UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR.
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA.
ESCUELA DE MATEMÁTICA.

TRABAJO DE GRADUACIÓN PREVIO A LA OPCIÓN AL GRADO DE:
MASTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA.

TITULO:

“RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN ECUACIONES DIFERENCIALES” UN ENFOQUE HEURISTICO.

ASESOR: **MSc. Martín Enrique Guerra Cáceres.**

PRESENTADO POR: **José Francisco Melgar Brizuela**

Ciudad Universitaria, Septiembre de 2004.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA.

ESCUELA DE MATEMATICA.

TRABAJO DE GRADUACIÓN PREVIO A LA OPCIÓN AL GRADO DE: MASTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA.

TITULO:

"RESOLUCION DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN ECUACIONES DIFERENCIALES" UN ENFOQUE HEURISTICO.

ASESOR: **MSc. Martín Enrique Guerra Cáceres** ______________________

PRESENTADO POR: **José Francisco Melgar Brizuela**

Ciudad Universitaria, Septiembre de 2004.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

Rectora: Dra. María Isabel Rodríguez

Vicerrector Académico: Ing. Joaquín Orlando Machuca

Vicerrectora Administrativa: Dra. Carmen E. Rodríguez de Rivas.

Secretaria General: Licda. Alicia Margarita Rivas de Recinos

Ciudad Universitaria, Septiembre de 2004.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

AUTORIDADES

Decano: MSc. José Héctor Elías Díaz

Vice-Decano: MSc. Francisco Antonio Chicas Batres

ESCUELA DE MATEMÁTICA

Director: Lic. Mauricio Hernán Lovo Córdova.

Ciudad Universitaria, Septiembre de 2004

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi profundo agradecimiento a:

- **La Asociación de profesores de la Cooperación Universitaria Española (CUES).**
- **La Escuela de Matemática y a nuestra Facultad.**
- **A los profesores que generosamente ofrecieron sus servicios para el desarrollo del Programa de Maestría en Didáctica de la Matemática, dentro del convenio UES-CUES, en especial a la**

  Dra. María Luz Callejo de la Vega y al
  Dr. Emilio de la Rosa

- **Al Dr. Jorge Rodríguez Piñero Fernández, presidente de la Cooperación Universitaria Española (CUES) y director del programa de Maestrías.**
- **Al Ing. y MSc. José Francisco Marroquín, Impulsor del Programa de Maestrías de la Escuela de Matemática. Nuestra gratitud por sus valiosas enseñanzas en las clases de repaso.**
- **Al MSc. Martín Enrique Guerra Cáceres por su asesoría.**

DEDICATORIA.

Dedico este trabajo de graduación a mi esposa: Adelita Muñoz

y a mis hijos: Claudia Mayarí,

Alex Francisco

y Luis Eduardo

INDICE.

INTRODUCCION.

Han transcurrido más de dos mil años desde que la matemática se estructuró como una disciplina científica. Desde entonces hasta la época actual ha evolucionado enormemente y cada vez que realiza una mirada retrospectiva sobre el espejo de la historia o que reflexiona sobre su propia práxis, afloran conclusiones que le van dando la capacidad de alcanzar mayores niveles de comprensión sobre si misma y sobre su pasado, su adecuación al momento histórico, sus proyecciones al futuro, sus formas de reproducirse en una sociedad determinada, su propia epistemología, etc.

Esta riqueza de pensamiento y reflexión, propia de las ciencias que han alcanzado un alto grado de madurez va dando resultados concretos que permiten reorientar el rumbo a seguir e introducir innovaciones curriculares tendientes a hacer más efectivos los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Como un valioso fruto de tales reflexiones puede afirmarse que la comunidad internacional de matemáticos, especialmente los investigadores en educación matemática, han concluido que la RESOLUCION DE PROBLEMAS, es la actividad matemática más importante, si es que esta ciencia ha de servir para cultivar la inteligencia: desarrollar la capacidad de establecer relaciones, de enfrentar situaciones nuevas y de "saber-hacer" más que de adquirir conocimientos como un "saber" que no sea capaz de aplicarse.

G. Polya sostenía, ya en 1945, que "la resolución de problemas es el corazón de la actividad matemática"[1]. Con esta afirmación estamos totalmente de acuerdo, dado que en ella el sujeto que aprende entra en interacción directa con los objetos matemáticos y adquiere la motivación que necesita para encontrarle interés a lo que está estudiando y aprendiendo.

[1] POLYA, G.(1945). How to Solve it. Princenton University Press.

No podemos extendernos mucho, por razones de espacio y tiempo, en esta breve introducción, sólo queremos agregar que la resolución de problemas se puede plantear en una gran variedad de objetivos y situaciones didácticas: para motivar, para desarrollar capacidades, para aplicar el conocimiento adquirido, para introducir nuevos conceptos, etc., lo que la sitúa como un recurso primordial para la formación inicial de los alumnos y en muchos casos para consolidar la formación de los más avanzados.

En el enfoque moderno de la educación matemática, los investigadores de mayor autoridad y prestigio, tales como Poincarè, G. Polya, Miguel de Guzman, J. Kilpatrick, María Luz Callejo de La Vega y otros, coinciden en que la formación matemática debe concebirse como un proceso de encontrar el conocimiento y no como una enseñanza a impartir.

En tal sentido la matemática puede considerarse como una ciencia experimental , ya que al igual que las ciencias naturales comienza utilizando los métodos empíricos del conocimiento: la observación, el ensayo (experimentación) y no es hasta después de comprobar y verificar las hipótesis iniciales que se procede (mediante la práctica-teórica) a la fase de elaboración de leyes y teorías que consolidan el movimiento del pensamiento de lo empírico a lo teórico, en analogía con los métodos que utilizan las ciencias naturales para construir y desarrollar el conocimiento científico. O como afirma Mostowski:

"El resultado (de Gödel) y otros resultados negativos confirman el aserto de la filosofía materialista de que la matemática es, en última instancia, una ciencia natural, que sus nociones y métodos tienen sus raíces en la experiencia y que los intentos de establecer los fundamentos de la matemática sin tener en cuenta su origen en las ciencias naturales están condenados al fracaso"[2]

---

[2] Citado por Imre Lakatos en Matemática, Ciencia y Epistemología. (Pág. 46)

El gran matemático y filósofo Imre Lakatos considera a la matemática como una ciencia cuasi-empírica. Para algunos matemáticos estas consideraciones filosóficas podrían parecer irrelevantes, no así para los que, de alguna manera, comprendemos la gran responsabilidad de hacer docencia en esta área del conocimiento. De la concepción filosófica que se tenga de la ciencia y de la matemática en este caso particular dependerá la metodología que se siga, tanto en su desarrollo como en su enseñanza.

"La metodología de una ciencia depende en gran medida de que dicha ciencia aspire a un ideal euclídeo o cuasi-empírico. La regla básica de una ciencia que adopte el primer objetivo es la búsqueda de axiomas auto-evidentes – la metodología euclídea es puritana y antiespeculativa. La regla básica del segundo tipo de ciencia es la búsqueda de hipótesis imaginativas y audaces con una gran potencia explicativa y "heurística" y, en realidad, este tipo de ciencia invoca una proliferación de hipótesis alternativas para ser escardadas por una crítica severa – la metodología cuasi-empírica es irreprimiblemente especulativa"[3] Véase también Teorías cuasi-empíricas versus teorías euclídeas[4]

El gran matemático español Miguel de Guzmán (recientemente fallecido), a quien los estudiantes de la maestría en didáctica de la matemática de la UES le recordamos con mucho cariño y agradecimiento por haber sido profesor en uno de nuestros cursos, opina:

"La matemática es, en mucha mayor medida de lo que normalmente se piensa, una verdadera ciencia experimental. No sucede solamente que esté ligada a las ciencias experimentales, como la astronomía entre los mesopotamios y la agricultura entre los egipcios, sino que es ella misma, en su modo de proceder y de progresar, una ciencia empírica"[5]

Esta concepción heurística de la matemática permite que sea el alumno el que vaya creando el conocimiento matemático en situaciones semejantes a las que se encontraban los

[3] Lakatos, I. Matemática, Ciencia y epistemología(1978). Alianza Editorial. Madrid.
[4] Op. C: (Págs. 47-57).
[5] Guzmán, M. (1985). Enfoque Heurístico de la Enseñanza de la Matemática. Aula Abierta Nº 57. ICE de la Universidad de Zaragoza.

investigadores al momento de crear el conocimiento, es decir, incubando y desarrollando las ideas que fueron la génesis del conocimiento actualmente establecido. Si lográramos, en base a esta concepción, una metodología adecuada de la matemática en nuestro medio, pronto veríamos el surgimiento de verdaderos investigadores aportando en las áreas de enseñanza, aplicación y engrandecimiento de esta valiosa ciencia.

Es claro que entre las diferentes áreas de la matemática hay algunas que se prestan mejor que otras para una actividad heurística. A nivel universitario (en el que se desempeña el autor de este trabajo de graduación) es evidente que la parcela de las ecuaciones diferenciales es una de las que mejor se prestan para desarrollar esta actividad heurística, justamente porque a través de la historia de las ciencias naturales y la ingeniería se puede comprobar que la resolución de problemas de estas áreas y algunos problemas matemáticos han tenido una fuerte componente heurística en su solución y, en consecuencia, no es de extrañar que el desarrollo histórico (desde la época del gran maestro Euler) de las ecuaciones diferenciales esté impregnado de métodos heurísticos, conocidos por otros como métodos de ensayo y error.

La motivación personal de realizar este trabajo de graduación en el área de resolución de problemas enfocados a la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales obedece a nuestro deseo de aportar modestamente, al menos, a la discusión en nuestro medio de los fundamentos de un área importante de la enseñanza de las matemáticas universitarias sobre la cual no ha habido hasta el momento muchos trabajos de investigación. En la segunda mitad del siglo XX se realizaron una gran cantidad de trabajos de investigación en diferentes áreas de la didáctica de las matemáticas y en particular, inspirados en las obras de G. Polya, tales como How to Solve it (1945), Mathematics and Plausible Reasoning (1954, 2 volúmenes), Mathematical Discovery (1962, 2 volúmenes), se han llevado a cabo muchos trabajos en el área de resolución de problemas; sin embargo, muy poco o casi nada se ha hecho para

investigar la posibilidad de enseñar las Ecuaciones Diferenciales con el enfoque de Resolución de Problemas.

En lo personal nos desempeñamos en la enseñanza de la Física y de la Matemática-Física (conocida generalmente como métodos matemáticos de la física), donde es enorme la cantidad de problemas que se resuelven mediante la utilización del Cálculo diferencial e Integral, Análisis Vectorial y Tensorial, Álgebra Lineal, Teoría de Grupos, Series Infinitas, Variable Compleja, Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias y Parciales), Teoría de Sturm-Liouville de las Funciones Ortogonales, Transformadas Integrales, Ecuaciones Integrales, Análisis Variacional, etc.

Después de más de veinticinco años de estar dedicado a esta labor hemos adquirido una modesta experiencia en la resolución de problemas y en los últimos años hemos aplicado algunos aspectos de la metodología de enseñanza basada en la Resolución de Problemas que estudiamos en el curso del mismo nombre impartido magistralmente por la Dra. María Luz Callejo de la Vega, a quien siempre le estaremos agradecidos por habernos introducido en la reflexión y práctica de esta metodología.

La mayoría de los problemas que presentamos a lo largo de este trabajo los hemos puesto en práctica en diferentes cursos de la licenciatura en física tales como Mecánica, Termodinámica, Teoría Electromagnética y, por supuesto, en los diferentes cursos de la Matemática-Física. Queremos aclarar, para evitar confusiones o falsas expectativas que nunca hemos impartido un curso de Ecuaciones Diferenciales y que nuestra experiencia en este tema está relacionada con la resolución de problemas cuando dichas ecuaciones aparecen como consecuencia natural de la aplicación de conceptos y leyes de la física. De esta manera surgió el deseo de compartir algunas de estas experiencias con los colegas que enseñan Ecuaciones Diferenciales en los cursos universitarios de matemáticas.

Los dos primeros capítulos de este trabajo de graduación se dedican a algunos aspectos conceptuales y pueden, en mi opinión, considerarse como pequeños desarrollos del

Marco Teórico o Marco Conceptual. En el Capítulo I se presenta un breve resumen del contexto histórico de las Ecuaciones Diferenciales y del área de la Didáctica de las Matemáticas conocida como Resolución de Problemas. El Capítulo II se refiere a la definición y clasificación de las Ecuaciones Diferenciales. El interés de presentar este capítulo es más que todo por la necesidad de orientar el desarrollo de este trabajo; sin embargo, el lector familiarizado con estos conceptos puede omitir la lectura de los artículos II.1 y II.2, pero se sugiere observar el enfoque didáctico implícito en los artículos II.3 y II.4. El Capítulo III se dedica a las ecuaciones diferenciales de primer orden y el Capítulo IV a las ecuaciones diferenciales de segundo orden y orden superior. El Capítulo V contiene una selección de problemas en diferentes áreas: Física, Economía, Biología, Química y otras. En el Capítulo VI se presentan algunas experiencias personales acumuladas a lo largo de varios años de labor docente en los cursos de Matemática-Física impartidos en la Escuela de Física de nuestra Facultad.

OBJETIVOS.

- **Realizar una lectura crítica de la bibliografía básica sobre el tema "RESOLUCION DE PROBLEMAS" y analizar sus incidencias en el curriculum universitario.**

- **Aplicar los conceptos, métodos y técnicas investigados, en la resolución de problemas que involucren ecuaciones diferenciales.**

- **Elaborar guías didácticas para cada uno de los problemas propuestos y experimentar con estudiantes estas guías didácticas.**

- **Involucrar algunos profesores que imparten los cursos de ecuaciones diferenciales y profesionales conocedores del tema y tomar en cuenta sus críticas, comentarios y sugerencias.**

MARCO TEORICO.

La mayoría de los trabajos de investigación o de graduación presentan explícitamente un Marco Teórico o Marco Conceptual. Consideramos que no solo es conveniente sino también necesario redactar al menos unos párrafos dedicados a enmarcar conceptualmente el trabajo realizado. En realidad todo trabajo de este tipo contiene, al menos implícitamente, un Marco Teórico que responde a las referencias conceptuales o ideas que guían a su autor en la realización del mismo, incluyendo los pasos metodológicos seguidos para su ejecución. Los trabajo más sencillos, generalmente limitados a un carácter descriptivo no necesitan presentar explícitamente ni siquiera un marco de referencia. En nuestro caso sucede todo lo contrario. Un Marco Teórico completo constituiría en si mismo un enorme trabajo de investigación (u otro trabajo de graduación). La Alternativa de una presentación breve (en unas pocas páginas) de un Marco Teórico acerca de la Resolución de Problemas y las Ecuaciones Diferenciales tampoco es viable porque implicaría un arduo trabajo de síntesis de múltiples generalidades relacionadas con todos los aspectos o facetas de ambos temas. Por tanto, nos limitaremos a señalar algunos de los aspectos más relevantes implicados y luego delimitaremos el alcance de este trabajo que no pretende más que ser considerado como un pequeño aporte al inmenso océano que constituyen los temas mencionados.

ASPECTO HISTORICO. **"Con frecuencia, la solución de problemas en la ciencia exige grandes esfuerzos de muchas generaciones de científicos"**[6]

La historia de la ciencia confirma que la investigación experimental y el desarrollo de la ciencia progresaban lentamente, al menos, hasta el siglo XVII. Sin embargo, la época del Renacimiento, que ponía fin al oscurantismo de la humanidad, propició el desarrollo del arte y abrió el camino para el futuro desarrollo de las ciencias experimentales. Con el

aparecimiento posterior de los sistema de producción capitalista, la investigación experimental comienza a desarrollarse con un ritmo más acelerado. La comprensión teórica de los procesos productivos exigía una comprensión cada vez más elaborada y completa del proceso del conocimiento, en especial del conocimiento científico. Este proceso comprende, al menos, la interacción de varios elementos: la acción cognoscitiva del hombre; los medios del conocimiento, los objetos del conocimiento y los resultados de la actividad cognoscitiva. Entre los principales medios se pueden mencionar: los medios materiales, los lógico-lingüísticos y los medios matemáticos del conocimiento.

Los investigadores comenzaron a distinguir los cambios en su propia actividad cognoscitiva de los que tienen lugar en los objetos estudiados. Los medios antes señalados desempeñan un papel importante en la distinción y estudio de los objetos y en la formulación y comprobación empírica de los conocimientos.

Las investigaciones experimentales en las ciencias naturales crearon el ambiente y la necesidad de explicar muchos fenómenos en términos de un lenguaje adecuado: el lenguaje matemático y especialmente el del Cálculo Diferencial e Integral. El advenimiento de la revolución industrial, cuyos pilares científicos se basaron en la Física y la Química, motivaron un amplio desarrollo de las Ecuaciones Diferenciales.

En la actualidad, las Ecuaciones Diferenciales continúan siendo objeto de investigación y el contenido de las mismas continúa incrementándose en áreas muy variadas tales como sistemas no lineales, Teoría de las bifurcaciones, Métodos numéricos de solución, Modelado con Ecuaciones Diferenciales y nuevos enfoques para su enseñanza. El avance computacional de nuestros días está exigiendo nuevos planteamientos metodológicos para la enseñanza y aplicación de las Ecuaciones Diferenciales.

---

[6] Academia de Ciencia y Filosofía de la Habana (1989). Metodología del Conocimiento Científico (Pág. 187). Ediciones Quinto Sol, La Habana.

ASPECTO FILOSOFICO. **No pretendemos, ni mucho menos, plantear aquí un enfoque epistemológico de las matemáticas. Nos limitaremos a mencionar que desde aproximadamente el año de 1930 se han venido discutiendo diferentes corrientes de interpretación filosófica de las matemáticas, entre las que podemos mencionar las corrientes logicista, formalista e intuicionista, apoyada esta última por Imre Lakatos y otros que consideran a la matemática como una ciencia empírica o cuasi-empírica. Como lo hemos señalado anteriormente, de la concepción que se tenga de la matemática depende la metodología que se adopte para su progreso y enseñanza. Aquí radica el aspecto más importante de la concepción de la matemática como ciencia.**

"El hecho de que el formalismo matemático se estableció mucho antes de que resultara clara su interpretación física demuestra las grandes capacidades heurísticas de las matemáticas en las ciencias contemporáneas. Esta circunstancia está condicionada por el hecho de que en la actualidad la matemática ha alcanzado tal grado de generalidad, que su objeto de estudio lo son las diferentes estructuras abstractas, y no solo las conocidas actualmente, sino en general, cualquier estructura posible. Debido a la gran generalidad de las estructuras matemáticas abstractas, con su ayuda resulta posible describir la sujeción a leyes de los más diferentes procesos físicos. Todo esto no hace más que confirmar la tesis acerca de la unidad material de la naturaleza, que encuentra su manifestación en la coincidencia de la estructura matemática de los diferentes fenómenos estudiados. Ya en la aurora de la nueva física, cuando algunos científicos utilizaban ampliamente las ecuaciones diferenciales y se hablaba de la "desaparición de la materia", Lenin escribía: La unidad de la naturaleza se manifiesta en la asombrosa analogía de las ecuaciones diferenciales que se refieren a diferentes ordenes de los fenómenos"[7]

ASPECTO DIDÁCTICO-METODOLOGICO.

"La educación matemática debe por tanto proporcionar a los alumnos: a) contextos de aprendizaje adecuados para que los estudiantes construyan sus conocimientos matemáticos en interacción con sus compañeros y con el profesor y b) situaciones problemáticas que les den la oportunidad de experimentar, conjeturar, refutar, comprobar, generalizar resultados, inventar nuevos problemas"[8]

Todos sabemos acerca del "fracaso escolar" en las asignaturas de matemáticas en todo nuestro sistema educativo. A nivel universitario también es crítico. Basta mencionar que en los tres últimos años en el primer examen parcial de la asignatura Geometría I, impartida por la Escuela de Matemática de nuestra Facultad han reprobado, en promedio, un 70% de los estudiantes de dicho curso, según investigación realizada por estudiantes de la Licenciatura en Estadística y Computación que cursaron la asignatura de Metodología de la Investigación el ciclo recién finalizado (Ciclo I, 2004), impartido por el autor de este trabajo.

Para intentar resolver este problema del fracaso escolar en matemáticas se han hecho muchas investigaciones en varios países desarrollados y se han presentado varios informes relevantes que nos describen esta situación patética. Talvez uno de los informes más mencionados sea el informe Cockcroft (1982, Gran Bretaña). También se han realizado muchos congresos sobre educación matemática (el autor de este trabajo tuvo la oportunidad de participar en RELME 16, Habana 2002) tratando de resolver esta crítica situación. Cada congreso propone una lista de recomendaciones orientadas a tal fin, pero desde hace unos cuarenta años se da una constante en tales recomendaciones, pues siempre aparece al menos una, que con pequeñas diferencias en su redacción es muy parecida a la siguiente:

[7] Metodología del Conocimiento Científico (Pág. 286). Op. C.
[8] María Luz Callejo de la Vega (1992). (SUMA Nº 10).

"El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas recomienda que la SOLUCIÓN DE PROBLEMAS sea el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas" (NCTM: National Council of Teachers of Mathematics, 1980).

Para finalizar con este importante aspecto del Marco Teórico, queremos señalar que el método por excelencia de las ciencias naturales es el METODO HIPOTÉTICO-DEDUCTIVO. En este método la construcción de hipótesis desempeña varias funciones, siendo la más importante su contribución al engrandecimiento de la ciencia (Véase LA HIPOESIS, Págs. 274-296 en Metodología del Conocimiento Científico, Op. C). Si la matemática ha de considerarse una ciencia experimental (como opina Miguel de Guzmán) o una ciencia cuasi-epírica (según la tesis de Imre Lakatos), bien haríamos los que enseñamos matemáticas en preocuparnos por conocer mejor los fundamentos filosóficos de este método.

"El método de la Hipótesis Matemática se utiliza fundamentalmente en la Física Teórica contemporánea. Esto se explica en primer lugar, por el hecho de que los conceptos y teorías de la nueva física resultan muy abstractos y están considerablemente alejados de la experiencia. Es por esto que para su clara interpretación, como indica el físico inglés P. Dirac, no son suficientes nuestras imágenes habituales. Realmente no es difícil representarnos las partículas y ondas materiales de la física clásica, pero es extremadamente difícil, si no imposible, crear una imagen visual de una micropartícula, que cuenta con propiedades tanto corpusculares como ondulares y cuya unión no es mecánica, si tenemos en cuenta que en la representación habitual los corpúsculos y las ondas aparecen como polarmente contradictorios. Por tal razón, en este caso se trata de una síntesis dialéctica de propiedades antípodas. De aquí resulta claro que si la física clásica podía formular sus hipótesis en términos más o menos comunes a las imágenes visuales, la física contemporánea, cada vez en

mayor medida, se ve obligada a apelar al auxilio de los métodos de la matemática y la lógica. Precisamente, uno de dichos métodos es el de la Hipótesis Matemática"[9]

Existe bastante bibliografía de muy buena calidad que trata detenidamente estos tres aspectos, aunque difícilmente los encontraremos en el mismo texto. Con frecuencia puede encontrarse, aunque dispersos, breves ensayos en las revistas científicas sobre matemática y en particular sobre educación matemática. Recomendamos al lector interesado leer algunas de las obras que hemos citado.

Dentro de este gran Marco Teórico el autor se limita a presentar: Un breve contexto histórico de las Ecuaciones Diferenciales y la Resolución de Problemas en el Cap. I; Un breve marco definitorio en el Cap.II (II.1 y II.2); algunos elementos para la reflexión de estrategias didácticas en el mismo Cap. II (II.3 y II.4). Pero principalmente se presenta a la consideración de profesores que imparten los cursos de Ecuaciones Diferenciales algunos elementos para la enseñanza de éstas mediante el enfoque de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, basados en nuestra experiencia en los cursos de Física y Matemática-Física. Aclaramos que no es nuestra pretensión proponer una metodología completa para la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales; únicamente queremos compartir algunas experiencias ya comprobadas en el aula a través de los cursos mencionados y talvez iniciar una discusión o motivar otras investigaciones tendientes a construir la DIDÁCTICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.

[9] Metodología del Conocimiento Científico (Pág. 284), Op. C.

JUSTIFICACIÓN.

En un trabajo de graduación es frecuente que aparezca en forma explícita la justificación del mismo, es decir, el autor debe expresar en forma clara su opinión acerca de la necesidad de realizar dicho trabajo, o la contribución que pretende aportar en la solución de algún problema específico. En este trabajo parte de dicha justificación se encuentra implícita en la INTRODUCCIÓN (Pág. 9).

En el caso particular de este trabajo consideramos que una verdadera justificación no se puede expresar en un contexto aislado, razón por la cual el lector podrá encontrar una mejor descripción de la misma en el Capítulo I. (Véase el Artículo I.3: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, Pág.30).

En nuestro medio es lamentable que algunos cursos de ecuaciones diferenciales se tomen como un simple requisito para satisfacer una exigencia del plan de estudio o se impartan de una manera mecanicista, pasando de lejos la oportunidad de consolidar una formación y actitud matemática en estudiantes que ya son casi profesionales y, por tanto, está en juego la conducta que adoptarán en su próximo ejercicio profesional. En tal sentido, hemos solicitado la colaboración de algunos profesores de reconocido prestigio que imparten cursos de ecuaciones diferenciales y de profesionales conocedores del tema para plantear (en base a las críticas , comentarios y sugerencias de los mismos) variantes de los problemas propuestos a fin de hacerlos más atractivos, más interesantes y que se puedan adaptar para resolver situaciones reales de las ciencias naturales o de las ciencias sociales y la economía.

A pesar del impresionante desarrollo del conocimiento de las Ecuaciones Diferenciales y de los esfuerzos realizados en la sistematización de su teoría, hace falta mucho trabajo para construir y desarrollar "la Didáctica de las Ecuaciones Diferenciales". Está claro que esta tarea requiere de muchos esfuerzos y recursos y de la participación de investigadores en

varios países. Nuestro objetivo es solamente contribuir desde la perspectiva de la resolución de problemas. Retomamos este aspecto en el Capítulo I de este trabajo de graduación.

Probablemente algunos profesores de Ecuaciones Diferenciales se preocupan muy poco por el fracaso escolar a este nivel de los estudios universitarios (4º o 5º ciclo en nuestro medio) dado que siempre se puede apelar a la "responsabilidad" del estudiante. Talvez ni siquiera exista el problema del fracaso escolar en términos de reprobaciones masivas, superiores al 50 %. En nuestra opinión el problema debe considerarse de otra manera y trataremos de plantearlo.

Supongamos, por ejemplo, que un estudiante adquiere las habilidades y destrezas necesarias para resolver las ecuaciones diferenciales que se le presentan ya dadas en cierto contexto de clasificación de las mismas pero descontextualizadas de cualquier aplicación práctica y por tanto carentes, en cierto modo, de significado; supongamos también que el mismo estudiante al enfrentarse a la situación de resolver un problema concreto en algún área de la ciencia de la que conoce sus diferentes leyes (por ejemplo las leyes de los circuitos eléctricos) no sea capaz de plantear correctamente la ecuación diferencial que debe resolver para solucionar dicho problema. Esta claro, entonces, que dicho estudiante no está adquiriendo las competencias necesarias para desempeñarse posteriormente en la vida profesional. Podrá decirse que no se trata más que de un ejemplo hipotético; sin embargo, con frecuencia encontramos casos similares al descrito en el ejercicio profesional de muchos graduados de las carreras de ciencias o de ingeniería e incluso de la misma licenciatura en matemáticas. La pregunta es la siguiente: ¿Estamos entonces enseñando algoritmos de solución de ecuaciones diferenciales o estamos contribuyendo a elevar el nivel de razonamiento de nuestros estudiantes y a mejorar sus competencias en la resolución de problemas que involucran estas ecuaciones? Recordemos que las Ecuaciones Diferenciales constituyen una parte importante de la estructura de los medios matemáticos del

conocimiento científico, como ya ha sido señalado en el Marco Teórico. Consideramos que bastan estos elementos aquí planteados para justificar un trabajo de esta naturaleza que busque contribuir a la solución de un problema específico, pero de gran relevancia por estar relacionado con muchas áreas del conocimiento y de las investigaciones científicas.

CAPITULO I.

CONTEXTO HISTORICO: LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y LA RESOLUCION DE PROBLEMAS.

> Los descubrimientos de un gran matemático como era Newton no pasan casi nunca automáticamente a formar parte de la tradición matemática general. Pueden muy bien permanecer perdidos largo tiempo para el mundo, a no ser que otros sabios los entiendan y se tomen además el suficiente interés para estudiarlos desde diversos puntos de vista, clasificarlos y generalizarlos, así como mostrar sus consecuencias

CARL B. BOYER.

I.1 ECUACIONES DIFERENCIALES.

Es muy difícil hablar con precisión de los orígenes del cálculo (diferencial e integral) y de las ecuaciones diferenciales. Muchos autores están de acuerdo en reconocer a Newton y a Leibnitz la paternidad del cálculo; otros en cambio, sostienen que las ideas básicas del concepto de límite eran ya conocidas por los antiguos griegos. El gran matemático francés Blaise Laplace sostenía a finales del siglo XVIII que Fermat fue el verdadero inventor del cálculo infinitesimal. Pierre de Fermat falleció en 1665, mientras que la mayor producción matemática de Newton fue posterior a ese año.[10]

Al margen de las anteriores consideraciones puede afirmarse que después de Newton el Cálculo no se desarrolló en forma rápida, sino más bien durante ciertas épocas y debido a la contribución de otros matemáticos. Con el desarrollo del cálculo surgieron las Ecuaciones Diferenciales (tan pronto como se reconoció la relación inversa existente entre los procesos de diferenciación y de integración) a cuyo engrandecimiento teórico contribuyó grandemente Jacques Bernoulli (1654-1705), con el estudio de las ahora conocidas como "ecuaciones de Bernoulli"[11]:

---

[10] Boyer, C.(1969). Historia de la Matemática (CAP XVII). Alianza Universidad, Madrid.
[11] Op. C.

$$y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^{n}.$$

A principios del Siglo XVIII el "arsenal" de procedimientos de soluciones de ecuaciones diferenciales era aun pequeño. En él se incluían la se separación de variables, casos particulares de búsqueda de factor integrante y la resolución de ecuaciones homogéneas de primer orden mediante sustituciones de la forma y = xt.

En la época en que Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) publicó su famoso "traité de dynamique" (1743) la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias ya se había desarrollado considerablemente, pero el problema más difícil de las ecuaciones en derivadas parciales era entonces un campo abierto para los pioneros. El estudio de la cuerda vibrante condujo a d'Alembert a la siguiente ecuación diferencial parcial:

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ **para la que obtuvo la solución u = f (x + t) + g (x – t) donde f y g son funciones arbitrarias pero continuas.**

El gran matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) propuso para la ecuación más general:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{la solución } u = f(x + a\,t) + g(x - a\,t).$$

Por tanto, puede afirmarse que el origen de las ecuaciones en derivadas parciales se encuentra en el estudio de la cuerda vibrante.

Alexis Claude Clairaut, uno de los matemáticos más precoces de la historia (a los 18 años fue nombrado miembro de la Acadèmie de Sciences) observó que, en general, las derivadas parciales de segundo orden f_{xy} y f_{yx} de una función f(x,y) son iguales (Ahora se sabe que es cierto si estas derivadas son continuas en el punto en cuestión). Clairaut utilizó este hecho en el familiar criterio $M_y = N_x$ en la teoría de las ecuaciones diferenciales, para el carácter de diferencial exacta de la expresión M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0.

Una de las ecuaciones diferenciales más interesantes que se estudiaron durante el siglo XVIII es la ecuación de Riccati:

$$y' = p(x)\, y^2 + q(x)\, y + r(x).$$

Esta interesante ecuación fue estudiada por muchos matemáticos de la época, entre ellos varios de los hermanos Bernoulli, d'Alembert, Jacopo Riccati (1676-1754) y su hermano Vincenzo. Euler observó el hecho de que si se conoce una solución particular $v = f(x)$, entonces el cambio de variable $y = v + 1/z$ convierte la ecuación de Riccati en una ecuación diferencial en z, de tal manera que se puede hallar una solución general.

A pesar de las dificultades para establecer con precisión el origen histórico de las Ecuaciones Diferenciales, puede asegurarse con certeza que éstas tuvieron un enorme desarrollo a lo largo del Siglo XVIII.

I.2 ORIGEN FISICO.

La historia del desarrollo del Cálculo y de las Ecuaciones Diferenciales a partir del siglo XVII es un tema apasionante, pero nos vemos obligados (por razones de espacio) a dejar hasta aquí tan interesante tema; sin embargo, consideramos necesario señalar que las Ecuaciones Diferenciales no solamente tienen un origen histórico sino también un origen en las ciencias naturales, especialmente en la Física, donde surgen en forma "espontánea" a partir del intento de resolver problemas propios de esta ciencia o problemas de aplicación en ingeniería.

Dennis G. Zill expresa: "No sería nada presuntuoso afirmar que las ecuaciones diferenciales son la piedra angular de disciplinas como la física y la ingeniería eléctrica, e incluso

proporcionan un importante instrumento de trabajo en áreas tan diversas como la biología y la economía"[12]

A pesar de que el desarrollo histórico de las ciencias naturales y de las ecuaciones diferenciales (de la matemática en general) se encuentra suficientemente documentado en una extensa bibliografía nos limitaremos, por las razones expuestas, a presentar una breve lista de ecuaciones diferenciales que surgen a partir de problemas de la Física.

1. $\frac{dp}{dy} = -ap$ **Modelo simplificado de la variación de la presión atmosférica con respecto a la altura.**

2. $\frac{dq}{dt} = -kA\frac{dT}{dx}$ **Flujo de calor unidimensional.**

3. $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ **Ecuación de la caída libre de cuerpos u objetos cercanos a la superficie de la tierra.**

4. $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ **Ecuación de un sistema masa-resorte.**

   Esta ecuación a menudo se escribe en la forma siguiente:

   $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ **con ω^2 = k/m. En esta forma es más conocida como la ecuación del oscilador armónico simple.**

5. $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$ **Ecuación que describe las oscilaciones de un péndulo simple.**

[12] Zill, D.(1982) Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones(Pág. 13). Wadsworth Internacional/Iberoamérica, Santiago, Chile.

6. $\xi(t) = L\dfrac{d^2q(t)}{dt^2} + R\dfrac{dq(t)}{dt} + \dfrac{q(t)}{C}$ **Ecuación de un circuito RLC (de corriente alterna) en serie.**

7. $\nabla^2\psi = 0$ **Ecuación de Laplace.**

8. $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ **Ecuación de onda de Helholtz.**

9. $\nabla^2 \mathrm{E} - \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial t^2} - g\mu\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = 0$ **Ecuación de onda electromagnética.**

10. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) = 0$ **Ecuación de Bessel. De mayor aplicación en problemas físicos de geometría cilíndrica.**

11. $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$ **Ecuación ordinaria de Legendre. De mayor aplicación en problemas físicos de geometría esférica.**

12. $-\dfrac{h^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = ih\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$

$-\dfrac{h^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = Eh$

Ecuación de Onda de Schrödinger y ecuación de onda independiente del del tiempo. Ambas ecuaciones son fundamentales para el estudio de la Mecánica Cuántica.

I.3 RESOLUCION DE PROBLEMAS.

> **Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema hay un cierto descubrimiento.**
>
> **G. Polya.**

Es frecuente leer en artículos (o escuchar en conferencias magistrales en el marco de congresos sobre matemática educativa) de revistas sobre didáctica de las matemáticas que hasta hace relativamente poco tiempo (primera mitad del siglo XX) la comunidad internacional de matemáticos consideraba que para enseñar matemáticas era suficiente con saber matemáticas. Eran verdaderas excepciones las opiniones que diferían de esta acepción generalizada; sin embargo, el fracaso escolar en matemáticas era (y sigue siendo) un problema común para todos los países, especialmente para aquellos que, como el nuestro, no tienen una verdadera tradición en esta ciencia.

Afortunadamente, en la época actual son cada día más numerosas las opiniones que consideran que para enseñar matemáticas no basta con "saber" matemáticas, es decir, que no basta con ser un profesional en esta ciencia, sino que además se necesita ser profesional en la enseñanza de la misma. Por tal razón los planes de estudio de una maestría en didáctica de las matemáticas incluyen cursos o módulos tales como: historia de la matemáticas, psicología de las matemáticas, sociología de las matemáticas, recursos matemáticos, epistemología matemática y muchos cursos más en las diferentes didácticas: del álgebra, la aritmética, el número, la geometría, probabilidades y estadística, el cálculo infinitesimal y la RESOLUCION DE PROBLEMAS. Todas estas disciplinas son de mucha importancia para la formación de profesores de matemáticas en los diferentes niveles del sistema educativo: primaria, educación media y nivel universitario. Este gran esfuerzo, de carácter internacional, por construir y desarrollar la "enseñanza de la matemática" como una verdadera profesión y

como una disciplina de estudio y de investigación ha comenzado a retribuir frutos cada vez más significativos; sin embargo, la RESOLUCION DE PROBLEMAS (a partir del gran maestro Polya con su famosa obra "How to solve it") se ha venido convirtiendo en una disciplina cada vez más esencial e importante en la enseñanza de esta ciencia, lo cual se refleja no sólo en revistas y congresos sino también en el creciente interés por participar en los diferentes eventos de Olimpíadas de Matemáticas, ya sean éstas de carácter local, regional o internacional.

Todo matemático estará de acuerdo en que las matemáticas presentadas a la manera euclideana aparecen como una ciencia sistemática, deductiva. De hecho, la mayoría de los autores de textos sobre metodología del conocimiento científico toman la matemática como un ejemplo de una ciencia deductiva; obviamente que no puede negársele este carácter una vez que se ha estructurado un sistema axiomático. Por el contrario, las matemáticas en vías de formación aparecen como una ciencia experimental, inductiva. Históricamente puede afirmarse que la casi totalidad del conocimiento matemático se ha formado (construido) en el proceso de solución de una gran variedad de problemas. Por tanto, parece evidente la conclusión de que se puede aprender mucho de matemáticas aprendiendo a resolver problemas. Tal era la visión de Polya.

En "How to solve it" (Traducción al español: "Como plantear y resolver problemas") Polya sostiene que para resolver un problema se necesita:

- **I. Comprender el problema**
- **II. Concebir un plan**
- **III. Ejecución del plan**
- **IV. Examinar la solución obtenida.**

Naturalmente, no es nuestro objetivo hacer un análisis detallado de la obra de este gran maestro. La bibliografía actual es rica en análisis y propuestas para desarrollar las ideas generadoras de este hombre que contribuyó grandemente a crear una visión adecuada a la problemática de la enseñanza de esta ciencia tan importante para la humanidad. Nos limitaremos a señalar el siguiente aspecto de la concepción de Polya acerca de la labor del maestro:

> **"El maestro debe ayudarle (al alumno), pero no mucho ni demasiado poco, de suerte que le deje asumir una parte del trabajo"**

DEBE PROPONERSE:

1º Ayudar al alumno a resolver el problema en cuestión.

2º Desarrollar la habilidad del alumno de tal manera que pueda resolver por si mismo problemas ulteriores.

Nos parece que esto resume magistralmente la labor que puede desempeñar un maestro que tiene siempre la disposición de reflexionar sobre su propia práctica docente a fin de realizarla cada día con mayor eficiencia. Nuestro propósito es extender estas ideas a la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales.

Las Ecuaciones diferenciales se desarrollaron por la necesidad de resolver problemas relacionados principalmente con la física y la ingeniería. En la actualidad estas ecuaciones aparecen de manera natural en la solución de problemas en áreas tan diversas como la biología, la química, la economía, la astrofísica, la geofísica, la meteorología y también en problemas relacionados con la salud, las ciencias sociales y las humanidades.

Dado que mediante el estudio de las ecuaciones diferenciales se resuelve en la actualidad una gran cantidad de problemas científicos, tecnológicos, culturales y en general de

la vida real, es importante tomar en cuenta los aspectos didácticos relacionados con la enseñanza de las mismas.

Las Ecuaciones Diferenciales, como disciplina de estudio, se ha construido a lo largo de la historia con el esfuerzo de grandes pensadores, entre los que puede mencionarse una lista de genios de la talla de Euler, los hermanos Bernoulli, d'Alembert y muchos otros. Algunos dedicaron su tiempo y sus esfuerzos en la búsqueda de soluciones matemáticas a situaciones prácticas (como el problema de la cuerda vibrante) y como resultado encontraron y desarrollaron métodos y procesos empíricos de soluciones a Ecuaciones Diferenciales de diversos tipos y clasificaciones. Todos estos procesos revelan un fuerte contenido heurístico

Posteriormente, como resultado de muchas experiencias acumuladas fueron apareciendo las diferentes "técnicas" de solución de las Ecuaciones Diferenciales y sobre todo la necesidad de organizar y sistematizar este conocimiento, es decir, de elaborar la teoría de las Ecuaciones Diferenciales. Actualmente el campo de aplicación de las mismas es tan extenso y especializado que su conocimiento se ha vuelto indispensable para la realización de una gran cantidad de proyectos de investigación de carácter científico.

Como señalamos en la parte introductoria de este trabajo de graduación, la sistematización del conocimiento y la teoría de las Ecuaciones Diferenciales ha alcanzado un desarrollo impresionante; sin embargo, hace falta mucho trabajo para desarrollar la "Didáctica de las Ecuaciones Diferenciales".

Una propuesta de trabajar en la construcción de esta didáctica especial se sustenta en varias razones que la justifican. Basta con mencionar las siguientes:

- **Su carácter estructural como parte importante del desarrollo científico contemporáneo.**
- **Su extensión y aplicación a nuevas áreas del conocimiento**

- **La creciente población estudiantil que demanda este conocimiento. No es raro encontrar planes de estudio a nivel de pre-grado, en países subdesarrollados, de carreras como licenciatura en biología que incluyen un curso de ecuaciones diferenciales. (Ej: Universidad de Costa Rica).**

- **Actualmente continúan las investigaciones acerca de las Ecuaciones Diferenciales ya sea con la finalidad de incrementar su acerbo teórico o de ampliar su campo de aplicaciones. El aparecimiento de sofwares cada vez más capaces de resolver ecuaciones matemáticas plantea la exigencia de postular nuevas metodologías de enseñanza de esta disciplina y las Ecuaciones Diferenciales no serán la excepción.**

Estamos seguros que algunos profesores de matemáticas universitarias, en diferentes países, estarán comenzado a trabajar en este sentido. A nosotros nos parece propicio contribuir modestamente a la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales mediante la solución de problemas adecuados, teniendo siempre presente las ideas fundamentales del gran maestro G. Polya y algunos de sus continuadores.

CAPITULO II.

DEFINICION Y CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.

II.1 INTRODUCCION.

A pesar de que el aspecto definitorio y la clasificación de las ecuaciones diferenciales no desempeña, en mi opinión, un papel trascendente para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a través de la solución de problemas, consideramos que es de mucha utilidad para que el profesor puede orientar su trabajo, en la medida que se desempeñe como guía o asesor en el aprendizaje de los estudiantes que se inician en el tema. Por esta razón hemos preferido presentar aquí únicamente los aspectos más fundamentales acerca de las definiciones y clasificaciones que corresponden a la estructura teórica de las ecuaciones diferenciales. Pretendemos hacer de esto un capítulo lo mas breve posible.

DEFINICION 2.1

Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial.

II.2 CLASIFICACION.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo a tres propiedades: 1) el tipo, 2) el orden y 3) la linealidad

II.2.1 DE ACUERDO AL TIPO:

Las ecuaciones diferenciales pueden ser de dos tipos: 1) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y 2) Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO).

Si una ecuación contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes, con respecto a una sola variable independiente, se dice que es una ecuación diferencial ordinaria.

Las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 1$$

$$(x + y)dx - 4ydy = 0$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ecuación Diferencial Parcial (EDP).

Si una ecuación contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes, respecto de dos o más variables independientes, se llama ecuación diferencial parcial o ecuación en derivadas parciales

Las siguientes ecuaciones:

$$a^2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2\psi = 0$$

son ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales.

II.2.2 DE ACUERDO AL ORDEN.

El orden de la más alta derivada en una ecuación diferencial se llama orden de la ecuación.

EJEMPLOS:

1) $\frac{d^3y}{dx^3}+5(\frac{d^2y}{dx^2})^2+3y=2x$ **es una EDO de tercer orden.**

2) Como la ecuación $x^2dy+ydx=0$ **,**

Puede escribirse en la forma

$x^2\frac{dy}{dx}+y=0$ **es una EDO de primer orden**

3) $\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+4\psi=0$ **es una EDP de segundo orden**

II.2.3 DE ACUERDO A LA LINEALIDAD.

Se dice que una ecuación de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+....+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

es una ecuación diferencial lineal de orden n, si satisface las siguientes propiedades:

i) **La potencia de la variable dependiente** y **y de todas sus derivadas es 1, es decir, de primer grado.**

ii) **Cada coeficiente** $a_i(x)$ **depende únicamente de la variable x.**

Si una ecuación no cumple ambas propiedades se dice que es NO LINEAL.

Las siguientes ecuaciones:

xdy + ydx = 0

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}-x^2\frac{d^2}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+5y=0$$

Son ejemplos de ecuaciones diferenciales LINEALES de primero, segundo y tercer orden, respectivamente

Mientras que las ecuaciones:

$$y^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} = x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + xy^3 = 0$$

Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias NO LINEALES. La primera tiene un coeficiente que no es función de x y la segunda contiene el término y^3 que no es de primer grado.

II.3 SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.

DEFINICION 2.2

"Cuando una función ϕ, definida en el intervalo I, se sustituye en una ecuación diferencial y transforma esa ecuación en una identidad, se dice que es una solución de la ecuación en el intervalo"[13]

Como nuestro objetivo se enmarca en el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales mediante la resolución de problemas, es claro que para este propósito será no sólo indispensable sino también estratégico que el estudiante se acostumbre en comprobar que una función ϕ es o nó solución de una ecuación diferencial dada.

Por tanto proponemos ejercicios similares a los siguientes:

<u>Ejercicio 1.</u>

Dada la ecuación $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$, comprobar que las siguientes funciones son soluciones de la ecuación dada.

a) $y(x) = a\cos(\omega x)$

b) $y(x) = b\,\mathrm{sen}(\omega x)$

[13] Zill, D. (1997). Ecuaciones Diferenciales (Pág. 4). Thomson Editores, México.

c) y(x) = a cos(ωx) + b sen(ωx)

Con ejercicios como éste el maestro puede aprovechar para que el estudiante obtenga conclusiones. Que comience a darse cuenta, por ejemplo, que puede haber más de una solución y que la combinación lineal de soluciones es también una solución.

<u>Ejercicio 2.</u>

Comprobar que $x^2 + y^2 = c$ es una solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Este ejercicio nos muestra que pueden existir comprobaciones implícitas.

Derivamos, ímplicitamente, respecto de x la ecuación dada y obtenemos:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Si ahora despejamos dy/dx obtenemos la ecuación diferencial mencionada.

Sin embargo, queda otro problema: ¿Para qué intervalo de la variable x es válida dicha solución? Si x es una variable real, el maestro puede inducir al estudiante a que observe que tal solución no es válida para todo el rango finito de la variable: $-\infty < x < \infty$, sino sólo para el intervalo $-\sqrt{c} < x < \sqrt{c}$.

Es claro que un problema tan sencillo como éste puede marcar la diferencia entre dos maneras distintas de conducir o guiar el aprendizaje de los estudiantes. La primera ocurre cuando el maestro realiza todos los pasos hasta llegar al resultado previsto, lo que generalmente sucede cuando se tiene prisa o ansiedad por terminar el programa de la asignatura. En la segunda, el maestro permite la máxima participación del estudiante de tal forma que sea éste quien realice todos o la mayoría de los pasos necesarios para llegar al mismo resultado. La experiencia nos muestra que el estudiante consolida mucho mejor su

aprendizaje cuando se le permite una participación más activa y paradójicamente el tiempo adicional invertido se recupere con creces.

<u>Ejercicio 3.</u>

i) Para cada una de las siguientes ecuaciones, encuentre una solución

a) y´(x) = a y(x)

a) y´(x) = -a y(x)

ii) Encuentre dos soluciones de la ecuación

y´´(x) = a^2 y

iii) Encuentre dos soluciones de la ecuación

y´´(x) - 3y´ - 4y = 0

Este tipo de ejercicio motiva y prepara al estudiante para asumir una actitud de búsqueda constante de soluciones, especialmente cuando tenga que enfrentarse a la solución de problemas.

También es necesario aclarar al estudiante que no toda ecuación diferencial que se nos ocurra tendrá una solución.

¿Cuál es la solución la solución de y´(x) = e^{x^2} ?

Sabemos que no existe una función "primitiva" sencilla que al derivarla de como resultado e^{x^2}. La única solución posible es una serie infinita de la forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + C$, cuya derivada da la expansión en serie de e^{x^2} .

Las soluciones también pueden clasificarse en soluciones generales, soluciones particulares, soluciones singulares, soluciones por tramos, etc., pero no es nuestro interés

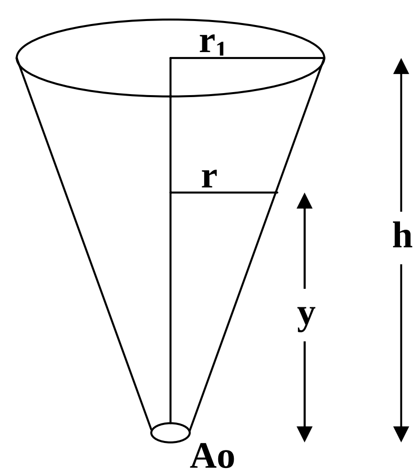
detenernos en todos estos detalles que se encuentran bien explicados en muchos textos excelentes sobre ecuaciones diferenciales.

II.4 PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA.

Algo sumamente importante (sin lo cual este trabajo no tendría sentido) es el planteamiento de problemas. Este aspecto será desarrollado a lo largo de todo el trabajo; sin embargo, para finalizar este capítulo queremos introducir, a manera de ejemplo, la resolución de un problema. Es necesario tomar en cuenta que para describir un fenómeno físico en términos matemáticos se parte de un modelo que tome en cuenta las principales características del fenómeno. Una descripción completa o exhaustiva podría implicar muchas complicaciones matemáticas, por tal razón es frecuente simplificar el modelo para evitar tales complicaciones. Debemos estar claros que los modelos simplificados nos pueden conducir a resultados aproximados y no a valores exactos; afortunadamente, en muchas situaciones es suficiente con tener buenas aproximaciones y cuando se desean resultados más exactos pueden obtenerse experimentalmente. A continuación presentamos la solución aproximada de un problema mediante un modelo simplificado.

PROBLEMA. Vaciado de un tanque cónico.

La figura representa un tanque cónico inicialmente lleno de agua hasta una altura h. El tanque está provisto de un pequeño agujero de salida, en la parte inferior, de área A_0. Se trata de encontrar la altura "y" del agua en cualquier momento, despreciando (en un modelo simplificado) la fricción del agua en las paredes del tanque y a través del agujero de salida.



EL MODELO.

Existe una relación entre la altura y del tanque en cualquier instante y la velocidad (instantánea) de salida del agua a través del área inferior A_o del cono trucado que constituye el tanque. El problema puede simplificarse aun más si se considera que el área de salida A_o es despreciablemente pequeña en comparación con el área A de la superficie superior del agua. Nótese que el modelo será válido únicamente si se cumple la condición anterior; esto significa que no será válido cuando al altura del agua en el tanque sea muy pequeña de manera que la diferencia entre las áreas superior e inferior sea también pequeña. En otras palabras el modelo no considerará un cono truncado, como sería la situación real, sino un cono geométrico (con vértice puntual). En todo caso, el interés primordial en este ejemplo es mostrar una forma didáctica de plantear un problema.

LA SOLUCIÓN

Para plantear la solución de un problema es aconsejable tener en cuenta tres elementos: 1) Qué información tenemos, 2) Con qué instrumentos teóricos contamos y 3) A dónde queremos llegar. Teniendo una visión clara de estos elementos se procede a plantear una estrategia de solución.

La información básica se encuentra en el enunciado del problema y en el modelo simplificado que hacemos del mismo. Los instrumentos teóricos los proporciona la hidrodinámica que en este modelo se reduce al teorema de Torricelli que establece que la velocidad v de salida del agua a través de A_o es $v = \sqrt{2gy}$ y que esta velocidad multiplicada por A_o nos proporciona el caudal de salida, es decir, el volumen (de agua) por unidad de tiempo que abandona el tanque

$$\frac{dV}{dt} = -A_o\sqrt{2gy}$$

La estrategia consiste en visualizar que existe una relación entre el volumen V del agua en el tanque y la altura y de la misma. En este modelo simplificado el volumen se puede expresar como el volumen de un cono $V = \frac{\pi}{3} r^2 y$; **donde** r **y** y **son valores (variables) instantáneos que se relacionan aproximadamente por** $r = \frac{r_1}{h} y$

Por tanto, $V = \frac{\pi}{3} \frac{r_1^2}{h^2} y^3$, **de donde se obtiene la solución buscada:**

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{A_o h^2}{\pi r_1^2 y^2} \sqrt{2gy} = -\frac{A_o h^2}{A_1 y^2} \sqrt{2gy}$$

(El problema finaliza integrando la ecuación anterior)

<u>COMENTARIOS</u>. Si en este problema el tanque se tratara como un cono truncado (lo cual corresponde más a la realidad) aparecerían algunas dificultades adicionales. Tendríamos que considerar dos velocidades: la velocidad de salida y la velocidad con que desciende el nivel superior del agua. En este caso habría que considerar una ley más general de la hidrodinámica: la ecuación de Bernoulli y además la ecuación de continuidad, para encontrar una expresión que relacione ambas velocidades. Naturalmente que el problema se vuelve más complicado tanto en el manejo matemático como en la búsqueda de la estrategia de solución; sin embargo, nuestro objetivo en este momento era solamente el de presentar un ejemplo de planteamiento de un problema.

CAPITULO III.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.

III.1 INTRODUCCION.

En este capítulo nos proponemos ilustrar o mejor dicho introducir algunos de los métodos más importantes para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, mediante algunos problemas escogidos de la Física y de la Ingeniería.

Tales problemas, a modo de ejemplos, pueden ser de mucha ayuda para motivar previamente al estudiante respecto al tema que el profesor va a exponer de una forma más rigurosa y sistemática y, por supuesto, para desarrollar conceptos que corresponden a un mayor nivel de abstracción.

Iniciaremos con algunos problemas que pueden resolverse mediante uno de los métodos más sencillos: la separación de variables y luego tomaremos un caso especial de la termodinámica (un proceso adiabático) para introducir el concepto de "ecuaciones exactas". Para las ecuaciones diferenciales lineales veremos un problema tomado de la mecánica y aprovecharemos para trabajar el concepto de variación de parámetro. También queremos aclarar que no pretendemos tratar el tema en forma exhaustiva, ya que nuestro objetivo no es elaborar un texto de Ecuaciones Diferenciales, sino mostrar el papel estratégico que desempeña la resolución de problemas.

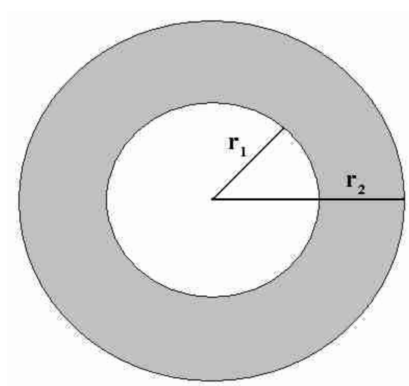
III.2 VARIABLES SEPARABLES.

A pesar de que este tema es relativamente sencillo y que la mayoría de los libros de texto de ecuaciones diferenciales comienzan por él, consideramos conveniente introducirlo de manera que el estudiante se vea inmerso en una problemática de tipo heurístico.

Existe una cantidad grande de problemas que pueden utilizarse para introducir este tema de separación de variables, pero por razones de espacio y tiempo nos limitaremos a presentar tres problemas de aplicación (relacionados con la física y la ingeniería) con sus respectivas GUIAS DIDÁCTICAS e intercalaremos después del primer problema dos dificultades de tipo conceptual.

Aprovechamos también para aclarar que en estos primeros problemas las guías didácticas serán desarrolladas un poco más extensas que las correspondientes a los demás problemas, evitando de esa manera ser muy repetitivos y tomando en consideración que siempre perseguimos los mismos objetivos generales.

<u>PROBLEMA Nº 1.</u>



Considere un material sólido, homogéneo, de conductividad k (constante), que llena completamente el espacio comprendido entre dos esferas concéntricas de radios r_1 (interior) y r_2 (exterior). Si la esfera interior se mantiene a la temperatura constante T_1 y la esfera

exterior a la temperatura constante T_2 ($T_1 > T_2$), encuentre el flujo de calor (H) a través del material.

GUIA DIDACTICA.

En un problema como éste el profesor puede comenzar por recordarle a los estudiantes que con la expresión "flujo de calor" (H) los físicos y los ingenieros se refieren a la rapidez con que fluye el calor a través de un cuerpo:

$$H = \frac{dQ}{dt}$$

Luego, para hacer que el estudiante participe se puede formular la siguiente pregunta: ¿qué se requiere para que el flujo de calor a través de un cuerpo sea constante?

Se trata de que el estudiante llegue a la conclusión que H depende de las condiciones en que ha de fluir el calor, es decir, de la diferencia de temperaturas ($T_1 - T_2$), de la naturaleza del material y de su forma geométrica. Si estas condiciones permanecen constantes, el flujo de calor H será también constante. Tal es el caso del problema propuesto.

Tenemos la información y sabemos a donde queremos llegar. Necesitamos los instrumentos teóricos y las estrategias de solución; sin embargo, el problema planteado puede ofrecer más dificultad de lo que aparenta a primera vista. Como recomendaba el gran maestro G. Polya, en estos casos puede comenzarse por plantear un problema con características similares pero de mayor sencillez.

El grado de dificultad se reduce grandemente cuando nos planteamos el problema del flujo de calor a través de un bloque rectangular de espesor l cuyas caras perpendiculares al eje x tienen un área A y se encuentran a temperaturas diferentes; las otras cuatro caras se encuentran térmicamente aisladas mediante materiales adiabáticos.

La ley termodinámica de Fourier nos dice que el flujo de calor (H) a través de una lámina rectangular delgada de espesor Δx, cuyas caras perpendiculares al eje x tienen un área A y se encuentran a una diferencia de temperatura ΔT, se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$H = -kA\frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad \textbf{(ec. 3.1)}$$

k: constante de conductividad térmica (propia de cada material)

El signo menos se debe a que el calor fluye de la cara de mayor temperatura (T + ΔT) hacia la cara de menor temperatura (T). El cociente ΔT/Δx recibe el nombre de "gradiente de temperatura"

En cuanto al aspecto geométrico es de observar que el calor fluye en la dirección perpendicular a las caras de la lámina. Esta observación puede parecer trivial; sin embargo, será importante para la solución del problema inicial, de mayor complejidad.

Otro aspecto teórico a considerarse es el principio de conservación de la energía. Si en lugar de la lámina delgada tenemos el bloque de espesor l, entonces éste podrá considerarse como constituido por una sucesión infinita de láminas de espesor infinitesimal dx y que el mismo flujo de calor atraviesa todas las láminas de la sucesión. Para una lámina de espesor infinitesimal la ec. 3.1, toma la forma siguiente:

$$H = -kA\frac{dT}{dx} \qquad \textbf{(ec. 3.2)}$$

Supongamos, ahora, que las caras del bloque perpendiculares al eje x se encuentran a las temperaturas constantes T_1 y T_2, respectivamente ($T_1 > T_2$). Ubiquemos la cara 1 (a la temperatura T_1) en el plano x = 0 y la cara 2 (a la temperatura T_2) en el plano x = l. Expresemos ahora la diferencia de temperaturas $T_1 - T_2$ en términos de H, k, A y l.

Como punto de partida tenemos la ec. 3.2. ¿Cuáles son la variables de esta ecuación? El estudiante deberá reconocer que las únicas variables en este caso son la temperatura T: $T_2 \leq T \leq T_1$ y la variable x (que posiciona las láminas de espesor infinitesimal) : $0 \leq x \leq l$. ¿Es posible separar estas variables escribiendo de otra forma equivalente la ec. 3.2? Se trata de que el estudiante llegue a la conclusión que esta ecuación se puede escribir así:

$$\mathbf{Hdx = -kAdT} \qquad \textbf{(ec. 3.3)}$$

Integrando esta ecuación tenemos: $H\int_0^l dx = -kA\int_{T_1}^{T_2} dT$

Por tanto, $\mathbf{H}l = -\mathbf{k\,A\,(T_2 - T_1)}$ **(ec. 3.4)**

Y finalmente: $T_1 - T_2 = \dfrac{Hl}{kA}$ **(ec. 3.5)**

Nótese como la idea de la "separación de variables" aparece en este problema de una manera natural y espontánea. Es claro que ésta es la idea básica que sustenta el método de separación de variables.

A fin de evitar falsas expectativas el profesor podrá indicar a los estudiantes que no siempre las cosas son tan sencillas (como veremos en los próximos problemas) y que hay casos en que la separación de variables no es posible y por tanto, habrá que buscar otros métodos de solución de ecuaciones diferenciales.

Volvamos al problema inicial. Con todos los antecedentes analizados podemos ahora enfrentar el problema del flujo de calor a través del material comprendido entre las esferas de radios r_1 y r_2. En este caso el área de la sección transversal a través de la cual fluye el calor no es constante; sin embargo, dado que el calor fluye en la dirección radial, podemos considerar el material de forma esférica como constituido por una sucesión infinita de cascarones de espesor infinitesimal dr y que el flujo de calor, por el principio de conservación de la energía, será el mismo a través de cada uno de los cascarones de la sucesión.

Ya que todas las condiciones están dadas, podemos ahora aplicar la ley de Fourier escribiendo la ec. 3.2 de la siguiente manera:

$$H = -kA\frac{dT}{dr} \qquad \textbf{(ec. 3.6)}$$

En este caso A = 4πr², es decir, el área de una superficie esférica de radio r. Por tanto,

$$H = -k4\pi\, r^2\, \frac{dT}{dr} \qquad \textbf{(ec. 3.7)}$$

Recordemos que el objetivo es encontrar una expresión que nos permita determinar la cantidad H. Si ahora aplicamos la separación de variables e integramos, obtenemos:

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{H}{4\pi\, k}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} \qquad \textbf{(ec. 3.8)}$$

y finalmente

$$H = \frac{4\pi\, kr_1r_2}{r_2 - r_1}(T_1 - T_2) \qquad \textbf{(ec. 3.9)}$$

COMENTARIO. Si la ec. 3.5 la hubiéramos escrito como $H = kA\frac{T_1 - T_2}{l}$ **podríamos opinar que éste era el resultado esperado en base a la ec. 3.1 y por tanto, no había necesidad de separar variables ni de realizar ninguna integración; sin embargo, no puede negarse que didácticamente era un paso necesario para facilitar la comprensión del estudiante en el proceso de solución del problema inicial. Nótese que en la ec. 3.5 se asume H como una cantidad conocida, mientras que en el problema inicial H es justamente la incógnita del problema que hay que encontrar en base a los demás parámetros.**

Dificultades Conceptuales.

Sabemos, por nuestra propia experiencia y por las conclusiones de los especialistas en didáctica que un concepto puede responder a una idea sencilla o a toda "una estructura conceptual" dinámica que se desarrolla a medida que se aplica a diferentes situaciones y se

incorporan (por el estudiante o el investigador) más experiencias relacionadas con dicha estructura. Atendiendo a lo anterior, sugerimos que el docente plantee a los estudiantes las siguientes dificultades (en forma de preguntas) de tipo conceptual.

A. Si y = f(x) es una función continua, desconocida pero diferenciable, de tal manera que su derivada dy/dx = u(x) es conocida, ¿cómo haría usted para encontrar y?

<u>Guía Didáctica.</u> Después que el estudiante ha comprendido la solución del problema anterior, el procedimiento para resolver esta dificultad es muy sencillo; sin embargo, es conveniente inducirlo a resolverla integrando de la siguiente manera:

Como y = f(x) se tiene que dy/dx = f '(x). Integrando en ambos lados de la ecuación (se asume que u(x) es una función continua) se tiene:

$$\int f'(x)\,dx = \int u(x)\,dx \qquad \text{(ec. 3.10)}$$

ó

$$\int dy = \int u(x)\,dx \qquad \text{(ec. 3.11)}$$

y finalmente

$$y = U(x) + C \qquad \text{(ec. 3.12)}$$

donde U(x) es la antiderivada de u(x).

Es claro que éste es el tipo de ecuación diferencial más sencilla que podemos encontrar, pero es necesario que el estudiante observe la ec. 3.11 y concluya que las variables han sido separadas.

El siguiente nivel de dificultad que puede proponerse al estudiante es un caso de mayor generalidad.

B. Si y = f(x) es una función de x, ¿cómo procedería para encontrar y a partir de la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = u(x)v(y) \;\; ? \qquad \text{(ec. 3.13)}$$

se asume que las funciones u(x) y v(y) son conocidas.

<u>Guía Didáctica</u>. Nótese que la derivada es el producto de dos funciones de "x" y de "y", respectivamente. Como dy/dx = f '(x) puede inducirse al estudiante para que plantee una ecuación con integrales en cada uno de sus miembros, de manera que cada integral contenga una sola variable de integración x ó y.

El estudiante puede comenzar por escribir la ec. 3.13 de la siguiente manera:

$$\frac{1}{v(y)} f'(x) = u(x) \qquad \textbf{(ec. 3.14)}$$

Por comodidad hagamos g(y) = 1/v(y); entonces, g(y) f '(x) = u(x) que también puede escribirse como g(f(x)) f '(x) = u(x). Integrando ahora a cada lado de la ecuación, se tiene:

$$\int g(f(x))\, f'(x)\, dx = \int u(x)\, dx \qquad \textbf{(ec. 3.15)}$$

ó $$\int g(y)dy = \int u(x)dx \qquad \textbf{(ec. 3.16)}$$

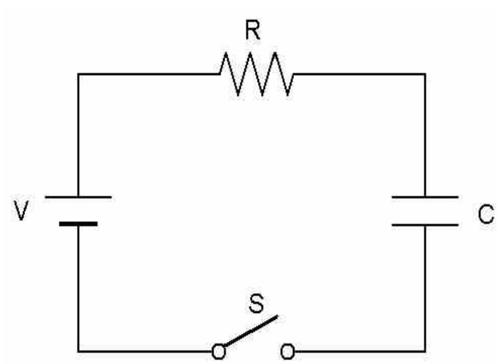
Obteniendo finalmente G(y) = U(x) + C (ec. 3.17)

Donde, por supuesto, G(y) y U(x) son las antiderivadas de g(y) = 1/v(y) y u(x), respectivamente.

Obsérvese que la dificultad está resuelta pero con un nivel de mayor abstracción. Si g(y) y u(x) son conocidas, en principio sus respectivas antiderivadas también serán conocidas y la variable y = f(x) podrá obtenerse al despejarla de la ec. 3.17.

Una vez superadas estas dificultades de tipo conceptual esperaríamos que el estudiante tenga ahora mayor disponibilidad para resolver los siguientes problemas propuestos.

<u>PROBLEMA Nº 2.</u>



La figura representa un circuito RC, es decir, un circuito formado por un resistor R en serie con un capacitor C, conectado a una fuente de fuerza electromotriz que

proporciona un voltaje (V) de salida constante. Se trata de encontrar la corriente I(t) que circula por el resistor R y la carga Q(t) que se acumula en el capacitor a partir del instante t = 0 en que se cierra el circuito, conectando el interruptor S.

Considere las condiciones iniciales $I(0) = I_0$ y $Q(0) = 0$

GUIA DIDÁCTICA.

Este es un ejemplo típico de aplicación física de las ecuaciones diferenciales del tipo de variables separables. El profesor puede recordar a los estudiantes que en los cursos básicos de electricidad y magnetismo se estudian las leyes (de Kirchhoff) de los circuitos, una de las cuales establece que:

"La suma algebraica de las diferencias de potencial en una trayectoria (o malla) cerrada es igual a cero"

Para el caso del circuito mostrado, la aplicación de la ley anterior nos conduce a la siguiente ecuación diferencial:

$$V - IR - Q/C = 0, \text{ donde:} \qquad \text{(ec. 3.18)}$$

V: es el voltaje (constante) suministrado por la fuente.

IR: representa la diferencia de potencial (variable) a través del resistor R.

Q/C : es la diferencia de potencial (variable) en el capacitor C.

Dado que la intensidad de la corriente I se define como $I(t) = dQ/dt$, la ec. 3.18 se puede expresar de la siguiente manera:

$$V = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \qquad \text{(ec. 3.19)}$$

donde V, R y C son constantes y Q = Q(t) es una función del tiempo. De esta forma hemos obtenido una ecuación diferencial de primer orden.

Naturalmente que en vista de las preguntas que plantea el enunciado del problema se deberá seguir alguna estrategia. Por tanto, es aconsejable encontrar primero la carga Q(t) y luego, derivando respecto al tiempo se podrá encontrar la intensidad de corriente I(t).

Obsérvese que a este momento las condiciones y conceptos físicos del problema ya han sido tomados en cuenta. El resto del problema consiste en resolver la ecuación diferencial. Por tanto, se puede decir que ha llegado el momento de dejar que el estudiante (en forma individual o formando pequeños grupos) intente resolver por si mismo la ecuación diferencial.

En caso que se considere necesario el profesor podrá sugerir que se intente el procedimiento de separar variables. Es claro que este problema presenta un poco más de dificultad que el anterior, pero ésta se limita al proceso algebraico de separar las variables. Por tanto, insistimos en que sea el estudiante el que encuentre una sucesión de pasos algebraicos semejante a la que presentamos a continuación:

Escribamos la ec. 3.19 como:

$$R\frac{dQ}{dt} = V - \frac{Q}{C} \qquad \textbf{(ec. 3.20)}$$

Multiplicando por C:

$$RC\frac{dQ}{dt} = VC - Q \qquad \textbf{(ec. 3.21)}$$

Transponiendo términos:

$$\frac{1}{VC - Q}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{RC} \qquad \textbf{(ec. 3.22)}$$

Integrando respecto al tiempo:

$$\int_0^t \frac{1}{VC - Q_1}\frac{dQ_1}{dt_1}dt_1 = \frac{1}{RC}\int_0^t dt_1 \qquad \textbf{(ec. 3.23)}$$

De donde se obtiene la separación de variables:

$$\int_0^{Q(t)} \frac{1}{VC - Q_1}dQ_1 = \frac{1}{RC}\int_0^t dt_1 \qquad \textbf{(ec. 3.24)}$$

Obsérvese el cambio de límites en la integral del miembro izquierdo. Resolviendo las integrales de la ec. 3.24, se obtiene:

$$-\ln\left|\frac{VC - Q(t)}{VC}\right| = \frac{t}{RC}$$ **(ec. 3.25)**

Despenando Q(t) de esta ecuación, se obtiene la carga en el capacitor:

$$Q(t) = VC\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$ **(ec. 3.26)**

Para encontrar la intensidad de corriente I(t) en el circuito basta ahora con derivar Q(t) respecto al tiempo:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) = \frac{V}{R}e^{-t/RC}$$ **(ec. 3.27)**

Es importante que el profesor cuestione a los estudiantes acerca de las condiciones iniciales del problema: ¿las ecs. (3.26) y (3.27) satisfacen las condiciones iniciales de este problema? Es evidente que la primera de ellas si satisface su propia condición, pero entonces ¿como determinamos I_0? Una pequeña observación en la ec. (3.27) nos conduce a la conclusión de que el cociente V/R (una constante) representa la corriente inicial I_0. Por tanto, dicha ecuación puede ser escrita de la siguiente manera: $I(t) = I_0\, e^{-t/RC}$.

RECOMENDACION. La mayoría de estudiantes se dan por satisfechos con llegar a la solución del problema, comprobando, en el mejor de los casos, que su respuesta satisface la ecuación diferencial correspondiente; sin embargo, es recomendable inducir al estudiante para que analice sus resultados y obtenga conclusiones acerca de los mismos. Esta práctica, además de ser motivacional, es muy provechosa dado que proporciona al estudiante ventajas metodológicas y desarrolla su capacidad de análisis, es decir, también es formativa. En nuestro caso, las gráficas de las ecuaciones 3.25 y 3.26 ayudarán mucho para tal propósito. El estudiante debe observar los valores iniciales, los valores finales, la pendiente inicial, el comportamiento asintótico, etc. Todo esto prepara al estudiante para enfrentar problemas de valor inicial o de condiciones de frontera.

PROBLEMA Nº 3. **DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA.**

Para finalizar con este tema de variables separables presentaremos el problema de la desintegración radiactiva. Pero antes queremos aclarar que como problema de encontrar la solución de una ecuación diferencial es relativamente sencillo; sin embargo, lo presentamos aquí no tanto por su dificultad sino más bien por la importancia de sus aplicaciones y porque puede servir de base para "modelar" otros fenómenos de la naturaleza.

A principios del siglo XX se descubrió el fenómeno de la radiactividad. Rutherford y otros físicos demostraron que, cuando en una sustancia se presenta este fenómeno, la intensidad radiactiva de la misma es proporcional al número de núcleos presentes en ella, es decir, que si N(t) es el número de núcleos que contiene una muestra radiactiva en el tiempo t, entonces el número de núcleos que se desintegran por unidad de tiempo dN/dt es proporcional a N, según la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \qquad \textbf{(ec. 3.28)}$$

donde λ es una constante ($\lambda > 0$), propia de cada sustancia radiactiva, conocida como constante de decaimiento.

El profesor puede preguntar al estudiante el porqué del signo menos en la ec. 3.28. (Podría ser necesario recordar al estudiante que los núcleos de un material radiactivo emiten partículas y que por tanto el número de núcleos "activos" va disminuyendo con el tiempo). Obsérvese también que al eliminar el signo menos en dicha ecuación ésta podría representar (en condiciones adecuadas) el crecimiento poblacional de una especie.

Después de este preámbulo el profesor puede proponer a los estudiantes la dificultad de encontrar una función N(t) que satisfaga la ec. 3.28, suponiendo la siguiente condición inicial: $N(t_0) = N_0$.

Con las experiencias previamente acumuladas se espera que el estudiante realice algunos pasos que comienzan por transformar la ecuación dada en las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda \qquad \textbf{(ec. 3.29)}$$

Y ahora, es claro, que ésta ecuación puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt}\ln N(t) = -\lambda \qquad \textbf{(ec. 3.30)}$$

Integrando esta ecuación respecto al tiempo, se tiene:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\ln N(\tau)d\tau = -\lambda\int_0^t d\tau \qquad \textbf{(ec. 3.31)}$$

Y por tanto, $$\int_{N_0}^{N(t)} d\ln N = -\lambda\int_0^t d\tau \qquad \textbf{(ec. 3.32)}$$

Con lo que se obtiene la separación de variables. Obsérvese el cambio de los límites de integración en la integral del miembro izquierdo de esta última ecuación. Realizando las integrales y después de algunos pasos algebraicos se obtiene la solución:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \qquad \textbf{(ec. 3.33)}$$

Como siempre, las gráficas pueden ser de gran ayuda para interpretar los resultados. Por ejemplo, puede proponérsele al estudiante que construya la gráfica de la ec. 3.33 para el caso particular de $t_0 = 0$ y que exprese algunas de sus conclusiones.

<u>Problema Complementario.</u> ¿Cuánto tiempo habrá de transcurrir para que una muestra radiactiva que en el instante inicial t_0 tiene N_0 núcleos, reduzca esté número a la mitad (Suponiendo conocida la constante λ)

Consideramos que debido a la sencillez del problema no es necesario escribir una guía didáctica formal. Basta con escribir la siguiente ecuación:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \qquad \textbf{(ec. 3.34)}$$

y $$\frac{1}{2} = e^{-\lambda(t-t_0)} \qquad \textbf{(ec. 3.35)}$$

de donde se obtiene $$t - t_0 = \frac{\ln 2}{\lambda} \qquad \textbf{(ec. 3.36)}$$

Resulta motivante saber que este tiempo, conocido como la "semivida" de la sustancia (algunos autores le llaman vida media) es la base teórica del método radiactivo que se utiliza para determinar la "edad" de algunos objetos tales como fósiles o piezas arqueológicas.

III.3 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS.

INTRODUCCIÓN. Veremos ahora un tipo particular de ecuaciones muy interesantes, las llamadas "ecuaciones diferenciales exactas". Muchos autores introducen este tema mediante una definición y después de algún(os) ejemplo(s) continúan con la demostración de algún(os) teorema(s) con lo cual completan el formalismo matemático de la presentación del tema. Sinceramente creemos que esta forma de iniciar el tema de las ecuaciones diferenciales exactas no es muy motivante. Es claro que no negamos la importancia de las definiciones y la demostración de los teoremas; sin embargo, compartimos con los especialistas en didáctica de las matemáticas que el estudiante se motiva mucho más cuando se enfrenta al reto de resolver, por si mismo, una dificultad que despierte su interés por conocer más acerca del tema correspondiente. En los congresos de matemática educativa es frecuente escuchar ponencias que presentan experiencias muy ilustrativas acerca de esta forma alternativa de introducir un tema. En consecuencia introduciremos el tema presentando una ecuación diferencial tomada de la termodinámica.

PROBLEMA Nº 4.

En los cursos de Termodinámica se estudia como un caso muy importante el comportamiento de los gases ideales en diferentes procesos. En un proceso adiabático el sistema termodinámico no intercambia calor (energía) con su ambiente. Este proceso se caracteriza por una función de la presión y el volumen $\psi(p,V)$ que satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$V^{\gamma} dp + \gamma \, pV^{\gamma-1} dV = 0 \qquad \textbf{(ec. 3.37)}$$

Encuentre la función $\psi(p,V)$.

GUIA DIDÁCTICA.

Los estudiantes de manera individual u organizados en pequeños grupos deben intentar resolver la ecuación anterior. Si el maestro observa que se tardan mucho puede ayudar con algunas preguntas sencillas similares a las siguientes: ¿cómo es la regla para encontrar el diferencial de un producto de dos variables?, ¿puede aplicarse dicha regla a la ecuación anterior?

Se trata de que el estudiante pueda expresar la ec. 3.37 así:

$$d(pV^{\gamma}) = 0 \qquad \textbf{(ec. 3.38)}$$

y por tanto, $$pV^{\gamma} = C \quad \text{(una constante)} \qquad \textbf{(ec. 3.39)}$$

Entonces, $\psi(p,V) = pV^{\gamma} = C$ es la función que satisface la ecuación diferencial.

Esta forma de introducir el tema puede parecer "simplista"; sin embargo, al pedir al estudiante que compruebe que la ec. 3.39 es solución de la ec. 3.37 se tienen que seguir los siguientes pasos:

$$\psi(p,V) = pV^{\gamma} = C \qquad \textbf{(ec. 3.40)}$$

$$d\psi(p,V)=\frac{\partial\psi}{\partial p}\,dp+\frac{\partial\psi}{\partial V}\,dV=0 \qquad \textbf{(ec. 3.41)}$$

de donde se tiene: $V^{\gamma}dp\ +\ \gamma\ pV^{\gamma-1}dV=0$, **la ecuación dada. Con esto el estudiante comprende mejor que existe un método (¿sencillo?) de resolver una ecuación diferencial, siempre que dicha ecuación se pueda escribir como la diferencial de una función.**

A este momento del desarrollo del tema consideramos conveniente hacer algún(os) ejercicio(s) sencillo(s). Proponemos el siguiente ejercicio:

EJERCICIO. **Resuelva la ecuación** $2xy\,dx + x^2\,dy = 0$, **escribiéndola como la diferencial de una función f(x,y).**

Obsérvese que esta ecuación se puede resolver por simple inspección al escribirla como

$$d(x^2y) = 0$$

De donde resulta que $f(x,y) = x^2y = C$ **es la solución.**

Después de esta experiencia acumulada es pertinente plantear al estudiante la siguiente pregunta: ¿Qué es una ecuación diferencial exacta?

Se espera que el estudiante pueda responder que una ecuación diferencial es exacta si se puede escribir como la diferencial de una función $f(x,y) = C$ **y por tanto** $df(x,y) = 0$**. Por supuesto que esto requiere que:**

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy=0 \qquad \textbf{(ec. 3.42)}$$

<u>¿Cómo saber si una ecuación diferencial es exacta?</u>

Los ejemplos que hasta ahora hemos visto son tan sencillos que se pueden resolver por simple inspección, pero en general los problemas de ecuaciones diferenciales exactas no siempre son tan fáciles y con frecuencia resulta difícil expresar este tipo de ecuaciones como la

diferencial de una función. Por tal razón es conveniente disponer de un criterio que nos permita saber de antemano si una ecuación dada corresponde o no a una diferencial exacta.

Volvamos a la ec. 3.42 y hagamos $M(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\mathrm{N(x,y)}=\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}$ **. Entonces, dicha ecuación se podrá escribir como:**

$$\mathbf{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \qquad \textbf{(ec. 3.43)}$$

que corresponde a una forma más general.

Si M(x,y) y N(x,y) poseen derivadas parciales continuas en una región rectangular R, definida por a **< x < b, c < y < d, entonces se tiene que:**

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \textbf{(ec. 3.44)}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)$$

y por tanto se cumple que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad \textbf{(ec. 3.45)}$$

Este es precisamente el criterio que se utiliza para decidir si una ecuación es o nó una diferencial exacta. Si se cumple la condición dada por la ec. 3.45 entonces la ec. 3.43 es una ecuación diferencial exacta, caso contrario no lo es.

Formalmente la ec. 3.45 expresa una condición necesaria y suficiente para que la ecuación 3.43 sea una diferencial exacta. La demostración de esta proposición constituye un importante teorema; sin embargo, dado que nuestro objetivo no es demostrar teoremas, sugerimos al lector interesado que consulte el Anexo A.

Por nuestra propia experiencia sabemos que no basta con que el estudiante disponga de la ec. 3.45 para decidir si una ecuación dada es o no una diferencial exacta. Resolver una ecuación de este tipo puede requerir cierta destreza que sólo se adquiere mediante la solución

de ejercicios y problemas. En tal sentido proponemos otro problema tomado de la teoría electromagnética.

PROBLEMA Nº 5.

Una esfera conductora cargada eléctricamente se coloca en un campo eléctrico inicialmente uniforme ($\vec{E}_0$). La carga eléctrica se redistribuye en la superficie de la esfera y junto con el campo eléctrico inicial producen, en la región exterior a la esfera un potencial eléctrico que se expresa mediante una función V(r,θ). Se escoge un sistema de coordenadas polares esféricas (r,θ,φ). Si el origen del sistema de coordenadas lo ubicamos en el centro de la esfera y tomamos el eje polar $\theta = 0$ en la dirección del campo eléctrico uniforme $\vec{E}_0$, entonces la función de potencial V(r,θ) es independiente del ángulo azimutal φ. Manteniendo fijo el ángulo φ se define un plano de coordenadas polares (r, θ). En este plano una "curva equipotencial" viene definida mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$-\left[\frac{k}{r^2}+\left(\frac{2a^3}{r^3}+1\right)E_0\cos\theta\right]dr + \left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)E_0 r\,sen\theta\, d\theta = 0 \qquad \textbf{(ec. 3.46)}$$

Donde k es una constante.

Encuentre la función de potencial V(r, θ).

GUIA DIDÁCTICA.

Resolviendo la ec. 3.46 encontraremos la función V(r, θ). En primer el lugar el estudiante deberá confirmar, utilizando el criterio dado por la ec. 3.45 que la ec. 3.46 corresponde a una diferencial exacta, es decir;

$$\frac{\partial}{\partial\theta}M(r,\theta)=\left(\frac{2a^3}{r^3}+1\right)E_0\,sen\theta=\frac{\partial}{\partial r}N(r,\theta) \qquad \textbf{(ec. 3.47)}$$

Nótese que en la ec. 3.46 se ha identificado M(r,θ) como el coeficiente de dr y N(r,θ) como el coeficiente de dθ. A pesar de que ya estamos seguros que se trata de una diferencial exacta, creemos que puede ser muy difícil encontrar por simple inspección la función correspondiente; sin embargo, la información disponible nos provee de otro camino para encontrar la función que buscamos y que presentamos a continuación.

Como se trata de una ecuación diferencial exacta entonces debe existir una función V(r,θ) tal que:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = M \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta} = N \qquad \textbf{(ec. 3.48)}$$

Aquí es conveniente cuestionar al estudiante de la siguiente manera: ¿Se pueden utilizar las ecs. 3.48 para encontrar la función V(r,θ)? Se trata de que el estudiante se de cuenta que integrando primero una de las dos ecuaciones disponibles y luego utilizando la otra para "afinar detalles" podemos encontrar la función buscada. Podemos, por ejemplo, comenzar integrando la segunda ecuación:

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta} = N \qquad \textbf{(ec. 3.49)}$$

$$V = \int N(r,\theta)d\theta \;+\; \mathrm{f(r)} \qquad \textbf{(ec. 3.50)}$$

Efectuando la integral, se tiene:

$$V = -\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)E_0 r \cos\theta \;+\; \mathrm{f(r)} \qquad \textbf{(ec. 3.51)}$$

¿Porqué la función f(r)? Nótese que la ec. 3.50 se refiere a una "integración parcial" indefinida y por tanto f(r) debe ser una función que solo depende de la variable r. Si ahora derivamos la ec. 3.50 parcialmente respecto a θ obtenemos de nuevo la ec. 3.49.

Es claro que aún queda pendiente un detalle: la función f(r). Es necesario determinar f(r) para encontrar en forma completa la función que buscamos: V(r,θ).

¿Qué sugerencias puede aportar el estudiante? Es aquí donde entra en acción la primera de las ecs. 3.48 que al igualarse con la derivada parcial respecto a r de la ec. 3.51, se tiene:

$$-\left(\frac{2a^3}{r^3}+1\right)E_0\cos\theta \;+\; \mathrm{f}'(\mathrm{r}) \;=\; -\frac{k}{r^2} \;-\; \left(\frac{2a^3}{r^3}+1\right)E_0\cos\theta \qquad \textbf{(ec.3.52)}$$

de donde resulta que $\mathrm{f}'(\mathrm{r}) \;=\; -\frac{k}{r^2}$ **(ec.3.53)**

y por tanto: $f(r)=\frac{k}{r}$ **(ec. 3.54)**

Una vez determinada f(r) se debe volver a la ec. 3.51 para completar la función que buscamos. Finalmente tenemos el resultado deseado:

$$V(r,\theta)= \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{r}}-\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)E_0 r\cos\theta \;=\; \mathrm{C} \qquad \textbf{(ec. 3.55)}$$

COMENTARIO. En realidad, como autor de este trabajo tenía un problema: buscaba un problema "original" para ilustrar este tema de las Ecuaciones Diferenciales Exactas. El PROBLEMA Nº 4 me parecía adecuado para introducir el tema, pero es obvio que no llena las expectativas para tratar este tema de manera completa. Posteriormente, en un texto de Teoría Electromagnética encontré propuesto (al final de un capítulo titulado SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELECTROSTATICOS) el problema de encontrar el potencial eléctrico (en cualquier punto del espacio) debido a una esfera conductora inicialmente cargada con una carga q, que después se coloca dentro de un campo eléctrico inicialmente uniforme (es claro que las condiciones iniciales cambiarán drásticamente debido a la interacción de la carga de la esfera con el campo eléctrico inicial). Un problema de este tipo se puede resolver con procedimientos que involucran la solución de la ecuación de Laplace, que implica aplicar el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales parciales y, además, el conocimiento de los polinomios de Legendre. Una vez obtenida la solución se me ocurrió la

idea de efectuar una "transposición didáctica" para adaptar dicho problema al contexto del presente trabajo. Creo con esto, haber logrado las expectativas de presentar un problema "original" y que didácticamente sirviera para mostrar un ejemplo de un procedimiento completo de solución de una Ecuación Diferencial Exacta. Ambas versiones del problema fueron posteriormente presentadas (en diferentes contextos) a estudiantes de los cursos de Teoría Electromagnética.

EJERCICIOS.

A continuación proponemos dos ejercicios que tienen por finalidad preparar el concepto de "factor integrante" que será más ampliamente utilizado en el siguiente apartado. Por razones de espacio y tiempo las guías didácticas que acompañan a estos ejercicios no ofrecen muchos comentarios (especialmente en el primero), pero siempre se espera que sea el estudiante el que realice el solo o con una pequeña asistencia del maestro los pasos necesarios para resolverlos.

1. **Deduzca una función M(x,y) tal que la siguiente ecuación diferencial sea exacta:**

$$M(x,y)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right)dy = 0 \qquad \textbf{(ec. 3.56)}$$

GUIA DIDÁCTICA.

Identificamos $N(x,y) = \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right)$ **(ec. 3.57)**

Aplicando el criterio de exactitud $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ **se tiene:**

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2} \qquad \textbf{(ec. 3.58)}$$

Integrando esta última ecuación obtenemos el resultado deseado.

$$M(x,y) = ye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} + h(x) \qquad \textbf{(ec.3.59)}$$

<u>Comentario</u>. Para integrar la ec. 3.58 puede requerirse la técnica de integración por partes; sin embargo, en nuestra opinión, esta técnica es conceptualmente sencilla y puede el profesor explicarla en cualquier momento o, preferiblemente, inducir a los estudiantes para que ellos mismos la "descubran"

2. **Resuelva la ecuación $(2y^2 + 3x)dx + 2xy\,dy = 0$, mediante el siguiente procedimiento:**
   a) **Verifique que no corresponde a una diferencial exacta.**
   b) **Suponga que multiplicando la ecuación dada por una función u(x) se transforma en una ecuación exacta. Encuentre la función u(x).**

GUIA DIDÁCTICA.

a) **Para esta primera parte identificamos:**

$M = 2y^2 + 3x$ y $N = 2xy$.

Por tanto $\frac{\partial M}{\partial y} = 4y \neq 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$. **<u>La ecuación dada no es exacta</u>.**

b) **Al multiplicar por el factor u(x) tendremos una nueva ecuación:**

$$(2y^2 + 3x)\,u(x)\,dx + 2xy\,u(x)\,dy = 0$$

y ahora se tiene que $M = (2y^2 + 3x)\,u(x)$ y $N = 2xy\,u(x)$

Dado que se asume (por hipótesis) que esta nueva ecuación sí es exacta, entonces aplicando el criterio de exactitud (ec. 3.45), se obtiene:

$$u(x) = x\,u'(x) \quad \text{y, por tanto:} \quad u(x) = x.$$

¿Qué conclusión obtiene el estudiante?

Naturalmente se espera que el estudiante pueda concluir que existen ecuaciones que no son exactas pero puede ocurrir que al multiplicarlas por un factor $\mu(x,y)$, que llamaremos "factor integrante" se transformen en una ecuación diferencial exacta.

NOTA. Por sencillez (para introducir el tema) el factor integrante de esta ecuación era simplemente una función de x, pero en general el factor integrante puede ser una función de "x" y de "y".

III.4 ECUACIONES LINEALES

INTRODUCCIÓN. Ahora presentamos un problema tomado de la Mecánica a partir del cual se pretende desarrollar un procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. El concepto de factor integrante desempeñará aquí un papel importante. El factor integrante en este caso será el resultado de otro concepto conocido como "variación de parámetro". No queremos extendernos en el surgimiento histórico de este nuevo concepto pero si queremos señalar que se trata de una estrategia con un gran contenido de creatividad y que en su momento histórico constituyó un logro importante en el desarrollo de las Ecuaciones Diferenciales. El aspecto didáctico relacionado con la "variación de parámetro" no es tan sencillo como los casos anteriores de separación de variables y ecuaciones exactas; por tal razón opinamos que es más conveniente que la participación del estudiante en la construcción de este concepto sea más bien dirigida por el maestro, pero siempre tratando de mantener una participación activa por parte del alumno.

PROBLEMA Nº6.

Considere un objeto de masa m que cae verticalmente sujeto a la fuerza de gravedad y a una fuerza de resistencia debida a la fricción con el aire, proporcional a la velocidad instantánea, que se opone al movimiento del objeto.

a) Escriba la ecuación diferencial que describe la velocidad (v) de dicho objeto en función del tiempo.

b) Resuelva la ecuación obtenida tomando en cuenta la condición inicial $v(0) = v_0$.

GUIA DIDÁCTICA.

a) Es casi seguro que todos los estudiantes que hacen un curso de Ecuaciones Diferencias conozcan la segunda ley de Newton, por tanto se trata de que el estudiante pueda escribir por su propia cuenta la siguiente ecuación:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \qquad \text{(ec. 3.60)}$$

donde k es una constante de proporcionalidad y el signo menos se debe a que la fuerza de resistencia se opone al movimiento.

Ahora conviene preguntar al estudiante: ¿Es ésta una ecuación diferencial lineal?, ¿de que orden? Naturalmente que se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden (véase el capitulo II).

b) Si solamente pedimos al estudiante que resuelva la ec. 3.60, sin indicarle ningún procedimiento, lo más probable es que la resuelva por separación de variables o que intente resolverla transformándola en una diferencial exacta.

Por ejemplo si se resuelve por separación de variables (lo cual constituye un ejercicio para practicar este método) se obtiene como resultado la siguiente expresión de la velocidad:

$$v = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} \qquad \text{(ec. 3.61)}$$

Ahora es conveniente que el estudiante trate de resolver la ec. 3.60 transformándola primero en una ecuación exacta. El primer paso será escribir esta ecuación en la forma dada por la ec. 3.43:

$$m\,dv + (kv - mg)\,dt = 0 \qquad \text{(ec. 3.62)}$$

Ya que es evidente que esta ecuación no es una diferencial exacta el maestro podrá indicar (para evitar complicaciones innecesarias en esta etapa del aprendizaje) que intente transformarla en una ecuación exacta multiplicándola por un factor integrante que dependa solo del tiempo: u(t). Con esto la ecuación anterior se transforma en:

$$mu(t)\,dv + (kv - mg)\,u(t)\,dt = 0 \qquad \textbf{(ec. 3.63)}$$

¿Se modifica con esto el carácter lineal de la ecuación? El estudiante debe concluir que la ec. 3.63 continúa siendo lineal.

Entonces se identifica M(v,t) = mu(t) y N(v,t) = (kv – mg) u(t).

El criterio de exactitud aplicado a la ec. 3.63 toma la forma

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial v} \qquad \textbf{(ec. 3.64)}$$

Resolviendo la ec. 3.64, se obtiene $u(t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}t}$ **(ec. 3.65)**

Y la ec. 3.63 se transforma en:

$$me^{\frac{k}{m}t}\,dv + (kv - mg)e^{\frac{k}{m}t}\,dt = 0 \qquad \textbf{(ec. 3.66)}$$

Como la ec. 3.66 es una ecuación diferencial exacta, entonces tiene que existir una función f(v,t) = C, tal que sus derivadas parciales cumplan las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = me^{\frac{k}{m}t} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = (kv - mg)e^{\frac{k}{m}t} \qquad \textbf{(ec. 3.67)}$$

Para determinar la función f(v,t) podemos partir de cualquiera de las dos ecuaciones 3.67, por ejemplo, de la primera:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = me^{\frac{k}{m}t} \qquad \textbf{(ec. 3.68)}$$

Integrando respecto a v, obtenemos:

$$f(v,t) = mve^{\frac{k}{m}t} + \mathrm{h(t)} \qquad \textbf{(ec. 3.69)}$$

donde h(t) es un función que solo depende de t. Para determinar explícitamente h(t) el estudiante deberá derivar parcialmente respecto de t la ec. 3.69 e igualar este resultado con el miembro derecho de la segunda de las ecuaciones 3.67, con lo cual se obtiene:

$$h'(t) = -mge^{\frac{k}{m}t} \qquad \text{y por tanto} \quad h(t) = -\frac{m^2}{k} ge^{\frac{k}{m}t} \qquad \text{(ec.3.70)}$$

Sustituyendo h(t) en la ec. 3.69, se tiene:

$$f(v,t) = mve^{\frac{k}{m}t} - \frac{m^2}{k} ge^{\frac{k}{m}t} = \mathrm{C} \qquad \text{(ec. 3.71)}$$

La constante C se puede evaluar fácilmente a través de la condición inicial: $v(0) = v_0$.

Aplicando esta condición tenemos: $C = mv_0 - \frac{m^2}{k} g$ (ec. 3.72)

Combinando las dos últimas ecuaciones y despejando la variable v, se tiene:

$$v = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} \qquad \text{que es la misma ec. 3.61.}$$

El procedimiento que se ha seguido para resolver este problema de caída vertical de un cuerpo sujeto a una fuerza de resistencia puede ser muy valioso si se considera que es una oportunidad para ejercitar los métodos anteriormente aprendidos, pero su principal importancia radica en que mentalmente prepara al estudiante para comprender mejor el concepto de “variación de parámetro”.

Variación de parámetro.

Volvamos a la ec. 3.60: $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$ Escribámosla ahora como

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g \qquad \text{(ec. 3.73)}$$

Supongamos, por un momento, que estuviéramos en una región del espacio en donde no existiera la gravedad, es decir: g = 0. La ec. 3.73 quedaría así:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=0 \qquad \textbf{(ec. 3.74)}$$

Planteadas así las cosas al estudiante le será más fácil comprender que la solución general de la ec. 3.73 es la suma de dos soluciones : la solución general de la ec. 3.74 más una solución particular de la ec. 3.73 (que es la misma 3.60 escrita de una manera más conveniente). Es decir,

$$v = v_c + v_p$$

El estudiante puede resolver fácilmente la ec. 3.74 separando variables y obtendrá el siguiente resultado:

$$v_c = ce^{-\frac{k}{m}t} \qquad \textbf{(ec 3.75)}$$

Por comodidad hagamos $v_c = cv_1$, donde es claro que $v_1 = e^{-\frac{k}{m}t}$. [14] **(ec. 3.76)**

(Si ahora incorporáramos la condición inicial encontraríamos que la constante es $c = v_0$, por tanto la velocidad inicial decaería exponencialmente ante la ausencia de la fuerza de gravedad).

Ahora que ya se tiene la solución de la ec. 3.74 , se debe construir "heurísticamente" un procedimiento para obtener una solución particular v_p de la ec. 3.73, a partir de la ec. 3.75;

La experiencia nos dice que es muy difícil (aunque no imposible) que a un estudiante se le ocurra algún procedimiento que conduzca a dicha solución; sin embargo, es conveniente invitarlos a que participen aportando sugerencias. En caso que no hubiera alguna sugerencia adecuada, el maestro podría hacer un planteamiento similar al siguiente: establezcamos como hipótesis que la solución y_p existe y que sea el producto de v_1 por una función u(t) que sólo dependa del tiempo; es decir: $v_p = v_1u(t)$. Si ahora se compara la hipótesis propuesta con la

[14] **Por comodidad llamamos v_1 a esta expresión, pero en realidad es adimensional.**

ec. 3.75 podrá observarse que la constante (el parámetro) c ahora se cambia por una función u(t). (Esto justifica el término "variación de parámetro").

¿Cómo podemos comprobar que la hipótesis anterior es correcta? El estudiante podrá expresar (o al menos comprender) que la única manera de comprobar esta hipótesis es sustituyendo v por $v_p = v_1 u(t)$ en la ec. 3.73. Haciendo esto se tiene:

$$\frac{d}{dt}(v_1 u) + \frac{k}{m} v_1 u = g \qquad \textbf{(ec. 3.77)}$$

Entonces,

$$u\frac{dv_1}{dt} + v_1\frac{du}{dt} + \frac{k}{m} v_1 u = g \qquad \textbf{(ec. 3.78)}$$

Reordenando esta ecuación se tiene:

$$\underbrace{u\left(\frac{dv_1}{dt} + \frac{k}{m} v_1\right)}_{\textbf{cero}} + v_1\frac{du}{dt} = g \qquad \textbf{(ec. 3.79)}$$

El estudiante debe observar la expresión entre paréntesis de esta ecuación y concluir que se anula. Con esto se logra el importante paso de encontrar la función u(t). La ec. 3.79 se reduce ahora a lo siguiente:

$$v_1\frac{du}{dt} = g \qquad \textbf{(ec. 3.80)}$$

como ya se conoce v_1, la solución de esta ecuación es inmediata:

$$u = \frac{m}{k} g e^{\frac{k}{m}t} \qquad \textbf{(ec.3.81)}$$

Por tanto, la solución particular que buscábamos $v_p = v_1 u(t)$, es:

$$v_p = \frac{m}{k} g \qquad \textbf{(ec. 3.82)}$$

que claramente satisface la ec. 3.73. Entonces la solución general de la ec. 3.60 es la suma de las ecuaciones 3.75 y 3.82, con lo cual se obtiene:

$$v(t) = ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k}g \qquad \textbf{(ec. 3.83).}$$

Fácilmente se comprueba que la ec. 3.83 es una solución de la ec. 3.60. Sin embargo, aún hace falta incorporar en esta solución la condición inicial v(0) = v_0. Esta condición nos permite evaluar la constante c:

$$c = v_0 - \frac{m}{k}g \qquad \textbf{(ec. 3.84)}$$

Finalmente, sustituyendo este valor de la constante en la ec. 3.83 obtenemos la solución del problema propuesto:

$$v = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} \qquad \text{que es la misma ec. 3.61.}$$

Comentario. Probablemente algún estudiante opine en el sentido de que no era necesario hacer tanto procedimiento para llegar a este resultado que se puede obtener más fácilmente por el método de separación de variables. Por experiencia sabemos que ésta es una situación didáctica interesante y que ocurre con frecuencia cuando se trata de introducir un nuevo método o procedimiento de resolver algo cuya solución ya se conoce. En este caso el profesor debe recordarle al estudiante que no siempre es aplicable el método separación de variables y que el hecho de llegar a un resultado ya conocido es muy bueno, precisamente porque nos da confianza en el nuevo método. Este nuevo puede ser aplicable a situaciones en las cuales el anterior no se pueda aplicar.

Sistematización.

¿Cómo se justifica este procedimiento de variación de parámetros?. Esta pregunta es casi obligada por parte de un estudiante crítico y no se debe tratar de esconder o restarle importancia al carácter heurístico de este procedimiento. Se justifica en si mismo dado que nos provee de una solución adecuada que se puede comprobar. Nuestra opinión al respecto es que se debe aprovechar una pregunta como esta para explicar al estudiante que una parte

considerable del desarrollo de la matemática se debe a la resolución de problemas especialmente cuando éstos requieren de estrategias creativas para su solución (que en muchos casos pueden considerarse como "el arte" de crear conjeturas exitosas). De nuevo podrá insistirse en comparar la función u(t) con la constante c de la ec. 3.74. Nótese que $v_c = cv_1$ es solución de la ec. 3.74 y que la "conjetura" consiste en suponer que una función $v_p = u(t)v_1$ sea solución particular de la ec. 3.73. Es como que estuviéramos imponiendo una solución condicionada a encontrar la función u(t) adecuada, lo cual (como puede observarse) se obtiene como una consecuencia lógica del mismo proceso.

A este nivel del desarrollo conceptual de este procedimiento de variación de parámetros el maestro puede preguntar a sus estudiantes si consideran que ¿vale la pena sistematizar dicho procedimiento? y después de una respuesta afirmativa proponerles que sean ellos mismos los que establezcan los pasos a seguir.

En forma de una guía resumida presentamos el siguiente proceso, pero para obtener mejores resultados es conveniente describirlo en términos más generales. Por tanto comencemos por escribir en forma estándar una ecuación diferencial de primer orden.

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)\,; \qquad \text{con} \quad a_1(x) \neq 0 \qquad \textbf{(ec. 3.85)}$$

1. dividiendo ahora por $a_1(x)$ [15] la ecuación anterior toma la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \qquad \textbf{(ec. 3.86)}$$

(compare esta ecuación con la ec. 3.73)

2. Tomemos ahora la ecuación "asociada":

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0\,, \qquad \textbf{(ec. 3.87)}$$

cuya solución es inmediata: $y_c = ce^{-\int P(x)dx} = cy_1$ **(ec. 3.88)**

con $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$

3. **La solución general (y) de la ec. 3.86 será la suma de y_c y de una solución particular de la misma ecuación: $y = y_c + y_p$. Para obtener y_p se recurre a la variación de parámetros:**

$$y_p = u(x)y_1$$

4. **Se sustituye y_p en la ec. 3.86 y se obtiene (después de reagrupar términos) :**

$$u\left(\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1\right) + y_1\frac{du}{dx} = f(x) \qquad \textbf{(ec. 3.89)}$$

Como y_1 es solución de la ec. 3.87, la última ecuación se reduce a:

$$y_1\frac{du}{dx} = f(x)$$

y por tanto, $u(x) = \int \frac{f(x)}{y_1}dx$ **(ec. 3.90)**

5. **Escribimos la solución general de la ec. 3.86 (que el la misma ec. 3.85), así:**

$$y = cy_1 + u(x)y_1$$

$$y(x) = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx} f(x)dx \qquad \textbf{(ec. 3.91)}$$

Una vez que el estudiante ha comprendido este proceso se le puede mostrar otroo más fácil y más rápido (más mecánico) para resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden. Para ver en que consiste se comienza por multiplicar la ec. 3.91 por $e^{\int P(x)dx}$ y se obtiene:

$$e^{\int P(x)dx}y(x) = c + \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx \qquad \textbf{(ec. 3.92)}$$

[15] **Las soluciones de las ecuaciones diferenciales son válidas dentro de algún intervalo de la variable x, por tanto deberá tenerse el cuidado de que $a_1(x)$ no se anule dentro de ese intervalo.**

Derivando esta ecuación se obtiene:

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+P(x)e^{\int P(x)dx}y=e^{\int P(x)dx}f(x) \qquad \textbf{(ec.3.93)}$$

Si dividimos ahora por $e^{\int P(x)dx}$ obtenemos nuevamente la ec. 3.86. (Este último paso se hizo solo para mostrar que el método rápido puede partir directamente de la ec. 3.86).

Es claro que el lado izquierdo de la ec. 3.93 puede escribirse como la derivada de un producto (esta es la esencia del método rápido):

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right)=e^{\int p(x)dx}f(x) \qquad \textbf{(ec.3.94)}$$

Integrando a ambos lados de esta ecuación obtenemos la solución buscada.

El estudiante debe observar que la expresión $e^{\int p(x)dx}$ en la ec. 3.93 constituye "el factor integrante" que nos permite encontrar una solución rápida.

Para finalizar proponemos el siguiente ejercicio.

EJERCICIO.

Resuelva la siguiente ecuación:

$$xy'+(1+x)y=e^{-x}sen2x \qquad \textbf{(ec. 3.95)}$$

El estudiante podrá comprender mejor la estrategia del factor integrante si se le pide que observe las ecuaciones 3.86, 3.93 y 3.94 y luego se le pregunta ¿cuál es la función del factor integrante?

Deberá tratarse que los estudiantes en forma individual u organizados en pequeños grupos resuelvan el ejercicio, pero de todas maneras proporcionamos una guía resumida.

Escribimos la ec. dada en la forma de la ec. 3.86:

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1+x}{x}\right)y=\frac{e^{-x}}{x}sen2x$$

Por tanto con $P(x) = \dfrac{1+x}{x}$ **el factor integrante es** $\mu(x) = xe^x$**. Multiplicando la última ecuación por este factor se tiene:**

$$xe^x \frac{dy}{dx} + (1+x)e^x y = sen2x$$

y $$\frac{d}{dx}\left(xe^x y\right) = sen2x$$

Integrando en ambos lados de esta ecuación se obtiene la solución de la ec. 3.95:

$$y = \frac{e^{-x}}{x}\left(c - \frac{\cos 2x}{2}\right)$$

Deberá insistirse en la función del factor integrante como un elemento que sirve para expresar el lado izquierdo de una ecuación (diferencial lineal de primer orden) como la derivada de un producto facilitando de esta forma la integración y la solución de la ecuación dada.

III.5 BERNOULLI Y RICCATI. ECUACIONES NO LINEALES.

INTRODUCCIÓN.

Hasta ahora, en este capítulo hemos cubierto los siguientes temas: variables separables, Ecuaciones Diferenciales Exactas (factor integrante), Ecuaciones lineales y variación de parámetro. Hemos considerado seis problemas, dos dificultades conceptuales y varios ejercicios, todos ellos con sus respectivas guías didácticas. Nótese que no es nuestro propósito presentar una gran cantidad de ejercicios, dado que esto no es parte de nuestros objetivos fundamentales. Los pocos ejercicios que se han seleccionado para este trabajo han sido atendiendo a consideraciones didácticas. Los profesores pueden encontrar cantidades de ejercicios en los libros de texto, sin embargo, no es frecuente encontrar guías didácticas para la solución de problemas.

Debemos aclarar que no es nuestra pretensión "agotar" todo lo relacionado con las Ecuaciones Diferenciales de primer orden, pero no queremos finalizar este capítulo sin mencionar dos casos históricos de Ecuaciones Diferenciales NO LINEALES: la ecuación de Bernoulli y la ecuación de Riccati.

Hemos observado que algunos textos de Ecuaciones Diferenciales no consideran estos dos casos y los que lo hacen talvez no les conceden la importancia que se merecen tanto en el aspecto histórico como en el metodológico. Nosotros queremos retomarlos como PROBLEMAS a los cuales deben enfrentarse los estudiantes y como amantes de la Historia de la Ciencia sugerimos a los colegas que imparten esta asignatura que no dejen pasar la(s) oportunidad(es) de cultivar la cultura (con los estudiantes), en este caso la que corresponde al conocimiento, amor y respeto por la Historia de la Ciencia y en particular de la Matemática. Recordemos que el nivel profesional de las personas se acrecienta cuando conocen más de la Historia de su propia profesión, de su país y de la Historia en general.

A. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BERNOULLI.

La siguiente ecuación es conocida como la ecuación diferencial de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n ; \quad \text{n: número real.} \qquad \text{(ec. 3.96)}$$

El estudiante debe observar que si n = 0 o si n = 1, la ecuación de Bernoulli se reduce al caso lineal y por tanto, puede resolverse por los procedimientos planteados en el artículo III.4; si $n \neq 0$ y $n \neq 1$, la ecuación 3.96 es una ecuación no lineal.

El profesor puede preguntar a los alumnos: ¿se podrá linealizar una ecuación no lineal? Después de escuchar algunas participaciones de los alumnos podrá sugerir a través de otra pregunta: ¿haciendo un cambio de variable se podrá linealizar la ecuación de Bernoulli?

Por experiencia sabemos que los estudiantes tienden a "mistificar" los cambios de variable (con excepción de los más sencillos). No dudamos que algunas veces encontrar el cambio de variable adecuado requiere de alguna estrategia agresiva, de algún tipo de clarividencia (o de un "chispazo" para decirlo en el lenguaje coloquial de nuestro medio); sin embargo (afortunadamente), en muchas situaciones el cambio de variable adecuado no es más que una consecuencia lógica del proceso, como veremos a continuación: si la ec. 3.96 se divide entre y^n se obtiene:

$$y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = f(x) \qquad \textbf{(ec. 3.97)}$$

Talvez así sea más fácil que algún estudiante (o un pequeño grupo de ellos, trabajando en equipo) proponga que se ensaye el siguiente cambio de variable: $u = y^{1-n}$. Nuestra sugerencia es que el profesor deje que los estudiantes comprueben que, con dicho cambio de variable, la ecuación de Bernoulli toma la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)f(x) \qquad \textbf{(ec. 3.98)}$$

Como esta ecuación ES LINEAL se puede resolver mediante los procedimientos ya vistos. A continuación el profesor puede proponer algunos ejercicios para que los estudiantes, trabajando en pequeños grupos resuelvan, en forma completa, algunas ecuaciones de Bernoulli. Para iniciar con un caso sencillo proponemos que los estudiantes resuelvan en forma completa la siguiente ecuación de Bernoulli con coeficientes constantes:

$$\frac{dy}{dx} - ay + by^2 = 0 \qquad \textbf{(ec. 3.99)}$$

Para este ejercicio no consideramos que sea necesario proponer una guía didáctica y nos limitamos a sugerir que el profesor deje que los estudiantes lleguen por su propia cuenta a la siguiente solución:

$$y = \frac{a}{b + Ce^{-ax}} \qquad \textbf{(ec. 3.100)}$$

COMENTARIO. Veámos, como ejemplo, lo que hace el autor Denis G. Zill en su texto ECUACIONES DIFERENCIALES (Op. C., 6ª Ed.), Pág. 65. El autor se limita a decir que la sustitución $u = y^{1-n}$ reduce cualquier ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal y luego resuelve un ejemplo en este contexto didáctico. Consideramos que al proceder de esta manera (profesores y los libros de texto) se pierde la oportunidad, en nuestra opinión, de desarrollar competencias en los estudiantes limitándolos a la realización de un simple ejercicio.

B. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE RICCATI.

Jacopo Riccati (1676 – 1754) es el matemático italiano más conocido de su época. La siguiente ecuación consagra su nombre:

$$\frac{dy}{dx} = R(x)y^2 + Q(x)y + P(x) \qquad \text{(ec. 3.101)}$$

Evidentemente, se trata de una Ecuación Diferencial no lineal. (Véase CAP. I, Pág. 19).

Esta ecuación fue estudiada por muchos matemáticos de la época, incluyendo a Euler. En realidad, no es fácil que un estudiante la resuelva por su propia cuenta. Se puede linealizar con un cambio de variable adecuado, pero en este caso se necesita mucha experiencia para encontrar el cambio "exitoso". Anteriormente opinamos que los cambios o sustituciones de variables son consecuencia lógica del proceso y lo sostenemos; sin embargo, algunas veces (permítanme la comparación) al matemático se le podrá comparar con el maestro de ajedrez, cuya visión estratégica alcanza a ver varias jugadas por delante. Cómo se menciona en el CAP. I, fue precisamente Euler (el genio con la más grande actitud matemática de su época) quien observó que si se conoce una solución particular $y_1(x)$ de la ec. de Riccati, entonces la sustitución $y(x) = y_1(x) + 1/v(x)$ la convierte en una ecuación diferencial lineal en $v(x)$.

Tampoco queremos, en este caso, detenernos en todos los detalles, pero sugerimos que el profesor permita que los estudiantes ensayen la sustitución propuesta por Euler y que vayan obteniendo los siguientes resultados:

$$-\frac{v'(x)}{v^2(x)} = \frac{2R(x)y_1(x)}{v(x)} + \frac{Q(x)}{v(x)} + \frac{R(x)}{v^2(x)} \qquad \textbf{(ec. 3.102)}$$

Por tanto, $$-v'(x) = \left[2R(x)y_1(x) + Q(x)\right]v(x) + R(x) \qquad \textbf{(ec. 3.103)}$$

Ahora, haciendo $2R(x)y_1(x) + Q(x) = a(x)$ **la ecuación anterior toma la forma:**

$-v'(x) = a(x)v(x) + R(x)$ **que es una ecuación diferencial lineal.**

Ahora creemos que es el momento oportuno de formular a los estudiantes la siguiente pregunta: ¿cuál es la consecuencia lógica de este proceso que justifica dicha sustitución?

EJERCICIO. Resuelva en forma completa la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 3y + 2 \qquad \textbf{(ec. 3.104)}$$

No pretendemos hacer una guía didáctica para este ejercicio, únicamente indicamos algunos detalles. El estudiante debe encontrar primero una solución particular. El profesor puede preguntar ¿Qué se requiere para que la derivada se anule? Y luego, permitir que los estudiantes concluyan que $0 = K^2 + 3K + 2$. Por tanto, una solución particular es $y_1(x) = -1$. Entonces, el cambio de variable requerido es:

$y(x) = -1 + 1/v(x)$, con el que se obtiene la siguiente ecuación lineal:

$$v'(x) + v(x) = -1 \qquad \textbf{(ec. 3.105)}$$

Dado que el factor integrante de esta ecuación es e^x, la podemos escribir como:

$$\frac{d}{dx}(e^x v(x)) = -e^x \qquad \textbf{(ec. 3.106)}$$

Cuya solución viene dada por $v(x) = Ce^{-x} - 1$ **(ec. 3.107)**

Por tanto, se concluye que la solución general de la ec. 3.106 es:

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{-x} - 1} - 1 \qquad \textbf{(ec. 3.109)}$$

Para finalizar este capítulo insistimos en que el estudiante debe comprobar las soluciones que obtenga.

CAPITULO IV.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

IV.1 INTRODUCCION.

En este capítulo trabajaremos primordialmente las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Cómo los métodos de solución de estas ecuaciones fácilmente se extienden a ecuaciones de orden superior, eventualmente veremos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales de tercer orden.

Aclaramos que no nos detendremos a profundizar en la deducción y demostración de aspectos teóricos (tales como teoremas y otros). Estos serán tratados o mencionados superficialmente y los casos que se consideren muy importantes podrán desarrollarse en los correspondientes anexos. (Véanse los objetivos de este trabajo de graduación.)

IV.2 ECUACIONES HOMOGÉNEAS.

En correspondencia con el apartado II.2.3, una ecuación diferencial lineal, de orden n, de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \qquad \textbf{(ec. 4.1)}$$

se llama <u>homogénea</u> porque cada término de la ecuación contiene a la función y, o a una de sus derivadas. En cambio la ecuación:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad \textbf{(ec. 4.2)}$$

donde g(x) no es idénticamente cero, se llama <u>no-homogénea.</u>

IV.3 ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL HOMOGÉNEA DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES.

De igual forma que en el capítulo III, comenzaremos con el caso más sencillo: una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Si en la (ec. 4.1) tomamos n = 2 y hacemos que todas las $a_i(x)$ sean constantes reales, tendremos este caso, el cual lo ilustraremos con el siguiente problema.

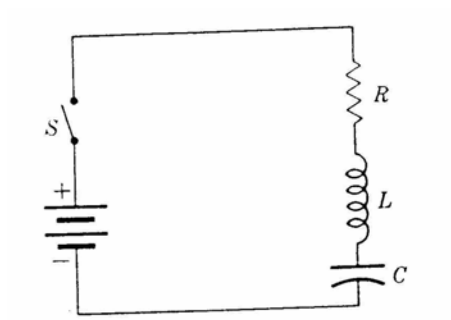
PROBLEMA Nº1.

Considere un circuito RLC que se conecta repentinamente a un voltaje V constante (al cerrar el interruptor S), según se muestra en la figura, donde R es un resistor, L un inductor y C un capacitor.

Asumiendo que los parámetros R, L y C permanecen constantes, encuentre una función I(t) que exprese el comportamiento temporal de la intensidad de la corriente eléctrica en el circuito.

GUIA DIDÁCTICA.

Aclaramos que para los objetivos de este trabajo no es necesario que el estudiante conozca en detalle la teoría de los circuitos eléctricos. El profesor puede proporcionar una breve explicación de las leyes de Kirchhoff para circuitos eléctricos (Véase el problema Nº2 del capítulo III). Aplicando la misma ley de Kirchhoff mencionada en el capítulo III, se tiene la siguiente ecuación diferencial.



$$RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(t)dt = V \qquad \textbf{(ec. 4.3)}$$

La integral en esta ecuación corresponde a la carga Q(t) que, en el instante t después de haberse cerrado el interruptor (S), posee el capacitor C y Q(t)/C es el voltaje que en el mismo instante tiene dicho elemento. Por simplicidad asumamos que el capacitor está inicialmente descargado y que el interruptor se cierra en el instante $t_0 = 0$.

Recordamos que lo que se pretende es que el estudiante desarrolle su capacidad de buscar y encontrar estrategias de solución para resolver ecuaciones diferenciales. En tal sentido este problema es muy interesante dado que involucra una serie de estrategias adecuadas para enfrentar las dificultades que se presentan en el proceso de solución del mismo, incluyendo la manera de evaluar algunas constantes.

Es claro que la ec. 4.3 (dada su naturaleza integrodiferencial) no tiene la apariencia de corresponder a un "caso sencillo" y además, no es de segundo orden. Sin embargo, una estrategia relativamente fácil la convierte en una ecuación adecuada para iniciar el estudio de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes.

¿Qué sucede si ahora derivamos la ec. 4.3?

El profesor debe permitir que el estudiante obtenga la siguiente ecuación:

$$L\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}I(t) = 0 \qquad \textbf{(ec. 4.4)}$$

y además, que elabore algunas conclusiones. Obsérvese que al derivar se pierde la información acerca del voltaje V (posteriormente será necesario recurrir a esta información; ver ec. 4.15). Otro procedimiento podría ser sustituir I(t) por dQ(t)/dt, pero en este caso se obtendría una ecuación diferencial lineal de segundo orden NO homogénea. Este tipo de ecuaciones las veremos luego en este capítulo.

Se trata ahora de que el estudiante proponga la forma de una posible solución de la ec. 4.4. (en este momento sería útil volver a considerar el ejercicio 3, parte iii, de la Pág. 32. Esto, además está de acuerdo con las sugerencias del gran maestro Polya).

Sería un éxito que el estudiante, por si mismo o trabajando en pequeños grupos, llegara a la conclusión de que una posible forma de solución de la ec. 4.4 es la función:

$$I(t) = ke^{mt}, \quad k\text{: una constante} \qquad \text{(ec. 4.5)}$$

El siguiente paso consiste en que el estudiante "ensaye" si esta función es o no una solución de la ec. 4.4. Para esto, la idea más simple es sustituir la "posible solución" en la ecuación dada, con lo que se obtiene:

$$Lm^2\, ke^{mt} + Rm\, ke^{mt} + ke^{mt}/C = 0 \qquad \text{(ec. 4.6)}$$

Simplificando esta ecuación se tiene:

$$Lm^2 + Rm + 1/C = 0 \qquad \text{(ec. 4.7)}$$

Por tanto, la función ke^{mt} será una solución de la ec. 4.4 si m satisface la "ecuación característica" dada por la ec. 4.7. Resolviendo para m en esta ecuación se tienen dos soluciones:

$$m_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \qquad \text{(ec. 4.8a)}$$

$$m_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \qquad \text{(ec. 4.8b)}$$

Entonces, la forma "concreta" de las soluciones depende del discriminante $R^2 - 4L/C$. Por simplicidad llamemos μ a dicho discriminante . Tendremos tres casos:

1) **Si $\mu > 0$, tendremos dos soluciones reales y distintas.**
2) **Si $\mu < 0$, habrá dos soluciones complejas, una de ellas será la conjugada compleja de la otra.**
3) **Si $\mu = 0$, tendremos dos soluciones iguales. En este caso suele decirse que es una solución de multiplicidad dos.**

Consideramos que en este momento se puede hacer un paréntesis para obtener el máximo provecho de la discusión acerca de este problema; luego, analizaremos cada uno de los tres casos mencionados, pero haciendo énfasis en el segundo caso (que ocurre con más frecuencia) y en el tercero (que nos conducirá a nuevas estrategias de solución). El primer caso se aprovechará para que el estudiante desarrolle sus observaciones y elabore algunas conclusiones de validez general.

Previamente escribamos la ec. 4.4 en una forma matemáticamente equivalente pero más estándar. Se trata de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes y positivos

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0; \quad a,b,c>0 \qquad \textbf{(ec. 4.9)}$$

En la ec. 4.4 cada uno de los parámetros L, R y C^{-1} tiene un significado físico, pero cuando estos parámetros permanecen constantes matemáticamente equivalen a las constantes a, b y c **de la ec.4.9 y las variables I e t de aquella ecuación corresponden a las variables x $\wedge$ y de esta última.**

En realidad, hemos considerado la ec. 4.9 no solamente por su sencillez sino también por tener un mayor grado de generalidad, lo que permite "modelar" otros sistemas físicos, como veremos en el Problema Nº2.

Si ahora suponemos una solución de la forma $y = e^{mx}$ tendremos:

$$am^2+bm+c=0 \qquad \textbf{(ec. 4.10)}$$

como la ecuación característica que corresponde a la ec. 4.9.

Las dos soluciones de esta ecuación característica tienen la siguiente forma:

$$m_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \textbf{(ec. 4.11a)}$$

$$m_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \textbf{(ec. 4.11b)}$$

caso i) $b^2 - 4ac > 0$ **(μ > 0). En este caso tendremos dos soluciones reales distintas: $m_1 \neq m_2$.**

El estudiante debe comprobar ahora varias cosas:

a) que la función $y_1(x) = e^{m_1 x}$ **es una solución de la ec. 4.9**

b) que la función $y_2(x) = e^{m_2 x}$ **es también solución de la ec. 4.9**

c) que cualquiera de las soluciones anteriores multiplicada por una constante es también solución de la ec. 4.9

d) que la combinación lineal $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, siendo C_1 y C_2 constantes cualesquiera es una solución de la ec. 4.9. Esta combinación lineal se dice que es la "solución general" de la ec. 4.9

e) que las dos soluciones $y_1(x) \wedge y_2(x)$ se anulan cuando x → ∞ debido al factor $e^{-bx/2a}$

Aplicando esta solución general, mencionada en el literal d), al circuito RLC (Ver ecuaciones 4.8a y 4.8b) vemos que la corriente en dicho circuito se amortigua rápidamente (por lo general los valores de L son muy pequeños comparados con los de R y los de C son muy pequeños comparados con los de L), debido al factor $e^{-Rt/2L}$ **. Por esta razón se dice que el circuito es sobreamortiguado.**

caso ii) $b^2 - 4ac > 0$ **(μ < 0). En este caso tendremos dos soluciones complejas, siendo una de ellas la conjugada compleja de la otra. Apliquemos de inmediato este resultado al circuito RLC. En este caso el estudiante debe observar que es más conveniente escribir las ecuaciones 4.8 a y 4.8 b en sus formas complejas:**

$$m_1 = -\frac{R}{2L} + i\omega_n \,, \quad \text{con } \omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad \textbf{(ec. 4.12 a)}$$

$$m_2 = -\frac{R}{2L} - i\omega_n \qquad \textbf{(ec. 4.12 b)}$$

Por tanto, la solución general de la ec. 4.4 puede escribirse de la manera siguiente:

$$I(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}(Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t}) \qquad \textbf{(ec. 4.13)}$$

donde A y B son constantes complejas que deben ser evaluadas de modo que se satisfagan las condiciones iniciales. El significado físico exige que la solución de la ec. 4.13 sea real; por tanto, B debe ser la conjugada compleja de A. Si el estudiante aún no ha tomado un curso básico de variable compleja esto constituirá una nueva situación problemática, en el sentido que plantea María Luz Callejo de la Vega (Ver MARCO TEORICO, Pág. 11). En consecuencia, la ec. 4.13 toma una forma sinusoidal:

$$I(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}(D\cos\omega_n t + Esen\omega_n t) \qquad \textbf{(ec. 4.14)}$$

Ahora, D y E son constantes reales. Si el lector desea ver un análisis más detallado de esta conclusión le sugerimos que consulte el ANEXO B. Tenemos ahora la situación problemática de evaluar estas nuevas constantes D y E. Para ello serán útiles las condiciones iniciales. Como el interruptor (S) se cerró en t = 0 y Q(0) = 0, la ec. 4.3 podrá satisfacerse agregando otras condiciones iniciales (deducidas) :

$$I(0) = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{L}\left.\frac{dI(t)}{dt}\right|_{t=0} = V \qquad \textbf{(ec. 4.15)}$$

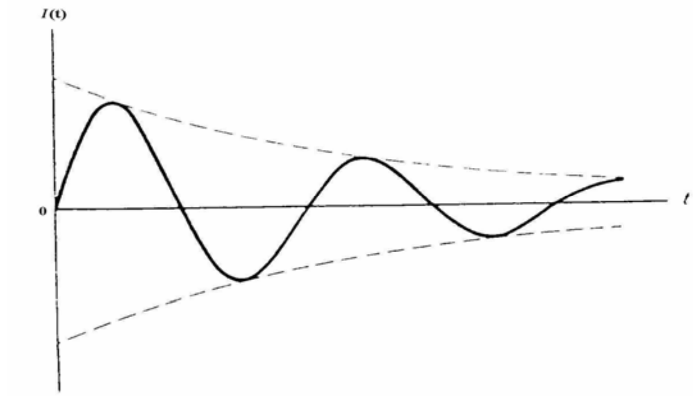
El maestro debe permitir que los estudiantes elaboren sus propias conclusiones. Aplicando las condiciones de la ec. 4.15, el estudiante debe concluir que:

1) D = 0 y 2) $\mathrm{E} = \frac{\mathrm{V}}{\omega_{\mathrm{n}} L}$

Finalmente, la solución (particular) que resuelve la ec. 4.3. tomando en cuenta todas las condiciones iniciales: Q(0) = 0 y las "deducidas" (ec. 4.15), es:

$$I(t) = \frac{V}{\omega_n L} e^{-\frac{R}{2L}t} sen\omega_n t \qquad \textbf{(ec.4.16)}$$

La gráfica de esta función (ec. 4.16) nos muestra el comportamiento del circuito RLC respecto al tiempo.



En ella puede observarse que la corriente del circuito I(t) oscila (cambia de sentido) periódicamente y que la amplitud (magnitud) de la misma decae exponencialmente debido al factor $e^{-Rt/2L}$. Se dice que se trata de un circuito RLC con oscilaciones amortiguadas o simplemente subamortiguado.

caso iii) $b^2 - 4ac = 0$ **(μ = 0). En este caso tendremos dos soluciones iguales o una solución (real) de multiplicidad dos. El estudiante debe observar que en los casos i) y ii) se obtuvieron dos soluciones distintas. El maestro podrá preguntar la opinión de los estudiantes en el sentido de la existencia de una segunda solución "distinta" para este caso. Dado que este caso requiere un poco más de tratamiento, por simplicidad lo veremos primero desde la "óptica" de la ec. 4.9. El estudiante debe comprobar que la función**

$$y_1(x) = Ae^{-\frac{b}{2a}x} \qquad \textbf{(ec. 4.17)}$$

es una solución de la ec. 4.9. Llamaremos a esta la "primera solución". A es cualquier constante; por tanto, cambiar la constante A por otra constante no nos conduce a otra solución cualitativamente distinta. Por comodidad tomemos A = 1. Necesitamos entonces una segunda solución $y_2(x)$ "linealmente independiente" de $y_1(x)$. Se dice que $y_2(x)$ es linealmente dependiente de $y_1(x)$ cuando el cociente $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} =$ **constante, pero si** $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \mathrm{u(x)}$**, donde u(x)**

es una función continua en un intervalo se dice que $y_2(x)$ es linealmente independiente de $y_1(x)$ en dicho intervalo. Ahora, el maestro debe proponer a los estudiantes la búsqueda de una segunda solución de la ec. 4.9, que sea linealmente independiente de la primera. Asumiendo su existencia, en vista de las aclaraciones anteriores, el maestro debe permitir que sean los estudiantes los que propongan la sustitución $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ en la ec. 4.9 para encontrar u(x) y, por tanto, la segunda solución linealmente independiente. Los estudiantes deberán llegar al siguiente resultado:

$$ay_1u'' + (2ay_1' + by_1)u' + (ay_1'' + by_1' + cy_1)u = 0 \qquad \textbf{(ec. 4.18)}$$

Obsérvese que el último término entre paréntesis se anula ya que $y_1(x)$ satisface la ec. 4.9; por tanto, nos queda: $ay_1u'' + (2ay_1' + by_1)u' = 0$ **,** **(ec. 4.19)**

como la ecuación que hay que resolver para encontrar u(x).

REDUCCIÓN DE ORDEN.

El maestro podrá proponer, para facilitar la solución de la ec. 4.19 una "reducción de orden", es decir, reducir el orden de la ecuación diferencial. Se espera que los mismos estudiantes razonen en el sentido de que si u(x) es una función derivable, u'(x) es también una función que podríamos identificar de alguna otra manera, por ejemplo haciendo u'(x) = v(x) y por tanto u"(x) = v'(x). Sustituyendo estas expresiones en la ec. 4.19, se tiene:

$$ay_1v' + (2ay_1' + by_1)v = 0 \qquad \textbf{(ec. 4.20)}$$

Dividiendo esta ecuación entre el producto ay_1v **se puede expresar de la siguiente manera:**

$$\frac{dv}{v} + 2\frac{dy_1}{y_1} + \frac{b}{a}dx = 0 \qquad \textbf{(ec. 4.21)}$$

Integrando la ec. 4.21 se obtiene:

$$v(x)y_1^2(x) = c_1e^{-\frac{b}{a}x} \qquad \textbf{(ec. 4.22)}$$

Como v(x) = u'(x), se tiene:

$$u(x) = c_1 \int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{y_1^2(x)} dx + c_2 \qquad \textbf{(ec. 4.23)}$$

Si ahora tomamos $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, entonces la segunda solución linealmente independiente vendrá dada por la siguiente expresión:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{y_1^2(x)} dx \qquad \textbf{(ec. 4.24)}$$

Con $y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}$ **se tiene:** $y_2(x) = xe^{-\frac{b}{2a}x}$ **(ec. 4.25)**

Finalmente, la solución general de la ec. 4.9 (para el tercer caso, con $\mu = 0$) viene dada por la combinación lineal $y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$ **y, por tanto:**

$$y(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}(k_1 + k_2 x) \qquad \textbf{(ec. 4.26)}$$

Dejaremos que el lector aplique este resultado al circuito RLC. En este caso se dice que el circuito es "críticamente amortiguado" porque una pequeña variación de alguno de sus parámetros lo reduciría a cualquiera de los dos primeros casos. Sólo agregaremos que en este caso el comportamiento del circuito es parecido al caso sobreamortiguado.

Para aprovechar aún más este tercer caso, propondremos un ejercicio, pero planteado en términos de una situación problemática.

EJERCICIO.

Considere una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden en su forma estándar:

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0, \qquad \textbf{(ec. 4.27)}$$

siendo P(x) y Q(x) funciones continuas en algún intervalo I. Supongamos que el estudiante conoce una primera solución $y_1(x)$ de la ec. 4.27. Ahora se trata de encontrar una segunda solución linealmente independiente y la solución general de dicha ecuación.

Sugiriendo el procedimiento anterior (empleado en el caso iii) el maestro debe permitir que el estudiante (trabajando en forma individual o en pequeños grupos) obtenga:

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx \qquad \textbf{(ec. 4.28)}$$

y por tanto, la solución general de 4.27 es $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

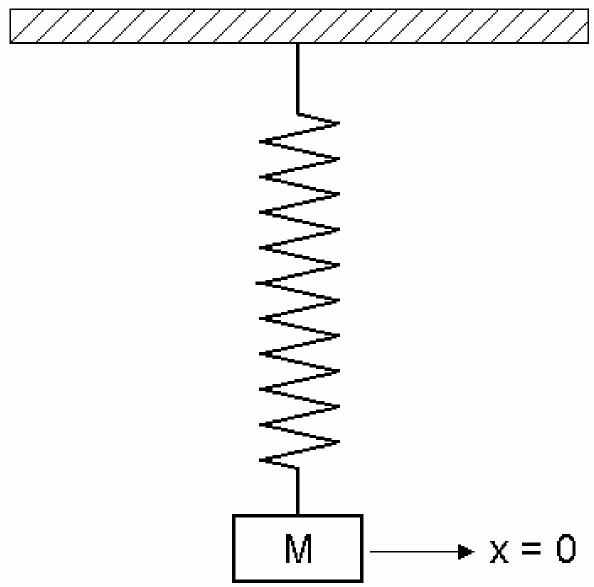
COMENTARIO. El lector podrá objetar (con justa razón) que este ejercicio se aparta del caso de las ecuaciones con coeficientes constantes; sin embargo, el procedimiento es siempre adecuado y estará disponible cuando en las clases se haya visto el caso más general planteado en la ec. 4.1 cuando las $a_i(x)$ (i = 0,1,2) son funciones continuas. En todo caso nos limitamos a proponer el ejercicio (de validez más general) como una situación problemática que el maestro podrá retomar cuando lo considere más conveniente.

PROBLEMA Nº2.

Tomaremos ahora un problema muy conocido en Mecánica que consiste en describir las oscilaciones de un sistema resorte-masa, es decir de una masa M ligada al extremo de un resorte, de constante de elasticidad K, que oscila alrededor de una posición de equilibrio, mientras el otro extremo permanece fijo (atado) en la misma posición. Un modelo idealizado de este sistema considera que el resorte no tiene masa y que la masa (M) ligada a uno de sus extremos no experimenta ningún tipo de fricción cuando se desplaza a uno y otro lado se su posición de equilibrio. En este caso se dice que el resorte oscila libremente. De este modelo sólo podemos esperar resultados aproximados. Estas aproximaciones son mejores cuando la masa propia del resorte es muy pequeña comparada con la masa ligada (M) y cuando la fuerza de fricción con el aire es despreciablemente pequeña.

El punto x = 0 (Ver figura) se conoce como punto de equilibrio, dado que en este punto la fuerza restauradora del resorte y la fuerza gravitatoria están en equilibrio. Si la masa M se

coloca en reposo en x = 0, permanecerá en reposo en dicha posición. En esta posición el resorte está alargado respecto a su longitud natural (l_0) y su longitud es $l = l_0 + Mg/K$, siendo g la aceleración de la gravedad. Por conveniencia, el punto que determina la posición de equilibrio se escoge como el origen del sistema de referencia.



Por experiencia se sabe que si la masa M, debido a la acción de un agente externo, se separa una distancia x de la posición de equilibrio y luego se le deja en libertad, el sistema oscilará con un movimiento conocido como Movimiento Armónico Simple (MAS).

Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - K\left(x + \frac{Mg}{K}\right) \quad \textbf{(ec. 4.29)}$$

$x + \frac{Mg}{K}$ **es el estiramiento total del resorte, respecto a su longitud natural, pero una parte de este estiramiento (Mg/K) se encarga de equilibrar la fuerza gravitatoria. Por tanto, la ec. 4.29 se reduce a:**

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0, \quad \textbf{(ec.4.30)}$$

y para ponerla en una forma más estándar la escribimos así:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0 \qquad \textbf{donde} \quad \omega^2=\frac{K}{M} \qquad \textbf{(ec.4.31)}$$

Como K y M son constantes, ω también lo será. La interpretación física nos hace concluir que ω es la frecuencia angular con que oscila el sistema y además es una constante no-negativa.

Sin detenernos en muchos detalles, por todo lo que hasta hoy hemos visto, el estudiante puede concluir (asesorado por el maestro) que la solución general de la ec. 4.31 es:

$$x(t)=C_1 e^{i\omega t}+C_2 e^{-i\omega t} \qquad \textbf{(ec.4.32)}$$

donde C_1 y C_2 son constantes complejas. De nuevo, dado que x(t) solo puede ser real, C_2 debe ser la conjuga compleja de C_1. En tal caso, la última ecuación toma la forma:

$$x(t)=A_1\cos\omega t+A_2\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad \textbf{(ec.4.33)}$$

siendo A_1 y A_2 constantes reales.

Si el sistema se dejó en libertad en la posición x = A en el instante t = 0; entonces, la condición inicial par este problema se expresa así: x(0) = A. El estudiante debe observar que esta condición se cumple si $A_1 = A$ y $A_2 = 0$.

Finalmente, la solución del problema de describir las oscilaciones libres de un sistema resorte-masa, que cumpla la condición inicial mencionada, viene dada por la función:

$$x(t)=A\cos\omega t \qquad \textbf{(ec.4.34)}$$

donde A es conocida como la "amplitud" de la oscilación. Observe también que -A y A son los límites (extremos) de la oscilación conocidos también como puntos de retorno.

Finalizamos haciendo la siguiente observación: Si en la ec. 4.3, hacemos V = 0 y R = 0 (tendremos un sistema LC: inductor-capacitor); entonces, la ec. 4.4 corresponde a la ec. 4.30 y en tal caso se producirán oscilaciones electromagnéticas libres. Este caso también es idealizado ya que en la práctica los inductores reales poseen, al menos, resistencias muy

pequeñas. En electrónica los sistemas LC tienen múltiples aplicaciones, entre ellas, la de constituir la unidad de sintonía en receptores de radio y televisión.

PROBLEMA Nº3.

En otro modelo más real (menos idealizado) la masa M ligada al resorte experimenta una fuerza de fricción con el aire (que se opone al movimiento) y que es proporcional a alguna potencia de la magnitud de su velocidad. Asumamos, por ejemplo, que es directamente proporcional a la velocidad (como ocurre en forma aproximada en muchos casos comprobados experimentalmente). El problema consiste en describir el movimiento de este sistema (amortiguado), cuando un agente externo separa la masa M una distancia x de su posición de equilibrio y luego la suelta en reposo. Entonces, al aplicar la segunda ley de Newton, se tiene:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + kx + \lambda\frac{dx}{dt} = 0 \qquad \textbf{(ec. 4.35)}$$

donde λ es una constante de proporcionalidad entre la fuerza de fricción y la velocidad. El lector habrá observado ya que la ec. 4.35 tiene la misma estructura que las ecuaciones 4.9 y 4.4. Por tanto, tendremos los mismos casos que en el problema Nº1, pero esta vez aplicados a un sistema mecánico. Con esto se ha mostrado que una misma ecuación diferencial puede servir para modelar varios sistemas físicos y aún de naturaleza distinta (como veremos en el Capítulo V).

EJERCICIO. Ecuación Diferencial de Tercer Orden. Con el objetivo de extender estas ideas al caso de una ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden, proponemos que el maestro propicie la discusión de los estudiantes para que obtengan la solución general de la siguiente ecuación:

$$y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0 \qquad \textbf{(ec. 4.36)}$$

No presentaremos una guía didáctica para este ejercicio; sólo indicaremos, brevemente, un procedimiento. La ecuación característica de la ecuación dada es:

$m^3 – 5\ m^2 + 3m + 9\ =\ 0$

1) **Observe que m = -1 es una raiz de la ec. carácterística.**
2) **Escriba la ec. característica como $(m + 1)(m^2 – 6m + 9)\ =\ 0$**
3) **Las raíces de la ec. característica son: $m_1 = -1$, $m_2 = m_3 = 3$ (una raíz de multiplicidad dos).**

Por tanto, la solución general de la ec. 4.36 es:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x} \qquad \textbf{(ec. 4.37)}$$

IV.4 ECUACIÓN DE SEGUNDO ORDEN. COEFICIENTES VARIABLES.

Hasta el momento hemos visto que se puede resolver con relativa facilidad, mediante procedimientos heurísticos, ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes; sin embargo, cuando los coeficientes de la ec. 4.1, las $a_i(x)$ son variables (funciones continuas de x) las soluciones no se consiguen con la misma facilidad. Nos restringimos al caso n = 2.

"….. cuando una ecuación diferencial lineal tiene coeficientes variables, lo mejor que podemos esperar, por lo general, es determinar una solución en forma de serie infinita".[16]

Esto no significa que no se puedan emplear procedimientos heurísticos para estos casos, únicamente se está afirmando que conllevan mayor dificultad para obtener, al menos, la primera solución, como veremos en el Capítulo VI al aplicar el método de solución por series infinitas.

Existen, sin embargo, algunas excepciones de casos relativamente sencillos que se pueden tratar con métodos parecidos a los de las ecuaciones con coeficientes constantes, que incluyen un tipo de ecuaciones conocidas como ecuaciones equidimensionales o ecuaciones de Cauchy-Euler. No pretendemos analizar todos estos casos; únicamente presentaremos un

[16] Zill, D (1997). Ecuaciones Diferenciales (Pág. 169). Op. C.

problema (que ilustre un caso sencillo) y un par de ejercicios que sean resueltos por los estudiantes siempre dentro del contexto de situaciones problemáticas.

PROBLEMA Nº4.

Antes de presentar un nuevo problema que ilustre el caso que estamos tratando, haremos un paréntesis para comentar una experiencia didáctica, vivida en el aula, en un curso de Teoría Electromagnética, impartido por el autor. Se trataba de resolver la Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2\varphi(r,\theta)=0, \quad \theta:\text{ángulo polar.} \qquad \textbf{(ec.4.38)}$$

donde $\varphi(r,\theta)$ **significaba el potencial electrostático debido a cierta configuración de cargas eléctricas, que por razones de simetría se reducía a dos variables: r y** θ**, es decir, era independiente del ángulo azimutal** ϕ**.**

La ecuación de Laplace, como se sabe, es una ecuación diferencial, lineal, parcial, homogénea, de segundo orden. Para resolver esta ecuación se puede aplicar el procedimiento de "separación de variables" que consiste en suponer que la función $\varphi(r,\theta)$ **es igual al producto de dos funciones que dependen cada una de ellas de una sola variable:**

$$\varphi(r,\theta)=P(\theta)R(r) \qquad \textbf{(ec. 4.39)}$$

Si ésta se sustituye en la ecuación anterior, después de algunos pasos se obtiene:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)=-\frac{1}{P(\theta)sen\theta}\frac{d}{d\theta}(sen\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}=\lambda \qquad \textbf{(ec.4.40)}$$

donde λ **es una constante. ¿Cómo se justifica la constante** λ**? Para responder esta pregunta basta observar que la ec. 4.40 iguala dos funciones que dependen de variables diferentes para todos los valores de r (0 ≤ r < ∞) y de** θ **(0 ≤** $\theta \le \pi$**).**

Por razones de convergencia de series λ se restringe a valores enteros de la forma λ = n(n + 1).

Con esto, la ecuación de Laplace se separa en dos ecuaciones, siendo cada una de ellas función de una sola variable:

1) $$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)-n(n+1)R(r)=0 \qquad \textbf{(ec. 4.41)}$$

2) $$\frac{1}{sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)+n(n+1)P(\theta)=0 \qquad \textbf{(ec.4.42)}$$

La ec. 4.42 es conocida como la ecuación diferencial ordinaria de Legendre.

La solución de la ec. 4.39 es el producto de las soluciones de las ecuaciones 4.41 y 4.42. Pasaremos de inmediato a mostrar como los alumnos de dicho curso resolvieron la ec. 4.41 (usualmente, la ec. 4.42 se transforma mediante el cambio de variable x = cosθ **y la ecuación resultante se resuelve por el método de series).**

El curso mencionado no tenía más de seis estudiantes, lo que permitía una participación más activa de todos ellos. Entonces, preguntamos: ¿cómo resolvemos la ecuación en r? Uno de ellos propuso que comenzáramos por desarrollar la derivada del producto, con lo que la ec. 4.41 toma la forma:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-n(n+1)R=0 \qquad \textbf{(ec. 4.43)}$$

Otros alumnos dijeron que este tipo de ecuaciones nunca las habían visto. Por experiencia sabemos que, algunas veces, este tipo de afirmaciones no son más que excusas (bloqueos mentales) para no enfrentar el problema; sin embargo, daba la impresión de que ninguno de ellos sabía como resolverla. Por tanto, les propuse: ¿Porqué no elaboramos una hipótesis acerca de la forma posible de la función R(r) que sea solución de la ecuación?, pero observemos primero el orden de cada una de las derivadas de la ecuación y el grado de la potencia de r de su respectivo coeficiente. Entonces alguien propuso que ensayáramos una solución de la forma R(r) = r^m**. Naturalmente aceptamos dicha propuesta, pero aún preguntamos: ¿y cómo se justifica? Otro estudiante opinó que si R(r) =** r^m**, cada vez que se**

deriva esta función la potencia de r disminuye una unidad, pero que el coeficiente respectivo "restituye" dicha potencia y al final los tres términos de la ecuación estarán expresados por la misma potencia de r: r^m y, por tanto, al sustituir $R(r) = r^m$ en la ecuación dada, se podría encontrar los valores apropiados de m. Continuando, entonces, con el desarrollo de la propuesta se obtuvo (después de algunos pasos)

$$[m(m + 1) - n(n+ 1)]r^m = 0, \qquad \textbf{(ec. 4.44)}$$

cuyas soluciones son m = n y m = -(n + 1). Por tanto, la solución general de la ec. 4.43 viene dada por:

$$R(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)} \qquad \textbf{(ec. 4.45)}$$

(A y B son constantes reales)

Por último pedimos a los estudiantes que comprobaran que r^n y $r^{-(n+1)}$ son ambas soluciones de la ec. 4.43 y por tanto, la función dada por la ec. 4.45 es la solución general.

EJERCICIO 1.

Encuentre la solución general de la ecuación:

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0 \qquad \textbf{(ec. 4.46)}$$

suponiendo que al aplicar el "método de Cauchy-Euler" encuentra dos raíces reales, iguales. Sólo indicaremos algunos pasos para la solución:

1) **Con $y(x) = x^m$ el estudiante debe obtener, después de un breve proceso, la siguiente ecuación auxiliar:**

$$am^2 + (b-a)m + c = 0 \qquad \textbf{(ec. 447)}$$

Como la dos raíces son iguales, el discriminante se anula y se obtiene una solución (doble) de la ec. 4.47 $m_1 = -\dfrac{b-a}{2a}$ **; por tanto, la primera solución de la ec. 4.46 es de la forma** $y_1(x) = x^{m_1}$**, es decir:**

$$y_1(x) = x^{-\frac{b-a}{2a}} \qquad \textbf{(ec. 4.48)}$$

2) **Para obtener la segunda solución linealmente independiente el estudiante deberá escribir la ec. 4.46 en la forma estándar de la ec. 4.27:**

$$y''(x) + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

donde $P(x) = \dfrac{b}{ax}$ y $Q(x) = \dfrac{c}{ax^2}$ **(ec.4.49)**

3) **aplicar la solución dada por la ec. 4.28 con lo que, después de seguir el procedimiento indicado, encontrará:**

$y_2(x) = x^{m_1} \ln x$ **y la solución general es:**

$$y(x) = \left(x^{-\frac{b-a}{2a}} \right)(c_1 + c_2 \ln x) \qquad \textbf{(ec.4.50)}$$

EJERCICIO 2. Ecuación Diferencial de Tercer Orden con Coeficientes Variables.

Encontrar la solución general de la ecuación:

$$\mathbf{x^3y''' + x^2y'' - 2y = 0} \qquad \textbf{(ec. 4.51)}$$

asumiendo que dicha solución debe ser real.

De nuevo, sólo indicaremos un par de pasos:

1) **Comenzando por y(x) = x^m obtenemos la siguiente ecuación auxiliar:**

$$\mathbf{(m - 2)(m^2 + 1) = 0}$$

Por tanto, tendremos tres soluciones cuyas formas son, respectivamente x^2, x^i y x^{-i}.

2) **Dado que se asume la condición de que la solución sea real, el maestro debe permitir que los estudiantes obtengan por su propia cuenta la siguiente solución general:**

$$y(x) = C_1x^2 + C_2\cos(\ln x) + C_3\mathrm{sen}(\ln x) \qquad \textbf{(ec. 4.52)}$$

donde C_1, C_2 y C_3 son constantes reales.

Finalizaremos este capítulo recordando que existen ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homogéneas que aún no hemos considerado en este trabajo. Por supuesto que este caso también se puede resolver de manera general empleando el mismo procedimiento que se utilizó en el Capítulo III, pero adaptado al caso de una ecuación de segundo orden.

IV.5 METODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS.

Por experiencia también podemos afirmar que este método (especialmente cuando ya se ha aplicado al caso de una ecuación diferencial de primer orden) se puede plantear a los estudiantes como una "situación problemática" que ellos deben resolver. Los colegas que imparten los cursos de ecuaciones diferenciales habrán observado que hasta el momento no hemos hablado del Wronskiano y sus propiedades aplicadas a la determinación de funciones linealmente independientes. El lector que desee ver un planteamiento más detallado de este método le sugerimos que consulte el ANEXO C, dado que también aquí nos limitaremos a sugerir un mínimo de pasos para que el maestro conduzca a los estudiantes por la vía de encontrar (o "construir") ellos mismos el conocimiento (procedimiento) adecuado para este caso.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA.

Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = g(x) \qquad \textbf{(ec. 4.53)}$$

1. **Escribir la ecuación en su forma estándar**

$$y''(x) + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad \textbf{(ec. 4.54)}$$

2. **Encontrar la solución general de la ecuación homogénea asociada:**

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

3. **Suponer la existencia de una solución particular de la ec. 4.54 de la forma:**

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

4. Sustituir $y_p(x)$ en la ec. 4.54 para obtener, con la guía del maestro:

$$y_p(x) = y_2(x)\int^x \frac{y_1(s)f(s)ds}{W[y_1(s), y_2(s)]} \quad - \quad y_1(x)\int^x \frac{y_2(s)f(s)ds}{W[y_1(s), y_2(s)]} \qquad \textbf{(ec. 4.55)}$$

donde $W[y_1(x), y_2(x)]$ es el Wronskiano de $y_1(x) \wedge y_2(x)$ que se define mediante el siguiente determinante: $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

Para que $y_1(x) \wedge y_2(x)$ sean linealmente independientes deberá ocurrir que $W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0$ en todo el intervalo (I) de validez de la solución. (Ver ANEXO C).

CAPITULO V.

SELECCIÓN DE PROBLEMAS DE DIFERENTES AREAS.

INTRODUCCIÓN.

En este capítulo presentamos ocho problemas de áreas muy variadas tales como el área social, economía, biología, física, química, criminología, ingeniería y geometría. En realidad, salvo alguna excepción la mayoría de estos problemas no ofrecen mucha dificultad, aunque siempre requieren la utilización de estrategia adecuadas. En todos estos problemas aparecerá como una situación problemática la determinación de constantes y por tal razón podemos considerar que siempre son formativos, especialmente para aquellos estudiantes que se inician en el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales.

El autor presenta esta selección de problemas motivado por el interés de mostrar explícitamente que las Ecuaciones Diferenciales tienen muchas aplicaciones. En nuestro medio, sin ánimos de criticar, observamos que nuestra facultad en su carrera de Licenciatura en Biología no le presta mucha importancia a la educación matemática (como puede verse en el plan de estudios); sin embargo, creemos que las aplicaciones matemáticas a la Biología podrían potenciar grandemente el nivel investigativo en esta ciencia y generar importantes proyectos de investigación en nuestra facultad en los cuales participen matemáticos y biólogos y de preferencia que sean proyectos interdisciplinarios. La creación del Instituto de Ciencias del Mar será una brillante oportunidad en este sentido.

Históricamente es interesante, como veremos en el PROBLEMA Nº3, que en el año de 1837 Verhulst (un biólogo y matemático holandés) como producto de sus investigaciones estableció, por primera vez en la historia de la ciencia, una ecuación diferencial muy útil para describir el crecimiento poblacional de una especie. En la actualidad, las aplicaciones matemáticas a la biología y en general a las ciencias naturales han alcanzado un impresionante nivel de desarrollo.

Esperamos que estas consideraciones puedan motivar y hacer reflexionar a nuestra Facultad acerca de la conveniencia de apostarle a la educación matemática, en especial para las carreras de ciencias naturales brindándoles un mejor servicio en esta área. Las ventajas serían muchas, basta mencionar que con esto se lograría un mayor nivel de integración de nuestras escuelas y de nuestras ciencias que fue, quizá, la motivación más importante que propició la lucha para crear la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Antes de presentar los problemas que hemos seleccionado para este capítulo queremos recordar, como lo mencionamos anteriormente, que las guías didácticas serían más detallada sólo para los primeros problemas; por tanto, ahora nos limitaremos a indicar, brevemente, algunos pasos para que los estudiantes, con la guía del maestro, puedan resolver estos problemas y en los problemas Nº2 y Nº4 nos limitamos a escribir su enunciado (Ver comentarios al problema Nº2, aplicables al Nº4); sin embargo, si algunos maestros desean llevar al aula los problemas de este capítulo, les sugerimos que siempre piensen en una guía didáctica (o al menos en un árbol de dificultades para cada problema). Este recurso es de gran beneficio para el maestro, ya que le ayuda a orientar al estudiante en la construcción de su propio conocimiento.

LA ECUACIÓN LOGISTA.

Esta importante ecuación puede servir para resolver problemas de diferente naturaleza. La utilizaremos para considerar los tres primeros problemas de este capítulo. El orden de estos problemas obedece más a razones didácticas que a razones históricas. El carácter histórica se retoma en el Problema Nº 3.

En el Capítulo III (Problema Nº3) mencionamos que si el número N(t) de individuos en una población sigue una ley de crecimiento exponencial, entonces $N(t) = N_0e^{kt}$ donde $k > 0$ y $N(0) = N_0$. Esta ley supone que en el tiempo t la razón de crecimiento dN/dt es directamente proporcional al número de individuos que tiene la población en ese momento:

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t) \qquad \textbf{(ec. 5.1)}$$

En realidad esta forma de crecimiento poblacional no es más que un modelo que puede funcionar en condiciones adecuadas. Con este modelo la población llegaría a tener un número infinito de individuos, no es más que una "cuestión de tiempo"; sin embargo, cuando una población llega a ser suficientemente grande aparecen factores ambientales que retardan su razón de crecimiento, tales como la disponibilidad de alimentos, la región donde dicha población esta confinada (su limitado espacio vital), la competencia con otras especies que habitan en la misma región, etc. Como consecuencia de estos factores dN/dt decrece. En estas circunstancias es lógico suponer que el tamaño de la población está limitado a un número máximo (M) de individuos: 0 < N < M y que cuando N → M, entonces dN/dt → 0 y el tamaño de la población tiende a estabilizarse.

En resumen se quiere encontrar un modelo de población que inicialmente (para poblaciones pequeñas) tenga un crecimiento exponencial y que también tome en cuenta la resistencia ambiental a poblaciones de gran tamaño. El maestro puede presentar este caso como una situación problemática. Se espera que los estudiantes puedan proponer el siguiente modelo de crecimiento:

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(\frac{M-N}{M}\right) \qquad \textbf{(ec. 5.2)}$$

El estudiante debe observar qué sucede para valores pequeños de N y para valores de N cercanos a M. Como K/M es una constante podemos reemplazarla por C y tendremos:

$$\frac{dN}{dt} = CN(M-N) \qquad \textbf{(ec. 5.3)}$$

Esta ecuación se conoce como la "ecuación logística" y la solución de ella como la función logística.

Aclaramos, para evitar falsas expectativas, que la ecuación logística es también un modelo que funciona para condiciones adecuadas y que existen modelos más elaborados que toman en cuenta, en forma detallada, algunos factores tales como la existencia de depredadores. La ecuación logística no toma en cuenta este factor. En la actualidad el modelo logístico se aplica en la solución de diversos problemas tales como el límite de producción de una determinada empresa, la rapidez con que se propaga un rumor y en algunos casos se puede aplicar para obtener soluciones aproximadas, pero útiles, para planificar (por ejemplo)el desarrollo de una institución educativa, como veremos en el primer problema.

PROBLEMA Nº1. UNA APLICACION SOCIAL EN LO EDUCATIVO.

Suponga que en una universidad estatal latinoamericana, debido a diversas limitaciones tales como su espacio físico y la pobre asignación presupuestaria por parte del estado, el número máximo de estudiantes que podrá atender sea de 60000. Hace 3 años contaba con 15000 estudiantes y ahora cuenta con 24000. ¿Cuántos estudiantes tendrá dentro de 15 años suponiendo que la población estudiantil crece como una función logística?

Estrictamente hablando la ecuación logística no es aplicable en este caso ya que la población estudiantil no crece en forma continua sino en determinados períodos que corresponden principalmente al inicio del año lectivo; sin embargo, como mencionamos anteriormente, aplicando el modelo logístico podemos obtener resultados aproximados.

SOLUCIÓN. Para obtener la solución de este problema sugerimos los siguientes pasos:

1. **Resuelva la ec. 5.3 como una ecuación de Bernoulli. Compárela directamente con la ec. 3.99 y su correspondiente solución:**

$$y = \frac{a}{b + Ce^{-ax}} \qquad \textbf{(ec. 5.4)}$$

2. **Compare las variables y observe el papel que juegan las constantes, para obtener:**

$$N(t) = \frac{M}{1 + b(e^{-c})^t} \qquad \textbf{(ec. 5.5)}$$

que es la función logística general, donde b y c son constantes indeterminadas.

3. Para resolver el problema se necesita previamente determinar las constantes b y c. Para ello escogemos el origen del tiempo tres años atrás, es decir, hace tres años t = 0 y N(0) = 15000. Con M = 60000, al hacer t = 0 en la ec. 5.5 se tiene que b = 3. Por tanto, ahora tenemos:

$$N(t) = \frac{M}{1 + 3(e^{-c})^t} \qquad \textbf{(ec. 5.6)}$$

Haciendo t = 3 en la última ecuación y N(3) = 24000, podemos ver que:

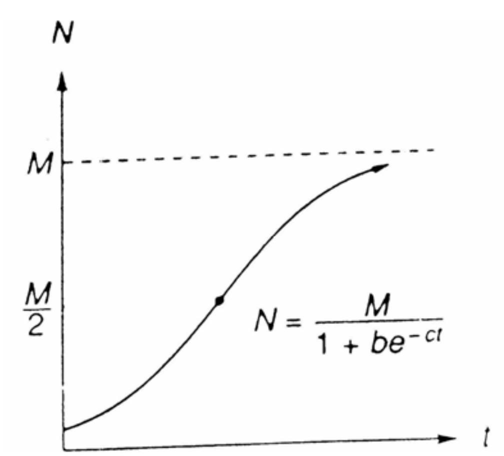
$$c = \frac{-\ln 2}{-3}$$ **(Obsérvese que este valor es positivo).**

En realidad es más práctico calcular el valor de e^{-c} que resulta ser aproximadamente igual a 0.7937, con lo que la ec. 5.5 toma su forma definitiva:

$$N(t) = \frac{M}{1 + 3(0.7937)^t} \qquad \textbf{(ec.5.7)}$$

Ahora, para tener un estimado de la población que habrá dentro de 15 años (sino aparecen factores extraños tales como guerras, terremotos o intervenciones militares), basta con sustituir t = 15 en la última ecuación, con lo que se tiene el siguiente valor estimado de la población estudiantil para ese año : 54857 estudiantes.

La siguiente gráfica representa la forma general de una función logística. En ella es notable su forma de "S". Aquí se presenta una bonita oportunidad para que el estudiante desarrolle su capacidad de observación.



En el curso sobre RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS que nos impartió la Dra. María Luz Callejo de la Vega, con frecuencia nos recomendaba que había que obtener el máximo provecho de cualquier problema resuelto, analizando qué pasaría al modificar alguno de sus datos, elaborando problemas parecidos o aplicando los mismos resultados generales en diferentes contextos. Es precisamente por eso que este capítulo lo iniciamos con problemas relacionados con la ecuación logística. Para finalizar con el problema Nº1 proponemos un pequeño ejercicio.

¿Cuándo ocurre la máxima razón de crecimiento?

De la ec. 5.3 vemos que la razón de crecimiento es: CN(M – N) y por tanto resolviendo la derivada $\frac{d}{dN}\left[CN(M-N)\right]=0$ **se encuentra que ocurre en N = M/2, es decir, cuando se tenga la mitad de la máxima población.**

¿En qué momento ocurrirá?

Si sustituimos $t = t_m$ **y** $N(t_m) = M/2$ **en la ec. 5.7 y luego despejamos** t_m **obtendremos que** $t_m =$ **4.75 años a partir del momento inicial, es decir, comenzando hace tres años. Por tanto ocurrirá aproximadamente dentro de 1 año y nueve meses; pero si tomamos en cuenta que el ingreso de estudiantes a la universidad no es una función continua es preferible decir que el máximo crecimiento estudiantil ocurrirá dentro de dos años.**

PROBLEMA Nº2. AREA ECONÓMICA (ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS)

La administración de una empresa ha estimado que la producción de cierto artículo, con sus instalaciones actuales, tendrá un crecimiento logístico. Actualmente se producen 200 unidades diarias y esa cantidad crecerá (de acuerdo a la curva logística correspondiente) a 300 unidades por día dentro de 1 año. Si la producción está limitada a 500 unidades por día, ¿Cuál es la producción prevista para dentro de dos años?

COMENTARIO. En realidad, en términos del aprendizaje matemático este problema no tendría nada que agregar y por tanto se convertiría en un simple ejercicio. El objetivo del autor de este trabajo al presentarlo es mostrar la diversidad de aplicaciones que se pueden tener a partir de una misma ecuación diferencial. En este caso particular queda claro que con la ecuación logística se puede "modelar" problemas de diferente naturaleza que en términos generales tienen el mismo comportamiento respecto al tiempo. En este caso nos limitamos a presentar el problema y que sea el estudiante quien encuentre la solución; sin embargo, ahora el estudiante se enfrentará a una nueva situación problemática: ¿cómo saber que la solución que él ha obtenido es la solución correcta? Desde una visión didáctica esto constituye un aspecto importante y por tanto, consideramos que merece, al menos, que le dediquemos unas líneas.

La mayoría de autores de texto presentan una lista numerada de problemas al final de cada capítulo, de los cuales sólo proporcionan la respuesta de los problemas que corresponden a números impares. Muchos estudiantes se niegan a trabajar los problemas que no traen la respuesta en dicho texto. Las explicaciones para esta manera de actuar son variadas, pero en lo personal hemos podido constatar que la mayoría de las veces los estudiantes opinan que no trabajan tales problemas porque al final de cuentas no sabrán si han obtenido o no la respuesta correcta. Por otro lado, el lector podrá preguntarse ¿qué actitud toman los docentes en este caso? Nosotros consideramos que los problemas que no traen respuesta se pueden aprovechar como oportunidades para estimular al estudiante a fin de que desarrolle sus propios métodos de comprobación, la confianza en si mismo y su capacidad de análisis. En algunas ocasiones hemos detectado un error en la respuesta que proporciona el texto y posteriormente, en una nueva edición del mismo texto, hemos visto una respuesta distinta, coincidente con la que nosotros habíamos obtenido. ¿Qué opina el lector?

PROBLEMA Nº3. UNA APLICACIÓN A LA BIOLOGÍA.

Como ya lo hemos mencionado son muchas las aplicaciones de la ecuación logística, pero creemos que con tres problemas es suficiente para mostrar su utilidad; sin embargo, consideramos conveniente, antes de abandonar esta importante ecuación, presentar al menos brevemente su carácter histórico. Como un paréntesis recordamos que como resultado del curso de Historia de la Matemática impartido por el Doctor Mariano Martínez Pérez, los estudiantes de la maestría en Didáctica de las Matemáticas incrementamos nuestro interés por el estudio de esta área y cada vez más somos conscientes de su importancia.

En 1837 el biólogo y matemático Verhulst planteó por primera vez la ecuación logística. Verhulst había observado que el modelo de crecimiento exponencial dado por la ecuación 5.1 no podía ser exacto especialmente para grandes poblaciones (por la razones antes expuestas). En honor al carácter histórico escribimos dicha ecuación así:

$$\frac{dp}{dt} = ap \qquad \textbf{(ec. 5.8)}$$

donde $\frac{dp}{dt}$ **representa la razón de crecimiento poblacional y** a **es una constante de proporcionalidad.**

Verhulst planteó como hipótesis de trabajo la necesidad de agregar a la ecuación 5.8 un término de oposición a grandes crecimientos poblacionales y concluyó que el término adecuado debía ser $-bp^2$ **ya que el promedio estadístico del número de encuentros de los individuos de una población aislada (no hay depredadores) que compiten, entre otras cosas, por el alimento es proporcional a** p^2**. Por tanto, la ecuación logística de Verhulst es:**

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 \qquad \textbf{(ec. 5.9)}$$

donde se asume que $\frac{dp}{dt} \geq 0$**. Verhulst llamó a las constantes** a y b **<u>coeficientes vitales</u> de la población.**[17]

En general la constante b (que se puede determinar experimentalmente) es muy pequeña comparada con a**, por lo que para valores pequeños de p, el término** $bp^2 << ap$ **y el crecimiento es aproximadamente de tipo exponencial. Si se compara la ecuación 5.3 con la ec.5.9 da la impresión que son diferentes; sin embargo, al resolver esta última veremos que ambas tienen como solución la función logística.**

El protozoario PARAMECIUM CAUDATUM. El biólogo y matemático G. F. Gause comprobó experimentalmente la ec. de Verhulst. Colocó 5 paramecia en un tubo de ensayo al que agregó un nutriente adecuado. Encontró que los paramecia se reproducían al principio con una tasa de crecimiento de 230.9% diaria (cuando la población era pequeña) pero posteriormente, hacia el cuarto día, la población había alcanzado un máximo de 375 paramecia con el tubo de ensayo saturado.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA.

Que los estudiantes (trabajando individualmente o en pequeños grupos) encuentren la función p(t) que describe el crecimiento de los paramecia en dicho tubo de ensayo. El maestro puede asesorar (sin hacerles el trabajo) para que los estudiantes concluyan a partir de los datos experimentales de G. F. Gause que tal función viene dada por:

$$p(t) = \frac{375}{1 + 74e^{-2.309t}} \qquad \textbf{(ec. 5.10)}$$

Compárese esta ecuación con la ec. 5.6. Es claro que ambas representan una ecuación logística, aunque la forma de llegar a ella haya sido planteada de manera diferente.

Ejercicio de observación. Derive respecto a t la ec. 5.9 para obtener:

[17] Braun, M (1990) Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones (Pág.28). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = p(a-2bp)(a-bp) \qquad \textbf{(ec. 5.11)}$$

El estudiante debe observar esta ecuación y obtener de ella algunas conclusiones:

i) $a - bp \geq 0$

ii) si $p(t) < \frac{a}{2b}$ entonces $\frac{dp}{dt}$ **es creciente.**

iii) si $p(t) > \frac{a}{2b}$ entonces $\frac{dp}{dt}$ **es decreciente.**

PROBLEMA Nº4. APLICACIÓN A LA FÍSICA (AREA DE MECANICA)

La resistencia que experimenta un objeto de masa m que cae (de cierta altura) cerca de la superficie de la tierra, donde la aceleración de la gravedad g se puede considerar constante, es proporcional al cuadrado de su velocidad instantánea (v) siendo b la constante de proporcionalidad.

i) **escriba la ecuación diferencial correspondiente.**

ii) **Resuelva dicha ecuación diferencial tomando en cuenta la siguiente condición inicial** $v(0) = v_0$

iii) **¿Cuál es la velocidad límite (terminal) de dicho objeto?**

Dado que este otro problema es una variante del problema Nº6 del capítulo III, tampoco presentaremos los pasos a seguir, ni daremos la solución; sin embargo, esperamos que el estudiante lo pueda resolver y en caso de que tenga dudas, que consulte con su maestro, con algún docente de física o en algún texto de física (en el área de mecánica) para verificar la validez de la solución que ha obtenido.

PROBLEMA Nº5. **APLICACIÓN A LA QUÍMICA (RAPIDEZ DE REACCIONES)**

Supongamos que se combina una sustancia A con una sustancia B, las cuales al reaccionar químicamente dan una sustancia C. Experimentalmente se ha comprobado que la rapidez instantánea con que se forma la sustancia C es directamente proporcional a cada una de las masas de las sustancias A y B que aún quedan sin reaccionar, según lo establece la ley de acción de masas.

Situación problemática Nº1. **Se combinan a gramos de la sustancia A con b gramos de la sustancia B. Ahora suponga que para formar P(t) gramos de la sustancia C, la sustancia A contribuye con n_1 partes y la sustancia B con n_2 partes. ¿Cuál es la ecuación diferencial que describe la rapidez con que se forma la sustancia C?**

El maestro, siguiendo las sugerencia de Polya debe asegurarse que los estudiantes hayan comprendido el enunciado del problema, para que después de discutir algún planteamiento concluyan que:

$$\frac{dP(t)}{dt} = k\left(a - \frac{n_1}{n_1 + n_2}P(t)\right)\left(b - \frac{n_2}{n_1 + n_2}P(t)\right) \qquad \textbf{(ec.5.12)}$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Situación problemática Nº2. **Dos sustancia A y B se combinan para formar la sustancia C. La rapidez de la reacción está determinada por la ley de acción de masas. Al principio hay 40 gramos de A y 50 gramos de B y por cada gramos de B se consumen dos de A. En los primeros cinco minutos se han formado 10 gramos de C.**

- **i)** **¿Cuántos gramos de C se forman en los primeros 20 minutos?**
- **ii)** **¿Cuál es la cantidad límite de C al cabo de mucho tiempo?**
- **iii)** **¿Cuántos gramos de a y cuántos de b quedaron al final de la reacción?**

Ahora, indicaremos unos pocos pasos para resolver esta situación problemática:

1. **Resuelva la ec. 5.12 tomando en cuenta los datos del problema y obtenga la siguiente función:**

$$P(t) = \frac{150(1-e^{-\beta t})}{2.5-e^{-\beta t}} \qquad \textbf{(ec. 5.13)}$$

donde el valor de β = 0.022665737 . Está claro que este valor deberá limitarse al número de cifras significativas con que el observador haya tomado los datos.

2. **Si ahora, hacemos t = 20 en la ec. 5.13, tendremos que en los primeros 20 minutos se han formado 29.32 gramos de la sustancia C.**
3. **Si tomamos el límite cuando t tiende a infinito en la misma ecuación podemos ver que al final de la reacción se habrán formado 60 gramos de la sustancia C y si tomamos en cuenta las partes que aportan cada una de las sustancias A y B concluimos que quedan cero gramos de A y 30 gramos de B al final de la reacción.**

PROBLEMA Nº6. UNA APLICACIÓN A LA CRIMINOLOGÍA.

Una noche fría un hombre muy rico fue asesinado y la policía encontró el cadáver a las 3.15 a.m. En ese momento la temperatura del cadáver era de 32ºC y una hora después era de 30ºC. La oficina meteorológica determinó que la temperatura promedio, en el lugar del crimen, entre las 0 horas y las 5 am era de 10ºC. ¿A qué hora ocurrió el crimen?

Del problema Nº1 del Capítulo III podemos concluir que la rapidez con que fluye calor entre dos cuerpos a diferentes temperaturas es proporcional a la diferencia de temperaturas entre dichos cuerpos. Por otro parte, podemos asumir que la disminución de temperatura del cadáver del hombre asesinado es proporcional a la cantidad de calor que pierde. Por tanto, la

rapidez instantánea de enfriamiento del cadáver (dT/dt) deberá ser proporcional a la diferencia (instantánea) entre su temperatura (T) y la temperatura ambiente (a), es decir;

$$\frac{dT}{dt} = k(T - a) \qquad \textbf{(ec. 5.14)}$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Indicaremos brevemente algunos pasos para la solución del problema.

1. **Resuelva la ec. 5.14 hasta obtener:**

$$\ln|T - 10| = kt + C \qquad \textbf{(ec. 5.15)}$$

2. **cuando t = 0, T = 32; por tanto, C = ln 22 y la ecuación anterior puede escribirse como :**

$$\ln\left|\frac{T - 10}{22}\right| = kt \qquad \textbf{(ec. 5.16)}$$

3. **cuanto t = 1, T = 30; luego** $k = \ln\frac{20}{22}$. **Por tanto, solo queda preguntarnos ¿En qué momento la temperatura del cuerpo era de 37ºC? Asumimos que la temperatura del cuerpo humano (vivo) es de 37ºC y que esa era la temperatura del cadáver en el instante en que fue asesinado. Finalmente, haciendo T = 37 en la ec. 5.16 y despejando t de esa ecuación, se tiene:**

$$t = \frac{\ln(27/22)}{\ln(20/22)}; \qquad t = -2.15 \text{ horas}$$

Se concluye, entonces, que el hombre fue asesinado alrededor de la 1:00 a.m.

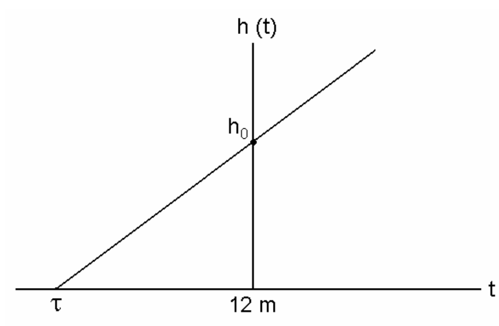
<u>PROBLEMA Nº7</u>. APLICACIÓN A INGENIERIA.

En el curso de ANÁLISIS MATEMÁTICO III el profesor Dr. Emilio de la Rosa (a quien agradecemos por sus valiosas enseñanzas) nos planteó un día el problema que ahora presentamos para que lo asumiéramos como un reto. Al autor de este trabajo le pareció un

problema interesante y de inmediato asumió el reto de trabajar en la solución del mismo y en sus archivos personales lo tiene registrado como:

EL PROBLEMA DE LA NIEVE. Está nevando regularmente. Al mediodía sale una máquina quitanieve que en la primera hora recorre el doble de espacio que en la segunda hora. La rapidez con que avanza la máquina es inversamente proporcional a la altura de la nieve. ¿A qué hora comenzó a nevar?

SOLUCIÓN. Si está nevando en forma regular entonces la altura h(t) de la nieve que se va acumulando es directamente proporcional al tiempo que ha transcurrido desde el momento en que comenzó a nevar.



Si escogemos el origen del tiempo que coincida con el instante en que la máquina comenzó a desplazarse, es decir, si hacemos que el mediodía (las 12 horas) corresponda a t = 0, entonces la gráfica anterior viene descrita por la ecuación:

$$h(t) = h_0 + mt \qquad \textbf{(ec. 5.17)}$$

donde m es la pendiente de la gráfica.

Si llamamos x(t) a la distancia recorrida por la máquina quitanieve, entonces tenemos la siguiente condición inicial : $x(0) = 0$ y las condiciones de frontera $x(1) = L$ y $x(2) = 3L/2$, es decir, que se asume que en la primera hora la máquina recorre una distancia L.

1. **Escribimos primero la ecuación diferencial que hay que resolver:**

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{h_0 + mt} \qquad \textbf{(ec. 5.18)}$$

2. Resolvemos esta ecuación para obtener:

$$x(t) = \frac{k}{m}\ln|h_0 + mt| + C \qquad \textbf{(ec. 5.19)}$$

3. Aplicando la condición inicial se tiene: $C = -\frac{k}{m}\ln h_0$**, con lo que la ecuación anterior puede escribirse así:**

$$x(t) = \frac{k}{m}\ln\left|\frac{h_0 + mt}{h_0}\right| \qquad \textbf{(ec. 5.20)}$$

4. Aplicando ahora las condiciones de frontera, tenemos:

$$x(2) = \frac{3}{2}L = \frac{k}{m}\ln\left|\frac{h_0 + 2m}{h_0}\right|$$

y $$x(1) = L = \frac{k}{m}\ln\left|\frac{h_0 + m}{h_0}\right|$$

De estas condiciones se obtiene:

$$\frac{h_0 + 2m}{h_0} = \left(\frac{h_0 + m}{h_0}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \textbf{(ec. 5.21)}$$

5. Esta ecuación puede escribirse:

$$\left(1 + 2\frac{m}{h_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{m}{h_0}\right)^3 \qquad \textbf{(ec. 5.22)}$$

6. Si llamamos τ al instante en que comenzó a nevar, entonces $h(\tau) = 0$ y de la ec. 5.17 se tiene que $\tau = -h_0/m$. Sustituyendo esta expresión en la ec. 5.22, se tiene:

$$\left(1 - \frac{2}{\tau}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^3 \qquad \textbf{(ec. 5.23)}$$

de donde se obtiene $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ **. Al resolver esta cuadrática tenemos:**

$$\tau = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \qquad \tau = -0.618 \text{ horas.}$$

Lo anterior se interpreta diciendo que comenzó a nevar 0.618 horas (aproximadamente 37 minutos) antes del mediodía (las doce horas). Por tanto se concluye que:

¡COMENZÓ A NEVAR A LAS 11 HORAS 23 MINUTOS!

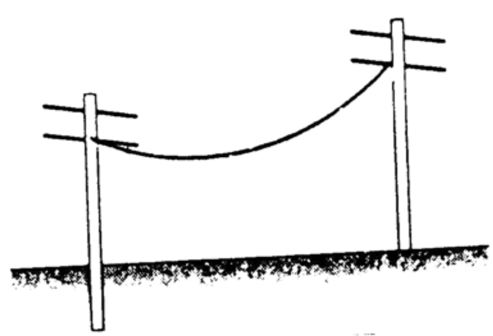
COMENTARIO. El estudiante debe observar que en la solución de este problema únicamente se empleó una ecuación diferencial cuya solución era prácticamente inmediata. El resto del problema se ha podido resolver mediante recursos algebraicos. Este no es un caso aislado y con frecuencia encontramos que para resolver ECUACIONES DIFERENCIALES se hace muy necesario el recurso ÁLGEBRA. Concluimos este problema recordando una frase de un famoso matemático del Siglo XVIII.

> El Álgebra es generosa, a menudo da más de lo que se le pide.

D´Alembert.

PROBLEMA Nº8. APLICACIÓN GEOMÉTRICA (LA CATENARIA).

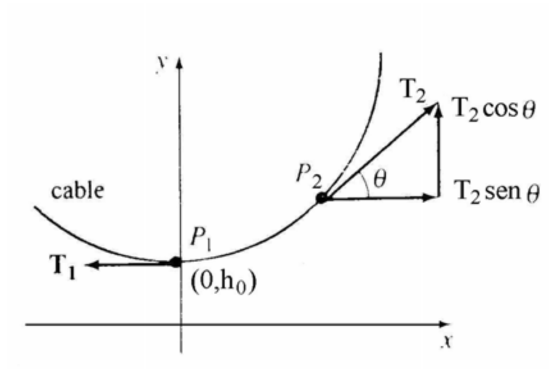
La figura muestra un cable que cuelga de dos postes, sujeto a la acción de su propio peso (físicamente podría ser un cable del tendido eléctrico). ¿Qué forma geométrica adopta el cable colgante?



Algunos estudiantes que ven por primera vez este problema piensan que se trata de una parábola.

Esta es una oportunidad para darse cuenta que muchas cosas de la vida tienen apariencia engañosa y por tanto, el científico debe ser cuidadoso en sus análisis.

<u>SOLUCIÓN</u>. Para resolver este problema es conveniente establecer un sistema de referencia adecuado. Escogemos el origen del sistema de referencia de manera que esté ubicado en un punto en el suelo que pertenezca a la vertical que pasa por el punto más bajo del cable y escogemos esta vertical como el eje y $\wedge$ la horizontal que pasa por el origen, como el eje x. Llamemos P_1 $(0,h_0)$ al punto más bajo del cable; por tanto, h_0 es la altura (sobre el nivel del suelo) del punto más bajo (Ver figura).



La estrategia de solución de este problema consistirá en plantear el equilibrio estático de un segmento del cable de longitud (s) comprendido entre P_1 y un punto cualquiera P_2.

Sea ρ el peso específico del cable.

De la figura puede observarse que dicho segmento del cable está en equilibrio estático sujeto a la acción tres fuerzas: Las tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ y su propio peso $\rho s(-\vec{j})$ **. Aplicando la condición de equilibrio, tenemos:** $T_1 = T_2 \cos\theta$ y $\rho s = T_2 sen\theta$

Dividiendo obtenemos: $\tan g\theta = \dfrac{\rho s}{T_1}$ **(ec. 5.24)**

Por tanto tenemos: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\rho s}{T_1}$ **(ec. 5.25)**

En principio esta es la ecuación diferencial que hay que resolver, pero una pequeña observación nos muestra que tal ecuación relaciona tres variables. Para resolver esta dificultad recordemos que para los elementos diferenciales ds, dx, dy existe la siguiente relación $ds^2 = dx^2 + dy^2$ **(ec 5.26)**

Que también puede escribirse como $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ **(ec. 5.27)**

Ahora, para relacionar las ec. 5.25 y 5.27, derivamos la ec.5.25 respecto a x y luego sustituimos el resultado obtenido en la ec. 5.27:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{T_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{(ec. 5.28)}$$

Esta es una ecuación diferencial NO LINEAL de segundo orden, pero es claro que se trata de la ecuación que hay que resolver para determinar la forma geométrica específica de la curva que adopta el cable colgante. Tal curva recibe el nombre de CATENARIA y tambíen queda claro que no corresponde a ninguna parábola.

Para resolver esta ecuación se hará uso de la siguiente estrategia: sustituimos u = y'. Con lo que la ec. 5.28 se transforma en:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\rho}{T_1}\sqrt{1+u^2} \quad \text{(ec. 5.29)}$$

Al separar variables se tiene:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\rho}{T_1}\int dx \quad \text{(ec. 5.30)}$$

Integrando tenemos: $senh^{-1}u = \frac{\rho}{T_1}x + C$ **(ec. 5.31)**

La solución completa de este problema pasa por determinar el valor de las constantes. Para tal fin disponemos de dos condiciones iniciales (para la catenaria):

1) y(0) = h_0 , 2) y'(0) = 0.

Aplicando la segunda condición se tiene que C = 0, por tanto:

$u = senh\frac{\rho}{T_1}x$ **ó** $\frac{dy}{dx} = senh\frac{\rho}{T_1}x$ **. Integrando se tiene:**

$$y(x) = \frac{T_1}{\rho}\cosh\frac{\rho}{T_1}x + C_1 \qquad \textbf{(ec. 5.32)}$$

Aplicando la primera condición inicial se tiene: $C_1 = h_0 - \frac{T_1}{\rho}$**. Por último, sustituyendo esta constante en la ec. 5.32, tenemos la función que buscábamos:**

$$y(x) = \frac{T_1}{\rho}\cosh\frac{\rho}{T_1}x + h_0 - \frac{T_1}{\rho} \qquad \textbf{(ec. 5.33)}$$

COMENTARIO. Para finalizar este problema (y este Capítulo) nos gustaría transcribir un párrafo del texto HISTORIA DE LA MATEMÁTICA. Boyer, C. (Op. C. Pág. 414):

"Es un hecho sorprendente que se estudiaran las secciones cónicas casi durante 2000 años antes que dos de ellas encontrasen, casi de manera simultánea, aplicación a la ciencia, la elipse a la astronomía y la parábola a la física. Galileo creyó equivocadamente que había encontrado otra aplicación de la parábola en la curva de suspensión libre de una cuerda o de un cable flexible o de una cadena (catena), pero los matemáticos posteriores de este mismo siglo demostraron que esta curva, la catenaria, no sólo no es una parábola, sino que no es ni siquiera una curva algebraica".

ACLARACION. En el párrafo anterior (copia textual de la obra citada) cuando se menciona "… los matemáticos posteriores de este mismo siglo.. " debe entenderse como los matemáticos posteriores del mismo siglo XVII.

La CATENARIA fue estudiada por Huygens y Leibniz.

CAPITULO VI.

ALGUNAS EXPERIENCIAS EN EL AULA.

INTRODUCCIÓN.

En este Capítulo presentaremos algunos problemas interesantes que se han resuelto en los cursos de Matemática Física que imparte el autor de este trabajo. Tales problemas han sido propuestos a los estudiantes y hemos tratado que sean ellos mismos los que encuentren la solución. Nosotros nos hemos limitado a brindar alguna asesoría o a estimular la participación de ellos mediante preguntas generadoras que den inicio a la discusión. En este sentido contamos con una lista grande de problemas en diferentes áreas de la Matemática Física, pero por razones de extensión de este trabajo seleccionamos únicamente seis problemas. Los cuatro primeros corresponden al área de las Ecuaciones Diferenciales y los dos últimos al área de las Ecuaciones Integrales.

Los tres primeros problemas están relacionados con la Ecuación Diferencial de Bessel, por tal razón, presentaremos primero una manera de obtener esta ecuación y luego, un método para resolverla.

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BESSEL.

"Bessel functions and closely related functions form a rich area of mathematical analysis with many representations, many interesting and useful properties, and many interrelations"[18]

La separación de la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas conduce a la ecuación diferencial de Bessel. Por tanto, veremos primero la ec. de Helmholtz:

$$\nabla^2\psi(\rho,\varphi,z)+k^2\psi(\rho,\varphi,z)=0 \qquad \textbf{(ec. 6.1)}$$

donde ∇^2 es el conocido operador Laplaciano. En coordenadas cilíndricas la ec. de Helmholtz toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0 \qquad \textbf{(ec. 6.2)}$$

Ahora asumimos una forma factoral de ψ :

$$\psi(\rho,\varphi,z)=P(\rho)\phi(\varphi)Z(z) \qquad \textbf{(ec. 6.3)}$$

Al sustituir este producto en la ec. 6.2, se obtienen 3 ecuaciones diferenciales ordinarias.

1) $$\frac{d^2Z}{dz^2}=l^2Z \qquad \textbf{(ec. 6.4)}$$

2) $$\frac{d^2\phi}{d\varphi^2}=-n^2\phi \qquad \textbf{(ec. 6.5)}$$

3) $$\rho^2\frac{d^2P}{d\rho^2}+\rho\frac{dP}{d\rho}+(m^2\rho^2-n^2)P=0 \qquad \textbf{(ec. 6.6)}$$

La tercera de estas ecuaciones es conocida como la Ecuación Diferencial de Bessel, que se clasifica como una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden y cuya solución generalmente se obtiene por el método de series infinitas. La solución de esta ecuación se conoce como la función de Bessel y generalmente se representa por $J_n(m\rho)$. En esta función debe observarse dos cosas: el subíndice n y el argumento $m\rho$ de la función. Con frecuencia nos referimos a esta función como "la función de Bessel de orden n" y de argumento $m\rho$. Esto podría dar lugar a confusión, pero estamos claros que el orden de la ecuación diferencial es 2 (segundo orden), mientras que el "orden n" se refiere al subíndice que la identifica, que no necesariamente tiene que ser entero.

[18] ARFKEN, G(2001). Mathematical Methods for Physicists. Fifth Ed. (Pág. 669). Harcourt Academic Press, San Francisco, Cal.

Es claro que hemos suprimido algunos pasos para llegar a la formas explícitas de estas tres ecuaciones. Solamente señalaremos que para una ecuación diferencial parcial de tres variables, como la ecuación de Helmholtz se necesitan dos constantes de separación. Tales constantes son l y n. La constante m se relaciona con ellas así: $k^2 + l^2 = m^2$. Debido a esta relación la constante m, sin ser estrictamente una constante de separación puede desempeñar ese rol en sustitución de l. En principio las constantes pueden tomar cualquier valor; sin embargo, en general, las condiciones de los problemas físicos restringen dichas constantes a valores discretos y en algunos casos a valores enteros. Por todo lo anterior, la solución general de la ecuación de Helhholtz tiene la forma siguiente:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m,n} a_{mn} P_{mn}(\rho)\phi_n(\varphi) Z_m(z) \qquad \textbf{(ec. 6.7)}$$

Es decir, que esta solución general es el producto de las soluciones de las tres ecuaciones diferenciales anteriores, tomando en cuenta todos los posibles valores de las constantes m y n y el principio de superposición.

Ahora enfocaremos nuestra atención en la solución de la ecuación diferencial de Bessel. Como ya se ha dicho se hará por el método de series, conocido también como método de Frobenius. No pretendemos en este trabajo presentar este método en forma exhaustiva. Brevemente, mostraremos los aspectos esenciales del mismo. Para trabajar la ec. de Bessel en una forma más estándar haremos el siguiente cambio de variable en la ec. 6.6: $m\rho = x$. Generalmente esta sustitución se la presentamos a los estudiantes como una situación problemática dado que la misma afecta también a las derivadas. El estudiante debe comprobar que con tal sustitución o cambio de variable, la ec. de Bessel toma la forma:

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x \frac{dy(x)}{dx} + (x^2 - n^2) y(x) = 0 \qquad \textbf{(ec. 6.8)}$$

y ahora preguntamos: ¿Cómo resolver esta ecuación? Y escuchamos las opiniones de los estudiantes, quienes después de observar la ec. 6.8 terminan afirmando que puede ser muy

difícil obtener una solución de la misma. Luego preguntamos ¿Y si utilizamos otros métodos? por ejemplo, el método de sustitución por series. En algunos casos mencionan que ese método nunca lo vieron y que ni siquiera saben que existe. Otras promociones de estudiantes dicen que vieron un poquito de ese método pero que no lo comprendieron bien, etc. Por experiencia propia creemos que puede haber cierto escepticismo respecto a este método, por tanto, dado que en el primer curso de Matemática Física se hace un estudio muy completo sobre series infinitas, les recuerdo que todas la funciones se pueden expresar por series y que si existe una función que sea solución de la ec. 6.8, también podrá expresarse mediante una serie infinita. Después de algunos minutos de discutir al respecto y de escuchar propuestas llegan a la conclusión que lo mejor es "ensayar" la siguiente propuesta de solución:

$$y(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} \qquad \textbf{(ec. 6.9)}$$

donde las a_λ **son constantes aún indeterminadas con** $a_0 \neq 0$ **y k una constante que se utiliza para fijar la potencia más baja de la serie de potencias dada por la ec. 6.9. Para evitar confusiones aclaramos que esta constante no es la misma que la que aparece en la ec. de Helmholtz. Luego, derivando dos veces la ec. 6.9 y sustituyendo en la ec. 6.8 se tiene:**

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)x^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda+2} - n^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} = 0 \qquad \textbf{(ec. 6.10)}$$

Haciendo $\lambda = 0$ se obtiene el coeficiente de x^k, la potencia más baja de x. Los estudiantes ya saben aplicar el teorema de unicidad de series de potencia, razón por la cual no tienen dificultades en encontrar el coeficiente neto de dicha potencia:

$$a_0 \left[k(k-1) + k - n^2 \right] = 0 \qquad \textbf{(ec. 6.11)}$$

Como $a_0 \neq 0$**, entonces esta ecuación nos lleva a lo que en este método se conoce como la "ecuación indicial" :** $k^2 - n^2 = 0.$ **(ec. 6.12)**

Con dos soluciones $k = \pm n$. El método de Frobenius no siempre funciona (Teorema de Fuch) y a veces, como en este caso, sólo nos permite obtener la primera solución linealmente independiente. La segunda solución habrá de obtenerse por otros métodos. Afortunadamente muchos problemas físicos se pueden resolver con solo la primera solución, la cual, cuando el método de Frobenius lo permite, es la solución que resulta de tomar el mayor valor de la ecuación indicial, para nuestro caso: $k = n$. Ahora, con el propósito de encontrar una "relación de recurrencia" mediante la utilización del teorema de unicidad de series de potencia, hacemos $\lambda = j + 2$ en el primero, segundo y cuarto términos de la ec. 6.10 y $\lambda = j$ en el tercer término. Con esto se obtiene la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{j+2} = -\frac{1}{(j+2)(2n+j+2)} a_j \qquad \textbf{(ec. 6.13)}$$

Con $a_1 = 0$ todos los coeficientes impares se anulan : $a_1 = a_3 = a_5 = ... = 0$.

Es claro que por razones de extensión de este trabajo no podemos considerar todos los detalles de este proceso y de algunos razonamientos que puedan ser interesantes. Al lector que desee realizar una lectura más detallada del método de Frobenius le sugerimos consultar el texto de METODOS MATEMÁTICOS PARA FISICOS que aparece en la Bibliografía, al final de este trabajo.

Dándole a j diferentes valores pares j: = 0, 2, 4, 6, … podemos obtener todos los coeficientes pares de la serie de potencias de la ec. 6.9. Después de un detallado trabajo con la ecuación de recurrencia, obtenemos el término general de tales coeficientes:

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{n!}{2^{2p}\, p!(n+p)!} a_0 \qquad \textbf{(ec. 6.14)}$$

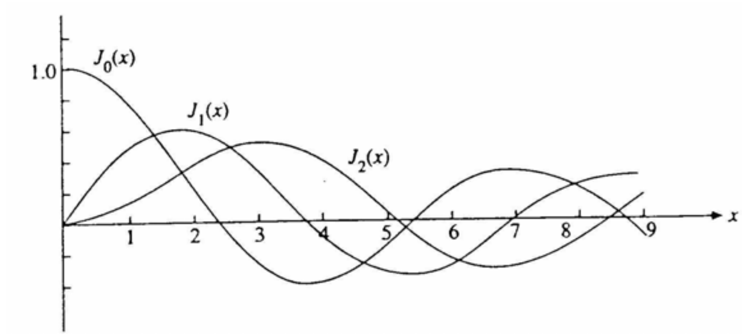
Una vez determinados los coeficientes de la serie tenemos la solución (la primera):

$$y(x) = a_0 2^n n! \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} \qquad \textbf{(ec. 6.15)}$$

Dado que la ec. 6.15 es solución de una ecuación homogénea puede entonces multiplicarse por cualquier constante y sigue siendo solución. En tal caso se dice que podemos normalizar la ec. 6.15 escribiendo la primera solución de la ecuación diferencial de Bessel (ec. 6.8) de la siguiente manera:

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2j} \qquad \textbf{(ec. 6.16)}$$

La función dada por la ec. 6.16 se conoce como la función de Bessel de orden n.



La función de Bessel tiene muchas propiedades. Una de ellas, que se utiliza con frecuencia es el hecho que esta función tiene muchas "raíces" es decir tiene muchos ceros (Véase la gráfica anterior). Se llama cero de la función de Bessel a un valor de su argumento para el cual esta función se anula. Los ceros de las funciones de Bessel se encuentran tabulados en Handbooks de Matemáticas o de Matemática-Física. A continuación mostramos una pequeña tabla de los primeros ceros de las funciones de Bessel de menor orden. Se acostumbra representar por α_{mn} al n-ésimo cero de la función de Bessel de orden m, de tal modo que $J_m(\alpha_{mn}) = 0$.

Ceros de las funciones de Bessel

Numero de Ceros	Jo(x)	J1(x)	J2(x)	J3(x)	J4(x)	J5(x)
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.761	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178

PROBLEMA Nº1. LA MEMBRANA CIRCULAR VIBRANTE.

La amplitud $U(\rho,\varphi,t)$ de una membrana circular vibrante de radio a satisface la ecuación de onda:

$$\nabla^2 U - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \qquad \textbf{(ec. 6.17)}$$

donde v es la velocidad de fase de la onda determinada por las constantes elásticas de la membrana y el amortiguamiento impuesto.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA. Encontrar las longitudes de onda permitidas.

SOLUCIÓN. Físicamente este problema podría representar las vibraciones de la membrana de un tambor. En este caso toda la orilla de la membrana (de radio a) es un nodo, es decir, toda la orilla de la membrana está desprovista de movimiento. $U(a,\varphi,t) = 0$ es, por tanto, una condición de frontera.

En coordenadas cilíndricas, la ec. 6.17 toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial U}{\partial t}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \qquad \textbf{(ec. 6.18)}$$

Para aplicar, ahora, el método de separación de variables hacemos:

$$U(\rho,\varphi,t) = P(\rho)\phi(\varphi)\tau(t) \qquad \textbf{(ec. 6.19)}$$

Sustituyendo este producto en la ec. 6.18, dividiendo el resultado entre este mismo producto y transponiendo términos tenemos:

$$\frac{1}{P\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{dP}{d\rho}) + \frac{1}{\rho^2\phi}\frac{d^2\phi}{d\varphi^2} = \frac{1}{v^2\tau}\frac{d^2\tau}{dt^2} = -k^2 \qquad \textbf{(ec. 6.20)}$$

- k^2 es una constante de separación que nos permite separar esta ecuación en dos ecuaciones: **1)**

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + k^2v^2\tau = 0 \qquad \textbf{(ec. 6.21)}$$

y **2)** $$\frac{1}{P\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{dP}{d\rho})+\frac{1}{\rho^2\phi}\frac{d^2\phi}{d\varphi^2} = -k^2 .$$ **(ec. 6.22)**

El término kv de la ec. 6.21 tiene unidades inversas de tiempo y físicamente se interpreta como la frecuencia angular ω; por tal razón hacemos $\omega^2 = k^2 v^2$ y la ec. 6.21 puede ahora escribirse así:

$$\frac{d^2\tau}{dt^2}+\omega^2\tau = 0$$ **(ec. 6.23)**

Cuya solución general es $$\tau(t) = b_1 e^{i\omega t} + b_2 e^{-i\omega t}$$ **(ec. 6.24)**

multiplicando por ρ^2 en la ec. 6.22 y reordenando términos se tiene:

$$\frac{\rho}{P}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{dP}{d\rho})+k^2\rho^2 = -\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{d\varphi^2} = m^2$$ **(ec. 6.25)**

donde m^2 es la otra constante de separación, que nos permite separar otras dos ecuaciones, siendo cada una de ellas función de una sola variables:

$$\frac{d^2\phi}{d\varphi^2}+m^2\phi = 0$$ **(ec. 6.26)**

cuya solución general es $$\phi(\varphi) = a_1 e^{im\varphi} + a_2 e^{-im\varphi}$$ **(ec.6.27)**

y la ecuación en ρ : $$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{dP}{d\rho})+(k^2\rho^2 - m^2)P = 0$$ **(ec. 6.28)**

Esta última ecuación también puede escribirse en la forma:

$$\rho^2\frac{\partial^2 P}{\partial\rho^2}+\rho\frac{dP}{d\rho}+(k^2\rho^2-m^2)P = 0$$ **(ec. 6.29)**

Cuya solución es la función de Bessel de orden m y de argumento $k\rho$: $J_m(k\rho)$ y que se define mediante la serie dada por la ec. 6.16

$$J_m(k\rho) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{1}{j!(m+j)!}\left(\frac{k\rho}{2}\right)^{m+2j}$$ **(ec.6.30)**

Por tanto la solución general de $U(\rho,\varphi,t)$ es la combinación lineal de las soluciones de las ecuaciones 6.23, 6.26 y 6.29:

$$U(\rho,\varphi,t)=\sum_{m,k} J_m(k\rho)(a_1 e^{im\varphi}+a_2 e^{-im\varphi})(b_1 e^{i\omega t}+b_2 e^{-i\omega t}) \qquad \textbf{(ec. 6.31)}$$

Para determinar cuáles son las longitudes de onda permitidas, debemos hacer uso de la condición de contorno: $U(a,\varphi,t)=0$. Observando la ecuación 6.31 vemos que tal condición (de Dirichlet) queda establecida de la siguiente manera: $J_m(ka)=0$, donde a es el radio de la membrana circular. Por tanto ka debe interpretarse como un cero de la función de Bessel de orden m, es decir: $ka=\alpha_{mn}$. Como físicamente k es el "número de onda" que se define en relación con la longitud de onda (λ): $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$, finalmente se tiene:

$$\lambda=\frac{2\pi a}{\alpha_{mn}} \qquad \textbf{(ec. 6.32)}$$

Y por tanto, vemos que las longitudes de onda permitidas están relacionadas con los ceros de la función de Bessel. Tenemos, pues, un problema de valores discretos que se resuelve exitosamente en base a las propiedades de las funciones de Bessel.

<u>PROBLEMA Nº2</u>. APLICACIÓN A ECUACIONES DIFERENCIALES

Resuelva la siguiente ecuación diferencial: $xy''+y'+ay=0$ **(ec. 6.33)**

Con este problema únicamente se quiere mostrar que el conocimiento de la ecuación de Bessel puede ser útil, con un poco de creatividad, para resolver otras ecuaciones diferenciales que se puedan adaptar a la forma de una Ecuación Diferencial de Bessel.

SOLUCIÓN. Primero multiplicamos por x la ec. 6.33, para tener:

$$x^2 y'' + xy' + axy = 0 \qquad \textbf{(ec. 6.34)}$$

Ahora se propone el siguiente cambio de variable: x = u^2. Naturalmente, este cambio tendrá consecuencias en las derivadas de la ec. 6.34. Veamos :

$$\textbf{Como } u = x^{1/2}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2u} \qquad \textbf{(ec. 6.35)}$$

Por tanto:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2u}\frac{d}{du} \qquad \textbf{(ec. 6.36)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2u}\frac{d}{du}\right] = \frac{d}{du}\left[\frac{1}{2u}\frac{d}{du}\right]\frac{du}{dx} \qquad \textbf{(ec. 6.37)}$$

de donde:

$$\frac{d^2}{dx^2} = -\frac{1}{4u^3}\frac{d}{du} + \frac{1}{4u^2}\frac{d^2}{du^2} \qquad \textbf{(ec. 6.38)}$$

Sustituyendo, ahora, estas derivadas en la ec. 6.34 y simplificando, tenemos:

$$u^2 \frac{d^2}{du^2} y(u) + u\frac{d}{du} y(u) + \left[\left(2\sqrt{au}\right)^2 - 0\right] y(u) = 0 \qquad \textbf{(ec. 6.39)}$$

Dado que esta ecuación se identifica como una ecuación diferencial de Bessel de orden CERO y argumento $2\sqrt{au}$ se tiene que la solución general de la ecuación 6.33 viene dada por:

$$y(x) = AJ_0(2\sqrt{a}x) + BN_0(2\sqrt{a}x) \qquad \textbf{(ec. 6.40)}$$

Donde $N_0(2\sqrt{a}x)$ es la segunda solución linealmente independiente conocida frecuentemente como la función de Newmann o como la función de Bessel de segunda clase. La función de Newmann es divergente en el origen, razón por la cual si el problema físico que se está considerando incluye el origen y allí no hay ninguna fuente que pudiera producir una singularidad, tal función deberá ser descartada de la solución, haciendo B = 0 en la ecuación 6.40.

TRANSFORMADAS DE LAPLACE.

En los tres problemas que siguen serán utilizadas transformadas de Laplace. Por tal razón, antes de presentar el Problema Nº3, dedicaremos un breve espacio a las Transformadas de Laplace.

Las transformadas de Laplace tienen muchas propiedades interesantes, pero nos limitaremos, por razones de extensión de este trabajo, a presentar la definición y un número mínimo de propiedades que serán utilizadas para la resolución de los siguientes tres problemas.

DEFINICIÓN. La transformada de Laplace f(s) de una función F(t) se define por:

$$\mathbf{f(s)} = \pounds\left\{F(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt \qquad \textbf{(ec. 6.41)}$$

Transformada de una derivada. Aplicando la definición 6.41 a la derivada de una función F'(t), se tiene:

$$\pounds\left\{F'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{dF(t)}{dt} dt \qquad \textbf{(ec. 6.42)}$$

Integrando por partes se obtiene: $\pounds\left\{F'(t)\right\} = \mathbf{s}\,\pounds\left\{F(t)\right\} - F(0)$ **(ec. 6.43)**

Extendiendo el procedimiento anterior se puede obtener:

$$\pounds\left\{F^{(2)}(t)\right\} = \mathbf{s^2}\,\pounds\left\{F\ (t)\right\} - \mathbf{sF(0)} - \mathbf{F'(0)} \qquad \textbf{(ec. 6.44)}$$

y generalizarse para la transformada de una derivada de mayor orden.

Derivada de una transformada. Cuando F(t) es al menos parcialmente continua y s se escoge de tal manera que $e^{-st}F(t)$ converja exponencialmente para valores grandes de s, la integral

$\int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$ **converge uniformemente y puede derivarse (dentro del signo integral) con respecto a s. Entonces:**

$$f'(s) = \int_0^{\infty} (-t)e^{-st}F(t)dt \;=\; \pounds\{-tF(t)\} \qquad \textbf{(ec. 6.45)}$$

y en general, continuando con este proceso se obtiene:

$$\mathbf{f^{(n)}(s)} \;=\; \pounds\{(-t)^n F(t)\} \qquad \textbf{(ec. 6.46)}$$

<u>PROBLEMA Nº3</u>. APLICACIÓN DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial utilizando transformadas de Laplace.

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0 \qquad \textbf{(ec. 6.47)}$$

El objetivo de presentar este problema es mostrar las ventajas que se obtienen al utilizar las transformadas de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales.

Observando la ec. 6.47 vemos que se trata de la ecuación diferencial de Bessel de orden cero. Dividamos la ec. 6.47 entre x , luego sustituyamos $t = x \;\wedge\; F(t) = y(x)$ para tenerla en una forma más adecuada a las definición de transformada. Entonces la ec. 6.47 toma la forma: $tF''(t) + F'(t) + tF(t) = 0.$ **(ec. 6.48)**

Necesitamos una solución regular, en particular, $F(0) = 1$. De esta última ecuación puede verse que si $t = 0$, entonces: $F'(0) = 0$. También asumimos que existe la transformada de F(t).

Transformando la ec. 6.48 y utilizando las ecs: 6.43, 6.44 y 6.45, se tiene:

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2 f(s) - s\right] + sf(s) - 1 - \frac{d}{ds} f(s) = 0 \qquad \textbf{(ec. 6.49)}$$

Reordenando términos se obtiene:

$$(s^2 + 1)f'(s) + sf(s) = 0 \qquad \textbf{(ec. 6.50)}$$

ó

$$\frac{df}{f} = -\frac{sds}{s^2 + 1} \qquad \textbf{(ec. 6.51)}$$

Una ecuación diferencial de primer orden. Integrando tenemos:

$$f(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2 + 1}} \qquad \textbf{(ec. 6.52)}$$

De la definición de transformada (ec. 6.41) tenemos:

$$\pounds\left\{t^{n}\right\}=\frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \textbf{(ec. 6.53)}$$

Para utilizar esta última expresión, expandimos la ec. 6.52 en una serie de potencias negativas de s, convergente para s > 1:

$$f(s)=\frac{C}{s}\left(1+\frac{1}{s^{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(ec. 6.54)}$$

$$f(s)=\frac{C}{s}\left[1-\frac{1}{2s^{2}}+\frac{1\cdot 3}{2^{2}2!s^{4}}-\cdots+\frac{(-1)^{n}(2n)!}{(2^{n}n!)^{2}s^{2n}}+\cdots\right] \qquad \textbf{(ec. 6.55)}$$

Invirtiendo (aplicando la transformada inversa) mediante la ec. 6.53, tenemos:

$$F(t)=C\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}\frac{1}{j!\,j!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2j} \qquad \textbf{(ec. 6.56)}$$

Compárese con la ec. 6.16 con n = 0. Cuando C = 1 en la ecuación anterior, como lo requiere la condición F(0) = 1, justamente se tiene la función de Bessel de orden cero: $J_0(t)$. Por tanto, se ha obtenido con éxito y con algunas ventajas la solución de la ec. 6.47. Como observación adicional, nótese que:

$$\pounds\left\{J_{0}(t)\right\}=\frac{1}{\sqrt{s^{2}+1}} \qquad \textbf{(ec. 6.57)}$$

PROBLEMA Nº4. OSCILADOR FORZADO Y AMORTIGUADO.

Consideremos nuevamente el Problema Nº3 del Capítulo IV, ec. 4.35, pero ahora accionado mediante una fuerza que también oscila periódicamente. Se trata de una masa m ligada a un resorte de constante de elasticidad k, sujeta a una fuerza de fricción con el aire directamente proporcional a su velocidad y accionada por la fuerza periódica $F(t) = F_0 \mathrm{Sen}\,\omega t$. Por tanto, tendremos que resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2}+\lambda\frac{dX(t)}{dt}+kX(t)=F_0 sen\omega t \qquad \textbf{(ec. 6.58)}$$

donde X(t) es la posición instantánea de la masa ligada al resorte y λ es la constante de proporcionalidad que relaciona la fuerza de fricción con la velocidad instantánea de dicha masa. La situación problemática consiste ahora en resolver la ec. 6.58 mediante la utilización de las transformadas de Laplace y sus propiedades.

Para comodidad de nuestros lectores, presentamos las transformadas de Laplace de las funciones seno y coseno que serán utilizadas en el desarrollo de la solución de este problema:

$$\pounds\{\cos\alpha t\}=\frac{s}{s^2+\alpha^2} \quad \textbf{y} \quad \pounds\{sen\alpha t\}=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \qquad \textbf{(ec. 6.59)}$$

Consideremos, por simplicidad, las siguientes condiciones iniciales:

X(0) = 0 y X'(0) = 0

La transforma de Laplace de la ecuación 6.58 es:

$$ms^2x(s)+\lambda sx(s)+kx(s)=\frac{F_0\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \textbf{(ec. 6.60)}$$

donde $x(s)$ **es la transformada de Laplace de X(t). Despejando** $x(s)$ **de la ecuación anterior se tiene:**

$$x(s)=\frac{F_0\omega}{m}\left[\frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(s^2+\frac{\lambda}{m}s+\omega_0{}^2\right)}\right] \quad \textbf{con } \omega_0{}^2=\frac{k}{m} \qquad \textbf{(ec. 6.61)}$$

Para facilitar el trabajo posterior de aplicar transformadas inversas, expandamos la fracción anterior en fracciones parciales.

$$x(s)=\frac{F_0\omega}{m}\left[\frac{as+b}{\left(s^2+\omega^2\right)}+\frac{cs+d}{\left((s+\lambda/2m)^2+\omega_1{}^2\right)}\right] \qquad \textbf{(ec.6.62)}$$

Donde $\omega_1^{\,2} = \frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2}$ **.** **Evaluando las constantes se tiene:**

$$a = -\frac{\lambda m}{\left[\lambda^2\omega^2 + m^2\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)^2\right]} \quad \text{y} \quad b = -\frac{m^2\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)}{\left[\lambda^2\omega^2 + m^2\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)^2\right]} \qquad \textbf{(ec. 6.63)}$$

Las constantes c y d pueden ignorarse dado que el segundo término de la derecha de la ecuación 6.62 conduce a una exponencial decreciente y por tanto, corresponde a una fase transitoria que se anula una vez que el sistema se haya estabilizado. Esto se explica debido a la siguiente fórmula de transformada de Laplace:

$$\pounds\left\{e^{-\gamma t}\cos\alpha t\right\} = \frac{s+\gamma}{(s+\gamma)^2 + \alpha^2} \qquad \textbf{(ec.6.64)}$$

Por tanto sustituyendo las constantes a y b **en la ec. 6.62 y aplicando las transformadas inversas de las funciones seno y coseno, se tiene:**

$$X(t) = F_0\left\{-\frac{\lambda\omega}{\left[\lambda^2\omega^2 + m^2(\omega_0^{\,2} - \omega^2)^2\right]}\cos\omega t + \frac{m(\omega_0^{\,2} - \omega^2)}{\left[\lambda^2\omega^2 + m^2(\omega_0^{\,2} - \omega^2)^2\right]} sen\,\omega t\right\} \qquad \textbf{(ec. 6.65)}$$

haciendo:

$$\tan\phi = \frac{\lambda\omega}{m(\omega_0^{\,2} - \omega^2)} \qquad \textbf{(ec. 6.66)}$$

se tiene:

$$X(t) = \left\{\frac{F_0}{\left[\lambda^2\omega^2 + m^2(\omega_0^{\,2} - \omega^2)^2\right]^{1/2}} sen(\omega t - \phi)\right\} \qquad \textbf{(ec. 6.67)}$$

Aplicando el método de máximos y mínimos se encuentra que la máxima amplitud (la resonancia) ocurre cuando

$$\omega^2 = \omega_0^{\,2} - \frac{\lambda^2}{2m^2} \qquad \textbf{(ec.6.68)}$$

Para esta frecuencia la amplitud máxima toma el valor de $\frac{F_0}{\lambda\omega_1}$ **.** **(ec. 6.69)**

Lo cual muestra que en ausencia de amortiguamiento ($\lambda = 0$ **) la amplitud crecería hasta que el sistema se rompa (en teoría crecería sin límite hasta alcanzar valores infinitos).**

En una situación más real λ podría tomar valores muy pequeños y si los materiales del sistema lo permiten, éste oscilará con amplitudes muy grandes. Tal fenómeno es conocido como resonancia.

Finalizamos este problema mencionando que la ec. 6.58 también puede "modelar" un circuito RLC en serie con un generador de voltaje que oscile periódicamente. En tal caso la ec.4.4 toma la siguiente forma:

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2}+R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{I(t)}{C}=V_0 sen\omega t \qquad \textbf{(ec. 6.70)}$$

Dado que matemáticamente tiene el mismo comportamiento regido por la ec. 6.58 dejamos este caso a la consideración del estudiante.

ECUACIONES INTEGRALES.

Para finalizar este Capítulo presentaremos dos problemas relacionados con ECUACIONES INTEGRALES. No nos detendremos en exponer la teoría de estas ecuaciones, únicamente mostraremos un ejemplo de una ecuación integral:

$$\mathrm{f(x)}=\int_a^x \mathrm{K(x,t)}\varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt} \qquad \textbf{(ec. 6.71)}$$

donde se asume que f(x) y K(x,t) son funciones conocidas y $\varphi(t)$ es una función desconocida. En pocas palabras, una Ecuación Integral se caracteriza por tener una función desconocida bajo el signo integral. Resolver una ecuación de este tipo significa encontrar dicha función desconocida.

El problema Nº5 que presentaremos a continuación es con el objetivo de mostrar que las transformadas de Laplace se aplican en la solución de Ecuaciones Integrales. En el desarrollo de la solución de este problema utilizaremos el Teorema de Convolución de las

Transformadas de Laplace, razón por la cual presentaremos primeramente el enunciado (sin demostración) de este teorema a manera de tenerlo listo al momento de su aplicación.

Sean $f_1(s)$ y $f_2(s)$ las transformadas de las funciones $F_1(t)$ y $F_2(t)$, respectivamente. Se define la CONVOLUCION de las funciones $F_1(t)$ y $F_2(t)$: F_1*F_2 como la siguiente integral:

$$F_1 * F_2 \equiv \int_0^t F_1(t-z)F_2(z)dz \qquad \textbf{(ec. 6.72)}$$

El Teorema de la Convolución establece que la transformada de la Convolución es igual al producto de las transformadas de las funciones originales, decir:

$$f_1(s)\cdot f_2(s) = \pounds\left\{F_1 * F_2\right\} \qquad \textbf{(ec. 6.73)}$$

PROBLEMA Nº5. APLICACIÓN DE LA CONVOLUCION DE LAPLACE.

La siguiente ecuación integral:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}dt, \quad 0<\alpha<1.$$

se conoce como la ecuación generalizada de Abel. Se asume que f(x) es una función conocida y que φ(t) es una función desconocida.

Para el caso particular en que f(x) = 1,

a) **Encuentre la función φ(t) que satisface la ecuación.**
b) **Compruebe que la función φ(t) que ha encontrado es una solución de la ecuación dada.**

SOLUCIÓN

a) En primer lugar observamos que la integral de la ecuación de Abel tiene la forma de una convolución de dos funciones: $g_1(x) = x^{-\alpha}$ y $g_2(x) = \varphi(x)$.
Aplicando el Teorema de la Convolución a la integral de Abel (con f(x) = 1), se obtiene:

$$\pounds\left\{1\right\} = \pounds\left\{x^{-\alpha}\right\}\cdot \pounds\left\{\varphi(x)\right\} \qquad \textbf{(ec. 6.74)}$$

Recordando que (ec. 6.53): $\pounds\left\{x^n\right\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

Entonces: $\pounds\left\{1\right\} = \dfrac{1}{s}$ **y** $\pounds\left\{x^{-\alpha}\right\} = \dfrac{(-\alpha)!}{s^{1-\alpha}}$ **(ec. 6.75)**

Por tanto, de 6.74 y 6.75 se tiene: $\dfrac{1}{s} = \dfrac{(-\alpha)!}{s^{1-\alpha}} \pounds\left\{\varphi(x)\right\}$ **(ec. 6.76)**

Entonces: $\pounds\left\{\varphi(x)\right\} = \dfrac{1}{s^{\alpha}(-\alpha)!}$ **(ec. 6.77)**

Pero: $\dfrac{1}{s^{\alpha}} = \dfrac{1}{(\alpha-1)!} \pounds\left\{x^{\alpha-1}\right\}$ **(ec. 6.78)**

Sustituyendo esta expresión en la ec. 6.77, se tiene:

$$\pounds\left\{\varphi(x)\right\} = \frac{1}{(\alpha-1)!(-\alpha)!} \pounds\left\{x^{\alpha-1}\right\} \quad \textbf{(ec. 6.79)}$$

Aplicando la fórmula de Weierstrass:

$$(\alpha-1)!(-\alpha)! = \frac{\pi}{\mathrm{Sen}\pi\alpha}$$

Se tiene: $\pounds\left\{\varphi(x)\right\} = \dfrac{\mathrm{Sen}\pi\alpha}{\pi} \pounds\left\{x^{\alpha-1}\right\}$ **(ec. 6.80)**

Ahora, basta aplicar la transformada inversa de Laplace para obtener:

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{Sen}\pi\alpha}{\pi} x^{\alpha-1}$$

Y se concluye que la solución a la ecuación generaliza de Abel, con f(x) = 1, es:

$$\varphi(t) = \frac{\mathrm{Sen}\pi\alpha}{\pi} t^{\alpha-1} \quad \textbf{(ec. 6.81)}$$

b) Es razonable que se tenga alguna duda (o cierto grado de escepticismo) respecto a la solución obtenida en a). Por tanto, se vuelve una exigencia comprobar dicha solución.

Se requiere, entonces, comprobar que:

$$\frac{Sen\pi\alpha}{\pi}\int_0^x t^{\alpha-1}(x-t)^{-\alpha}\,dt = 1 \quad \textbf{(ec.6.82)}$$

Esta comprobación resulta sencilla utilizando una forma particular de la función Beta, que establece:

$$\int_0^1 t^m (1-t)^n \, dt \; = \; \frac{\mathrm{m!n!}}{(\mathrm{m+n+1})!} \qquad \textbf{(ec. 6.83)}$$

Para ello es conveniente el cambio de variable t = xu, con lo cual la (ec.6.82) se convierte en:

$$\frac{Sen\pi\alpha}{\pi}\int_0^1 \mathrm{u}^{\alpha\text{-}1}(1-u)^{-\alpha}\,du \; = \; \frac{\mathrm{Sen}\pi\alpha}{\pi}(\alpha-1)!(-\alpha)! \; = \; 1$$

Resultado que se obtiene aplicando la (ec. 6.83) y la fórmula de Weierstrass.

COMETARIOS.

Las transformadas de Laplace, en las cuales se fundamentan las soluciones de tres problemas presentados en este Capítulo, son muy importantes en varias áreas de la matemática pura y aplicada. Con un poco de creatividad se pueden aplicar a la solución de una gran variedad de problemas que incluyen: ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales), ecuaciones integrales, etc. En la actualidad continúan las investigaciones acerca de la aplicación de estas transformadas en la solución de sistemas dinámicos, electromagnéticos y otras parcelas de la gigantesca área conocida como MATEMÁTICA APLICADA.

PROBLEMA Nº6. POLINOMIOS DE LEGENDRE.

Para aprovechar esta incursión en el área de las Ecuaciones Integrales presentamos este último problema que está relacionado con los Polinomios de Legendre, su función generatriz y su ortogonalidad. De igual manera que en ocasiones anteriores, mencionaremos brevemente, sin entrar en detalles, algunos elementos que se utilizarán en la solución de este problema.

Los Polinomios de Legendre constituyen, debido a sus múltiples aplicaciones, una de las funciones más importantes de la Matemática-Física. Se relacionan con su función generatriz g(x,t) de la siguiente manera:

$$g(x,t) \;=\; (1-2xt+x^2)^{-1/2} \;=\; \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)x^r \qquad \textbf{(ec. 6.84)}$$

Los Polinomios de Legendre satisfacen la siguiente propiedad de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1} \qquad \textbf{(ec. 6.85)}$$

Donde δ_{mn} **es la delta de Kronecker:** $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA. Resuelva la siguiente ecuación integral:

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{(1-2xt+x^2)^{1/2}}\,dt \qquad \textbf{(ec.6.86)}$$

para la función desconocida $\varphi(t)$ **si:**

a) $f(x) = x^{2s}$; **b)** $f(x) = x^{2s+1}$

SOLUCION.

a) **Dado que la integral de la ec. 6.86 contiene la función generatriz de los Polinomios de Legendre y que además los límites de la integral corresponden al intervalo de ortogonalidad de estos polinomios, usaremos la siguiente estrategia de solución:**

Asumimos que $\varphi(t)$ **es una función continua que se puede expandir en una serie infinita de Polinomios de Legendre:**

$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n P_n(t)$, **donde las constantes** a_n **son aún indeterminadas y habrá que calcularlas en base a las mismas propiedades de ortogonalidad. Entonces, la ec. 6.86 toma la forma:**

$$x^{2s}=\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n P_n(t)\sum_{r=0}^{\infty}P_r(t)x^r\,dt \qquad \textbf{(ec. 6.87)}$$

Ahora, por unicidad de series de potencia: si hacemos r = 2s, entonces, se tiene:

$$x^{2s}=a_{2s}\,\frac{2}{2(2s)+1}\,x^{2s} \qquad \textbf{(ec. 6.88)}$$

debido a la propiedad de ortogonalidad. Por tanto: $a_{2s}=\frac{4s+1}{2}$

y $$\varphi(t)=\frac{4s+1}{2}P_{2s}(t) \qquad \textbf{(ec. 6.89)}$$

b) Aplicando el mismo procedimiento, con r = 2s + 1, se tiene:

$$\varphi(t)=\frac{4s+3}{2}P_{2s+1}(t) \qquad \textbf{(ec. 6.90).}$$

ANEXO A.

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS.

TEOREMA. **Sean M(x,y) y N(x,y) funciones continuas y con derivadas parciales continuas con respecto a x y a y en el rectángulo R formado por los puntos (x,y) con** $a < x < b$ y $c < y < d$. **Entonces existe una función** $\phi(x, y)$ **tal que** $M(x, y) = \partial\phi / \partial x$ **y** $N(x, y) = \partial\phi / \partial y$ **si y sólo si**

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \textbf{(ec. 1)}$$

DEMOSTRACIÓN.

Obsérvese que $M(x, y) = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ **si y sólo si**

$$\phi(x, y) = \int M(x, y)dx \;+\; \mathrm{h(y)} \qquad \textbf{(ec. 2)}$$

donde h(y) es una función arbitraria de y. Derivando parcialmente ambos lados de la ec.2, respecto a y se obtiene:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx \;+\; \mathrm{h}'(\mathrm{y}) \qquad \textbf{(ec. 3)}$$

Por lo tanto, $\partial\phi / \partial y$ **es igual a N(x,y) si y sólo si**

$$N(x, y) = \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx \;+\; \mathrm{h}'(\mathrm{y}) \qquad \textbf{(ec. 4)}$$

o bien

$$\mathrm{h}'(\mathrm{y}) = N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx \qquad \textbf{(ec. 5)}$$

Ahora bien, h'(y) es una función sólo de y mientras que el lado derecho de la (ec.5) pareciera ser una función tanto de x como de y. Pero una función que solo depende de y no puede ser igual a una función que depende de x y de y. Así pues, la (ec.5) tiene sentido únicamente si su miembro derecho es solo función de y, lo cual sucede si y sólo si.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\int\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0 \qquad \textbf{(ec. 6)}$$

Por lo tanto, si $\frac{\partial N}{\partial x}\neq\frac{\partial M}{\partial y}$ **, entonces no existe una función** $\phi(x,y)$ **tal que** $M=\frac{\partial \phi}{\partial x}$ **y** $N=\frac{\partial \phi}{\partial y}$**. Por otro lado, si** $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$ **, entonces es posible resolver para determinar:**

$$h(y)=\int\left[N(x,y)-\int\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx\right]dy \qquad \textbf{(ec. 7)}$$

Como consecuencia $M=\frac{\partial \phi}{\partial x}$ y $N=\frac{\partial \phi}{\partial y}$ **con:**

$$\phi(x,y)=\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\int\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx\right]dy \qquad \textbf{(ec. 8)}$$

ANEXO B

COMPROBACION DE FUNCION REAL.

Dada la función de variable compleja:

$$Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t} \text{ ,} \qquad \textbf{(ec. 1)}$$

donde A y B son constantes complejas, se quiere demostrar que cuando B se toma como la conjugada compleja de A, entonces dicha función se vuelve real. Por tanto tomemos $A = A_1 + i A_2$ y $B = A_1 - i A_2$.

Recordemos las fórmulas de Euler:

$$e^{i\omega_n t} = Cos\omega_n t + iSen\omega_n t \quad \textbf{y} \quad e^{-i\omega_n t} = Cos\omega_n t - iSen\omega_n t \qquad \textbf{(ec. 2)}$$

Sustituyendo las expresiones de las constantes A y B y las fórmulas de Euler en la ec. 1, tenemos:

$$(A_1 + iA_2)(Cos\omega_n t + iSen\omega_n t) + (A_1 - iA_2)(Cos\omega_n t - iSen\omega_n t) \qquad \textbf{(ec. 3)}$$

Al simplificar términos esta expresión se reduce a:

$$2A_1 Cos\omega_n t - 2A_2 Sen\omega_n t \qquad \textbf{(ec. 4)}$$

Finalmente, haciendo $2A_1 = D$ y $-2A_2 = E$**, donde es claro que D y E son ahora constantes reales, la expresión dada por la ec.4 (y por supuesto, la ec. 1) se reduce a:**

$$D\,Cos\omega_n t + E\,Sen\omega_n t \qquad \textbf{(ec.5)}$$

Que es lo que se quería comprobar.

ANEXO C

METODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS.

Una vez escrita la ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden en su forma estándar

$$y''(x) + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad \textbf{(ec. 1)}$$

1. **Se procede a encontrar la solución general de la ecuación homogénea asociada:**

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \qquad \textbf{(ec.2)}$$

2. **Se supone (hipótesis) la existencia de una solución particular de la ec. 1 de la forma:**

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \qquad \textbf{(ec.3)}$$

3. **Derivando la ec.3, tenemos:**

$$\mathbf{y_p' = u_1y_1' + u_1'y_1 + u_2y_2' + u_2'y_2}$$

$$\mathbf{y_p'' = u_1y_1'' + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1''y_1 + u_2y_2'' + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2''y_2}$$

4. **Ahora, sustituyendo $\mathbf{y_p(x)}$ y sus derivadas en la ec.1, se tiene:**

$$u_1\underbrace{\left[y_1'' + Py_1' + Qy_1\right]}_{\text{CERO}} + u_2\underbrace{\left[y_2'' + Py_2' + Qy_2\right]}_{\text{CERO}} + y_1u_1'' + u_1'y_1' + y_2u_2'' + u_2'y_2'$$

$$+ P\left[y_1u_1' + y_2u_2'\right] + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$$

Como los dos primeros paréntesis se anulan y los primeros cuatro términos después del segundo paréntesis se pueden compactar, se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left[y_1u_1' + y_2u_2'\right] + P\left[y_1u_1' + y_2u_2'\right] + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x) \qquad \textbf{(ec. 4)}$$

5. **Nuestro objetivo es encontrar las dos funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$. Por tanto, es lógico que esperemos encontrar estas dos funciones a partir de dos ecuaciones linealmente independientes. Entonces, podemos establecer una hipótesis adicional que sea:**

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \qquad \textbf{(ec. 5)}$$

Esta hipótesis responde a una buena estrategia (de tipo heurístico) y es pertinente porque si $y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$**, entonces la ec. 4 se reduce, drásticamente, a:**

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) \qquad \textbf{(ec. 6)}$$

Con esto se logra el sigiente sistema de ecuaciones:

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0,$$

$$\textbf{y} \qquad y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x)$$

Que nos permite, al menos, determinar las derivadas u_1' y u_2'. Este sistema se puede resolver mediante la regla de Cramer, para obtener:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} \qquad \textbf{(ec. 7)}$$

Donde $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$ **(ec. 8)**

W se conoce como el "Wronskiano" de las funciones que aparecen dentro del determinante. Para más comodidad también se puede representar así:

$W[y_1(x), y_2(x)]$ **es el Wronskiano de $y_1(x) \wedge y_2(x)$**

6. **Ahora, integrando las ecs. 7 y sustituyendo estos resultados en la ec. 3, se tiene:**

$$y_p(x) = y_2(x)\int^x \frac{y_1(s) f(s) ds}{W[y_1(s), y_2(s)]} - y_1(x)\int^x \frac{y_2(s) f(s) ds}{W[y_1(s), y_2(s)]} \qquad \textbf{(ec. 9)}$$

Para que $y_1(x) \wedge y_2(x)$ sean linealmente independientes deberá ocurrir que $W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0$ **en todo el intervalo (I) de validez de la solución.**

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.

I. INTRODUCCION.

El lector que haya leído con atención este trabajo estará de acuerdo que a partir de los aspectos históricos, filosóficos, metodológicos y experimentales, así como las reflexiones personales del autor y la forma como se ha estructurado, se pueden obtener muchas conclusiones interesantes y sugerencias para trabajos futuros; sin embargo, atendiendo a nuestro propósito de no excedernos en la extensión del mismo, nos limitaremos a presentar algunas conclusiones de carácter general y otras que corresponden a los aspectos experimentales y metodológicos.

II. CONCLUSIONES GENERALES.

Para la elaboración de este trabajo de graduación se han realizado varios esfuerzos en diferentes sentidos. Esto es una consecuencia de las ideas del autor respecto a la estructura conceptual de las disciplinas involucradas en el mismo, tales como: La Historia, La Filosofía, La Metodología del Conocimiento Científico y más específicamente las concepciones modernas acerca de la Resolución de Problemas como un Recurso Didáctico en la enseñanza y el aprendizaje de las diferentes ramas de la Matemática y de la Ciencia en general.

En tal sentido se ha invertido tiempo y esfuerzo en la revisión bibliográfica de textos con temáticas muy diferentes, pero que de una u otra forma utilizan las Ecuaciones Diferenciales o los aspectos históricos, filosóficos y metodológicos mencionados en el párrafo anterior, lo cual se hace más notable al observar la Bibliografía presentada en la última página de este trabajo.

Por otro lado, desde que el autor recibió los cursos de Resolución de Problemas y de Ecuaciones Diferenciales de la Maestría en Didáctica de la Matemática ha venido practicando los conocimientos adquiridos en dichos cursos con estudiantes de diversas asignaturas de la Licenciatura en Física. En este sentido podemos mencionar que se han tenido experiencias valiosas y que en la mayoría de los casos los estudiantes con un poco de orientación han podido "construir" su conocimiento o al menos han puesto mucho empeño en discutir los procedimientos lógicos adecuados para enfrentar las situaciones que se les han presentado, al estilo de lo que se conoce como "una situación problemática" para que sea asumida por pequeños grupos en calidad de reto.

También comprendemos que llevar a la práctica la metodología de la Resolución de Problemas no es nada fácil; sin embargo, en nuestro caso hemos contado con la ventaja de tener grupos pequeños de estudiantes y darles, por tanto, una atención más personalizada. De todas maneras consideramos que la experiencia que hemos obtenido es muy valiosa y estamos dispuestos a compartirla con otros colegas.

III. CONCLUSIONES METODOLOGICAS.

El presente trabajo contiene un total de 25 problemas y 12 ejercicios; además, se han incluido problemas conceptuales, problemas y ejercicios complementarios y ejercicios de observación para que los estudiantes obtengan de inmediato las conclusiones pertinentes.

Se elaboraron GUIAS DIDACTICAS para los problemas del Capíulo III y para algunos ejercicios de este mismo capítulo. En los Capítulos IV, V y VI (con excepción del problema Nº1 del capítulo IV) no se presentaron de manera formal las guías didácticas, por razones de espacio y tiempo, pero aclaramos que es conveniente que los maestros elaboren sus propias guías.

Los problemas que se han presentado en este trabajo de graduación fueron seleccionados en base a dos aspectos: 1) la clasificación de las ecuaciones diferenciales y 2) las enseñanzas que se pueden obtener de cada problema o, mejor dicho, lo que el estudiante puede aprender en el proceso de solución de los mismos.

Para comprender mejor la significación del párrafo anterior, consideremos como caso hipotético que el lector de este trabajo sea un estudiante, por ejemplo de nuestro medio universitario, que haya tomado cursos de cálculo diferencial e integral pero que aún no haya hecho el curso de ecuaciones diferenciales. Ahora preguntémonos: ¿Cuánto puede aprender este personaje hipotético si lee atentamente este trabajo tratando de entender y resolver cada uno de los problemas y ejercicios aquí propuestos?

Naturalmente que la pregunta anterior no es fácil de contestar; sin embargo la misma ha estado subyacente en la elaboración y estructura que se le ha dado al presente trabajo y ha sido tomada muy en cuenta en la selección de los problemas y ejercicios que aquí se han expuesto.

El lector atento podrá observar múltiples relaciones entre los diferentes problemas y ejercicios, por ejemplo la ecuación de Bernoulli (específicamente el ejercicio de la ec. 3.99) y su relación con la ecuación logística en los problemas Nº1 (ec. 5.3) y Nº3 (ec. 5.9) del Capítulo V.

En el Capítulo III se cubre casi todo lo relacionado con la separación de variables y se complementa con el Capítulo V. La noción de "factor integrante" se desarrolla bajo la visión de una estructura conceptual y las ecuaciones de Bernoulli y de Riccati se tratan (brevemente) en su dimensión histórica y metodológica.

En el Capítulo IV, con sólo tres problemas se cubre casi todo lo que un estudiante debe saber acerca de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes y se incursiona en ecuaciones de tercer orden. En este mismo capítulo con el problema Nº4 y ejercicios seleccionados en base a criterios didácticos se cubre el caso

“equidimensional” de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables, se retroalimenta la búsqueda de la segunda solución linealmente independiente, se incursiona en ecuaciones diferenciales lineales de tercer orden (equidimensionales) y se presenta el procedimiento para obtener soluciones reales a partir de raíces imaginarias de una ecuación característica.

En el Capítulo V se ha pretendido mostrar una pequeña ventana de toda la panorámica del campo de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales. El modelado y la búsqueda de estrategias de solución están implícitos, pero presentes a la vista de quien tenga ojos para realizar una lectura crítica (la segunda lectura filosófica).

Con el Capitulo VI se ha querido mostrar, aunque sea brevemente, que las ecuaciones diferenciales son una base fundamental para alcanzar mayores niveles de conocimiento del Análisis Matemático y se aprovecha para mostrar un método se solución (separación de variables) de ecuaciones diferenciales parciales y el método de solución por series infinitas (método de Frobenius) para ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables cuando éstas no son susceptibles de resolverse mediante procedimientos más sencillos. También se pretende abrir una pequeña ventana que nos permita visualizar el enorme potencial de las transformadas de Laplace en la solución de problemas de diferente índole. Con los problemas 5 y 6 de este último capítulo se quiere hacer del conocimiento de algunos lectores que también existen las Ecuaciones Integrales. Por último, con este capítulo, como se sugiere en la introducción de estas conclusiones, se ha querido presentar una pequeña muestra de la capacidad que pueden desarrollar los estudiantes mediante la utilización adecuada de este valioso recurso didáctico conocido como RESOLUCION DE PROBLEMAS.

Si algunos de nuestros lectores son capaces de sorprenderse de lo que se puede aprender con solo 25 problemas y algunos ejercicios estructurados con los criterios metodológicos de la resolución de problemas nos daremos por satisfechos y los exhortamos

para que pongan en práctica esta forma alternativa de enseñar no solo las ecuaciones diferenciales sino también otras áreas importantes de la Matemática.

IV. CONCLUSIONES EXPERIMENTALES.

A pesar de que son varios años de experiencia (a partir de haber recibido los cursos antes mencionados) de estar poniendo en práctica esta forma alternativa de orientar el trabajo de los estudiantes de la licenciatura en física, nos limitaremos a señalar que toda nuestra actividad docente ha estado orientada a lograr un nivel de participación cada vez mayor por parte de los estudiantes y que nos sentimos satisfechos por los logros alcanzados, lo cual se refleja en las mismas clases cuando los estudiantes motivados a participar van construyendo los aspectos conceptuales de manera natural, casi espontánea.

Casi todos los problemas aquí presentados, como se ha indicado en varias ocasiones a lo largo de este trabajo, han sido resueltos por los estudiantes, en las tareas, en las sesiones de discusión de problemas y en los exámenes. En varias ocasiones hemos puesto problemas de difícil solución en los exámenes parciales y hemos presenciado como los estudiantes con un poco de orientación han sido capaces de obtener éxito en la solución de los mismos, con lo cual adicionalmente se mejora su autoestima, la confianza en si mismo, y principalmente la motivación necesaria para asumir los retos que les demanda su propia formación profesional.
En las sesiones de discusión de problemas hemos dejado que se organicen en uno o varios grupos y que surja de ellos mismos, en forma espontánea, el estudiante que asuma como coordinador de cada grupo. En algunas ocasiones el autor ha asumido el papel de moderador.

IV. TRABAJOS FUTUROS.

En la actualidad, el autor ha tomado la iniciativa de formar un Club de Matemáticas, especialmente en el área de la Matemática aplicada, con el objeto de crear conocimientos que

puedan ser útiles para investigaciones posteriores en el área de las Ciencias Naturales, las cuales dentro de nuestra Facultad (a excepción de Física) se han descuidado en lo que respecta a la educación matemática. El autor está dispuesto a realizar esfuerzos en este sentido, dado que lamentablemente se percibe una tendencia a eliminar, o al menos a reducir el contenido matemático de algunas carreras de nuestra Facultad.

Como miembro y actual coordinados de la Comisión Curricular de nuestra Facultad estoy en pláticas con algunos compañeros docentes de las Escuelas de Biología y de Química para discutir esta situación y principalmente para tomar iniciativas tendientes a proporcionar capacitación en matemáticas para estas carreras.

También hemos platicado con el Dr. Simón Peña acerca de la posibilidad de realizar conjuntamente trabajos de investigación en el área de las Ecuaciones Diferenciales. En los próximos días hablaremos formalmente acerca de la elaboración de proyectos en este sentido. Además, manifiesto mi disposición de trabajar con otros colegas en el modelado de diferentes tipos de problemas, especialmente en el área de las Ciencias Naturales.

V. RECOMENDACIÓN.

Para finalizar recomendamos a las autoridades de la UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR y de nuestra FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA que se hagan los esfuerzos necesarios para darle continuidad a los planes de estudio de la Maestría en Didáctica de la Matemática, dado que esto contribuiría grandemente a la formación de profesionales en la enseñanza de la Matemática que puedan ayudar a formar los cuadros docentes para atender con más eficiencia la enseñanza de esta ciencia tan importante para el futuro desarrollo de nuestro país.

BIBLIOGRAFÍA.

1. **Polya, G. HOW TO SOLVE IT. Princenton University Press. New York, 1986.**
2. **Lakatos, I. MATEMATICA, CIENCIA Y EPISTEMOLOGIA. A. E., Madrid, 1978.**
3. **Guzmán, M. ENFOQUE HEURISTICO DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. Aula Abierta Nº57. ICE de la Universidad de Zaragoza, 1985.**
4. **Academia de Ciencia y Filosofía de la Habana. METODOLOGÍA DEL CONOCIMIENTO CIENTÍFICO. Ediciones Quinto Sol; La Habana, 1989.**
5. **Hernández, R; Fernández, C; Lucio, P. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN. Mac Graw-Hill; México, 2003.**
6. **Boyer, C. HISTORIA DE LA MATEMATICA. Alianza Universidad; Madrid, 1969.**
7. **Halliday, D; Resnick, R; Krane, K. FISICA. 4ª Ed. CECSA, México, 1996.**
8. **Zemansky, M; Dittman, R. CALOR Y TERMODINAMICA. 6ª Ed. Mac Graw_Hill, México, 1990.**
9. **Reitz, J; Milford, F; Christy, R. FUNDAMENTOS DE LA TEORIA ELECTROMAGNETICA. 3ª Ed. Fondo Educativo Interamericano; México, 1984.**
10. **Braun, M. ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES. Grupo Editorial Iberoamérica; Madrid, 1990.**
11. **Blanchard, P; Devany, R; may, G. ECUACIONES DIFERENCIALES. Thomson Editores; México, 1999.**
12. **Zill, D. ECUACIONES DIFERENCIALES. 6ª Ed. Thomson Editores; México, 2000.**

13. **Haeussler, E; Paul, R. MATEMATAICAS PARA ADMINISTRACIÓN, ECONOMÍA, CIENCIAS SOCIALES Y DE LA VIDA. 8ª Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana; México, 2001.**
14. **Arfken, G; Weber, H. MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS. 5ª Ed. Academic Press, New York, 2001.**