UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

LA TOPOLOGIA DE ZARISKI SOBRE ANILLOS CONMUTATIVOS

PRESENTADO POR:
Br. INGRID CAROLINA MARTINEZ BARAHONA

PARA OPTAR AL TITULO DE:
LICENCIADA EN MATEMATICA

CIUDAD UNIVERSITARIA, MARZO DE 2008.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

MsC. RUFINO ANTONIO QUEZADA SANCHEZ
RECTOR

Lic.DOUGLAS VLADIMIR ALAFARO CHAVEZ
SECRETARIO GENERAL

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. RAFAEL ANTONIO GOMEZ ESCOTO
DECANO

Licda. MARIA TRINIDAD TRIGUEROS DE CASTRO
SECRETARIA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

Ing. CARLOS MAURICIO CANJURA
DIRECTOR

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

LA TOPOLOGIA DE ZARISKI SOBRE ANILLOS CONMUTATIVOS

PRESENTADO POR
Br. INGRID CAROLINA MARTINEZ BARAHONA

PARA OPTAR AL TITULO DE
LICENCIADA EN MATEMATICA

Msc.JOSE FRANCISCO MARROQUIN
ASESOR

Lic. JOSE RENE PALACIOS BARRERA
ASESOR ADJUNTO

CIUDAD UNIVERSITARIA, MARZO DE 2008.

“La matemática es el trabajo del espíritu humano que está destinado tanto a estudiar como a conocer, tanto a buscar la verdad como a encontrarla”
E. Galois

A mis padres, por su amor y apoyo,
por ser los pilares de mi vida.

A mis hermanos, por ser un regalo
maravilloso de Dios.

“Jesús le dijo: Yo soy el camino, la verdad, y la vida”.

Agradecimientos

A Dios todo poderoso, por haberme permitido llegar hasta aquí, por ayudarme en los momentos más dificiles y por cruzar en mi camino personas maravillosas.

A la Universidad de El Salvador, y en especial a la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática por brindarme la oportunidad de pertenecer a esta institución.

Al Ing. José Francisco Marroquín asesor de tesis, por asumir la dirección de la presente, por sus conocimientos compartidos, sus comentarios siempre acertados, por su apoyo incondicional y por el honor de trabajar con él.

Al Lic. José René Palacios asesor adjunto de tesis, por sus comentarios, sugerencias y correciones al trabajo, y tener siempre la disponibilidad de ayudarme a resolver mis dudas.

A mis padres, por su apoyo incondicional de principio a fin en todo lo que hago, por creer en mí y por ser mi principal motivación en la vida.

muchas gracias

Resumen

En el presente trabajo se plantea la relación entre el Álgebra Conmutativa y la Topología, desarrollando una topología particular sobre el conjunto de todos los ideales primos de un anillo conmutativo cualquiera. Y haciendo un estudio del espectro primo del anillo. Para ello hacemos uso tanto de las nociones de Álgebra como las de Topología. Luego se estudia el subespacio maximal del espectro primo para ver la relación que hay entre un espacio topológico compacto Hausdorff y el subespacio maximal del anillo de todas las funciones continuas reales sobre dicho espacio.
El trabajo está dividido en los siguientes capitulos:

Capítulo 1. Nociones Básicas de Álgebra. Definiciones y resultado sobre anillos, homomorfismos de anillos ,ideales primos y maximales (que son una parte fundamental para el desarrollo del trabajo),operaciones con ideales, nilradical y radical, extensión , contracción y otros.

Capítulo 2. Espacios Topológicos. Definición de espacio topológico y subespacios, axiomas de separación, conexidad, compacidad , homomorfismos de espacios topológicos.

Capítulo 3. Topología de Zariski. Se dota a un anillo A de una topología, definiendo en primer lugar los conjuntos cerrados. La topología resultante es llamada *Topología de Zarisky*, y el espacio topológico se denomina *espectro primo de A*, luego se hace un estudio de la topología, definiendo: la base, cierre, compacidad, axiomas de separación, irreducibilidad, conexidad.

Capítulo 4. El subespacio $Max(A)$ de $Spec(A)$ Si tomamos un espacio compacto y Hausdorrf, podemos reconstruirlo a través del anillo de todas las funciones reales continuas sobre dicho espacio.

Índice general

Introducción

El Álgebra Conmutativa es de creación relativamente reciente, pero su desarrollo puede comprenderse sólo en función de la teoría de los Números Algebraicos y de la Geometría Algebraica, que le dieron origen.
Se pudo conjeturar sin demasiada inverosimilitud que la famosa demostración que pretendía poseer Fermat de la imposibilidad de la ecuación $x^p + y^p = z^p$ para p primo impar y x, y, z, enteros distintos de cero, habría reposado en la descomposición

$$(x + y)(x + \zeta y)...(x + \zeta^{p-1} y) = z^p$$

en el anillo $Z[\zeta]$(donde $\zeta \neq 1$ es una raíz p-ésima de la unidad), y sobre un raciocinio de divisibilidad en este anillo, suponiéndolo *principal*.
Euler y Gauss demuestran el teorema de Fermat para $p = 3$, Gauss y Dirichlet para $p = 5$, y Dirichelet la imposibilidad de la ecuación $x^{14}+y^{14} = z^{14}$; en sus primeras búsquedas sobre la Teoría de los Números, Kummer había creído que él conseguía de esa manera una demostración general, y es sin duda este error (que le fue señalado por Dirichlet) que le orientó a sus estudios sobre la aritmética de los cuerpos ciclotómicos. Los progresos ulteriores del Ágebra Conmutativa van sobre todo a provenir de problemas bastante diferentes, nacidos de la Geometría Algebraica (que por otra parte influirá de modo directo de la Teoría de los Números, hasta antes de los desarrollos abstractos de la época contemporánea). No tenemos aquí que hacer la historia detallada de la Geometría Algebraica. Basta con recordar que tenía por objeto sobre todo el estudio de las curvas algebricas en el plano proyectivo complejo, abordado la mayoría de las veces por los métodos de la Geometría Proyectiva. Paralelamente se había desarrollado, con Abel, Jacobi, Weierstrass y Riemann, la teoría de las «Funciones Algebraicas» de una variable compleja y de sus integrales; es evidente el lazo entre esta teoría y la Geometría de las curvas algebraicas planas, pero los métodos utilizados para el estudio de las funciones algebraicas eran sobretodo de naturaleza «transcendente» ; este carácter todavía se acentúa en los trabajos de Riemann, con la introducción de superficies de Riemann y de las funciones analíticas definidas sobre tal superficie. Pero hasta para los contemporáneos, los métodos transcendentales de Riemann (particularmente su uso de nociones topológicas y del principio de Dirichlet) aparecían reposar en fundamentos inciertos; y aunque Brill y M. Noether sean más bien más cuidadosos que la mayoría de los geómetras «sintéticos» contemporáneos , sus raciocinios geometrico-analítico no están libres de todo reproche. Esencialmente es para dar a la teoría de las curvas algebraicas planas una base sólida que Dedekind y Weber publica en 1882 su gran informe sobre este sujeto: «*tienen por objeto de asentar los fundamentos de la teoría de las funciones algebraicas de una*

variable, creaciones principales de Riemann, de modo simples, rigurosos y totalmente generales. En las búsquedas anteriores sobre este sujeto, hacemos en general hipótesis restrictiva sobre las singularidades de las funciones consideradas, y los casos supuestos de excepción son, o bien mencionados en concurrido como caso límite, o bien totalmente descuidados. También, admitimos ciertos teoremas fundamentales sobre la continuidad o el análisis , cuya evidencia se apoya en intuiciones geométricas de naturaleza variada». La idea esencial de su trabajo es calcar la teoría de las funciones algebraicas de una variable sobre la teoría de los números algebraicos tal, como acababa de desarrollarlo Dedekind; para hacerlo, deben primero colocarse hasta el punto de vista «Afín» (al contrario de sus contemporáneos, que consideraban invariablemente las curvas algebraicas como submersiones en el espacio proyectivo complejo); parten pues de una extensión algebraica finita K del cuerpo $C(X)$ de las fracciones racionales, y del anillo A de «funciones algebraicas enteras» en K, i.e. elementos de este cuerpo sobre el anillo $C[X]$ de polinomios; su resultado fundamental, que obtienen sin utilizar ninguna consideración topológica , es que A es un anillo de Dedekind (y hasta, como lo observa Dedekind y Weber sin ver todavía claramente la razón, de modo más simple). Esto hace,que ellos prueben que sus teoremas no dependen del cuerpo K y en particular no dependen de la elección de «recta al infinito» como punto de partida. Lo que es todavía más interesante sin duda para nosotros es que, queriendo definir los puntos de la «superficie de Riemann» correspondiente a K (y en particular «puntos al infinito», que no le podían corresponder a ideales de A), son llevados a introducir la noción de «sitio» del cuerpo K; se encuentran delante de la situación que reencontrará Gelfand en 1940 para fundar la Teoría de las Álgebras Normales, a saber que un conjunto K de elementos que no son dados como funciones, los que sin embargo se pueden considerar como tales; y, para obtener el conjunto de definición de estas funciones hipotéticas, tienen por primera vez la idea (que repetirá Gelfand, y que se volvió común a fuerza de ser utilizada a cada paso en matemática moderna) de asociar con un punto x de un conjunto E y a un conjunto F de aplicaciones de E en un conjunto G la aplicación $f \to f(x)$ de F en G es decir de considerar, en la expresión $f(x)$,f como variable y x como fijo. Por fin, no les cuesta, a partir de la noción de «sitio», definir los «divisores positivos» («Polígono» en su terminología) que comprenden los ideales de A como casos particulares y corresponden a «sistemas de puntos» de Brill y M. Noether; pero, aunque escriben los divisores principales y los divisores de diferenciales como «cocientes» de divisores positivos, no dan la definición general de divisores, y es solamente en 1902 que Hensel y Landsberg introducirán, por analogía con los ideales fraccionarios esta noción que les estorbaba siempre a los poseedores de los métodos puramente «geométricos».

El mismo año 1882 también aparece el gran informe de Kronecker esperado después de 20 años. Mucho más ambicioso que el trabajo de Dedekind-Weber.Su tema central es el estudio de los ideales de una álgebra finita íntegral [1] sobre uno de los anillos de polinomios $C[x_1, ..., X_n]$ o $Z[X_1, ..., X_n]$; Kronecker se limita a priori a estos ideales que son de tipo finito (serian probados solamente (para los ideales de $C[X_1, ..., X_n]$) algunos años más tarde por Hilbert en el curso de sus trabajos sobre los invariantes). En cuanto a $C[X_1, ..., X_n]$ o $Z[X_1, ..., X_n]$, es natural asociar con todo ideal de uno de estos anillos con una «Variedad Algebraica» formada por los ceros comunes a todos los elementos del ideal; y los estudios de geometría en dimensiones 2 y 3 hechos en el curso del siglo XIX debían conducir intuitivamente a la idea que toda variedad es unión de variedades «irreducibles» en número finito cuyas dimensiones necesariamente no son las mismas.

El movimiento de ideas que acabará en el Álgebra Conmutativa moderna comienza a tomar forma a finales 1910. Si la noción general de cuerpo es adquirida desde el principio del siglo XX, en cambio el primer trabajo donde sea definida la noción general de anillo es sin duda el de Fraenkel en 1914 . En aquella época ya teníamos ejemplos de anillos, no sólo anillos enteros de la Teoría de Números y de la Geometría Algebraica, sino que también los anillos de series (formales o convergentes), y por fin las álgebras (conmutativas o no) sobre un cuerpo de base. No obstante, tanto para la teoría de anillos como para la de cuerpos el papel catalizador parece haber sido la teoría de los números p-ádicos de Hensel, que Fraenkel tanto como Steinitz mencionan muy especialmente como punto de partida de sus búsquedas.

La idea de introducir en un cuerpo p-ádico[2] nociones topológicas no aparece en Hensel antes de 1905; y es solamente en 1907, después de haber escrito totalmente el libro donde reexpone según sus ideas la Teoría de los Números Algebraicos que llegue a la definición y a la propiedad esencial de los valores absolutos p-ádicos, a partir de los cuales podrá desarrollar, calcándola sobre la teoría de Cauchy, todo un análisis «p-ádico» que sabrá aplicar con resultados teóricamente númericos (particularmente con la utilización del exponencial y del logaritmo p-ádico).

[1] Sea $f : A \to B$ un homomorfismos de anillos. Si $a \in A$ y $b \in B$, se define un producto $ab = f(a)b$.Esta definición de multiplicación escalar convierte el anillo B en un A-módulo.Así B tiene una estructura de A-módulo y también una estructura de anillo. El anillo B dotado de esta estructura de A-módulo, se denomina una A-álgebra.Así una A-álgebra es por definición un anillo B junto con un homomorfismo de anillos $f : A \to B$

[2] Si p es un primo finito en un cuerpo numérico k, la compleción k_p se conoce como cuerpo de los números p-ádicos.

Los primeros trabajos importantes en el estudio de los anillos conmutativos generales son los dos grandes informes de E. Noether[3] sobre la teoría de los ideales; el de 1921, consagrado a la descomposición primaria[4], que prosigue sobre el plano más general y completa sobre muchos puntos los resultados de Lasker y Macaulay; y el de 1927 que caracteriza axiomáticamente los anillos de Dedekind.

A E. Noether, le debemos la formulación general del lema de normalización[5] (de donde emana entre otras cosas el teorema de los ceros de Hilbert) así como el primer criterio general (transcripción de los raciocinios clásicos de Kronecker y Dedekind) que permite afirmar que el cierre íntegral de un anillo íntegro es finito sobre este anillo.

La noción de espectro. El teorema espectral de Hilbert que introduce conjuntos ordenados de proyecciones ortogonales de un espacio de Hilbert, forma una álgebra booleana (o una red booleana), en correspondencia biunívoca con una red booleana de clases de partes mensurables (para una medida conveniente) de R. Son sin duda sus trabajos anteriores sobre los operadores en los espacios de Hilbert que, hacia 1935, traen M. H. Stone a estudiar de modo general las redes booleana, particularmente a buscar representaciones por partes de un conjunto . Observamos que una red booleana se hace un anillo conmutativo (de un tipo muy especial por otra parte), cuando se define allí la multiplicación por $xy = inf(x, y)$ y la adición por

[3]Emmy Noether (Erlangen, Alemania 23 de marzo de 1882 - Bryn Mawr, Estados Unidos, 14 de abril de 1935), hija de Max Noether: distinguido matematico y profesor de la Universidad de Erlangen. Es conocida por haber establecido un resultado básico en física matemática, el teorema de Noether, que relaciona simetrías y magnitudes conservadas en un sistema físico, resultado que es aplaudido fervorosamente por Albert Einstein. También se le conoce como la madre del álgebra moderna, por la creación de las estructuras de anillos y de ideales (los anillos noetherianos están bautizados en su honor). Cuando muere en Bryn Mawr en 1935, el propio Albert Einstein escribió una nota necrológica.

[4]La descomposición de un ideal en ideales primarios(q es primario si $xy \in q \Rightarrow x \in q o y^n \in q$) es un pilar tradicional de la teoría de ideales.Proporciona el fundamento algebraico para la descomposición de una variedad algebraica en sus componentes irreducibles. Desde otro punto de vista la descomposición primaria proporciona una generalización de la factorización de un entero como producto de potencias de primos

[5]En la Geometría Algebraica clásica las curvas se estudian frecuentemente proyectándolas sobre una recta y considerando la curva como un recubrimiento de la recta.Esto es completamente análogo a la relación entre un cuerpo de números y el cuerpo de los números racionales , y la característica algebraica común es la noción de dependencia entera en donde aparece el Lema de normalización: “Sea k un cuerpo y $A \neq 0$ una k-álgebra con generación finita. Entonces existen elementos $y, ..., y_r \in A$ que son algebraicamente independientes sobre k y tales que A es entero sobre $k[y, ..., y_r]$”

$x + y = sup(inf(x, y'), inf(x', y))$.
Stone precisamente obtiene su teorema general de representación de red booleana considerando también el conjunto de los ideales maximales del anillo correspondiente, y asociando con todo elemento de la red booleana el conjunto de los ideales maximales que le contienen. Por otra parte, conocíamos, como ejemplo clásico de red booleana, el conjunto de las partes a la vez abiertas y cerradas por un espacio topológico. En un segundo trabajo, Stone mostró que de hecho toda red booleana es isomorfa a una red booleana de esta naturaleza. Naturalmente hacía falta para esto definir una topología sobre el conjunto de los ideales maximales de un anillo booleano; lo que se hace simplemente tomando por conjuntos cerrados, para cada ideal a, el conjunto de los ideales maximales que contienen a a.

Tenemos que hablar aquí de la influencia de estas ideas en Análisis funcional, donde desempeñaron un papel importante en el nacimiento de la teoría de las álgebras normadas desarrollada por I. Gelfand y su escuela. Pero en 1945, Jacobson observa que el procedimiento de definición de una topología, imaginado por Stone, puede de hecho aplicarse a todo anillo A (conmutativo o no) con tal que se tome como conjunto de ideales no el conjunto de los ideales maximales, pero el conjunto de los ideales primos bilaterales (i.e. los ideales bilaterales b tales que A/b sea un domino entero); para un anillo conmutativo, reencontramos desde luego los ideales maximales. Por su parte, Zariski, en 1944, utiliza un método análogo para definir una topología sobre el conjunto de los sitios de un cuerpo de funciones algebraicas. No obstante, estas topologías se quedaban como curiosidades simples, razón del hecho de que comúnmente son separadas. Esta desconfianza fue disipada sólo cuando A. Weil mostró, en 1952 que toda variedad algébraica puede ser proveída de modo natural de una topología del tipo precedente y que esta topología permite definir, en analogía perfecta con el caso de las variedades diferenciables o analíticas, la noción de espacio fibrado; poco después, Serre tuvo la idea de entender estas variedades así topologizadas en la teoría de los haces fibrados, gracias a la cual la topología devuelve en el caso de las variedades abstraídas los mismos servicios que la topología usual cuando el cuerpo de base es C, particularmente en cuanto a la aplicación de los métodos de la Topología Algebraica. Desde entonces era natural utilizar este lenguaje geométrico en toda el Álgebra Conmutativa. Pero la consideración de los ideales maximales es comúnmente insuficiente para obtener enunciados cómodos, y que la noción adecuada es la del conjunto de los ideales primos del anillo, topologizado de la misma manera. Con la introducción de la noción de espectro, disponemos ahora de un diccionario que permite expresar todo teorema de Álgebra Conmutativa en un lenguaje geométrico muy próximo del de la

Geometría Algebraica de la época de Weil - Zariski; lo que por otra parte trajo, en seguida a extender el marco de esta última, de modo que el Álgebra Conmutativa no es mas, desde este punto de vista, que la parte más elemental.

Capítulo 1

Nociones Básicas de Álgebra

1.1. Anillos y homomorsfismos de anillos

Definición 1.1.1 *Un anillo es un conjunto A con dos operaciones binarias (adición y multiplicación) tales que:*

1. *A es un grupo abeliano respecto a la adición.*

2. *La multiplicación es asociativa ($(xy)z = x(yz)$) y distributiva respecto a la adición ($x(y + z) = xy + xz, (y + z)x = yx + zx$).*

   Se considerarán sólo anillos conmutativos cuando:

3. *$xy = yx$ para cada $x, y \in A$,*

   y que tengan elemento identidad (que se indica por 1):

4. *$\exists 1 \in A$ tal que $x1 = 1x = x$ para todo $x \in A$.*
   El elemento identidad es único.

*A lo largo de este trabajo la palabra **anillo** significa un **anillo conmutativo** con elemento identidad*, es decir, un anillo que satisface los axiomas de (1) al (4). No se excluye en (4) la posibilidad de que 1 puede ser igual a 0. Si es así, entonces para cada $x \in A$ se tiene

$$x = x1 = x0 = 0$$

con lo cual A tiene un solo elemento, 0. En este caso A es el *anillo cero*, que se indica por ***0***.

Definición 1.1.2 *Un subconjunto S de un anillo A es un subanillo de A si S es cerrado respecto a la adición y la multiplicación y contiene el elemento identidad de A.*

Definición 1.1.3 *Un homomorfismo de anillos es una función f de un anillo A en un anillo B tal que*

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *es decir f es un homomorfismo de grupos abelianos y por tanto* $f(x-y) = f(x) - f(y), f(-x) = -f(x), f(0) = 0$
2. $f(xy) = f(x)f(y)$
3. $f(1) = 1$.

En otras palabras, f respeta la adición, la multiplicación y el elemento identidad.

Observaciones

1. Llamamos *núcleo* de f a $Ker(f) = \{a \in A / \ f(a) = 0\}$;
2. y la *imagen* de f a $Imf = \{b \in B / \ b = f(a) \text{ para algún } a \in A\}$;
3. si $f : A \to B, \ g : B \to C$ son homomorfismos de anillos, también lo es su composición $g \circ f : A \to C$.

Proposición 1.1.1 *$\varphi : A \to B$ es inyectiva $\Leftrightarrow Ker(\varphi) = \{0\}$*

i)φ es inyectiva, tenemos que $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Sea } a \in Ker(\varphi), \text{ entonces } \varphi(a) & = & \varphi(0) \text{ , luego} \\ a & = & 0 \end{array}$$

por tanto $Ker(\varphi) = 0$

ii) Si $Ker(\varphi) = \{0\}$ probemos que φ es inyectiva.

$$\begin{array}{rl} \text{Si } \varphi(a) = \varphi(b) & \Rightarrow \varphi(a-b) = 0 \\ & \Rightarrow a - b \in Ker(\varphi) = \{0\} \\ & \Rightarrow a - b = 0 \\ & \Rightarrow a = b \end{array}$$

por lo que φ es inyectiva.

1.2. Ideales. Anillo cociente

Definición 1.2.1 *Un ideal* $\mathfrak{a}$ *de un anillo* A *es un subconjunto de* A *que es un subgrupo aditivo y tal que* $A\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ *(es decir,* $x \in A$ *e* $y \in \mathfrak{a}$ *implica* $xy \in \mathfrak{a}$*), y lo denotamos por* $\mathfrak{a} < A$.

En particular $\mathfrak{a}$ es un anillo con las mismas operaciones de A. Aún más, al ser subgrupo de A, tiene sentido construir el grupo cociente $A/\mathfrak{a}$ ya que en este caso, al ser conmutativa la operación $+$, las clases laterales izquierdas y derechas coinciden.
Recordemos que:

$$A/\mathfrak{a} = \{x + \mathfrak{a}; x \in A\}$$

Además:

1. $x + \mathfrak{a} + y + \mathfrak{a} = x + y + \mathfrak{a}$
2. $x + \mathfrak{a} = y + \mathfrak{a} \Leftrightarrow x - y \in \mathfrak{a}$
3. si $x \in \mathfrak{a}$, $x + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$; $0 + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$
4. luego: $x + \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = x + \mathfrak{a}$ o lo que es lo mismo $\mathfrak{a}$ es el **cero** del grupo cociente $A/\mathfrak{a}$

Al grupo cociente $A/\mathfrak{a}$ podemos dotarlo de una estructura de anillo definiendo:

$$\begin{array}{rcl} A/\mathfrak{a} \times A/\mathfrak{a} & \longrightarrow & A/\mathfrak{a} \\ (x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}) & \mapsto & xy + \mathfrak{a} = (x + \mathfrak{a})(y + \mathfrak{a}) \end{array}$$

Es necesario comprobar que esta operación es efectivamente una función, o lo que es lo mismo:

1. Que todo elemento del dominio tiene imagen en el conjunto de llegada y
2. Que esta imagen es única.

Para 1) tenemos que: Es claro que si $(x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}) \in A/\mathfrak{a} \times A/\mathfrak{a}$ entonces $xy + \mathfrak{a} \in A/\mathfrak{a}$, por el simple hecho que $xy \in A$ y todo elemento de A pertenece a una clase de equivalencia en $A/\mathfrak{a}$.

Para 2) tenemos que:
Sean $x_1, y_1, x_2, y_2 \in A$
$c = (x_1 + \mathfrak{a}, y_1 + \mathfrak{a}) \longmapsto x_1 y_1 + \mathfrak{a}$

$d = (x_2 + \mathfrak{a}, y_2 + \mathfrak{a}) \longmapsto x_2 y_2 + \mathfrak{a}$

si $c = d$ entonces:
$x_1 + \mathfrak{a} = x_2 + \mathfrak{a} \wedge y_1 + \mathfrak{a} = y_2 + \mathfrak{a}$

como

$$\begin{aligned} x_1 + \mathfrak{a} = x_2 + \mathfrak{a} &\Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathfrak{a} \\ &\Rightarrow y_1(x_1 - x_2) \in \mathfrak{a} \\ &\Rightarrow (y_1 x_1 - y_1 x_2) \in \mathfrak{a} \quad (1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y_1 + \mathfrak{a} = y_2 + \mathfrak{a} &\Rightarrow y_1 - y_2 \in \mathfrak{a} \\ &\Rightarrow x_2(y_1 - y_2) \in \mathfrak{a} \\ &\Rightarrow (x_2 y_1 - x_2 y_2) \in \mathfrak{a} \quad (2) \end{aligned}$$

de (1) y (2) obtenemos que:

$$(y_1 x_1 - y_1 x_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2) \in \mathfrak{a}$$

entonces

$$(y_1 x_1 - x_2 y_2) \in \mathfrak{a} \Rightarrow y_1 x_1 + \mathfrak{a} = x_2 y_2 + \mathfrak{a}$$

por lo que la imagen es única.

Si definimos:

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow A/\mathfrak{a} \\ x &\mapsto \varphi(x) = x + \mathfrak{a} \end{aligned}$$

es un homomorfismo de anillos ya que:

1.

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= x + y + \mathfrak{a} \\ &= x + \mathfrak{a} + y + \mathfrak{a} \\ &= \varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\varphi(xy) &= xy+\mathfrak{a}\\ &= (x+\mathfrak{a})(y+\mathfrak{a})\\ &= \varphi(x)\varphi(y)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1+\mathfrak{a}\\ &= 1_{A/\mathfrak{a}}\end{aligned}$$

A este homomorfismo le conocemos como la suryección canónica ó el epimorfismo canónico.

Proposición 1.2.1 *Existe una correspondencia biyectiva que conserva el orden entre los ideales* $\mathfrak{b}$ *de* A *que contienen* $\mathfrak{a}$*, y los ideales* $\bar{\mathfrak{b}}$ *de* $A/\mathfrak{a}$*, dada por:*

$$\varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}}) = \mathfrak{b}$$

Demostración:
Sean:
$I = \left\{\bar{\mathfrak{b}}/\bar{\mathfrak{b}} < A/\mathfrak{a}\right\}$
$J = \{\epsilon/\epsilon < A, \epsilon \supseteq \mathfrak{a}\}$

y definamos:

$$\begin{aligned}\Psi : I &\longrightarrow J\\ \bar{\mathfrak{b}} &\mapsto \Psi(\bar{\mathfrak{b}}) = \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})\end{aligned}$$

Sabemos que: $\varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}}) = \{x \in A \ / \ \phi(x) \in \mathfrak{b}\}$
Probemos que $\varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$ es un ideal

1. $\varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}}) \neq \phi$ ya que :
   $0_{A/\mathfrak{a}} \in \bar{\mathfrak{b}}$ y $\varphi(0_A) = 0_{A/\mathfrak{a}} \in \bar{\mathfrak{b}} \Rightarrow 0_A \in \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$

2. $x, y \in \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}}) \Rightarrow \varphi(x), \varphi(y) \in \bar{\mathfrak{b}}$
   $\Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x-y) \in \bar{\mathfrak{b}}$
   $\Rightarrow x - y \in \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$

3. Sea $x \in A$ y $y \in \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$ entonces
   $\varphi(x) \in A/\mathfrak{a}$; $\varphi(y) \in \bar{\mathfrak{b}}$ y como:
   $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) \in \mathfrak{b}$, por ser ideal
   $\Rightarrow xy \in \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$.

   Por lo tanto $\varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$ es un ideal de A.

Veamos que: $\mathfrak{a} \subseteq \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$
Sea $x \in \mathfrak{a}$ entonces:
$\varphi(x) = x + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \in \bar{\mathfrak{b}}$ (ya que $\mathfrak{a}$ es el cero del cociente)
$x \in \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$
$\Rightarrow \mathfrak{a} \subseteq \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$
luego $\varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}}) \in J$

Probaremos que $\Psi(\bar{\mathfrak{b}}) = \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$ es inyectiva.
Si $\Psi(\bar{\mathfrak{b}_1}) = \Psi(\bar{\mathfrak{b}_2})$ entonces $\varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}_1}) = \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}_2})$
como φ es el epimorfismo canónico, tenemos que:

$$\varphi\left(\varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}_1})\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}_2})\right)$$

$$\Rightarrow \bar{\mathfrak{b}_1} = \bar{\mathfrak{b}_2}$$

por lo tanto Ψ es inyectiva.

Veamos ahora que Ψ es sobreyectiva, para ello sea $C \in J$. C es un ideal de A y $\mathfrak{a} \subseteq C$.
Necesitamos encontrar $\bar{\mathfrak{b}} < A/\mathfrak{a}$ de modo que $\varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}}) = C$
Veamos que $\varphi(C)$ es un ideal de $A/\mathfrak{a}$ y que $\varphi^{-1}(\varphi(C)) = C$.
Sabemos que $\varphi(C)$ es un subanillo de $A/\mathfrak{a}$; sean $x + \mathfrak{a} \in A/\mathfrak{a}$, $y + \mathfrak{a} \in \varphi(C)$ tenemos que $y \in C$ y como φ es sobre, existe $z \in A$ tq $\varphi(z) = x + \mathfrak{a}$ por ser C ideal tenemos

$$zy \in C$$

$$\Rightarrow \varphi(zy) \in \varphi(C)$$

$$\Rightarrow zy + \mathfrak{a} \in \varphi(C)$$

de $\varphi(z) = x + \mathfrak{a}$ tendremos que $z + \mathfrak{a} = x + \mathfrak{a}$ por la definición de φ entonces:

$$(x + \mathfrak{a})(y + \mathfrak{a}) = (z + \mathfrak{a})(y + \mathfrak{a}) \in \varphi(C)$$

$$\Rightarrow (x+\mathfrak{a})(y+\mathfrak{a}) \in \varphi\,(C)$$

tenemos entonces que $\varphi\,(C)$ es un ideal de $A/\mathfrak{a}$.

Nada más nos resta probar que

$$\varphi^{-1}\,(\varphi\,(C)) = C$$

ya que:

$$\begin{array}{cccc} \Psi: & I & \longrightarrow & J \\ & \varphi(C) & \mapsto & \Psi(\varphi(C)) = C \end{array}$$

Primero sabemos que: $C \subseteq \varphi^{-1}\,(\varphi\,(C))$ (se cumple para cualquier función).
Ahora sea $x \in \varphi^{-1}\,(\varphi\,(C))$
$\Rightarrow \varphi(x) \in \varphi\,(C)$
$\Rightarrow x+\mathfrak{a} \in \varphi\,(C)$
$\Rightarrow \exists y \in C$ tq $\varphi(y) = x+\mathfrak{a}$
$\Rightarrow x+\mathfrak{a} = y+\mathfrak{a}, y \in C$
tenemos que $x-y \in \mathfrak{a} \subseteq C \Rightarrow x-y \in C$
entonces $x-y = z \in C, y \in C$
$\Rightarrow x \in C \Rightarrow \varphi^{-1}\,(\varphi\,(C)) \subseteq C$
$\Rightarrow \varphi^{-1}\,(\varphi\,(C)) = C$
por lo tanto Ψ es sobreyectiva.

Veamos que respeta el orden, para ello sean $\bar{\mathfrak{b}}_1$ y $\bar{\mathfrak{b}}_2$ ideales de $A/\mathfrak{a}$ tales que $\bar{\mathfrak{b}}_1 \subseteq \bar{\mathfrak{b}}_2$. Veamos que $\Psi(\bar{\mathfrak{b}}_1) \subseteq \Psi(\bar{\mathfrak{b}}_2)$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Sea } x \in \Psi(\bar{\mathfrak{b}}_1) = \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}}_1) & \Rightarrow & \varphi(x) \in \bar{\mathfrak{b}}_1 \subseteq \bar{\mathfrak{b}}_2 \\ & \Rightarrow & \varphi(x) \in \bar{\mathfrak{b}}_2 \\ & \Rightarrow & x \in \varphi^{-1}(\bar{b}_2) \\ & \Rightarrow & x \in \Psi(\bar{\mathfrak{b}}_2) \end{array}$$

por lo que $\Psi(\bar{\mathfrak{b}}_1) \subseteq \Psi(\bar{\mathfrak{b}}_2)$.

1.3. Divisores de cero. Elementos nilpotentes. Unidades

Definición 1.3.1 *: Sea A un anillo. x es divisor de cero ssi $\exists y \neq 0$ en A tq $xy = 0$.*

Definición 1.3.2 *:A es Dominio Entero ssi no tiene divisores de cero y $1 \neq 0$.*

Definición 1.3.3 *:x es nilpotente ssi* $\exists n > 0$ *tq* $x^n = 0$.

Un elemento nilpotente es un divisor de cero (salvo si $A = 0$), pero no recíprocamente (en general).
Ejemplo: el elemento
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
es un divisor de cero ya que:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
pero para todo n
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 1.3.4 *:Una unidad en* A *es un elemeto que «divide 1», es decir, un elemento* x *tal que* $xy = 1$ *para algún* $y \in A$.

El elemento y está unívocamente determinado por x, y se escribe x^{-1}.
Las unidades en A forman un grupo abeliano (multiplicativo).

Los múltiplos ax de un elemento $x \in A$ forman un **ideal principal**, que se indica por (x) o Ax.
x es unidad $\Leftrightarrow (x) = A = (1)$.
El ideal *cero* (0) se acostumbra a indicar por 0.

Definición 1.3.5 *: Un cuerpo es un anillo* A *en el que* $1 \neq 0$ *y cada elemento no nulo es una unidad.*

Cada cuerpo es un dominio de integridad (pero no recíprocamente: $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo).

Proposición 1.3.1 *: Sea* $A \neq 0$ *un anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. A es un cuerpo;
2. los únicos ideales de A son 0 y (1);
3. cada homomorfismo de A en un anillo no nulo B es inyectivo.

Demostración.

1. $\Rightarrow$ 2.Si A es un cuerpo, sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A; $\mathfrak{a} \neq 0$
$\Rightarrow \exists x \in \mathfrak{a}$ tq x es unidad, tendremos que: $(x) \subseteq \mathfrak{a}$, por tanto $\mathfrak{a} = (1)$.

2. $\Rightarrow$ 3. Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Entonces $Ker\,(\varphi)$ es un ideal de A y $Ker\,(\varphi) \neq (1)$ pero por hipótesis los únicos ideales de A son 0 y (1)$\Rightarrow$ $Ker\,(\varphi) = 0$ por tanto φ es inyectiva.

3. $\Rightarrow$ 1.Supongamos que todo homomorfismo es inyectivo. Sea $x \in A$ y x no unidad, tenemos que $(x) \neq (1)$ entonces $A/(x)$ es un anillo diferente del anillo cero. Definamos $\varphi : A \to A/(x)$ por : $\varphi(y) = y + (x)$ entonces el $Ker(\varphi) = (x)$ pero como φ es inyectiva $\Rightarrow Ker(\varphi) = (x) = 0 \Rightarrow x = 0$

1.4. Ideales primos e ideales maximales

Definición 1.4.1 *:Un ideal $\mathfrak{p}$ en A es primo si $\mathfrak{p} \neq (1)$ y si $xy \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \mathfrak{p}$ o $y \in \mathfrak{p}$.*

Definición 1.4.2 *: Un ideal $\mathfrak{m}$ en A es maximal si $\mathfrak{m} \neq (1)$ y no existe ningún ideal $\mathfrak{a}$ tal que $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq (1)$.*

Se puede dar una definición equivalente: $\mathfrak{m}$ es maximal si $\mathfrak{m} \neq (1)$ y si
$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subset (1)$ entonces $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$ ó $\mathfrak{a} = (1)$, para cualquier ideal $\mathfrak{a}$ de A.

Esto equivale a decir:

1. $\mathfrak{p}$ es primo $\Leftrightarrow A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad;

2. $\mathfrak{m}$ es maximal $\Leftrightarrow A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo

Demostración:
1. $\mathfrak{p}$ es primo $\Leftrightarrow A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad.

Primero probemos que: $\mathfrak{p}$ es primo $\Rightarrow A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad. Para ello sea $\mathfrak{p}$ primo y $x + \mathfrak{p}$, $y + \mathfrak{p} \in A/\mathfrak{p}$ de modo que:

$$\begin{aligned} (x+\mathfrak{p})(y+\mathfrak{p}) &= \mathfrak{p} \\ xy + \mathfrak{p} &= \mathfrak{p} \end{aligned}$$

$\Rightarrow xy \in \mathfrak{p}$, como $\mathfrak{p}$ es primo tenemos que $x \in \mathfrak{p}$ o $y \in \mathfrak{p}$
$\Rightarrow x + \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ o $y + \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, por tanto $A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad.

Ahora probemos que: $A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad $\Rightarrow$ $\mathfrak{p}$ es primo.
Sean $x, y \in A$ de manera que $xy \in \mathfrak{p}$ entonces:

$$\begin{aligned} xy + \mathfrak{p} &= \mathfrak{p} \\ (x+\mathfrak{p})(y+\mathfrak{p}) &= \mathfrak{p} \end{aligned}$$

por ser $A/\mathfrak{p}$ dominio de integridad $\Rightarrow x + \mathfrak{p} = \mathfrak{p} \quad$ o $\quad y + \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$
$\Rightarrow x \in \mathfrak{p} \quad$ o $\quad y \in \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{p}$ es primo.

2. $\mathfrak{m}$ es maximal $\Leftrightarrow$ $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo.

Primero $\mathfrak{m}$ es maximal $\Rightarrow$ $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo. Supongamos $\mathfrak{m}$ maximal y sea $x + \mathfrak{m} \in A/\mathfrak{m}$ y $x + \mathfrak{m}$ diferente de cero, es decir $x + \mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}$ entonces $x \notin \mathfrak{m}$, tenemos que:
$\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m} + (x) \Rightarrow \mathfrak{m} + (x) = A = (1)$
$\Rightarrow \exists\ m \in \mathfrak{m},\ y \in A$ tq: $m + yx = 1$
$\Rightarrow yx - 1 = -m \in \mathfrak{m}$
$\Rightarrow yx + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m}$
$\Rightarrow (y+\mathfrak{m})(x+\mathfrak{m}) = 1 + \mathfrak{m} \in A/\mathfrak{m}$, es decir, todo elemento de $A/\mathfrak{m}$ diferente de $\mathfrak{m}$, tiene inverso multiplicativo $\Rightarrow$ $A/\mathfrak{m}$ es campo.

Ahora probemos que: $A/\mathfrak{m}$ es campo $\Rightarrow$ $\mathfrak{m}$ es maximal.
Supongamos que $\mathfrak{a}$ es ideal de A y $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{a}$
Sea $x \in \mathfrak{a}$, $x \notin \mathfrak{m} \Rightarrow x + \mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}$
$\Rightarrow \exists y + \mathfrak{m}$ tal que $(x + \mathfrak{m})(y + \mathfrak{m}) = 1 + \mathfrak{m}$
tenemos que $xy + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m} \Leftrightarrow xy - 1 \in \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a}$
$\Rightarrow xy - 1 \in \mathfrak{a}$ y como $x \in \mathfrak{a}$; $xy \in \mathfrak{a} \Rightarrow 1 \in \mathfrak{a}$.

Orden en A Un conjunto A es *parcialmete ordenado* si $\forall x, y, z \in A$ se cumple:

1. $x \leq x$
2. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
3. $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Cota Superior. Sea $B \subseteq A$, se dice que $a \in A$ es una cota superior de B si $a \geq b, \forall b \in B$

Cadena en A. El conjunto $C \subseteq A$ se llama *cadena* si dados $x, y \in C$ se cumple que $x \leq y$ ó $y \leq x$

Elemento maximal en A. Un elemento $m \in A$ es un elemento maximal si $\forall n \in A : m \leq n \Rightarrow m = n$

Lema de Zorn: Sea A un conjunto parcialmente ordenado. Si en A toda cadena tiene cota superior (en A) entonces A tiene al menos un elemento maximal.

Teorema 1.4.1 *.Cada anillo $A \neq 0$ tiene por lo menos un ideal maximal.*

Demostración

Sea $I = \{i : i < A\}$ el conjunto de todos los ideales de A distintos de (1). $I \neq \phi$ ya que $(0) \in I$; ahora tomemos una cadena en I.
Sea $\mathfrak{C}$ una cadena de ideales en I. Se tiene que $C_i, C_j \in \mathfrak{C} \Rightarrow C_i \subseteq C_j$ ó $C_j \subseteq C_i$.
Tomemos todos los ideales en $\mathfrak{C}$ y efectuemos la unión de estos:

$$J = \bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C$$

Vamos a probar que:
i) J es un ideal de A

ii) $J \in I$

i) J es un ideal de A. Veamos que J es subgrupo de A.

Sean $j_1, j_2 \in J$
$j_1 \in J \Rightarrow \exists C_{j_1} \in I \ / \ j_1 \in C_{j_1}$
$j_2 \in J \Rightarrow \exists C_{j_2} \in I \ / \ j_{\in} C_{j_2}$
Digamos que:
$C_{j_1} \subseteq C_{j_2}$
$\Rightarrow j_1 \in C_{j_2}$ y como $j_2 \in C_{j_2}$
$\Rightarrow j_1 - j_2 \in C_{j_2}$ y luego está en la unión porque está en alguno de ellos.
Entonces J es subgrupo de A.

Probemos que J es ideal, ahora tomemos $j_1 \in J$ y $a_1 \in A$
Ya que $j_1 \in J \Rightarrow \exists C_{j_1} \in I / j_1 \in C_{j_1}$ luego $a_1 j_1 \in C_{j_1} \subseteq J \Rightarrow a_1 j_1 \in J$, por tanto J es ideal de A.

ii) $J \in I$. Demostremos que $1 \notin J$. Si $1 \in J$, entonces estuviera en algunos de los elementos de $\mathfrak{C}$ lo que es contradictorio.Por tanto $J \in I$

Luego J es cota superior de la cadena, por el lema de Zorn hay elemento maximal en el anillo A

Corolario 1.4.1 . *Si $\mathfrak{a} \neq (1)$ es un ideal del anillo $A \neq 0$, en A existe un ideal maximal que contiene a $\mathfrak{a}$.*

Demostración
Sea $\Sigma = \{I \neq (1)/I < A, \mathfrak{a} \subseteq I\}$; $\Sigma \neq \phi$ porque $\mathfrak{a} \in \Sigma$.

Sea $\mathfrak{C}$ una cadena en Σ y sea $J = \bigcup_{T \in \mathfrak{C}} T$
J es ideal de A y $1 \notin J$, luego $J \in \Sigma$ y además $\forall T \in \mathfrak{C} : T \subseteq J$, luego $\mathfrak{a} \subseteq J$.
Por el lema de Zorn, en Σ hay elementos maximales
Por tanto existe al menos un ideal $\mathfrak{m}$ maximal que contiene al ideal $\mathfrak{a}$.

Otra Prueba: Tenemos que $A/\mathfrak{a} \neq 0$ ya que $\mathfrak{a} \neq (1)$ aplicando el teorema anterior en $A/\mathfrak{a}$ hay elementos maximales $\bar{\mathfrak{m}}$, por el teorema 1.1 existe $\varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{m}})$ ideal de A que contiene a $\mathfrak{a}$.

Corolario 1.4.2 . *Cada elemento de A que no es unidad está contenido en un ideal maximal.*

Demostración
Sea $x \in A$, x no es unidad entonces $(x) \neq (1)$, por el corolario 1.4.1, existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ que contiene a (x), entonces $x \in \mathfrak{m}$.

Definición 1.4.3 *Un anillo A que tiene exactamente un ideal maximal $\mathfrak{m}$ se denomina* ***anillo local****.*

Proposición 1.4.1 *.i) Sea A un anillo y $\mathfrak{m} \neq (1)$ un ideal de A tal que cada $x \in A - \mathfrak{m}$ es una unidad en A. Entonces A es un anillo local y $\mathfrak{m}$ su ideal maximal.*

ii) Sea A un anillo y $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de A tal que cada elemento de $1 + \mathfrak{m}$ (es decir, cada $1 + x$, donde $x \in \mathfrak{m}$) es una unidad en A. Entonces A es un anillo local.

Demostración.

i) Si y no es unidad, entonces hay un ideal maximal que lo contiene $\mathfrak{m}$.
Si existe $\mathfrak{a}$ tal que $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a} \subseteq (1)$ entonces existe $x \in \mathfrak{a}$ y $x \notin \mathfrak{m}$ luego x es unidad, entonces $(1) = (x) \subseteq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{a} = (1) = A$.
Como $\mathfrak{m}$ es maximal y todo elemento que no es unidad está en $\mathfrak{m}$, entonces $\mathfrak{m}$ es el único maximal de A.

ii)Sea $z \in A - \mathfrak{m}$ ya que $\mathfrak{m}$ es maximal $\mathfrak{m} \subsetneq (z) + \mathfrak{m}$ luego $(z) + \mathfrak{m} = A \Rightarrow \exists y \in A$ y $t \in \mathfrak{m}$ tq. $yz + t = 1$ luego $yz = 1 - t \in 1 + \mathfrak{m}$ entonces yz es unidad, por lo que $\exists r \in A$ tq $r(yz) = 1 \Rightarrow (ry)z = 1$, entonces z es una unidad por i) A es un anillo local.

1.4.1. Anillos de Boole

Definición 1.4.4 *Un anillo A es un anillo de Boole si $x^2 = x$ para cada $x \in A$.*

Proposición 1.4.2 *Sea A un anillo de Boole.*

1. $2x = 0 \ \forall x \in A$;
2. *cada ideal primo $\mathfrak{p}$ es maximal, y $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo con dos elementos;*
3. *cada ideal con generación finita en A es principal.*

Demostración

1. $2x = 0 \ \forall x \in A$
Tenemos que:

$$\begin{aligned} (x+x)^2 &= x+x \\ x^2 + 2x^2 + x^2 &= x+x \quad \text{pero } x^2 = x \\ x + 2x + x &= x+x \\ x + 2x + x - x - x &= 0 \\ 2x &= 0 \end{aligned}$$

2. Cada ideal primo $\mathfrak{p}$ es maximal, y $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo con dos elementos.

Como $\mathfrak{p}$ es primo $\Rightarrow A/\mathfrak{p}$ es dominio entero, tenemos que probar que $A/\mathfrak{p}$ es un campo para que $\mathfrak{p}$ sea maximal.
Sabemos que:

$$\begin{aligned} x^2 &= x \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

por lo que $x \in \mathfrak{p}$ ó $(x-1) \in \mathfrak{p}$.
Sea $x + \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}$, es decir,
$x \notin \mathfrak{p} \Rightarrow (x-1) \in \mathfrak{p}$
$\Rightarrow x + \mathfrak{p} = 1 + \mathfrak{p} \Rightarrow A/\mathfrak{p}$ tiene dos ideales 0 y $(1+\mathfrak{p})$ por lo que $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo $\Rightarrow \mathfrak{p}$ es maximal.

1.5. Nilradical y radical de Jacobson

Proposición 1.5.1 . *Sea A un anillo. Entonces el conjunto $\aleph$ de todos los elementos nilpotentes de A, es un ideal de A, y $A/\aleph$ no tiene ningún elemento nilpotente $\neq 0$.*

Demostración. Primero $\aleph \neq \phi$ ya que $0 \in \aleph$
Ahora probemos que $\aleph$ es subgrupo de A.
Sean $x, y \in \aleph$, se tendrá que existen $m, n \in N^+$ tales que $x^m = 0$ y $y^n = 0$, luego en $(x-y)^{m+n}$, al desarrollar el binomio todo elemento tiene además del respectivo coeficiente los productos de la forma $x^i y^j$ en donde $i + j = m + n$ y si $i < m$ por fuerza $j > n$ (o viceversa $j < n \Rightarrow i > m$). Luego será $x^i = 0$ ó $y^j = 0$ por lo que $x - y$ es nilpotente. Por tanto $\aleph$ es sugrupo de A.
Ahora sea $x \in \aleph$ y $a \in A$ entonces $\exists n > 0$ tal que $x^n = 0$ luego $(ax)^n = a^n x^n = 0 \Rightarrow ax \in \aleph$. Absorbe el producto por elementos de A.Por tanto $\aleph$ es un ideal de A.

Ahora probemos que: $A/\aleph$ no tiene ningún elemento nilpotente $\neq 0$.
Si $\bar{x} \in A/\aleph$ es tal que

$$(\bar{x})^n = \aleph$$

$\Rightarrow (x + \aleph)^n = \aleph$
$\Rightarrow x^n + \aleph = \aleph$
$\Rightarrow x^n \in \aleph \Rightarrow \exists m > 0 \, (x^n)^m = 0 \Rightarrow x \in \aleph$
Luego $\bar{x} = 0$.

El ideal $\aleph$ se denomina el *nilradical* de A.

Lema 1.5.1 *Si $f \in A$ es tal que $f^n \in \mathfrak{p}$: primo, entonces $f \in \mathfrak{p}$*

Demostración

Por inducción.
Para n=2, si $f^2 \in \mathfrak{p} \Rightarrow f \in \mathfrak{p}$
Supongamos que se cumple para $n-1$, es decir:

$$f^{n-1} \in \mathfrak{p} \Rightarrow f \in \mathfrak{p}$$

verifiquemos que se cumple para n.
Si $f^n \in \mathfrak{p} \Rightarrow f^{n-1}.f \in \mathfrak{p}$, ya que $\mathfrak{p}$ es primo, entonces $f^{n-1} \in \mathfrak{p}$ o $f \in \mathfrak{p}$, por lo que $f \in \mathfrak{p}$.

La siguiente proposición da una nueva definición de $\aleph$:

Proposición 1.5.2 *Si $\aleph$ es el nilradical de A entonces :*

$$\aleph = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}<A \\ \mathfrak{p}:primo}} \mathfrak{p}$$

Demostración

$i.\aleph \subseteq \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}<A \\ \mathfrak{p}:primo}} \mathfrak{p}$

Sea $f \in \aleph \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n = 0 \in \mathfrak{p}$; $\forall \mathfrak{p}$: primo y $\mathfrak{p} < A$, por el lema anterior $f \in \mathfrak{p}$,$\forall \mathfrak{p}$: primo, por lo que .

$$f \in \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}<A \\ \mathfrak{p}:primo}} \mathfrak{p}$$

$ii. \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}<A \\ \mathfrak{p}:primo}} \mathfrak{p} \subseteq \aleph$

Probaremos que:

$$\forall f \in \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}<A \\ \mathfrak{p}:primo}} \mathfrak{p} \Rightarrow f \quad \text{es nilpotente}$$

lo que es equivalente a:

$$f \ \text{ no nilpotente } \Rightarrow f \notin \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}<A \\ \mathfrak{p}:primo}} \mathfrak{p}$$

Sea

$$i = \{\mathfrak{a} \;\; ideal / n > 0 \Rightarrow f^n \notin \mathfrak{a}\} \;;$$

i es no vacío, ya que i continene al ideal 0(ya que si f no es nilpotente $\forall n > 0, f^n \neq 0 \Rightarrow f^n \notin 0$).
Ahora sea C una cadena en i

$$J = \bigcup_{C \in \boldsymbol{C}} C$$

$f^n \notin J$ puesto $f^n \notin \boldsymbol{C}$
$\Rightarrow J$ es una cota superior de la cadena por el lema de Zorn hay un elemento maximal $(\exists \mathfrak{P})$.
Probaremos que $\mathfrak{P}$ es primo.
Como $\mathfrak{P} \in i$ y sean $x, y \notin \mathfrak{P}$ tenemos que $\mathfrak{P} + (x) \notin i$ y $\mathfrak{P} + (y) \notin i$ ya que $\mathfrak{P} \subsetneq \mathfrak{P} + (x)$, $\mathfrak{P} \subsetneq \mathfrak{P} + (y)$ luego $\exists n, m \in N$ tales que $f^n \in \mathfrak{P} + (x)$ y $f^m \in \mathfrak{P} + (y)$
$\Rightarrow f^{m+n} \in \mathfrak{P} + (xy)$
$\Rightarrow \mathfrak{P} + (xy) \notin i$
$\Rightarrow xy \notin \mathfrak{P}$
por tanto $\mathfrak{P}$ es primo.
Ya que $\mathfrak{P}$ es primo y $\mathfrak{P} \in i$

$$\Rightarrow f^n \notin \mathfrak{P}$$

$$\Rightarrow f^n \notin \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} < A \\ \mathfrak{p} : primo}} \mathfrak{p}$$

De i) y ii) obtenemos la igualdad

$$\aleph = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} < A \\ \mathfrak{p} : primo}} \mathfrak{p}$$

El *radical de Jacobson* $\Re$ de A se define como la intersección de todos los ideales maximales de A. Se puede caracterizar como sigue:

Proposición 1.5.3 . *$x \in \Re \Leftrightarrow 1 - xy$ es una unidad en A para todo $y \in A$.*

Demostración:
i)$x \in \Re \Rightarrow 1 - xy$ *es una unidad en* A *para todo* $y \in A$
Sea $x \in \Re$, y supóngase que $1 - xy$ no es unidad, $\exists \mathfrak{m}$ maximal tal que

$1 - xy \in \mathfrak{m}$(por el corolario 1.5) y como $x \in \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{m}$
$\Rightarrow xy \in \mathfrak{m} \Rightarrow 1 \in \mathfrak{m}$ lo que es contradictorio.
$\Rightarrow 1 - xy$ es unidad.

ii)$1 - xy$ *es una unidad en* A *para todo* $y \in A \Rightarrow x \in \mathfrak{R}$, lo que equivale a probar que: $x \notin \mathfrak{R} \Rightarrow 1 - tx$ no es unidad para algún $t \in A$
Sea $x \notin \mathfrak{R} \Rightarrow$ existe $\mathfrak{m}$ maximal tq $x \notin \mathfrak{m}$ entonces $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m} + (x) = (1)$
$\Rightarrow \exists m \in \mathfrak{m}$ y $t \in A$ tal que:
$m + tx = 1$
$\Rightarrow 1 - tx \in \mathfrak{m}$
$\Rightarrow 1 - tx$ no es unidad para algún $t \in A$

1.6. Operaciones con ideales

Suma Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ son ideales en un anillo A, su *suma* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ es el conjunto de todos los $x + y$ donde $x \in \mathfrak{a}$ e $y \in \mathfrak{b}$. Es el menor ideal que contiene $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$. De manera más general, se puede definir la suma $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_\mathfrak{i}$ de una familia cualquiera (que puede ser infinita) de ideales $\mathfrak{a}_\mathfrak{i}$ de A; sus elementos son todas las sumas $\sum x_i$, donde $x_i \in \mathfrak{a}_\mathfrak{i}$ para todo $i \in I$ y las x_i son casi todas cero (es decir, todas salvo un conjunto finito).Es el menor ideal de A que contiene todos los ideales $\mathfrak{a}_\mathfrak{i}$.

Intersección. La intersección de una familia cualquiera $(\mathfrak{a}_\mathfrak{i})_{i \in I}$ de ideales es un ideal. Así los ideales de A forman un retículo [1] completo respecto a la inclusión.

Producto. El producto de dos ideales $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ en A es el ideal $\mathfrak{ab}$ *generado* por todos los productos xy, donde $x \in \mathfrak{a}$ e $y \in \mathfrak{b}$. Es el conjunto de todas las suma finitas $\sum x_i y_i$ donde cada $x_i \in \mathfrak{a}$ y cada $y_i \in \mathfrak{b}$ (es claro que $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{b}$). Análogamente se define el producto de cualquier familia *finita* de ideales. En particular las potencias $\mathfrak{a}^\mathfrak{n}(n > 0)$es el ideal generado por todos los productos $x_1 x_2 ... x_n$ en los que cada factor x_i pertenece a $\mathfrak{a}$.

Las tres operaciones que se han definido son todas conmutativas y asociativas. Se tiene también la *ley distributiva*

[1] Un *retículo* es un conjunto parcialmente ordenado $\langle L, \leq \rangle$ en el que todo par de elementos $a, b \in L$ tiene una máxima cota inferior y una mínima cota superior.

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

Prueba:
Sean $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ideales, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) &= \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \;/ x_i \in \mathfrak{a},\ y_i \in (\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\right\} \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\left(v_i+w_i\right) \;/ x_i \in \mathfrak{a},\ v_i \in \mathfrak{b},\ w_i \in \mathfrak{c}\right\} \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i v_i + \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \;/ x_i \in \mathfrak{a},\ v_i \in \mathfrak{b},\ w_i \in \mathfrak{c}\right\}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}) &= \{x+y \;/ x \in \mathfrak{a}\mathfrak{b},\ y \in \mathfrak{a}\mathfrak{c}\} \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n} v_i w_i + \sum_{i=1}^{n} v_i' z_i \;/ v_i, v_i' \in \mathfrak{a},\ w_i \in \mathfrak{b},\ z_i \in \mathfrak{c}\right\}
\end{aligned}$$

por lo que para cualquier elemento de $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ se tiene
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i v_i + \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, entonces $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}$
Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i\left(b_i+0\right) \\
\sum_{i=1}^{n} a_i' b_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i'\left(0+c_i\right)
\end{aligned}$$

por lo que:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\left(b_i+0\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i'\left(0+c_i\right) \;/\; a_i, a_i' \in \mathfrak{a}; b_i, 0 \in \mathfrak{b}; c_i, 0 \in \mathfrak{c}\right\}$$

por lo tanto
$\sum_{i=1}^{n} a_i\left(b_i+0\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i'\left(0+c_i\right) \in \mathfrak{a}\left(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}\right)$
Entonces $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}$.

Definición 1.6.1 . *Dos ideales $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ se dice que son primos entre sí (o comaximales) si $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=(1)$.*

Para ideales primos entre sí se tiene $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Evidentemente dos ideales $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ son primos entre sí, si y sólo si existen $x\in\mathfrak{a}$ e $y\in\mathfrak{b}$ tales que $x+y=1$.

Definición 1.6.2 *Sea $\mathfrak{a}$ un ideal del anillo A y $a,b\in A$. Diremos que el elemento a es* ***congruente*** *con b módulo $\mathfrak{a}$ (denotado por: $a\equiv b \pmod{\mathfrak{a}}$) si $a-b\in\mathfrak{a}$. Así*

$$a\equiv b \pmod{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow a-b\in\mathfrak{a} \Leftrightarrow a+\mathfrak{a}=b+\mathfrak{a}$$

Definición 1.6.3 . *Sean $A_1,...,A_n$ anillos. Su producto directo*

$$A=\prod_{i=1}^{n} A_i$$

es el conjunto de todas las sucesiones $x=(x_1,...,x_n)$ con $x_i\in A_i(1\leq i\leq n)$ y la suma y producto componente a componente. A es un anillo conmutativo con elemento unidad $(1,1,...,1)$. Se tienen las proyecciones $p_i: A\to A_i$ definidas por $p_i(x)=x_i$ son homomorfismo de anillos.

Sea A un anillo y $\mathfrak{a}_1,...,\mathfrak{a}_n$ ideales de A. Se define un homorfismo

$$\phi: A\to\prod_{i=1}^{n}(A/\mathfrak{a}_i)$$

por la regla $\phi(x)=(x+\mathfrak{a}_1,...,x+\mathfrak{a}_n.)$

Proposición 1.6.1

1. *Si $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_j$ son primos entre sí cuando $i\neq j$, entonces $\prod\mathfrak{a}_i=\cap\mathfrak{a}_i$.*
2. *ϕ es suprayectiva $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_j$ son primos entre sí cuando $i\neq j$*
3. *ϕ es inyectiva $\Longleftrightarrow \cap\mathfrak{a}_i=(0)$.*

Demostración
1. Por inducción respecto a n.
Para $n=2$ sabemos que si $\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2$ son primos entre sí cuando $i\neq j$ entonces $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}_1\bigcap\mathfrak{a}_2$

supongamos cierto para $n-1$:
$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_{n-1}$ y sea $\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i$.
Puesto que $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_n = (1)$; $(1 \leq i \leq n-1)$ tenemos que $x_i + y_i = 1$; $x_i \in \mathfrak{a}_i$ $y_i \in \mathfrak{a}_n$ entonces $x_i = 1 - y_i$
por lo que

$$\begin{aligned} x_1.x_2...x_{n-1} &= (1-y_1)(1-y_2)...(1-y_{n-1}) \\ &= 1-k; k \in \mathfrak{a}_n \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} x_1.x_2...x_{n-1} + k &= 1 \\ (b) + (a_n) &= 1 \\ \mathfrak{b} + \mathfrak{a}_n &= 1 \end{aligned}$$

la ultima igualdad implica:

$$\mathfrak{b}.\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_n$$

pero

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}.\mathfrak{a}_n &= \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i \bigcap \mathfrak{a}_n \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}.\mathfrak{a}_n &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i \right) \mathfrak{a}_n \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \end{aligned}$$

obtenemos la conclusión deseada.

2. Primero probaremos que si ϕ es sobreyectiva entonces $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j$ son primos

entre sí .
Si ϕ es sobreyectiva entonces existe $x \in A$ tal que:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= (0,0,...,1,...,0) \text{ 1 en la i-esima posición y 0 para } j \neq i \\ &= (0+\mathfrak{a}_1, 0+\mathfrak{a}_2, ..., 1+\mathfrak{a}_i, ..., 0+\mathfrak{a}_n) \\ &= (x+\mathfrak{a}_1, x+\mathfrak{a}_2, ..., x+\mathfrak{a}_n) \text{ por definición de la función.}\end{aligned}$$

tenemos que:
$x+\mathfrak{a}_1 = 0+\mathfrak{a}_1 \rightarrow x \equiv 0(mod \ \ \mathfrak{a}_1) \Rightarrow x \in \mathfrak{a}_1$
.
.
.
$x+\mathfrak{a}_i = 1+\mathfrak{a}_i \rightarrow x \equiv 1(mod \ \ \mathfrak{a}_i) \Rightarrow x-1 \in \mathfrak{a}_i$
$x+\mathfrak{a}_{i+1} = 0+\mathfrak{a}_{i+1} \rightarrow x \equiv 0(mod \ \ \mathfrak{a}_{i+1}) \Rightarrow x \in \mathfrak{a}_{i+1}$
.
.
.
$x+\mathfrak{a}_n = 0+\mathfrak{a}_n \rightarrow x \equiv 0(mod \ \ \mathfrak{a}_n) \Rightarrow x \in \mathfrak{a}_n$

entonces:

$$1 = (1-x)+x \in \mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j \Rightarrow a_i \ \ y \ \ a_j \text{ son primos relativos.}$$

Ahora probaremos que si $\mathfrak{a}_i$ y $\mathfrak{a}_j$ son primos relativos entre sí entonces existe $x \in A$ tal que $\phi(x) = (0,0,...,1,...,0)$ con 1 en la i-ésima posición.
Como $\mathfrak{a}_i$ y $\mathfrak{a}_j$ son primos relativos entonces:

$$\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = (1)$$

$$\Rightarrow u_i + v_j = 1; u_i \in \mathfrak{a}_1 \text{ y } v_j \in \mathfrak{a}_j$$

sea : $x = \prod_{k=1_{k\neq i}}^{n} v_k \Rightarrow x = \prod (1-u_k) = 1-U; U \in \mathfrak{a}_i$
$\Rightarrow x \equiv 1(mod \ \ a_i)$
y también:
$x = \prod_{k=1_{k\neq i}}^{n} v_k = V; V \in \mathfrak{a}_j \Rightarrow x \equiv 0 \ \ (mod \mathfrak{a}_j)$
$\Rightarrow \phi(x) = (0,0,...,1,...,0)$ con 1 en la i-ésima posición.

3. ϕ es inyectiva $\Leftrightarrow \cap\mathfrak{a_i} = (0)$
Sea $x \in Ker\,(\phi)$ entonces:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 0\\ &= (x+\mathfrak{a_1}, x+\mathfrak{a_2}, ..., x+\mathfrak{a_n})\\ &= (\mathfrak{a_1}, \mathfrak{a_2}, ..., \mathfrak{a_n})\end{aligned}$$

$\Rightarrow x \in \cap\mathfrak{a_i}$
$\Rightarrow Ker\,(\phi) \subseteq \cap\mathfrak{a_i}$.

Ahora sea $x \in \cap\mathfrak{a_i}$

$$\begin{aligned}\phi(x) &= (x+\mathfrak{a_1}, x+\mathfrak{a_2}, ..., x+\mathfrak{a_n})\\ &= (\mathfrak{a_1}, \mathfrak{a_2}, ..., \mathfrak{a_n})\\ &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow x \in Ker\,(\phi)$
$\Rightarrow \cap a_i \subseteq Ker\phi$.
tenemos entonces:

$$Ker\,(\phi) = \cap\mathfrak{a_i}$$

pero sabemos que:

$$\phi \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow ker\,(\phi) = \{0\}$$

de ahí que:

$$\phi \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow \cap\mathfrak{a_i} = (0)$$

Proposición 1.6.2 . *i)Sean $\mathfrak{p_1}, ..., \mathfrak{p_n}$ ideales primos y sea $\mathfrak{a}$ un ideal contenido en $\bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{p_i}$. Entonces $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p_i}$, para algún i.*

ii) Sean $\mathfrak{a_1}, ..., \mathfrak{a_n}$ ideales y sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo que contiene $\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{a_i}$. Entonces $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a_i}$ para algún i. Si $\mathfrak{p} = \bigcap\mathfrak{a_i}$ entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{a_i}$ para algún i.

Demostración.
i) Por inducción respecto a n en la forma

$$\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p_i}\ \ (1 \leq i \leq n) \Rightarrow \mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{p_i}$$

Para $n = 1$

$i = 1 \Rightarrow \mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}_1 \Rightarrow \mathfrak{a} \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{1} \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_1$.

supongamos que se cumple para $n-1$,$n > 1$.

$$\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}_i \ (1 \leq i \leq n-1) \Rightarrow \mathfrak{a} \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathfrak{p}_i$$

$\Rightarrow$ para cada i $\exists x_i \in \mathfrak{a}$ tal que $x_i \notin \mathfrak{p}_j$ para $j \neq i$.
$\forall i$ sea $\mathfrak{p}_j, i \neq j, n-1$ ideales, como $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}_j, \forall i \neq j$
$\Rightarrow \exists ! x_i \in \mathfrak{a}$ y $x_i \notin \mathfrak{p}_j, i \neq j$

$$\begin{aligned} \text{Si } \ x_i \notin \mathfrak{p}_i \quad &\Rightarrow \quad x_i \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \\ &\Rightarrow \quad \mathfrak{a} \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \end{aligned}$$

Si para algún $x_i \notin \mathfrak{p}_j, i \neq j$, ya está demostrado.
Si no, entonces $x_i \in \mathfrak{p}_i, \forall i$, considérese el elemento
$y = \sum_{i=1}^{n} x_1.x_2...x_{i-1}x_{i+1}x_{i+2}...x_n$ tenemos que:
$x_1 \in \mathfrak{p}_1, x_1 \notin \mathfrak{p}_j, j \neq 1$
$x_2 \in \mathfrak{p}_2, x_2 \notin \mathfrak{p}_j, j \neq 2$
...
$x_i \in \mathfrak{p}_1, x_i \notin \mathfrak{p}_j, j \neq i$
por lo que $y \in \mathfrak{a}$ y $y \notin \mathfrak{p}_i$ pot tanto $\mathfrak{a} \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$

ii) supongamos que $\mathfrak{a}_i \nsubseteq \mathfrak{p} \ \forall i$, entonces $\exists x_i \in \mathfrak{a}_i$ tal que $x_i \notin \mathfrak{p} \ \ (1 \leq i \leq n)$
Sea $y = \prod x_i = x_1 \times x_2 \times ... \times x_n \in \prod \mathfrak{a}_i \subseteq \cap \mathfrak{a}_i$ pero $\prod x_i \notin p$
$\Rightarrow \mathfrak{p} \nsupseteq \cap \mathfrak{a}_i$.

Finalmente si $\mathfrak{p} = \cap \mathfrak{a}_i$, $\ \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a}_i \ \forall i$, pero también $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_j$ para algún j, por lo tanto $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_j$ para algún j.

Teorema 1.6.1 *Teorema Chino del resto. Sean $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, ..., \mathfrak{a}_n$ ideales de A tales que $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = A$, $i \neq j$. Entonces, dados $b_1, b_2, ..., b_n \in A$ existe $r \in A$ tal que $r \equiv b_i (mod \ \ \mathfrak{a}_i)$ para cada $i \leq i \leq n$*

Demostración.

Consideremos la relación:
$\mathfrak{a}_\mathfrak{i} + \mathfrak{a}_\mathfrak{j} = A \Rightarrow 1 = x_i + y_j,\ \ x_i \in \mathfrak{a}_\mathfrak{i}, y_i \in \mathfrak{a}_\mathfrak{j}$, por lo que:

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{j=1}^{n}(x_i + y_j)\,,\ \ i \neq j \\ &= (x_i + y_1)(x_i + y_2)...(x_i + y_{i-1})(x_i + y_{i+1})...(x_i + y_n) \\ &= U + y_1 y_2 .. y_{i-1} y_{i+1} ... y_n \in \mathfrak{a}_\mathfrak{i} + \prod_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_j,\ \ i \neq j \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \exists z_i \in A$ tal que $z_i - 1 \in \mathfrak{a}_\mathfrak{i}$ y $z_i - 0 \in \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{a}_\mathfrak{j},\ \ 1 \leq j \leq n, i \neq j$
$\Rightarrow z_i - 1 \in \mathfrak{a}_\mathfrak{i}$ y $z_i \in \mathfrak{a}_\mathfrak{j}$, $\forall i \neq j$.
Entonces el elemento $r = b_1 z_1 + b_2 z_2 + ... + b_n z_n$ cumple que:

$$\begin{aligned} r - b_i &= b_1 z_1 + b_2 z_2 + ... + z_i b_i + ... + b_n z_n - b_i \\ &= \underbrace{b_1 z_1}_{\in \mathfrak{a}_\mathfrak{i}} + \underbrace{b_2 z_2}_{\in \mathfrak{a}_\mathfrak{i}} + ... + \underbrace{b_i(z_i - 1)}_{\in \mathfrak{a}_\mathfrak{i}} + ... + \underbrace{b_n z_n}_{\in \mathfrak{a}_\mathfrak{i}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow r - b_i \in \mathfrak{a}_\mathfrak{i}, \forall i \neq j$
$\Rightarrow r \equiv b_i (mod\ \ \mathfrak{a}_\mathfrak{i})$.

Corolario 1.6.1 *Sean* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, ..., \mathfrak{a}_\mathfrak{n}$ *ideales de* A *tales que* $\mathfrak{a}_\mathfrak{i} + \mathfrak{a}_\mathfrak{j} = A$, $i \neq j$. *Entonces:*

$$A/(\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_\mathfrak{i}) \cong \prod_{i=1}^{n} (A/\mathfrak{a}_\mathfrak{i})$$

Demostración

Tenemos el homomorfismo: $\phi : A \rightarrow \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(A/\mathfrak{a}_\mathfrak{i})$, definido por: $\phi\,(x) = (x + \mathfrak{a}_1, ..., x + \mathfrak{a}_\mathfrak{n}.)$
donde, $Ker(\phi) = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap ... \cap \mathfrak{a}_\mathfrak{n}$, por lo que ϕ inuduce el homomorfismo $\varphi : A/(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_\mathfrak{i}) \rightarrow \prod_{i=1}^{n}(A/\mathfrak{a}_\mathfrak{i})$, definido por: $\varphi(x + \cap \mathfrak{a}_\mathfrak{i}) = (x + \mathfrak{a}_1, x + \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_\mathfrak{n})$,
veamos si φ es sobreyectiva.
Sea $(b_1 + \mathfrak{a}_1, b_2 + \mathfrak{a}_2, ..., b_n + \mathfrak{a}_\mathfrak{n}) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(A/\mathfrak{a}_\mathfrak{i})$, por el teorema anterior existe

$r \in A$ tal que $r \equiv b_i (mod\ \mathfrak{a_i})$ para todo i. Así,

$$\begin{aligned} \varphi(r + \cap \mathfrak{a_i}) &= (r + \mathfrak{a_1}, r + \mathfrak{a_2}, ..., r + \mathfrak{a_n}) \\ &= (b_1 + \mathfrak{a_1}, b_2 + \mathfrak{a_2}, ..., b_n + \mathfrak{a_n}) \end{aligned}$$

por lo que φ es sobreyectiva, aplicando el primer teorema de ismomorfía [2] tenemos que: $A/(\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a_i}) \cong \prod_{i=1}^{n} (A/\mathfrak{a_i})$.

Definición 1.6.4 . *Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ son ideales en el anillo A, llamaremos ideal cociente al conjunto*

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \{x \in A : x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$$

que es un ideal. En particular $(0 : \mathfrak{b})$ se denomina el *anulador* de $\mathfrak{b}$ y se indica por $Ann(\mathfrak{b})$: es el conjunto de todos los $x \in A$ tales que $x\mathfrak{b} = 0$. Con esta notación el conjunto de todos los divisores de cero en A es

$$D = \bigcup_{x \neq 0} Ann(x).$$

Propiedades.

i) $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$

ii)$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$

iii)$((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{bc}) = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b})$

iv) $\left(\bigcap_i \mathfrak{a_i} : \mathfrak{b}\right) = \bigcap_i (\mathfrak{a_i} : \mathfrak{b})$

v) $\left(\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b_i}\right) = \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b_i})$

Prueba.

i) $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$

Sabemos que: $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \{x \in A : x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$ y $x\mathfrak{b} = \{xy : y \in \mathfrak{b}\}$
Sea $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{b} \Rightarrow xy \in \mathfrak{a}$ por lo que $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.

ii)$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$

[2]Si $f : A \to B$ es un homomorfismo de anillos, entonces f induce un isomorfimo $A/Ker(f) \cong Imf$

Sabemos que $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\mathfrak{b}=\{\sum_i x_iy_i : x_i\in(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\wedge y_i\in\mathfrak{b}\}$
Es suficiente probar que para xy con $x\in(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\wedge y\in\mathfrak{b}$, $xy\in\mathfrak{a}$
Si $x\in(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\wedge\forall y\in\mathfrak{b}\Rightarrow xy\in\mathfrak{a}$, entonces para cualquier $\sum_i x_iy_i\in\mathfrak{a}$

iii)$((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})=((\mathfrak{a}:\mathfrak{c}):\mathfrak{b})$

Probaremos primero que $((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})$

a)Sea $x\in((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})\Rightarrow(x\mathfrak{c})\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$, entonces $\forall\ c\in\mathfrak{c}$, $b\in\mathfrak{b}$, $(xc)b\in\mathfrak{a}$ ya que estamos trabajando con anillos conmutativos tenemos que
$x(bc)\in\mathfrak{a}$
$\Rightarrow x\in(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})$
$\Rightarrow((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})\subseteq(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})$

b)sea $x\in(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})=\{x\in A/x(\mathfrak{b}\mathfrak{c})\subseteq\mathfrak{a}\}$ entonces $\forall b\in\mathfrak{b}\ \wedge\ c\in\mathfrak{c}$, $x(bc)\in\mathfrak{a}$
$\Rightarrow(xc)b\in\mathfrak{a}$
$\Rightarrow xc\in(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$
$\Rightarrow x\in((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})$
$\Rightarrow(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})\subseteq((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})$.
De a) y b) obtenemos $((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})$.

Ahora probemos $((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})=((\mathfrak{a}:\mathfrak{c}):\mathfrak{b})$

c) Sea $x\in((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})$, entonces $\forall c\in\mathfrak{c}\ \wedge\ b\in\mathfrak{b}$ tenemos
$(xc)b\in\mathfrak{a}$
$\Rightarrow(xb)c\in\mathfrak{a}$
$\Rightarrow xb\in(\mathfrak{a}:\mathfrak{c})$
$\Rightarrow x\in((\mathfrak{a}:\mathfrak{c}):\mathfrak{b})$
$\Rightarrow((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})\subseteq((\mathfrak{a}:\mathfrak{c}):\mathfrak{b})$

d)Sea $x\in((\mathfrak{a}:\mathfrak{c}):\mathfrak{b})$ entonces $\forall c\in\mathfrak{c}\ \wedge\ b\in\mathfrak{b}$ tenemos $(xb)c\in\mathfrak{a}$
$\Rightarrow(xc)b\in\mathfrak{a}\Rightarrow xc\in(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\Rightarrow x\in((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})$
por lo que $((\mathfrak{a}:\mathfrak{c}):\mathfrak{b})\subseteq((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})$

iv) $\left(\bigcap_i\mathfrak{a}_\mathfrak{i}:\mathfrak{b}\right)=\bigcap_i(\mathfrak{a}_\mathfrak{i}:\mathfrak{b})$

Nótese que:

$$\begin{aligned}(\cap_i\mathfrak{a}_\mathfrak{i}:\mathfrak{b}) &= \{x\in A:\ x\mathfrak{b}\subseteq\cap_i\mathfrak{a}_\mathfrak{i}\}\\ \cap_i(\mathfrak{a}_\mathfrak{i}:\mathfrak{b}) &= \cap_i\{x\in A:\ x\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}_\mathfrak{i}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sea } x \in (\cap_i \mathfrak{a_i} : \mathfrak{b}) &\Leftrightarrow x\mathfrak{b} \subseteq \cap_i \mathfrak{a_i} \\
&\Leftrightarrow x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a_i}, \ \ \forall i \\
&\Leftrightarrow x \in (\mathfrak{a_i} : \mathfrak{b}), \ \ \forall i \\
&\Leftrightarrow x \in \cap_i (\mathfrak{a_i} : \mathfrak{b})
\end{aligned}$$

v) $\left(\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b_i}\right) = \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b_i})$

$$\begin{aligned}
\text{Sea } x \in \left(\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b_i}\right) &\Rightarrow x \sum_i \mathfrak{b_i} \subseteq \mathfrak{a} \\
&\Rightarrow x(b_1 + b_2 + ... + b_n) \in \mathfrak{a} \ \forall \sum_{i=1}^{n} b_i \in \sum_i \mathfrak{b_i} \\
&\Rightarrow (xb_1 + xb_2 + ... + xb_n) \in \mathfrak{a}
\end{aligned}$$

Pero $\forall j, \ \ \forall b_j \in \mathfrak{b_j} \subseteq \sum_i \mathfrak{b_i}$ tendremos que:

$$\begin{aligned}
xb_j \in a &\Rightarrow x\mathfrak{b_j} \subseteq a \\
&\Rightarrow x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b_j}), \forall i \\
&\Rightarrow x \in \cap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b_i})
\end{aligned}$$

por lo que $(\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b_i}) \subseteq \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b_i})$

$$\begin{aligned}
\text{Ahora sea } x \in \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b_i}) &\Rightarrow x\mathfrak{b_i} \subseteq \mathfrak{a}, \ \ \forall i \\
&\Rightarrow \forall i \ \ \wedge \ \ \forall b_i \in \mathfrak{b_i}, \ \ xb_i \in \mathfrak{a} \\
&\Rightarrow \forall \sum_{i=1}^{n} b_i \in \sum_i \mathfrak{b_i}, x \sum_{i=1}^{n} b_i \in \mathfrak{a} \\
&\Rightarrow x \sum_i \mathfrak{b_i} \subseteq \mathfrak{a} \\
&\Rightarrow x \in (\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b_i})
\end{aligned}$$

por lo que $\bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b_i}) \subseteq (\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b_i})$

Definición 1.6.5 . *Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A, el radical de $\mathfrak{a}$ es*

$$r(\mathfrak{a}) = \{x \in A : x^n \in \mathfrak{a} \text{ para algún } n > 0\}$$

El radical de $\mathfrak{a}$ es un ideal de A, ya que:

Si $\varphi : A :\to A/\mathfrak{a}$ es el homomorfismo canónico, entonces:

$$\aleph_{A/\mathfrak{a}} = \{x + \mathfrak{a} / \ \exists n > 0 \ tq. \ (x + \mathfrak{a})^n = \mathfrak{a}\}$$

pero

$$\begin{aligned} (x + \mathfrak{a})^n = \mathfrak{a} &\Leftrightarrow x^n + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \\ &\Leftrightarrow x^n \in \mathfrak{a} \\ &\Leftrightarrow x \in r(\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\aleph_{A/\mathfrak{a}}) &= \left\{x \in A / \ \varphi(x) \in \aleph_{A/\mathfrak{a}}\right\} \\ &= \left\{x \in A / \ x + \mathfrak{a} \in \aleph_{A/\mathfrak{a}}\right\} \\ &= \{x \in \mathfrak{a} / \ x^n \in \mathfrak{a}\} \\ &= r(\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

ya que $\aleph_{A/\mathfrak{a}}$ es un ideal, por el teorema (1.2.1) $r(\mathfrak{a})$ es un ideal de A.

Propiedades

i)$\mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a})$

ii)$r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$

iii)$r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$

iv)$r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$

v)$r(\mathfrak{a}) = (1) \Leftrightarrow \mathfrak{a} = (1)$

vi)si $\mathfrak{p}$ es primo, $r(\mathfrak{p}^\mathfrak{n}) = \mathfrak{p}$ para todo $n > 0$.

Demostración

i)$\mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a})$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in \mathfrak{a} &\Rightarrow x^1 \in \mathfrak{a} \\ &\Rightarrow x \in r(\mathfrak{a}) \\ &\Rightarrow a \subseteq r(\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

ii)$r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$

Por i) tenemos que $r(\mathfrak{a}) \subseteq r(r(\mathfrak{a}))$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in r(r(\mathfrak{a})) &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ tq. \ x^n \in r(\mathfrak{a}) \\ &\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \ tq. \ (x^n)^m \in \mathfrak{a} \\ &\Rightarrow x \in r(\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

por lo que $r(r(\mathfrak{a})) \subseteq r(\mathfrak{a})$

iii)$r(\mathfrak{ab}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$

1. $r(\mathfrak{ab}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in r(\mathfrak{ab}) &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ tq. \ x^n \in \mathfrak{ab} \\ &\Rightarrow x^n \in \mathfrak{a} \text{ y } x^n \in \mathfrak{b} \\ &\Rightarrow x \in r(\mathfrak{a}) \text{ y } x \in r(\mathfrak{b}) \\ &\Rightarrow x \in r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b}) \end{aligned}$$

por lo que $r(\mathfrak{ab}) \subseteq r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b}) &\Rightarrow x \in r(\mathfrak{a}) \text{ y } x \in r(\mathfrak{b}) \\ &\Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N} \text{ tales que } x^n \in \mathfrak{a} \text{ y } x^m \in \mathfrak{b} \\ &\Rightarrow x^n x^m \in \mathfrak{a} \text{ y } x^n x^m \in \mathfrak{b} \\ &\Rightarrow x^{n+m} \in \mathfrak{ab} \\ &\Rightarrow x \in r(\mathfrak{ab}) \end{aligned}$$

por lo que $r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b}) \subseteq r(\mathfrak{ab})$.

2.$r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b}) &\Rightarrow x \in r(\mathfrak{a}) \text{ y } x \in r(\mathfrak{b}) \\ &\Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N} \text{ tales que } x^n \in \mathfrak{a} \text{ y } x^m \in \mathfrak{b} \\ &\Rightarrow x^n x^m \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \\ &\Rightarrow x \in r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \end{aligned}$$

por lo que $r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b}) \subseteq r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ tq. \ x^n \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \\ &\Rightarrow x^n \in \mathfrak{a} \text{ y } x^n \in \mathfrak{b} \\ &\Rightarrow x \in r(\mathfrak{a}) \text{ y } x \in r(\mathfrak{b}) \\ &\Rightarrow x \in r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b}) \end{aligned}$$

por lo que $r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$

iv)$r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$

Sabemos que $\mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a})$ y $\mathfrak{b} \subseteq r(\mathfrak{b})$ entonces $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \subseteq r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b})$, luego por $i)$ $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subseteq r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$

Sea $x \in r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b})) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ $tq.$ $x^n \in r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b})$
$\Rightarrow x^n = y + z$ con $y \in r(\mathfrak{a})$ y $z \in r(\mathfrak{b})$ por lo que $\exists m, t \in \mathbb{N}$ tales que $y^m \in \mathfrak{a}$ y $z^t \in \mathfrak{b}$.
Pero
$(y+z)^{m+t} = y^{m+t} + C_1 y^{m+t-1} z + C_2 y^{m+t-2} z^2 + ... + C_t y^m z^t + C_{t+1} y^{m-1} z^{t+1} + C_{t+2} y^{m-2} z^{t+2} + ... + C_{t+m} z^{t+m}$
y $y^{m+t} + C_1 y^{m+t-1} z + C_2 y^{m+t-2} z^2 + ... + C_t y^m z^t \in \mathfrak{a}$, $C_{t+1} y^{m-1} z^{t+1} + C_{t+2} y^{m-2} z^{t+2} + ... + C_{t+m} z^{t+m} \in \mathfrak{b}$
entonces $(y+z)^{m+t} \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \Rightarrow (x^n)^{m+t} = (y+z)^{m+t} \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$
$\Rightarrow x \in r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$
por lo que $r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b})) \subseteq r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$

v)$r(\mathfrak{a}) = (1) \Leftrightarrow \mathfrak{a} = (1)$

Si $r(\mathfrak{a}) = (1)$ entonces $1^n \in \mathfrak{a} \Rightarrow 1 \in \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{a} = (1)$

Si $\mathfrak{a} = (1)$ por i) $(1) \subseteq r(\mathfrak{a}) \Rightarrow r(\mathfrak{a}) = 1$

vi)Si $\mathfrak{p}$ es primo, $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ para todo $n > 0$.

Por inducción.
Para $n = 1$ veamos que $r(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$, sabemos por i) que $\mathfrak{p} \subseteq r(\mathfrak{p})$.
Ahora sea $x \in r(\mathfrak{p}) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tq. $x^n \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \mathfrak{p} \Rightarrow r(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}$
por lo que $r(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$
Supongamos que se cumple para $n - 1$ es decir

$$r(\mathfrak{p}^{n-1}) = \mathfrak{p}$$

probemos que es cierto para n

$$\begin{aligned} r(\mathfrak{p}^n) &= r(\mathfrak{p}^{n-1}.\mathfrak{p}) \\ &= r(\mathfrak{p}^{n-1} \cap r(\mathfrak{p}) \text{ por iii} \\ &= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p} \\ &= \mathfrak{p} \end{aligned}$$

Por lo que $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ para $n > 0$

Proposición 1.6.3 . *El radical de un ideal $\mathfrak{a}$ es la intersección de los ideales primos que contienen $\mathfrak{a}$.*

Demostración.

Sea $A/\mathfrak{a}$ y $x+\mathfrak{a}$ un elemento nilpotente $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x^n + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

$$\Leftrightarrow x^n \in \mathfrak{a}$$

$$x \in r(\mathfrak{a})$$

Y sabemos que $\aleph_{A/\mathfrak{a}} = \bigcap \bar{\mathfrak{p}_i}$ con $\bar{\mathfrak{p}_i}$ ideal primo de $A/\mathfrak{a}$
por (1.2.1) tenemos que :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}\left(\aleph_{A/\mathfrak{a}}\right) &= r(\mathfrak{a}) \\ \varphi^{-1}\left(\bigcap \bar{\mathfrak{p}_i}\right) &= \bigcap \mathfrak{p}_i \end{aligned}$$

por lo que $r(\mathfrak{a}) = \bigcap \mathfrak{p}_i$.

En general, se puede definir el radical $r(E)$ de cualquier *subconjunto* E de A de la misma forma. Generalmente *no* es un ideal.
Se tiene $r\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right) = \bigcup_\alpha r(E_\alpha)$, para cualquier familia de subconjuntos E_α de A.
Ya que:

$$\begin{aligned} x \in r(\cup_\alpha E_\alpha) &\Leftrightarrow x^n \in \bigcup_\alpha E_\alpha \\ &\Leftrightarrow x^n \in E_{\alpha_i}; \text{para algún i} \\ &\Leftrightarrow x \in r(E_\alpha) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_\alpha r(E_\alpha) \end{aligned}$$

Proposición 1.6.4 . *D =conjunto de divisores de cero $A = \bigcup_{x\neq 0} r(Ann(x))$.*

Demostración

Sea D el conjunto de todos los divisores de cero en A, $D = \bigcup_{x\neq 0} Ann(x)$.

Entonces A/D no tiene divisores de cero $\Rightarrow D$ es primo

$$\begin{aligned}\Rightarrow D &= r(D)\\ &= r\left(\bigcup_{x\neq 0} Ann\,(x)\right)\\ &= \bigcup_{x\neq 0} r\,(Ann\,(x))\end{aligned}$$

Proposición 1.6.5 *Sean $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ ideales de un anillo A tales que $r(\mathfrak{a}), r(\mathfrak{b})$ son primos entre sí. Entonces $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ son primos entre sí.*

Demostración

Sabemos que:

$$\begin{aligned} r(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) &= r(r(\mathfrak{a})+r(\mathfrak{b}))\\ &= r(1)\\ &= (1)\end{aligned}$$

por tanto $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = (1)$ por v).

1.7. Extensión y Contracción

Sea $f : A \longmapsto B$ un homomorfismo de anillos. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal en A, el conjunto $f(\mathfrak{a})$ no es necesariamente un ideal en B (por ejemplo, sea f la inyección de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$, el cuerpo de los racionales, y sea $\mathfrak{a}$ cualquier ideal no nulo de $\mathbb{Z}$.

Definición 1.7.1 *Sea $f : A \longmapsto B$ un homomorfismo de anillos y $\mathfrak{a}$ un ideal en A, la* ***extensión*** *de $\mathfrak{a}$ es el ideal $Bf(\mathfrak{a})$ generado por $f(\mathfrak{a})$ en B, y se denota por $\mathfrak{a}^e$.*

En forma más explícita se puede definir $\mathfrak{a}^e$ como el conjunto de todas las sumas $\sum y_i f(x_i)$ donde $x_i \in \mathfrak{a}$, $y_i \in B$.

Definición 1.7.2 *Si $\mathfrak{b}$ es un ideal de B, entonces $f^{-1}(\mathfrak{b})$ es siempre un ideal de A, llamado la* ***contracción*** *$\mathfrak{b}^c$ de $\mathfrak{b}$.*

Si $\mathfrak{b}$ es primo, entonces $\mathfrak{b}^c$ es primo. Si $\mathfrak{a}$ es primo $\mathfrak{a}^e$ no ha de ser necesariamente primo (por ejemplo, $f : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Q}$, $\mathfrak{a} \neq 0$; entonces $\mathfrak{a}^e = \mathbb{Q}$, que no es un ideal primo).

Proposición 1.7.1 *Sea $f : A \longmapsto B$ un homomorfismo de anillos, $\mathfrak{a}$ es un ideal en A y $\mathfrak{b}$ un ideal de B. Entonces:*

1. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$, $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$;
2. $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$, $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$;
3. *Si C es el conjunto de los ideales contraídos en A y si E es el conjunto de los ideales extendidos en B,entonces $C = \{\mathfrak{a}|\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}$, $E = \{\mathfrak{b}|\mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}$ y $\mathfrak{a} \longmapsto \mathfrak{a}^e$ es* ***una aplicación biyectiva de*** *C* ***sobre*** *E****, cuya inversa es*** $\mathfrak{b} \longmapsto \mathfrak{b}^c$

Demostración

1. i) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$. Sabemos que $\mathfrak{a}^e = \{\sum y_i f(x_i) : x_i \in \mathfrak{a}; y_i \in B\}$.
Sea $x \in \mathfrak{a}$ y

$$\begin{aligned} f :& A \longrightarrow B \\ & x \;\mapsto\; f(x) = y; y \in B \end{aligned}$$

entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} 1.f(x) = f(x) \in \mathfrak{a}^e \Rightarrow x \in \mathfrak{a}^{ec}$.
Por lo que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$.

ii) $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$. Sea $\alpha \in \mathfrak{b}^{ce}$ entonces $\alpha = \sum_i y_i f(x_i); y_i \in B, x_i \in \mathfrak{b}^c$ asi $f(x_i) \in \mathfrak{b} \Rightarrow \sum y_i f(x_i) \in \mathfrak{b} \Rightarrow \alpha \in \mathfrak{b}$.
Por lo que $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$.

2.i)$\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$, de 1. sabemos que $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$ por lo que $\mathfrak{b}^c \supseteq \mathfrak{b}^{cec}$, ademas $\mathfrak{b}^c$ es un ideal de A, si hacemos $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c$ de 1. obtenemos que $\mathfrak{b}^c \subseteq \mathfrak{b}^{cec}$.
Por lo que $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$.

ii)$\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$, de 1. sabemos que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$ por lo que $\mathfrak{a}^e \subseteq \mathfrak{a}^{ece}$, si hacemos $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^e$ en 1. tenemos que $\mathfrak{a}^{ece} \subseteq \mathfrak{a}^e$,por lo que $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$.

3.Para C: Si $\mathfrak{a} \in C \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{a}^{ec}$ y si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec} \Rightarrow \mathfrak{a}$ es una contracción de $\mathfrak{a}^e$

Para E: Si $\mathfrak{b} \in E \Rightarrow \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece} = \mathfrak{b}^c e$, y si $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{ce} \Rightarrow \mathfrak{b}$ es una extensión de $\mathfrak{b}^c$.

Por lo que las aplicaciones

$$\begin{aligned}\varphi_1 : C &\longrightarrow E\\ \mathfrak{a} &\mapsto \mathfrak{a}^e\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\varphi_2 : E &\longrightarrow C\\ \mathfrak{b} &\mapsto \mathfrak{b}^c\end{aligned}$$

son tales que: $\varphi_1 \circ \varphi_2 = 1_E$ y $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 1_C$

Capítulo 2

Espacios Topológicos

2.1. Definición de espacio topológico

Definición 2.1.1 *: Dado un conjunto$X$, $\Im$ es una topología de X si satisface:*

- $\Im \subseteq P(X) = \{A \subseteq X\}$
- $\phi, X \in \Im$
- $\{A_\alpha\}_{\alpha \in B}$ tal que $\forall \alpha \in B : A_\alpha \in \Im \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in B} A_\alpha \in \Im$
- $\{A_j\}_{j=1}^n$ tal que $\forall 1 \leq j \leq n : A_j \in \Im \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} A_J \in \Im$

Notación:

- Si $A \in \Im$ diremos que A es *abierto.*
- $(X, \Im)$: *espacio topológico.*

Definición 2.1.2 *Sea E subconjunto de X, E es* ***cerrado*** *si y solo si $E^c \in \Im$.*

Definición 2.1.3 *: Sea $x \in X$, U es un* ***vecindario*** *de x si $\exists V \in \Im$ tal que $x \in V \subseteq U$.*

Definición 2.1.4 *: Un punto $x \in X$ es un punto interior de S si S es un vecindario de x.*

El conjunto de puntos interiores de S es llamado el *interior* de S y es denotado por $int(S)$, es evidente que $int(s) \subset S$.

Teorema 2.1.1 . *Un subconjunto S de un espacio topológico X es abierto si y sólo si $S = int(S)$, esto es, si y sólo si S es un vecindario de cada uno de sus puntos.*

Teorema 2.1.2 . *Si S es un subconjunto de un espacio topológico X, entonces $int(S)$ es un subconjunto abierto de X. En otras palabras, $int(int(S)) = int(S)$.*

Definición 2.1.5 *: Sea $x \in X$, $S \subset X$ y $(X, \Im)$ diremos que x es adherente a S si $\forall V$: vecindario de x: $V \cap S \neq \phi$, es decir, S contiene a cada vecindario de x.*

El *cierre* de S, denotado por $\bar{S}$, es el conjunto de puntos en X que son adherentes a S, evidentemente $S \subseteq \bar{S}$.

Teorema 2.1.3 *.Un subconjunto S de un espacio topológico X es cerrado si y sólo si $S = \bar{S}$.*

Teorema 2.1.4 *Si S es un subconjunto de un espacio topológico X entonces $\bar{S}$ es cerrado, esto es, $\bar{\bar{S}} = \bar{S}$.*

Definición 2.1.6 *Una definición alternativa de cierre de un conjunto es la siguiente:*

Sea $S \subseteq X$ el cierre de S es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a S. i.e.,

$$\bar{S} = \bigcap \{D : cerrado \ \ y \ \ S \subset D\}$$

Prueba
i. $\bar{S} \subseteq \bigcap D$.
Supongamos que $x \in \bar{S}$ y $x \notin D$, desde que cada conjunto D es cerrado, $\bigcap D$ es un conjunto cerrado
$\Rightarrow x \notin \bigcap D \Rightarrow x \in (\bigcap D)^c$ donde $(\bigcap D)^c$ es un conjunto abierto
$\exists G$:vecindario de x tal que:

$$G \cap (\bigcap D) = \phi$$

$$\Rightarrow G \cap S = \phi$$

$$\Rightarrow x \notin \bar{S}$$

lo que es contradictorio por lo que $x \in \bigcap D$.

ii. $\bigcap D \subseteq \bar{S}$
Si $x \notin \bar{S} \Rightarrow \exists N$: vecindario de x tal que

$$N \cap S \neq \phi$$

$\Rightarrow N^c$ es uno de los conjuntos D, desde que $x \notin N^c$ también $x \notin \bigcap D$.

Definición 2.1.7 *:Una sucesion de puntos $\{x_i\}$ en un espacio topológico Xconverge a $x \in X$ si, para cada vecindario abierto U de x, existe un entero N tal que $x_i \in U$ para $i > N$.*

Teorema: Si S es un subconjunto de un espacio topologico X y si una sucesion $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en S converge a $x \in X$, entonces $x \in \bar{S}$.

2.2. Subespacio Topológico

Sea $(X, \Im)$ un espacio topológico y sea S un subconjunto de X.Entonces la familia

$$\varphi = \{S \cap A : A \in \Im\}$$

de subconjuntos de S es una topología de S
En efecto:

- $A = \phi \in \Im \Rightarrow S \cap \phi = \phi \in \varphi$
- $A = X \in \Im \Rightarrow S \cap X = S \in \varphi$
- $\forall \beta \in B; U_\beta \in \varphi$ es de la forma $U_\beta = S \cap A_\beta$ con $A_\beta \in \Im$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \bigcup_\beta U_\beta &= \bigcup_\beta S \cap A_\beta \\ &= S \cap \bigcup A_\beta \in \varphi \end{aligned}$$

$\Rightarrow \bigcup_{\beta} U_\beta \in \varphi$

- $\forall i \leq j \leq n \ U_j \in \varphi$ tenemos que $U_j = S \cap A_j$ con $A_j \in \Im$ entonces:

$$\begin{aligned}\bigcap_j U_j &= \bigcap_j (S \cap A_j) \\ &= S \cap \left(\bigcap_j A_j \right)\end{aligned}$$

ya que $\bigcap_j A_j \in \Im \Rightarrow \bigcap_j U_j \in \varphi$

Dicha topología es llamada *topología relativa* inherente de $(X, \Im)$.Los conjuntos $V \in \varphi$ son subconjuntos relativamente abiertos de S y los conjuntos $V^c, V \in \varphi$ son subconjuntos relativamente cerrados de S.

El espacio (S, φ) es llamado *sub-espacio* de $(X, \Im)$

2.3. Funciones Continuas

Definición 2.3.1 *Sean $(X, \Im_X)$ y $(Y, \Im_Y)$ dos espacios topológicos, y sea $f : (X, \Im_X) \to (Y, \Im_Y)$, f es continua en un punto $x \in X$ si $\forall V \in \Im_Y$, $f(x) \in V$ existe $U \in \Im_X$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$*

Propiedades de separación de funciones continuas

Definición 2.3.2 *Dos subconjuntos disjuntos E y W disjuntos de un espacio topológico X son:*

1. ***separables por conjuntos abiertos,****si exiten dos conjuntos abiertos disjuntos U y V que satisfacen: $E \subseteq U$ y $W \subseteq V$.*

2. ***separables por una funcion continua****, si existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(a) = 0$ pra cada $a \in E$y $f(b) = 1$ para cada $b \in W$.*

Homeomorfismos

Definición 2.3.3 *Sean $(X, \Im)$y (Y, φ) dos espacios topologicos,y sea $f : X \to Y$, f es un* ***Homeomorfimo*** *si:*

1. *f es continua.*

2. f *es biyectiva.*

3. f^{-1} *es continua.*

2.4. Base de una topología

Sea $\mathbb{B} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que $\forall \alpha \in A$: $U_\alpha \in \Im$ i.e. $\mathbb{B} \subseteq \Im$ es llamada base de la topología $\Im$ si $\forall V \in \Im$,

$$V = \bigcup_{\substack{U_\alpha \in \mathbb{B} \\ U_\alpha \subseteq V}} U_\alpha$$

2.5. Axiomas de separación

Espacio T_1. Un espacio topológico X es un *espacio* T_1 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe un conjunto abierto U que contiene a y tal que $x \neq U$.

Lema 2.5.1 *: El espacio topológigo* X *es* T_1 *si y solo si* $\forall x \in X : x$ *es cerrado.*

Epacio T_2. El espacio topológico X es T_2 o *espacio Hausdorff*, si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V tal que $x \in U$ y $y \in V$. Evidentemente un espacio T_2 es un espacio T_1.

Espacio regular. El espacio X es *regular* si para cada subconjunto cerrado E de X y cada punto $x \in E^c$, existen conjuntos abiertos U y V tal que $E \subset U$ y $x \in V$.

Espacio T_3. El espacio X es T_3 si es un espacio regular y T_1.Evidentemente un espacio T_3 es un espacio T_1.

Espacio normal. El espacio X es *normal* si para cada E y F subconjuntos disjuntos cerrados de X, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V tal que $E \subseteq U$ y $F \subseteq V$.

Espacio T_4. Un espacio X es T_4 si es un espacio T_1 y normal, cada espacio T_4 es un espacio T_3.

Lema 2.5.2 *(Lema de Uryshon) Sea X un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es espacio normal.*
2. *Si A es un subconjunto cerrado y V un subconjunto abierto de X que satisfacen $A \subseteq V$, entonces un abierto W tq $A \subseteq W \subseteq \bar{W} \subseteq V$.*
3. *Cada par de conjuntos cerrados disjuntos pueden ser separdos por una función continua.*
4. *Si C es un subconjunto cerrado de X y $f : C \to [0,1]$ es una función continua entonces existe una extensión continua de f para todo X con valores en $[0,1]$*

2.6. Compacidad

Definición 2.6.1 *Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que $\forall \alpha \in A$, $U_\alpha \in \Im : X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ es llamada una cubierta del espacio X*

Definición 2.6.2 *Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta de X, el conjunto $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\}_{\alpha_i \in A}$ tal que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ es llamada subcubierta finita de X*

Definición 2.6.3 *Un espacio X es compacto si $\forall \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ cubierta de X existe $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\}_{\alpha_i \in A}$: una subcubierta finita de X.*

Teorema 2.6.1 *Sea X un espacio topológico compacto y $S \subseteq X$, S cerrado $\Rightarrow S$ es compacto.*

Demostración

Consideremos una cubierta de S, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $\forall \alpha \in I$: $U_\alpha \in \Im$ y $S \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$.
Ahora definamos para todo $\alpha \in I$, $V_\alpha := U_\alpha \cup S^c \in \Im$, por lo que si $S \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow X \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha$.

Ya que X es compacto $\Rightarrow \exists V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, ..., V_{\alpha_n}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$.

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} S = X - S^c &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} - S^c \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} - S^c \right) \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \end{aligned}$$

$\Rightarrow S$ es compacto.

Teorema 2.6.2 *Si X es un espacio topológico compacto y Hausdorff entonces X es un espacio normal.*

Sean S, T cerrados tales que $S \cap T = \phi \Rightarrow t \in T : \forall s \in S, s \neq t$,ya que X es Hausdorff existen U_s, V_s subconjuntos abiertos de X tales que $U_s \cap V_s = \phi$ con $t \in U_s$ y $s \in V_s$. Lo que implica que para todo $s \in S$ existe V_s abierto en X tal que $s \in V_s \Rightarrow s \subseteq \bigcup V_s$, ya que X es compacto existe una subcubierta finita, es decir $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{s_i} = V_t$, además $t \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{s_i} = U_t$, tenemos que: $V_t \cup U_t = \phi$. Por lo que para todo $t \in T$ $\exists U_t$ y V_t abiertos en X tales que: $V_t \cap U_t = \phi$; con $t \in U_t$ y $S \subseteq V_t \Rightarrow T \subseteq \bigcup U_t$, ya que X es Hausdorff entonces $T \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i} = U$, y $S \subseteq \bigcap V_{t_i} = V \Rightarrow U \cap V = \phi$.
Hemos probado que para S y T conjuntos cerrados disjuntos existen U y V abiertos tales que $S \subseteq V$ y $T \subseteq U$ y $U \cap V = \phi$, por lo que X es un espacio normal.

Teorema 2.6.3 *Sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Si X es compacto y Y es Hausdorff entonces f es un homeomorfismo.*

2.7. Irreducibilidad

Definición 2.7.1 *Un espacio topológico X se dice que es irreducible si $X \neq \phi$ y si para cada par de conjuntos abiertos no vacíos en X se cortan, o si $X = F \cup G con$ F, G cerrados $F = X$ ó $G = X$.*

Diremos que una parte E de un espacio topológico X es irreducible si el subespacio E de X es irreducible. Para que esto sea así es necesario y suficiente que, para todo par de conjuntos U, V abiertos en X que corten a E, $U \cap V$ corte tambien a E, o que, para todo par de conjuntos, F, G cerrados en X tales que $E \subset F \cup G$, entonces $E \subset F$ o $E \subset G$.

Proposición 2.7.1 *Sea $(X, \Im)$ un espacio topológico no vacío. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es irreducible;*
2. *todo conjunto abierto no vacío en X es denso en X;*
3. *todo conjunto abierto de X es conexo*

Demostración

1. $\Rightarrow$ 2. Sea $U \in \Im$, ya que X es irreducible $\forall V \in \Im, U \cap V \neq \phi \Rightarrow U$ es denso.

3. $\Rightarrow$ 1. Probemos que si X no es irreducible entonces $\exists U$ no conexo.
Si X no es irreducible $\exists U_1, U_2$ abiertos tales que $U_2 \cap U_2 = \phi$ entonces $U = U_1 \cup U_2$ es no conexo.

1. $\Rightarrow$ 3. Probemos que si $\exists U \in \Im, U$ no conexo entonces X no es irreducible
$\exists U$ no conexo $\Rightarrow \exists V_1, V_2 \in \Im_U \subseteq \Im$ tal que $U = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \phi \Rightarrow$ $\exists V_i, V_j \in \Im$ tal que $V_i \cap V_j = \phi$, por lo que X no es irreducible.

Proposición 2.7.2 *Sea X un espacio topológico.*

1. *Y es un subespacio irreducible de $X \Leftrightarrow$ la clausura $\bar{Y}$ de Y en X es irreducible.*
2. *Cada subespacio irreducible de X está contenido en un subespacio maximal irreducible.*

Demostración

Sea $T = \{Y/Y \subseteq X : Y \ \ irreducible \ \ en \ \ X\}$ y C una cadena de partes de T tal que $C_i, C_j \in \mathrm{C} \Rightarrow C_i \subseteq C_j$ ó $C_j \subseteq C_i$.
Sea $J = \bigcup\limits_{C \in \mathrm{C}} C$ mostraremos que J es irreducible.
Sean U, V abiertos en X tales que: $U \cap J \neq \varphi$ y $V \cap J \neq \varphi$ (dos conjuntos abiertos no vacios en J).

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ \ \exists F \in C \ \ tq. \ U \cap V \cap F \neq \phi \\
&\Rightarrow \ \ U \cap V \cap J \neq \phi \\
&\Rightarrow \ \ (U \cap J) \cap (V \cap J) \neq \phi
\end{aligned}$$

Por lo que dos conjuntos abiertos en J se cortan $\Rightarrow J$ es irreducible.

Capítulo 3

La Topología de Zariski

3.1. Definición de la Topología de Zariski

Sea A un anillo y sea X el conjunto de todos los ideales primos de A. Para cada subconjunto E de A, se indica por $V(E)$ el conjunto de todos los ideales primos que contienen a E.
Tenemos que:

1. Si $\mathfrak{a}$ es el ideal engendrado por E, entonces $V\left(E\right) = V\left(\mathfrak{a}\right) = V\left(r(\mathfrak{a})\right)$.

2. $V(0) = X$,$V(1) = \phi$.

3. Si $(E_i)_{i\in I}$ es una familia cualquiera de subconjuntos de A, entonces

$$V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} V\left(E_i\right).$$

4. $V\left(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\right) = V\left(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\right) = V\left(\mathfrak{a}\right)\cup V\left(\mathfrak{b}\right)$ para cualesquiera ideales $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ de A .

Demostración.

1.$V\left(\mathfrak{a}\right) = V\left(r(\mathfrak{a})\right)$.
Sea $\mathfrak{p}\in V\left(\mathfrak{a}\right)$ entonces $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}$,pero sabemos que $\mathfrak{a}\subseteq r(\mathfrak{a})$ y que $r(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_i}\mathfrak{p}_i$; $\mathfrak{p}_i$ primo, tenemos que $\mathfrak{a}\subseteq\bigcap_{\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_i}\mathfrak{p}_i\subseteq\mathfrak{p}\Rightarrow\mathfrak{p}\in V(r)$

Sea $\mathfrak{p}\in V\left(r\left(\mathfrak{a}\right)\right)$ entonces $r\left(\mathfrak{a}\right)\subseteq\mathfrak{p}$; pero sabemos que $\mathfrak{a}\subseteq r\left(\mathfrak{a}\right)\Rightarrow\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}\Rightarrow\mathfrak{p}\in V\left(\mathfrak{a}\right)$ tenemos que $V\left(r(\mathfrak{a})\right)\subseteq V(\mathfrak{a})$.

Por tanto $V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$

2. $V(0) = X, V(1) = \phi$.
Por definición sabemos que $V(0) = \{\mathfrak{p} : primo/0 \in \mathfrak{p}\}$ pero todo ideal de A contiene al elemento 0, entonces $V(0) = X$.
$V(1) = \{\mathfrak{p} : primo/1 \in \mathfrak{p}\}$ pero ningún ideal primo contiene al elemento 1 por tanto $V(1) = \phi$.

3. Primero probemos que $V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} V(E_i)$.

Sea $\mathfrak{p} \in V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$
$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} E_i \subseteq \mathfrak{p}$
$\Rightarrow \forall i \in I \;\; ; E_i \subseteq \mathfrak{p}$
$\Rightarrow \forall i \in I \;\; ; \mathfrak{p} \in V(E_i)$
$\Rightarrow \mathfrak{p} \in \bigcap_{i\in I} V(E_i)$.

Ahora probaremos que $\bigcap_{i\in I} V(E_i) \subseteq V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$.
Sea $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i\in I} V(E_i)$
$\Rightarrow \forall i \in I; \mathfrak{p} \in V(E_i)$
$\Rightarrow \forall i \in I; E_i \subseteq \mathfrak{p}$
$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} E_i \subseteq \mathfrak{p}$.

$\Rightarrow \mathfrak{p} \in V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$.
Por tanto $V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(E_i)$.

4. Primero probemos que:$V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.
Sea $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \Rightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$
$\Rightarrow \forall x \in \mathfrak{a} \wedge \forall y \in \mathfrak{b}$ tenemos que $xy \in \mathfrak{p}$ ya que $\mathfrak{p}$ es primo $x \in \mathfrak{p}$ ó $y \in \mathfrak{p}$; $\forall x \in \mathfrak{a} \wedge \forall y \in \mathfrak{b}$, entonces $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ ó $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ ó $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b}) \Rightarrow \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ entonces $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Sea $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$
$\Rightarrow \mathfrak{q} \in V(\mathfrak{a})$ ó $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})$ pero como $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}$ y $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$
$\Rightarrow \mathfrak{q} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \Rightarrow V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

Ahora probemos que $V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{ab})$.
Sea $\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$
$\Rightarrow \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{p}$ pero $\mathfrak{ab}\subseteq\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ entonces $\mathfrak{ab}\subseteq\mathfrak{p}\Rightarrow\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{ab})$ entonces $V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\subseteq V(\mathfrak{ab})$

Sea $\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{ab}) = V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})\Rightarrow\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{a})$ ó $\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{b})$
$\Rightarrow\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{q}$ ó $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{q}$
$\Rightarrow\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}$ ó $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{q}\Rightarrow\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ entonces $V(\mathfrak{ab})\subseteq V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$.

Estos resultados muestran que los conjuntos $V(E)$ satisfacen los axiomas de los conjutos cerrados en un espacio topológico. La topología resultante se denomina la *topología de Zariski*. El espacio topológico X se denomina el *espectro primo de* A, y se indica por $Spec(A)$.

Definición 3.1.1 *Para cada $f\in A$, se indica por X_f el complemento de $V(f)$ en $X = Spec(A)$, X_f son los conjuntos abiertos de la topología de Zariski.*

Proposición 3.1.1 *Los conjuntos abiertos X_f forman una base para la topología de Zariski.*

Demostración Probaremos que todo conjunto abierto puede ser escrito como la unión finita de los X_f.
Sea U un conjunto abierto entonces $U = V^c(E)$ para algún $E\subseteq A$. Así:

$$\begin{aligned} U &= V^c\left(\bigcup_{e\in E}\{e\}\right) \\ &= \left(\bigcap_{e\in E} V(\{e\})\right)^c \\ &= \bigcup_{e\in E} V^c(\{e\}) \\ &= \bigcup_{e\in E} X_e \end{aligned}$$

Por lo que $\mathbb{B} = \{X_f\}_{f\in A}$ forman una base.

Proposición 3.1.2 *Los conjuntos abiertos X_f cumplen las siguientes propiedades:*

1. $X_f\cap X_g = X_f g$

2. $X_f = \phi \Leftrightarrow f$ *es nilpotente;*

3. $X_f = X \Leftrightarrow f$ *es una unidad;*

4. $X_f = X_g \Leftrightarrow r((f)) = r((g))$.

Demostración.
1.

$$\begin{aligned} X_f \cap X_g &= V^c(f) \cap V^c(g) \\ &= (V(f) \cup V(g))^c \\ &= (V(fg))^c \\ &= X_{fg} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} X_f = \phi &\Leftrightarrow V^c(f) = \phi \\ &\Leftrightarrow V(f) = X \\ &\Leftrightarrow \forall \mathfrak{p} \in X; f \in \mathfrak{p} \\ &\Leftrightarrow f \in \bigcap_{\mathfrak{p}:primo} \mathfrak{p} = \aleph \\ &\Leftrightarrow f \ \ es \ \ nilpotente \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} X_f = X &\Leftrightarrow V^c(f) = X \\ &\Leftrightarrow V(f) = \phi \\ &\Leftrightarrow \forall \mathfrak{p} \in X; f \notin \mathfrak{p} \\ &\Leftrightarrow f \ \ es \ \ una \ \ unidad \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} X_f = X_g &\Leftrightarrow V^c(f) = V^c(g) \\ &\Leftrightarrow V(f) = V(g) \\ &\Leftrightarrow V((f)) = V((g)) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ todo ideal primo que contenga a f contiene a g y viceversa

$$\Leftrightarrow \bigcap_{\substack{(f)\subseteq\mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}_i:primo}} \mathfrak{p}_i = \bigcap_{\substack{(g)\subseteq\mathfrak{q}_j \\ \mathfrak{q}_j:primo}} \mathfrak{q}_j$$

$\Leftrightarrow r((f)) = r((g))$ en virtud de (1.6.2)

3.2. Compacidad del espectro primo

Proposición 3.2.1 *$X = SpecA$ es compacto*

Demostración.
Sea $\{X_{f_i}\}_{i\in I}$ una cubierta de X, entonces

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{i\in I} X_{f_i} \\ X &= \bigcup_{i\in I} V^c(f_i) \\ X &= \left(\bigcap_{i\in I} V\left((f_i)\right)\right)^c \\ X &= V\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)^c \end{aligned}$$

Pero $X = V\left(\bigcup_{i\in I}(f_i)\right)^c \Leftrightarrow V\left(\bigcup_{i\in I}(f_i)\right) = \phi$
$\Rightarrow \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) = A = (1)$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{\substack{j\in J\subseteq I \\ J:finito}} f_j$$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{\substack{j\in J\subseteq I \\ J:finito}} X_{f_j}$$

Entonces $\left\{X_{f_j}\right\}_{j\in J}$ es una subcubierta finita de X, por tanto X es compacto.

Proposición 3.2.2 *Cada conjunto X_f es compacto*

Demostración.
Sea $\{X_{f_i}\}_{i\in I}$ una cubierta de X_f, entonces

$$\begin{aligned} X_f &= \bigcup_{i\in I} X_{f_i} \\ V^c(f) &= \bigcup_{i\in I} V^c(f_i) \\ V^c(f) &= \left(\bigcap_{i\in I} V\left(f_i\right)\right)^c \\ V^c(f) &= V\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)^c \end{aligned}$$

$\Rightarrow V(f) = V\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) \Leftrightarrow r\left(f\right) = r\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)$

pero sabemos que $(f) \subseteq r\left(f\right) = r\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)$

$\Rightarrow f \in r\left(\bigcup_{i\in I} f_j\right)$

$\Rightarrow \exists n > 0$ tal que $f^n \in \bigcup_{i\in I} f_j$

$$\Rightarrow f^n = \sum_{\substack{j\in J\subseteq I \\ J:finito}} a_j; a_j \in \bigcup_{i\in I} f_i$$

$$\Rightarrow (f^n) = \sum_{\substack{j\in J\subseteq I \\ J:finito}} (f_j)$$

$$\Rightarrow V\left((f^n)\right) = V\left(\sum_{\substack{j\in J\subseteq I \\ J:finito}} (f_j)\right)$$

Pero sabemos que $V\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) = V\left(\sum_{i\in I} M_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(M_i)$ para cualquier familia $(M_i)_{i\in I}$ de conjuntos de A.

$$\Rightarrow V\left((f^n)\right) = \bigcap_{\substack{j\in J\subseteq I \\ J:finito}} V\left((f_j)\right)$$

Ahora observemos que $V(f^n) = V(f)$ ya que:
Si $\mathfrak{p} \in V(f^n) \Rightarrow f^n \in \mathfrak{p}$ por ser $\mathfrak{p}$ primo $\Rightarrow f \in \mathfrak{p}$.

Y si $\mathfrak{p} \in V(f) \Rightarrow f \in \mathfrak{p} \Rightarrow f^n \in \mathfrak{p}$.

$$\Rightarrow V((f)) = \bigcap_{\substack{j \in J \subseteq I \\ J: finito}} V((f_j))$$

$$\Rightarrow V^c((f)) = \left(\bigcap_{\substack{j \in J \subseteq I \\ J: finito}} V((f_j)) \right)^c$$

$$\Rightarrow V^c((f)) = \bigcup_{\substack{j \in J \subseteq I \\ J: finito}} V((f_j))^c$$

$$\Rightarrow X_f = \bigcup_{\substack{j \in J \subseteq I \\ J: finito}} X_{f_j}$$

Entonces $\left\{X_{f_j}\right\}_{j \in J}$ es una subcubierta finita de X_f, por tanto X_f es compacto.

3.3. Cierre

Por razones de conveniencia designaremos un ideal primo de A por letras como x o y cuando sea considerado como un punto de $X = Spec(A)$. Cuando se considere como un ideal primo de A, se indicará por $\mathfrak{p}_x$.

Proposición 3.3.1 *Sea $X = Spec(A)$*

1. *el conjunto $\{x\}$ es cerrado (se dice que x es un punto cerrado) en $X = Spec(A) \Leftrightarrow \mathfrak{p}_x$ es maximal.*
2. *$\{\bar{x}\} = V(\mathfrak{p}_x)$*
3. *$y \in \{\bar{x}\} \Leftrightarrow \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$*

Demostración

1.Probemos primero que si el conjunto $\{x\}$ es cerrado en $X = Spec(A)$ entonces $\mathfrak{p}_x$ es maximal.

Si $\{x\}$ es cerrado entonces $\{x\} = \{\bar{x}\}$

$\Rightarrow \forall y \neq x, \exists U$ vecindario de y tal que $y \in U$ y $x \notin U$

$\Rightarrow y \in X_f \subseteq U$ y $x \in U^c$ por lo que $x \notin X_f$

ya que $X_f = V(f)^c$ y $V(f) = \{\mathfrak{p} : primo\ /f \in \mathfrak{p}\}$

$\Rightarrow f \in \mathfrak{p}_x$ y $f \notin \mathfrak{p}_y$ por lo que $\mathfrak{p}_x \nsubseteq \mathfrak{p}_y$ para todo $\mathfrak{p}_y$ ideal primo de A, entonces $\mathfrak{p}_x$ es maximal

Ahora probemos que si $\mathfrak{p}_x$ es maximal entonces el conjunto $\{x\}$ es cerrado.
Si $\mathfrak{p}_x$ es maximal entonces el único ideal primo que lo contiene es él mismo por lo que $V(\mathfrak{p}_x) = \{\mathfrak{p}_x\} = \{x\}$, ya que $V(\mathfrak{p}_x)$ es cerrado entonces $\{x\}$ es cerrado en $X = Spec(A)$.

2. $\{\bar{x}\} = V(\mathfrak{p}_x)$

Sabemos que el cierre de $\{x\}$ es el conjunto cerrado mas pequeño que lo contiene y también que $\{x\} \subseteq V(\mathfrak{p}_x)$.
Supongamos que hay otro cerrado que contiene a $\{x\}$, es decir $\{x\} \subseteq V(N)$, mostremos que $V(\mathfrak{p}_x) \subseteq V(N)$.

Sea $r \in V(\mathfrak{p}_x)$

$\Rightarrow \mathfrak{p}_x \subseteq r$ pero como $x \in V(N)$

$N \subseteq \mathfrak{p}_x \subseteq r$

$\Rightarrow r \in V(N)$

$\Rightarrow V(\mathfrak{p}_x) \subseteq V(N)$

Por lo que $V(\mathfrak{p}_x)$ es el conjunto cerrado mas pequeño que contiene a $\{x\}$ entonces $\{\bar{x}\} = V(\mathfrak{p}_x)$.

3. i)$y \in \{\bar{x}\} \Rightarrow \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$

Si $y \in \{\bar{x}\}$ por 2. tenemos que $y \in V(\mathfrak{p}_x)$ por lo que $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$

ii) $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y \Rightarrow y \in \{\bar{x}\}$

Si $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y \Rightarrow y \in V(\mathfrak{p}_x)$ por 2. tenemos que $y \in \{\bar{x}\}$

Definición 3.3.1 *Para toda parte Y de $X = Spec(A)$, definimos $\mathfrak{I}(Y)$ como la intersección de los ideales primos de A que pertenecen a Y, es decir:*

$$\mathfrak{I}(Y) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in Y \\ \mathfrak{p}:primo}} \mathfrak{p}$$

Es claro que $\mathfrak{I}(Y)$ es un ideal de A, y que se cumplen las siguientes relaciones:

i)$\mathfrak{I}(\phi) = A$

ii) $\mathfrak{I}\left(\bigcup_{\lambda\in L} Y_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in L} \mathfrak{I}(Y_\lambda)$

Proposición 3.3.2 *Sea A un anillo, Y una parte de $X = Spec(A)$. Entonces $V(\mathfrak{I}(Y))$ es la adherencia de Y en X.*

Demostración

Sabemos que $Y \subset V(\mathfrak{I}(Y))$ ya que si $\mathfrak{p} \in Y$

$$\Rightarrow \bigcap_{\substack{\mathfrak{q}\in Y \\ \mathfrak{q}:primo}} \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$$

$\Rightarrow \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{I}(Y))$

Probaremos que $V(\mathfrak{I}(Y))$ es el menor cerrado que contiene a Y.

Sea $V(M)$ un conjunto cerrado tal que $Y \subset V(M)(M \subset A)$, entonces $M \subseteq \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in Y$ ideal primo, por lo que $M \subseteq \mathfrak{I}(Y) \Rightarrow V(\mathfrak{I}(Y)) \subset V(M)$. Por lo que $\bar{Y} = V(\mathfrak{I}(Y))$.

3.4. Irreducibilidad

Proposición 3.4.1 *Sea A un anillo. Para que una parte Y de X sea irreducible, es necesario y suficiente que el ideal $\mathfrak{I}(Y)$ sea primo.*

Demostración

Supongamos que $\mathfrak{I}(Y) = \mathfrak{q}$, notemos que para un elemento $f \in A$, la relación $f \in \mathfrak{q}$ es equivalente a $Y \subset V(f)$ ya que:

$$f \in \mathfrak{q} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in Y \\ \mathfrak{p}:primo}} \mathfrak{p} \Leftrightarrow \forall \mathfrak{p} \in Y, f \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow, \mathfrak{p} \in V(f)$$

Supongamos que Y es irreducible, y sean $f, g \in A$ tales que $fg \in \mathfrak{q}$. Entonces

$$Y \subset V(fg) = V(f) \cup V(g);$$

como Y es irreducible, $V(f)$ y $V(g)$ son cerrados, entonces $Y \subset V(f)$ o $Y \subset V(g)$, de donde $f \in \mathfrak{q}$ o $g \in \mathfrak{q}$, por tanto $\mathfrak{q}$ es primo.

Ahora supogamos que $\mathfrak{I}(Y) = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ primo, sabemos que $\bar{Y} = V(\mathfrak{I}(Y)) = V(\mathfrak{p})$ y $\{\bar{\mathfrak{p}}\} = V(\mathfrak{p})$ entonces $\bar{Y} = \{\bar{\mathfrak{p}}\}$ como un conjunto unitario es irreducible entonces $\bar{Y}$ es irreducible, por lo que Y es irreducible.

Proposición 3.4.2 *El espacio topológico $X = Spec(A)$ es irreducible si y sólo si el nilradical de A es un ideal primo.*

Demostración
i) $X = Spec(A)$ es irreducible $\Rightarrow$ el nilradical de A es un ideal primo.

Sean $x, y \in A$ tales que $x \notin \aleph_A$ y $y \notin \aleph_A$

$\Rightarrow \exists \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in X$ tales que $x \notin \mathfrak{q}_1$ y $x \notin \mathfrak{q}_2$

$\Rightarrow \mathfrak{q}_1 \notin V(x)$ y $\mathfrak{q}_2 \notin V(y)$

$\Rightarrow \mathfrak{q}_1 \in X_x$ y $\mathfrak{q}_2 \in X_y$

pero por hipótesis X es irreducible tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} X_x \cap X_y &\neq \phi \text{ pero } X_x \cap X_y = X_{xy} \\ X_{xy} &\neq \phi \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists \mathfrak{p} \in X$ tal que $xy \notin \mathfrak{p} \Rightarrow xy \notin \aleph_A$.

Por tanto $\aleph_A$ es primo.

ii) Si el nilradical de A es primo entonces $X = Spec(A)$ es irreducible.

Sean $X_f \neq \phi$ y $X_g \neq \phi$ con $f, g \in A$ dos conjuntos abiertos en X y supongamos que

$$\begin{aligned} X_f \cap X_g &= \phi \text{ pero } X_f \cap X_g = X_{fg} \\ X_{fg} &= \phi \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall \mathfrak{p} \in X; fg \in \mathfrak{p} \Rightarrow fg \in \aleph_A$

pero por hipótesis $\aleph_A$ es un ideal primo de A entonces tenemos que: $f \in \aleph_A$ ó $g \in \aleph_A$

$\Rightarrow X_f = \phi$ ó $X_g = \phi$ lo que es una contradicción, por lo que $X_f \cap X_g \neq \phi$.

Por tanto $X = Spec(A)$ es irreducible.

Definición 3.4.1 *Los subespacios maximales irreducibles de X que son cerrados y recubren a X se denominan Componentes Irreducibles de X*

Ejemplo: Componentes irreducibles de un espacio Hausdorff.

Proposición 3.4.3 *Si A es un anillo y $X = Spec(A)$, entonces las componentes irreducibles de X son los conjuntos cerrados $V(\mathfrak{p})$, donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de A*

Sea $\mathbb{F} = \{F \subset X, F$ cerrado, irreducible maximal$\}$ y la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \Psi : X & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \Psi(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{p}) \end{array}$$

Probaremos que Ψ es una biyección.

Inyectividad. Si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ entonces $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{p})$ y $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{q})$ entonces $V(\mathfrak{p}) \neq V(\mathfrak{q})$
Si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ entonces $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{p})$ pero $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{q})$ por lo que $V(\mathfrak{p}) \neq V(\mathfrak{q})$.
Hemos probado que si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ entonces $\Psi(\mathfrak{p}) \neq \Psi(\mathfrak{q})$.

Sobreyectividad. Recordemos que $V(\mathfrak{p})$ es irreducible $\Leftrightarrow \mathfrak{I}(V(\mathfrak{p}))$ es primo, pero

$$\mathfrak{I}(V(p)) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p}) \\ \mathfrak{q}: primo}} \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$$

entonces para cada $V(\mathfrak{p}) \in \mathbb{F}$ $\exists \mathfrak{p} \in X$ tal que $\Psi(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{p})$.

Entonces toda componente irreducible Y es igual a un $V(\mathfrak{p})$, probaremos que $\mathfrak{p}$ es minimal.

Sea $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ entonces $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(\mathfrak{q})$ pero como $V(\mathfrak{p})$ es maximal
$\Rightarrow V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{q}) \Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, por lo que $\mathfrak{p}$ es minimal.

3.5. Homeomorfismos

Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos.

i)Si J es un ideal de B, entonces $\varphi^{-1}(J) = \{a \in A : \varphi(a) \in J\}$ es un ideal de A.
Prueba:

- $\varphi^{-1}(J) \neq \phi$ ya que $0 \in A$ y $\varphi(0) = 0 \in J$ entonces $0 \in \varphi^{-1}(J)$
- $\varphi^{-1}(J)$ es un subgrupo de A
  Sean $x, y \in \varphi^{-1}(J) \Rightarrow \varphi(x) \in J$ y $\varphi(y) \in J$
  ya que J es un ideal de B tenemos que $\varphi(x) - \varphi(y) \in J \Rightarrow \varphi(x-y) \in J$ por lo que $x - y \in \varphi^{-1}(J)$
- Absorve el producto.
  Sean$a \in A$ y $x \in \varphi^{-1}(J)$ entonces tenemos que $\varphi(x) \in J$ y $\varphi(a) \in B$, como J es un ideal de $B \Rightarrow \varphi(x)\varphi(a) \in J \Rightarrow \varphi(xy) \in J$ por lo que $ax \in \varphi^{-1}(J)$

ii) Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de B entonces $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo de A.
Prueba:
Si $xy \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \Rightarrow \varphi(xy) \in \mathfrak{p} \Rightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in \mathfrak{p}$
ya que $\mathfrak{p}$ es primo tenemos que $\varphi(x) \in \mathfrak{p}$ ó $\varphi(y) \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ó $y \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$.
Por tanto $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo de A.

De i) y ii) tenemos que φ induce una aplicación natural

$$\varphi^* : Y = Spec(B) \longrightarrow X = Spec(A) \text{ definida por } \varphi^*(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

con $(X, \Im_X)$ y $(Y, \Im_Y)$

Teorema 3.5.1 *:La aplicación inducida en los espectros por cualquier homomorfismo de anillos es continua.*

Demostración.
Sea $\varphi : A \to B$ y $\varphi^* : Y = Spec(B) \longrightarrow X = Spec(A)$ definida por $\varphi^*(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$.

Basta probar que para cualquier X_f en la base de $\Im_X$ entonces $\varphi^{*-1}(X_f) \in \Im_Y$

Sea X_f abierto en X y sea

$$\begin{aligned} y\in\varphi^{*-1}\left(X_f\right) &\Leftrightarrow y\in Y:\varphi^{*}\left(y\right)\in X_f\\ &\Leftrightarrow \varphi^{-1}\left(\mathfrak{p}_y\right)\in X_f\\ &\Leftrightarrow f\notin\varphi^{-1}\left(\mathfrak{p}_y\right)\\ &\Leftrightarrow \varphi\left(f\right)\notin\mathfrak{p}_y\\ &\Leftrightarrow y\in Y_{\varphi(f)}\end{aligned}$$

Por lo que $\varphi^{*-1}\left(X_f\right)=Y_{\varphi(f)}$, por tanto φ^{*} es continua.

Proposición 3.5.1 *i)Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A, entonces $\varphi^{*-1}\left(V(\mathfrak{a})\right)=V(\mathfrak{a}^e)$*
ii)Si $\mathfrak{b}$ es un ideal de B, entonces $\varphi^{*}\left(\bar{V}(\mathfrak{b})\right)=V(\mathfrak{b}^c)$

Demostración
i)

$$\begin{aligned} \text{Sea}\quad y\in\varphi^{*-1}\left(V(\mathfrak{a})\right) &\Leftrightarrow y\in Y:\varphi^{*}\left(y\right)\in V(\mathfrak{a})\\ &\Leftrightarrow \varphi^{-1}\left(\mathfrak{p}_y\right)\in V(\mathfrak{a})\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{a}\subseteq\varphi^{-1}\left(\mathfrak{p}_y\right)\\ &\Leftrightarrow \varphi\left(\mathfrak{a}\right)\subseteq\mathfrak{p}_y\\ &\Leftrightarrow B\varphi\left(\mathfrak{a}\right)\subseteq\mathfrak{p}_y\\ &\Leftrightarrow y\in V(\mathfrak{a}^e)\end{aligned}$$

Por lo que $\varphi^{*-1}\left(V(\mathfrak{a})\right)=V(\mathfrak{a}^e)$

ii) Tenemos que $\varphi^{*}\left(V(\mathfrak{b})\right)=\{\mathfrak{p}\in Spec(A)/\varphi^{-1}(\mathfrak{p})\supseteq\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\}$, pero recordemos que $\mathfrak{b}^c=\varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ por lo que $\varphi^{*}\left(V(\mathfrak{b})\right)=V(\mathfrak{b}^c)$ por la proposicion $\varphi^{*-1}\left(V(\mathfrak{a})\right)=V(\mathfrak{a}^e)$.

Teorema 3.5.2 *Si φ es sobreyectiva, entonces φ^{*} es un homeomorfismo de Y sobre el subconjunto cerrado $V(Ker(\varphi))$ de X.[En particular, $Spec(A/\aleph_A)$ son homeomorfos en el homeomorfismo natural.]*

Demostración

Sean:

$$\varphi:A\longrightarrow B$$

y

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : Y & \longrightarrow & V(Ker(\varphi)) \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \varphi^*(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in V(Ker(\varphi)) \end{array}$$

Para que φ^* sea un homeomorfimo debe cumplir con:

1. φ^*:continua
2. φ^{*-1}:continua
3. φ^*: biyectiva.

φ^*:continua, por la proposición

φ^{*-1}:continua, ya que probamos que la imagen directa de un cerrado es cerrado $\varphi^*(V(\mathfrak{b})) = V(\mathfrak{b}^c)$

Probemos que φ^*: es biyectiva.

Inyectiva:

$$\begin{array}{rcl} \text{Sean } \varphi^*(V(\mathfrak{p})) & = & \varphi^*(V(\mathfrak{q})) \;\; p, q \text{ primos en } B \\ V(\mathfrak{p}^c) & = & V(\mathfrak{q}^c) \\ V(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})) & = & V(\varphi^{-1}(\mathfrak{q})) \\ \Leftrightarrow r(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})) & = & r(\varphi^{-1}(\mathfrak{q})) \\ \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) & = & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}), \text{ ya que } \varphi^{-1}(\mathfrak{p}), \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \text{ son ideales primos de } A \\ \Rightarrow \varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{q})) & = & \varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{q})) \\ \Rightarrow \mathfrak{p} & = & \mathfrak{q}, \text{ ya que } \varphi \text{ es sobreyectiva} \\ \Rightarrow V(\mathfrak{p}) & = & V(\mathfrak{q}) \end{array}$$

por lo tanto φ^* es inyectiva.

Sobreyectiva
Sabemos que :

$$\begin{array}{rcl} \{0\} \subseteq \mathfrak{p}, \; \forall \mathfrak{p} \in Y & \Rightarrow & \varphi^{-1}(\{0\}) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \varphi^*(\mathfrak{p}) \\ & \Rightarrow & Ker(\varphi) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in X \\ & \Rightarrow & \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in V(Ker(\varphi)) \end{array}$$

$\Rightarrow \forall \mathfrak{q} \in V(Ker(\varphi)) \; \exists \mathfrak{p} \in Y, \; tq. \; \varphi^*(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$, por lo que φ^* es sobreyectiva.

Teorema 3.5.3 *Si φ es inyectiva, entonces $\varphi^*(Y)$ es denso en X.De manera más precisa, $\varphi^*(Y)$ es denso en $X \Leftrightarrow Ker(\varphi) \subseteq \aleph$.*

Primero probemos que si φ es inyectiva, entonces $\varphi^*(Y)$ es denso en X.
Sabemos que: $\overline{\varphi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\mathfrak{b}^c) \ \ \forall \mathfrak{b}$ ideal de B, y 0_B es un ideal de B,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{\varphi^*(V(0_B))} &= V(0_B^c); \quad \text{pero } \ V(0_B) = Y \quad \text{y} \quad 0_B^c = Ker(\varphi) \\
\Rightarrow \overline{\varphi^*(Y)} &= V(Ker(\varphi)); \quad \text{ya que } \ \varphi \ \text{ es inyectiva } \ Ker(\varphi) = 0_A \\
\Rightarrow \overline{\varphi^*(Y)} &= V(0_A) \\
\Rightarrow \overline{\varphi^*(Y)} &= X
\end{aligned}$$

por tanto $\varphi^*(Y)$ es denso en X.

Ahora veamos que $\varphi^*(Y)$ es denso en $X \Leftrightarrow Ker(\varphi) \subseteq \aleph$.

$$\begin{aligned}
\varphi^*(Y) \ \text{ es denso en } \ X \ &\Leftrightarrow \ \overline{\varphi^*(Y)} = X, \ \text{ pero } \ \overline{\varphi^*(Y)} = V(Ker\varphi) \\
&\Leftrightarrow \ V(Ker(\varphi)) = X \\
&\Leftrightarrow \ \forall \mathfrak{p} \in X, \ \ Ker(\varphi) \subseteq \mathfrak{p} \\
&\Leftrightarrow \ Ker(\varphi) \subseteq \bigcap \mathfrak{p} = \aleph \\
&\Leftrightarrow \ Ker(\varphi) \subseteq \aleph
\end{aligned}$$

Teorema 3.5.4 *Sea A un anillo cualquiera, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$X = Spec(A)$ es no conexo.*
2. *$A \cong A_1 \times A_2$ donde ninguno de los anillos A_1, A_2 es el anillo cero.*
3. *A contiene un elemento idempotente distinto de 0 y 1.*

Demostración

$1 \Rightarrow 2$ Si X es no conexo $\Rightarrow \exists E, F \subseteq A$ tales que:

$$X = V(E) \cup V(F) \text{ y } V(E) \cap V(F) = \phi$$

pero,

$$V(E) = V((E)) = V(r((E))) \text{ y } V(F) = V((F)) = V(r((F)))$$

hacemos $\mathfrak{a} = V(r((E)))$ y $\mathfrak{b} = V(r((F)))$
entonces,

$$X = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \text{ y } V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = \phi$$

Se presentan 2 casos.

Caso I: $r(A) = 0$ Si $r(A) = 0$ tenemos que:
$X = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$
$\Rightarrow \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$
y $V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) = \phi$
$\Rightarrow (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$
por lo que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son primos entre sí, por el corolario 1.6.1 , tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{A}{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} &\cong \frac{A}{\mathfrak{a}} \times \frac{A}{\mathfrak{b}} \text{ pero ya que } \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0, \\ A &\cong \frac{A}{\mathfrak{a}} \times \frac{A}{\mathfrak{b}} \end{aligned}$$

Caso II: $r(A) \neq 0$.
Consideremos $A' = \frac{A}{r(A)}$. Si $X = Spec(A)$ es no conexo entonces $X' = Spec(A')$ también es no conexo ya que:
$X' = \{\mathfrak{p} + r(A) = \mathfrak{p}';\ \mathfrak{p} \in X\}$.
Si X es no conexo $X = V(E) \cup V(F) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{a})$, $E, F \in A$ y $\mathfrak{a} = V\left(r\left((E)\right)\right)$ y $\mathfrak{b} = V\left(r\left((F)\right)\right)$, y si $\mathfrak{p} \in X \Rightarrow \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ ó $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$, es decir $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ ó $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$
Por lo que:
$r(A) \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ ó $r(A) \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$,
de donde,
$\mathfrak{p}' \in V(\mathfrak{a}')$ ó $\mathfrak{p}' \in V(\mathfrak{b}')$
por tanto
$X' = V(\mathfrak{a}') \cup V(\mathfrak{b}')$
pero $r(A') = \bigcap_{\mathfrak{p}' \in X'} \mathfrak{p}' = \left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}\right)' = \dfrac{r(A)}{r(A)} = 0$
por lo que para A' podemos aplicar el argumento del caso 1, de manera que:

$$A' \cong A'_1 \times A'_2$$

$2 \Rightarrow 3$ Sea

$$\Psi : A \longrightarrow A_1 \times A_2,\ \ A_1 \neq \phi,\ \ A_1 \neq \phi,\ \Psi \text{ biyectiva}$$

Sabemos que $(1, 0) \in A_1 \times A_2$ es un elemento idempotente ya que

$$\begin{aligned} (1,0).(1,0) &= (1 \cdot 1, 0 \cdot 0) \\ &= (1,0) \end{aligned}$$

ademas tenemos que $(1, 0) \neq (0, 0) \in A_1 \times A_2$ y $(1, 0) \neq (1, 1) \in A_1 \times A_2$, entonces $\Psi^{-1}\left((1, 0)\right) \in A$ es un elemento idempotente de A diferente de 0 y

1.

$3 \Rightarrow 1$ Sea $x \in A - \{1, 0\}$ un elemento idempotente, es decir:

$$x^2 = x$$

por lo que

$$\begin{aligned} x(x-1) = 0 \in \mathfrak{p} \ \ \forall \mathfrak{p} \in X \ \ &\Rightarrow \ \ x \in \mathfrak{p} \ \ o \ \ x - 1 \in \mathfrak{p} \\ &\Rightarrow \ \ \{x\} \subseteq \mathfrak{p} \ \ o \ \ \{x-1\} \subseteq \mathfrak{p} \\ &\Rightarrow \ \ \mathfrak{p} \in V(\{x\}) \ \ o \ \ \mathfrak{p} \in V(\{x-1\}); \ \ \forall \mathfrak{p} \in X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(\{x\}) \cup V(\{x-1\}) &= X \ \ y \\ V(\{x\}) \cap V(\{x-1\}) &= \phi \end{aligned}$$

ya que de lo contrario si $V(\{x\}) \cap V(\{x-1\}) \neq \phi$ entonces $\exists \mathfrak{p} \in X$ tal que $\mathfrak{p} \in V(\{x\}) \cap V(\{x-1\}) \Rightarrow x \in \mathfrak{p}$ y $x - 1 \in \mathfrak{p}$, tendriamos que $1 \in \mathfrak{p}$ lo que es contradictorio.

Por tanto X es no conexo.

Teorema 3.5.5 *Sea A un anillo de Boole, y sea $X = Spec(A)$.*

1. *Para cada $f \in A$, el conjunto X_f es a la vez abierto y cerrado en X.*
2. *Sea $f_1, ..., f_n \in A$, entonces $X_{f_1} \cup X_{f_2} \cup ... \cup X_{f_n} = X_f$ para algún $f \in A$.*
3. *Los conjuntos X_f son los únicos subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados.*

Demostración

1. Para cada $f \in A$, el conjunto X_f es a la vez abierto y cerrado en X. Sabemos que $(x) = (x + x) \ \forall x \in A$, pero ya que A en un anillo de boole tenemos: $x + x = 2x = 0$. Sea $f \in A$:

$$\begin{aligned} V(f) &= V((f)) \\ &= V((f+f)) \\ &= V((2f)) \\ &= V(0) \\ &= X \end{aligned}$$

Ya que X es abierto y cerrado, $V(f)$ es abierto y cerrado, por lo que X_f son abiertos y cerrados a la vez.

2.Sea $f_1, ..., f_n \in A$, entonces $X_{f_1} \cup X_{f_2} \cup ... \cup X_{f_n} = X_f$ para algún $f \in A$.

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{n} X_{f_n} &= \bigcup_{i=1}^{n} V(f_n)^c \\
&= (\bigcap_{i=1}^{n} V(f_n))^c \\
&= V(\bigcup_{i=1}^{n} f_n)^c \\
&= V((\bigcup_{i=1}^{n} f_n))^c
\end{aligned}$$

ya en un anillo de Boole cada ideal de generación finita es principal, $\exists f \in A$ tal que $(\bigcup_{i=1}^{n} f_n) = (f)$, por lo que

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{n} X_{f_n} &= V((f))^c \\
&= X_f
\end{aligned}$$

3.Los conjuntos X_f son los únicos subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados.

Sea $W \subseteq X$ a la vez abierto y cerrado.
Ya que W es abierto

$$W = \bigcup_{\substack{f \in I \\ X_f \subseteq W}} X_f$$

Y como W es cerrado y X es compacto $\Rightarrow W$ es compacto.

Por lo que $W = \bigcup_{\substack{f \in I \\ X_f \subseteq W}} X_f \Rightarrow \exists \{X_{f_1}, X_{f_2}, ..., X_{f_n}\}$ tal que

$$\begin{aligned}
W &= \bigcup_{i=1}^{n} X_{f_i} \\
&= X_f \quad \text{para algún} f \in A \ \text{(por 2)}
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Aplicación: El subespacio $Max(A)$ de $Spec(A)$

Sea A un anillo. El subespacio de $Spec(A)$ formado por los ideales *maximales* de A, con la topología inducida, se denomina el *espectro maximal de* A y se designa por $Max(A)$.
Para anillos conmutativos arbitrarios no tienen las propiedades functoriales de $Spec(A)$, porque la imagen inversa de un ideal maximal en un homomorfismo de anillos no es necesariamente maximal.

Teorema 4.0.6 *Sea X un espacio Hausdorff compacto y sea $C(X)$ el anillo de todas las funciones continuas reales sobre X. Para cada $x \in X$, sea m_x el conjunto de todas las $f \in C(X)$ tales que $f(x) = 0$.El ideal m_x es maximal. Si $\tilde{X}$ designa $Max(C(X))$ se tiene por tanto una aplicación $\mu : X \to \tilde{X}$ tal que $x \to m_x$. Entonces μ es un homeomorfismo de X sobre $\tilde{X}$.*

Demostración

1. Probemos que $\mathfrak{m}_x = \{f \in C/\ f(x) = 0\}$ es maximal.
Sea $\Psi : C(X) \to \mathbb{R}$ que aplica f a $f(x)$, entonces

$$\frac{C(X)}{\mathfrak{m}_x} \cong \frac{C(X)}{Ker\Psi}$$

ya que:

$$\begin{aligned} Ker(\Psi) &= \{f/\ \Psi(f) = 0\} \\ &= \{f/\ f(x) = 0\} \\ &= \mathfrak{m}_x. \end{aligned}$$

Pero $\dfrac{C(X)}{Ker\Psi}$ está formado por las $f \neq 0$, por lo que todos los elementos son unidades (el inverso de f es $\frac{1}{f}$), por lo que si $\dfrac{C(X)}{\mathfrak{m}_x}$ es un campo entonces $\mathfrak{m}_x$ es maximal.

2. Ahora sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff y $\tilde{X} = Max(C(X))$ y definimos $\mu : X \to \tilde{X}$ tal que $x \to m_x$. Probaremos que μ es un homeomorfismo de X sobre $\tilde{X}$

i) Probemos que μ sobreyectiva, es decir $\forall \mathfrak{m} \in \tilde{X}, \exists x \in X$ tal que: $\mu(x) = \mathfrak{m}$.

Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal cualquiera de $C(X)$, y sea $V = V(\mathfrak{m})$ el conjunto de los ceros comunes de las funciones en $\mathfrak{m}$ es decir,

$$V = \{x \in X : f(x) = 0 \text{para todo } \ f \in \mathfrak{m}\}.$$

Supóngase que V es vacío. Entonces para cada $x \in X$ existe $f_x \in \mathfrak{m}$ tal que $f_x(x) \neq 0$.
Puesto que f_x es continua, existe un vecindario U_x de $x \in X$ en el que f_x no se anula.

Todos los U_x cubren a X en virtud de la compacidad un número finito de entornos cubren a X es decir:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}.$$

Sea

$$f = f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + ... + f_{x_n}^2 \in \mathfrak{m}$$

Ya que cada $f_{x_i} \neq 0$ entonces $f_{x_i}^2 > 0$, por lo que $f > 0$, no se anula en ningún punto de X, por lo que f tiene inverso $(\frac{1}{f})$, por tanto es unidad en $C(X)$, por lo que $f \notin \mathfrak{m}$. Pero esto contradice que $f \in \mathfrak{m}$, por lo que $V(\mathfrak{m}) \neq \phi$.
Sea $x \in V(\mathfrak{m}) \Rightarrow \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_x$, ya que $\mathfrak{m}$ es maximal $\Rightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$, por lo que $\forall \mathfrak{m} \in \tilde{X}, \exists x \in X$ tal que: $\mu(x) = \mathfrak{m}$.

ii. Probemos que μ es inyectiva, es decir para cada $x \neq y \Rightarrow \mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$.

Sean $x \neq y$, $x, y \in X$, son puntos cerrados, ademas cada f es continua, podemos aplicar el Lema de Uryshon. Entonces si para cada f, $f(x) = 0$ entonces $f(y) \neq 0$, por lo que:

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in C(X)/f(x) = 0\} \neq \mathfrak{m}_y = \{f \in C(X)/f(y) = 0\}$$

3. Ahora probaremos que μ^{-1} es una función continua, es decir la imagen directa de un conjunto abierto es un conjunto abierto.

Ses $f \in C(X)$, definamos:

$$\begin{aligned} U_f &= \{x \in X / f(x) \neq 0\} \quad \text{y} \\ \tilde{U}_f &= \left\{\mathfrak{m} \in \tilde{X} / f \notin \mathfrak{m}\right\} \end{aligned}$$

Los conjuntos U_f y $\tilde{U}_f$ son conjuntos abiertos ya que son los complementos de conjuntos cerrados. Probaremos que $\mu\left(U_f\right) = \tilde{U}_f$.

$$\begin{aligned} \mu\left(U_f\right) &= \{\mu\left(x\right); x \in U_f\} \\ &= \{\mathfrak{m}_x; x \in U_f\} \\ &= \{\mathfrak{m}_x; f(x) \neq 0\} \\ &= \{\mathfrak{m}_x / f \notin \mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}\} \\ &= \tilde{U}_f \end{aligned}$$

entonces μ^{-1} es una función continua.
Ahora probemos que μ es continua, para ello veamos que la imagen inversa de un cerrado es cerrado.
Sabemos que: $\mu^{-1} : \tilde{X} \to X$, tomemos U cerrado en $\tilde{X}$, como $\tilde{X}$ es compacto, entonces U es compacto, ya que μ^{-1} es continua, $\mu^{-1}(U)$ es compacto en X, pero como X es Hausdorff entonces $\mu^{-1}(U)$ es cerrado. Por lo que la imagen inversa de un cerrado es cerrado. Así μ es continua.

Por lo que μ es un **homeomorfismo** de los espacios X y $\tilde{X}$. Así X puede ser reconstruido a partir del anillo de funciones $C(X)$.

Referencias

1. James R. Munkres: Topology, Editorial Prentince Hall, E.E. U.U. 1975
2. M.F. Atiyah, I. G. Macdonald:Introducción al Álgebra Conmutativa, Edición en Español, Editorial Reverté, S.A., 1978
3. N. Bourbaki: Eléments de mathématique: Algebre Commutative, chapitre 1 y 2, Editorial Hermann, París 1961
4. Theodore W. Gamelin,Robert Everist Greene:Introduction to Topology, Dover Publications,New York.
5. Thomas W. Hungerford: Graduate Texts in Mathematics, Editorial Board.
6. Wikipedia, la enciclopedia libre: http://es.wikipedia.org