UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN TITULADO:

“ESTUDIO DE CUÁDRICAS CON GEOMETRÍA PROYECTIVA”

PRESENTADO POR:
REINA MARITZA PLEITEZ VÁSQUEZ
ANA VIDAL ROMERO CUADRA

PARA OPTAR AL TÍTULO:
LICENCIATURA EN MATEMATICA.

CIUDAD UNIVERSITARIA, SAN SALVADOR, ABRIL DE 2010.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR : ING. RUFINO ANTONIO QUEZADA SÁNCHEZ

SECRETARIO GENERAL : LIC. DOUGLAS VLADIMIR ALFARO CHÁVEZ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO: DR. RAFAEL ANTONIO GÓMEZ ESCOTO

SECRETARIA: LIC. MARÍA TRINIDAD TRIGUERROS DE CASTRO

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR: ING. CARLOS MAURICIO CANJURA LINARES

TRABAJO DE GRADUACIÓN TITULADO:

“ESTUDIO DE CUÁDRICAS CON GEOMETRÍA PROYECTIVA”

APROBADO POR:

DOCENTES DIRECTORES

LIC. ERNESTO AMÉRICO HIDALGO CASTELLANOS

LIC. AARÓN ERNESTO RAMÍREZ FLORES

AGRADECIMIENTOS

- Damos gracias en primer lugar a Dios y a nuestra madre santísima la virgen de Guadalupe por darnos la oportunidad de terminar nuestros estudios de una manera exitosa, y porque a lo largo de nuestra carrera nos ha dado la fortaleza y la perseverancia para alcanzar todas nuestras metas, y superar los obstáculos que se nos han presentado.

- D**e** igual forma a nuestras familias, por el apoyo incondicional que nos han brindado día con día en nuestros estudios y en toda nuestra vida, ya que su apoyo ha sido una de las principales fortalezas que nos ha impulsado a seguir siempre adelante a pesar de todas las dificultades que se nos han presentado.

- A nuestros asesores Lic. Ernesto Américo Hidalgo Castellanos y Lic. Aarón Ernesto Ramírez Flores, ya que han sido las personas que nos fueron guiando durante todo el proceso de nuestro proyecto de Graduación.

- Agradecemos también a nuestros amigos que nos han apoyado tanto económicamente, como moral, espiritualmente, y que nos han impulsado a seguir con nuestro sueño de ser Licenciadas en matemática para poder culminar nuestra meta.

- Del mismo modo agradecemos a las autoridades de la Universidad Nacional, ya que es en esta institución en la cual hemos recibido la formación para ser verdaderas profesionales por medio de todos los conocimientos que hemos adquirido a lo largo de nuestra carrera.

INDICE

INTRODUCCIÓN

El propósito del presente trabajo de graduación es estudiar la teoría sobre de las cuádricas con Geometría Proyectiva, aplicando conceptos, definiciones, y teoremas fundamentales, los cuales nos llevan a comprender la importancia de su aplicación en las diferentes ramas de la matemática y sus representaciones gráficas.

Es por ello que en este trabajo se trata de desarrollar temas que están enfocados a comprender las cuádricas con geometría proyectiva y su importancia.

En el primer capitulo se desarrollará la noción de proyección, donde se dan definiciones importantes sobre la proyección, así como una descripción de que sucede si se agregan los puntos ideales o puntos al infinito, y que estos sean los centros de proyección, además el enriquecimiento que aportan estos nuevos conceptos. Se desarrollarán los conceptos de coordenadas homogéneas, que es fundamental para la comprensión de los puntos ideales o puntos al infinito, que facilitarán el manejo algebraico en el estudio del espacio proyectivo, el cual también incluye puntos complejos, así como la representación del espacio en diferentes dimensiones, y cambio de estructura de coordenadas, subespacios, hiperplanos y dualidad.

En el segundo capitulo se desarrollarán definiciones, teoremas, corolarios, lemas y uno de los más importantes teoremas de la Geometría Euclidiana, desarrollado con la Geometría Proyectiva, que es el Teorema de Desargues, y algunos resultados importantes adicionales. También se hará una introducción a proyectividades, razón cruzada, y transformaciones lineales.

En el tercer capitulo se desarrollará la aplicación de los conceptos estudiados en los capítulos anteriores, en el cual se refleja la riqueza que tienen las cuádricas aplicando los conceptos de la geometría proyectiva, así como sus diferentes representaciones. Es importante mencionar que en el pasado el ser humano se ha visto favorecido por tales representaciones, facilitando la comprensión de su entorno, aunque muchas veces no este consciente de los aspectos matemáticos que están involucrados.

OBJETIVOS

GENERAL:

- Estudiar y profundizar el conocimiento de las Cuádricas con Geometría Proyectiva, haciendo uso de conceptos, teoremas, corolarios y lemas importantes que las enriquezcan, así como mostrar su importancia en las diferentes áreas de la matemática, dándole un enfoque más amplio que el de la geometría euclidiana, generalizando así esta teoría.

ESPECIFICOS:

- Aplicar conceptos y teoremas de importancia de la Geometría proyectiva a las Cuádricas.

- Desarrollar estructura y propiedades del espacio proyectivo para la aplicación de la cuádricas.

- Aplicar los conceptos de la geometría proyectiva a algunos teoremas de la geometría euclidiana y en especial al estudio de las Cuádricas.

- Hacer un enfoque analítico y geométrico del estudio de las cuádricas en la geometría proyectiva.

CAPITULO I

“Conceptos fundamentales de la geometría proyectiva”

1.1 **La noción de proyección**

Considérese la situación del dibujo de la figura (1.1) una elipse E_1 y otra elipse E_2 dentro de la elipse E_1. Si se comienza tomando un punto arbitrario P sobre E_1, y trazando una tangente a E_2 uniéndose con E_1 en un punto Q, luego desde Q se traza otra tangente a E_2 uniéndose con E_1 en un punto R, y uniendo R y P, sería inusual que el segmento PR sea tangente a E_2. En general, no se cumplirá que dadas dos elipses estas tengan un triángulo inscrito en una y circunscrito en la otra.

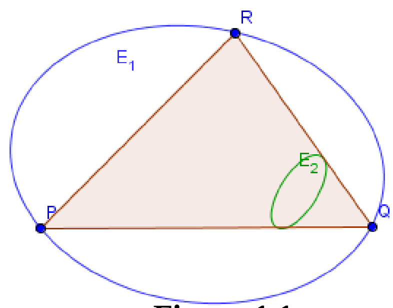


Figura 1.1

Definición de proyección 1.1: Una proyección de un plano π hacia un plano π' desde un centro de proyección O, y este es un punto exterior a los dos planos, es una transformación por el cual un punto P del plano π es mapeado en otro punto P' en el cual el segmento OP intercepta el plano π'.

Ahora considérese la figura (1.2) que esta formada por un triángulo equilátero ABC, una circunferencia circunscrita K_1, y otra circunferencia inscrita K_2. Si se analiza esta figura extendiéndola en un plano π, y “proyectándola” sobre otro plano π', tomando como centro de proyección O como en la fig (1.3) se obtiene el resultado de la figura (1.4)

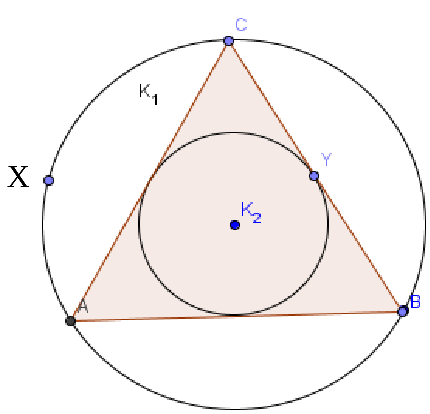


Figura 1.2

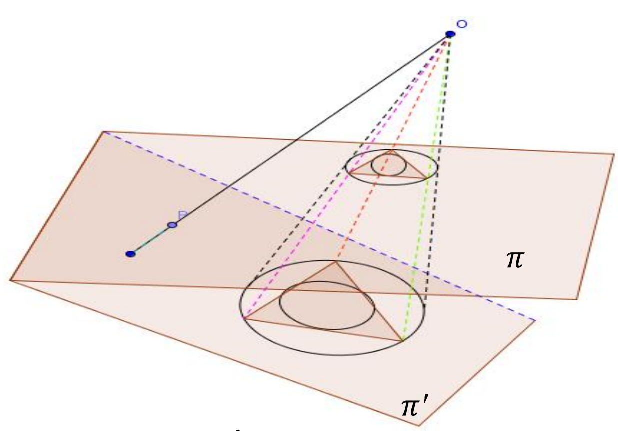


Figura 1.3

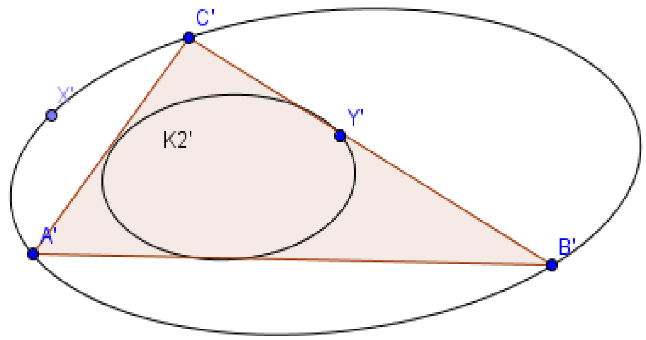


Figura 1.4

Tomando una proyección desde un plano π sobre un plano π', con centro de proyección O, (figura 1.3) se obtiene la propiedad que se esta buscando, pero dichos planos no son paralelos ya que si fueran paralelos la proyección es la misma, y lo que se quiere ver es que sucede con la proyección cuando los planos no son paralelos.

Ahora tomando un punto arbitrario X de K_1, este será mapeado por la proyección en un punto X' de π' tal que K_1 es proyectado en otra curva ovalada K'_1 que puede ser interpretada como una elipse. Igualmente K_2 es proyectada como otra elipse K'_2. Los vértices A, B y C del triángulo equilátero son proyectados en $A', B'\,y\,C'$ en el plano π'; puesto que $A, B\,y\,C$ están sobre K_1, entonces $A', B'\,y\,C'$ están sobre la elipse K'_1; pero el triángulo $A'B'C'$ generalmente no será equilátero. Un punto de la recta AB es mapeado en algún otro punto de la recta $A'B'$ ya que la proyección de rectas son también rectas; además, puesto que la recta BC, por ejemplo es tangente a K_2, la recta $B'C'$ es tangente a la elipse K'_2. Para ver este resultado primero se discutirá si es posible lo siguiente: Que si los puntos de tangencia Y de la recta BC con K_2 son proyectados al interior de los puntos Y' los cuales están sobre la recta $B'C'$ y K'_2.

Supóngase que $B'C'$ tiene otro punto en común con K'_2 , sea Z' el punto en común con K'_2. Este punto seria la proyección de un punto Z el cual seria la intersección de BC con K_2, pero BC es tangente a K_2 por lo tanto no puede haber otro punto en común mas que solo Y. Así $B'C'$ solo tendrá el punto Y' en común con K'_2.
Aquí se está aplicando una característica intuitiva de las tangentes a circunferencias y elipses, pero para algunas otras curvas no se puede decir que una tangente es una recta que solo toca exactamente un punto de la curva ya que este tipo de argumentos para otras curvas son inadecuados.

Para el proceso de proyección desde el centro O se tiene transformada la figura (1.2) en la figura (1.4) obteniendo dos elipses (que resulta ser un caso particular) tal que un triángulo puede ser inscrito en una elipse y circunscrito en la otra.

Con el resultado obtenido se tiene la propiedad buscada que es: **Poder inscribir y circunscribir triángulos en elipses de manera que los lados del triángulo sean tangentes a la elipse inscrita y los vértices de dicho triángulo estén sobre la elipse circunscrita.**

Se puede hablar también de la simetría de la figura (1.2) claramente se toma cualquier punto de K_1 y ser elegido como un vértice de un triángulo inscrito en K_1 y circunscrito sobre K_2. Así por la misma proyección se podrá concluir que cualquier punto sobre la elipse K'_1 puede ser tomado como un vértice de un triángulo inscrito y otro circunscrito en las elipses.

Propiedad proyectiva
Es aquella que se conserva luego de una proyección, caso contrario no lo es.

Entre las propiedades proyectivas más comunes se tiene:

- Si se tiene puntos alineados en el plano, la proyección de estos puntos sobre otro plano; también están alineados.
- Si las rectas son concurrentes, sus proyecciones también serán rectas concurrentes.

En la figura (1.2) y en la figura (1.4) se observan las siguientes **propiedades proyectivas:**

- X esta sobre una curva K_1, y X' esta sobre una curva K'_1.
- C es el punto de intersección de la recta AC, y la recta BC y C' es el punto de intersección de la recta $A'C'$ y la recta $B'C'$.
- AB es una recta, y $A'B'$ es también una recta.

Lo siguiente no es una propiedad proyectiva:

- La proyección de un triángulo equilátero es un triángulo cualquiera.
- La proyección de una circunferencia no es una circunferencia.

En la figura (1.2) y en la figura (1.4) se observan las siguientes **propiedades no proyectivas:**

- "K_1 es un circunferencia" y se puede ver que es proyectada sobre una elipse.
- ABC es un triangulo equilátero; pero $A'B'C'$ no es un triángulo equilátero.
- El $\sphericalangle CAB = 60$ y el $\sphericalangle C'A'B' \neq 60$.
- Si M es punto medio de BC, M' no es punto medio de $B'C'$.

Note que todos los detalles de esta lista de propiedades no proyectivas involucran magnitudes, cantidades y ángulos.

1.2 Argumentos fundamentales para la proyección

Fundamentalmente, los argumentos dados en la sección anterior requieren una proyección que tenga una "correspondencia uno a uno". Que es, a cada punto U del plano π figura (1.5) le corresponde exactamente un punto U' del plano π', y es el punto en el que se unen la recta OU con el plano π'; y a cada punto V' del plano π', le corresponde un único punto V en que la recta OV' se intercepta con el plano π . Note que la "correspondencia fomentada" (de π a π') es usada por ejemplo en la argumentación que la proyección del punto C esta sobre ambas, que son la proyección de K_1 y la proyección de AC; mientras que la "correspondencia anterior" (de π a π') la usamos en el argumento de que $B'C'$ es tangente a K'_2. Pero esto no es tan simple.

Si se toma un punto X sobre la circunferencia K_1 tal que OX es paralela a π' figura (1.6), entonces hay un punto que no está en π' y que corresponda a X de π. (Si X es un punto de K_1 se puede mostrar que la proyección de K_1 es una parábola. Si hay dos puntos X, Y de K_1 tal que OX y OY son ambos paralelos a π' en la figura (1-7), entonces puede mostrarse que la proyección de K_1 es una hipérbola).

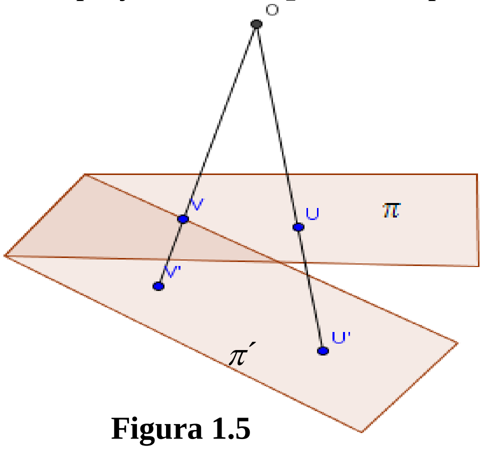


Figura 1.5

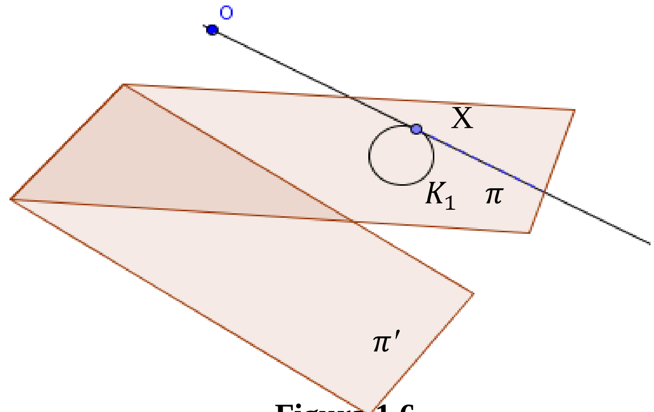


Figura 1.6

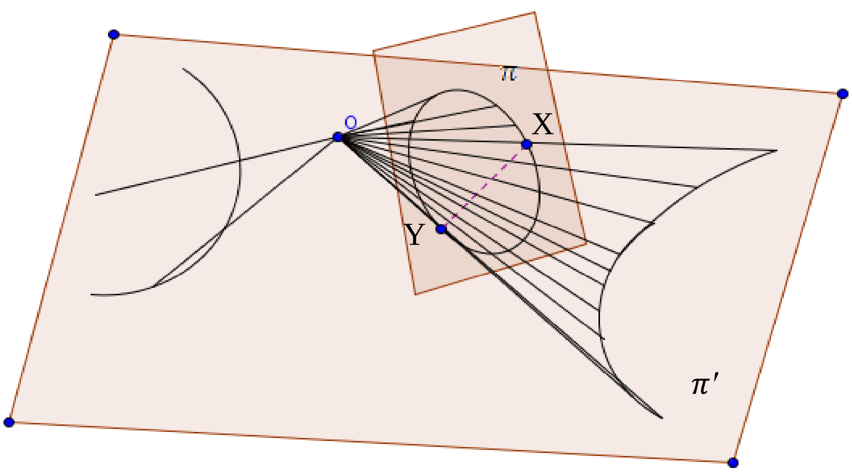


Figura 1.7

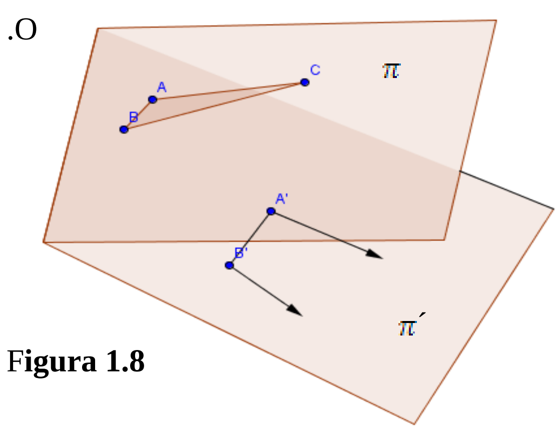


Figura 1.8

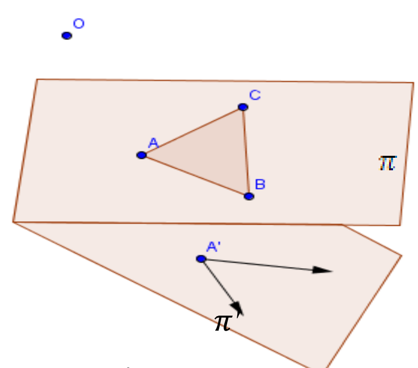


Figura 1.9

Si el vértice C del triángulo estuviera en una posición en la cual OC fuese paralelo a π', entonces la proyección del triángulo ABC aparecería como en la figura (1.8).
Si ambos $B\ y\ C$ estaría en una posición tal que OB y OC sean paralelos a π', entonces la proyección del triángulo ABC aparecería como en la figura (1.9).

Esta ilustración indica esas definiciones en la geometría ordinaria nuestra definición de propiedad de proyección no es muy utilizada. Recordando que la propiedades proyectivas que se dieron anteriormente llamadas así porque son propiedades que se preservan bajo toda proyección.

En todos estos casos ilustrados, no se ha tenido el resultado básico "correspondencia uno a uno" deseado, como se había dicho.
Para toda otra posición relativa de π y π' que no son paralelos, una proyección no establece una correspondencia uno a uno.

Definición1.2: Dadas dos rectas coplanares l, l' y un centro de proyección O, en el plano de las rectas, pero no sobre la misma recta, la proyección de un punto P sobre l es el punto P' en que OP se intercepta con l. El punto M, común a $l\ y\ l'$, corresponde a si mismo en la proyección y es conocida como el punto correspondiente a si mismo en la proyección.

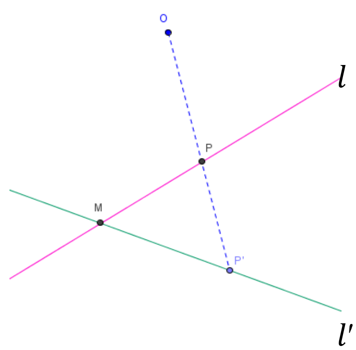


Figura 1.10

1.3 Elementos Ideales

La dificultad descrita en la sección 1-2 se base en el hecho, de que en el espacio de geometría ordinaria euclidiana, las rectas paralelas no tienen puntos en común. Por esta razón se añaden **"puntos ideales"** o **"puntos al infinito"** al conjunto de **"puntos ordinarios."**
Si se tienen rectas paralelas distintas todas ellas se cortan en un único punto ideal, ya que en cada dirección como se observa en la figura (1.11) habrá un único punto de corte, debido a las siguientes propiedades:

- Dos rectas distintas en el plano se cortan en único punto.
- Dos puntos distintos en el plano generan una recta.

Siempre que dos rectas no son paralelas en el plano tienen precisamente un punto en común, en caso contrario, son paralelas y se unirán en algún punto que se llamará un **punto ideal**.

Haciendo el mismo razonamiento para tres dimensiones como para dos: todas las rectas paralelas en el espacio contienen un punto ideal, y todas las rectas paralelas en una dirección dada tienen el mismo punto ideal en común.

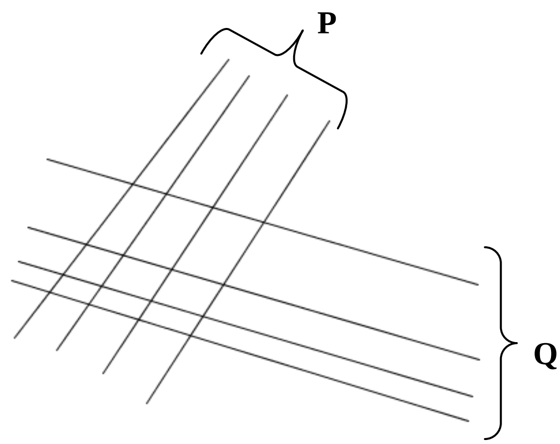


Figura 1.11

Con este argumento, se puede mencionar las declaraciones siguientes utilizadas en la Geometría Euclidiana agregándole los puntos al infinito:

a) "Dos rectas distintas en un plano tienen uno y solo un punto en común o son paralelas".
b) "Dos rectas no paralelas se intersecan en un punto ordinario."
c) "Dos rectas paralelas se cortan en un punto ideal."

El trato de planos, rectas y puntos están fundamentados en ciertas suposiciones (axiomas y postulados) esto es en la geometría euclidiana pero en sección se trabajara agregando los puntos ideales. Desde ahora, se podrá darle el nombre **"punto"** a cualquier cosa que cumpla las declaraciones.

En resumen, toda la geometría (realmente, toda la matemática) trata con construcción de la imaginación del ser humano; y un punto "ideal" esta precisamente sobre la misma base, desde este punto de vista, como un punto "ordinario". El sistema matemático es consistente por si mismo.

La creación de puntos ideales y la convención, que estos son un punto ideal correspondiente a cada dirección en el espacio no es suficiente para obtener la correspondencia uno a uno en una proyección. Esta condición de la noción de proyección, es una proyección hecha de una recta sobre otra recta; pero se vio en el caso ilustrado por la fig.1-9 que la recta BC del plano π no tiene una correspondencia en el plano π'. Acorde a la convención que se ha hecho, los puntos de BC corresponden a un punto ideal de π'. Así se obtiene la siguiente convención:
Los puntos ideales de un plano constituyen una recta llamada la recta ideal del plano.

Prueba:
Se dan tres direcciones distintas de rectas paralelas, en cada dirección de las rectas dadas hay un punto ideal.

Sean P, R y Q los respectivos puntos ideales en cada dirección dada, se quiere ver que P, Q, y R están alineados.
Por contradicción:
Como por convención se tiene que P y Q son puntos, por el postulado de la Geometría Euclidiana, que por dos puntos pasa exactamente una recta y es única se obtiene la recta PQ, en la dirección de las rectas paralelas a la recta L' se toma un punto R' que pertenece a la recta PQ supóngase que este es un punto ordinario en la dirección de la recta L' de aquí que si La recta PR' tendría la misma dirección de L, pero también tendría la misma dirección de la recta L' lo cual es una contradicción puesto que las recta L y L' no son paralelas y cada una de ellas tienen un único punto ideal en cada dirección por lo tanto R' no puede un punto ordinario, entonces es ideal pero por ser único $R = R'$. De Aquí se tiene que P, Q y R están alineados. Y así PQR es la recta ideal del plano.

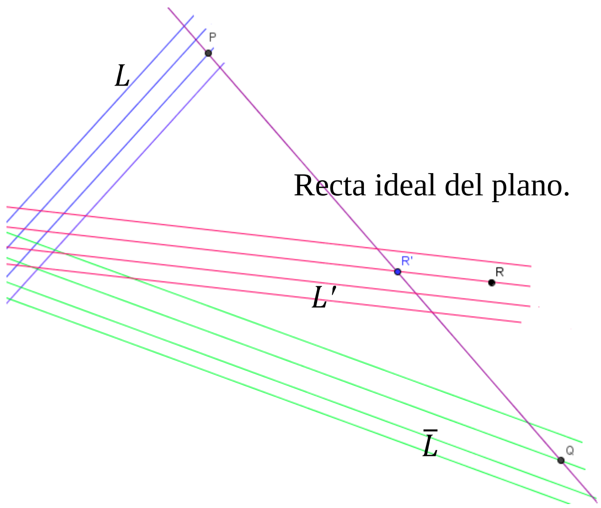


Figura 1.12

Con estas convenciones, se pueden nuevamente hacer las siguientes afirmaciones.
1) Bajo un centro de proyección desde un plano π a otro plano π' hay una correspondencia uno a uno entre los puntos y una correspondencia uno a uno entre las rectas.
2) En un plano, bajo un centro de proyección desde una recta l a otra recta l' hay una correspondencia uno a uno entre los puntos.
3) En el espacio tridimensional, dos planos cualesquiera distintos se intersecan en una única recta.
4) En un plano, cualesquiera dos rectas distintas se intersecan en un único punto.

Cada uno de las afirmaciones del 1 al 4 representa una consolidación de casos que se habían considerado por separado sin las convenciones sobre puntos ideales. Hay todavía otra consolidación posible.

En la “proyección paralela” desde π a π' la figura (1.13), $P', Q', R', \ldots$ son obtenidas como los puntos en que las rectas paralelas en la misma dirección fija pasan por $P, Q, R, \ldots$ de π interceptándose con π'.

La “Proyección ortogonal” es la proyección paralela en que la dirección fija es perpendicular a π'.

Se puede ver que la proyección paralela (incluyendo la ortogonal) es un caso de centro de proyección, en que el centro de proyección es un punto ideal.

El espacio de puntos ordinarios, rectas y planos es llamado espacio ordinario en la Geometría Euclidiana; agregándole puntos ideales, rectas y planos es llamado **“espacio extendido”**.

Análogamente, en dos dimensiones se habla del “plano ordinario” y agregándole los puntos ideales es el “plano extendido”.

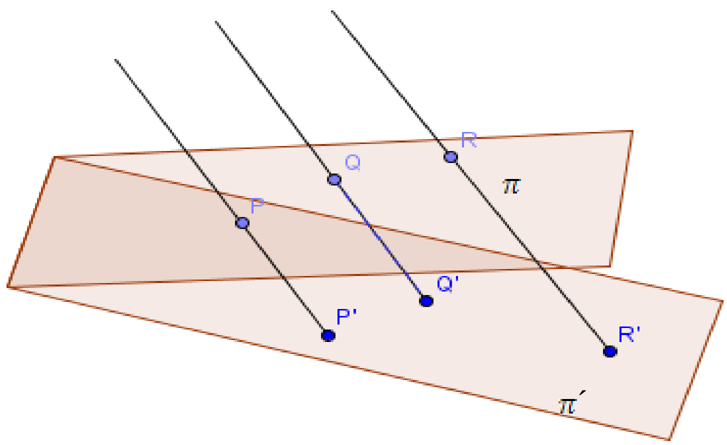


Figura 1.13

1.4 Coordenadas homogéneas y sus ecuaciones.

Considérese una recta que pasa por el origen y el punto(x, y) como en la siguiente figura.

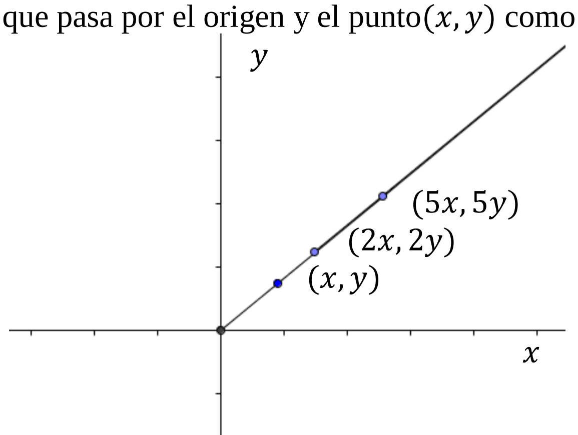


Figura 1-14

Los puntos $(2x,2y),(5x,5y),(100x,100y)\ldots$ todos están sobre la recta.

Definición 1.3: Dado un punto (x,y) arbitrario del plano, este es representado por $x = {x_1}/{x_0}$, $y = {x_2}/{x_0}$ a está representación de dicho punto se llamará coordenadas homogéneas asociadas al punto (x,y) y estará representado por (x_0,x_1,x_2).

Se sabe que el punto ideal en la recta es el que está "infinitamente lejos" y este se representará con coordenadas homogéneas $({x}/{\alpha}, {y}/{\alpha})$, para $\alpha = 0$ pero la división por cero no esta definida en aritmética y algebra. Una alternativa es usar tres coordenadas, (x_0,x_1,x_2) Para $x_0 \neq 0$, se tendrá un punto ordinario, con coordenadas no homogéneas (x,y), donde $x = {x_1}/{x_0}$, $y = {x_2}/{x_0}$ y para $x_0 = 0$, se tiene el punto ideal en la dirección dada. Para cualquier punto dado, estas son las "coordenadas homogéneas" y están determinadas de la forma; (x_0,x_1,x_2) ó (kx_0,kx_1,kx_2) y son coordenadas del mismo punto para todo $k \neq 0$.
Para cada triada (x_0,x_1,x_2) excepto el punto $(0,0,0)$ corresponde a un único punto.

De manera análoga se definen coordenadas homogéneas para puntos en espacio de tres dimensiones como cuádruples de números reales, no todos cero.

Dado un punto (x,y,z), su representación en coordenadas homogéneas son $x = {x_1}/{x_0}$ $y = {x_2}/{x_0}$, $z = {x_3}/{x_0}$ y se escriben de la siguiente manera (x_0,x_1,x_2,x_3) ó (kx_0,kx_1,kx_2,kx_3) con $k \neq 0$, para los puntos de $\mathbb{R}^3$. Si la primera coordenada x_0 es cero, el punto es ideal; En caso contrario el punto es ordinario.
Se sabe que el conjunto de vectores directores de la recta dados los puntos con coordenadas rectangulares (x,y,z) y (x',y',z') están dados de la siguiente forma, $x'-x, y'-y, z'-z$.
Los puntos ideales en la dirección determinada por los vectores directores de coordenadas n_1,n_2,n_3 tienen el punto de coordenadas $(0,n_1,n_2,n_3)$

1.5 Ecuaciones en coordenadas homogéneas.

Se sabe que en un sistema de coordenadas de dos dimensiones dado, la ecuación de una cierta recta l es

$$a_1x + a_2y + a_0 = 0 \qquad (1)$$

De manera que si $P(p_1,p_2)$ es un punto que esta sobre l, entonces $a_1p_1 + a_2p_2 + a_0 = 0$, y también que si $x = r, y = s$ es una solución de la ecuación (1) entonces el punto $U(r,s)$ está sobre l.

La ecuación (1) expresa la relación entre la abscisa y ordenada sólo de puntos *ordinarios.* Claramente no podemos usar la ecuación para comprobar si un cierto punto ideal está sobre l.

Una modificación de ecuación (1) lo hará aplicable para puntos ordinarios e ideales. Reemplazando x por ${x_1}/{x_0}$ y y por ${x_2}/{x_0}$ con $x_0 \neq 0$. La ecuación (1) queda determina de la siguiente forma:

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \qquad (2)$$

La ecuación (2) obviamente satisface las condiciones de las coordenadas homogéneas de los puntos ordinarios que están sobre l; y está satisface para las coordenadas homogéneas de un punto ideal si y sólo si el punto ideal está sobre l. Se dice, entonces, que la ecuación (2) es *la ecuación de l en coordenadas homogéneas*.

Una función polinomial en varias variables se llama *homogénea de grado n* si todo término es de grado *enésimo* en las variables en común. Así $Ax^3 + Bx^2y + Cy^3$ es homogénea de grado 3 en x e y , y

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2$$

Es homogénea de grado 2 en x_0, x_1, x_2.

Si la función polinomial $f(x_0, x_1, x_2 \dots, x_{r-1})$ es homogénea en r variables, entonces la ecuación, $f(x_0, x_1, x_2 \dots, x_{r-1}) = 0$ es llamada ecuación homogénea.

Así la ecuación (1) no es homogénea en x e y, pero la ecuación (2) es homogénea de grado 1 en x_0, x_1, x_2.

Hay ciertas rectas cuyas ecuaciones son particularmente simples. Si se resuelve la ecuación del eje de las abscisas $y = 0$, en coordenadas homogéneas sustituyendo y por ${x_2}/{x_0}$ se tiene que $x_2 = 0$. Alternativamente, se puede notar que ese punto con coordenadas (x_0, x_1, x_2), Está sobre el eje de las abscisas si y sólo si $x_2 = 0$. Es conveniente considerar este problema en tres partes. La recta en general, $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, no todas igual a cero, es el eje de las abscisas si la recta pasa por los puntos con coordenadas $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$. Por consiguiente si $a_0 = 0 = a_1$ y la ecuación del eje X se reduce a $a_2x_2 = 0$, así $x_2 = 0$ y es la ecuación deseada.

Casos simples de las representaciones de una recta en coordenadas homogéneas:

$$eje\ y\text{:} \qquad x_1 = 0$$
$$Recta\ ideal\text{:} \quad x_0 = 0$$
$$La\ recta \text{ general } a\ través\ del\ origen\ es\text{:} \quad a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

En tres dimensiones consiste en remplazar x por ${x_1}/{x_0}$ e y por ${x_2}/{x_0}$, y z por ${x_3}/{x_0}$, donde $x_0 \neq 0$. Así el plano π tiene como ecuación en coordenadas no homogéneas:

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_0 \qquad (3)$$

$$a_1\left(\frac{x_1}{x_0}\right)+a_2\left(\frac{x_2}{x_0}\right)+a_3\left(\frac{x_3}{x_0}\right)+a_0=0$$

Multiplicando por x_0 se convierte en:

$$a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \quad (4)$$

Y la recta l con ecuaciones no homogéneas

$$\frac{x-r}{n_1}=\frac{y-s}{n_2}=\frac{z-t}{n_3} \qquad (5)$$

Remplazando $x, y\ e\ z$

$$\frac{\frac{x_1}{x_0}-r}{n_1}=\frac{\frac{x_2}{x_0}-s}{n_2}=\frac{\frac{x_3}{x_0}-t}{n_3}$$

Se convierte en:

$$\frac{x_1-rx_0}{n_1}=\frac{x_2-sx_0}{n_2}=\frac{x_3-tx_0}{n_3} \qquad (6)$$

Está claro que un punto P ordinario este sobre el plano π (o la recta l) si y solo si las coordenadas homogéneas de P satisfacen la ecuación (4) (o la ecuación (6)). También que P puede ser un punto ideal.

Se puede decir, entonces, que en tres dimensiones, la ecuación (4) es la ecuación de un plano, y la ecuación (6) es la ecuación de una recta en coordenadas homogéneas.

Observación: La ecuación (5) representa una recta en la dirección de $n_1,\ n_2, n_3$ ninguna de las n_i cero para $i=1,2,3$, pasando a través del punto A con coordenadas no homogéneas $(r,\ s,\ t)$.

La ecuación (6) representa la recta en coordenadas homogéneas. Sin embargo, puede obtenerse un resultado más simétrico utilizando coordenadas homogéneas para A también, se puede decir que (r_0, r_1, r_2, r_3) donde

$$\boldsymbol{r}=\frac{r_1}{r_0}, \qquad \boldsymbol{s}=\frac{r_2}{r_0}, \qquad \boldsymbol{t}=\frac{r_3}{r_0}.$$

Sustituyendo $r, s\ y\ t$ en la ecuación,

$$\frac{x_1-x_0\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{n_1}=\frac{x_2-x_0\frac{r_2}{r_0}}{n_2}=\frac{x_3-x_0\frac{r_3}{r_0}}{n_3}$$

Entonces se obtiene:

$$\frac{r_0x_1-x_0r_1}{n_1}=\frac{r_0x_2-x_0r_2}{n_2}=\frac{r_0x_3-x_0r_3}{n_3} \qquad (7)$$

Ecuaciones de las cuádricas en el plano Complejo extendido xy.

- **La circunferencia** $x^2 + y^2 = r^2$ su ecuación en coordenadas homogéneas será:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 = r^2$$

Multiplicando por ${x_0}^2$ y pasando todos los términos al lado izquierdo se tiene:

$$x_1^2 + x_2^2 - r^2 x_0^2 = 0, \qquad (8)$$

La ecuación (8) es la ecuación de la circunferencia en coordenadas homogéneas

- **La hipérbola** $\left({x^2}/{a^2}\right) - \left({y^2}/{b^2}\right) = 1$ su ecuación en coordenadas homogéneas será:

$$\left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 \Big/ a^2\right) - \left(\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 \Big/ b^2\right) = 1$$

Multiplicando por ${x_0}^2$ y pasando todos los términos al lado izquierdo se tiene:

$$b^2 x_1^2 - a^2 x_2^2 - a^2 b^2 x_0^2 = 0.$$

- **La Elipse** $\left({x^2}/{a^2}\right) + \left({y^2}/{b^2}\right) = 1$ su ecuación en coordenadas homogéneas será:

$$\left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 \Big/ a^2\right) + \left(\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 \Big/ b^2\right) = 1$$

Multiplicando por ${x_0}^2$ y pasando todos los términos al lado izquierdo se tiene:

$$b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - a^2 b^2 x_0^2 = 0.$$

- **La parábola** $y^2 = 4px$ su ecuación en coordenadas homogéneas será:

$$y^2 = 4px$$

$$\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 = 4p\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$$

Multiplicando por ${x_0}^2$ y pasando todos los términos al lado izquierdo se tiene:

$$x_2^2 - 4px_1x_0 = 0$$

(Note que, en términos de coordenadas homogéneas, entre las curvas tienen ecuaciones homogéneas de grado 2).

Se puede preguntar si estás curvas tiene puntos ideales sobre ellas. Un punto ideal, (x_0, x_1, x_2), tiene $x_0 = 0$; Así, para un punto ideal sobre la circunferencia, se tiene que $x_1^2 + x_2^2 = 0$, Pero la única solución real de esta ecuación es $x_1 = 0 = x_2$ pero la tríada $(0, 0, 0)$ no esta representa en un punto de 2 dimensiones en coordenadas homogéneas. De esto se concluye que la circunferencia no tiene puntos ideales sobre ella. Un resultado de acuerdo con nuestra intuición es que una circunferencia está acotada en todas las direcciones, y no se "extiende hasta infinito".

En el caso de la hipérbola, si $x_0 = 0$, entonces $x_2 = (b/a)x_1$; Luego, si se tienen 2 puntos en la hipérbola, $P_1(0, 1, b\ /\ a)$ y $P_2(0, 1, -b/a)$ que son los puntos ideales del plano en la dirección de la recta con pendiente $b\ /\ a$ y $-b\ /\ a$. Pero las asíntotas de esta hipérbola son rectas de pendientes $\pm b\ /\ a$, en consecuencia, cada punto ideal P_1, P_2 es común entre la hipérbola y una de las asíntotas.

1.6 Espacios proyectivos; coordenadas homogéneas

Primero se define un rayo en un espacio vectorial

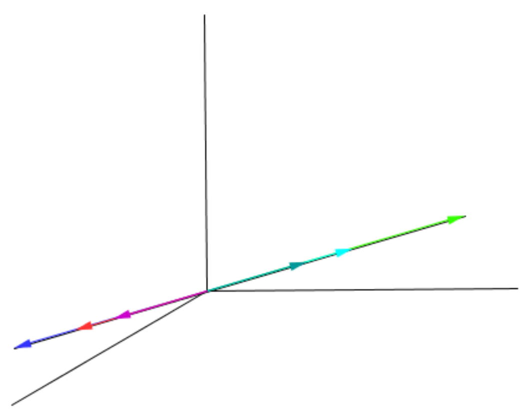


Figura 1-15

Definición 1.4: Para un vector dado $\alpha \in V_n(\mathbf{C})$, el rayo $[\alpha]$ es el conjunto de todos los vectores de la forma $K.\alpha$, $K \in C$.

Es claro que, para $p \neq 0$, con $p \in C$, $[P.\alpha]=[\alpha]$, es decir que el rayo $[P.\alpha]$ y el rayo $[\alpha]$ consta de los mismos vectores. El rayo $[\alpha]$ es el espacio unidimensional generado por α.

La notación de rayo común es un tipo de segmento de recta, en otras palabras el término de rayo no es quizá un nombre ideal para este conjunto de vectores, pero es más o menos estándar.

Definición 1.5: Los rayos $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, … , $[\alpha_r]$ son llamados linealmente independientes o linealmente dependientes de acuerdo como sean los vectores α_1, α_2, …, α_r ya sean linealmente independientes[1] o linealmente dependientes[2].

Definición 1.6: Un espacio proyectivo de dimensión n, denotado por S_n(**C**), es cualquier conjunto de elementos en correspondencia uno a uno con los rayos de V_{n+1}(**C**), con elementos de S_n linealmente dependientes si y solo si la correspondencia de rayos de V_{n+1} son linealmente dependientes.

Cuando no hay otra interpretación de los espacios que no sean de importancia, los elementos de S_n serán llamados "puntos".

Note que la definición describe un espacio proyectivo como un sistema matemático con una relación, eso de la dependencia lineal, y no de operaciones. Parece tener muy pocas condiciones impuestas sobre nuestro espacio, que pueden contar, por consiguiente, y se puede hacer pocas conclusiones desde un sistema con tanta generalidad.

Además, las condiciones de correspondencia uno a uno con los rayos de un vector del espacio, preserva la relación de dependencia lineal, esto es suficiente para insinuar muchos resultados interesantes.

En particular, ellos nos facilitan para introducir un sistema de coordenadas sobre S_n sin tomar en cuenta la noción de distancia. En S_2 Los puntos sobre la superficie de una esfera tangente al plano XY, no incluyen el punto 0 de tangencia, mas el punto de un semicírculo en el plano XY con centro 0, incluyen un punto pero no otro, en correspondencia natural con los rayos pasando por 0 (Figura 1-16).

Los vectores α, β, γ, δ son linealmente dependientes (coplanares); desde ahora los puntos A, B, C, y D son linealmente dependientes.

---

[1] Los vectores $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ son linealmente independientes si $\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i = 0$, implica que $c_1 = 0 = c_2 = \cdots = c_n$.

[2] Si al menos uno de los $c_i \neq 0$, entonces los vectores son linealmente dependientes.

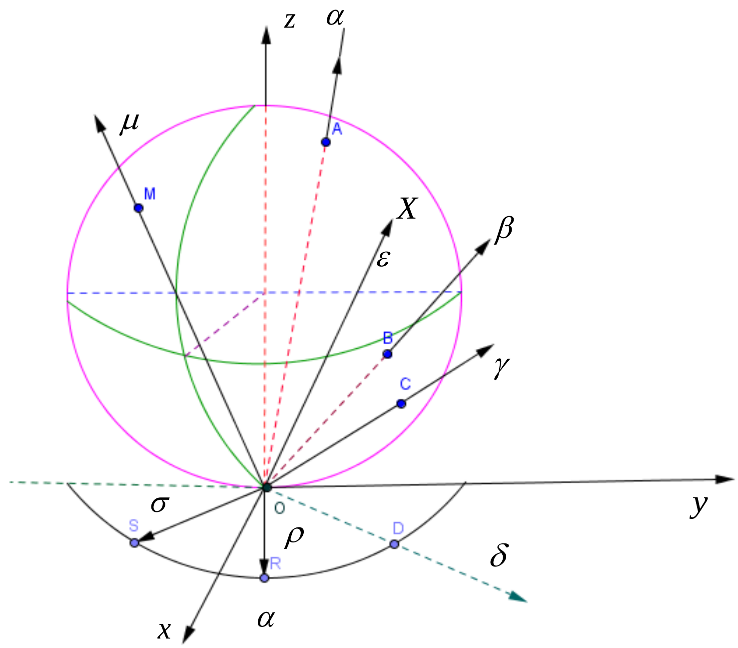


Figura 1-16

Lo que se quiere decir es que los puntos ideales de dicha figura son los que están en el plano paralelo al plano XY son de la forma siguiente (figura 1-17).

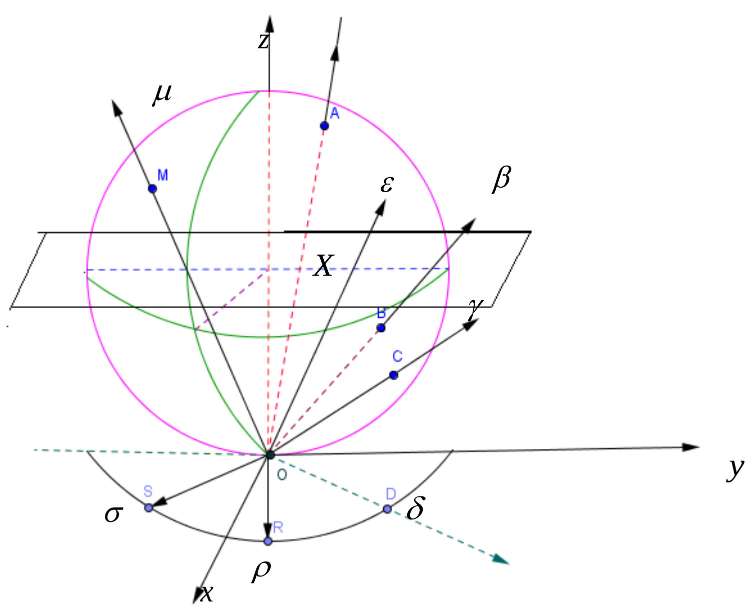


Figura 1-17

Los puntos de S_2 son los puntos del plano XY más los puntos de un semicírculo en un plano paralelo al plano XY, incluyen uno y puntos del semicírculo pero no el otro, en correspondencia natural pasando por el centro del semicírculo (Fig. 1-18)

Los rayos [α], [β], [γ], [δ], son coplanares, son linealmente dependientes.

Desde que los puntos A, B, C, y D son linealmente dependientes. En lenguaje intuitivo, se puede decir que D es “el punto al infinito” sobre la recta ABC.
Note también que cualesquiera tres o más puntos sobre el semicírculo son linealmente dependientes.
Ahora se desarrolla un sistema de coordenadas en un espacio proyectivo. Se considera el caso para $n = 2$, que es el caso del espacio proyectivo en dos dimensiones con relación a un vector en el espacio tridimensional, este ultimo como el espacio tridimensional euclidiano ordinario.

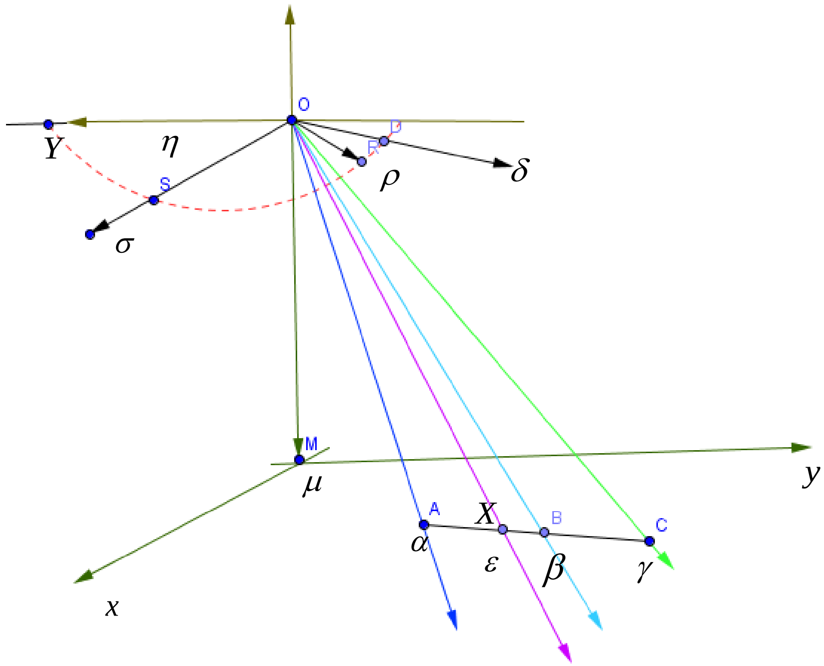


Figura 1-18

Suponga que $A_1, A_0, ,\ A_2, \dots, A_n$ son n+1 puntos linealmente independientes de S_n en correspondencia uno a uno con los rayos $[\alpha_0]$, $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, …, $[\alpha_n]$ de V_{n+1}. Ellos por definición de vectores linealmente independientes α_0, α_1, α_2, …, α_n son linealmente independientes, y como también son generadores , estos vectores forman una base para V_{n+1}. Además supóngase que D es un punto de S_n, no uno de los $A_s^{'}$, y que D corresponde al rayo $[\delta]$ de V_{n+1}. El vector δ pude ser expresado como una combinación lineal de los vectores de la base α_0, α_1, α_2, …, α_n forma única:

$$\delta = d_0\alpha_0 + d_1\alpha_1 + \ldots + d_n\alpha_n,$$

Es decir. Asumiendo así que D no es nulo sino los d_i son cero. Si se hace el cambio de estructura se tiene:

$$d_0\alpha_0 = \alpha'_0, \qquad d_1\alpha_1 = \alpha'_1, \ldots \quad d_n\alpha_n = \alpha'_n.$$

Los vectores $\alpha_0^{'}$, $\alpha_1^{'}$, … $\alpha_n^{'}$ también constituyen una base para V_{n+1}.
Ahora sea X un punto arbitrario de S_n, correspondiente al rayo $[\varepsilon]$, es decir.

El vector ε es expresado en una y solo una forma como una combinación de los vectores de la base $\alpha_0^{'}$, $\alpha_1^{'}$, ..., $\alpha_n^{'}$:

$$\varepsilon = x_0\, \alpha_0^{'} + x_1\, \alpha_1^{'} + \dots + x_n\, \alpha_n^{'} .$$

Definición 1.7: El conjunto ordenado (x_0, x_1, ... , x_n) constituye las coordenadas homogéneas de X relativo a los $n+2$ puntos fundamentales, A_0, A_1, A_2, …, A_n, D es la combinación lineal de los $n+1$ puntos fundamentales.

El conjunto de coordenadas homogéneas de un punto de S_n relativo a un punto fijo del conjunto de n+2 puntos fundamentales no es único.

Se puede tener $k_0\, \alpha_0$, $k_1\, \alpha_1$, … , $k_n\, \alpha_n$, con ninguno de los $k_s^{'}$ igual a cero, mas bien que α_0, α_1, α_2, …, α_n, determinan los rayos [α_0], [α_1], [α_2], …, [α_n], asimismo se tendría $l\,.\,\delta$, $l \neq 0$, igualmente que δ, a determinar los rayos [δ], y $m\,.\varepsilon$, $m \neq 0$, igual que ε, a determinar los rayos [ε].

$$l\,.\,\delta = \frac{ld_o}{k_o}\,.(k_0\, \alpha_0) + \frac{ld_1}{k_1}\,.(k_1\, \alpha_1) + \dots + \frac{ld_n}{k_n}\,.(k_n\, \alpha_n)$$

Entonces se tendrá el conjunto

$$\frac{ld_o}{k_o}.(k_0\, \alpha_0) = \tilde{\alpha}_0 , \, .. \, . , \quad \frac{ld_n}{k_n}(k_n\, \alpha_n) = \tilde{\alpha}_n$$

En otras palabras, se tendrá que:

$$\tilde{\alpha}_0 = l\,.\alpha_0^{'} , \ \ \tilde{\alpha}_1 = l\,.\alpha_1^{'} , \dots , \ \ \tilde{\alpha}_n = l\,.\ \alpha_n^{'}$$

Finalmente, entonces se tendrá que:

$$m\ .\ \varepsilon = m\ x_0\ \alpha_0^{'} + m\ x_1\ \alpha_1^{'} + \dots + m\ x_n\ \alpha_n^{'} .$$

$$= \frac{m}{l}\ x_0 \,.\, \tilde{\alpha}_0 + \frac{m}{l}\ x_1 \,.\, \alpha_1^{'} + \dots + \frac{m}{l}\ x_n \,.\, \tilde{\alpha}_n$$

Así se ha obtenido, como las coordenadas de X relativo a los $n+2$ puntos fundamentales A_0, A_1, A_2, …, A_n, D, el conjunto [$\frac{m}{l}\, x_0$, $\frac{m}{l}\, x_1$, ..., $\frac{m}{l}\, x_n$] en lugar de (x_0, x_1, ... , x_n). Se ve que las coordenadas homogéneas son determinadas dentro de un elemento común distinto de cero.

Las coordenadas de D en esta estructura son $(1, 1, \ \dots \ , 1)$; D es llamado el punto unitario.

Las coordenadas de A_0 son $(1, 0, \ldots, 0)$; de A_1, $(0, 1, \ldots, 0)$; de A_n, $(0, 0, \ldots, 1)$. Los puntos $A_0, A_1, A_2 \ldots . A_n$ son llamados los vértices de $(n+1)$-simple[3] de referencia: un triángulo en dos dimensiones, y un tetraedro en tres dimensiones.
En el sistema de coordenadas homogéneas por extensión de sistemas de coordenadas rectangulares, A_0 seria llamada el origen y A_1, A_2, …, A_n serian llamados puntos ideales. Pero no hay absoluta distinción entre "puntos ordinarios" y "puntos ideales".
Desde que no se ha determinado un rayo, ahí no es un punto de S_n que corresponda a "[0]," y desde ahora ese no es un punto de S_n con coordenadas $(0, 0, \ldots, 0)$.

Se introducirá un sistema de coordenadas sobre S_2 como sigue.
Se eligen 3 puntos A_0, A_1, A_2, sobre la semiesfera, no todos los puntos están en el plano que esta pasando por el centro de la esfera, y se elige un cuarto punto D sobre la semiesfera, no esta sobre cualquier circunferencia grande $A_0 A_1$, $A_2 A_0$, $A_1 A_2$, (figura 1-19). Sean $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \delta$ los vectores trazados desde el centro de la esfera a los puntos A_0, A_1, A_2, D.

Suponga que el plano pasa por α_2 y δ intercepta el plano pasando por α_0 y α_1 en la recta l. A lo largo de la recta l se elige un vector λ, y trazando rectas pasando por atravez de λ paralelas a α_0 y α_1 se puede determinar λ como una combinación lineal de α_0 y α_1:

$$\lambda = c_0\, \alpha_0 + c_1\, \alpha_1 ,$$

D se obtiene trazando un a recta paralela a λ y α_2, así determinamos δ como un combinación lineal de λ y α_2:

$$\delta = h_0\, \lambda + h_1\, \alpha_2 ,$$

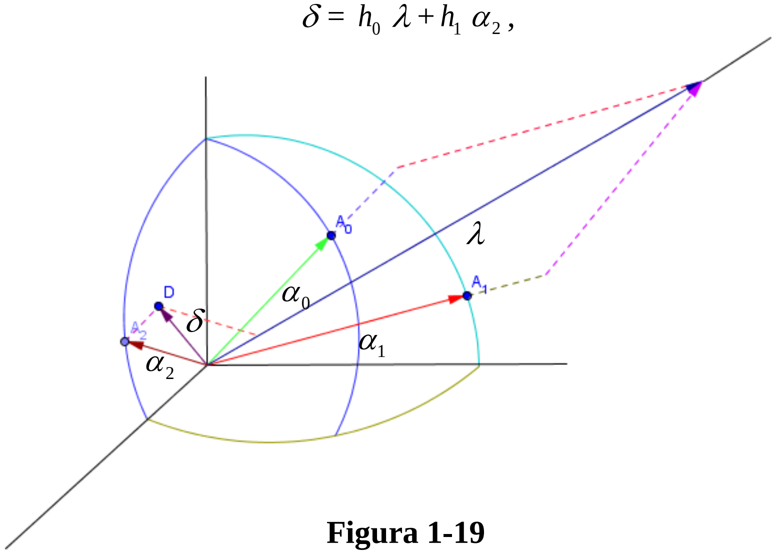


Figura 1-19

---

[3] Se llama n+1-simple: al conjunto de combinaciones convexas de los puntos linealmente independientes. Se llama combinación convexa de los puntos dados: a una combinación lineal con coeficientes no negativos en el que $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$

Ahora se puede expresar δ como una combinación lineal de α_0, α_1, α_2:

$$\begin{aligned}\delta &= h_0\ \lambda + h_1\ \alpha_2 \\ &= h_0\,(c_0\ \alpha_0 + c_1\ \alpha_1) + h_1\ \alpha_2 \\ &= h_0\ c_0\ \alpha_0 + h_0\ c_1\ \alpha_1 + h_1\ \alpha_2\end{aligned}$$

El conjunto

$$h_0\ c_0\ \alpha_0 = \alpha_0^{'}, \qquad h_0\ c_1\ \alpha_1 = \alpha_1^{'}, \quad h_1\ \alpha_2 = \alpha_2^{'}.$$

Para el vector ε se intercepta el centro de la esfera con un punto arbitrario X de la semiesfera, se expresa ε como una combinación lineal de $\alpha_0^{'}$, $\alpha_1^{'}$, $\alpha_2^{'}$ por la misma construcción geométrica usada para expresar δ como una combinación lineal de $\alpha_0^{'}$, $\alpha_1^{'}$, $\alpha_2^{'}$ (Figura. 1-20)

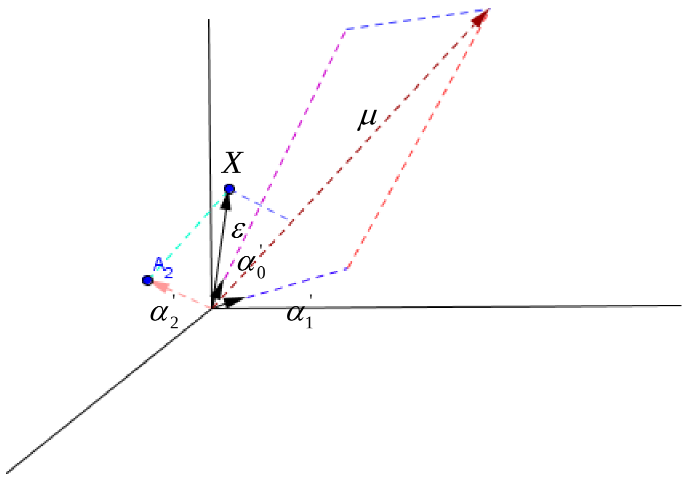


Figura 1-20

$$\varepsilon = x_0\ \alpha_0^{'} + x_1\ \alpha_1^{'} + x_2\ \alpha_2^{'},$$

Entonces (x_0, x_1, x_2) son coordenadas homogéneas de X, en términos del triángulo de referencia $A_0\ A_1\ A_2$, y el punto unidad D.

Es conveniente tomar la notación de espacios vectoriales en referencia a las coordenadas homogéneas de los puntos.

Si un punto X tiene coordenadas homogéneas $(r_0,\ r_1,\ \dots\ ,\ r_n)$, se abreviará las coordenadas como ρ, y se llamará un vector coordenado de X. Claramente $k.\rho$ es un vector coordenado del mismo punto X para cualquier $k \neq 0$. Si ρ y σ son vectores coordenadas de dos puntos, entonces $\rho + \sigma$ es un vector coordenado de un tercer punto.

Teorema 1-1: Sean los puntos $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k$ tienen vectores coordenadas $\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_k$ relativos a alguna estructura de coordenadas en S_n. Entonces los puntos $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k$ forman un conjunto dependientes si y solo si los vectores $\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_k$ de V_{n+1} forman un conjunto dependientes.

Prueba: por definición de S_n, hay rayos $[\beta_1], [\beta_2], \ldots, [\beta_k]$ de V_{n+1} en correspondencia uno a uno con los puntos $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k$ con el punto B_i forman un conjunto dependiente si y solo si los rayos $[\beta_i]$ forman un conjunto dependiente. Además, si el vector coordenado ρ_i tiene componentes $r_{i0}, r_{i1}, \ldots, r_{in}$ entonces, por definición de coordenadas,

$$\beta_i = r_{i0}\,\alpha_0^{'} + r_{i1}\,\alpha_1^{'} + \cdots + r_{in}\,\alpha_n^{'},$$

Donde los $[\alpha_i^{'}]$ son rayos correspondientes a los vértices de los k-simple de referencia, ahora el conjunto de $B_s^{'}$ son linealmente dependientes si y solo si existen $c_1, \ldots, c_k$ no todos cero, tal que $c_1\beta_1 + \cdots + c_k\beta_k = 0$.

Haciendo uso de la expresión para los $\beta_s^{'}$ en términos de los $\alpha_s^{'}$, se tiene entonces

$$(c_i r_{io})\alpha'_0 + (c_i r_{i1})\alpha'_1 + \cdots + (c_i r_{in})\alpha'_n = 0 \qquad 1 \le i \le k$$

Desde que los $\alpha_s^{'}$ son un conjunto linealmente independientes, esta última ecuación implica que cada uno de los coeficientes es cero:

$$[r_{ij}][c_i] = 0.$$

Esta matriz puede ser abreviada como el vector ecuación:
$c_1\rho_1 + \cdots + c_k\rho_n = 0$ donde ρ_i representa las columnas de la matriz.
Así se tiene que $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ es un conjunto dependiente si y solo si $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$ es un conjunto dependiente si y solo si $\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k\}$ es un conjunto dependiente.

Corolario 1.1: supóngase que el punto X_i, i=1, …, k, están ambos en S_l y S_m, que son subespacios de S_n; y suponga que X_i tiene como vector coordenado a λ_i relativo a cualquier estructura en S_l y el vector coordenado μ_i relativo a cualquier estructura en S_m. Entonces los vectores $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k$ forman un conjunto linealmente dependiente si y solo si los vectores $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_k$ forman un conjunto dependiente.

Prueba:
S_l y S_m son subespacios de S_n y X_i esta sobre ambos subespacios
Los vectores relativos a X_i en S_l son los λ_i.
Los vectores relativos a X_i en S_m son los μ_i.

Como S_l es un subespacio de S_n todos los vectores de $S_l \subset S_n$ esto implica que$\lambda_i \in S_l$, y aplicando la definición 1.6 los elementos de $S_l \subset S_n$ están en correspondencia uno a uno con los rayos de V_{n+1} si y solo si los vectores son linealmente dependientes, y si los vectores son linealmente dependientes entonces por el teorema 1.1 los puntos X_i son linealmente dependientes; además como los X_i están también en $S_m \subset S_n$ que es también subespacio de S_n y entonces aplicando nuevamente el teorema 1.1 los vectores μ_i son linealmente dependientes si y solo si los puntos son linealmente dependientes.
Por lo tanto λ_i son dependientes si y solo si μ_i son también dependientes.

Cambio de estructura de coordenadas; subespacios; hiperplanos.

Un cambio de coordenadas para un $(n+1)$-simple de referencia A_0, A_1, A_2, … , A_n y un punto unidad D en otro $(n+1)$-simple de referencia de referencia $B_0, B_1, \ldots B_n$ y un punto unidad E efectúa un cambio de estructura de coordenadas en un espacio proyectivo. ¿Como son las coordenadas de un punto en una estructura relacionada a estas coordenadas con una estructura diferente? La respuesta es dada por el estudio de cambio de bases en un espacio vectorial, porque de la correspondencia entre puntos de S_n y los rayos de V_{n+1}.
Se encuentra que las coordenadas de un vector, relativo a dos bases, son relacionadas por una transformación lineal. Así se concluye que las coordenadas de un punto de S_n, relativo a dos estructuras coordenadas, también están relacionadas por una transformación lineal.
Además, porque de lo hecho en coordenadas homogéneas estas no son únicas, la familiaridad de una constante de proporcionalidad aparece en la ecuación de una transformación.
Específicamente, si un punto tiene coordenadas (x_0, x_1, … , x_n) relativas a una estructura de coordenadas, y (y_0, y_1, …, y_n) coordenadas relativas a otra estructura de coordenadas, entonces

$$r[c_i] = [t_{ij}][x_i] \qquad\qquad r \neq 0.$$

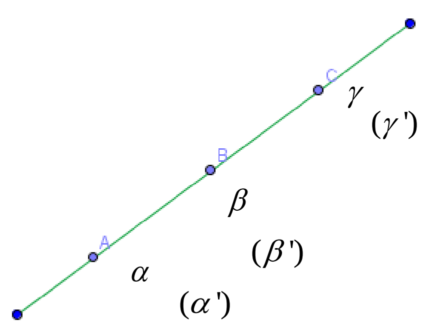


Figura 1-21

En S_2, suponga que los puntos colineales A, B, y C tienen vectores coordenadas α , β , γ , relativos a una estructura de coordenadas, y vectores coordenados α', β' , γ' , relativos a otra estructura de coordenadas (figura 1-21). Supóngase adicionalmente que $\gamma = h\,\alpha + k\,\beta$.

¿Como es la expresión para γ' como una combinación lineal de α' y β'? Se procederá de la siguiente forma:

$$r_1[a'_i] = [t_{ij}][a_i] \qquad (2)$$

$$r_2[b'_i] = [t_{ij}][b_i] \qquad (3)$$

$$r_3[c'_i] = [t_{ij}][c_i] \qquad (4)$$

La constante de proporcionalidad que aparece en la transformación lineal expresa el cambio de coordenadas, no necesariamente es la misma para puntos diferentes.

Ahora

$$c_0 = h\ a_0 + k\ b_0, \quad c_1 = h\ a_1 + k\ b_1, \quad c_2 = h\ a_2 + k\ b_2. \qquad (5)$$

Sustituyendo la ecuación (5) en la ecuación (4), y haciendo uso de la ecuación (2) y (3), se obtiene:

$$\begin{aligned} r_3\ c_0' &= t_{00}\ c_0 + t_{01}\ c_1 + t_{02}\ c_2 \\ r_3\ c_0' &= t_{00}(h\ a_0 + k\ b_0) + t_{01}(h\ a_1 + k\ b_1) + t_{02}(h\ a_2 + k\ b_2) \\ r_3\ c_0' &= h(t_{00}\ a_0 + t_{01}\ a_1 + t_{02}\ a_2) + k(t_{00}\ b_0 + t_{01}\ b_1 + t_{02}\ b_2) \\ &= h\ r_1\ a_0' + k\ r_2\ b_0', \text{ etc.} \end{aligned}$$

O

$$\begin{aligned} c_0' &= \frac{r_1}{r_3}\ h\ a_0' + \frac{r_2}{r_3}\ k\ b_0'. \\ &= \frac{r_1}{r_3}\ h\ \alpha + \frac{r_2}{r_3}\ k\ \beta. \end{aligned}$$

Se ha estudiado subespacios de V_n; también se tiene interés con los subespacios de S_n, en particular los subespacios llamados hiperplanos.

Anteriormente se vio que la ecuación:

$$a_0\ x_0 + a_1\ x_1 + a_2\ x_2 = 0$$

es la ecuación de una recta en el espacio de dos dimensiones y

$$a_0\ x_0 + a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + a_3\ x_3 = 0$$

la ecuación de la recta en el espacio de tres dimensiones. Generalizando estas ideas, se hace la siguiente definición:

Definición 1.8: El conjunto de todos los puntos $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de S_2(**C**) que satisfacen una ecuación homogénea lineal singular

$$p_0x_0 + p_1x_1 + \cdots + p_nx_n = 0$$

Es llamado hiperplano (o plano o primario).
Así, desde un punto de vista, una recta es un hiperplano de S_2(**C**), y un plano es un hiperplano de S_3(**C**).

Haciendo uso de algunos de los resultados sobre un espacio vectorial, se puede probar que un hiperplano en S_n es un espacio proyectivo de (n-1) dimensiones.

Teorema 1.2: Un hiperplano en S_n es un S_{n-1}.

Prueba: Por definición de hiperplano y S_n, se conoce que cada punto X, con coordenadas (x_0, x_1, **…** , x_n), del hiperplano definido por $p_0\ x_0 + p_1\ x_1 + \dots + p_n\ x_n = 0$ corresponde a un rayo [ε] de V_{n+1},donde el vector ε puede escribirse como

$$\varepsilon = x_0\alpha'_0 + x_1\alpha'_1 + \cdots + x_n\alpha'_n$$

Por resultados de espacio vectorial con respecto a sus dimensiones se sabe que, el conjunto $\{\varepsilon\}$ de todos los vectores que constituyen un espacio vectorial n-dimensional; y por isomorfismos[4] de subespacios y espacios, el conjunto $\{\varepsilon\}$ es isomorfo a V_n. Así se concluye que los puntos de S_n correspondientes a estos rayos constituyen un S_{n-1}.
Se puede hacer uso del álgebra elemental para establecer dos teoremas básicos sobre incidencia de puntos y rectas.

Teorema 1.3: En S_2, dos puntos distintos determinan una única recta (o ambos puntos están justo sobre una recta).

Prueba : si A(a_0, a_1, a_2), B(b_0, b_1, b_2) son dos puntos , ellos están sobre la recta con ecuación

$$p_0\ x_0 + p_1\ x_1 + p_2\ x_2 = 0$$

Si y solo si

$$p_0\ a_0 + p_1\ a_1 + p_2\ a_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad p_0\ b_0 + p_1\ b_1 + p_2\ b_2 = 0.$$

Si los a_i no son proporcionales a los b_i, entonces esas dos ecuaciones determinan p_0, p_1, p_2 un punto común dentro de ellas, es un elemento $\neq 0$.

---

[4] Isomorfismo es. Un homomorfismo biyectivo entre los espacios vectoriales.

Teorema 1.4: En S_2, dos rectas distintas determinan un único punto (o ambas rectas pasan justamente por un punto).

Prueba: Si

$$p_0\, x_0 + p_1\, x_1 + p_2\, x_2 = 0 \quad \text{y} \quad q_0\, x_0 + q_1\, x_1 + q_2\, x_2 = 0$$

Son las ecuaciones de dos rectas en S_2, entonces el punto R(r_0, r_1, r_2) está sobre ambas rectas entonces el determinante del sistema asociado a las ecuaciones de las rectas en coordenadas homogéneas es distinto de cero.

Note que en el teorema 1.3, se asume que los puntos están en S_2 es superficial, ya que dos puntos siempre están en S_2. La correspondiente Asunción no es superficial en el teorema 1.4, y es incluido en el teorema 1.3 para indicar una similitud entre los dos teoremas.

Teorema 1.5: Si T y U son subespacios de S_n, entonces $T \cap U$ es también un subespacio de S_n.

Prueba: Sean $X \in T \cap U$ y $Y \in T \cap U$
Entonces como T y U son subespacios de S_n

$$X + Y \in T, \qquad X + Y \in U$$
$$X + Y \in T \cap U$$
$$\text{Sea } X \in T \cap U \implies \alpha X \in T \cap U$$

Por lo tanto $T \cap U$ es un subespacio de S_n.

Nota: T y U pueden tener justamente un punto en común, en este caso d (T$\cap$U)=0; o T y U no pueden tener puntos en común en este caso es que T y U son asimétricos a cada otro, y se asume que T$\cap$U su dimensiones -1.

Definición 1.9: Si T y U son subespacios de S_n, el espacios más pequeño que los contienen a ambos T y U es llamado el asociado de T y U, se simboliza por [T, U].

El asociado de T y U no es justamente la unión de los dos conjuntos de puntos T y U. se arriesga la posibilidad leve de confusión por el bien del lenguaje geométrico expresivo, el asociado de dos puntos (espacio cero-dimensional) A y B es la recta AB, etc.

Teorema 1.6: Si T y U son subespacios de S_n, entonces d (T)+ d (U)= d (T$\cap$U)+ d ([T, U]).

Prueba: Supóngase que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p$, forman una base para $T \cap U$, entonces sean los vectores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p$,; $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_q$, que forman una base para T $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_p$ forma una base para U entonces $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p$;$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_q$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_p$ Forman una base para T+U.

$\Rightarrow d(T) + d(U) = d(T \cap U) + d([T, U])$

Teorema 1.7: Si [T, U]= S_n y si T y U son asimétricos a cada otro, entonces

$$d\,(T) + \ d\,(U) = \ n - 1.$$

Prueba: Como la unión de T y U generan a S_n, entonces

$$d(T) + d(U) = d(T \cap U) + d([T, U]) \quad \text{(Por definición de asimetría)}$$
$$= \ n - 1. \text{ ya que } d(T \cap U) = -1$$

1.7 Dualidad

La dualidad es prueba útil en varias ramas de las matemáticas y en algunas de las ciencias también, pero su uso en geometría proyectiva es particularmente elegante y especialmente porque facilita los procesos de pruebas.

En S_2 se considera una recta $l_1^{'}$ con ecuación $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_3 = 0$, se puede señalar $l_1^{'}$ por la tríada de coeficientes (a_0, a_1, a_2).

Puesto que $ka_0x_0 + ka_1x_1 + ka_2x_3 = 0$ para cualesquiera $k \neq 0$, es también una ecuación de $l_1^{'}$, la tríada (ka_0, ka_1, ka_2) representa la misma recta que la de coordenadas (a_0, a_1, a_2).

Se comienza a ver que si la tríada (a_0, a_1, a_2) forma un sistema de "coordenadas homogéneas" para $l_1^{'}$ se puede demostrar que éste es realmente el caso, como sigue.

Haciendo que el rayo $[\lambda]$ de V_3 corresponda a una recta arbitraria con la ecuación $l_0x_0 + \ l_1x_1 + \ l_2x_2 = 0$ sobre S_2, donde el vector λ tiene componentes l_0, l_1, l_2. Entonces hay una correspondencia uno a uno entre las rectas de S_2 y los rayos de V_3.

Sea la dependencia lineal de las rectas definida por la dependencia lineal de los rayos correspondientes. Así, *las rectas de S_2 constituyen los elementos –de un espacio proyectivo de dos dimensiones.* Se designa por Σ_2 este espacio, del cual los elementos son las rectas de S_2.

Así, asociado a un espacio proyectivo de dos dimensiones S_2 hay un espacio proyectivo de dos dimensiones, $\sum_2$ cuyos elementos son las rectas (hiperplanos) de S_2.
Por definición de hiperplano, se sabe que un hiperplano de $\sum_2$, es el conjunto de rectas con las coordenadas (x_0, x_1, x_2) satisfaciendo una ecuación lineal fija.

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_3 = 0,$$

Puesto que cada una de estas rectas es un conjunto de puntos de S_2 el hiperplano en Σ_2 es ciertamente un "conjunto de conjuntos" de puntos de S_2 ¿Pero cómo están relacionadas estas rectas? Todas ellas pasan a través de un punto de hecho, el punto de S_2

con coordenadas (a_0, a_1, a_2) . Este punto, que es común a todas las rectas constituye el hiperplano, que se elige llamar " hiperplano". Esto determina la relación recíproca:

	S_2	Σ_2
Elementos	Puntos	Rectas
hiperplanos	Rectas	Puntos

Esencialmente la relación se basa en el hecho siguiente: Los elementos de S_2 (punto) con coordenada homogénea (p_0, p_1, p_2) están sobre los elemento de Σ_2(recta) con coordenadas homogéneas (q_0, q_1, q_2) si solamente si

$$q_0.\ p_0 + q_1.\ p_1 + q_2.\ p_2 = 0.$$

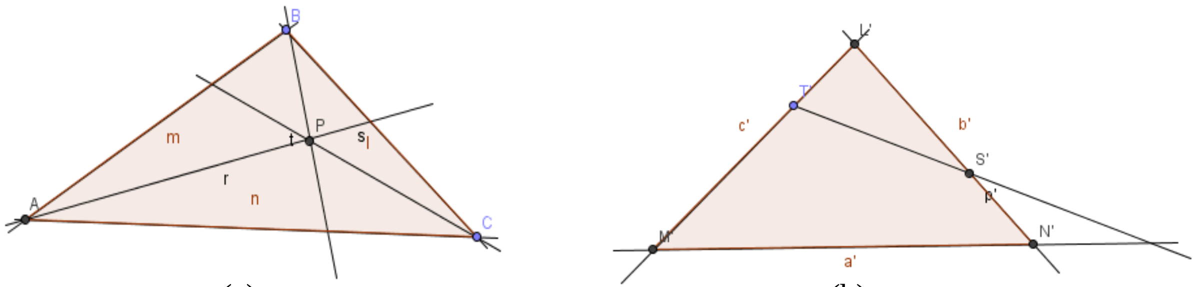
Ésta es exactamente la condición de la cual el elemento Σ_2 (recta) con coordenadas homogéneas (p_0, p_1, p_2) pasa a través del elemento de S_2 (punto) con coordenadas homogéneas (q_0, q_1, q_2).

Éste es el principio de la dualidad en dos dimensiones. Obtener el dual de una declaración en S_2 es un intercambio simplemente los términos "punto" y "recta", realizando tal que otros cambios en la fraseología (“los puntos que están sobre la recta" se convierten en "rectas que pasan a través del punto", etc.) como lo es la necesidad de la expresión idiomática.

Considerando la figura 1-22(a) en el cual se tienen cuatro puntos, A, B, C, P, ninguno de los tres colineales, y las seis rectas, $l, m, n, r, s, t,$ uniéndose los pares de estos puntos.

La figura dual (figura 1-22b) consiste en cuatro rectas, $a', b', c', p',$ ninguna de las tres concurrentes, y los seis puntos, $L', M', N', R', S', T',$ de la intersección de pares de estas rectas. En la fig. 1-22(a) los puntos A y B son unidos por la recta n; en la figura dual, las rectas a' y b' se interceptan en el punto N', etc.

Otra forma de expresar la relación es decir que el triángulo con vértices A, B, C y lados l, m, n duales al triángulo con los lados $a', b', c',$ y vértices $L', M', N',$ (un triángulo es una figura "dual de si misma"), y que las tres rectas $r, s, t,$ una pasando por cada vértice y concurren en P dualiza a tres puntos $R', S', T',$ uno sobre cada lado y colineales sobre p'.



(a) (b)

Figura 1-22

Una generalización de la discusión precedente de la dualidad en dos dimensiones comenzaría como sigue. El conjunto de todos los hiperplano de S_n formas un espacio proyectivo de dimensión n que se denota Σ_n. Un teorema proyectivo en S_n puede ser dualizado para obtener otro teorema intercambiando el "punto" y el "hiperplano", etc. está vez será necesario el intercambio de S_2 con S_{n-2} y, en general, S_r con S_{n-r}.

CAPITULO II

"Espacio Proyectivo y sus proyectividades en una y dos dimensiones"

2.1 Teorema de Desargues y resultados relacionados

Teorema 2.1 (Desargues[5]) En el plano si en dos triángulos con vértices y lados distintos, las rectas que unen los vértices correspondientes son concurrentes, entonces los puntos de intersección de lados correspondientes son colineales, e inversamente.

Prueba. Dados seis puntos distintos, forman los dos triángulos el ABC y $A'B'C'$ figura (2.1). Se supone de acuerdo con la hipótesis del teorema AA', BB', $C'C$ se interceptan en X. Sea AB y, $A'B'$, se interceptan en L; BC y $B'C'$ se interceptan en M; CA y $C'A'$ se interceptan en N, se mostrará que L, M, N son colineales.

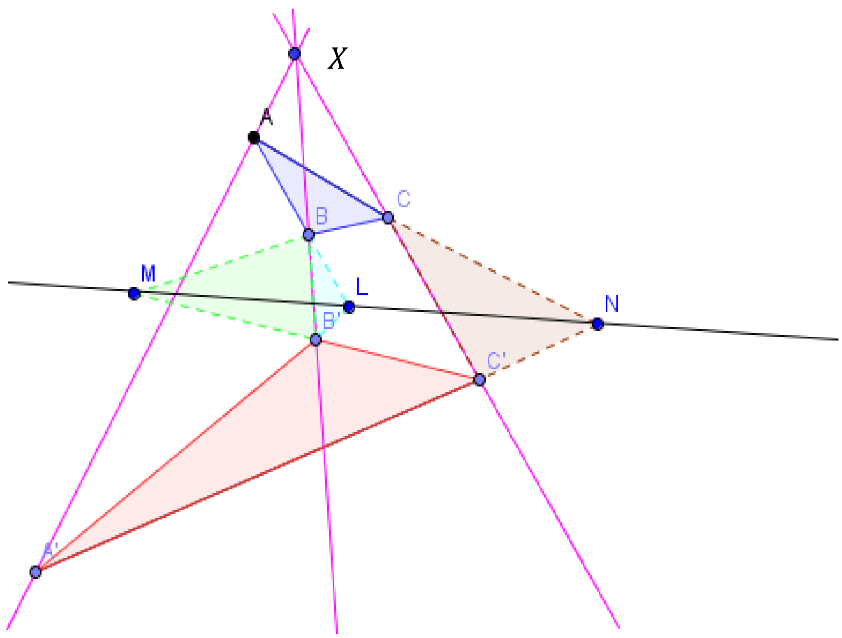


Figura 2.1

Sean los vectores coordenados de $A, B, C, A', B', C', L, M, N, X$ respectivamente $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \lambda, \mu, \nu, \xi$. Puesto que X esta sobre AA', ξ es una combinación lineal de α y α', es decir;

$$\xi = p_1 . \alpha + p_2 . \alpha' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Asimismo,

[5] Gerard Desargues, un arquitecto de León estuvo activo en matemáticas durante la primera mitad del siglo 17.

$$\xi = q_{1\,.}\,\beta + q_{2\,.}\beta' \dots\dots\dots\dots\dots\dots.(2)$$

$$\xi = r_{1\,.}\gamma + r_{2\,.}\gamma' \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

Igualando (1) y (2)

$$p_{1\,.}\,\alpha - q_{1\,.}\,\beta = q_{2\,.}\beta' - p_{2\,.}\alpha' \dots\dots\dots..(4)$$

Ahora $p_{1\,.}\,\alpha - q_{1\,.}\,\beta$ es un vector coordenado de un punto sobre *AB*, mientras que $q_{2\,.}\beta' - p_{2\,.}\alpha'$ es un vector coordenado de un punto sobre $B'A'$. porque los vectores coordenados son iguales, deben ambos representar a L, el punto común entre AB y $A'B'$

Similarmente un vector coordenado de M es

$$q_{1\,.}\,\beta - r_{1\,.}\gamma = r_{2\,.}\gamma'. - q_{2\,.}\beta';$$

Y el vector coordenado de N es

$$p_1.\alpha - r_{1\,.}\gamma = r_{2\,.}\gamma' - p_{2\,.}\alpha' .$$

Entonces sumando los vectores coordenados de L, M y N se tiene que:

$$(p_1.\alpha - q_{1\,.}\,\beta) + (q_{1\,.}\,\beta - r_{1\,.}\gamma) - (p_{1\,.}\,\alpha - r_{1\,.}\gamma\,) = 0.$$

$$(p_1 - p_1)\alpha + (q_1 - q_1)\beta + (r_1 - r_1)\gamma = 0$$

Entonces se concluye que L, M, N son colineales.

Note que no se ha hecho ninguna mención acerca de la dimensión del espacio S_n. El número de componentes de los vectores coordenados mencionados en la discusión precedente dependerá de *n*, pero la prueba no será afectada. [En el espacio tridimensional euclidiano extendido, *ABC*, $A'B'C'$ están en planos diferentes.

Si la figura completa esta en S_2, la parte inversa del teorema de Desargues se da por dualidad.

[En S_2 el teorema de Desargues "Su dual es él mismo"] Pero, en un espacio de grado mayor, la dualidad no será de ayuda en esta prueba. Es por ello que se establecerá un lema que su prueba es a menudo útil.

Lema 2.1. Sean L, M, N puntos distintos que están respectivamente sobre los lados *AB*, *AC*, *CA* del triángulo *ABC* figura (2.2). Sean los vectores coordenados de A, B, C, respectivamente α, β, γ. Entonces L, M, N son colineales $\Leftrightarrow$ $l$os vectores coordenados λ, μ, ν de L, M, N pueden ser elegidos de modo que

$$\lambda = p\,.\alpha - q\,.\beta \qquad \mu = q\,.\beta - r.\gamma, \qquad \nu = r\,.\gamma - p\,.\alpha$$

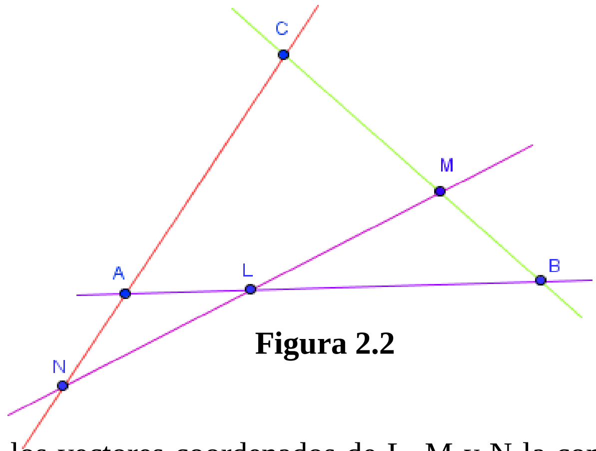


Figura 2.2

Prueba "$\Leftarrow$": como los vectores coordenados de L, M y N la combinación lineal de ellos es igual a cero, ya que $\lambda + \mu + \nu = 0$

"$\Rightarrow$": Como esta sobre AB, λ un vector coordenado de L puede ser escrito como $\lambda = p.\alpha - q.\beta$, para algún p, q. M esta sobre AC, cualquier vector coordenado de M es una combinación lineal de β y γ; eligiendo un múltiplo escalar apropiado, se puede escribir $\mu = q.\beta -$ r.γ, para un cierto r.

Similarmente, se puede escribir $\nu =$ r. $\gamma - p'.\alpha$, para algún p'. Ahora el problema, es demostrar que $p' = p$. Para hacer esto, hacemos uso la hipótesis que L, M, N son colineales. Así, existen las constantes l, m, n no todas cero, tal que

$$l.\lambda + m.\mu + n.\nu = 0,$$

Así sustituyendo λ, μ, ν , se tiene:

$$l(p.\alpha - q.\beta) + m(q.\beta - r.\gamma) + n(r.\gamma - p'\alpha) = 0$$

Reagrupando términos se tiene:

$$(lp - np')\alpha + (m - l)q.\beta + (n - m)r.\gamma = 0$$

Como α, β, γ son independiente (¿porqué?) (R\ Por ser los vectores coordenados de los puntos) los coeficientes $(lp - np')$ $(m - l)q, (n - m)r$, deben cada uno ser cero. Puesto que $q \neq 0$ $r \neq 0$, (¿porqué?) (R/Puesto que si $q = 0$ y $r = 0$, no podríamos expresar los vectores coordenados de los puntos L, M y N) se concluye que $l = m = n$. por lo tanto $p' = p$.

Esta es una prueba de la parte inversa del teorema de Desargues.

Desde L, M, N, son puntos colineales, uno sobre cada lado del triángulo A, B, C se sigue del lema 1 es posible escribir sus vectores coordenados como

$$\lambda = p.\alpha - q.\beta; \qquad \mu = q.\beta - r.\gamma; \qquad \nu = r.\gamma - p.\alpha.$$

Además puesto que L, M, N también están sobre cada uno de los lados del triángulo $A'B'C'$, es posible escribir sus vectores coordenados como:

$$\lambda' = p'.\alpha' - q'.\beta', \;\; \mu' = q'.\beta' - r'.d', \;\;\; v' = r'.\gamma' - p'\alpha'.$$

Como λ y λ' son vectores coordenados del mismo punto $\lambda = l.\lambda'$, para algún l distinto de cero igualmente, $\mu = m.\mu'$, $v = n.v'$, para algún m, n distintos de cero.

Puesto que $\lambda + \mu + v = 0$ se concluye que; $l.\lambda' + m.\mu' + n.v' = 0$, es decir, que

$$l(p'.\alpha' - q'.\beta') + m(q'.\beta' - r'\gamma') + n(r'.\gamma' - p'.\alpha') = 0.$$

Reagrupando términos podemos escribir esta ecuación como

$$(l-n)p'.\alpha' + \; (m-l)q'.\beta' + \; (n-m)r'.\gamma' = 0$$

Desde que ninguno de los p', q', r' es cero, y también que α', β', γ' son independiente, se concluye que $l - n = 0$, $m - l = 0$, $n - m = 0$; en otras palabras $l = m = n = k$. Entonces $\lambda = k.\lambda'$ esto implica que:

$$p.\alpha - q.\beta = k(p'.\alpha' - q'.\beta'), \;\; \text{ó} \quad p.\alpha - kp'.\alpha' = q.\beta - kq'.\beta'.$$

Asimismo, $\mu = k.\mu'$ conduce a

$$q.\beta - kq'.\beta' = r.\gamma - kr'.\gamma'$$

Ahora $p.\alpha - kp'.\alpha'$ es un vector coordenado de un punto sobre la recta AA'; $q.\beta - kq'.\beta'$ es un vector coordenado de un punto sobre BB'; $r.\gamma - kr'.\gamma'$ es un vector coordenado de un punto sobre CC'.

La igualdad de los vectores implica que las rectas son concurrentes.

Lema 2.2 Sean L, M, N puntos distintos que están respectivamente sobre los lados AB, BC, CA del triángulo ABC figura (2.3). Sean los vectores coordenados de A, B, C respectivamente α, β, γ. entonces AM, BN, CL son concurrentes $\Longleftrightarrow$ los vectores coordenados λ, μ, v de L, M, N pueden ser elegidos tal que

$$\lambda = p.\alpha + q.\beta; \qquad \mu = q.\beta + r.\gamma; \qquad v = r.\gamma + p.\alpha.$$

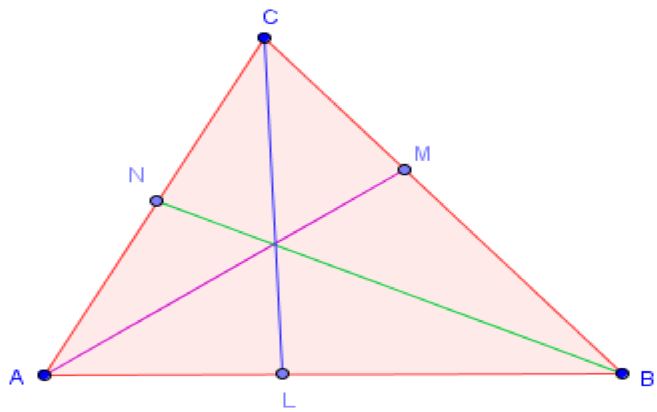


Figura 2.3

Prueba: "⟸": Considérese el punto P con vector coordenado $\pi = p.\alpha + q.\beta + r.\gamma$. puesto que $\pi = p.\alpha + 1.(q.\beta + r.\gamma)$, está claro que P esta sobre AM, a asimismo P esta sobre BN y Sobre Cl. Así las tres rectas son concurrentes.

"⟹". La situación es similar comparando una parte de la prueba del lema 1. Se puede escribir

$$\lambda = p.\alpha + q.\beta, \qquad \mu = q.\beta + r.\gamma, \qquad v = r.\gamma + p'.\alpha$$

Y se debe demostrar que $p = p'$.

Un vector coordenado π, de P el punto de la concurrencia de $AM, BN,$ y $CL,$ puede ser escrito

$$\pi = h_1.(p.\alpha + q.\beta) + k_1.\gamma = h_2(q.\beta + r.\gamma) + k_2.\alpha$$

$$\pi = h_1.(p.\alpha + q.\beta) + k_1.\gamma = h_2(q.\beta + r.\gamma) + k_2.\alpha$$

Reagrupando términos y haciendo uso la independencia $\alpha, \beta, \gamma,$ se concluye fácilmente que $h_1 = h_2 = h_3$. de esta igualdad, se deduce que $p' = p$.

2.2 Proyección desde una recta sobre una segunda recta en el plano extendido; Razón cruzada.

Retrocediendo a la noción de proyección que se dio al principio. En el plano extendido podemos tener una correspondencia uno a uno entre los puntos de l y l' sabiendo que 0 no esta sobre l ni l'.

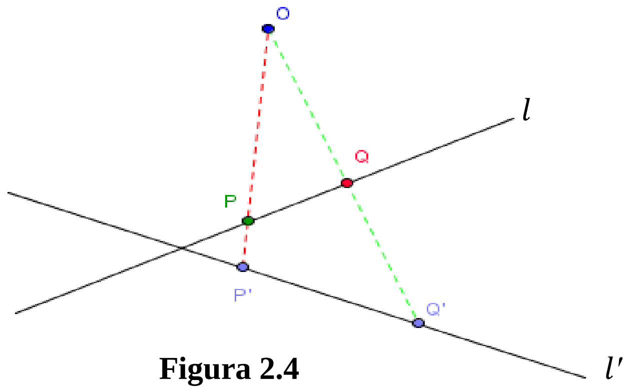


Figura 2.4

Claramente se ve que no hay una correspondencia uno a uno entre cada uno de los puntos de l y l' que están ilustrados en la figura 2.4; para esta clase de proyección, esto es necesario y suficiente que las rectas se unan en un punto que será el punto de concurrencia.

Definición 2.1: Una correspondencia uno a uno entre los puntos de dos rectas en el cual las rectas se unen en un punto correspondiente, entonces las rectas son concurrentes al punto 0 y es llamada una perspectiva con centro de perspectiva O, (en otras palabras las rectas están en perspectiva desde 0).

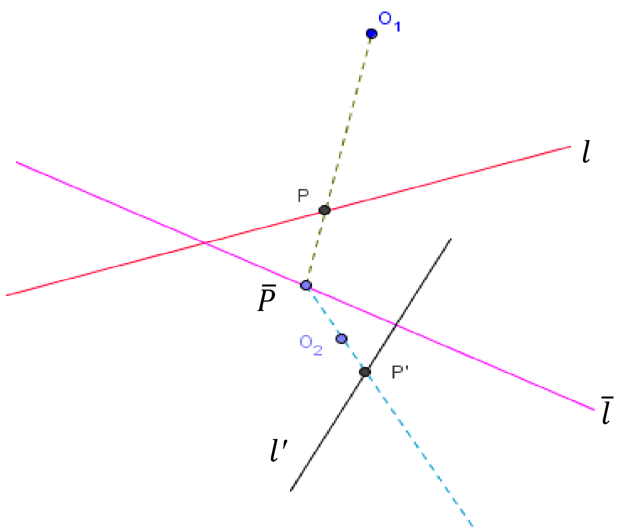


Figura 2.5

Se extenderá esta noción para considerar correspondencia de manera más general: Si l y $\bar{l}$ están en perspectiva desde O_1, y si $\bar{l}$ y l' están en perspectiva desde O_2, entonces esa es una correspondencia uno a uno entre los puntos de l y l' (fig 2.5). Este no es generalmente una perspectiva. Podemos definir una correspondencia entre los puntos de l y los de l' para una sucesión de mas de dos perspectivas.

Una correspondencia definida por una sucesión de un numero finito de perspectivas se llama una **proyectividad entre los puntos de l y los de l'.**

Dual de la definición 2.1: Se dice que dos haces O, O' de un mismo plano son perspectivos cuando entre sus rectas existe una correspondencia biyectiva tal que los puntos en que se cortan las rectas homologas están sobre una misma recta.

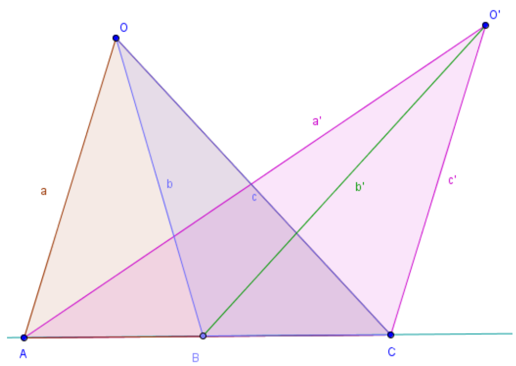


Figura 2.6

¿Que características son preservadas bajo una proyectividad?
La característica que preserva la proyectividad es: la colinealidad, los triángulos y las rectas, pero las distancias no se preservan.
No es verdadero que las razones de distancia son preservadas $\frac{P'Q'}{Q'R'} \neq \frac{PQ}{QR}$. Sin embargo los griegos, determinaron que la razón de razones son preservadas: por ejemplo

$$\frac{R'P'/R'Q'}{S'P'/S'Q'} = \frac{RP/RQ}{SP/SQ}$$

Note que si la "razón de razones" puede ser demostrada de igual forma que la perspectiva general, tales como los de la figura 2.7, seguirá inmediatamente que son también iguales para una proyectiva general.
La prueba de la invarianza bajo proyección de las "razones de razones" se hará en la próxima sección (teorema 2.2); primero se eligirá un nombre y una notación, y entonces obtendremos un resultado importante.

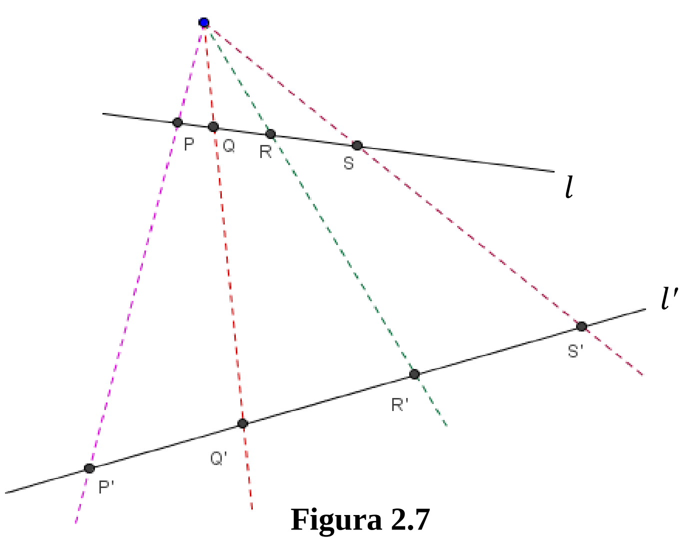


Figura 2.7

Si A, B, C, D son cuatro puntos distintos y colineales en el espacio real, la razón cruzada de A, B, C, D, denotada por (AB, CD), es el valor de

$$\frac{CA/CB}{DA/DB} \quad o \ \left(= \frac{CA}{CB}.\frac{DB}{DA}\right).$$

Esta definición tiene un solo significado si las cuatro distancias están definidas. Por lo tanto, ninguno de los cuatro puntos pueden ser ideales; esto es porque lo restringimos a nuestro espacio ordinario.

Para ello se trabajará en la recta real para luego se hará en coordenadas homogéneas.
Sea $C = h_1A + k_1B \quad y \quad D = h_2A + k_2B$. En el cual se encontrará los valores de $h_1, h_2, k_1 \ y \ k_2$

Tomando $A = O + \alpha_1\, L, \quad B = O + \alpha_2\, L, \ \ C = O + \alpha_3\, L, \quad D = O + \alpha_4\, L$
Donde O es el origen y $\alpha_i L$ con $i = 1,2,3,4$, son las distancias del origen al punto.

Luego restando el segmento $C - A \ \ y \ \ C - B$ se tiene:

$$C - A = (\alpha_3 - \alpha_1)L\,; \quad C - B = (\alpha_3 - \alpha_2)L$$

Despejando L de ambas ecuaciones se tiene:

$$L = \frac{C - A}{\alpha_3 - \alpha_1}; \quad L = \frac{C - B}{\alpha_3 - \alpha_2}.$$

Igualando L se tendrá:

$$\frac{C - A}{\alpha_3 - \alpha_1} = \frac{C - B}{\alpha_3 - \alpha_2}$$

$$\frac{C}{\alpha_3 - \alpha_1} - \frac{A}{\alpha_3 - \alpha_1} = \frac{C}{\alpha_3 - \alpha_2} - \frac{B}{\alpha_3 - \alpha_2}$$

$$\frac{C}{\alpha_3 - \alpha_1} - \frac{C}{\alpha_3 - \alpha_2} = \frac{A}{\alpha_3 - \alpha_1} - \frac{B}{\alpha_3 - \alpha_2}$$

$$C\left(\frac{1}{\alpha_3 - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_3 - \alpha_2}\right) = A\left(\frac{1}{\alpha_3 - \alpha_1}\right) - B\left(\frac{1}{\alpha_3 - \alpha_2}\right)$$

$$C\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}\right) = A\left(\frac{1}{\alpha_3 - \alpha_1}\right) - B\left(\frac{1}{\alpha_3 - \alpha_2}\right)$$

$$C(\alpha_1 - \alpha_2) = A\left(\frac{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}{\alpha_3 - \alpha_1}\right) - B\left(\frac{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)1}{\alpha_3 - \alpha_2}\right)$$

$$C(\alpha_1 - \alpha_2) = (\alpha_3 - \alpha_2)A - (\alpha_3 - \alpha_1)B$$

$$C = \left(\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\right)A + \left(\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)B$$

El mismo proceso se realiza para encontrar D,

$$D = \left(\frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\right)A + \left(\frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)B$$

Haciendo las razones simples de cada uno de ellos se obtiene,

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{\left(\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\right)A}{\left(\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\right)B} = -\left(\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1}\right)\frac{A}{B},$$

$$\frac{DA}{DB} = -\frac{\left(\frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\right)A}{\left(\frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)B} = -\left(\frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_4 - \alpha_1}\right)\frac{A}{B}$$

Por lo tanto la razón de razones es:

$$\frac{CA}{CB}\Big/\frac{DA}{DB} = \frac{-\left(\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1}\right)\frac{A}{B}}{-\left(\frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_4 - \alpha_1}\right)\frac{A}{B}}$$

$$\frac{CA}{CB}\Big/\frac{DA}{DB} = \frac{\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1}}{\frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_4 - \alpha_1}}$$

$$\frac{CA}{CB}\Big/\frac{DA}{DB} = \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_2)} \qquad (1)$$

Ahora pasándolo a coordenadas homogéneas el conjunto que esta sobre la recta ABCD, de manera que estos cuatro puntos distintos tengan, respectivamente, vectores coordenados $\alpha(a_0,\ a_1)$; $\beta(b_0,\ b_1)$; $\gamma(c_0,\ c_1)$; $\delta(d_0,\ d_1)$. Sabemos que cada uno de los γ, δ, puede ser expresado como una combinación lineal de α y β:

$$\gamma = h_1.\alpha + k_1.\alpha, \qquad \delta = h_2.\alpha + k_{2.}.\beta\ ,$$

Poniendo $\alpha_1 = {a_0}^{-1}a_1,\ \ \alpha_2 = {b_0}^{-1}b_1,\ \ \alpha_3 = {c_0}^{-1}c_1,\ \ \alpha_4 = {d_0}^{-1}d_1,$

Sustituyendo y simplificando en la ecuación (1) se obtiene:

$$(AB, CD) = \frac{(a_0c_1 - a_1c_0)(b_0d_1 - b_1d_0)}{(b_0c_1 - b_1c_0)(a_0d_1 - a_1d_0)}$$

Para el caso particular haciendo $c_0 = h_1,\ d_0 = h_2\ ,\ c_1 = k_1,\ d_1 = k_2, a_0 = 1,\quad a_1 = 0\ , b_0 = 0,\ b_1 = 1,$ se tiene:

$$(AB, CD) = \frac{k_1 h_2}{h_1 k_2} \qquad (2)$$

Utilizando la ecuación (2) para la razón cruzada de cuatro puntos colineales, es también valido cuando A, B, C, D son expresados en términos de dos o tres dimensiones de coordenadas.

RAZÓN CRUZADA EN $\boldsymbol{S_1}$

Sin hacer referencia a la noción de distancia, se puede hacer uso de la ecuación (2) de la sección anterior para definir la razón cruzada en s_1.

Definición 2.2: Sea A, B, C, D cuatro puntos en s_1. Relativo a la misma estructura de coordenadas en s_1, sean los vectores coordenados de A, B, C y D, son respectivamente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$con

$$\gamma = h_1.\alpha + k_1.\beta, \qquad \delta = h_2.\alpha + k_{2.}.\beta\ ,$$

Entonces la razón cruzada de A, B, C, D esta definida por:

$$(AB, CD) = \frac{k_1 h_2}{h_1 k_2}.$$

Nota. La generalización de esta definición, no tiene que ser una recta.

La razón cruzada dada aquí es independiente del sistema de coordenadas y es una constante particular de proporcionalidad.

Semejante a la definición de distancia mencionada anteriormente, la definición 2 asigna un valor a la razón cruzada de cuatro puntos coloniales iguales, cuando uno de los puntos es ideal de hecho, como es el caso general en geometría proyectiva, no hay distinción entre los trazos de puntos ordinarios y los puntos ideales.

Observación: Desde ahora en s_2, el conjunto de todas las rectas que pasan por un punto constituyen un s_1, la definición es una aplicación inmediata de la definición de razón cruzada de cuatro puntos coplanares, rectas concurrentes. Esta observación nos lleva a un lema importante.

Lema 2.3: En s_2, la razón cruzada de cuatro puntos colineales es igual a la razón cruzada de las cuatro rectas obtenidas por la unión de un quinto punto a cualquiera de los otros cuatro puntos, que no esta sobre la recta dada por los cuatro puntos.

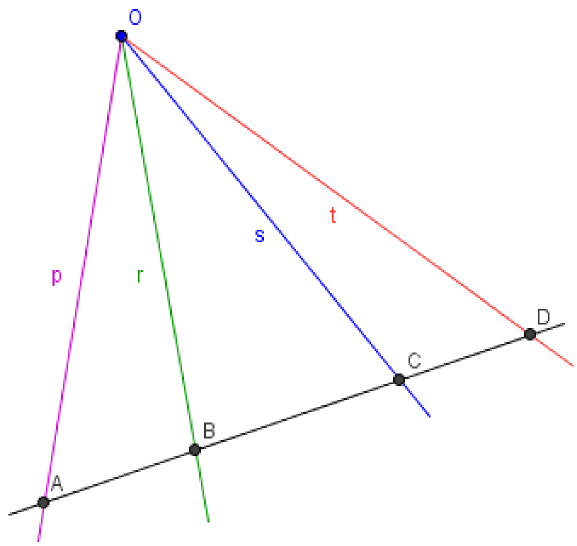


Figura 2.8

Prueba: Sean los puntos colineales A, B, C, D unidos con un punto O, formando las rectas $p, r, s, t,$ (fig 2.6). Sean los vectores coordenados en s_2, de A, B, C, D, respectivamente, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; y sean los vectores coordenados en $\sum_2$, de p, r, s, t, respectivamente, los π, ρ, σ, τ,. Si

$$\gamma = h_1.\alpha + k_1.\beta, \qquad \delta = h_2.\alpha + k_{2.}.\beta\,,$$

Entonces

$$\sigma = h_1.\pi + k_1.\rho, \qquad \tau = h_{2.}.\pi + k_2.\rho\,,$$

Y como $\sigma\ y\ \tau$ se pueden escribir como una combinación lineal por lo tanto

$$(AB, CD) = \frac{k_1 h_2}{h_1 k_2} = (pr, st)\ .$$

La prueba del lema ilustra que, si bien la definición de perspectividad y proyectividad de la sección anterior se refiere al plano real extendido, ella pude considerarse y aplicarse igualmente en s_2, con la única diferencia entre las formas de la figuras 2.4 y 2.5, no son de uso eficiente en la prueba. Una expresión como "rectas unidas correspondientes a puntos son concurrentes" esto tiene interpretación como "ciertas ecuaciones de rectas tienen la misma solución o una solución en común"; con cierta frecuencia se usará el lenguaje geométrico asociado con los diagramas para abreviar una discusión algebraica, pero no reemplazándola.

Teorema 2.2: la razón cruzada es preservada en una proyectividad desde los puntos de una recta a los de la segunda recta.

Prueba: supóngase que A_1, B_1, C_1, D_1 corresponden respectivamente a A_2, B_2, C_2, D_2 en una perspectividad con centro en P. Si designamos las rectas $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$ por a, b, c, d, respectivamente. Entonces por el lema 3, se tiene que:

$$(A_1B_1, C_1D_1) = (ab, cd) = (A_2B_2, C_2D_2).$$

Por lo tanto una proyectividad es una sucesión finita de perspectivas.

Lema 2.4: Si A, B, C, X, Y son puntos colineales tal que $(AB, CX) = (AB, CY)$, entonces $X = Y$.

Prueba: Se sabe que

$$(AB, CX) = \frac{k_1}{h_1} \cdot \frac{h_2}{k_2} \qquad \text{y que} \qquad (AB, CY) = \frac{k_1}{h_1} \cdot \frac{h_3}{k_3}$$

Y además que $(AB, CX) = (AB, CY)$ entonces

$$(AB, CX) = \frac{k_1}{h_1} \cdot \frac{h_2}{k_2} = (AB, CY) = \frac{k_1}{h_1} \cdot \frac{h_3}{k_3}$$

De aquí se tiene que

$$\frac{k_1}{h_1} \cdot \frac{h_2}{k_2} = \frac{k_1}{h_1} \cdot \frac{h_3}{k_3} \rightarrow \frac{h_2}{k_2} = \frac{h_3}{k_3}$$ Por lo tanto $X = Y$.

Teorema 2-3: Si $A, B, C, \ldots$ están sobre la recta l correspondientes a $A', B', C', \ldots$ que están sobre la recta l', con la razón cruzada de cualesquiera cuatro puntos distintos sobre l es igual a la razón cruzada de los cuatro puntos correspondientes sobre l' entonces esta es una proyectividad de l a l' que establece la misma correspondencia.

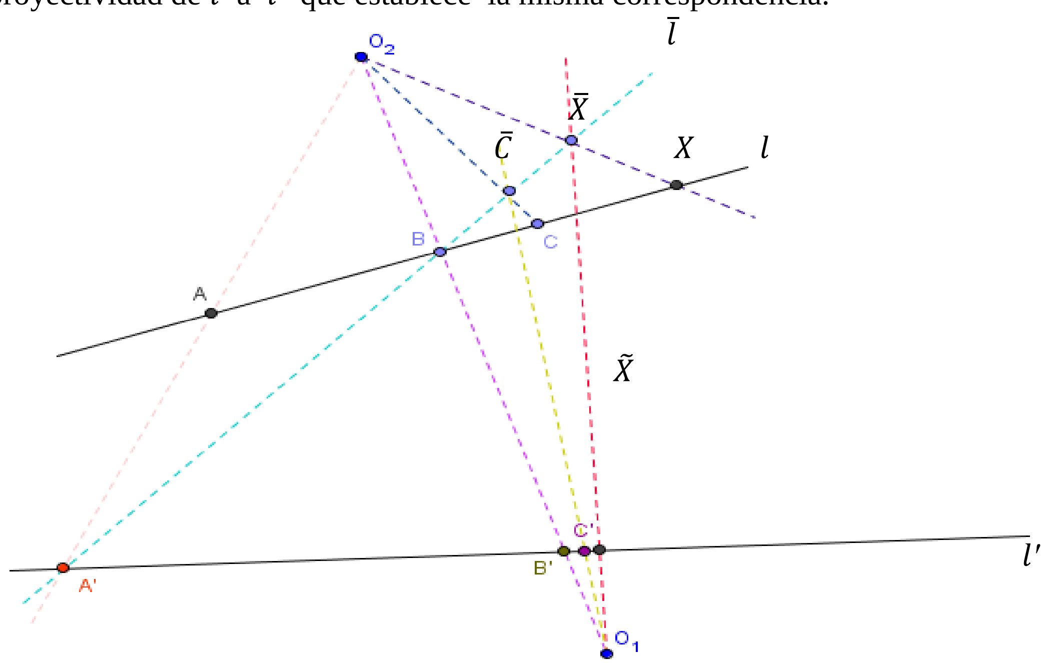


Figura 2.9

Prueba: Sea $\bar{l}$ la recta $A'B$. Sea AA' y BB' que se interceptan en O_2.
Se designa como $\bar{C}$ la intersección de O_2C con $\bar{l}$. Sea $\bar{C}C'$ y BB' que se interceptan en O_1. Ahora, si se toma un punto arbitrario X de l, se denota por $\bar{X}$ el punto de $\bar{l}$ correspondiente a X en la perspectiva desde l a $\bar{l}$ centrado en O_2, y se denota por $\tilde{X}$ el punto de l' correspondiente a $\bar{X}$ en la perspectiva desde l a l' centrado en O_2. Así tenemos una

proyección desde l a l' (una sucesión de dos perspectivas) en la cual A, B, C, X corresponden, respectivamente a $A^{'}, B^{'}, C^{'}, \tilde{X}$ por la definición de perspectividad.

Se tendrá sucesiones en la prueba de este teorema y se puede ver que $\tilde{X}$ es el mismo punto, como X', la correspondencia de X en la razón cruzada dada preserva la transformación. Esto se hace como lo siguiente. De la perspectiva centrada en O_1, $(AB, CX) = (A^{'}B, \bar{C}\bar{X})$; y de la perspectiva centrada en O_2, $(A^{'}B, \bar{C}\bar{X}) = (A^{'}B^{'}, C^{'}\tilde{X})$.

Así $(AB,\ CX) = (A^{'}B^{'},\ C^{'}\tilde{X})$. (se obtiene este resultado en un paso aplicando el teorema 2.2) pero, desde que la transformación dada, $(AB, CX) = (A^{'}B^{'}, C^{'}X')$. Así, por el lema 2.4, se concluye que $\tilde{X} = X^{'}$.

Note que la construcción involucrada en la prueba del teorema 2.3 es una sucesión de cualquier número finito de perspectivas y es equivalente a una sucesión de más de dos perspectivas.

2.3 Proyectividades y transformaciones lineales.

Supóngase que en S_2, se elige cuatro puntos distintos arbitrarios A, B, C, D sobre la recta l y se requiere que ellos correspondan, respectivamente, a cuatro puntos distintos arbitrarios $A^{'}, B^{'}, C^{'}, D^{'}$ sobre la recta l', en proyectividad. Esto es generalmente imposible, porque las posibilidades son $(AB, CD) \neq (A'B', C'D')$.

Es decir, no hay proyectividad de la cual hará que cuatro puntos arbitrarios de l corresponden a cuatro puntos arbitrarios de $l^{'}$ en la recta hay infinidad de proyectividades (perspectivas, de hecho) que hacen que a un punto A sobre l corresponda un A' sobre $l^{'}$; que es justamente una perspectiva que toma que A, B de l corresponda a $A^{'}, B^{'}$ de $l^{'}$; y que puede no estar en perspectiva que toma A, B, C de l en correspondencia con $A^{'}, B, 'C'$, de $l^{'}$.

Hay proyectividades que no están en perspectiva.

Teorema 2.4. Hay exactamente una proyectividad que toma tres puntos distintos arbitrarios de la recta l en correspondencia con tres puntos distintos arbitrarios l' (alternativamente, una proyectividad desde una recta a una segunda recta está determinada por tres pares de puntos correspondientes).

Prueba: Sean A, B, C tres puntos distintos de l, y sean $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ los puntos distintos correspondientes de l', entonces la figura 2.9 muestra cómo el conjunto de una sucesión de dos perspectivas (es decir, una proyectividad entre l y l') en la que A, B, C está en correspondencia con $A^{'}, B^{'}, C^{'}$, respectivamente. Además, hay una proyectividad semejante; es decir, que es justamente una correspondencia entre los puntos de l y l', puesto que si una proyectividad toma A, B, C, X sobre $A^{'}, B^{'}, C^{'}, X^{'}$, respectivamente, y si tomamos otros puntos, $A, B, C,\ X$ sobre $A^{'}, B^{'}, C^{'}, \tilde{X}$, entonces $(AB, CX) = (A^{'}B^{'}, C^{'}X^{'})$ y $(AB, CX) = (A^{'}B^{'}, C^{'}\tilde{X})$, por Teorema 2.2; de esto se tiene que $X^{'} = \tilde{X}$, por Lema 2.4 de este capitulo.

En otras palabras la transformación de cualquier punto X es el mismo en una proyectividad como en la otra - la proyectividad es la misma.

Nota: la construcción implicada en la prueba del teorema 2.3 da un método de localizar geométricamente en el plano ordinario que el punto $\boldsymbol{X'}$ es correspondiente a un punto arbitrario $\boldsymbol{X}$ en la proyectividad determinada por tres pares de puntos correspondientes.
El teorema 2.4 nos permite caracterizar perspectividades de una forma útil.
Se considera el punto M común a las rectas l y l' (figura 2.10). En cualquier perspectiva entre l y l', M es claramente "correspondiente así mismo," es decir, M es un punto de l correspondiente de M como un punto en l' en la perspectividad.

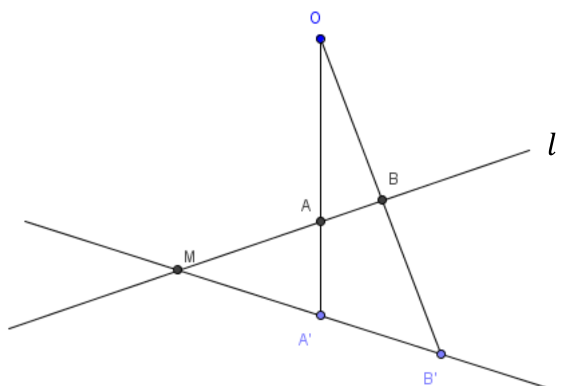


Figura 2.10

Teorema 2.5 En una proyectividad entre dos rectas, el punto común es correspondiente en si mismo $\Leftrightarrow$ la proyectividad es un perspectiva.

Prueba "$\Longrightarrow$" se llama a la proyectividad dada $\wp$; Sea M el punto común de las dos rectas l y l' sea A, B dos puntos de l, ambos distintos de M; Sean A', B' los dos puntos de l' correspondientes A, B en la proyectividad $\wp$ (fig. 2.10).
Sea O el punto de la intersección de AA' y BB', y se llama $\wp'$ a la perspectividad de l a l' centrado en O. Entonces $\wp$ lleva M, A, B a M', A', B', respectivamente; así mismo hace $\wp'$. Por lo tanto, por Teorema 2.4, que dice que dados tres puntos arbitrarios de una recta le corresponden tres puntos arbitrarios de la otra así $\wp$ es idéntico con $\wp'$.

" $\Longleftarrow$": Esto es trivial. (Puesto que si la proyectividad es una perspectiva, entonces el punto en común entre las 2 rectas será el mismo, tanto para la proyección como para la perspectiva, y por tanto será correspondiente en si mismo).

Considérese proyectividades relacionándolas con las transformaciones lineales.

Primero se pregunta: ¿Si A, B, C son tres puntos distintos fijos sobre l y A', B', C' son tres puntos distintos fijos en l', para cualquier X de l (distinto de A, B, C) podemos encontrar un X' de l' tal que $(A'B', C'X') = (AB, CX)$?

Es absolutamente fácil establecer que hay exactamente un punto X' que corresponde a cada X y es el siguiente teorema.

Teorema 2.6. La transformación razón cruzada preserva los puntos de una recta a los puntos de una segunda recta, es lineal en las coordenadas homogéneas unidimensionales de los puntos.

Prueba: Sean los vectores coordenados de A, B, C, X los β, γ, ξ con $\gamma = h.\alpha + k.\beta$, $\xi = s.\alpha + t.\beta$; Sean los vectores coordenados de A', B', C', X' los $\alpha', \beta', \gamma', \xi'$,con $\gamma' = h'.\alpha' + k'.\beta'$; $\xi' = s'.\alpha' + t'$. La existencia de s' y t'es la pregunta. Si las razones cruzadas son iguales,

$$\frac{k'}{h'}.\frac{s'}{t'} = \frac{k}{h}.\frac{s}{t}$$

$$s' : t' = h'ks : k'ht. \qquad (3)$$

Así, dados A, B, C, X, A', B', C', hay una razón única de s' a t' para que las razones cruzados sean iguales; por lo tanto, X' se determina únicamente.

Es útil obtener una expresión para los coordenadas de X'.

Supóngase que en un sistema coordenado unidimensional sobre l, $\alpha = (a_{0,} a_1)$, $\beta = (b_0, b_1), \xi = (x_0, x_1)$, y en un sistema coordenado unidimensional en l', $\alpha' = (\alpha'_{0,} \alpha'_1)$, $\beta' = (b'_0, b'_1)$, $\xi' = (x'_0, x'_1)$, no es necesario tratar explícitamente con γ y γ'.

Luego

$$\xi = s.\alpha + t.\beta,$$

Se tiene,

$$a_0\ s + b_0 t = x_0, \qquad a_1 s + b_1 t = x_1.$$

Similarmente, se tiene

$$a'_0 s' + b'_0 t' = x'_0 \qquad a'_1 s' + b'_1 t' = x'_1$$

Solucionar estos pares de las ecuaciones para s, t y s', t', y el sustituyendo en ecuación (3) conduce a

$$(b'_1 x'_0 - b'_0 x'_1) : (a'_1 x'_0 - \alpha'_0 x'_1) = h'k(b_1 x_0 - b_0 x_1) : k'h(a_1 x_0 - a_0\ x_1).$$

$$b'_1 x'_0 - b'_0 x'_1 = mh'k(b_1 x_0 - b_0 x_1)$$

$$a'_1 x'_0 - a'_0 x'_1 = mk'h(a_1 x_0 - a_0 x_1), \qquad (4)$$

Para una constante de la proporcionalidad $m \neq 0$.

Luego si se despeja x'_0 de la ecuación donde esta a'_1 se tiene

$$a'_1 x'_0 = mk'h(a_1x_0 - a_0x_1) + a'_0x'_1$$

Entonces

$$x'_0 = \frac{mk'h(a_1x_0 - a_0x_1) + a'_0x'_1}{a'_1}$$

Sustituyendo en el termino de b'_1 se tiene

$$b'_1\left(\frac{mk'h(a_1x_0 - a_0x_1) + a'_0x'_1}{a'_1}\right) - b'_0x'_1 = mh'k(b_1x_0 - b_0x_1)$$

Así despejando x'_1 se tiene

$$b'_1\left(\frac{a'_0}{a'_1}\right)x'_1 - b'_0x'_1 = x_0\left(-b'_1mk'h\left(\frac{a_1}{a'_1}\right) + mh'kb_1\right) + x_1\left(b'_1mk'h\left(\frac{a_0}{a'_1}\right) + mh'kb_0\right)$$

Así:

$$x'_1\underbrace{\left(b'_1\left(\frac{a'_0}{a'_1}\right) - b'_0\right)}_{c} = x_0\underbrace{\left(-b'_1mk'h\left(\frac{a_1}{a'_1}\right) + mh'kb_1\right)}_{r} + x_1\underbrace{\left(b'_1mk'h\left(\frac{a_0}{a'_1}\right) + mh'kb_0\right)}_{s}$$

$$c.x'_1 = rx_0 + sx_1$$

Al multiplicar por c y sustituyendo por $c.x'_1$ se tiene

$$cx'_0 = c\left(\frac{mk'h(a_1x_0 - a_0x_1) + a'_0x'_1}{a'_1}\right)$$

$$= cmk'h\frac{a_1}{a'_1}x_0 - cmk'h\frac{a_0}{a'_1}x_1 + \frac{a'_0}{a'_1}(rx_0 + sx_1)$$

$$cx'_0 = x_0\underbrace{\left(cmk'h\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a'_0}{a'_1}r\right)}_{p} + x_1\underbrace{\left(\frac{a'_0}{a'_1}s - cmk'h\frac{a_0}{a'_1}\right)}_{q}$$

Solucionando la ecuación (2) para x'_0, x'_1, y observando que h, k, h', k' son algunas funciones de las coordenadas de A, B, C, A', B', C', de lo que finalmente se obtienen

$$c.x'_0 = px_0 + qx_1 \qquad\qquad c \neq 0 \quad (5)$$
$$c.x'_1 = rx_0 + sx_1$$

Donde p, q, r, s, c son las funciones implicadas de las coordenadas A, B, C, A', B', C'. Así se tiene una expresión para las coordenadas de X' si $(A'B', C'X') = (AB, CX)$.

También se puede trabajar de forma inversa a requerir los coordenadas X en términos de X'. Esta discusión se pudo haber realizado con esta misma visión, y se habría obtenido un punto único X que corresponde a $X.'$Este argumento podría llevarse a cabo con este objetivo, y se hubiese obtenido un único punto X correspondiente a X'. Sin expresiones explícitas que salen para p, q, r, s, la ecuación (5) se puede solucionar para x_0, x_1, en términos de x'_0, x'_1; es decir, $ps - qr \neq 0$.

Una transformación, como la de la ecuación (5), en que las coordenadas de X' son funciones lineales de las coordenadas de X se llaman *Trasformaciones lineales.*

Si se desea interpretar S_2 como el plano ordinario, y se está dispuesto a restringir la atención a los puntos ordinarios, se puede dividir el segundo de la ecuación (5) por el primero, e introduciendo los coordenadas no homogéneas

$$x' = \frac{x'_1}{x'_0}, \qquad x = \frac{x_1}{x_0}$$

Sustituyendo

$$x' = \frac{rx_0 + sx_1}{px_0 + qx_1}$$

Dividiendo y multiplicando por x_0 se obtiene

$$x' = \frac{sx + r}{qx + p} \qquad (6)$$

Como la ecuación de la razón cruzada preserva transformaciones. Esta transformación no es uno a uno sin excepción.

Es importante para dicho propósito establecer el inverso del teorema 2.6, es decir, que una transformación lineal uno a uno de los puntos de una recta a los de una segunda recta preserva la razón cruzada. Todo lo que se sabe del teorema 2.6 es que bajo la transformación lineal de la ecuación (5), la razón cruzada de tres puntos particulares A, B, C y cualquier cuarto punto X es igual a la razón cruzada de los tres puntos particulares A', B', C'y el punto X'que correspondiente a X. Todavía no se sabe que la razón cruzada de cualesquiera cuatro puntos sobre l es igual a la razón cruzada de sus correspondientes según lo dado por la ecuación (5).

Teorema 2.7 Si X, Y, Z, W son cuatro puntos sobre la recta l, y si X', Y', Z', W'son los puntos correspondientes de la recta l', con la correspondencia determinada por la ecuación (5) con $ps - qr \neq 0$, entonces

$$(X'Y', Z'W') = (XY, ZW).$$

Prueba: Con la notación anterior, se tiene:

$$c_1x'_0 = px_0 + qx_1, \qquad c_2y'_0 = py_0 + qy_1,$$

$$c_1x'_1 = rx_0 + sx_1, \qquad c_2y'_0 = ry_0 + sy_1, \qquad (6)$$

$$c_3z'_0 = pz_0 + qz_1, \qquad c_4w'_0 = pw_0 + qw_1,$$

$$c_3z'_1 = rz_0 + sz_1, \qquad c_4w'_1 = rw_0 + sw_1,$$

(Como se observo anteriormente, la transformación lineal toma a X sobre X' no toman necesariamente ξ, un vector coordenado particular de X, sobre ξ', un vector coordenado particular de X', pero preferiblemente un múltiplo de ξ', es decir $c_1\xi'$.

La misma transformación lineal puede tomar para η, un vector coordenado de Y, tomando un múltiplo distinto, $c_2\eta'$ de η', un vector coordenado de Y' etc.)

Sea ζ y ω, los vectores coordenados de Z y W, que tienen las expresiones siguientes como combinaciones lineales de ξ y η:

$$\zeta = h_1\xi + k_1\eta; \qquad \omega = h_2\xi + k_2\eta$$

Sacando las componentes de los vectores $\xi', \eta', \zeta', \omega'$

$$\xi' = (c_1x'_0, c_1x'_1), \ \eta' = (c_2y'_0, c_2y'_1), \zeta' = (c_3z'_0, c_3z'_1), \ \omega' = (c_4w'_0, c_4w'_0),$$

Escribiendo estas ecuaciones del vector como ecuaciones algebraicas en los términos de las componentes de los vectores que se sustituyen en la ecuación (6) nos da

$$c_3z'_0 = h_1c_1x'_0 + k_1c_2y'_0$$

Entonces

$$z'_0 = \frac{h_1c_1}{c_3}x'_0 + \frac{k_1c_2}{c_3}y'_0$$

Y tres expresiones similares para. $z'_1, \omega'_0, \omega'_1$ se obtiene así

$$\zeta' = \frac{h_1c_1}{c_3}\xi' + \frac{k_1c_2}{c_3}\eta', \qquad \omega' = \frac{h_2c_1}{c_4}\xi' + \frac{k_2c_2}{c_4}\eta'$$

Por lo tanto

$$(XY, ZW) = \frac{k_1}{h_1} \cdot \frac{h_2}{k_2},$$

Y

$$(X'Y', Z'W') = \frac{k_1 c_2/c_3}{h_1 c_1/c_3} \cdot \frac{h_2 c_1/c_4}{k_2 c_2/c_4} = \frac{k_1 h_2}{h_1 k_2}.$$

En resumen, se tiene el resultado que los tres tipos siguientes de transformaciones de los puntos de una recta a los de la segunda recta son equivalentes el uno al otro.

(1) Proyectividad,
(2) Razón cruza-preserva transformaciones,
(3) Transformaciones lineales;

$$\begin{aligned} c.x'_0 &= px_0 + qx_1, \\ c.x'_1 &= rx_0 + sx_1, \end{aligned} \qquad ps - qr \neq 0; c \neq 0.$$

Se estableció la equivalencia indicada en cuatro pasos:

(a) Las transformaciones que son proyectivas preservan la razón cruzada (teorema 2.2);
(b) Las transformaciones que preservan la razón cruzada son proyectivas (teorema 2.3);
(c) Las transformaciones que preservan la razón cruzada son lineales (teorema 2.6);
(d) Transformaciones que son lineales preservan la razón cruzada (Teorema 2.7).

2.4 Definiciones importantes y el teorema de Pappus

(i) Una propiedad proyectiva de S_1 a S_1' en que los puntos $A, B, C, \ldots$ de S_1 corresponden respectivamente a los puntos $A', B', C', \ldots$ de S_1' puede ser designada como

$$(A, B, C, \ldots) \wedge (A', B', C', \ldots).$$

(ii) si los S_1 y S_1' de (i) son rectas l, l', respectivamente, cada recta es a veces llamada una hilera de puntos, y la proyectividad de (i) puede ser denotada como $l \wedge l'$.

(iii) si la proyectividad de (i) es una perspectiva, con centro en O, a veces la simbolizaremos usando

$$(A, B, C, \ldots) \overset{0}{\wedge} (A', B', C', \ldots)$$

O

$$l \overset{0}{\wedge} l'.$$

(iv) si las rectas $VA, VB,$ ... de los haces con vértices V correspondientes en una proyectividad con las rectas $VA', VB',$ ... de los haces de vértices V', se escriben

$$V(A, B, C, \ldots) \wedge V'(A', B', C', \ldots).$$

Si dos haces proyectivos están en perspectiva las rectas sobre las que se unen los correspondientes haces de rectas se llama *eje de perspectiva*.

(v) si los dos haces de (iv) son perspectivas, con ejes de perspectiva P, se pueden escribir

$$V(A, B, C, \ldots) \overset{p}{\wedge} V'(A', B', C', \ldots).$$

O

$$V \overset{p}{\wedge} V'.$$

Se puede hablar de perspectiva en un sentido intuitivo.

(vi) si se tiene una proyectividad (es decir una transformación lineal) relaciona los puntos de una rango a la recta de un haz.

En la figura 2.11 hay claramente una correspondencia uno a uno en que la transformación preserva la razón cruzada la cuál toma $A, B, C, D, \ldots$ en $PA, PB, PC, PD, \ldots$ se puede simbolizar esta proyectividad como

$$(A, B, C, \ldots) \wedge P(A, B, C, \ldots)$$

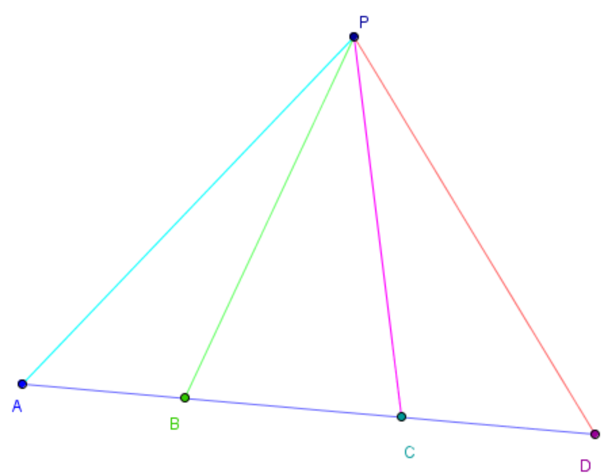


Figura 2.11

Una proyectividad de los puntos de S_n sobre los mismos puntos de S_n. Esta proyectividad será llamada una colinealidad de S_n.

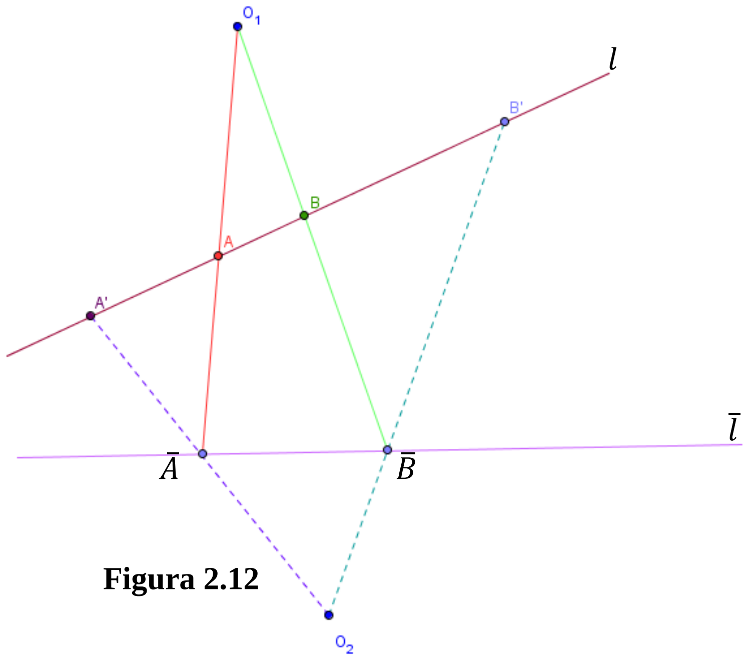


Figura 2.12

Se puede visualizar una colinealidad de una recta l como una sucesión de dos perspectivas: $l \overset{O_1}{\wedge} \bar{l} \overset{O_2}{\wedge} l$ (figura 2.12) este proceso exige el ajuste de l sobre un S_2. Pero la colineacion puede ser expresada algebraicamente haciendo referencia a un S_2. Si se elige un sistema de coordenadas sobre l, entonces la correspondencia de cualquier punto $(x_0,\ x_1)$ es el punto $(x'_0,\ x'_1)$ donde

$$k\begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

A una matriz no singular 2×2.

Literalmente la palabra “colinealidad” hace referencia a una transformación que toma puntos colineales sobre puntos colineales, y esto es verdadero en cualquier propiedad proyectiva de los puntos de S_n a ésos de S'_n. Algunos autores lo utilizan el termino colineación como un sinónimo apropiado como “propiedad proyectiva”, pero se reserva “colineación” para las proyectividades en que $S_n = S'_n$. Note que si $S_m \subset S_n$, una colineacion de S_n no es necesariamente también de S_m.

Colineación y correlación no son lo mismo.

Correlación: es una propiedad proyectiva de los puntos de S_n a los hiperplanos del mismo S_n.

Si ξ, tiene componentes $x_0,\ x_1,\ \ldots, x_n$, es el vector coordenado de un punto de S_n, y si ω, con componentes $w_0,\ w_1,\ \ldots, w_n$, es vector coordenado relacionado a un hiperplano, entonces la ecuación de una correlación es $k\ \omega = B\xi$, donde B es una matriz $(n+1) \times (n+1)$. Se tendrá en ocasiones que estudiar colineación y correlación con el mismo detalle.

Colineación de $\boldsymbol{S_n}$: esta definida como una transformación de puntos, incidentemente lleva hiperplanos sobre hiperplanos. Además la matriz que expresa la transformación de puntos es diferente desde que expresa la transformación de los hiperplanos.

Suponga que, relacionado a cierta estructura de coordenadas, una colineación en S_n es caracterizada por los puntos de una transformación

$$k\xi' = A\xi.$$

Si el punto con vector coordenado ξ esta en el hiperplano con vector coordenado π, tal que $\pi^t\xi = 0$ (recuerde que π puede se interpretado como un vector o como una matriz columna cualquiera), entonces los puntos de la transformación, con vector coordenado ξ', esta transformado en un hiperplano, con vector coordenado π', tal que $(\pi')^t.\xi' = 0$. Así

$$(\pi')^t.(\frac{1}{k}A.\xi') = 0 \qquad o \qquad \left[(\pi')^t.\frac{1}{k}A\right]\xi = 0$$

Por lo tanto $\pi^t = k'(\pi')^tA,\ o\ k'(\pi')^t = \pi^t A^{-1}$. Aquí $\pi^t\ y\ (\pi')^t$ son matrices filas; en términos de matrices columnas, las ecuaciones anteriores se convierten en

$$k'\pi' = (A^{-1})^t.\pi. \qquad (8)$$

Se observa la aplicación de la correlación. Si, relativo a cierta estructura de coordenadas, una correlación transforma un punto con vector coordenado ξ en un hiperplano con vector coordenado ω de acuerdo con la formula

$$k\omega = b\xi, \qquad (9)$$

Entonces un argumento importante es el procedimiento de una demostración que la correlación lleva el hiperplano con vector coordenado α en el punto con vector coordenadas η acorde a la formula

$$k'\eta = (A^{-1})^t.\alpha \qquad (10)$$

Es útil pensar que la correlación se puede ver como una transformación T que lleva puntos a hiperplanos e hiperplanos a puntos. Con este punto de vista se puede pensar que T es una transformación de un cierto conjunto (puntos e hiperplanos sobre si mismos).

Teorema de Pappus

Ahora se probará un teorema de fundamental de mucha importancia, debido a Pappus de Alejandría, año 400.

Teorema 2.8: Si los puntos de dos variedades[6] en un plano son proyectivamente relacionados, entonces los puntos de intersección de las rectas que interceptan estos pares de puntos correspondientes son diagonalmente colineales, si

$$(A, B, C, \dots) \wedge (A', B', C', \dots)$$

Es decir, los puntos de intersección de AB'y $A'B$, de AC' y $A'C, \dots$, de BC' y $B'C$ ... son colineales.

Nota: la recta en que están estos puntos es llamada la recta de Pappus' o los ejes cruzados de la proyectividad.

Prueba: considérese los haces $AA', AB', AC', \dots$ y $A'A, A'B, A'C, \dots$ estos haces son proyectivos, para

$$A(A', B', C', \dots) \wedge (A', B', C', \dots) \wedge (A, B, C, \dots) \wedge A'(A, B, C, \dots).$$

Además los haces están en perspectiva, para la recta común a AA' es correspondiente en si misma por definición dual de haces de perspectiva. Por consiguiente los puntos de intersección de las rectas correspondientes son colineales; AB' y $A'B, AC'$ y $A'C, \dots$, es decir, se interceptan en puntos colineales. Análogamente, es para los haces con vértices en B y B' están en perspectiva, tal que BA' y $B'A, BC'$, y $B'C, \dots$ se interceptan en puntos colineales. El problema ahora es demostrar que dos rectas están determinadas (es decir, los ejes de perspectiva de los haces con vértices A y A′, y los ejes de perspectiva de B y B') están sobre la misma recta, los ejes que se desea que se crucen son los de la proyectividad. Para hacer esto se hará en dos casos.

Caso 1

Si dadas las proyectividades y no están en perspectiva, entonces el punto de intersección de las dos variedades, l: $A, B, C, \dots$ y l': $A', B', C', \dots$, no están en correspondencia con si mismas puesto que no hay un único centro de perspectiva es decir $A \; y \; B$ tienen el mismo centro de perspectiva, pero con C ya no tienen el mismo centro de perspectiva. Suponga que el punto en común, en la recta l, es llamado M, al que le corresponde un punto M' sobre l' mientras que este mismo punto común, es un punto de l' llamado N', al que le corresponde un punto N sobre l. Los ejes de perspectiva de los haces con vértices A, A' van desde M' a N; asimismo para los haces con vértices B, B', o con cualquier par de puntos correspondientes de las proyectividades dadas como vértices.

[6] Una variedad lineal: es un subespacio de una estructura vectorial del espacio proyectivo.

Desde que dos puntos determinan una recta, tenemos el resultado deseado puesto que se aclaro por definición dual de perspectividad de haces que los puntos M' y N están alineados.

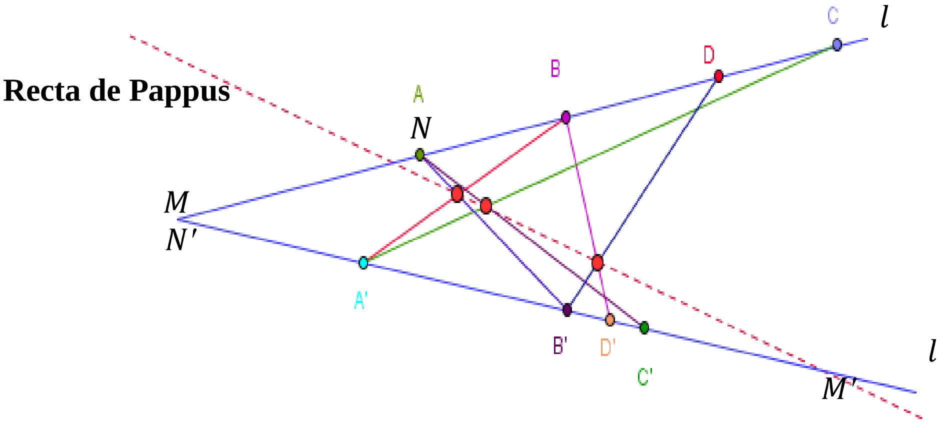


Figura 2.13 caso no perspectivo (a)

Caso 2

Si las proyectividades dadas son una perspectiva, entonces los ejes de perspectiva de los haces con vértices $A,\ A'$ pasan por los siguientes dos puntos: el punto de intersección de l y l', y el punto de intersección de AB' y $A'B$. Asimismo los ejes de perspectiva de los haces con vértices $B,\ B'$ pasan por los mismos dos puntos. Por tanto los puntos están alineados.

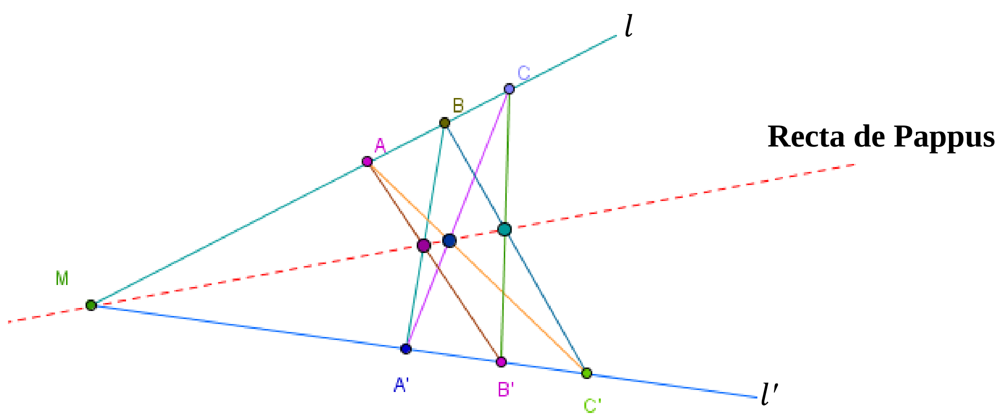


Figura 2.13 caso perspectivo (b)

Prueba 2

Sean $A, B, C,$ sobre l que corresponden respectivamente, a $A',\ B', C'$, sobre l'. Se elige el sistema de coordenadas en dos dimensiones para el plano y asignando los vectores coordenados por $\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'$. desde que C es colineal con A y B, γ es una combinación lineal de α y β; se elige de tal forma que $\gamma = \alpha + \beta$. Asimismo se elige α' y β' de tal forma que $\gamma' = \alpha' + \beta'$. La ecuación de AB' se puede escribir en términos de determinantes como

$$\begin{vmatrix} x_0 & a_0 & b_0^{'} \\ x_1 & a_1 & b_1^{'} \\ x_2 & a_2 & b_2^{'} \end{vmatrix} = 0, \qquad (11)$$

La cual se puede abreviar como $\left|\xi\alpha\beta^{'}\right| = 0$.

Usando abreviaciones similares, se puede escribir la de $A'B$ como

$$|\xi\alpha'\beta| = 0 \qquad (12)$$

La ecuación de AC' como

$$|\xi\alpha\alpha'| + \left|\xi\alpha\beta^{'}\right| = 0 \qquad (13)$$

La ecuación de $A'C$ como

$$|\xi\alpha'\alpha| + |\xi\alpha'\beta| = 0 \qquad (14)$$

La ecuación de BC' como

$$|\xi\beta\alpha| + |\xi\beta\beta'| = 0 \qquad (15)$$

La ecuación de $B'C$ como

$$|\xi\beta'\alpha| + |\xi\beta'\beta| = 0 \qquad (16)$$

Supóngase que $A'B$ y AB' se interceptan en L, con vector coordenado λ. Entonces λ satisface la ecuación (11) y (12). Asimismo si $A'C$ y AC' se interceptan en M, con vector coordenado μ, satisfaciendo las ecuaciones (13) y (14); y si $B'C$ y BC' se interceptan en N, con vector coordenado ν, entonces ν, satisface las ecuaciones (15) y (16).

Se debe demostrar que L, M, N son colineales. Si sumamos (11) y (12), o (13) y (14), o (15) y (16) se llega a que la ecuación de $A'C$ conlleva a que

$$|\xi\alpha\beta| + |\xi\alpha'\beta| = 0 \qquad (17)$$

Cada uno de los λ, μ, ν satisfacen (17). Así (17) es la ecuación de la recta de Pappus'.

Desde la prueba uno se vio que en el caso que no son perspectivas, se puede caracterizar los ejes cruzados como las rectas interceptándose en dos puntos correspondientes al punto en común de dos variedades. En poco tiempo se demostró el caso perspectivo, los ejes cruzados pueden estar caracterizados en términos de una cierta razón cruzada.

2.5 Razón cruzada y división armónica

Para hacer uso del concepto de razón cruzada, primero se deriva una expresión para la razón cruzada de cuatro puntos colineales, cada uno de ellos es expresado como una combinación lineal de dos puntos particulares.

Supóngase que los puntos colineales A, B, C, D, E, F tienen vectores coordenados $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \phi,$ respectivamente, con $\gamma = h_1\alpha + k_1\beta,$ $\delta = h_2\alpha + k_2\beta,$ $\varepsilon = h_3\alpha + k_3\beta,$ y $\phi = h_4\alpha + k_4\beta$. Entonces por la definición 2 de razón cruzada se puede obtener

$$(CD, EF) = \frac{\begin{vmatrix} h_3 & h_1 \\ k_3 & k_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_3 & h_2 \\ k_3 & k_2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} h_4 & h_2 \\ k_4 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_4 & h_1 \\ k_4 & k_1 \end{vmatrix}}. \qquad (18)$$

Demostración: Como $\varepsilon = h_3\alpha + k_3\beta,$ y $\phi = h_4\alpha + k_4\beta$ y lo que se quiere es la combinación lineal de ε y ϕ en términos de γ y δ.

$$\Rightarrow \varepsilon = m_1\gamma + n_1\delta$$

Ahora igualando las dos ecuaciones de ε se tiene que:

$$h_3\alpha + k_3\beta = m_1\gamma + n_1\delta$$

$$h_3\alpha + k_3\beta = m_1(h_1\alpha + k_1\beta) + n_1(h_2\alpha + k_2\beta)$$

$$h_3\alpha + k_3\beta = m_1h_1\alpha + m_1k_1\beta + n_1h_2\alpha + n_1k_2\beta$$

$$h_3\alpha + k_3\beta = (m_1h_1 + n_1h_2)\alpha + (m_1k_1 + n_1k_2)\beta$$

Ahora se tiene el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas siguiente:

$$h_3\alpha = (m_1h_1 + n_1h_2)\alpha$$

$$k_3\beta = (m_1k_1 + n_1k_2)\beta$$

$$h_3 = m_1h_1 + n_1h_2$$

$$k_3 = m_1k_1 + n_1k_2$$

Resolviendo este sistema se tiene:

$$h_3 = m_1h_1 + n_1h_2$$

$$h_3k_1 - h_1k_3 = \qquad k_1n_1h_2 - \quad k_2n_1h_1$$

De esto se tiene que $n_1 = \frac{h_3k_1 - h_1k_3}{k_1h_2 - k_2h_1}$ y $m_1 = -\frac{h_2k_3 - h_3k_2}{h_1k_2 - h_2k_1}$

Ahora resolviendo para ϕ se tiene que:

$$\Rightarrow \phi = m_2\gamma + n_2\delta$$

Ahora igualando las dos ecuaciones de ϕ se tiene que:

$$h_4\alpha + k_4\beta = m_2\gamma + n_2\delta$$

$$h_4\alpha + k_4\beta = m_2(h_1\alpha + k_1\beta) + n_2(h_2\alpha + k_2\beta)$$

$$h_4\alpha + k_4\beta = m_2h_1\alpha + m_2k_1\beta + n_2h_2\alpha + n_2k_2\beta$$

$$h_4\alpha + k_4\beta = (m_2h_1 + n_2h_2)\alpha + (m_2k_1 + n_2k_2)\beta$$

Ahora se tiene el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas siguiente:

$$h_4\alpha = (m_2h_1 + n_2h_2)\alpha$$

$$k_4\beta = (m_2k_1 + n_2k_2)\beta$$

$$h_4 = m_2h_1 + n_2h_2$$

$$k_4 = m_2k_1 + n_2k_2$$

Resolviendo este sistema se tiene:

$$h_4 = m_2h_1 + n_2h_2$$

$$h_4k_1 - h_1k_4 = \qquad k_1n_2h_2 - \quad k_2n_2h_1$$

De esto se tiene que $n_2 = \frac{h_4k_1 - h_1k_4}{k_1h_2 - k_2h_1}$ y $m_2 = -\frac{h_2k_4 - h_4k_2}{h_1k_2 - h_2k_1}$

Ahora utilizando la definición de razón cruzada se tiene que:

$$(CD, EF) = \frac{n_1m_2}{m_1n_2}.$$

$$= \frac{\left(\frac{h_3k_1 - h_1k_3}{k_1h_2 - k_2h_1}\right)\left(-\frac{h_2k_4 - h_4k_2}{h_1k_2 - h_2k_1}\right)}{\left(-\frac{h_2k_3 - h_3k_2}{h_1k_2 - h_2k_1}\right)\left(\frac{h_4k_1 - h_1k_4}{k_1h_2 - k_2h_1}\right)}$$

$$= \frac{(h_3k_1 - h_1k_3)(h_4k_2 - h_2k_4)(h_1k_2 - h_2k_1)(k_1h_2 - k_2h_1)}{(h_3k_2 - h_2k_3)(h_4k_1 - h_1k_4)(h_1k_2 - h_2k_1)(k_1h_2 - k_2h_1)}$$

$$= \frac{(h_3k_1 - h_1k_3)(h_4k_2 - h_2k_4)}{(h_3k_2 - h_2k_3)(h_4k_1 - h_1k_4)}$$

$$(CD, EF) = \frac{\begin{vmatrix} h_3 & h_1 \\ k_3 & k_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_3 & h_2 \\ k_3 & k_2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} h_4 & h_2 \\ k_4 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_4 & h_1 \\ k_4 & k_1 \end{vmatrix}}$$

Definición 2.3: La razón cruzada es positiva, cuando los pares no se separan, y es negativa, si un par divide al otro.

Se sigue directamente de la ecuación (18) que

$$(CD, EF) = (DC, FE) = (EF, CD) = (FE, DC) \tag{19}$$

Se sabe que 4!=24 permutaciones de 4 elementos, Hay, entonces, a lo sumo 6 razones cruzadas distintas.

Usando la definición de razón cruzada, sabemos que si $(XY, ZW) = r$, entonces $(XY, WZ) = {}^{1}/_{r}$; $(XZ, YW) = 1 - r$; $(XZ, WY) = {}^{1}/_{(1-r)}$; $(XW, YZ) = 1 - ({}^{1}/_{r})$; Y $(XW, ZY) = {}^{r}/_{(r-1)}$.

Es tedioso estar demostrando cada una de ellas por lo tanto se darán las reglas para obtenerlas.

Regla 1: cuando se permutan los pares la razón cruzada no varía.
Según la formula para obtener $(ZW, XY) = \frac{ZX.YW}{XW.ZY}$ y esto coincide con (XY, ZW)

Regla 2: la razón cruzada no varía cuando los elementos dentro de cada par se permutan simultáneamente.

Regla 3: al permutar los elementos en un solo par, el valor de la razón cruzada se cambia por su reciproco.

Regla 4: cuando se permutan los elementos no correspondientes de los pares distintos, el valor de la razón cruzada se reemplaza por su complemento hasta la unidad.

Por ejemplo: encontrar $(XZ, YW) = \frac{-(XZ+ZY)(WY+YZ)}{ZY\ XW}$

$$= -\frac{XZ.WY + XZYZ + ZY.WY + ZY.YZ}{ZY\ XW}$$

En el segundo término del numerador permutamos las letras, se asocia y se tiene lo siguiente:

$$= -\frac{XZ.WY + ZY(XZ + WY + YZ)}{ZY\ XW}$$

$$= -\frac{XZ.WY + ZY.WX}{ZY\ XW}$$

$$= -\frac{XZ.WY}{ZY\ XW} + 1$$

Pero $\frac{XZ.WY}{ZY\ XW} = r$ entonces se tiene:

$$= 1 - r$$

Estos son los grupos de razones cruzadas que conservan el mismo valor.

1- $(XY, ZW) = (YX, WZ) = (ZW, XY) = (WZ, XY) = r$

2- $(YX, ZW) = (XY, WZ) = (WZ, XY) = (ZW, XY) = 1/r$

3- $(XZ, YW) = (YW, XZ) = (ZX, WY) = (WY, ZX) = 1 - r$

4- $(ZX, YW) = (WY, XZ) = (XZ, WY) = (YW, ZX) = 1/(1 - r)$

5- $(YZ, XW) = (XW, YZ) = (WX, ZY) = (ZY, WX) = 1 - (1/r)$

6- $(ZY, XW) = (WX, YZ) = (XW, ZY) = (YZ, WX) = r/(r - 1)$

Es posible que puedan ser menos que 6 valores distintos en este conjunto.

(a) Si $r = 1/r$, entonces $r = \pm 1$.

i. Si $r = 1$, entonces los valores únicos de las otras razones cruzadas es 0. (dos de esas expresiones son indefinidas en este caso) Esto ocurrirá sólo si dos de los cuatro elementos coinciden.

ii. Si $r = -1$, entonces los valores únicos en las otras razones cruzadas son 2 y $\frac{1}{2}$. En este caso $(XY, ZW) = (XY, WZ)$. lo que se quiere decir es “Z y W dividen a X y Y armónicamente” o “X, Y, Z, W forman un conjunto armónico” o “W es el cuarto elemento armónico del conjunto X, Y, Z” o “W es el conjugado armónico de Z respecto de X y Y”. claramente si Z y W dividen a X y Y armónicamente, entonces W y Z también divide armónicamente a X y Y; y además, X y Y (y Y y X) dividen armónicamente a Z y W.

(b) Si $r = {}^{1}/_{(1-r)}$, entonces r es una raíz cubica imaginaria de -1, y los valores únicos de las otras razones cruzadas son otras raíces cubicas imaginarias de -1. En este caso X, Y, Z, y W, se dice que forman un conjunto equi-armónico.

El concepto de división armónica es relacionado fundamentalmente para el cuadrilátero completo[7] y se completa el cuadrilátero de la siguiente manera. Sean A, B, C, D los vértices de un cuadrilátero completo con puntos diagonales[8] P, Q, R (figura 2.14) supongamos que PR se une con AB en S. Entonces; puede demostrar que si S es el armonico conjugado de Q con respecto a A y B $(AB, QS) = -1$.

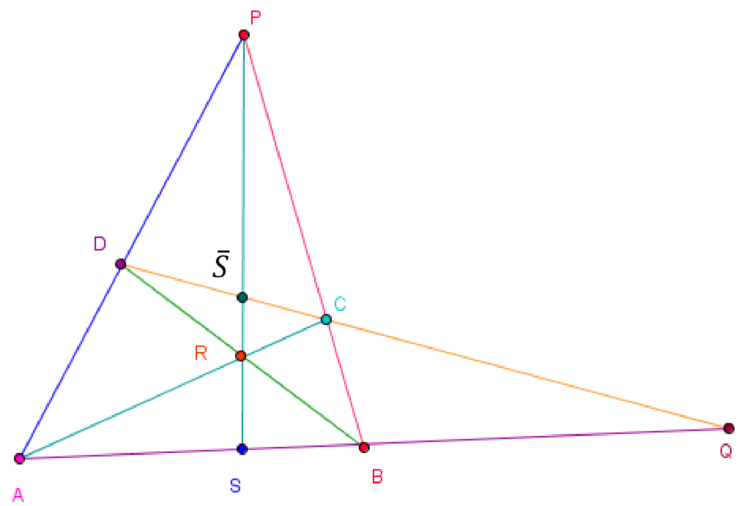


Figura 2.14

Teorema 2.9 Dos vértices de un cuadrilátero completo están separados armónicamente por el punto diagonal sobre su lado y el punto en el que su lado se intercepta con la recta que une las otras dos puntos diagonales.

Prueba: Se deducirá este resultado en dos formas

1-) supongamos que PR se une con CD en $\bar{S}$. Entonces $(A, B, Q, S) \overset{P}{\wedge} (D, C, Q, \bar{S}) \overset{R}{\wedge} (B, A, Q, S)$ se realizan las proyectividades correspondientes de manera que tomando los vectores coordenados de $A, B, C, D, Q, S, \bar{S}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, \eta$ se tiene

$$\sigma = k_1\beta + h_1\alpha \quad y \quad \eta = k_2\beta + h_2\alpha$$

---

[7] La configuración consistente en cuatro puntos coplanares, ninguno de tres de ellos colineales, y la intersección de seis pares de rectas de estos puntos es llamado un cuadrilátero completo.

[8] Punto diagonal: se le llama al punto intersección de dos pares de lados opuestos de un cuadrilátero completo

Por lo tanto $(AB,\ QS) = \frac{h_2k_1}{k_2h_1} = \ \phi = (DC, Q\bar{S}) = (BA,\ QS) = \frac{h_1k_2}{k_1h_2} = \frac{1}{\phi}$. Luego se tiene que $\phi = \frac{1}{\phi}\ \ \Rightarrow\ \ \phi^2 = 1$ ya que los elementos son distintos, esto implica que $\phi = -1 = (AB,\ QS)$ por lo tanto dos vértices del cuadrilátero están separados armónicamente por los puntos diagonales.

2-) sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ los vectores coordenados de los vectores A, B, C, D en la estructura de sistema de coordenadas en dos dimensiones. Estos vectores forman un conjunto linealmente dependiente:

$$k_1\alpha + \ k_2\beta + k_3\gamma + k_4\delta = 0.$$

Desde que los tres puntos no son colineales, ninguno de los k_s' es cero. Para simplificar, se escogen nuevos vectores coordenados para A, B, C, D:

$$\alpha' = k_1\alpha, \quad \beta' = k_2\beta, \quad \gamma' = k_3\gamma, \quad \delta' = k_4\delta,$$

Entonces se tiene:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 0.$$

La ecuación $\alpha' + \beta' = -(\gamma' + \delta')$ esta es una combinación lineal de las coordenadas de A y B de la otra combinación lineal de las coordenadas de C y D. de esta forma Q tiene coordenadas $\alpha' + \beta'$ [o alternativamente $-(\gamma' + \delta')$]. Asimismo, $\alpha' + \delta' = -(\gamma' + \beta')$ implica que P tiene coordenadas $\alpha' + \delta'$ o, $-(\gamma' + \beta')$. Finalmente $\beta' + \delta' = -(\alpha' + \gamma')$ implica que R tiene coordenadas $\beta' + \delta'$ o, $-(\alpha' + \gamma')$. Se usa $\alpha' + \beta'$ como el vector coordenado de Q; $\alpha' + \delta'$, de P; y $\beta' + \delta'$, de R. Desde que S esta sobre PR Sus coordenadas deben ser expresadas como una combinación lineal de P y R; para algún k, l,

$$\sigma = k(\alpha' + \delta') + l(\beta' + \delta') = k\alpha' + l\beta' + (k + l)\delta'.$$

Pero S también esta sobre AB; por lo tanto σ solo debe ser expresado como una combinación lineal de α' y β'. Así los que deben ser cero son $k + l = 0 \ \Rightarrow\ l = -k$, tal que $\sigma = k\alpha' - k\beta'$ y $\eta = \alpha' + \beta'$ Por la definición de razón cruzada, se tiene que $(AB, QS) = \frac{1.(-k)}{k.(1)} = \frac{-k}{k} = -1$ por lo tanto dos vértices del cuadrilátero están separados armónicamente por los puntos diagonales.

Como una consecuencia de este teorema, vea que las rectas $PA, PB, PQ, y\ PS$ (fig 2.14) forman un conjunto armónico.

Teorema 2.10 Dos lados opuestos de un cuadrilátero completo están separados armónicamente por las rectas que unen sus puntos de intersección con otros dos puntos diagonales.

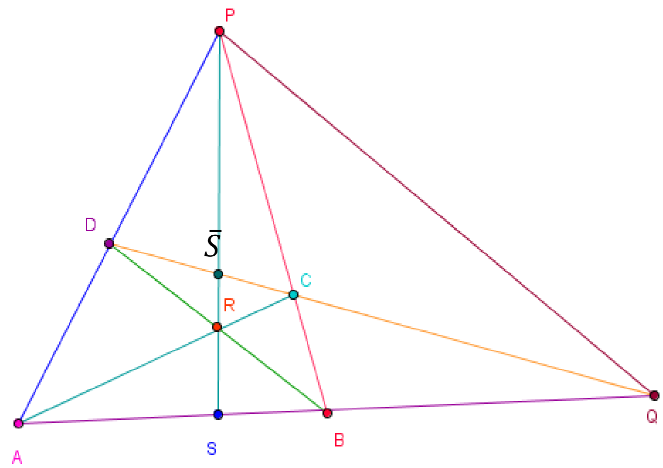


Figura 2.15

Prueba: Por el teorema 2.9 se sabe que $(AB, QS) = -1$ además que por el lema 2.3, se sabe que en S_2 la razón cruzada de 4 puntos colineales es igual a la razón cruzada de las cuatro rectas obtenidas por la unión de un quinto punto P cualquiera, que no este sobre la recta que contiene a los otros 4 puntos colineales. Por tanto $PA, PB, PQ, y\ PS$ forman un conjunto armónico.

Para el teorema 2.9, se observa otro estilo de resultado. Que R y Q están separados armónicamente por los puntos en que RQ se unen con AD y BC.

Teorema 2.11 Dos puntos diagonales de un cuadrilátero completo están separados armónicamente por los puntos en que sus rectas son interceptadas por los lados del cuadrilátero pasando por el tercer punto diagonal.

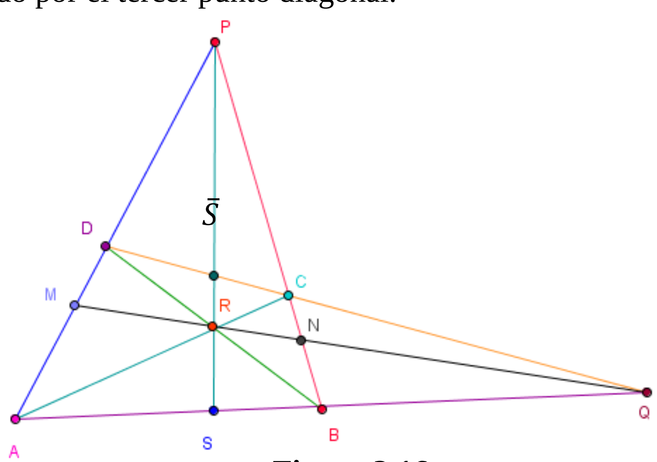


Figura 2.16

Prueba: Por el teorema 2.9 se sabe que $(AB, QS) = -1$ puesto que la razón cruzada se preserva por perspectividad, en este caso con centro de perspectiva P, $\Longrightarrow (MN, QR) = -1$ y por tanto los puntos M, N, Q y R forman una cuaterna armónica, y que R y Q están separados armónicamente por los puntos en que $\overline{RQ}$ se unen con $\overline{AD}\ y\ \overline{BC}$ donde M y N son la intersección del lado del cuadrilátero con el punto diagonal.

2.6 Algunos teoremas sobre triángulos

Haciendo uso de los lemas 2.1 y 2.2, se puede obtener un par de teoremas que son una generalización de resultados que se han encontrado anteriormente.

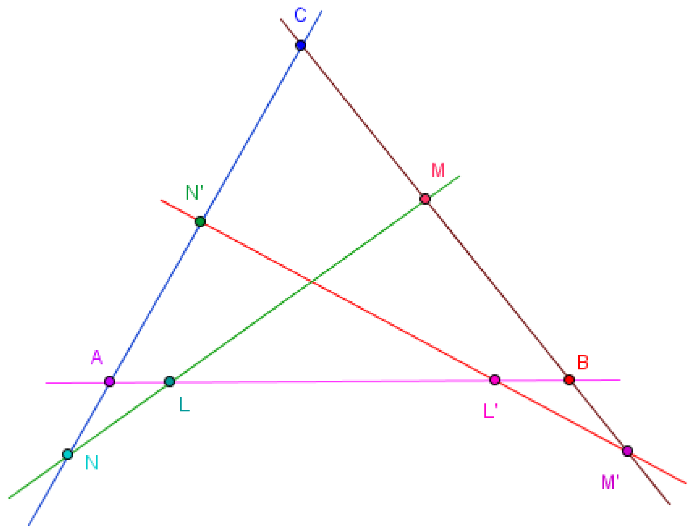


Figura 2.17

Teorema 2.12 Sean $L, M, y\ N$ tres puntos uno en cada uno de los lados del triangulo ABC, y sean L', M', N' otros tres puntos, uno sobre cada lado del triangulo (fig 2.17). Supónganse que $(AB, L'L) = k_1$; $(BC, M'M) = k_2$; $(CA, N'N) = k_3$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que $L', M'\ y\ N'$ sean colineales es que $k_1 k_2 k_3 = 1$.

Prueba: De acuerdo con el lema 2.1, los vectores coordenados de $L, M, y\ N$ pueden ser escrito así

$$\lambda = p\alpha - q\beta, \qquad \mu = q\beta - r\gamma, \qquad \nu = r\gamma - p\alpha$$

Entonces, usando lo de que los puntos están alineados, se puede concluir que los vectores coordenados de L', $M' y\ N'$ pueden ser escritos de la siguiente manera sean $\alpha, \beta, \lambda = p\alpha - q\beta$, y $\lambda' = c_1\alpha + c_2\beta$ así como la razón cruzada de $(AB, L'L) = k_1$ entonces se tiene:

$$\frac{pc_2}{-qc_1} = k_1,$$

Tomando $c_1 = p \Longrightarrow c_2 = -qk_1 \Longrightarrow \lambda' = p\alpha - k_1 q\beta,$

Al igual que para los otros dos $\mu'\ y\ \nu'$ se tendrá

$$\lambda' = p\alpha - k_1 q\beta, \qquad \mu' = q\beta - k_2 r\gamma, \qquad \nu' = r\gamma - k_3 p\alpha.$$

Si los puntos L', $M' y\ N'$ son colineales, entonces existen $h_1,\ h_2\ y\ h_3$ no todos ceros, tal que

$$h_1\lambda' + h_2\mu' + h_3\nu' = 0,$$

O

$$h_1(p\alpha - k_1 q\beta) + h_2(q\beta - k_2 \mathrm{r}\gamma) + h_3(r\gamma - k_3 p\alpha) = 0$$

$$h_1 p\alpha - k_1 h_1 q\beta + h_2 q\beta - h_2 k_2 r\gamma + h_3 r\gamma - h_3 k_3 p\alpha = 0$$

Reagrupando se tiene,

$$\alpha(h_1 p - h_3 k_3 p) + \beta(h_2 q - k_1 h_1 q) + \gamma(h_3 r - h_2 k_2) = 0$$

Por la independencia de $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, podemos decir entonces que los escalares deben ser cero:

$$h_1 p - h_3 k_3 p = 0, \quad h_2 q - k_1 h_1 q = 0 \quad \text{y} \quad h_3 r - h_2 k_2 = 0$$

Así,

$$h_1 = h_3 k_3, \qquad h_2 = h_1 k_1, \quad h_3 = h_2 k_2$$

Luego despejando los k_i , $i = 1,2,3$

$$k_3 = \frac{h_1}{h_3}, \quad k_1 = \frac{h_2}{h_1} \ , \quad k_2 = \frac{h_3}{h_2}$$

Esta ecuación implica que $k_1 k_2 k_3 = 1$.

Inversamente se tendrá entonces que

$$h_1 \lambda' + h_2 \mu' + h_3 \nu' = 0$$

Sustituyendo los valores de $h_1 = h_3 k_3,\ h_2 = h_1 k_1, \quad h_3 = h_2 k_2$. en la ecuación anterior se tiene:

$$h_3 k_3 \lambda' + h_1 k_1 \mu' + h_2 k_2 \nu' = 0$$

Dividiendo por $h_3 k_3$ la ecuación anterior

$$\lambda' + \frac{h_1 k_1}{h_3 k_3}\mu' + \frac{h_2 k_2}{h_3 k_3}\nu' = 0$$

Pero $\frac{h_1}{h_3} = k_3$ y $\frac{h_2}{h_3} = k_2$

$$\lambda' + k_3 . \frac{k_1}{k_3}\mu' + \frac{1}{k_2} . \frac{k_2}{k_3}\nu' = 0$$

$$\lambda' + k_1 \mu' + \frac{1}{k_3}\nu' = 0$$

Pero $\frac{1}{k_3} = k_1 k_2$

$$\lambda' + k_1 \mu' + k_1 k_2 \nu' = 0$$

Por tanto $L',\ M' y\ N'$ son colineales.

Teorema 2.13 Sean L, M, N tres puntos colineales, uno sobre cada lado del triangulo ABC, y sean $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ otros tres puntos, también uno sobre cada lado del triangulo. Supóngase que $(AB,\ \bar{L}L) = k_1$; $(BC,\ \bar{M}M) = k_2$; $(CA,\ \bar{N}N) = k_3$. entonces una condición necesaria y suficiente es que $A\bar{M}$, $B\bar{N}$, $C\bar{L}$ sean concurrentes es que $k_1k_2k_3 = -1$.

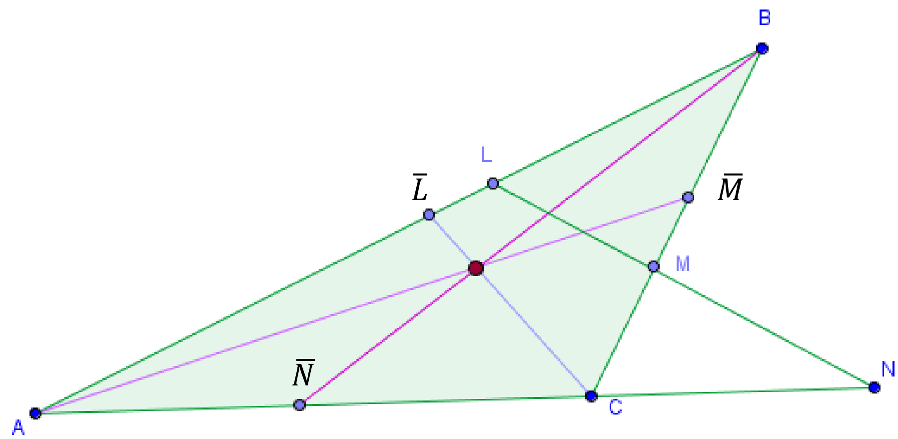


Figura 2.18

Prueba: Como L, M y N son colineales por el lema 2.1 los vectores coordenados de $L, M, y\ N$ pueden ser escritos así

$$\lambda = p\alpha - q\beta, \qquad \mu = q\beta - r\gamma, \qquad \nu = r\gamma - p\alpha$$

Ahora supóngase que $A\bar{M}, B\bar{N}\ y\ C\bar{L}$ son concurrentes, entonces por el lema 2.2 los vectores coordenados se pueden escribir así:

$$\bar{\lambda} = p\alpha + q\beta, \qquad \bar{\mu} = q\beta + r\gamma, \qquad \bar{\nu} = r\gamma + p\alpha$$

Como $A, B, L\ y\ \bar{L}$ están alineados entonces se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\bar{\lambda} = p\alpha - k_1q\beta, \qquad \bar{\mu} = q\beta - k_2r\gamma, \qquad \bar{\nu} = r\gamma - k_3p\alpha.$$

Se tiene que:

$$p\alpha + q\beta = p\alpha - k_1q\beta \qquad q\beta + r\gamma = q\beta - k_2r\gamma \qquad r\gamma + p\alpha = r\gamma - k_3p\alpha$$

$$q\beta = -k_1q\beta \qquad r\gamma = -k_2r\gamma \qquad p\alpha = -k_3p\alpha$$

$$1 = -k_1 \Rightarrow k_1 = -1 \qquad 1 = -k_2 \Rightarrow k_2 = -1 \qquad 1 = -k_3 \Rightarrow k_3 = -1$$

De esto se tiene que $k_1k_2k_3 = -1$

Ahora se tiene que $k_1k_2k_3 = -1$ Considérese el punto P con vector coordenado $\pi = p.\alpha + q.\beta + r.\gamma$. puesto que $\pi = p.\alpha + 1.(q.\beta + r.\gamma)$, está claro que P esta sobre $A\bar{M}$, a asimismo P está sobre $B\bar{N}$ y Sobre $C\bar{L}$ Así las tres rectas son concurrentes.

Corolario 2.1 sean L, M, N tres puntos colineales, uno sobre cada lado del triángulo ABC. Sea $\bar{L}$ el conjugado armónico de L respecto a A y B; $\bar{M}$, de M respecto B y C; $\bar{N}$, de N respecto C y A. Entonces $A\bar{M}$, $B\bar{N}$, $C\bar{L}$ son concurrentes.

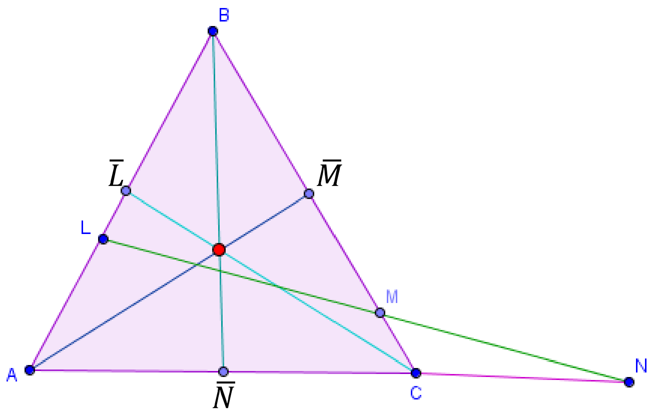


Figura 2.19

Prueba: Por hipótesis se tiene que L, M, N son puntos colineales y que además que $\bar{L}$ es el conjugado armónico de L respecto a A y B; $\bar{M}$, de M respecto B y C; y $\bar{N}$, de N respecto C y A entonces $(AB,\ \bar{L}\mathrm{L}) = -1$; $(BC,\ \bar{M}\mathrm{M}) = -1$; $(CA,\ \bar{N}\mathrm{N}) = -1$.
Utilizando el teorema anterior que $k_1k_2k_3 = -1$ entonces se tiene que $A\bar{M}$, $B\bar{N}$, $C\bar{L}$ son concurrentes.

Corolario 2.2 tres puntos $L^{'}, M^{'}\ y\ N'$, uno sobre cada lado del triangulo ABC, son colineales si y solo si el producto algebraico de las razones en el cual ellos dividen los lados AB, BC, CA es 1.

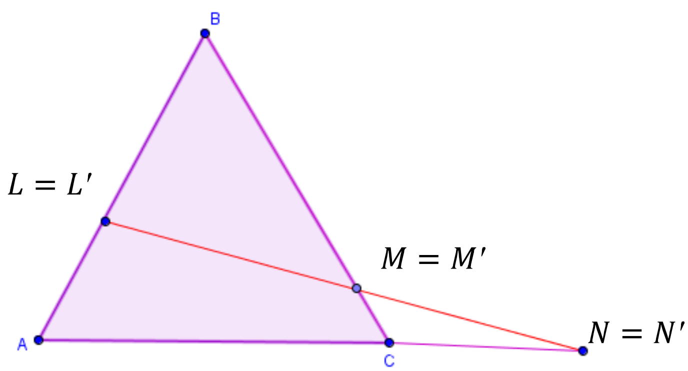


Figura 2.20

Prueba: Supóngase que $L = L^{'}$, $M = M^{'}, y\ N = N'$, así se tendrá entonces que:
$(AB, L^{'}L) = -1$; $(BC, M^{'}M) = -1$; $(CA, N^{'}N) = 1$, puesto que si los vectores coordenados de L es $\lambda = h_1\alpha + k_1\beta$ y como $L = L^{'} \Leftrightarrow$ la razón cruzada es $(AB, L^{'}L) = -\frac{k_1h_1}{h_1k_1} = -1$, (Puesto que L' y M' son conjugados armónicos de A y B y de B y C respectivamente) caso similar para las otras dos razones, (en el caso de la razón cruzada

de $(CA, N'N) = 1)$ por definición puesto que es positivo si un par no separa al otro luego utilizando el teorema 2.9 si $k_1k_2k_2 = 1 \iff L', M'\ y\ N'$, son colineales. Por tanto se cumple el corolario 2.

Corolario 2.3 si $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ son tres puntos, uno encada lado del triángulo ABC, entonces $A\bar{M}$, $B\bar{N}$, $C\bar{L}$ son concurrentes si y solo si el producto algebraico de las razones en que dividen los lados AB, BC, CA es -1.

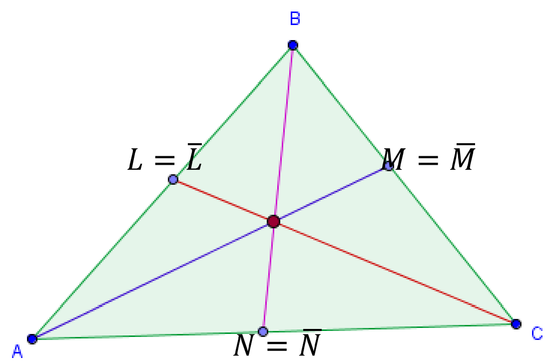


Figura 2.21

Prueba: Supóngase que $L = \bar{L}$, $M = \bar{M}, y\ N = \bar{N}$, así se tendrá entonces que: $(AB, L'L) = -1$; $(BC, M'M) = -1$; $(CA, N'N) = -1$, puesto que $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$; son conjugados armónicos de A y B, B y C, A y C respectivamente así si los vectores coordenados de L es $\lambda = h_1\alpha + k_1\beta$ y como $L = \bar{L} \iff$ la razón cruzada es $(AB, \bar{L}L) = \frac{k_1h_1}{h_1k_1} = -1$, caso similar para las otras dos razones (luego utilizando el teorema 2.10 si $k_1k_2k_2 = -1 \iff A\bar{M}$, $B\bar{N}$, $C\bar{L}$, son concurrentes. Por tanto se cumple el corolario 3.

Los corolarios 2 y 3 son el teorema de Menelao y Ceva.

Colineación en S_1

Es conveniente referirse a una colineación en S_1 con un punto fijo singular como "parabólica", y a una con dos puntos fijos con "no parabólica." La colineación no parabólica posteriormente se clasificará como "elíptica" si los puntos fijos son imaginarios y "hiperbólicas" si los puntos fijos son reales.

2.7 Involución y transformación; Involución en S_1; colineacion cíclica; involución métrica.

Una transformación de un dominio sobre si mismo es llamado *involutivo* si la transformación, aplicado dos veces en la sucesión, es equivalente a la identidad. Así una transformación involutiva es su propia inversa.

Las transformaciones involutivas no necesariamente son lineales; las que son lineales y no triviales (es decir ellas no son la identidad) son llamadas *involuciones*.

Una matriz T de $n \times n$ representa una involución de $V_n(C)$ siempre que $T^2 = I_n$; y una matriz W de $(n+1) \times (n+1)$ representa una involución de $S_n(C)$ siempre que $W^2 = c.I_{n+1}$ para algún numero complejo c, que se da porque ξ y $c\xi$ son vectores coordenados del mismo punto.

Estos son algunos ejemplos de transformaciones involutivas.

Dominio	p	$p' = T(p)$	Descripción de la transformación
1) S_n	$(p_0, p_1, \dots, p_n)$	$(p_0, -p_1, \dots, -p_n)$	Reflexión en el origen
2) S_n	$(p_0, p_1, \dots, p_n)$	$(\overline{p_0}, \overline{p_1}, \dots, \overline{p_n})$	Conjugación
3) $S_2 - (1, 0, 0)$	(p_0, p_1, p_2)	$(p_1^2 + p_2^2, p_0\, p_1, p_2 p_0)$	Inversión en el circulo unitario
4) Matrices $n \times n$	$[a_{ij}]$	$[a_{ji}]$	Transposición
5) Matrices no singulares	$[a_{ij}]$	$[\, a_{ij}]^{-1}$	Inversión

Nota: una colineación parabólica de S_1, no puede ser involución.

La forma canónica de una forma parabólica es

$$T = \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 1 & k_0 \end{bmatrix}.$$

Se ve que

$$T^2 = \begin{bmatrix} {k_0}^2 & 0 \\ 1 & {k_0}^2 \end{bmatrix},$$

Que no puede ser un múltiplo de I para $k_0 \neq 0$.
Por lo tanto toda involución de S_1 no es parabólica, es significativo referirse a la invarianza de una involución.

Teorema 2.14. La invarianza de una involución unidimensional es -1; es decir en una involución unidimensional cada par de puntos correspondientes separan los puntos fijos armónicamente.

Prueba: Por la invarianza de la razón cruzada bajo proyectividades,

$$(UV, XX') = (UV, X'X).$$

Pero en general, $(UV, XX') = {}^{1}/_{(UV, X'X)}$. Por lo tanto todos los puntos involucrados son distintos, $(UV, XX') \neq 1$. Por consiguiente, $(UV, XX') = -1$.

Teorema 2.15 si una colineación de S_1 intercambia un par de puntos, esa es una involución, es decir intercambia cada par de puntos.

Prueba: Supóngase que $T(X) = X',\ T(X') = X,\ T(Y) = Y',\ \ T(Y') = Z.$
Se desea probar que $Z = Y$. En virtud del hecho que T es una colineacion, $(XX', YY') = (X'X, Y'Z)$ pero el resultado general sobre la razón cruzada que
$(XX', YY') = (X'X, Y'Y)$ por lo tanto $Z = Y$.

Corolario 2.6 Si una colineación tiene invarianza -1, esta es una involución.

Prueba: Este corolario es una consecuencia del teorema 2.14. Puesto que toda invarianza de involución unidimensional es -1

Teorema 2.16 la matriz no singular

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Representa una involución de S_1 si y solo si $a + d = 0$.

Prueba:" $\Longrightarrow$ " Como T es una involución entonces cumple que $T^2 = kI_2$, entonces se tiene:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Así $a^2 + bc = k$; $ab + bd = 0$; $ca + dc = 0$; $cb + d^2 = k$

Tomando la ecuación 1 y 4 y simultaneándolas se tiene

$$\begin{array}{c} a^2 + bc = k \\ \underline{-cb - d^2 = -k} \\ a^2 - d^2 = 0 \\ \Longrightarrow\ \ (a - d)(a + d) = 0 \end{array}$$

Por lo tanto $a + d = 0$. Lqqd.

" $\Leftarrow$ " Ahora se sabe que $a + d = 0,$ entonces se quiere ver que $T^2 = kI_2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}$$

Como $a = -d$

Entonces $= \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & cb+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cb+d^2 & 0 \\ 0 & cb+d^2 \end{bmatrix} = cb + d^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sacando de factor $cb + d^2$ se obtiene $T^2 = kI_2$ con $k = cb + d^2$
Y por tanto T representa una involución.

Definición 2.5: Una trasformación es cíclica de periodo p si $T^p = cI$ para algún entero positivo p y $T^q \neq dI$ para $0 < q < p$.

2.8 Formas cuadráticas; invariantes.

Esta sección formara un resumen introduciendo algunos tópicos de primera calidad en geometría y algebra, pero un análisis mayor de estos temas es un material para el próximo capitulo.

Definición 2.6 un polinomio homogéneo de grado n en dos variables es llamado *una forma binaria de orden n.*

Así $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es una forma binaria de orden 2, o una forma cuadrática binaria.

La forma cuadrática binaria

$$f(w_0, w_1) = a_{00}w_0^2 + 2a_{01}w_0w_1 + a_{11}w_1^2 \qquad (1)$$

Que puede ser expresada con una representación de dos puntos sobre una recta l en el sentido que las raíces de $f(w_0, w_1) = 0$, (r_0, r_1) y (s_0, s_1), expresado, puede pensarse de cómo los vectores coordenados están sobre l. Los puntos son distintos si y solo si $a_{00}a_{11} - a_{01}^2 \neq 0$.

Hay una forma de matriz ordenada para la ecuación (1):

$$f(w_0, w_1) \equiv [w_0 \quad w_1] \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{01} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}; \qquad (2)$$

O, con notación obvia,

$$f(w_0, w_1) = w^t . A . w, \qquad (3)$$

Donde A puede ser llamada la matriz de transformación.

Los puntos representados por la transformación son distintos si y solo si la matriz de la transformación es no singular; si y solo si eldet $A \neq 0$.

Ahora supóngase que se representa una transformación lineal no singular T, puede ser considerada como una proyectividad de los puntos de l sobre los puntos de otra recta $l^{'}$, o como el cambio de estructura sobre l. Se tiene

$$\omega = T\omega^{'}.$$

Por lo tanto

$$\omega^{t} = (\omega^{'})^{t}T^{t},$$

Y la ecuación (3) queda

$$f'(w'_0, w'_1) = (\omega^{'})^{t}T^{t}AT\omega^{'} \qquad (4)$$

O

$$f'(w^{'}_0, w^{'}_1) = (\omega^{'})^{t}A'\omega^{'}$$

Donde $A^{'} = T^{t}AT$.

Ahora

$$\det\ A^{'} = \det(T^{t}) . \det(A) . \det(T) = (\det T)^2 . (\det A). \qquad (5)$$

Desde que T no es singular, det $T \neq 0$. por lo tanto det $A' = 0$ si y solo si det $A = 0$. este argumento tiene un significado, sin embargo, la interpretación geométrica es obvia. Los puntos representados por $f'(w'_0, w'_1)$ son distintos si y solo si los puntos representados por $f(w_0, w_1)$ son distintos.

Escrita de otra forma la ecuación (5) de otra forma mas explicita:

$$\begin{bmatrix} a'_{00} & a'_{01} \\ a'_{01} & a'_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{bmatrix}^2 . \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{01} & a_{11} \end{bmatrix}, \text{ donde } T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Aquí se tiene un ejemplo de una invarianza, o más precisamente, de una invariante de la forma $f(w_0, w_1)$ bajo una transformación T. la definición formal se lee como lo siguiente.

Definición 2.7: Una función $\phi(a_{00}, a_{01}, a_{11})$ de coeficientes de variables de una forma cuadrática binaria es invariante bajo una transformación lineal con matriz T, si

$$\phi(a^{'}_{00}, a^{'}_{01}, a^{'}_{11}) = k\phi(a_{00}, a_{01}, a_{11}),$$

Donde $a^{'}_{00}, a^{'}_{01}, a^{'}_{11}$ son los coeficientes de las variables de la forma después de la transformación, y k es una función solo de los elementos de T. (es decir k es independiente los a_s).

Puede ser mostrado que k siempre será igual a $(det\, T)^{\,n}$ donde es algún entero, llamado *el peso de la invarianza.* Así, el discriminante $a_{00}a_{11} - a_{01}^2$, es un invariante de peso 2 de la forma (1) bajo transformaciones lineales.

Geométricamente, si una invarianza ϕ de una forma cuadrática binaria igualada a cero, esa es una relación entre los puntos representados por f que es igual bajo cambio de coordenadas o proyectividad. Este hecho da explicación sobre la importancia en la estudio de la invarianza en la geometría.

Resultados interesantes son obtenidos si se consideran una segunda forma a la vez.

Sea $g(w_0,\ w_1) \equiv b_{00}w_0^2 + 2b_0w_0w_1 + b_{11}^2w_1^2 \equiv \omega^tB\omega$ representa otro par de puntos sobre la recta l. Para cualquier valor del parámetro x, la forma cuadrática.

$$f(w_0, w_1) + x.\,g(w_0, w_1) \equiv (a_{00} + xb_{00})w_0^2 + \cdots \equiv \omega^t(A + x.B)\omega$$

También representa un par de puntos sobre l.

Ahora se considera una transformación no singular

$$\omega = T\omega'$$

Que toma $f, g, f + xg$ en $f', g', f' + xg'$, respectivamente. Sean $A^{'}, B^{'}, A^{'} + xB'$ las matrices de estas nuevas formas, respectivamente. De la ecuación (5) se sabe que

$$\det\ (A + xB) = (a_{00} + xb_{00})(a_{11} + xb_{11}) - (a_{01} + xb_{01})^2$$

$$= \det\ A + x\psi + x^2(\det\ B),$$

Donde

$$\psi = a_{00}b_{11} - 2a_{01}b_{01} + a_{11}b_{00}$$

Y similarmente,

$$\det\ (A^{'} + xB^{'}) = \det\ A^{'} + x\psi' + x^2\ (\det\ B^{'}),$$

Donde

$$\psi^{'} = a_{00}^{'}b_{11}^{'} + 2a_{01}^{'}b_{01}^{'} + a_{11}^{'}b_{00}^{'}.$$

Así

$$(\det T)^2.(\det\ A) + x\psi^{'} + x^2(\det\ T)^2(\det\ B) = (\det\ T)^2[\det\ A + x\psi + x^2\ (\det\ B)].$$

Como el $det\, T$ es independiente de x, se concluye que

$$\psi^{'} = (\det\ T)^2.\psi. \qquad (7)$$

Aquí se tiene un ejemplo de un *simultáneo invariante* de la forma f y g bajo la transformación T.

Definición 2.8: Una función $\boldsymbol{\Phi}(a'_{00}, a'_{01}, a'_{11}, b'_{00}, b'_{01}, b'_{11})$ de los coeficientes de las variables de dos formas cuadráticas binarias es un simultáneo invariante de las formas bajo una transformación lineal con matriz T si

$$\boldsymbol{\Phi}(a'_{00}, .., b'_{11}) = \boldsymbol{k\Phi}(a_{00}, \dots, b_{11}),$$

Donde Las letras primas son los coeficientes de las variables de las formas después de la transformación, y k es una función de los elementos solo de T (k, es independiente de los a'_s y b'_s).

El significado geométrico de simultaneo invariante es análogo a lo de una invarianza simple: la desaparición de un simultaneo invariante de f y g expresa una relación proyectiva invariante entre el conjunto de puntos representados por f y g.

El significado de la invarianza de ψ , como se dio en la ecuación (7) esta contenido en el siguiente teorema.

Definición 2.9: Dos formas cuadráticas binarias para las cuales

$$\psi = a_{00}b_{11}, +2a_{01}b_{01} + a_{11}b_{00} = 0$$

Se dice que son apolares.

Así, un de formas cuadráticas representan un conjunto armónico de puntos si y solo si las formas son apolares.

CAPITULO III

“Estudio de las cónicas en el espacio proyectivo”.

3.1 Definición y generación proyectiva de cónicas

Definición 3.1. El polinomio

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

Es llamado una forma cuadrática ternaria. El Rango de la forma es el rango de la matriz

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{00} & \mathrm{a}_{01} & \mathrm{a}_{02} \\ \mathrm{a}_{01} & \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{02} & \mathrm{a}_{12} & \mathrm{a}_{22} \end{bmatrix}.$$

Definición 3.2 Se llama cónica al lugar geométrico de los puntos reales o imaginarios cuyas coordenadas homogéneas, con respecto a un sistema de referencia proyectivo, en el Plano $S_2(C)$, satisfacen a una ecuación de segundo grado (forma cuadrática ternaria) del tipo

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \qquad (1)$$

Otras expresiones para esta ecuación son:

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = 0 \qquad\qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

Y su expresión matricial es

$$[x_0x_1x_2]\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [0]. \qquad (2)$$

O en vectores coordenados

$$\xi^t A\xi = 0 \qquad (3)$$

Donde ξ es la matriz de columnas de x_i , A es la matriz *simétrica* de 3×3 de coeficientes denominada matriz de la forma cuadrática o matriz asociada a la ecuación de la cónica, y el cero en los lados derechos de las ecuaciones (2) y (3) es la matriz cero de 1×1.

La cónica, entonces, es específicamente relativa a una estructura de coordenadas dado, una vez la matriz A dada; en una estructura de coordenadas fija, hay una correspondencia uno a uno entre las cónicas y las matrices simétricas de 3×3.

En la geometría analítica elemental, es usual para simplificar la ecuación de una cónica por un cambio de estructura de coordenadas. Por movimientos rígidos de los ejes (las traslaciones y las rotaciones), se puede hacer una elipse, por ejemplo, asume la forma estándar $\left({x^2}/{a^2}\right) + \left({y^2}/{b^2}\right) = 1$, o, en las condiciones de coordenadas homogéneas del plano Euclidiano extendido

$$x_0^2 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0.$$

Si se considera una transformación lineal en el dominio complejo se tiene el siguiente cambio de estructura.

$$rx_0^{'} = x_0$$

$$rx_1^{'} = \frac{i}{a}x_1$$

$$rx_2^{'} = \frac{i}{b}x_2$$

(No un movimiento rígido), se obtiene la forma ordenada $x_0^{'2} + x_1^{'2} + x'^2_2 = 0$.

Ahora si se tiene la ecuación de una cónica

$$\xi^t A\xi = 0$$

"después de un cambio de coordenadas proyectivos $\eta = M.\xi$ (M es la matriz no singular es decir de determinante no nulo) la nueva ecuación de la cónica sigue siendo un polinomio de segundo grado homogéneo". En efecto sustituyendo en la ecuación de la cónica, las antiguas coordenadas en función de las nuevas resulta

$$\xi^t A\xi = (M^{-1}\eta)^t A(M^{-1}\eta)$$

$$= \eta^t((M^{-1})^t A(M^{-1}))\eta = 0$$

Se denota $B = (M^{-1})^t A(M^{-1})$ resulta que $B = B^t$ y si (b_{ij}) son sus componentes y $(y_0,\ y_1, y_2)$ las coordenadas respecto al nuevo sistema, se tiene como una nueva ecuación de la cónica, el polinomio homogéneo de segundo grado

$$\sum_{i,j=0}^{2} b_{ij}x_i x_j = 0 \qquad\qquad b_{ij} = b_{ji}.$$

Además "el rango de la matriz A asociada a una cónica se conserva por un cambio de coordenadas proyectivo (es decir, es un invariante proyectivo)".

En efecto por la propia definición de rango de una matriz en términos de la transformación lineal en $\mathbb{R}^3$ se define, respecto a unas bases fijadas, puesto que la dimensión del espacio imagen de dicha transformación lineal no depende de las bases elegidas, resulta que:

$$rango\ B = rango\ (M^{-1})^t A (M^{-1}) = rango\ A.$$

Este hecho permite hacer la siguiente distinción entre las cónicas.

Definición 3.3: se dice que una cónica es degenerada si el determinante de su matriz asociada es nulo; caso contrario, se dirá que la cónica es no degenerada.

Definición 3.4: Un punto es llamado un punto singular de una cónica si cada recta determinada por esta y un punto de la cónica esta contenido en la cónica.

Clasificación proyectiva de las cónicas.

El rango de la matriz asociada $A = (a_{ij})$ a la ecuación de una cónica $\xi^t A \xi = 0$ es un invariante proyectivo, es por lo que el número de puntos singulares de una cónica no depende del sistema particular de coordenadas proyectivas que se tome. De acuerdo con esto, se van a clasificar las cónicas con arreglo al número de puntos singulares.

El sistema que da los puntos singulares es:

$$\begin{aligned} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 &= 0 \\ a_{01}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{02}x_0 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

1. Si *rango* $A = 3$, el sistema no admite más que la solución $(0, 0, 0)$, que no representa ningún punto. Una cónica no degenerada no tiene puntos singulares.

2. Si *rango* $A = 2$, hay un solo punto cuyas coordenadas homogéneas satisfacen al sistema. Una recta que no pase por el punto singular tendrá dos puntos comunes con la cónica o ninguno, pues si tuviera uno sólo la cónica degenerada en una recta doble con lo que el *rango* $A = 1$. Así la cónica y la recta tiene dos puntos comunes o ningunos; y la cónica se descompone en las rectas definidas por dichos puntos y el punto singular o sólo consta del punto singular.

3. Si *rango* $A = 1$, las ecuaciones son dependientes por lo que los puntos singulares son todos los de la recta determinada por una de las ecuaciones que no sea idénticamente nula, a la cual se reduce la cónica.

En resumen, según que el *rango A* sea 3, 2 ó 1 la cónica es no degenerada, degenerada en dos rectas con un punto común singular, o degenerada en una recta de puntos singulares.

Teorema 3.1: Los puntos de intersección de rectas correspondientes de dos haces proyectivos constituyen una cónica. Si los haces son perspectivos, entonces la cónica es degenerada; de otra manera es no degenerada. En todo caso, la cónica pasa por los vértices de los haces.

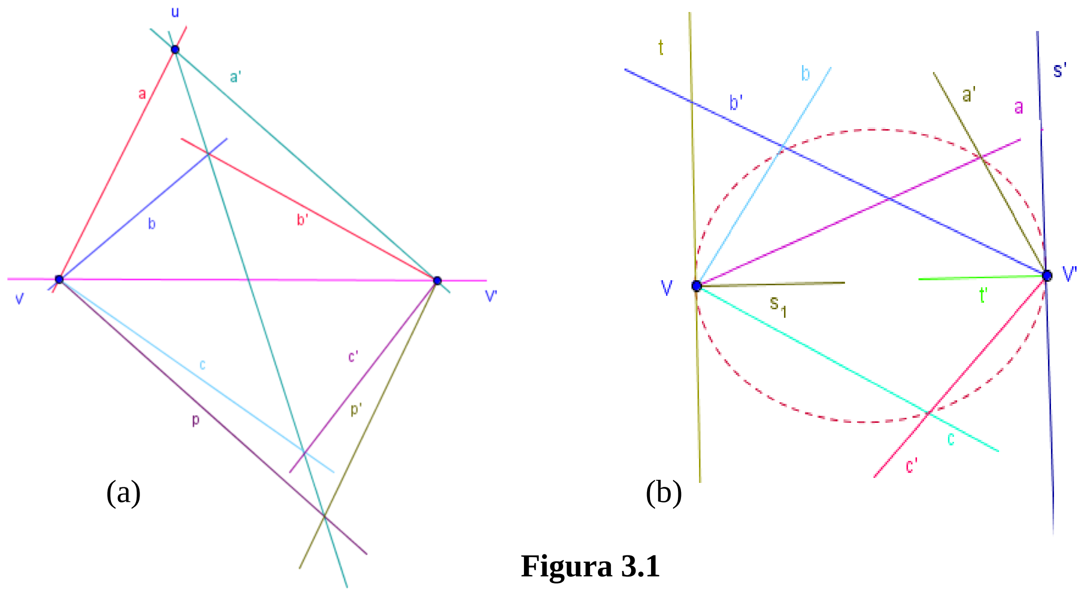


Figura 3.1

Prueba. Sea u el eje de perspectiva y VV' son los dos haces de perspectiva.
Supóngase que la proyectividad esta definida por $a \leftrightarrow a'$, $b \leftrightarrow b'$, $c \leftrightarrow c'$. Y sean los vectores coordenados de las rectas dados por $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$, de manera que $\gamma = \alpha + \beta$, $\gamma' = \alpha' + \beta'$. Si p, p' son un par arbitrario de rectas correspondientes de los haces. Si π, π' son vectores coordenados de p, p', y si $\pi = \alpha + k\beta$ entonces $\pi' = \alpha' + k\beta'$, ya que la razón cruzada se preserva bajo proyectividad. Ahora P, el punto de intersección de p y p', es un punto del lugar geométrico requerido. Si ξ es un vector coordenado de P, entonces $\pi.\xi = 0$, pero $\pi = \alpha + k\beta \Longrightarrow (\alpha + k\beta).\xi = 0$ por lo tanto $\alpha.\xi + k\beta.\xi = 0$
Y además $\pi'.\xi = 0$ y $\pi' = \alpha' + k\beta'$, $\Longrightarrow$ $(\alpha' + k\beta').\xi = 0$ por lo tanto $\alpha'.\xi + k\beta'.\xi = 0$.
Igualando k entre estas dos ecuaciones se tiene

$$k = -\frac{\alpha.\xi}{\beta.\xi} \quad y \quad k = -\frac{\alpha'.\xi}{\beta'.\xi}$$

$$-\frac{\alpha.\xi}{\beta.\xi} = -\frac{\alpha'.\xi}{\beta'.\xi}$$

$$(\alpha.\xi)(\beta'.\xi) - (\alpha'.\xi)(\beta.\xi) = 0. \qquad (1)$$

Puesto que cada uno de los productos internos que aparecen en la ecuación (1) es una forma lineal en x_0, x_1, x_2, esta ecuación es cuadrática y por lo tanto representa una cónica.
Si la proyectividad es una perspectiva, se elije la recta común VV' como b (y también, por consiguiente, como b'). Entonces la ecuación de la cónica viene dada por

$$(\beta.\xi)[(\alpha.\xi) - (\alpha'.\xi)] = 0,$$

Esta es claramente degenerada puesto que es reducible. Por lo tanto las coordenadas de V satisfacen que $\alpha.\xi = 0$ y $\beta.\xi = 0$, y V está sobre la cónica con ecuación (1) ya sea o no degenerada. Asimismo con V'.

Si la proyectividad no es una perspectiva, entonces la recta VV' no es parte del lugar geométrico. Si la cónica fuera degenerada, entonces tendría que constituirse alguna recta pasando por V y alguna recta pasando V'. Supóngase que esa recta hipotética pasando por V es elegida como a. entonces se tiene, otra vez, la ecuación (1) como la ecuación de la supuesta cónica degenerada. Aunque $\alpha.\xi$ es un factor de $(\alpha.\xi)(\beta'.\xi)$, no es un factor de $(\alpha'.\xi)(\beta.\xi)$ porque a es distinto de a' y de b. Así $\alpha.\xi$ no es un factor del lado izquierda lateral de la ecuación (1), contradiciendo la suposición de degeneración.

Inversamente, cualquier cónica puede ser" Proyectivamente Generada ", es decir, Sus puntos pueden ser considerados como los puntos de intersección de rectas correspondientes de dos haces proyectivos. Para ver esto, se escoge una estructura de coordenadas así es que la ecuación de la cónica (no degenerada) es $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0$. Reescribiendo esta ecuación como $(y_0 + iy_1)(y_0 - iy_1) - (y_2)(-y_2) = 0$, y comparando el resultado con ecuación (1), vemos que la cónica dada por lugar geométrico de puntos de intersección de rectas correspondientes de la proyectividad determinada por $a \leftrightarrow a'$, $b \leftrightarrow b'$, $c \leftrightarrow c'$, dónde las rectas tienen ecuaciones las cuales son indicadas a continuación.

a: $\quad y_0 + iy_1 = 0,$

a': $\quad y_2 = 0,$

b: $\quad -y_2 = 0,$

b': $\quad y_0 - iy_1 = 0,$

c: $\quad y_0 + iy_1 - y_2 = 0, \qquad (\gamma = \alpha + \beta),$

c': $\quad y_0 - iy_1 + y_2 = 0, \qquad (\gamma' = \alpha' + \beta'),$

Un cambio de estructura de coordenadas no altera la conclusión.

Teorema 3.2. Proyectando los puntos de una cónica desde dos cualesquiera de sus puntos se obtienen haces proyectivos.

Prueba: Sea la cónica generada por dos haces proyectivos de vértices $A_1\, y\, A_2$ y sean B_1, B_2, M_1 tres puntos de la misma, se considera la proyectividad entre los haces de vértices B_1, B_2 definida por $B_1(A_1A_2M_1) \wedge B_2(A_1A_2M_1)$; si M_2 es otro punto cualquiera de la cónica se busca la recta homóloga de B_1M_2 en el segundo haz. Se corta el primer haz por M_1A_1 y el segundo por M_1A_2. Se obtendrán rectas perspectivas puesto que M_1 es unido. El centro de perspectividad resulta ser O puesto que B_1A_2 y B_2A_1 unen puntos homólogos. Para hallar la recta homóloga de B_1M_2 se debe unir O con P que es la intersección de B_1M_2 y M_1A_1 para Q que es la intersección de M_1A_2 con OP y B_2Q es la recta buscada. Pero la recta B_2Q pasa por M_2, lo que prueba que la recta homóloga de B_1M_2 es B_2M_2 y por tanto cumple que se corresponden en la proyectividad mencionada entre los haces de los vértices B_1, B_2.

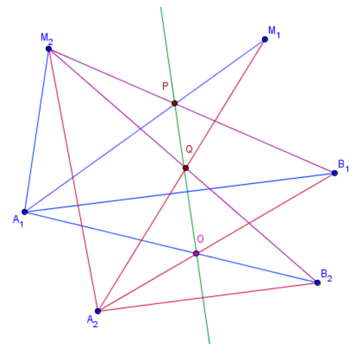


Figura 3.2

Corolario 3.1 (Steiner). La razón cruzada de la recta que une cuatro puntos fijos de una cónica para un quinto punto de la cónica es independiente de la posición del quinto punto.

Prueba: Por el teorema 3.2 el haz es proyectivo pero la razón cruzada se preserva bajo proyectividades por lo tanto no importa cual sea el quinto punto que se tome la razón cruzada, siempre será la misma.

Corolario 3.2: Hay una y sólo una cónica que atraviesa cinco puntos coplanares. (Para abreviar, cinco puntos determinan una cónica).

Prueba: Sean en efecto, los cinco puntos A, B, C, D, E. Se toma dos cualesquiera de ellos, por ejemplo $A\ y\ B$ y se proyecta desde los mismos los restantes puntos (Figura 3.3) queda así determinada la proyectividad $A(CDE) \wedge B(CDE)$. Los puntos en que se encuentren las rectas homólogas de esta proyectividad son los de la cónica. Para hallar otro punto, basta trazar por A una recta cualquiera h y buscar su homóloga h' del haz de vértice B; el punto H es la intersección de h, h' será otro punto de la cónica. Repitiendo la construcción sucesivamente se podrán obtener cuantos puntos se deseen de la cónica.

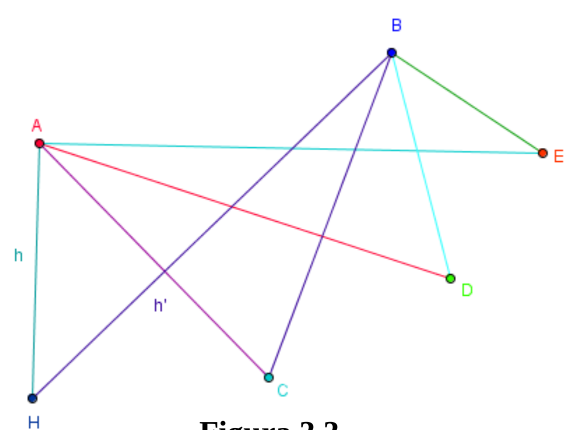


Figura 3.3

Prueba 2: En la figura 3.4 se tienen dos haces de centros los puntos *P* y *Q*. En el primero se han tomado rectas *a*, *b* y *c* cuyas homólogas en el segundo son las rectas *a', b'* y *c'*.

La recta **m** = *PQ*, que une los centros de los dos haces, considerada como recta del primer haz, no es homóloga de sí misma, pues de serlo, los haces serían perspectivos y la cónica se reduciría al eje perspectivo. Su homóloga es otra recta del segundo haz, **m'**. E igualmente para la recta **n'** =*QP*, que es la homóloga de una recta **n** del haz de centro *P*. El punto de encuentro de **m** con **m'** es el punto *Q*; el punto de encuentro de **n** con **n'** es *P*. Así pues, la cónica definida por los puntos de intersección de dos haces centrados en *P* y *Q* contiene también los vértices de esos haces. De todo esto se concluye que la cónica puntual queda definida conociendo cinco puntos de la misma y por el teorema 3.1 la cónica pasa por los vértices

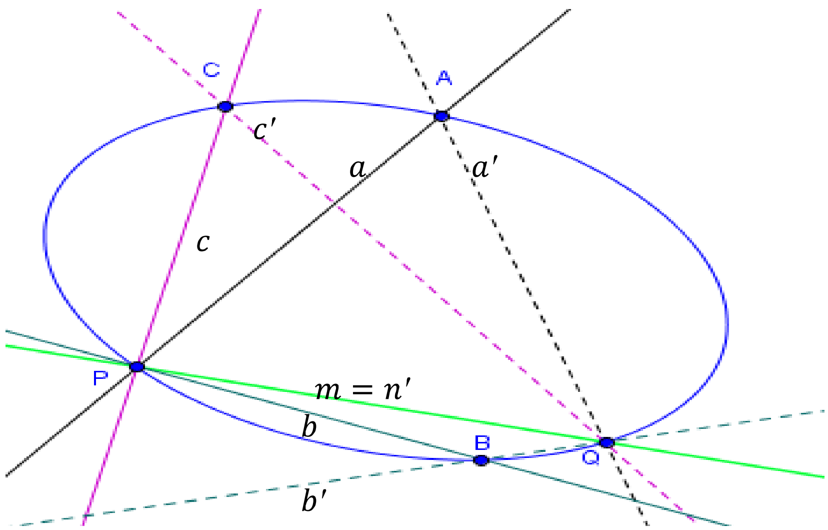


Figura 3.4

3.2 Representación paramétrica, tangentes, polares y sus ecuaciones en una cónica

Relativo a una estructura de coordenadas apropiado, la ecuación de una cónica no degenerada es

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

Se eligen dos puntos A, B de la cónica como $(0,0,1)$ y $(1,0,0)$, (Figura 3.4).

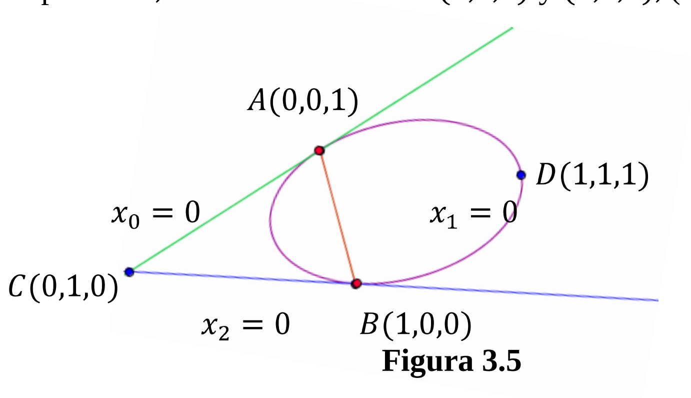


Figura 3.5

De conformidad con Teorema 3.2, los haces de rectas que se interceptan a los puntos de la cónica a A y B son proyectivos. Desde que la cónica no es degenerada, la recta AB no es correspondiente a si misma. Supóngase que AB del haz de A corresponde a la recta BC, y que BA es el haz de B que correspondiente a la recta AC. Tomando C como $(0,1,0,)$ el tercer vértice del triángulo de referencia, y sea $D(1,1,1)$ cualquier punto sobre la cónica distinto de $A\ o\ B$. Entonces la ecuación de AB es $x_1 = 0$, de AC es $x_0 = 0$, y de BC es $x_2 = 0$. Tal que la ecuación de AD es $x_0 - x_1 = 0$, y la ecuación de BD es $x_1 - x_2 = 0$. Sea $P(x_0, x_1, x_2)$ un punto arbitrario de la cónica. Se puede escribir la ecuación de AP como una combinación lineal de las ecuaciones de $AC\ y\ AB$: $kx_0 + lx_1 = 0$, es decir, similarmente, la ecuación de BP es $mx_1 + nx_2 = 0$, para algún m, n.

Así se tiene la siguiente situación en la proyectividad.
AC, con ecuación $x_0 = 0$, correspondiente a BA, con la ecuación $x_1 = 0$;
AB, con ecuación $x_1 = 0$, correspondiente a BC, con la ecuación $x_2 = 0$;
AD, con ecuación $x_0 - x_1 = 0$, correspondiente a BD, con ecuación $x_1 - x_2 = 0$;
AP, con ecuación $kx_0 + lx_1 = 0$, correspondiente a BP, con ecuación $mx_1 + nx_2 = 0$.

Dado que la razón cruzada se preservada en una proyectividad, las anteriores correspondencias implican $k: l = m: n$. Ahora se obtiene la ecuación (1) del lugar geométrico de P eliminando a k, l entre las ecuaciones para AP y BP: $kx_0 + lx_1 = 0$, $mx_1 + nx_2 = 0$.

Se puede ir por otro lado y despejar la ecuación de AP y BP para x_0, x_1, x_2 como sigue:

$x_0: x_1: x_2 = l^2: -lk: k^2$ Ó $x_0: x_1: x_2 = 1: r: r^2$
Donde $r = -(k/l)$ si $l \neq 0$.

Así las coordenadas homogéneas de los puntos sobre una cónica son $(l^2, -lk, k^2)$ y las coordenadas no homogéneas (r, r^2). Cualquier par de números complejos (l, k) determina un punto sobre la cónica. El punto con coordenadas $(l^2, -lk, k^2)$ el par (cl, ck), para $c \neq 0$ define el mismo punto como (l, k). Inversamente, para cualquier punto en la cónica es determinado un par (l, k) ó, Más bien, una razón de tales pares de los puntos con coordenadas $(l_1^2, -l_1k_1, k_1^2)$ y $(l_2^2, -l_2k_2, k_2^2)$ son distintos si y solo si $l_1k_2 \neq l_2k_1$.

Así, los puntos de la cónica son determinados por un par de coordenadas homogéneas: *Los puntos de una forma cónica en S_1.*

Entonces inmediatamente se puede aplicar para cónicas estos teoremas acerca de S_1 los cuáles son verdaderos "en general". El significado de la última frase es: que alguno de los resultados anteriores dependen de S_1 vienen a ser un hiperplano en un S_2. (es decir, una recta en un plano). Una cónica, no es una recta en el plano. Sólo estos teoremas sobre S_1 que no dependen del S_1 son implementados en un S_2 que automáticamente es cierto para cónicas. Inmediatamente se tiene los siguientes resultados.

Del teorema 2.4 hay exactamente una transformación lineal unidimensional con coordenadas homogéneas que lleva tres puntos arbitrarios de una cónica a tres puntos arbitrarios de otra. En particular, una colineación de una cónica es determinada por tres pares de puntos correspondientes.

Si una colineación de una cónica tiene más de dos puntos fijos, entonces esta es la transformación identidad.

En la figura 3.5, cualquier recta a de un haz con vértice A tiene una única recta correspondiente b de un haz con vértice B. Si a es diferente de AC, entonces b es diferente de BA, y a y b se interceptan en un punto P diferente de A, sobre la cónica. La recta AP, entonces se intercepta en dos puntos distintos de la cónica A y P, y solamente en esos puntos. Si a es AC, entonces b es BA, y P coincide con A. La recta AC se intercepta la cónica solo en A. llamaremos la recta AC tangente a la cónica, y A es el *punto de tangencia o punto de contacto.*

Definición 3.5: se llamara recta tangente a la cónica a una recta que se intercepta con la cónica solo en un punto, y dicho punto será llamado punto de tangencia.

Desde que las cónicas pueden ser pensadas de como vienen generadas por dos haces proyectivos cuyos vértices son cualesquiera dos puntos de la cónica, tienen el resultado que cada punto de la cónica es un punto de tangencia de una única tangente a la cónica.
Se puede pensar en la tangente como la intercepción de dos puntos coincidentes con la cónica al punto tangencia.

Para encontrar los puntos de tangencia se procede de manera algebraica como sigue:
El punto con coordenadas $(1, r, r^2)$ está sobre la recta u con ecuación $u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$ si y solo si

$$u_0 + u_1r + u_2r^2 = 0$$

Esta ecuación cuadrática en r tiene dos raíces $r_1, r_{2.}$ Así si $r_1 \neq r_2$, se obtiene el resultado que la recta con coordenadas (u_0, u_1, u_2) intercepta la cónica $x_0x_2 - x_1^2 = 0$ en dos puntos distintos $(1, r_1, r_1^2)$ y $(1, r_2, r_2^2)$. Si $r_1 = r_2$, la recta intercepta la cónica en un solo punto, es decir es tangente a la cónica. Así, casualmente, se ha establecido el hecho que una recta se intercepta con una cónica no degenerada en dos puntos o es tangente a la cónica. Dado que una condición necesaria y suficiente para que las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ se igual es que $b^2 - 4ac = 0$, se concluye que la recta con coordenadas (u_0, u_1, u_2) es tangente a la cónica $x_0x_2 - x_1^2 = 0$, si y solo si

$$u_1^2 - 4u_0u_2 = 0$$

Está ecuación cuadrática, también representa una cónica, llamada una recta cónica porque los "elementos" de la cónica son rectas con coordenadas (u_0, u_1, u_2). Estas rectas son claramente las tangentes al punto de una cónica $x_0x_2 - x_1^2 = 0$. Dual, si se interpreta $x_0x_2 - x_1^2 = 0$, como una recta cónica para empezar con, la ecuación $u_1^2 - 4u_0u_2 = 0$, Representarían los puntos de contacto sobre esas rectas, Así si A es no singular, la configuración consistente de los puntos satisfaciendo $\xi^t A\xi = 0$, y las rectas tangentes para este lugar geométrico es el mismo dual.

3.3 Polares, tangenciales y polos

Considérese la cónica $\xi^t A\xi = 0$, en la cual A es no singular. Sea R, S con vectores coordenadas ρ, σ son dos puntos del plano, y sea P con vector coordenado $\pi = k\rho + l\sigma$ algún punto sobre la recta RS, Si P esta sobre la cónica, se tiene $[k\rho + l\sigma]^t A[k\rho + l\sigma] = 0$.

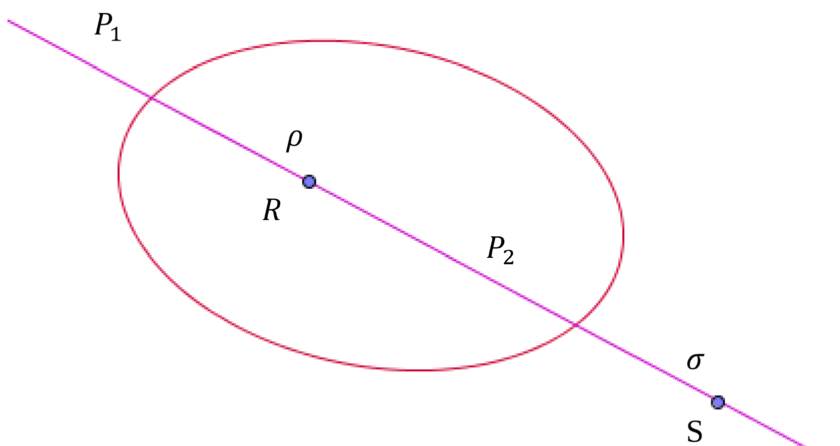


Figura 3.6

Haciendo uso de la distributividad de la multiplicación sobre la adición para matrices, y de la conmutatividad de la multiplicación de matrices y escalares, y de la simetría de A, se puede escribir la ecuación de arriba como

$$\pi^t A\pi = 0$$

$$[k\rho + l\sigma]^t A[k\rho + l\sigma] = 0$$

$$[\rho^t k + l\sigma^t]A[k\rho + l\sigma] = 0$$

$$\rho^t kAk\rho + l\sigma^t Ak\rho + \rho^t kAl\sigma + l\sigma^t Al\sigma = 0$$

$$k^2\rho^t A\rho + kl(\sigma^t A\rho + \sigma^t A\sigma) + l^2\sigma^t A\sigma = 0$$

Desde que $\sigma^t A\rho$ es una matriz de 1×1 y como A es simétrica,

$$\sigma^t A\rho = (\sigma^t A\rho)^t = \rho^t A\sigma$$

Así se obtiene,

$$\rho^t A\rho . k^2 + 2\rho^t A\sigma . kl + \sigma^t A\sigma . l^2 = 0 \qquad (1)$$

Está ecuación cuadrática en la razón k/l generalmente tiene dos raíces k_1/l_1, k_2/l_2, correspondientes a los dos puntos P_1, P_2 en la cual la recta RS intercepta la cónica.

Definición 3.6: Dos puntos R, S se dice que son *Conjugados con respecto a una cónica* $\mathcal{C}$ Si ellos están separados armónicamente por los puntos en los cuales la recta RS se intercepta a $\mathcal{C}$.

Teorema 3.3 Una condición necesaria y suficiente para que R, S con vector de coordenadas ρ, σ sean conjugados con respecto a la cónica $\xi^t A\xi = 0$ es que $\rho^t A\sigma = 0$.

Prueba: Sea R, con vector coordenado ρ; S, con σ; P_1 con $k_1\rho + l_1\sigma$; P_2 con $k_2\rho + l_2\sigma$ se sabe que $(R, S; P_1, P_2) = -1$ si y solo si

$$\frac{k_1}{l_1} = -\frac{k_2}{l_2} \quad ó \quad \frac{k_1}{l_1} + \frac{k_2}{l_2} = 0,$$

Así, el criterio de separación armónica es que la suma de las raíces de ecuación (1) sea cero,

$$\rho^t A\rho. k^2 + 2\rho^t A\sigma. kl + \sigma^t A\sigma. l^2 = 0$$

$$\rho^t A\rho. k^2 + 2\rho^t A\sigma. \left(\frac{k_1}{l_1} + \frac{k_2}{l_2}\right) + \sigma^t A\sigma. l^2 = 0$$

$\rho^t A\rho = 0 \;\; y\; \sigma^t A\sigma = 0$ Por definición de cónicas.
Así

$$2\rho^t A\sigma. \left(\frac{k_1}{l_1} + \frac{k_2}{l_2}\right) = 0$$

Pero como

$$\frac{k_1}{l_1} + \frac{k_2}{l_2} = 0$$

Se tiene que $\rho^t A\sigma = 0$.

Teorema 3.4: El lugar geométrico de puntos conjugados para un punto fijo con relación a una cónica degenera es una recta.

Prueba: Supóngase que R es un punto que esta fijo y S un punto que puede moverse. Para cada recta que pasa por R, hay un punto S sobre la recta que es conjugado a R con relación a la cónica. La ecuación del lugar geométrico es $\rho^t A\sigma = 0$ para el fijo ρ, es una ecuación lineal en s_0, s_1, s_2.

Definición 3.7: Las rectas de un haz de centro *P* que no está en la cónica determinan, en general, dos puntos sobre ella. Si estos son A y A', el cuarto armónico de estos tres, (propiedad del cuadrilátero completo $A'ABB'$) se dirá que es el punto A*. Y dicho punto es **el conjugado de *P* respecto de la cónica.**

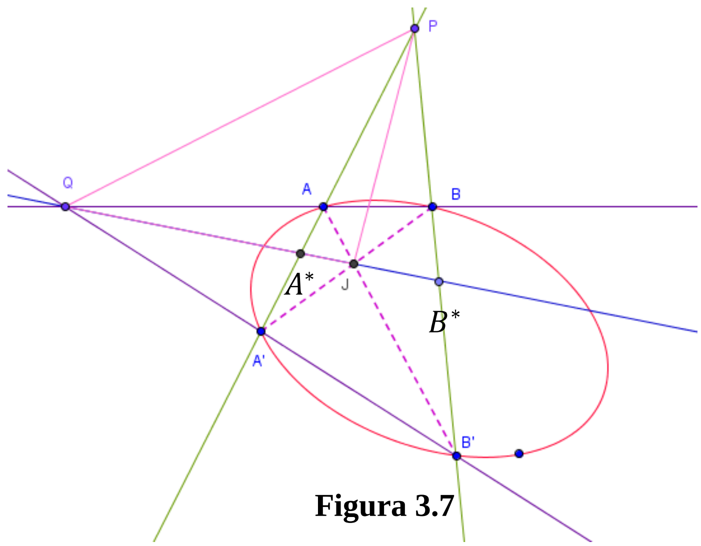


Figura 3.7

Si A^* es el cuarto armónico de la terna PAA' podemos decir igualmente que P es el cuarto armónico de la terna $AA'A^*$ o bien, que P es el conjugado de A^* y por ello, la polar de A^* ha de pasar por el punto P. Así pues, la relación de conjugación es simétrica, y por ello si un punto es el polo de una determinada recta (su polar), los puntos de ésta, tienen polares que pasan por su polo.

Definición 3.8: Se llama **polar del punto *P* respecto de la cónica dada**, al lugar geométrico de los conjugados de P respecto de la cónica. Este lugar geométrico es una recta (el eje proyectivo de la involución definida por el punto P).

Definición 3.9: Se llama polo de una recta respecto a la cónica, a un punto cuya recta polar es la recta dada.

Definición 3.10: Al triángulo diagonal de un cuadrilátero completo sobre una cónica se llama *triángulo autopolar*, es decir, que cada vértice es el polo del lado opuesto, y viceversa, cada lado de este triángulo es la recta polar del vértice opuesto. La polar de P es la recta QJ, la de Q es la recta JP y por último, la de J es la recta PQ.

Definición 3.11: Se llama polar de un punto P perteneciente a una cónica, respecto de la misma, a la tangente a la cónica en P.

Teorema 3.5: La polar con respecto a un punto que estas sobre la cónica es tangente a la cónica en ese punto.

Prueba: En la figura 3.5, R y S no están sobre la cónica, pero con utilizando argumentos algebraicos se puede conseguir que pase a través de R, es decir, que esté sobre la cónica. En este caso $\rho^t A\sigma = 0$ que significa que R está sobre la polar de R. Además si un punto P está sobre la polar en este caso, la ecuación (1) se convierte en $\sigma^t A\sigma . l^2 = 0$.
Ahora $\sigma^t A\sigma \neq 0$; De otra manera la recta continua RS estaría sobre la cónica, y es una contradicción para lo asumido de la no degeneración de la cónica. Así si $l = 0$; es decir $\pi = k\rho$, o R es solo un punto en el cual la polar intercepta a la cónica.

Teorema 3.6: si la polar de M (con relación a una cónica dada) pasa atravez de N, entonces la polar de N pasa atravez de M.

Prueba: La ecuación de la polar de M es $\mu^t A\xi = 0$. Si N está sobre está recta, entonces $\mu^t A\eta = 0$, así $\eta^t A\mu = 0$ Pero esta última ecuación es precisamente la condición que M está sobre la polar de N.

Definición 3.12: Dos puntos son conjugados respecto a una cónica (respecto a la polaridad asociada a la cónica) si cada uno está en la polar del otro.

Definición 3.13: Un punto se dice que es autoconjugado respecto a una cónica si está en su polar.

Corolario 3.3: Sean las polares de R y S que se interceptan en P. Entonces la polar de P es la recta RS.

Prueba: Se sabe por hipótesis que la polar de R pasa por P así como también la polar de S también pasa por P, Luego aplicando el teorema 3.6 se tendrá que la polar de P pasa por R pero también que la polar de P pasa por S así como por dos puntos pasa una y solamente una recta entonces se obtiene que la recta RS es la polar de P.

Corolario 3.4: Sean las tangentes a $\mathcal{C}$ desde el punto P interceptándose con $\mathcal{C}$ en T_1 y T_2, entonces la polar de P es la recta T_1T_2.

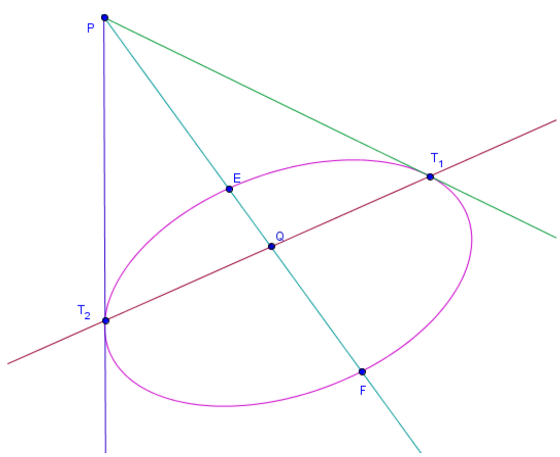


Figura 3.8

Prueba: Por la definición 3.11 se tiene que la polar de T_1 por ser un punto perteneciente a la cónica es la recta tangente que pasa por T_1 al igual para el punto T_2 que su polar es la recta tangente que pasa por el punto T_2 pero por hipótesis T_1 y T_2 se interceptan en P y por el corolario 3.3 se tiene que T_1T_2 es la recta polar de P.

Definición 3.14: un par de triángulos se dice que son polares con respecto a una cónica c si la polar de un vértice es el lado del otro triángulo respecto de la cónica c.

Sean las polares de $A, B, y\ C$ con respecto a la cónica $\mathcal{C}$ por a, b, c respectivamente. Sean $a\ y\ b$ que se interceptan en C'; $b\ y\ c$ en A'; $c\ y\ a$ en B'. Entonces BC es la polar de A', CA de B', y AB de C'.

Si dos triángulos son coincidentes entonces la polar de un vértice del triángulo es el lado opuesto al vértice del triángulo; es decir, que cada lado del triángulo son el polar del vértice opuesto.

Supóngase que se escoge un punto X arbitrario no está sobre una cónica dada $\mathcal{C}$. Sobre x, la polar de X, se escoge un punto cualquiera Y que no este sobre $\mathcal{C}$, sea y la polar de Y, intercepta x en Z. Entonces la polar de Z es la rectas XY (corolario 3.3).
Ciertamente, la polar de cada vértice del triangulo XYZ es el lado opuesto del triangulo; El triángulo XYZ se dice que es la misma polar con respecto a $\mathcal{C}$. Note que hay infinitamente muchos triángulos polares en si mismo con relación a una cónica dada.

El material en polar también tiene aplicación para cónica degeneradas excepto cuando se consideran la polar de un punto singular (definición 3.4).

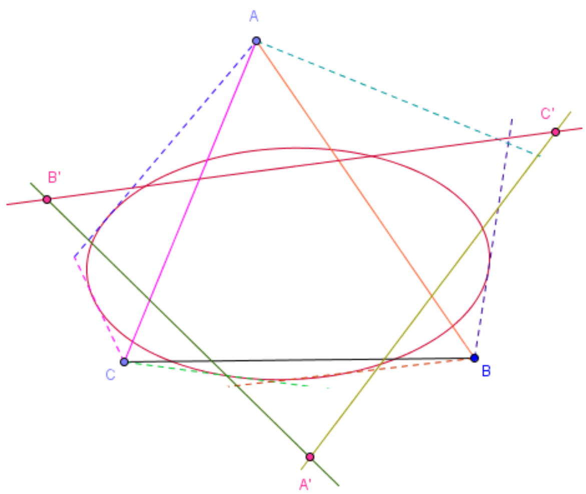


Figura 3.9

Teorema 3.7: Las polares de una hilera de puntos, con respecto a un punto de una cónica no degenerada, forman un haz de rectas. Esto es una proyectividad natural entre la hilera y el haz.

Prueba. Sea la cónica que tiene por ecuación $\xi^t A\xi = 0$. Sea la hilera de puntos que forman la recta l. Supóngase que R, S, con vectores coordenados ρ, σ son dos puntos de l, entonces las polares de R, S son las rectas r, s con ecuaciones $\rho^t A\xi = 0$, $\sigma^t A\xi = 0$, respectivamente. Si T, con vector coordenado γ, es cualquier punto de l, entonces γ puede escribirse como una combinación lineal de ρ y de σ: $\gamma = a\rho + b\sigma$, es decir, la recta t, es la polar de T, y tiene por ecuación $\gamma^t A\xi = 0$ esto puede ser expresado como

$$\gamma^t A\xi = 0$$

$$(a\rho + b\sigma)^t A\xi = 0$$

$$a\rho^t A\xi + b\sigma^t A\xi = 0$$

En otras palabras, la ecuación de T es la misma combinación lineal de las ecuaciones de r y s así las coordenadas de T son las coordenadas de R y S. Por lo tanto, no solo las rectas polares son concurrentes, sino que la correspondencia entre los puntos y las polares son una proyectividad.

Definición 3.15: La recta cónica es la figura que esta formada por las tangentes a los puntos de una cónica, y las tangentes a la cónica constituyen el dual del punto cónico que es la cónica que se genera por puntos.

La ecuación de la recta cónica es a menudo llamada *la ecuación tangencial de la cónica.*

Para obtener una expresión general para la ecuación de una cónica se tiene lo siguiente:
Sea $\mathcal{C}$ un punto de una cónica no degenerada con matriz A, De tal manera que su ecuación es $\xi^t A\xi = 0$, si μ es un vector coordenado del punto M sobre $\mathcal{C}$, la ecuación de la recta tangente t en M es $\mu^t A\xi = 0$, Luego, si γ es un vector de coordenadas de la recta t, $\gamma^t = \mu^t A$, o

$$\gamma = A\mu. \qquad (6)$$

$$\gamma A^{-1} = A^{-1}A\mu.$$

$$\gamma A^{-1} = \mu.$$

Se obtiene la ecuación tangencial de $\mathcal{C}$ eliminando μ entre la ecuación (6) y $\mu^t A\mu = 0$. Así, $\mu^t = \gamma^t A^{-1}$, $\mu = A^{-1}\gamma$, Así $\gamma^t A^{-1}AA^{-1}\gamma = 0$ o $\gamma^t A^{-1}\gamma = 0$, puesto que $A^{-1} = A_{adj}/detA$, se puede escribir la ecuación tangencial de $\mathcal{C}$ como:

$$\gamma^t A_{adj}\gamma = 0 \qquad (7)$$

Dualizando en S_2 se obtiene el siguiente trabajo sobre polares.

Definición 3.16: Dos retas l, m son llamadas conjugadas con respecto a una recta cónica si ellas están separadas armónicamente por las rectas de la cónica a través de su punto de intersección.

Teorema 3.8: (Teorema dual del teorema 3.3). Una condición necesaria y suficiente es que l, m con vectores coordenados λ, μ son conjugados con respecto a la recta cónica con ecuación (2) se da por $\gamma^t A_{adj}\mu = 0$.

Prueba: Sea l, con vector coordenado λ; m, con μ; P_1 con $k_1\lambda + l_1\mu$; P_2 con $k_2\lambda + l_2\mu$ se sabe que $(lm; P_1P_2) = -1$ si y solo si

$$\frac{k_1}{l_1} = -\frac{k_2}{l_2} \quad ó \qquad \frac{k_1}{l_1} + \frac{k_2}{l_2} = 0,$$

Así, el criterio para separación armónica es que la suma de las raíces de ecuación (5) sea cero,

$$\lambda^t A_{adj}\lambda. k^2 + 2\lambda^t A_{adj}\mu. kl + \mu^t A_{adj}\mu. l^2 = 0$$

$$\lambda^t A_{adj}\lambda. k^2 + 2\lambda^t A_{adj}\mu. \left(\frac{k_1}{l_1} + \frac{k_2}{l_2}\right) + \mu^t A_{adj}\mu. l^2 = 0$$

$\lambda^t A_{adj}\lambda = 0 \;\; y \; \mu^t A_{adj}\mu = 0$ Por definición de recta cónica.

Así

$$2\rho^t A_{adj}\sigma. \left(\frac{k_1}{l_1} + \frac{k_2}{l_2}\right) = 0$$

Pero como

$$\frac{k_1}{l_1} + \frac{k_2}{l_2} = 0$$

Se tiene que $\lambda^t A_{adj}\mu = 0$.

Teorema 3.9 (Teorema dual del teorema 3.4). El conjunto de rectas conjugadas con respecto a la recta cónica con ecuación (7) forman un haz cuyo vértice es el punto con ecuación $\lambda^t A_{adj}\gamma = 0$.

Prueba: Supóngase que l es una recta que esta fija y m una recta que puede moverse. Para cada punto de l, hay una recta m sobre el punto que es conjugado a l con relación a la recta cónica. La ecuación del lugar geométrico es $\lambda^t A_{adj}\mu = 0$ para el fijo λ, y es un punto.

Definición 3.17: El punto del teorema 3.9 es llamado el polo de la recta l con respecto a la cónica.

Teorema 3.10 (Dual del teorema 3.5). El polo con respecto a la recta cónica de una recta de la cónica es el punto de contacto de la recta.

Prueba: sea l y m rectas que no están sobre la cónica, pero con utilizando argumentos algebraicos se puede conseguir que pase a través de l, es decir, que esté sobre la recta cónica. En este caso $\lambda^t A_{adj}\mu = 0$ que significa que l está sobre el polo de l. Además si una recta P está sobre el polo en este caso, la ecuación (5) se convierte en $\mu^t A_{adj}\mu. l^2 = 0$. Ahora $\sigma^t A_{adj}\sigma \neq 0$; De otra manera el punto estaría sobre la recta cónica, y es una contradicción para lo asumido de la no degeneración de la recta cónica. Así si $l = 0$; es decir $\pi = k\lambda$, o l es solo una recta en la cual el polo intercepta a la recta cónica.

Nota: El lugar geométrico de los polos de las rectas que forman la recta cónica $\gamma^t A_{adj}\gamma = 0$ es el punto de la cónica $\xi^t (A_{adj})_{adj}\xi = 0$, es decir, el punto de la cónica $\mathcal{C}$ “original”.

Teorema 3.11: La recta l es la polar del punto L con respecto a la cónica generada por puntos $\xi^t A\xi = 0$ si y solo si L es el polo de l con respecto a la cónica generadas por rectas $\gamma^t A_{adj}\gamma = 0$.

Prueba:" $\Longrightarrow$ " Por definición de polo se sabe que si l es la polar del punto L con respecto a la cónica de rectas entonces L será el polo del conjunto de haces con vértices en L aplicando el teorema 3.10 que dice el polo con respecto a la recta cónica de una recta de la cónica es el punto de contacto de la recta y con este se tiene la conclusión deseada.

" $\Longleftarrow$ " Luego por definición de polar como L es el polo con respecto a la cónica de rectas con respecto a la recta l implica que l es la polar del punto L con respecto a la cónica de puntos por definición 3.9 que dice se llama polo de una recta respecto a la cónica, a un punto cuya recta polar es la recta dada. Así se obtiene la conclusión deseada.

Esta es la relación reciproca la cual permite el uso de expresiones elípticas “El polo de l con respecto a la cónica de puntos $\mathcal{C}$.” Lo que significa “El polo de l con respecto cónica de rectas consiste de las tangentes a $\mathcal{C}$ ” o “El punto polar con respecto a $\mathcal{C}$ es l”.

3.4 La geometría en una cónica.

Teorema 3.12. Los puntos de una cónica están proyectivamente relacionados a las rectas que unen a estos puntos con cualquier punto fijo O, de la cónica, en está proyectividad O corresponde a la tangente de la cónica en O.

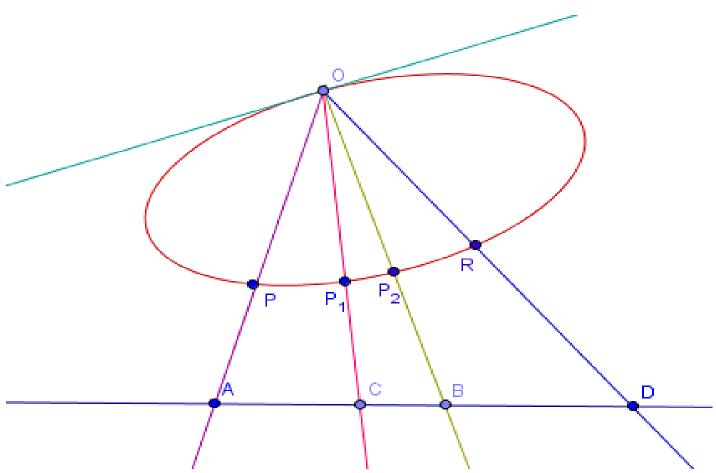


Figura 3.10

Prueba. Escogiendo un sistema de coordenadas sobre la cónica, así que O tiene las coordenadas (0,1) (unidimensional homogéneas). Sea P un punto arbitrario de la cónica que tiene coordenadas (l, k). Las coordenadas bidimensionales de O y P son (0,0,1) y , por consiguiente, la ecuación de la recta OP es $kx_0 + lx_1 = 0$, si $l \neq 0$. por lo tanto, si $P_1(l_1, k_1), P_2(l_2, k_2) y\, R(cl_1 + dl_2, ck_1 + dk_2)$ son tres puntos sobre la cónica, las ecuaciones de OP_1, OP_2, OR son respectivamente

$$k_1x_0 + l_1x_1 = 0, \qquad k_2x_0 + l_2x_1 = 0,$$

$$c(k_1x_0 + l_1x_1) + d(k_2x_0 + l_2x_1) = 0;$$

Esto es, la ecuación de OR es la misma combinación lineal de la ecuación de $OP_1\ y\ OP_2$ que las coordenadas de R son las coordenadas de P_1 y P_2. Así, la razón cruzada de cuatro puntos sobre una cónica es igual a la razón cruzada de las rectas que se interceptan en el punto O aplicando el lema 2.3.

Para demostrar que la proyectividad en O corresponde a la recta tangente a la cónica en O, se da por el teorema 3.5 puesto que la polar de un punto sobre la cónica es la recta tangente a la cónica en dicho punto por tanto O es el punto de tangencia a la cónica en la proyectividad.

Teorema 3.13. Si A, B, C, D son cuatro puntos sobre una cónica $\mathcal{C}$, $(AB, CD) = -1 \Leftrightarrow AB\ y\ \ CD$ son rectas conjugadas con respecto a $\mathcal{C}$.

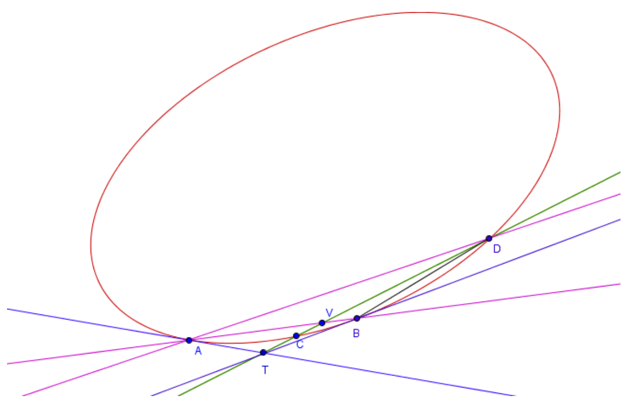


Figura 3.11

Prueba. " $\Rightarrow$ " Supóngase que AB intercepta a CD en V, y que la tangente en A intercepta a CD en T. Entonces, por teorema 3.12 en este caso el punto cualquiera del que se toma la proyectividad es el punto A y puesto que por hipótesis la razón cruzada de $(AB, CD) = -1$, se preserva bajo proyectividad se tiene que $(CD, VT) = -1$. Similarmente, tomando B en vez de A como el vértice de un haz, se obtiene el resultado de que la tangente a $\mathcal{C}$ en B intersecta CD en el conjugado harmónico de V con respecto a C y D. En otras palabras, la tangente a A y B intercepta a T en CD. Así, el polo de AB esta sobre CD; y por consiguiente AB y CD son rectas conjugadas.

" $\Leftarrow$ " Si AB y CD son rectas conjugadas, el polo T de AB está sobre CD. Luego $(CD, VT) = -1$; si AC, AD, AV, AT se designan por c, d, v, t respectivamente, entonces

$(cd, vt) = -1$ utilizando el lema 2.3 se tiene que la razón cruzada de los puntos es igual a la de las rectas.

Teorema 3.14 En una cónica $\mathcal{C}$ sea $P_i \leftrightarrow Q_i$ define una proyectividad distinta a la identidad. Supóngase que la recta P_jQ_k y P_kQ_j , $j \neq k$ se interceptan en R_{jk} . Entonces el lugar geométrico de R_{jk} es una recta (llamada el eje cruzado de la proyectividad).

Prueba: Casi se puede duplicar una prueba del teorema de Pappus. Tomando cualquier par de puntos fijos P_a, Q_a, y formando dos haces de rectas, interceptándose en P_a para todas las Q_sy Q_a para todas las P_s. Por teorema 3.12, el haz con vértice P_a es proyectivo a la hilera de puntos $\{Q_i\}$; asimismo el haz con vértice Q_a es proyectivo a la hilera de puntos $\{P_i\}$.
Dado que las hileras $\{P_i\}$ y $\{Q_i\}$ son proyectivas por hipótesis, se puede concluir que los dos haces en cuestión son proyectivos. Ciertamente, estos haces son perspectivos, para la recta común P_aQ_a se corresponde asi mismo. Así los puntos R_{ai} , Como i varia, son colineales. Así, para cada elección de a, se obtiene una recta. Para completar la prueba del teorema se debe mostrar que todas las rectas así obtenidas son idénticas.

En el caso la proyectividad dada sobre la cónica tiene dos puntos fijos distintos, el problema es inmediatamente solucionado, pues cada una de las rectas en cuestión claramente pasa a través de ambos puntos fijos.

En el caso de la proyectividad dada sobre la cónica que tiene un único punto fijo, U, se considera las dos rectas resultando de los haces perspectivos con vértices P_b, Q_b y con vértices P_c, Q_c. Estas rectas ambas pasan a través de U y R_{bc} , Así las rectas son idénticas. Por consiguiente, todas las rectas coinciden.

Mas aun en este caso, el eje cruzado debe ser tangente a la cónica, para cualquier punto común hacia el eje cruzado y la cónica debe ser correspondiente a si misma en la proyectividad dada.

Así se puede establecer la siguiente caracterización del eje cruzado de una proyectividad sobre una cónica. Si la proyectividad es no parabólica, con dos puntos fijos, M, N el eje cruzado es la recta MN; si la proyectividad es parabólica con un punto singular fijo, U, el eje cruzado es la tangente a la cónica en U.

Observación: El teorema de Pappus' (Teorema 2.8) es un caso especial del teorema 3.14 donde la cónica es degenerada y cada uno de las hileras $\{P_i\}$, $\{Q_i\}$ están sobre una recta separable de la cónica no degenerada.

Teorema 3.15. Si un hexágono es inscrito sobre una cónica, los tres puntos de intersección de pares de lados opuestos son colineales.

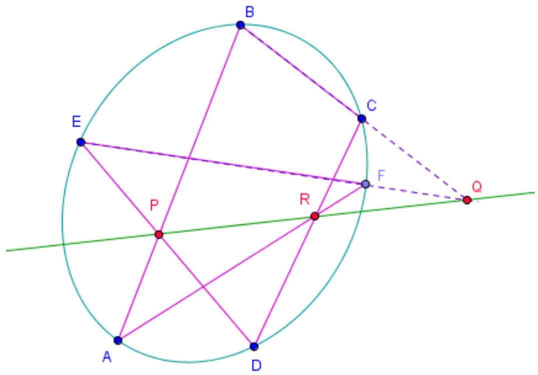


Figura 3.12

Prueba: Sea el hexágono $ABCDEF$ en la figura 3.12 Considérese los haces proyectivos que desde A y C proyectan los puntos de la cónica; en ellos es

$$A(EDFB) \wedge C(EDFB)$$

Cortándose el haz de vértice A por ED y el de vértice C por EF. Se obtienen sobre estas rectas dos rectas perspectivas, puesto que el punto E el punto intersección. El centro de perspectividad es el punto R $(CD \cap AF)$ puesto que las rectas CD y AF se unen en puntos homólogos. Por otra parte $P(AB \cap DE)$ y $Q(BC \cap EF)$son también puntos homólogos, correspondientes a las rectas homólogas AB y CB. Por lo tanto P, Q, R están en la recta. Como estos puntos son precisamente los puntos de intersección de los lados opuestos del hexágono, el teorema queda demostrado.

Teorema 3.16: Si A_1, A_2, A_3, B_1, B_3 son cinco puntos distintos sobre una cónica, y si l es la recta tangente a A, entonces los puntos de intersección de A_2B_3 y A_3A_1, de A_3B_1 y A_1B_3 y de l y A_2B_1 son colineales.

Prueba: como se tienen 5 puntos más el de la recta tangente a la cónica, hacen los 6 puntos y aplicando el teorema de pascal a estos seis puntos se tiene que la intersección de puntos de intersección de pares de lados opuestos son colineales.

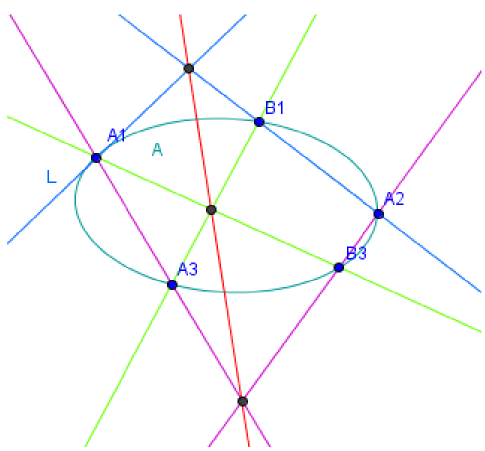


Figura 3.13

Teorema 3.17 (Inverso del teorema de Pascal). Sean $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ seis puntos distintos en un plano, con A_2B_3 y A_3B_2 Interceptándose en L, A_3B_1 y A_1B_3 en M, y A_1B_2 y A_2B_1 en N. Si L, M, N son colineales, entonces está es una cónica (la cual puede estar degenerada) que pasa a través de los seis puntos.

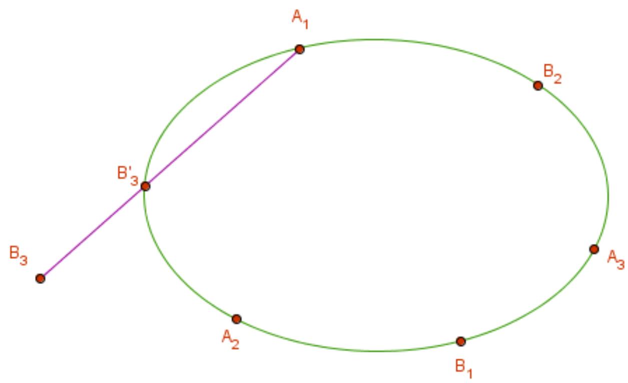


Figura 3.14

Prueba. Si tres de los seis puntos dados no son colineales, se mostrará que esta es una cónica no degenerada que pasa a través de ellos mismos. Por el corolario 3.2 del teorema 3.2, está es una única cónica $\mathcal{C}$ que pasa a través de A_1, A_2, A_3, B_1 y B_2. Desde que tres de los cinco puntos no son colineales $\mathcal{C}$ es no degenerada. Sea la recta A_1B_3 intercepta a $\mathcal{C}$ en A_1 y B'_3 (Para todo lo que conocemos, B'_3 podría coincidir con A_1) se mostrará que B'_3 es el mismo B_3. Por el teorema de Pascal aplicando al hexágono $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B'_3$ inscrito en $\mathcal{C}$, se sabe de la existencia de tres puntos colineales: L' que es la intersección de $A_2B'_3$ y A_3B_2, M' la intersección de A_3B_1 y $A_1B'_3$, y N. desde que $A_1B'_3$ es la misma recta como A_1B_3, M' es el mimo punto que M, ya que A_1, B_2, B_3 no son colineales, M es distinto de N. Así L' no está en la recta LMN, esta recta es distinta de A_3B_2 pero si M está sobre A_3B_2, el mismo M coincide con A_3 en tal caso A_1, A_3, B_3 son colineales o B_1 esta sobre A_3B_2 y está conclusión es una contradicción a la hipótesis que tres de los seis puntos dados no son colineales. Así L' coincide con L, es más, L es distinto de A_2, Así A_3, A_2, B_2 no son colineales. Luego las rectas $A_2B'_3$ y A_2B_3 ambas coinciden con A_2L y, así A_1 no esta sobre está recta y B'_2 coincide con B_3, así B_3 está sobre $\mathcal{C}$.

En el caso de la suposición de colinealidad no se satisfacen, la cónica es degenerada.
El inverso del teorema de pascal permite para las condiciones los inversos de los teoremas el cual corresponde los casos dónde no todos los vértices son colineales del hexágono son distintos.

3.5 Correlación y la polar reciproca

En el capítulo II, una correlación estaba definida como una proyectividad ideal entre los puntos del espacio S_n y los primos del mismo espacio S_n. La relación de punto y polar proporciona un ejemplo importante de correlaciones en S_2. Supóngase que se escoge un punto X y una cónica $\mathcal{C}$ que, relativo a una estructura de coordenadas dada, tiene

respectivamente, el vector coordenado ξ y la matriz A (simétrica). Entonces p, la polar de X con respecto a $\mathcal{C}$, tiene el vector de coordenado π dado por $\pi^t = \xi^t A$ o $\pi = A\xi$.
Una correlación no necesita tener una matriz simétrica. En el caso que la correlación tenga la matriz simétrica, La correlación puede ser descrita como la relación entre punto y su polar con respecto a la cónica con dicha matriz.

Definición 3.18: El punto y la recta se llaman polar recíproca con respecto a la cónica, y el proceso de obtención de la polar recíproca de una transformación se conoce como la polar reciproca.

La fraseología de la sentencia precedente implica una relación simétrica que hace, existe:
Según el teorema 3.11 y el comentario que sigue a ese teorema, la polar recíproca con relación a $\mathcal{C}$ de la recta con vector coordenado μ es el punto con vector coordenada η dado por $\eta^t = \mu^t A^{-1}$, ó $\eta = A^{-1}\mu$.

Teorema 3.18: El punto de la cónica con matriz P reciproca, con respecto a la cónica generada por puntos con matriz N, en la recta cónica (cónica generada por las rectas tangentes), la matriz del punto es $MP^{-1}M$.

Prueba: la reciproca del punto X con relación a $\mathcal{C}$ conduce a la recta p, y al reciproca p con relación a $\mathcal{C}$ llevan de regreso para el punto X:

$$\xi \longrightarrow A\xi \longrightarrow A^{-1}(A\xi) = \xi.$$

Supóngase ahora que se considera el efecto de reciprocidad para todos los puntos de la cónica, $\wp$, con respecto a otra $\mathfrak{M}$, con matrices P y N, respectivamente. Cada punto de $\wp$, $\xi^t P\xi = 0$, es llevado a la recta con vector coordenado $r = M\xi$ de esto se tiene que $M^{-1}r = \xi$, $\xi^t = r^t M^{-1}$ y sustituyendo en la ecuación de la cónica se tiene:

$$\xi^t P\xi = 0$$

$$r^t M^{-1}PM^{-1}r = 0$$

Así el punto de la cónica $r^t M^{-1}PM^{-1}r = 0$. De esto se tiene que la matriz del punto de la recta cónica es: $M^{-1}PM^{-1}$ de esto se tiene que la matriz de la cónica generada por puntos es $MP^{-1}M$.

Un importante resultado es que "La relación del polo y la polar se preservan bajo la polar reciproca," de forma precisa, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.19: Sea el punto M, la recta p y la cónica $\mathcal{C}$ es reciproca con respecto a la cónica, δ, en la recta m, el punto P y la cónica $\mathfrak{D}$, respectivamente. Entonces p es la polar de M con respecto a $\mathcal{C}$ si y solo si m es la polar de P con respecto a $\mathfrak{D}$.

Prueba: hipótesis Sea el punto con ecuación de $\mathcal{C}$ $\xi^t A\xi = 0$, y la de δ $\xi^t B\xi = 0$. Entonces por el teorema 3.18, El punto ecuación de $\mathfrak{D}$ es:

$$\xi^t B A^{-1} B \xi = 0.$$

Sea un vector coordenado de M dado por μ y un vector coordenado de m dado por μ'.
Se tiene que $\mu' = B\mu \Rightarrow B^{-1}\mu' = \mu$.

Sea un vector coordenado de p esta dado por π y un vector coordenado de P es π'.
Se tiene que $\pi' = B^{-1}\pi \Rightarrow B\pi' = \pi$.
" $\Rightarrow$ "Como p es la polar de M con respecto a $\mathcal{C} \Rightarrow \pi = A\mu$,

$$\pi = A\mu$$

Sustituyendo π se tiene $B\pi' = A\mu$
Ahora multiplicando por A^{-1} a ambos lados $A^{-1}B\pi' = \mu$
Sustituyendo μ se tiene $A^{-1}B\pi' = B^{-1}\mu'$
Multiplicando por B a ambos lados se tiene $BA^{-1}B\pi' = \mu'$
Por lo tanto m es la polar de P con respecto a $\mathfrak{D} \Rightarrow \mu' = BA^{-1}B\pi'$.

" $\Leftarrow$ " Como m es la polar de P con respecto a $\mathfrak{D} \Rightarrow \mu' = BA^{-1}B\pi'$.

$$\mu' = BA^{-1}B\pi'.$$

Multiplicando por B^{-1} a ambos lados se tiene $B^{-1}\mu' = A^{-1}B\pi'$
Ahora multiplicando por A a ambos lados $AB^{-1}\mu' = B\pi'$
Sustituyendo $B^{-1}\mu'$ por μ se tiene $A\mu = B\pi'$
Ahora sustituyendo $B\pi'$ por $\pi \Rightarrow A\mu = \pi$.
De esto se tiene que p es la polar de M con respecto a $\mathcal{C}$ si y solo si m es la polar de P con respecto a $\mathfrak{D}$.

3.6 Aplicaciones de la polar reciproca.

Uno de los usos de la polar reciproca es la prueba de resultados generales de casos especiales.

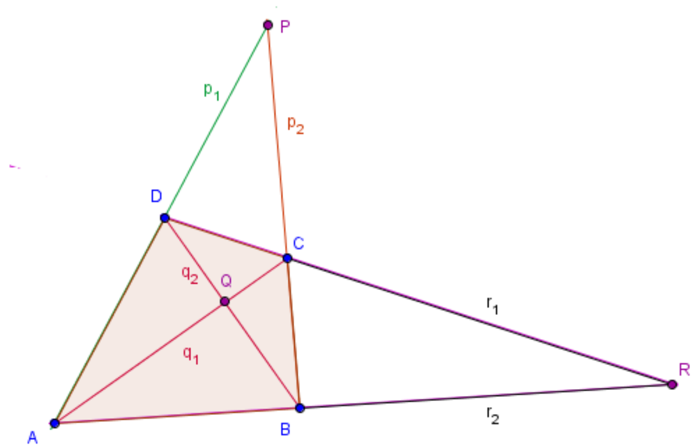


Figura 3.15

La ilustración de la figura 3.15 concierne las propiedades armónicas del cuadrilátero completo. Estas propiedades pueden ser establecidas en el dominio real de la siguiente manera: Se inicia con un cuadrilátero completo arbitrario ABCD, con puntos diagonales P, Q, R. Recíprocamente esta figura con relación a una cónica central cuyo centro está en P. La polar de P es la recta ideal. Así p_1 y p_2 son recíprocas en dos puntos ideales, P_1 y P_2. Luego A y D se reciprocarán en dos rectas, a y d, con el punto ideal P_1 en común, B y C resulta en b y c, con el punto ideal P_2 en común (la Figura 3.16).

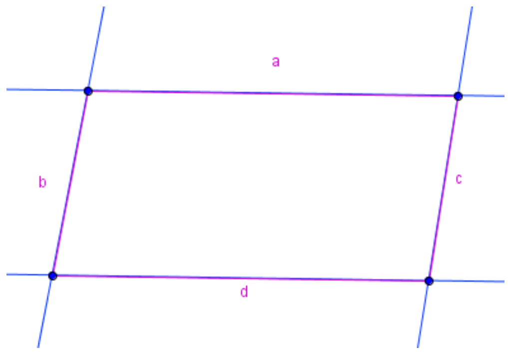


Figura 3.16

Pero ahora, las características armónicas de paralelogramo, como un cuadrilátero, están evidentes por sí mismo. Por lo tanto, desde que la reciprocidad polar es una transformación lineal (conservando razón cruzada), se obtiene las propiedades armónicas del cuadrilátero completo por reciprocidad anterior.

Definición 3.19:

(i) Las pendientes de las rectas i o $-i$ son llamadas rectas isotrópicas.
(ii) Una tangente a la curva de pendientes i o $-i$ es llamado tangente isotrópicas.
(iii) Un punto de intersección (distinto de I o J) de dos tangentes isotrópicas hacia una cónica es llamado el foco de la cónica.
(iv) La polar con respecto a la cónica $\mathcal{C}$ de un foco, F de $\mathcal{C}$ es llamado la directriz correspondiente a F.

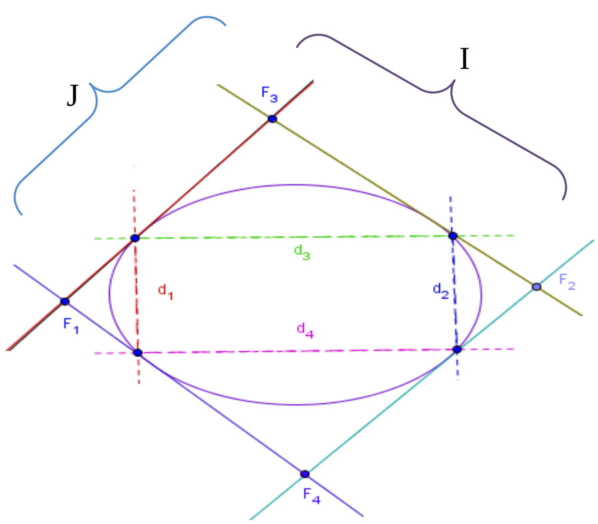


Figura 3.17

Del hecho que la ecuación de la recta de una cónica es de segundo grado, se concluye que una cónica "generalmente" tiene dos tangentes con cualquier pendiente dada. Así una cónica "generalmente" tiene cuatro focos y cuatro directrices. Esta situación es simbolizada en la figura 3.17. Pero es posible que una cónica tenga solo una tangente de una cierta pendiente.

Definición3.20: Una tangente a la curva en un punto ideal sobre la curva es llamada una asíntota.

Así, las asíntotas de una circunferencia son rectas isotrópicas.

Teorema 3.20. Las asíntotas de una circunferencia se interceptan en su centro, o el centro de una circunferencia es su (único) foco.

Tradicionalmente, los términos “foco” y “directriz” están asociados con la definición métrica de una cónica: “una cónica es el lugar geométrico de un punto la razón de cuyas distancias de un punto fijo (el foco) y una recta fija (la directriz) es constante.”

Teorema 3.21. El recíproco de un circunferencia S_1 con centro C con respecto a una circunferencia S_2 con centro O es una cónica no degenerado con O como foco y la polar de C como la directriz correspondiente.

Prueba: Que el recíproco es una cónica no degenerada sigue del hecho de que la circunferencia no degenerada (puesto que tiene un centro) y que el rango de la matriz no cambia por una transformación lineal.

El polar de C con respecto a S_1 es la recta ideal, en las es reciproca entre O. Por lo tanto, por el teorema 3.19 O es la polar de C con respecto a S_2 son polo y polar con respecto a la cónica.

Queda solamente probar que O es un foco de la cónica. Ahora I y J, están sobre S_1 recíprocamente en dos rectas de la cónica. Pero puesto que I y J están sobre S_2, son reciprocas entre las tangentes a S_2 en I y J (la polar de un punto en una cónica es la tangente en ese punto). Es decir I e J son reciprocas en tangentes isotrópicas a la cónica, interceptándose en O.

3.7 Involuciones en una cónica

Definición 3.21: Una involución es determinada por dos pares de elementos correspondientes, o por estos elementos fijos.

Una proyectividad que intercambia el elemento de un par es una involución.

Teorema 3.22: En una involución sobre una cónica, distinta de la identidad. Los pares de puntos conjugados están alineados con un punto fijo O llamado polo de la involución.

Prueba: Se considera ahora el caso en que la proyectividad sobre una cónica sea una involución, es decir, el caso en que coincide con su inversa o que su cuadrado es la identidad. Esto quiere decir que proyectando los puntos de la cónica y sus homólogos desde un punto S de la misma se obtienen haces proyectivos en involución, para que una proyectividad sobre una cónica sea una involución basta que un par de puntos A, A' se correspondan doblemente. Una involución queda determinada por dos pares de puntos homólogos, sean A, A' y B, B', pues un tercer par de puntos homólogos es el A, A'. El eje de colineación e queda determinado por los puntos $P(BA' \cap B'A)$ y $Q(BA \cap B'A')$ Figura 3.18.
Sea C, C' otro par de puntos homólogos. Por el teorema 3.15 los puntos $R(AC \cap A'C')$ y $S(BC \cap B'C')$ están sobre e y por tanto los triángulos ABC y $A'B'C'$ por cortarse los pares de lados correspondientes en puntos de una recta son homológicos, en consecuencia las rectas $AA^{'}, BB^{'}, CC'$ pasan por el mismo punto O. como $CC^{'}$ era cualquier par de puntos conjugados se da el resultado del teorema.
La propiedad reciproca es evidente, pues si los pares $(A, A^{'}), (B, B^{'}), \ldots$ están alineados con un punto fijo O, la proyectividad definida por $(AA^{'}B) \wedge (A'AB')$ es una involución cuyos pares de puntos correspondientes, por el teorema 3.15, deben estar alineados con $O\ (AA' \cap BB')$

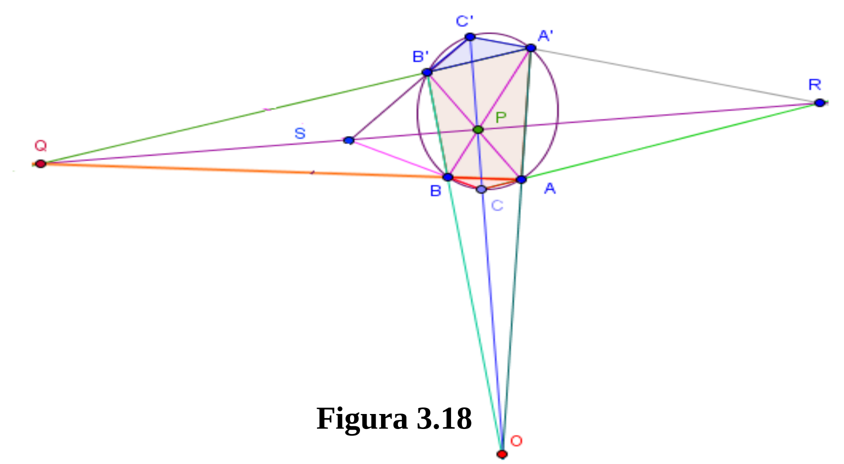


Figura 3.18

Teorema 3.23. El haz de rectas que pasa a través de O, un punto no esta sobre la cónica $\mathcal{C}$, corta a pares de puntos de una involución en $\mathcal{C}$. Inversamente, toda involución en $\mathcal{C}$ se puede pensar en como siendo generada de esta manera.

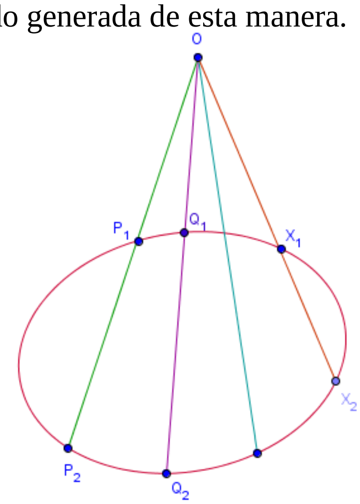


Figura 3.19

Prueba: Se considera una cónica no degenerado $\mathcal{C}$ y un punto O que no está sobre $\mathcal{C}$. Sea el haz de rectas con vértice O que cortan a la cónica en los pares; P_1, P_2, Q_1, Q_2 etc. Sin realizar ningunos de los detalles algebraicos, se puede ver que el vector coordenado de cualquier punto X_2 está relacionado linealmente con el vector coordenado de su pareja X_1. Por otra parte, la correspondencia es uno a uno y simétrica: Si X_2 corresponde a X_1, entonces X_1 corresponde a X_2. Por lo tanto esta construcción define una involución sobre $\mathcal{C}$. Por otra parte, toda involución en una cónica se puede pensar en como siendo generada de esta manera, por si una involución U aparea P_1 y P_2, Q_1 y Q_2, simplemente se unen los segmentos P_1P_2 y Q_1Q_2 se interceptan en O.

Entonces la involución determinada por el haz de rectas a través de O debe ser idéntica con U puesto que una involución es determinada por dos pares de puntos correspondientes.

Reafirmación: Una condición necesaria y suficiente que una proyectividad sobre una cónica sea una involución es que las rectas que unen puntos correspondientes sean concurrentes.

Claramente, los puntos fijos de la involución sobre $\mathcal{C}$ determinada por el haz con vértice O son los puntos del contacto de las tangentes de O

El punto O se llama el centro de la involución, y la recta que unen los puntos fijos H, K es el *eje*. El eje es el eje cruzado de la proyectividad sobre la cónica (teorema 3.14). Una involución en una cónica se determina una vez que se especifique su centro o su eje.

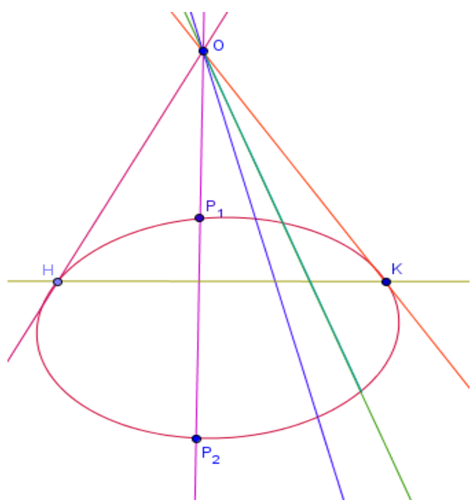


Figura 3.20

Si $(HK, P_1P_2) = -1$, P_1 y P_2 se aparejan en la involución de la cual H y Kson puntos fijos. Por lo tanto P_1P_2 pasan a través O, el polo de HK, el cual implica P_1P_2 eso HK son rectas conjugadas respecto a $\mathcal{C}$.

Dos clases de involución

Los dos puntos de un par conjugado de una involución pueden ambos estar en el mismo lado del centro o pueden estar en los lados opuestos del centro de la involución.

Definición 3.22: Se dice que una involución es hiperbólica, si los dos puntos de un par conjugado, están en el mismo lado del centro; en una involución hiperbólica, dos puntos son auto-conjugados, es decir cada uno es su propio conjugado, estos puntos son conocidos como los puntos dobles

Definición 3.23: Se dice que una involución es elíptica si los dos puntos de dicho par están en lados opuestos del centro. La involución elíptica no tiene puntos dobles.

3.8 Pares y haces de cónicas

Una base de resultado significativo atiende un estudio de ciertos tipos de familias de cónicas. Uno de la mayoría de tipos interesantes de familia a considerar son los haces, llamados así en analogía con la definición de un haz de rectas, el sistema de cónicas cuyas ecuaciones son combinaciones lineales de dos cónicas base.

Pero algún análisis preliminar es requerido. Mientras que es claro que dos rectas distintas siempre se interceptan en un punto requiere algún trabajo para estar seguro del número de puntos comunes para dos cónicas.

La intersección de dos cónicas.

La experiencia con graficas de cónicas en geometría analítica elemental conduce a suponer que dos cónicas se interceptan en cuatro puntos, con menos de cuatro, con las intersecciones distintas que aparecen cuando algunas intersecciones son imaginarias, ideales o múltiple, o posiblemente una combinación de esos casos especiales. Al menos se sabe que dos cónicas no degeneradas no tienen más que cuatro puntos en común, desde que cinco puntos, tres no colineales determinan una cónica.

Para estar seguro de este resultado, se abordará el problema sistemáticamente, usando métodos algebraicos. Se comenzará con dos cónicas (distintas), $\mathcal{C}\ y\ \mathcal{C}'$, con $\mathcal{C}$ siendo una cónica no degenerada. De la forma paramétrica se sabe que una estructura de coordenadas puede ser elegida tal que la ecuación es $x_0x_2 - x_1^2 = 0$, con puntos sobre $\mathcal{C}$ teniendo coordenadas $(1, r, r^2)$ en términos de un parámetro r. Además, desde que hay autonomía en la elección de este sistema, el punto A de la figura 3.5 no puede estar sobre $\mathcal{C}'$. La ecuación de $\mathcal{C}'$ relativo estas estructuras de coordenadas es

$$\xi^t M \xi = 0$$

O

$$m_{00}x_0^2 + m_{11}x_1^2 + m_{22}x_2^2 + 2m_{01}x_0x_1 + 2m_{02}x_0x_2 + 2m_{12}x_1x_2 = 0$$

El punto R$(1, r, r^2)$ de $\mathcal{C}$ esta sobre $\mathcal{C}'$ si y solo si r satisface la ecuación cuadrática

$$m_{22}r^4 + 2m_{12}r^3 + (m_{11} + 2m_{02})r^2 + 2m_{01}r + m_{00} = 0. \qquad (1)$$

Desde que A(0, 0, 1) no esta sobre $\mathcal{C}^{'}$, $m_{22} \neq 0$. por lo tanto la ecuación (1) tiene cuatro raíces r_1, r_2, r_3, r_4, no necesariamente todas distintas. Ciertamente, hay cinco casos a considerar:

(i) Cuatro raíces simples (todas las raíces distintas);
(ii) Dos raíces distintas y una raíz doble;
(iii) Dos raíces dobles;
(iv) Una raíz triple y una raíz simple;
(v) Una raíz cuádruple;

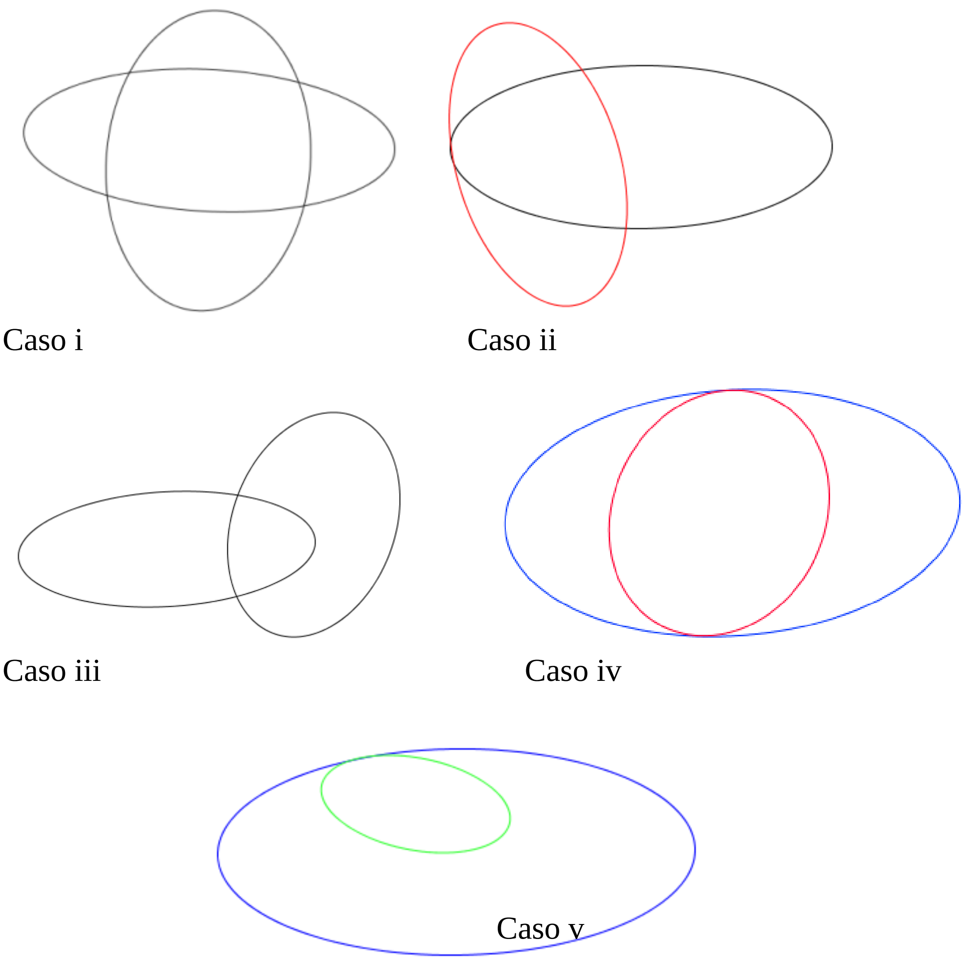


Figura 3.21

Si está de acuerdo en contar el punto correspondiente a las raíces doble, triple, o cuádruple como dos, tres, o cuatro puntos de intercepción.

Teorema 3.26: dos cónicas distintas tienen a lo más cuatro puntos comunes, con excepción del caso en que ambas sean degeneradas y tengan una recta común.

Prueba: sean $\mathcal{C}\ y\ \mathcal{C}'$ dos cónicas distintas, para demostrar el teorema considérese primero el caso de que una de ellas se degenerada. Como una de las cónicas es degenerada por hipótesis, entonces a $\mathcal{C}$ la forman dos rectas que son l_1 y l_2. La recta l_1 corta lo sumo en dos puntos a la cónica $\mathcal{C}'$ ya que si la cotara en más de dos puntos esta pertenecería a la cónica y lo mismo sucede con l_2 y esto prueba el teorema en este caso particular.

Ahora considérese el caso general.

Supóngase que dos cónicas $\mathcal{C}\ y\ \mathcal{C}'$ son no degeneradas y sean sus ecuaciones $\xi^t A\xi = 0$ y $\xi^t B\xi = 0$, ahora considérese otra cónica $\mathcal{C}_\lambda$ de ecuación $\xi^t A\xi + \lambda\xi^t B\xi = 0$ siendo λ un parámetro no nulo. Es inmediato que los puntos comunes a $\mathcal{C}\ y\ \mathcal{C}'$ son los mismos comunes a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_\lambda$ por lo tanto si se determina λ de forma que $\mathcal{C}_\lambda$ fuese una cónica degenerada, el teorema estaría demostrado.

La condición para que $\mathcal{C}_\lambda$ sea degenerada es que su determinante sea igual a cero, es decir que se tenga

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & a_{13}+\lambda b_{13} \\ a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+\lambda b_{22} & a_{23}+\lambda b_{23} \\ a_{31}+\lambda b_{31} & a_{32}+\lambda b_{32} & a_{33}+\lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Esta ecuación de tercer grado que denomina la ecuación en λ de la cónica; por propiedades de determinantes se deduce que el coeficiente de λ^3 en la ecuación es el determinante de la cónica $\mathcal{C}'$, y termino independiente es el determinante de $\mathcal{C}$; luego por hipótesis $\mathcal{C}\ y\ \mathcal{C}'$ no son degeneradas, la ecuación en λ tiene siempre una raíz real y distinta de cero. Las cónicas $\mathcal{C}\ y\ \mathcal{C}_\lambda$ tienen a lo más cuatro puntos comunes puesto que la cónica $\mathcal{C}$ es no degenerada.

En caso de que $\mathcal{C}\ y\ \mathcal{C}'$ ambas son degeneradas, cada una consiste de un par de rectas distintas, o una recta contada dos veces.

Teorema 3.27: dos cónicas no degeneradas son tangentes en p si y solo si p es un punto múltiple de intersección de las cónicas.

Prueba: otra vez, eligiendo el sistema coordenado de la forma paramétrica, tomando B(1, 0, 0) como el punto p. entonces la ecuación de $\mathcal{C}$ es $x_0x_2 - x_1^2 = 0$, y la ecuación de la tangente en p es $x_2 = 0$; la ecuación de $\mathcal{C}'$ es
$m_{11}x_1^2 + m_{22}x_2^2 + 2m_{01}x_0x_1 + 2m_{02}x_0x_2 + 2m_{12}x_1x_2 = 0$ y la ecuación de la tangente a $\mathcal{C}'$ en p es $m_{01}x_1 + m_{02}x_2 = 0$;

Igualando estas dos ecuaciones se tiene que:

$$m_{11}x_1^2 + m_{22}x_2^2 + 2m_{01}x_0x_1 + 2m_{02}x_0x_2 + 2m_{12}x_1x_2 = x_0x_2 - x_1^2$$

$$x_1^2(m_{11}+1) + m_{22}x_2^2 + 2m_{01}x_0x_1 + x_0x_2(2m_{02}-1) + 2m_{12}x_1x_2 = 0$$

$$m_{22}x_2^2 + x_1^2(m_{11}+1) + 2m_{01}x_0x_1 + x_0x_2(2m_{02}-1) + 2m_{12}x_1x_2 = 0$$

Sustituyendo el punto $R(1, r, r^2)$ se tiene:

$$m_{22}r^4 + r^2(m_{11}+1) + 2m_{01}r + r^2(2m_{02}-1) + 2m_{12}r^3 = 0$$

$$m_{22}r^4 + r^2(m_{11}+1+2m_{02}-1) + 2m_{01}r + 2m_{12}r^3 = 0$$

Reordenando

$$m_{22}r^4 + 2m_{12}r^3 + (m_{11}+2m_{02})r^2 + 2m_{01}r = 0.$$

Ahora 0 es al menos una raíz doble de esta ultima ecuación si y solo si $m_{01} = 0$.

Si $r = 0 \Rightarrow m_{22}r^3 + 2m_{12}r^2 + (m_{11}+2m_{02})r + 2m_{01} = 0$

$$\Rightarrow 2m_{01} = 0.$$

Pero esta es precisamente la condición que la tangente a C y C' en p coincide.

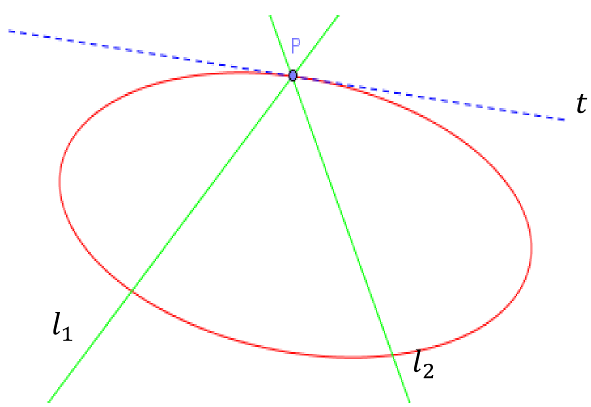


Figura 3.22

Definición 3.24: se dice que dos cónicas generadas por puntos, una o ambas son degeneradas, si son tangentes en un punto p común, si p es un punto múltiple de la intersección.

Así en la figura 3.22, la cónica degenerada l_1l_2 y la cónica C es tangente en p. la recta t es la tangente a C en p, esta es la única recta que no tiene otros puntos en común solo p en común con C. Se dirá que cualquier recta pasando por P es tangente a la cónica degenerada l_1l_2.

Haces de cónicas

Sea $\mathcal{a}, \mathcal{B}$ con ecuaciones

$$f \equiv \xi^t A \xi = 0, \qquad g \equiv \xi^t B \xi = 0 \qquad (1)$$

Dos cónicas distintas. Entonces para todo número complejo h, k, no todos cero,

$$hf + kg \equiv h\xi^t A\xi + k\xi^t B\xi \equiv \xi^t(hA + kB)\,\xi = 0 \quad (2)$$

es la ecuación de una cónica pasando por todos los puntos comunes a $\mathcal{a}\ y\ \mathcal{B}$ tales cónicas, linealmente dependientes sobre dos cónicas, constituyen lo que es conocido como un haz.

Definición 3.25: (a) el conjunto de todos los puntos que generan una cónica cuyas ecuaciones son combinaciones lineales de las ecuaciones de dos cónicas particulares es llamado un haz de cónicas generadas por puntos.
(b) las dos cónicas particulares de la parte (a) son llamadas cónicas bases del haz.

El mismo haz puede ser generado por más de un par de cónicas bases. Ciertamente cualquier par en el haz sirve.

Teorema 3.28: dos cónicas cualesquiera distintas de un haz pueden ser usadas como cónicas bases del haz.

Prueba: Se considera el haz con ecuación (2), y sean $\mathcal{R}, \mathcal{S}$, con ecuaciones

$$r \equiv h_1 f + k_1 g = 0, \qquad s \equiv h_2 f + k_2 g = 0$$

Dos cónicas distintas del haz. Entonces

$$\begin{bmatrix} h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Es no singular. Ahora cualquier cónica $\mathcal{J}$ que forma parte del haz con cónicas bases $\mathcal{R}\ y\ \mathcal{S}$, perteneciendo al haz original, si la ecuación de $\mathcal{J}$ es

$$t \equiv mr + ns = 0,$$

Entonces t también puede escribirse como

$$t \equiv (mh_1 + nh_2)f + (mk_1 + nk_2)g = 0$$

Inversamente, desde que se puede despejar para $f\ y\ g$ en términos de $r\ y\ s$, cualquier combinación lineal del par anterior es expresable como una combinación lineal del primer par, así también cualquier cónica del haz original es una cónica del haz $\mathcal{R}, \mathcal{S}$.

Si las cónicas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son fijas, cualquier par de números complejos (h, k), ambos distintos de cero, determinan una cónica del haz de la ecuación (2). El par (ch, ck), donde c es cualquier complejo distinto de cero, determinan la misma cónica como (h, k).

Además a cualquier cónica del haz le corresponde un par (h, k), o bien un conjunto de pares (ch, ck). La cónica de un haz, entonces constituye un S_1, con coordenadas homogéneas (h, k) relativo a una estructura en que $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son los elementos fundamentales. Cambiando a $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ como cónicas bases del haz correspondiente a un cambio de estructura de coordenadas.

El resto de este capítulo es asignado al desarrollo de ciertas propiedades de haces que permitirá un análisis completo de todos los tipos de haces, para ser efectuado en la siguiente sección.

Teorema 3.29: si P no es un punto común a todas las cónicas de un haz, hay precisamente una cónica del haz que pasando por P.

Prueba: el punto P con vector coordenado π esta sobre una cónica del haz con ecuación (2) siempre que

$$h(\pi^t A\pi) + k(\pi^t B\pi) = 0.$$

Si $\pi^t A\pi$ y $\pi^t B\pi$ son ambos distintos de cero, hay una única razón $h{:}\,k$ que satisface esta ecuación.

Si dos cónicas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ tienen exactamente cuatro puntos distintos P_1, P_2, P_3, P_4, entonces tres de esos puntos no son colineales. Por lo tanto hay al menos tres cónicas distintas degeneradas en el haz determinadas por $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, es decir,

$\mathcal{D}_1$, consistiendo del par de rectas P_1P_2 y P_3P_4;
$\mathcal{D}_2$, consistiendo del par de rectas P_1P_3 y P_2P_4;
$\mathcal{D}_3$, consistiendo del par de rectas P_1P_4 y P_2P_3;

O, más brevemente, el par de lados opuestos del cuadrilátero completo con vértices P_1, P_2, P_3, P_4.

Se puede demostrar que no hay más que tres cónicas degeneradas en un haz, salvo que todas las cónicas sean degeneradas.

Teorema 3.30: si un haz de cónicas generadas por puntos contiene al menos una cónica no degenerada, está contiene a lo sumo tres cónicas degeneradas.

Prueba: elija una cónica degenerada como $\mathcal{A}$, una de las cónicas bases del haz. Entonces $\det A \neq 0$. Una cónica del haz dada por la ecuación (2) es degenerada si y solo si el determinante es cero:

$$det[hA + kB] = 0.$$

Es fácil chequear que

$$det[hA + kB] = h^3(\det A) + h^2k\theta + hk^2\theta' + k^3(\det B)$$

Donde θ y θ' son polinomios en los elementos de las matrices A y B.

Entonces con una ecuación cubica a en la razón $h:k$, que tiene tres raíces (no necesariamente distintas) d_0, d_1, d_2.

Para el propósito presente no se necesita conocer la expresión para θ y θ' en términos de los elementos de A y B.

Teorema 3.31: si P es un punto n-ada (simple, doble, triple o cuádruple) de intersección de dos cónicas de un haz, P es también un punto n-ada de intersección para cualesquiera otro par de cónicas del haz.

Prueba: se asumirá que el haz contiene al menos una cónica no degenerada, en cuyo caso contiene muchas semejantes (teorema 3.30).
Se eligen dos de esas cónicas degeneradas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ como cónicas bases del haz, con ecuación dada como la ecuación (1). La tangente a $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ en P tienen ecuación

$$\pi^t A\xi = 0; \qquad \pi^t B\xi = 0. \tag{4}$$

Si las cónicas $\mathcal{R},\ \mathcal{S}$ tienen ecuación

$$r \equiv h_1 f + k_1 g; \qquad s \equiv h_2 f + k_2 g,$$

Entonces las ecuaciones a las tangentes a $\mathcal{R},\ \mathcal{S}$ en P tienen ecuaciones

$$r \equiv h_1\pi^t A\xi + k_1\pi^t B\xi = 0; \qquad s \equiv h_2\pi^t A\xi + k_2\pi^t B\xi = 0. \tag{5}$$

Las rectas representadas por las ecuaciones (4) son idénticas si y solo si las rectas representadas por las ecuaciones (5) son idénticas. (Por considerar el caso donde una o ambas $\mathcal{R}\ y\, \mathcal{S}$ son degeneradas.) Por lo tanto P es un punto simple o múltiple para un par de cónicas del haz acorde como P es un punto simple o múltiple de cualquier otro haz de cónicas.

Ahora debe ser mostrada que el orden de intersección es el mismo para cada par de cónicas del haz. Esto puede estar hecho enumerar todos los casos. Supóngase, por ejemplo, que las cónicas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ se interceptan en P_1, P_1, P_2, P_3; es decir que P_1 es un punto doble, y que cada uno P_2, P_3 es una simple intersección. Ahora se sabe que cualesquiera dos cónicas $\mathcal{R},\ \mathcal{S}$ tendrán P_1, P_2, P_3 como el conjunto total de puntos de intersección; y, del argumento anterior, $P_2\ y\ P_3$ son puntos simples. Esto no deja elección para P_1 pero este es un punto doble de intersección de $\mathcal{R}\ y\ \ \mathcal{S}$.

3.9 Clasificación de los haces

Ahora se pueden describir varios tipos de haces, correspondientes a los 5 tipos de intersección de un par de cónicas listadas en la sección 3.8 la numeración corresponde a la usada en los 5 casos.

Caso (i). Cuatro puntos simples P_1, P_2, P_3, P_4. hay tres cónicas distintas degeneradas en el haz, como se describió en la sección anterior. Dos cualesquiera de ellas pueden ser usadas como cónicas bases del haz. Esta observación provee un método conveniente para encontrar la ecuación de una cónica determinado por 5 puntos.

Si los 5 puntos determinan una cónica, 4 de los 5 no son colineales; por lo tanto se pueden escoger 4 de los 5, tal que tres de los 4 no sean colineales. Sea $F = 0$, $G = 0$ las ecuaciones de dos cónicas degeneradas pasando por esos 4 puntos, y determinando $h, k,$ tal que

$$hF + kG = 0$$

es la ecuación de una cónica pasando por el quinto punto.

Teorema 3.32: Por propiedades de cambio de estructura de coordenadas, las ecuaciones de cualesquiera dos cónicas no degeneradas $\mathcal{a}, \mathcal{B}$ interceptándose en 4 puntos distintos puede simultanearse y ser reducida a la forma de la ecuación (2). El haz simbolizado por $h\mathcal{a} + k\mathcal{B}$ consiste de todas las cónicas pasando por el cuarto punto en común a $\mathcal{a}, \mathcal{B}$. Hay tres cónicas distintas degeneradas en este haz, dadas por $h: k = d_0, d_1, d_2$.

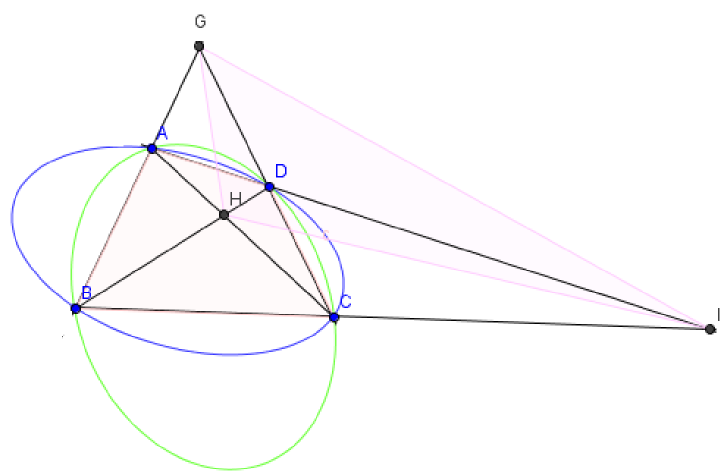


Figura 3.23

Prueba: Por un adecuado cambio de estructura de coordenadas, la ecuación de dos cónicas cualesquiera no degeneradas de este haz pueden simultanearse y reducirse a una simple forma. Sea $\mathcal{a}, \mathcal{B}$ *do*s cónicas bases del haz pasando por P_1, P_2, P_3, P_4. entonces el triángulo diagonal del cuadrilátero completo es polar por si mismo con respecto a ambas $\mathcal{a}$ *y* $\mathcal{B}$ (y también es cierto para cualquier cónica no degenerada del haz). Si se elige este triángulo como el triángulo fundamental de la nueva estructura de coordenadas, cada una de las matrices de $\mathcal{a}\ y\ \mathcal{B}$ quedan diagonales

$$a_0^{'}y_0^2 + a_1^{'}y_1^2 + a_2^{'}y_2^2 = 0, \qquad b_0^{'}y_0^2 + b_1^{'}y_1^2 + b_2^{'}y_2^2 = 0,$$

Donde ninguno los coeficientes son cero. Que favorece el cambio de estructura de coordenadas:

$$\sqrt{a_i^{'}}y_i = z_i \qquad i = 0,1,2$$

Llegando a la ecuación:

$$\begin{aligned} \zeta^t A'\zeta &\equiv z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0, \\ \zeta^t B^{'}\zeta &\equiv c_0 z_0^2 + c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Se puede ver por el teorema 3.29 que c_0, c_1, c_2 son iguales en algún orden, a los negativos d_0, d_1, d_2 los valores de las razones $h\colon k$ correspondientes a las tres cónicas degeneradas del haz.
Así finalmente se tiene las formas canonícas

$$\begin{aligned} z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 &= 0, \\ d_0 z_0^2 + d_1 z_1^2 + d_2 z_2^2 &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Caso (ii). Un punto doble y dos puntos simples P_1, P_1, P_3, P_4. Si dos cónicas $\mathcal{a}$ y $\mathcal{B}$ tienen este tipo de intersección, todas las cónicas del haz determinado por $\mathcal{a}\ y\ \mathcal{B}$ son tangentes en P_1 (teorema 3.27), con recta tangente t y pasando por $P_3\ y\ P_4$. Además, toda cónica tangente a t en P_1 y pasando por $P_3\ y\ P_4$ pertenece al haz, tal que cada cónica es determinada por la condición que pasa adicionalmente por un punto y por el teorema 3.29 hace que sea una cónica en el haz.

Se negocia con el caso donde las raíces r_1, r_2, r_3, r_4 de la ecuación (1) de la sección 3.8 no todas son distintas:$r_1 = r_2$ y r_3, r_4 son distintas de r_1 y de cada otra. Si en caso que d_0, d_1, d_2 expresada determinaran las cónicas degeneradas del haz, en términos de r_1, r_2, r_3, r_4 halle en este caso, que $d_0 = d_1 \neq d_2$. así hay solo dos cónicas distintas degeneradas de este haz: el par de rectas P_1P_3 y P_1P_4 y el par de rectas t y P_3P_4. Es conveniente utilizar las cónicas degeneradas como bases del haz y determinar las constantes de la combinación usando el resultado que cónicas pasan por cualquier punto asignado el plano. Así se resuelve el siguiente problema: encuentre la ecuación de la cónica tangente a t en P_1, pasando por P_3, P_4 y Q.

El problema de simultáneo reduce la ecuación de dos cónicas arbitrarias no degeneradas de un haz de tipo (ii) a la forma canoníca por transformación de coordenadas que no es natural como los problemas análogos del tipo (i). La ecuación particular que se obtiene en general se reduce al simultáneo de matrices y se reduce a dos matrices.

Supóngase que $\mathcal{a}, \mathcal{B}$ son cónicas no degeneradas tangentes en la recta t en P_1, y pasando por P_3 y P_4 (figura 11.3). Sea P_3P_4 y t interceptándose en T y sea la otra tangente de T a $\mathcal{a}$ tocándola en U. Sea P_1U y P_3P_4 interceptándose en V. por lo tanto la polar de $\mathrm{P_1}$, U con respecto a $\mathcal{a}$ son $\mathrm{P_1T}$, UT, respectivamente, es inmediato que $\mathrm{P_1U}$ es también la polar de T con respecto a $\mathcal{B}$. Se sabe que V es el conjugado armónico de T con respecto a P_3 , P_4. Además V y T son puntos conjugados armónicos con respecto a $\mathcal{B}$. Desde que T esta sobre la tangente a $\mathcal{B}$ en $\mathrm{P_1}$, se concluye que P_1 y T son también puntos conjugados armónicos con respecto a $\mathcal{B}$. Por lo tanto PU es la polar de T con respecto a $\mathcal{B}$.

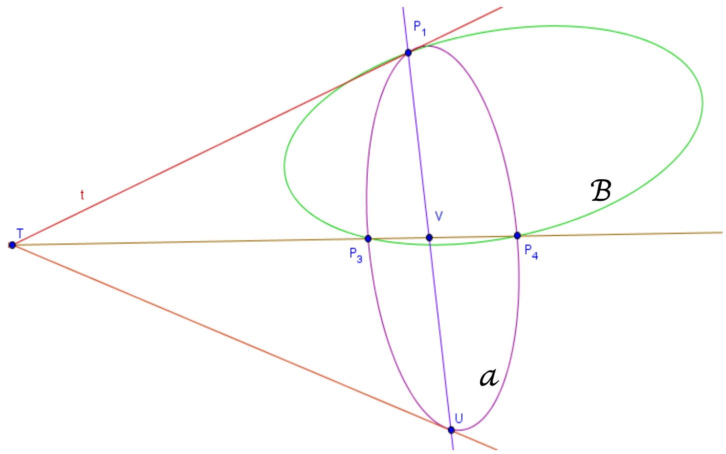


Figura 3.24

Caso (iii) Dos puntos dobles P_1, P_1, P_3, P_3. Aquí cualquier dos cónicas de los haces son tangente en P_1 y en P_3 . Sean las rectas tangentes comunes en P_1 y P_3 por t_1 y t_3. Entonces cualquier cónica tangente a estas rectas en P_1 y P_3 forma parte del haz, para una cónica que es determinada por la condición que pasa a través de uno o más puntos, con la condición de mantener fija la razón h: k. En la ecuación 2 del tema haces de cónicas en la sección 3.8. Las raíces r_1, r_2, r_3, r_4 de la ecuación 1 de la sección 3.8 son iguales en los pares: $r_1 = r_2, r_3 = r_4$, $r_1 \neq r_3$, por lo tanto puede determinarse que $d_0 = d_1 \neq d_2$; es decir, hay dos cónicas degeneradas distintas del haz.

Una de estas es la recta de pareja t_1, t_3; la otra es la recta repetida P_1, P_3. Estas cónicas degeneradas constituyen un par conveniente de base cónica para solucionar el siguiente problema por un método que debería ser familiar a esta hora: Encontrar la ecuación de la tangente cónica a cada uno de dos rectas dadas en los puntos asignados en estas rectas, y de pasado a través de un punto más.

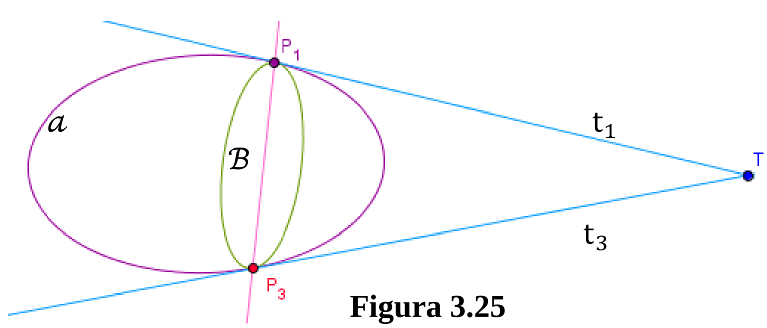


Figura 3.25

En la figura 3.25, el puntoT, común a $t_1 y\ t_3$, tiene la recta P_1P_3 como polar con respecto a cada una de las cónicas no degenerado de $\mathcal{a}, \mathcal{B}$.

Por otra parte, cualquier par de puntos de la involución en P_1P_3 la cual tiene $P_1\ y\ P_3$ como puntos fijos que son conjugados con respecto a cada uno de las cónicas. Por consiguiente, el triángulo TXY , donde X, Y, es un par de puntos de la involución mencionada arriba, es polar en si misma con relación a cada una de $\mathcal{a}, \mathcal{B}$.

Esta observación conduce a un método conveniente para encontrar las formas canónicas para las ecuaciones de cualesquiera dos cónicas no degenerado del haz.

Se usa alguno de los triángulos polares en si misma TXY como el triángulo de referencia, con coordenadas de T tomadas como (0, 0,1). Así la ecuación de P_1P_3 toma la forma $y_2 = 0$.

Entonces, justamente en la discusión del caso (i), se obtiene la ecuación (1) como la ecuación de las dos cónicas. Para determinar los coeficientes c_0, c_1, c_2, se observa que si $h: k = d_0$, la combinación lineal simbolizada por h$\mathcal{a}$ + k$\mathcal{B}$ representa la recta repetida; $z_2^2 = 0$ y si $h: k = d_2$, $h\mathcal{a} + k\mathcal{B}$ representar una recta par pasando a través de (0,0,1).

Por lo tanto $c_0 = -d_0 = c_1$, y $c_2 = -d_2$. Así tenemos las formas canónicas

$$\begin{gathered} z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0, \\ d_0(z_0^2 + z_1^2) + d_2 z_2^2 = 0. \end{gathered} \qquad (7)$$

Caso (iv) Un punto triple y un punto simple P_1, P_1, P_1, P_4. Si $\mathcal{a}\ y\ \mathcal{B}$ son dos cónicas no degeneradas con este tipo de intersección, se tiene que P_1 es un punto de triple intersección y, con más razón, tienen la misma recta tangente t, en ese punto.

El trabajo previo nos asegura cada par de cónicas del haz determinado por $\mathcal{a}$ y $\mathcal{B}$ tendrán a P_1 como un punto triple parte y P_4 como un punto simple de intersección.

Si $\mathcal{a}$ es una cónica del haz, y X es cualquiera cónica que tiene a P_1 como un punto triple, y P_4 como un punto sencillo de intersección con $\mathcal{a}$, entonces X es una cónica del haz.

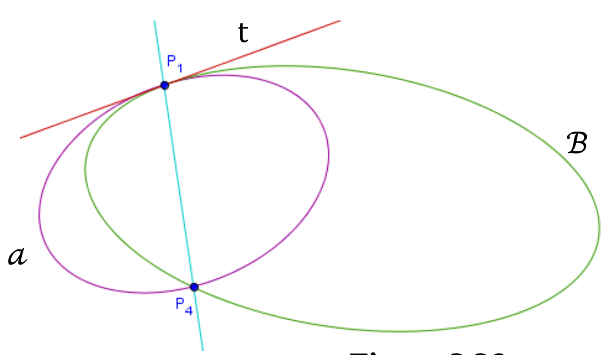


Figura 3.26

En este caso, tres de las raíces de la ecuación (1) de la sección 3.8 son iguales el uno al otro, y la cuarta raíz es distinta. Puede ser demostrado que $d_0 = d_1 = d_2$; es decir, hay justamente una cónica degenerado en el haz, consistiendo en la recta par t y P_1P_4.
Si $\mathcal{A}$ es cualquier cónica no degenerado del haz, se puede escribir al miembro típico del haz simbólicamente como $h\mathcal{A} + kr.P_1P_4$.

Las formas canónicas para las ecuaciones de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son

$$\begin{gathered} 2y_0y_2 + y_1^2 = 0, \\ d_0(2y_0y_2 + y_1^2) + 2y_1y_2 = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Caso (v) Un punto cuádruple: P_1, P_1, P_1, P_1. Por un argumento parecido a del primer párrafo del argumento de caso (iv), se concluye que el haz consta de todo punto de la cónica que no tiene a P_1 como un punto cuádruple de intersección con una cónica determinada no degenerada a través de P_1.

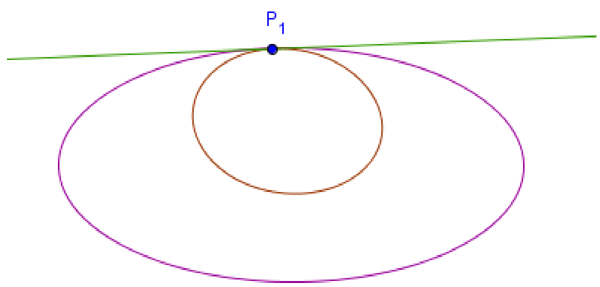


Figura 3.27

Las cuatro raíces de la ecuación (1) de la sección 3.8 son idénticas, y $d_0 = d_1 = d_2$ el haz contiene una cónica degenerada, la tangente común en P_1, contada dos veces. El miembro típico del haz puede ser representado simbólicamente como

$$h\mathcal{A} + kr^2.$$

Este caso, las formas canónicas para las ecuaciones de dos cónicas no degeneradas del haz es

$$\begin{gathered} 2y_0y_1 + y_2^2 = 0, \\ d_0(2y_0y_1 + y_2^2) + y_1^2 = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

3.10 Algunos teoremas sobre pares y haces de cónicas.

Esta sección se dedicará a varios teoremas que tengan ramificaciones interesantes.

Teorema 3.33. Supóngase que las cónicas $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ todas pasan a través P_1 y P_2, con al menos una de las cónicas que contiene la recta entera P_1P_2. Sean las intersecciones restantes de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son P_3 y P_4 de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ esta en Q_3 y Q_4 de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ esta R_3 y R_4. Entonces las rectas P_3P_4, Q_3Q_4, R_3R_4 son concurrentes.

Prueba. Sean las ecuaciones de $a, \mathcal{B}, \mathcal{C}$**,** son respectivamente $a = 0, b = 0, c = 0$ y sean las ecuaciones de las rectas $P_1P_2, P_3P_4, Q_3Q_4, R_3R_4$ son respectivamente $t = 0, u = 0, v = 0, w = 0$. Entonces, para algunos números complejos h_1, k_1, h_2, k_2 se tendrá

$h_1 a + k_1 b = t.u,$ y $\mathrm{h_2 b + k_2 c = t.v.}$

La eliminación b entre de estas ecuaciones da.

$$h_1 h_2 a - k_1 k_2 c = t(h_2 u - k_1 v)$$

El lado izquierdo de esta ecuación representa claramente una cónica pasando por P_1, P_2, R_3, R_4, el lado derecho representa una cónica degenerado pasando por P_1P_2. Por lo tanto $h_2 u - k_1 l w$, para un cierto número complejo l.

Teorema 3.34 (Teorema de la Involución de Desargues). Una recta L que no pasa a través de un punto común a todo las cónicas de un haz de las cónicas generadas por puntos corta a ésas cónicas en pares de puntos de una involución.

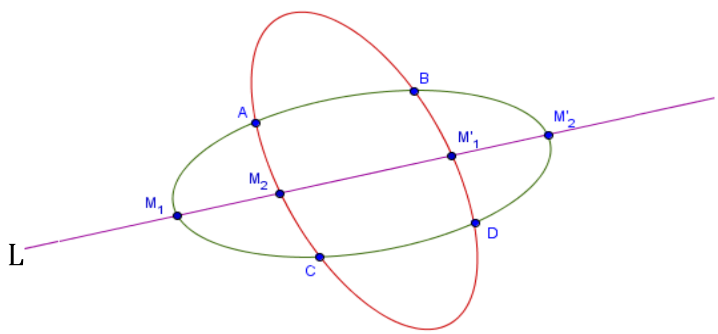


Figura 3.28

Prueba. Elegir una estructura de coordenado tal que la ecuación de L es $x_2 = 0$. Los puntos de la intersección de L con una cónica del haz,

$$h.\xi^t A \xi + k.\xi^t B \xi = 0$$

Donde $A = [a_{i,j}], B = [b_{i,j}], i, j = 0,1,2$, son determinadas por,

$h(a_{00}.x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2) + k(b_{00}x_0^2 + 2b_{01}x_0x_1 + b_{11}x_1^2) = 0.$

$$J = 2\begin{bmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 & b_{00}x_0 + b_{01}x_1 \\ a_{01}x_0 + a_{11}x_1 & b_{01}x_0 + b_{11}x_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$det\, J = (a_{00}x_0 + a_{01}x_1)(b_{01}x_0 + b_{11}x_1) - (a_{01}x_0 + a_{11}x_1)(b_{00}x_0 + b_{01}x_1) = 0$$

$$= a_{00}b_{01}x_0^2 + a_{01}b_{01}x_1x_0 + a_{01}b_{11}x_1^2 + a_{00}b_{11}x_1x_0 - a_{01}b_{00}x_0^2$$
$$-a_{11}b_{00}x_0x_1 - a_{01}b_{01}x_1x_0 - a_{11}b_{01}x_1^2$$

$$= x_0^2(a_{00}b_{01} - a_{01}b_{00}) + x_0x_1(a_{00}b_{11} - a_{11}b_{00}) + x_1^2(a_{01}b_{11} - a_{11}b_{01}) = 0$$

Así este determinante representa los puntos fijos de la involución de la recta L que no pasa por un punto común a todas las cónicas de un haz.

Hay dos puntos fijos de la involución en L, correspondientes a las cónicas que son tangentes a L en estos puntos. (Una o ambas cónicas puede ser degenerada, en tal caso nos estamos ocupando de un concepto generalizado de la tangencia.) Se obtiene así un teorema sobre cónicas determinados por los puntos y las rectas.

Teorema 3.35 Hay dos cónicas generadas por puntos distintas que pasa a través de cuatro puntos, ningunos de ellos tres colineales, y tangente a una recta que no contiene cualquiera de los cuatro puntos.

Prueba: Como las dos cónicas se interceptan en 4 puntos por hipótesis pero por el teorema 3.34 se sabe que si una recta L no pasa por ningún punto común a las cónicas del haz corta a dichas cónicas en pares de puntos de una involución y como una involución en una cónica son las rectas tangentes por lo tanto la recta tangente no contiene a ninguno de los cuatro puntos que generan las dos cónicas.

Polos y polares con respecto a los haces de cónicas.

Teorema 3.36. Las polares de un punto P con respecto a las cónicas de un haz de cónicas del punto forman un haz de rectas, proyectivamente relacionado al haz de cónicas, a menos que P sea un punto singular de una de las cónicas del haz, en tal caso las polares P con respecto a el resto de cónicas del haz son la misma recta.

Prueba: Supóngase que se tiene dos cónicas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ no degenerada del punto P con ecuaciones $\xi^t A\xi = 0, \xi^t B\xi = 0$. Si el punto P tiene vector coordenado π, la polar de P con respecto a $\mathcal{A}$ es la recta p_a con la ecuación $\pi^t A\xi = 0$, y con respecto a $\mathcal{B}$ es la recta p_b con la ecuación $\pi^t B\xi = 0$. Ahora considérese una cónica arbitraria $\mathcal{C}$ del haz generado por $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$: $\mathcal{C}$ tiene ecuación

$$h\xi^t A\xi + k\xi^t B\xi = 0.$$

La polar de P con respecto a $\mathcal{C}$ es la recta p_c con la ecuación

$$h\pi^t A\xi + k\pi^t B\xi = 0.$$

Puesto que la ecuación de p_c es una combinación lineal de las ecuaciones p_a y p_b, se concluye que las polares de un punto, con respecto a las cónicas de un haz, son concurrentes y se forma así un haz de rectas. Pero hay un caso en el cual esta conclusión no sería justificada: Si p_a y p_b es la misma recta, Así p_c también sería la misma recta. ¿Cómo puede esto ocurrir? Si $\pi^t A\xi = 0,\ \pi^t B\xi = 0$ son las ecuaciones de la misma recta, entonces hay dos números complejos c_1, c_2, no ambos cero, tal que

$$c_1\pi^t A\xi + c_2\pi^t B\xi = 0.$$

Es decir la polar P con respecto a la cónica

$$c_1\xi^t A\xi + c_2\xi^t B\xi = 0$$

No existe. Se sabe que esto sucede solamente cuando la cónica es degenerada y P es un punto singular de la cónica.

Otro poquito se puede decir más en el caso general. Puesto que la ecuación de p_c es la misma combinación lineal de las ecuaciones de p_a y p_b, que la ecuación de $\mathcal{C}$ es de la ecuación de $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ se puede concluir que esta es una relación proyectiva entre las rectas del haz de rectas y la cónicas del haz de cónicas (ambos se saben que son S_1).

Definición 3.23: El punto P^* el cual está en el vértice del haz de polares de P, con respecto a las cónicas del haz, es conjugado de P con respecto a cada una de las cónicas.
Se abrevia esta relación como "P^* es el conjugado de P con respecto al haz del cónicas. "La relación es simétrica: P es conjugado de P^* con respecto a las cónicas del haz, es decir las polares de P^* con respecto a las cónicas del haz forman un haz de rectas con vértice en P.

En el caso de que P sea un punto singular de una de las cónicas degeneradas del haz, su punto conjugado P^* no es determinado.

Teorema 3.37: Los polos de una recta p con respecto a las cónicas de un haz de la cónicas generadas por rectas forman una hilera de puntos proyectivamente relacionados con el haz de cónicas, a menos que p sea una recta singular de una de las cónicas del haz, en tal caso los polos de p con respecto a todas las otras cónicas del haz son el mismo punto.

Prueba: Supóngase que se tiene dos cónicas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ no degenerada de la recta p con ecuaciones $\xi^t A\xi = 0, \xi^t B\xi = 0$. Si la recta p tiene vector coordenado π, el polo de p con respecto a $\mathcal{A}$ es el punto P_a con vector coordenado $\pi_{\mathcal{A}}$ y con respecto a $\mathcal{B}$ es el punto P_b con vector coordenado $\pi_{\mathcal{B}}$. Ahora considérese una cónica arbitraria $\mathcal{C}$ del haz generado por $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$: $\mathcal{C}$ tiene ecuación

$$h\xi^t A\xi + k\xi^t B\xi = 0.$$

El polo de de p con respecto a $\mathcal{C}$ es el punto P_c con vector coordenado $h_1\pi_{\mathcal{A}} + k_1\pi_{\mathcal{B}}$
Puesto que el vector coordenado de P_c es una combinación lineal de las ecuaciones P_a y P_b, se concluye que los polos de una recta, con respecto a las cónicas de un haz, son colineales y se forma así una hilera de puntos. Pero hay un caso en el cual esta conclusión no sería justificada: Si P_a y P_b es el mismo punto, Así P_c también sería el mismo punto. ¿Cómo puede esto ocurrir? Si $\pi_{\mathcal{A}} = \pi_{\mathcal{B}}$. Son los vectores coordenados del mismo punto, entonces hay dos números complejos c_1, c_2, ambos distintos de cero, tal que

$$c_1\pi^t A\xi + c_2\pi^t B\xi = 0.$$

Es decir el polo de p con respecto a la cónica

$$c_1\xi^t A\xi + c_2\xi^t B\xi = 0$$

Que es P_a no existe. Se sabe que esto sucede solamente cuando la cónica es degenerada y p es una recta singular de la cónica.

Otro poquito se puede decir más en el caso general. Puesto que la ecuación de P_c es la misma combinación lineal de las ecuaciones de P_a y P_b, que la ecuación de $\mathcal{C}$ es de la ecuación de $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ se puede concluir que esta es una relación proyectiva entre los puntos de la hilera de puntos y la cónicas del haz de cónicas (ambos se saben que son S_1).

Supóngase, ahora, que se consideran los polos de una recta p con respecto a las cónicas de un haz de las cónicas generada por puntos. No se debe asumir que se tiene aquí la situación descrita en el teorema 3.37. Aunque la configuración consiste de una cónica generada por puntos, y esta recta tangente es la "igual" que una cónica generada por rectas y de sus puntos de contacto, un haz de las cónicas generadas por puntos no es "igual" que un haz de las cónicas generadas por rectas.

Para ver esto geométricamente, considérese dos cónicas (la generada por puntos y la generada por rectas) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, como en la figura 3.28, intersecándose en los puntos P_1, P_2, P_3, P_4, y teniendo las cuatro tangentes comunes. t_1, t_2, t_3, t_4 El haz de las cónicas del punto generado por $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ consiste en todas las cónicas a través P_1, P_2, P_3, P_4, mientras que el haz de las cónicas generada por rectas generados por $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ consiste en todas las cónicas tangentes a t_1, t_2, t_3, t_4 no la misma familia para todos.

Algebraicamente, la diferencia entre los dos tipos de haces se considera del hecho de que si A y B son las matrices

$$(kA + lB)_{adj} \neq kA_{adj} + lB_{adj}$$

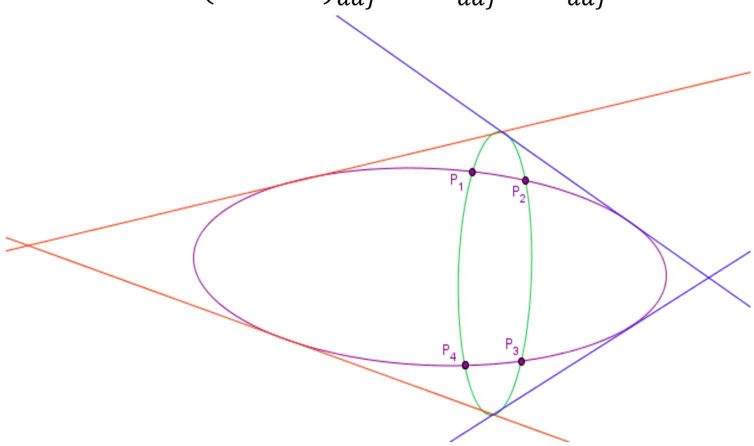


Figura 3.28

Teorema 3.38. Si un haz de las cónicas generadas por puntos no contiene ninguna recta repetida, los polos de una recta p con respecto a la cónica del haz constituyen una cónica generada por puntos, la cuál es no degenerada a menos que p pasa a través de un punto singular de una de lo cónica del haz

Prueba: Se elige a considerar el polo p con respecto a una cónica $\mathcal{C}$ como el punto de la intersección de las polares de dos puntos sobre p. Sean R, S cualesquiera dos puntos sobre p. Las polares de R, S, con respecto a la cónicas del haz, son dos haces con vértices R^*, S^*. Por teorema 3.36,

$$(r_a, r_b, r_c \dots) \wedge (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots)$$

y

$$(s_a, s_b, s_c \dots) \wedge (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots)$$

Por lo tanto los dos haces con vértices R^*, S^* son proyectivamente relacionados, y así los puntos de intersección de las recta correspondientes de las dos haces están sobre la cónica, $\mathcal{E}$ (los polos deseados).

La cónica $\mathcal{E}$ será degenerada si y solamente si (a) R^*y S^*son distintos y la recta R^*S^* se corresponde a si misma en el proyectividad o (b) R^* y S^*coinciden. En el primero de estos casos, hay alguna cónica del haz $\mathcal{D}$, tal que $r_d = s_d$ éste ocurrirá si y solamente si la recta p pasa a través de un punto singular de $\mathcal{D}$. En el caso de (b), p sea la polar de R^* con respecto a cada uno de las cónicas del haz; por lo tanto, por el teorema 3.36, R^* es un punto singular de una de las cónicas del haz.

Hay una manera alternativa de describir la cónica $\mathcal{E}$ del teorema 3.38.
La prueba de ese teorema reveló que $\mathcal{E}$, el cual fue encontrado como el lugar geométrico de los polos de p con respecto a las cónicas del haz, pasando a través del punto conjugado de cualquier punto sobre p.

CONCLUSIONES

- En conclusión se puede decir que las cuádricas con geometría proyectiva, es mucho mas fácil de estudiar cuando se utiliza el método de coordenadas homogéneas, agregando al nuevo sistema un nuevo concepto como lo es el punto ideal, en el cual en la Geometría Euclidiana no es posible. Y así trabajar de manera peculiar en la geometría proyectiva, sin tener restricción, cuando las rectas son paralelas.

- Así si se tienen dos rectas no importa si son paralelas siempre se interceptarán en un punto, cabe mencionar que la Geometría proyectiva relaciona teoremas, corolarios y lemas de mucha importancia en la Geometría Euclidiana, que sus pruebas y resultados son mas fáciles de demostrar mediante el nuevo sistema y con el concepto de razón cruzada, proyectividad, de rectas y haces.

- También que el estudio de cuádricas o cónicas es muy utilizado en ciertas áreas de la arquitectura, y en las de pintura y por supuesto que en la nueva tecnología de lentes de cámaras fotográficas entre otras.

- Con este estudio se ha podido observar que es de mucha importancia conocer las diferentes representaciones de las cuádricas y conocer un poco más de la geometría que es muy extensa y variada.

RECOMENDACIONES

- Se recomienda a la escuela de matemática llevar a cabo un estudio con mayor profundidad a la Geometría proyectiva, pues es una materia muy interesante ya que se sabe que una de las maneras de aprender en mediante la visualización de las cosas y la Geometría Proyectiva facilita este aprendizaje.

- Así como también profundizar un poco mas sobre Algebra moderna ya que facilitaría mucho mas la comprensión de está.

- Además que se dé a conocer mucho más este tema para que los estudiantes de matemática se interesen por la geometría e intenten continuar con un tema relacionado de la geometría proyectiva.

BIBLIOGRAFIA.

- Rosenbaum, R. (1963). *Introduction to projective Geometry and modern Algebra.* Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

- Santaló, L. (1966). *Geometría proyectiva.* Buenos aires: EUDEBA(Editorial universitaria de Buenos Aires)

- Faulkner, T. (1952). *Projective Geometry*. New York: Interscience Publishers Inc.

- Villamayor, O. (1997). *Geometría Elemental a nivel universitario.* Buenos Aires: Red Olímpica Santa Fe 3312 9º, Buenos Aires, Argentina.

- Pastor, J. *Geometría Analítica.* Buenos Aires: Editorial Kapelusz, Buenos Aires, Argentina.
- Sidler, J. (1993). *Géométrie projective.* Paris : Inter Editions, paris, Francia.

- Artículos buscados en el internet acerca de Geometría proyectiva, Google.

➢ *webpages.ull.es/users/amontes/**apuntes**/gdhmono.pdf*
➢ *www-en.us.es/da/**apuntes**/ampgeo/agt6n.pdf*
➢ ***apuntes**-de**matematicas**.blogspot.com/*
➢ *apuntes-dematematicas.blogspot.com/.../19-**polos-y-polares**.html*
➢ *www.ugr.es/~milan/**Conicas**.pdf*
➢ *www.nebrija.es/~pvelez/GeomPro/**conicas**.html*
➢ *www.nebrija.es/~pvelez/GeomPro/polaridad.html*
➢ *personal.us.es/jcordero/**CONICA**/pagina01.htm*
➢ *ommyucatan.netne.net/material/concurrencia%20y%20colinealidad.pdf*
➢ *www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/**sol182ped.htm***