

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA**



Universidad de El Salvador

Hacia la libertad por la cultura

**“TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS: CLASIFICACIÓN Y
APLICACIONES”**

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR:

***ROSA ESTELA GUZMÁN MELARA
CARNÉ: GM-04122***

ASESORES:

***LIC. ERNESTO AMERICO HIDALGO.
LIC. AARÓN ERNESTO RAMIRÉZ FLORES.***

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICA

DICIEMBRE DE 2009.

SAN SALVADOR

EL SALVADOR

CENTRO AMERICA

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS

MSc. RUFINO ANTONIO QUEZADA SÁNCHEZ.

RECTOR

LIC. DOUGLAS VLADIMIR ALFARO CHACÓN.

SECRETARIO GENERAL

DR. RENÉ MADECADEL PERLA JIMÉNES.

FISCAL GENERAL

DR. RAFAEL ANTONIO GÓMEZ ESCOTO.

DECANO

LIC. MARÍA TRINIDAD TRIGUEROS DE CASTRO.

SECRETARIA

ING. CARLOS MAURICIO CANJURA LINARES.

DIRECTOR

LIC. ERNESTO AMERICO HIDALGO.

SECRETARIO

CIUDAD UNIVERSITARIA, DICIEMBRE DE 2009.

INDICE GENERAL

Introducción.....	3
Unidad I: Estructura de las transformaciones de Möbius.	
Similitudes.....	5
1.1 Traslación.....	7
1.2 Rotación.....	13
1.3 Homotecia.....	15
1.4 Inversión Geométrica.....	23
1.5 Inversión Compleja.....	28
1.6 Proyección Estereográfica.....	31
Unidad II: Propiedades de las transformaciones de Möbius.	
Transformaciones de Möbius con $\Delta = ad - bc \neq 0$	44
2.1 Puntos fijos.....	49
2.2 Razón cruzada.....	50
2.3 Simetría.....	63
2.4 Orientación.....	66
2.5 Transformaciones de Möbius con Matrices.....	70
Unidad III: Clasificación de las transformaciones de Möbius.	
Clasificación según sus puntos fijos.....	78
3.1 Visualización Geométrica.....	84
3.2 Transformaciones Elípticas.....	87

3.3 Transformaciones hiperbólicas.....	90
3.4 Transformaciones loxodrómicas.....	92
3.5 Transformaciones parabólicas.....	93
Clasificación por traza.....	95
Unidad IV: Algunas aplicaciones de las transformaciones de Möbius	
4.1 El Modelo del Semiplano.....	102
4.2 El Modelo del Disco de Poincaré	121
Bibliografía.....	130

INTRODUCCION

En el presente Trabajo se comenzará por estudiar la teoría básica de las Transformaciones de Möbius, es decir similitudes (traslación, rotación y dilatación). Por la definición de las transformaciones de Möbius, se puede decir que las similitudes, que son las transformaciones de la forma $S(z) = az + b$, son casos particulares de las transformaciones de Möbius. Es por ello que se estudiará detenidamente desde un enfoque analítico y geométrico cada una de ellas, así como también la inversión compleja, la inversión geométrica y la proyección estereográfica.

Se estudiarán las principales propiedades de las transformaciones de Möbius, entre estas que las transformaciones de Möbius son transformaciones conformes y que dejan invariante la razón cruzada, así como también una propiedad que es muy importante para su clasificación; toda transformación de Möbius no degenerada tiene a lo sumo dos puntos fijos, a menos que sea la identidad.

Se clasificarán las Transformaciones de Möbius según sus puntos fijos, ilustrando el comportamiento analítico y geométrico de cada clase resultante: parabólicas, hiperbólicas, loxodrómicas y elípticas. Así mismo, se estudiará otra clasificación de transformaciones Möbius de acuerdo a la traza de la matriz que determina cada transformación de Möbius.

Y finalmente se estudiara dos de las aplicaciones más conocidas de transformaciones de Möbius; el Modelo del Semiplano y el Modelo del Disco de Poincaré, en ambos se describen las transformaciones que sirven como isometrías; en el Modelo del Semiplano son el grupo de Transformaciones de

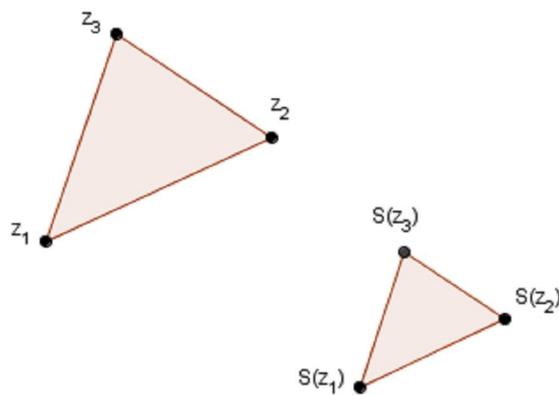
Möbius definidas por matrices cuadradas de orden 2 con entradas reales y en el Modelo del Disco de Poincaré son el grupo de transformaciones de Möbius definidas con matrices cuadradas de orden 2 pero con entradas complejas.

UNIDAD I: ESTRUCTURA DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS.

En la unidad I se comenzará por estudiar la teoría básica de las Transformaciones de Möbius, es decir similitudes (traslación, rotación y homotecias). Por la definición de las transformaciones de Möbius, se puede decir que las similitudes, que son las transformaciones de la forma $S(z) = az + b$, son casos particulares de las transformaciones de Möbius. Es por ello que se estudiará detenidamente desde un enfoque analítico y geométrico cada una de ellas, así como también la inversión compleja, la inversión geométrica y la proyección estereográfica.

Similitudes

Una similitud es una transformación del plano que deja invariante las razones de la distancia.



$$\frac{|z_2 - z_1|}{|S(z_2) - S(z_1)|} = \frac{|z_3 - z_1|}{|S(z_3) - S(z_1)|} = \frac{|z_3 - z_2|}{|S(z_3) - S(z_2)|} = r$$

Si las razones de las distancias tienen un factor r , entonces la similitud se denotara por S^r .

Los movimientos son similitudes de razón unitaria (S)

Movimientos o isometrías

Un movimiento es una transformación del plano que conserva la distancia entre puntos, es decir, que la distancia entre dos puntos se conserva entre la distancia de sus imágenes. En otras palabras, son movimientos rígidos en el plano.

Estos movimientos los clasificaremos en:

Movimientos directos: son movimientos que preservan tanto la magnitud como la orientación de los ángulos, ejemplo de ello son traslaciones, rotaciones o combinaciones de estas.

Teorema 1.1:

Todo movimiento directo puede expresarse como una función compleja de la forma

$$S(z) = e^{i\alpha} z + v$$

Demostración

Sean z un número complejo arbitrario y z_1 y z_2 dos complejos fijos tal que

$$\frac{|z - z_1|}{|S(z) - S(z_1)|} = \frac{|z_2 - z_1|}{|S(z_2) - S(z_1)|}; \quad \theta = \arg\left(\frac{z - z_1}{S(z) - S(z_1)}\right) = \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{S(z_2) - S(z_1)}\right)$$

Cuando tenemos dos números complejos en el cuales sus módulos y sus argumentos coinciden entonces no que da mas que esos números complejos sean iguales, es decir

$$\frac{z - z_1}{S(z) - S(z_1)} = \frac{z_2 - z_1}{S(z_2) - S(z_1)}$$

Despejando obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{S(z) - S(z_1)}{z - z_1} &= \frac{S(z_2) - S(z_1)}{z_2 - z_1} \\ S(z) &= \frac{S(z_2) - S(z_1)}{z_2 - z_1} (z - z_1) + S(z_1) \end{aligned}$$

Sea $w = S(z_2) - S(z_1)$ y $w' = z_2 - z_1$

$$S(z) = \frac{w}{w'}(z - z_1) + S(z_1)$$

$$S(z) = \frac{|w|e^{i\theta}}{|w'|e^{i\theta'}}(z - z_1) + S(z_1); \quad |w| = |w'|$$

$$S(z) = e^{i(\theta - \theta')}(z - z_1) + S(z_1)$$

$$S(z) = e^{i\alpha}z - e^{i\alpha}z_1 + S(z_1)$$

Haciendo $v = S(z_1) - e^{i\alpha}z_1$ obtenemos que

$$S(z) = e^{i\alpha}z + v$$

Movimientos indirectos:

Los movimientos indirectos se definen como la composición de un movimiento directo y un movimiento que invierte la orientación de los ángulos (reflexión), en otras palabras son movimientos que preservan la magnitud pero no la orientación de los ángulos.

El ejemplo de movimiento indirecto más usual en números complejos es la función

$$J(z) = \bar{z}$$

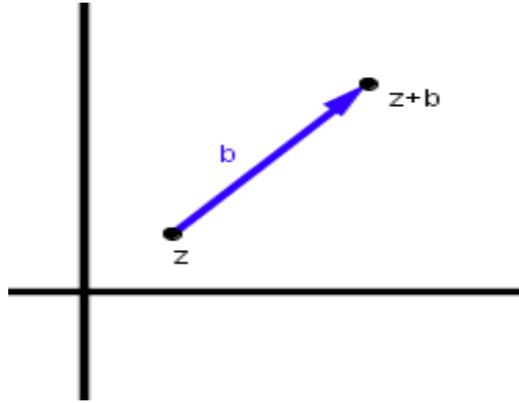
Por lo que un movimiento indirecto \tilde{M} queda definido de la forma

$$\tilde{M}(z) = M(J(z)) = M(\bar{z}) = e^{i\theta}\bar{z} + v$$

1.1 Traslación

Definiremos algebraicamente las traslaciones como $t_b(z) = b + z$, donde b es un número complejo fijo. Es claro que cada punto z es movido una distancia fija y

una dirección fija, dado por el número complejo b considerado como un vector. Si $b = 0$ el mapeo es la identidad.



El inverso de t_b se escribirá como t_b^{-1} , es la transformación inversa, formalmente t_b^{-1} esta definida por $t_b^{-1} \circ t_b = \varepsilon = t_b \circ t_b^{-1}$, donde ε es la transformación llamada identidad que mapea cada punto en si mismo: $\varepsilon(z) = z$

Ya que $t_b(z) = b + z$, y $t_{-b}(z) = z - b$

Es claro que $t_b^{-1} = t_{-b}$.

A continuación demostraremos algunos resultados que serán de importancia para el desarrollo de las transformaciones de Möbius, para ello definimos la ecuación de una recta y una circunferencia en el plano complejo.

Ecuación de una recta en el plano complejo

La ecuación general en el plano cartesiano es $ax + by + c = 0$

Donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a^2 + b^2 \neq 0$. Si $z = x + iy$, entonces $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ y $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

Así,

$$a\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + b\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + c = 0$$

$$a\frac{z}{2} + a\frac{\bar{z}}{2} - ib\frac{z}{2} + ib\frac{\bar{z}}{2} + c = 0.$$

Equivalente a

$$\bar{z}\left(\frac{a+ib}{2}\right) + z\left(\frac{a-ib}{2}\right) + c = 0$$

Sea $\alpha = \frac{a-ib}{2} \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $\beta = c \in \mathbb{R}$, entonces la ecuación de la recta es $\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta = 0$. (1)

Se considerara una recta R del plano de ecuación $ax + by + c = 0$. Sea $z = x + iy$, el complejo que representa al punto $M(x, y)$ del plano y $w = a + bi$ el complejo asociado al vector $\bar{v} = (a, b)$, que representa un vector normal a la recta R.

Se mostrara que al usar los complejos, se puede verificar que los puntos de la recta satisfacen la relación

$$\bar{w}z + w\bar{z} + 2c = 0. \quad (2)$$

Prueba de la ecuación cartesiana de la recta, se tiene que $y = \frac{-ax - c}{b}$, al sustituir en $z = x + iy$,

$z = x - i\left(\frac{ax + c}{b}\right)$, y si $w = a + bi$, entonces $\bar{w} = a - bi$ sustituyendo en (1)

$$\begin{aligned} & (a-ib)\left(x - i\left(\frac{ax+c}{b}\right)\right) + (a+ib)\left(x + i\left(\frac{ax+c}{b}\right)\right) + 2c \\ &= ax - ia\left(\frac{ax+c}{b}\right) - ibx - b\left(\frac{ax+c}{b}\right) + ax + ia\left(\frac{ax+c}{b}\right) + ibx - b\left(\frac{ax+c}{b}\right) + 2c \\ &= 2ax - 2b\left(\frac{ax+c}{b}\right) + 2c \\ &= 2ax - 2ax - 2c + 2c \\ &= 0 \end{aligned}$$

c es nulo \Leftrightarrow la recta R pasa por el origen.

Si $c = 0$ la ecuación de la recta es $\bar{w}z + w\bar{z} = 0$, en efecto $z = 0$ la satisface, por lo que pasa por el origen.

Si pasa por el origen $z = 0$, por lo que la ecuación queda $2c = 0$ y esto implica que $c = 0$.

Si en (1) se considera a $\bar{\alpha} = w$ y $\beta = 2c$, se obtiene (2), por lo que ambas expresiones representan a una recta.

Ecuación de una circunferencia en el plano complejo.

La ecuación canónica de una circunferencia es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Haciendo, $D = -2h$, $E = -2k$, $F = h^2 + k^2 - r^2$, se tiene que la ecuación general de una circunferencia en el plano cartesiano es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ donde $D, E, F \in \mathbb{R}$

En base que $D = -2h$, $E = -2k$, F se puede expresar como $F = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - r^2$ por

lo que se puede decir que $F < \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$.

Teniendo en cuenta que $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ y $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ y $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$ se obtiene

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$|z|^2 + D\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + E\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + F = 0$$
$$z\bar{z} + \frac{D}{2}z + \frac{D}{2}\bar{z} - \frac{Ei}{2}z + \frac{Ei}{2}\bar{z} + F = 0$$

$$z\bar{z} + \left(\frac{D-Ei}{2}\right)z + \left(\frac{D+Ei}{2}\right)\bar{z} + F = 0$$

Tomando $\alpha = \frac{D-Ei}{2} \in \mathbb{C}$ y $\beta = F \in \mathbb{R}$ se tiene la ecuación

$$z\bar{z} + \alpha z + \alpha\bar{z} + \beta = 0 \quad (1)$$

El radio de la circunferencia se deduce de $F = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - r^2$ por lo que

$$r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}, \text{ y en términos de } \alpha \text{ y } \beta \text{ es } r = \sqrt{\alpha\bar{\alpha} - \beta}.$$

Ahora que se sabe que la ecuación (1) representa una circunferencia, se puede sumar y restar $\alpha\bar{\alpha}$ que es una cantidad real, así

$$\begin{aligned} z\bar{z} + \alpha z + \alpha\bar{z} + \beta &= 0 \\ z\bar{z} + \alpha z + \alpha\bar{z} + \beta + \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\alpha} &= 0 \\ z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} &= \alpha\bar{\alpha} - \beta \\ (z + \bar{\alpha})(\bar{z} + \alpha) &= r^2 \end{aligned}$$

Si se considera a $w = -\frac{D}{2} - i\frac{E}{2}$, la ecuación de la circunferencia se transforma en $(z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = |z - w|^2 = r^2$,

Se representa a una circunferencia con centro w y radio r .

Si en la ecuación (1) se considera a $\alpha = \bar{w}$ y $\beta = c$ entonces la expresión de la circunferencia se transforma en

$$z\bar{z} + \bar{w}z + w\bar{z} + c = 0 \quad (2)$$

La constante c es nula si y solo si la circunferencia pasa por el origen.

Si c es nula, la expresión que denota a una circunferencia es $z\bar{z} + \bar{w}z + w\bar{z} = 0$, pero $z = 0$ satisface la ecuación, por lo que pasa por el origen.

Por el otro lado se tiene que si la circunferencia pasa por el origen $z=0$ y al sustituir en la ecuación (2), se tiene como resultado que $c=0$.

- Una recta se transforma mediante una traslación, en una recta.

La ecuación de una recta en forma compleja es $z\bar{w} + \bar{z}w + 2c = 0$

$$t_b(z) = b + z; \quad z^* = t_b(z) \Rightarrow z^* = b + z$$

Por lo que $z^* - b = z$

Sustituyendo en la ecuación de la recta

$$\begin{aligned} (z^* - b)\bar{w} + \overline{(z^* - b)}w + 2c &= 0 \\ z^*\bar{w} - b\bar{w} + \bar{z}^*w - \bar{b}w + 2c &= 0 \\ z^*\bar{w} + \bar{z}^*w - (2\operatorname{Re}(bw) - 2c) &= 0 \\ z^*\bar{w} + \bar{z}^*w - 2(\operatorname{Re}(bw) - c) &= 0 \end{aligned}$$

Sea $c^* = (\operatorname{Re}(bw) - c)$

Por lo que queda

$$z^*\bar{w} + \bar{z}^*w + 2c^* = 0$$

Y esta es la ecuación de una recta.

- Una circunferencia se transforma mediante una traslación en una circunferencia.

Sabemos que la ecuación de una circunferencia en forma compleja es

$$z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w} = r^2$$

Ahora sustituyendo en la ecuación de la circunferencia tenemos que

$$\begin{aligned}
(z^* - b)(\bar{z}^* - \bar{b}) - (z^* - b)\bar{w} - (\bar{z}^* - \bar{b})w + w\bar{w} &= r^2 \\
z^*\bar{z}^* - z^*\bar{b} - b\bar{z}^* - b\bar{b} - z^*\bar{w} - b\bar{w} - \bar{z}^*w - \bar{b}w + w\bar{w} &= r^2 \\
z^*\bar{z}^* - z^*\bar{w} - \bar{z}^*w - (z^*\bar{b} + b\bar{z}^*) - (b\bar{w} + \bar{b}w) + w\bar{w} &= r^2 + b\bar{b} \\
z^*\bar{z}^* - z^*\bar{w} - \bar{z}^*w - (2\operatorname{Re}(z^*\bar{b})) - (2\operatorname{Re}(b\bar{w})) + w\bar{w} &= r^2 + |b|^2 \\
z^*\bar{z}^* - z^*\bar{w} - \bar{z}^*w + w\bar{w} &= r^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(z^*\bar{b} + b\bar{w})
\end{aligned}$$

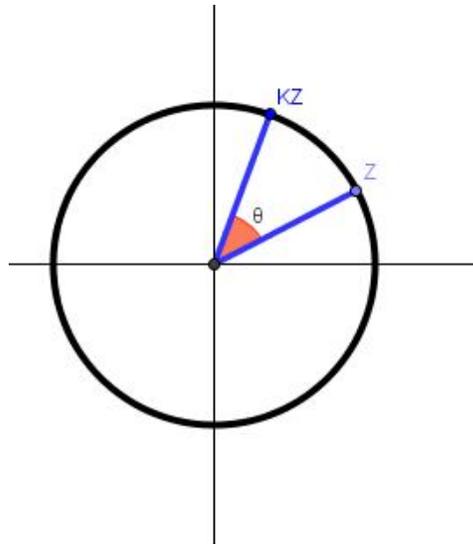
Haciendo $r_1^2 = r^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(z^*\bar{b} + b\bar{w})$

$$z^*\bar{z}^* - z^*\bar{w} - \bar{z}^*w + w\bar{w} = r_1^2$$

Esta es la ecuación de una circunferencia.

1.2 Rotación

Analíticamente definiremos que las rotaciones $R_0^\theta(z) = e^{i\theta}z$, es la representación de una rotación de ángulo θ y de centro el origen.



Donde $k = e^{i\theta}$

Y $R_a^\theta(z)$ denota una rotación de ángulo θ y de centro a .

Teorema 1.2:

Toda rotación $R_a^\theta(z)$ se puede representar por la traslación inversa de a a 0 rotando θ alrededor de 0, y la traslación de 0 a a .

Demostración

$$\begin{aligned}R_a^\theta(z) &= (t_a \circ R_0^\theta \circ t_a^{-1})(z) \\&= t_a(R_0^\theta \circ t_a^{-1}(z)) \\&= t_a(R_0^\theta(z-a)) \\&= t_a(e^{i\theta}(z-a)) \\&= e^{i\theta}(z-a) + a \\&= e^{i\theta}z + (a - ae^{i\theta}), \quad a - ae^{i\theta} = v \\&= e^{i\theta}z + v\end{aligned}$$

Sea ha encontrado que la rotación alrededor de cualquier punto puede ser expresada como una rotación alrededor del origen, seguida de una traslación: $R_a^\theta = (t_v \circ R_0^\theta)$. Recíprocamente, una rotación de ángulo α y centro el origen, seguida de una traslación de w siempre puede reducirse a una sola transformación en este caso a una rotación:

$$\begin{aligned}(t_w \circ R_0^\alpha) &= t_w(R_0^\alpha(z)) \\&= t_w(e^{i\alpha}z) \\&= e^{i\alpha}z + w, \quad w = c - ce^{i\alpha} \Rightarrow c = \frac{w}{1 - e^{i\alpha}} \\&= R_c^\alpha\end{aligned}$$

- Una recta se transforma mediante rotación (centrada en el origen del plano complejo) en otra recta.

$$\begin{aligned}R_0^\theta(z) &= e^{i\theta}z \\z' = e^{i\theta}z &\Rightarrow z = e^{-i\theta}z'\end{aligned}$$

Sustituyendo z en la ecuación de la recta tenemos

$$\begin{aligned} (e^{-i\theta} z') \bar{w} + \overline{(e^{-i\theta} z')} w + 2c &= 0 \\ \overline{(e^{i\theta} z')} w + (e^{i\theta} z') \bar{w} + 2c &= 0 \end{aligned}$$

Sea $z^* = (e^{-i\theta} z')$ por lo que obtenemos $z^* \bar{w} + \bar{z}^* w + 2c = 0$ que es la ecuación de otra recta.

- Una circunferencia se transforma mediante rotación (centrada en el origen del plano complejo) en otra circunferencia.

En efecto sustituyendo z en la ecuación de la circunferencia tenemos

$$(e^{-i\theta} z') \overline{(e^{-i\theta} z')} - (e^{-i\theta} z') \bar{w} - \overline{(e^{-i\theta} z')} w + w \bar{w} = r^2$$

Sea $z^* = (e^{-i\theta} z')$ sustituyendo obtenemos $z^* \bar{z}^* - z^* \bar{w} - \bar{z}^* w + w \bar{w} = r^2$ la ecuación de otra circunferencia.

1.3 Homotecias

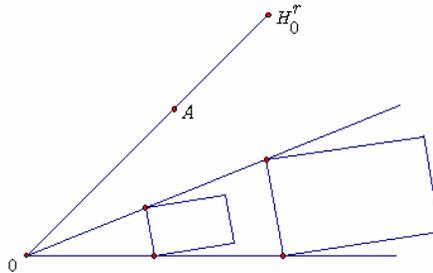
Una homotecia de de razón r y centro Q , H_Q^r es una transformación en el mismo plano

P , talque a imagen de un punto p es p' , donde p' se determina vectorialmente por:

$$\overline{Qp'} = r \overline{Qp} = r(p - Q),$$

En términos de números complejos $H_Q^r(z) = r(z - Q)$

La siguiente figura, muestra que el centro es un punto (el origen) fijo y aumente el punto A del segmento \overline{OA} por un factor r , sucede igual con cada punto del cuadrado.



La inversa de una homotecia central es otra homotecia central

Para esto tenemos que

$$H_0^r(z) = r(z-0) = rz \Rightarrow (H_0^r)^{-1} = \frac{1}{r}z$$

$$(H_0^r)^{-1} = H_0^{\frac{1}{r}}$$

- Una recta se transforma mediante una homotecia en una recta.

Hemos definido algebraicamente una homotecia de la siguiente forma:

$$H_Q^r(z) = r(z-Q)$$

$$z' = r(z-Q) \Rightarrow z = \frac{1}{r}z' + Q$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta obtenemos

$$\left(\frac{1}{r}z' + Q\right)\bar{w} + \overline{\left(\frac{1}{r}z' + Q\right)}w + 2c = 0$$

$$\frac{1}{r}z'\bar{w} + Q\bar{w} + \frac{1}{r}\bar{z}'w + \bar{Q}w + 2c = 0$$

$$\frac{1}{r}z'\bar{w} + \frac{1}{r}\bar{z}'w + 2\operatorname{Re}(\bar{Q}w) + 2c = 0$$

$$z'\bar{w} + \bar{z}'w + 2\left(r\left(\operatorname{Re}(\bar{Q}w) + c\right)\right) = 0$$

Sea $c' = \left(r\left(\operatorname{Re}(\bar{Q}w) + c\right)\right)$ sustituyendo tenemos $z'\bar{w} + \bar{z}'w + 2c = 0$ que es la ecuación de otra recta.

- Una circunferencia se transforma mediante una homotecia en otra circunferencia.

Sustituyendo en la ecuación de una circunferencia tenemos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{r}z' + Q\right)\overline{\left(\frac{1}{r}z' + Q\right)} - \left(\frac{1}{r}z' + Q\right)\bar{w} - \overline{\left(\frac{1}{r}z' + Q\right)}w + w\bar{w} = r^2 \\ & \frac{1}{r^2}z'\bar{z}' + \frac{1}{r}z'\bar{Q} + Q\frac{1}{r}\bar{z}' + Q\bar{Q} - \frac{1}{r}z'\bar{w} - Q\bar{w} - \frac{1}{r}\bar{z}'w - \bar{Q}w + w\bar{w} = r^2 \\ & \frac{1}{r^2}z'\bar{z}' + \frac{1}{r}(z'\bar{Q} + Q\bar{z}') - \frac{1}{r}(z'\bar{w} - \bar{z}'w) - (\bar{Q}w + Q\bar{w}) + w\bar{w} = r^2 - |Q|^2 \end{aligned}$$

Sea $z^* = \left(\frac{1}{r}z' + Q\right)$ sustituyendo tenemos $z^*\bar{z}^* - z^*\bar{w} - \bar{z}^*w + w\bar{w} = r^2$ que es la ecuación de otra circunferencia.

Hasta el momento hemos demostrado que tanto la traslación, la rotación y la homotecia convierten rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.

Teorema 1.3:

La composición de un movimiento (directo o indirecto) y una homotecia central $S = H \circ M$ da como resultado una similitud.

Demostración

En primer lugar se verifica que $H \circ M$ cumple con la definición de similitud.

Sin pérdida de generalidad, se considera a la homotecia central como $H_Q^r = rz$, y

al movimiento directo de la forma $M(z) = e^{i\theta}z + v$.

$$\begin{aligned} S(z) &= (H \circ M)(z) \\ &= H(M(z)) \\ &= r(e^{i\theta}z + v) \\ &= (re^{i\theta})z + rv \end{aligned}$$

Se considera a tres puntos no alineados y a sus imágenes,

$$S(z_1) = (re^{i\theta})z_1 + rv$$

$$S(z_2) = (re^{i\theta})z_2 + rv$$

$$S(z_3) = (re^{i\theta})z_3 + rv$$

$$\begin{aligned} \frac{|S(z_2) - S(z_1)|}{|z_2 - z_1|} &= \frac{|(re^{i\theta})z_2 - (re^{i\theta})z_1|}{|z_2 - z_1|} \\ &= \frac{|(re^{i\theta})(z_2 - z_1)|}{|z_2 - z_1|} \\ &= \frac{|r||e^{i\theta}||z_2 - z_1|}{|z_2 - z_1|} \\ &= |r| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|S(z_3) - S(z_1)|}{|z_3 - z_1|} &= \frac{|(re^{i\theta})z_3 - (re^{i\theta})z_1|}{|z_3 - z_1|} \\ &= \frac{|(re^{i\theta})(z_3 - z_1)|}{|z_3 - z_1|} \\ &= \frac{|r||e^{i\theta}||z_3 - z_1|}{|z_3 - z_1|} \\ &= |r| \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} \frac{|S(z_3) - S(z_2)|}{|z_3 - z_2|} &= \frac{|(re^{i\theta})z_3 - (re^{i\theta})z_2|}{|z_3 - z_2|} \\ &= \frac{|(re^{i\theta})(z_3 - z_2)|}{|z_3 - z_2|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|r| |e^{i\theta}| |z_3 - z_2|}{|z_3 - z_2|} \\
&= |r|
\end{aligned}$$

por lo que cumple con la definición de similitud, en vista de que el movimiento es directo, a esta similitud se le denomina **similitud directa** (mantiene la orientación de los ángulos tras la similitud).

Si mantiene la orientación de los ángulos, se debe probar que

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}\right) &= \arg\left(\frac{S(z_2) - S(z_1)}{S(z_3) - S(z_2)}\right) \\
\arg\left(\frac{S(z_2) - S(z_1)}{S(z_3) - S(z_2)}\right) &= \arg(S(z_2) - S(z_1)) - \arg(S(z_3) - S(z_2)) \\
&= \arg(re^{i\theta} z_2 - re^{i\theta} z_1) - \arg(re^{i\theta} z_3 - re^{i\theta} z_1) \\
&= \arg(re^{i\theta} (z_2 - z_1)) - \arg(re^{i\theta} (z_3 - z_1)) \\
&= [\arg(re^{i\theta}) + \arg(z_2 - z_1)] - [\arg(re^{i\theta}) + \arg(z_3 - z_1)] \\
&= \arg(z_2 - z_1) - \arg(z_3 - z_1) \\
&= \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)
\end{aligned}$$

Al movimiento directo compuesto con una homotecia, también se le denomina rotación dilatativa $D_p^{r,\theta}$ de centro p , razón r y ángulo θ .

Si se considera que 0 es el origen de \mathbb{C} , geoméricamente la multiplicación de un complejo $A = re^{i\theta}$ es una rotación del plano a través de un ángulo θ y una dilatación del plano de razón r , por este resultado, se dice que $D_o^{r,\theta}$ corresponde a multiplicar por $re^{i\theta}$:

$$D_o^{r,\theta}(z) = (re^{i\theta})z = Az$$

Ahora se hará la composición de una homotecia central y un movimiento indirecto

$$\begin{aligned}
 \tilde{M}(z) &= re^{i\theta}\bar{z} + v \\
 S(z) &= (H \circ \tilde{M})(z) \\
 &= H(\tilde{M}(z)) \\
 &= r(e^{i\theta}\bar{z} + v) \\
 &= (re^{i\theta})\bar{z} + rv
 \end{aligned}$$

Se consideran a tres puntos no alineados y a sus imágenes

$$\begin{aligned}
 S(z_1) &= (re^{i\theta})\bar{z}_1 + rv \\
 S(z_2) &= (re^{i\theta})\bar{z}_2 + rv \\
 S(z_3) &= (re^{i\theta})\bar{z}_3 + rv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{|S(z_2) - S(z_1)|}{|z_2 - z_1|} &= \frac{|(re^{i\theta})\bar{z}_2 - (re^{i\theta})\bar{z}_1|}{|z_2 - z_1|} \\
 &= \frac{|(re^{i\theta})(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)|}{|z_2 - z_1|} \\
 &= \frac{|r||e^{i\theta}||\bar{z}_2 - \bar{z}_1|}{|z_2 - z_1|} \\
 &= \frac{|r||z_2 - z_1|}{|z_2 - z_1|} \\
 &= |r|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{|S(z_3) - S(z_1)|}{|z_3 - z_1|} &= \frac{|(re^{i\theta})\bar{z}_3 - (re^{i\theta})\bar{z}_1|}{|z_3 - z_1|} \\
 &= \frac{|(re^{i\theta})(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)|}{|z_3 - z_1|}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|r| |e^{i\theta}| |\overline{z_3 - z_1}|}{|z_3 - z_1|} \\
&= \frac{|r| |z_3 - z_1|}{|z_3 - z_1|} \\
&= |r|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|S(z_3) - S(z_2)|}{|z_2 - z_1|} &= \frac{|(re^{i\theta})\overline{z_3} - (re^{i\theta})\overline{z_2}|}{|z_3 - z_2|} \\
&= \frac{|(re^{i\theta})(\overline{z_3} - \overline{z_2})|}{|z_3 - z_2|} \\
&= \frac{|r| |e^{i\theta}| |\overline{z_3} - \overline{z_2}|}{|z_3 - z_2|} \\
&= \frac{|r| |z_3 - z_2|}{|z_3 - z_2|} \\
&= |r|
\end{aligned}$$

Por lo que cumple la definición de similitud, como el movimiento es indirecto, a esta similitud se le denomina **similitud indirecta**.

Para ver que cambia la orientación de los ángulos se debe probar que

$$\arg\left(\frac{\overline{z_2} - \overline{z_1}}{\overline{z_3} - \overline{z_2}}\right) = \arg\left(\frac{S(z_2) - S(z_1)}{S(z_3) - S(z_2)}\right)$$

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{S(z_2) - S(z_1)}{S(z_3) - S(z_2)}\right) &= \arg(S(z_2) - S(z_1)) - \arg(S(z_3) - S(z_2)) \\
&= \arg(re^{i\theta}\overline{z_2} - re^{i\theta}\overline{z_1}) - \arg(re^{i\theta}\overline{z_3} - re^{i\theta}\overline{z_2}) \\
&= \arg(re^{i\theta}(\overline{z_2} - \overline{z_1})) - \arg(re^{i\theta}(\overline{z_3} - \overline{z_2})) \\
&= [\arg(re^{i\theta}) + \arg(\overline{z_2} - \overline{z_1})] - [\arg(re^{i\theta}) + \arg(\overline{z_3} - \overline{z_2})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \arg(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \arg(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) \\
&= \arg\left(\frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}\right).
\end{aligned}$$

Por lo que toda similitud se puede expresar como la composición de un movimiento (directo o indirecto) y una homotecia.

Teorema 1.4:

Toda similitud directa puede ser expresada como una función compleja del tipo

$$S(z) = Az + B \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Demostración

$$\frac{|z - z_1|}{|S(z) - S(z_1)|} = \frac{|z_2 - z_1|}{|S(z_2) - S(z_1)|}; \quad \theta = \arg\left(\frac{z - z_1}{S(z) - S(z_1)}\right) = \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{S(z_2) - S(z_1)}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{S(z) - S(z_1)}{z - z_1} &= \frac{S(z_2) - S(z_1)}{z_2 - z_1} \\
S(z) &= \frac{S(z_2) - S(z_1)}{z_2 - z_1}(z - z_1) + S(z_1)
\end{aligned}$$

Haciendo $A = \frac{S(z_2) - S(z_1)}{z_2 - z_1}$ tenemos que

$$S(z) = Az - Az_1 + S(z_1)$$

Sea $B = S(z_1) - Az_1$

$$S(z) = Az + B \quad A, B \in \mathbb{C}$$

Ya que las similitudes directas tienen la forma $S(z) = Az + B$ con A y $B \in \mathbb{C}$

Si $A = 1$, entonces S es una traslación $S(z) = z + B$.

Si $A \neq 1$, $|A| = 1$, $A = e^{i\theta}$, entonces $S(z) = e^{i\theta}z + B$ es una rotación acompañada de una traslación.

Si $A \neq 1$, entonces $S(z) = |A|e^{i\theta}z + B$ es una rotación con dilatación acompañada de una traslación.

Si $A = 1$ y $B = 0$ entonces $S(z) = z$, todos los puntos son fijos.

Si w es un punto fijo de una similitud S , entonces

$$S(w) = w \Leftrightarrow w = Aw + B$$

$$w(1 - A) = B$$

$$w = \frac{B}{1 - A}, A \neq 1,$$

Donde w es un número complejo que representa al centro de la similitud.

Se tiene que $S(z) = Az + B$ y $S(w) = Aw + B$, al efectuar la operación

$$S(z) - S(w) = A(z - w),$$

$$S(z) - w = A(z - w),$$

Es una homotecia y rotación de centro w .

Para un estudio algebraico de algunas propiedades importantes en las traslaciones rotaciones y homotecias, es necesario de antemano definir la ecuación de una recta y una circunferencia en el plano complejo.

1.4 inversión geométrica

Diremos que dos puntos son inversos respecto de un círculo dado si

- Los puntos están en un mismo radio.
- El producto de sus distancias al centro es igual al cuadrado del radio del círculo.

Por ejemplo z_1 y z_2 son puntos inversos con respecto al círculo $|z - a| = R$ si, y solo si,

$$(z_1 - a)\overline{(z_2 - a)} = R^2$$

En efecto $(z_1 - a)(\overline{z_1 - a}) = R^2$ esto implica que $z_1 - a$ y $z_2 - a$ están en la misma recta o que z_1 y z_2 están en el mismo radio del círculo, y también que el producto de sus longitudes es R^2 .

Algebraicamente definimos la inversión geométrica como la función

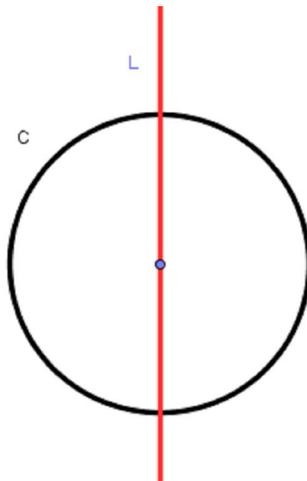
$$I_c(z) = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Ahora bien, es fácil verificar que según esta función, la imagen de $z = re^{i\theta}$ es el complejo $z' = \frac{1}{r}e^{i\theta}$, en el que resulta tener el mismo argumento, pero su módulo es el recíproco del módulo de z .

La inversión geométrica intercambia el interior con el exterior del círculo unitario, mientras que los puntos sobre la circunferencia quedan invariantes por la transformación.

Propiedades de la inversión geométrica.

- La imagen de una recta R por la inversión geométrica es también una recta, si y solo si la recta R pasa por el origen.



En efecto.

Sea R la recta que pasa por el origen y es de la forma $z\bar{w} + \bar{z}w = 0$.

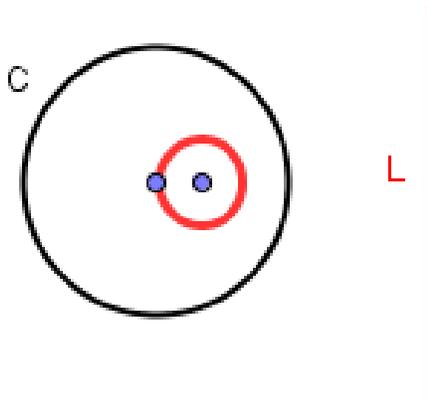
Por inversión geométrica $z' = \frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow z = \frac{1}{\bar{z}'}$,

Sustituyendo en la recta se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{z}'} \bar{w} + \frac{1}{z'} w &= 0 \\ \frac{z'}{\bar{z}' z'} \bar{w} + \frac{\bar{z}'}{z' \bar{z}'} w &= 0 \\ \frac{z'}{|z'|^2} \bar{w} + \frac{\bar{z}'}{|z'|^2} w &= 0 \\ \frac{1}{|z'|^2} (z' \bar{w} + \bar{z}' w) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que $z' \bar{w} + \bar{z}' w = 0$ que es también una recta.

- La imagen por inversión geométrica de una recta R que no pasa por el origen es una circunferencia que pasa por el origen.



Como R no pasa por el origen tiene la forma $z\bar{w} + \bar{z}w + 2c = 0$.

Sustituyendo $z = \frac{1}{\bar{z}'}$ en la recta tenemos

$$\frac{1}{\bar{z}'} \bar{w} + \frac{1}{z'} w + 2c = 0$$

$$\frac{\bar{w}z'}{|z'|^2} + \frac{w\bar{z}'}{|z'|^2} + 2c = 0$$

$$\frac{\bar{w}z' + w\bar{z}' + 2c|z'|^2}{|z'|^2} = 0$$

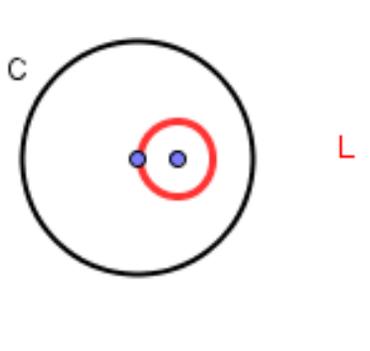
Como $z \neq 0$, implica que $\bar{w}z' + w\bar{z}' + 2c|z'|^2 = 0$, pero también se sabe que c es un real distinto de cero y $|z|^2 = z\bar{z}$, al dividir por $2c$, se tiene que

$$z'\bar{z}' + z'\left(\frac{\bar{w}}{2c}\right) + \bar{z}'\left(\frac{w}{2c}\right) = 0,$$

Como $\frac{\bar{w}}{2c} = \overline{\left(\frac{w}{2c}\right)} = w'$,

$z'\bar{z}' + z'w' + \bar{z}'w' = 0$, Es la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen.

- La imagen de una circunferencia C que no pasa por el origen según la inversión geométrica, es una recta que no pasa por el origen.

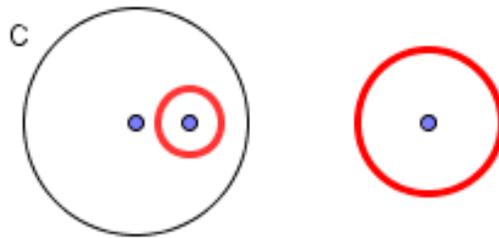


Como la circunferencia C pasa por el origen es de la forma $z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w = 0$, donde $z \in C$, sustituyendo $z = \frac{1}{\bar{z}'}$ en dicha ecuación tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\bar{z}'}\right)\left(\frac{1}{z'}\right) + \frac{1}{\bar{z}'}\bar{w} + \frac{1}{z'}w &= 0 \\ \frac{1}{|z'|^2} + \frac{\bar{w}z'}{|z'|^2} + \frac{w\bar{z}'}{|z'|^2} &= 0 \\ \frac{1 + \bar{w}z' + w\bar{z}'}{|z'|^2} &= 0, \end{aligned}$$

Como $z \neq 0$, implica que $1 + \bar{w}z' + w\bar{z}' = 0$, con $c = 1$ es la forma de la ecuación de una recta que no pasa por el origen.

- La imagen de una circunferencia que no pasa por el origen es otra circunferencia que no pasa por el origen.



Como C no pasa por el origen tiene la forma $z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + c = 0$ donde $z \in C$.
Sustituyendo $z = \frac{1}{\bar{z}'}$ en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\bar{z}'}\right)\left(\frac{1}{z'}\right) + \frac{1}{\bar{z}'}\bar{w} + \frac{1}{z'}w + c &= 0 \\ \frac{1}{|z'|^2} + \frac{\bar{w}z'}{|z'|^2} + \frac{w\bar{z}'}{|z'|^2} + \frac{c|z'|^2}{|z'|^2} &= 0 \\ \frac{1 + \bar{w}z' + w\bar{z}' + c|z'|^2}{|z'|^2} &= 0, \end{aligned}$$

Como $z \neq 0$, implica que $1 + \bar{w}z + w\bar{z} + c|z|^2 = 0$, considerando al numero real $\frac{1}{c} = k$ y $k\bar{w} = \overline{(kw)} = \bar{w}'$, se tiene $k + \bar{w}'z' + w'\bar{z}' + |z'|^2 = 0$ es la ecuación de una circunferencia que no pasa por el origen.

1.5 Inversión compleja

Consideraremos la aplicación $I: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $I(z) = \frac{1}{z}$.

La aplicación solo esta definida sobre \mathbb{C}^* , es decir el complejo nulo no tiene imagen.

La aplicación es involutiva, es decir $I \circ I$ es la identidad de \mathbb{C}^* . Lo anterior significa que $z' = I(z) \Leftrightarrow I(z')$.

En base a la observación, se puede demostrar que:

- La imagen de una recta R por la inversión compleja es también una recta, si y solo si la recta R pasa por el origen.

En efecto.

Sea R la recta que pasa por el origen y es de la forma $z\bar{w} + \bar{z}w = 0$.

Por definición

$$I(z) = \frac{1}{z} = z' \in \text{imagen}(R) \Leftrightarrow I(z') \in R.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z'}\bar{w} + \frac{1}{\bar{z}'}w &= 0 \\ \frac{\bar{z}'\bar{w} + z'w}{z'\bar{z}'} &= 0, \quad z'\bar{z}' \neq 0 \end{aligned}$$

$z'\bar{w} + \bar{z}'w = 0$, es otra recta que pasa por el origen.

- La imagen por inversión compleja de una recta R que no pasa por el origen es una circunferencia que pasa por el origen con su respectivo centro.

Como R no pasa por el origen tiene la forma $z\bar{w} + \bar{z}w + 2c = 0$. Así sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z'}\bar{w} + \frac{1}{\bar{z}'}w + 2c &= 0 \\ \frac{\bar{z}'\bar{w} + z'w + 2cz'\bar{z}'}{z'\bar{z}'} &= 0, \quad z'\bar{z}' \neq 0 \\ \bar{z}'\bar{w} + z'w + 2cz'\bar{z}' &= 0 \\ z'\bar{z}' + \frac{\bar{z}'\bar{w}}{2c} + \frac{z'w}{2c} &= 0 \\ z'\bar{z}' + \bar{z}'\left(\frac{\bar{w}}{2c}\right) + z'\left(\frac{w}{2c}\right) &= 0, \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen. Y por lo desarrollado anteriormente se tiene que su centro es $-\frac{\bar{w}}{2c}$.

- La imagen de una circunferencia C que no pasa por el origen según la inversión compleja, es una recta que no pasa por el origen.

Como la circunferencia C pasa por el origen es de la forma $z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w = 0$, donde $z \in C$

$$\frac{1}{z} = z' \in \text{imagen}(C) \Leftrightarrow I(z') \in C$$

Sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z'}\right)\left(\frac{1}{\bar{z}'}\right) + \frac{1}{z'}\bar{w} + \frac{1}{\bar{z}'}w &= 0 \\ \frac{1 + \bar{z}'\bar{w} + z'w}{z'\bar{z}'} &= 0, \quad z'\bar{z}' \neq 0 \end{aligned}$$

$1 + \bar{z}'\bar{w} + z'w = 0$, es la ecuación de una recta que no pasa por el origen, donde el vector normal es \bar{w} .

- La imagen de una circunferencia que no pasa por el origen es otra circunferencia que no pasa por el origen.

Como C no pasa por el origen tiene la forma $z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + c = 0$ donde $z \in C$.

Por inversión compleja $\frac{1}{z} = z' \in \text{imagen}(C) \Leftrightarrow I(z') \in C$.

$$\left(\frac{1}{z'}\right)\left(\frac{1}{\bar{z}'}\right) + \frac{1}{z'}\bar{w} + \frac{1}{\bar{z}'}w + c = 0$$

$$\frac{1 + \bar{z}'\bar{w} + z'w + z'\bar{z}'c}{z'\bar{z}'} = 0, \quad z'\bar{z}' \neq 0$$

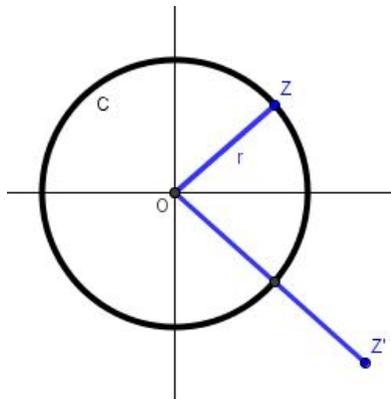
$1 + \bar{z}'\bar{w} + z'w + z'\bar{z}'c = 0$, por hipótesis $c \neq 0$

$z\bar{z} + z'\left(\frac{w}{c}\right) + \bar{z}'\left(\frac{\bar{w}}{c}\right) + \frac{1}{c} = 0$, es una circunferencia que no pasa por el origen.

Por inversión compleja, $f(z) = \frac{1}{z}$, la imagen de $z = re^{i\theta}$ es el complejo

$$z' = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

Así, el módulo de la imagen es el recíproco del módulo de z ; mientras que su argumento es el opuesto del argumento de z .



Si $r > 1$, entonces $\frac{1}{r} < 1$;

Si $r < 1$, entonces $\frac{1}{r} > 1$;

Si $r = 1$, entonces $\frac{1}{r} = 1$;

Según esta operación, si se considera el círculo unitario centrado en el origen del plano complejo, los puntos del interior del círculo son transformados en puntos del exterior; los del exterior en puntos del interior, mientras que los puntos sobre la circunferencia permanecen sobre ella.

1.6 Proyección estereográfica.

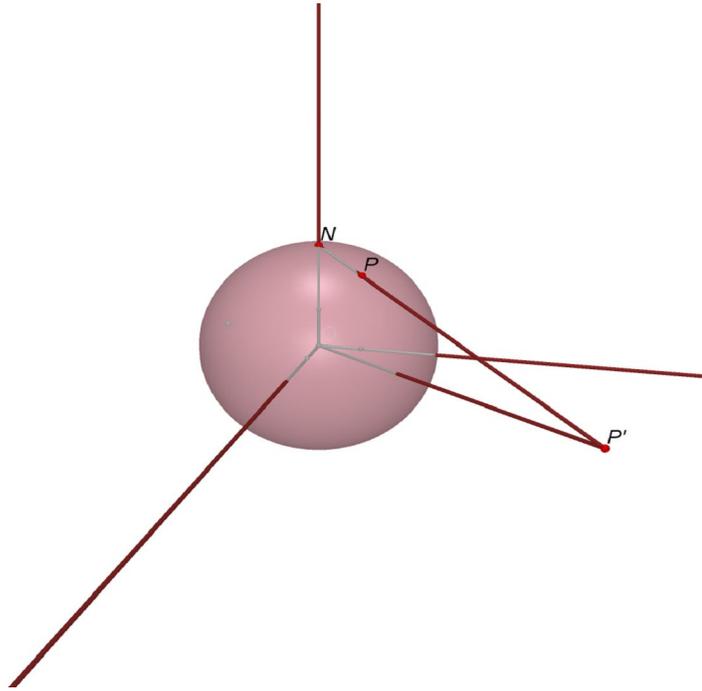
Un mapa geográfico es una representación en el plano de toda o solo una parte de la superficie terrestre. Las curvas que se encuentran sobre la superficie de la tierra (como líneas costeras, ríos o líneas fronterizas) se representan en el plano como líneas correspondientes. Por ejemplo: los ángulos comprendidos en la intersección de ríos y líneas fronterizas se representan por ángulos comprendidos en la intersección de las curvas correspondientes del plano. Un mapa sería perfecto si preservara cada ángulo y redujera proporcionalmente a la misma escala cada distancia medida sobre una curva. Desafortunadamente es imposible hacer un mapa así de perfecto. Sin embargo es posible construir un mapa semiperfecto que, aunque distorsione distancias, preserve ángulos; a un mapa de esta clase se le llama conforme.

Empezaremos por construir un mapa conforme de la esfera; este mapa es comúnmente llamado la proyección estereográfica.

Como ya se señaló, consideremos la tierra como una esfera perfecta y tomamos su radio como la unidad. En términos de sus coordenadas rectangulares (ξ, η, ζ) , la ecuación de la esfera es:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

Consideramos el polo norte N al punto $(0, 0, 1)$. Entonces el ecuador es la intersección de la esfera con el plano $\zeta = 0$, al cual llamaremos plano ecuatorial. Si pasáramos una línea recta por el polo norte N y cualquier otro punto P de la esfera, esta recta se intersectaría en un único punto P' con el plano ecuatorial $\zeta = 0$



Denotaremos las coordenada rectangulares de P' por $(x, y, 0)$, o, puesto que $\zeta = 0$ para todo los puntos de este plano escribamos (x, y) para P' . De manera que con cada punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ de la esfera, asociamos un único punto $P'(x, y)$ del plano ecuatorial. Recíprocamente, a cada punto $P'(x, y)$ del plano ecuatorial le corresponde un único punto en la esfera, el cual encontramos uniendo P' con el polo norte (si es necesario alargando la recta mas allá de P') y tomando la intersección $P(\xi, \eta, \zeta)$ de esta recta con la esfera (por ejemplo si P' es el origen $(0, 0)$, P es el polo sur $(0, 0, -1)$ (mas adelante se probará analíticamente esta biyección) esta transformación o correspondencia biunívoca de los puntos de la esfera con los puntos del plano, se llama proyección estereográfica.

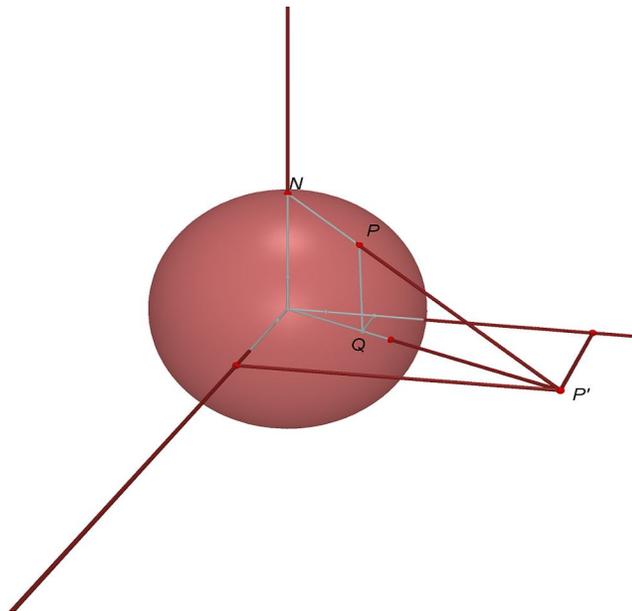
En realidad solo se obtuvo una transformación de aquellos puntos de la esfera que son distintos del polo norte. Es conveniente también incluir al polo norte en nuestra aplicación; para lograrlo, dejemos a $P(\xi, \eta, \zeta)$, un punto de la esfera, aproximarse al polo norte, y observamos lo que pasa en el plano ecuatorial con la imagen $P'(x, y)$: cuando P se aproxima a N . En este caso, la recta que pasa por P y N tiende a ser tangente a N , y P' tiende al infinito: cuando $P(\xi, \eta, \zeta)$ se aproxima a N , el punto P' se aproxima al punto al infinito al plano x, y ,

podemos cerrar el plano, indicando con esto que ahora a cada punto del plano corresponde un único punto de la esfera cerrada y viceversa.

Este concepto de punto al infinito es un concepto extremadamente útil, y la proyección estereográfica nos ayuda a visualizar el comportamiento de los puntos que se encuentra alejados del origen, al considerarlos como puntos cercanos al polo norte de la esfera.

La relación entre $P(\xi, \eta, \zeta)$ y $P'(x, y)$ se obtiene rápidamente en términos de las coordenadas de estos puntos, de manera que de los triángulos semejantes de la figura 1.4.1, obtenemos o las siguientes proporciones

$$\frac{x}{\xi} = \frac{OP'}{OQ}; \quad \frac{y}{\eta} = \frac{OP'}{OQ};$$
$$\frac{OP'}{QP'} = \frac{\xi}{1}.$$



$$OQ + QP' = OP' \rightarrow \frac{OQ}{OP'} + \frac{QP'}{OP'} = 1$$

Además

$$\frac{OQ}{OP'} + \frac{\xi}{1} = 1$$

$$\frac{OP'}{OQ} = 1 - \xi$$

Por lo que obtenemos la siguiente relación

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{OP'}{OQ} = \frac{1}{1 - \xi}$$

De aquí

$$x = \frac{\xi}{1 - \xi} \quad y = \frac{\eta}{1 - \xi} \quad (1)$$

O asociando $z = x + iy$ con el punto (x, y) ,

$$z = x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1 - \xi} \quad (2)$$

Con base a esta idea se define la función

$$\psi : S^2 - \{(0,0,1)\} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$$

Probaremos que ψ es una biyección de $S^2 - \{(0,0,1)\}$ al plano complejo \mathbb{C} .

1. ψ es inyectiva. Para demostrar esto se construye la inversa. Obsérvese que si $z = \psi(\xi, \eta, \zeta)$, como $(\xi, \eta, \zeta) \in S^2$, se tiene que

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} \rightarrow |z|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{1 - \zeta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}$$

Y despejando

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \\
|z|^2 - \zeta |z|^2 &= 1+\zeta \\
|z|^2 - 1 &= \zeta |z|^2 + \zeta \\
\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} &= \zeta
\end{aligned}$$

También

$$z + \bar{z} = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta} + \frac{\xi - i\eta}{1-\zeta} = \frac{2\xi}{1-\zeta}$$

Y

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{(z + \bar{z})(1-\zeta)}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{z + \bar{z}}{2} \left(\frac{2}{|z|^2 + 1} \right) \\
\xi &= \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}
\end{aligned}$$

Finalmente, como

$$z - \bar{z} = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta} - \frac{\xi - i\eta}{1-\zeta} = \frac{2i\eta}{1-\zeta}$$

Se sigue que

$$\eta = \frac{(z - \bar{z})(1-\zeta)}{2i} = \frac{(z - \bar{z}) \left(\frac{2}{|z|^2 + 1} \right)}{2i} = \frac{(z - \bar{z})}{i(|z|^2 + 1)}$$

Por consiguiente, ψ es inyectiva, ya que z determina (ξ, η, ζ) observe también

que la función $\pi(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{(z - \bar{z})}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$ es inversa por la izquierda de

ψ .

2. ψ es sobreyectiva. Para ello demostramos que π es también una inversa derecha de ψ .

En efecto

$$\begin{aligned}
 \psi(\pi(z)) &= \psi\left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{(z-\bar{z})}{i(|z|^2+1)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \\
 &= \frac{\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1} + i\left(\frac{(z-\bar{z})}{i(|z|^2+1)}\right)}{1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}} \\
 &= \frac{\frac{2z}{|z|^2+1}}{\frac{2}{|z|^2+1}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

De ahora en adelante, a menudo diremos “el punto z en ves del punto $P'(x, y)$, y llamaremos al plano ecuatorial el plano z o el plano $x+iy$.

Teorema 1.5:

Si z_1 y z_2 son las imágenes estereográficas de los puntos de la esfera P_1 y P_2 , respectivamente, entonces la distancia que hay entre P_1 y P_2 es

$$\frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

Demostración

Sabemos que $\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} = \zeta$

$$1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + \zeta} = 1 - \zeta$$

$$1 - \zeta = \frac{2}{|z|^2 + 1}$$

Por lo que

$$\xi + i\eta = \frac{2z}{|z|^2 + 1}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} |P_1 P_2|^2 &= (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 \\ &= (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + i(\xi_1 - \xi_2)(\eta_1 - \eta_2) - i(\xi_1 - \xi_2)(\eta_1 - \eta_2) + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 \\ &= (\xi_1 - \xi_2)[(\xi_1 - \xi_2) + i(\eta_1 - \eta_2)] + (\eta_1 - \eta_2)[(\eta_1 - \eta_2) - i(\xi_1 - \xi_2)] + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 \\ &= (\xi_1 - \xi_2)[(\xi_1 - \xi_2) + i(\eta_1 - \eta_2)] - i(\eta_1 - \eta_2)[i(\eta_1 - \eta_2) + i(\xi_1 - \xi_2)] + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 \\ &= [(\xi_1 - \xi_2) + i(\eta_1 - \eta_2)][(\xi_1 - \xi_2) - i(\eta_1 - \eta_2)] + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 \\ &= [\xi_2 + i\eta_2 - (\xi_1 + i\eta_1)][\xi_2 - i\eta_2 - (\xi_1 - i\eta_1)] + [(1 - \zeta_1) - (1 - \zeta_2)]^2 \\ &= \left(\frac{2z_2}{|z_2|^2 + 1} - \frac{2z_1}{|z_1|^2 + 1} \right) \left(\frac{2\bar{z}_2}{|z_2|^2 + 1} - \frac{2\bar{z}_1}{|z_1|^2 + 1} \right) + \left(\frac{2}{|z_2|^2 + 1} - \frac{2}{|z_1|^2 + 1} \right)^2 \\ &= \frac{4|z_2 - z_1|^2}{(|z_2|^2 + 1)(|z_1|^2 + 1)} \\ &= \frac{2|z_2 - z_1|}{\sqrt{(|z_2|^2 + 1)(|z_1|^2 + 1)}} \end{aligned}$$

Obsérvese además que los triángulos $NP_1'P_2'$ y $NP_2'P_1'$ son semejantes ya que los ángulos en N son iguales. Entonces,

$$\begin{aligned}
|NP'|^2 &= x^2 + y^2 + 1 \\
&= 1 + |z|^2 \\
|NP|^2 &= \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 \\
&= \frac{4|z|^2 + 4}{(1 + |z|^2)^2} = \frac{4}{1 + |z|^2} \\
|NP'| |NP| &= 2
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
|NP_2| &= \frac{2|NP_1'|}{\sqrt{(|z_2|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)}} \\
|NP_1| &= \frac{2|NP_2'|}{\sqrt{(|z_2|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)}} \\
|P_1P_2| &= \frac{2|P_1'P_1'|}{\sqrt{(|z_2|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)}}
\end{aligned}$$

Teorema 1.6:

Si P_1 y P_2 son puntos de la esfera y están en los extremos opuestos de un diámetro (puntos antipodales) entonces sus imágenes estereográficas z_1 y z_2 satisfacen

$$z_1 \bar{z}_2 = -1$$

Demostración

Como P_1 y P_2 son los extremos de un diámetro $|P_1 - P_2| = 2$

Por consiguiente

$$\frac{|z_2 - z_1|^2}{(|z_2|^2 + 1)(|z_1|^2 + 1)} = 1$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1 z_2|^2 + 1 = |z_2|^2 + |z_1|^2 - z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2$$

$$(z_1 \bar{z}_2 + 1)(z_1 \bar{z}_2 + 1) = 0$$

$$|z_1 \bar{z}_2 + 1| = 0$$

Propiedades de la proyección estereográfica

Muchas de las propiedades de la proyección estereográfica son casi inmediatas cuando observamos lo que ocurre con las paralelas de latitud y los meridianos de longitud en la transformación. Cuando los puntos de cualquier paralela de latitud se unen a N , se obtiene un cono (cuyo eje, el diámetro que pasa por N , es el eje de la esfera) de manera que la curva en el plano z que corresponde a una paralela de latitud es la intersección de este cono con el plano z , es decir, un círculo con centro en el origen.

Similarmente, los meridianos de longitud son intersecciones de la esfera con planos que pasan por el eje de la esfera (el diámetro que pasa por N y por el polo sur). Así que la imagen de un meridiano de longitud es la intersección de dos planos que pasan por el origen, o una línea recta que pasa por el origen. De manera que el enrejado formado por las paralelas de latitud y meridianos de longitud se aplica sobre un enrejado formado por círculos concéntricos y líneas rectas que pasan por el centro (idénticas a la red de rectas $r = \text{constante}$ y $\theta = \text{constante}$, dadas en coordenadas polares).

Teorema 1.7:

Cada círculo de la esfera se transforma sobre un círculo o una recta del plano

Demostración

Un círculo en la esfera es la intersección de la esfera con un plano. Si el plano pasa por el polo norte, obtenemos un círculo que pasa por el polo norte. La línea recta que se proyecta pasando por N y cualquier punto de uno de estos círculos, esta en el plano que determina al círculo, por lo tanto el punto imagen esta en la intersección de este plano con el plano ecuatorial, es decir una recta: esta línea recta es la imagen del círculo que pasa por el polo norte. Lo que hemos probado comprende el caso particular de los meridianos. Por otra parte, un círculo que no

pasa por el polo norte se aplica sobre alguna curva cerrada finita (que no pase por el punto al infinito) y de aquí que su imagen no sea una recta.

Para ver esto analíticamente, expresemos por medio de ecuaciones el hecho de que un círculo en la esfera es la intersección de la esfera con algún plano: un punto (ξ, η, ζ) de este círculo satisface las dos ecuaciones:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = \rho$$

De donde suponemos que $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ y que $\rho \geq 0$. Recordemos que en esta notación, λ, μ, ν , son los cósenos directores de la normal al plano, y que ρ es la distancia del origen al plano. En nuestro caso, $\rho < 1$ para que la esfera y el plano puedan intersecarse. Utilizando (1), tenemos:

$$\xi = x(1 - \zeta), \quad \eta = y(1 - \zeta)$$

Y escribimos otra vez nuestras ecuaciones en la forma:

$$\begin{aligned} (\lambda x + \mu y)(1 - \zeta) + \nu\zeta &= \rho \\ (1 - \zeta)^2 (x^2 + y^2) + \zeta^2 &= 1 \end{aligned}$$

Podemos dividir la segunda ecuación entre $(1 - \zeta)$, descartando únicamente el polo norte $\zeta = 1$.

$$\begin{aligned} (1 - \zeta)(x^2 + y^2) + \frac{\zeta^2}{(1 - \zeta)} &= \frac{1}{(1 - \zeta)} \\ (1 - \zeta)(x^2 + y^2) + \frac{\zeta^2 - 1}{(1 - \zeta)} &= 0 \\ (1 - \zeta)(x^2 + y^2) - (1 + \zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Sustituimos $\zeta = 1 - \frac{\xi}{x}$ en la primera y segunda ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\xi}{x}(x^2 + y^2) - 2 + \frac{\xi}{x} &= 0 & \frac{\xi}{x}(\lambda x + \mu y) + \nu \left(1 - \frac{\xi}{x}\right) &= \rho \\ \frac{\xi}{x}(x^2 + y^2 + 1) &= 2 & \frac{\xi}{x}(\lambda x + \mu y + \nu) &= \rho - \nu\end{aligned}$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos

$$(\rho - \nu)(x^2 + y^2 + 1) = 2(\lambda x + \mu y - \nu)$$

que es la imagen deseada del círculo en la esfera en el plano $x + iy$

Esta es la ecuación de un círculo si $\rho \neq \nu$, y es la ecuación de una línea recta si $\rho = \nu$; nuestra deducción es completamente general y da la respuesta para todos los casos. El significado del caso $\rho = \nu$ se ve de la ecuación del plano para este caso:

$$\lambda\xi + \mu\eta + \nu(\zeta - 1) = 0.$$

Este plano pasa por el polo norte $(0,0,1)$, es decir, determina un círculo por el polo norte, y así, nuestro calculo confirma lo que ya habíamos notado por medio de un simple argumento geométrico; la imagen de un círculo de esta clase es una línea recta.

Hemos visto que un círculo de la esfera se aplica siempre en un círculo sobre el plano, a menos que el círculo de la esfera pase por el polo norte. Examinaremos este caso excepcional

$$\begin{aligned}(\rho - \nu)(x^2 + y^2 + 1) &= 2(\lambda x + \mu y - \nu) \\ x^2 + y^2 + 1 &= \frac{2\lambda x}{(\rho - \nu)} + \frac{2\mu y}{(\rho - \nu)} - \frac{2\nu}{(\rho - \nu)} \\ x^2 - \frac{2\lambda x}{(\rho - \nu)} + \left(\frac{\lambda}{(\rho - \nu)}\right)^2 &+ y^2 - \frac{2\mu y}{(\rho - \nu)} + \left(\frac{\mu}{(\rho - \nu)}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{(\rho - \nu)}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{(\rho - \nu)}\right)^2 - \frac{2\nu}{(\rho - \nu)} - 1 \\ \left(x - \frac{\lambda}{\rho - \nu}\right)^2 + \left(y - \frac{\mu}{\rho - \nu}\right)^2 &= \frac{\lambda^2 + \mu^2 - 2\nu(\rho - \nu) - (\rho - \nu)^2}{(\rho - \nu)^2}\end{aligned}$$

Ocupando el hecho $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ se transforma en

$$\left(x - \frac{\lambda}{\rho - \nu}\right)^2 + \left(y - \frac{\mu}{\rho - \nu}\right)^2 = \frac{1 - \rho^2}{(\rho - \nu)^2}$$

De aquí se ve que cuando $(\rho - \nu) \rightarrow 0$, el centro y el radio del círculo tienden ambos al infinito (ρ no puede tender a 1) y el círculo se convierte en una recta. Conviene imaginar las rectas como círculos de radio infinito, ya así, tomando en cuenta esta observación, se tiene la afirmación general: la proyección estereográfica manda círculos en la esfera sobre círculos del plano.

Ahora ya estamos en posición de demostrar el siguiente teorema

Teorema 1.8:

Los ángulos se preservan bajo la proyección estereográfica.

Demostración

Las curvas C_1 y C_2 en la esfera se intersecan en el punto P en un ángulo α . Esta afirmación supone tácitamente que las curvas tienen tangentes en su punto de intersección y que α es el ángulo formado por estas tangentes. Sean C_1' y C_2' , respectivamente, las imágenes en el plano de C_1 y C_2 bajo la transformación estereográfica, y sea α' el ángulo que hay entre estas curvas imágenes en su punto de intersección P' , la imagen de P ver la figura 4.3. Ahora bien, los ángulos α y α' están determinados únicamente por las tangentes en el punto de intersección de las curvas en cuestión. Además, es intuitivamente claro que curvas tangentes una con otra se proyectan sobre curvas tangentes una con otra. De manera, que podemos reemplazar cualquiera de nuestras curvas C_1 y C_2 por cualquier otra curva (por ejemplo, un círculo) que pase por su punto de intersección P y tenga la misma tangente en este punto P . En particular reemplazamos cada curva por un círculo que pase el polo norte. Esta es una elección natural; de hecho, las tangentes a C_1' y C_2' en su punto de intersección P' (que forman un ángulo α') son precisamente las imágenes estereográficas respectivas de los dos círculos elegidos.

Ahora bien los dos círculos que pasan por N se interesan formando el mismo ángulo α , tanto en el punto P como en el punto N , en virtud de la simetría de

la esfera. Entonces el plano tangente a la esfera en el polo norte N es, evidentemente, paralelo al plano ecuatorial z . Obsérvese, que estos planos paralelos se intersecan en líneas rectas paralelas con un tercer plano no paralelo. El plano de un círculo que pasa por el polo norte N es un tercer plano de esta clase. Por consiguiente, los lados del ángulo α con vértice en N son paralelos a los lados del ángulo α' con vértice en la intersección P' de C_1' y C_2' . Esto demuestra que $\alpha = \alpha'$; los ángulos se preservan.

UNIDAD II. PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS.

En la Unidad II se estudiarán las principales propiedades de las transformaciones de Möbius, entre estas que las transformaciones de Möbius son transformaciones conformes y que dejan invariante la razón cruzada, así como también una propiedad que es muy importante para su clasificación; toda transformación de Möbius no degenerada tiene a lo sumo dos puntos fijos, a menos que sea la identidad.

Una transformación de Möbius es un mapeo de la forma

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (2.1)$$

donde a, b, c, d son constantes complejas no todas nulas y con la restricción que

$$\Delta = ad - bc \neq 0.$$

Al número Δ le llamaremos determinante de la de la transformación.

Cuando $c \neq 0$, la ecuación (2.1) admite la expresión

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{c(az+b)}{c(cz+d)} \\ &= \frac{acz+ad+bc-ad}{c(cz+d)} \\ &= \frac{a(cz+d)+(bc-ad)}{c(cz+d)} \end{aligned}$$

$$T(z) = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc-ad}{c} \right) \left(\frac{1}{cz+d} \right) \quad (2.2)$$

Si el $\Delta = ad - bc = 0$

Supongamos primero que $c \neq 0$ entonces $T(z)$ se degenera a una aplicación constante como se puede verificar fácilmente en la expresión (2.2), entonces

$$T(z) = \frac{a}{c}.$$

Ahora si $c = 0$ de la expresión $ad - bc = 0$ implica que $a = 0$ ó $d = 0$ es decir $T(z) = \frac{b}{d}$ ó $T(z) = \infty$ respectivamente, lo cual nuevamente es una aplicación constante. Todos estos casos carecen de significado especial para nuestro interés por lo que estudiaremos transformaciones de Möbius no degeneradas es decir, tales que $\Delta = ad - bc \neq 0$.

La ecuación (2.1) revela que, cuando $c \neq 0$, una transformación de Möbius es una composición de varias aplicaciones, traslaciones (t_a), inversiones (I), homotecias (H):

$$\begin{aligned} t_{a_1} : C &\rightarrow C \\ z &\rightarrow z + \frac{d}{c} \quad c, d \in C \\ t_{a_2} : C &\rightarrow C \\ z &\rightarrow z + \frac{a}{c} \\ I : C &\rightarrow C \\ z &\rightarrow \frac{1}{z} \\ H : C &\rightarrow C \\ z &\rightarrow -\frac{(ad - bc)}{c^2} z \quad a, b, c, d \in C. \end{aligned}$$

La composición que debe realizarse para llegar a la transformación de Möbius es:

$$(t_{a_2} \circ H \circ I \circ t_{a_1}) = t_{a_2} \left(H \left(I \left(z + \frac{d}{c} \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= t_{a2} \left(H \left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}} \right) \right) = t_{a2} \left(- \left(\frac{ad - bc}{c^2} \right) \left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}} \right) \right) \\
&= - \left(\frac{ad - bc}{c^2} \right) \left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}} \right) + \frac{a}{c} \\
&= \left(\frac{bc - ad}{c^2 \left(z + \frac{d}{c} \right)} \right) + \frac{a}{c} \\
&= \frac{bc - ad + c \left(z + \frac{d}{c} \right) a}{c^2 \left(z + \frac{d}{c} \right)} \\
&= \frac{bc - ad + acz + ad}{c^2 z + cd} \\
&= \frac{c(b + az)}{c(cz + d)} \\
&= \frac{az + b}{cz + d}
\end{aligned}$$

Notemos que al despejar z de (2.1), se llega a:

$$\begin{aligned}
w &= \frac{az + b}{cz + d} \\
(cz + d)w &= az + b \\
z &= \frac{-dw + b}{cw - a} \quad ad - bc \neq 0 \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Con esto se tiene que, cuando un punto w dado es imagen de algún punto z bajo la transformación (2.1), el punto z se recupera mediante la ecuación (2.3).

Si $c = 0$, de modo que a y d son ambos no nulos, cada punto del plano w es obviamente imagen de un punto, y solo uno, del plano z . Lo mismo es cierto si

$c \neq 0$, excepto cuando $w = \frac{a}{c}$, pues el denominador de la ecuación (2.3) se anula.

Sin embargo se puede ampliar el dominio de la transformación (2.1) con el fin de definir una transformación de Möbius sobre el plano z extendido de manera tal que el punto $w = \frac{a}{c}$ sea la imagen de $z = \infty$ cuando $c \neq 0$.

Para que T sea continua sobre el plano z extendido debe la ecuación (2.1) cumplir con

$$T(\infty) = \infty \text{ si } c = 0,$$

En efecto

$$\begin{aligned} T(\infty) &= \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{d} \\ &= \infty \end{aligned}$$

$$T(\infty) = \frac{a}{c} \text{ y } T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \text{ si } c \neq 0$$

En efecto

$$\begin{aligned} T(\infty) &= \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \\ &= \frac{a}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T\left(-\frac{d}{c}\right) &= \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \\
&= \frac{a - \frac{b}{\frac{d}{c}}}{c - \frac{d}{\frac{d}{c}}} \\
&= \frac{a - \frac{bc}{d}}{c - c} \\
&= \frac{ad - bc}{d} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Ya que $ad - bc \neq 0$.

Cuando ese dominio de definición se amplía de este modo, la transformación (2.1) es una aplicación uno a uno del plano z extendido al plano w extendido. Es decir $T(z_1) = T(z_2)$ siempre que $z_1 = z_2$, y para cada punto z tal que $w = T(z)$. Por lo tanto, asociada con la transformación T existe una transformación inversa T^{-1} que se define sobre el plano extendido w como

$$T^{-1}(w) = z \Leftrightarrow T(z) = w$$

De la ecuación (2.3), se tiene

$$T^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad ad - bc \neq 0$$

Es claro que T^{-1} es ella misma una transformación de Möbius, con

$$T^{-1}(\infty) = \infty \quad \text{Si } c = 0,$$

$$T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty \quad \text{y} \quad T^{-1}(\infty) = \frac{d}{c} \quad \text{Si } c \neq 0.$$

Por los resultados anteriores queda demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.1

Toda transformación de Möbius no degenerada es una transformación biyectiva.

Se determinará cuando una transformación de Möbius es su propia inversa.

Es decir, debe cumplir que $T(T^{-1}(w)) = T^{-1}(T(z)) = z$.

$$T(z) = T^{-1}(z) \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = \frac{-dz+b}{cz-a}$$

Si $z = 0$,

$$\frac{b}{d} = -\frac{b}{a} \Rightarrow d = -a$$

$$\text{Así, } T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = T^{-1}(z) = \frac{-az-b}{-cz+a}$$

Si $b \neq 0$, y $c = 0$, existen dos casos:

$$T(z) = \frac{az-b}{d} = T^{-1}(z) = \frac{-dz-b}{-a} \quad b < 0$$

$$T(z) = \frac{az+b}{d} = T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{-a} \quad b < 0$$

Mientras que si $b = 0$, también existen dos casos:

$$T(z) = \frac{az}{cz+d} = T^{-1}(z) = \frac{-dz}{cz-a} \quad c \neq 0$$

$$T(z) = \frac{az}{d} = T^{-1}(z) = \frac{-dz}{-a} = \frac{dz}{a} \quad c = 0$$

2.1 Puntos fijos

Definición 2.1

Un punto fijo dada una transformación cualquiera F , es tal que $F(p) = p$. Con esta definición aplicada a transformaciones de Möbius se puede ver fácilmente que:

Teorema 2.2

Toda transformación de Möbius diferente de la identidad tiene a lo más dos puntos fijos, a menos que sea la identidad.

Demostración.

Sea z un punto fijo, esto implica que:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = z \\ \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} &= z \\ \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Esto es una cuadrática por lo tanto siempre que $c \neq 0$ tiene a lo sumo dos raíces. Si $c=0$ entonces la ecuación (2.4) se convierte en la ecuación lineal $(d-a)z - b = 0$ la cual tiene solución única si $d-a \neq 0$.

Viendo este último caso, $c=0$ y $d-a=0$, para que se cumpla (2.4) $b=0$, y la transformación quedaría $T(z) = \frac{az}{a} = z$, que es la identidad, que tiene infinitos puntos fijos. Por lo tanto una transformación de Möbius tiene a lo sumo dos puntos fijos, a menos que sea la identidad.

2.2 Razón Cruzada

Definición 2.2:

Dados z_1, z_2, z_3 y z_4 cuatro puntos distintos del plano complejo extendido. Se define su razón cruzada por:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \right) \left(\frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \right)$$

En la definición anterior, si alguno de los puntos es el ∞ , la fracción que lo contiene se define por 1. Si en particular, se cuenta con el hecho de que $z_2 = \infty$, esto implica que $\left(\frac{z_1 - z_2}{z_4 - z_2}\right)$, tiende a 1 cuando z_2 tiende a ∞ .

Teorema 2.3:

Sea z_1, z_2, z_3 y z_4 puntos distintos y sea $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda$ entonces los valores dados al permutar los puntos son los siguientes:

$$\begin{aligned} (z_1, z_2; z_3, z_4) &= (z_2, z_1; z_4, z_3) = (z_3, z_4; z_1, z_2) = (z_4, z_3; z_2, z_1) = \lambda \\ (z_1, z_3; z_2, z_4) &= (z_3, z_1; z_4, z_2) = (z_2, z_4; z_1, z_3) = (z_4, z_2; z_3, z_1) = \frac{1}{\lambda} \\ (z_1, z_4; z_3, z_2) &= (z_4, z_1; z_2, z_3) = (z_3, z_2; z_1, z_4) = (z_2, z_3; z_4, z_1) = 1 - \lambda \\ (z_1, z_3; z_4, z_2) &= (z_3, z_1; z_2, z_4) = (z_4, z_2; z_1, z_3) = (z_2, z_4; z_3, z_1) = \frac{1}{1 - \lambda} \\ (z_1, z_2; z_4, z_3) &= (z_2, z_1; z_3, z_4) = (z_4, z_3; z_1, z_2) = (z_3, z_4; z_2, z_1) = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \\ (z_1, z_4; z_2, z_3) &= (z_4, z_1; z_3, z_2) = (z_2, z_3; z_1, z_4) = (z_3, z_2; z_4, z_1) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \end{aligned}$$

Demostración

$$\begin{aligned} \lambda &= (z_1, z_2; z_3, z_4) = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right) \left(\frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}\right) \\ &= \frac{(-(z_2 - z_1))(- (z_3 - z_4))}{(-(z_3 - z_1))(- (z_2 - z_4))} \\ &= \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_4}\right) \left(\frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_1}\right) \\ &= (z_2, z_1; z_4, z_3) \end{aligned}$$

De forma similar se verifica que la razón cruzada permanece constante cuando intercambiamos z_1 con z_4 , z_3 con z_2 ; z_1 con z_3 y z_2 con z_4 .

$$\begin{aligned}
(z_1, z_3; z_2, z_4) &= \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right) \left(\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3} \right) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \right) \left(\frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \right)} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z_3, z_1; z_4, z_2) &= \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_4} \right) \left(\frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_1} \right) \\
&= \left(\frac{-(z_1 - z_3)}{-(z_2 - z_1)} \right) \left(\frac{-(z_4 - z_2)}{-(z_4 - z_3)} \right) \\
&= \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right) \left(\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3} \right) \\
&= (z_1, z_3; z_2, z_4) \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

De forma similar se prueba que $(z_2, z_4; z_1, z_3) = (z_4, z_2; z_3, z_1) = \frac{1}{\lambda}$

Para el siguiente caso tenemos que

$$\begin{aligned}
1 - \lambda &= 1 - (z_1, z_2, z_3, z_4) \\
&= 1 - \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \right) \left(\frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \right) \\
&= \frac{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2) - [(z_1 - z_2)(z_4 - z_3)]}{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)} \\
&= \frac{z_1 z_4 - z_1 z_2 - z_3 z_4 + z_3 z_2 - [z_1 z_4 - z_1 z_3 - z_2 z_4 + z_3 z_2]}{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)} \\
&= \frac{-z_1 z_2 - z_3 z_4 + z_1 z_3 + z_2 z_4}{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)} \\
&= (z_1, z_4; z_3, z_2)
\end{aligned}$$

Con un calculo similar se verifica que

$$(z_4, z_1; z_2, z_3) = (z_3, z_2; z_1, z_4) = (z_2, z_3; z_4, z_1) = 1 - \lambda$$

En los casos siguientes solo se verificara una de las igualdades las restantes son triviales.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\lambda} &= (z_1, z_4; z_3, z_2) \\
&= \frac{1}{\frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)}} \\
&= \frac{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} \\
&= (z_1, z_3; z_4, z_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\lambda-1} &= \frac{\frac{(z_1 - z_2)(z_4 - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)}}{\frac{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)}} \\
&= \frac{(z_1 - z_2)(z_4 - z_3)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \\
&= (z_2, z_1; z_3, z_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda-1}{\lambda} &= \frac{1}{\frac{(z_1-z_2)(z_4-z_3)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}} \\
&= \frac{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_4-z_3)} \\
&= (z_1, z_4; z_2, z_3)
\end{aligned}$$

Teorema 2.4

Sea a y k una constantes reales entonces

$$1. (z_1, z_2; z_3, z_4) = (z_1 - a, z_2 - a; z_3 - a, z_4 - a)$$

$$2. (z_1, z_2, z_3, z_4) = (kz_1, kz_2, kz_3, kz_4)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
(z_1 - a, z_2 - a; z_3 - a, z_4 - a) &= \left(\frac{(z_1 - a) - (z_2 - a)}{(z_1 - a) - (z_4 - a)} \right) \left(\frac{(z_3 - a) - (z_4 - a)}{(z_3 - a) - (z_2 - a)} \right) \\
&= \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \right) \left(\frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \right) \\
&= (z_1, z_2, z_3, z_4)
\end{aligned}$$

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (kz_1, kz_2, kz_3, kz_4)$$

$$\begin{aligned}
(kz_1, kz_2, kz_3, kz_4) &= \left(\frac{kz_1 - kz_2}{kz_1 - kz_4} \right) \left(\frac{kz_3 - kz_4}{kz_3 - kz_2} \right) \\
&= \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \right) \left(\frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \right) \\
&= (z_1, z_2, z_3, z_4)
\end{aligned}$$

Teorema 2.4:

Toda transformación de Möbius se puede expresar como la razón cruzada de una variable z y tres puntos dados.

Demostración

En efecto dado tres puntos $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^*$ diferentes, una transformación de Möbius que a una tripla ordenada $\{z_2, z_3, z_4\}$ la transforme en la tripla ordenada $\{0, 1, \infty\}$ es:

$$S(z) = \left(\frac{z - z_2}{z - z_3} \right) \left(\frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \right)$$

Denotaremos a S por $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$, diremos que S está determinada por $\{z_2, z_3, z_4\}$.

Notemos que si:

$$\begin{aligned} S(z) &= \left(\frac{z - z_2}{z - z_3} \right) \left(\frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \right) = \frac{az + b}{cz + d} \\ \frac{zz_4 - zz_3 - z_2z_4 + z_2z_3}{zz_4 - zz_2 - z_4z_3 + z_2z_3} &= \frac{az + b}{cz + d} \\ \frac{z(z_4 - z_3) + z_2(z_3 - z_4)}{z(z_4 - z_2) + z_3(z_2 - z_4)} &= \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

$$a = (z_4 - z_3)$$

$$b = z_2(z_3 - z_4)$$

$$c = z(z_4 - z_2)$$

$$d = z_3(z_2 - z_4)$$

Luego, toda transformación de Möbius se puede expresar de la forma $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$. Además, su representación es única.

Teorema 2.5:

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos y $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ también distintos. Existe una única transformación T de Möbius, tal que $T(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Demostración.

Primero supongamos que $z_1 = \infty$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$. Busquemos una transformación de Möbius

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ac - bc \neq 0$$

Que cumpla con las condiciones del enunciado.

Debe cumplir:

$$w(\infty) = w_1 = \frac{a}{c}, \quad w(0) = w_2 = \frac{b}{d}, \quad w(1) = w_3 = \frac{a+b}{c+d} \quad (1)$$

Entendiéndose que algún $w_i = \infty$, si y solo si se anula el denominador correspondiente.

Primera parte

Primer caso

$$w_1 = \infty \quad w_2 \neq \infty \quad w_3 \neq \infty$$

Entonces las igualdades (1) son equivalentes a:

$$c = 0, \quad d \neq 0, \quad b = dw_2, \quad a = d(w_3 - w_2)$$

Esto determina una y solo una transformación de Möbius, cualquiera que sea el valor complejo de $d \neq 0$ que se elija, pues

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = (w_3 - w_2)z + w_2$$

Segundo caso

$$w_1 \neq \infty \quad w_2 = \infty \quad w_3 \neq \infty$$

Entonces las igualdades (1) son equivalentes a:

$$d = 0, \quad c \neq 0, \quad a = cw_1, \quad b = c(w_3 - w_1)$$

Esto determina una y solo una transformación de Möbius, cualquiera que sea el valor complejo de $c \neq 0$ que se elija, pues

$$w = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)z + \left(\frac{b}{c}\right)}{z} = \frac{w_1z + (w_3 - w_1)}{z}$$

Tercer caso

$$w_1 \neq \infty \quad w_2 \neq \infty \quad w_3 = \infty$$

Entonces las igualdades (1) son equivalentes a:

$$c \neq 0, \quad a = cw_1, \quad d = -c, \quad b = -cw_2$$

Esto determina una y solo una transformación de Möbius, cualquiera que sea el valor complejo de $c \neq 0$ que se elija, pues

$$w = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)z + \left(\frac{b}{c}\right)}{z + \left(\frac{d}{c}\right)} = \frac{w_1z - w_2}{z - 1}$$

Cuarto caso

$$w_1 \neq \infty \quad w_2 \neq \infty \quad w_3 \neq \infty$$

Entonces las igualdades (1) son equivalentes a:

$$c \neq 0, \quad a = cw_1, \quad d = -c \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_3}, \quad b = c \frac{(w_3 - w_1)w_2}{w_2 - w_3}$$

Esto determina una y solo una transformación de Möbius, cualquiera que sea el valor complejo de $c \neq 0$ que se elija, pues

$$w = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)z + \left(\frac{b}{c}\right)}{z + \left(\frac{d}{c}\right)} = \frac{w_1(w_2 - w_3)z + w_2(w_3 - w_1)}{(w_2 - w_3)z + (w_3 - w_1)}$$

Hemos probado que cualesquiera que sean $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos entre si, existe una única transformación de Möbius talque

$$w(\infty) = w_1, \quad w(0) = w_2, \quad w(1) = w_3$$

Segunda parte: ahora probemos el caso general enunciado en el teorema.

Dados $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos entre si por lo demostrado anteriormente, existe una única transformación de Möbius f talque

$$f(\infty) = z_1, \quad f(0) = z_2, \quad f(1) = z_3$$

Consideremos la inversa de f . Es la única transformación de Möbius que lleva z_1, z_2 y z_3 respectivamente a $\infty, 0$ y 1 .

Por otro lado, dados $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos entre si, según lo demostrado antes, existe una única transformación de Möbius g talque

$$g(\infty) = w_1, \quad g(0) = w_2, \quad g(1) = w_3 \quad (2)$$

Luego la transformación compuesta

$$h = g \circ f^{-1}$$

(Que es una transformación de Möbius por ser composición de transformaciones de Möbius), lleva z_1, z_2, z_3 a w_1, w_2, w_3 respectivamente, con esto probamos la existencia ahora probemos la unicidad de h , si h_1 es una transformación de Möbius que lleva z_1, z_2, z_3 a w_1, w_2, w_3 respectivamente, entonces consideremos la transformación compuesta $g_1 = h_1 \circ f$ donde f es la transformación que lleva $\infty, 0$ y 1 a w_1, w_2, w_3 respectivamente pero por lo visto en la primera parte esta

transformación es única.

Luego $g_1 = g$, donde g es la construida en (2) entonces $g = h_1 \circ f$ de donde se deduce que $h_1 = g \circ f^{-1}$. Por lo tanto h_1 coincide con la transformación $h = g \circ f^{-1}$ construida antes, probando así la unicidad.

Se presentará la siguiente proposición, útil para el estudio geométrico de las transformaciones de Möbius.

Proposición 2.1:

Sea C la circunferencia determinada por tres puntos distintos z_2, z_3, z_4 de $\overline{\mathbb{C}}$ entonces, $z \in \mathbb{C}$ si y solo si $(z, z_2, z_3, z_4) \in \mathfrak{R}_\infty$.

Demostración

La ecuación general de una circunferencia en $\overline{\mathbb{C}}$ es

$$Az\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0 \quad A, D \in \mathbb{R}; \quad B = \bar{C}; \quad AD - BC < 0.$$

Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ definida por $Tz = (z, z_2, z_3, z_4)$

La condición $Tz \in \mathbb{R}$ significa que $z = z_4$ y $Tz = \bar{Tz}$

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}} \\ (az+b)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d}) &= (\bar{a}\bar{z}+\bar{b})(\bar{c}\bar{z}+\bar{d}) \\ z\bar{z}(a\bar{c}-\bar{a}c) + z(ad-\bar{b}c) + \bar{z}(b\bar{c}-\bar{a}d) + (b\bar{d}-\bar{b}d) &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= (a\bar{c} - \bar{a}c) & D &= (b\bar{d} - \bar{b}d) \\
B &= (a\bar{d} - \bar{b}c) & \bar{C} &= (b\bar{c} - \bar{a}d) \\
&\Rightarrow A, D \in \mathbb{R} & B &= \bar{C} \quad \text{y} \\
AD - BC &= -\left[(a\bar{c} - \bar{a}c)(b\bar{d} - \bar{b}d) - (a\bar{d} - \bar{b}c)(b\bar{c} - \bar{a}d) \right] \\
&= -\left[|ad|^2 + |bc|^2 - ad\bar{b}c - \bar{a}dbc \right] \\
&= -|ad - bc|^2 < 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $T(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z$ satisface (*) que significa que z esta en una recta

El siguiente lema será la herramienta más usada a lo largo de este trabajo.

Lema 1:

Dados tres puntos distintos $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^*$ y T una transformación de Möbius, se tiene:

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

para cualquier $z \in \mathbb{C}^*$.

Demostración.

Sea

$$S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$$

Si

$$M(z) = (S \circ T^{-1})(z)$$

Entonces

$$M(T(z_2)) = 0$$

$$M(T(z_3)) = 1$$

$$M(T(z_4)) = \infty$$

Ahora para cualquier $w \in \bar{\mathbb{C}}$ se tiene que

$$S \circ T^{-1}(T(z)) = S \circ T^{-1}(w) = (w, T(z_2), T(z_3), T(z_4)).$$

Por lo tanto

$$(z, z_2, z_3, z_4) = S(z) = S(T^{-1}(T(z))) = (T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

En geometría, tres puntos no colineales determinan un círculo. Si los puntos son colineales determinan una recta que pasa por el infinito, las cuales consideraremos como círculos.

Por lo tanto tres puntos para nosotros determinaran siempre un círculo.

Teorema 2.6.

Toda transformación de Möbius envía círculos en círculos.

Demostración

Sean Γ un círculo en \mathbb{C}^* determinado por los puntos $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^*$, T una transformación de Möbius.

$T(z_i) = w_i$ para $i = 2, 3, 4$ y Γ' el círculo en \mathbb{C}^* determinado por w_2, w_3, w_4 .

Queremos ver que $T(\Gamma) = \Gamma'$

Si $z \in \mathbb{C}^*$, entonces, por el lema 1 tenemos:

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = (T(z), w_2, w_3, w_4)$$

Además, si $z \in \Gamma$, entonces $(z, z_2, z_3, z_4) \in R$ (proposición 2.2), luego

$(T(z), w_2, w_3, w_4)$ también es un número real, esto quiere decir que $T(\Gamma) = \Gamma'$

Teorema 2.7:

Las transformaciones de Möbius no degeneradas forman un grupo bajo la composición de aplicaciones.

Demostración

Verifiquemos que efectivamente cumple las condiciones de grupo.

Cerradura:

Supongamos que $T_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $T_2(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ son dos transformaciones de Möbius no degeneradas con determinantes $\Delta_1 = (ad-bc) \neq 0$ y $\Delta_2 = (a'd'-b'c') \neq 0$ respectivamente.

Entonces

$$\begin{aligned} T' &= T_1 \circ T_2 \\ &= \frac{a' \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + b'}{c' \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + d'} \\ &= \frac{(aa'+b'c)z + (a'b+b'd)}{(ac'+cd')z + (bc'+dd')} \end{aligned}$$

Es decir, T' es otra transformación de Möbius además se verifica que su determinante $\Delta \neq 0$.

En efecto

$$\begin{aligned} \Delta &= (aa'+b'c)(bc'+dd') - (a'b+b'd)(ac'+cd') \\ &= (a'd'-b'c')(ad-bc) \\ &= \Delta_2 \Delta_1 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Por lo que T' es no degenerada.

Asociativa:

La composición de funciones cumple la ley asociativa siempre que las

aplicaciones sean biyectivas y por el teorema 2.1 sabemos que las transformaciones de Möbius son biyectivas.

Elemento inverso.

En la demostración del teorema 2.1 se encontró la aplicación inversa $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$ $ad - bc \neq 0$ de una transformación de Möbius no degenerada y se observo que era otra transformación de Möbius no degenerada.

Elemento identidad:

La transformación identidad $T(z) = z$ también es una transformación de Möbius no degenerada.

Por lo que las transformaciones Möbius tienen estructura de grupo.

2.3 Simetría

Definición 2.3:

Dado Γ un círculo en \mathbb{C}^* y z_2, z_3, z_4 puntos que determinan a Γ , decimos que $z, z' \in \mathbb{C}^*$ son simétricos respecto de Γ si:

$$(z', z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} \quad (2.1)$$

Si Γ es el círculo que pasa por $z_4 = \infty$, (es decir una recta), la ecuación (2.1) se convierte en:

$$\frac{z' - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3}$$

La cual implica que $|z' - z_3| = |z - z_3|$ y puesto que z_3 es cualquier punto sobre Γ , se tiene que z y z' equidistan de cada punto de Γ .

Por otra parte la expresión también implica que:

$$\operatorname{Im} \frac{z' - z_3}{z_2 - z_3} = \operatorname{Im} \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} = -\operatorname{Im} \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}$$

Esto es si $z \notin \Gamma$, entonces z y z' están en lados opuestos en relación a Γ , y el segmento $[z, z']$ es perpendicular a Γ .

Ahora supongamos que $\Gamma = \{z : |z - a| = R\}$, con $0 < R < \infty$.

Sean z_2, z_3, z_4 puntos diferentes en Γ .

Sabemos que dada cualquier transformación de Möbius T , se tiene que:

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

Aplicando el teorema con las transformaciones

$T_1(z) = z - a$, $T_2(z) = \frac{R^2}{z}$ y $T_3(z) = z + a$ a la ecuación (2.1), tenemos

$$\begin{aligned} (z', z_2, z_3, z_4) &= \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} \\ &= \overline{(z - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a)} \\ &= \overline{(z - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a)} \\ &= \overline{(z - a, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a}, \frac{R^2}{z_4 - a})} \\ &= \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a \right) \\ &= \left(a + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_2, z_3, z_4 \right) \end{aligned}$$

De donde

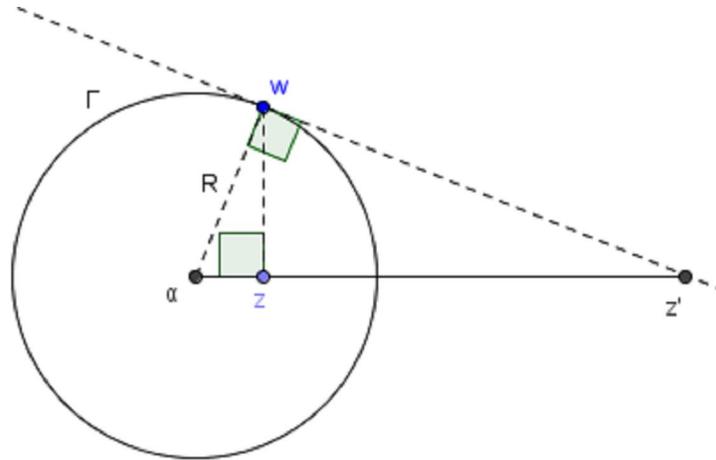
$$z^* = a + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} = a + \frac{R^2}{|z - a|} (z - a)$$

Esto, es z^* esta sobre el rayo dirigido de a hacia z .

Además, también se tiene que $|z - a| |z^* - a| = R^2$

Esto nos dice que si z esta en el interior de Γ , z^* esta ubicado como se ilustra en

la figura siguiente.



Teorema 2.9 : (Principio de simetría):

Sea T una transformación de Möbius que envía el círculo Γ_1 sobre el círculo Γ_2 . Si dos puntos son simétricos con respecto a Γ_1 , entonces sus imágenes bajo T son puntos simétricos respecto a Γ_2 .

Demostración

Sea $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^*$ y z' el simétrico de z con respecto a Γ_1

$$\begin{aligned} (T(z'), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) &= (z', z_2, z_3, z_4) \\ &= \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} \\ &= \overline{(T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4))} \end{aligned}$$

Este principio es independiente de la escogencia de los puntos z_2, z_3, z_4 :

En efecto, se Γ un círculo determinado por los puntos z_2, z_3, z_4 si w_2, w_3, w_4 son otros tres puntos diferentes en Γ .

Supongamos que z y z' son simétricos respecto a Γ , tomando como referencia

los puntos z_2, z_3, z_4 .

$$(z', z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)}$$

Sea T la única transformación de Möbius tal que $T(z_i) = w_i$, para $i = 2, 3, 4$. Por el principio de simetría sabemos que si z y z' son simétricos respecto a Γ las imágenes de z y z' bajo cualquier transformación de Möbius son simétricas respecto de la imagen de Γ .

Entonces

$$\begin{aligned} (z^*, w_2, w_3, w_4) &= \overline{(T^{-1}, z_2, z_3, z_4)} \\ &= \overline{(z, w_2, w_3, w_4)} \end{aligned}$$

Luego z y z' son simétricos respecto a Γ tomando como referencia los puntos w_2, w_3, w_4 , como queríamos probar.

2.4 Orientación

Definición 2.4:

sea Γ un círculo en \mathbb{C}^* . una orientación para Γ es una tripla ordenada (z_2, z_3, z_4) de puntos de Γ .

Sea $\Gamma = \mathbb{R}$, z_2, z_3, z_4 tres puntos en Γ , $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Como $\mathbb{R} = T(\mathbb{R}_\infty)$, a, b, c y d y se pueden escoger reales

Puesto que:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{ac|z|^2 +adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}$$

Entonces

$$ImT(z) = Im(z, z_2, z_3, z_4) = \frac{Im(adz) + Im(bc\bar{z})}{|cz + d|^2} = \frac{(ad - bc)}{|cz + d|^2} Imz$$

Luego, el conjunto $\{z : Im(z, z_2, z_3, z_4) > 0\}$ es el semiplano superior si $ad - bc > 0$ o el semiplano inferior si $ad - bc < 0$.

Sea ahora Γ un círculo arbitrario en \mathbb{C}^* determinado por z_2, z_3, z_4 .
 Para cualquier transformación de Möbius T , se tiene que

$$\begin{aligned} \{z : \text{Im}(z, z_2, z_3, z_4) > 0\} &= \{z : \text{Im}(T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) > 0\} \\ &= \{z : \text{Im}(z, T(z_2), T(z_3), T(z_4)) > 0\} \end{aligned}$$

En particular, si T se escoge de tal forma que $T(\Gamma) = \mathbb{R}^*$, entonces $\{z : \text{Im}(z, z_2, z_3, z_4) > 0\}$ es igual a la imagen inversa de T del semiplano superior o inferior.

Esto sugiere la siguiente definición:

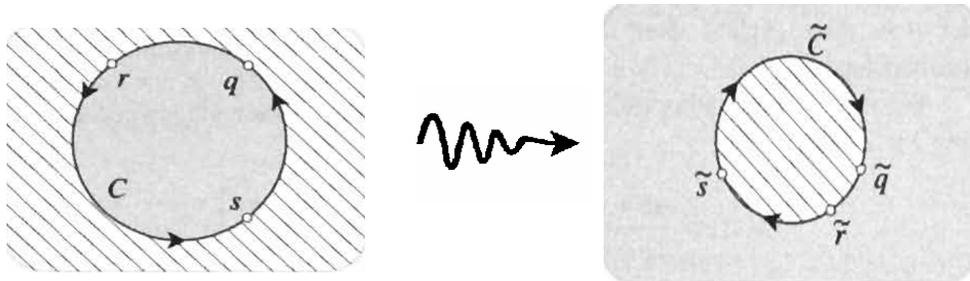
Definición 2.5:

Sea (z_2, z_3, z_4) una orientación para Γ , definimos el lado derecho de Γ como el conjunto $\{z : \text{Im}(z, z_2, z_3, z_4) > 0\}$ y análogamente definimos el lado izquierdo de Γ como el conjunto $\{z : \text{Im}(z, z_2, z_3, z_4) < 0\}$.

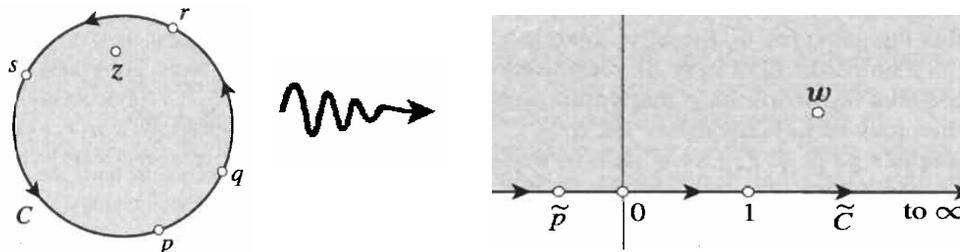
Teorema 2.10 (principio de orientación)

Sea Γ_1 y Γ_2 dos círculos en \mathbb{C}^* , (z_2, z_3, z_4) una orientación para Γ_1 . T una transformación de Möbius talque $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

Entonces T envía el lado derecho de Γ_1 sobre el lado derecho de Γ_2 con respecto a la orientación.



En caso particular



Mapeos conformes.

Definición 2.6:

Un mapeo $f : A \rightarrow B$ es llamado conforme si para toda $z_0 \in A$, f rota a vectores tangentes a curvas a través de z_0 , un ángulo específico θ y los alarga un factor definido r .

Se utilizará el siguiente teorema para probar que las transformaciones de Möbius son conformes.

Teorema 2.10.

Sea $f : A \rightarrow B$ analítica y $f'(z_0) \neq 0$ para toda $z_0 \in A$. Entonces f es conforme.

Demostración

Consideremos una función f analítica en una región $A \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in A$ y

$$\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow A$$

$$\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow A$$

Curvas suaves contenidas en A tales que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$, donde $\gamma_1'(t_1) \neq 0$, $\gamma_2'(t_2) \neq 0$, $\gamma_1'(t_1) \neq \gamma_2'(t_2)$, $f'(z_0) \neq 0$.

Sean $F_1 = f \circ \gamma_1$, $F_2 = f \circ \gamma_2$, entonces

$$F_1(t_1) = f(\gamma_1(t_1))$$

$$F_1'(t_1) = f'(\gamma_1(t_1)) \cdot \gamma_1'(t_1) = f'(z_0) \cdot \gamma_1'(t_1) \neq 0$$

$$F_2(t_2) = f(\gamma_2(t_2))$$

$$F_2'(t_2) = f'(\gamma_2(t_2)) \cdot \gamma_2'(t_2) = f'(z_0) \cdot \gamma_2'(t_2) \neq 0$$

Además, tenemos que

$$\text{Arg}F_1'(t_1) = \text{Arg}(f'(z_0) \cdot \gamma_1'(t_1)) = \text{Arg}(f'(z_0)) + \text{Arg}(\gamma_1'(t_1)) \dots (1)$$

$$\text{Arg}F_2'(t_2) = \text{Arg}(f'(z_0) \cdot \gamma_2'(t_2)) = \text{Arg}(f'(z_0)) + \text{Arg}(\gamma_2'(t_2))$$

Restando (1) y (2) tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Arg}F_1'(t_1) - \text{Arg}F_2'(t_2) &= \text{Arg}(f'(z_0) \cdot \gamma_1'(t_1)) - \text{Arg}(f'(z_0) \cdot \gamma_2'(t_2)) \\ &= \text{Arg}(\gamma_1'(t_1)) - \text{Arg}(\gamma_2'(t_2)). \end{aligned}$$

Es decir, el ángulo entre γ_1 y γ_2 en z_0 , es igual al ángulo entre $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ en el punto $f(z_0) = w_0$.

Entonces hemos demostrado que si f es analítica z_0 preserva ángulos en cada punto z_0 donde $f'(z_0) \neq 0$, luego f es conforme.

Con este teorema se puede verificar analíticamente que tanto

Teorema 2.5

El mapeo T definido por la ecuación $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es conforme.

Ya que T cumple con las condiciones del teorema primero es continua y

diferenciable y su derivada es $T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$

La conformidad de las transformaciones de Möbius también es deducible del hecho que tanto traslaciones, rotaciones, dilataciones e inversión compleja son conformes.

Veamos un ejemplo de cómo las transformadas de Möbius por ser conformes preservan la orientación del plano.

$$T(z) = \frac{-iz + 1}{z - i}$$

Esta transformación de Möbius cumple con

$$T(-1) = -1$$

$$T(-i) = 0$$

$$T(i) = \infty$$

Luego lleva la circunferencia que pasa por -1 , por $-i$ y por i , a la recta que pasa por -1 , por 0 y por ∞ .

Transforma entonces la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en la recta $y = 0$. A la región R encerrada por la circunferencia $R: x^2 + y^2 < 1$, la transforma en alguno de los semiplanos, bien $y > 0$ o bien $y < 0$, limitados por la recta $y = 0$.

Para determinar cual de los dos semiplanos es el correspondiente de R , orientamos la circunferencia borde de R de algún modo por ejemplo recorriendo en este orden los tres puntos dados $-1, -i, i$ (quedo orientado en sentido antihorario) la circunferencia así orientada dejo a la región R a la izquierda. Entonces recorriendo los puntos imágenes en ese mismo orden $-1, 0, \infty$ a la región imagen $T(R)$ también a la izquierda, luego $T(R) = \{y > 0\}$

2.5 Transformaciones de Möbius con Matrices.

Como ya se estuvo estudiando sobre las propiedades de las transformaciones de Möbius. Estos resultados tienen una conexión con las matrices en álgebra lineal.

Vemos que por asociatividad con cada transformación de Möbius $T(z)$ le corresponde una matriz de 2×2 y la denotaremos por:

$$[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Donde a, b, c, d son las constantes complejas de la transformación.

Debido a que los coeficientes de la transformación de Möbius no son únicos. Si $k \neq 0$ es cualquier constante, entonces la matriz $k[T]$ corresponde a la misma transformación de Möbius que $[T]$.

Sin embargo si $[T]$ es normalizada por la imposición $ad - bc = 1$ entonces hay exactamente dos posibles matrices asociadas con una transformación de Möbius dada. Si una de ellas la llamamos $[T]$ la otra sería $-[T]$; en otras palabras, la matriz es determinada únicamente por el signo.

Es importante mencionar que existe la posibilidad de confundirse ya que estamos acostumbrados en algebra lineal a pensar que una matriz de números reales de orden 2×2 es una representación de una transformación lineal de \mathbb{R}^2 .

Por ejemplo

La matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ representa una rotación del plano pasando por $\frac{\pi}{2}$, esto es cuando aplicamos un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ entonces obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ rotaciones de } \frac{\pi}{2} \right\}.$$

En contraste rígido, la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que corresponde a una transformación de

Möbius tiene generalmente números complejos como sus entradas, y así que no puede ser interpretada como una transformación lineal en \mathbb{R}^2 . Incluso si las entradas son reales, tampoco debe ser interpretada como una transformación lineal de \mathbb{R}^2 . Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ corresponde a la transformación de

Möbius $T(z) = -\frac{1}{z}$, la cual no es una transformación lineal en \mathbb{C} . Por lo que es importante llevar mente esta diferencia.

A pesar de esto , tenemos los paralelos siguientes entre el comportamiento de las transformaciones de Möbius y las matrices que las representan:

1. La identidad en las transformaciones de Möbius $\varepsilon(z) = z$ corresponde a la familia de matrices identidades

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La transformación de Möbius $T(z)$ con matriz $[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ posee inversa si y solo si la matriz asociada posee inversa.
 $[T]$ Es no singular si y solo si $\det[T] = ad - bc \neq 0$

3. La matriz inversa de una transformación de Möbius $[T^{-1}]$ corresponde a la inversa de la matriz asociada a T, es decir $[T^{-1}] = [T]^{-1}$

En efecto

$$\text{Sea } T^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a} \leftrightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -cb + da \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces la matriz asociada a T^{-1} es la matriz inversa $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

4. La composición de transformaciones de Möbius corresponde a la multiplicación de matrices.

En efecto sean T_1 y T_2 dos transformaciones de Möbius talque

$$T_1(z) = \frac{az+b}{cz+d} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$T_2(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (T_1 \circ T_2)(z) &= T_1\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) \\ &= \frac{a\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)+b}{c\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)+d} \\ &= \frac{aa'z+ab'+b(c'z+d')}{(c'z+d')(ca'z+cb'+d(c'z+d'))} \\ &= \frac{aa'z+ab'+b(c'z+d')}{ca'z+cb'+d(c'z+d')} \\ &= \frac{(aa'+bc')z+ab'+bd'}{(ca'+dc')z+cb'+dd'} \end{aligned}$$

Cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

Haciendo el producto de las matrices asociadas a cada transformación obtenemos que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

Por lo que $[T_2][T_1] = [T_2 \circ T_1]$

Coordenadas homogéneas

Este sistema de coordenadas lo que hace es completar el plano complejo.

Sea $z = x + iy$ en términos de dos números reales, como la razón de dos números complejos z_1 y z_2 $z = \frac{z_1}{z_2}$

El par ordenado de números complejos $[z_1, z_2]$ son llamadas coordenadas homogéneas de z con $[z_1, z_2] \neq [0, 0]$. A cada par ordenado $[z_1, z_2 \neq 0]$ le corresponde precisamente un punto $z = \frac{z_1}{z_2}$, y a cada punto z le corresponde un conjunto de coordenadas homogéneas $[kz_1, kz_2] = k[z_1, z_2]$ donde k un número complejo arbitrario es arbitrario $k \neq 0$.

Ahora bien, ¿que pasa si tenemos un par de la forma $[z_1, 0]$? Es claro que $[z_1, 0]$ es identificado con el punto al infinito. Todos los pares $[z_1, z_2]$ proveen las coordenadas para extender el plano complejo.

Se usa el símbolo \mathbb{R}^2 para denotar el conjunto de pares (x, y) de números reales y el símbolo \mathbb{C}^2 para denotar el conjunto de pares $[z_1, z_2]$ de números complejos.

Una transformación lineal de \mathbb{R}^2 es representada por una matriz real 2×2 y una transformación lineal de \mathbb{C}^2 es representada por una matriz compleja 2×2 .

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{bmatrix}$$

Como $[z_1, z_2]$ y $[m_1, m_2]$ son coordenadas homogéneas en \mathbb{C}^2 de $z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ en \mathbb{C}

y $w = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)$ es la imagen, entonces es una transformación de \mathbb{C}^2

$$z = \frac{z_1}{z_2} \rightarrow w = \frac{m_1}{m_2} = \frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2} = \frac{a \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + b}{c \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + d} = \frac{az + b}{cz + d}$$

que es la forma de la transformación de Möbius.

Hemos explicado así porqué las transformaciones de Möbius en \mathbb{C} se comportan tanto como transformaciones lineales, estas son transformaciones lineales, sólo si actúan en las coordenadas homogéneas en \mathbb{C}^2 .

Valores y vectores propios.

La representación de las transformaciones de Möbius como matrices provee un elegante método de hacer los cálculos prácticos y concretos. Sin embargo la teoría de las transformaciones de Möbius tiene un rango mayor que las ideas técnicas que se usan en algebra lineal.

Definición 2.5

Un vector propio de una transformación de Möbius con matriz asociada $[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es un vector $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ cuya dirección es inalterable por la transformación, en el sentido la imagen es un simple múltiplo λ_z del original; este múltiplo es llamado valor propio del vector propio.

En otras palabras, un vector propio satisface la ecuación.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Los puntos fijos de una transformación de Möbius coinciden con los vectores propios.

Según la definición anterior si $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ es un vector propio entonces es mapeado a $T(z) = \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \lambda z_2 \end{pmatrix}$ por lo que $T(z) = \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \lambda z_2 \end{pmatrix} = z$.

$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ es un vector propio de $T(z)$ si y solo si $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ es un punto fijo de $[T]$.

Note que un beneficio inmediato de esto es aprovechar que no son reales distintos entre un punto fijo finito y un punto fijo infinito que corresponde a los vectores propios de la forma $\begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Si ∞ es un punto fijo entonces $\lambda \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az_1 \\ cz_2 \end{bmatrix}$

Si la matriz $[T]$ asociada a la transformación de Möbius $T(z)$ entonces la matriz $k[T]$ se obtiene multiplicando todos sus valores por k , los valores propios de la matriz son independientes de k , si z es un vector propio de $[T]$ (con valor propio λ) entonces es un vector propio de $k[M]$ de valor propio $k\lambda$

$$\{k[M]\} z = k\lambda z$$

Este valor solo depende del k arbitrario, este valor propio no puede tener una representación geométrica natural del mapeo $T(z)$, si $[T]$ es normalizada entonces los valores propios se encuentran de la siguiente forma:

Ecuación característica de una transformación de Möbius normalizada

Los valores propios de $[T]$ son las soluciones características de la ecuación $\det\{[T] - \lambda[\varepsilon]\} = 0$, donde $[\varepsilon]$ es la matriz identidad.

$$\begin{aligned}
\det\{[T] - \lambda[\varepsilon]\} &= 0 \\
\det\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} &= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (a-\lambda)(d-\lambda) - cb \\
&= ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - cb \\
&= \lambda^2 - \lambda(a+d) + 1 \qquad (1)
\end{aligned}$$

La expresión (1) es llamada ecuación característica .

Encontremos los valores propios de una transformación de Möbius normalizada a partir de la ecuación característica.

Esta ecuación tiene dos valores propios λ_1 y λ_2 , ellos son determinados por el valor de $(a+d)$ por la cuadrática obtenemos inmediatamente

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - (a+d)\lambda + 1 &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\
\lambda^2 - (a+d)\lambda + 1 &= \lambda^2 - (\lambda_2 + \lambda_1)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \\
\rightarrow \lambda_1\lambda_2 &= 1 \quad (\lambda_2 + \lambda_1) = (a+d) \\
\lambda_2 &= \frac{1}{\lambda_1} \rightarrow \left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) = (a+d)
\end{aligned}$$

Y por la cuadrática se obtiene

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - (a+d)\lambda + 1 &= 0 \\
\lambda_1, \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4} \right]
\end{aligned}$$

UNIDAD III: CLASIFICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

En la unidad III se clasificarán las Transformaciones de Möbius según sus puntos fijos, ilustrando el comportamiento analítico y geométrico de cada clase resultante: parabólicas, hiperbólicas, loxodrómicas y elípticas, así mismo se presentara una clasificación por la traza de la matriz que determina la transformación de Möbius

En la unidad II se analizo cuando una transformación de Möbius tiene el determinante $ad - bc = 0$ en este caso se degenera a una aplicación constante.

Para otros valores $ad - bc = k \neq 0$, la transformación

$$z \rightarrow \frac{\frac{a}{\sqrt{k}}z + \frac{b}{\sqrt{k}}}{\frac{c}{\sqrt{k}}z + \frac{d}{\sqrt{k}}}$$

tiene la misma regla de correspondencia que la transformación original, sin embargo,

$$\frac{a}{\sqrt{k}} \frac{d}{\sqrt{k}} - \frac{b}{\sqrt{k}} \frac{c}{\sqrt{k}} = 1$$

De este hecho se sigue que todas las transformaciones de Möbius que pueden definir por matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = 1$

De ahora en adelante denotaremos a este grupo de marices $PSL(2, \mathbb{C})$ si los coeficientes de la transformación a, b, c, d son complejos y $PSL(2, \mathbb{R})$ si los coeficientes son todos reales.

Clasificación de las transformaciones de Möbius según sus puntos fijos

Para empezar retomaremos el concepto de puntos fijos, tan importantes en la clasificación de las transformadas de Möbius.

A continuación describimos los puntos fijos de una transformada de Möbius en general de forma explícita.

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 + 4bc}}{2c}$$

Ahora que pasa si $M(z)$ es normalizada, entonces los dos puntos fijos α_1, α_2 están dados por

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

Los cuales se obtienen de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \alpha_1, \alpha_2 &= \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c} \\ &= \frac{(a-d) \pm \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}}{2c} \\ &= \frac{(a-d) \pm \sqrt{a^2 + d^2 - 2(ad - bc) + 2bc}}{2c} \\ &= \frac{(a-d) \pm \sqrt{a^2 + d^2 - 2(1) + 2(-1 + ad)}}{2c} \\ &= \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \end{aligned}$$

En el caso excepcional de que $(a+d) = \pm 2$, los dos puntos fijos α_1, α_2 se funden en el único punto fijo $\alpha = \frac{(a-d)}{2c}$.

Analicemos a continuación los puntos fijos al infinito

Siempre $c \neq 0$ entonces los puntos fijos son finitos; ahora bien, si $c = 0$ por lo menos un punto fijo es en el infinito, además si $c = 0$ entonces la transformación de Möbius adopta la forma $T(z) = \alpha z + \beta$.

Ahora bien si se escribe $\alpha = \rho e^{i\theta}$ entonces esto puede ser visto como la composición de una rotación θ alrededor del origen, una expansión o contracción ρ en dirección del origen, y finalmente, una traslación de β .

Mas adelante vamos a visualizar cada una de estas tres transformaciones en la esfera de Riemann (Σ).

Teorema 3.1

Una transformación de Möbius tiene como punto fijo ∞ si, y sólo se trata de una similitud $S(z) = \alpha z + \beta$. Por otra parte, ∞ es el único punto fijo si y sólo si $S(z)$ es una traslación $S(z) = (z + b)$.

Demostración

$$\text{Sea } T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$\text{Pero } T(\infty) = \frac{a}{c} \text{ por lo que } T(\infty) = \infty \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Por lo tanto } T(z) = \frac{az + b}{d} = \alpha z + \beta = S(z)$$

Por otra parte

$$S(z) = az + b = z \Leftrightarrow z - az = b$$

$$z = \frac{b}{(1-a)}$$

Entonces

$$\frac{b}{(1-a)} = \infty \Leftrightarrow a = 1 \text{ por lo que se concluye que } S(z) = (z + b).$$

Definición 3.1

Sea T de Möbius, tal que fija exactamente un punto en $\hat{\mathbb{C}}$, entonces a T se le llama parabólica.

Definición 3.2

Diremos que dos transformaciones de Möbius S y T son conjugadas si existe una transformación de Möbius φ talque

$$S = \varphi T \varphi^{-1}$$

Lema 3.1

Sean T y φ transformaciones de Möbius, entonces T fija a un punto w en $\widehat{\mathbb{C}}$ (o conserva un subconjunto $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$) si y sólo si $S = \varphi T \varphi^{-1}$ fija $\varphi(w)$ (o preserva $\varphi(A)$).

Demostración.

$$T(w) = w \Leftrightarrow (\varphi \circ T)(w) = \varphi(w) \Leftrightarrow (\varphi \circ T \circ \varphi^{-1})(\varphi(w)) = \varphi(w)$$

De ahí que

$$(\varphi \circ T \circ \varphi^{-1})(\varphi(w)) = \varphi(w)$$

por lo que $S = \varphi T \varphi^{-1}$ fija $\varphi(w)$.

Esta misma demostración prueba la afirmación del lema sobre un conjunto A preservado por T .

Obsérvese que el lema anterior también se aplica en otras dimensiones y en contextos más generales.

Proposición 3.1

Sea T una transformación de Möbius. Entonces:

1. Si T es parabólica, T es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a una traslación;
2. si T no es parabólica, T es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a una transformación de la forma $z \rightarrow \alpha z$.

Demostración.

Sea T parabólica con punto fijo z_0 y $\varphi \in PSL(2, \mathbb{C})$ tal que $\varphi(z_0) = \infty$, por ejemplo,

$$\varphi(z) = \frac{1}{z - z_0},$$

entonces $S = \varphi T \varphi^{-1}$ fija ∞ , y por lo tanto es de la forma

$$S(z) = \alpha z + \beta$$

Se sigue del lema anterior que S no tiene otro punto fijo, por lo cual $\alpha = 1$ (si $\alpha \neq 1$, la ecuación $\alpha z + \beta = z$ tendría una solución finita).

Para probar la segunda parte, supongamos que T fija 2 puntos distintos w_1, w_2 y que

$$\varphi(z) = \frac{z - w_1}{z - w_2}$$

(Si $w_2 = \infty$, se toma $\varphi(z) = z - w_1$). Bajo estas hipótesis la función

$$S = \varphi T \varphi^{-1}$$

fija 0 e ∞ , ya que

$$S(0) = \varphi(T(\varphi^{-1}(0))) = \varphi(T(w_1)) = \varphi(w_1) = 0$$

$$S(\infty) = \varphi(T(\varphi^{-1}(\infty))) = \varphi(\infty) = \infty$$

por lo cual si

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

se tiene $b, c = 0$

El resultado anterior muestra que cualquier transformación de Möbius es conjugada a una transformación canónica. El siguiente resultado examina la conjugación entre estas transformaciones canónicas.

Proposición 3.2

Sean k_1, k_2 , complejos no nulos, supóngase también que $k_1 \neq k_2, k_2^{-1}$ entonces las transformaciones $T(z) = k_1 z$ y $S(z) = k_2 z$ no son conjugadas en $PSL(2, \mathbb{C})$.

Demostración.

Si la transformación $\varphi \in PSL(2, \mathbb{C})$ y conjugua T y S , digamos $S = \varphi T \varphi^{-1}$, entonces se sigue del Lema 3.1 que φ preserva $\{0, \infty\}$.

Si φ fija 0 e ∞ , entonces φ es de la forma $z \rightarrow \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{C}$, por lo que

$$S(z) = \varphi\left(T\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) = \varphi\left(T\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right) = \varphi\left(k_1\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right) = k_1 z,$$

Es decir $S = T$ lo cual contradice las hipótesis de que $k_1 \neq k_2$.

Por otra parte, si $\varphi(0) = \infty$ y $\varphi(\infty) = 0$, escribiendo

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

como $\varphi(\infty) = \frac{a}{c}$ y $\varphi(0) = \frac{b}{d}$, se tiene que $a, d = 0$ y que

$$\varphi(z) = \frac{b}{cz}.$$

En este caso φ es una involución, es decir, $\varphi = \varphi^{-1}$ y

$$S(z) = \varphi\left(T\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) = \varphi\left(T\left(\frac{b}{cz}\right)\right) = \varphi\left(k_1\left(\frac{b}{cz}\right)\right) = \frac{b}{c\left(\frac{k_1 b}{cz}\right)} = \frac{z}{k_1},$$

lo cual contradice $k_1 \neq k_2^{-1}$.

Podemos ahora obtener una clasificación de los elementos de $PSL(2, \mathbb{C})$, en relación a las transformaciones canónicas actuando en la esfera de Riemann.

Definición 3.3

Sea T que pertenece al grupo de transformaciones de Möbius, tal que T fija exactamente 2 puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$, supóngase también que T es conjugada en al grupo de transformaciones de Möbius a la transformación $S(z) = \alpha z$. Entonces:

1. si $|\alpha| = 1$, a T se le llama elíptica;
2. si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, a T se le llama hiperbólica;
3. si $|\alpha| \neq 1$ y $\alpha \notin \mathbb{R}^+$, a T se le llama loxodrómica.

La proposición anterior muestra que esta definición no depende de la transformación conjugante. Más aún, la transformación $z \rightarrow \frac{1}{z}$ conjugua las transformaciones

$$T_1(z) = \alpha z \quad \text{y} \quad T_2(z) = \frac{z}{\alpha}.$$

La definición anterior no es usada de manera general en la literatura, algunos autores denominan a las transformaciones loxodrómicas o hiperbólicas, simplemente hiperbólicas, otros autores en cambio, consideran a las hiperbólicas como una subclase de las loxodrómicas.

Visualización geométrica

Para visualizar la acción geométrica de las transformaciones de Möbius en la esfera de Riemann y en el plano complejo, es útil considerar ciertas familias de “círculos”. Con este propósito se toman $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ distintos y

$$\bar{\varphi}(z) = \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2} \quad (3.1).$$

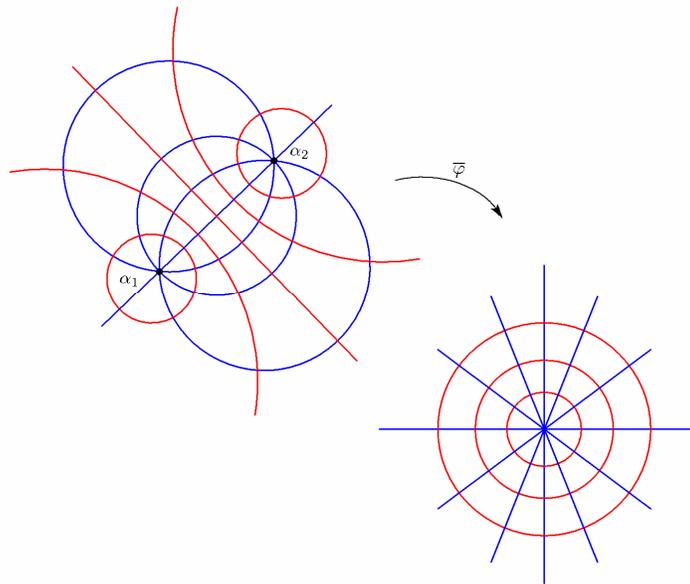


Figura 3.1: configuración de Steiner

Obsérvese que como $\bar{\varphi}$ es una transformación de Möbius, $\bar{\varphi}$ transforma los “círculos” que pasan por α_1 y α_2 , en rectas por el origen ya que envía α_1 a 0 y α_2 a ∞ . También los “círculos” concéntricos al origen $\{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$ son la imagen bajo $\bar{\varphi}$ de los conjuntos definidos por la siguiente ecuación

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : \frac{|z - \alpha_1|}{|z - \alpha_2|} = r \right\}$$

estos conjuntos son “círculos” ya que $\bar{\varphi}^{-1}$ es de Möbius. A estos “círculos” se les llama de Apolonio con respecto a los puntos límite α_1 y α_2 . Nótese que estos “círculos” están caracterizados por la propiedad de ser el conjunto de puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos tienen una razón constante. En caso de que r tome un solo valor, el “círculo” de Apolonio es una recta.

Por ejemplo para $r = 1$ tenemos que $\frac{|z - \alpha_1|}{|z - \alpha_2|} = 1 \Rightarrow |z - \alpha_1| = |z - \alpha_2|$ es decir es la mediatriz del segmento determinado por α_1 y α_2 que es considerada como una circunferencia de Apolonio de diámetro infinitamente grande o lo que es lo mismo una recta.

Denotamos por C_1 a la familia de “círculos” que pasan por α_1 y α_2 , y por C_2 la familia de los “círculos” de Apolonio con respecto a estos puntos (véase la Figura 3.1), con referencia a la figura, supongamos que p es un punto arbitrario en la línea que atraviesa a α_1 y α_2 , pero que no entran en el segmento que conecta los puntos fijos. Si K es el círculo de radio $\sqrt{|p - \alpha_1||p - \alpha_2|}$ centrado en p , α_1 y α_2 , son simétricos con respecto a K . Por lo tanto K corta a cada miembro de C_1 en ángulos rectos. Al variar la posición de p obtenemos así la familia de círculos C_2 de forma que α_1 y α_2 , son simétricos con respecto a cada miembro de C_2 , y cada miembro de C_2 es ortogonal a cada miembro de C_1 .

Por lo que esta configuración, llamada de Steiner, cumple las siguientes propiedades:

1. Cada “círculo” en C_1 intersecta a cada “círculo” de C_2 ortogonalmente en dos puntos.
2. Además, puesto que $\bar{\varphi}$ es conforme, dos de estas líneas deben contener el mismo ángulo en 0 como el correspondiente círculos C_1 en α_1 . Hemos tratado de hacer esto de la manera mas fácil, es por ello que en nuestra imagen se han dibujando círculos C_1 que pasen por α_1 en las direcciones uniformemente espaciadas, con cada uno formando un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ con el siguiente.

Se ha considerado anteriormente que T una transformación de Möbius elíptica si es conjugada un transformación $S(z) = \alpha z$ con $|\alpha| = 1$, lo que significa que S es una rotación simple correspondiente a $\alpha = e^{i\theta}$.

Como S es una rotación si y sólo si cada círculo centrado en el origen se mapea en sí mismo, entonces T es elíptica si y sólo si cada círculo de C_2 se mapea en sí mismo.

Con $\alpha = \frac{\pi}{3}$, el lado derecho de la figura 3.1 ilustra el efecto de S en un punto \tilde{z} .

Así mismo en el lado izquierdo usted puede ver los resultados correspondientes, el efecto inequívoco de $T: z$ se desplaza a lo largo del círculo C_2 hasta que se encuentra en el círculo C_1 tomando un ángulo $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ con el círculo original C_1 a través de z .

Asimismo se considero que T es una transformación de Möbius hiperbólica si es conjugada a una transformación $S(z) = \alpha z$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$, lo que significa que es una expansión simple correspondiente a α .

Entonces S es una expansión si y sólo si mapea cada línea que pasa por el origen en ella misma, T es hiperbólica si y sólo si mapea cada círculo de C_1 en sí mismo.

Por último, si T es una transformación de Möbius loxodrómica entonces se conjuga a una transformación $S(z) = \alpha z$ con $|\alpha| \neq 1$ y $\alpha \notin \mathbb{R}^+$, $\alpha = \rho e^{i\theta}$ entonces S es la composición de una rotación y una expansión.

En este caso, ni los círculos C_1 , ni los círculos C_2 son invariantes. Las curvas que son invariantes son espirales.

A continuación estudiaremos más detalladamente cada una de las clases resultante de la clasificación de las transformaciones de Möbius.

3.3 Transformaciones elípticas

Sean T elíptica con puntos fijos α_1, α_2 y φ como en (3.1), entonces

$$S = \varphi T \varphi^{-1} = e^{i\theta} z$$

Lema 3.2

Si C es un “círculo” de Apolonio con puntos límite α_1 y α_2 , entonces $T(C) = C$.

Demostración.

Como S preserva $\varphi(C)$, por el lema 1, entonces $T = \varphi S \varphi^{-1}$ preserva

$$\varphi^{-1}\varphi(C) = C.$$

Lema 3.3

Si A es un “círculo” por α_1 y α_2 , entonces $T(A)$ es un “círculo” por α_1 y α_2 , que forma con A un ángulo θ en α_1 , y en α_2 .

Demostración.

Como T fija α_1 y α_2 , $T(A)$ es un “círculo” por α_1 y α_2 . Ahora $\varphi(A)$ y $S\varphi(A)$ forman un ángulo θ en el origen y por la conformalidad de φ^{-1} se tiene que

$$A = \varphi^{-1}\varphi(A) \quad \text{y} \quad T(A) = \varphi^{-1}S\varphi(A).$$

también se intersecan en un ángulo θ en α_1 . Para probar la afirmación en el punto α_2 , se intercambian los papeles de α_1 y α_2 en la expresión de φ (véase la Figura 3.2).

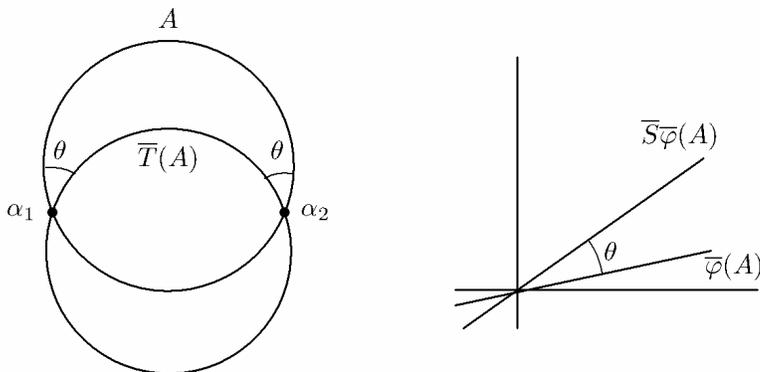


Figura 3.2: Las transformaciones elípticas intercambian los “círculos” por los puntos fijos (rotándolos)

En resumen, una transformación elíptica es una rotación en los “círculos” de Apolonio en el plano complejo. (Véase las Figuras 3.3)

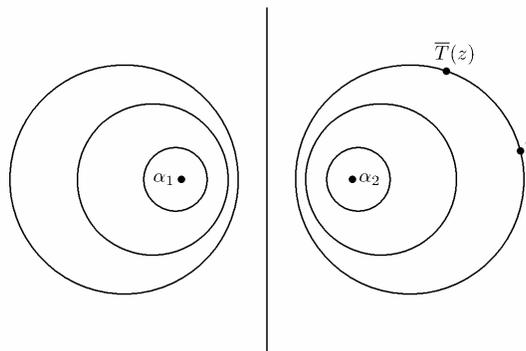


Figura 3.3: Las transformaciones elípticas rotan los círculos de Apolonio

Acción de las transformaciones elípticas en la esfera

La acción geométrica de estas transformaciones consiste en una rotación alrededor de un “círculo” de puntos fijos

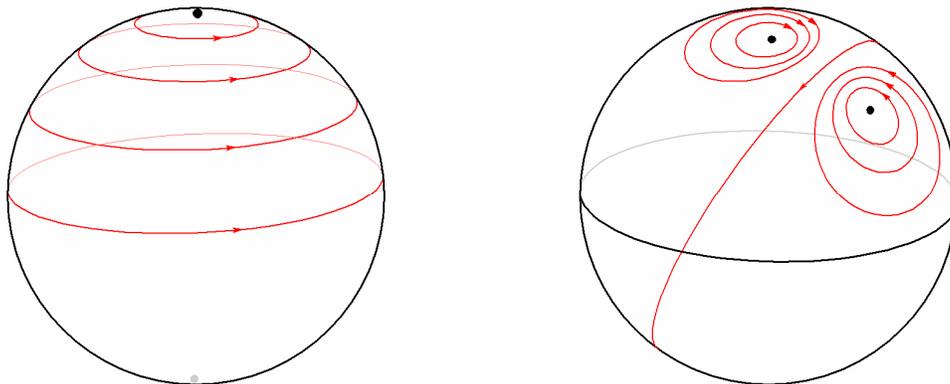


Figura 3.4

Con $\alpha > 0$, la figura 3.4 pone de manifiesto que la rotación $z \rightarrow e^{i\alpha} z$ en \mathbb{C} induce igualmente a una rotación en la Σ sobre el eje vertical a través de su centro. Círculos horizontales en Σ giran (en la dirección de las flechas) en sí mismos; por cumplir dicha característica se les llamara **curvas invariante de la transformación**.

En la misma figura también es claramente evidente que los puntos fijos de dicha rotación son 0 y ∞ . Tenga en cuenta también que los círculos (grandes) a través de estos puntos fijos (que son ortogonales a los círculos invariables) se permutan entre sí.

3.4 Transformaciones hiperbólicas

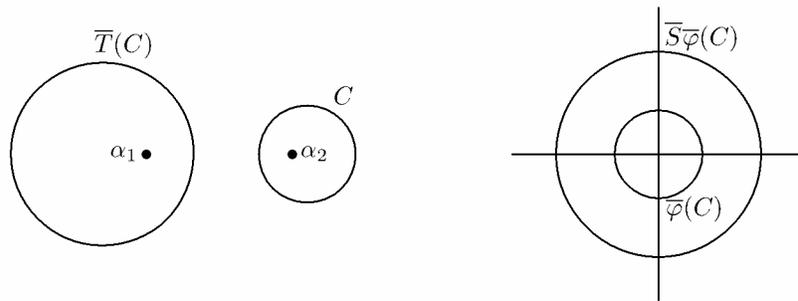


Figura 3.5: Las transformaciones hiperbólicas intercambian los “círculos” de Apolonio

Como en el caso elíptico consideramos $\varphi(z)$ como en (3.1) y T hiperbólica con puntos fijos α_1 y α_2 , por lo cual

$$S = \varphi T \varphi^{-1} = kz, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

En este caso T preserva los “círculos” por α_1 y α_2 e intercambia los “círculos” de Apolonio. La primera afirmación se sigue de manera inmediata (véase la Figura 3.6). Ahora, si C es un “circulo” de Apolonio, entonces $\varphi(C)$ y $S\varphi(C)$ son círculos distintos concéntricos al origen y

$$\varphi^{-1}S\varphi(C) = T(C)$$

es otro círculo de Apolonio (véase la figura 3.6)

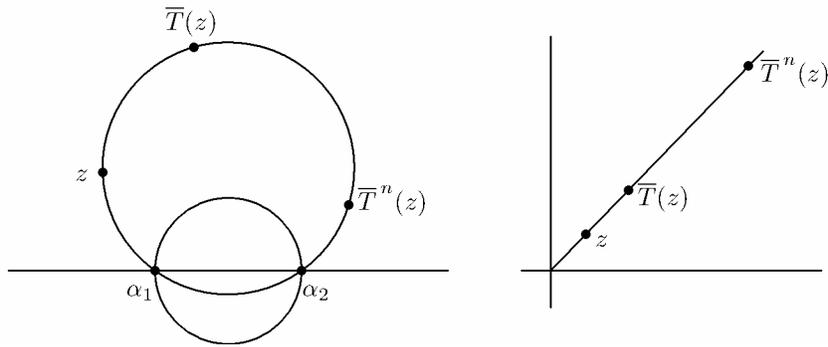


Figura 3.6: “Círculos” fijos de las transformaciones hiperbólicas

Obsérvese que al iterar T , si $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$T^n(z) = (\varphi^{-1}S\varphi)^n(z) = \varphi^{-1}S^n\varphi(z).$$

Por lo cual, si $k > 1$ y $z = \alpha_1$, entonces $T^n(z) \rightarrow \alpha_2$, cuando $n \rightarrow \infty$, ya que se $S^n\varphi(z)$ acerca a ∞ . En este caso los puntos fluyen hacia α_2 y se dice que α_2 es el atractor. También, $S^n\varphi(z)$ se aleja de 0 y $T^n(z)$ de α_1 , se dice que α_1 es el repulsor. Si $k < 1$, es claro que se invierten los papeles, α_1 es ahora el atractor (véase las Figuras 3.6 y 3.7).

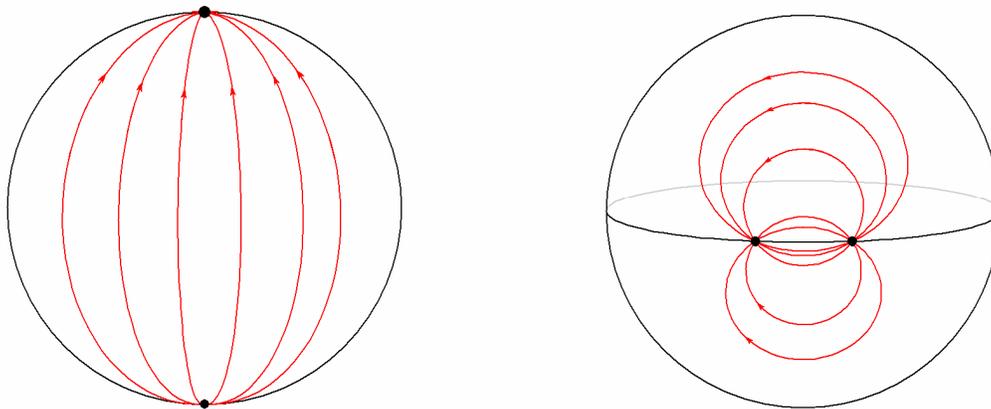


Figura 3.7: Acción de las transformaciones hiperbólicas en la esfera

En el lado izquierdo de la figura 3.7, se ve claramente que los puntos fijos son 0 y ∞ , pero los papeles de las dos familias de curvas en la figura 3.4 están al revés: las curvas invariantes son los grandes círculos a través de los puntos fijos en los polos y los círculos horizontales ortogonales se permutan entre sí.

Transformaciones loxodrómicas

Las loxodrómicas son una composición de hiperbólicas y elípticas, por lo que su dinámica consiste de una rotación de los “círculos” de Apolonio, seguida de una traslación a lo largo de los “círculos” por α_1 y α_2 (o viceversa, ya que estas funciones conmutan). De manera análoga al caso hiperbólico, uno de los puntos fijos es un atractor y el otro un repulsor. En este caso, no hay “círculos” fijos, sin embargo, estas transformaciones preservan espirales que se enrollan en los puntos fijos (véase la Figura 3.8).

Si los puntos fijos son 0 e ∞ , esto se sigue al considerar $T(z) = az$, $a = e^{r+i\theta}$, loxodrómica y $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$; se tiene entonces que las imágenes de este punto bajo las iteraciones de T son los puntos

$$z_0 e^{nr+in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

por lo cual, la espiral

$$z_0 e^{nr+ix\theta}, \quad x \in \mathbb{R},$$

es invariante bajo T .

El caso general se sigue por conjugación, queda como ejercicio para el lector la verificación de los detalles.

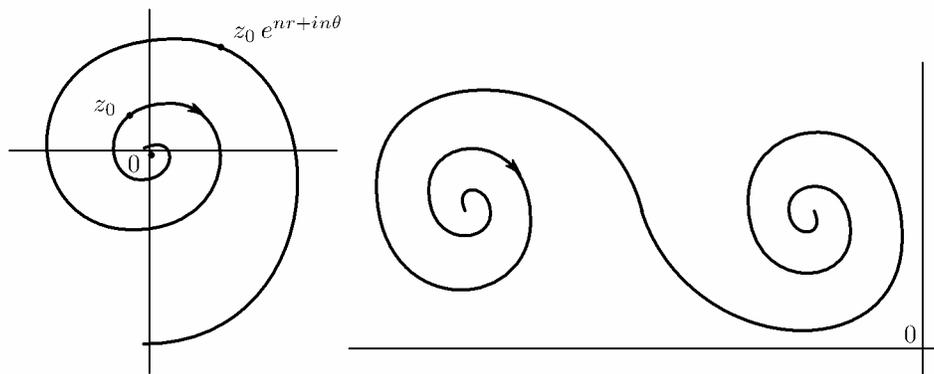


Figura 3.8: Espirales invariantes bajo las transformaciones loxodrómicas

Acción de las transformaciones hiperbólicas en la esfera

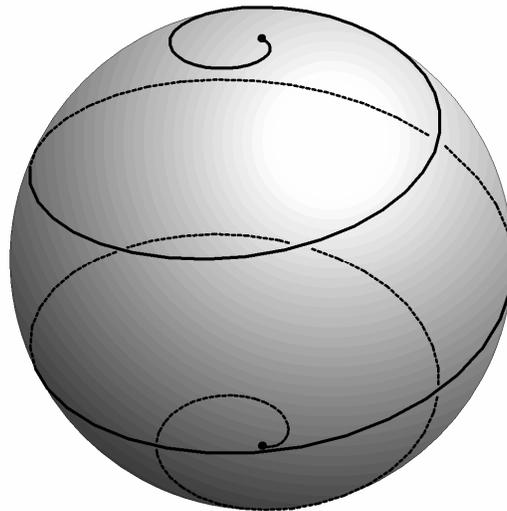


Figura 3.9

Figura 3.9 muestra el efecto combinado de la rotación y la expansión que se mostró en la figura 3.3 y 3.7. Aquí las curvas invariantes están ilustradas como "espiral", sin embargo, las dos familias de los círculos son invariantes en su conjunto, en el sentido de que los miembros de cada familia se permutan entre sí.

Por lo que se puede decir que las transformaciones elípticas e hiperbólicas son casos especiales de las transformaciones loxodrómicas.

Transformaciones parabólicas

Las traslaciones de la forma $S(z) = z + b$ tienen como familia de "círculos" fijos a las rectas paralelas al vector b , las cuales se intersectan en ∞ (véase la Figura 3.10). Al iterar S los puntos de C se mueven hacia ∞ en la dirección del vector b .

En el caso general, si T es parabólica y fija α , conjugando con

$$\varphi(z) = \frac{1}{z - \alpha}$$

se tiene que la familia de "círculos" fijos cubren $\hat{\mathbb{C}}$ y se intersectan solamente en α . Al iterar T algunos puntos fluyen a lo largo de estos "círculos" hacia α , otros

se “alejan” de este punto, para posteriormente “acercarse” a él (véase las Figuras 3.10 y 3.11). Estas afirmaciones se pueden probar de manera análoga a las del caso hiperbólico.

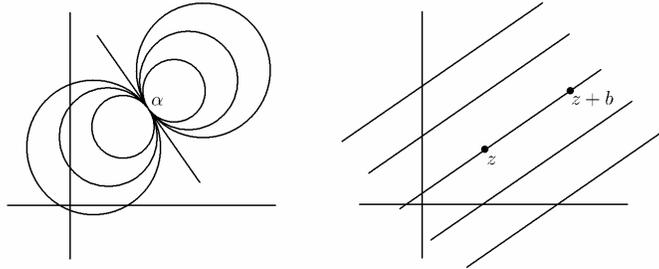


Figura 3.10: Círculos fijos de las transformaciones parabólicas

La configuración de los “círculos” fijos de las parabólicas descrita en la Figura 3.10 se enriquece al incorporar su familia ortogonal, como se muestra en la Figura 3.12. Esta nueva configuración describe de manera más detallada la geometría de las transformaciones parabólicas y se puede pensar como un caso degenerado de la configuración de Steiner, que se obtiene al juntar los dos puntos límite α_1 y α_2 , en uno solo, que es precisamente el punto α .

La familia de los “círculos” fijos, la denotamos por C_2 , como ya se mencionó consiste de “círculos” tangentes en α , que cubren la esfera de Riemann, es decir, si $F_1, F_2 \in C_2$, entonces $F_1 \cap F_2 = \{\alpha\}$. Esta familia se puede pensar como un caso degenerado de los “círculos” de Apolonio que originalmente rodean los puntos límite α_1 y α_2 , y que al deformar estos en un solo punto α , se transforman en “círculos” tangentes en α , que cubren la esfera de Riemann.

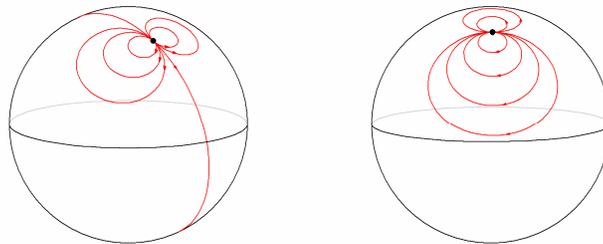


Figura 3.10: Acción de las transformaciones parabólicas en la esfera

En este sentido, las parabólicas se pueden pensar como un caso degenerado de las elípticas, al conservarse en el límite ese carácter rotacional por los círculos de Apolonio.

La otra familia, que denotamos por C_1 , es la familia ortogonal, esto es, los “círculos” obtenidos al rotar (por multiplicación por i) alrededor de α , los “círculos” de la familia C_2 .

Para el caso $\alpha = \infty$, la rotación puede ser sobre cualquier punto del plano. Los “círculos” de esta familia C_1 son intercambiados por las parabólicas, esto es, se rotan entre si, alrededor de α (véase la Figura 3.11). Todas estas afirmaciones son evidentes para el caso de las traslaciones, el caso general se sigue por biyectividad y conformalidad al conyugar.

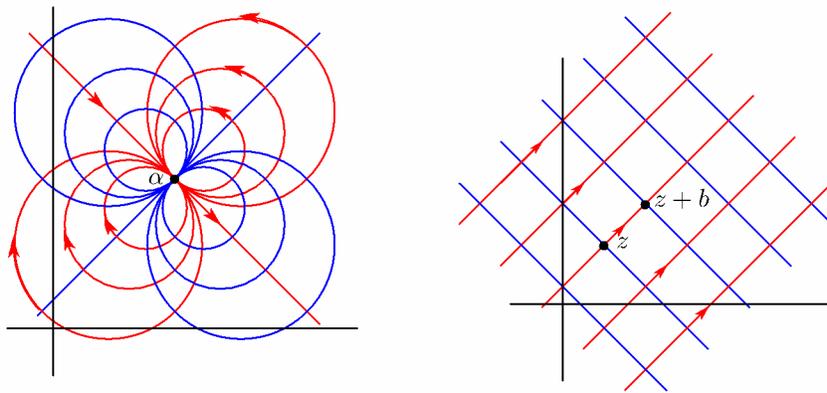


Figura 3.12 Clasificación de Steiner degenerada.

3.7 Clasificación por la traza

Ahora exhibimos una caracterización de los elementos de en el grupo de transformaciones de Möbius en términos de la traza, esta clasificación es de gran utilidad, por ejemplo, permite detectar de manera inmediata de qué tipo es una transformación de Möbius dada.

Definición 3.4

Sea T una transformación de Möbius distinta de la identidad.

1. Si T es parabólica se define su multiplicador como 1.

2. Si T es conjugada a una transformación de la forma $z \rightarrow kz$, $k \neq 0, 1$, a los números k y $\frac{1}{k}$ se les llama los multiplicadores de T .

Se sigue de la clasificación definida por la conjugación a formas canónicas que los multiplicadores están bien definidos.

El grupo de matrices de 2×2 con entradas complejas y determinante distinto de 0 se denota por $GL(2, \mathbb{C})$, se define la traza de $A \in GL(2, \mathbb{C})$ como la suma de los elementos diagonales, esta se denota por $tr(A)$. Usaremos el siguiente resultado básico del álgebra lineal.

Lema 3.4

La traza es invariante bajo conjugación en $GL(2, \mathbb{C})$.

Demostración.

Basta probar que $tr(AB) = tr(BA)$ $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$, ya que entonces $tr(ABA^{-1}) = tr(A^{-1}AB) = tr(B)$.

Escribiendo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Se tiene

$$AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

por lo que $tr(AB) = tr(BA)$.

La traza de una transformación de Möbius está bien definida salvo un signo, puesto que existen dos matrices cuyo determinante es igual 1 que la definen.

Definición 3.5

Dada T que pertenece a el grupo de transformaciones de Möbius,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

se define la traza de T como $\pm \frac{a+d}{\sqrt{ad-bc}}$.

Teorema 3.2

Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, $T \neq Id$, entonces

$$k + \frac{1}{k} + 2 = \chi^2,$$

donde $k, \frac{1}{k}$ son los multiplicadores de T y χ es su traza.

Demostración.

Caso 1: T es parabólica.

Como el cuadrado de la traza es invariante bajo conjugación, se tiene

$$\chi^2(T) = \text{tr}^2 \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

y se sigue el resultado.

Caso 2: T no es parabólica.

En este caso T es conjugada a una transformación de la forma $S(z) = kz$, la cual está definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k}} \end{pmatrix}$$

Por lo cual

$$\chi^2(T) = \chi^2(S) = \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 = k + \frac{1}{k} + 2.$$

Para transformaciones con dos puntos fijos finitos α_1 y α_2 , se tiene una expresión de los multiplicadores en términos de estos puntos. Sea

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

Con esta propiedad, $S(z) = kz$, donde k es uno de los multiplicadores de T y

$$\bar{\varphi}(z) = \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2}.$$

Entonces,

$$S = \varphi T \varphi^{-1} \quad \text{y} \quad S\varphi = \varphi T$$

Por lo cual

$$\frac{T(z) - \alpha_1}{T(z) - \alpha_2} = k \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2},$$

y evaluando en ∞ , se tiene

$$k = \frac{\frac{a}{c} - \alpha_1}{\frac{a}{c} - \alpha_2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{k} = \frac{\frac{a}{c} - \alpha_2}{\frac{a}{c} - \alpha_1}.$$

Para el caso de una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$ que fija dos puntos, uno de los cuales es ∞ , es decir, de la forma $T(z) = \alpha z + \beta$, los multiplicadores se encuentran con facilidad, estos son precisamente $\alpha, \frac{1}{\alpha}$. Lo cual se sigue, ya que con esta notación el segundo punto fijo está dado por

$$\frac{\beta}{1 - \alpha},$$

y conjugando con

$$\varphi(z) = z - \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

se obtiene

$$S(z) = \varphi T \varphi^{-1}(z) = \varphi T \left(z + \frac{\beta}{1-\alpha} \right) = \alpha z,$$

(como el término constante es cero, no es necesario efectuar más cuentas).

Esta facilidad para detectar los multiplicadores de una transformación que fija ∞ , permite también clasificarla de manera inmediata, por ejemplo,

$$z \rightarrow iz + 5$$

es elíptica, sin embargo

$$z \rightarrow 7z + 8 + i$$

es hiperbólica.

El siguiente resultado es muy importante, exhibe un criterio, también sencillo, para clasificar cualquier transformación en que pertenece al grupo de transformaciones de Möbius.

Teorema 3.3

Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, $T \neq Id$ y χ la traza de T . Entonces

1. T es parabólica si y sólo si $\chi = \pm 2$;
2. T es elíptica si y sólo si $\chi \in (-2, 2)$;
3. T es hiperbólica si y sólo si $\chi \in (2, \infty) \cup (-2, -\infty)$;
4. T es loxodrómica si y sólo si $\chi \notin \mathbb{R}$.

Demostración.

Probamos primero las condiciones de necesidad.

El caso parabólico ya se probó.

Si T es elíptica, entonces T es conjugada a una transformación de la forma $S(z) = e^{i\theta} z$, $\theta \in (0, 2\pi)$, la cual está determinada por la matriz

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\pm\chi(T) = \pm\chi(S) = \pm 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \in (-2, 2)$.

Si T es hiperbólica, entonces T es conjugada a una transformación definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k}} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}^+,$$

por lo cual

$$\chi^2(T) = \chi^2(S) = \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = k + \frac{1}{k} + 2 > 4,$$

puesto que

$$\left(\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 > 0.$$

Ahora, si T es loxodrómica y $\rho e^{i\theta}$, $\rho \neq 0, 1$, $\theta \in (0, 2\pi)$, es uno de sus multiplicadores, se sigue del Teorema 3.2 que

$$\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) + 2 = \chi^2(T).$$

Si $\chi(T) \in \mathbb{R}$, se tendría $\chi^2(T) \in \mathbb{R}^+$, y $\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\operatorname{sen}\theta = 0$, por lo cual

$\operatorname{sen}\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Al tomar la parte real se tiene $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + 2 \in \mathbb{R}^+$, lo

que es una contradicción, ya que $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) > 2$.

Para probar la suficiencia, obsérvese que si $\chi^2(T) = 4$, se sigue de la primera parte que T no es elíptica, ni tampoco hiperbólica o loxodrómica, por lo que debe ser parabólica. Los otros casos se siguen de manera análoga.

El siguiente resultado, que es consecuencia del Teorema 3.2, muestra que χ^2 clasifica las clases conjugadas de en el grupo de transformaciones de Möbius.

Corolario 3.1

Dos transformaciones de Möbius complejas T , S son conjugadas en el grupo de transformaciones de Möbius si y sólo si

$$\chi^2(T) = \chi^2(S).$$

Demostración

Tenemos por el lema 3.4 que

$$\operatorname{tr}(\varphi T \varphi^{-1}) = \operatorname{tr}(\varphi \varphi^{-1} T) = \operatorname{tr}(T)$$

Pero como T y S son conjugadas entonces

$$S = \varphi T \varphi^{-1} \Rightarrow \operatorname{tr}(S) = \operatorname{tr}(T)$$

Como el cuadrado de la traza es invariante bajo conjugación se concluye que

$$\chi^2(T) = \chi^2(S)$$

El caso reciproco es trivial.

Damos ahora unos ejemplos, las transformaciones

$$z \rightarrow \frac{2z+3}{z+2} \quad \text{y} \quad z \rightarrow \frac{2z+9}{-z-4}$$

son hiperbólica y parabólica, respectivamente.

Por otra parte, las funciones

$$z \rightarrow -\frac{1}{z} \quad \text{y} \quad z \rightarrow \frac{iz-2}{z+iz}$$

son elíptica de orden 2 y loxodrómica, respectivamente.

UNIDAD IV: ALGUNAS APLICACIONES DE LAS TRANSFORMADAS DE MÖBIUS

En la unidad IV se estudiara dos de las aplicaciones más conocidas de transformaciones de Möbius; el Modelo del Semiplano y el Modelo del Disco de Poincaré, en ambos se describen las transformaciones que sirven como isometrías; en el Modelo del Semiplano son el grupo de Transformaciones de Möbius definidas por matrices cuadradas de orden 2 con entradas reales y en el Modelo del Disco de Poincaré son el grupo de transformaciones de Möbius definidas con matrices cuadradas de orden 2 pero con entradas complejas.

El modelo del semiplano

El modelo del semiplano superior es atribuido a H. Poincaré. Este modelo consiste de todos los puntos en el semiplano superior del plano de coordenadas cartesianas (x, y) sin incluir los puntos del eje x .

Las **rectas** en este modelo son semicírculos euclidianos cuyos centros están sobre el eje x y las semirrectas euclidianas verticales, a las que podemos considerar como arcos de círculos de radio infinito. En la Figura 4.1, k es un ejemplo de tales rectas.

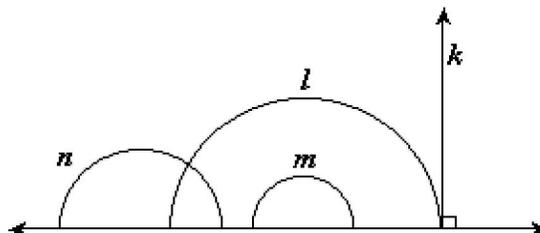


Figura 4.1

En el modelo representado en la Figura 4.1, las rectas l y n se intersectan, así que no son paralelas. Las rectas k , n y m son **divergentemente paralelas**, pues no se intersectan ni en el semiplano ni en su frontera. Las rectas k y l son **asintóticamente paralelas**, pues se intersectan en la frontera, que, por construcción, no está incluida en el modelo.

Algebraicamente se define el semiplano superior como

$$H^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

Mostraremos en esta unidad que este semiplano es uno de los modelos más importantes del plano hiperbólico y que las transformaciones de Möbius que lo preservan, actúan como isometrías hiperbólicas.

Se describen primero las transformaciones de Möbius que describen el semiplano superior

Teorema 4.1

Las transformaciones de Möbius que preservan \mathbb{H}^2 son precisamente aquellas definidas por $PSL(2, \mathbb{R})$

Demostración

Sea

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1 \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Tenemos que $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ahora, como

$$T(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{(ai+b)(-ci+d)}{c^2+d^2},$$

se tiene que

$$\text{Im}(T(i)) = \frac{1}{c^2+d^2} > 0$$

se sigue entonces por conexidad que T preserva \mathbb{H}^2

Por otra parte, si

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1$$

preserva \mathbb{H}^2 , entonces la continuidad y la biyectividad implican que T también preserva la recta real extendida \mathbb{R} .

Ahora si

$$S(z) = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}},$$

Resulta que T y S coinciden en \mathbb{R} , ya que si $z \in \mathbb{R}$, entonces

$$T(z) = \overline{T(\bar{z})} = S(\bar{z}) = S(z).$$

Por lo tanto, como T y S coinciden en mas de dos puntos, $T = S$ y

$$a = \pm \bar{a}, \quad b = \pm \bar{b}, \quad c = \pm \bar{c}, \quad d = \pm \bar{d}.$$

Hay que probar que a, b, c y d no son imaginarios puros, si así fuera, se tendría

$$T(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(-\bar{c}i + \bar{d})}{|ci + d|^2},$$

Y

$$\text{Im}T(i) = \frac{a\bar{d} - b\bar{c}}{|ci + d|^2} = -\frac{\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}}{|ci + d|^2} < 0,$$

lo cual contradice que T preserva H^2 .

Con el fin de desarrollar algunas propiedades del modelo del semiplano es necesario introducir el concepto de densidad y como está induce a una métrica así como también bajo biyecciones conformes se obtienen isometrías.

Densidades

Definición 4.1

Sea A una región en \mathbb{R}^n , una densidad en A es una función continua

$$\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Las densidades nos permiten medir longitudes de curvas de distintas maneras. Mas precisamente, dada una densidad λ en una región A y γ una curva continua y con primera derivada continua (clase C^1) en A , se define la λ -longitud de γ como

$$\int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

donde $\gamma : [a, b] \rightarrow A$. Esta definición se alarga a curvas de clase C^1 por tramos. Denotamos esta longitud por $l_\lambda(\gamma)$. Esta medición de curvas permite también medir la distancia entre puntos.

Definición 4.2

Sea λ una densidad en una región A y $z_1, z_2 \in A$, se define la λ -distancia de z_1 a z_2 , como

$$\inf_{\gamma} l_\lambda(\gamma)$$

donde el ínfimo es sobre todas las curvas de γ clase C^1 por tramos que une z_1 con z_2 . A esta distancia se le denota por $\rho_\lambda(z_1, z_2)$.

Teorema 4.2

Sea λ una densidad definida en una región A de \mathbb{R}^n , entonces la distancia ρ_λ define una métrica en A .

Demostración.

Verifiquemos si ρ posee las cuatro propiedades de una métrica

1. Evidentemente, $\rho(x, x) = 0, \forall x \in A$.
2. ρ es simétrica.

Para esto, si se tiene una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ de clase C^1 que une z_1 con z_2 , se define $-\gamma : [a, b] \rightarrow A$ como $-\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$. Obsérvese que $-\gamma$ une z_1 con z_2 , y que usando el teorema fundamental del calculo se tiene

$$\begin{aligned} l_\lambda(-\gamma) &= \int_a^b \lambda(-\gamma(t)) |-\gamma'(t)| dt, = \int_a^b \lambda(\gamma(a+b-t)) |\gamma'(a+b-t)| dt \\ &= \int_a^b \lambda(-\gamma(s)) |-\gamma'(s)| dt = l_\lambda(\gamma) \end{aligned}$$

3. Además, se cumple la desigualdad del triangulo:

Por contradicción, si

$$\rho(x, z) > \rho(x, w) + \rho(w, z),$$

entonces existe $\xi > 0$, tal que

$$\rho(x, z) > \rho(x, w) + \rho(w, z) + \xi,$$

sin embargo, en este caso se podrían tomar dos curvas, γ_1 y γ_2 , cuyas longitudes aproximarán $\rho(x, w)$ y $\rho(w, z)$ por una cantidad menor a $\frac{\xi}{2}$, respectivamente. Esto sería una contradicción, ya que la curva $\gamma_1 + \gamma_2$ uniría x con z y tendría longitud menor a $\rho(x, z)$.

4. Falta solamente probar que si $x \neq y$, entonces $\rho(x, y) > 0$.

Para probar esto, sea D un disco cerrado con centro en x , radio r y tal que $y \notin D$. Por compacidad y continuidad existe m tal que $\lambda(z) \geq m, \forall z \in D$. Ahora, sea $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ una curva que une x con y y $t_0 \in [a, b]$, tal que $\gamma(t_0)$ es el primer punto donde la curva sale del disco abierto D (véase la Figura 4.2).

En este caso se tiene

$$l_\lambda(\gamma) = \int_a^{t_0} \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \geq mr$$

puesto que cualquier curva que une x con un punto en ∂D tiene una longitud mayor o igual a r . Por lo tanto $\rho(x, y) \geq mr > 0$.

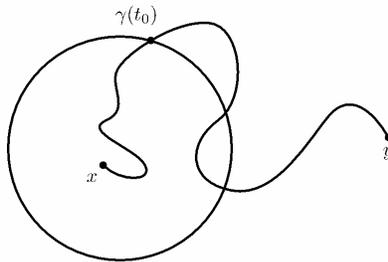


Figura 4.2: Positividad de a métrica definida por una densidad

La siguiente observación es de gran utilidad para obtener espacios isométricos, por ejemplo, al exhibir diferentes modelos del plano hiperbólico. Sean A y B dos regiones en \mathbb{R}^n y $f : A \rightarrow B$, una biyección conforme, supóngase también que la región A esta provista de una métrica definida por una densidad λ . Bajo estas hipótesis, se puede proveer a la región B con una densidad σ de tal manera que f sea una isometría. Esto se obtiene definiendo

$$\sigma(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)} \quad (4.1)$$

donde $\mu(x) = |f'(x)|$ es el factor de conformalidad de f en x . Esto se sigue, ya que

si $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ es una curva de clase C^1 , entonces se tiene

$$\begin{aligned} l_\sigma(f(\gamma)) &= \int_a^b \sigma(f(\gamma(t))) |(f\gamma)'(t)| dt \\ &= \int_a^b \mu(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \frac{\lambda(\gamma(t))}{\mu(\gamma(t))} dt \\ &= l_\lambda(\gamma). \end{aligned}$$

Como toda curva de clase en C^1 en B es de esta forma, se sigue la observación, puesto que este análisis se puede generalizar fácilmente a curvas de clase C^1 por tramos.

Es importante destacar que el argumento funciona también en el sentido inverso, es decir, si se tienen dos regiones A y B con métricas definidas por densidades λ y σ respectivamente y una biyección conforme entre ellas que satisface (4.1), entonces A y B son regiones isométricas.

En particular, si se tiene una región A en \mathbb{R}^n provista con una métrica definida por una densidad λ y una biyección conforme $f : A \rightarrow B$, que satisface la ecuación

$$\lambda(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)} \quad (4.2)$$

Entonces, f es una isometría.

Si se tiene definida una densidad λ , en una región $A \subset \mathbb{R}^n$, es claro que la λ -longitud de una curva C en A no esta unívocamente determinada, ya que al

parametrizarla se puede hacer de tal manera que se recorra algún segmento de la curva, mas de una vez. Sin embargo, si la curva C esta parametrizada por una función C^1 por tramos, de modo que la derivada se anule solamente en un numero finito de puntos y recorra la curva en la misma dirección; entonces la λ -longitud de C es única.

Para probar esto, obsérvese primero que se tienen dos parametrizaciones $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow A$ y $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow A$, de clase C^1 , que recorren el mismo segmento de la curva C , en la misma dirección y con derivada no nula, entonces se sigue del teorema de parametrización unitaria, que existe un difeomorfismo $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ tal que $\gamma_2 \varphi = \gamma_1$. Ahora, bajo estas hipótesis, se tiene por el teorema de cambio de variable real, que

$$\begin{aligned} l_\lambda(\gamma_1) &= l_\lambda(\gamma_2 \varphi) = \int_a^b |(\gamma_2 \varphi)'(t)| \lambda(\gamma_2(\varphi(t))) dt \\ &= \int_a^b \varphi'(t) |\gamma_2'(\varphi(t))| \lambda(\gamma_2(\varphi(t))) dt \\ &= \int_c^d \gamma_2'(s) \lambda(\gamma_2(s)) ds = l_\lambda(\gamma_2) \end{aligned}$$

Usando este argumento se sigue fácilmente la afirmación en el caso general.

La discusión sobre densidades nos permite presentar un primer modelo del plano hiperbólico, donde $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa como un grupo de isometrías.

Definición 4.3

El plano superior H^2 provisto con la métrica definida por la densidad

$$\lambda(z) = \frac{1}{\text{Im } z}$$

se le llama el plano hiperbólico y a esta métrica se le llama la métrica hiperbólica.

En este modelo, llamado del semiplano, es intuitivamente claro que si se tiene una curva C en H^2 y se traslada en dirección vertical, su longitud hiperbólica puede crecer tanto como se quiera (si se mueve hacia abajo), o puede decrecer tanto como se quiera (si se mueve hacia arriba); sin embargo la longitud euclidiana siempre es la misma.

Teorema 4.3

El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa como un grupo de isometrías en H^2 con la métrica hiperbólica.

Demostración.

Obsérvese primero que si

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Esta definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}),$$

Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \operatorname{Im}\frac{(az+b)(-c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} \end{aligned}$$

También como

$$T'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

Se sigue de las ecuaciones de Cauchy –Riemann que

$$\mu_T(z) = \frac{1}{|cz+d|^2}.$$

Estos hechos muestran que se cumple la relación (4.2) ya que

$$\frac{1}{\operatorname{Im}(T(z))} = \frac{|cz+d|^2}{\operatorname{Im}(z)} = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} \left(\frac{1}{\mu_T(z)} \right)$$

Por lo que se sigue del resultado.

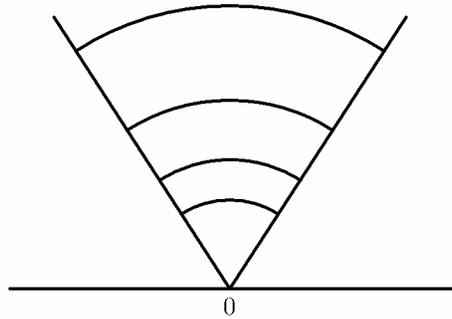


Figura 4.3

Si existen curvas que euclideanamente miden cualquier valor que se quiera, pero que hiperbólicamente siempre miden lo mismo, por ejemplo, los segmentos de círculos concéntricos de la Figura 4.3. Esto se sigue del Teorema 4.3, ya que las homotecias son isometrías hiperbólicas, al estar definidas por matrices en $SL(2, \mathbb{R})$.

Proposición 4.1

El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa transitivamente en la familia de “círculos” ortogonales al eje real.

Demostración.

Obsérvese primero que por conformalidad cualquier transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ preserva esta familia. Ahora, para probar el teorema, basta mostrar que dado cualquier “círculo” ortogonal al eje real C existe una función en $PSL(2, \mathbb{R})$ que transforma este círculo en el eje imaginario.

Si C es una recta paralela al eje imaginario, una traslación la mueve al eje imaginario. Por otra parte, si C es un círculo que intersecta ortogonalmente al eje real, este se puede transformar mediante una traslación y una homotecia en el círculo unitario, por lo que basta probar que existe un elemento en $PSL(2, \mathbb{R})$ que transforme el círculo unitario en el eje imaginario. Una opción es mandar 1 en 0 y -1 en i , lo cual sugiere tomar

$$z \rightarrow \frac{z-1}{z+1},$$

que es en efecto una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ que transforma el círculo unitario en el eje imaginario.

Nótese, que la transformación

$$z \rightarrow \frac{z+1}{z-1} \notin PSL(2, \mathbb{R})$$

por lo que es importante checar a nivel matricial las entradas, para detectar si una transformación pertenece, o no, a $PSL(2, \mathbb{R})$. Obsérvese también que la proposición 4.1 implica que $PSL(2, \mathbb{R})$ es transitivo en puntos de \mathbb{H}^2 (evidentemente lo es para los puntos de \mathbb{R}), ya que cualquier punto puede trasladarse al eje imaginario, y posteriormente aplicando una homotecia mandarlo al punto i .

Se puede ahora caracterizar todas las curvas que minimizan distancias, que en este contexto se les llama también geodésicas. Sean $z, w \in \mathbb{H}^2$ y C el “círculo” ortogonal a la recta real que pasa por z y w ; se tiene entonces que $\rho(z, w)$ está dada por la longitud hiperbólica del segmento de C que une z con w (véase la Figura 4.4). Esto se sigue, ya que en virtud de la Proposición 4.1, se puede encontrar una función en $PSL(2, \mathbb{R})$ que transforme C en el eje imaginario, y estas transformaciones, además de ser isometrías, tienen la propiedad de preservar curvas que minimizan la distancia (la última afirmación se sigue de la prueba del Teorema 4.2).

Este argumento demuestra además que el segmento de C , que denotaremos por $[z, w]$, es la única curva que minimiza la distancia; esto se sigue, ya que si hubiera otra curva de z a w , con dicha propiedad, existiría otra geodésica, distinta de un segmento vertical, uniendo a dos puntos en el eje imaginario.

Se concluye entonces que los “semicírculos” en \mathbb{H}^2 , ortogonales a la recta real, contienen todas las geodésicas hiperbólicas. Estos últimos razonamientos demuestran también el siguiente importante resultado.

Teorema 4.4

Sean z, w, v tres puntos distintos en \mathbb{H}^2 , entonces

$$\rho(z, v) = \rho(z, w) + \rho(w, v) \Leftrightarrow w \in [z, v]$$

Obsérvese que el teorema anterior implica que cualquier isometría hiperbólica de \mathbb{H}^2 necesariamente manda geodésicas en geodésicas. Para obtener una fórmula general de la distancia hiperbólica, entre dos puntos cualesquiera, se prueba primero el siguiente resultado de invariabilidad de cierta expresión, bajo la acción de elementos en $PSL(2, \mathbb{R})$.

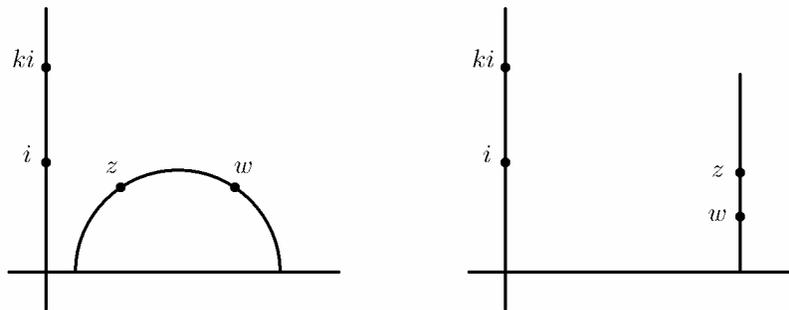


Figura 4.4

Lema 4.1

La expresión

$$\frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}$$

es invariante bajo la acción de transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Demostración.

Sea $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ dada por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad ad - bc = 1$$

se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\frac{|T(z)-T(w)|^2}{2\operatorname{Im}T(z)\operatorname{Im}T(w)} &= \frac{\left|\frac{az+b}{cz+d}-\frac{aw+b}{cw+d}\right|^2|cz+d|^2|cw+d|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w} \\
&= \frac{|(az+b)(cw+d)-(aw+b)(cz+d)|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w} \\
&= \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}
\end{aligned}$$

Se puede ahora exhibir una fórmula general de la distancia hiperbólica en el modelo del semiplano; esta mostrara ser de gran utilidad, debido a sus múltiples aplicaciones.

Teorema 4.5

Sean z y w dos puntos en H^2 , entonces

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}.$$

Demostración.

Si $z=i$ y $w=ki$, $k>1$, entonces

$$\begin{aligned}
\cosh \rho(i, ki) &= \cosh(\log k) = \frac{k + \frac{1}{k}}{2} \\
&= \frac{k + \frac{1}{k-2}}{2} + 1 = \frac{(k-1)^2}{2k} + 1 \\
&= \frac{|i-ki|^2}{2\operatorname{Im}(i)\operatorname{Im}(ki)}
\end{aligned}$$

El caso general se sigue del lema anterior y de los Teoremas 4.3 y 4.1, ya que se puede encontrar una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ que mande z y w en i y ki , $k>1$. Esto ultimo se logra enviando la geodésica por z y w al eje

imaginario, y posteriormente si es necesario aplicando una homotecia y la función $z \rightarrow -\frac{1}{z}$.

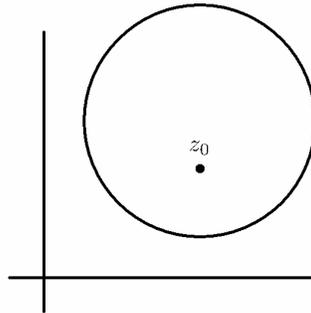


Figura 4.5: Círculo hiperbólico con centro en z_0

Una primera aplicación de esta fórmula muestra que los círculos hiperbólicos son círculos euclidianos, donde el centro euclidiano se obtiene incrementando la parte imaginaria del centro hiperbólico (véase la Figura 4.5).

Teorema 4.6

El conjunto de los puntos $z = x + iy$ en \mathbb{H}^2 , que equidistan Hiperbólicamente una distancia r de un punto $z_0 = x_0 + iy_0$, están determinados por la siguiente ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \cosh r)^2 = y_0^2 \sinh^2 r,$$

es decir, constituyen un círculo euclidiano.

Demostración.

Sea $C = \{z \in \mathbb{H}^2 : \rho(z, z_0) = r\}$, entonces

$$\cosh \rho(z, z_0) = \cosh r = 1 + \frac{|z - z_0|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} z_0}$$

y se tiene

$$\cosh = \frac{(x - x_0)^2 + y^2 + y_0^2}{2yy_0}$$

Despejando y completando cuadrados se tiene

$$2yy_0 \cosh r = (x - x_0)^2 + y^2 + y_0^2 (\cosh^2 r - \sinh^2 r)$$

y

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \cosh r)^2 = y_0^2 \sinh^2 r.$$

Se ha probado entonces que el círculo hiperbólico con centro $z_0 = x_0 + iy_0$ y radio hiperbólico r es el círculo euclidiano con centro en $x_0 + iy_0 \cosh r$ y radio $y_0^2 \sinh^2 r$ (véase la Figura 4.5).

Mostramos ahora otra manera de probar que los círculos hiperbólicos son círculos euclidianos.

Sean $z_0 \in \mathbb{H}^2$ y $r \in \mathbb{R}^+$, trazando cualquier geodésica en \mathbb{H}^2 por el punto z_0 , se encuentra otro punto $z \in \mathbb{H}^2$, tal que $\rho(z, z_0) = r$. Ahora, si C denota el círculo de Apolonio con respecto a z_0 y \bar{z}_0 que pasa por z , como \mathbb{R} es también un “círculo” de Apolonio con respecto a estos puntos límite, se tiene que cualquier transformación elíptica, que fije z_0 y \bar{z}_0 , esta en $PSL(2, \mathbb{R})$ y preserva C . En consecuencia, C consiste de puntos que equidistan hiperbólicamente una distancia r de z_0 , esto se sigue ya que las transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$ son isometrías. Finalmente, si $\rho(z_0, w) = r$, al trazar la geodésica que une z_0 con w , esta intersecta C en 2 puntos y es claro que uno de ellos es w (véase la Figura 4.6).

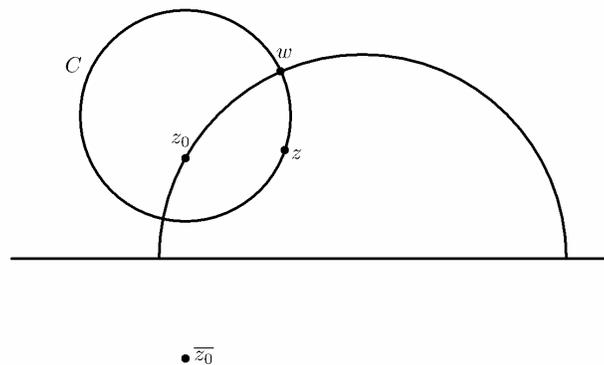


Figura 4.6 Los círculos hiperbólicos son de apolonio

Una consecuencia importante de esta caracterización de los círculos hiperbólicos es que las métricas hiperbólica y euclidiana definen la misma topología en el semiplano superior H^2 , es decir, los conjuntos abiertos en ambas métricas coinciden. Esto se sigue del hecho de que dado un punto $z_0 \in H^2$, los círculos de Apolonio en H^2 con puntos límite z_0 y \bar{z}_0 cubren $H^2 - \{z_0\}$.

En este contexto pueden interpretarse las transformaciones de Möbius en $PSL(2, \mathbb{R})$ de manera hiperbólica, primero introducimos dos definiciones, véase además las Figuras 4.7 y 3.6.

Definición 4.4

Un horociclo basado en un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ es un círculo en H^2 , tangente en α a la recta real, si α es finito, y es cualquier recta en H^2 paralela a la recta real (y distinta de esta), si $\alpha = \infty$.

Definición 4.5

Un hiperciclo por α, β puntos distintos en \mathbb{R} es la intersección de cualquier “círculo” por α y β con H^2 .

Se tiene entonces que las elípticas son rotaciones hiperbólicas en los círculos de Apolonio contenidos en H^2 . Las transformaciones parabólicas son un caso límite de las elípticas cuando los puntos fijos z_0 y \bar{z}_0 se juntan en la recta real para coincidir en un solo punto, digamos α ; se dice que son una rotación límite, esto es, son rotaciones en los horociclos (véase la Figura 4.7).

Por otra parte, si T es hiperbólica con puntos fijos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces T preserva los hiperciclos por α y β . Mas aún, al iterar T los puntos viajan en estos hiperciclos hacia el atractor, por lo que T es una traslación hiperbólica (véase la Figura 3.6). En particular, la geodésica por α y β , llamada el eje, es uno de estos hiperciclos.

Resulta que en los casos hiperbólico y parabólico los puntos fijos no pertenecen al plano hiperbólico, sin embargo juegan un papel fundamental en la acción geométrica de estas funciones, por lo que es muy importante considerar la recta real extendida, a la cual se le llama la recta al infinito.

Otra aplicación fundamental del Teorema 4.5 la establece el siguiente resultado, el cual implica que el grupo completo de isometrías de H^2 está dado por

$$\langle z \rightarrow -z, PSL(2, \mathbb{R}) \rangle$$

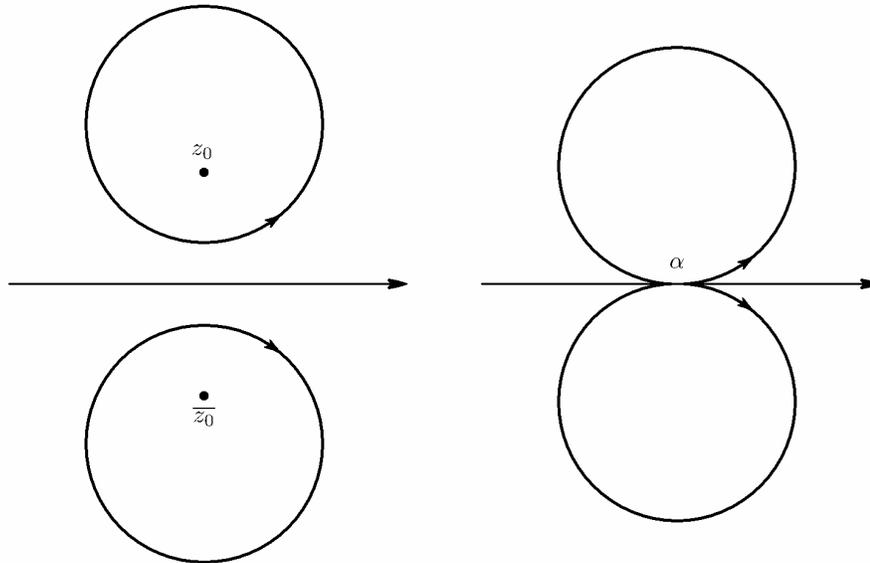


Figura 4.7

Teorema 4.7

Cualquier isometría del plano hiperbólico H^2 es un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$, o es de la forma

$$z \rightarrow \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$

Demostración.

Sea φ una isometría de H^2 con la métrica hiperbólica. Usando los Teoremas 4.2, 4.4. y la Proposición 4.1 (y si es necesario aplicando una homotecia y la función

$z \rightarrow -\frac{1}{z}$, se puede suponer, sin perder generalidad, que existe $T \in PSL(2, \mathbb{R})$, tal que la función $T\varphi$ fija puntualmente el eje imaginario positivo.

Ahora, sea $z \in \mathbb{H}^2$, $z = x + iy$ $T\varphi(z) = a + bi$, se sigue entonces del Teorema 4.5

que $\forall t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, se tiene

$$\frac{|it - T\varphi(z)|^2}{2 \operatorname{Im}(it) \operatorname{Im}(T\varphi(z))} = \frac{|it - z|^2}{2 \operatorname{Im}(it) \operatorname{Im} z}$$

Por lo cual

$$\frac{a^2 + (b-t)^2}{b} = \frac{x^2 + (y-t)^2}{y}$$

$$y(a^2 + (b-t)^2) = b(x^2 + (y-t)^2)$$

Haciendo t tender a ∞ , en esta última ecuación, se obtiene

$$b = y \quad y \quad a = \pm x$$

Finalmente, como las isometrías son evidentemente continuas, se tiene que los puntos en el primer cuadrante, donde $T\varphi$ es la función $z \rightarrow -z$ (o la identidad), es un conjunto abierto y cerrado (este argumento se aplica también al segundo cuadrante). Se sigue entonces por conexidad, y del hecho de que cualquier isometría es inyectiva, que

$$T\varphi = Id \quad \text{o} \quad T\varphi(z) = -\bar{z}$$

Estas generalizaciones muestran que como en el caso bidimensional este grupo está generado por las reflexiones en “esferas” ortogonales a \mathbb{R}_{n-1} . El siguiente resultado muestra que la distancia de un punto a una geodésica se alcanza trazando otra geodésica ortogonal.

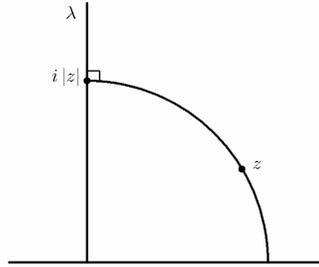


Figura 4.8

Lema 4.2

Sea λ una geodésica en \mathbb{H}^2 y $z \in \mathbb{H}^2 - \lambda$, entonces $\rho(z, \lambda)$ se alcanza en $z_0 \in \lambda$, donde el segmento $[z, z_0]$ corta ortogonalmente a λ .

Demostración.

Sin perder generalidad, se puede suponer que λ es el eje imaginario, se afirma que $\rho(z, \lambda) = \rho(z, i|z|)$ (véase la Figura 4.8). Usando la formula de la distancia hiperbólica, si $z = x + iy$, se tiene

$$\begin{aligned} \cosh \rho(z, it) &= 1 + \frac{|z - it|^2}{2(\operatorname{Im} z)t} = \frac{x^2 + y^2 + t^2}{2yt} \\ &= \frac{|z|^2 + t^2}{2yt} = \frac{|z|}{2y} \left(\frac{|z|}{t} + \frac{t}{|z|} \right) \geq \frac{|z|}{y} \end{aligned}$$

(puesto que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{x+1}{x} \geq 2$). La igualdad se obtiene si $t = z$.

Se deduce de la formula de la distancia hiperbólica una interesante propiedad que cumplen todos los triángulos hiperbólicos en el semiplano superior o en el disco de Poincaré que tienen un ángulo recto y dos puntos finitos. Esta propiedad establece que la longitud hiperbólica del lado finito esta determinada por el

ángulo de magnitud distinta de 0 y de $\frac{\pi}{2}$. Explícitamente, como $PSL(2, \mathbb{R})$ es transitivo en geodésicas, se puede tomar el triángulo determinado por ∞ , $i|z|$ y z ; si el ángulo en z es α , se tiene

$$\operatorname{sen} \alpha \cosh \rho(z, i|z|) = 1$$

(Véase la Figura 4.9). A esta propiedad se le conoce como ángulo de paralelismo.

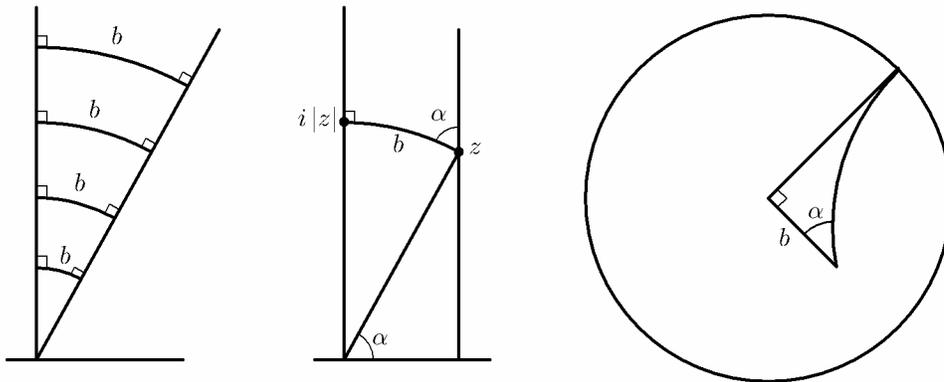


Figura 4.9

El modelo del disco de Poincaré

El modelo de Poincaré consiste en un disco abierto D en el que las líneas rectas se representan mediante arcos euclidianos que intersectan perpendicularmente a la frontera de D .

La Figura 4.10 muestra algunas rectas en el modelo de Poincaré; en esta figura: l , n y m intersectan ortogonalmente a la frontera de D .

Las rectas m y n no son paralelas pues tienen un punto en común. l y n son **divergentemente paralelas**, lo que significa que estas rectas no tienen puntos en común ni en D ni en la frontera de D . l y m son rectas **asintóticamente paralelas**, lo que significa que tienen un punto en común que no está contenido en el modelo.

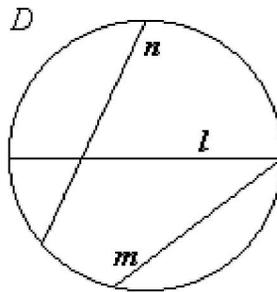


Figura 4.10

Algebraicamente definiremos el disco de Poincaré

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

Esto es muy importante, porque este disco, llamado de Poincaré, es un segundo modelo del plano hiperbólico, más homogéneo que el semiplano superior, ya que todos los puntos en la “recta” al infinito, es decir, en el círculo unitario, son similares; en contraste con la recta real extendida, en la cual ∞ juega un papel muy particular.

Con objeto, describir las transformaciones de Möbius que preservan el disco unitario se encuentra una función en $PSL(2, \mathbb{C})$ que transforme H^2 en Δ . Para

esto basta mandar tres puntos distintos de la recta real extendida, a tres puntos distintos del círculo unitario $\partial\Delta$. Una elección, que resulta muy adecuada, es enviar $-1, 0, 1$ a $i, -1, -i$.

Si $T \in PSL(2, \mathbb{C})$

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

tiene esta propiedad, evaluando en 0 , se tiene

$$\frac{b}{d} = -1 \quad \text{y} \quad b = -d.$$

Evaluando ahora en ± 1 , se sigue que

$$\frac{-a+b}{-c+d} = i \quad \text{y} \quad \frac{a+b}{c+d} = -i$$

Por consiguiente

$$-a+b = i(-c+d) \quad \text{y} \quad a-b = -i(c+d)$$

sumando y restando estas ecuaciones se obtiene

$$2d = -2ic \quad \text{y} \quad -2a = 2id$$

Finalmente, si $d = i$ se obtiene la transformación buscada

$$T(z) = \frac{z-i}{z+i},$$

ya que como $T(i) = 0$ y por construcción T manda la recta real en el círculo unitario, se sigue por conexidad que

$$T(\mathbb{H}^2) = \Delta$$

Esta transformación se conoce con el nombre de Cayley

Teorema 4.8

Las transformaciones de Möbius en $PSL(2, \mathbb{C})$ que preserva el disco unitario Δ son de la forma

$$S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Demostración.

Obsérvese primero que si

$$T(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

y S es una función en $PSL(2, \mathbb{C})$ que preserva Δ , entonces la transformación

$$U = T^{-1}ST \in PSL(2, \mathbb{R})$$

Y

$$S = T^{-1}UT$$

Escribiendo

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

basta calcular $T^{-1}UT$

Como

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2i} & \frac{i}{2i} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2i} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix},$$

se tiene

$$\begin{aligned} T^{-1}UT &= \frac{1}{2} I \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} I \begin{pmatrix} a-ic & b-id \\ a+ic & b+id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} I \begin{pmatrix} a+d+i(b-c) & a-d+i(b+c) \\ a-d+i(b+c) & a+d+i(c-b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la cual es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Denotaremos por $M(\Delta)$ a este subgrupo de transformaciones de $PSL(2, \mathbb{C})$ que preservan Δ .

La función

$$z \rightarrow \frac{az + c}{\bar{c}z + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1$$

se puede modificar a otra útil expresión, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{az + c}{\bar{c}z + \bar{a}} &= \frac{a \left(z + \frac{c}{a} \right)}{\frac{\bar{c}}{|a|} z + \frac{\bar{a}}{|a|}} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{|a|} \right)^2 \left(z - \left(-\frac{c}{a} \right) \right)}{\frac{a\bar{c}}{|a|^2} z + \frac{a\bar{a}}{|a|^2}} \\ &= \frac{e^{i\theta} (z - z_0)}{-\bar{z}_0 z + 1}, \quad z_0 \in \Delta \end{aligned} \quad (4.3)$$

Donde $e^{i\theta} = \left(\frac{a}{|a|} \right)^2$ (como $|a|^2 - |c|^2 = 1$, $z_0 \in \Delta$).

Viceversa, se sigue por biyectividad y conexidad, que toda transformación de la forma (4.3) preserva Δ , ya que $T(z_0)$ y si $|z|=1$, entonces

$$\frac{|z - z_0|}{|-\bar{z}_0 z + 1|} = \frac{|\bar{z}\bar{z} - z_0\bar{z}|}{|-\bar{z}_0 z + 1|} = 1$$

Las transformaciones de Möbius que preservan Δ son conformes en Δ , ya que los únicos puntos donde una función en $PSL(2, \mathbb{C})$ puede no ser conforme son ∞ y su preimagen.

La relación (4.1) descrita en la sección de densidades permite exhibir, sin gran

dificultad, el disco unitario Δ como un segundo modelo del plano hiperbólico.

La función de Cayley

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

es una biyección conforme de H^2 en el disco unitario Δ .

Para encontrar la métrica hiperbólica en Δ , primero hay que calcular la función inversa de f y su factor de conformalidad. Se tiene que

$$f^{-1}(w) = \frac{iw+i}{-w+1}$$

y

$$f'(z) = \frac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z+i)^2}$$

Ahora, se sigue de las ecuaciones de Cauchy-Riemann que el factor de conformalidad,

denotado en (2.1) por $\mu(z)$ está dado por $|f'(z)|$, por lo cual

$$\mu(z) = \frac{2}{|z+i|^2}$$

También

$$\operatorname{Im}[f^{-1}(w)] = \operatorname{Re}\left[\frac{w+1}{1-w}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{(w+1)(1-\bar{w})}{|1-w|^2}\right] = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}$$

Finalmente, juntando esta información se tiene

$$\begin{aligned} \sigma(w) &= \frac{\lambda(f^{-1}(w))}{\mu(f^{-1}(w))} = \frac{|f^{-1}(w)+i|}{2\operatorname{Im}f^{-1}(w)} \\ &= \frac{|1-w|^2 \left| \frac{iw+i}{1-w} + i \right|^2}{2(1-|w|^2)} = \frac{2}{1-|w|^2} \end{aligned}$$

Estos cálculos establecen una densidad en Δ que define la métrica hiperbólica en este segundo modelo (descubierto por Beltrami).

Definición 4.6

El disco unitario $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ provisto con la métrica definida por la densidad

$$\sigma(w) = \frac{2}{1-|w|^2}$$

se le conoce como el disco de Poincaré y a la métrica inducida se le llama hiperbólica.

A ambos modelos, el disco de Poincaré y el semiplano H^2 , se les conoce como el plano hiperbólico. Se sigue de las observaciones y definiciones anteriores que la función f es una isometría hiperbólica entre estos dos “discos” de la esfera de Riemann.

Es evidente de la definición de esta densidad que al trasladar euclideanamente una curva en el disco unitario hacia su frontera, es decir, al círculo unitario, su longitud hiperbólica crece tanto como se quiera. Sin embargo, al trasladar hiperbólicamente una curva hacia el círculo unitario, la longitud euclidiana decrece a cero. Este último hecho se manifiesta con gran claridad y belleza en algunas de las famosas ilustraciones de Escher, como la que reproducimos en la Figura 2.9. Una manera rigurosa de constatar estas ideas es observando la acción de la transformación hiperbólica conjugada a la homotecia $z \rightarrow kz$, $k > 1$, bajo la función f . Si denotamos a esta función como g se tiene que su eje es el intervalo $[-1, 1]$, ya que $f(\infty) = 1$ y $f(0) = -1$. También, es claro que si consideramos la imagen iterada bajo g de un segmento vertical $[-ti, ti]$, su longitud euclidiana tiende a cero, mientras que la longitud hiperbólica se mantiene constante. Esto se sigue, ya que g es composición de isometrías

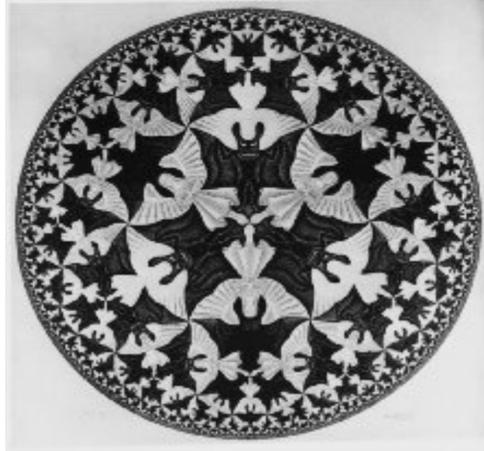


Figura 4.11

Este modelo del disco es ciertamente más homogéneo que el del semiplano, al ser todos los puntos en la recta al infinito $\partial\Delta$ similares, a diferencia de H^2 en el que ∞ es un punto distinguido. Sin embargo, al estudiar las transformaciones parabólicas e hiperbólicas, como estas son conjugadas a las traslaciones y las homotecias que se expresan de manera muy simple con números reales, el modelo del semiplano es el más adecuado. En contraste, el ámbito donde se entiende mejor a las transformaciones elípticas es en el disco unitario, ya que las rotaciones se expresan en términos de complejos unitarios.

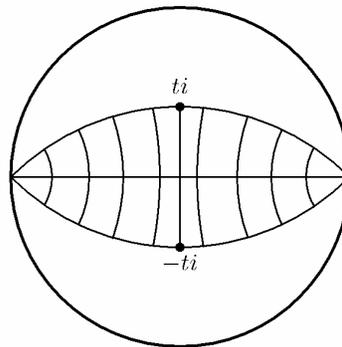


Figura 4.12: Homotecias en el disco de Poincaré

Casi todas las propiedades que se probaron para el semiplano son también válidas en el disco de Poincaré, ya que la función f es una isometría de Möbius y es por lo tanto conforme y preserva la familia de todos los “círculos”.

En primera instancia, f transforma los “círculos” ortogonales a la recta real en los “círculos” ortogonales al círculo unitario; también se sigue de la prueba de la relación (4.1) que esta función no solamente es una isometría, sino que también preserva la longitud de las curvas de clase C^1 por tramos, en particular las que minimizan la distancia. Por lo tanto, los segmentos en Δ de los “círculos” ortogonales al círculo unitario minimizan las distancias hiperbólicas.

Se sigue también de la discusión en la sección anterior, referente a que la única curva que minimiza la distancia entre i y ki es el correspondiente segmento vertical en el eje imaginario, que esta propiedad de unicidad también la cumplen los segmentos de los “círculos” ortogonales al círculo unitario. En consecuencia, las geodésicas en este modelo son los semicírculos ortogonales al círculo unitario, así como los diámetros (véase la Figura 4.13).

Estos argumentos muestran que el Teorema 4.6 también se cumple en este modelo.

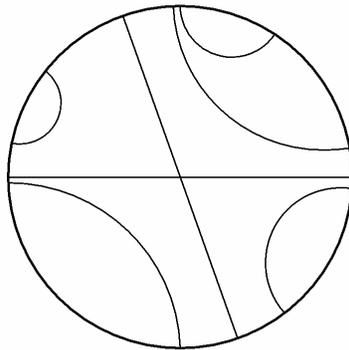


Figura 4.13

Otra consecuencia fundamental es que los grupos $PSL(2, \mathbb{R})$ y $M(\Delta)$ son conjugados bajo la transformación f , y por consiguiente el grupo $M(\Delta)$ actúa como un grupo de isometrías en el disco de Poincaré, en particular, en este modelo las rotaciones son isometrías hiperbólicas. Por otra parte, las propiedades descritas de la función f , junto con el Teorema 4.7 implican también que los círculos hiperbólicos en el disco de Poincaré son círculos euclidianos; mas aún, los discos hiperbólicos con centro en el origen son círculos euclidianos con centro en el origen. Además, como la función f es una isometría conforme que manda

geodésicas en geodésicas, se sigue que el Teorema 4.9 y la propiedad del paralelismo se cumplen también en este modelo (véase la Figura 4.9).

El siguiente resultado es el dual del Teorema 4.8 para el disco unitario.

Teorema 4.9

Cualquier isometría hiperbólica del disco de Poincaré es un elemento de $M(\Delta)$, o es de la forma

$$z \rightarrow \frac{a\bar{z} + c}{c\bar{z} + a},$$

donde $||a|^2 - |c|^2 = 1$.

Este resultado es consecuencia directa del Teorema 4.8 y del hecho de que las transformaciones $z \rightarrow \bar{z}$ y $z \rightarrow -\bar{z}$ son conjugadas bajo la función f . En la siguiente sección se probará una fórmula general para la distancia entre dos puntos cualesquiera en Δ . A continuación probamos un caso particular.

Lema 4.3

La distancia hiperbólica del origen a un punto z en el disco de Poincaré está dada por

$$\log \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

Demostración.

Se sigue de las observaciones anteriores que basta calcular la longitud hiperbólica del segmento de geodésica $[0, |z|]$, el cual se puede parametrizar por

$$\gamma: [0, |z|] \rightarrow \Delta, \quad \gamma(t) = t.$$

Por lo cual

$$l_h(\gamma) = \int_0^{|z|} \frac{2}{1-t^2} dt = \int_0^{|z|} \frac{1}{1+t} dt + \int_0^{|z|} \frac{1}{1-t} dt$$

Lo cual implica el resultado.

BIBLIOGRAFIA

Libros.

1. Dan pedoe, *Geometry A Comprehensive Course*. Cambridge. Englend, (1970).
2. J. Bak, *Complex Analysis*, Springer Verlag, New York, (1982).
3. Jerrold E. Mariden, Michael J. Hoffman, *Análisis Basico de Variable Compleja*, México, (1986).
4. Needham. Tristan, *Visual Complex Analysis*. Editorial Oxford University Pres, Gran Bretaña, (2002).
5. Rubén A. Hidalgo, *Transformaciones de Möbius una Introducción*, Valparaíso, Chile, (2006).
6. W. Rudin, *Análisis Real y Complejo*, McGraw-Hill, Madrid, (1988).

Páginas Web.

www.ima.umn.edu/arnold/papers/moebius.pdf. (25/03/2009)

en.wikipedia.org/wiki/Möbius-Trasformation-132k-. (25/03/2009)