UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMATICA

"DESARROLLO DE LAS ALGEBRAS Y COMPLEJOS DE KOSZUL"

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR:

PATRICIA JUDITH CHAFOYA CASTRO

CLAUDIA YANIRA PEÑA JANDRES

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICA

CIUDAD UNIVERSITARIA, 10 de agosto de 2009

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMATICA

"DESARROLLO DE LAS ALGEBRAS Y COMPLEJOS DE KOSZUL"

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR:

FATRICIA JUDITH CHAFOYA CASTRO

CLAUDIA YANIRA PEÑA JANDRES

FARA OPTAR AL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICA

ASESORES

Ing. José Francisco Marroquín

Licda. Claudia Patricia Corcio de Beltrán

CIUDAD UNIVERSITARIA, 10 de agosto de 2009

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

MSc. Rufino Antonio Quezada Sánchez

SECRETARIO GENERAL

Lic. Douglas Vladimir Alfaro Chávez

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MÁTEMATICA

DECANO:

Dr. Rafael Gómez Escoto

SECRETARIA:

Licda. Maria Trinidad Trigeros de Castro

ESCUELA DE MÁTEMATICA

DIRECTOR:

Ing. Carlos Mauricio Canjura

CIUDAD UNIVERSITARIA, 10 de agosto de 2009

Agradecimientos

Gracias a Dios

Por permitirme llegar hasta este momento tan importante de mi vida y lograr otra meta más en mi carrera.

Gracias a mis padres Cristóbal Chafoya y Marta Castro

Por su cariño, comprensión y apoyo sin condiciones ni medida. Gracias por guiarme sobre el camino de la educación. Creo ahora entender porque me obligaban a terminar mi tarea, y muchas cosas más que no terminaría de mencionar. Sobre todo gracias por ser un ejemplo a seguir.

Gracias a alguien muy especial Julio Cesar Escalante Tejada

Por tu apoyo, compresión y amor que me permite sentir poder lograr lo que me proponga. Gracias por escucharme y por tus consejos. Gracias por ser parte de mi vida; eres lo mejor que me ha pasado.

Gracias a mi abuelita Mercedes Merlos

Por encomendarme siempre con Dios para que saliera adelante. Yo se que sus oraciones fueron escuchadas.

Gracias a mi compaëra de tesis Claudia Yanira Peña Jandres

Por hacer que cada pedazo de tiempo fuera ameno. No voy a olvidar sus consejos, enseanzas y ayuda durante el lapso de nuestra tesis. Asi como el tiempo que compartimos durante toda la carrera, en especial por ser mi amiga.

Gracias a mi asesor Ing. José Francisco Marroquín

Tus consejos, paciencia y opiniones sirvieron para que me sienta satisfecha en mi participación dentro del proyecto de investigación. Además por orientarme en el área de Álgebra Abstracta.

Gracias a mi asesor Lic. Claudia Patricia Corcio de Beltrán

Por su apoyo incondicional para la finalización de este trabajo. Además por ser parte de mi inspiración desde el primer año de mi carrera (por su preocupación de que aprendieramos y sus consejos).

Gracias a cada uno de los maestros

Que participaron en mi desarrollo profesional durante mi carrera, sin su ayuda y conocimientos no estaría en donde me encuentro ahora.

Gracias a todos mis amigos

Que estuvieron conmigo y compartimos tantas aventuras, experiencias, desveladas y triunfos. Gracias a cada uno por hacer que mi estancia en la UES fuera super divertida.

F. Patricia Judith Chafoya Castro

Agradezco este logro,

En primer lugar a **Dios** por haberme brindado la capacidad, principalmente la sabiduría necesaria los cuales me impulsaron para el avance de este trabajo y el cual pudo ser posible.

En segundo lugar, a mi familia en principal a mis padres **Marco Peña** y **Ana Jandres**, por su apoyo moral y económico, el cual fue muy importante en el transcurso de mi carrera.

En tercer lugar a mis asesores **Ing. José Francisco Marroquín** y **Lic. Claudia Patricia Corcio de Beltrán**, los cuales fueron el apoyo más fuerte para la elaboración de este arduo trabajo, gracias a su tiempo, dedicación y orientación que fueron una de las principales razones, las cuales hicieron posible la finalización de este trabajo de graduación.

En último lugar pero no menos importante a mis **compañeros de estudio**, con los cuales compartimos compromisos y responsabilidades y que de alguna manera obtuve el apoyo incondicional por parte de cada uno de ellos, principalmente de mi compañera de tesis **Patricia Judith Chafoya Castro**. Con la cual desempeñamos un importante trabajo en equipo y así dar por concluido este importante trabajo de Graduación.

F. Claudia Yanira Peña Jandres

Índice general

Resumen

En estas tesis se aborda el problema de obtener una versión certificada de un resultado fundamental en Álgebra Homológica, conocido como "Desarrollo de las Álgebras y Complejos de Koszul". Las principales motivaciones de nuestro trabajo consisten en aumentar nuestro conocimiento sobre la naturaleza del Álgebra Homológica y Topología Algebraica de dicho resultado matemático, así como evaluar las distintas posibilidades que ofrecen Los Complejos de Koszul y Álgebras de Koszul para demostrar teoremas en Álgebra Homológica, y a la vez las aplicaciones en Álgebra Homológica.

El contenido de la tesis está dividido en seis capítulos. En el primero se realiza una breve introducción a las herramientas de trabajo utilizadas. En particular, se presentan definiciones de estructuras algebraicas y resultados previos necesarios para enunciar Los módulos proyectivos e inyectivos; también se aporta información relevante pára nuestro trabajo sobre la construcción de estructuras algebraicas con sucesiones exactas y semiexactas. En el segundo capítulo se enuncia el Teorema de Coeficientes Universales y fórmula de Kunneth y se da una demostración formal de los mismos. El tercer capítulo que tratan de la modelización, especificación y verificación de Concepto de Grado, Teoría de grado para anillos semi-locales, Anillos semi-regulares y propiedades generales de anillos de polinomios. En el capítulo 4, se presentan los principales teoremas, definiciones, proposiciones sobre: Teoría de Multiplicidad, principales teoremas sobre ideales centrales, Sistema de multiplicidad, El Símbolo de multiplicidad. En el quinto capítulo el objetivo es mostrar cómo las propiedades de los complejos de Koszul dan luz sobre ciertos aspectos de la teoría de multiplicidad y teoría de grado. En el capítulo sexto, se presentan algunos de los resultados básicos sobre Álgebras de Koszul en el caso no local. Se investigan las álgebras Noeterianas no graduadas semiperfectas; la definición y el estudio de Álgebras casi-koszul, Álgebras de Yoneda y Auslander.

Introducción

En esta tesis se estudia el desarrollo de las álgebras y complejos de Koszul. Se emplean las técnicas y mecanismos existentes para el desarrollo de la misma, unos de los objetivos de este trabajo es desarrollar la teoría matemática de Los Complejos de Koszul y sus aplicaciones en el Álgebra Homológica. Dar a conocer la importancia de los Complejos de Koszul en el Álgebra Homológica y sus aplicaciones. Demostrar los principales teoremas existentes relacionados con Los Complejos de Koszul y el camino para llegar a ellos, a la vez se quiere mostrar a los interesados una visión general sobre los Complejos de Koszul. Y para ello esta tesis se divide en seis capítulos con los cuales se alcanzaron a cumplir los objetivos deseados.

En el primer capítulo se explica el concepto de teoría de módulos, las características principales. Así como la relación que existe entre los módulos proyectivos, inyectivos y libres.

En el capítulo segundo se analizan los funtores torsión y extensión, se especifica un método a seguir para el cálculo de éstas, y se trabaja con resoluciones proyectivas, las cuales se utilizan para el estudio de los Teoremas de Coeficientes Universales y la fórmula de Kunneth [20].

En el capítulo tercero se estudia el desarrollo de la teoría de grado. Se estudia el concepto de grado, anillos de polinomio y esto se establece para luego hacer la conexión con los complejos de Koszul.

En el capítulo cuarto se diseña la estructura de un sistema de multiplicidad, aplicando los conceptos y fórmulas estudiadas en los capítulos anteriores, además se define el símbolo de multiplicidad con el cual se hace una conexión con el capítulo 5.

En el capítulo quinto se establece la definición de un complejo y se hace la construcción de un complejo de Koszul, parte importante de nuestro trabajo, a la vez se dan las propiedades más importantes sobre complejos de Koszul y la conexión que tienen con la teoría de grado y multiplicidad.

En el capítulo sexto se da las ideas básicas del estudio de las Álgebras de Koszul y las nociones básicas del uso del complejo de Koszul en el caso de Álgebras Conmutativas. Además de la relación que existe entre el Álgebra de Yoneda y el Álgebra de Koszul. En este último capítulo se muestran las aplicaciones que tienen las Álgebras de Koszul.

Actualmente los Complejos de Koszul y Álgebras de Koszul tienen muchas aplicaciones. Se acaba de presentar una investigación de gran interés en el ámbito de la teoría de fiabilidad, usada en muchos campos, desde aplicaciones industriales (como el control de redes y procesos de distinto tipo) a temas biológicos, como el escaneo de secuencias de ADN [26], en ella se estudia la homología de Koszul. Estas aplicaciones van desde el estudio de ciertos ideales del Álgebra Conmutativa, al estudio de sistemas diferenciales o incluso a la fiabilidad de sistemas complejos.

Capítulo 1

Teoría de Módulos

1.1. Módulos

Definición 1 *Sea R un anillo conmutativo con unidad $1 \neq 0$ Un módulo sobre R es un grupo aditivo X juntamente con la función*

$$\mu : R \times X \to X$$

$$(\alpha, x) \to \mu(\alpha, x) = \alpha x$$

Satisface las condiciones siguientes:

i) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
ii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
iii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
iv) $1x = x$

Para cualquier $\alpha, \beta \in R$ y $x, y \in X$

Ejemplo 1 *Sea R el anillo Z de los enteros. Para cualquier grupo abeliano X, la función*

$$\mu : Z \times X \to X$$

$$(n, x) \to \mu(n, x) = nx$$

Para todo $n \in Z,\ x \in X$
Satisface que si $n_1, n_2 \in Z,\ x_1, x_2 \in X$
i.

$$\begin{aligned} \mu(n_1 + n_2, x) &= (n_1 + n_2)x \ \in X \\ &= n_1 x + n_2 x \\ &= \mu(n_1, x) + \mu(n_2, x) \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} \mu(n, x_1 + x_2) &= n(x_1 + x_2) \ \in X \\ &= nx_1 + nx_2 \\ &= \mu(n, x_1) + \mu(n, x_2) \end{aligned}$$

iii.

$$\mu(1, x) = 1x = x$$

Ejemplo 2 *Sea X un anillo con unidad 1 y R un subanillo conmutativo de X que contenga 1. Entonces la función $\mu : R \times X \to X$, definida por $\mu(\alpha, x) = \alpha x$ para todo ($\alpha \in R$ y $x \in X$), satisface las siguientes condiciones* *i)*

$$\mu(\alpha+\beta, x) = (\alpha+\beta)(x) = \alpha x + \beta x = \mu(\alpha, x) + \mu(\beta, x)$$

Se cumple la distributiva ya que $\alpha, \beta, x \in X$

ii)

$$\mu(\alpha, x_1 + x_2) = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2 = \mu(\alpha, x_1) + \mu(\alpha, x_2)$$

iii)

$$\mu[\alpha, \mu(\beta, x)] = \mu[\alpha, \beta x] = \alpha(\beta x) = \mu(\alpha\beta, x)$$

Ya que estamos en el anillo X *lo cumple*

iv)

$$\mu(1x) = 1x = x$$

Luego todo anillo X *con unidad 1 es un módulo sobre cualquiera de sus subanillos conmutativos que contienen 1. En particular, todo anillo conmutativo con unidad puede ser considerado como módulo sobre sí mismo.*

Ejemplo 3 *El conjunto* $X = R^S$ *de todas las funciones* $f : S \to R$ *de un conjunto* S *en* R *es un grupo abeliano respecto a la adición funcional definida por* $(f+g)(s) = f(s) + g(s)$ *para cualesquiera* $f, g \in X$ *y* $s \in S$*. La función* $\mu : R \times X \to X$*, definida asignando a cada elemento* α, f *de* $R \times X$ *la función* $\alpha f : S \to R$*, dada por* $(\alpha f)(s) = \alpha[f(s)]$ *para todo* $s \in S$*, satisface las siguientes condiciones*
i)

$$\begin{aligned}
[\mu(\alpha+\beta, f)](s) &= [(\alpha+\beta)f](s) \\
&= (\alpha+\beta)f(s) \\
&= \alpha f(s) + \beta f(s) \\
&= [\alpha f]s + [\beta f]s \\
&= [\alpha f + \beta f](s) \\
&= \mu(\alpha, f)(s) + \mu(\beta, f)(s)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
[\mu(\alpha, g+f)](s) &= \alpha(g+f)(s) \\
&= \alpha(g(s) + f(s)) \\
&= \alpha[g(s)] + \alpha[f(s)] \\
&= \mu[\alpha, g](s) + \mu[\alpha, f)](s)
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
[\mu(\alpha\beta, f)](s) &= [(\alpha\beta)f](s) \\
&= (\alpha\beta)f(s) \\
&= \alpha(\beta f(s)) \\
&= \alpha[(\beta f)(s)] \\
&= [\alpha(\beta f)](s) \\
&= \mu[\alpha, \mu(\beta, f)](s)
\end{aligned}$$

Lema 1 *Para cualquier elemento* u *de* R*-módulo* X *se cumple*

$$0u = 0 \qquad (-1)u = -u$$

Prueba: En virtud de i) y iv), tenemos $u + 0u = (1 + 0)u = 1u = u$ por tanto $0u = 0$. Por otra parte, tenemos también

$$u + (-1u) = (1 - 1)u = 0u = 0$$

por tanto $(-1)u = -u$.||

1.1.1. Submódulos

Definición 2 *Sea X un R-módulo arbitrario, A un subconjunto no vacío de X entonces A es submódulo de X sí y solo sí*

i) A es subgrupo del grupo abeliano aditivo X
ii) $\forall \alpha \in X$ y $\forall x \in A$ entonces $\alpha x \in A$

Ejemplo 4 *Todo subgrupo A de un grupo abeliano aditivo X es un submódulo de X considerado como módulo sobre el anillo Z de los enteros.*

i. Sea $x, y \in A$, como A es submódulo sobre Z

$$\Rightarrow y^{-1} \in A \Rightarrow xy^{-1} \in A$$

por tanto A es subgrupo de X

ii. Sea $\alpha \in R \quad x \in A$. Como A es módulo sobre el anillo Z de los enteros entonces $\alpha x \in A \; ; \alpha \in Z$

Lema 2 *Un subconjunto no vacío A de un R-módulo X es un submódulo de X sí y solo sí para cualesquiera que sean $\alpha \in R$ y $u, v \in X$, se tiene que $u + v \in A$ y $\alpha u \in A$.*

Prueba: $\Rightarrow$ Por definición de submódulo, como $A \neq \emptyset$ y es un submódulo de X respecto a la adición y multiplicación escalar del módulo X se cumple que
$u + v \in A \;\; \alpha u \in A \Rightarrow$ Basta probar que el opuesto $-u$ de $u \in A$ esta en A (Por lema 1) $-u = (-1) \;\; u \in A$. Entonces existe $\alpha = (-1)$ que satisface $\alpha u \in A$, además $u + v \in A$ ya que X es aditivo.||

Lema 3 *Sea A un submódulo de un R-módulo de X, entonces, para todo $\alpha \in R$ y $u \in X$, tenemos $\{\alpha(u + a) \; a \in A\} \subset \alpha u + A$*

Prueba: Sea A un submódulo de X entonces $\alpha a \in A \;\; \forall a \in A$ por tanto

$$\alpha(u + a) = \alpha u + \alpha a \in \alpha u + A$$

Ya que se cumple la ley distributiva.||

Lema 4 *La intersección de cualquier familia de submódulos de un R-módulo X, es un submódulo de X.*

Prueba: Consideremos una familia $\Phi = \{A_i / i \in M\}$ de submódulos de un R-módulo X y sea A su intersección $A = \bigcap_{i \in M} A_i$. A probar que A es un submódulo de X, sean $\alpha \in R \;\; u, v \in A$ (por lema 2) hay que establecer $u + v \in A \;\; \alpha u \in A$. Para eso consideremos un $i \in M$ arbitrario. Ya que $A \subset A_i \; A_i$ es un submódulo de X (por lema 2) $u + v \in A_i \;\; \alpha u \in A_i$
Y como esto es cierto para todo $i \in M$ entonces $u + v \in A \;\; \alpha u \in A$. Por tanto A es submódulo de X ||
Sea ahora S un subconjunto arbitrario de un R-módulo X. Entonces S esta contenido en al menos un submódulo de X, a saber, en el propio X. Por (lema 4), la intersección A de todos los submódulos de X que contienen S es un submódulo de X. Precisamente, A es el mínimo submódulo de X que contiene el subconjunto dado S, y recibe el nombre de submódulo engendrado por S. En el caso $A = X$, se dice que S es un sistema de generadores de X y que X esta engendrado por S.||

Definición 3 *Un elemento X de un R-módulo X se dice que es combinación lineal de elementos de un subconjunto S de X sí y solo si existe un numero finito de elementos $x_1, x_2, ...x_n$ de S tales que*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in R$

Proposición 1 *El submódulo de un R-módulo X engendrado por un subconjunto S de X es el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S.*

Prueba: Sea A el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S. Por (Lema 2) A es un submódulo de X. Para cada $x \in S$, tenemos $x = 1x \in A$. Luego A contiene S. Sea B un submódulo de X que contenga S. Por (prop.2), Toda combinación lineal de elementos de S esta contenida en B. Luego $A \subset B$. Por tanto A es el mínimo submódulo de X que contiene S ||

Concluimos la presente sección, definiendo algunas nociones que serán usadas en lo sucesivo. Siendo S y T subconjuntos cualesquiera de un R-módulo arbitrario X, su suma $S + T$ es el subconjunto X definido por

$$S + T = \{u + v / u \in S,\ v \in T\}$$

Si S y T son submódulos de X, es evidente que también lo es $S + T$. Por otra parte, para todo subconjunto C de R, CS denota el subconjunto de X definido por

$$CS = \{\alpha u / \alpha \in C,\ u \in S\}$$

Definición 4 *Sea R un anillo con unidad 1, conmutativo o no. Un R-módulo por la izquierda es un grupo abeliano aditivo X juntamente con la función*

$$\mu : R \times X \to X$$

que satisface las condiciones de módulo. Análogamente, definimos R-módulos por la derecha.

Proposición 2 *Probar que, si R es conmutativo, ambas nociones coinciden esencialmente.*

Prueba: Sea

$$\begin{aligned} \mu : \quad & R \times X \to X \\ & (r, x) \to \mu(r, x) = rx \end{aligned}$$

un R-módulo por la izquierda. Por hipotesis del ejercicio se satisface que para $r_1, r_2 \in R,\quad x_1 + x_2 \in X$

$$\begin{aligned} i) \quad & r(x_1 + x_2) = rx_1 + rx_2 \\ ii) \quad & (r_1 + r_2)x = r_1 x + r_2 x \\ iii) \quad & r(\alpha x) = (r\alpha)x \\ iv) \quad & 1x = x \end{aligned}$$

Definamos R-módulos por la derecha

$$\begin{aligned} \mu : \quad & X \times R \to X \\ & (x, r) \to \mu(x, r) = xr \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{array}{ll} i) & x(r_1 + r_2) = xr_1 + xr_2 \\ ii) & (x_1 + x_2)r = x_1 r + x_2 r \\ iii) & x(\alpha r) = (x\alpha)r \\ iv) & 1r = r \end{array}$$

Y obtenemos que las propiedades de un R-módulo por la izquierda y derecha son iguales. ||

Proposición 3 *Probar que fijado un elemento $\alpha \in R$, la correspondencia $x \to \alpha x$ define un endomorfismo $D_\alpha : X \to X$ del grupo abeliano aditivo de cualquier R-módulo X. Este endomorfismo recibe el nombre de dilatación u homotecia de rázon α. Entonces*

$$D_{\alpha\beta} = D_\alpha \circ D_\beta$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in R$, y deducir que C_α es un automorfismo si α es un elemento inversible de R.
Prueba:

$$\begin{array}{ll} D_\alpha : & X \to X \\ & x \to D_\alpha(x) = \alpha x \end{array}$$

Sean $x_1, x_2 \in X$ se verifica que D_α es un homomorfismo

$$\begin{array}{ll} D_\alpha(x_1 + x_2) & D_\alpha(x_1 x_2) \\ = \alpha(x_1 + x_2) & = \alpha(x - 1x - 2) \\ = \alpha x_1 + \alpha x_2 & = \alpha x_1 \alpha x_2 \\ = D_\alpha(x_1) + D_\alpha(x_2) & = D_\alpha(x_1) D_\alpha(x_2) \end{array}$$

Falta verificar que $D_{\alpha\beta} = D_\alpha \circ D_\beta$ para ello sea $\alpha, \beta \in R$

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} \quad & = \alpha\beta x \\ & = \alpha(\beta x) \\ & = D_\alpha(\beta x) \\ & = D_\alpha \circ D_\beta(x) \end{aligned}$$

Ahora veamos que D_α es inyectivo. Sean $x_1, x_2 \in X$ entonces

$$\begin{aligned} D_\alpha(x_1) &= D_\alpha(x_2) \\ \alpha x_1 &= \alpha x_2 \\ \alpha^{-1}\alpha x_1 &= \alpha^{-1}\alpha x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Entonces D_α es inyectivo. Por tanto es isomorfismo. ||

Ejemplo 5 *Siendo X un elemento dado de un R-módulo arbitrario X, la corresponencia $\alpha \to \alpha x$ define un homomorfismo $h : R \to X$ del grupo aditivo de R en el grupo aditivo de X. En consecuencia,*

$$0x = 0, (\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x, n(\alpha) = (n\alpha)x$$

para todo $\alpha, \beta \in R$ y todo entero n se deduce, si R es de característica ρ, que $\rho x = 0$ para todo $x \in X$.

Prueba.

$$\begin{aligned} h: \quad & R \to X \\ & \alpha \to h(\alpha) = \alpha x \end{aligned}$$

(i) Como $h(0) = 0$ y por definición $h(0) = 0x$ entoces $0x = 0$

(ii)

$$\begin{aligned} h(\alpha - \beta) \quad &= h(\alpha) + h(-\beta) \text{ por ser } h \text{ homomorfismo} \\ &= h(\alpha) - h(\beta) \\ &= \alpha x - \beta x \end{aligned}$$

Además por definición $h(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)x$ por tanto $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$
(iii) Por definición $h(n\alpha) = (n\alpha)x$ Además

$$\begin{aligned} h(n\alpha) \quad &= h(\alpha + \alpha + ... + \alpha) \qquad \alpha n\text{veces} \\ &= h(\alpha) + h(\alpha) + ... + h(\alpha) \\ &= \alpha x + \alpha x + ... + \alpha x \\ &= n(\alpha x) \end{aligned}$$

por tanto

$$(n\alpha)x = n(\alpha x)$$

Sabemos que para todo $\alpha \in R \ \ \rho\alpha = 0$. Sea $x \in X$

$$\begin{aligned} \rho x \quad &= \rho(1x) \\ &= (\rho 1)x \\ &= 0x \\ &= 0; \qquad \text{Por tanto} \ \ \rho x = 0 \qquad || \end{aligned}$$

Proposición 4 *Sea K un ideal de un anillo conmutativo con unidad R y x un elemento dado de un R-módulo X. Entonces el subconjunto de X*

$$A = Kx = \{\alpha x / \alpha \in K\}$$

es un submódulo.

Prueba. Dado que A es subconjunto de X. Sea u y $v \in A$ debemos probar que $v + v \in A$ y que $\alpha u \in A$ para todo $\alpha \in K, u = \alpha_1 x \ \ \alpha_1 \in K \qquad v = \alpha_2 \in K$

$$\begin{aligned} u + v \quad &= \alpha_1 x + \alpha_2 x & \alpha u \quad &= \alpha(\alpha_1 x) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) & &= (\alpha\alpha_1)x \\ &= \alpha_3 x \in A & &= \alpha_3 x \ \ \text{para } \alpha\alpha_1 \in k \qquad || \end{aligned}$$

Definición 5 *Sea R un dominio de integridad conmutativo. Un elemento x de un R-módulo X se llama elemento de torsión e X sí y solo sí existe un elemento no nulo $\lambda \in R$ tal que $\lambda x = 0$.*

Ejemplo 6 *Probar que los elementos de torsión de X forman un submódulo $\tau(X)$, denominado submódulo de torsión sí y solo sí $\tau(X) = X$ y módulo sin torsión sí y solo sí $\tau(X) = 0$. Probar que, para cualquier R-módulo X, es $\tau(X)$ un módulo de torsión. Probar también las siguentes proposiciones:*

(a) *R es un módulo de torsión sobre sí mismo*

(b) *Todo submódulo de un R-módulo de torsión es a su vez un R-módulo de torsión*

(c) *Todo submódulo de un R-módulo sin torsión es también un R-módulo sin torsión.*

Prueba. Sean $x, y \in \tau(x)$. Entonces existe $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ tal que $\lambda_1 x = 0, \lambda_2 y = 0$ entonces $\lambda_1 x + \lambda_2 y = 0$. Como estamos trabajando sobre un anillo conmutativo con intregridad no hay divisores entonces para $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \qquad \lambda_1\lambda_2 = 0$

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2(x+y) \qquad &= \lambda_1\lambda_2 x + \lambda_1\lambda_2 y \\ &= \lambda_2(\lambda_1 x) + \lambda_1(\lambda_2 y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto $x + y \in \tau(X)$. Sea $\alpha \in R$ y $x \in \tau(X)$ entonces $\alpha x \in \tau(X)$ entonces existe $\lambda x \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\lambda x = 0 \\ &\alpha\lambda x = 0; \text{ si } \alpha \neq 0\, y \quad \alpha\lambda \neq 0 \\ &\lambda' x = 0 \end{aligned}$$

por tanto

$$\lambda' x \in \tau(X)$$

Probar que, para cualquier R-módulo X, es $\tau(X)$ un módulo de torsión. Debemos probar que $\tau(X) = \tau(\tau(X))$. Para $\tau(\tau(X)) \subset \tau(X)$ se da ya que $\tau(\tau(X))$ es un submódulo de $\tau(X)$. Para la otra inclusión sea $y \in \tau(X)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ \exists\ \lambda \neq 0 \text{ tal que } \lambda x = 0 \\ &\Rightarrow y \in \tau(\tau(X)) \\ &\Rightarrow \tau(X) \subset \tau(\tau(X)) \end{aligned}$$

Por tanto $\tau(X) = \tau(\tau(X))$. Ahora probaremos (a). A probar que $\tau(R) = 0$. Sea $x \in \tau(R)$ entonces $\exists\lambda \neq 0$ tal que $\lambda x = 0$ y como R es un dominio con integridad $\lambda = 0$ o $x = 0$ pero como $\lambda \neq 0$ entonces $x = 0$. Por tanto R es un módulo de torsión sobre sí mismo. Para probar (b). Sea M un R-módulo tal que $\tau(M) = M$ y sea A un submódulo de M. A probar que $\tau(A) = A$. Sabemos que $\tau(A) \subset \tau(M)$ se cumple por ser $A \subset M$ (A submódulo de M) por tanto $\tau(A) \subset A$. Para la otra inclución. Sea $x \in A$ como A es un submódulo de $M = \tau(M)$ entonces existe $\lambda \in 0$ tal que $\lambda x = 0$ por tanto $A \subset \tau(A)$ lo que implica que $A = \tau A$. Para (c) necesitamos probar que $\tau(A) = 0$. Como $\tau(M) = 0$ por ser un R-módulo de torsión existe $\lambda \neq 0$ tal que para algún $x \in A$ cumple que $\lambda x = 0$. Por tanto $\tau(A) = 0$. ||

1.2. Homomorfismos

Un homomorfismo (o morfismo o aplicación lineal) de un R-módulo X en un R-módulo Y es una función $f : X \longrightarrow Y$, que es un homomorfismo del grupo abeliano aditivo Y, que conserva la multiplicación escalar. En otros terminos, f es un homomorfismo del módulo X en el módulo Y si y solo si

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

para todo α en R y u, v en X.
Por ejemplo, la función inclusión $i : A \to X$ de un submódulo A del R-módulo X en X es un homomorfismo del módulo A en el módulo X, y tal que nos referimos siempre con el nombre de homomorfismo inclusión. en particular, la función identidad de un R-módulo arbitrario X es un homomorfismo llamado homomorfismo identidad.

$$\begin{aligned} i: \quad & A \longrightarrow X \\ & a \to i(a) = a \end{aligned}$$

Proposición 5 *Siendo X, Y, Z R-módulos arbitrarios, la aplicación compuesta $g \circ f : X \to Z$ de dos homomorfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ es un homomorfismo llamado homomorfismo producto.*

Prueba. Sean $\alpha \in R$ y $u, v \in X$ arbitrariamente dados. Como f y g son homomorfismos se cumple que:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

$$g(u+v) = g(u) + g(v)$$

$$g(\alpha u) = \alpha g(u)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(u+v) \quad & = g[f(u+v)] \\ & = g[f(u) + f(v)] \\ & = g[f(u)] + g[f(v)] \\ & = (f \circ g)(u) + (f \circ g)(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (gof)(\alpha u) \quad & = g[\alpha f(u)] \\ & = \alpha\, g[f(u)] \\ & = \alpha[(g \circ f)(u)] \end{aligned}$$

por tanto $g \circ f$ es un homomorfismo.||

Proposición 6 *Para cualquier homomorfismo $h : X \to Y$,y de un R-módulo X en un R-módulo Y, la imagen $h(A) = \{h(x) | x \in A\}$ de un submódulo A de X es un submódulo de Y, y la imagen inversa*

$$h^{-1}(B) = \{x \in X | h(x) \in B\}$$

de un submódulo B de Y es un submódulo de X.

Prueba: Sean $\alpha \in R$ y $u, v \in h(A)$ arbitrariamente dados. Por definición de $f(A)$ $\exists\, c, d \in A$ tq $h(c) = u$, $h(d) = v$, como A es un submódulo de X y por Lema 2 se tiene que $c + d \in A$ y $\alpha c \in A$. Como h es un homomorfismo esto implica que:

$$\begin{aligned} u + v \quad & = h(c) + h(d) \\ & = h(c+d) \in h(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha u &= \alpha f(c) \\ &= f(\alpha c) \in h(A) \end{aligned}$$

Por el lema 2, $h(A)$ es un submódulo de Y. Para probar que $h^{-1}(B)$ es un submódulo de X, tenemos que: Sean $\alpha \in R$ y $u, v \in h^{-1}(B)$ cualesquiera. Por definición $h(u)$ y $h(v) \in B$. Como h es un homomorfismo y B un submódulo de Y tenemos que:

$$h(u+v) = h(u) + h(v) \in B$$

$$h(\alpha u) = \alpha h(u) \in B$$

Por definicion de $h^{-1}(B)$, $u+v \in h^{-1}(B)$ y $\alpha u \in h^{-1}(B)$ y por lema 2 $h^{-1}(B)$ es un submódulo de X. Lo que completa la demostración.||

Si el submódulo A de X es el propio X la imagen $Im(h) = h(x)$ es un submódulo de Y llamado imagen del homomorfismo $h : X \to Y$. Por otra parte si el submódulo B de Y es el submódulo trivial 0 de Y, la imagen inversa $ker(h) = h^{-1}(0)$ es un submódulo de X llamado núcleo del homomorfismo $h : X \to Y$. La Coimagen $Coim(h)$ y el conucleo $Coker(Y)$ de $h : X \to Y$ son los módulos cocientes.

$$Coim(h) = \frac{X}{ker(h)}$$

$$Coker(h) = \frac{Y}{Im(h)}$$

de los submódulos X e Y, respectivamente.

Definición 6 *Un homomorfismo $h : X \to Y$ de un R-módulo X en un R-módulo Y se dice monomorfismo si y sólo si es inyectivo; h se dice epimorfismo si y sólo si es suprayectivo (sobre). Un homomorfismo biyectivo (inyectivo y sobreyectivo) recibe el nombre de isomorfismo.*

Definición 7 *Dos R-módulos X y Y son isomorfos , $X \approx Y$ si y sólo si existe un isomorfismo $h : X \to Y$.*

Definición 8 *Un homomorfismo $h : X \to Y$ de un R-módulo X en si mismo se llamará un endomorfismo de X. Los endomorfismos de X. Los endomorfismos inyectivos son los automorfismos de X. Los automorfismos son los casos especiales de isomorfismos.*

Definición 9 *El homomorfirmo inclusión $i : A \to X$ de un submódulo A de un R-módulo X en X es un monomorfismo y el homomorfismo identidad $i : X \to X$ de cualquier módulo X es un automorfismo de X.*

Proposición 7 *Un homomorfismo $h : X \to Y$ de un R-módulo X en un R-módulo Y es un monomorfismo si y sólo si $Ker(h) = 0$*

Prueba." $\Rightarrow$ " (necesidad) Supongamos que $h : X \to Y$ es un monomorfismo. Como h es un homomorfismo, aplica un elemento 0 de X en el elemento 0 de Y. Por tanto el elemento 0 de X figura en el nucleo $Ker(h) = h^{-1}(0)$ de h. Como h es inyectivo,la imagen inversa $h^{-1}(0)$ del elemento 0 de Y no puede tener más de un elemento de X, entonces $Ker(h) = 0$.

" $\Leftarrow$ " (Suficiencia) Supongamos que el $Ker(h) = 0$. Sean $u, v \in X$ tal que $h(u) = h(v)$ como h es homomorfismo tenemos que:

$$\begin{aligned} h(u-v) &= h(u) - h(v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

por definición del $ker\,(h)$, se deduce que

$$u - v \in ker\,(h)$$

Como $ker\,(h) = 0 \Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v$ Por tanto h es inyectivo , h es un monomorfismo.||

Proposición 8 *Un homomorfismo $h : X \to Y$ de un R-módulo X en un R-módulo Y, es un epimorfismo si y solo si $Coker\,(h) = 0$.*

Prueba. " $\Rightarrow$ " (Necesidad). Supongamos que $h : X \to Y$ es un epimorfismo. Entonces h es supreyectivo

$$\Longrightarrow Im\,(h) = h\,(X) = Y$$

Esto implica que:

$$Coker\,(h) = \frac{Y}{Im\,(h)} = \frac{Y}{h\,(x)} = 0$$

$$h : X_x \longrightarrow Y_{h(x)=y}$$

" $\Longleftarrow$ " (Suficiencia). Supongamos que $Coker\,(h) = 0$. Entonces $Coker\,(h) = \frac{Y}{Im(h)}$, implica que:

$$h\,(x) = Im\,(h) = y$$

Luego h es suprayectivo. Por tanto es h un epimorfismo.

Proposición 9 *Si $h = g \circ f$ denota el producto de los homomorfismos*

$$f : X \longrightarrow Y \text{ y } g : Y \longrightarrow Z$$

de R- módulos, entonces las dos proposiciones siguientes son ciertas:

1. *Si h es un monomorfismo, lo es también f.*
2. *Si h es un epimorfismo , lo es también g.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & h \searrow \swarrow g & \\ & Z & \end{array}$$

Sean X e Y R-módulos arbitrarios. Se llama homomorfismo trivial de X en Y, el homomorfismo $h : X \longrightarrow Y$ definido por $h\,(x) = 0$ para todo $x \in X$. Si $h = 0$ significa que h es el homomorfismo trivial.||

Proposición 10 *Siendo $h : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo arbitrario de un R-módulo X en un R-módulo Y, las condiciones siguientes son equivalentes:*

i) $h = 0$

ii) $Im\,(h) = 0$

iii) $ker\,(h) = X$

Prueba: $(i) \Rightarrow (ii)$. Si h=0. Para todo $x \in X$, $h\,(x) = 0 \Leftrightarrow Im\,(h) = 0$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Si la $Im\,(h) = 0$, h es un monomorfismo $\Rightarrow Ker\,(h) = X$

$(iii) \Rightarrow (i)$. $Ker\,(h) = X$ Para todo $x \in X$, $\exists\; y \in Y$ tq $h\,(x) = 0$ Por tanto $h = 0$. ||

Proposición 11 *El producto $h = gof$ de los homomorfismos $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ de R-módulos es el homomorfismo trivial si y solo si*

$$Im\,(f) \subset ker\,(g)$$

Prueba: Necesidad. Supongamos que $h = 0$. Sea $y \in Im\,(f)$. Por definición $\exists$ *un elemento* $x \in X$ tal que $f\,(x) = y$. Entonces

$$g\,(y) = g\,[f\,(x)] = h\,(x) = 0$$

Luego $y \in g^{-1}\,(0) = ker\,(g)$, lo que prueba la inclusión $Im\,(f) \subset ker\,(g)$.

Suficiencia. Supongamos $Im\,(f) \subset ker\,(g)$. Sea $x \in X$. Entonces tenemos que:

$$h\,(x) = g\,[f\,(x)]$$

Puesto que $f\,(x) \in Im\,(f) \subset ker\,(g)$ Obtenemos $g\,[f\,(x)] = 0$ y de aqui que $h\,(x) = 0$, como x es arbitrario resulta que $h = 0.||$

Estudiaremos frecuentemente una sucesión finita o infinita

$$... \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f} Z \longrightarrow ...$$

de homomorfismos de R-módulos. En cada módulo no extremo de la sucesión, por ejemplo Y, hay un homomorfismo f con Y como módulo final y un homomorfismo g con Y como módulo inicial. Por conveniencia, se llamarán respectivamente homomorfismos entrante y saliente de la sucesión en Y.

Consideremos ahora un submódulo A arbitrario de un módulo X sobre R y el módulo cociente $Q = \frac{X}{A}$ La función $p : X \longrightarrow Q$ definida por $p\,(x) = x + A$ para todo $x \in X$, recibe el nombre de proyección natural del módulo X sobre el módulo cociente Q. p es un epimorfismo del grupo aditivo X sobre el grupo aditivo Q. Puesto que

$$p\,(\alpha x) = \alpha x + A = \alpha\,[p\,(x)]$$

para todo $\alpha \in R$ y todo $x \in X$, p es por consiguiente un epimorfismo del módulo X sobre el módulo. Además, tenemos $A = ker\,(p)$. Así, todo submódulo de X es el nucleo de algún homomorfismo.

Consideremos ahora R-módulos X e Y arbitrariamente dados y submódulos respectivos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Denotemos con

$$X* = \frac{X}{A},$$

$$Y* = \frac{Y}{B}$$

los módulos cocientes con proyecciones naturales

$$p : X \longrightarrow X* \;,\; q : Y \longrightarrow Y*$$

Sea $h : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de X en Y que aplica A en B.

Este homomorfismo $h' : A \longrightarrow B$ será llamado homomorfismo definido por h sobre los submódulos. Cuando B=Y, h' se conoce con el nombre de restricción h al submódulo A de X y es denotado por

$$h|A : A \longrightarrow Y$$

Sea ahora $u \in X$ arbitrariamente dado. Puesto que $h(u+a) = h(u) + h(a) \in h(u) + B$, para todo $a \in A$, la imagen $h(u+A)$ está contenida en una única clase de B en Y, a saber $h(u+A) \subset h(u) + B$ Luego, la correspondencia $u+A \longrightarrow h(u)+B$ define una función $h* : X* \longrightarrow Y*$ $h*$ es un homomorfismo del grupo aditivo X* en el grupo aditivo Y*. Como

$$h*(\alpha u + A) = h(\alpha u) + B = \alpha h(u) + B = \alpha h*(u+A)$$

para todo $\alpha \in R$ y todo $u \in X$, h* es un homomorfismo del módulo X* en el módulo, Y* llamado homomorfismo inducido por h en los módulos cocientes. Además, de acuerdo con, la igualdad $goh = h*op$ prueba la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ p\downarrow & & \downarrow q \\ X* & \xrightarrow{h*} & Y* \end{array}$$

Puesto que las proyecciones naturales p y q son epimorfismos, se deduce facilmente de la relación $qoh = h*op$ que

$$Im(h*) = q[Im(h)]$$

$$Ker(h*) = p\left[h^{-1}(B)\right]$$

En particular, si h es un epimorfismo, $B = 0$, y $A = Ker(h)$, entonces $Y* = Y$ y $h*$ es un isomorfismo. En este caso, tenemos el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ & p \searrow \swarrow h* & \\ & X/A & \end{array}$$

Así tenemos la siguiente proposición.

Proposición 12 *Para un homomorfismo $h : X \to Y$ de un R-módulo X en un R-módulo Y, se tiene*

$$Coim(h) = x/Ker(h) \approx Im(h)$$

El siguiente teorema es conocido como el segundo Teorema de isomorfismo de Noether.

Teorema 1 *Siendo A, B submódulos cuales quiera de un R-módulo X, el homomorfismo inclusion*

$$i* : A/(A \cap B) \approx (A+B)/B$$

Prueba: Como i es el homomorfsimo inclusión, es obvio que i aplica $A \cap B$ en B y por tanto induce un homomorfismo

$$i* : A/(A \cap B) \to (A+B)/B$$

Para probar que $i*$ es un monomorfismo, denotemos con x un elemento de $A/(A \cap B)$ tal que $i*(x) = 0$. Elijamos $a \in x \subset A$. Por definición de $i*$, es $a = i(a) \in B$. Luego $a \in A \cap B$ y por ello $x = 0$. Entonces $i*$ es, pues, un monomorfismo.

Para probar que $i*$ es un epimorfismo, sea $y \in (A+B)/B$. Elijamos $a \in A$ y $b \in B$ tales que $a + b \in y \subset A + B$. Como $-b \in B$, tenemos:

$$a = (a+b) + (-b) \in y$$

Por tanto $i*$ aplica elemento $a + (A \cap B)$de $A/(A \cap B)$ en y. Esto prueba que $i*$ es un epimorfismo. En consecuencia, $i*$ es un isomorfismo.||

Definición 10 *Un R-módulo se llama simple si y solo si los unicos submódulos de X son 0 y X.*

Proposición 13 *Probar que todo R-módulo X generado por un unico elemento $x \neq 0$ es un módulo simple y que la correspondencia $\alpha \rightarrow \alpha x$ define un isomorfismo de R como R-módulo sobre un cuerpo R se llaman espacios vectoriales sobre R y sus submódulos, subespacios.*

Prueba:

$$f : R_\alpha \longrightarrow X_{f(\alpha)=\alpha x}$$

$x \neq 0$. Lo que tengo que probar es que el R-módulo X tiene los unicos submódulos 0 y x. Sea A un submódulo de X. $A \neq 0$. Sea $x \in X$. Como $A \neq 0$ $\exists$ $x \in A$ tal que $x \neq 0$, $x = \alpha x \Rightarrow \alpha x \in A$. Como $\alpha^{-1} \in R$ entonces

$$\alpha^{-1} \alpha x \in A$$

y estos generan a todo X $\Rightarrow$ $X \in A$. Por tanto es un submódulo simple. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in R$

(i)

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 + \alpha_2) &= (\alpha_1 + \alpha_2) x \\ &= \alpha_1 x + \alpha_2 x \\ &= f(\alpha_1) + f(\alpha_2) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} f(\beta\, \alpha_1) &= (\beta \alpha_1) x \\ &= (\beta \alpha_1 x) \\ &= \beta (\alpha_1 x) \\ &= \beta f(\alpha_1 x) \end{aligned}$$

Por tanto f es un homomorfismo. Veamos que es inyectivo. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ y sean $f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \in X$

$$\begin{aligned} f(\alpha_1) &= f(\alpha_2) \\ \alpha_1 x &= \alpha_2 x \\ \alpha_1 x x^{-1} &= \alpha_2 x x^{-1} \\ \alpha_1 &= \alpha_2 \end{aligned}$$

Por tanto f es inyectivo. Veamos que f es sobreyectivo. Basta con elegir $\alpha x \in X$ tq $f(\alpha) = \alpha x$, por tanto define un isomorfismo.||

Proposición 14 *Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos homomorfismos de un R-módulo Xen un R-módulo Y tales que $f(s) = g(s)$ para todo elemento sde un subconjunto S de X. Probar que $f(x) = g(x)$ para todo elemento x del submódulo A de X generado por S.*

Prueba: Sea A un submódulo de X, generado por S. Sea $x \in A$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3 + ... + \alpha_n s_n$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3 + ... + \alpha_n s_n) \\ &= \alpha_1 f(s_1) + \alpha_2 f(s_2) + \alpha_3 f(s_3) + ... + \alpha_n f(s_n) \\ &= \alpha_1 g(s_1) + \alpha_2 g(s_2) + \alpha_3 g(s_3) + ... + \alpha_n g(s_n) \\ &= g(x) \qquad || \end{aligned}$$

1.3. Productos Directos y Sumas Directas

Consideremos una familia arbitraria dada

$$\Im = \{X_i / i \in M\}$$

de R-módulos X_i y designamos con $P = \prod_{i \in M} X_i$ el producto cartesiano de la familia $\Im$. Por definición, un elemento de P es una función

$$\begin{aligned} f : M &\to U \\ i &\to f(i) \in X_i \text{ para todo } i \in M. \end{aligned}$$

Definición 11 *Una operación binaria en P considerando para, dos elementos, $f, g \in P$ la función*

$$\begin{aligned} f + g : \quad & M \to U \\ & i \to (f+g)(i) = f(i) + g(i) \in X_i \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que esta operación binaria $+$ estructura a P como grupo abeliano aditivo. En efecto,$\forall f, h \in P$

$$\begin{aligned} f(i) + g(i) \quad & = (f+g)(i) \\ & = (g+f)(i) \\ & = g(i) + f(i) \end{aligned}$$

Por tanto

$$f + g = g + f$$

El elemento 0 de P es la función

$$\begin{aligned} 0 : \quad & M \to U \\ & i \to o(i) = 0 \in X_i \end{aligned}$$

El elemento opuesto es la función

$$\begin{aligned} -f : \quad & M \to U \\ & i \to -f(i) = -[f(i)] \end{aligned}$$

Por otra parte se define la multiplicación escalar

$$\mu R \times P \to P$$

asignando a cada $\alpha \in R$ y cada $f \in P$ el producto escalar

$$\mu(\alpha, f) = \alpha f : M \to U$$

dado por

$$(\alpha f)(i) = \alpha[f(i)]$$

Se comprueba fácilmente que esta multiplicación escalar μ estructura al grupo abeliano aditivo P como R-módulo, que es conocido con el nombre de producto directo de la familia dada de R-módulos $X_i \in M$ En efecto, $\forall \alpha \in R\ \forall f, g \in P$

$$\begin{aligned} \alpha[(g.f)(i)] \quad & = [\alpha(g.f)](i) \\ & = [\alpha(f.g)](i) \\ & = \alpha[(f.g)(i)] \end{aligned}$$

Consideremos ahora el subconjunto S de P que consiste de todo $f \in P$ tal que $f(i) = 0$ salvo a lo más en un número finito. Evidentemente es un submódulo de P. En efecto S es subgrupo de P puesto que

- $(+)$ es cerrado en S
- El elemento 0 de P esta en S
- Si $f \in S$ entonces $-f \in S$

Además $\forall \alpha \in R,\ s \in S$ y $\alpha s \in S$. Luego S es un R-módulo llamado *suma directa* de la familia dada $\Im$ y es designado por $S = \sum_{i \in M} X_i$. Si el conjunto M es finito, entonces $P = S$. En este caso, el R-módulo puede llamarse o bien producto directo o bien suma directa de la familia finita $\Im$. Para todo índice $j \in M$, definamos una función

$$\begin{aligned} d_j : \qquad & X_j \longrightarrow S \\ & x \longrightarrow [d_j(x)](i) = \begin{cases} x & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \end{aligned}$$

Para todo $x \in X$. Evidentemente d_j es un homomorfismo del módulo X_j en el módulo S llamado *inyección natural* de X_j en la suma directa S. En efecto sea $x, y \in X_j$

$$[d_j(x+y)](i) = \begin{cases} x+y & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

y como

$$[d_j(x)](i) = \begin{cases} x, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$[d_j(y)](i) = \begin{cases} y & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

entonces

$$[d_j(x) + d_j(y)](i) = [d_j(x)](i) + [d_j(y)](i) = \begin{cases} x+y & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

Por tanto

$$[d_j(x) + d_j(y)] = [d_j(x)] + [d_j(y)]$$

Además

$$[d_j(\alpha x)](i) = \begin{cases} \alpha x, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

por otro lado

$$\alpha[d_j(x)](i) = \alpha \left[\begin{cases} x, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \right] = \begin{cases} \alpha x, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

De lo anterior se prueba que d_j define un homomorfismo. Análogamente definimos una función

$$\begin{aligned} p_k : \qquad & P \rightarrow X_k \\ & f \rightarrow p_k(f) = f(k) \end{aligned}$$

Para todo $f : M \rightarrow U$ en P y $k \in M$ Evidentemente p_k es un homomorfismo del módulo P en el módulo X_k llamado *proyección natural* del producto directo S en el módulo X_k. En efecto sean $f, g \in P_k$ entonces

$$p_k(f+g) = (f+g)(k) = f(k) + g(k) = p_k(f) + p_k(g)$$

además

$$p_h(\alpha f) = (\alpha) f(k) = \alpha(f(k)) = \alpha p_k$$

por tanto p_k define un homomorfismo. Además, su restricción

$$q_k = \frac{p_k}{S} : S \to X_k$$

al submódulo S de P se llamará *proyección natural* de la suma directa S en el módulo X_k. Sea la sucesión de homomorfismos

$$X_j \xrightarrow{d_j} S \xrightarrow{h} P \xrightarrow{p_k} X_k$$

Donde $h : S \to P$ representa el homomorfismo inclusión. La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de las definiciones.

Proposición 15 *El producto*

$$p_k \circ h \circ D_j : X_i \to X_h$$

es el homomorfismo trivial si $j \neq k$ es homomorfismo identidad si $j = k$.

Prueba: Construimos la sucesión de homomorfismos

$$X_j \xrightarrow{d_j} S \xrightarrow{h} P \xrightarrow{p_k} X_k$$

$$x_j \to (x_j)_{i \in j} = \left\{ \begin{array}{ll} x_j, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{array} \right\} \to (x_i)_{i \in I} \to \left\{ \begin{array}{ll} x_k = x_j, & k = j \\ x_k = 0, & k \neq j \end{array} \right.$$

Donde si $\Im = \{X_i / \in M\}$ es una familia de R-módulos entonces

$P = \prod_{i \in M} X_i$ es el producto cartesiano de la familia $\Im$,

$S = \sum_{i \in M} X_i$ es la suma directa de la familia $\Im$, además

$p_k : P \to X_k$ Proyección natural

$h : S \to P$ Función inclusión

$d_j : X_j \to S$ Inyección natural

De aquí realizamos el producto de funciones y obtenemos

$$\begin{array}{ll} p_k \circ h \circ d_j : & X_j \to X_k \\ & x_j \to (p_k \circ h \circ d_j)(x_j) = \left\{ \begin{array}{ll} x_j, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{array} \right. \end{array}$$

De lo anterior se completa la demostración. ||

Como consecuencia inmediata de (prop. 10) y de la proposición anterior para el caso $k = j$ tenemos los siguientes corolarios

Corolario 1 *Para todo $j \in M$, la inyección natural $d_j : X_j \to S$ del módulo X_j en la suma directa S es un monomorfismo. Así, podemos identificar cada módulo X_j con su imagen $d_j(X_j)$ en S y considerar X_j como submódulo de la suma directa S. Supuesto esto, $d_j : X_j \to S$ se convierte en el homomorfismo inclusión y S esta engendrado por la unión U de todos los X_j en S.*

Debido a que $p_k \circ h = q_k$ el siguiente corolario es consecuencia directa de (prop. 10 y prop. 16)

Corolario 2 *Para todo $k \in M$, la proyección natural $q_k : S \to X_k$ de la suma directa S en el módulo X_k es un epimorfismo.*

Prueba: La demostración de los dos corolarios se reduce a una sola ya que en el caso que $j = k$ se tienen las funciones definidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} d_j : \quad & X_j \to S \\ & x_j \to d_j(x_j) = (x_j)_{i\in M} = x_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} q_k : \quad & S \to X_k \\ & (x_i)_{i\in M} \to x_k = q_k[(x_i)_{i\in M}] \end{aligned}$$

Sea la sucesión de homomorfismos

$$X_j \quad \overset{d_j}{\to} \qquad\qquad S \quad \overset{h}{\to} \qquad\qquad P \overset{p_k}{\to} \qquad\qquad X_k$$

$$x_j \to d_j(x_j) = (x_i)_{i\in M} = x_j \to x_k = q_k[(x_i)_{i\in M}]$$

$$\overline{q_k = P_k \circ h = \frac{P_k}{S}}$$

Como q_k es p_k restringiendo S

$$X_j \quad \overset{d_j}{\to} \qquad\qquad S \quad \overset{q_k}{\to} \qquad\qquad X_k$$

$$x_j \to d_j(x_j) = (x_i)_{i\in M} = x_j \to x_k = q_k[(x_j)_{i\in M}]$$

En donde

$$\begin{aligned} & (p_k \circ h \circ d_j)(x_j) = x_j \\ & \Rightarrow (q_k \circ d_j)(x_j) = x_j \end{aligned}$$

se define el homomorfismo identidad resulta que d_j es inyectiva y q_k es sobreyectiva por tanto d_j es un monomorfismo y q_k es un epimorfismo $\|$

Proposición 16 *Para todo $k \in M$, el núcleo $Ker(q_k)$ de la proyección natural*

$$q_k : S \to X_k$$

es el submódulo A de la suma directa S generado por Y_k. En otras palabras hay que probar que

$$Ker(q_k) = \textit{ submódulo } A \textit{ de } S = \left(Y_k =< \bigcup_{j\neq k} Im(d_j) > \right)$$

Prueba: Puesto que $q_k \circ d_j = 0$, $\forall j \neq k$ por (prop 2.1 y 2.7)

$$\left(Y_k =< \bigcup_{j\neq k} Im(d_j) > \right) \subset Ker(q_k)$$

Esto prueba que $Ker(q_k)$ contiene el submódulo A de S generado por Y_k.

Recíprocamente, sea f un elemento de S perteneciente al $Ker(q-k)$. Se deduce de la definición de S, que

$$\begin{aligned} f(j) = x_j \neq 0; \qquad & j \in K \\ f(i) = 0; \qquad & i \notin J \end{aligned}$$

Donde J designa un cierto subconjunto finito $J = \{j_1, j_2, , , j_n\}$ de M y $x \in X_j$. Puesto que, además, f figura en $Ker(q_k)$, es

$$q_k(f) = f(k) = 0$$

$$f(j_1) \neq 0 \rightarrow f_1 = (x_i)_{i \in I} = \begin{cases} x_{j_1}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$f(j_1) \neq 0 \rightarrow f_1 = (x_i)_{i \in I} = \begin{cases} x_{j_1}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$f(j_n) \neq 0 \rightarrow f_n = (x_i)_{i \in I} = \begin{cases} x_{j_n}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Luego $k \notin j$,

$$\sum_{t=1}^{n} f_t = f \in \left(Y_k =< \bigcup_{j \neq k} Im(d_j) > \right)$$

y de aquí que $f \in A$. Por consiguiente $Ker(q_k) \subset A$ por tanto

$$Ker(q_k) = A \quad ||$$

El submódulo $Ker(q_k)$ de S es isomorfo a la suma directa de la familia de módulos

$$\Im / \{X_k\} = \{X_i / i \in M/k\}$$

Tenemos dos homomorfismos

$$\delta : X \rightarrow P$$
$$\sigma : S \rightarrow X$$

Definidos por

$$[\delta(x)](i) = x \qquad (i \in M)$$
$$\sigma(f) = \sum_{i \in M} f(i) \qquad (f \in S)$$

Nos referimos a ellos como el homomorfismo diagonal δ y el homomorfismo sumador σ, respectivamente.

Consideremos ahora una familia arbitrariamente dada

$$\wp = \{h_i : X_i \rightarrow Y_i / i \in M\}$$

De homomorfismos de R-módulos. Definamos una función

$$\phi : \prod_{i \in M} X_i \rightarrow \prod_{i \in M} Y_i$$

Mediante

$$[\phi(f)](i) = h_i[f(i)] \ \ \forall i \in M \text{ y } \forall f \in \prod_{i \in M} X_i$$

Obviamente, ϕ es un homomorfismo de R-módulos. En efecto $\forall f, g \in \prod_{i \in M} X_i$ y $\forall \alpha \in R$

$$[\phi(f + g)](i) = h_i[(f + g)(i)] = h_i[f(i) + g(i)] = h_i[f(i)] + h_i[g(i)]$$

y

$$[\phi(\alpha f)](i) = h_i[(\alpha f)(i)] = h_i[\alpha(f(i))] = \alpha h_i[f(i)] = \alpha[\phi(f)](i)$$

Por tanto ϕ es un homomorfismo

Nos referimos a él como el *producto directo* de la familia dada $\wp$ de homomorfismos y lo denotaremos por

$$\phi = \prod h_i$$

Además, ϕ tiene la siguiente propiedad:

$$\phi\left(\sum_{i\in M} X_i\right) \subset \sum_{i\in M} Y_i$$

En efecto sea $f \in \sum_{i\in M} X_i$ con $f(i) \neq 0$ salvo para un número finito I

$$[\phi(f)(i)] = h_i[f(i)] \neq 0;\ \forall i \notin I$$

$$\phi(f) \in \sum_{i\in M} Y_i$$

por tanto

$$\phi\left(\sum_{i\in M} X_i\right) \subset \sum_{i\in M} Y_i$$

Por tanto ϕ define un homomorfismo

$$\psi = \sum_{i\in M} X_i \to \sum_{i\in M} Y_i$$

Este homomorfismo ψ de módulos lo denominaremos suma directa de la familia dada $\wp$ y será designado por $\psi = \sum_{i\in M} h_i$. Si el conjunto M es finito, entonces $\psi = \phi$. En este caso, el homomorfismo puede denominarse bien producto directo, bien suma directa de la familia finita dada $\wp$.

En el caso $X_i = X \quad \forall i \in M$, tenemos

$$X \xrightarrow{\delta} \prod_{i\in M} X_i \xrightarrow{\phi} \prod_{i\in M} Y_i$$

Donde δ representa el homomorfismo diagonal. El producto

$$\phi' = \phi \circ \delta : X \to \prod_{i\in M} Y_i$$

Recibe el nombre de *producto directo* restringido de la familia

$$\wp = \{h_i : X \to Y_i / i \in M\}$$

Si $Y_i = Y$ es un isomorfismo, entonces

$$X \approx \prod_{i\in M} Y_i$$

Si $Y_i = Y$, tenemos

$$\sum_{i\in M} X_i \xrightarrow{\psi} \sum_{i\in M} Y_i \xrightarrow{\sigma} Y$$

Donde σ representa el homomorfismo sumador. El producto

$$\psi' = \sigma \circ \psi : \sum_{i\in M} X_i \to Y$$

Se llamara suma directa *realizada* de la familia

$$\wp = \{h_i : X_i \rightarrow Y/i \in M\}$$

Si ψ' es isomorfismo, entonces

$$\sum_{i \in M} X_i \approx Y$$

Y la familia $\wp$ se dice que es una representación inyectiva del módulo Y como suma directa. En particular, si X_i es un submódulo de un R-módulo X y si la familia

$$\wp = \{h_i : X_i \rightarrow X/i \in M\}$$

De homomorfismo inclusión es una representación inyectiva del módulo X como suma directa, entonces

$$\sum_{i \in M} X_i \approx X$$

En este caso decimos que el módulo es descomponible en la suma directa de los submódulos

$$\Im = \{X_i/i \in M\}$$

Frecuentemente, también diremos que el módulo X es la suma directa (interna) de sus submódulos $\Im$. Si $\Im$ es una familia finita de R-módulos,

$$\Im = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$$

Entonces la suma directa de $\Im$ se denota por

$$X_1 \oplus X_2 \oplus ... \oplus X_n$$

Además, si cada X_i es un módulo de un R-módulo X, entonces

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus ... \oplus X_n$$

Expresa que X es la suma directa de los submódulos $X_1, X_2, ..., X_n$. El siguiente teorema es de gran utilidad.

Teorema 2 *Un R-módulo X es la suma directa de los submódulos A y B si y sólo si*

$$A + B = X, \quad A \bigcap B = 0$$

Prueba: $\Rightarrow$ Supongamos que X es la suma directa de A y B. Entonces, por definición, el homomorfismo definido

$$\begin{aligned} \psi' : \quad & A \oplus B \rightarrow X \\ & (a, b) \rightarrow \psi'(a, b) = a + b \end{aligned}$$

Es un isomorfismo.

Para probar que, $A + B = X$, sea $x \in X$. Como ψ' es un epimorfismo, existe un elemento $(a, b) \in A \oplus B$ tal que

$$x = \psi'(a, b) = a + b \in A + B$$

Luego $x \in A + B$, y siendo x arbitrario, resulta $A + B = X$

Para probar $A \bigcap B = 0$ por contradicción suponemos que $A \bigcap B$ contiene un elemento no nulo $x \in X$. Como $A \bigcap B$ es un submódulo de X, tenemos $-x \in A \bigcap B$. Entonces $-x, x$ es un elemento no nulo de $A \oplus B$. Puesto que

$$\psi'(-x,x) = x - x = 0,$$
$$\Rightarrow (x,-x) \in Ker(\psi')$$

y como $-x, x$ es un elemento no nulo ψ'. No es un monomorfismo $\rightarrow\leftarrow$, entonces $A \bigcap B = 0$

$\Leftarrow$ Supongamos que $A + B = X$, $A \bigcap B = 0$. Debemos probar que ψ' es un isomorfismo. Sea $x \in X$. Como $A + B = X$, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $a + b = x$. Esto implica

$$\psi'(a,b) = a + b = x$$

Por lo que ψ' es un epimorfismo. Sea $x \in X$. Entonces

$$a + b = \psi'(a+b) = 0$$

Se deduce que $a \in A$ y $a = -b \in B$. Luego $a \in A \bigcap B$. Como $A \bigcap B = 0$, es $a = 0$ y $b = -a = 0$. Por tanto (a,b), es el elemento cero $\{(0,0)\} \in A \oplus B$. Así $Ker(\psi') = 0$, ψ' es un monomorfismo. Por tanto

$$\psi' \text{ Es un isomorfismo } \|$$

Teorema 3 *Si el producto $h = g \circ f$ de los homomorfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ de R-módulos X, Y, Z es un isomorfismo, entonces se cumple:*

i) *f es monomorfismo*

ii) *g es epimorfismo*

iii) *El módulo Y es descomponible en la suma directa de $Im(f)$ y $Ker(g)$; en símbolos,*

$$Y = Im(f) \oplus Ker(g)$$

Prueba: i) Si h es monomorfismo entonces f es monomorfismo. Sabemos que como $ker(h) = 0$ entonces $x \in Ker(h) \Leftrightarrow h(x) = 0$. Sea $x \in Kerf$, como

$$\begin{aligned} h(x) \quad &= (g \circ f)(x) \\ &= g(f(x)) \\ &= 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \quad \text{Porque } h \text{ es monomorfismo} \\ &\Rightarrow Ker(f) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto f es monomofismo
ii. Si h es epimorfismo entonces g es epimorfismo

Sabemos que $h(x) = z \in Z$ por ser h sobreyectiva. Sea $z \in Z$ necesito definir un elemento $y \in Y$ tal que $g(y) = z \in Z$, como
$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = z \in Z$

Si $\qquad y = f(x) \in Y \qquad g(y) = z \in Z$. Por tanto g es epimorfismo.
iii. Sea $A = Im(f)$ y $B = Ker(g)$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

Sea y un elemento arbitrario de Y, y sea $z = g(y) \in Z$. Como $h : X \to Z$ es un isomorfismo, existe un elemento $x \in X$ tal que $h(x) = z$

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{h=g\circ f}{\longrightarrow} & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & & y \to g(y) = z & & \\ x \to h(x) = z & & & & \end{array}$$

Sean $a = f(x) \in A$ y $b = y - a$. Entonces

$$g(b) = g(y-a) = g(y) - g(a) = z - g(f(x)) = z - h(x) = z - z = 0$$

$$g(b) = 0 \Rightarrow B \in Ker(g) = B$$

Y de lo anterior

$$\begin{array}{c} a \in A = Im(f) \\ X \xrightarrow{f} \quad Y \xrightarrow{g} \quad Z \\ b \in B = Ker(g) \end{array}$$

Luego $b \in B$, por lo que $y = a + b \in A + B$. Como y es arbitrario, deducimos que $A + B = Y$.

Para probar que $A \bigcap B = 0$, consideremos $y \in A \bigcap B$. Como $y \in A$, existe un elemento $x \in X$ tal que $f(y) = y$. Como $y \in B = Ker(g)$, tenemos $g(y) = 0$. Entonces

$$h(x) = g(f(x)) = g(y) = 0$$

Puesto que g es un isomorfismo, deducimos que $x = 0$, y de aqu

$$y = f(x) = f(0) = 0$$

Por tanto $A \bigcap B = 0$. Por (teor. 2), Y es la suma directa de los submódulos A y B. Por tanto

$$Y = Im(f) \oplus Ker(g) \quad ||$$

Proposición 17 *Un proyector de un R-módulo es un endomomorfismo ρ del módulo X que satisface $\rho \circ \rho = \rho$. Sea X un R-módulo que es la suma directa de una familia*

$$\Im = \{X_i / i \in M\}$$

de submódulos de X. Probar que existe una unica familia

$$\{\rho_i : X \to X / i \in M\}$$

de proyectores de X tales que $\rho_i(X) = X_i$ y $\rho_i(X_j) = 0$ si $i \neq j$. Además, para todo elemento $x \in X$, es $\rho_i(x) = 0$ para todo índice $i \in M$ salvo a lo sumo en un número finito de ellos.

Prueba: Sea la sucesión de funciones

$$X \xrightarrow{\pi_i} X_i \xrightarrow{i_i} X$$

en donde

i_i: es la función inclusión
π_i: función proyección
$\rho_i = i_i \circ \pi_i$

Y se satisface que

$$\begin{aligned} \rho \circ \rho \quad &= (i_i \circ \pi_i)(i_i \circ \pi_i) \\ &= i_i \circ (\pi_i \circ i_i) \circ \pi_i \\ &= i_i \circ \pi_i \\ &= \rho \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \rho_i(X) \quad &= (i_i \circ \pi_i)(X) \\ &= i_i(\pi_i(X)) \\ &= i_i(X_i) \\ &= X_i \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \rho_i(X - j) \quad &= (i_i \circ \pi_i)(X_j) \\ &= i_i(\pi_i(X_j)) \\ &= i - i(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Proposición 18 *Sea* $\wp = \{h_i : X_i \to X/i \in M\}$ *una representación inyectiva del R-módulo* X *como suma directa. Entonces existe un única familia*

$$\Im = \{g_i; X \to X_i/i \in M\}$$

de homomorfismos de módulos tal que el producto

$$g_k \circ h_j : X_j \to X_k$$

es el homomorfismo trivial si $j \neq k$ *y es el homomorfismo identidad si* $j = k$. *Por tanto, para cada* $i \in M$, h_i *es un monomorfismo y* g_i *es un epimorfismo. Ademas, tenemos tambien*

$$X = Im(h_i) \oplus Ker(g_i)$$

para todo $i \in M$. *Las dos familias* $\wp$ *y* $\Im$ *se dice que constituyen una representación completa del módulo* X *como suma directa*

$$\begin{array}{cccccc} X_j & \overset{h_j}{\to} & X & \overset{g_k}{\to} & & X_k \\ x_j & \to & (x_i)_i \in M = \begin{cases} x_j, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} & \to x_k = & \begin{cases} x_k = x_j, & k = j \\ x_h = 0, & k \neq j \end{cases} & \end{array}$$

Por tanto $(g_k \circ h_k)(x_j) = x_j$ si $k = j$ me induce el homomorfismo identidad y $(g_k \circ h_k)(x_j) = 0$ si $k \neq j$ me induce el homomorfismo trivial. Como $(g_k \circ h_k)(x_j)$ es el homomorfismo identidad si $k = j$. Entonces

$$(g_k \circ h_j)(x_j) = (g_j \circ h_j)(x_j) = g_j(h_j(x_j)) = g_j(x_j) = x_j$$

Por tanto

$$(g_k \circ h_j)(x_j) = x_j$$

por tanto h_i es monomorfismo y g_k es epimorfismo
Además obtenemos también que

$$X = Im(h_i) \oplus ker(g_i) \qquad ||$$

1.4. Módulos Libres

Un R-módulo libre sobre un conjunto S es un R-módulo F justamente con una función $f : S \to T$ tal que, para toda función $g : S \to X$ del conjunto S en un R-módulo X, existe un único homomorfismo $h : F \to X$ del módulo F en el módulo X tal que $h \circ f = g$. Lo que expresa que el siguiente triángulo es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & F \arrow[d, "h"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Teorema 4 *Si el par formado por un R-módulo F y una función* $f : S \to F$ *de S en F es un R-módulo libre F sobre el conjunto S, entonces f es inyectia y su imagen* $f(s)$ *genera el módulo F.*

Prueba: Sean a,b dos elementos distintos de S. Debemos probar que
$f(a) \neq f(b)$.Para ello, sea X un R-módulo que contenga mas de un elemento y elijamos una función $g : S \to A$ tal que $g(a) \neq g(b)$. como

$$\begin{aligned} (hof)(u) \quad &= h[f(a)] \\ &= g(a) \\ &\neq g(b) \\ &= h[f(b)] \end{aligned}$$

se debe tener que $f\,(a) \neq f\,(b)$. Por tanto f es inyectiva.

Para probar que $f(s)$ genera F, sea A el submódulo de F generado por $f(S)$. Entonces la función f define una función $g : S \rightarrow A$ tal que $iog = f$ representa el homomorfismo inclusión $i : A \rightarrow F$. Por la defición existe un homomorfismo $h : F \rightarrow A$ tal que $hof = g$. Consideremos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "j"] \\ & F \end{tikzcd}$$

$$1_F of = f,\ ioh = k = j = 1_F$$

Donde j denota el endomorfismo identidad y k representa el producto ioh. Puesto que

$$jof = f,\ kof = iohof = iog = f$$

se deduce de la unicidad en la definición que $ioh = k = j$.

$$F \xrightarrow{h} A \xrightarrow{i} F$$

Por prop. 9, el homomorfismo inclusión i debe ser un epimorfismo. Luego $A = F$ y $f\,(s)$ genera el módulo F.||

Teorema 5 (*Teorema de Unicidad*). *Si (F, f) y (F', f) son R-módulos libres sobre el mismo conjunto S, entonces existe un unico isomorfismo $j : F \rightarrow F'$ del módulo F sobre el módulo F'tal que $jof = f'$.*

Prueba: Como (F, f) es un R-módulo libre sobre el conjunto S por definición de módulos libres existe un único homomorfismo $j : F \rightarrow F'$ tal que $jof = f'$ es el siguiente triángulo.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & F \arrow[d, "j"] \\ & F' \end{tikzcd}$$

Como (F', f') es un R-módulo libre sobre el conjunto S, por definición de módulos libres existe un único homomorfismo $k : F' \rightarrow f$ tal que $kof' = f$, en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & F' \arrow[d, "k"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Consideremos el producto $h = koj$ y el endomorfismo identidad del módulo F. En el diagrama.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "h"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} hof &= kojof \\ &= kof' \\ &= f \end{aligned}$$

$iof = f$. Se deduce de la unicidad de la definición que: $kof = h = i$. Como i es un isomorfismo, por (Lema 10) tenemos que f es un monomorfismo. De la misma manera $j\ o\ k$ es el endomorfismo identidad de F' ya que

$$\begin{aligned} jokof' &= jof \\ &= f' \end{aligned}$$

Luego j es también un epimorfismo lo que prueba que j es un isomorfismo.

Teorema 6 (*Teorema de Existencia*). *Para cualquier conjunto S existe siempre un R-módulo libre sobre S.*

Prueba: Sea F el conjunto de todas las funciones $\phi : S \to R$ que satisfacen $\phi(s) = 0$ para toda $s \in S$, salvo a lo más un número finito. Entonces F es un grupo abeliano con la adición funcional como operacion binaria; esto es dado dos elementos cuales quiera $\phi\ y\ \varphi$ de F el elemento $\phi + \varphi$ de F es el definido por

$$(\phi + \varphi)(s) = \phi(s) + \varphi(s)$$

para todo $s \in S$. Además F es el módulo respecto a la multiplicación por escalar definida por

$$(\alpha\phi)(s) = \alpha[\phi(s)]$$

para todo $\alpha \in R$, $s \in S$, $\phi \in F$. Definamos una función $f : S \to F$ asignando a cada elemento $s \in S$ la función $f(s) : S \to R$determinada por:

$$[f(s)](t) = \begin{cases} 1\ (sit = s) \\ 0\ (sit \neq 1) \end{cases}$$

$$f = \left\{ S \xrightarrow{\phi} R | \phi(s) = 0 \right\}$$

$$S_s \to F_{f(s):S_t \longrightarrow R} \begin{cases} 1\ (si\ t = s) \\ 0 (si\ t \neq s) \end{cases}$$

Para todo $t \in S$.

Probemos que F con $f : S \to F$ es un R-módulo libre sobre el conjunto S. Para ello, sea $g : S \to X$ una función arbitraria de S en un R-módulo X. Consideremos la función $h : F \to X$ que asigna a cada $\phi \in F$ el elemento

$$h(\phi) = \sum_{s \in S} \phi(s)\, g(s)$$

Observemos que el sumatorio esta bien definido puesto que a lo mas un numero finito de terminos son distintos de cero. Obviamente, h es un monomorfismoque satisface $hof = g$. Para probar la unicidad de h, sea $h' : F \to X$ un homomorfismo arbitrario que satisface $h'of = g$. Siendo $\phi \in F$, por definicion de f, tenemos

$$\phi = \sum_{s \in S} \phi(s)\, f(s)$$

. Como h' es un homomorfismo, se deduce que

$$\begin{aligned} h'(\phi) &= \sum_{s \in S} \phi(s)\, h'[f(s)] \\ &= \sum_{s \in S} \phi(s)\, g(s) \\ &= h(\phi) \end{aligned}$$

Por ser ϕ un elemento arbitrario de F, deducimos que $h' = h$. Así, todo conjunto S determina un R-módulo (F, f) libre esencialmente único. Puesto que la función $f : S \to F$ es inyectiva, podemos identificar S con su imagen $f(s)$ en F. Hecho esto, podemos considerar el conjunto dado S como un subconjunto de F que genera el módulo F. Toda función $g : S \to X$ del conjunto S en un R-módulo arbitrario X se extiende a un único homomorfismo $h : F \to X$ del módulo X. Nos referimos a F como el R-módulo libre generado por el conjunto dado S.

Consideremos ahora una familia de módulos

$$F = \{X_s | s \in S\}$$

Donde X_s es el anillo R como R-módulo sobre sí mismo. El R-módulo libre F construido en la demostración del Teo. 6 es precisamente la suma directa de la familia F. Tenemos, por tanto, el siguiente corolario.

Corolario 3 *La suma directa de una familia*

$$F = \{X_s | s \in S\} \text{ con } X_s \approx R$$

para todo $s \in S$ es isomorfa al R-módulo libre generado por el conjunto S.

Un R-módulo X se llama libre sí y solo sí es isomorfo a un R-módulo libre generado por algun conjunto S.

Corolario 4 *La suma directa de una familia arbitraria de módulos libres sobre R es un R-módulo libre.*

Teorema 7 *Todo R-módulo es isomorfo a un módulo cociente de un R-módulo libre.*

Prueba: Sea X un R-módulo arbitrariamente dado. Elijamos un subconjunto S de X que genere X. Por ejemplo, podemos escoger $S = X$. Consideremos el R-módulo libre F generado por el conjunto S. Entonces la función $g : S \to X$ se extiende a un homomorfismo $h : F \to X$ del módulo F en el módulo X.

Como $S = g(S) \subset h(F)$ y S genera x, tenemos $h(F) = X$. Luego h es un epimorfismo. Sea K el núcleo de h. Entonces, por la Prop. 13, X es isomorfo al módulo cociente F/K del módulo libre F.

Definición 12 *Un subconjunto S de un R-módulo X se llama linealmene independiente sí y solo sí, para todo número finito de elementos distintos $x_1, x_2, ..., xn$ de S,*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i = 0$$

$(\alpha_i \in R)$, implica $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$.

Definición 13 *Una base de un R-módulo es un subconjunto S linealmente independiente de X que genera X.*

Teorema 8 *Un subconjunto S de un R-módulo X es una base de X si y solo si la función inclusión $i : S \longrightarrow X$ se extiene a un isomorfismo $h : F \longrightarrow X$ del R-módulo libre generado por S sobre el módulo X.*

Prueba: Por definición de R-módulo libre generado por $S \subset X$, la función inclusión $i : S \longrightarrow X$ siempre se extiende a un único homomorfismo $h : F \longrightarrow X$

del módulo F en el módulo X. Bastará probar que S es una base de X sí y solo sí h es un isomorfismo.

Necesidad: Supongamos que S es una base de X. La imagen $h(F)$ es un submódulo de X que contiene S. Como S genera X, esto implica $h(F) =$ y por tanto h es un epimorfismo.

Por otra parte, sea $\phi : S \longrightarrow R$ un elemento cualquiera de $Ker(h)$. Como elemento de F, ϕ satisface $\phi(s) = 0$ para todo $s \in S$ excepto acaso un número finito de elementos distintos $x_1, x_2, ..., xn$ de S. Puesto que h es extensión de la función inclusión i, tenemos:

$$h(\phi) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\, x_i$$

Como $\phi \in Ker(h)$, tenemos $h(\phi) = 0$, y siendo S linealmente independiente, se deduce $\phi(x_i)$ para $i = 1, ..., n$. Luego $\phi = 0$, lo que prueba que h es un isomorfismo.

Suficiencia: Supongamos que h es un isomorfismo. Para probar la independencia lineal de S, supongamos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

Con $x_1, x_2, ..., x_n$ elementos distintos de S y $\alpha_i \in R$ para todo $i = 1, ..., n$.

Sea $\phi : S \longrightarrow R$ la función definida para cada $x \in S$ por

$$\phi(x) = \begin{cases} \alpha i \ (si\ x = x_i\ para\ algun\ i), \\ 0 (six \neq x_i\ para\ todo\ i) \end{cases}$$

Entonces tenemos

$$h(\phi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

Como h es un monomorfismo, esto implica que $\phi = 0$. Por tanto obtenemos $\alpha_i = \phi(x_i) = 0$ para $i = 1, ..., n$, lo que prueba la independencia lineal del conjunto S.

Probemos finalmente, que S genera X, para lo cual sea x un elemento abitrario de X. Como h es un epimorfismo, $\exists\ \phi \in F$ tal que $h(\phi) = x$. Como elemento de F, ϕ satisface $\phi(s) = 0$ para todo $s \in S$ excepto acaso un número finito de elementos $x_1, ..., xn$ de S. Entonces ,

$$x = h(\phi) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\, x_i$$

Como $\phi(x_i) \in R$ para $i = 1, ..., n$ deducimos que x es una combinacion lineal de S. Luego S genera X.||

Corolario 5 *Un R-módulo X tiene una base si y solo si es libre.*

Ejemplo 7 *Demostrar que toda función $f : S \longrightarrow T$ se extiende a un único homomorfismo*

$$F(f) : F(S) \longrightarrow F(T)$$

de los R-módulos libres $F(S)$ y $F(T)$generados por S y . Probar que

$$F(fog) = F(f)\, oF(g)$$

Solución: Con el siguiente diagrama probamos que toda función f se extiende a un único homomorfismo.

$$S \xrightarrow{\phi} F(S)$$
$$f \downarrow \qquad F(f) \downarrow$$
$$T \xrightarrow{\phi'} F(T)$$
$$g \downarrow \qquad F(g) \downarrow$$
$$W \xrightarrow{\phi''} F(W)$$
$$F(f) \ o \ \phi = \phi \ o \ f$$
$$F(g) \ o \ \phi = \phi \ o \ g$$

Queremos probar que:

$$F(gof) \ o \ \phi = \phi \ o \ (fog)$$

$$\begin{aligned}(F(g) \, oF(f)) \, o\phi \qquad &= F(g) \, o \, [F(f) \ o \ \phi] \\ &= F(g) \, o \ (\phi \ o \ f) \\ &= F(g) \ o \ \phi of \\ &= \phi \ og \ o \ f\end{aligned}$$

Y como es unica.

$$\Rightarrow F(gof) = F(g) \, oF(f)$$

1.5. Sucesiones Exactas

Una sucesión exacta de módulos es una sucesión finita o infinita

$$.... \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow ...$$

de homomorfismos de R-módulos tal que la imagen del homomorfismo entrante coincide con el núcleo del homomorfismo saliente de todo módulo distinto de los extremos ($si \ existen$) de la sucesión. Por ejemplo, en el módulo Y, debera ser $Im(f) = Ker(g)$ Una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

se llama sucesión exacta corta.

Como ejemplo de sucesión exacta consideremos un submódulo arbitrario E de un R-módulo X y el módulo cociente $Q = X/E$. Como el homomorfismo inclusion $i : E \rightarrow X$ es un monomorfismo ya que para todo $x \in E$ al aplicarle la función $i(e) = e$.

$$i : E_x \longrightarrow X_{i(x)=x}$$

la proyección natural $p : X \rightarrow Q$ es un epimorfismo, y

$$Im(i) = E = Ker(p)$$

Obteniéndose una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 0$$

Recíprocamente, consideremos una sucesión exacta corta arbitraria

$$0_o \longrightarrow A_{f'(0)=0} \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

Para todo elemento que tomemos en 0, tenemos que:

$$Im\,(f') = 0,\ Ker\,(f) = 0$$

Por tanto f es monomorfismo.
Para ver que g es sobreyectiva tenemos que:

$$B_{para\ todo\ b} \longrightarrow \left\{0_{g'(b)=0}\right\}$$

Entonces

$$Ker\,(g') = \{b \in B | g\,(b) = 0\}$$
$$\Rightarrow Im\,(g) = Ker\,(g')$$

Por tanto g es epimorfismo. De la exactitud, se deduce que $Im\,(f) = Ker\,(g)$.

Sea E este submódulo común $Im\,(f) = Ker\,(g)$ de X.

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Im\,(f) = Ker\,(g) \longrightarrow 0$$

Entonces f define un isomorfismo $j : A \to E$ y g induce un isomorfismo $k : Q \to B$ del módulo cociente $Q = X/E$. Si identificamos los módulos A y B con los módulos E y Q por medio de los isomorfismos j y k^{-1}, la sucesión exacta corta dada se convierte en

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Por tanto, podemos decir que una sucesión exacta corta es simplemente otro nombre para un submódulo y su módulo cociente.

Como ejemplo de sucesión exacta mas larga, considemos un homomorfismo arbitrario $h : X \to Y$ de un R-módulo X en un R-módulo Y. Consideremos el núcleo y el conúcleo de h:

$ker\,(h) \subset X$, $Coker\,(h) = Y/Im\,(h)$. Sea $i : Ker\,(h) \to X$ el homomorfismo inclusión y $p : Y \to Coker\,(h)$, la proyecion natural. Veamos que obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Ker\,(h) \xrightarrow{i} X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{p} Coker\,(h) \longrightarrow 0$$

llamada sucesión exacta corta del homomorfismo h. Veamos que es exacta en X. Sea $a \in Ker\,(h)$ como i es el homomorfismo inclusión y $i\,(a) = a$

$$Im\,(i) = \{a \in Ker\,(h)\,| i\,(a) = a\} = Ker\,(h)$$

Por tanto es exacta en X, por que $Im\,(i) = Ker\,(h)$

Veamos que es exacta en Y. Sea $y \in Ker\,(\rho)$ tal que

$$\begin{aligned} \rho\,(y) \quad &= y\ +\ Im\,(h) \\ &= 0\ +\ Im\,(h) \\ \Rightarrow Ker\,(\rho) \quad &= Im\,(h) \\ \Rightarrow y \in Im\,(h) \quad & \end{aligned}$$

Por tanto la sucesión del homomorfismo h es exacta.

Teorema 9 *En una sucesión exacta arbitraria*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

de homomorfismos de R- módulos, las siguientes tres proposiciones son equivalentes:

a) *f es un epimorfismo*

b) *g es el homorfismo trivial*

c) *h es un monomorfismo*

Prueba: $(a) \Leftrightarrow (b)$. Por definicion, f es un epimorfismo sí y solo sí $Im\,(f) = B$. Por otra parte, g es el homomorfismo trivial si y solo si $Ker\,(g) = B$. Debido a la exactitud, tenemos $Im\,(f) = Ker\,(g)$. Luego $(a) \Leftrightarrow (b)$.

$(b) \Leftrightarrow (c)$. Por definición, g es el homomorfismo trivial si y solo si $Im\,(h) = 0$. Además h es un monomorfismo si y solo si $ker\,(h) = 0$. Por la exactitud tenemos, $Im\,(g) = Ker\,(h)$. Luego $(b) \Leftrightarrow (c)$.

Corolario 6 *En una sucesión exacta arbitraria*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \xrightarrow{k} E$$

de homomorfirmos de R-módulos, $C = 0$ si y solo si f e sun epimorfismo y k es un monomorfismo.

Demostracion: Necesidad: Supongamos que $c = 0$.

$$Ker\,(h) = 0$$

$$Im\,(g) = 0$$

Entonces g y h son homomorfismos triviales. Luego, por Teorema 9, f es un epimorfismo y k es un monomorfismo.

Suficiencia: Supongamos que f un epimorfismo y k un monomorfismo. Por Teorema 9. g y h son homomorfismos triviales. Se deduce que la $Im\,(g) = 0$ y el $Ker\,(h) = C$. Por la exactitud , tenemos que:

$$Im\,(g) = Ker\,(h)$$

. Luego $C = 0$.

Nota: En particular la condición (5,2) se cumple cuando $B = 0$ y $D = 0$.

Corolario 7 *Si una sucesión $0 \to C \to 0$ de R-módulos es exacta, entonces $c = 0$.*

Prueba:

$$0 \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} 0$$

Por la exactitud $Im\,(f) = Ker\,(g)$

$$Im\,(f) = 0 \; y \; Ker\,(g) = c$$

, $\Rightarrow C = 0.||$

Corolario 8 *En una sucesión exacta arbitraria*

$$A \xrightarrow{d} B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D \xrightarrow{h} E \xrightarrow{k} F$$

de homomorfismos e R-módulos, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) *g es isomorfismo*

b) *f y h son homomorfismos triviales*

c) *d es epimorfismo y k es monomorfismo.*

Prueba: $(a) \Leftrightarrow (b)$ y $(b) \Leftrightarrow (c)$ son conseuencias inmediatas de (Teo.9).||

Corolario 9 *Si la sucesión*

$$0 \to C \xrightarrow{g} D \to 0$$

de homomorfismos de R-módulos es exacta, entonces g es isomorfismo.

Prueba: Sea

$$0_0 \longrightarrow C_{f(0)=0} \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

Entonces $Im\,(f) = 0$, por la exactitud, tenemos que:

$$Im\,(f) = ker\,(g)$$

$$\Rightarrow Ker\,(g) = 0$$

$$\Rightarrow\ g\,esmonomorfismo$$

Veamos que es sobreyectiva: $Im\,(f) = 0$; por la exactitud. Sea $c \in C\ \Rightarrow\ g\,(c) = d$

$$\Rightarrow\ Im\,(g) = \{d \in D|\ D \in Ker\,(h)\} = Ker\,(h)$$

Por tanto g es epimorfismo. Por tanto g es isomorfismo. Se dice que una sucesión exacta

$$... \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow ...$$

se descompone en el módulo Y; o es descomponible en Y, si y solo si el submódulo $A = Im\,(f) = Ker\,(g)$ de Y en el sumando directo de Y. Es decir, si y solo si Y se descompone en suma directa de A y otro submódulo. Si la sucesión exacta es descomponible en cada uno de sus módulos no extremos , decimos que se descompone o que es descomponible. Puesto que un sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

por lo tanto se descompone en A y C, es descomponible si y solo si lo es en B.||

Teorema 10 *Si una sucesión exacta*

$$... \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow ...$$

de homomorfismos de R-módulos se descompone en el módulo Y, entonces Y es isomorfo a la suma directa $Im\,(f) \oplus Im\,(g)$

Prueba: Por definición, Y se descompone en la suma directa del módulo $A = Im\,(f)$ y otro submódulo B. Basta probar que $B \approx Im\,(g)$. Para ello, consideremos la restricción $h = g|B : B \to Z$ entonces h es un homomorfismo del módulo B en el módulo Z. Como

$$Ker\,(g) = Im\,(f) = A,\ A \cap B$$

se sigue que $Ker\,(h) = \{0\}$, entonces h es un monomorfismo. Queda por establecer que $Im\,(h) = Im\,(g)$. Sea $z \in Im\,(g)$ arbitrariamente dado. Entonces existe un elemento $y \in Y$ tal que $g\,(y) = z$. Como $Y = A + B$, existen elementos $a \in A$ y $b \in B$ con $y = a + b$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} z &= g\,(y) \\ &= g\,(a+b) \\ &= g\,(a) + g\,(b) \\ &= g\,(b)\,,\ g\,(a) = 0 \text{ por que } Ker\,(g) = A \\ &= h\,(b) \end{aligned}$$

Y como $h\,(b) = g\,(b)$ por como esta definido, ya que $a \in A$ y $b \in B$. Por tanto

$$Im\,(h) = Im\,(g)$$

Corolario 10 *Si una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

de homomorfsmos de R-módulos se descompone, entonces B es isomorfo a la suma direta $A \oplus C$.

Prueba: Similar a la prueba anterior.||

Corolario 11 *Una sucesión exacta arbitraria*

$$... \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow ...$$

de homomorfismos de R-módulos se descompone en el módulo Y si existe un homomorfismo $h : Y \rightarrow X$ *tal que el producto* hof *es un automorfismo del módulo X. En este caso, tenemos*

$$Y \approx Im\,(f) \oplus Im\,(g) \approx X \oplus Im\,(g)$$

Prueba: Por Teorema 9 tenemos que si $h = gof$ de dos homomorfismos $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ de R-módulos X,Y,Z es un isomorfismo entonces se cumple:

i) f es monomorfismo

ii) g es epimorfismo

iii) El módulo Y es descomponible en la suma directa de $Im\,(f)\ y\, Ker\,(g)$ en simbolos:

$$Y = Im\,(f) \oplus Im\,(g)$$

$$... \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow ...$$

$$f\,(x) = y$$

$$h\,(y) = x$$

$\Rightarrow Im\,(f) = y$, h es sobreyectiva, f es inyectivo.

$Im\,(f) \approx X$ Por que f es sobreyectiva e inyectiva por corolario 11
$X \longrightarrow Im\,(f)$, $X \cong Im\,(f)$

Corolario 12 *Una sucesión exacta arbitraria*

$$... \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow ...$$

de homomorfismos de R-módulos se descompone en el módulo Y si existen un homomorfismo $k : Z \rightarrow Y$ *tal que el producto* gok *es un automorfismo del módulo Z. En este caso, tenemos*

$$Y \approx Im\,(f) \oplus Im\,(g) \approx Im\,(f) \oplus Z$$

.

Prueba: Similar a la demostracion anterior.||

Sea $f : X \rightarrow Y$ un homomorfismo arbitrario de un R-módulo X e un R-módulo Y. Un inverso por la izquierda de f, es un homomorfismo $h : Y \rightarrow X$ tal que el producto hof es el automorfismo identidad del módulo X. Analogamente, un inverso por la derecha de f es un homomorfismo $k : Y \rightarrow X$ tal que el producto fok es el automorfismo identidad del módulo Y. Entonces se tiene el siguiente corolario.

Corolario 13 *Para cualquier sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

de homomorfismos de R-módulos, las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) *La sucesión exacta corta se descompone.*

b) *El homomorfismo f tiene un inverso por la izquierda*

c) *El homomorfismo g tiene un inverso por la derecha*

Prueba: $(a) \Rightarrow (b)$ y $(a) \Rightarrow (c)$. Para ello, supongamos que la sucesión exacta corta dada se descompone. Sea $D = Im\,(f) = Ker\,(g)$. Por definición,el módulo B se descompone en la suma directa de su submódulo D y otro submódulo E de B. Observemos que f es un monomorfismo y por tanto define un isomorfismo i : $A \rightarrow D = Im\,(f)$. Sea $x \in B$ arbitrariamente dado. Entonces existen elementos $u \in D$ y $v \in E$ unicamente determinados. Se puede comprobar fácilmente que la correspondencia.

$$x \rightarrow h\,(x) = i^{-1}\,(u)$$

define un homomorfismo $h : B \rightarrow A$ que es el inverso por la izquierda de f. Para establecer (c), observemos que g es un epimorfismo con D como núcleo. Puesto que $D \cup E = 0$, se deduce que la restriccion $j = g|E : E \rightarrow C$ es un isomorfismo. Por ello, la correspondencia, $x \rightarrow k\,(x) = j^{-1}\,(x)$ para todo $x \in C$ define un homomorfismo $k : C \rightarrow B$ que es inverso por la derecha de g.

Teorema 11 $(EL\ LEMA\ CUATRO)$. *Si en el siguientre diagrama de homomorfismos de R-módulos,*

$$\begin{array}{cccc} A \xrightarrow{f} & B \xrightarrow{g} & C \xrightarrow{h} & D \\ \alpha \downarrow & \beta \downarrow & \gamma \downarrow & \delta \downarrow \\ A' \xrightarrow{f'} & B' \xrightarrow{g'} & C' \xrightarrow{h'} & D' \end{array}$$

las dos filas son exactas, las tres cuadros son conmutativos, α es un epimorfismo, y δ es un monomorfismo, entonces tenemos.

$$Im\,(\beta) = g' - 1\,[Im\,(\gamma)]$$

$$Ker\,(\gamma) = g\,[Ker\,(\beta)]$$

Por tanto, si γ es un epimorfismo también lo es β, y si β es un monomorfismo también lo es γ. Aquí la conmutatividad de los tres cuadros expresa las tres siguientes igualdades:

$$\beta of = f'\ o\ \alpha$$

$$\gamma og = g'\ o\ \beta$$

$$\delta oh = h'\ o\ \gamma$$

Prueba: Para probar (a), sea $b' \in Im\,(\beta)$ arbitrariamente dado. Entonces, existe $b \in B$ tal que $\beta\,(b) = b'$. Por la conmutatividad del cuadro central, tenemos:

$$g'\,(b') = g'\,[\beta\,(b)] = \gamma\,[g\,(b)] \in Im\,(\gamma)$$

Esto implica $b' \in g'^{-1}\,[Im\,(\gamma)]$, como b' es un elemento arbitrario de

$$Im\,(\beta)\ es\ Im\,(\beta) \subset g'\,[Im\,(\gamma)]$$

Reciprocamente, sea $b' \in g'^{-1}[Im(\gamma)]$, entonces el elemento $c' = g'(b)$ esta en $Im(\gamma)$. Lueso $c \in C$ tal que $\gamma(c) = c'$. Por la exactitud de la fila inferior, tenemos $h'(c') = 0$. Debido a la conmutatividad del cuadro derecho, tenemos

$$\begin{aligned} [h(c)] &= h'[\gamma(c)] \\ &= h'(c') \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como δ es monomorfismo, esto implica $h(c) = 0$. Por tanto obtenemos $c \in Ker(h) = Im(g)$ en virtud de la exactitud de la fila superior. Por definicion de $Im(g)$, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Consideremos el elemento $b' - \beta(b)$ del módulo B'. Como

$$\begin{aligned} g[b' - \beta(b)] &= g(b') - g[\beta(b)] \\ &= c' - c' \\ &= 0 \end{aligned}$$

$b' - \beta(b)$ figura en $Ker(g') = Im(f')$. Se sigue que existe $a' \in A$ tal que

$$f'(a') = b' - \beta(b)$$

. Y como α es un epimorfismo, existe un elemento $a \in A$ con $\alpha(a) = a'$. Consideremos ahora el elemento $f(a) + b$ del módulo B. Por la conmutatividad del cuadro izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned} \beta(f(a) + b) &= \beta[f(a)]\beta(b) \\ &= f'[\alpha(a)] + \beta(b) \\ &= f'(a) + \beta(b) \\ &= b' - \beta(b) + \beta(b) \\ &= b' \end{aligned}$$

Esto implica $b' \in Im(\beta)$. Como bé sun elemento arbitrario de $g'^{-1}(Im(\gamma))$, es $g'^{-1}(Im(\gamma)) \subset Im(\beta)$. Esto completa la demostración de (a). Para probar (b), sea $c \in Ker(\gamma)$. Luego $\gamma(c) = 0$. por la conmutatividad del cuadro derecho tenemos $\delta[h(c)] = h'[\gamma(c)] = h'(0) = 0$. Como δ es un monomorfismo, esto implica $h(c) = 0$. Por tanto obtenemos
$c \in Ker(h) = Im(g)$ debido a la exactitud de la fila superior. Por definición de $Im(g)$, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Consideremos el elemento $b' = \beta(b) \in B'$. Por la conmutatividad del cuadro central, obtenemos

$$\begin{aligned} g'(b') &= g'[\beta(b)] \\ &= \gamma[g(b)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto implica que $b' \in Ker(g') = Im(f')$ debido a la exactitud del a fila inferior. así, existe $a' \in A'$ ta que $f'(a') = b'$. Como α es epimorfismo, existe $a' \in A$ tal que $\alpha(a) = a'$. Considermos ahora el elemento $b - f(a)$ del módulo B.$g'^{-1}(Im(\gamma))$ por la conmutatividad del cuadro izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned} \beta[b - f(a)] &= \beta(b) + \beta[f(a)] \\ &= \beta(b - f'[\alpha(a)]) \\ &= b' - b' \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto implica que el elemento $b-f\,()$ figura en el $Ker\,(\beta)$. Por otra parte, tenemos también

$$\begin{aligned} g\,[b-f\,(a)] \quad &= g\,(b)-g\,[f\,(a)] \\ &= c-0 \\ &= c \end{aligned}$$

Luego $c \in g\,[Ker\,(\beta)]$. Como c es un elemento arbitrario de

$$Ker\,(\gamma) \ es \ Ker\,(\gamma) \subset g\,[Ker\,(\beta)]$$

Recíprocamente, sea $c \in g\,[Ker\,(\beta)]$. Entonces existe $b \in Ker\,(\beta)$ tal que $g\,(b) = c$. Por la conmutatividad del cuadro central, tenemos

$$\begin{aligned} \gamma\,(c) \quad &= \gamma\,[g\,(b)] \\ &= g'\,[\beta\,(b)] \\ &= g'\,(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto implica que $c \in Ker\,(\gamma)$. Como c es un elemento arbitrario de $g\,[Ker\,(\beta)]$, se tiene

$$g\,[Ker\,(\beta)] \subset ker\,(\gamma)$$

lo que completa la demostración.||

Nota 1 *La ultima afirmación de (Teo. 11) es una consecuencia inmediata de* (a) *y* (b)*.*

Este tipo de demostración suele designar ususalmente como "**Diagrama cazador**".

Corolario 14 (*EL LEMA CINCO*). *Si en el digrama de homomorfismos de R-módulos,*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{k} & E \\ \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \delta\downarrow & & \epsilon\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{k'} & E' \end{array}$$

las dos filas son exactas, los cuatro cuadros son conmutativos, y los homomorfismos α, β, δ, ϵ *son isomorfismos, entonces el homomorfismo central y debe ser tabién un isomorfismo.*

Corolario 15 (*EL LEMA CINCO CORTO*). *Si en el digrama de homomorfismos de R-módulos,*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to & 0 \\ & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \to & 0 \end{array}$$

las dos filas son exactas y los dos cuadros son conmutativos, entonces:

a) *Si* α *y* γ *son monomorfismos, también lo es* β

b) *si* α *y* γ *son epimorfismos, también lo es* β

por lo tanto el homomorfismo central β *es un isomorfismo si* α *y* γ *son también isomorfismos.*

Proposición 19 *1. Consideremos el siguiente cuadro conmutativo de homomorfismos de R-módulos:*

$$X \xrightarrow{h} Y$$

$$\zeta \downarrow \qquad \eta \downarrow$$

$$X' \xrightarrow{h'} Y'$$

Probar que ζ *aplica* $Ker\,(h)$ *en* $Ker\,(h')$ *y* η *aplica* $Im\,(h)$ *en* $Im\,(h')$*. Por tanto,* ζ *y* η *determinan los siguientes homomorfismos:*

$$\zeta : Ker\,(h) \rightarrow Ker\,(h')$$

$$\eta : Im\,(h) \rightarrow Im\,(h')$$

$$\zeta* : Coim\,(h) \rightarrow Coim\,(h')$$

$$\eta* : Coker\,(h) \rightarrow Coker\,(h')$$

Luego $h\,(x) = 0$*, por la conmutatividad tenemos que*

$$\begin{aligned} \eta\,(h\,(x)) \qquad &= h'\,(\zeta\,(x)) \\ &= h'\,(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$\zeta\,(x) \in Ker\,(h')$$

Entonces se tiene que:

$$\zeta : Ker\,(h) \rightarrow Ker\,(h')$$

Ahora, sea $x' \in Ker\,(h)$*,* $\Rightarrow \exists\; x \in X$ *tal que* $h\,(x) = x'$

$$\eta\,(h\,(x)) = h'\,(\zeta\,(x))$$

Entonces:

$$\eta\,(x') = h'\,(\zeta\,(x)) \in Im\,(h')$$

Se tiene que: $\eta : Im\,(h) \rightarrow Im\,(h')$*. De la misma manera se prueba para las siguientes:*

$$\zeta* : Coim\,(h) \rightarrow Coim\,(h')$$

$$\eta* : Coker\,(h) \rightarrow Coker\,(h')$$

2. Consideremos el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} 0$$

$$h \downarrow$$

$$D$$

Donde la fila es exacta y $hof = 0$*. Probar que existe un homomorfismo* $k : c \rightarrow D$ *unicamente determinado que satisface* $kog = h$*.*

Prueba:

1. Consideremos el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

donde la fila es exacta y $goh = 0$. Probar que existe un homomorfismo $K : D \rightarrow A$ unicamente determinado que satisface $fok = h$.

2. Consideremos el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

Donde las filas son exactas y los cuadros conmutativos. Aplicando la proposición anterior, demostrar que fy g definen una sucesión

$$(i)\, Ker\,(\alpha) \rightarrow Ker\,(\beta) \rightarrow Ker\,(\gamma)$$

y f' y g' inducen una sucesión exacta.

$$(ii)\, Coker\,(\alpha) \rightarrow Coker\,(\beta) \rightarrow Coker\,(\gamma)$$

Probar que (i) es exacta si $f' : A' \rightarrow B'$ es un monomorfismo y que (ii) es exacta si $g : B \rightarrow C$ es un epimorfismo.

Solución: Sea $a' + Im\,(\alpha) \in \frac{A'}{Im(\alpha)}$

$$\begin{aligned} f'\alpha\,[a' + Im\,(\alpha)] &= f'\,(a') + Im\,(\beta) \\ Sean\ a_1' + Im\,(\alpha) &= a_2 + Im\,(\alpha) \\ (a_1 - a_2) \in Im\,(\alpha) & \\ \exists a \in A\ tq\ \alpha\,(a) &= a_1' - a_2' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\beta\ o\ f)\,(a) &= \beta\,(f\,(a)) \\ &= (f'\ o\ \alpha)\,(a) \\ &= f'\,(\alpha\,(a)) \\ &= f'\,(\alpha\,(a_1' - a_2')) \\ &= f'\,(\alpha\,(a_1') - f'\,(a_2)) \\ f'\,(\alpha\,(a_1') - f'\,(a_2')) &= \beta\,(b) \\ f'\,(\alpha\,(a_1') - f'\,(a_2'))\ &\in Im\,(\beta) \\ f'\,(\alpha\,(a_1')) + Im\,(\beta) &= f'\,(a_2') + Im\,(\beta) \end{aligned}$$

Por tanto f_*' esta bien definida.

1.6. Sucesiones Semiexactas

Una secesión finita o infinita

$$\cdots \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow \cdots$$

de homomorfismos de R-módulos se llama semiexacta si y sólo si la imagen del homomorfismo entrante está contenida en el núcleo del homomorfismo saliente en todo módulo distintos de los extremos (si existen) de la sucesión. En virtud de (Prop. 12), la sucesión es semiexacta si y sólo si el producto $g \circ f$ de dos homomorfismos cualesquiera consecutivos de la sucesión f y g es el homomorfismo trivial.

Toda sucesión exacta de homomorfismos de R-módulos es semiexacta, pero no toda sucesión semiexacta es exacta. Por ejemplo, sea A un submódulo propio de un R-módulo X, es decir, $A \neq X$ y $A \subset X$ y sea $i : A \to X$ el homomorfismo inclusión. Entonces, la sucesión $0 \to A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\rho} 0$ es semiexacta, ya que $Im(i) = A \subset X = Ker(\rho)$ entonces $Im(i) \subset Ker(\rho)$ pero no es exacta ya que $A \neq X$ entonces $A \not\subset X$ esto implica que $ker(\rho) \not\subset Im(i)$.
Por lo tanto la sucesión no es exacta. El módulo cociente $Q = X/A$ viene a ser como una medida de la desviación de la exactitud. Esto sugiere la siguiente definición general.

Definición 14 *En una sucesión semiexacta arbitrarimente dada*

$$C : \cdots \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to \cdots$$

de homomorfismos de R-módulos, en el módulo cociente $Ker(g)/Im(f) = M$ se llama módulo derivado de la sucesión C en el módulo Y.

Proposición 20 *Una sucesión semiexacta de homomorfismos de R-módulos es exacta si y sólo si todos sus módulos derivados son triviales.*

Prueba.
Suficiencia: Todos sus módulos derivados son triviales entonces $Ker(g)/Im(f) = 0 = Im(f)$. Luego $\forall x \in Ker(g) : x + Im(f) = Im(f)$. Y por la diferencia de clases $x \in Im(f)$. De ahí que $Ker(g) \subset Im(f)$ y por ser semiexacta entonces $Im(f) = Ker(g)$.
Necesidad: Si es exacta $Im(f) = Ker(g)$ entonces

$$\begin{aligned} Ker(g)/Im(f) &= \{x + Im(f)/x \in Ker(g)\} \\ &= \{x + Im(f)/x \in Im(f)\} \\ &= \{Im(f)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto todos sus módulos derivados son triviales.||

Como subíndices para los módulos de una sucesión semiexacta C se utilizan los enteros decrecientes o enteros crecientes.

En el primer caso, la sucesión semiexacta C recibe el nombre de *sucesión descendente (o complejo de cadenas)* y los homomorfismos de C se denotarán todos por el mismo símbolo ∂. Así, una sucesión descendente C es de la siguiente forma:

$$C : \cdots \xrightarrow{\partial} C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots$$

con $\partial \circ \partial = 0$. En este caso, los elementos de C_n se llaman *cadenas n-dimensionales* de C y los homomorfismos ∂ son los *operadores borde*. El núcleo de ∂ en C_n denotado por $Z_n(C)$, se denomina *módulo de los ciclos n-dimensionales* de C. La imagen de ∂ en C_n, denotada por $B_n(C)$ es llamada *módulo de los bordes n-dimensionales* de C. Finalmente, el módulo derivado de C en el módulo C_n, designado por

$$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$$

recibe el nombre de *módulo de homología n-dimensional* de C.

Si los subíndices que se utilizan son enteros crecientes, entonces la sucesión semiexacta C se llama *sucesión ascendente (o complejo de cocadenas)* y los homomorfismos de C se representan todos con el mismo símbolo δ. Así, una sucesión ascendente C es de la forma siguiente:

$$C : \cdots \xrightarrow{\delta} C^{n-1} \xrightarrow{\delta} C^{n} \xrightarrow{\delta} C^{n+1} \xrightarrow{\delta} \cdots$$

donde $\delta \circ \delta = 0$. En este caso los términos *cocadena, cociclo y coborde* son utilizados en lugar de cadena, ciclo y borde para las sucesiones descendentes. Además, se usan superíndices en lugar de subíndices. Finalmente, el módulo derivado

$$H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$$

recibe el nombre de *módulo de cohomología n-dimensional* de C.

Debido a la analogía entre sucesiones ascendentes y descendentes, consideraremos únicamente sucesiónes descendentes en el resto de esta sección. Sean dos sucesiones descendentes cualesquiera

$$C : \cdots \xrightarrow{\partial} C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots$$

$$D : \cdots \xrightarrow{\partial} D_{n+1} \xrightarrow{\partial} D_n \xrightarrow{\partial} D_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots$$

de R-módulos. Un *homomorfismo (o transformación de cadenadenas)*
$f : C \to D$ es una familia de homomorfismos

$$f = \{f_n : C_n \to D_n / n \in Z\}$$

de R-módulos con el conjunto de índices Z, tal que se tiene

$$\partial \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial$$

en el rectángulo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} \\ f_{n+1} \downarrow & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ . \quad D_{n+1} & \xrightarrow{\partial'} & D_n & \xrightarrow{\partial'} & D_n - 1 \end{array}$$

para todo entero Z. Consideremos ahora un homomorfismo arbitrariamente dado $f : C \to D$ de la sucesión descendente C en la sucesión descendente D. Por (Prop. 20), el homomorfismo $f_n : C_n \to D_n$ aplica $Z_n(C) \xrightarrow{f_n} Z_n(D)$ y $B_n(C) \xrightarrow{f_n} B_n(D)$ (*). Por tanto f_n induce un homomorfismo

$$H_n(f) : H_n(C) \to H_n(D)$$

entre los módulos de homología n-dimensionales $H_n(C)$ y $H_n(D)$. En efecto hay que ver que esta bien definido; para ello primero hay que encontrar su imagen.

$$\begin{aligned} H_n(f) &: H_n(C) \to H_n(D) \\ x + B_n(C) &\sim H_n(f(x + B_n(C))) \\ &= f_n(x) + B_n(D) \end{aligned}$$

Por (*) Como $\forall x \in Z_n(C)$ $f_n(x) \in Z_n(D)$ entonces todo elemento tiene imagen en $H_n(D)$.

Ahora veamos que la imagen es única

$$\begin{gathered} x + B_n(C) = y + B_n(C) \\ x - y \in B_n(C) \\ f_n(x - y) \in B_n(D) \\ f_n(x) + B_n(D) = f_n(x) + B_n(D) \\ f_n(x + B_n(C)) = f_n(y + B_n(C)) \\ H_n(f)(x + B_n(C)) = H_n(f)(y + B_n(C)) \end{gathered}$$

Lo que se concluye que la imagen es única. Este homomorfismo $H_n(f)$ recibe el nombre de *homomorfismo inducido n-dimensional* de f

Definición 15 *Denominaremos homomorfismo identidad $i : C \to C$ de una sucesión descendente C, a la familia*

$$i = \{i_n : C_n \to C_n / n \in Z\}$$

de los homomorfismos identidad i_n de los módulos C_n

Proposición 21 *Si $i : C \to C$ es el homomorfismo identidad de una sucesión descendente C entonces $H_n(i)$ es el homomorfismo identidad del módulo $H_n(C)$ para todo $n \in Z$.*

Prueba. Por lo anterior el homomorfismo i_n aplica $Z_n(C) \to Z_n(C)$ y $B_n(C) \to B_n(C)$ por lo tanto i_n induce un homomorfismo

$$H_n(i) : H_n(C) \to H_n(C) \parallel$$

Sean $f : C \to D$ y $g : D \to E$ homomorfismos de sucesiones descendentes. Entonces la familia $h = \{g_n \circ f_n : C_n \to E_n / n \in Z\}$ es un homomorfismo de la sucesión descendente C en la sucesión descendente E. Este homomorfismo $h : C \to E$ se llama *producto (o composición)* de los homomorfismos f y g, y se denota por $g \circ f : C \to E$.

Proposición 22 *Si $f : C \to D$ y $g : D \to E$ son homorfismos de sucesiones descendentes, entonces $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ para todo $n \in Z$*

Prueba. $H_n(C) \xrightarrow{H_n(g \circ f)} H_n(E)$

$$\begin{aligned} x + B_n(C) \longrightarrow\ & (H_n(g \circ f))(x + B_n(C)) \\ &= (g_n \circ f_n)(x + B_n(C)) \\ &= g_n(f_n(x + B_n(C))) \\ &= g_n(f_n(x) + B_n(D)) \\ &= g_n(f_n(x)) + B_n(E) \end{aligned}$$

$$H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} \quad H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} \quad H_n(E)$$

$$\begin{aligned} x + B_n(C) \to\ & (H_n(f))(x + B_n(C)) \\ &= f_n(x + B_n(C)) \\ &= f_n(x) + B_n(D) \to (H_n(g))(f_n(x) + B_n(D)) \\ &\qquad = g_n(f_n(x) + B_n(D)) \\ &\qquad = g_n(f_n(x)) + B_n(E) \end{aligned}$$

De esto tenemos que $\forall\ x + B_n(C) \in H_n(f)$

$$(H_n(g) \circ H_n(f))(x + B_n(C)) = g_n(f_n(x)) + B_n(E) = (H_n(g \circ f))(x + B_n(C))$$

Por lo tanto $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ para todo $n \in Z \parallel$

Definición 16 *Se llama sucesión descendente trivial, una sucesión descendente 0 (nula) tal que, $\forall\ n \in Z$, 0_n consta de un solo elemento. Como toda sucesión descendente trivial es exacta, tenemos $H_n(0) = 0\ \forall\ n \in Z$.*

Definición 17 *Recibe el nombre de homomorfismo trivial de una sucesión descendente C en una sucesión descendente D, el homomorfismo $h : C \to D$ tal que h_n es el homomorfismo trivial del módulo C_n en $D_n\ \forall\ n \in Z$. Expresaremos con $h = 0$ que h es el homomorfismo trivial*

Proposición 23 *Si $h : C \to D$ es el homomorfismo trivial de una sucesión descendente C en una sucesión descendente D, entonces*

$$H_n(h) : H_n(C) \to H_n(D)$$

es el homomorfismo trivial $\forall\ n \in Z$

Prueba. Sea 0 la sucesión descendente trivial tal que 0_n consiste del elemento cero de D_n $\forall\ n \in Z$. Sean $C \xrightarrow{i} 0 \xrightarrow{j} D$ dos homomorfismos únicamente determinados. Como h es trivial, tenemos $h = j \circ i = 0$. Por (Prop. 22), es $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(h) = 0$. Como $H_n(0) = 0\ \forall\ n \in Z$. Por lo tanto $H_n(h) : H_n(C) \to H_n(D)$ es el homomorfismo trivial.||

Dos homomorfismos $f, g : C \to D$ de una sucesión descendente C en una sucesión descendente D se llaman *homotópicos* si y sólo si existe una familia de homomorfismos

$$h = \{h_n : C_n \to D_{n-1}/n \in Z\}$$

tal que $\forall n \in Z$ se cumple

$$\partial^{'} \circ h_n + h_{n+1} \circ \partial = f_n - g_n$$

en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{h_n} & D_{n+1} \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial^{'} \\ C_{n-1} & \xrightarrow{h_{n-1}} & D_n \end{array}$$

En este caso, la familia h se llama *homotopía (o homotopía de cadenas)* entre los homomorfismos f y g; en símbolos, $h : f \approx g : C \to D$

Proposición 24 *Si dos homomorfismos $f, g : C \to D$ de sucesiones descendentes son homotópicos, entonces*

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(C) \to H_n(D)$$

para todo $n \in Z$

Prueba. Sea $h : f \approx g : C \to D$. Para probar que $H_n(f) = H_n(g)$ sea $x \in H_n(C)$ arbitrariamente dado. Elijamos $z \in Z_n(C)$ tal que $z \in ker(\partial^{'})$ en C_n entonces $\partial^{'}(z) = 0$. Definamos la función proyección natural

$$\rho : Z_n(C) \to H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}$$

$$z \quad \to \quad \rho(z) = x = z + B_n(z)$$

Entonces tenemos

$$(f_n - g_n)(z) = f_n(z) - g_n(z) = \partial(h_n(z)) + h_{n-1}(\partial^{'}(z)) = \partial(h_n(z))$$

y como $\partial(h_n(z)) \in B_n(D) = Im(\partial)$ en C_n. Entonces

$$f_n(z) - g_n(z) \in B_n(D)$$
$$f_n(z) + B_n(D) = g_n(z) + B_n(D)$$
$$H_n(f(z + B_n(c))) = H_n(g(z + B_n(c)))$$
$$(H_n(f))(x) = (H_n(g))(x)$$
$$H_n(f) = H_n(g)$$

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{h_n} & D_{n+1} \\ \downarrow \partial' & & \downarrow \partial \\ C_{n-1} & \xrightarrow{h_{n-1}} & D_n \end{array}$$

y se completa la prueba. ||

Consideremos ahora una *sucesión exacta corta S de sucesiones descendentes:*

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$$

Con ello, queremos expresar que $f : C \to D$ y $g : D \to E$ son homomorfismos de sucesiones descendentes tales que

$$0 \to C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \to 0$$

es una sucesión exacta corta de R-módulos para todo entero $n \in Z$

Lema 5 *Para todo entero $n \in Z$, la sucesión*

$$H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E)$$

de R-módulos es exacta.

Prueba. Como consideramos una sucesión exacta de homomorfismos f, g sabemos que es semiexacta entonces el producto $g \circ f = 0$ (por ser el homomorfismo trivial) por (prop 22 y 23)

$$H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f) = H_n(0) = 0$$

Entonces $Im(H_n(f)) \subset Ker(H_n(g))$; la sucesión es semiexacta.

Falta probar que $Im(H_n(f)) \supset Ker(H_n(g))$ $\forall n \in Z$. Sea α un elemento del submódulo $Ker(H_n(g))$ en $H_n(D)$ elijamos un ciclo

$$z \in Z_n(D),\ \alpha \in D_n \qquad Z_n(D) \subset D_n,\ z \in \alpha$$

$$\alpha \in Z_n(D)/B_n(D) \ \Rightarrow \alpha = z + B_n(D);\ \ z \in Z_n(D)$$

Como α es un elemento del submódulo $Ker(H_n(g))$ entonces $H_n(g)(\alpha) = 0$ y tenemos que

$$\begin{aligned}(H_n(g))(\alpha) &= (H_n(g))(z + B_n(D)) \\ &= g_n(z + B_n(D)) \\ &= g_n(z) + B_n(E) \\ &= 0 \\ &\Rightarrow g_n(z) \in B_n(E)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} & & & & \\
 & & \partial'' \uparrow & & \partial' \uparrow & & & & \\
0 \to & & C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n & \xrightarrow{g_n} & E_n & & \to 0 \\
 & & & & \partial' \uparrow & & \partial \uparrow & & \\
 & & & & D_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & E_{n+1} & &
\end{array}$$

Por tanto $\exists y \in E_{n+1}$ tal que $\partial(y) = g_n(z)$ donde ∂ denota el operador borde $\partial : E_{n+1} \to E_n$. Puesto que g_{n+1} es epimorfismo $g_{n+1}(x) = y$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}g_n(z - \partial^{'}(x)) &= g_n(z) - g_n(\partial^{'}(x)) \\ &= g_n(z) - \partial(g_{n+1}(x)) \text{ ;por conmutatividad} \\ &= g_n(z) - \partial(y) \\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo que

$$z - \partial^{'}(x) \in ker(g_n) = Im(f_n)$$

Esto implica $z - \partial'(x) \in Im(f_n)$. Entonces existe $w \in C_n$ con $f_n(w) = z - \partial^{'}(x)$ tal que

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(\partial^{''}(w)) &= \partial^{'}(f_n(w)) \text{ ; por conmutatividad del diagrama} \\
&= \partial^{'}(z - \partial^{'}(x)) \\
&= \partial^{'}(z) - (\partial^{'} \circ \partial^{'})(x) \\
&= \partial^{'}(z) \\
&= 0 \qquad \text{; Ya que } z \in Z_n(D) = ker(\partial^{'}) \text{ en } D_n
\end{aligned}$$

entonces $f_{n-1}(\partial^{''}(w)) = 0$; Como f_{n-1} es monomorfismo $\partial^{''}(w) = 0$; de aquí que $w \in Ker(\partial^{''}) = Z_n(C)$; en C_n. Ahora sea ρ la proyección natural

$$\begin{aligned}
\rho : \qquad & Z_n(C) \to H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C) \\
& w \to \rho(w) = \beta = w + B_n(C) \text{ ; } w \in Z_n(C)
\end{aligned}$$

Como $\partial^{'}(x) \in \left\{Im(\partial^{'}) \text{ en } D_n\right\} = B_n(D)$ entonces $\partial^{'}(x) \in B_n(D)$. Tenemos $f_n(w) = z - \partial^{'}(x)$ con $\alpha = z + B_n(D)$. De aquí que $z - f_n(w) = \partial^{'}(x) \in B_n(D)$ $\alpha = z + B_n(D) = f_n(w) + B_n(D)$; Por igualdad de clases

$$\begin{aligned}
\alpha &= f_n(w) + B_n(D) \\
&= f_n(w + B_n(C)) \\
&= H_n(f)(w + B_n(C)) \text{ donde } w \in Z_n(C) \\
&= H_n(f)(H_n(C))
\end{aligned}$$

Luego tendríamos en la sucesión

$$Z_n(C) \xrightarrow{\rho} H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)} \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E)$$

$$\begin{aligned}
w \to \rho(w) &= \beta \\
&= w + B_n(C) \to \quad H_n(f)(w + B_n(C)) \\
&\qquad\qquad\qquad = H_n(f)(\beta) = \alpha
\end{aligned}$$

De aquí que $\alpha \in Im(H_n(f))$. Por tanto

$$Ker(Hn(g) \subset Im(H_n(f)))$$

Por lo que se concluye que

$$Ker(H_n(g)) = Im(H_n(f)) \;||$$

A fin de enlazar las sucesiones exactas de (prop. 25) en una sola sucesión, construyamos para cada entero n un homomorfismo

$$\partial : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$$

donde $f_{n-1}(v) = \partial^{'}(u)$ y $g_{n-1} = z$ llamado *homomorfismo de conexión* de la sucesión exacta corta (S)

Definamos para ello, una función $\phi : Z_n(E) \to H_{n-1}(C)$ como sigue. Sea z un elemento arbitrario de $Z_n(E)$ o sea que $z \in Z_n(E) = \{Ker(\partial) \text{ en } E_n\}$ entonces

$\partial(z) = 0$. Como $g_n : D_n \to E_n$ es un epimorfismo, existe $u \in D_n$ con $\boxed{g_n(u) = z,}$ consideremos el elemento $\partial^{'}(u) \in D_{n-1}$. Puesto que

$$g_{n-1}(\partial^{'}(u)) = \partial(g_n(u)) = \partial(z) = 0$$

tenemos $\partial^{'}(u) \in ker(g_{n-1}) = Im(f_{n-1})$. Siendo f_{n-1} un monomorfismo, existe un único elemento $v \in C_{n-1}$ tal que $\boxed{f_{n-1}(v) = \partial^{'}(u).}$ Entonces tenemos

$$f_{n-2}(\partial^{''}(v)) = \partial^{'}(f_{n-1}(v)) = \partial^{'}(\partial^{'}(u)) = 0$$

$$f_{n-2}(\partial^{''}(v)) = 0 \text{ y como } f_{n-2} \text{ y es monomorfismo}$$

$$\partial^{''}(v) = 0 \text{ entonces } v \in \left\{ ker(\partial^{''}) \text{ en } C_{n-1} \right\} = Z_{n-1}$$

Así obtenemos un elemento $w = \rho(v) \in H_{n-1}(C)$ donde ρ representa la proyección natural

$$\rho : Z_{n-1}(C) \to H_{n-1}$$
$$v \to \rho(v) = w$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & C_n & \stackrel{f_n}{\to} & D_n & \stackrel{g_n}{\to} & E_n & \to & 0 \\
 & & \partial'' \downarrow & & \partial' \downarrow & & \partial \downarrow & & \\
 & & C_{n-1} & \stackrel{f_{n-1}}{\to} & D_{n-1} & \stackrel{g_{n-1}}{\to} & E_{n-1} & & \\
 & & \partial'' \downarrow & & \partial' \downarrow & & & & \\
 & & C_{n-2} & \stackrel{f_{n-2}}{\to} & D_{n-2} & & & &
\end{array}$$

Por la construcción anterior tenemos que ϕ satisface que

$$f_{n-1}(v) = \partial^{'}(u) \text{ y } g_n(u) = z$$

para $u \in D_n,\ v \in C_{n-1},\ z \in Z_n(E)$

Lema 6 *El elemento $w \in H_{n-1}(C)$ es independiente de la elección del elemento $u \in D_n$ y por tanto depende únicamente del elemento $z \in Z_n(E)$*

Prueba. Sean u y u' elementos cualesquiera de D_n con $g_n(u) = z = g_n(u')$. Entonces existen v y v' de C_{n-1} únicos que satisfacen

$$f_{n-1}(v) = \partial(u),\ f_{n-1}(v') = \partial(u')$$

Basta probar que $\rho(v) = \rho(v') = w$ donde

$$\rho : Z_n(C) \to H_{n-1}(C) = \frac{Z_{n-1}(C)}{B_{n-1}(C)}$$

$v \to \rho(v) = w + B_{n-1}(C)$. Con este objeto, consideremos el elemento $u - u'$ de D_n.

$$\begin{array}{ccccc}
C_n & \stackrel{f_n}{\to} & D_n & \stackrel{g_n}{\to} & E_n \\
\downarrow & & \partial \downarrow & & \\
C_{n-1} & \stackrel{f_{n-1}}{\to} & D_{n-1} & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
C_n & \stackrel{f_n}{\to} & D_n & \stackrel{g_n}{\to} & E_n \\
\partial' \downarrow & & \partial \downarrow & & \\
C_{n-1} & \stackrel{f_{n-1}}{\to} & D_{n-1} & &
\end{array}$$

Como

$g_n(u-u') = g_n(u) - g_n(u') = z - z = 0$ tenemos $u - u' \in Ker(g_n) = Im(f_n)$

Luego existe $y \in C_n$ tal que $f_n(y) = u - u'$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} f_{n-1}((v-v') - \partial'(y)) &= f_{n-1}(v) - f_{n-1}(v') - f_{n-1}[\partial(y)] \\ &= \partial(u) - \partial(u') - \partial(f_n(y)) \\ &= \partial(u) - \partial(u') - \partial(u-u') \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como f_{n-1} es un monomorfismo esto implica $(v-v') = \partial'(y) = 0$ entonces

$$v - v' = \partial'(y) \in \{Im(\partial') \text{ en } C_{n-1}\} = B_{n-1}(C)$$

Lo que implica que $v - v' \in B_{n-1}(C)$ y por diferencia de clases $v + B_{n-1}(C) = v' + B_{n-1}(C)$, por tanto obtenemos $\rho(v) - \rho(v') = \rho(v - v') = 0$ entonces $\rho(v) = \rho(v') = w$ que completa la demostración ||

Debido a (prop. 6) podemos definir la función $\phi : Z_n(E) \to H_{n-1}(C)$ asignando a cada elemento $z \in Z_n(E)$ el elemento $\phi(z) = w = \rho(v) \in H_{n-1}(C)$ tal que $u \in D_n$ y $v \in C_{n-1}$ son elementos arbitrarios que satisfacen

$$g_n(u) = z \text{ y } f_{n-1}(v) = \partial(u)$$

Lema 7 *La función ϕ es un homomorfismo del módulo $Z_n(E)$ en el módulo $H_{n-1}(E)$*

Prueba. Sean $z, z' \in Z_n(E)$ y $\alpha, \alpha' \in R$ arbitrariamente dados. Elijamos $u, u' \in D_n$ y $v, v' \in C_{n-1}$ satisfaciendo

$$g_n(u) = z,\ g_n(u') = z';\ f_{n-1}(v) = \partial(u); f_{n-1}(v') = \partial(u')$$

Entonces tenemos

$$g_n(\alpha u + \alpha' u') = \alpha z + \alpha' z',\ f_{n-1}(\alpha v + \alpha' v') = \partial(\alpha u + \alpha' u')$$

Lo que implica

$$\begin{aligned} \phi(\alpha z + \alpha' z') &= \rho(\alpha v + \alpha' v') \\ &= \alpha\rho(v) + \alpha'\rho(v') \\ &= \alpha\phi(z) + \alpha'\phi(z') \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n & \xrightarrow{g_n} & E_n \\ \downarrow & & \partial\downarrow & & \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} & & \end{array}$$

Esto prueba que ϕ es un homomorfismo de módulos. ||

Lema 8 *El núcleo del homomorfismo ϕ contiene el submódulo $B_n(E)$ de $Z_n(E)$*

Prueba. A probar que $B_n(E) \subset ker(\phi)$. Sea z un elemento arbitrario de $B_n(E)$. Por definición existe $y \in E_{n+1}$ con $\partial(y) = z$. Como g_{n+1} es epimorfismo, existe un elemento w de D_{n+1} que satisface $g_{n+1}(w) = y$. Sea $u = \partial'(w)$. Entonces

$$g_n(u) = g_n(\partial'(w)) = \partial(g_{n+1}(w)) = \partial(y) = z$$

Por otra parte, como $\partial'(u) = \partial'(\partial'(w)) = (\partial' \circ \partial')(w) = 0$ podemos elegir $v = 0 \in C_{n-1}$, cumpliéndose $f_{n-1}(v) = f_{n-1}(0) = 0 = \partial'(u)$. Por definición de ϕ, obtenemos $\phi(z) = \rho(v) = \rho(0) = 0$ entonces $z \in Ker(\phi)$ Por lo tanto

$$B_n(E) \subset Ker(\phi)$$

$$\begin{array}{ccccc}
C_{n-1} & \overset{f_{n-1}}{\to} & D_{n-1} & & \\
\uparrow & & \uparrow \partial' & & \\
C_n & \overset{f_n}{\to} & D_n & \overset{g_n}{\to} & E_n \\
& & \partial' \uparrow & & \uparrow \partial \\
& & D_{n+1} & \overset{g_{n+1}}{\to} & E_{n+1}
\end{array}$$

Lo que completa la demostración. ||
Debido a (Lema 6.8), el homomorfismo ϕ induce un homomorfismo

$$\partial : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$$

para todo entero n. Asi obtenemos la sucesión

$$\cdots \to H_n(C) \overset{f_*}{\to} H_n(D) \overset{g_*}{\to} H_n(E) \overset{\partial}{\to} H_{n-1}(C) \to \cdots$$

Donde $f_* = H_n(f)$ y $g_* = H_n(g)$. Esta sucesión recibe el nombre de *Sucesión de homología* de la sucesión exacta corta (S).

Teorema 12 *La sucesión de homología de toda sucesión exacta corta de sucesiones descendentes es exacta.*

Prueba. Sea la sucesión

$$\cdots \to H_n(C) \overset{f_*}{\to} H_n(D) \overset{g_*}{\to} H_n(E) \overset{\partial}{\to} H_{n-1}(C) \overset{H_{n-1}(f)}{\to} H_{n-1}(D) \to \cdots$$

Debido a (prop. 25) tenemos la exactitud en el módulo de homología $H_n(D)$

Para el desarrollo de la prueba basta establecer la exactitud en $H_n(E)$ y $H_{n-1}(C)$ comprobando las dos igualdades siguientes:

1. $Im(g_*) = ker(\partial)$
2. $Im(\partial) = Ker(f_*)$

Primero probaremos la exactitud en $H_n(E)$. Demostración de (1): Analicemos la parte

$$H_n(D) \overset{g_*}{\to} H_n(E) \overset{\partial}{\to} H_{n-1}(C)$$

de la sucesión de homología.

(i) $Im(H_n(g)) \subset Ker(\partial)$. Sea $\alpha \in Im(H_n(g)) \subset H_n(E)$ entonces existe un elemento
$\beta \in H_n(D) = \frac{Z_n(D)}{B_n(D)}$ donde β es de la forma $\beta = z + B_n(D)$; $z \in Z_n(D)$ tal que $(H_n(g))(\beta) = \alpha$. Elijamos un ciclo $z \in \beta \subset Z_n(D) \subset D_n$. Por definición de $H_n(g)$; tenemos

$$(H_n(g))(z) \in (H_n(g))(\beta) \subset (H_n(g))(Z_n(D)) \subset (H_n(g))(D_n)$$

$$g_n(z) \in \alpha \subset Z_n(E) \subset E_n$$

$$g_n(z) \in Z_n(E) \text{ con } z \in D_n$$

Por otra parte como $z \in Z_n(D) = \{Ker(\partial') \text{ en } D_n\}$ tenemos $\partial'(z) = 0$. Por tanto podemos elegir $v = 0 \in C_{n-1}$ tal que $f_{n-1}(v) = 0 = \partial'(z)$ implica que

$$f_{n-1}(v) = \partial'(z)$$

Se deduce mediante la definición de ∂ que para $z \in D_n,\ v \in C_{n-1}$ que satisface $g_n(z) \in Z_n(E) \subset E_n$ y $f_{n-1}(v) = \partial'(z)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \partial : \qquad & H_n(E) \to H_{n-1}(C) \\ & \alpha \to \partial(\alpha) = \rho(v) = \rho(0) = 0 \end{aligned}$$

Entonces $\partial(\alpha) = 0$ de ahí que $\alpha \in ker(\partial)$. Por tanto

$$Im(H_n(g)) \subset Ker(\partial)$$

$$\begin{array}{ccccc} C_n & \overset{f_n}{\to} & D_n & \overset{g_n}{\to} & E_n \\ \downarrow & & \downarrow \partial' & & \\ C_{n-1} & \overset{f_{n-1}}{\to} & D_{n-1} & & \end{array}$$

Para la otra inclusión

(ii) $Ker(\partial) \subset Im(H_n(g))$. Sea $\alpha \in Ker(\partial) \subset H_n(g)$ Elijamos un ciclo $z \in \alpha \subset Z_n(g) \subset E_n$ De acuerdo con la definición de $\partial(\alpha)$, $\exists\ u \in D_n,\ v \in C_{n-1}$ que satisfacen $g_n(u) = z,\ f_{n-1}(v) = \partial'(u)$, y tales que $\partial(z) \in \partial(\alpha) \subset \partial(Z_n(E)) \subset \partial(E_n),\ v \in \partial(\alpha) \subset Z_{n-1}(C) \subset C_{n-1}$ Como $\partial(\alpha) = 0$ donde $\partial(\alpha) \in H_{n-1}$, tenemos $v \in \{Im(\partial'') \text{ en } C_{n-1}\} = B_{n-1}(C)$. Por tanto $\exists w \in C_n$ con $\partial''(w) = v$ y $f_n(w) \in D_n$

Sea $y = u - f_n(w) \in D_n$ entonces

$$\begin{aligned} \partial'(y) \quad & = \partial'(u - f_n(w)) \\ & = \partial'(u) - \partial'(f_n(w)) \\ & = \partial'(u) - f_{n-1}(\partial''(w)) \\ & = \partial'(u) - f_{n-1}(v) \\ & = 0 \end{aligned}$$

De aquí que $y \in \{ker(\partial'), \text{ en } D_n\} = Z_n(D)$. Sea β el elemento de $H_n(D)$ que contiene el ciclo y. En otras palabras
$y \in \beta \in H_n(D)$ Luego

$$\begin{aligned} g_n(y) \quad & = g_n(u - f_n(w)) \\ & = g_n(u) - g_n(f_n(w)) \\ & = g_n(u) - (g_n \circ f_n(w)) \\ & = g_n(u) \\ & = z \end{aligned}$$

Entonces $g_n(y) = H_n(g)(y) = z$ y como $z \in \alpha,\ \ y \in \beta$ se tiene que $H_n(g)(\beta) = \alpha$ lo que implica que $Im(H_n(g)) \in \alpha$ por lo tanto $Ker(\partial) \subset Im(H_n(g))$

$$\begin{array}{ccccc} C_n & \overset{f_n}{\to} & D_n & \overset{g_n}{\to} & E_n \\ \downarrow & & \downarrow \partial' & & \\ C_{n-1} & \overset{f_{n-1}}{\to} & D_{n-1} & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} C_n & \to & E_n \\ \downarrow & \swarrow \partial & \\ C_{n-1} & & \end{array}$$

De lo anterior se prueba que

$$Im(H_n(g)) = Ker(\partial)$$

Con lo que se concluye la exactitud en el módulo de homología $H_n(D)$

Ahora probaremos la exactitud en $H_{n-1}(C)$.

Demostración de (2): Analicemos la parte

$$H_n(E) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(D)$$

de la sucesión de homología.

(i) $Im(\partial) \subset Ker(H_{n-1}(f))$. Sea $\alpha \in Im(\partial) \subset H_{n-1}(C)$ Como ∂ es inyectiva $\exists\ \beta \in H_n(E)$ tal que $\partial(\beta) = \alpha$

Elijamos un ciclo $z \in \beta \subset Z_n(E) \subset E_n$. Por definición de ∂, $\exists\ u \in D_n$; $v \in C_{n-1}$ que satisfacen $g_n(u) = z, v \in \alpha, f_{n-1}(v) = \partial'(u)$ y como $\alpha \in H_{n-1}(C) = \frac{Z_{n-1}(C)}{B_{n-1}(C)}$ con $\alpha = z + B_{n-1}(C)$ donde $z \in Z_{n-1}(C)$

Esto implica $H_{n-1}(f)(\alpha) = 0$ y por tanto $\alpha \in Ker(H_{n-1}(f))$. Como α es un elemento cualquiera de $Im(\partial)$, resulta $Im(\partial) \subset Ker(H_{n-1}(f))$
(ii) $Ker(H_{n-1}(f)) \subset Im(\partial)$. Sea $\alpha \in Ker(H_{n-1}(f) \subset H_{n-1}(C)$
Elijamos un ciclo $z \in \alpha \subset Z_{n-1}(C) \subset C_{n-1}$. Como $\alpha \in Ker(H_{n-1}(f))$ entonces $H_{n-1}(f)(\alpha) = 0$. Además existe $u \in D_n$ que satisface $\partial''(u) = f_{n-1}(z)$

Sean $y = g_n(u) \in E_n$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} \partial'(y) &= \partial[g_n(u)] \\ &= g_{n-1}[\partial''(u)] \\ &= g_{n-1}[f_{n-1}(z)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $y \in \{Ker(\partial') \text{ en } E_n\} = Z_n(E)$

Sea β el elemento de $H_n(E)$ que contiene el ciclo y para $y \subset \beta \in H_n(E)$, donde $\beta = y + B_n(E)$. Como $g_n(u) = y$ y $f_{n-1}(z) = \partial''(u)$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n & \xrightarrow{g_n} & E_n & \rightarrow & 0 \\ & & \partial''' \downarrow & & \partial'' \downarrow & & \partial' \downarrow & & \\ & & C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & E_{n-1} & & \\ & & \partial''' \downarrow & & \partial'' \downarrow & & & & \\ & & C_{n-2} & \xrightarrow{f_{n-2}} & D_{n-2} & & & & \end{array}$$

para $u \in D_n, z \in C_{n-1}, y \in Z_n(E) = ker\partial$ en E_n $f_{n-1}(z) = \partial^{'}(u)$ y $g_n(u) = y$. Se deduce de la definición de ∂ que

$$\begin{aligned} \partial(\beta) &= \partial(y + B_n(E)) \\ &= \partial(y) + B_{n-1}(C) \\ &= z + B_{n-1}(C) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Como $\alpha \in H_{n-1}(C) = \frac{Z_{n-1}(C)}{B_{n-1}(C}$ entonces $\alpha = z + B_{n-1}(C)$; $z \in Z_{n-1}(C)$. Entonces $\partial(\beta) = \alpha$ de aquí que $\alpha \in Im(\partial)$ para $\beta \in H_n(E)$ y como α es un elemento cualquiera de $Ker(H_n(f))$ resulta que $Ker(H_n(f)) \subset Im(\partial)$. Y de lo

anterior se prueba que $Ker(H_n(f)) = Im(\partial)$. Por tanto queda establecido la exactitud en los módulos de homología
$H_n(D), H_n(E)$ y $H_{n-1}(C)$ de la sucesión exacta corta de sucesiones descendentes.

Proposición 25 *Consideremos el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \to 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

donde el cuadrado es conmutativo, la fila superior es exacta y la inferior es semiexacta. Probar que existe un homomorfismo $\psi : C \to C'$ únicamente determinado que satisface $\psi \circ g = g' \circ \beta$

Prueba: Sabemos que $Im(f) = Ker(g), \quad Im(f') \subset Ker g'$ y $\beta \circ f = f' \circ \alpha$. A probar que existe $\psi : C \to C'$ que satisface $\psi \circ g = g' \circ \beta$. Sean $b_1, b_2 \in B$ tales que $g(b_1) = c \quad g(b_2) = c$

$$\begin{aligned} g(b_1 - b_2) = g(b_1) - g(b_2) = c - c = 0 \\ \Rightarrow (b_1 - b_2) \in Ker(g) = Im(f) \\ \Rightarrow (b_1 - b_2) \in Im(f) \\ \Rightarrow \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b_1 - b_2 \end{aligned}$$

además por conmutatividad del diagrama tenemos que $f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)) = \beta(b_1 - b_2)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f'(\alpha(a)) = \beta(b_1 - b_2) \\ &\Rightarrow \beta(b_1 - b_2 \in Im(f')) \subset Ker(g') \\ &\Rightarrow \beta(b_1 - b_2) \in ker(g') \\ &\Rightarrow g'(\beta(b_1 - b_2)) = 0 \\ &\Rightarrow g'(\beta(b_1)) - g'(\beta(b_2)) = 0 \\ &\Rightarrow g'(\beta(b_1)) = g'(\beta(b_2)) \end{aligned}$$

Como g' es sobreyectiva $\exists\ c_1', c_2' \in C'$ tal que $g'(\beta(b_1)) = c_1'$ y $g'(\beta(b_2)) = c_2'$. Entonces $c_1' = c_2'$. Sean $c_1, c_2 \in C \quad x \in R$ como g es homomorfismo se satisface que

$$\begin{aligned} g : \quad & B \to C \\ & xb \to g(xb) = xg(b) = xc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \quad & B \to C \\ & b_1 + b_2 \to g(b_1 + b_2) = g(b_1) + g(b_2) = c_1 + c_2 \end{aligned}$$

Por tanto se comprueba que $\psi : C \to C'$ esta bien definida y se satisface que

$$\begin{aligned} \psi(c_1 + c_2) &= g'(\beta(b_1 + b_2)) & \psi(xc) &= g'(\beta(xb)) \\ &= g'(\beta(b_1) + \beta(b_2)) & &= g'(x(\beta b)) \\ &= g'(\beta(b_1)) + g'(\beta(b_2)) & &= xg'(\beta(b)) \\ &= \psi(c_1) + \psi(c_2) & &= x\psi(c) \end{aligned}$$

Por tanto existe un homomorfismo $\psi : C \to C'$ únicamente determinado que satisface que para todo $b \in B, \quad x \in R$ en donde $g(xb) = xc$ se tiene que

$$\psi(c) = \psi(g(b)) = g'(\beta(b))$$

Por tanto $\psi \circ g = g' \circ \beta$

Proposición 26 *Consideremos un diagrama de homomorfismo de R-módulos*

$$\begin{array}{ccccc} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma \\ 0 \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

donde el cuadro es conmutativo, la fila superior es semiexacta y la inferior es exacta. Probar que existe un homomorfismo $\alpha : A \to A'$ *únicamente determinado que satisface*

$$f' \circ \alpha = \beta \circ f$$

Prueba: Sea $a \in A$ como f es monomorfismo $\exists\ b \in B$ tal que

$$\begin{aligned} & f(a) = b \in Im(f) \subset Ker(g) \\ & \Rightarrow b \in Ker(g) \\ & \Rightarrow g(b) = 0 \\ & \Rightarrow \psi(g(b)) = \psi(0) = 0 \end{aligned}$$

Y por conmutatividad del diagrama tenemos que

$$\begin{aligned} & g'(\beta(b)) = \psi(g(b)) = 0 \\ & \Rightarrow g'(\beta(b)) = 0 \\ & \Rightarrow \beta(b) \in Ker(g') = Im(f') \\ & \Rightarrow \beta(b) \in Im(f') \\ & \Rightarrow \exists a' \in A' \text{ único tal que } f'(a') = \beta(b) : \quad \text{por ser } f' \text{ inyectiva} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \alpha : \qquad & A \to A' \\ & a \to \alpha(a) = a' \end{aligned}$$

esta bien definida

Ahora probaremos que α es homomorfismo. Sean $a_1, a_2 \in A$ vamos a verificar que $\alpha(a_1) + \alpha(a_2) = \alpha(a_1 + a - 2)$

$$\begin{array}{ccccc} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma \\ 0 \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} & f(a_1 + a_2) = b_1 + b_2 \\ & \Rightarrow \beta(f(a_1 + a_2)) = \beta(b_1 + b_2) \\ & \text{y como } g'(\beta(b_1 + b_2)) = \psi(g(b_1 + b_2)), \text{ por conmutatividad del diagrama} \\ & g'(\beta(b_1 + b_2)) = 0 \\ & \Rightarrow \beta(b_1 + b_2) \in ker(g') = Im(f') \end{aligned}$$

Entonces $\exists\ a'_3 \in A'$ tal que $f'(a'_3) = \beta(b_1 + b_2) = \beta(b_1) + \beta(b_2) \in Im(f)$ de ahí que $f'(a'_3) = \beta(b_1) + \beta(b_2)$

$$\begin{aligned} f'(a'_1 + a'_2) &= f'(a_1) + f'(a_2) \\ &= \beta(f(a_1)) + \beta(f(a_2)) \\ &= \beta(f(a_1) + f(a_2)) \\ &= \beta(b_1 + b_2) \\ &= f'(a'_3) \end{aligned}$$

entonces $f'(a'_1 + a'_2) = f'(a'_3)$ y como f' es inyectiva se tiene que

$$a'_1 + a'_2 = a'_3$$

$$\alpha(a_1) + \alpha(a_2) = \alpha(a_1 + a - 2)$$

de acuerdo a como esta definida la función. Ahora sea $xa \in A \quad x \in R$ vamos a verificar que $x\alpha(a_1) = \alpha(xa_1)$

$$\begin{array}{ccccc} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma \\ 0 \rightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(a') &= \beta(f(a)) \\ &= \beta(b) \\ xf'(a') &= x\beta(b) \\ f'(xa') &= f'(a') \\ x'a' &= a';\ \text{ya que } f' \text{ es inyectiva} \\ x\alpha(a) &= \alpha(xa) \end{aligned}$$

Por tanto α es homomorfismo únicamente determinado que además cumple que para $\alpha(a) = a'$ donde $a \in A$ y $a' \in A'$ arbitrariamente dados

$$f'(\alpha(a)) = f'(a') = \beta(b) = \beta(f(a))$$

Por tanto $f' \circ \alpha = \beta \circ f$

1.7. Productos Tensoriales

Sean A y B dos R-módulos cualesquiera y consideremos el producto cartesiano $A \times B$ de los conjuntos A y B. Una función $g : A \times B \longrightarrow X$ de $A \times B$ en un R-módulo X es llama *bilineal* si y sólo si

$$g(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) = \alpha_1 g(a_1, b) + \alpha_2 g(a_2, b)$$

$$g(a, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) = \beta_1 g(a, b_1) + \beta_2 g(a, b_2)$$

Para todo $a_1, a_2, a \in A$, $b_1, b_2, b \in B$ y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

Un *producto tensorial* (sobre R) de los módulos A y B, es un R-módulo T junto con una función bilineal

$$f : A \times B \longrightarrow T$$

tal que, para toda función bilineal

$$g : A \times B \longrightarrow X$$

de $A \times B$ en un R-módulo X, existe un único homomorfismo $h : T \longrightarrow X$ del módulo T en el módulo X que satisface la relación de conmutatividad $h \circ f = g$ en el siguiente triángulo:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, "h"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Teorema 13 *Si un R-módulo T con una función bilineal $f : A \times B \longrightarrow T$ es un producto tensorial sobre R de los módulos A y B, entonces la imagen $f\,(A \times B)$ genera el módulo T.*

Prueba. Se probará que $f(A \times B)$ genera el módulo T. Sea C el submódulo de T generado por $f(A \times B)$. Entonces la función f define una función $g : A \times B \to C$ tal que $i \circ g = f$. En el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[d, "i"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Donde i representa el homomorfismo inclusión $i : C \to T$. Por la definición de Producto Tensorial existe un homomorfismo $h : T \to C$ tal que $h \circ f = g$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "j"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Donde j denota el endomorfismo identidad y k representa el producto $i \circ h$. Puesto que

$$j \circ f = f$$

$$\begin{aligned} k \circ f \quad &= i \circ h \circ f \\ &= i \circ g \\ &= f \end{aligned}$$

Se deduce de la unicidad en la definición que $i \circ h = k = j$. Por (Prop. 9), el homomorfismo inclusión i debe ser un epimorfismo. Luego $C = T$ y $f\,(A \times B)$ genera el módulo T. $||$

Teorema 14 *(Teorema de Unicidad.) Si (T, f) y (T', f') son productos tensoriales sobre R de los módulos A y B, entonces existe un único isomorfismo $j : T \longrightarrow T'$ del módulo T en el módulo T' tal que $j \circ f = f'$.*

Prueba. Como (T, f) es un producto Tensorial sobre R de los módulos A y B, de la definición se deduce que existe un único homomorfismo $j : T \to T'$ tal que $j \circ f = f'$ es el siguiente triángulo.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & T \arrow[d, "j"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

Como (T', f') es un Producto Tensorial sobre R, por definición se deduce que existe un único homomorfismo $k : T' \to T$ tal que $k \circ f' = f$, en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{c} A \times B \xrightarrow{f'} T' \\ f \searrow \swarrow k \\ T \end{array}$$

Ahora consideremos el producto $h = k \circ j$ y el endomorfismo identidad del módulo T.

$$\begin{array}{c} A \times B \xrightarrow{f} T \\ f \searrow \swarrow h \\ T \end{array}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} k \circ f \qquad &= k \circ j \circ f \\ &= k \circ f' \\ i \circ f \qquad &= f \end{aligned}$$

Se deduce de la unicidad de la definición de Producto Tensorial que:
$k \circ f = h = i$. Como i es un isomorfismo, por (Prop. 10) tenemos que f es un monomorfismo. Queremos demostrar que $j \circ k$ es el endomorfismo identidad.

$$\begin{array}{c} A \times B \xrightarrow{f'} T' \\ f' \searrow \swarrow i' \\ T' \end{array}$$

Donde i' es el homomorfismo identidad de T'.

$$\begin{aligned} h' \circ f' \qquad &= j \circ k \circ f' \\ &= j \circ f \\ &= f' \end{aligned}$$

De la unicidad de la definición de producto tensorial tenemos:

$$h' = j \circ k = i'$$

Como i' es isomorfismo por (Prop. 9). Luego j es también un epimorfismo lo que prueba que j es un isomorfismo.||

Teorema 15 *(Teorema de Existencia). Dados dos R-módulos cuales quiera A y B, existe un producto tensorial sobre R de A y B.*

Prueba. Consideremos un R-módulo libre (F, i) sobre el conjunto $A \times B$ donde $i : A \times B \longrightarrow F$ y sea G el submódulo de F generado por los elementos

$$i(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) - \alpha_1 i(a_1, b) - \alpha_2 i(a_2, b)$$

$$i(a, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) - \beta_1 i(a, b_1) - \beta_2 i(a, b_2)$$

para todo $a_1, a_2, a \in A$, $b_1, b_2, b \in B$ y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

Así obtenemos el módulo cociente sobre R, $T = F/G$ con proyección natural $p : F \longrightarrow T$.

Sea $f = p \circ i : A \times B \longrightarrow T$. Para probar que f es bilineal, sean $a_1, a_2, a \in A$, $b_1, b_2, b \in B$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ arbitrariamente dados. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) - \alpha_1 f(a_1, b) - \alpha_2 f(a_2, b) \quad &= p[i(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b)] - \alpha_1 p[i(a_1, b)] - \alpha_2 p[i(a_2, b)] \\ &= p[i(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) - \alpha_1 i(a_1, b) - \alpha_2 i(a_2, b)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo que implica que $f(a, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) = \alpha_1 f(a_1, b) + \alpha_2 f(a_2, b)$. Análogamente, $f(a, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) = \beta_1 f(a, b_1) + \beta_2 f(a, b_2)$. Luego f es bilineal.

Probemos ahora que (T, f) es un producto tensorial sobre R de A y B. Para ello, sea $g : A \times B \longrightarrow X$ una función bilineal arbitraria de $A \times B$ en un R-módulo X. Como (F, i) es un R-módulo libre sobre $A \times B$, existe un homomosfismo $j : F \longrightarrow X$ de módulos tal que $j \circ i = g$ en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "g"'] & F \arrow[d, "j"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Consideremos elementos arbitrarios

$$a_1, a_2, a \in A, \quad b_1, b_2, a \in B \ \text{ y } \ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R.$$

Entonces

$$\begin{aligned} j[i(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) - \alpha_1 i(a_1, b) - \alpha_2 i(a_2, b)] \quad &= j[i(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b)] - \alpha_1 j[i(a_1, b)] - \alpha_2 j[i(a_2, b)] \\ &= g(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) - \alpha_1 g(a_1, b) - \alpha_2 g(a_2, b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que g es bilineal. Esto implica que el elemento

$$i(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) - \alpha_1 i(a_1, b) - \alpha_2 i(a_2, b)$$

figura en el $ker(j)$. Como G es el submódulo de F generado por estos elementos, se deduce que $G \subset ker(j)$; por que las imágenes estan en el $Ker(j)$ y las imágenes generan al subgrupo, entonces el grupo $G \subset Ker(j)$. Luego j induce un homomorfismo $h = j* : T \longrightarrow X$, del módulo cociente $T = F/G$ en el módulo X tal que $h \circ \rho = j$. Por tanto, en el triángulo tenemos que:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, "h"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$$h \circ f = h \circ \rho \circ i = j \circ i = g$$

Falta probar la unicidad de h. Para ello sea $k : T \longrightarrow X$ cualquier homomorfismo de módulos que satisfaga $k \circ f = g$, y sea t un elemento arbitrario de T. Como $f(A \times B)$ genera T, puede escribirse t en la forma:

$$t = y_1 f(a_1, b_1) + y_2 f(a_2, b_2) + \ldots + yn(an, bn)$$

Donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n \in R$. Entonces

$$\begin{aligned} K(t) \quad &= y_1 K[f(a_1, b_1)] + y_2 K[f(a_2, b_2)] + \ldots + y_n K[f(an, bn)] \\ &= y_1 g(a_1, b_1) + y_2 g(a_2, b_2) + \ldots + y_n g(an, bn) \\ &= h(t) \end{aligned}$$

Como t es un elemento arbitrario de T, esto implica que $h = k$, lo que completa la demostración.||

Todo par de módulos A y B sobre R determinan un producto tensorial (T, f) esencialmente único. Este R-módulo T se denota usualmente con el símbolo $A \otimes_R B$ y recibe el nombre de *Producto Tensorial* sobre R de los módulos A y B. Puesto que nuestro interés se centra en módulos sobre un anillo de coeficientes fijo R, denotaremos el producto tensorial por el símbolo más simple $A \otimes B$, siempre que no exista peligro de la ambiguedad. La función bilineal $f : A \times B \longrightarrow T$ será designada mediante el símbolo

$$\tau : AxB \longrightarrow A \otimes B$$

y la denominaremos *aplicación tensorial*. Se deduce del ejercicio 7A del final de esta sección que τ no es nunca inyectiva a no ser que $A = 0$ y $B = 0$. Por tanto, no podemos identificar $A \times B$ como subconjunto $A \otimes B$. Es decir no se puede copiar.

Para cada $a \in A$ y $b \in B$, el elemento τ de $A \otimes B$ se denotará por $a \otimes b$ y recibirá el *nombre de producto tensorial sobre* R de los elementos a y b.

Como $\tau(A \times B)$ genera el módulo $A \otimes B$ en virtud de la proposición (7.1) todo elemento t de $A \otimes B$ puede ser escrito en la forma $t = \sum_{i=1}^{n} yi\,(a_i \otimes bi)$ donde $a_i \in A, bi \in B$ y $yi \in R$ para todo $i = 1, ..., n$. Estas expresiones de elementos de $A \otimes B$ no son de ninguna manera únicas. En efecto, se sigue inmediatamente de la bilinealidad de la aplicación tensorial τ que

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \otimes b = \alpha_1 (a_1 \otimes b) + \alpha_2 (a_2 \otimes b)$$

$$a \otimes (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) = \beta_1 (a \otimes b_1) + \beta_2 (a \otimes b_2)$$

para todo $a_1, a_2, a \in A$, $b_1, b_2, b \in B$ y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$. En particular,

$$(\gamma a) \otimes b = \gamma (a \otimes b) = a \otimes (\gamma b)$$

para todo $a \in A, b \in B$ y $\gamma \in R$. Si $\gamma = 0$ ó $\gamma = -1$, tenemos

$$0 \oplus b = 0 = a \otimes o$$

$$(-a) \otimes b = -(a \otimes b) = a \otimes (-b)$$

Por consiguiente, todo elemento t de $A \otimes B$ puede escribirse en la forma $t = \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes bi)$ donde $a \in A, b \in B$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Proposición 27 *Si X es un R-módulo, se verifica*

$$X \otimes R \approx X \approx R \otimes X$$

Prueba. Consideremos la función $g : X \times R \longrightarrow X$ definida por $g(x, \alpha) = \alpha x$ para todo $x \in X$, $\alpha \in R$. Veamos que g es bilineal.

$$\begin{aligned} g(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) \quad &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) b \\ &= \alpha_1 a_1 b + \alpha_2 a_2 b \\ &= \alpha_1 g(a_1, b) + \alpha_2 g(a_2, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(a, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) \quad &= a(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) \\ &= a\beta_1 b_1 a + \beta_2 b_2 \\ &= \beta_1 g(a, b_1) + \beta_2 g(a, b_2) \end{aligned}$$

por tanto g es bilineal.

$\Rightarrow$ Existe un único homomorfismo $h : X \otimes R \longrightarrow X$ tal que $h \circ \tau = g$ en el siguiente triángulo:

$$\begin{array}{c} X \times R \xrightarrow{\tau} X \otimes R \\ g \searrow \swarrow h \\ X \end{array}$$

Donde τ representa la aplicación tensorial. Como $g(x,1) = x$ para todo $x \in X$, g es sobreyectiva. Como $h \circ \tau = g$ y g es sobreyectiva, entonces h es supreyectiva. Luego h es un epimorfismo.

Para probar que h es también un monomorfismo, consideremos un elemento t arbitrariamente dado de $X \otimes R$. Entonces existen $x_1, x_2, ..., x_n$ en X y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in R$ tales que

$$t = \sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i x_i \otimes 1) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) \otimes 1$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} h(t) \qquad &= h\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) \otimes 1 \right] = h\left[\tau \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, 1 \right) 1 \right] \\ &= g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, 1 \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \end{aligned}$$

Por tanto $h(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \otimes 1 = 0$, por tanto h es un monomorfismo.

Hemos demostrado que $X \otimes R \approx X$

Ahora veamos que $R \otimes X \approx X$. Consideremos la función $g' : R \times X \to X$ definida por $g'(\alpha, x) = \alpha x$ para todo $x \in X$, $\alpha \in R$. Veamos que g es bilineal.

$$\begin{aligned} g'(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) \qquad &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) b \\ &= \alpha_1 a_1 b + \alpha_2 a_2 b \\ &= \alpha_1 g(a_1, b) + \alpha_2 g(a_2, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(a, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) \qquad &= a(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) \\ &= a\beta_1 b_1 a + \beta_2 b_2 \\ &= \beta_1 g'(a, b_1) + \beta_2 g'(a, b_2) \end{aligned}$$

por tanto g' es bilineal.

$\Rightarrow$ Existe un único homomorfismo $h' : R \otimes X \longrightarrow X$ tal que $h' \circ \tau = g'$ en el siguiente triángulo:

$$\begin{array}{c} R \times X \xrightarrow{\tau} R \otimes X \\ g' \searrow \swarrow h' \\ X \end{array}$$

Donde τ representa la aplicación tensorial. Como $g'(x,1) = x$ para todo $x \in X$, g' es sobreyectiva. Como $h' \circ \tau = g'$ y g' es sobreyectiva, entonces h' es supreyectiva. Luego h' es un epimorfismo.

Para probar que h' es también un monomorfismo, consideremos un elemento t arbitrariamente dado de $R \otimes X$. Entonces existen $x_1, x_2, ..., x_n$ en X y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in R$ tales que

$$t = \sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i x_i \otimes 1) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) \otimes 1$$

Esto implica que:

$$\begin{aligned} h'(t) &= h'\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \otimes 1\right] = h'\left[\tau\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, 1\right) 1\right] \\ &= g'\left(\sum n_{i=1} \alpha_i x_i, 1\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \end{aligned}$$

Por tanto $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \otimes 1 = 0$, por tanto h' es un monomorfismo. Hemos demostrado que $R \otimes X \approx X$. Por tanto

$$X \otimes R \approx X \approx R \otimes X$$

El isomorfismo único $h : X \otimes R \longrightarrow X$ recibe el nombre de *isomorfismo canónico* del módulo $X \otimes R$ sobre el módulo X.

Supongamos ahora que $f : A \longrightarrow A'$ y $g : B \longrightarrow B'$ son dos homomorfismos de R-módulos arbitrariamente dados, y consideremos los productos tensoriales $A \otimes B$ y $A' \otimes B'$ sobre R, y sean $\tau\ y\ \tau'$ sus aplicaciones tensoriales. Denotemos con $h : f \times g : A \times B \longrightarrow A' \times B'$ el producto cartesiano de f y g definido por $h(x, y) = [f(x), g(y)]$ para todo $(x, y) \in A \times B$, veamos que $\tau' o (f \times g)$ es bilineal.

$$\begin{aligned} [\tau'\ o\ (fxg)]\ (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) &= \tau'[(fxg)(\alpha_1 a_1 + \alpha 2 a_2, b)] \\ &= \tau'[f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2), g(b)] \\ &= f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \otimes g(b) \\ &= \alpha_1 f(a_1) \otimes g(b) + \alpha_2 f(a_2) \otimes g(b) \\ &= \alpha_1 \tau'(fxg(a_1, b)) + \alpha_2 \tau'(fxg(a_2, b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tau'\ o\ (fxg))\ (a, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) &= \tau'[(fxg)](a, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) \\ &= \tau'(f(a), g(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2)) \\ &= \beta_1 [f(a), g(b_1)] + \beta_2 [f(a), g(b_2)] \\ &= \beta_1 \tau'[fxg(a, b_1)] + \beta_2 \tau'[fxg(a, b_2)] \end{aligned}$$

Por tanto $\tau'\ o\ (f \times g)$ es bilineal. Por definición existe un único homomorfismo

$$k : A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B'$$

del módulo $A' \otimes B'$ tal que $k \circ \tau = \tau' \circ h$. En el siguiente diagrama:

$$A \times B \ \overset{\tau}{\to} \ A \otimes B$$

$$h \downarrow \qquad k \downarrow$$

$$A' \times B' \overset{\tau'}{\to} \ A' \otimes B'$$

Como consecuencia inmediata de esta relación, tenemos

$$k(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$$

Para todo $a \in A$, $b \in B$. Este homomorfismo únicamente determinado k se denotará con el símbolo $f \otimes g : A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B'$ recibiendo el nombre de *producto tensorial sobre* R de los homomorfismos de módulos f y g.

Proposición 28 *Si $i : A \to A$ y $j : B \to B$ son los homomorfismos identidad de los R-módulos A y B, entonces su producto tensorial*

$$i \otimes j : A \otimes B \to A \otimes B$$

es el homomorfismo identidad del módulo $A \otimes B$. Si $f : A' \to A'$, $f' : A' \to A''$, $g : B \to B'$, $g' : B' \to B''$ son homomorfismos de R-módulos, entonces

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g')(f \otimes g)$$

Teorema 16 *Si los R-módulos A y B son descomponibles en su suma directa*

$$A = \sum_{\mu \in M} A_\mu \quad B = \sum_{v \in N} B_v$$

de submódulos, entonces

$$A \otimes B \approx \sum_{(\mu,v)} A_\mu \otimes B_v$$

Prueba. Consideremos los homomorfismos inclusión $i_\mu \otimes j_v : A_\mu \longrightarrow A$ y $j_v : B_v \longrightarrow B$ juntamente con su producto tensorial

$$i_\mu \otimes j_v : A_\mu \otimes B_v \longrightarrow A \otimes B$$

Para todo $\mu \in M$ y $v \in N$. Por definición, todo elemento s de la suma directa

$$S = \sum_{(\mu,v) \in F} A_\mu \otimes B_v$$

Puede ser únicamente escrito en la forma $S = \sum_{(\mu,v)\in F} x_{\mu v}$ donde F es un subconjunto finito de $M \times N$ y $x_{\mu v} \in A_\mu \otimes B_v$ para todo $(\mu, v) \in F$. Definamos un homomorfismo $h : S \longrightarrow A \otimes B$ tomando

$$h(s) = \sum_{(\mu,v)} (i_\mu \otimes j_v)(x_{\mu v})$$

Por otra parte, consideremos las proyecciones naturales $\rho_\mu ; A \longrightarrow A_\mu$ y $q_v : B \longrightarrow B_v$ justamente con su producto tensorial

$$\rho_\mu \otimes q_v : A \otimes B \longrightarrow A_\mu \otimes B_v$$

para todo $\mu \in M$ y $v \in N$. El producto restringido de la familia

$$\{\rho_\mu \otimes q_v | \mu \in M \ y \ v \in N\}$$

define un homomorfismo $k : A \otimes B \longrightarrow S$

Para probar que $h \circ k$ es el homomorfismo identidad sobre $A \otimes B$, elijamos arbitrariamente $a \in A, b \in B$. Entonces

$$\begin{aligned}
h[k(a \otimes b)] \quad &= h\left[\sum_{(\mu,v)} (\rho_\mu \otimes q_v)(a \otimes b)\right] \\
&= \sum_{(\mu,v)} (i_\mu \otimes j_v)(\rho_\mu \otimes q_v)(a \otimes b) \\
&= \sum_{(\mu,v)} [(i_\mu \ o \ \rho_\mu)(a)] \otimes [(j_v o q_v)(b)] \\
&= \left[\sum_{\mu} (i_\mu \ o \rho_\mu)(a)\right] \otimes \left[\sum_{v} (j_v \ o \ q_v)(b)\right] \\
&= a \otimes b
\end{aligned}$$

Como los elementos $a \otimes b$ generan al módulo $A \otimes B$ sobre R, resulta ser $h \circ k$ homomorfismo identidad sobre $A \otimes B$.

Para probar que $h \circ k$ es el homomorfismo identidad sobre S, sean $\alpha \in M, \beta \in N, a \in A_\alpha, b \in B_\beta$ arbitrariamente dados. Consideremos $a \otimes b \in A_\alpha \otimes B_\beta \subset S$, entonces

$$\begin{aligned} k\left[h\left(a \otimes b\right)\right] &= k\left[\left(i_\alpha \otimes j_\beta\right)\left(a \otimes b\right)\right] \\ &= \sum_{(\mu,v)} \left(\rho_\mu \otimes q_v\right)\left(i_\alpha \otimes j_\beta\right)\left(a \otimes b\right) \\ &= \left[\sum_\mu \left(\rho_\mu \circ i_\alpha\right)(a)\right] \otimes \left[\sum_v \left(q_v \circ j_\beta\right)(b)\right] \\ &= a \otimes b \end{aligned}$$

Como los elementos $a \otimes b$ generan al módulo S, se deduce que $h \circ k$ es el homomorfismo identidad sobre S. Por tanto, h y k son isomorfismos y el teorema está demostrado.||

Teorema 17 *Si $f : A \longrightarrow A'$ y $g : B \longrightarrow B'$ son epimorfismos de R-módulos, entonces el producto tensorial $h = f \otimes g : A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B'$ sobre R es también un epimorfismo y su núcleo $Ker\,(h)$ es el submódulo K de $A \otimes B$ generado por los elementos $a \otimes b$ de $A \otimes B$ con $a \in Ker\,(f)$ o $b \in ker\,(g)$.*

Prueba. Sean $a' \in A$ y $b \in B$ arbitrariamente dados. Como f y g son epimorfismos, existe $a \in A$ y $b \in B$ tales que $f\,(a) = a'$ y $g\,(b) = b'$. De aquí obtenemos

$$a' \otimes b' = f\,(a) \otimes g\,(b) \in Im\,(h)$$

Como $A' \otimes B'$ está generado por los elementos $a' \otimes b' \in Im\,(h)$ es un submódulo de $A' \otimes B'$, resulta $Im\,(h) = A' \otimes B'$. Luego h es epimorfismo.

Para probar que $K \subset Ker\,(h)$, consideremos $a \otimes b \in A \otimes B$. Como

$$h\,(a \otimes b) = f\,(a) \otimes g\,(b)$$

se sigue que $a \otimes b \in Ker\,(h)$, si $a \in Ker\,(f)$ o $b \in Ker\,(g)$. Como $Ker\,(h)$ es un submódulo de $A \otimes B$, resulta $K \subset Ker\,(h)$.

Consideremos el módulo cociente $Q = (A \otimes B)\,/K$. Como $K \subset Ker\,(h)$, h induce un homomorfismo $h* : Q \longrightarrow A' \otimes B'$. Debemos probar que $h*$ es un monomorfismo. Para ello, construiremos una función $j : A' \times B' \longrightarrow Q$ como sigue:

Sean $x' \in A'$, $y' \in B'$ arbitrariamente dados. Como f y g son epimorfismos, existen elementos $x \in A$, $y \in B$ que satisfacen $f\,(x) = x'$ y $g\,(y) = y'$. Sea $p : A \otimes B \longrightarrow Q$ la proyección natural.

Entonces $p\,(x \otimes y)$ es un elemento del módulo cociente Q. Para probar que este elemento $p\,(x \otimes y)$ de Q depende únicamente de x' *e* y', y no de la elección de x e y, sean $u \in A, v \in B$ tales que $f\,(u) = x'$ y $g\,(v) = y'$. Entonces $\xi = u - x$ pertenece a $Ker\,(f)$ y $\eta = v - y$ pertenece a $Ker\,(g)$. Por tanto tenemos

$$u \otimes v - x \otimes y = \xi \otimes y + x \otimes \eta = \xi \otimes \eta \in K$$

Esto implica $p\,(u \otimes v) = p\,(x \otimes y)$. Por consiguiente, $p\,(x \otimes y)$ depende únicamente de x', y', y podemos definir una función $j : A' \times B' \longrightarrow Q$ mediante

$$j\,(x', y') = p\,(x \otimes y)$$

para todo $x' \in A', y' \in B'$ con arbitrarios $x \in A, y \in B$ tales que $f(x) = x'$ y $g(y) = y'$. Para ver que j es bilineal, sean $x'_1, x'_2, x' \in A'$ y $y'_1, y'_2, y' \in B'$, y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ arbitrariamente dados. Elijamos $x_1, x_2, x \in A$, $y_1, y_2, y \in B$ tales que

$$f(x_1) = x'_1 \qquad f(x_2) = x'_2 \qquad f(x) = x'$$
$$g(y_1) = y'_1 \qquad g(y_2) = y'_2 \qquad g(y) = y'$$

Como f y g son homomorfismos de módulos, tenemos

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2$$

$$g(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 y'_1 + \beta_2 y'_2$$

Por consiguiente, obtenemos

$$\begin{aligned} j(\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2) &= p[(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \otimes y] \\ &= \alpha_1 p(x_1 \otimes y) + \alpha_2 p(x_2 \otimes y) \\ &= \alpha_1 j(x'_1, y') + \alpha_2 j(x'_2, y') \end{aligned}$$

Análogamente, tenemos también $j(x', \beta_1 y'_1 + \beta_2 y'_2) = \beta_1 j(x', y'_1) + \beta_2 j(x', y'_2)$. Luego j es bilineal. Por definición de $A' \otimes B'$, existe un homomorfismo $j* : A' \otimes B' \longrightarrow Q$ tal que $j * \circ \tau' = j$ en el triángulo siguiente:

$$\begin{array}{c} A' \times B' \xrightarrow{\tau'} A \otimes B \\ f \searrow \swarrow j* \\ Q \end{array}$$

Donde τ' representa la aplicación tensorial. Esto implica que $j * \circ h = p$ en el triángulo siguiente:

$$\begin{array}{c} A' \times B' \xrightarrow{h} A \otimes B \\ p \searrow \swarrow j* \\ Q \end{array}$$

Y por ello $j * \circ h*$ es el endomorfismo identidad de Q. Luego $h*$ es un monomorfismo, lo que completa la demostración.

Observemos que la conclusión del (Teor. 17), ambas partes serían falsas en general si f y g no fuesen epimorfismos.

Corolario 16 *Si $f : A \longrightarrow A'$ y $g : B \longrightarrow B'$ son epimorfismos de R-módulos, entonces el producto tensorial*

$$h = f \otimes g : A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B'$$

es también epimorfismo.

Teorema 18 *Si M es un R-módulo arbitrario y*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

Una sucesión exacta de R-módulos entonces la sucesión

$$A \xrightarrow{f \otimes i} B \otimes M \xrightarrow{g \otimes i} C \otimes M \to 0$$

De sus productos tensoriales, siendo $i : M \longrightarrow M$ el endomorfismo identidad, es también exacta

Prueba. Por conveniencia, denotemos $f' = f \otimes i$, $g' = g \otimes i$. Como g e i son epimorfismos, se sigue del (Teor. 17) que g' es también un epimorfismo y el núcleo de g' es el submódulo K de $B \otimes M$ generado por los elementos $y \otimes w$ de $B \otimes M$ con $y \in Ker\,(g)$. Como $Im\,(f) = Ker\,(g)$ existe un elemento $x \in A$ tal que $f\,(x) = y$. De aquí obtenemos

$$y \otimes w = f\,(x) \otimes i\,(w) = f'\,(x \otimes w) \in Im\,(f')$$

Como K está generado por los elementos $y \otimes w$ e $Im\,(f')$ es un submódulo de $B \otimes M$, $Ker\,(g') = K \subset Im\,(f')$. Por otra parte, como

$$g' \circ f' = (g \otimes i) \circ (f \otimes i) = (g \circ f) \otimes (i \circ i) = 0 \otimes i$$

es el homomorfismo trivial, se deduce de (Prop. 12) que también $Im\,(f') \subset Im\,(g')$. Esto completa la demostración de (Teor. 18). ||

Teorema 19 *Si la siguiente sucesión de homomorfismos de R-módulos*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, entonces igual sucede con la sucesión

$$0 \longrightarrow A \otimes M \xrightarrow{f \otimes i} B \otimes M \xrightarrow{h \otimes i} C \otimes M \longrightarrow 0$$

de sus productos tensoriales, donde $i : M \longrightarrow M$ es el enomorfismo identidad.

Prueba. Por (Cor. 13), el homomorfismo f tiene inverso por la izquierda. En otras palabras, existe un homomorfismo $h : B \longrightarrow A$ tal que el producto $j = h \circ f$ es el endomorfismo identidad del módulo A. Como

$$(h \otimes i) \circ (f \otimes i) = (h \circ f) \otimes (i \circ i) = j \otimes i$$

es el endomorfismo identidad de $A \otimes M$, se sigue del (Teor. 3) que $f \otimes i$ es un monomorfismo. Por (Teor. 17), implica que la sucesión de produtos tensoriales es una sucesión exacta corta. Además, se descompone en virtud de (Cor. 13). Observemos que el homomorfismo $f \otimes i$ no es en general un monomorfismo si la sucesión exacta corta dada se descompone.

Proposición 29 *Para toda función bilineal $f : A \times B \longrightarrow X$ de R-módulos A, B, X, se satisface que*

$$f\,(a, 0) = 0 = f\,(0, b)$$

Para todo $a \in A$ y $b \in B$. Luego f no puede ser nunca inyectiva, a menos que $A = 0$ y $B = 0$.

Prueba.

$$f\,(a, 0) = \tau\,(a, 0) = a \otimes 0 = 0$$

$$f\,(0, b) = \tau\,(0, b) = 0 \otimes b = 0$$

Entonces

$$f\,(a, 0) = 0 = f\,(0, b)\,. \quad ||$$

Proposición 30 *Para cualesquiera R-módulos, probar los siguientes isomorfismos*

$$A \otimes B \approx B \otimes A$$

$$(A \otimes B) \otimes C \approx A \otimes (B \otimes C)$$

Para ello el producto tensorial sobre R de cualquier número finito de R-módulos está bien definido.

Prueba. Sea $g : A \times B \longrightarrow B \otimes A$ tal que $g(a,b) = b \otimes a$. Veamos que es bilineal.

$$\begin{aligned} g(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) \otimes b \\ &= \alpha_1 (a_1 \otimes b) + \alpha_2 (a_2 \otimes b) \\ &= \alpha_1 g(a_1, b) + \alpha_2 g(a_2, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(a, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) &= a \otimes (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) \otimes b \\ &= \beta_1 (a \otimes b_1) + \beta_2 (a \otimes b_2) \\ &= \beta_1 g(a, b_1) + \beta_2 g(a, b_2) \end{aligned}$$

por tanto g es bilineal. Entonces existe $h : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$ tal que $h \circ \tau = g$ (En el diagrama 1). Sea $g' : B \times A \longrightarrow A \otimes B$ tal que $g(b,a) = a \otimes b$. Veamos que g' es bilineal.

$$\begin{aligned} g'(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2, a) &= a \otimes (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) \\ &= \alpha_1 (a \otimes b_1) + \alpha_2 (a \otimes b_2) \\ &= \alpha_1 g'(a, b_1) + \alpha_2 g'(a, b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(a, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) &= a \otimes (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) \otimes b \\ &= \beta_1 (a \otimes b_1) + \beta_2 (a \otimes b_2) \\ &= \beta_1 g'(a, b_1) + \beta_2 g'(a, b_2) \end{aligned}$$

Por tanto g' es bilineal. Entonces existe $k : B \otimes A \longrightarrow A \otimes B$ tal que $k \circ \tau = g'$

$$\begin{array}{c} A \times B \xrightarrow{\tau} A \otimes B \\ g \searrow \swarrow h \\ B \times A \xrightarrow{\tau'} B \otimes A \end{array} \qquad \begin{array}{c} B \times A \xrightarrow{\tau'} B \otimes A \\ g' \searrow \swarrow k \\ A \times B \xrightarrow{\tau} A \otimes B \end{array}$$

$$g' = \tau \circ iA \circ iB = k \circ \tau'$$

Lo que tenemos que probar es que:

$$k \circ h = 1A \otimes B \qquad h \circ k = 1B \otimes A$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} (k \circ h)(a \otimes b) &= k(h(a \otimes b)) = k(b \otimes a) \\ &= a \otimes b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ k)(b \otimes a) &= h(k(b \otimes a)) = k(a \otimes b) \\ &= b \otimes a \end{aligned}$$

Por tanto h y k son monomorfismos y epimorfismos. Por tanto existe un isomorfismo

$$A \otimes B \approx B \otimes A$$

Ahora veamos que

$$(A \otimes B) \otimes C \approx A \otimes (B \otimes C)$$

Por definición todo elemento v de $(A \otimes B) \otimes C$ es una suma finita

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes c_i \, (u_i \in A \otimes B, c_i \in C)$$

Cada $u_i \in A \otimes B$ es una suma finita

$$\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \otimes b_{ij}\ (a_{ij} \in A, b_{ij} \in B)$$

Nosotros tenemos

$$v = \sum_i u_i \otimes c_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \otimes b_{ij} \right) \otimes c_i = \sum_i \sum_j \left[(a_{ij} \otimes b_{ij}) \otimes c_i \right]$$

$(A \otimes B) \otimes C$ es un generador por cada elemento de la forma $(a \otimes b) \otimes c$ $a \in A$, $b \in B$. Similar

$$\sum_i a_i \otimes v_i = \sum_i a_i \otimes \left(\sum_j b_{ij} \otimes c_{ij} \right) = \sum_i \sum_j \left[a_i \otimes (b_{ij} \otimes c_{ij}) \right]$$

$a_i \in A, b_{ij} \in B, c_{ij} \in C, v_i \in B \otimes C$ es una suma finita $A \otimes (B \otimes C)$ es generado por cada $a \otimes (b \otimes c)$ con $a \in A, b \in B, c \in C$

Verifiquemos que la asignación

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes bi, c \right) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left[a_i \otimes (bi \otimes ci) \right]$$

define un S-bilineal función lineal

$$(A \otimes B) \times C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C)$$

de aquí es un homomorfismo.

$$\alpha : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C)$$

con $\alpha \left[(a \otimes b) \otimes c \right] = a \otimes (b \otimes c)$ para todo $a \in A, b \in B, c \in C$

Similarmente se define un R-bilineal función lineal

$$A \times (B \otimes C) \longrightarrow (A \otimes B) \otimes C$$

que induce un homomorfismo

$$\beta : A \otimes (B \otimes C) \longrightarrow (A \otimes B) \otimes C$$

tal que $\beta \left[a \otimes (b \otimes c) \right] = (a \otimes b) \otimes c$ para todo $a \in A, b \in B, c \in C$

Para cada generador $(a \otimes b) \otimes c$ de $(A \otimes B) \otimes C$

$$\beta\alpha \left[(a \otimes b) \otimes c \right] = (a \otimes b) \otimes c$$

Donde $\beta \circ \alpha$ es la función identidad sobre $(A \otimes B) \otimes C$. Un argumento similar prueba que $\alpha \circ \beta$ es la identidad sobre $A \otimes (B \otimes C)$. De aquí que α y β son isomorfismos. $||$

Proposición 31 *Para todo R-módulo libre y toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

de R-módulos, la sucesión

$$0 \longrightarrow A \otimes F \xrightarrow{f \otimes i} B \otimes F \xrightarrow{g \otimes i} C \otimes F \longrightarrow 0$$

De sus productos tensoriales con el endomorfismo identidad $i : F \longrightarrow F$ es siempre exacta. En particular, si el anillo de coeficientes R es un cuerpo, entonces todo R-módulo es libre.

Prueba: Denotemos $f' = f \otimes i$, $g' = g \otimes i$. Como g y i son sobreyectivas por teorema (Teo.27) g' es sobreyectiva y el núcleo de g' es el submódulo K de $B \otimes F$ generado por los elementos $y \otimes w$ de $B \otimes F$ con $y \in Ker\,(g)$. Existe un elemento $x \in A$ tal que $f\,(x) = y$. De aquí obtenemos

$$y \otimes w = f\,(x) \otimes i\,(w) = f'\,(x \otimes w) \in Im\,(f')$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} g' \circ f' \qquad &= (g \otimes i) \circ (f \otimes i) \\ &= (g \circ f) \otimes (i \circ i) \\ &= 0 \otimes i \end{aligned}$$

es el homomorfismo trivial, se deduce de (Prop. 9) que también

$$Im\,(f') \subset Ker\,(g')$$

Por tanto $Im\,(f') = Ker\,(g')$. Veamos que f' es inyectiva. El submódulo S de $A \otimes F$ es generado por los elementos $\alpha \otimes w \in A \otimes F$ con $x \in Ker\,(f)$ ó $x \in Ker\,(i) = 0$ Entonces

$$x \in Ker\,(f)$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes f_i = 0,\ f_i = 0$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes f_i, a_i \in Ker\,(f)$$

$$f'\,(x) = f'\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes f_i\right) = f'\,(a_1 \otimes f_1) + ... + f'\,(a_n \otimes f_n) = 0$$

Por tanto f' es inyectiva. ||

Proposición 32 *Sea el anillo R de coeficientes el anillo Z de los enteros. Entonces los R-módulos son precisamente los grupos abelianos. Sea $B = Z$ y $A = 2Z =$ el subgrupo de los enteros pares. Entonces el homomorfismo inclusión $f : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo. Sea M un grupo cíclico de orden 2 con generador g. Probar que $A \otimes M$ es un grupo cíclico de orden 2 con generador $2 \otimes g$. Probar que el producto tensorial*

$$h = f \otimes i : A \otimes M \longrightarrow B \otimes M$$

de f y el automorfismo identidad $i : M \longrightarrow M$ es el homomorfismo trivial y por ello no es monomorfismo.

Prueba: Primero probemos que todo grupo abeliano es un Z-módulo. Sea $(X, *)$ un grupo abeliano arbitrario del Z-módulo.

$$\begin{aligned} \mu : \qquad & Z \times X \longrightarrow X \\ & (n, x) \longrightarrow \mu\,(n, x) = nx \end{aligned}$$

Sean $n_1, n_2 \in Z$, $x_1, x_2 \in X$

$$\begin{aligned} \mu\,(n_1 + n_2, x) \qquad &= (n_1 + n_2)\,x & \qquad \mu\,(n, x_1 + x_2) \qquad &= n\,(x_1 + x_2) \\ &= n_1 x + n_2 x & &= n x_1 + n x_2 \\ &= \mu\,(n_1, x) + \mu\,(n_2, x) & &= \mu\,(n, x_1) + \mu\,(n, x_2) \end{aligned}$$

Por tanto todo grupo abeliano es un Z-módulo. Ahora probemos que M es un grupo cíclico de orden 2 generado por $2 \otimes g$, $\exists 2 \otimes g \in A \otimes M$ tal que el subgrupo generado por $2 \otimes g$ es $A \otimes M$

$$\begin{aligned}
M &= \{[0], [1]\} \\
\langle 2 \otimes 1 \rangle &= A \otimes M \\
A &= \{2, 4, ..., 2n\} \\
\langle 2 \otimes 1 \rangle &= \left\{2 \otimes 1, (2 \otimes 1)^2 = e\right\} \\
[2 \otimes 1] + [2 \otimes 1] &= 2\,(2 \otimes 1) \\
&= 2 \otimes 1{,}2 \\
&= 2 \otimes 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por tanto $2 \otimes 1$ genera a $A \otimes M$. Probemos que $h = f \otimes i : A \otimes M \longrightarrow B \otimes M$ es el módulo trivial, lo que queremos probar es que $h\,(2 \otimes 1) = 0$.

Sea $2 \otimes 1 \in A \otimes M, 2 \in A, 1 \in M$

$$\begin{aligned}
h\,(2 \otimes 1) &= 2;\ \text{por que la inclusión } f : A \longrightarrow B \text{ es el homomorfismo trivial} \\
&= 1 \otimes 2 \in Z \otimes M \\
&= 0;\ \text{por que } 2 \neq M
\end{aligned}$$

Por tanto $h\,(2 \otimes 1) = 0$. Por tanto h es un homomorfismo trivial.

1.8. Módulos de Homomorfismos

Sean A y B R-módulos cualesquiera y consideremos el conjunto

$$\Phi = Hom_R(A, B)$$

de todos los homomorfismos del módulo A en el módulo B. Como consideraremos el anillo de coeficientes R fijo, usaremos el símbolo más abreviado

$$\Phi = Hom(A, B)$$

siempre que no haya peligro de ambiguedad. Definamos una adicción $+$ en este conjunto Φ tomando como suma de los homomorfismos $\phi, \psi : A \rightarrow B$ el homomorfismo

$$\begin{aligned}
\phi + \psi : \quad & A \rightarrow \ B \\
& x \rightarrow (\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in A$. Con esta adición es Φ evidentemente un grupo abeliano. En efecto:

(i) Cerradura para la suma y el producto por escalar. Sean $\psi, \phi \in \Phi$ $x, y \in A$ $\alpha \in R$

$$\begin{aligned}
(\psi + \phi)(x + y) &= (\psi(x + y)) + (\phi(x + y)) \\
&= \psi(x) + \psi(y) + \phi(x) + \phi(y) \\
&= [\psi(x) + \phi(x)] + [\psi(y) + \phi(y)] \\
&= [\psi + \phi](x) + [\psi + \phi](y)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
(\psi + \phi)(\alpha x) &= (\psi(\alpha x)) + (\phi(\alpha x)) \\
&= \alpha[\psi(x)] + \alpha[\psi(y)] \\
&= \alpha[\psi(x) + \phi(x)] \\
&= \alpha[\psi + \phi](x)
\end{aligned}$$

(ii) Asociativa. Sean $\psi, \phi, \gamma \in \Phi$ $x \in A$

$$\begin{aligned}
[\psi + (\phi + \gamma)](x) &= \psi(x) + (\phi + \gamma)(x) \\
&= \psi(x) + [\phi(x) + \gamma(x)] \\
&= [\psi(x) + \phi(x)] + \gamma(x) \\
&= [\psi + \phi](x) + \gamma(x) \\
&= [(\psi + \phi) + \gamma](x)
\end{aligned}$$

(iii) Elemento neutro. Sea el homomorfismo $\psi \in \Phi$ definido por $psi(x) = 0$, $\forall x \in A$

$$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x) = \phi(x)$$

(iv) Elemento inverso. Sea el homomorfismo $\psi \in \Phi$ definido por $\psi(x) = -\phi(x)$ $\forall x \in A$

$$\begin{aligned}
(\phi + \psi)(x) &= \phi(x) + \psi(x) \\
&= \phi(x) + [-\phi(x)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

(v) Conmutativo

$$\begin{aligned}
[\psi + \phi](x) &= \psi(x) + \phi(x) \\
&= \phi(x) + \psi(x) \\
&= [\phi + \psi](x)
\end{aligned}$$

De aquí se ha comprobado que Φ tiene la estructura de grupo abeliano. Ahora para cualesquiera $\alpha \in R$ y $\phi \in \Phi$ consideremos la función

$$\begin{aligned}
\alpha\phi : \quad & A \to B \\
& x \to [\alpha\phi](x) = \alpha[\phi(x)]
\end{aligned}$$

Mediante la conmutatividad de R, se puede fácilmente comprobar que $\alpha\phi$ es un homomorfismo de A en B. En efecto. Sean $x, y \in A$ $a \in R$

$$\begin{aligned}
(\alpha\phi)(x + y) &= \alpha[\phi(x + y)] \\
&= \alpha[\phi(x) + \phi(y)] \\
&= \alpha[\phi(x)] + \alpha[\phi(y)] \\
&= [\alpha\phi](x) + [\alpha\phi](y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha\phi)(ax) &= \alpha[\phi(ax)] \\
&= \alpha[a\phi(x)] \\
&= \alpha a[\phi(x)] \\
&= a\alpha[\phi(x)] \\
&= a[\alpha[\phi(x)]] \\
&= a[\alpha\phi](x)
\end{aligned}$$

La correspondencia $(\alpha, \phi) \to (\alpha\phi)$ define la multiplicación escalar

$$\begin{aligned}
\mu : \quad & R \times \Phi \to \Phi \\
& (\alpha, \phi) \to \mu(\alpha, \phi) = \alpha\phi
\end{aligned}$$

En el grupo abeliano Φ. Así Φ queda estructurado como R-módulo recibiendo el nombre de *Módulo de homomorfismos* de A en B.

En efecto sean $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$ $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$

$$\begin{aligned}
[(\alpha_1 + \alpha_2)](x) &= (\alpha_1 + \alpha_2)[\phi(x)] \\
&= \alpha_1[\phi(x)] + \alpha_2[\phi(x)] \\
&= [\alpha_1\phi](x) + [\alpha_2\phi](x) \\
&= [\alpha_1\phi + \alpha_2\phi](x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha(\phi_1 + \phi_2)](x) &= \alpha(\phi_1 + \phi_2)(x) \\
&= \alpha[\phi_1(x) + \phi_2(x)] \\
&= \alpha[\phi_1](x) + \alpha[\phi_2](x) \\
&= [\alpha\phi_1](x) + [\alpha\phi_2](x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\alpha(\beta\phi)](x) &= \alpha[\beta\phi(x)] \\ &= (\alpha\beta)\phi(x) \\ &= [(\alpha\beta)\phi](x)\end{aligned} \qquad 1\cdot\phi(x) = \phi(x)$$

Por lo que μ queda estructurado como R-módulo ||

Proposición 33 *Todo R-módulo X cumple que* $Hom(R, X) \approx X$

Prueba. Definamos una función

$$\begin{aligned} h: \quad & Hom(R,X) \to X \\ & \phi \to h(\phi) = \phi(1)\end{aligned}$$

A probar que h es isomorfismo. Sea $x \in X$ necesitamos encontrar un $\phi \in Hom(R, X)$ tal que $h(\phi) = x$. Como R es un R-módulo libre generado por $\{1\}$ existe un único homomorfismo $\phi : R \to X$ tal que

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & R \arrow[d, "\phi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Por definición de módulo libre $(\phi \circ f)(1) = g(1) = x, \quad \forall x \in X$. Además por otra parte tenemos

$$\begin{aligned} x &= (\phi\circ f)(1) \\ &= \phi(f(1)) \\ &= \phi(1) \text{ ;por ser f inyectiva} \\ &= h(\phi)\end{aligned}$$

Por tanto $h(\phi) = x$ para $x \in X$; $\phi \in Hom(R, X)$, de aquí se comprueba que h es epimorfismo

Ahora sea $\phi \in \Phi$ donde $\phi \in Ker(h)$ a probar que h es monomorfismo

Si $\phi \in Ker(h) \Rightarrow h(\phi) = \phi(1) = 0$

$$\phi(\alpha) = \alpha\phi(1) = \alpha 0 = 0$$

Entonces $\phi = 0 \ \forall\alpha$ y como $\phi \in Ker(h)$ $Ker(h) = 0$ Por tanto h es monomrfismo

Lo que demuestra que h es isomorfismo.||

Sea ahora $f : A' \to A, \quad g : B \to B'$ dos homomorfismos cualesquiera de R-módulos, y consideremos los módulos $Hom(A, B)$ y $Hom(A', B')$. Definamos

$$\begin{aligned} h: \quad & Hom(A,B) \to Hom(A',B') \\ & \phi \to h(\phi) = g\circ\phi\circ f\end{aligned} \qquad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] & A \arrow[dl, "\phi"] \\ B \arrow[r, "g"] & B' \end{tikzcd}$$

Evidentemente h es un homomorfismo del módulo $Hom(A, B)$ en el módulo $Hom(A^{'}, B^{'})$ que se denota con el símbolo $Hom(f, g)$. En efecto sean $\psi, \phi \in Hom(A, B) = \Phi, \quad \alpha \in R$

$$\begin{aligned} h(\psi+\phi) &= [g\circ(\psi+\phi)\circ f](x) \\ &= g[(\psi+\phi)(f(x))] \\ &= g[\psi(f(x)) + \phi(f(x))] \\ &= g[\psi(f(x))] + g[\phi(f(x))] \\ &= [g\circ\psi\circ f](x) + [g\circ\phi\circ f](x) \\ &= h(\psi) + h(\phi)\end{aligned} \qquad \begin{aligned} h(\alpha\phi) &= [g\circ(\alpha\phi)\circ f](x) \\ &= g[\alpha\phi(f(x))] \\ &= \alpha g[\phi(f(x))] \\ &= \alpha[g\circ\phi\circ f](x) \\ &= \alpha(\phi)\end{aligned}$$

La siguiente proposición es consecuencia inmediata de la definición. ||

Proposición 34 *Si $i : A \to A$ y $j : B \to B$ son los homomorfismos identidad de los R-módulos A y B, entonces*

$$Hom(i, j) : Hom(A, B) \to Hom(A, B)$$

es el homomorfismo identidad del módulo $Hom(A, B)$. Si $f : A' \to A$, $f' : A'' \to A', g : B \to B', g' : B' \to B''$ son homomorfismos de R-módulos, entonces tenemos

$$Hom(f \circ f', g' \circ g) = Hom(f', g') \circ Hom(f, g)$$

Prueba: Por definición anterior si i, j son homomorfismos consideramos el módulo $Hom(A, B)$; se define

$h = Hom(i, j) : Hom(A, B) \to Hom(A, B)$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A \\ & \swarrow \phi & \\ B & \xrightarrow{j} & B \end{array}$$

Si f, g y f', g' son homomorfismos sabemos que

$$\begin{array}{ccccc} Hom(A, B) & \overset{Hom(f,g)}{\to} & Hom(A', B') & \overset{Hom(f',g')}{\to} & Hom(A'', B'') \\ & & & & \\ \phi & \to & Hom(f, g)(\phi) & & \\ & & = g \circ \phi \circ f & \to & Hom(f', g')(g \circ \phi \circ f) \\ & & & & = g' \circ [g \circ \phi \circ f] \circ f' \\ & & & & = (g' \circ g) \circ \phi \circ (f \circ f') \end{array}$$

Entonces $[Hom(f', g') \circ Hom(f, g)](\phi) = (g' \circ g) \circ \phi \circ (f \circ f')$
Por otra parte

$$A'' \xrightarrow{f'} A' \xrightarrow{f} A \qquad B \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g'} B$$

$$f \circ f' : A'' \to A \qquad g' \circ g : B \to B'$$

además

Si $\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f} & A \\ & \swarrow & \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$ y $\begin{array}{ccc} A'' & \xrightarrow{f'} & A' \\ & \swarrow & \\ B' & \xrightarrow{g'} & B'' \end{array}$ entonces $\begin{array}{ccc} A'' & \xrightarrow{f \circ f'} & A \\ & \swarrow & \\ B & \xrightarrow{g' \circ g} & B'' \end{array}$

Luego $Hom(f \circ f', g' \circ g) : Hom(A, B) \to Hom(A'', B'')$

$$\begin{array}{ccl} \phi & \to & Hom(f \circ f', g' \circ g)(\phi) \\ & & = (g' \circ g) \circ \phi \circ (f \circ f') \end{array}$$

De aquí tenemos que $Hom(f \circ f', g' \circ g)(\phi) = (g' \circ g) \circ \phi \circ (f \circ f')$. Por tanto se cumple que

$$Hom(f \circ f', g' \circ g) = Hom(f', g') \circ Hom(f, g)$$

Para cualquier $\phi \in Hom(A, B)$.||

Corolario 17 *Si $f : A \to A'$ y $g : B \to B'$ son los isomorfismos de R-módulos, entonces también lo es*

$$Hom(f, g) : Hom(A, B) \to Hom(A'.B')$$

Prueba. Como f, g son isomorfismos existen homomorfismos $h : A \to A'$, $k : B' \to B$ tales que $(h \circ f), (f \circ h), (k \circ g), (g \circ k)$ son los homomorfismo identidad. Por (Prop. 35) se deduce que los productos

$$Hom(h \circ k) \circ Hom(f \circ g) = Hom(f \circ h, k \circ g) : Hom(A, B) \to Hom(A, B)$$

$$Hom(f \circ g) \circ Hom(h \circ k) = Hom(h \circ f, g \circ k) : Hom(A', B') \to Hom(A', B')$$

Son los homomorfismos identidad de los módulos $Hom(A', B')$ y $Hom(A', B')$ respectivamente. Luego $Hom(f, g) : Hom(A, B) \to Hom(A', B')$ es un isomorfismo.||. Establezcamos ahora el siguiente teorema.

Teorema 20 *Si los R-módulos A y B son descomponibles en su suma directa y producto directo*

$$A = \sum_{\mu \in M} A_\mu, \quad B = \prod_{v \in N} B_v,$$

entonces tenemos

$$Hom(A, B) \approx \prod_{\mu, v} Hom(A_\mu, B_v)$$

Prueba. Por definición, un elemento arbitrario f del producto directo

$$P = \prod_{\mu, v} Hom(A_\mu, B_v)$$

es una función definida sobre $M \times N$ tal que $f(\mu, v) \in Hom(A_\mu, B_v)$. En donde $\forall a \in A$ y $b \in B$ son funciones definidas mediante

$a : M \to \bigcup A_\mu$	
$\mu \to a(\mu) = 0$	$b : N \to \bigcup B_n$
salvo a lo mas en un # finito	$v \to b(v)$
de elementos	

Definamos una función $h : P \to Hom(A_\mu, B_v)$, asignando a cada $f \in P$ el homomorfismo $h(f) : A \to B$ definido por $h : P \to Hom(A, B)$

$$\begin{aligned} f \to \quad & h(f) : A \to B \\ & \quad a \to [h(f)](a) : N \to \bigcup B_n \\ & \qquad\qquad v \to [h(f)](a)(v) \\ & \qquad\qquad\quad = \textstyle\sum_{\mu \in M} f(\mu, v)[a(\mu)] \end{aligned}$$

para todo $a \in A$ y cada $v \in B$. Evidentemente h es un homomorfismo de módulos.

Sean $f, g \in P \;\; , \alpha \in R$

$$\begin{aligned} \{[h(f+g)](a)\}(v) &= \textstyle\sum_{\mu \in M} (f+g)(\mu, v)[a(\mu)] \\ &= \textstyle\sum_{\mu \in M} (f(\mu, v) + g(\mu, v))[a(\mu)] \\ &= \textstyle\sum_{\mu \in M} (f(\mu, v)[a(\mu)] + g(\mu, v)[a(\mu)]) \\ &= \textstyle\sum_{\mu \in M} f(\mu, v)[a(\mu)] + \sum_{\mu \in M} g(\mu, v)[a(\mu)] \\ &= \{[h(f)](a)\}(v) + \{h(g)(a)\}(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{[h(\alpha f)](a)\}(v) &= \textstyle\sum_{\mu \in M} (\alpha f)(\mu, v)[a(\mu)] \\ &= \textstyle\sum_{\mu \in M} \alpha f(\mu, v)[a(\mu)] \\ &= \alpha \textstyle\sum_{\mu \in M} f(\mu, v)[a(\mu)] \\ &= \alpha \{[h(f)](a)\}(v) \end{aligned}$$

Por otra parte el homomorfismo inclusión
$i_\mu : A_\mu \to A$

$$a \to i_\mu(a_\mu) = \begin{cases} a; \mu \in I \\ \\ 0; \mu \notin I \end{cases}$$

Y la proyección natural
$\rho_v : B \to B_v$
. $b \to B_v = b(v)$

I:Conjunto de # finito de elementos

Determinan un homomorfismo $Hom(i_\mu, \rho_v) : Hom(A, B) \to Hom(A_\mu, B_v)$

$$\begin{aligned} \phi \to \quad & Hom(i_\mu, \rho_v)(\phi) \\ & = \rho_v \circ \phi \circ i_\mu : A_\mu \to B_v \end{aligned}$$

Sea

$$k = \prod_{\mu, v \in M \times N} Hom(A, B) \to \prod Hom(A_\mu, B_v) = P$$

$$\phi \to [k(\phi)](\mu, v) = \rho_v \circ \phi \circ i_\mu,$$

el producto directo restringido de la familia

$$\{Hom(i_\mu, \rho_v) : Hom(A, B) \to Hom(A_\mu, B_v)/(\mu, v) \in (M \times N)\}.$$

Entonces k es un homomorfismo de módulos. Sean $\phi, \psi \in Hom(A, B)$ $\alpha \in R$

$$\begin{aligned} k(\phi + \psi) \quad & = [\rho_v \circ (\phi + \psi) \circ i_\mu][a(\mu)] \\ & = \rho_v \{(\phi + \psi)[i_\mu(a(\mu))]\} \\ & = \rho_v \{\phi[i_\mu(a(\mu))] + \psi[i_\mu(a(\mu))]\} \\ & = \rho_v \{\phi[i_\mu(a(\mu))]\} + \rho_v \{\psi[i_\mu(a(\mu))]\} \\ & = [\rho_v \circ \phi \circ i_\mu][a(\mu)] + [\rho_v \circ \psi \circ i_\mu][a(\mu)] \\ & = k(\phi) + k(\psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(\alpha\phi) \quad & = [\rho_v \circ (\alpha\phi) \circ i_\mu][a(\mu)] \\ & = \rho_v \{(\alpha\phi)[i_\mu(a(\mu))]\} \\ & = \alpha\rho_v \{\phi[i_\mu(a(\mu))]\} \\ & = \alpha[\rho_v \circ \phi \circ i_\mu][a(\mu)] \\ & = \alpha k(\phi) \end{aligned}$$

Para probar que $h \circ k$ es el homomorfismo identidad de $Hom(A, B)$, sea ϕ un elemento arbitrario de $Hom(A, B)$ y $f = k(\phi) \in P$. Por definición de k tenemos

$$\begin{aligned} f(\mu, v) \quad & = k(\phi)(\mu, v) \\ & = \rho_v \circ \phi \circ i_\mu : A_\mu \to B_v \qquad \forall(\mu, v) \in M \times N \end{aligned}$$

Por definición de h tenemos

$$\begin{aligned} \{[h(f)](a)\}(v) \quad & = \textstyle\sum_{\mu \in M} (\rho_v \circ \phi \circ i_\mu)[a(\mu)] \\ & = \rho_v \circ \phi(\textstyle\sum_{\mu \in M} i_\mu[a(\mu)]) \\ & = (\rho \circ \phi)(a) \\ & = \rho(\phi(a)) \\ & = [\phi(a)](v) \qquad \forall a \in M \text{ y cada } v \in N \end{aligned}$$

Esto prueba que $h(f) = \phi$. Como ϕ es un elemento arbitrario de $Hom(A, B)$

$$k : Hom(A, B) \to P$$

$$\phi \to \quad k(\phi) = f \in P$$

Entonces

$$h(f) = h(k(\phi)) = \phi$$

por tanto $h \circ k$ es el homomorfismo identidad de $Hom(A, B)$. Para probar que $k \circ k$ es el homomorfismo identidad de P, sea $f \in P$ y denotemos $\phi = h(f)$. Por definición de h, es

$$\begin{aligned}[\phi(a)](v) &= \textstyle\sum_{\mu \in M} f(\mu, v)[a(\mu)] \\ &= \textstyle\sum_{\mu \in M} f(\mu, v)[\rho_\mu(a)] \qquad \forall a \in M \text{ y cada } v \in N\end{aligned}$$

Entonces por definición de k, tenemos

$$[k(\phi)](\alpha, \beta) = \rho_\beta \circ \phi \circ i_\alpha : A_\alpha \to B_\beta$$

.
$$\begin{aligned} a_\alpha \to \quad & \{[k(\phi)](\alpha, \beta)\}(a_\alpha) \\ & = (\rho_\beta \circ \phi \circ i_\alpha)(a_\alpha) \\ & = \rho(\phi(i_\alpha(a_\alpha))) \\ & = \{\phi(i_\alpha(a_\alpha))\}(\beta) \\ & = \textstyle\sum_{\mu \in M} f(\mu, \beta)[\rho_\mu(i_\alpha(a_\alpha))] \qquad \text{(por definición de h)} \\ & = \textstyle\sum_{\mu \in M} f(\mu, \beta)[(\rho_\mu \circ i_\alpha)(a_\mu)] \\ & = [f(\alpha, \beta)](a_\alpha) \qquad \text{(por *)} \end{aligned}$$

(*) ya que para $\mu \neq \beta$ todo es cero y para $\mu = \beta$ es la identidad de ahí que $(\rho_\mu \circ i_\mu)(a_\alpha) = a_\alpha$. Como $(\alpha, \beta) \in M \times N$ y $a_\alpha \in A_\alpha$ son arbitrarios, resulta $k(\phi) = f$. Y como $f \in P$

$$h : P \to Hom(A, B)$$

$$f \to \quad h(f) = \phi$$

Entonces $k(\phi) = k(h(f)) = f$. Así $k \circ h$ es el homomorfismo identidad de P. Por tanto h, k son isomorfos y el teorema queda demostrado.||

Teorema 21 *Siendo $f : A' \to A$ y $g : B \to B'$ homomorfismos de R-módulos, el núcleo del homomorfismo*

$$h = Hom(f, g) = Hom(A, B) \to Hom(A', B')$$

es el submódulo K de $Hom(A, B)$ definido por

$$K = \{\phi \in Hom(A.B)/\phi[Im(f)] \subset Ker(g)\}$$

Prueba. A probar que $Ker(h) = K$
(i) $K \subset Ker(h)$. Sea $\phi \in K$ arbitrariamente dado. Probemos que $K \in Ker(h)$ viendo que
$h(\phi) = 0$. Para ello, sea $x \in A'$. Como $f(x) \in Im(f)$ y $\phi \in K$, tenemos $K(\phi) \in Ker(g)$ entonces $g(\phi(f(x))) = 0$

.
$$Hom(A, B) \xrightarrow{h} Hom(A', B')$$

$$\begin{aligned} \phi \to \quad & h(\phi) : A' \to B' \\ & \qquad x \to [h(\phi)](x) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
[h(\phi)](x) &= [Hom(f,g)(\phi)](x) \\
&= (g \circ \phi \circ f)(x) \\
&= g(\phi(f(x))) \\
&= 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
A' \xrightarrow{f} A \\
\swarrow \phi \\
B \xrightarrow{g} B'
\end{array}$$

Entonces $\phi \in Ker(h)$ y como tomamos $\phi \in K$ por tanto $K \subset Ker(h)$
(ii)$Ker(h) \subset K$. Sea ahora $\phi \in Ker(h)$ de donde $h(\phi) = 0$. Entonces

$$g \circ \phi \circ f = Hom(f,g)(\phi) = h(\phi) = 0$$

En virtud de la (prop 9), esto implica

$$Im(\phi \circ f) \subset ker(g)$$

Por una relación puramente conjuntista,

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{g} B'$$

tenemos

$$\phi(Im(f)) = Im(\phi \circ f) \subset ker(g)$$

Por consiguiente, $\phi(Im(f)) \subset ker(g)$; y por definición de K lo que implica que $\phi \in K$ por tanto $ker(h) \subset K$, lo que cumple que $ker(h) = K||$.

Corolario 18 *Si $f : A' \to A$ es un epimorfismo y $g : B \to B'$ es un monomofismo de R-módulos, entonces*

$$h = Hom(f,g) : Hom(A,B) \to Hom(A',B')$$

es un monomorfismo.

Prueba. A probar que $ker(h) = 0$. Sea $\phi \in ker(h)$ donde $h(\phi) = 0$

$$\begin{aligned}
g(\phi(f(x))) &= (g \circ \phi \circ f)(x) \\
&= [Hom(f,g)(\phi)](x) \\
&= h(\phi)(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Y como g es monomorfismo $\phi(f(x)) = 0$ y como f es epimorfismo $\exists x \in A'$ tal que $f(x) = y$; $\forall y \in A$ entonces $\phi(y) = 0$ y como $\phi \in ker(h)$ por tanto $ker(h) = 0$. $||$

Teorema 22 *Si M es un R-módulo arbitrario y*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

es una sucesión exacta de R-módulos, entonces la sucesión

$$0 \to Hom(C,M) \xrightarrow{g^*} Hom(B,M) \xrightarrow{f^*} Hom(A,B)$$

con $f^* = Hom(f,i)$ y $g^* = Hom(g,i)$, donde $i : M \to M$ es el homomorfismo identidad del módulo M, es también exacta.

Prueba. A probar que $Im(g^*) = ker(f^*)$
(i) $Im(g^*) \subset ker(f^*)$. Como g es epimorfismo e i es monomorfismo, se deduce

del (Cor. 18) que $g^* = Hom(g, i)$ es monomorfismo. Como $g \circ f = 0$, es inmediato que $Hom(g \circ f, i) = 0$. Luego

$$\begin{aligned} f^* \circ g^* &= Hom(f, i) \circ Hom(g, i) \\ &= Hom(f \circ g, i \circ i) \\ &= Hom(f \circ g, i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $g^* \circ f = 0$ me determina el homomorfismo trivial y por la (Prop. 13)

$$Im(g^*) \subset ker(f^*)$$

(ii) $ker(f^*) \subset Im(g^*)$. Llamemos $K = Im(f) = ker(g)$; K sub-módulo de B. Como $f^* = Hom(f, i)$ se sigue de (Teo. 21) que

$$\phi(K) = \phi(Im(f)) \subset ker(i) = 0$$

(por ser i monomorfismo por Prop. 8). Y por ello $\phi(K) = 0$. Por consiguiente, $\phi : B \to M$ induce un homomorfismo

$$\psi : B/K \to M$$

Donde $K \subset B$ denotamos con $Q = B/K$ el módulo cociente con la proyección natural $\rho : B \to Q$ y tenemos el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\rho"'] & & M \\ & Q \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Donde ψ es el homomorfismo inducido por la función ϕ. Como g es epimorfismo con K como su núcleo $ker(g) = K$. La función $g : B \to C$ induce un isomorfismo $h : Q = B/K \approx C$ Ya que por (Prop. 14)

$$Coim(g) = B/ker(g) = B/K \approx Im(g)$$

donde $Im(g) \subset C$ y $K \subset B$. Tenemos el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\rho"'] & & C \\ & Q \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Donde h es el isomorfismo inducido por el epimorfismo g. Obtenemos así el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & C & \\ B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\phi"'] & & Q \arrow[ul, "h"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

En él, los dos triángulos son conmutativos. Siendo h isomorfismo, podemos definir un homomorfismo

$$\chi = \psi \circ h^{-1} : C \to M$$

Entonces $\chi \in Hom(C, M)$ y

$$g^*(\chi) = [Hom(g, i)](\chi) = i \circ \chi \circ g = \chi \circ g = \psi \circ h^{-1} \circ g = \psi \circ \rho$$

Luego $\phi \in Im(g^*)$ y de aquí que $ker(f^*) \subset Im(g^*)$. Por tanto $ker(f^*) = Im(g^*)$ ||.

Teorema 23 *Si la sucesión de homomorfismos de R-módulos*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

es una sucesión exacta corta que se descompone, entonces igual sucede con la sucesión

$$0 \to Hom(C,M) \xrightarrow{g^*} Hom(B,M) \xrightarrow{f^*} Hom(A,M) \to 0$$

donde $f^* = Hom(f,i)$ *y* $g^* = Hom(g,i)$ *representando* $i : M \to M$ *el endomorfismo identidad de un R-módulo* M

Prueba. Por (Teo. 11) f tiene un inverso por la izquierda. En otras palabras, existe un homomorfismo $h : B \to A$ tal que el producto $j = h \circ f$ es el endomorfismo identidad del módulo A. Como (por Prop. 34)

$$h = Hom(f,i) \circ Hom(h,i) = Hom(h \circ f, i \circ i) = Hom(j,i)$$

es el endomorfismo identidad de $Hom(A,M)$ de ahí que h es un isomorfismo, se deduce de (Teo. 3) que $f^* = Hom(f,i)$ es un epimorfismo. Por (Cor. 18), la sucesión es una sucesión exacta corta. Además en virtud de (prop. 34) ya que f^* es epimorfismo y tiene inverso por la izquierda la sucesión se descompone.||

Teorema 24 *Si* M *es un R-módulo arbitrario y*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

es una sucesión exacta de R-módulos, entonces la sucesión

$$0 \to Hom(M,A) \xrightarrow{f_*} Hom(M,B) \xrightarrow{g_*} Hom(M,C)$$

con $f_* = Hom(i,f)$ *y* $g_* = Hom(i,g)$ *donde* $i : M \to M$ *denota el homomorfismo identidad de* M*, es también una sucesión exacta corta.*

Prueba. A probar que $Im(f_*) = ker(g_*)$
(i) $Im(f_*) \subset ker(g_*)$. Como f es monomorfismo e i epimorfismo, se deduce del (Teo. 21) que $Hom(f,i) = f_*$ es monomorfismo. Puesto que $g \circ f = 0$ es claro que $Hom(i, g \circ f) = Hom(i,0) = 0$. Luego

$$g_* \circ f_* = Hom(i,g) \circ Hom(i,f) = Hom(i \circ i, g \circ f) = Hom(i, g \circ f) = 0$$

entonces $g_* \circ f_*$ me define el homomorfismo trivial lo que implica

$$Im(f_*) \subset ker(g_*)$$

(ii) $ker(g_*) \subset Im(f_*)$. Sea $\phi \in ker(g_*)$.
Como $g_* = Hom(i,g) : Hom(M,B) \to Hom(M,C)$. Deducimos del (Teo. 21) que

$$\phi(M) = \phi(Im(i)) \subset ker(g) = Im(f)$$

Puesto que f es monomorfismo, existe un isomorfismo $j : Im(f) \approx A$ tal que $f \circ j$ es el homomorfiso inclusión de $Im(f)$ en B.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f"] & \\ M \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, "\phi"] & & B \end{tikzcd}$$

$$f \circ j = i : Im(f) \to B$$
$$Im(f) \xrightarrow{j} A \xrightarrow{f} B$$

Definamos el homomorfismo identidad $\psi : M \to A$, tomando $\forall x \in M$

$$\psi(x) = j[\phi(x)]$$

Entonces ψ es un elemento de $Hom(M, A)$ y

$$\begin{aligned} f_*(\psi(x)) &= Hom(i, f)[\psi(x)] \\ &= f \circ \psi(c) \circ i \\ &= f \circ \psi(x) \\ &= f[j(\phi(x))] \quad \text{;por ser homo. inclusión} \\ &= \phi(x) \end{aligned}$$

Entonces $f_*(\psi) = \phi$ de ahí que $\phi \in Im(f_*)$ y como $\phi \in ker(g_*)$ tenemos que

$$ker(g_*) \subset Im(f_*)$$

Por tanto $ker(g_*) = Im(f_*)$ ||

Teorema 25 *Si la siguiente sucesión de homomorfismo de R-módulos*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

es una sucesión exacta corta que se descompone, entonces igual sucede con la sucesión

$$0 \to Hom(M, A) \xrightarrow{f_*} Hom(M, B) \xrightarrow{g_*} Hom(M, C) \to 0$$

donde $f_* = Hom(i, f)$ y $g_* = Hom(i, g)$ con $i : M \to M$ designando el endomorfismo identidad de un R-módulo M.

Prueba. Por la (Prop.34) el homomorfismo g posee inverso por la derecha. Entonces existe un homomorfismo $h : C \to B$ tal que $g \circ h = j$ es el endomorfismo identidad del módulo C. Como

$$Hom(i, g) \circ Hom(i, h) = Hom(i \circ i, g \circ h) = Hom(i, j)$$

es el endomorfismo indentidad de $Hom(M, C)$ Por (Prop.11) $g_* = Hom(i, g)$ es un epimorfismo. Por (Teo. 23) esto implica que la sucesión de la conclusión de (Teo. 24) es una sucesión exacta corta. Y por (Prop. 34) por ser g_* epimorfismo se descompone||

Proposición 35 *Para cualquier R-módulo libre A sobre un conjunto S, probar que $Hom(A, B)$ es isomorfo al módulo $Fun(S, B)$ de todas las funciones de S en el módulo B.*

Prueba. A probar que $Hom(A, B) \approx Fun(S, B)$. Si $F = Fun(S, B)$ hay que verificar que tiene una estructura de R-módulo. Definamos una adición $+$ en el conjunto F. Tomando como suma de funciones

$$\begin{aligned} f + g : \quad & S \to B \\ & x \to (f + g)(x) = f(x) + g(x) \end{aligned}$$

Para cualquier $\alpha \in R \;\; f \in F$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \alpha f : \quad & S \to B \\ & x \to (\alpha f)(x) = \alpha[f(x)] \end{aligned}$$

La correspondencia $(\alpha, f) \to \alpha f$ define la multiplicación escalar en F

$$\begin{aligned} \mu : \quad & R \times F \to F \\ & (\alpha, f) \to \mu(\alpha, f) = \alpha f \end{aligned}$$

Así F queda estructurado como R-módulo. Como A es un R-módulo libre sobre S juntamente con la función $f : S \to A$ tal que para todo $g : S \to X$ existe un único homomorfismo $h : A \to X$ tal que $g = h \circ f$

$$\begin{array}{c} S \xrightarrow{f} A \\ g \searrow \swarrow h \\ B \end{array}$$

Definamos la función

$$\begin{aligned} \Phi : \qquad Fun(S, B) &\to Hom(A, B) \\ g &\to \Phi(g) = h \end{aligned}$$

tal que $g = h \circ f$. A probar que Φ es un isomorfismo.

Epimorfismo: Sea $h \in Hom(A, B)$, se debe encontrar $g \in Fun(S, B)$ tal que $\Phi(g) = h$ pero como

$$\begin{array}{c} S \xrightarrow{f} A \\ h \circ f \searrow \swarrow h \\ B \end{array}$$

Tomando g como la composición de f, g si $g = h \circ f : S \to B$ entonces
$g \in Fun(S, B)$, tal que $\Phi(g) = h$

$$Fun(S, B) \xrightarrow{\Phi} Hom(A, b)$$

$$g \to \Phi(g) = h$$

Monomorfismo: Sea $g \in Fun(S, B)$ entonces $g \in ker(\Phi)$, entonces $\Phi(g) = 0$. Ya que

$$g = h \circ f = 0(f) = 0$$

Entonces $ker(\Phi) = 0$. Por tanto Φ es isomorfismo

Proposición 36 *Probar que para todo R-módulo libre F y toda sucesión exacta corta*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

de R-módulos la sucesión $0 \to Hom(F, A) \xrightarrow{f_*} Hom(F, B) \xrightarrow{g_*} Hom(F, C) \to 0$ donde $f_* = Hom(f, i)$ y $g_* = Hom(i, g)$ con $i : F \to F$ (denotando el homomorfismo identidad de f), es también exacta.

Prueba. Sabemos que la sucesión $0 \to Hom(F, A) \xrightarrow{f_*} Hom(F, B) \xrightarrow{g_*} Hom(F, C)$ es exacta por (Teor. 24) para ver la exactitud en toda la sucesión hay que probar que g_* es epimorfismo

$$\begin{aligned} g_* = Hom(i, g) : \qquad Hom(F, B) &\to Hom(F, C) \\ \phi &\to Hom(i, g)(\phi) \\ &= g \circ \phi \circ i \\ &= g \circ \phi \\ &= \psi \end{aligned}$$

Para ello sea $\psi \in Hom(F, C)$ necesitamos encontrar un único homomorfismo

$$\gamma \in Hom(F, B) \text{ tal que } Hom(i, g)(\gamma) = \psi$$

Como F es un R-módulo libre existe un conjunto S donde $(f : S \to F)$

$$\begin{array}{c} S \xrightarrow{f} F \\ \phi \swarrow \downarrow \psi \\ B \xrightarrow{g} C \to 0 \end{array}$$

En donde para todo $x \in S$, $\quad \psi(f(x)) \in C$. Como g es epimorfismo $\exists b \in B$ tal que $g(b) = \psi(f(x))$. Siendo F un módulo libre el mapeo

$$\begin{aligned} f: \qquad & S \to F \\ & x \to y \end{aligned}$$

induce un homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi: \qquad & F \to B \\ & \phi(f(x)) \to b \end{aligned}$$

en donde $g(\phi(f(x))) = g(b) = \psi(f(x))$ para todo $x \in S$

$$g(\phi(f)) = \psi(f) : S \to C$$

$$g(\phi) = \psi$$

para todo $\phi \in Hom(F, B)$. Entonces $Hom(i, g)(\gamma) = g \circ \gamma \circ i = g \circ \gamma = \psi$. Por tanto $g_* = Hom(i, g)$ es un isomorfismo y por tanto la sucesión

$$0 \to Hom(F, A) \xrightarrow{f_*} Hom(F, B) \xrightarrow{g_*} Hom(F, C) \to 0$$

es una sucesión exacta corta

1.9. Módulos Proyectivos

Un R-módulo se dice proyectivo si y sólo si, para todo homomorfismo $f : X \to B$ y todo epimorfismo $g : A \to B$ de R-módulos, existe un homomorfismo $h : X \to A$ que satisface $g \circ h = f$. En el lenguaje de diagramas, esta definición puede ser expresada como sigue: Un R-módulo X es proyectivo si y sólo si todo diagrama

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ A \xrightarrow{g} B \to 0 \end{array}$$

de homomorfismo de R-módulos, cuya fila es exacta, puede ser inmerso en un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Proposición 37 *Todo R-módulo libre es proyectivo*

Prueba. Consideremos un R-módulo libre X arbitrario generado por un subconjunto S de X. Sea un homomorfismo $f : X \to B$ y un epimorfismo $g : A \to B$ de R-módulos arbitrariamente dados.

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ A \xrightarrow{g} B \to 0 \end{array}$$

Para cualquier $s \in S$, existe un elemento $j(s)$ de A con $g[j(s)] = f(s)$ puesto que g es epimorfismo. La correspondencia $s \to j(s)$ define una función $j : S \to A$. Como X es un R-módulo libre sobre el conjunto $S \subset X$, existe un único homomorfismo $h : X \to A$ extensión de j. Comprobemos que $g \circ h = f$. Para ello, sea $x \in X$. Como S genera X, es x una combinación lineal

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$$

con $\alpha_i \in R$ y $s_i \in S$ para todo $i = 1, 2, ..., , n$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} g\left[h\left(x\right)\right] &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g\left[h\left(s_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g\left[j\left(s_i\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f\left(s_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i\right) = f\left(x\right) \end{aligned}$$

Puesto que x es un elemento arbitrario de X, es $g \circ h = f$, lo que completa la demostración. ||

Proposición 38 *Todo sumando directo de un R-módulo proyectivo es proyectivo.*

Prueba. Supongamos que la suma directa $X = U \oplus V$ de los dos R-módulos U y V es proyectiva. Para probar que U es proyectivo, sea un homomorfismo $f : U \to B$ y $g : A \to B$ un epimorfismo, ambos arbitrariamente dados. Denotemos con $j : U \to X$ y $p : X \to U$, respectivamente, la inyección natural y proyección natural. Como X es proyectivo, existe un homomorfismo $k : X \to A$ que satisface $g \circ k = f \circ p$

Consideremos el homomorfismo composición $h = k \circ j : U \to X$. Puesto que $p \circ j$ es el endomorfismo identidad de U, obtenemos

$$g \circ h = g \circ k \circ j = f \circ p \circ j = f$$

lo que completa la demostración.

Proposición 39 *Toda suma directa de R-módulos proyectivos es proyectiva.*

Prueba. Consideremos la suma directa

$$X = \sum_{i \in M} X_i$$

de una familia arbitraria $F = \{X_i | i \in M\}$ de R-módulos proyectivos.
Sean $f : X \to B$ y $g : A \to B$ un homomorfismo y un epimorfismo, respectivamente, arbitrariamente dados. Para cada $i \in M$, sea $d_i : X_i \to X$ la inyección natural. Como X_i es proyectivo, existe un homomorfismo $h_i : X_i \to A$ que satisface $g \circ h_i = f \circ d_i$. Entonces obtenemos la suma directa "realizada"

$$h = \sigma \circ \left(\sum_{i \in M} h_i\right) : X \to A$$

de la familia $H = \{h_i : i \to A | i \in M\}$. Para ello, sean $x \in X$ y $p_i : X \to X_i$ la proyección natural para todo $i \in M$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \left(g \circ h\right)\left(x\right) &= \sum_{i \in M} \left(g \circ h_i \circ p_i\right)\left(x\right) = \sum_{i \in M} \left(f \circ d_i \circ p_i\right)\left(x\right) \\ &= f\left(\sum_{i \in M} \left(d_i \circ p_i\right)\left(x\right)\right) = f\left(x\right) \end{aligned}$$

lo que implica que $g \circ h = f$.

Teorema 26 *Sea X un R-módulo arbitrario e $i : X \to X$ su endomorfismo identidad. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) *X es proyectivo.*

(b) *Toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

de R-módulos se descompone.

(c) *X es isomorfo a un sumando directo de un R-módulo libre.*

(d) *Si $g : A \to B$ es epimorfismo, entonces*

$$g* = Hom\,(i, g) : Hom\,(X, A) \to Hom\,(X, B)$$

es también epimorfismo.

(e) *Si*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de R-módulos, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom\,(X, A) \xrightarrow{f_*} Hom\,(X, B) \xrightarrow{g_*} Hom\,(X, C) \longrightarrow 0$$

con $f* = Hom\,(i, f)$ y $g* = Hom\,(i, g)$ es también una sucesión exacta corta.

Prueba. $(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos que X es proyectivo y consideremos el diagrama de homomorfismos

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow i \\ V \xrightarrow{g} X \to 0 \end{array}$$

Por definición, existe un homomorfismo $h : X \to V$ que satisface $g \circ h = i$. Por (Teor. 10) esto implica que la sucesión exacta corta de (b) se descompone.

$(b) \Rightarrow (c)$. Por (4,6), X es isomorfo a un módulo cociente de un R-módulo libre. En otros términos, existe un R-módulo libre F y un epimorfismo $g : F \to X$. Sea K el núcleo de g y $f : K \to F$ el homomorfismo inclusión. Entonces obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

Por (b) esta sucesión se descompone. En virtud del (Teor. 10) esto implica la existencia de un homomorfismo $h : X \to F$ tal que $g \circ h$ es el automorfismo identidad de X. Por (Prop. 13), h es monomorfismo y $F = Im\,(h) \oplus ker\,(g)$. Luego X es isomorfo al sumando directo $Im\,(h)$ del módulo libre F.

$(c) \Rightarrow (a)$. Es consecuencia inmediata de (Prop. 39) y (Prop. 39).
$(a) \Rightarrow (d)$. Por definición $g* = Hom\,(i, g)$ es epimorfismo si y sólo si, para todo elemento $f : X \to B$ de $Hom\,(X, B)$, existe un elemento $h : X \to A$ de homomorfismo $Hom\,(X, a)$ tal que

$$g * (h) = g \circ h \circ i = g \circ h = f$$

Luego (d) se cumple si y sólo si X es proyectivo.

$(d) \Rightarrow (e)$. Es consecuencia inmediata de (Teo. 24)

Proposición 40 *Todo R-módulo puede ser inmerso en una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

de R-módulos donde X es proyectivo.

Proposición 41 *Consideremos el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos:*

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow h \\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \end{array}$$

donde X es proyectivo, $g \circ h = 0$ y la fila es exacta. Probar que existe un homomorfismo $k : X \to A$ que satisface $f \circ k = h$.

Prueba. Como la sucesión es exacta, entonces: $Im\,(f) = ker\,(g)$ además $g \circ h = 0$. Se tiene que: $Im\,(f) = ker\,(g) \subset ker\,(h)$. Obtenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow h \\ A_{k(x)} \xrightarrow{f} Im\,(f)_{f(k(x))} \to 0 \end{array}$$

Por tanto existe un homomorfismo $k : X \longrightarrow C$ tal que $f \circ h = k$ ||

Proposición 42 *Consideremos el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos:*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{d} & Y & \xrightarrow{p} & Z \\ & & j \downarrow & & k \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

donde X es proyectivo, el cuadro es conmutativo, la fila superior es semiexacta y la inferior es exacta. Probar que existe un homomorfismo $h : X \to A$ que satisface $f \circ h = j \circ d$

Prueba. Como el cuadrado es conmutativo $k \circ p = g \circ j$, la fila inferior es exacta, $Im\,(f) = ker\,(g)$. Y como la fila superior es semiexacta, $Im\,(d) \subset ker\,(p)$; $d \circ p$ es el homomorfismo trivial $d \circ p = 0$. Entonces, por la proposición anterior tenemos que existe $h : X \to A$ tal que $f \circ h = j \circ d$. En el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{d} & Y & \xrightarrow{p} & Z \\ \downarrow h & & j \downarrow & & k \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

Proposición 43 *Probar que toda sucesión exacta corta*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

de homomorfismos de R-módulos puede ser inmersa en un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \rightarrow & U & \xrightarrow{i_u} & V & \xrightarrow{p_v} & W \rightarrow 0 \\
i_1 \downarrow & & & i_1 \oplus i_2 \downarrow & & i_2 \downarrow \\
0 \rightarrow & X & \xrightarrow{i_x} & Y & \xrightarrow{p_z} & Z \rightarrow 0 \\
\psi \downarrow & & & \gamma \downarrow & & \rho \downarrow \\
0 \rightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \rightarrow 0
\end{array}$$

donde las filas y columnas son exactas, la fila intermedia se descompone y X, Y, Z son R-módulos proyectivos. Además, las sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow U \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow 0 \qquad 0 \rightarrow W \rightarrow Z \rightarrow C \rightarrow 0$$

pueden ser arbitrariamente escogidos.

Prueba. Sea $A \approx \frac{X}{U}$; donde X es un R-módulo libre $\Rightarrow$ por (Prop.38) es proyectivo. Entonces existe

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{i_1} X \xrightarrow{\psi} A \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta. De la misma manera sea $C \approx \frac{Z}{W}$, donde Z es un R-módulo libre entonces por proposición (Prop. 38) es proyectivo. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{i_2} Z \xrightarrow{\rho} C \rightarrow 0$$

Ahora sea $Y = X \oplus Z$, donde Z y X son R-módulos proyectivos entonces la suma directa es proyectiva por proposición (Prop. 39). Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{i_x} Y \xrightarrow{p_z} Z \rightarrow 0$$

Sea $V = U \oplus W$, donde U y W son R-módulos proyectivos entonces la suma directa es proyectiva por proposición (Prop. 39). Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{i_u} V \xrightarrow{p_v} W \rightarrow 0 \qquad ||$$

1.9.1. Módulos Inyectivos

Un R-módulo X se dice inyectivo si y sólo si, para todo homomorfismo $f : A \rightarrow X$ y todo monomorfismo $g : A \rightarrow B$ que satisface $h \circ g = f$. En términos de diagramas, esta definición se enuncia como sigue: Un R-módulo X es inyectivo si y sólo si todo diagrama

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow A \xrightarrow{g} B \\
\downarrow f \\
X
\end{array}$$

de homomorfismos de R-módulos, cuya fila es exacta, puede ser inmerso en un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow A \xrightarrow{g} B \\
f \downarrow \swarrow h \\
X
\end{array}$$

Respecto a la existencia de R-módulos inyectivos, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 27 *Todo R-módulo es isomorfo a un submódulo de un R-módulo inyectivo*

Prueba. La prueba se basa en la demostración de el Lema siguiente [1]

Lema 9 *Todo grupo abeliano A puede ser isomorfo a un subgrupo de un grupo divisible abeliano si dado por algún* $y \in D$, $n \neq 0$ *y* $n \in Z$, $\exists x \in D$ *tal que* $nx = y$

A es un grupo abeliano, existe un grupo divisible J y un monomorfismo de un grupo $F : A \to J$. Por el Lema la función

$$\begin{aligned} \bar{f}: \quad & Hom_Z(R, A) \to Hom_Z(R, J) \\ & g \to \bar{f}(g) = fg \end{aligned}$$

es un monomorfismo de R-módulo. Como todo homomorfismo de R-módulo es un homomorfismo de Z-módulo es fácil ver que $Hom_R(R, A)$ es un R-submódulo de $Hom_Z(R, A)$ $(Hom_R(R, A) \subset Hom_Z(R, A))$ finalmente se verifica que la función

$$\begin{aligned} \subset: \quad & A \to Hom_R(R, A) \\ & a \to f_a \end{aligned}$$

donde $f_a(R) = ra$ es un R-módulo monomorfismo (en hecho es un isomorfismo). Componiendo estos mapeos produce un R-módulo monomorfismo

$$A \to Hom_(R) \xrightarrow{\subset} Hom_Z(R, A) \xrightarrow{\bar{f}} Hom_Z(R, J)$$

donde $\subset$ es la función inclusión. Puesto que $Hom_Z(R, J)$ es un submódulo inyectivo por lema anterior tenemos un isomorfismo A en un R-módulo inyetivo ||

Proposición 44 *Todo sumando directo de un R-módulo inyectivo es inyectivo.*

Prueba. Supongamos que la suma directa $X = U \oplus B$. De los módulos U y V sobre R es inyectiva. Para probar que U es inyectivo, sean $f : A \to U$ un homomorfismo y $g : A \to B$ un monomorfismo arbitrariamente dados. Consideremos la inyección natural $j : U \to X$ y la proyección natural $\rho : X \to U$. Como X es inyectivo, existe un homomorfismo $k : B \to X$ que satisface

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ f \downarrow & \swarrow & \downarrow k \\ U & \xrightarrow{j} & X \\ & \xleftarrow{\rho} & \end{array} \qquad\qquad k \circ g = j \circ f$$

Consideremos el homomorfismo producto $h = \rho \circ k : B \to U$ Como $\rho \circ j$ es el endomorfismo identidad de U, obtenemos:

$$h \circ g = \rho \circ h \circ g = \rho \circ j \circ f = f$$

Lo que completa la demostración ||

Proposición 45 *Todo producto directo de R-módulos inyectivos es inyectivo.*

Prueba: Consideremos el producto directo

$$X = \prod_{i \in M} X_i$$

de una familia $\Im = \{X_i / i \in M\}$ de R-módulos inyectivos. Para probar que X es inyectivo, sea $f : A \to X$ un homomorfismo y $g : A \to B$ un monomorfismo

[1] ver MacLane, S., Homology y Norcott, D. G., An Introduction to Homological Algebra

arbitrariamente dados. para cada $i \in M$, denotemos con $\rho_i : X \to X_i$ la proyección natural. Como X_i es inyectivo, existe un homomorfismo $h_i : B \to X_i$ que satisface

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ f \downarrow & \swarrow & \downarrow h_i \\ U & \xrightarrow{j} & X_i \\ & \overleftarrow{\rho_i} & \end{array} \qquad\qquad h_i \circ g = \rho_i \circ f$$

Considerando el producto directo restringido $h = (\prod_{i\in} h_i) \circ \delta : B \to X$ de la familia $\wp = \{h_i : B \to X_i / i \in M\}$ donde

$$\delta : X \to P = \prod_{i \in M} X_i \text{ homomorfismo diagonal}$$

Comprobemos que es $g \circ h = f$. Para ello, sea $j \in M$ Tenemos

$$\rho_j \circ h \circ g = \rho_j \circ (\prod_{i \in M} h_i) \circ \delta \circ g = h_j \circ g = \rho_j \circ f$$

Como esto es cierto para todo $j \in M$, obtenemos $h \circ g = f$, lo que completa la demostración||

Teorema 28 *Siendo X un R-módulo arbitrario e $i : X \to X$ su endomorfismo identidad, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) *X es inyectivo.*

(b) *Toda sucesión exacta corta*

$$0 \to X \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} V \to 0$$

de R-módulos se descompone.

(c) *X es isomorfo a un sumando directo de un R-módulo inyectivo.*

(d) *Para todo monomorfismo $g' : A \to B$, es*

$$(g*)' = Hom(g', i) : Hom(B, X) \to Hom(A, X)$$

un epimorfismo.

(e) *Para toda sucesión exacta corta*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

de R-módulos, la sucesión

$$0 \to Hom(C, X) \xrightarrow{g*} Hom(B, X) \xrightarrow{f*} Hom(A, X) \to 0$$

donde $f = Hom(f, i)$ y $g* = Hom(g, i)$, es también una sucesión exacta corta.*

Prueba. (a)⇒(b). Supongamos que X es inyectivo y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} 0 \to X & \xrightarrow{f} & U \\ i \downarrow & \swarrow h & \\ X & & \end{array}$$

de homomorfismos. Por definición, existe un homomorfismo $h : U \to X$ que satisface $g \circ f = i$. De aquí que f tiene inverso por la izquierda. En virtud de (Teor. 10), esto implica que la sucesión exacta corta se descompone.

(b)$\Rightarrow$(c): Por (Teo. 27), X es isomorfo a un submódulo de un R-módulo inyectivo. En otras palabras, existe un R-módulo inyectivo U y un monomorfismo $f : X \to U$. Sea $K = f(X)$ y $V = U/K$. Entonces obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to X \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} V \to 0$$

donde $g : U \to V$ representa la proyección natural. Por (b), esta sucesión se descompone y de aquí que K sea sumando directo de U. Como U es inyectivo y X es isomorfo a K, resulta que X es isomorfo a un sumando directo de un R-módulo inyectivo.

(c)$\Rightarrow$(a): Sabemos que si $Y = U \oplus V$ donde Y es inyectivo y que $X \approx U$ o $X \approx V$ por (Lema. 9) U y V son inyectivos y como X es isomorfo a U o V entonces X es inyectivo.

(a)$\Leftrightarrow$(d): Por definición $(g*)' = Hom(g', i) : Hom(B, X) \to Hom(A, X)$ es un epimorfismo si y sólo si, para todo elemento $f : A \to X$ de $Hom(A, X)$, existe un elemento $h : B \to X$ de $Hom(A, X)$ tal que

$$\begin{aligned} g^*(h) &= Hom(g, i) \\ &= i \circ h \circ g \\ &= h \circ g \\ &= f \end{aligned} \qquad\qquad \begin{array}{c} 0 \to A \xrightarrow{g} B \\ f \downarrow \swarrow h \\ X \to X \end{array}$$

Luego (d) se cumple si y sólo si X es inyectivo.
(d)$\Leftrightarrow$(e): Si $(g*)' = Hom(g', i) : Hom(B, X) \to Hom(A, X)$ es epimorfismo. Cumple que $h \to \quad g * (h) = f$. Entonces por (Teo. 22) $g* = Hom(g, i) : Hom(C, X) \to Hom(B, X)$ es monomorfismo y

$$f* = (g*)' = Hom(f, i) = Hom(g', i) : Hom(B, X) \to Hom(A, X)$$

es epimorfismo entonces la sucesión

$$0 \to Hom(C, X) \xrightarrow{g*} Hom(B, X) \xrightarrow{f*} Hom(A, X) \to 0$$

es exacta corta.||

Proposición 46 *Consideremos el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos:*

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ \downarrow h \\ X \end{array}$$

donde X es inyectivo, $h \circ f = 0$ y la fila es exacta. Probar que existe un homomorfismo $k : C \to X$ que satisface $k \circ g = h$

Prueba:. Hay que tratar de definir una función $k : C \to X$ para ello utilizamos la suguiete sucesión

$$\begin{array}{c} 0 \to B/Im(f) \xrightarrow{\bar{g}} C \\ \downarrow \bar{h} \\ X \end{array}$$

En donde

$$\bar{g}(b + Im(f)) = g(b)$$
$$\bar{h}(b + Im(f)) = h(b)$$

además definamos la función proyección natural ρ que va de cada elemento de B a su clase

$$\begin{aligned} \rho : \quad & B \to B/Im(f) \\ & b \to \rho(b) = b + Im(f) \end{aligned}$$

Primero veamos que $\bar{g}$ es monomorfismo para ello sea

$$\begin{aligned} (b + Im(f)) \in B/Im(f) \quad & \Rightarrow b + Im(f) \in ker(\bar{g}) \\ & \Rightarrow \bar{g}(b + Im(f)) = 0 \\ & \Rightarrow g(b) = 0 \\ & \Rightarrow b \in ker(g) = Im(f) \\ & \Rightarrow b \in Im(f) \\ & \Rightarrow b + Im(f) = Im(f) = 0; \text{ ya que abajo del cociente se hace 0} \\ & \Rightarrow b + Im(f) = 0 \end{aligned}$$

Y como $b + Im(f) \in ker(\bar{g}) \Rightarrow ker(\bar{g}) = 0$. Ahora hay que probar que

$$\begin{aligned} \bar{h} : \quad & B/Im(f) \to X \\ & b + Im(f) \to \bar{h}(b + Im(f)) = h(b) \end{aligned}$$

esta bien definida. Para ello probaremos que dados dos elementos iguales $b_1 + Im(f)$, $b_2 + Im(f)$ en $B/Im(f)$ los representantes de sus clases son iguales

$$\begin{aligned} \text{entonces} \quad & b_1 + Im(f) = b_2 + Im(f) \\ \Rightarrow \quad & b_1 - b_2 \in Im(f) \subset ker(h) \\ \Rightarrow \quad & b_1 - b_2 \in ker(h) \\ \Rightarrow \quad & h(b_1 - b_2) = 0 \\ \Rightarrow \quad & h(b_1) - h(b_2) = 0 \\ \Rightarrow \quad & h(b_1) = h(b_2) \\ \Rightarrow \quad & b_1 + \bar{I}m(f) = b_2 + \bar{I}m(f) \end{aligned}$$

Entonces por la propiedad proyectiva existe $k : C \to X$ tal que $k \circ \bar{g} = \bar{h}$, además sabemos que para cualquier $b \in B$ arbitrariamente dado que

$$g + \bar{I}m(f) = g(b)$$
$$\bar{h}(b + Im(f))$$

Entonces

$$(k \circ g)(b) = k(g(b)) = k(\bar{(}b + Im(f))) = \bar{h}(b + Im(f)) = h(b)$$

Por tanto $(k \circ g)(b) = h(b)$

Proposición 47 *Consideremos el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos:*

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ \downarrow a \qquad \downarrow b \\ U \xrightarrow{h} V \xrightarrow{k} X \end{array}$$

donde X es inyecctivo, el cuadrado es conmutativo, la fila superior es exacta y la inferior semiexacta. Probar que existe un homomorfismo $c : C \to X$ que satisface

$$c \circ g = k \circ b$$

Prueba. Definamos la función proyección que va de cada elemento de B a su clase

$$\rho : B \to B/Im(f)$$

$$\begin{array}{ccc} 0 \to B/Im(f) & \xrightarrow{\bar{g}} & C \\ f \searrow & & \downarrow h \\ & & X \end{array}$$

hay que probar que

$$\begin{aligned} \bar{g} : \quad & B/Im(f) \to C \\ & b + Im(f) \to \bar{g}(b + Im(f)) = g(b) \end{aligned}$$

esta bien definida; para ello sean $b_1 + Im(f), b_2 + Im(f) \in B/Im(f)$ a verificar que los representantes de sus clases son iguales

$$\begin{aligned} & b_1 + Im(f) = b_2 Im(f) \\ & \Rightarrow b_1 - b_2 \in Im(f) = ker(g) \\ & \Rightarrow b_1 + b_2 \in ker(g) \\ & \Rightarrow g(b_1 - b_2) = 0 \\ & \Rightarrow g(b_1) - g(b_2) = 0 \\ & \Rightarrow g(b_1) = g(b_2) \\ & \Rightarrow \bar{g}(b_1 + Im(f) = \bar{g}(b_2 + Im(f)) \end{aligned}$$

Por tanto $\bar{g}$ esta bien definida para un único elemento en $B/Im(f)$. Ahora hay que verificar que $\bar{g}$ es monomorfismo para ello sea $b + Im(f)$ un elemento de $b/Im(f)$ para $b \in B$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow b + Im(f) \in ker(\bar{g}) \\ & \Rightarrow \bar{g}(b + Im(f)) = 0 \\ & \Rightarrow g(b) = 0 \\ & \Rightarrow b \in ker(g) = Im(f) \\ & \Rightarrow b \in Im(f) \\ & \Rightarrow b + Im(f) = Im(f) = 0; \text{ ya que abajo del cociente se hace } 0 \\ & \Rightarrow b + Im(f) = 0 \end{aligned}$$

Y como $b + Im(f) \in ker(\bar{g}) \Rightarrow ker(\bar{g}) = 0$. Por tanto $\bar{g}$ es monomorfismo. Ahora probaremos que $\bar{f}$ esta bien definida para ello definimos $\bar{f}$ mediante

$$\begin{aligned} \bar{f} : \quad & \frac{B}{Im(f)} \to X \\ & b + Im(f) \to \bar{f}(b + Im(f)) + (\kappa \circ \beta)(b) \end{aligned}$$

Para ello sean

$$\begin{aligned} & b_1 + Im(f) = b_2 + Im(f) \\ & \Rightarrow b_1 - b_2 \in Im(f) \\ & \Rightarrow \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b_1 - b_1 \end{aligned}$$

además por conmutatividad del diagrama tenemos que

$$h(\alpha(a)) = \beta(f(a)) = \beta(b_1 - b_2)$$

$$h(\alpha(a)) = \beta(b_1 + b_2) \in Im(h) \subset ker(\kappa)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \beta(b_1 - b_2) \in ker(\kappa)\\
&\Rightarrow \kappa(\beta(b_1 - b_2)) = 0\\
&\Rightarrow \kappa(\beta(b_1) - \beta(b_2)) = 0\\
&\Rightarrow \kappa(\beta(b_1)) - \kappa(\beta(b_2)) = 0\\
&\Rightarrow \kappa(\beta(b_1)) = \kappa(\beta(b_2))\\
&\Rightarrow \bar{f}(b_1 + Im(f)) = \bar{f}(b_2 + Im(f))
\end{aligned}$$

Por tanto $\bar{f}$ esta bien definida. Entonces existe un $h : C \to X$ tal que $h \circ \bar{g} = \bar{f}$

Ahora verificaremos que $\kappa \circ \beta = c \circ g$. Sea $b \in B$ un elemento arbitrariamente dado entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
(\kappa \circ \beta)(b) \quad &= \bar{f}(b + Im(f))\\
&= (h \circ \bar{g})(b = Im(f))\\
&= h(\bar{g}(b + Im(f)))\\
&= (h \circ g)(b)
\end{aligned}$$

Por tanto se satisface la conmutatividad del diagrama ||

Proposición 48 *Un grupo abeliano X se dice divisible si y sólo si, para todo $x \in X$ y todo entero $n \neq 0$, existe $a \in X$ con $na = x$. Probar que X como Z-módulo, es inyectivo si y sólo si es divisible.*

Prueba. $' \Rightarrow'$ Si X como Z-módulo es inyectivo. Para todo homomorfismo $f : A \to X$ y todo monomorfismo $g : A \to B$ existe $h : B \to X$ tal que

$$0 \to A \xrightarrow{g} B$$

$$f \downarrow \swarrow h$$

$$X$$

A probar la existencia de $a \in A$ tal que para todo $x \in X$ y todo entero $n \neq 0 \;\; na = x$

$$0 \to < n > \xrightarrow{i} Z$$

$$\bar{f} \downarrow \swarrow \bar{h}$$

$$X$$

en donde $< n >= \{kn/k \in Z\}$ y

$$\begin{aligned}
\bar{f} : \quad & < n > \to X\\
& n \to \bar{f}(n)\\
& kn \to \bar{f}(kn) = kx
\end{aligned}$$

A verificar que $\bar{f}$ es monomorfismo. Para ello sean $k_1, k_2 \in Z, \quad \alpha \in R$

$$\begin{aligned}
\bar{f}(k_1 n = k_2 n) \quad &= \bar{f}((k_1 = k_2)n)\\
&= (k_1 = k_2)x\\
&= k_1 x + k_2 x\\
&= \bar{f}(k_1 n) = \bar{f}(k_2 n)
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\bar{f}(\alpha kn) \quad &= (\alpha k)x\\
&= \alpha(kx)\\
&= \alpha \bar{f}(kn)
\end{aligned}$$

Por tanto $\bar{f}$ es homomorfismo entonces existe $\bar{h} : Z \to X$ tal que $\bar{f} \circ i = \bar{f}$ entonces

$$\bar{h}(n) = \bar{h}(i(n)) = (\bar{h} \circ i)(n) = x$$

Luego $\bar{h}(n) = x$ entonces existe $a = \bar{h}(1)$ tal que $na = x$
$' \Leftarrow'$ Note que los únicos ideales izquierdos de Z son grupos cíclicos $< n >,\ n \in Z$.

La prueba se basa en la demostración del Lema siguiente [2]

Lema 10 *Sea R un anillo con identidad A un R-módulo unitario X es inyectivo si y sólo si para todo ideal izquierdo L de R, algún R-módulo homomorfismo $L \to X$ puede ser extendido para un R-módulo homomorfismo $R \to X$*

Si X es divisible y $f :< n >\to X$ es un homomorfismo entonces existe $x \in X$ con $nx = f(n)$. Define

$$h : \quad \begin{array}{l} Z \to X \\ 1 \to x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 0 \to < n > \xrightarrow{i} Z \\ \bar{f} \downarrow \swarrow \bar{h} \\ X \end{array}$$

A probar que si tomamos $h/ < n >:< n >\to X \quad h/ < n >= f$ para ello $h(k(n)) = (h \circ i)(kn) = f(kn)$, por tanto $h/ < n >= f(kn)$ y verifica que h es un homomorfismo que extiende a f. Por tanto, X es inyectivo por el lema anterior.

[2] ver Tomas W. Hungerford Graduate Texts in Mathematics. 2003

Capítulo 2

Tor_n y Ext^n

2.1. Resoluciones

A lo largo de esta sección, X denotará un R-módulo arbitrariamente dado.

Definición 18 *Una resolución proyectiva de X es una sucesión descendente exacta*

$$C : \ldots \to C_{n+1} \stackrel{\partial}{\to} C_n \stackrel{\partial}{\to} C_{n-1} \to \ldots$$

de R-módulos, que satisface las tres condiciones siguientes:

$$C_{-1} = X$$
$$C_n = 0 \text{ para todo } n < -1$$
$$C_n \text{ es R-módulo proyectivo para todo } n \geq 0$$

En particular, si C_n es un R-módulo libre para todo $n \geq 0$, entonces la sucesión descendente C se llama resolución libre del módulo X.

Una resolución proyectiva toma la forma siguiente

$$C : \cdots \to C_{n+1} \stackrel{\partial_{n+1}}{\to} C_n \stackrel{\partial_n}{\to} C_{n-1} \stackrel{\partial_{n-1}}{\to} \to C_1 \stackrel{\partial_1}{\to} C_0 \stackrel{\partial_0}{\to} X \to 0$$

Nuestra atención es probar que todo R-módulo tiene resolución proyectiva. En realidad vamos a probar que todo módulo X tiene resolución libre. Referente a la existencia de resoluciones proyectivas, establecemos la siguiente proposición.

Proposición 49 *Todo R-módulo X posee una resolución libre.*

Prueba: En virtud de (teor. 7) existe una sucesión exacta corta

$$0 \to X_0 \stackrel{\alpha_0}{\to} F_0 \stackrel{\beta_0}{\to} X \to 0$$

donde F_0 es un R-módulo libre. Aplicando (teor.7) al módulo X_0, obtenemos una sucesón exacta corta

$$0 \to X_1 \stackrel{\alpha_1}{\to} F_1 \stackrel{\beta_1}{\to} X_0 \to 0$$

para todo $n > 0$, donde F_1 es un R-módulo libre. Por inducción, obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to X_n \stackrel{\alpha_n}{\to} F_n \stackrel{\beta_n}{\to} X_{n-1} \to 0$$

para todo $n \geq 0$ donde F_n es un R-módulo libre. Obtenemos de esta manera el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & \\
 & & & X_n \arrow[ur] \arrow[drr, "\alpha_n"] & & & & & & X_1 \arrow[ur] \arrow[drr, "\alpha_1"] & & & & X_0 \arrow[ur] \arrow[drr, "\alpha_0"] & & & & \\
\cdots \arrow[r] & F_{n+1} \arrow[urr, "\beta_{n+1}"] \arrow[rrrr, "\alpha_n\beta_{n+1}"] & & & & F_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[urr, "\beta_2"] \arrow[rrrr, "\alpha_1\beta_2"] & & & & F_1 \arrow[urr, "\beta_1"] \arrow[rrrr, "\alpha_0\beta_1"] & & & & F_0 \arrow[r, "\beta_0"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

definimos en base a ello una sucesión

$$C : \ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \ldots$$

de módulos y homomorfismos tomando

$$C_n = \begin{cases} X & \text{si } n = -1 \\ F_n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < -1 \end{cases}$$

y

$$\partial_n = \begin{cases} \beta_0 & \text{si } n = 0 \\ \alpha_{n-1} \circ \beta_n & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Para probar que C es una resolución libre de X, falta establecer su exactitud. Para ello basta verificar $Im(\partial_{n+1}) = Ker(\partial_n)$ o sea

$$Im\alpha_n \circ \beta_{n+1} = ker\alpha_{n-1} \circ \beta_n$$

para todo $n \geq 0$. Sabemos que $Im\alpha_n = Ker\beta_n$, será suficiente probar que

$$Im\partial_{n+1} = Im\alpha_n \text{ y } ker\partial_n = ker\beta_n$$

Sea

$$\begin{aligned} x \in ker\partial_n \quad & \Leftrightarrow (\alpha_{n-1} \circ \beta_n)(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow (\alpha_{n-1}(\beta_n)(x)) = 0 \\ & \Leftrightarrow \beta_n = 0 \\ & \Leftrightarrow x \in ker\beta_n \end{aligned}$$

Luego $ker\partial_n = ker\beta_n$. Ahora probaremos que $Im\partial_{n+1} = Im\alpha_n$
(i) $Im\partial_{n+1} \subset Im\alpha_n$

$$\begin{aligned} \text{Sea } y \in Im\partial_{n+1} \Rightarrow \quad & \exists x \in F_{n+1} \text{ tal que} \\ & y = \alpha_n(\beta_{n+1}(x)) \in Im\alpha_n \\ & Im\partial_{n+1} \subset Im\alpha_n \end{aligned}$$

(ii) $Im\alpha_n \subset Im\partial_{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{Sea } Y \in Im\alpha_n \Rightarrow \quad & \exists z \in X_n && \text{tal que} \\ & Y = \alpha_n(z), && \text{pero} \\ & \beta_{n+1} && \text{es sobreyectiva} \\ & \exists x \in F_{n+1} && \text{tal que} \\ & z = \beta_{n+1}(x), && \text{de aqui que} \\ & Y = \alpha_n(z) && \\ & \quad = \alpha_n(\beta_{n+1}(x)) && \\ & \quad = (\alpha_n \circ \beta_{n+1})(x) \in Im\partial_{n+1} && \end{aligned}$$

y así $Im\alpha_n \subset Im\partial_{n+1}$. Y tenemos

$$Im(\partial_{n+1}) = Im(\alpha_n) = ker(\beta_n) = Ker(\partial_n)$$

para todo $n \geq 0$, lo que completa la demostración de (prop. 50)||

Consideremos ahora un homomorfismo $h : X \to Y$ del módulo X en un R-módulo Y. Sea

$$C : \ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \to 0$$

una resolución proyectiva de X, y

$$D : \ldots \to D_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} D_n \to \cdots \to D_1 \xrightarrow{\partial'_1} D_0 \xrightarrow{\partial'_0} Y \to 0$$

una resolución proyectiva de Y. Establescamos primero la siguiente proposición.

Proposición 50 *Existe un homomorfismo (transformación de cadenas)*

$$f = \{f_n : C_n \to D_n / n \in Z\}$$

de la sucesión descendente C en la sucesión descendente D tal que $f_{-1} = h$

Prueba: Primero definimos $f_{-1} = h$. A continuación sea $n < -1$. Como $C_n = 0$, f_n esta definido unicamente, esto es, $f_n = 0$. Para el caso $n = 0$ consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{\partial} X \to 0 \\ f_0 \downarrow & \downarrow h = f_-1 \\ D_0 & \xrightarrow{\partial} Y \to 0 \end{array}$$

Como C_0 es proyectivo y $\partial : D_0 \to Y$ es epimorfismo, se sige de la definición de módulos proyectivos que existe un homomorfismo $f_0 : C_0 \to D_0$ que satisface la relación de conmutatividad $\partial \circ f_0 = h \circ \partial = f_{-1} \circ \partial$, explicando mejor en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{c} C_0 \\ f_0 \swarrow \downarrow f_{-1} \circ \partial_0 \\ D_0 \xrightarrow{\partial'_0} Y \to 0 \end{array}$$

para el caso $n = 1$ tenemos la siguiente situación

$$\begin{array}{c} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \to 0 \\ . \quad f_0 \downarrow \quad \downarrow h = f_{-1} \\ D_1 \xrightarrow{\partial'_1} D_0 \xrightarrow{\partial'_0} Y \to 0 \end{array}$$

de aqui se deriva el siguiente diagrama

$$\begin{array}{c} C_1 \\ \downarrow f_0 \circ \partial_1 \\ D_1 \xrightarrow{\partial'_1} D_0 \xrightarrow{\partial'_0} Y \end{array}$$

en el cual $\partial'_0 \circ f_0 \circ \partial_1 = h \circ \partial_0 \circ \partial_1 = 0$. Además C_1 es proyectivo y la fila es exacta, por (prop. 42) existe $f_1 : C_1 \to D_1$ tal que $\partial'_0 \circ f_1 = f_0 \circ \partial_1$. Supongamos ahora que para $n > 0$, tenemos construido $f_m : C_m \to D_m$, $\forall\ m < n$ de tal manera que el rectángulo

$$C_m \overset{\partial_m}{\to} C_m - 1$$

$$f_m \downarrow \qquad\qquad \downarrow f_{m-1}$$

$$D_m \overset{\partial_0^{'}}{\to} D_{m-1}$$

es conmutativo. Consideremos el rectángulo

$$C_n \overset{\partial_n}{\to} C_{n-1} \overset{\partial_{n-1}}{\to} C_{n-2}$$

$$f_{n-1} \downarrow \qquad\qquad \downarrow f_{n-2}$$

$$D_n \overset{\partial_n^{'}}{\to} D_{n-1} \overset{\partial_0^{'}}{\to} D_{n-2}$$

Por (prop. 43), existe un homomorfismo $f_n : C_n \to D_n$ que satisface

$$\partial \circ f_n = f_n - 1 \circ \partial$$

Es completa la construcción inductiva de la transformación de cadenas $f : C \to D$ y prueba (prop. 51)||.
Establescamos ahora la siguiente proposición.

Proposición 51 *Dos homomorfismos (transformaciones de cadenas)*

$$f = \{f_n : C_n \to D_n | n \in Z\}$$

$$g = \{g_n : C_n \to D_n | n \in Z\}$$

de la sucesión descendente C en la sucesión descendente D, que satisfacen $f_{-1} = h = g_{-}1$ son homotópicos.

Prueba: Tenemos que construir una homotopía (homotopía de cadenas)

$$k : f \approx g : C \to D.$$

Por tanto tenemos que constuir, para todo entero n, un homomorfismo

$$k_n : C_n \to D_{n+1}$$

tal que

$$\partial \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial = f_n - g_n$$

es el diagrama

$$C_n \quad \overset{k_n}{\to} \quad D_{n+1}$$

$$\downarrow \partial_n \qquad\qquad \downarrow \partial_{n+1}^{'}$$

$$C_{n-1} \quad \overset{k_{n-1}}{\to} \quad D_n$$

para todo $n \in Z$. Para todo $n < -1$, $k_n = 0$ es el único homomorfismo de C_n en D_{n+1} puesto que $C_n = 0$. Para $n = -1$, tenemos la siguiente situación

$$C_{-1} \quad \overset{k_{-1}}{\to} \quad D_0$$

$$\downarrow \partial_{-1} \qquad\qquad \downarrow \partial_0^{'}$$

$$C_{-2} \quad \overset{k_{-2}}{\rightarrow} \quad D_{-1}$$

tenemos del diagrama que $f_{-1} - g_{-1} = 0$ y $k_{-2} = 0$ luego

$$\partial_0^{'} \circ k_{-1} + k_{-2} \circ \partial_{-1} = f_1 - g_1 = h - h = 0.$$

de modo que $\partial_0^{'} \circ k_{-1} = 0$, hacemos $k_{-1} = 0$ y procedamos a construir k_0, para ello consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} C_1 \overset{\partial_1}{\rightarrow} & C_0 & \overset{\partial_0}{\rightarrow} & C_{-1} & \rightarrow 0 \\ k_0 \swarrow & f_0 \downarrow\downarrow g_0 & \swarrow & f_{-1} \downarrow\downarrow g_{-1} & \swarrow k_{-2} \\ D_1 \overset{\partial_1^{'}}{\rightarrow} & D_0 & \overset{\partial_0^{'}}{\rightarrow} & D_{-1} & \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\partial_1^{'} \circ k_0 + k_{-1} \circ \partial_0 = f_0 - g_0$$
$$\partial_1^{'} \circ k_0 = f_0 - g_0$$

observemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{c} C_0 \\ k_0 \swarrow \quad \downarrow f_0 - g_0 \\ D_1 \overset{\partial_1^{'}}{\rightarrow} D_0 \overset{\partial_0^{1}}{\rightarrow} D_{-1} \end{array}$$

$$\partial_0^{'}(f_0 - g_0) = \partial_0^0 \circ f_0 - \partial_0^{'} \circ g_0$$

para definir k_0, tenemos la siguiente situación

$$\begin{array}{cccc} & C_0 & \overset{\partial_0}{\rightarrow} & C_{-1} \rightarrow 0 \\ & f_0 \downarrow\downarrow g_0 & & f_{-1} \downarrow\downarrow g_{-1} \\ D_1 \rightarrow & D_0 & \overset{\partial_0^{'}}{\rightarrow} & D_{-1} \end{array}$$

$$\partial_0^{'} \circ f_0 = f_{-1} \circ \partial_0 = h \circ \partial_0$$
$$\partial^{'} \circ g_0 = g_{-1} \circ \partial_0 = h \circ \partial_0$$

de donde $\partial_0^{'}(f_0 - g_0) = \partial_0^{'} \circ f_0 - \partial_0^{'} \circ g_0 = h \circ \partial_0 - h \circ \partial_0 = 0$ y por (prop. 42 y prop. 43) existe $k_0 : C_0 \rightarrow D_1$, de manera que

$$\partial_1^{'} \circ k_0 + k_{-1} \circ \partial_0 = f_0 - g_0$$

Sea ahora $n \leq 1$ y asumamos que tenemos construido

$$k_m : C_m \rightarrow D_{m+1}, \ \forall m < n$$

de manera que $k_{m-1} \circ \partial_m + \partial_{m+1}^{'} \circ k_m = f_m - g_m$ y consideremos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc} & C_n & \overset{\partial_n}{\rightarrow} & C_{n-1} & \overset{\partial_{n-1}}{\rightarrow} & C_{n-2} \rightarrow \\ & g_n \downarrow\downarrow f_n & \swarrow & g_{n-1} \downarrow\downarrow f_{n-1} & \swarrow & g_{n-2} \downarrow\downarrow f_{n-2} \\ \rightarrow D_{n+1} \overset{\partial_{n+1}^{'}}{\rightarrow} & D_n & \overset{\partial_n^{'}}{\rightarrow} & D_{n-1} & \overset{\partial_{n-1}^{'}}{\rightarrow} & D_{n-2} \end{array}$$

De donde

$$\partial_n^{'} \circ h_{n-1} + k_{n-2} \circ \partial_{n-1} = f_{n-1} - g_{n-1}$$

el siguiente diagrama

$$\begin{array}{c} C_n \\ \downarrow j \\ D_{n-1} \overset{\partial'_{n+1}}{\rightarrow} D_n \overset{\partial'_n}{\rightarrow} D_{n-1} \end{array}$$

j representa el homomorfismo $j = f_n - g_n - k_{n-1} \circ \partial'_n$. Componiendo j con $\partial : D_n \to D_{n-1}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \partial'_n \circ j \quad & \partial'_n(f_n - g_n - k_{n-1} \circ \partial_n) \\ & = \partial' \circ f_n - \partial' \circ g_n - \partial' \circ k_{n-1} \circ \partial_n \\ & = f_{n-1} \circ \partial - g_{n-1} \circ \partial - (f_{n-1} - g_{n-1} - k_{n-2} \circ \partial_{n-1}) \circ \partial_n \\ & = k_{n-2} \circ \partial_{n-1} \circ \partial_n \\ & = 0 \end{aligned}$$

Como C_n es proyectivo y la fila es exacta, se deduce de (prop. 42) que existe un un homomorfismo $k_n : C_n \to D_{n+1}$ que satisface la relación

$$\partial'_{n+1} \circ k_n = j = f_n - g_n - k_{n-1}\partial_n$$

Esto implica $\partial'_{n+1} \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n$ y completa la construcción inductiva de la homotopía de cadenas

$$k : f \approx g : C \to D$$

Por consiguiente f y g son homotópicos. ||

Apliquemos ahora (prop. 51 y prop. 52) al caso especial en que $X = Y$ y h es el homomorfismo identidad. En este caso, C y D son dos resoluciones proyectivas del mismo módulo X. Por (prop. 51), existe un homomorfismo

$$f = \{f_n : C_n \to D_n | n \in Z\}$$

de la sucesión descendente C en la sucesión descendente D tal que f_{-1} es el endomorfismo identidad h del módulo X.
Análogamente, existe un homomorfismo

$$g = \{g_n : D_n \to C_n | n \in Z\}$$

De la sucesión descendente C tal que g_{-1} es el endomorfismo identidad h del módulo X. Consideremos las composiciones

$$g \circ f : \{g_n \circ f_n : C_n \circ C_n | n \in Z\}$$

$$f \circ g : \{f_n \circ g_n : D_n \circ D_n | n \in Z\}$$

Se comprueba fácilmente que son endomorfismos de las sucesiones descendente C y D, respectivamente, satisfaciendo

$$g_{-1} \circ f_{-1} = h = f_{-1} \circ g_{-1},$$

donde h representa el endomorfismo identidad de X. Por (prop. 52) $g \circ f$ es homotópico al endomorfismo identidad de la sucesión descendente C y $f \circ g$ es homotópico al endomorfismo identidad de D.

Las transformaciones de cadenas f y g que satisfacen estas condiciones se - denominan usualmente *equivalencias de cadenas.* Por tanto, $f : C \to D$ y $g : D \to C$ construidas anteriormente son equivalencias de cadenas, y las resoluciones proyectivas C y D del R-módulo X se dicen *equivalentes homotópicamente* o del mismo *tipo de homotopía.* Resumiendo lo anterior, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 29 *Todo R-módulo X tiene una resolución proyectiva, y dos resoluciones proyectivas del mismo módulo X son equivalentes homotópicamente.*

La prueba se le deja al lector.

Definición 19 *Una resolución inyectiva en un R-módulo X es una sucecion ascendente exacta.*

$$C : \cdots \to C^{n-1} \xrightarrow{\delta^n} C^n \xrightarrow{\delta^{n+1}} C^{n+1} \to \cdots$$

que cumple

- $C^{-1} = X$

- $C^n \quad \forall n < -1$

- C^n *es un R-módulo inyectivo para todo* $n \geq 0$

Proposición 52 *Todo R-módulo X tiene resolución inyectiva*

Prueba. De la observación anterior tenemos que la sucesión

$$0 \to X \xrightarrow{\beta_0} L_0 \xrightarrow{\alpha_0} X_0 \to 0$$

es exacta, con L_0 inyectiva. Haciendo lo mismo para X_1

$$0 \to X_0 \xrightarrow{\beta_1} L_1 \xrightarrow{\alpha_1} X_1 \to 0$$

es exacta con L_1 inyectiva. Y así sucesivamente tenemos que la sucesión

$$0 \to X_n \xrightarrow{\beta_n} L_{n+1} \xrightarrow{\alpha_n} X_{n+1} \to 0$$

es exacta. Por lo que tenemos el siguiente diagrama de R-módulos

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
 & & & & X_0 \arrow[ur] \arrow[drr, "\beta_1"] & & & & & & X_{n-1} \arrow[ur] \arrow[drr, "\beta_n"] & & & & X_n \arrow[ur] \arrow[drr, "\beta_{n+1}"] & & & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\beta_0"] & L_0 \arrow[urr, "\alpha_0"] \arrow[rrrr, "\beta_1\circ\alpha_0"] & & & & L_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & L_{n-1} \arrow[urr, "\alpha_{n-1}"] \arrow[rrrr, "\beta_n\circ\alpha_{n-1}"] & & & & L_n \arrow[urr, "\alpha_n"] \arrow[rrrr, "\beta_{n+1}\circ\alpha_n"] & & & & L_{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde los L_n, $\forall n \geq 0$, son R-módulos inyectivos. Definamos

$$C^n = \begin{cases} L_n & \text{si } n \geq 0 \\ X & \text{si } n = -1 \\ 0 & \text{si } n < -1 \end{cases}$$

y

$$\partial^n = \begin{cases} \beta^{n+1}\alpha_n & \text{si } n \geq 0 \\ \beta_0 & \text{si } n = -1 \\ 0 & \text{si } n < -1 \end{cases}$$

α_n es sobreyectiva y β_n es inyectiva. Luego se tiene

$$C : 0 \to X \xrightarrow{\beta_0} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots \to C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots$$

Solamente nos bastará probar que la sucesión C es exacta en C^{n+1} es decir

$$Im\delta^n = ker\delta^{n+1}$$
$$Im\beta_{n+1} = ker\alpha_{n+1}$$
$$Im\delta^n = Im(\beta_{n+1} \circ \alpha_n) = Im\beta_{n+1}$$
$$ker\delta^{n+1} = ker(\beta_{n+1} \circ \alpha_{n+1} = ker\alpha_{n+1})$$

Por que β_{n+2} es inyectivo $Im\delta^n = ker\delta^{n+1}$, luego X posee una resolución proyectiva.||

Proposición 53 *Para una sucesión exacta corta arbitrariamente dada*

$$0 \to X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{k} Z \to 0$$

de R-módulos juntamente con resoluciones proyectivas arbitrariamente dadas C y E de módulos X y Z, respectivamente, existe una resolución proyectiva D del módulo Y y dos transformaciones de cadena $f : C \to D$, $g : D \to E$ de estas sucesiones descendentes tales que, para todo entero no negativo

$$0 \to C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible.

Prueba. Sean

$$C : \cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \to 0$$

$$D : \cdots \to D_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial'_n} D_{n-1} \to \cdots \to D_1 \xrightarrow{\partial'_1} D_0 \xrightarrow{\partial'_0} Z \to 0$$

dos resoluciones proyectivas de módulos X y Z respectivamente. Consideremos el suguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & C_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & C_{n+1} \otimes E_{n+1} & \xrightarrow{P_{n+1}} & E_{n+1} & \to 0 \\
 & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} \otimes \partial'_{n+1} & & \downarrow \partial'_{n+1} & \\
0 \to & C_n & \xrightarrow{i_n} & C_n \otimes E_n & \xrightarrow{P_n} & E_n & \to 0 \\
 & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n \otimes \partial'_n & & \downarrow \partial'_n & \\
0 \to & C_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & C_{n-1} \otimes E_{n-1} & \xrightarrow{P_{n-1}} & E_{n-1} & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & C_1 & \xrightarrow{i_1} & C_1 \otimes E_1 & \xrightarrow{P_1} & E_1 & \to 0 \\
 & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 \otimes \partial'_1 & & \downarrow \partial'_1 & \\
0 \to & C_0 & \xrightarrow{i_0} & C_0 \otimes E_0 & \xrightarrow{P_0} & E_0 & \to 0 \\
 & \downarrow \partial_0 & & \downarrow \partial_0 \otimes \partial'_0 & & \downarrow \partial'_0 & \\
0 \to & X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{P} & Z & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

Como E_0 es proyectivo existe $h : E_0 \to Y$ tal que $g \circ h = \partial'$; definamos la función

$$\begin{aligned}
\partial''_0 : \quad & C_0 \otimes E_0 \to Y \\
& (x_0, y_0) \to \partial''_0(x_0, y_0) \\
& \qquad = f\partial_0(x_0) + h(y_0)
\end{aligned}$$

Probemos que $\partial_0^{''}$ es sobreyectiva. Sea $y \in Y$

$$\begin{array}{rl}
y \in Y & \Rightarrow g(y) \in Z \\
 & \Rightarrow \exists y_0 \in E_0 \text{ talque } \partial_0^{'}(y_0) = g(y) \\
\text{Aplicando} & \partial_0^{''}(0, y_0) \\
 & = f\partial_0(0) + h(y_0) = h(y_0) \\
\text{es tal que} & g(h(y)) = \partial_0^{'}(y_0) = g(y) \\
\text{esto implica} & y - h(y_0) \in ker\ g \\
 & \Rightarrow \exists x_0 \in X \text{ tal que} \\
 & f(x_0) = y - h(y_0)
\end{array}$$

Sea $x_1 \in C_0$ tal que $\partial_0(x_1) = x_0$, aplicando

$$\partial^{''}(x_1, y_0) = f\ \partial_0(x_1) + h(y_0) = y - h(y_0) + h(y_0) = y$$

luego $\partial^{''}$ es sobreyectiva
Probemos la conmutatividad del diagrama:
(i) Para el rectángulo derecho tenemos. Sea $x_0 \in C_0$

$$\begin{array}{rl}
x_0 \in C_0 & \Rightarrow f\partial(x_0) \qquad (1) \\
\partial^{''}(i_0(x_0)) & = (f\partial_0 \oplus h) \\
 & = (f\partial_0 \oplus h)(x_0, 0) \\
 & = f\ \partial_0(x_0) \qquad (2)
\end{array}$$

Luego de (1) y (2) se cumple que el rectangulo derecho es conmutativo.
(ii) Para el rectángulo izquierdo tenemos

$$\partial_0^{''}(p_0(x_0, y_0)) = \partial_0^{'}(y_0) \qquad (1) \qquad \text{y}$$

$$g(\partial_0^{''}(x_0, y_0)) = g(f\ \partial_0(x_0) + h(y_0)) \qquad g(\partial_0^{''}(x_0, y_0)) = g(h(y_0)) = \partial_0^{''}(y_0) \qquad (2)$$

luego de (1) y (2) se cumple que el rectangulo de la izquierda es conmutativo.
Probemos la exactitud en el módulo $C_0 \oplus E_0$ es decir que la $Im(\partial_0 \oplus \partial_0^{''}) = ker\ \partial_0^{''}$
(i) $Im(\partial_1 \oplus \partial_1^{''}) \subset ker\ \partial_0^{''}$ Sea $(a, b) \in C_1 \oplus E_1$

$$\begin{array}{rl}
\partial_0^{''}(\partial_1 \oplus \partial_1^{'})(a, b) & = \partial_0^{''}(\partial_1(a), \partial_1^{'}(b)) \\
 & = f\ \partial_0(\partial_1(a)) + h\ \partial_1^{'}(b) \\
 & = h\ \partial_1^{'}(b)
\end{array}$$

Probemos que $h\ \partial_1^{'}(b) = 0$. Aplicando g a $h\ \partial_1^{'}(b)$ tenemos

$$g(h(\partial_1^{'}(b))) = (g \circ h)(\partial_1^{'}(b)) = (\partial_0^{'} \circ \partial_1^{'})(b) = 0$$

esto implica que:

$$\begin{aligned} h\ \partial_1^{'}(b) \in kerg \qquad & \Rightarrow \exists x \in X \text{ tq } f(x) = h\ \partial_1^{'}(b) \\ & \Rightarrow \exists x_0 \in C_0 \text{ tq } \partial_0(x_0) = x \end{aligned}$$

Aplicando $(\partial'' \circ i_0)(x_0) = f(\partial(x_0)) = f(x) = h(\partial_1^{'}(b))$ y así

$$\begin{aligned} f(\partial(x_0)) + 0 \qquad & = f(\partial(x_0)) + h(0) \\ & = 0 + h(\partial_1^{'}(b)) \text{ por tener escritura única} \\ \text{luego } h(\partial_1^{'}(b)) \qquad & = 0 \end{aligned}$$

lo que completa la prueba de $Im(\partial_1 \oplus \partial_1^{'}) \subset ker\partial_0^{''}$
(ii) $ker\partial_0^{''} \subset Im(\partial_1 \oplus '_1)$

$$\begin{aligned} \text{Sea}(x_0, y_0) \in ker\partial_0^{''} \qquad & \Rightarrow \partial_0^{''}(x_0, y_0) \\ & = f(\partial_0(x_0)) + h(y_0) \\ & = 0 \\ f(\partial_0(x_0)) = 0_0 \qquad & \Rightarrow \partial_0(x_0) = 0 \\ & \Rightarrow \exists x_1 \in C_1 \text{ tq } \partial_1(x_1) \\ & = x_0 \\ h(y_0) = 0 \qquad & \Rightarrow \exists y_1 \in E_1 \text{ tq } \partial_1^{'}(y_1) = y_0 \\ & \Rightarrow (x_0, y_0) = (\partial_1 \oplus \partial_1^{'})(x_1, y_1) \\ \text{luego} \qquad & (x_0, y_0) \in Im(\partial_1 \oplus \partial_1^{'}) \end{aligned}$$

de (i) (ii) concluimos que $Im(\partial_1 \oplus \partial_1^{'}) = ker\partial_0^{''}$
(i) Para el cuadrado de la derecha. Sea $(a_n, b_n) \in C_n \oplus E_n$

$$(a_n, b_n) \in C_n \oplus E_n \Rightarrow \partial_n^{'}(P_n(a_n, b_n)) = \partial_n^{'}(b_n)$$

por otra parte

$$\begin{aligned} P_{n-1}((\partial_n \oplus \partial_n^{'})(a_n, b_n)) \qquad & = P_{n-1}(\partial_n(a_n), \partial_n^{'}(b_n)) \\ & = \partial_n^{'}(b_n) \end{aligned}$$

Luego el cuadrado de la derecha es conmutativo
(ii) Para el cuadrado de la izquierda. Sea $a_n \in C_n$

$$a_n \in C_n \Rightarrow (\partial_n \oplus \partial_n^{'})(i_n(a_n)) = (\partial_n \oplus \partial_n^{'})(a_n, 0) = (\partial_n(a_n), 0)$$

por otra parte

$$i_{n-1}(\partial_n(a_n)) = (\partial_n(a_n), 0)$$

luego el cuadrado de la izquierda es conmutativo. Probando así que los cuadrados conmutan. Además para todo $n \geq 0$ se tienen que las filas son sucesiones exactas cortas descomponibles por la forma que estan definidas em cada nivel y el nivel $n = -1$ tenemos que el módulo Y se descompone en

$$Y = Im\partial_0^{''} = Im\ f\partial_0 \oplus Imh$$

teniendo así que la sucesión exacta corta de la fila $n = -1$ se descompone. Lo que prueba la proposición ||

2.2. Funtores Torsión

A lo largo de la presente sección, X y Y denotarán R-módulos arbitrariamente dados. Elijamos una resolución proyectiva

$$C : \cdots \to C_{n+1} \stackrel{\partial_{n+1}}{\to} C_n \stackrel{\partial_n}{\to} \cdots \to C_0 \stackrel{\partial_0}{\to} X \to 0$$

del módulo X, y consideremos su producto tensorial $C \otimes Y$ que es la sucesión

$$C \otimes Y \cdots \to C_{n+1} \otimes Y \stackrel{\partial_{n+1}\otimes i}{\to} C_n \otimes Y \stackrel{\partial_n \otimes i}{\to} \cdots \to C_0 \otimes Y \stackrel{\partial_{n+1}\otimes i}{\to} X \otimes Y \to 0$$

donde i representa el endomorfismo identidad del módulo Y. Como

$$\partial_* \circ \partial_* = (\partial_n \circ i) \otimes (\partial_{n+1} \circ i) = (\partial_n \circ \partial_{n+1}) \otimes i = 0 \otimes i = 0$$

$C \otimes Y$ es semiexacta y por tanto es una sucesión descendente. Para todo entero n, el módulo de homológia n-dimencional

$$H_n(C \otimes Y) \text{ de } (C \otimes Y)$$

se define como en por Prop.50

$$H_n C \otimes Y = \frac{ker(\partial_n \otimes i)}{Im(\partial_{n+1} \otimes i)}$$

Lema 11 *Para cualquier otra resolución proyectiva*

$$D : \cdots \to D_{n+1} \stackrel{\partial'_{n+1}}{\to} D_n \stackrel{\partial'_n}{\to} D_{n-1} \to \cdots \to D_0 \stackrel{\partial'_0}{\to} X \to 0$$

del módulo X tenemos

$$H_n(C \otimes Y) \approx H_n(D \otimes Y)$$

para todo entero n.

Prueba: Por (teor. 29), existen transformaciones de cadenas

$$f = \{f_n : C_n \to D_n | n \in Z\},$$

$$g = \{g_n : D_n \to C_n | n \in Z\}$$

de las sucesiones descendentes C y D tales que las transformaciones de cadenas

$$g \circ f = \{g_n \circ f_n : C_n \to C_n | n \in Z\}$$

$$f \circ g = \{f_n \circ g_n : D_n \to D_n | n \in Z\}$$

son homotópicas y las transformasiones de cadenas identidad de C y D.

Sea $i : Y \to Y$ el endomorfismo identidad de Y. Se comprueba fácilmente que

$$f \otimes i = \{f_n \otimes i : C_n \otimes Y \to D_n \otimes Y | n \in Y\},$$

$$g \otimes i = \{g_n \otimes i : D_n \otimes Y \to D_n \otimes Y | n \in Y\},$$

son transformaciones de cadenas de las sucesiones descendentes $C \otimes Y$ y $D \otimes Y$. Estas inducen homomorfismos

$$f_* : H_n(C \otimes Y) \to H_n(D \otimes Y),$$

$$g_* : H_n(D \otimes Y) \to H_n(C \otimes Y),$$

para todo entero n. Puesto que $g \circ f$ y $f \circ g$ son homotópicas a las transformaciones de cadenas identidad de las sucesiones descendentes C y D, se sigue fácilmente que $(g \otimes i) \circ (f \otimes i)$ y $(f \otimes i) \circ (g \otimes i)$ son también homotópicas a las transformaciones de cadenas identidad de las sucesiones descendentes $C \otimes Y$ y $D \otimes Y$. Por (prop. 22, prop. 23 y prop. 25) esto implica que $g_* \circ f_*$ y $f_* \circ g_*$ son los automorfismos identidad de los módulos $H_n(C \otimes Y)$ y $H_n(D \otimes Y)$, respectivamente. Por tanto f_* y g_* son isomorfismos para todo entero n. ||

Lema 12 $H_n(C \otimes Y) = 0$ *para todo* $n \leq 0$.

Prueba: $H_n(C \otimes Y) = 0$ para todo $n < -1$ es obvio puesto que $C_n \otimes Y = 0$ para todo $n < -1$. Para los casos $n = 0$ y $n = -1$, observemos que la exactitud de

$$C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\partial} C_{-1} \xrightarrow{\partial} 0 = C_{-2}$$

implica la exactitud de

$$C_1 \otimes Y \xrightarrow{\partial_*} C_0 \otimes Y \xrightarrow{\partial_*} C_{-1} \otimes Y \xrightarrow{\partial_*} C_{-2} \otimes Y$$

en virtud de (teor. 18). Por tanto tenemos

$$H_0(C \otimes Y) = 0, \qquad H_{-1}(C \otimes Y) = 0$$

Lo que completa la demostración de (L. 12) ||

Nota 2 *Por (L. 11), el módulo* $H_n(C \otimes Y)$ *depende esencialmente sólo del entero* n *y los* R*-módulos dados* X *e* Y*. Por (L. 12),* $H_n(C \otimes Y)$ *es trivial para todo* $n \leq 0$*. Debido a esto, damos la siguiente definición.*

Definición 20 *Para todo entero positivo* n*, el* R*-módulo* $H_n(C \otimes Y)$ *recibe el nombre de producto torsión* n*-dimencional sobre* R *de los* R*-módulos dados* X*,* Y *y será denotado por*

$$Tor_n^R(X, Y)$$

Cuando no haya peligro de ambiuedad, será denotado por

$$Tor_n(X, Y).$$

Además en el caso $n = 1$*, usaremos la notación más simple y lo denominaremos abreviadamente producto torsión sobre* R *de* X *e* Y*.*

Proposición 54 *Si el módulo* X *es proyectivo, entonces*

$$Tor_n(X, Y) = 0$$

para todo entero positivo n *y todo* R*-módulo* Y*.*

Pueba: Como X es proyectivo, tenemos una resolución proyectiva

$$C : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

con

$$C_n = \begin{cases} 0, & (\text{si } n \neq 0 \text{ y } n \neq -1) \\ X, & (\text{si } n = 0 \text{ o } n = -1) \end{cases}$$

y $\partial_n = 0$ para todo $n \neq 0$, mientras que ∂_0 es el endomorfismo identidad del módulo X. Se deduce que $C \otimes Y$ es exacta y por consiguiente $Tor_n(X, Y) = 0$ para todo módulo Y y todo entero positivo n. ||

Proposición 55 *Si el módulo Y es proyectivo, entonces*

$$Tor_n(X,Y)=0$$

para todo entero positivo n y todo R-módulo X.

Prueba: Sea C una resolución proyectiva de X. Como C es exacta e Y es proyectivo, se sigue de ([20]Cap.1, ejer. 9E), que $C\otimes Y$ es también exacta. Esto implica.

$$Tor_n(X,Y)=H_n(C\otimes Y)=0$$

para todo entero positivo n. ||. Como generalización de (prop. 55), tenemos la siguiente proposición.

Proposición 56 *Si el módulo X tiene una resolución proyectiva C tal que $C_n=0$ para todo $n>m$, entonces*

$$Tor_n(X,Y)=0$$

para todo $n>m$ y todo R-módulo Y. Además,

$$Tor_m(X,Y)\approx Ker(\partial_m\otimes i),$$

donde

$$\partial_m\otimes i : C_m\otimes Y\to C_{m-1}\otimes Y$$

denota el producto tensorial del homomorfismo $\partial_m : C_m\to C_{m-1}$ en C y el endomorfismo identidad $i:Y\to Y$ del módulo Y.

Prueba: Tenemos la siguiente situación

$$C:\cdots\to 0\to 0\xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m\xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}\to\cdots\to C_0\xrightarrow{\partial_0} X\to$$

de donde resulta

$$C\otimes Y:\cdots\to 0\to 0\to C_m\otimes Y\xrightarrow{\partial_m\otimes i} C_{m-1}\otimes Y\to\cdots$$

Como $C_n\otimes Y=0$ para todo $n>m$, la primera afirmación es obvia. Además, puesto que

$$Im(\partial_{m+1}\otimes i)=0,$$

tenemos

$$Tor_m(X,Y)=Ker(\partial_m\otimes i)/Im(\partial_{m+1}\otimes i)\approx Ker(\partial_m\otimes i).$$

lo que prueba (prop. 57) ||. Si R es un dominio de ideales principales, tenemos el siguiente corolario de (prop. 57)

Corolario 19 *Dados dos módulos X e Y sobre un dominio de ideales principales R, tenemos*

$$Tor_n(X,Y)=0$$

para todo entero $n>1$. Además,

$$Tor(X,Y)\approx Ker(f\otimes i),$$

donde $f\otimes i$ representa el producto tensorial del homomorfismo $f:A\to F$ es cualquier sucesión exacta corta

$$0\to A\xrightarrow{f} F\xrightarrow{g} X\to 0$$

con F R-módulo libre y el endomorfismo identidad $i:Y\to Y$.

Prueba: De acuerdo con (teor. 7),existe una sucesión exacta corta

$$0 \to A \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} X \to 0$$

con F R-módulo libre. De acuerdo con (prop. 38) el módulo A también es libre. Luego F y A son proyectivos. Así obtenemos una resolución proyectiva C de X con $C_n = 0$ para todo $n > 1$ y $\partial_1 = f$. Entonces (cor. 19) esconsecuencia directa de (prop. 5). Lo que prueba el resultado. ||

Lema 13 *Si tenemos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "h"'] & & N \arrow[r] \arrow[dl, "f"] & 0 \\ & T & & \end{tikzcd}$$

entonces g lleva a $kerh$ sobre $kerf$

Prueba. Definamos

$$\begin{array}{ll} \hat{g}: & kerh \to kerf \\ & x \to \hat{g}(x) = g(x) \end{array}$$

Veamos que es sobreyectiva. Si $y \in kerf$, como g es sobre, existe $x \in M$ tal que $y = g(x)$; con $(f \circ g)(x) = h(x)$ esto implica que $x \in kerh$. Generalicemos (cor. 19) estableciendo la siguiente proposición

Proposición 57 *Para R-módulos X e Y arbitrariamente dados y cualquier sucesión exacta corta*

$$0 \to A \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} X \to 0$$

Con P un R-módulo proyectivo, tenemos

$$Tor_n(X, Y) \approx Tor_{-1}(A, Y)$$

para todo $n > 1$ y

$$Tor(X, Y) \approx Ker(f \otimes i)$$

donde $f\otimes$ representa el producto tensorial sobre R del homomorfismo $f : A \to P$ y el endomorfismo identidad $i : Y \to Y$ del módulo Y.

Prueba: Consideremos una resolución proyectiva C del R-módulo A.

$$C : \cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} A \to 0$$

$$\partial^*_{n+1} \qquad \partial^*_n \qquad\qquad \partial^*_2 \qquad \partial^*_1 \qquad \partial^*_0$$

$$C^* : \cdots \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{f\,\partial_0} P \xrightarrow{g} X \to 0$$

$$\begin{array}{ccc} \partial_0 \searrow & & \nearrow f \\ & A & \\ \nearrow & & \searrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Puesto que $\partial_0 : C \to A$ es epimorfismo y $f : A \to P$ es monomorfismo, tenemos

$$Ker(f \circ \partial_0) = Ker(\partial_0) \ , \ Im(f \circ \partial_0) = Im(f)$$

Por lo tanto, Obtenemos una resolución proyectiva C^* tomando

$$C^*_n = \begin{cases} C_{n-1} & \text{si } n > 0 \text{ o } n < -1 \\ P & \text{si } n = 0 \\ X & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

y

$$\partial_n^* = \begin{cases} \partial_{n-1} & \text{si } n > 1 \\ f \circ \partial_0 & \text{si } n = 1 \\ g & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

nada mas falta probar la exactitud en C_0^* y en P

- En C_0^*, $ker f \circ \partial_0 = ker \partial_o$, ya que f es inyectiva luego

$$ker f \circ \partial_0 = Im \partial_1$$

- En P, $Im f \circ \partial_0 = Im f$, ya que ∂_0 es sobreyectiva luego

$$Im(f \circ \partial_0) = ker g$$

Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} Tor_n(X,Y) \quad & \approx Ker(\partial_{n-1}^* \otimes i)/Im(\partial_{n+1}^* \otimes i) \\ & = Ker(\partial_{n-1} \otimes i)/Im(\partial_n \otimes i) \\ & \approx Tor_{n-1}(A,Y) \end{aligned}$$

para todo entero $n > 1$. Queda por estudiar el caso $n = 1$. En virtud de (teor. 18), la exactitud de

$$C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} A \rightarrow 0$$

implica la de la sucesión

$$C_1 \otimes Y \xrightarrow{\partial_1 \otimes i} C_0 \otimes Y \xrightarrow{\partial_0 \otimes i} A \otimes Y \rightarrow 0$$

Por tanto, $\partial_0 \otimes i$ es epimorfismo y

$$Im(\partial_1 \otimes i) = Ker(\partial_0 \otimes i).$$

Consideremos el triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C_0 \otimes Y \arrow[rr, "\partial_1^* \otimes i"] \arrow[dr, "\partial_0 \otimes i"'] & & P \otimes Y \\ & A \otimes Y \arrow[ur, "f \otimes i"'] & \end{tikzcd}$$

Como $\partial_0 \otimes i$ es epimorfismo, aplica $Ker(\partial_1^* \otimes i)$ sobre $Ker(f \otimes i)$. Luego

$$\begin{aligned} Tor_n(X,Y) \quad & \approx Ker(\partial_1^* \otimes i)/Im(\partial_2^* \otimes i) \\ & = Ker(\partial_1^* \otimes i)/Im(\partial_n \otimes i) \\ & = Ker(\partial_1^* \otimes i)/Ker(\partial_0 \otimes i) \\ & \approx Ker(f \otimes i) \end{aligned}$$

lo que completa la demostración de (prop. 58). ||

Nota 3 *1. Por conveniencia en el resto de esta sección, definimos*

$$Tor_0(X,Y) = X \otimes Y$$

para dos R-módulos cualesquiera X, Y.

2. *Para una resolución proyectiva cualquiera*

$$C : \cdots \to C_{n+1} \overset{\partial_{n+1}}{\to} C_n \overset{\partial_n}{\to} C_{n-1} \to \cdots$$

de un R-módulo X, defimamos una sucesión descendente

$$\tilde{C} : \cdots \to \tilde{C}_{n+1} \overset{\tilde{\partial}_{n+1}}{\to} \tilde{C}_n \overset{\tilde{\partial}_n}{\to} \tilde{C}_{n-1} \to \cdots$$

de R-módulos tomando

$$\tilde{C}_n = \begin{cases} C_n & (si\ n \neq -1), \\ 0 & (si\ n = -1) \end{cases}$$

y

$$\tilde{\partial}_n = \begin{cases} \partial_n & (si\ n > 0) \\ 0 & (si\ n \leq 0) \end{cases}$$

Diremos que esta sucesión descendente $\tilde{C}$ es una resolución proyectiva reducida del módulo X.

3. *La utilidad de las resoluciones proyectivas reducidas es debida al hecho que todo módulo en estas resoluciones es proyectivo.*

Lema 14 *Para R-módulos X, Y arbitrariamente dados y cualquier resolución proyectiva reducida $\tilde{C}$ de X tenemos*

$$H_n(\tilde{C} \otimes Y) \approx Tor_n(X, y)$$

para todo entero no negativo n.

Prueba: Para $n > 0$, tenemos evidentemente

$$H_n(\tilde{C} \otimes Y) = H_n(C \otimes Y) \approx Tor_n(X, Y).$$

Asi falta establecer

$$H_n(\tilde{C} \otimes Y) \approx X \otimes Y.$$

En virtud de (teor. 18), la exactitud de la sucesión

$$C_1 \overset{\partial_1}{\to} C_0 \overset{\partial_0}{\to} X \to 0,$$

implica la de la sucesión

$$C_1 \otimes Y \overset{\partial_1 \otimes i}{\to} C_0 \otimes Y \overset{\partial_0 \otimes i}{\to} X \otimes Y \to 0,$$

donde i representa el endomorfismo identidad del módulo Y. por tanto $\partial_0 \otimes i$ es epimorfismo y

$$Im(\partial_1 \otimes i) = Ker(\partial_1 \otimes i).$$

Consecuentemente, obtenemos

$$\begin{aligned} H_0(\tilde{C} \otimes Y) \quad & = C_0 \otimes Y / Im(\partial_1 \otimes i) \\ & = C_0 \otimes Y / Ker(\partial_0 \otimes i) \\ & \approx X \otimes Y. \end{aligned}$$

Lo que completa la demostración de (L. 14) ||

Nota 4 *Consideremos ahora homomorfismos arbitrariamente dados*

$$h : X \to X', \qquad k : Y \to Y'$$

de R-módulos. Elijamos resoluciones proyectivas C y C' para los módulos X y X', respectivamente. Por (prop. 51), existe una transformación de cadenas

$$f = \{f_n : C_n \to C'_n | n \in Z\}$$

de la sucesión descendente C en la sucesión descendente C' tal que

$$f_-1 = h.$$

entonces

$$f \otimes K = \{f_n \otimes k : C - n \otimes Y \to C'_n \otimes Y' | n \in Z\}$$

Es una transformacion de cadenas de la sucesión descendente $C \otimes Y$ en la sucesión descendente $C' \otimes Y'$. Por tanto $f \otimes k$ induce un homomorfismo

$$(f \otimes k)_{*n} : Tor_n(X, Y) \to Tor_n(X', Y')$$

para todo entero $n > 0$. Por medio de (prop. 52), se comprueba que $(f \otimes k)_{*n}$ no depende de la elección particular de transformación de cadenas $f : C \to C'$ y esta completamente determinado por el entero n y los homomorfismos h, k. Este homomorfismo recibirá el nombre de producto torsión n-dimencional sobre R de los homomorfismos h, k, denotándolo por

$$Tor_n(h, k) : Tor_n(X, Y) \to Tor_n(X', Y')$$

En el caso $n = 1$, usaremos la notación mas simple

$$Tor(h, k) : Tor(X, Y) \to Tor(X', Y')$$

y lo denominaremos producto torsión (sobre R) de h y k. Por conveniencia, definimos

$$Tor_0(h, k) = h \otimes k.$$

El teorema siguinte es ahora obvio.

Teorema 30 *Para todo entero no negativo n, Tor_n es un funtor covariante de de dos variables de la categoria M_R con valores en M_R.*

Consideremos ahora un R-módulo X y una sucesión exacta corta

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

de R-módulos. Elijamos una resolución proyectiva reducida

$$\tilde{C} : \cdots \to \tilde{C}_{n+1} \xrightarrow{\tilde{\partial}} \tilde{C}_n \xrightarrow{\tilde{\partial}} \tilde{C}_{n-1} \to \cdots$$

del módulo X. Para todo entero n, la sucesión

$$0 \to \tilde{C}_n \otimes U \xrightarrow{i_n \otimes f} \tilde{C}_n \otimes V \xrightarrow{i_n \otimes g} \tilde{(C)}_n \otimes W \to 0,$$

donde i_n representa el endomorfismo identidad del módulo $\tilde{C}_n$, es exacta; puesto que $\tilde{C}$ es proyectivo. Así obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to \tilde{C}_n \otimes U \xrightarrow{i \otimes f} \tilde{C}_n \otimes V \xrightarrow{i \otimes g} \tilde{(C)}_n \otimes W \to 0,$$

de sucesiones descendentes. Por (teor. 12), obtenemos una sucesión de homología exacta

$$\cdots \to H_n(\tilde{C} \otimes U) \xrightarrow{f_*} H_n(\tilde{C} \otimes V) \xrightarrow{g_*} H_n(\tilde{C} \otimes W) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\tilde{C} \otimes U) \to \cdots,$$

donde f_* y g_* estan definidas por las transformaciones de cadenas $i \otimes f$ y $i \otimes g$, respectivamente, y ∂ es el homomorfismo de conexión definido en (1.6). En virtud de (L. 14), esto implica el siguiente teorema.

Teorema 31 *Para todo R-módulo X y cualquier sucesión exacta corta*

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

de R-módulos, tenemos la sucesión exacta

$$\cdots \to Tor_n(X,U) \xrightarrow{f_*} Tor_n(X,V) \xrightarrow{g_*} Tor_n(X,W) \xrightarrow{\partial} Tor_{n-1}(X,U) \to \cdots$$

donde

$$f_* = Tor_n(i,f), \qquad g_* = Tor_n(i,g)$$

y ∂ es el homomorfismo de conexión. Esta sucesión finaliza con

$$\cdots \to Tor(X,W) \xrightarrow{\partial} X \otimes U \xrightarrow{i\otimes f} X \otimes V \xrightarrow{i\otimes g} X \otimes W \to 0.$$

Demostración: Sea C una resolución proyectiva reducida del módulo X; y consiceremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & C_{n+1}\otimes U & \xrightarrow{i\otimes f_{n+1}} & C_{n+1}\otimes V & \xrightarrow{i\otimes g_{n+1}} & C_{n+1}\otimes W & \to 0 \\
 & \downarrow \partial_{n+1}\otimes i_U & & \downarrow \partial_{n+1}\otimes i_V & & \downarrow \partial_{n+1}\otimes i_W & \\
0 \to & C_n\otimes U & \xrightarrow{i\otimes f_n} & C_n\otimes V & \xrightarrow{i\otimes g_n} & C_n\otimes W & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & C_0\otimes U & \xrightarrow{i\otimes f_0} & C_0\otimes V & \xrightarrow{i\otimes g_0} & C_0\otimes W & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

Dado que $0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$ es una sucesión exacta y C_n es proyectivo para todo $n \in Z$ resulta que las filas son exactas y que las columnas son semiexactas cumpliendo así las condiciones planteadas en el proceso de definición del homomorfismo de conexón.
Resultando así la conclucion del teorema ||.
Debido a (cor. 19), se tiene el siguiente corolario de (teor. 31) para el caso especial en que R es un dominio de ideales principales.

Corolario 20 *Para cualquier módulo X sobre un dominio de ideales principales R y cualquier sucesión exacta corta*

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

de R-módulos, se tiene una sucesión exacta

$$0 \to Tor(X,U) \xrightarrow{Tor(i,f)} Tor(X,V) \xrightarrow{Tor(i,g)} Tor(X,W) \xrightarrow{\partial^*} X\otimes U \xrightarrow{i\otimes f} X\otimes V \xrightarrow{i\otimes g} X\otimes W \to 0.$$

Aqui, ∂ es el homomorfismo conexión, mientras que los otros homomorfismos son los productos torsión y los productos tensoriales del homomorfismo identidad $i : X \to X$ y los homomorfismos f y g, respectivamente.

Demostración: Efectivamente si introducimos a X en una sucesión exacta corta

$$C : 0 \to A \xrightarrow{f'} F \xrightarrow{g} X \to 0$$

con F libre, A también es libre y así obtenemos la resolución proyectiva reducida

$$\tilde{C}: 0 \to A \xrightarrow{f'} F \to 0$$

en este caso obtenemos

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & U \otimes A & \xrightarrow{f \otimes i} & V \otimes A & \xrightarrow{g \otimes i} & W \otimes A & \to 0 \\ & \downarrow i \otimes f' & & \downarrow i \otimes f' & & \downarrow i \otimes f' & \\ 0 \to & U \otimes F & \xrightarrow{f \otimes i} & V \otimes F & \xrightarrow{g \otimes i} & W \otimes F & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

y de aquí obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to H_1(\tilde{C} \otimes U) \to H_1(\tilde{C} \otimes V) \to H_1(\tilde{C} \otimes W) \to H_0(\tilde{C} \otimes U) \to H_0(\tilde{C} \otimes V) \to H_0(\tilde{C} \otimes W) \to 0$$

y esto es

$$0 \to Tor(X,U) \to Tor(X,V) \to Tor(X,W) \to Tor(X,U) \to Tor(X,V) \to Tor(X,W) \to Tor(X,U) \to 0$$

y así el resultado está probado ||

Análogamente, si se utiliza (teor. 19) resulta el siguiente teorema.

Teorema 32 *Para todo R-módulo Y y cualquier sucesión exacta corta*

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

de R-módulos, tenemos una sucesión exacta

$$\cdots \to Tor_n(U,Y) \xrightarrow{f_*} Tor_n(V,Y) \xrightarrow{g_*} Tor_n(W,Y) \xrightarrow{\partial} Tor_{n-1}(U,Y) \to \cdots$$

donde

$$f_* = Tor_n(f,i), \qquad g_* = Tor_n(g,i)$$

y ∂ es el homomorfismo de conexión. Esta sucesión finaliza con

$$\cdots \to Tor(W,Y) \xrightarrow{\partial_*} U \otimes X \xrightarrow{f \otimes i} V \otimes Y \xrightarrow{g \otimes i} W \otimes Y \to 0.$$

análogamente, (teor. 32) tiene un corolario semejante a (cor. 20). Demostración: Sean C y E dos resoluciones proyectivos de módulos U y W luego existe una resolución proyectiva D del módulo V y dos transformaciones de cadenas

$$f: C \to D \text{ y } g: D \to E$$

de estas sucesiones descendentes tales que para todo entero no negativo es una sucesión exacta corta descomponible y por (teor. 19)

$$0 \to C_n \otimes \xrightarrow{f_n \otimes i} Y D_n \otimes \xrightarrow{g_n \otimes i} Y E_n \otimes Y \to 0$$

es una sucesión exacta corta escomponible para todo entero no negativo y así las filas son exactas y las columnas semiexactas cumplíendose las hipótesis R_n el proceso de construcción del homomorfismo de conexión resultando así la conclusión del teorema.||

El resto de la presente sección se dedica a la caracterización axiomática de productos torsión y sus consecuencias. Para ello introduciremos en primer lugar la noción de *sucesiones conexas de funtores.*

Una sucesión de funtores covariantes

$$\{\phi_n : M_R \to M_R | n = 0, 1, 2, ...\}$$

se dice *conexa descendente* si y sólo si, para todo entero $n > 0$ y toda sucesión exacta corta

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

de R-módulos se da un homomorfismo

$$\partial : \phi_n(W) \to \phi_{n-1}(U)$$

que satisface las condiciones siguientes:

(1) La siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \to \phi_n(U) \xrightarrow{\phi_n(f)} \phi_n(V) \xrightarrow{\phi_n(g)} \phi_n(W) \xrightarrow{\partial} \phi_{n-1}(U) \to \cdots \phi_0(W) \to 0$$

(2) Para un diagrama arbitrario

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

$$\downarrow \alpha \quad \downarrow \beta \quad \downarrow \lambda$$

$$0 \to U' \xrightarrow{f'} V' \xrightarrow{g'} W' \to 0$$

de R-módulos con filas exactas y cuadrados conmutativos, el cuadrado

$$\phi_n(W) \xrightarrow{\partial} \phi_{n-1}(U)$$

$$\phi_n(\gamma) \downarrow \qquad\qquad \downarrow \phi_{n-1}(\alpha)$$

$$\phi_n(W') \xrightarrow{\partial} \phi_{n-1}(U')$$

es conmutativo para todo $n > 0$. Por ejemplo sea X un R-módulo e $i : X \to X$ el homomorfismo identidad.

Entonces la sucesión

$$\{\tau_n : M_R \to M_R | n = 0, 1, 2...\}$$

de funtores covariantes, definida por

$$\tau_n(Y) = Tor_n(X, Y), \qquad \tau_n(f) = Tor_n(i, f)$$

para todo objeto de Y de M_R y todo morfismo f de M_R, es conexa-descendente puesto que los homomorfismos de conexión

$$\partial : Tor_n(X, W) \to Tor_{n-1}(X, U)$$

satisfacen las dos condiciones de acuerdo con (Prop.31) y su demostración.

Teorema 33 *Sea* $\{\phi_n : M_R \to M_R | n = 0, 1, 2, ...\}$ *una sucesión conexa-descendente de funtores covariantes que satisfacen las dos condiciones siguientes:*

(a) ϕ_0 *es equivalente naturalmente a* τ_0*.*

(b) $\phi_n(F) = 0$ *para todo R-módulo libre* F *y todo* $n > 0$

Entonces

$$\phi_n(Y) \approx \tau_n(Y) = Tor_n(X, Y)$$

para todo entero $n \geq 0$ y todo R-módulo Y.

Prueba. Sea $h : \phi_0 \approx \tau_0$ una equivalencia natural de los funtores ϕ_0 y τ_0. Para probar la condición de (teor. 33), sea Y un R-módulo. Elijamos una sucesión exacta corta

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

siendo F un R-módulo libre.

Para el caso $n = 0$, se deduce de la definición de equivalencia natural que

$$h(Y) : \phi_0(Y) \approx \tau_0(Y) = X \otimes Y.$$

Para el caso $n = 1$ consideremos el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} \phi_1(F) = 0 & \xrightarrow{\phi_1(g)} & \phi_1(Y) & \xrightarrow{\partial} & \phi_0(A) & \xrightarrow{\phi_0(f)} & \phi_0(F) \\ & & & & \downarrow h(a) & & \downarrow h(F) \\ \tau_1(F) = 0 & \xrightarrow{\tau_1(g)} & \tau_1(Y) & \xrightarrow{\partial} & \tau_0(A) & \xrightarrow{\tau_0(f)} & \tau_0(F) \end{array}$$

La exactitud de las filas implica que los dos homomorfismos designados con ∂ son monomorfismos y

$$\partial[\phi_1(Y)] = Ker[\phi_0(f)], \qquad \partial[\tau_1(Y)] = Ker[\tau_0(f)].$$

Por (prop. 20), la conmutatividad del rectangulo implica que el isomorfismo

$$h_1(Y) : \phi_1(Y) \approx \tau_{n-1}(A).$$

Consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{\phi_n(g)} & \phi_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & \phi_{n-1}(A) & \xrightarrow{\phi_{n-1}(f)} & 0 \\ & & & & \downarrow h_{n-1}(A) & & \\ 0 & \xrightarrow{\tau_n(g)} & \tau_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & \tau_{n-1}(A) & \xrightarrow{\tau_{n-1}(f)} & 0 \end{array}$$

La exactitud de las filas implica que los dos homomorfismos designados con ∂ son isomorfos. Luego obtenemos un único isomorfismo

$$h_n(Y) = \partial^{-1} \circ h_{n-1}(A) \circ \partial : \phi_n(Y) \approx \tau_n(Y)$$

que satisface $\partial \circ h_n(Y) = h_{n-1}(A) \circ \partial$. Esto prueba la demostración inductiva de (teor. 33). ||

Como aplicación de (teor. 33), definamos $\phi_n : M_R \to M_R$ tomando

$$\phi_n(Y) = Tor_n(X, Y), \qquad \phi_n(f) = Tor_n(f, i)$$

para todo objeto $Y \in M_R$. Por (teor. 32) se deduce que $\{\phi_n | n \geq 0\}$ es una sucesión conexa-descendente de funtores covariantes. Como

$$Y \otimes X \approx X \otimes Y,$$

tenemos el siguiente corolario de (teor. 33).

Corolario 21 *Ley conmutativa para productos torsión. Para todo entero $n \geq 0$ y cualequiera R-módulos X, Y tenemos*

$$Tor_n(X,Y) \approx Tor_n(Y,X)$$

Prueba. Para $n = 0$

$$\begin{aligned} Tor_0(X,Y) &= X \otimes Y \\ Tor_0(Y,X) &= Y \otimes X \text{ luego} \\ Tor_n(X,Y) &= Tor_0(Y,X) \end{aligned}$$

Supongamos que el teorema es cierto, cualesquiera que sean X, y para todo $m < n$ y lo se probara para n. Sea

$$0 \to K \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} X \to 0$$

con F libre. Por (teor. 32) tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\cdots \to Tor_n(F,Y) \to Tor_n(X,Y) \to Tor_{n-1}(K,Y) \to Tor_{n-1}(F,Y) \to Tor_n(Y,F) \to$$
$$\to Tor_n(X,Y) \to Tor_{n-1}(Y,K) \to Tor_{n-1}(Y,F) \to \cdots$$

pero

$$Tor_n(F,Y) = Tor_{n-1}(F,Y) = Tor_{n-1}(Y,F) = Tor_{n-1}(Y,F) = 0$$

por ser F R-módulo libre. Luego

$$Tor_n(X,Y) \approx Tor_{n-1}(K,Y) \text{ Y } Tor_n(X,Y) \approx Tor_{n-1}(Y,K)$$

como por hipotesis inductiva

$$Tor_{n-1}(K,Y) \approx Tor_{n-1}(Y,K)$$

luego

$$Tor_n(X,Y) \approx Tor_n(Y,X)$$

Otra aplicación de (teor. 33) es la siguiente. Tomemos $\phi_n : M_R \to M_R$ como el satelite por la izquierda $\phi_n = S_n(\tau_0) : M_R \to M_R$ del funtor covariante $\tau_0 : M_R \to M_R$. $\{\phi_n | n \geq 0\}$ es una sucesión conexa descendente. Debido a $\phi_0 = S_n(\tau_0) = \tau_0$ tenemos el sugiente corolario del (teor. 33).

Corolario 22 *Para todo entero $n \geq 0$ y cualquier R-módulo Y, tenemos*

$$[S_n(\tau_0)](Y) \approx \tau_n(Y) = Tor_n(X,Y).$$

Proposición 58 *Probar que siendo X un R-módulo e i su endomorfismo identidad, las siguitenes proposiciones son equivalentes:*

(a) $Tor(X,Y) = 0$ para todo R-módulo Y.
(b) $Tor_(X,Y) = 0$ para todo $n > 0$ y todo R-módulo Y.
(c) Si $f : A \to B$ es un monomorfismo de R-módulos, también lo es $i \otimes f$
(d) Toda sucesión exacta de R-módulos permanece exacta en la multiplicación tensorial por X.
(e) Para todo R-módulo Y y toda sucesión exacta corta

$$0 \to U \to V \to X \to 0$$

la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to U \otimes Y \to V \otimes Y \to X \otimes Y \to 0$$

2.3. Funtores Extensión

A lo largo de la presente sección, X e Y denotarán R-módulos arbitrariamente dados. Elijamos una resolución proyectiva

$$C : \cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots \to C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \to 0$$

del módulo X y sea $i : Y \to Y$ el endomorfismo identidad de Y. Consideremos $Hom(C, Y)$, que es la sucesión

$$0 \to Hom(X, Y) \xrightarrow{\delta^0} Hom(C_o, Y) \xrightarrow{\delta^1} Hom(C_1, Y) \to \cdots$$

$$\xrightarrow{\delta^n} Hom(C_n, Y) \xrightarrow{\delta^{n+1}} Hom(C_{n+1}, Y) \to \cdots$$

donde $\delta^n = Hom(\partial_n, i)$. Como

$$\delta^n \circ \delta^{n-1} = Hom(\partial_{n-1} \circ \partial_n, i \circ i) = Hom(0, i) = 0,$$

$Hom(C, Y)$ es semiexacta en el sentido de (30) y por tanto es una sucesión ascendente. Para todo entero n, el módulo de cohomología n-dimencional

$$H^n[Hom(C, Y)]$$

de $Hom(C, Y)$, está definido como

$$H^n[Hom(C, Y)] = \frac{Z^n(Hom(C, Y))}{B^n(Hom(C, Y))}$$

Por dualización de la demostración (L. 12 y L. 13), se pueden establecer fácilmente los dos lemas siguientes

Lema 15 *Para cualquier otra resolución proyectiva*

$$D : \cdots \to D_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial'_n} D_{n-1} \to \cdots \to D_0 \xrightarrow{\partial'_0} X \to 0$$

del módulo X, tenemos $H^n[Hom(C, Y)] \approx H^n[Hom(D, Y)]$ para todo entero n

Demostración: Dado que todo R-módulo X tiene una resolución proyectiva y dos resoluciones proyectivas del mismo módulo X son equivalentes homotópicamente. Existen transformaciones de cadenas

$$f = \{f_n : C_n \to D_n / n \in Z\}$$

$$g = \{g_n : D_n \to C_n / n \in Z\}$$

es decir

$$\begin{array}{ccccccccccc}
C : \cdots \to & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \to \cdots \to & C_0 & \xrightarrow{\partial_0} & X & \to 0 \\
& \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_{-1} & \\
D : \cdots \to & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} & \to \cdots \to & D_0 & \xrightarrow{\partial'_0} & Y & \to 0 \\
& \downarrow g_{n+1} & & \downarrow g_n & & \downarrow g_{n-1} & & \downarrow g_0 & & \downarrow g_{-1} & \\
C : \cdots \to & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \to \cdots \to & C_0 & \xrightarrow{\partial_0} & X & \to 0
\end{array}$$

de las sucesiones descendentes C y D de las transformaciones de cadenas

$$g \circ f = \{g_n \circ f_n : C_n \to C_n / n \in Z\}$$

$$f \circ g = \{f_n \circ g_n : D_n \to D_n / n \in Z\}$$

son homotopicas a las transformaciones de cadenas identidad de C y D. Si tenemos que $i : Y \to Y$ es el endomorfismo identidad

$$\begin{array}{ccccccc} Hom(D,Y) : 0 \to Hom(X,Y) & \overset{Hom(\partial_0^{'},i)}{\to} & Hom(D_n,Y) \to \cdots \to Hom(D_n,Y) & \overset{Hom(\partial_{n+1}^{'},i)}{\to} & Hom(D_{n+1},Y) \to \cdots \\ Hom(f_{-1},i)\downarrow & & \downarrow \qquad Hom(f_n,i)\downarrow & & \downarrow \\ Hom(C,Y) : 0 \to Hom(X,Y) & \overset{Hom(\partial_0,i)}{\to} & Hom(C_0,Y) \to \cdots \to Hom(C_n,Y) & \overset{Hom(\partial_{n+1},i)}{\to} & Hom(C_{n+1},Y) \to \cdots \end{array}$$

Además

$$\begin{array}{ccc} Hom(C_n,Y) & \overset{Hom(\partial_{n+1},i)}{\to} & Hom(C_{n+1},Y) \\ Hom(f_n,i)\uparrow & & Hom(f_{n+1},i)\uparrow \\ Hom(D_n,Y) & \overset{Hom(\partial_{n+1}^{'},i)}{\to} & Hom(D_{n+1},Y) \end{array}$$

$$\begin{aligned} Hom(\partial_{n+1},i) \circ Hom(f_n,i) &= Hom(f_n \circ \partial_{n+1},i) \\ Hom(f_{n+1},i) \circ Hom(\partial_{n+1}^{'},i) &= Hom(\partial_{n+1}^{'} \circ f_{n+1},i) \\ \text{luego } Hom(f_n \circ \partial_{n+1},i) &= Hom(\partial_{n+1}^{'} \circ f_{n+1},i) \end{aligned}$$

y así tenemos

$$Hom(f,i) = \{Hom(f_n,i) : Hom(D_n,Y) \to Hom(C_n,Y/n \in Z)\}$$

$$Hom(g,i) = \{Hom(g_n,i) : Hom(C_n,Y) \to Hom(D_n,Y/n \in Z)\}$$

Son transformaciones de cadenas de las sucesiones acendentes $Hom(C,Y)$ y $Hom(D,Y)$. Estas inducen homomorfismos

$$f^* : H^n(Hom(D,Y)) \to H^n(Hom(C,Y))$$

$$g^* : H^n(Hom(C,Y)) \to H^n(Hom(D,Y))$$

para todo n. Puesto que $g \circ f$ y $f \circ g$ son homotopicas a las transformaciones de cadena identidad de las sucesiones C y D se sigue que

$$Hom(g,i) \circ Hom(f,i) = Hom(f \circ g,i) = hom(i,i)$$

$$Hom(f,i) \circ Hom(g,i) = Hom(g \circ f,i) = hom(i,i)$$

son homotopicas a las transformaciones de cadenas identidad de las sucesiones ascendentes

$$Hom(D,Y) \text{ y } Hom(C,Y)$$

respectivamente y

$$H^n(Hom(f,i)) \circ H^n(Hom(g,i)) =^1 H^n(C,Y)$$

$$H^n(Hom(g,i)) \circ H^n(Hom(f,i)) =^1 H^n(C,Y)$$

lo que implica que f^* y g^* son isomorfos para todo entero n. Y así

$$H^n(Hom(C,Y) \approx H^n(Hom(D,Y)))$$

Lema 16 $H^n[Hom(C,Y)] = 0$ *para todo* $n \leq 0$.

Prueba. Para $n < -1$ $H^n[Hom(C, Y)] = 0$ ya que $Hom(C_n, Y) = 0$ para el caso $n = 0$ y $n = -1$ tenemos

$$C : C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \xrightarrow{\partial_{-1}} 0$$

la exactitud de C implica la exactitud de $Hom(C, Y)$

$$Hom(C, Y) : 0 \to Hom(X, Y) \xrightarrow{Hom(\partial_1, i)} Hom(C_0, Y) \xrightarrow{Hom\partial_1, i} Hom(C_1, Y) \to$$

por tanto

$$H^0(Hom(C, Y)) = 0 \qquad H^{-1}(Hom(C, Y)) = 0$$

Por (L. 17), el módulo $H^n[Hom(C, Y)]$ depende esencialmente sólo del entero n y los R-módulos dados X, Y . Por (L. 16), $H^n[Hom(C, Y)]$ es trivial para todo $n \leq 0$. Debido a esto damos la siguiente definición.

Definición 21 *Para todo entero positivo n, el módulo $H^n[Hom(C, Y)]$ sobre R se llamará producto extensión n-dimencional sobre R de los módulos X, Y y se denotarán con el símbolo*

$$Ext^n_R(X, Y)$$

Cuando no haya peligro de ambiguedad, será denotado por

$$Ext^n(X, Y).$$

Además, en el caso $n = 1$, utilizaremos la notación más simple

$$Ext(X, Y)$$

denominándolo simplemente producto extensión (sobre R) de X e Y.

La siguiente proposición puede probarse como (prop. 55) con modificaciones evidentes.

Proposición 59 *Si el módulo X es proyectivo entonces*

$$Ext^n(X, Y) = 0$$

para todo entero positivo n y todo R-módulo Y.

Prueba. Dado que X es proyectivo tenemos una resolución proyectiva

$$C : \cdots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to X \to X \to 0$$

con

$$C_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0, \quad n \neq -1 \\ X & \text{si } n = 0 \text{ ó } n = -1 \end{cases}$$

$$\partial_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 1x & \end{cases}$$

Se deduce que $Hom(C, Y)$ es exacta y por consiguiente

$$H^n(Hom(C, Y)) = 0$$

para todo módulo Y y todo entero positivo n. Establescamos ahora la siguiente proposición.

Proposición 60 *Si el módulo Y es inyectivo, entonces $Ext^n(X, Y) = 0$ para todo entero positivo n y todo R-módulo X.*

Prueba: Sea C una resolución proyectiva de X.

$$C : \cdots \to C_{n+1} \stackrel{\partial_{n+1}}{\to} C_n \stackrel{\partial_n}{\to} C_{n-1} \to \cdots \to C_0 \stackrel{\partial_0}{\to} X \to 0$$

Como C es exacta e Y es inyectivo se deduce de (teor. 28 lit.e) que $Hom(C,Y)$ es también exacta. Por ello

$$Ext^n(X,Y) = H^n[Hom(C,Y)] = 0$$

para todo entero positivo n. $||$. Como generalización de (prop. 60) tenemos la siguiente proposición.

Proposición 61 *Si el módulo X tiene una resolución proyectiva C tal que $C_n = 0$ para todo $n > m$, entonces*

$$Ext^n(X,Y) = 0$$

para todo $n > m$ y todo R-módulo Y. Además tenemos

$$Ext^m(X,Y) \approx Coker[Hom(\partial_m, i)],$$

donde

$$Hom(\partial_m, i) : Hom(C_{m-1}, Y) \to Hom(C_m, Y)$$

es el Hom del homomorfismo $\partial_m : C_m \to C_{m-1}$ de C y el homomorfismo identidad $i : Y \to Y$ del módulo Y.

Prueba: Como $Hom(C,Y) = 0$ para todo $n > m$, la primera afirmación es inmediata. Además, como

$$Ker[Hom(\partial_{m+1}, i)] = Hom(C_m, Y),$$

tenemos

$$Ext^m(X,Y) = \frac{Ker[Hom(\partial_{m+1}, i)]}{Im[Hom(\partial_m, i)]} \approx Coker[Hom(\partial_m, i)].$$

lo que prueba (prop. 62). $||$.
Si R es un dominio de ideales principales, tenemos el siguiente corolario de (prop. 62) que puede probarse como (cor. 19).

Corolario 23 *Para cualesquiera dos R-módulos X, Y sobre un dominio de ideales principales R, se tiene*

$$Ext^n(x,y) = 0$$

para todo entero $n > 1$.Además,

$$Ext(x,y) \approx Coker[Hom(f.i)],$$

donde $Hom(f,i)$ representa el Hom del homomorfismo $f : A \to F$ de cualquier sucesión exacta corta

$$0 \to A \stackrel{f}{\to} F \stackrel{g}{\to} X \to 0$$

con F R-módulo libre y el endomorfismo identidad $i : Y \to Y$ del módulo Y.

Prueba. Efectivamente, dado que F es libre, A también es libre y así F y A son proyectivos, luego tenemos una resolución proyectiva del módulo X como $C_n = 0$, para $n > 1$ y $\partial_1 = f$. Se cumple las hipotesis de (prop. 57) resultando así la conclusión del corolario $||$

Lema 17 *Si*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \\ & T \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "h = f\circ g"'] & \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo con f inyectiva entonces f induce un monomorfismo entre el coker$g$ y el coker$h$ luego

$$\frac{M}{Img} \approx \tilde{f}(\frac{M}{Img}) = \frac{f(M)}{Imh} \approx \frac{N}{Imh}$$

Prueba. Definamos

$$\begin{aligned} \tilde{f}: \qquad & \frac{M}{Img} \to \frac{N}{Imh} \\ & x + Img \to \tilde{f}(x + Img) = f(x) + Imh \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \in Im \qquad & \Rightarrow x_1 - x_2 = g(Y), \text{ para algún } Y \in T \\ & \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = f(g(Y)) = h(Y) \in Imh \\ & \text{por tanto } \ f(x_1) + Imh = f(x_2) + Im(h) \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned} x + Img \in Ker\tilde{f} \qquad & \Rightarrow f(X) \in Imh \\ & \Rightarrow \exists y \in T / f(x) = h(y) = f(g(y)) \\ & \Rightarrow x = g(y) \in Img \end{aligned}$$

Por una demostración dual de (prop. 58), generalizamos (cor. 23) mediante la siguiente proposición.

Proposición 62 *Para R-módulo X e Y arbitrariamente dados y cualquier sucesión exacta corta*

$$0 \to A \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} X \to 0$$

con P R-módulo proyectivo, se tiene $Ext^n(X,Y) \approx Coker[Hom(f,i)]$ donde $Hom(f,i)$ representa el Hom del homomorfismo $f : A \to P$ y el endomorfismo identidad $i : Y \to Y$ del módulo Y.

Demostración: Consideremos una resolución proyectiva de A

$$C : \cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots \to C_0 \xrightarrow{\partial_0} A \to 0$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] C^* : \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial^*_{n+2}"] & C_n \arrow[r, "\partial^*_{n+1}"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial^*_2"] & C_0 \arrow[rr, "f\partial_0\ \partial^*_1"] \arrow[dr, "\partial_0"'] & & P \arrow[r, "g"] & X \arrow[r] & 0 \\ & & & & & & A \arrow[ur, "f"'] \arrow[dr] & & & \\ & & & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & \end{tikzcd}$$

obtenemos una resolución proyectiva C^* de X donde

$$C^*_n = \begin{cases} C_{n-1}, & n > 0 \text{ ó } n < -1 \\ P, & n = 0 \\ X, & n = -1 \end{cases}$$

$$\partial_n^* = \begin{cases} \partial_{n-1}, & n > 1 \\ f\partial_0, & n = 1 \\ g, & n = 0 \\ 0, & n < 1 \end{cases}$$

la sucesión $Hom(C^*, Y)$

$$0 \to Hom(X,Y) \overset{Hom(\partial_0^*,i)}{\to} Hom(P,Y) \overset{Hom(\partial_1^*,i)}{\to} Hom(C_{n-1},Y) \to Hom(C_n,Y) \to Hom(C_{n+1},Y) \to \cdots$$

$$Hom(f,i) \searrow \quad \nearrow Hom(\partial_0, i)$$

$$Hom(A,Y)$$

$$\nearrow \quad \searrow$$

$$0 \qquad 0$$

luego obtenemos

$$\begin{aligned} H^n(Hom(X,Y)) &= \frac{Ker[Hom(\partial_{n+1}^*, i)]}{Im[Hom(\partial_n^*, i)]} \\ &= \frac{Ker[Hom(\partial_n^*, i)]}{Im[Hom(\partial_{n-1}^*, i)]} \\ &= H^{n-1}(Hom(A,Y)) \quad \forall > 1 \end{aligned}$$

para el caso $n = 1$ en virtud de (teor. 23) la exactitud de

$$C_1 \overset{\partial_1}{\to} C_0 \overset{\partial_0}{\to} A \to 0$$

implica la exactitud de

$$Hom : 0 \to Hom(A,Y) \overset{Hom(\partial_0,i)}{\to} Hom(C_0,Y) \overset{Hom(\partial_1,i)}{\to} Hom(C_1,Y)$$

por lo que $Hom(\partial_0, i)$ es inyectiva así $Im(Hom(\partial_0, i)) \approx Hom(A, Y)$ además

$$Im(Hom(\partial_0, i)) = Ker[Hom(\partial_1, i)]$$

considerando el diagrama

$$Hom(X,Y) \overset{Hom(\partial_0^*,i)}{\to} Hom(P,Y) \overset{Hom(\partial_1^*,i)}{\to} Hom(C_0,y) \to$$

$$Hom(f,i) \searrow \quad \nearrow Hom(\partial_0, i)$$

$$Hom(A,Y)$$

$$\nearrow \quad \searrow$$

$$0 \qquad 0$$

$$\begin{aligned} Ext(X,Y) &= \frac{ker[Hom(\partial_2^*, i)]}{Im[Hom(f\partial_0, i)]} \\ &= \frac{ker(Hom(\partial_1, i))}{Im[Hom(f\partial_0, i)]} \\ &= \frac{Im[Hom(\partial_0, i)]}{Im[Hom(\partial_0, i)] \circ Hom(f, i)} \\ &\approx \frac{Hom(A,Y)}{Im[Hom(f,i)]} \quad \text{por que } Hom(f,i) \text{ es sobreyectiva} \\ &\approx koker[Hom(f,i)] \end{aligned}$$

Por conveniencia en la parte restante de la presente sección, definimos

$$Ext^0(X,Y) = Hom(X,Y)$$

para cualquiera R-módulos X, Y. Por una demostración dual de la de (L. 14), podemos establecer el siguiente lema.

Lema 18 *Para R-módulos X, Y arbitrariamente dados y cualquier resolución proyectiva reducida $\tilde{C}$ del módulo X se tiene*

$$Hom^n[Hom(\tilde{C}, Y)] \approx Ext^n(X, Y)$$

para todo entero no negativo n.

Demostración: Dada una resolución proyectiva cualquiera del módulo X

$$C : C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_0 X \to 0$$

y

$$\tilde{C} : \tilde{C}_{n+1} \to \tilde{C}_n \to \tilde{C}_{n-1} \to \cdots \to \tilde{C}_0 X \to 0$$

una resolución proyectiva reducida del módulo X

$$\tilde{C}_n^* = \begin{cases} C_n, & n \neq 0 \\ 0, & n = -1 \end{cases}$$

$$\tilde{\partial}_n^* = \begin{cases} \partial_n, & n > 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

para $n > 0$ tenemos

$$H^n[Hom(\tilde{C}, Y)] = H^n[Hom(C, Y)] = Ext(X, Y)$$

para $n > 0$. Falta establecer

$$H^0[Hom(C, Y)] \approx Hom(X, Y)$$

Sea $C_1 \overset{\partial_1}{\to} C_0 \overset{\partial_0}{\to} X \to 0$ una sucesión exacta corta la exactitud de esta sucesión implica la exactitud de

$$0 \to Hom(X, Y) \overset{Hom(\partial_0, i)}{\to} Hom(C_0, Y) \overset{Hom(\partial_1, i)}{\to} Hom(C_1, Y)$$

teniendo así que $Hom(\partial_0, i)$ es inyectivo y $Um[Hom(\partial_0, i)] = ker[Hom(\partial_1, i)]$. Consecuentemente

$$\begin{aligned} H^0(\tilde{C}, Y) \qquad &= \frac{ker[Hom(\tilde{\partial}_0, i)]}{0} \\ &= ker[Hom(\partial_0, i)] \\ &\approx ker[Hom(\partial_1, i)] = Im[Hom(\partial_0, i)] \\ &\approx Hom(X, Y) \end{aligned}$$

Consideremos ahora homomorfismos arbitrariamente dados

$$h : X' \to X, \qquad k : Y \to Y'$$

de R-módulos. Elijamos resoluciones proyectivas C y C' para los módulos X y X' respectivamente. Por (L. 13), existe una transformación de cadenas

$$f = \{f_n : C'_n \to C_n | n \in Z\}$$

de la sucesión descendente C' en la sucesión descendente C tal que

$$f_{-1} = h$$

Entonces

$$Hom(f.k) = \{Hom(f_n, k) : Hom(C_n, Y) \to Hom(C'_n, Y) | n \in Z\}$$

es una transformación de cadenas de la sucesión ascendente $Hom(C, Y)$ en la sucesión ascendente $Hom(C', Y')$. Por tanto $Hom(f, k)$ induce un homomorfismo

$$Hom(f, k)^{*n} : Ext^n(X, Y) \to Ext^n(X'.Y')$$

para todo entero $n > 0$. Por medio de (prop. 52), se comprueba fácilmente que $Hom(f, k)^{*n}$ no depende de la elección particular de la transformación de cadenas $f : C' \to C$ y esta completamente determinado por el entero n y los homomorfismos h, k. este homomorfismo se denominará *producto extensión n-dimencional* sobre R de h y k, y sera denotado

$$Ext^n(h, k) : Ext^n(X, Y) \to Ext^n(X', Y')$$

En el caso $n = 1$, usaremos la notación más simple

$$Ext(h, k) : Ext(X, Y) \to Ext(X', Y')$$

denominandolo *producto extención* (sobre R) de los homomorfismos dados h y k. Por conveniencia, definimos

$$Ext^0(h, k) = Hom(h, k).$$

El siguiente teorema es ahora inmediato.

Teorema 34 *Para todo entero no negativo n, Ext^n es un funtor de dos variables de la categoría M_R con valores en M_R contravariante el la primera variable y covariante en la segunda.*

Consideremos ahora un R-módulo X y una sucesión exacta corta

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

de R-módulos. Elijamos una resolución proyectiva reducida

$$\tilde{C} : \cdots \to \tilde{C}_{n+1} \xrightarrow{\tilde{\partial}} \tilde{C}_n \xrightarrow{\tilde{\partial}} \tilde{C}_{n-1} \to \cdots$$

del módulo X para todo entero n, la sucesión

$$0 \to Hom(\tilde{C}_n, U) \xrightarrow{Hom(i_n,U)} Hom(\tilde{C}_n, V) \xrightarrow{Hom(i_n,U)} Hom(\tilde{C}_n, W) \to 0,$$

donde i_n representa el endemorfismo identidad módulo C_n, es exacta de acuerdo con ([20]teor. 9.4e) puesto que C_n es proyectivo. Así obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to Hom(\tilde{C}, U) \xrightarrow{Hom(i,U)} Hom(\tilde{C}, V) \xrightarrow{Hom(i,U)} Hom(\tilde{C}, W) \to 0$$

de sucesiones ascendentes. Por el dual de (teor. 12), obtenemos una sucesión de cohomología exacta

$$\cdots \to H^n[Hom(\tilde{C}, U)] \xrightarrow{f^*} H^n[Hom(\tilde{C}, V)] \xrightarrow{g^*} H^n[Hom(\tilde{C}, W)] \xrightarrow{\delta} H^{n+1}[Hom(\tilde{C}, U)] \to \cdots$$

donde f^* y g^* estan definidas por las transformaciones de cadenas $Hom(i, f)$ y $Hom(i, g)$, respectivamente, y δ es el homomorfismo de conexión. En virtud de (L. 17), esto implica el siguiente teorema

Teorema 35 *Para todo R-módulo X y cualquier sucesión exacta corta*

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

de R-módulos, tenemos una sucesión exacta

$$\cdots \to Ext^n(X,U) \xrightarrow{f^*} Ext^n(X,V) \xrightarrow{g^*} Ext^n(X,W) \xrightarrow{\delta} Ext^{n+1}(X,U) \to \cdots$$

donde

$$f^* = Ext^n(i,f), \qquad g^* = Ext^n(i,g),$$

y δ es el homomorfismo conexión. Esta sucesión comienza con

$$0 \to Hom(X,U) \overset{Hom(i,f)}{\to} Hom(X,V) \overset{Hom(i,g)}{\to} Hom(X,W) \xrightarrow{\delta} Ext(X,U) \to \cdots$$

Debido a (cor. 23) tenemos el siguiente corolario de (teor. 10) para el caso especial en que R es un dominio de ideales principales.

Corolario 24 *Para cualquier módulo X sobre un dominio de ideales pricipales R y cualquier sucesión exacta corta*

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

de R-módulos, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to Hom(X,U) \to Hom(X,V) \to Hom(X,W) \xrightarrow{\delta} Ext(X,U) \to Ext(X,V) \to Ext(X,W) \to 0.$$

Aquí,δ es el homomorfismo de conexión mientras que los otros homomorfismos son los Hom y los productos extención del homomorfismo identidad $i : X \to X$ y los homomorfismos f y g, respectivamente.

Análogamente, si se usa (teor. 23) es lugar de (teor. 26e), se puede establecer el siguiente teorema.

Teorema 36 *Para todo R-módulo Y y cualquier sucesión exacta corta*

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

de R-módulos, tenemos una sucesión exacta

$$\cdots \to Ext^n(W,Y) \xrightarrow{g^*} Ext^n(V,Y) \xrightarrow{f^*} Ext^n(U,Y) \xrightarrow{\delta} Ext^{n+1}(W,Y) \to \cdots$$

donde

$$f^* = Ext^n(f,i), \qquad g^* = Ext^n(g,i),$$

y δ es el homomorfismo conexion. Esta sucesión comienza con

$$0 \to Hom(W,Y) \overset{Hom(g,i)}{\to} Hom(V,Y) \overset{Hom(f,i)}{\to} Hom(U,Y) \xrightarrow{\delta} Ext(W,Y) \to \cdots$$

Análogamente, (teor. 36) tiene un corolario semejante a (cor. 24).

Para caracterizar los productos extención axiomáticamente, definamos la noción de *sucesión exacta-ascendente de funtores contravariantes.*

Definición 22 *Una sucesión de funtores contravariantes*

$$\{\phi^n : M_R \to M_R | n = 0,1,2...\}$$

se llama conexa-ascendente si y sólo si, para todo entero $n \geq 0$ y toda sucesión exacta corta

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

de R-módulos, se da un homomorfismo

$$\delta : \phi^n(U) \to \phi^{n+1}(W)$$

que satisface las dos condiciones siguientes:

1. *La siguiente sucesión es exacta:*

$$0 \to \phi^0(W) \to \cdots \to \phi^n(W) \overset{\phi^n(g)}{\to} \phi^n(V) \overset{\phi^n(f)}{\to} \phi^{n+1}(W) \to \cdots$$

2. *Para un diagrama arbitrario*

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

$$\downarrow \alpha \downarrow \beta \downarrow \tau$$

$$0 \to U' \xrightarrow{f'} V' \xrightarrow{g'} W' \to 0$$

de R-módulos con filas exactas y cuadros conmutativos, el siguiente cuadrado

$$\phi^n(U') \xrightarrow{\delta} \phi^{n+1}(W')$$

$$\downarrow \phi^n(\alpha) \quad \downarrow \phi^{n+1}(\tau)$$

$$\phi^n(U) \xrightarrow{\delta} \phi^{n+1}(W)$$

es conmutativo para todo $n \geq 0$.

Por ejemplo sea Y un R-módulo e $i : Y \to Y$ el homomorfismo identidad. Entonces la sucesión

$$\{E^n : M_R \to M_R | n = 0, 1, 2...\}$$

de funtores covariantes, definida por

$$E^n(X) = Ext^n(X, Y), \qquad E^n(f) = Ext^n(f, i)$$

para todo objeto X de M_R y todo morfismo f de M_R es conexa-ascendentemente puesto que los homomorfismos de conexión

$$\delta : Ext^n(U, V) \to Ext^{n+1}(W, Y)$$

satisfacen las condiciones (1) y (2) de acuerdo con (teor. 36) y su demostración.

El siguiente teorema se establece por un razonamiento dual del de (teor. 33)

Teorema 37 *Sea $\{\phi^n : M_R \to M_R | n = 0, 1, 2...\}$ una sucesión conexa-ascendente de funtores covariantes que satisfacen las dos condiciones siguientes:*

(a) *ϕ^0 es equivalente naturalmente a E^0*

(b) *$\phi^n(F) = 0$ para todo R-módulo libre F y todo $n > 0$*

Entonces se cumple

$$\phi^n(X) \approx E^n(X) = Ext^n(X, Y)$$

para todo entero $n \geq 0$ y todo R-módulo X

Como aplicación de (teor. 37), daremos una construcción de los productos extensión. Para ellos, sean x e Y R-módulos. Elijamos una resolución inyectiva

$$C : \cdots \to C^{n-1} \xrightarrow{\partial} C^n \xrightarrow{\partial} C^{n+1} \to \cdots$$

del módulo Y. Consideremos $Hom(X, C)$ que es la sucesión

$$Hom(X, C) : \cdots \to Hom(X, C^n) \xrightarrow{\delta^*} Hom(X, C^{n+1}) \to \cdots,$$

donde $\delta^* = Hom(i, \partial)$. Designando i el endomorfismo identidad del módulo X. Puesto que

$$\delta^* \circ \delta^* = Hom(i \circ i, \delta \circ \delta) = Hom(i, 0) = 0,$$

$Hom(X, C)$ es semiexacta y por tanto una sucesión ascendente. Para todo entero n, el módulo de cohomología n-dimencional

$$H^n[Hom(X, C)]$$

de $Hom(X, C)$ esta definido. Establescamos el siguiente corolario del (teor. 37).

Corolario 25 *Para todo entero positivo n tenemos*

$$H^n[Hom(X, C)] \approx Ext^n(X, Y).$$

Prueba: Definamos una sucesión ascendente

$$\tilde{C} : \cdots \to \tilde{C}^{n-1} \xrightarrow{\tilde{\delta}^{n-1}} \tilde{C}^n \xrightarrow{\tilde{\delta}^n} \tilde{C}^{n+1} \to \cdots$$

de R-módulos tomando

$$\tilde{C}^n = \begin{cases} C^n & (\text{si } n \neq -1), \\ 0 & (\text{si } n = -1) \end{cases}$$

y

$$\tilde{\delta}^n = \begin{cases} \delta^n & (\text{si } n > 0) \\ 0 & (\text{si } n \leq 0) \end{cases}$$

Esta sucesión ascendente $\tilde{C}$ se llamara *resolución inyectiva reducidad del módulo* Y. Su utilidad es debida al hecho de que todo módulo de $\tilde{C}$ es inyectivo. Como en la demostración de (L. 14), se puede probar aquí que

$$H^n[Hom(X, \tilde{C})] = H^n[Hom(X, C)]$$

para todo $n > 0$ y que existe un isomorfismo natural

$$H^0[Hom(X, \tilde{C})] \approx Hom(X, Y).$$

Por otra parte, todo homomorfismo $f : A \to B$ de R-módulos induce un homomorfismo

$$F^{*n} : H^n[Hom(B, \tilde{C})] \to H^n[Hom(A, \tilde{C})]$$

para todo entero n. Es evidente que, para todo $n \geq 0$ la función

$$\phi^n : M_R \to M_R$$

definida por

$$\phi^n(X) = H^n[Hom(X, \tilde{C})], \qquad \phi^n = f^{*n}$$

para todo objeto X de M_R y todo morfismo f de M_R, es un funtor contravariante. Puesto que todo módulo $\tilde{C}^n$ de la sucesión $\tilde{C}$ es inyectivo, se deduce de (teor. 28 lit.e) que toda sucesión exacta corta

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

de R-módulos, determina una sucesión exacta corta

$$\cdots \to Hom(W, \tilde{C}) \xrightarrow{g^{\neq}} Hom(V, \tilde{C}) \xrightarrow{f^{\neq}} Hom(U, \tilde{C}) \to \cdots$$

de complejos de cocadenas con $f^{\neq}$ y $g^{\neq}$ definidos de manera obvia. Por tanto obtenemos un homomorfismo de conección

$$\delta : \phi^n \to \phi^{n+1}(W)$$

para todo $n \geq 0$ que satisface condiciones (1) y (2). Esto prueba que

$$\{\phi^n : M_R \to M_R | n = 0, 1, 2...\}$$

es una sucesión conexa-ascendente de funtores covariantes. Ahora sea F un R-módulo libre. Por (teor. 26 lit.e), se deduce que $Hom(F, C)$ es exacta. por tanto obtenemos

$$\phi^n(F) = H^n[Hom(F, \tilde{C})] \approx H^n[Hom(F, C)] = 0$$

para todo $n > 0$, y se verifica (b) de (teor. 37). Puesto que (a) de (teor. 37) se satisface evidentemente, se sigue que

$$\phi^n(X) \approx E^n(X) = Ext^n(X, Y)$$

para todo $n > 0$ ||

Para otra aplicación de (teor 37), tomemos $\phi^n : M_R \to M_R$ como el satelite por la derecha

$$\phi^n = S^n(E^0) : M_R \to M_R$$

del funtor contravariante $E^0 : M_R \to M_R$. $\{\phi^n | n \geq 0\}$ es una sucesión conexa-ascendente. Debido a $\phi^0 = S^0(E^0) = E^0$ tenemos el siguiente corolario de (teor 37)

Corolario 26 *Para todo entero $n \geq 0$ y cualquier R-módulo X, tenemos*

$$[S^n(E^0)](X) \approx E^n(X) = Ext^n(X, Y).$$

2.4. Dimensiones

Definición 23 *Sea m un entero menor que -1. Un R-módulo X se dice que es de dimensión proyectiva sobre R (o dimensión homológica sobre R)$\leq m$ si y sólo si existe una resolución proyectiva C de X que satisface $C_n = 0$ para todo $n > m$. Si tal entero m no existe, entonces el módulo X se dice que es de dimensión proyectiva ∞. El menor de tales enteros m recibe el nombre de dimensión proyectiva (sobre R) del módulo X y se denotará por el símbolo $dim_R(X)$ o por la notación más simple $dim(X)$ siempre que no existe peligro de ambiguedad.*

Ejemplo 8 *Puesto que el módulo cero 0 tiene una resolución proyectiva C con $C_n = 0$ para todo n, tenemos $dim = -1$*

Ejemplo 9 *Sea X un R-módulo proyectivo no nulo. Puesto que X es proyectivo, obtenemos una resolución proyectiva*

$$C : \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow ...$$

de X tomando

$$C_n = \begin{cases} X \ (si\ n = -1\ o\ n = 0) \\ 0 \ (si\ n \neq -1\ y\ n \neq 0) \end{cases}$$

y

$$\partial = \begin{cases} i \ (si\ n = 0) \\ 0 \ (si\ n \neq 0) \end{cases}$$

donde i es el homomorfismo identidad $i : X \longrightarrow X$. Por otra parte, puesto que X es no nulo, no existe resolución proyectiva D de X con $D_0 = 0$. Por tanto, $dim(X) = 0$

Teorema 38 *Sea m un entero no negativo. Siendo X un R-módulo arbitrario e $i : X \longrightarrow X$ su endomorfismo identidad, las cuatro proposiciones siguientes son equivalentes:*

(a) *X es de dimensión proyectiva $\leq m$.*

(b) *$Ext^{m+1}(X, Y) = 0$ para todo R-módulo Y.*

(c) *La función $\phi^m : M_R \to M_R$ definida por*

$$\phi^m(Y) = Ext^m(X, Y), \qquad \phi^m(f) = Ext^m(i, f)$$

para todo objeto Y de M_R y todo morfismo f de M_R es un funtor covariante exacto por la derecha.

(d) *Para toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow C_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

de R-módulos con $C_0, C_1, ..., C_{m-1}$ proyectivos, el módulo A es proyectivo.

Prueba. $(a) \Rightarrow (b)$. Sea Y un R-módulo. Por (a), existe una resolución proyectiva C de X con $C_n = 0$ para todo $n > m$. Esto implica $Hom(C_n, Y) = 0$ para todo $n > m$. En consecuencia, obtenemos

$$Ext^n(X, Y) \approx H^n[Hom(C, Y)] = 0$$

para todo $n > m$. Tomando $n = m + 1$, se obtiene (b).
$(b) \Rightarrow (c)$. Consideremos una sucesión exacta corta arbitraria dada

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

de R-módulos. De acuerdo con (teor. 35), tenemos una sucesión exacta

$$... \to Ext^n(X, U) \xrightarrow{f*} Ext^n(X, V) \xrightarrow{g*} Ext^{n+1}(X, U) \xrightarrow{\delta} \to ...$$

donde $f* = Ext^n(i, f)$ $f* = Ext^n(i, g)$ y δ es el homomorfismo de conexión. Puesto que $Ext^{m+1}(X, U) = 0$, tenemos una sucesión exacta

$$Ext^m(X, U) \xrightarrow{f*} Ext^m(X, V) \xrightarrow{g*} Ext^m(X, W) \to 0$$

Esta es precisamente

$$\phi^m(U) \xrightarrow{\phi^m(f)} \phi^m(V) \xrightarrow{\phi^m(g)} \phi^m(W) \to 0$$

y por tanto ϕ^m es un funtor covariante exacto por la derecha.
$(c) \Rightarrow (d)$. Sea C la sucesión exacta de (d). Para $n = 0, 1, ..., m - 2$, sea D_n el submódulo de C_n que es la imagen del homomorfismo entrante y por consiguiente el núcleo del homomorfismo saliente en la sucesión C. Entonces obtenemos m sucesiones exactas cortas, a saber,

$$0 \to A \xrightarrow{f} C_{m-1} \to D_{m-2} \to 0$$

$$0 \to D_n \longrightarrow D_n \longrightarrow D_{n-1} \longrightarrow 0$$

para $n = m - 2, m - 3, ..., 2, 1$ y $0 \longrightarrow D_0 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$. Aplicando (teor. 36) a la sucesión primera, obtenemos una sucesión exacta

$$Hom(C_{m-1}, Y) \xrightarrow{f*} Hom(A, Y) \xrightarrow{\delta^0} Hom(D_{m-2}, Y) \to 0$$

puesto que C_{m-1} es proyectivo. En ella, $f* = Hom\,(f, i)$, representando i el endomorfismo identidad del módulo arbitrario Y, y δ^0 denota el homomorfismo de conexión. Aplicando (teor. 12) a cada una de las $m-2$ sucesiones intermedias, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to Ext^{m-n-1}\,(D_n, Y) \overset{\delta^{m-n-1}}{\to} Ext^{m-n}\,(D_{n-1}, Y) \to 0$$

para todo $n = m-2, ..., 2, 1$ y todo R-módulo Y. Esto implica que el homomorfismo de conexión δ^{m-n-1} es un isomorfismo para todo $n = m-2, ..., 2, 1$. Aplicando (teor. 12) a la última sucesión, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to Ext^{m-1}\,(D_0, Y) \overset{\delta^{m-1}}{\to} Ext^m\,(X, Y) \to 0$$

Esto implica que el homomorfismo de conexión

$$\delta = \delta^{m-1} o ... \delta^1 o \delta^0 : Hom\,(A, Y) \to Ext^m\,(X, Y)$$

es un epimorfismo y $Ker\,(\delta) = Ker\,(\delta^0)$. En consecuencia, obtenemos una sucesión exacta

$$Hom\,(C_{m-1}, Y) \overset{f*}{\to} Hom\,(A, Y) \overset{\delta}{\to} Ext^m\,(X, Y) \to 0$$

para todo R-módulo Y. Dado un epimorfismo arbitrario $h : Y \longrightarrow Y'$ de R-módulos, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} Hom\,(C_{m-1}, Y) & \overset{f*}{\to} & Hom\,(A, Y) & \overset{\delta}{\to} & Ext^m\,(X, Y) & \to 0 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & \\ Hom\,(C_{m-1}, Y') & \overset{f*}{\to} & Hom\,(A, Y') & \overset{\delta}{\to} & Ext^m\,(X, Y') & \to 0 \end{array}.$$

donde α, β, γ están inducidos por $h : Y \longrightarrow Y'$. Puesto que C_{m-1} es proyectivo, se sigue de (Teor. 26 e) que α es epimorfismo. Por otra parte, γ es epimorfismo. Por otra parte, γ es epimorfismo debido a (c). Por el diagrama cazador, es inmediato comprobar que β es también epimorfismo. En consecuencia, hemos probado que, para todo epimorfismo $h : Y \longrightarrow Y'$ y todo homomorfismo $k : A \longrightarrow Y'$ de $Hom\,(A, Y')$, existe un homomorfismo $g : A \longrightarrow Y$ de $Hom\,(A, Y)$, que satisface $h \circ g = \beta\,(g) = k$. En virtud de la definición de módulos proyectivos, A es proyectivo. Por tanto (d) se cumple.
$(d) \Rightarrow (a)$. Consideremos una resolución proyectiva arbitraria C el R-módulo X. Sea A la imagen del homomorfismo $\partial : C_m \to C_{m-1}$ de C. Entonces obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to A \to C_{m-1} \to ... \to C_1 \to C_0 \to X \to 0$$

Por (d), A es proyectivo. Por tanto obtenemos una resolución proyectiva C' de X con

$$c'_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n > m \\ A & \text{si } n = 0 \\ C_n & \text{si } n < m \end{cases}$$

De acuerdo con la definición, X es de dimensión proyectiva $\leq m$. $\|$

Corolario 27 *Para cualquier R-módulo X, las siguientes tres proposiciones son equivalentes:*

(a) *X es proyectivo*

(b) *$Ext\,(X, Y) = 0$ para todo R-módulo Y.*

(c) *X es de dimensión proyectiva ≤ 0*

Prueba. $(a) \Rightarrow (b)$. Es un caso especial de (prop. 60) $(b) \Rightarrow (c)$ es consecuencia de (teor. 38). Falta establecer $(c) \Rightarrow (a)$. Para ello, supongamos que X es de dimensión proyectiva ≤ 0. Por definición, esto implica la existencia de una resolución proyectiva C de X tal que $C_n = 0$ para todo $n > 0$. Por tanto C es de la forma:

$$... \to 0 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\partial} X \longrightarrow 0 \longrightarrow ...$$

La exactitud de esta sucesión implica que $\partial : C_0 \to X$ es isomorfismo. Puesto que C_0 es proyectivo, también lo es X. ||

Proposición 63 *Para cualquier sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

de R-módulos donde P es proyectivo y X no lo es, tenemos $dim\,(X) = 1 + dim\,(A)$

Prueba. Como P es proyectivo y X no, la exactitud de la sucesión dada implica $A \neq 0$. Por tanto tenemos $dim\,(A) \geq 0$ y $dim\,(X) \geq 1$. Por (teor. 36), tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Ext^{n+1}\,(A, Y) \xrightarrow{\delta} Ext^{n+2}\,(X, Y) \longrightarrow 0$$

para todo entero $n \geq 0$ y todo R-módulo Y puesto que P es proyectivo. Por lo tanto, $Ext^{n+1}\,(A, Y) \approx Ext^{n+2}\,(X, Y)$. Así (prop. 64) se deduce de la equivalencia $(a) \Leftrightarrow (b)$ de (teor. 38) ||

Proposición 64 *Para cualquier entero $n \geq -1$ y cualquier sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

de R-módulos, $dim\,(U) \leq n$ y $dim\,(W) \leq n$ implican $dim\,(V) \leq n$

Prueba. Sea Y un R-módulo arbitrario. Puesto que $dim\,(U) \leq n$ y $dim\,(W) \leq n$, se deduce de (teor. 38) que $Ext^{n+1}\,(U, Y) = 0$, $Ext^{n+1}\,(W, Y) = 0$ Por (teor. 36), tenemos una sucesión exacta

$$0 = Ext^{n+1}\,(W, Y) \to Ext^{n+1}\,(V, Y) \to Ext^{n+1}\,(U, Y) = 0$$

La exactitud de esta sucesión implica $Ext^{n+1}\,(V, Y) = 0$. Como esto es cierto para todo R-módulo Y, se sigue de (teor. 38) que $dim\,(V) \leq n$ ||

En particular, para el caso $n = 0$ se tiene el siguiente corolario.

Corolario 28 *Si los módulos U y W de una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

de R-módulos son proyectivos, también lo es el módulo intermedio V.

Definición 24 *Se llama dimensión global del anillo R el entero ó infinito*

$$Dim\,(R) = sup\,\{dim\,(X)\,|X \in M_R\}$$

Teorema 39 *Para todo entero $m \geq 0$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) $Dim\,(R) \leq 0$

(b) $dim\,(R) \leq m$ *para todo R-módulo X*

(c) *$Ext^{n+1}(X,Y)=0$ para todo par de R-módulos X e Y.*

Prueba. $(a)\Rightarrow(b)$. Se deduce inmediatamente de la definición de $Dim(R)$. Por otra parte, $(b)\Rightarrow(c)$ es consecuencia de (teor. 38).||

Proposición 65 *La dimensión global del anillo Z de los enteros es 1, en símbolos*

$$Dim(Z)=1$$

Prueba. Por (teor. 36) tenemos $Ext^2(X,Y)=0$ para todo par de grupos abelianos X e Y. En virtud de (teor. 39), esto implica $Dim(Z)\leq 1$. Por (cor. 19), cualquier grupo abeliano X que no es sin torsión no es proyectivo. Luego $dim(X)\geq 1$ de acuerdo con (cor. 27). Por definición de $Dim(Z)$, esto implica $Dim(Z)\geq 1$. De ambas desigualdades obtenemos que $Dim(Z)=1$ ||

Proposición 66 *La dimensión global de un cuerpo F es 0; en símbolos,*

$$Dim(F)=0$$

Prueba. Como todo módulo sobre un cuerpo F es libre y por tanto proyectivo sobre F, por (cor. 27), tenemos $Dim(X)\leq 0$. Puesto que es cierto para todo F-módulo y $f\neq 0$, se tiene $Dim(F)\leq 0$ Por otra parte, como F es F-módulo, tenemos $Dim(F)\geq dim(F)\geq 0$. De ambas desigualdades obtenemos $Dim(F)=0$ que es (prop. 67) ||

En particual, si F es el cuerpo real, entonces $Z\subset F$ mientras que $Dim(Z)>Dim(F)$. En este caso, es también interesante observar que la dimensión topológica de Z es 0 y la de F es 1.

2.5. Teoremas de los Coeficientes Universales

Trabajaremos con una sucesión descendente *o complejo de cadenas* arbitrariamente dada

$$C:\ldots\longrightarrow C_{n+1}\overset{\partial_{n+1}}{\to}C_n\overset{\partial_n}{\to}C_{n-1}\to\ldots$$

de R-módulos y un R-módulo G arbitrariamente dado que será denominado el *módulo coeficiente.*
Por (sección 1.6) el módulo de homología n-dimensional $H_n(C)=Z(C)/B_n(C)$ con $Z_n=Ker(\partial_n)$, $B_n(C)=Im(\partial_{n+1})$ está bien definido para todo entero n.
Primero, consideremos el producto tensorial $C\otimes G$. Por definición, $C\otimes G$ es la sucesión descendente

$$C\otimes G:\ldots\longrightarrow C_{n+1}\otimes G\overset{\partial_{n+1}*}{\to}C_n\otimes G\overset{\partial_n*}{\to}C_{n-1}\otimes G\overset{\partial_{n-1}*}{\to}\ldots$$

donde $\partial*=\partial\otimes i$ es el producto tensorial de $\partial_n:C_n\to C_{n-1}$ y el homomorfimo identidad $i:G\to G$
El módulo de homología n-dimensional

$$H_n(C\otimes G)=Z(C\otimes G)/B_n(C\otimes G)$$

de $C\otimes G$ se llama *módulo de homología n-dimensional de C sobre el módulo coeficiente* G y se denotará por $H_n(C;G)$. Nuestro objeto es determinar $H_n(C;G)$ en términos de $H_n(C)$ y $H_{n-1}(C)$. Para ello definamos un homomorfismo

$$\begin{aligned}j_n:&\quad H_n(C)\otimes G\longrightarrow H_n(C;G)\\ j_n:&\quad \frac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}\otimes G\to\frac{ker(\partial_n\otimes i)}{Im(\partial_{n+1}\otimes i)}\end{aligned}$$

Para todo entero n como sigue. Sean

$$\begin{array}{ll} p_n: & Z_n(C) \longrightarrow H_n(C) \\ p_n: & ker(\partial_n) \rightarrow \dfrac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} q_n: & z_n(C \otimes G) \longrightarrow H_n(C;G) \\ q_n: & ker(\partial_n \otimes i) \rightarrow \dfrac{ker(\partial_n \otimes i)}{Im(\partial_{n+1} \otimes i)} \end{array}$$

las proyecciones naturales. Para definir j, sean $x \in H_n(C)$ y $g \in G$ arbitrariamente dados. Elijamos un elemento $z \in Z_n(C) \subset C_n$ que satisfaga $p(z) = x$. Puesto que $z \in C_n$ y $g \in G$, tenemos $z \otimes g \in C_n \otimes G$. Como $\partial_n = (z \otimes g) = (\partial_n(z)) \otimes (i \otimes g) = 0 \otimes g = 0$ se tendrá que $z \otimes g \in Z_n(C \otimes G) = ker(\partial_n,)$. Si $z_1 - z_2 \in Im\partial_{n+1}$, entonces $(z_1 - z_2) \otimes g \in Im(\partial_{n+1} \otimes i)$ es decir que la función

$$\begin{array}{ll} j_n: & \dfrac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})} \otimes G \rightarrow \dfrac{ker(\partial_n \otimes i)}{Im(\partial_{n+1} \otimes i)} \\ & [z + Im(\partial_{n+1})] \otimes g \rightarrow z \otimes g + Im(\partial_{n+1} \otimes i) \end{array}$$

está bien definida.

Teorema 40 *Teorema de Coeficiente Universal para Homología.*
Si R es un dominio de ideales principales y C_n es un R-módulo libre para todo entero n, entonces existe un homomorfismo

$$k : H_n(C;G) \rightarrow Tor[H_{n-1}(C), G]$$

para todo entero n tal que

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H_n(C;G) \xrightarrow{k} Tor[H_{n-1}(C), G] \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por lo tanto, $H_{n-1}(C;G)$ es isomorfo a la suma directa de $H_n(C) \otimes G$ y $Tor[H_{n-1}(C), G]$

Prueba. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Z_n(C) \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{d} Z_{n-1}(C) C_n \xrightarrow{p} H_{n-1}(C) \rightarrow 0$$

donde e representa el homomorfismo inclusón, d está definido por $\partial : C_n \rightarrow C_{n-1}$ y p la proyección natural. Como R es un dominio de ideales principales, se sigue de las hipótesis, que los módulos $Z_{n-1}(C), C_n, Z_n(C)$ son R-módulos libres y por tanto esta sucesión exacta es una resolución proyectiva del módulo $H_{n-1}(C)$. Por consiguiente, la sucesión

$$0 \longrightarrow Z_n(C) \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{d} Z_{n-1} \rightarrow 0$$

es una resolución proyectiva reducida D del módulo $H_{n-1}(C)$. Consideremos el producto tensorial $D \otimes G$ de D y G

$$D \otimes G : 0 \longrightarrow Z_n(C) \otimes G \xrightarrow{e \otimes i} C_n \otimes G \xrightarrow{d \otimes i} Z_{n-1} \otimes G \rightarrow 0$$

De acuerdo con (L. 14) y (cor. 19), tenemos

$$Ker(e \otimes i) = H_2(D \otimes G) \approx Tor_2[H_{n-1}(C), G] = 0$$

$$Ker(d \otimes i) / Im(e \otimes i) = H_1(D \otimes G) \approx Tor[H_{n-1}(C), G]$$

$$Coker\,(d \otimes i) = H_0\,(D \otimes G) \approx H_{n-1}\,(C) \otimes G$$

La primera establece que $e \otimes i$ es monomorfismo y por tanto $Z_n\,(C) \otimes G$ puede ser considerado como submódulo de $C_n \otimes G$. En consecuencia la imagen $Im\,(\partial_{n+1} \otimes i)$ del homomorfismo $\partial_{n+1} \otimes i : C_{n+1} \otimes G \to C_n \otimes G$ está contenida en el submódulo $Z_n\,(C) \otimes G$ de $C_n \otimes G$ por consiguiente obtenemos las siguientes inclusiones:

$$Im\,(\partial_{n+1} \otimes i) \subset Z_n\,(C) \otimes G \subset Ker\,(\partial_n \otimes i) \subset C_n \otimes G$$

La segunda afirma que

$$Ker\,(\partial_n \otimes i)\,/Z_n\,(C) \otimes G \subset Tor\,[H_{n-1}\,(C)\,, G]$$

La tercera con n sustituido por $n+1$ dice que

$$Z_n\,(C) \otimes G/Im\,(\partial_n \otimes i) \approx H_n\,(C) \otimes G$$

Puesto que el módulo $A = Z_n\,(C) \otimes G/Im\,(\partial_n \otimes i)$ es submódulo de

$$H_n\,(C; G) = Ker\,(\partial_n \otimes i)\,/Im\,(\partial_n \otimes i)$$

y el módulo cociente $H_n\,(C; G)\,/A$ puede ser identificado con

$$B = Ker\,(\partial_n \otimes i)\,/Z_n\,(C) \otimes G$$

obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} H_n\,(C; G) \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$$

donde α es el homomorfismo inclusión y β es la proyección natural. Para probar que esta sucesión exacta corta se descompone, consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Z_n\,(C) \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{f} B_{n-1}\,(C) \longrightarrow 0$$

donde e es el homomorfismo inclusión y f está definido por $\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$. Por ser submódulo del R-módulo libre C_{n-1}, se sigue que $B_{n-1}(C)$ es libre y por tanto proyectivo. Por (teor. 26 b) esta sucesión exacta corta se descompone. En virtud de (cor. 13) existe un homomorfismo $h : C_n \longrightarrow Z_n\,(C)$ tal que $h \circ e$ es el automorfismo identidad del módulo $Z_n\,(C)$. Por tanto el producto tensorial $h \otimes i : C_n \otimes G \longrightarrow Z_n\,(C) \otimes G$ es un homomorfismo tal que

$$(h \otimes i) \circ (e \otimes i) = (h \circ e) \otimes i$$

es el automorfismo identidad de $Z_n\,(C) \otimes G$. Si $Z_n\,(C) \otimes G$ es considerado como submódulo de $C_n \otimes G$, esto implica que la restricción $h \otimes i | Z_n\,(C) \otimes G$ es el automorfismo identidad de $Z_n\,(C) \otimes G$. Por consiguiente, $h \otimes i$ induce un homomorfismo $\gamma : H_n\,(C \otimes G) \to A$ tal que $\gamma\ o\alpha$ es el automorfismo identidad del grupo A. Por (cor. 13) se deduce que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} H_n\,(C; G) \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$$

se descompone. Si identificamos a A con $H_n\,(C \otimes G)$ y B con $Tor\,[H_{n-1}\,(C)\,, G]$ por los isomorfismos construidos anteriormente, α se reduce a j y β determina un homomorfismo k. Por tanto obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow H_n\,(C) \otimes G \xrightarrow{j} H_n\,(C \otimes G) \xrightarrow{k} Tor\,[H_{n-1}\,(C)\,, G] \to 0$$

que se descompone. ||

Para el caso particular en que R es un cuerpo, tenemos el siguiente corolario de (teor. 40).

Corolario 29 *Si C es una sucesión descendente de espacios vectoriales sobre un cuerpo R y G es un espacio vectorial cualquiera sobre R, entonces*

$$j : H_n(C) \otimes G \to H_n(C \otimes G)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

El teorema de Coeficiente Universal (teor. 40) puede ser generalizado a una clase más amplia de sucesiones descendentes sobre R. Para ello, debemos introducir la noción de aproximación libre de una sucesión descendente sobre R.
Una *aproximación libre* de una sucesión descendente C sobre R, es una transformación de cadenas $f : C' \to C$ de una sucesión descendente C' sobre R en C que satisface las siguientes tres condiciones:

(C1) C'_n es un R-módulo libre para todo entero n

(C2) $f_n : C'_n \to C_n$ es un epimorfismo para todo entero n.

(C3) f induce un isomorfismo $f* : H_n(C') \approx H_n(C)$ para todo entero n.

Lema 19 *Si R es un dominio de ideales principales, entonces toda sucesión descendente C sobre R tiene una aproximación libre.*

Prueba. Para cada entero n consideremos el submódulo $Z_n(C) = Ker(\partial_n)$ de C_n. Por (Teor. 7) existe un epimorfismo $h_n : F_n \to Z_n(C)$ de un módulo libre F_n sobre $Z_n(C)$. Consideremos el submódulo $G_n = h_n^{-1}[B_n(C)]$ de F_n. Como F_n es R-módulo libre por es G_n un R-módulo libre. Sea $C'_n = F_n \oplus G_{n-1}$ para todo entero n. Entonces C'_n es R-módulo libre y por tanto (C1) se cumple. Para todo entero n definamos un homomorfismo $\partial'_n : C'_n \to C'_{n-1}$ tomando
$\partial'_n(x, y) = (y, 0)$ para todo $x \in F$ y todo $y \in C_{n-1} \subset F_{n-1}$. Según esta definición, se tiene $\partial'_n \ o\ \partial'_{n+1} = 0$ y por tanto obtenemos una sucesión descendente

$$C' : ... \longrightarrow C'_{n+1} \overset{\partial'_{n+1}}{\to} C'_n \overset{\partial'_n}{\to} ...$$

Para todo entero n, definamos un homomorfismo $f_n : C'_n \to C_n$ como sigue. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & C_n \\ & & \downarrow e_n \\ C_{n+1} & \overset{d_{n+1}}{\to} & B_n(C) \to 0 \end{array}$$

donde d_{n+1} y e_n son los homomorfismos definidos por $\partial_{n+1} : C_{n+1} \to C_n$ y $h_n : F_n \to Z_n(C)$, respectivamente. Puesto que

$$Im\,(d_{n+1} = Im\,(\partial_{n+1}) = B_n(C))$$

la fila es exacta. Como G_n es libre y por tanto proyectivo, existe un homomorfismo $k_n : G_n \to C_{n+1}$ que satisface $d_{n+1} \ o\ k_n = e_n$. Entonces definimos f_n tomando $f_n(x, y) = h_n(x) + k_{n-1}(y)$ para todo $x \in f_n$ y todo $y \in G_{n-1}$. Es evidente que f_n es un homomorfismo. Para demostrar que $f = \{f_n | n \in Z\}$ es una transformación de cadenas de C' en C, debemos verificar la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C'_n & \overset{\partial'_n}{\to} & C'_{n-1} \\ f_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow \\ C_n & \overset{\partial_n}{\to} & C_{n-1} \end{array}$$

Para ello, $x \in f_n$ y todo $y \in G_{n-1}$, arbitrariamente dados, entonces,

$$\begin{aligned} \partial_n [f_n(x,y)] &= \partial_n [h_n(x) + k_{n-1}(y)] = \partial_n [h_n(x)] + \partial [\, k_{n-1}(y)] \\ &= d_n [k_{n-1}(y)] = e_{n-1}(y) \end{aligned}$$

$$f_{n-1}[\partial'_n(x,y)] = f_{n-1}(y,0) = h_{n-1}(y) = e_{n-1}(y)$$

Esto prueba que $\partial_n \; o \; f_n = f_{n-1} \; o \; \partial'_n$. Por tanto f es una transformación de cadenas. Falta comprobar las condiciones (C2) y (C3).
Veamos (C2). Sea w un elemento cualquiera de C_n. Entonces $\partial_n(w) \in B_{n-1}(C)$ Como h_{n-1} es epimorfismo, existe un elemento $y \in G_{n-1}$ tal que $h_{n-1} = \partial_n(w)$ sea $v = w - k_{n-1}(y)$. Tenemos

$$\partial_n = \partial_n [k_{n-1}(y)] = \partial_n(w) - h_{n-1}(y) = 0$$

Esto prueba que $v \in Z_n(C)$. Como h_n es epimorfismo, existe $x \in F_n$ tal que

$$h_n(x) = v = w - k_{n-1}(y)$$

En consecuencia, obtenemos $f_n(x,y) = h_n(x) + k_{n-1}(y) = w$ Por lo tanto, f_n es epimorfismo.
Para verificar (C3), observemos que $Z_n(C') = F_n$, $B_n(C') = G_n$ y que $f_n(x,0) = h_n(x)$ para todo $x \in F_n$. Como h_n es epimorfismo y $G_n = h_n^{-1}[B_n(B)]$, se sigue que $f* : H_n(C') = F_n/G_n \approx H_n$ lo que completa la demostración.||

Consideremos ahora una aproximación libre arbitrariamente dada $f : C' \to C$ de un complejo de cadenas sobre R. Para cada entero n, sea $C''_n = Ker(f_n) \subset C'_n$. Como f es una transformación de cadenas δ'_n aplica C''_n en C''_{n-1} y por tanto define un homomorfismo $\delta''_n : C''_n \to C''_{n-1}$. Así obtenemos un complejo de cadenas

$$C'' : \ldots \longrightarrow C''_{n+1} \overset{\partial''_{n+1}}{\to} C''_n \overset{\partial''_n}{\to} \ldots$$

Sobre R. C'' es un subcomplejo de C' al que llamaremos *núcleo* de la aproximación libre $f : C' \to C$. La sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \to C'' \overset{e}{\to} C' \overset{f}{\to} C \to 0$$

donde e representa la inclusión, recibirá el nombre de *sucesión exacta* corta de la aproximación libre $f : C' \to C$.

Lema 20 . *El núcleo C'' de cualquier aproximación libre $f : C' \to C$ de una sucesión descendente C sobre R es una sucesión exacta.*

Prueba. Sea

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \to & & ker(f_n) & \overset{e_n}{\to} & C'_n & \overset{f_n}{\to} & C_n & & \to 0 \\ 0 \to & & ker(f_{n-1}) & \overset{e_{n-1}}{\to} & C'_{n-1} & \overset{f_{n-1}}{\to} & C_{n-1} & & \to 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \to & & C'' & \to & C' & \to & C & & \to 0 \end{array}$$

la sucesión de homología

$$\to H_n(C'') \to H_n(C') \overset{H_n(f)}{\to} H_n(C) \overset{\partial_*}{\to} H_{n-1} \to \cdots$$

y como $H_n(C')$ y $H_{n-1}(C'') = 0$ y así $H_n(C') \approx H_n(C)$. ||

El *producto torsión* de una sucesión descendente C de R y un R-módulo G es la sucesión descendente $Tor\,(C, G)$:

$$... \longrightarrow Tor\,(C_{n+1}, G) \overset{\partial_{n+1}*}{\to} Tor\,(C_n, G) \overset{\partial_n *}{\to} Tor\,(C_{n-1}, G) \longrightarrow ...$$

donde $\partial_n *$ representa el producto tensorial $\partial_n * = Tor\,(\partial_n, i)$ del homomorfismo $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ y el endomorfismo identidad i del módulo G.

Estamos ahora en condiciones de establecer la siguiente generalización de (teor. 40)

Teorema 41 *Si C es una sucesión descendente sobre un dominio de ideales principales R, y G es un R-módulo tal que la sucesión descendente $Tor\,(C, G)$ es exacta, entonces existe un homomorfismo*

$$k : H_n\,(C; G) \to Tor\,[H_{n-1}\,(C)\,, G]$$

para todo entero n tal que

$$0 \to H_n\,(C) \otimes G \overset{j}{\to} H_n\,(C; G) \overset{k}{\to} Tor\,[H_{n-1}\,(C)\,, G] \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por consiguiente, $H_n\,(C; G)$ es isomorfo a la suma directa de $H_n\,(C) \otimes G$ y $Tor\,[H_{n-1}\,(C)\,, G]$

Prueba. De acuerdo con (lema 19) existe una aproximación libre $f : C' \to C$ de la sucesión descendente dada C. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to C'' \overset{e}{\to} C' \overset{f}{\to} C \to 0$$

de la aproximación libre $f : C' \to C$. Como $C_n^{'}$ es libre y por tanto proyectivo para todo n, tenemos $Tor\,(C', C) = 0$. Por consiguiente, se deduce de (lema 13) que tenemos una sucesión exacta.

$$0 \to Tor\,(C, G) \overset{\partial}{\to} C'' \otimes G \overset{e \otimes i}{\to} C' \otimes G \overset{f \otimes i}{\to} C \otimes G \to 0$$

de sucesiones descendentes, donde i representa el endomorfismo identidad del módulo G y ∂ designa el homomorfismo de conexión. Esta sucesión exacta se descompone en las dos sucesiones exactas cortas siguientes:

$$0 \to Tor\,(C, G) \overset{\partial}{\to} C'' \otimes G \overset{\xi}{\to} Im\,(e \otimes i) \to 0$$

$$0 \to Im\,(e \otimes i) \overset{\eta}{\to} C' \otimes G \overset{f \otimes i}{\to} C \otimes G \to 0$$

donde ξ está definido por $e \otimes i$ y η es la inclusión. Por nuestra hipótesis, la sucesión descendente $Tor\,(C, G)$ es exacta. En virtud de (lema 20), la sucesión descendente C'' es exacta. Por submódulo de un R-móduloo libre C_n, en C_n'' un R-módulo libre para todo n. Luego por (teor. 40)

$$H_n\,(C''; G) \approx [H_n\,(C'') \otimes G] \oplus Tor\,[H_{n-1}\,(C'')\,, G] = 0$$

para todo entero n. Esto implica que la sucesión descendente $C'' \otimes G$ es también exacta. Este $Tor\,(C, G)$ y $C'' \otimes G$ implica que la sucesión descendente $Im\,(e \otimes i)$ es exacta. Por (teor 12), este hecho y la sucesión de homología exacta de la sucesión exacta corta

$$0 \to Im\,(e \otimes i) \overset{\eta}{\to} C' \otimes G \overset{f \otimes i}{\to} C \otimes G \to 0$$

implica que el homomorfismo inducido $\alpha_n = (f \otimes i) * : H_n(C'; G) \to H_n(C; G)$ es isomorfo para todo entero n. Por (C1) para la aproximación libre $f : C' \to C$, el homomorfismo inducido $f* : H_n(C') \to H_n(C)$ es isomorfo para todo entero n . Esto implica que los homomorfismos

$$f * \otimes i : H_n(C') \otimes G \to H_n(C) \otimes G$$

$$\gamma = Tor(f*, i) : Tor[H_n(C'), G] \to Tor[H_n(C), G]$$

son isomorfismos para todo entero n. Como $C_n^{'}$ es R-módulo libre, podemos aplicar (teor. 40) a C' y obtenemos

$$0 \to H_n(C') \otimes G \xrightarrow{j'} H_n(C'; G) \xrightarrow{k'} Tor[H_{n-1}(C'), G] \to 0$$

que es una sucesíon exacta corta descomponible. Definamos un homomorfismo

$$k : H_n(C, G) \to Tor[H_{n-1}(C), G]$$

para todo n tomando $k = \gamma_{n-1} \; o \; k' \; o \; \alpha_n^{-1}$. Queda por establecer que

$$0 \to H_n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H_n(C; G) \xrightarrow{k} Tor[H_{n-1}(C), G] \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible. Para ello, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to Hom_n(C') \otimes G & \xrightarrow{j'} & Hom_n(C'; G) & \xrightarrow{k'} & Tor[H_{n-1}(C'), G] & \to 0 \\
\beta_n \downarrow & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \gamma_{n-1} & \\
0 \to \quad Hom_n(C) \otimes G & \xrightarrow{j} & Hom_n(C; G) & \xrightarrow{k} & Tor[H_{n-1}(C) G] & \to 0
\end{array}$$

Según la definición de j y j' dada al principio de esta sección, el rectángulo de la izquierda es claramente conmutativo. La definición k anteriormente dada implica que el rectángulo de la derecha es también conmutativo. Puesto que los homomorfismos verticales son isomorfismos y la fila superior es una sucesión exacta corta descomponible, es sencillo comprobar mediante la conmutatividad de los rectángulos que la fila inferior es una sucesión exacta corta descomponible y existe $h' : Tor[H_{n-1}(C, G)] \to H_n(C'; G)$ tal que $k' \circ h' = 1_{Tor}[H_{n-1}(C'), G]$ Sea $h : Tor[H_{n-1}(C), G] \to H_n(C; G)$ tal que $h = \alpha_n \circ h' \circ \gamma_{n-1}^{-1}$ y así

$$\begin{aligned}
k \circ h \quad & = k \circ \alpha_n \circ h' \circ \gamma_{n-1}^{-1} \\
& = \gamma_{n-1} \circ k' \circ \alpha_n^{-1} \circ \alpha_n \circ h' \circ \gamma_{n-1}^{-1} \\
& = \gamma_{n-1}^{1} \circ k' \circ k' \circ h' \circ \gamma_{n-1}^{-1} \\
& = \gamma_{n-1} \circ 1_{Tor}[H_{n-1}(C), G] \circ \gamma_{n-1}^{-1} \\
& = \gamma_{n-1} \circ \gamma_{n-1}^{-1} \\
& = 1_{Tor}[H_{n-1}(C), G]
\end{aligned}$$

Probando así que existe h de manera que $k \circ h = 1_{Tor}[H_{n-1}(C), G]$ y luego la sucesión

$$0 \to H_n \otimes G \to H_n(C; G) \to Tor[H_{n-1}(C), G] \to 0$$

es una sucesión exacta que desciende lo que completa (teor. 41).||

Ahora, consideremos $Hom(C, G)$ que designa la sucesión ascendente (complejo de cocadenas):

$$... \to Hom(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\delta^n} Hom(C_n, G) \xrightarrow{\delta^{n+1}} Hom(C_{n+1}, G) \to ...$$

donde $\delta^n = Hom\,(\partial_n, i)$ es el Hom de $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ y el homomorfismo identidad $i : G \to G$. El módulo de cohomología n-dimensional

$$H^n\,[Hom\,(C,G)] = Z^n\,[Hom\,(C,G)]\,/B^n\,[Hom\,(C,G)]$$

de $Hom\,(C,G)$ recibe el nombre de *módulo de cohomología n-dimensional de C sobre el módulo coeficiente* G y se designará por $H^n\,(C;G)$. Nuestro objeto es determinar $H^n\,(C;G)$ en términos de $H_n\,(C)$ y $H_{n-1}\,(C)$. Para ello, definamos un homomorfismo

$$\begin{aligned} h: &\quad H^n\,(C;G) \to Hom\,[H_n\,(C)\,,G] \\ h: &\quad H^n[Hom(C,G)] = \frac{ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1_G)]} \to Hom\left[\frac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}, G\right] \end{aligned}$$

$$h : \frac{ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1)]} \to Hom\left[\frac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}, G\right]$$

para todo entero n como sigue. Sea

$$\begin{aligned} p: &\quad Z^n\,[Hom\,(C,G)] \to H^n\,(C;G) \\ &\quad ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)] \to \frac{ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1_G)]} \end{aligned}$$

p es la proyección natural. Para definir h sea x un elemento arbitrario de $Hom(C;G)$

$$h : \frac{ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1)]} \to Hom\left[\frac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}, G\right]$$

$$\begin{array}{ccccc} ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)] & \xrightarrow{p} & \dfrac{ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1_G)]} & \xrightarrow{h} & Hom\left[\dfrac{ker(\partial_n)}{Im(\partial)}, G\right] \\ z \to & & p(z) = x & \to & h(x) = z_* \end{array}$$

Elijamos un elemento $z \in Z^n\,[Hom\,(C,G)] \subset Hom\,(C_n, G)$ que satisface $p\,(z) = x$. Como $z \in Hom\,(C,G)$, z es por definición un homomorfismo: $z : C_n \to G$. Como $\delta^{n+1}\,(z) = z \text{ o } \partial_{n=1} = 0$, z aplica el submódulo $B_n\,(C)$ en el elemento 0 de G. Por tanto z induce un homomorfismo $z* : H_n\,(c) \to G$. Así, z_* es un elemento de $Hom\,[H_n\,(C)\,,G]$. Se puede fácilmente comprobar que z_* no depende de la elección del elemento z y por tanto está completamente determinado por el elemento dado x de $H^n\,(C;G)$. Por consiguiente, podemos definir $h : H^n\,(C;G) \to Hom\,[H_n\,(C)\,,G]$, tomando $h\,(x) = z*$. Es inmediato verificar que h es un homomorfismo.

Teorema 42 *Teorema de Coeficiente Universal para Cohomología.*
Si R es un dominio de ideales principales y C_n es un R-módulo libre para todo entero n, entonces existe un homomorfismo

$$g : Ext\,[H_{n-1}\,(C)\,,G] \to H^n\,(C;G)$$

para todo entero n tal que

$$0 \to Ext\,[H_{n-1}\,(C)\,,G] \xrightarrow{g} H^n\,(C;G) \xrightarrow{h} Hom\,[H_n\,(C)\,,G] \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por consiguiente, $H^n\,(C;G)$ es isomorfo a la suma directa de $Ext\,[H_{n-1}\,(C)\,G]$ y $H^n\,(C;G)$.

Prueba. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to Z_n(C) \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{d} Z_{n-1}(C) \xrightarrow{p} H_{n-1}(C) \to 0$$

donde e representa el homomorfismo inclusión, que está definida por
$\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ y p es la proyección natural, en otras palabras la sucesión

$$0 \to ker(\partial_n) \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{\partial_n} ker(\partial_{n-1}) \xrightarrow{p} \frac{ker(\partial_{n-1})}{Im(\partial_n)} \to 0$$

puesto que R es un dominio de ideales principales se tiene que los módulos $ker(\partial_n)$ y $ker(\partial_{n-1})$ son R-módulos libres y así la sucesión D es una resolución proyectiva reducida de $H_{n-1}(C) = \frac{ker(\partial_{n-1})}{Im(\partial_n)}$

$$0 \to ker(\partial_n) \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{\partial_n} ker(\partial_{n-1}) \to 0$$

obteniendo $Hom(D, G)$ tenemos:

$$0 \to Hom[ker(\partial_{n-1}, G)] \xrightarrow{Hom(\partial_n, 1_G)} Hom(C_n, G) \xrightarrow{Hom(C, 1_G)} Hom[ker(\partial_n), G] \to 0$$

(1)

$$H^0(D, G) = \frac{ker[Hom(\partial_n, 1_G)]}{0} \approx Hom[H_{n-1}(C), G]$$

(2)

$$H^1(D, G) = \frac{ker[Hom(e, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1_G)]} \approx Ext[H_{n-1}(C), G]$$

(3)

$$H^2(D, G) = \frac{Hom[ker(\partial_n), G]}{Im[Hom(e, 1_G)]} = 0$$

esto implica

$$Hom[ker(\partial_n), G] \approx \frac{Hom(C_n, G)}{ker[Hom(e, G)]}$$

por (2) tenemos con n aumentando en 1

$$Hom[H_n(C), G] \approx ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]$$

veamos que $ker[Hom(e, 1_G)] \subset ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]$. Sea

$$\begin{aligned} \phi \in ker[Hom(e, 1_G)] \qquad & \Rightarrow \phi(Ime) = 0 \\ & \Rightarrow \phi(ker\partial_n) = 0 \end{aligned}$$

dado que $Im(\partial_{n+1}) \subset ker\partial_n$

$$\begin{aligned} \phi(Im\partial_{n+1}) \qquad & = 0 \\ \phi \qquad & \in ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)] \end{aligned}$$

y así tenemos la siguiente sucesión

$$0 \to \frac{ker[Hom(e, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1_G)]} \xrightarrow{\alpha} \frac{ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1_G)]} \xrightarrow{\beta} ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]$$

probemos que es exacta.

$$\text{Sea} \quad ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)] \xrightarrow{p} \frac{ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1_G)]} \xrightarrow{h} Hom\left[\frac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}, G\right]$$

$$z \longrightarrow z + Im[Hom(\partial_n, 1_G)] \longrightarrow z_*$$

$$\begin{aligned} z^* = 0 \quad &\Leftrightarrow z(ker\partial_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow ker[Hom(e, 1_G)] = 0 \end{aligned}$$

por tanto

$$kerB = \frac{ker[Hom(e, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1_G)]} = Im\alpha$$

y dado que $Hom(H(C), G) \approx ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]$ tenemos que

$$D : 0 \to \frac{ker[Hom(e, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1_G)]} \xrightarrow{\alpha} \frac{ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1_G)]} \xrightarrow{\beta} ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]$$

Sea

$$f : ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)] \to \frac{ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1_G)]}$$

entonces $\beta \circ f$ es la identidad en $ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]$, luego existe f y así es una sucesión exacta corta descomponible, si identificamos

$$\frac{ker[Hom(e, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1_G)]} \approx Ext[H_{n-1}(c), G], \quad \frac{ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)]}{Im[Hom(\partial_n, 1_G)]} = H^n(C; G)$$

y $ker[Hom(\partial_{n+1}, 1_G)] \approx Hom(H_n(C), G)$, tenemos $\alpha = g, \approx \beta = h$

$$0 \to Ext[H_{n-1}(C), G] \xrightarrow{g} H^n(C; G) \xrightarrow{h} Hom[H_n(C, G)] \to 0$$

es descendente luego

$$H^n(C; G) \approx Ext[H_{n-1}(C), G] \oplus Hom(H_n(C), G) \to 0$$

lo que prueba el resultado ||

Corolario 30 *Si C es una sucesión descendente de espacios vectoriales sobre un cuerpo R, y G es un espacio vectorial sobre R, entonces*

$$h : H^n(C; G) \to Hom[H_n(C), G]$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Llamaremos $Ext(C, G)$ a la sucesión ascendente:

$$... \to Ext(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\delta_*^n} Ext(C_n, G) \xrightarrow{\delta_*^{n+1}} Ext(C_{n+1}, G) \to ...$$

donde δ_*^n representa $Ext(\partial_n, i)$ del homomorfismo $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ y el endomorfismo identidad del módulo G, i.

De manera similar a la demostración de (teor. 41), se establece la siguiente generalización de (teor. 42)

Teorema 43 *Si C es una sucesión descendente sobre un dominio R de ideales principales y G es un R-módulo tal que la sucesión ascendente $Ext(C, G)$ es exacta, entonces existe un homomorfismo*

$$g : Ext[H_{n-1}(C), G] \to H^n(C; G)$$

para todo entero n tal que

$$0 \to Ext[H_{n-1}(C), G] \xrightarrow{g} H^n(C; G) \xrightarrow{h} Hom[H_n(C), G] \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por consiguiente, $H^n(C; G)$ es isomorfo a la suma directa de $Ext[H_{n-1}(C), G]$ y $H^n(C; G)$.

Prueba. De acuerdo con (lema 19) existe una aproximación libre $f : C' \to C$ de la sucesión descendente dada C. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to C'' \xrightarrow{e} C' \xrightarrow{f} C \to 0$$

de la aproximación libre $f : C' \to C$. Como C'_n es libre y por tanto proyectivo para todo n, tenemos $Hom(C;G) = 0$ por lo que se deduce de (cor. 24) que

$$0 \to Hom(e,G) \overset{Hom(f,1_G)}{\to} Hom(C',G) \overset{Hom(e,1_G)}{\to} Hom(C'',G) \xrightarrow{\partial^*} Ext(C,G) \to 0$$

es una sucesión exacta de sucesiones ascendentes, ∂^* designa el homomorfismo de conexión, esta sucesión exacta se descompone en las dos sucesiones exactas cortas siguientes

$$0 \to Im[Hom(e,1_G)] \xrightarrow{\xi} Hom(C'',G) \xrightarrow{\partial^*} Ext(C,G) \to 0$$

$$0 \to Hom(C,G) \overset{Hom(f,1_G)}{\to} Hom(C',G) \xrightarrow{\eta} Im[Hom(e,1_G)] \to 0$$

por nuestra hipótesis $Ext(C,G)$ es exacta, luego

$$H^n(C'';G) \approx Ext[H_{n-1}(C''),G] \oplus Hom[H_n(C''),G] = 0$$

para todo entero n, esto implica que $Hom(C'',G)$ es también exacta. La exactitud de $Hom(C,G)$ y $Hom(C'',G)$ implica que la sucesión ascendente $Im[Hom(e,1_G)]$ es exacta por (teor. 12) y este hecho y la sucesión de homología exacta de la sucesión exacta corta

$$0 \to Hom(C,G) \overset{Hom(f,1_G)}{\to} Hom(C',G) \xrightarrow{\eta} Im[Hom(e,1_G)] \to 0$$

implica que el homomorfismo inducido

$$\alpha_n = Hom(f,1_G)_* : H^n(C;G) \to h^n(C',G)$$

es isomorfismo para todo entero n. Por condición (C3) para las aproximaciones libres $f : C' \to C$ el homomorfismo inducido $f_* : H_n(C') \to H_n(C)$ es isomorfismo para todo entero n, esto implica que los homomorfismos

$$\beta_n = Hom(f_*,1_G) : Hom[H_n(C),G] \to Hom[H_n(C'),G]$$

$$\gamma_n = Ext(f_*,1_G) : Ext[H_n(C),G] \to Ext[H_n(C'),G]$$

Son isomorfismo para todo entero n, como C'_n es libre podemos aplicar a C'

$$0 \to Ext[H_{n-1}(C'),G] \xrightarrow{j'} H^n(C';G) \xrightarrow{k'} Hom[H_n(C'),G] \to 0$$

que es una sucesión exacta corta descomponible. Definamos un homomorfismo

$$\begin{array}{ll} j: & Ext[H_{n-1}(C),G] \to H^n(C;G) \\ j: & \alpha_n^{-1} \circ j' \circ \gamma_{n-1} \end{array}$$

queda por establecer que

$$0 \to Ext[H_{n-1}(C),G] \xrightarrow{j} H^n(C;G) \xrightarrow{k} Hom[H_n(C),G] \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible para ello, consideremos el siguiente diagrama:

$$0 \to Ext[H_{n-1}(C), G] \xrightarrow{j} H^n(C; G) \xrightarrow{k} Hom[H_n(C), G] \to 0$$
$$\gamma_n \downarrow \qquad \alpha_n \downarrow \qquad \beta \downarrow$$
$$0 \to Ext[H_{n-1}(C'), G] \xrightarrow{j'} H^n(C'; G) \xrightarrow{k'} Hom[H_n(C'), G] \to$$

Razonando en forma similar a el teorema (teor. 41) se concluye que

$$0 \to Ext[H_{n-1}(C), G] \xrightarrow{j} H^n(C; G) \xrightarrow{k} Hom[H_n(C), G] \to 0$$

es una sucesión exacta corta que se descompone. ||

Lema 21 *Si R es un dominio de ideales principales, entonces toda sucesión ascendente C sobre R tiene una aproximación libre.*

Prueba. Sea

$$C : \cdots \to C_{n-1} \xrightarrow{\delta^n} C_n \xrightarrow{\delta^{n+1}} C_{n+1} \to \cdots \to$$

para cada entero consideremos el submódulo $z^n(C) = ker\ \delta^{n+1}$ de C_n. Por (teor. 7) existe un epimorfismo $h : F_n \to Ker(\delta n + 1)$ de un módulo libre F_n sobre z^n. Consideremos el submódulo $G_n = h_n^{-1}(Im(\delta^n))$ de F_n como F_n es R-módulo libre, C_n es un R-módulo libre. Sea $C'_n = F_n \oplus G_{n+1}$ para todo entero n. Entonces C'_n es un R-módulo libre por tanto (C1) se cumple. Para todo entero n, definimos un homomorfismo

$$\begin{aligned} \delta_1^{n+1} : \qquad & C'n \to C'_{n+1} \\ & (x, y) \to \delta n + 1_1(x, y) = (y, 0) \end{aligned}$$

para todo $x \in F$ y todo $y \in G_{n+1} \subset F_{n+1}$ según esta definición se tiene

$$\delta n + 2_1(\delta n + 1_1(x, y)) = \delta n + 2_1(y, 0) = (0, 0)$$

y por tanto obtenemos una sucesión ascendente

$$C' : \cdots \to C'_{n-1} \xrightarrow{\delta n_1} C'_n \xrightarrow{\delta n + 1_1} C'_{n+1} \to \cdots$$

Para todo entero n, definamos un homomorfismo f_n, considerando el siguiente diagrama

$$\cdots \to F_n \oplus G_{n+1} \xrightarrow{\delta_1^{n+1}} F_{n+1} \oplus G_{n+2} \xrightarrow{\delta_1^{n+2}} F_{n+2} \oplus G_{n+3} \to \cdots$$
$$f_n \downarrow \qquad f_{n+1} \downarrow \qquad f_{n+2} \downarrow$$
$$\cdots \to C_n \xrightarrow{\delta^{n+1}} F_{n+1} \oplus G_{n+2} \xrightarrow{\delta^{n+2}} C_{n+2} \to \cdots$$

tal que el siguiente triángulo es conmutativo

$$G_{n+1}$$
$$k_n \swarrow \quad \downarrow h_{n+1}$$
$$C_n \xrightarrow{\delta^{n+1}} Im(\delta^{n+1}) \to 0$$

con $\delta^{n+1} \circ k_n = h_{n+1}$, así tenemos

$$\begin{aligned} f_n : \qquad & F_n \oplus G_{n+1} \to C_n \\ & (x, y) \to f(x, y) = h_n(x) + k_n(y) \end{aligned}$$

para todo $x \in F_n$ y todo $y \in G_{n+1}$, es evidente que f_n es un homomorfismo. Para demostrar que $f = \{f_n / n \in Z\}$ es una transformación de cadenas de C'_n en C_n, debemos verificar la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_n \oplus G_{n+1} & \overset{\delta^{n+1}}{\rightarrow} & F_{n+1} \oplus G_{n+2} \\ f_n \downarrow & & f_{n+1} \downarrow \\ C & \overset{\delta^{n+1}}{\rightarrow} & C_{n+1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \delta^{n+1}(f_n(x,y)) &= \delta^{n+1}(h_n(x) + k_n(y)) \\ &= \delta^{n+1}(h_n(x)) + \delta^{n+1}(k_n(y)) \\ &= h_{n+1}(Y) \end{aligned}$$

y

$$f_{n+1}(\delta_1^{n+1}(x,y)) = f_{n+1}(y,0) = h_{n+1}(y)$$

esto prueba que $\delta^{n+1} \circ f_n = f_{n+1} \circ \delta_1^{n+1}$, por lo tanto f es una transformación de cadenas.
Falta probar las condiciones (C2) y (C3). Para probar (C2). Sea w un elemento cualquiera de e_n. Entonces $\delta^{n+1}(w) \in Im(\delta^{n+1})$ y como h_{n+1} es sobre $\exists y \in G_{n+1}$ tal que $h_{n+1}(y) = \delta^{n+1}(w)$. Sea $V = w - h_n(y)$

$$\delta^{n+1}(V) = \delta^{n+1}(w) - \delta^{n+1}(k_n(y)) = \delta^{n+1}(w) - h_{n+1}(y) = 0$$

esto prueba que $V \in ker(\delta^{n+1}) \Rightarrow \exists x \in F_n$ tal que $h_n(x) = v = w - k_n(y)$ en consecuencia obtenemos

$$f_n(x,y) = h_n(x) + k_n(y) = v + k_n(y) = w - k_n(y) + k_n(y) = w$$

por tanto f_n es sobreyectiva.
Para verificar (C3) observamos que $H_n = \frac{ker(\delta_1^{n+1})}{Im(\delta_1^n)} = \frac{F_n}{G_n}$ y que $f_n(x,0) = h_n(x)$, como h_n es epimorfismo y $G_n = h_n^{-1}(Im(\delta^n))$, se sigue que

$$f_* : H_n(C') = \frac{F_n}{G_n} \approx H_n(C)$$

lo que completa la demostración. ||

Teorema 44 *Si R es un dominio de ideales principales y C_n es un R-módulo libre para todo entero n, entonces existe un homomorfismo*

$$k : H^n(C;G) \rightarrow Tor[H^{n+1}(C), G]$$

para todo entero n tal que

$$0 \rightarrow H^n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H^n(C;G) \xrightarrow{k} Tor[H^{n+1}(C), G] \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por lo tanto $H^n(C;G)$ es isomorfo a la suma directa de $H^n(C) \otimes G$ y $Tor[H^{n+1}(C), G]$

Prueba. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow ker(\delta^{n+1}) \xrightarrow{e} C_n \overset{\delta^{n+1}}{\rightarrow} ker(\delta^{n+2}) \xrightarrow{p} \frac{ker\delta^{n+2}}{Im(\delta^{n+1})} \rightarrow 0$$

donde e es el homomorfismo inclusión y p es la proyección natural. Como R es un dominio de ideales principales, se sigue de nuestra hipótesis, que los módulos

$ker(\delta^{n+1})$ y $ker(\delta^{n+2})$ son R-módulos libres y por lo tanto esta sucesión es una resolución proyectiva del módulo $\frac{ker(\delta^{n+2})}{Im(\delta^{n+1})} = H^{n+1}(C)$. Por consiguiente, la sucesión

$$D : 0 \to ker(\delta^{n+1}) \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{\delta^{n+1}} ker(\delta^{n+2}) \to 0$$

es una resolución proyectiva reducida D del módulo $H^{n+1}(C)$.
Consideremos el producto tensorial $D \otimes G$ de D y G

$$0 \to ker(\delta^{n+1} \otimes G) \xrightarrow{e\otimes i} C_n \otimes G \xrightarrow{\delta^{n+1}\otimes i} ker(\delta^{n+2} \otimes G) \to 0$$

de acuerdo con (lema 14) y (cor. 19) tenemos
(1)

$$H^0(D \otimes G) = \frac{ker(\delta^{n+1}) \otimes G}{Im(\delta^{n+1} \oplus i)} \approx H^{n+1}(C) \otimes G = Coker(\delta^{n+1} \otimes i)$$

(2)

$$H'(D \otimes G) = \frac{ker(\delta^{n+1} \otimes i)}{Im(e \otimes i)} \approx Tor[H^{n+1}(C), G]$$

(3)

$$H^2(D \otimes G) = ker(e \otimes i) = Tor_2[H^{n+1}(C), G] = 0$$

la tercera establece que $e \otimes i$ es inyectivo, la segunda $\frac{ker(\delta^{n+1})\otimes i}{Im(\delta^{n+1}\oplus G)}$ y la condición (1) disminuido n en uno

$$\frac{ker(\delta^{n+1}) \otimes G}{Im(\delta^{n} \oplus i)} \approx H^n(C) \otimes G$$

como

$$\frac{ker(\delta^{n+1}) \otimes G}{Im(\delta^{n+1} \oplus i)} \approx \frac{ker(\delta^{n+1} \oplus i)/Im(\delta^{n} \oplus i)}{ker(G^{n+1} \oplus G)/Im(\delta^{n} \oplus i)}$$

obtenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \to \frac{ker(\delta^{n+1}) \otimes G}{Im(\delta^{n} \oplus i)} \xrightarrow{\alpha} \frac{ker(\delta^{n+1}) \otimes i}{Im(\delta^{n} \oplus i)} \xrightarrow{\beta} \frac{ker(\delta^{n+1}) \otimes i}{Im(\delta^{n+1} \oplus G)} \to 0$$

donde α es la inclusión y β el homomorfismo proyección. Para probar que esta sucesión exacta corta se descompone, consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \to ker(\delta^{n+1}) \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{\delta^{n+1}} Im(\delta^{n+1}) \to 0$$

donde e es el homomorfismo inclusión luego existe $h : C_n \to ker(\delta^{n+1})$ tal que $h \circ e = 1_{ker}\delta^{n+1}$, también $h \otimes i : C_n \otimes G \to ker\delta^{n+1} \otimes G$ si hacemos $(h \otimes i) \circ (e \otimes i) = 1_{ker}\delta^{n+1} \otimes G$ y así la restricción

$$h \otimes i / ker\delta^{n+1} \otimes G = 1_{ker}\delta^{n+1} \otimes G$$

luego induce el homomorfismo

$$\gamma : \frac{ker(\delta^{n+1} \otimes i)}{Im(\delta^{n} \otimes i)} \to \frac{ker(\delta^{n+1} \otimes G)}{Im(\delta^{n+1} \otimes i)}$$

de manera que $\gamma \circ \alpha$ es el homomorfimo identidad de $\frac{ker\delta^{n+1}\otimes G}{Im(\delta^{n+1}\otimes I)}$ lo que prueba el resultado. Si identificamos a los módulos de la siguiente manera

$$H^n(C) = ker\delta^{n+1} \otimes G / Im(\delta^{n} \otimes i)$$

$$H^n(C;G) = ker(\delta^{n+1} \otimes i)/Im(\delta^n \otimes i)$$
$$Tor[H^{n+1}(C), G] = ker(\delta^{n+1} \otimes i)/ker\delta^{n+1} \otimes G$$

y $\alpha = j$, $k = \beta$ obtenemos

$$0 \to H^n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H^n(C;G) \xrightarrow{k} Tor[H^{n+1}(C), G] \to 0$$

que es una sucesión exacta corta descomponible. ||

Teorema 45 *Si C es una sucesión ascendente sobre un dominio R de ideales principales, y G es un R-módulo tal que la sucesión ascendente $Tor\,(C, G)$ es exacta, entonces existe un homomorfismo*

$$k : H^n\,(C) \otimes G \to Tor\left[H^{n+1}\,(C)\,, G\right]$$

$$0 \to H^n\,(C) \otimes G \xrightarrow{j} H^n\,(C;G) \xrightarrow{k} Tor\left[H^{n+1}\,(C)\,, G\right] \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por consiguiente $H^n\,(C \otimes G)$ es isomorfo a la suma directa $H^n\,(C) \otimes G$ y $Tor\left[H^{n+1}\,(C)\,, G\right] \to 0$.

Prueba. De acuerdo con (lema 20) existe una aproximación libre $f : C' \to C$ de la sucesión ascendente dada C. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to C'' \xrightarrow{e} C' \xrightarrow{f} C \to 0$$

de la aproximación libre y por tanto proyectivo para todo n, tenemos $Tor(C', G) = 0$ por consiguiente. Se deduce de (teor. 32) que tenemos una sucesión exacta

$$0 \to Tor(C, G) \xrightarrow{\partial} C'' \otimes G \xrightarrow{e \otimes i} C' \otimes G \xrightarrow{f \otimes i} C \otimes G \to 0$$

de sucesiones ascendentes, donde i representa el endomorfismo identidad del módulo G y ∂ designa el homomorfimo de conexión. Esta sucesión exacta se descompone en las dos sucesiones exactas cortas siguientes

$$0 \to Tor(C, G) \xrightarrow{\partial} C'' \otimes G \xrightarrow{\xi \otimes i} Im(e \otimes i)$$

$$0 \to Im(e \otimes I) \xrightarrow{\eta} C' \otimes G \xrightarrow{f \otimes i} C \otimes G \to 0$$

Donde ξ está definido por $e \otimes i$ y η es la inclusión por nuestra hipótesis la sucesión ascendente $Tor(C, G)$ es exacta, la sucesión ascendente C'' es exacta. Por ser submódulo de un R-módulo libre para todo n. Luego por (teor. 44)

$$H^n(C''; G) \approx H^n(C') \otimes G \oplus Tor[H^{n+1}(C''), G] = 0$$

para todo entero n esto implica que la sucesión ascendente $Im(e \otimes i)$ es exacta, este hecho y la sucesión de cohomología exacta de la sucesión exacta corta

$$0 \to I(e \otimes i) \xrightarrow{\eta} C' \otimes G \xrightarrow{f \otimes i} C \otimes G$$

implica que el homomorfismo inducido $\alpha_n = (f \otimes i)_* : H^n(C' \otimes G) \to H^n(C \otimes G)$ es isomorfismo para todo entero n. Por (C3) para la aproximación libre $f : C' \to C$ el homomorfismo inducido $f_* : H_n(C') \to H_n(C)$ es un isomorfismo para todo entero n. Esto implica que los homomorfismos

$$\beta_n = f_* \otimes i : H_n(C') \otimes G \to H_n(C) \otimes G$$

y

$$\gamma_n = Tor(f_*, i) : TorHn(C), G \to Tor[H^n(C), G]$$

son isomorfismos para todo entero n. Como C'_n es R-módulo libre, podemos aplicar (teor. 44) a C' y obtenemos

$$0 \to H^n(C') \otimes G \xrightarrow{j'} H^n(C'; G) \xrightarrow{k'} Tor\left[H^{n+1}(C'), G\right] \to 0$$

que es una sucesión exacta corta descomponible. Definamos un homomorfismo

$$k : H^n(C \otimes G) \to Tor[H^{n+1}(C), G]$$

$k = \gamma_{n+1} \circ k' \circ \alpha_n^{-1}$ es fácil establecer que

$$0 \to H^n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H^n(C; G) \xrightarrow{k} Tor\left[H^{n+1}(C), G\right] \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible y así

$$H^n(C; G) \approx H^n(C) \otimes G \oplus Tor[H^{n+1}(C), G] = 0$$

2.6. La Fórmula de Kunneth

A lo largo de la sección, C y D denotarán sucesiones descendentes arbitrariamente dadas de *complejos de cadenas* de R-módulos.
Para todo entero n, se considera la suma directa $E = \sum_{p+q=n} C_p \otimes D_q$ y el homomorfismo $\partial : E_n \to E_{n-1}$ definido sobre los generadores

$$\partial_n \sum_{p+q=n} C_p \otimes D_q \to \sum_{p+q=n-1} C_p \otimes D_q$$

$x \otimes y$ de E_n tal que $\partial(x \otimes y) = \partial x \otimes \partial y \; + \; (-1)^{deg(x)} x \otimes \partial y$
Puesto que se comprueba fácilmente que $\partial \; o \; \partial = 0$,

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1}(\partial_n(x \otimes y)) \quad &= \partial_{n-1}(\partial_p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes \partial_q(y)) \\
&= \partial_{n-1}(\partial_p(x) \otimes y + (-1)^p(\partial_{n-1}(x \otimes \partial_q(y)) \\
&= (\partial_{p-1}(\partial_p(x)) \otimes \; y + (-1)^{p-1}(\partial_p(x) \otimes \partial_q(y)) \\
&\quad +(-1)^p(\partial_p(x) \otimes \partial_q(y)) + (-1)^p x \otimes (\partial_{q-1}(\partial_q(y))) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\partial_{n-1}(\partial_n(x \otimes y)) = 0$ por lo que obtenemos una sucesión descendente

$$E : ... \to E_{n+1} \xrightarrow{\partial} E_n \xrightarrow{\partial} E_{n-1} \to ...$$

de R-módulos, que recibe el nombre de producto tensorial sobre R de las sucesiones dadas C y D (descendente) y se denotará $E = C \otimes D$
Si C y D son positivas, esto es, si $C_n = 0, \;\; D_n = 0$ para todo entero negativo n, entonces igual sucede con su producto tensorial $E = C \otimes D$. En este caso, tenemos también la suma directa finita

$$E_n = \sum_{p=0}^{n} C_p \otimes D_q$$

para todo entero no negativo n.
Para todo par de enteros p y q, definimos un homomorfismo

$$\pi_{pq} : H_p(C) \otimes H_q(D)(C)(D) \to H_{p+q}(C \otimes D)$$

de R-módulos como sigue.

$$\begin{array}{ll} \pi_{pq}: & \dfrac{ker(\partial_p)}{Im(\partial_{p+1})} \otimes \dfrac{ker(\partial_q)}{Im(\partial_{q+1})} \to \dfrac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})} \\ & (x + Im(\partial_{p+1})) \otimes (y + Im(\partial_{q+1})) \to x \otimes y + Im(\partial_{n+1}) \end{array}$$

Sean los elementos $\xi \in H_p(C)$ y $\eta \in H_q(D)$. Son clases laterales de $B_p(C)$ y $B_q(D)$ en $Z_p(C)$ y $Z_q(D)$, respectivamente. Sean

$$x \in \xi \subset Z_p(C) \subset C_p, \qquad y \in \eta \subset Z_q(D) \subset C_q$$

Entonces $x \otimes y$ es un elemento de $C_p \otimes D_q \subset E_{p+q}$

$$\begin{array}{ll} \pi_{pq}: & \dfrac{ker\partial_p}{Im\partial_{p+1}} \otimes \dfrac{ker\partial_p}{Im\partial_{q+1}} \to \dfrac{ker\partial_n}{Im\partial_{n+1}} \\ & (x + Im(\partial_{p+1})) \otimes (y + Im(\partial_{q+p})) \to x \otimes y + Im(\partial_{n+1}) \end{array}$$

Como $\partial x = 0$ y $\partial y = 0$, obtenemos $\partial(x \otimes y) = \partial x \otimes y \ + \ (-1)^p x \otimes y = 0$. Esto implica que $x \otimes y$ figura en $Z_{p+q}(C \otimes D)$ y por tanto determina un elemento ζ de $H_{p+q}(C \otimes D)$. Se puede comprobar fácilmente que este elemento ζ no depende de la elección de los ciclos x e y de las clases laterales ξ y η, respectivamente. En consecuencia, ζ está completamente determinado por los elementos dados ξ y η. Así, podemos determinar π_{pq} tomando $\pi_{pq}(\xi, \eta) = \zeta$. Es inmediato verificar que π_{pq} es un homomorfismo de R-módulos. El elemento $\pi_{pq}(\xi, \eta)$ se llama *producto de homología* de los elementos $\xi \in Hp(C)$ y $\eta \in H_q(D)$. Para todo entero n, la suma directa *realizada o sumada*

$$\pi = \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes H_q(D) \to H_n(C \otimes D)$$

de la manera siguiente

$$\sum_{p+q+1} \left(\sum_{i=1}^{nqp} (x_{ip} + Im\partial_{p+1}) \otimes (y_{iq} + Im\partial_{q+1}) \right) \to \sum_{p+q=n} \sum_{i=1}^{mpq} (x_{ip} \otimes y_{iq} + Im\partial_{n+1})$$

a π es un homomorfismo de R-módulos y se denominará producto de homología (n-dimensional) de las sucesiones escendentes dadas C y D. En particular, si

$$D_n = \begin{cases} G(si\ n = 0) \\ 0(si\ n \neq 0) \end{cases}$$

donde G es un R-módulo arbitrariamente dado, tenemos para todo entero n y por consiguiente $C \otimes D$ se reduce al producto tensorial $C \otimes G$ definido en la precedente. Además, como

$$H_n(D) = \begin{cases} G(si\ n = 0) \\ 0(si\ n \neq 0) \end{cases}$$

El producto de homología π se reduce al homomorfismo

$$j : H_n(C) \otimes G \to H_n(C \otimes G)$$

de la sección presedente.

Definición 25 *Un R-módulo se dice plano si y sólo si se tiene*

$$Tor(X, Y) = 0$$

para todo R-módulo Y.

Lema 22 *Si G es un R-módulo plano, entonces*

$$\pi = j : H_n(C) \otimes G \to H_n(C \otimes G)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Prueba. Sea n un entero arbitrariamente dado. Designemos

$$B_n = B_n(C) = Im(\partial_{n+1}) \qquad Z_n = Z_n(C) = ker(\partial_n) \qquad H_n = H_n(C) = \frac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Im(\partial_{n+1}) & \xrightarrow{e} & ker(\partial_n) & \xrightarrow{p} & \dfrac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})} \to 0 \\
 & & \uparrow \tilde{\partial}_{n+1} & & \downarrow f & & \\
 & & C_{n+1} & \overset{\partial_{n+1}}{\to} & C_n & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & C_{n-1} & &
\end{array}$$

donde ∂_n y ∂_{n+1} son los homomorfismos de la sucesión descendente C, D es el homomorfismo definido por ∂_{n+1}, e y f son homomorfismos inclusión y p es la proyección natural de Z_n sobre su módulo cociente $H_n = Z_n/B_n$. Las filas y columnas de este diagrama son evidentemente exactas. Efectuando los productos tensoriales con el homomorfismo identidad $i : G \to G$, obtenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Im(\partial_{n+1}) \otimes G & \to & ker(\partial_n) \otimes G & \to & \dfrac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})} \otimes G \to 0 \\
 & & \uparrow \tilde{\partial}_{n+1} \otimes i & & \downarrow f \otimes i & & \\
 & & C_{n+1} \otimes G & \overset{\partial_{n+1} \otimes i}{\to} & C_n \otimes G & & \\
 & & & & \downarrow \partial_n \otimes i & & \\
 & & & & C_{n-1} \otimes G & &
\end{array}$$

Como G es plano, se deduce que es una consecuencia inmediata de (teor. 32),(teor. 21) que las filas y columnas de este diagrama de productos tensoriales son también exactas. De la exactitud de la fila larga, se deduce que $p \otimes i$ es un epimorfismo e induce un isomorfismo $k = (p \otimes i)_* \, Z_n \otimes G / Im\,(e \otimes i) \approx H_n \otimes G$ ya que $Im(e \otimes i) = ker(p \otimes i)$ por la exactitud de la fila. La exactitud de la columna corta implica que $d \otimes i$ es epimorfismo, mientras que la exactitud de la columna larga implica que $f \otimes i$ es monomorfismo y $Im\,(f \otimes i) = Ker\,(\partial_n \otimes i)$ ya que $Im(e \otimes i) = ker(p \otimes i)$ por la exactitud de la fila. Puesto que el rectángulo es conmutativo y $d \otimes i$ es epimorfismo se deduce que

$$Im\,((f \otimes i) \circ e \otimes i) = Im(\partial_{n+1} \otimes i) = Im\,(\partial_{n+1} \otimes i) = (f \otimes i)\,(Im(e \otimes i))$$

En consecuencia, el homomorfismo $f \otimes i$ induce un isomorfismo

$$\lambda = (f \otimes i)_* : \frac{ker\partial_n \otimes G}{Im(e \otimes i)} \approx \frac{\partial_n \otimes i}{\partial_{n+1} \otimes i}$$

ya que

$$0 \to ker\partial_n \otimes G \to C_n \otimes G$$

$$0 \to \frac{ker\partial_n \otimes G}{Im(e \otimes i)} \to \frac{ker\partial_n \otimes i}{Im\partial_{n+1} \otimes i}$$

por que $(f \otimes i)(Im(e \otimes i)) = Im(\partial_{n+1} \otimes i)$ y $ker(\partial_n \otimes i) = Im(f \otimes i)$ y considerando que

$$H_n(C) \otimes G \xrightarrow{k} \frac{ker\partial_n \otimes G}{Im(e \otimes i)} \xrightarrow{\lambda} H_n(C \otimes G)$$

obtenemos $\lambda \circ k = j : H_n(C) \otimes G \to H_n(C \otimes G)$ por la definición del homomorfismo j, es evidente que $\lambda \; o \; \kappa^{-1} = j$ ya que

$$0 \to ker\partial_n \otimes G \to C_n \otimes G$$

y

$$0 \to \frac{ker\partial_n \otimes G}{Im(e \otimes i)} \to \frac{ker\partial_n \otimes i}{Im(\partial_{n+1} \otimes i)}$$

por que $(f \otimes i)(Im(e \otimes i)) = Im(\partial_{n+1} \otimes i)$ y $ker(\partial_n \otimes i) = Im(f \otimes i)$. Esto implica que j es isomorfismo y completa la demostración. $||$
Más generalmente, sea q un entero. Si $D_n = 0$ para todo $n \neq q$, entonces tenemos

$$H_n(D) \begin{cases} D_q(si\ n = q) \\ 0(si\ n \neq q \end{cases}$$

En este caso, el producto de homología π es $\pi = j : H_{n-q}(C) \otimes D_q \to H_n(C \otimes D)$

Lema 23 *Si $D_n = 0$ para todo $n \neq q$ y D_q es un R-módulo plano, entonces*

$$\pi = j : H_{n-q}(C) \otimes D_q \to H_n(C \otimes D)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Prueba. Sea n un entero arbitrariamente dado designemos con

$$B_{n-q} = Im(\partial_{n-q+1}) : z_{n-q} = ker(\partial_{n-q}) \quad \text{y} \quad H_{n-q} = \frac{ker(\partial_{n-q})}{Im(\partial_{n-q+1})}$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \uparrow & & \downarrow & & & \\
0 \to & Im(\partial_{n-q+1}) & \xrightarrow{e} & ker(\partial_{n-q}) & \xrightarrow{p} & \frac{ker(\partial_{n-q})}{Im(\partial_{n-q+1})} & \to 0 \\
 & \uparrow \tilde{\partial}_{n-q+1} & & \downarrow f & & & \\
 & C_{n-q+1} & \xrightarrow{\partial_{n-q+1}} & C_{n-q} & & & \\
 & & & \downarrow \partial_{n-q} & & & \\
 & & & C_{n-q-1} & & &
\end{array}$$

donde ∂_{n-q} y ∂_{n-q+1} son los homomorfismos de la sucesión descendente C, e y f son los homomorfismos inclusión y p es la proyección natural del $ker\partial_{n-q}$ sobre un módulo cociente $\frac{ker\partial_{n-q}}{Im\partial_{n-q+1}}$. Las filas y columnas de este diagrama son exactas. Efectuando los productos tensoriales con el homomorfismo identidad $i : D_q \to D_q$, obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \\
0 \to & Im\partial_{n-q+1} \otimes D_q & \stackrel{e\otimes i}{\to} & ker\partial_{n-q} \otimes D_q & \stackrel{p\otimes i}{\to} & \dfrac{ker(\partial_{n-q})}{Im(\partial_{n-q+1})} \otimes D_q \to 0 & \\
 & \uparrow \tilde{\partial}_{n-q+1} \otimes i & & \downarrow f \otimes i & & & \\
 & C_{n-q+1} \otimes D_q & \stackrel{\partial_{n-q+1}\otimes i}{\to} & C_{n-q} \otimes D_q & & & \\
 & & & \downarrow \partial_{n-q} \otimes i & & & \\
 & & & C_{n-q+1} \otimes D_q & & &
\end{array}$$

como D_q es plano, se deduce que las filas y columnas de este diagrama de productos tensoriales son también exactas. De la exactitud de la fila larga, se deduce que $p \otimes i$ es epimorfismo e induce un isomorfismo

$$\begin{aligned}
k = (p \otimes i)_* : \frac{ker\partial_{n-q}}{Im\partial_{n-q+1}} \otimes D_q \qquad & \approx \frac{ker\partial_{n-q} \otimes D_q}{ker(p \otimes i)} \\
& \approx \frac{\partial_{n-q} \otimes D_q}{Im(e \otimes i)}
\end{aligned}$$

ya que $Im(e \otimes i) = ker(p \otimes i) = ker(p \otimes i)$ por ser la fila exacta. De la exactitud de la columna corta implica que $\tilde{\partial}_{n-q+1} \otimes i$ es epimorfismo, mientras que la exactitud de la culumna larga implica que $f \otimes i$ es monomorfismo y que $Im(f \otimes i) = ker(\partial_n \otimes i)$ puesto que el rectángulo es conmutativo y $\tilde{\partial}_{n-q+1} \otimes i$ es epimorfismo

$$Im(f \otimes i \circ e \otimes i) = Im\partial_{n-q+1} \otimes i = f \otimes i(Im(e \otimes i))$$

En consecuencia, el homomorfismo $f \otimes i$ induce un isomorfismo.

$$\lambda = (f \otimes i)_* = \frac{ker\partial_{n-1} \otimes D_q}{Im(e \otimes i)} \approx \frac{ker(\partial_{n-q} \otimes i)}{Im(\partial_{n-q+1} \otimes i)}$$

ya que

$$0 \to ker\partial_{n-q} \otimes D_q \to C_{n-q} \otimes D_q \qquad 0 \to \frac{ker\partial_{n-q} \otimes D_q}{Im(e \otimes i)} \approx \frac{ker(\partial_{n-q} \otimes i)}{\partial_{n-q+1} \otimes i}$$

por que $(f \otimes i)(Im(e \otimes i)) = Im(\partial_{n-q+1} \otimes i)$ y $ker(\partial_{n-q} \otimes i) = Im(f \otimes i)$ así

$$\frac{ker\partial_{n-q}}{Im(ker\partial_{n-q})} \otimes D_q \stackrel{k}{\to} \frac{kerker\partial_{n-q}}{Im(e \otimes i)} \stackrel{\lambda}{\to} \frac{ker(ker\partial_{n-q} \otimes i)}{Im(\partial_{n-q+1} \otimes i)}$$

$\lambda \circ k = \pi_{(n-q)q} : H_{n-q} \otimes D \to H_n(C \otimes D)$ es un isomorfismo. $||$

Definición 26 *Una sucesión descendente D de R-módulos se dice que tiene borde trivial si y sólo si $\partial_n : D_n \to D_{n-1}$ es el homomorfismo trivial* 0 *para todo entero n. Si D tiene borde trivial, entonces tenemos $H_n(D) = D_n$ para todo entero n. En este caso el producto de homología π es*

$$\pi = \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes D_q \to H_n(C \otimes D)$$

Además, D es la suma directa de los D_q considerados como sucesiones descendentes como en (lema 32) y por tanto tenemos

$$H_n(C \otimes D) = \sum_{q \in Z} H_n(C \otimes D_q)$$

Lema 24 *Si D tiene borde trivial y D_n es un R-módulo plano para todo entero n, entonces $\pi = \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes D_q \to H_n(C \otimes D)$ es un isomorfismo para todo entero n.*

Prueba. Por (lema 32), $\pi_{(n-q)q} : H_{n-q}(C) \otimes D_q \to H_n(C \otimes D_q)$ es un isomorfismo y como la suma de isomorfismos es isomorfismo tenemos

$$\sum_{q \in Z} \pi_{(n-q)q} : \sum_{q \in Z} H_{n-q}(C) \otimes D_q \to \sum_{q \in Z} H_(C \otimes D_q)$$

Si hacemos $\pi_{pq} : \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes D_q \to \sum_{q \in Z} H_n(C \otimes D_q)$ incluimos que π_{pq} es un isomorfismo para todo entero n. ||

Para todo entero n, consideremos la suma directa $F_n = \sum_{p+q=n} Tor(C_p, D_q)$ y el homomorfismo $\partial : F_n \to F_{n-1}$ definido por

$$\partial_n / Tor(C_p, D_q) = Tor(\partial_p, i_q) + (-1)^p Tor(i_p, \partial_q)$$

donde $\partial_p : C_p \to C_{p-1}$, $\partial_q : D_q \to D_{q-1}$ son los homomorfismos identidad. Como se puede comprobar fácilmente que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Si

$$\partial_{n-1} / Tor(C_{p-1}, D_q) = Tor(\partial_{p-1}, D_q) = Tor(\partial_{p-1}, i_q) + (-1)^{p-1} Tor(i_{p-1}, \partial_q)$$

$$\text{y} \quad \partial_{n-1} / Tor(C_p, D_{q-1}) = Tor(\partial_p, D_{q-1}) = Tor(\partial_p, i_q) + (-1)^p Tor(i_p, \partial_{q-1})$$

haciendo la composición $\partial_{n-1} \circ \partial_n$ tenemos que

$$(Tor(\partial_{p-1}, i_q) + (-1)^{p-1} Tor(i_{p-1}, \partial_q)) \circ Tor(\partial_p, i_q) + (-1) Tor(\partial_p, i_{q-1}) + (-1)^p Tor(i_p, \partial_{q-1}) \circ Tor(i_p, \partial_q)$$

$$= Tor(\partial_{p-1 \circ \partial_p, i_q}) + (-1)^{p-1} Tor(\partial_p, \partial_q) + (-1)^p Tor(\partial_p, \partial_q) + (-1)^{2p} Tor(i_p . \partial_{q-1} \partial_q)$$

por lo que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Luego obtenemos una sucesión descendente

$$F : \ldots \to F_{n+1} \xrightarrow{\partial} F_n \xrightarrow{\partial} F_{n-1} \to \ldots$$

de R-módulos, que se llama *producto torsión* sobre R de las sucesiones descendentes dadas C y D y se denotará por $F = Tor(C, D)$. Si las sucesiones descendentes dadas C y D son positivas, entonces también lo es $F = Tor(C, D)$. En este caso, tenemos también la suma directa finita $F_n = \sum_{p=0}^{n} Tor(C_p, D_{n-p})$ para todo entero no negativo n.

Los módulos de homología $H_n(C)$ de cualquier sucesión descendente sobre R para todo entero n constituyen una sucesión descendente $H(C)$ con borde trivial. Por tanto las sucesiones descendentes

$$H(C) \otimes H(D), \quad Tor[H(C), H(D)]$$

están bien definidas y tienen borde trivial. Para todo entero n, sus componentes n-dimensionales son

$$\{H(C) \otimes H(D)\}_n = \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes H_q(D)$$

$$\{Tor[H(C), H(D)]\}_n = \sum_{p+q=n} Tor[H_p(C), H_q(D)]$$

Por medio de ellas, el producto de homología π de las sucesiones descendentes dadas C y D es $\pi : \{H(C) \otimes H(D)\}_n \to H_n(C \otimes D)$ para todo entero n y, en efecto, constituye una transformación de cadenas

$$\pi : H(C) \otimes H(D) \to H(C \otimes D)$$

de las sucesiones descendentes $H(C) \otimes H(D)$ y $H(C \otimes D)$ con borde trivial .

Teorema 46 *Si $Z_n(D)$ y $B_n(D)$ son R-módulos planos para todo entero n, entonces existe un homomorfismo $\theta : H_n(C \otimes D) \to \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1}$ para todo entero n tal que la siguiente sucesión es exacta:*

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\pi} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1} \to 0$$

Prueba. Los módulos planos $Z_n = Z_n(D)$ y $Q_n = D_n/Z_n \approx B_{n-1}(D)$, constituyen sucesiones descendentes Z y Q con borde trivial. Así obtenemos una sucesión exacta corta $0 \to Z \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} Q \to 0$ de sucesiones descendentes sobre R, donde f denota la inclusión y g la proyección natural. Como Q_q es plano para todo entero q, tenemos $Tor(C_p, Q_q) \approx Tor(Q_q, C_p) = 0$ para todo p y q. Por (teor. 31) esto implica que la siguiente sucesión

$$0 \to C \otimes Z \xrightarrow{i \otimes f} C \otimes D \xrightarrow{i \otimes g} C \otimes Q \to 0$$

es exacta, donde $i : C \to C$ designa la transformación de cadenas identidad. Aplicando (teor. 12) a esta sucesión exacta corta de sucesiones descendentes sobre R obtenemos una sucesión exacta corta

$$H_{n+1}(C \otimes Q) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_{n+1}(C \otimes Z) \xrightarrow{(i \otimes f)_*} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{(i \otimes g)_*} H_n(C \otimes Q) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C \otimes Z)$$

Para todo entero n, donde ∂_n y ∂_{n+1} representan los homomorfismos de conexión. Por consiguiente obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to Coker(\partial_{n+1}) \xrightarrow{\phi} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\psi} Ker(\partial_n) \to 0$$

donde ϕ y ψ están inducidos por $(i \otimes f)_*$ y $(i \otimes g)_*$ respectivamente. Por la definición el módulo de homología $H_q(D)$ de la sucesión descendente D, obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to Q_{n+1} \xrightarrow{\xi_q} Z_q \xrightarrow{\eta_q} H_q(D) \to 0$$

para todo entero q, donde ξ_q está inducido por $\partial_{q+1} : D_{q+1} \to D_q$ y η_q es la proyección natural. Como Z_q se ha supuesto plano, tenemos

$$Tor[H_p(C), Z_q] \approx Tor[Z_q, H_p(C)] = 0$$

para todo par de enteros p y q. Por (teor. 31) esto implica que la siguiente sucesión

$$0 \to Tor[H_p(C), H_q(D)] \xrightarrow{\partial} H_p(C) \otimes Q_{q+1} \xrightarrow{i_p \otimes \xi_q} H_p(C) \otimes Z_q \xrightarrow{i_p \otimes \eta_q} H_p(C) \otimes H_q(D) \to 0$$

es exacta para todo p y q, donde ∂ es el homomorfismo de conexión e i_p representa el endomorfismo identidad de $H_p(C)$ Puesto que Z_q y Q_{q+1} son planos para todo entero q, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{p+q=n} Hom_p\,(C) \otimes Q_{q+1} & \overset{h_{n+1}}{\rightarrow} & \sum\limits_{p+q=n} Hom_p\,(C) \otimes Z_q \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \mu \\ Hom_{n+1}\,(C \otimes Q) & \overset{\partial_{n+1}}{\rightarrow} & Hom_n\,(C \otimes Z) \end{array}$$

para todo entero n, donde h_{n+1} es la suma directa $h_{n+1} = \sum_{p+q=n} i_p \otimes \xi_q$, λ y μ son los isomorfismos dados por (lema 24) y δ_{n+1} es el homomorfismo conexión construido anteriormente para nuestro caso particular tenemos

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow C_p \otimes Z_{p+q} & \overset{i_p \otimes f}{\rightarrow} & C_p \otimes D_{q+1} & \overset{i_p \otimes g}{\rightarrow} & C_p \otimes Q_{q+1} \rightarrow 0 \\ i_p \otimes \xi_{q+1} \downarrow & & i_p \otimes_{q+1} \downarrow & & i_p \otimes \partial_{q+1} \downarrow \\ 0 \rightarrow C_p \otimes Z_{p+q} & \overset{i_p \otimes f}{\rightarrow} & C_p \otimes D_{q+1} & \overset{i_p \otimes g}{\rightarrow} & C_p \otimes Q_{q+1} \rightarrow 0 \\ & & x \otimes \partial_{q+1}(y) \leftarrow x \otimes \partial_{q+1}(y) & & \end{array}$$

y así $\partial^*_{n+1}(x \otimes (y + ker\partial_{q+1})) = x \otimes \partial_{q+1}(y)$ con ∂^*_{n+1} así definido probemos que el diagrama superior es conmutativo. Sea $(\bar{x} \otimes \bar{y}) \in H_p(C) \otimes Q_{q+1}$ donde $\bar{x}$, $\bar{y}$ son clases

$$\partial^*_{n+1}(\lambda(x \otimes y)) = \partial^*_{n+1}(x \otimes y) = x \otimes \partial_{q+1}(y)$$
$$u(\lambda_{n+1}(\bar{x} \otimes \bar{y})) = u(\bar{x} \otimes \bar{\partial}_{q+1}(y)) = x \otimes \partial_{q+1}$$

luego el diagrama es conmutativo.
Consideremos la suma directa de la sucesión exacta precedente para todos los enteros p, q tales que $p + q = n$ y haciendo uso de este rectángulo conmutativo, obtenemos una sucesión exacta:

$$0 \rightarrow \{Tor\,[H\,(C)\,, H\,(D)]\}_n \overset{\alpha}{\rightarrow} H_{n+1}\,(C \otimes Q) \overset{\partial_{n+1}}{\rightarrow} H_n\,(C \otimes Z) \overset{\beta}{\rightarrow} \{H\,(C) \otimes H\,(D)\}_n \rightarrow 0$$

Debido a la exactitud de esta sucesión, los homomorfismos α y β inducen dos isomorfismos

$$\alpha_{n+1}* : \{Tor\,[H\,(C)\,, H\,(D)]\}_n \approx Ker\,(\partial_{n+1})$$

$$\beta_{n+1}* : Coker\,(\partial_{n+1}) \approx \{H\,(C) \otimes H\,(D)\}_n$$

para todo entero n. Se comprueba que $\pi = \phi\ o\ \left(\beta^*_{n+1}\right)^{-1}$.
Por otra parte $\theta = (\alpha_{n+1}*)^{-1} \circ \psi$. Entonces obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \{H\,(C) \otimes H\,(D)\}_n \overset{\pi}{\rightarrow} H_n\,(C \otimes D) \overset{\theta}{\rightarrow} \{Tor\,[H\,(C)\,, H\,(D)]\}_{n-1} \rightarrow 0$$

y como $Im(\phi \circ (\beta_{n+1})^{-1}) = Im\phi$ y $ker((\alpha^*_n)^{-1} \circ \psi) = ker(\psi)$ de esto concluimos que la sucesión es una sucesión exacta corta. Lo que completa la demostración. ||

Corolario 31 *Si $Z_n\,(D)$ y $H_n\,(D)$ son R-módulos proyectivos para todo entero n, entonces*

$$\pi : \{H\,(C) \otimes H\,(D)\}_n \rightarrow H_n\,(C \otimes D)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Prueba. Como $H_n(D)$ es proyectivo, la sucesión exacta corta

$$0 \to B_n(D) \xrightarrow{\alpha} Z_n(D) \xrightarrow{\beta} H_n(D) \to 0$$

se descompone de acuerdo con (teor. 26 b). Aquí α denota el homomorfismo inclusión y β representa la proyección natural. Por (teor. 10), esto implica que $B_n(D)$ es isomorfo a un sumando directo de $Z_n(D)$. Puesto que $Z_n(D)$ es proyectivo, se deduce de (prop. 39) que $B_n(D)$ es también proyectivo. En virtud de (prop. 55), $Z_n(D)$ y $B_n(D)$ son R-módulos planos. Por consiguiente, podemos aplicar (teor. 46) a este caso. Por otra parte, como $H_n(D)$ es proyectivo para todo entero n, tenemos

$$Tor\,[H_p(C), H_q(D)] \approx Tor\,[H_q(C), H_p(D)] = 0$$

para todo par de enteros p y q. Esto implica $\{Tor\,[H(C), H(D)]\}_{n-1} = 0$ para todo entero n. Por tanto la exactitud de la sucesión de (teor. 46) implica que π es un isomorfismo para todo entero n. $||$

Corolario 32 *Si C y D son sucesiones descendentes de espacios vectoriales sobre un cuerpo R, entonces $\pi : \{H(C) \otimes H(D)\}_n \to H_n(C \otimes D)$ es un isomorfismo para todo entero n.*

Teorema 47 *fórmula de Kunneth para homología..*
Si C y D son sucesiones descendentes de módulos libres sobre un dominio R de ideales principales, entonces existe un homomorfismo

$$\theta : H_n(C \otimes D) \to \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1}$$

para todo entero n tal que

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\pi} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1} \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible y, por consiguiente, tenemos

$$H_n(C \otimes D) \approx \{H(C) \otimes H(D)\}_n \oplus \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1}$$

para todo entero n

Prueba. Por ser súbmodulos de un módulo libre D_n sobre un dominio R de ideales principales, los módulos $Z_n(D)$ y $B_n(D)$ son libres y por tanto planos. Por lo tanto, podemos aplicar (teor. 46) a este caso y obtenemos el homomorfismo θ, así como la sucesión exacta corta

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\pi} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1} \to 0$$

para todo entero n. Queda por probar que esta sucesión exacta corta se descompone. Para ello consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to Z_n(C) \xrightarrow{\alpha_n} C_n \xrightarrow{\beta_n} B_{n-1} \to 0,$$

donde α_n denota el homomorfismo inclusión y β_n está definido por $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$. Por ser submódulo de un módulo libre C_{n-1} sobre un dominio de ideales principales R, $B_{n-1}(C)$ es libre y por tanto proyectivo por (teor. 26 b), se deduce que la precedente sucesión exacta corta se descompone. De acuerdo con (cor. 13 b), esto implica que el homomorfismo α tiene un inverso por la izquierda, esto es un homomorfismo $\gamma : C_n \to Z_n(C)$ tal que $\tau_n \circ \alpha_n$ es el endomorfismo identidad del módulo $Z_n(C)$. Sea $\delta : Z_n(C) \to H_n(C)$ la proyección natural. Entonces obtenemos un homomorfismo definido $C_n \xrightarrow{\gamma_n} Z_n(C) \xrightarrow{\delta_n}$

$H_n(C)$, $\phi_n = \delta_n \circ \gamma_n : C_n \to H_n(C)$ con $\phi_n|Z_n(C) = \phi \circ \alpha = \delta_n \circ \tau_n\alpha_n = \delta_n$. Análogamente, existe un homomorfosmo $\psi_n : D_n \to H_n(D)$ tal que $\psi_n|Z_n(D)$ es la proyección natural de $Z_n(D)$ sobre $H_n(D)$. Para enteros arbitrarios p y q, consideremos el producto tensorial $\phi_p \otimes \psi_q : C_p \otimes D_q \to H_p(C) \otimes H_q(D)$. Estos homomorfismos constituyen una transformación de cadenas

$$\phi \otimes \psi : C \otimes D \to H(C) \otimes H(D)$$

de las sucesiones descendentes $C \otimes D$ y $H(C) \otimes H(D)$ porque claramente se anula sobre los bordes $C \otimes D$. Por tanto $\phi \otimes \psi$ induce un homomorfismo

$$(\phi \otimes \psi)_* : H_n(C \otimes D) \to \{H(C) \otimes H(D)\}_n$$

para todo entero n. Como $\phi_n|Z_p(C)$ y $\psi_q|Z_n(D)$ son las proyecciones naturales. Tenemos $\pi_{pq}(\phi_p \otimes \psi_q) = \pi_{rq}(\bar{x} \otimes \bar{y}) = x \otimes y$ que es la identidad en el módulo $H_n(C \otimes D)$, se verifica fácilmente que $(\phi \otimes \psi)_*$ es inverso por la izquierda de π. Por (cor. 13), esto implica que la sucesión exacta corta de (teor. 47) se descompone y por tanto (teor. 47) queda probado. ||

Para generalizar (teor. 47) a una clase más amplia de sucesiones descendentes sobre R, necesitamos el siguiente lema.

Lema 25 *Si C y D son sucesiones descendentes de módulos sobre un dominio R de ideales principales, entonces la sucesión descendente $C \otimes D$ es exacta con tal que se satisfagan las dos condiciones siguientes:*

(a) *Para todo entero n, D_n es un R-módulo libre.*

(b) *O bien C o bien D es exacta.*

Prueba. Como en la demostración de (teor. 47), podemos aplicar (teor. 46) a este caso y obtener una sucesión exacta corta

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\pi} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1} \to 0$$

para todo entero n. Como C o D es exacta debemos tener

$$\{H(C) \otimes H(D)\}_n = 0, \qquad \{Tor[H(C), H(D)]\}_n = 0$$

para todo entero n. En consecuencia, tenemos $H_n(C \otimes D) = 0$ para todo entero n. Esto implica que la sucesión descendente $C \otimes D$ es exacta ||

Mediante aproximaciones libres de C y D, establecemos la siguiente generalízación del (teor. 47).

Teorema 48 *Si C y D son sucesiones descendentes de módulos sobre sobre un dominio R de ideales principales, tales que la sucesión descendente $Tor(C, D)$ es exacta, entonces existe un homomorfismo*

$$\theta : H_n(C \otimes D) \to \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1}$$

para todo entero n tal que

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\pi} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1} \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por lo tanto, tenemos

$$H_n(C \otimes D) \approx \{H(C) \otimes H(D)\}_n \oplus \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1}$$

para todo enteo n.

Prueba. En virtud del (lema 19), existen aproximaciones libres $f : C' \to C$, $g : D' \to D$ de las sucesiones descendentes dadas C y D respectivamente. Consideremos la sucesión exacta corta $0 \to D'' \xrightarrow{j} D' \xrightarrow{g} D \to 0$ de la aproximación libre $g : D' \to D$, donde j representa la inclusión. Como D'_n es libre y por tanto proyectivo para todo n, tenemos $Tor(C, D') = 0$. Por consiguiente, se deduce de (teor. 31) que

$$\cdots \to Tor(C, D) \xrightarrow{\partial} C \otimes D'' \xrightarrow{i\otimes j} C \otimes D'' \xrightarrow{i\otimes g} C \otimes D \to 0$$

es una sucesión exacta de sucesiones descendentes, donde i representa la trasformación de cadenas identidad de la sucesión descendente C. Por nuestra hipótesis, $Tor(C, D)$ es exacta. Por otra parte, como D'' es libre y exacta en virtud de (lema 20), se sigue que $C \otimes D''$ es también exacta. Como en la demostración de (teor. 41), esto implica que el homomorfismo inducido

$$i \otimes g : Hom_n(C \otimes D') \to Hom_n(C \otimes D)$$

es isomorfismo para todo entero n. Considerando ahora la sucesión exacta corta

$$0 \to C'' \xrightarrow{\epsilon} C' \xrightarrow{f} C \to 0$$

de la aproximación libre $f : C' \to C$, donde ϵ representa la inclusión. Como D'_n es libre y por tanto proyectivo para todo n, determina una sucesión exacta corta

$$0 \to C'' \otimes D' \xrightarrow{\epsilon\otimes i'} C' \otimes D' \xrightarrow{C''\otimes D'} C \otimes D' \to 0$$

Aquí i' representa la trasformación de cadenas identidad de la sucesión descendente D'. Por (lema 25), la sucesión descendente $C'' \otimes D'$ es exacta. Esto implica que el homomorfismo inducido

$$\alpha_n = (f \otimes i')_* : H_n(C' \otimes D') \to H_n(C \otimes D')$$

es isomorfismo para todo entero n. De acuerdo con la condición (C3) para las aproximaciones libres $f : C' \to C$ y $g : D' \to D$, los homomorfismos inducidos

$$f_{*n} : H_n(C') \to H_n(C), \qquad g_{*n} : H_n(D') \to H_n(D)$$

son isomorfismos para todo entero n. Luego los homomorfismos

$$\beta_n = \sum_{p+q=n} f_{*n} \otimes g_{*n} : \{H(C') \otimes H(D')\}_n \to \{H(C) \otimes H(D)\}_n$$

$$\gamma_n \sum_{p+q=n} Tor(f_{*n}, g_{*n}) : \{Tor[H(C'), H(D')]\}_n \, \{Tor[H(C), H(D)]\}_n$$

son isomorfismos para todo entero n. Puesto que C'_n y D'_n son R-módulos libres, podemos, aplicar (teor. 47) a las sucesiones descendentes C' y D' para obtener una sucesión exacta corta

$$0 \to \{H(C') \otimes H(D')\}_n \xrightarrow{\pi'} H_n(C' \otimes D') \xrightarrow{\theta'} \{Tor[H(C'), H(D')]\}_{n-1} \to 0$$

descomponible. Definamos un homomorfismo $\theta : H_n(C \otimes D) \to \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1}$ para todo entero n tomando $\theta = \gamma_{n-1} \circ \theta' \circ \alpha_n^{-1}$. Queda por establecer que

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\pi} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1} \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible. Para ello consideremos el siguiente diagrama

$$0 \to \{H(C') \otimes H(D')\}_n \xrightarrow{\pi'} H_n(C' \otimes D') \xrightarrow{\theta'} \{Tor[H(C'), H(D')]\}_{n-1} \to 0$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\downarrow \beta_n & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \gamma_{n-1} \\
0 \to \{H(C)\otimes H(D)\}_n & \xrightarrow{\pi} & H_n(C\otimes D) & \xrightarrow{\theta} & \{Tor[H(C),H(D)]\}_{n-1} \to 0
\end{array}
$$

Por definición de π y π' dada al principio de esta sección, el rectángulo de la izquierda es claramente conmutativo. La definición de θ dada antes implica que el rectángulo de la derecha también es conmutativo. Puesto que los homomorfismos verticales son isomorfismos y la fila superior es una sucesión exacta corta descomponible, se puede comprobar fácilmente mediante la conmutatividad de los rectángulos que la fila inferior es también una sucesión exacta corta descomponible. Esto completa la demostración de (teor. 48) ||

Para el caso particular en que

$$D_n = \begin{cases} G & (\text{si } n = 0), \\ 0 & (\text{si } n \neq 0) \end{cases}$$

(teor. 47 y teor. 48) se reducen a (teor. 20 y cor. 31), respectivamente. Por tanto la fórmula de Kunneth es una generalización del Teorema de Coeficiente Universal para homología. De manera parecida, se puede proceder con sucesiones ascendentes (complejos de cocadenas) C y D de R-módulos y deducir resultados análogos a (lema. 22, teor. 48).

De aquí en adelante, C y D denotarán sucesiones ascendentes arbitrariamente dadas (complejos de cocadenas) de R-módulos. Para todo entero n, consideremos la suma directa $E^n = \sum_{p+q=n} C^p \otimes D^q$ y el homomorfismo

$$
\begin{aligned}
\delta^n : &\quad E_{n-1} \to E_n \\
\delta^n : &\quad \sum_{p+q=n-1} C^p \otimes D^q \to \sum_{p+q=n} C^p \otimes D^q
\end{aligned}
$$

definido sobre los generadores $\delta^n(x\otimes y) = \delta^p(x)\otimes y + (-1)^p x \otimes \delta^q(y)$. Haciendo la composición $\delta^{n+1}\circ\delta^n$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\delta^{n+1}\circ(\delta^n(x\otimes y)) \quad &= \delta^{n+1}(\delta^p(x)\otimes y + (-1)^p x\otimes \delta^q(y)) \\
&= \delta^{n+1}(\delta^p(x)\otimes y) + (-1)^p \delta^{n+1}(x\otimes\delta^q(y)) \\
&= \delta^{p+1}(\delta^p(x))\otimes y + (-1)^{p+1}\delta^p(x)\otimes\delta^q(y) + \\
&\qquad (-1)^p[\delta^p(x)\otimes\delta^q(y) + (-1)^{p+1}\otimes\delta^{q+1}\delta^q(y)] \\
&= (-1)^{p+1}\delta^p(x) + (-1)^p\delta^p(x)\otimes\delta^q(y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

y así $\delta^{n+1}\circ(\delta^n(x\otimes y)) = 0$, por lo que obtenemos una sucesión ascendente

$$E : \cdots \to E_{n-1} \xrightarrow{\delta^n} E_n \xrightarrow{\delta^{n+1}} E_{n+1} \to \cdots$$

de R-módulos, que recibe el nombre de *producto tensorial sobre* R de las sucesiones ascendentes dadas C y D se denotarán por $E = C\otimes D$. Si C y D son positivas, esto es, si $C^n = 0$ y $D^n = 0$ para todo entero negativo n, entonces igual sucede con su producto tensorial $E = C\otimes D$. En este caso tenemos también la suma directa finita $E^n = \sum_{p=0}^{n} C^n \otimes D^{n-p}$ para todo entero no negativo n. Para todo par de enteros p y q en particular, definamos un homomorfismo

$$
\begin{aligned}
\pi^{pq} \qquad &: H^p(C)\otimes H^q(\bar{D}) \to H^{p+q}(C\otimes D) \\
&\frac{ker\delta^{p+1}}{Im\delta^p} \otimes \frac{ker\delta^{q+1}}{Im\delta^q} \to \frac{ker\delta^{n+1}}{Im\delta^n} \\
&(x + Im\delta^p)\otimes(y + Im\delta^n) \to (x\otimes y) + Im\delta^n
\end{aligned}
$$

es fácil verificar que $(x \otimes y) \in ker\delta^{n+1}$ y que π^{pq} está bien definida. Para todo entero n en una forma semejante la suma directa realizada

$$\pi = \sum_{p+q=n} \pi^{pq} : \{H(C) \otimes H(D)\}^n \to H^n(C \otimes D)$$

Este homomorfismo π se denotará *producto de cohomología* de la sucesiones ascendentes C y D. De la manera siguiente

$$\sum_{p+q=n} \sum_{i=1}^{mpq} ((x_{ip} + Im\delta^p) \otimes (y_{iq} + Im\delta^q)) \to \sum_{p+q=n} \sum_{i=1}^{mpq} (x_{ip} \otimes y_{iq}) + Im\delta^n$$

En particular si

$$D^n = \begin{cases} G \text{ (si } n = 0) \\ 0 \text{ (si } n \neq 1) \end{cases}$$

donde G es un R-módulo arbitrariamente dado, tenemos $E^n = C^n \otimes G$ para todo entero n y por consiguiente $C \otimes D$ se deduce al producto tensorial $C \otimes G$ definido en la sección precedente, además

$$D^n = \begin{cases} G \text{ (si } n = 0) \\ 0 \text{ (si } n \neq 1) \end{cases}$$

es el producto de cohomología π se reduce al homomorfismo

$$j : H^n(C) \otimes G \to H^n(C \otimes D)$$

Lema 26 *Si G es un R-módulo plano, entonces*

$$\pi = j : H^n(C) \otimes G \to H^n(C \otimes D)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Prueba. Sea n un entero arbitrariamente dado. Designemos

$$B^n = B^n\,(C) \qquad Z^n = Z^n\,(C) \qquad H^n = H^n\,(C)$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \\
0 \to & & Im(\delta^n) & \xrightarrow{e} & ker(\delta^{n+1}) & \xrightarrow{p} & \dfrac{ker(\delta^{n+1})}{Im(\delta^n)} \to 0 \\
 & & \uparrow \tilde{\delta}_n & & \downarrow f & & \\
 & & C^{n-1} & \xrightarrow{\partial_n} & C^n & & \\
 & & & & \downarrow \delta^{n+1} & & \\
 & & & & C^{n+1} & &
\end{array}$$

donde δ^n y δ^{n+1} son los homomorfismos de la sucesión ascendente C e y f son homomorfismos inclusión y p es la proyección natural de Z^n sobre su módulo cociente $H^n = Z^n/B^n$. Las filas y columnas de este diagrama son evidentemente exactas. Efectuando los productos tensoriales con el homomorfismo identidad $i : G \to G$, obtenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\uparrow & & \downarrow \\
0 \to Im(\partial_{n+1}) \otimes G & \to & ker(\partial_n) \otimes G \to \dfrac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})} \otimes G \to 0 \\
\uparrow \tilde{\partial}_{n+1} \otimes i & & \downarrow f \otimes i \\
C_{n+1} \otimes G & \overset{\partial_{n+1} \otimes i}{\to} & C_n \otimes G \\
& & \downarrow \partial_n \otimes i \\
& & C_{n-1} \otimes G
\end{array}$$

Como G es plano, se deduce, que es una consecuencia inmediata de (teor. 32),(cor. 21) que las filas y columnas de este diagrama de productos tensoriales son también exactas. De la exactitud de la fila larga, se deduce que $p \otimes i$ es un epimorfismo e induce un isomorfismo

$$k = (p \otimes i)_* : Z^n \otimes G / Im\,(e \otimes i) \approx \frac{(ker\delta^{n+1} \otimes G)}{ker(p \otimes i)} \approx H^n \otimes G$$

ya que $Im(e \otimes i) = ker(p \otimes i)$ por la exactitud de la fila. La exactitud de la columna corta implica que $\tilde{\delta}^n \otimes i$ es epimorfismo, mientras que la exactitud de la columna larga implica que $f \otimes i$ es monomorfismo y que

$$Im\,(f \otimes i) = Ker\left(\delta^{n+1} \otimes i\right)$$

puesto que el triángulo es conmutativo y $\delta^n \otimes i$ es epimorfismo

$$\begin{aligned} Im\,((f \otimes i) \circ e \otimes i) \qquad &= Im(\delta^n \otimes i) \\ &f \otimes i(Im(e \otimes i)) \end{aligned}$$

En consecuencia, el homomorfismo $f \otimes i$ induce un isomorfismo

$$\lambda = (f \otimes i)_* : \frac{ker\delta n + 1 \otimes G}{Im(e \otimes i)} \approx \frac{ker(\delta n + 1 \otimes i)}{Im(\delta_n \otimes i)}$$

ya que

$$0 \to ker\delta^{n+1} \otimes G \to C^n \otimes G$$

$$0 \to \frac{ker\delta^{n+1} \otimes G}{Im(e \otimes i)} \to \frac{ker\delta^{n+1} \otimes i}{Im\delta^n \otimes i}$$

por que $(f \otimes i)(Im(e \otimes i)) = Im(\delta^n \otimes i)$, considerando que

$$H^n(C) \otimes G \xrightarrow{k} \frac{ker\delta^{n+1} \otimes G}{Im(e \otimes i)} \xrightarrow{\lambda} H^n(C \otimes G)$$

obtenemos $j = \lambda \circ k = j : H^n(C) \otimes G \to H^n(C \otimes G)$ es un isomorfismo y completa la demostración. ||

Más generalmente, sea q un entero. Si $D^n = 0$ para todo $n \neq q$, entonces tenemos

$$H^n(D) = \begin{cases} D & (si\ n = q) \\ 0 & (si\ n \neq q \end{cases}$$

En este caso, el producto de homología π es

$$\pi = j : H^{n-q}\,(C) \otimes D^q \to H^n\,(C \otimes D)$$

Análogamente se puede establecer el siguiente Lema:

Lema 27 *Si $D^n = 0$ para todo $n \neq q$ y D^q es un R-módulo plano, entonces*

$$\pi = j : H^{n-q}(C) \otimes D^q \to H^n(C \otimes D^q)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Prueba. Sea n un entero arbitrariamente dado designemos con

$$B^{n-q} = B^{n-q}(C), \quad z^{n-q} = z^{n-q}(C) \text{ y } H^{n-q} = H^{n-q}$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Im(\partial^{n-q}) \arrow[u] \arrow[r, "e"] & ker(\delta^{n-q+1}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & \dfrac{ker(\delta^{n-q+1})}{Im(\delta^{n-q})} \arrow[r] & 0 \\
 & C^{n-q-1} \arrow[u, "\tilde{\delta}_{n-q}"] \arrow[r, "\delta^{n-q}"] & C^{n-q} \arrow[d, "\delta^{n-q+1}"] & & \\
 & & C^{n-q+1} & &
\end{tikzcd}$$

donde δ^{n-q} y δ^{n-q+1} son los homomorfismos de la sucesión descendente C. e y f son los homomorfismos inclusión y p es la proyección natural del Z^{n-q} sobre un módulo cociente $H^{n-q}(C)$. Las filas y columnas de este diagrama son exactas. Efectuando los productos tensoriales con el homomorfismo identidad $i : D^q \to D^q$, obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Im\delta^{n-q} \otimes D^q \arrow[u] \arrow[r, "e\otimes i"] & ker\delta^{n-q+1} \otimes D^q \arrow[r, "p\otimes i"] \arrow[d, "f\otimes i"] & \dfrac{ker(\delta^{n-q+1})}{Im(\delta^{n-q})} \otimes D^q \arrow[r] & 0 \\
 & C^{n-q-1} \otimes D^q \arrow[u, "\tilde{\delta}^{n-q}\otimes i"] \arrow[r, "\delta^{n-q}\otimes i"] & C^{n-q} \otimes D^q \arrow[d, "\delta^{n-q+1}\otimes i"] & & \\
 & & C^{n-q+1} \otimes D^q & &
\end{tikzcd}$$

como D^q es plano, se deduce que las filas y columnas de este diagrama de productos tensoriales son también exactas. De la exactitud de la fila larga, se deduce que $p \otimes i$ es epimorfismo e induce un isomorfismo

$$k = (p \otimes i)_* : H^{n-q}(C) \otimes D^q \to \frac{ker\delta^{n-q+1} \otimes D^q}{Im(e \otimes i)}$$

De la exactitud de la columna corta implica que $\tilde{\delta}^{n-q} \otimes i$ es epimorfismo, mientras que la exactitud de la culumna larga implica que $f \otimes i$ es monomorfismo y que $Im(f \otimes i) = ker(\delta^{n-q+1} \otimes i)$ puesto que el rectángulo es conmutativo y $\tilde{\delta}^{n-q} \otimes i$ es epimorfismo

$$\begin{aligned}
Im(f \otimes i \circ e \otimes i) \quad &= Im\delta^{n-q} \otimes i \\
&= f \otimes i(Im(e \otimes i))
\end{aligned}$$

En consecuencia, el homomorfismo $f \otimes i$ induce un isomorfismo.

$$\lambda = (f \otimes i)_* = \frac{ker\delta^{n-q+1} \otimes D^q}{Im(e \otimes i)} \approx \frac{ker(\delta^{n-q+1} \otimes i)}{Im(\delta^{n-q} \otimes i)}$$

ya que

$$0 \to ker\delta^{n-q+1} \otimes D^q \to C^{n-q} \otimes D^q$$

$$0 \to \frac{ker\delta^{n-q+1} \otimes D^q}{Im(e \otimes i)} \approx \frac{ker(\delta^{n-q+1} \otimes i)}{\delta^{n-q} \otimes i}$$

por que $(f \otimes i)(Im(e \otimes i)) = Im(\delta^{n-q} \otimes i)$ considerando

$$H^{n-q}(C) \otimes D^q \to \frac{ker\delta^{n-q+1} \otimes D^q}{Im(e \otimes i)} \xrightarrow{\lambda} \frac{ker(\delta^{n-q+1} \otimes i)}{Im(\delta^{n-q} \otimes i)}$$

luego

$$j = \lambda \circ k : H^{n-q} \otimes D^q \to \frac{ker(\delta^{n-q+1} \otimes i)}{Im(\delta^{n-q} \otimes i)}$$

$$j = \pi : H^{n-q}(C) \otimes D^q \to H^n(C \otimes D)$$

es isomorfismo.||

Una sucesión ascendente D de R-módulos se dice que tiene coborde trivial si y sólo si $\delta_1^n : D^{n-1} \to D^n$ es el homomorfismo trivial cero para todo entero n. Si D tiene coborde trivial, entonces tenemos $H^n(D) = D^n$ para todo entero n. En este caso el producto de cohomología π es

$$\pi = \sum_{p+q=n} H^p(C) \otimes D^q \to H^n(C \otimes D)$$

Además, D es la suma directa de los D^q considerados como sucesiones ascendentes y por tanto tenemos

$$H^n(C \otimes D) = \sum_{q \in Z} H^n(C \otimes D^q)$$

Lema 28 *Si D tiene coborde trivial y D^n es un R-módulo plano para todo entero n, entonces*

$$\pi = \sum_{p+q=n} H^p(C) \otimes D^q \to H^n(C \otimes D)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Prueba. Por (lema 27) tenemos $\pi^{(n-q)q} : H^{n-q}(C) \otimes D^q \to H^n(C \otimes D^q)$ es un isomorfismo y así

$$\sum \pi^{(n-q)q} : \sum_{q \in Z} H^{n-q}(C) \otimes D^q \to \sum_{q \in Z} H^(C \otimes D^q)$$

y como la suma de isomorfismos es isomorfismo tenemos

$$\pi_{pq} : \sum_{p+q=n} H^p(C) \otimes D^q \to \sum_{q \in Z} H^n(C \otimes D_q)$$

es un isomorfismo. Para todo entero n, consideremos la suma directa

$$F_n = \sum_{p+q=n} Tor(C^p, D^q)$$

y el homomorfismo

$$\begin{aligned} \partial_n : &\quad F_{n-1} \to F_n \\ \partial_n : &\quad \sum_{p+q=n-1} Tor(C^p, D^q) \to \sum_{p+q=n} Tor(C^p, D^q) \end{aligned}$$

definido por $\partial_n / Tor(C^p, D^q) = Tor(\delta^p, i_q) + (-1)^p Tor(i_p, \delta^q)$ donde $\delta^p : C^{p-1} \to C^p$, $\delta^q : D^{q-1} \to D^q$ son los homomorfismos identidad. Si realizamos $\delta^{n-1} \circ \delta^n$ tenemos que

$$\delta^{n+1} / Tor(C^{p+1}, D^q) = Tor(\delta^{p+1}, i_q) + (-1)^{p+1}(i_{p+1}, \delta^q)$$

y

$$\delta^{n+1} / Tor(C^p, D^{q+1}) = Tor(\delta^p, i_{q+1}) + (-1)^{p+1}(i_p, \delta^{q+1})$$

Aplicando

$$\big(Tor(\delta^{p+1}, i_q) + (-1)^{p+1}(i_{p+1}, \delta^q)\big) \circ Tor(\delta^p, i_q) + (-1)^p Tor(\delta^p, i_{q+1}) + (-1)^p (i_p, \delta^{q+1}) \circ Tor(i_p, \delta^q)$$

$$= Tor(\delta^{p+1} \circ \delta^p, i_q) + (-1)^{p+1}(i_{p+1}, \delta^q) + (-1)^p Tor(\delta^p, \delta^q) + (-1)^{2p} Tor(i_p, \delta^{q+1}\delta^q) = 0$$

De lo anterior tenemos que $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$. Obteniendo así una sucesión ascendente

$$F : \ldots \to F^{n-1} \xrightarrow{\delta^n} F^n \xrightarrow{\delta^{n+1}} F^{n+1} \to \ldots$$

de R-módulos, que se llama *producto torsión* sobre R de las sucesiones ascendentes dadas C y D y se denotará por $F = Tor\,(C, D)$. Si las sucesiones descendentes dadas C y D son positivas, entonces también lo es $F = Tor\,(C, D)$. En este caso, tenemos también la suma directa finita

$$F^n = \sum_{p=0}^{n} Tor\left(C^p, D^{n-p}\right)$$

para todo entero no negativo n. Los módulos de cohomología $H^n(C)$ de cualquier sucesión ascendente sobre R para todo entero n constituyen una sucesión ascendente $H(C)$ con borde trivial. Por tanto las sucesiones descendentes

$$H(C) \otimes H(D), \quad Tor\,[H(C), H(D)]$$

están bien definidas y tienen coborde trivial. Para todo entero n, sus componentes n-dimensionales son $\{H(C) \otimes H(D)\}^n = \sum_{p+q=n} H^p(C) \otimes H^q(D)$

$$\{Tor\,[H(C), H(D)]\}^n = \sum_{p+q=n} Tor\,[H^p(C), H^q(D)]$$

Por medio de ellas, el producto de homología π de las sucesiones descendentes dadas C y D es $\pi : \{H(C) \otimes H(D)\}^n \to H^n(C \otimes D)$ para todo entero n y, por tener coborde trivial constituye una transformación de cadenas

$$\pi : H(C) \otimes H(D) \to H(C \otimes D)$$

de las sucesiones descendentes $H(C) \otimes H(D)$ y $H(C \otimes D)$ con borde trivial .

Teorema 49 *Si $Z^n(D)$ y $B^n(D)$ son R-módulos planos para todo entero n, entonces existe un homomorfismo $\theta : H^n(C \otimes D) \to \{Tor\,[H(C), H(D)]\}_{n-1}$ para todo entero n tal que la siguiente sucesión es exacta:*

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\pi} H^n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor\,[H(C), H(D)]\}_{n-1} \to 0$$

Prueba. Los módulos planos $Z^n = ker\delta^{n+1}$ $Q^n = D^n/ker\delta^{n+1}$. Constituyen sucesiones descendentes Z y Q con coborde trivial. Así obtenemos una sucesión exacta corta $0 \to Z \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} Q \to 0$ de sucesiones ascenentes sobre R, donde f denota la inclusión y g la proyección natural. Como Q_q es plano para todo entero q, tenemos $Tor\,(C^p, Q^q) \approx Tor\,(Q^q, C^p) = 0$ para todo p y q. Por (teor. 31) esto implica que la siguiente sucesión

$$0 \to C \otimes ker\delta \overset{i\otimes f}{\to} C \otimes D \overset{i\otimes g}{\to} C \otimes Q \to 0$$

es exacta, donde $i : C \to C$ designa la transformación de cadenas identidad. Aplicando (teor. 12) a esta sucesión exacta corta.

$$H^{n-1}(C \otimes Q) \xrightarrow{\delta^n} H^n(C \otimes Z)\, stackrel(i\otimes g)_* {\to} H^n(C \otimes D) \overset{(i\otimes f)_*}{\to} H^n(C \otimes Q) \overset{\delta^{n+1}}{\to} H^{n+1}(C \otimes Z)$$

Para todo entero n, donde δ^n y δ^{n+1} representan los homomorfismos de conexión. Por consiguiente obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to Coker\,(\delta^n) \xrightarrow{\psi} H^n(C \otimes D) \xrightarrow{\phi} Ker\left(\delta^{n+1}\right) \to 0$$

donde ψ y ϕ son inducidos por $(i \otimes f)_*$ y $(i \otimes g)_*$ respectivamente. Por la definición el módulo de cohomología $H^q(D)$ de la sucesión ascendente D, obtenemos una sucesión exacta corta $0 \to Q^{n+1} \xrightarrow{\xi_q} Z^q \xrightarrow{\eta_q} H^q(D) \to 0$ para todo entero q, donde ξ_q está inducido por $\delta^q : D^{q-1} \to D^q$ y η_q es la proyección natural. Como Z_q se ha supuesto plano, tenemos

$$Tor\,[H^p(C), Z^q] \approx Tor\,[Z^q, H^p(C)] = 0$$

para todo par de enteros p y q. Por (teor. 31) esto implica que la siguiente sucesión

$$0 \to Tor\,[H^p(C), H^q(D)] \to H^p(C) \otimes Q^q \overset{i_p\otimes\xi_q}{\to} H^p(C) \otimes H^{q+1}(D) \to 0$$

es exacta para todo p y q, donde δ^* es el homomorfismo de conexión e i_p representa el endomorfismo identidad de $H_p(C)$. Puesto que Z^q y Q^{q+1} son planos para todo entero q, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{p+q=n} H^p(C) \otimes Q^q & \to & \sum\limits_{p+q=n} H^p(C) \otimes Z^{q+1} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \mu \\ H^{n+1}(C \otimes Q) & \overset{\delta^{*\ n+1}}{\to} & H^{n+1}(C \otimes Z) \end{array}$$

para todo entero n, donde h_n es la suma directa $h_n = \sum_{p+q=n} i_p \otimes \xi_q$. λ y μ son los isomorfismos dados por (lema 28) y $\delta^{*\ n+1}$ es el homomorfismo conexión construido de forma similar a (teor. 12) similarmente a (teor. 46) se comprueba que este diagrama es conmutativo para todo entero n. Consideremos la suma directa de la sucesión exacta precedente para los enteros p, q tales que $p + q = n$ y haciendo uso de este rectángulo conmutativo, obtenemos una sucesión exacta:

$$0 \to \{Tor\,[H(C), H(D)]\}\ n \xrightarrow{\alpha} H^n(C \otimes Q) \overset{\delta^{*\ n+1}}{\to} H^{n+1}(C \otimes Z) \xrightarrow{\beta} \{H(C) \otimes H(D)\}^{n+1} \to 0$$

En forma parecida a (teor. 46) se comprueba que la sucesión

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\pi} H^n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor\,[H(C), H(D)]\}^{n+1} \to 0$$

es una sucesión exacta corta.||

Corolario 33 *Si $Z^n(D)$ y $H^n(D)$ son R-módulos proyectivos para todo entero n, entonces*

$$\pi : \{H(C) \otimes H(D)\} \to H^n(C \otimes D)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Prueba. Como $H^n(D)$ es proyectivo, la sucesión exacta corta

$$0 \to Im\delta^n(D) \xrightarrow{\alpha} ker\delta^{n+1}(D) \xrightarrow{\beta} \frac{\delta^{n+1}}{Im\delta^n}(D) \to 0$$

se descompone. Aquí α denota el homomorfismo inclusión y β representa la proyección natural. Por (teor. 10), esto implica que $Im\delta^n$ es isomorfo a un sumando directo de $Z^n(D)$. Puesto que $Z^n(D)$ es proyectivo, se deduce de (prop. 39) que $B^n(D)$ es también proyectivo. En virtud de (prop. 55) $Z^n(D)$ y $B^n(D)$ son R-módulos planos por consiguiente podemos aplicar (teor. 49) a este caso

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\pi} H^n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1} \to 0$$

y como $H^n(D)$ es proyectivo para todo n

$$Tor[H^p(C), H^q(D)] \approx Tor[H^q(C), H^p(D)] = 0$$

para todo par de enteros p y q y así $\{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1} = 0$ para todo entero n, por tanto la exactitud de la sucesión anterior implica que π es un isomorfismo para todo entero n. ||

Teorema 50 *Fórmula de Kunneth para Cohomología.*
Si C y D son sucesiones ascendentes de módulos libres sobre un dominio R de ideales principales, entonces existe un homomorfismo

$$\theta : H^n(C \otimes D) \to \{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1}$$

para todo entero n tal que

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\pi} H^n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1} \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible y, por consiguiente, tenemos

$$H^n(C \otimes D) \approx \{H(C) \otimes H(D)\}^n \oplus \{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1}$$

para todo entero n

Prueba. Por ser submódulos de un módulo libre D^n sobre un dominio R de ideales principales, los módulos $Z^n(D) = ker\delta^{n+1}$ y $B^n(D) = Im\delta^n$ son libres y por tanto planos, podemos aplicar (Teo. 46) a este caso y obtenemos el homomorfismo θ, así como la sucesión exacta corta

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\pi} H^n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1} \to 0$$

para todo entero n. Queda por probar que esta sucesión exacta corta se descompone. Para ello consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to ker\delta^{n+1} \xrightarrow{\alpha^n} C^n \xrightarrow{\beta^n} Im\delta^{n+1} \to 0,$$

donde α_n denota el homomorfismo inclusión y β_n está definido por $\delta^{n+1} : C^n \to C^{n+1}$. Por ser submódulo de un módulo libre C^{n+1} sobre un dominio de ideales principales R, la $Im\delta^{n+1}$ es libre y por tanto proyectivo por (teor. 26 b), se deduce que la precedente sucesión exacta corta se descompone. De acuerdo con (cor. 13 b), esto implica que el homomorfismo α tiene un inverso por la izquierda, esto es un homomorfismo $\gamma^n : C^n \to ker\delta^{n+1}$ tal que $\tau^n \circ \alpha_n = 1ker\delta^{n+1}$. Sea $\delta : Z_n(C) \to H_n(C)$ la proyección natural. Entonces obtenemos un homomorfismo definido

$$C^n \xrightarrow{\gamma^n} ker\delta^{n+1} \xrightarrow{\delta^n} \frac{ker\delta^{n+1}}{Im\delta^n}$$

obtenemos $\psi_n = \delta^n \circ \gamma^n : C^n \to \frac{ker\delta^{n+1}}{Im\delta^n}$. Si restringimos $\phi_n : ker\delta^{n+1} \to \frac{ker\delta^{n+1}}{Im\delta^n}$ obteniendo de

$$ker\delta^{n+1} \xrightarrow{\alpha_n} ker\delta^{n+1} \xrightarrow{\phi_n} \frac{ker\delta^{n+1}}{Im\delta^n}$$

$$\phi/ker\delta^{n+1} = \phi_n \circ \alpha_n = \delta^n \circ \tau^n \circ \tau^n \alpha^n = \delta^n$$

Análogamente existe un homomorfismo $\psi^n : D^n \to H^n(D)$ tal que $\psi_n/Z_n(D)$ es la proyección natural de $Z^n(D)$ sobre $H^n(D)$. Para enteros arbitrarios p y q, consideremos el producto tensorial

$$\phi_p \otimes \psi_q : C^p \otimes D^q \to H^p(C) \otimes H^q(D).$$

Estos homomorfismos constituyen una transformación de cadenas

$$\phi \otimes \psi : C \otimes D \to H(C) \otimes H(D)$$

de las sucesiones ascendentes $C \otimes D$ y $H(C) \otimes H(D)$, porque claramente se anula sobre los cobordes $C \otimes D$. Por tanto $\phi \otimes \psi$ induce un homomorfismo

$$(\phi \otimes \psi)_* : H^n(C \otimes D) \to \{H(C) \otimes H(D)\}^n$$

para todo entero n. Como $\phi_n|Z(C)$ y $\psi_q|Z(D)$ son las proyecciones naturales, se verifica fácilmente que $(\phi \otimes \psi)_*$ es inverso por la izquierda de π. Por (cor. 13), esto implica que la sucesión exacta corta de (teor. 50) se descompone y por tanto (teor. 50) queda probado. ||

Lema 29 *Si C y D son sucesiones ascendentes de módulos sobre un dominio R de idaales principales, entonces la sucesión descendente $C \otimes D$ es exacta con tal que se satisfagan las dos condiciones siguientes:*

(a) *Para todo entero n, D^n es un R-módulo libre.*

(b) *O bien C o bien D es exacta.*

Prueba. Aplicando (teor. 50) obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\pi} H^n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1} \to 0$$

para todo entero n. Como C o D es exacta debemos tener

$$\{H(C) \otimes H(D)\}^n = 0, \qquad \{Tor[H(C), H(D)]\}^n = 0$$

para todo entero n. En consecuencia, tenemos $H^n(C \otimes D) = 0$ para todo entero n. Esto implica que la sucesión descendente $C \otimes D$ es exacta ||

Teorema 51 *Si C y D son sucesiones ascendentes de módulos sobre sobre un dominio R de ideales principales, tales que la sucesión ascendente $Tor(C, D)$ es exacta, entonces existe un homomorfismo*

$$\theta : H^n(C \otimes D) \to \{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1}$$

para todo entero n tal que

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\pi} H^n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1} \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por lo tanto, tenemos

$$H^n(C \otimes D) \approx \{H(C) \otimes H(D)\}^n \oplus \{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1}$$

para todo enteo n.

Prueba. En virtud de (lema 20), existen aproximaciones libres

$$f : C' \to C \qquad g : D' \to D$$

de las sucesiones ascendentes dadas C y D respectivamente. Consideremos la sucesión exacta corta $0 \to D'' \xrightarrow{j} D' \xrightarrow{g} D \to 0$ de la aproximación libre $g : D' \to D$, donde j representa la inclusión. Como D'_n es libre y por tanto proyectivo para todo n, tenemos $Tor(C, D') = 0$. Por consiguiente, se deduce de (teor. 31) que

$$\cdots \to Tor(C, D) \xrightarrow{\delta *} C \otimes D'' \xrightarrow{i \otimes j} C \otimes D' \xrightarrow{i \otimes g} C \otimes D \to 0.$$

es una sucesión exacta de sucesiones ascendentes, donde i representa la transformación de cadenas identidad de la sucesión ascendente C. Por nuestra hipótesis, $Tor(C, D)$ es exacta. Por otra parte, como D'' es libre y exacta en virtud de (lema 20), se sigue que $C \otimes D''$ es también exacta, esto implica que el homomorfismo inducido en cohomología $i \otimes g_* : Hom^n(C \otimes D') \to Hom^n(C \otimes D)$ es isomorfismo para todo entero n. Considerando ahora la sucesión exacta corta

$$0 \to C'' \xrightarrow{\epsilon} C' \xrightarrow{f} C \to 0$$

de la aproximación libre $f : C' \to C$, donde ϵ representa la inclusión. Como D'_n es libre y por tanto proyectivo para todo n, determina una sucesión exacta corta

$$0 \to C'' \otimes D' \xrightarrow{\epsilon \otimes i'} C' \otimes D' \xrightarrow{C'' \otimes D'} C \otimes D' \to 0$$

Aquí i' representa la trasformación de cadenas identidad de la sucesión ascendente D'. Por (lema 25), la sucesión ascendente $C'' \otimes D'$ es exacta. Esto implica que el homomorfismo inducido

$$\alpha_n = (f \otimes i')_* : H_n(C' \otimes D') \to H_n(C \otimes D')$$

es isomorfismo para todo entero n. De acuerdo con la condición (C3) para las aproximaciones libres $f : C' \to C$ y $g : D' \to D$, los homomorfismos inducidos

$$f_{*n} : H^n(C') \to H^n(C), \qquad g_{*n} : H^n(D') \to H^n(D)$$

son isomorfismos para todo entero n. Luego los homomorfismos

$$\beta_n = \sum_{p+q=n} f_* p \otimes g_* q : \{H(C') \otimes H(D')\}^n \to \{H(C) \otimes H(D)\}^n$$

$$\gamma_n \sum_{p+q=n} Tor(f_* p, g_* q) : \{Tor[H(C'), H(D')]\}^n \, \{Tor[H(C), H(D)]\}^n$$

son isomorfismos para todo entero n. Puesto que C'_n y D'_n son R-módulos libres, podemos, aplicar (teor.50) a las sucesiones ascendentes C' y D' para obtener una sucesión exacta corta

$$0 \to \{H(C') \otimes H(D')\}^n \xrightarrow{\pi'} H^n(C' \otimes D') \xrightarrow{\theta'} \{Tor[H(C'), H(D')]\}^{n+1} \to 0$$

descomponible. Definamos un homomorfsmo $\theta : H^n(C \otimes D) \to \{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1}$ para todo entero n tomando $\theta = \gamma_{n-1} \circ \theta' \circ \alpha_n^{-1}$. Queda por establecer que

$$0 \to \{H(C) \otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\pi'} H^n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta'} \{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1} \to 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible. Para ello consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \{H(C') \otimes H(D')\}^n & \xrightarrow{\pi'} & H^n(C' \otimes D') & \xrightarrow{\theta'} & \{Tor[H(C'), H(D')]\}^{n+1} & \to 0 \\ & \downarrow \beta_n & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \gamma_{n+1} & \\ 0 \to & \{H(C) \otimes H(D)\}^n & \xrightarrow{\pi} & H^n(C \otimes D) & \xrightarrow{\theta} & \{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1} & \to 0 \end{array}$$

por definición de π y π' dada al principio de esta sección, el rectángulo de la izquierda es claramente conmutativo. La definición de θ dada antes implica que el rectángulo de la derecha también es conmutativo. Puesto que los homomorfismos verticales son isomorfismos y la fila superior es una sucesión exacta corta descomponible, se puede probar similarmente a (teor. 41) que la fila inferior es exacta. Esto completa la demostración de (teor. 51) ||

Observacion final: Para el caso particular en que

$$D_n = \begin{cases} G & (\text{si } n = 0), \\ 0 & (\text{si } n \neq 0) \end{cases}$$

entonces la fórmula de Kunneth es una generalización del Teorema de Coeficiente Universal para la homología y cohomología.

Capítulo 3

La teoría de grado

3.1. El concepto de grado

Sea R una anillo (conmutativo y poseedor de un elemento identidad), E un R-módulo, y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ una sucesión de elementos de R.

Definición 27 *La sucesión $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ será llamada una "R-sucesión sobre E" que satisface que:*

(a) $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) E \neq E$ *y*

(b) $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) E :_E \alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) E$ *para* $1 \leq i \leq s$

Naturalmente cuando $i = 1$ es entendido que (b) afirma que $0 :_E \alpha_1 = 0$. Si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ es una R-sucesión sobre R, entonces decimos que es una R-sucesión. Es conveniente a introducir alguna terminología en el futuro en orden a facilitar la discusión de R-sucesiónes sobre módulos.

Definición 28 *Un elemento γ de el anillo R es llamado un "divisor de cero" sobre el módulo E si existe $e \in E$, $e \neq 0$, tal que $\gamma e = 0$.*

Es importante notar que, cuando E es un R-módulo Noeteriano, γ es un divisor de cero sobre E cuando y sólo cuando[1] está contenido en uno de los ideales primos pertenecientes al submódulo de E. Otra vez regresemos al caso general, un elemento $\alpha \in R$ no es un divisor de cero sobre E si y sólo si $0 :_E \alpha = 0$. Ahora supongamos que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) E \neq E$. Entonces $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ es una R-sucesión sobre E precisamente cuando, para cada $i \,(1 \leq i \leq s), \alpha_i$ no es un divisor de cero sobre $E/(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}) E$. Además, para $p + 1 \leq i \leq s$, tenemos

$$(\alpha_{p+1}, ..., \alpha_i) (E/(\alpha_1, ..., \alpha_p) E) = (\alpha_1, ..., \alpha_p, ..., \alpha_i) E/(\alpha_1, ..., \alpha_p) E$$

Se sigue que *si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ es una R-sucesión sobre E, entonces $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, ..., \alpha_s$ es una R-sucesión sobre $E/(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)E$*

Lema 30 *Sea $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{s-1}, \alpha_s$ una R-sucesión sobre E y supongamos que $s \geq 2$. Entonces $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{s-2}, \alpha_s) E :_E \alpha_{s-1} = (\alpha_1, ..., \alpha_{s-2}, \alpha_s) E$. Se sigue que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{s-2}, \alpha_s, \alpha_{s-1}$ es una R-sucesión sobre E si y sólo si $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{s-2}) E :_E \alpha_s = (\alpha_1, ..., \alpha_{s-2}) E$*

Prueba. Sea $e \in (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{s-2}, \alpha_s) E :_e \alpha_{s-1}$. Entonces $\alpha_{s-1} e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_{s-2} e_{s-2} + \alpha_s e_s$ elementos adecuados para $e_1, ..., e_{s-2}, e_s$ en E. En consecuencia

$$e_s \in ((\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{s-2}, \alpha_{s-1}) E_E : \alpha_s) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{s-2}, \alpha_{s-1}) E$$

[1]Ver [15] Teorema 14 cor. 2 de sección (4.4)

y por tanto podemos expresar e_s en la forma. $e_s = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + ... + \alpha_{s-2} e'_{s-2} + \alpha_{s-1} e'_{s-1}$ se sigue que $\alpha_{s-1} e - \alpha_s \alpha_{s-1} e'_{s-1} \in (\alpha_1, ..., \alpha_{s-2}) E$. Por tanto

$$e - \alpha_s e'_{s-1} \in (\alpha_1, ..., \alpha_{s-2}) E :_E \alpha_{s-1} = (\alpha_1, ..., \alpha_{s-2}) E$$

y por tanto $e \in (\alpha_1, ..., \alpha_{s-2}) E$. Esto prueba que

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{s-2}, \alpha_s) E :_E \alpha_{s-1} \subseteq (\alpha_1, ..., \alpha_{s-2}, \alpha_s) E$$

y la otra inclusión es obvia. ||

Lema 31 *Sea E un R-módulo y A un ideal de R. Además, sea α y α' elementos de A que no son divisores de cero sobre E. Entonces*

$$(\alpha E :_E A) / \alpha E \qquad y \qquad (\alpha' E :_E A) / \alpha' E$$

son isomorfismos con R-módulos.

Prueba. Si S permite designar el conjunto de todos los elementos de R que no son divisores de cero sobre E. Entonces S, como es fácil de verificar, es multiplicativamente cerrado y, por hipótesis, tanto α y α' pertenecen a él. Ahora formemos el módulo E_s de fracciones y, en lo que sigue, lo consideran como un R-módulo. El mapeo $\phi : (\alpha E :_E A) \to E_s$ definido por $\phi(x) = [x/\alpha]$, donde x es un elemento arbitrario de $\alpha E :_E A$, es un homomorfismo de R-módulos. Si $\phi(x) = 0$, entonces $sx = 0$ para algunos $s \in S$ y por tanto, $x = 0$. De esta manera ϕ es un monomorfismo. Sea $\chi : E \to E_S$ la función canónica [2]. Sostenemos que

$$Im(\phi) = \chi(E) :_{E_S} A \tag{3.1.1}$$

Sea x pertenece a $\alpha E :_E A$ y $a \in A$. Entonces $a\phi(x) = [ax/\alpha]$. Pero $ax = \alpha e'$ para algún $e' \in E$ y por tanto, $[ax/\alpha] = [\alpha e'/\alpha]$, que pertenecen a $\chi(E)$. Por lo tanto $a\phi(x) \in \chi(E)$, donde $\phi(x)$ pertenece a $\chi(E) :_{E_S} A$. Ahora supongamos que ξ es un elemento de $\chi(E) :_{E_S} A$. Entonce $\alpha\xi \in \chi(E)$, expresa $\alpha\xi = \chi(e)$. Sea $a \in A$. Entonces $\chi(ae) = a\chi(e) = a\alpha\xi \in \alpha\chi(E)$ y así $\chi(ae) = \chi(\alpha e^*)$ para algún $e^* \in E$. Pero, como se indica en [15] sección (3,1), el núcleo de χ es la S-componente del submódulo cero de E. Por lo tanto $s(ae - \alpha e^*) = 0$ para algún $s \in S$ y, por tanto, $ae = \alpha e^* \in \alpha E$ porque s no es divisor de cero sobre E. Se deduce que e pertence a $\alpha E :_E A$. Además $\alpha\xi = \chi(e) = \left[\frac{\alpha e}{\alpha}\right] = \alpha \left[\frac{e}{\alpha}\right] = \alpha\phi(e)$ Pero E_S es un R_S-módulo, así como un R-módulo. Podemos, por tanto multiplicar $[\alpha/1]\,\xi = [\alpha/1]\,\phi(e)$ por $[1/\alpha]$ para obtener $\xi = \phi(e) \in Im(\phi)$. Por lo tanto (3.1.1) es establecido. Este resultado, combinado con el hecho de que ϕ es un monomorfismo, muestra que ϕ induce un isomorfismo de el R-módulo $\alpha E :_E A$ sobre el R-módulo de $\chi(E) :_{E_S} A$. Además αE es llevado a $\chi(E)$. Por consiguiente, se induce un isomorfismo $(\alpha E :_E A) / \alpha E \approx (\chi(E) :_{E_S} A) / \chi(E)$ ya que tenemos un isomorfismo similares en los que α' sustituye α. el lema resulta ||

Corolario 34 *Sea E un R-módulo, K un submódulo de E y A un ideal de R. Si ahora $\alpha, \alpha' \in A$ y $K :_E \alpha = K = K :_E \alpha'$, entonces*

$$\{(\alpha E + K) :_E A\} / (\alpha E + K) \ y \ \{(\alpha' E + K) :_E A\} / (\alpha' E + K)$$

son isomorfismos de R-módulos.

Prueba. La hipótesis demuestra que ni α ni α' son divisores de cero sobre E/K. También

$$\alpha(E/K) = (\alpha E + K)/K \qquad \text{y} \qquad \alpha(E/K) :_{E/K} A = \{(\alpha E + K) :_E A\}/K$$

relaciones similares con la participación de α'. Por lo tanto, el corolario resulta del lema. ||

[2]Ver [15] sección (3.1)

Teorema 52 *Sea E un R-módulo Noetheriano y A un ideal de R. Supongamos que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ y $\beta_1, \beta_2 ..., \beta_K$ son dos R-sucesiónes sobre E que consisten de cada K elementos pertenecientes a el ideal A. En estas circunstancias existe un isomorfismo*

$$\{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)E :_E A\} / (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)E \approx \{(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)\, E :_E A\} / (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)\, E$$

entre las dos partes se consideran como R-módulos.

Prueba. Los módulos $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)E \quad (0 \leq i \leq k-1)$ y $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_j)E \quad (0 \leq j \leq k-1)$ son todos ellos de la propiedad submódulos de los R-módulos Noeterianos E y por lo tanto, a cada uno de ellos pertenece a un número finito de ideales primos. Denotados por $P_1, P_2, ..., P_s$ el primer conjunto de ideales primos que surgen de esta manera. Consideremos P_1 pertenece a uno de los conjuntos de los submódulos $2k$. Supongamos que pertenecen a $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)\, E$, donde $0 \leq i \leq k-1$. Ya que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)\, E :_E \alpha_{i+1} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)\, E$ vemos que un $\alpha_{i+1} \notin P_1$, por tanto $A \subseteq P_1$, se deduce, por razones similares, que A no figura por algunos $P_1, P_2, ..., P_s$. Por [15] proposición 5 de la sección (2.3), existen $\gamma_K \in A$ tal que $\gamma_K \notin P_1, \gamma_K \notin P_2, ..., \gamma_K \notin P_S$ En consecuencia

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)\, E :_E \gamma_k = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)\, E \;\; (0 \leq i \leq k-1) \tag{3.1.2}$$

$$\text{y} \quad (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_i)\, E :_E \gamma_k = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_i)\, E \;\; (0 \leq i \leq k-1) \tag{3.1.3}$$

En particular

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1})\, E :_E \alpha_k = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1})\, E = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1})\, E :_E \gamma_k$$

y por tanto por el Lema 31, tenemos un isomorfismo
$\{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)\, E :_E A\} / (\alpha_1, , ..., \alpha_{k-1}\alpha_k)\, E$

$$\approx \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}, \gamma_k)\, E :_E A\} / (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}, \gamma_k)\, E \tag{3.1.4}$$

Es claro que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}, \gamma_k$ es una R-sucesión sobre E. Además por (3.1.2) y Lema 30, podemos concluir que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-2}, \gamma_k, \alpha_{k-1}$ es una R-sucesión sobre E. De hecho otra aplicación sobre estos resultados prueba que
$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-3}, \gamma_k, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}$ es una R-sucesión sobre E y, procediendo en este camino establecemos que $\gamma_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$ es una R-sucesión sobre E. Note que (3.1.4) puede escribirse como
$\{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)\, E :_E A\} / (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)\, E$

$$\approx \{(\gamma_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1},)\, E :_E A\} / (\gamma_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1})\, E \tag{3.1.5}$$

De la exactitud deducimos que $\gamma_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k-1}$ es una R-sucesión sobre E y, como una compoñía para (3.1.5) tenemos un isomorfismo
$\{(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)\, E :_E A\} / (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)\, E$

$$\approx \{(\gamma_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k-1})\, E :_E A\} / (\gamma_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k-1})\, E \tag{3.1.6}$$

Este argumento condujo a (3.1.5) y (3.1.6) podemos ahora reiteradas veces con $\gamma_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$ y $\gamma_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k-1}$ la sustitución $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ y $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ Se encuentra que existen elementos $\gamma_{k-1} \in A$ tal que
(i) $\gamma_{k-1}, \gamma_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-2}$ y $\gamma_{k-1}, \gamma_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k-2}$ son R-sucesiónes sobre E y (ii) Hay unos isomorfismos
$\{(\gamma_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1})\, E :_E A\} / (\gamma_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1},)\, E$

$$\approx \{(\gamma_{k-1}, \gamma_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-2})\, E :_E A\} / (\gamma_{k-1}, \gamma_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-2})\, E \tag{3.1.7}$$

con un isomorfismo similar la partición de $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k-1}$. Observemos que, por combinar el nuevo isomorfismo con (3.1.5) y (3.1.6) obtenemos
$\{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) E :_E A\} / (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) E$

$$\approx \{(\gamma_{k-1}, \gamma_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-2}) E :_E A\} / (\gamma_{k-1}, \gamma_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-2},) E$$

y $\{(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k) E :_E A\} / (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k) E$

$$\approx \{(\gamma_{k-1}, \gamma_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k-2}) E :_E A\} / (\gamma_{k-1}, \gamma_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k-2}) E$$

Es evidente como continua el argumento. Eventualmente obtenemos una R-sucesión $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ sobre E tal que $\{(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k) E :_E A\} / (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k) E$ es isomorfo a ambos

$$\{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) E :_E A\} / (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) E \text{ y } \{(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k) E :_E A\} / (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_K) E$$

esto completa la prueba. ||

Definición 29 *Si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ es una R-sucesión sobre un R-módulo E y si los α_i pertencen a un ideal A, entonces $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ serán llamados "R-sucesiónes sobre E en A".*

Como una aplicación del último teorema.

Teorema 53 *Sea E un R-módulo Noeteriano y A un ideal de R tal que $AE \neq E$. Además sean $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ y $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ R-sucesiónes sobre E en A. Si ahora $m < n$, entonces es posible encontrar $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, ..., \alpha_n$ tal que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, ..., \alpha_n$ es una R-sucesión sobre E en A.*

Prueba. Ya que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ y $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ son ambos R-sucesiónes sobre E donde ellos tienen el mismo número m de términos, en el último teorema se probó que es un isomorfismo
$\{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) E :_E A\} / (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) E$

$$\approx \{(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) E :_E A\} / (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) E$$

de R-módulos. Ahora $m < n$ y $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) E :_E \beta_{m+1} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) E$; en consecuencia $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) E :_E A = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) E$. Del isomorfismo se deduce que, $\{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) E :_E A\} / (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) E$ es un módulo nulo y a la vez implica que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) E :_E A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) E$ en consecuencia A no está contenido por los ideales primos que pertenecen a los submódulos $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) E$ de E. Por lo tanto por [15] proposición 5 de la sección (2.3), existen $\alpha_{m+1} \in A$ que no está en ningno de estos ideales primos y por tanto satisface $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) E :_E \alpha_{m+1} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) E$. Pero $AE \neq E$; en consecuencia $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}) E \neq E$. Así $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}$ es una R-sucesión sobre E en A. Si $m + 1 < n$, entonces podemos repetir el argumento. ||

Teorema 54 *Sea E un R-módulo Noeteriano y A un ideal de R tal que $AE \neq E$. Entonces hay un mayor número entero $k\,(k \geq 0)$ tal que existen R-sucesión sobre E en A que tiene k términos. Además, si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ es una R-sucesión arbitraria sobre E en A, entonces es posible encontrar elementos $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, ..., \alpha_k$ de modo que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, ..., \alpha_k$ es una R-sucesión sobre E en A teniendo el maximo número de k términos.*

Prueba. Por Teorema 53, sólo es necesario probar la primera afirmación. Para ello asumiremos que para todo $n > 0$ existen al menos una R-sucesión sobre E en A teniendo n términos. De ello se deriva una contradicción. Sea α_1 una

R-sucesión sobre E en A. Ya que existe una R-sucesión sobre E en A con dos términos, el Teorema 53 muestra que podemos encontrar α_2 tal que α_1, α_2 son R-sucesiónes sobre E en A. Luego, porque existe una R-sucesión sobre E en A con tres términos, se sigue del Teorema 53 que podemos encontrar α_3 tal que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ es una R-sucesión sobre E en A. Y así sucesivamente. En este camino obtenemos una sucesión infinita $\alpha_1, \alpha_2, ...$ tal que, para cada n $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ es una R-sucesión sobre E en A. Ya que E es un R-módulo Noeteriano, la sucesión $(\alpha_1) E \subseteq (\alpha_1, \alpha_2) E \subseteq (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) E \subseteq ...$ de submódulos de E debe terminar. Podemos por tanto encontrar un entero m tal que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) E = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}) E$. Entonces

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) E = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) E :_E \alpha_{m+1} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}) E :_E \alpha_{m+1} = E$$

Sin embargo, todos los $\alpha_i \in A$ y $AE \neq E$. Estos produce una contradicción y completa la prueba.||

Definición 30 *Sea E un R-módulo Noeteriano y A un ideal de R tal que $AE \neq E$. El número de términos de una R-sucesión maximal sobre E en A, será llamada el "grado de A sobre E" y denotado por $gr\,(A; E)$.*

Usaremos la expresión *maximal* R-sucesión sobre E en A en el sentido de una R-sucesión sobre E en A que tengan el mayor número posible de términos. El Teorema 54 asegura que $gr\,(A; E)$ es definido y finito de bajo de las condiciones que declaro. Cabe señalar que, hasta ahora, no tenemos ninguna estimación de como $gr\,(A; E)$ pueden ser grandes. Probaremos, sin embargo, regresaremos a estos puntos después. Mediante la adopción $E = R$ llegamos la siguiente subsidiarios.

Definición 31 *Sea A un ideal propio de un Anillo R. Entonces por el "grado de A" significa el grado de A sobre R cuando R es considerado un módulo con respecto a sí mismo. El grado de A es denotado por $gr\,(A)$. Así $gr\,(A) = gr\,(A; R)$.*

Asumiendo que E es un R-módulo Noeteriano y $AE \neq E$, observemos que $gr\,(A; E) = 0$ en el sentido que cada elemento de A es un divisor de cero sobre E y por lo tanto está contenido en algúnos ideales primos pertenecientes al submódulo cero de E. En consecuencia, por [15] proposición 5 de sección (2.3), A debe ser totalmente contenido por algunos de esos ideales primos. Por tanto $gr\,(A; E) = 0$ si y sólo si $0 :_E A \neq 0$. Otro punto a notar es que si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ es un R-sucesión sobre E en A, entonces $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) E :_E A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) E$ Si $s < gr\,(A; E)$ mientras que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) E :_E A \neq (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) E$ si $s = gr\,(A; E)$. Esto es claro por que en el caso formal la sucesión puede extenderse y este último no puede.

Proposición 67 *Sea E un R-módulo Noeteriano y A un ideal de R satisfaciendo $AE \neq E$. Si ahora B es un ideal de R y $B \subseteq Rad\ A$, entonces $BE \neq E$ y $gr\,(B; E) \leq gr\,(A; E)$. Por tanto si $Rad\ A = Rad\ B$, entonces $gr\,(B, E) = gr\,(A; E)$.*

Prueba. Primero asumamos que $BE = E$ y conduce a una contradicción. Donde E es un R-módulo Noeteriano, es finitamente generado. Sea $E = Re_1 + Re_2 + Re_3 + ... + Re_p$. Entonces para cada $i\,(1 \leq i \leq p)$ tenemos una relación de la forma $e_i = b_{i1}e_1 + b_{i2}e_2 + ... + b_{ip}e_p$ donde $b_{ij} \in B$. Sea B_0 el ideal generado por los b_{ij} así que $B_0 \subseteq B$ y $E = B_0E$. Puesto que $B_0 \subseteq Rad\ A$ y B_0 es finitamente generado, de ello resulta que [3] es un entero m tal que $B_0^m \subseteq A$. Sin embargo de $E = B_0E$ sigue $E = B_0^mE$. Consecuentemente $E = AE$ que es la

[3] Ver [15] Proposición 8 de sección (2.3)

contradicción requerida. Se debe probar que $BE \neq E$. Así $gr(B; E)$ es definido. Sea $b_1, b_2, ..., b_s$ una R-sucesión maximal sobre E en B. Entonces $s = gr(B; E)$. Escojamos n así que $b_1^n \in A$ y sea $\beta_1 = b_1^n$. Puesto que $0 :_E b_1 = 0$, de ello resulta que $0 :_E \beta_1 = 0$. De aquí β_1 es una R-sucesión sobre E en $A \cap B$ y, por Teorema 54, puede ser prolongada a una R-sucesión maximal $\beta_1,\ b_2^{'}, ..., b_s^{'}$ sobre E en B. Escojamos k así que $b_2^{'k} \in A$ y sea $\beta_2 = b_2^{'k}$. Entonces, porque $(\beta_1)E_E b_2^{'} = (\beta_1)E$, tenemos $(\beta_1)E_E\beta_2 = (\beta_1)E$. Así $\beta_1,\ \beta_2$ es una R-sucesión sobre E en $A \cap B$ y podemos prolongarla a una R-sucesión maximal $\beta_1,\ \beta_2,\ b_3^{''}, ..., b_s^{''}$ sobre E en B. Procediendo en este camino finalizamos obteniendo una R-sucesión $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$ sobre E en $A \cap B$. De ello resulta que $gr(A; E) \geq s = gr(B; E)$. La afirmación final de la proposición no necesita comentario. $||$

Proposición 68 *Sea E un R-módulo Noetheriano y A, B ideales de R tal que $AE \neq E$ y $BE \neq E$. Entonces*

$$gr(AB; E) = gr(A \cap B; E) = min\,\{gr(A; E), gr(B; E)\}$$

Prueba. Es claro que $gr(AB; E) \leq gr(A \cap B; E) \leq min\,\{gr(A; E), gr(B; E)\}$ Sea $s = gr(A; E)$ y $t = gr(B; E)$. Sea $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ una R-sucesión sobre E en A y $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ una R-sucesión sobre E en B. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $s \leq t$. Sea $\gamma_1 = \alpha_1\beta_1$. Entonces $\gamma_1 \in AB$ y, puesto que $0 :_E \alpha_1 = 0$ y $0 :_E \beta_1 = 0$, tenemos $0 :_E \gamma_1 = 0$. De esta manera γ_1 es una R-sucesión sobre E en AB. Esto puede ser extendido a una R-sucesión $\gamma_1, \alpha_2^{'}, ..., \alpha_s^{'}$ sobre E en A. Similarmente existe una R-sucesión $\gamma_1, \beta_2^{'}, ..., \beta_t^{'}$ sobre E en B. Ahora fijamos $\gamma_2 = \alpha_2^{'}\beta_2^{'}$. Entonces $\gamma_2 \in AB$ y tenemos $(\gamma_1)E :_E \gamma_2 = (\gamma_1)E$ porque $(\gamma_1)E :_E \gamma_2^{'} = (\gamma_1)E$ y $(\gamma_1)E :_E \beta'_2 = (\gamma_1)E$. De esta manera γ_1, γ_2 es una R-sucesión sobre E en AB. Además existen sucesiónes $\gamma_1\gamma_2, \alpha_3^{''}, ..., \alpha_s^{''}$ y $\gamma_1\gamma_2, \beta_3^{''}, ..., \beta_t^{''}$ que son R-sucesiónes sobre E en A y B respectivamente. Después se pasa a s, esto produce una R-sucesión $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ sobre E en AB. Por consiguiente $gr(AB; E) \geq s = min\,\{gr(A; B), gr(B; E)\}$ y la prueba se completa. $||$

Son ciertas situaciones en que la propiedad será una R-sucesión sobre un módulo no es afectado si el orden de los elementos en la sucesión es cambiado. En esta conexión recordaremos que el radical de Jacobson de un anillo es definido como la intersección de todos sus ideales maximales. Demostraremos presentando que, para módulos Noetherianos, el oden de los elementos en una R-sucesión no es importante siempre que todos los elementos pertenecen a el radical de Jacobson. En preparación para esto establecemos lo siguiente.

Lema 32 *Sea E un R-módulo Noetheriano y α, β una R-sucesión sobre E. Si ahora α pertenece a el radical de Jacobson de R, entonces β, es también una R-sucesión sobre E.*

Prueba. Por Lema 30, es suficiente probar que $0 :_E \beta = 0$. Asumamos que $\beta e = 0$ donde $e \in E$. Afirmamos que $e \in (\alpha^m)E$ para $m \geq 0$. En efecto esto es trivial para $m = 0$. También, si $e \in (\alpha^s)E$, donde $s \geq 0$, entonces $e = \alpha^s e'$ para algunos $e' \in E$ y $\beta\alpha^s e' = 0$. Pero α no es un divisor de cero sobre E. Por consiguiente $\beta e' = 0$ donde a *fortiori* $\beta e' \in \alpha E$. Sin embargo $\alpha :_E \beta = \alpha E$ podemos por ello concluir que $e' \in \alpha E$, digamos $e' = \alpha e''$. De esta manera $e = \alpha^s e' = \alpha^{s+1} e''$ donde $e \in (\alpha^{s+1})E$. La afirmación que $e \in (\alpha^m)E$ para todo m se sigue por inducción. Tenemos ahora probado que

$$e \in \bigcap_{m=1}^{\infty} (\alpha^m)E = \bigcap_{m=1}^{\infty} (\alpha)^m E$$

De aquí que $e = 0$ por [15] Teorema 19 de sección (4.6). Por consiguiente $0 :_E \beta = 0$ y la prueba es completa. $||$

Teorema 55 *Sea E un R-módulo Noetheriano y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ una R-sucesión sobre E de cada elemento que estan contenidos en el radical de Jacobson de R. Si ahora $\{i_1, i_2, ..., i_s\}$ es un nuevo arreglo arbitrario de $\{1, 2, ..., s\}$, entonces $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_s}$ es también una R-sucesión sobre E.*

Prueba. Es suficiente probar que algunos dos términos adyacentes en la sucesión $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ pueden ser cambiados sin perturbar la propiedad de ser una R-sucesión sobre E.Claramente todo nos permite probar que $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_i$ es una R-sucesión sobre E. Por Lema 30, se sigue probando que

$$(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1})E :_E \alpha_{i+1} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1})E$$

Por consiguiente para establecer el teorema es suficiente probar que α_{i+1} no es un divisor de cero sobre $E' = E/(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1})E$. Ahora E' es un R-módulo Noetheriano y α_i, α_{i+1} es una R-sucesión sobre E'. Puesto que α_i pertenece a el radical de Jacobson de R, Lema 32 prueba que α_{i+1}, α_i es una R-sucesión sobre E'. En particular, α_{i+1} no es un divisor de cero sobre E'. Esto completa la prueba. ||

El teorema 55 sugiere que la simplificación es posible que ocurra donde son concernientes con ideales y elementos que son contenidos en el radical de Jacobson. El siguiente resultado sostiene esta idea.

Teorema 56 *Sea $E \neq 0$ un R-módulo Noetheriano. Sea B un ideal y γ un elemento de R y supongamos que ambos son contenidos en el radical de Jacobson de R. Entonces $gr((B, \gamma); E) \leq gr(B; E) + 1$*

La hipótesis asegura que $(B, \gamma)E \neq E$. Para distintos podemos concluir, por [15] Teorema 19 de sección (4.6), que $E = \bigcap_{n=1}^{\infty}(B, \gamma)^n E = 0$ y este no es el caso. Por ello se sigue que los dos grados (que ocurren en las condiciones de el teorema) son apropiados mediante definición. Como un paso para probar este resultado primero establecemos

Lema 33 *Sea E, B y γ como en las condiciones de el Teorema 56. Asumamos también que $gr((B, \gamma); E) \geq 1$. Entonces existe $b \in B$ tal que $\gamma + b$ no es un divisor cero sobre E.*

Prueba. Puesto que $gr((B, \gamma); E) \geq 1$, el ideal (B, γ) contiene un elemento x que no es divisor de cero sobre E. Sea $x = r\gamma + b_0$, donde $r \in R$ y $b_0 \in B$. Probaremos que uno el menor de los elementos $\gamma + b_0^v \quad (v = 1, 2, ...)$ no es un divisor de cero sobre E y esto establece el lema. *Asumamos lo contrario* y sea $P_1, P_2, ..., P_s$ ideales primos que pertenecen a el submódulo cero de E. Entonces un elemento de R es un divisor de cero sobre E si y sólo si está contenido por uno de $P_1, P_2, ..., P_s$. Puesto que $\gamma + b_0^v$ es un divisor de cero para todo valor de v, es posible encontrar enteros m, n tal que $m < n$ y ambos $\gamma + b_0^m$ y $\gamma + b_0^n$ que pertenecen a el mismo idal primo P, donde P tiene lugar entre $P_1, P_2, ..., P_s$. Entonces $b_0^m(1 - b_0^{n-m}) \in P$. Ahora $b_0 \in B$ y B es contenido en el radical de Jacobson. De ello resulta que $1 - b_0^{n-m}$ no está contenido en alguno de los ideales maximales y por ello es una unidad. Multiplicando $b_0^m(1 - b_0^{n-m})$ por el inverso de $1 - b_0^{n-m}$, vemos que $b_0^m \in P$ y por ello $b_0 \in P$. De ello resulta que γ también pertenece a P. Por consiguiente $x = r\gamma + b_0$ pertenece a P esto es lo que requiere la contradicción porque x no es un divisor de cero sobre E. ||

Corolario 35 *Sea E, B y γ satisfacen las hipótesis del Teorema 56 y supongamos, en adicción, que todo elemento de B es un divisor cero sobre E. Entonces $gr((B, \gamma); E) \leq 1$*

Prueba. Asumamos que $gr((B,\gamma);E) \geq 1$. Entonces, por el lema, existe $b \in B$ tal que $\gamma+b$ no es un divisor de cero sobre E. Sea β un elemento arbitrario de B Entonces $\gamma+b, \beta$ no es una R-sucesión sobre E. (Para asumir lo contrario. $\gamma+b, \beta$ son contenidos en el radical de Jacobson, por ello resulta que $\beta, \gamma+b$ es también una R-sucesión sobre E. Sin embargo es imposible puesto que, por hipótesis, β es un divisor de cero sobre E.) Por consiguiente $(\gamma+b)E :_E \beta \neq (\gamma+b)E$ y por ello β está contenido en uno de los ideales primos $P_1^{'}, P_2^{'}, ..., P_m^{'}$ que pertenecen a el submódulo $(\gamma+b)E$ de E. Pero β es un elemento arbitrario de B. Por ello resulta, por [15] Proposición 5 de sección (2.3), que B mismo es contenido por uno de $P_1^{'}, P_2^{'}, ..., P_m^{'}$. Supongamos por definición que $B \subseteq P'$. Entonces, puesto que $P_1^{'}$ contiene [4] el ideal $(\gamma+b)E : E$, vemos que $P_1^{'}$ también contiene $\gamma+b$. De esta manera $(B,\gamma) = (B, \gamma+b) \subseteq P_1^{'}$. Sin embargo $(\gamma+b)E :_E P_1^{'} \neq (\gamma+b)E$ y por ello $(\gamma+b)$ es una R-sucesión maximal sobre E contenida en $P_1^{'}$. Por consiguiente $gr(P_1^{'};E) = 1$. Finalmente $gr((B,\gamma);E) \leq gr(P'_1;E) = 1$ y ahora la prueba es completa. ||

Prueba de Teorema 56. Sea E, B y γ como en las condiciones de el teorema. Sea $gr(B;E) = s$ y $gr((B,\gamma);E) = t$. Entonces existe una R-sucesión $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ sobre E y consideremos en B. También, por Teorema 54, esto puede ser extendido a una R-sucesión $\alpha_1, ..., \alpha_s, \alpha_{s+1}, ..., \alpha_t$ sobre E en (B,γ). Escribamos $\bar{E} = E/(\alpha_1, ..., \alpha_s)E$. Puesto que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ es una R-sucesión maximal sobre E en B, todo elemento de B es un divisor sobre $\bar{E}$. El corolario Lema 33 por ello prueba que $gr((B,\gamma);\bar{B}) \leq 1$. Sin embargo $\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}...., \alpha_t$ es una R-sucesión sobre $\bar{E}$ y todos estos elementos son contenidos en (B,γ). Por consiguiente $t-s \leq 1$ y la prueba es completa. ||

Supogamos que E es un R-módulo Noetheriano y B un ideal de R tal que $BE \neq E$. Por Teorema 54, $gr(B;E)$ es finito. Consolidaremos este resultado probaremos que

$$gr(B;E) \leq rank[(Ann_R E, B)/Ann_R E]$$

donde $Ann_R E$ denota (como usual) el niquilador ideal de E, y $(Ann_R E, B)$ es usado como una abreviacíon de $(Ann_R E)+B$. Observe que, por [15] Teorema 2 de sección (4.2), el anillo $R/Ann_R E$ es Noetheriano y por ello cada uno de sus ideales propios tiene rango finito. Es conveniente a empezar por establecer

Proposición 69 *Sea E un R-módulo Noetheriano y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ elementos de R. Entonces*

$$Rad[(Ann_R E, \alpha_1, ..., \alpha_p)] = Rad[Ann_R(E/(\alpha_1, ..., \alpha_p)E)]$$

y los ideales primos que contienen $(Ann_R E, \alpha_1, ..., \alpha_p)$ son los mismos como los ideales que contienen $Ann_R(E/(\alpha_1, ..., \alpha_p)E)$. Si $(\alpha_1, ..., \alpha_p)E \neq E$ entonces

$$rank[Ann_R(E/(\alpha_1, ..., \alpha_p)E)/Ann_R E] \leq p$$

Prueba. Sea $A = Ann_R E$ y $B = Ann_R(E/(\alpha_1, ..., \alpha_p)E)$. Entonces

$$(A, \alpha_1, ..., \alpha_p) \subseteq B \text{ y } BE \subseteq (\alpha_1, ..., \alpha_p)E = (A, \alpha_1, ..., \alpha_p)E$$

Puesto que E es finitamente generado, se sigue, de [15] Proposición 13 de sección (2.7), que $B^n \subseteq (A, \alpha_1, ..., \alpha_p)$ para algunos enteros positivos n. La relación $B^n \subseteq (A, \alpha_1, ..., \alpha_p) \subseteq B$ ahora probamos que $Rad\ B = Rad(A, \alpha_1, ..., \alpha_p)$ y también que un ideal primo contiene B si y sólo si este contiene $(A, \alpha_1, ..., \alpha_p)$ Asumamos que $(\alpha_1, ..., \alpha_p)E \neq E$. Puesto que $(A, \alpha_1, ..., \alpha_p)E = (\alpha_1, ..., \alpha_p)E$

[4] Ver la observación el el párrafo que sigue de [15] (4.4.5)

de ello resulta que $(A, \alpha_1, ..., \alpha_p) \neq R$. Consideremos B/A y $(A, \alpha_1, ..., \alpha_p)/A$. Algunos ideales primos de R/A que contienen la forma que contendrá el último y viceversa. De aquí que ambos son ideales propios y

$$rank(B/A) = rank((A, \alpha_1, ..., \alpha_p)/A)$$

Finalmente $(A, \alpha_1, ..., \alpha_p)/A$ es un ideal que puede ser generado por p elementos a saber la imagen natural de $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$. Puesto que R/A es un anillo Noetheriano, concluimos de [15] Teor. 22 de sección (4.8), que $rank((A, \alpha_1, ..., \alpha_p)/A) \leq p$. La proposición ahora resulta ||

Proposición 70 *Sea E un R-módulo Noetheriano y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ una R-sucesión sobre E. Entonces*

$$rank[(Ann_R E, \alpha_1, ..., \alpha_p)/Ann_R E] = rank[Ann_R(E/(\alpha_1, ..., \alpha_p)E)/Ann_R E] = p$$

Además, si C es un ideal de R tal que $CE \neq E$, entonces $(Ann_R E, C) \neq R$ y $gr(C; E) \leq rank[(Ann_R E, C)/Ann_R E]$

Prueba. Como en la prueba de Proposición 54, sea

$$A = Ann_R E \ \text{ y } \ B = Ann_R(E/(\alpha_1, ..., \alpha_p)E)$$

Puesto que $(A, \alpha_1, ..., \alpha_p)E = (\alpha_1, ..., \alpha_p)E$ y $(\alpha_1, ..., \alpha_p)E \neq E$ de ello resulta que $(A, \alpha_1, ..., \alpha_p) \neq R$. Ahora supongamos que $0 \leq i \leq p$. Entonces α_{i+1} no es un divisor de cero sobre $E/(\alpha_1, ..., \alpha_p)E$ y por ello α_{i+1} no está contenido en algún ideal primo minimal de sus submódulos cero. Por otra parte, por [15] Teorema 14 de sección (2.9), estos ideales primos minimales son los mismos como los ideales primos contenidos de $Ann_R(E/(\alpha_1, ..., \alpha_i)E) = B_i$ digamos. Ahora, por Proposición 70, el ideal primo que contiene B_i son los mismos como los ideales contenidos $(A, \alpha_1, ..., \alpha_i)$. Por consiguiente α_{i+1} no está contenido en algún ideal primo minimal de el último. Sea $\bar{\alpha}_j$ denota la imagen de α_j en el anillo Noetheriano $\bar{R} = R/A$. La observación de arriba prueba que $\bar{\alpha}_{i+1}$ no está contenido en algún ideal primo minimal de $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, ..., \bar{\alpha}_i$ y por ello

$$rank(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, ..., \bar{\alpha}_{i+1}) > rank(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, ..., \bar{\alpha}_i)$$

para $0 \leq i \leq p - 1$. De esta manera $rank(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, ..., \bar{\alpha}_p) \geq p$ y, puesto que la desigualdad opuesta la tenemos por [15] Teorema 22 de sección (4.8), de ello resulta que $rank[(A, \alpha_1, ..., \alpha_p)/A] = rank[B/A]$. Además, como cerramos en la prueba de Proposición 70,

$$rank[(A, \alpha_1, ..., \alpha_p)/A] = rank[B/A]$$

De esta manera la primera parte de la proposición queda establesida. Ahora supongamos que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ es una R-sucesión maximal sobre E contenida en C así que $gr(C; E) = p$. Puesto que $(A, C)E = CE$ y $CE \neq E$, de ello resulta que $(A, C) \neq R$. Finalmente

$$gr(C; E) = p = rank[(A, \alpha_1, ..., \alpha_p)/A] \leq rank[(A, C)/A]$$

porque $(A, \alpha_1, ..., \alpha_p) \subseteq (A, C)$. Esto completa la prueba. ||

Corolario 36 *Sea R un anillo Noetheriano y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ una R-sucesión. Entonces*
$rank(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) = p$

Corolario 37 *Sea R un anillo Noetheriano y C un ideal propio de R. Entonces* $gr(C) \leq rank\ C$

Ambos corolarios son obtenidos por tomar $E = R$ en la proposición justamente demostrada.

3.2. La teoría de grado por anillo semi-local

La teoría de grado puede ser considerablemente extendida si restringimos nuestra atención a anillos semilocales. Los resultados adicionales que puede ser obtenidos en este camino son el objeto de la presente sección.
Sea R un anillo semilocal y $M_1, M_2, ..., M_h$ sus ideales maximales. Escribamos

$$J = M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_h \tag{3.2.8}$$

tal que J es el radical de Jacobson. Por brevedad nos remitimos a J como el radical de R. Ahora hacemos un número de observaciones simples en orden para atraer la atención a hechos básicos que empleamos en lo que sigue. Por [15] Proposición 1 Cor. de sección (4.1), todo R-módulo de generación finita es un R-módulo Noetheriano. Sea E uno de tales módulos y B un ideal contenido en el radical de J. Entonces, por [15] Teorema 19 de sección (4.6),

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B^n E = 0 \tag{3.2.9}$$

De aquí si $E \neq 0$, entonces $BE \neq E$. Note que como caso especial de (3.2.9)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n = (0) \tag{3.2.10}$$

Si los elementos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ pertenecen a el radical de R forman una R-sucesión sobre E, entonces ellos continuaran a hacer así si su orden no es cambiado en algún camino. Esto sigue del Teorema 55. Observamos, también que si K es un submódulo de el R-módulo Noetheriano E, entonces los ideales primos pertenecen a el submódulo K son el mismo que pertenecen a el submódulo nulo de E/K. Esto sigue del [15] Teorema 20 Cor. sección (2.10). Sea $\sigma : R \rightarrow \bar{R}$ un epimorfismo de el anillo semilocal R a un anillo no-nulo $\bar{R}$. Entonces, como en la [15] sección (4.9), $\bar{R}$ es también un anillo semilocal. Podemos suponer que los ideales maximales $M_1, M_2, ..., M_h$ de R son numerados $M_1, M_2, ..., M_i$ conteniendo el núcleo de σ mientras que $M_{i+1}, M_{i+2}, ..., M_h$ no. Por esto es comprensivo $\sigma(M_1), ..., \sigma(M_i)$ son los ideales maximales de $\bar{R}$ y $\sigma(M_j) = \bar{R}$ para $t+1 \leq j \leq h$. Ahora $M_i + M_j = R$ si $i \neq j$. De donde, por [15] Proposición 4 de sección (4.2), $J = M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_i \cap ... \cap M_h = M_1 M_2 ... M_i ... M_h$. Por consiguiente

$$\sigma(J) = \sigma(M_1)\sigma(M_2)...\sigma(M_i)...\sigma(M_h) = \sigma(M_1)\sigma(M_2)...\sigma(M_i)$$

y este es el radical de $\bar{R}$. De esta manera el epimorfismo σ mapea el radical de R en el radical de $\bar{R}$. En esta etapa es conveniente introducir dos nuevas definiciones. La primera de esta es de interés general porque nos permite aplicar el concepto de dimensión a módulos. La segunda definición juega sólo un menor rol y desaparece de la discusión una vez haya servido a su propósito inmediato.

Definición 32 *Sea $E \neq 0$ un R-módulo. Entonces por la "dimensión" de E entenderemos la dimensión del anillo $R/Ann_R E$. La dimensión de el módulo E será denotado por $DimE$.*

De esa manera $DimE = Dim(R/Ann_R E)$ o igualmente que, $DimE$ es igual a la dimensión $Dim(Ann_R E)$ de el ideal de elementos que aniquilan a E. Note que la definición no requiere que R sea un anillo semilocal o aunque sea Noetheriano. Otro punto a notar es que si tomamos $R = E$. Encontraremos que no hay conflicto con la noción de dimensión anteriormente aplicada a anillos. Puede ser que E es un R-módulo Noetheriano y $P_1, P_2, ..., P_t$ los ideales primos pertenecen a el submódulo nulo. Entonces

$$DimE = \max_{1 \leq i \leq t} dimP_i \tag{3.2.11}$$

Esto es porque [5] los ideales primos minimales que pertenecen a el submódulo nulo de E son los mismos ideales primos minimales de $Ann_R E$. Ahora supongamos que R es un anillo semilocal. Sea $E \neq 0$ un R-módulo de generación finita y denotaremos por $P_1, P_2, ..., P_t$ los ideales primos pertenecientes a el submódulo nulo. Escribamos

$$s(E) = \max_{1 \leq i \leq t} dimP_i - \min_{1 \leq j \leq t} dimP_j \tag{3.2.12}$$

y llamaremos $S(E)$ la *envergadura* de el R-módulo E. El hecho que R es un anillo semilocal asegura que la dimensión que ocurre en (3.2.12) es finita. Note que $s(E) \geq 0$ y

$$\min_{1 \leq i \leq t} \dim P_j = DimE - s(E) \tag{3.2.13}$$

También $s(E) = 0$ cuando y sólo cuando las dimensiones de los ideales primos pertencen a el submódulo nulo de E son todas iguales, en que caso el valor comun de las dimesiones es $DimE$

Teorema 57 *Sea R un anillo semilocal, $E \neq 0$ un R-módulo de generación finita y γ un elemento que pertenece a el radical J de R y no es un divisor de cero en E. De aquí que $Dim(E/\gamma E) = DimE - 1$ y $s(E/\gamma E) \geq s(E)$.*

Prueba. Sea $DimE = r$, $s(E) = p$, $A = Ann_R E$ y $\bar{R} = R/A$. Supongamos además que $\bar{\gamma}$ denota la imagen de γ bajo el mapeo natural $R \to \bar{R}$. Por Proposición 70, los ideales primos que contiene $Ann_R(E/\gamma L)$ son los mismos que contienen (A, γ). De donde

$$Dim(E/\gamma E) = dim(A, \gamma) = DimR/(A, \gamma) = Dim\bar{R}/(\bar{\gamma})$$

porque $R/(A, \gamma)$ es anillo isomorfo a $\bar{R}/(\bar{\gamma})$. Por hipótesis, γ no es un divisor-nulo sobre E. Se sigue que γ no está contenido en algún ideal primo minimal perteneciente a un submódulo nulo de E y por tanto no está contenido en algún ideal primo minimal de A. Esto prueba que $dim(A, \alpha) < dimA = r$ y por lo tanto $Dim\bar{R}/(\bar{\gamma}) = dim(A, \gamma) < r = Dim\bar{R}$. Ahora $\bar{R}$ es un anillo semilocal y $\bar{\gamma}$ pertenece a cada uno de sus ideales maximales. Consecuentemente, por [15] Proposición 19 de sección (4.9), $Dim\bar{R}/(\bar{\gamma}) \geq Dim\bar{R} - 1$. Por consiguiente $Dim(E/\gamma E) = Dim\ \bar{R}/(\bar{\gamma}) = r - 1$ y la primera afirmación está probada. Puesto que $s(E) = p$, se sigue, de (3.2.13), que existe un ideal primo P que pertenece a el submódulo nulo de E y es tal que $dimP = r - p$. Ahora $0 :_E P \neq 0$. Consecuentemente existe $y \in E$ tal que $y \neq 0$ y $Py = 0$. Por (3.2.9) y el hecho que γ pertenece al radical de R, tenemos $\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma^n E = 0$. Por consiguiente existe un entero k tal que $y \in \gamma^k E$ y $y \notin \gamma^{k+1} E$. Sea $y = \gamma^k z$, donde $z \in E$. Entonces $z \notin \gamma E$ pero $\gamma^K Pz = Py = 0$. Sin embargo γ no es un divisor de cero en E así, esto implica que $Pz = 0$. Esto prueba que $\gamma E :_E P \neq \gamma E$. Porque el lado izquierdo contiene Z mientras el lado derecho no. Esto prueba que $P \subseteq P'$, donde P' es uno de los ideales primos pertenecientes a el submódulo γE de E. Además P' tiene que contener estrictamente a P. (Ya que si $P = P'$, entonces $\gamma \in (\gamma E : E) \subseteq P' = P$ que es imposible porque γ no es un divisor nulo en E) Por consiguiente $DimP' < dimP = r - p$ y por tanto, ya que P' pertenece a el submódulo cero de $E/\gamma E$,

$$s(E/\gamma E) \geq Dim(E/\gamma E) - dimP' \geq (r-1) - (r-p-1) = p$$

Esto completa la prueba. $||$

[5] Ver [15] Teorema 14 de sección (2.9)

Corolario 38 *Sea R un anillo semilocal con radical J, $E \neq 0$ un R-módulo con generación finita, y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ una R-sucesión sobre E en J. Entonces*

$$Dim[E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E] = DimE - m \quad y \quad s[E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E] \leq DimE - gr(J; E)$$

Observación 1 *Es importante notar que para el caso $m = 0$ está incluido en el corolario. De esta manera la prueba mostrará que*

$$s(E) \leq DimE - gr(J; E). \tag{3.2.14}$$

Esto a su vez implica, por (3.2.13), que

$$gr(J; E) \leq \min_{1 \leq j \leq t} dimP_j \leq DimE \tag{3.2.15}$$

donde $P_1, P_2, ..., P_t$ denotan los ideales primos que pertenecen a el submódulo nulo de E.

Prueba: Comensamos con la afirmación $Dim[E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E] = DimE - m$. Esto es trivial si $m = 0$. Ahora supongamos que $m > 0$ y sus
$E_i = E/(\alpha_1, ..., \alpha_i)E$. Entonces, para $0 \leq i \leq m-1, \alpha_{i+1}$ no es un divisor nulo en E_i y por tanto por Teorema 57 $Dim(E_i/\alpha_{i+1}E_i) = Dim\ E_i - 1$. Sin embargo $\alpha_{i+1}E_i = (\alpha_1, ..., \alpha_i, \alpha_{i+1})E/(\alpha_1, ..., \alpha_i)E$ y por tanto $E_i/\alpha_{i+1}E_i$ es isomorfo a E_{i+1}. Por consiguiente $DimE_{i+1} = DimE_i - 1$ y la primera afirmación de el corolario resulta. Ahora cambiamos nuestra atención a la afirmación

$$s[E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E] \leq DimE - gr(J; E).$$

Si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ es una R-sucesión maximal sobre E en J, entonces $gr(J; E) = m$ y todo elemento de J es un divisor nulo en $E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E$. Se sigue que J está contenido en uno de los ideales primos pertenecientes a el submódulo nulo de $E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E$. Pero J es una intersección de ideales maximales. Esto prueba que uno de los ideales maximales de R pertenece al submódulo nulo de $E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E$. Por tanto, por la definición de la envergadura de un módulo

$$\begin{aligned} s[E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E] \quad &= Dim[E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E] \\ &= DimE - m \\ &= DimE - gr(J; E). \end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ no es una R-sucesión maximal sobre E en J. Entonces Teorema 54 prueba que podemos extenderlo de manera que llegue a ser una. Sea $\alpha_1, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_i$ una R-sucesión maximal sobre E en J y escribimos $E_i = E/(\alpha_1, ..., \alpha_i)E$ como antes. Por teorema 57 y el hecho que $E_i/\alpha_{i+1}E_i$ es isomorfo a E_{i+1}, vemos que $s(E_{i+1}) \geq s(E_i)$ y por tanto $s(E_t) \geq s(E_m)$. Sin embargo, lo observado de el último párrafo prueba que $s(E_i) = DimE - gr(J; E)$. Así todo es probado. $||$.

El siguiente lema recoge algunos resultados simples que se requieren en la prueba de los teoremas principales.

Lema 34 *Sea R un anillo semilocal, $E \neq 0$ un R-módulo con generación finita y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ elementos contenidos en el radical J de R. Asumamos que*

$$Dim[E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E] = DimE - m$$

Entonces $Dim[E/(\alpha_1, ..., \alpha_i)E] = DimE - i$ para $i = 0, 1, ..., m$. Además, si este es el caso que para cada valor de i satisface $0 \leq i < m$ el ideal primo pertenece a el submódulo nulo de $E/(\alpha_1, ..., \alpha_i)E$ todo tiene dimensión igual a $DimE - i$, entonces $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ es una R-sucesión en E

Prueba. Sea $A = Ann_R E$ y $\bar{R} = R/A$. Por proposición 54 los ideales primos que contienen a $Ann_R(E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E)$ son los mismos que contienen $(A, \alpha_1, ..., \alpha_m)$. De ello resulta que

$$dim(A, \alpha_1, ..., \alpha_m) = Dim[E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E] = DimE - m = Dim\bar{R} - m$$

Supongamos que $\bar{\alpha}_j$ denota la imagen natural de α_j en $\bar{R}$. Entonces $\bar{R}$ es un anillo semilocal cuyo radical contiene elementos $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_m$. Pasando al anillo $\bar{R}/(\bar{\alpha}_1, ..., \bar{\alpha}_m)$, vemos que

$$Dim\bar{R}/(\bar{\alpha_1}, ..., \bar{\alpha_i}) = dim(\bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2}, ..., \bar{\alpha_m}) = dim(A, \alpha_1, ..., \alpha_m) = Dim\bar{R} - m$$

De aquí, por [15] Proposición 19 sección (2.9) $\bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2}, ..., \bar{\alpha_m}$ es un subconjunto de un sistema de parámetros de $\bar{R}$. Supongamos ahora que $0 \leq i \leq m$. Entonces $\bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2}, ..., \bar{\alpha_i}$ es también un subconjunto de un sistema de parámetros de $\bar{R}$ y por tanto por la misma proposición, $Dim\bar{R}/(\bar{\alpha_1}, ..., \bar{\alpha_i}) = Dim\bar{R} - i$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} dim(A, \alpha_1, ..., \alpha_i) \quad &= dim(\bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2}, ..., \bar{\alpha_i}) = Dim\bar{R}/(\bar{\alpha_1}, ..., \bar{\alpha_i}) \\ &= Dim\bar{R} - i = DimE - i \end{aligned}$$

Sin embargo, por Proposición 54, $(A, \alpha_1, ..., \alpha_i)$ y el ideal aniquilador de $E/(\alpha_1, ..., \alpha_i)E$ tiene la misma dimensión. Esto lleva a $Dim[E/(\alpha_1, ..., \alpha_i)E] = DimE - i$ y se establece la primera parte de el lema. Ahora asumamos que (para cada i $0 \leq i < m$) el ideal primo pertenece a el submódulo nulo de $E/(\alpha_1, ..., \alpha_i)E = E_i$ (digamos) todos tienen dimensión igual a $DimE - i$. Entonces α_{i+1} no puede estar contenido en algún ideal primo que pertenece a el submódulo nulo de E_i. Si asumimos que uno de estos ideales primos, digamos P, contiene a α_{i+1}. Entonces tendríamos $dimP = DimE - i$ y también $(A, \alpha_1, ..., \alpha_i, \alpha_{i+1}) \subseteq P$ porque P contiene todo ideal, tal como $(A, \alpha_1, ..., \alpha_i)$ que aniquila E_i. Por consiguiente $dim(A, \alpha_1, ..., \alpha_i, \alpha_{i+1}) \geq dimP = DimE - i$ y ahora tenemos una contradicción porque ya vimos que $dim(A, \alpha_1, ..., \alpha_i, \alpha_{i+1}) = DimE - i - 1$. Se sigue que α_{i+1} no es un divisor nulo en E_i. Como esto se tiene para $0 \leq i < m$ vemos que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ es una R-sucesión en E. La prueba es ahora completa. ||

Teorema 58 *Sea R un anillo semilocal con radical J y $E \neq 0$ un R-módulo finitamente generado. Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

(a) $gr(J; E) = DimE$

(b) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ $(m \geq 0)$ *pertenece a J y*

$$Dim[E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E] = DimE - m$$

entonces todos los ideales primos pertenecen a el submódulo nulo de $E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E$ tiene la misma dimensión.

Prueba. Primero asumimos que (a) es verdadero. Sea $\alpha_1, ..., \alpha_m$ pertenece a J y tal que $Dim[E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E]DimE - m$. Sea $E_i = E/(\alpha_1, ..., \alpha_i)E$. Tenemos que probar que $s(E_m) = 0$. Esto se realizara, usando inducción en i, $s(E_i) = 0$ para $i = 0, 1, ..., m$. El caso $i = 0$ es trivial porque, por (3.2.14),

$$0 \leq s(E) \leq DimE - gr(J; E)$$

Por tanto supongamos que $0 < i \leq m$ y también que $s(E_j) = 0$ para $0 \leq j < i$. Por Lema 34, tenemos $Dim[E/(\alpha_1, ..., \alpha_j)E] = DimE - j$ para $0 \leq j \leq m$. Esto resulta (usando hipótesis inductiva) que si $0 \leq j < i$ entonces todo ideal primo pertenece al submódulo nulo de $E/(\alpha_1, ..., \alpha_j)E$ debe tener igual dimensión a $DimE - j$. De aquí que otra vez usamos Lema 34, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i$ es una R-sucesión sobre E. Por consiguiente, por el corolario Teorema 57, $0 \leq s(E_i) \leq DimE - gr(J; E)$. De esa manera $s(E_i) = 0$ y concluimos que (a) implica (b). Ahora asumimos que (b) es verdadero. Sea $A = Ann_R E$, $\bar{R} = R/A$ y $DimE = p$. Entonces $\bar{R}$ es un anillo semilocal p-dimensional. Consideremos el epimorfismo natural $R \to \bar{R}$. Este mapeo de el radical de R sobre el radical de $\bar{R}$ encontraremos elementos $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_p$ en J así que sus imagenes $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, ..., \bar{\alpha}_p$ forma un sistema de paramentros de $\bar{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} Dim[E/(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_p)E] \quad &= dim(A, \alpha_1, ...\alpha_p) = dim(\bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2}, ..., \bar{\alpha_p}) \\ &= 0 = DimE - p. \end{aligned}$$

De aquí que, por Lema 34, $Dim[E/(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)E] = Dim\ E - i$ para $0 \leq i \leq p$ Además, todo ideal primo que pertenece a el submódulo nulo de $E/(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_i)E$ tiene dimensión igual a $DimE - i$ porque asumimos (b) es verdadero. Por consiguiente, por la segunda parte del Lema 34, $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_p$ es una R-sucesión en E y por tanto $gr(J; E) \geq p = Dim\ E$. Sin embargo la desigualdad opuesta se tiene por virtud de (3.2.15) y así la prueba se completa. ||

Proposición 71 *Sea R un anillo semilocal con radical J y $E \neq 0$ una generación finita de R-módulos que satisface $gr(J; E) = DimE$. Si ahora $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ pertenece a J y $Dim[E/(\alpha_1, ..., \alpha_m)E] = DimE - m$, entonces $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ es una R-sucesión en E.*

Prueba. La primer parte del Lema 56 prueba que

$$Dim[E/(\alpha_1, ..., \alpha_i)E] = DimE - i$$

para $0 \leq i \leq m$. Luego, se sigue (de Teorema 58) que el primer ideal pertenece a el submódulo nulo de $E/(\alpha_1, ..., \alpha_i)E$ toda dimensión igual a $DimE - i$. De aquí que, por la segunda parte del Lema 56, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ es una R-sucesión en E. Esto establece la proposición. ||

Teorema 59 *Sea R un anillo semilocal con radical J y $E \neq 0$ un R-módulo con generación finita que satisface $gr(J; E) = DimE$. Si ahora P es algún ideal primo que contiene el aniquilador $Ann_R E$ de E entonces*

$$gr(P; E) = rank(P/Ann_R E) \quad y$$

$$DimE = rank(P/Ann_R E) + dim\ P.$$

Prueba. Veamos, por [15] Proposición 13 de sección (2.7), que $PE \neq E$. De aquí, por Proposición 71, $gr(P; E) \leq rank(P/Ann_R E)$. También, por razones triviales,

$$\begin{aligned} rank(P/Ann_R E) + dim\ P \quad &= rank(P/Ann_R E) + dim(P/Ann_R E) \\ &\leq Dim(R/Ann_R E) \\ &= DimE \end{aligned}$$

Esto es por tanto suficiente probar que $gr(P; E) + dim\ P \geq DimE$. Para este fin sea $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ una R-sucesión maximal sobre E en $P \cap J$. Por el corolario Teorema 57, $Dim[E/(\alpha_1, ..., \alpha_k)E] = DimE - k$ y, por Teorema 58, cada ideal primo pertenece a el submódulo nulo de $E/(\alpha_1, ..., \alpha_k)E$ tiene dimensión igual a $DimE - k$. Además, uno de los ideales primos, digamos P', debe contener $P \cap J$ para destinar que existe una R-sucesión sobre E en $P \cap J$ que es más grande que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. De esa manera $dimP' = DimE - k$ y ambos $P \subseteq P'$ o $J \subseteq P'$. Si

$P \subseteq P'$, entonces todos los elementos de P es un divisor nulo en $E/(\alpha_1, ..., \alpha_k)E$ y por tanto $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ es una R-sucesión maximal sobre E en P. De esta manera $gr(P; E) = k$ y por lo tanto $gr(P; E) + dimP \geq k + dimP' = DimE$. En el otro lado, si $J \subseteq P'$, entonces P' es un ideal maximal de R y así $DimE - k = dimP' = 0$. Por consiguiente $gr(P; E) + dim\ P \geq gr(P; E) \geq K = DimE$ como requiere.||

Teorema 60 *Sea R un anillo semilocal con radical J y $E \neq 0$ un R-módulo finitamente generado. Entonces las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:*

(a) $gr(J; E) = DimE = Dim\ R$;

(b) *todo sistema de parámetro es una R-sucesión sobre E;*

(c) *allí es en menor un sistema de parámetro que es una R-sucesión sobre E.*

Observación 2 *Por (3.4.23), tenemos $gr(J; E) \leq DimE \leq Dim\ R$. Así (a) es valido si y sólo si $gr(J; E) = Dim\ R$. Nuevamente si $Dim\ R = 0$, entonces el conjunto vacío es sólo un sistema de parámetro. Esto es considerado como formando una R-sucesión sobre todo R-módulo no nulo.*

Prueba. Daremos una demostración cíclica. Primero supongamos que (a) es verdadero y sea $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d$ un sistema de parámetro de R. Entonces $d = DimR$ y, puesto que $E/(\alpha_1, ..., \alpha_d)E$ es un módulo no nulo aniquilado por $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d)$, $Dim[E/(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d)E] = 0 = DimE - d$. El cual $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d$ es una R-sucesión sobre E ahora sigue de la Proposición 56. Así (a) implica (b) es obvio (b) implica (c). Ahora asumamos que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d$ es un sistema de parámetro que es también una R-sucesión sobre E. Entonces $gr(J; E) \geq d = DimR$ y la ecuación $gr(J; E) = DimE = Dim\ R$ sigue por virtud de la observación hace inmediata la afirmación posterior de el teorema. La prueba esta ahora completa. ||

3.3. Anillo Semi-regular

En esta sección la teoría de grado será aplicada a el estudio de una importante clase de anillos Noetherianos. Esta clase convenientemente se describe con la ayuda de dos definiciones preliminares. Sea A un ideal propio en un anillo Noetheiano no-nulo R.

Definición 33 *El ideal A se dice llamar la clase fundamental si puede ser generado por r elementos, donde $r = rankA$.*

Por [15] Teorema 22 de sección (4.8), A no puede ser generado por menos elementos que $rankA$; de aquí que un ideal de la clase fundamental es en un extremo sistuado respecto del rango. Por consiguiente a convención por lo que el conjunto vacío es considerado como generador el ideal cero, el ideal cero es necesariamente la clase fundamental. En efecto sólo el ideal de rango cero tiene esta propiedad. Para la orientación de el lector, es necesario indicar esos que son llamados ideales de la clase fundamental son más usualmente descrito como ideales de la *clase principal*. Sin embargo la terminología anterior puede ser preferia porque un ideal de la clase principla fuertemente es confundida con un *ideal principal* por que que queremos, desde luego, un ideal que puede ser generado por un sólo elemento.

Definición 34 *El ideal A se dice ser "puro en respecto del rango " si todo ideal primo perteneciente a A tiene el mismo rango.*

Claramente si A es puro en respecto del rango, entonces todo ideal primo perteneciente a A tiene el mismo rango como A mismo. También A no tiene ideal primo fijo.[6] Veamos ahora el concepto central de esta sección.

Definición 35 *Un anillo Noetheriano no nulo puede ser llamado "semi-regular" si todo ideal propio de la clase fundamental es puro con respecto del rango.*

Un anillo Semi-regular es también a saber un anillo Macaulay-Cohen.

Teorema 61 *Sea R un anillo local de dimensión $d \geq 0$. Entonces las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:*

(a) *R es semi-regular*

(b) *existe un menor sistema de parámetros que es una R-sucesión;*

(c) *todo sistema de parámetro es una R-sucesión.*

Observación 3 *Debe de notar que si $d = 0$, entonces R es simi-regular porque, en este caso, existe sólo un ideal primo.*

Ver también la observacion del Teorema 60.
Prueba. Sea M el ideal maximal de R así que $rank\ M = d$. Empezaremos por asumir que (a) es verdadero. Por [15] Proposición 15 de sección (4.8), existen elementos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i = i$ pertenecientes a M tal que $rank(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i) = i$ para $0 \leq i \leq d$. Por consiguiente, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)$ es de la clase fundamental y por ello, puesto que R es simi-regular, todo ideal primo perteneciente a este tiene rango igual a i. Si por ello $i < d$, entonces α_{i+1} no petenece a alguno de estos ideales primos para distintos $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, \alpha_{i+1})$ debía tener sólo $rank\ i$. Por consiguiente $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i) : \alpha_{i+1} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)$ que prueba que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d$ es una R-sucesión. Además $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d)$ tiene rango igual a d y por ello $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d$ es un sistema de parámetro. De esta menera se prueba que (a) implica (b). Ahora supongamos que (b) es verdadero. Tomando $E = R$ en teorema 60, encontramos que todo sistema de parametro es una R-sucesion. De esta manera (b) implica (c). Finalmente asumamos que tenemos (c). Entonces, de nuevo usamos Teorema 60, $gr(M) = Dim\ R$ y así se sigue, de Teorema 59 que $dimP + rankP = DimR$ para todo ideal primo P. Sea $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ elementos de R que generan un ideal de $rank\ r$. Por consideración el ideal primo que pertenece a $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r)$, vemos una vez que $dim(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r) = d - r$. De esta manera la dimensión de los R-módulos $R/(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r)$ es $DimR - r$. Podemos por ello aplicar Teorema 58 (con $E = R$) para deducir que todo ideal primo perteneciente a $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r)$ tiene dimensión $d - r$. Por este medio todos esos ideales primos tienen $rank\ r$. Por consiguiente $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r)$ es puro en respecto del rango y por ello R puede ser probado para ser semi-regular. ||

Corolario 39 *Sea R un anillo local que es semi-regular. Entonces $DimP + rankP = DimR$ para todo ideal primo P*

En orden vemos que es suficiente observar que, en la trayectoria de la prueba justamente dada, prueba que la relación $DimP + rankP = DimR$ es una consecuencia de la condición (c) en las consideraciones de el teorema.

Lema 35 *Sea R un anillo semi-regular y P uno de sus ideales primos. Entonces R_P es un anillo local semi-regular.*

[6] Ver [15] sección (2.9) de la expansión de este término.

Prueba. Sea $rankP = d$. Por [15] proposición 15 de sección (4.8), existen elementos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d$ en P tal que $rank(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i) = i$ para $0 \leq i \leq d$. Puesto que R es semi-regular, todos los ideales pertenecientes a $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)$ tienen rango igual a i. De ello resulta que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i) : \alpha_{i+1} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)$ siempre que $0 \leq i < d$. Notemos, en el procedimiento anterior, que P es un ideal primo minimal de $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d)$. Sea $\chi : R \to R_P$ el mapeo canónico. Por [15] Proposición 3 de sección (3.2) y por (3.5.6), $(\chi(\alpha_1), ..., \chi(\alpha_i)) : \chi(\alpha_{i+1}) = (\chi(\alpha_1), ..., \chi(\alpha_i))$ para $0 \leq i < d$. De ello resulta que $\chi(\alpha_1), \chi(\alpha_2), ..., \chi(\alpha_d)$ son ambos una R_P-sucesión y un sistems de parámetros en R_P. Este R_P es un anillo local semiragular es ahora una consecuencia de Teorema 61. Esto completa la prueba. ||

Teorema 62 *Sea R un anillo Noetheriano no-nulo. Entonces R es semiregular si y sólo si R_M es semi-regular para todo ideal maximal M.*

Prueba. Asumamos que R_M es semi-regular para todo ideal maximal M y se deduce de esto que R mismo es semi-regular. Lo recíproco se sigue de Lema 35. Sea $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$ r elementos que generan un ideal de *rank* r. Entonces todo ideal primo *minimal* de $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$ tiene *rank* r. Supongamos ahora que P es un ideal primo arbitrario perteneciente a $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$. El teorema resulta si podemos probar que el rango de P es igual a r. Existe un ideal maximal M tal que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r) \subseteq P \subseteq M$. De paso el anillo R_M de fracciones, encontramos, usando [15] Teorema 11 de sección (3.7), que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$ extendido a un ideal de la clase fundamental de quienes el rango es r y que tiene P_M como uno de sus ideales. Puesto que R_M es semi-regular, de ello resulta que $P_M = r$. Sin embargo $rankP_M = rank\ P$. Por consiguiente $rank\ P = r$ y el teorema esta probado. ||

El siguiente resultado proporciona una generalización de Lema 35.

Teorema 63 *Sea R un anillo semi-regular y S un subconjunto no vacío multiplicativamente cerrado subconjunto de R no conteniendo el elemento cero. Entonces R_S es también un anillo semi-regular.*

Prueba. Empezaremos negando que R_S es un anillo Noetheriano no nulo. Sea M un ideal maximal de R_S. Entonces $M = P_S$, donde P es algún ideal primo de R que no satisface S. Por Teorema 62, es suficiente probar que $(R_S)_M$, que es $(R_S)_{P_S}$ es semi-regular. Sin embargo, por [15] Proposición 19 de sección (3.8), $(R_S)_{P_S}$ es anillo-isomorfo a R_P y sabemos que R_P es semi-regular por virtud de Lema 35. Esto completa la prueba. ||

Teorema 64 *Sea R un anillo semi-regular y P', P ideales primos de R que satisfacen $P' \subseteq P$. Entonces $rankP = rank(P/P') + rankP'$*

Si localizamos a P, entonces lo requerido en el resultado se sigue inmediatamente de Lema 35 y el corolario Teorema 61.

Teorema 65 *Sea R un anillo semi-regular y A un ideal de la clase fundamental. Entonces R/A es también un anillo semi-regular.*

Prueba. Sea $r = rankA$. Entonces, puesto que A pertenece a la clase fundamental, existen elementos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ que genera A. Sea $\bar{R} = R/A$ y asumamos que $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$ pertenecen a R y tal que $rank(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ..., \bar{\beta}_s) = s$. Aquí $\bar{\beta}_i$ denota la imagen natural de β_i en $\bar{R}$. El ideal primo perteneciente a el $\bar{R}$-ideal $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ..., \bar{\beta}_s)$ son justamente los ideales Π/A, donde Π es un ideal primo característico perteneciente a $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s)$. Para establecer el teorema debemos probar que $rank(\Pi/A) = s$ en todo caso. Sea P un ideal primo *minimal* de $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s)$. Entonces P/A es un ideal primo minimal de $(\bar{\beta}_1, ..., \bar{\beta}_s)$.

Por consiguiente $rank(P/A) \leq s$, tenemos en hecho $rank(P/A) = s$. De ello resulta que existe un ideal primo minimal P' de A tal que $A \subseteq P' \subseteq P$ y $rank(P/P') = s$. Sin embargo todos los ideales primos pertenecientes a A tiene rango igual a r y así , en particular, $rankP' = r$. De aquí, por Teorema 64, $rankP = rankP' + rank(P/P') = r+s$. Esto prueba que $rank(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s) = r + s$ y demuestra que el R-ideal $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s)$ es de la clase fundamental. Ahora asumamos que Π es un ideal primo arbitrario perteneciente a $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s)$. Puesto que R es semi-regular y el ideal es de la clase fundamental, podemos concluir que $\Pi = r + s$. Luego podemos escoger un ideal primo minimal P^* de A tal que $P^* \subseteq \Pi$ y $rank(\Pi/P^*) = rank(\Pi/A)$. Entonces, usando Teorema 64 y el hecho que $rank\ P* = r$, obtenemos

$$rank(\Pi/A) = rank\ \Pi - rank\ P^* = r + s - r = s$$

Esto completa la prueba. ||

El resto de la discusión de anillos semi-regulares concierne con anillo polinomial semi-regular. Para nuestra investigación, necesitamos usar ciertas propiedades de anillos polimomiales que no estan aún establecidas.

3.4. Propiedades generales de los anillos polinomiales

Como usualmente, R denota un anillo conmutativo con un elemento identidad y $R[X_1, X_2, ..., X_n]$ el anillo de polinomio en $X_1, X_2, ..., X_n$ con coeficientes en R. Por consiguiente un elemento característico f de $R[X_1, X_2, ..., X_n]$ tiene representación *única*

$$f = \sum r_{\mu_1,\mu_2 ... \mu_n} X_1^{\mu_1} X_2^{\mu_2} ... X_n^{\mu_n}, \tag{3.4.16}$$

donde los $r_{\mu_1,\mu_2 ... \mu_n}$ pertenece a R y sólo un número finito de ellos son diferentes de cero. Sea A un ideal de el anillo R. *En orden el polinomio f, de (3.4.16), debe pertenecer a la extensión $AR[X_1, X_2, ..., X_n]$ de A estos son ambos necesarios y suficientes para todos los coeficientes $r_{\mu_1,\mu_2 ... \mu_n}$ pertenecen a A.* Una consecuencia inmediata de esta observación es la relación

$$AR[X_1, X_2, ..., X_n] \cap R = A \tag{3.4.17}$$

Supongamos ahora que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de ideales de R. Entonces la misma observación prueba que

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) R[X_1, X_2, ..., X_n] = \bigcap_{i \in I} (A_i R[X_1, X_2, ..., X_n]). \tag{3.4.18}$$

Como antes, sea A un ideal de R. Si f es el polinomio descrito en (3.4.16) y $c \in R$, entonces cf pertenece a $AR[X_1, X_2, ..., X_n]$ si y sólo si $cr_{\mu_1,\mu_2,...,\mu_n} \in A$; esto es si y sólo si $r_{\mu_1,\mu_2,...,\mu_n} \in (A : c)$, de cada coeficiente $r_{\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}$. Por consiguiente

$$AR[X_1, X_2, ..., X_n] : c = (A : c)R[X_1, X_2, ..., X_n] \tag{3.4.19}$$

Si C también un R-ideal. Entonces $A : C = \bigcap_{c \in C} (A : c)$ y, usando (3.4.19), afirmamos que

$$\begin{aligned} AR[X_1, ..., X_n] : CR[X_1, ..., X_n] &= \bigcap_{c \in C} (AR[X_1, X_2, ..., X_n] : c) \\ &= \bigcap_{c \in C} ((A : c)[X_1, X_2, ..., X_n]) \end{aligned}$$

Por lo tanto se sigue, de (3.4.18), que

$$AR[X_1, ..., X_n] : CR[X_1, ..., X_n] = (\bigcap_{c \in C} (A : c))R[X_1, ..., X_n]$$

que puede reescribirse como

$$AR[X_1, ..., X_n] : CR[X_1, ..., X_n] = (A : C)R[X_1, ...X_n]. \tag{3.4.20}$$

Aún asumimos que A es un R ideal, sea $\phi : R \to R/A$ el mapeo natural. Se obtiene un anillo epimorfismo $R[X_1, X_2, ..., X_n] \to (R/A)[X_1, X_2, ..., X_n]$ por la operación con ϕ en los coeficientes de cada polinomio en $R[X_1, X_2, ..., X_n]$. El núcleo de este epimorfismo es claramente $AR[X_1, X_2, ..., X_n]$. Consecuentemente se induce un anillo isomorfismo

$$R[X_1, X_2, ..., X_n]/AR[X_1, X_2, ..., X_n] \approx (R/A)[X_1, X_2, ..., X_n] \tag{3.4.21}$$

Este isomorfismo es frecuentemente usado para identificar los dos anillos que ocurren en (5.4.6). Otra útil identificación puede originarse en el siguiente camino. Sea S un conjunto no vacío multiplicativo cerrado subconjunto de R. Entonces es algún subconjunto multiplicativo cerrado de $R[X_1, X_2, ..., X_n]$ y por tanto podemos formar el anillo $R[X_1, X_2, ..., X_n]_S$ de fracciones. Sea

$$f = \sum r_{v_1, v_2 ... v_n} X_1^{v_1} X_2^{v_2} ... X_n^{v_n}$$

es un elemento característico de $R[X_1, X_2, ..., X_n]$. Ahora obtenemos un anillo-isomorfismo

$$R[X_1, X_2, ..., X_n]_S \approx R_S[X_1, X_2, ..., X_n] \tag{3.4.22}$$

por medio del mapeo

$$\left[\frac{f}{s}\right] \to \sum \left[\frac{r_{v_1, v_2 ... v_n}}{s}\right] X_1^{v_1} X_2^{v_2} ... X_n^{v_n}$$

Aquí, desde luego, s denota un elemento de S. Sea D el monoid consistente de toda sucesión $(v_1, v_2, ..., v_n)$ de n enteros no negativos, esto es entendible que la adición de tal sucesión es definida por

$$(v_1, v_2, ..., v_n) + (v_1', v_2', ..., v_n') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2', ..., v_n + v_n').$$

El monoid D es menor torsión. Además puede ser considerado como un anillo D-grado [7] en que el elemento homogéneo de grado $(v_1, v_2, ..., v_n)$ son dados la forma $rX_1^{v_1} X_2^{v_2} ... X_n^{v_n}$ donde r pertenece a R. Sea A un ideal de R. Entonces $AR[X_1, X_2, ..., X_n]$ es un ideal homogéneo y por tanto, por [15] Proposición 32 de sección (2.13). $Rad(AR[X_1, ..., X_n])$ es también homogéneo, *Ahora sostenemos que*

$$(Rad\ A)R[X_1, X_2, ..., X_n] = Rad(AR[X_1, X_2, ..., X_n]) \tag{3.4.23}$$

Efectivamente es claro que el lado izquierdo es contenido en el lado derecho. Para probar la inclusión opuesta, es suficiente probar que si un elemento homogéneo $rX_1^{v_1} X_2^{v_2} ... X_n^{v_n}$ pertenece a $Rad(AR[X_1, X_2, ..., X_n])$, entonces $r \in RadA$. Sin embargo, si $(rX_1^{v_1} X_2^{v_2} ... X_m^{v_n})^m \in AR[X_1, ..., X_n]$, entonces $r^m \in A$ y por tanto $r \in Rad\ A$ como se ha requerido.

Proposición 72 *Sea P un ideal primo de R. Entonces $PR[X_1, X_2, ..., X_n]$ es un ideal primo de el anillo polinomial $R[X_1, X_2, ..., X_n]$.*

[7] vea [15] sección (2.11) de la definición de anillo de grado

Prueba. Primero notaremos que $PR[X_1, X_2, ..., X_n]$ es un ideal homogéneo propio de $R[X_1, X_2, ..., X_n]$. De aquí, por [15] Lema 13 de sección (2.13), es suficiente determinar la propiedad característica de un ideal primo dada en el caso de elementos *homogéneos*. Sin embargo esto es obvio. $||$

Corolario 40 *Si R es un dominio integral, entonces el anillo polinomial*

$$R[X_1, X_2, ..., X_n]$$

es también un dominio integral.

Este es el caso especial de Proposición 73 en que P es el ideal nulo. Nuestro siguiente resultado concierne una importante propiedad de divisores nulos en un anillo polinomial.

Proposición 73 *Sea $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ un divisor nulo en el anillo polinomial $R[X_1, X_2, ..., X_n]$. Entonces existe c en R tal que $c \neq 0$ y $cf(X_1, X_2, ..., X_n) = 0$.*

Prueba. Podemos observar que $R[X_1, X_2, ..., X_n]$ es grado por el monoid consiste de toda sucesión de n enteros no negativos. Este monoid es menor torsión. Por ello puede ser dado un orden total que es compatible con su estructura monoid.[8] Sea $f(X_1, ..., X_n) = \alpha X_1^{\mu_1} X_2^{\mu_2} ... X_n^{\mu_n} + \beta X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} ... X_n^{\nu_n} + ... + \omega X_1^{\sigma_1} X_2^{\sigma_2} ... X_n^{\sigma_n}$ donde $\alpha, \beta, ..., \omega$ son en R y

$$(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) > (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) > ... > (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n).$$

Por hipótesis, existe $g(X_1, X_2, ..., X_n) \neq 0$ tal que

$$f(X_1, ..., X_n) g(X_1, ..., X_n) = 0$$

Escojamos $g(X_1, X_2, ..., X_n)$ así que se satiaface esta condición y, en adición, tenemos la pequeña posibilidad de un número de términos no nulos. Sea

$$g(X_1, X_2, ..., X_n) = cX_1^{m_1} X_2^{m_2} ... X_n^{m_n} + ...,$$

donde $c \in R$, $c \neq 0$, y $X_1^{m_1} X_2^{m_2} ... X_n^{m_n}$ es el alto producto potencia actual que ocurre en $g(X_1, X_2, ..., X_n)$. Puesto que $f(X_1, ..., X_n) g(X_1, ..., X_n) = 0$ vemos, por considerar el término de grado $(\mu_1 + m_1, \mu_2 + m_2, ..., \mu_n + m_n)$, que $\alpha c = 0$. De esa manera $\alpha g(X_1, X_2, ..., X_n)$ tiene menos términos no nulo que $g(X_1, X_2, ..., X_n)$ y $f(X_1, ..., X_n) \alpha g(X_1, ..., X_n) = 0$. De aquí, por escoger $g(X_1, ..., X_n)$, debemos tener $\alpha g(X_1, ..., X_n) = 0$. Luego observamos que

$$[f(X_1, X_2, ..., X_n) - \alpha X_1^{\mu_1} X_2^{\mu_2} ... X_n^{\mu_n}] g(X_1, X_2, ..., X_n) = 0$$

que es

$$(\beta X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} ... X_n^{\nu_n} + ... + \omega X_1^{\sigma_1} X_2^{\sigma_2} ... X_n^{\sigma_n}) g(X_1, X_2, ..., X_n) = 0$$

Se calcula considerando del término de grado

$$(\nu_1 + m_1, \nu_2 + m_2, ..., \nu_n + m_n)$$

prueba que $\beta c = 0$. De esa manera $\beta g(X_1, X_2, ..., X_n)$ tiene menos términos no nulos que $g(X_1, X_2, ..., X_n)$ y $f(X_1, ..., X_n) \beta g(X_1, ..., X_n) = 0$. Consecuentemente, por el escogido de $g(X_1, X_2, ..., X_n)$. Tenemos $\beta g(X_1, ..., X_n) = 0$. Procediendo en este camino probaremos, en la sucesión, que

$$\alpha c = 0, \ \beta c = 0, ..., \omega c = 0.$$

Por consiguiente $cf(X_1, X_2, ..., X_n) = 0$ y la prueba se completa.$||$

Probaremos ahora que un ideal primario de el anillo R queda primario cuando este es extendido a $R[X_1, X_2, ..., X_n]$.

[8] Ver [15] teorema 22 de sección (2.12). Sin embargo, este puede ser notado que la lexicografía de orden familiar tiene la propiedad requerida. (Ver [15] ejercicio 15 de capitulo 2)

Proposición 74 *Sea Q un ideal P-primario de el anillo R. Entonces*

$$QR[X_1, X_2, ..., X_n]$$

es un ideal primario de el anillo polinomial $R[X_1, X_2, ..., X_n]$ y el ideal primo que pertenece a $PR[X_1, X_2, ..., X_n]$.

Prueba. Es suficiente probar que $QR[X_1, X_2, ..., X_n]$ es un ideal primario, para entonces la otra afirmación se sigue inmediatamente de (3.4.23). Ahora $QR[X_1, X_2, ..., X_n]$ es un ideal homogéneo propio. De aquí por [15] Lema 14 de sección (2.13) en orden a verificar que esta tiene la propiedad característica de un ideal primario puede afirmar nuestra atención a elementos homogéneos. Sin embargo en este caso la verificación es trivial. ||

Proposición 75 *Sea A un ideal de R y supongamos que este tiene una descomposición primaria*

$$A = Q_1 \cap Q_2 \cap ... \cap Q_s \tag{3.4.24}$$

en R. Entonces
$AR[X_1, ..., X_n]$

$$= Q_1R[X_1, ..., X_n] \cap Q_2R[X_1, ..., X_n] \cap ... \cap Q_sR[X_1, ..., X_n] \tag{3.4.25}$$

es una descomposición primaria de $AR[X_1, X_2, ..., X_n]$ en $R[X_1, X_2, ..., X_n]$. Además, si (3.4.24) es una descomposición normal, entonces así tambíen es (3.4.25). Esto prueba que si $P_i(1 \le i \le t)$ son los ideales primos pertenecientes a A, entonces el $P_iR[X_1, X_2, ..., X_n]$, donde $1 \le i \le t$, son los ideales primos pertenicientes a $AR[X_1, X_2, ..., X_n]$.

Prueba. Supongamos que el ideal Q_i pertenece a el ideal primo P_i. Entonces, por Propocicion 75, $Q_iR[X_1, X_2, ..., X_n]$ es también primario y su radical es $P_iR[X_1, X_2, ..., X_n]$. Luego, la relación (3.4.25) sigue de (3.4.24) por virtud de (3.4.18). Estas dos observaciones establecen la primera afirmación. Ahora asumamos que (3.4.24) es una descomposición normal. Inmediatamente se sigue; de (3.4.17) que los ideales primos $P_iR[X_1, X_2, ..., X_n]$ son distintos. Además podemos tener

$$Q_iR[X_1, X_2, ..., X_n] \supseteq \bigcap_{j \neq i} Q_jR[X_1, X_2, ..., X_n]$$

porque, toma sobre interseccíones con R, este produce $Q_i \supseteq \bigcap_{j\neq i} Q_j$ que es contrario a la suposición de (3.4.24) es una descomposición normal. ||

Proposición 76 *Sea R un anillo Noetheriano y P un ideal primo de R. Entonces $PR[X_1, X_2, ..., X_n]$ es un ideal primo de el anillo polinomial*

$$R[X_1, X_2, ..., X_n]$$

y este tiene el mismo rango como P.

Prueba. Primero notemos que, por [15] Teorema 1 Cor. de sección (4.1),

$$R[X_1, X_2, ..., X_n]$$

es un anillo Noetheriano y, por Proposición 73, $PR[X_1, X_2, ..., X_n]$ es un ideal primo. Sea *rank* $P = r$. Entonces existe una estricta sucesión decreciente

$$P \supset P_1 \supset P_2 \supset ... \supset P_r$$

de $r+1$ ideales primos de el anillo R. Esto sigue, de Proposición 73 y (3.4.17), que

$$PR[X_1, ..., X_n] \supset P_1 R[X_1, ..., X_n] \supset ... \supset P_r R[X_1, ..., X_n]$$

es alguna sucesión descendente estricta de ideales primos. Entonces

$$rank(PR[X_1, ..., X_n]) \geq r.$$

Luego, por [15] Proposición 15 de sección (4.8), existe r elementos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ tal que P es un ideal primo minimal de $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$. De aquí por Proposición 76, $PR[X_1, ..., X_n]$ es un ideal primo minimal de $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)R[X_1, ..., X_n]$. Por tanto se sigue, de [15] Teorema 22 de Sección (4.8), que
$rankPR[X_1, X_2, ..., X_n]$. Esto completa la prueba de el teorema. ||

Supongamos que R es un anillo (conmutativo y posee un elemento identidad) y $X_1, X_2, ..., X_n$ son indeterminados. Para $1 \leq i \leq n$ sea $R_i = R[X_1, X_2, ..., X_i]$ y sea $R_0 = R$. Entonces, como notamos en [15] sección (4.2), $R_{i+1} = R_i[X_{i+1}]$. En otros términos, $R[X_1, X_2, ..., X_{i+1}]$ puede considerarse como el anillo de polinomios en X_{i+1} dado con coeficientes polinomiales en $X_1, X_2, ..., X_i$. Esta útil observación nos permite, en ocasión, a reducir un problema con respecto a polinomios en varias variables a el caso donde allí es solamente una sola variable. En vista de esto, probaremos tomando la oportunidad para hacer algúnas observaciones elementales con respecto a polinomios en una variable. La misma variable será denotada por X. Sea $f(X) = a_0 + a_1X + ... + a_mX^m$ pertenece a $R[X]$. La máxima potencia de X que tiene un coeficiente no nulo es llamado el *grado de* $f(X)$. Este grado es denotado por $\partial^0 f(X)$ o simplemente $\partial^0 f$. De esta manera si $a_m \neq 0$, entonces $\partial^0 f = m$. En este caso a_m es llamado el *primer coeficiente* y a_mX^m los *primeros términos* de $f(X)$. Claramente si $f(X)$ y $g(X)$ ambos pertenecen a $R[X]$, entonces

$$\partial^0(f+g) \leq max(\partial^0 f, \partial^0 g) \tag{3.4.26}$$

y efectivamente es igual si sucede que $\partial^0 f \neq \partial^0 g$. Sea $\partial^0 f(X) = m$ y $\partial^0 g(X) = n$. Entonces $f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_mX^m$ donde $a_m \neq 0$, y
$g(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + ... + b_mX^m$ donde $b_n \neq 0$. Ahora

$$f(X)g(X) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)X + ... + (a_mb_n)X^{m+n}.$$

Desde luego puede suceder que $a_mb_n = 0$, pero en algún caso $\partial^0(fg) \leq m+n$, que es

$$\partial^0(fg) \leq \partial^0 f + \partial^0 g. \tag{3.4.27}$$

Sin embargo $a_mb_n \neq 0$, entonces obtenemos

$$\partial^0(fg) = \partial^0 f + \partial^0 g, \tag{3.4.28}$$

en tal caso probaremos diciendo que *la fórmula de grado es dada por $f(X)$ y $g(X)$*. Es importante notar que la fórmula de grado cumple las siguientes condiciones:

1. Cada $f(X)$ o $g(X)$ tiene un primer coeficiente que no es un divisor de cero

2. Cada $f(X)$ o $g(X)$ tiene un primer coeficiente que es una unidad;

3. El anillo R, de coeficientes, es un dominio integral.

Es uno respecto en que la discusión de arriba es incompleta. Puesto que el polinomio nulo o cero no tiene coeficiente no nulo, su grado no es definido. Sin embargo es conveniente asignar el polinomio nulo de grado convencional *menos infinito.* Si esto es hecho entonces (3.4.26), (3.4.27) y, las condiciónes apropiadas abajo (3.4.28) permanecen siendo validas igual si el polinomio nulo es presentado, siempre, claro, que cierta convención natural respecto a el uso de cantidad infinita son observados. Aquí las condiciones son exactamente las mismas como en algebra elementeal así no elaboraremos este punto.

Lema 36 *Sea $g(X)$ un polinomio no nulo (con coeficientes en R) del cual el primer coeficiente es unidad. Si ahora $f(X)$ pertenece a $R[X]$, entonces $f(X)$ tiene única representación en la forma*

$$f(X) = q(X)g(X) + r(X),$$

donde $q(X)$, $r(X)$ pertenece a $R[X]$ y $\partial^0 r(X) < \partial^0 g(X)$.

Prueba. Empezamos por probar que una representación semejante es alguna posible. *Asumamos lo contrario.* Entonces existe un polinomio menor que puede ser expresado en la forma deseada. Entre tal polinomio seleccionamos uno, digamos $\phi(X)$, del cual el grado es posiblemente pequeño. Sea $\partial^0\phi = n$ y $\partial^0 g = m$. Entonces $n \geq m$ para distintos $\phi(X) = 0g(X) + \phi(X)$ tendría que ser una representación de el tipo en cuestión. Sea $g(X) = a_0X^m + ... + a_m$ y $\phi(X) = b_0X^n + ... + b_n$. Por hipótesis, a_0 es una unidad. Podemos por tanto formar $\phi_1(X) = \phi(X) - a_0^{-1}b_0X^{n-m}g(X)$ que es un polinomio tiene grado menor que $\phi(X)$. Por consiguiente existe $q_1(X)$ y $r_1(X)$ en $R[X]$ tal que $\partial^0 r_1(X) < \partial^0 g(X)$ y $\phi_1(X) = q_1(X)g(X) + r_1(X)$. Pero entonces

$$\phi(X) = \left\{q_1(X) + a_0^{-1}b_0X^{n-m}\right\} g(X) + r_1(X)$$

y ahora tenemos una contradicción porque es una representación de $\phi(X)$ de el tipo requerido. Será probado que algún elemento de $R[X]$ puede ser representado en la manera descrita y así sólo necesita ser probado que la representación es única. Supongamos por tanto que $q(X)g(X)+r(X) = q'(X)g(X)+r'(X)$ donde $q(X)$, $q'(X)$, $r(X)$, $r'(X)$ estan todos en $R[X]$ y $\partial^0 r(X) < \partial^0 g(X)$, $\partial^0 r'(X) < \partial^0 g(X)$. Deseamos probar que ambos $q(X) = q'(X)$ y $r(X) = r'(X)$. Sin embargo, una vez el primero se prueba, el segundo se sigue inmediatamente. Asumamos que $q(X) \neq q'(X)$. Entonces $q(X) - q'(X)$ no es el polinomio nulo y

$$r'(X) - r(X) = \{q(X) - q'(X)\} g(X).$$

Ahora el primer coeficiente de $g(X)$ es una unidad; de aquí que la fórmula de grado puede ser aplicado a el lado derecho. Esto produce

$$\partial^0 \{r'(X) - r(X)\} = \partial^0 \{q(X) - q'(X)\} + \partial^0 g(X) \geq \partial^0 g(X)$$

porque, puesto que $q(X)-q'(X)$ no es el polinomio nulo, su grado no es negativo. Sin embargo $\partial^0 \{r'(X) - r(X)\} \leq max\left\{\partial^0 r'(X), \partial^0 r(X)\right\} < \partial^0 g(X)$. Esto da una contradicción y establece el lema. ||

Los siguientes resultados son ambos familiares y muy importantes. Forma una acompañia natural para [15] teorema 7 de sección (4.2). Una prueba será incluido para ser completa.

Teorema 66 *Sea F un campo. Entonces cada ideal de el anillo polinomial $F[X]$ puede ser generado por algún elemento.*

Prueba. Sea A un ideal de $F[X]$. Puesto que el ideal nulo es algún generador separado, asumimos que $A \neq (0)$. En lo que resulta suponemos que $\phi(X)$ es un polinomio no nulo que pertenece a A y, sujeto a esta condición, se asume tiene el grado más pequeño posible. Será probado que $A \subseteq (\phi)$. Puesto que la inclusión opuesta es obvia, esto establece el teorema. ||

Supongamos que $f(X) \in A$. Por Lema 36, podemos expresar $f(X)$ en la forma

$$f(X) = q(X)\phi(X) + r(X),$$

donde $q(X)$ y $r(X)$ pertenece a $F[X]$ y $\partial^0 r(X) < \partial^0 \phi(X)$. Pero entonces $r(X) \in A$, de donde, por la seclección de $\phi(X)$, vemos que $r(X) = 0$. De esta manera $f(X)$ pertenece a (ϕ) y, como ya explica, el teorema resulta. ||

Corolario 41 *Sea F un campo. Entonces $F[X]$ no es un campo pero todo ideal primo no nulo es un ideal maximal.*

Prueba. Es claro que X no es una unidad en $F[X]$. Consecuentemente $F[X]$ no es un campo. Ahora supongamos que $P_1 \subset P_2$ (inclusión estricta), donde $P_1,\ P_2$ son ideales primos. Entonces, por el teorema, existe polinomios $\phi_1,\ \phi_2$ tal que $P_1 = (\phi_1)$ y $P_2 = (\phi_2)$. Puesto que ϕ_1 pertenece a P_2 tenemos $\phi_1 = \phi_2\psi$ donde $\psi \in F[X]$. Pero entonces $\phi_2\psi \in P_1$ y $\phi_2 \notin P_1$. Por consiguiente $\psi \in P_1$, digamos $\psi = \phi_1\psi'$ donde $\psi' \in F[X]$. De esta manera $\phi_1 = \phi_1\phi_2\psi'$. *Ahora afirma que* $\phi_1 0$. Para distinto $1 = \phi_2\psi'$ de lo cual, porque la fórmula de grado tiene en $F[X]$, ϕ_2 es una constante no nula y de aquí una unidad. Sin embargo esto es imposible porque $P_2 = (\phi_2)$ es un ideal propio. De ello resulta que ϕ_1 es el polinomio nulo y por tanto $P_1 = (0)$. El corolario es de esta manera establecido.||

Teorema 67 *Sea R un anillo Noheteriano y $X_1, X_2, ..., X_n$ indeterminantes. Entonces*

$$Dim\ R[X_1, X_2, ..., X_n] = Dim\ R + n.$$

Prueba. Es suficiente probar el teorema para el caso $n = 1$. Por tanto asumimos que tenemos esta condición y, en orden simplifica la notación, denotaremos sólo la variable por X. Sea P un ideal primo de R. Entonces, por Proposición 10, $rank\ (PR[X]) = rank\ P$. De ello resulta que $Dim\ R[X] \geq Dim\ R$ que establece el teorema en el caso donde $Dim\ R = \infty$. Donde ahora suponemos que $Dim\ R < \infty$. Existe un ideal maximal M de R que satisface $rank\ M = Dim\ R$ y es por tanto $rank(MR[X]) = Dim\ R$. Ahora $R/M = F$ (digamos) es un campo y, por (5.4.6), $R[X]/MR[X]$ es anillo-isomorfo a $F[X]$. Sin embargo, por el corolario Teorema 15, $F[X]$ no es un campo y por tanto $MR[X]$ no es un ideal maximal de $R[X]$. De ello resulta que $Dim\ R[X] \geq Dim\ R + 1$. Luego, sea Π el ideal maximal de $R[X]$. Para completar la prueba es suficiente probar que $rank\ \Pi$ no es excedido $Dim\ R + 1$. Sea $P = \Pi \cap R$. Entonces P es un ideal primo de R y su complemento S, en R, es un conjunto multiplicativo cerrado no vacío. Ahora identificamos $R[X]_S$ con $R_S[X]$ por medio de (3.4.22). Entonces Π_S es un ideal maximal de $R_S[X]$, R_S es un anillo local, y $\Pi_S \cap R_S$ es el ideal maximal de R_S. Además Π_S y Π tienen el mismo rango mientras

$$Dim\ R_S = rank\ P \leq Dim\ R.$$

Consecuentemente es suficiente probar que $rank\ \Pi_S \leq Dim\ R_S + 1$. Esta conclusión puede vorver a ser planteada de la siguiente forma: *cuando prueba que $rank\ \pi$ es mayor que $Dim\ R + 1$ podemos asumir que (i) R es un anillo local y (ii) Π contracta a el ideal maximal de R.* En lo que sigue suponemos que tenemos esta situación. Sea M el ideal maximal de R, así que $\pi \cap R = M$, y sea $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d$ un sistema de parámetros de R. Sabemos que el anillo $R[X]/MR[X]$ y $(R/M)[X]$ puede ser identificado y, por Teorema 15 cada ideal de $(R/M)[X]$, en particular el ideal $\Pi/MR[X]$, es alguno generado. De esta manera existe $f \in R[X]$ tal que $MR[X] + fR[X] = \Pi$. Sea Π' un ideal primo arbitrario de $R[X]$ que contiene $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d f$. Entonces $\Pi' \cap R$ es un R-ideal primo contiene el sistema de parámetro $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d$. Esto prueba que $\Pi' \cap R = M$ y por tanto Π' contiene $MR[X] + fR[X] = \Pi$. Esto prueba que Π debe ser un ideal primo minimal de $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d, f)$. De aquí, por [15] Teorema 22 de sección (4.8),

$$rank\ \Pi \leq d + 1 = Dim\ R + 1$$

La prueba de el teorema es ahora completa. ||

3.5. Anillos Polinomiales Semi-locales

Con la sección final de este capítulo, retormamos a el estudio de anillos semi-regular que comenzó en sección (5.3)

Teorema 68 *Sea R un anillo semi-regular. Entonces el anillo polinomial $R[X_1, X_2, ..., X_n]$ es también semi-regular.*

Prueba. Es claro y suficiente probar el teorema para el caso en que hay sólo una variable. En lo que sigue asumamos que tenemos esta situación y denotaremos sólo la variable por X. Obviamente $R[X]$ es un anillo Noetheriano no nulo. Sea Π un ideal maximal de $R[X]$ si podemos demostrar que el anillo de fracciones de $R[X]$ con respecto a Π es semi-regular, entonces el resultado requerido se sigue por virtud de Teormea 62. Sea $P = \Pi \cap R$ y denotemos el componente de P en R por S. Entonces P es un R-ideal primo y S es un subconjunto (no vacío) multiplicativamente cerrado de $R[X]$. Además, por [15] Proposición 19 de sección (3.8), $R[X]_\Pi$ y el anillo de fracciones de $R[X]_S$ con respecto a Π_S son isomorfos. Consecuentemente es suficiente probar que el último es semi-regular. Ahora usaremos (3.4.22) en orden para identificar $R[X]_S$ con $R_S[X]$. Esto es comprensivo, Π_S es un ideal maximal de $R_S[X]$, R_S es un anillo local semi-regular, [9] y Π_S contrae, en R_S a el ideal maximal de este anillo. La observación de arriba prueba que, para el propósito de probar que $R[X]_\Pi$ es un anillo semi-regular, podemos ahora añadir la suposición que R es un anillo local (semi-regular) y que el ideal maximal Π de $R[X]$ contrae a el ideal maximal M (digamos) de R. Esta suposición se hace en lo siguiente. Sea $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d$ un sistema de parámetros de R. Por Teorema 61, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)R : \alpha_{i+1} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)R$ para $0 \leq i < d$. De aquí, por (3.4.19), $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)R[X] : \alpha_{i+1} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)R[X]$ así que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d$ es también una $R[X]$-sucesión. Note que, puesto que M es sólo ideal primo perteneciente a $(\alpha_1.\alpha_2, ..., \alpha_d)R$, $MR[X]$ es sólo ideal primo perteneciente a $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d)R[X]$. Aquí tenemos que hacer uso de Proposición 60. Luego, $\Pi/MR[X]$ es un ideal maximal de el anillo $R[X]/MR[X]$ y este anillo puede ser identificado con $(R/M)[X]$ por virtud de (3.4.21). Además R/M es un campo; consecuentemente $\Pi/MR[X]$ es un ideal principal no nulo.[10]. De esta manera existe $f \in R[X]$ tal que $f \notin MR[X]$ y $MR[X] + fR[X] = \Pi$. Esto prueba que [11] Π es un ideal primo minimal de $(\alpha_1, ..., \alpha_d, f)$, mientras tanto de $f \notin MR[X]$ concluimos que $(\alpha_1, ..., \alpha_d)R[X] : f = (\alpha_1, ..., \alpha_d)R[X]$. Por consiguiente $\alpha_1, ..., \alpha_d, f$ es una $R[X]$-sucesión y $rank\ \Pi = d + 1$. Ahora estamos listos para pasar a el anillo $R[X]_\Pi$. Sea $\alpha_1^*, ..., \alpha_d^*, f^*$ las imágenes de $\alpha_1, ..., \alpha_d, f$ bajo el mapeo canónico $R[X] \rightarrow R[X]_\Pi$. Observamos, en primer lugar, que $R[X]_\Pi$ es un anillo local de dimensión $d + 1$. Luego, Por [15] Proposición 3 de sección (3.2), la extensión de

$$(\alpha_1, ..., \alpha_d, f)R[X] \text{ en } R[X]_\Pi$$

es generado por $\alpha_1^*, ..., \alpha_d^*, f^*$. En adición, [15] Teorema 11 de sección (3.7) prueba que sólo el ideal primo perteneciente a esta extensión es el ideal maximal de

[9]Ver Teorema 63

[10]Ver Teorema 66 y su corolario

[11]Una situación similar será encontrada en la prueba de Teorema 67. El argumento que tenemos por tanto no será repetido a lo largo.

$R[X]_\Pi$. De esta manera $\alpha_1^*, ..., \alpha_d^*, f^*$ es un sistema de parámetros en $R[X]_\Pi$. Finalmente, por [15] (3.5.6), tenemos $(\alpha_1^*, ..., \alpha_i^*)R[X]_\Pi : \alpha_{i+1}^* = (\alpha_1^*, ..., \alpha_i^*)R[X]_\Pi$ para $0 \leq i \leq d$, y $(\alpha_1^*, ..., \alpha_d^*)R[X]_\Pi : f^* = (\alpha_1^*, ..., \alpha_d^*)R[X]_\Pi$ Por consiguiente el sistema de parámetros $\alpha_1^*, ..., \alpha_d^*, f^*$ es sólo una $R[X]_\Pi$-sucesión. Ahora se sigue, de Teorema 61, que $R[X]_\Pi$ es un anillo local semi-regular y que esto completa la prueba. ||

Teorema 69 *Sea F un campo. Entonces el anillo polinomial $F[X_1, X_2, ..., X_n]$ es semi-regular y su dimensión es n.*

Prueba. Puesto que un campo es obviamente cero-dimensional y semi-regular, el Teorema 69 es una consecuencia inmediata de Teorema 67 y 68

Capítulo 4

Teoría de Multiplicidad

4.1. Consideraciones preliminares

Sea R un anillo con un elemento identidad. En lo que resulta, el término R-módulo será siempre un R-módulo izquierdo. Si un R-módulo E satisface la condición maximal para submódulos, entonces E será llamado un R-módulo Noetheriano. Esto es en conformidad con la definición ya introducida en conexión con anillos conmutativos. Hay ciertos términos y ciertas construcciones, ya empleadas en el caso conmutativo, que debe ser adaptado a nuestro presente propósito. Sea E un R-módulo y B un ideal izquierdo. Denotemos por BE el submódulo de E que consiste de todo elemento que puede ser expresado en la forma $b_1e_1 + b_2e_2 + ... + b_se_s$, donde $b_i \in B$ y $e_i \in E$. Si ahora A es un ideal izquierdo, entonces, se verifica fácilmente que, $(AB)E = A(BE)$. Podemos por tanto omitir los corchetes y escribir ABE para el módulo en cuestión. Note que se hace significado a decir de la m-potencia A^m de A. Más general, si $A_1, A_2, ..., A_m$ son ideales izquierdos, entonces el producto extensión $A_1A_2...A_m$ es bien definido y así también un ideal izquierdo.

Definición 36 *Un elemento γ de R es llamado un "elemento central" si $\gamma r = r\gamma$ para todo r en R*

Por ejemplo, ambos 0_R o 1_R son elemetos centrales. Una simple verificación prueba que el elemento central de R forma un anillo. Este anillo es llamado el *centro* de R, y tiene el mismo elemento identidad como R mismo. Sea G un conjunto de elementos centrales de R. Entonces el ideal izquierdo generado por por G coincide con el ideal derecho generado por el mismo conjunto. De aquí que el total de elementos que puede ser expresado en la forma $r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2 + ... + r_s\gamma_s$, donde $r_i \in R$ y $\gamma_i \in G$ es un ideal en ambos lados. Podemos por ello decir que el ideal generado por un conjunto de elementos centrales sin especificar si este es un ideal izquierdo, un ideal derecho o un ideal en ambos lados como tenemos en mente.

Definición 37 *Un ideal que puede ser generado por un conjunto de elementos centrales será llamado un "ideal central".*

La observación de arriba establece que los ideales centrales son de ambos lados. Sea G y G' conjuntos de elementos centrales y A y A' los ideales centrales que ellos generan. Entonces $A + A'$ es generado por $G \cup G'$ mientras que AA' es generado por el conjunto de todo producto $\gamma\gamma'$, donde γ pertenece a G y γ' a G'. De quí la suma y el producto de dos ideales centrales son nuevamente ideales centrales. Ademaś el conjunto de productos $\gamma\gamma'$ coincide con el correspondiente conjunto obtenido por intercambiar los roles de G y G'. De aquí $AA' = A'A$ y por ello, en un producto de ideales centrales, el orden de los factores puede ser cambiado en algún camino y este no cambia el valor de el producto. Supongamos ahora que A es un ideal central dado. Entonces A es un ideal en ambos lados. Nos permite asumir que, como un ideal en ambos lados, es finitamente generado. Por esto existe un conjunto finito $u_1, u_2, ..., u_s$ de elementos de R tal que A es el ideal más pequeño en ambos lados que los contiene. En estas circunstancias cada u_i puede ser expresado en la forma $u_i = r_{i1}\gamma_{i1} + r_{i2}\gamma_{i2} + ... + r_{in_i}\gamma_{in_i}$ $(1 \leq i \leq s)$, donde γ_{ij} denota el elemento central contenido en A y r_{ij} pertenece a R. Es claro que el ideal central generado por la variable γ_{ij} es A mismo. De aquí *A puede ser generado por un número finito de elementos centrales* En este camino vemos que la expresión *ideal central finitamente generado* puede ser usada sin esencial ambiguedad. En el caso de un conjunto finito $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p$ de elementos centrales, podemos en algun momento usar $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p)$ para denotar el ideal central que genera. Si ahora $\gamma_1^{'}, \gamma_2^{'}, ..., \gamma_q^{'}$ son también elementos centrales, entonces $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p) + (\gamma_1^{'}, \gamma_2^{'}, ..., \gamma_q^{'}) = (\gamma_1, , ..., \gamma_p, \gamma_1^{'}, ..., \gamma_q^{'})$ y $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p)(\gamma_1^{'}, \gamma_2^{'}, ..., \gamma_q^{'}) = (\gamma_1\gamma_1^{'}, ..., \gamma_i\gamma_j^{'}, ..., \gamma_p\gamma_q^{'})$. Se sigue, de la segunda relación, que si $A = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p)$, entonces A^m es generado por la colección de productos $\gamma_1^{n_1} + \gamma_2^{n_2} + ... + \gamma_p^{n_p}$, donde $n_1, n_2, ..., n_p$ son enteros no negativos que satisfacen $n_1 + n_2 + ... + n_p = m$. Sea E un R-módulo y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p$ elementos centrales. Entonces $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p)E$ consiste de todo elemento central que puede ser expresado en la forma $\gamma_1 e_1, \gamma_2 e_2, ..., \gamma_p e_p$, donde $e_1, e_2, ..., e_p$ pertenecen a E. Por esta razón a menudo usaremos $\gamma_1 E, \gamma_2 E, ..., \gamma_s E$ como una alternativa para $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p)E$. En particular γE es usado en lugar de $(\gamma)E$. Supongamos que tenemos un *epimorfismo* de un anillo R sobre un anillo R'. Es claro que todo elemento central de R es transferido en un elemento central de R'. Por ejemplo, si A es un ideal en ambos lados de R y γ pertenece a el centro de R, entonces la imagen natural de γ en el residuo de el anillo R/A es un elemento central de ese anillo. Completemos esta sección por algúna relación simple conectada con elementos centrales, submódulos y factor módulo. Sea $K \subseteq L$ submódulos de un R-módulo E y sea γ, γ' elementos centrales. El mapeo $E \to E$ en que $e \to e\gamma$ es un endomorfismo de R-módulos. La imagen inversa de K con respecto a este mapeo es denotada por $K :_E \gamma$ así que un elemento e, de E, pertenece a $K :_E \gamma$ si y sólo si $\gamma e \in K$. (Más general, si A es un subconjunto de R, entonces $K :_E A$ denota el conjunto de todos los elementos $e \in E$ tal que $ae \in K$ para todo $a \in A$. Este es un submódulo de E si A pasa a ser un ideal en ambos lados.) Evidentemente

$$(K :_E \gamma) :_E \gamma' = K :_E \gamma\gamma' \tag{4.1.1}$$

y, como fácilmente se verifica,

$$\gamma E \cap K = \gamma(K :_E \gamma) \tag{4.1.2}$$

Ahora consideraremos el mapeo natural $\phi : E \to E/K$. Puesto que $K + \gamma E$ es mapeo sobre $\gamma(E/K)$, tenemos un isomorfismo

$$E/(K + \gamma E) \approx (E/K)/\gamma(E/K) \tag{4.1.3}$$

Atambién si e pertenece a E, entonces $\phi(e)$ pertenece a $(L/E) :_{E/K} \gamma$ si y sólo si e esta en $L :_E \gamma$. De ello resulta que

$$(L :_E \gamma)/K = (L/K) :_{E/K} \gamma \tag{4.1.4}$$

Un útil caso especial de esta relación es obtenido por presentar $L = K$. Esto produce

$$(K :_E \gamma)/K = 0 :_{E/K} \gamma \tag{4.1.5}$$

4.2. Teoremas clave sobre ideales centrales

En esta sección estableceremos algunos resultados básicos que conciernen a ideales centrales y módulos Noetherianos. El primero de estos es una generalización de el Teorema Artin-Rees que, el lector recordará, primero se encuentra como [15] Teorema 20 de sección (4.7).

Teorema 70 *Sea K un submódulo de un R-módulo Noetheriano E y sea A un ideal central. Entonces existe un entero $q \geq 0$ tal que $A^nE \cap K = A^{n-q}(A^qE \cap K)$ para todo $n \geq q$*

Prueba. Sea A_0 un ideal de R que puede ser generado por un número *finito* de elementos centrales en A. Entonces $A_0 \subseteq A$ y A_0E es un submódulo de E. Puesto que E es un R-módulo Noetheriano, podemos escojer un A_0 así que A_0E es un miembro maximal de la familia de todos los submódulos que pueden ser obtenidos en este camino. Ahora supongamos que γ es un elemento central arbitrario contenido en A. Entonces $\gamma E \subseteq (A_0 + R\gamma)E = A_0E$ y por ello $AE = A_0E$. De ello resulta que $A^2E = AA_0E = A_0AE = A_0^2E$ de donde $A^3E = AA_0^2E = A_0^2AE = A_0^3E$ Procediendo en este camino encontraremos que $A^nE = A_0^nE$ para todo $n \geq 0$. Asumamos que existe un entero $q \geq 0$ tal que $A_0^nE \cap K = A_0^{n-q}(A_0^qE \cap K)$ para todo $n \geq q$. Entonces, cuando $n \geq q$,

$$A^nE \cap K = A_0^nE \cap K = A_0^{n-q}(A_0^qE \cap K) \subseteq A^{n-q}(A^qE \cap K)$$

que implica que $A^nE \cap K = A^{n-q}(A^qE \cap K)$. De esta manera para el propósito de la prueba podemos asumir que A es *finitamente generado*. De aquí en la prueba es practicamente la misma como la de el [15] Teorema 20 de sección (4.7). En efecto el argumento particular precedente será escogido porque puede ser adaptado a las condiciones presentes. A el lector se le aconseja por ello a leer directamente este argumento nuevamente a luz de la siguiente observación. Primero, lo tratado en el [15] Capítulo 4 usa el Teorema Base estableciendo [15] Teorema 1 de secció(4.1). Esto será recordado, es uno de los resultados de [15] Capítulo 4 que se tiene para el caso no conmutativo como bien para anillos conmutativos. Luego, aúnque el primer párrafo de la prueba original se dedica a probar que podemos asumir que A es finitamente generado, el argumento usado en esta ocasión no es aplicable en la instancia presente. Este párrafo en particular tiene que ser reemplazado por la discusión dada arriba. Finalmente, en selección un conjunto finito $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ de elementos para generar A, es necesario ordenar que cada γ_i es un elemento central de R. Siempre que estos puntos son sostenidos en mente, el lector no tiene que experimentar dificultad alguna en establecer el teorema. ||

El siguiente resultado corresponde a el Teorema Intersección [1] de Krull. Cuando encontramos este resultado antes, la prueba dada puede usarse de la teoría de descomposición primaria y este no es valido para nuestras presentes circunstancias. Sin embargo, podemos obtener aproximadamente esta dificultad con la ayuda de el Teorema 70.

Teorema 71 *Sea E un R-módulo Noetheriano y A un ideal central. Entonces un elemento e, de E, pertence a $\cap_{n=1}^{\infty} A^nE$ si y sólo si $e = \alpha e$ para algún elemento α perteneciente a A.*

Prueba. Si $e = \alpha e$, donde $\alpha \in A$, entonces $e = \alpha^n e$ para todo n y por ello e pertenece a la intersección. Ahora asumamos que e está en $\cap_{n=1}^{\infty} A^nE$. Por Teorema 70, existe un entero $q \geq 0$ tal que $A^nE \cap Re = A^{n-q}(A^qE \cap Re)$ para

[1] Ver [15] Teorema 18 de secciónn (4.6)

todo $n \geq q$. Tomamos $n = q+1$ encontramos que $Re = A(Re)$. Por consiguiente $e \in A(Re)$ y por ello $e = \alpha e$ para algún $\alpha \in A$. Esto completa la prueba. $||$

También necesitamos un resultado que puede ser considerado como una adaptación de parte de [15] Teorema 19 de sección (4.6). La dificultad es que, para anillos no comutativos, el concepto de el radical de Jacobson presenta problemas que no se encuentran en el caso conmutativo. En hecho, define el radical de Jacobson de un anillo general R como la intersección de todos sus ideales izquierdos maximales. El lector probablemente sostiene que estos deben ser llamados el radicar izquierdo de Jacobson y que, por la analogía, debe ser un segundo radical de Jacobson para ser distinguido por el adjetivo "derecho". Sin embargo, como lo veremos muy poco, la intersección de todos los ideales maximales izquierdos siempre coincide con la intersección de todos los ideales maximales derechos. Por esta razón, el propósito de distinción se vuelve innecesario muy rápidamente. Antes de proceder, notemos que *todo ideal propio izquierdo de R es contenido en un ideal maximal izquierdo.* En efecto si I es un ideal izquierdo diferente de R mismo, entonces el conjunto Ω de ideales propios izquierdos contenidos en I forman un sistema inductivo no vacío donde sus miembros son de orden parcial por la relación de inclusión. El lema de Zorn's prueba que existe un miembro maximal, digamos L, de Ω. Claramente L es un ideal maximal izquierdo de R e I es contenido en L.

Proposición 77 *Si x pertencece a el radical de Jacobson J, de R, entonces $1+x$ tiene un inverso en ambos lados.*

Prueba. Tenemos que probar que existe un elemento, ρ de R, tal que $\rho(1+x) = (1+x)\rho = 1$. Claramente $1+x$ no esta contenido en algún ideal maximal izquierdo así el mismo es verdadero para $R(1+x)$. Se deriva que $R(1+x) = R$ y por ello $\rho(1+x) = 1$ para un elemento conveniente ρ de R. Luego $\rho = i - \rho x = 1 + x'$ digamos. Aquí $x' = -\rho x$ pertenece a J por que J es desde luego un ideal izquierdo. Repitiendo el argumento ahora vemos que existe un elemento ρ' tal que $\rho^{'}(1+x') = 1$, i.e. $\rho'\rho = 1$. Finalmente $\rho' = \rho'(\rho(1+x)) = (\rho'\rho)(1+x) = 1+x$ y por ello $(1+x)\rho = \rho'\rho = 1$. Esto completa la prueba. $||$

Lema 37 *Si $x \in J$, donde J es el radical de Jacobson de R, y sea r un elemento arbitrario de el anillo. Entonces $xr \in J$.*

Prueba. Sea L un ideal maximal izquierdo. El lema resultara si probamos que xr pertencece a L. Asumamos lo contrario. Entonces $Rxr + L$ es un ideal izquierdo que contiene estrictamente a L. Aquí $Rxr = L = R$ y por ello $\rho xr + \lambda = 1$ para elementos convenientes $\rho \in R$ y $\lambda \in L$. Sea $y = \rho x$. Entonces $y \in J$ y $1 - yr = \lambda$. Ahora $(1-ry)r = r(1-yr) = r\lambda$ y, por Proposición 78, $1 - ry$ tiene un inverso en ambos lados. Si multiplicamos en ambos lados la ecuacion $(1-ry)r = r\lambda$ sobre el izquierdo por este inverso, entonces se ve que $r \in L$. Por consiguiente $1 = \lambda + yr$ pertenece a L y ahora tenemos una contradicción porque L es un ideal propio. $||$

Teorema 72 *La intersección de todos los ideales maximales izquierdos de R coincide con la intersección de todos sus ideales maximales derechos.*

Prueba. Probaremos que la intersección, digamos J, de todos los ideales maximales izquierdos es contenida en la intersección de todos los ideales maximales derechos. El teorema resultara por simetría. Si x pertenece a J y sea Q un ideal maximal arbitrario derecho. Es ahora suficiente probar que x pertenece a Q. Asumamos que $x \notin Q$. Entonces $Q + xR = R$ y por ello $1 = q + xr$ para elementos convenientes $q \in Q$ y $r \in R$. Por Lema 37, $xr \in J$ y así, por Proposición 78, $1 - xr = q$ tenemos un inverso en ambos lados digamos q^{-1}. Pero entonces

$qq^{-1} = 1$ pertenece al ideal izquierdo Q y ahora tenemos la contradicccción porque Q es un ideal propio. Esto completa la prueba.||

Teorema 73 *Sea E un R-módoulo Noetheriano y A un ideal central contenido en el radical de Jacobson J de R. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A^n E = 0$.*

Prueba. Si e pertenece a $\bigcap A^n E$. Entonces, por Teorema 71, tenemos $e = \alpha e$ para algún elemento α que pertenece a A y por ello también a J. De esta manera $(1-\alpha)e$=0 y, por Proposición 78, $1-\alpha$ tenemos un inverso en ambos lados. Si multiplicamos la relación $(1-\alpha)e = 0$ por este inverso, vemos que $e = 0$. Esto completa la prueba. ||

4.3. Sistemas de multiplicidad

Sea E un R-módulo y sea $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s \quad (s \geq 0)$ elemento central de R. Lo que haremos es definir, bajo seguras condiciones, el sistema de multiplicidad $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ sobre (o en relación a) el módulo E. En orden tiene un conciso camino de referencia a esta condición, tenemos la siguiente defininción.

Definición 38 *El elemento central $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s \qquad (s \geq 0)$ se dice forma un "sistema de multiplicidad" sobre E si el R-módulo $E/(\gamma_1 E, \gamma_2 E, ..., \gamma_s E)$ tiene longitud finita. Donde $s = 0$ esta condición es sobreentendida como significado que $L_R(E)$ es finito.*

Antes procedemos a enumerar las propiedades básicas de un sistema de multiplicidad, estableciendo una desigualdad elemental concerniente a lo largo de módulos que es prueba útil en algunas ocasiónes. La desigualdad es debido a D.J. Wright.

Proposición 78 *Sea E un R-módulo y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ elementos centrales de R.*

Entonces $L_R \{E/(\gamma_1^{n_1} E + \gamma_2^{n_2} E + ..., +\gamma_s^{n_s} E)\} \leq n_1 n_2 ... n_s L_R(E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E + ... + \gamma_s E))$

para enteros positivos arbitrarios $n_1, n_2, ..., n_s$

Observación 4 *En este resultado no es necesario para longitudes que tienden a ser finitas.*

Prueba. Es claro y suficiente probar que

$$L_R \{E/(\gamma_1^{n_1} E + \gamma_2 E + ... + \gamma_s E)\} \leq n_1 L_R(E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E + ... + \gamma_s E))$$

para algunas veces será establecido el resutado más general repitiendo las aplicaciónes de el caso especial. Si $E' = E/(\gamma_2 E + ... + \gamma_s E)$. Entonces, por (4.1.3), tenemos un isomorfismo $E'/\gamma_1^{n_1} E' \approx E/(\gamma_1^{n_1} E + \gamma_2 E + ... + \gamma_s E)$ Por consiguiente

$$L_R \{E'/\gamma_1^{n_1} E'\} = L_R \{E/(\gamma_2^{n_2} E, ..., \gamma_s^{n_s} E)\}$$

y así lo que se probará puede ser escrito como $L_R \{E'/\gamma_1^{n_1} E'\} \leq n_1 L_R \{E'/\gamma_1 E'\}$. Esta conclusión puede igual bien ser descrita diciendo que necesitamos sólo considerar en caso en que $s = 1$. Sea $\gamma = \gamma_1$ y $n = n_1$. Tenemos que probar $L_R(E/\gamma^n E)$ no excede $nL_R(E/\gamma E)$. Pero $L_R(E/\gamma^n E) = \sum_{i=1}^{n} L_R(\gamma^{i-1} E/\gamma^i E)$ así es solamente necesario probar que $L_R(\gamma^{i-1} E/\gamma^i E) \leq L_R(E/\gamma E)$. Luego, la multiplicación por γ^{i-1} produce un epimorfismo $E \to \gamma^{i-1} E$. La imagen inversa de $\gamma^i E$ con respecto a este mapeo es $(0 :_E \gamma^{i-1}) + \gamma E$. Así tenemos un isomorfismo $\gamma^{i-1} E/\gamma^i E \approx E/(0 :_E \gamma^{i-1} + \gamma E)$ y por ello

$$L_R \{\gamma^{i-1} E/\gamma^i E\} = L_R \{E/(0 :_E \gamma^{i-1} + \gamma E)\} \leq L_R \{E/\gamma E\}$$

Esto complete la prueba.||

Sea $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E. Haremos un número de observaciones simples.

(a) Los elementos $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ permanecen en un sistema de multiplicidad sobre E si cambiamos su orden en alguna manera. También continua formando un sistema de multiplicidad sobre E si suprimimos algún γ_i para que $\gamma_i E = 0$

(b) Para enteros positivos arbitrarios $n_1, n_2, ..., n_s$ los elementos centrales $\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, ..., \gamma_s^{n_s}$ también forman un sistema de multiplicidad sobre E. Al ver esto sólo podemos observar que, por Proposición 79,

$$L_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E + ... + \gamma_s^{n_s}E)\} \leq n_1 n_2 ... n_s L_R\{E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E + ... + \gamma_s E)\}$$

Puesto que la segunda expresión es finita, se establece (b).

(c) Si E' es un módulo factor de E, entonces $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre E'.

Podemos probar esto como sigue. Sea $E' = E/K$. Entonces $\gamma_1 E' + \gamma_2 E' + ... + \gamma_s E'$ es justemente $(K + \gamma_1 E + ... + \gamma_s E)/K$ y así tenemos un isomorfismo

$$E'/(\gamma_1 E' + \gamma_2 E' + ... + \gamma_s E') \approx E/(K + \gamma_1 E + ... + \gamma_s E)$$

de ello resulta que

$$L_R\{E'/(\gamma_1 E' + ... + \gamma_s E')\} = L_R\{E/(K + \gamma_1 E + ... + \gamma_s E)\} \leq L_R\{E/(\gamma_1 E + ... + \gamma_s E)\}$$

y este es finito. Así (c) es demostrado. Esto no será verdadero, sin sumar una condición extra, los $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ son necesariamente un sistems de multiplicidad sobre todo submódulo de E. Sin embargo tenemos el siguiente resultado.

Lema 38 *Sea $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos y sea $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ elementos centrales. Entonces*

$$L_R\{E/(\gamma_1 E + ... + \gamma_s E)\} \leq L_R\{E'/(\gamma_1 E' + ... + \gamma_s E')\} + L_R\{E''/(\gamma_1 E'' + ... + \gamma_s E'')\}$$

Puesto que si $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre ambos E' y E'', entonces son también un sistema de multiplicidad sobre E.

Prueba. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que E' es un submódulo de E y $E'' = E/E'$. Entonces $\gamma_1 E'' + \gamma_2 E'' + ... + \gamma_s E'' = (E' + \gamma_1 E + ... + \gamma_s E)/E'$ y por ello

$$L_R\{E''/(\gamma_1 E'' + ... + \gamma_s E'')\} = L_R\{E/(E' + \gamma_1 E + ... + \gamma_s E)\}$$

porque los módulos que ocurren en esta ecuación son isomorfismos. Por consiguiente

$$\begin{aligned} &L_R\{E/(\gamma_1 E + ... + \gamma_s E)\} \\ &\quad = L_R\{E/(E' + \gamma_1 E + ... + \gamma_s E)\} \\ &\qquad\qquad + L_R\{(E' + \gamma_1 E + ... + \gamma_s E)/(\gamma_1 E + ... + \gamma_s E)\} \\ &\quad = L_R\{E''/(\gamma_1 E'' + ... + \gamma_s E'')\} + L_R\{E'/(E' \cap (\gamma_1 E + ... + \gamma_s E))\} \end{aligned}$$

De aquí tenemos que hacer uso de el isomorfismo

$$(E' + \gamma_1 E + ... + \gamma_s E)/(\gamma_1 E + ... + \gamma_s E) \approx E'/(E' \cap (\gamma_1 E + ... + \gamma_s E))$$

que tenemos en virtud de [15] Teorema 3 de sección (1.6). Nuevamente

$$\gamma_1 E' + \gamma_2 E' + ... + \gamma_s E' \subseteq E' \cap (\gamma_1 E + ... + \gamma_s E) \subseteq E' \quad \text{y así}$$

$$L_R \{E'/(E' \cap (\gamma_1 E + ... + \gamma_s E))\} \leq L_R \{E'/(\gamma_1 E' + ... + \gamma_s E')\}$$

Y el lema se establece ||

Ya se observa que si $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de mutiplicidad sobre un R-módulo E, entonces pueden existir submódulos de E, para que $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ no es un sistema de multiplicidad, Sin embargo si confinamos nuestra atención a módulos Noetherianos, será dificíl posiblemente que no pueda originarse como se prueba por nuestro siguiente resultado.

Proposición 79 *Sea $0 \to E' \to E \to E''$ una sucesión exacta de un R-módulo Noetheriano y sea $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ elementos centrales. Entonces $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre E si y sólo si es un sistema multiplicativo sobre ambos E' y E''*

Prueba. Asumamos que $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre E y deduce que es también un sistema de multiplicidad sobre E'. Es suficiente porque todas las otras afirmaciones contenidas en la condiciones de la proposición ya están establecidas. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que E' es un submódulo de E. Sea $A = \gamma_1 R, \gamma_2 R, ..., \gamma_s R$. Entonces, por Teorema 70, existe un entero no negativo q tal que $A^{q+1}E \cap E' = A(A^q E \cap E') \subseteq AE'$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} L_R \{E'/(\gamma_1 E' + ... + \gamma_s E')\} \qquad &= L_R \{E'/AE'\} \\ &\leq \{E'/(A^{q+1}E \cap E')\} \\ &= L_R \{(A^{q+1}E + E')/A^{q+1}E\} \\ &\leq L_R \{E/A^{q+1}E\} \end{aligned}$$

porque, por [15] Teorema 3 de sección (1.6), el módulo $E'/(A^{q+1}E \cap E')$ y $(A^{q+1}E + E')/A^{q+1}E$ son isomorfismos. Ahora

$$\gamma_1^{q+1}E + \gamma_2^{q+1}E + ... + \gamma_s^{q+1}E$$

está contenido en $A^{q+1}E$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} L_R \{E'/(\gamma_1 E' + ... + \gamma_s E')\} \qquad &\leq L_R \left\{E/(\gamma_1^{q+1}E + ... + \gamma_s^{q+1}E)\right\} \\ &\leq (q+1)^s L_R \{E'/(\gamma_1 E + ... + \gamma_s E)\} \\ &< \infty \end{aligned}$$

por virtud de Proposición 79. Esto prueba que $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre E' y completa la prueba. ||

Concluimos esta sección con una observación con respecto a el comportamiento de sistemas de multiplicidad en relación a una reducción de el anillo de operación. Sea $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre un R-módulo E y sea I un ideal en ambos lados tal que $IE = 0$. Sea $\bar{R} = R/I$. Entonces, por [15] Proposición 24 de sección (1.14), E tiene una estructura bien definida como un $\bar{R}$-módulo. Denota la imagen natural de γ_i en $\bar{R}$ por $\bar{\gamma}_i$. Entonces $\bar{\gamma}_i$ es un elemento central de $\bar{R}$ y $E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E + ... + \gamma_s E) = E/(\bar{\gamma}_1 E + \bar{\gamma}_2 E + ... + \bar{\gamma}_s E)$ porque $\gamma_i E = \bar{\gamma}_i E$. Lo que tenemos aquí son ambos sus R-módulos y sus $\bar{R}$-submódulos coincide. Por consiguiente

$$L_{\bar{R}} \{E/(\bar{\gamma}_1 E + ... + \bar{\gamma}_s E)\} = L_R \{E/(\gamma_1 E + ... + \gamma_s E)\} < \infty$$

De aquí que $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, ..., \bar{\gamma}_s$ es un sistema de multiplicidad sobre E cuando E es considerado como un $\bar{R}$-módulo.

4.4. El símbolo de multiplicidad

Sea E un R-módulo Noetheriano y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E. Ahora definimos la multiplicidad de $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ sobre (o con respecto a) E. Esta multiplicidad vuelve a ser un entero no negativo y usamos el símbolo $e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E)$ para denotarlo. La definición de el símbolo de multiplicidad usa inducción sobre s. Primero supongamos que $s = 0$. En este caso el conjunto vacío es un sistema de multiplicidad sobre E y por ello, por nuestra convención, $L_R(E)$ es finito. Podemos por ello poner

$$e_R(.|E) = L_R(E) \tag{4.4.6}$$

Ahora supongamos que $s \geq 1$ y que el símbolo de multiplicidad será definido por módulos Noetherianos y sistemas de multiplicidad con sólo $s-1$ elementos. Por [15] Lema 1 de sección (4.1), ambos el factor módulo $E|\gamma_1 E$ y el submódulo $0 :_E \gamma_1$ son Noetherianos. Luego, por Proposicion 80, puesto que $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre E, los γ_i también forman un sistema de multiplicidad sobre los dos módulos derivados de esto. Pero γ_1 aniquila $E|\gamma_1 E$. De aquí si removemos γ_1 los elementos restantes aún forman un sistema de multiplicidad sobre este módulo. De esta manera $\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre $E/\gamma_1 E$ y una consideración similar prueba que $\gamma_2.\gamma_3, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre $0 :_E \gamma_1$ como bien. Por consiguiente, por virtud de nuestra suposición, $e_R(\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E/\gamma_1 E)$ y $e_R(\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|0 :_E \gamma_1)$ son ambos definidos y así podemos escribir

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) = e_R(\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E/\gamma_1 E) - e_R(\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|0 :_E \gamma_1) \tag{4.4.7}$$

El símbolo de multiplicidad general es ahora completamente determinado por medio de (4.4.6) y (4.4.7). Es claro que $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s)|E$ es un entero aúnque no tenemos fundamentos, aún como para decir que es no negativo. Es obvio, también, que el valor de símbolo de multiplicidad no es cambiado si reemplazamos E por algún módulo que es isomorfo a este. Además $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E)$ tiene el valor de cero cuando E es un módulo nulo. Notemos alguna otra propiedad fundamental. Supongamos que E es un R-módulo Noetheriano y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre E. Supongamos también que I es un ideal en ambos lados y que $IE = 0$. Sea $\bar{R} = R/I$ y $\bar{\gamma}_i$ denota la imagen natural de γ_i en $\bar{R}$. Entonces E es un $\bar{R}$-módulo y como tal es Noetheriano porque el $\bar{R}$-submódulo de E son justamente los mismos como sus R-submódulos. Además, como vemos al final de la última sección, $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, ..., \bar{\gamma}_s$ es un sistema de multiplicidad sobre el $\bar{R}$-módulolo E. Por consiguiente ambos $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ y $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, ..., \bar{\gamma}_s$ tienen un sistema de multiplicidad sobre E. *Pedimos que*

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) = e_{\bar{R}}(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, ..., \bar{\gamma}_s) \tag{4.4.8}$$

Si $s = 0$, entonces alli no hay problema porque (4.4.8) simplemente afirma que $L_R(E)$ y $L_{\bar{R}}(E)$ son iguales. Ahora supongamos que $s > 0$ y que el resultado en cuestión se prueba en el caso de sistema de multiplicidad con $s-1$ elementos. Entonces, puesto que $E/\gamma_1 E = E/\bar{\gamma}_1 E$ y $0 :_E \gamma_1 = 0 :_E \bar{\gamma}_1$, de ello resulta que

$$\begin{aligned} e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) \quad &= e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|E/\gamma_1 E) - e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|0 :_E \gamma_1) \\ &= e_{\bar{R}}(\bar{\gamma}_2, ..., \bar{\gamma}_s|E/\gamma_1 E) - e_{\bar{R}}(\bar{\gamma}_2, ..., \bar{\gamma}_s|0 :_E \gamma_1) \\ &= e_{\bar{R}}(\bar{\gamma}_2, ..., \bar{\gamma}_s|E/\bar{\gamma}_1 E) - e_{\bar{R}}(\bar{\gamma}_2, ..., \bar{\gamma}_s|0 :_E \bar{\gamma}_1) \\ &= e_{\bar{R}}(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, ..., \bar{\gamma}_s|E) \end{aligned}$$

De esta manera (4.4.8) es establecido. El símbolo de multiplicidad tiene una importante propiedad aditiva. El siguiente lema será util en establecer este hecho.

Lema 39 . *Sea $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos y sea γ un elemento central. Entonces una sucesión exacta es de la forma*

$$0 \to 0 :_{E'} \gamma \xrightarrow{\phi'} 0 :_E \gamma \xrightarrow{\psi'} 0 :_{E''} \gamma \xrightarrow{f} E'/\gamma E' \xrightarrow{\phi^*} E/\gamma E \xrightarrow{\psi^*} E''/\gamma E'' \to 0 \quad (4.4.9)$$

puede ser construido

Prueba. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que E' es un submódulo de E y $E'' = E/E'$. En el cual resulta que $\phi : E' \to E$ denota el mapeo inclusión y $\psi : E \to E''$ el mapeo natural de E sobre el factor módulo $E/E' = E''$. Entonces $\phi(0 :_{E'} \gamma)$ es contenido en $0 :_{E'} \gamma$ y $\phi(\gamma E') \subseteq \gamma E$. De esta manera, por restricción, ϕ dado desarrolla un mapeo ϕ' de $0 :_{E''} \gamma$ en $0 :_E \gamma$ y esta induce un mapeo $\phi^* : E'/\gamma E' \to E/\gamma E$. Del mismo modo $\psi(0 :_E \gamma)$ es contenido en $0 :_{E''} \gamma$ y $\psi(\gamma E) \subseteq \gamma E''$ de esta manera de ψ obtenemos el mapeo $0 :_E \gamma \to 0 :_{E''} \gamma$ y $E/\gamma E \to E''/\gamma E''$ que denotaremos por γ' y $\gamma*$ respectivamente. Luego definimos el mapeo de f. Si e'' pertenece a $0 :_{E''} \gamma$. Es posible escojer $e \in E$ así que $\psi(e) = e''$ y entonces, porque $\gamma e'' = 0$, tenemos $\psi(\gamma e)$ y por ello $\gamma e \in E'$. Ahora escribimos

$$f(e'') = \text{ imagen de } \gamma e \text{ en } E'/\gamma E' \quad (4.4.10)$$

y observamos que si $e_1 \in E$ también se tiene la propiedad que $\psi(e_1) = e''$, entonces $e - e_1$ pertenece a E' y por ello $\gamma e - \gamma e_1$ pertenece a $\gamma E'$. De esta manera γe y γe_1 tenemos la misma imagen en $E'/\gamma E'$ que prueba que f es bien definido por (4.4.10). Fácilmente verificamos que f es R-lineal. Ahora el mapeo en (4.4.9) tiene todo definido, es necesario comprobar que la sucesión es exacta. La mayor parte de esto es muy simple. Verifiquemos que $kerf = Im\psi'$, $Imf = ker\phi^*$ y se deja el otro detalle para el lector. Por (4.4.10), $f(e'') = 0$ si y sólo si $\gamma e \in \gamma E'$ que es digamos $\gamma(e - e') = 0$ para algún e' en E'. De esta manera $e'' \in kerf$ donde y sólo donde existe $\xi \in E$ tal que $\gamma\xi = 0$ y $\psi(\xi) = e''$. En otros términos, e'' está en $Kerf$ donde y sólo donde es la imagen, bajo ψ, de un elemento de $0 :_E \gamma$. Esto prueba que $kerf = Im\psi'$. De (4.4.10) vemos que $\phi^* f(e'') = 0$. Por consiguiente $Imf \subseteq ker\phi^*$. Ahora asumamos que $\eta \in ker\phi^*$ y sea η la imagen de e' en $E'/\gamma E'$. Entonces $\phi^*(\eta)$ es la imagen de e' en $E/\gamma E$ de donde, puesto que $\phi^*(\eta) = 0$, $e' = \gamma e$ para algún e en E. Sea $e'' = \psi(e)$. Entonces $\gamma e'' = \psi(\gamma e) = \psi(e') = 0$ que prueba e'' pertencea a $0 :_{E''} \gamma$. Además, por (4.4.10), $f(e'')$ es la imagen de $\gamma e = e'$ en $E'/\gamma E''$, que es digamos $f(e'') = \eta$. De esta manera $\eta \in Imf$ y por ello $Ker\phi^* \subseteq Imf$. El lema resulta. ||

Teorema 74 *Sea $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos Noetherianos y supongamos que $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre cada término. Entonces*

$$e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E) = e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E') + e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E'')$$

Es conveniente probar Teorema 74 y el siguiente corolario junto.

Corolario 42 *Sea $0 \to E_p \to \cdots \to E_1 \to E_0 \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos Noetherianos y supongamos que $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre cada término. Entonces $\sum_{i=0}^{p}(-1)^i e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E_i) = 0$*

Prueba. El teorema y el corolario serán probados simultáneamente usando inducción sobre s. Cuando $s = 0$ no hay problema porque todo lo necesario es proporcionado por [15] Teorema 20 de sección (1.12). Asumamos que $s \geq 1$ y que ambos el teorema y el corolario sabemos que son verdaderos cuando tenemos un sistema de multiplicidad conteniendo sólo $s - 1$ elementos. Volvamos ahora a el Teorema 74, observamos que, por Lema 39, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to 0 :_{E'} \gamma_1 \to 0 :_E \gamma_1 \to 0 :_{E''} \gamma_1 \to E'/\gamma_1 E' \to E/\gamma_1 E \to E''/\gamma_1 E'' \to 0$$

En esta sucesión todo término es un R-módulo Noetheriano y admite $\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ como un sistema de multiplicidad. Por consiguiente estamos en una posición para aplicar Cor. 42. Esto produce
$e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|E/\gamma_1 E) - e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|0 :_E \gamma_1)$

$$\begin{aligned} &= e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|E'/\gamma_1 E') - e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|0 :_{E'} \gamma_1) \\ &\quad + e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|E''/\gamma_1 E'') - e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|0 :_{E''} \gamma_1) \end{aligned}$$

Pero puede ser escrito como

$$e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E) = e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E') + e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E')$$

en vista de (4.4.7). Por consiguiente Teorema 74 es establecido por el valor de s bajo la consideración. Para derivar el corolario de este valor simplemente adaptamos el argumento usado de el correspondiente resultado en el caso de longitudes [2]

Corolario 43 *Sea E_1, E_2 submódulo Noetheriano de un R-módulo E y sea $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre ambos E_1 y E_2. Entonces $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre el módulo Noetheriano $E_1 + E_2$, $E_1 \cap E_2$ y*
$e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E_1 + E_2) + e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E_1 \cap E_2)$

$$= e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E_1) + e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E_2) \tag{4.4.11}$$

Prueba. El hecho que $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$ son R-módulos Noetherianos resulta de [15] Proposición 1 y Lema 1 ambos de sección (4.1). Luego, por [15] Lema 1 Cor. 1 de sección (4.1), $E_1 \oplus E_2$ es un R-módulo Noetheriano. Puesto que tenemos una sucesión exacta $0 \to E_1 \to E_1 \oplus E_2 \to E_2 \to 0$, Proposición 80 prueba que $\gamma_1, \gamma_2 ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre $E_1 \oplus E_2$. Nuevamente $E_1 + E_2$ es isomorfo a un factor módulo de $E_1 \oplus E_2$ y $E_1 \cap E_2$ es un submódulo de E_1. De aquí, nuevamente por virtud de Proposición 3, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplisidad sobre $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$. Esto prueba que toda la multiplicidad ocurre en (4.4.11) son bien definidos. Considerando la sucesión $0 \to E_1 \to E_1 + E_2 \to (E_1 + E_2)/E_1 \to 0$. Por [15] Teorema 3 de sección (1.6), tenemos un isomorfismo $(E_1 + E_2)/E_1 \approx E_2/(E_1 \cap E_2)$ así que la sucesión puede ser reescrita como

$$0 \to E_1 \to E_1 + E_2 \to E_2/(E_1 \cap E_2) \to 0 \tag{4.4.12}$$

También tenemos una sucesión exacta

$$0 \to E_1 \cap E_2 \to E_2 \to E_2/(E_1 \cap E_2) \to 0 \tag{4.4.13}$$

El resultado deseado ahora resulta aplicando Teorema 74 para (4.4.12) y (4.4.13)

Corolario 44 *Sea E_1 y E_2 submódulos de un R-módulo E tal que E/E_1 y E/E_2 son Noetheriano. Si ahora $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre E/E_1 y E/E_2, entonces es también un sistema de multiplicidad sobre el módulo Noetheriano $E/(E_1 \cap E_2)$ y $E/(E_1 + E_2)$. Además*
$e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E/(E_1 \cap E_2)) + e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E/(E_1 + E_2))$

$$= e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E/E_1) + e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E/E_2) \tag{4.4.14}$$

[2]Ver [15] Teorema 20 de sección (1.12)

Prueba. El módulo $E/(E_1 + E_2)$ es Noetheriano y admite $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ como un sistema de multiplicidad porque es isomorfo a un módulo factor de E/E_1. Sobre el otro lado $E/(E_1 \cap E_2)$ es Noetheriano por [15] Proposición 2 de sección (4.1). En efecto la prueba de este resultado demuestra que $E/(E_1 \cap E_2)$ es isomorfo al submódulo de $(E/E_1) \oplus (E/E_2)$ y la suma directa sabemos que es Noetheriano por virtud de el [15] Lema 1 Cor 1 de sección (4.1). Luego, por aplicar Proposición 80 la sucesión exacta $0 \to E/E_1 \to (E/E_1) \oplus (E/E_2) \to E/E_2 \to 0$ vemos que $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre $(E/E_1) \oplus (E/E_2)$ y de aquí en $E/(E_1 \cap E_2)$. De esta manera la multiplicidad que ocurre en (4.4.14) es bien definida. El módulo $E_1/(E_1 \cap E_2)$ es isomorfo a $(E_1+E_2)/E_2$ así podemos reescribir la sucesión exacta $0 \to E_1/(E_1 \cap E_2) \to E/(E_1 \cap E_2) \to E/E_1 \to 0$ como

$$0 \to (E_1 + E_2)/E_2 \to E/(E_1 \cap E_2) \to E/E_1 \to 0 \tag{4.4.15}$$

También tenemos una sucesión exacta

$$0 \to (E_1 + E_2)/E_2 \to E/E_2 \to E/(E_1 + E_2) \to 0 \tag{4.4.16}$$

El corolario ahora resulta aplicando Teorema 74 a la sucesión (4.4.15) y (4.4.16). ||

Lema 40 *Sea E un R-módulo y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ $(s \geq 2)$ un sistema de multiplicidad sobre E Entonces $e_R(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3, ..., \gamma_s|E) = e_R(\gamma_2, \gamma_1\gamma_3, ..., \gamma_s|E)$.*

Prueba. Simplemente aplicamos (4.4.7) dos veces y examinamos el resultado para ver si es simétrico en γ_1 y γ_2. Sin embargo la expresión que ocurre porque es un poco complicada. Por esta razón introducimos alguna notación auxiliar que es como sigue. Cuando K es un R-módulo Noetheriano con la propiedad que $\gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre este, escribimos $[K] = e_R(\alpha_3, ..., \alpha_s|K)$. Observamos que si $L \subseteq M$ son submódulos de un R-módulo Noetheriano N y $\gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre N/L, entonces $\gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre cada M/L y N/M, y tenemos

$$[N/L] = [N/M] + [M/L] \tag{4.4.17}$$

Esto es claro si aplicamos Proposición 80 y Teorema 74 para la sucesión exacta $0 \to M/L \to N/L \to N/M \to 0$. Ahora estamos listos para calcular el principio. Por (4.4.7), $e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) = e_R(\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E/\gamma_1 E) - e_R(\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|0 :_E \gamma)$. Ahora usaremos la misma relación para expresar cada término sobre el lado derecho como la diferencia de multiplicidad 2. Esto dado

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) = [1] - [2] - [3] + [4] \text{ donde}$$

$$\begin{aligned}
[1] &= [(E/\gamma_1 E)/\gamma_2(E/\gamma_1 E)],\\
[2] &= [0 :_{E/\gamma_1 E} \gamma_2],\\
[3] &= [(0 :_E \gamma_1)/\gamma_2(0 :_E \gamma_1)],\\
[4] &= [0 :_{(0:_E\gamma_1)} \gamma_2]
\end{aligned}$$

Ahora, por (4.1.3), $(E/\gamma_1 E)/\gamma_2(E/\gamma_1 E)$ es isomorfo a $E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E)$. En el otro lado es obvio que $0 :_{(0:_E\gamma_1)} \gamma_2 = (0 :_E \gamma_1) \cap (0 :_E \gamma_2)$. Por consiguiente

$$\begin{aligned}
[1] &= [E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E)] \qquad \text{y}\\
[4] &= [(0 :_E \gamma_1) \cap (0 :_E \gamma_2)]
\end{aligned}$$

ambos que concierne γ_1 y γ_2 simultáneamente. De esta manera sólo a trataremos nosotros mismos con $[2] + [3]$. Por (4.1.5), tenemos

$$0 :_{E/\gamma_1 E} \gamma_2 = (\gamma_1 E :_E \gamma_2)/\gamma_1 E$$

y es evidente que $\gamma_1 E \subseteq \gamma_1 E + (0 :_E \gamma_2) \subseteq \gamma_1 E :_E \gamma_2$. De aquí, por (4.4.17),

$$\begin{aligned}[2] \quad &= [(\gamma_1 E + (0 :_E \gamma_2))/\gamma_1 E] + [(\gamma_1 E :_E \gamma_2)/(\gamma_1 E + (0 :_E \gamma_2))] \\ &= [(0 :_E \gamma_2)/\gamma_1 E \cap (0 :_E \gamma_2)] + [(\gamma_1 E :_E \gamma_2)/(\gamma_1 E + (0 :_E \gamma_2))]\end{aligned}$$

porque por [15] Teorema 3 de sección (1.6), $(\gamma_1 E + (0 :_E \gamma_2))/\gamma_1 E$ es isomorfo a $(0 :_E \gamma_2)/(\gamma_1 E \cap (0 :_E \gamma_2))$. Luego, por (4.1.2) y (4.1.1),

$$\gamma_1 R \cap (0 :_E \gamma_2) = \gamma_1 (0 :_E \gamma_1 \gamma_2)$$

De esta manera $[2] = [5] + [6]$, donde $[5] = [(0 :_E \gamma_2)/\gamma_1(0 :_E \gamma_1\gamma_2)]$ y

$$[6] = [(\gamma_1 E :_E \gamma_2)/(\gamma_1 E + (0 :_E \gamma_2))]$$

De nuevo multiplicando por γ_2 produce un homomorfismo de $\gamma_1 E :_E \gamma_2$ sobre $\gamma_2(\gamma_1 E :_E \gamma_2)$ que, por (4.1.2), es el mismo como $\gamma_1 E \cap \gamma_2 E$. De esta manera tenemos un homomorfismo $(\gamma_1 E :_E \gamma_2) \to \gamma_1 E \cap \gamma_2 E$ del cual el nucleo es $0 :_E \gamma_2$. Ahora $\gamma_1 E + (0 :_E \gamma_2)$ contiene este nucleo y es el mapeo sobre $\gamma_1\gamma_2 E$. De ello resulta, por [15] Teorema 1 de sección (1.6), que tenemos un isomorfismo

$$(\gamma_1 E :_E \gamma_2)/(\gamma_1 E + (0 :_E \gamma_2)) \approx (\gamma_1 E \cap \gamma_2 E)/\gamma_1\gamma_2 E$$

Por consiguiente $[6] = [(\gamma_1 E \cap \gamma_2 E)/\gamma_1\gamma_2 E]$ y esto, también, es simétrico en γ_1 y γ_2. Esto queda para examinar la suma de [3] y [5]. Evidentemente

$$\gamma_2(0 :_E \gamma_1) \subseteq \gamma_2(0 :_E \gamma_1\gamma_2) \subseteq 0 :_E \gamma_1$$

De aquí, por (4.4.17), $[3] + [5] = [7] + \{8\}$, donde $[7] = [\gamma_2(0 :_E \gamma_1\gamma_2)/\gamma_2(0 :_E \gamma_1)]$ y $\{8\} = [(0 :_E \gamma_1)/\gamma_2(0 :_E \gamma_1\gamma_2)] + [(0 :_E \gamma_2)/\gamma_1(0 :_E \gamma_1\gamma_2)]$. Lo último de esto tenemos la simetría deseada. También multiplicando por γ_2 induce un epimorfismo $(0 :_E \gamma_1\gamma_2) \to \gamma_2(0 :_E \gamma_1\gamma_2)$ que es tal que la imagen inversa de $\gamma_2(0 :_E \gamma_1)$ es $(0 :_E \gamma_1) + (0 :_E \gamma_2)$. Por consiguiente tenemos un isomorfismo

$$(0 :_E \gamma_1\gamma_2)/((0 :_E \gamma_1) + (0 :_E \gamma_2)) \approx \gamma_2(0 :_E \gamma_1\gamma_2)/\gamma_2(0 :_E \gamma_1)$$

y por ello $[7] = [(0 :_E \gamma_1\gamma_2)/((0 :_E \gamma_1) + (0 :_E \gamma_2))]$ que es otra expresión simétrica. Colectando términos encontramos que $e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E)$ es igual a $[1] + [4] - [6] - [7] - \{8\}$ y que cada término tiene la propiedad que permanece inalterado donde γ_1 y γ_2 son intercambiados. El lema resulta. ||

Proposición 80 *Sea E un R-módulo Noetheriano y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E. Si ahora $\{i_1, i_2, ..., i_s\}$ es una pemutación de $\{1, 2, ..., s\}$, entonces $e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) = e_R(\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, ..., \gamma_{i_s}|E)$*

Observación 5 . *Nos referimos a esta propiedad de el símbolo de multiplicidad como la Propiedad de Cambio.*

Prueba. Es suficiente probar que el valor de $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_m, \gamma_{m+1}, ..., \gamma_s|E)$ es inalterado si cambiamos γ_m y γ_{m+1}. Ahora por $m-1$ aplicando (4.4.7) obtenemos una expresión de $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s)|E$ como una suma finita como sigue:

$$e_R(\gamma_1, ..., \gamma_m, \gamma_{m+1}, ..., \gamma_s|E) = \sum_v \epsilon_v e_R(\gamma_m, \gamma_{m+1}, ..., \gamma_s|E_v)$$

aquí cada ϵ_v es igual a ± 1 y cada E_v es un R-módulo Noetheriano que admite $\gamma_m, \gamma_{m+1}, ..., \gamma_s$ como un sistema de multiplicidad. Además, el número ϵ_v y el módulo E_v son determinados solamente por E y $\gamma_1, ..., \gamma_{m-1}$, que dicen ser completamente independientes de $\gamma_m, \gamma_{m+1}, ..., \gamma_s$. Aquí si intercambiamos γ_m y γ_{m+1} obtenemos

$$e_R(\gamma_1, ..., \gamma_{m+1}, \gamma_m, ..., \gamma_s|E) = \sum_v \epsilon_v e_R(\gamma_{m+1}, \gamma_m, ..., \gamma_s|E_v)$$

donde ϵ_v y E_v tienen el mismo significado como antes. Pero, por Lema 40,,

$$e_R(\gamma_m, \gamma_{m+1}, ..., \gamma_s|E_v) = e_R(\gamma_{m+1}, \gamma_m, ..., \gamma_s|E_v)$$

De ello resulta que $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_m\gamma_{m+1}, ..., \gamma_s|E) = e_R(\gamma_1, ..., \gamma_{m+1}\gamma_m, ..., \gamma_s|E)$ y con esto la Proposición se establece. ||

Proposición 81 *Sea E un R-módulo Noetheriano y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E. Asumamos que para algún valor en particular de i tenemos $\gamma_i^m E = 0$, donde m es un entero positivo. Entonces $e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) = 0$*

Prueba. La propiedad de cambio de el símbolo de multiplicidad prueba que podemos asumir que $i = 1$. Hecha esta suposición procedemos aprobar la proposición por inducción sobre m. Primero supongamos que $m = 1$. Entonces $\gamma_1 E = 0$ y por ello $E/\gamma_1 E = E$ y $0 :_E \gamma_1 = E$. Por consiguiente, por (4.4.7),

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) = e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|E) - e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|E) = 0$$

Ahora asumimos que $m > 1$ y que el resultado deseado es ya establecido para valores pequeños de la variable inductiva. Por Teorema 74 y la sucesión exacta $0 \to \gamma_1 E \to E \to E/\gamma_1 E \to 0$ vemos que $e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) = e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|\gamma_1 E) + e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E/\gamma_1 E)$. Sin embargo $\gamma_1^{m-1}(\gamma_1 E) = 0$ y $\gamma_1(E/\gamma_1 E) = 0$. Aquí, por la hipótesis inductiva, ambos $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|\gamma_1 E)$ y $e_R(\gamma_1, , ..., \gamma_s|0 :_E \gamma_1)$ son cero. La Proposición resulta ||

Lema 41 *Sea E un R-módulo Noetheriano y γ un elemento central. Sea $F_m = E/(0 :_E \gamma_m)$. Entonces $0 :_{F_m} \gamma = 0$ siempre que m es suficientemente grande.*

Prueba. Puesto que E es un R-módulo Noetheriano, la sucesión ascendente $0 :_E \gamma \subseteq 0 :_E \gamma^2 \subseteq 0 :_E \gamma^3 \subseteq ...$ de submódulos de E debe finalizar. Supongamos ahora que m es suficientemente grande para asegurar que $0 :_E \gamma^m = 0 :_E \gamma^{m+1}$. Entonces, por (4.1.5) y (4.1.1),

$$\begin{aligned} 0_{F_m}\gamma \quad &= ((0_E\gamma^m) :_E \gamma)/(0 :_E \gamma^m) = (0_E\gamma^{m+1})/(0 :_E \gamma^m) \\ &= (0_E\gamma^m)/(0 :_E \gamma^m) = 0 \end{aligned}$$

como requiere ||

Teorema 75 *Sea E un R-módulo Noetheriano y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E. Entonces*

$$0 \leq e_R(\gamma_1, , ..., \gamma_s|E) \leq L_R\{E/(\gamma_1 E + ... + \gamma_s E)\} \tag{4.4.18}$$

Prueba. Primero probaremos, usando inducción sobre s, $e_R(\gamma_1, , ..., \gamma_s|E)$ es no negativo. Si $s = 0$, entonces es obvio. Por ello asumamos que $s \geq 1$ y también que el caracter no negativo de multiplicidad es establecido en el caso de sistema de multiplicidad dado sólo $s-1$ miembros. Sea $F = E/(0 :_E \gamma^m)$, donde m se escoje suficientemente grande para asegurar que $0_F\gamma_1 = 0$. Esto es posible por Lema 41.

Luego, aplicando Teorema 74 a la sucesión exacta $0 \to 0 :_E \gamma_1^m \to E \to F \to 0$ y se construye usando Proposición 74, vemos que

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) = e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|F) = e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|F/\gamma_1 F)$$

porque $0 :_F \gamma_1 = 0$. Sin embargo, por la hipótesis inductiva, $e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|F/\gamma_1 F)$ es no negativo y así el mismo es verdadero de $e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|R)$. Queda por establecer la segunda desigualdad en (4.4.18). Si $s \geq 1$ tenemos

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) = e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|E/\gamma_1 E) - e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|0 :_E \gamma_1)$$

donde

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) \leq e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|E/\gamma_1 E) \tag{4.4.19}$$

porque $e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|0 :_E \gamma_1)$ es no negativo. En esta desigualdad sustituimos $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ y E por $\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ y $E/\gamma_1 E = E'$ (digamos). Esto prueba que

$$e_R(\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E/\gamma_1 E) \leq e_R(\gamma_3, ..., \gamma_s|E'/\gamma_2 E')$$

Pero, por (4.1.3), $E'/\gamma_2 E'$ es isomorfo a $E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E)$. Aquí

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) \leq e_R(\gamma_3, ..., \gamma_s|E(\gamma_1 E + \gamma_2 E))$$

Procediendo en este camino finalmente llegamos a la desigualdad

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) \leq e_R(\cdot|E/(\gamma_1 E, ..., \gamma_s E))$$

En vista de (4.4.6) se completa la prueba. ||

Corolario 45 *Si $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre un R-módulo Noetheriano E y $\gamma_1 E, \gamma_2 E, ..., \gamma_s E = E$, entonces $e_R(\gamma_1, , ..., \gamma_s|E) = 0$*

Teorema 76 *Sea E un R-módulo Noetheriano y sea $\gamma_1, ..., \gamma_i, ..., \gamma_s$ y $\gamma_1, ..., \gamma_i^{'}, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E . Entonces $\gamma_1, ..., \gamma_i\gamma_i^{'}, ..., \gamma_s$ es tambien un sistema de multiplicidad sobre E y*
$e_R(\gamma_1 + ... + \gamma_i\gamma_i^{'} + ... + \gamma_s|E)$

$$= e_R(\gamma_1 + ... + \gamma_i + ... + \gamma_s|E) + e_R(\gamma_1 + ... + \gamma_i^{'} + ... + \gamma_s|E) \tag{4.4.20}$$

Prueba. Sea $F = \gamma_1 E + ... + \gamma_i E + ... + \gamma_s E$. Entonces F es un submódulo de E y por ello, por Proposición 80, $\gamma_1, ..., \gamma_i^{'}, ..., \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre F. Luego
$L_R\left\{E|(\gamma_1 F + ... + \gamma_i^{'} F + ... + \gamma_s F)\right\}$

$$= L_R\left\{E/F\right\} + L_R\left\{F/(\gamma_1 F + ... + \gamma_i^{'} F + ... + \gamma_s F)\right\}$$

y, en esta ecuación, los términos en el lado derecho son finitos. Nuevamente

$$\gamma_1 F + ... + \gamma_i^{'} F + ... + \gamma_s F \subseteq \gamma_1 E + ... + \gamma_i\gamma_i^{'} E + ... + \gamma_s E \subseteq E$$

y así vemos que $L_R\left\{E/(\gamma_1 E + ... + \gamma_i\gamma_i^{'} E + ... + \gamma_s E)\right\} < \infty$. Por consiguiente $\gamma_1 + ... + \gamma_i\gamma_i^{'} + ... + \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre E. Ahora probemos (4.4.20) y empecemos por observar que, en vista de Proposición 81, podemos suponer que $i = s$. Pero, repitiendo la aplicacion de (4.4.7), $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) = \sum_v \epsilon_v e_R(\gamma_s|E_v)$. Aquí el lado derecho es una suma finita en que cada ϵ_v tiene el valor ± 1 y los E_v son ciertos R-módulos Noetherianos en que γ_s es, por lo mismo, un sistema de multiplicidad. Además el número ϵ_v y el módulo E_v depende sólo de E y los elementos $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{s-1}$. De ello resulta que

$$e_R(\gamma_1, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s^{'}|E) = \sum_v \epsilon_v e_R(\gamma_s^{'}|E_v) \text{ y } e_R(\gamma_1, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s\gamma_s^{'}|E) = \sum_v \epsilon_v e_R(\gamma_s\gamma_s^{'}|E_v)$$

que el mismo ϵ_v y E_v como antes. Vemos de esto que es sólo necesario probar el teorema en el caso $s = 1$. En lo que sigue asumimos que tenemos esta condición y, para simplificar la notación, escribimos γ y γ' en lugar de γ_s y $\gamma_s^{'}$. Por definición, tenemos $e_R(\gamma|E) = L_R(E|\gamma E) - L_R(0 :_E \gamma)$ con expresiones similares de $e_R(\gamma'|E)$ y $e_R(\gamma\gamma'|E)$. Luego multiplicando por γ produce un epimorfismo $E \to \gamma E$ con la propiedad que la imagen inversa de $\gamma\gamma' E$ es $(0 :_E \gamma) + \gamma' E$. Por consiguiente tenemos un isomorfismo $\gamma E/\gamma\gamma' E \approx E/((0 :_E \gamma) + \gamma' E)$ donde $L_R(\gamma E/\gamma\gamma' E) = L_R(E/\gamma' E) - L_R((0 :_E \gamma + \gamma' E)/\gamma' E)$. Sin embargo $(0 :_E \gamma + \gamma' E)/\gamma' E$ es isomorfo a $(0 :_E \gamma)/(\gamma' E \cap (0 :_E \gamma)) = (0 :_E \gamma)/\gamma'(0 :_E \gamma\gamma')$ y así $L_R(\gamma E/\gamma\gamma' E) = L_R(E/\gamma' E) - L_R(0 :_E \gamma) + L_R(\gamma'(0 :_E \gamma\gamma'))$ que produce $L_R(E/\gamma\gamma' E) = L_R(E/\gamma E) - L_R(0 :_E \gamma) + L_R(E/\gamma' E) + L_R(\gamma'(0 :_E \gamma\gamma'))$ sumando $L_R(E/\gamma E)$ a ambos lados. Para completar la prueba es suficiente probar que $L_R(\gamma'(0 :_E \gamma\gamma')) = L_R(0 :_E \gamma\gamma') - L_R(0 :_E \gamma')$. Sin embargo es claro porque $\gamma'(0 :_E \gamma\gamma')$ es isomorfo a $(0 :_E \gamma\gamma')/(0 :_E \gamma')$ como podemos ver de el epimorfismo $(0 :_E \gamma\gamma') \to \gamma'(0 :_E \gamma\gamma')$ producido por medio de multiplicar por γ'. ||

Corolario 46 *Sea E un R-módulo Noetheriano, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E, y $n_1, n_2, ..., n_s$ enteros positivos. Entonces $\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, ..., \gamma_s^{n_s}$ también es un sistema de multiplicidad sobre E y*

$$e_R(\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, ..., \gamma_s^{n_s}|E) = n_1 n_2 ... n_s e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E)$$

Esto resulta repitiendo la aplicacion de el teorema

Corolario 47 *Sea E un R-módulo Noetheriano, y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E, entonces*

$$0 \leq e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E) \leq \frac{L_R\left\{(\gamma_1^{n_1}E, ..., \gamma_s^{n_s}E)\right\}}{n_1 n_2 ... n_s}$$

para enteros positivos arbitrarios $n_1, n_2, ..., n_s$.

Prueba. Puesto que $n_1 n_2 ... n_s e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E)$ es igual a

$$e_R(\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, ..., \gamma_s^{n_s})|E$$

el resultando deseado se sigue de Teorema 75. ||

Corolario 48 *Sea E un R-módulo Noetheriano, y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E. Supongamos que*

$$\gamma_i^m E \subseteq \gamma_1 E + ... + \gamma_{i-1} E + \gamma_{i+1}(E) + ... + \gamma_s E$$

donde m es un entero positivo. Entonces $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E) = 0$

Observación 6 *Puede ser notado que este resultado considerable consolida la Proposición 82.*

Prueba. Por Proposición 81, podemos suponer que $i = 1$. Si ahora $n > m$, entonces $\gamma_1^n E + \gamma_2 E + ... + \gamma_s E = \gamma_2 E + ... + \gamma_s E$ y así, por Cor. 43,

$$0 \leq n e_R(\gamma_1 \gamma_2, ..., \gamma_s|E) \leq L_R\left\{(\gamma_2 E, ..., \gamma_s E)\right\} < \infty$$

El resultado deseado se sigue de dividir directamene por n y entonces n tiende a infinito. ||

Es de considerable interés saber bajo que condiciones la multiplicidad $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E)$ y la longitud de $L_R\{E/(\gamma_1 E, ..., \gamma_s E)\}$ son iguales. Primero damos una condición suficiente para que esto ocurra.

Teorema 77 *Sea E un R-módulo Northeriano y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E. Si ahora $(\gamma_1 E + \gamma_2 E + ... + \gamma_i E) :_E \gamma_{i+1} = \gamma_1 E + \gamma_2 E + ... + \gamma_i E$ para $0 \leq i \leq s-1$, entonces $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E) = L_R\{E/(\gamma_1 E, ..., \gamma_s E)\}$.*

Prueba. Sea $E_i = E/(\gamma_1 E + ... + \gamma_i E)$. Entonces, por nuestra hipótesis y (4.1.5), tenemos $0 :_{E_i} \gamma_{i+1} = 0$ para $0 \leq i \leq s-1$. También, por (4.1.3), $E_i/\gamma_{i+1}E_i$ y E_{i+1} son isomorfismos. Por consiguiente

$$\begin{aligned} e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) &= e_R(\gamma_2, \gamma_3 ..., \gamma_s|E_1) \\ &= e_R(\gamma_3, ..., \gamma_s|E_2) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= e_R(\cdot|E_s) \\ &= L_R\{E/(\gamma_1 E + ... + \gamma_s E)\} \end{aligned}$$

como requiere. ||

Nuestro siguiente resultado proporciona un importante resultado opuesto a Teorema 77.

Teorema 78 *Sea E un R-módulo Noetheriano y $\gamma_1, \gamma_2 ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E del cual los elementos son considerados en el radical de Jacobson de R. Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

(a) $e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) = L_R\{E/(\gamma_1 E, ..., \gamma_s E)\}$;

(b) *para $0 \leq i \leq s-1$, tenemos $(\gamma_1 E + ... + \gamma_i E) :_E \gamma_{i+1} = \gamma_1 E + ... + \gamma_i E$*

Prueba. Por Teorema 77, necesitamos sólo probar que (a) implica (b). Para esto usemos inducción sobre s. Cuando $s = 1$ tenemos $e_R(\gamma_1|E) = L_R(E/\gamma_1 E) - L_R(0 :_E \gamma_1)$ y así, puesto que asumimos (a) verdadero, $L_R(0 :_E \gamma_1) = 0$. Por consiguiente $0 :_E \gamma_1 = 0$ que es todo lo que necesitamos en este caso. De aquí asumamos que $s > 1$ y también que la afirmacion "(a) implica (b)" se establece en todas circunstancias donde el sistema de multiplicidad tiene sólo $s-1$ elementos. Sea $n_1, n_2, ..., n_s$ enteros positivos. Entonces, por Teorema 75, Proposición 79, y Teorema 76 Cor. 42,

$$\begin{aligned} e_R(\gamma_1^{n_1}, ..., \gamma_s^{n_s}|E) &\leq L_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E + ... + \gamma_s^{n_s}E)\} \\ &\leq n_1 n_2 ... n_s L_R\{E/(\gamma_1 E, ..., \gamma_s E)\} \\ &= n_1 n_2 ... n_s e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E) \\ &= e_R(\gamma_1^{n_1}, ..., \gamma_s^{n_s}|E) \end{aligned}$$

De esta manera

$$e_R(\gamma_1^{n_1}, ..., \gamma_s^{n_s}|E) = L_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E + ... + \gamma_s^{n_s}E)\} \tag{4.4.21}$$

para enteros positivos arbitrarios $n_1, n_2, ..., n_s$. Sea $K = E/(0 :_E \gamma_1)$. Entonces resulta de la sucesión exacta $0 \to 0 :_E \gamma_1 \to E \to K \to 0$ y Proposición 82, que

$$e_R(\gamma_1^{n_1}, ..., \gamma_s^{n_s}|E) = e_R(\gamma_1^{n_1}, ..., \gamma_s^{n_s}|K)$$

De aquí, por (4.4.21) y Teorema 75,

$$\begin{aligned} L_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E)\} &= e_R(\gamma_1^{n_1},...,\gamma_s^{n_s}|K) \\ &\le L_R\{K/(\gamma_1^{n_1}K+...+\gamma_s^{n_s}K)\} \\ &= L_R\{E/((0:_E\gamma_1)+\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E)\} \end{aligned}$$

porque los módulos

$$K/(\gamma_1^{n_1}K+...+\gamma_s^{n_s}K) \text{ y } E/((0:_E\gamma_1)+\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E)$$

son isomorfismos. Pero, puesto que

$$\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E = (0:_E\gamma_1)+\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E$$

y por tanto

$$(0:_E\gamma_1) \subseteq \gamma_1^{n_1}E+\gamma_2^{n_2}E+...+\gamma_3^{n_3}E$$

para enteros positivos arbitrarios $n_1, n_2, ..., n_s$. Sea $A = \gamma_1R+\gamma_2R+...+\gamma_sR$ entonces para cada entero positivo n tenemos $(0:_E\gamma_1) \subseteq \gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E \subseteq A^nE$. Sin embargo, por Teorema 73, la intersección de todos los A^nE ($n = 1,2,3,...$) es el submódulo cero de E Porque A es un ideal central contenido en el radical de Jacobson de R. Por consiguiente $0:_E\gamma_1 = 0$. Sea $\bar{E} = E/\gamma_1E$. Puesto que $0:_E\gamma_1 = 0$ y tenemos un isomorfismo $E/(\gamma_1E+\gamma_2E+...+\gamma_sE) \approx \bar{E}/(\gamma_2\bar{E}+...+\gamma_s\bar{E})$ de ello resulta que

$$\begin{aligned} e_R(\gamma_2,...,\gamma_s|\bar{E}) &= e_R(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_s|E) \\ &= L_R\{E/(\gamma_1E+\gamma_2E+...+\gamma_sE)\} \\ &= L_R\{\bar{E}/(\gamma_2\bar{E}+...+\gamma_s\bar{E})\} \end{aligned}$$

es ahora posible aplicar la hipótesis inductiva. Esto prueba que

$$(\gamma_2\bar{E},...,\gamma_i\bar{E}):_{\bar{E}}\gamma_{i+1} = \gamma_2\bar{E}+...+\gamma_i\bar{E}$$

para $1 \le i \le s$. Pero $\gamma_2\bar{E}+...+\gamma_i\bar{E} = (\gamma_1E+\gamma_2E+...+\gamma_iE)/\gamma_1E$. Por consiguiente, por (4.1.4), $(\gamma_1E+\gamma_2E+...+\gamma_iE):_E\gamma_{i+1} = \gamma_1E+\gamma_2E+...+\gamma_iE$ no sólo para $i=0$ pero también para $1 \le i < s$. Se completa la prueba. ||

4.5. La fórmula límite de Lech

Históricamente la teoría moderna de multiplicidad empieza con el estudio de el comportamiento asintótico de potencias de ideales. Esta parte de la teoría vuelve a centrarse en dos expresiónes para $e_R(\gamma_1,...,\gamma_s|E)$ como un límite. Uno de estos limites formulados es debido a P. Samuel y C. Lech. De nuestro punto de vista es fácil ir con lo último. Consideremos primero el caso en que tenemos un R-módulo Noetheriano E y un elemento central γ que, por si mismo forma un sistema de multiplicidad sobre E. Entonces, porque $0_E\gamma \subseteq 0:_E\gamma^2 \subseteq 0:_E\gamma^3 \subseteq ...$ es una sucesión ascendente de submódulos de E, existe un entero m tal que $0:_E\gamma^n = 0:_E\gamma^m$ para todo $n \ge m$. Por consiguiente cuando $m \le n$

$$e_R(\gamma^n|E) = L_R(E/\gamma^nE) - L_R(0:_E\gamma^n) = L_R(E/\gamma^nE) - L_R(0:_E\gamma^m)$$

Ahora, por Teorema 76 Cor., $e_R(\gamma^n)E = ne_R(\gamma|E)$. De ello resulta que

$$L_R(E/\gamma^nE) = ne_R(\gamma|E) + C$$

para todo $n \ge m$, donde C es independiente de n. En particular vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_R(E/\gamma^nE)}{n} = e_R(\gamma|E) \qquad (4.5.22)$$

Este es el caso simple de la fórmula de Lech. El resultado general esta contenido en el siguiente teorema.

Teorema 79 *Sea E un R-módulo Noetheriano y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E. Entonces*

$$\lim_{min(n_i)\to\infty} \frac{L_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E)\}}{n_1n_2...n_s} = e_R(\gamma_1,...,\gamma_s|E) \qquad (4.5.23)$$

Prueba. Usaremos inducción sobre s y empezaremos por observar el caso $s=1$ ya dado en (4.5.22). Para ello suponemos que $s>1$ y que la fórmula correspondiente a (4.5.23) se establece para el caso de sistema de multiplicidad posee $s-1$ miembros. El objeto de la primera parte de la prueba es para probar que, sin pérdida de generalidad, podemos imponer condiciones extras que $0:_E \gamma_1$ es el submódulo cero de E. Una vez esto se hace el argumento procediendo rápidamente a su conclusión. Sea $F=E(0:_E \gamma_1^p)$, donde p se escoge suficientemente grande para asegurar que $0:_F \gamma_1 = 0$. Esto es posible por Lema 41. Se sigue, de la sucesión exacta $0\to 0:_E\gamma_1^p \to E\to F\to 0$ y Proposición 82, que

$$e_R(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_s)|E = e_R(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_s|F) \qquad (4.5.24)$$

Luego, de el isomorfismo

$$F/(\gamma_1^{n_1}F+...+\gamma_s^{n_s}F) \approx E/((0:_E\gamma_1^p)) + \gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E$$

deducimos que

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq L_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E)\} - L_R\{F/(\gamma_1^{n_1}F+...+\gamma_s^{n_s}F)\} \\ &= L_R\{((0:_E\gamma_1^p)+\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E)/(\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E)\} \\ &= L_R\{(0:_E\gamma_1^p)/((0:_E\gamma_1^p)\cap(\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E))\} \end{aligned}$$

por uno de nuestros teorema de isomorfismo normal. Nuevamente

$$(0:_E\gamma_1^p)\cap(\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E) \supseteq \gamma_2^{n_2}(0:_E\gamma_1^p)+...+\gamma_s^{n_s}(0:_E\gamma_1^p)$$

y así, por Proposición 79,
$L_R\{(0:_E\gamma_1^p)/((0:_E\gamma_1^p)\cap(\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E))\}$

$$\begin{aligned} &\leq n_2n_3...n_sL_R\{(0:_E\gamma_1^p)/(\gamma_2(0:_E\gamma_1^p)+...+\gamma_s(0:_E\gamma_1^p))\} \\ &= n_2n_3...n_sC \end{aligned}$$

Ahora C es finito. Para ver esto es suficiente probar que $\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre $0:_E\gamma_1^p$. Sin embargo es claro porque $\gamma_1^p,\gamma_2,...,\gamma_s$ es seguro un sistema de multiplicidad sobre el módulo en cuestión y $\gamma_1^p(0:_E \gamma_1^p)=0$. Estas observaciones varias prueban que tenemos la desigualdad

$$0\leq \frac{L_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E)\} - L_R\{F/(\gamma_1^{n_1}F+...+\gamma_s^{n_s}F)\}}{n_1n_2...n_s} \leq \frac{C}{n_1}$$

y así, por (4.5.24), es suficiente probar que

$$\lim_{min(n_i)\to\infty} \frac{L_R\{F/(\gamma_1^{n_1}F+...+\gamma_s^{n_s}F)\}}{n_1n_2...n_s} = e_R(\gamma_1,...,\gamma_s|F)$$

En vista de esto es permisible asumir, para el resto de la prueba, que la condición adicional $0:_E\gamma_1=0$ se satisface. Sea $\bar{E}=E/\gamma_1E$. Entonces, por Teorema 76 Cor. 43 y Proposición 79,

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq n_1n_2...n_se_R(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_s|E) \\ &\leq L_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E)\} \\ &\leq n_1L_R\{E/(\gamma_1E+\gamma_2^{n_2}E+...+\gamma_s^{n_s}E)\} \\ &= n_1L_R\{\bar{E}/\gamma_1\bar{E}+\gamma_2^{n_2}\bar{E}+...+\gamma_s^{n_s}\bar{E}\} \end{aligned}$$

porque $E/(\gamma_1 E + \gamma_2^{n_2} E + ... + \gamma_s^{n_s} E)$ y $\bar{E}/(\gamma_2^{n_2}\bar{E} + ... + \gamma_s^{n_s}\bar{E})$ son isomorfismos. Por consiguiente $\frac{L_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E+...+\gamma_s^{n_s}E)\}}{n_1 n_2 ... n_s}$ situación entre $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E)$ y $\frac{L_R\{\bar{E}/(\gamma_2^{n_2}\bar{E}+...+\gamma_s^{n_s}\bar{E})\}}{n_2 n_3 ... n_s}$ Sin embargo nuestra hipótesis inductiva nos permite concluir que esta última expresión tiende a $e_R(\gamma_2, ..., \gamma_s|\bar{E})$ y esto es igual a $e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E)$ porque ahora tenemos $0 :_E \gamma_1 = 0$. El teorema resulta.||

4.6. La función de Hilbert

Se establecieron anteriormente dos expresiones para $e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E)$ como un límite que juegan roles importantes en el desarrollo histórico de nuestra materia. Uno de estos limites formulados ahora se deriva. El segundo tiene asociatividad cercana con la teoría aritmética de grado de módulos. Este es un tópico fascinate en su recto conocimiento totalmente aparte de sus aplicaciones para la teoría de multiplicidad. En esta sección se estableceran algunos de los hechos básicos de esta teoría en orden para aplicar los últimos. La noción de un *anillo de grado* se introduce en [15] sección (2.11). En tal ocasión accedemos a restringir nuestra atencion a anillos conmutativos pero, como el lector fácilmente verifica, la extensión de la *definición* para el caso no conmutativo no presenta dificultad. También tenemos un anillo de grado (pero no necesariamente conmutativo), es posible definir la noción de un *módulo de grado* sobre el anillo exacto como antes. El anillo de grado que tratamos son anillos polinomiales. Para ser completamente explicito, sea R un anillo no nulo y formamos el anillo polinomial $R[X_1, X_2, ..., X_s]$ en los indeterminates $X_1, X_2, ..., X_s$, donde $s \geq 0$. Es implícito que los X_i son conmutativos con los otros así que, con una misma notación explicativa, $(rX_1^{\mu_1}X_2^{\mu_2}..., X_s^{\mu_s})(\rho X_1^{v_1}X_2^{v_2}..., X_s^{v_s}) = (r\rho)X_1^{\mu_1+v_1}X_2^{\mu_2+v_2}..., X_s^{\mu_s+v_s}$ De esta manera $X_1, X_2, ..., X_s$ todos pertenecen a el *centro* de $R[X_1, X_2, ..., X_s]$. Consideraremos $R[X_1, X_2, ..., X_s]$ como grado, el camino usual, por los enteros no negativos. Por consiguiente si $m \geq 0$ es un entero, entonces un polinomio es *homogéneo de grado* m si puede ser expresado en la forma

$$\sum_{\mu_1+...+\mu_s=m} r_{\mu_1\mu_2...\mu_s} X_1^{\mu_1}X_2^{\mu_2}..., X_s^{\mu_s}$$

A menudo es conveniente usar $R[X]$ como una abreviación para $R[X_1, X_2, ..., X_s]$. Cuando $s = 0$, $R[X]$ es justamente R mismo y el grado sobre R es el único trivial, i.e. todos los elementos no cero son homogéneos de grado cero. Supongamos que M es un grado $R[X]$-módulo. Entonces, para cada $n \geq 0$, el elemento homogéneo de M de grado n forma un subgrupo M_n de el grupo aditivo de M y tenemos $M = M_0 \oplus M_1 \oplus ... \oplus M_n \oplus ...$ Además si un elemento de M_n es multiplicado por un polinomio homogéneo de grado m, entonces el resultado pertenece a M_{m+n}. Ahora el polinomio homogéneo de grado cero forma un subanillo de $R[X]$ que naturalmente identificamos con R. Sobre esto implícito, cada M_N es un R-módulo. Sea

$$H(n, M) = L_R(M_n) \tag{4.6.25}$$

Entonces $H(n, M)$ es una función de n para $n = 0, 1, 2, ...$ y su valor es algún entero no negativo o "maś infinito".

Definición 39 *La función aritmética $H(n, M)$ es llamada la "función Hilbert" de el grado $R[X]$-módulo M.*

Desde el punto de vista de teoría de multiplicidad, no es $H(n, M)$ que nos interese más sino la función relación

$$H^*(n, M) = H(0, M) + H(1, M) + ... + H(n, M) \tag{4.6.26}$$

Nos remitimos a $H^*(n, M)$ como la *función de Hilbert acumulativa de* M. Antes empezaremos el estudio de esta función, llamaremos seguras nociones fundamentales pertenecientes a la teoría de módulo grado. [3] Para este fin sea M un grado $R[X]$-módulo y N un $R[X]$-submódulo de M. Recordaremos que N es llamado un *submódulo homogéneo* si puede ser generado por elementos homogéneos. (Una definicion equivalente se dice en cualquier u que pertenece a N entonces todos los componentes homogéneos de u también pertenecen a N.) Supongamos que tenemos esta situación. Entonces el grado en M induce un grado en N, y M/N puede también ser considerado como un grado $R[X]$-módulos en un camino natural. Estos grados son tal que en la sucesión exacta usual

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0 \tag{4.6.27}$$

el mapeo preserva el grado, que se dice un elemento homogenemo es algún mapeo en un elemento homogéneo, de el *mismo grado*. De ello resuta para cada entero $n \geq 0$, (4.6.27) dado aumentado a una sucesión exacta

$$0 \to N_n \to M_n \to (M/N)_n \to 0$$

de R-módulos. Por consiguiente $L_R(M_n) = L_R(N_n) + L_R((M/N)_n)$, que se dira

$$H(n, M) = H(n, N) + H(n, M/N) \tag{4.6.28}$$

Más genreral, si $0 \to N \to M \to K \to 0$ es una sucesión exacta de grado $R[X]$-módulo en que el mapeo preserva el grado, entonces

$$H(n, M) = H(n, N) + H(n, K) \tag{4.6.29}$$

para todo $n \geq 0$ y por ello

$$H^*(n, M) = H^*(n, N) + H^*(n, K) \tag{4.6.30}$$

para todo $n \geq 0$ como bien. Se realizará que la función de un grado módulo es sólo posible será interesante si los valores que estos toman son finitos. En hecho la situación que es más rica en utilizar resultados es esta en que el módulo son ambos finitamente generados y tienen una función de Hilbert que nunca es infinita. Por consiguiente hacemos lo siguiente

Definición 40 *Un grado $R[X]$-módulo M será llamado "$R[X]$-módulo de Hilbert" si M es finitamente generado y $H(n, M) < \infty$ para todo $n \geq 0$.*

Sea M una $R[X]$-módulo de Hilbert y supongamos que u es un elemento de M que es homogéneo de grado p. Entonces $Ru \subseteq M_p$ y por ello

$$L_R(Ru) \leq L_R(M_p) = H(p, M) < \infty$$

Sea I el núcleo de el R-epimorfismo $R \to Ru$ en que $r \to ru$. Entonces R/I es isomorfo a Ru y por ello $L_R(R/I) < \infty$. En particular vemos que R/I es un R-módulo Notheriano. Se sigue, por [15] Teorema 1 de sección (4.1), que [4] el $R[X]$-módulo $(R/I)[X]$, que consiste de todo polinomio en $X_1, X_2, ..., X_s$ con coeficientes en el módulo R/I, es también Noetheriano. Si $\phi(X)$ pertenece a $R[X]$, sea $\bar{\phi}(X)$ denota el elemento de $(R/I)[X]$ obtenido por aplicar el mapeo natural $R \to R/I$ para los coeficientes de $\phi(X)$. Fácilmente se comprueba que existe un $R[X]$-epimorfismo bien definido $(R/I)[X] \to R[X]u$ en que $\bar{\phi}(X) \to$

[3] Este material es ampliamente discutido en [15] sección (2.11).

[4] El lector recordara que el teorema citado se tiene para anillos no conmutativos como bien como para conmutativos.

$\phi(X)u$. Puesto que $(R/I)[X]$ es un $R[X]$-módulo Noetheriano, de ello resulta que $R[X]u$ es un $R[X]$-módulo Noetheriano como bien. Sea $U = R[X]u$. Entonces $U = U_p \oplus U_{p+1} \oplus U_{p+2} \oplus ...$, donde $U_p = Ru$, y

$$X_1U + X_2U + ... + X_sU = U_{p+1} \oplus U_{P+2} \oplus ...$$

Esto prueba que $L_R\{U/(X_1U + ... + X_sU)\} = L_R\{U_p\} = L_R\{Ru\} < \infty$ y así $X_1, X_2, ..., X_s$ *es un sistema de multiplicidad sobre* $R[X]u$. Ahora estamos listos para probar

Proposición 82 *Sea M un $R[X]$-módulo de Hilbert. Entonces M es $R[X]$-módulo Noetheriano y $X_1, X_2, ..., X_s$ es un sistema de multiplicidad sobre M.*

Prueba. Puesto que M es un $R[X]$-módulo de Hilbert, es finitamente generado. Sea $M = R[X]u_1 + R[X]u_2 + ... + R[X]u_q$ entonces es claro que podemos ordenar para que cada u_i sea homogéneo. De la observación hecha arriba, ahora resulta que, para $1 \leq i \leq q$, $R[X]u_i$ es un $R[X]$-módulo Noetheriano. Por consiguiente M es un $R[X]$-módulo Noetheriano por [15] Proposición 1 de sección (4.1). También sabemos, de la discusión previa, que $X_1, X_2, ..., X_s$ es un sistema de multiplicidad sobre cada submódulo $R[X]u_1, R[X]u_2, ...R[X]u_q$. Por ello resulta, de [15] Teorema 5 Cor. 2, que $X_1, X_2..., X_s$ es un sistema de multiplicidad sobre M. Esto establece la Proposición. ||

Corolario 49 *Sea N un submódulo homogéneo de un $R[X]$-módulo de Hilbert M. Entonces N y M/N, cuando dota con el grado usual, son también un $R[X]$-módulo de Hilbert.*

Prueba. La descomposición prueba que M es un $R[X]$-módulo Noetheriano. Por consiguiente ambos N y M/N son finitamente generados. Luego, puesto que $H(n, M) < \infty$, se sigue, de (4.6.28), que $H(n, M)$ y $H(n, M/N)$ son también finitos para todo n. Esto completa la prueba. ||

El siguiente lema nos habla acerca de la función de Hilbert de un módulo en el caso donde el número de variables es cero. Esto siempre que con un punto sorprendente de seguros argumentos que inducen en el número de variables.

Lema 42 *Sea M un $R[X]$-módulo de Hilbert y supongamos que $s = 0$. Entonces $H(n, M) = 0$ para todo valor grande de n. Además $L_R(M)$ es finito y $H^*(n, M) = L_R(M)$ para todo valor grande de n.*

Prueba. Puesto que M es finitamente generado y $s = 0$, existen elementos homogéneos $u_1, u_2, ..., u_q$ tal que $M = Ru_1 + Ru_2 + ... + Ru_q$. Sea el grado de u_i n_i. Entonces $Ru_i \subseteq M_{n_i}$ y $L_R(Ru_i) \leq H(n_i, M)$ que es finito. De ello resulta que $L_R(M) < \infty$. Pero $M = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus ...$ es una suma directa de R-módulos. Consecuentemente, puesto que M tiene longitud finita, $L_R(M_n) = 0$ donde n es suficientemente grande, digamos cuando $n > p$. Por consiguiente $M_n = 0$ cuando $n > p$ y así $M = M_0 \oplus M_1 \oplus ... \oplus M_p$. De ello resulta que

$$\begin{aligned} H^*(n, M) &= L_R(M_0) + L_R(M_1) + ... + L_R(M_n) \\ &= L_R(M_0) + L_R(M_1) + ... + L_R(M_p) \\ &= L_R(M) \end{aligned}$$

Simpre que $n > p$. Esto completa la prueba. ||

Teorema 80 *Sea M un $R[X_1, X_2, ..., X_s]$-módulo de Hilbert. Entonces para todo valor grande de n, $H(n, M)$ es dado por una relación de la forma*

$$H(n, M) = \sum_{v=0}^{s-1} C_v \binom{n+v}{v} \qquad (4.6.31)$$

donde $c_0, c_1, ..., c_{s-1}$ son enteros que son independientes de n.

Observación 7 *Este es el resultado clave con respecto a la función de Hilbert. Antes de proceder a la prueba hacemos una observación un poco general.*
Primero $\binom{n+v}{v}$ *denota el binomio usual de coeficiente. Es dado explícitamente por* $\binom{n+v}{v} = \frac{(n+v)(n+v-1)...(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3...v}$ *así, para un valor fijo* v ($v \geq 0$), $\binom{n+v}{v}$ *es un polinomio en* n *de grado* v *del cual el primer término es* $n^v/v!$. *El teorema por tanto prueba que, para valores grandes de* n,

$$H(n, M) = c_{s-1}\frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + ...$$

donde, en esta equación, el término indicado por $+...$ *constituye un polinomio en* n *del cual el grado es menor que* $s-1$. *El siguiente punto que requiere atención es que la representación (4.6.31) es necesariamente única. Para ver esto primero observamos que si* $f(t)$ *es un polinomio (con coeficientes complejos) en una indeterminante* t *y* $f(n) = 0$ *cuando* n *es un entero positivo suficientemente grande entonces* $f(t)$ *es un polinomio nulo. Es porque un polinomio no nulo tiene en la mayoría un número finito de base. Ahora supongamos que* $c_0^{'}, c_1^{'}, ..., c_q^{'}$ *y* $c_0^{''}, c_1^{''}, ..., c_q^{''}$ *son dos sucesiones y cada una consiste de* $q+1$ *términos complejos, y además supongamos que*

$$\sum_{v=0}^{q} c_v^{'}\binom{n+v}{v} = \sum_{v=0}^{q} c_v^{''}\binom{n+v}{v} \tag{4.6.32}$$

para todo entero positivo suficientemente grande n. *Podemos reescibir entonces cada lado como un polinomio en* n. *Sin embargo, hacemos esto, entonces la observación justamente hecha prueba que los dos polinomios así obtenidos tienen idénticos coeficientes. Esto a su vez implica que* $c_i^{'} = c_i^{''}$ *para* $i = 0, 1, 2..., q$. *De ésta manera (4.6.32) se puede sólo tener para todo* n *grande si la sucesión* $c_0^{'}, c_1^{'}, ..., c_q^{'}$ *y* $c_0^{''}, c_1^{''}, ..., c_q^{''}$ *son idénticas. Esto prueba que, siempre que una representación de la forma (4.6.31) es posible, debe ser unica. De la prueba de el Teorema 80, requerimos dos propiedades muy conocidas de coeficientes binomial. La primera de estas es la relación*

$$\binom{n+v}{v} - \binom{n+v-1}{v-1} = \binom{n-1+v}{v} \tag{4.6.33}$$

que es valida siempre que $n \geq 1$ *y* $v \geq 1$. *La segunda es*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+v}{v} = \binom{n+v+1}{v+1} \tag{4.6.34}$$

Esto dado para $n \geq 0$ *y* $v \geq 0$ *y puede ser establecido aplicando el teorema binomial para la identidad* $\frac{t}{1-t} + \frac{t}{(1-t)^2} + ... + \frac{t}{(1-t)^{n+1}} \equiv \frac{t}{(1-t)^{n+1}} - 1$

Prueba de el teorema 80. El argumento requiere inducción sobre el número s de indeterminantes y empezaremos por observar que el Lema 42 prueba que el teorema es verdadero cuando $s = 0$ siempre que hacemos el convenio natural con respecto a sumas vacías. Por consiguiente ahora en esto asumimos que $s \geq 1$ y que el resultado en cuestión es establecido para módulos Hilbert sobre anillos polinomiales en $s-1$ indefinidos. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to 0 :_M X_s \to M \to M \to M/X_sM \to 0 \tag{4.6.35}$$

donde el mapeo $M \to M$ consiste en multiplicar los elementos de M por X_s. Es claro que $0 :_M X_s$ y X_sM son submódulos homogéneos de M y por ello $0 :_M X_s$ y M/X_sM tienen grado natural derivado de el grado dado sobre M. Son comprensivos ambos $(0 :_M X_s) \to M$ y $M \to M/X_sM$ preserva el grado cuando se aplican elementos homogéneos por unidad porque debemos multiplicar por X_s. Por contraste, el mapeo $M \to M$ aumenta el grado de un elemento homogéneo. De aquí para cada $n \geq 0$ tenemos una sucesión exacta

$$0 \to (0 :_M X_s)_{n-1} \to M_{n-1} \to M_n \to (M/X_sM)_n \to 0$$

de R-módulos siempre que interpretemos $(0 :_M X_s)_{n-1}$ y M_{n-1} como módulos cuando $n = 0$. Ahora todos estos R-módulos tienen longuitud finita. Por consiguiente

$$L_R\{(M/X_sM)_n\} - L_R\{(0 :_M X_s)_{n-1}\} = H(n, M) - H(n-1, M) \qquad (4.6.36)$$

es comprensivo que $H(n-1, M)$ se toma como cero cuando $n = 0$. Por Proposición 83 Cor. Ambos M/X_sM y $0 :_M X_s$ son $R[X_1, X_2, ..., X_s]$-módulos de Hilbert. Sin embargo ambos son aniquilados por X_s. De ello resulta que los considerados como $R[X_1, X_2, ..., X_{s-1}]$-módulos y mantiene el grado igual, entonces serán ambos módulos de Hilbert sobre los anillos pequeños que, notamos, es un anillo polinomial en sólo $s-1$ variables. Por consiguiente, por nuestra suposición, temenos

$$L_R\{(M/X_SM)_n\} = \sum_{v=0}^{s-2} a_v \binom{n+v}{v} \qquad (n \text{ grande})$$

y

$$L_R\{(0 :_M /X_S)_n\} = \sum_{v=0}^{s-2} b_v \binom{n+v}{v} \qquad (n \text{ grande})$$

donde los a_v y b_v son enteros que son independientes de n. Luego, usando (4.6.33), obtenenos

$$L_R\{(0 :_M /X_s)_{n-1}\} = b_0 + \sum_{v=1}^{s-2} b_v \left[\binom{n+v}{v} - \binom{n+v-1}{v-1}\right]$$

para valores grandes de n. Si ahora sustituimos por $L_R\{(M/X_sM)_n\}$ y $L_R\{(0 :_M /X_S)_n\}$ en (4.6.36), encontramos que

$$H(n, M) - H(n-1, M) = \sum_{v=0}^{s-2} d_v \binom{n+v}{v} \qquad \text{n grande}$$

donde $d_0, d_1, ..., d_{s-2}$ son ciertos enteros que no dependen en n. Por consiguiente podemos escribir, para todo valor de k $(k \geq 0)$,

$$H(k, M) - H(k-1, M) = \sum_{v=0}^{s-2} d_v \binom{k+v}{v} + w_k \qquad (4.6.37)$$

donde los w_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ son enteros que son cero en algun punto hacia adelante, digamos $w_k = 0$ cuando $k \geq p$. Finalmente supongamos que $n \geq p$ y la suma (4.6.37) sobre el rango $k = 0, 1, 2, ..., n$. Esto produce

$$H(n, M) = \sum_{v=0}^{s-2} d_v \sum_{k=0}^{n} \binom{k+v}{v} + \sum_{k=0}^{\infty} w_k = \sum_{v=0}^{s-2} d_v \binom{n+v+1}{v+1} + \sum_{k=0}^{\infty} w_k$$

por (4.6.34). La prueba se completa. ||

Nos permite analizar este resultado. Diremos que si M es un $R[X_1, X_2, ..., X_s]$ -módulo de Hilbert, entonces existe un único entero $h_0(M), h_1(M), ..., h_{s-1}(M)$ tal que

$$H(n, M) = \sum_{v=0}^{s-1} h_v(M) \binom{n+v}{v} \tag{4.6.38}$$

para todo valor grande de n. Llamaremos el entero $h_v(M)$ el *coeficiente Hilbert de* M. Luego se demuestra que

$$H(k, M) = \sum_{v=0}^{s-1} h_v(M) \binom{k+v}{v} + \mu_k \tag{4.6.39}$$

para todo $k \geq 0$, donde $\mu_0, \mu_1, \mu_2, ...$ es una sucesión de enteros con la propiedad que $\mu_k = 0$ una vez K es suficientemente grande. Supongamos que $\mu_k = 0$ cuando $k > q$. Si ahora $n > q$ y sumamos (4.6.39) para $K = 0, 1, ..., n$, entonces encontramos que

$$H^*(n, M) = \sum_{v=0}^{s-2} h_v(M) \sum_{k=0}^{n} \binom{k+v}{v} + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k = \sum_{v=0}^{\infty} \mu_k + \sum_{v=0}^{s-2} h_v(M) \binom{n+v+1}{v+1}$$

por virtud de (4.6.34). De ello resulta que existe un único entero $h_0^*(M), h_1^*(M), ..., h_s^*(M)$ tal que

$$H^*(n, M) = \sum_{v=0}^{s} h_v^*(M) \binom{n+v}{v} \tag{4.6.40}$$

siempre que n es suficionesmente grande. Además $h_0(M), h_1(M), ..., h_{s-1}(M)$ son los mismos como $h_1^*(M), h_2^*(M), ..., h_s^*(M)$. En particular, cuando $s \geq 1$ tenemos

$$h_s^*(M) = h_{s-1}(M) \tag{4.6.41}$$

Nos permite asumir que $s \geq 1$. Entonces (4.6.36) demuestra que

$$H(m, M/X_sM) - H(m-1, 0 :_M X_s) = H(m, M) - H(m-1, M)$$

es verdadero para todo $m \geq 0$. Ahora asumamos sobre el rango $m = 0, 1, ..., n$ encontramos que

$$H^*(n, M/X_sM) - H^*(n-1, 0 :_M X_s) = H(n, M) \tag{4.6.42}$$

para todo n. Pero cuando n es grande cada una de estas funciones es expresada como un polinomio en n. En hecho de todo n grande

$$H^*(n, M/X_sM) = h_{s-1}^*(M/X_sM) \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + ... \tag{4.6.43}$$

$$H^*(n, 0 :_m X_s) = h_{s-1}^*(0 :_M X_s) \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + ... \tag{4.6.44}$$

$$\text{y} \qquad H(n, M) = h_{s-1}(M) \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + ... \tag{4.6.45}$$

donde en cada caso $+...$ denota un polinomio en n del cual el grado es más pequeño que $s-1$. De (4.6.44) obtenemos

$$H^*(n-1, 0 :_M X_S) = h_{s-1}^*(0 :_M X_s) \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + ... \tag{4.6.46}$$

y (4.6.45) podemos reescribirlo como

$$H(n, M) = h_s^*(M)\frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + ... \qquad (4.6.47)$$

porque $h_{s-1}(M) = h_s^*(M)$ Nos permite usar (4.6.43), (4.6.46) y (4.6.47) para sustituir en (4.6.42). Entonces, comparando términos de grado $s-1$, obtenemos

$$h_s^*(M) = h_{s-1}^*(M/X_sM) - h_{s-1}^*(0 :_M X_s) \qquad (4.6.48)$$

esto se tiene siempre que $s \geq 1$

Teorema 81 *Sea M un $R[X_1, X_2, ..., X_s]$-módulo de Hilbert. Entonces*

$$h_s^*(M) = e_{R[X]}(X_1, ..., X_s|M)$$

Prueba. Usaremos inducción sobre s. Si $s = 0$, entonces $R[X] = R$ y $e_{R[X]}(X_1, ..., X_s|M)$ es justamente $L_R(M)$. Sobre el otro lado, Lema 42 demuestra que $h_s^*(M)$ es también igual a $L_R(M)$ es este caso particular. Ahora asumamos que $s \geq 1$ y que también el resultado en cuestión será probado sólo cuando $s-1$ indetermintes son concernientes. Por Proposición 83, $e_{R[X]}(X_1, ..., X_s|M)$ es definido. Ahora

$$e_{R[X]}(X_1, ..., X_{s-1}, X_s|M) = e_{R[X]}(X_1, ..., X_{s-1}|M/X_sM) - e_{R[X]}(X_1, ..., X_{s-1}|0 :_M X_s)$$

Además, la clase residual del anillo $R[X]/(X_s)$ es naturalmente isomorfo a el anillo polinomial (digamos) $R[X_1, ..., X_s] = \Lambda$ y el isomorfismo es tal que, para $1 \leq i \leq s-1$, la imagen de X_i en $R[X]/(X_s)$ corresponde a X_i considerado como un elemento de Λ. En adiccion, el ideal (X_s) aniquila M/X_sM. Podemos por ello aplicar (4.4.8) que prueba que

$$e_{R[X]}(X_1, ..., X_{s-1}|M/X_sM) = e_\Lambda(X_1, ..., X_{s-1}|M/X_sM)$$

Pero M/X_sM es un módulo de Hilbert con respecto a $R[X_1, ..., X_{s-1}] = \Lambda$ Por consiguiente, por la suposición inductiva,

$$e_\Lambda(X_1, ..., X_{s-1}|M/X_sM) = h_{s-1}^*(M/X_sM)$$

$$\text{y por ello } \ e_{R[X]}(X_1, ..., X_{s-1}|M/X_sM) = h_{s-1}^*(M/X_sM)$$

Similarmente podemos probar que $e_{R[X]}(X_1, ..., X_{s-1}|0 :_M /X_s) = h_{s-1}^*(0 :_M X_s)$. De esta manera $e_{R[X]}(X_1, ..., X_{s-1}|M) = h_{s-1}^*(M/X_sM) - h_{s-1}^*(0 :_M X_s) = h_{s-1}^*(M)$ por (4.6.48) la prueba es ahora completa.||

4.7. La fórmula límite de Samuel

El resultado de la última sección ahora será aplicado a extender nuestro conocimiento de la propiedad de multiplicidad general. Para este fin sea E un R-módulo Noetheriano y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E. Sea

$$A = \gamma_1 R + \gamma_2 R + ... + \gamma_s R$$

así que A es un ideal central finitamente generado, y usamos $X_1, X_2, ..., X_s$ para denotar indeterminantes. Note que será un indeterminante para cada elemento de el sistema de multiplicidad. Si $n \geq 0$ es un entero, entonces $\gamma_1^n E, \gamma_2^n E, ..., \gamma_s^n E$ es contenido en $A^n E$. Por consiguiente $L_R(E/A^nE) < \infty$ para todo n. Sea

$$M = (E/AE) \oplus (AE/A^2E) \oplus (A^2E/A^3E) \oplus ... \qquad (4.7.49)$$

Afirmemos que M puede dar la estructura de grado $R[X_1, ..., X_s]$-módulo en que el grupo de elementos homogéneos de grado n es justamente $A^nE/A^{n+1}E$. Para explicar esta estructura sea un elemento η de $A^nE/A^{n+1}E$ representado por el elemento y de A^nE y sea

$$\phi(X) = \sum_{\mu_1+...+\mu_s=m} r_{\mu_1,\mu_2,...,\mu_s} X_1^{\mu_1} X_2^{\mu_2} ... X_s^{\mu_s}$$

un elemento homogéneo de $R[X_1, ..., X_s]$ de grado m. Entonces $\pi(X)\eta$ es ese elemento de $A^{m+1}E/A^{m+n+1}E$ que es representado por

$$\sum_{\mu_1+...,\mu_s=m} r_{\mu_1,\mu_2,...,\mu_s} \gamma_1^{\mu_1} \gamma_2^{\mu_2} ... \gamma_s^{\mu_s} y$$

Dejamos la lectura para detenernos, en este camino, M puede ser hecho en un grado $R[X]$-módulo que lo prescribe elementos homogéneos. Puesto que E es un R-módulo Noetheriano, es finitamente generado. Sea $E = Re_1 + Re_2 + ..., +Re_q$ y denotado por $\bar{e}_i$ la imagen natural de e_i en E/AE así que $\bar{e}_i$ es un elemento homogéneo de M de grado cero. Entonces $M = R[X]\bar{e}_1 + R[X]\bar{e}_2 + ... + R[X]\bar{e}_q$ donde, usualmente, $R[X]$ es usado como una abreviación $R[X_1, ..., X_2]$. Ahora

$$L_R(M_n) = L_R(A^nE/A^{n+1}E) \tag{4.7.50}$$

que es finto. Por consiguiente *cuando M es considerado como un grado $R[X]$-módulo, en la manera descrita arriba, vuelve a $R[X]$-módulo de Hilbert.* Además, por (4.7.50), $L_R(E/A^nE) = L_R(M_0) + L_R(M_2) + ... + L_R(M_{n-1})$ eso se dira

$$L_R(E/A^nE) = H^*(n-1, M) \tag{4.7.51}$$

De aquí que, por (4.6.40), una vez n puede volverse suficientemente grande, $L_R(E/A^nE)$ es igual a un polinomio en n de grado no excediendo s. Efectivamente (4.6.40) prueba que, para n grande,

$$L_R(E/A^nE) = h_s^*(M)\frac{n^s}{s!} + ..., \tag{4.7.52}$$

donde este calculo $+...$ denota un polinomio en grado n el cual es menor que s. Sea

$$e(s, A, E) = \lim_{n\to\infty} \frac{L_R(E/A^nE)}{n^s/s!} = h_s^*(M) \tag{4.7.53}$$

El importante hecho, para demostrar poco, es que $e(s, A, E)$ es realmente igual a $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E)$. Note que cuando $s = 0$ obtenemos

$$e(0, (0), E) = L_R(E) \tag{4.7.54}$$

directamente de la definición así la afirmación es desde luego verdadera en este caso. Ahora supongamos que $s \geq 1$ y sea $\bar{E} = E/\gamma_1E, \bar{A} = \gamma_2R + ... + \gamma_sR$. Entonces $\bar{E}$ es un R-módulo Noetheriano y este admite $\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ como un sistema de multiplicidad. También, porque γ_1 aniquila $\bar{E}$, $\bar{A}^n\bar{E} = A^n\bar{E}$ y por ello $\bar{E}/(\bar{A})^n\bar{E}$ es isomorfo a $E/(\gamma_1E + A^nE)$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} L_R\{\bar{E}/(\bar{A})^n\bar{E}\} &= L_R\{E/A^nE\} - L_R\{(\gamma_1E + A^nE)/A^nE\} \\ &= L_R\{E/A^nE\} - L_R\{\gamma_1E/(\gamma_1E \cap A^nE)\} \\ &= L_R\{E/A^nE\} - L_R\{\gamma_1E/\gamma_1(A^nE :_E \gamma_1)\} \end{aligned}$$

por (4.1.2). Sin embargo, el epimorfismo $E \to \gamma_1E$ producido por multiplicar por γ_1 es tal que la imagen inversa de $\gamma_1(A^nE :_E \gamma_1)$ es justamente $A^nE :_E \gamma_1$. De esta manera $\gamma_1E/\gamma_1(A^nE :_E \gamma_1)$ es isomorfo a $E/(A^nE :_E \gamma_1)$ y así

$$\begin{aligned} L_R\{\bar{E}/(\bar{A})^n\bar{E}\} &= L_R\{E/A^nE\} - L_R\{E/(A^nE :_E \gamma_1)\} \\ &\geq L_R\{E/A^nE\} - L_R\{E/A^{n-1}E\} \end{aligned}$$

porque $A^{n-1}E \subseteq (A^nE :_E \gamma_1)$. Luego, por (7.7.49) y (4.7.53),

$$L_R\{E/A^nE\} = e(s, A, E)\frac{n^s}{s!} + ... \quad (4.7.55)$$

para n grande, donde $+...$ tiene su significado usual. De ello resulta que, cuando n es grande, $L_R\{E/A^nE\} - L_R\{E/A^{n-1}E\} = e(s, A, E)\frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + ...$ y por ello

$$L_R\{\bar{E}/(\bar{A})^n\bar{E}\} \geq e(s, A, E)\frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + ...$$

Nos permite dividir directamente por $n^{s-1}/(s-1)!$ y despues n tiende a infinito. Esto produce $e(s-1, \bar{A}, \bar{E}) \geq e(s, A, E)$. Si ocurre que $s \geq 2$, entonces el argumento anterior puede ser repetido. En este camino obtenemos $e(s-2, \bar{\bar{A}}, \bar{\bar{E}}) \geq e(s-1, \bar{A}, \bar{E})$ donde $\bar{\bar{A}} = \gamma_3R + ... + \gamma_sR$ y $\bar{\bar{E}} = \bar{E}/\gamma_2\bar{E}$. Pero, por (4.1.3), $\bar{\bar{E}}$ es isomorfo a $E/(\gamma_1E + \gamma_2E)$ y así se establece que $e(s, A, E) \leq e(s-1, \bar{A}, E/\gamma_1E) \leq e(c-2, \bar{\bar{A}}, E/(\gamma_1E + \gamma_2E))$. Es ahora claro como el argumento procede. En hecho eventualmente obtenemos $e(s, A, E) \leq e(0(0), E/(\gamma_1E + ... + \gamma_sE)) = L_R(E/(\gamma_1E + ... + \gamma_sE))$ por (4.7.54), o , cambiando la notación,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_R(E/A^nE)}{n^s/s!} \leq L_R(E/(\gamma_1E + ... + \gamma_sE))$$

En esta relación ahora reemplazamos $\gamma_1, \gamma_2, ...\gamma_s$ por $\gamma_1^p, \gamma_2^p, ...\gamma_s^p$, donde p es un entero positivo arbitrario, y observamos, al mismo tiempo, que

$$(\gamma_1^pR, ...\gamma_s^pR)^nE \subseteq (\gamma_1R, ...\gamma_sR)^{np}E$$

Esto prueba que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{L_R\{E/(\gamma_1R + ... + \gamma_sR)^{np}E\}}{(np)^s/s!} &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{L_R\{E/(\gamma_1^pR + ... + \gamma_s^pR)^nE\}}{(np)^s/s!} \\ &\leq \frac{L_R\{E/(\gamma_1^pE + ... + \gamma_s^pE)\}}{p^s}\end{aligned}$$

Pero el primero de estos límites es $e(s, A, E)$. De donde

$$e(s, A, E) \leq \frac{L_R\{E/(\gamma_1^pE + ... + \gamma_s^pE)\}}{p^s}$$

Ahora si p tiende a infinito y aplica Teorema 79. Esto produce

$$e(s, A, E) \leq e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E) \quad (4.7.56)$$

El resto nos establece la desigualdad opuesta. Para este fin sea $n_1, n_2, ..., n_s$ enteros positivos y sea

$$U = \oplus_{n=0}^{\infty}\{(A^nE \cap (A^{n+1}E + \gamma_1^{n_1}E + ... + \gamma_s^{n_s}E))/A^{n+1}E\}$$

Es fácil comprobar que U es un $R[X]$-submódulo homogéneo de M (ver (4.7.49)) y que $X_1^{n_1}M + X_2^{n_2}M + ... + X_s^{n_s}M \subseteq U$. Por consiguiente

$$L_R\{M/(X_1^{n_1}M + X_2^{n_2}M + ... + X_s^{n_s}M)\} \geq L_R\{M/U\} \quad (4.7.57)$$

Sea $F = \gamma_1^{n_1}E + \gamma_2^{n_2}E + ... + \gamma_s^{n_s}E$. Entonces tenemos un isomorfismo

$$M/U \approx \oplus_{n=0}^{\infty}\{A^nE/(A^nE \cap (A^{n+1}E + F))\}$$

de R-módulos. Pero

$$\begin{aligned} A^nE/(A^nE \cap (A^{n+1}E+F)) &\approx (A^nE + A^{n+1}E+F)/(A^{n+1}E+F) \\ &\approx (A^nE+F)/(A^{n+1}E+F) \end{aligned}$$

y así $M/U \approx \oplus_{n=0}^{\infty} \{(A^nE+F)/(A^{n+1}E+F)\}$. Sin embargo, cuando $n \geq n_1 + n_2 + ... + n_s$ tenemos $A^nE \subseteq F$ y por ello $A^nE + F = F$. De ello resulta que

$$L_R\{M/U\} = \sum_{n \geq 0} L_R\{(A^nE+F)/(A^{n+1}E+F)\} = L_R\{E/F\}$$

y así, por (4.7.57), $L_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E + ... + \gamma_s^{n_s}E)\} \leq L_R\{M/(X_1^{n_1}M + ... + X_s^{n_s}M)\}$

El siguiente paso prueba que

$$L_R\{M/(X_1^{n_1}M + ... + X_s^{n_s}M)\} = L_{R[X]}\{M/(X_1^{n_1}M + ... + X_s^{n_s}M)\} \tag{4.7.58}$$

Dejamos la prueba por este momento y discutiremos su consecuencia. Ahora

tenemos $\dfrac{L_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E + ... + \gamma_s^{n_s}E)\}}{n_1 n_2 ... n_s} \leq \dfrac{L_{R[X]}\{M/(X_1^{n_1}M + ... + X_s^{n_s}M)\}}{n_1 n_2 ... n_s}$

se sigue, del Teorema 79, que $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E) \leq e_{R[X]}(X_1, ..., X_s|M)$. Pero, por Teorema 81 y (4.7.53), $e_{R[X]}(X_1, ..., X_s|M) = h_s^*(M) = e(s, A, E)$ De esta manera $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E) \leq e(s, A, E)$ que, en vista de (4.7.56), conduce a

Teorema 82 *Sea E un R-módulo Noetheriano $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ un sistema de multiplicidad sobre E. Si ahora $A = \gamma_1 R + \gamma_2 R + ... + \gamma_s R$ entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{L_R\{E/A^nE\}}{n^s/s!} = e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) \tag{4.7.59}$$

Además $e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E) = e_{R[X]}(X_1, ..., X_s|M)$ donde M es el $R[X_1, ..., X_s]$-módulo dado por (4.7.49).

Observación 8 *La expresión para $e_R(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E)$ provisto por (4.7.59) es la fórmula límite de P. Samuel*

Prueba. Posteriormente a la discusión previa es sólo necesario probar (4.7.58). Con este fin sea I el $R[X]$-ideal generado por $X_1, X_2, ..., X_s$ y sea n un entero que satisface $n \geq n_1 + n_2 + ... + n_s$. Entonces $I^nM \subseteq X_1^{n_1}M + ... + X_s^{n_s}M$. Ahora $L_R\{M/(X_1^{n_1}M + ... + X_s^{n_s}M)\} \geq L_{R[X]}\{M/(X_1^{n_1}M + ... + X_s^{n_s}M)\}$

$$\text{y} \quad L_R\{(X_1^{n_1}M + ... + X_s^{n_s}M)/I^nM\} \geq L_{R[X]}\{(X_1^{n_1}M + ... + X_s^{n_s}M)I^nM\}$$

porque todo $R[X]$-módulo es también un R-módulo. De donde el resultado deseado resulta si podemos probar que $L_R\{M/I^nM\} = L_{R[X]}\{M/I^nM\} < \infty$. Pero

$$L_R\{M/I^nM\} = \sum_{v=0}^{n-1} L_R\{I^vM/I^{v+1}M\}$$

$$L_{R[X]}\{M/I^nM\} = \sum_{v=0}^{n-1} L_{R[X]}\{I^vM/I^{v+1}M\}$$

y cada $X_1, X_2, ..., X_s$ aniquila $I^vM/I^{v+1}M$. De esta manera el $R[X]$-submódulo de $I^vM/I^{v+1}M$ son los mismos como sus R-submódulos y así

$$L_R\{I^vM/I^{v+1}M\} = L_{R[X]}\{I^vM/I^{v+1}M\}$$

Por consiguiente $L_R\{M/I^nM\} = L_{R[X]}\{M/I^nM\}$ Además la segunda expresión es finita porque, por Proposición 83, $X_1, X_2, ..., X_s$ es un sistema de multiplicidad sobre M. La prueba es ahora completa.||

Como una aplicación de la fórmula límite de Samuel's probaremos

Teorema 83 *Sea E un R-módulo Noetheriano y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ y $\gamma'_1, \gamma'_2, ..., \gamma'_s$ sistema de multiplicidad sobre E. Supongamos que*

$$\gamma_1 E + \gamma_2 E + ... + \gamma_s E \subseteq \gamma'_1 E, \gamma'_2 E, ..., \gamma'_s E$$

Entonces

$$e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|K) \geq e_R(\gamma'_1, ..., \gamma'_s K)$$

donde K es algún submódulo o factor módulo de E.

Prueba. Podemos asumir que $s > 0$. Sea $\gamma_1 R, ..., \gamma_s R = A$ y $\gamma'_1 R, ..., \gamma'_s R = A'$. Entonces daremos que $AE \subseteq A'E$. De donde $A^2E \subseteq AA'E = A'AE \subseteq A'^2E$ y, en general, $A^nE \subseteq A'^nE$. Por consiguiente $L_R\{E/A^nE\} \geq L_R\left\{E/A'^nE\right\}$ y así $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E) \geq e_R(\gamma'_1, ..., \gamma'_s|E)$ por virtud de (4.7.59). Ahora sea K un módulo factor de E. Entonces de $\gamma_1 E + ... + \gamma_s E \subseteq \gamma'_1 E + ... + \gamma'_s E$ resulta $\gamma_1 K + ... + \gamma_s K \subseteq \gamma'_1 K + ... + \gamma'_s K$, y así obtenemos $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|K) \geq e_R(\gamma'_1, ..., \gamma'_s|K)$ por razón completemente similar a estas ya dadas. Finalmente, supongamos que K es un submódulo de E. Entonces, por Teorema 70, existe un entero $q \geq 0$ tal que $A'(A'^qE \cap K) = A'^{q+1}E \cap K$. Ahora $\gamma_1'^q(K/(A'^qE \cap K)) = 0$. También $\gamma_1^q(K/(A'^qE \cap K)) = 0$ porque $\gamma_1^qK \subseteq A^qE \cap K \subseteq A'^qE \cap K$. Y por ello se sigue, de Proposición 82, que

$$e_R(\gamma'_1, ..., \gamma'_s|K) = e_R(\gamma'_1, ..., \gamma'_s|A'^qE \cap K) \tag{4.7.60}$$

y

$$e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|K) = e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|A'^qE \cap K) \tag{4.7.61}$$

Luego $A(A'^qE \cap K) \subseteq AA'^qE \cap K = A'^qAE \cap K \subseteq A'^{q+1}E \cap K = A'(A'^qE \cap K)$ y por ello $\gamma_1(A'^qE \cap K) + ... + \gamma_s(A'^qE \cap K) \subseteq \gamma'_1(A'^qE \cap K) + ... + \gamma'_s(A'^qE \cap K)$. Por consiguiente $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|A'^qE \cap K) \geq e_R(\gamma'_1, ..., \gamma'_s|A'^qE \cap K)$ por el caso ya considerado. Finalmente $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|K) \geq e_R(\gamma'_1, ..., \gamma'_s|K)$ por (4.7.60) y (4.7.61). Se completa la prueba. ||

Corolario 50 *Sea E un R-módulo Noetheriano y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ y $\gamma'_1, \gamma'_2, ..., \gamma'_s$ dos sistemas de multiplicidad sobre E. Si ahora $\gamma_1 E, ..., \gamma_s E = \gamma'_1 E, ..., \gamma'_s E$ entonces $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|K) = e_R(\gamma'_1, ..., \gamma'_s|K)$ donde K es algún submódulo o módulo factor de E*

Corolario 51 *Sea $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ y $\gamma'_1, \gamma'_2, ..., \gamma'_s$ elementos centrales de R tal que $\gamma_1 R + ... + \gamma_s R = \gamma'_1 R + ... + \gamma'_s R$. Entonces para todo R-módulo Noetheriano E que admite ambos $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ y $\gamma'_1, \gamma'_2, ..., \gamma'_s$ como sistema de multiplicidad damos $e_R(\gamma_1, ..., \gamma_s|E) = e_R(\gamma'_1, ..., \gamma'_s|E)$.*

Capítulo 5

El Complejo de Koszul

5.1. Complejos

Como de costumbre R denota un anillo con un elemento identidad. (No se supone que R es conmutativo a menos que exista una declaración en sentido contrario). El término R-módulo debe ser siempre interpretado en el sentido de un R-módulo de la izquierda.

Por un complejo de R-módulos entenderemos una sucesión

$$... \to X_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} X_n \overset{d_n}{\to} X_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} X_{n-2} \to ... \tag{5.1.1}$$

de R-módulos y R-homomorfismos extendida al infinito en ambas direcciones, con la propiedad

$$d_{n-1} \circ d_n = 0 \tag{5.1.2}$$

para todo valor de n. X_n es llamado el módulo componente de grado n o el componente n de los complejos.
Nos referiremos a d_n como el n-esimo homomorfismo frontera o la n-esima diferenciación del homomorfismo.

A fin de evitar la escritura en todos los detalles en ocasiones, nos referiremos a (5.1.1) como el complejo (X, d) o, sencillamente, como el complejo X. Una manera de poner esto en una base más formal es establecer

$$X = \bigoplus_{-\infty<n<\infty} X_n$$

y definir un R-endomorfismo $d : X \to X$ para que $d\left(x_n\right) = d_n(x_n)$ para $x_n \in X$. De esta manera, X se convierte en un módulo más de R considerado como un anillo con de clasificación trivial, y d es tal que disminuye el grado de un elemento por unidad homogénea. Además, la condición descrita en (5.1.2) ahora tiene la forma $d^2 = 0$.

$$Z_n\left(X\right) = Ker\left(X_n \to X_{n-1}\right) = Kerd_n \tag{5.1.3}$$

$$B_n\left(X\right) = Im\left(X_{n+1} \to X_n\right) = Im\left(d_{n+1}\right) \tag{5.1.4}$$

Los elementos de $Z_n\left(X\right)$ son llamados los n-ciclos de X y esos de $B_n\left(X\right)$ las n-fronteras. Se sigue por (5.1.2), que

$$B_n\left(X\right) \subseteq Z_n\left(X\right)$$

$$\textit{ponemos } H_n\left(X\right) = Z_n\left(X\right)/B_n\left(X\right) \tag{5.1.5}$$

y llamamos $H_n(X)$ la n-esima homología del módulo complejo. Así pues, la secuencia (5.1.1) es exacta cuando y sólo cuando todos los módulos de homología de X son cero.

Supongamos que (X', d') y (X, d) son complejos de R-módulos. Por una función ϕ de los primeros complejos en la segunda vamos a entender una familia $\{\phi_n\}$ de los R-homomorfismos

$$\phi_n : X'_n \to X_n \ (-\infty < n < \infty)$$

tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X'_n & \overset{d'_n}{\to} & X'_{n-1} \\ \phi_n \downarrow & & \phi_{n-1} \downarrow \\ X_n & \overset{d_n}{\to} & X_{n-1} \end{array} \tag{5.1.6}$$

es conmutativo, tal que

$$\phi_{n-1} d'_n = d_n \phi_n \tag{5.1.7}$$

Para todo n. Cuando es ese el caso abraviamos la notacion y escribimos $\phi : X' \to X$. Entonces ϕ es llamado un isomorfismo de complejos si cada ϕ_n es un isomorfismo de R-módulos.

Sea $\phi : X' \to X$ una función del complejo X' en el complejo X. El hecho que el diagrama es conmutativo prueba que

$$\phi_n \left(Kerd'_n \right) \subseteq Kerd_n$$

es decir $\phi_n(Z_n(X')) \subseteq Z_n(X)$. Por otro lado

$$\begin{array}{ccc} X'_{n+1} & \overset{d'_{n+1}}{\to} & X'_n \\ \phi_{n+1} \downarrow & & \phi_n \downarrow \\ X_{n+1} & \overset{d_{n+1}}{\to} & X_n \end{array}$$

es tambien conmutativo y por tanto $\phi_n \left(Im \left(d'_{n+1} \right) \right) \subseteq Im(d_{n+1})$. Esto se puede reescribir como $\phi_n(B_n(X')) \subseteq B_n(X)$. Por lo tanto, en el idioma [15] (sec. (1.5)), ϕ_n da lugar a una función del par $(B_n(X'), Z_n(X'))$ en el par $(B_n(X), Z_n(X))$. Se sigue que induce un homomorfismo

$$\phi_n^* : Z_n(X') / B_n(X') \to Z_n(X) / B_n(X)$$

Vamos a utilizar (5.1.5) para escribir esto como

$$\phi_n^* : H_n(X') \to H_n(X)$$

Asi, pues vemos que una función $\phi_n : X' \to X$ de complejos induce homomorfismos $H_n(X') \to H_n(X)$ de la homología de módulos de X' en la homología de módulos de X.

Ahora sea X', X, X'' complejos de R-módulos y sean $\phi : X' \to X$ y $\psi : X \to X''$ funciónes de complejos. Decimos que

$$X' \xrightarrow{\phi} X \xrightarrow{\psi} X''$$

Es una sucesión exacta de complejos si

$$X'_n \overset{\phi_n}{\to} X_n \overset{\psi_n}{\to} X''_n$$

es una sucesión exacta de R-módulos para todo valor de n. Sera conveniente utilizar el simbolo 0 para denotar el complejo nulo, es decir, uno que tiene la propiedad de que todos sus módulos son módulos nulos. En este entendimiento, es natural decir que

$$0 \to X' \overset{\phi}{\to} X \overset{\psi}{\to} X'' \to 0$$

es una sucesión exacta de complejos si

$$0 \to X'_n \overset{\phi_n}{\to} X_n \overset{\psi_n}{\to} X''_n \to 0$$

es una sucesión exacta de complejos para todo n.

Lema 43 *Supongamos que* $(X', d'), (X, d)$ *y* (X'', d'') *son complejos de R-módulos y la sucesión*

$$0 \to X' \overset{\phi}{\to} X \overset{\psi}{\to} X'' \to 0$$

es exacta. Entonces cada sucesión inducida

$$H_n(X') \overset{\phi_n^*}{\to} H_n(X) \overset{\psi_n^*}{\to} H_n(X'')$$

es exacta.

Prueba: Las asignaciones

$$Z_n(X') \to Z_n(X) \to Z_n(X'')$$

surgen por la restricción de los homomorfismos

$$X'_n \overset{\phi_n}{\to} X_n \overset{\psi_n}{\to} X''_n$$

En consecuencia el resultado de combinar $Z_n(X') \to Z_n(X)$ con $Z_n(X) \to Z_n(X'')$ es un homomorfismo nulo. Esto a su vez implica que

$$\psi_n^* \phi_n^* = 0 \quad o \quad Im\phi_n^* \subseteq Ker\psi_n^*$$

Ahora sea $\xi_n \in H_n(X)$ y supongamos que ξ_n es representado por $u_n \in Z_n(X)$. Además asumamos que $\xi_n \in Ker(\psi_n^*)$ asi que $\psi_n^*(\xi_n) = 0$. Entonces $\psi_n(u_n) \in B_n(X'')$ es decir, $\psi_n(u_n) = d^{``}_{n+1}\left(x^{''}_{n+1}\right)$, donde $x^{''}_{n+1}$ es un elemento de $X^{''}_{n+1}$. Donde $\psi_{n+1} : X_{n+1} \to X^{''}_{n+1}$ es un epimorfismo,$x^{''}_{n+1} = \psi_{n+1}(x_{n+1})$ por un elemento $x_{n+1} \in X_{n+1}$ y entonces

$$\psi_n(u_n) = d^{''}_{n+1}\psi_{n+1}(x_{n+1}) = \psi_n d_{n+1}(x_{n+1})$$

Porque $d^{''}_{n+1}\psi_{n+1} = \psi_n d_{n+1}$. Donde $Im(\phi_n) = Ker(\psi_n)$, esto prueba que

$$u_n - d_{n+1}(X_{n+1}) = \phi_n\left(x^{'}_n\right) \tag{5.1.8}$$

para algún $x^{'}_n \in X^{'}_n$. Asi

$$u_n \equiv \phi_n\left(x^{'}_n\right)(modB_n(X)) \tag{5.1.9}$$

Ahora, por (5.1.9) y el hecho que $d_n\phi_n = \phi_{n-1}d_n^{'}$, tenemos

$$\begin{aligned}\phi_{n-1}d_n^{'}\left(x_n^{'}\right) \quad &= d_n\phi_n\left(x_n^{'}\right)\\ &= d_n\left(u_n - d_{n+1}\left(x_{n+1}\right)\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

y por tanto $d_n^{'}\left(x_n^{'}\right) = 0$ por que ϕ_{n-1} es un monomorfismo. En consecuencia $x_n^{'} \in Z_n\left(X'\right)$ y asi determina un elemento, η_n es decir pertenecientes a $H_n\left(X'\right)$. Finalmente, por (5.1.9), $\phi_n^*\left(\eta_n\right) = \xi_n$. Esto prueba que $Ker\left(\psi_n^*\right) \subseteq Im\left(\phi_n^*\right)$ y completa la prueba del lema.

Una vez mas sea,

$$0 \to X' \overset{\phi}{\to} X \overset{\psi}{\to} X'' \to 0$$

una sucesión exacta de complejos. Para cada n construiremos un R-homomorfismo

$$\Delta_n : H_n\left(X''\right) \to H_{n-1}\left(X'\right)$$

Estos homomorfismos son conocidos como la conexión de homomorfismos. Los detalles de la construcción de Δ_n son importante y son establecidos en el párrafo siguiente.

Sea $\xi_n \in H_n\left(X''\right)$. Podemos entonces encontrar $u_n^{''} \in Z_n\left(X''\right)$ de modo que $u_n^{''}$ es representante de ξ_n. Ahora ψ_n es un epimorfismo; en consecuencia existen $x_n \in X_n$ tal que $\psi_n\left(x_n\right) = u_n^{''}$. Además

$$\begin{aligned}\psi_{n-1}d_n\left(x_n\right) \quad &= d_n^{''}\psi_n\left(x_n\right)\\ &= d_n^{''}\left(u_n^{''}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Porque $u_n^{''} \in Z_n\left(X''\right)$.Por tanto la sucesión

$$0 \to X'_{n-1} \overset{\phi_{n-1}}{\to} X_{n-1} \overset{\psi_{n-1}}{\to} X''_{n-1} \to 0$$

es exacta y así $d_n\left(x_n\right) = \phi_{n-1}\left(x_{n-1}^{'}\right)$ para algunos $x_{n-1}^{'} \in X_{n-1}^{'}$. Luego

$$\begin{aligned}\phi_{n-2}d_{n-1}^{'}\left(x_{n-1}^{'}\right) \quad &= d_{n-1}\phi_{n-1}\left(x_{n-1}^{'}\right)\\ &= d_{n-1}d_n\left(x_n\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

porque $d_{n-1}d_n = 0$. Pero ϕ_{n-2} es un monomorfismo. Y por tanto se sigue que $d_{n-1}^{'}\left(x_{n-1}^{'}\right) = 0$ es decir, $x_{n-1}^{'} \in Z_{n-1}\left(X^{'}\right)$. Ahora establecemos que:

$$\Delta_n\left(\xi_n\right) = Imagen\ de\ x_{n-1}^{'}\ en\ H_{n-1}\left(X^{'}\right) \tag{5.1.10}$$

esto completa la construcción de Δ_n. Por supuesto, hay cierto grados de libertad en la forma en que la construcción se lleva a cabo, lo que todavía no está claro es que la función Δ_n es bien definida.

De nuevo sea $\xi_n \in H_n\left(X^{''}\right)$ y supongamos que repetimos los pasos anteriores y esta vez, en lugar de los elementos $u_n^{'}, x_n, x_{n-1}^{'}$ obteniendo $v_n^{''}, y_n, y_{n-1}^{'}$ en esos lugares. Entonces $u_n^{''}$ y $v_n^{''}$ ambas representan ξ_n en $H_n\left(X''\right) = Z_n\left(X''\right)/B_n\left(X''\right)$

y por tanto $u_n^{''} - v_n^{''}$ pertenece a $B_n(X'')$. Sea $u_n^{''} - v_n^{''} = d_{n+1}^{''}\left(x_{n+1}^{''}\right)$, donde $x_{n+1}^{''} \in X_{n+1}^{''}$. Entonces $x_{n+1}^{''} = \psi_n d_{n+1}(t_{n+1})$. Además $\psi_n(x_n) = u_n^{''}$ y $\psi_n(y_n) = v_n^{''}$. Por lo tanto $x_n - y_n - d_{n+1}(t_{n+1})$ pertenecen a $Ker(\psi_n) = Im(\phi)$. En vista de esto, se puede escribir

$$x_n - y_n - d_{n+1}(t_{n+1}) = \phi_n\left(t_n^{'}\right)$$

Donde $t_n^{'} \in X_n^{'}$. Ahora vamos a operar en ambos lados con d_n y usar los hechos que $d_n(X_n) = \phi_{n-1}\left(x_{n-1}^{'}\right)$ y $d_n(y_n) = \phi_{n-1}\left(y_{n-1}^{'}\right)$. Esto prueba que $\phi_{n-1}\left(x_{n-1}^{'}\right) - \phi_{n-1}\left(y_{n-1}^{'}\right) = \phi_{n-1}d_n^{'}\left(t_n^{'}\right)$ Por tanto ϕ_{n-1} es un monomorfismo. Se sigue que $x_{n-1}^{'} - y_{n-1}^{'} = d_n^{'}\left(t_n^{'}\right)$. Donde $x_{n-1}^{'} \equiv y_{n-1}^{'}(modB_{n-1})(X')$. En consecuencia $x_{n-1}^{'}$ y $y_{n-1}^{'}$ tiene la misma imagen en $H_{n-1}(X')$ y con la comprobación de que este Δ_n esta bien definida es función completa. Ahora es trivial comprobar que Δ_n es lineal.

Teorema 84 *Sea* $(X', d'), (X, d), (X'', d'')$ *complejos de* R*-módulos y supongamos que*

$$0 \to X' \overset{\phi}{\to} X \overset{\psi}{\to} X'' \to 0 \tag{5.1.11}$$

es una sucesión exacta. Entonces

$$... \to H_n(X') \to H_n(X) \to H_n(X'') \to H_{n-1}(X') \to H_n(X) \to ... \tag{5.1.12}$$

es una sucesión exacta de R*-módulos, donde*

(1) $H_n(X') \to H_n(X)$ *y* $H_n(X) \to H_n(X'')$ *son las funciónes y* ψ_n^* *respectivamente.*

(2) $H_n(X'') \to H_n(X')$ *es la conexión de homomorfismo* Δ_n*.*

Observacion:La sucesión (5.1.13) se denominará en lo sucesivo la homología de la sucesión exacta derivada de (5.1.12)

Prueba: Primero consideremos

$$H_n(X) \overset{\psi_n^*}{\to} H_n(X'') \overset{\Delta_n}{\to} H_{n-1}(X') \tag{5.1.13}$$

Sea $\xi_n \in H_n(X)$ y supongamos que ξ_n es representado por $u_n \in Z_n(X)$. Entonces $\psi_n^*(\xi_n)$ es representado por el elemento $\psi_n(u_n)$ de $Z_n(X'')$. Para encontrar $\Delta_n\psi_n^*(\xi_n)$ de u_n y 0 respectivamente. Se sigue, por (5.1.11), que $\Delta_n\psi_n^*(\xi_n) = 0$. Por tanto $Im(\psi_n^*) \subseteq Ker(\Delta_n)$.

Ahora sea $\xi_n \in ker(\Delta_n)$ y elijamos $u_n^{''}, x_n, x_{n-1}^{'}$ como en la construcción de $\Delta_n(\xi_n)$. Donde $\Delta_n(\xi_n) = 0$, por (5.1.11) prueba que $x_{n-1}^{'} \in B_{n-1}(X')$. por lo tanto $x_{n-1}^{'} = d_n\left(y_n^{'}\right)$, donde $y_n^{'} \in X_n^{'}$. Luego

$$\begin{aligned} d_n(x_n) &= \phi_{n-1}\left(x_{n-1}^{'}\right) \\ &= \phi_{n-1}d_n^{'}\left(y_n^{'}\right) \\ &= d_n\phi_n\left(y_n^{'}\right) \end{aligned}$$

Así $x_n - \phi_n\left(y_n^{'}\right)$ pertenece al $Ker(d_n)$ y representa un elemento ξ_n en $H_n(X)$. Además $\psi_n^*(\xi_n)$ es representado por

$$\psi_n(x_n) - \psi_n\phi_n\left(y_n^{'}\right) = u_n^{''} - 0$$

y por tanto $\psi_n^*(\xi_n) = \zeta$. Esto prueba que $Ker(\Delta_n) \subseteq Im(\psi_n^*)$ y completa que (5.1.14) es exacta. Dirijamos nuestra atencion

$$H_n(X'') \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(X') \xrightarrow{\phi_{n-1}} H_{n-1}(X) \qquad (5.1.14)$$

Sea $\zeta_n \in H_n(X'')$ y elijamos $u_n^{''}, x_n, x_{n-1}^{'}$ como en la construcción de $\Delta_n(\zeta_n)$ descrito anteriormente. Entonces $\phi_{n-1}^*\Delta_n(\zeta_n)$ es la imagen de $\phi_{n-1}\left(x_{n-1}^{'}\right)$ en $H_{n-1}(X)$. Pero $\phi_{n-1}\left(x_{n-1}^{'}\right) = d_n(x_n) \in B_{n-1}(X)$. En Consecuencia $\phi_{n-1}^*\Delta_n(\zeta_n) = 0$ y tenemos probado que $Im(\Delta_n) \subseteq Ker(\phi_{n-1}^*)$.

Supongamos que $\eta_{n-1} \in H_{n-1}(X')$ y que $\phi_{n-1}^*(\eta_{n-1}) = 0$. Elijamos $y_{n-1}^{'} \in Z_{n-1}(X')$ asi que $y_{n-1}^{'}$ representa η_{n-1}. Entonces, porque $\phi_{n-1}^*(\eta_{n-1}) = 0$ tenemos $\phi_{n-1}\left(y_{n-1}^{'}\right) \in B_{n-1}(X)$, es decir $\phi_{n-1}\left(y_{n-1}^{'}\right) = d_n(y_n)$. Entonces

$$\begin{aligned} d_n^{''}\left(y_n^{''}\right) &= d_n^{''}\psi_n(y_n) \\ &= \psi_{n-1}d_n(y_n) \\ &= \psi_{n-1}\phi_{n-1}\left(y_{n-1}^{'}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Porque $\psi_{n-1}\phi_{n-1} = 0$. Por tanto $y_n^{''} \in Z_n(X'')$ representa un elemento $\eta_n \in H_n(X'')$. Consideremos $\Delta_n(\zeta_n)$. Si seguimos a través de la construcción que se ha descrito anteriormente, podemos tener los elementos $u_n^{''}, x_n, x_{n-1}^{'}$ como $y_n^{''}, y_n, y_{n-1}^{'}$ respectivamente. $\Delta_n(\zeta_n)$ es la imagen de $y_{n-1}^{'}$ en $H_{n-1}(X')$ es decir η_{n-1}. En consecuencia $Ker(\phi_{n-1}^*) \subseteq Im(\Delta_n)$ y (5.1.15) se ha demostrado que es exacta. Finalmente, la sucesión

$$H_n(X') \xrightarrow{\phi_n} H_n(X) \xrightarrow{\psi_n} H_n(X'')$$

es exacta por Lema 43. Así todo se prueba y queda establecido el teorema.

Concluiremos esta sección introducciendo alguna terminologia que sera util mas adelante. Sea (X', d') y (X, d) complejos de R-módulos. Decimos que (X', d') es un subcomplejo de (X, d) siempre que

(i) $X_n^{'}$ es un submódulo de X_n para cada n;
(ii) La función inclusión $X_n^{'} \rightarrow X_n$ constituye una función de los complejos (X', d') dentro de los complejos (X, d).

La última condicion significa, por supuesto, que, para cada n, d_n coincide con $d_n^{'}$ sobre $X_n^{'}$.
Supongamos que (X', d') es un subcomplejo de (X, d) y pongamos $\left(X_n^{'}, X_{n-1}\right)$. En consecuencia se produce un homomorfismo

$$d_n^{''} : X_n^{''} \rightarrow X_{n-1}^{'}$$

Evidentemente $d_{n-1}^{''}d_n^{''} = 0$ asi tenemos un nuevo complejo (X'', d''). Esto es llamado el factor complejidad de (X, d) con respecto a (X', d'). Ahora el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_n^{''} & \xrightarrow{d_n^{''}} & X_{n-1}^{''} \end{array}$$

es conmutativo, donde las funciónes verticales son funciones naturales sobre un factor de módulos. Esas funciones naturales $X_n \to X_n$ constituyen una función de (X, d) dentro de (X'', d''). Además, para cada n, la sucesión

$$0 \to X_n^{'} \to X_n \to X_n^{''} \to 0$$

es exacta. Por lo tanto, para resumir, cuando (X', d') es un subcomplejo de (X, d) podemos formar el factor complejidad (X'', d'') y, a continuación, estos estarán relacionados por la sucesión exacta

$$0 \to X^{'} \to X \to X^{''} \to 0$$

de complejos.

Un complejo (X, d) es llamado un complejo izquierdo si $X_n = 0$ para todo $n < 0$. Por lo tanto, un complejo de la izquierda tiene la forma

$$... \to X_n \to X_{n-1} \to ... \to X_1 \to X_0 \to 0 \to 0 \to ...$$

Se observa que actualmente el complejo de koszul es de este tipo. Supongamos que

$$0 \to X^{'} \to X \to X^{''} \to 0$$

es una sucesión exacta de complejos de la izquierda. Por teorema 84 esto da lugar a una homología de sucesiónes exactas. Ahora, $H_n(X'), H_n(X)$ y $H_n(X'')$ serán los módulos nulos si $n < 0$. En consecuencia, la homología de sucesiones exactas es de la forma

$$... \to H_1(X) \to H_1(X'') \to H_0(X') \to H_0(X) \to H_0(X'') \to 0 \to 0 \to ...$$

5.2. Construcción de el Complejo de Koszul

Sea E un R-módulo y $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ $(s \geq 0)$ elementos centrales de R. Proponemos el uso de estos para la construcci ón de un complejo de R-módulos que se denominará Complejo de Koszul de E con respecto a $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$. La notación utilizada para este complejo puede variar un poco dependiendo de cuán explícito queremos ser. Por lo tanto, si queremos indicar todo el procedimiento en la construcción vamos a utilizar $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|R|E)$. Esto se puede reducir hasta $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ si no hay incertidumbre sobre el anillo de los operadores. De vez en cuando $K(\gamma|E)$ se utilizarán si se trata de una secuencia fija $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ de elementos centrales.

Los complejos de Koszul $K(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s|E)$ tiene la forma

$$... \to 0 \to 0 \to K_s(\gamma|E) \to ... \to K_1(\gamma|E) \to K_0(\gamma|E) \to 0 \to 0 \to ...$$

De modo que, en particular se trata de un complejo de la izquierda. Para $0 \leq \mu \leq s$, μst componente $K_\mu(\gamma|E)$ es una suma directa de $\binom{s}{\mu}$ característica de E, donde $\binom{s}{\mu}$ es el habitual coeficiente binomial. Asi pues, cuando $s = 0, K(.|E)$ es simplemente

$$... \to 0 \to 0 \to E \to 0 \to 0 \to ...$$

Donde E se produce como el componente $K_0(.|E)$.

Para $s \geq 1$ es necesario para describir la frontera del homomorfismos y para ayudar a introducir en este algunas notaciones especiales. Sea $T_1, T_2, .., T_s$ nuevos simbolos y escribamos

$$K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) = \bigoplus_{i_1, i_2, ..., i_\mu} ET_{i_1}, T_{i_2}, ..., T_{i_\mu} \tag{5.2.15}$$

Donde $i_1, i_2, ..., i_\mu$ son enteros que varian de manera que

$$i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_\mu \leq s$$

Así pues, cuando $0 \leq \mu \leq s$, $K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ es efectivamente una suma directa de $\binom{s}{\mu}$ característica de E y de un elemento que tenga una representación única en la forma

$$\sum_{i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_\mu} e_{i_1, i_2, ..., i_\mu}, T_{i_1}, ET_{i_2}, ..., ET_{i_\mu}$$

Donde $e_{i_1, i_2, ..., i_\mu}$ pertenece a E. Ya que puede no ser muy claro cómo (5.2.15) esta interpretando en el caso $\mu = 0$, y declara explicitamente que

$$K_0(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) = E \tag{5.2.16}$$

El siguiente paso para definir el homomorfismo frontera

$$d_\mu : K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \to K_{\mu-1}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$$

se consideran solo los valores de μ que satisfacen $0 < \mu \leq s$. Supongamos por tanto que μ esta en el rango y sean $i_1, i_2, ..., i_\mu$ enteros para cualquier $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_\mu \leq s$. Donde cada elemento de $K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ se expresa de manera unica como la suma de los elementos de la forma $eT_{i_1}, T_{i_2}, ..., T_{i_\mu}$, donde $e \in E$, podemos especificar d_μ mediante la asignacion de un sentido a $d_\mu\left(eT_{i_1}, T_{i_2}, ..., T_{i_\mu}\right)$. Esto lo hacemos estableciendo

$$d_\mu\left(eT_{i_1}, T_{i_2}, ..., T_{i_\mu}\right) = \sum_{p=1}^{\mu} (-1)^{p-1} \gamma_{i_p} eT_{i_1}, T_{i_2}, ..., T_{i_\mu} \tag{5.2.17}$$

Donde los ^ sobre T_{i_p} significa que es el factor que se omite. (Note que la construcción conduce a una función R-lineal por que los γ_i pertenecen al centro de R). Se entiende que cuando $\mu = 1$ (5.2.17) afirma que

$$d_1(eT_{i_1}) = \gamma_{i_1} e \tag{5.2.18}$$

es necesario probar que

$$... \to K_{\mu+1}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \xrightarrow{d_{\mu+1}} K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \xrightarrow{d_\mu} K_{\mu-1}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \to ... \tag{5.2.19}$$

realmente es un complejo, lo que significa que tenemos que probar que $d_{\mu-1}d_\mu = 0$. Para esto supongamos que $0 \leq \mu - 1 \leq \mu \leq s$ y probemos que

$$d_{\mu-1}d_\mu\left(eT_{i_1}, T_{i_2}, ..., T_{i_\mu}\right) = 0 \tag{5.2.20}$$

para ello, tenga en cuenta que si $1 \leq p \leq q \leq \mu$, entonces cuando evaluamos el lado izquierdo de (5.2.6) los terminos $\gamma_{i_p}\gamma_{i_q} eT_{i_1}, ..., T_{i_p}, ..., T_{i_q}, ..., T_{i_\mu}$ ocurren dos veces. En una ocasión se multiplica por $(-1)^{p-1}(-1)^{q-1}$ y por otra parte por $(-1)^{p-1}(-1)^{q-2}$. Así pues los dos terminos se cancelan. En consecuencia (5.2.20) ha sido establecido y (5.2.19) ha demostrado ser un complejo.

Donde $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ es un complejo, podemos formar homología de sus módulos. Los μth módulos de homología son denotados por $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ que vamos a veces abreviar $H_\mu K(\gamma, E)$. Evidentemente $H_\mu K(\gamma,) = 0$ cuando $\mu > S$ o $\mu < 0$. De nuevo un elemento de $K_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ tiene la forma $\sum_i e_i T_i$, donde $e_i \in E$ y por (5.2.18) tenemos

$$d_1\left(\sum_{i=1}^{s} e_i T_i\right) = \gamma_1 e_1, \gamma_2 e_2, \gamma_3 e_3, ..., \gamma_s e_s$$

Así $Im\,(d_1) = \gamma_1 E, \gamma_2 E, \gamma_3 E, ..., \gamma_s E$ y por consiguiente, $K_{-1}\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) = 0$. Tenemos

$$H_0 K\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) = E\ \ (\gamma_1 E, \gamma_2 E, \gamma_3, ..., \gamma_s E) \tag{5.2.21}$$

Cada lado, el elemento de $K_s\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ tiene la forma $eT_1T_2, ..., T_s$. Tambien por (5.2.17)

$$d_s\,(eT_1T_2, ..., T_s) = \sum_{p=1}^{s} (-1)^{p-1}\,\gamma_p e T_1 T_2 ... T_p ... T_s$$

En consecuencia $d_s\,(eT_1T_2, ..., T_s) = 0$ si y solo si $\gamma_i e = 0$ para $i = 1, 2, ..., s$. Nos identificamos en la practica $K_s\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ con E así mismo de modo que $eT_1T_2...T_s$ pasan a ser identificados con e. En este entendimiento

$$Ker\,(d_s) = 0 :_E (\gamma_1 R + \gamma_2 R + ... + \gamma_s R)$$

De ahi, ya que $K_{s+1}\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) = 0$

$$H_s K\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) = 0 :_E (\gamma_1 R + \gamma_2 R + ... + \gamma_s R) \tag{5.2.22}$$

5.3. Propiedades de El Complejo de Koszul

Sea E un R-módulo y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ elementos centrales. Vamos a demostrar que el complejo de Koszul $K\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ se mantiene sin cambios(dentro del isomorfismo) si la secuencia $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s\}$ se reordenara de cualquier manera.

Proposición 83 *Sea $\{j_1, j_2, ..., j_s\}$ una permutación de $\{1, 2, ..., s\}$. Entonces los complejos $K\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ y $K\,(\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, ..., \gamma_{j_s}|E)$ son isomorfismos.*

Prueba: Supongamos que $1 \leq m < m+1 \leq s$. Vamos a demostrar que $K\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_m, \gamma_{m+1}, ..., \gamma_s|E)$ y el complejo $K\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{m+1}, \gamma_m, ..., \gamma_s|E)$, obtenidos a partir del intercambio de γ_m y γ_{m+1} son isomorfos. De esta proposición se sigue .

Es suficiente establecer que existen isomorfismos

$$\phi_\mu : K_\mu\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_m, \gamma_{m+1}, ..., \gamma_s|E) \to K\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{m+1}, \gamma_m, ..., \gamma_s|E)$$

Que conmuta con los homomorfismos frontera. Primero observemos que el dominio y rango propuesto de ϕ_μ son el mismo módulo, Es decir

$$\bigoplus_{1 \leq i_i < ... < i_\mu \leq s} ET_{i_1} T_{i_2} ... T_{i_\mu}$$

Se describe ϕ_μ lo que hace a un elemento $eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu}$. Para ello hay que distinguir entre las siguientes cuatro posibilidades

1. Ningún m o $m+1$ se produce entre $\{i_1, i_2, ..., i_\mu\}$
2. m se produce entre $\{i_1, i_2, ..., i_\mu\}$ pero $m+1$ no.
3. $m+1$ se produce entre $\{i_1, i_2, ..., i_\mu\}$ pero m no.
4. ambas m, $m+1$ se producen entre $\{i_1, i_2, ..., i_\mu\}$.

La acción de ϕ_μ depende de obtener las situaciones mencionadas anteriormente. En caso 1, los elementos $eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu}$ son izquierdos sin cambio. En el caso 2, $eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu} = eT_{i_1}T_{i_2}..T_m...T_{i_\mu}$ y es asignada a $eT_{i_1}T_{i_2}...T_{m+1}...T_{i_\mu}$, en el caso 3, $eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu} = eT_{i_1}T_{i_2}...T_{m+1}...T_{i_\mu}$ y esta vez es tomado en $eT_{i_1}T_{i_2}...T_m...T_{i_\mu}$. Finalmente, en caso 4, $eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu}$ se asigna en su negativa. Es obvio que cuando ϕ_μ se define de esta manera se produce un isomorfismo de $K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_m, \gamma_{m+1}, ..., \gamma_s|E)$ a $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{m+1}, \gamma_m, ..., \gamma_s|E)$ y es fácil verificar que conmuta el homomorfismo frontera.||

Corolario 52 *Sean las hipotesis como en la proposición anterior. Entonces para cada μ tenemos un isomorfismo*

$$H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \approx H_\mu K(\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, ..., \gamma_{j_s}|E)$$

de R-módulos.

Otra vez sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ $(s \geq 0)$ elementos centrales de R pero supongamos que $E^{'}$ y E son ambos R-módulos. Podemos entonces formar Complejos de Koszul $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E')$ y $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$. Supongamos además que se nos da un homomorfismo $f : E' \to E$ de R-módulos. Entonces para f podemos derivar homomorfismos

$$f_\mu : K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E') \to K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \tag{5.3.23}$$

tal que,

$$f_\mu\left(eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu}\right) = f(e')\, T_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu} \tag{5.3.24}$$

Evidentemente f_μ conmuta con los limites de los homomorfismos de $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E')$ y $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$. Por lo tanto cada homomorfismo $E' \to E$ de R-módulos da lugar a una función $f_\mu : K_\mu(\gamma|E') \to K_\mu(\gamma|E)$ de los correspondientes complejos de Koszul.

Finalmente asumamos que tenemos una sucesión exacta

$$0 \to E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \to 0 \tag{5.3.25}$$

de R-módulos. Entonces para f y g obtenemos funciones $(\gamma|E') \to K_\mu(\gamma|E)$ y $K(\gamma|E) \to K_\mu(\gamma|E'')$ de complejos. Además, es claro, por (5.3.24) que toda sucesión

$$0 \to K_\mu(\gamma|E') \xrightarrow{f_\mu} K_\mu(\gamma|E) \xrightarrow{g_\mu} K_\mu(\gamma|E'') \to 0$$

es exacta. En consecuencia la sucesión exacta (5.3.25) de R-módulos da lugar a la sucesión exacta

$$0 \to K(\gamma|E') \to K(\gamma|E) \to K(\gamma|E'') \to 0 \tag{5.3.26}$$

de complejos.

Teorema 85 *Sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ los elementos centrales de R y sea*

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

una sucesión exacta de R-módulos. Entonces los módulos de homología de los complejos de koszul de E', E, E'' con respecto a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ son conectados por una sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 &\to K_s(\gamma|E') \to K_s(\gamma|E) \to K_s(\gamma|E'') \to ... \to K_\mu(\gamma|E') \to K_\mu(\gamma|E) \to K_\mu(\gamma|E'') \to ... \\ &\to K_{\mu-1}(\gamma|E') \to K_{\mu-1}(\gamma|E) \to K_{\mu-1}(\gamma|E'') \to ... \to K_0(\gamma|E') \to K_0(\gamma|E) \to K_0(\gamma|E'') \to 0 \end{aligned} \tag{5.3.27}$$

Prueba: La sucesión exacta $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ produce la sucesión exacta (5.3.4) de complejos. Si escribimos la homología de la sucesión de (5.3.26) y recordamos que tanto $K_{s+1}(\gamma|E'')$ y $K_{-1}(\gamma|E)$ son módulos nulos, entonces obtenemos (5.3.27).

Sea E un R-módulo y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ los elementos centrales de R. Supongamos además que j es un entero que satisface $1 \leq j \leq s$. Para cada entero μ vamos a definir un homomorfismo

$$\sigma_\mu^j : K_\mu(\gamma|E) \to K_{\mu+1}(\gamma|E) \tag{5.3.28}$$

de R-módulos. Evidentemente los únicos valores de μ para los que requieren detalles son los que satisfacen $0 \leq \mu \leq s$. Para tal μ es necesario definir

$$\sigma_\mu^j\left(eT_{i_1}T_{i_2}...T_m...T_{i_\mu}\right) \tag{5.3.29}$$

Donde $1 \leq i_1... \leq < i_\mu \leq s$ y $e \in E$. Hay dos posibilidades a considerar (i) j no se produce entre $i_1, ..., i_s$ y (ii) j es uno de $i_1, ..., i_s$. En caso (i) Sea v denota el numero de enteros en la sucesión $i_1, ..., i_s$ que son menores que j. Entonces

$$\sigma_\mu^j\left(eT_{i_1}T_{i_2}...T_m...T_{i_\mu}\right) = (-1)^v eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_v}T_jT_{i_{v+1}}...T_{i_\mu} \tag{5.3.30}$$

En caso (ii) ponemos $\sigma_\mu^j\left(eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu}\right) = 0$. Los homomorfismos (5.3.28) son ahora definidos. ||

Lema 44 *Sea x_μ que petenece a $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$, donde μ es un entero arbitrario. Entonces*

$$d_{\mu+1}\sigma_\mu^j(x_\mu) = \gamma_j x_\mu - \sigma_{\mu-1}^j d_\mu(x_\mu) \tag{5.3.31}$$

Prueba: Si $\mu > s$ o $\mu < 0$, entonces $x_\mu = 0$ y la afirmación es trivial. Asumamos que $0 \leq \mu < s$. Entonces a fin de establecer (5.3.31) podemos suponer que $x_\mu = eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu}$, donde la notacion es la misma que en (5.3.29). Primero supongamos que j no se produce entre $i_1, ..., i_s$ y sea v el numero de estas que estan a menos de j. Entonces

$$d_\mu(x_\mu) = \sum_{p=1}^{v}(-1)^{p-1}\gamma_{i_p}eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_p}...T_{i_\mu} + \sum_{q=v+1}^{\mu}(-1)^{q-1}\gamma_{i_p}eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_p}...T_{i_\mu}$$

y además

$$\sigma_{\mu-1}^{(j)}d_\mu(x_\mu) = (-1)^{v-1}\sum_{p=1}^{v}(-1)^{p-1}\gamma_{i_p}eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_p}...T_{i_\mu} + (-1)^v\sum_{q=v+1}^{\mu}(-1)^{q-1}\gamma_{i_q}eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_q}...T_{i_\mu}$$

En consecuencia

$$\gamma_j x_\mu - \sigma_{\mu-1}^{(j)}d_\mu(x_\mu) = (-1)^v\sum_{p=1}^{v}(-1)^{p-1}\gamma_{i_p}eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_p}...T_j...T_{i_\mu} + (-1)^v(-1)^v\gamma_j eT_{i_1}T_{i_2}...T_j...T_{i_\mu}$$

$$+(-1)^v\sum_{q=v+1}^{\mu}(-1)^q\gamma_{i_q}eT_{i_1}T_{i_2}...T_j...T_{i_q}...T_{i_\mu} = (-1)^v d_{\mu+1}\left(eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_v}T_jT_{i_{v+1}}...T_{i_\mu}\right) = d_{\mu+1}\sigma_\mu^{(j)}(x_\mu)$$

por (5.3.30). Ahora asumamos que j esta presente entre $i_1, ..., i_\mu$, es decir $j = i_l$. Entonces

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu-1}^{(j)}d_\mu(x_\mu) &= \sigma_{\mu-1}^{(j)}\left((-1)^{l-1}\gamma_{i_l}eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_l}...T_{i_\mu}\right)\\ &= \gamma_{i_l}eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_l}...T_{i_\mu}\\ &= \gamma_j x_\mu\end{aligned}$$

Así $\gamma_j x_\mu - \sigma_{\mu-1}^{(j)} d_\mu (x_\mu) = 0$ que es precisamente lo que (5.3.31) reduce en el presente caso. Falta establecer el caso $\mu = s$ pero para esta situación el argumento se produce como en el último parrafo.||

Teorema 86 *Sea E un R-módulo y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ elementos centrales de R. Sea $A = \gamma_1 R + \gamma_2 R + \gamma_3 R + ... + \gamma_s R$. Entonces A aniquila todos los módulos de homología $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ de el Complejo de Koszul de E con respecto a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$.*

Prueba. Sea $\xi_\mu \in H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ y supongamos que $1 \leq j \leq s$. Vamos a demostrar que $\gamma_i \xi_\mu = 0$ y eso completa la prueba.
Una representación para ξ_μ sera un elemento x_μ de $K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ que satisface $d_\mu(x_\mu) = 0$. Pero entonces, por (5.3.31), $\gamma_j x_\mu = d_{\mu+1}\sigma_\mu^{(j)}(x_\mu)$ lo que demuestra que $\gamma_j x_\mu$ es un μ-frontera de $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$. Esto significa que el elemento de $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ representado por $\gamma_j x_\mu$ es el elemento cero. Asi $\gamma_j \xi_\mu = 0$.||

Corolario 53 *Sea E un R-módulo y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ elementos centrales de R. Si ahora $\gamma_1 R + \gamma_2 R + \gamma_3 R + ... + \gamma_s R = R$, entonces todos los módulos de homología $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ de los complejos de Koszul de E con respecto a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ son cero.*

Sea E un R-módulo y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ $(s \geq 1)$ elementos centrales de R. Evidentemente $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E)$ es un subcomplejo de $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..\gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$. Además tenemos, para cada μ una sucesión exacta

$$0 \to K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \xrightarrow{f_\mu} K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) \xrightarrow{g_\mu} K_{\mu-1}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \to 0$$

en que f_μ es la función inclusión y g_μ mapea $eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_p}...T_{i_\mu}$ en cero si $i_\mu < s$ y en $eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_p}...T_{i_\mu - 1}$ si $i_\mu = s$. El siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) & \xrightarrow{g_\mu} & K_{\mu-1}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{\mu-1}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) & \xrightarrow{g_{\mu-1}} & K_{\mu-2}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \end{array} \tag{5.3.32}$$

es conmutativo en el entendimiento de que las asignaciones verticales son homomorfismos frontera. Expresemos $X_\mu = K_{\mu-1}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E)$ y sea $X_\mu \to X_{\mu-1}$ el homomorfismo frontera que ocurre en (5.3.23). Entonces X es un complejo. Tambien los f_μ y g_μ nos proporcionan las asignaciones
$K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \to K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$ y $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) \to X$ de complejos de ese tipo que

$$0 \to K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \to K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) \to X \to 0 \tag{5.3.33}$$

es una sucesión exacta. Además

$$H_\mu(X) = H_{\mu-1}K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \tag{5.3.34}$$

Proposición 84 *Sea E un R-módulo y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ $(s \geq 1)$ elementos centrales de R. Entonces los módulos de homología de los complejos de Koszul $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E)$ y $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$ son conectados por una sucesión exacta*

$$... \to H_{\mu+1}K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \to H_{\mu+1}K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}\gamma_s|E) \to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E)$$

$H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) \to H_{\mu-1} K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \to ...$

Además la conexión del homomorfismo

$$\Delta : H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E)$$

consiste en la multiplicación por $(-1)^\mu \gamma_s$.

Prueba: La sucesión exacta (5.3.33) da el rendimiento de la homología de la sucesión exacta

$$... \to H_{\mu+1} K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \to H_{\mu+1} K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) \to H_{\mu+1}(X)$$

$$\to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) \to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$$

$\to H_\mu(X) \to ...$

Si utilizamos (5.3.34) para sustituir en la homología de módulos de X, este da la primera afirmación de la proposición.

Para la consideración de la conexión del homomorfismos

$$\Delta : H_{\mu+1}(X) \to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E)$$

hay que remitirse a la construcción en (5.1.33). Sea $\zeta_{\mu+1}$ pertenece a $H_{\mu+1}(X) = H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E)$. Entonces $\zeta_{\mu+1}$ es representado por un elemento de $X_{\mu+1} = K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E)$ expresado por

$$x_{\mu+1} = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_\mu \le s-1} e_{i_1 i_2 ... i_\mu} T_{i_1} T_{i_2} ... T_{i_\mu}$$

y tenemos

$$\sum_{1 \le i_1 < ... < i_\mu \le s-1} \sum_{p=1}^{\mu} (-1)^{p-1} \gamma_{i_p} e_{i_1 i_2 ... i_\mu} T_{i_1} T_{i_2} ... \hat{T}_{i_p} ... T_{i_\mu} = 0 \qquad (5.3.35)$$

Porque $x_{\mu+1} \in Z_{\mu+1}(X)$. Ahora $x_{\mu+1} = g_{\mu+1}(y_{\mu+1})$, donde

$$y_{\mu+1} = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_\mu \le s-1} e_{i_1 i_2 ... i_\mu} T_{i_1} T_{i_2} ... T_{i_\mu} T_s$$

y por (5.3.35)

$$\begin{aligned} d_{\mu+1}(y_{\mu+1}) &= (-1)^\mu \gamma_s \sum_{1 \le i_1 < ... < i_\mu \le s-1} e_{i_1 i_2 ... i_\mu} T_{i_1} T_{i_2} ... T_{i_\mu} \\ &= (-1)^\mu \gamma_s x_{\mu+1} \\ &= f_\mu((-1)^\mu \gamma_s x_{\mu+1}) \end{aligned}$$

Por tanto $\Delta(\zeta_{\mu+1})$ es la imagen de $(-1)^\mu \gamma_s x_{\mu+1}$ en $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E)$ es decir,$\Delta(\zeta_{\mu+1}) = (-1)^\mu \gamma_s \zeta_{\mu+1}$ según sea necesario.||

Necesitamos un mayor resultado y, a continuación, vamos a ser capaces de demostrar la pertinencia de los complejos de Koszul a algunas de nuestras investigaciones anteriores. La propiedad adicional se refiere a la homología de módulos $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ cuando $0 :_E \gamma_s = 0$, es decir cuando γ_s no es divisor de cero sobre E. La información que necesitamos se obtiene teniendo en cuenta, junto con $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$, el complejo $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, 1|E)$ obtenidos mediante la sustitucion γ_s por el elemento identidad de R.

En primer lugar, tenga en cuenta que los dos tienen las mismas componentes de módulos, los μth componentes en cada caso,

$$\bigoplus_{1\leq i_1<\ldots<i_\mu\leq s} T_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu}$$

Definimos un homomorfismo

$$f_\mu : K_\mu\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_s|E\right)\rightarrow K_\mu\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_{s-1},1|E\right)$$

que requiere

$$f_\mu\left(eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu}\right)=\begin{cases}\gamma_s eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_p}...T_{i_\mu} & (i_\mu=s)\\ eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu} & (i_\mu<s)\end{cases}$$

Evidentemente f_μ es un monomorfismo en el caso donde f_μ no es un divisor de cero sobre E. Por otra parte, incluso sin este supuesto, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_\mu\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_{s-1},\gamma_s|E\right) & \xrightarrow{f_\mu} & K_\mu\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_{s-1},1|E\right)\\ \downarrow & & \downarrow\\ K_{\mu-1}\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_{s-1},\gamma_s|E\right) & \xrightarrow{f_{\mu-1}} & K_{\mu-1}\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_{s-1},1|E\right)\end{array}$$

es conmutativo. (Aquí se entiende que las asignaciones verticales son homomorfismos frontera). Por tanto los f_μ constituyen una función

$$f : K\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_s|E\right)\rightarrow K\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_{s-1},1|E\right)$$

de complejos.

Expresemos $\overline{E}=E/\gamma_s E$ y para cada $e\in E$, $\overline{e}$ denota que es natural en la imagen de E. Si ahora

$$X_\mu=\bigoplus_{1\leq i_1<\ldots<i_{\mu-1}\leq s}\overline{E}T_{i_1}T_{i_2}...T_{i_{\mu-1}}=K_{\mu-1}\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_{s-1}|\overline{E}\right)$$

y $\delta_\mu : X_\mu\rightarrow X_{\mu+1}$ es el homomorfismo definido por

$$\delta_\mu\left(\overline{e}T_{i_1}T_{i_2}...T_{i_{\mu-1}}\right)=\sum_{p=1}^{\mu-1}(-1)^{p-1}\gamma_{i_p}\overline{e}T_{i_1}T_{i_2}...T_{i_p}...T_{i_{\mu-1}}$$

Entonces

$$...\rightarrow X_{\mu+1}\overset{\delta_{\mu+1}}{\rightarrow}X_\mu\overset{\delta_\mu}{\rightarrow}X_{\mu-1}\rightarrow...$$

es simplemente el complejo $K\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_{s-1}|\overline{E}\right)$desplazados un lugar a la izquierda. En consecuencia $H_\mu\left(X\right)=H_{\mu-1}K\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_{s-1}|\overline{E}\right)$ para todos los valores de μ. Consideremos los homomorfismos $g_\mu : K_\mu\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_{s-1},1|E\right)\rightarrow X_\mu$ definido por

$$g_\mu\left(eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu}\right)=\begin{cases} o, & (i_\mu<s)\\ \overline{e}T_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu-1}, & (i_\mu=s)\end{cases}$$

Evidentemente g_μ es un epimorfismo, $Ker\left(g_\mu\right)=Im\left(f_\mu\right)$ y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_\mu\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_{s-1},1|E\right) & \xrightarrow{g_\mu} & X_\mu\\ \downarrow & & \downarrow\end{array}$$

$$K_{\mu-1}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, 1|E) \overset{g_{\mu-1}}{\to} X_{\mu-1}$$

es conmutativo. (una vez más las asignaciones verticales se entienden que son homomorfismos de fronteras). Por tanto los g_μ constituyen una función g : $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, 1|E) \to X$ de complejos. Finalmente, si γ_s no es un divisor e cero sobre E, entonces

$$0 \to K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) \xrightarrow{f} K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, 1|E) \xrightarrow{g} X \to 0 \tag{5.3.36}$$

es una sucesión exacta de complejos.

Teorema 87 *Sea E un R-módulo y* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s$ $(s \geq 1)$ *elementos centrales de R. Si* γ_s *no es divisor de cero sobre E, entonces tenemos un isomorfismo*

$$H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) \approx K_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E/\gamma_s E)$$

de R-módulos para todos los valores de μ.

Prueba: Si aplicamos el teorema 84 a la sucesión exacta (5.3.36), entonces obtenemos una sucesión exacta

$$H_{\mu+1}k(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, 1|E) \to H_{\mu+1}(X) \to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$$

$$\to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, 1|E)$$

para todos los alores de μ. Por tanto, por teorema 85 y corolario

$$H_{\mu+1}k(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, 1|E) \text{ y } H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$$

son módulos nulos y por tanto tenemos un isomorfismo

$$H_{\mu+1} \approx H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$$

. El resultado deseado ahora sigue de (5.3.35)||

5.4. Conexiones con Teoría de Multiplicidad

Los complejos de Koszul pueden usarse para dar una nueva descripción de la multiplicidad símbolo $e_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$. Por tanto, antes de que pueda justificar esta declaración hay que establecer algunos lemas.

Lema 45 *Sea E un R-módulo Noeteriano y* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s$ *un sistema de multiplicidades sobre E. Entonces cada uno de los R-módulos* $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$ *tiene longitud finita.*

Prueba: Para cada $\mu, H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$ es la suma directa de un numero finito de características de E. Por lo tanto es Noeteriano y admite $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s$ un sistema de multiplicidades. Inmediatamente $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$ es un factor módulo de un submódulo $k_\mu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$. Por tanto se sigue,(ver [15] prop.3 de secc. (7.3)), que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s$ es un sistema de multiplicidades sobre $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$. Sin embargo, por teorema 86, cada γ_i anula a $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$. Por consiguiente $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$ tiene longitud finita.||

Sea E un R-módulo Noeteriano y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s$ $(s \geq 0)$ un sistema de multiplicidades sobre E. Por Lema 45, cada uno de los módulos de homología $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$ tiene longitud finita. Podemos por tanto poner

$$X_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) = \sum_\mu (-1)^\mu L_R\{H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)\} \tag{5.4.37}$$

(Observe que esencialmente en una suma finita el sumando es cero si bien $\mu < o$ o $\mu > 0$). Se mostrará que, en factores $\chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$ es igual a $e_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$. Ahora para $s = 0$ (5.4.37) da

$$X_R(.|E) = L_R(E) \tag{5.4.38}$$

por lo que no hay problemas en este caso particular. Vamos a demostrar el resultado general mediante inducción en s, pero primero haremos algunas observaciones sobre la terminología.

Supongamos que (X, d) es un complejo de R-módulos tal que todas las componentes de módulos tienen longitud finita y a lo sumo un numero finito de ellos no son nulos. Entonces

$$\sum_{\mu} (-1)^{\mu} L_R(X_\mu)$$

esta bien definida. Es llamada la característica de Euler- Poincaré de X. En el caso de los complejos de Koszul, vamos a hacer un complejo de la homología de módulos $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$ teniendo cada uno homomorfismo frontera es una función nula. El resultado es llamado el complejo de homología $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$ que nos permite describir el resultado que vamos a establecer en los siguientes términos: el valor de símbolo de la multiplicidad $e_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$ es igual a la característica de Euler-Poincaré de el complejo de homología de $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$. La prueba requiere dos lemas.

Lema 46 *Sea* $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ *una sucesión exacta de módulos y supongamos que cada termino admite* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s$ *un sistema de multiplicidad. Entonces*

$$\chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) = \chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E') + \chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E'')$$

Prueba: Por Lema 45, todos los módulos en la sucesión exacta (5.3.27) tienen longitud finita. El resultado deseado sigue aplicando [15](Teo.20 de seccion (1.20)) a esta sucesión.||

Lema 47 *Sea E un R-módulo Noeteriano y* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s$ *un sistema de multiplicidad sobre E. Si ahora* $\gamma_s^m E = 0$*, donde* $m > 0$*, entonces*

$$\chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) = 0$$

Prueba: Ya que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s$ es un sistema de multiplicidad sobre E lo mismo ocurre con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s^m$. Pero γ_s^m anula a E. Por consiguiente la sucesión abreviada $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}$ es tambien un sistema de multiplicidad sobre E. Se sigue, por Lema 45 que $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E)$ y $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$ tienen longitud finita. Podemos por tanto aplicar el(ver [15] Teo.20 seccion (1.12))a la sucesión exacta que se produce en la Proposicion 85. Inmediatamente se tiene el resultado deseado.||

Teorema 88 *Sea E un R-módulo Noeteriano y* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s$ *un sistema de multiplicidad sobre E. Entonces*

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) = \chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E)$$

Prueba: Usaremos inducion sobre s. Por (5.4.38), el teorema es cierto cuando $s = 0$. por lo tanto, se supone que $s > 0$ y que el teorema esta establecido para sistema de multiplicidades de $s - 1$ elementos. Expresemos $F = E/(0 :_E \gamma_s^m)$, cuando m es elegido lo sufientemente grande como para garantizar que γ_s no es divisor de cero sobre F. Esto es posible por [15](Lema5 secc (7.4)). Entonces, por aplicacion del Lema 46 a la sucesión exacta

$$0 \to 0 :_E \gamma_s^m \to E \to F \to 0$$

Obtenemos

$$\chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) = \chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|F) + \chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|0 :_E \gamma_s^m)$$

que reduce a

$$\chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) = \chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|F)$$

Con la ayuda del Lema 47. Ya que γ_s no es divisor de cero sobre F, Teorema 87 prueba que $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|F)$ y $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|F/\gamma_s F)$ son isomorfismos de R-módulos. se sigue que

$$\chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|F) = \chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|F/\gamma_s F)$$

y por tanto

$$\chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) = \chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|F/\gamma_s F)$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} e_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|E) &= e_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s|F) \\ &= e_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|F/\gamma_s F) \end{aligned}$$

por las propiedades basicas de multiplicidad de simbolos. Finalmente

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|F/\gamma_s F) = \chi_R(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|F/\gamma_s F)$$

por la hipotesis inductiva. Por lo tanto el teorema es establecido.||

5.5. Conexión con la Teoría de Grado

Existen estrechas relaciones entre la Teoría de el Complejo de Koszul y la teoría de grado. Esto es probado por el siguiente teorema.

Teorema 89 *Sea R un anillo conmutativo, E un R-módulo Noeteriano, y A un ideal finitamente generado de R tal que $AE \neq E$. Expresemos $q = gr(A; E)$ donde, como en la seccion (5.1), $gr(A; E)$ denota el grado de A sobre E. Si ahora $A = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s)$, entonces $H_{s-q}K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) \neq 0$ y $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) = 0$ para todo $\mu > s - q$*

Observacion: Este Teorema prueba que el grado de A sobre E puede determinarse buscando la última homología de módulo no cero de el complejo de Koszul de E con respecto a cualquier sistema de generadores de A.

Prueba: Sea U cualquier R-módulo tal que $AU \neq U$. Por (5.2.22) $H_0K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|U) = U/AU$ que no es cero. Por lo tanto hay un mayor numero entero $\lambda = \lambda(U)$ tal que $H_\lambda K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|U) \neq 0$. Obviamente $0 \leq \lambda(U) \leq s$. Tenemos que probar que $q + \lambda(E) = s$..

Primero supongamos que $gr(A; E) = 0$. Esto significa que cada elemento de A es un divisor de cero sobre E. Consecuentemente [15] (Teo.14 y Cor.12 sec. (4.4)), cada elemento de A es contenido en algun ideal primo perteneciente a el submódulo cero de E. Se sigue, por [1](*prop*,5*sec*.(2,3)), que A el mismo es contenido por uno de esos ideales primos y por tanto, $0 :_E A \neq 0$. Sin embargo, por (5.2.23) $H_sK(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}|E) = 0 :_E A$ y asi vemos que $\lambda(E) = s$. Viceversa si $\lambda(E) = s$, entonces $0 :_E A \neq 0$ es un módulo no nulo y por tanto cada elemento de A es un divisor de cero sobre E. Asi pues para resumir: $gr(A; E) = 0$ cuando y solo cuando $\lambda(E) = s$.

Ahora asumamos que $gr(A; E) > 0$ o equivalentemente que $\lambda(E) < s$. Entonces existe un elemento $\beta_1 \in A$ tal que β_1 no es un divisor de cero sobre E. Se sigue que

$$gr(A; E/\beta_1 E) = gr(A; E) - 1 \tag{5.5.39}$$

tenemos la siguiente secuencia exacta

$$0 \to E \xrightarrow{f} E \to E/\beta_1 E \to 0$$

Donde f consiste en la multiplicación por β_1, consecuentemente por Teorema 85, esto da lugar a secuencia exacta de la forma

$$H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E/\beta_1 E)$$

$\to H_{\mu-1}K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \to H_{\mu-1}K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ Otra vez, desde

$$H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \tag{5.5.40}$$

es inducida por f, tambien consiste en multiplicaciones por β_1. Pero, por Teorema 86, A anula a $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ y por, hipotesis, $\beta_1 \in A$. se sigue que (5.5.40) es una función nula y por tanto nuestra sucesión exacta redimenta la sucesión exacta simplificada

$$0 \to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \to H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E/\beta_1 E) \to H_{\mu-1}K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \to 0$$

Expresemos $\lambda = \lambda(E)$. Entonces para $\mu > \lambda+1$ ambos $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ y $H_{\mu-1}K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$ son módulos nulos. Por lo tanto $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E/\beta_1 E) = 0$.

Por otro lado, cuando $\mu = \lambda + 1$ obtenemos un isomorfismo

$$H_{\lambda+1}K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E/\beta_1 E) \approx H_\lambda K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E)$$

Esto prueba, en particular, que $H_{\lambda+1}K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E/\beta_1 E) \neq 0$ en consecuencia

$$\lambda(E/\beta_1 E) = \lambda(E) + 1 \tag{5.5.41}$$

Finalmente supongamos que $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p$ son elementos de A tal que,para cada i $(i = 0, 1, 2, ..., p-1)$, β_{i+1} no es un divisor de cero sobre

$$E/(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_i) E$$

Entonces, por repetidas aplicaciones de (5.5.1) y (5.5.3)

$$gr(A; E/(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_i)/E) = gr(A; E) - p$$

y

$$\lambda(E/(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_i)/E) = \lambda(E) + p$$

asi mismo, la sucesión $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p$ es incapaz de ser extendido cuando $gr(A; E/(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p)/E) = 0$, que por nuestras observaciones anteriores, es equivalente a la condicion que $\lambda(E(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p)/E) = s$. Se sigue que $\lambda(E) + gr(A; E) = s$ y con esto la prueba es completada ||

Por el resultado final de este capitulo suponemos, otra vez, que R es un anillo general, que no requerimos que R sea conmutativa.

Teorema 90 *Sea E un R-módulo y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ $(s \geq 0)$ elementos centrales de R tal que, para cada i $(1 \leq i \leq s)$, $\gamma_i$no es divisor de cero sobre $E/(\gamma_1 E, \gamma_2 E, \gamma_3 E, ..., \gamma_{i-1} E)$. Entonces $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s | E) = 0$ para todo $\mu \neq 0$.*

Prueba: Usaremos inducción sobre s y comencemos por observar que la afirmación es trivial cuando $s = 0$. Ahora supongamos que $s \geq 1$ y evidentemente la hipotesis inductiva. Por proposicion 84, Cor. y Teorema 87, tenemos isomorfismos

$$\begin{aligned} H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s | E) \qquad & \approx H_\mu K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_s, \gamma_1 | E) \\ & \approx H_\mu K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_s | E/\gamma_1 E) \end{aligned}$$

para cada valor de μ. Sin embargo si $\overline{E} = E/\gamma_1 E$, entonces, para $2 \leq i \leq s, \gamma_i$ no es divisor de cero sobre $\overline{E}\left(\gamma_2 \overline{E}, \gamma_3 \overline{E}, \gamma_4 \overline{E}, ..., \gamma_{i_1} \overline{E}\right)$. Por tanto, por la hipotesis inductiva, $H_\mu K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_s | E/\gamma_1 E) = 0$ para todo $\mu \neq 0$. Se sigue el resultado deseado. $\|$

El teorema final es sorprendente en la medida que , en condiciones adecuadas, es la desaparicion de $H_1 K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s | E)$ que es muy importante. Sin embargo, debemos demostrar el lema.

Lema 48 *Sea E un R-módulo Noeteriano y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_{s-1}, \gamma_s$ elementos centrales de R. Si ahora $H_p K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_s | E) = 0$ y γ_s es el Radical de Jacobson de R, entonces $H_p K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_{s-1} | E) = 0$.*

Prueba: Por porposicion 84, tenemos una sucesión exacta

$$H_p K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_{s-1} | E) \to H_p K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_{s-1} | E) \to H_p K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_s | E)$$

en el que la primera función consiste en la multiplicación por $(-1)^p \gamma_s$. Ya que $H_p K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_{s-1} | E) = 0$, esto prueba que

$$H_p K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_{s-1} | E) = (\gamma_s) H_p K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_{s-1} | E)$$

En consecuencia

$$H_p K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_{s-1} | E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\gamma_s)^n H_p K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_{s-1} | E)$$

Ahora $H_p K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_{s-1} | E)$ es un módulo factor de un submódulo de una suma directa finita de caracteristicas de E. Se sigue que $H_p K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_{s-1} | E)$ es un R-módulo Noeteriano. Que $H_p K(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_{s-1} | E) = 0$ ahora se sigue por teorema 4 de seccion (7.2).

Teorema 91 *Sea E un R-módulo Noeteriano y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s$ $(s \geq 1)$ elementos centrales contenidos en el radical de Jacobson de R. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes*

(a) *Para cada i $(1 \geq i)$,γ_i no es divisor de cero sobre $E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E + \gamma_3 E + ... + \gamma_{i-1} E)$*

(b) $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s | E)$

(c) $H_1 K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s | E) = 0$

Prueba: El teorema 87 prueba que (a)implicaba (b) y es evidente que (b) implica (c). Demostraremos que (c) implica (a). Esto se logrará mediante la inducción de s.

Supongamos primero que $s = 1$. Entonces, por (5.2.8), las hipotesis $H_1K(\gamma_1|E) = 0$ significa que $0 :_E \gamma_1 = 0$, i.e. que γ_1 no es divisor de cero sobre E. Por tanto el resultado en cuestion es cierto en este caso.

De ahora en adelante se supondra $s > 1$ y que la afirmacion (c) implica (a) esta establecida cuando el numero de elementos centrales que se trata es solo $s - 1$. Por la repeticion de las aplicaciones del Lema 48, vemos que todos los módulos $H_1K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_i|E)$ $(i = 1, 2..., s)$ son módulos nulos. En particular tenemos $H_1K(\gamma_1|E) = 0$ apartir de la cual, como vimos anteriormente se deduce que γ_1 no es divisor de cero sobre E. Expresemos $\overline{E} = E/\gamma_1 E$. Entonces, por proposicion 84, Cor.52 y Teorema 87, tenemos isomorfismos

$$\begin{aligned} H_1K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|E) \qquad & \approx H_1K(\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s, \gamma_1|E) \\ & \approx H_1K\left(\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|\overline{E}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, $H_1K\left(\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_s|\overline{E}\right) = 0$ y por tanto, por la hipotesis inductiva, γ_i no es divisor de cero sobre $\overline{E}/\left(\gamma_2\overline{E} + ... + \gamma_{i-1}\overline{E}\right)$ para cualquier i satisfaciendo $2 \leq i \leq s$. Ya que $\overline{E}/\left(\gamma_2\overline{E} + ... + \gamma_{i-1}\overline{E}\right)$ es isomorfo a $E/\left(\gamma_2 E + ... + \gamma_{i-1}E\right)$ esto completa la prueba.||

Capítulo 6

Álgebras de Koszul y Yoneda

En este capitulo se presentan algunos de los resultados básicos sobre Álgebras de Koszul en el caso no local. Al hacerlo, proporcionan nuevas pruebas elementales de algunos de los resultados fundamentales en este ámbito. Investigaremos las álgebras noeterianas no graduadas semiperfectas; la definición y el estudio de álgebras casi-koszul. Las Álgebra de Yoneda, las Álgebra de Auslander son estudiadas en detalle.

Las Álgebras de Koszul juegan un rol importante en el Álgebra Conmutativa y Topología Algebraica. Recientemente se han producido importantes aplicaciones de álgebras de Koszul no comutativas de Topología Algebraica, y la Teoría de Lie. Este capitulo presenta un enfoque unificado a álgebras de Koszul y proporciona nuevas pruebas de los principales resultados en la fijación de trayectoria de álgebras que incluye la configuración original de álgebras libres. En particular, mostramos que las Álgebras de Yoneda de una álgebra de Koszul es de nuevo una álgebra de Koszul.

Damos la equivalencia de la definición de un álgebra cuadrática de koszul con la existencia de la solución lineal semi-simple de grado 0. También generalizar la teoria a álgebras noeterianas semiperfectas no graduadas. Probaremos las nuevas aplicaciones de álgebras de dimensión global 2. En particular, probaremos que una álgebra cuadrática de dimensión global 2 son siempre álgebras de Koszul. Entonces aplicaremos este al estudiar álgebras de Auslander con más detalle.

6.1. Álgebras Graduadas y Trayectoria de Álgebras

En esta sección presentaremos algunos resultados elementales sobre álgebras graduadas y también introduciremos la terminología y la notación que vamos a utilizar. K siempre denotara un campo.

Definición 41 *Una k-álgebra graduada es una familia* $\{\Lambda_i, \phi_{ij}\}_{i,j=0}^{\infty}$ *de k-espacios vectoriales y de funciones que cumplen:*

1. Λ_0 *es una* K*-álgebra*
2. *Cada* Λ_i *es un* $\Lambda_0 - \Lambda_0$*-bimodulo*
3. $\phi_{ij} : \Lambda_i \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_j \to \Lambda_{i+j}$, *y*

4. *El siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_j \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_k & \overset{\phi_{ij}\otimes 1}{\rightarrow} & \Lambda_{i+j} \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_k \\ 1 \otimes \phi_{jk} \downarrow & & \phi_{(i+j)k} \downarrow \\ \Lambda_i \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_{j+k} & \overset{\phi_{i(j+k)}\otimes 1}{\rightarrow} & \Lambda_{i+j+k} \end{array}$$

Si $\{\Lambda_i, \phi_{ij}\}$ es una K-álgebra graduada que simplemente se escribe $\Lambda = \coprod_{i\geq 0} \Lambda_i$ cuando no puede surgir la confusión. Denotaremos la imagen de ϕ_{ij} por $\Lambda_i\Lambda_j$. Decimos una K-álgebra graduada de $\Lambda = \coprod_{i\geq 0} \Lambda_i$ es generada en grado 1 si, para todo, $i, j \geq o$, las funciones ϕ_{ij} son surjective. Tenemos el siguiente resultado.

Lema 49 *Sea $\Lambda = \coprod_{i\geq 0} \Lambda_i$ una álgebra graduada. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *Λ es generado en grado 1*
2. *Para todo $i, j \geq o, \Lambda_i\Lambda_j = \Lambda_{i+j}$*
3. *Para cada $k \geq 1$, $\prod_{i=1}^{k} \Lambda_i$*

Proposición 85 *Sea $\Lambda = \sum_{i\geq 1} \Lambda_i$ un anillo graduado en grado 1 y $J = \sum_{i\geq 1} \Lambda_i$ entonces J es un ideal de Λ tal que Λ es isomorfo(como anillos graduados) a $\coprod_{i\geq 1} J^i/J^{i+1}$.*

Prueba: Tenemos que $J^0 = \Lambda$ asi que J^0/J es isomorfo a λ_0. Seguidamente vemos que

$$J^2 = \sum_{k\geq 2} \sum_{i+j=k} \Lambda_i\Lambda_j = \sum_{k\geq 2} \Lambda_k$$

por inducción, $J^n = \sum_{k\geq n} \Lambda_k$. Por tanto concluimos que $\Lambda_n = J^n/J^{n+1}$ y $\Lambda \cong \coprod_{n\geq 0} J^n/J^{n+1}$.||

Dada una álgebra A y un ideal I, el anillo graduado asociado a I es $\coprod_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ y sera denotado $Gr_I(A)$ es generado en grado 1 y por la proposición anterior es la conversion de este hecho. Si $\Lambda = \coprod_{i\geq 0} \Lambda_i$ es un anillo graduado entonces J denota el ideal $\sum_{i\geq 1} \Lambda_i$ por J. Sea $I = \coprod_{n\geq 0} I_n$ un ideal por la izquierda en Λ tal que $I + J = \Lambda$. Entonces $I_0 = \Lambda_0$ y $\Lambda_i I_0 \subset I_i$. Pero $1 \in I_0$ implica que $I_i = \Lambda_i$ para todo i y concluimos que $I = \Lambda$. Tenemos que probar que J es un ideal superfluo. Esto lleva a la siguiente definición.

Definición 42 *Si Λ_0 es un anillo semisimple. Entonces podemos decir que J es el radical de Jacobson graduado de Λ.*

En gran parte de este capitulo, restringiremos nuestra atencion a una categoria especial de álgebras graduadas que ahora definiremos.

Definición 43 *Decimos que una K-álgebra graduada de Λ es un divisor básico 1-finitamente generado si las siguientes tres condiciones se cumplen:*

1. *Λ_0 es isomorfo a un producto finito de caracteristicas del campo K.(eso es, Λ_0 es una K-álgebra semi-simple de división básica)*
2. *Cada Λ_i tiene longitud finita sobre Λ_0, y*
3. *Λ es generado en grado 1*

Es claro que teniendo la propiedad 1 y 3, la propiedad 2 puede reemplazarse por 2'. Λ_1 tiene K-dimensión.

Damos dos ejemplos de las clases. Primero, sea A una K-álgebra y I un ideal de A tal que A/I es una K-álgebra con divisor básico semi-simple y tal que I/I^2 es de dimensión finita sobre K. Esto ocurre, por ejemplo, si A es una K-álgebra dimensional finita básica sobre un campo algebraicamente cerrado. Entonces $Gr_I(A)$ es un anillo graduado con división básica finitamente generado.

El segundo de las clases son las trayectorias de álgebras, Sea Γ un quiver finito y sea $K\Gamma$ denota la trayectoria del álgebra. Eso es, $K\Gamma = \coprod_{n\geq 0}(K\Gamma)_n$ donde $(K\Gamma)_n$ es el K-vector espacio generado por las trayectorias dirigidas de Γ de longitud n. (Ver [3] para una descripcion completa de trayectorias de algebras). Entonces $K\Gamma$ es una álgebra graduada finitamente 1-generado con división básica. Es conocido que las trayectorias de las álgebras son álgebras hereditarias. Vamos a considerar a menudo cocientes de $K\Gamma$ por un ideal I tal que $I \subset L^2$. (Donde $L = \sum_{i\geq 1}(K\Gamma)_i$). Note que si I asimismo, clasifica como un módulo de la izquierda, (eso es, si $I = \sum_{n\geq 2} I_n, I_n \subset (K\Gamma)_n\,,\ y\ (K\Gamma)_n I_m \subset I_{n+m}$) entonces el anillo cociente, $K\Gamma/I$ es también un anillo graduado finitamente 1-generado de división básica. Que es el radical graduado L/I. Note que no asumimos que $K\Gamma/I$ es de dimensión finita.

De hecho, el siguiente resultado muestra que todas álgebras graduadas, finitamente generadas con división básico son cocientes de las trayectorias de álgebras.

Proposición 86 *Sea K un campo y Λ una K-álgebra graduada finitamente 1-generado con división básica. Entonces existe un quiver finito Γ y un ideal graduado I en $K\Gamma$ tal que $I \subset \sum_{n\geq 2}(K\Gamma)_n$ y Λ es isomorfo a $K\Gamma/I$ como K-álgebras graduadas.*

Prueba: Ya que Λ es 1-generado, probamos que Λ es un isomorfismo graduado a $\coprod_{n\geq 0} L^n/L^{n+1}$, donde $L = \sum_{n\geq 1}\Lambda_n$. Se sigue por hipótesis que $dim_K\left(L^i/L^{i+1}\right)$ es finita para todo i. Ya que Λ_0 es una K-álgebra semi-simple de división básica, es un conjunto único de primitiva central ortogonal idempotentes $e_1, ..., e_n$.

Para cada $1 \leq i, j \leq n$, fijamos una K-base $\left\{\beta^s_{i,j}\right\}_{1\leq s\leq n_{i,j}}$ donde $n_{i,j} = dim_K\left(e_i\left(L/L^2\right)e_j\right)$. Sea Γ el quiver con un conjunto de vertices $v_1, .., v_n$ y $n_{i,j}$ flechas de $\alpha^s_{i,j}$ a partir de v_i a v_j. Entonces definimos $\psi : K\Gamma \to \Lambda$ por $\psi(v_i) = e_i$ y $\psi\left(\alpha^s_{i,j}\right) = \beta^s_{i,j}$. Definimos ψ en todos los $k\Gamma$, es claro que ψ y es en el nucleo de ψ, I es contenido en $\sum_{n\geq 2}(K\Gamma)_n$. Por tanto $K\Gamma/I$ es isomorfo como K-álgebra a Λ. Para completar la prueba necesitamos ver que I es un ideal graduado y que ψ es un isomorfismo graduado. Sea $I_n = I \cap (K\Gamma)_n$. Entonces es claro, $\sum_{n\geq 0} I_n \subset I$. A probar la otra inclusión, sea $x \in I$. Entonces $x = \sum_i x_i$ donde $x_i \in (K\Gamma)_i$. Pero, ya que Λ es graduada y $\psi(x_i) \subset \lambda_i$, $\psi(x) = 0$ implica que $\psi(x_i) = 0$ para todo i. Por tanto $x_i \in I \cap (K\Gamma)_i$ y concluimos que $x \in \sum_{n\geq 0} I_n$. Es inmediato que ψ es un isomorfismo graduado $||$.

Los e_i descritos en la prueba anterior serán llamados vértices idempotentes de Λ. Introduciremos otra terminologia que utilizaremos. Sea Λ una K-álgebra graduada. Sea $M = \sum_{i=-\infty}^{\infty} M_i$ un Λ-módulo graduado. Podemos decir que M es generado en grado J si $M \neq (0)$ y $\Lambda_k M_j = M_{j+k}$ para todo k. Note que Λ es visto como un Λ-módulo graduado que es generado en grado 0. Si s es un entero, $M[s]$, s-desplazamiento laterales de M, es el módulo graduado $\sum_{i=-\infty}^{\infty} N_i$ donde $N_i = M_{i-s}$ decimos M es finitamente generado (grado 0) si hay una surjection para una suma directa finita de los turnos de Λ en M.

Para el resto de esta sección, se asume que $\Lambda = \coprod_{n\geq 0}\Lambda_n$ es una K-álgebra graduada divisor finitamente 1-generado y $\sum_{n\geq 1}\lambda_n$ y sean $\{e_i\}$ idempotentes primitivas ortogonales centrales de Λ_0. Se sigue que Λ_{e_i} es un Λ-módulo proyectivo para cada i. Puede ser considerada como un Λ-módulo graduado generado en grado 0. En este capitulo un Λ-módulo proyectivo graduado finitamente generados significa que es un módulo graduado que es isomorfo a una suma directa finita de la forma $\bigoplus_{j=1}^{n} \Lambda e_{i_j}[s_j]$, es decir, una suma directa finita de caracteristicas de los Λe_i. Finalmente, supongamos que M es un Λ-módulo graduado finitamente generado. Decimos $f : P \to M$ es una cubierta proyectiva graduada de M si P es un Λ-módulo poyectivo graduado finitamente generado, si f es una función de grado 0, y el $Ker(f) \subset LP$.

El siguiente resultado presenta algunas propiedades basicas de módulos graduados.

Proposición 87 *Sea $\Lambda = K\Gamma/I$ una K-álgebra graduada finitamente 1-generado de división básico, con $L = \sum_{n \geq 1} \Lambda_n$. Sea M un Λ-módulo graduado finitamente generado y R es un Λ-módulo proyectivo graduado finitamente generado de $\sum_i \Lambda e_{l_i}$.*

1. *Sea $\overline{f} : R/LR \to M_j$ una Λ_0-función graduada. Entonces $\overline{f}$ se extiende a un grado 0-función $f : R[-j] \to M$.*
2. *Manteniendo las hipótesis de la parte 1, si M es generado en grado j y $\overline{f}$ es en f.*
3. *Manteniendo las hipótesis de la parte 1, si $\overline{f}$ es un isomorfismo, entonces el $Ker(f) \subset LR$*
4. *Si M es generado en grado j entonces hay una cubierta proyectiva graduada $f : P \to M$ con P generado en grado j.*
5. *M tiene una cubierta proyectiva graduada.*
6. *M tiene una cubierta proyectiva graduada $f : P \to M$ y $g : Q \to M$ con Q un Λ-módulo proyectivo graduado finitamente generado y $Ker(g) \subset LQ$ entonces existe un isomorfismo de módulos graduados $h : P \to Q$ tal que $gh = f$.*
7. *Supongamos que tenemos una sucesión exacta corta*

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

de módulos graduados finitamente generados. Cada uno de los cuales se genera en el grado j, entonces existen módulos proyectivos graduados P, Q y R tal que el siguiente diagrama de módulos y funciones graduados es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{K} & \to & \mathrm{L} & \to & \mathrm{M} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & P & \to & Q & \to & R & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

y tal que f, g y h son proyectivos graduados.||

Terminamos esta sección con una vista previa de lo que vendrá. Nos interesan las resoluciones lineales proyectivas de módulos simples (que se definen más adelante).

Teorema 92 *Sea K un campo y Γ un quiver. Sea $L = \sum_{n\geq 1} (K\Gamma)_n$. Se asume que I es un ideal en $K\Gamma$ (no necesariamente graduado) y que $I \supset L^2$. Sea $\Lambda = K\Gamma/I$ y $J = L/I$. Entonces para cada sumando S simple de Λ/J, entonces existe una presentación proyectiva*

$$P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} S \rightarrow 0$$

con $ker(f_i) \subset JP_i$ para $i = 0, 1$. Si es un ideal graduado entonces todos los módulos y funciones pueden ser elegidas tambien graduadas.

Prueba: Haremos uso de la denominada resolución Butler [6] cuyos terminos son los siguientes $L/IL \xrightarrow{h} K\Gamma/I \xrightarrow{g} \Lambda/J \rightarrow 0$. Note que el kernel de h es I/IL. Ahora L es un $K\Gamma$-módulo proyectivo finitamente generado. En realidad para cada vértice idempotente e_i, $i = 1, ..., n$, consideremos la función

$$\coprod_{\substack{a\in\Gamma_1 \\ a:e_j\rightarrow e_i}} K\Gamma e_j \rightarrow Le_i$$

que se define de la siguiente manera. Sea p en un sumando de los dominios correspondientes a las filas $a : e_j \rightarrow e_i$. Entonces p tiene vertices terminales e_j. Definir $\phi(p) = pa$. No es dificil demostra que ϕ es un isomorfismo. Por lo tanto Le_i es un $K\Gamma$-módulo proyectivo. Ya que $\bigoplus_{i=1}^{n} Le_i$ vemos que L es un $K\Gamma$-módulo proyectivo finitamente generado. Concluimos que I/IL es un Λ-módulo proyectivo finitamente generado.

Ahora si S es un sumando simple de Λ/J, entonces $S = K\Gamma e_i/Le_i$ para algunos vertices idempotentes e_i. Observando que $I/IL \subset L^2/IL = L(L/IL)$, ahora tenemos una resolución Λ-proyectivo:

$$Le_i/ILe_i \rightarrow K\Gamma e_i/Ie_i \rightarrow \Lambda e_i/Je_i \rightarrow 0$$

satisfacen la condicion del teorema. En el caso cuando I es un ideal graduado, todas las funciones son de grado 0 y los módulos son graduados $||$.

Estamos interesados tambien en álgebras no graduadas. Para esto decimos que una K-álgebra Λ es una K-álgebra de división básica si Λ es isomorfo a $K\Gamma/I$ para algun ideal I contenido en $\sum_{n\geq 1} (K\Gamma)_n$. La única diferencia entre la K-álgebra 1-generada de división básica y una K-álgebra de división básica es que en la definición de la división básica, no asumimos que es generado por elementos homogéneos de $K\Gamma$.

6.2. Álgebras de Koszul y Resoluciones lineales

Las álgebras de Koszul y resoluciones lineales son definidas en esta sección. A lo largo de esta sección, K sera un campo, Γ un quiver finito, y $K\Gamma$ será la trayectoria del álgebra. Veamos que $K\Gamma$ es una álgebra graduada y sea $L = \bigoplus_{n\geq 1} (K\Gamma)_n$ el radical de Jacobson graduado donde una trayectoria de longitud n es un elemento homogéneo de grado n. Clasificamos un ideal graduado I tal que $I \subset L^2$ y $\Lambda = K\Gamma/I$. Como hemos demostrado en la sección 1, $\Lambda = \coprod_{n\geq 0} \lambda_n$ es un anillo graduado de división básica, finitamente 1-generado y $J = L/I$ es el radical de Jacobson graduado de Λ. Establecemos $\lambda_o = \Lambda/J = K\Gamma/L$ y sean $e_1, ..., e_n$ denotan los idempotentes ortogonales centrales de Λ/J. Los módulos graduados simples de Λ son isomorfos a algunos S_i, donde un módulo graduado, $(S_i)_0 = \lambda_0 e_i$ y $(S_i)_j = 0$ si $j \neq 0$ y llamamos a esos módulos simples el vértice Λ-módulos simple.

Comencemos con la definición de resoluciones lineales. Sea M un Λ-módulo finitamente generado que es generado en grado 0. Supongamos que

$$P_n \to P_{n-1} \to ... \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

es una resolución Λ-proyectiva graduada de M. Decimos que esa resolución es lineal de longitud n si para $0 \leq i \leq n$ P_i es generado en grado i y el núcleo de $P_n \to P_{n-1}$ es generado en grado $n+1$. Decimos M tiene una resolución lineal si tiene una resolución proyectiva

$$... \to P_n \to P_{n-1} \to ... \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

que es lineal para cada $n \geq 0$. Si M tiene una resolución lineal(respectivamente de longitud n) entonces la resolución lineal es de hecho una resolución mínima graduada lineal de M (respectivamente de longitud n). Recordar que una resolución es mínima graduada si cada núcleo $P_i \to P_{i-1}$ es contenida en JP_i. Note que, en ese caso, si $\Omega^{i+1}(M) = Im\,(P_{i+1} \to P_i)$, entonces Ω^{i+1} es generado en grado $i+1$ y $\Omega^{i+1}(M)[-i-1]$ tambien tiene una resolución lineal.
Note que el Teorema 93 prueba que todo Λ-módulo graduado simple tiene resolución lineal de longitud 0. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 88 *Sea $\Lambda = K\Gamma/I$ para algun ideal graduado I. Sea M un Λ-módulo graduado finitamente generado que es generado en grado 0. Sea*

$$(*)\ P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} ... \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

una resolución Λ-proyectiva graduada de M. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. *(*) es una resolución lineal de longitud n.*
2. *Para $0 \leq i \leq n$, $Ker\,(f_i) \subset JP_i$ y el $JKer\,(f_i) \subset J^2P_i \cap Ker\,(f_n)$.*
3. *Para $0 \leq i \leq n$, $P_i = \bigoplus_{e\geq 1} \Lambda e_{i_e}[-i]$, la componente de $f_i(e_{i_e})$ en algún $\lambda_{e_{i-1_m}}$ es λ_1, $Ker\,(f_n) \subset JP_n$ y el $JKer\,(f_n) \subset J^2P_n \cap Ker\,(f_n)$.*

Prueba: Primero supongamos que la resolución es lineal. Entonces para $0 \leq i \leq n$, P_i es generado en grado i. Ahora $f_i(P_i) = Ker\,(f_{i-1})$. Se sigue que $Ker\,(f_i)$ es generado en grado $j+1$ para $0 \leq j \leq n-1$. Pero P_j es generado en grado j. Por tanto los elementos de grado $j+1$ estan en JP_j. Por tanto, $Ker\,(f_i) \subset JP_j$. Similarmente, $JKer\,(f_j) \subset J^2P_j \cap Ker\,(f_j)$. Sea $x \in Ker\,(f_j)$ es un elemento homogéneo de grado i. Nota $i \geq j+2$. Necesitamos probar que $x \in JKer\,(f_j)$. Si no, x es un generador de $Ker\,(f_j)$. Pero $f_{j+1}(P_{j+1}) = Ker\,(f_j)$ es generado en grado $j+1$ (o en el caso de $j = n$, asumamos que $Ker\,(f_n)$ es generado en grado $n+1$). Eso contradice $i \geq j+2$. Por tanto (1) implica (2).
Ahora probemos que (2) implica (1). Comencemos por probar que P_0 es generado en grado 0. Primero probamos que $(P_0)_j = 0$ si suponemos que $j < 0$. Ya que P_0 es finitamente generado, es mas pequeña que $j < 0$ tal que $(P_0)_j \neq 0$. Sea $x \neq 0$ un elemento de grado j en P_0. Entonces $f_0(x) = 0$ por tanto $x \in Ker\,(f_0)$. Pero $Ker\,(f_0) \subset JP_0$ que contradice las elecciones de j. Por tanto, $(P_0)_j = 0$ para $j < 0$. Ahora probaremos que si $x \in (P_0)_i$ donde $i > 0$ entonces $x \in JP_0$. si probemos eso, se sigue que P_0 es generado en grado 0 ya que es finitamente generado. Pero, ya que M es generado en grado 0, $f_0(x) \in JM$. Por tanto $x \in f_0^{-1}(JM) = JP_0 + ker\,(f_0)$. Por (2), $x \in JP_0$. Tenemos que P_0 es generado en grado 0, las hipótesis $JKer\,(f_0) = J^2P_0 \cap Ker\,(f_0)$ implica que $Ker\,(f_0)$ es generado en grado 1. Repitiendo el argumento anterior, reemplazando M por $Ker\,(f_0)$ y el aumento de indices por 1 provemos que P_1 es generado en grado

1 y $Ker(f_1)$ es generado en grado 2. Continuamente este argumento da (2).
Probaremos que (1) y (2) implica (3). Ya que cada P_i es generado en grado i, se sigue que los e_{i_e} son de grado i. Por tanto $f_i(e_{i_e}) \in (P_{i-1})_i$. Pero P_{i-1} es generado en grado $i-1$ y por tanto los elementos de $(P_{i-1})_i$ son $\Lambda_1 (P_{i-1})_{i-1}$ la parte (3) queda establecida.
Finalmente probemos que (3) implica (1). Una vez mas probemos que P_0 es generado en grado 0 y que el $Ker(f_0)$ es generado en grado 1. El resultado se sigue por un simple argumento de inducción. Por hipótesis $f_1(P_1) \subset JP_0$ ya que $\Lambda_1 \subset J$. Por tanto $ker(f_0) = f_1(P_1) \subset JP_0$. Pero un argumento similar a la que se concede (2) implica (1) prueba que P_0 es generado en grado 0. Ya que λ_1 son elementos homogeneos de grado 1, se sigue que $Ker(f_0)$ es generado en grado 1.
La propiedad (3) de la proposición justifica el uso del término "lineal". en pocas palabras, la propiedad implica ver los f_i como matrices (actuando sobre generadores idempotentes e_{i_l}). Las entradas de la matrix es Λ_1.||

Regresemos a módulos y álgebras de Koszul. Sea $E(\Lambda)$ denota la álgebra de Yoneda $E(\Lambda)_k = Ext^k_\Lambda(\Lambda/J, \Lambda/J)$. Usamos Ext y Hom denota Λ-álgebra y las funciones que no son necesariamente de grado 0. La estructura multiplicativa de $E(\Lambda)$ se da por el producto de Yoneda [11]. Note que debajo de nuestra hipótesis sobre Λ,$E(\Lambda)$ esta siempre una k-álgebra graduada finitamente generada de división básico, con $E(\Lambda)_K = Ext^k_\Lambda(\Lambda/J, \Lambda/J)$. Decimos que Λ es una álgebra de koszul si $E(\Lambda)$ es 1-generado. Que es una Λ de Koszul, si $Ext^1_\Lambda(\Lambda/J, \Lambda/J)$ genera todos los grupos de mayor extensión en el marco del producto de Yoneda.

Sea M un Λ-módulo, decimos que M es un módulo casi-Koszul si $\coprod_{k\geq 0} Ext^k_\Lambda(\Lambda/J, \Lambda/J)$, visto como un Λ-módulo graduado, es generado en grado 0. Eso es para todo $i \geq 1$ $Ext^1_\Lambda(\Lambda/J, \Lambda/J).Ext^{i-1}_\Lambda(M\Lambda/J) = Ext^i_\Lambda(M, \Lambda/J)$. Si M es un módulo casi-koszul y M es Λ-módulo graduado, entonces decimos que M es un módulo de Koszul.
El siguiente resultado es preliminar para el teorema principal de esta sección.

Proposición 89 *Sea Λ un divisor básico, K-álgebra finitamente 1-generado y M un Λ-módulo graduado tiene un resolucion lineal de longitud $n-1$. Entonces para $0 \leq j \leq n-1$ tenemos*

$$Ext^1_\Lambda(\Lambda/J, \Lambda/J).Ext^j_\Lambda(M\Lambda/J) = Ext^1_\Lambda(\Lambda/J, \Lambda/J)...Ext^1_\Lambda(\Lambda/J, \Lambda/J).Ext^0_\Lambda(M\Lambda/J) = Ext^{j+1}_\Lambda(M\Lambda/J)$$

Prueba: Procedemos por inducción sobre n. Omitimos la prueba en el caso $n=1$ ya que es similar a la inducción en el caso que sigue. Asumamos que el resultado ha sido demostrado para $1 \leq j \leq\geq k-1$. Sea $x \in Ext^k_\Lambda(M, S)$ para algunos módulos simples de vértice S. Consideremos una resolución lineal

$$P_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} P_{k-2} \xrightarrow{f_{k-2}} ...P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

de M de longitud $k-1$. Entonces $Ext^k_\Lambda(M, S)$ es isomorfo a $Hom_\Lambda(ker(f_{k-1}), S)$. Sea $H = ker(f_{k-1})$ y $g : H \to S$ la función correspondiente a x bajo el isomorfismo que se menciono anteriormente. Ya que S es un vértice módulo simple de factores como $g = \overline{g}p$, donde $p : H \to H/JH$ es la surjection canónica y $\overline{g} : H/JH \to S$ es alguna función. Usando Lema 51, vemos que $H \subset JP_{k-1}$ y $JH = J^2P_{k-1} \cap H$. Por tanto tenemos un diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i} & JP_{k-1} \\ p\downarrow & & \downarrow q \\ H/JH & \xrightarrow{\overline{i}} & JP_{k-1}/J^2P_{k-1} \end{array}$$

donde i es la función inclusión, $\overline{i}$ es inducida por i y q es el epimorfismo canonico. Note que $\overline{i}$ es inyectiva. Ya que ambos H/JH y $JH = J^2P_{k-1}$ son Λ-módulos semisimples, $\overline{i}$ es un monomorfismo. Por tanto, existen $p^{'} : JP_{k-1} \to H/JH$ tal que $p = p^{'}i$. Por tanto $g = \overline{g}p = \overline{g}p^{'}i$. Sea $g^{'} = \overline{g}p^{'} : JP_{k-1} \to S$. Por tanto $g = g^{'}i$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H & \to & P_{k-1} & \to & f_{k-1}(P_{k-1}) & \to & 0 \\ & & i\downarrow & & \downarrow i_d & & \downarrow t & & \\ 0 & \to & JP_{k-1} & \to & P_{k-1} & \to & P_{k-1}/JP_{k-1} & \to & 0 \end{array}$$

donde t es en principio la surjetion canónica de $f_{k-1}(P_{k-1})$. Sea

$$0 \to S \to E \to P_{k-1}/JP_{k-1} \to JP_{k-1} \to 0$$

de

$$\begin{array}{ccc} JP_{k-1} & \to & P_{k-1} \\ g^{'}\downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

Supongamos que P_{k-1}/JP_{k-1} es isomorfo a $\bigoplus_{i=1}^{m} S_i$ vertices de módulos simples. Ahora $Hom_\Lambda\left(f_{k-1}(P_{k-1}), \bigoplus_{i=1}^{m}(S_i)\right)$ es isomorfo a $Ext_\Lambda^{k-1}\left(M, \bigoplus_{i=1}^{m} S_i\right)$. Por tanto tenemos extenciones $z_i \in Ext_\Lambda^{k-1}(M, S_i)$ tal que $z = (z_1, ..., z_m)$ corresponde a $t \in Hom_\Lambda\left(f_{k-1}(P_{k-1}), \bigoplus_{i=1}^{m} S_i\right)$. Sea $y = (y_1, ..., y_m)^t$ la extención $0 \to S \to E \to \bigoplus_{i=1}^{m} S_i \to 0$ con $y_i \in Ext_\Lambda^1(S_i, S)$. Tenemos que probar que $x = z.y = \sum_{i=1}^{m} z_i.y_i$. Por tanto, $Ext_\Lambda^k(M, \Lambda/J) = Ext_\Lambda^1(\Lambda/J, \Lambda/J)\,.Ext_\Lambda^{k-1}(M, \Lambda/J)$ y por inducción se hacen.||

Ahora probaremos el siguiente resultado en está sección.

Teorema 93 *Sea K un campo, Γ un quiver finito y $K\Gamma$ la trayectoria del álgebra. Sea I un ideal graduado en L^2, donde L es el ideal L generado por las filas. Sea $\Lambda = K\Gamma/I$ y $J = L/I$. Supongamos que M es un Λ-módulo graduado generado en grado 0. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *M es un módulo Koszul*
2. *M tiene una resolución lineal*

Prueba: (2) implica (1) se sigue por Lema 51. Asumamos que M es un módulo de Koszul. consideremos la resolución minimal proyectiva graduada $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ con P_0 generada en grado 0. Sea $K_1 = f_1(P_1)$. Ya que M es generado en grado 0, veamos que el homomorfismo $Hom_\Lambda(K_1\Lambda/J) \to Ext_\Lambda^1(M, \Lambda/J)$ inducido para aplicar $Hom_\Lambda(-\Lambda/J)$ a la sucesión exacta corta $0 \to K_1 \to P_0 \to M \to 0$ es un isomorfismo. Ya que $Ext_\Lambda^1(\Lambda/J, \Lambda/J)$ es generado en grado 1 por teorema 92, concluimos que K_1 debe ser generado en grado 1. Por tanto P_1 debe ser generado en grado 1. Por tanto $P_0 \to M \to 0$ es una resolución lineal de M con longitud 0. Procedemos por inducción. Supongamos que tenemos construida una resolución lineal de longitud n,

$$P_n \xrightarrow{f_n} ... \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Necesitamos construir $f_{n+1} : P_{n+1} \rightarrow P_n$ tal que P_{n+1} es generado en grado $n+1$ y el núcleo de f_{n+1} es generado en grado $n+2$. Por la hipótesis inductiva, $Ker\,(f_n)$ es generado en grado $n+1$ y tenemos $P_{n+1} \rightarrow Ker\,(f_n)$ es la cubierta proyectiva graduada, que existe por Cor. 54. Sea f_{n+1} la composición de esa cubierta proyectiva con la función inclusión $Ker\,(f_n) \rightarrow P_n$. Ya que el $ker\,(f_n)$ es generado en grado $n+1$ vemos que P_{n+1} es generado en grado $n+1$. Ya que $P_{n+1} \rightarrow ker\,(f_n)$ es una cubierta proyectiva, tenemos que el $ker\,(f_{n+1})$ esta contenido en JP_{n+1}. Sigue probar que el $ker\,(f_{n+1})$ es generado en grado $n+2$. Sea $P_{n+2} \rightarrow ker\,(f_{n+1})$ una cubierta proyectiva graduada. El resultado se sigue si se prueba que P_{n+2} es generado en grado $n+2$. Entonces habría un sumando proyectivo $\Lambda e\,(-m)$ donde e es un idempotente primitivo central de Λ_0 y $m \geq n+3$. Por tanto, P_{n+2}, e tiene grado mayor que $n+2$. Sea x la imagen de e en el $ker\,(f_{n+1})$. Entonces x tiene grado m y es generador de $ker\,(f_{n+1})$. Ya que P_{n+1} es generado en grado $n+1$, concluimos que un elemento de P_{n+1}, $x \in J^2 P_{n+1}$. Obtenemos una contradicción. $Ext_{\Lambda}^{n+1}\,(M, \Lambda/J)$ es isomorfo a $Hom_{\Lambda}\,(ker\,(f_{n+1})\,\Lambda/J)$. Hay algunos homomorfismos $g : ker\,(f_{n+1}) \rightarrow \Lambda/J$ tal que $g\,(x) \neq 0$. Probemos que g es considerado como un elemento $Ext_{\Lambda}^{n+2}\,(M, \Lambda/J)$, no esta en $Ext_{\Lambda}^{1}\,(\Lambda/J, \Lambda/J)\,.Ext_{\Lambda}^{n+1}\,(M, \Lambda/J)$ que es una contradicción de las fuciones M que son koszul. Identifiquemos a $Ext_{\Lambda}^{n+1}\,(M, \Lambda/J)$ con $Hom_{\Lambda}\,(ker\,(f_{n+1})\,\Lambda/J)$. Veamos que si g es un elemneto de $Ext_{\Lambda}^{1}\,(\Lambda/J, \Lambda/J)\,.Ext_{\Lambda}^{n+1}\,(M, \Lambda/J)$, tendrian que existir funciones $h, s, h^{'}, k$ y un elemento $0 \rightarrow \Lambda/J \rightarrow E \rightarrow \Lambda/J \rightarrow 0$ en $Ext_{\Lambda}^{1}\,(\Lambda/J, \Lambda/J)$ tal que $g = kh^{'}$ y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow & ker\,(f_{n+1}) & \rightarrow & P_{n+1} & \rightarrow & f_{n+1}\,(P_{n+1}) & \rightarrow 0 \\
 & h^{'} \downarrow & & \downarrow s & & \downarrow h & \\
0 \rightarrow & \Lambda/J & \rightarrow & E & \rightarrow & \Lambda/J & \rightarrow 0 \\
 & & & k \downarrow & & & \\
 & & & \Lambda/J & & &
\end{array}
$$

Ahora la longitud suave de E es la mayor de $x \in J^2 P_{n+1}$. Ya que $s\,(x) = 0$ y vemos que $h^{'}\,(x)\,0$. Pero eso contradice a $g\,(x) \neq 0$ y que $g = kh^{'}$. eso completa la prueba $||$.

Corolario 54 *Sea K un campo, y Γ un quiver finito y $K\Gamma$ la álgebra proyectiva. Sea I un ideal graduado contenido en L^2, donde L es el ideal generado por las filas. Sea $\Lambda = K\Gamma/I$ y $J = L/I$. Entonces las declaraciones son equivalentes:*

1. *Λ es una álgebra koszul*
2. *Todo vértice simple Λ-módulo tiene una resolución lineal.*

6.3. El caso no graduado

En esta sección, probaremos como obteniendo el resultado principal de la sección anterior en el caso no graduado. Para esta sección asumiremos que Λ es una K-álgebra noeteriana semiperfecta con radical Jacobson J. Comencemos con la definicion de resolución lineal. Sea M un Λ-módulo y sea

$$(*) \; ... \rightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} ... \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$$

Una resolución proyectiva de M. Decimos que M tiene una resolución lineal (de longitud n) si el $ker\,(f_i) \subset JP_i$ y $Jker\,(f_i) = J^2 P_i \cap ker\,(f_i)$ para todo $i \geq 0$ (respectivamente para, $0 \leq i \leq n$). Como en el caso graduado, $E\,(\Lambda)$ denota el álgeba de Yoneda $\coprod_{k\geq 0} Ext_{\Lambda}^{k}(\Lambda/J,\Lambda/J)$, y decimos que Λ es una álgebra casi-koszul si $E(\Lambda)$ es 1-generado. Decimos que Λ-módulo es un módulo casi-Koszul si $\coprod_{k\geq 0} Ext_{\Lambda}^{k}(M,\Lambda/J)$ es visto como un $E(\Lambda)$-módulo graduado, es generado en grado 0.

En el caso no graduado,los Λ-módulos simples corresponden a los vertices de módulos simples en el caso graduado. Tomando nota de esto, observamos que la prueba del Lema 50 nunca uso que Λ es graduada o que M es un módulo graduado. Por tanto tenemos.

Proposición 90 *Sea Λ K-álgebra noeteriano semiperfecta con radical Jacobson J. Sea M un Λ-módulo generado finitamente teniendo una resolución lineal de longitud $n-1$. Entonces para $0\leq j\leq n-1$ tenemos*

$$Ext_{\Lambda}^{1}(\Lambda/J,\Lambda/J).Ext_{\Lambda}^{j}(M\Lambda/J)=Ext_{\Lambda}^{1}(\Lambda/J,\Lambda/J)...Ext_{\Lambda}^{1}(\Lambda/J,\Lambda/J).Ext_{\Lambda}^{0}(M\Lambda/J)=Ext_{\Lambda}^{j+1}(M\Lambda/J)$$

Para la prueba del caso no graduado del Teorema 94 necesitamos los siguientes lemas.

Lema 50 *Sea Λ noeteriano, K-álgebra semiperfecta con radical Jacobson J. Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo de Λ-módulos finitamente generados*

$$0\to k\xrightarrow{g}P\xrightarrow{f}M\to 0$$

$$u\downarrow \qquad\qquad \downarrow v \qquad\qquad \downarrow w$$

$$0\to \Lambda/J\xrightarrow{\alpha}L\xrightarrow{\beta}\Lambda/J\to 0$$

tal que las fechas no son divisores de la sucesión exacta $f:P\to M$ es una cubierta proyectiva. Entonces existe $g^{'}:K\to JP$ y $u^{'}:JP\to\Lambda/J$ tal que $g=u\circ g$ y $u=u^{'}g^{'}$.

Prueba: Ya que F es una cubierta proyectiva $g(k)\subset JP$ y tomamos $g^{'}:K\to JP$ es la función inducida por g. Ya que Λ/J es semi-simple concluimos que $JM\subseteq ker(w)$. Por tanto tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas.

$$0\to k\xrightarrow{g}P\xrightarrow{f}M\to 0$$

$$g^{'}\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \pi$$

$$0\to JP\xrightarrow{i}P\longrightarrow M/JM\to 0$$

$$\downarrow v \qquad\qquad \downarrow \omega$$

$$0\to \Lambda/J\xrightarrow{\alpha}L\xrightarrow{\beta}\Lambda/J\to 0$$

donde π es la surjection canónica. Por tanto existen $u^{'}:JP\to\Lambda/J$ tal que $vi=\alpha u^{'}$. Por tanto, $\alpha u^{'}g^{'}=vig^{'}=vg=\alpha u$. Concluimos que $u=u^{'}g^{'}$.||

Lema 51 *Sea Λ una K-álgebra noeteriana semiperfecta con radical Jacobson J. Supongamos que A y B son Λ-módulos finitamente generados tal que $A\subset JB$. Además asumamos que toda función $A\to S$ por factores JB si S es un Λ-módulo simple. Entonces $JA=J^{2}B\cap A$.*

Ahora probaremos el caso no graduado para el Teorema 94.

Teorema 94 *Sea Λ una K-álgebra noeteriana semiperfecta con radical Jacobson J. Sea M un Λ-módulo finitamente generado. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *M es un módulo casi-koszul*

2. M tiene resolución lineal

Prueba: (2) implica (1) se sigue por Lema 52. Asumamos que M es un módulo casi-koszul. Probemos que M tiene una resolución lineal. Procedemos por inducción. Consideremos la sucesión exacta corta $0 \to H_1 \xrightarrow{f_1'} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$, donde $f_0 : P_0 \to M$ es una cubierta proyectiva. Sea $x \in Ext^1_\Lambda(M, \Lambda/J)$ es un isomorfismo natural $\phi : Hom_\Lambda(M, \Lambda/J) = Ext^1_\Lambda(M, \Lambda/J)$. Por tanto $x = \sum_{i=1}^m y_i f_i$ donde $y_i \in Ext^1_\Lambda(\Lambda/J, \Lambda/J)$ y f_i en $Hom_\Lambda(M, \Lambda/J)$. Por tanto tenemos el siguiente diagrama con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & t_i \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \\
0 & \to & \Lambda/J & \longrightarrow & E_i & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & 1 \downarrow & & \downarrow f_i & & \\
0 & \to & \Lambda/J & \longrightarrow & L_i & \longrightarrow & \Lambda/J & \to & 0
\end{array}$$

Donde t_i es $\phi(y_i f_i)$. Por Prop. 92, concluimos que cada t_i a través de factores JP_0. Ya que g a través de factores JP_0. Algunos homomorfismos $H_1 \to S$ donde S es un módulo simple, pueden ser vistos como homomorfismos $H_1 \to \Lambda/J$. El argumento prueba que un homomorfismo a través de JP_0. Aplicando Prop. 93, vemos que $JH_1 = J^2 P_0 \cap H_1$.

Asumamos que tenemos una parte de una resolución proyectiva minimal

$$0 \longrightarrow H_k \longrightarrow P_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} P_{k-2} \longrightarrow ...P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Con $Jker(f_{k-1}) = J^2 P_{i-1} \cap ker(f_{k-1})$. Sea $y \in Hom_\Lambda(H_k, \Lambda_J)$ y $x \in Ext^k_\Lambda(M, \Lambda/J)$. asumiremos que $Ext^1_\Lambda(\Lambda/J, \Lambda/J).Ext^{k-1}_\Lambda(M, \Lambda/J) = Ext^k_\Lambda(M, \Lambda/J)$. Por tanto, $x = \sum_{i=1}^m y_i z_i$ donde $y_i \in Ext^1_\Lambda(\Lambda/J, \Lambda/J)$ y $z_i \in Ext^{k-1}_\Lambda(M, \Lambda/J)$. Note que es un isomorfismo $\phi : Ext^{k-1}_\Lambda(M, \Lambda/J) \to Hom_\Lambda(H_k, \Lambda_J)$. Finalmente note que $Ext^{k-1}_\Lambda(M, \Lambda/J)$ es isomorfo a $Hom_\Lambda(ker(f_{k-2}), \Lambda_J)$. La prueba continua como en el caso $k = 1$. ||

6.4. Módulos de Koszul y casi-Koszul

En esta sección desarrollaremos algunas propiedades básicas de módulos de Koszul y casi-Koszul. Sea Λ cualquier K-álgebra graduada finitamente 1-generado de divisor básico, con $J = \sum_{i \geq 1} \lambda_i$ o una K-álgebra noeteriana semiperfecta con radical jacobson J. Decimos que un Λ-módulo generado finitamente es casi-koszul si es una resolución proyectiva minimal:

$$... \longrightarrow P_k \xrightarrow{f_k} P_{k-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

tal que para cada $i \geq 0$ y $k \geq 1$ $J^k ker(f_i) = J^{k+1} P_i \cap ker(f_i)$. Decimos que es un anillo noeteriano semiperfecto y es llamado strongly casi-koszul si todo Λ-módulo es strongly casi-koszul.

Las siguientes observaciones se refieren a casos graduados y no graduados. Supongamos que $\Lambda = K\Gamma/I$ para algunos no necesariamente ideales graduados tal que Λ es semiperfecto y noeteriano con radical jacobson $J = L/I$ (donde L es el ideal generado por las filas de Γ). Sea $Gr(\Lambda) = \coprod_{k \geq 0} J^k / J^{k+1}$ la álgebra graduada asociada. Consideremos el funtor

$$Gr : mod(\Lambda) \to grmod(Gr(\Lambda)))$$

dada por $Gr(M) = \coprod_{k\geq 0} J^k M/J^{k+1}M$. Entonces si Λ-módulo finitamente generado es strongly casi-koszul entonces $Gr(M)$ es Koszul.
El siguiente resultado prueba que todo módulo koszul es strongly casi-koszul.

Lema 52 a) *Supongamos que $\Lambda = K\Gamma/I$ es un cociente graduado de una trayectoria de álgebra y M es un Λ-módulo finitamente generado que es generado en grado d. Entonces si M es un módulo de Koszul, M es un strongly casi-koszul.*

b) *Asumamos que Λ es una K-álgebra noetheriana semiperfecta hereditaria y M es un Λ-módulo finitamente generado. Entonces si M es un módulo de koszul, M es un strongly casi-koszul.*

Prueba: Supongamos que tenemos una resolución lineal proyectiva graduada $\ldots \to P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \to \ldots$ de M. Sea $H = ker(f_i)$. Entonces H es un módulo graduado y $H = \sum_{k\geq 1} H_k$. Ahora $J^{k+1}H = \sum_{j\geq k} \Lambda_j \sum_{s\geq 1} H_s = \sum_{t\geq k+1}\sum_{j+s=t} \Lambda_j H_s$. Ahora $J^{k+1}P_i = \sum_{t\geq k+1} (P_i)_t$. Notemos que $J^{k+1}P_i \cap H = \sum_{t\geq k+1} H-k$. Ahora $J^2 P_i \cap H = JH$ implica que $H_2 = \Lambda_1 H_1$. En general tenemos que $H_k = \Lambda_{k-1}H_1$ se sigue que $J^{k+1}H = \sum_{j\geq k}\Lambda_j H_1 = \sum_{t\geq k+1} H_k = J^{k+1}P_i \cap H$.
A probar b) asumimos que M es un módulo casi-koszul con resolución proyectiva minimal $0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$. Por hipótesis, nos damos un homomorfismo $\Lambda/J \otimes_\Lambda P_1 \to \Lambda/J \otimes_\Lambda JP_0$. esto induce un monomorfismo de Λ/J-módulos:

$$J^k/J^{k+1} \otimes_{\Lambda/J} \Lambda/J \otimes_\Lambda P_1 \to J^k/J^{k+1} \otimes_{\Lambda/J} \Lambda/J \otimes_\Lambda JP_0$$

por tanto tenemos un monomorfismo $J^k/J^{k+1} \otimes_{\Lambda/J} P_1 \to J^k/J^{k+1} \otimes_{\Lambda/J} JP_0$, recordemos que P_0 y P_1 son módulos proyectivos, tenemos un monomorfismo $J^k P_1/J^{k+1}P_1 \to J^{k+1}P_0/J^{k+2}P_0$. Por tanto $J^{k+2}P_0 \cap J^k P_1 = J^{k+1}P_1$ y por tanto $J^{k+2}P_0 \cap P_1 = J^{k+1}P_1$.||
Los siguientes dos resultados prueban que strongly casi-koszul módulos se comportan homologicamnete.

Proposición 91 *Sea Λ un anillo noeteriano semiperfecto con radical jacobson J o sea $\Lambda = K\Gamma/I$. Sea $0 \to A \to B \to C \to 0$ una sucesion exacta corta de Λ-módulos finitamente generada tal que $J^k B \cap A = J^k A$ para todo k. Si A y B son strongly casi-koszul, entonces C es strongly casi-koszul.*

Prueba: La hipótesis que $JB \cap A = JA$ que tenemos un diagrama conmutativo con filas centrales exactas y los módulos proyectivos de estas funciones proyectivas son proyectivas.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & P'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Por este diagrama obtemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & JP^{'} & \longrightarrow & JP & \longrightarrow & JP^{''} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & JA & \longrightarrow & JB & \longrightarrow & JC & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

Ya que A y B son strongly casi-koszul, las funciones $\Lambda/J^k \otimes_\Lambda A_1 \to \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JP^{'}$ y $\Lambda/J^k \otimes_\Lambda B_1 \to \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JP^{'}$ son monomorfismos. Por hipótesis $J^{k+1}B \cap A \cap JA = J^{k+1}A \cap JA$ y vemos que la función induce $\Lambda/J^k \otimes_\Lambda JA \to \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JB$ es un monomorfismo. Por tanto, el diagrama tensorial previo con Λ/J^k nos da un diagrama conmutativo con sucesiones exactas.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda A_1 & \longrightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda B_1 & \longrightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda C_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JP^{'} & \longrightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JP & \longrightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JP^{''} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JA & \longrightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JB & \longrightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JC & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

Por tanto, $\Lambda/J^k \otimes_\Lambda A_1 \longrightarrow \Lambda/J^k \otimes_\Lambda B_1$ es un monomorfismo. Se sigue que $J^{k+1}P^{''} \cap C_1 = J^k C_1$ y $J^k B_1 \cap A_1 = J^k A_1$.||

Proposición 92 *Sea Λ un anillo noeteriano semiperfecto con radical jacobson J o sea $\Lambda = K\Gamma/I$ con $J = L/I$. Sea $0 \to A \to B \to C \to 0$ una sucesione exacta corta de Λ-módulos finitamente generada y asumimos que $JB \cap A = JA$. Entonces:*

a) *Si A y C son casi-koszul módulos entonces B es casi-koszul.*

b) *Si A y C son strongly casi-koszul entonces B es Si A y C son casi-koszul módulos entonces B es strongly casi-koszul y $J^k B \cap A = J^k A$.*

Prueba: Procedemos como en Lema 53, nos damos un diagrama conmutativo

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda A_1 & \longrightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda B_1 & \longrightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda C_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JP^{'} & \longrightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JP & \longrightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\lambda JP^{''} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JA & \longrightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JB & \longrightarrow & \Lambda/J^k \otimes_\Lambda JC & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}
$$

$$0 \qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad 0$$

Sea $k = 1$ y asumamos que A y C son casi-koszul. Entonces las funciones $\Lambda/J \otimes_\Lambda A_1 \longrightarrow \Lambda/J \otimes_\Lambda JP'$ y $\Lambda/J \otimes_\Lambda C_1 \longrightarrow \Lambda/J \otimes_\Lambda JP''$ son monomorfismos. Por tanto las funciones $\Lambda/J \otimes_\Lambda B_1 \longrightarrow \Lambda/J \otimes_\Lambda JP$ y $\Lambda/J \otimes_\Lambda A_1 \longrightarrow \Lambda/J \otimes_\Lambda B_1$ son tambien monomorfismos. Por tanto la sucesión esxacta $0 \to A_1 \to B_1 \to C_1 \to 0$ satisface las mismas hipótesis como $0 \to A \to B \to C \to 0$ en la parte a), se sigue por inducción. El misma argumento prueba la parte b).||

Corolario 55 *Bajo las mismas condiciones como Cor. 56 si $B = A \oplus C$ y A y C son casi-koszul módulos (respectivamente strongly casi-koszul módulos) entonces B es casi-koszul módulo (respectivamente un strongly casi-koszul módulo)*

Proposición 93 **(a)** *Supongamos que Λ es un anillo noeteriano, semiperfecto, strongly casi-koszul con radical Jacoson J. Sea M un módulo strongly casi-koszul. Entonces JM es un strongly casi-koszul Λ-módulo.*

(b) *Si Λ es una álgebra de koszul y M es un módulo de koszul entonces JM es un módulo de Koszul.*

Probaremos solamente la parte a) ya que b) es probado de la misma manera usando resoluciones graduadas. Sea P la cubierta proyectiva de M y M/JM. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & JP & \longrightarrow & JM \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & P & \xrightarrow{=} & P & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to JM & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/JM & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Ya que Λ es un strongly casi-koszul tenemos que M/JM es strongly casi-koszul. Por tanto H y JP son strongly casi-koszul. Entonces por Teorema 98 JM es strongly casi-koszul.||

Terminamos esta sección con dos resultados que construcción de la sucesión exacta corta de syzygies el radical capas de módulos proyectivos. La sucesión conduce a una sucesión exacta corta fundamental sobre los niveles de extensión. Usaremos este resultado en la siguiente sección.

Teorema 95 *Sea $\Lambda = K\Gamma I$ una K-álgebra donde I es un ideal graduado contenido en L. Asumamos que Λ es una álgebra de Koszul. Entonces, para algunos finitamente generados, idescomponibles, Λ-módulos proyectivos graduados P y algun entero positivo.*

1. *Para algún $k \geq 0$, tenemos una Λ resolución proyectiva graduada:*

$$P^{(K)} \overset{f^{(k)}}{\to} P^{(K-1)} \overset{f^{(k-1)}}{\to} ...P^{(1)} \overset{f^{(1)}}{\to} P^{(0)} \overset{f^{(0)}}{\to} J^n P \longrightarrow 0$$

$$con\ ker\left(f^{(k-1)}\right) \subset JP^{k-1}\ y\ Jker\left(f^{(k-1)}\right) = J^2P^{k-1} \cap ker\left(f^{(k-1)}\right)$$

2. *Existe una sucesión exacta corta:*
$$0 \to \Omega^t\left(J^{n-1}P\right) \to \Omega^t\left(J^{n-1}P/J^nP\right) \to \Omega^{t-1}\left(J^nP\right) \to 0$$
con $J\Omega^t\left(J^{n-1}P\right) = J\Omega^t\left(J^{n-1}P/J^nP\right) \cap \Omega^t\left(J^{n-1}P\right)$, *y*

3. *Entonces existe una sucesión exacta corta:*
$$0 \to Ext_\Lambda^{t-1}\left(J^nP, \Lambda/J\right) \to Ext_\Lambda^t\left(J^{n-1}P/J^nP\right) \to Ext_\Lambda^t\left(J^nP\right) \to 0$$
para todo $t \geq 1$

Prueba: la parte 1) se sigue de la Teo. 99 consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & \downarrow 0 & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & H^{(1)} & \longrightarrow & L^{(1)} & \longrightarrow & J^nP \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & P^{(0)} & \longrightarrow & P^{(0)} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to J^{(n+1)}P & \longrightarrow & J^nP & \longrightarrow & J^nP/J^{n+1}P \to 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Ahora $H^{(1)}, L^{(1)}$ *y* $J^{n+1}P$ son casi-koszul módulos y la sucesión $0 \to H^{(1)} \to L^{(1)} \to J^n \to 0$ satisface las condiciones del Cor. 56, tenemos la siguiente sucesión exacta: $0 \to H^{(j)} \to L^{(j)} \to M^{j-1} \to 0$ donde $H^j = \Omega^j\left(J^{n-1}P\right), L^j = \Omega^j\left(J^{n-1}P/J^nP\right), M^j = \Omega^j\left(J^nP\right)$ y $JL^{()} \cap H^{(j)} = JH^{(j)}$. La sucesión exacta
$$0 \to H^{(j)}/JH^{(j)} \to L^{(j)}/JL^{(j)} \to M^{(j-1)}/JM^{(j-1)} \to 0$$
induce la sucesión exacta
$$0 \to Hom\left(\Omega^{j-1}\left(J^nP\right), \Lambda/J\right) \to Hom\left(\Omega^j\left(J^{n-1}P/J^nP\right), \Lambda/J\right) \to Hom\left(\Omega^j\left(J^{n-1}P\right), \Lambda/J\right) \to 0$$
pero esta es la sucesión de la parte 3). Tenemos la siguiente versión de los resultados sitados en el caso no graduado. La prueba es basicamente como la anterior y la omitiremos.||

Teorema 96 *Seaque* Λ *es un noeteriano, semiperfecto, strongly casi-koszul anillo con radical Jacoson* J. *Entonces para algún* Λ*-módulo proyectivo finitamente generado* P *y algún entero positivo* n.

1. *Para algún* $k \geq 0$, *tenemos una* Λ *resolución proyectiva graduada graduada:*
$$P^{(k)} \xrightarrow{f^{(k)}} P^{(k-1)} \xrightarrow{f^{(k-1)}} ...P^{(1)} \xrightarrow{f^{(1)}} P^{(0)} \xrightarrow{f^{(0)}} J^nP \longrightarrow 0$$
con $ker\left(f^{(k-1)}\right) \subset JP^{k-1}$ *y* $Jker\left(f^{(k-1)}\right) = J^2P^{k-1} \cap ker\left(f^{(k-1)}\right)$

2. *Existe una sucesión exacta corta:*
$$0 \to \Omega^t\left(J^{n-1}P\right) \to \Omega^t\left(J^{n-1}P/J^nP\right) \to \Omega^{t-1}\left(J^nP\right) \to 0$$
con $J\Omega^t\left(J^{n-1}P\right) = J\Omega^t\left(J^{n-1}P/J^nP\right) \cap \Omega^t\left(J^{n-1}P\right)$, *y*

3. *Entonces existe una sucesión exacta corta:*
$$0 \to Ext_\Lambda^{t-1}\left(J^nP, \Lambda/J\right) \to Ext_\Lambda^t\left(J^{n-1}P/J^nP\right) \to Ext_\Lambda^t\left(J^{n-1}P\right) \to 0$$
para todo $t \geq 1$

6.4.1. La álgebra de Yoneda y álgebra de Koszul

El resultado principal de esta sección es que El Álgebra de Yoneda , $E(\Lambda)$, de una álgebra de Koszul Λ si tambien una álgebra de Koszul. Incluiremos tambien cuando es no graduada.

Teorema 97 *Sea $\Lambda = K\Gamma/I$ una álgebra de Koszul o sea Λ un anillo noeteriano, semiperfecto, strongly casi-koszul. Entonces El álgebra de Yoneda $E(\Lambda)$, es un anillo graduado casi-koszul. En el primer caso, $E(\Lambda)$ es una álgebra de Koszul con el mismo quiver como Λ.*

Prueba: Asumamos que Λ es un casi-koszul anillo y que J es cualquiera, el ideal L/I donde L es el ideal generado por las filas exactas de Γ en el caso donde $\Lambda = K\Gamma/I$ o J es un radical de Jacobson J de Λ en el caso noeteriano semiperfecto. Ya que $E(\Lambda) = \coprod_{n\geq 0} Ext^n_\Lambda (\Lambda/J, \Lambda/J)$ es positivamente anillo Z-graduado, sea $J_E = \coprod_{n\geq 1} Ext^n_\Lambda (\Lambda/J, \Lambda/J)$. Ya que $Ext^0_\Lambda (\Lambda/J, \Lambda/J) = Hom_\Lambda (\Lambda/J, \Lambda/J) \approx (\Lambda J)^{OP}$ es un semiperfecto anillo, J_E es el radical de Jacobson graduado de $E(\Lambda)$. Además, tenemos que $E(\Lambda) = \coprod_{n\geq 1} Ext^n_\Lambda J^n_E/J^{n+1}_E$ como anillos graduados. Si $\Lambda \approx K\Gamma/I$ es una álgebra de Koszul entonces $E(\Lambda)$ es una K-álgebra con quiver Γ ya que $J_E/J^2_E \approx Ext^1_\Lambda (\Lambda/J, \Lambda/J)$ y si e_i y e_j son idempotentes en $E(\Lambda)_0$, entonces

$$e_i \left(J_E/J^2_E\right) e_j \approx e_i Ext^1_\Lambda (\Lambda/J, \Lambda/J)\, e_j \approx e_i \left(J/J^2\right) e_j$$

A probar que $E(\Lambda)$ es un casi-koszul. Sea S un sumando simple de Γ/J con resolución proyectiva minimal.

$$P^{(k)} \overset{f^{(k)}}{\to} P^{(k-1)} \overset{f^{(k-1)}}{\to} ...P^{(1)} \overset{f^{(1)}}{\to} P^{(0)} \overset{f^{(0)}}{\to} J^n P \longrightarrow 0$$

tal que $ker\left(f^{(k-1)}\right) \subset JP^{k-1}$ y $Jker\left(f^{(k-1)}\right) = J^2P^{k-1} \cap ker\left(f^{(k-1)}\right)$ para algún $k \geq 0$. Sea $S = Hom_\lambda \left(\widehat{S}\Lambda/J\right)$. Entonces $\widehat{S}$ es un Γ^{OP}-módulo simple con cubierta proyectiva $\widehat{P}^{(0)}J_E = \coprod_{n\geq 1} Ext^n_\Lambda (S, \Lambda/J) \approx \coprod_{n\geq 0} Ext^n_\Lambda \left(JP^{(0)}, \Lambda/J\right)$. Aplicando teorema 95 o 96, vemos que $\widehat{P}^{(0)}J_E$ tiene cubierta proyectiva $g^{(1)}$: $\coprod_{n\geq 0} Ext^n_\Lambda \left(JP^{(0)}/J^2P^{(0)}, \Lambda/J\right) \to \coprod_{n\geq 0} Ext^n_\Lambda \left(JP^{(0)}, \Lambda/J\right)$. Sea $\widehat{P}^{(1)} = \coprod_{n\geq 0} Ext^n_\Lambda \left(JP^{(0)}/J^2P^{(0)}, \Lambda/J\right)$. Por teorema 95 o 96 $ker\left(g^{(1)}\right) = \coprod_{n\geq 1} Ext^{n-1}_\Lambda \left(J^2P^{(0)}, \Lambda/J\right)$. Por inducción obtenemos una resolución proyectiva $E(\Lambda)$:

$$\widehat{P^{(k)}} \overset{g^{(k)}}{\to} \widehat{P^{(k-1)}} \overset{g^{(k-1)}}{\to} ...\widehat{P^{(1)}} \overset{g^{(1)}}{\to} \widehat{P^{(0)}} \overset{g^{(0)}}{\to} \widehat{S} \longrightarrow 0$$

tal que

- $ker\left(g^{(k)}\right) = \coprod_{n\geq 1} Ext^{n-1}_\Lambda \left(J^{k+1}P^{(0)}, \Lambda/J\right)$
- $ker\left(g^{(k)}\right) J_E = \coprod_{n\geq 2} Ext^{n-1}_\Lambda \left(J^{k+1}P^{(0)}, \Lambda/J\right)$
- $\widehat{P}^{(k)}J^2_E = \coprod_{n\geq 2} Ext^{n-1}_\Lambda \left(J^kP^{(0)}/J^{k+1}P^{(0)}, \Lambda/J\right)$
- $\widehat{P}^{(k)}J^2_E \cap ker\left(g^{(k)}\right) = \coprod_{n\geq 2} Ext^{n-1}_\Lambda \left(J^kP^{(0)}/J^{k+1}P^{(0)}, \Lambda/J\right) \cap \coprod_{n\geq 2} Ext^{n-1}_\Lambda \left(J^{k+1}P^{(0)}, \Lambda/J\right)$ y,
- $ker\left(g^{(k)}\right) J_E = \widehat{P}^{(k)}J_E \cap ker\left(g^{(k)}\right) J_E$

Por tanto, por Lema 51 Teo. 94, Γ es casi-koszul y la prueba es completada.||

6.5. Dimensión Global 2 y Álgebras de Auslander

En estas sección comenzaremos por estudiar álgebras cuadráticas y probaremos que la álgebras de Koszul debe ser cuadratica. Entonces probemos que toda álgebra cuadratica de dimensión global 2 es una álgebra de koszul. Probemos que las álgebras de Auslander son siempre casi-koszul álgebras. En la siguiente sección estudiaremos las propiedades de las álgebras de Auslander. Sea
$\Lambda = K\Gamma/I$ con Γ un quiver finito y I es un ideal contenido en L^2 donde L es un ideal generado en $K\Gamma$ generado por las filas de Γ. Decimos que Λ es cuadratica si I es generado por relaciones $\rho = \sum_{i=1}^{m} C_i\alpha_i\beta_i$ donde $C_i \in K^*$, α y β son filas y la trayectoria $\alpha_i\beta_i$ tiene el mismo origen y terminal vertical para $i = 1, ..., m$. Note que las álgebras cuadraticas son álgebras graduadas 1-finitamente generadas con divisores básicos, como se definio en la sección 2. El siguiente resultado clasifica las álgebras cuadraticas.

Lema 53 *Sea $\Lambda = K\Gamma/I$ como el anterior. Entonces tenemos los siguientes resultados.*

1. *Si Λ es cuadratico entonces $L^3 \cap I = IL + LI$*
2. *Si Λ es graduado y $L^3 \cap I = IL + LI$ entonces Λ es cuadratica.*

Prueba: Ya que $I \subseteq L^2$, tenemos $l(\mu_i)$ que $IL+LI \subseteq L^3 \cap I$. Ahora sea $x \in L^3 \cap I$. Entonces $x = \sum_{i=1}^{m} C_i\mu_i\rho_i v_i$, donde ρ_i como la generación de relaciones de I, μ_i $y v_i$ son trayectorias, y $c_i \in K^*$. Sea $l(\mu_i)$ denota la longitud de μ_i. Entonces escribimos a x como

$$x = \sum_{l(\mu_i)\geq 1 \ o \ l(v_i)\geq 1} l(\mu_i) + \sum_j c_j\rho_j^{'}$$

Ahora $l\left(\rho_j^{'}\right) = 2$ y $\sum_{l(\mu_i)\geq 1 o l(v_i)\geq 1} C_i\mu_i\rho_i v_i \in L^3$ implica que $\sum_j c_j\rho_j^{'} = 0$. Por tanto vemos que $x \in IL + LI$. A probar 2), asumimos que Λ es graduado. Sea $\rho = \sum_j c_j y_j \in I/(IL + LI)$ con todas las trayectorias de y_i de la misma longitud. Por hipótesis, $\rho \neq L^3$. Por tanto, $l\left(\rho_j^{'}\right) = 2$ para toda j y por tanto I es cuadrática. $||$

Ejemplo 10 *Sea $\Lambda = K\Gamma/I$ la álgebra con quiver:*

$$\begin{tikzcd} v_1^{\circ} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & v_2^{\circ} \arrow[r, "\beta"] & \circ_{v_3} \\ v_4^{\circ} \arrow[r, "\delta"] & \circ_{v_5} \arrow[ur, "\epsilon"'] & \end{tikzcd}$$

con I generado por $\beta\alpha - \epsilon\delta\gamma$. Entonces Λ no es graduada pero $IL+LI = I \cap L^3$. El siguiente resultado tiene como consecuencia que las álgebras cuadráticas de dimensión global 2 son Koszul.

Teorema 98 *Sea $\Lambda = K\Gamma/I$ con $I \subseteq L^2$ y $L = \sum_{n\geq 1} (K\Gamma/I)_n$. Supongamos que $L^3 \cap I = IL + LI$. Sea $J = L/I$. Entonces $Ext_{\Lambda}^{1}(\Lambda/J, \Lambda/J)$ genera $Ext_{\Lambda}^{2}(\Lambda/J, \Lambda/J)$. En particular, una álgebra cuadrática de dimensión global 2 es koszul. Ademas, si $L^3 \cap I \neq IL + LI$ entonces $Ext_{\Lambda}^{2}(\Lambda/J, \Lambda/J)$ contiene elementos que no son generados por productos de elementos $Ext_{\Lambda}^{1}(\Lambda/J, \Lambda/J)$.*

Prueba: Tenemos unsa sucesión exacta:

$$0 \to I/IL \to L/IL \to \Lambda \to \Lambda/J \to 0$$

Si $f : I/IL \to L^2/IL \to L^2/L^3$ el homomorfismo natural que es la composición de la inclusión y la proyección. Entonces $ker\,(f) = \left(I \cap L^3\right)/IL$ y $rad\,(I/IL) = LI/\left(IL \cap LI\right) = \left(IL + LI\right)/IL = \left(I \cap L^3\right)/IL$. Un sumando simple S de Λ/J es de la forma $S = (\Lambda/J)_e$ con e un idempotente primitivo. Por tanto, tenemos una sucesión exacta:

$$0 \to Ie/ILe \to Le/ILe \to \Lambda e \to \Lambda e/Je \to 0$$

Asi vemos que la resolución $Le/ILe \to \Lambda e \to \Lambda e/Je \to 0$ es lineal. Por tanto, por teorema 85 se sigue el resultado. El mismo analisis prueba que si $L^3 \cap I \neq IL + LI$ entonces de la ultima afirmación se tiene.||

Corolario 56 *Sea $\Lambda = K\Gamma$ un divisor básico, K-álgebra graduada finitamente 1-generado con $I \subseteq L^2$ donde L es un ideal en $K\Gamma$ generado por las filas. Entonces si Λ es koszul entonces I es un ideal cuadrático.*

Ahora pongamos nuestra atencion a las álgebras de Auslander. Recordemos la definición. Sea A una K-álgebra dimensional finita. Decimos que A es de tipo finito si hay solo un numero finito de no isomorfismos generados indecomposable Λ-módulos. Para el resultado de esta sección sea A una K-álgebra dimensional finita de tipo finito. Supongamos que A es de tipo finito y sea $X_1, ..., X_t$ un conjunto completo no isomorfismos idencomposable Λ-módulos. Sea $X = \coprod_{i=1}^{t} X_i$. Entonces la Auslander álgebra de A es $\Lambda = End_\lambda\,(X)^{OP}$.
Sea C la subcategoria completa de la categoria de Λ-módulos cuyos objetos son $X_1, ..., X_t$. Sea $Mod\,(K)$ denota la categoria de dimensión finita de espacios K-vector. Recordemos [2] que la categoria de funtores covariantes son finitamente presentados.

$$Mod\,(C) = \{F : C \to Mod\,(K)\}$$

es equivalente a las categorias de Λ-módulos de anillos, Mod-Λ, por medio de la evaluacion de funtor: $e : Mod\,(C) \to Mod - \Lambda$. Identifiquemos $Mod\,(C)$ en Mod-Λ. La álgebra de Auslander es siempre de dimensión global 2. Por tanto si es una álgebra cuadratica entonces es de Koszul. En general, las álgebras de Auslander no son cuadraticas. Si A es estandar entonces la álgebra de Auslander es cuadratica y por tanto Koszul. En general tenemos el siguiente resultado.

Teorema 99 *Asumamos que K es un campo algebraicamente cerrado. Sea A una K-álgebra de dimensión finita de tipo finita. Entonces la álgebra de Auslander de A es casi-koszul.*

Prueba: Como antes, sea Λ una álgebra de Auslander de A. Debemos escribir $(M, -)$ en vez de $Hom_\lambda\,(M, -)$. Sea S un funtor simple en $Mod\,(C)$. Por [3] existe un idescomposable A-módulo M tal que cualquier

- M es inyectivo y $\Pi : M \to M/Soc\,(M)$ induce una resolución Λ-proyectiva: $0 \to (M/soc\,(M), -) \to (M, -) \to S \to 0,$ *o*
- M no es proyectiva y la sucesión $0 \to M \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\Pi} N \to 0$ induce una resolución Λ-proyectiva minimal:

$$0 \to (N, -) \xrightarrow{(\Pi, -)} (E, -) \xrightarrow{(\alpha, -)} (M, -) \to S \to 0$$

Sea $P_2 = (N, -)\,, P - 1 = (E, -)$ y $P_0 = (M, -)$ queremos probar que:

a) $P_2 \subset rP_1$ y P_2 no esta contenida en r^2P_1 donde r denota el radical de Jacobson de Λ y

b) La función $f = qoj$ tiene núcleo rP_2 donde $j : P_2 \to rP_1$ es inducida para $(\Pi, -)$ y $q : rP_1 \to rP_1/r^2P_1$ es la surjection canónica.

Ya que es π es una función irreducible,$j_N : (N, N) \to r\,(E, N)$ satisface $\pi = j_\gamma\,(1) \notin r^2\,(E, N)$. Por tanto P_2 no esta contenida en r^2P_1. Consideremos la composicion $f_\gamma = q_\gamma j_\gamma$. Observemos que N es indecomposable, $g : N \to Y$ es un epimorfismo. Por tanto si $g : N \to Y$ es un epimorfismo, es un monomorfismo. Por tanto

$$ker\,(f_\gamma) = \left\{g : N \to Y | g\pi \in r^2\,(E, Y)\right\} = \{g : N \to Y | g\ no\ es\ un\ monomorfismodivisor\} = r\,(N, Y)$$

Esto completa la prueba.||

6.5.1. La Álgebra de Yoneda de una Álgebra de Auslander

En esta sección investigaremos propiedades de Yoneda álgebra de una álgebra de Auslander. En la última sección probamos que una álgebra de Auslander de una álgebra de dimensión finita más de un campo algebraicamente cerrado es siempre una álgebra casi-koszul. Asumamos que K es un campo algebraicamente cerrado. En toda esta sección A es una K-álgebra dimensional finita de tipo finita. Denotemos la álgebra de Auslander de A por Λ. Si M es u A-módulo indecomposable, denotemos el Λ-módulo simple que es isomorfo a la parte superior de $(M, -)$ por [M]. El siguiente resultado da el quiver de Λ.

Proposición 94 *Sea Λ la álgebra de Auslander de una K-álgebra dimensión finita A de tipo finito. Sea $E\,(\Lambda)$ la álgebra de Yoneda de Λ. Entonces la división de $E\,(\Lambda)$ es la misma como la división de Λ.*

Prueba: Sea Γ la división de Λ. Entonces Γ es la Auslander-Reiten división de A. Los vertices de Γ son indexados por el isomorfismos de clases [M] de indecomposable A-módulos. Existe una fila $[\alpha] : [M] \to [N]$ si y solo si $r\,(M, N)\,/r^2\,(M, N) \neq 0$. Para cada vértice [M] elejimos un A-módulo indecomsable M y para cada fila M $[\alpha] : [M] \to [N]$ elejimos una función irreducible $\alpha : M \to N$. Ahora sea $E\,(\Lambda) = Hom_\Lambda\,(\Lambda/J, \Lambda/J) \oplus Ext^1_\Lambda\,(\Lambda/J, \Lambda/J) \oplus Ext^2_\Lambda\,(\Lambda/J, \Lambda/J)$. Como una semi álgebra simple, $Hom_\Lambda\,(\Lambda/J, \Lambda/J) = \Lambda/J$. El radical de $E\,(\Lambda)$ es $r_E = Ext^1_\Lambda\,(\Lambda/J, \Lambda/J) \oplus Ext^2_\Lambda\,(\Lambda/J, \Lambda/J)$. Por tanto $r^2_E = Ext^2_\Lambda\,(\Lambda/J, \Lambda/J)$ y $r_E r^2_E = Ext^1_\Lambda\,(\Lambda/J, \Lambda/J) \oplus Ext^2_\Lambda\,(\Lambda/J, \Lambda/J)$. Por tanto sigue el resultado.||

Usaremos la notacion introducida en la prueba del resultado anterior de esta sección. El siguiente resultado da la relación de $E\,(\Lambda)$. Sea $\tau = DTr$ denota el traslado Auslander-Reiten.

Teorema 100 *Sea A una K-álgebra dimensional finita de tipo finita y sea Λ una álgebra de Auslander. Sea $E\,(\Lambda)$ la álgebra de Yoneda de Λ. Las relaciones de Λ son las siguientes:*

1. *$[\beta][\alpha] = 0$ donde $[M] \overset{[\alpha]}{\to} [N] \overset{[\beta]}{\to} [L]$ si y solo si cualquier M es A-módulo o $[L] \neq [\tau^{-1}\,(M)]$.*

2. *Si $0 \to M \overset{\sum_i \alpha_i}{\to} \coprod_{i=1}^k N_i \overset{\sum_i \beta_i}{\to} \tau^{-1}\,(M) \to 0$ es una mayor división sucesión. Entonces para $1 \geq i, j \leq k$, $[\beta_j][\alpha_j] = c^{[M]}_{ij}[\beta_j][\alpha_j]$ con $c^{[M]}_{ij} \in K^*$.*

3. *Si A es estandar entonces podemos elejir $c^{[M]}_{ij} = 1$ para todo i, j y M.*

Prueba: Por proposición 95, Λ y $E(\Lambda)$ tienen el mísmo divisor. Si M y N son A-módulos indecomposable, $Ext^1_\Lambda([M],[N]) = Hom_\lambda(\Omega_\lambda([M]),[N])$. Si M es un A-módulo inyectivo, entonces si $E = M/soc(M)$ y $\alpha : M \to E$ es la surjection canónica, entonces

$$0 \to (E,-) \overset{(\alpha,-)}{\to} (M,-) \to [M] \to 0$$

es exacta. Por tanto la dimensión Λ-proyectiva de [M] es 1. Por tanto, $Ext^2_\Lambda([M],[N]) = 0$ para todo [N]. Asumamos de aqui en adelante que M no es un A-módulo inyectivo. Casi al dividir la sucesion $0 \to M \overset{\alpha}{\to} E \overset{\pi}{\to} \tau^{-1}(M) \to 0$, induce a una resolución minima Λ-proyectiva:

$$0 \to \left(\tau^{-1}(M),-\right) \overset{(\pi,-)}{\to} (E,-) \overset{(\alpha,-)}{\to} (M,-) \to [M] \to 0$$

Por tanto, $\Omega_\lambda([M]) = r(M,-)$. Tenemos que

$$Hom_\Lambda(r(M,-),[M]) = Hom_{\Lambda/J}\left(r(M,-)/r^2(M,-),[M]\right)$$

Componer $(\alpha,-) : (E,-) \to r(M,-)$ y la transformacion natural $\eta_M : r(M,-) \to r(M,-)/r^2(M,-)$, veamos que $\eta_M o(\alpha,-)$ está con $ker(\eta_M o(\alpha,-)) = r(E,-)$. Por tanto $(E,-)/r(E,-) \approx r(M,-)/r^2(M,-)$. Podemos asumir que $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_k)^t$ donde $E = \coprod_{i=1}^k E_i$ con cada E_i un indecomposable A-módulo y los α_i son las funciones irreducibles elegidas. Entonces $r(M,-)/r^2(M,-) \approx \left(\coprod_{i=1}^k (E_i,-)/r(E_i,-)\right)$. Por tanto tenemos

$$Ext^1_\Lambda([M],[N]) = Hom_\Lambda\left(\coprod_{i=1}^k (E_i,-),[N]\right) = \coprod_{i=1}^k [N](E_i)$$

. Pero $[N](E_i) = 0$ si N no es isomorfo a E_i y $[N](E_i) = K$ si N es isomorfo a E_i. Para cada E_i tenemos una sucesión de divisores:

$$0 \to E_i \overset{\gamma}{\to} \coprod_{s=1}^{k_i} F_s \to \tau^{-1}(E_i) \to 0$$

o si E_i es inyectiva y $E_i/soc(E_i) = \coprod_{s=1}^{k_i} F_s$, tenemos

$$0 \to E_i \overset{\gamma}{\to} \coprod_{s=1}^{k_i} F_s \to 0$$

donde en cada caso, $\gamma = (\gamma_1,...,\gamma_{k_i})^t$ y para $1 \le s \le k_i, \gamma_s$ son elegidas las funciones irreducibles. En particulas, despues de reordenar, podemos asumir que $\gamma_i = \beta_i$. Tenemos isomorfismos:

$$\sigma_i : \left(\coprod_{s=1}^{k_i} F_s,-\right)/r\left(\coprod_{s=1}^{k_i} F_s,-\right) \to r(E_i,-)/r^2(E_i,-)$$

Note que σ_i^{-1} es definida como sigue: sea $g \in r(E_i,X)$ un homomorfismo. Por la propiedad de mayor división de sucesiones, g se estiende a $\coprod_{s=1}^{k_i} F_s$ como $g = h\gamma$ donde $h = (H_1,...,h_{k_i})$ es una función $h : \coprod_{s=1}^{k_i} F_s \to X$. Si denota la clase de g por $\overline{g}$, entonces $\sigma_i^{-1}(\overline{g}) = h$. La función

$$f_x : r(E_i,X)/r^2(E_i,X) \approx \coprod_{s=1}^{k_i} (F_s,X)/r(F_s,X) \to (F_s,X)/r(F_s,X)$$

esta dado por $f_x(\overline{g}) = \overline{h_s}$. Siguiente, sea N igual a E_i. Podemos la existencia en $Ext_\Lambda([M],[E_i])$ corresponde a la función canónica dada por la composición de funciones: $p_i : r(M,-) \to r(M,-)/r^2(M,-), r(M,-)/r^2(M,-) \approx \coprod_{j=1}^{k}(E_j,-)/r(E_j,-)$ y $(0,...,0,1,0,...,0) : \coprod_{j=1}^{k}(E_j,-)/r(E_j,-) \to (E_i,-)/r(E_i,-) \approx [E_i]$. Sea asume que L es un A-módulo indecomposable tal que $Ext_\Lambda^1([N],[L]) \neq 0$. Note que $Ext_\Lambda^1([N],[L]) \approx Hom_\Lambda(\Omega_\Lambda([N]),[L])$. Sea $q \in Hom_\Lambda(\Omega_\Lambda([N]),[L])$ la función canónica definida en una forma similar como definimos la función canónica $E_\Lambda([M],[E_i])$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & (\tau^{-1}(M),-) & \longrightarrow & (E,-) & \longrightarrow & r(M,-) & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow (\pi_i,-) & & \downarrow (j_i,-) & & \downarrow \rho_i & \\
0 \longrightarrow & r(E_i,-) & \longrightarrow & (E_i,-) & \longrightarrow & (E_i,-)/r(E_i,-) & \longrightarrow 0 \\
& & & & & \downarrow & \\
& & & & & (F_i,-)/r(F_i,-) &
\end{array}$$

donde $j_i : E_i \to E$ es la inyeccion canónica y $\pi_i = \pi \circ j_i$ donde $\pi_i : E_i \to \tau^{-1}(M)$ es la función irreducible. Si $\tau^{-1}(M) \approx F_j$ entonces $q(\pi_i,-) = 0$. esto prueba 1). Ahora asumamos que $\tau^{-1}(M)$ no es isomorfo a F_j y sea $B_j : E_i \to \tau^{-1}(M)$ es la función irreducible elegida. Entonces $\pi_i = c_i\beta_i + t_i$ para algun $t_i \in r^2(E_i, \tau^{-1}(M))$. Ahora la imagen de $(t_i,-)$ esta contenida en $r^2(E_i,\tau^{-1}(M))$ y por tanto $q(t_i,-) = 0$. Por tanto, $q(\pi_i,-) = c_i q(\beta_i,-) = 0$. Sea X un A-módulo y consideremos la composicion $q_X(\beta_i, X)$ con el isomorfismo

$$(F_j,X)/r(F_j,X) \to (\tau^{-1}(M),X)/r(\tau^{-1}(M),X)$$

dada por $q_X(\beta_i,X)(g) = q_X(g\beta_i) = f_X(\overline{g\beta_i})$ pero $g\beta_i : E_i \to X$ tiene una extension a F dada por $g\beta_i = (0,...,0,g,0,...,0)\gamma$ donde g se produce en la $i-th$ componente. Por tanto, $q_X(\beta_i,X)(g) = \overline{g}$. Se sigue que $q_X(\beta_i,X)$ es la proyección natural y tenemos probado que $a\Omega(p) = q(\pi_i,-) = c\delta$, donde $\delta : (\tau^{-1}(M),X) \to (\tau^{-1}(M),X)/r(\tau^{-1}(M),X)$ es la proyección natural. Sea $x \in Ext_\Lambda^1([M],[N])$, $y \in Ext_\Lambda^1([N],\tau^{-1}(M))$ y $z \in Ext_\Lambda^1([M],\tau^{-1}(M))$ las correspondientes extenciones de las funciones sitadas anteriormente se sigue: x a p_i y a q y z a δ. Tenemos probado que $x.y = cz$ con $c \in K^*$ y por tanto se sigue 2). Si A es estandar podemos elegir funciones irreducibles en tal que una trayectoria que satisfacen las "relaciones mesh"[5]. En este caso podemos elegir $c = 1$ y se sigue 3). ||

En orden acontinuación investigaremos las propiedades de las álgebras de Yoneda en una álgebra de Auslander, necesitamos el siguiente resultado. Note que debajo de la prueba probamos que $D(Ext_\Lambda^k(D(\Lambda/r),X)) \approx \Omega^k(X)/\Omega^k(X)r$ tiene una estructura $E(\Lambda)$-módulo.

Proposición 95 *Sea Λ una K-álgebra dimensional finita de dimensión global finita n y sea $E(\Lambda)$ la álgebra de Yoneda de Λ. Sea $D(M)$ denota el dual de M. Entonces la idencomposable $E(\Lambda)$-módulos inyectivos son de la forma $\coprod_{k=0}^{n}\Omega^k D(T)/\Omega^k D(T)r$ con $D(T) = Hom_{\Lambda/r}(T,\Lambda/r)$ donde T es un Λ-módulo simple.*

A $E(\Lambda)$-módulo $\coprod_{k=0}^{n} Ext_\Lambda^k(S,\Lambda/r)$ don de S es un Λ-módulo, es inyectivo si y solo si $T = \Omega^n(S)/r\Omega^n(S)r$ y para $0 \geq k \geq n$ tenemos un isomorfismo $\Omega^k(S)/r\Omega^n(S)r \approx soc(\Omega^{-(n-k)}(T))$.

Prueba: Es conocido que para X y Y Λ-módulo finitamente generado, un isomorfismo natural $Ext_\Lambda^k(X,Y) \approx D(Tor_k^\Lambda(D(Y),X))$. Por tanto la indecomposable inyectiva $E(\Lambda)$-módulos son de la forma $D(\coprod_{k=0}^{n} Ext_\Lambda^k(\Lambda/r,T)) \approx$

$\coprod_{k=0}^{n} Tor_k^{\Lambda}(D(T), \Lambda/r)$. Supongamos que tenemos una Λ^{op} cubierta minimal $Q \to X \to 0$ con núcleo $\Omega(X)$. Tenemos las sucesiones inducidas

$$0 \to Tor_1^{\Lambda}(X, \Lambda/r) \to \Omega(X) \otimes_{\Lambda} \Lambda/r \to Q \otimes_{\Lambda} \Lambda/r \to X \otimes_{\Lambda} \Lambda/r \to\to 0$$

Pero $Q \otimes_{\Lambda} \Lambda/r \approx Q/Qr \approx X/Xr \approx X \otimes_{\Lambda} \Lambda/r$. Por tanto $Tor_1^{\Lambda}(X, \Lambda/r) \approx \Omega(X)/\Omega(X)r$. Por un argumento similar concluimos que $Tor_k^{\Lambda}(X, \Lambda/r) \approx \Omega^k(X)/\Omega^k(X)r$ y por tanto $\coprod_{k=0}^{n} Tor_k^{\Lambda}(D(T), \Lambda/r) \approx \coprod_{k=0}^{n} \Omega^k(X)/\Omega^k(X)r$ con socle $D(T) = Hom_{\Lambda/r}(T, \Lambda/r)$. Note que $\coprod_{k=0}^{n} \Omega^k(X)/\Omega^k(X)r$ "reverso" grado, que es la parte de grado k $\Omega^{n-k}(X)/\Omega^{n-k}(X)r$.
Seguidamente, asumamos que $\coprod_{k=0}^{n} Ext_{\Lambda}^{k}(S, \Lambda/r)$ es inyectivo. Tenemos que probar que el indescomposable módulo inyectivo son de la forma $\coprod_{k=0}^{n} \Omega^k(X)/\Omega^k(X)r$ con los grados reversos. Ya que la componente graduada del isomorfimo del módulo es isomorfo, para cada k, $o \geq k \geq n$, tenemos isomorfismos
$Tor_{n-k}^{\Lambda}(D(T), \Lambda/r) \approx Ext_{\Lambda}^{k}(S, \Lambda/r)$ para $o \geq k \geq n$. Por tanto
$Tor_{n-k}^{\Lambda}(D(T), \Lambda/r) \approx \Omega^{n-k} D(T) \otimes_{\Lambda} \Lambda/r \approx D\left(\Omega^{-(n-k)}(T)\right) \otimes_{\Lambda} \Lambda/r$

$$\approx D\left(\Omega^{-(n-k)}(T)\right) / D\left(\Omega^{-(n-k)}(T)\right) r \approx D\left(soc\Omega^{-(n-k)}(T)\right) \otimes_{\Lambda} \Lambda/r$$

Tambien tenemos:
$Ext_{\Lambda}^{k}(S, \Lambda/r) \approx Hom_{\Lambda}\left(\Omega^k(S), \Lambda/r\right) \approx Hom_{\Lambda/r}\left(\Omega^k(S)/\Omega^k(S)r, \Lambda/r\right)$
$\approx D\left(\Omega^k(S)/r\Omega^k(S)\right)$ Por tanto, $\Omega^k(S)/r\Omega^k(S) \approx soc\Omega^{-(n-k)}(T)$ para todo k si y solo si $Tor_{n-k}^{\Lambda}(D(T), \Lambda/r) \approx Ext_{\Lambda}^{k}(S, \Lambda/r)$ para todo $o \geq k \geq n$. $||$

Como consecuencia de la propposición, podemos dar el resultado sobre la estrucura de la álgebra de Yoneda de una álgebra de Auslander.

Teorema 101 *Sea A una K-álgebra dimensional finita de tipo finito sobre un campo K algebraicamente cerrado. Sea Λ una álgebra de Auslander de A y sea $E(\Lambda)$ denota la álgebra de Yoneda de Λ. Entonces un $E(\Lambda)^{op}$-módulo proyectivo $P_M = \coprod_{k=0}^{2}([M], \Lambda/r)$ es inyectiva si y solo si el Λ-módulo simple corresponde a un A-módulo no inyectivo M. En particular, $E(\Lambda)$ es Loewy de longitud 3 y cada proyectivo de Loewy de longitud 3 es inyectivo. Por tanto, $E(\Lambda)$ es 1-Gorenstein.*

Prueba: Como en la seccion anterior, identificamos a $mod - \Lambda^{op}$ con la categoria de funtores finitamente presentados (mod-A, mod-k). Tiene una dualidad $\widehat{D} : (mod - A, mod - k) \to (mod - A^{op}, mod - k)$ dado por $\widehat{D}(F)(M) = Hom_k(F(M), K)$. Por tanto el funtor inyectivo en (mod-A, mod-k)son funtores de la forma $\widehat{D}()\, Hom_k(-, X)$.
Sea [M] un Λ-módulo simple correspondiente a un indecomposable A-módulo no inyectivo M. Entonces M tiene un mayor divisor de sucesión $O \to M \to E \to \tau^{-1}(M) \to 0$ que induce a una resolucion Λ-proyectivo minimal de [M] dada por

$$0 \to \left(\tau^{-1}(M), -\right) \to (E, -) \to (M, -) \to [M] \to 0$$

Por tanto, $\Omega^2([M]) = \left(\tau^{-1}(M), -\right)$, $\Omega^2([M])/\Omega^2([M])r = [\tau^{-1}(M)], \Omega([M]) = r(M, -)$ y $\Omega([M])/\Omega([M])r = r(M, -)/r^2(M, -) = (E, -)/r(E, -) = \coprod_{i=0}^{k}[E_i]$, donde $E = \coprod_{i=0}^{k} E_i$ es una descomposición de E en un sumando indescomponible.

Supongamos que $[X]^0$ es un funtor simple en $(mod - A^{op}, mod - k)$. Entonces

$$\widehat{D}([X]^0)(Y) = Hom_k([X]^0(Y), K) = \begin{cases} 0 \; si \; X \not\approx Y \\ K \; si \; X \approx Y \end{cases}$$

Para X y Y A-modulos indecomposables. Se sigue que $\widehat{D}([X]^0) = [X]$. Tambien tenemos una sucesion exacta de funtores

$$0 \to (-, M) \to (-, E) \to \big(-, \tau^{-1}(M)\big) \to [\tau^{-1}[M]]^0 \to 0$$

que es una resolucion Λ^{op}-proyectiva minimal de $[\tau^{-1}[M]]^0$. Aplicando $\widehat{d}$ a esta resolución, tenemos

$$0 \to [\tau^{-1}[M]] \to \widehat{D}((-, \tau^{-1}(M))) \to \widehat{D}((-, M)) \to \widehat{D}((-, E)) \to 0$$

Concluimos que
$\Omega^{-2}(\tau^{-1}[M]) = \widehat{D}((-, M))$,
$soc(\Omega^{-2}(\tau^{-1}[M])) = \widehat{D}((-, M))/r(-, M) = \widehat{D}([M]^0) = [M]$, $\Omega^{-1}(\tau^{-1}[M]) = \widehat{D}(r(-, \tau^{-1}[M]))$, y
$soc(\Omega^{-1}(\tau^{-1}[M])) = \widehat{D}(r(-, \tau^{-1}[M])/r^2(-, \tau^{-1}[M])) = \widehat{D}((-, E)/r(-, E)) = \coprod_{i=0}^{k}[E_i]$.
Tenemos que
$\Omega^{-2}([M])/\Omega^{-2}([M])r = [\tau^{-1}(M)]$, $\Omega([M])/\Omega([M])r = soc^{-1}(\Omega[\tau^{-1}(M)]) = [M]$.
Se sigue que la proyección $\coprod_{k=0}^{2} Ext_{\Lambda}^{k}([M], \Lambda/r)$, es inyectiva como un $E(\Lambda)$-módulo.

Sea I un A-módulo inyectivo. La función $I \to I/soc(I)$ induce a una resolución Λ-proyectivo minimal de [I];

$$0 \to (I/soc(I), -) \to (I, -) \to [I] \to 0$$

Por tanto, la cubierta $E(\Lambda)$-proyectivo de [I] es
$P_I = Hom_{\Lambda}([I], \Lambda/r) \otimes Ext_{\Lambda}^{1}([I], \Lambda/r) = Hom_{\Lambda}([I], \Lambda/r) \oplus Hom_{\Lambda}((I/soc(I), -), \Lambda/r) = Hom_{\Lambda}([I], \Lambda/r) \oplus Hom_{\Lambda}((I/soc(I), -), \Lambda/r)/r((I/soc(I), -), \Lambda/r)$.
Supongamos que
$(I/soc(I), -), \Lambda/r)/r((I/soc(I), -), \Lambda/r) = \coprod_{i=1}^{t} L_i$,
con los L_I indecomposable A-modulos. Entonces
$(I/soc(I), -), \Lambda/r)/r((I/soc(I), -), \Lambda/r) = \coprod_{i=1}^{t}[L_i]$. Por tanto,

$$P_1 = Hom_{\Lambda}([I], \Lambda/r) \oplus Hom_{\Lambda/r}(\coprod_{i=1}^{t}[L_i], \Lambda/r)$$

Por tanto $soc(P_1) = Hom_{\Lambda/r}(\coprod_{i=1}^{t}[L_i], \Lambda/r)$. Cada L_i no es proyectivo y por tanto tenemos una sucesión de divisor mayor $0 \to \tau(L_i) \to E_i \to L_i \to 0$. Esa sucesión induce a una resolucion Λ-proyectiva minimal de $[\tau(L_i)]$.

$$0 \to (L_i, -) \to (E_i, -) \to (\tau(L_i), -) \to [\tau(L_i)] \to 0$$

Por tanto, la cubierta $E(\Lambda)$-proyectiva de $[\tau(L_i)]$ es $P_{\tau(L_i)} = Hom_{\Lambda}([\tau(L_i)], \Lambda) \oplus Ext_{\Lambda}^{1}([\tau(L_i)], \Lambda) \oplus Ext_{\Lambda}^{2}([\tau(L_i)], \Lambda/r) = Hom_{\Lambda}([\tau(L_i)], \Lambda/r) \oplus Hom_{\Lambda}((E_i, -)/(E_i, -)\Lambda/r) \oplus Hom_{\Lambda/r}([L_i], \Lambda/r)$

Por tanto, probamos que $soc(P_{\tau(L_i)}) = Hom_{\Lambda/r}([L_i], \Lambda/r)$ y que $P_{\tau(L_i)}$ es un $E(\Lambda)$-módulo proyectivo-inyectivo. Se sigue que $\coprod_{i=1}^{t} P_{\tau(L_i)}$ es la envoltura inyectiva de P_I y la prueba queda completada.||

Bibliografía

[1] Articulo, Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clasica. Emilio Lluis-Puebla. 2005 por Sociedad Mateática Mexicana.

[2] Articulo, Álgebra Homológica y Álgebra Conmutativa, Carlos Ivorra Castillo

[3] Atiyah, M.F, Macdonald, I.G. Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, Massachussetts, 1969.

[4] Boletin de la Asociacion Matemática Venezolana, Volumen XII, Numero 1, Año 2005 I.S.S.N. 13154125

[5] BOURBAKI, N. Algébre Commutative, Chap. X: profondeur, dualité, Masson, 1998.

[6] BRUNS, W., HERZOG, J. Cohen-Macaulay rings, revised edition, Cambridge University Press, 1998.

[7] EISENBUD, D. Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry. Springer, 1995.

[8] Francis Borceux. Handbook of Categorical Algebra, volumes $50-52$ of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1994.

[9] GIRAL, J. M. Anillos locales regulares, teoría del grado, anillos de Cohen-Macaulay. UB, 1995.

[10] http:$//www.dacb.ujat.mx/publicaciones/revista_dacb/Acervo/v4n1OL/v4n1a5-ol/index.html$

[11] Liu, Q. Algebraic Geometry and Arithmetic Curves. Oxford University Press, 2002.

[12] MATSUMURA, H. Commutative Ring Theory, Cambridge University Press, 1986.

[13] Mitchell, B., Theory of Categories, Academic Press, Nueva York, 1965.

[14] Miyanishi, M. Algebraic Geometry. American Mathematical Society, 1994.

[15] Northcott, D. G., Lessons on Rings, Modules and Multiplicities, Cambridge University Press, Londres, 1968.

[16] Obtenido de “http://es.wikipedia.org/wiki/Homology mathematics” Categoría: Topología algebraica

[17] OSBORNE, M. S. Basic Homological Algebra, Gradiate text in mathematics, 196. Springer, New York, 2000.

[18] ROTMAN, J. J. An introduction to Homological Algebra, Pure and applied Mathematics, 85, Academic Press, Inc., New York, 1979.

[19] Saunders Mac Lane (1998): Categories for the Working Mathematician, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer; ISBN $0-387-98403-8$ SERRE, J. P. Local Algebra, Springer, 2000.

[20] Sze-Tsen Hu. Introduction to Homological Algebra. Holden-Day, San Francisco California,1974,Capitulo 1,3.

[21] Tesis de Trabajo de Graduacion Formulas de Kunneth, Universidad de El Salvador, Jose Antonio, Capitulo 3, pag.137.

[22] Tomas W. Hungerford Graduate Texts in Mathematics. 2003

[23] William Lawvere Steve Schanuel, Matemáticas Conceptuales: Una primera introducción a categorías, Siglo XXI, 2002

[24] Marmolejo Rivas, Francisco a partir de Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories, Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

[25] William Lawvere Steve Schanuel, Sets for mathematics, Cambridge University Press, 2003.

[26] Luis Javier Hernández, Tesis Doctoral titulada: "Homología de Koszul combinatoria: Cálculos y Aplicaciones". Universidad de Rioja, 2008.