UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

"GRUPOS DE LIE DE MATRICES REALES O COMPLEJOS"

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR:

EDWIN ALEXANDER AGUILAR MARTÍNEZ. AM05085

PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

CIUDAD UNIVERSITARIA, NOVIEMBRE, 2011

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

“GRUPOS DE LIE DE MATRICES REALES O COMPLEJOS”

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR:

EDWIN ALEXANDER AGUILAR MARTÍNEZ. AM05085

PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ASESORES:

Dr. Simón Alfredo Peña   **MSc. Walter Otoniel Campos**

CIUDAD UNIVERSITARIA, NOVIEMBRE, 2011

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

Ing. Mario Roberto Nieto Lovo

SECRETARIO GENERAL:

Dr. Ana Leticia Zavaleta de Amaya

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

MSc. Martín Guerra Cáceres

SECRETARI0:

Lic. Nelson Ediltrudys Gómez Cedillos.

ESCUELA DE MATEMÁTICA:

DIRECTOR:

Ing. Carlos Mauricio Canjura

CIUDAD UNIVERSITARIA, NOVIEMBRE, 2011

"A Dios Todopoderoso."

"Acuérdate. oh Jeová, de tus piedades y
de tus misericordias, que son perpetuas;
De los pecados de mi juventud,
y de mis rebeliones, no te acuerdes."
(Salmo 25. v. 6-7.)

Agradecimientos

Dedicado con aprecio y agradecimiento primeramente a **Dios Todopoderoso**, por brindarme el soplo de vida, la familia que tengo, la novia que me has regalado, todas las personas que de alguna manera has puesto delante de mi para poder caminar por el diario vivir y levantarme en los momentos de angustia y calamidad.

A mis Padres y mis tres hermanos, especialmente a mi hermano **Daniel Enrrique Aguilar Martínez**, por ser quienes me han formado en la Universidad de la vida, en el hombre que soy, por sus consejos, y palabras de aliento, y a pesar de nuestra crisis económica hicieron posible que llegara a la Universidad de El Salvador, y culminar con mi carrera. Quiero decirles que de volver a nacer no estaría mas confiado y seguro de poder contar y estar con cada uno de ustedes como mi **única Familia** en todo el sentido de la palabra.

Buena parte de mis logros como en el presente agradezco a mi respetable compañera **Norma Guadalupe Moscoso Fuentes**, por compartir tu amor conmigo, has sido lo mas grande e inesperado que me ha brindado la Universidad de El Salvador.

Reconocer el acompañamiento de mis estimados amigos que se concretaron como tal en esta etapa de la vida, ellos saben quienes son, por haber tenido el placer de conocerlos, y disfrutar de la vida Universitaria junto a ustedes.

A mis apreciables asesores: **Dr. Simón Alfredo Peña Aguilar** y **MSc. Walter Otoniel Campos Granados**, por sus comentarios, sugerencias y correcciones, en la dirección del presente trabajo.

GRACIAS.

Resumen

El propósito de este trabajo de investigación es el estudio de una clase especial de grupos de Lie: Los **"Grupos de Lie de Matrices Reales o Complejos".** Presentamos algunos conceptos matemáticos bellos pues para la definición de grupos de Lie se tendrá que introducir el concepto de variedad diferenciable[1] el cuál es fundamental en muchas ramas de la matemática como en la física y viene de la generalización de conceptos en geometría. El trabajo está dividido en los siguientes capítulos:

1. **"Grupos y Matrices"**: En el primer capítulo de nuestro trabajo, se sentarán las bases preliminares que contendrán las definiciones elementales de grupo, luego daremos a las matrices estructura de espacio vectorial, seguidamente le asociamos una norma, así el conjunto de matrices tendrá estructura topológica, además se resaltarán algunos resultados de las formas n-lineales los cuales nos servirán en los restantes capítulos.

2. **"Grupos de Lie de Matrices"**: En este capítulo introduciremos el concepto de grupos de Lie de matrices. Se expone además los conceptos de homomorfismos continuos en grupos de Lie de matrices, estos mantienen tanto la parte algebraica como la topológica, luego se dará una visión más general de las ideas, definiendo el grupo lineal general de un espacio vectorial normado, se versará también sobre el tema de Acciones de grupo continuas.

3. **"La aplicación Exponencial de Matrices y Grupos Uniparamétricos"**: Este capítulo es de suma importancia para concretar nuestros fines dado que la función exponencial es fundamental en el estudio de subgrupos de Lie de matrices; en particular los grupos uniparamétricos. Se proporcionarán además algunas formulas útiles para la función exponencial, las cuales están ligadas a la teoría de ecuaciones diferenciales. La importancia de la función exponencial generalizada en la teoría de Lie es que aplica el álgebra de Lie de un grupo de Lie en el grupo mismo.

4. **"Espacios Tangentes y Álgebras de Lie"**: En este capítulo estudiaremos las álgebras de Lie, espacios vectoriales con una función bilineal la cual es antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi. Las álgebras de Lie tienen una importancia mayúscula en la teoría de Lie, ya que nos ayuda a ver el grupo de Lie no como una variedad si no como un espacio vectorial.

5. **"Variedades Diferenciales"**: Una variedad diferenciable es un espacio que localmente es igual a $\mathbb{R}^n$. Esto quiere decir que las variedades, con dimensión n, son todas iguales localmente y el interés mayor está en su geometría global. En este capítulo definiremos el concepto de Variedad diferenciable, función diferenciable, para ello precisaremos en los conceptos de cartas locales o

[1]Cualitativamente, una variedad diferenciable es un conjunto que localmente se puede representar por algún $\mathbb{R}^m$, y tal que los cambios de coordenadas entre diferentes representaciones de un subconjunto son C^∞.

sistemas de coordenadas locales, Atlas, espacio tangente a una variedad y diversos ejemplos de variedades diferenciables.

6. **“Grupos de Lie”**: El sexto y último capítulo trata a los **Grupos de Lie**. Un grupo de Lie es un grupo algebraico con estructura de variedad diferenciable y compatible entre ambas estructuras. Se generalizan en alguna medida los conceptos principales de los capítulos anteriores y se demuestra el Teorema principal: “Todo grupo de Lie de matrices es grupo de Lie”, verificando la aseveración ante dicha, así mismo, se establece que el reciproco de la afirmación no se satisface en general y se expone al grupo de Heisenberg de tamaño tres como contraejemplo, este grupo da la “existencia de grupos de Lie que no son grupos de Lie de matrices”, es decir un grupo de Lie que no se puede ver como un subgrupo de matrices.

Indice

Introducción

Como la historia nos lo viene diciendo, en general los resultados importantes y trascendentales en matemática son los capaces de vincular dos estructuras, en su esencia, totalmente distintas. En el año 1973, el matemático Noruego **Marius Sophus Lie** (1849-1925) estudiando propiedades de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales, dio origen a las ideas que conformaron la hoy denominada *Teoría de Lie,* la cual plantea la relación entre geometría, álgebra y la topología, este admirable matemático creó en gran parte la teoría de la simetría continua, y la aplicó al estudio de la geometría y las ecuaciones diferenciales. con aportes posteriores de los matemáticos **Weyl, Cartan, Chevalley, Killing, Harish Chandra** y otros estructuran la teoría de Lie, presentaremos en este trabajo de investigación las nociones básicas que subyacen en dicha teoría . En los primeros trabajos de Sophus Lie, la idea subyacente era construir una teoría de *grupos continuos*, que complementara la ya existente teoría de grupos[1].

Afirmamos en primera instancia el poder conocer el mundo maravilloso de los grupos de Lie y las álgebras de Lie, estudiando los así llamados grupos de Lie de matrices, mejor conocidos como los grupos clásicos lineales[2]. Trazaremos un objetivo fundamental: Estudiar la relación entre los grupos de Lie y los grupos de Lie de matrices[3]. Demostramos que todo grupo de Lie de matrices es un grupo de Lie, el reciproco de esta aseveración no es cierta para ello proporcionamos un contraejemplo: el grupo de Heisenberg. En este trabajo de investigación haremos uso exclusivo de técnicas del álgebra Lineal para la construcción del grupo de Heisenberg. El grupo de Heisenberg es importante en mecánica cuántica, teoría de operadores sobre espacios de Hilbert, entre otros campos de la ciencia.

Advertimos con precisión que la proyección del presente trabajo es dejar en claro lo que son los grupos Lie y las álgebras Lie, conceptos no tan evidentes para un estudiante de nuestra licenciatura en matemática, pues los cursos de álgebra moderna pese a su nombre de ningún modo refleja la diversidad del álgebra moderna, cuando se ha ignorado la piedra angular del algebra lineal: el algebra multilineal, en fin el álgebra lineal abstracta, no mal interpretemos que este tema es de álgebra, está encajado en las áreas de análisis y geometría, sólo se comprende cuan importante es el estudio del lenguaje algebraico, cuando se intenta prescindir de él al estudiar particularmente matemáticas.

[1]Para más detalles históricos de la teoría de Lie ver [[2], pág. 283-305]

[2]Ver [3]

[3]Un subgrupo algebraico, G de $GL_n(\mathbb{K})$ que es también un subespacio cerrado de $GL_n(\mathbb{K})$, lo llamaremos un **grupo de Lie de matrices sobre** $\mathbb{K}$, o un **subgrupo de Lie matricial de** $GL_n(\mathbb{K})$, denotado por $G \leq GL_n(\mathbb{K})$.

Capítulo 1

Grupos y Matrices

"Si por ciencia se entiende un conjunto sistematizado de conocimientos que constituyen una rama del saber humano, la matemática es la ciencia por exelencia".

(Luis A. Santalo.)

En el presente capítulo, se sentarán las bases preliminares que contendrán las definiciones elementales de grupo, luego daremos a las matrices estructura de espacio vectorial, seguidamente le asociamos una norma, así el conjunto de matrices tendrá estructura topológica. Además se resaltarán algunos resultados de las formas n-lineales los cuales nos servirán en los restantes capítulos.

1.1 Grupos y homomorfismos

Es extraordinario, que una de las ramas del álgebra más antigua y más abundante en resultados, que juega un papel fundamental en la geometría y en las aplicaciones de las matemáticas a cuestiones de las ciencias naturales, se basa en axiomas tan sencillos

Definición 1.1.1 *Un grupo es un conjunto G con una operación binaria $G \times G \xrightarrow{*} G$, $(g, h) \longrightarrow g * h$*[1]*, que verifica:*

1. *La propiedad asociativa: $(gh)k = g(hk)$.*
2. *La existencia de un elemento idéntico*[2] *$\boldsymbol{e} \in G$, tal que, para cada $g \in G$, $\boldsymbol{e}g = g\boldsymbol{e} = g$.*
3. *La existencia de un elemento inverso $g^{-1} \in G$, para cada $g \in G$, tal que $g^{-1}g = gg^{-1} = \boldsymbol{e}$.*

[1]Cuando nos refiramos a un grupo $(G, *)$, habitualmente omitiremos la operación binaria interna $*$ y si no hay riesgo de confusión también omitiremos el simbolo $*$ al escribir el producto, es decir se escribira gh en lugar de $g * h$.

[2]También llamado elemento neutro.

Los grupos[1] con operaciones conmutativas se llaman, naturalmente, conmutativos, y más frecuentemente.

Definición 1.1.2 *Un grupo* **G** *es* **abeliano**[2]*, si su operación binaria* $*$ *es conmutativa.*

Definición 1.1.3 *Si* **G** *es un grupo finito entonces el orden de* **G** *denotado por* $|\mathbf{G}|$*, es él número de elementos en* **G**.

Observación:
La palabra «orden» en matemáticas, tiene significados múltiples, en ese sentido en cada caso, surgirá claramente del contexto a qué orden nos referimos.
El orden de un grupo es su cardinalidad; en base a él, los grupos pueden clasificarse en grupos de orden finito de orden infinito. La clasificación de los grupos simples de orden finito es uno de los mayores logros matemáticos del siglo XX.

Procederemos ahora a precisar el concepto de grupo contenido en otro.

Definición 1.1.4 *Si* **H** *es un subconjunto de un grupo* **G** *cerrado bajo la operación de grupo de* **G** *y si* **H** *es él mismo un grupo bajo esta operación inducida, entonces* **H***, es un* ***subgrupo*** *de* **G**. *Denotamos por* $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$ *ó* $\mathbf{G} \geq \mathbf{H}$ *el hecho de que* **H** *es un subgrupo de* **G**.

Definición 1.1.5 *Un* **isomorfismo** *entre un grupo* **G** *y un grupo* $\mathbf{G}'$ *es una función* ϕ *uno a uno, que lleva a* **G** *sobre* $\mathbf{G}'$ *y tal que todas las* x *y* y *en* **G**,

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

Si los grupos **G** y $\mathbf{G}'$ son isomorfos, se denotará por:$\mathbf{G} \simeq \mathbf{G}'$.

No debe sorprender a ningún matemático actual, que al menos todo grupo finito **G**, sea isomorfo a algún subgrupo del grupo $\mathbf{S_G}$[3], lo mismo sucede con los grupos infinitos; el interés principal de esta parte es presentar un resultado extraordinario del cual se desprende que los grupos de permutaciones son universales en el sentido de contener subgrupos isomorfos a uno dado. El teorema de Cayley literalmente dice que "Todo grupo es isomorfo a algún grupo formado por permutaciones bajo la multiplicación(composición de funciones) de permutaciones".

Teorema 1.1.1 *(Cayley) Todo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones*

Demostración:

- Sea **G** un grupo dado, consideremos en principio $\mathbf{S_G}$, el grupo de todas las permutaciones de **G** bajo la operación $\circ$, (Nótese que en el caso finito si **G** tiene n-elementos; $\mathbf{S_G}$ tiene $n!$ elementos. Así, en general, es claro que $\mathbf{S_G}$ es demasiado grande para ser isomorfo a **G**). La idea es encontrar un conjunto $\mathbf{G}'$ de permutaciones que sea candidato a formar un grupo isomorfo a **G**, que sea

[1] El propio término «grupo» pertenece al matemático francés Evariste Galois(1811-1832), el legítimo creador de la teoría de los grupos. Los trabajos geniales de Galois resultaron incomprendidos, y el renacimiento del interés por ellos comenzó sólo despues del libro de Jordan «Curso de la teoría de permutaciones y de ecuaciones algebraicas», en el año 1870.

[2] En honor al matemático noruego Niels Henrik Abel(1802-1829).

[3] $\mathbf{S_G}$ denota (como $\mathbf{S_n}$); todas las permutaciones de **G**

subgrupo de $\mathbf{S_G}$.
Para $a \in \mathbf{G}$ sea ρ_a la transformación de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{G}$ dado por,

$$\rho_a(x) = xa; \;\; x \in \mathbf{G}$$

Se puede pensar en ρ_a como multiplicación derecha por a.
Si $\rho_a(x) = \rho_a(y)$ entonces $xa = ya$ y por la ley cancelativa, se tiene $x = y$; Así ρ_a es una función inyectiva.
Sea $y \in \mathbf{G}$, entonces

$$\rho_a(ya^{-1}) = (ya^{-1})a = y(a^{-1}a) = y$$

Así ρ_a lleva a $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{G}$, es decir es sobreyectiva. Como $\rho_a : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ es inyectiva y sobre; ρ_a es una biyección, por tanto ρ_a es una permutación, de $\mathbf{G}$, esto es, $\rho_a \in \mathbf{S_G}$; Sea $\mathbf{G}' = \{\rho_a \mid a \in \mathbf{G}\}$.

- Verificaremos que $\rho_a\rho_b = \rho_{ba}$, para mostrar que estas funciones son iguales, se debe mostrar que actúan igual sobre toda $x \in \mathbf{G}$. Ahora

$$\rho_a\rho_b(x) = \rho_a(\rho_b(x)) = \rho_a(xb) = xba = \rho_{ba}(x).$$

Así, $\rho_a\rho_b = \rho_{ba}$, y por tanto $\mathbf{G}'$ es cerrado bajo la composición de funciones. Además es claro que para toda $x \in \mathbf{G}$

$$\rho_{\mathbf{e}}(x) = xe = x; \qquad \text{dónde } e \text{ es el elemento neutro de } \mathbf{G}.$$

de modo que $\rho_{\mathbf{e}}$ es la permutación identidad en $\mathbf{S_G}$ y está en $\mathbf{G}'$.
Por otra parte dado que $\rho_a\rho_b = \rho_{ba}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \rho_a\rho_{a^{-1}} &= \rho_{a^{-1}a} = \rho_e, \text{ y además} \\ \rho_{a^{-1}}\rho_a &= \rho_{aa^{-1}} = \rho_e. \end{aligned}$$

De aquí que $(\rho_a)^{-1} = \rho_{a^{-1}}$, de modo que $(\rho_a)^{-1} \in \mathbf{G}'$. Entonces $\mathbf{G}'$ es un subgrupo de $\mathbf{S_G}$.

- Finalmente hay que provar $\mathbf{G} \simeq \mathbf{G}'$
Sea $\phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}'$, dada por $\phi(a) = \rho_{a^{-1}}, a \in \mathbf{G}$;

$$\text{Si } \phi(a) = \phi(b) \text{ entonces } \rho_{a^{-1}} = \rho_{b^{-1}}.$$

es decir $\rho_{a^{-1}}$ y ρ_{b-1}, deben ser la misma permutación de $\mathbf{G}$. En particular,

$\rho_{a^{-1}}(e) = \rho_{b^{-1}}(e) \rightarrow ea^{-1} = eb^{-1} \rightarrow a^{-1} = b^{-1} \rightarrow a = b$, por la unicidad bajo inversos.

Por tanto ϕ es inyectiva.
Trivialmente ϕ es sobre, (por la definición de $\mathbf{G}'$).
y puesto que

$$\phi(ab) = \rho_{(ab)^{-1}} = \rho_{b^{-1}a^{-1}} = \rho_{a^{-1}}\rho_{b^{-1}} = \phi(a)\phi(b).$$

Se tiene que $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b); \qquad \forall a, b \in \mathbf{G}$.
Por tanto ϕ, es un isomorfismo. □

Definición 1.1.6 *Una aplicación ϕ de un grupo $(\mathbf{G}, \cdot)$ en un grupo $(\mathbf{G}', *)$ es un un homomorfismo si $\phi(a \cdot b) = \phi(a) * \phi(b)$, $\forall a, b \in \mathbf{G}$.*

Esta definición puede ser representada diciendo que el diagrama adjunto conmuta(ver Figura 1.1). La exigencia para un homomorfismo de preservar la identidad y la inversa es intrínseca, $\phi(e) = e', \phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$. Además la imagen de un subgrupo es un subgrupo, en particular $\phi(\mathbf{G}) \leq \mathbf{G}'$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G} \times \mathbf{G} \arrow[r, "\phi\times\phi"] \arrow[d, "\cdot"'] & \mathbf{G}' \times \mathbf{G}' \arrow[d, "*"] \\
\mathbf{G} \arrow[r, "\phi"'] & \mathbf{G}'
\end{tikzcd}$$

Figura 1.1: Representación grafica de un homomorfismo

1.1.1 Homomorfismos

Entre las aplicaciones buenas entre grupos, es decir las que conservan las operaciones de los grupos en los que está definida, tenemos.

Si el homomorfismo ϕ es inyectivo, se dirá que es un **monomorfismo**.

1. Si el homomorfismo ϕ es inyectivo, se dirá que es un **monomorfismo**.
2. Si ϕ es sobre , se dirá que es un **epimorfismo**.
3. Si ϕ es biyectivo, se dirá que es un **isomorfismo**.

La aplicación isomorfa de un grupo sobre sí mismo, también se llama **automorfismo.**

Definición 1.1.7 *Se llama kernel o núcleo del homomorfismo $f : G \longrightarrow G'$ al conjunto*

$$Ker(f) = \{g \in G \,|\, f(g) = e', \;\textit{unidad del grupo}\, G'\}.$$

La aplicación homomorfa de un grupo sobre sí mismo, también se llama **endomorfismo.**

Relación de equivalencia

Si X es un conjunto, una **relación** $\mathcal{R}$ en X es un subconjunto de $X \times X$. Decimos que $\mathcal{R}$ es llamada de **equivalencia** si de manera simultánea es **reflexiva, simétrica y transitiva**. Cada relación de equivalencia determina una partición $X/\mathcal{R} = \{[x] \,:\, x \in X\}$ formada por las clases de equivalencia $[x] = \{y \,:\, x\mathcal{R}y\}$; de manera natural existe una función sobreyectiva

$$q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$$

Toda función $f : X \longrightarrow Y$ define una relación de equivalencia en X si definimos $x \sim y$ si y solo si $f(x) = f(y)$. En este caso notamos a la relación(y a la partición) como $\mathcal{R}_f$ con $\mathcal{R}_f = \left\{f^{-1}(t) : t \in f(X)\right\}$.

El siguiente diagrama es conmutativo, donde $\mathcal{R}_f$ se encarga de igualar los puntos que tienen una misma imagen, con lo cual h_f definida como $h_f([x]) = f(x)$ está bien definida, es inyectiva y por su codominio es sobreyectiva, es decir tenemos una biyección con inversa $h_f^{-1}(y) = f^{-1}(y)(ver Figura 1.2)$
El anterior diagrama se conoce como el teorema de la factorización de funciones entre conjuntos o teorema del cociente para conjuntos.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/\mathcal{R}_f \arrow[r, "\approx", "h_f"'] & f[X] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Figura 1.2: Diagrama del teorema del cociente para conjuntos

Grupo cociente

El estudio de un grupo $(G, *)$ puede simplificarse si se estudian sus subgrupos propios, que poseen un orden inferior al orden de G, y los conjuntos cocientes de G sobre cada uno de estos subgrupos. Si H es un subgrupo de G podemos considerar el conjunto cociente G/H, que es el conjunto de las clases de equivalencia que se obtienen al definir en G la relación de equivalencia módulo H.

Definición 1.1.8 *Sea G un grupo y H un subgrupo de G; diremos que dos elementos $x, y \in G$ están relacionados mediante H, y escribiremos $x \equiv y(H)$, si y sólo si $x^{-1}y \in H$.*

Para cada subgrupo H de G hacemos una descomposición de G disjunta en pedazos llamados clases laterales (izquierdas o derechas) de H en G. Las clases laterales izquierdas son los conjuntos de la forma

$$gH = [g] = \{gh \ : \ h \in H, \ \ g \in G\}\,.$$

Así H es el mismo una clase lateral para $g = 1$, y en general una clase lateral gH es H **trasladado por** g, no debemos tomar generalmente la palabra trasladado literalmente. Un ejemplo para el cual éste es literalmente cierto es tomando G como el plano $\mathbb{R}^2$ bajo adición de vectores, y H el subgrupo de puntos $\left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \in \mathbb{R}\right\}$. En este caso utilizamos la notación aditiva y se escriben las clases laterales de (x, y) como

$$(x, y) + H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \in \mathbb{R}\right\}, \text{ donde } x \text{ es constante.}$$

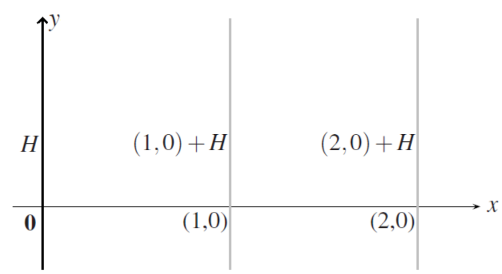


Figura 1.3: Subgrupo H de $\mathbb{R}^2$ y clases laterales.

Entonces H es el y-eje y la clase lateral $(x, y) + H$ es H trasladado por el vector (x, y)(ver Figura 1.3).

Ahora dotemos a G/H de estructura de grupo, cuya operación esté relacionada con la operación de G, en este sentido lo más logico que cabe esperar del resultado de operar las clases de equivalencia, $(xH)(yH)$ en G/H es la clase de equivalencia $(xy)H$. Pero esto no sucede en cualquier subgrupo de un

Ejemplo 1.1.1 *Sea $G = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ con la multiplicación compleja $*$, definida por $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.*

1. *El elemento identidad es $(1, 0)$,*
2. $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$,
3. *Si $z = (a, b)$, $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ donde $\overline{z}$ denota al conjugado y $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ es el modulo.*

   El subconjunto $H = z : |z| = 1$, es un subgrupo y se denota por S^1 (la circunferencia unidad). Si $x \in G$ entonces xH es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $|x|$(para todo $h \in H$ tenemos $|xh| = |x||h| = |x|1 = |x|$; ver Figura 1.4).

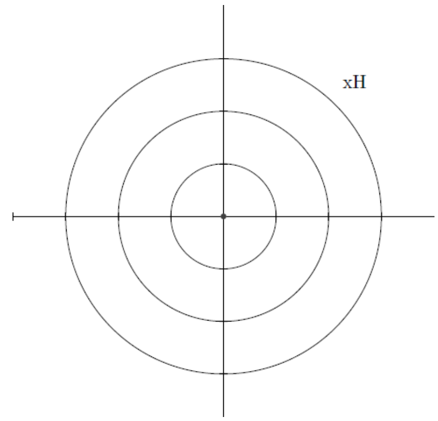


Figura 1.4: Subgrupo S^1 de $\mathbb{C}^*$ y clases laterales.

grupo dado, estos subgrupos distinguidos reciben el nombre de **normales**, más concreto y elemental tenemos

Definición 1.1.9 *Un subgrupo H de un grupo G se dice normal, y escribiremos $H \triangleleft G$, si $(xH)(yH) = (xy)H$ para todo $x, y \in G$.*

Proposición 1.1.1 *Sea G un grupo y H un subgrupo normal de G; la operación $(xH)(yH) = (xy)H$ define el conjunto cociente G/H un estructura de grupo. Este grupo recibe el nombre de* **grupo cociente de G sobre H**

Demostración
Sea $G/H \times G/H \xrightarrow{*} G/H$, $(xH, yH) \longrightarrow (xH)(yH) = (xy)H$
La operación esta bien definida, pues si x' es un representante de la clase de xH e y' es un representante de la clase de yH, $x'y'$ es un representante de $(xy)H$. Pero como $x' \in xH$ e $y' \in yH$, $x'y' \in (xH)(yH) = (xy)H$, ya que $H \triangleleft G$, luego la operación es binaria.

1. La asociatividad es consecuencia de la asociatividad de G.
2. Sea el elemento idéntico $\mathbf{e} \in G$, luego
$$(xH)(eH) = (xe)H = xH, \quad (eH)(xH) = (ex)H = xH$$
así H es el elemento identico de G/H,
3. Dado que
$$(xH)(x^{-1}H) = (xx^{-1})H = eH = H, \quad (x^{-1}H)(xH) = (x^{-1}x)H = eH = H$$
Así dado $xH \in G/H$, $x^{-1}H$ es el su inverso. □

La siguiente proposición nos da condiciones equivalentes de normalidad que permiten determinar más fácilmente los subgrupos normales de un grupo.

Proposición 1.1.2 *Sea G un grupo y H un subgrupo de G, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *H es subgrupo normal de G,*
2. $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$*,*
3. $xH = Hx$ *para todo* $x \in G$*, es decir las clases de equivalencia por la izquierda y por la dercha coinciden.*

Demostración

(1➔2) Sea H subgrupo normal de G, entonces $(xH)(x^{-1}H) = (xx^{-1})H = H$, para todo $x \in G$; se tiene entonces que si $h \in H$, entonces $(xhx^{-1}h) \in H$ y por tanto, $(xhx^{-1}) \in Hh^{-1} = H \subset H$, ahora dado que $H \subset xHx^{-1}$, basta tomar $x = e$. Por tanto $xHx^{-1} = H$.

(2➔3) Supongamos que $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$, operando con x por la derecha se obtiene trivialmente $xH = Hx$.

(3➔1) Finalmente supongamos que $xH = Hx$ para todo $x \in G$, queremos demostrar que $(xH)(yH) = (xy)H$. Sea $(xy)h \in (xy)H$; entonces

$$(xy)h = (xe)(yh) \in (xH)(yH)$$

Esto prueba que $(xy)H \subset (xH)(yH)$.
Sean ahora $x' \in xH$ e $y' \in yH$; se tiene que $x' = xh_1$ e $y' = yh_2$ con $h_1, h_2 \in H$, entonces $x'y' = (xh_1)(yh_2)$, puesto que $yH = Hy$, existe $h_3 \in H$ tal que $h_1y = yh_3$, con lo cual

$$x'y' = (xh_1)(yh_2) = x(h_1y)h_2 = x(yh_3)h_2 = xy(\underbrace{h_3h_2}_{\in H}) \in (xy)H.$$

Con lo cual se prueba la inclusión $(xH)(yH) \subset (xy)H$. Por tanto $(xH)(yH) = (xy)H$, y con ella la normalidad de H en G. □

Teorema 1.1.2 *Si N es un subgrupo normal de un grupo G, entonces la transformación canónica(o natural)* $\pi : G \longrightarrow G/N$ *dada por* $\pi(a) = aN$ *para* $a \in G$ *es un homomorfismo sobreyectivo.*

Demostración
Sean $a, b \in G$ entonces

$$\pi(ab) = (ab)N = (aN)(bN) = \pi(a)\pi(b)$$

La sobreyectividad de π es consecuencia directa de su definición. □

Teorema 1.1.3 (Teorema de correspondencia entre homomorfismos y subgrupos) *Sea* ϕ *un homomorfismo de grupos de un grupo G en un grupo* G'*, sean* e, e' *las identidades de G y* G' *respectivamente, entonces:*

1. $\phi(e) = e'$*,*

2. *Si $a \in G$ entonces $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$,*

3. *Si H es un subgrupo de G, entonces $\phi(H)$ es un subgrupo de G',*

4. *Si H es un subgrupo normal de G, entonces $\phi(H)$ es un subgrupo normal de G',*

5. *Si K' es un subgrupo de G', entonces $\phi^{-1}(K')$ es un subgrupo de G,*

6. *Si K' es un subgrupo normal de G', entonces $\phi^{-1}(K')$ es un subgrupo normal de G,*

Demostración
Ver [[18] pág. 132.] □
Observación
En particular, para un homomorfismo de $\phi : G \longrightarrow G'$, el kernel, $Ker(\phi) = \phi^{-1}(\{e'\})$ es un subgrupo normal de G.

Definición 1.1.10 *Sea $\phi : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo y sea $a' \in G'$. La imagen inversa $\phi^{-1}(a') = \{g \in G \,|\, \phi(g) = a'\}$ es la fibra sobre a' bajo ϕ(ver Figura 1.5)*

Como $\{e'\}$ es en particular un subgrupo de G', el teorema 1.1.3 muestra que la fibra $\phi^{-1}(\{e'\})$ bajo el homomorfismo ϕ, es un subgrupo de G, Así las fibras de G bajo ϕ forman una partición de G

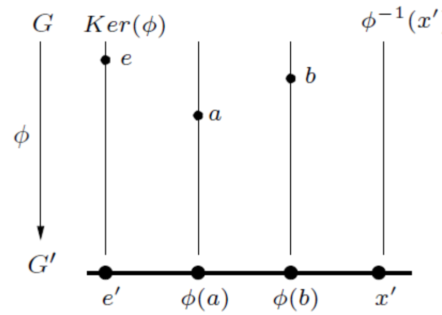


Figura 1.5: Fibras y Kernel.

Grupos cíclicos

Dado un grupo G y un elemento $a \in G$, todos los elementos de la forma a^n, $n \in \mathbb{Z}$ también están en G.

Definición 1.1.11 *Dado un grupo G y un elemento $a \in G$, el conjunto*

$$\langle a \rangle = \{a^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\} = \bigcap_{i \in I} H_i, \quad H_i \leq G \, y \, a \in H_i$$

es un subgrupo de G, de hecho el subgrupo más pequeño que contiene al elemento a(recordemos que la intersección de subgrupos es un subgrupo) y es llamado el **subgrupo cíclico generado por el elemento** *a*

Observación
Si $G = \langle a \rangle$ para algún $a \in G$, decimos que G es un grupo cíclico generado por a.

Construcción de grupos

Definición 1.1.12 *Sean $G_1, G_2, \ldots, G_n$ son grupos, al producto cartesiano*

$$\prod_{k=1}^{n} G_k = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$$

le damos una estructura de grupos al operar las $n-$tuplas ordenadas operando componente a componente

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) * (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n)$$

y se llama **producto directo externo** *de los grupos G_i.*

Nótese que cada G_k es isomorfo de una manera natural a un subgrupo $G_k \in \prod_{k=1}^{n} G_k$ cuando identificamos cada $g \in G_k$ con el elemento $(e_1, \ldots, e_{k-1}, g, e_{k+1}, \ldots, e_n) \in \prod_{k=1}^{n} G_k$. Entonces decimos que $\prod_{k=1}^{n} G_k$ es el producto directo **interno** de estos subgrupos G_k a cambio de decir que era el producto directo externo de los G_k

Ejemplo 1.1.2 *Si $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}^+$ con un máximo comun denominador $MCD(m_1, m_2, \ldots, m_n) = 1$, entonces $\prod_{k=1}^{n} \mathbb{Z}_{m_k}$ es cíclico y se tiene*

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbb{Z}_{m_k} \simeq \mathbb{Z}_{m_1 m_2 \ldots m_n}.$$

En geometría, un toro se describe como una superficie de revolución generada por una circunferencia que gira alrededor de una recta exterior coplanaria (en su plano y que no la corta). La palabra «toro» proviene del vocablo en latín torus, el cual en castellano significa «bocel» o «murecillo».
Topológicamente, un toro es una superficie cerrada definida como el producto cartesiano de dos circunferencias, y del ejemplo 1.1.1, se tiene

Ejemplo 1.1.3 *Sea $(S^1, *)$, el cual es un grupo bajo la multiplicación compleja, se tiene que*

$$S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$$

el toro $\mathbb{T}^2$, es un grupo(ver Figura 1.6).

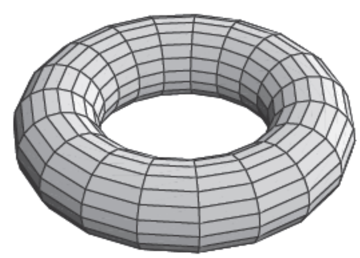


Figura 1.6: El toro descrito como el producto de dos circunferencias.

Con esta descripción se puede generalizar fácilmente el toro a cualquier dimensión o potencia. Un toro n dimensional se define como el producto de n circunferencias:

Ejemplo 1.1.4 *Dado que el $(S^1, *)$, es un grupo bajo la multiplicación compleja, se tiene que*

$$S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1 = \mathbb{T}^n$$

el toro $\mathbb{T}^n$, es un grupo

Factorización de homomorfismos

Teorema 1.1.4 (Teorema fundamental del homomorfismo) *Sea φ un homomorfismo de un grupo G en un grupo G', con kernel K. Entonces $\varphi(K)$ es un grupo y existe un isomorfismo canónico(natural) de $\varphi(G)$ con G/K, es decir $\varphi(G) \approx G/Ker(\varphi)$(ver Figura 1.7)*

Demostración
Ver [[18], pág. 133.] □

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/Ker(\varphi) \arrow[ur, dashed, "\approx", "F"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 1.7: El diagrama conmuta si $F \circ \pi = \varphi$.

Si $f : G \longrightarrow H$ y $g : H \longrightarrow J$ son homomorfismos (isomorfismos) de grupos, la compuesta $g \circ f : G \longrightarrow J$ también es un homomorfismo (isomorfismo). Sabemos del teorema 1.1.3 que un homomorfismo f tiene un comportamiento ideal: la identidad va a la identidad, la imagen inversa de un subgrupo (normal) es un subgrupo (normal), la preimagen de la identidad es el núcleo o kernel de f. El siguiente teorema muestra cómo factorizar un homomorfismo utilizando un isomorfismo.

Teorema 1.1.5 *Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. f tiene una única factorización $f = i \circ r \circ q$(ver Figura 1.8) donde q es la función cociente, r está definida como $r([g]) = f(g)$, i es la inclusión.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & H \\ G/Ker(f) \arrow[r, "\approx", "r"'] & Im(f) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Figura 1.8: Teorema del cociente para grupos.

El teorema del cociente para conjuntos, nos dice que tal factorización existe, falta verificar entonces que las condiciones algebraicas se mantienen (homomorfismos). Nótese que para este diagrama el homomorfismo r es un isomorfismo $G/Ker(f) \approx r(H)$ si f es sobreyectiva (Teorema fundamental de homomorfismo).

1.1.2 Acciones de grupo

En el álgebra y la geometría, una acción de grupo es una manera de describir las simetrías de los objetos utilizando grupos.

Definición 1.1.13 *Una acción (por la izquierda) de un grupo $(G, *)$ en un conjunto X es una función $\psi : G \times X \longrightarrow X$, que verifica las siguientes propiedades:*

i) $\psi(e, x) = x$, *para todo* $x \in X$; $e \in G$ *es el elemento idéntico y,* *ii)* $\psi(g, \psi(h, x)) = \psi(g * h, x)$*, para* $g, h \in G$ *y* $x \in X$*.*

cuando no halla lugar a ambigüedad escribiremos gh en vez de $\psi(g, h)$*.*

Observación
Bajo estas condiciones, X es un G-conjunto.
Análogamente, una acción(por la derecha) de un grupo G en un conjunto X es una función $\varphi : X \times G \longrightarrow X$ que verifica

i) $\varphi(x, e) = x$, para todo $x \in X$; $e \in G$ es el elemento idéntico y,

ii) $\varphi(\varphi(x, g), h) = \varphi(x, gh)$, para $g, h \in G$ y $x \in X$.

Ejemplo 1.1.5 *Aquí X puede ser finito o infinito*

- *Sea* $L(X) = \{f : X \longrightarrow X : f \text{ es un homomorfismo biyectivo.}\}$*. Note ademas que el grupo* $L(X)$ *actúa por la izquierda en el conjunto X bajo*

$$\begin{array}{rcl} L(X) \times X & \longrightarrow & X \\ (f, x) & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

  También se puede definir una acción de G en X, ψ*, es equivalente a definir un homomorfismo de grupos,*

$$\begin{array}{rcl} \psi : G & \longrightarrow & L(X) \\ g & \longmapsto & \psi_g. \end{array}$$

  , con $\psi_g(x) = \psi(g, x)$*.*

- *Sea X cualquier conjunto y* S_X *el grupo de todas las permutaciones de X. Entonces, X es un* S_X*-conjunto donde para* $x \in X$ *y* $\sigma \in S_X$*, la acción* $\sigma(x)$ *de* σ *en x es el efecto de la permutación* σ *en x. La segunda condición se cumple, como consecuencia de la definición de multiplicación de permutaciones como composición de funciones y la condición primera es inmediata a partir de la definición de la permutación identidad. En particular,* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *es un* S_n*-conjunto.*

Definición 1.1.14 *Sea* $\psi : G \times X \longrightarrow X$*, una acción de un grupo, se llamará transitiva, o se dirá que el grupo actúa transitivamente sobre un Conjunto X, si dados dos elementos* x, y *cualesquiera del conjunto X, existe un elemento g del grupo que aplica el x en y, es decir:*
existe $g \in G$*, tal que* $\psi(g, x) = y$*.*

Existen dos importantes nociones asociadas a la acción de grupo.

Algunos elementos de un grupo G actuando en un espacio X, podran fijar un punto $x \in X$. Estos elementos del grupo forman un subgrupo llamado el **estabilizador o grupo de isotropía** de x, definido por:

$$Stab_G(x) = \{g \in G : gx = x\} = \{g \in G : \psi(g, x) = x\} \subseteq G,$$

mientras la órbita[1] de x es

$$Orb_G(x) = \{gx \in X : g \in G\} = \{\psi(g, x) \in X : g \in G\} \subseteq X.$$

Teorema 1.1.6 *Sea G que actúa sobre X.*

1. *Para $x \in X$, $Stab_G(x)$ es un subgrupo de G.*

2. *Para $x, y \in X$, y $y \in Orb_G(x)$ si y solo si $Orb_G(x) = Orb_G(y)$.*

3. *Para $x \in X$, existe una biyección.*

$$\varphi : G/Stab_G(x) \longrightarrow Orb_G(x)$$

   tal que $\varphi(g\,Stab_G(x)) = gx$. Además φ es equivalente sobre G en el sentido de que para todo $g, h \in G$,

$$\varphi((gh)\,Stab_G(x)) = h\,\varphi(g\,Stab_G(x)).$$

4. *Si $y \in Orb_G(x)$, entonces para algún $g \in G$ tenemos que*

$$Stab_G(y) = g\,Stab_G(x)\,g^{-1}.$$

Demostración

1. Sean $g_1, g_2 \in Stab_G(x)$, entonces por la condición ii) dada en la definición 1.1.13 se tiene que

$$(g_1\,g_2)x = g_1(g_2x) = g_1x = x,$$

   por lo tanto $g_1g_2 \in Stab_G(x)$.
   e[2] $\in Stab_G(x)$, por la definición 1.1.13.
   Si $g \in Stab_G(x)$ entonces $g^{-1}x = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x$, por lo tanto $g^{-1} \in Stab_G(x)$
   Podemos por tanto asegurar que $Stab_G(x)$ es un subgrupo de G.

2. Si $y \in Orb_G(x)$ entonces existe $g \in G$ tal que $y = gx$, es decir $x = g^{-1}y$ de esta forma $Orb_G(y) = Orb_G(x)$.
   Si por otra parte tenemos $Orb_G(y) = Orb_G(x)$, como $ey = y \in Orb_G(y)$, entonces $y \in Orb_G(x)$.

3. Como $Stab_G(x)$ no necesariamente es un grupo normal de G entonces $G/Stab_G(x)$ no necesriamente tiene estructura de grupo. Si definimos la relación $g_1 \sim g_2 \leftrightarrow g_1x = g_2x$, y esto sucede si y solo si $g_1, g_2 \in Stab_G(x)$, entonces

$$G/\sim = G/Stab_G(x).$$

   Verifiquemos que φ es una biyección.

[1]En la mecánica celeste, la ruta fija un rastro cuando un planeta se mueve alrededor del Sol se llama una órbita. Cuando un grupo G actúa sobre un conjunto X(Este proceso se conoce como acción de grupo), que permuta los elementos de X. Cualquier elemento x de X se mueve en una trayectoria fija que se llama su órbita.

[2]e es el elemento neutro del grupo G.

- Sean $g_1, g_2 \in G$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi(g_1 Stab_G(x)) = \varphi(g_2 Stab_G(x)) &\leftrightarrow g_1 x = g_2 x\\ &\leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in Stab_G(x)\\ &\leftrightarrow g_1^{-1} g_2 Stab_G(x) = Stab_G(x)\\ &\leftrightarrow g_1 Stab_G(x) = g_2 Stab_G(x).\end{aligned}$$

  La función φ es inyectiva.

- Sea gx un elemento cualquiera de $Orb_G(x)$ para $x \in X$, $g \in G$ y $gStab_G(x) \in G/Stab_G(x)$. Siempre que

$$\varphi(gStab_G(x)) = gx.$$

  Podemos asegurar que φ es sobre.

4. Si $y \in Orb_G(x)$ entonces existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Sea $h_x \in Stab_G(x)$, entonces

$$(gh_x g^{-1})y = (gh_x)(g^{-1}y) = (gh_x)x = g(h_x x) = gx = y$$

   Por lo tanto $gh_x g^{-1} \in Stab_G(x)$, y así

$$gStab_G(x)g^{-1} \subseteq Stab_G(y).$$

   Ahora sea $h_y \in Stab_G(y)$, encontremos un $h_x \in Stab_G(x)$ tal que $h_y = gh_x g^{-1}$, tomando $h_x \in Stab_G(x)$,

$$h_x x = (g^{-1}h_y g)x = (g^{-1}h_y)(gx) = (g^{-1}h_y)y = g^{-1}(h_y y) = g^{-1}y = x.$$

   Por tanto $Stab_G(y) \subseteq gStab_G(x)g^{-1}$; y por consiguiente

$$Stab_G(y) = gStab_G(x)g^{-1}.$$

□

Otros temas

Hemos expuesto el número mínimo de conceptos necesarios para entender las ideas que siguen. Hay un conjunto de conceptos importantes que hemos dejado fuera, y que el lector que quiera profundizar en el tema debe conocer, estos son: **clases de conjugación, producto directo de grupos, grupo simple, centro y centralizador, etc.**

Puede consultarse por ejemplo [18] , [19] y [20].

1.2 Matrices como espacio vectorial

El tema de espacios vectoriales es la piedra angular del álgebra lineal. De aquí en adelante se entenderá que los resultados, son validos en el campo $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ (Real ó Complejo), no sólo de los números reales(siempre y cuando no se diga otra cosa). Las propiedades ó axiomas de los espacios vectoriales son ya conosidas, sin embargo, se enuncian aqui brevemente:

Definición 1.2.1 *Un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, es un conjunto* **V** *dotado de dos operaciones. Una de ellas interna (suma)*

$$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V},$$

respecto al que es un grupo abeliano y una operación externa, el producto por escalar

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V},$$

que verifica

1. $(a + b)v = au + bv$.
2. $a(u + v) = au + av$.
3. $a(bv) = (ab)v$.
4. $1v = v$, *donde* $u, v \in \mathbf{V}$, $a, b \in \mathbb{K}$ *y 1 es la unidad en* $\mathbb{K}$.

Se denota $M_{m,n}(\mathbb{K})$, al conjunto de matrices de tamaño $m \times n$(m-filas y n-columnas), con entradas en $\mathbb{K}$, es decir

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \longleftrightarrow A = [a_{ij}] = [(A)_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{con } a_{ij} \in \mathbb{K}$$

El concepto de matriz conjugada compleja es importante en la teoría de Lie.

Definición 1.2.2 *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ la matriz que surge de sustituir en A todo elemento por el número complejo conjugado de dicho elemento se llama conjugada compleja de A y se denota por $\overline{A}$.*

Observación
$\overline{A} = A$ si y sólo si A es real puesto que, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{z} = z \Leftarrow : z \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.1 *Dada* $A = \begin{pmatrix} 3-i & 4 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix}$, *se tiene que* $\overline{A} = \begin{pmatrix} 3+i & 4 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix}$

Ahora pasamos a definir el concepto de matriz hermitiana[1]

Definición 1.2.3 *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$, si $A = \overline{A^T} = A^*$ la matriz A, se llama hermitiana o simétrica(según Hermite.)*

Observaciones
Si $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ se cumple que $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$, esto conlleva aque los elementos de la diagonal son números reales y los elementos simétricos con respecto a la diagonal principal son conjugados.
Una matriz es hermitiana si y solo si es simétrica.

[1]Estas matrices se denominan así en honor al matemático francés Charles Hermite(1822-1901), que contribuyó grandemente al desarrollo del álgebra y del análisis. En la teoría de la física atómica a menudo aparecen matrices con coeficientes complejos, muchas de las cuales son hermitianas.

Ejemplo 1.2.2 *1. Es facil verificar que*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4+6i & 8-10i \\ 4-6i & 10 & 12+4i \\ 8+10i & 12-4i & -14 \end{pmatrix}, \text{ es hermitiana.}$$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 7 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, *es hermitiana puesto que es real y simétrica.*

Sin abusar del lenguaje matemático haremos uso de una notación especial

$$M_n(\mathbb{K}) = M_{n,n}(\mathbb{K}), M_{\mathbb{K}} = M_{2,2}(\mathbb{K}), \mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Teorema 1.2.1 . $(M_{m,n}(\mathbb{K}), +)$ *es un grupo abeliano.*

Demostración:

- La matriz
$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{actúa como elemento neutro para la adición}$$
de matrices.

- $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$; con
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{existe exactamente } B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$
$$B = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}, \text{tal que}$$
$A + B = \mathbf{0}_{m,n}$. La matriz obtenida B se llama matriz opuesta de la matriz A, para la adición.

- La adición de matrices es asociativa y conmutativa. □

Definición 1.2.4 *Se llama multiplicación por escalar de una matriz* $A \in M_{m,n}$, *por un escalar de* $\mathbb{K}$, *a la aplicación*

$$\mathbb{K} \times M_{m,n} \xrightarrow{\bullet} M_{m,n}$$

, dada por $(\lambda, A) \longrightarrow \lambda \bullet A = \lambda A,\ A \in M_{m,n}$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposición 1.2.1 . *La multiplicación por escalar tiene las siguientes propiedades:*

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

2. $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A.$

3. $(\lambda_1\lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A).$

4. $1A = A$

esto para todo $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ *y* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

Teorema 1.2.2 . $(M_n(\mathbb{K}), +, \bullet)$ *toma estructura de espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$*.*

Demostración:
Basta combinar los resultados del Teorema1.2.1 y la Proposición1.2.1. □
Todo espacio vectorial tiene por lo menos una base y el tamaño de esta base es la dimensión del espacio vectorial.

Consideremos los elementos de $M_{\mathbb{K}}$, definidos por:

$$(E^{r,s})_{i,j} = \delta_{ir}\delta_{js} = \begin{cases} 1 & \text{, para } i = r \wedge j = s. \\ 0 & \text{, en otro caso.} \end{cases} \quad \text{dondé } 1 \leq r \leq n,\ 1 \leq s \leq n;\ r, s \in \mathbb{N}.$$

Es decir las matrices $E^{r,s}$ de orden $n \times n$, tienen un cero en todas las posiciones, salvo en la fila r, columna s, en la cual tienen un 1. Además tenemos que

1. $\alpha_{11}E^{1,1} + \alpha_{12}E^{1,2} + \ldots + \alpha_{1n}E^{1,n} + \alpha_{21}E^{2,1} + \ldots + \alpha_{2n}E^{2,n} + \ldots + \alpha_{nn}E^{n,n} = \mathbf{0_{n\times n}}$

$$: \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{n\times n}$$

   esto si y solo si $\alpha_{ij} = 0, \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, es decir B es un conjunto linealmente independiente.

2. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} = a_{11}E^{1,1} + a_{12}E^{1,2} + \ldots + a_{2n}E^{2,n} + \ldots + a_{nn}E^{n,n}.$$

   , Por tanto B es un sistema de generadores.

De (1) y (2), B es una base de $M_n(\mathbb{K})$, por tanto $dim(M_n(\mathbb{K})) = n^2$.

1.2.1 Aplicaciones y formas multilineales

Comenzaremos generalizando algunas nociones sobre las aplicaciones lineales estudiadas en los cursos de algebra Lineal, para estudiar de forma amena las aplicaciones n-lineales, aqui F denota un campo cualquiera y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 1.2.5 *(Aplicación de n variables)*
Sean los conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$, $\mathbb{F}$ y el producto cartesiano $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$

$$\begin{array}{rccl} f: & E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & f((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = z. \end{array}$$

se llama aplicación de las n-variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Apartir de esta aplicación se puede definir otras.

Definición 1.2.6 *(Aplicación i-ésima proyección)*
Sean los conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ y el producto cartesiano $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$
La aplicación

$$\begin{array}{rccl} \pi_i: & E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n & \longrightarrow & E_i \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i. \end{array}$$

se llama aplicación i-ésima proyección

Observación:
Algunos autores llaman a esta aplicación, aplicación i-ésima coordenada, pero aquí se evidenciará mas adelante del porque optamos por mantener este nombre.

Definición 1.2.7 *Sean los espacios vectoriales $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$, sobre el mismo campo $\mathbb{F}$, y el producto cartesiano $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times \ldots \times \mathbf{E}_n$. La aplicación $f : \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times \ldots \times \mathbf{E}_n \longrightarrow \mathbf{J}$, se llama n-lineal si se cumple: para todo $1 \leq i \leq n$*

1. $f((x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n)) =$
   $f((x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) + f((x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n)).$
2. $f((x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = \lambda f((x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n))$

Observación:
La definición anterior expresa que cada aplicación parcial $\mathbf{E}_i \longrightarrow \mathbb{F}$ asociada a f es una aplicación n-lineal, es decir cada vez que fijamos n-1 variables obtenemos una aplicación lineal en la variable que resta, entonces f es lineal.

Definición 1.2.8 (Forma n-lineal) *Sean los espacios vectoriales $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$, sobre el mismo campo $\mathbb{K}$, y el producto cartesiano $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times \ldots \times \mathbf{E}_n$. Toda aplicación $f : \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times \ldots \times \mathbf{E}_n \longrightarrow \mathbb{K}$, se llama* **forma n-lineal**, *definida sobre $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times \ldots \times \mathbf{E}_n$.*

Observaciones
Cuando $n = 2$, se puede reconocer que se trata de una forma bilineal.
Cuando $n = 3$, se llama forma trilineal.
En general, a estas aplicaciones algunos autores les llaman aplicaciones o formas multilineales.

Ejemplo 1.2.3 *Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, *)$, y la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f[(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)] = y_1 x_2 y_3$, f es trilineal.*

Para una mejor escritura se denotará $\mathbf{E}^n = \underbrace{\mathbf{E}\times\mathbf{E}\ldots\times\mathbf{E}}_{n}$

Definición 1.2.9 (Aplicación simétrica) .
Sean E y F dos conjuntos.
La aplicación $f : E^n \longrightarrow F$, es simétrica, si para todo elemento $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, y para toda permutación $\alpha \in S_n$.

$$f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, \ldots, x_{\alpha(n)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Observación
Cuando $n = 2$, es fácil percatarse que una forma bilineal $f : \mathbf{E}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ será simétrica si para todo $x, y \in \mathbf{E}$, $f(x, y) = f(y, x)$.

Definición 1.2.10 (Aplicación antisimétrica) .

Sea un conjunto E y un grupo $(F, +)$.
La aplicación $f : E^n \longrightarrow F$, es antisimétrica, si para todo elemento $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, y para toda transposición $\alpha_{ij} \in S_n$.

$$f(x_{\alpha_{ij}(1)}, x_{\alpha_{ij}(2)}, \ldots, x_{\alpha_{ij}(n)}) = -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Observación

- La condición de antisimétria se puede expresar así:
  f es antisimétrica si y solo si para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$

  $$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

- Cuando $n = 2$, es fácil percatarse que una forma bilineal $f : \mathbf{E}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ será simétrica si para todo $x, y \in \mathbf{E}$, $f(x, y) = -f(y, x)$.

Definición 1.2.11 (Aplicación alternada) .
Sean los espacios vectoriales $\mathbf{E}$ *y* $\mathbf{J}$ *sobre el mismo campo* $\mathbb{K}$.
La aplicación n-lineal $f : \mathbf{E}^n \longrightarrow \mathbf{J}$, es alternada, si para todo elemento $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{E}^n$.

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0$$

cada vez que existan $x_i = x_j$, con $i \neq j$

Observación

- En el caso particular de la aplicación n-lineal $f : \mathbf{E}^n \longrightarrow \mathbb{K}$, que cumpla las condiciones de la definición anterior se llama forma n-lineal alternada.

- Cuando $n = 2$, es fácil percatarse que una forma bilineal $f : \mathbf{E}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ será alternada si para todo $x \in \mathbf{E}$, $f(x, x) = 0$.

Problema 1.2.1 *Sea* $(\mathbf{E}, \mathbb{K}, +, *)$ *un espacio vectorial de dimensión* 2*(i.e. dim*$(\mathbf{E}) = 2$*) y consideremos* $\{e_1, e_2\}$*, una base de* $\mathbf{E}$*. Sean* $x_1, x_2 \in \mathbf{E}$ *con*

$$\begin{aligned} x_1 =& a_1 e_1 + a_2 e_2 \\ x_2 =& b_1 e_1 + b_2 e_2 \end{aligned}$$

Pruebe que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{E}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{array}$$

es una forma bilineal, alternada y antisimétrica.

Solución

1. Probemos que f es bilineal. Sea $x_1, x_1', x_2, x_2' \in \mathbf{E}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$;

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_1', x_2) =& (a_1 + a_1')b_2 - (a_2 + a_2')b_1, \text{ definición de } f \\ =& a_1 b_2 + a_1' b_2 - a_2 b_1 + a_2' b_1, \ (\mathbb{K}, +, \cdot) \text{ Campo conmutativo} \\ =& (a_1 b_2 - a_2 b_1) - (a_1' b_2 - a_2' b_1) \\ =& f(x_1, x_2) + f(x_1', x_2'), \text{ definición de } f. \end{aligned}$$

Análogamente se tiene que $f(x_1, x_2 + x_2') = f(x_1, x_2) + f(x_1, x_2')$;

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1, x_2) =& \lambda a_1 b_2 - \lambda a_2 b_1, \text{ definición de } f \\ =& \lambda(a_1 b_2 - a_1 b_1), \ (\mathbb{K}, +, \cdot) \text{ Campo conmutativo} \\ =& \lambda f(x_1, x_2), \text{ definición de } f. \end{aligned}$$

Análogamente se tiene que $f(x_1, \lambda x_2) = \lambda f(x_1, x_2)$. Por tanto f es bilineal.

2. Debemos probar ahora que f es alternada, según la definición 1.2.11

$$\begin{aligned} f(x_1, x_1) =& a_1 a_2 - a_2 a_1, \text{ definición de } f \\ =& a_1 a_2 - a_1 a_2, \ (\mathbb{K}, +, \cdot) \text{ Campo conmutativo} \\ =& 0, \ (\mathbb{K}, +, \cdot) \text{ Campo conmutativo.} \end{aligned}$$

Luego f es alternada.

3. Debemos probar ahora que f es antisimétrica, según la definición 1.2.10

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1) =& b_1 a_2 - b_2 a_1, \text{ definición de } f \\ =& - b_2 a_1 + b_1 a_2, \ (\mathbb{K}, +, \cdot) \text{ Campo conmutativo} \\ =& - (a_1 b_2 - a_2 b_1), \ (\mathbb{K}, +, \cdot) \text{ Campo conmutativo} \\ =& \lambda - f(x_1, x_2), \text{ definición de } f. \end{aligned}$$

Es decir f es antisimétrica.

El siguiente teorema muestra un resultado importante, el cuál establece que toda aplicación (respectivamente forma), f alternada es antisimétrica.

Teorema 1.2.3 . *Sean los espacios vectoriales* $\mathbf{E}$ *y* $\mathbf{J}$ *sobre el mismo campo* $\mathbb{F}$.
Toda aplicación (respectivamente forma), f alternada definida sobre $\mathbf{E}^n$ *con valores en* $\mathbf{J}$ *(respectivamente en* $\mathbb{F}$*) es antisimétrica.*

Demostración
Sea f una aplicación (forma), n-lineal alternada definida sobre $\mathbf{E}^n$, con valores en $\mathbf{J}$(en $\mathbb{F}$).
Sean $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \in \mathbf{E}^n$, $i \neq j$ supongamos que $i < j$.
Como f es alternada tenemos:

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_j, \dots, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i + x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = 0, \text{ ya que f es alterna.}$$
$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$$
$$+f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0, \text{ por la n-linealidad de f.}$$

Pero el primero y último términos en la expresión anterior son nulos, pues f es alternada, de dónde:

$$f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n).$$

Luego, f es antisimétrica. □

Observación
El reciproco de este teorema se cumple, si el campo $\mathbb{F}$ es de característica distinta de 2.

Matrices y Formas Bilineales

Sea $\mathbb{F}$ un campo y $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$.
En espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Es conocido el hecho de que si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbf{V}$, entonces el espacio $\mathbf{V}^*$ llamado dual algebraico de $\mathbf{V}$, definido por $\mathbf{V}^* = \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbb{F}) = Hom_{\mathbb{F}}(\mathbf{V}) = \{f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{F} \,|\, f \text{ lineal}\}$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, tiene dimensión n y el conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, donde $f_i(v_k) = \delta_{ik}$, $i, j = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, es una base de $\mathbf{V}^*$. Sea

$$\begin{array}{rccc} B: & \mathbf{V}^2 & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & k. \end{array}$$

una forma bilineal.
Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \mathcal{B}$ una base de $\mathbf{V}$, luego $b_{ij} = B(v_i, v_j)$, $\forall i, j$, entonces $\widehat{B} = [b_{ij}]$ es llamada la matriz $\widehat{B}$ relativa a la base $\mathcal{B}$.
De esta manera, los valores que toma la forma bilineal sobre vectores x, y, de coordenadas en la base $\mathcal{B}$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}. \text{ vienen dados por:}$$

$$B(x, y) = B(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i B(v_i, v_j) y_j = x^T \widehat{B} y$$

Como la correspondencia entre formas bilineales y matrices $n \times n$ es biunívoca, tenemos establecido un isomorfismo entre estos dos espacios vectoriales. Toda matriz cuadrada representa una forma bilineal en una base dada de $\mathbf{V}$. Nótese que esta es otra utilización de las matrices aparte de la ya considerada de representar aplicaciones bilineales.

Proposición 1.2.2 *Si B es una forma bilineal simétrica, la matriz que representa a F en cualquier base es una matriz simétrica.*

Demostración
Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \mathcal{B}$ una base de de $\mathbf{V}$. Entonces:

$$b_{ij} = B(v_i, v_j) = B(v_j, v_i) = b_{ji}$$

es decir:

$$\widehat{B}^T = \widehat{B}.$$

□

Es también evidente que si la matriz asociada a una forma bilineal es simétrica en una base, lo es en todas y la forma bilineal correspondiente es simétrica. De forma similar se concluye que una forma bilineal es antisimétrica si y solo si su matriz en cualquier base es antisimétrica. Las formas simétricas forman un subespacio vectorial del espacio de las formas bilineales. Las formas antisimétricas forman también un subespacio vectorial.

1.2.2 Función coordenada

Establescamos una correspondencia biunívoca entre $M_n(\mathbb{K})$ y el espacio euclideano $\mathbb{R}^{n^2}$ o $\mathbb{C}^{n^2}$, es decir con $\mathbb{K}^{n^2}$. La construcción de tal correspondencia se basa en el hecho siguiente.
Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$\text{dónde } A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{con } a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Se define

$$\begin{array}{rccl} f: & M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n^2} \\ & A & \longmapsto & f(A) = z. \end{array}$$

$$\begin{aligned} z = f(A) &= \underbrace{(1^{\text{o}} \text{ columna de A}, 2^{\text{o}} \text{ columna de A}, \ldots, n - \text{ésima columna de A})}_{n*n \text{ elementos}} \\ &= \underbrace{(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})}_{n*n=n^2 \text{ elementos}} \\ &= (coord_{11}(A), coord_{21}(A), \ldots, coord_{n1}(A), coord_{n2}(A), \ldots, coord_{1n}(A), coord_{2n}(A), \\ &\ldots, coord_{nn}(A)) \end{aligned}$$

Así sea $f = Coord$, con la ayuda de las funciones coordenadas, hemos definido la función coordenada[1] denotada por **Coord**, la cual es fundamental en nuestro trabajo(pues con ella, se logra demostrar que $M_n(\mathbb{K})$ es una variedad).

Con lo anterior se tiene.

Lema 1.2.1 *La función coordenada definida por*

$$\begin{array}{rccl} Coord: & M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n^2} \\ & A & \longmapsto & Coord(A). \end{array}$$

es una biyección

Demostración
(1) La función coordenada es evidentemente una biyección, pues

- $Coord$ está bien definida ya que si

$$[a_{ij}] = [b_{ij}] \to a_{ij} = b_{ij}; \quad 1 \leq i; j \leq n$$
$$\text{pero}$$
$$coord_{ij}([a_{ij}]) = coord_{ij}([b_{ij}]); \quad 1 \leq i; j \leq n$$
$$\to Coord([a_{ij}]) = Coord([b_{ij}]).$$

- $Coord$ es inyectiva, pues si

$$[a_{ij}] \neq [b_{ij}], \quad \text{entonces para algún ij}$$
$$a_{ij} \neq b_{ij}; \quad \text{entonces}$$
$$coord_{ij}([a_{ij}]) \neq coord_{ij}([b_{ij}])$$
$$\to Coord([a_{ij}]) \neq Coord([b_{ij}]).$$

- $Coord$ es sobre
  Dado que para todo $P \in \mathbb{K}^{n^2}$, existe una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$con las siguientes características 1^{era} columna de A formada por las coordenadas
  $1 \xrightarrow{a}$ n-ésimas de$P$

  2^{da} columna de A formada por las coordenadas
  $n+1 \xrightarrow{a}$ 2n-ésimas de$P$
  $\vdots$
  $n^{\text{ésima}}$ columna de A formada por las coordenadas
  $n(n-1) \xrightarrow{a} n^2$-ésimas de$P$

Entonces $Coord(A) = P$.
Por lo tanto $Coord$ es biyectiva, y establece una correspondencia biunivoca entre $M_n(\mathbb{K})$ y $\mathbb{K}^{n^2}$. □

[1] Note que en particular esta función es n^2-lineal

1.2.3 Función determinante

El concepto de determinante es tan importante que aunque un tratamiento preciso de esta noción requiere adentrarse en el ámbito del álgebra tensorial, como literatuara de este enfoque puede consultarse en [[17], p.63-65.].

Teorema 1.2.4 . *Sean* $(\mathbf{E}, \mathbb{K}, +, *)$*, un espacio vectorial tal que* $dim(\mathbf{E}) = 2$*, y* $\{e_1, e_2\}$ *una base de* $\mathbf{E}$*. Entonces se cumple:*

1. *Toda forma bilineal alternada f definida sobre* $\mathbf{E}^2$ *es tal que,* $f = \lambda d, \ \lambda \in \mathbb{K}$*, dónde*

$$\begin{array}{rccl} d: & \mathbf{E}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & d(x_1, x_2) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{array}$$

con $x_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2, \ x_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$*. Es una forma bilineal alternada sobre* E^2*.*

2. *Para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *existe una forma bilineal alternada única tal que* $f(e_1, e_2) = \lambda$*, dónde* $\{e_1, e_2\}$ *es una base de* $\mathbf{E}$*.*

3. *El espacio vectorial de las formas bilineales alternadas definidas sobre* $\mathbf{E}^2$*, es de dimensión 1.*

Demostración

1. Sean $(\mathbf{E}, \mathbb{K}, +, *)$, un espacio vectorial tal que $dim(\mathbf{E}) = 2$, y la forma bilineal alternada $f : \mathbf{E}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$. Sea $\{e_1, e_2\}$ una base de $\mathbf{E}$ y consideremos

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \\ x_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 \end{aligned}$$

Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(a_{11}e_1 + a_{21}e_2, a_{12}e_1 + a_{22}e_2), \quad \text{sustituyendo.} \\ &= f(a_{11}e_1, a_{12}e_1 + a_{22}e_2) + f(a_{21}e_2, a_{12}e_1 + a_{22}e_2), \quad \text{f es bilineal.} \\ &= f(a_{11}e_1, a_{12}e_1) + f(a_{11}e_1, a_{22}e_2) + f(a_{21}e_2, a_{12}e_1) + f(a_{21}e_2, a_{22}e_2), \quad \text{f es bilineal.} \\ &= a_{11}a_{12}f(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}f(e_1, e_2) + a_{21}a_{12}f(e_2, e_1) + a_{21}a_{22}f(e_2, e_2), \quad \text{f es bilineal.} \\ &= a_{11}a_{22}f(e_1, e_2) + a_{21}a_{12}f(e_2, e_1), \quad \text{f es alternada.} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})f(e_1, e_2), \quad \text{por el teorema 1.2.3 } f(e_2, e_1) = -f(e_1, e_2). \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\lambda, \quad \text{dondé } \lambda = f(e_1, e_2). \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora bien, la aplicación

$$\begin{array}{rccl} d: & \mathbf{E}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & f(x_1, x_2) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{array}$$

Según el problema 1.2.1, es bilineal y alternada.
De (1), se tiene que $f(x_1, x_2) = \lambda d$
Luego, toda forma bilineal alternada f definida sobre $\mathbf{E}^2$, es tal que:
$f = \lambda d, \ \lambda \in \mathbb{K}$. (2)

2. Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\{e_1, e_2\}$ base de $\mathbf{E}^2$,
   definase
   $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbf{E}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & \lambda d(x_1, x_2). \end{array}$$
   donde d esta definida como en el primer literal, así f es una forma bilineal alternada sobre $\mathbf{E}^2$ pues d es una forma bilineal y alterna sobre $\mathbf{E}^2$. verificaremos que f cumple, $f(e_1, e_2) = \lambda$:
   $$\begin{aligned} f(e_1, e_2) =& \lambda d(e_1, e_2) \\ =& \lambda(1 * 1 - 0 * 0), \quad \text{definición de } d. \\ =& \lambda * 1 \\ =& \lambda. \end{aligned}$$
   Probemos que f es única Sea $g : \mathbf{E}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal alternada sobre $\mathbf{E}^2$, tal que $g(e_1, e_2) = \lambda$. Sea $(x_1, x_2) \in \mathbf{E}^2$
   $$\begin{aligned} g(x_1, x_2) =& g(e_1, e_2) d(x_1, x_2), \text{ pues del literal 1, toda forma bilineal alterna es de esta forma.} \\ =& \lambda d(x_1, x_2), \text{ ya que } g(e_1, e_2) = \lambda. \\ =& f(x_1, x_2), \text{ definición de } f. \end{aligned}$$
   Por lo cual $g = f$, y f es única.

3. Sea sabe de los resultados anteriores que :
   $d(e_1, e_2) = 1$, por la definición de d(tomando $\lambda = 1$), es decir existen formas bilineales alternadas definidas sobre $\mathbf{E}^2$, no nulas, por ejemplo d.
   Según (2), d no solo es una forma bilineal alternada sino que todas las formas bilineales alternadas sobre $\mathbf{E}^2$ son múltiplos de ella.
   Luego {d}, es una base del espacio vectorial de las formas bilineales alternadas definidas sobre $\mathbf{E}^2$, y por ende la dimensión de este espacio es 1. □

Observación
Para $\lambda = 1$, $f = d$, es decir, d es la única forma bilineal alternada que $d(e_1, e_2) = 1$

El teorema anterior se puede generalizar al caso de las formas n-lineales, alternadas.

Teorema 1.2.5 *(Función Determinante)*
Sea $(\mathbf{E}, \mathbb{K}, +, *)$ *un espacio vectorial tal que* $dim(\mathbf{E}) = n$ *y* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, *una base de* $\mathbf{E}^n$ *entonces se cumple:*

1. *Toda forma n-lineal alternada f definida sobre* $\mathbf{E}^n$ *es tal que* $f = \lambda D$, $\lambda \in \mathbb{K}$, *donde*
   $$\begin{array}{rccl} D: & \mathbf{E}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \sum_{\alpha \in S_n} \epsilon(\alpha) a_{\alpha(1)1} a_{\alpha(2)2}, \ldots, a_{\alpha(n)n}. \end{array}$$
   y

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n \\ x_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

es una forma n-lineal alternada sobre $\mathbf{E}^n$

2. *Para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *existe una forma n-lineal alternada única tal que* $f(e_1, \ldots, e_n) = \lambda$*, dondé* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$*, es una base de* $\mathbf{E}^n$.

3. *El espacio vectorial de las formas n-lineales alternadas definidas sobre* $\mathbf{E}^n$*, es de dimensión 1.*

Demostaración.
Ver [[21], pág.55-66.] □

Observación
Para $\lambda = 1$, $f = D$, es decir, D es la única forma n-lineal y alternada tal que $D(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$
$\epsilon(\alpha)$, es la paridad o signatura de la permutación α en S_n. Los razonamientos que se utilizan en la demostración de este teorema son los mismos que los empleados es el teorema 1.2.1

Definición 1.2.12 *(Determinante de un sistema de vectores) Sean* $(\mathbf{E}, \mathbb{K}, +, *)$ *un espacio vectorial tal que* $dim(\mathbf{E}) = n$ *y* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *una base de* $\mathbf{E}$*. El valor para* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de la única función n-lineal alternada D, definida sobre* $\mathbf{E}^n$ *tal que* $D(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$*, se llama determinante de los vectores* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *respecto a la base B y se denota por* $det_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Observaciones
A veces se comete el abuso de lenguaje al llamar determinante de un sistema de vectores relativo a la base B a la aplicación $D : \mathbf{E}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ en vez de al valor de esta aplicación. Si

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n \\ x_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

entonces

$$det_B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in S_n} \epsilon(\alpha) a_{\alpha(1)1} a_{\alpha(2)2}, \ldots, a_{\alpha(n)n}.$$

y se representa

$$det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cuando se ocupe la base natural y no haya lugar a confusión escribiremos $det((x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Como lo hemos abordado con anterioridad, cada columna de una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ puede considerarse como un vector de $\mathbb{K}^n$, de tal forma que podemos definir funciones multilineales de $M_n(\mathbb{K})$ en $\mathbb{K}$ analizaremos la expresión $\sum_{\alpha \in S_n} \epsilon(\alpha) a_{\alpha(1)1} a_{\alpha(2)2}, \dots, a_{\alpha(n)n}$.
Por ejemplo

a) Si $n = 2$, consideremos $A = [a_{ij}] \in M_2(\mathbb{K})$ S_2 tendra 2! elementos, que son las permutaciones $e = (1, 2)$ y $\alpha = (2, 1)$, así $S_2 = \{e, \alpha\}$, Puesto que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (c_1, c_2), \quad c_1, c_2 \text{ denotan las columnas de A}$$

$$\begin{aligned} det(A) = D(c_1, c_2) =& \sum_{\alpha \in S_2} \epsilon(\alpha) a_{\alpha(1)1} a_{\alpha(2)2} \\ =& \epsilon(e) a_{e(1)1} a_{e(2)2} + \epsilon(\alpha) a_{\alpha(1)1} a_{\alpha(2)2} \\ =& (+1) a_{11} a_{22} + (-1) a_{21} a_{12}, \quad \text{definición de e y de } \alpha \\ =& a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \end{aligned}$$

Note que se puede reconocer que la expresión última en a) es el valor de d, en el caso $n = 2$(ver 1.2.4).

Proposición 1.2.3 *La función determinante det* : $M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$*, tiene las siguientes propiedades*

1. $det(AB) = det(A)det(B)$*; para todo* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$
2. $det(I_n) = 1$
3. $A \in M_n(\mathbb{K})$ *es invertible si y solo si* $det(A) \neq 0$

Demostración.
Ver [[17], pág.63-65.] □

Gracias ala proposición 1.2.3, se define
$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : det(A) \neq 0\}$, como el **grupo lineal general** de tamaño $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$, y
$SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : det(A) = 1\}$, como el **grupo especial lineal** de tamaño $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$.

Formas Sesquilineales en el plano

Cuando el campo subyacente de un espacio vectorial es el de los números complejos, además de formas bilineales puede haber formas sesquilineales.

Definición 1.2.13 *Una forma sesquilineal en $\mathbb{C}^2$ es una función*

$$B : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que, para cada $u \in \mathbb{C}^2$, la función $v \longmapsto B(u, v)$ es lineal y para cada $v \in \mathbb{C}^2$, la función $u \longmapsto B(u, v)$ es antilineal; es decir dados $a, b \in \mathbb{C}$ y $u, v, w \in \mathbb{C}^2$

$$B(au + bw, v) = \overline{a}B(u, v) + \overline{b}B(w, v)$$

Al elegir una base de $\mathbb{C}^2$, el conjunto de todas sus formas sesquilineales puede ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto de todas las matrices de 2×2 con entradas complejas. En particular, el grupo $GL_2(\mathbb{C})$ de matrices invertibles de 2×2 con entradas complejas, actúa de la siguiente manera bajo cambios de base:

$$\begin{array}{rccc} \psi : & M_2(\mathbb{C}) \times GL_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{C}) \\ & (\mathbf{B}, A) & \longmapsto & \overline{A}^T \mathbf{B} A. \end{array}$$

Definición 1.2.14 *Una forma sesquilineal es hermitiana(resp. antihermitiana) si para todo par de vectores $u, v \in \mathbf{V}$, $B(u, v) = \overline{B(v, u)}$(resp. $B(u, v) = -\overline{B(v, u)}$).*

El producto escalar puede definirse también en los espacios euclídeos de dimensión mayor a tres, y en general en los espacios vectoriales reales y complejos. Los espacios vectoriales dotados de producto escalar reciben el nombre de espacios prehilbertianos. El producto interior o producto escalar de dos vectores en un espacio vectorial es una forma bilineal, hermítica y definida positiva[1], por lo que se puede considerar una forma cuadrática definida positiva.

Definición 1.2.15 *Un espacio con producto interior o pre-Hilbert es un espacio vectorial X en el que se define una aplicación*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

las siguientes propiedades[2] *:*

[1]Sea A una matriz hermitiana cuadrada $n \times n$, denotaremos la transpuesta de una matriz o vector a como a^T, y el conjugado transpuesto, a^*. Esta matriz A se dice **definida positiva** si cumple con una (y por lo tanto, las demás) de las siguientes formulaciones equivalentes:

1. Para todos los vectores no nulos $z \in \mathbb{C}^n$, tenemos que $z^*Az > 0$
2. Todos los autovalores λ_i de A son positivos. (Recordamos que los autovalores de una matriz hermitiana o en su defecto, simétrica, son reales.)
3. La función $x \cdot y = x^*Ay$ define un producto interno en $\mathbb{C}^n$

Análogamente, si A es una matriz real simétrica, se reemplaza $\mathbb{C}^n$ por $\mathbb{R}^n$, y la conjugada transpuesta por la transpuesta.

[2]Estos axiomas fueron primero establecidos por von Neumann en 1930 en sus trabajos sobre fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica. En su definición se incluía también la separabilidad del espacio, axioma posteriormente eliminado cuando Löwing, Rellig y F. Riesz mostraron que en la práctica era innecesaria dicha restricción.

1. *(aditiva)* $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;
2. *(homogénea)* $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle, \ \ \lambda \in \mathbb{K}$;
3. *(hermítica)* $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;
4. *(definida positiva)* $\langle x, x\rangle \geq 0$ *y* $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

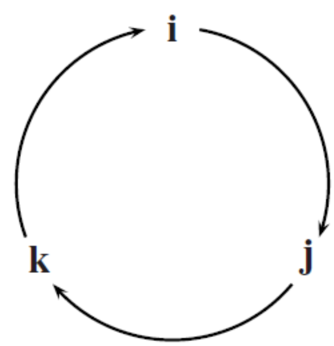
Toda aplicación que verifique *(1), (2) y (3)* se llama forma sesquilineal hermítica.

1.2.4 Los cuaterniones

Los cuaterniones[1] (también llamados cuaternios) son una extensión de los números reales, similar a la de los números complejos. Mientras que los números complejos son una extensión de los reales por la adición de la unidad imaginaria i, tal que $i^2 = -1$, los cuaterniones son una extensión generada de manera análoga añadiendo las unidades imaginarias: i, j y k, a los números $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -\mathbf{1}$.

Sea $\mathbb{H}$ la $\mathbb{R}$-álgebra definida de la siguiente manera: como espacio vectorial, $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ y se fija la base $\{\mathbf{1} = (1,0,0,0), i = (0,1,0,0), j = (0,0,1,0), k = (0,0,0,1)\}$, en términos de la cual la ley de multiplicación toma la forma,

$$\mathbf{1}i, \ \ \mathbf{1}j = j\mathbf{1} \ \ \mathbf{1}k = k = k\mathbf{1}, \ \ \mathbf{1}^2 = \mathbf{1}.$$



$$ij = k = -ji, \ \ jk = i = -kj \ \ ki = j = -ik, \ \ i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -\mathbf{1}.$$

Productos de las unidades imaginarias del cuaternion.

Los elementos del conjunto: $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ se llaman cuaterniones, entonces un cuaternión es un número de la forma $a + bi + cj + dk$, donde $a, b, c,$ y d son números reales unívocamente determinados por cada cuaternión.
Sean $x = x_0\mathbf{1} + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \ y = y_0\mathbf{1} + y_1 i + y_2 j + y_3 k \in \mathbb{H}$
La adición se realiza análogamente a como se hace con los complejos, es decir: término a término:

$$x + y = (x_0 + y_0)\mathbf{1} + (x_1 + y_1)i + (x_2 + y_2)j + (x_3 + y_3)k$$

[1] Los cuaterniones fueron creados por William Rowan Hamilton en 1843. Hamilton buscaba formas de extender los números complejos (que pueden interpretarse como puntos en un plano) a un número mayor de dimensiones. No pudo hacerlo para 3 dimensiones, pero para 4 dimensiones obtuvo los cuaterniones. Según una historia relatada por el propio Hamilton, la solución al problema que le ocupaba le sobrevino un día que estaba paseando con su esposa, bajo la forma de la ecuación: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Inmediatamente, grabó esta expresión en el lateral del puente de Brougham, que estaba muy cerca del lugar.
Hamilton popularizó los cuaterniones con varios libros, el último de los cuales, Elements of Quaternions (del inglés Elementos de Cuaterniones), tenía 800 páginas y fue publicado poco después de su muerte.

El producto se realiza componente a componente, y está dado en su forma completa por:

$$xy = (x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)\mathbf{1}+(x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2)i+(x_0y_2-x_1y_3+x_2y_0+x_3y_1)j+(x_0y_3+x_1y_2-x_2y_1+x_3y_0)k$$

Es directo verificar que el producto de cuaterniones es asociativo, pero no es conmutativo. El subespacio tridimensional generado por $\{i, j, k\}$ se llama el subespacio de cuaterniones puros y en lo sucesivo se identificará directamente con $\mathbb{R}^3$.
Todo $x \in \mathbb{H}$ se descompone en la forma

$$x = x_0\mathbf{1} + x_1 i + x_2 j + x_3 k = Re(x) + Pu(x)$$

siendo $Re : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}\mathbf{1}$ y $Pu : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ las proyecciones lineales a los subespacios generados por $\{\mathbf{1}\}$ y $\{i, j, k\}$ respectivamente. La conjugación de cuaterniones es la transformación $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ definida por,

$$x = Re(x) + Pu(x) \longmapsto x^* = Re(x) - Pu(x)$$

Definición 1.2.16 *Para $x = x_0\mathbf{1} + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ en $\mathbb{H}$, el conjugado*[1]*, al que denotaremos por x^*, esta definido por $x^* = x_0\mathbf{1} - x_1 i - x_2 j - x_3 k$*

Lema 1.2.2 *La conjugación de cuaterniones satisface*

1. $x^{**} = x$
2. $(\lambda_1 x + \lambda_2 y)^* = \lambda_1 x^* + \lambda_2 y^*$
3. $(xy)^* = y^* x^*$ *para todo* $x, y \in \mathbb{H}$ *y cualesquiera* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Demostración
Ver [[19], pág. 378.] □

Problema 1.2.2 *Existe una matriz $K \in M_2(\mathbb{C})$, tal que*

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{H} & \longrightarrow & M_2(\mathbb{C}) \\ & a\mathbf{1} + bi + cj + dk & \longmapsto & a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + dK. \end{array}$$

para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, define un isomorfismo de $\mathbb{H}$ en $\phi(\mathbb{H})$.

1. *Encuentre la matriz K.*
2. *Calcule el determinante de $\phi(x)$, $x \in \mathbb{H}$*

Solución

[1] También llamado adjunto de x

1. Del problema, notemos que la matriz identidad $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, juega el papel del elemento $\mathbf{1} \in \mathbb{H}$, la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, juega el papel del elemento $i \in \mathbb{H}$ y la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, juega el papel del elemento $j \in \mathbb{H}$. Por tanto ya que $ij = k =: K = BC = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

2. Sea $x = a + bi + cj + dk$:$\phi(x) = \begin{pmatrix} a+id & b+ic \\ -b+ic & a-id \end{pmatrix}$ Así $det\left(\begin{pmatrix} a+id & b+ic \\ -b+ic & a-id \end{pmatrix}\right) = D\left(\begin{pmatrix} a+id \\ -b+ic \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b+ic \\ a-id \end{pmatrix}\right) = (a+id)(a-id)-(-b+ic)(b+ic) = a^2+d^2-(-b^2-c^2) = a^2+b^2+c^2+d^2$.

Nótese que del problema anterior que $det(\phi(x)) = N(x)$. La naturaleza no conmutativa del producto de los cuaterniones se expone más claramente cuando escribimos

$$\begin{pmatrix} a+id & b+ic \\ -b+ic & a-id \end{pmatrix} = a + bi + cj + dk$$

y todas las propiedades de lema 1.2.2 se hacen naturales, y para el cuaternion $x = x_0\mathbf{1}+x_1i+x_2j+x_3k = A_x = \begin{pmatrix} x_0+ix_3 & x_1+ix_2 \\ -x_1+ix_2 & x_0-ix_3 \end{pmatrix}$, el conjugado $x^* = x_0\mathbf{1}-x_1i-x_2j-x_3k = A_{x^*} = \begin{pmatrix} x_0+ix_3 & -x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0-ix_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0+ix_3 & x_1+ix_2 \\ -x_1+ix_2 & x_0-ix_3 \end{pmatrix}^T = A_x^T$.

Definición 1.2.17 *Si $x \in \mathbb{H}$ entonces la norma de x, a la que presentaremos por $N(x)$, está definida por $N^2(x) = xx^*$*

Nótese que si $x = x_0\mathbf{1} + x_1i + x_2j + x_3k$, entonces $N(x) = xx^* = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = det(A_x)$; Por tanto $N(\mathbf{0}) = 0$ y $N(x)$ es un número real positivo para $x \neq \mathbf{0} \in \mathbb{H}$. En particular, para cualquier real λ, $N(\lambda) = \lambda^2$. Si $x \neq \mathbf{0}$, nótese que la multiplicación de cuaternios es asociativa y todo cuaternión no nulo posee un único inverso, esto pues el inverso multiplicativo de un cuaternión x, distinto de cero, está dado por:

$$x^{-1} = \frac{x^*}{N(x)} = \frac{x^*}{xx^*}$$

El cual es mismo patrón que cumplen los números complejos así en particular $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{0\}$ es un grupo bajo la multiplicación de Cuaterniones.

Problema 1.2.3 *Encuéntrese el centro*[2] *del grupo* $(\mathbb{H}, \cdot)$ *donde* $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{0\}$

Solución

$Z(\mathbb{H}^*) = \{g \in \mathbb{H}^* | gx = xg \text{ para todo } x \in \mathbb{H}^*\}$, definición de centro,

$= \{g \in \mathbb{H}^* | g(x_0\mathbf{1} + x_1i + x_2j + x_3k) = (x_0\mathbf{1} + x_1i + x_2j + x_3k)g \text{ para todo } x_0\mathbf{1} + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H}^*\}$,

Dado que los coeficientes distintos a cero de $\{i, j, k\}$ conducen a un elemento con el cual no conmuta con $\{j, k, i\}$ respectivamente, por tanto

$= \{r\mathbf{1} + \mathbf{0}i + \mathbf{0}j + \mathbf{0}k | r \in \mathbb{R},\ r \neq 0\}$.

[2]El centro de un grupo G es $Z(G) = \{g \in G | gx = xg \text{ para todo } x \in G\}$

Lema 1.2.3 *Para todo $x, y \in \mathbb{H}$, $N(xy) = N(x)N(y)$*

Demostración
Sean $x, y \in \mathbb{H}$, sean también A_x, A_y las matrices asociadas a x, y respectivamente, luego

$$N(xy) = det(A_x A_y) = det(A_x)det(A_y) = N(x)N(y)$$

□

Los cuaterniones son un ejemplo de cuerpo asimétrico(a veces llamado anillo con división), una estructura algebraica parecida a un cuerpo pero no conmutativo bajo la multiplicación, es decir, satisfacen todas las propiedades de un campo con excepción de que el producto no es conmutativo, por tanto tenemos

Teorema 1.2.6 *Los cuaterniones $\mathbb{H}$ forman un semicampo bajo la suma y la multiplicación de cuaternios.*

Los cuaternios forman una $\mathbb{R}$-álgebra 4-dimensional sobre los reales y los complejos forman un subconjunto de ella, los cuaterniones no forman un álgebra asociativa sobre los complejos es decir no son una $\mathbb{C}$-álgebra.

1.3 Grupo de matrices como espacio métrico

En esta sección se define una norma sobre $M_n(\mathbb{K})$ de tal forma que $(M_n(\mathbb{K}), ||.||)$, tome estructura de espacio métrico completo.

Definición 1.3.1 . *Un espacio normado es un par $(\mathbb{V}, ||.||)$, formado por un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita $\mathbb{V}$, junto a una función $||.|| : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, llamada norma, con las siguientes propiedades*

1. *Para $v \in \mathbb{V}$, $||v|| > 0$;*
2. *Para $v \in \mathbb{V}$, $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;*
3. $||tv|| = |t|\,||v||$. *para $t \in \mathbb{K}$, $v \in \mathbb{V}$;*
4. $||v_1 + v_2|| \leq ||v_1|| + ||v_2||$. *para $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.*

Observación
Si no se exige la condición *2.*, la función $||\cdot||$ se llama seminorma.

Las normas usuales euclideanas de los espacios real y complejo son;

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \qquad |x| = |x|_{\mathbb{K}^n} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_1|^2}$$

Para $A \in M_n(\mathbb{K})$, consideremos los conjuntos

$$S_A = \left\{ \frac{|Ax|}{|x|} : x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0 \right\}$$

$$S'_A = \{|Ax| : x \in \mathbb{K}^n, |x| = 1\}$$

Veamos que: $S_A = S_A{}'$.
En efecto
Dado que $S'_A \subseteq S_A$. Sea $x \in \mathbb{K}^n$; $x \neq 0$, entonces $\dfrac{|Ax|}{|x|} \in S_A$, ahora tomemos $x' = \left(\frac{1}{|x|}\right) x$, note que $|x'| = \left| \left(\dfrac{1}{|x|} \right) x \right| = \dfrac{1}{|x|}. |x| = 1$, Por lo tanto
$|Ax'| = \left| A \left(\dfrac{1}{|x|} \right) x \right| = \dfrac{1}{|x|} |Ax| = \dfrac{|Ax|}{|x|} \in S'_A$. Así, obtenemos que $S_A \subseteq S'_A$, es decir $S_A = S'_A$. □

Consideremos el siguiente conjunto $\mathbf{E} = \{x \in \mathbb{K}^n : |x| = 1\} \subseteq \mathbb{K}^n\mathbf{E}$, es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{K}^n$, por tanto $\mathbf{E}$ es compacto en $\mathbb{K}^n$. Se define para cada $A \in M_n(\mathbb{K})$ una función f_A, dada por:

$$\begin{array}{rccc} f_A : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |Ax|\,. \end{array}$$

Problema 1.3.1 *Demostrar que la función f_A, es continua.*

Solución
Sea $x \in E$; entonces $x = t_1 e_1 + t_2 e_2 + \ldots + t_n e_n = \sum_{i=1}^n t_i e_i$, con $t_i \in \mathbb{K}, \forall i$ y además tomando a $\mathbb{K}^n$, como un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, con la base usual ortonormal(e_i es el vector canonico i-ésimo). Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

y $M = \sum_{i,j} \left| a_{i,j} \right|_{\mathbb{K}}$, *entonces:*

$$
\begin{aligned}
|Ax|_{\mathbb{K}^n} &= \left| A(\sum_{i=1}^{n} t_i e_i) \right|_{\mathbb{K}^n} && (1.1)\\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |t_i|_{\mathbb{K}} \, |Ae_i|_{\mathbb{K}^n} \\
&= |t_1|_{\mathbb{K}} \, |Ae_1|_{\mathbb{K}^n} + |t_2|_{\mathbb{K}} \, |Ae_2|_{\mathbb{K}^n} + \ldots + |t_n|_{\mathbb{K}} \, |Ae_n|_{\mathbb{K}^n} \\
&= |t_1|_{\mathbb{K}} \, |(a_{11} \ldots a_{n1})|_{\mathbb{K}^n} + |t_2|_{\mathbb{K}} \, |(a_{12} \ldots a_{12})|_{\mathbb{K}^n} + \ldots + |t_n|_{\mathbb{K}} \, |(a_{1n} \ldots a_{nn})|_{\mathbb{K}^n} \\
&= |t_1|_{\mathbb{K}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|^2} + |t_2|_{\mathbb{K}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{i2}|^2} + \ldots + |t_n|_{\mathbb{K}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{in}|^2} \\
&\leq \left(\underbrace{\text{Máx}}_{1 \leq i \leq n} |t_i| \right) \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{i2}|^2} + \ldots + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{in}|^2} \right) && (1.2)\\
&\leq \left(\underbrace{\text{Máx}}_{1 \leq i \leq n} |t_i|_{\mathbb{K}} \right) \underbrace{\left(\sum_{ij} \left| a_{ij} \right|_{\mathbb{K}} \right)}_{M} \\
&= M \left(\underbrace{\text{Máx}}_{1 \leq i \leq n} |t_i|_{\mathbb{K}} \right) \\
&\leq M \, |x|_{\mathbb{K}^n} && (1.3)
\end{aligned}
$$

Para $x \in E$, sea $\epsilon > o$, $\delta = \epsilon/M$ tal que si, $|x-y| < \delta$: $\left| |Ax|_{\mathbb{K}^n} - |Ay|_{\mathbb{K}^n} \right|_{\mathbb{K}} \leq |Ax - Ay|_{\mathbb{K}^n} = |A(x-y)|_{\mathbb{K}^n} \leq M \, |x-y|_{\mathbb{K}^n} < M\delta = \epsilon$.
Por lo tanto f_A, es continua en $x \in E$, como x es cualquiera, entonces f_A es continua en E. □

Del problema anterior, puesto que **E es compacto** y $\mathbf{f_A}$ es continua en E, obtenemos que el conjunto de imagenes de f_A, denotado por $\mathbf{Img(f_A) = S'_A}$, es compacto, entonces existe en S'_A elemento máximo y mínimo.

Se define el operador norma sobre $M_n(\mathbb{K})$, como:

$$||A|| = \text{Máx}\, S'_A \tag{1.4}$$

Se estaría tentado a pensar que para $A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$, él operador norma, tendría dos imagenes dadas por:

$$||A||_{\mathbb{R}} = \text{Máx}\,\{|Ax| : \ |x| = 1, \ x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$||A||_{\mathbb{C}} = \text{Máx}\,\{|Ax| : \ |x| = 1, \ x \in \mathbb{C}^n\}$$

El siguiente lema muestra que esto no es así, que el operador norma(ver Figura 1.9) está bien definido.

Lema 1.3.1 *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, entonces $||A||_{\mathbb{R}} = ||A||_{\mathbb{C}}$.*

Demostaración
Es evidente que $||A||_{\mathbb{R}} \leq ||A||_{\mathbb{C}}$. dado que $\{|Ax| : \ |x| = 1, \ x \in \mathbb{R}^n\}$, es subconjunto de $\{|Ax| : \ |x| = 1, \ x \in \mathbb{C}^n\}$.
Por otra parte, sea $z \in \mathbb{C}^n$, con $|z| = 1$, se puede escribir $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}^n$
Si $y \neq 0$:
entonces $|x|^2 + |y|^2 = 1$, y

$$\begin{aligned}
|Az|^2 &= |A(x+iy)|^2\,, \\
&= |Ax + iAy|^2 \\
&= |Ax|^2 + |Ay|^2\,, \\
&= |x|^2 \ \frac{|Ax|^2}{|x|^2} + |y|^2 \ \frac{|Ay|^2}{|y|^2}, \ \text{ si } x \neq 0, \\
&\leq |x|^2 \ ||A||^2_{\mathbb{R}} \ + \ |y|^2 \ ||A||^2_{\mathbb{R}}\,, \\
&= \left(|x|^2 + |y|^2\right) \ ||A||^2_{\mathbb{R}}\,, \\
&= ||A||^2_{\mathbb{R}}\,.
\end{aligned}$$

Así $||A||_{\mathbb{R}}$, es cota superior de $\{|Az| : \ |z| = 1, \ z \in \mathbb{C}^n\}$ por tanto, $||A||_{\mathbb{C}} \leq ||A||_{\mathbb{R}}$.
Si $x = 0, \ y = 1$, tenemos $|Az|^2 \ = |i| \ |Ay|^2 \ = |Ay|^2 \ \leq \ ||A||^2_{\mathbb{R}}$.
Así obtenemos que $||A||_{\mathbb{R}}$, es cota superior de $\{|Az| : \ |z| = 1, \ z \in \mathbb{C}^n\}$ por tanto, $||A||_{\mathbb{C}} \leq ||A||_{\mathbb{R}}$.
Resumiendo, se concluye que $||A||_{\mathbb{C}} = ||A||_{\mathbb{R}}$ □

La siguiente proposición nos muestra que el operador norma, es una norma sobre $\mathbb{K}$, segun la definición 1.9

Proposición 1.3.1 *El operador norma,* $||.|| : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, *tiene las siguientes propiedades.*

1. *Si* $t \in \mathbb{K}, \ A \in M_n(\mathbb{K})$, *entonces* $||tA|| = |t| \ ||A||$.
2. *Si* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, *entonces* $||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$.
3. *Si* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, *entonces* $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$.
4. *Si* $A \in M_n(\mathbb{K})$, *entonces* $||A|| = 0 \ \Leftrightarrow \ A = 0$.
5. $||I_n|| = 1$, *dónde* I_n *denota la matriz identidad de* $n \times n$.

Demostración

1. Sea $x \in \mathbb{K}^n, \ |x| = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
|(tA)x| &= |t(Ax)| \\
&= |t| \, |Ax|\,, \quad \text{por lo tanto}
\end{aligned}$$

$\text{Máx}\,\{|(tA)x| : |x| = 1\,, \ x \in \mathbb{K}^n\} \ = \ |t|\,\text{Máx}\,\{|Ax| : |x| = 1\,, \ x \in \mathbb{K}^n\}$, es decir

$$||tA|| \ = \ |t| \, ||A||\,.$$

2. Sea $x \in \mathbb{K}^n$, $|x| = 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
|(AB)x| &= \left| A \underbrace{(Bx)}_{y} \right| \\
&= |Ay| \\
&= |y| \frac{|Ay|}{|y|} \\
&\leq |y| \, \|A\| \\
&= |Bx| \, \|A\| \\
&\leq \|B\| \, \|A\| \\
&= \|A\| \, \|B\| .
\end{aligned}
$$

   Para $y = Bx \in \mathbb{K}^n$, $y \neq 0$ (Si $y = 0$, la desigualdad es trivial), Por lo tanto $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

3. Sea $x \in \mathbb{K}^n$, $|x| = 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
|(A + B)x| &= |Ax + Bx| , \\
&\leq |Ax| + |Bx| , \\
&\leq \|A\| + \|B\| .
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| .$$

4. Si $\|A\| = \text{Máx}\,\{|Ax| : x \in \mathbb{K}^n, |x| = 1\} = 0$, entonces para todo $x \in \mathbb{K}^n$, con $|x| = 1$, $|Ax| = 0$. Por lo tanto $A = 0$.
   Reciprocamente, si $A = 0$, entonces para todo $x \in \mathbb{K}^n$, $|Ax| = 0$.
   Por lo tanto $\|A\| = \text{Máx}\,\{|Ax| : x \in \mathbb{K}^n, |x| = 1\} = 0$.

5. Sea $x \in \mathbb{K}^n$, $|x| = 1$, entonces $|I_n x| = |x| = 1$

$$
\begin{aligned}
: \|I_n\| &= \text{Máx}\,\{|I_n x| : x \in \mathbb{K}^n, |x| = 1\} \\
&= \text{Máx}\,\{|x| : x \in \mathbb{K}^n, |x| = 1\} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

□

Problema 1.3.2 *Sea* $A \in M_n(\mathbb{C})$

1. *muestre que*

$$
\begin{aligned}
\|A\|^2 &= Sup\,\{x^* A^* x : x \in \mathbb{C}^n, |x| = 1\} \\
&= Máx\,\{x^* A^* x : x \in \mathbb{C}^n, |x| = 1\}
\end{aligned}
$$

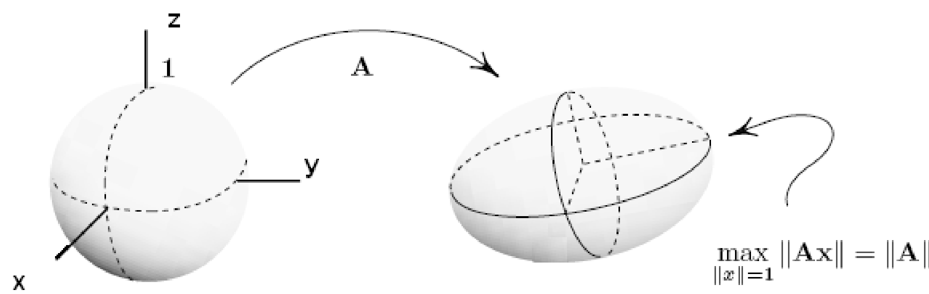


Figura 1.9: Representación geométrica de la norma matricial inducida por la norma en $\mathbb{R}^3$.

2. *Muestre que los valores propios de A^*A son números reales no negativos. Deduzca que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es el máximo valos propio de A^*A entonces $||A|| = \sqrt{\lambda}$ y para cualquier vector propio $v \in \mathbb{C}^n$ de A^*A para el valor propio de λ, $||\lambda|| = |Av|$.*

Solución

1. Dado que
$$||A||^2 = (\mathrm{Sup}\,\{|Ax| : x \in \mathbb{C}^n, |x| = 1\})^2$$
Sea $x \in \mathbb{C}^n$, $|x| = 1$; así
$$0 \leq |Ax| \leq ||A|| \to |Ax|^2 \leq ||A||^2 .$$
entonces
$$\mathrm{Sup}\,\{|Ax| : x \in \mathbb{C}^n, |x| = 1\} \leq ||A||^2$$
como $||A|| = \mathrm{Sup}\,\{|Ax| : x \in \mathbb{C}^n, |x| = 1\} = \mathrm{Máx}\,\{|Ax| : x \in \mathbb{C}^n, |x| = 1\}$, existe $x_0 \in \mathbb{C}^n$ con $|x_0| = 1$ tal que $||A|| = |Ax_0|$; por lo tanto
$$||A||^2 = |Ax_0|^2 \leq \mathrm{Sup}\,\{|Ax| : x \in \mathbb{C}^n, |x| = 1\}$$
Así obtenemos
$$||A||^2 = \mathrm{Sup}\left\{|Ax|^2 : x \in \mathbb{C}^n, |x| = 1\right\}$$
Consideremos nuevamente el conjunto
$$\mathbf{E} = \{x \in \mathbb{K}^n : |x| = 1\} \subseteq \mathbb{K}^n$$
el cual es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{K}^n$, por tanto $\mathbf{E}$ es compacto en $\mathbb{K}^n$. Se define para cada $A \in M_n(\mathbb{K})$ una función g_A, dada por:
$$\begin{array}{rccl} g_A : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g_A(x) = (f_A(x))^2 = |Ax|^2 . \end{array}$$
ua función continua en $\mathbf{E}$, así, $Img(g_A)$ es compacto en $\mathbb{R}$. Entonces
$$||A||^2 = \mathrm{Sup}\,(\mathrm{Im}(g_A)) = \mathrm{Máx}(\mathrm{Im}(g_A)) = \mathrm{Máx}\left\{|Ax|^2 : x \in \mathbb{C}^n, |x| = 1\right\}$$

Por otra parte, dado que

$$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = (Ax)^* \cdot (Ax) = x^*A^*Ax$$

entonces,

$$||A||^2 = \text{Máx}\,\{x^*A^*Ax \ : \ x \in \mathbb{C}^n,\ |x| = 1\}\,.$$

2. Sea λ valor propio de A^*A entonces $A^*Au = \lambda u$ donde u es u vector propio de A^*A para el valor propio λ, valor propio de A, es real y no negativo.
   Puesto que A^*A es hermitiana, $(A^*A)^* = A^*A$, existen $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ vectores propios de A^*A para los valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, de modo que formen una base ortonormal para $\mathbb{C}^n$.
   Sea $x \in \mathbb{C}^n$, $|x| = 1$; entonces, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ para algunos $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, así $x^* = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} u_i^*$, lo que implica

$$\begin{aligned}|x|^2 &= x^*x\\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} u_i^*\right)\\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i}\alpha_i \underbrace{u_i^* u_i}_{=1}\\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2.\end{aligned}$$

   Entonces

$$\begin{aligned}|Ax|^2 &= x^*A^*Ax = x^*A^*A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = x^*\sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{(A^*A)u_i}_{\lambda u_i} = x^*\sum_{i=1}^n \alpha_i\lambda_i u_i\\ &= \left(\sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} u_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\lambda_i u_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i\overline{\alpha_i}\alpha_i \underbrace{u_i^* u_i}_{=1}\\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i|\alpha_i|^2,\\ &\le \sum_{i=1}^n \text{Máx}\,\{\lambda_i,\ 1 \le i \le n\}\,|\alpha_i|^2,\\ &= \underbrace{\text{Máx}\,\{\lambda_i,\ 1 \le i \le n\}}_{\lambda}\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2,\\ &= \lambda.\end{aligned}$$

   Así obtenemos

$$||A||^2 \le \lambda.$$

Por otra parte dado $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ cualquiera, se tiene que

$$|Au_i|^2 = u_i^* A^* A u_i = \lambda_i \leq \|A\|^2 .$$

Por tanto tenemos

$$\|A\|^2 = \text{Máx}\,\{\lambda_i,\ 1 \leq i \leq n\} = \lambda$$

□

Observación

Ejemplo 1.3.1 *Como consecuencia del problema anterior tenemos*

1. *Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ es una matriz unitaria, es decir $A^*A = I_n$ entonces $\|A\| = 1$.*
2. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica, es decir $A^T = A$ entonces $\|A\| = |\lambda_{máx}|$.*
   Donde $|\lambda_{máx}| =$ máximo en valor absoluto de los valores propios de A.

Es conocido del análisis, que dada una norma sobre $M_n(\mathbb{K})$, se puede definir una metrica, ρ sobre $M_n(\mathbb{K})$ dada por

$$\rho(A, B) = \|A - B\|\,,\ \ A, B \in M_n(\mathbb{K}),$$

de tal manera que

Definición 1.3.2 *Una sucesión $\{A_n\}_{n\geq 0}$, de elementos en $M_n(\mathbb{K})$, es convergente si existe $A \in M_n(\mathbb{K})$, tal que*

$$\|A_n - A\| \longrightarrow 0,\ \ \textit{cuando } n \longrightarrow \infty$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$$

El espacio $M_n(\mathbb{K})$[1] tiene estructura de espacio topológico[2]: sus subconjuntos abiertos son aquellos que pueden expresarse como unión de intersecciones finitas de subconjuntos de la forma

$$N_{M_n(\mathbb{K})}(A; r)\ =\ \{B \in M_n(\mathbb{K}) :\ \ \|A - B\| < r\}$$

es la definición de **bola abierta**, de radio $r > 0$, y centro $A \in M_n(\mathbb{K})$, en $M_n(\mathbb{K})$.

---

[1]Puede pensarse como un espacio euclidiano ya que $\mathbb{K}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{K})$

[2]Un espacio topológico es un par ordenado (X, τ) formado por un conjunto X y una topológia τ sobre X. Una topología sobre un conjunto X, es una colección τ, de subconjuntos de X (llamados abiertos), con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset,\ X\ \in \tau$.
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección arbitraria de τ está en τ.
3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ.

De una manera análoga para $Y \subseteq M_n(\mathbb{K})$, tendremos una bola abierta de radio $r > 0$, y centro $A \in Y$ en Y.

$$N_Y(A; r) = \{B \in Y : \|B - A\| < r\} = N_{M_n(\mathbb{K})}(A; r) \cap Y$$

Entonces un subconjunto $V \subseteq Y$, es abierto en Y, si y solo si para cualquier, $A \in V$, existe $\delta > 0$, tal que

$$N_Y(A; \delta) \subseteq V$$

Definición 1.3.3 *Sea $Y \subseteq M_n(\mathbb{K})$, y (X, τ) un espacio topológico. La función $f : Y \longrightarrow X$, es continua si para todo $A \in Y$ y $U \in \tau$, tal que $f(A) \in U$, existe $\delta > 0$, para el cuál*

$$B \in N_Y(A; \delta) : f(B) \in U.$$

Equivalentemente, f es continua si y solo si, para cada $U \in \tau$ se tiene que, $f^{-1}(U) \subseteq Y$ es abierto en Y.

También es válida y útil, desde el punto de vista práctico la siguiente caracterización de la continuidad de una función definida entre **espacios métricos**, mediante el concepto de sucesión y que se conoce con la denominación de función sucesionalmente continua. Se tiene en resumen que

$$f \textbf{ es continua en } x \equiv f \textbf{ es sucesionalmente continua en } x$$
$$\equiv x_n \longrightarrow x =: f(x_n) \longrightarrow f(x).$$

de donde se obtiene

Teorema 1.3.1 *Sea (X, ρ), un espacio métrico, tenemos que $f : Y \subseteq M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow X$, es continua si y solo si dada cualquier sucesión $\{A_n\}_{n\geq 0}$, convergente a $A \in Y$, se tiene que*

$$(f(A_n)) \longrightarrow f(A), \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} (f(A_n)) = f(A)$$

Demostración:

- Supongase que f es continua. Sea $\{A_n\}_{n\geq 0}$, una sucesión en Y, que converge a una matriz A, en Y. Sea V una vecindad abierta de $f(A)$ en X, entonces $A \in f^{-1}(V)$, es un subconjunto abierto de Y, por lo tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > K$, $A_n \in f^{-1}(V)$ ó $f(A_n) \in V$, puesto que V es cualquier vecindad, de f(A), por lo tanto
$$\lim_{n\to\infty} (f(A_n)) = f(A).$$
- Supongamos ahora que se tiene la condición de continuidad. Dada cualquier sucesión $\{A_n\}_{n\geq 0}$, convergente a A en Y, se tiene que
$$\lim_{n\to\infty} (f(A_n)) = f(A).$$

Supongamos a f discontinua en $A \in Y$, entonces existe $\epsilon > 0$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f\left(N_Y(A; 1/n) - B_\rho(f(A); \epsilon)\right) \neq \emptyset$$

entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, elegimos $A_n \in N_Y(A; 1/n)$, tal que $f(A_n) \notin B_\rho(f(A); \epsilon)$ entonces la sucesión $\{f(A_n)\}_{n\geq 0}$, no converge a f(A). Más se tiene que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n_0} < \epsilon$, tal que para todo $n > n_0$, $A_n \in N_Y(A; 1/n) \subseteq N_Y(A; \epsilon)$. Por lo tanto $(A_n)_{n\geq 0} \longrightarrow A$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto f es continua en A; para todo A en Y. $\square$

Teorema 1.3.2 *Sean* $\{A_k\}_{k\geq 0} = \left\{[a_{ij}^{(k)}]\right\}_{k\geq 0}$, $\{B_k\}_{k\geq 0} = \left\{[b_{ij}^{(k)}]\right\}_{k\geq 0}$,*sucesiones de matrices en* $M_n(\mathbb{K})$*, para* $k \in \mathbb{N}$*, entonces*

1. $\{A_k\}_{k\geq 0}$ *converge a una matriz* $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$ *si y solo si*

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \quad i, j = \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

2. *Si* $\lim_{k\to\infty} A_k = A$ *y* $\lim_{k\to\infty} B_k = B$ *entonces*

$$\lim_{k\to\infty} A_k B_k = AB.$$

Demostración

1. Sean $\{A_k\}_{k\geq 0} = \left\{[a_{ij}^{(k)}]\right\}_{k\geq 0}$, una sucesión de matrices en $M_n(\mathbb{K})$ tal que converge a una matriz $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$. Sean $1 \leq i\,,\ j \leq n$; fijos entonces,

$$\begin{aligned} \left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right| &\leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right|^2}\right) \\ &= \left|(A_k - A)e_j\right| \\ &\leq \|A_n - A\|. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Tomando límite en (1.5) se obtiene

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right| \leq \lim_{k\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

entonces,

$$\lim_{k\to\infty} \left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right| = 0 \text{ ó } \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}. \tag{1.6}$$

Por otra parte si se tiene (1.6) se define la matriz en $M_n(\mathbb{K})$ como

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

hay que verificar que $A_n \longrightarrow A$; para esto he de tener en cuenta el resultado (1.3) en la solución del problema 1.3.1
Si $z \in \mathbb{K}^{n^2}$, $|z| = 1$ y $A \in M_n(\mathbb{K})$ tenemos que

$$|Az| \leq M\,|z| = M \qquad \text{dondé } M = \sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|.$$

entonces por la definición de extremo superior

$$\|A\| \leq M = \sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|.$$

Entonces $\|A_k - A\| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right|$, tomando límite

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \|A_k - A\| \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right| = \sum_{i,j=1}^{n} \lim_{k\to\infty} \left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right| = 0,$$

es decir $A_k \longrightarrow A$

2. Sean $\{A_k\}_{k\geq 0} = \left\{[a_{ij}^{(k)}]\right\}_{k\geq 0}$, $\{B_k\}_{k\geq 0} = \left\{[b_{ij}^{(k)}]\right\}_{k\geq 0}$, una secuencia de matrices en $M_n(\mathbb{K})$, que convergen en $M_n(\mathbb{K})$ a $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, respectivamente.

ya que $A_kB_k = [a_{ij}^{(k)}][b_{ij}^{(k)}] = [c_{ij}^{(k)}] = \left[\sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} b_{tj}^{(k)}\right] = C_k$, y
$AB = [a_{ij}][b_{ij}] = [c_{ij}] = \left[\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}\right] = C$
se tiene también que

$\lim_{k\to\infty} A_k = A$ y $\lim_{k\to\infty} B_k = B$ entonces por el literal anterior

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \quad \text{cualesquiera que sean los subíndices } i, j.$$

$$\lim_{k\to\infty} b_{ij}^{(k)} = b_{ij} \quad \text{cualesquiera que sean los subíndices } i, j.$$

Así

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} b_{tj}^{(k)} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj} \quad \text{cualesquiera que sean los subíndices } i, j.$$

es decir

$$\lim_{k\to\infty} c_{ij}^{(k)} = c_{ij} \quad \text{cualesquiera que sean los subíndices } i, j.$$

Por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} A_kB_k = AB.$$

$\square$

Lema 1.3.2 *Las funciones coordenadas* $coord_{rs} : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$*, dónde*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto a_{rs}$$

para $1 \leq r\,,\; s \leq n$*, son continuas.*

Demostración
Sea $\left\{\{A_k\}_{k\geq 0} = \left\{[a_{ij}^{(k)}]\right\}_{k\geq 0}\,,\;\right\} \in M_n(\mathbb{K})$, una sucesión de matrices que converge a $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \|A_k - A\| = 0$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > N$ tenemos que $\|A_k - A\| < \epsilon$. Sea $e_s \in \mathbb{K}^{n^2}$ para $s = 1, 2, \dots, n^2$, la base usual ortonormal, y $n > N$; tenemos

$$\begin{aligned}
|coord_{rs}(A_k) - coord_{rs}(A)|_{\mathbb{K}} &= \left|a_{rs}^{(k)} - a_{rs}\right|_{\mathbb{K}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{r=1}^{n} \left|a_{rs}^{(k)} - a_{rs}\right|_{\mathbb{K}}^2} \\
&= |A_n e_s - A e_s|_{\mathbb{K}^n} \\
&= |(A_n - A) e_s|_{\mathbb{K}^n} \\
&\leq \|A_k - A\| \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto $coord_{rs}(A_k) \longrightarrow coord_{rs}(A)$, y por el teorema1.3.1 la función $coord_{rs}$ es continua en $M_n(\mathbb{K})$ para $1 \leq i\,,\; j \leq n$ □

Corolario 1.3.1 *La función Coord, es continua y además también* $Coord^{-1}$ *es continua*

Demostración

- *Coord* es continua
  Sea $\{A_k\}_{k\geq 0} = \left\{[a_{ij}^{(k)}]\right\}_{k\geq 0} \in M_n(\mathbb{K})$, una sucesión de matrices que converge a $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}\;, \quad 1 \leq i; j \leq n. \tag{1.7}$$

Luego

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} Coord(A_n) = &\lim_{n\to\infty}(a_{11}^{(k)}, a_{21}^{(k)}, \ldots, a_{n1}^{(k)}, \ldots, a_{1n}^{(k)}, \ldots, a_{nn}^{(k)})\\ &=(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{nn}), \quad \text{de } 1.7\\ &=Coord(A).\end{aligned}$$

Por el teorema 1.3.1, la función *Coord* es continua.

- Tomando como base para $\mathbb{K}^{n^2}$ la usual ortonormal expresamos cada elemento $x \in \mathbb{K}^{n^2}$, como

$$\begin{aligned}x =&(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{nn})\\ =&x_{11}e_1 + x_{21}e_2 + \ldots + x_{n1}e_n + \ldots + x_{1n}e_{n(n-1)} + \ldots, x_{nn}e_{n^2}\end{aligned}$$

Dondé $x_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i; j \leq n$.
Entonces la inversa de la función coordenada se puede expresar como
$Coord^{-1} : \mathbb{K}^{n^2} \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$, donde

$$(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{nn}) \longmapsto \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n}\\ x_{21} & \ldots & x_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1} & \ldots & x_{nn}\end{pmatrix}$$

y de manera análoga se tiene que $Coord^{-1}$, es continua. □

Corolario 1.3.2 *La función determinante*

$$\begin{array}{rccl} D: & M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ & A = (c_1, \ldots, c_n) & \longmapsto & D(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{\alpha\in S_n} \epsilon(\alpha) a_{\alpha(1)1} a_{\alpha(2)2}, \ldots, a_{\alpha(n)n}.\end{array}$$

Donde

$$\begin{aligned}c_1 =&a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n\\ c_2 =&a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n\\ &\vdots\\ c_n =&a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n\end{aligned}$$

es continua.

Demostración
Definase f por

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{K}^{n^2} = \underbrace{\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\ldots\times\mathbb{K}}_{n^2-\text{veces}} & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ & z = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{nn}) & \longmapsto & f(z) = \sum_{\alpha\in S_n} \epsilon(\alpha) a_{\alpha(1)1} a_{\alpha(2)2}, \ldots, a_{\alpha(n)n}.\end{array}$$

la cual es una función polinómica por lo tanto continua. luego puesto que $D : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$; es tal que $D(A) = f \circ Coord(A)$, y puesto que la composición de funciones continuas es continua.
Por lo tanto D es continua. □

Definición 1.3.4 *Sen X , Y dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$. Diremos que f es un* **homeomorfismo**, *si es una biyección y tanto f comó f^{-1} son continuas.*

Dos espacios topológicos, X,Y son **homeomorfos ó topológicamente equivalentes** si existe entre ellos un homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$

Teorema 1.3.3 *El espacio $(M_n(\mathbb{K}), \rho)$ es homeomorfo al espacio $(\mathbb{K}^{n^2}, |.|)$*

Demostración
Basta combinar los resultados del lema 1.2.1 y el corolario1.3.1 □.

Definición 1.3.5 *Una sucesión $\{A_k\}_{k\geq 0}$ de matrices es de* **Cauchy** *si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p, q > N$,*

$$\left\|A_p - A_q\right\| < \epsilon$$

Definición 1.3.6 *Un espacio métrico es* **completo** *si toda sucesión de* **Cauchy** *es una sucesión convergente en el sentido de la definición 1.3.2.*

Teorema 1.3.4 *(Completitud de $M_n(\mathbb{K})$)*
El espacio $(M_n(\mathbb{K}), \rho)$, es completo.

Demostración
Sea $\{A_{k\geq 0}\}$ una sucesión de Cauchy en $M_n(\mathbb{K})$. Sean $1 \leq i\,,\ j \leq n$; fijos entonces,

$$\begin{aligned} \left|a_{ij}^{(p)} - a_{ij}^{(q)}\right| &\leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}^{(p)} - a_{ij}^{(q)}\right|^2}\right) \qquad (1.8)\\ &= \left|(A_p - A_q)e_j\right| \\ &\leq \left\|A_p - A_q\right\|. \end{aligned}$$

$$\left|a_{ij}^{(p)} - a_{ij}^{(q)}\right| \leq \left\|A_p - Aq\right\| < \epsilon$$

Por lo tanto la sucesión $\left\{a_{ij}^{(r)}\right\} \subset \mathbb{K}$ es de cauchy; por ser $\mathbb{K}$ con la norma usual un espacio métrico completo, entonces existe $a_{ij} \in \mathbb{K}$, tal que $a_{ij}^{(r)} \longrightarrow a_{ij}$, para $1 \leq i\,, j\ \leq n$
Sea $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$, entonces por el teorema 1.3.2 tenemos que $\{A_r\}_{r\geq 0} \longrightarrow A$; por lo tanto, $\{A_r\}_{r\geq 0}$ es convergente en $M_n(\mathbb{K})$ Por lo tanto $(M_n(\mathbb{K}), \rho)$ es completo. □
Observación
El teorema nos dice que $(M_n(\mathbb{K}), \rho)$ es completo, por consiguiente $M_n(\mathbb{K})$ es un **espacio de Banach**.
Sean (X, τ) , (Y, τ^*) dos espacios topológicos, es sabido que le podemos dar estructura topológica al producto, $X \times Y$, con la topológia producto $\tau \times \tau^*$ dada por

$$\tau \times \tau^* = \{U\beta' \ : \beta' \subset \beta\} \ \text{ donde } \ \beta = \{U \times V \ : \ U \in \tau,\ V \in \tau^*\}$$

Tambien podemos definir una métrica producto, μ, para $M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$, dada por

$$\begin{array}{rccl} \mu : & M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (A, B) \times (C, D) & \longmapsto & \mu((A, B) \times (C, D)) = \sqrt{\|A - C\|^2 + \|B - D\|^2}. \end{array}$$

y en la cual se tiene que la sucesión $\{(A_r, B_r)\}_{r\geq 0}$, converge a $(A, B) \in M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$ si y solo si las sucesiones $\{A_r\}_{r\geq 0}$ y $\{B_r\}_{r\geq 0}$ convergen a A y B respectivamente.

Proposición 1.3.2 *Demuestre que las funciones*

1. *Suma de matrices dada por*

$$\begin{array}{rccl} suma : & M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ & (A, B) & \longmapsto & suma((A, B)) = A + B. \end{array}$$

2. *multiplicación de matrices dada por*

$$\begin{array}{rccl} mult : & M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ & (A, B) & \longmapsto & mult((A, B)) = AB. \end{array}$$

3. *inversa de matrices dada por*

$$\begin{array}{rccl} inv : & GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ & A & \longmapsto & inv(A) = A^{-1} \end{array}$$

son continuas.

Demostración

1. Sea $\{(A_r, B_r)\}_{r\geq 0}$ una sucesión en $M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$ que converge a $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})$; entonces

$$A_r \longrightarrow A \quad \text{y} \quad B_r \longrightarrow B$$

   Por el teorema 1.3.2, se tiene que

$$mult(A_r, B_r) = A_r B_r \longrightarrow AB = (A, B)$$

   y por lo tanto del teorema 1.3.1, *mult* es continua.

2. Dado que $\lim\limits_{r\to\infty} a_{ij}^{(r)} = a_{ij}$ y $\lim\limits_{r\to\infty} b_{ij}^{(r)} = b_{ij}$ entonces

$$\lim_{r\to\infty} a_{ij}^{(r)} + b_{ij}^{(r)} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{para } 1 \leq i\,,\; j \leq n.$$

   es decir,

$$suma(A_r, B_r) = A_r + B_r \longrightarrow A + B = suma(A, B)$$

   e igualmente por el teorema 1.3.1, *suma* es continua.

3. La función
$$\begin{array}{rccc} P_{c_{ij}}: & GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & GL_{n-1}(\mathbb{K}) \\ & A & \longmapsto & A(i|j) \end{array}$$
donde $A(i|j)$ es la matriz obtenida de A excluyendo la *i-ésima* fila y la *j-ésima* columna, $P_{c_{ij}}$ es continua pues es una contracción débil[1]. En efecto sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ cualesquiera entonces
$$\left\| P_{c_{ij}}(A) - P_{c_{ij}}(B) \right\| = \|A(i|j) - B(i|j)\| \leq \|A - B\|$$
del Corolario1.3.2 la función determinante
$$\begin{array}{rccc} D: & M_{n-1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto & det(A) \end{array}$$
es continua, entonces la función
$$\begin{array}{rccc} adj_{ij}: & M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto & (-1)^{i+j} det\,(A(j|i)) \end{array}$$
es continua pues es compuesta de funciones continuas
$$adj_{ij}(A) = (-1)^{i+j} det(A(j|i))^{2} = (-1)^{i+j} D \circ P_{c_{ij}}(A).$$
Así la función
$$adj: \; M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$$
dada por
$$adj(A) = \begin{pmatrix} adj_{11}(A) & \dots & adj_{1n}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ adj_{n1}(A) & \dots & adj_{nn}(A) \end{pmatrix}$$
puesto que todas las coordenadas $adj_{ij}(A)$ son continuas se tiene que $adj(A)$ es continua. Luego la función
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} - \{0\} \\ & A & \longmapsto & \frac{1}{det(A)} \end{array}$$
es continua dado que es la compuesta de la función determinante con la función
$$f : \mathbb{K} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{K}; \quad f(x) = \frac{1}{x}$$
que son continuas. Dado que
$$inv(A) = A^{-1} = \left[\frac{(-1)^{i+j} det(A(i|j))}{det(A)} \right]^T = \left[\frac{(-1)^{i+j} det(A(j|i))}{det(A)} \right] = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)$$
es compuesta de las funciones continuas
$$\begin{array}{ccccc} GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} - \{0\} \times GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \left(\frac{1}{det(A)}, adj(A) \right) & \longmapsto & \frac{1}{det(A)} . adj(A) \end{array}$$
por consiguiente la función *inv* es continua. □

[1]Sean (M, d) y (N, d') espacios métricos, entonces la aplicación $f : (M, d) \longrightarrow (N, d')$ e una *contracción debil* si para cualesquiera $x, y \in M$, $d(f(x), f(y)) \leq d'(x, y)$

[2] El escalar $(-1)^{i+j} det(A(i|j))$ es llamado i, j **cofactor** de A.

Capítulo 2

Grupos de Lie de Matrices

Necesitamos unas supermatemáticas en las que las operaciones sean tan desconocidas como las cantidades sobre las que operan, y un supermatemático que no sepa que está haciendo cuando realiza esas operaciones. Esas supermatem'aticas son la teoria de grupos.

(Sir Arthur Stanley Eddington)

En este capítulo serán considerados los subgrupos(algebraico) del conjunto de matrices cuadradas $n \times n$, con entradas en $\mathbb{K}$, no degeneradas(invertibles): el conjunto $GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : det(A) \neq 0\}$, el cuál es conosido por “El grupo lineal general”. Al mismo tiempo de definir las estructuras algebraicas y topológicas de tales subgrupos y estudiaremos la compatibilidad entre ambas estructuras, el cual nos permite dirigir un enfoque tradicional a la «Geometría de los grupos de Lie de matrices» de tal manera que los conceptos que subyacen en tal campo se harán más comprensibles y tangibles. Se expone además los conceptos de homomorfismos continuos en grupos de Lie de matrices, estos mantienen tanto la parte algebraica como la topológica, luego se dará una visión más general de las ideas, definiendo el grupo lineal general de un espacio vectorial normado, y clasificaremos algunos tipos de geometrías.

2.1 Grupo lineal general y general especial

Nótese que

Proposición 2.1.1 .

1. *$GL_n(\mathbb{K})$ es un subconjunto abierto de $M_n(\mathbb{K})$.*
2. *$SL_n(\mathbb{K})$ es un subconjunto cerrado de $M_n(\mathbb{K})$.*

Demostración

1. Se sabe por el corolario 1.3.2, que la función determinante es continua en $M_n(\mathbb{K})$, entonces

$$GL_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K}) - det^{-1}(\{0\})$$

   es un conjunto abierto ya que $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{K}$, y bajo una función continua la imagen inversa de un conjunto abierto, es un abierto. De manera similar

2. $SL_n(\mathbb{K}) = det^{-1}(\{1\})$
   es cerrado en $M_n(\mathbb{K})$, ya que $\{1\}$, es un conjunto cerrado en $M_n(\mathbb{K})$. □

Definición 2.1.1 *Sea G un conjunto con una operación binaria $G \times G \xrightarrow{*} G$, $(g, h) \longrightarrow gh$ y sea τ una familia de subconjuntos de G. Decimos que G es un grupo topológico si*

1. *G es grupo algebraico*[1].

2. *(G, τ) es un espacio topológico, $G \times G$ el espacio producto,*

3. *Las aplicaciones*

$$\begin{array}{rccc} mult: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g, h) & \longmapsto & gh. \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} inv: & G & \longrightarrow & G \\ & g & \longmapsto & g^{-1}. \end{array}$$

   estan bien definidas y son continuas.

Observación
Una forma común de definir a un grupo topológico es: "Un grupo dotado de una topología compatible con su estructura de grupo se llama grupo topológico".
Un ejemplo general se da al tomar un grupo algebraico finito G y su conjunto de partes $P(G)$, de tal forma que $(G, P(G))$ tome estructura topológica, entonces $(G, P(G))$ es un grupo topológico.

Cuando de manipular números complejos se trata, lo mejor es emigrar de las coordenadas cartesianas de un punto $P = z = (x, y)$ a las coordenadas polares (r, θ) donde r es el módulo o valor absoluto $|z|$ del complejo z y $\theta = argz = \arctan(y/x)$ es el ángulo ó argumento del complejo z, que forman la línea que une a P con el origen $\mathbf{0}$ y el eje x. De la fórmula de Euler[2] se tiene que $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r\exp(i\theta)$. Así cuando el plano $\mathbb{R}^2$ se identifica con el plano $\mathbb{C}$ de los números complejos, una rotación alrededor del origen es igual a multiplicar por el número

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \exp(i\theta)$$

[1] Ver definición 1.1.1

[2] Leonardo Euler (1707-1783) fue un maestro del cálculo -en la acepción de calcular- utilizando los números complejos, los cuales llevó a nuevas alturas.

que es el conjunto de números en el circulo unitario o 1-esfera definida por

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}.$$

Nótese primeramente que S^1 no es solamente un objeto geométrico, si no que también adquiere estructura algebraica bajo el producto de los números complejos $(S^1, *)$, más aun puede ser dotado de estructura topológica y mantener la compatibilidad de ambas estructuras como se muestra en el siguiente problema

Problema 2.1.1 *Demuestre que* $(S^1, *)$*, es un grupo topológico*

Solución

En $S^1 \subseteq \mathbb{C} - \{\mathbf{0}\}$ definamos la operación binaria $S^1 \times S^1 \xrightarrow{*} S^1$, $(\exp(i\theta), \exp(i\varphi)) \longrightarrow \exp(i\theta)\exp(i\varphi)$

1. S^1 es grupo algebraico[1].
2. Dado que un cojunto $U \subseteq S^1$ es abierto si esixte un $O \subseteq \mathbb{C} - \{0\}$ abierto tal que $U = O \cap S^1$. Así la 1-esfera hereda las propiedades topológicas de $\mathbb{R}^2$, y tomando $\tau = \left\{U \subseteq S^1 |\ U = O \cap S^1,\ O \,\text{es abierto en}\, \mathbb{R}^2\right\}$ una familia de subconjuntos de S^1 se tendra que (S^1, τ) es un espacio topológico,
3. Las aplicaciones
$$\begin{array}{rccl} mult: & S^1 \times S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & (\exp(i\theta), \exp(i\varphi)) & \longmapsto & \exp(i\theta)\exp(i\varphi) = \exp(i(\theta + \varphi)). \end{array}$$
$$\begin{array}{rccl} inv: & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & \exp(i\theta) & \longmapsto & \exp(-i\theta). \end{array}$$
estan bien definidas y son continuas.

Ejemplo 2.1.1 *La topológia de un espacio normado(en particular* $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, M_n(\mathbb{K})$*) es compatible con su estructura de grupo aditivo.*

Teorema 2.1.1 *Los grupos* $GL_n(\mathbb{K})$ *y* $SL_n(\mathbb{K})$ *son grupos topológicos.*

Demostración
solo hace falta verificar la condición *3.* en la definición 2.1.1.
Tomando

$$\begin{array}{rccl} mult|_{GL_n(\mathbb{K})}: & GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ & (A, B) & \longmapsto & mult((A, B)) = AB. \end{array}$$

y la inversa de matrices dada por

$$\begin{array}{rccl} inv: & GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ & A & \longmapsto & inv(A) = A^{-1} \end{array}$$

Así de la proposición 1.3.2 $mult|_{GL_n(\mathbb{K})}$ e inv, son continuas. Análogamente se prueba que $mult|_{SL_n(\mathbb{K})}$ e $inv|_{SL_n(\mathbb{K})}$ son aplicaciones bien definidas y continuas. □

[1] Ver definición 1.1.1

Teorema 2.1.2 *En todo grupo topológico G, todo subgrupo localmente cerrado es cerrado. Todo subgrupo que tiene un punto interior es simultanemante abierto y cerrado.*

Definición 2.1.2 *Un subgrupo algebraico, G de $GL_n(\mathbb{K})$ que es también un subespacio cerrado de $GL_n(\mathbb{K})$, lo llamaremos un* **grupo de Lie de matrices sobre** $\mathbb{K}$, *o un* **subgrupo de Lie matricial de** $GL_n(\mathbb{K})$, *denotado por $G \leq GL_n(\mathbb{K})$.*

Proposición 2.1.2 *Sea $G \leq GL_n(\mathbb{K})$, un subgrupo de Lie matricial de $GL_n(\mathbb{K})$. Entonces un subgrupo cerrado H, de G es un subgrupo de Lie matricial de $GL_n(\mathbb{K})$*

Demostración
Para toda sucesión $\{A_n\}_{n\geq 0}$ en H con límite en $GL_n(\mathbb{K})$, tiene su límite en G siempre que $A_n \in H \subseteq G$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y puesto que G es cerrado en $GL_n(\mathbb{K})$. Siempre que H es cerrado en G, es decir que $\{A_n\}_{n\geq 0}$, tiene su límite en H. Por lo tanto H es cerrado en $GL_n(\mathbb{K})$, y puesto que ser subgrupo algebraico es una relación transitiva, esto muestra, se tiene que H es un subgrupo de Lie matricial de $GL_n(\mathbb{K})$. □

La proposición 2.1.2, nos sugiere una nueva definición.

Definición 2.1.3 *Un subgrupo cerrado, H en un subgrupo de Lie matricial G de $GL_n(\mathbb{K})$, se llama* **subgrupo de Lie matricial** *de G.*

Proposición 2.1.3 *Sea G un grupo de Lie de matrices sobre $\mathbb{K}$. Sean $H \subseteq K$, un subgrupo de Lie matricial de K y $K \subseteq G$, un subgrupo de Lie matrical de G. Entonces H es un subgrupo de Lie matricial de G.*

Ejemplo 2.1.2 *$SL_n(\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K})$, es decir que el conjunto de matrices unimodulares de tamaño $n \times n$, es un grupo de Lie de matrices.*

Demostración
$SL_n(\mathbb{K})$ es cerrado por la proposición 2.1.1, además $SL_n(\mathbb{K})$, es subgrupo algebraico de $GL_n(\mathbb{K})$. Por lo tanto $SL_n(\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K})$. □

Ejemplo 2.1.3 *Podemos encajar a $GL_n(\mathbb{K})$, como subgrupo de Lie matricial de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$.*

Demostración
Sea

$$\begin{array}{rccc} f: & GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & GL_{n+1}(\mathbb{K}) \\ & A & \mapsto & f(A) = A' \end{array}$$

dónde

$$A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $A \in GL_n(\mathbb{K})$, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:

1. $det(A') = det(A)$.
2. $A' = B'$ si y solo si $A = B$.
3. $(AB)' = A'B'$.
4. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.
5. $\lim_{n\to\infty}(A_n)' = (\lim_{n\to\infty} A_n)'$

Por lo tanto f es un homomorfismo de grupos inyectivo tal que las funciones f y f^{-1} son continuas. Así la imagen de f es un subgrupo algebraico cerrado de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$, es decir, un sugrupo de Lie matricial de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$. □

2.2 Ejemplos de grupos de Lie de matrices

2.2.1 Grupo de matrices Triangulares Superiores

Una matriz A en $M_n(\mathbb{K})$ es triangular superior si tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y es unipotente si tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Sean los conjuntos de matrices
$UT_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : A \text{ es tiangular superior}\}$ y $SUT_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : A \text{ es unipotente}\}$.

Teorema 2.2.1 *$UT_n(\mathbb{K})$ y $SUT_n(\mathbb{K})$ son grupos de Lie de matrices sobre $\mathbb{K}$.*
Además, $SUT_n(\mathbb{K}) \leq UT_n(\mathbb{K})$.

Demostración

1. Es trivial que $SUT_n(\mathbb{K})$ y $UT_n(\mathbb{K})$, son grupos algebraicos bajo la multiplicación de matrices.
2. Sea $A = [a_{ij}] \in UT_n(\mathbb{K})$:$a_{ij} = 0$, si $i < j, 1 \leq i; j \leq n$ y dado que

$$UT_n(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K}) \cap \left(\underbrace{\bigcap_{i<j} coord_{ij}^{-1}(\{0\})}_{\text{cerrado}} \right), \text{ Por lo tanto } UT_n(\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K}).$$

De forma analoga.
Sea $A = [a_{ij}] \in SUT_n(\mathbb{K})$:$a_{ij} = 0$, si $i < j$ y $a_{ij} = 1$, si $i = j$, $1 \leq i; j \leq n$

$$:SUT_n(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K}) \cap \left(\underbrace{\bigcap_{i<j} coord_{ij}^{-1}(\{0\}) \cap \bigcap_{i=j} coord_{ij}^{-1}(\{1\})}_{cerrado} \right).$$

Por lo tanto $SUT_n(\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K})$.

3. Dado que $SUT_n(\mathbb{K}) \subseteq UT_n(\mathbb{K})$, por lo tanto, $SUT_n(\mathbb{K})$ es subgrupo algebraico de $UT_n(\mathbb{K})$ y ademas de la proposición 2.1.3 $:SUT_n(\mathbb{K}) \leq UT_n(\mathbb{K})$. □

2.2.2 Grupo Afín

El grupo Afín n-dimensional sobre $\mathbb{K}$, es

$$Aff_n(\mathbb{K}) = \left\{ \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ A \in GL_n(\mathbb{K}), \ t \in \mathbb{K}^n \right\} \subset GL_{n+1}(\mathbb{K}).$$

Mostremos ahora que $Aff_n(\mathbb{K})$, es un grupo de Lie de matrices sobre $\mathbb{K}$.
En efecto:

- $Aff_n(\mathbb{K})$, es grupo Algebraico.
- Sean $\{A_n\}_{n\geq 1}$, sucesión en $GL_n(\mathbb{K})$ y $\{t_n\}_{n\geq 1}$ sucesión en $\mathbb{K}^n$, tal que $\|A_n - A\| \longrightarrow 0$, y $|t_n - t| \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces.

$$\tilde{A}_n = \begin{pmatrix} A_n & t_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ n \in \mathbb{N}, \text{ es una sucesión cualquiera en } Aff_n(\mathbb{K}).$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{A}_n = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} A_n & \lim_{n\to\infty} t_n \\ \lim_{n\to\infty} 0 & \lim_{n\to\infty} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Aff_n(\mathbb{K}).$$

Por lo tanto $Aff_n(\mathbb{K})$ contiene sus puntos limites, lo que implica que $Aff_n(\mathbb{K})$ es cerrado en $GL_{n+1}(\mathbb{K})$

Sea el conjunto

$$\widetilde{\mathbb{K}}^n = \left\{ \widetilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{K}^n \right\} \subset \mathbb{K}^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$$

La aplicación

$$\Gamma : Aff_n(\mathbb{K}) \times \widetilde{\mathbb{K}}^n \longrightarrow \widetilde{\mathbb{K}}^n$$

dada por la formula

$$\Gamma(\widetilde{A}, \widetilde{x}) = \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observación
Transformaciones en $\mathbb{K}^n$ de la forma $x \longmapsto Ax + t$, para A, invertible y $t \in \mathbb{K}^n$ son llamadas transformaciones afines, las cuales preservan las líneas rectas, es decir, transforma espacios unidimensionales en espacios unidimensionales.
El espacio vectorial $\mathbb{K}^n$, puede ser considerado como subgrupo de Lie matricial del **subgrupo de traslaciones,**

$$Trans_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} I_n & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{K}^n \right\} \leq Aff_n(\mathbb{K})$$

Note que se puede identificar $GL'_n(\mathbb{K})$, con $GL_n(\mathbb{K})$, donde

$$GL'_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in GL_n(\mathbb{K}) \right\} \leq Aff_n(\mathbb{K})$$

es un subgrupo de Lie de $Aff_n(\mathbb{K})$(o $GL_n(\mathbb{K})$ es un subgrupo de Lie matricial de $Aff_n(\mathbb{K})$).

Definición 2.2.1 *Sean G un grupo, H subgrupo de G y N subgrupo normal de G.*
G es el producto semidirecto de H y N, si $G = HN$ y $H \cap N = \{1\}$; esto es denotado por $G = H \ltimes N$, o , $G = N \rtimes H$.

Observación
Si $G = H \ltimes N$, entonces para cada $g \in G$ existen únicos $n \in N$ y $h \in H$ tal que $g = hn$, podemos por lo tanto definir una aplicación,

$$q : G/N \longrightarrow H; \quad q(gN) = q(hnN) = q(hN) = h.$$

la cual es un isomorfismo de grupos.
Si $j : H \hookrightarrow G$, es el homomorfismo inclusión de H en G y $\pi : G \longrightarrow G/N$, es la proyección canónica de G sobre G/N tenemos para cada $h \in H$,

$$q \circ \pi \circ j(h) = q \circ \pi(h) = q(hN) = h,$$

es decir, $q \circ \pi \circ j = Id_H$.

Proposición 2.2.1 *$Aff_n(\mathbb{K})$ puede ser expresado como el producto semidirecto de $Trans_n(\mathbb{K})$ y $GL'_n(\mathbb{K})$.*

Demostración

1. Sean $A \in GL_n(\mathbb{K})$ y $t \in \mathbb{K}^n$ entonces,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & At \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Aff_n(\mathbb{K})$$

Por tanto $GL'_n(\mathbb{K}).Trans_n(\mathbb{K}) \subseteq Aff_n(\mathbb{K})$.

$$\text{Ahora si } \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Aff_n(\mathbb{K}), \text{ basta tomar}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL'_n(\mathbb{K}) \text{ y } \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Trans_n(\mathbb{K}) \text{ ,de modo que}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & A^{-1}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } Aff_n(\mathbb{K}) \subseteq GL'_n(\mathbb{K}).Trans_n(\mathbb{K})$$

Por lo tanto $GL'_n(\mathbb{K}).Trans_n(\mathbb{K}) = Aff_n(\mathbb{K})$.

2. Mostremos que $Trans_n(\mathbb{K}) \triangleleft Aff_n(\mathbb{K})$, es decir que $Trans_n(\mathbb{K})$ es un subgrupo normal de $Aff_n(\mathbb{K})$. Sea $A \in GL_n(\mathbb{K})$ y $t \in \mathbb{K}^n$ entonces,

$$\begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & At \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Trans_n(\mathbb{K}).$$

3. La igualdad $Trans_n(\mathbb{K}) \cap GL'_n(\mathbb{K}) = \{I_{n+1}\}$, se sigue del hecho de que las traslaciones no triviales no fijan al 0 mientras que todos los elementos de $GL_n(\mathbb{K})$ lo hacen. □

2.2.3 Grupo Ortogonal

Una matriz real A, tal que $A^T A = I_n$, es llamada una matriz ortogonal, donde A^T significa la matriz transpuesta de $A = [a_{ij}]$ definida por $A^T = [a_{ji}]$.
Es trivial darse cuenta que el producto de matrices ortogonales, es una matriz ortogonal, además la matriz identidad I_n es ortogonal.
Entonces el conjunto $O_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^T A = I_n\right\} \subseteq GL_n(\mathbb{K})$, es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{K})$ y es llamado el **grupo ortogonal**. Se dice que una martiz satisface la condición de ortogonalidad si satisface $A^T A = I_n$, es decir si satisface n^2- ecuaciones

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}, \quad \text{para los } n^2\text{números } a_{ij}, \quad \delta_{ij} \text{ es la delta de Kroneker.}$$

Sean la funciones polinómicas continuas,

$$\begin{array}{rccl} f_{i,j}: & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}\right) - \delta_{ij}, \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq n. \end{array}$$

entonces la condición de ortogonalidad para A, se satisface si y solamente si $f_{ij}(A) = 0$, para toda $1 \leq i, j \leq n$.
Por lo tanto

$$O_n(\mathbb{R}) = \bigcap_{ij} f_{ij}^{-1}(0),$$

así, $O_n(\mathbb{R})$, es un suconjunto cerrado de $M_n(\mathbb{R})$, con esto aseguro que $O_n(\mathbb{R})$, es un grupo de Lie de matrices.

Consideremos la función determinante restringida a

$$\begin{array}{rccl} det: & O_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\times} \\ & A & \longmapsto & det(A) \end{array}$$

notemos que para $A \in O_n(\mathbb{R})$

$$(det(A))^2 = det(A^T).det(A) = det(I_n) = 1$$

lo cual implica que $det(A) = \pm 1$. Así se tiene que

$$O_n(\mathbb{R}) = O_n^+(\mathbb{R}) \cup O_n^-(\mathbb{R}),$$

donde $O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) : det(A) = 1\}$, $\quad O_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) : det(A) = -1\}$
El importante subgrupo de $O_n(\mathbb{R})$

$$SO_n(\mathbb{R}) = O_n^+(\mathbb{R})$$

es llamado el **grupo especial ortogonal**, Este grupo coincide con las rotaciones de $\mathbb{R}^n$ alrededor del origen, además, $SO_n(\mathbb{R})$ es el kernel del homomorfismo

$$\begin{array}{rccl} D: & O_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\} \\ & A & \longmapsto & det(A) \end{array}$$

En efecto: $Ker(D) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \,|\, D(A) = det(A) = 1\} = O_n^+(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})$. De acuerdo con el teorema fundamental del homomorfismo 1.1.4, se tiene que $O_n(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{Z}_2$.

Uno de los principales motivos del estudio de la matrices ortogonales es su relación con las isometrías.

Definición 2.2.2 *Una Isometría de $\mathbb{R}^n$, es una biyección que preserva distancias, es decir, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$*

Si la isometría fija el origen entonces es en realidad una transformación lineal, la cual llamaremos **Isometria Lineal**, que con respecto a la base estándar tendrá una matriz $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
El siguiente resultado resume las propiedades de tales matrices, para ello recordemos el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$, sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canonica para $\mathbb{R}^n$, por consiguiente $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, 1 en la i-ésima componente

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \text{ para todo } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in \mathbb{R}^n, \; x_i, y_i \in \mathbb{R}, \; 1 \leq i, j \leq n.$$

Proposición 2.2.2 *Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *A es una isometria lineal.*

2. $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.

3. *A es ortogonal, es decir, $A^T A = I_n$.*

Demostración:
Si A es una isometría lineal entonces para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $|Av| = |v|$. Ahora para todo par de vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} |A(x-y)|^2 &= \langle Ax - Ay, Ax - Ay\rangle \\ &= |Ax|^2 + |Ay|^2 - 2\langle Ax, Ay\rangle \\ &= |x|^2 + |y|^2 - 2\langle Ax, Ay\rangle . \end{aligned}$$

y similarmente

$$\begin{aligned} |A(x-y)|^2 &= |x-y|^2 \\ &= \langle x-y, x-y\rangle \\ &= |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y\rangle . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle .$$

Para $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\langle u, v\rangle = u^T v$ y $\langle Au, Av\rangle = u^T A^T A v$.
Para $1 \leq i, j \leq n$ $\quad e_i^T A^T A e_j = (i, j)$ entrada de $A^T A$ y $e_i^T e_j = \delta_{ij}$. Así

$$A^T A = I_n.$$

Finalmente, si $A^T A = I_n$, entonces para cada valor $w \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |Aw|^2 &= \langle Aw, Aw\rangle \\ &= w^T A^T A w \\ &= w^T w \\ &= |w|^2 \end{aligned}$$

Lo que muestra que A es una isometría lineal. $\square$

Los elementos de $SO_n(\mathbb{R})$ son llamados **isometrías directas o rotaciones**, mientras los elementos de $O_n^-(\mathbb{R})$, son llamados **isometrías indirectas**. Podemos definir el grupo de isometrías de $\mathbb{R}^n$ $Isom_n(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : f \text{es isometría lineal}\}$ que claramente contiene al subgrupo de traslaciones, $x \longmapsto x + t$.
Ahora dado que una isometría lineal, con respecto a la base estándar tendrá una matriz asociada, el grupo de isometrias de $\mathbb{R}^n$, también se puede escribir en la forma

$$Isom_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in O_n(\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R}^n \right\} \subseteq GL_{n+1}(\mathbb{R})$$

Proposición 2.2.3 *El grupo $Isom_n(\mathbb{R})$ puede ser expresado como el producto semidirecto de $Trans_n(\mathbb{K})$ y $O_n(\mathbb{R})$, es decir $Isom_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \ltimes Trans_n(\mathbb{K})$*

Demostración
Análoga a la que se hizo en la proposición 2.2.1 □

Hagamos notar las siguientes propiedades fundamentales de las matrices ortogonales. Primero un subespacio $H \subset \mathbb{R}^n$ con dimensión real $n - 1 = dim(H)$, es llamado un hiperplano en $\mathbb{R}^n$.

El siguiente resultado se basa en el **Teorema de las proyecciones del Álgebra Lineal.**

Si H es un hiperplano de $\mathbb{R}^n$, se define el **complemento ortogonal** de H como

$$H^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall y \in H, \ \langle x, y\rangle = 0\}$$

y se puede asegurar que

$$\mathbb{R}^n = H \oplus H^{\perp}, \quad H = H^{\perp\perp}$$

En otras palabras para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existen únicos $x_H \in H$ y $x'_H \in H^{\perp}$ tales que $x = x_H + x'_H$.
Definimos una función,

$$\begin{array}{rccl} \theta_H : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & \theta_H(x) = x_H - x'_H. \end{array}$$

a la que llamamos **reflexión en el hiperplano** H.

Lema 2.2.1 *Para un hiperplano $H \subseteq \mathbb{R}^n$, la reflexión en el hiperplano H es una isometría indirecta de $\mathbb{R}^n$, es decir $\theta_H \in O^-_{\mathbb{R}}$*

Demostración
Basta recordar que dada un base ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ de H y adjuntando un vector unitario v_n de $H^{\perp}$, se tiene que $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$, es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, la matriz de θ_H, en esta base es de la forma.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} = diag(1, 1, \ldots, 1, -1).$$

Siendo claro que esta matriz es ortogonal con determinante -1, y así $\theta_H \in O^-_{\mathbb{R}}$ □

Nos referimos a un elemento de $O_n(\mathbb{R})$ como la reflexión hiperplana si esta representa una reflexión hiperplana en la base estándar de $\mathbb{R}^n$, y tiene por forma,

$$P \ diag(1, 1, \ldots, 1, -1) \ P^T \quad P \in O_n(\mathbb{R}).$$

haciendo el respectivo cambio de base.

Proposición 2.2.4 *Todo elemento $A \in O_n(\mathbb{R})$ es un producto de reflexiones hiperplanas. Si el producto de reflexiones es par $A \in SO_n(\mathbb{R})$ y si el producto de reflexiones es impar $A \in O^-_n(\mathbb{R})$*

Demostración
Ver [[1] pág. 24] □

2.2.3.1 Los hiperplanos en $\mathbb{R}^2$

Los hiperplanos en $\mathbb{R}^2$ los podemos caracterizar con un número real m de la siguiente manera $H_m = \{(x, mx) : x \in \mathbb{R}\}$,

$$\begin{aligned} H_m^{\perp} &= \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | (\forall x \in \mathbb{R}) \langle (x, mx), (y_1, y_2) \rangle = 0\right\} \\ &= \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | (\forall x \in \mathbb{R}) xy_1 + mxy_2 = 0\right\} \\ &= \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | (\forall x \in \mathbb{R}) y_2 = (-1/m) y_1\right\} \\ &= H_{-1/m} \end{aligned}$$

Un resultado inmediato que se puede obtener es el siguiente: Si $m = 0$, $H_0 = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ el eje real de las abscisas(eje x), y $H_0^{\perp} = \{(0, x) | x \in \mathbb{R}\}$ el eje real de las ordenadas(eje y).

Por el teorema de la proyecciones tenemos que

$$\mathbb{R}^2 = H_m \oplus H_{-1/m},$$

Por tanto dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) = \left(\frac{x + my}{1 + m^2}, \frac{mx + m^2 y}{1 + m^2}\right) + \left(\frac{m^2 x - my}{1 + m^2}, \frac{y - mx}{1 + m^2}\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \theta_H : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \theta_H(x) = x_H - x'_H. \end{aligned}$$

La reflexión en el hiperplano H, satisface,

$$\theta_{H_m}(1, 0) = \frac{1}{1 + m^2}\left(1 - m^2, 2m\right) = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} e_1 + \frac{2m}{1 + m^2} e_2$$

$$\theta_{H_m}(0, 1) = \frac{1}{1 + m^2}\left(2m, m^2 - 1\right) = \frac{2m}{1 + m^2} e_1 + \frac{m^2 - 1}{1 + m^2} e_2$$

$$\theta_H = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{m^2-1}{1+m^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1 - m^2 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando $m = \tan(t)$ para $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ entonces

$$\theta_H = \frac{1}{1+\tan^2(t)} \begin{pmatrix} 1 - \tan^2(t) & 2\tan(t) \\ 2\tan(t) & \tan^2(t) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ \sin(2t) & -\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Es decir, toda reflexión en el hiperplano H_m es de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ \sin(2t) & -\cos(2t) \end{pmatrix}$$

para agún $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, tal que $m = \tan(t)$, cuando $t = \pm\pi/2$ la reflexión en el hiperplano $H_0^{\perp}$, es de la forma

$$\theta_{H_0^{\perp}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.4 Grupo Simpléctico

La geometría simplectica es un tema de investigación en matemática actual, no es de sorprender pues es la geometría asociada con la Mecánica Hamiltoniana y por consiguiente a la mecánica cuántica, es también importante como un área de geometría diferencial en el estudio de las 4−variedades, el grupo simpléctico es el grupo simétrico más natural para tales geometrías.

Realizando consideraciones similares a las de la sección anterior aplicadas a una matriz 2×2 real antisimétrica, es decir $S^T = -S$.
entonces $det(S^T) = det(-S) = (-1)^2 det(S)$, de donde $det(S^T) = (-1)^2 det(S)$.
Los casos mas interesantes ocurren si $det(S) \neq 0$. Un ejemplo es tomando la matriz antisimétrica,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y construir el llamado **grupo simplectico** de tamaño 2.

$$Symp_{\mathbb{R}} = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) : A^T J A = J \right\}.$$

Proposición 2.2.5 $SL_2(\mathbb{R}) = Symp_{\mathbb{R}}$.

Demostración

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}), \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} A^T J A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \\ a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J \end{aligned}$$

si y solamente si $det(A) = 1$ □

2.2.5 Grupo Unitario

Como es conocido el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$ se puede extender a $\mathbb{C}^n$(sobre R), sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canonica para $\mathbb{C}^n$, por consiguiente $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, 1 en la i-ésima componente

$$x.y = \langle x^*, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k, \text{ para todo } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in \mathbb{C}^n, \; x_i, y_i \in \mathbb{C}, \; 1 \leq i, j \leq n.$$

Esta clase de producto interno definido con (*) se llama producto hermitiano, el siguiente teorema nos brinda un criterio para preservar el producto interno en C^n

Teorema 2.2.2 *Una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ preserva el producto interno (*) si y solamente si su matriz A satisface $A\overline{A}^T = I$, donde la matriz I denota la matriz identidad.*

Para $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$

$$A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$$

es la conjugada Hermitiana de A, es decir, $A^* = [\overline{a_{ji}}]$.

Como en el apartado del Grupo Ortogonal, uno encuentra que las filas (o las columnas) de la matriz A, forman una base ortonormal para C^n. Las filas v_i son **normales** en el sentido que $|v_i| = 1$, y **ortogonal** en el sentido que $v_i.v_j = 0$ cuando $i \neq j$, donde el punto denota el producto interno hermitiano (*). Está claro que las transformaciones lineales preservan el producto interno hermitiano entonces su producto e inversa, también preservan el producto interno hermitiano, así que el sistema de todas las transformaciones que preservan el producto hermitiano es un grupo, llamado el **grupo unitario de tamaño n**, o simplemente el **grupo Unitario**, es el subgrupo de $GL_n(\mathbb{C})$.

$$U_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^*A = I\} \leq GL_n(\mathbb{C})$$

Es claro que $U_n(\mathbb{C})$ es un grupo de Lie de matrices sobre $\mathbb{C}$.
Se dice también que una matriz $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$, es unitaria si y solo si se satisfacen las n^2 ecuaciones (para los n^2 números complejos a_{ij}) siguientes:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}} a_{kj} = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n, \text{ donde } \delta_{ij} \text{ es la delta de Kronecker.}$$

El **grupo especial unitario** se define y denota por

$$SU_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^*A = I,\ det(A) = 1\} \leq GL_n(\mathbb{C})$$

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es especial unitaria si y solamente si, satisface las $n^2 + 1$ ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}} a_{kj} & = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n \\ \quad det(A) & = 1. \end{cases}$$

Los cuaterniones Unitarios y el grupo $SU_2(\mathbb{C})$

La tres esfera unitaria(3-esfera), se define por

$$S^3 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\right\}$$

Por otra parte en la sección 1.2.4 definimos al conjunto $\mathbb{H}$ de los cuaterniones, sea $x = a\mathbf{1} + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ tal que $N(x) = 1$, entonces se dira que x es un cuaternio unitario y satisface la ecuación

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

Por tanto podemos definir a la 3-esfera como

$$S^3 = \left\{x \in \mathbb{H} \,|\, N(x) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\right\}$$

y tenemos

Proposición 2.2.6 *La 3-esfera,* $S^3 = \left\{x \in \mathbb{H} \,|\, N(x) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\right\}$ *es un subgrupo de* $\mathbb{H} - \{\boldsymbol{0}\} = \mathbb{H}^*$ *respecto a la multiplicación de cuaternios.*

Demostración
Tenemos que probar las condiciones de la definición 1.1.1.
Puesto que si se multiplican dos cuaternios cualesquiera el resultado es otro cuaternio, y del lema 1.2.3, sabemos que $N(xy) = N(x)N(y)$, así al multiplicar cuaternios unitarios, obtenemos otro cuaternio unitario, por tanto definamos la operación binaria $S^3 \times S^3 \xrightarrow{*} S^3$, $(x, y) \longrightarrow x * y = xy$

1. ya que en $\mathbb{H}$ se cumple la ley asociativa, en particular los cuaternios unitarios son asociativos,

2. $\mathbf{1} \in \mathbb{H}^*$, pues $N(\mathbf{1}) = 1$.

3. El inverso multiplicativo de un cuaternión x, distinto de cero, está dado por:

$$x^{-1} = \frac{x^*}{N(x)} = \frac{x^*}{1} = x^*$$

Así ya que $x \in \mathbb{H}^*$ se tiene que $N(x) = det(A_x) = det(A_x^T) = N(x^*) = 1$. □

La proposición anterior nos muestra que, los cuaternios unitarios forman un grupo donde se aprecia a priori que su conjunto subyacente es la 3-esfera unitaria de $\mathbb{R}^4$
Describamos la topología de $SU_2(\mathbb{C}) = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) : A^*A = I,\ det(A) = 1\}$,
Sea

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU_2(\mathbb{C})$$

Tenemos entonces que

$$g^* = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{pmatrix} \text{ y } g^{-1} = \frac{1}{det(g)} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \text{ ya que } det(g) = 1$$

Como $g \in SU_2(\mathbb{C})$ si y sólo si $g^*g = I_2$ si y sólo si $g^* = g^{-1}$, entonces $\delta = \overline{\alpha}$ y $\gamma = -\overline{\beta}$. De este modo, cualquier matriz de $SU_2(\mathbb{C})$ tiene la forma

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\delta} \end{pmatrix}, \quad det(g) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{2.1}$$

Inversamente, si g es una matriz del tipo 2.1, entonces evidentemente, $g \in SU_2(\mathbb{C})$. En consecuencia, cada elemento del grupo $SU_2(\mathbb{C})$ queda determinado unívocamente por un par de números complejos α, β, tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Haciendo $\alpha = x_1 + ix_2$, $\beta = x_3 + ix_4$ con $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i = \sqrt{-1}$, entonces la condición $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, se escribe

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

lo cual Permite decir, que el grupo $SU_2(\mathbb{C})$ es topológicamente equivalente(homeomorfo) a la 3-esfera S^3 en el espacio real $\mathbb{R}^4$ y por tanto S^3 es un grupo de Lie de matrices bajo la multiplicación de cuaternios.
Se ha demostrado que el conjunto que subyace al grupo $SU_2(\mathbb{C})$ es también la 3-esfera.

Problema 2.2.1 *Identifique a* $\mathbb{C}$ *con el subespacio* $\{x\mathbf{1} + yi \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}$

Solución

Una buena manera de ver porqué las matrices $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ se comportan igual que los números complejos $z_\theta = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, se deduce del hecho $R_\theta = \cos(\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(\theta)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sea la base formada por las matrices $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Fácilmente se comprueba que

$$\mathbf{1}^2 = \mathbf{1},\ \mathbf{1}i = i\mathbf{1} = i,\ i^2 = -\mathbf{1}.$$

se tiene entonces que las matrices $\mathbf{1}$ e i, se comportan exactamente igual que los números complejos 1 e $i = \sqrt{-1}$. y podemos identificar cada número complejo $z = x + iy$, con una matriz real dada por la función

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & \mathbb{C} & \longrightarrow \quad & \mathbb{H} \\ & z = x + iy & \longmapsto \quad & x\mathbf{1} + yi = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

φ es claramente un homomorfismo inyectivo, podemos entonces ver a $\mathbb{C}$ como un subespacio de $\mathbb{H}$, identificando a $\mathbb{C}$ como la imagen de φ

$$\varphi(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.3 Conexidad y compacidad en los grupos de Lie de matrices

Definición 2.3.1 *Un espacio topológico,* (X, τ)*, es* **compacto** *si todo cubrimiento de abiertos de X,* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$*, contiene un subcubrimiento finito* $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^k$.

Proposición 2.3.1 *Sean* X, Y *espacios topológicos y* $f : X \longrightarrow Y$ *una función continua. Entonces la imagen de* f*,* $Im(f) \subseteq Y$*, es un subconjunto compacto de* Y.

Demostración

Ver [[8], pág. 189] □

Daremos acontinuación una caracterización de un espacio métrico compacto.

Proposición 2.3.2 (X, d) *es un espacio métrico compacto si y solamente si toda sucesión* $\{s_n\}_{n\geq 1}$ *de* X*, contiene una subsucesión que converge* $\{s_{n_k}\}_{n_k \geq 1}$ *a un punto de* X.

Demostración

Ver [[8], pág. 204] □

Observaciones

- El espacio topológico con esta propiedad se denomina **sucesionalmente compacto**[1],

[1]Un subconjunto A de un espacio topológico X es sucesionalmente compacto si y solo si toda sucesión de A contiene una subsucesión que converge a un punto de A.

- En algunos libros se utiliza el término **bicompacto** para denotar un espacio compacto, y el término compacto para denotar un espacio sucesionalmente compacto,
- En general, existen espacios topológicos compactos que no son sucesionalmente compactos y viceversa, aunque en los espacios metrizables son equivalentes[2].

Proposición 2.3.3 . *Un subconjunto $X \subseteq M_n(\mathbb{K})$ es compacto si y solo si satisface las siguientes dos condiciones:*

1. *Existe $b \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $A \in X$, $\|A\| \leq b$,*
2. *Toda sucesión $\{A_n\}_{n\geq 0}$ en X que es convergente en $M_n(\mathbb{K})$ tiene su límite en X.*

Demostración
Tenemos que

- $M_n(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial normado de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$.
- La condición (1) implica que X es acotado, y (2) implica que X es cerrado
- Hemos demostrado en la capitulo anterior que La función coordenada definida por

$$\begin{array}{rccl} Coord: & M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n^2} \\ & A & \longmapsto & Coord(A). \end{array}$$

  es un homeomorfismo(ver corolario1.3.1), además de ser un isomorfismo lineal(ver lema 1.2.1). Sea $Coord(X) \subseteq \mathbb{K}^{n^2}$, es compacto puesto que

  a) $Coord(X)$ es cerrado; X es cerrado y $Coord$ es un homeomorfismo.
  b) $Coord(X)$ es acotado; Sea $A \in X$, por ser X acotado existe $c > 0, c \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|A\| \leq c$ luego por ser $Coord$ un isomorfismo lineal tenemos que

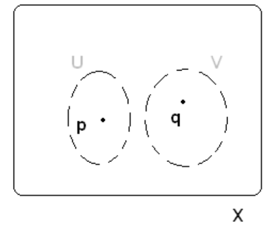
  $$|Coord(A)| \leq M\,\|A\| \leq Mc,$$

  para $M > 0$, una constante que depende de $Coord$.
  Así $X = Coord^{-1}(Coord(X))$ es compacto por ser $Coord^{-1}$ continua. □

Exponemos acontinuación requisitos sucesivos a imponer en el **Capítulo 5**, sobre un espacio para considerarlo variedad diferenciable, escenario de una física del contínuo.

Definición 2.3.2 Base de entornos abiertos de un punto
Para un punto x de un espacio topológico (X, τ), una base de entornos abiertos es una familia de conjuntos abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, que contiene a x de tal manera que si se toma cualquier otro conjunto abierto V que lo contenga, siempre se pueda encontrar un U_α, perteneciente a V.

Definición 2.3.3 Espacio topológico separable
Se dice de un espacio topológico (X, τ) que es separable si admite una base numerable de entornos abiertos.



Definición 2.3.4 *Un espacio topológico (X, τ) se dice que es de Haussdorf si $\forall p, q \in X$, con $x \neq q$, existen abiertos tales que $p \in U$, $q \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Es decir, que se puede separar dos puntos distintos de X.*

Dado que todo espacio métrico es Hausdorrf, en particular $(M_n(\mathbb{K}), \rho)$ es Hausdorrf.

Proposición 2.3.4 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y biyectiva. Si (X, τ_1) es un espacio topológico compacto e (Y, τ_2) es un espacio topológico Hausdorrf. Entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración
Ver [[8], pág. 189] □

Acontinuación definiremos lo que es un espacio topológico conexo.

Definición 2.3.5 *Un espacio topológico (X, τ) es* **disconexo** *si existen U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X tal que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Un espacio topológico es **conexo** si no es disconexo.
Obviamente, la conexión es una propiedad topológica, ya que se formula completamente en términos de la colección de los conjuntos abiertos de X. En otras palabras si X es un espacio conexo, también lo será cualquier espacio homeomorfo a X.

Proposición 2.3.5 *Sean X, Y espacios topológicos. Si X es conexo y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entonces $Im(f) \subseteq Y$ es un subconjunto conexo de Y.*

Demostración
Ver [[8], pág. 170] □

Teorema 2.3.1 *Se tiene que*

1. *$O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$, $SU_n(\mathbb{C})$ son compactos.*
2. *$GL_n(\mathbb{K})$ y $SL_n(\mathbb{K})$ no son compactos.*

Demostración

1. Dado que $O_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \ A^T A = I_n\right\}$.
   - para toda matriz ortogonal, $A \in O_n(\mathbb{R})$ se tiene que $\|A\| = 1$; por lo tanto $O_n(\mathbb{R})$ es acotado.

[2] Ver [[8], pág. 203-206]

- Sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de matrices en $O_n(\mathbb{R})$ que converge a una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$. Tenemos que

$$\begin{aligned} AA^T &= \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)^T \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} A_n^T\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(A_n A_n^T\right) \\ &= I \end{aligned}$$

  Entonces $A \in O_n(\mathbb{R})$; por lo tanto de la proposición 2.3.3 $O_n(\mathbb{R})$ es compacto en $M_n(\mathbb{K})$. Luego por la proposición 2.1.2 $SO_n(\mathbb{R})$ es subgrupo de Lie de matrices de $O_n(\mathbb{R})$, entonces $SO_n(\mathbb{R})$ es un subespacio cerrado(topológico) de $O_n(\mathbb{R})$, por tanto es cerrado(topológico) en $M_n(\mathbb{K})$, solo nos falta ver si es acotado para toda matriz ortogonal, $A \in O_n(\mathbb{R})$, con la condición que $det(A) = 1$ se tiene que $\|A\| = 1$; por lo tanto $SO_n(\mathbb{R})$ es acotado así nuevamente de la proposición 2.3.3 $SO_n(\mathbb{R})$ es compacto en $M_n(\mathbb{K})$. Por otra parte la compacidad de $U_n(\mathbb{C})$, $SU_n(\mathbb{C})$ en $M_n(\mathbb{K})$ se comprueba de forma análoga.

2. Basta verificarlo para $n = 2$. Para todo $k \neq 0 \in \mathbb{N}$ sea

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{K}) \subseteq GL_2(\mathbb{K}).$$

$$\begin{aligned} \|A_k\| &= \text{Máx}\left\{|Ax| : \ |x| = 1,\ x \in \mathbb{K}^2\right\} \\ &= \text{Máx}\left\{\left|\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}\right| |x| : \ |x| = 1,\ x \in \mathbb{K}^2\right\} \\ &= \text{Máx}\left\{|k|, |1/k|\right\} = k. \end{aligned}$$

   Por lo tanto $\{A_k\}_{k\geq 0}$ no es acotada y así $SL_2(\mathbb{K}) \subseteq GL_2(\mathbb{K})$ no cumple la condición (2) de la proposición 2.3.3. □

Teorema 2.3.2 $O_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \ A^T A = I_n\right\} \subseteq GL_n(\mathbb{K})$*, es disconexo.*

Demostración

Consideremos la función determinante restringida a

$$\begin{array}{rccc} det : & O_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^\times \\ & A & \longmapsto & det(A) \end{array}$$

notemos que para $A \in O_n(\mathbb{R})$

$$(det(A))^2 = det(A^T).det(A) = det(I_n) = 1$$

lo cual implica que $det(A) = \pm 1$. Así se tiene que

$$O_n(\mathbb{R}) = O_n^+(\mathbb{R}) \cup O_n^-(\mathbb{R}),$$

donde $O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) : det(A) = 1\}$, $\quad O_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) : det(A) = -1\}$

Notemos que

$$O_n^+(\mathbb{R}) \cap O_n^-(\mathbb{R}) = \emptyset$$

entonces $O_n(\mathbb{R})$, es la unión disjunta de dos subconjuntos cerrados no vacios es decir, $O_n(\mathbb{R})$ es disconexo. □

Dado un subgrupo de Lie matricial de $G \leq GL_n(\mathbb{K})$, usaremos a menudo la restricción de la función determinante dada por

$$\begin{array}{rccl} det_G: & G & \longrightarrow & \mathbb{K}^\times = \mathbb{K} - \{0\} \\ & A & \mapsto & det_G(A) = det(A) \end{array}$$

usualmente escribiremos esta función como det(en vez de det_G), siempre que no haya lugar a confusión. Claro que det_G es un homomorfismo de grupos que también es una función continua.

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, consideremos los conjuntos $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{t \in \mathbb{R} : t < 0\}$, note que $\mathbb{R}^+$ es un subgrupo de $GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$ que es un subconjunto tanto abierto como cerrado, al igual que $\mathbb{R}^-$. Por lo tanto $\mathbb{R}^\times$ es disconexo.

Para $G \leq GL_n(\mathbb{K})$,

$$det_G^{-1}\mathbb{R}^+ = G \cap det^{-1}\mathbb{R}^+,$$

así mismo,

$$G = det_G^{-1}\mathbb{R}^+ \cup det_G^{-1}\mathbb{R}^-.$$

Los subconjuntos de G, $G^+ = det_G^{-1}\mathbb{R}^+$ y $G^- = det_G^{-1}\mathbb{R}^-$, son tanto abiertos como cerrados; por ser det una función continua y $\mathbb{R}^+$ como $\mathbb{R}^-$ subconjuntos de $\mathbb{R}^\times$ abiertos y cerrados. Como $G^+ \neq \emptyset$ ya que $I \in G^+ = det_G^{-1}\mathbb{R}^+$ y si $G^- \neq \emptyset$ tenemos que $G = G^+ \cup G^-$ es un conjunto disconexo. Cuando $G^- = \emptyset$, puede que $G = G^+$ sea conexo o disconexo. Así hemos probado la siguiente proposición.

Proposición 2.3.6 .
Sea G un subgrupo de Lie matricial de $GL_n(\mathbb{R})$. Si $G^- \neq \emptyset$, entonces G es un subconjunto disconexo de $GL_n(\mathbb{R})$.

2.4 Acción de grupo continua

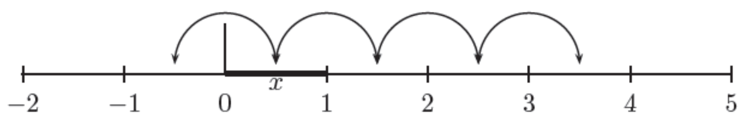
En la sección 1.1.2, definimos la forma en que operan los grupos en los conjuntos, extendamos esas ideas a un grupo topológico para obtener una interacción entre las estructuras algebraica y topológica al definir la acción de grupo continua sobre un espacio topológico.

Definición 2.4.1 *Sea G un grupo topológico y X un espacio topológico. Se dice que una acción de grupo*[1] $\psi : G \times X \longrightarrow X$ *es una* **acción de grupo continua** *si la función ψ es continua.*

Observacion
En está definición, $G \times X$ tiene la topología producto.
Si X es hausdorff entonces cualquier conjunto unitario $\{x\}$, es cerrado en X.

Ejemplo 2.4.1 *Tomando $(\mathbb{Z}, \tau)$, τ es la topología discreta*[2]*, definamos la función $\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $(n, x) \longmapsto n + x$, ψ es una acción continua.*

Del ejemplo anterior nótese que para el caso de $\mathbb{Z}$ y la acción sobre $\mathbb{R}$ dada por $\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $(n, x) \longmapsto n + x$, tenemos que dos puntos se identifican si difieren por un entero, luego
$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = ([0, 1], \ 0 \sim 1)$ donde 0 es identificado con 1, es decir tenemos a S^1.



$\mathbb{Z}$ operando sobre $\mathbb{R}$.

Problema 2.4.1 *Sea $\psi : G \times X \longrightarrow X$, una acción de grupo continua; asumiendo que X es un espacio topológico hausdorff, verificar.*

- *Si $x \in X$, muestre que el conjunto de isotropía de x, $Stab_G(x)$, es cerrado en G.*
- *Si $W \subseteq X$ es un subconjunto cerrado, muestre que*

$$Stab_G(W) = \{g \in G : gW = W\}, \quad \bigcap_{w \in W} Stab_G(w)$$

son subgrupos de G.

Solución

---

[1] Recordemos que una acción (por la izquierda) de un grupo G en un conjunto X es una función $\psi : G \times X \longrightarrow X$, que verifica las siguientes propiedades:

i) $\psi(e, x) = x$, para todo $x \in X$; $e \in G$ es el elemento idéntico y,

ii) $\psi(g, \psi(h, x)) = \psi(gh, x)$, para $g, h \in G$ y $x \in X$.

cuando no halla lugar a ambigüedad escribiremos gh en vez de $\psi(g, h)$. Bajo estas condiciones, X es un G-conjunto.

[2] Dado un conjunto X la colección de todos los subconjuntos de un conjunto X se llama la topología discreta en X es decir:
la topología discreta en X se define tomando cada subconjunto de X abierto (y por tanto, también cerrado), y X es un espacio topológico discreto si se equipa con su topología discreta;

- Si $g \notin Stab_G(x)$ entonces $gx \in X - \{x\}$. Siempre que $X - \{x\}$ sea un abierto en X, $\psi^{-1}(X - \{x\})$ es abierto en $G \times X$. Entonces existen conjuntos abiertos $U \subseteq G,\ V \subseteq X$ tales que $g \in G,\ x \in V$ y $U \times V \subseteq \psi^{-1}(X - \{x\})$.
  Si $h \in U$ entonces $hx \neq x$, por lo tanto $U \subseteq G - Stab_G(x)$. Es decir que para $g \in G - Stab_G(x)$, existe un conjunto abierto U tal que
  $$U \subseteq G - Stab_G(x).$$
  Por lo tanto $G - Stab_G(x)$ es abierto en G y por consiguiente $Stab_G(x)$ es cerrado en G.

- Si $g \notin Stab_G(W)$ entonces $gW \nsubseteq W$ o $g^{-1}W \nsubseteq W$. Si $gW \nsubseteq W$ entonces para algún $w \in W$, $gw \neq w$. Siempre que $X - \{w\}$ es abierto en X, $\psi^{-1}(X - \{w\})$ es abierto en $G \times X$.
  Entonces existen conjuntos abiertos $U \subseteq G,\ V \subseteq X$, tales que $g \in G,\ w \in V$ y $U \times V \subseteq \psi^{-1}(X - \{w\})$.
  Si $h \in U$ entonces $hw \neq w$, por lo tanto $U \subseteq G - Stab_G(W)$. Es decir todo punto de $G - Stab_G(W)$ es punto interior, por lo tanto $G - Stab_G(W)$ es abierto en G y por consiguiente $Stab_G(W)$ es cerrado en G. $\square$

2.5 Homomorfismos continuos en grupos de Lie de matrices

En el estudio de grupos, la noción de homomorfismos de grupos cobra un papel principal. Para grupos de Lie de matrices necesitamos unos homomorfismos especiales que mantengan tanto la parte algebraica como la topológica. Estos morfismos se introducen ahora.

Definición 2.5.1 *Sean G, H dos grupos de Lie de matrices sobre $\mathbb{K}$. Un homomorfismo de grupos $\varphi : G \longrightarrow H$ es un* **homomorfismo continuo de grupos de Lie de matrices** *si φ es continua y la imagen por φ, $Im(\varphi) = \varphi(G)$, es un subgrupo de Lie matricial de H.*

En otras palabras una función $\varphi : G \longrightarrow H$, entre grupos de Lie de matrices es un homomorfismo continuo de grupos de Lie de matrices sí:

1. φ es un homomorfismo de grupos.
2. φ es una función continua.
3. La imagen por φ, $\varphi(G)$, es un subconjunto cerrado de H.

La condición *3.* es clave pues no basta con ser homomorfismo continuo para ser un homomorfismo continuo de grupos de Lie de matrices.

Mostremos esto con un ejemplo: Consideremos $U_1(\mathbb{C})$ el circulo unitario con centro en el origen del plano complejo,

$$U_1(\mathbb{C}) = \left\{A \in GL_1(\mathbb{C}) : \overline{A}A = I\right\} = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z}z = |z| = 1\} = S^1$$

Que es un grupo de Lie de matrices sobre $\mathbb{C}$.

Ejemplo 2.5.1 *La función*

$$\varphi : SUT_2(\mathbb{R}) \longrightarrow U_1(\mathbb{C}); \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [e^{2\pi t i}]$$

es un homomorfismo continuo de grupos de Lie de matrices, sobreyectiva.

Solución
Sea $z \in U_1(\mathbb{C})$, el círculo unitario con centro en el origen del plano complejo, entonces $z = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t) = e^{2\pi t i}$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Por tanto φ es sobreyectiva. Luego

1. $$\varphi\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 + t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [e^{2\pi(t_1+t_2)}]$$
$$= [e^{2\pi t_1 i}][e^{2\pi t_2 i}] = \varphi\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 1 & t_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sea $\{t_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales tales que $t_n \longrightarrow t \in \mathbb{R}$; entonces
$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & t_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}_{n\geq 1} \quad \text{es una sucesión convergente cualquiera en } SUT_{\mathbb{R}} \text{y}$$
$$\lim_{n\to\infty} \varphi\begin{pmatrix} 1 & t_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [e^{2\pi(t_n i}] = [e^{2\pi t i}] = \varphi\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La función φ es sobreyectiva entonces $\varphi(SUT_2(\mathbb{R})) = U_1(\mathbb{C})$; que es un subgrupo cerrado de $\mathbb{C}$. □

Proposición 2.5.1 *Sea $\varphi : G \longrightarrow H$ un homomorfismo continuo de grupos de Lie de matrices. Entonces $ker(\varphi)$ es un subgrupo de Lie matricial de G. El grupo cociente, $G/ker(\varphi)$, puede ser identificado con el grupo de Lie de matrices $\varphi(G)$, mediante el isomorfismo cociente usual $\overline{\varphi} : G/ker(\varphi) \longrightarrow \varphi(G)$(que no necesariamente es un homomorfismo continuo de grupos de Lie de matrices, dado que $G/ker(\varphi)$ no necesariamente es un grupo de Lie de matrices.)*

Demostración
Por ser φ un homomorfismo de grupos, $ker(\varphi)$ es subgrupo algebraico de G. Veamos si $ker(\varphi)$ es un subconjunto cerrado de G.
Sea $\{g_i\}_{i\geq 1}$ una sucesión de elementos en $ker(\varphi)$ tal que $g_i \longrightarrow g \in G$; entonces

$$\varphi(g_i) = \varphi(\lim_{i\to\infty} g_i) = \lim_{i\to\infty} \varphi(g_i) = 0,$$

por lo tanto $g \in ker(\varphi)$ así $ker(\varphi)$ es cerrado en G.
Por el teorema fundamental de homomorfismo de la teoría de grupos sabemos que el isomorfismo $\overline{\varphi}$ existe. □

Observación
Sea N un subgrupo cerrado normal de G un grupo de Lie de matrices sobre $\mathbb{K}$. Entonces el subgrupo G/N no necesariamente es un Grupo de Lie de matrices sobre $\mathbb{K}$. Este sera un ejemplo importante de un Grupo de Lie que no es un grupo de Lie de matrices.

2.6 El Grupo lineal general de un espacio vectorial normado

En esta sección nos interesa definir le grupo lineal de un espacio vectorial normado, por ende estamos interesados por las aplicaciones de un espacio vectorial en otro, que poseen la propiedad de conservar las estructuras algebraicas(conservar las operaciones).

Definición 2.6.1 *Sean* $\mathbf{V}$ *,* $\mathbf{W}$ *dos espacios vectoriales sobre el mismo campo conmutativo* $\mathbb{K}$*. Una aplicación* $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ *es una aplicación lineal si y solo si*

a) Para todo $x, y \in \mathbf{V};\ f(x + y) = f(x) + f(y),$

b) Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$*, para todo* $x \in \mathbf{V};\ f(x + y) = f(x) + f(y).$

Observaciones

- Notemos que en la condición $f(x + y) = f(x) + f(y)$, la operación de adición tiene un significado distinto en cada miembro. En el miembro izquierdo la adición de x con y se efectúa en $\mathbf{V}$, mientras que en el miembro derecho la adición de $f(x)$ con $f(y)$ se efectúa en $\mathbf{W}$,
- en lugar de aplicación lineal en ocasiones se dice homomorfismo de espacio vectorial, transformación lineal u operador,
- en el caso $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ decimos que la aplicación lineal $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$, es un endomorfismo del espacio vectorial $\mathbf{V}$. En ocasiones se dice que es un operador lineal en $\mathbf{V}$.
- Si la aplicación lineal $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$, es biyectiva, se dice que f es un isomorfismo lineal de $\mathbf{V}$ sobre $\mathbf{W}$; si además $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ entonces f es un automorfismo lineal del espacio vectorial $\mathbf{V}$.

Teorema 2.6.1 *Sean* $(\mathbf{V}, \|.\|_{\mathbf{V}})$ *y* $(\mathbf{W}, \|.\|_{\mathbf{W}})$ *espacios vectoriales normados de dimensión finita sobre* $\mathbb{K}$ *con la misma dimensión. Entonces cualquier isomorfismo lineal* $L : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ *es un homeomorfismo, es decir* L *y* L^{-1} *son funciones continuas.*

Demostración

Sea $A = [a_{ij}]$, la matriz que representa a L en las bases $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de $\mathbf{V}$ y $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de $\mathbf{W}$. Entonces realizando cálculos similares a los de la ecuación (1.1)(del Capitulo 1) podemos asegurar que

$$\|L(v)\|_{\mathbf{W}} \leq M \|v\|_{\mathbf{V}} \tag{2.2}$$

para $v \in \mathbf{V}$ y $M = \sum_{ij} \left|a_{ij}\right|$ una constante real positiva (que depende de L)
Ahora, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \epsilon/M$ tal que si $\|u\| < \delta$ se tiene que

$$\|L(v)\|_{\mathbf{W}} \leq M \|v\|_{\mathbf{V}} < M\delta = \epsilon.$$

Por lo tanto L es una función continua. De la misma manera se puede demostrar que L^{-1} es una función continua. $\square$

Definición 2.6.2 *Sean* $\mathbf{V}$ *y* $\mathbf{W}$ *espacios vectoriales reales normados de dimensión finita, se* U *un subconjunto abierto de* $\mathbf{V}$*,* f *una función de* U *a* $\mathbf{W}$*,* $f : U \longrightarrow \mathbf{W}$*, y* a *un punto de* U*. Entonces* f *es* **diferenciable** *en* a *si existe una aplicación lineal entre* $\mathbf{V}$ *y* $\mathbf{W}$*,* Df_a*, tal que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df_a(h)\|_{\mathbf{W}}}{\|h\|_{\mathbf{V}}} = 0$$

A la aplicación lineal Df_a se le llama la **derivada de f en** a**.**
Dado un espacio normado $(\mathbf{V}, \|.\|_{\mathbf{V}})$ y una aplicación lineal $L : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$, definimos el **operador norma de L** con respecto a $\|.\|_{\mathbf{V}}$ por

$$\|L\| = sup\left\{\|L(v)\|_{\mathbf{V}} : \ v \in \mathbf{V}, \|v\|_{\mathbf{V}} = 1\right\}.$$

Si denotamos por $End_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$ al conjunto de los endomorfismos del espacio vectorial $\mathbf{V}$, entonces el operador norma antes descrito es una norma para $End_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$. Por lo tanto $\left(End_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}), \|.\|\right)$ es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{K}$.

Proposición 2.6.1 *Si* $\|.\|_1$ *y* $\|.\|_2$ *son dos normas en* $\mathbf{V}$*, entonces la topología asociada a* $\left(End_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}), \|.\|_1\right)$ *y* $\left(End_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}), \|.\|_2\right)$ *son la misma.*

Dentro de $End_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$ se tiene al grupo de isomorfismos lineales[1], denotado por $GL(\mathbf{V}) = \{f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V} \ : \ f \text{ lineal e invertible}\} \subseteq End_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$, el **grupo lineal general** del espacio vectorial $\mathbf{V}$.
Si $\mathbf{V}$ es un espacio normado entonces $GL(\mathbf{V})$ hereda la norma de $End_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$, además $GL(\mathbf{V})$ es un subconjunto abierto de $End_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$.

Proposición 2.6.2 *Sean* $\mathbf{V}$ *y* $\mathbf{W}$ *dos espacios vectoriales normados con dimensión* $n \in \mathbb{N}$ *sobre* $\mathbb{K}$*. Si* $L : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ *es un isomorfismo lineal, entonces* L *induce un isomorfismo continuo de grupos con inversa continua*

$$\begin{array}{rccl} L_* : & GL(\mathbf{V}) & \longrightarrow & GL(\mathbf{W}) \\ & T & \longmapsto & L_*(T) = L \circ T \circ L^{-1}. \end{array}$$

Es de recordar que para $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n$, identificamos a $End_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$ por $M_n(\mathbb{K})$ y a $GL(\mathbf{V})$ con $GL_n(\mathbb{K})$. Más generalmente, dada una base para $\mathbf{V}$, existe un isomorfismo lineal entre $\mathbf{V}$ y $\mathbb{K}^n$, un isomorfismo de anillos entre $End_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$ y $M_n(\mathbb{K})$ y un isomorfismo de grupos entre $GL(\mathbf{V})$ y $GL_n(\mathbb{K})$, es decir que el grupo $GL(\mathbf{V})$ se identifica de manera concreta con el grupo de matrices invertibles $GL_n(\mathbb{K})$.

Teorema 2.6.2 *Sea* $\mathbf{V}$ *un espacio vectorial normado de dimensión* n *sobre* $\mathbb{K}$*,* $dim(\mathbf{V}) = n$ *y sea* $L : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ *un isomorfismo lineal. Entonces*

$$\begin{array}{rccl} L_* : & GL(\mathbf{V}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ & T & \longmapsto & L_*(T) = L \circ T \circ L^{-1}. \end{array}$$

es un isomorfismo continuo de grupos con inversa continua. Por lo tanto $GL(\mathbf{V})$ *es un grupo de Lie de matrices.*

[1] Aplicaciones lineales invertibles

Proposición 2.6.3 *Sea* $\mathbf{V}$ *un espacio vectorial normado de dimensión finita sobre* $\mathbb{K}$ *y* $\mathbf{W}$ *un subespacio de* $\mathbf{V}$. *Para* $u \in \mathbf{V}$ *existe un vector* $w_0 \in \mathbf{W}$ *tal que*

$$\|w_0 - v\| = inf\,\{\|w - v\| : w \in \mathbf{W}\}\,.$$

Demostración
Sea v un elemento cualquiera de $\mathbf{V}$. Siempre que $0 \in \mathbf{W}$ entonces la distancia entre v y $\mathbf{W}$,

$$d(v, \mathbf{W}) = inf\,\{\|w - v\| : w \in \mathbf{W}\}\,.$$

toma valores entre 0 y $\|v\|$. Sea

$$S = \{w \in \mathbf{W} : \|w\| \leq d(v, \mathbf{W}) + 2\,\|v\|\}\,.$$

note que

- S es cerrado. En efecto, sea $(w_i)_{i\geq 0}$ una sucesión en S que converge a w.

  $$\|w\| = \left\|\lim_{i\to\infty} w_i\right\| = \lim_{i\to\infty} \|w_i\| \leq \lim_{i\to\infty}(d(v, \mathbf{W}) + 2\,\|v\|) = d(v, \mathbf{W}) + \|v\|\,.$$

  entonces $w \in S$.

- S es acotado, ya que $\|w\| \leq 3\,\|v\|$, para $w \in S$.

Por tanto S es un conjunto cerrado y acotado y por el lema 2.3.3 es compacto.
Definase la función f de la siguiente manera

$$\begin{array}{rccl} f: & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & w & \longmapsto & |w - v|\,. \end{array}$$

verificare que f es continua. Sea $(w_i)_{i\geq 0}$ es una sucesión en S que converge a $w \in S$, entonces

$$\lim_{i\to\infty} f(w_i) = \lim_{i\to\infty} \|w_i - v\| = \left\|\lim_{i\to\infty}(w_i - v)\right\| = \|w - v\| = f(w).$$

Por lo tanto f es continua. Es evidente que $d(v, \mathbf{W}) = d(v, S)$,

1. Con $S \subseteq \mathbf{W}$:$d(v, \mathbf{W}) \leq d(v, S)$.

2. Si $w \in S$ y $\|w - v\| \leq d(v, \mathbf{W}) + \|v\|$, entonces $w \in S$, por lo tanto $d(v, \mathbf{W}) \geq d(v, S)$.

Así por (1) y (2) se tiene que $d(v, \mathbf{W}) = d(v, S)$.
Dado que f es una función continua y definida sobre un compacto, por tanto f alcanza sus valores máximos y minimos, entonces existe un $w_0 \in \mathbf{W}$ tal que

$$\|w_0 - v\| = d(v, S) = d(v, \mathbf{W}),$$

□

Definición 2.6.3 *Si* $\varphi : G \longrightarrow GL(\mathbf{V})$ *es un homomorfismo continuo de grupos entonces la acción continua asociada a* φ

$$\begin{array}{rccl} \psi_\varphi : & GL(\mathbf{V}) \times \mathbf{V} & \longrightarrow & \mathbf{V} \\ & (g, v) & \longmapsto & \varphi(g)(v). \end{array}$$

es llamada una acción lineal o **representación** *de* G *sobre* $\mathbf{V}$.

Grupos Ortogonales Generalizados

La situación mas general de un grupo ortogonal es cuando se asocia a una matriz $n \times n$ real simétrica, es decir $Q^T = Q$, el grupo
$$O_Q = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^T QA = Q\right\}$$
Verifiquemos que O_Q, es un grupo de Lie de matrices sobre $\mathbb{R}$.

1. Si $A, B \in O_Q$, entonces $(AB)^T Q(AB) = B^T (A^T QA)B = B^T QB = Q$; por lo tanto, $AB \in O_Q$.

2. $I^T QI = Q$; por lo tanto, $I \in O_Q$.

3. Sea $A \in O_Q$, $A^T QA = Q$, entonces multiplicando a derecha por A^{-1} y a izquierda por $(A^T)^{-1}$ tenemos que $Q = (A^T)^{-1} QA^{-1} = (A^{-1})^T QA^{-1}$; por lo tanto $A^{-1} \in O_Q$.

4. Sea una sucesión de matrices en O_Q, $\{A_n\}_{n\geq 1}$ tal que $A_n \longrightarrow A$ entonces
$$\begin{aligned} A^T QA &= (\lim_{n\to\infty} A_n)^T Q(\lim_{n\to\infty} A_n) \\ &= \lim_{n\to\infty}(A_n)^T Q \lim_{n\to\infty} A_n \\ &= \lim_{n\to\infty} A_n^T QA_n = Q. \end{aligned}$$
   Por lo tanto $A \in O_Q$. Entonces O_Q es cerrado en $GL_n(\mathbb{R})$.

Si $det(Q) \neq 0$, para $A \in O_Q$ tenemos que $det(A) = \pm 1$. Definimos
$$O_Q^+ = det^{-1}(\mathbb{R}^+), \quad O_Q^- = det^{-1}(\mathbb{R}^-)$$
Entonces O_Q es la unión de dos conjuntos tanto abiertos como cerrados O_Q^+ y O_Q^- Por tanto
$$O_Q = O_Q^+ \cup O_Q^-.$$

2.7 Geometría en espacios vectoriales finitos

Esta sección esta dedicada a generalizar las ideas que se han venido proporcionando. Por **V** o **W** se entenderán espacios vectoriales reales o complejos de dimensión finita y definidos sobre cuerpos de caracterstica distinta de dos.
Los grupos de Lie de matrices en $\mathbb{R}^n$ se obtienen al describir explícitamente los diversos subgrupos de $GL_n(\mathbb{R})$, que resultan ser de isotropía en las formas canónicas $\widehat{B} \in GL_n(\mathbb{R})$, simétricas o antisimétricas, bajo la acción
$$\begin{array}{rccc} \psi : & GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ & (A, \widehat{B}) & \longmapsto & A^T \widehat{B} A. \end{array}$$

Algunos elementos de un grupo $GL_n(\mathbb{R})$ actuando en un espacio $GL_n(\mathbb{R})$, podran fijar un punto $\widehat{B} \in GL_n(\mathbb{R})$. Estos elementos del grupo forman un subgrupo llamado el **estabilizador o grupo de isotropía** de $\widehat{B}$, definido por:
$$Stab_{GL_n(\mathbb{R})}(\widehat{B}) = G_{\widehat{B}} = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^T \widehat{B} A = \widehat{B}\right\} \subseteq GL_n(\mathbb{R}),$$

La restricción a matrices $\widehat{B}$ simétricas o antisimetricas se debe a aque al definir la relacion de ortogonalidad mediante una forma bilineal [1] B, esta forma bilineal resulta ser simétrica si y sólo si $\widehat{B}$ es simétrica o antisimétrica.

De manera casi análoga los grupos de Lie de matrices en $\mathbb{C}^n$ se obtienen al describir explícitamente los diversos subgrupos de isotropía en $GL_n(\mathbb{C})$ de la acción

$$\begin{array}{rccc} \psi: & GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ & (A, \widehat{H}) & \longmapsto & A^*\widehat{H}A. \end{array}$$

calculados para las formas canónicas $\widehat{H} \in GL_n(\mathbb{C})$, de las formas hermitianas o antihermitianas

$$Stab_{GL_n(\mathbb{C})}(\widehat{H}) = G_{\widehat{H}} = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^*\widehat{H}A = \widehat{H}\right\} \subseteq GL_n(\mathbb{C}),$$

En general consideremos un espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimension finita Sea B una forma bilineal(simétrica o antisimétrica), o sesquilineal (hermitiana o antihermitiana), de tal manera que $B(u, v) = 0$ para todo $v \in \mathbf{V}$, implican que $u = 0$, lo cual corresponde a que $det(\widehat{B}) \neq 0$

En general las transformaciones del grupo $GL(\mathbf{V})$ alterarán la forma B, de ahí que el objeto importante para el par $(\mathbf{V}, B)$ sea, precisamente,

$$G_B(\mathbf{V}) = \{g \in GL(\mathbf{V}) | B(gu, gv) = B(u, v), \text{ para todos } u, v \in \mathbf{V}\}$$

Así nos encontramos con la descripción de un subgrupo de isotropía y en una intensificación de las diversas descripciones matriciales que hemos realizado. Por tanto se dirá que $\mathbf{V}$ esta equipado con geometría

- Ortogonal si B es bilineal simétrica;
- Simpléctica si B es bilineal antisimétrica, y
- Unitaria si B es sesquilineal hermitiana o antihermitiana.

Notemos que resulta muy ilustrativo describir los subgrupos de isotropía a los que hacemos referencia, no en términos de las matrices que representan a los diversos objetos que hemos introducido en los apartados anteriores, sino en términos de los objetos mismos. Para profundizar en esta visión geométrica ver [16].

Precisamente, el punto de vista propuesto por Klein[1] en su famosa cátedra de oposición(Programa de Erlangen) de 1872 es estudiar geometría estudiando las relaciones que permanecen invariantes frente a las transformaciones de un grupo dado.

«Todo método geométrico queda determinado al especificar la variedad X de sus elementos y un grupo G de transformaciones de X que define las relaciones invariantes[2] de la geométria» (Felix Klein)

---

[1] $u \perp v \leftrightarrow B(u, v) = 0$, donde B es la forma bilineal asociada a la matriz $\widehat{B}$.

[1] Felix Klein (1849-1925) Matemático alemán

[2] Clásicamente, el término **teoría de invariantes** se refiere al estudio de los invariantes algebraicos formas (que es equivalente a tensores simétricos) para la acción de las transformaciones lineales . Este fue un importante tema de estudio en la última parte del siglo XIX. Las teorías actuales sobre el grupo simétrico y funciones simétricas , álgebra conmutativa , espacios de módulos y la representación de grupos de Lie tienen sus raíces en esta área.

Capítulo 3

La aplicación Exponencial de Matrices y Grupos Uniparametricos

*"El espiritu humano siempre progresa
pero este progreso es espiral".*

(Madame de Stael.)

Las versiones en matrices reales ó complejas de las aplicaciones exponencial y logarítmica son fundamentales en el estudio de los grupos de Lie de matrices, en particular los grupos uniparamétricos en las siguientes secciones nos centraremos en algunas propiedades importantes que nos permitirán cumplir nuestro objetivo principal, que es pasar del álgebra de Lie al grupo de Lie, y esto se logra gracias a la aplicación exponencial.

3.1 Matriz exponencial y logaritmo

En esta sección, introduciremos la aplicación o mapa exponencial de matrices y mostraremos algunas de sus propiedades fundamentales. La aplicación exponencial es una herramienta muy valiosa que nos da permiso de "linealizar" ciertas propiedades algebraicas de matrices.

Para $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$ tenemos la definición de exponencial de una matriz A, denotada por $\mathbf{Exp}(A)$, dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{Exp}(A) =& I_n + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{p!}A^p\\ =& \sum_{n\geq 0} \frac{1}{p!}A^p; \text{ utilizando la convención } A^0 = I_n.\end{aligned}$$

El problema que surge es si esta serie esta bien definida. El lema siguiente, demuestra que la serie antedicha es de hecho absolutamente convergente.

Lema 3.1.1 *Sea $[a_{ij}]$ (real ó compleja) de dimensión $n \times n$, y sea $M = \text{máx}\left\{\left|a_{ij}\right|,\ 1 \leq i; j \leq n\right\}$ Si $A^p = [a^p_{ij}]$; entonces $\left|a^p_{ij}\right| \leq (nM)^p$, para todo $ij \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$; en consecuencia las $n^2 -$ series*

$$\sum_{p\geq 0} \frac{a^p_{ij}}{p!}$$

Converge absolutamente, y la matriz

$$\mathbf{Exp}(A) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{p!} A^p$$

es una matriz bien definida.

Demostración
Por Inducción sobre p.

- Para $p = 0$, se tiene que $p = 0 =: A^0 = I_n$ y $(nM)^0 = 1$, y el lema es obvio.
- Se Asume que el lema se satisface para p.
- verifiquemos para $p + 1$
  para cada $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|a^{p+1}_{ij}\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a^p_{ik} a_{kj}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left|a^p_{ik}\right| \underbrace{\left|a_{kj}\right|}_{M} \\
&= M \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left|a^p_{ik}\right|}_{\leq (nM)^p}, \text{ de la hipotesis de inducción} \\
&\leq M\, n\, (nM)^p \\
&= (nM)(nM)^p \\
&= (nM)^{p+1}.
\end{aligned}$$

Luego para todo $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$; se tendra que $\left|a^p_{ij}\right| \leq (nM)^p$ como consecuencia directa de lo anterior, la serie

$$\sum_{p\geq 0} \frac{\left|a^p_{ij}\right|}{p!}$$

esta mayorada por la serie convergente

$$\sum_{p\geq 0} \frac{(nM)^p}{p!} = \exp(nM)$$

Y por el criterio de comparación se tiene entonces que la serie

$$\sum_{p\geq 0} \frac{a_{ij}^p}{p!}$$

converge absolutamente. $\square$

Para $A \in M_n(\mathbb{K})$ tenemos la versión matricial de las series exponencial y Logaritmo,

$$\mathbf{Exp}(A) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}A^n = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots, \quad \text{con } A^0 = I_n$$

$$\mathbf{Log}(A) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}A^n = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{4}A^4 + \dots$$

Las cuales convergen absolutamente[1] cuando $\|A\| < r$ siendo $r > 0$, y $\|A\| < 1$ respectivamente.
Nótese que se puede también definir la exponencial de una matriz por:

$$\mathbf{Exp}(A) = \lim_{n\to\infty}(I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n)$$

Esta definición de exponencial de una matriz podría ser la mas natural, pero también podemos recurrir a la teoría de ecuaciones diferenciales.

Matrices Fundamentales

Para simplificar determinados cálculos y argumentos es útil introducir la siguiente definición, para ello consideremos la curva

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (\alpha,\beta) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ & t & \longmapsto & \varphi(t). \end{array}$$

se tiene entonces

Definición 3.1.1 *Se dice que una matriz $\varphi(t)$ es matriz fundamental de la ecuación*

$$x'(t) = A(t)x(t); \quad A(t) = [a_{ij}(t)]. \tag{3.1}$$

si sus n columnas son n soluciones linealmente independientes de dicha ecuación.

Observación:
$A(t)x$ significa como es usual la aplicación de la matriz $A(t)$ al vector $x(t)$.

Podemos reescribir esta definición así

[1] Sea $\{A_r\}_{r\geq 0}$, una sucesión de matrices en $M_n(\mathbb{K})$, entonces

- $\lim_{r\to\infty} \frac{\|A_{r+1}\|}{\|A_r\|} < 1$, la serie $\sum_{r=0}^{\infty} A_r$, converge en $M_n(\mathbb{K})$.
- $\lim_{r\to\infty} \frac{\|A_{r+1}\|}{\|A_r\|} > 1$, la serie $\sum_{r=0}^{\infty} A_r$, diverge en $M_n(\mathbb{K})$.

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{n,n}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \varphi^1(t) & \cdots & \varphi^n(t) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

donde

$$\varphi^j(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1j}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{nj} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

entonces $\varphi(t)$ es matriz fundamental de la ecuación 3.1 si las n funciones vectoriales $\varphi^j(t)$, $(j = \{1,\dots,n\})$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación 3.1, o sea, forman una base del espacio de soluciones de la ecuación. Si $\varphi(t)$ es una matriz fundamental de 3.1, el conjunto de soluciones de 3.1 se podrá representar por

$$\varphi(t)C, \ \text{donde}\, C \in \mathbb{R}^n.$$

Por tanto resolver 3.1 se reduce, pues a encontrar una matriz fundamental.

Si $A(t) = [a_{ij}(t)]$, la derivada de $A(t)$ es la función matricial

$$\frac{d}{dt}A(t) = \left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right]$$

y la integral sobre el intervalo $[t_1,t_2]$ es la matriz

$$\int_{t_1}^{t_2} A(t) = \left[\int_{t_1}^{t_2} a_{ij}(t)\right]$$

El problema de valor inicial (PVI) asociado a 3.1 consiste en hallar la función (vectorial) $x(t)$ derivable en (α,β) que satisfaga

$$\begin{cases} x'(t) = & A(t)x(t), \ \ \text{donde}\, A(t) = [a_{ij}(t)], \\ x(t_0) = & x^0, \ \ t_0 \in (\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}, \ \ x^0 \in \mathbb{R}^n \ \text{dados}. \end{cases} \tag{3.2}$$

En general no será posible encontrar explícitamente la soluciones de 3.1, a diferencia de lo que ocurre para algunas ecuaciones escalares, mas adelante demostraremos que no obstante si es posible, de una manera general, demostrar la existencia y unicidad de solución, para el problema 3.1 aunque esa demostración no permita exhibir una fórmula explícita que dé la solución.

Método de Picard

En este apartado describiremos un método de aproximaciones sucesivas para obtener la solución del problema de valor inicial(**PVI**) definido en 3.1, el cual se conoce como método de Picar[1] el cual consiste en resolver una ecuación integral[2] equivalente, para ser precisos: Si $x(t)$ es solución de 3.1 en el intervalo (α,β), entonces

$$x'(t) = A(t)x(t), \ \ \text{para todo}\, t \in (\alpha,\beta)$$

[1]En honor del matemático Francés que lo descubrió *Emile Picard*, 1856 – 1941.

[2]Ecuación integral porque la función incógnita aparece bajo el signo radical.

Integrando esta expresión entre t_0 y t, $t_0, t \in (\alpha, \beta)$, y teniendo encuentra la condición inicial resultará

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds \tag{3.3}$$

y recíprocamente, toda función $x(t)$ que satisfaga la ecuación 3.3 en (α, β), es solución del problema 3.1, según se ve por simple derivación[1].

Busquemos una primera aproximación a la solución de 3.1, no disponiendo de información suplementaria, esa primera aproximación puede ser, en general imprecisa, desde luego, la función constante

$$x^0(t) = x^0$$

Sustituimos esta función en el segundo miembro de la ecuación integral 3.3

$$x^1(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x^0(s)ds$$

Utilizamos $x^1(t)$, a su vez, para generar una nueva aproximación

$$x^2(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x^1(s)ds$$

y así sucesivamente

$$x^j(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x^{j-1}(s)ds \tag{3.4}$$

se obtiene así una sucesión de funciones $\left\{x^j(t)\right\}_{j\geq 1}$, de la que vamos a demostrar que converge uniformemente a una función $x(t)$. En efecto Sea $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ y tal que $a \leq t_0 \leq b$, y pongamos

$$k = máx\,\{|A(t)|;\;\; t \in [a, b]\}$$

Se tiene que para $t \in [a, b]$,

$$\left|x^1(t) - x^0(t)\right| = \left|\int_{t_0}^{t} A(s)x^0\right| \leq \underbrace{k|x^0|}_{M}\,|t - t_0|$$

Análogamente

$$\left|x^2(t) - x^1(t)\right| = \left|\int_{t_0}^{t} A(s)[x^1(t) - x^0]\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \underbrace{|A(s)|}_{\leq k}\;\underbrace{|[x^1(t) - x^0]|}_{\leq M|t-t_0|}ds\right| \leq Mk\left|\int_{t_0}^{t} |s - t_0|ds\right| \leq Mk\frac{|t - t_0|}{2!}.$$

y, en general, procediendo por inducción tenemos

$$\left|x^j(t) - x^{j-1}(t)\right| \leq Mk^{j-1}\frac{|t - t_0|^j}{j!} \leq \frac{M}{k}\frac{k^j(b - a)^j}{j!}.$$

[1] Por ello se dice que 3.3 es una ecuación integral equivalente al problema de valor inicial 3.1.

y como la serie numérica

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{M}{k} \frac{k^j (b-a)^j}{j!}$$

Converge a $\frac{M}{k}(e^{k(b-a)} - 1)$, se tendrá, por el criterio de **Weierstrass**, que la serie de funciones $x^0(t) + \sum_{j=1}^{\infty}[x^j(t) - x^{j-1}(t)]$ convergen uniformemente en $[a, b]$ a una función $x(t)$ que será continua. Teniendo en cuenta que $[a, b]$ es un subintervalo cerrado y acotado arbitrario de (α, β), con $t_0 \in [a, b]$, se tendrá que para toda $t \in (\alpha, \beta)$

$$\begin{array}{ccc} x^j(t) & = & x^0 + \int_{t_0}^{t} A(s) x^{j-1}(s) ds \\ \downarrow & j \to \infty & \downarrow \\ x(t) & = & x^0 + \int_{t_0}^{t} A(s) x(s) ds \end{array}$$

Se tendrá entonces que la función límite satisface la cuación integral , es decir que es solución del **PVI** por la equivalencia de ambos resultados.

Ejemplo 3.1.1 *Resolver haciendo uso exclusivo de las iterantes de Picard*

$$\begin{cases} x' = & ax, \ a \in \mathbb{R} \\ x(0) = & x^0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.5}$$

Solución
Se tendra

$$\begin{aligned} x_0(t) =& x_0 \\ x_1(t) =& x_0 + \int_0^t (a x_0)\, ds = x_0 (1 + at) \\ x_2(t) =& x_0 + \int_0^t a x_0 (1 + at)\, ds = x_0 \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2}\right) \\ x_3(t) =& x_0 + \int_0^t a x_0 \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2}\right) ds = x_0 \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{2 \cdot 3}\right) \end{aligned}$$

y, en general(procediendo por inducción), vemos que

$$x_j(t) = x_0 \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{(at)^j}{j!}\right)$$

$$\lim_{j \to \infty} x_j(t) = \lim_{j \to \infty} x_0 \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{(at)^j}{j!}\right) = x_0 e^{at}$$

En este ejemplo particular, pues vemos cómo efectivamente las iterantes de Picard $x_j(t)$ convergen a la solución del problema de valor inicial.

Consideremos la matriz fundamental $\phi(t)$ del sistema 3.1 que verifica $\phi(0) = I_n$, es decir, la solución única del problema de valor inicial(PVI)

$$\begin{cases} x' = & Ax \\ x(0) = & I_n \end{cases} \tag{3.6}$$

Proposición 3.1.1 *Tenemos que*

a) *La solución del PVI*

$$\begin{cases} x' = & Ax \\ x(0) = & x^0 \end{cases}$$

es $x(t) = \varphi(t)x^0$[1]

b) $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$, *para todo* $t, s \in \mathbb{R}$[2].

c) $\varphi^{-1}(t) = \varphi(-t)$.

Demostración:
Ver [[22] pág. 84] □

Por otra parte tenemos la siguiente proposición

Proposición 3.1.2 *Si* $\varphi(t)$ *es la matriz fundamental de* 3.1 *tal que* $\varphi(0) = I$, *entonces*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \tag{3.7}$$

siendo la convergencia de la serie uniforme en cada intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.

Demostración:
Consideremos el problema de valor inicial dado en 3.6, cuya solución es $\varphi(t)$, y considerando las sucesivas iterantes de Picard(funciones matriciales),

$$\begin{cases} x_0(t) & = & I \\ x_{k+1}(t) & = & I + \int_0^t AX_k(s)ds. \end{cases}$$

[1] Como las soluciones de $x' = Ax$ están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ basta considerar el PVI con instante inicial $t_0 = 0$ si $t_0 \neq 0$, la solución de $x' = Ax$, $x(t_0) = x^0$, estará dada por $x(t) = \varphi(t - t_0)x^0$

[2] cualquiera que sea $t \in \mathbb{R}$, se tiene definido para cada $t \in \mathbb{R}$ un isomorfismo φ_t en $\mathbb{R}^n$ por

$$x \longrightarrow \varphi(t)x = \varphi_t(x)$$

A un punto $x \in \mathbb{R}$, φ_t, le hace corresponder el punto en $\mathbb{R}^n$ que se **alcanza en el instante t** dado por la solución que **empezó** en x para $t = 0$.
Fijado $s \in \mathbb{R}$ las matrices

$$\varphi_1(t) = \varphi(t+s)$$
$$\varphi_2(t) = \varphi(t)\varphi(s)$$

son ambas soluciones del PVI, esta observación en conjunto con la propiedad $\varphi(0) = I_n$, y agregando que $\varphi(t)$ es una matriz no singular, establece que esa familia de isomorfismos, con $t \in \mathbb{R}$, constituyen un grupo.

Vemos que

$$X_1(t) = I + \int_0^t AIds = I + tA.$$
$$X_2(t) = I + \int_0^t A(I + sA)ds = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!}.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_k(t) = I + \int_0^t A\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{s^jA^j}{j!}\right)ds = \sum_{j=0}^{k} \frac{t^jA^j}{j!}.$$

son precisamente las sucesivas sumas parciales de la serie 3.7, y puesto que la convergencia de las iterantes de Picard, a la solución del problema de valor inicial ($\varphi(t)$ en este caso), es uniforme en cada intervalo cerrado y acotado. Por lo tanto del teorema de existencia y unicidad aplicada al PVI 3.6 se tiene que

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^kA^k}{k!}$$

□

Observación

- Note que en particular $\varphi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = Exp(A)$.
- Con esta notación, la solución del PVI 3.6 toma, de acuerdo con la observación anterior, la forma

$$x(t) = \mathbf{Exp}(tA)x(0)$$

Problema 3.1.1 *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) *Calcular* $\mathbf{Exp}(A)$ *y* $\mathbf{Exp}(tA)$

b) *Utilizar (a), para resolver*

$$\begin{cases} x' = & 3x + 2y + 4z \\ y' = & 2x + 2z \\ z' = & 4x + 2y + 3z \end{cases} \quad \textit{; sabiendo que para } t = 0,\ x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$$

SOLUCIÓN

a) Dado que

$$\mathbf{Exp}(A) = \lim_{n\to\infty}(I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n)$$

Puesto que existe S tal que $A = SDS^{-1}$, con D matriz diagonal, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{Exp}(A) &= \lim_{n\to\infty}(SS^{-1} + SDS^{-1} + \frac{1}{2!}SD^2S^{-1} + \frac{1}{3!}SD^3S^{-1} + \ldots + \frac{1}{n!}SD^nS^{-1})\\ &= S\lim_{n\to\infty}(I + D + \frac{1}{2!}D^2 + \frac{1}{3!}D^3 + \ldots + \frac{1}{n!}D^n)S^{-1}\\ &= S\,\mathbf{Exp}(D)S^{-1}\end{aligned}$$

Verificaremos a continuación que en efecto existen las matrices S y D.

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= -(\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0\\ \Leftrightarrow -(\lambda+1)^2 &= 0 \lor (\lambda-8) = 0\\ \Leftrightarrow \lambda &= -1 \lor \lambda = 8.\end{aligned}$$

además $dim(Ker(A + I)) = 2$
Luego

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

Determinando S, para ello encontremos

$$\{v_1, v_2\} \text{ base de } Ker(A + I)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y\\ x\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} =: 2x + y + 2z = 0, \text{ haciendo } x = \alpha \land y = \beta =:$$

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \alpha\underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}}_{v_1} + \beta\underbrace{\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1/2\end{pmatrix}}_{v_2}$$

Para mayor facilidad de trabajo tomando $\alpha = 1 \land \beta = 2$ se tiene que

$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} \land v_2 = \begin{pmatrix} 0\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$. Encontremos de manera análoga $v_3 \in Ker(A - 8I)$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4\\ 2 & -8 & 2\\ 4 & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y\\ x\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} =: \begin{cases} -5x + 2y + 4z &= 0\\ 2x - 8y + 2z &= 0\end{cases} =: v_3 = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

de donde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \wedge S^{-1} = \tfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{Exp}(D) = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (8)^2 \end{pmatrix} + \dots$$
$$+ \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (8)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (e)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (e)^8 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{Exp}(A) = S\,\mathbf{Exp}(D)S^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5e^{-1}+4e^8 & -2e^{-1}+2e^8 & -4e^{-1}+4e^8 \\ -2e^{-1}+2e^8 & 8e^{-1}+e^8 & -2e^{-1}+2e^8 \\ -4e^{-1}+4e^8 & -2e^{-1}+2e^8 & 5e^{-1}+4e^8 \end{pmatrix}$$

Además

$$\mathbf{Exp}(tA) = S\,\mathbf{Exp}(tD)S^{-1}$$

y

$$\mathbf{Exp}(tD) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{8t} \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$\mathbf{Exp}(tA) = S\,\mathbf{Exp}(tD)S^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5e^{-t}+4e^{8t} & -2e^{-t}+2e^{8t} & -4e^{-t}+4e^{8t} \\ -2e^{-t}+2e^{8t} & 8e^{-t}+e^{8t} & -2e^{-t}+2e^{8t} \\ -4e^{-t}+4e^{8t} & -2e^{-t}+2e^{8t} & 5e^{-t}+4e^{8t} \end{pmatrix}$$

b) Pasaremos acontinuación a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $X(t) = \mathbf{Exp}(tA)X(0)$ con

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$X(t) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -11e^{-t}+20e^{8t} \\ 8e^{-t}+10e^{8t} \\ 7e^{-t}+20e^{8t} \end{pmatrix}$$

□

Proposición 3.1.3 . *Sean $A \in M_n(\mathbb{K})$, y $U \in GL_n(\mathbb{K})$, entonces* $\mathbf{Exp}(UAU^{-1}) = U\mathbf{Exp}(A)U^{-1}$.

Demostración
Se verifica por inducción que
$$U\,A^p\,U^{-1} = (U\,A\,U^{-1})^p, \quad p \in \mathbb{N}$$

Luego

$$\mathbf{Exp}(UAU^{-1}) = \sum_{p\geq 0} \frac{(UAU^{-1})^p}{p!} = \sum_{p\geq 0} \frac{UA^pU^{-1}}{p!} = U\left(\sum_{p\geq 0} \frac{A^p}{p!}\right)U^{-1} = U\mathbf{Exp}(A)U^{-1}$$

□

Proposición 3.1.4 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$*

1. *Para $u, v \in \mathbb{C}$, $\mathbf{Exp}((u+v)A) = \mathbf{Exp}(uA)\mathbf{Exp}(vA)$.*
2. *$\mathbf{Exp}(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ y $\mathbf{Exp}(A)^{-1} = \mathbf{Exp}(-A)$.*

Demostración:

1. Por definición expandiendo el primer término se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{Exp}((u+v)A) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(u+v)^n A^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{(u+v)^n}{n!} A^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\sum_{n\geq 0} \binom{n}{r} u^r v^{n-r}\right) A^n, \quad \text{por el teorema del binomio} \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{r=0}^{n} \frac{u^r v^{n-r}}{r!(n-r)!}\right) A^n \\
&= \sum_{r\geq 0 \wedge s\geq 0} \frac{u^r v^s}{r!s!} A^{r+s} \\
&= \left(\sum_{r\geq 0} \frac{u^r}{s!} A^r\right)\left(\sum_{s\geq 0} \frac{v^s}{s!} A^s\right) \\
&= \mathbf{Exp}(uA)\mathbf{Exp}(vA).
\end{aligned}$$

2. de la parte (1) se tiene que

$$I = \mathbf{Exp}(O) = \mathbf{Exp}((1+(-1))A) = \mathbf{Exp}(A)\mathbf{Exp}(-A) \Leftrightarrow \mathbf{Exp}(-A) = \mathbf{Exp}(A)^{-1}$$

□

Por lo tanto de la Proposición 3.1.4, para cualquier matriz $A_{n\times n}$, $\mathbf{Exp}(A)$ es nosingular(es decir no degenerada) y podemos definir la aplicación exponencial

$$\exp : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K}); \quad \exp(A) = \mathbf{Exp}(A).$$

Ejemplo 3.1.2 . *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz diagonal con*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Se tiene

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}, \ldots, A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} = diag(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k).$$

Y, por tanto

$$\exp(A) = diag(1, \ldots, 1) + diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + \frac{1}{2!}diag(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2) + \ldots + \frac{1}{k!}diag(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) + \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{2!} + \ldots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_2^2}{2!} + \ldots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + \lambda_{n-1} + \frac{\lambda_{n-1}^2}{2!} + \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 + \lambda_n + \frac{\lambda_n^2}{2!} + \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Así mismo

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{n-1} t} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.1.3 *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, con $A = diag(A_1, A_2, \ldots, A_m)$, (con $A_i \in M_2(\mathbb{R})$) o sea, es una matriz construida con las submatrices $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sobre la diagonal principal. Recordando como se efectúa la multiplicación de matrices se tiene que*

$$\exp(A) = diag(\exp(A_1), \exp(A_2), \ldots, \exp(A_m))$$

A continuación daremos una serie de resultados, sin demostración los cuales pueden encontrarse en [[1] pag.46-56].

Proposición 3.1.5 *Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ conmutan entonces*

$$exp(A + B) = exp(A)exp(B).$$

Demostración:
Ver [[1] pág. 47.] $\square$

De igual manera se puede definir la aplicación logaritmo por

$$log : N_{M_n(\mathbb{K})}(I_n; 1) \longrightarrow M_n(\mathbb{K}); \;\; log(A) = \mathbf{Log}(A - I_n)$$

Para todo $\|A - I_n\| < 1$

$$log(A) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(A - I_n)^n.$$

Proposición 3.1.6 *Las aplicaciones exp y log tienen las siguientes propiedades*

1. *Si $\|A - I_n\| < 1$, entonces $exp(log(A)) = A$.*
2. *Si $\|exp(B) - I_n\| < 1$, entonces $log(exp(B)) = B$.*

Demostración:
Ver [[1] pág. 48] $\square$

Dado $r \in \mathbb{R}$ tenemos que $\exp\left(N_{M_n(\mathbb{K})}(O, r)\right) \subseteq N_{M_n(\mathbb{K})}(I_n, e^r - 1)$,
Siempre que $\|A\| < r$

$$\left\|\exp(A) - I_n\right\| = \left\|\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}A^n\right\| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}\|A^n\| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}r^n = e^r - 1.$$

Para $z \in \mathbb{C}$ se considera la serie

$$F(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(k+1)!}z^k = \frac{e^z - 1}{z}$$

que tiene radio infinito de convergencia.
Sea ϕ un operador lineal sobre $M_n(\mathbb{C})$. Se considera la serie de operadores

$$F(\phi) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)!}\phi^k$$

de elementos en $M_n(\mathbb{C})$. En particular se considera $\phi = Ad_A$ para $A \in M_n(\mathbb{C})$ como sigue

$$ad_A : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}); \quad ad_A(C) = AC - CA$$

llamada la acción adjunta. Entonces

$$F(ad_A)(C) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} ad_A^k(C).$$

Proposición 3.1.7 *Para $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tenemos*

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(A + tB) = F(ad_A)(B) \exp(A).$$

En particular, si $A = 0$ o más generalmente si $AB = BA$

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(A + tB) = B \exp(A).$$

Demostración:
Ver [[1] pág. 49.] □

3.2 Cálculo de la exponencial de una matriz. Forma canónica de Jordan

El grupo $GL_2(\mathbb{R})$ actúa(por la izquierda) en el conjunto $End(\mathbb{R}^2)$[1] , de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl} GL_2(\mathbb{R}) \times End(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & End(\mathbb{R}^2) \\ (S, L) & \longmapsto & SLS^{-1}. \end{array}$$

La elección de una base $\{e_i\}$ para $\mathbb{R}^2$ permite establecer una biyección

$$\begin{array}{rclcl} End(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) & & \\ L_A & \longmapsto & L_A(e_i) & = \sum_{i=1}^{2} a_{ij}e_i, & \text{dondé } A_{2\times 2} = [a_{ij}]. \end{array}$$

De manera que la acción antes mencionada se traduce en la acción del grupo $GL_2(\mathbb{R})$, en el conjunto de matrices $M_2(\mathbb{R})$, mediante transformaciones de semejanza.

$$\begin{array}{rcl} GL_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ (S, A) & \longmapsto & SAS^{-1}. \end{array}$$

Las transformaciones de semejanza resultan de realizar cambios de base en $\mathbb{R}^2$, entonces A y SAS^{-1} en $M_2(\mathbb{R})$ son matrices asociadas a la misma transformación lineal L, respecto a las bases distintas. Mediante el Teorema de Jordan[2], se pueden clasificar las matrices reales ó complejas en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1 *. Para cada $A \in M_2(\mathbb{C})$; $A \neq 0$, se puede encontrar un $S \in GL_2(\mathbb{C})$, tal que $SAS^{-1} \in M_2(\mathbb{R})$ tome una y sólo una de las siguientes formas*

Polinomio Característico	$(x-\lambda)(x-\mu)$	$(x-\lambda)^2$	$(x-\lambda)^2+\mu^2$
Forma Canonica	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$

Demostración:
Sean $\lambda, \mu \neq 0$ los autovalores de A[3], se consideran los casos siguientes.

1. Si $\lambda = \mu$, el polinomio característico de A es $\det(A - \lambda I) = P_A(x) = (x - \lambda)^2$ por lo tanto λ es real y hay que tener dos consideraciones

   a) Si el polinomio mínimo de A es $m_A(x) = x - \lambda$, la forma canónica de A es
   $$S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

---

[1] $End(\mathbb{R}^2)$, es el conjunto de todas las transformaciones lineales $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

[2] [1].

[3] autovalores ó los valores propios de una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ son los ceros de la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

b) Si el polinomio mínimo de A es $m_A(x) = (x-\lambda)^2 = P_A(x)$, la forma canónica de A es $S = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

2. Si $\lambda \neq \mu$, el polinomio característico de A es $P_A(x) = (x-\lambda)(x-\mu) = m_A(x)$, surgen dos consideraciones.

   a) Si λ y μ, son reales, la forma canónica de A es $S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

   b) Si λ y μ, son complejas, entonces $\mu = \overline{\lambda} = a - ib$; $a, b \in \mathbb{R}$; por lo tanto la forma canónica asociada a A es $S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ siempre que $S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ o & \overline{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$

□

Basta regresar unas páginas atrás para saber que dado el **PVI**

$$\begin{cases} x' = & Ax \\ x(0) = & x^0 \end{cases} \tag{3.8}$$

su solución esta dada por

$$x(t) = \exp(tA)x^0$$

Por tanto para resolver dicho problema, se debe de realizar el cálculo de $\exp(tA)$. Recurrir a la propia definición de exponencial de una matriz, tratando de llevar a cabo la suma de la serie correspondiente, llevaría, en el caso general, a cálculos irrealizables en la práctica. Es necesario abordar el problema de manera indirecta:
Considérese el cambio de variables de la forma

$$x = Py$$

El problema 3.8 se transforma entonces en el problema equivalente

$$\begin{cases} y' = By, \\ y(0) = P^{-1}x^0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Donde $B = PAP^{-1}$, la solución de 3.9 esta dada por

$$y(t) = \exp(tB)P^{-1}x^0$$

Así deshaciendo el cambio de variables la solución de 3.8 será entonces:

$$x(t) = Py(t) = P\exp(tB)P^{-1}x^0$$

De donde por la unicidad de la solución, se deduce que:

$$\exp(At)x^0 = Py(t) = P\exp(tB)P^{-1}x^0$$

Y esto para todo $x^0 \in \mathbb{R}^n$, con lo que

$$\exp(At) = P\exp(tB)P^{-1}$$

resultado ya conocido por la proposición 3.1.3.
Convendrá entonces, realizar un cambio de variables, o, equivalente, encontrar una matriz P, tal que el cálculo de $\exp(Bt)$ sea más sencillo que el de $\exp(tA)$.

Si A es diagonizable, existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$PAP^{-1} = B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(Por ejemplo, si A tiene n autovalores reales distintos, se tiene que A es simétrica). En este caso

$$\exp(At)x^0 = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1}x^0$$

Lo mismo cabe decir en el caso que A tenga n autovalores distintos, reales ó complejos. Pero como se sabe, no toda matriz es diagonizable, ni aún pasando a $\mathbb{C}$. El resultado final[2] de diagonalizar una matriz es la forma Canónica de Jordan; se trata de una matriz **casi diagonal** que es semejante a la matriz dada A y que en el caso de matrices 2×2, mediante la Proposición 3.2.1, pudimos determinar en todos los casos. Se tiene para el caso general, el siguiente teorema debido a Jordan[3]

Teorema 3.2.1 *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ con s autovectores linealmente independientes, entonces existe una matriz no singular P tal que*

$$PAP^{-1} = B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_s \end{pmatrix}$$

Cada bloque de Jordan B_j, $j = \{1, 2, 3, \ldots, s\}$, es una matriz triangular de orden m (con $1 \leq m < n$),

[2] Ideal, al menos, para el cálculo de la exponencial de una matriz, como se aprecia en el Ejemplo 3.1.2.

[3] Camille Jordan (1838 - 1922) Fue un matemático francés conocido tanto por su trabajo, fundamental, sobre la teoría de los grupos como por su influyente Curso de análisis (*Cours d'analyse*). Jordan estudió en la Escuela Politécnica (promoción 1855). Fue ingeniero de minas y, más tarde ejerció como examinador en la misma escuela. En 1876 entró como profesor en el Colegio de Francia, sustituyendo a Joseph Liouville.

de la forma

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

donde λ_k *es autovalor de la matriz A. Un autovalor* λ_k *puede aparecer en varios bloques si corresponde a varios autovectores linealmente independientes.*

Observación

- La matriz $B = PAP^{-1}$ se denomina matriz de Jordan, o forma canónica de Jordan de A. Salvo en el orden de los bloques de Jordan, B esta unívocamente determinada por A, y dos matrices semejantes tienen la misma forma canónica. Los bloques correspondientes a un mismo autovalor λ (λ-bloques de Jordan) se sobreentiende que están dispuestos consecutivamente sobre la diagonal principal de B.

3.3 La derivada de la exponencial

Definición 3.3.1 *Una* **curva derivable** *en* $M_n(\mathbb{K})$ *es una aplicación*

$$\alpha : (a, b) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$$

tal que la derivada de α en t, $\alpha'(t)$*, existe para cada* $t \in (a, b)$*. Donde se debe de entender que*

$$\alpha'(t) = \lim_{s \to t} \frac{\alpha(s) - \alpha(t)}{s - t} \in M_n(\mathbb{K})$$

siempre que este limite exista.

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, sea $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, asumiendo que $a < 0 < b$, se denotara por

$$\alpha'(t) = \frac{d}{dt}\alpha(t)$$

la derivada de $\alpha(t)$.

Lema 3.3.1 *Sea* $\gamma : (a, b) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ *una curva derivable en* $M_n(\mathbb{K})$ *con* $\gamma(0) = I$*. Entonces*

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \det(\gamma(t)) = traza(\gamma'(0)).$$

Demostración:
Ver [[1] pág. 76.] □

Lema 3.3.2 . *Para* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *tenemos*

$$\det(\exp(A)) = e^{traza(A)}.$$

Demostración:
Usando ecuaciones diferenciales, Consideremos la curva

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}; \quad \gamma(t) = \det(\exp(tA))$$

γ satisface la ecuación diferencial con condición inicial

$$\begin{cases} \gamma'(t) = & \gamma(t)traza(A) \\ \gamma(0) = & 1 \end{cases} \tag{3.10}$$

siempre que

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) =& \lim_{h\to 0} \frac{\det(\exp((t+h)A)) - \det(\exp(tA))}{h} \\
=& \lim_{h\to 0} \frac{\det(\exp((tA)+(hA)) - \det(\exp(tA))}{h} \\
=& \lim_{h\to 0} \frac{\det(\exp((tA)+(hA)) - \det(\exp(tA))}{h} \\
=& \lim_{h\to 0} \frac{\det(\exp((tA)*(hA)) - \det(\exp(tA))}{h} \\
=& \lim_{h\to 0} \frac{\det(\exp(tA))\det(\exp(hA)) - \det(\exp(tA))}{h} \\
=& \det(\exp(tA))\lim_{h\to 0} \frac{\det(\exp(hA)) - 1}{h} \\
=& \det(\exp(tA))\frac{d}{dt}|_{t=0} \det(\exp(tA)), \text{ aplicando el lema anterior a la curva } t \longmapsto \exp(tA) \\
=& \det(\exp(tA)traza(A)) \\
=& \gamma(t)traza(A)
\end{aligned}$$

La curva $t \longmapsto e^{t\cdot traza(A)}$ satisface la ecuación diferencial 3.10. Por lo tanto por el teorema de existencia y unicidad, obtenemos

$$\gamma(t) = \det(\exp(tA)) = e^{traza(A)}.$$

□

Lema 3.3.3 . *La aplicación* $t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(tA) \in GL_n(\mathbb{K})$*, es derivable con derivada*

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

Demostración:
Ya que la aplicación exponencial $t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(tA)$ se define por la serie absolutamente convergente

$\exp(tA) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(tA)^p}{p!}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\exp(tA) =& \frac{d}{dt}\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(tA)^p}{p!}\right) \\
=& \frac{d}{dt}\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(A)^p}{p!} t^p\right) \\
=& \left(\sum_{p=1}^{\infty} A^p \frac{(t)^{p-1}}{(p-1)!}\right) \\
=& \left(\sum_{p=1}^{\infty} AA^{p-1} \frac{(t)^{p-1}}{(p-1)!}\right) \\
=& \left(A\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(t)^{p-1}A^{p-1}}{(p-1)!}\right) \\
=& \left(A\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(tA)^{p-1}}{(p-1)!}\right) \\
=& A\exp(tA) \\
=& \exp(tA)A; \quad \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

□

Observación

- En particular $\frac{d}{dt}\exp(tA)|_{t=0} = A$.

Teorema 3.3.1 *(Existencia y Unicidad)*
Para $A, C \in M_n(\mathbb{R})$, con A no nula, y $a < 0 < b$, la ecuación diferencial

$$\gamma'(t) = \gamma(t)A$$

tiene una única solución $\gamma : (a,b) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, con condición inicial $\gamma(0) = C$. Además si C es invertible, entonces también lo es $\gamma(t)$ para cada $t \in (a,b)$, así $\gamma : (a,b) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$.

Demostración:
Primeramente se resolvera el problema

$$\begin{cases} \gamma'(t) = & \gamma(t)A \\ \gamma(0) = & I \end{cases} \tag{3.11}$$

Para cada $t \in (a, b)$ la serie

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(tA)^p}{p!} = \exp(tA)$$

converge absolutamente, a la aplicación $\gamma : (a, b) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}); \quad \gamma(t) = \exp(tA)$.
y por el lema 3.3.3 se tiene que

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

entonces $\gamma(t)$ satisface 3.11; Puesto que dados $s, t, (s + t) \in (a, b)$, se tiene que

$$\gamma(s + t) = \gamma(s)\gamma(t)$$

en particular, se tiene que $\gamma(t)$ es invertible, con $\gamma(t)^{-1} = \gamma(-t)$.
Luego una solución para el problema

$$\begin{cases} \gamma'(t) = & \gamma(t)A \\ \gamma(0) = & C \end{cases} \tag{3.12}$$

estaria dado por $\gamma(t) = C\exp(tA)$.
Para garantizar la unicidad supongase que $\beta(t)$, es otra solución de 3.12, entonces $\alpha(t) = \beta(t)\exp(-tA)$, satisface

$$\begin{aligned} \alpha'(t) =& \beta'(t)\exp(-tA) + \beta(t)\frac{d}{dt}\exp(-tA) \\ =& \beta'(t)\exp(-tA) - \beta(t)\exp(-tA)A \\ =& \beta(t)A\exp(-tA) - \beta(t)\exp(-tA)A \\ =& 0. \end{aligned}$$

Entonces $\alpha(t)$, es una aplicación constante con $\alpha(t) = \alpha(0) = C$. Por tanto $\beta(t) = C\exp(tA) = \gamma(t)$; por lo tanto la solución es única.
Note que si C, es invertible también lo es $C\exp(tA)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, así $\gamma : (a, b) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ □

3.4 Subgrupos uniparamétricos en grupos de Lie de matrices

Sea $G \subseteq GL_n(\mathbb{K}) \subseteq M_n(\mathbb{K})$, un grupo de Lie de matrices, se define una curva derivable de manera análoga a la definición 3.3.1

Definición 3.4.1 *Una curva derivable en G es una aplicación*

$$\gamma : (a,b) \longrightarrow G$$

tal que la derivada $\gamma'(t)$ existe para cada $t \in (a,b)$. Es decir que

$$\gamma'(t) = \lim_{s\to t} \frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{s-t} \in M_n(\mathbb{K})$$

siempre que este limite exista para cada $t \in (a,b)$.

Observación
Usualmente se considera $a < 0 < b$.

Ahora supongase que $\epsilon > 0$ ó $\epsilon = \infty$.

Definición 3.4.2 *Un* **semigrupo uniparamétrico en** *G es una aplicación continua $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow G$, que es derivable en cero y satisface*

$$\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$$

Cuando $s, t, (s+t) \in (-\epsilon,\epsilon)$. Se llama a la última condición como la **propiedad de homomorfismo.**
Si $\epsilon = \infty$, entonces $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ es llamado un **grupo uniparamétrico en** *G ó* **subgrupo uniparamétrico de** G**.**

OBSERVACIÓN:
Note que si γ es un semigrupo uniparamétrico en G, se tedra que $\gamma(0) = I_n$

Proposición 3.4.1 *Sea $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow G$ un subgrupo uniparamétrico en G. Entonces para cada $t \in (-\epsilon,\epsilon)$, γ es derivable en t y*

$$\gamma' = \gamma'(0)\gamma(t) = \gamma(t)\gamma'(0)$$

Demostración:
Sea $h > 0$, se tiene que

$$\gamma(h)\gamma(t) = \gamma(h+t) = \gamma(t+h) = \gamma(t)\gamma(h)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\gamma(t+h) - \gamma(t)\right)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\gamma(t)\gamma(h) - \gamma(t)\right)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\gamma(h) - I\right)\gamma(t)\\
&= \gamma'(0)\gamma(t)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\gamma(h+t)-\gamma(t)\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\gamma(h)\gamma(t)-\gamma(t)\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\gamma(t)\left(\gamma(h)-I\right)\\
&=\gamma(t)\gamma'(0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\gamma' = \gamma'(0)\gamma(t) = \gamma(t)\gamma'(0)$$

$\square$

Proposición 3.4.2 *Sea $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow G$ un subgrupo uniparamétrico en G. Entonces existe una única extención a un grupo uniparamétrico $\overline{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow G$ en G, esto es, un grupo uniparamétrico en G, $\overline{\gamma}$, para el cual $\overline{\gamma}(t) = \gamma(t)$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$*

Demostración
Sea $t \in \mathbb{R}$. Entonces existe un natural m tal que $-\epsilon < t/m < \epsilon$, por lo tanto $\gamma(t/m), \gamma(t/m)^m \in G$. Similarmente, puedo escoger un segundo natural, n, tal que $\gamma(t/n), \gamma(t/n)^n \in G$. Siempre que $mn \geq n$ y $mn \geq m$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma(t/n)^n &=\gamma(mt/mn)^n\\
&=\gamma(t/mn)^{mn}\\
&=\gamma(nt/mn)^m\\
&=\gamma(t/m)^m.
\end{aligned}$$

hemos verificado entonces que la aplicación
$\overline{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow G; \overline{\gamma} = \gamma(t/n)^n$, para n grande
es un grupo uniparamétrico bien definido. $\square$

Teorema 3.4.1 *sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ un grupo uniparamétrico en G, entonces este tiene la forma*

$$\gamma(t) = \exp(tA)$$

para algún $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Demostración
Sea $A = \gamma'(0)$, por la proposición 3.4.2, γ satisface la ecuación diferencial con condición inicial

$$\gamma'(t) = \gamma(t)A, \quad \gamma(0) = I_n.$$

Por el teorema 3.3.1, esta ecuación tiene una única solución $\gamma(t) = \exp(tA)$ $\square$
Nota:

- Aunque el reciproco de este teorema es valido bajo ciertas restricciones: Encontrar un subgrupo uniparamétrico para una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$. Su demostración involucra álgebras de Lie, las cuales se considerarán en el capítulo cuatro.

Capítulo 4

Espacios Tangentes y Álgebras de Lie

"Estoy seguro, absolutamente seguro de que estas teorias serán reconocidas como fundamentales en algún momento del futuro".

(Marius Sophus Lie, 1842-1899)

En este capítulo estudiaremos las álgebras de Lie, espacios vectoriales con una función bilineal la cual es antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi. Las álgebras de Lie tienen una importancia mayúscula en la teoría de Lie, ya que nos ayudará a ver el grupo de Lie(en abstracto) no como una variedad si no como un espacio vectorial. Los aspectos geométricos de esto serán estudiados en el último capítulo cuando definamos a los grupos de Lie.

4.1 Álgebras de Lie

Un álgebra de Lie es la estructura algebraica que describe un conjunto de transformaciones infinitesimales. Su uso principal reside en el estudio de objetos geométricos tales como grupos de Lie y variedades diferenciables. El término de Álgebra de Lie fue introducido por Hermann Weyl (1885-1955) en 1934; previamente, en sus trabajos de 1925, Weyl había utilizado la expresión grupo infinitesimal.

Se enetendará como de costumbre a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, estos campos son de característica cero.

Ejemplo 4.1.1 *Sea $M_n(\mathbb{K})$ el espacio vectorial de las matrices de orden $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Además de esta estructura de espacio vectorial, existe una operación de multiplicación en este conjunto con las siguientes propiedades. Si $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$:*

1. $A(B + C) = AB + AC,\ (A + B)C = AC + BC$, *distributiva*
2. $A(BC) = (AB)C$, *,Asociativa*
3. $AB \neq BA$, *En general*

4. $AI_n = I_n = A$, *La matriz identidad.*

Se dice que $M_n(\mathbb{K})$ es un álgebra asociativa no conmutativa con elemento unidad. En este conjunto definimos una nueva operación de la forma siguiente:

$$\begin{array}{rccl} [,]: & M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ & (A, B) & \longmapsto & [A, B] = AB - BA. \end{array}$$

que tiene las siguientes propiedades:

1. $[A, B] = -[B, A]$, *propiedad antisimétrica*

2. $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = \boldsymbol{0}$, *identidad de Jacobi.*

En efecto

- *Antisimetría*

$$[A, B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B, A].$$

- *Para $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$, se tiene que:*

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] =& A[B, C] - [B, C]A \\ =& A(BC - CB) - (BC - CB)A \\ =& ABC - ACB - BCA + CBA. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [B, [C, A]] =& B[C, A] - [C, A]B \\ =& B(CA - AC) - (CA - AC)B \\ =& BCA - BAC - CAB + ACB. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [C, [A, B]] =& C[A, B] - [A, B]C \\ =& C(AB - BA) - (AB - BA)C \\ =& CAB - CBA - ABC + BAC. \end{aligned}$$

Luego sumando miembro a miembro

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = \boldsymbol{0}$$

Se dice que $M_n(\mathbb{K})$ es un álgebra de Lie con esta operación(conmutador de dos matrices).

Observación

- Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, estas matrices conmutan si $AB - BA = \mathbf{0}$. Entonces $[A, B] = \mathbf{0}$ si y solo si A, B conmutan. por lo tanto la estructura de álgebra de lie de $M_n(\mathbb{K})$ permite saber en que medida falla la conmutatividad de matrices.

Como veremos, toda álgebra de Lie de dimensión finita se obtiene esencialmente de esta forma. Un álgebra sobre $\mathbb{K}$, se define de la siguiente forma:

Definición 4.1.1 *Un álgebra sobre $\mathbb{K}$ ó $\mathbb{K}$-álgebra, es un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ *sobre $\mathbb{K}$, en el que se define una operación(producto):*

$$\begin{array}{rccl} \omega : & \mathbf{V}\times\mathbf{V} & \longrightarrow & \mathbf{V} \\ & (x, y) & \longmapsto & \omega(x, y) = xy. \end{array}$$

que tiene las siguientes propiedades:

1. $x(y + z) = xy + xz, \ (x + y)z = xz + yz, \ \forall x, y, z \in \mathbf{V}$
2. $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y), \ \lambda \in \mathbb{K}, \ x, y \in \mathbf{V}.$

Observación:
La dimensión del álgebra es la dimensión de $\mathbf{V}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Uno de los casos más interesantes de álgebras lo constituyen la **álgebras asociativas**.

Una $\mathbb{R}$-álgebra interesante se obtiene tomando $\mathbf{V} = End(\mathbf{W}) = \{T : \mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{W} | T \text{es lineal}\}$, dónde $\mathbf{W}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y tomando ω como la composición de transformaciones lineales.

Definición 4.1.2 *Un álgebra* $\mathbf{V}$ *se dice que es asociativa si se verifica(además de las propiedades de álgebra):*

$$x(yz) = (xy)z, \quad x, y, z \in \mathbf{V}.$$

Observación:
El álgebra $M_n(\mathbb{K})$ estudiada en el Ejemplo 4.1.1, es un álgebra asociativa de dimensión finita.

Definición 4.1.3 *Se dice que el álgebra* $\mathbf{V}$ *es abeliana (conmutativa) si*

$$xy = yx$$

para todo par de elementos de $\mathbf{V}$.

Ejemplo 4.1.2 *Entre los ejemplos de álgebra tenemos:*

1. *El álgebra de todas las matrices $n \times n$ sobre el cuerpo (o anillo conmutativo) $\mathbb{K}$. Aquí la multiplicación es multiplicación ordinaria de matrices.*
2. *Las álgebras de funciones, tales como el $\mathbb{R}$-álgebra de todas las funciones continuas de valores reales definidas en el intervalo $[0, 1]$, o la $\mathbb{C}$-álgebra de todas las funciones holomorfas definidas en algún conjunto abierto en el plano complejo. Éstas son también conmutativas.*

3. *Las álgebras de operadores lineales, por ejemplo en un espacio de Hilbert. Aquí la multiplicación del álgebra viene dada por la composición de operadores. Estas álgebras también llevan una topología; se definen muchas de ellas en un espacio subyacente de Banach que las convierte en un álgebra de Banach. Éstas se estudian en análisis funcional.*

Ahora podemos definir el objeto principal de este apartado.

Definición 4.1.4 *Un álgebra de Lie $\mathfrak{a}$, sobre un cierto campo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, equipado con una operación bilineal, sobre $\mathbb{K}$, $[\,,\,] : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}$, llamado el* **corchete de Lie** *o* **producto de Lie***, que satisface las propiedades, para $x, y, z \in \mathfrak{a}$:*

1. $[x, y] = -[y, x]$*; La antisimetría.*
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$*; La identidad de Jacobi.*

OBSERVACIÓN:

- En general, la operación $(x, y) \longrightarrow [x, y]$ no es ni asociativa, ni conmutativa. La falta de asociatividad se comprueba fácilmente en el ejemplo del producto cruz.
- Un álgebra de Lie no puede ser asociativa en general ($[x, [y, z]] \neq [[x, y], z]$). La propiedad de Jacobi establece como difieren los dos términos en la desigualdad, su diferencia es igual a $[[z, x], y]$.
- Las álgebras de Lie; espacios vectoriales con una aplicación bilineal la cual es antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi.
- Las álgebras de Lie tienen una importancia mayúscula en la teoría de Grupos de Lie. Ya que el álgebra de Lie nos ayuda a ver el grupo de Lie no como una variedad si no como un espacio vectorial.

Como se ha observado un álgebra de Lie no puede ser asociativa en general ($[x, [y, z]] \neq [[x, y], z]$). La propiedad de Jacobi establece como difieren los dos términos en la desigualdad, su diferencia es igual a $[[z, x], y]$. Pero a partir de un álgebra asociativa siempre podemos definir un álgebra de Lie.

Problema 4.1.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa, defina una operación para que adquiera la estructura de álgebra de Lie.*

Solución
Definamos $\mathcal{A}_L$, como el álgebra que se obtiene utilizando el mismo espacio vectorial $\mathcal{A}$ como soporte de una nueva operación, definida como hicimos con las matrices en el ejemplo 4.1.1:

$$(x, y) \longrightarrow [x, y] = xy - yx, \quad x, y \in \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}_L$ es un álgebra de Lie.

1. $(\mathcal{A}_L, [-, -])$, el corchete es trivilmente antisimétrico;

2. Verifiquemos la condición de Jacobi. En efecto:

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] =& x[y,z]-[y,z]x+y[z,x]-[z,x]y+z[x,y]-[x,y]z \\
=& x(yz-zy)-(yz-zy)x+y(zx-xz)-(zx-xz)y \\
&+z(xy-yx)-(xy-yx)z \\
=& x(yz)-x(zy)-(yz)x+(zy)x+y(zx)-y(xz)-(zx)y+(xz)y \\
&+z(xy)-z(yx)-(xy)z+(yx)z \\
=& 0.
\end{aligned}$$

para todo $x, y, z \in \mathcal{A}_L$, pues el producto es asociativo por hipótesis.

□

Problema 4.1.2 *Demuestre que si* $(\mathfrak{a},+,*)$ *es un álgebra de lie sobre un cuerpo* $\mathbb{F}$ *de característica distinta de dos(*$Char(\mathbb{F}) \neq 2$*), la propiedad de antisimetría es equivalente a*

$$[x,x]=0, \quad \forall x \in \mathfrak{a}$$

Solución
En efecto, dado que $Char(\mathbb{F}) \neq 2$, dados $x, y \in \mathfrak{a}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
[x+y,x+y] =& [x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]=0 \\
\leftrightarrow& [x,y]+[y,x]=0 \\
\leftrightarrow& [x,y]=-[y,x].
\end{aligned}$$

□

Problema 4.1.3 *Sea* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathfrak{a}=\mathbb{R}^3$ *y el producto cruz;*

$$[x,y]=x\times y,$$

Como producto de Lie, demuestre que $\mathbb{R}^3$ *es un álgebra de Lie sobre* $\mathbb{R}$*.*

Demostración:
Sea $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, tomando $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, entonces existen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, con $1 \leq i; j \leq 3$ tal que

$$\begin{aligned}
x =& \alpha_{11}e_1+\alpha_{12}e_2+\alpha_{13}e_3 \\
y =& \alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2+\alpha_{23}e_3 \\
z =& \alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2+\alpha_{33}e_3
\end{aligned}$$

Verificaremos a continuación que el producto cruz, satisface las propiedades de antisimetría y la identidad de Jacobi.

- La antisimetría;

$$\begin{aligned}
[x,y] = x\times y =& (\alpha_{11}e_1+\alpha_{12}e_2+\alpha_{13}e_3)\times(\alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2+\alpha_{23}e_3)\\
=&\alpha_{11}e_1\times(\alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2+\alpha_{23}e_3)+\alpha_{12}e_2\times(\alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2+\alpha_{23}e_3)+\\
&\alpha_{13}e_3\times(\alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2+\alpha_{23}e_3)\\
=&\alpha_{11}\alpha_{21}\underbrace{e_1\times e_1}_{0}+\alpha_{11}\alpha_{22}\underbrace{e_1\times e_2}_{e_3}+\alpha_{11}\alpha_{23}\underbrace{e_1\times e_3}_{-e_2}+\alpha_{12}\alpha_{21}\underbrace{e_2\times e_1}_{-e_3}+\alpha_{12}\alpha_{22}\underbrace{e_2\times e_2}_{0}\\
&+\alpha_{12}\alpha_{23}\underbrace{e_2\times e_3}_{e_1}+\alpha_{13}\alpha_{21}\underbrace{e_3\times e_1}_{e_2}+\alpha_{13}\alpha_{22}\underbrace{e_3\times e_2}_{-e_1}+\alpha_{13}\alpha_{22}\underbrace{e_3\times e_3}_{0}\\
=&(\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22})e_1+(\alpha_{13}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{23})e_2+(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})e_3\\
=&\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{vmatrix}\\
=&-\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\end{vmatrix}\\
=&-(y\times x)=-[y,x].
\end{aligned}$$

- La identidad de Jacobi
  Utilizando el resultado anterior se puede verificar que $y\times(x\times z)=y\langle x,z\rangle - z\langle x,y\rangle$ [1] Por tanto

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]] = x\times[y,z] = x\times(y\times z) =& y\langle x,z\rangle - z\langle x,y\rangle\\
[y,[z,x]] = y\times[z,x] = y\times(z\times x) =& z\langle y,x\rangle - x\langle y,z\rangle\\
[z,[x,y]] = z\times[x,y] = z\times(x\times y) =& x\langle z,y\rangle - y\langle z,x\rangle .
\end{aligned}$$

  Sumando miembro a miembro se obtiene el resultado pedido. □

Dadas dos matrices $A,B\in M_n(\mathbb{K})$, su conmutador o corchete Lie es la matriz $[A,B]=AB-BA$. Este conmutador define una aplicación bilineal sobre $\mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
[,]: \quad M_n(\mathbb{K})\times M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{K})\\
(A,B) &\longmapsto [A,B].
\end{aligned}$$

Morfismos

Una vez conocidos los conceptos fundamentales de la teoría de, las álgebras asociativas y álgebras de Lie, pasamos ahora a establecer la definición y propiedades de los homomorfismos estre dichos objetos.

Definición 4.1.5 *Un morfismo entre dos álgebras de Lie* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{g}'$*, es una transformación lineal* $\rho:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}'$ *que además satisface,* $\rho([x,y])=[\rho(x),\rho(y)]$.

[1] $\langle x,y\rangle$, denota el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$

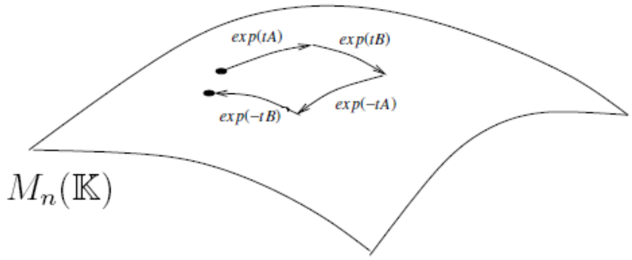


Figura 4.1: En este esquema se puede ver una interpretación gráfica del corchete de Lie.

Introduciremos ahora conceptos básicos de la teoría de álgebras de Lie, los cuales son análogos a los de teoría de grupos ó anillos.

Definición 4.1.6 . *Sea $\mathfrak{a}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$, con corchete de Lie $[,]$, entonces un subespacio vectorial $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{a}$ es una* **subálgebra de Lie** *de $\mathfrak{a}$ sobre $\mathbb{K}$, si es cerrado bajo el corchete de Lie, es decir, si $x, y \in \mathfrak{b}$ implica que $[x, y] \in \mathfrak{b}$.*

Para $\mathfrak{a}$ álgebra de Lie se tienen dos ejemplos triviales de subálgebras de Lie; $\mathfrak{a}$ mismo y $\{0\} \subseteq \mathfrak{a}$, el álgebra de Lie trivial.
Un álgebra de Lie donde todos sus corchetes son nulos es llamada **abeliana**.
Supóngase que $\mathfrak{a} \subseteq M_n(\mathbb{K})$ es un subespacio vectorial. Por la definición 4.1.6, $\mathfrak{a}$ es una subálgebra de Lie de $M_n(\mathbb{K})$ que es cerrada bajo el conmutador, esto es, $[A, B] = AB - BA \in \mathfrak{a}$, para cualquier $A, B \in \mathfrak{a}$.

Definición 4.1.7 *Si $\mathfrak{a}$ es un álgebra de Lie con corchete de Lie $[,]$, entonces un subespacio vectorial de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$, es un* **ideal de Lie** *de $\mathfrak{a}$ si $[z, x] \in \mathfrak{n}$ para todo $z \in \mathfrak{n}$ y $x \in \mathfrak{a}$. Un ideal de Lie de $\mathfrak{a}, \mathfrak{n}$, es propio si $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{a}$ y no trivial si $\mathfrak{n} \neq \{0\}$, el ideal $\{0\}$ es llamado el ideal trivial.*

Definición 4.1.8 *Sea $\mathfrak{a}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ con corchete de Lie $[,]$.*

- *El centro de $\mathfrak{a}$ es :*
$$z(\mathfrak{a}) = \{z \in \mathfrak{a} : \forall x \in \mathfrak{a},\ [z, x] = 0\}.$$

- *La subálgebra derivada de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, es el subespacio vectorial de $\mathfrak{a}$, generado por el conjunto*
$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{[x, y] :\ x, y \in \mathfrak{a}\}.$$
es decir,
$$\mathfrak{a}' = \langle[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\rangle = \left\{\sum_i [x_i, y_i] : i \in \mathbb{N}, x_i, y_i \in \mathfrak{a}.\right\}$$

Proposición 4.1.1 *$z(\mathfrak{a})$ y $\mathfrak{a}'$ son ideales de Lie de $\mathfrak{a}$.*

Demostración:

1. Sean $z_1, z_2, z_3 \in z(\mathfrak{a})$ y x un elemento cualquiera de $\mathfrak{a}$, entonces

   - $z_1 + z_2 \in z(\mathfrak{a})$ siempre que
   $$[z_1 + z_2, x] = [z_1, x] + [z_2, x] = 0.$$
   - Para $\lambda \in \mathbb{K}$,
   $$[\lambda z, x] = \lambda[z, x] = 0,$$
   por lo tanto $\lambda z \in z(\mathfrak{a})$. Así $z(\mathfrak{a})$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{a}$.
   - Vemos que $[z(\mathfrak{a}), \mathfrak{a}] \subseteq z(\mathfrak{a})$.
   Sea $z \in z(\mathfrak{a}),\ \ x \in \mathfrak{a}$ entonces
   $$[z, x] = 0.$$
   Por ser $z(\mathfrak{a})$ subespacio de $\mathfrak{a}$ implica que $0 \in z(\mathfrak{a})$, por lo tanto
   $$[z, x] \in z(\mathfrak{a}) \ \ (z \in z(\mathfrak{a}),\ x \in \mathfrak{a}).$$

2. $\mathfrak{a}'$ es subespacio vectorial de $\mathfrak{a}$ por definición

   - Para ver que $\mathfrak{a}'$ es un ideal de Lie de $\mathfrak{a}$ nótese que
   $$[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}] \subseteq \langle [[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}], \mathfrak{a}] \rangle \subseteq \mathfrak{a}'.$$
   siempre que por propiedades del producto de Lie tenemos que para $x, y, z \in \mathfrak{a}$
   $$[[x, y], z] = [[z, x], y] + [[x, y], z] \ \in \mathfrak{a}'.$$
   así $[[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}], \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}'$ y por lo tanto el subespacio generado de $[[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}], \mathfrak{a}]$ esta contenido en $\mathfrak{a}'$. □

Ejemplo 4.1.3 *Sea* $UT_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ *el conjunto de matrices reales triangulares superiores, es un subespacio vectorial real de de* $M_2(\mathbb{R})$*. En efecto: Sean* $r_1, r_2, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ *con* $i = \{1, 2, 3\}$*, tenemos que*
$$r_1 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} \in UT_2(\mathbb{R})$$
Además,
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} \in UT_2(\mathbb{R})$$
Por lo tanto $UT_2(\mathbb{R})$ *es cerrado bajo la multiplicación de matrices, así* $UT_2(\mathbb{R})$*, es una subálgebra de Lie de* $M_2(\mathbb{R})$ *siempre que para* $A, B \in UT_2(\mathbb{R})$
$$[A, B] = AB - BA \in UT_2(\mathbb{R}).$$
Entonces el centro de $UT_2(\mathbb{R}), z(UT_2(\mathbb{R}))$*, es un ideal de Lie de* $UT_2(\mathbb{R})$*. Es evidente que*
$$z(UT_2(\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \ a \in \mathbb{R} \right\}$$

En efecto

a) Dado que

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R}\right\} \subseteq z(UT_2(\mathbb{R}))$$

Sean $a, x, y, z \in \mathbb{R}$ entonces

$$\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ 0 & az \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xa & ya \\ 0 & za \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

b) Por otra parte

$$z(UT_2(\mathbb{R})) \subseteq \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R}\right\}$$

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in z(UT_2(\mathbb{R}))$ *entonces para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$*

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xa & xb+yc \\ 0 & zc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-xa & ay+bz-xb-yc \\ 0 & cz-zc \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$ *esto si y solo si*

$$ay + bz - bx - cy = 0,$$

como es para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ podemos tomar $x = z$ entonces $(a-c)y = 0$, en consecuencia $a = c$, así obtenemos necesariamente que $b = 0$, por tanto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Se puede asegurar tomando en cuenta b) que

$$UT_2'(\mathbb{R}) = \langle [UT_2(\mathbb{R}), UT_2(\mathbb{R})] \rangle = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R}\right\}.$$

Definición 4.1.9 *Un álgebra de Lie $\mathfrak{a}$, es simple si todo ideal propio $\mathfrak{n}$, es trivial es decir $\mathfrak{n} = \{0\}$.*

Definición 4.1.10 *Sean $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$. Una transformación lineal sobre $\mathbb{K}$, $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$, es un* **homomorfismo de álgebras de Lie** *si para todo $x, y \in \mathfrak{g}$;*

$$\phi([x, y]_{\mathfrak{g}}) = [\phi(x), \phi(y)]_{\mathfrak{h}}.$$

Tal homomorfismo es un isomorfismo de álgebras de Lie si ϕ es un isomorfismo lineal.

Proposición 4.1.2 *Sea $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo sobreyectivo de álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$. Entonces $\mathfrak{h}$ es abeliana si y solo si $\mathfrak{g}' \subseteq ker(\phi) = \{x \in \mathfrak{g} : \varphi(x) = \mathbf{0}_{\mathfrak{h}}\}$.*

Demostración:
Sea $\mathfrak{h}$ abeliana, es decir, para todo $x, y \in \mathfrak{h}$; $[x, y]_{\mathfrak{h}} = 0$.
Si $x \in \mathfrak{g}'$ entonces $x = \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i]_{\mathfrak{g}}$ para $n \in \mathbb{N}$, $x_i, y_i \in \mathfrak{g}$, se tiene que

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi[x_i, y_i]_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^{n} [\phi(x_i), \phi(y_i)]_{\mathfrak{h}} = 0$$

por ser $\mathfrak{h}$ abeliana. Esto nos lleva a que $x \in ker(\phi)$, es decir, $\mathfrak{g}' \subseteq ker(\phi)$.
Por otra parte si $\mathfrak{g}' \subseteq ker(\phi)$, sean $x, y \in \mathfrak{h}$ entonces existen $\widehat{x}, \widehat{y} \in \mathfrak{g}$ tales que $x = \phi(\widehat{x})$, $y = \phi(\widehat{y})$ por ser ϕ sobreyectivo. Tenemos que

$$[x, y]_{\mathfrak{h}} = [\phi(\widehat{x}), \phi(\widehat{y})]_{\mathfrak{g}} = \phi[\widehat{x}, \widehat{y}]_{\mathfrak{g}} = \phi(\widehat{z}) = 0$$

siempre que $\widehat{z} = [\widehat{x}, \widehat{y}]_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}' \subseteq ker(\phi)$. Por lo tanto $\mathfrak{h}$ es abeliana. $\square$
Para un ideal de Lie de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$, el espacio vectorial cociente,

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}} = \{x + \mathfrak{n} : \; x \in \mathfrak{a}\}$$

hereda el producto de Lie definido por

$$[x + \mathfrak{n}, y + \mathfrak{n}]_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}} = [x, y]_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{n} \in \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}.$$

De esta forma $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}, [,]_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}}\right)$ tiene estructura de álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ y la llamaremos el **álgebra de Lie cociente** de $\mathfrak{a}$, con respecto al ideal $\mathfrak{n}$.
Además existe un homomorfismo canónico de álgebras de Lie dado por:

$$\begin{array}{rccl} \pi : & \mathfrak{a} & \longrightarrow & \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}} \\ & x & \longmapsto & \varphi(x) = x + \mathfrak{n}. \end{array}$$

Proposición 4.1.3 *Sean $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo de álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$. entonces $ker(\phi)$ es un ideal de $\mathfrak{g}$; además existe un isomorfismo de álgebras de Lie entre $Im(\varphi)$ y el álgebra de Lie cociente de $\mathfrak{g}$ con respecto al ideal $ker(\varphi)$, es decir, $Im(\varphi) = \dfrac{\mathfrak{g}}{ker(\varphi)}$.*

Demostración:
Sea la aplicación

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathfrak{g}/ker(\varphi) & \longrightarrow & Im(\varphi) \\ & x + ker(\varphi) & \longmapsto & \varphi(x). \end{array}$$

Tenemos que f es un homomorfismo de álgebras de Lie siempre que por el teorema de homomorfismo f es un isomorfismo lineal y

$$\begin{aligned} f([x + ker(\varphi), y + ker(\varphi)]) =& f([x, y] + ker(\varphi)), \\ =& \varphi([x, y]), \\ =& [\phi(x), \phi(y)], \\ =& [f(x + ker(\varphi)), f(y + ker(\varphi))]. \end{aligned}$$

□

Definición 4.1.11 *Sean* $\mathfrak{a}$ *un álgebra de Lie sobre* $\mathbb{K}$*,* $\mathfrak{b}$ *una* **subálgebra de Lie** *de* $\mathfrak{a}$*, y* $\mathfrak{n}$ *un ideal de Lie de* $\mathfrak{a}$*. Entonces* $\mathfrak{a}$ *es el* **producto semidirecto** *de* $\mathfrak{b}$ *y* $\mathfrak{n}$ *si* $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{n} = \{0\}$ *y* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{n}$ *como espacios vectoriales. Escribiremos que*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \ltimes \mathfrak{n}$$

Tenemos un caso especial de producto semidirecto, el producto directo, al cual le podemos dar estructura de álgebra de Lie; es decir, si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ son álgebras de Lie, sobre $\mathbb{K}$ entonces

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \{(x, y) : \ x \in \mathfrak{a}, \ y \in \mathfrak{a}\}$$

con producto de Lie dado por

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}} = \left([x_1, x_2]_{\mathfrak{a}} \, [y_1, y_2]_{\mathfrak{b}}\right)$$

es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$.

4.2 Relaciones conmutativas y las constantes de estructura de un álgebra de Lie

Sea $\mathfrak{a}$ un álgebra de Lie, de dimensión d, y sea $\{e_i\}_{i=1}^{d}$ una base del espacio vectorial asociado a $\mathfrak{a}$. Las relaciones conmutativas de $\mathfrak{a}$ en la base $\{e_i\}_{i=1}^{d}$, son los corchetes de lie $[e_i, e_j]$, $1 \leq i < j \leq d$.

Las constantes, números reales ó complejos C_{ij}^{k}, tales que

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{d} C_{ij}^{k} e_k;$$

son llamados constantes de estructura[1] .

Si dos álgebras de Lie, de dimensión finita, tienen las mismas constantes de estructura son isomorfas. Más exacto, si existen las álgebras de Lie, $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de la misma dimensión d, en las bases $\{e_i\}_{i=1}^{d}$ y $\{f_i\}_{i=1}^{d}$, respectivamente, tales que las constantes de estructura son iguales entonces el isomorfismo lineal de $\mathfrak{a}$ sobre $\mathfrak{b}$ definido por:

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathfrak{a} & \longrightarrow & \mathfrak{b} \\ & e_i & \longmapsto & f_i. \end{array}$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie.

[1]En física matemática, los coeficientes de estructura se escriben a menudo C_{ij}^{k} y se escribe usando el convenio de sumación de Einstein como

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^{k} e_k.$$

Ejemplo 4.2.1 *Calculemos los corchetes en el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$. Identificando a $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ con las matrices reales 2×2, ésta generada como espacio vectorial(de dimensión $n^2 = 4$) por los elementos*[1]

$$\left\{E^{1,1}, E^{1,2}, E^{2,1}, E^{2,2}\right\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

La yuxtaposición significa la multiplicación usual de matrices. Los corchetes de Lie entre elementos de la base dan como resultado

$$[E^{1,1}, E^{1,2}] = E^{1,1}E^{1,2} - E^{1,2}E^{1,1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $[e_1, e_2] = e_2$. De igual modo se calcula

$$[E^{1,1}, E^{2,1}] = E^{1,1}E^{2,1} - E^{2,1}E^{1,1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $[e_1, e_3] = -e_3$. Así siguiendo de este modo, obtenemos:
$[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = -e_3$, $[e_1, e_4] = 0$, $[e_2, e_3] = e_1 - e_4$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = -e_3$.
Notar que los 16 corchetes entre elementos de la base, sólo es necesario calcular expícitamente 6, por la propiedad de antisimetría del corchete. Observemos, además, que el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ puede pensarse como espacio vectorial generada por la misma base pero ahora como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Obtenemos las mismas constantes de estructura que para el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$.

Problema 4.2.1 *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.*

1. *Considere las álgebras de Lie de dimensión dos sobre $\mathbb{K}$*

   $$\mathfrak{a} = \mathbb{K}^2, \quad \mathfrak{b} = \left\{\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{K}\right\}$$

   Con los productos de Lie obvios que hacen que $\mathfrak{a}$ sea abeliana, y $\mathfrak{b}$ subálgebra de Lie de $M_2(\mathbb{K})$. Muestre que cualquier álgebra de Lie de dimensión dos sobre $\mathbb{K}$, es isomorfa a $\mathfrak{a}$ si es abeliana ó a $\mathfrak{b}$ si no es abeliana.

2. *Encuentre un subgrupo de Lie matricial, de $GL_2(\mathbb{K})$, G, tal que*

   $$T_I G = \mathfrak{b}.$$

Solución:

[1]Las matrices $E^{r,s}$, 2×2, tienen un cero en todas las posiciones, salvo en la fila r, columna s, en la cual tienen un 1. Véase Sección 1.2

1. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión dos sobre $\mathbb{K}$. Tenemos dos casos:

   I) Si $\mathfrak{g}$ es abeliana entonces existe un isomorfismo lineal entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{a}$, $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$, que cumple

   $$\phi[x,y]_{\mathfrak{g}} = 0 = [\phi(x), \phi(y)]_{\mathfrak{a}}$$

   Para cualquier $x, y \in \mathfrak{g}$, por lo tanto $\mathfrak{g}$ es isomorfo a $\mathfrak{a}$ como álgebra de Lie.

   II) Si $\mathfrak{g}$, no es abeliana entonces existen $x, y \in \mathfrak{g}$ tal que $[x, y] \neq 0$ por lo tanto x, y son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$, y así, $\{x, y\}$ forma una base para $\mathfrak{g}$. Entonces para algunos $a, b \in \mathbb{K}$ con $a \neq 0$

   $$[x,y] = ax + by \neq 0. \tag{4.1}$$

   Tomando $x^0 = x + \frac{b}{a}y$ y $y^0 = \frac{1}{a}y$.
   forman una base para $\mathfrak{g}$ y además

   $$[x^0, y^0] = [x + \frac{b}{a}y, \frac{1}{a}y] = \frac{1}{a}[x,y] = \frac{1}{a}(ax + by) = x + \frac{b}{a}y = x^0.$$

   Por tanto, tomando $a = 1$ y $b = 0$ en la ecuación 4.1.
   Si
   $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ forman una base para $\mathfrak{b}$ y $[U, V] = U$ entonces existe un isomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{b}$, dado por

   $$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{b} \\ ax + by & \longmapsto & aU + bV. \end{array}$$

2. Basta tomar

   $$G = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ u, v \in \mathbb{K}, \ u \neq 0 \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{R})$$

□

4.3 Curvas y espacios tangentes

En esta sección por $\mathbf{G} \leq GL_n(\mathbb{K})$, se entenderá, sistemáticamente, un grupo de Lie de matrices sobre $\mathbb{K}$.

Definición 4.3.1 *Una curva derivable en* $\mathbf{G}$ *es una aplicación*

$$\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbf{G}$$

para la cual la derivada $\alpha'(t)$ *existe para cada* $t \in (a, b)$.

A menudo tomaremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < 0 < b$.

Definición 4.3.2 *El* **espacio tangente** *de* $\mathbf{G}$ *en* $U \in \mathbf{G}$*, es:*

$$\mathbf{T}_U\mathbf{G} = \{\alpha'(0) \in M_n(\mathbb{K}) : \ \alpha \text{ es una curva derivable con } \alpha(0) = U\}.$$

Proposición 4.3.1 . $\mathbf{T}_U\mathbf{G}$ *es un subespacio vectorial real de* $M_n(\mathbb{K})$

Demostración:
Supóngase que α, β son curvas diferenciales en $\mathbf{G}$ con $\alpha(0) = \beta(0) = U$, es decir, $\alpha'(0), \beta'(0) \in \mathbf{T}_U\mathbf{G}$. Sea γ una curva definida por

$$\gamma : dom(\alpha) \cap dom(\beta) \longrightarrow \mathbf{G}; \ \ \gamma(t) = \alpha(t)U^{-1}\beta(t).$$

a verificar que la curva γ, esta bien definida y es derivable con $\gamma(0) = U$

1. γ esta bien definida. Siempre que los dominios de α y β sean vecindades de cero, es decir que $dom(\alpha) \cap dom(\beta) \neq \emptyset$. Además para cada $t \in dom(\alpha) \cap dom(\beta)$ se tiene que $\alpha(t)U^{-1}\beta(t) \in \mathbf{G}$.

2. γ es derivable. Ya que es el producto de funciones derivables, así:

$$\gamma'(t) = \left(\alpha(t)U^{-1}\beta(t)\right)' = \alpha'(t)U^{-1}\beta(t) + \alpha(t)U^{-1}\beta'(t).$$

   como $\gamma(0) = \alpha(0)U^{-1}\beta(0) = UU'U = U$.
   entonces

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \alpha'(0)U^{-1}\beta(0) + \alpha(0)U^{-1}\beta'(0) \\ &= \alpha'(0)U^{-1}U + UU^{-1}\beta'(0) \\ &= \alpha'(0) + \beta'(0). \end{aligned}$$

   está en $\mathbf{T}_U\mathbf{G}$. Así la suma de dos elementos del espacio tangente de $\mathbf{G}$ en U, $\mathbf{T}_U\mathbf{G}$, es un elemento de $\mathbf{T}_U\mathbf{G}$.
   De manera análoga, sea $r \in \mathbb{R}$ y α una curva derivable en $\mathbf{G}$ con $\alpha(0) = U$, entonces se define $\gamma(t) = \alpha(rt)$, que es una curva derivable en $\mathbf{G}$ con $\gamma(0) = \alpha(0) = U$, entonces $\gamma'(0) = r\alpha'(0)$ está en $\mathbf{T}_U\mathbf{G}$. De aquí obtenemos que $\mathbf{T}_U\mathbf{G}$ es cerrado bajo el producto por escalar real.
   Por tanto $\mathbf{T}_U\mathbf{G}$ es un subespacio real de $M_n(\mathbb{K})$ □

Definición 4.3.3 *La* **dimensión real** *de un grupo de Lie de matrices sobre* $\mathbb{K}$*,* $\mathbf{G}$*, es la dimensión de su espacio tangente en* I[1]*,* $dim(\mathbf{G}) = dim_{\mathbb{R}}\mathbf{T}_I\mathbf{G}$.

Se usará la notación $\mathfrak{g} = \mathbf{T}_I\mathbf{G}$ para este subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{K})$.
$\mathfrak{g}$ tiene estructura de álgebra de Lie como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1 *Se tiene que;*

1. *Si* $\mathbf{G}$ *es un grupo de Lie de matrices sobre* $\mathbb{K}$*, entonces* $\mathfrak{g}$ *es una subálgebra de Lie real de* $M_n(\mathbb{K})$.

[1] Aquí I_n es el elemento identidad de $\mathbf{G}$.

2. *Si* $\mathbf{G}$ *es un grupo de Lie de matrices sobre* $\mathbb{C}$ *y* $\mathfrak{g}$ *es un subespacio complejo de* $M_n(\mathbb{C})$*, entonces* $\mathfrak{g}$ *es una subálgebra de Lie compleja de* $M_n(\mathbb{C})$.

Demostración:

1. Se debe de demostrar que si α y β son curvas diferenciales en $\mathbf{G}$, con $\alpha(0) = \beta(0) = I$ entonces existe otra curva derivable en $\mathbf{G}$, γ, con $\gamma(0) = I$ y

$$\gamma'(0) = [\alpha'(0), \beta'(0)].$$

considere la aplicación

$$F : dom(\alpha) \times dom(\beta) \longrightarrow \mathbf{G}; \quad F(s,t) = \alpha(s)\beta(t)\alpha(s)^{-1}.$$

F satisface la condición de continuidad siempre que si s_n y t_n son sucesiones en $dom(\alpha)$ y $dom(\beta)$ respectivamente con $s_n \longrightarrow s$ y $t_n \longrightarrow t$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(s_n)\beta(t_n)\alpha(s_n)^{-1} = \alpha(s)\beta(t)\alpha(s)^{-1}.$$

Además F es derivable con respecto a cada una de las variables s, t.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(F(s,t)) &= \alpha(s)\beta'(t)\alpha(s)^{-1},\\ \frac{\partial}{\partial s}(F(s,t)) &= \alpha'(s)\beta(t)\alpha(s)^{-1} - \alpha(s)\beta(t)\alpha(s)^{-1}\alpha'(s)\alpha(s)^{-1},\end{aligned}$$

siempre que

$$\tfrac{d}{dt}(\alpha(s)^{-1}) = \ -\alpha(s)^{-1}\alpha'(s)\alpha(s)^{-1}. \tag{4.2}$$

Entonces para cada $s \in dom(\alpha)$, la aplicación $F(s,) : dom(\beta) \longrightarrow \mathbf{G}$ es una curva derivable en $\mathbf{G}$ con $F(s,0) = I$. Diferenciando

$$\left.\frac{dF(s,t)}{dt}\right|_{t=0} = \alpha(s)\beta'(0)\alpha(s)^{-1}$$

se tiene entonces que

$$\alpha(s)\beta'(0)\alpha(s)^{-1} \in \mathfrak{g}$$

Por la proposición 4.3.1 $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{K})$ y por el teorema que literalmente dice *Sea* $\mathbf{V}$ *un espacio vectorial de dimensión finita sobre* $\mathbb{K}$*. Entonces para todo subespacio* $\mathbf{W} \subseteq V$*, es un subconjunto cerrado en* $\mathbf{V}$. Por tanto $\mathfrak{g}$ es cerrado. Así el siguiente límite está en $\mathfrak{g}$.

$$\lim_{s\to o} \frac{1}{s}(\alpha(s)\beta'(0)\alpha(0)^{-1} - \beta'(0)) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}((\alpha(s))\beta'(0)\alpha(s)^{-1}) \in \mathfrak{g}.$$

Mas

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}((\alpha(s))\beta'(0)\alpha(s)^{-1}) =&\alpha'(0)\beta'(0)\alpha(0)^{-1} - \alpha(0)\beta'(0)\alpha(0)^{-1}\alpha'(0)\alpha(0)^{-1}\\ =&\alpha'(0)\beta'(0)\alpha(0)^{-1} - \alpha(0)\beta'(0)\alpha'(0)\\ =&\alpha'(0)\beta'(0) - \beta'(0)\alpha'(0)\\ =&\left[\alpha'(0),\beta'(0)\right].\end{aligned}$$

Es decir que $[\alpha'(0),\beta'(0)] \in \mathfrak{g}$, por lo tanto existe una curva derivable γ en $\mathbf{G}$, con $\gamma(0) = I$, tal que $\gamma'(0) = [\alpha'(0),\beta'(0)]$.
Entonces

$$[\alpha'(0),\beta'(0)] = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} F(s,t)\right).$$

donde $F(s,t) = \alpha(s)\beta(t)\alpha(s)^{-1}$.

2. Se demuestra de manera análoga como en la parte (1).

□

Observación
Para cada grupo de Lie de matrices, $\mathbf{G}$, existe su álgebra de Lie el espacio tangente en el elemento unidad, $\mathfrak{g} = \mathbf{T}_I\mathbf{G}$.

Definición 4.3.4 . *Sean $\mathbf{G} \subseteq GL_n(\mathbb{K})$, $\mathbf{H} \subseteq GL_n(\mathbb{K})$, grupos de Lie de matrices sobre $\mathbb{K}$, y sea $\varphi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{H}$, una aplicación continua. Entonces φ es una aplicación* **derivable** *si se satisfacen las siguientes condiciones:*

a) *Para toda curva derivable $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbf{G}$, la curva $\varphi \circ \gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbf{H}$, es derivable con derivada*

$$(\varphi \circ \gamma)'(t) = \frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t));$$

b) *Si dos curvas $\alpha,\beta : (a,b) \longrightarrow \mathbf{G}$ satisfacen.*

$$\alpha(0) = \beta(0), \quad \alpha'(0) = \beta'(0),$$

entonces

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0).$$

Una aplicación derivable que también es un homomorfismo de grupos es llamada un **homomorfismo derivable**. Un **homomorfismo continuo de grupos de Lie de matrices** que también es una aplicación derivable es llamada un homomorfismo de Lie.

Proposición 4.3.2 *Sean $\mathbf{G},\mathbf{H},\mathbf{K}$ grupos de Lie de matrices sobre $\mathbb{K}$ con $\varphi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{H}$ y $\theta : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{K}$ homomorfismos derivables. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas.*

1. *Para cada $A \in \mathbf{G}$ existe una transformación lineal real, $d\varphi_A$, dada por*

$$\begin{array}{rccc} d\varphi_A: & \mathbf{T}_A\mathbf{G} & \longrightarrow & \mathbf{T}_{\varphi(A)}\mathbf{H} \\ & \gamma'(0) & \longmapsto & (\varphi\circ\gamma)'(0). \end{array}$$

   donde $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbf{G}$ es una curva derivable en $\mathbf{G}$ con $\gamma(0) = A$.

2. *Se tiene que*

$$d\theta_{\varphi(A)} \circ d\varphi_A = d(\theta\circ\varphi)_A.$$

3. *Para la aplicación identidad*

$$Id_G : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G},$$

   y $A \in \mathbf{G}$

$$d(Id_G)_A = Id_{T_AG}.$$

Demostración:

1. Sea $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbf{G}$ una curva derivable en $\mathbf{G}$ con $\gamma(0) = A$. se tiene que $\varphi\circ\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbf{H}$ es una curva derivable en $\mathbf{H}$ siempre que φ es derivable y

$$(\varphi\circ\gamma)(0) = \varphi(\gamma(0)) = \varphi(A)$$

   Así

$$(\varphi\circ\gamma)'(0) = d\varphi_A(\gamma'(0)) \in \mathbf{T}_{\varphi(A)}\mathbf{H}.$$

   Sean α, β curvas diferenciales en $\mathbf{G}$ con $\alpha(0) = \beta(0) = A$, es decir, $\alpha'(0), \beta'(0) \in \mathbf{T}_A\mathbf{G}$. Sea γ una curva definida por

$$\gamma : dom(\alpha) \cap dom(\beta) \longrightarrow \mathbf{G}; \quad \gamma(t) = \alpha(t)A^{-1}\beta(t).$$

   por la proposición 4.3.1 la curva γ, esta bien definida y es derivable con $\gamma(0) = A$ además

$$\alpha'(0) + \beta'(0) = \gamma'(0).$$

   Entonces

$$\begin{aligned} d\varphi_A(\alpha'(0) + \beta'(0)) =& d\varphi_A(\alpha'(0)) \\ =& (\varphi\circ\gamma)'(0) \\ =& (\varphi\circ(\alpha A^{-1}\beta))'(0) \\ =& ((\varphi\circ\alpha)(\varphi(A^{-1}))(\varphi\circ\beta))'(0) \\ =& (\varphi\circ\alpha)'(0)(\varphi(A^{-1}))(\varphi\circ\beta)(0) + (\varphi\circ\alpha)(0)(\varphi(A^{-1}))(\varphi\circ\beta)'(0) \\ =& (\varphi\circ\alpha)'(0)\varphi(A)^{-1}\varphi(A) + \varphi(A)\varphi(A)^{-1}(\varphi\circ\beta)'(0) \\ =& (\varphi\circ\alpha)'(0) + (\varphi\circ\beta)'(0) \\ =& d\varphi_A(\alpha'(0)) + d\varphi_A(\beta'(0)) \end{aligned}$$

   Por otra parte sea $r \in \mathbb{R}$ y α una curva derivable en $\mathbf{G}$ con $\alpha(0) = A$, entonces se define $\gamma(t) = \alpha(rt)$, que es una curva derivable en $\mathbf{G}$ con $\gamma(0) = \alpha(0) = A$.

Sea $\pi_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\pi_r(t) = rt$. Así, $\gamma = \alpha \circ \pi_r$ Luego

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \gamma)'(0) =& (\varphi \circ \alpha \circ \pi_r)'(0)\\ =& (\varphi \circ \alpha)'(\pi_r(0))\pi'(0)\\ =& r(\varphi \circ \alpha)'(0).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d\varphi_A(r\alpha'(0)) = d\varphi_A(\gamma'(0)) = rd\varphi_A(\alpha'(0)).$$

2. Sea $\gamma : (a, b) \longrightarrow \mathbf{G}$ una curva derivable en $\mathbf{G}$ con $\gamma(0) = A$
Entonces

$$d(\theta \circ \varphi)_A(\gamma'(0)) = \quad (\theta \circ \varphi \circ \gamma)'(0) = (\theta \circ \widetilde{\varphi})'(0) \tag{4.3}$$

Para $\widetilde{\varphi} : \varphi \circ \gamma \longrightarrow \mathbf{H}$ y $(\theta \circ \widetilde{\varphi})(0) = \theta(\varphi(A))$ entonces

$$(\theta \circ \varphi \circ \gamma)'(0) \in \mathbf{T}_{\theta(\varphi(A))}\mathbf{K}.$$

luego por la ecuación 4.3 se tiene que:

$$\begin{aligned}(\theta \circ \widetilde{\varphi})'(0) &= d\theta_{\varphi(A)}(\widetilde{\varphi}'(0))\\ &= d\theta_{\varphi(A)}(d\varphi_A(\gamma'(0))\\ &= (d\theta_{\varphi(A)} \circ (d\varphi_A)(\gamma'(0))\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d\theta_{\varphi(A)} \circ d\varphi_A = d(\theta \circ \varphi)_A.$$

3. Sea $A \in \mathbf{G}$ y $\gamma : (a, b) \longrightarrow \mathbf{G}$, una curva diferencial en $\mathbf{G}$ con $\gamma(0) = A$.
como $Id_G : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ es un homomorfismo de grupos y

$$(Id_G \circ \gamma) = \gamma : (a, b) \longrightarrow \mathbf{G}$$

es una curva derivable en $\mathbf{G}$, por lo tanto Id_G es un homomorfismo derivable entonces

$$d(Id_G)_A(\gamma'(0)) = (Id_G \circ \gamma)'(0) = \gamma'(0)$$

Por lo tanto

$$d(Id_G)_A = Id_{T_AG}.$$

□

4.4 Representación de álgebras de Lie; La representación adjunta

Para cada $A \in \mathbf{G}$, existe un homomorfismo derivable en $\mathbf{G}$, X_A, llamado el **homomorfismo conjugación**.

$$X_A : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}; \quad X_A(U) = AUA^{-1}.$$

En efecto

- X_A, es un homomorfismo: Para $U_1, U_2 \in \mathbf{G}$

$$X_A(U_1U_2) = AU_1U_2A^{-1} = AU_1A^{-1}AU_2A^{-1} = X_A(U_1)X_A(U_2).$$

- X_A, es derivable: Sea $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbf{G}$ una curva derivable cualquiera en $\mathbf{G}$ verifiquemos que $X_A \circ \gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbf{G}$, es derivable. Por la definición de derivada se tiene que:

$$\begin{aligned}(X_A \circ \gamma)'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{(X_A \circ \gamma)(t+h) - (X_A \circ \gamma)(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(A(t+h)A^{-1} - A\gamma(t)A^{-1})}{h} \\ &= A\left(\lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\right)A^{-1} \\ &= A\gamma'(t)A^{-1}.\end{aligned}$$

Sean dos curvas $\alpha, \beta : (a,b) \longrightarrow \mathbf{G}$ tales que

$$\alpha(0) = \beta(0), \quad \alpha'(0) = \beta'(0),$$

es trivial verificar que:

$$(X_A \circ \alpha)'(0) = (X_A \circ \beta)'(0).$$

Por tanto por la definición 4.3.4, se tiene que X_A es un homomorfismo derivable.

La derivada de X_A, dX_A , es llamada la acción adjunta de A sobre $\mathfrak{g}$, entonces

$$Ad_A = dX_A : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}; \quad Ad_A(\gamma'(0)) = (X_A \circ \gamma)'(0) = A\gamma'(0)A^{-1}.$$

Lo de acción viene de que

$$\begin{array}{rccl} \widehat{Ad}: & \mathbf{G} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & (A, Y) & \longmapsto & Ad_A(Y) = AYA^{-1}. \end{array}$$

es una acción de grupo como se verifica fácilmente. Además es continua, verifiquemos que es sucesionalmente continua en $Y \in \mathfrak{g}$.
Sean A_n, Y_n sucesiones en $\mathbf{G}$ y $\mathfrak{g}$, que convergen a A y Y respectivamente, entonces.

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{Ad}(A_n, Y_n) = \lim_{n\to\infty} A_nY_nA_n^{-1} = AYA^{-1} = \widehat{Ad}(A, Y).$$

Entonces escogiendo una base para g tenemos un homomorfismo continuo (y de hecho derivable en el sentido de la definición 4.3.4) de grupos;

$$\begin{array}{rccl} Ad: & \mathbf{G} & \longrightarrow & GL_{dim(\mathbf{T}_I\mathbf{G})}(\mathbb{K}) = GL_{dim(\mathfrak{g})}(\mathbb{K}) \\ & A & \longmapsto & Ad_A. \end{array}$$

Donde

$$GL_{dim(\mathfrak{g})}(\mathbb{K}) = \{L : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : L \text{ es una transformación sobre } \mathbb{K} \text{ biyectiva}\}.$$

Dada una curva derivable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbf{G}$ con $\alpha(0) = I$, existe otra curva

$$\widetilde{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow GL_{dim(\mathfrak{g})}(\mathbb{K}); \;\; \widetilde{\alpha}(t) = Ad_{\alpha(t)}.$$

que es derivable en 0 siempre que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}'(Y) =& \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\alpha(t) Y \alpha(t)^{-1}\right) \\
=& \alpha'(0) Y \alpha(0)^{-1} + \alpha(0) Y \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\alpha(t)^{-1}\right) \\
=& \alpha'(0) Y \alpha(0)^{-1} - \alpha(0) Y \alpha(0)^{-1} \alpha'(0) \alpha(0)^{-1} \\
=& \alpha'(0) Y - Y \alpha'(0) \\
=& \left[\alpha'(0), Y\right]
\end{aligned}$$

Esto define una acción adjunta de $U \in \mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}$,

$$ad_U : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}; \;\; ad_U(Y) = [U, Y].$$

Además por la identidad de Jacobi para $U, V, Y \in \mathfrak{g}$.

$$[[U, V], Y] + [[V, Y], U] + [[Y, U], V] = 0$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
ad_{[U,V]_{\mathfrak{g}}}(Y) =& [[U, V], Y] \\
=& -[[V, Y], U] - [[Y, U], V] \\
=& [U, [V, Y]] - [V, [U, Y]] \\
=& [U, ad_V(Y)] - [V, ad_U(Y)] \\
=& ad_U \circ ad_V(Y) - ad_V \circ ad_U(Y) \\
=& [ad_U, ad_V]_{GL_{dim(\mathfrak{g})}(\mathbb{K})}(Y).
\end{aligned}$$

Entonces tenemos un homomorfismo de álgebras de Lie y además toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ viene equipada con una representación natural en sí misma; a saber, la representación adjunta.

$$ad : \mathfrak{g} \longrightarrow M_n(\mathbb{K}); \;\; ad(U) = ad_U.$$

Ad y *ad*, son comúnmente referidas como las **representaciones adjuntas** de $\mathbf{G}$ y $\mathfrak{g}$ respectivamente. La importancia de la representación adjunta, *ad*, es que ella trae consigo toda la información necesaria para distinguir (y por tanto, clasificar) las álgebras de Lie.

4.5 Álgebras de Lie asociadas a los grupos de Lie de matrices clásicos

En esta sección se determinará el álgebra de Lie de algunos grupos de Lie de matrices definidos en la *sección 2.2*. Como es costumbre nos referimos por $M_n(\mathbb{K})$, al conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$, con $\mathbb{K}$ el campo de números reales o complejos.

4.5.1 Grupo lineal general y especial

Sea $GL_n(\mathbb{R})$ el grupo lineal general de tamaño n sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 4.5.1 *El álgebra de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$, denotada por $\mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$, es $M_n(\mathbb{R})$, es decir,*

$$\mathbf{T}_{I_n}GL_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$$

Además, $dim(GL_n(\mathbb{R})) = n^2$).

Demostración:
Siempre que

$$\mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R}) = \{\gamma'(0) \in M_n(\mathbb{R}) : \ \gamma \text{ es una curva derivable en } \ GL_n(\mathbb{R}) \text{ con } \gamma(0) = I_n\}$$

Por otra parte para cada $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $\epsilon > 0$ existe una curva derivable (que depende de A)

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}); \ \ \gamma(t) = I_n + tA.$$

γ es una curva derivable en $GL_n(\mathbb{R})$, con derivada $\gamma'(t) = A$, para toda $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ además $\gamma(0) = I_n$ y por lo tanto

$$A = \gamma'(t) \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$$

Si $A = 0$ la curva γ es constante con valor I_n y trivialmente se tendrá que $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$

Si $A \neq 0$. Consideremos primeramente el conjunto

$$\delta = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \text{ valor propio de } A\} > 0$$

y tomando $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \frac{1}{\delta}$.

Verificaremos que efectivamente $Im(\gamma) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$.
Supongamos que existe $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que

$$0 = det(I - tA) = (-1)^n t^n det(A - \frac{1}{t} I_n)$$

Por lo tanto $t \neq 0$ entonces $\frac{1}{t}$ es valor propio de A más

$$\frac{1}{|t|} \leq \delta \text{ ó } \frac{1}{\delta} \leq |t| < \epsilon.$$

Lo que nos genera una contradicción por tanto $Img(\gamma) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$. Así obtenemos que $M_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$. □

De manera casi análoga aseguramos que

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{I_n}GL_n(\mathbb{C}) = & \mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C}) = & M_n(\mathbb{C}) \\ dim_{\mathbb{C}}GL_n(\mathbb{C}) = & n^2 & \\ dim_{\mathbb{R}}GL_n(\mathbb{C}) = & 2n^2 & \end{cases}$$

Sea $\mathfrak{sl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ el álgebra de Lie el grupo lineal Especial $SL_n(\mathbb{R})$
Si $\gamma : (a,b) \longrightarrow SL_n(\mathbb{R})$ es una curva diferencial en $SL_n(\mathbb{R})$ con $\gamma(0) = I_n$ entonces para $t \in (a,b)$ tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} det(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} 1 = 0.$$

Por el lema 3.3.1, tenemos que

$$traza^{1}(\gamma'(0)) = 0$$

y por lo tanto

$$\mathbf{T}_{I_n}SL_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R}) \subseteq ker(traza) \subseteq M_n(\mathbb{R}) \tag{4.4}$$

El reciproco de la ecuación anterior también se tiene, siempre que si $A \in ker(traza)$. Sea

$$\gamma : (a,b) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}); \;\; \gamma(t) = exp(tA)$$

Una curva derivable con derivada $\gamma'(t) = A\gamma(t)$, que evaluada en cero es A, $\gamma'(0) = A$. Veamos que γ toma valores en $SL_n(\mathbb{R})$, siempre que por el lema 3.3.2 tenemos:

$$\det(\exp(tA)) = e^{traza(tA)} = e^{t\, traza(A)} = e^{0} = 1.$$

Entonces

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{I_n}SL_n(\mathbb{R}) = & \mathfrak{sl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R}) = & ker(traza) \subseteq M_n(\mathbb{R}), \\ dim(SL_n(\mathbb{R})) = & n^2 - 1. \end{cases}$$

Trabajando sobre $\mathbb{C}$, tenemos que

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{I_n}SL_n(\mathbb{C}) = & \mathfrak{sl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C}) = & \ker(\text{traza}) \subseteq M_n(\mathbb{C}) \\ dim_{\mathbb{C}}(SL_n(\mathbb{C})) = & n^2 - 1. \\ dim_{\mathbb{R}}(SL_n(\mathbb{C})) = & 2n^2 - 2. \end{cases}$$

Problema 4.5.1 *Sea G el grupo definido por*

$$G = \left\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \; : \; A^T A = \alpha I_2, \;\; \alpha > 0, \;\; det(A) > 0\right\}.$$

1. *Encontrar una expresión explícita de los elementos de G.*

Solución

1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}).$$

Imponiendo la condición $A^T A = \alpha I_2$, obtenemos:

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 = \alpha^2 \tag{4.5}$$

[1]Recordar que $traza : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \;\; traza(A) = traza([a_{ij}]) = \sum_{1\leq i\leq n} a_{ii}$

y

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \tag{4.6}$$

Luego de 4.5

$$\underbrace{\frac{a_{11}^2}{\alpha^2}}_{\cos^2(\theta)} + \underbrace{\frac{a_{21}^2}{\alpha^2}}_{\sin^2(\theta)} = \underbrace{\frac{a_{12}^2}{\alpha^2}}_{\cos^2(\beta)} + \underbrace{\frac{a_{22}^2}{\alpha^2}}_{\sin^2(\beta)} = 1$$

Se deduce que

$$a_{11} = \alpha\cos(\theta),\ \ a_{12} = \alpha\cos(\beta),\ \ a_{21} = \alpha\sin(\theta),\ \ a_{22} = \alpha\sin(\beta),$$

y sustituyendo en 4.6, tenemos que

$$\cos(\theta)\cos(\beta) + \sin(\theta)\sin(\beta) = \cos(\theta - \beta) = 0,$$

es decir

$$\cos(\theta-\beta) = 0 \leftrightarrow \theta - \beta = \frac{k\pi}{2} \leftrightarrow \theta = \beta + \frac{k\pi}{2},\ \ k = 2n+1,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Por consiguiente

$$A = \begin{pmatrix} \alpha\cos(\theta) & (-1)^k\alpha\sin(\theta) \\ \alpha\sin(\theta) & (-1)^{k-1}\alpha\cos(\theta) \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}).$$

de la cuál se tiene que

$$det(A) = (-1)^{k-1}\alpha^2,$$

Por lo tanto $A \in G$ si y solamente si k es impar (pues dado que $A \in G$, si $det(A) > 0$,), y podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ \ a^2 + b^2 = \alpha^2,$$

donde $a = \alpha\cos(\theta)$, $b = \alpha\sin(\theta)$. Los elementos de G generalmente se llaman las semejanzas del plano, que son el producto de una rotación por un homotecia, ambos alrededor del origen, entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto se tiene que

$$G = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})\ :\ a_{11} - a_{22} = a_{12} + a_{21} = 0\right\}.$$

Problema 4.5.2 *Demostrar que* $\mathfrak{sl}_\mathbf{n}(\mathbb{C})$ *es un ideal de Lie de* $\mathfrak{gl}_\mathbf{n}(\mathbb{C})$.

Solución

Basta recordar que $traza : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ traza(A) = traza([a_{ij}]) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$, es una aplicación lineal y que además $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$ se tiene que $traza(AB) = traza(BA)$ En efecto:

$$traza(AB) = traza([a_{ij}][b_{ij}]) = traza([a_{ik}b_{ki}]) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

y

$$traza(BA) = traza([b_{ij}][a_{ij}]) = traza([b_{im}a_{mi}]) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} b_{im}a_{mi}$$

y puesto que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, son cuerpos conmutativos se tiene que $traza(AB) = traza(BA)$.
Ahora sean $A, B \in \mathfrak{sl}_\mathbf{n}(\mathbb{C})$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$, entonces

- De la linealidad de la *traza* tenemos que

$$traza\,(\lambda A + \beta B) = \lambda traza\,(A) + \beta traza\,(B) = \lambda(0) + \beta(0) = 0.$$

  por lo tanto $\lambda A + \beta B \in \mathfrak{sl}_\mathbf{n}(\mathbb{C})$, y $\mathfrak{sl}_\mathbf{n}(\mathbb{C})$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{gl}_\mathbf{n}(\mathbb{C})$.

- Veamos que $[\mathfrak{sl}_\mathbf{n}(\mathbb{C}), \mathfrak{gl}_\mathbf{n}(\mathbb{C})] \subseteq \mathfrak{sl}_\mathbf{n}(\mathbb{C})$.
  Sea $A \in \mathfrak{sl}_\mathbf{n}(\mathbb{C}),\ X \in \mathfrak{gl}_\mathbf{n}(\mathbb{C})$ entonces

$$traza([A, X]) = traza(AX - XA) = traza(AX) - traza(XA) = 0.$$

  por lo tanto

$$[A, X] \in \mathfrak{sl}_\mathbf{n}(\mathbb{C})\ \ (A \in \mathfrak{sl}_\mathbf{n}(\mathbb{C}),\ X \in \mathfrak{gl}_\mathbf{n}(\mathbb{C})).$$

4.5.2 Grupo Afín

El grupo Afín n-dimensional sobre $\mathbb{K}$, se definió en la sección 2.2.2, como:

$$Aff_n(\mathbb{K}) = \left\{ \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :\ A \in GL_n(\mathbb{K}),\ t \in \mathbb{K}^n \right\} \subset GL_{n+1}(\mathbb{K}).$$

el cual es un grupo de Lie de Matrices sobre $\mathbb{K}$ y por la proposición 2.2.1, puede ser expresado como el producto semidirecto de $Trans_n(\mathbb{K})$ y $GL'_n(\mathbb{K})$, es decir $Aff_n(\mathbb{K}) = Trans_n(\mathbb{K}) \ltimes GL'_n(\mathbb{K})$

Teorema 4.5.2 *El álgebra de Lie de $Aff_n(\mathbb{K})$, es*

$$T_{I_n}Aff_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{aff}_\mathbf{n}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} :\ A \in \mathfrak{gl}_\mathbf{n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K}),\ x \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Demostración:
De la definición 4.3.2, tenemos que

$$T_{I_n}Aff_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{aff}_\mathbf{n}(\mathbb{K}) = \{\gamma'(0) \in M_n(\mathbb{R}) :\ \gamma \text{ es una curva derivable en } Aff_n(\mathbb{K}) \text{ con } \gamma(0) = I_n\}$$

Sea entonces

$$\gamma : (a,b) \longrightarrow Aff_n(\mathbb{K});$$

una curva derivable en el grupo Afín, con $\gamma(0) = I_n$ y por lo tanto

$$\gamma(t) = [a_{ij}(t)] = [(A)_{ij}(t)] = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) & x_1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) & x_n(t) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{con } a_{ij}(t), x_i(t) \text{ funciones derivables en } t \in (a,b),$$

Tenemos entonces que $a'_{ij}(t), x'_i(t)$ son funciones de t con valores en $\mathbb{K}$, así

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} a'_{11}(0) & \dots & a'_{1n}(0) & x'_1(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a'_{n1}(0) & \dots & a'_{nn}(0) & x'_n(0) \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \; A \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K}), \;\; x \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Por consiguiente

$$\mathfrak{aff}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K}) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \; A \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K}), \;\; x \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Luego sea $A' = \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Una matriz con $A \in M_n(\mathbb{K}), \; x \in \mathbb{K}^n$ y para algún $\epsilon > 0$(este ϵ, se calcula como en el Teorema 5.6.1) sea

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow Aff_n(\mathbb{K}), \;\; \gamma(t) = I_n + tA';$$

curva derivable en $Aff_n(\mathbb{K})$.

De aquí se tiene que

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{aff}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K}),$$

entonces

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \; A \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K}), \;\; x \in \mathbb{K}^n \right\} \subseteq \mathfrak{aff}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K})$$

□

4.5.3 Grupo Triangular Superior

Recordemos al grupo de matrices triangulares superior n-dimensional sobre $\mathbb{K}$, el cual se definió en la sección 2.2.1, como:

$$UT_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : A \text{ es tiangular superior}\}$$

y

$$SUT_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : det(A) = 1\}.$$

los cuales son grupos de Lie de matrices sobre $\mathbb{K}$.

Teorema 4.5.3 *El álgebra de Lie de $UT_n(\mathbb{K})$, es*

$$T_{I_n}UT_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{trian}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$$

Demostración

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow UT_n(\mathbb{K});$$

una curva derivable, con $\gamma(0) = I_n$.
Entonces $\gamma'(0)$ es triangular superior. Además, usando el argumento que se utilizo en la demostración del Teorema 5.6.1, se tiene que dada una matriz triangular superior en $M_n(\mathbb{K})$, existe una curva

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow UT_n(\mathbb{K}), \quad \gamma(t) = I_n + tA;$$

para algún $\epsilon > 0$ pequeño. De esta forma $\gamma'(0) = A$ y obtenemos

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{I_n}UT_n(\mathbb{K}) = & \mathfrak{trian}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K}) = \quad \text{conjunto de matrices superiores en } M_n(\mathbb{K}), \\ dim_{\mathbb{K}}(UT_n(\mathbb{K})) = & \binom{n+1}{2} dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}. \end{cases}$$

□

El álgebra de Lie de $SUT_n(\mathbb{K})$, es

$$T_{I_n}SUT_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{trian}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$$

Denominado el **conjunto de matrices triangulares estrictas**, son aquellas que además de ser triangular superior los elementos de la diagonal son cero. Entonces

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{I_n}SUT_n(\mathbb{K}) = & \mathfrak{strian}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K}) = \quad \text{conjunto de matrices superiores estrictas en } M_n(\mathbb{K}), \\ dim_{\mathbb{K}}(SUT_n(\mathbb{K})) = & \binom{n}{2} dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}. \end{cases}$$

4.5.4 Grupo Ortogonal y Ortogonal Especial

Sea $O_n(\mathbb{R})$ el grupo ortogonal, definido en la sección 2.2.3 por

$O_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \ A^T A = I_n\right\} \subseteq GL_n(\mathbb{K})$, es un grupo de Lie de Matrices.

Para una curva derivable $\gamma : (a, b) \longrightarrow O_n(\mathbb{R})$, que satisface $\gamma(0) = I_n$, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)^T\gamma(t) = \mathbf{0},$$

y así

$$\gamma'(t)^T\gamma(t) + \gamma^T\gamma'(t) = \mathbf{0},$$

lo que implica

$$\gamma'(0)^T + \gamma'(0) = \mathbf{0}.$$

Entonces, $\gamma'(0) = -\gamma'(0)^T$, es decir, $\gamma'(0)$ es una matriz antisimétrica. Por tanto

$$T_{I_n}O_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{ortog}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R}) \subseteq Asim_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) : \ A^T = -A\right\}$$

Luego si $A \in Asim_n(\mathbb{R})$, para $\epsilon > 0$, consideremos la curva

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}); \quad \alpha(t) = \exp(tA).$$

y puesto que

$$\begin{aligned}\alpha(t)^T\alpha(t) = \exp(tA)^T\exp(tA) &= \exp(tA^T)\exp(tA)\\ &= \exp(-tA)\exp(tA)\\ &= I_n.\end{aligned}$$

Así entonces al tomar $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow O_n(\mathbb{R})$, se tiene que $\alpha'(0) = A$,tenemos

$$Asim_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{ortog}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R}) = T_{I_n}O_n(\mathbb{R})$$

Por tanto

$$Asim_n(\mathbb{R}) = T_{I_n}O_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{ortog}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$$

Nótese que si $A \in Asim_n(\mathbb{R})$, entonces

$$traza(A) = traza(A^T) = traza(-A) = -traza(A),$$

Por lo tanto $traza(A) = 0$. Tomando en cuenta el Lema 3.3.2 $\det(\exp(A)) = e^{traza(A)} = 1$, se tiene que

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$$

Es fácil verificar que

$$dim_{\mathbb{R}}Asim_n(\mathbb{R}) = \binom{n}{2}$$

Resumiendo tenemos

$$\begin{cases} T_{I_n}O_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{ortog}_\mathbf{n}(\mathbb{R}) = T_{I_n}SO_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{sortog}_\mathbf{n}(\mathbb{R}) = Asim_n(\mathbb{R}) \\ dim_{\mathbb{R}}SO_n(\mathbb{R}) = dim_{\mathbb{R}}O_n(\mathbb{R}) = \binom{n}{2} \end{cases}$$

Como consecuencia del análisis anterior tenemos que si $A \in Asim_n(\mathbb{R})$, entonces

$$\exp(tA) \in SO_n(\mathbb{R}), \quad (t \in \mathbb{R})$$

Problema 4.5.3 *Probar que la álgebra de Lie $\mathfrak{sortog}_\mathbf{3}(\mathbb{R})$ no admite ninguna subálgebra de Lie de dimensión* 2

Solución
Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar; con el conmutador usual de matrices se tiene que

$$[e_1, e_2] = e_3, \ [e_2, e_3] = e_1, \ [e_3, e_1] = e_2$$

Asumamos que $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie. Sea entonces $\left\{v = \lambda^i e_i, \ w = \mu^i e_i\right\}$ una base de $\mathfrak{g}$. Y puesto que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 & \mu^1 \\ \lambda^2 & \mu^2 \\ \lambda^3 & \mu^3 \end{pmatrix}$$

es 2, podemos asumir que

$$det\left(\begin{pmatrix} \lambda^1 & \mu^1 \\ \lambda^2 & \mu^2 \end{pmatrix}\right) \neq 0,$$

Haciendo un cambio de base en $\mathfrak{g}$ podemos suponer que

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 & \mu^1 \\ \lambda^2 & \mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$v = e_1 + \lambda^3 e_3, \quad w = e_2 + \mu^3 e_3. \tag{4.7}$$

Como $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie, tenemos que $[v, w] = \alpha v + \beta w$, y retomando 4.7, obtenemos que

$$\lambda^3 = -\alpha, \ \mu^3 = -\beta, \ \alpha\lambda^3 + \beta\mu^3 = 1,$$

y substituyendo las primeras dos relaciones en la tercera, obtenemos

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1 = 0$$

Lo que nos genera una contradicción.

4.6 Observaciones entre la aplicación exponencial y el algebra de Lie

Para un grupo de Lie de matrices $G \subseteq GL_n(\mathbb{K})$, las siguientes afirmaciones son verdaderas y proporcionan una receta para determinar álgebras de Lie de grupos de Lie de matrices, usando las técnicas de esta sección:

1. La función
$$\exp_G : \quad \mathfrak{g} \quad \longrightarrow \quad GL_n(\mathbb{K})$$
está contenida en G, es decir $\exp_G(\mathfrak{g}) \subseteq G$, **usualmente escribiremos** $\exp_G$ **por la exponencial de** G **y otras veces simplemente** $\exp$**.**

2. Si G es compacto y conexo entonces $\exp_G(\mathfrak{g}) = G$.

3. Existe una bola abierta $N_{\mathfrak{g}}(\mathbf{0}; r) \subseteq \mathfrak{g}$ sobre la cual exp es inyectiva y da origen a un homeomorfismo,
$$\exp : N_{\mathfrak{g}}(\mathbf{0}; r) \longrightarrow N_{\mathfrak{g}}(\mathbf{0}; r),$$
Donde $\exp\Big(N_{\mathfrak{g}}(\mathbf{0}; r)\Big) \subseteq G$ es en efecto un conjunto abierto de G.

Proposición 4.6.1 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$, un grupo uniparamétrico de $GL_n(\mathbb{K})$, entonces existe un único $X \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K})$, tales que para cada $t \in \mathbb{R}$,*

$$f(t) = \exp(tX).$$

Demostración
Dado que $f : \mathbb{R} \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$, un grupo uniparamétrico de $GL_n(\mathbb{K})$, se tiene que f es una aplicación continua y $f(0) = I_n$, así dado $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ se tiene que

$$\int_0^a f(t)dt, \ \text{ existe y}$$

para cada $s \in \mathbb{R}$

$$\int_0^a f(t+s)dt = \int_0^a f(t)f(s)dt = f(s)\int_0^a f(t)dt = \int_s^{s+a} f(t)dt.$$

Esta expresión es derivable con repecto a s. Para probar que f es derivable, es suficiente demostrar que hay un número real $a > 0$, tal que

$$g(t) = \int_a^t f(t)$$

es invertible[1]

[1] Definamos $g = T(f)$, como la función en $GL_n(\mathbb{K})$ dada por

$$g(t) = \int_a^t f(t)dt$$

T es una transformación lineal llamada operador integración.

Ahora puesto que f es continua en 0 y $f(0) = I_n$,

$$\exists a > 0,\ |t| \leq a,\ \ \|f(t) - I_n\| \leq \frac{1}{2},$$

de donde

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{a}\left(\int_0^a f(t)dt\right) - I_n\right\| &= \left\|\frac{1}{a}\int_0^a (f(t) - I_n)\,dt\right\| \\
&= \left|\frac{1}{a}\right|\left\|\int_0^a (f(t) - I_n)\,dt\right\| \\
&\leq \left|\frac{1}{a}\right|\left\|\int_0^a \frac{1}{2}dt\right\| \\
&= \left|\frac{1}{a}\right|\left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1.
\end{aligned}$$

por consiguiente $\int_0^a f(t)$ es invertible.
Luego f es derivable y en consecuencia la matriz deseada X debe satisfacer la ecuación diferencial

$$f'(t) = f(t)X,\ \ f(0) = I_n.$$

Por el teorema 3.3.1, esta ecuación tiene una única solución $\gamma(t) = \exp(tX)$. Por lo tanto $f(t) = \exp(tX)$ $\square$

Definición 4.6.1 *El elemento X de $\mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K})$ satisfaciendo $f(t) = \exp(tX)$, se llama el* **generador infinitesimal** *del grupo uniparamétrico $t \longrightarrow f(t)$. Tenemos*

$$X = f'(0)$$

y más generalmente

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ (f(t))^{-1} f'(t) = X.$$

Ejemplo 4.6.1

$$\gamma(t) = [a_{ij}(t)] = [(A)_{ij}(t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

es un grupo uniparamétrico (describe las rotaciones alrededor del eje $0x$), puesto que

$$\gamma(t) = \exp(tX)$$

donde

$$X = [x_{ij}] = [(X)_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que X es un generador infinitesimal de γ.

Problema 4.6.1 *Demuestre que* $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$*, no es de la forma* $\exp(X)$*, para algun* $X \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{2}}(\mathbb{R})$.

Solución
Supongamos que

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \exp(B)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \exp(B) &= \exp\left(\frac{B}{2} + \frac{B}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{B}{2}\right)\exp\left(\frac{B}{2}\right) \\ &= \left(\exp\left(\frac{B}{2}\right)\right)^2 \end{aligned}$$

Así $\left(\exp\left(\frac{B}{2}\right)\right)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, donde $\left(\exp\left(\frac{B}{2}\right)\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -d \end{pmatrix}$
por consiguiente

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

lo que equivale a resolver el sistema

$$\begin{cases} a^2 + bc = -2 \\ ab + bd = 0 \\ ca + dc = 0 \\ cb + d^2 = -1 \end{cases}$$

el cual no tiene solución real. □

El siguiente lema nos muestra que la aplicación exponencial no necesariamente es sobreyectiva para un grupo de Lie conexo.

Lema 4.6.1 *Sea* $A \in M_2(\mathbb{R})$ *tal que* $traza(A) = 0$ *y* t *un número real entonces*

$$traza(\exp(tA)) \geq -2.$$

Demostración
Por el Teorema de Cayley-Hamilton tenemos que

$$A^2 + (det(A))I_2 = \mathbf{0},$$

Caso 1 Si $det(A) = 0$, entonces $A^2 = 0$ y

$$\exp(tA) = I_2 + tA, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto $traza(\exp(tA)) = 2$.

Caso 2 Si $det(A) \neq 0$, entonces A tiene dos valores propios distintos, y estan dados por

$$\begin{cases} \pm i\sqrt{det(A)} & \text{si } det(A) > 0, \\ \pm i\sqrt{-det(A)} & \text{si } det(A) < 0. \end{cases}$$

En cada uno de los casos existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{cases} \begin{pmatrix} i\sqrt{det(A)} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{det(A)} \end{pmatrix} & \text{si } det(A) > 0, \\ \\ \begin{pmatrix} \sqrt{-det(A)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-det(A)} \end{pmatrix} & \text{si } det(A) < 0. \end{cases}$$

Entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$P^{-1}\exp(tA)P = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{it\sqrt{det(A)}} & 0 \\ 0 & e^{-it\sqrt{det(A)}} \end{pmatrix} & \text{si } det(A) > 0, \\ \\ \begin{pmatrix} e^{t\sqrt{-det(A)}} & 0 \\ 0 & e^{-t\sqrt{-det(A)}} \end{pmatrix} & \text{si } det(A) < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\exp(tA) = \begin{cases} \cos\left(t\sqrt{det(A)}\right) I_2 + \frac{\sin\left(t\sqrt{det(A)}\right)}{\sqrt{det(A)}} A & \text{si } det(A) > 0, \\ \cosh\left(t\sqrt{-det(A)}\right) I_2 + \frac{\sin\left(t\sqrt{-det(A)}\right)}{\sqrt{-det(A)}} A & \text{si } det(A) < 0. \end{cases}$$

Así

$$traza(\exp(tA)) = \begin{cases} 2\cos\left(t\sqrt{det(A)}\right) & \text{si } det(A) > 0, \\ 2\cosh\left(t\sqrt{-det(A)}\right) & \text{si } det(A) < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto para A una matriz real con traza cero y $t \in \mathbb{R}$, tenemos que $traza(\exp(tA)) \geq -2$. $\square$

Capítulo 5

Variedades Diferenciables

La ciencia de la Matemática pura en su desarrollo moderno puede pretender ser la creación más original del espíritu humano.

(A. N. Whitehead. Science and the Modern World, 1925.)

En este Capítulo se versará sobre el concepto de variedad diferenciable el cual aparece al generalizar y formalizar la definición de superficie, independientemente de un espacio exterior. El vocabulario de la disciplina toma términos de la descripción del globo terrestre: la representación plana de la superficie terrestre es un problema que ha ocupado un papel fundamental en la geometría durante la historia. Las regiones de la Tierra se representan mediante cartas o mapas, que se reúnen en un volumen para formar un atlas, un conjunto de cartas para todo el planeta. La noción de variedad diferenciable es necesaria para entender los métodos de Cálculo Diferencial en espacios más generales que $\mathbb{R}^n$.

5.1 Transformaciones diferenciables de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Empecemos este capítulo recordando el caso más sencillo de diferencial de una función de varias variables, con valores reales. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, decimos que f es diferenciable en el origen $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, si existe una transformación lineal afín:

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \text{ tal que}$$

$$\lim_{X \to \mathbf{0}} \frac{f(X) - L(X)}{|X|} = 0$$

Sabemos que

$$L(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La gráfica de L en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, es el subespacio tangente a la gráfica de f sobre el origen.

Definición 5.1.1 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$*, diremos que es diferenciable si*

1. *Es diferenciable en cada punto de su dominio.*

2. *La matriz* $Df_x = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$*, varía continuamente con* x*.*

Definición 5.1.2 *Una función continua* $f : \mathbf{V}_1 \subseteq \mathbb{R}^{m_1} \longrightarrow \mathbf{V}_2 \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$*, dónde cada* V_k *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^{m_k}$*, con* $k = \{1, 2\}$*, es* **diferenciable ó suave***, si* f *es* **infinitamente** *diferenciable*[2]

La función coordenada definida por

$$\begin{array}{rccc} Coord: & M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n^2} \\ & A & \longmapsto & Coord(A). \end{array}$$

Es diferenciable.

Definición 5.1.3 *Un* **difeomorfismo***, es una función diferenciable con inversa diferenciable.*

Observación

- "Invertible", quiere decir invertible en la categoría diferenciable; así , es un difeomorfismo $f : \mathbf{V}_1 \subseteq \mathbb{R}^{m_1} \longrightarrow \mathbf{V}_2 \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$ si existe una aplicación diferenciable $g : \mathbf{V}_2 \subseteq \mathbb{R}^{m_2} \longrightarrow \mathbf{V}_1 \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$, tal que $f \circ g = I_{V_2}$ y $g \circ f = I_{V_1}$. En otras palabras, esto significa que f es biyectiva y f^{-1} es diferenciable.

- Los difeomorfismos constituyen los isomorfismos de la categoría diferenciable.

Problema 5.1.1 *Construya un difeomorfismo entre el elipsoide* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ \ a < b < c$ *y la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Solución
Sea $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ y $S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2\right\}$. Considérese:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x, \frac{a}{b}y, \frac{a}{c}z). \end{array}$$

f es evidentemente una biyección y es diferenciable, con inversa

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x, \frac{b}{a}y, \frac{c}{a}z). \end{array}$$

también diferenciable, luego f es un difeomorfismo en $\mathbb{R}^3$. Ahora consideremos

$$\begin{array}{rccc} f|_E: & E \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x, \frac{a}{b}y, \frac{a}{c}z). \end{array}$$

El recorrido de $f|_E$, es S^2, ya que

[2]Es decir que $f \in C^\infty$.

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{a}{b}y\right)^2 + \left(\frac{a}{c}z\right)^2 &= x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{a^2}{c^2}z^2 \\ &= a^2 \underbrace{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)}_{(x,y,z)\in E} \\ &= a^2. \end{aligned}$$

Su inversa f^{-1}, esta dada por

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}|_{S^2} : & S^2 \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x, \frac{b}{a}y, \frac{c}{a}z). \end{array}$$

El recorrido de f^{-1} es E, ya que

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{(\frac{b}{a}y)^2}{b^2} + \frac{(\frac{c}{a}z)^2}{c^2} &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} \\ &= \frac{\overbrace{x^2 + y^2 + z^2}^{(x,y,z)\in S^2}}{a^2} \\ &= \frac{a^2}{a^2} = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \longrightarrow & S^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x, \frac{b}{a}y, \frac{c}{a}z). \end{array}$$

Es un difeomorfismo de E sobre S^2. □

El teorema de la función Inversa

Si queremos resolver sistemas con ecuaciones no lineales, se tiene la interrogante ¿existe un criterio que diga si es posible resolver el sistema?
El teorema de la función inversa nos da ese criterio:

Teorema 5.1.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, diferenciable y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $det(Df_x) \neq 0$, entonces f es invertible en una vecindad de x_0.*

Demostración:

Ver [[9] pág. 8-10] □

El teorema del rango

El teorema de la función inversa es un resultado que habla del comportamiento local de una función, nos dice lo que pasa en una vecindad de un punto. Pero si estamos interesados en estudiar algunos aspectos del **comportamiento global**, de las funciones diferenciables es necesario generalizarlo, y es con esa finalidad que proporcionamos el siguiente resultado conocido como el teorema del Rango.

Teorema 5.1.2 *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, una función diferenciable y supóngase que la transformación lineal Df_x, tiene rango p, para todo x en alguna vecindad de x_0. Entonces existen difeomorfismos*

$$u : V(x_0) \longrightarrow B(0;r)$$
$$v : V(f(x_0)) \longrightarrow B(0;r)$$

Tales que la composición $v \circ f \circ u^{-1}$ es la proyección en las primeras p coordenadas.

Demostración: Ver [[9] pág. 8-10] □

Observación

- El rango de una transformación lineal es la dimensión de su imagen, la cual es menor que la dimensión del dominio y que la del contradominio de la misma.

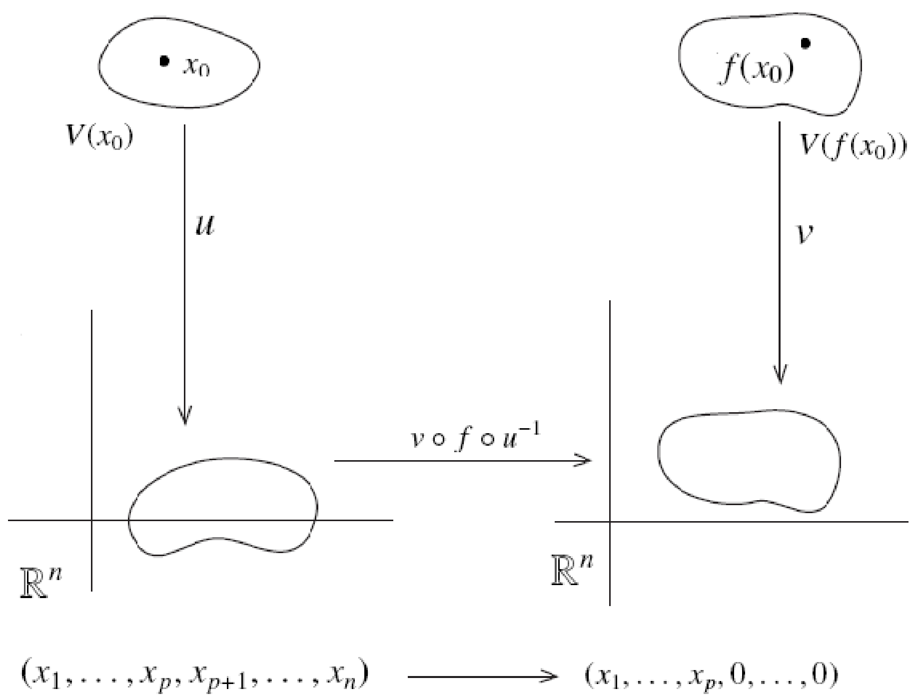


Figura 5.1: Representación geométrica del teorema del rango.

5.2 Variedades diferenciables

Cualitativamente, una variedad diferenciable[1] es un conjunto que localmente se puede representar por algún $\mathbb{R}^m$, y tal que los cambios de coordenadas entre diferentes representaciones de un subconjunto son C^∞.

La noción de variedad diferenciable y difeomorfismo se remonta por lo menos a *Poincaré*; en su famoso artículo «analysis situs»(*Collected Works, Vol. 6, Gauthier-Villars, Paris, 1953.*) topología ó «análisis situs» era, para *Poincaré*, el estudio de las variedades diferenciables bajo la relación de equivalencia definida por el difeomorfismo, *Poincaré* utilizó de hecho la palabra *homeomorfismo* para designar lo que hoy se denomina difeomorfismo de clase C^k, $k \geq 1$, podemos decir que la topología diferencial es lo que *Poincaré* entendió como topología originalmente.

Existen diversas formas de introducir la noción de variedad diferenciable, muchas de las cuales parten de la idea de variedad topológica[2] ó espacio topológico. Nosotros preferimos introducir las **estructuras diferenciables**, sobre un conjunto sin ninguna otra estructura adicional por el momento.

Sea M^n un espacio topológico Hausdorff separable[3]

Definición 5.2.1 . *Una* **Carta** *o sistema de coordenadas, de dimensión n en M^n, es un par (U, ϕ), donde $U \subset M^n$ es un conjunto abierto, y V es un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\phi : U \subseteq M^n \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Es un homeomorfismo.

Observación

- Cada punto p de M^n puede recibir un entorno local al que es asignable por medio de ϕ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.
- Cabe agregar el abuso del lenguaje al llamar carta a la función ϕ, pues en general se le llama carta al par (U, ϕ), donde U es un abierto de un espacio topológico Hausdorff separable M^n. Y ϕ es un homeomorfismo de un abierto de U de M^n en un abierto V de $\mathbb{R}^n$

[1] La Topología Diferencial es la parte de la topología que estudia las variedades diferenciables y las propiedades que son invariantes por difeomorfismos.

[2] Sea (X, τ) un espacio topológico, decimos que X, es una variedad topológica de dimensión n si

a) X es Hausdorff;

b) X tiene una base de vecindades numerable; y

c) X es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$

[3] Se dice de un espacio topológico M^n, que es Haussdorf separable si

- $\forall x, y \in M^n$, $\exists U, V \subseteq M^n$, abiertos, tales que $x \in U$, $y \in V$, con $U \cap V = \emptyset$.
- M^n admite una base numerable de entornos abiertos.

.

Así un sistema de coordenadas de dimensión n en $p \in M$ es la n-tupla $(x_1, \ldots, x_n) = (u_1 \circ \phi, \ldots, u_n \circ \phi)$, donde ϕ es una carta de dimensión n en p, y

$$u_i : V \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

son las funciones coordenadas en V.

Ejemplo 5.2.1 *Tomando $M^n = \mathbb{R}^n$, y $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\varphi = Id_{\mathbb{R}^n}$, es claro que $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$, es una carta de dimensión n, en $\mathbb{R}^n$. En este caso, las coordenadas son las usuales que en $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 5.2.2 *Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Podemos identificar a $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, mediante el homeomorfismo $z = x + iy \longrightarrow (x, y)$. Sea $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}}_{n\text{-veces}}$, el producto cartesiano de n-copias de $\mathbb{C}$. Sea $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, dada por*

$$\varphi(x_1 + iy_2, \ldots, x_n + iy_n) = (x_1, y_2, \ldots, x_n, y_n)$$

entonces $\{(\mathbb{C}^n, \varphi)\}$ es una carta 2n-dimensional de $\mathbb{C}^n$.

Ejemplo 5.2.3 *Sea $M^k = M_n(\mathbb{K})$, al conjunto de matrices de tamaño $n \times n$, con entradas en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Dado que $M_n(\mathbb{K})$ tiene estructura de espacio topológico (ver sección 1.3), y considerando la aplicación coordenada definida por*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n^2} \\ & [a_{ij}] & \longmapsto & Coord(A) \end{array}$$

Luego del lema 1.2.1 y el corolario1.3.1, Coord es un homeomorfismo. Y por tanto $(M_n(\mathbb{K}), \varphi)$, es una carta de dimensión $k = n^2$.

Ejemplo 5.2.4 *Sea C un circulo de radio r, con centro $(R, 0)$, $R > 0$, y $R > r$, en el plano xy, giremos a C sobre el eje z y obtenemos al toro denotado por T. Encontremos una carta al toro*

Llamemos eje de giro del origen de coordenadas al eje z, luego sea $p \in T$, sea también $O = \mathbb{R}^3 - \{eje\ z\}$ abierto tal que $p \in O$, ahora definamos

$$\begin{array}{rccc} f : & O & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longmapsto & \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 \end{array}$$

Luego tenemos que $p \in T \leftrightarrow f(p) = r^2$. Calculemos el gradiente de f

$$\nabla f = \left(\frac{2(\sqrt{x^2 + y^2 - R})x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2(\sqrt{x^2 + y^2 - R})y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z \right)$$

Luego $\nabla f\big|_p \neq 0$ fuera del circulo $x^2 + y^2 = R^2 \wedge z = 0$. Como $R > r \neq 0$, entonces r^2 es un valor regular de f, por consiguiente $T = f^{-1}(r^2)$ es una curva de nivel y se obtiene al toro como una superficie de nivel. Por otra parte tomando el rectángulo $V = (R - r, R + r) \times (R - r, R + r)$, la ecuación cartesiana del toro es por tanto

$$
\begin{array}{rccl}
g: & V & \longrightarrow & T \\
 & (x,y) & \longmapsto & \left(x, y, \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2}\right)
\end{array}
$$

Y tomando $U = g(V)$, obtenemos por la construcción que

$$
\begin{array}{rccl}
\phi: & U & \longrightarrow & V \\
 & (x,y,z) & \longmapsto & (x,y)
\end{array}
$$

Es un homeomorfismo y por tanto (U, ϕ) es una carta para el toro T.

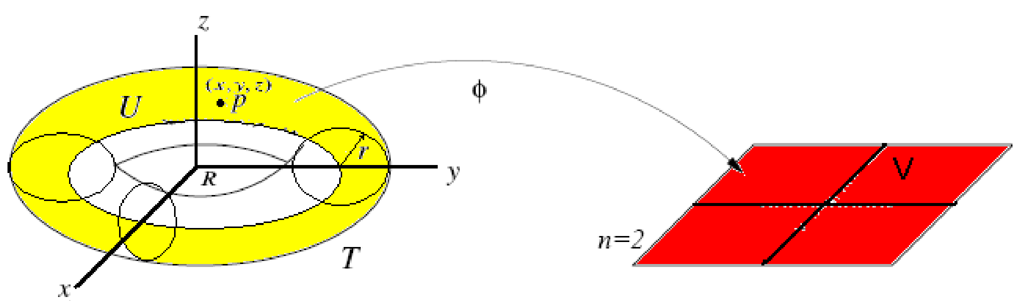


Figura 5.2: La figura se muestra una carta para el toro (U, ϕ).

Ejemplo 5.2.5 *Consideremos la circunferencia unidad del plano complejo $S^1 = \left\{e^{i\theta} \;:\; \theta \in \mathbb{R}\right\}$, la esfera de dimensión 1 en $\mathbb{C}$, en este caso particular la llamaremos 1−esfera. En S^1. Sean $U = S^1 - \{1\}$ y $V = S^1 - \{-1\}$, es claro que U y V, son abiertos de S^1, ver figura 5.3*

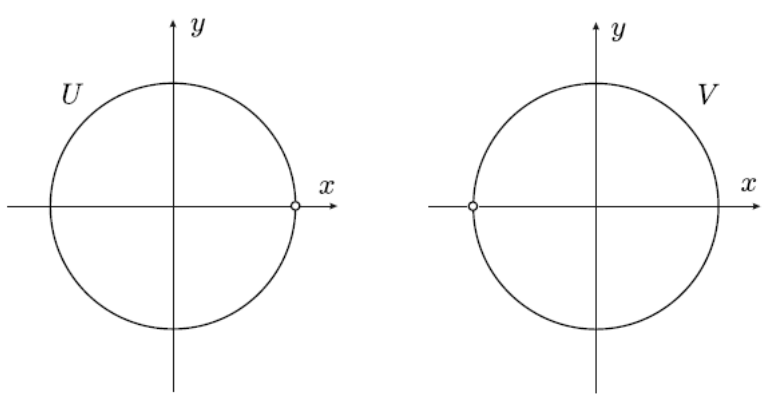


Figura 5.3: Abiertos en S^1.

Ahora las transformaciones

$$
\begin{array}{rccl}
\varphi: & U & \longrightarrow &]0, 2\pi[\\
 & \theta & \longmapsto & \varphi(e^{i\theta}) = \theta
\end{array}
$$

Y

$$\begin{array}{rccl} \psi: & V & \longrightarrow &]-\pi,\pi[\\ & \vartheta & \longmapsto & \psi(e^{i\vartheta})=\vartheta \end{array}$$

Son homeomorfismos. Por tanto (U,φ), (V,ψ), *son cartas de la* $1-$ *esfera de dimensión* 1.

con la definición 5.2.1 Surge un problema: Al intentar cubrir una variedad M^n puede haber dos abiertos que se solapen en una determinada región, de modo que para un punto p se tengan dos posibles subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ y $\phi_2(U_1 \cap U_2)$. Pero como queremos las coordenadas Tengan un cierto grado de diferenciabilidad para poder definir sobre ellas objetos(funciones u otros más complicados), a su vez, con cierto grado de diferenciabilidad, deben imponerse algunas condiciones de compatibilidad. Como condición de compatibilidad exigiremos que se satisfaga para los dos cambios de coordenadas, la siguiente definición.

Definición 5.2.2 *Sea* $\phi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ *y* $\phi_2 : U_2 \longrightarrow V_2$, *dos cartas de dimensión* n *en* M^n, *con* $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. *Entonces* ϕ_1 *y* ϕ_2 *son compatibles si*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

Es un difeomorfismo.

Observación

- En la definición anterior se admite la posibilidad de que $U_1 \cap U_2$ sea vacio. En caso contrario, los difeomorfismos $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ se llaman cambios de coordenadas. Ver figura 5.4.

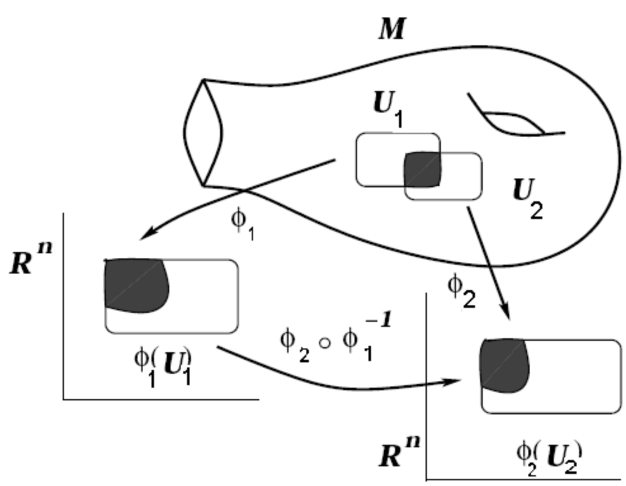


Figura 5.4: Cambio de coordenadas.

Con lo anterior podemos pasar a pensar en todas las posibles cartas n-dimensionales compatibles entre si y tenemos

Definición 5.2.3 *Una colección de cartas de dimensión n en M^n,*

$$\mathfrak{U} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha\}_{\alpha\in I},$$

Es un **atlas** *de dimensión n en M^n si dado $J \subseteq \mathbb{N}$, tenemos que:*

- $M^n \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$.
- $\forall\alpha, \beta \in J$ *tal que* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ *se tiene que* ϕ_α *y* ϕ_β *son compatibles.*

Ejemplo 5.2.6 *Retomando el ejemplo 5.2.5. En S^1, tenemos que las cartas (U, φ), (V, ψ), definen un atlas. En efecto*

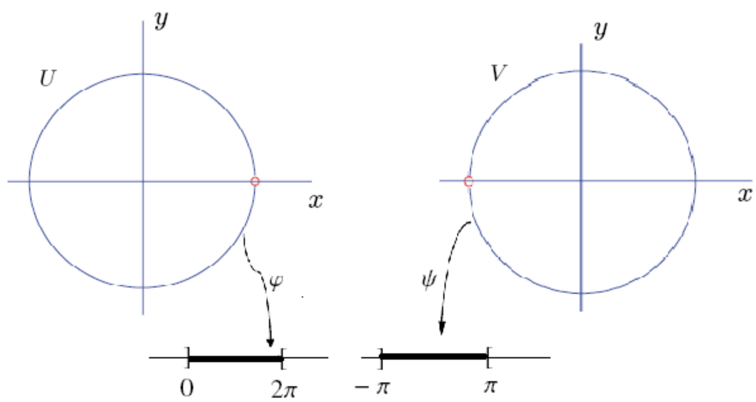


Figura 5.5: Cartas definidas en S^1.

Verifiquemos que se cumple la definición 5.2.3. En efecto

1. $S^1 = U \cup V = S^1 - \{-1\} \cup S^1 - \{1\}$
2. *Ahora dado que* $U \cap V = S^1 - \{-1\} \cap S^1 - \{1\} = S^1 - \{-1, 1\} \neq \emptyset$ *y*

$$\varphi(U \cap V) = \varphi(S^1 - \{-1, 1\}) =]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$$

$$\psi(U \cap V) = \psi(S^1 - \{-1, 1\}) =]0, \pi[\cup] - \pi, 0[$$

Afirmamos que $\psi \circ \varphi^{-1}$, es un difeomorfismo. En efecto

$$\begin{array}{ccccc} \varphi(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & U \cap V & \xrightarrow{\psi} & \psi(U \cap V) \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} & \longmapsto & \begin{cases} \theta, \ si\theta \in]0, \pi[\\ \theta - 2\pi, \ si\theta \in]\pi, 2\pi[\end{cases} \end{array}$$

Es diferenciable, y

$$\begin{array}{ccccc} \psi(U \cap V) & \xrightarrow{\psi^{-1}} & U \cap V & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U \cap V) \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} & \longmapsto & \begin{cases} \theta, \ si\theta \in]0, \pi[\\ \theta + 2\pi, \ si\theta \in] - \pi, 0[\end{cases} \end{array}$$

Es diferenciable
Luego $\psi \circ \varphi^{-1}$, es un difeomorfismo, y por tanto

$$\mathfrak{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$$

Es un atlas de dimensión 1, para S^1.

Definición 5.2.4 *Dos atlas de dimensión n en $M^n, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, son* **equivalentes** *si para cualesquiera dos cartas*

$$\phi_1 \in \mathfrak{A}_1 \ \phi_1 : U_1 \longrightarrow V_1 \ y$$
$$\phi_2 \in \mathfrak{A}_2 \ \phi_2 : U_2 \longrightarrow V_2 \ con \ U_1 \cap U_2 \neq \emptyset.$$

ϕ_1 y ϕ_2 son compatibles, es decir, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ es un difeomorfismo.

Observación:
Note que de la definición dos atlas $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ de M son equivalentes, si su unión $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ define un atlas de M^n

Ejemplo 5.2.7 *En S^1 tenemos el atlas definido en el ejemplo 5.2.6. Ahora definiremos otro atlas $1-$dimensional de clase C^∞ en S^1. Sea $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\right\}$, en $\mathbb{R}^2$, en este caso particular la llamaremos $1-$esfera. En S^1, definamos un atlas C^∞:*
Sean $O = \left\{(\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \in S^1 \ : \ 0 < t < 1\right\}$ y $W = \left\{(\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \in S^1 \ : \ -1/2 < t < 1/2\right\}$, es claro que O y W, son abiertos de S^1. Definamos las funciones

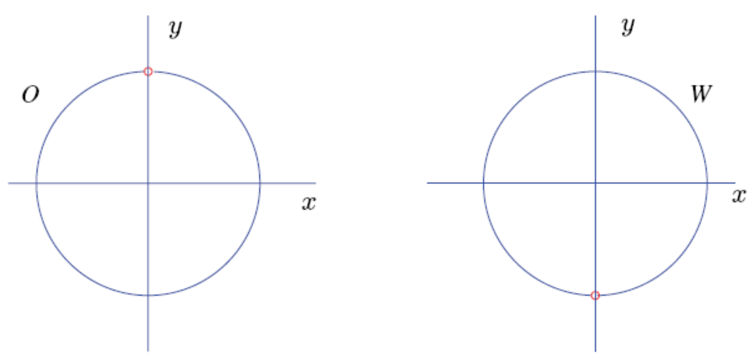


Figura 5.6: Abiertos en la $1-$esfera.

$$\begin{array}{rccl} \mu : & O & \longrightarrow &]0,1[\\ & (\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) & \longmapsto & t \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & W & \longrightarrow &]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\\ & (\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) & \longmapsto & t \end{array}$$

Tenemos que $S^1 = O \cup W$ y $O \cap W = \left\{(\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \in S^1 \ : \ 0 < t < \frac{1}{2} \ ó \ \frac{1}{2} < t < 1\right\}$.

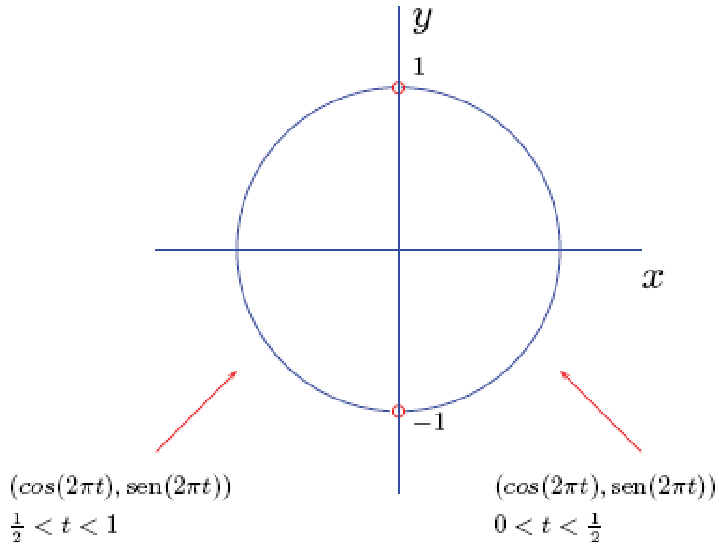


Figura 5.7: Abiertos traslapados en la 1− esfera.

Ahora como $\mu = \sigma$*, si* $0 < t < \frac{1}{2}$*, y* $\sigma = \mu - 1$ *si* $\frac{1}{2} < t < 1$*, el cambio de coordenadas* $\sigma \circ \mu^{-1} : \mu(U \cap V) \longrightarrow \sigma(O \cap W)$*, es la identidad sobre el intervalo* $]0, \frac{1}{2}[$ *y* $\sigma \circ \mu^{-1}(t) = t - 1$*, sobre el intervalo* $]\frac{1}{2}, 1[$*. Luego* $\sigma \circ \mu^{-1}$*, es un difeomorfismo* C^∞*, y* $\mathfrak{A} = \{(O, \mu), (W, \sigma)\}$*, es un atlas de dimensión uno* C^∞*, en* S^1*.*

El siguiente problema nos demuestra que no todos los atlas son difeomorficamente iguales

Problema 5.2.1 *Probar que la función*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(t) = t^3. \end{array}$$

Define una estructura diferenciable en $\mathbb{R}$ *diferente de la usual.(El del atlas* $\mathfrak{A}_1 = \{(\mathbb{R}, Id)\}$*)*

Solución
Dado que

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \sqrt[3]{t}. \end{array}$$

Es continua, se tiene que f es un homeomorfismo, así $\{(\mathbb{R}, f)\} = \mathfrak{A}_2$ es un atlas, compuesto por una carta global, veamos si $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$, son equivalentes.

$$f \circ Id^{-1}(t) = f(t), \text{ es diferenciable}$$

Y

$$Id \circ f^{-1}(t) = f^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}, \text{ no es diferenciable en } 0.$$

Por tanto $f \circ Id^{-1}$ no es un difeomorfismo, es decir $(\mathbb{R}, f)$ define una estructura diferenciable en $\mathbb{R}$ diferente de la usual.

La definición 5.2.4 establece una relación de equivalencia en la familia de los atlas de una variedad M^m:

Lema 5.2.1 *Dos atlas $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ de M^n son equivalentes, si su unión $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ define un atlas de M^n, que establece una relación de equivalencia en la familia de los atlas de M^n*

Demostración:

1. reflexiva: Evidentemente cada atlas es equivalente a si mismo;

2. simétrica: Sean $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, dos atlas equivalentes en M^n, entonces de la definición 5.2.4, toda carta de $\mathfrak{A}_1$, es compatible con toda carta de $\mathfrak{A}_2$,

$$\begin{aligned} &\phi_1 \in \mathfrak{A}_1 \ \phi_1 : U_1 \longrightarrow V_1 \ \text{y} \\ &\phi_2 \in \mathfrak{A}_2 \ \phi_2 : U_2 \longrightarrow V_2, \ \text{con} \ U_1 \cap U_2 \neq \emptyset. \end{aligned}$$

   ϕ_1 y ϕ_2 son compatibles, es decir, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ es un difeomorfismo. Entonces $\mathfrak{A}_2$ es equivalente a $\mathfrak{A}_1$.

3. transitiva: Supongamos que $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_3$, son tales que el primero es equivalente al segundo y el segundo es equivalente al tercero. Tenemos que probar que el primero es equivalente al tercero y, para ello, basta ver que si $(U, \varphi_1) \in \mathfrak{A}_1$ y $(W, \varphi_3) \in \mathfrak{A}_3$ es compatible con (W, φ_3). De hecho, es suficiente de demostrar que $\varphi_1(U \cap W)$, es abierto y $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ es C^∞, ya que entonces intercambiamos los papeles de $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_3$, se deduce que $\varphi_3(U \cap W)$ es abierto y $\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$ es C^∞.

   Dado $p \in \varphi_1(U \cap W)$, consideremos $(V, \varphi_2) \in \mathfrak{A}_2$ tal que $\varphi_1^{-1}(p) \in V$. Vemos que $\varphi_2(U \cap V \cap W)$ es abierto, por ser intersección de $\varphi_2(U \cap V)$ con $\varphi_2(V \cap W)$ que lo son. Entonces $\varphi_1(U \cap V \cap W)$ es abierto por ser la imagen de $\varphi_2(U \cap V \cap W)$ por el homeomorfismo $\varphi_1 \varphi_2^{-1}$, contiene a p y está contenido en $\varphi_1(U \cap W)$. Esto muestra que este último conjunto contiene un entorno de cada uno de sus puntos y es, por tanto, abierto.

   Ahora, basta demostrar que $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ es C^∞ en un entorno de p, pero con la notación de antes podemos escribir:

$$\begin{aligned} \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1(U\cap V\cap W)} =& \varphi_3|_{U\cap V\cap W} \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1(U\cap V\cap W)} \\ =& \varphi_3|_{U\cap V\cap W} \circ \varphi_2^{-1}|_{\varphi_2(U\cap V\cap W)} \circ \varphi_2|_{U\cap V\cap W} \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1(U\cap V\cap W)} \\ =& (\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1})|_{\varphi_2(U\cap V\cap W)} \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})|_{\varphi_1(U\cap V\cap W)} \end{aligned}$$

Lo que demuestra que $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ es C^∞ en $\varphi_1(U \cap V \cap W)$. □

Definición 5.2.5 *Un atlas de dimensión n en M^n, $\mathfrak{A}$, es maximal si dado cualquier otro atlas de dimensión n en M^n, $\mathfrak{A}'$, compatible con $\mathfrak{A}$, se tiene que*

$$\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}.$$

Observación
Dado un atlas $\mathfrak{A}'$ en M^n siempre existe un atlas maximal en M^n, $\mathfrak{A}$, que lo contiene, $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$.

Definición 5.2.6 *La tupla* $(M^n, \mathfrak{A})$*, o simplemente*[1] M^n*, es una* **variedad diferenciable** *de dimensión n en* M^n *si*

- M^n *es un espacio topológico Hausdorff separable.*
- $\mathfrak{A}$ *es un atlas maximal en* M^n*.*

Observación

- La filosofía subyacente es que como una variedad es un espacio topológico abstracto todas las operaciones de análisis que queramos hacer se llevarán a cabo bajando a $\mathbb{R}^n$ por una carta.
- Del lema 5.2.1, se deduce que cada estructura diferenciable tiene un único representante maximal para la inclusión. Por tanto para obtener una estructura diferenciable maximal, es suficiente definir un atlas $\mathfrak{A}$, y tomar su clase de equivalencia $[\mathfrak{A}]$
- Es posible obtener diferentes estructuras diferenciables en un mismo espacio topológico: Se sabe que en la esfera de dimensión dos, S^2, sólo hay una estructura diferenciable pero *J. Milnor* en 1956 probó que en la esfera de siete dimensiones, S^7, hay 28 posibilidades, considerándolas como equivalentes si son difeomorfas.

Ejemplo 5.2.8 *Sabemos del ejemplo 5.2.1 que* $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, dada por* $\varphi = Id_{\mathbb{R}^n}$*,* $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$*, es una carta global de dimensión n, en* $\mathbb{R}^n$*. Se tiene entonces que* $\mathfrak{A} = \left\{(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})\right\}$*, es un atlas. Por tanto* $(\mathbb{R}^n, [\mathfrak{A}])$*, es una variedad diferenciable.*

Ejemplo 5.2.9 *Tenemos del ejemplo 5.2.2, que* $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$*, dada por*

$$\varphi(x_1 + iy_2, \ldots, x_n + iy_n) = (x_1, y_2, \ldots, x_n, y_n)$$

Es un homeomorfismo y por consiguiente $\{(\mathbb{C}^n, \varphi)\}$ *es una carta global para* $\mathbb{C}^n$*. Luego tomando* $\mathfrak{A} = \{(\mathbb{C}^n, \varphi)\}$*, es un atlas* $2n$*-dimensional de* $\mathbb{C}^n$*. Por lo tanto* $(\mathbb{C}^n, [\mathfrak{A}])$*, es una variedad diferenciable.*

Ejemplo 5.2.10 *Consideremos nuevamente a* $M^k = M_n(\mathbb{K})$*, el conjunto de matrices de tamaño* $n \times n$*, con entradas en* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$*. Sabemos del ejemplo 5.2.3, que*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n^2} \\ & [a_{ij}] & \longmapsto & Coord(A) \end{array}$$

Es una carta global de $M_n(\mathbb{K})$*. Así* $\mathfrak{A} = \{(M_n(\mathbb{K}), \varphi)\}$*, es un atlas, por consiguiente* $(M_n(\mathbb{K}), [\mathfrak{A}])$*, es una variedad diferenciable de dimensión* n^2

Ejemplo 5.2.11 *Del ejemplo 5.2.6 se tiene que* $(S^1, [\mathfrak{A}])$ *es una variedad diferenciable* $1-$*dimensional.*

---

[1] Esto abusando del lenguaje matemático

Ejemplo 5.2.12 Esfera en espacios euclidianos

Tenemos que $S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}$, define a la esfera unitaria de dimensión n en $\mathbb{R}^{n+1}$. En S^n consideramos la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^{n+1}$, la cual hace a S^n un espacio topológico hausdorff separable. Sean $U_N = S^n - \{P_N\}$ y $U_S = S^n - \{P_S\}$, donde $P_N = (1, \ldots, 0, 1)$ y $P_S = (0, \ldots, 0, -1)$ son respectivamente, los polos norte y sur de la esfera S^n. Los conjuntos U_N y U_S, son conjuntos abiertos en S^n y $S^n = U_N \cap U_S$, a continuación definamos las aplicaciones siguientes:

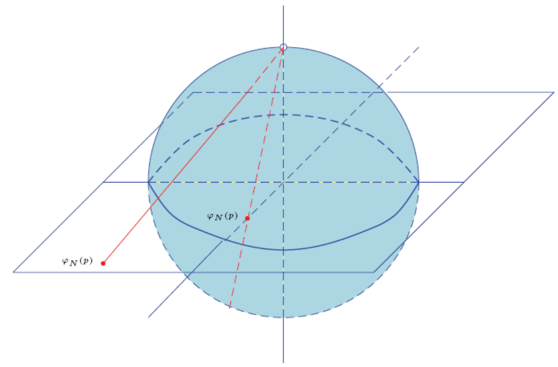


Figura 5.8: Proyección Estereográfica

$$\begin{array}{rccl} \varphi_N : & U_N & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccl} \varphi_S : & U_S & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & \frac{1}{1+x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

Las aplicaciones φ_N y φ_S son llamadas, respectivamente, proyecciones estereográficas norte y sur. Las inversas de las aplicaciones φ_N^{-1} y φ_S^{-1} son dadas, respectivamente por:

$$\begin{array}{rccl} \varphi_N^{-1} : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U_N \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \left(\frac{2x_1}{1+\|x\|^2}, \ldots, \frac{2x_n}{1+\|x\|^2}, \frac{\|x\|^2-1}{1+\|x\|^2}\right). \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccl} \varphi_S^{-1} : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U_S \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \left(\frac{2x_1}{1+\|x\|^2}, \ldots, \frac{2x_n}{1+\|x\|^2}, \frac{1-\|x\|^2}{1+\|x\|^2}\right). \end{array}$$

donde $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Es claro que φ_N y φ_S, son homeomorfismos, y $\mathfrak{A} = \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$, es un atlas $n-$dimensionales en S^n. En efecto:
Tenemos que $U_N \cap U_S = S^n - \{P_N, P_S\}$ y que $\varphi_N(U_N \cap U_S) = \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(x_1, \ldots, x_n) =& \varphi_N\left(\frac{2x_1}{1+\|x\|^2}, \ldots, \frac{2x_n}{1+\|x\|^2}, \frac{1-\|x\|^2}{1+\|x\|^2}\right) \\ =& \varphi_N(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}). \end{aligned}$$

donde $y_i = \frac{2x_i}{1+\|x\|^2}$, $i = 1, \ldots, n$ e $y_{n+1} = \frac{1-\|x\|^2}{1+\|x\|^2}$ tenemos por consiguiente que $1 - y_{n+1} = 1 - \frac{1-\|x\|^2}{1+\|x\|^2} = \frac{2\|x\|^2}{1+\|x\|^2}$, luego

$$\frac{1}{1-y_{n+1}} = \frac{1-\|x\|^2}{2\|x\|^2}.$$

Ahora

$$\begin{aligned}\varphi_N(y_1,\ldots,y_n,y_{n+1}) &= \frac{1}{1-y_{n+1}}(y_1,\ldots,y_n)\\ &= \frac{1+\|x\|^2}{2\|x\|}\left(\frac{2x_1}{1+\|x\|^2},\ldots,\frac{2x_n}{1+\|x\|^2}\right)\\ &= \frac{1}{\|x\|^2}(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\varphi_N\circ\varphi_S^{-1}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{\|x\|^2}(x_1,\ldots,x_n)$$

El cual es claramente un difeomorfismo C^∞, Ahora puesto que

$$\varphi_S\circ\varphi_N^{-1} = \left(\varphi_N\circ\varphi_S^{-1}\right)^{-1},$$

Se sigue que $\varphi_S\circ\varphi_N^{-1}$, es también un difeomorfismo C^∞.
Luego $\mathfrak{A} = \{(U_N,\varphi_N), (U_S,\varphi_S)\}$ es un atlas de dimensión n para S^n. Por consiguiente $(S^n,[\mathfrak{A}])$, es una variedad diferenciable.

Problema 5.2.2 *Consideremos la función*

$$\begin{array}{rccl} d: & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases}1, & si\ x\neq y\\ 0, & si\ x=y\end{cases}\end{array}$$

Describir la topología inducida por las d esferas. ¿Es una variedad?

Solución Para $0<\epsilon<1$ las esferas abiertas para esta norma d, se reducen al punto centro, esto es:

$$B(a;\epsilon) = \{x\in\mathbb{R}^n\ :\ d(a,x)<\epsilon\} = \{a\}$$

Luego si $\epsilon>1$ las esferas abiertas satisfacen que

$$\bigcup_{a\in\mathbb{R}^n} B(a;\epsilon) = \mathbb{R}^n,$$

Por tanto la d topología resultante es la topología discreta pues cada punto es abierto. En $\mathbb{R}^n$ con la topología discreta no podemos definir una estructura diferenciable pues no podemos definir homeomorfismos. Por tanto no es una variedad.

5.3 Las subvariedades abiertas

Los abiertos de una variedad tienen estructura de variedad. Sea A un abierto en M^n una variedad diferenciable de dimensión n, es a su vez una variedad diferenciable. Veamos como A, hereda las propiedades topológicas y diferenciables de M^n.

1. **Topología inducida de M^n en A.** Diremos que $B \subset A$, es abierto si existe $O \subset M^n$ Abierto tal que $O \cap A = B$. Esta definición permite saber qué es y qué no es un subconjunto abierto de A. Por ejemplo, para determinar si un subconjunto de la esfera S^1 es abierto a partir de una topología de $\mathbb{R}^2$ no hay más que encontrar un abierto de $\mathbb{R}^2$, cuya intersección sea el subconjunto de la esfera en cuestión.

2. **Hausdorff** Sean $U, V \in A \subset M^n$. Entonces existen $P, Q \subset M^n$ abiertos tales que $U \in P$ y $V \in Q$, tal que $P \cap Q = \emptyset$. Pero entonces

$$U = P \cap A$$
$$V = Q \cap A$$

   Por construcción, son subconjuntos abiertos de A. Luego efectivamente si el conjunto de partida es Hausdorff, el subconjunto con topología inducida también lo es.

3. **Separabilidad** Dada una base de entornos abiertos numerable para M^n(por ser separable) conseguimos una para A simplemente formando su intersección con M^n. Más formalmente, existen $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ abiertos de M^n implica que es posible construir una base numerable de entornos abiertos para A, $\left\{\widehat{O_\alpha}\right\}$, simplemente definiendo $\widehat{O_\alpha} = O_\alpha \cap A$.

4. **Atlas C^∞**. Si M^n es una variedad C^∞ a partir de su atlas, $\mathfrak{A}_1 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ construimos un atlas C^∞ para A, $\left\{\left(\widehat{U_\alpha}, \widehat{\varphi_\alpha}\right)\right\}_{\alpha\in I}$ del siguiente modo:

$$\widehat{U_\alpha} = U_\alpha \cap A$$
$$\widehat{\varphi_\alpha} = \varphi_\alpha|_{U_\alpha}.$$

   Los conjuntos abiertos los construimos por intersección con los de M^n y las aplicaciones de carta mediante restricción del dominio original (en M^n) a A. Las subvariedades abiertas tienen la misma dimensión que $\mathbb{R}^n$, la variedad ambiente. La 3-esfera no es por tanto una subvariedad abierta de $\mathbb{R}^3$. La bola de dimensión n sí es una subvariedad abierta de $\mathbb{R}^n$.

Si $\phi : U \longrightarrow V$, es una carta en M, tomando $\widehat{\phi} : U \cap A \longrightarrow \widehat{\phi}(U \cap A)$ tal que $\widehat{\phi}(x) = \phi(x),\ x \in U \cap A$. Entonces las cartas así construidas forman un atlas para A. Luego A es llamada una subvariedad abierta de M.

Mas ejemplos de variedades

1. El grupo $GL_n(\mathbb{K})$ es una subvariedad abierta de $M_n(\mathbb{K})$, esto pues $GL_n(\mathbb{K})$ es un abierto en la variedad $M_n(\mathbb{K})$. En efecto
   La función determinante es continua[1] en $M_n(\mathbb{K})$, entonces

[1]Puesto que $M_n(\mathbb{K})$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{n^2}$. Sea f dada por

$$\begin{array}{llcl} f: & \mathbb{K}^{n^2} = \underbrace{\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\ldots\times\mathbb{K}}_{n^2-\text{veces}} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & z = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{nn}) & \longmapsto & f(z) = \sum_{\alpha\in S_n} \epsilon(\alpha) a_{\alpha(1)1} a_{\alpha(2)2}, \ldots, a_{\alpha(n)n}. \end{array}$$

$$GL_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K}) - det^{-1}(\{0\})$$

es un conjunto abierto ya que $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{K}$, y bajo una función continua la imagen inversa de un conjunto abierto, es un abierto.

Problema 5.3.1 *El cono cuadrado en $\mathbb{R}^3$, esta dado por*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

¿Es una variedad de dimensión dos? ¿Por qué si o por qué no?

Solución

Afirmamos que el cono no es una 2−variedad. En efecto, supongamos que

$$C = \left\{(x, y, z) \ : \ z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right\}$$

es una 2−variedad, tomemos el punto $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in C$ y construyamos una supuesta carta (U, φ), en un entorno de $\mathbf{0}$, claramente U es conexa por ser φ un homeomorfismo, $\varphi(U)$ es conexo, sea $\widehat{U} = \varphi(U) - P$, entonces $\widehat{U}$, es conexo pues a $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^2$, le hemos quitado solamente un punto, puesto que φ^{-1} es continua, entonces $\varphi^{-1}(\widehat{U}) = U - \mathbf{0}$ es conexo. Lo que nos genera una contradicción, pues todos los caminos quedan suspendidos en $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, en particular los puntos P y Q de la figura 5.9, no se pueden unir por ningún camino.

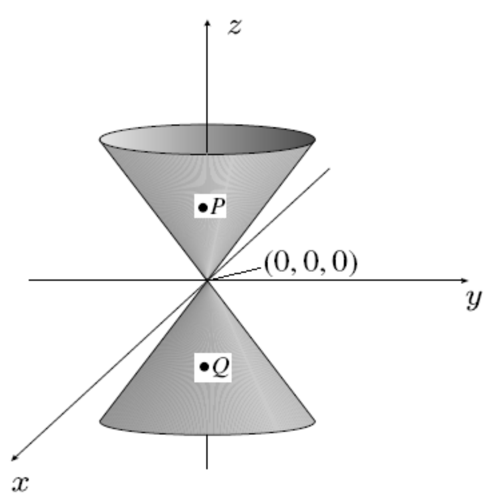


Figura 5.9: Representación del cono cuadrado en $\mathbb{R}^3$.

---

la cual es una función polinómica por lo tanto continua. luego puesto que $det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$; es tal que $det(A) = f \circ Coord(A)$, y puesto que la composición de funciones continuas es continua. Por lo tanto det es continua.

5.4 La variedad producto

En el sentido de construir variedades diferenciables a partir de unas ya conocidas (ó dadas), se abre un espacio ilimitado a la fantasía. Pero la tarea del estudio de variedades diferenciables es demasiado general para que se proporcionen todas en esta pequeña introducción pero fundamental sección del presente trabajo. Por esta causa se efectúa con las distintas limitaciones naturales, no pudiendo dejar a un lado respondernos algo que parecería evidente e inofensivo *¿dadas dos variedades diferenciables M^m, N^n, el producto cartesiano $M^m \times N^n$, es también una variedad diferenciable?*

Teorema 5.4.1 *Sean $(M^m, \mathfrak{A}_\alpha)$, $(N^n, \mathfrak{A}_\beta)$ variedades diferenciables. entonces el producto cartesiano $M^m \times N^n$, es una variedad diferenciable.*

Demostración

1. Dado que el producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff(ver [[8], Pág. 225]), y un producto numerable de espacios segundo numerable, es segundo numerable(ver [[8], Pág. 218]), se tiene por tanto que $M^m \times N^n$, es un espacio topológico Hausdorff separable.

2. Ahora consideremos
$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_\alpha &= \{\varphi_\alpha : U_\alpha \subseteq M^m \longrightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m\}_{\alpha\in I} \\ \mathfrak{A}_\beta &= \left\{\theta_\beta : O_\beta \subseteq N^n \longrightarrow W_\beta \subseteq \mathbb{R}^n\right\}_{\beta\in J} \end{aligned}$$
las estructuras diferenciables de M^m y N^n respectivamente. Consideremos las aplicaciones
$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} : \quad U_\alpha \times O_\beta \subseteq M^m \times N^n &\longrightarrow V_\alpha \times W_\beta \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \\ (x, y) &\longmapsto (\varphi_\alpha(x), \theta_\beta(y)). \end{aligned}$$
Demostraremos que $\mathfrak{A} = \{h_{\alpha\beta} : U_\alpha \times O_\beta \longrightarrow V_\alpha \times W_\beta\}_{\alpha,\beta\in I\times J}$ es una estructura diferenciable de $M^m \times N^n$. En efecto

   - Sea $h_{\alpha\beta}(x, y) = h_{\alpha\beta}(t, u)$, se tiene la definición de $h_{\alpha\beta}$ que
$$(\varphi_\alpha(x), \theta_\beta(y)) = (\varphi_\alpha(t), \theta_\beta(u)) \leftrightarrow \varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(t) \ \wedge \ \theta_\beta(x) = \theta_\beta(u)$$
Puesto que φ_α y θ_β son biyectivas, se sigue que $x = t \ \wedge \ y = u$, o sea que $h_{\alpha\beta}$ es biyectiva.
   - Mostremos que se cumple la definición 5.2.3. En efecto
$$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}(U_\alpha \times O_\beta) &= \bigcup_{\alpha,\beta} (\varphi_\alpha, \theta_\beta)(U_\alpha \times O_\beta) = \bigcup_{\alpha,\beta} \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \theta_\beta(O_\beta) \\ &= \left(\bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha)\right) \times \left(\bigcup_\beta \theta_\beta(O_\beta)\right) \subseteq M^m \times N^n. \end{aligned}$$
Por otra parte sean (α_1, β_1), $(\alpha_2, \beta_2) \in I \times J$ tal que $(U_{\alpha_1} \times O_{\beta_1}) \cap (U_{\alpha_2} \times O_{\beta_2}) \neq \emptyset$
$$\begin{aligned} h^{-1}_{\alpha_1\beta_1} \circ h^{-1}_{\alpha_2\beta_2} &= (\varphi_{\alpha_1}, \theta_{\beta_1})^{-1} \circ (\varphi_{\alpha_2}, \theta_{\beta_2}) \\ &= (\varphi^{-1}_{\alpha_1}, \theta^{-1}_{\beta_1}) \circ (\varphi_{\alpha_2}, \theta_{\beta_2}) \\ &= (\varphi^{-1}_{\alpha_1} \circ \varphi_{\alpha_2}, \theta^{-1}_{\beta_1} \circ \theta_{\beta_2}), \ \text{basta recordar } u \times v \circ (z \times w) = (u \circ z) \times (v \circ w) \end{aligned}$$

Como cada una de las componentes es diferenciable se sigue que $h^{-1}_{\alpha_1\beta_1} \circ h^{-1}_{\alpha_2\beta_2}$, es diferenciable y se tiene que el cambio de coordenadas es diferenciable y por lo tanto $M^m \times N^n$, es una variedad diferenciable.

Ejemplo 5.4.1 *Considerando el ejemplo 5.2.11, tenemos que $(S^1, \mathfrak{A})$ es una variedad diferenciable, así entonces $S^1 \times S^1 = T^2$ el toro, es una variedad diferenciable de dimensión* 4.

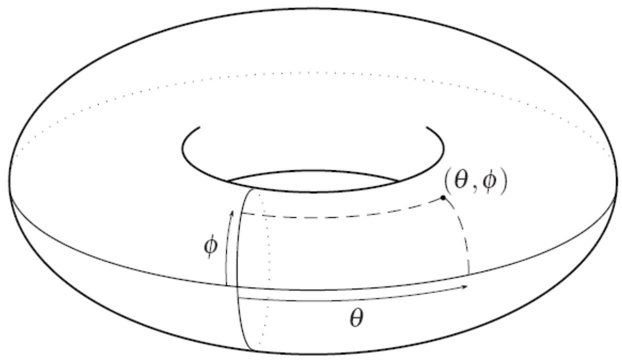


Figura 5.10: El toro como producto de $S^1 \times S^1$.

Ejemplo 5.4.2 *Generalizando el ejemplo anterior, tenemos que $(S^1, \mathfrak{A})$ es una variedad diferenciable, así entonces $S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1 = T^n$ el toro, es una variedad diferenciable de dimensión $2n$.*

5.5 Transformaciones diferenciables en variedades

En lo que sigue, una variedad diferenciable de dimensión m, $(M^m, \mathfrak{A})$ la denotaremos simplemente por M^m, cuando no exista la necesidad de explicitar un atlas que determine la estructura diferenciable $\mathfrak{A}$, de M^m.

Definición 5.5.1 *Sean $(M^m, \mathfrak{A}_1)$ y $(N^n, \mathfrak{A}_2)$ variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente.*

- *Una transformación continua $f : M^m \longrightarrow N^n$ es diferenciable[2] en un punto $p \in M^m$ si y sólo si existe una carta $(U, \phi) \in \mathfrak{A}_1$ de una vecindad de p en M^m y una carta $(V, \psi) \in \mathfrak{A}_2$, de una vecindad de $f(p)$ en N^n tales que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es diferenciable en $\phi(p)$.*

- *Una transformación continua $f : M^m \longrightarrow N^n$ es diferenciable si y sólo si f es diferenciable en p para todo $p \in M^m$*

Observación

- La aplicación $f_{\phi\psi} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, es llamada expresión local de f, en las coordenadas ϕ y ψ.

[2]De clase C^∞

- Esta definición, aunque no lo parezca, es la más natural que puede darse para la noción de diferenciabilidad de una aplicación $f : M^m \longrightarrow N^n$, puesto que en los espacios abstractos M^m y N^n, no tenemos estructura de espacio vectorial, por lo tanto usando coordenadas locales traspasamos el problema a abiertos de espacios euclidianos, donde ya tenemos definida la noción de diferenciabilidad.

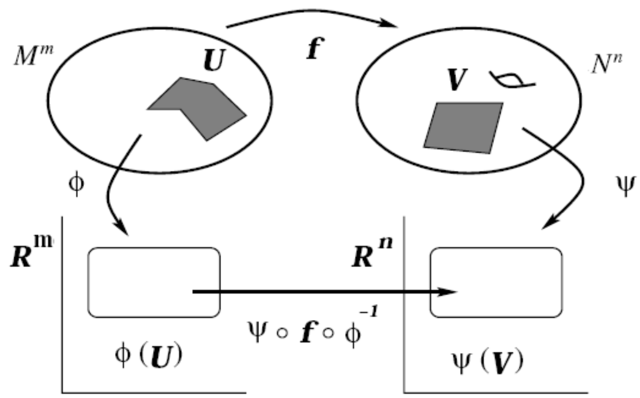


Figura 5.11: Transformación diferenciable entre variedades.

Problema 5.5.1 *Demostrar que la definición de diferenciabilidad de una transformación* $f : (M^m, \mathfrak{A}_1) \longrightarrow (N^n, \mathfrak{A}_2)$*, en un punto* $p \in M^m$*, no depende de los sistemas de coordenadas* (U, φ) *y* (V, ψ) *elegidos en* $\mathfrak{A}_1$ *y* $\mathfrak{A}_2$*, respectivamente.*

Solución
Sean (U_1, φ_1) y (V_1, ψ_1) elegidos en $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$, respectivamente, las cuales satisfacen la definición de diferenciabilidad de f en p. Entonces en $\varphi_1(U \cap U_1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} f_{\varphi_1\psi_1} &= \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} \\ &= \psi_1 \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \varphi_1^{-1} \\ &= (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1}) \\ &= (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ f_{\varphi\psi} \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1}) \end{aligned}$$

Como estamos suponiendo que $f_{\varphi\psi}$, es diferenciable en el punto $\varphi(p)$, y los cambios de coordenadas son diferenciables es el punto $\varphi_1(p)$. □

5.6 Espacio tangente y derivadas

Sea M^m una variedad diferenciable de dimensión m y p un elemento en M^m. Se define el conjunto de funciones suaves con dominio una vecindad de p como $C^\infty(M^m, p) = \{f : U \subseteq M^m \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ es diferenciable y } p \in U.\}$ Para $f, g \in C^\infty(M^m, p)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos

$$\begin{aligned} f+g \in C^\infty(M^m,p) &\quad \text{por } (f+g)(x) = f(x)+g(x) \\ fg \in C^\infty(M^m,p) &\quad \text{por } (fg)(x) = f(x)g(x) \\ \alpha f \in C^\infty(M^m,p) &\quad \text{por } (\alpha f)(x) = \alpha f(x). \end{aligned}$$

para $x \in dom(f) \cap dom(g)$.

Es necesario entonces definir formalmente el concepto de espacio tangente a una variedad.

Definición 5.6.1 *Una tangente de M^m en p, v, es un operador real de $C^\infty(M^m,p)$, $v : C^\infty(M^m,p) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que v satisface los siguientes axiomas:*

1. $v(af+bg) = av(f)+bv(g)$ *(Linealidad.)*
2. $v(fg) = v(f)g(p)+f(p)v(g)$ *(Regla de Leibniz.)*

El conjunto de las tangentes de M^m en p es llamado el **espacio tangente** de M^m en p, denotado por $\mathbf{T_pM^m}$, el cual tiene estructura de espacio vectorial real.

$$\begin{array}{rccl} + : & T_pM^m \times T_pM^m & \longrightarrow & T_pM^m \\ & (v_1,v_2) & \longmapsto & v_1+v_2, \quad (v_1+v_2)(f) = v_1(f)+v_2(f). \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{R} \times T_pM^m & \longrightarrow & T_pM^m \\ & (\alpha,v) & \longmapsto & \alpha v, \quad (\alpha v)(f) = \alpha v(f). \end{array}$$

Problema 5.6.1 *Demostrar que $v(f)$ depende solamente del comportamiento de f localmente.*

Solución

Sea v una tangente de M^m en p, sea $c \in \mathbb{K}$, y sea también U una vecindad de p, definamos la función constante:

$$\begin{array}{rccl} c : & p \in U \subseteq M^m & \longrightarrow & M^m \\ & x & \longmapsto & c \end{array}$$

Luego

- Si $c|_U = 0$, $v(c|_U) = v(0+0) = v(0)+v(0)$, entonces $v(c|_U) = 0$.
- Si $c|_U = 1|_U$, $v(1|_U \cdot 1|_U) = v(1|_U)1(p) + 1|_U(p)v(1|_U) = 2v(1|_U)$, entonces $v(1|_U) = 0$.
- Para $c \neq 0$, $v(c|_U) = v(c1|_U) = cv(1|_U) = 0$.

Cabe agregar que $1|_U$ denota a la función 1 definida en la vecindad U de p, tenemos que:

$$v(f|_U) = v(f \cdot 1|_U) = v(f)1(p) + f(p)v(1|_U) = v(f)$$

Por lo tanto $v(f)$ depende solamente del comportamiento de f localmente. □

Definición 5.6.2 *Una curva diferenciable en M^m, es una función γ, continua de un intervalo (a, b) $(a < 0 < b)$ sobre un abierto U de M^m, tal que se extienda a una función diferenciable, es decir para cada carta φ, de dimensión m en M^m, con $dom(\varphi) \cap U \neq \emptyset$ tenemos que*

$$\varphi \circ \gamma \, : \, \gamma^{-1}(dom(\varphi) \cap U) \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \textit{es diferenciable.}$$

Definamos una relación entre dos curvas que pasan por un mismo punto: **Diremos que estas curvas son equivalentes si y sólo si tienen el mismo vector velocidad en el punto**[2]

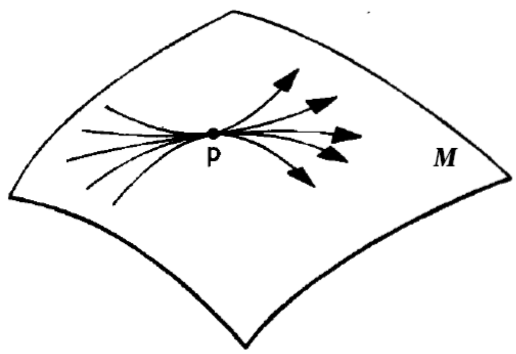


Figura 5.12: Curvas equivalentes.

Definición 5.6.3 *Sea M^m una variedad diferenciable de dimensión m, y sean $\alpha_1, \alpha_2 : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M^m$, dos curvas diferenciables en M^m tales que $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p \in M^m$. Diremos que α_1, α_2 son equivalentes y se nota $\alpha_1 \sim \alpha_2$, si y sólo si para alguna carta (U, ϕ) de una vecindad de p, se tiene que $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \alpha_2)'(0)$.*

Observación

- En la definición la condición impuesta no depende de la carta elegida.
- La condición induce una relación de equivalencia, entre curvas.
  Véase [9].

Sea γ una curva diferenciable en M^m y $x \in dom(\gamma)$. Se define la derivada direccional, de f en $p = \gamma(x)$, en la dirección γ como $\gamma_*(s)(f)$, donde

$$\begin{array}{rccc} \gamma_*(s) \; : & C^\infty(M^m, p) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & (f \circ \gamma)'(x) \end{array}$$

es un operador real de $C^\infty(M^m, p)$.

El concepto de variedad está diseñado de tal manera que tenga sentido definir diferenciabilidad de una transformación, la filosofía subyacente es que como una variedad es un espacio topológico abstracto todas las operaciones de análisis que queramos hacer se llevarán a cabo bajando a $\mathbb{R}^n$ por una

[2]Pensemos en $\mathbb{R}^n$, pues un vector tangente se puede pensar como el vector **velocidad** de una curva. Todo esto claro esta se considera de nuevo localmente en torno al punto

carta. Por ejemplo, se dice que una función $f : N^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es C^∞, si para cada carta (U,φ) la función $f\circ\varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$, lo es y se define para cada $p \in U$, la derivada parcial i-ésima en la variedad como

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p = D_{x_i}(f\circ\varphi^{-1})\Big|_{(\varphi(p))}.$$

donde el símbolo D_{x_i}, significa la derivada parcial usual con respecto a la i-ésima variable. En general:

Definición 5.6.4 *Sea* $(N^n, \mathfrak{A})$*, una variedad diferenciable de dimensión* n *y* (U,φ)*, una carta, con* $(x_1,\ldots,x_n) = (u_1\circ\varphi,\ldots,u_n\circ\varphi)$*, un sistema de coordenadas, sea* $p\in N^n$*, para cada* $i\in\{1,2,\ldots,n\}$*, se define la derivada parcial en* p *con respecto a* x_i*,* $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$*, definida por*

$$\begin{array}{rccc} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : & C^\infty(N^n,p) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}\right|_{(\varphi(p))}. \end{array}$$

Observación

1. $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \in T_pN^n$

2. Se tiene la siguiente notación para denotar la derivada parcial en p con respecto a x_i

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)(f) = D_{x_i}(p)f.$$

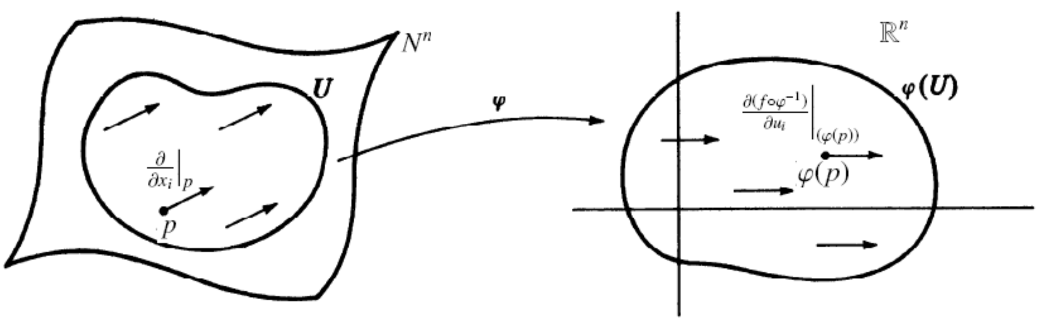


Figura 5.13: Derivada parcial en p con respecto a x_i.

Haciendo uso de la función δ_{ij}, delta de Kroneker, tenemos que

$$D_{x_j}(p)x_i = \frac{\partial(x_i\circ\varphi^{-1})}{\partial u_j}(\varphi(p)) = \frac{\partial(u_i\circ\varphi\circ\varphi^{-1})}{\partial u_j}(\varphi(p)) = \frac{\partial u_i}{\partial u_j}(\varphi(p)) = \delta_{ij}.$$

Así entonces, sea $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{R}$, sea

$$a_1D_{x_1}(p) + \ldots + a_mD_{x_m}(p) = 0$$

una combinación lineal nula de elementos en T_pM^m, entonces para cualquier $f \in C^\infty(M^m, p)$, por consiguiente
$$[a_1 D_{x_1}(p) + \ldots + a_m D_{x_m}(p)](f) = 0$$
en especial
$$0 = [a_1 D_{x_1}(p) + \ldots + a_m D_{x_m}(p)](x_i) = a_i D_{x_i}(p) x_i = a_i,$$
Por lo tanto $\{D_{x_i}(p)\}_{1\leq i\leq m}$, es linealmente independiente en T_pM^m. **(1)**

Lema 5.6.1 *Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, a)$, $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, entonces existen funciones $g_1, \ldots, g_m \in C^\infty(\mathbb{R}^m, a)$, tales que*
$$f = f(a) + \sum_{j=1}^{m}(u_j - a_j)g_j.$$
en una vecindad de a. Además, $g_i(a) = D_i(a)(f)$.

Teorema 5.6.1 *Si $(x_1, \ldots, x_m) = (u_1 \circ \varphi, \ldots, u_m \circ \varphi)$, es un sistema de coordenadas, en $p \in M^m$, una tangente v de p, entonces*
$$v = \sum_{i=1}^{m} v(x_i) \cdot D_{x_i}(p).$$

Demostración
Sea $f \in C^\infty(M^m, p)$. Por el lema 5.6.1, para $f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(M^m, \varphi(p))$, entonces existen $g_1, \ldots, g_m \in C^\infty(M^m, \varphi(p))$ tales que
$$f \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)) + \sum_{j=1}^{m}(u_j - \varphi(p)_j)g_j.$$
en una vecindad de $\varphi(p)$ y $D_i(\varphi(p))(f \circ \varphi^{-1}) = g_i(\varphi(p))$. Sea U una vecindad de p, para todo $x \in U$, se tiene que

$$\begin{aligned}
f(x) =&(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\\
=&f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p))(\varphi(x)) + \sum_{j=1}^{m}(u_j(\varphi(x)) - u_j \circ \varphi(p)(\varphi(x)))g_i(\varphi(x))\\
=&f(p) + \sum_{j=1}^{m}(x_j(x) - x_j(p))g_j \circ \varphi(x).
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
D_{x_i}(p)f =& \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p))\\
=& \frac{\partial\left(f(p)+\sum_{j=1}^{m}(u_j-\varphi(p)_j)g_j\right)}{\partial u_i}(\varphi(p))\\
=& \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\partial u_j}{\partial u_i}(\varphi(p))\,g_j(\varphi(p))+\left(u_j(\varphi(p))-u_j\circ\varphi(p)\right)\frac{\partial g_j}{\partial u_i}(\varphi(p))\right]\\
=& g_i\circ\varphi(p).
\end{aligned}
$$

Entonces para $v\in T_pM^m$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
v(f) =& v(f(p))+\sum_{j=1}^{m}\left(x_j-x_j(p)g_j\circ\varphi\right)\\
=& \sum_{j=1}^{m}v\left((x_j-x_j(p))g_j\circ\varphi\right)\\
=& \sum_{j=1}^{m}v(x_j)g_j\circ\varphi(p)+(x_j(p)-x_j(p))v(g_j\circ\varphi)\\
=& \sum_{j=1}^{m}v(x_j)D_{x_j}(p)(f)
\end{aligned}
$$

□

Observación

- El teorema nos dice que $\{D_{x_i}(p)\}_{1\leq i\leq m}$, es una base para T_pM^m.
- La dimensión del espacio tangente, es la dimensión de la variedad diferenciable M^m.
- Se tiene trivialmente que
$$
\begin{array}{cccc}
F: & T_pM^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^{dim(M^m)}\\
 & D_{x_i}(p) & \longmapsto & e_i.
\end{array}
$$
es un isomorfismo natural entre T_pM^m y $\mathbb{R}^{dim(M^m)}$, como espacios vectoriales.

Sea $C_p(M^m)$ el conjunto de curvas diferenciables de la variedad M^m, α, tal que $\alpha(0)=p$. El siguiente teorema nos mostrará que por cada tangente, v, viene asociada una curva, α, tal que $v=\alpha_*(0)$

Teorema 5.6.2 *Sea M^m, una variedad diferenciable de dimensión m, y p un elemento de M^m, tenemos que*
$$
T_pM=C_p(M^m)/\sim=\left\{\alpha_*(0)\ :\ \alpha \textit{ es un representante de } [\alpha]\in C_p(M^m)/\sim\right\}.
$$

Demostración
Sean $(x_1, \dots, x_m) = (u_1 \circ \varphi, \dots, u_m \circ \varphi)$, un sistema de coordenadas de $p \in U \subset M^m$[1] y v una tangente en p. Entonces por el teorema 5.6.1, $v = \sum_{i=1}^{m} a_i D_{x_i}(p)$, para algunos $a_i \in \mathbb{R}$. Construyamos la función diferenciable $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, como $g(s) = (x_1(p) + sa_1, \dots, x_m(p) + sa_m)$, entonces existe $\epsilon > 0$, tal que $g_\epsilon = g|_{(-\epsilon,\epsilon)} \subseteq V$, por ser abierto en $\mathbb{R}^m$. Definimos la siguiente curva

$$\gamma : \varphi^{-1} \circ g_\epsilon : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U$$

la cual es diferenciable en M^m con $\gamma(0) = p$.
Veamos que $\gamma_*(0) = v$, sea $f \in C^\infty(M^m, p)$.

$$\begin{aligned}
\gamma_*(0)(f) &= (f \circ \gamma)'(0) \\
&= (f \circ \varphi^{-1} \circ g_\epsilon)'(0) \\
&= D\left(f \circ \varphi^{-1}\right)(g_\epsilon(0)) \cdot Dg_\epsilon(0) \\
&= \begin{pmatrix} D_{x_1}(p)f & \cdots & D_{x_m}(p)f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_i D_{x_i}(p)f \\
&= v(f).
\end{aligned}$$

□

5.6.1 La Derivada de Funciones Diferenciables

Definición 5.6.5 *Si $h : M^m \longrightarrow N^m$, es una función diferenciable entre variedades, definimos la* **derivada** *de h en p, como la aplicación lineal*

$$\begin{array}{rccl}
dh_p : & T_pM^m & \longrightarrow & T_{h(p)}N^m \\
& f & \longmapsto & dh_p(v)(f) = v(f \circ h).
\end{array}$$

para v una tangente en p, y $f \in C^\infty(N^m, h(p))$.

Una de las ventajas que nos brinda el teorema 5.6.2, es su evidente sabor geométrico. Mantiene a los vectores ligados a curvas en M^m. Esto permite, por ejemplo, dar una definición alternativa de la diferencial de una transformación diferenciable, más precisamente
Basta tomar

$$dh_p\left(\gamma_*(0)\right) = (h \circ \gamma)_*(0)$$

Donde $\gamma \in C_p(M^m)$.

[1] Donde $\varphi : U \subset M^m \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$.

Problema 5.6.2 *Demostrar que las definiciones ante dichas de la derivada de h, coinciden si* $v = \gamma_*(0)$*, para alguna* $\gamma \in C_p(M^m)/\sim$

Solución
Sea $f \in C^\infty(N^m, h(p))$, entonces

$$\begin{aligned} dh_p(v)(f) =& v(f \circ h) \\ =& \gamma_*(0)(f \circ h) \\ =& (f \circ h \circ \gamma)'(0) \\ =& (h \circ \gamma)_*(0)(f) \\ =& dh_p(\gamma_*(0))(f). \end{aligned}$$

□

Lema 5.6.2 *La aplicación derivada*

$$\begin{array}{rccl} dh_p : & T_pM^m & \longrightarrow & T_{h(p)}N^m \\ & f & \longmapsto & dh_p(v)(f) = v(f \circ h). \end{array}$$

es lineal.

Demostración
Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $u, v \in T_pM^m$, y $f \in C^\infty(M^m, h(p))$, se tiene que

$$\begin{aligned} dh_p(au + bv)(f) =& (au + bv)(f \circ h), \text{ definición de derivada} \\ =& a(u(f \circ h)) + b(v(f \circ h)) \\ =& a(dh_p(u)(f)) + b(dh_p(v)(f)) \\ =& (a(dh_p(u)) + b(dh_p(v)))(f). \end{aligned}$$

□

Proposición 5.6.1 *Sea* $h : M^m \longrightarrow N^n$ *una funión entre variedades, y sea* $p \in M^m$*. Si* $(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (u_1 \circ \varphi, u_2 \circ \varphi, \ldots, u_m \circ \varphi)$*, es un sistema de coordenadas en* $p \in M^m$ *y* $(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (u_1 \circ \theta, u_2 \circ \theta, \ldots, u_n \circ \theta$*, es un sistema de coordenadas en* $h(p) \in N^n$*, pruebe que la matriz de* dh_p *respecto a las bases* $\left\{D_{x_j}(p)\right\}_{1\leq j\leq m}$ *y* $\left\{D_{y_i}(h(p))\right\}_{1\leq i\leq n}$*, es la matriz jacobiana* $[D_{x_j}(p)(y_i \circ h)] \in M_{n,m}(\mathbb{R})$

Demostración
Sea f una función de valores reales, definida en una vecindad de $p \in M^m$, y $g_i = u_i \circ \theta \circ h \circ \varphi^{-1}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
dh_p(D_{x_j}(p))(f) =& D_{x_j}(p)(f \circ h) \\
=& \frac{\partial(f \circ h \circ \varphi^{-1})}{\partial u_j}(\varphi(p)) \\
=& \frac{\partial(f \circ \theta^{-1} \circ \theta \circ h \circ \varphi^{-1})}{\partial u_j}(\varphi(p)) \\
=& D(f \circ \theta^{-1})(\theta(h(p))) \cdot D(\theta \circ h \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot e_j, \quad \text{donde } e_j \in \mathbb{R}^m \\
=& [D_{y_1}(h(p))f \cdots D_{y_n}(h(p))f] \cdot Jac_g(\varphi(p)) \cdot e_j \\
=& [D_{y_1}(h(p))f \cdots D_{y_n}(h(p))f] \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_j}(\varphi(p)) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_j}(\varphi(p)) \end{pmatrix} \\
=& \sum_{i=1}^{n} D_{y_i}(h(p))f \cdot \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\varphi(p)).
\end{aligned}
$$

Y dado que

$$
D_{x_j}(p)(y_i \circ h) = \frac{\partial(u_i \circ \theta \circ h \circ \varphi^{-1})}{\partial u_j}(\varphi(p)) = \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\varphi(p)).
$$

□

Observación

1. Nótese que $Jac_g(\varphi(p))$, significa la matriz jacobiana de la función diferenciable g, en $\varphi(p)$ es decir:

$$
Jac_g(\varphi(p)) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\varphi(p))\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(\varphi(p)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m}(\varphi(p)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1}(\varphi(p)) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial u_m}(\varphi(p)) \end{pmatrix}
$$

2. Quieran lo que quieran decir los simbolos $D_{x_j}(p) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$, ya sean derivadas de clases de curvas o derivaciones que actúan sobre funciones, el caso es que formalmente se transforman por medio de una matriz jacobiana, es decir como ya se conocia en el calculo multivariable cuando el simbolo tenía otro significado.

Problema 5.6.3 *Consideremos la función*

$$
\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & (x,y) & \longmapsto & x^3 + xy + y^3 + 1.
\end{array}
$$

1. *Compute* $df_p : T_p\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}$

2. *En cual de lo puntos* $(0,0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$*, es* df_p*, inyectiva ó sobreyectiva?*

Solución

1. Por definición tenemos que

$$df\left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{f(p)} = (3x^2+y)(p)\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{f(p)}$$

y

$$df\left(\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(p)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{f(p)} = (x+3y^2)(p)\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{f(p)}$$

2. Para $p=(0,0)$ se tiene que $f(p)=1$, así entonces

$$df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(0,0)}\right) = 0\cdot\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_1,\quad df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(0,0)}\right) = 0\cdot\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_1$$

   Por otra parte para $p=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, se tiene que $f(p)=\frac{32}{27}$, luego

$$df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\frac{32}{27}}$$

   y

$$df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\frac{32}{27}}$$

   Por consiguiente df_p es sobreyectiva en $p=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. Y en general df_p no puede ser inyectiva puesto que $dim(\mathbb{R}^2) > dim(\mathbb{R})$.

Todo elemento $f \in C^\infty(M^m,p)$, da origen, via su diferencial, a un elemento del espacio dual de T_pM^m, $T_pM^{m^*}$. Identificamos $T_{f(p)}\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$, mediate $[a\cdot D(f(p)) \longleftrightarrow a]$ y así $df_p : T_pM^m \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}\cong\mathbb{R}$. Notemos que bajo esta identificación para $v\in T_pM^m$, tenemos que $df_p(v)=v(f)$. Ahora, si $(x_1,\dots,x_m)$, es un sistema de coordenadas en $p\in M^m$, tenemos que

$$dx_{i_p}(D_{x_j}(p)) = D_{x_j}(p)x_i = \delta_{ij},$$

entonces $\left\{dx_{1_p},\dots,dx_{m_p}\right\}$ es una base para $T_pM^{m^*}$. En efecto

$$df_p(v) = v(f) = \sum_i v(x_i)\cdot D_{x_i}(p)f = \sum_i (D_{x_i}(p)f)d_{x_{i_p}}(v).$$

Definición 5.6.6 *Sea M^m variedad diferenciable, y sea tambien $p\in Mm$, dada una carta (U,φ) de p en M^m, al espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, generado por $\left\{dx_1\big|_p,\dots,dx_m\big|_p\right\}$, se le denomina espacio cotangente de M^m en p y se denota por $T_pM^{m^*}$, por ser el dual de T_pM^m. Los elementos de $T_pM^{m^*}$ se llaman **uno formas**.*

Observación

- Para efectos de notación $dx_i\big|_p = dx_{i_p}$.

Dado que todos los espacios vectoriales(V) de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ se pueden tratar como un $\mathbb{R}^k$(para algún entero $k = dim(V)$), y una vez fijadas las bases las operaciones se realizan coordenada a coordenada como si casi todo fuera vectores en $\mathbb{R}^k$.

Ejemplo 5.6.1 $(2dx_{1_p} + 3dx_{2_p})(2\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p - \frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p) = 1$ *porque* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$

Problema 5.6.4 *Sea*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x^2 - 2y, 4x^3y^2). \end{array}$$

1. *Compute* $df_{(1,2)}$,
2. *Encuentre* $df((4\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})\big|_{(0,1)})$

Solución

1. Dado que $p = (1, 2) \longrightarrow f((1, 2)) = (-3, 16)$, luego

$$\begin{aligned} df(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{(1,2)}) =& \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,2)}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(-3,16)} \\ =& \left(2x, 12x^2y^2\right)\Big|_{(1,2)}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(-3,16)} \\ =&(2, 48)\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(-3,16)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} df(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{(1,2)}) =& \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,2)}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(-3,16)} \\ =& \left(-2, 8x^3y\right)\Big|_{(1,2)}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(-3,16)} \\ =&(-2, 16)\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(-3,16)} \end{aligned}$$

Por tanto

$$df_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 48 & 16 \end{pmatrix}$$

2. Notemos primeramente que $df((4\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})\big|_{(0,1)}) = df_{(0,1)}(4\frac{\partial}{\partial x}\big|_{(0,1)} - \frac{\partial}{\partial y}\big|_{(0,1)})$ Así

$$df((4\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})\big|_{(0,1)}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 48 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 176 \end{pmatrix}\Bigg|_{f(0,1)} = 10\frac{\partial}{\partial x}\Bigg|_{(-3,16)} + 176\frac{\partial}{\partial y}\Bigg|_{(-3,16)}$$

Definición 5.6.7 *Sea $(M^m, \mathfrak{A})$, una variedad diferenciable de dimensión m. Un subconjunto N^k de $M^m(k \leq m)$, es una subvariedad diferenciable de M^m, de dimensión k, si para todo $p \in N^k$, existe una vecindad U, tal que $p \in U \subset M^m$, y una carta (φ, U) de dimensión m, $\varphi : U \subset M^m \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$, tal que*

$$p \in \varphi^{-1}(V \cap \mathbb{R}^k) = N^k \cap U.$$

Observación

- Para tal N^k, subvariedad de M^m, formamos un atlas de N^k, $\mathfrak{A}_*$, tomando como cartas

  $$\widehat{\varphi} \,:\, \widehat{U} = N^k \cap U \longrightarrow V \cap \mathbb{R}^k;\;\; \widehat{\varphi}(x) = \varphi(x),$$

  donde φ, es una carta de dimensión m en M^m.

Definición 5.6.8 *Una transformación diferenciable $f : M^n \longrightarrow N^n$, entre variedades diferenciables es un difeomorfismo local en p si y sólo si existe una vecindad U de p en M^n, tal que $f|_U : U \longrightarrow f(U)$, es un difeomorfismo.*

Ahora disponemos de más herramientas para trabajar con las variedades diferenciables y podemos extender con facilidad algunos resultados clásicos del cálculo. Se tiene en principio el siguiente resultado

Teorema 5.6.3 (Teorema de la función inversa para variedades)
Sea $h : M \longrightarrow M'$ una función diferenciable entre variedades de dimensión m y m′ respectivamente supongamos que para algún $p \in M'$

$$dh_p \,:\, T_pM \longrightarrow T_{h(p)}M'$$

es un isomorfismo. Entonces existe una vecindad U, de p,y una vecindad V de $h(p)$, tal que

$$h|_U \,:\, U \longrightarrow V$$

es un difeomorfismo. En particular $m = m'$.

Ver [[6], pág. 24] □

Luego generalizando el resultado anterior obtenemos:

Teorema 5.6.4 (Teorema de la función implícita para variedades)
Sea $h : M \longrightarrow M'$ una función diferenciable entre variedades de dimensión m y m′ respectivamente supongamos que para algún $q \in M'$

$$dh_p \,:\, T_pM \longrightarrow T_{h(p)}M'$$

es sobreyectiva para todo $p \in N = h^{-1}(q)$. Entonces $N \subseteq M$, es una subvariedad de dimensión $m - m'$ y el espacio de $p \in N$ esta dado por $T_pN = ker(dh_p)$.

Ver [[6], pág. 31-32] □

Capítulo 6

Grupos de Lie

Últimamente, cada vez más difundido el punto de vista, que muchas de las partes de las matemáticas no son otra cosa que la teoría de invariantes de grupos especiales

(Marius Sophus Lie, 1893)

Presentamos a continuación nuestro último Capítulo el cual trata a los grupos de Lie; un grupo algebraico con estructura de variedad diferenciable y compatibilidad entre ambas estructuras es decir que las operaciones del grupo son infinitamente diferenciables. Se estudia el teorema principal Todo grupo de Lie de Matrices en un grupo de Lie, y se da a conocer que el reciproco es falso para ello construiremos un contraejemplo y exponemos para ello al grupo de Heisenberg de tamaño tres. Este grupo describe una de las más importantes diferencias entre los grupos de Lie y grupos de Lie de matrices.

6.1 Grupos de Lie

Definición 6.1.1 *Un* **Grupo de Lie**, *es una variedad diferenciable G de dimensión finita que es también un grupo algebraico*[1], *y tal que las aplicaciones naturales(del grupo) mult* $: G \times G \longrightarrow G,\ mult((g, h)) = gh$, *e inversa inv* $: G \longrightarrow G,\ inv(g) = g^{-1}$*(con* $G \times G$ *es la variedad producto) que son la multiplicación y la aplicación por inversos, son diferenciables(infinitamente diferenciable).*

Podemos también brindar una definición alternativa sin abusar del lenguaje

Definición 6.1.2 *Un* **Grupo de Lie**, *es un par* (G, μ), *donde* G *es una variedad diferenciable y* $\mu : G \times G \longrightarrow G$, *es la operación que define el producto del grupo, de tal manera que la aplicación*

$$\rho : G \times G \longrightarrow G,\ mult((g, h)) = \rho(g, h^{-1}) = gh^{-1},$$

[1] ver definición 1.1.1

es diferenciable(infinitamente diferenciable).

Observación
La dimensión del grupo de Lie, es la dimensión de la variedad diferenciable G.
Un grupo de lie de dimensión cero(como variedad) se llama discreto. Tiene la topología trivial, y es a lo mas numerable, recíprocamente, un grupo(abstracto) numerable, es un grupo discreto.

Un grupo de Lie es en particular un grupo topológico[1]. La topología es la inducida en el grupo por la estructura de variedad. Cabe preguntarse bajo que condiciones se puede asegurar que un grupo topológico admite una estructura de variedad diferenciable que lo hace grupo de Lie. Este problema constituye el **quinto problema de Hilbert**[2]. Esencialmente se puede enunciar el resultado de la forma siguiente:
Un grupo de topológico Hausdorff G, es un grupo de Lie si y solo si es variedad topológica.

Esto es equivalente a decir que G es localmente compacto, y que no contiene subgrupos arbitrariamente pequeños[3]

Definición 6.1.3 *Sea G un grupo de Lie. Un subgrupo cerrado H de G que también es una subvariedad de G, es un* **subvariedad de Lie** *de G*

Ejemplos de Grupos de Lie

En los primeros ejemplos no hay dificultad en probar la diferenciabilidad de la operación de grupo, puesto que las variedades involucradas son abiertos de un espacio euclideo, tal y como lo observamos en los ejemplos de variedades[4].

Ejemplo 6.1.1 $\mathbb{R}^n$ *con la suma es un grupo de Lie, ya que es una variedad diferenciable de dimensión n, es un grupo topológico aditivo y las operaciones de adición y cambio de signo son diferenciables.*

Ejemplo 6.1.2 *En general cualquier espacio vectorial real V de dimensión finita es un grupo de Lie. La estructura diferenciable resulta de identificarlo con* $\mathbb{R}^{dim(V)}$*, mediante la carta global dada por las coordenadas respecto a la base arbitraria, y aplicación aditiva* $f : V \times V \longrightarrow V, \;\; f(u, v) = u - v$*, es de clase* C^∞

Ejemplo 6.1.3 *Del problema 3.4.1, y del ejemplo 5.2.6, tenemos que* $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$*, es un grupo topológico, además una variedad diferenciable. Por otra parte tenemos que*

$$\begin{array}{rccl} mult: & S^1 \times S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & (e^{(i\theta)}, e^{(i\varphi)}) & \longmapsto & e^{(i\theta)} e^{(i\varphi)} = e^{(i(\theta+\varphi))}. \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} inv: & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & e^{(i\theta)} & \longmapsto & e^{(-i\theta)}. \end{array}$$

[1] Ver definición 2.1.1
[2] En 1952 el quinto problema de Hilbert fue resuelto conjuntamente por Gleason y por D. Montgomery y L. Zippin. Ver [[3], pág. 24]
[3] Es decir que el elemento neutro $e \in G$, posee un entorno compacto que no contiene subgrupos no triviales.
[4] Ver la sección 5.2

están bien definidas y son diferenciables. Por lo tanto $(S^1, \mathfrak{A}, \cdot)$, *es un grupo de Lie de dimensión* 1.

Proposición 6.1.1 *Sean* G_1, G_2, *grupos de Lie. Entonces* $G = G_1 \times G_2$, *con el producto* $(x, y) \cdot (m, n) = (x \cdot n, y \cdot m)$, *y el inverso dado por* $(x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1})$, *es un grupo de Lie.*

Demostración De la sección 5.4, tenemos que $G = G_1 \times G_2$, es una variedad diferenciable, respecto a la estructura diferenciable dada por la variedad producto.

además las aplicación

$$\begin{array}{rccc} mult: & (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) & \longrightarrow & (G_1 \times G_2) \\ & ((g, h), (g', h')) & \longmapsto & (gg'^{-1}, hh'^{-1}). \end{array}$$

es C^∞. Por tanto $G = G_1 \times G_2$ es un grupo de Lie. □

Ejemplo 6.1.4 *Del ejemplo 6.1.3,* $(S^1, *)$,*es un grupo de Lie bajo la multiplicación compleja, se tiene que*

$$S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$$

el toro $\mathbb{T}^2$, *es un grupo de Lie, de dimensión* 4. *(Ver ejemplo 1.1.3)*

Ejemplo 6.1.5 *Generalizando el ejemplo anterior, tenemos que* $S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1 = T^n$ *el toro, es un grupo de Lie de dimensión* $2n$.

Ejemplo 6.1.6 $(GL_n(\mathbb{K}), *)$ *es un grupo de Lie con respecto al producto de matrices. En efecto*

a) $(GL_n(\mathbb{K}), *)$ *es un grupo con respecto al producto de matrices.*
Si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, *entonces* $A * B = AB \in GL_n(\mathbb{K})$, *para* $A, B, C \in GL_n(\mathbb{K})$ *se cumple* $A(BC) = (AB)C$*(la propiedad asociativa), la matriz identidad* $I = [\delta_{ij}]$*(donde* δ_{ij} *es el símbolo de Kronecker, definido por:* $\delta_{ij} = 1$ *si* $i = j$ *y* $\delta_{ij} = 0$, *si* $i \neq j$*) esta contenida en* $GL_n(\mathbb{K})$, *además dada una matriz* $A \in GL_n(\mathbb{K})$, *es nosingular y por tanto* A^{-1} *es nosingular, así* $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$.

b) $GL_n(\mathbb{K})$ *es una variedad diferenciable.*
De los ejemplos de variedades diferenciables se tiene que $GL_n(\mathbb{K})$ *es una variedad diferenciable ya que es una subvariedad diferenciable del espacio lineal* $M_n(\mathbb{K})$.

c)Sea $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$, *el espacio producto, ya que* $GL_n(\mathbb{K})$ *también es un grupo algebraico, y las aplicaciones multiplicación e inverso*

$$\begin{array}{rccc} mult: & GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ & (A, B) & \longmapsto & AB. \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} inv: & GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ & A & \longmapsto & A^{-1}. \end{array}$$

están bien definidas y son continuas, además

$$\begin{array}{ll} (A, B) \longmapsto AB & (AB)_{ij} \text{ son polinomios en } A_{ij}, B_{ij} \\ A \longmapsto A^{-1} & (A^{-1})_{ij} \text{ son funciones racionales en } A_{ij} \end{array}$$

son diferenciables.

Ejemplo 6.1.7 *$SL_n(\mathbb{K})$ es un subgrupo de Lie de $GL_n(\mathbb{K})$. En efecto*
Sabemos que $SL_n(\mathbb{K}) = det^{-1}(\{1\}) \leq GL_n(\mathbb{K})$, donde $det : GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, es la función determinante, la cual es C^∞. Así sea $A \in SL_n(\mathbb{K}) = det^{-1}(\{1\})$, tenemos que la derivada de det esta dada por:

$$d(det)_A \ : \ T_A GL_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow T_1\mathbb{K} \cong \mathbb{K}.$$

Sea $\gamma \ : \ (a,b) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$, una curva C^∞, con $\gamma(0) = A$. Entonces

$$d(det)_A(\gamma'(0)) = (det \circ \gamma)'(0).$$

Sea $\gamma_0 \ : \ (a,b) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$, tal que $\gamma_0(0) = A^{-1}\gamma(t)$. Tenemos que $\gamma_0(0) = I_n$, y por el lema 3.3.1

$$(det \circ \gamma_0)'(0) = traza(\gamma'(0)).$$

Por lo tanto

$$(det \circ \gamma)'(0) = (det \circ A\gamma_0)'(0) = (det(A))(det \circ \gamma_0)'(0) = traza(\gamma'(0)).$$

Entonces $d(det)_A(X) = traza(A^{-1}X)$, es una función sobreyectiva, para toda

$$A \in det^{-1}(\{1\}) = SL_n(\mathbb{K})$$

siempre que la función traza es sobreyectiva. De este modo por el teorema de la función implícita $det^{-1}(\{1\}) = SL_n(\mathbb{K})$, es una subvariedad de $GL_n(\mathbb{K})$ y por tanto un subgrupo de Lie de $GL_n(\mathbb{K})$

Las buenas aplicaciones entre grupos se denominan homomorfismos, en la teoría de Lie no podría faltar su análogo más precisamente tenemos una extensión de la definición 2.5.1 para grupos de Lie.

Definición 6.1.4 *Sean G, H grupos de Lie, Un homomorfismo diferenciable o suave de grupos de Lie, $h : G \longrightarrow H$, es un homomorfismo continuo de grupos de Lie y una función diferenciable entre variedades si satisface:*

- *Un homomorfismo que es continuo y*
- *$h(G)$ es subgrupo de Lie de H.*

Decimos que h, es un isomorfismo de grupos de Lie si además es un difeomorfismo. Un isomorfismo de un grupo de Lie G en sí mismo se llama un automorfismo del grupo de Lie G.

Para G un grupo de Lie y $g \in G$, se definen las funciones

$L_g : G \longrightarrow G;$	$L_g = gx$	Traslación a izquierda.
$R_g : G \longrightarrow G;$	$R_g = xg$	Traslación a derecha.
$\chi_g : G \longrightarrow G;$	$\chi_g = gxg^{-1}$	Conjugación.

Proposición 6.1.2 *Para cada $g \in G$, las funciones L_g, R_g, χ_g son difeomorfismo con inversas*

$$L_g^{-1} = L_{g^{-1}}, \ R_g^{-1} = R_{g^{-1}}, \ \chi_g^{-1} = \chi_{g^{-1}}.$$

Demostración:
Ver [[1], pág. 188] □

6.2 Campos invariantes por traslaciones a la izquierda

Dado que un grupo de Lie G es una variedad diferenciable, podemos hablar de campos vectoriales en G y denotaremos por $\mathfrak{X}(G)$ al conjunto de los campos vectoriales diferenciables en el grupo de Lie G.

Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(G)$ se dice que es invariante por la izquierda si

$$dL_g(X(h)) = X(gh) \quad \forall g, h \in G,$$

Problema 6.2.1 *Considerar el T^1 del producto $T^1 \times \mathbb{R}^+$ del toro unidimensional por el grupo multiplicativo de los números reales positivos (de los cuales llaman el grupo de semejanzas del plano). Sea (θ, x), coordenadas locales. Demostrar que el campo de vectores*

$$\frac{\partial}{\partial\theta} + x\frac{\partial}{\partial x}$$

es invariante a izquierda

Solución

Ya que T^1 y $\mathbb{R}^+$, son grupos de Lie, y puesto que el producto directo de grupos de Lie es a la vez un grupo de Lie, se tiene que $T^1 \times \mathbb{R}^+$, es un grupo de Lie. Luego sea $(\theta, x) \in T^1 \times \mathbb{R}^+$ arbitrario y $(\alpha, a) \in T^1 \times \mathbb{R}^+$ un elemento fijo cualquiera, consideremos $L_{(\alpha,a)} : T^1 \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow T^1 \times \mathbb{R}^+$; $L_g = gx$, la traslación a izquierda definida por $L_{(\alpha,a)}((\theta, x)) = (\alpha + \theta, ax)$ por lo tanto se tiene que

$$dL_{(\alpha,a)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\alpha+\theta)}{\partial\theta} & \frac{\partial(\alpha+\theta)}{\partial x} \\ \frac{\partial(ax)}{\partial\theta} & \frac{\partial(ax)}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Dado que $X_{(\theta,x)} = \frac{\partial}{\partial\theta} + x\frac{\partial}{\partial x}$, ver figura 6.1
Luego dado que

$$dL_{(\alpha,a)} \circ X_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial\theta} + a\frac{\partial}{\partial x} = X_{(0,1)} \circ L_{(\alpha,a)} = X_{(\alpha,a)}.$$

Por consiguiente dado que (α, a) es arbitrario, tenemos que X es invariante a izquierda.

Problema 6.2.2 *Usar las coordenadas del campo de vectores*

$$\frac{\partial}{\partial x_i^j}, \quad i \leq i; \, j \leq n, \; en \, GL_n(\mathbb{R})$$

probar que el campo de vectores Y en $GL_n(\mathbb{R})$, de quién matriz de componentes en la identidad es $A = (a_i^j)$, y a que matriz de componentes es igual BA, donde los elementos $B = (b_i^j$, de $GL_n(\mathbb{R})$, es un campo invariante por la izquierda

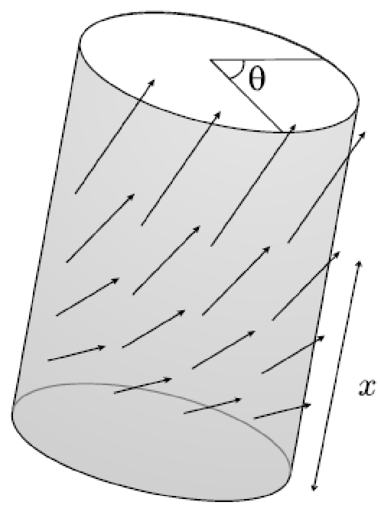


Figura 6.1: El campo vectorial $\frac{\partial}{\partial\theta} + x\frac{\partial}{\partial x}$ en el grupo de las semejanzas del plano .

6.3 Algebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G.

La importancia del concepto álgebra de Lie[1], reside en que hay un álgebra de Lie especial (que además es finito dimensional), asociada a cada grupo de Lie y que las propiedades del grupo quedan reflejadas en las de su álgebra[2]

Denotemos por $X(h) = X_h$ a un elemento de T_hG, por lo que

$$dL_{g_h} : T_hG \longrightarrow T_{gh}G.$$

Los campos vectoriales invariantes izquierda forman una subálgebra de Lie, del álgebra de Lie, todos los campos C^∞ y esta es la que se llama **álgebra de Lie** de G, denotada por $\mathfrak{g}$. Podemos pensar a cada campo C^∞ invariante a izquierda como una familia de vectores tangentes X_g uno para cada $g \in G$; dado que $X_g = dL_gX_e$, el campo esta determinado por X_e. Veremos que la función $X \longrightarrow X_e$, con e el elemento identidad del grupo de Lie es un isomorfismo de espacios vectoriales de $\mathfrak{g}$ en T_eG, el espacio tangente a la identidad de G. Finalmente T_eG hereda la estructura de álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ vía este isomorfismo. Más precisamente tenemos que:

Proposición 6.3.1 *Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ el espacio vectorial de todos los campos de vectores invariantes a izquierda, entonces*

1. *$\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial real y $\mathfrak{g} \cong T_eG$ vía el isomorfismo de espacios vectoriales $\mathfrak{g} \longrightarrow T_eG$ dado por $\alpha(X) = X_e$.*

2. *Los campos invariantes a izquierda son diferenciables.*

[1] Ver definición 4.1.4

[2] *Por ejemplo los grupos de Lie conexos y simplemente conexos están completamente determinados por sus álgebras de Lie y el estudio de estos se reduce en parte al estudio de aquellas que en bastantes aspectos son mas sencillas.*

3. *El corchete de dos campos invariantes a izquierda es invariante a izquierda.*

4. *El espacio $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie que identificamos con T_eG, el álgebra de Lie de G.*

Demostración

1. Es claro que $\mathfrak{g}$, es un espacio vectorial real y que α, es lineal; veamos que $\alpha(X)$, es inyectiva: Supongamos que $\alpha(X) = \alpha(Y)$, entonces para cada $g \in G$, tenemos que $dL_g(X_e) = dL_g(Y_e)$, luego

$$X_g = dL_g(X_e) = dL_g(Y_e) = Y_g.$$

Por lo tanto, $X = Y$. Veamos que α es sobreyectiva: sea $x \in T_eG$, definamos un campo de vectores invariantes a izquierda por $X_g = dL_g(x)$, para cada $g \in G$; entonces $\alpha(X) = x$.

2. Veamos que los campos de vectores invariantes a izquierda son diferenciables: es suficiente probar que para todo campo invariante X, y toda $f \in C^\infty(G)$, Xf es C^∞, para lo cual queremos ver esta como una composición de funciones C^∞. En efecto:
Para cualquier $g \in G$

$$Xf(g) = X_g(f) = dL_g(X_e)f = X_e(f \circ L_g)(*)$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que $(*)$ es C^∞. La idea fundamental es tomar un campo C^∞, Y, tal que $Y_e = X_e$, y reemplazar a X por Y en la anterior. Definamos las **aplicaciones inclusiones** de $G \longrightarrow G \times G$, por

$$i_e^1(g) = (g, e), \quad \text{e} \quad i_\tau^2(g) = (\tau, g).$$

Finalmente, si m es la multiplicación en el grupo, veamos que $(*)$ coincide con la función $\big((0, Y)(f \circ m) \circ i_e^1\big)$ que es C^∞ por ser composición de funciones C^∞. En lo siguiente, notemos que $(0, Y)$ es un campo C^∞ en $G \times G$, el primer paso es la evaluación de un campo en una función aplicada en el punto (g, e) y tal que las n primeras derivadas parciales son cero:

$$\begin{aligned}\big((0, Y)(f \circ m) \circ i_e^1(g)\big) =& (0, Y)_{(g,e)}(f \circ m)\\ =& 0_e(f \circ m \circ i_e^1) + Y_e(f \circ m \circ i_g^2)\\ =& Y_e(f \circ m \circ i_g^2)\\ =& X_e(f \circ m \circ i_g^2)\\ =& X_e(f \circ L_g) = (*)\end{aligned}$$

Por lo tanto $g \longmapsto X_e(f \circ L_g)$, es C^∞.

3. El corchete de dos campos invariantes a izquierda es invariante a izquierda: Es consecuencia del siguiente hecho más general: Sea $\varphi : G \longrightarrow H$ un difeormorfismo entre variedades diferenciables G y H, sean X e Y campos de vectores en G, entonces

$$d\varphi[X, Y] = [d\varphi(X), d\varphi(Y)]$$

aplicado a $G = H$ grupo de Lie, $\varphi = L_g$ la traslación a izquierda por un g arbitrario.

4. Esta afirmación es consecuencia inmediata de lo anterior: por lo tanto $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, isomorfa a T_eG, el álgebra de Lie de G.

$\square$

El siguiente resultado muestra que el problema de probar que un homomorfismos de grupos abstractos, entre grupos de Lie, es de Lie se reduce a comprobar que es continuo.

Teorema 6.3.1 *Sea G y H grupos de Lie y sea $\varphi : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos abstractos; si φ es continuo entonces φ es C^∞.*

Ver [[6], pág. 109] $\square$

Teorema 6.3.2 *Sean G y H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, respectivamente, y con G simplemente conexo[1]; sea $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces existe un único homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$, tal que $d\varphi = \psi$.*

Demostración
Ver [[6], pág. 101] $\square$

6.4 La función exponencial en un grupo de Lie

Sea G, un grupo de Lie. Un subgrupo uniparamétrico[2] de G es un homomorfismo de grupos de Lie de $\mathbb{R}$ en G. Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G y sea $X \in \mathfrak{g}$; la función

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & \lambda \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} & \longmapsto & \lambda X \end{array}$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie de $\mathbb{R}$ en $\mathfrak{g}$, donde pensamos a $\mathbb{R}$ como el álgebra de Lie del grupo $\mathbb{R}$. Dado que $\mathbb{R}$ es simplemente conexo el teorema 6.3.2, asegura la existencia de un único subgrupo uniparamétrico de G:

$$\exp_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

tal que

$$d\exp_X\left(\lambda \frac{d}{dr}\Big|_{r=0}\right) = \lambda X.$$

En otras palabras, $t \longrightarrow \exp_X(t)$ es el único subgrupo uniparamétrico tal que la derivada en $t = 0$ es X_e. se define la **función exponencial** como

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & G \\ & X & \longmapsto & \exp_X(1) \end{array}$$

[1] Un espacio topológico (X, τ), se dice simplemente conexo si es conexo por caminos, cuyo grupo fundamental es trivial. Ejemplo: Todo espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.

[2] Ver sección 3.4

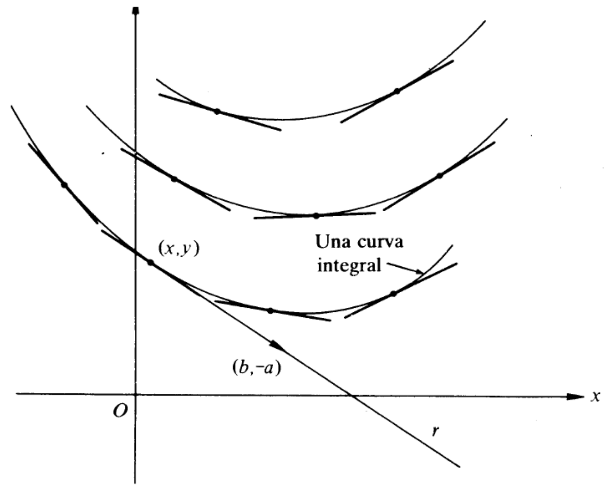


Figura 6.2: Curva integral de un campo de vectores.

Por otra parte, recordemos que si X es un campo de vectores C^∞ y $c(t)$ una curva C^∞, c se dice una curva integral del campo X si $c'(t) = X_{c(t)}$(ver figura 6.2), para todo t. Lo anterior se puede resumir en la forma siguiente. Sea $\mathfrak{g} = T_eG$ álgebra de Lie de G; para cada $v \in T_eG$, sea X el único campo invariante a izquierda tal que $X_e = v$, sea $c(t)$ la única curva integral de X, tal que, en particular, verifica $c'(0) = v$; se define $\exp(v) = c(1)$, o sea,

$$\begin{array}{rccc} \exp: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & G \\ & v & \longmapsto & c(1) \end{array}$$

Si se quiere definir a $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$, pensando a $\mathfrak{g}$ como el álgebra de Lie de campos invariantes a izquierda, se toma $v = X_e$ y la definición es la misma.

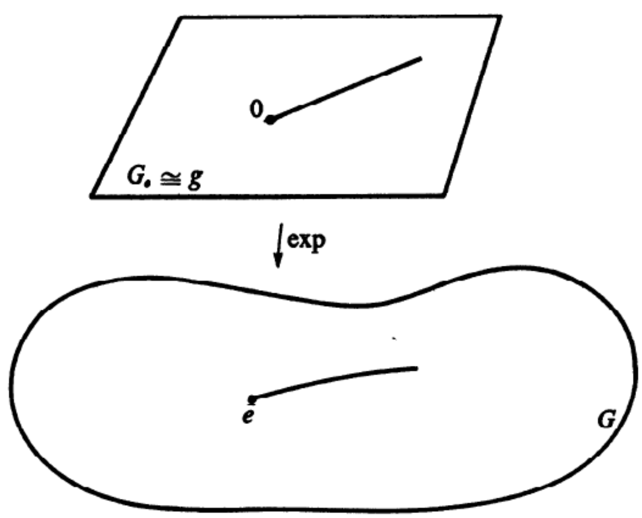


Figura 6.3: Función exponencial en un grupo de Lie.

Teorema 6.4.1 *El álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K})$ es el álgebra de Lie del grupo de Lie general $GL_n(\mathbb{K})$.*

Demostración Por el teorema 4.5.1, sabemos que $\mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K})$ es un algebra de Lie; por otra parte sabemos que el grupo de Lie $GL_n(\mathbb{K})$ tiene su álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_eG$ = espacio de campos invariantes a izquierda, se quiere demostrar que $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K})$.

Calculamos los campos invariantes a izquierda.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz que identificamos con un elemento del tangente a la identidad(I) en la forma

$$A = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial}{\partial_{ij}}\bigg|_I$$

Notemos que si $p \in GL_n(\mathbb{K})$ una matriz invertible, entonces existe un ϵ positivo tal que $c(t) = I_n + tp$ es invertible[1], para todo t de módulo menor que ϵ. Podemos tomar esa curva y al calcular la derivada obtenemos

$$c'(t) = c'(0) = p.$$

Sea X un campo de vectores de la forma

$$X_p = X(p) = \sum_{ijk} x_{ik}(p) a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\bigg|_p.$$

para cada $p \in GL_n(\mathbb{K})$, donde $a_{kj} \in \mathbb{R}$. Notemos que un campo tal es invariante y que

$$X_I = X(I) = \sum_{ijk} x_{ik}(I) a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\bigg|_I = \sum_{ijk} \delta_{ik}(I) a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\bigg|_I = \sum_{ijk} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\bigg|_I.$$

Dado que todo campo invariante queda completamente determinado por su valor en la identidad, todo campo invariante a izquierda es de esta forma para una única elección de coeficientes a_{ij}.
El isomorfismo es la composición siguiente

$$X \longmapsto X(I) = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\bigg|_I \longmapsto A = [a_{ij}].$$

Denotemos por X_A al único campo invariante a izquierda asociado a la matriz A. Y evidentemente tenemos que

$$[X_A, X_B] = X_{[A,B]}$$

donde a la izquierda es el corchete de Lie de campos y $[A, B]$ es el conmutador de matrices. $\square$.

Denotemos por e^A, la exponencial de matrices definida en la sección 3.1, así entonces

Proposición 6.4.1 *Dada una matriz $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ el subgrupo $1-$paramétrico $c : \mathbb{R} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, está dado por $c(t) = e^{tA}$; en consecuencia $exp(A) = e^A$; con*

$$e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{p!} A^p.$$

[1] Ver demostración del teorema 4.5.1

Es decir la función exponencial

$$\exp : \mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

es la exponencial usual de matrices.

Demostración
Dada $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$, sea $X \in \mathfrak{g}$ a quien le corresponde $A = X_e$ y $X_g = gA,\ \forall g \in G$. Del teorema anterior conocemos los campos invariante a izquierda en $G = GL_n(\mathbb{C})$. Luego:

1. Del lema 3.1.1, e^{tA}, está bien definida.

2. $c(t) = e^{tA}$ es la única curva integral del campo X asociado a una matriz A y tal que $c(0) = I_n$ lo cual es evidente. Calculamos

$$\begin{aligned} c'(t) =& \frac{d}{dt}e^{tA} \\ =& e^{tA}A \\ =& X_{c(t)}. \end{aligned}$$

Identificando $T_{I_n}GL_n(\mathbb{C})$ con $\mathfrak{gl}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$, la formula anterior nos dice que la curva e^{tA}, es la curva integral del único campo invariante a izquierda que tiene valor A en la identidad(e). □

proporcionamos el siguiente resultado sin demostración, pero fundamental para tenerlo en consideración;

Teorema 6.4.2 *La exponencial abstracta de cualquier grupo de Lie de matrices coincide con la exponencial usual de matrices.*

6.5 Los grupos de Lie de matrices son grupos de Lie

En está sección se demostrará que todo grupo de Lie de matrices es un grupo de Lie. Para ello comencemos definiendo

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA) \in G\}$$

donde G es un grupo de Lie de matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.

Mas adelante se muestra que $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{g}}$, para cualquier G grupo de Lie matricial, sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 6.5.1 *El conjunto* $\widehat{\mathfrak{g}}$ *es una subálgebra de Lie real de* $M_n(\mathbb{R})$

Demostración
Por definición $\widehat{\mathfrak{g}}$ es cerrado bajo la multiplicación por escalares.
Si $A, B \in \widehat{\mathfrak{g}}$ y $r \geq 1$ se tiene que los siguientes elementos están en G:

$$\left(\exp(\frac{1}{r}A)\right)\left(\exp(\frac{1}{r}B)\right),\ \left(\exp(\frac{1}{r}A)\right)\left(\exp(\frac{1}{r}B)\right)^{r};$$
$$\left(\exp(\frac{1}{r}A)\right)\left(\exp(\frac{1}{r}B)\right),\ \left(\exp(\frac{1}{r}A)\right)\left(\exp(\frac{1}{r}B)\right)^{r2}$$
$$\left(\exp(\frac{1}{r}A)\right)\left(\exp(\frac{1}{r}B)\right),\ \left(\exp(\frac{1}{r}A)\right)\left(\exp(\frac{1}{r}B)\right)^{r^3}.$$

Por la formula de Trotter[1], para $t \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\exp(tA + tB) = \lim_{r\to\infty}\left(\exp\left(\frac{1}{r}tA\right)\exp\left(\frac{1}{r}tB\right)\right)^{r}.$$

y por la formula del conmutador

$$\begin{aligned}\exp\left(t[A,B]\right) &= \exp\left([tA,B]\right)\\ &= \lim_{r\to\infty}\left(\exp\left(\frac{1}{r}tA\right)\right)\left(\exp\left(\frac{1}{r}B\right)\right)\left(\exp\left(-\frac{1}{r}tA\right)\right)\left(\exp\left(-\frac{1}{r}B\right)\right)^{r^2}.\end{aligned}$$

Siempre que G, sea un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{R})$, entonces todos los límites están en G. Esto muestra que $\widehat{\mathfrak{g}}$ es una subálgebra de Lie real de $M_n(\mathbb{R})$. □

Proposición 6.5.1 *Para un grupo de Lie de matrices, G, $\widehat{\mathfrak{g}}$ es una subálgebra de Lie real de $\mathfrak{g} = T_{I_n}G$.*

Demostración
Sea $A \in \widehat{\mathfrak{g}}$. Entonces la curva

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G; \quad \gamma(t) = \exp\left(tA\right),$$

satisface que $\gamma(0) = I_n$, y $\gamma'(0) = A$, por lo tanto $A \in \mathfrak{g}$. □

Como se ha visto en el capítulo 4, la función exponencial exp, es un enlace entre el álgebra de Lie y su grupo de Lie de matrices. Una observación muy importante es que exp es inyectiva cuando es restringida a la bola abierta $N_{M_n(\mathbb{K})}(\mathbf{0}; r)$, escogiendo $r \in (0, 1/2)$. Así podemos escoger un $r_1 > 0$,

[1]Para $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, se tiene la formula de Trotter dada por:

$$\exp(A + B) = \lim_{r\to\infty}\left(\exp\left(\frac{1}{r}A\right)\exp\left(\frac{1}{r}B\right)\right)^{r}.$$

y la formula del Conmutador:

$$\exp[A,B] = \lim_{r\to\infty}\left(\exp\left(\frac{1}{r}A\right)\right)\left(\exp\left(\frac{1}{r}B\right)\right)\left(\exp\left(-\frac{1}{r}A\right)\right)\left(\exp\left(-\frac{1}{r}B\right)\right)^{r^2}.$$

para su demostración ver [[1],Pág. 196].

tal que si $A,\ B \in N_{M_n(\mathbb{K})}(\mathbf{0}; r_1)$, entonces $\exp(A)\exp(B)$ está contenido en $\exp\Big(N_{M_n(\mathbb{K})}(\mathbf{0}; r)\Big)$. Por lo tanto existe un único $C \in N_{M_n(\mathbb{K})}(\mathbf{0}; r)$ tal que

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(C).$$

Existe una formula muy útil para la matriz exponencial, la formula de Campbell-Hausdorff (ver [[5], pág. 152]), para expresar a C como una serie de potencias en términos de A y B. A continuación se presenta un resultado que justifica los primeros dos términos.

Proposición 6.5.2 *Supongamos las matrices* $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$*, con norma menor que* $1/2$*, tal que* $\exp(A)\exp(B) = \exp(C)$*. Entonces*

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + S.$$

para una matriz S*, que satisface*

$$\|S\| \leq 65\,(\|A\| + \|B\|)^3\,.$$

Demostración
Ver [[1], pág. 193-195] □

presentamos a continuación nuestro resultado principal

Teorema 6.5.2 *La función exponencial,* $\exp\,:\,\widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow G$*, aplica biyectivamente una vecindad de* $\mathbf{0}$ *en* $\widehat{\mathfrak{g}}$ *en una vecindad de* I_n *en* G*.*

Demostración
Sea V un subespacio vectorial complementario de $\widehat{\mathfrak{g}}$, esto es, un subespacio real de $M_n(\mathbb{R})$, tal que

$$\widehat{\mathfrak{g}} \oplus V = M_n(\mathbb{R})$$

por lo tanto todo elemento P de $M_n(\mathbb{R})$, se escribe de manera única de la forma $P = A + B$, con $A \in \widehat{\mathfrak{g}},\ B \in V$, además $\widehat{\mathfrak{g}} \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

Consideremos la función suave

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \widehat{\mathfrak{g}} \oplus V & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ & (A, B) & \longmapsto & \exp(A)\exp(B), \end{array}$$

que aplica la matriz nula de $M_n(\mathbb{R})$, en la matriz identidad de $GL_n(\mathbb{R})$.

Haciendo isomorfismos respectivos podemos ver a ϕ como una función entre $\mathbb{R}^{n^2}$, y un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Encontremos la matriz jacobiana de ϕ en $\mathbf{0}$ evaluada en un punto $A + B \in \widehat{\mathfrak{g}} \oplus V = M_n(\mathbb{R})$, luego la derivada direccional de ϕ en $\mathbf{0}$ en la dirección $A + B$, esta dada por:

$$D\phi(\mathbf{0})(A+B) = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{\phi(\mathbf{0}+t(A+B)) - \phi(\mathbf{0})}{t},$$
$$= \frac{d}{dt}\phi(t(A+B))\,|_{t=0}.$$

Tomando A, B y $t \in \mathbb{R}$ pequeños, con norma menor que $1/2$, por proposición 6.5.2, tenemos que

$$\phi(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB) = \exp(C(t))$$

para una única matriz[1] $C(t) \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $C(0) = \mathbf{0}$ y

$$\left\| C(t) - tA - tB - \frac{t^2}{2}[A,B] \right\| \leq 65\,|t|^3\,(||A|| + ||B||)^3$$

ó

$$||C(t) - tA - tB|| \leq \frac{t^2}{2}\left([A+B] + 130\,|t|\,(||A|| + ||B||)^3\right)$$

Obtenemos así que $\frac{d}{dt}C(t)|_{t=0} = A + B$ siempre que

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{||C(t) - C(0) - tA - tB||}{t} = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{||C(t) - tA - tB||}{t} = \mathbf{0}.$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\phi(t(A+B))\,|_{t=0} = \frac{d}{dt}\exp(C(t))\,|_{t=0} = \exp(C(0)) \cdot \frac{d}{dt}C(t)|_{t=0} = A + B.$$

Por consiguiente $D\phi(\mathbf{0})$ es la función identidad en una vecindad pequeña de $\mathbb{R}^{n^2}$. Por otra parte siempre que para cualquier $A \in M_n(\mathbb{R})$, existen $\{A_i\}_{1\leq i\leq m}$con norma menor que $1/2$ tal que

$$A = \sum_{i=1}^{m} A_i.$$

Se puede asegurar por la linealidad de $D\phi(\mathbf{0})$, que dicha transformación es la función identidad en todo $\mathbb{R}^{n^2}$. Realizando la respectiva correspondencia entre las matrices jacobianas, $D\phi(\mathbf{0}) \longleftrightarrow d\phi_0$, podemos asegurar que $d\phi_0$ es la función identidad en $M_n(\mathbb{R})$. Entonces por el teorema de la función inversa 5.6.3 existe una vecindad de $\mathbf{0}$ en $M_n(\mathbb{R})$ tal que $\phi|_U$ es un difeomorfismo.

Tenemos que ver si

$$\exp|_{U\cap\widehat{\mathfrak{g}}} = \phi|_{U\cap\widehat{\mathfrak{g}}} : U \cap \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \phi|_{U\cap\widehat{\mathfrak{g}}}(U \cap \widehat{\mathfrak{g}})$$

aplica biyectivamente a una vecindad de I_n en G. Para verificar esto, supongamos lo contrario, es decir, existe una sucesión en G, $\{U_n\}_{n\geq 1}$, tal que $U_n \longrightarrow I_n$, pero $U_n \notin \phi(\widehat{\mathfrak{g}})$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Tomando

[1] Que depende de t

n suficientemente grande sabemos que $U_n \in \phi(U)$ siempre que ϕ es U, es un difeomorfismo. Por consiguiente existen $A_n \in \widehat{\mathfrak{g}}$ y $B_n \in V - \{\mathbf{0}\}$ tal que

$$\phi(A_n + B_n) = U_n.$$

Por ser ϕ en U un difeomorfismo tenemos que si $U_n \longrightarrow I_n$, se tendrá que

$$\phi^{-1}(U_n) = A_n + B_n \longrightarrow \phi^{-1}(I_n) = \mathbf{0}.$$

y esto implica que $A_n \longrightarrow \mathbf{0}$ y $B_n \longrightarrow \mathbf{0}$. Por definición de ϕ tenemos que

$$\phi(A_n + B_n) = \exp(A_n)\exp(B_n) = U_n \in G, \quad \text{ó}$$

$$\exp(B_n) = (\exp(A_n))^{-1}\, U_n \in G$$

Consideremos $\overline{B_n} = \frac{1}{||B_n||}B_n$, que es la esfera unitaria en $M_n(\mathbb{R})$, la cual es compacta, entonces existe una subsucesión convergente de $\left\{\overline{B_n}\right\}$. Ahora tomando $\overline{B_n} \longrightarrow B$, con B en la esfera unitaria de $M_n(\mathbb{R})$, $||B|| = 1$. Para

$$\left\{B_n \in \exp^{-1}(G)\right\} \text{ y } \left\{\frac{1}{||B_n||} \in \mathbb{R}\right\}$$

se obtiene que

$$\frac{1}{||B_n||}B_n = \overline{B_n} \longrightarrow B \in \widehat{\mathfrak{g}}.$$

Pero cada B_n y por lo tanto cada $\overline{B_n}$ está en V. Por ser V cerrado en $M_n(\mathbb{R})$, tenemos que $B \in V$. Por lo tanto $B \in \widehat{\mathfrak{g}} \cap V = \{\mathbf{0}\}$, pero esto genera una contradicción(ya que $||B|| = 1$).
Por lo tanto exp es un difeomorfismo de una vecindad de $\mathbf{0}$, $U \cap \widehat{\mathfrak{g}} \subseteq \widehat{\mathfrak{g}}$, en una vecindad de I_n, $\widetilde{U} = \exp\left(U \cap \widehat{\mathfrak{g}}\right) \subseteq G$. □

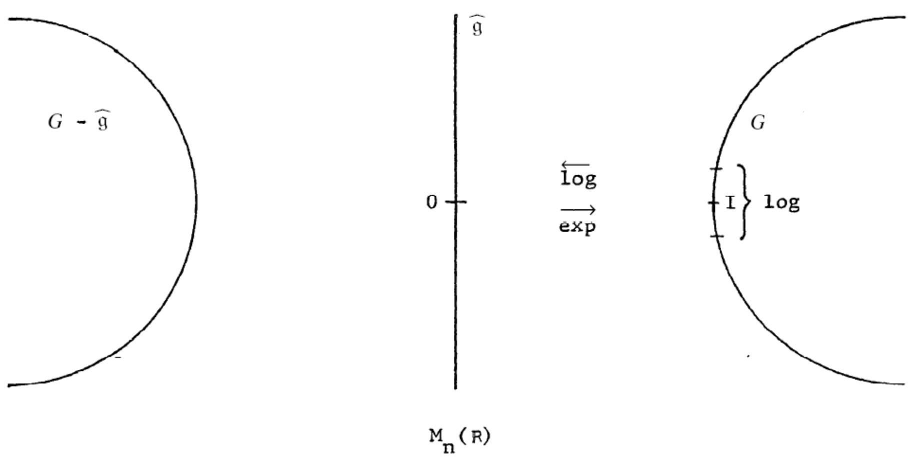


Figura 6.4: La aplicación exp.

Teorema 6.5.3 *Todo subgrupo de Lie matricial de $GL_n(\mathbb{R})$, es un subgrupo de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$*

Demostración
Sea $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$, un subgrupo de Lie de matrices, tenemos que probar que si G es una subvariedad de $GL_n(\mathbb{R})$. Por el teorema 6.5.2, tenemos que para algún $V \subseteq \widehat{\mathfrak{g}}$; $\exp|_V V \subseteq \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow U \subseteq G$, es un difeomorfismo. Luego $\widehat{\mathfrak{g}} \subseteq M_n(\mathbb{R})$ es un subespacio normado real de dimensión finita, tenemos que $\widehat{\mathfrak{g}}$ es una variedad diferenciable, y sus cartas vienen dadas por restricciones abiertas del homeomorfismo entre $\widehat{\mathfrak{g}}$ y $\mathbb{R}^{dim(\widehat{\mathfrak{g}})}$, tenemos que

$$\phi_g = \varphi \circ \exp^{-1} \circ L_{g^{-1}} : L_g(U) \subseteq G \longrightarrow \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^{dim(\widehat{\mathfrak{g}})}$$

es una carta de dimensión igual a $dim\,(\widehat{\mathfrak{g}})$ en $g \in G$. Por lo tanto
$\mathfrak{A} = \left\{\phi_g \ : \ g \in G\right\}$, es un atlas de dimensión igual a $dim(\widehat{\mathfrak{g}})$ para G. □

Lema 6.5.1 *Sea G un grupo de Lie de matrices entonces*

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ \forall t \ \in \ \mathbb{R}, \ \exp(tA) \ \in \ G\} = \mathfrak{g} = T_{I_n}G$$

Demostración

La dimensión de G, como variedad diferenciable, es la dimensión de sus cartas $dim(\widehat{\mathfrak{g}})$, la cual es igual a la dimensión de su álgebra de Lie asociada, según la definición 4.3.3, que es $dim(\mathfrak{g})$. Por lo tanto

$$dim(\widehat{\mathfrak{g}}) = dim(\mathfrak{g})$$

y dado que $\widehat{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}$ se tiene que $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$ □

6.6 El grupo de Heisenberg

A continuación mediante técnicas del álgebra lineal presentaremos al grupo de Heisenberg, importante en mecánica cuántica y teoría de operadores sobre espacios de Hilbert.
Sea

$$SUT_3(\mathbb{R}) = \{A \in GL_3(\mathbb{R}) : A \text{ es unipotente}\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Del teorema 2.2.1, sabemos que $SUT_3(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie de matrices de $GL_3(\mathbb{R})$. Ahora definamos también a

$$Z_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ z \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Note que Z_3 es un subgrupo normal de $SUT_3(\mathbb{R})$; en efecto:

Dado que para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego se tiene

$$Heis_3(\mathbb{R}) = \frac{SUT_3(\mathbb{R})}{Z_3}.$$

El grupo de Heisenberg de tamaño tres.

Teorema 6.6.1 *El grupo de Heisenberg de tamaño tres $Heis_3(\mathbb{R})$, es un grupo de Lie.*

Demostración

Por construcción tenemos que $Heis_3(\mathbb{R}) = \{gZ_3 \ : \ g \in SUT_3(\mathbb{R})\}$.
Sea ahora $\pi \ : \ SUT_3(\mathbb{R}) \longrightarrow Heis_3(\mathbb{R})$, el homomorfismo natural tal que

$$\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a & b+z \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ z \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Proporcionemos ahora a $Heis_3(\mathbb{R})$ de estructura topológica, diremos que

$$U \subseteq Heis_3(\mathbb{R}) \text{ es abierto si y solo si } \pi^{-1}(U) = SUT_3(\mathbb{R}) \text{ es abierto.}$$

$Heis_3(\mathbb{R})$ con esta topología es Hausdorff.
Sea ahora $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}$, y sea también B_{x_1,x_2,x_3} la bola abierta de tamaño $1/2$ y centro $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, es decir

$$B_{x_1,x_2,x_3} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ \left\|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\| = \sum_i |x_i - y_i| < 1/2\right\}$$

Evidentemente tenemos que

$$F = \{B_{x_1,x_2,x_3} \ : \ x_i \in \mathbb{Q}\}$$

Es un recubrimiento de $SUT_3(\mathbb{R})$ y además

$$\begin{array}{rccc} \phi_{a,b,c} : & U_{a,b,c} & \longrightarrow & \phi_{a,b,c}(U_{a,b,c}) \subseteq Heis_3(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z_3, \end{array}$$

define un homeomorfismo. En efecto

1. $\phi_{a,b,c}$ es inyectiva.
   Sean $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_{a,b,c}$, si

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 + z \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{Z} \right\}$$

   es igual a la clase

$$\begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_2 + z \\ 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{Z} \right\}$$

   Se debe tener que $x_1 = y_1$, $x_3 = y_3$, y $x_2 - y_2 \in \mathbb{Z}$ mas

$$|x_2 - y_2| \leq |x_2 - b| + |y_2 - b| < 1$$

   Por lo tanto

$$x_2 = y_2.$$

2. Por definición de la topología en $Heis_3(\mathbb{R})$ las funciones $\phi_{a,b,c}$, $\phi^{-1}_{a,b,c}$ son continuas.

Por otra parte tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \psi : & SUT_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & (x_1, x_2, x_3), \end{array}$$

es trivialmente un difeomorfismo. Entonces

$$\psi \circ \phi^{-1}_{a,b,c} : \phi(U_{a,b,c}) \subseteq Heis_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \psi(U_{a,b,c}) \subseteq \mathbb{R}^3$$

es una carta de dimensión tres en $Heis_3(\mathbb{R})$. Por consiguiente dado que $\psi \circ \phi^{-1}_{a,b,c} \circ \phi_{x,y,z} \circ \psi^{-1}$ es la función identidad en algún abierto de $\mathbb{R}^3$, tenemos que

$$\mathfrak{A} = \left\{ \psi \circ \phi^{-1}_{a,b,c} : a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$$

Es un atlas de dimensión tres para $Heis_3(\mathbb{R})$.
Por lo tanto $(Heis_3(\mathbb{R}), \mathfrak{A})$ es una variedad diferenciable de dimensión tres. Además las aplicaciones

$$\begin{array}{cccc} m : & Heis_3(\mathbb{R}) \times Heis_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & Heis_3(\mathbb{R}) \\ & (xZ_3, yZ_3) & \longmapsto & xyZ_3, \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} i: & Heis_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & Heis_3(\mathbb{R}) \\ & xZ_3 & \longmapsto & x^{-1}Z_3, \end{array}$$

son diferenciables. Por tanto $Heis_3(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie. □

Ahora recordando que el centro de un grupo(algebraico) G denotado por $z(G)$ viene dado por : $z(G) = \{g \in G : xg = gx, \ \ \forall x \in G\}$. Tenemos el siguiente resultado de teoría de grupos

Proposición 6.6.1 *Si G es un grupo y J es un subgrupo de $z(G)$, se tiene necesariamente que J es un subgrupo normal de G. En particular $z(G)$ es un subgrupo normal de G.*

Demostración
ver [[20], pág. 92] □

Se define también al subgrupo derivado ó subgrupo conmutador de G, denotado por G' por :
$G' = \left\{g \in G : g = xyx^{-1}y^{-1}, \ \ \forall x, y \in G\right\}$, y tenemos

Proposición 6.6.2 *Si G es un grupo, el subgrupo derivado G', de G es normal en G y $\frac{G}{G'}$ es abeliano. Además si N es un subgrupo normal de G, $\frac{G}{N}$ es abeliano si y solo si G' es un subgrupo de N.*

Demostración
ver [[20], pág. 176] □

Ahora presentamos un resultado inmediato

Proposición 6.6.3 *Las siguientes igualdades se satisfacen:*

1. $z\left(SUT_3(\mathbb{R})\right) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\}$, *es el centro de* $SUT_3(\mathbb{R})$.
2. $z\left(SUT_3(\mathbb{R})\right) \subseteq SUT_3(\mathbb{R})'$, *es el subgrupo derivado de* $SUT_3(\mathbb{R})$.
3. $z\left(Heis_3(\mathbb{R})\right) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z_3 : b \in \mathbb{R}\right\}$, *es el centro de* $Heis_3(\mathbb{R})$.
4. $z(Heis_3(\mathbb{R})) \subseteq Heis_3(\mathbb{R})'$.

De la proposición anterior es trivial darse cuenta que $z(Heis_3(\mathbb{R})) = \dfrac{z\left(SUT_3\mathbb{R}\right)}{Z_3}$, y por consiguiente $z(Heis_3(\mathbb{R}))$ es isomorfo al grupo circular $(S^1, *) = \mathbb{T}$. Tomemos la función

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ & t & \longmapsto & e^{2\pi i t}. \end{array}$$

Sea ρ el isomorfismo sobreyectivo definido por

$$\begin{array}{rccc} \rho: & SUT_3\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & (x, y). \end{array}$$

Esta función tiene como kernel a $z(SUT_3\mathbb{R})$. Dado que Z_3, es un subgrupo(algebraico) de $z(SUT_3\mathbb{R}) = ker(p)$, existe un homomorfismo sobreyectivo de Lie;

$$\widehat{\rho} : Heis_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

que satisface $\widehat{\rho} \circ \pi = \rho$, donde π es el homomorfismo natural entre $SUT_3\mathbb{R}$ y $Heis_3(\mathbb{R})$.

En este caso el isomorfismo $z(Heis_3(\mathbb{R})) \cong \mathbb{T}$, esta dado por

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & z(Heis_3(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z_3 & \longmapsto & e^{2\pi i t}. \end{array}$$

Por consiguiente una clase

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z_3 \in Heis_3(\mathbb{R}),$$

puede ser denotada por $[x, y, e^{2\pi i t}]$.Es decir que un elemento de $Heis_3(\mathbb{R})$ tendrá la forma $[x, y, z]$, para $x, y \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{T}$. El elemento unidad en $Heis_3(\mathbb{R})$ es $1 = [0, 0, 1] = I_3Z_3$

Proposición 6.6.4 *La multiplicación, inversos y conmutadores en $Heis_3(\mathbb{R})$ están dados por*

1. $[x_1, x_2, x_3][y_1, y_2, y_3] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3y_3e^{2\pi x_1 y_2}]$,
2. $[x, y, z]^{-1} = [-x, -y, z^{-1}e^{2\pi i x y}]$,
3. $[x_1, x_2, x_3][y_1, y_2, y_3][x_1, x_2, x_3]^{-1}[y_1, y_2, y_3]^{-1} = [0, 0, e^{2\pi i(x_1 y_2 - x_2 y_1)}]$.

Demostración
Ver [[1], pág 205] □.

6.7 Existencia de grupos de Lie que no son grupos de Lie de matrices

Históricamente, en matemáticas las teorías son el producto de respuestas a un intento de satisfacer el deseo insaciable de la mente científica que no permitan excepciones.

En la sección anterior se construyo el grupo de Heisenberg, como un cociente de grupos de Lie de matrices, el siguiente resultado nos demuestra que este grupo de Lie, no es un grupo de Lie de Matrices, es decir que $Heis_3(\mathbb{R})$ no es un subgrupo cerrado del grupo Lineal general $GL_n(\mathbb{C})$ complejo de tamaño n.

Teorema 6.7.1 *No existen homomorfismos continuos $\varphi : Heis_3(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ con kernel trivial, $ker(\varphi) = I_nZ_3$*

Demostración

Supongamos que $\varphi : Heis_3(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ es un homomorfismo continuo con kernel trivial, y sea n el mínimo entero para el cual esto sucede. Para cada $g \in Heis_3(\mathbb{R})$, la matriz $\varphi(g)$, actúa sobre $\mathbb{C}^n$ de la manera siguiente

$$\begin{array}{ccc} Heis_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (g, v) & \longmapsto & \varphi(g)v, \end{array}$$

El grupo circular unitario del plano complejo $(S^1, *) = \mathbb{T}$, tiene un generador topológico; un elemento $z_0 \in \mathbb{T}$, tal que su subgrupo generado;

$$\langle z_0 \rangle = \left\{ z_0^k : k \in \mathbb{Z} \right\},$$

Es denso en $\mathbb{T}$, y dado que $e^{2\pi i r}$ es un generador topológico de $\mathbb{T} = U(1)$, para $r \in \mathbb{Q}$ fijo.
Dado que el isomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \sigma & : z(Heis_3(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z_3 & \longmapsto & e^{2\pi i t}, \end{array}$$

identifica al centro de $Heis_3(\mathbb{R})$, $z(Heis_3(\mathbb{R}))$ con $\mathbb{T}$, sea $z_0 \in z(Heis_3(\mathbb{R})) \cong \mathbb{T}$ un generador topológico de $z(Heis_3(\mathbb{R})) \cong \mathbb{T}$, y λ un valor propio de $\phi(z_0)$, con vector propio v.
Tomemos $|\lambda| \geq 1$, reemplazando, si es necesario, z_0 por z_0^{-1}, si $|\lambda| \geq 1$ y dado que

$$\varphi(z_0^k)v = \varphi(z_0)^k v = \varphi(z_0)^{k-1}\lambda v = \lambda^k v,$$

se obtiene entonces

$$\left\| \varphi(z_0^k) \right\| = \text{máx} \left\{ \frac{|\varphi(z_0)^k v}{|v|} : v \in \mathbb{C}^n - \{\mathbf{0}\} \right\} \geq |\lambda|^k,$$

por lo tanto $\left\| \varphi(z_0^k) \right\| \longrightarrow \infty$, cuando $k \longrightarrow \infty$, lo cual implica que $\varphi(\mathbb{T})$ no es acotada, pero esto es contradictorio siempre que $\mathbb{T}$ es compacto y φ es continua. Así $|\lambda|$ tiene norma 1, luego $|\lambda| = 1$.
Sea $g \in Heis_3(\mathbb{R})$, cualquiera, entonces

$$\varphi(z_0)\varphi(g)v = \varphi(z_0 g)v = \varphi(g z_0)v = \varphi(g)\varphi(z_0)v = \lambda\varphi(g)v,$$

lo cual muestra que $\varphi(g)v$ es un vector propio de $\varphi(z_0)$ para el valor propio λ.
Sean

$$V_\lambda^k = \left\{ v \in \mathbb{C}^n : (\varphi(z_0) - \lambda I_n)^k\, v = 0 \right\} \text{ y}$$

$$V_\lambda^k = \bigcup_k V_\lambda^k,$$

Es fácil darse cuenta que

$$V_\lambda^1 \subseteq V_\lambda^2 \subseteq V_\lambda^3 \subseteq \ldots \subseteq V_\lambda^k \subseteq \ldots$$

El conjunto V_λ, es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$, el cual es cerrado bajo la acción de las matrices $\varphi(g)$, con $g \in Heis_3(\mathbb{R})$, es decir, si v está en V_λ, entonces $\varphi(g)v$ está en V_λ. Esto se tiene ya que si v está en V_λ existe un $k > 0$ para el cual

$$(\varphi(z_0) - \lambda I_n)^k\, v \;=\; 0,$$

Así

$$\begin{aligned}
(\varphi(z_0) - \lambda I_n)^k\, \varphi(g)v &= (\varphi(z_0) - \lambda I_n)^{k-1}\, (\varphi(z_0)\varphi(g) - \lambda\varphi(g))\, v \\
&= (\varphi(z_0) - \lambda I_n)^{k-1}\, (\varphi(z_0 g) - \lambda\varphi(g))\, v \\
&= (\varphi(z_0) - \lambda I_n)^{k-1}\, (\varphi(g z_0) - \lambda\varphi(g))\, v \\
&= (\varphi(z_0) - \lambda I_n)^{k-1}\, (\varphi(g)\varphi(z_0) - \lambda\varphi(g))\, v \\
&= (\varphi(z_0) - \lambda I_n)^{k-1}\, (\varphi(g)\,(\varphi(z_0) - \lambda I_n))\, v \\
&=\varphi(g)\,(\varphi(z_0) - \lambda I_n)^k\, v \\
&=\mathbf{0}.
\end{aligned}$$

por lo tanto $\varphi(g)v \in V_\lambda$. Escojamos $k_0 \geq 1$ el más grande entero para el cual exista $v_0 \in V_\lambda$, que satisfaga,

$$(\varphi(z_0) - \lambda I_n)^{k_0}\, v_0 = \mathbf{0}, \;\text{ pero }\; (\varphi(z_0) - \lambda I_n)^{k_0-1}\, v_0 \neq \mathbf{0}.$$

Si $k_0 > 1$,

$$\mathbf{0} = (\varphi(z_0) - \lambda I_n)\,(\varphi(z_0) - \lambda I_n)\,(\varphi(z_0) - \lambda I_n)^{k_0-2}\, v_0,$$

Sean $u \;=\; (\varphi(z_0) - \lambda I_n)\,(\varphi(z_0) - \lambda I_n)^{k_0-2}\, v_0$ y $v = (\varphi(z_0 - \lambda I_n)^{k_0-2}\, v_0$ vectores no nulos en V_λ tales que

$$\varphi(z_0)u \;=\; \lambda u + v, \quad \varphi(z_0)v = \lambda v.$$

Dado que $v \neq \mathbf{0}$ y

$$\begin{aligned}
\varphi(z_0^k)u &=\varphi(z_0)^k u \\
&=\varphi(z_0)^{k-1}(\lambda u + v) \\
&=\lambda\varphi(z_0)^{k-1}u + \varphi(z_0)^{k-1}v \\
&=\lambda\varphi(z_0)^{k-1}u + \lambda^{k-1}v \\
&=\lambda^k u + k\lambda^{k-1}v,
\end{aligned}$$

se obtiene que

$$\left\|\varphi(z_0^k)u\right\| = \left\|\varphi(z_0)^k u\right\| \geq |\lambda u + kv| \longrightarrow \infty$$

cuando $k \longrightarrow \infty$. Esta afirmación es una contradicción dado que $\varphi(\mathbb{T})$ es acotada, entonces $k_0 = 1$ y V_λ es simplemente el espacio vectorial de los vectores propios de $\varphi(z_0$ para el valor propio λ.

Escogiendo una base para V_λ, obtenemos que

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\varphi} & Heis_3(\mathbb{R}) \times V_\lambda & \longrightarrow & V_\lambda \\ & (g, v) & \longmapsto & \varphi(g)v, \end{array}$$

Es una acción lineal o representación del grupo de Lie $Heis_3(\mathbb{R})$ sobre el espacio vectorial V_λ, por lo tanto la función

$$\varphi : \quad Heis_3(\mathbb{R}) \quad \longrightarrow \quad GL_{dim(V_\lambda)}(\mathbb{C})$$

Es un homomorfismo continuo con kernel trivial tal que $\varphi(z_0) = \lambda\lambda I_{dim(V_\lambda)}$ y por la minimalidad de n, necesariamente se debe tener que $dim(V_\lambda) = n$. Es más, por la continuidad de φ tenemos que para todo $z \in \mathbb{T}$, $\varphi(z) = (\text{escalar})I_n$. Y puesto que dado $z \in \mathbb{T}$, z es un conmutador, $z = ghg^{-1}h^{-1}$ para $g, h \in Heis_3(\mathbb{R})$ y tanto la función determinante det como φ, son homomorfismos tenemos que:

$$det(\varphi(z)) = det(\varphi(ghg^{-1}h^{-1})) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{T}.$$

Por consiguiente, existe una función continua $\mu : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tal que para todo $z \in \mathbb{T}$,

$$\varphi(z) = \mu(z)I_n, \;\; \text{y} \;\; \mu(z)^n = det(\varphi(z)) = 1$$

Como $\mathbb{T}$ es un subconjunto arco conexo de $\mathbb{C}$, se tiene que $\mu(z) = 1, \; \forall z \in \mathbb{T}$. Luego necesariamente $\varphi(z) = I_n, \;\; \forall z \in \mathbb{T}$, por lo tanto $\mathbb{T} \subseteq ker(\varphi) = \varphi^{-1}(I_n)$; lo cual es contradictorio con la suposición de que el kernel de φ es trivial. Por lo tanto no existen homomorfismos continuos entre $Heis_3(\mathbb{R})$ y $GL_n(\mathbb{C})$, $\varphi : Heis_3(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, con kernel trivial, $ker(\varphi) = I_nZ_3$. □

Con el teorema anterior se da por finalizado este trabajo de investigación, cumpliéndose los objetivos trazados en nuestra propuesta. En estudios posteriores se ha logrado establecer algunas condiciones para que un grupo de Lie sea un grupo de Lie de matrices, en [[1], pág. 251] se establece que todo grupo de Lie compacto puede ser representado por un grupo de Lie de matrices.

Implicaciones de lo resultados expuestos

Antes de dar por terminado este trabajo de investigación de matemática, se resaltan algunos de los resultados más importantes aquí estudiados.

- Las matrices reales o complejas de $n \times n$, forman un espacio vectorial de dimensión n^2.
- Para $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\|A\| = \text{máx}\{|Ax| : |x| = 1\}$ es una norma para $M_n(\mathbb{K})$.
- Las transformaciones en $\mathbb{K}^n$ de la forma $x \longmapsto Ax + t$, para A, invertible y $t \in \mathbb{K}^n$ son llamadas transformaciones afines, las cuales preservan las líneas rectas, es decir, transforma espacios unidimensionales en espacios unidimensionales.

- La serie $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{p!}A^p$ converge absolutamente, a $\exp(A)$.
- Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)$ es una matriz en $GL_n(\mathbb{K})$, es decir, $\exp(A)$ es invertible.
- Un grupo de Lie de matrices es un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{K})$.
- El espacio tangente de un grupo de Lie de matrices, $\mathbf{G}$, en $g \in \mathbf{G}$ se define como $\mathbf{T}_g\mathbf{G} = \{\psi'(0) \in M_n(\mathbb{K}) : \psi \text{ es una curva derivable con } \psi(0) = g\}$.
- Un álgebra de Lie; es un espacio vectorial con una aplicación bilineal la cual es antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi.
- El álgebra de Lie de un grupo de Lie de matrices sobre $\mathbb{R}$, $G \subseteq GL_n(\mathbb{K})$, viene dado por

$$\mathfrak{g} = T_I G = \widehat{\mathfrak{g}} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \ \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA) \in G\}.$$

- Sea M^m, una variedad diferenciable de dimensión m, y p un elemento de M^m, tenemos que el espacio tangente a l variedad esta dado por:

$$T_p M = C_p(M^m)/\sim\, = \left\{\alpha_*(0) \, : \, \alpha \text{ es un representante de } [\alpha] \in C_p(M^m)/\sim\right\}.$$

- Un **Grupo de Lie**, es una variedad diferenciable G de dimensión finita que es también un grupo algebraico, y tal que las aplicaciones naturales(del grupo) $mult : G \times G \longrightarrow G$, $mult((g,h)) = gh$, e inversa $inv : G \longrightarrow G$, $inv(g) = g^{-1}$(con $G \times G$ es la variedad producto) que son la multiplicación y la aplicación por inversos, son diferenciables(infinitamente diferenciable).
- La función exponencial, $\exp : \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow G$, aplica biyectivamente una vecindad de $\mathbf{0}$ en $\widehat{\mathfrak{g}}$ en una vecindad de I_n en G.
- Todo grupo de Lie de matrices es un grupo de Lie.
- El grupo de Heisenberg, no es un grupo de Lie de matrices

Un trabajo de investigaciön, naturalmente al principio sólo sería
un trabajo aburrido y fastidioso, no me impediría
existir y saber que existo. Pero llegaría el momento en que
el trabajo estaría escrito, estaría detrás de mí,
y pienso que un poco de claridad caería sobre mi pasado.

(Parafraseando a Fernando Chamizo)

Apéndice A

Programa de Erlangen

Se conoce como Programa de Erlangen a un programa de investigación publicado por Félix Klein en 1872 con el título de *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Este Programa de Erlangen - Klein estaba en ese entonces en Erlangen - propuso un nuevo tipo de solución a los problemas de la geometría del tiempo. El artículo en sí supone un verdadero hito en la historia de la Geometría y de la Matemática en general.

Felix Klein (1849-1925).

El Programa de Erlangen

Con motivo de su ingreso como profesor en la Facultad de Filosofía y al Senado de la Universidad de Erlangen, Klein escribió una memoria en 1872 (que por cierto no llego a leer en público) que puede considerarse, junto a la Conferencia de Riemann y a los Elementos de Euclides, como los puntos esenciales del estudio de la Geometría. La idea de la memoria, conocida como el Programa de Erlangen, es bastante sencilla. Se trata de dar una definición formal de lo que es una geometría, más allá de la idea más o menos intuitiva que tenemos de ella. Ante la aparición de las nuevas geometrías no euclidianas, parece lógico preguntarse qué es la Geometría, máxime cuando la propia idea de la geometría euclidiana se había visto modificada desde la irrupción de los métodos algebraicos y analíticos. Empieza a no estar tan claro que la Geometría sea el estudio de puntos, líneas (rectas o curvas) y superficies, puesto que el propio Análisis Matemático (sobre todo en el estudio de Ecuaciones Diferenciales) parece que también estudia tales objetos. Por otra parte, los métodos analíticos y algebraicos también son aplicables a las geometrías no euclidianas. Hay, digamos, dos niveles de distinciones: por un lado, la de las geometrías no euclidianas y la geometría euclidiana, por otro lado, la distinción entre el método sintético, el algebraico y el analítico.

¿Qué es entonces la Geometría?

Klein da respuesta a esta pregunta introduciendo en la Geometría un nuevo concepto de carácter algebraico: el concepto de grupo. Un grupo es un conjunto G en el que hay definida una operación, es decir, una aplicación binaria que a cada par de elementos del conjunto le asigna otro elemento del conjunto (que será el resultado de operar dichos dos elementos). Mientras que la mayoría de la gente está familiarizada con las operaciones numéricas, les resulta difícil imaginar que puedan operarse puntos, rectas, etc. Puede hacerse, y no hay más que pensar en, por ejemplo, la operación **tomar el punto medio**, que a cada par de puntos le asigna el punto medio del segmento que une los dos primeros puntos. Para que un conjunto en el que haya una operación sea un grupo deben de cumplirse las condiciones de la definición 1.1.1.

El concepto de grupo no es invención de Klein, pero es él el que descubre un hecho fundamental que lo relaciona con las distintas geometrías: cada geometría es el estudio de ciertas propiedades que no cambian cuando se le aplican un tipo de transformaciones. Esas propiedades, por no cambiar, las denomina invariantes, y las transformaciones que a un invariante no le hacen cambiar han de tener estructura de grupo bajo la operación de composición (componer dos transformaciones es hacer una de ellas y aplicarle la otra transformación al resultado de la primera).

Así Klein descubre que, por ejemplo, la geometría euclidiana es el estudio de los invariantes mediante el grupo de los movimientos rígidos (como las simetrías, giros y traslaciones), que la geometría afín es el estudio de los invariantes mediante el grupo de las translaciones, que la geometría proyectiva es el estudio de los invariantes mediante el grupo de las proyectividades, e incluso que la Topología es el estudio de los invariantes mediante el grupo de las funciones continuas y de inversa continua, entre otras.

De hecho, Klein afirma que la comprensión de **tener una geometría, entonces hay un grupo principal** es más bien al revés. Uno a priori dice qué tipo de transformaciones admitirá (es decir, da el grupo) y todo lo demás se puede reconstruir a partir de él. Se demuestra incluso, que si uno da un subgrupo de las biyecciones de un conjunto en sí mismo isomorfo a algún grupo clásico (simetrías, translaciones, proyectividades) entonces todos los teoremas de esa geometría son válidos en este. El descubrimiento de Klein es fundamental, ya que por un lado nos permite clasificar las geometrías, comprendiendo cuál es una **subgeometría** de cual, por otro lado nos permite comprender qué es el estudio general de la Geometría (como disciplina matemática) y por último, pero no menos importante, es la confirmación de que los métodos sintético y algebraico no dan geometrías distintas, sino que realmente estudian la misma geometría en cada caso. Se pone fin así a la distinción entre el método sintético y el algebraico-analítico. En su época supuso la consagración de la Geometría Proyectiva como la Reina de las Geometrías. Nótese que es la primera vez que una ciencia (la Geometría) es capaz de autodefinirse rigurosamente y, por tanto, constituye uno de los puntos culminantes del espíritu humano en la historia.

Tomado de:

`http://es.wikipedia.org/wiki/Programa_de_Erlangen;`
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Klein.html.`

Bibliografía

[1] BAKER, ANDREW (2002). "*Matrix Groups. An Introduction to Lie group theory*". New York. U.S.A. Editorial Springer-Verlag.

[2] BOURBAKI, N. (1972). "*Groupes et algèbres de Lie*". Chapitres 2 et 3. New York. U.S.A. Editorial Springer-Verlag.

[3] FREUDENTHAL, HANS & De VRIES, H. (1969). "*Linear Lie Groups.*", New York and London. Editorial Academic Press.

[4] KOSMAN-SCHWARZBACH, YVETTE (2010). "*Groups and Symmetries from finite Groups to Lie Groups*". New York. U.S.A. Editorial Springer-Verlag.

[5] STILLWELL, JHON. (2000). Naive Lie Theory. New York. U.S.A. Editorial Springer-Verlag.

[6] WARNER, FRANK W. (1983). "*Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*". New York. U.S.A. Editorial Springer-Verlag.

[7] MIMURA, M. & TODA, HIROSI (1991). "*Topology of Lie Groups, I and II*". Rhode Island. USA. American Mathematical Society.

[8] MUNKRES, JAMES R.(2002). "*Topología*". Madrid. España. Editorial Pearson Educación.

[9] GITLER, SAMUEL (1979). "*Topología Diferencial*". Oaxtepec. Mexico. Editorial I.P.N.

[10] CANTERO, ÁLVARO. (2004). "*Variedades, tensores y Física*". Disponible: http://alqua.org/people/alvaro

[11] CARTAN, E. (1976). Un Centenario: Sophus Lie. En F. de Lionnais (ed.) Las grandes corrientes del pensamiento matemático. EUDEBA.

[12] STUBHAUG, A. (2002). "*A. The Mathematician Sophus Lie: It was the audacity of my thinking*". New York. U.S.A. Editorial Springer-Verlag.

[13] EINSTEIN, ALBERT. (1983), " *A. Sidelights on Relativity*". New York. U.S.A. Editorial Dover.

[14] GALAVIZ, I., GARCIA-COMPEÁN, H., & MORENO, G. (2006). "*Introductory Lectures on Lie Groups and Lie Algebras*". AIP Conference Proceedings, 809(1), 44-63. doi:10.1063/1.2160969.

[15] CURTIS, MORTON. L. (1984). "*Matrix Groups*". New York. U.S.A. Editorial Springer-Verlag.

[16] GROVE C. LARRY(2002). "*Classical Groups and Geometric Algebra*". Rhode Island. U.S.A. Editorial American Mathematical Society.

[17] CURTIS, MORTON. L. (1990). "*Abstract Linear Algebra*". New York. U.S.A. Editorial Springer-Verlag.

[18] FRALEIGH, JHON B. (1987). "*Algebra Abstracta Primer Curso*". Addison Wesley.

[19] HERSTEIN, I. N. (1870). "*Algebra Moderna*". Distrito Federal, México, Editorial Trillas.

[20] DORRONSORO, J. & HERNÁNDEZ, E.(1996). "*Números, grupos y anillos*". Salamanca, Madrid, Editorial Addison-Wesley / Universidad Autónoma de Madrid.

[21] BUENO, P. HAMILTON. (2006). "*Álgebra Linear*". Rio de Janeiro. Brasil. Sociedad Brasileira de Matemática.

[22] FERNÁNDEZ PÉREZ, CARLOS.(1992). "*Ecuaciones Diferenciales I*". Madrid. España. Editorial Pirámide, S.A.

Indice de figuras

Índice alfabético