parámetro debe de aumentar la tasa de inviabilidad de los huevos, o disminuir la tasa de paso al estado larvario. Vale de recordar que el criterio de control sobre los huevos dado

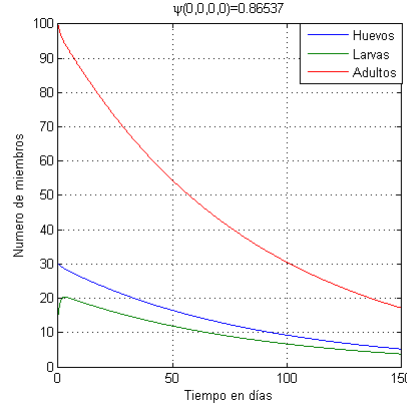


Figura 3.4: Mayor mortalidad en larvas.

en (2.44) solo depende de los parámetros entomológicos. Así

$$(\gamma_H + \mu_H)(\psi(0, 0, 0, 0) - 1) < \alpha$$

y utilizando los valores del Cuadro 3.1, se tiene que

$$0.93637 < \alpha.$$

Es decir si  $\alpha$  es menor que 0.93637 la población se estabiliza en un valor de existencia de mosquitos, en un número menor que en el caso cuando no se controla la población, mientras que si  $\alpha$  es mayor o igual que 0.93637 la población tendera a cero. Este resultado exige que el control sobre los huevos tenga una efectividad de alrededor de 94%, un requerimiento bastante alto, pues se pide que casi la totalidad de huevos del mosquito sean eliminados, una situación casi irreal.

Como se observa en la Figura 3.1 las medidas de control inician después de 30 días, momento en el que hay un crecimiento elevado en la población de mosquitos adultos. Además de ser un tiempo apropiado para la reacción de la población ante un aumento en la población de mosquitos, en ese momento se cuenta con aproximadamente 210 huevos, 141 larvas y 763 adultos, que se convertirán en la condición inicial al momento de aplicar las medidas de control, (210, 141, 763).

Al aplicar la medida de control con una efectividad de 25%,  $\alpha = 0.25$ , con lo cual  $\psi(0.25, 0, 0, 0) = 1.5491$ , es decir, no se logra controlar la población, ya que continua teniendo una cantidad elevada de miembros, 22879 adultos, el equilibrio en este caso es (3545, 2531, 22879); siendo esta una disminución significativa de alrededor de 27% en los adultos, como se logra apreciar en las Figuras 3.5 donde se ha muestra el efecto del control en la población, y en la Figura 3.6 donde se muestra la comparación en la evolución de la población en los casos sin control y con control.

Con el valor de  $\alpha = 0.45$  se tiene un umbral de crecimiento de  $\psi(0.45, 0, 0, 0) = 1.3354$ , lo que deriva en una disminución de alrededor del 48% en la población del mosquito. El nuevo equilibrio es (2512, 1794, 16213). En las Figura 3.7 se muestra el comportamiento de la población al aplicar la medida de control y en la Figura 3.8 se muestra la comparación entre el crecimiento de la población sin control y con control.

Ahora tomando el valor de  $\alpha = 0.93637$ , el cual es igual al criterio de control de los huevos de mosquito, se tiene que  $\psi(0.93637, 0, 0, 0) = 1$ . Así después de aplicar la medida de control la población tiende al equilibrio trivial, (0, 0, 0, 0). Pero de una manera muy lenta (ver Figura 3.9). Los picos que se observa son debidos a la aplicación de la medida de control pues se está eliminando alrededor del 94% de los huevos. Ello causa que el



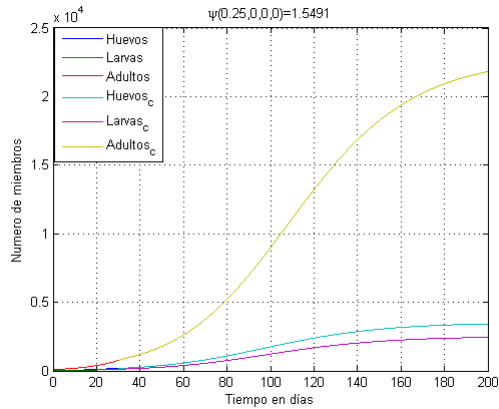


Figura 3.5: Evolución de la población de mosquitos aplicando control en los huevos,  $\alpha = 0.25$ .

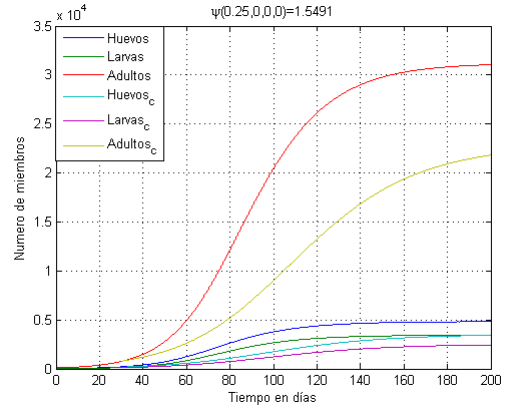


Figura 3.6: Comparación del crecimiento de la población sin control y con control en los huevos,  $\alpha = 0.25$ .

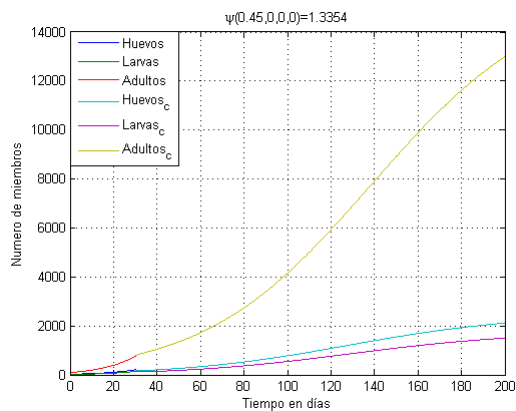


Figura 3.7: Evolución de la población de mosquitos aplicando control en los huevos,  $\alpha = 0.45$ .

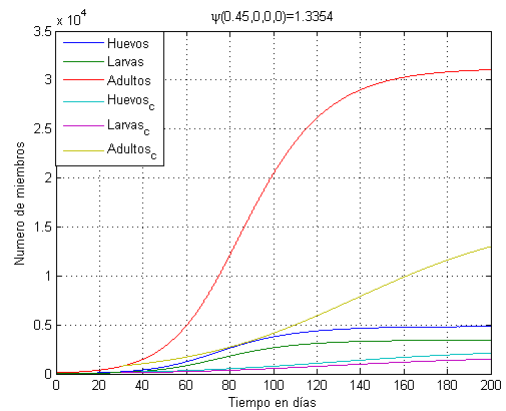


Figura 3.8: Comparación del crecimiento de la población sin control y con control en los huevos,  $\alpha = 0.45$ .

número de larvas decrezca drásticamente para los días siguientes pues no hay muchos huevos que pueda llevar al estado larvario.

Finalmente se toma un valor de  $\alpha = 0.95$  que es significativamente mayor que el valor umbral, pero que ocasiona que  $\psi(0.95, 0, 0, 0) = 0,993 < 1$ , es decir la población tiende al equilibrio trivial, pero de una manera un poco más rápida que cuando  $\alpha$  toma el valor umbral. Nuevamente el decrecimiento de la población será lento (ver Figura 3.10).

No se aplica un valor mayor a  $\alpha$  ya que representa la tasa de efectividad del control en los huevos del mosquito con lo cual no puede ser mayor que uno, además un valor cercano a 1 sería casi irreal, ya que significaría la eliminación de la totalidad de los huevos del mosquito.

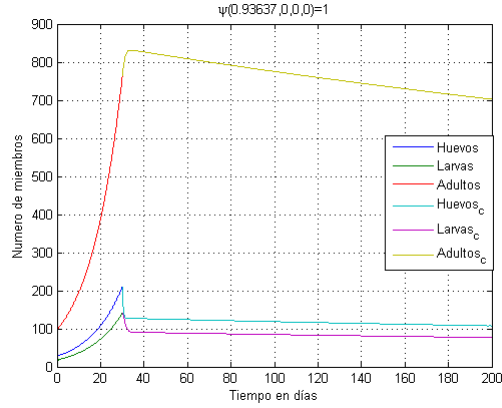


Figura 3.9: Evolución de la población de mosquitos aplicando control en los huevos,  $\alpha = 0.93637$ .

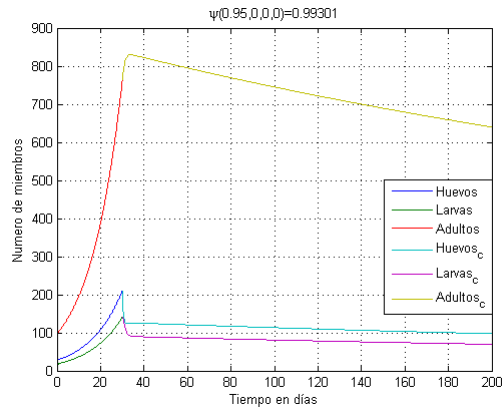


Figura 3.10: Evolución de la población de mosquito aplicando control en los huevos,  $\alpha = 0.95$ .

### 3.3.2. Aplicando control químico sobre las larvas

Ahora se realizarán las simulaciones del control químico sobre las larvas, con alguna de las medidas mencionadas en la Sección 1.2.1, De manera semejante a lo hecho en el control de los huevos el parámetro se compara con el valor dado por el criterio de control químico sobre las larvas, (2.45), y los valores de los parámetros entomológicos del Cuadro 3.1, con lo cual se tiene

$$(\gamma_L + \mu_L)(\psi(0, 0, 0, 0) - 1) < \rho$$

$$0.93637 < \rho.$$

Al tomar  $\rho = 0.25$ ,  $\psi(0, 0.25, 0, 0) = 1.5491$ , lo cual indica una disminución en la población de aproximadamente 41 % en los adultos, siendo (3545, 2025, 18304) el nuevo equilibrio. En las Figuras 3.11 y 3.12 se muestra la evolución de la población y la comparación del crecimiento al aplicar la medida de control, respectivamente.

Al utilizar el valor de  $\rho = 0.55$ , se tiene que  $\psi(0, 0.55, 0, 0) = 1.2493$ , es decir, la población tiende al nuevo equilibrio (1996, 920, 8309), lo cual indica una disminución de 73 % en la población adulta del mosquito, tal como se aprecia en las Figuras 3.13 y 3.14.

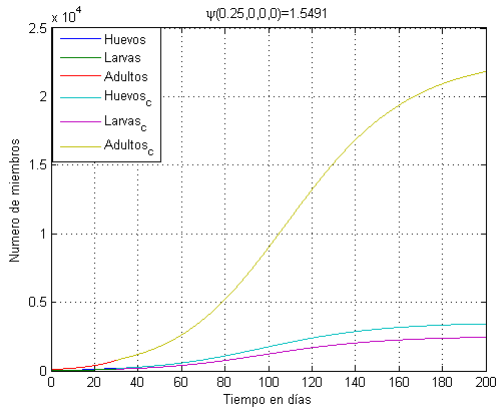


Figura 3.11: Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico en las larvas,  $\rho = 0.25$ .

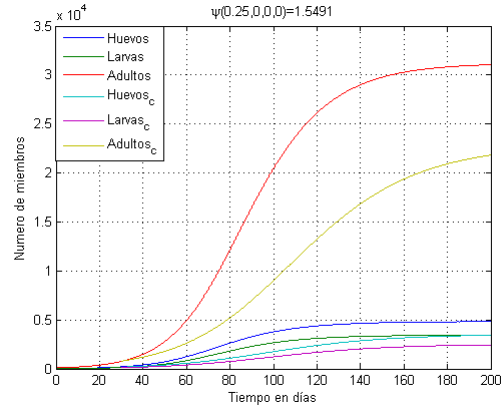


Figura 3.12: Comparación del crecimiento de la población sin control y con control químico en las larvas,  $\rho = 0.25$ .

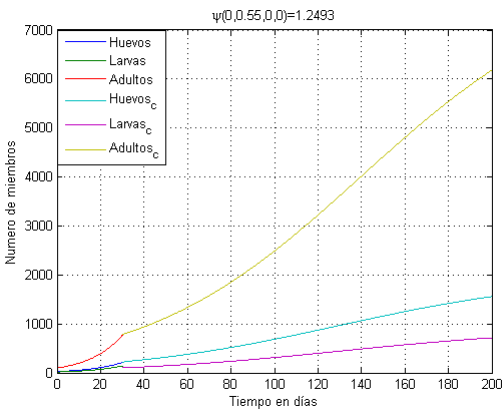


Figura 3.13: Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico de las larvas,  $\rho = 0.55$ .

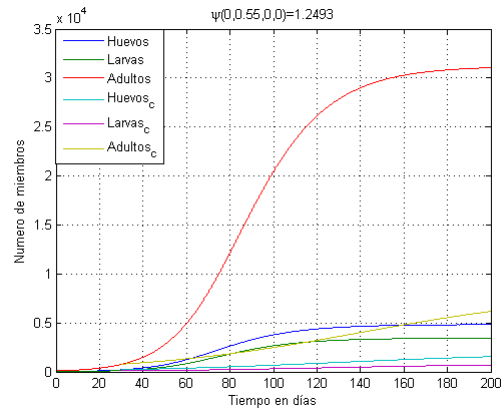


Figura 3.14: Comparación del crecimiento de la población sin control y con control químico de las larvas,  $\rho = 0.55$ .

Para el caso del valor  $\rho$  umbral,  $\rho = 0.93637$ , el cual ocasiona que  $\psi(0, 0.93637, 0, 0) = 1$  conlleva a una nueva reducción del tamaño de la población, pero a un ritmo lento, tendiendo al equilibrio trivial, (ver Figura 3.15).

Finalmente, si se toma un valor de  $\rho$  mayor que el valor umbral,  $\rho = 0.96^3$ .

Con  $\rho = 0.96$  se tiene el umbral de crecimiento poblacional  $\psi(0, 0.96, 0, 0) = 0.9879 < 1$ , el decrecimiento es lento y se presenta un pico en la curva que representa el número de larvas. En este caso a diferencia de los picos que se observaron en el control de los huevos, (ver Figura 3.10), el pico no se traslada inmediatamente al siguiente estado, si no que este disminuye un poco mas suave, ver Figura 3.16.

<sup>3</sup>Nuevamente se hace la aclaración que el valor de  $\rho$  no puede ser mayor que uno, ya que es la tasa de efectividad del control químico sobre las larvas, no se pueden exterminar las larvas que aun no están en el medio, incluso el valor de  $\rho = 0.96$ , es al igual que el valor de  $\alpha = 0.95$ , es una situación muy irreal ya que se está hablando de exterminar el 96 % de las larvas en ese instante y continuar con este ritmo de control de las larvas.

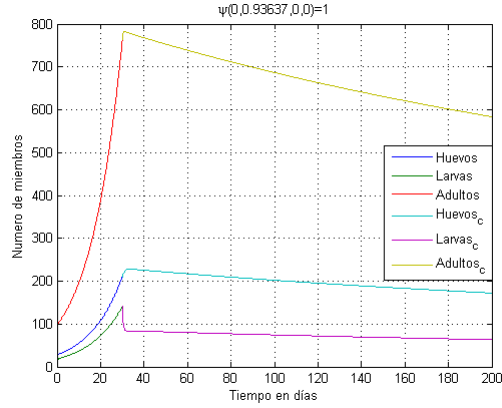


Figura 3.15: Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico de las larvas,  $\rho = 0.93637$ .

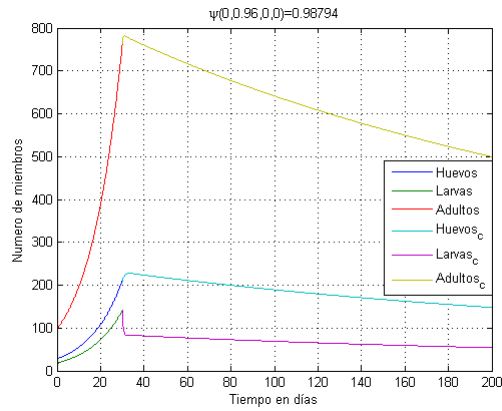


Figura 3.16: Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico de las larvas,  $\rho = 0.96$ .

### 3.3.3. El control de los mosquitos adultos

Ahora se aplica el control sobre los adultos por medio de aduictidas. Esta es una de las medidas más utilizadas por las instituciones de salud pública, pues además de tener un impacto directo en la disminución del número mosquitos adultos es una medida política, considerada muy positiva por la población. Pero ella no es una medida efectiva a largo plazo pues se debe mantener la medida de fumigación por largos periodos tiempo para que mantengan a la población de mosquitos en niveles bajos, lo cual implicaría una erogación elevada de recursos por parte del estado, además de que puede atraer algunas complicaciones en la población, como son las enfermedades respiratorias.

Siguiendo la misma metodología, se tomaran valores para  $\delta$  alrededor del valor umbral, (2.46). El valor umbral se obtiene de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \mu_A(\psi(0, 0, 0, 0) - 1) &< \delta \\ 0.09364 &< \delta. \end{aligned}$$

Obsérvese que la tasa de mortalidad de los adultos, presentada en el Cuadro 3.1, es cercano al valor umbral,

además de ser pequeño, lo que complica un poco la selección de valores para  $\delta$ , debido a que estos deberán ser cercanos al cero.

Si  $\delta = 0.05$ , es decir, si se considera una efectividad del aduictida del 5%, entonces se alcanza un umbral de crecimiento de  $\psi(0, 0, 0, 0.05) = 1.2909$ , con el punto de equilibrio  $(2254, 1610, 9698)$  es estable, lo cual indica una disminución en la población adulta de alrededor de 69%, (Ver Figuras 3.17 y 3.18).

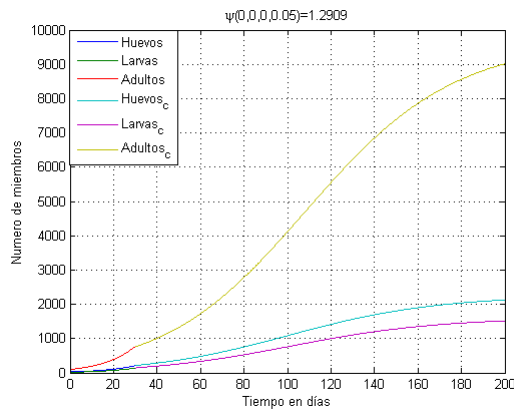


Figura 3.17: Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico en los adultos,  $\delta = 0.05$ .

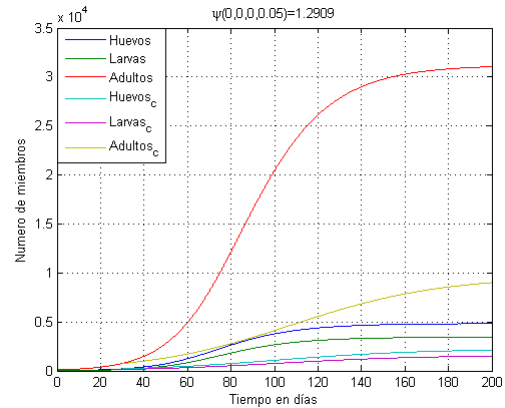


Figura 3.18: Comparación del crecimiento de la población sin control y con control químico en los adultos,  $\delta = 0.05$ .

Si  $\delta = 0.09$ , la efectividad en el control de los adultos del 9%, entonces, con este valor el umbral de crecimiento poblacional de mosquito disminuye hasta  $\psi(0, 0, 0, 0.09) = 1.0191 > 1$ , ocasionando nuevamente que el nuevo equilibrio  $(188, 135, 639)$  sea estable, además se presenta una disminución de alrededor del 98% en la población de adultos.

Debido a que el umbral de crecimiento  $\psi(0, 0, 0, 0.09)$  es muy próximo a 1, el descenso en el tamaño de la población será lento, pero siempre tiende a la baja como se aprecia en la Figura 3.19. No se presenta el gráfico comparativo debido a que la diferencia en los tamaños de la población y la escala no permiten apreciar bien la comparación de las curvas de crecimiento de  $\delta$  entre los valores 0.05 y 0.09 sea mínima, se puede realizar una simulación para apreciar el decrecimiento en la población de mosquitos es mayor comparado con el  $\delta = 0.09$ . Recuérdese que si  $\delta = 0.093637$ , entonces  $\psi(0, 0, 0, 0.093637) = 1$  y así el equilibrio trivial es estable. En este caso el pico que se muestra en la evolución de la población adulta es más pronunciado que el pico de la Figura 3.19 como se aprecia en la Figura 3.20, además el decrecimiento es más rápido. Aunque la tendencia al equilibrio sea lenta la población deja de crecer.

Para finalizar el control sobre los adultos se toma un valor para  $\delta > 0.09364$ , lo cual permita ver la efectividad de controlar los mosquitos adultos, si  $\delta = 0.25$ , entonces el umbral de crecimiento  $\psi(0, 0, 0, 0.25) = 0.55 < 1$ , lo que implica que el equilibrio trivial sea estable, es decir se controla la población, ver Figura 3.21.

Aunque se sabe de aduictidas que tienen una efectividad más alta del 25%, es de recordar que en este modelo las medidas se mantienen constantes en el tiempo, es decir que las acciones no se suspenden en ningún momento, lo cual es una situación poco real pues no se puede mantener algunas de las medidas en largos periodos de tiempo pues los recursos económicos no son ilimitados, además el control químico en los adultos podría acarrear otras complicaciones de salud en la población.

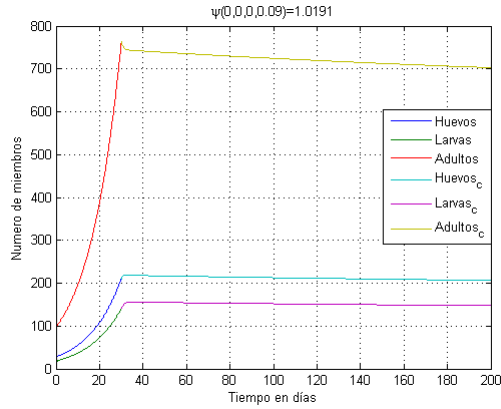


Figura 3.19: Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico en los adultos,  $\delta = 0.09$ .

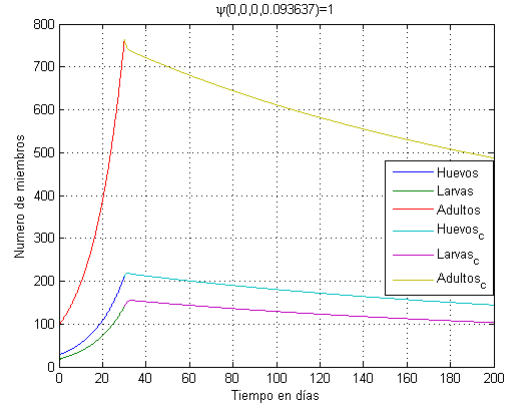


Figura 3.20: Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico en los adultos,  $\delta = 0.093637$ .

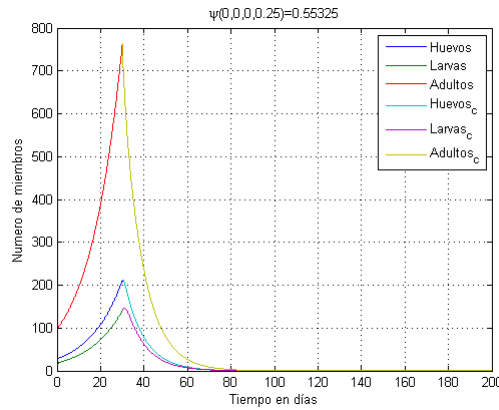


Figura 3.21: Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico en los adultos,  $\delta = 0.25$ .

### 3.3.4. La aparición del control biológico, la depredación de las larvas del mosquito

En este apartado se presentan las simulaciones cuando la población de mosquitos se controla por medio de depredación de sus larvas. Esto se conoce como control biológico. Para recordar algunos de los depredadores ver la Sección 1.2.2. También es necesario recordar los cálculos de las Secciones 2.1 y 2.2.3, donde se calcularon las soluciones de equilibrio para el modelo con depredación, (2.3). Y se determinó la estabilidad de los mismos. Considerando los valores numéricos de los parámetros entomológicos del modelo, Cuadro 3.1. Con ello se puede tener una idea aproximada de los valores que puede tomar la tasa de depredación,  $\beta$ , para realizar las simulaciones numéricas.

Con los parámetros entomológicos del Cuadro 3.1 el modelo (2.3) se convierte en

$$\begin{aligned}
 H' &= 0.3A \left( 1 - \frac{H}{10000} \right) - H \\
 L' &= 0.714H - L - \frac{\beta L K_D}{L + \eta} \\
 A' &= 0.904L - 0.1A
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

En (3.1) aparecen todavía como parámetros, la capacidad del medio para mantener al depredador, la tasa media de saturación y la tasa de depredación,  $K_D$ ,  $\eta$  y  $\beta$  respectivamente. Para  $K_D$  se considera el tamaño de criadero de zancudos donde se aplica el control. Se considera que la capacidad de carga para el depredador será un centésimo de la capacidad de carga de las larvas, así

$$K_D = \frac{K_H}{100} = 100.$$

En el caso de  $\eta$  es la tasa media de saturación del depredador se tomara la tasa dada por Duque, Muñoz y Navarro - Silva (2004), donde se toma el valor de  $\eta = 0.2125$ . Así se obtiene el siguiente modelo

$$\begin{aligned} H' &= 0.3A \left(1 - \frac{H}{10000}\right) - H \\ L' &= 0.714H - L - \frac{100\beta L}{L + 0.2125} \\ A' &= 0.904L - 0.1A. \end{aligned} \quad (3.2)$$

El objetivo ahora es conocer cuáles son los valor que se le pueden asignar al parámetro  $\beta$  al momento de realizar las simulaciones numéricas. Para ello, se aplica el calculo de la solución de equilibrio y el análisis de estabilidad de las soluciones de equilibrio.

Las soluciones de equilibrio para el modelo (3.2) dependen de las soluciones de una ecuación cuadrática (2.24)

$$L^2 + aL + b = 0$$

donde  $a$  y  $b$  están determinadas por (2.25). Si  $\alpha = \rho = \delta = 0$ , con lo que  $\psi(0, 0, 0, 0) = 1.9364$ , así,

$$\begin{aligned} a &= 100\beta - 3452.53 \\ b &= 368725.31\beta - 733.71. \end{aligned}$$

Las soluciones dadas en (2.26) se convierten en

$$\bar{L}_1 = -50(0.03\sqrt{1000\beta^2 - 216541\beta + 1192290} + \beta - 34.53) \quad (3.3)$$

$$\bar{L}_2 = -50(-0.03\sqrt{1000\beta^2 - 216541\beta + 1192290} + \beta - 34.53) \quad (3.4)$$

De (3.3) y (3.4) se tiene que para que  $\bar{L}_1$  y  $\bar{L}_2$  sean positivos,  $\beta$  debe cumplir que

$$0.002 < \beta \leq 5.65 \quad (3.5)$$

y si  $\beta < 0.002$  se tendrá que  $\bar{L}_1 < 0$  y  $\bar{L}_2 > 0$ , y si  $\beta \geq 210.89$  ambos serán negativos.

Ahora al analizar a la luz del modelo estos resultados y recordando que  $\beta$  es la tasa de depredación, se obtiene que  $0 \leq \beta \leq 1$ . Por tanto, es imposible que se presente, en sentido biológico, el caso de las dos soluciones sean negativas, aunque si el caso de que uno sea negativo,  $\bar{L}_1$ , otro positivo,  $\bar{L}_2$ , pero el valor de  $\beta$  seria cercano a cero, es decir un depredador no muy efectivo para el control de las larvas.

Con  $\beta \in (0, 1)$  interesa saber los valores máximos y mínimos que tomaran las soluciones de equilibrio,

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{10000\bar{L}}{\bar{L} + 3687.32} \\ \bar{L} &= \bar{L}_1 \text{ y/ó } \bar{L}_2, \quad (\text{según corresponda}) \\ \bar{A} &= 9.04\bar{L}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

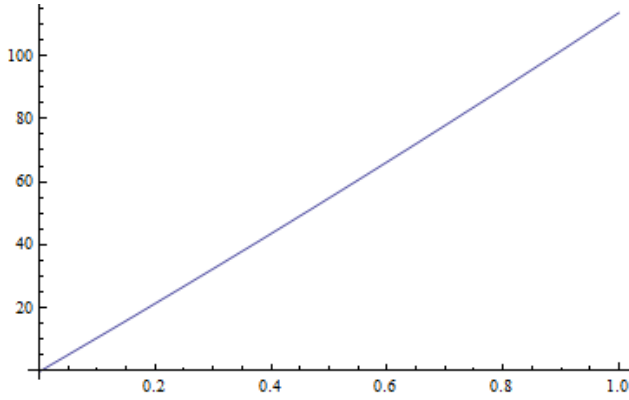


Figura 3.22: Gráfica de  $\bar{L}_1$  como función de  $\beta \in (0, 1)$ .

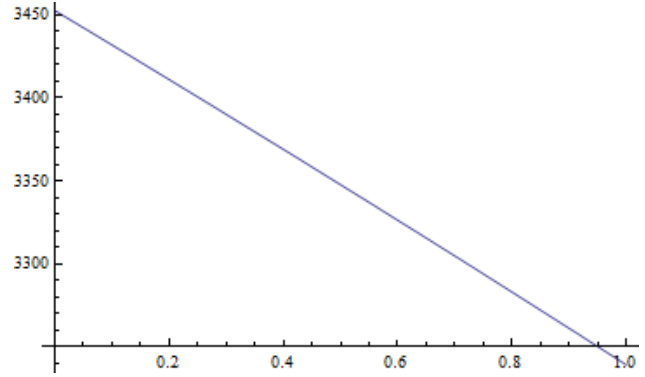


Figura 3.23: Gráfica de  $\bar{L}_2$  como función de  $\beta \in (0, 1)$ .

Y tal como se logra apreciar, estas dependen del valor de  $\bar{L}$ , es decir, sólo es necesario únicamente estudiar el comportamiento de (3.3) y (3.4).

En las Figuras 3.22 y 3.23 se presenta el comportamiento de  $\bar{L}_1$  y  $\bar{L}_2$  como funciones de  $\beta$ , respectivamente. Se observa que ambas funciones son monótonas,  $\bar{L}_1$  es creciente, mientras que  $\bar{L}_2$  es decreciente, con lo que los que el mínimo y el máximo los toman en los extremos del intervalo para *beta*.

Con el caso que  $\bar{L}_1$  toma su mínimo en un valor negativo, valor que no sera considerado por no tener significado biológico, así valores extremos de  $\bar{L}_1$  y  $\bar{L}_2$  son

$\beta$	$L_1$	$L_2$
0		3453
0.002	0	3453
1	114	3239

Conociendo el signo para las soluciones de equilibrio, ahora se debe ver cual es el comportamiento cualitativo de las soluciones de equilibrio cuando  $\beta \in (0, 1)$ .

La matriz de linealización para el equilibrio está dada en (2.28) que en este caso se convierte en

$$\mathcal{M}(\bar{H}, \bar{L}, \bar{A}) = \begin{pmatrix} -1 - \frac{3}{100000}\bar{A} & 0 & 0.3 \left(1 - \frac{\bar{H}}{10000}\right) \\ 0.714 & -1 - \frac{0.0423}{(0.2125 + \bar{L})^2} & 0 \\ 0 & 0.904 & -0.1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

con polinomio característico, dado en (2.43),

$$\lambda^3 + a_4\lambda^2 + b_4\lambda + c_4 = 0$$



con los coeficientes, (2.42),

$$\begin{aligned} a_4 &= 2.1 + 3 \times 10^{-5} \bar{A} + \frac{100 + 0.2125\beta}{(0.2125 + \bar{L})^2} \\ b_4 &= 0.1 \left(1 + 3 \times 10^{-5} \bar{A}\right) + 0.1 \left(1 + \frac{21.25\beta}{(0.2125 + \bar{L})^2}\right) + (1 + 3 \times 10^{-5} \bar{A}) \left(1 + \frac{21.25\beta}{(0.2125 + \bar{L})^2}\right) \\ c_4 &= -0.0936 + 1.9 \times 10^{-5} + \frac{2.125\beta}{(0.2125 + \bar{L})^2} + \bar{A} \left(3 \times 10^{-6} + \frac{6.3 \times 10^{-5}\beta}{(0.2125 + \bar{L})^2}\right). \end{aligned}$$

Utilizando el criterio de Routh - Hurwitz para determinar la estabilidad de las soluciones. Se tiene que  $a_4$  y  $b_4$  son ambos positivos, ahora para  $c_4$  se tiene

$$c_4 = -0.0936 + 1.9 \times 10^{-5} + \frac{2.125\beta}{(0.2125 + \bar{L})^2} + \bar{A} \left(3 \times 10^{-6} + \frac{6.3 \times 10^{-5}\beta}{(0.2125 + \bar{L})^2}\right) > 0.$$

Sustituyendo  $\bar{A}$  y  $\bar{H}$

$$c_4 = -\frac{193.637}{1000 + 0.2712\bar{L}} + 0.1(1 + 0.0003\bar{L}) \left(1 + \frac{21.25\beta}{(0.2125 + \bar{L})^2}\right) > 0.$$

Sustituyendo  $\bar{L}$  por  $\bar{L}_1$  o por  $\bar{L}_2$ , la expresión se vuelve complicada, por lo cual se hace uso del software para graficar  $c_4$  como función de  $\beta \in (0, 1)$ , en la Figura 3.24 se muestra el gráfico de  $c_4$  para  $\bar{L} = \bar{L}_1$ , y como se ve es negativo para  $\beta > 0.002$ , y cero en  $\beta = 0.002$ , que es el mismo valor para cuando  $\bar{L}_1$  es cero. En el caso cuando  $\bar{L} = \bar{L}_2$ , Figura 3.25,  $c_4$  es positivo para todo  $\beta \in (0, 1)$ .

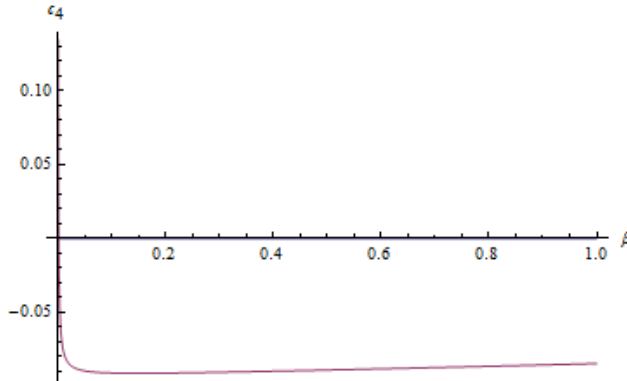


Figura 3.24: Gráfico de  $c_4$  para  $\bar{L}_1$ .

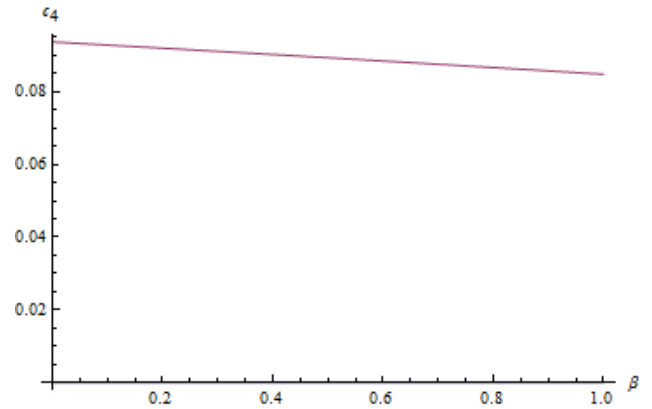


Figura 3.25: Gráfico de  $c_4$  para  $\bar{L} = \bar{L}_2$ .

Al tener estos resultados se obtiene que  $\bar{L}_2$  será asintóticamente estable para todo  $\beta \in (0, 1)$ , mientras que  $\bar{L}_1$  lo será para  $\beta \in (0, 0.002)$ , pero este caso no es tomado en cuenta pues  $\bar{L}_1$  es negativo para estos valores, por lo que en el caso cuando  $\bar{L}_1 > 0$  este es una solución inestable.

Falta analizar una solución de equilibrio, cuando se presenta el control biológico, esta es la solución trivial  $P_0^{K_D}$ , retomando el Teorema 2.3.3 de la Sección 2.3, se debe cumplir que  $\psi(0, 0, \beta, 0) < 1$ , ó equivalentemente

en términos de  $\beta$  se puede utilizar el criterio de control biológico sobre las larvas del mosquito, (2.50),

$$\begin{aligned} \psi(0, 0, \beta, 0) &> 1 \\ \frac{\phi\gamma_H\gamma_L}{(\gamma_H + \mu_H) \left( \gamma_L + \mu_L + \frac{\beta K_D}{\eta} \right) \mu_A} &> 1 \\ \frac{\eta(\gamma_L + \mu_L)}{K_D} (\psi(0, 0, 0, 0) - 1) &> \beta \end{aligned}$$

que en este caso con los valores de los parámetros entomológicos y del depredador del Cuadro 3.1 se transforma en

$$0.002 > \beta,$$

es decir que si  $\beta$  es menor que 0.002 el equilibrio trivial,  $P_0^{K_D}$  es asintóticamente estable.

Se resumen en el Cuadro 3.2 el comportamiento de las soluciones de equilibrio del modelo con depredación como única medida de control.

Cuadro 3.2: Resumen para las soluciones de equilibrio, signo y comportamiento cualitativo, en función del parámetro  $\beta$ , con  $\beta \in (0, 1)$ .

$\beta$	$< 0.002$	$0.002$	$> 0.002$
$P_0^{K_D}$	estable	inestable	inestable
$\bar{L}_1$	-, estable	0, estable	+, inestable
$\bar{L}_2$	+, estable	+, estable	+, estable

Ahora que ya se conoce un poco más del comportamiento de las soluciones es posible tomar algunos valores para  $\beta$  que permitan estudiar los diferentes casos que se presentan, así los valores a considerar son 0.001, 0.002, 0.4 y 0.6, con estos se realizarán las simulaciones del modelo.

Al realizar la simulación para  $\beta = 0.001$ , las soluciones de equilibrio son la trivial, la asociada a  $\bar{L}_1$  que es el origen, pues el valor de  $\bar{L}_1$  es negativo y muy próximo al cero, y la asociada a  $\bar{L}_2$ , (4836, 3452, 31211), que es una disminución muy pobre 2 individuos adultos, además  $\psi(0, 0, 0.001, 0) = 1.3167 > 1$  lo que implica que las soluciones tenderán al equilibrio asociado a  $\bar{L}_2$ . En la Figura 3.26 se muestra la evolución de la población de mosquitos, observando que debido a que la disminución en la población es mínima se considera este control como inefectivo, cuando la tasa de depredación es de  $\beta = 0.001$ .

En el caso de  $\beta = 0.002$ ,  $\beta$  umbral, la disminución de la población nuevamente no es significativa, pues el nuevo equilibrio asociado a  $\bar{L}_2$  es (4836, 3453, 31209), es decir una disminución de 4 individuos adultos, aunque el umbral de crecimiento poblacional,  $\psi(0, 0, 0.002, 0) = 1$ , decrece pero no lo suficiente para que la población se controle, como se logra apreciar en la Figura 3.27.

Después de ver el comportamiento poblacional para valores pequeños de  $\beta$  se continúa con valores un poco mayores, es decir, cuando el depredador consume un mayor número de larvas del mosquito o una depredación efectiva. Tomando  $\beta = 0.4$  se tiene que una disminución mayor, comparada a los valores anteriores, de 2% en la población adulta, los niveles de la población siempre se mantendrán altos, pues la población tiende al equilibrio asociado a  $\bar{L}_2$ , (4775, 3369, 30455).

Debido a las condiciones iniciales, (210, 141, 763), el equilibrio asociado a  $\bar{L}_1$ , (117, 44, 394), no se presenta, pues las soluciones estarán en la zona de atracción del equilibrio asociado a  $\bar{L}_2$ .

Se puede observar en la Figura 3.28 la evolución de la población del mosquito al aplicar el control biológico y en la Figura 3.29 se presenta la comparación del crecimiento de la población.

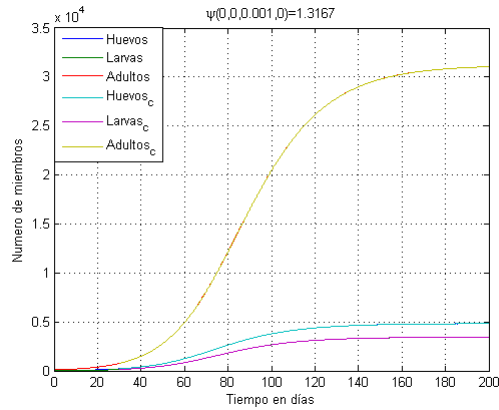


Figura 3.26: Evolución de la población de mosquitos aplicando control biológico en las larvas,  $\beta = 0.001$ , la evolución de la población sin control y con control es muy similar, pues el control es muy poco efectivo.

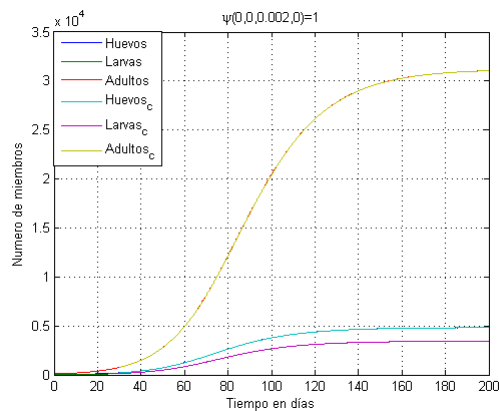


Figura 3.27: Evolución de la población de mosquitos aplicando control biológico en las larvas,  $\beta = 0.002$ .

Nuevamente al tomar  $\beta = 0.6$ , debido a las condiciones iniciales, ó momento en que se aplica la medida de control, la población tiende al equilibrio asociado a  $\bar{L}_2$ , (4743, 3327, 30029), Figura 3.30, aunque con una leve disminución en la población adulta, alrededor del 4%, Figura 3.31; Recuérdese que el equilibrio asociado a  $\bar{L}_2$  siempre es estable para  $\beta \in (0, 1)$ , pero el equilibrio asociado a  $\bar{L}_1$  divide las región de sentido biológico,  $\Omega$ , en dos subregiones una donde las soluciones tenderán al equilibrio trivial y la otra que las empuja al equilibrio asociado  $\bar{L}_2$ , todo dependerá de las condiciones iniciales, ó momento de aplicar la medida de control biológico.

El resultado obtenido en esta Sección es importante pues indica que si en un brote de mosquitos estos no se controlan a tiempo puede que en un momento determinado su eliminación o control se vuelva complicado, en el caso del control biológico, ya que se dependerá del tamaño que tenga la población de mosquitos, condiciones iniciales, al momento de aplicar la medida de control, lo que podría causar una inversión de recursos innecesarios por parte del estado o la población en general.

Siendo está una de las grandes diferencias, además del método, entre el control biológico y el control químico. Ya que como se vio en las secciones anteriores, para el control químico no importa el momento de la aplicación de la medida está siempre causa una disminución en la población del mosquito, toda vez que el parámetro de control sea mayor que el valor dado por el criterio de control, la población se controla efectivamente caso

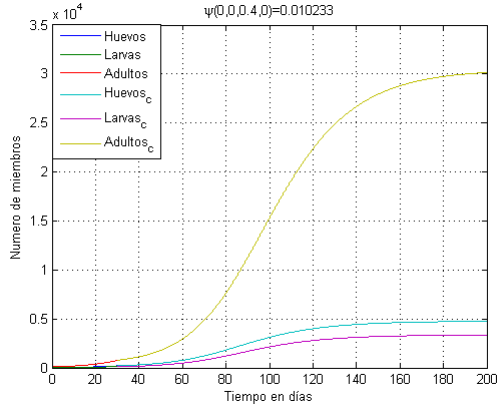


Figura 3.28: Evolución de la población de mosquitos aplicando control biológico sobre las larvas,  $\beta = 0.4$ .

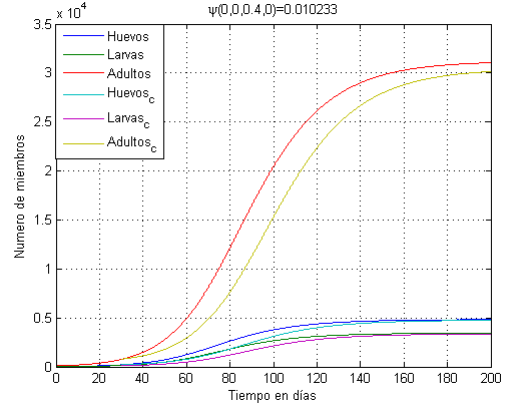


Figura 3.29: Comparación del crecimiento de la población sin control y con control biológico sobre los mosquitos,  $\beta = 0.4$ .

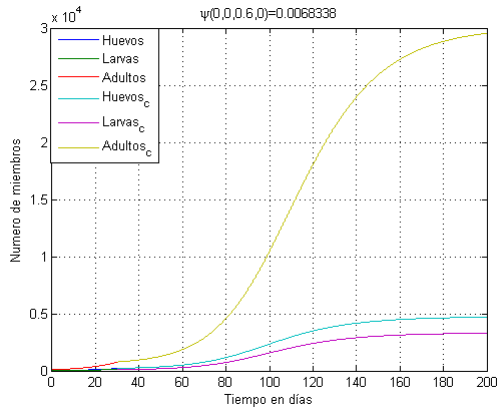


Figura 3.30: Evolución de la población de mosquitos aplicando control biológico sobre las larvas,  $\beta = 0.6$ .

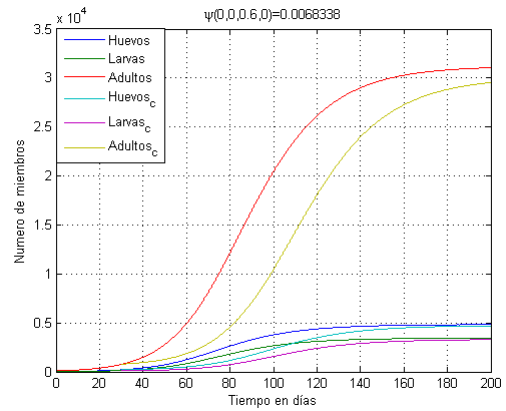


Figura 3.31: Comparación del crecimiento de la población sin control y con control biológico sobre los mosquitos,  $\beta = 0.6$ .

contrario únicamente se reduce su número, contrario a lo visto para el control biológico.

Con lo anterior se puede concluir que la medidas biológicas deben ser aplicadas de tal manera que se evite un brote de mosquitos, al momento de presentarse un aumento en la población de mosquitos es más factible aplicar las medidas químicas para la disminución de los mosquitos.

### 3.3.5. Control químico de la población de mosquitos

Hasta el momento se ha mostrado la aplicación de una sola medida de control sobre alguno de los estados de desarrollo de la población de mosquitos. En este apartado se simula el control químico en todos los estados de desarrollo del mosquito, tomando los parámetros ya utilizados en las Secciones anteriores, además del criterio de control químico, (2.48), para determinar la efectividad de las medidas de control.

Por control químico se entenderá a la aplicación de medidas de químicas que ataquen los diferentes estados

de desarrollo del mosquito, huevo, larva y adulto. Entre las medidas puede ser la fumigación, para el control de los adultos. Abate, para el control de las larvas, entre otras.

Para la primera simulación se toman los valores menores para las medidas de control, es decir,  $\alpha = 0.25$ ,  $\rho = 0.25$  y  $\delta = .05$ , con lo que  $\psi(0.25, 0.25, 0, 0.05) = 0.71 < 1$ , lo que implica que el equilibrio trivial sera estable y la población se controlara, (ver Figura 3.32).

Aunque la efectividad en la eliminación de la población de mosquitos lleva alrededor de 70 días después del brote de mosquitos. El hecho importante de este caso es que las medidas que individualmente no causaban el efecto de control, al combinarse logran controlar a la población de mosquitos.

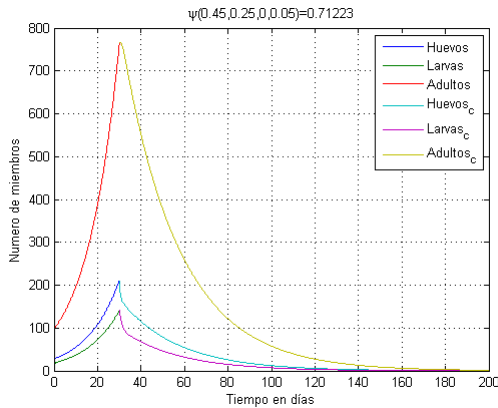


Figura 3.32: Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico,  $\psi(0.25, 0.25, 0, 0.05) = 0.71$ .

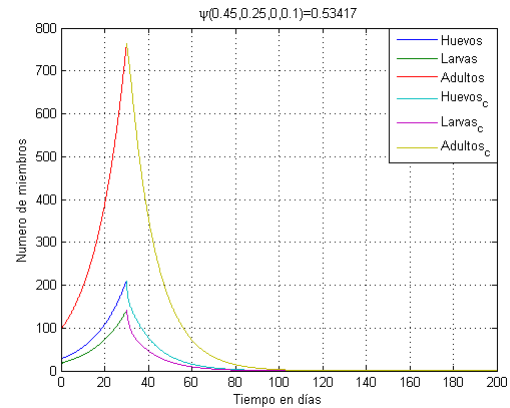


Figura 3.33: Evolución de la población de mosquitos aplicando control químico,  $\psi(0.25, 0.25, 0, 0.1) = 0.53$ .

Con un leve aumento en la efectividad en el control de los mosquitos adultos, tomando  $\delta = 0.1$ , la población disminuye más rápidamente, se controla al mismo nivel de los 100 días para  $\beta = 0.05$  en alrededor de 60 días, ver Figura 3.33.

### 3.3.6. Control integral de la población de mosquitos

En las últimas simulaciones, se realiza con control integral, es decir, control químico y control biológico. En las Figuras 3.34 y 3.35 se tienen las simulaciones de la aplicación de las medidas de control integral. Las medidas tiene el efecto que se busca eliminar la población de mosquitos, ambos valores del umbral de crecimiento son menores que uno, pero al aumentar la depredación a una tasa de  $\beta = 0.1$  y la tasa de efectividad del adulticida  $\delta = 0.1$  la población disminuye más rápidamente, se necesita alrededor de 30 días de aplicación de las medidas de control para reducir la población al mismo tamaño que con las medidas anteriores, para estas se necesitaban 130 días.

En todas las simulaciones anteriores se considera que desde el momento de la aplicación de las medidas de control estas se mantienen de manera constante en el tiempo, situación alejada de la realidad, pues las instituciones de salud reducen el ataque al brote de mosquitos después que la población tiene un numero pequeño nuevamente y vuelve a aplicar las medidas de control cuando se presenta un rebrote de mosquitos. Con esta idea se plantea la última simulación de este trabajo, es decir durante un tiempo se dejara que la población crezca sin ningún control y luego se aplicara el control integral, los tiempo considerados son espacios de 30 días, 30 días sin control y luego otros 30 días aplicación de las medidas de control.

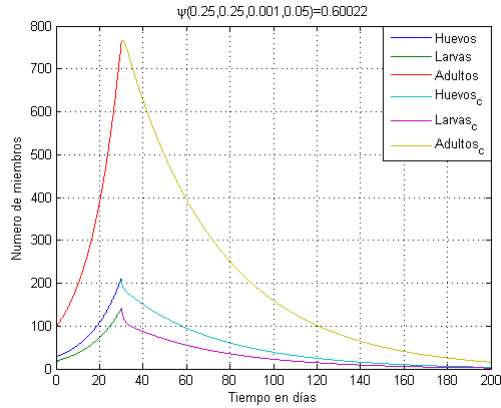


Figura 3.34: Evolución de la población de mosquitos aplicando control integral,  $\psi(0.25, 0.25, 0.001, 0.05) = 0.60$ .

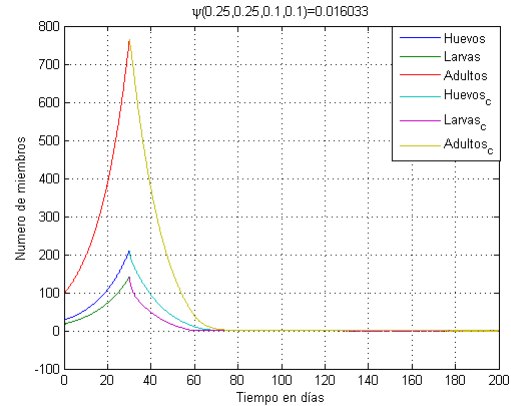


Figura 3.35: Evolución de la población de mosquitos aplicando control integral,  $\psi(0.25, 0.25, 0.1, 0.1) = 0.02$ .

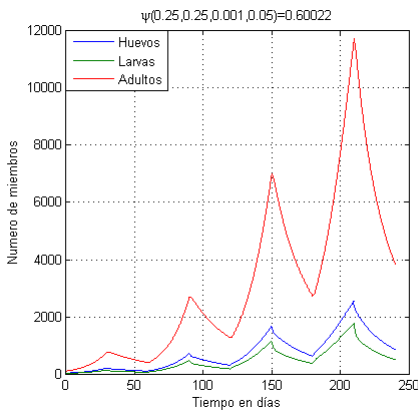


Figura 3.36: Evolución de la población de mosquitos aplicando control integral,  $\psi(0.25, 0.25, 0.001, 0.05) = 0.60$ .

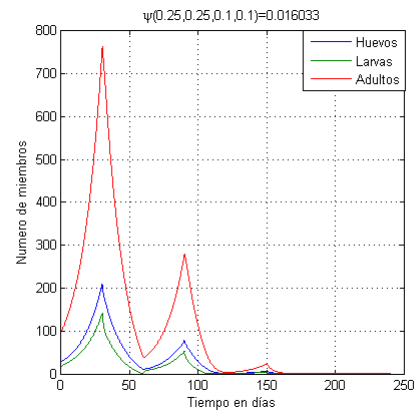


Figura 3.37: Evolución de la población de mosquitos aplicando control integral,  $\psi(0.25, 0.25, 0.1, 0.1) = 0.02$ .

En el primer caso, Figura 3.36, a pesar que la aplicación de las medidas de control disminuye la población lo brotes son cada vez mas intensos, se puede concluir de este caso que las medidas de control, aunque efectivas a corto plazo, no lo representan una opción para el control de la población de mosquitos.

En el segundo caso, Figura 3.37, las medidas de control mantienen a la población de mosquitos en niveles bajos después del primer brote, teniendo con esto una medida, teórica, para mantener a la población de mosquitos bajo control y así evitar la aparición de epidemias asociadas con este vector.

Se finaliza con las simulaciones con una modificación al modelo, la cual es el decaimiento de las medidas de control, pues se ha considerado que las medidas de control se mantienen constantes en el tiempo, se utiliza la función

$$0.5 \cos\left(\frac{t\pi}{30}\right) + 0.5$$

que va desde 1 hasta 0 en 30 días, lo que describiría de una manera aproximada el comportamiento de las aplicación de las medidas de control, que al momento de aplicarlas se inicia de una manera intensa (la función toma el valor de 1) y luego se va relajando (la función decrece) hasta dejar de aplicarse (la función toma el valor

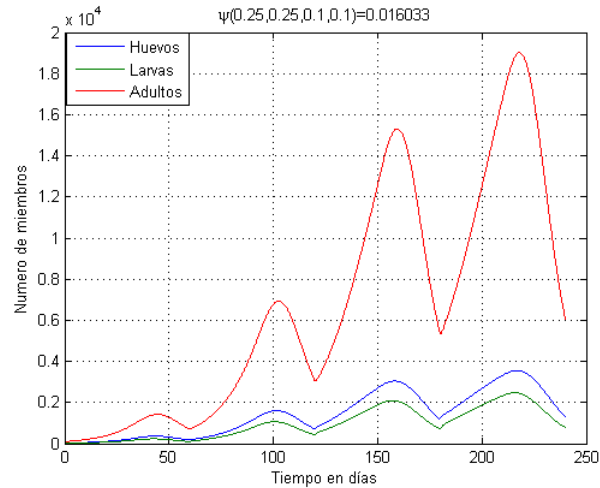


Figura 3.38: Evolución de la población de mosquitos aplicando control integral temporal con pérdida de fuerza en las medidas,  $\psi(0.25, 0.25, 0.1, 0.1) = 0.02$

de cero).

La simulación de este caso se muestra en la Figura 3.38, se observa que la población decrece al aplicar la medidas de control, pero los rebotes cada vez son mas intensos. La curiosidad de este resultado es que en la Figura 3.37 se tiene la simulación con los mismos valores para los parámetros de control, con la diferencia que en este caso las medidas van decreciendo.

Este ultimo caso es el que se presenta en la realidad, un aumento en la población y luego de la aplicación de las medidas de control la población decrece, pero se presentan rebotes que las medidas no logran disminuir de manera efectiva a la población de mosquitos.





## Capítulo 4

# Conclusiones del modelo para la dinámica de población del mosquito con estrategias de control

En el capítulo 1 se presentaron algunas de las principales características biológicas del mosquito y se mencionaron algunos de los ejemplos de las medidas de control a nivel químico y nivel biológico. Luego se presentaron las ecuaciones diferenciales ordinarias que describen la dinámica de población de mosquitos. En primer lugar se estableció la dinámica del crecimiento poblacional sin ningún control y luego se agregó el control químico a los estados de huevo, larva y adulto. En segundo lugar, se aplicó el control biológico en el estado larvario. Finalmente se obtuvo el modelo para la dinámica poblacional del mosquito con medidas de control integral, es decir, medidas químicas y medidas biológicas, que describen las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}H' &= \phi A \left(1 - \frac{H}{K_H}\right) - \mu_H H - \gamma_H H - \alpha H \\L' &= \gamma_H H - \gamma_L L - \mu_L L - \rho L - \frac{\beta L D}{L + \eta} \\A' &= \gamma_L L - \mu_A A - \delta A \\D' &= \omega D \left(1 - \frac{D}{K_D}\right),\end{aligned}$$

En el capítulo 2, Este analizó cualitativamente calculando las soluciones de equilibrio y analizando la estabilidad de éstas. Como resultado se presentó lo que se denomina el *umbral de crecimiento poblacional del mosquito con control biológico (depredación) y control químico*, que está dado por

$$\psi(\alpha, \rho, \beta, \delta) = \frac{\phi \gamma_L \gamma_H}{(\gamma_H + \mu_H + \alpha) \left( \gamma_L + \mu_L + \rho + \frac{\beta K_D}{\eta} \right) (\mu_A + \delta)}$$

Este umbral indica el número promedio de mosquitos adultos producidos por un mosquito. Expresión que está involucrada en el análisis de estabilidad de las soluciones de equilibrio del modelo y permite determinar la estabilidad de las soluciones del modelo.

Al final del capítulo se presentó la interpretación de los resultados del análisis de estabilidad a luz del modelo

de la dinámica de población del mosquito *Aedes aegypti*, de donde se obtienen lo que se llaman los criterios de control para la población del mosquito *Aedes aegypti*.

Conocidos los diferentes criterios de control en el Capítulo 3 se realizaron simulaciones numéricas del modelo para las diferentes estrategias de control, para las simulaciones se utilizó el software matemático MatLab, que permite visualizar el comportamiento gráfico de las curvas soluciones del modelo.

Luego de este breve resumen de lo realizado en este trabajo se presentan algunas de las conclusiones y recomendaciones que se obtiene del modelo, algunas incluidas en las páginas previas.

- Este trabajo brinda la oportunidad de realizar estudios de campo y de laboratorio que permitan estimar los parámetros tomados en el modelo, con el propósito de realizar las simulaciones y el análisis de estabilidad. Es decir, al existir la posibilidad de realizar algún trabajo de campo ó laboratorio es posible utilizar este modelo para tener una idea de los comportamientos a estudiar de la población de mosquitos, que como se tiene del análisis del modelo serán los parámetros entomológicos del mosquito.
- En este estudio se modela un fenómeno ecológico que influye sobre un fenómeno epidemiológico. Pues el tamaño de la población de mosquitos puede incidir de manera directa al momento de presentarse una brote epidémico de las enfermedades asociadas a este vector, ya sea dengue, clásico o hemorrágico, paludismo, malaria, entre otras.
- La naturaleza de la estabilidad de los puntos de equilibrio está relacionada con el valor dado a los parámetros; dependiendo además de los valores que tomen las poblaciones iniciales (condiciones iniciales), la dinámica puede tender a un equilibrio estable o inestable. Como se mencionó al realizar las simulaciones para el caso del control biológico se presentaba el caso que las condiciones iniciales se encontraban dentro de la región de atracción del equilibrio estable que mantenía a la población de mosquitos en niveles elevados. Dicho de otra manera si la población de mosquitos no se controla oportunamente esta crecerá impidiendo pudiendo ocasionar un brote epidémico.

Al ser un modelo que considera que las medidas se aplican de manera constante esto ocasiona que el modelo se aleje de la realidad, pues las medidas de control pierden intensidad a medida que la población de mosquitos empieza a decrecer. Otro hecho que hace que el modelo se aleje de la realidad es que al considerar los parámetros entomológicos constantes, ya que estos varían con el tiempo, dependen de la temperatura ambiente, el nivel de nutrientes en el agua, etc.

# Apéndice



## Apéndice A

# Análisis de las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + ax + b = 0$

### Solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita

Considere la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{A.1}$$

donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , y  $a \neq 0$ .

Cuando  $b$  ó  $c$  (ó ambos) son nulos la ecuación se dice *incompleta*. La expresión (A.1) es la forma *entera* de la ecuación.

Puesto que  $a \neq 0$ , se puede rescribir la ecuación como

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Tomando

$$\frac{b}{a} = 2p \quad \frac{c}{a} = q \tag{A.2}$$

la ecuación se escribe

$$x^2 + 2px + q = 0. \tag{A.3}$$

De (A.3) se despeja  $q$  y se suma a ambos miembros  $p^2$  para obtener

$$\begin{aligned} x^2 + 2px + p^2 &= p^2 + q \\ (x + p)^2 &= p^2 - q \end{aligned}$$

al extraer raíz cuadrada en ambos miembros, entonces

$$\begin{aligned} x + p &= \pm \sqrt{p^2 - q} \\ x &= -p \pm \sqrt{p^2 - q} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Se obtienen así dos raíces o soluciones para la ecuación (A.3),

$$x_1 = -p + \sqrt{p^2 - q}, \quad x_2 = -p - \sqrt{p^2 - q} \quad (\text{A.5})$$

las cuales se pueden verificar por sustitución directa. Estas son las raíces pues sabemos que un polinomio de segundo grado no puede anularse para más de dos valores sin ser idénticamente nulo. Resulta así

### **Teorema A.0.1**

Toda ecuación de segundo grado con una incógnita admite dos raíces. Si la ecuación se escribe de la forma (A.3), y estas raíces son las dadas en (A.5).

Si se desea puede expresarse la expresión (A.4) en función de los coeficientes  $a, b, c$  de la ecuación (A.1); para ello basta sustituir en (A.4) los valores de  $p$  y  $q$  dados por (A.2), para obtener

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

## Propiedades de las raíces

Escribiendo la ecuación de la forma

$$x^2 + 2px + q = 0$$

se ha visto que las raíces se expresan como

$$x_1 = -p + \sqrt{p^2 - q} \quad x_2 = -p - \sqrt{p^2 - q}$$

se mencionan a continuación algunas de sus propiedades más importantes

1. *Suma de las raíces.* Sumando las raíces (A.5) se obtiene

$$x_1 + x_2 = -2p$$

de donde se deduce que: *Si una raíz de la ecuación es  $x = \lambda$  entonces la otra raíz es  $-2p - \lambda$ .*

2. *Diferencia de las raíces.* Restando las raíces (A.5) se obtiene

$$x_1 - x_2 = 2\sqrt{p^2 - q}$$

3. *Producto de las raíces.* Al multiplicar las raíces se tiene

$$x_1 x_2 = q$$

De la igualdad dada por el producto de las raíces tenemos que si las raíces  $x_1 x_2$  son reales ( $p^2 - q \geq 0$ ) y la suma  $x_1 x_2 = -2p$  es constante, el producto

$$x_1 x_2 = q$$

será máximo cuando  $p^2 - q$  sea nulo; pero en este caso la relación de la resta de raíces se expresa como  $x_1 = x_2$ .

4. *Cociente de las raíces.* se puede expresar en función de una de ellas y de los coeficientes de la ecuación, pues de  $x_1 + x_2 = -2p$  resulta

$$\frac{x_1}{x_2} = -1 - \frac{2p}{x_2} = -1 - \frac{2px_1}{q}$$

El la discusión de la ecuación de segundo grado

$$x^2 + 2px + q = 0 \tag{A.7}$$

cuyas raíces son

$$x_1 = -p + \sqrt{p^2 - q}, \quad x_2 = -p + \sqrt{p^2 - q} \tag{A.8}$$

desempeña un papel importante el binomio  $p^2 - q$ , que suele representarse por  $\Delta$ , y se llama *discriminante* de la ecuación.

Con esto

$$x_1 - x_2 = 2\sqrt{\Delta} \tag{A.9}$$

Primer caso. Los coeficientes  $p, q$  son números complejos.

Si  $\Delta = 0$ , resulta  $x_1 = x_2 = -p$ , es decir, las raíces son iguales.

Si  $\Delta \neq 0$ , resulta  $x_1 \neq x_2$ , es decir, las raíces son desiguales.

Segundo caso. Los coeficientes  $p, q$  son números reales.

Este es el caso más frecuente en la práctica. Se distinguirán los siguientes sub casos:

a)  $\Delta < 0$ . Tomando  $\Delta = -\delta^2$  se obtiene para las raíces

$$x_1 = -p + i\delta, \quad x_2 = -p - i\delta.$$

Por tanto, cuando los coeficientes de la ecuación son reales y el discriminante es negativo las raíces son dos números complejos conjugados.

Obsérvese que siendo  $p^2$  un número positivo para que se verifique  $\Delta < 0$  se necesita que  $q$  sea positivo y, además, mayor que  $p^2$ .

Si  $p = 0$ ,  $q > 0$  las raíces son números imaginarios puros.

b)  $\Delta = 0$ . Las fórmulas (A.8) dan  $x_1 = x_2 = -p$ .

Por tanto, en este caso las raíces de la ecuación son reales e iguales y su signo es contrario al del coeficiente de la primera potencia de la incógnita. Si  $p = 0$  ambas raíces son nulas.

Observemos que de  $\Delta = 0$  resulta  $q = p^2$  y por consiguiente, la ecuación A.7 se puede escribir

$$\begin{aligned} x^2 + 2px + p^2 &= 0 \\ (x + p)^2 &= 0 \end{aligned}$$

que hace evidente la raíz doble  $-p$ .

Recíprocamente, si el trinomio  $x^2 + 2px + q$  es un cuadrado perfecto, se verifica  $q = p^2$  y, por tanto,  $\Delta = 0$ . Luego, la condición necesaria y suficiente para que  $x^2 + 2px + q$  sea cuadrado perfecto es que se tenga  $\Delta = 0$ .

c)  $\Delta > 0$ . Las raíces son reales en virtud de (A.8), y distintas, pues de (A.9)  $x_1 = x_2 + 2\sqrt{\Delta}$ .

Si los coeficientes  $p, q$  son números racionales y  $\Delta$  es un cuadrado perfecto ambas raíces son racionales; si  $\Delta$  no es cuadrado perfecto entonces dichas raíces son irracionales.

Respecto al signo de las raíces, obsérvese que si  $p > 0$  y  $q > 0$  ambas raíces son negativas pues siendo  $p^2 - q < p^2$  se tiene

$$x_1 = -p + \sqrt{p^2 - q} < 0, \quad x_2 = -p - \sqrt{p^2 - q}.$$

Además, es evidente que  $|x_2| > |x_1|$ .

Si  $p > 0$  y  $q < 0$  entonces  $p^2 - q > p^2$  y, por tanto,

$$x_1 = -p + \sqrt{p^2 - q} > 0, \quad x_2 = -p - \sqrt{p^2 - q} < 0$$

es decir, en este caso hay una raíz positiva y otra negativa teniendo mayor valor absoluto la negativa, pues  $|x_2| > |x_1|$ .

Si  $p < 0$  y  $q > 0$  resultará  $p^2 - q < p^2$  y como  $-p$  es entonces positivo se obtiene

$$x_1 = -p + \sqrt{p^2 - q} > 0, \quad x_2 = -p - \sqrt{p^2 - q} > 0$$

luego ambas raíces son positivas, y además  $|x_1| > |x_2|$ .

Finalmente, si  $p < 0$  y  $q < 0$  tenemos  $p^2 - q < p^2$  y como  $-p$  es positivo, se obtiene

$$x_1 = -p + \sqrt{p^2 - q} > 0, \quad x_2 = -p - \sqrt{p^2 - q} < 0$$

por consiguiente, hay una raíz positiva y otra negativa, y la positiva tiene mayor valor absoluto, es decir,  $|x_1| > |x_2|$ .

Los signos de las raíces reales pueden obtenerse también recordando las relaciones

$$x_1 + x_2 = -2p, \quad x_1 x_2 = q$$

en las cuales se vé que si  $q > 0$  ambas son necesariamente del mismo signo, y si  $q < 0$  son de signo contrario. En el caso  $q > 0$  el signo de las raíces es opuesto al de  $p$ , en virtud de la primera relación, esto es, son ambas negativas si  $p$  es positivo, y ambas positivas si  $p$  es negativo.

Si se escriben en orden los signos de los coeficientes 1,  $2p$ ,  $q$  de la ecuación y se dice que dos signos consecutivos presentan *permanencia* o *variación* según que sean iguales u opuestos, se puede resumir los resultados que anteceden en la forma siguiente

signo de los coeficientes	número de permanencias	número de variaciones	raíces positivas	raíces negativas
+++	2	0	0	2
++-	1	1	1	1
+ - +	0	2	2	0
+ - -	1	1	1	1

De donde se deduce: *En una ecuación reducida de segundo grado con coeficientes reales y discriminante positivo, el número de raíces positivas y negativas es respectivamente igual al número de variaciones y permanencias que presenten los signos de sus coeficientes.*

Es decir

$$\begin{aligned} n^0 \text{ de raíces positivas} &= n^0 \text{ de variaciones.} \\ n^0 \text{ de raíces negativas} &= n^0 \text{ de permanencias.} \end{aligned}$$

Ahora los casos en que la ecuación es incompleta, esto es, cuando uno o ambos coeficientes  $p, q$  son nulos.



$\alpha$ ) Si  $p \neq 0$ ,  $q = 0$  es  $\Delta > 0$  y las fórmulas (A.8) dan las raíces

$$x_1 = -p + q = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = -p - p = -2p$$

es decir, una raíz es cero y la otra igual y de signo contrario al coeficiente del segundo término. Este resultado puede corroborarse llevando la hipótesis actual a la ecuación (A.7), que entonces se escribe

$$x^2 + 2px = 0 \quad \text{ó} \quad x(x + p) = 0$$

y se nota que el primer miembro será nulo si  $x = 0$  o bien  $x = -2p$ .

$\beta$ ) Si  $p = 0$ ,  $q \neq 0$  el signo de  $\Delta$  depende del signo de  $q$ . En el caso que  $q > 0$  las raíces serán imaginarias puras, como ya se advirtió. En el caso  $q < 0$  serán reales y de signo contrario, pero del mismo valor absoluto, como resulta de las fórmulas (A.8), o bien recordando que  $x_1 + x_2 = -p = 0$ , de donde  $x_1 = -x_2$ .

En este caso la ecuación se reduce a  $x^2 + q = 0$ , o sea,  $x^2 = -q$ , luego  $x = \pm\sqrt{-q}$  resultado que naturalmente concuerda con el obtenido de las fórmulas.

$\gamma$ ) Si  $p = q = 0$  se tiene el caso más simple posible pues la ecuación se reduce a  $x^2 = 0$  que admite la raíz doble  $x = 0$ . Aplicando las fórmulas (A.8) se obtiene el mismo resultado  $x_1 = x_2 = 0$ .

Dichas fórmulas (A.8) no presentan, pues, caso alguno de excepción, pudiéndose hacer respecto a los coeficientes  $p, q$  todas las hipótesis imaginables.



## Apéndice B

# Método de linealización de Lyapunov y el Teorema de Hartman-Grobman

Considérese la ecuación

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}), \tag{B.1}$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Supongamos que  $\mathbf{x}_0$  es un punto de equilibrio del sistema<sup>1</sup>, es decir,  $f(\mathbf{x}_0) = 0$ , y se desea determinar el comportamiento de las órbitas alrededor de dicho punto.

Si  $f$  es lineal, no se tiene que realizar mayor trabajo, en cambio si  $f$  no es una función lineal, es posible considerar en lugar de  $f(\mathbf{x})$ , la expresión obtenida al aplicar la fórmula de Taylor a  $f$  en los alrededores de  $\mathbf{x}_0$  (se supone que  $f$  es bien portada), teniéndose

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + O^2(\mathbf{x}_0)$$

Despreciando los términos de orden mayor a uno y recordando que  $f(\mathbf{x}_0) = 0$  y finalmente tomando el cambio de variable  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  se obtiene el sistema linealizado

$$\mathbf{u}' = Df(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} \tag{B.2}$$

la matriz de este sistema  $Df(\mathbf{x}_0)$  no es mas que la matriz de las derivadas parciales de primer orden ó matriz Jacobiana de la función  $f$ , calculada en  $\mathbf{x}_0$ . A este proceso de linealización se le conoce como *método de linealización de Lyapunov*.

Cabría preguntarse cuando ésta linealización del sistema original tiene sentido, esto es, si es de alguna forma equivalente clasificar el  $\mathbf{x}_0$  de (B.1) a clasificar en el origen en (B.2). La respuesta la ofrece el siguiente teorema:

### **Teorema B.0.2 (Teorema de Hartman-Grobman)**

<sup>2</sup> Dado el sistema (B.1) y  $\mathbf{x}_0$  un punto equilibrio del sistema tal que  $\det[Df(\mathbf{x}_0)] \neq 0$  y  $Df(\mathbf{x}_0)$  no tiene valores propios con parte real nula, entonces existe un homeomorfismo  $\mathbf{h}$  definido en algún entorno  $V$  de  $\mathbf{x}_0$  y con valores en  $\mathbb{R}^n$ , que transforma las órbitas de la ecuación (B.1) en las órbitas de (B.2). Este homeomorfismo puede ser elegido de forma que conserve el sentido de las órbitas y la parametrización del tiempo.

O lo que es lo mismo, el comportamiento las trayectorias (o de las órbitas) del sistema linealizado (B.2) en un entorno pequeño el origen tiene el mismo carácter del comportamiento de las trayectorias (las órbitas) en un entorno pequeño de  $\mathbf{x}_0$  siempre que el cero no será un centro del sistema (B.1).

<sup>1</sup>Aunque los resultados se presentan en  $\mathbb{R}^n$ , son fácilmente aplicables para cualquier  $n \geq 2$ .

<sup>2</sup>Este teorema de linealización fue enunciado por Grobman en 1959 y formalizado por Hartman en 1964.



## Apéndice C

# Criterio de Routh - Hurwitz

La estabilidad es una propiedad cualitativa sumamente importante de los sistemas dinámicos. Ello debido a que, en la práctica, todo sistema debe ser estable. Si un sistema no es estable, normalmente carece de todo interés y utilidad.

## Criterio de Routh - Hurwitz

El criterio de Routh permite analizar la estabilidad de un sistema lineal a partir de los coeficientes de la ecuación característica.

### Definición C.0.1 (Polinomio de Hurwitz)

*Un polinomio se denomina un polinomio de Hurwitz si todas sus raíces tienen la parte real negativa.*

El método directo de comprobar si un determinado polinomio es o no un polinomio de Hurwitz consiste en determinar todas las raíces de dicho polinomio. Este procedimiento puede ser, además de excesivamente laborioso, inútil por cuanto que suministra una información superior a la que se requiere. No se trata de saber cuales son las raíces, sino, simplemente, si su parte real será negativa o no.

El método de Routh - Hurwitz, permite determinar si las partes reales de las raíces serán negativas o no sin necesidad de determinarlas. Considérese un polinomio como el siguiente:

$$s^{n+1} + a_1s^n + \dots + a_n. \tag{C.1}$$

Para determinar si el anterior polinomio tiene raíces con parte real negativa se procede como sigue:

1. Si algún coeficiente del polinomio es negativo o cero, entonces existe al menos una raíz positiva. El sistema es, por lo tanto, inestable.

2. En el caso de que no se cumplan los supuestos de 1, se procede a construir la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|cccc}
 n+1 & 1 & a_2 & a_4 & \dots \\
 n & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\
 n-1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \\
 n-2 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \\
 \dots & \dots & & & \\
 1 & \rho_1 & & & 
 \end{array} \tag{C.2}$$

en donde la generación de las distintas filas se hace como sigue, a partir de los elementos de las dos anteriores

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_3 1}{a_1} \\
 \beta_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_5 1}{a_1}.
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

La tabla anterior recibe la denominación de *tabla de Routh*, y el algoritmo que permite su construcción se denomina *algoritmo de Routh*. Independientemente de los trabajos de Routh, que publicó originalmente el algoritmo que conduce a la construcción de la tabla anterior, Hurwitz publicó un criterio de estabilidad, que se estudiará posteriormente, que esencialmente coincide con el de Routh. Por ello el criterio lleva conjuntamente el nombre de los dos autores.

Toda fila depende de las dos filas precedentes. Se procede sucesivamente a determinar filas hasta que se determine una cuyos elementos sean todos 0. Para un polinomio de orden  $n$  se determinan  $n+1$  filas.

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz dice que el polinomio tiene sus raíces negativas si todos los elementos de la primera columna son positivos y no nulos. El número de cambios de signo en la primera columna es igual al número de raíces positivas del polinomio (C.1).

#### EJEMPLO C.0.1

Sea el polinomio  $s^4 + 5s^3 + 3s^2 + s + 2 = 0$ . Para determinar el número de raíces positivas se construye la tabla de Routh y se tiene,

$$\begin{array}{c|ccc}
 4 & 1 & 3 & 2 \\
 3 & 5 & 1 & 0 \\
 2 & \frac{14}{5} & 2 & \\
 1 & -\frac{36}{14} & 0 & \\
 0 & 2 & & 
 \end{array} \tag{C.4}$$

como hay dos cambios de signo en la primera columna existirán dos raíces en el semiplano positivo. Por consiguiente el sistema es inestable.

En la práctica el criterio de Routh-Hurwitz se aplica para determinar si el sistema es estable o no y, en general, no interesa saber el número de raíces en el semiplano positivo abierto. Por lo tanto, cuando lo único que interese sea conocer si el sistema será estable o no, se procederá a construir la tabla de Routh hasta encontrar un elemento de la primera columna que sea negativo o cero. Cuando aparezca un elemento negativo o nulo, se suspenderá la construcción de la tabla, y se dictaminará que el sistema es inestable.

En el caso de que interesase conocer cuantas raíces existirán en el semiplano positivo, o en el eje imaginario, se procede a construir la tabla de Routh completa. En la construcción de la tabla de Routh, para el caso en que interese completarla aún cuando aparezcan elementos nulos en la primera columna, se presentan los dos casos singulares siguientes:

1. Aparece un 0 en la primera columna, siendo no nulos los otros elementos de la misma fila.

2. Aparece una fila con todos los elementos nulos, antes de llegar a la fila  $n + 2$ .

En el primer caso se sustituye el 0 por un número arbitrariamente pequeño  $\epsilon$ . Se completa la tabla y se calcula el límite de los elementos en los que aparezca haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**EJEMPLO C.0.2**

Considérese el polinomio  $s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3$

Al construir la tabla de Routh se encuentra un cero en la primera columna, en la fila dos. Se sustituye este cero por  $\epsilon$  y se procede a completar la tabla, que resulta

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & \\ 2 & 0 \rightarrow \epsilon & 3 & \\ 1 & \frac{2\epsilon-3}{\epsilon} & & \\ 0 & 3 & & \end{array} \quad (\text{C.5})$$

Una vez construida la tabla se determina el límite de aquellos elementos en la primera columna en los que aparezca  $\epsilon$ , cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . El elemento correspondiente a la fila 1 tiene el siguiente límite,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2\epsilon - 3}{\epsilon} = -\infty$$

por lo tanto, la primera columna queda como sigue

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -\infty \\ 3 \end{array}$$

se presentan dos cambios de signo en la primera columna, y por consiguiente el sistema tiene dos raíces en el semiplano derecho, y es inestable.

El segundo caso particular más arriba enunciado, es decir, el caso en que se presente toda una fila de ceros, indica que el polinomio tiene, al menos, un factor par. Es decir, que existe un par de raíces reales simétricas con respecto al eje imaginario, que existen dos raíces imaginarias puras conjugadas, o que existen cuatro raíces complejas situadas simétricamente con relación al origen. Cuando esto sucede se procede a formar una ecuación subsidiaria a partir de los coeficientes de la fila anterior a aquella en la que todos los elementos sean nulos. La expresión así obtenida resulta ser el factor par del polinomio. Para obtener la fila siguiente, en la tabla de Routh, se procede a derivar esta expresión una vez con respecto a  $s$  y situar sus coeficientes en la fila cuyos elementos se habían anulado. A partir de esta sustitución se prosigue la construcción de la tabla de Routh normalmente. Un ejemplo ayudará a fijar ideas.

**EJEMPLO C.0.3**

Considérese el siguiente polinomio  $s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2$

Si se construye la tabla de Routh correspondiente al llegar a la fila 1, se encuentra que todos los elementos son ceros. En efecto

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

La ecuación subsidiaria que se obtiene empleando los coeficientes de la segunda fila es la siguiente:

$$2s^2 + 2 = 0$$

que corresponde al factor par  $s^2 + 1$ . La derivada de la ecuación subsidiaria es  $4s$ . Por lo tanto la tabla se completa como sigue

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \\ 1 & 4 & 0 & \\ 0 & 2 & & \end{array}$$

De la observación de esta tabla se desprende que el polinomio considerado no tiene raíces en el semiplano positivo. La factorización del polinomio anterior conduce a,

$$(s^2 + 1)(s + 2)(s + 1).$$

El anterior ejemplo muestra qué sucede cuando el polinomio en cuestión tiene raíces en el eje imaginario. En tal caso estas raíces dan lugar a un factor par, de la forma del que aparece en el ejemplo, que se pone de manifiesto al aparecer una fila de ceros en la tabla de Routh. Procediendo como se ha hecho en el ejemplo, se elimina la fila de ceros y se tiene una tabla de Routh que indica, por medio de los cambios de signos si existen raíces en el semiplano derecho. Obsérvese que aunque no existan raíces en el semiplano derecho, como sucede en el ejemplo anterior, el sistema será inestable, puesto que existen raíces en el eje imaginario.

La aplicación de las dos reglas anteriores, a los dos casos singulares que se acaban de discutir, debe tomarse con ciertas reservas. En particular, la aplicación de la primera regla (introducción de pequeños parámetros  $\epsilon$ ) sólo está justificada cuando el polinomio no tiene raíces sobre el eje imaginario. La aplicación del criterio de Routh - Hurwitz es, sencillamente, determinar si el sistema será estable o no, lo cual puede hacerse en todo caso sin ninguna ambigüedad, detectando si existe algún cero o algún cambio de signo en la primera columna de la tabla de Routh.

El criterio de Routh - Hurwitz suministra una determinación rápida de la estabilidad absoluta de un sistema. Sin embargo no suministra ninguna indicación respecto a la posibilidad de alterar la situación de las raíces. Su principal interés reside en su empleo como un paso previo, antes de aplicar otros métodos.

## Matriz de Hurwitz

El criterio de Routh - Hurwitz, objeto del apartado anterior, en realidad fue desarrollado originalmente por Routh. Sin embargo es completamente análogo al desarrollado por Hurwitz, al que se va a dedicar este apartado.

Sea un polinomio  $a(s)$  tal como

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (\text{C.6})$$

Se define la matriz de Hurwitz como la matriz formada por los coeficientes del polinomio, así

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$



El criterio de estabilidad de Routh - Hurwitz se puede enunciar diciendo que el polinomio  $a(s)$  es un polinomio de Hurwitz si y sólo si los menores principales diagonales de  $H$  son todos positivos. Los menores principales diagonales de  $H$  son los siguientes

$$\begin{aligned} H_1 &= a_1 \\ H_2 &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \\ H_3 &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} \\ H_n &= \det H \end{aligned} \tag{C.8}$$

Si en la tabla de Routh los elementos de la primera columna se denotan por  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, p_1$ , entonces es posible demostrar, después de algunas manipulaciones algebraicas, que,

$$\begin{aligned} H_1 &= \alpha_1 \\ H_2 &= \alpha_1 \beta_1 \\ H_3 &= \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \end{aligned} \tag{C.9}$$

Por ello es evidente que el procedimiento de determinar  $H_1, H_2, \dots, H_n$  y ver si son positivos no nulos es equivalente al de construir la tabla de Routh. Los determinantes  $H_1, H_2, \dots$ , reciben la denominación de determinantes de Hurwitz.

Para aplicaciones practicas se recomienda emplear el método tabular de Routh, por ser más simple que la determinación de las matrices de Hurwitz.

Quedando el criterio de la siguiente manera

**Teorema C.0.3 (Criterio Routh - Hurwitz)**

Sea

$$F(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_j s^{n-j} + \dots + a_n$$

un polinomio con coeficientes reales. Entonces todos los ceros de  $F(s)$  tienen parte real negativa si, y sólo si, todos los determinantes de la matrices diagonales principales de la matriz de Hurwitz

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

son positivos, es decir:

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} > 0, \quad D_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix} > 0, \dots$$

Así el criterio para  $s^2 + a_1 s + a_2$  es  $a_1 > 0, a_2 > 0$ . Para  $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$  es  $a_1 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, a_3 > 0$ . En el caso de  $s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4$  es  $a_1 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, (a_1 a_2 - a_3) a_3 - a_1^2 a_4 > 0, a_4 > 0$ .



## Apéndice D

# Código utilizado para las simulaciones en MatLab

modelo.m

```
function HLA=sistema(t,y,phi,KH,gamma_H,mu_H,alpha,gamma_L,mu_L,rho,beta,D,eta,mu_A,delta)
HLA=zeros(3,1);
% Huevos
HLA(1)=phi*y(3)*(1-y(1)/KH)-(gamma_H + mu_H + alpha)*y(1);
% Larvas
HLA(2)=gamma_H*y(1)-(gamma_L + mu_L + rho + beta*D/(y(2)+eta))*y(2);
% Adultos
HLA(3)=gamma_L*y(2)-(mu_A + delta)*y(3);
```

Modelo con perdida de esfuerzo en las medidas de control.

modelo\_c.m

```
function HLA=sistema(t,y,phi,KH,gamma_H,mu_H,alpha,gamma_L,mu_L,rho,beta,D,eta,mu_A,delta)
HLA=zeros(3,1);
% Huevos
HLA(1)=phi*y(3)*(1-y(1)/KH)-(gamma_H + mu_H + alpha*(0.5*cos(t*pi/30)+0.5))*y(1);
% Larvas
HLA(2)=gamma_H*y(1)-(gamma_L + mu_L + rho*(0.5*cos(t*pi/30)+0.5) +
(0.5*cos(t*pi/30)+0.5)*beta*D/(y(2)+eta))*y(2);
% Adultos
HLA(3)=gamma_L*y(2)-(mu_A + delta*(0.5*cos(t*pi/30)+0.5))*y(3);
```

Simulación del modelo sin ninguna medida de control.  
simulacion\_D0.m

```
% CALCULO DE LOS VALORES DE EQUILIBRIO PARA EL CASO D=0
clear
clc
close all

% PARAMETROS DEL MODELO
phi=0.3;      % Oviposicion
KH=10000;    %Capacidad de huevos
mu_H=0.286;  %Tasa de inviabilidad de huevos
gamma_H=0.714; %Tasa de cambio de H -> L
alpha=0;     %Tasa de efectividad en el control de los huevos
gamma_L=0.904; %Tasa de cambio de L -> A
mu_L=0.096;  %Tasa de mortalidad de Larvas
rho=0;       %Tasa de efectividad del larvicida
beta=0;      %Tasa de depredacion o captura
D=0;        %Equilibrio del depredador
eta=0;      %Tasa media de saturacion
mu_A=0.1;   %Tasa de mortalidad de los adultos
delta=0;    %Tasa de efectividad del insecticida

% CALCULO DEL VALOR UMBRAL DE CRECIMIENTO DE LA POBLACION
psi00=(phi*gamma_L*gamma_H)/((mu_A)*(mu_H+gamma_H)*(gamma_L+mu_L))
psi=(phi*gamma_L*gamma_H)/((mu_A+delta)*(mu_H+gamma_H+alpha)*(gamma_L+mu_L+rho))

% EQUILIBRIO
EH=KH*(psi-1)/psi;
EL=(EH*gamma_H)/(rho+gamma_L+mu_L);
EA=(EH*gamma_L*gamma_H)/((mu_A+delta)*(gamma_L+mu_L+rho));
EQ=ceil([EH,EL,EA])

% CRITERIOS
['ALPHA= ',num2str(alpha),' <? ',num2str((gamma_H+mu_H)*(psi00-1))]
['RHO= ',num2str(rho),' <? ',num2str((gamma_L+mu_L)*(psi00-1))]
[num2str(mu_A*(psi00-1)),' >? DELTA = ',num2str(delta)]

%y0=[H0,L0,A0]
y0=[30,15,100];
tiempo=[0:0.1:150];%tiempo
[t,y]=ode45(@modelo,tiempo,y0,[],phi,KH,gamma_H,mu_H,alpha,gamma_L,mu_L,rho,beta,D,eta,mu_A,delta);
plot(t,y(:,1),t,y(:,2),t,y(:,3));
legend('Huevos','Larvas','Adultos');
xlabel('Tiempo en días');
ylabel('Numero de miembros');
title(['\psi(',num2str(alpha),' , ',num2str(rho),' ,0 , ',num2str(delta),' )=' ,num2str(psi)]);
grid on
axis square
axis on
```

Simulación del modelo aplicando control integral.  
simulacion\_control\_integral.m

```

% CALCULO DE LOS VALORES DE EQUILIBRIO PARA EL CASO D=K_D
clear
clc
close all

% PARAMETROS DEL MODELO
phi=0.3;           % Oviposicion
KH=10000;         %Capacidad de huevos
mu_H=0.286;       %Tasa de inviabilidad de huevos
gamma_H=0.714;    %Tasa de cambio de H -> L
alpha=0;          %Tasa de efectividad en el control de los huevos
gamma_L=0.904;    %Tasa de cambio de L -> A
mu_L=0.096;       %Tasa de mortalidad de Larvas
rho=0;            %Tasa de efectividad del larvicida
beta=0;           %Tasa de depredacion o captura
D=0;              %Equilibrio del depredador
eta=0;            %Tasa media de saturacion
mu_A=0.1;         %Tasa de mortalidad de los adultos
delta=0;          %Tasa de efectividad del insecticida

% CALCULO DEL VALOR UMBRAL DE CRECIMIENTO DE LA POBLACION
psi_0=(phi*gamma_L*gamma_H)/((mu_A)*(mu_H+gamma_H)*(gamma_L+mu_L))

% EQUILIBRIO
EH=KH*(psi_0-1)/psi_0;
EL=(EH*gamma_H)/(rho+gamma_L+mu_L);
EA=(EH*gamma_L*gamma_H)/((mu_A+delta)*(gamma_L+mu_L+rho));
EQ=ceil([EH,EL,EA])

%y0=[H0,L0,A0]
y0=[30,15,100];

%tiempo
tiempo=[0:0.1:30];
%tiempo=[0:0.1:200];
[t1,y1]=ode45(@modelo,tiempo,y0,[],phi,KH,gamma_H,mu_H,alpha,gamma_L,
mu_L,rho,beta,D,eta,mu_A,delta);

% APLICACION DE LAS MEDIDAS DE CONTROL
alpha=0.25;
rho=0.25;
delta=0.05;
beta=0.001;
D=100;
eta=0.2125;

% VALORES UMBRALES
psi_0=(phi*gamma_L*gamma_H)/((mu_A+delta)*(mu_H+gamma_H+alpha)*(gamma_L+mu_L+rho));
psi=(phi*gamma_L*gamma_H)/((mu_A+delta)*(mu_H+gamma_H+alpha)*(gamma_L+mu_L+rho+beta*D/eta))

```

```

% NUEVO EQUILIBRIO
a= eta + (gamma_H *KH)/(gamma_L +mu_L +rho)*( 1/psi_0 +(beta * D)/(gamma_H* KH)-1);
b= (gamma_H* KH)/(gamma_L +mu_L +rho)*(eta/psi_0 -eta +(beta* D)/((gamma_L +mu_L +rho)*psi_0));
disc=a*a-4*b;
[ ' [a,b,disc]= ', num2str([a,b,disc]) ]];
EL1=(-a-sqrt(disc))/2;
EL2=(-a+sqrt(disc))/2;
EH=(phi*KH*gamma_L*EL1)/(phi*gamma_L*EL1+KH*(delta+mu_A)*(alpha+gamma_H+mu_H));
EA=gamma_L*EL1/(delta+mu_A);
EQ1=ceil( [EH,EL1,EA] )
EH=(phi*KH*gamma_L*EL2)/(phi*gamma_L*EL2+KH*(delta+mu_A)*(alpha+gamma_H+mu_H));
EA=gamma_L*EL2/(delta+mu_A);
EQ2=ceil( [EH,EL2,EA] )

tiempo_1=[30:0.1:200];
[t2,y2]=ode45(@modelo,tiempo_1,y1(301,:), [], phi,KH,gamma_H,mu_H,alpha,gamma_L,mu_L,rho,beta,D,
eta,mu_A,delta);

plot(t1,y1(:,1),t1,y1(:,2),t1,y1(:,3),t2,y2(:,1),t2,y2(:,2),t2,y2(:,3));
legend('Huevos','Larvas','Adultos','Huevos_c','Larvas_c','Adultos_c');
xlabel('Tiempo en días');
ylabel('Numero de miembros');
title(['\psi(', num2str(alpha), ', ', num2str(rho), ', ', num2str(beta), ', ', num2str(delta), ') = ',
num2str(psi)]);
grid on
axis on

```

Simulación del modelo aplicando control integral temporalmente  
simulacion\_control\_integral\_temporal1.m

```

% CALCULO DE LOS VALORES DE EQUILIBRIO PARA EL CASO D=K_D
clear
clc
close all

% PARAMETROS DEL MODELO
phi=0.3;           % Oviposicion
KH=10000;         %Capacidad de huevos
mu_H=0.286;       %Tasa de inviabilidad de huevos
gamma_H=0.714;    %Tasa de cambio de H -> L
alpha=0;          %Tasa de efectividad en el control de los huevos
gamma_L=0.904;    %Tasa de cambio de L -> A
mu_L=0.096;       %Tasa de mortalidad de Larvas
rho=0;            %Tasa de efectividad del larvicida
beta=0;           %Tasa de depredacion o captura
D=0;              %Equilibrio del depredador
eta=0;            %Tasa media de saturacion
mu_A=0.1;         %Tasa de mortalidad de los adultos
delta=0;          %Tasa de efectividad del insecticida

```

```

% CALCULO DEL VALOR UMBRAL DE CRECIMIENTO DE LA POBLACION
psi_0=(phi*gamma_L*gamma_H)/((mu_A)*(mu_H+gamma_H)*(gamma_L+mu_L))

%tiempo
tf=300;
tiempo=[0:0.1:tf];

t=zeros(1,10*tf+1);
y=zeros(10*tf+1,3);

% CONDICIONES INICIALES
% y0=[H0,LO,A0]
%y(1,:)=[30,15,100];
y(1,:)=[3000,2142,10];

for i=1:tf/30
    if(rem(i,2)==0) % Se aplica las medidas de control
        % APLICACION DE LAS MEDIDAS DE CONTROL
        alpha=0.25;
        rho=0.25;
        delta=0.01;
        beta=0.001;
        D=100;
        eta=0.2125;
        [t1,y1]=ode45(@modelo,tiempo(300*(i-1)+1:300*i+1),y(300*(i-1)+1,:),[],phi,KH,gamma_H,
            mu_H,alpha,gamma_L,mu_L,rho,beta,D,eta,mu_A,delta);
    else % No se aplica ninguna medida de control
        % APLICACION DE LAS MEDIDAS DE CONTROL
        alpha=0;
        rho=0;
        delta=0;
        beta=0;
        D=100;
        eta=0.2125;
        [t1,y1]=ode45(@modelo,tiempo(300*(i-1)+1:300*i+1),y(300*(i-1)+1,:),[],phi,KH,gamma_H,
            mu_H,alpha,gamma_L,mu_L,rho,beta,D,eta,mu_A,delta);
    end
    t(300*(i-1)+1:300*i+1)=t1(1:end);
    y(300*(i-1)+1:300*i+1,:)=y1(1:end,:);
end
psi=(phi*gamma_L*gamma_H)/((mu_A+delta)*(mu_H+gamma_H+alpha)*(gamma_L+mu_L+rho+beta*D/eta))

plot(t,y);
legend('Huevos','Larvas','Adultos');
xlabel('Tiempo en días');
ylabel('Numero de miembros');
title(['\psi(',num2str(alpha),',',',num2str(rho),',',',num2str(beta),',',',num2str(delta),')=' ,
num2str(psi)]);
grid on
axis on

```

Simulación del modelo aplicando control temporal con perdida de esfuerzo  
 Simulacion\_control\_integral\_temporal2.m

```
% CALCULO DE LOS VALORES DE EQUILIBRIO PARA EL CASO D=K_D
clear
clc
close all

% PARAMETROS DEL MODELO
phi=0.3;           % Oviposicion
KH=10000;         %Capacidad de huevos
mu_H=0.286;       %Tasa de inviabilidad de huevos
gamma_H=0.714;    %Tasa de cambio de H -> L
alpha=0;          %Tasa de efectividad en el control de los huevos
gamma_L=0.904;    %Tasa de cambio de L -> A
mu_L=0.096;       %Tasa de mortalidad de Larvas
rho=0;            %Tasa de efectividad del larvicida
beta=0;           %Tasa de depredacion o captura
D=0;              %Equilibrio del depredador
eta=0;            %Tasa media de saturacion
mu_A=0.1;         %Tasa de mortalidad de los adultos
delta=0;          %Tasa de efectividad del insecticida

% CALCULO DEL VALOR UMBRAL DE CRECIMIENTO DE LA POBLACION
psi_0=(phi*gamma_L*gamma_H)/((mu_A)*(mu_H+gamma_H)*(gamma_L+mu_L))

%tiempo
tf=240;
tiempo=[0:0.1:tf];

t=zeros(1,10*tf+1);
y=zeros(10*tf+1,3);

% CONDICIONES INICIALES
% y0=[H0,L0,A0]
y(1,:)= [30,15,100];
%y(1,:)= [3000,2142,10];

for i=1:tf/30
    if(rem(i,2)==0) % Se aplica las medidas de control
        % APLICACION DE LAS MEDIDAS DE CONTROL
        alpha=0.25;
        rho=0.25;
        delta=0.1;
        beta=0.1;
        D=100;
        eta=0.2125;
        [t1,y1]=ode45(@modelo_c,tiempo(300*(i-1)+1:300*i+1),y(300*(i-1)+1,:), [], phi,KH,gamma_H,
        mu_H,alpha,gamma_L,mu_L,rho,beta,D,eta,mu_A,delta);
    else % No se aplica ninguna medida de control
        % APLICACION DE LAS MEDIDAS DE CONTROL
```



```

alpha=0;
rho=0;
delta=0;
beta=0;
D=100;
eta=0.2125;
[t1,y1]=ode45(@modelo,tiempo(300*(i-1)+1:300*i+1),y(300*(i-1)+1,:),[],phi,KH,gamma_H,
mu_H,alpha,gamma_L,mu_L,rho,beta,D,eta,mu_A,delta);
end
t(300*(i-1)+1:300*i+1)=t1(1:end);
y(300*(i-1)+1:300*i+1,:)=y1(1:end,:);
end
psi=(phi*gamma_L*gamma_H)/((mu_A+delta)*(mu_H+gamma_H+alpha)*(gamma_L+mu_L+rho+beta*D/eta))

plot(t,y);
legend('Huevos','Larvas','Adultos');
xlabel('Tiempo en días');
ylabel('Numero de miembros');
title(['\psi(',num2str(alpha),',',',num2str(rho),',',',num2str(beta),',',',num2str(delta),')=',
num2str(psi)]);
grid on
axis on

```



# Bibliografía

- [1] Alvarez, L.; A. Briceño y M. Oviedo (2006). *Resistencia al Temephos en poblaciones de Aedes aegypti (Diptera: Culicidae) del occidente de Venezuela*. Revista Colombiana de Entomología, Julio 1, 2006.
- [2] Biblioteca virtual de salud para desastres. Lucha contra el mosquito *Aedes aegypti*. <http://www.greenstone.org/greenstone3/nzdl>, consultado en julio 2011.
- [3] Castillo, I.; R. Valdés; M. E. Piquero y N. Fernandez (2008). *Evaluación de Mesocyclops pehpeiensis (Copepoda: Cyclopoida) para el control de mosquitos*. Revista Cubana Medicina Tropical 2008. 60(2).
- [4] Duarte, R. F.; J. C. Castillo C.; O. C. Rodríguez, E. C. Santander y R. González G. (2009). *Eficacia del control de larvas de mosquitos (Diptera: Culicidae) con peces larvívoros*.
- [5] Duque L., J. E.; A. Muñoz Loaiza y M. A. Navarro-Silva (2004). *A simulation model for the control of the Aedes aegypti, the mosquito vector of dengue and yellow fever, by the crustacean Mesocyclops spp.* Rev. salud pública, Ene./Abr. 2004, Vol.6, No.1, p.87-99. ISSN 0124-0064. [www.medicina.unal.edu.co/ist/revistasp](http://www.medicina.unal.edu.co/ist/revistasp)
- [6] Duque L., J. E. y M. A. Navarro - Silva (2006). *Dynamics of the control of Aedes (Stegomyia) aegypti Linnaeus (Diptera, Culicidae) by Bacillus thuringiensis var israelensis, related with temperature, density and concentration of insecticide*. Revista Brasileira de Entomología 50(4), Diciembre 2006, pp. 528 - 533.
- [7] Eiman, M.; M. V. Introini y C. Ripoll (2009). *Directrices para la prevención y control de Aedes aegypti*. Ministerio de Salud, Argentina.
- [8] Fernández Pérez, C. y J. M. Vega Montaner (1996). *Ecuaciones Diferenciales II, Ecuaciones no Lineales*, Ediciones Pirámide.
- [9] Ferreira, C. P.; S. T. Pinho; L. Esteva; F. R. Barreto; V. C. Morato e Silva y M. G. L. Teixeira (2010). *Modelling the dynamics of dengue real epidemics*. Anais do CNMAC 2010 Publicação da SBMAC, Vol. 3.ISSN 1984 - 820X.
- [10] Flores, A. E.; M. H. Badii y G. Ponce G. (2001). *Resistencia a insecticidas en insectos vectores de enfermedades con énfasis en mosquitos*. Revista Salud Pública y Nutrición RESPYN, Vol 2, No 4, Octubre - Diciembre 2001.
- [11] García, I.; R. González (1986). *Principales especies de peces larvívoros en la familia Poeciliidae y su efectividad en las condiciones naturales de Cuba*. Revista Cubana Medicina Tropical 1986. 38(2).
- [12] Hernández, C. F. y J. D. García (2000). *Aedes, dengue y la posibilidad de un enfoque diferente de lucha*. Revista Costarricense de Salud Pública 2000, Vol. 9, Núm. 16.
- [13] Hernández H., E y M. Marques P. (2006). *Control de larvas de Aedes aegypti (L) con Poecilia reticulata Peter, 1895: una experiencia comunitaria en el municipio Taguasco, Sancti Spíritus, Cuba*. Revista Cubana Medicina Tropical 2006. 58(2).

- [14] Hernández R., M.; M. B. da Costa y G. Montero L. (2010). *Efectividad comparativa del BACILLUS THURINGIENSIS VAR. ISRAELENIS Y TEMEPHOS contra larvas de Aedes aegypti en el municipio de Uberlândia*. Revista institucional del grupo empresarial de producciones biofarmacéuticas y químicas, LABIOFAM. No 1/2010.
- [15] [http://es.wikipedia.org/wiki/Aedes\\_aegypti](http://es.wikipedia.org/wiki/Aedes_aegypti), consultado en julio 2011.
- [16] Jiménez López, V. (2000). *Ecuaciones Diferenciales: Cómo aprenderlas, Cómo enseñarlas*, Universidad de Murcia.
- [17] Libro electrónico, Ciencias de la Tierra y del Medio Ambiente. <http://www.tecnun.es/asignaturas/Ecologia/Hipertexto/09ProdQui/112TiposPest.htm>, consultado julio 2011.
- [18] Loumbos, P. y R. E. Campos (2002). *Investigaciones recientes sobre Toxorhynchites rutilus (Diptera: Culicidae) con referencia al control biológico de mosquitos habitantes en recipientes*. Boletín de Entomología Venezolana, Vol. 17(2), Agosto 2002.
- [19] Marín G., C. V.; A. Muñoz L.; H. D. Toro Z. y L. D. Restrepo A. (2007). *Modelado de estrategias para el control químico y biológico del Aedes aegypti (Diptera: Culicidae)*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria Vol. XX, No 1, Junio, Matemáticas: 1 - 16.
- [20] Montero, G. (2009). *Biología de Aedes aegypti*. Sitio argentino de producción animal, <http://www.fcagr.unr.edu.ar/blog/?p=28>, consultado en mayo 2011.
- [21] Mosquera, L. A. y M. H. Perea (2006). *Modelos matemático para la enfermedad del dengue*. Boletín de Matemáticas Nueva Serie, Volumen XIII No. 2 2006, pp. 176 - 185.
- [22] Nam, V. S., N. T. Yen, B. H. Kay, G. G. Marten y J. W. Reid (1998). *Eradication of Aedes aegypti from a village in Vietnam, using copepods and community participation*. Am J Trop Med Hyg 59. pp 657 - 660.
- [23] Nava, L. M. y J. M. Sánchez - Yáñez (2007). *El control de mosquitos vectores de enfermedades humanas con Bacillus thuringiensis var israelensis*. Instituto de Investigaciones Químico Biológicas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. México.
- [24] Organización Mundial de la Salud (2000). *Meeting report of the Scientific Working Group on Dengue of the UNDP/World Bank/WHO Special Programme for Research and Training in Tropical Diseases (TDR)*. Abril 3 - 5; Genova, Suiza.
- [25] Pérez I., O.; R. González B.; J. A. Bisset L.; A. Navarro O.; N. Hernández C. y A. Martínez C. (2004). *Efectos de Tapinoma melanocephalum (Hymenoptera: Formicidae) sobre huevos de Aedes aegypti (Diptera: Culicidae) en insectario*. Revista Cubana Medicina Tropical 2004. 56(3).
- [26] Perko, L. (1991). *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer - Verlag.
- [27] Programa de Naciones Unidas para el Medio Ambiente (PNUMA). Programa de Naciones Unidas para el Medio Ambiente (PNUMA) (ed.): Noticias 3 mayo 2005 - PNUMA plantea suprimir uso de DDT y plaguicidas, [www.pnuma.org](http://www.pnuma.org).
- [28] Rodríguez, M. M., J. A. Bisset; O. Pérez; F. Ramos y G. E. Risco (2006). *Modo de herencia de la resistencia a temefos (abate) en Aedes aegypti (Diptera: Culicidae) de Cuba*. Revista Cubana Medicina Tropical 2006;58(2).
- [29] Rodríguez R., J.; Z. M. Díaz; I. García G.; M. Díaz P.; J. E. Sánchez y R. Gato A. (2006). *Conducta de oviposición de Aedes aegypti (L.) en presencia de Macrocylops albidus (J.) y Bacillus thuringiensis var. israelensis en condiciones de laboratorio*. Revista Cubana Medicina Tropical 2007;59(1).

- [30] Suárez D., S.; J. Rodríguez R.; Z. Menéndez D.; D. Montana D.; I. García A. y M. C. Marquetti-Fernández (2005). *Macrocyclops albidus* (Copepoda: Cyclopidae): una nueva alternativa para el control de larvas de mosquitos en Cuba. *Revista Cubana Medicina Tropical* 2005. 57(3).
- [31] Valero, N.; E. Meleán; M. Maldonado; M. Montiel; Y. Larreal y L. M. Espina (2006). *Capacidad Larvívora del Gold Fish (Carassius auratus auratus) y del Guppy Salvaje (Poecilia reticulata) Sobre Larvas de Aedes aegypti en Condiciones de Laboratorio*. *Revista Científica* (Maracaibo), julio 2006, Vol. 16, No 4.
- [32] Vargas V., M (2002). *Uso de ovitrampas en los programas de prevención y control del dengue*. *Rev. Col. de MQC de Costa Rica* (2002) vol. 8, número 5.