

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA



“Introducción a la Teoría de Decisión Estadística.”

**TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO Y TÍTULO
DE:**

LICENCIADA EN ESTADÍSTICA

PRESENTAN:

**ALVARENGA ALVARENGA, ADA RAQUEL.
BLANCO HERNÁNDEZ, CARMEN ALICIA.
VASQUEZ VASQUEZ, DANYA BEATRIZ.**

**ASESOR DE TRABAJO DE GRADUACIÓN
DOCTOR JOSÉ NERYS FUNES TORRES.**

FEBRERO, 16, 2009

CIUDAD UNIVERSITARIA, SAN SALVADOR, EL SALVADOR.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR.

MASTER RUFINO ANTONIO QUEZADA SANCHEZ.
RECTOR.

MASTER MIGUEL ANGEL PEREZ RAMOS.
VICERRECTOR ACADÉMICO.

MASTER OSCAR NOÉ NAVARRETE ROMERO.
VICERRECTOR ADMINISTRATIVO.

LICENCIADO DOUGLAS VLADIMIR ALFARO CHAVEZ.
SECRETARIO GENERAL.

DOCTOR RENE MADECADEL PERLA JIMENEZ.
FISCAL GENERAL.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA.

DOCTOR RAFAEL ANTONIO GÓMEZ ESCOTO
DECANO.

LICENCIADA MARTHA NOEMÍ MARTÍNEZ HERNÁNDEZ.
VICEDECANO.

LICDA. MARÍA TRINIDAD TRIGUEROS DE CASTRO.
SECRETARIO.

DOCTOR JOSÉ NERYS FUNES TORRES
ASESOR DE TESIS.

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIA.

Dedico este trabajo con mucho cariño especialmente:

A DIOS: Por acompañarme siempre en todo momento de dificultad, permitirme terminar satisfactoriamente mis estudios, y por cuidar de mi vida en todo momento.

A MIS PADRES: Raúl Alvarenga y Rosa de Alvarenga. Porque gracias, a su cariño, guía y consejos he llegado a realizar uno de los anhelos más grandes de la vida, fruto del inmenso apoyo, amor y confianza que en mi se depositó y con los cuales he logrado terminar mis estudios profesionales que constituyen el legado más grande que pudiera recibir y por lo cual les viviré eternamente agradecida.

A MI ESPOSO: William Elías. Agradezco de todo corazón a mi esposo por su amor, comprensión, apoyo, estímulo y motivación que me ha brindado durante los últimos tres años de mi carrera profesional.

Agradezco el apoyo que he recibido en el transcurso de mis estudios a:

A todos mis familiares y amigos: Que de una u otra manera estuvieron pendientes a lo largo de este proceso, brindado su apoyo incondicional.

A mi director de tesis: Dr. José Nerys Funes Torres. Por su generosidad al brindarme la oportunidad de recurrir a su capacidad y experiencia científica, por sus valiosas sugerencias y acertados aportes durante el desarrollo de este trabajo.

ADA RAQUEL ALVARENGA ALVARENGA.

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIA.

Dedico este trabajo con mucho cariño especialmente:

A DIOS TODO PODEROSO: por darme la vida, la fuerza para seguir adelante, por cuidarme cada día y permitirme concluir mi carrera.

A MI FAMILIA: Blanca, Nohemy, Adrian y Gerardo a quienes agradezco por su esfuerzo y apoyo incondicional brindado en el transcurso de mis estudios y por ayudarme a crecer en mi formación personal y académica.

Agradezco el apoyo que he recibido en el transcurso de mis estudios a:

A mis amig@s: por darme cada día su confianza, ánimos, esperanzas y consejos para ser una persona de bien a la sociedad.

A mis compañeras de Tesis: Raquel y Danya gracias por su paciencia, comprensión y esfuerzo para terminar este trabajo de la mejor forma posible, y por su amistad en estos años de estudios.

A nuestro Asesor de Tesis: Dr. José Nerys Funes Torres por su profesionalismo, tiempo, paciencia y dedicación para el desarrollo de este trabajo, que sin su apoyo incondicional no hubiese sido posible.

CARMEN ALICIA BLANCO HERNÁNDEZ

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIA

Dedico este trabajo especialmente:

A DIOS TODO PODEROSO: Ya que gracias a ti Dios he logrado mi meta, ya que tu has sido mi guía y fortaleza en los momentos más difíciles en la vida. ***“Muchas Gracias”***.

A MIS PADRES: Pedro Pablo Vásquez Rivas y Elsa Beatriz Vásquez. A quienes agradezco su esfuerzo y comprensión, ya que con su trabajo y dedicación he logra mí meta.

Agradezco el apoyo que he recibido en el transcurso de mis estudios a:

A mis Hermanas: Iveth, Silvana y Paula, ya que sin su apoyo y cariño no hubiera sido posible seguir adelante. **A mis sobrinos:** Jeremy y Zayda que son mi inspiración para seguir avanzando y ser una mejor persona día a día. **A mis amig@s:** Por su apoyo incondicional y amistad a lo largo de la carrera, especialmente a Ingrid y Karina.

A mis compañeras de Tesis: Carmen y Ada les doy las gracias por el esfuerzo y dedicación para lograr una de nuestras metas.

A nuestro Asesor de Tesis: Dr. José Nerys Funes Torres por su comprensión y profesionalismos. Además por su disposición a orientarnos en la elaboración de nuestra tesis ya que sin su apoyo este trabajo no hubiera sido posible.

DANYA BEATRIZ VASQUEZ VASQUEZ.

TABLA DE CONTENIDO.

INTRODUCCIÓN.....	9
OBJETIVOS.....	11
OBJETIVO GENERAL.....	11
CAPÍTULO 1	12
1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE DECISIÓN ESTADÍSTICA.....	12
1.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS.....	12
1.2 TEORÍA DE LA DECISIÓN.....	13
1.3 CARACTERÍSTICAS Y FASES DEL PROCESO DE DECISIÓN:.....	14
1.4 ELEMENTOS DE UN PROBLEMA DE DECISIÓN:.....	15
1.5 TIPOS DE DECISIÓN.....	16
1.6 CLASIFICACIÓN DE LOS PROCESOS DE DECISIÓN:	17
1.7 TABLA DE DECISIÓN.....	21
1.8 ÁRBOL DE DECISIÓN.....	23
CAPÍTULO 2	24
2. TOMA DE DECISIONES BAJO DIFERENTES AMBIENTES.....	24
2.1 TOMA DE DECISIONES BAJO CERTIDUMBRE.....	24
2.2 CRITERIOS DE DECISIÓN BAJO CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE.....	30
2.2.1 Criterio Maximín o de Wald	31
2.2.2 Criterio Maximax, optimista	35
2.2.3 Criterio de Hurwicz (1951)	37
2.2.4 Criterio de Laplace o razón insuficiente.....	40
2.2.5 Criterio de Savage , Minimax o pérdida de oportunidad.....	42
2.2.6 El Modelo de Amplitud (EMA).....	47
2.2.7 Método Minimax Ampliado (Minimax- A).....	51
2.3 CRITERIOS DE DECISIÓN BAJO CONDICIONES DE RIESGO.....	51
2.3.1 Tablas de Decisión bajo Riesgo.....	51
2.3.2 Reglas de decisión.....	53
2.3.3. Criterio del valor esperado.....	54

2.3.4. Criterio de pérdida de oportunidad esperada	56
2.3.5. Valor esperado de información perfecta	62
2.3.6. Criterio de mínima varianza con media acotada	63
2.3.7. Criterio de media con varianza acotada	65
2.3.8. Criterio de dispersión	66
2.3.9. Criterio de la probabilidad máxima	68
2.3.10. Máxima verosimilitud	70
2.3.11. Las curvas de utilidad	71
3.3.12. Modelo de Amplitud para Riesgo e Incertidumbre (MARI)	76
CAPÍTULO 3	84
3. ÁRBOL DE DECISIÓN	84
3.1 INTRODUCCIÓN.....	84
3.2 DEFINICIÓN DE ÁRBOL DE DECISIÓN	84
3.3 VENTAJAS E INCONVENIENTES EN EL ÁRBOL DE DECISIÓN	85
3.4 ELEMENTOS QUE INTERVIENEN EN UN ÁRBOL DE DECISIÓN	86
3.5 ETAPAS PARA EL ANÁLISIS DE PROBLEMAS UTILIZANDO EL ÁRBOL DE DECISIÓN.....	87
3.6 CONSTRUCCIÓN DEL ÁRBOL DE DECISIÓN.....	88
3.7 ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES A LOS NODOS DE SUCESOS INCIERTOS	89
3.8 EVALUACIÓN EN LOS PUNTOS TERMINALES.....	90
3.9 EVALUACIÓN DEL ÁRBOL DE DECISIÓN.....	90
3.10 ELABORACIÓN DE UN ÁRBOL DE DECISIÓN SECUENCIAL.....	102
3.11 VALOR ESPERADO DE LA INFORMACIÓN MUESTRAL (VEIM)	110
CAPÍTULO 4	111
4. ANALISIS DE DECISION MULTICRITERIO	111
4.1. ANTECEDENTE HISTÓRICO	111
4.2. ESTRUCTURA DE UN PROCESO DE DECISIÓN	112
4.3. ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS	114
4.4. CRITERIO DE OPTIMALIDAD PARETIANA.....	115
4.5. NORMALIZACIÓN DE LOS CRITERIOS.....	116
4.6. PROCEDIMIENTOS DE NORMALIZACIÓN DE LOS CRITERIOS.....	116

4.7. MÉTODOS DE SOBRE CLASIFICACIÓN (ELECTRE).....	118
4.8. PROCESO ANALÍTICO JERÁRQUICO.....	130
4.8.1. ¿En qué consiste el AHP?	131
4.8.2. Base Matemática del AHP	132
CAPÍTULO 5	151
5. APLICACIONES DE ANÁLISIS DE DECISIÓN ESTADÍSTICA.....	151
5.1. APLICACIÓN DE DECISIONES BAJO RIESGO PARA EL CASO DE UN REPARTIDOR DE PERIÓDICOS.	151
5.2 APLICACIÓN DE ÁRBOL DE DECISIÓN.	153
5.3. APLICACIÓN DE DECISIONES MULTICRITERIO, PARA LA ELECCIÓN DE UN VEHÍCULO DE CARGA.....	163
CAPÍTULO 6	179
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	179
6.1. CONCLUSIONES.....	179
6.2. RECOMENDACIONES.....	180
BIBLIOGRAFÍA	181
ANEXOS	184

INTRODUCCIÓN.

La toma de decisiones es el proceso mediante el cual se realiza una elección entre las alternativas o formas para resolver diferentes situaciones de la vida, estos se pueden presentar en diversos contextos, tanto a nivel laboral, familiar, sentimental, etc. Es decir, en todo momento se toman decisiones, la diferencia entre cada una de estas, es el proceso o la forma en la cual se llega a ella. La toma de decisiones consiste, básicamente en elegir una alternativa entre las disponibles, a los efectos de resolver un problema actual o potencial.

Para tomar una decisión no importando su naturaleza, es necesario, conocer, comprender y analizar un problema, para así poderle dar solución; en algunos casos por ser tan simples y cotidianos este proceso se realiza de forma implícita y se soluciona muy rápidamente pero existen otros casos en los cuales las consecuencias de una mala elección pueden tener grandes repercusiones, por lo tanto es necesario realizar un proceso estructurado que recopile la mayor cantidad de información relevante.

Ante esta situación la presente tesis esta estructurada en seis capítulos, organizados de la siguiente forma

En el primer capítulo se definen los conceptos fundamentales que intervienen en la Teoría de decisión, tales como criterios, alternativas, tablas de decisión, los cuales son de ayuda para la comprensión de los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo se estudian tres tipos de ambientes de decisión los cuales son Certidumbre, Incertidumbre y Riesgo, en cada uno de ellos conocemos las alternativas y los estados de la naturaleza. Además, intervienen diferentes reglas o criterios con los cuales podemos encontrar la mejor alternativa de solución a un problema determinado.

En el tercer capítulo se estudia el árbol de decisión que no es más que un método gráfico de modelización en el que se representan y comparan los resultados esperados de cada una de las posibles alternativas de elección propuestas por el decisor, obteniendo así la mejor ruta de solución ante una situación determinada. Generalmente el árbol de decisión es utilizado en el ambiente de riesgo debido a que hace uso de las probabilidades.

En el cuarto capítulo se estudian los problemas que involucran modelos multicriterio discretos, es decir, aquellos que hacen uso de más de un atributo y tienen soluciones finitas, estos están diseñados para obtener la mejor alternativa a través de los atributos valiosos, que deben ser evaluados como componentes de los criterios.

En el quinto capítulo se pondrá en práctica la teoría estudiada a través de aplicaciones reales, como en el caso de un repartidor de periódicos, que desea saber el número de periódicos necesarios para poder satisfacer la demanda diaria, también se desea decidir si lanzar o no un nuevo producto al mercado. Además, se estudiará el caso en el que se desea adquirir un vehículo, considerando una serie de criterios o atributos que son de interés para el comprador. Para resolver dichos casos, lo haremos con ayuda de software estadístico.

En capítulo seis se realiza la conclusión del trabajo y sus respectivas recomendaciones para trabajos e investigaciones futuras.

OBJETIVOS.

OBJETIVO GENERAL.

- Estudiar y sistematizar la teoría de decisión estadística y sus aplicaciones.

OBJETIVOS ESPECIFICOS.

- Estudiar los diferentes criterios utilizados en la teoría de decisión.
- Estudiar el árbol de decisión como herramienta para la toma de decisiones.
- Estudiar el modelo multicriterio en la toma de decisiones.
- Realizar aplicaciones en casos reales de la teoría de decisión, utilizando un software estadístico.

CAPÍTULO 1

1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE DECISIÓN ESTADÍSTICA.

1.1 Antecedentes Históricos.

Existen diferentes enfoques en la toma de decisión, sin embargo, el área de decisión bajo condiciones de incertidumbre representa el principal esfuerzo de investigación en la teoría de la decisión. El procedimiento se basa en el valor esperado ya conocido en el siglo XVII. El filósofo francés Blaise Pascal ya lo enunciaba en sus famosas dudas, contenidas en su *Pensamientos*, publicado en 1670. La idea del valor esperado consiste en que cuando afrontamos un número de acciones, cada una de ellas con un número de resultados asociados a una probabilidad diferente, el procedimiento racional consiste en identificar todos los posibles resultados de las acciones, determinar sus valores (positivos o negativos) y sus probabilidades asociadas que resultan de cada acción, posteriormente se multiplican los valores anteriores obteniendo así el valor esperado. La acción elegida deberá ser aquella que proporcione el mayor valor esperado de entre las calculadas. En 1738, Daniel Bernoulli publicó un documento influyente denominado *Exposición de una nueva Teoría sobre la Medida del Riesgo*, en la que emplea la paradoja de San Petersburgo para mostrar que el valor esperado debe ser normativamente erróneo. Proporciona un ejemplo con un mercante holandés que intenta decidir si asegurar la carga que quiere enviar desde Ámsterdam a San Petersburgo en invierno, cuando se sabe que hay un 5% de posibilidad de perder la carga durante el viaje.

En su solución, define por primera vez la función de utilidad y calcula la utilidad esperada en vez del valor financiero.

En el siglo XX el interés por este tema fue reiniciado por un artículo de Abraham Wald's en 1939 señalando los dos temas centrales de la estadística ortodoxa de aquel tiempo, que son: los test de hipótesis estadísticas y la teoría de la estimación estadística, podrían ser temas especiales del problema general de la decisión. Este artículo introduce muchos de los ingredientes actuales de la moderna teoría de la decisión, incluyendo funciones de pérdida, función de riesgo, reglas de decisión admisibles, distribuciones a priori, teoría de Bayes de la decisión, y reglas minimax para la toma de decisión. La frase "teoría de la decisión" fue empleada por primera vez en el año 1950 por E. L. Lehmann.

1.2 Teoría de la decisión.

La Teoría de la decisión es una área interdisciplinaria de estudio, relacionada con casi todos los participantes en ramas de la ciencia, ingeniería y así como las actividades sociales. Conciérne a la forma y al estudio del comportamiento y fenómenos psíquicos de aquellos que toman las decisiones (reales o ficticios), así como las condiciones por las que deben ser tomadas las decisiones óptimas.

El problema de la Decisión, motivado por la existencia de ciertos estados de ambigüedad que constan de proposiciones verdaderas (conocidas o desconocidas), es tan antiguo como la vida misma. Podemos afirmar que todos los seres vivos, aún los más simples, se enfrentan con problemas de decisión. Por lo tanto tomar decisiones no es algo desconocido para nosotros, todo ser humano que día a día se enfrenta a este mundo debe tomar decisiones, en la mayoría de los casos estas son triviales. Es probable

que al tomar tantas, algunas parezcan automáticas, por lo que hay que tener especial cuidado con éstas. Algunas veces hay situaciones en que las decisiones son importantes y no solo involucran a una sola persona por lo que se necesita un esfuerzo mental para tomar la decisión que más nos favorezca ya que las buenas decisiones no se logran fácilmente, son el resultado de un arduo y ordenado proceso mental. Las condiciones cambian, así que no podemos exponernos a los riesgos de una respuesta mecánica o un enfoque intuitivo. De hecho, las exigencias para decisiones rápidas pueden ser tan grandes que nos pueden llevar, sin darnos cuenta, a una trampa. Por lo tanto, la toma de decisiones es algo que nos concierne a todos, tanto si realizamos la elección como si sufrimos sus consecuencias.

Conforme aumenta la complejidad del ser vivo, aumenta también la complejidad de sus decisiones y la forma en que éstas se toman. Así, pasamos de una toma de decisiones guiada instintivamente, a procesos de toma de decisiones que deben estar guiados por un pensamiento racional en el ser humano. La Teoría de la Decisión tratará, por tanto, el estudio de los procesos de toma de decisiones desde una perspectiva racional.

Análisis de decisión.

El análisis de decisión se puede usar para seleccionar una estrategia cuando quien tiene que tomar decisiones enfrenta varias alternativas y un patrón incierto de eventos futuros.

1.3 Características y fases del proceso de decisión:

Un proceso de decisión presenta las siguientes características principales:

- Existen al menos dos posibles formas de actuar, que llamaremos alternativas o acciones, excluyentes entre sí, de manera que la actuación según una de ellas imposibilita cualquiera de las restantes.

- Mediante un proceso de decisión se elige una alternativa, que es la que se lleva a cabo.
- La elección de una alternativa ha de realizarse de modo que cumpla un fin determinado.

El proceso de decisión consta de las siguientes fases fundamentales:

- Predicción de las consecuencias de cada actuación. Esta predicción deberá basarse en la experiencia y se obtiene por inducción sobre un conjunto de datos. La recopilación de este conjunto de datos y su utilización entran dentro del campo de la Estadística.
- Valoración de las consecuencias de acuerdo con una escala de bondad o deseabilidad. Esta escala de valor dará lugar a un sistema de preferencias.
- Elección de la alternativa mediante un criterio de decisión adecuado. Este punto lleva asociado el problema de elección del criterio más adecuado para nuestra decisión, cuestión que no siempre es fácil de resolver de un modo totalmente satisfactorio.

1.4 Elementos de un problema de decisión:

En todo problema de decisión pueden distinguirse una serie de elementos característicos:

- El decisor, encargado de realizar la elección de la mejor forma de actuar de acuerdo con sus intereses.
- Las alternativas o acciones, que son las diferentes formas posibles de actuar, de entre las cuales se seleccionará una. Deben ser excluyentes entre sí.
- Los posibles estados de la naturaleza, término mediante el cual se designan a todos aquellos eventos futuros que escapan al control del decisor y que influyen en el proceso.

- Las consecuencias o resultados que se obtienen al seleccionar las diferentes alternativas bajo cada uno de los posibles estados de la naturaleza.
- La regla de decisión o criterio, que es la especificación de un procedimiento para identificar la mejor alternativa en un problema de decisión.

1.5 Tipos de decisión

Las decisiones se pueden clasificar teniendo en cuenta diferentes aspectos, como lo es la frecuencia con que se presentan. Se clasifican en cuanto a las circunstancias que afrontan estas decisiones sea la situación para decidir y cómo decidir.

En cualquier organización podemos identificar dos tipos o clases de decisiones:

- a) Las decisiones programadas (o esquemas de ejecución), son procedimientos repetitivos y rutinarios. Se explican mediante un conjunto de reglas o procedimientos de decisión. Se reflejan en libros sobre reglas, tablas de decisión y reglamentaciones. Implican decisiones bajo certeza en razón de que todos los resultados o consecuencias son conocidos de antemano.

Entre las técnicas tradicionales para las decisiones programadas, las estructuras de organización son instrumentos de decisión que dan motivaciones comunes, definen informaciones y responsabilidades y elaboran los objetivos de cada unidad de la organización (que se convierten en las metas secundarias de la organización; sus fines son sus metas principales).

- b) Las decisiones no programadas, se refieren a los problemas no estructurados o de gran importancia. A diferencia de las anteriores no tienen reglas o procedimientos preestablecidos.

Las decisiones no programadas abordan problemas poco frecuentes o excepcionales. Si un problema no se ha presentado con la frecuencia suficiente como para que lo cubra una política o si resulta tan importante que merece trato especial, deberá ser manejado como una decisión no programada.

Herbert Simon considera que entre la década de 1950 y 1960 hubo una revolución en las técnicas y herramientas de decisiones no programadas, tan importante como fue la revolución industrial, que se debe al surgimiento de nuevos métodos dependientes de la investigación de operaciones en su más amplio sentido: análisis matemático, modelos en condiciones de riesgo e incertidumbre, probabilidades, árboles de decisión, construcción de modelos, optimización y simulación.

1.6 Clasificación de los procesos de decisión:

Los procesos de decisión se clasifican de acuerdo al grado de conocimiento que se tenga sobre el ambiente o contexto, es decir sobre el conjunto de factores o variables no controladas por el decisor y que pueden tener influencia sobre el resultado final.

En este sentido se realiza una clasificación de los diferentes criterios bajo los cuales se toma una decisión.

- **Criterio de decisión bajo condición de certidumbre.**

La toma de decisión bajo condición de certidumbre ocurre cuando el decisor conoce el estado de la naturaleza con absoluta certeza.

- **Criterio de decisión en condición de incertidumbre.**

La toma de decisión en condición de incertidumbre se utiliza cuando, la probabilidad de que ocurra un estado de la naturaleza es absolutamente desconocida. El carácter de incertidumbre está asociado con el hecho que nos damos cuenta de que somos incapaces de estimar o calcular las probabilidades asociadas a cada uno de los estados naturales.

Existen algunas reglas o criterios de decisión en ambiente de incertidumbre, que conducen a escoger el mejor curso de acción de acuerdo al criterio elegido, a continuación se presentan:

- a) Criterio Maximín o de Wald.

Este criterio sugiere que quien toma las decisiones siempre debe ser pesimista. Lo que da por resultado un criterio de decisión máximo. Lo que significa que el decisor toma el mejor resultado para el estado de la naturaleza más desfavorable.

- b) Criterio Maximax.

El criterio maximax consiste en elegir aquella alternativa que proporcione el mayor nivel de optimismo posible. Este criterio corresponde a un pensamiento optimista, ya que el decisor supone que la naturaleza siempre estará de su parte, por lo que siempre se presentará el estado más favorable.

- c) Criterio de Hurwicz.

Es un criterio intermedio entre el criterio maximax y el maximín. También se le llama criterio de realismo.

d) Criterio de Savage.

Este criterio consiste en que después de saber el resultado el decidor pueda arrepentirse de haber escogido ese curso de acción, puesto que tal vez hubiera preferido escoger un curso de acción diferente, procurando de que este arrepentimiento se reduzca al mínimo.

e) Criterio de Laplace.

Este método supone que todos los diversos estados de la naturaleza tienen igual probabilidad de ocurrencia, o sea que es probable que ocurran todos los estados de la naturaleza.

f) El Modelo de Amplitud (EMA),

Actúa como castigo sobre la amplitud, y es una combinación entre Hurwicz y Laplace, utilizando un factor β de corrección.

- **Criterio de decisión bajo condición de riesgo.**

La toma de decisión bajo condición de riesgo se da cuando existe conocimiento de la probabilidad que un estado de la naturaleza ocurra; es decir el decidor debe prever la probabilidad de ocurrencia de cada uno de estos estados.

Normalmente, las probabilidades de ocurrencia de los estados de la naturaleza se conoce mediante la determinación de la frecuencia con que dichos estados ocurrieron en el pasado; o mediante criterios personales o subjetivos.

Los principales criterios de decisión en ambiente de riesgo son:

a) Criterio del valor esperado.

Este criterio consiste en elegir el máximo valor esperado.

b) Criterio de mínima varianza con media acotada.

Este criterio consiste en elegir la menor varianza, y de esta forma se consigue la elección de una alternativa con poca variabilidad en sus resultados.

c) Criterio de media con varianza acotada.

Este criterio consiste en elegir la alternativa que posee mayor valor esperado, consideran exclusivamente las alternativas, cuya varianza sea menor o igual que una constante K fijada por el decisor.

d) Criterio de la dispersión.

Aquí se elige la alternativa que posee el máximo valor medio corregido.

e) Criterio de la probabilidad máxima.

Consiste en elegir alternativa con mayor probabilidad asociada.

f) Criterio de verosimilitud.

Consiste en aplicar el método del valor esperado, pero considerando sólo el estado de la naturaleza que es mayor.

g) Curvas de utilidad.

Mide el nivel de riesgo del decisor (adverso, propenso, indiferente al riesgo).

h) Modelo de Amplitud para Riesgo e Incertidumbre (MARI).

Es una ampliación y funciona igual que el El Modelo de Amplitud (EMA).

1.7 Tabla de decisión

Es una matriz de renglones y columnas que indican condiciones y acciones. Las reglas de decisión, incluidas en una tabla de decisión, establecen el procedimiento a seguir cuando existen ciertas condiciones. La tabla de decisión es un instrumento para dar respuesta a la cuestión fundamental en todo proceso de decisión

Muchos procesos de toma de decisiones pueden ser tratados por medio de tablas de **decisión**, en las que se representan los elementos característicos de estos problemas de la siguiente manera:

Los diferentes estados que puede presentar la naturaleza: e_1, e_2, \dots, e_n

- Las acciones o alternativas entre las que seleccionará el decisor:
 a_1, a_2, \dots, a_m
- Las consecuencias o resultados x_{ij} de la elección de la alternativa a_i cuando la naturaleza presenta el estado e_j .

Se supone, por simplicidad, la existencia de un número finito de estados y alternativas. El formato general de una tabla de decisión es el siguiente:

Tabla 1.1Tabla de decisión.

		Estados de la naturaleza			
Alternativas		e_1	e_2	...	e_n
	a_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
	a_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
	a_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}

¿Cuál es la mejor alternativa de elegir?

Para la elección de la alternativa más conveniente nos basaremos en el concepto de regla o criterio de decisión, que podemos definir de la siguiente forma:

Una regla o criterio de decisión es una aplicación que asocia a cada alternativa un número, que expresa las preferencias del decisor por los resultados asociados a dicha alternativa.

Notaremos por S a esta aplicación y $S(a)$ el valor numérico asociado por el criterio S a la alternativa a .

La descripción de los diferentes criterios de decisión que proporcionan la alternativa óptima será realizada de acuerdo con el conocimiento que posea el decisor acerca del estado de la naturaleza, es decir, atendiendo a la clasificación de los procesos de decisión:

- Tablas de decisión en ambiente de certidumbre.
- Tablas de decisión en ambiente de incertidumbre.
- Tablas de decisión en ambiente de riesgo.

Además de las tablas de decisión o matriz de decisión existe otra herramienta para el análisis de decisión que es llamado árbol de decisión.

1.8 Árbol de decisión.

Es un modelo gráfico empleado para representar las decisiones secuenciales, así como la incertidumbre asociada a la ocurrencia de eventos considerados claves.

El primer paso para resolver problemas complejos es descomponerlos en subproblemas más simples, los árboles de decisión ilustran la manera en que se pueden desglosar los problemas y la secuencia del proceso de decisión.

Muchos problemas de decisión del mundo real se conforman en una secuencia de decisiones dependientes, por lo que los árboles de decisión se utilizan en los análisis de procesos de decisión escalonados, mientras que la tabla de decisión es conveniente utilizarla en la toma de decisión en situaciones más simples.

CAPÍTULO 2

2. TOMA DE DECISIONES BAJO DIFERENTES AMBIENTES.

2.1 Toma de Decisiones bajo Certidumbre.

La certidumbre es la condición en que los individuos son plenamente informados sobre un problema, las soluciones alternativas son obvias, y son

claros los posibles resultados de cada decisión. En condiciones de certidumbre, la gente puede al menos prever (si no es que controlar) los hechos y sus resultados. Esta condición significa el debido conocimiento y clara definición tanto del problema como de las soluciones alternativas. Una vez que un individuo identifica soluciones alternativas y sus resultados esperados, la toma de la decisión es relativamente fácil. El responsable de tomar la decisión sencillamente elige la solución con el mejor resultado potencial. Por ejemplo, de un agente de compras de una imprenta se espera que ordene papel de calidad estándar al proveedor que ofrezca el menor precio y mejor servicio. Por supuesto que generalmente el proceso de toma de decisiones no es tan simple. Un problema puede tener muchas posibles soluciones, y calcular los resultados esperados de todas ellas puede ser extremadamente lento y costoso.

Entonces si se pueden predecir con certeza las consecuencias de cada alternativa de acción y los parámetros son conocidos entonces estaremos frente a una de toma de decisiones bajo certidumbre.

Otra manera de pensar en esto es que existe una relación directa de causa y efecto entre cada acto y su consecuencia. Por ejemplo si está lloviendo, ¿deberá llevarse un paraguas?, si hace frío, ¿deberá llevarse un abrigo?. Ya sea que se lleve o no el paraguas o el abrigo, las consecuencias son predecibles.

En la decisión con certidumbre, lo que se hace es obtener el resultado esperado para cada alternativa y seleccionar aquel que optimiza nuestra función objetivo.

El problema de decisión con certidumbre se reduce, por tanto, a un problema de optimización, ya que se trata de escoger la alternativa que conduzca a la consecuencia con mayor valor numérico asociado.

Básicamente, un problema de optimización puede expresarse en forma compacta como sigue:

$$\text{Max } \{f(x): x \in S\} \quad (1.1)$$

Ya que se trata de escoger la alternativa que conduzca a la consecuencia con mayor valor numérico asociado.

Donde:

- **S** es el conjunto de alternativas o conjunto factible. Se trata de un subconjunto de espacio euclídeo R^n , que puede contener un número finito o infinito de elementos.
- **f: S** → **R** es la denominada función objetivo, que asigna a cada alternativa una valoración, permitiendo su comparación.
- **x** representa el n-dimensional que describe cada elemento del conjunto factible. Cada una de sus componentes recibe el nombre de "*variable de decisión*".

Algunas de las técnicas para manejar la toma de decisiones bajo certidumbre (causa y efecto) son:

- Programación Lineal
- Análisis del punto de equilibrio
- Programación de producción y otros.

Para nuestro caso utilizaremos la programación lineal.

La programación lineal es una de las metodologías que más difusión ha experimentado en el ámbito de la investigación operativa. Su aplicación se

extiende desde la logística industrial hasta la construcción, existiendo aplicaciones en casi todas las industrias.

En esencia, esta técnica proporciona a través de la optimización matemática de una función lineal que modeliza un criterio sobre el que se toma la decisión. A esta función se le suele denominar “función objetivo”.

En la que intervienen las restricciones del problema las cuales determinan el número de soluciones factibles. Si más de una alternativa satisface todas las restricciones se deberá aplicar el criterio de objetivo y seleccionar entre todas las alternativas la más factible.

Por ejemplo. Si se elige una pieza de pan, puede quererse que esté rebanado y recién hecho. Si varias marcas satisfacen estas restricciones, puede aplicarse el objetivo de un consumo mínimo y escoger el más barato.

En otras palabras, la programación lineal es una técnica determinista la cual no incluye probabilidades y no hay duda con respecto a cual será la utilidad asociada. El objetivo y cada una de las restricciones se deben expresar como una relación lineal, de ahí el nombre de programación lineal.

Todos los problemas de PL (Programación Lineal) tienen cuatro propiedades en común:

1. Los problemas de PL buscan **maximizar o minimizar** una cantidad (generalmente beneficios o costos). Nos referimos a ello como la **Función Objetivo** de un PL. El principal objetivo de una empresa es maximizar los beneficios a largo plazo. En el caso de un sistema de distribución, el objetivo puede ser minimizar los costos de transporte.

2. La presencia de **restricciones** limita el grado en que podemos perseguir el objetivo. Por ejemplo, decidir cuántas unidades se deben fabricar para una línea de productos de una empresa está restringido por la disponibilidad de horas de mano de obra y máquinas. Se quiere por tanto, maximizar o minimizar una cantidad (función objetivo) sujeta a las limitaciones de recursos (restricciones).

3. Deben existir **diferentes alternativas** donde poder elegir. Por ejemplo, si una empresa fabrica tres productos, los directivos pueden utilizar PL para decidir cómo asignar entre ellos sus recursos de producción limitados (trabajo, máquinas y demás). Si no existen alternativas evidentes que seleccionar, no necesitaremos la PL.

4. La función objetivo y las restricciones de un PL deben ser expresadas en términos de **ecuaciones lineales** o inecuaciones.

Ejemplo 1.1:

Un herrero con 80 kg de acero y 120 kg de aluminio quiere hacer bicicletas de paseo y de montaña que quiere vender, respectivamente a 20 y 15 dólares cada una. Para sacar el máximo beneficio. Para la bicicleta de paseo empleará 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para la de montaña empleará 2 kg de ambos metales.

¿Cuántas bicicletas de paseo y de montaña venderá?

Sean las variables de decisión:

x = número de bicicletas de paseo vendidas.

y = número de bicicletas de montaña vendidas.

Tabla 2.1. Material empleado

	Acero	Aluminio
Paseo	1	3
Montaña	2	2

Función objetivo:

$f(x, y) = 20x + 15y$ máximo beneficio.

Restricciones:

Restricción A: $3x + 2y \leq 120$

Restricción B: $x + 2y \leq 80$

$y \geq 0$ y $x \geq 0$ ya que el número de unidades no debe ser negativo.

Soluciones básicas.

$3x + 2y = 120$; aluminio.

$x + 2y = 80$; acero.

Restricción A.

$3x + 2y = 120$ tenemos $(x=40, y=0)$

Restricción B

$x + 2y = 80$ tenemos $(x=0, y=40)$

Intersecciones de restricción A y B

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 120 \\ x + 2y = 80 \end{array} \right\} (x=20, y=30)$$

Valores de la función objetivo en los vértices:

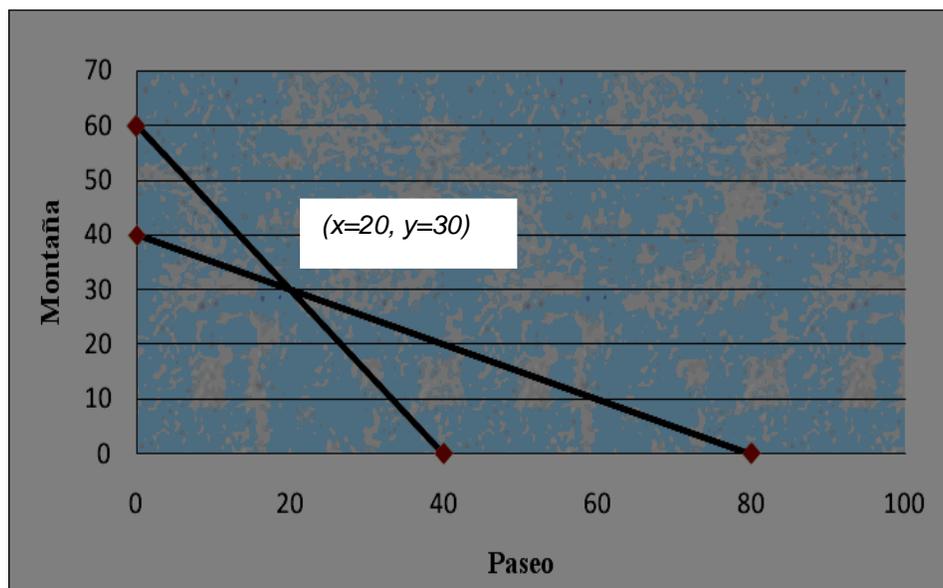
$$f(x, y) = 20x + 15y = 20(20) + 15(30) = 400 + 450 = 850 \text{ máximo de beneficio.}$$

$$f(A) = 20x + 15y = 20(40) + 15(0) = 800$$

$$f(B) = 20x + 15y = 20(0) + 15(40) = 600$$

Ha de vender 20 bicicletas de paseo y 30 de montaña para obtener un beneficio máximo de 850 dólares.

Gráfico 1. Cantidad de bicicletas.



2.2 Criterios de Decisión bajo Condiciones de Incertidumbre.

A lo largo de la vida todas estamos destinados a tomar decisiones, y siempre hay incertidumbre sobre el futuro, pero también puede haber incertidumbre sobre eventos presentes y pasados. La incertidumbre nos rodea y su medición numérica puede ayudarnos a lograr coherencia en el manejo de este importante componente de las decisiones.

La incertidumbre puede ser definida como la falta de conocimiento preciso o desconocimiento de las causas que determinan el comportamiento de un sistema real o las variable que definen el modelo respectivo, sea ésta cualitativa o cuantitativa.

El termino incertidumbre puede llegar a confundirse con el termino riesgo, como es el caso de Hiller (1963) hablaba de riesgo e incertidumbre como si fuera la misma situación. Por otro lado Murriss (1964) hace distinción entre riesgo e incertidumbre, lo cierto es que existen grados de incertidumbre y en la medida en que ella disminuye con la información recolectada se puede manejar en forma analítica cada vez más.

Los casos de riesgo como lo define Morris, son muy particulares y los más comunes son los relacionados a los juegos (Loterías, ruletas, rifas, etc.). O con decisión a cuyos resultados posibles se les ha dado una distribución de probabilidad, para la incertidumbre por el contrario no se posee información suficiente como para asignarle una distribución de probabilidad.

El ambiente es de incertidumbre cuando cada decisión puede dar lugar a una serie de consecuencias a las que no puede asignarse una distribución de probabilidad, bien por que no sea conocida o porque no tenga sentido hablar de ella.

Existen dos clases de incertidumbre:

- Estructurada: No se sabe que puede pasar entre diferentes alternativas, pero si se conoce que puede ocurrir entre varias posibilidades.
- No Estructurada: No se sabe que puede ocurrir ni las probabilidades para las posibles soluciones, es decir no se tiene ni idea de que puede pasar.

Existen distintos criterios para estudiar la incertidumbre los cuales son los siguientes.

1. Criterio Maximín, pesimista o Wald
2. Criterio Maximax, optimista
3. Criterio de Hurwicz
4. Criterio de Laplace.
5. Criterio de Savage.
6. Criterio EMA
7. Criterio Minimax-EMA

Antes de definir cada uno de los criterios de decisión debemos tener en cuenta que el decisor no tiene un oponente inteligente. Se dice que la “naturaleza” es el oponente y que no existe razón para creer que la naturaleza se proponga provocar pérdidas al decisor.

Si existe un oponente inteligente, se aplicará otros criterios correspondientes a la teoría de juegos.

2.2.1 Criterio Maximín o de Wald

Este criterio ha sido adaptado a la teoría de la decisión por Abraham Wald (1902-1950), partiendo del criterio del “Minimax” desarrollado por J. Von Neumann y O. Morgenster. Es un criterio excesivamente prudente y conservador.

El maximin es esencialmente una regla pesimista. El decisor se pregunta qué resultado puede asegurarse en cada alternativa de curso de acción; esto está representado por lo mínimo que puede ganar o lo máximo que puede perder (según se trate de una matriz de utilidades o de costos) y se corresponde con el peor resultado que se puede obtener para cada alternativa.

Luego entre los resultados pésimos, elige el óptimo. De esta manera el decisor se asegura un resultado mínimo. Es una actitud muy conservadora y pesimista en la que se busca reducir la pérdida, asumiendo que esta se producirá. La expresión numérica que resume este criterio cuando tenemos ganancia es el siguiente:

$$T(a_k) = \max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m \{\min_{j=1}^n \{x_{ij}\}\} \quad (2.1)$$

Cuando la matriz de decisión se refiere a pérdidas o pagos, el criterio maximín no tiene sentido y entonces usamos el criterio minimax dado por:

$$T(a_k) = \min_{i=1}^m T(a_i) = \min_{i=1}^m \{\max_{j=1}^n \{x_{ij}\}\} \quad (2.2)$$

Para poder aplicar este criterio debemos seguir las etapas siguientes:

1. Para cada decisión θ_j , se detecta el mínimo pago. Se trata de identificar la peor consecuencia posible asociada a cada decisión.

$$\min\{x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}\} = \min\{x_{ij}\} \quad (2.3)$$

2. Se detecta el beneficio máximo entre los mínimos. Se trata de identificar el mayor beneficio entre todos los escenarios pesimistas para evitar los peores. En otros términos, el individuo que toma la decisión es pesimista y elige la decisión cuyo pago menor es el máximo.

$$\text{Max}\{\min_i\{x_{i1}\}, \min_i\{x_{i2}\}, \dots, \min_i\{x_{in}\}\} = \max\{\min_i\{x_{ij}\}\} \quad (2.4)$$

3. Se toma la decisión cuyo mínimo sea el máximo entre todos los mínimos es decir, el maximín.

En el caso que tengamos pérdidas, los pasos a seguir son los mismos que en el caso anterior.

Maximin es utilizado a menudo en situaciones donde la persona que planea siente que no puede permitirse un error. Como es el caso de la planeación de la defensa nacional, así como la inversión de los ahorros de toda la vida, quien

planea elige una decisión que hace lo mejor posible en el peor (o más pesimista) caso posible.

Ejemplo 2.1:

Supongamos que una empresa quiere realizar una campaña publicitaria. Se le presentan 3 posibilidades: radio (15 minutos de lunes a jueves en un espacio), TV (1 spot cada semana sobre las 12h) y prensa (1 anuncio 2 días a la semana los lunes y los jueves). Como han hecho campañas anteriormente se han podido valorar los resultados de las diferentes posibilidades del siguiente modo:

Tabla 2.2. Campañas publicitarias.

	<u>DEMANDA ALTA</u>	<u>DEMANDA</u> <u>MEDIA</u>	<u>DEMANDA</u> <u>BAJA</u>
Radio	100	40	20
T.V.	80	20	5
PRENSA	90	35	25

Solución:

Para a_1 : $\min \{ 100,40,20\}= 20$.

Para a_2 : $\min\{80,20,5\}=5$.

Para a_3 : $\min\{90,35,25\}=25$.

Ahora detectamos el beneficio máximo entre los mínimos. Se trata de identificar el mayor beneficio entre todos los escenarios pesimistas para evitar los peores. En otros términos, el individuo que toma la decisión es pesimista y elige la decisión cuyo pago menor es el máximo.

$\text{Max} \{20, 5,25\}=25$.

Se toma la decisión cuyo mínimo sea el máximo entre todos los mínimos, es decir el maximín, en este caso el maximín es a_3 , lo que nos lleva a decir que la mejor opción es montar una campaña en Prensa (1 anuncio 2 días a la semana los lunes y los jueves).

En ocasiones, el criterio de Wald puede conducir a decisiones poco adecuadas. Por ejemplo, consideremos la siguiente tabla de decisión, en la que se muestran los niveles de seguridad de las diferentes alternativas.

Tabla 2.3 Niveles de seguridad.

Alternativas	Estados de la naturaleza		
	e_1	e_2	s_k
a_1	1000	99	99
a_2	100	100	100

El criterio de Wald seleccionaría la alternativa a_2 , aunque lo más razonable parece ser elegir la alternativa a_1 , ya que en el caso más favorable proporciona una recompensa mucho mayor, mientras que en el caso más desfavorable la recompensa es similar.

2.2.2 Criterio Maximax, optimista

En este criterio se elige el valor máximo por acción que denotaremos por

$$T(a_i) = \max_{j=1}^n \{x_{ij}\} \quad (2.5)$$

Posteriormente, la mejor acción se elige, con la que se obtiene el máximo de las máximas consecuencias por acción $T(a_k) =$

$$\max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m \{ \max_{j=1}^n \{x_{ij}\} \} \quad (2.6)$$

.Este criterio tiene una filosofía muy **optimista**.

Al igual que el caso anterior se tiene que seguir básicamente tres pasos:

1. Para cada decisión a_j , se detecta el máximo beneficio. Se trata de identificar la mejor consecuencia posible de cada decisión.

$$\max\{x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}\} = \max\{x_{ij}\} \quad (2.7)$$

2. Se detecta el pago máximo entre los máximos. Se trata de identificar el mayor beneficio entre todos los escenarios optimistas, es decir, buscar el mejor de los mejores. En otros términos, el individuo que toma la decisión es optimista y elige la decisión por la cual el mayor pago posible es máximo.

$$\text{Max}\{\max_i\{x_{i1}\}, \max_i\{x_{i2}\}, \dots, \max_i\{x_{in}\}\} = \max\{\max_i\{x_{ij}\}\} \quad (2.8)$$

3. Se toma la decisión cuyo máximo sea el beneficio máximo entre todos los beneficios máximos, es decir, el maximax.

Retomando el ejemplo anterior de la tabla 2.2 de la campaña publicitaria podemos encontrar el maximax:

1. Para cada decisión:

Para a_1 : $\max\{100, 40, 20\} = 100$

Para a_2 : $\max\{80, 20, 5\} = 80$

Para a_3 : $\max\{90, 35, 25\} = 90$.

Ahora debemos encontrar el beneficio máximo entre los máximos lo que nos da como resultado $\text{Max}\{100, 80, 90\}$.

Luego el valor máximo corresponde a la alternativa Radio, lo que implica que en esa acción se encontraría la máxima ganancia, suponiendo que el estado de la naturaleza estará a su favor.

Una de las desventajas de este criterio es que las pérdidas pueden ser elevadas si no se presenta el estado de la naturaleza adecuado. Además, en ocasiones puede conducir a decisiones pobres o poco convenientes. Por ejemplo, consideremos la siguiente tabla de decisión, en la que se muestran los niveles de optimismo de las diferentes alternativas.

Tabla 2.4 Niveles de optimismo

ALTERNATIVAS	ESTADOS DE LA NATURALEZA		
	e_1	e_2	O_i
a_1	100	-10000	100
a_2	99	99	99

El criterio maximax seleccionaría la alternativa a_1 , aunque lo más razonable parece ser elegir la alternativa a_2 , ya que evitaría las enormes pérdidas de a_1 en el caso desfavorable, mientras que en el caso favorable la recompensa sería similar.

Tomando en cuenta los criterios descritos anteriormente podemos sacar algunas conclusiones:

Tanto el Maximin o el Maximax no toman en cuenta las distintas probabilidades P_1, \dots, P_m de ocurrencia de los distintos estados posibles de la naturaleza e_1, \dots, e_m , lo que nos llevará posiblemente a obtener información donde ganemos poco en términos económicos, o perdamos mucho, por lo que es importante, la utilización de otro criterio que haga uso de las probabilidades.

2.2.3 Criterio de Hurwicz (1951) .

En 1951 Hurwicz recomendó un criterio que no es muy extremo como fueron los criterios anteriores maximín y maximax. Es un criterio intermedio de los dos anteriores, el criterio de Hurwicz, pondera los valores extremos de tal manera que los coeficientes de ponderación asignados reflejan la importancia que les concede el decisor a su nivel de optimismo o pesimismo por medio de un peso $\alpha \in [0,1]$, en donde la mejor acción se elige de tal forma que:

$$\max_{i=1}^n \{ \alpha \min_j x_{ij} + (1 - \alpha) \max_j x_{ij} \} \quad (2.9)$$

Denominando $O_i = \min_{j=1}^n \{x_{ij}\}$ (2.3) y $S_i = \max_j \{x_{ij}\}$ (2.10). Tenemos como resultado la siguiente expresión:

$$\alpha O_k + (1 - \alpha) S_k = \max_{i=1}^m \{ \alpha O_i + (1 - \alpha) S_i \}; \quad (2.11) \alpha \in [0,1]$$

Este criterio tiene una filosofía **optimista-pesimista**, dependiendo del valor del peso. Si queremos que el peso este más cargado a la parte pesimista, se elige un valor de $\alpha > 0.5$, en caso de que el peso se quiera más cargado a la parte optimista, se elige un valor de $\alpha < 0.5$ y para el valor de 0.5, se tiene sólo un promedio de los dos criterios. Además cuando $\alpha = 0.$, corresponde a un pensamiento optimista obteniendo el caso de maximax, cuando $\alpha = 1$, se obtiene el criterio de Wald, α es un valor específico, elegido por el decisor y aplicable a cualquier problema de decisión abordado por él, por lo que:

$T(a_k) = \alpha O_k + (1 - \alpha) S_k$ (2.12). Así la regla de Hurwicz cuando tenemos ganancias resulta ser: Elegir la alternativa a_k tal que:

$$T(a_k) = \alpha O_k + (1 - \alpha) S_k = \max_{1 \leq i \leq m} \{ \alpha O_i + (1 - \alpha) S_i \} \quad (2.13)$$

Para el caso que se tengan pérdidas cambiamos los mínimos por los máximos y viceversa resultando expresiones similares a las anteriores.

Estos valores generan a que el decisor tenga una gran influencia, debido a que dependerá del decisor las probabilidades que asigne, sin embargo en cada caso, estas pueden ser cambiantes, de acuerdo a la situación que se presentan en la vida diaria. Pero además podemos determinar de forma sencilla estos valores.

Tabla 2.5 Determinación de valores λ .

ALTERNATIVAS	ESTADOS DE LA NATURALEZA				
	e_1	e_2	S_i	O_i	$S(a_i)$
a_1	1	0	0	1	$1 - \alpha$
a_2	λ	λ	λ	λ	λ

Si las alternativas a_1 y a_2 son indiferentes para el decisor, se tendrá , por lo que $\alpha = 1 - \lambda$ Por tanto, para determinar α el decisor debe de seleccionar repetidamente una alternativa en esta tabla, modificando el valor en cada elección, hasta que muestre indiferencia entre ambas alternativas.

Ejemplo 2.2: Retomando el ejemplo 2.1 y si el decisor tiene el conocimiento que las probabilidades son $\alpha=0.6$ y $1 - \alpha=0.4$, procedemos a construir la tabla para seleccionar la mejor de las alternativas.

Tabla 2.6 Campaña publicitaria con probabilidades.

ALTERNATIVAS	DEMANDA ALTA	DEMANDA MEDIA	DEMANDA BAJA	S_i	O_i	$S(A_i)$
RADIO	100	40	20	20	100	52

<i>T.V.</i>	80	20	5	5	80	35
<i>PRENSA</i>	90	35	25	25	90	51

Tras haber ponderado los valores para cada uno de las alternativas, se escogería la radio debido a que es el valor más grande.

Una de las desventajas es que puede llegar en ocasiones a conducir a decisiones poco razonables, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 2.7 Ejemplo alternativas poco razonables utilizando Hurwicz.

ALTERNATIVAS	ESTADOS DE LA NATURALEZA						
	e_1	e_2	e_n	S_i	O_i	$S(a_i)$
a_1	0	1	...	1	0	1	$1 - \alpha$
a_2	1	0	0	0	1	$1 - \alpha$

Según este criterio ambas alternativas son equivalentes, aunque se puede observar que la alternativa a_1 es preferible a la alternativa a_2 .

2.2.4 Criterio de Laplace o razón insuficiente.

Este criterio, propuesto por Laplace en 1825, está basado en el principio de razón insuficiente: Como a priori no existe ninguna razón para suponer que un estado de naturaleza se puede presentar antes que los demás, podemos considerar que todos los estados de naturaleza tienen la misma probabilidad de ocurrencia, es decir, la ausencia de conocimiento sobre el estado de la naturaleza equivale a afirmar que todos los estados son equiprobables. Así,

para un problema de decisión con n posibles estados de la naturaleza, asignaríamos probabilidad $1/n$ a cada uno de ellos.

El sujeto decisor tratará de minimizar lo más que se puede dejar de ganar. A partir de la matriz de decisión se obtiene una nueva matriz llamada matriz de "riesgos", de "perjuicios" o de "pesares".

Una vez realizada esta asignación de probabilidades, a la alternativa a_i le corresponderá un resultado esperado igual a: $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}$ (2.14)

La regla de Laplace selecciona como alternativa óptima aquella que proporciona un mayor resultado esperado:

$$L_k = \bar{a}_X = \max_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} \right\} \quad (2.15).$$

En caso que los valores x_{ij} represente pérdida, entonces el valor "max" se reemplaza con el operador "min", obteniendo:

$$L_k = \bar{a}_X = \min_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} \right\} \quad (2.16)$$

Considerando los valores del ejemplo 2.1, y aplicando el criterio de Laplace, se tendrá que todos tendrán la misma probabilidad, por lo que se procede de la forma siguiente:

Resultado Medio Radio: $1/3(100+40+20)=160/3 = 53.3$

Resultado Medio T.V.: $1/3(80+20+5)=105/3 = 35$.

Resultado Medio Prensa: $1/3(90+35+25)=150/3 = 50$.

Ahora si dentro de estos resultados elegimos el máximo tenemos:

$$L_k = \text{Max} (53.3, 35, 50)$$

Por lo que el máximo es Radio, con lo que nuevamente estaríamos obteniendo que el radio sea el medio que nos puede proporcionar mayor valor.

La objeción que se suele hacer al criterio de Laplace es la siguiente: ante una misma realidad, pueden tenerse distintas probabilidades, según los casos que se consideren. Por ejemplo, una partícula puede moverse o no moverse, por lo que la probabilidad de no moverse es $1/2$. En cambio, también puede considerarse de la siguiente forma: una partícula puede moverse a la derecha, moverse a la izquierda o no moverse, por lo que la probabilidad de no moverse es $1/3$.

Desde un punto de vista práctico, la dificultad de aplicación de este criterio reside en la necesidad de elaboración de una lista exhaustiva y mutuamente excluyente de todos los posibles estados de la naturaleza.

Por otra parte, al ser un criterio basado en el concepto de valor esperado, su funcionamiento debe ser correcto tras sucesivas repeticiones del proceso de toma de decisiones. Sin embargo, en aquellos casos en que la elección sólo va a realizarse una vez, puede conducir a decisiones poco acertadas si la distribución de resultados presenta una gran dispersión, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 2.8. Distribución de resultados con gran dispersión.

ALTERNATIVAS	ESTADOS DE LA NATURALEZA		
	e_1	e_2	<i>Resultado Esperado</i>
a_1	15000	-5000	500
a_2	5000	4000	4500

Este criterio seleccionaría la alternativa a_1 , que puede ser poco conveniente si la toma de decisiones se realiza una única vez, ya que podría conducirnos a una pérdida elevada.

2.2.5 Criterio de Savage , Minimax o pérdida de oportunidad.

En 1951 Savage argumenta que al utilizar los valores x_{ij} para realizar la elección, el decisor compara el resultado de una alternativa bajo un estado de la naturaleza con todos los demás resultados, independientemente del estado de la naturaleza bajo el que ocurran. Sin embargo, el estado de la naturaleza no es controlable por el decisor, por lo que el resultado de una alternativa sólo debería ser comparado con los resultados de las demás alternativas bajo el mismo estado de la naturaleza.

Con este propósito Savage define el concepto de pérdida relativa o pérdida de oportunidad r_{ij} asociada a un resultado x_{ij} como la diferencia entre el resultado de la mejor alternativa dado que e_j es el verdadero estado de la naturaleza y el resultado de la alternativa a_i bajo el estado e_j .

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq n} (x_{kj}) - x_{ij}, \text{ganancias} \\ & x_{ij} - \min_{1 \leq k \leq n} (x_{kj}), \text{pérdidas} \end{aligned}$$

$$r_{ij} = \{$$

(2.17)

Así, si el verdadero estado en que se presenta la naturaleza es e_j y el decisor elige la alternativa a_i que proporciona el máximo resultado x_{ij} , entonces no ha dejado de ganar nada, pero si elige otra alternativa

cualquiera a_r , entonces obtendría como ganancia x_{rj} y dejaría de ganar $x_{ij} - x_{rj}$.

Savage propone seleccionar la alternativa que proporcione la menor de las mayores pérdidas relativas, es decir, si se define ρ_i como la mayor pérdida que puede obtenerse al seleccionar la alternativa a_i ,

$$\rho_i = \text{Max}_{i \leq j \leq n} \{r_{ij}\} \quad (2.18)$$

Así el criterio de Savage resulta ser el siguiente:

$$\rho_k = \text{Min} \rho_i = \text{Min}_{1 \leq i \leq m} \text{Max}_{1 \leq j \leq n} (r_{ij}) \quad (2.19)$$

Antes de aplicar este criterio se procede a calcular la matriz de pérdidas relativas, formada por los elementos r_{ij} . Cada columna de esta matriz se obtiene calculando la diferencia entre el valor máximo de esa columna y cada uno de los valores que aparecen en ella.

Así teniendo en cuenta el ejemplo 2.1 se tiene los siguientes valores.

Tabla.2.9. Campaña publicitaria.

<i>ALTERNATIVAS</i>	<i>DEMANDA ALTA</i>	<i>DEMANDA MEDIA</i>	<i>DEMANDA BAJA</i>
<i>RADIO</i>	<i>100</i>	<i>40</i>	<i>20</i>
<i>T.V.</i>	<i>80</i>	<i>20</i>	<i>5</i>
<i>PRENSA</i>	<i>90</i>	<i>35</i>	<i>25</i>

En cada una de las columnas debemos elegir el máximo valor que se tiene en cada una de las columnas y restarlas al resto de los elementos Para la

columna 1 es el valor 100, la columna 2 el valor mayor es 40, y para la tercera columna es 25, quedando la tabla siguiente:

Tabla 2.10. Pérdidas relativas.

<u>ALTERNATIVAS</u>	DEMANDA ALTA	DEMANDA MEDIA	DEMANDA BAJA	P_i
RADIO	0	0	5	5
T.V.	20	20	20	20
PRENSA	10	15	0	10

Así para la columna de demanda alta en la tabla de decisión original era 100, se debe restar a cada uno de los elementos de la columna, ahora en la siguiente tabla se hace de igual forma, cada uno de estos valores representan los r_{ij} . Así en este ejemplo se tiene que el mínimo de estos valores es Radio.

El criterio de Savage puede dar lugar en ocasiones a decisiones poco razonables. Para comprobarlo, consideremos la siguiente tabla de resultados:

Tabla 2.11. Tabla de resultados.

ALTERNATIVAS	ESTADOS DE LA NATURALEZA	
	e_1	e_2
a_1	9	2
a_2	4	6

La tabla de pérdidas relativas correspondiente a esta tabla 2.11 de resultados es la siguiente:

Tabla.2.12. Pérdidas relativas de la tabla anterior.

ALTERNATIVAS	ESTADOS DE LA NATURALEZA		
	e_1	e_2	p_i
a_1	0	4	4
a_2	5	0	5

La alternativa óptima es a_1 . Supongamos ahora que se añade una alternativa, dando lugar a la siguiente tabla de resultados:

Tabla.2.13. Tabla de resultados agregando una alternativa.

ALTERNATIVAS	ESTADOS DE LA NATURALEZA.	
	e_1	e_2
a_1	9	2
a_2	4	6
a_3	3	9

La nueva tabla de pérdidas relativas es:

Tabla.2.14. Nueva tabla pérdidas relativas.

ALTERNATIVAS	ESTADOS DE LA NATURALEZA		
	e_1	e_2	p_i
a_1	0	7	7
a_2	5	3	5
a_3	6	0	6

El criterio de Savage selecciona ahora como alternativa óptima a_2 , cuando antes selecciono a_1 .

En resumen, si comparamos los resultados obtenidos con los diferentes criterios tenemos:

Tabla.2.15. Comparación de los diferentes criterios.

MEDIO	MAXIMIN	MAXIMAX	LAPLACE	OPTIMISMO PESIMISMO	MINIMAX
Radio		X	X	X	X
T.V.					
Prensa	X				

Por lo que en este problema, tomando todos los criterios estudiados, podemos concluir que se debe montar la campaña publicitaria por la Radio ya que se presenta menos riesgo o menos posibilidades de pérdidas.

En los ejemplos anteriores se ha desarrollado los criterios que comúnmente se utilizan para tomar las decisiones, sin embargo en el documento denominado "Toma de decisiones bajo incertidumbre considerando la dispersión", se propone otro método el cual considera la amplitud.

Sabemos que se pueden encontrar distintas medidas de dispersión como son el coeficiente de variación, la varianza, la desviación estándar y amplitud, entre otras.

En este caso se podría utilizar cualquiera de estas medidas, sin embargo, por simplicidad se usa la amplitud, que es simplemente la diferencia entre los valores mayor y menor de un conjunto de datos.

2.2.6 El Modelo de Amplitud (EMA).

El modelo de Amplitud es una combinación del modelo de Laplace, ya que lo primero que hace es calcular los valores promedios, con cierta similitud al modelo de Hurwicz, dado que corrige este valor promedio a través del factor β , que actúa sobre la amplitud, funcionando ésta como un castigo para cada alternativa.

La amplitud como castigo, es que entre alternativas con pagos similares, difiriendo en su medida de dispersión, debe ser seleccionada aquella que tenga menor dispersión, dado que implica un menor riesgo.

El valor β , será el decisor quien lo fije y dependerá del problema en si y de su actitud ante el riesgo.

El procedimiento consiste en: primero, seleccionar los valores mayor y menor por cada fila, la cual es llamada A_i .

$$A_i = \text{Mayor}P_{ij} - \text{Menor}P_{ij} \quad (2.20) \text{ como la amplitud de la alternativa.}$$

Posteriormente se calcula el valor esperado de la alternativa i , calculado por el modelo de Laplace VE_i .

$$VE_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}}{n} \quad (2.21)$$

Por lo que la elección de la mejor alternativa que en este caso maximiza será:

$$T(a_k) = \max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m \{VE_i + (\beta * VE_i - (1 - \beta) * A_i)\} \quad (2.22)$$

En el caso de minimización, manteniendo la misma nomenclatura se tiene:

$$T(a_k) = \min_{i=1}^m T(a_i) = \min_{i=1}^m \{VE_i + (\beta * VE_i - (1 - \beta) * A_i)\} \quad (2.23)$$

En ambas ecuaciones la *Alternativa** se refiere a la mejor alternativa.

El modelo no pierde sentido si se usará la desviación estándar o la varianza, además, el rango de interés del factor β , debe reducirse a $0 < \beta < 1$, fuera de

estos valores, se obtendrían resultados distorsionados, y en el caso particular de los extremos $\beta=0$, se le estaría dando igual peso al valor esperado que a la amplitud, lo que no tendría mucho sentido, y para $\beta=1$, se estaría aplicando el modelo de Laplace y no EMA.

Para elegir el valor más adecuado del factor β , es necesario tener algunas consideraciones especiales siguientes:

- ❖ Primeramente si una alternativa tiene mejor valor esperado y mejor amplitud, será seleccionada siempre, sin importar el valor β con el cual se trabaje.
- ❖ Por la misma razón frente a alternativas de valores esperados iguales y diferentes amplitudes, siempre será seleccionada la de mejor amplitud, sin importar el β escogido para el estudio.
- ❖ De la misma manera, independiente del valor de β , entre alternativas de igual amplitud, pero diferentes valores esperados, será seleccionada la de mejor valor esperado.

El valor β , será interesante, si la alternativa de mejor valor esperado, no es la de mejor amplitud.

- ❖ Si la primera alternativa tiene mejor valor esperado, y peor amplitud, y la diferencia, en valores absolutos, entre los valores esperados es mayor que la diferencia entre las amplitudes, en el rango de interés, la alternativa uno será siempre mejor que la dos.
- ❖ Si la primera alternativa tiene mejor valor esperado, y peor amplitud, y la diferencia, en valor absoluto, entre los valores esperados es menor que la diferencia entre las amplitudes, en el rango de interés, la alternativa uno pasará de ser peor a ser mejor

Este caso es el único, donde dependiendo del valor de β , se seleccionará una u otra alternativa.

En particular, aunque aun no existe ninguna demostración específica, se recomienda que el valor β este entre cero punto setenta y cinco (0.75) y cero punto noventa y cinco (0.95).

Por debajo de este rango, para la mayoría de problemas, se le estaría dando mayor relevancia a la amplitud que a los pagos, y por encima de él, se estaría tomando la solución que ofrece Laplace.

Ejemplo 2.3:

Suponiendo que una empresa tiene las alternativas A_1 , A_2 , A_3 y los estados de la naturaleza E_1 , E_2 , E_3 , representados en la tabla de pagos siguiente:

Tabla 2.16. Representación de tabla de pagos.

ALT \ E. N	e₁	e₂	e₃
a₁	50	49	48
a₂	49	55	49
a₃	48	50	52

El valor β a utilizar será 0.8.

Posteriormente se calculará la amplitud de cada alternativa, que es la diferencia entre el valor mayor y menor, luego se calculará el valor esperado de cada alternativa, que se resume en la siguiente tabla:

Tabla 2.17. Tabla de pagos con valor esperado.

ALT \ E. N	e₁	e₂	e₃	A_i	Ve_i
a₁	50	49	48	2	49
a₂	49	55	49	6	51
a₃	48	50	52	4	50

Aplicando la ecuación (2.22) y suponiendo que queremos maximizar las ganancias entonces tenemos los resultados siguientes:

A1=87.8, A2=90.6, A3=89.2. Por lo que la alternativa adecuada y la que deja mayores ganancias es la alternativa 2.

2.2.7 Método Minimax Ampliado (Minimax- A).

Este criterio, retoma la filosofía de EMA, en el sentido que corrige el valor esperado, pero en este caso con el valor del máximo arrepentimiento de la fila, el cual denotaremos por MaxPa_{ij} , quedando para el caso de maximización la expresión siguiente:

$$T(a_k) = \max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m \{VE_i + (\beta * VE_i - (1 - \beta) * \text{MaxPa}_{ij})\} \quad (2.24)$$

De forma similar para el caso de minimización la expresión siguiente:

$$T(a_k) = \min_{i=1}^m T(a_i) = \min_{i=1}^m \{VE_i + (\beta * VE_i - (1 - \beta) * \text{MaxPa}_{ij})\} \quad (2.25)$$

El procedimiento es similar al caso anterior.

La elección de uno u otro criterio de decisión ante la incertidumbre lleva implícita una atribución de probabilidades a los diferentes estados de la naturaleza, estos criterios han sido propuestos por los teóricos de la decisión con la finalidad de evitar subjetividad en el comportamiento del sujeto decisor,

sin embargo como estos valores dependen del decisor este se enfrenta a un nuevo problema de elección, pero que se puede resolver desarrollando otros métodos como es el desarrollo de experimentos.

2.3 Criterios de Decisión bajo Condiciones de Riesgo.

2.3.1 Tablas de Decisión bajo Riesgo.

Los procesos de decisión en ambiente de *riesgo* envuelven situaciones en las que se puede asociar la probabilidad de ocurrencia a cada estado de la naturaleza, probabilidades que son conocidas o pueden ser estimadas por el decisor antes del proceso de toma de decisiones.

Muchas veces se suele confundir riesgo con incertidumbre ya que en ambos casos se desconoce lo que pasará en el futuro pero existe una gran diferencia entre ambos términos.

La diferencia entre la toma de decisiones bajo incertidumbre y la toma de decisiones bajo riesgo, es que en el primer, no se posee información suficiente como para asignarle una distribución de probabilidad a los posibles resultados futuros de una decisión tomada hoy. En el segundo caso, las probabilidades de los eventos son conocidas (Hillier & Lieberman 1974, León 2001, Levin & Kirkpatrick 1985).

Los casos de riesgo son muy particulares y los más comunes están relacionados con situaciones de azar (loterías, ruletas, rifas, opciones, etc.).

Fenómenos que causan el riesgo.

- Catástrofes naturales o comportamiento del clima.
- Cambios en la economía, tanto nacional como mundial.

- Cambios en políticas de países que en forma directa o indirecta afectan el entorno económico local.
- Obsolescencia.
- Cambio tecnológico rápido y progreso.
- Mejora en los productos.

Entonces diremos que los procesos de decisión en ambiente de riesgo se caracterizan porque puede asociarse una probabilidad de ocurrencia a cada estado de la naturaleza, probabilidades que son conocidas o pueden ser estimadas por el decisor antes del proceso de toma de decisiones.

2.3.2 Reglas de decisión.

Los diferentes criterios de decisión en ambiente de riesgo se basan en estadísticos asociados a la distribución de probabilidad de los resultados. Algunos de estos criterios se aplican sobre la totalidad de las alternativas, mientras que otros sólo tienen en cuenta un subconjunto de ellas, considerando las restantes peores, por lo que no están presentes en el proceso de toma de decisiones.

Representaremos por $R(a_i)$ los resultados asociados a la alternativa a_i , y por $p(e)$ la distribución de probabilidad correspondiente a tales resultados, esto es, el conjunto de valores que representan las probabilidades de ocurrencia de los diferentes estados de la naturaleza:

Tabla .2.18. Representación de una tabla de decisiones bajo riesgo.

	Estados de la naturaleza				
Alternativas		e_1	e_2	...	e_n
	a_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
	a_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
	a_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}
Probabilidades	p_1	p_2	...	p_n	

En el contexto de decisiones en condiciones bajo riesgo daremos los siguientes criterios:

- ✓ Criterio del valor esperado.
- ✓ Criterio de pérdida de oportunidad esperada (POE).
- ✓ Criterio de mínima varianza con media acotada.
- ✓ Criterio de media con varianza acotada.
- ✓ Criterio de dispersión.
- ✓ Criterio de la probabilidad máxima.
- ✓ Criterio de máxima verosimilitud.
- ✓ Curvas de utilidad.
- ✓ Modelo de Amplitud para Riesgo e incertidumbre (MARI).

Criterios de Decisión.

La toma de decisión bajo condición de riesgo se da cuando existe conocimiento de la probabilidad que un estado de la naturaleza ocurra; es decir el decisor debe prever la probabilidad de ocurrencia de cada uno de estos estados.

2.3.3. Criterio del valor esperado.

Lo más lógico y sencillo para tomar una decisión en situaciones de riesgo es determinar valor esperado para cada alternativa y elegir aquella alternativa que proporciona el máximo valor esperado y se define como:

$$E[R(a_i)] = \sum_{j=1}^n x_{ij}P_j = x_{i1}p_1 + x_{i2}p_2 + \dots + x_{in}p_n$$

$$= T(a_i) \quad (2.26) \text{ para la alternativa } a_i$$

En donde:

a_i : Alternativa i -ésima.

x_{ij} : Resultado o consecuencia asociado a la alternativa a_i

P_j : Probabilidad de ocurrencia del estado de naturaleza e_j .

Siendo.

$P_j \geq 0$ para todos los estados de naturaleza y $\sum_{j=1}^n P_j = 1$

Por lo que el criterio del valor esperado resulta:

Elegir la alternativa a_k tal que, $T(a_k) = \max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m E[R(a_i)]$ (2.27).

Ejemplo 2.4: Sea una inversión cualquiera cuyos datos aparecen en la siguiente tabla.

Tabla 2.19. Inversiones.

	Estados de la Naturaleza			
Alternativas	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	11	9	11	8
a_2	8	25	8	11
a_3	8	11	10	11
Probabilidades	0.2	0.2	0.5	0.1

En donde calcularemos el valor esperado para cada una de las alternativas, utilizando la ecuación (2.26).

Los valores esperados para cada alternativa son los siguientes:

Calculando el valor esperado para a_1

$$E[R(a_1)] = x_{11}p_1 + x_{12}p_2 + x_{13}p_3 + x_{14}p_4$$

$$E[R(a_1)] = (11)(0.2) + (9)(0.2) + (11)(0.5) + (8)(0.1) = 10.3.$$

Calculando el valor esperado para a_2 .

$$E[R(a_2)] = x_{21}p_1 + x_{22}p_2 + x_{23}p_3 + x_{24}p_4$$

$$E[R(a_2)] = (8)(0.2) + (25)(0.2) + (8)(0.5) + (11)(0.1) = 11.7$$

Calculando el valor esperado para a_3 .

$$E[R(a_3)] = (8)(0.2) + (11)(0.2) + (10)(0.5) + (11)(0.1) = 9.9$$

Por lo tanto tenemos: $T(a_1) = 10.3, T(a_2) = 11.7$ y $T(a_3) = 9.9$

La alternativa óptima viene dada por: $T(a_k) = \max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m E[R(a_i)]$

(2.27).

En donde se debe elegir el máximo de los valores esperados.

$$\max\{E[R(a_1)], E[R(a_2)], E[R(a_3)]\} = \max\{10.3, 11.7, 9.9\} = 11.7.$$

Entonces la alternativa óptima según el criterio del valor esperado es a_2 , ya que proporciona el máximo de los valores esperados.

2.3.4. Criterio de pérdida de oportunidad esperada.

Es un método alternativo para la toma de decisiones bajo riesgo se basa en la idea de que el decisor tratará de minimizar la pérdida asociada a la mejor alternativa seleccionada. Usando esta idea, se tiene el criterio de la pérdida de oportunidad esperada (POE) o regret.

La pérdida de oportunidad o función regret para un estado de naturaleza y una alternativa se define como la diferencia entre el beneficio óptimo para un estado de naturaleza en particular y los beneficios obtenidos de la combinación del estado de naturaleza particular y las diferentes alternativas. Esta pérdida de oportunidad nos da la cantidad que se pierde por no elegir la mejor alternativa.

La expresión general para la pérdida de oportunidad o función regret es.

$$R(a_i, e_j) = V(e_j) - V(a_i, e_j) \quad (2.28)$$

Donde:

$R(a_i, e_j)$: Pérdida de oportunidad o regret asociado a la alternativa a_i y el estado de la naturaleza e_j .

$V(e_j)$: Beneficio óptimo bajo el estado de naturaleza e_j .

$V(a_i, e_j)$: Beneficio asociado con la alternativa a_i y el estado de naturaleza e_j , este se puede representar como (x_{ij}) .

La pérdida de oportunidad para las diferentes alternativas y estados de la naturaleza se representa por la tabla siguiente.

Tabla .2.19. Tabla de pérdida de oportunidad.

	Estados de la naturaleza				
Alternativas		e_1	e_2	...	e_n
	a_1	$R(a_1, e_1)$	$R(a_1, e_2)$...	$R(a_1, e_n)$
	a_2	$R(a_2, e_1)$	$R(a_2, e_2)$...	$R(a_2, e_n)$
	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
	a_m	$R(a_m, e_1)$	$R(a_m, e_2)$...	$R(a_m, e_n)$
Probabilidades		p_1	p_2	...	p_n

Teniendo construida la tabla de pérdidas de oportunidad, el criterio de pérdida de oportunidad esperada (POE) utiliza las probabilidades de los estados de naturaleza como ponderación para los valores de las pérdidas de oportunidad.

La pérdida de oportunidad esperada de la alternativa a_i , $POE(a_i)$, se define como:

$$POE(a_i) = E[R(a_i, e_j)] = \sum_{j=1}^n R(a_i, e_j) P_j = R(a_i, e_1)p_1 + R(a_i, e_2)p_2 + \dots + R(a_i, e_n)p_n$$

que es una esperanza matemática o valor esperado de la pérdida de oportunidad.

Según este criterio, la alternativa óptima, sería aquella alternativa que haga mínima la POE, es decir:

$$POE(a^*) = \text{Mín}_i POE(a_i).$$

Ejemplo 2.5

Utilizando la información de la siguiente tabla que contiene los valores monetarios para las diferentes alternativas. Obtener la tabla de pérdidas de oportunidad y las pérdidas de oportunidad esperadas para cada alternativa.

Tabla .2.20. Tabla de valores monetarios.

		Estados de Naturaleza		
		Demanda alta	Demanda media	Demanda baja
Alternativas	Mejorar la calidad a_1	20,000	10,000	-2,000
	Extender el servicio a_2	50,000	24,000	-10,000
	Trasladar la empresa a_3	30,000	16,000	-1,000
Probabilidades		0.4	0.4	0.2

Para la alternativa a_1 , mejorar la calidad, y el estado de naturaleza demanda alta, tendremos la siguiente pérdida de oportunidad.

$$a) R(a_1, e_1) = V(e_1) - V(a_1, e_1) = V(e_1) - x_{11}$$

$$R(a_1, e_1) = 50,000 - 20,000 = 30,000$$

Para la alternativa a_1 , mejorar la calidad, y los estados de naturaleza demanda media y baja, tendremos la siguiente pérdida de oportunidad.

$$b) R(a_1, e_2) = V(e_2) - V(a_1, e_2) = V(e_2) - x_{12}$$

$$R(a_1, e_2) = 24,000 - 10,000 = 14,000.$$

$$c) R(a_1, e_3) = V(e_3) - V(a_1, e_3) = V(e_3) - x_{13}$$

$$R(a_1, e_3) = -1,000 - (-2,000) = 1,000.$$

Ahora para la alternativa a_2 , Extender el servicio, y el estado de naturaleza demanda alta, tendremos la siguiente pérdida de oportunidad.

$$a) R(a_2, e_1) = V(e_1) - V(a_2, e_1) = V(e_1) - x_{21}$$

$$R(a_2, e_1) = 50,000 - 50,000 = 0.$$

Para los estados de naturaleza demanda media y baja, tendremos la siguiente pérdida de oportunidad.

$$b) R(a_2, e_2) = 24,000 - 24,000 = 0.$$

$$c) R(a_2, e_3) = -1,000 - (-10,000) = 9,000.$$

Análogamente para las restantes alternativas.

Resulta, la siguiente tabla de pérdidas de oportunidad, la cual se calcula como hemos visto restando el beneficio asociado a la combinación (a_i, e_j) al mejor beneficio que aparezca en la columna correspondiente al estado de naturaleza e_j .

Tabla .2.21. Tabla de pérdida de oportunidad y pérdida de oportunidad esperada.

		Estados de Naturaleza			
Alternativas		Demanda alta	Demanda media	Demanda baja	Pérdida de oportunidad esperada
	Mejorar la calidad a_1	30,000	14,000	1,000	17,800
	Extender el servicio a_2	0	0	9,000	1,800
	Trasladar la empresa a_3	20,000	8,000	0	11,200
Probabilidades		0.4	0.4	0.2	

La pérdida de oportunidad esperada se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{POE}(a_1) &= \sum_{j=1}^3 R(a_1, e_j) P_j = R(a_1, e_1)p_1 + R(a_1, e_2)p_2 + R(a_1, e_3)p_3 \\ &= (30,000)(0.4) + (14,000)(0.4) + (1,000)(0.2) = 17,800. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{POE}(a_2) &= R(a_2, e_1)p_1 + R(a_2, e_2)p_2 + R(a_2, e_3)p_3 \\ &= (0)(0.4) + (0)(0.4) + (9,000)(0.2) = 1,800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{POE}(a_3) &= R(a_3, e_1)p_1 + R(a_3, e_2)p_2 + R(a_3, e_3)p_3 \\ &= (20,000)(0.4) + (8,000)(0.4) + (0)(0.2) = 11,200 \end{aligned}$$

$$\text{POE}(a_2) = \text{Mín}[(17,800), (1,800), (11,200)] = 1,800$$

Examinado los valores de la pérdida de oportunidad esperada para las diferentes alternativas vemos que la menor pérdida de oportunidad esperada es la correspondiente a la alternativa a_2 , “Extender el servicio”.

2.3.5. Valor esperado de información perfecta.

El valor esperado de información perfecta (VEIP) está relacionado con los dos criterios anteriores. Como su nombre lo indica, es el valor de la información que permitiría al decisor estar seguro de que la alternativa correcta habría sido elegida. Este tipo de información puede prevenir al decisor de un error muy costoso.

Volviendo a la tabla de pérdidas de oportunidad. Vemos que si se conoce que la demanda es alta, entonces la alternativa seleccionada sería a_2 , “Extender el servicio”. De forma similar, si se conoce que la demanda es media entonces la alternativa seleccionada sería también a_2 , y si la demanda fuese baja entonces la alternativa elegida sería a_3 , “Trasladar la empresa”. Luego si tenemos la información perfecta⁵⁹, es decir, que conocemos con exactitud cual de los estados de naturaleza ocurrirá, y elegimos, en cada caso, aquella alternativa que hiciese mínima la pérdida de oportunidad.

⁵⁹ Cuando se conoce con exactitud cual de los estados de naturaleza ocurrirá, entonces la decisión cambia de riesgo a certidumbre. A esta información se llama “información perfecta o de certidumbre”

Veamos como podemos calcular el valor esperado de esta información perfecta. Utilizando las probabilidades de los estados de naturaleza y los valores de pérdida de oportunidad, vemos que el 80% de las veces el decisor dejara de ganar cero dólares y un 20% de las veces ahorrará 9,000 dólares. Así pues podemos calcular el valor esperado de información perfecta o valor esperado bajo certidumbre como:

$$VEIP = \sum_{j=1}^n R(a_i, e_j) P_j. \quad (2.29)$$

Donde:

$R(a_i, e_j)$: Pérdida de oportunidad o regret asociado a la mejor alternativa a_i y el estado de naturaleza e_j .

P_j : Probabilidad de ocurrencia.

En nuestro ejemplo la mejor decisión es la alternativa $a_2 = a$, y el valor esperado de información perfecta (valor esperado bajo certidumbre) será:

$$VEIP = \sum_{j=1}^n R(a_2, e_j) P_j = (0)(0.4) + (0)(0.4) + (0.2)(9,000) = 1,800 \text{ dólares.}$$

Es decir que si se puede obtener la información perfecta, podríamos reducir la pérdida de oportunidad esperada 1,800 dólares.

Observemos que el valor esperado de información perfecta 1,800 dólares, es igual al valor mínimo de las pérdidas de oportunidad esperadas $POE(a_i)$, calculada anteriormente.

2.3.6. Criterio de mínima varianza con media acotada.

Para la utilización de este criterio se consideran exclusivamente las alternativas a_i cuyo valor esperado $E[R(a_i)]$ sea mayor o igual que una constante K fijada por el decisor es decir, $E[R(a_i)] \geq K$. Para cada una de las alternativas a_i que cumpla esta condición, se determina la varianza $V[R(a_i)]$, de sus resultados, definida como:

$$T(a_i) = V[R(a_i)] = \sum_{j=1}^n (x_{ij} - E[R(a_i)])^2 P_j \quad (2.30)$$

El criterio de mínima varianza con media acotada, consiste en elegir la menor varianza, y de esta forma se consigue la elección de una alternativa con poca variabilidad en sus resultados.

En resumen, el criterio de mínima varianza con media acotada es el

$$T(a_k) = \min_{i=1}^m$$

siguiente: Elegir la alternativa a_k tal que $i = 1$ (2.31),

$$T(a_i) = \min_m V[R(a_i)]$$

donde se debe cumplir $E[R(a_i)] \geq K$.

Ejemplo 2.6: para este criterio utilizaremos los datos de la tabla 2.19. En donde calcularemos la varianza para cada una de las alternativas, utilizando

(2.28): $V[R(a_i)] = \sum_{j=1}^n (x_{ij} - E[R(a_i)])^2 p_{j_i}$, donde se debe cumplir:

$E[R(a_i)] \geq K$, con un $K = 10$.

Calculando la varianza para a_1

$$V[R(a_1)] = (x_{11} - E[R(a_1)])^2 p_1 + (x_{12} - E[R(a_1)])^2 p_2 + (x_{13} - E[R(a_1)])^2 p_3 + (x_{14} - E[R(a_1)])^2 p_4$$

$$V[R(a_1)] = (11 - 10.3)^2(0.2) + (9 - 10.3)^2(0.2) + (11 - 10.3)^2(0.5) + (8 - 10.3)^2(0.1)$$

$$V[R(a_1)] = 0.098 + 0.338 + 0.245 + 0.529 = 1.21.$$

Calculando la varianza para a_2 .

$$V[R(a_2)] = (x_{21} - E[R(a_2)])^2 p_1 + (x_{22} - E[R(a_2)])^2 p_2 + (x_{23} - E[R(a_2)])^2 p_3 + (x_{24} - E[R(a_2)])^2 p_4$$

$$V[R(a_2)] = (8 - 11.7)^2(0.2) + (25 - 11.7)^2(0.2) + (8 - 11.7)^2(0.5) + (11 - 11.7)^2(0.1)$$

$$V[R(a_2)] = 45.01.$$

Calculando la varianza para a_3

$$V[R(a_3)] = (x_{31} - E[R(a_3)])^2 p_1 + (x_{32} - E[R(a_3)])^2 p_2 + (x_{33} - E[R(a_3)])^2 p_3 + (x_{34} - E[R(a_3)])^2 p_4$$

$$V[R(a_3)] = (8 - 9.9)^2(0.2) + (11 - 9.9)^2(0.2) + (10 - 9.9)^2(0.5) + (11 - 9.9)^2(0.1).$$

$$V[R(a_3)] = 1.09.$$

Tenemos : $T(a_1) = 1.21$, $T(a_2) = 45.01$ y $T(a_3) = 1.09$

Sabemos que $K = 10$, se tomaran todas las alternativas que cumplan $E[R(a_i)] \geq 10$, y dado que la alternativa a_3 su valor esperado es 9.9 no cumple, solo se tomaran en cuenta las varianzas de a_1 y a_2 . Utilizando el criterio de mínima varianza con media acotada:

$$\min\{V[R(a_1)], V[R(a_2)]\} = \min\{1.21, 45.02\} = 1.21.$$

Por lo tanto, la alternativa óptima corresponde $T(a_1) = 1.21$, pues posee la menor varianza.

2.3.7. Criterio de media con varianza acotada.

Para la utilización de este criterio se consideran exclusivamente las alternativas a_i , cuya varianza $V[R(a_i)]$ sea menor o igual que una constante K fijada por el decisor. Para cada una de las alternativas a_i que cumpla esta condición se determina el valor esperado $E[R(a_i)]$.

Luego se deberá elegir la alternativa que posee mayor valor esperado, y esta

$$T(a_k) = \max_{i=1} E[R(a_i)]$$

se define utilizando la ecuación (2.27): $T(a_k) = \max_{i=1} E[R(a_i)]$, donde

$$T(a_i) = \max_m E[R(a_i)]$$

se debe de cumplir $V[R(a_i)] \leq K$.

Ejemplo 2.7: partiendo de los resultados del ejemplo 2.5 podemos mostrar la siguiente tabla:

Tabla 2.22. Valor esperado y Varianza de cada una de las alternativas.

Alternativas	Estados de la Naturaleza				$E[R(a_i)]$	$V[R(a_i)]$
	e_1	e_2	e_3	e_4		
a_1	11	9	11	8	10.3	1.21
a_2	8	25	8	11	11.7	45.01
a_3	8	11	10	11	9.9	1.09
probabilidades	0.2	0.2	0.5	0.1		

Si el decisor fija un valor de $K = 15$, y como el criterio establece que se consideran exclusivamente las alternativas a_i cuya varianza se menor o igual a un K , para nuestro caso debe de cumplir que $V[R(a_i)] \leq 15$. Entonces quedaría excluida del proceso de decisión la alternativa a_2 , ya que su varianza es igual a 45.01, por lo tanto no cumple, las restantes alternativas si cumplen con la condición.

Encontrado la elección óptima, utilizando (2.27):

$$T(a_k) = \max_{i=1}$$

$$i = 1$$

$$T(a_i) = \max_m E[R(a_i)]$$

$\max\{E[R(a_1)], E[R(a_3)]\} = \max\{10.3, 9.9\} = 10.3$. Por lo tanto la decisión óptima corresponde a la alternativa a_1 .

2.3.8. Criterio de dispersión.

Aquí se elige la alternativa a_i que posee el máximo valor medio corregido y se define como.

$$T(a_k) = \max_{i=1}^m EC[R(a_i)] \quad (2.32).$$

$$T(a_i) = \max_m EC[R(a_i)]$$

Donde:

$EC[R(a_i)] = E[R(a_i)] - K\sqrt{V[R(a_i)]}$ (2.33) (Valor esperado corregido); donde K es un valor fijado por el decisor.

Ejemplo 2.8: Tomando los resultados de la tabla 2.6, podemos calcular para cada una de las alternativas su valor esperado corregido.

Utilizando (2.33): $EC[R(a_i)] = E[R(a_i)] - K\sqrt{V[R(a_i)]}$ y fijando un $K = 2$

Calculando el valor esperado corregido para a_1 :

$$EC[R(a_1)] = E[R(a_1)] - K\sqrt{V[R(a_1)]}$$

$$EC[R(a_1)] = 10.3 - 2\sqrt{1.21} = 8.1$$

Calculando el valor esperado corregido para a_2 :

$$EC[R(a_2)] = E[R(a_2)] - K\sqrt{V[R(a_2)]}$$

$$EC[R(a_2)] = 11.7 - 2\sqrt{45.01} = -1.72$$

Calculando el valor esperado corregido para a_3 :

$$EC[R(a_3)] = E[R(a_3)] - K\sqrt{V[R(a_3)]}$$

$$EC[R(a_3)] = 9.9 - 2\sqrt{1.09} = 7.82.$$

Tabla2.23 Resultado de calcular el valor esperado corregido.

Alternativas	Estados de la Naturaleza				$E[R(a_i)]$	EC[$R(a_i)$]
	e_1	e_2	e_3	e_4		
a_1	11	9	11	8	10.3	8.1
a_2	8	25	8	11	11.7	-1.72
a_3	8	11	10	11	9.9	7.81
Probabilidades	0.2	0.2	0.5	0.1		

Y como podemos observar según el criterio de dispersión que consisten en elegir el máximo de los valores esperados, utilizando (2.32):

$$T(a_k) = \max_{i=1}$$

$$i = 1$$

Tenemos que:

$$T(a_i) = \max_m EC[R(a_i)]$$

$$\max\{EC[R(a_1)], EC[R(a_2)], EC[R(a_3)]\} = \max\{8.1, -1.72, 7.81\} = 8.1.$$

Podemos decir, que la alternativa óptima es a_1 ya que tiene el máximo valor esperado corregido.

2.3.9. Criterio de la probabilidad máxima.

Para cada alternativa a_i , cuyos resultados correspondientes a los estados e_j , tome un valor mayor o igual que una constante K fijada por el decisor. $T(a_i) = P[R(a_i) \geq K]$. Se determina su probabilidad asociada.

Se selecciona aquella alternativa con mayor probabilidad asociada. Por tanto, se elige la alternativa a_k tal que:

$$T(a_k) = \max_{i=1} P[R(a_i) \geq K] \quad (2.34).$$

$$T(a_i) = \max_m P[R(a_i) \geq K]$$

Ejemplo 2.9: Utilizando los datos del ejemplo 2.4, con un $K=10$.

Tabla.2.24. Con cada una de la probabilidades asociadas.

	Estados de la Naturaleza				
Alternativas	e_1	e_2	e_3	e_4	p
a_1	11	9	11	8	0.7
a_2	8	25	8	11	0.3
a_3	8	11	10	11	0.8
Probabilidades	0.2	0.2	0.5	0.1	

Analizando para la alternativa a_1 , como podemos ver los resultados correspondientes a los estados e_1 y e_3 son los únicos que superan el valor 10, siendo sus probabilidades asociadas 0.2 y 0.5; sumando ambas se obtiene una probabilidad $p = 0.7$.

Ahora para la alternativa a_2 , los resultados correspondientes a los estados e_2 y e_4 son los únicos que superan el valor 10, siendo sus probabilidades asociadas 0.2 y 0.1; sumando ambas se obtiene una probabilidad $p = 0.3$. Finalmente para la alternativa a_3 , como podemos ver los resultados correspondientes a los estados e_2, e_3 y e_4 son los únicos que superan el valor 10, siendo sus probabilidades asociadas 0.2, 0.5 y 0.1; sumando ambas se obtiene una probabilidad $p = 0.8$. La alternativa óptima sería a_3 .

2.3.10. Máxima verosimilitud.

Sólo se debe usar si una de las p_j , es claramente superior a las restantes y preferiblemente si es una decisión puntual; consiste en aplicar el método del valor esperado, pero considerando sólo el estado de la naturaleza que es mayor, ignorando los restantes, lo que implicaría que es equivalente a manejar la información perfecta (Es decir que conociendo el estado de naturaleza que va a suceder, su probabilidad p_j valdría uno, las restantes cero), sólo que aquí se toma la decisión directa, en función de la alternativa a_i que tenga el mejor pago para el estado de la naturaleza que tiene la probabilidad p_j , muy superior a los restantes, ya que al calcular el valor esperado de cada alternativa por esa probabilidad no alteraría para nada el resultado.

Ejemplo 2.10: a continuación se presentan los diferentes pagos por el préstamo recibido en tres diferentes bancos. Cada uno de los eventos tienen probabilidades de 0.20, 0.25, 0.3, 0.25 con probabilidades, respectivamente.

Tabla 2.35. Cantidades de pagos.

Alternativas	Estados de la Naturaleza			
	e_1	e_2	e_3	e_4
Banamex	-27,000	-28,800	-30,600	-37,800
Bancomer	-25,200	-28,800	-32,400	-36,000
HSBC	-23,400	-30,600	-32,400	-39,600
Probabilidades	0.2	0.25	0.3	0.25

(Obsérvese que todas las consecuencias son negativas, debido a que son costos)

Aplicando el criterio de verosimilitud tenemos que la mayor p_j , pertenece al estado e_3 , y su mayor pago es el correspondiente a -30,600.

$$E[R(a_i)] = \sum_{j=1}^n X_{ij}P_j = (-30,600)(1) = -30,600$$

Cabe decir que muchas veces el método de verosimilitud no es muy eficaz, ya que a veces puede existir que dos estados de naturaleza tengan la mayor probabilidad, por lo tanto este método, no podrá decidir cual es la mejor alternativa.

2.3.11. Las curvas de utilidad.

Es fácil notar que para estos dos métodos, valor esperado y máxima verosimilitud, se centran en el pago promedio, o en el pago esperado a la larga, sin tomar en consideración, que la ocurrencia de un estado de la naturaleza poco favorable, pudiese generar resultados muy poco deseados, es decir la dispersión de los valores, excepto por su influencia en los promedios, no es tomada en cuenta, por lo cual, existe otro método, que si bien no toma en cuenta la dispersión, si considera, en cierta forma, el nivel de

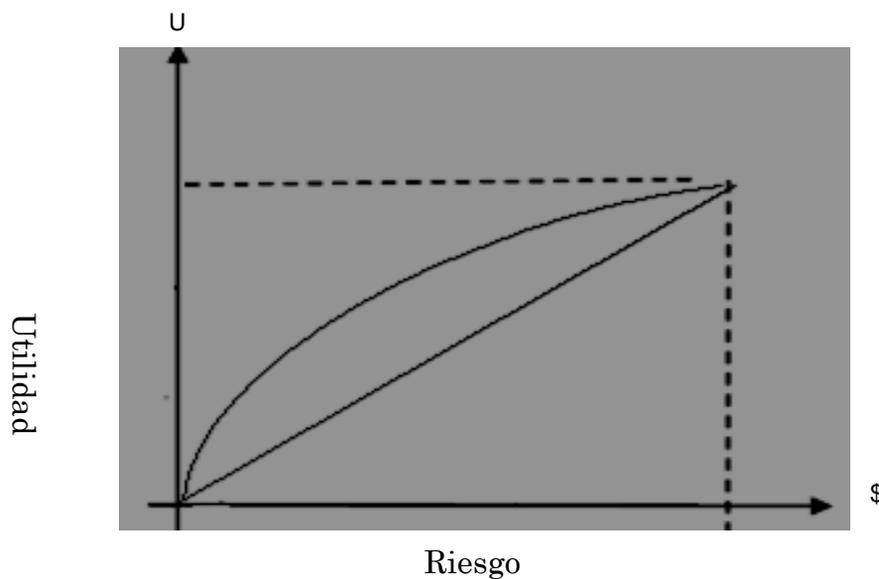
riesgo del decisor, este método son las curvas de utilidad, las cuales son particulares para cada decisor, en cada situación problema y reflejan su propensión o aversión al riesgo, traduciendo los pagos esperados en unidades de utilidad esperada.

Con este método, el decisor también tomaría la decisión en función de la alternativa que genere el mejor valor promedio.

Existen diferentes formas de representar el riesgo con las curvas utilidad, estas son:

- a) Curva de utilidad con aversión al riesgo.

Figura 2.1. Curva de utilidad con aversión al riesgo.



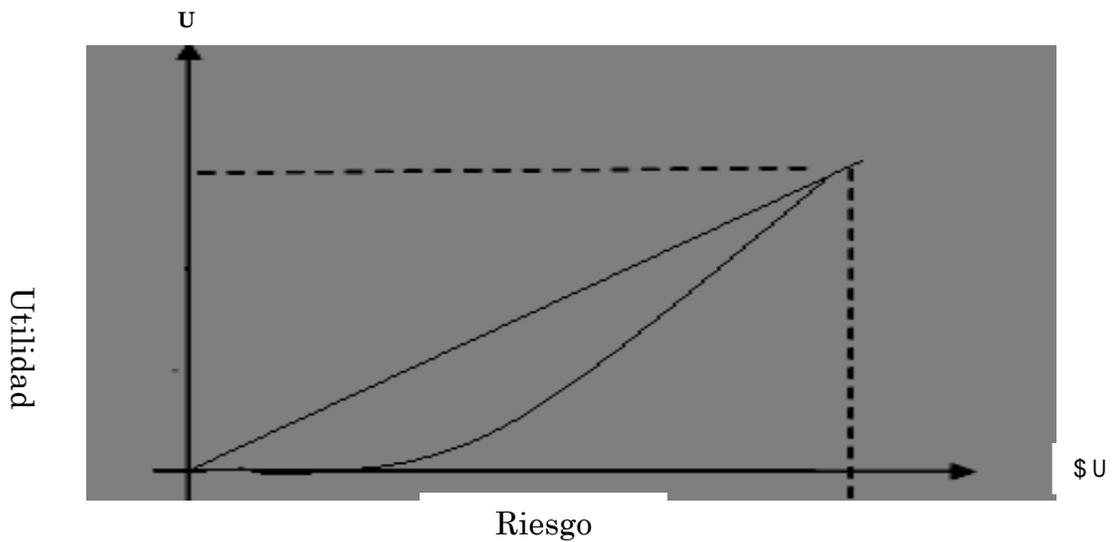
La figura anterior muestra una típica función de adversa al riesgo, esta función de utilidad se caracteriza por ser creciente y cóncava.

En la aversión hacia el riesgo, ubicamos al inversionista común, que frente a la inversión en igualdad de condiciones, tenderá a seleccionar la que tenga

menor riesgo. Esta situación implica que a medida, aumenta el riesgo, su satisfacción tiende a disminuir.

b) Curva de utilidad propensa al riesgo.

Figura 2.2 Curva de utilidad propensa al riesgo.



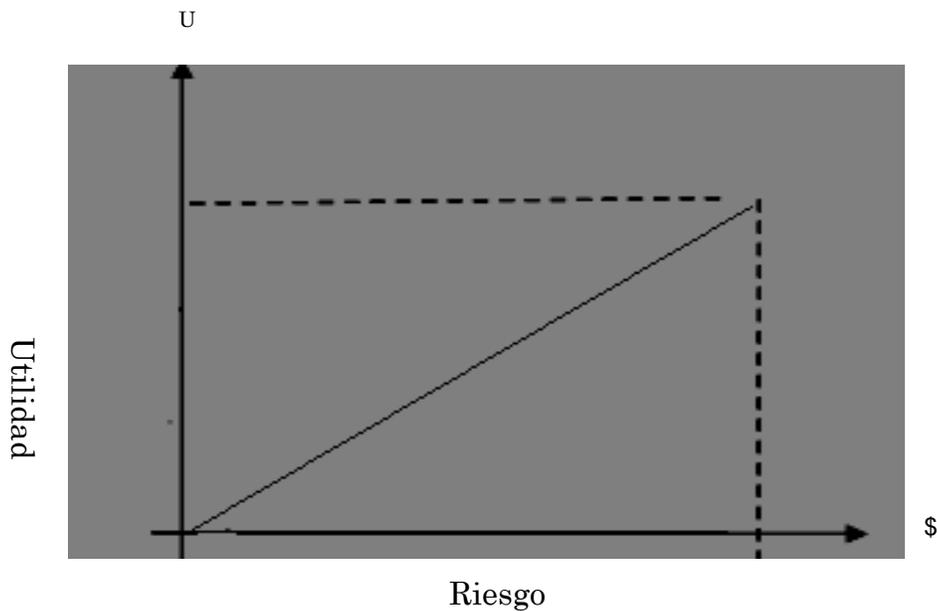
La figura anterior muestra una función de propensa al riesgo, esta función de utilidad se caracteriza por ser decreciente y cóncava.

Podemos ubicar al individuo que busca el riesgo, es decir que no tienen grandes expectativas sobre los rendimientos sino sobre el placer o satisfacción que el riesgo produce. En otras palabras es el inversionista que

busca ganar a toda costa, no importando la gran probabilidad que tiene de perder.

c) Indiferencia al riesgo.

Figura 2.3 Curva de utilidad de indiferencia al riesgo.



Aquí ubicamos al individuo que no siente aversión ni tendencia al riesgo, ya que su grado de satisfacción es proporcional a los rendimientos que le produzca la inversión. Es decir que no les preocupa el riesgo pero si lo toman en cuenta.

Un método utilizado para elaborar funciones de utilidad consiste en usar una función de utilidad exponencial. Esta función tiene una forma predeterminada (cóncava) y requiere evaluar solo un parámetro. Ha sido utilizada para analizar decisiones de inversiones financieras. La función tiene la siguiente forma:

$$U(x) = 1 - e^{-x/r} \quad (2.35).$$

Donde x es la cantidad de dinero que vamos a convertir en utilidad, el único parámetro a evaluar es r , que es la constante que mide el grado de aversión al riesgo. Es decir, entre más elevado sea el valor de r , más propensa al riesgo es la persona o la empresa. De manera similar, entre menor sea el valor de r , más adversa al riesgo es la persona o empresa.

A continuación se muestra un ejemplo en donde se calcula la utilidad esperada, utilizando la curva de utilidad.

Ejemplo 2.11: En la tabla 2.25 se presentan las diferentes ganancias o utilidades generadas por dos contratos propuestos a la empresa constructora A.B.C. Cada uno de ganancias con sus respectivas probabilidades.

Tabla 2.25. Utilidades de cada contrato.

Alternativas	Estados de la Naturaleza			
	e_1	e_2	e_3	e_4
Contrato 1	80	50	10	-6
Contrato 2	100	25	-30	0
Probabilidades	0.6	0.2	0.15	0.05

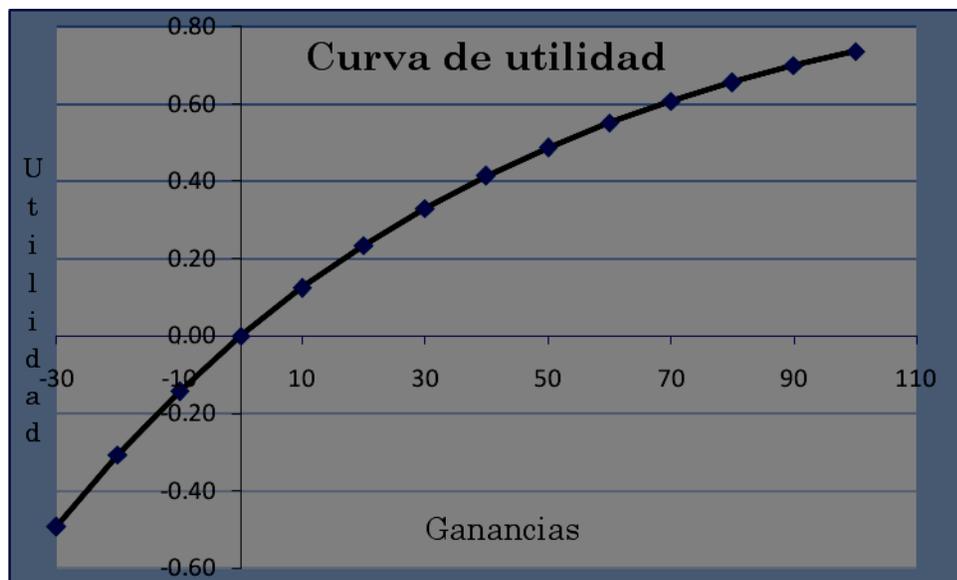
Utilizaremos el método de la función de utilidad exponencial predeterminada $U(x) = 1 - e^{-x/r}$ y utilizando el parámetro $r=75$ obtenemos la siguiente tabla.

Tabla 2.26. Utilidades generadas por la función predeterminada.

Alternativas	Estados de la Naturaleza				$E[R(a_i)]$
	e_1	e_2	e_3	e_4	
Contrato 1	0.66	0.49	0.12	-0.08	0.51
Contrato 2	0.74	0.28	-0.49	0	0.43
Probabilidades	0.6	0.2	0.15	0.05	

Ahora calculando el valor esperado $E[R(a_i)] = \sum_{j=1}^n P_j x_{ij}$ se obtienen los resultados que se pueden observar en la última columna de la tabla anterior. Podemos decir que para obtener la mayor ganancia esperada se deberá elegir el contrato 1. Su gráfica de utilidad se presenta a continuación.

Gráfico 2. Curva de utilidad del ejemplo 2.11.



3.3.12. Modelo de Amplitud para Riesgo e Incertidumbre (MARI)

Es una ampliación y funciona igual que el El Modelo de Amplitud (EMA), sólo que el valor esperado de cada alternativa $E[R(a_i)]$, se calculará a través de las probabilidades de ocurrencia de cada estado de la naturaleza p_j , a través de las siguientes expresiones:

Para maximización se tendrá:

$$T(a_i) = \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] - (1 - \beta) * A_i)\} \quad (2.36).$$

$$T(a_k) = \max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] - (1 - \beta) * A_i)\} \quad (2.37).$$

Para minimización se utilizará la siguiente expresión:

$$T(a_i) = \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] + (1 - \beta) * A_i)\} \quad (2.38).$$

$$T(a_k) = \min_{i=1}^m T(a_i) = \min_{i=1}^m \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] + (1 - \beta) * A_i)\} \quad (2.39).$$

Donde:

$$T(a_i) = E[R(a_i)] = \sum_{j=1}^n P_j x_{ij}; \text{ valor esperado de cada alternativa.}$$

$A_i = \text{mayor}x_{ij} - \text{menor}x_{ij}$, es el cálculo de la amplitud correspondiente de cada alternativa. Y β factor de castigo para elegir la alternativa con menor dispersión.

Ahora bien, en muchos casos sucederá que p_j del mayor x_{ij} , pueda ser muy grande o muy pequeño con respecto p_j del menor x_{ij} , por lo que $A_i = \text{mayor}x_{ij} - \text{menor}x_{ij}$ (2.40) pudiese no indicar una verdadera relación de dispersión de los resultados, por lo que se genera la siguiente expresión:

$$A_i c = [(1 - p_j \text{ mayor}) * \text{mayor}x_{ij}] - [p_j \text{ menor} - \text{menor}x_{ij}] \quad (2.41), \quad \text{que se denomina amplitud corregida .}$$

Donde:

p_j mayor: es la probabilidad de estado de naturaleza j , que para alternativa i , produce el mayor pago.

p_j menor: es la probabilidad de estado de naturaleza j , que para alternativa i , produce el menor pago.

Con la amplitud corregida $A_i c$, se tendrá una nueva forma de evaluar el problema de toma de decisiones bajo riesgo, utilizando el método MARI, y según sea el caso que se presente será de maximización o de minimización y se tendrán las siguientes ecuaciones:

Para caso de maximización se tendrá:

$$T(a_i) = \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] - (1 - \beta) * A_i c)\} (2.42).$$

$$T(a_k) = \max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] - (1 - \beta) * A_i c)\} (2.43).$$

Para el caso minimización se utilizara la siguiente expresión:

$$T(a_i) = \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] + (1 - \beta) * A_i c)\} (2.44).$$

$$T(a_k) = \max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] + (1 - \beta) * A_i c)\} (2.45).$$

Ya que no tenemos ninguna evidencia, que las segundas expresiones, sean mejores que las primeras, para la evaluación del método MARI, se utilizaran los dos casos.

Y los distinguiremos de la siguiente manera: cuando se utilicen las primeras expresiones se denominará MARI y utilizando las segundas ecuaciones se le denominará MARI-AC.

Para poder entender mejor la aplicación de las ecuaciones anteriores realizaremos un ejemplo en donde solo se analizará el caso de maximización:

Ejemplo 2.12:

El problema de Anderson, Sweeney & Williams (1993), en donde contamos con tres alternativas: Inversión A, Inversión B, y No invertir, tres estados de naturaleza: e_1 =suben los precios, e_2 = Permanecen los precios y e_3 =bajan los

precios, con probabilidades de 0.3, 0.5 y 0.2 respectivamente. Además se presenta los valores esperados de cada alternativa i , utilizando un factor $\beta = 0.8$.

Tabla 2.26. Datos del problema Anderson, Sweeney & Williams (1993).

	Estados de la Naturaleza			
Alternativas	e_1	e_2	e_3	$E[R(a_i)]$
Inversión A a_1	30000	20000	-50000	9000
Inversión B a_2	50000	-20000	-30000	-1000
No invertir a_3	0	0	0	0
probabilidades	0.3	0.5	0.2	

En primer lugar calcularemos la amplitud correspondiente a cada alternativa, ya sea ésta corregida o no corregida, utilizando las ecuaciones anteriores.

Cálculo de amplitud utilizando (2.40): $A_i = \text{mayor}x_{ij} - \text{menor}x_{ij}$

Para a_1

$$A_1 = 30000 - (-50000) = 80000$$

Para a_2

$$A_2 = 50000 - (-30000) = 80000$$

Cálculo de amplitud corregida:

$$A_i c = [(1 - p_j \text{ mayor}) * \text{mayor}x_{ij}] - [p_j \text{ menor} - \text{menor}x_{ij}] \quad (2.41)$$

Para a_1 :

$$A_1 c = [(1 - 0.3) * 30000] - [0.2 - (-50000)] = 31000$$

Para a_2 :

$$A_2c = [(1 - 0.3) * 50000] - [0.2 - (-30000)] = 41000$$

Ahora con ayuda de los datos de la tabla anterior buscaremos la mejor alternativa de inversión, utilizando el modelo MARI y MARI-AC respectivamente.

Cálculo de mejor alternativa con el modelo MARI.

Utilizando (2.34): $T(a_i) = \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] - (1 - \beta) * A_i)\}$.

Para a_1 :

$$T(a_1) = \{9000 + (0.8 * 9000 - (1 - 0.8) * 80000)\}$$

$$T(a_1) = 9000 + 7200 - 16000 = 200.$$

Para a_2 :

$$T(a_2) = \{-1000 + (0.8 * (-1000) - (1 - 0.8) * 80000)\}.$$

$$T(a_2) = -1000 + 800 - 16000 = -16200.$$

Encontrando la mejor alternativa con (2.35):

$$T(a_k) = \max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] - (1 - \beta) * A_i)\}.$$

$\max\{200, -16200\}=200$. Podemos decir, que la alternativa optima es a_1 .

Cálculo de mejor alternativa con el modelo MARI-AC.

Utilizando (2.40): $T(a_i) = \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] - (1 - \beta) * A_i c)\}$.

Para a_1 :

$$T(a_1) = \{E[R(a_1)] + (\beta * E[R(a_1)] - (1 - \beta) * A_1 c)\}.$$

$$T(a_1) = \{9000 + (0.8 * 9000 - (1 - 0.8) * 31000)\}.$$

$$T(a_1) = 9000 + 7200 - 6200 = 10000$$

Para a_2 :

$$T(a_2) = \{E[R(a_2)] + (\beta * E[R(a_2)] - (1 - \beta) * A_2c)\}$$

$$T(a_2) = \{-1000 + (0.8 * -1000 - (1 - 0.8) * 41000)\}.$$

$$T(a_2) = -1000 - 800 - 8200 = 10000.$$

Encontrando la mejor alternativa con (2.41):

$$T(a_k) = \max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] - (1 - \beta) * A_i c)\}.$$

$\max\{10000, -10000\}=10000$. Podemos decir, que la alternativa optima es a_1 .

A continuación se realizará una comparación entre los métodos: Valor esperado, Máxima verosimilitud, MARI y MARI-AC.

Ejemplo 2.13. Para el problema de Mathur & Solow que consiste en elegir el mejor nivel de inversión teniendo los siguientes datos:

Alternativas: Baja, Moderada, Alta.

Estados de naturaleza: e_1 =Fracaso, e_2 = Éxito y e_3 =Gran éxito, con probabilidades de 0.4, 0.4 y 0.2 respectivamente. Además se presenta los valores esperados amplitudes y amplitudes corregidas, de cada alternativa i , utilizando un factor $\beta = 0.8$. Cuyos datos se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 2.27. Datos del problema Mathur & Solow.

Alternativas	Estados de la Naturaleza					
	e_1	e_2	e_3	$E[R(a_i)]$	A_i	$A_i c$
Baja a_1	-2	5	8	2.8	10	7.2
Moderada a_2	-5	10	12	4.4	17	11.6
Alta a_3	-8	6	15	2.2	23	15.2
Probabilidades	0.4	0.4	0.2			

Analizando con el Criterio de valor esperado:

$$\text{Utilizado (2.27): } T(a_k) = \max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m E[R(a_i)].$$

$\max\{2.8, 4.4, 2.2\}=4.4$; la mejor alternativa es a_2 .

Analizando con Criterio de máxima verosimilitud.

Consiste en elegir de cada estado de naturaleza que posee la mayor p_j las alternativas a_i con mayor pago. Y para nuestro ejemplo tendremos que los estados que poseen mayor p_j son e_1 y e_2 . Además las alternativas con mayor valor son a_1 y a_2 , con -2 y 10 respectivamente.

Analizando con Método MARI (Utilizando el caso de maximización).

$$\text{Utilizando (2.34): } T(a_i) = \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] - (1 - \beta) * A_i)\}$$

Para a_1 :

$$T(a_1) = \{2.8 + (0.8 * 2.8 - (1 - 0.8) * 10)\} = 3.04.$$

Para a_2 :

$$T(a_2) = \{4.4 + (0.8 * 4.4 - (1 - 0.8) * 17)\} = 4.52.$$

Para a_3 :

$$T(a_3) = \{2.2 + (0.8 * 2.2 - (1 - 0.8) * 23)\} = -0.64$$

Encontrando la mejor alternativa con:

Utilizando: $T(a_k) = \max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] - (1 - \beta) * A_i)\}$.(2.36):

$\max\{3.04, 4.52, -0.64\}=4.52$. Podemos decir, que la alternativa optima es a_2 .

Cálculo de mejor alternativa con el modelo MARI-AC.

Utilizando (2.40): $T(a_i) = \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] - (1 - \beta) * A_i c)\}$.

Para a_1 :

$$T(a_1) = \{2.8 + (0.8 * 2.8 - (1 - 0.8) * 7.2)\} = 3.6.$$

Para a_2 :

$$T(a_2) = \{4.4 + (0.8 * 4.4 - (1 - 0.8) * 11.6)\} = 5.6.$$

Para a_3 :

$$T(a_3) = \{2.2 + (0.8 * 2.2 - (1 - 0.8) * 15.2)\} = 0.92$$

Encontrando la mejor alternativa con:

Utilizando (2.41) $T(a_k) = \max_{i=1}^m T(a_i) = \max_{i=1}^m \{E[R(a_i)] + (\beta * E[R(a_i)] - (1 - \beta) * A_i c)\}$.

$\max\{3.6, 5.6, 0.92\}=5.6$. Podemos decir, que la alternativa optima es a_2 .

Donde se puede observar que todos los métodos, excepto Máxima verosimilitud, que no puede discernir, escogieron la misma alternativa, la a_2 , lo que permite decir que el método MARI actúa como una confirmación del método del valor esperado, y permite discernir cuando el método de máxima verosimilitud no lo hace.

CAPÍTULO 3

3. ÁRBOL DE DECISIÓN

3.1 Introducción.

La mayoría de los problemas, de decisión se pueden presentar en forma de tablas de decisiones, en las cuales los resultados o consecuencias se expresan en valores numéricos que se designan por x_{ij} . Pero las tablas de decisiones o matriz de resultados nos dan una representación estática del problema de decisión, y sin embargo los problemas reales son de tipo dinámico, pudiendo llevarnos la toma de una decisión a otra situación en la que tuviéramos que volver a tomar otra decisión y así sucesivamente, resultando por tanto que la elección de una decisión deba estudiarse dentro de una secuencia de decisiones posteriores.

Estas situaciones de secuencia de decisiones son muy frecuentes en las empresas, así pues la decisión inicial puede desencadenar otras decisiones posteriores, siendo muy complicadas en estos casos la elaboración de una matriz o tabla de decisión, que tendrá que ser sustituida por un árbol de decisión.

3.2 Definición de árbol de decisión.

Un árbol de decisión es una representación gráfica que indica las posibles alternativas que pueden presentarse y los diferentes estados de la naturaleza que pueden ocurrir. El árbol de decisión representa la información que se tiene del problema, así como las posibles alternativas, resultados o

consecuencias en función de los diferentes estados de la naturaleza que se presenten.

Los árboles de decisión son normalmente construidos a partir de la descripción de la narrativa de un problema. Ellos proveen una visión gráfica de la toma de decisión necesaria, especifican las variables que son evaluadas, qué acciones deben ser tomadas y el orden en la cual la toma de decisión será efectuada. Cada vez que se ejecuta un árbol de decisión, solo un camino será seguido dependiendo del valor actual de la variable evaluada.

3.3 Ventajas e inconvenientes en el árbol de decisión

Entre las ventajas que presenta este método para la toma de decisiones se pueden citar:

- Facilita la interpretación de la decisión adoptada, indicando no solo la primera decisión a tomar, sino también las decisiones posteriores.
- Proporciona un alto grado de comprensión del conocimiento utilizado en la toma de decisiones, y a partir de este análisis el decisor puede definir estrategias posteriores.
- Explica el comportamiento respecto a una determinada tarea de decisión.
- Reduce el número de variables independientes.
- Es una magnífica herramienta para el control de gestión empresarial.

No obstante este método de árbol de decisión también presenta algunas limitaciones:

- El resultado solamente será válido para quien admita el criterio del valor esperado máximo, y acepte las diferentes probabilidades objetivas y subjetivas que se asignan.

- El método exige que el decisor (o empresa) pueda soportar el riesgo del resultado más desfavorable.

3.4 Elementos que intervienen en un árbol de decisión.

En la construcción de un árbol de decisión intervienen los siguientes elementos:

Nodo o puntos de decisión: Indica que una decisión necesita tomarse en ese punto del proceso, es decir, es el punto de partida de las diferentes estrategias que un decisor puede tomar, a estas estrategias no se les asignan probabilidades de ocurrencia. Los puntos de decisión se representan por un cuadrado.

Nodo de probabilidad o nodo de sucesos inciertos: Indica que en ese punto del proceso ocurre un evento aleatorio (estado de la naturaleza). Estos nodos se representan por un círculo, del cual se desprenden ramas que se les asignan probabilidades de ocurrencia.

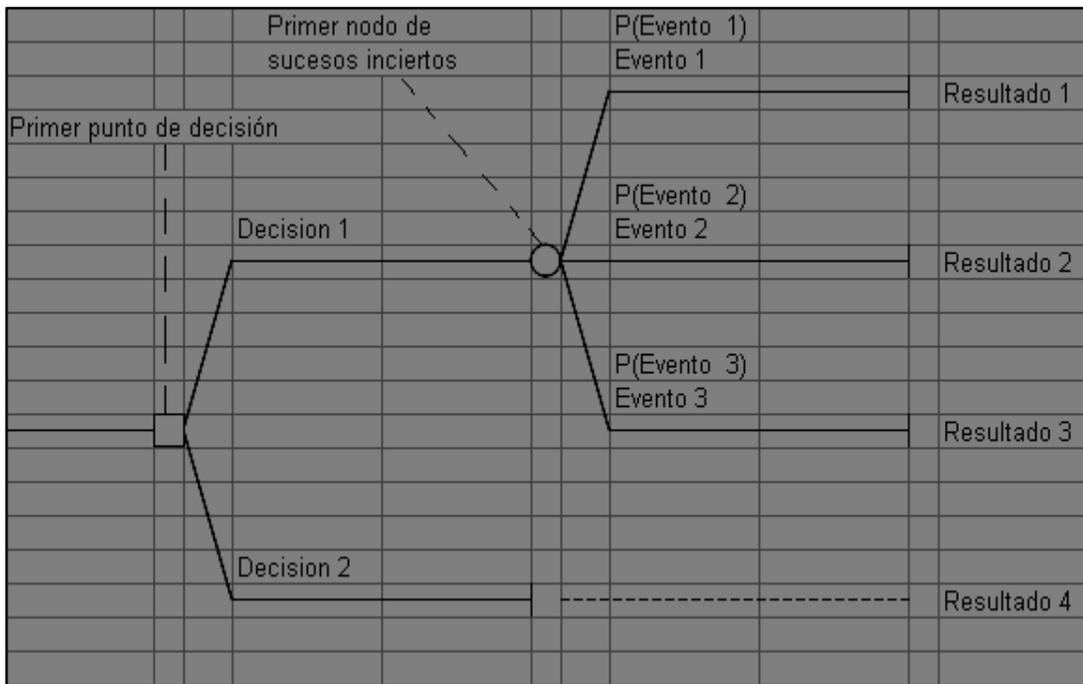
Rama: Nos muestra los distintos posibles caminos que se pueden emprender dado que tomamos una decisión u ocurre algún evento aleatorio.

Puntos terminales o resultados: en estos puntos se colocan los resultados esperados de las posibles interacciones entre las alternativas de decisión y los eventos. También se les conoce con el nombre de Pagos, y en ocasiones (depende del software utilizado) se representan por un triángulo.

Los puntos de decisión corresponden a las distintas alternativas que pueden ser adoptadas por el decisor ante una situación, y se sitúan en los vértices del árbol, del cual salen las ramas que corresponden a cada una de las

posibles alternativas. Pero al elegir una de las alternativas, el resultado que se obtendrá dependerá del estado de la naturaleza que se presente, luego al final de la rama correspondiente a cada alternativa habrá un nuevo vértice, que indicarán los sucesos inciertos, los cuales conducirán a diferentes resultados con sus probabilidades y que se presentarán por las diferentes ramas que salen del vértice, y terminan en los resultados. A Continuación se muestra una representación de lo antes mencionado.

Figura No. 3.1. Esquema General de un árbol de decisión.



3.5 Etapas para el análisis de problemas utilizando el árbol de decisión.

1. **Definir el problema:** En esta etapa se describe detalladamente el problema que se pretende resolver, incluyendo todas sus posibles

estrategias de solución, determinando así las posibles alternativas y la secuencia de las posibles decisiones a tomar, con los posibles sucesos o acontecimientos inciertos.

2. **Período de Análisis:** En esta etapa se determina el tiempo en el cual interesa analizar un problema determinado, que se establece de acuerdo a su naturaleza, fuera del periodo de análisis que se establezca no se considera ningún acto o evento.
3. **Definir el objetivo o los objetivos que se persiguen:** En esta etapa se debe establecer claramente el o los resultados buscados.
4. **Representación del árbol de decisión:** en esta etapa se debe representar en un árbol las diferentes secuencias, de alternativas y de acontecimientos, de tal manera que en cada vértice de sucesos o acontecimientos inciertos, tendremos que asignar a los diferentes estados de la naturaleza sus respectivas probabilidades de ocurrencia.
5. **Evaluación en los puntos terminales:** Hay que evaluar, en términos de beneficios o de costes, el resultado que se obtendría para cada una de las posibles combinaciones de alternativas y sucesos inciertos.

3.6 Construcción del árbol de decisión.

El árbol debe mostrar:

1. Todos los actos inmediatos entre los que el decisor desea seleccionar.
2. Todos los actos y eventos inciertos futuros que el decisor desee considerar, porque ellos pueden afectar directamente los actos inmediatos.
3. Todos los eventos inciertos que el decisor desee considerar porque pueden proporcionar información que puedan afectar directamente las consecuencias de los actos inmediatos de manera indirecta.

4. Se debe indicar que en una representación gráfica mediante un árbol de decisión existe una alternativa entre los puntos de decisión y los nodos de acontecimientos, terminando cada rama en un punto final o resultado.

Una rama en el diagrama puede presentar un acto o un evento incierto. Un cuadrado del que salen ramas que representan actos es un punto de decisión y un círculo del que salen las ramas que representan eventos es un punto de incertidumbre.

Los eventos en un punto de incertidumbre deben ser mutuamente exclusivos y colectivamente exhaustivos. Mutuamente exclusivos indica que solo uno de ellos puede ocurrir y colectivamente exhaustivos indica que todos los eventos pueden ocurrir. Esto también debe cumplirse para los actos en los puntos de decisión. En cualquier punto de decisión, los eventos y los actos cuya ocurrencia esta perfectamente determinada para el decisor, en el diagrama deben estar situados a su izquierda y todos aquellos que aún son una incógnita deben estar a su derecha.

Una característica importante del árbol de decisión es que utiliza el concepto de regreso a un nivel inferior, para resolver un problema. Lo que significa comenzar con el término de derecha que tenga el mayor valor esperado del árbol y regresar al punto de decisión actual o inicial, para determinar la decisión o decisiones que deban tomarse.

3.7 Asignación de probabilidades a los nodos de sucesos inciertos.

En el análisis de un problema utilizando un árbol de decisión, se describen en orden cronológico las diferentes alternativas de acción que se presentan y la información adquirida a lo largo de las diferentes rutas. En algunos nodos del

árbol, el decisor controla la elección, pero en otros el control pasa a manos del azar. En estos nodos controlados por el azar es crucial conocer las probabilidades de que el azar escoja una rama particular de las varias alternativas posibles.

Estas probabilidades que se le asignan están en función del grado de información que se posee, las cuales pueden ser probabilidades subjetivas u objetivas.

Entre las probabilidades objetivas se tienen: marginales, conjuntas y condicionales. Las probabilidades subjetivas son asignadas de acuerdo a la experiencia del decisor.

3.8 Evaluación en los puntos terminales.

En los puntos terminales se llega a valores que pueden ser utilidades o pérdidas que dependen de los costos o beneficios que se tengan en las diferentes estrategias consideradas. En estos puntos también se pueden colocar resultados esperados que no necesariamente sean valores monetarios; o la combinación de ambos; es decir, resultados esperados y valores monetarios, los cuales permitirán al decisor seleccionar la mejor estrategia.

3.9 Evaluación del árbol de decisión

Después de haber construido el árbol de decisión con las diversas estrategias posibles y obtenido los resultados en los puntos terminales de cada rama, se procede a evaluarlo; con el objetivo de seleccionar la mejor estrategia, utilizando el concepto de “regreso a un nivel inferior”.

El criterio de evaluación que se utiliza es el del *Valor Monetario Esperado (VME)*, este consiste en descomponer el árbol, partiendo de los puntos

terminales hasta llegar al punto inicial de la decisión, en donde se hace la selección de la “mejor estrategia a seguir”.

El VME debe utilizarse si la persona responsable de la toma de decisión, lo usa como su norma para seleccionar un curso de acción que proporcione con certeza una cantidad determinada de dinero o para seleccionar un curso de acción que produzca la mejor o la peor de todas las consecuencias posibles asociadas con un conjunto de alternativas factibles, en una situación concreta bajo incertidumbre.

Utilizando este método, el árbol de decisión se descompone de la siguiente manera:

1. Se asigna en los puntos terminales de cada rama los beneficios o costos monetarios que se obtienen con cada estrategia.
2. En las ramas que parten de los nodos de azar, se les asignan a cada una de ellas, sus probabilidades de ocurrencia, las cuales pueden ser objetivas o subjetivas de acuerdo al grado de información que posea.
3. Estando en los extremos del árbol se procede marcha atrás, utilizando sucesivamente dos mecanismos:
 - a) Un proceso de cálculo del valor o beneficio esperado en cada nodo de azar.
 - b) Un proceso de elección que selecciona la ruta hacia el máximo valor futuro en cada nodo de decisión.

La mejor manera de comprender la teoría relacionada con el árbol de decisión es a través de ejemplos.

Ejemplo 3.1:

Definición del problema:

Se supone un laboratorio farmacéutico que analiza el lanzamiento de un nuevo producto dietético “dieta”. Evidentemente los resultados esperados dependerán fundamentalmente de dos factores:

- De la existencia de otro producto parecido en el mercado, y
- Del precio.

Objetivo del problema:

- Análisis de beneficios o costes del lanzamiento de un nuevo producto “dietético”.

La empresa debe fijar el precio de venta de este producto “dieta”; pero este precio dependerá de si hay o no otro producto ya en el mercado, pues evidentemente si no hay otro producto de competencia en el mercado el beneficio dependerá del precio fijado para el producto “dieta”; pero si existe un producto de competencia en el mercado, entonces el beneficio dependerá del precio de los productos de la competencia y por supuesto del precio fijado para el producto “dieta”.

En esta situación este laboratorio farmacéutico tendrá que tomar las dos decisiones siguientes:

1. Decidir si se debe lanzar o no el producto “dieta”.
2. Si decide lanzar el producto, fijar el precio del mismo.

Elaboración del árbol de decisión:

La decisión inicial sería, elegir entre dos posibles alternativas:

1. No lanzar el producto o
2. Lanzar el producto.

Con lo cual ya se tendría el primer punto de decisión, representado por un cuadrado, con dos ramas o aristas, (Ver figura 3.2). Si se decide no lanzar el producto el problema a terminado, el beneficio sería cero, el punto final de esa rama sería un triángulo y el resultado $R_1 = 0$. Si por el contrario se elige la alternativa de lanzar el producto “dieta”, pueden ocurrir dos acontecimientos o sucesos inciertos:

1. Que no exista producto de la competencia en el mercado o
2. Que si exista producto de competencia en el mercado.

Con los cual ya se tiene el primer nodo de sucesos inciertos, representado por un círculo.

Ahora, tanto si no existe producto de competencia en el mercado como si existe, se tendrá que fijar un precio para el producto “dieta”, suponiendo que estos precios del producto son P_1 , P_2 y P_3 , y que los precios del producto de la competencia son P'_1 , P'_2 y P'_3 , en el supuesto que existiera este producto de la competencia. Por lo tanto en la figura 3.2 se tendrán 13 puntos finales o resultados en donde cada uno de ellos corresponde a una combinación diferente de las alternativas y de los sucesos inciertos o acontecimientos.

Asignación de precios y probabilidades:

La empresa prevé que si no existe producto de competencia en el mercado, y considera que los posibles precios para su producto “dieta” pueden ser $P_1 = 5$ dólares, $P_2 = 6$ dólares y $P_3 = 7$ dólares, por lo que la empresa estima según experiencia y estudios similares unos resultados o beneficios de 1.2, 1.3 ó 1.4 millones de dólares, dependiendo de si el precio fijado era P_1 , P_2 y P_3 respectivamente (ver figura 3.2).

Si admite que aparece un nuevo producto de competencia en el mercado, entonces los resultados o beneficios dependerán tanto del precio del producto “dieta” P_1 , P_2 y P_3 , como del posible precio del producto de la competencia en el mercado, que según la empresa pueden ser $P'_1 = 4.80$ dólares, $P'_2 = 6.15$ dólares y $P'_3 = 7.40$ dólares.

La siguiente tabla muestra los resultados o consecuencias para el supuesto que aparezca un nuevo producto en el mercado.

Tabla 3.1. Resultados suponiendo que aparece un nuevo producto en el mercado (los beneficios están expresados en millones de dólares.).

DIETA	PRODUCTO DE COMPETENCIA		
	$P'_1 = 4.80$	$P'_2 = 6.15$	$P'_3 = 7.40$
$P_1 = 5$	0.70	-0.60	-1.80
	(0.3)	(0.5)	(0.2)
$P_2 = 6$	0.50	-0.50	-0.75
	(0.2)	(0.5)	(0.3)
$P_3 = 7$	0.30	0.02	-0.20
	(0.1)	(0.2)	(0.7)

De experiencias análogas así como de investigaciones de mercado realizadas se llega a estimar las probabilidades para los diferentes sucesos inciertos, las cuales son:

- Si se decide lanzar un nuevo producto “dieta” se estima una probabilidad de 0.3 de que no aparezca el producto competidor, por lo

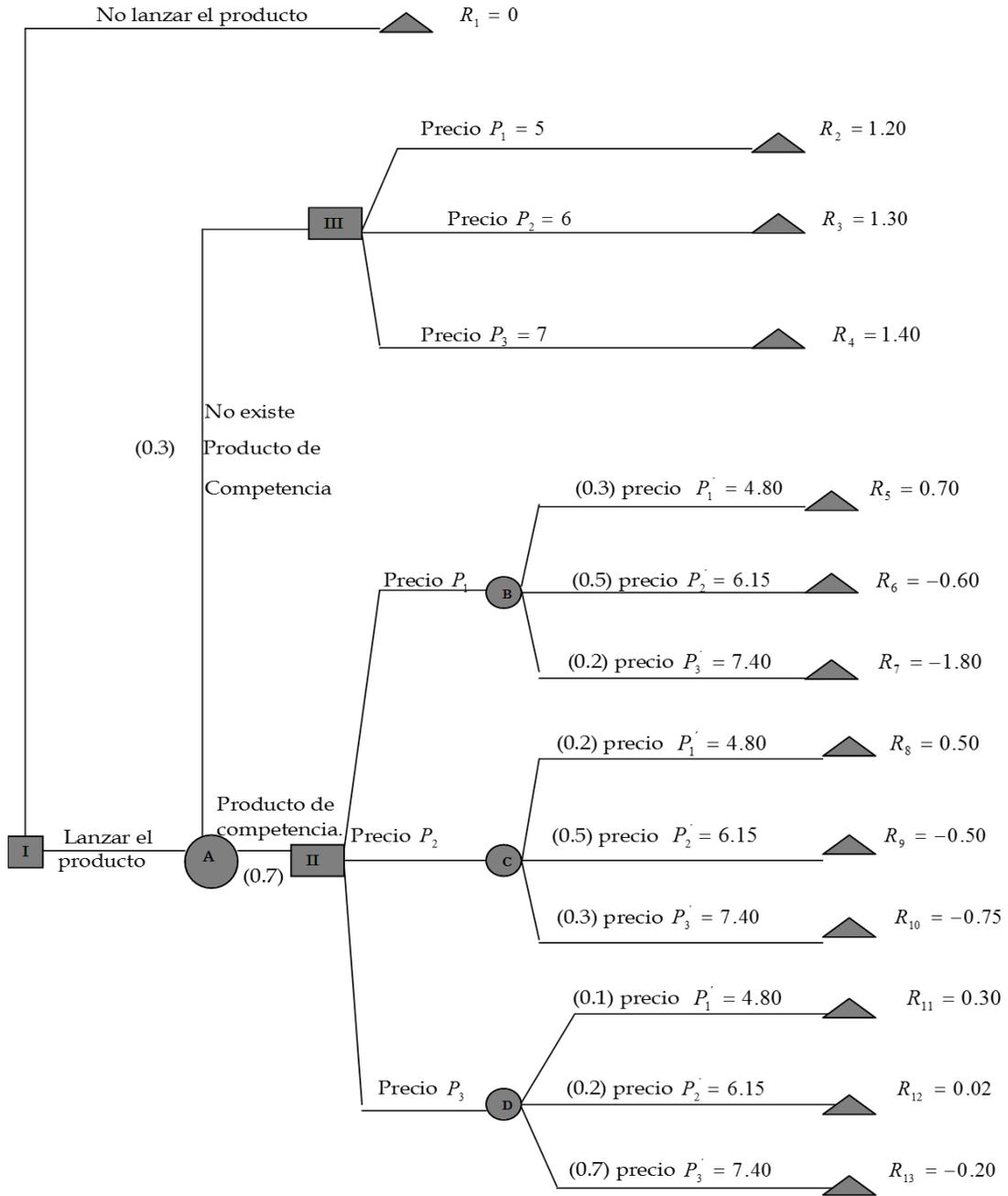
tanto hay una probabilidad de 0.7 de que aparezca el producto competidor.

- Si el precio que se fija para el producto “dieta” es P_1 , las probabilidades para que el precio del producto de la competencia sea P'_1 , P'_2 o P'_3 son 0.3, 0.5, ó 0.2.
- Si el precio que se fija para el producto “dieta” es P_2 , las probabilidades para que el precio del producto de la competencia sea P'_1 , P'_2 o P'_3 son 0.2, 0.5, ó 0.3.
- Si el precio que se fija para el producto “dieta” es P_3 , las probabilidades para que el precio del producto de la competencia sea P'_1 , P'_2 o P'_3 son 0.1, 0.2, ó 0.7.

Estas probabilidades son las que se muestran en la tabla 3.1 entre paréntesis, y en el árbol de decisión también aparecen entre paréntesis. Así pues el árbol de decisión recoge las posibles alternativas, así como beneficios esperados para cada alternativa y las correspondientes probabilidades.

Después de recoger toda la información anterior y efectuar el correspondiente análisis la empresa deberá decidir si lanzar o no el nuevo producto “dieta” y el precio al que debe salir al mercado para obtener el máximo beneficio.

Figura 3.2 Árbol de decisión para la implementación de un nuevo producto al mercado.



Evaluación del árbol de decisión:

La primera decisión que se encuentra en la figura 3.2, será el punto I ¿el nuevo producto dieta debe ser lanzado o no?, es decir hay que elegir una de las dos ramas (alternativas), pero para ello será necesario conocer el beneficio esperado correspondiente a cada alternativa, y se elegirá la alternativa que proporcione mayor beneficio. Ahora bien en este caso se conoce el beneficio $R_1 = 0$ que se obtiene si no se lanza el producto, pero no se conoce el beneficio en el nudo A del gráfico, es decir si se decide lanzar el nuevo producto “dieta” no se conoce el beneficio esperado.

Sin embargo, si el decisor conociera los beneficios o resultados en los puntos de decisión II y III de la figura 3.2, entonces se podría determinar en el nodo de acontecimientos A, el beneficio esperado, el cual se obtiene ponderando los beneficios o resultados en los puntos II y III por sus probabilidades y sumando. Y la decisión sobre lanzar o no el nuevo producto “dieta” se tomaría comparando el beneficio $R_1 = 0$, el beneficio para el caso de no lanzar el producto, con el beneficio esperado en el nodo A.

Se observa que para poder tomar una decisión en el punto I, se necesita conocer los beneficios o resultados correspondientes a los puntos de decisión II y III y así sucesivamente.

Punto de decisión III:

En este punto el decisor elegirá aquella alternativa (precio) que proporcione máximo beneficio, luego en este caso elegirá fijar como precio $P_3 = 7$ dólares, pues proporciona el beneficio máximo $R_4 = 1.40$ millones de dólares.

Punto de decisión II:

En este punto el decisor elegirá aquella alternativa referente al precio P_1 , P_2 y P_3 , que de lugar al beneficio esperado máximo. Así pues se tendrá que calcular el valor esperado en cada nodo.

$$E [B] = \text{VME} (B) = (0.70) (0.3) + (-0.60) (0.5) + (-1.80) (0.2) = -0.45$$

$$E [C] = \text{VME} (C) = (0.50) (0.2) + (-0.50) (0.5) + (-0.75) (0.3) = -0.375$$

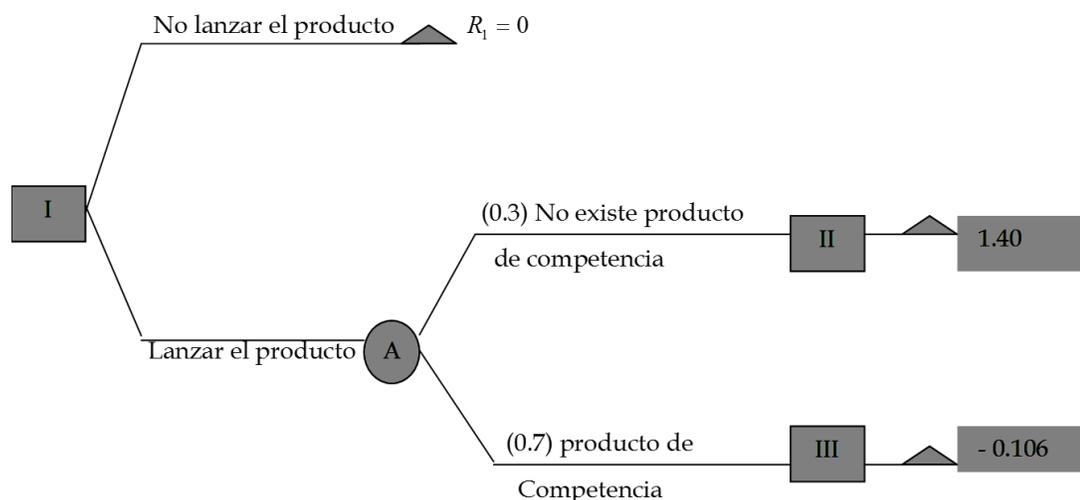
$$E [D] = \text{VME} (D) = (0.30) (0.1) + (0.02) (0.2) + (-0.20) (0.7) = -0.106$$

En el punto de decisión II el decisor elegirá el precio $P_3 = 7$ dólares, pues esta alternativa es la que conduce a una pérdida esperada menor, igual a -0.106 millones de dólares.

El punto de decisión I, en donde se tendrá que decidir si se lanza o no el producto, y sustituyendo los puntos de decisión II y III por sus decisiones óptimas, tendremos que el árbol de decisión a quedado reducido al siguiente esquema:

Figura 3.3 Puntos de Decisión.

El beneficio esperado en el nodo A, en caso de lanzar el producto “dieta” al



mercado será: $E[A] = \text{VME} (A) = (1.40)(0.3) + (-0.106)(0.7) = 0.3458$

Conclusiones:

Después del cálculo del VME(A) se dispone de información para poder tomar la decisión:

- En el caso de no lanzar el producto, el beneficio esperado es 0.
- Y si se lanza el producto el beneficio esperado es 0.3458 millones de dólares.
- Por lo tanto lógicamente la empresa decidirá lanzar el nuevo producto dieta esperando obtener un beneficio medio de 0.3458 millones de dólares.
- Si se decide lanzar el producto y no hay producto de competencia, elegirá como precio el producto $P_3 = 7$ dólares.
- En caso de que exista producto de competencia en el mercado también se debe elegir el precio $P_3 = 7$ dólares para el nuevo producto, pues con ese precio se obtendría la menor pérdida esperada de -0.106 millones de dólares.

Ejemplo 3.2:

Definición del problema:

Una empresa dedicada a la fabricación de ordenadores personales, ha tenido en los últimos años una fuerte demanda, por lo que ha sufrido diferentes tipos de inconvenientes y limitaciones en su planta de fabricación; por tal razón los funcionarios de la empresa se plantean tres tipos de alternativas:

a_1 : Aumentar las instalaciones de la fábrica actual.

a_2 : Construir una nueva fábrica.

a_3 : Solicitar licencia para construir un nuevo ordenador en las instalaciones actuales.

La empresa piensa que sucesos inciertos o sucesos futuros pueden hacer que la demanda sea: alta, media o baja, lo cual da lugar a tres estados de la naturaleza.

e_1 : Demanda alta.

e_2 : Demanda media.

e_3 : Demanda baja.

Asignación de probabilidades:

Las respectivas probabilidades para la demanda alta, media y baja son: 0.4, 0.4, 0.2 estas probabilidades a priori han sido obtenidas por los funcionarios de la empresa en base a otras experiencias o de manera subjetiva.

Los beneficios estimados por los funcionarios de la empresa, están expresados en la siguiente tabla, en la que se obtendrá la alternativa óptima a través del cálculo del VME.

Tabla 3.2. Beneficios estimados (cantidades expresadas en millones de dólares.)

ALTERNATIVAS	ESTADOS DE LA NATURALEZA			Valor Monetario Esperado (VME)
	e_1 : Demanda alta	e_2 : Demanda media	e_3 : Demanda baja	
a_1 : Aumentar	10	5	-1	5.8
a_2 : Construir	25	12	-5	13.8
a_3 : Licencia	15	8	-0.50	9.1
Probabilidad	0.4	0.4	0.2	

En la última columna de la tabla tenemos los valores monetarios esperados para cada alternativa:

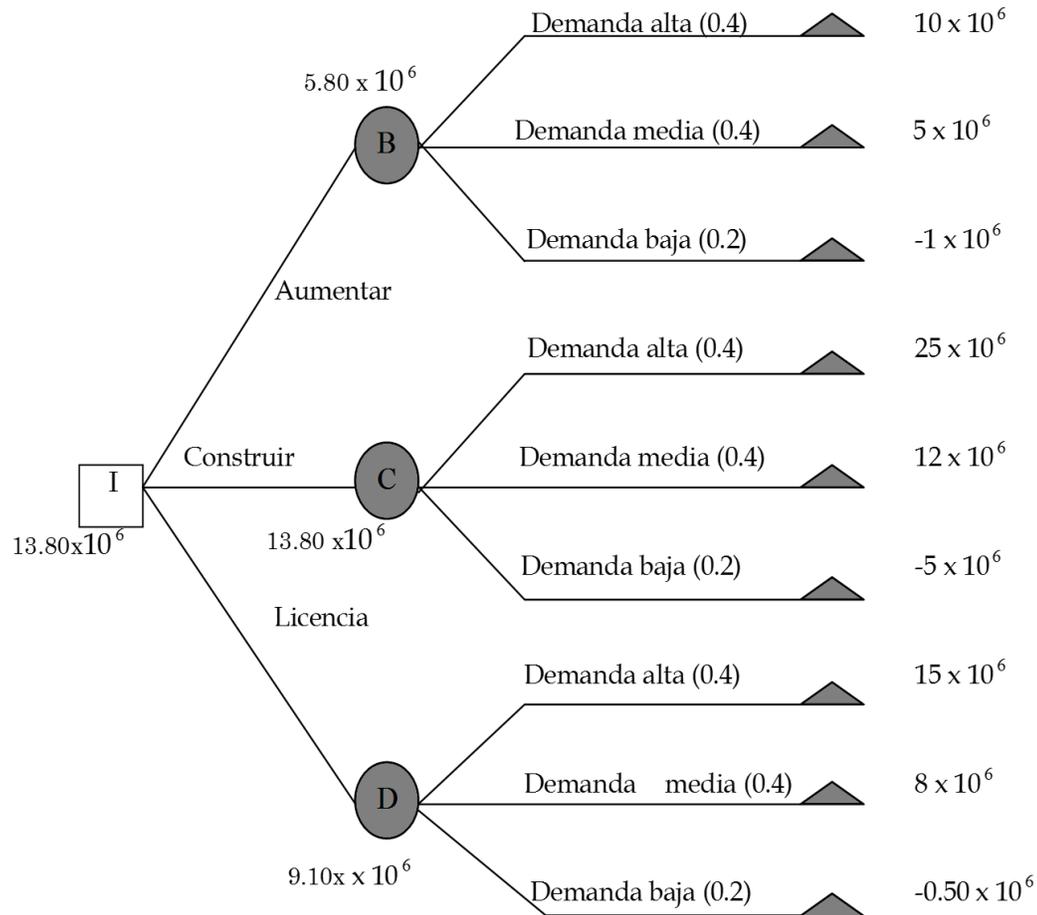
$$\text{VME}(a_1) = (0.4)(10) + (0.4)(5) + (0.2)(-1) = 5.8$$

$$\text{VME}(a_2) = (0.4)(25) + (0.4)(12) + (0.2)(-5) = 13.8$$

$$\text{VME}(a_3) = (0.4)(15) + (0.4)(8) + (0.2)(-0.50) = 9.1$$

A continuación se muestra la representación gráfica, donde se pone de manifiesto que la alternativa óptima es construir una nueva fábrica.

Figura 3.4 Representación del árbol de decisión.



El valor monetario asociado al punto o nodo de decisión I es simplemente el máximo de los valores monetarios esperados de las tres ramas o alternativas, es decir,

$$\begin{aligned} \text{VME (Punto de decisión I)} &= \text{máx. } \{5.80 \times 10^6, 13.80 \times 10^6, 9.10 \times 10^6\} \\ &= 13.80 \times 10^6 \text{ dólares.} \end{aligned}$$

Este resultado corresponde al Valor Monetario Esperado de la alternativa a_2 : Construir una nueva fábrica. Por lo tanto la alternativa óptima es a_2 .

3.10 Elaboración de un árbol de decisión secuencial.

El árbol de decisión es un diagrama que representa en forma secuencial condiciones y acciones, basándose en el uso de resultados y probabilidades asociadas; mostrando así que condiciones se consideran en primer lugar, en segundo lugar y así sucesivamente. Este método permite mostrar la relación que existe entre cada condición y el grupo de acciones permisibles asociado con ella.

Ejemplo 3.3:

Un árbol de decisión es aún más útil cuando se deben de tomar una serie de decisiones secuenciales. Así pues, suponiendo que en el ejemplo anterior el director de la empresa tiene que tomar dos decisiones, en donde la segunda decisión depende del resultado de la primera decisión. Se debe admitir que antes de tomar la decisión sobre el proceso de expansión (elegir una de las alternativas a_1 , a_2 , o a_3) la empresa puede hacer una investigación cuyo coste es de 50,000 dólares . Obteniendo los resultados de la investigación de mercados, el director de la empresa puede elegir una de las tres posibles alternativas.

En el ejemplo anterior, en donde no se conocían los resultados de la investigación de mercados, el director de la empresa estimaba las probabilidades a priori de los diferentes estados de la naturaleza:

$$P(\text{Demanda alta}) = P(e_1) = 0.4$$

$$P(\text{Demanda media}) = P(e_2) = 0.4$$

$$P(\text{Demanda baja}) = P(e_3) = 0.2$$

De esta manera la empresa considera que la información a priori disponible es escasa y decide incorporar más información con el fin de reducir el coste de la incertidumbre, pues si la incertidumbre es grande es necesario obtener más información antes de tomar la decisión.

La empresa puede decidir incorporar más información para reducir la incertidumbre y para ello podrá realizar una investigación de mercado, cuyo coste es de \$50,000.

El estudio sobre la investigación de mercado proporciona información referente a dos posibles alternativas:

- Es favorable el proceso de expansión.
- No es favorable el proceso de expansión.

Los resultados que se obtuvieron en la investigación se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 3.3. . Probabilidades obtenidas de la investigación de mercado.

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN DE MERCADO	ESTADOS DE LA NATURALEZA		
	e_1 :Demanda alta	e_2 :Demanda media	e_3 :Demanda baja
Favorable (F)	$P(F/e_1)= 0.7$	$P(F/e_2)= 0.6$	$P(F/e_3)= 0.2$
No favorable (\bar{F})	$P(\bar{F}/e_1)= 0.3$	$P(\bar{F}/e_2)= 0.4$	$P(\bar{F}/e_3)= 0.8$

Las probabilidades que aparecen en el interior de la tabla son probabilidades condicionadas. Así pues, la probabilidad de que la investigación de mercado fuera favorable cuando la demanda es alta, es $P(F/e_1)= 0.7$, mientras que la probabilidad de que la investigación de mercado fuera desfavorable, cuando la demanda es alta, es $P(\bar{F}/e_1)= 0.3$.

Las probabilidades a priori dadas anteriormente y las probabilidades condicionadas dadas en la tabla anterior se utilizarán para determinar las probabilidades a posteriores, utilizando para ello el teorema de Bayes.

El árbol de decisión secuencial para este supuesto está en la figura 3.5. En el punto o nodo de decisión I el director de la empresa debe tomar la decisión sobre hacer la investigación de mercado o no hacerla. Si decide no hacerla, llega al punto de decisión IV. En este punto de decisión la empresa puede elegir una de las tres alternativas a_1, a_2 , o a_3 , (aumentar, construir, licencia) Las cuales conducirán a los nodos H, I o J, de estados de la naturaleza y dependiendo del estado de la naturaleza e_1, e_2 , o e_3 (demanda alta, media o baja) que se presente se tendrá el correspondiente beneficio asociado.

Debe mencionarse que para este punto de decisión las probabilidades asociadas a los estados de la naturaleza, y sus beneficios asociados son los mismos que en el ejemplo anterior; resultando que la parte inferior de este árbol de decisiones es idéntica al árbol que aparece en la figura 3.4, ya que la toma de decisiones se hace sin realizar la investigación de mercado.

La parte superior del árbol de decisión (Figura 3.5) refleja las consecuencias asociadas cuando se realiza la investigación de mercado. Así pues, si se decide realizar la investigación de mercado, inmediatamente se llega al nodo A, con dos ramas de dos posibles estados de la naturaleza.

- Para la rama superior, *la investigación es favorable*, la correspondiente probabilidad será: (Aplicando el teorema o fórmula de probabilidad total⁶⁰).

⁶⁰ Teorema de la probabilidad total $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)$

$$\begin{aligned}
 P(F) &= P(F/e_1) \times P(e_1) + P(F/e_2) \times P(e_2) + P(F/e_3) \times P(e_3) \\
 &= (0.7) \times (0.4) + (0.6) \times (0.4) + (0.2) \times (0.2) \\
 &= 0.56
 \end{aligned}$$

- Para la rama inferior, la probabilidad que la investigación *no sea favorable* es:

$$\begin{aligned}
 P(\bar{F}) &= P(\bar{F}/e_1) \times P(e_1) + P(\bar{F}/e_2) \times P(e_2) + P(\bar{F}/e_3) \times P(e_3) \\
 &= (0.3) \times (0.4) + (0.4) \times (0.4) + (0.8) \times (0.2) \\
 &= 0.44
 \end{aligned}$$

Y dependiendo de que la investigación sea favorable o no sea favorable el decisor se encontrará en el punto de decisión II o III respectivamente y tendrá que elegir una de las tres alternativas a_1, a_2 , o a_3 , llegando así a uno de los nodos B, C, D, E, F o G, en donde intervienen los diferentes estados de la naturaleza e_1, e_2 , o e_3 .

Los resultados o beneficios para cada alternativa y estados de la naturaleza serán los mismos del supuesto del ejemplo 3.2, que están expresados en la tabla 3.2, pero habrá que restarles a cada uno \$50,000, que es el importe gastado en el estudio de investigación de mercado. Por ejemplo en el nodo E, para el estado de la naturaleza e_2 , o rama “demanda media” el beneficio era $\$5 \times 10^6$ pero como hay que restarle el importe de la investigación de mercado, tendremos:

$$R_{11} = 5 \times 10^6 - 50,000 = 4.95 \times 10^6$$

Veamos ahora las probabilidades a posteriori asociadas a cada uno de los estados de la naturaleza e_1, e_2 , o e_3 , después de haber realizado la investigación de mercado, es decir, :

$$P(e_1/F), P(e_2/F) \text{ Y } P(e_3/F)$$

Estas probabilidades a posteriori son calculadas utilizando el teorema de Bayes⁶¹. Las probabilidades a posteriori se obtienen utilizando la información adicional que proporciona la investigación de mercado.

Así pues las diferentes probabilidades para los nodos B, C, y D serán:

$$\begin{aligned}
 P(e_1/F) &= \frac{P(e_1) \cdot P(F/e_1)}{P(F)} \\
 &= \frac{P(e_1) \cdot P(F/e_1)}{P(e_1) \cdot P(F/e_1) + P(e_2) \cdot P(F/e_2) + P(e_3) \cdot P(F/e_3)} \\
 &= \frac{(0.4)(0.7)}{(0.4)(0.7) + (0.4)(0.6) + (0.2)(0.2)} \\
 &= 0.5
 \end{aligned}$$

Aplicando este mismo proceso se encuentra:

$$P(e_2/F) = 0.43 \quad \text{Y}$$

$$P(e_3/F) = 0.07$$

Para los nodos E, F, y G se tiene:

$$\begin{aligned}
 P(e_1/\bar{F}) &= \frac{P(e_1) \cdot P(\bar{F}/e_1)}{P(\bar{F})} \\
 &= \frac{P(e_1) \cdot P(\bar{F}/e_1)}{P(e_1) \cdot P(\bar{F}/e_1) + P(e_2) \cdot P(\bar{F}/e_2) + P(e_3) \cdot P(\bar{F}/e_3)} \\
 &= \frac{(0.4)(0.3)}{(0.4)(0.3) + (0.4)(0.4) + (0.2)(0.8)} \\
 &= 0.28
 \end{aligned}$$

Y análogamente:

⁶¹ **Teorema de Bayes:** $P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$ = Probabilidades a posteriori

Donde:

A_i = Sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos.

B = Un suceso o resultado cualquiera, para el cual se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$.

$p(A_i)$ = Probabilidad a priori.

$P(B/A_i)$ = Probabilidad condicionada o verosimilitud.

$$P(e_2/\bar{F}) = 0.36 \quad Y$$

$$P(e_3/\bar{F}) = 0.36$$

Utilizando la información proporcionada por la investigación de mercado, es decir utilizando las probabilidades a posteriori podemos calcular el valor monetario esperado para cada uno de los nodos B, C, y D, así:

$$\begin{aligned} \text{VME (nodo C)} &= (0.5) (24.95 \times 10^{-6}) + (0.43) (11.95 \times 10^{-6}) + (0.07) (-5.05 \times 10^{-6}) \\ &= 17.26 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\text{VME (nodo B)} = 7.03 \times 10^{-6}$$

$$\text{VME (nodo D)} = 10.855 \times 10^{-6}$$

Por lo tanto, se puede observar que el máximo VME corresponde al nodo C, entonces se elegirá este nodo en caso que la investigación sea favorable, es decir, en el punto de decisión II se elige la alternativa a_2 .

$$\begin{aligned} \text{VME (nodo II)} &= \text{máx. } \{7.03 \times 10^{-6}, 17.26 \times 10^{-6}, 10.855 \times 10^{-6}\} \\ &= 17.26 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

Análogamente se calcula el valor monetario esperado para cada uno de los nodos E, F y G, así:

$$\begin{aligned} \text{VME (nodo E)} &= (0.28) (9.95 \times 10^{-6}) + (0.36) (4.95 \times 10^{-6}) + (0.36) (-1.05 \times 10^{-6}) \\ &= 4.19 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\text{VME (nodo F)} = 9.47 \times 10^{-6}$$

$$\text{VME (nodo G)} = 6.85 \times 10^{-6}$$

Por lo tanto el máximo VME corresponde al nodo F, se elegirá, en caso de que no sea favorable la investigación de mercado, es decir, en el punto o nodo de decisiones III, se elegirá también la alternativa a_2 .

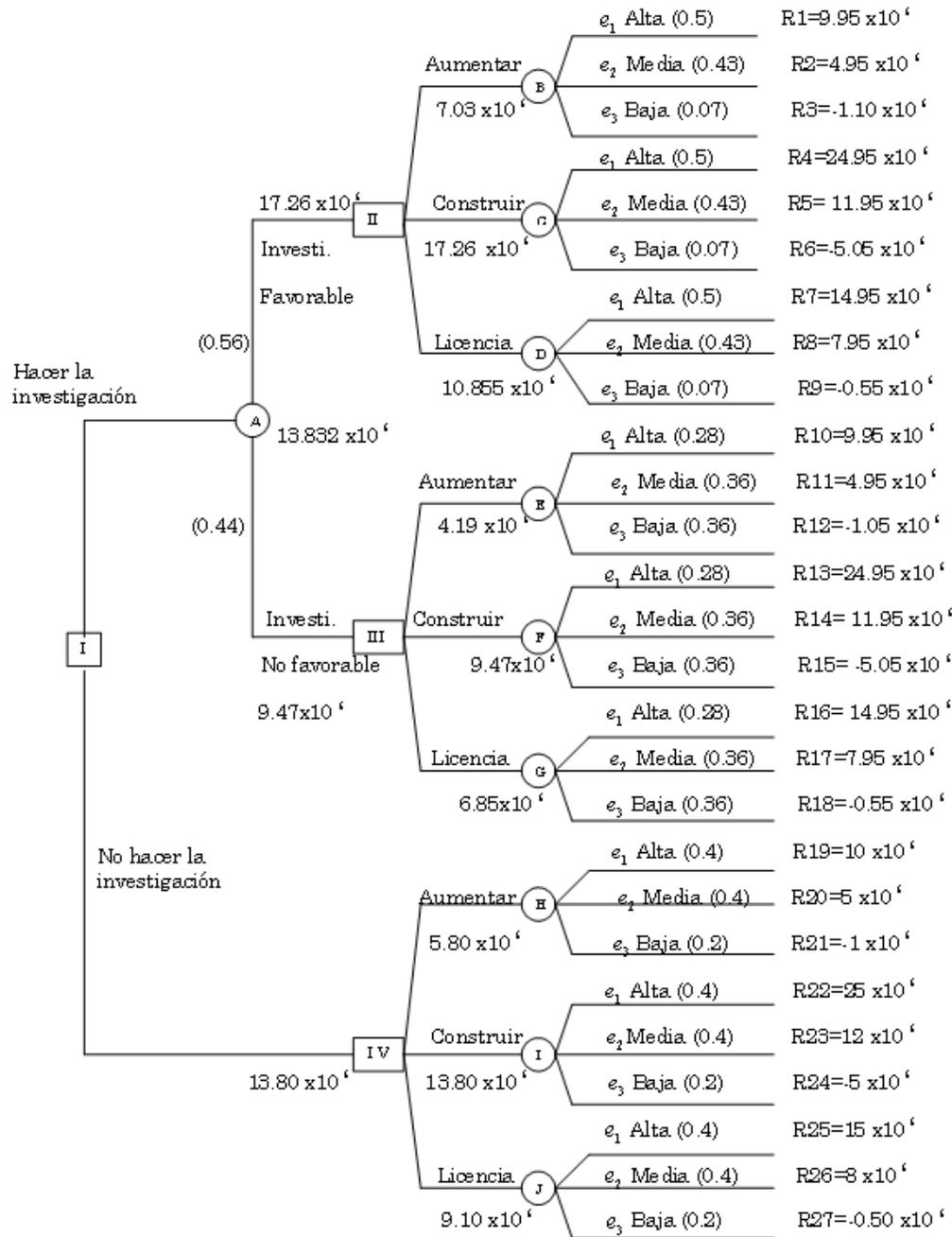
$$\begin{aligned}\text{VME (nodo III)} &= \text{máx. } \{4.19 \times 10^{-6}, 9.47 \times 10^{-6}, 6.85 \times 10^{-6}\} \\ &= 9.47 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Y utilizando los VME en los nodos o puntos de decisión II y III, podemos obtener el VME (nodo A).

$$\begin{aligned}\text{VME (nodo A)} &= (0.56) (17.26 \times 10^{-6}) + (0.44) (9.47 \times 10^{-6}) \\ &= 13.8324 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Este será el VME que se espera obtener si se realiza la investigación de mercado y que es menor que el VME (nodo IV) = 13.80×10^{-6} , que se obtendría si no se realiza la investigación de mercado. Luego la mejor decisión será no realizar la investigación de mercado y elegir a_2 (construir una nueva fábrica).

Figura 3.5. Árbol de decisión secuencial.



3.11 Valor Esperado de la Información Muestral (VEIM)

Una manera de medir el valor de la información que proporciona la investigación de mercado (la muestra) es calculando el valor esperado de la información muestral (VEIM). En términos generales está dado por:

$VEIM = (\text{Valor esperado de la decisión óptima con información muestral, sin tener en cuenta el costo de la muestra}) - (\text{Valor esperado de la decisión óptima sin información muestral})$

El VEIM es un límite superior en la cantidad que deberíamos estar dispuestos a pagar por la información muestral.

Ejemplo 3.4:

En el ejemplo anterior haciendo uso de la información proporcionada por la investigación de mercado se ha elegido la alternativa a_2 , “construir una nueva fábrica”. El costo de investigación, es decir, de la información adicional que proporcionó la muestra, ha sido de 50,000 dólares. Pero la empresa está interesada en conocer el valor que tiene esta información comparada con su costo, por lo que se calculará el VEIM.

Ahora bien el valor esperado de la decisión óptima con información muestral (con la investigación de mercado) es igual a 13.832×10^6 , pero a esta cantidad hay que sumarle los 50,000 dólares que cuesta la información muestral, pues en los cálculos anteriores para obtener los resultados R_1, \dots, R_{18} se había restado.

$$\begin{aligned} \text{Luego: } \quad VEIM &= (13.832 \times 10^6 + 50,000) - (13.8 \times 10^6) \\ &= 82,000 \end{aligned}$$

Por lo tanto el director de la empresa estaría dispuesto a pagar hasta 82,000 dólares por la información proporcionada por la investigación de mercado.

CAPÍTULO 4

4. ANALISIS DE DECISION MULTICRITERIO.

4.1. Antecedente Histórico.

El problema de toma de decisiones con múltiples criterios quizás es el área de desarrollo más activo en los últimos años en el campo de la ciencia de la decisión. En octubre de 1972 se celebra en EEUU el primer Congreso Mundial sobre Toma de Decisiones Multicriterio (Multicriterial Decision Making).

En la actualidad se realizan diferentes conferencias regionales donde se discuten ponencias sobre el uso y desarrollo de estas técnicas en el ambiente empresarial.

Estos y otros ejemplos ponen de manifiesto que en el proceso de toma de decisiones reales se desea encontrar la mejor decisión sobre la base de múltiples criterios y no solo considerando un único criterio u objetivo, como supone implícitamente el paradigma tradicional.

Los primeros trabajos desarrollados fueron de Koopmans (1951) y de Kuhn & Tucker (1951). Otro trabajo crucial para el desarrollo del paradigma multicriterio es el desarrollado por Charnes, Cooper Ferguson (1955) y que fue mejorado posteriormente por Charnes & Cooper en 1961.

Estas ideas pioneras fueron desarrollados por otros investigadores, culminando en el Primer Congreso Mundial sobre Toma de Decisiones Multicriterio en 1972. Tal acontecimiento puede considerarse el nacimiento del paradigma decisional multicriterio, así como el comienzo de un nuevo período en el campo de las ciencias de la decisión.

La aplicación de técnicas de análisis de la decisión, específicamente las técnicas multicriterio, podría enriquecer la solución del problema y permitir a

la gestión una toma de decisiones que garantice elevar la eficiencia de la empresa. Esto además propicia la aplicación de métodos más flexibles debido a las ventajas que estas técnicas presentan con respecto a las monocriteriales.

4.2. Estructura de un proceso de decisión.

En una dimensión básica, un proceso de toma de decisiones, puede concebirse como la elección por parte de un centro decisor (Un individuo o grupo de individuos) de lo mejor entre lo posible. El problema surge cuando debemos definir lo mejor y lo posible en un determinado contexto decisonal. Podemos definir estos elementos como la existencia de recursos limitados, generan la restricción del problema. El valor de las variables de decisión que satisfacen las restricciones constituye lo que se denomina el conjunto factible o alcanzable que estructura y formaliza lo que se entiende por lo posible. Este conjunto puede ser continuo (esto es, existen infinitas soluciones factibles) también llamado Decisión Multiobjetivo o discreto (esto es, existe un número finito de soluciones factibles).

“Los métodos de Decisión Multicriterio Discreta se utilizan para realizar una evaluación y decisión respecto de problemas que, por naturaleza o diseño, admiten un número finito de alternativas de solución, a través de:

1. Un conjunto de alternativas estable, generalmente finito (soluciones factibles que cumplen con las restricciones posibles o previsibles); se asumen que cada una de ellas es perfectamente identificada, aunque no son necesariamente conocidas en forma exacta y completa todas sus consecuencias cuantitativas y cualitativas;
2. Una familia de criterios de evaluación (atributos, objetivos) que permiten evaluar cada una de las alternativas (analizar sus consecuencias), conforme a los pesos (o ponderaciones) asignados

por el agente decisor y que reflejan la importancia (preferencia) relativa de cada criterio;

3. Una matriz de decisión o de impactos que resumen la evaluación de cada alternativa conforme a cada criterio; una valoración (precisa o subjetiva) de cada una de las soluciones a la luz de cada uno de los criterios; la escala de medida de las evaluaciones puede ser cuantitativa o cualitativa, y las medidas pueden expresarse en diversas escalas cardinal (razón o intervalo), ordinal, nominal, y probabilística.
4. Una metodología o modelo de agregación de preferencias en una síntesis global; ordenación, clasificación, partición o jerarquización de dichos juicios para determinar la solución que globalmente recibe las mejores evaluaciones;
5. Un proceso de toma de decisiones (contexto de análisis) en el cual se lleva a cabo una negociación consensual entre los actores o interesados (analista- “experto”, decisor y usuario”).

Los principales métodos de evaluación y decisión multicriterio discretos son: Ponderación Lineal (scoring), Utilidad multiatributo (MAUT), Relaciones de superación y Análisis Jerárquico (AHP- The Analytic Hierarchy Process- Proceso Analítico Jerárquico).

Una vez determinado lo posible se aborda la determinación de lo mejor. Para ello, se define una función de criterio que refleja adecuadamente las preferencias o deseos del centro decisor. Esta función de criterio también llamada función de utilidad o de valor, asocia de una manera monótona un número real a cada solución factible.

La primera parte del proceso decisorial que se mencionó anteriormente requiere información exclusivamente de tipo técnico. En otras palabras, para determinar el conjunto factible solo se necesita información no preferencial. Las preferencias reales del centro decisor aparecen en la segunda fase

cuando se establece la función de criterio o de utilidad. La intersección de ambas fases determinan la mejor de entre las elecciones posibles, es decir, la solución óptima.

4.3. Algunos conceptos básicos.

Para entender el significado y el alcance del análisis de decisiones multicriterio es necesario introducir una serie de conceptos y definiciones.

Atributo: se refiere a los valores con los que el centro decisor se enfrenta a un determinado problema decisional. Para que estos valores puedan conceptualizarse como atributo es necesario que puedan medirse independiente de los deseos del decisor y a la vez sean susceptibles de expresarse como una función de las correspondientes variables de decisión.

Objetivo: Representa direcciones de mejora de los atributos que estamos considerando. La mejora puede interpretarse en el sentido “más del atributo mejor” o bien “menos del atributo mejor”. El primer caso corresponde a un proceso de maximización y el segundo a un proceso de minimización. Así, maximizar la fiabilidad de un sistema, minimizar el coste de un proceso de producción, etc., son ejemplos de objetivos. En general, los objetivos toman la forma: $\text{Max } f(x)$ o $\text{Min } f(x)$.

Nivel de aspiración: Representa un nivel aceptable de logro para el correspondiente atributo. La combinación de un atributo con un nivel de aspiración genera una meta.

En algunos casos, el decisor puede desear alcanzar exactamente el nivel de aspiración, es decir no desea variaciones ni por arriba ni por abajo con

respecto al nivel de aspiración en tal caso, la expresión matemática de la meta será $f(x)=t$, siendo t el nivel de aspiración.

Criterio: Es un término general que engloba los tres conceptos precedentes. Así, los criterios son atributos, objetivos o metas que se consideran relevantes en un cierto problema decisional.

Por consiguiente el análisis de la decisión multicriterio constituye un marco general o paradigma en el que se investigan problemas decisionales con diferentes atributos, objetivos o metas.

4.4. Criterio de Optimalidad Paretiana.

En 1896, el economista italiano Wilfredo Pareto introdujo un criterio de optimalidad que ha recibido su nombre y que puede considerarse crucial en teoría económica. Pareto consideró inicialmente que una colectividad se encuentra en un estado óptimo si ninguna persona de esa colectividad puede mejorar su situación sin que empeore la situación de alguna otra persona de la misma. A esta clase de optimalidad se denomina también eficiencia paretiana.

Este criterio de optimalidad paretiana puede transferirse de una manera directa de la economía al análisis decisional multicriterio. Para ello, se sustituye el concepto original de Pareto de “sociedad” o “colectivo” de personas por el conjunto de criterios. Así, cada criterio individual representa a una persona en esta nueva interpretación. Este concepto de optimalidad paretiana juega un papel esencial en los diferentes enfoques desarrollados dentro del paradigma multicriterio.

El concepto de optimalidad paretiana dentro del campo multicriterio puede definirse formalmente de la siguiente manera. Un conjunto de soluciones es

eficiente cuando esta formado por soluciones factible, tales que no existe otra solución factible que proporcioné una mejora en un atributo sin producir un empeoramiento en al menos otro de los atributos.

4.5. Normalización de los criterios.

No siempre es necesario en muchos métodos multicriterio, resulta esencial proceder a la normalización de los diferentes criterios en consideración. La normalización es necesaria por al menos tres tipos de razones.

1. La mayor parte de los contextos decisionales las unidades en que están medidos los diferentes criterios suelen ser muy diferentes, por ejemplo, pueden estar medidos en kilómetros/hora, toneladas, dólares, etc. Una comparación o agregación de los diferentes criterios carece de significado.
2. Los valores alcanzables por los diferentes criterios pueden ser muy diferentes. En tales casos, sin una normalización previa de los criterios los métodos multicriterios pueden conducirnos a soluciones sesgadas hacia los criterios con valores alcanzables mayores.
3. Se trabaja con mayor facilidad las tareas comparativas entre criterios cuando trabajan con valores normalizados de los mismos en vez de sus correspondientes valores originales.

4.6. Procedimientos de normalización de los criterios.

Uno de los procedimientos más utilizados y más simples para normalizar los criterios consiste en dividir los valores que alcanza el criterio por su valor “mejor”. El valor mejor es el máximo cuando el criterio consiste en un atributo del tipo “más mejor” o el mínimo cuando se trata de un atributo del tipo menos mejor, así por ejemplo, si en un problema tenemos el criterio velocidad y

costo, la velocidad la dividimos entre el mayor valor que presenta, sin embargo el costo se divide entre el menor valor.

También pueden normalizarse los criterios, dividiendo los valores que alcanza el criterio por su recorrido. Se entiende por recorrido o rango a la diferencia entre el valor «mejor» y el valor «peor» alcanzado por cada criterio.

Como se mencionó anteriormente los principales métodos de decisión multicriterio discreto son: Ponderación lineal, utilidad Multiatributo, Relaciones de superación y Análisis Jerárquico.

Definición: Ponderación lineal (Scoring)

Es un método que permite abordar situaciones de incertidumbre con pocos niveles de información. Se construye una función de valor para cada una de las alternativas. Es un método completamente compensatorio, y puede resultar dependiente, y manipulable de la asignación de pesos a los criterios o de la escala de medida de las evaluaciones, es un método ampliamente usado en el mundo.

Definición: Utilidad Multiatributo.

Para cada uno de los atributos se determina la correspondiente función de utilidad y luego se agregan en una función de utilidad multiatributo de forma aditiva o multiplicativa. Al determinar la utilidad de cada una de las alternativas se consigue una ordenación completa del conjunto finito de alternativas. El método de utilidad multiatributo supone la transitividad de preferencias o la comparabilidad.

El rigor de los supuestos teóricos de este método son difíciles de contrastar en la práctica, lo que requiere un elevado nivel de información del agente decisor para la construcción de funciones de utilidad multiatributo.

Definición: Relaciones de Superación.

Estos métodos utilizan el mecanismo básico de la comparación dos a dos de las alternativas, criterio por criterio. De esta forma puede construirse un coeficiente de concordancia C_{ik} asociado con cada par de alternativas.

4.7. Métodos de sobre clasificación (ELECTRE)

El método ELECTRE (elimination and (et) choice translating algorithm), es el método multicriterio discreto más conocido y a la vez más utilizado en la práctica desde finales de los años 60, el cual fue desarrollado por el profesor Bernad Roy.

El método ELECTRE, es también conocido como: ELECTRA (Eliminación y elección para representar la realidad), básicamente, consiste en dividir el conjunto eficiente en dos subconjuntos: el de las alternativas más favorables para el decisor (el núcleo) y el de las alternativas menos favorables. Para ello, utiliza el concepto de “relación de sobreclasificación” (outranking relationship).

Para construir la relación de sobreclasificación, el método ELECTRE, se sirven de:

Hipótesis de sobre clasificación: Es la hipótesis planteada para que una alternativa a_i sobre clasifica a otra a_k cuando para los atributos considerados, “la alternativa a_i es al menos tan buena como la alternativa a_k ”. La

sobreclasificación se establece en base a dos conceptos: concordancia⁶² y discordancia⁶³.

La relación de sobre clasificación se utiliza para formar un grafo de sobre clasificación para el conjunto de pares de acciones (a_i, a_k) . Cada acción está representada por un vértice; si la acción a_i sobre clasifica a la acción a_k , habrá una arco que unirá los dos vértices partiendo de a_i y llegando a a_k . Si no existe ninguna relación de sobre clasificación entre los dos vértices, entonces no se puede dibujar ningún arco entre los dos vértices.

En este trabajo se explicará brevemente el proceso, para usar el método ELECTRE I.

Estructura algorítmica del método ELECTRE.

La mecánica operativa del ELECTRE no es complicada pero si algo tediosa. Por consecuencia nos limitaremos a exponer brevemente los rasgos fundamentales y los diferentes pasos a seguir cuando se aplique el algoritmo ELECTRE.

Paso 1:

Se parte de una matriz decisional (a_i, e_j) , así como de un vector de pesos que definiremos como $W = \{W_1, W_2, \dots, W_i, \dots, W_n\}$, se calcula la matriz de índices de concordancia C_{ik} . Esta se obtiene sumando los pesos asociados a los criterios en los que la alternativa a_i es mejor a la alternativa a_k ; en caso de empate se asigna la mitad del peso a cada una de las alternativas. Dicha matriz tiene las siguientes características:

- Es una matriz cuadrada

⁶² Concordancia se refiere a aquellos pares de alternativas que superan a otros.

⁶³ Discordancia se refiere a aquellos pares de alternativas que no superan a otros.

- Los elementos de la matriz son números que están entre 0 y 1
- En la diagonal principal nunca hay números.

Paso 2

Se procede a normalizar los elementos de la matriz decisional inicial.

Paso 3

Se multiplica cada columna de la matriz decisional normalizada por el peso preferencial correspondiente, se obtiene la matriz decisional normalizada y ponderada.

Paso 4

Se deducen los índices de discordancias. El índice de discordancia D_{ik} entre las alternativas a_i y a_k , se calcula como el cociente entre la diferencia mayor en valor absoluto para los que la alternativa i es peor que la k y la mayor diferencia en valor absoluto entre los resultados alcanzados por la alternativa a_i y a_k . A partir de estos índices se construye la matriz de índices de discordancia. La cual tiene las mismas características de la matriz de concordancia.

Paso 5

Se fija un umbral mínimo c para el índice de concordancia, así como un umbral máximo d para el índice de discordancia.

Paso 6

Se calcula la matriz de dominación concordante de la siguiente manera. Cuando un elemento de la matriz de índices de concordancia es menor que

el valor umbral c en la matriz de dominancia concordante se escribe un 1, en caso contrario se escribe 0.

Paso 7

Se calcula la matriz de dominación discordante de la siguiente manera. Cuando un elemento de la matriz de índices de discordancia es menor que el valor umbral d en la matriz de dominancia discordante se escribe un 1, en caso contrario se escribe 0.

Paso 8

Se calcula la matriz de dominación agregada (concordante-discordante) multiplicando los términos homólogos de las matrices de dominación concordante y discordante.

Paso 9

Se determina el grafo ELECTRE. De la siguiente manera, cada alternativa representa un vértice del grafo, si y solo si el correspondiente elemento de la matriz de dominación agregada es 1. Por ejemplo si existe un arco orientado de A a B, esto significa que la alternativa A es superior o preferida a la alternativa B, es decir A domina a B.

Figura 4.1 A es preferida a B

El núcleo del grafo ELECTRE esta formado por aquellas alternativas que no se dominan (sobre clasifican) entre si, es decir no existen arcos de llegadas en los correspondientes vértices, quedando además las restantes alternativas dominadas por alguna alternativa del núcleo, es decir, que existe al menos un

vértice del núcleo del que sale un arco a los vértices que no forman parte del núcleo.

Por ejemplo, según los criterios A_1 y A_2 la alternativa B domina a A y a C. Además, las alternativas A y C están dominadas por B. Por tanto, B es el núcleo.

Criterio A_1

Criterio A_2

A continuación presentaremos un ejemplo ilustrativo utilizando el método ELECTRE I.

Ejemplo 4.1 Supongamos que se desea seleccionar un modelo de Caza-bombardero, donde el centro de decisor considera relevante los siguientes atributos: Velocidad, Carga, Coste y Maniobrabilidad, todos los atributos considerados son de tipo “mas mejor” excepto el atributo coste que es de tipo “menos mejor”.

Tabla 4.1 Datos del modelo de caza-bombarderos.

ALTERNATIVA	ATRIBUTOS			
	VELOCIDAD	CARGA	COSTE	MANIOBRABILIDAD
A	1400	10	500	9
B	1700	8	600	7
C	1400	12	500	8
D	1800	7	700	7
E	1500	9	600	9
F	18000	6	700	6

En primer lugar verificamos, que alternativas o acciones son eficientes y cuales nunca serán elegidas por el decisor. Para ello utilizaremos el concepto de optimalidad paretiana expuestos en la sección 4.4.

De acuerdo con lo anterior el modelo F es no eficiente o inferior y nunca será elegido por el centro decisor I, pues esta dominado por la alternativa o modelo D. Aunque, en efecto la velocidad y el coste en los dos modelos coinciden, sin embargo, tanto la carga máxima como la maniobrabilidad proporcionada por el modelo D son mayores que las proporcionadas por el modelo F. Por lo tanto eliminaremos el modelo F.

Ahora con las alternativas restantes procedemos a estimar los pesos preferenciales (relación de superación). Para ello se clasificaran los criterios por orden de importancia. Es decir, si tenemos n criterios se solicita al decisor que asigne el número 1 al criterio que considere más importante, el número 2 al criterio siguiente importante hasta asignar el número n al criterio que considere menos importante. Los pesos compatibles con dicha información pueden obtenerse a partir de la siguiente expresión:

$$W_j = \frac{(n-r_j+1)}{\sum_{i=1}^n (n-r_i+1)} \quad (1)$$

Donde:

r_j : Es el lugar o posición que ocupa el criterio j-ésimo en la clasificación establecida por el decisor.

n : Número de criterios.

W_j : Peso del criterio j-ésimo.

Supongamos que el responsable de la selección de un caza-bombardero ordena la importancia de los criterios de la siguiente manera:

Maniobrabilidad \implies **Velocidad** \implies **Coste** \implies **Carga**

Para calcular los pesos utilizaremos la ecuación (1) obteniendo los siguientes resultados:

$$W_1(\text{velocidad}) = \frac{(4-2+1)}{(4-1+1)+(4-2+1)+(4-3+1)+(4-4+1)} = 0.3.$$

$$W_2(\text{carga}) = \frac{(4-4+1)}{(4-1+1)+(4-2+1)+(4-3+1)+(4-4+1)} = 0.1.$$

$$W_3(\text{coste}) = \frac{(4-3+1)}{(4-1+1)+(4-2+1)+(4-3+1)+(4-4+1)} = 0.2$$

Y así sucesivamente para los demás criterios. Entonces el vector de pesos sería $W = (0.3, 0.1, 0.2, 0.4)$. Este vector debe cumplir que los valores que lo forman deben ser positivos y la suma de todos ellos debe ser 1.

Calculando índices de concordancias para la alternativa A

$$C_{ab} = 0+0.1+0.2+0.4=0.7.$$

$$C_{ac} = (1/2)(0.3)+0+(1/2)(0.2)+0.4=0.65.$$

$$C_{ad} = 0+0.1+ (0.2)+0.4=0.7.$$

$$C_{ae} = 0+0.1+ (0.2)+ (1/2)(0.4)=0.5.$$

De igual forma se calcula los restantes índices de concordancia para cada una de las alternativas restantes obteniendo.

Tabla 4.2 Matriz de índice de concordancia.

	A	B	C	D	E
A	-	0.7	0.65	0.7	0.5
B	0.3	-	0.3	0.5	0.4
C	0.35	0.7	-	0.7	0.3
D	0.3	0.5	0.3	-	0.3
E	0.5	0.6	0.7	0.7	-

El paso siguiente consiste en normalizar los elementos de la matriz decisional ya que generalmente los criterios suelen ser muy distintos entre si, debido a sus unidades de medidas. En algunos métodos multicriterio resulta conveniente que los valores normalizados de los criterios queden acotados en el intervalo (0,1). Este tipo de normalización puede conseguirse con la facilidad restando al “mejor” valor el que realmente alcanza el criterio, dividiendo seguidamente dicha diferencia por el correspondiente rango.

$$N_{A1} = \frac{1800-1400}{1800-1400} = 1$$

$$N_{A3} = \frac{500-500}{700-500} = 0$$

$$N_{A2} = \frac{12-10}{12-7} = 0.4$$

$$N_{A4} = \frac{9-9}{9-7} = 0$$

De igual forma se normalizan los restantes criterios, obteniendo la siguiente tabla:

Tabla 4.3 Matriz decisional normalizada.

	ATRIBUTOS			
ALTERNATIVA	VELOCIDAD	CARGA	COSTE	MANIOBRABILIDAD
A	1	0.4	0	0
B	0.25	0.8	0.5	1
C	1	0	0	0.5
D	0	1	1	1
E	0.75	0.6	0.5	0

A continuación, se multiplica cada columna de la matriz decisional normalizada por el peso preferencial correspondiente obteniéndose de esta manera la matriz decisional normalizada y ponderada.

- Los elementos de la columna velocidad de la matriz decisional normalizada por 0.3.
- Los elementos de la columna carga de la matriz decisional normalizada por 0.1.
- Los elementos de la columna coste de la matriz decisional normalizada por 0.2.

Y así sucesivamente se obtiene. Se obtiene la siguiente tabla de resultados:

Tabla 4.4 Matriz decisional normalizada y ponderada.

	ATRIBUTOS			
ALTERNATIVA	VELOCIDAD	CARGA	COSTE	MANIOBRABILIDAD
A	0.3	0.04	0	0
B	0.075	0.08	0.1	0.4
C	0.3	0	0	0.2
D	0	0.1	0.2	0.4
E	0.225	0.06	0.1	0

Ahora según el paso 4 del algoritmo deducimos los índices de discordancia, con ayuda de la matriz decisional normalizada y ponderada. El índice de discordancia entre las alternativas a_i y a_k se calcula como el cociente entre la diferencia mayor en valor absoluto de los criterios para los que la alternativa i es peor que la k y la mayor diferencia en valor absoluto entre los resultados

alcanzados por la alternativa *i* y la *k*. A continuación calcularemos los índices de discordancia donde las alternativas B, C, D y E son dominadas por A

$$D(A, B) = \frac{\max|(0.3-0.075)|}{\max|(0.3-0.075);(0.04-0.08);(0-0.1);(0-0.4)|} = \frac{0.225}{0.4} = 0.5625.$$

$$D(A, C) = \frac{\max|(0.04-0)|}{\max|(0.3-0.3);(0.04-0);(0-0);(0-0.2)|} = \frac{0.04}{0.2} = 0.2.$$

$$D(A, D) = \frac{\max|(0.3-0)|}{\max|(0.3-0);(0.04-0.1);(0-0.2);(0-0.4)|} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75.$$

$$D(A, E) = \frac{\max|(0.3 - 0.225)|}{\max|(0.3 - 0.225); (0.04 - 0.06); (0 - 0.1); (0 - 0)|} = \frac{0.075}{0.1} = 0.75$$

De igual forma se calcula los restantes índices, obteniendo los siguientes resultados.

Tabla 4.5 Matriz índice de discordancia.

	A	B	C	D	E
A	-	0.5625	0.2	0.75	0.75
B	1	-	0.88	0.75	1
C	1	1	-	1	1
D	1	1	0.666	-	1
E	1	0.375	0.5	0.5625	-

Seguidamente se fijan los umbrales de concordancia y discordancia. Se aconseja inicialmente que dichos valores estén dados por los valores medios de los elementos de las matrices de concordancia y discordancia, para nuestro ejemplo estos valores son: $c=0.5$ y $d=0.8$; obtenido según los pasos 6 y 7.

Tabla 4.6 Matriz de dominación concordante.

	A	B	C	D	E
A	-	1	1	1	0
B	0	-	0	0	0
C	0	1	-	1	0
D	0	0	0	-	0
E	0	1	1	1	-

Tabla 4.7 Matriz de dominación discordante.

	A	B	C	D	E
A	-	1	1	1	1
B	0	-	0	1	0
C	0	0	-	0	0
D	0	0	1	-	0
E	0	1	1	1	-

Según se expuso en el paso 8 del algoritmo por medio de una multiplicación término a término de las dos matrices anteriores se obtiene la matriz final de dominación agregada (concordante y discordante).

Tabla 4.8 Matriz de dominación agregada (concordante / discordante).

	A	B	C	D	E
A	-	1	1	1	0
B	0	-	0	0	0
C	0	0	-	0	0
D	0	0	0	-	0
E	0	1	1	1	-

Ahora con la ayuda de la matriz de dominación agregada (concordante/discordante). Obtendremos el grafo y su respectivo núcleo.

Figura 4.4 Grafo electre y núcleos asociados

Donde el núcleo está formado por las alternativas A y E, es decir, núcleo= {A, E}. Siendo la alternativa E preferida a C, D y B. y la alternativa A es preferida a B, C y E.

En conclusión el método ELECTRE I involucra un proceso de relación que concluye con la elección de una única alternativa o un grupo de alternativas que constituyen el núcleo o kernel del conjunto de alternativas preferidas. Además el modelo ELECTRE I garantiza que las opiniones del decisor son tenidas en cuenta durante todas las etapas del proceso de decisión.

4.8. Proceso Analítico Jerárquico.

El Proceso Analítico Jerárquico que por sus siglas en Inglés es denominado AHP (The Analytic Hierarchy Process) fue desarrollado por el matemático Thomas Saaty y es considerada una técnica multiatributo y multicriterio que consiste en formalizar la comprensión intuitiva de problemas complejos mediante la construcción de un Modelo Jerárquico.

El propósito del método es permitir que el agente decisor pueda estructurar un problema multicriterio en forma visual, mediante la construcción de un Modelo Jerárquico que básicamente contiene tres niveles: meta u objetivo, criterios y alternativas.

Una vez construido el Modelo Jerárquico, se realizan comparaciones de pares entre dichos elementos (criterios-subcriterios y alternativas) y se atribuyen valores numéricos a las preferencias señaladas por las personas, entregando una síntesis de las mismas mediante la agregación de esos juicios parciales.

El fundamento del proceso de Saaty descansa en el hecho que permite dar valores numéricos a los juicios dados por las personas, logrando medir cómo

contribuye cada elemento de la jerarquía al nivel inmediatamente superior del cual se desprende.

Para estas comparaciones se utilizan escalas de razón en términos de preferencia, importancia o probabilidad, sobre la base de una escala numérica propuesta por Saaty, que va desde 1 hasta 9.

Una vez obtenido el resultado final, el AHP permite llevar a cabo el análisis de sensibilidad.

4.8.1. ¿En qué consiste el AHP?

El AHP, mediante la construcción de un modelo jerárquico, permite de una manera eficiente y gráfica organizar la información respecto de un problema, descomponerla y analizarla por partes, visualizar los efectos de cambios en los niveles y sintetizar.

El AHP trata de desmenuzar un problema y luego unir todas las soluciones de los sub problemas en una conclusión” (Thomas Saaty, 1998)⁶⁴.

El AHP se fundamenta en:

- La estructuración del modelo jerárquico (representación del problema mediante identificación de meta, criterios, subcriterios y alternativas);
- Priorización de los elementos del modelo jerárquico;
- Comparaciones binarias entre los elementos;
- Evaluación de los elementos mediante asignación de “pesos”;
- Ranking de las alternativas de acuerdo con los pesos dados;
- Síntesis;
- Análisis de Sensibilidad.

⁶⁴ El AHP, fue desarrollado por el doctor en Matemáticas Thomas Saaty, a fines de la década de los 80 para resolver el tratado de reducción de armamento estratégico entre los Estados Unidos y la Antigua URSS.

Ventajas del AHP frente a otros métodos de Decisión Multicriterio son:

1. Presentar un sustento matemático.
2. Permite desglosar y analizar un problema por partes.
3. Permite medir criterios cuantitativos y cualitativos mediante una escala común.
4. Incluir la participación de diferentes personas o grupos de interés y generar un consenso.
5. Permite verificar el índice de consistencia y hacer las correcciones, si es el caso.
6. Generar una síntesis y dar la posibilidad de realizar análisis de sensibilidad.
7. Ser de fácil uso y permitir que su solución se pueda complementar con métodos matemáticos de optimización.

4.8.2. Base Matemática del AHP

El AHP trata directamente con pares ordenados de prioridades de importancia, preferencia o probabilidad de pares de elementos en función de un atributo o criterio común representado en la jerarquía de decisión.

Este método podría haber sido el método natural (pero refinado) que la gente siguió al tomar decisiones mucho antes que se desarrollaran funciones de utilidad y antes que se desarrollara formalmente el AHP (Thomas Saaty, 1998).

“El AHP hace posible la toma de decisiones grupal mediante el agregado de opiniones, de tal manera que satisfaga la relación recíproca al comparar dos elementos. Luego toma el promedio geométrico de las opiniones. Cuando el grupo consiste en expertos, cada uno elabora su propia jerarquía, y el AHP combina los resultados por el promedio geométrico” (Thomas Saaty, 1998).

Comparaciones pareadas.

Las comparaciones pareadas son fundamentales del AHP, utilizando una escala con valores de 1 a 9 para calificar las preferencias relativas de los dos elementos.

La matriz de comparaciones pareadas es una matriz cuadrada que contiene comparaciones pareadas de alternativas o criterios.

Sea A una matriz $n \times n$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$. Sea a_{ij} el elemento (i, j) de A , Para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Decimos que A es una matriz de comparaciones pareadas de n alternativas, si a_{ij} es la medida de la preferencia de la alternativa en el renglón i cuando se le compara con la alternativa de la columna j . Cuando $i = j$, el valor de a_{ij} será igual a 1, pues se está comparando la alternativa consigo misma.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

En la matriz A todos los elementos son positivos y se puede verificar que:

Reciprocidad es decir, $a_{ij} = 1/a_{ji}$, quedando la matriz $A =$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{n1} & 1/a_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

El análisis compara la importancia relativa de todas las posibles comparaciones pareadas asignando valores que reflejan una diferencia importante; por ejemplo, si el criterio uno es considerado con mayor dominancia por encima del criterio dos, entonces un número 5 es colocado en a_{12} , y el recíproco, $1/5$ es colocado en a_{21} .

Esto queda sustentado con los siguientes axiomas.

Los axiomas del AHP son:

Axioma No.1 Referente a la condición de juicios recíprocos:

La intensidad de preferencia de A_i/A_j es inversa a la preferencia de A_j/A_i .

Donde A_i y A_j son alternativas.

Axioma No.2 Referente a la condición de homogeneidad de los elementos:

Los elementos que se comparan son del mismo orden de magnitud.

Axioma No.3 Referente a la condición de estructura jerárquica o estructura dependiente de reaprovechamiento.

Dependencia en los elementos de dos niveles consecutivos en la jerarquía y dentro de un mismo nivel.

Axioma No.4 Referente a condición de expectativas de orden de rango:

Las expectativas deben estar representadas en la estructura en términos de criterios y alternativas.

Consistencia.

Una consideración importante en términos de la calidad de la decisión final se refiere a la consistencia de los juicios que muestra el tomador de decisiones en el transcurso de la serie de comparaciones pareadas. La consistencia perfecta es muy difícil lograr y es posible esperar inconsistencia en casi cualquier conjunto de comparaciones pareadas. El AHP mide el grado de inconsistencia entre las opiniones pareadas que proporciona el decisor, si el grado de consistencia es inaceptable quien toma las decisiones debe reconsiderar y posiblemente modificar sus juicios.

De forma matemática, decimos que una matriz de comparación A $n \times n$ es consistente si: $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ para $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. Esta propiedad requiere que todas las columnas y renglones de A , sean linealmente dependientes.

Para determinar si la consistencia es o no razonable necesitamos desarrollar una medida cuantificable para la matriz de comparación A. Se sabe que si la matriz A es perfectamente consistente produce una matriz N $n \times n$ normalizada⁶⁵ de elementos W_{ij} para $i, j = 1, 2, \dots, n$, tal que todas las columnas son idénticas, es decir:

$$N = \begin{bmatrix} w_1 & w_1 & \cdots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \cdots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n & w_n & \cdots & w_n \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz de comparación de A se puede determinar a partir de N, dividiendo los elementos de la columna i entre w_i entonces tenemos:

$$A' = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix}$$

De la definición dada de A' , y multiplicando a la derecha por el vector de ponderaciones w el resultado es el siguiente:

$$A'w = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & \cdots & w_1/w_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nw_1 \\ \vdots \\ nw_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Es decir, $A'w = nw$, lo que implica que n es un autovalor de A' y el único diferente de cero, ya que A' tiene rango unitario, pues cada fila es un múltiplo

⁶⁵ Se dice que una matriz es normal o esta normalizada, si conmuta con su transpuesta. Las matrices simétricas, anti simétricas u ortogonales son necesariamente normales. Sea M una matriz, se dice que es normal si $MM^T = M^T M$.

constante de la primera fila. Por lo tanto, todos sus valores propios son cero, excepto uno.

Además, la suma de sus valores propios de una matriz es igual a su traza, y en este caso la traza es igual a n . Por lo tanto, n es un valor propio de A' , y tiene una solución no trivial.

Haciendo \bar{w} el estimado calculado, se puede mostrar que: $A'\bar{w} = n_{\max}\bar{w}$

donde $n_{\max} \geq n$, y entre más cerca este n_{\max} a n , más consistente será la matriz de comparación.

Como resultado el AHP calcula la razón de consistencia (RC) como el cociente entre el índice de consistencia de A y el índice de consistencia aleatorio.

$$RC = \frac{IC}{IA}$$

Donde IC es el índice de consistencia de A y se calcula como sigue:

$$IC = \frac{n_{\max} - n}{(n - 1)}$$

Donde n_{\max} no es más que el mayor valor propio de A' . Es decir que la ecuación anterior queda de la forma siguiente:

$$IC = \frac{\lambda_{\max} - n}{(n - 1)}$$

IA es el índice de consistencia aleatoria de A , es el de consistencia de una matriz de comparaciones pareadas generada en forma aleatoria. Se puede mostrar que el IA depende del número de elementos que se comparan, y

asume los siguientes valores, de la tabla 4.9, donde n da el orden de la matriz (primera fila) y el valor promedio del R.I (segunda fila).

Tabla 4.9. Matriz de Índice Aleatorio de Consistencia.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Índice Aleatorio de Consistencia	0	0	0.52	0.89	1.11	1.25	1.35	1.4	1.45	1.49

Fuente: Elaborada por Thomas Saaty.

$IA = \frac{1.98(n-2)}{n}$ Algunos autores sugieren la siguiente estimación para el IA:

La razón de consistencia RC, esta diseñado de manera que los valores que exceden de 0.10 son señal de juicios inconsistentes; es probable que en estos casos el tomador de decisiones desee reconsiderar y modificar los valores originales de la matriz de comparaciones pareadas. Los valores menores de 0.10 son señal de un nivel razonable de consistencia en las comparaciones pareadas.

Preparación y Organización para la aplicación de un AHP.

Para aplicar el método AHP es necesario que exista una amplia participación de los sectores o personas que puedan aportar información en base a la experiencia y además, se debe disponer de tiempo suficiente cuando se trata de problemas complejos y tener claro el tipo de información necesaria para afrontar el problema.

Esquema Metodológico del AHP.

Estructuración del Modelo Jerárquico.

Una de las partes más importantes del AHP, consiste en la estructuración de la jerarquía del problema, etapa en la cual el grupo decisor involucrado debe lograr desglosar el problema en sus componentes relevantes.

La jerarquía está conformado por: meta u objetivo general, criterios y alternativas.

Los pasos a seguir para la estructuración del modelo jerárquico son:

1. Identificación del problema
2. Definición del objetivo.
3. Identificación de Criterios.
4. Identificación de Alternativas.

Figura 4.4: Modelo Jerárquico para la Toma de Decisiones con AHP.

Identificación del Problema

Es la situación que se desea resolver mediante la selección de una de las alternativas de las que se dispone o la priorización de ellas.

Dichas alternativas serán comparadas unas con otras mediante la evaluación de criterios establecidos que permitan conocer los pro y los contras incorporados en cada una de ellas.

Ejemplo 4.2: La decisión a la que se enfrenta una cadena vendedora de antigüedades es la relativa a la ubicación de un nuevo local en una ciudad.

Definición del Objetivo

Un objetivo es una dirección identificada para mejorar una situación existente. El objetivo está en un nivel independiente y los otros elementos de la jerarquía que serán los sub-objetivos o criterios, subcriterios y alternativas apuntan en conjunto a la consecución del mismo.

Para el ejemplo 4.2, el objetivo será: seleccionar la mejor ubicación disponible para su negocio. Este último será entonces el objetivo general.

Identificación de Criterios

Son las dimensiones relevantes que afectan significativamente a los objetivos y deben expresar las preferencias de los implicados en la toma de decisión. Se deben incluir aspectos vitales cuantitativos y cualitativos a tener en cuenta en la toma de decisión.

Debido a la experiencia de los socios, las mayores preocupaciones son el *costo de arriendo del local*, suficiente *tráfico de turistas y personas en general*, en término de potenciales compradores, *visibilidad del local* y la *competencia* existente, constituida por el número de negocios de antigüedades y recuerdos en esa ciudad.

Identificación de Alternativas

Corresponden a propuestas factibles mediante las cuales se podrá alcanzar el objetivo general. Cada una de las alternativas presenta características con pro y contras.

Siguiendo con el ejemplo de la tienda de antigüedades, los socios revisaron todos los posibles lugares para la tienda, sin embargo, fueron eliminando las alternativas que no cumplían con las expectativas, por lo que finalmente identificaron tres ubicaciones disponibles:

1. *Un local en un gran centro comercial (Mall A).*

- Presenta alta población de estudiantes universitarios y personas mayores de 50 años que en su mayoría son pensionados y son fuertes compradores de antigüedades.
- La renta por metro cuadrado es costosa frente al promedio en la ciudad.
- El local tiene una amplia entrada y una ventana.
- Hay variedad de comercio y existen otros locales de antigüedades.

2. *Local en el centro de la ciudad (B).*

- Costo por la mitad del precio del anterior.
- El sector está conformado en su mayoría por oficinas que trabajan únicamente de lunes a viernes.
- Hay un pequeño comercio en el sector y no existen ventas de Antigüedades.
- El local tiene una pequeña entrada.

3. *Local en pasaje subterráneo cerca al metro(C).*

- Buena mezcla de transeúntes.
- Existe un pequeño negocio de recuerdos en la esquina.
- El local tiene una amplia entrada y varias ventanas.
- El costo del local está en el promedio de los de la ciudad.

En estas tres alternativas claramente se presenta una característica cuantitativa como es el caso del costo del arriendo por metro cuadrado. Sin embargo, existen también otras que no son fáciles de ser medidas como es la preferencia de los habitantes y transeúntes de cada uno de esos sectores respecto de la compra de antigüedades.

Teniendo las alternativas se siguen los siguientes pasos:

Paso 1. Árbol Jerárquico.

Figura 4.5. Árbol Jerárquico para selección de local.

La Jerarquía se puede hacer de arriba hacia abajo o de abajo hacia arriba. La construcción de arriba hacia abajo se inicia con la identificación de los criterios más globales, es decir, desde lo más general hasta lo más particular. De esta manera, todos los aspectos generales recopilados en la definición del problema están presentes en ese primer nivel a manera de criterios.

Cada criterio identificado debe ir acompañado de una descripción de lo que significa. Si se requiere, de los criterios pueden desprenderse subcriterios. Estos últimos deben guardar una relación jerárquica con el criterio del que se desprenden.

En la construcción de abajo hacia arriba el proceso se desarrolla a la inversa. Primero se generan todas las características que permiten diferenciar entre las alternativas y posteriormente se construye el modelo jerárquico agrupando aquellas características que mantienen un factor común a manera de criterios o sub criterios, según sea el caso, hasta llegar al objetivo general.

Paso 2. Matriz de Comparaciones pareadas (MCP) de las alternativas para cada criterio que indica la preferencia del decisor.

Dentro de este paso es importante definir las medidas utilizadas por AHP, las cuales se definen a continuación.

Selección de la Medida

Uno de los conceptos más relevantes del método AHP es el de medida. Diariamente, utilizamos una serie de medidas o escalas de medición con unidades como: kilómetros, litros, horas, grados, etc. Además podemos percibir otras características de las cosas como: Olor, textura, etc.

El AHP permite incorporar factores cualitativos y cuantitativos a tener en cuenta para dar solución a un problema, para que luego las personas determinen sus preferencias por medio de juicios. El AHP representa esos juicios por medio de números, generando una escala de medida.

A través de una secuencia matemática, el AHP sintetiza los juicios y entrega un resultado. Las dos clases de medida que se pueden utilizar en el AHP son medida relativa y medida absoluta. Inclusive se puede hacer una combinación de ambas.

La Medida Relativa

Esta se utiliza cuando el número de alternativas es hasta el 7. En esta medida, el modelo se evalúa por medio de comparaciones entre criterios, subcriterios y las alternativas. Estas últimas se comparan frente a un tercer elemento común para ambas. Una vez evaluado todo el modelo, la medida relativa entrega las alternativas priorizadas de la mejor a la peor.

La Medida Absoluta

Con la medida absoluta se pueden manejar decenas y/o cientos de alternativas, debido a que se comparan alternativas contra un estándar.

Seguidamente se inician las comparaciones a pares para conocer las preferencias (los pesos) entre los criterios, subcriterios y las escalas. De esa

forma se obtiene un estándar, contra el cual se evaluará en forma independiente cada una de las alternativas (nótese que las alternativas se evalúan una a una y no de a pares como en la medida relativa).

A cada alternativa le corresponderá un puntaje, lo cual generará al final un ranking para el total de ellas, mostrando una lista de la mejor hasta la peor. Es importante saber que no se debe escoger obligatoriamente el uso de este enfoque porque el problema puede incluir una gran cantidad de alternativas.

Evaluación del Modelo

Los pasos a seguir para la evaluación de los componentes del modelo jerárquico son:

1. *Establecimiento de las Prioridades*
2. *Emisión de Juicios y Evaluaciones*

Establecimiento de las Prioridades

Una vez se defina el Modelo Jerárquico se determina la importancia relativa de sus partes. Para facilitar el proceso de asignación de juicios y evaluaciones se recomienda priorizar previamente los elementos del modelo.

Para el ejemplo las prioridades son:

1. Compradores
2. Visibilidad del Local
3. Competencia
4. Costo

Emisión de los Juicios y las Evaluaciones.

Los juicios son la base del proceso llevado a cabo por AHP. Los juicios pueden estar guiados por información científica, técnica y la dada por la experiencia y conocimientos del grupo decisor útiles para evaluar los diferentes

componentes del Modelo. Esto hace que el AHP sea diferente a otros métodos, puesto que dentro de la evaluación del modelo se toman en cuenta los juicios de cada uno de los individuos y/o grupos de interés involucrados en la toma de decisión.

Cada persona expresa su preferencia haciendo la pregunta apropiada mediante los términos Importancia, Preferencia o Probabilidad, asignando un valor numérico, el cual mide la intensidad de su preferencia.

El AHP dispone de una escala creada por el propio Saaty que mide los juicios emitidos por el grupo decisor (Ver Tabla 4.10).

Este paso de la emisión de juicios consiste en:

Para cada elemento “e” de un nivel de la jerarquía, se comparan pares de elementos del nivel inmediatamente inferior, con respecto de su influencia en “e”.

Tabla 4.10 Escala de Saaty (Creador del método AHP).

ESCALA NUMERICA	ESCALA VERBAL	EXPLICACIÓN
1.0	Ambos elementos son de igual importancia	Ambos elementos contribuyen con la propiedad en igual forma, Siempre ocurre en los elementos de la diagonal de la matriz A
3.0	Moderada Importancia de un elemento sobre otro.	La experiencia y el juicio del experto favorece levemente a un elemento sobre otro.
5.0		

	Fuerte importancia de un elemento sobre otro	Un elemento es fuertemente favorecido
7.0	Muy fuerte importancia de un elemento sobre otro	Un elemento es muy fuertemente dominante
9.0	Extrema importancia de un elemento sobre otro.	Un elemento es favorecido, por lo menos con un orden de magnitud de diferencia
2.0,4.0,6.0,8.0	Valores intermedios entre dos juicios adyacentes	Usados como valores de consenso entre dos juicios
Incrementos de 0.1	Valores intermedios en la graduación más fina de 0.1 (Por ejemplo 5.2 es una entrada válida).	Usados para graduaciones más finas de los juicios.

Teniendo en cuenta los elementos anteriores se puede asignar según la escala de Saaty las comparaciones para el ejemplo de los socios de la cadena de venta de antigüedades.

Para los criterios.

Tabla 4.11 de comparación por pares de los criterios.

Criterios	Costo	Compradores	Visibilidad	Competencia
Costos	1	1/8	1/6	1/3
Compradores	8	1	3	7
Visibilidad del Local	6	1/3	1	3
Competencia	3	1/7		1

Igualmente para las alternativas se hace la comparación por pares, por cada uno de los criterios, por ejemplo, para el criterio costo se tiene que formular la siguiente interrogante ¿Cuál es la alternativa más preferible (Comparación entre pares de alternativas frente a un elemento común: El costo y cuanto? (En la escala de Saaty.)

Por lo que se tendría la siguiente matriz

Tabla 4.12: comparación por pares de las alternativas para el criterio costo.

Así	Alternativas	Mall	Centro	Pasaje Subterráneo
		Mall	1	1/8
	Centro	8	1	3
	Pasaje Subterráneo	4	1/3	1

sucesivamente se continúa la evaluación hasta agotar la totalidad de comparaciones de los elementos del modelo.

Teniendo cada una de las matrices de comparaciones pareadas se procede a realizar el proceso de cálculo de valores para poder hacer la ordenación de las alternativas.

Paso 3. Procedimiento de Sintetización.

- Calcular la prioridad de cada elemento comparado:
 1. Sumar los valores de cada columna.
 2. Dividir cada elemento de la matriz por el total de su columna, con lo que se obtiene la matriz de comparaciones pareadas normalizadas (MCPN)

3. Promediar los elementos de cada renglón, lo que da como resultado el vector de prioridades (VP).

Tabla 4.13 Matriz de Comparación de criterios y prioridades.

Criterios	Costo	Compradores	Visibilidad	Competencia	Prioridades
Costos	1	1/8	1/6	1/3	0.048
Compradores	8	1	3	7	0.596
Visibilidad del Local	6	1/3	1	3	0.254
Competencia	3	1/7	1/3	1	0.101

Tabla 4.14: comparación por pares de las alternativas para el criterio costo y prioridades.

Alternativas	Mall	Centro	Pasaje Subterráneo	Prioridades
Mall	1	1/8	1/4	0.073
Centro	8	1	3	0.671
Pasaje Subterráneo	4	1/3	1	0.101

Así sucesivamente se continúa la priorización hasta el total de comparaciones.

Paso 4. Consistencia.

Se toma calculando la Relación de Consistencia (RC). Pasos para su cálculo:

1. Multiplicar cada valor de la primera columna de la MCP por la prioridad relativa del primer elemento del VP, multiplicar cada valor de la segunda columna por la prioridad relativa del segundo elemento considerado y así sucesivamente. Luego sumar los valores de cada renglón, al cual se le denomina Vector Suma Ponderada (VSP).
2. Dividir los elementos de VSP por el correspondiente valor de prioridad.
3. Determinar λ_{\max} según los valores obtenidos en el paso 2.
4. Calcular el índice de consistencia (IC):
5. Determinar la RC.
6. Evaluar que el RC sea menor a 0.1 para declarar estos valores consistentes.

Este proceso se repite para todos los criterios.

Teniendo todas las comparaciones de todos los criterios se sigue con el siguiente paso.

Paso 5. Matriz de comparaciones pareadas para los cuatro criterios, de donde se obtiene el vector de prioridades para los cuatro criterios.

Paso 6. Jerarquización Global de prioridades.

La prioridad global (PG) para cada alternativa de decisión se obtiene sumando el producto de la prioridad del criterio por la prioridad de la alternativa de decisión con respecto a ese criterio.

Con los resultados obtenidos al calcular las prioridades globales se obtiene la jerarquización de alternativas de decisión.

El valor mayor que corresponda a la alternativa será aquella recomendable para ser electa.

En este caso, siguiendo todos los pasos anteriores se determinó que las alternativas quedan en el siguiente orden de Prioridad.

ALTERNATIVA C

ALTERNATIVA A

ALTERNATIVA B

El índice de consistencia fue menor a 0.1 que lo hace aceptable. Por lo tanto el local adecuado y con mayores ventajas es el que esta ubicado cerca del subterráneo.

CAPÍTULO 5

5. APLICACIONES DE ANÁLISIS DE DECISIÓN ESTADÍSTICA.

5.1. Aplicación de Decisiones bajo Riesgo para el caso de un Repartidor de Periódicos.

Aplicación 1. Un repartidor de periódicos en la zona de Soyapango, desea saber el número de periódicos necesarios que debe comprar para poder satisfacer la demanda diaria y obtener el mayor beneficio, el repartidor manifiesta que cada periódico le cuesta 35 centavos de dólar y su precio de venta es 50 centavos, obteniendo un beneficio de 15 centavos por cada periódico vendido y que los periódicos que no se venden durante el día se

pierden. Además la demanda diaria varía entre 60, 70, 80 y 90 periódicos. Con propósito de realizar los cálculos supondremos la siguiente distribución de probabilidades: $P = \{0.1, 0.3, 0.4, 0.2\}$.

Según la información proporcionada podemos obtener la matriz de resultados para cada uno de las alternativas (Comprar 60, 70, 80 y 90 periódicos) con sus diferentes estados de naturaleza (Vender 60, 70, 80, 90 periódicos) y calcular el beneficio esperado.

Para obtener la matriz de resultado podemos considerar las siguientes ecuaciones:

$$R_{ij} = 0.50i - 0.35i = 0.15i \quad \text{cuando} \quad (i \leq j)$$

$$R_{ij} = 0.50j - 0.35i \quad \text{cuando} \quad (i > j)$$

Donde:

R_{ij} : Resultado o consecuencia asociado a la oferta i y la demanda j .

i : Representa el número de periódicos comprados (oferta de periódico).

j : Representa el número de periódicos vendidos (demanda de periódicos).

En muchas ocasiones el cálculo de la matriz de resultados es muy tedioso realizarlo a mano por lo tanto se puede hacer uso de Excel, obteniendo el siguiente resultado (ver Tabla. 5.1).

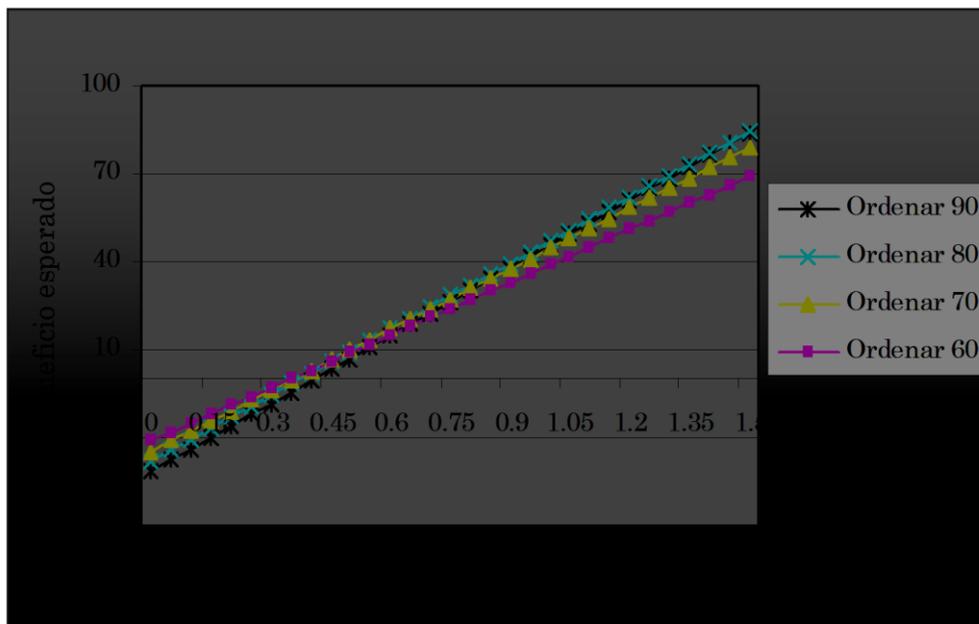
Tabla 5.1. Matriz de resultados y beneficio esperado.

	A	B	C	D	E	F
1	Precio de venta	0.5				
2	Costo de compra	0.35				
3						
4						
5		Estados de la naturaleza				
6	Alternativas	60	70	80	90	Beneficio esperado
7	60	9	9	9	9	9
8	70	5.5	10.5	10.5	10.5	10
9	80	2	7	12	12	9.5
10	90	-1.5	3.5	8.5	13.5	7
11						
12	Probabilidades	0.1	0.3	0.4	0.2	

Para calcular el beneficio esperado de cada una de las alternativas, se deberá introducir las probabilidades correspondientes a cada uno de los estados de naturaleza, tal como se muestra en la tabla anterior.

Según los resultados obtenidos podemos decir, que el repartidor deberá comprar 70 periódicos diarios para obtener el máximo de sus beneficios, obteniendo una ganancia de 10 dólares.

Gráfico.5.2 Análisis de sensibilidad para el precio de venta



Obsérvese que a medida que disminuye el precio de venta, los beneficios esperados se reducen. Para el precio de venta menor a 0.35 centavos, la

solución óptima es ordenar 60 periódicos, a partir de un precio de 0.35 centavos en adelante, la mayoría de las alternativas tienen un incremento considerable de los beneficios, pero observando la gráfica podemos decir que la solución óptima sería ordenar 80 periódicos.

5.2 Aplicación de Árbol de Decisión.

Aplicación 2. La empresa MULTIAPLICACIONES S.A. DE C.V dedicada a la venta y fabricación de bebidas no alcohólicas, debido a que en los últimos meses la demanda en la venta de uno de sus productos ha sufrido una disminución, el dueño de la empresa junto con su equipo de trabajo están planeando sacar del mercado el producto y buscar otras nuevas alternativas, a si como el lanzamiento de uno o dos nuevos productos, con el objetivo de incrementar las ventas y ganancias.

Por lo que la gerencia desea saber si el lanzamiento de los nuevos productos le producirá mayores ganancias, por lo que se plantean las siguientes alternativas.

a_1 : Lanzar solo el nuevo producto llamado Tuki-Tuki (Producto A)

a_2 : Lanzar solo el nuevo producto llamado Frisky (Producto B)

a_3 : lanzar el producto Tuki-Tuki y el producto Frisky (Producto A y B).

a_4 : No lanzar los nuevos productos (quedarse con el producto ya existente).

Descripción de los productos:

- Producto A: *Tuki-Tuki*, este producto de ser lanzado al mercado se presentará con un contenido de 225 ml de jugo con una variedad de tres sabores. La venta que la empresa realiza al distribuidor es por charola que contiene 24 unidades.

- Producto B: *Frisky*, este producto de ser lanzado al mercado se presentará con un contenido de 250 ml. de jugo con una variedad de dos sabores. La venta que la empresa realiza al distribuidor es por charola que contiene 24 unidades.
- De no ser lanzados ninguno de los dos productos anteriores, la empresa se quedaría con el producto ya existente llamado *Spring*, que contiene 250ml de jugo con una variedad de dos sabores, la venta que la empresa realiza al distribuidor es por charola que contiene 24 unidades a un precio de \$3.25 cada charola.

La gerencia debe fijar el precio de venta de estos dos nuevos productos y según el margen de utilidad que ellos manejan y considerando también los precios de los productos de competencia, se han propuesto los siguientes precios:

- Producto A: tuki-tuki la charola puede ser vendida a los distribuidores a un costo como mínimo de \$2.77 (Precio 1) y un costo como máximo de \$2.82 (Precio 2).
- Producto B: Frisky la charola puede ser vendida a los distribuidores a un costo como mínimo de \$3.25 (Precio 1) y un costo como máximo de \$3.30 (Precio 2).

La empresa está consiente que sucesos inciertos hace que la demanda durante el año varíe, por lo que se consideran dos estados de la naturaleza.

e_1 : Demanda fuerte.

e_2 : Demanda Débil.

Se plantean estos dos estados de la naturaleza debido a que estadísticamente la empresa maneja unos meses del año en que la demanda aumenta y unos meses en que la demanda disminuye; los meses en que la demanda aumenta son los meses de verano y que son meses escolares; además el mes de Diciembre y Octubre la demanda siempre aumenta. Por lo tanto la empresa considera según estadísticas de ventas de años anteriores, que durante un año el 65% la demanda permanece fuerte y un 35% durante el año permanece débil.

De lanzamientos de productos similares y de experiencias análogas la empresa estima los siguientes beneficios que obtendrá al tomar una decisión.

Tabla 5.3. Ganancias estimadas mensualmente, considerando el precio 1 para el producto A (\$ 2.77) y para el producto B (\$ 3.25)

PRECIO P1 Decisión	ESTADOS DE LA NATURALEZA	
	Fuerte	Débil
Lanzar el producto A	\$ 1,450.00	\$ 660.00
Lanzar el producto B	\$ 1,150.00	\$ 825.00
Lanzar los productos A y B	\$ 1,700.00	\$ 900.00

Tabla 5.4. Ganancias estimadas mensualmente, considerando el precio 2 para el producto A (\$ 2.82) y para el producto B (\$3.30).

PRECIO P2 Decisión	ESTADOS DE LA NATURALEZA	
	Fuerte	Débil
Lanzar el producto A	\$ 1,500.00	\$ 650.00
Lanzar el producto b	\$ 1,000.00	\$ 550.00
Lanzar los productos A y B	\$ 1,800.00	\$ 600.00

La empresa estima que la probabilidad de lanzar el producto A es del 50%, la probabilidad de lanzar el producto B también es del 50%.

Nota: Cabe mencionar que estas son probabilidades a priori estimadas por experiencias y datos que se tienen de lanzamientos de otros productos similares en la empresa, estas probabilidades se calculan de esta manera porque no hay estudios de mercado que la empresa haya realizado formalmente.

Los beneficios que se tienen actualmente del jugo Spring a un precio ya fijado de \$3.25 por charola, son los que se muestran a continuación:

Tabla 5.5. Ganancias estimadas mensualmente, considerando el precio fijo de \$3.25 para el producto ya existente (jugo Spring).

Decisión	ESTADOS DE LA NATURALEZA	
	Fuerte	Débil
Jugo Spring	\$ 1,057.00	\$ 577.50

Elaboración del árbol de decisión:

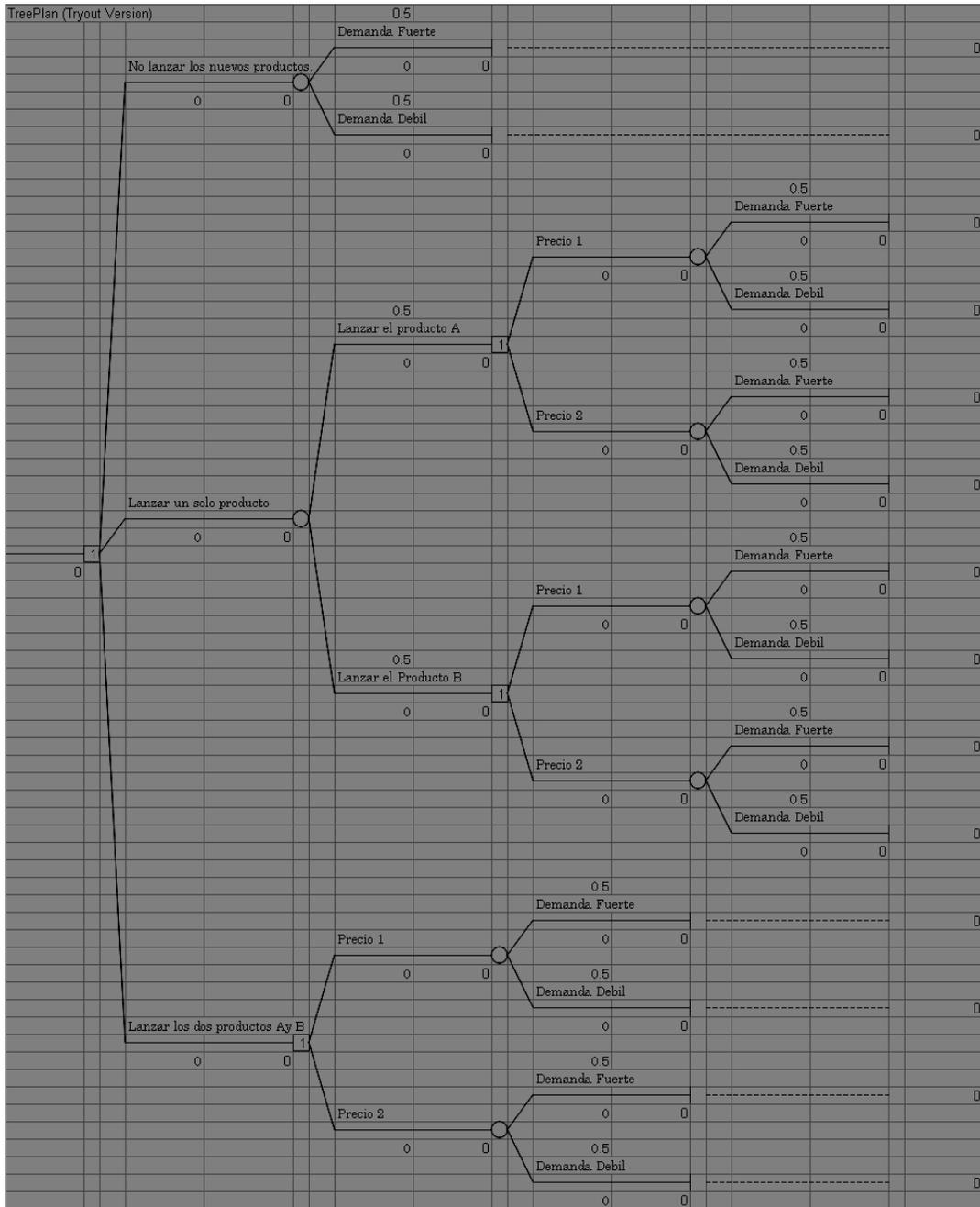
Para la elaboración del árbol de decisiones se utilizará el programa el treeplan, este es un complemento de Microsoft Office Excel, que si se desea utilizar se puede bajar del sitio Web <http://www.treeplan.com> (para instalar treeplan a la PC vea anexo 2)

1. La empresa tiene las tres primeras decisiones: No lanzar ningún producto nuevo, lanzar uno de los nuevos productos o lanzar ambos productos nuevos, con lo cual ya se tiene el primer punto de decisión con tres ramas o alternativas.

2. Si se decide no lanzar ningún nuevo producto quiere decir que nos quedamos con el producto ya existente, por lo que se produce el primer nodo de acontecimientos inciertos, que tendrá dos ramas, una referente a la ganancia de demanda alta del jugo Spring y la otra cuando se produce una ganancia, siendo la demanda baja.
3. Si se decide lanzar un solo producto de los dos nuevos, se tendrán el segundo nodo de sucesos inciertos, con dos alternativas:
 - a_1 : Lanzar solo el nuevo producto llamado Tuki-Tuki (Producto A)
 - a_2 : Lanzar solo el nuevo producto llamado Frisky (Producto B)
4. Para cada una de estas alternativas se tendrá que fijar un precio de venta. Por lo que se tienen dos decisiones: lanzar el producto con el precio P1 o lanzar el producto con el precio P2.
5. Si se elige el precio P1 para el producto A, nos encontramos ante un suceso incierto con dos alternativas, que la demanda sea fuerte o que la demanda sea débil, de igual manera si se elige el precio P2.
6. El paso 5 se cumple de igual manera para el producto B.
7. volviendo al nodo de decisión inicial supongamos que se decide lanzar ambos productos nuevos, también se tienen dos posibles precios de venta, es decir dos ramas de decisión, cada una de las cuales nos lleva a un suceso incierto con dos posibles alternativas, de demanda fuerte o débil.

De lo anterior obtenemos el siguiente árbol de decisión.

Figura 5.1. Árbol de decisión para obtener la alternativa óptima que maximice las ganancias en el lanzamiento de nuevo producto al mercado.



En la figura 5.2 aparece el árbol de decisión con sus respectivas probabilidades, sus ganancias y el valor monetario esperado, mostrando así la solución óptima, es decir la decisión que podemos tomar brindando mayor beneficio a la empresa.

1. En la primera decisión de no lanzarse el producto nuevo, es decir permanecer con el producto ya existente (jugo Spring), se le asignó a la demanda fuerte una ganancia de \$1,057 mensual, y si la demanda es débil se tiene una ganancia de \$577.5 mensual, con una probabilidad de 0.65 y 0.35 respectivamente. Estas ganancias son las mostradas en la tabla 5.5.

Con estos datos se obtiene el valor Monetario Esperado (criterio para elegir la mejor alternativa, como se explicó en el apartado de árbol de decisión), de la siguiente manera:

$$\text{VME} = 0.65 (1,057) + 0.35 (577.5) = 889.175$$

Este valor es el que aparece en el primer nodo de incertidumbre.

2. En la segunda decisión de lanzarse uno de los dos productos nuevos, se tienen dos alternativas como ya se vio anteriormente, en la figura 5.2 se muestra que se le asignó en la última columna de la derecha las ganancias según P1 y P2 de cada alternativa, en las ramas del nodo de incertidumbre de demanda fuerte o demanda débil se le asignaron las probabilidades de 0.65 y 0.35 respectivamente.
3. Una vez introducidos todos los datos se encuentra el valor monetario esperado en los puntos de decisión de P1 y P2. Para la decisión de lanzar el producto A, el valor monetario esperado de P1 es \$1,173.5 y de P2 es \$1,202.5, luego en el punto de decisión de lanzar el producto A se coloca el máximo (\$1,173.5 \$1,202.5) que es \$1,202.5, es decir que se produce una ganancia de \$1202.5 si se decide lanzar el nuevo producto Tuki-Tuki (producto A), a un precio P2 = \$2.82.
4. El mismo proceso se sigue para encontrar la máxima ganancia si se decide lanzar el producto B.

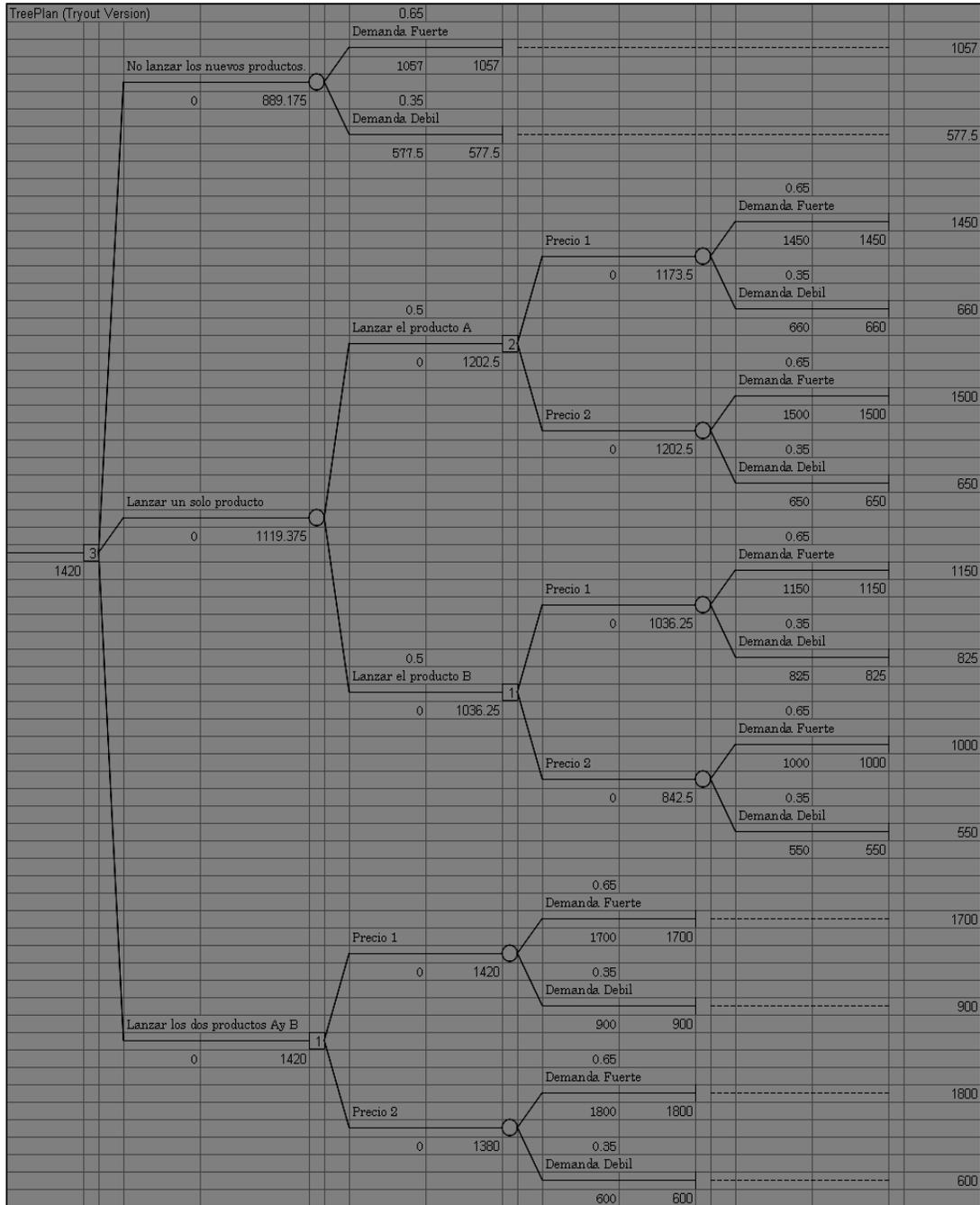
5. Para la última decisión de lanzar ambos productos, se calcula el valor esperado en base a la demanda fuerte y demanda débil, cuyo valor esperado es \$1,420 para el precio 1, y \$1,380 para el precio 2. Posteriormente en el nodo de decisión de lanzar los productos A y B se asigna el valor máximo (\$1,420 - \$1,380), es decir se produce una ganancia mensual de \$1,420 si se decide lanzar ambos productos a un precio de \$2.77 para el producto A y \$3.25 para el producto B

Decisión óptima:

Si se decide no lanzar el producto entonces el beneficio esperado es de \$889.18 mientras que si se decide lanzar un solo producto obtendremos un beneficio o ganancia de \$1,119.38 y si se decide lanzar ambos productos se obtendrá el beneficio máximo de \$1,420, entonces la alternativa óptima es lanzar ambos productos, Y sacar del mercado el producto antes existente (Spring).

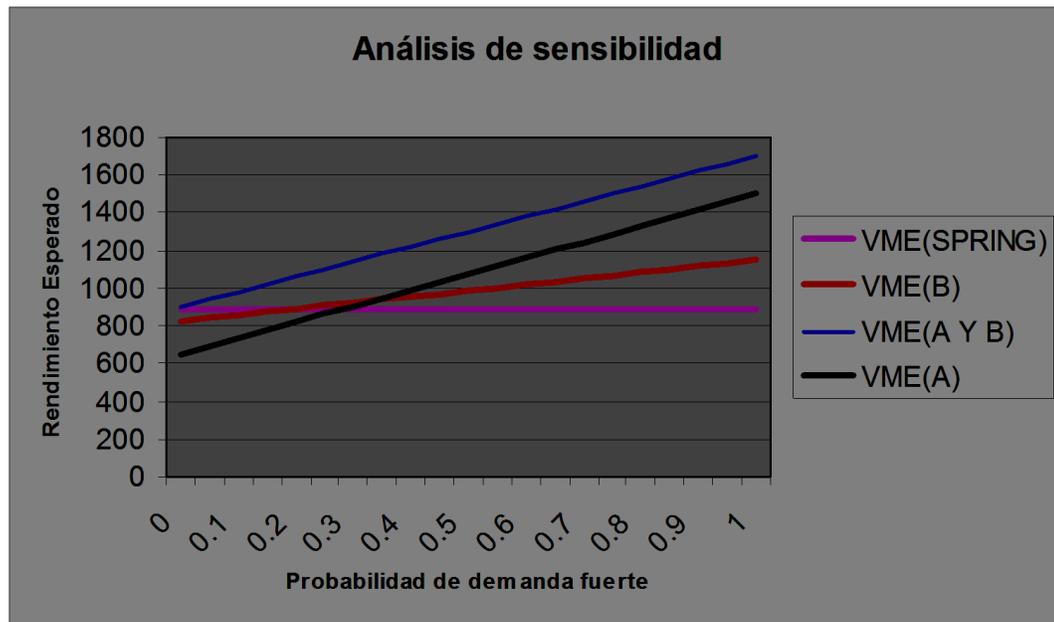
Es decir se debe lanzar al mercado el producto Tuki-Tuki a un precio de \$2.77 y lanzar a la vez el producto Frisky a un precio de \$3.25 por charola, obteniendo una ganancia de \$1,420 mensual.

Figura 5.2. Árbol de decisión para obtener la alternativa óptima que maximice las ganancias en el lanzamiento de nuevo producto al mercado.



Análisis de sensibilidad.

Gráfico 5.3 Análisis de sensibilidad.



En el análisis de sensibilidad se observa que evidentemente la mayor ganancia es de \$1,420 que corresponde al lanzamiento de ambos productos a la vez, y además observamos que sería una buena decisión sacar del mercado el producto Spring ya que en todo momento proporciona menores beneficios.

5.3. Aplicación de Decisiones Multicriterio, para la elección de un vehículo de carga.

Aplicación 3. Una empresa dedicada al cultivo de frutas y café, esta interesada en comprar un nuevo vehículo de carga, por lo que se desea como requisito mínimo que el vehículo sea de cinco toneladas, y que el precio sea accesible, para ello se visitaron las agencias distribuidoras de vehículos de carga, se solicitaron las cotizaciones y las características de los vehículo.

Para poder seleccionar el vehículo más adecuado vamos a usar el Proceso de Análisis Jerárquico (AHP), con 5 alternativas y 7 criterios.

Las características son similares en algunos casos, sin embargo, existen elementos en los que difieren, los cuales pueden influir en la elección de la mejor alternativa.

Las marcas y modelos de vehículos de carga de 5 toneladas disponibles en el mercado son los siguientes:

1. WORKER VW 8120
2. MITSUBISHI FUSO CANTER FE85PG6L_M06_2008.
3. HINO WU422L-HKMRB3, 2008.
4. ISUZU NPR-P32.
5. HYUNDAI HD72, 2008.

Los criterios fueron seleccionados en base a la información recolectada y a la experiencia de la persona encargada de la administración de la empresa, ya que posee conocimiento técnico en el área, además, tomando en cuenta que el vehículo desarrolla el trabajo en calles con pendientes y no pavimentadas, transporta grandes cantidades de peso en diferentes épocas del año. Los criterios seleccionados fueron, el precio, desplazamiento o cilindrada, potencia, marca, suspensión, sistema de frenos y la garantía que ofrece la distribuidora.

Tabla 5.6 Criterios y alternativas para la selección de un vehículo de carga.

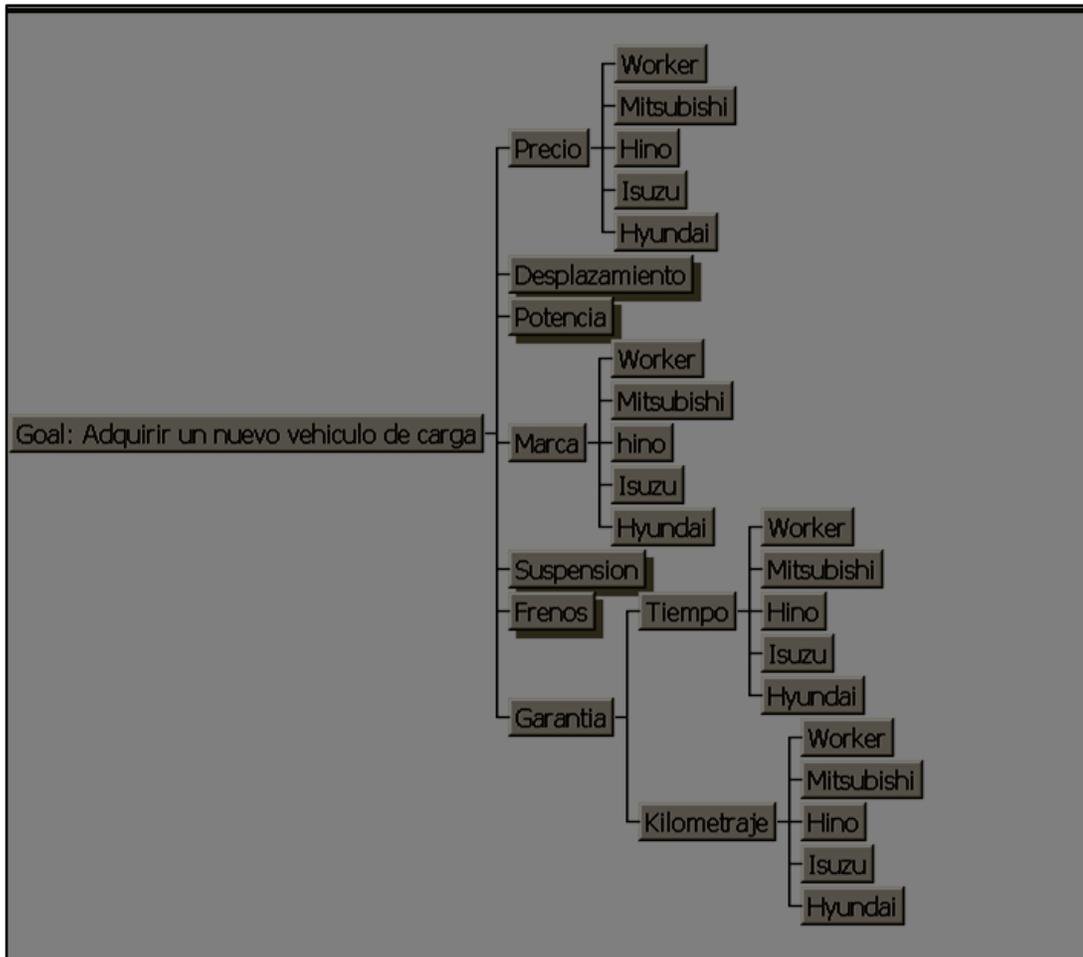
ALTERNATIVAS	A	B	C	D	E
PRECIO	\$29,945.00	\$25,990.00	\$25,900.00	\$22,000.00	\$20,800.00
DESPLAZAMIENTO	4300 CC.	3907 CC.	4000 CC.	4300 CC.	3900 CC.
POTENCIA	115	113	115	109	120
MARCA	WORKER	MITSUBISHI	HINO	ISUZU	HYUNDAI
SUSPENSION	Suspensión delantera de ballestas semielípticas y amortiguadores hidráulicos de doble acción.	Suspensión trasera de resortes, amortiguadores hidráulicos	Suspensión delantera de ballestas multihojas, reforzadas y amortiguadores de doble acción, suspensión trasera multihojas reforzadas y auxiliares amortiguadores de doble acción	Suspensión de aleación de acero, semielíptica, amortiguadores telescópicos de doble acción.	Hojas semielípticas y amortiguadores
SISTEMA DE FRENOS	Frenos 100% aire, Freno de motor tipo mariposa. Accionamiento electro neumático, circuito doble.	Frenos hidráulicos, servo asistido de doble circuito, freno de motor al escape, Freno de estacionamiento a la transmisión.	Sistema hidráulico de doble circuito, freno de motor tipo mariposa, freno de estacionamiento mecánico.	Circuito hidráulico doble, expansión mecánica en la transmisión, freno de motor al escape.	Frenos hidráulicos, servo asistido de doble circuito, freno al motor.
GARANTIA	12 MESES	24 MESES	12 MESES	24 MESES	36 MESES
	Libre Kilometraje	50,000 Km.	50,000 Km.	100,000	100,000 Km.

Para encontrar la mejor alternativa, vamos a usar el programa especializado Expert Choice Versión 11.0, el cual es un software comercial que puede ser descargado de Internet mediante la dirección www.expertchoice.com, el cual usa la metodología del Proceso Analítico Jerárquico (AHP), este software esta supervisado por el creador del AHP, Tomas Saaty por lo que ofrece gran

confiabilidad en los resultados y una interfaz gráfica de fácil uso, que permite la visualización gráfica del árbol de decisión, de las matrices de comparaciones, resultados finales y permite la realización del análisis de sensibilidad.

1. Árbol de Decisión.

Figura 5.3. Árbol Jerárquico, para el problema de la elección de un nuevo vehículo de carga



El árbol Jerárquico de la figura anterior, se puede notar que falta desplegar las alternativas en los criterios Desplazamiento, Potencia, Suspensión,

Frenos, además, el criterio garantía tiene dos subcriterios que son Tiempo de garantía y el kilometraje.

2. Comparaciones pareadas.

Estas comparaciones pareadas serán dadas según la preferencia del decisor, que en este caso fue el encargada de la empresa interesada en la adquisición del vehículo de carga, es importante mencionar que el conocimiento técnico y la experiencia juegan un papel importante en la solución de estos problemas, además, previo a la comparación de las alternativas se explicó en que consistía la escala de Saaty, y como debían hacerse las comparaciones. En este caso, primero haremos la comparación de la importancia relativa que tiene cada criterio respecto a los demás.

La escala de Saaty es:

1. Igual importancia de un elemento sobre otro.
3. Leve importancia de un elemento sobre otro.
5. Fuerte importancia de un elemento sobre otro.
7. Enorme importancia de un elemento sobre otro.
9. Absoluta importancia de un elemento sobre otro.

2, 4, 6,8 son valores intermedios posibles entre dos elementos.

Tabla 5.7. Comparaciones relativas respecto a los criterios.

	Precio	Desplazam	Potencia	Marca	Suspensio	Frenos	Garantía
Precio		8.0	7.0	5.0	7.0	5.0	7.0
Desplazamiento			3.0	3.0	2.0	1.0	1.0
Potencia				3.0	2.0	2.0	1.0
Marca					1.0	2.0	1.0
Suspension						3.0	1.0
Frenos							3.0
Garantía							

Este primer caso corresponde a la comparación que se realiza de los criterios, para poder obtener el peso que cada uno de estos aporta a la solución general.

En la primera comparación de Precio con respecto a Desplazamiento del vehículo, tiene asignado 8, por lo que en este caso el Precio es entre enormemente y absolutamente más importante que el desplazamiento del motor, en el caso de la comparación entre precio y potencia, el precio es enormemente más importante que la potencia, en este caso, el precio es importante debido a que la empresa es pequeña, por lo que debe buscar un vehículo no muy costoso. En el caso de desplazamiento y potencia, la potencia es levemente más importante que el desplazamiento, así sucesivamente para cada una de las comparaciones.

Posteriormente se hacen las comparaciones de cada una de las alternativas respecto a los criterios.

Tabla 5.8. Comparaciones relativas respecto al Precio en dólares.

	Worker	Mitsubi	Hino	Isuzu	Hyundai
Worker		7.0	8.0	9.0	9.0
Mitsubishi			2.0	4.0	5.0
Hino				3.0	4.0
Isuzu					2.0
Hyundai					

Ahora comparando las alternativas con respecto al precio, comparando el vehículo Worker con respecto al Mitsubishi, el precio del Mitsubishi es enormemente preferido al precio del Worker, así comparando el Isuzu con el Hyundai, se puede observar que el precio del Hyundai es entre igual y levemente preferido al precio del Isuzu, esto se puede ver en la tabla de criterios y alternativas donde se muestran los precios de cada uno de los vehículos, este mismo procedimiento para cada una de las comparaciones.

Tabla 5.9. Comparaciones relativas respecto al Desplazamiento del motor.

	Worker	Mitsubishi	Hino	Isuzu	Hyundai
Worker		3.0	2.0	1.0	3.0
Mitsubishi			2.0	3.0	1.0
Hino				3.0	4.0
Isuzu					4.0
Hyundai					

Comparando las alternativas respecto al Desplazamiento del vehículo podemos observar que el encargado de la empresa manifiesta que el desplazamiento del Worker es levemente más importante que el desplazamiento del Mitsubishi, al hacer la comparación entre el desplazamiento del Mitsubishi y el Hino, podemos observar que el Hino es entre igual y levemente preferido al Mitsubishi.

Tabla 5.10. Comparación relativa respecto a la Potencia del Motor en Caballos de Fuerza.

	Worker	Mitsubishi	Hino	Isuzu	Hyundai
Worker		3.0	1.0	4.0	4.0
Mitsubishi			3.0	3.0	5.0
Hino				4.0	4.0
Isuzu					5.0
Hyundai					

Haciendo las comparaciones entre las alternativas respecto a la potencia del motor, podemos observar en la primera comparación que la Potencia del Worker es levemente más importante que el Mitsubishi, por otro lado la potencia del Worker y el Hino tienen la misma importancia, así sucesivamente para cada una de las alternativas.

Tabla 5.11. Comparaciones relativas respecto a la Marca.

	Worker	Mitsubishi	hino	Isuzu	Hyundai
Worker		2.0	3.0	3.0	3.0
Mitsubishi			3.0	3.0	3.0
hino				2.0	6.0
Isuzu					5.0
Hyundai					

Otro de los criterios que se consideraron importante en la elección de la mejor alternativa es la marca, debido al respaldo y reconocimiento que tienen dichas marcas en el mercado local, es por ello que al comparar el Worker con respecto a las otras marcas tiene menos preferencia debido a que no es una marca muy reconocida en el país, sin embargo, las otras marcas tienen mayor presencia en el mercado, la marca que presenta valores más elevados se presenta al realizar la comparación entre el Hino y el Hyundai, ya que el Hino es entre fuerte y enormemente preferido al Hyundai, además sucede un caso similar al comparar el Isuzu y el Hyundai, ya que el Isuzu es Fuertemente preferido al Hyundai, realizando las comparaciones restante se tiene la tabla anterior.

Tabla 5.12. Comparación de importancia relativa respecto a la Suspensión

	Worker	Mitsubishi	Hino	Isuzu	Hyundai
Worker		1.0	1.0	2.0	2.0
Mitsubishi			1.0	2.0	2.0
Hino				1.0	3.0
Isuzu					3.0
Hyundai					

Para la comparación de las alternativas con respecto al tipo de suspensión se tiene que casi todos los vehículos tienen el mismo tipo de suspensión, sin

embargo al hacer la comparación entre el Worker respecto al Isuzu, este presenta como igual y levemente preferido, esto debido al tipo de amortiguadores que trae. Similar situación se presenta en las otras comparaciones.

Tabla 5.13 .Comparación de importancia relativa respecto al Sistema de Frenos.

	Worker	Mitsubishi	Hino	Isuzu	Hyundai
Worker		9.0	9.0	9.0	9.0
Mitsubishi			1.0	1.0	1.0
Hino				1.0	1.0
Isuzu					1.0
Hyundai					

Ahora si comparamos el sistema de frenos de cada una de las alternativas, podemos observar que el vehículo Worker es absolutamente preferido en las comparaciones con los demás vehículos, debido a que tiene sistema de frenos que permite mayor seguridad, lo que lo hace sobresalir del resto, los demás vehículos tienen igual preferencia o importancia.

Tabla 5.14. Comparación de la importancia relativa respecto a la Garantía

	Tiempo	Kilometraje
Tiempo		3.0
Kilometraje		

Para obtener los pesos que compondrán la garantía debemos hacer primero la comparación entre los subcriterios en este caso el Kilometraje es levemente mas importante que el tiempo que la empresa ofrezca como garantía.

Después de comparar los subcriterios, es importante hacer las comparaciones relativas de las alternativas para el Tiempo y el kilometraje.

Tabla 5.15. Comparación de la importancia relativa respecto a la Garantía/ Tiempo.

	Worker	Mitsubishi	Hino	Isuzu	Hyundai
Worker		2.0	1.0	2.0	3.0
Mitsubishi			2.0	1.0	2.0
Hino				2.0	3.0
Isuzu					2.0
Hyundai					

Ahora vamos a comparar las alternativas con respecto a la garantía teniendo como subcriterio el Tiempo, que la empresa ofrece, en la tabla 5.15 podemos observar que el Mitsubishi es entre igual y levemente más importante que el Worker, esto debido a que el primero ofrece 24 meses y el segundo 12 meses de garantía, así para las alternativas que tiene igual tiempo tienen asignado 1.

Tabla 5.16. Comparación de la importancia relativa respecto a la Garantía/ Kilometraje.

	Worker	Mitsubishi	Hino	Isuzu	Hyundai
Worker		5.0	5.0	5.0	5.0
Mitsubishi			1.0	3.0	3.0
Hino				3.0	3.0
Isuzu					1.0
Hyundai					

Los valores que aparecen en rojo son los recíprocos, y los valores que se encuentran en la tabla pueden leerse de la siguiente forma: para la comparación del vehículo Worker y Mitsubishi se lee “El vehículo Worker es fuertemente más importante sobre el Mitsubishi, para el criterio Garantía medida en kilometraje”, por otro lado los valores en rojo de la posición (2,4) se lee “El vehículo Isuzu es moderadamente más importante que el vehículo Mitsubishi, para el criterio Garantía medida en kilometraje”.

3. Obtención de los pesos.

Para las diversas comparaciones se obtienen los pesos relativos los cuales se presentan en la siguiente tabla, estos pesos nos sirven para obtener la alternativa que debe ser seleccionada.

Tabla 5.17. Pesos para criterios y subcriterio.

CRITERIO		SUB CRITERIOS		ALTERNATIVAS				
NOMBRE	W	TERMINO	W	Worker	Mitsubishi	Hino	Isuzu	Hyundai
Precio	0.489			0.026	0.097	0.143	0.296	0.438
Desplazamiento	0.066			0.297	0.093	0.184	0.348	0.078
Potencia	0.113			0.181	0.087	0.181	0.051	0.5
Marca	0.079			0.11	0.145	0.4	0.294	0.051
Suspensión	0.053			0.185	0.185	0.233	0.306	0.09
Frenos	0.137			0.692	0.077	0.077	0.077	0.077
Garantía	0.065	Tiempo	0.25	0.108	0.29	0.108	0.207	0.288
		Kilometraje	0.75	0.544	0.068	0.068	0.161	0.161

La columna W indica el nivel relativo de la importancia del atributo o criterio; así, el precio tiene 48.9% de importancia, el desplazamiento el 6.6%, la potencia el 11.3%, la marca el 7.9%, suspensión el 5.3%, el sistema de frenos el 13.7%, la garantía el 6.5%, cada uno de estos atributos tiene influencia en la alternativa a elegir.

La garantía tiene dos subcriterios que aportan al peso de garantía, como es el tiempo y el kilometraje, siendo este último el que aporta el 75% al criterio garantía.

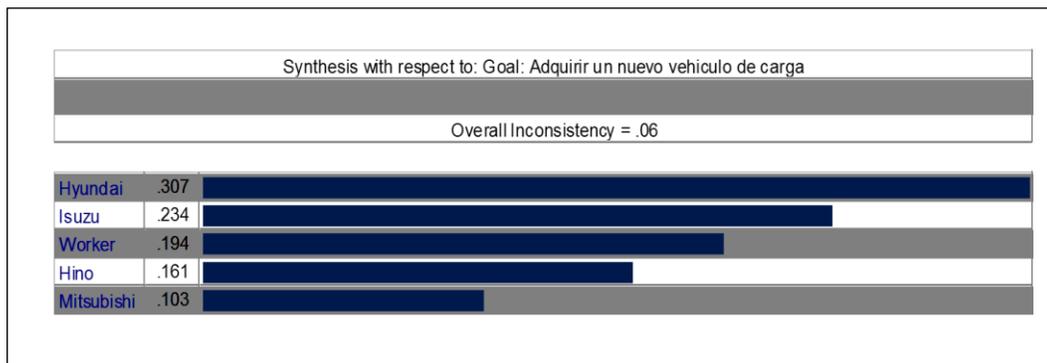
Para obtener la ponderación final de una alternativa se debe multiplicar cada una de las ramas de las cuales depende la alternativa, de manera semejante a los árboles de decisión.

En Expert Choice, podemos obtener los resultados finales y la elección de la mejor alternativa mediante métodos gráficos como se muestra en el figura 2.

4. Síntesis

Obtención de la mejor alternativa.

Figura 5.4. Resultados de los pesos finales, y elección de la alternativa.



Podemos observar que el índice de inconsistencia es menor a 0.1, por lo que es señal de un nivel razonable de consistencia. Es importante observar al pie de la tabla los índices de consistencia todos son menores a 0.1 por lo que es aceptable el procedimiento y no aparecen contradicciones y no se viola el axioma de consistencia.

Con los resultados obtenidos se tiene la jerarquización que se muestra en la figura 2, por lo que se recomienda elegir el vehículo Marca Hyundai con un 30.7% de aceptación, seguido del vehículo marca Isuzu con un 23.4% de aceptación.

5. Análisis de Sensibilidad.

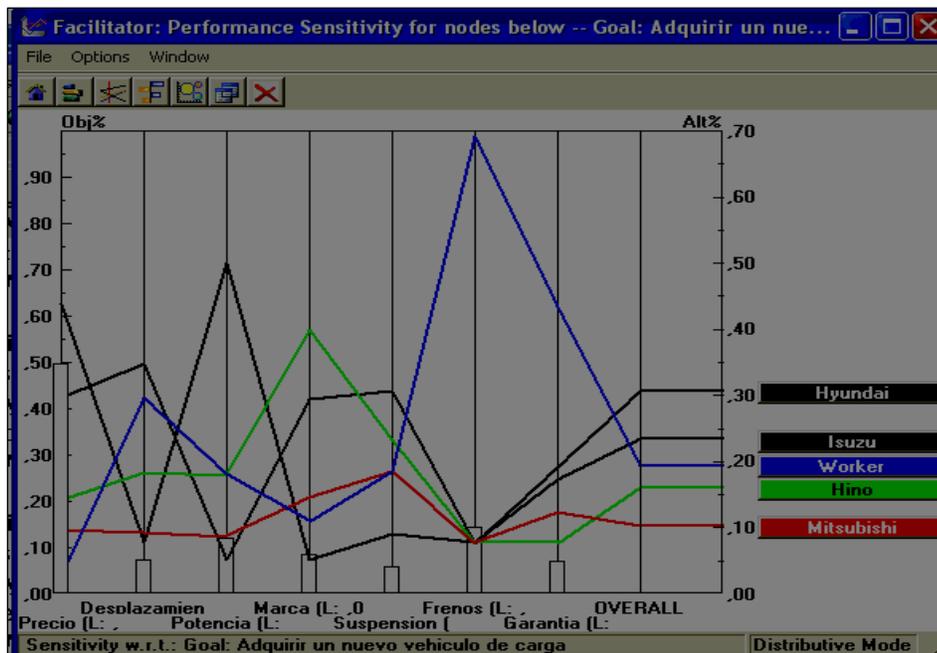
Este análisis se realiza en base al resultado obtenido mediante el proceso de análisis Jerárquico, respondiendo a la interrogante ¿Qué pasa si ocurre algún cambio en la toma de decisión de parte del decisor? o ¿Qué sucede si algún factor no manejable por el decisor, afecta a la toma de decisiones?

El Expert Choice tiene la opción “Sensitivity-Graphs”, que permite realizar de modo gráfico el análisis de sensibilidad, presentando los siguientes tipos: Performance, Dynamic, Gradient, Head to Head.

Los gráficos que son más entendibles para el decisor son el performance y el Dynamic.

A continuación se presentara el análisis de sensibilidad gráfico para el resultado obtenido.

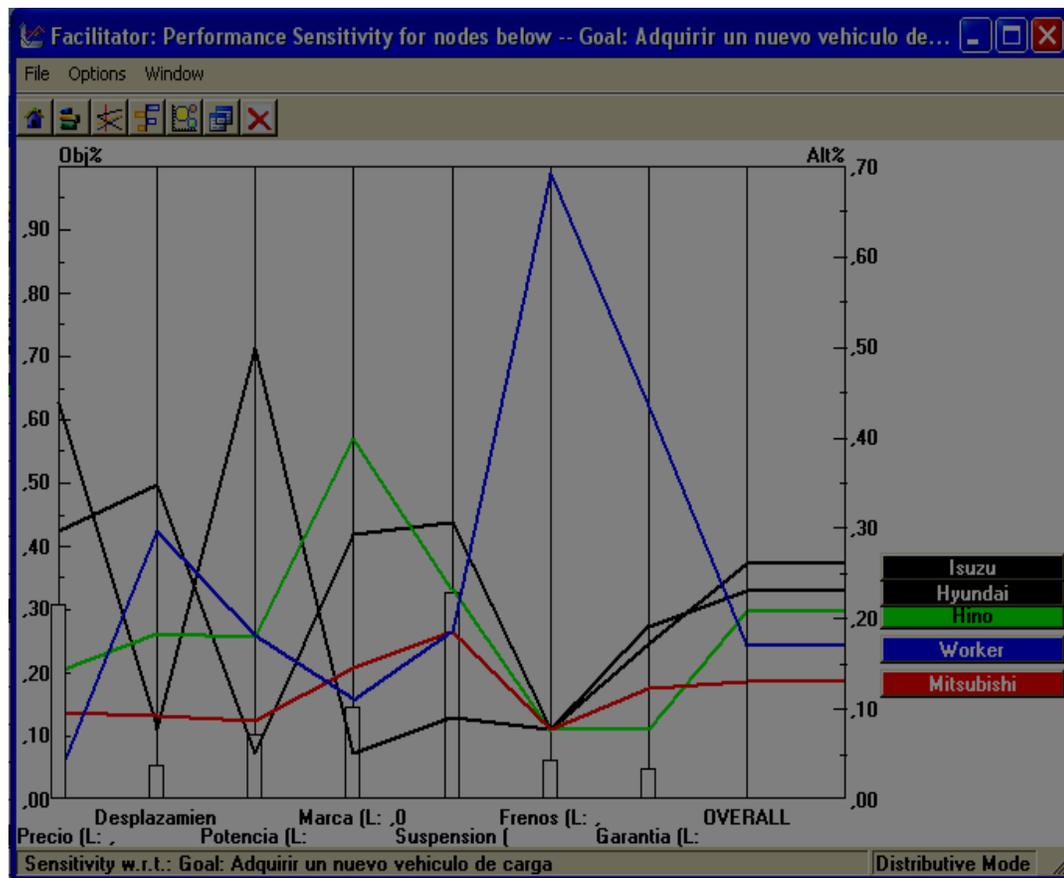
Gráfico 5.4. Análisis de sensibilidad utilizando Performance.



Analizando el gráfico el criterio que parece más importante al decisor es el precio, si la elección fuera basada en el desplazamiento del motor fuera el Isuzu el vehículo a elegir, por otra parte si el sistema de frenos fuera el criterio más importante sería el Worker, por otra parte si se disminuye levemente el peso del precio y se aumenta el peso del tipo de suspensión puede haber un cambio, lo que daría como resultado la elección del Isuzu.

Ahora si le reducimos el peso al criterio precio y aumentamos el peso a la marca, y además producimos un leve incremento en el tipo de suspensión, inmediatamente ocurre que se cambia el orden de selección de las alternativas.

Gráfico 5.5. Análisis de sensibilidad utilizando diferentes pesos.

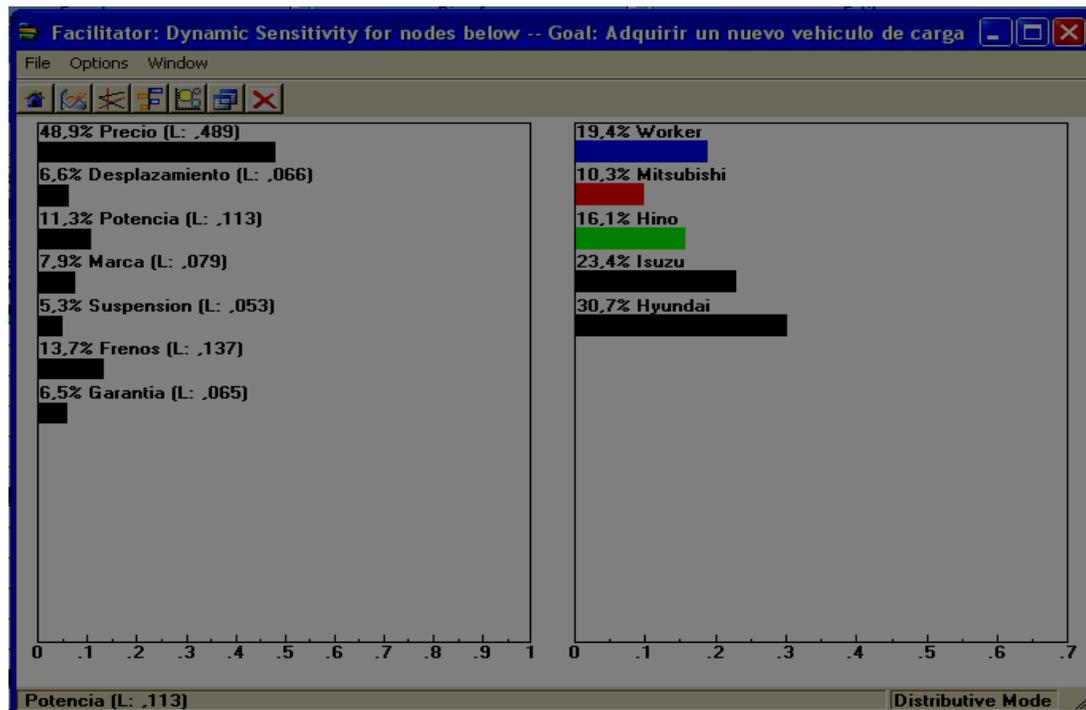


Podemos observar que ahora la alternativa óptima sería la elección del Isuzu, además, se puede observar que aunque los pesos de los criterios sean

cambiados el Mitsubishi queda relegado al último lugar, también si la marca fuese el factor más importante el Vehículo Hino sería elegido.

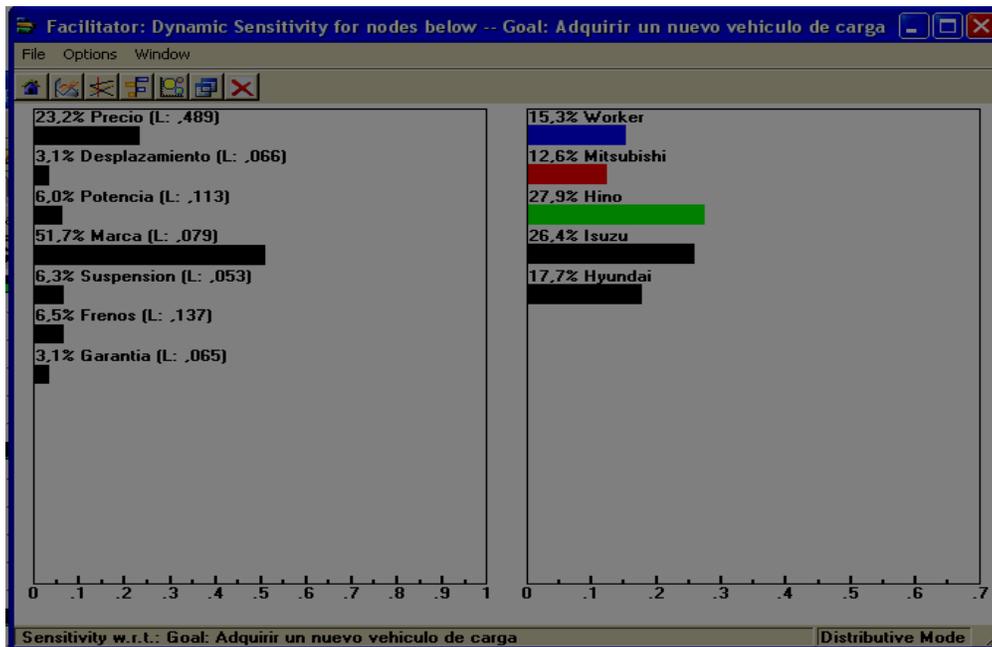
Ahora el comportamiento usando el gráfico Dynamic es el siguiente.

Gráfico 5.6. Análisis de sensibilidad utilizando Dynamic.



En este caso al elevar el peso que tiene la marca hasta el 50% aproximadamente y disminuyendo los pesos de los otros criterios, los vehículos que sobresalen serían el Hino con un 27.9 % y el Isuzu, con un 26.4%.

Gráfico 5.7. Análisis de Sensibilidad usando diferentes pesos.



En resumen, es importante destacar que podría haber otros criterios a evaluar como son los planes de pago, la disponibilidad de repuesto en el mercado, etc. para la adquisición de un automóvil.

Se debe tener en cuenta que al aumentar el peso asignado a la marca podría cambiar la alternativa final, lo que significa que el problema es sensible a pequeños cambios en los pesos.

En este caso con los pesos asignados inicialmente se debe seleccionar el vehículo Marca Hyundai.

CAPÍTULO 6

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

6.1. Conclusiones

La toma de decisiones es el proceso mediante el cual se realiza una elección entre las alternativas o formas para resolver un problema.

- Para tomar una decisión no importando su naturaleza, es necesario conocer, comprender y analizar un problema utilizando los criterios y herramientas de la toma de decisión.
- Los criterios bajo ambiente de incertidumbre, certidumbre y riesgos son útiles cuando interviene un solo atributo.
- La aplicación de técnicas de análisis de la decisión multicriterio, puede enriquecer la solución del problema. Debido a que nos muestra los índices de consistencia entre cada par de criterios o alternativas.
- El éxito de los métodos depende en gran medida de la utilización que le den los implicados en la toma de decisiones, los modelos no son más que una ayuda que necesita complementarse con las habilidades y el conocimiento de las personas.
- El método AHP es simple y flexible, lo cual facilita entender la situación o problema en cuestión y llevar a cabo un adecuado proceso de toma de decisión.
- Usualmente hay dificultad cuando se va a tomar una decisión y se deben manejar muchos criterios o aspectos de un problema a la vez lo cual requiere la participación de varios actores en las diferentes etapas. En este sentido, el método AHP permitió organizar, visualizar y analizarlo sistemáticamente el problema por medio del modelo, y obtener una síntesis.

6.2. Recomendaciones.

- Desarrollo del método de Utilidad Multiatributo, diseñado para obtener la utilidad de las alternativas a través de los atributos valiosos que deben ser evaluados como componentes de los criterios.
- Combinación de un conjunto de herramientas de la investigación de operaciones y el método de utilidad multiatributo para lograr un algoritmo de rutas turísticas, donde a través de ellos se permite una mejor jerarquía y escoger tanto los lugares que representan la mayor satisfacción como las rutas que las brindan.
- Creación de Sistemas de Ayuda a la Decisión que combinen los métodos monocriterios y multicriterios.
- Estudio de la teoría de juegos donde se trata de establecer estrategias a seguir cuando un decisor se enfrenta a otro. En estas situaciones el decisor debe intentar conocer lo que “el otro” hará y actuar consecuentemente.
- Estudio del AHP combinado con la lógica difusa, donde se toma en cuenta la incertidumbre asociada a los juicios humanos.

BIBLIOGRAFÍA

- 1) Andaluz Salazar, Ricardo Antonio; Calderón Barahona, Gabriel Edgardo; Quijada Orellana, Iván Guillermo (1992), Consideraciones Sobre la Aplicación de la Teoría de Decisión a los Desastres Naturales, Universidad de El Salvador, El Salvador. (Tesis de pre-grado)
- 2) Begoña Bermejo, Fraile (2001), Epidemiología Clínica Aplicada a la toma de decisiones en Medicina. Gobierno de Navarra, España.
- 3) Bellini M, Franco (2004), Investigación de Operaciones, en: [http://www.investigacion-operaciones.com/Cursoinv-OperCarpeta/Clase12 .pdf](http://www.investigacion-operaciones.com/Cursoinv-OperCarpeta/Clase12.pdf), Consultada (Enero-Abril 2008)
- 4) Botia Blaya, Juan A. (2001), Árboles de Decisión, Universidad de Murcia, en: <http://www.ants.dif.um.es/staff/juanbot/ml/files/20012002/tema3parte1.pdf.gz>
- 5) Bustos Farías, Eduardo (2005), Métodos Multicriterio para la Ayuda a la Toma de Decisiones, en: http://www.angelfire.com/ak6/publicaciones2/PRESENTACION_1.pdf
- 6) Concepción Cortés Rodríguez (2003), Tema7: Métodos Discretos en: http://www.uhu.es/24057/ficheros_datos/transparencias/tema7.PDF.
- 7) Chacón López, Segismundo Edilberto (1993), Modelos de optimización aplicados a la Toma de decisiones, Universidad de El Salvador, El Salvador.(tesis de pre-grado)

- 8) Cyert, Richard M. (1965), Teoría de las Decisiones Económicas de la empresa, Herrero Hermanos, México.
- 9) Eppen, G.D, Gould, F.J, Schnidt, C.P, More Jeffrey H, Weatherford, Larry R.; Investigación de Operaciones en la ciencia Administrativa (2000). 5a. Edición, Prentice Hall Hispanoamérica, S.A, Mexico.
- 10) Ferguson, Thomas S. (1967), Mathematical Statistic: A Decision Theoric Approach, Academic Press, New York.
- 11) Flores Fernández, Mario Ernesto; Pastore G., Juan Manuel (1993). Determinación de necesidades de información para la toma de decisiones gerenciales, Universidad de El Salvador, El Salvador (tesis de pre-grado)
- 12) García G., María; Hernández, José G. (2001), Toma de Decisiones Bajo Incertidumbre Considerando la Dispersión, Universidad Metropolitana, Escuela de Ingeniería de Sistemas, Caracas Venezuela.
- 13) García G., María; Hernández, José G. (2003), El Método de Amplitud para Riesgos e Incertidumbre: 340-354, Universidad Metropolitana, Escuela de Ingeniería de Sistemas, Caracas Venezuela.
- 14) García G., María; Hernández, José G. (2003), Análisis del Factor Beta, en el Modelo de Amplitud (EMA), Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones, volumen 10, Nº 1-2; 187-199, Caracas Venezuela.
- 15) García G., María; Hernández, José G. (2007), "Revista de matemática: Teoría y Aplicación" 14(1): 221-238, Editorial de la Universidad de Costa Rica, San José.

- 16) Hamdya, Taha (1999), Investigación de Operaciones una Introducción, 6ta edición, Editorial Prentice Hall, University of Arkansas, Fayetteville.
- 17) Lindley, D.V. (1977), Principios de la Teoría de la decisión, Editorial Vicens Vives, Barcelona.
- 18) López Alberto, Oscar Eduardo; Samayoa Romero, Felix Andres; Vasquez Erazo, Angela Paula (1986). El Sistema de Información Estadística en la Toma de Decisiones en las Instituciones de Seguridad Social en El Salvador, Caso práctico: Diseño general de un Sistema en El Instituto Salvadoreño del Seguro Social, Universidad de El Salvador, El Salvador.
- 19) Rivett, Patrick, Construcción de modelos para Análisis de Decisiones(1986), Editorial Limusa.
- 20) Romero, Carlos (1996). Análisis de las Decisiones Multicriterio. Gráficas Algoran, S.A. Madrid.
- 21) Romero, Carlos, Aplicaciones de las teorías de decisión Multicriterio en la Planificación de los Recursos Forestales. Departamento de Economía y Gestión, Universidad Politécnica de Madrid.
- 22) Rodríguez Estrada, Mauro (1988). Manejo de problemas y toma de decisiones. Manual Moderno, México.
- 23) Toskano Hurtado, Gérard Bruno (2006), El proceso de Análisis jerárquico (AHP) como Herramienta para la Toma de Decisiones en la Selección de Proveedores en:

http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/tesis/Basic/toskano_hg/cap2.pdf.

ANEXOS

Anexo 1. Creación de la matriz de resultados y beneficio esperado, en la hoja de cálculo de Excel para el modelo de repartidor de periódicos.

- Se crea un libro de trabajo en Excel llamado “repartidor de periódicos.xls”, luego introducir el costo de compra y precio de venta con su respectiva etiqueta así como sus respectivas alternativas y estados de naturaleza, se nombra a esa hoja de cálculo “periódicos”.

Figura 1. Creación de la hoja de cálculo “periódicos”

	A	B	C	D	E	F
1	Precio de venta	0.5				
2	Costo de compra	0.35				
3						
4						
5		Estados de la naturaleza				
6	Alternativas	60	70	80	90	Beneficio esperado
7	60					
8	70					
9	80					
10	90					
11						
12	Probabilidades	0.1	0.3	0.4	0.2	
13						
14						
15						
16						

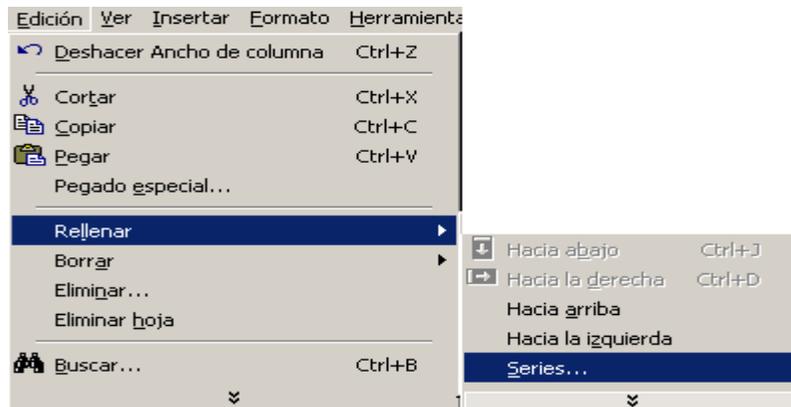
- Después se calculan los resultados para cada uno de los estados de naturaleza, introduciendo en la celda B7 la siguiente ecuación: $\$B\$1 * \text{MIN}(\$A7, \$B\$6) - \$B\$2 * \$A7$ y la columna de beneficio esperado (columna F), se puede generar utilizando la formula: $\text{SUMAPRODUCTO}(B7:E7, \$B\$12:\$E\$12)$, que es la suma de los productos de las probabilidades por su respectivo resultado.

Figura 2. Cálculo de las respectivas retribuciones y benéfico esperado

	A	B	C	D	E	F
1	Precio de venta	0.5				
2	Costo de compra	0.35				
3						
4						
5		Estados de la naturaleza				
6	Alternativas	60	70	80	90	Beneficio esperado
7	60	9	9	9	9	9
8	70	5.5	10.5	10.5	10.5	10
9	80	2	7	12	12	9.5
10	90	-1.5	3.5	8.5	13.5	7
11						
12	Probabilidades	0.1	0.3	0.4	0.2	

- Para realizar el análisis de sensibilidad se deberá copiar los datos de la hoja periódicos en una nueva hoja de cálculo, luego se introducirá en la celda A16 un valor inicial de precio de venta igual 0. Luego hacer clic en edición, rellenar, después en series, tal como se muestra en la figura 3

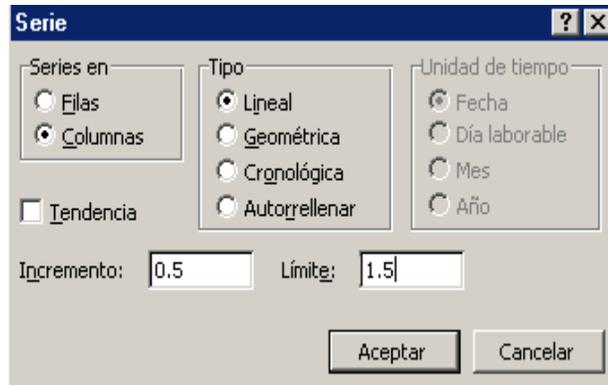
Figura 3. Opciones para rellenar serie.



- Seguidamente de dar clic en series, se mostrará una tabla similar a la figura 4, donde se deberá seleccionar la opción columnas y se debe

establecer un incremento de 0.05 y un valor límite de 1.5, por último dar clic en “aceptar”.

Figura 4. Opciones de submenú series.



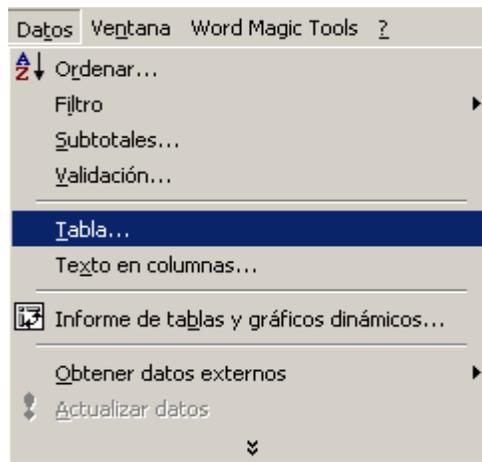
- Posteriormente en las celdas B15:E15 se introducirán los beneficios esperados de la hoja de cálculo llamada periódicos, para ordenar 60, 70, 80 y 90 periódicos (es decir, B15=F7, C15=F8, D15=F9, E15=F10).

Figura 5. Rellenado de serie e inserción de beneficio esperado

	A	B	C	D	E
15		9	10	9.5	7
16	0				
17	0.05				
18	0.1				
19	0.15				
20	0.2				
21	0.25				
22	0.3				
23	0.35				
24	0.4				
25	0.45				
26	0.5				
27	0.55				
28	0.6				

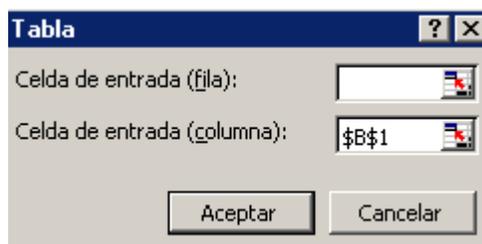
- Después hacer clic en el menú de datos, luego en tabla tal como se muestra a continuación.

Figura 6. Opciones de menú Datos



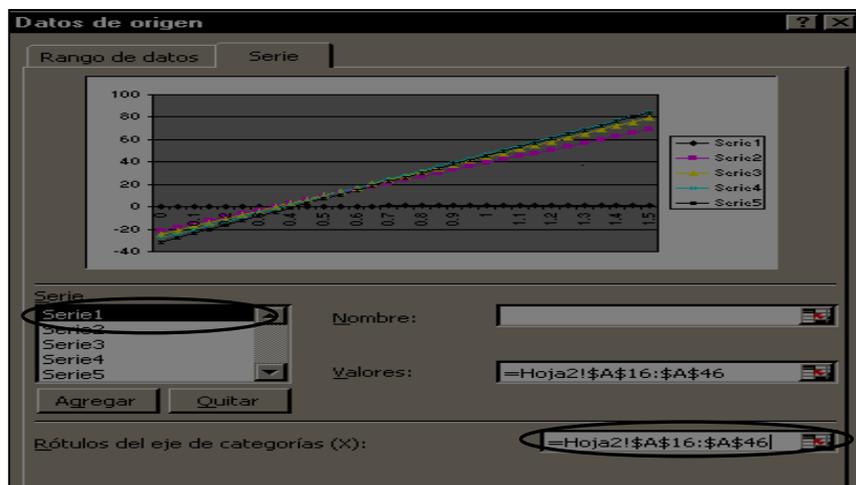
Luego se mostrará la siguiente pantalla, donde se escribirá la celda de entrada de la columna \$B\$1, como se muestra en la figura 7.

Figura 7. Creación de la tabla de datos para modelo repartidor de periódico con base a la variable B1.



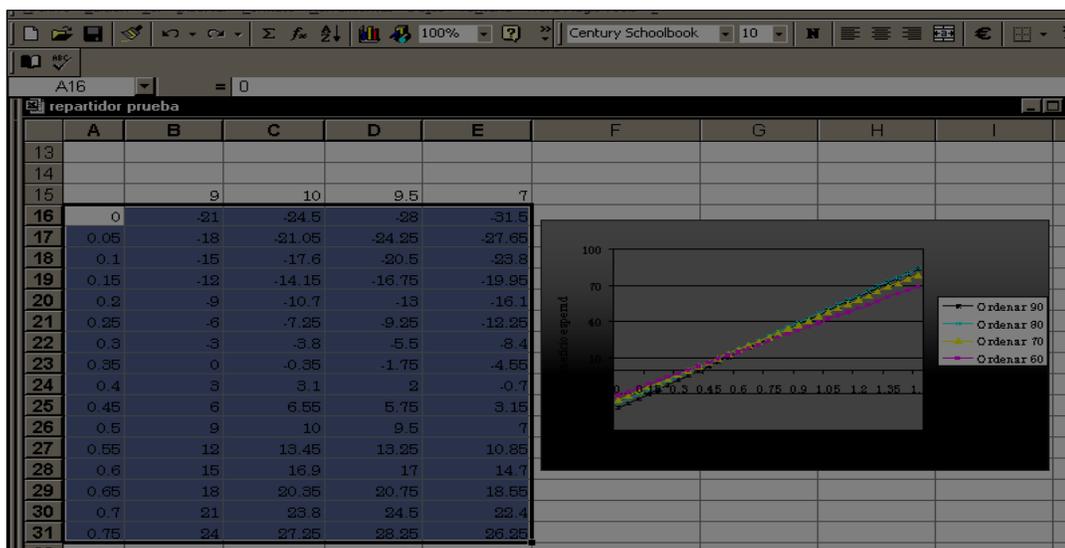
- Por último hacer clic en el icono del asistente de gráficas de Excel , donde en primer lugar se deberá escoger el tipo de gráfico , haga clic en “línea”, después haga clic en “siguiente”, después haga clic en “series” e indique las “Etiquetas del eje de las X” se encuentra en A16:A46, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 8. Opciones de serie.



Posteriormente eliminaremos la serie 1, ya que es el rótulo para el eje X, cambiamos las leyendas de las cuatro series restantes por “Serie 2 = Ordenar 60”, de la misma forma para las restantes, se obtendrá los siguientes resultados.

Figura 9. Resultado del análisis de sensibilidad.



Anexo 2. Creación del árbol de decisión utilizando la aplicación Treeplan de Excel.

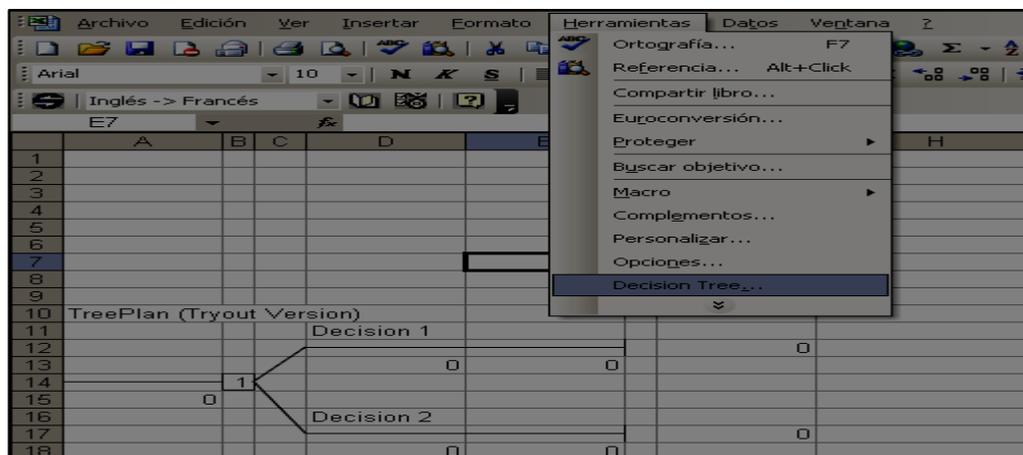
Una herramienta muy útil en la elaboración de árbol de decisiones es el treeplan, este es un complemento de Microsoft Office Excel, que si se desea utilizar se puede bajar del sitio Web <http://www.treeplan.com>

Para instalar treeplan a su computador solo baje la aplicación de Internet, coloque en el escritorio y luego en Excel haga clic en herramientas, después en complementos, luego en examinar, y luego localice TREEPLAN.XLA en su computadora (escritorio). Una vez instalado debe estar dispuesto en herramientas la opción árbol decisión.

Pasos para la elaboración del árbol de decisión.

1. Colocar el cursor en la celda A10, hacer clic en herramientas y después en árbol de decisión y luego agregar nuevo árbol. Aparecerá un árbol predeterminado.

Figura 1. Creación de eventos iniciales.



- Para el caso del lanzamiento de los nuevos productos necesitamos tres puntos de decisión, por lo que habrá que insertar otra rama de la siguiente manera: hacer clic en la celda B14, luego en el menú herramientas seleccionar árbol de decisión, y luego seleccionar agregar rama.

Figura 2. Creación de ramas iniciales.

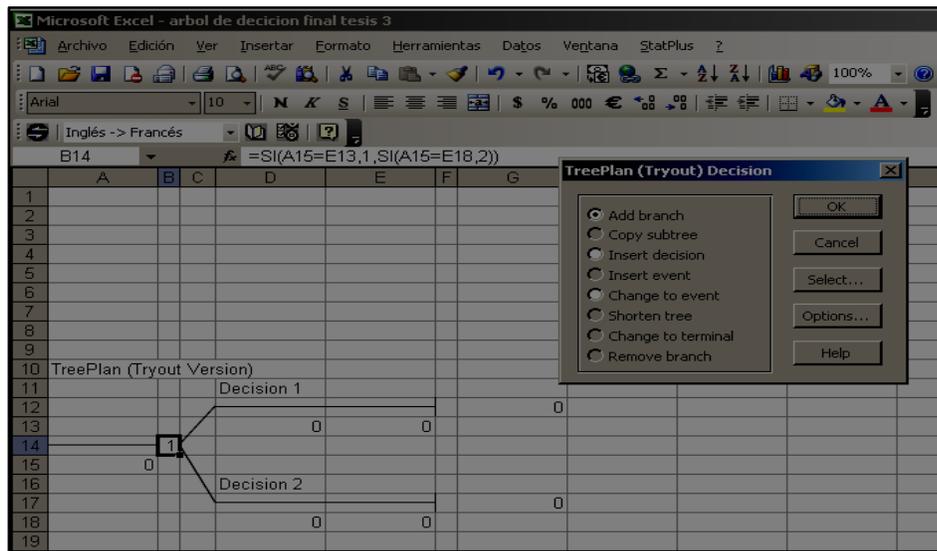
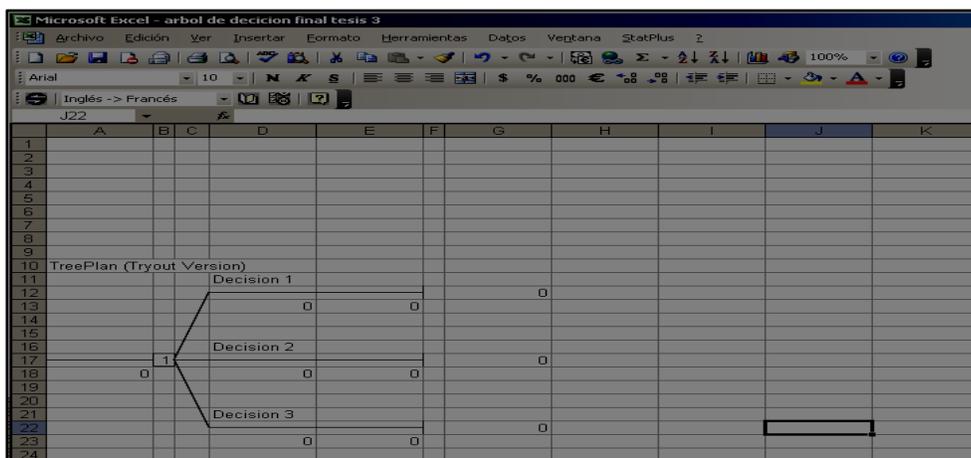


Figura 3. Decisiones iniciales.



- En la decisión 1 que aparece en la figura anterior se quiere reemplazar el nodo Terminal por un nodo de eventos aleatorios, el cual se hace de la

siguiente manera: hacemos clic en la celda F12 como se muestra en la figura siguiente, posteriormente hacemos clic en herramientas, árbol de decisión, luego seleccionar nodo de eventos, posteriormente seleccionamos dos (que son las dos ramas que necesitamos) posteriormente clic en aceptar.

Figura 4. Creación de sucesos o eventos inciertos.

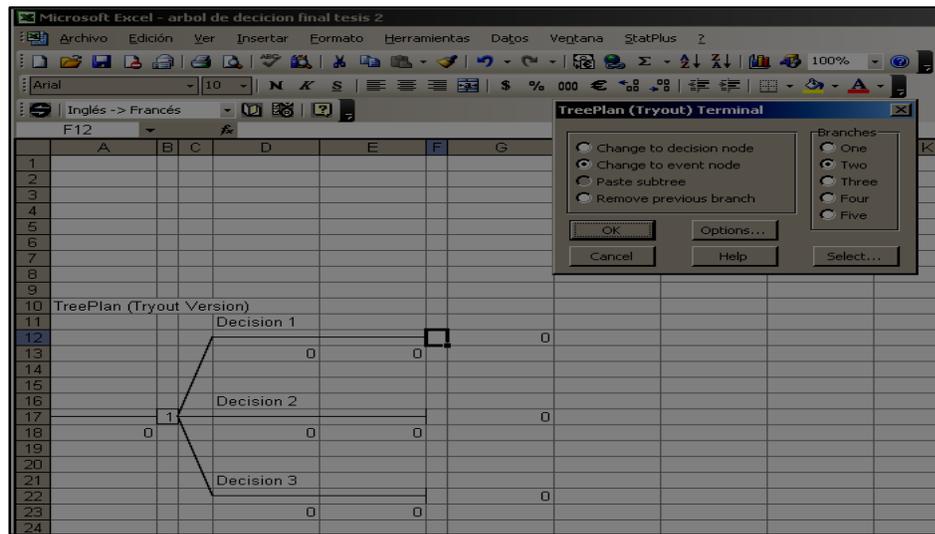
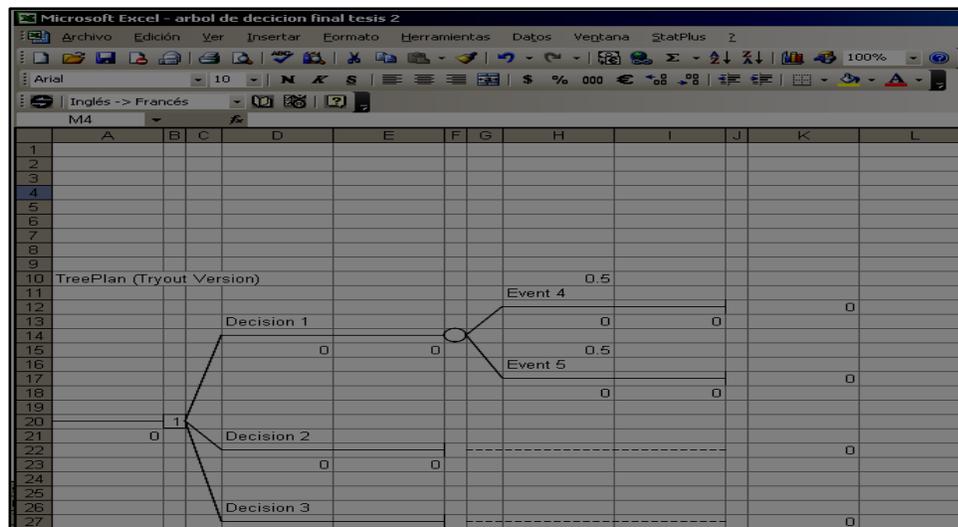
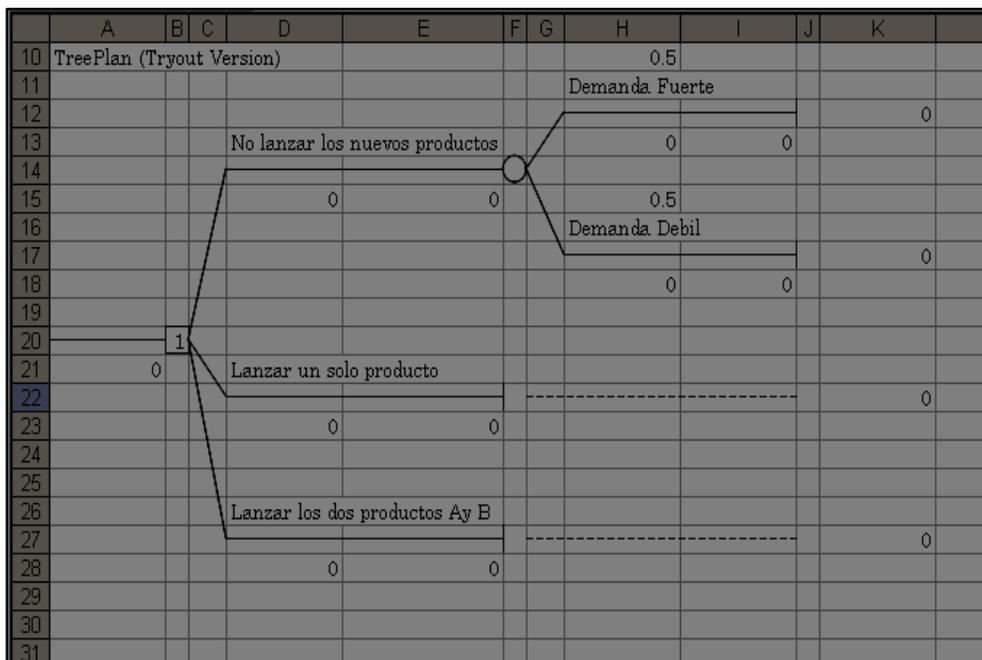


Figura 5. Eventos inciertos.



4. Observe que tree plan asigna probabilidades predeterminadas de 0.5 para cada una de las ramas de los eventos aleatorios, así también proporciona los nombres predeterminados para cada rama, los cuales deben ser cambiados por los del problema que se esta resolviendo.
5. posteriormente cambiamos las etiquetas de evento 4 por demanda fuerte y evento 5 por demanda débil. Cambiamos decisión 1 por no lanzar el producto, decisión 2 por lanzar un solo producto y decisión 3 por lanzar los dos productos A y B.

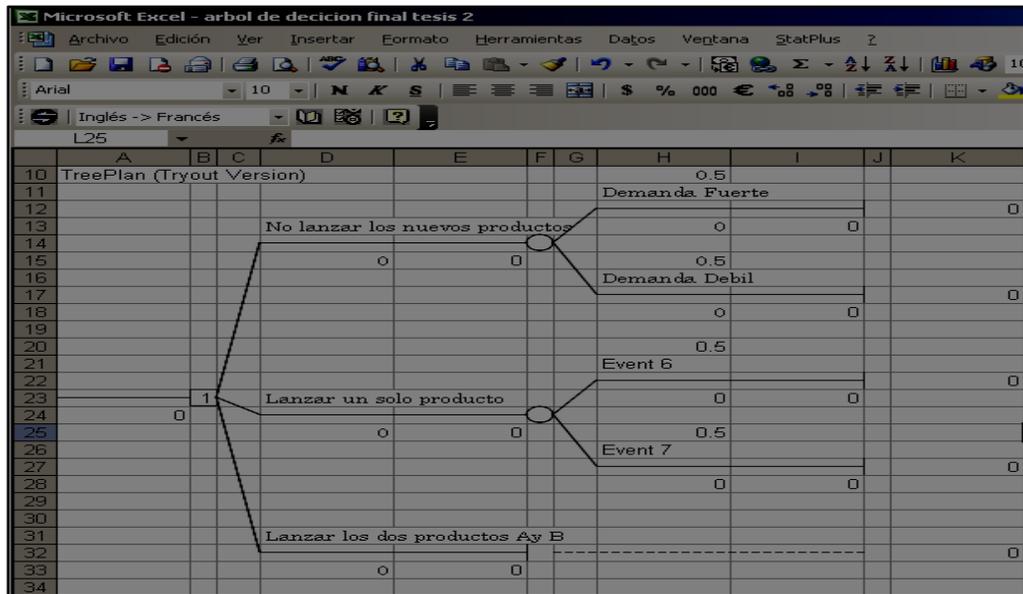
Figura 6. Nombrar etiqueta



6. Luego en el punto de decisión de lanzar un solo producto necesitamos cambiar el nodo terminal por un nodo de eventos aleatorios el cual se hace de la siguiente manera: hacemos clic en la celda F22, posteriormente

hacemos clic en herramientas, luego en cambiar a nodo de eventos y luego seleccionamos dos (que son las dos ramas que necesitamos) posteriormente clic en aceptar.

Figura 7. Agregar nodos de incertidumbre.



7. Posteriormente se necesita cambiar el nodo Terminal de evento 6 y evento 7 por un nodo de decisión, lo que se hace de la siguiente manera: hacer clic en la celda J 22, luego clic en herramientas, luego en árbol de decisión, luego clic en cambiar nodo de decisión, hacer clic en dos por que son dos ramas las que se necesitan.

Figura 8. Agregar nodos de decisión.

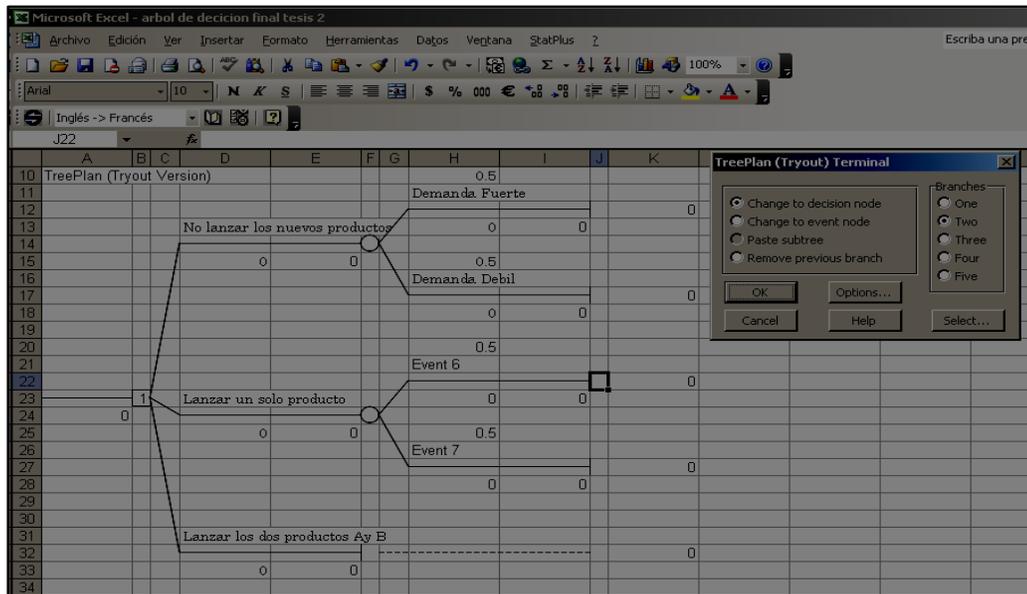
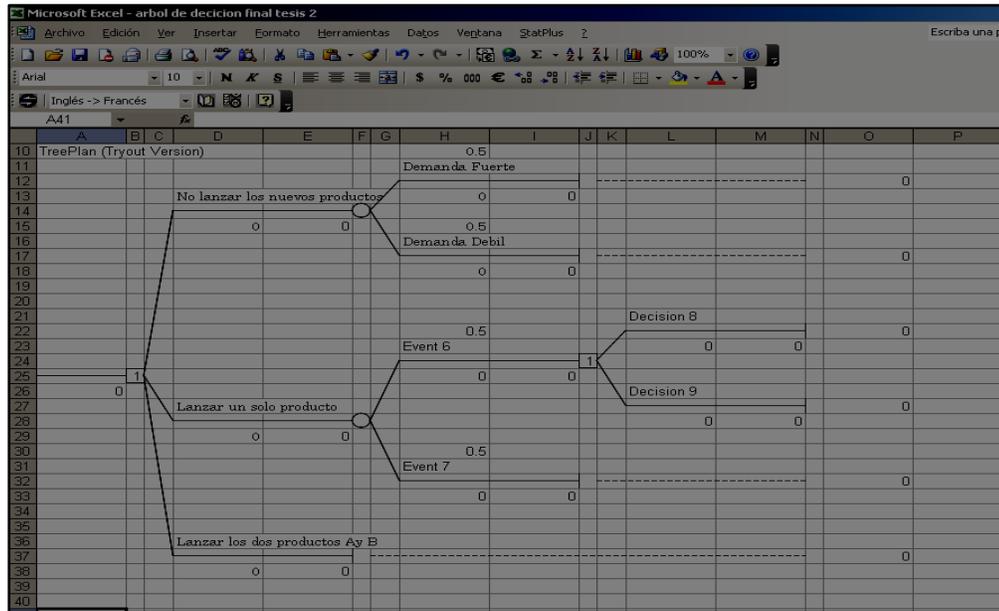


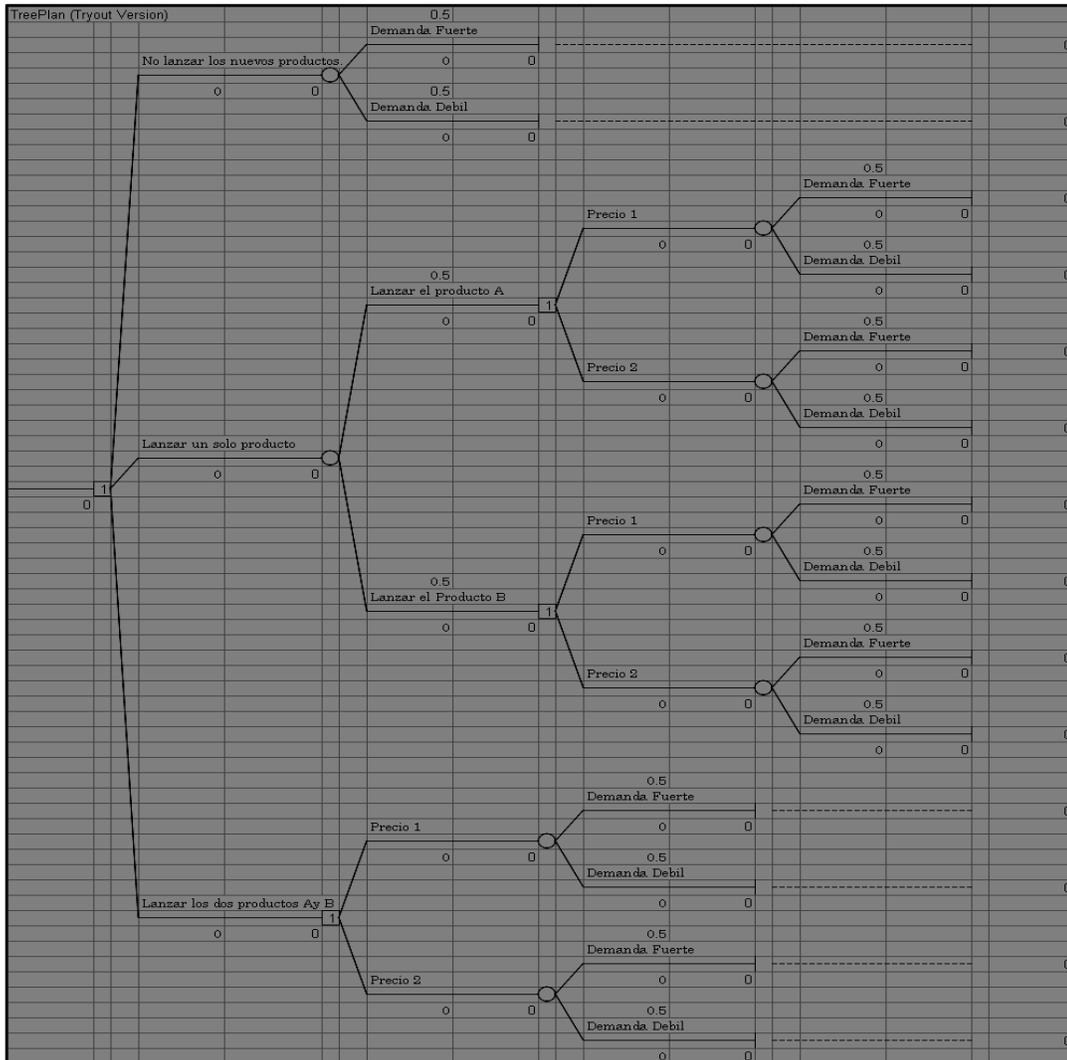
Figura 9. Agregar nodos de decisión.



Nota: En las celdas H10, H15, H22 y H30 se proporcionan las probabilidades automáticas por el programa, las cuales deben cambiarse por las del problema real.

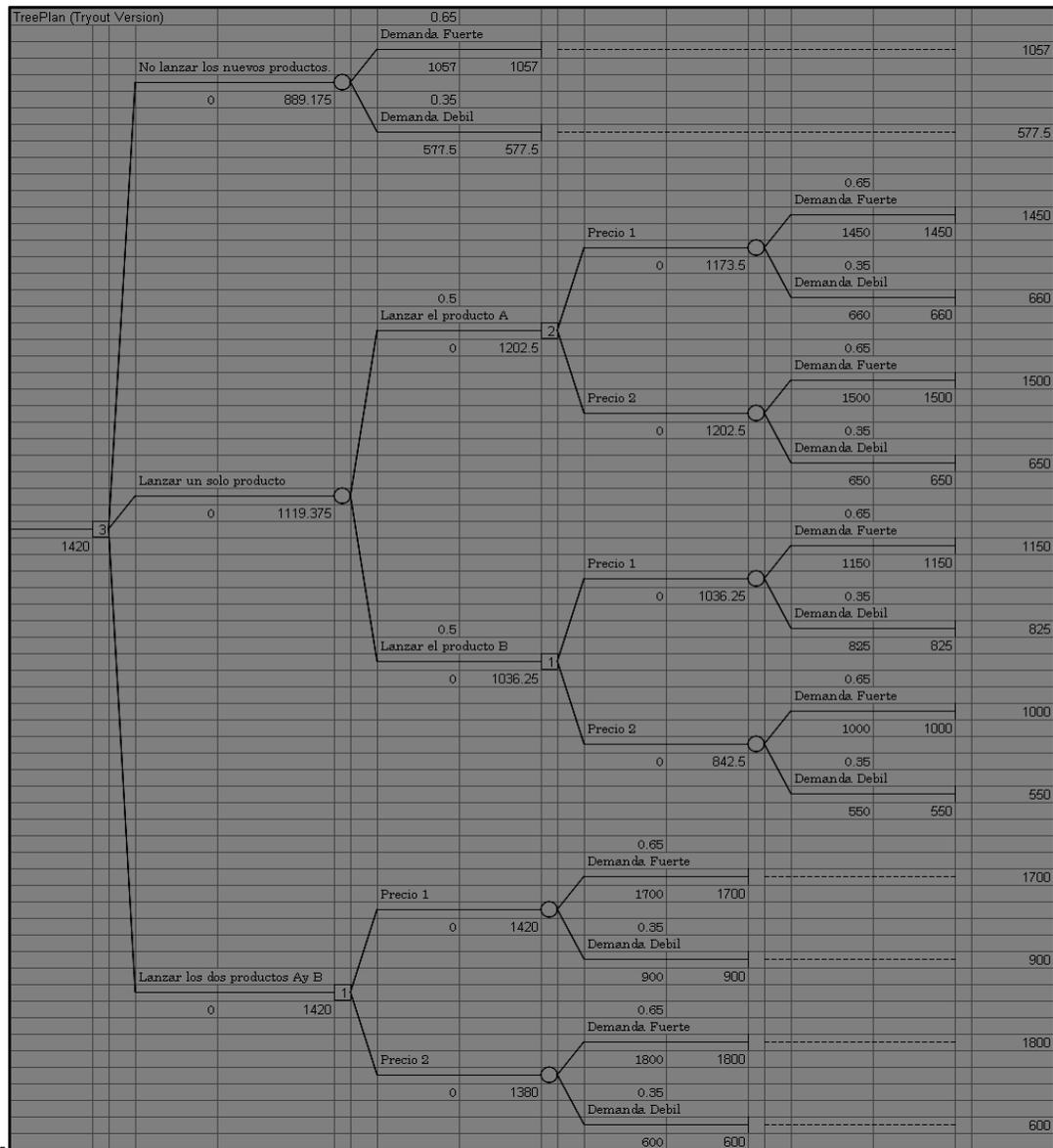
8. Posteriormente se van agregando los nodos de decisión y de incertidumbre que se necesiten para formar el árbol y se cambian las probabilidades automáticas del programa por las del problema real, obteniendo así el siguiente árbol.

Figura 10. Árbol de decisión.



9. Posteriormente los valores de cero que aparecen en la última columna del árbol deben ser sustituidos por los respectivos beneficios o pérdidas que se tengan del planteamiento del problema, los cuales son utilizados para calcular Los valores monetarios esperados, que son calculados automáticamente por el programa. Obteniendo así el árbol de decisión final. Para encontrar la alternativa óptima se hace un análisis de retroceso empezando por las ramas de la derecha hasta llegar al nodo de decisión inicial.

Figura 11. Árbol de Decisión Final.

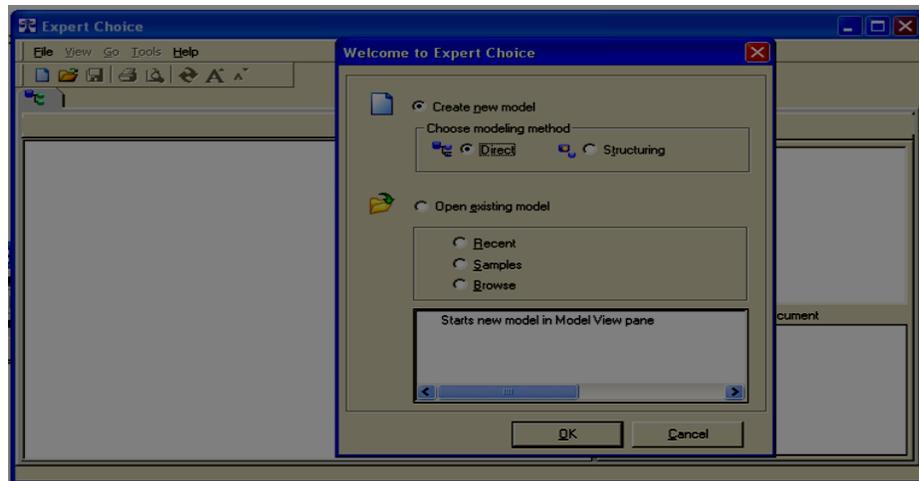


Nota: Los valores de cero que aparecen en el árbol son predeterminados por el programa y no tienen ninguna trascendencia en el análisis del árbol.

Anexos. 3 Uso del programa Expert Choice 11. Para el análisis jerárquico.

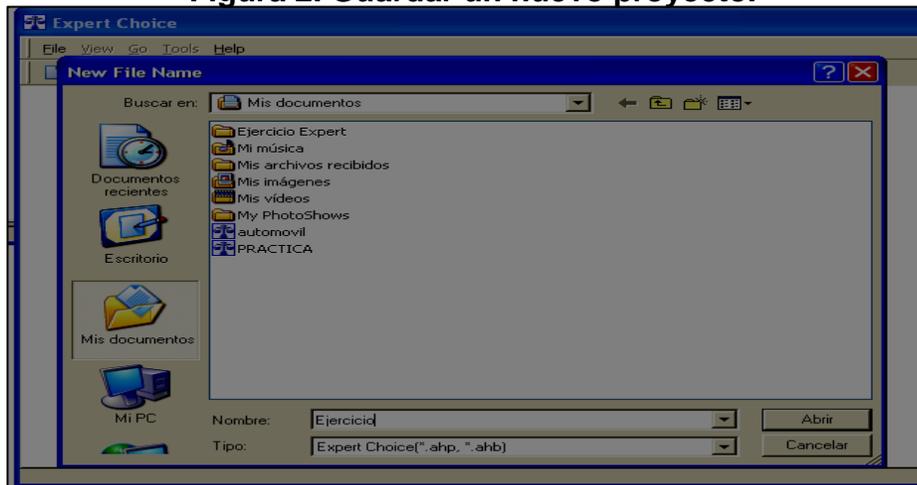
1. Al inicializar el programa aparece una pantalla donde si estamos inicializando un nuevo problema damos Click en "Create new model", posteriormente en la opción "Direct". Y Finalmente "OK". Como se muestra en la siguiente figura.

Figura 1. Pantalla inicial.



2. Posteriormente nos pedirá que asignemos un nombre al problema, y en seguida se hace clic en “Abrir”, como se muestra en la siguiente figura

Figura 2. Guardar un nuevo proyecto.



3. Luego aparecerá una pantalla donde nos pedirá que definamos el objetivo del problema. Presionamos Enter y aparece nuestro objetivo, damos clic derecho sobre el objetivo y seleccionamos la opción “Insert Child of current node”, ahí aparece donde podemos empezar a escribir todos los criterios.

Figura 3. Insertar un nuevo nodo.

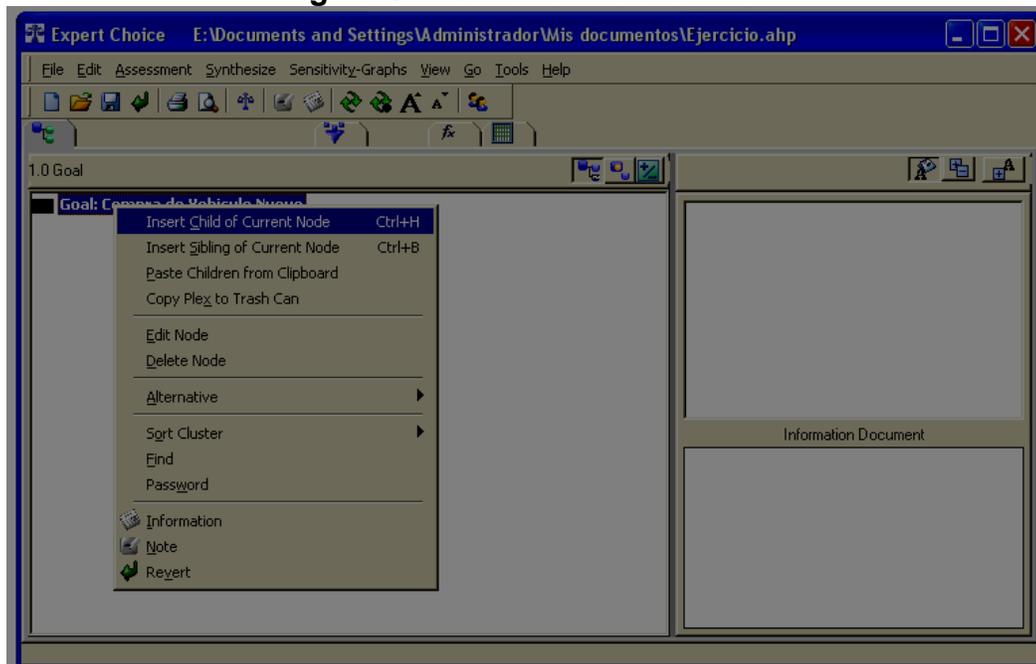
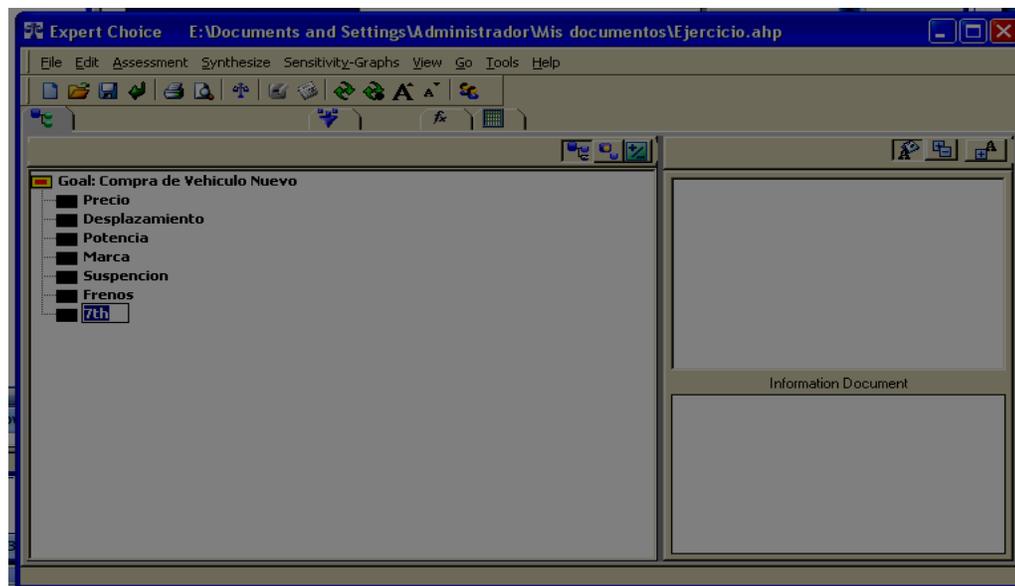


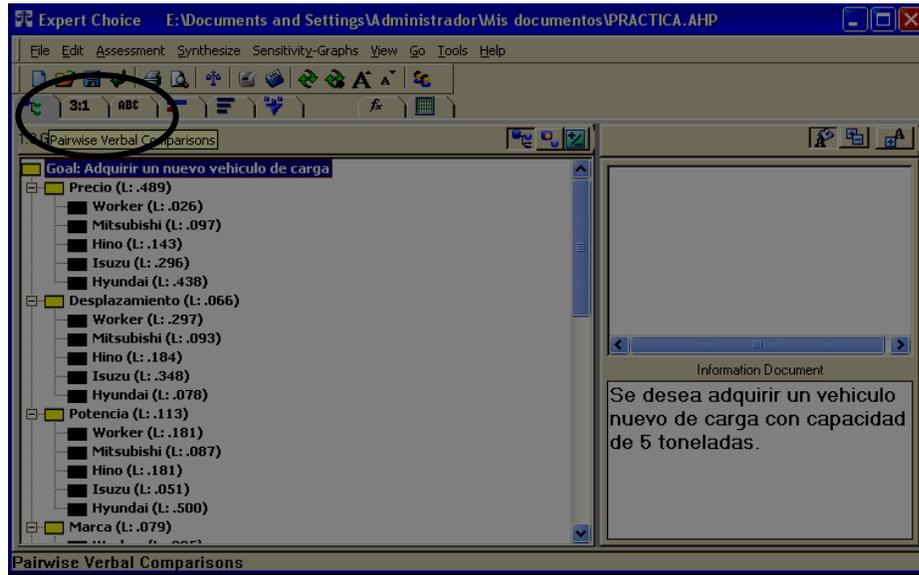
Figura 4. Asignación de nombre a los nodos



4. De igual forma se puede agregar los subcriterios en caso de que existan. Luego se deben hacer las comparaciones por pares para este caso primero se deben hacer las comparaciones entre los criterios para asignar los

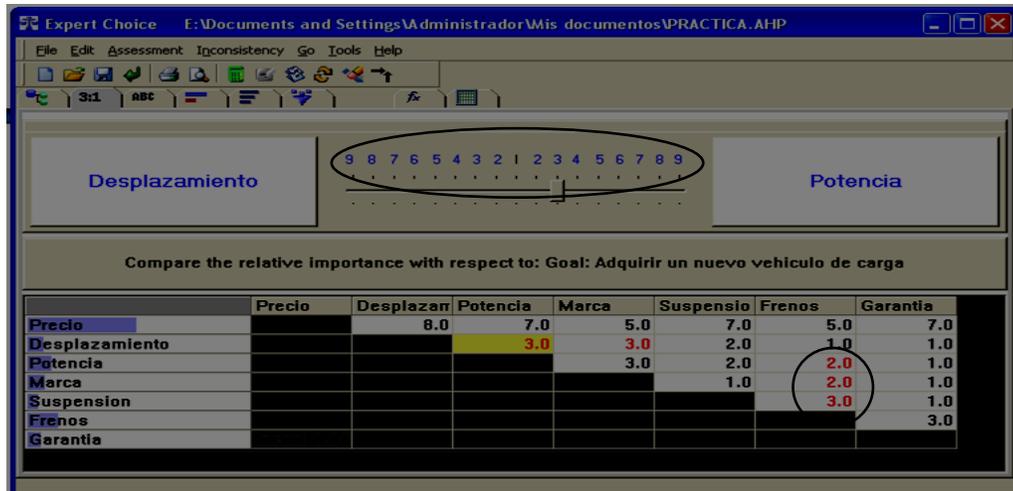
pesos, a cada uno de ellos, posteriormente se debe hacer las comparaciones de cada una de las alternativas para cada criterios.

Figura 5. Comparación por pares.



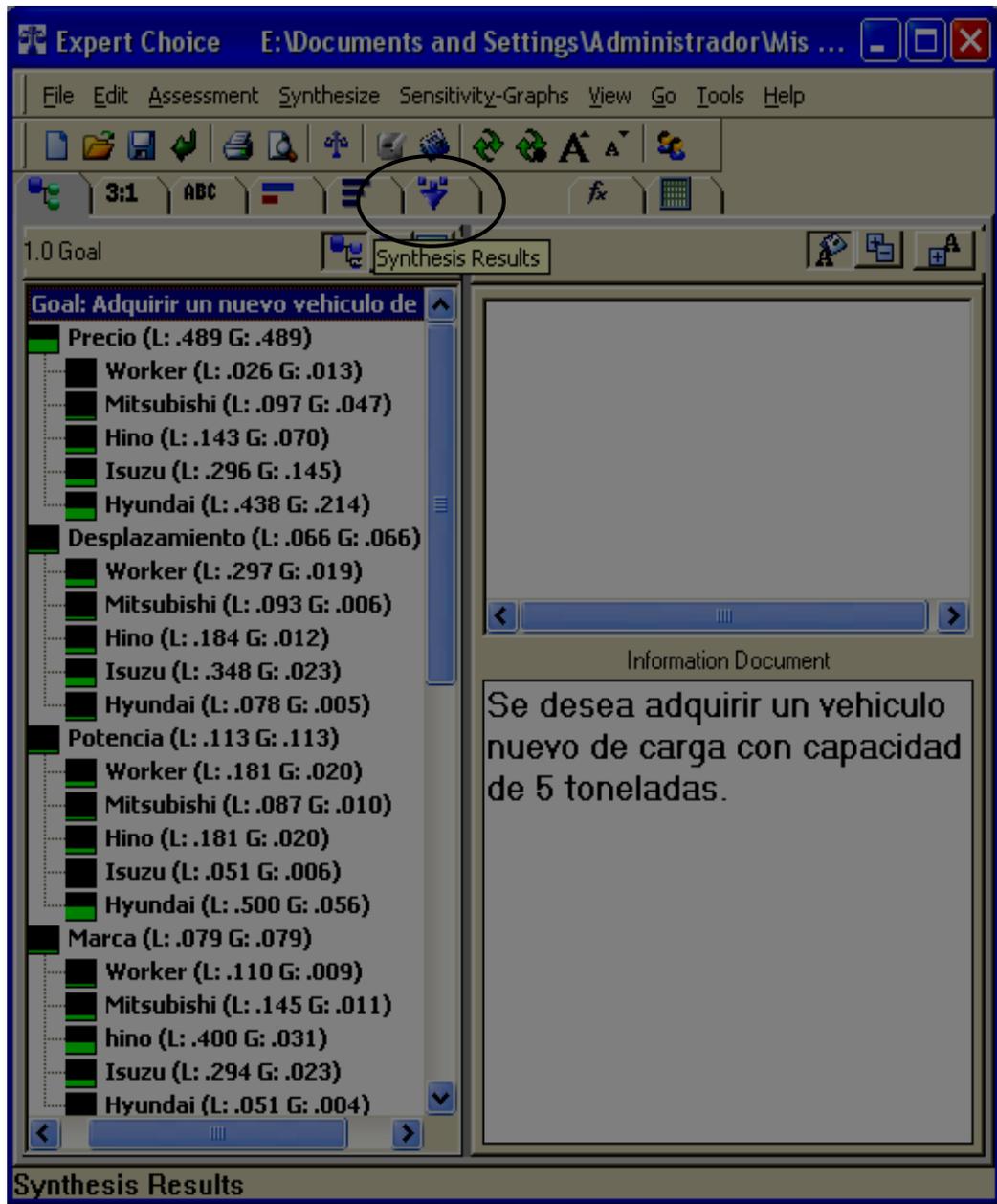
5. Posteriormente aparece una tabla donde debemos poner las comparaciones, recordando que solo una parte de ella debe llenarse debido a la reciprocidad que presenta el método, además en este programa los números en rojo representa la reciprocidad, es decir que es $1/(\text{el valor})$, que hemos puesto. La parte de la regla deslizante ayuda a mover hacia los valores que preferimos, es decir, hacia un nivel u otro.

Figura 7. Modo de asignar volares numéricos.



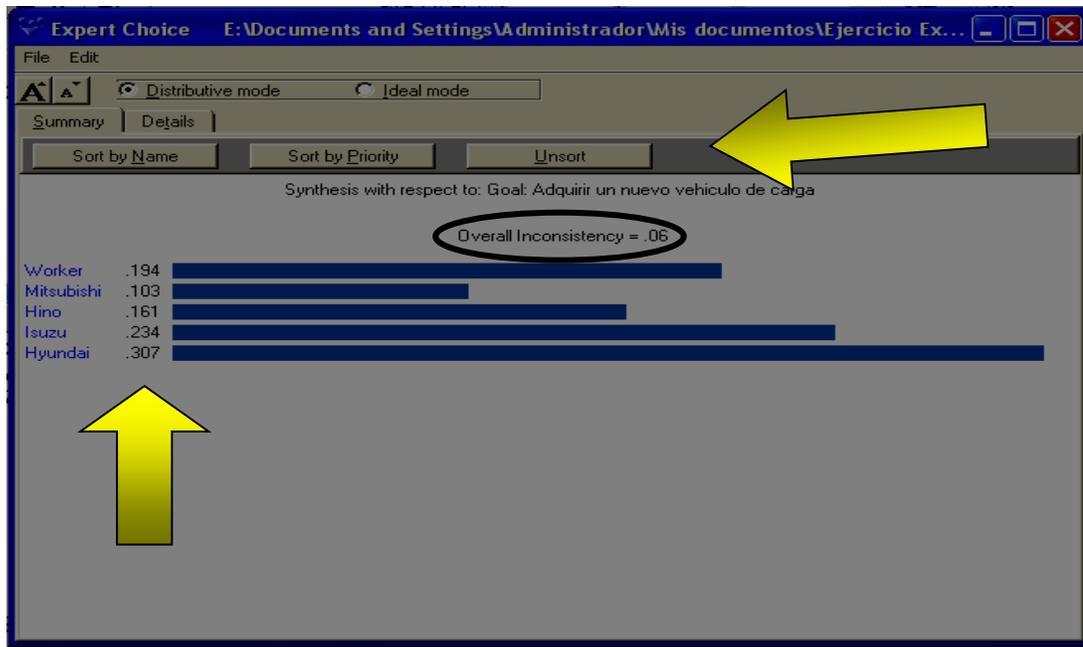
6. Realizamos la comparación para cada uno de los criterios y subcriterios, para obtener el grado de inconsistencia de cada uno de los criterios y del problema en general, el grado de inconsistencia se muestra en la parte final de la tabla, si nos da mayor a 0.1, debemos revisar los juicios emitidos y reconsiderar nuestras comparaciones.
7. Después de haber hecho todas las comparaciones podemos observar la síntesis del problema, ubicándonos en el objetivo o en uno de los criterios y posteriormente dando clic sobre "Synthesis Results".

Figura 8. Resultados finales.



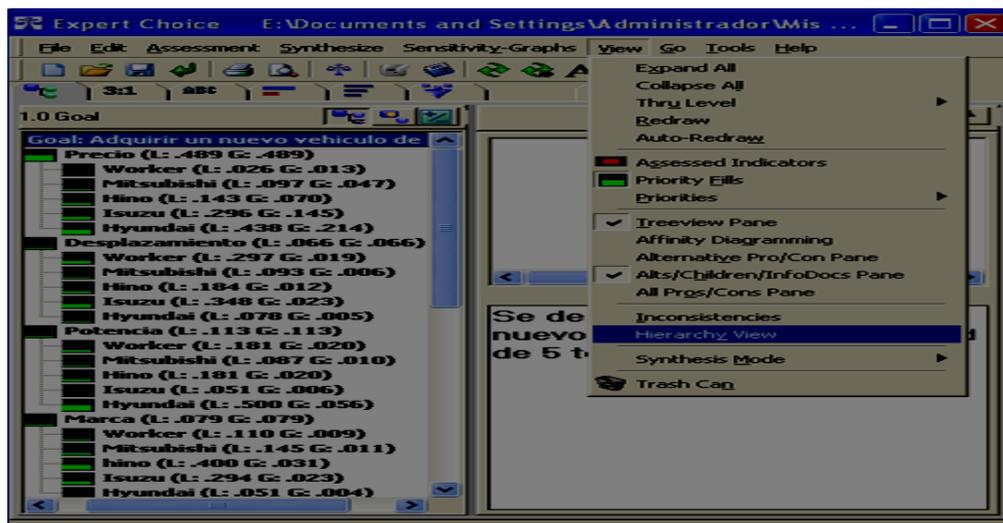
8. Posteriormente, aparece la siguiente ventana, donde aparece diversas opciones para ordenar las alternativas, por nombre, por prioridad o sin orden específico y además presenta los pesos, globales, también puede guardarse en formato Word.

Figura 9. Selección de la mejor alternativa.



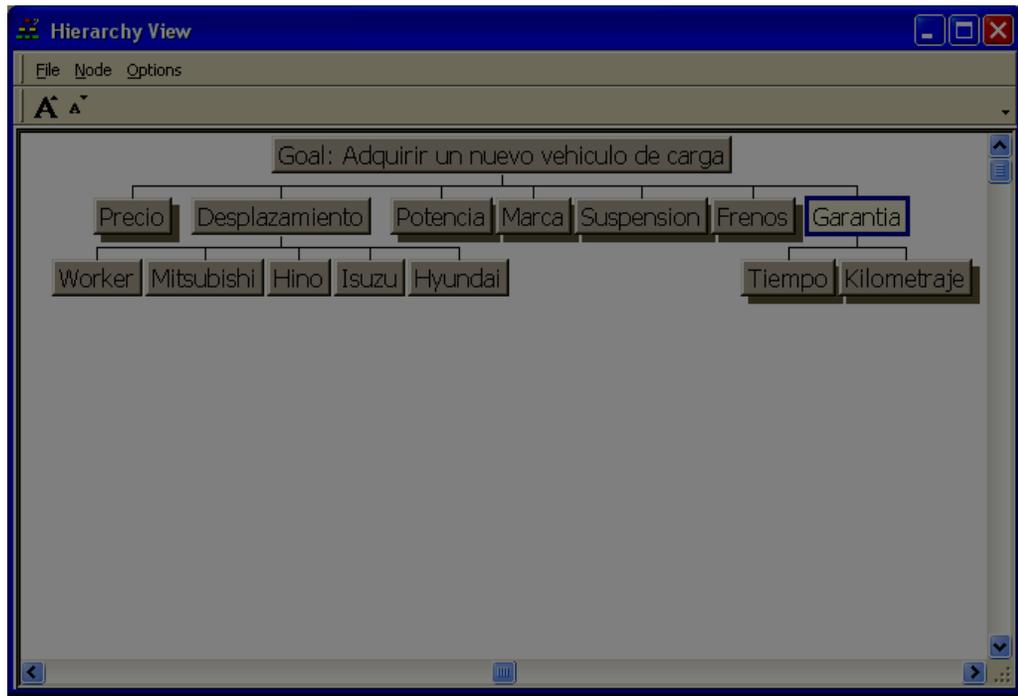
9. Tenemos la opción de presentar el árbol Jerárquico, en forma gráfica, para ello damos clic en el menú “View” luego damos clic en Hierarchy View”, como se muestra en la figura 10.

Figura 10. Pasos para visualizar el árbol jerárquico.



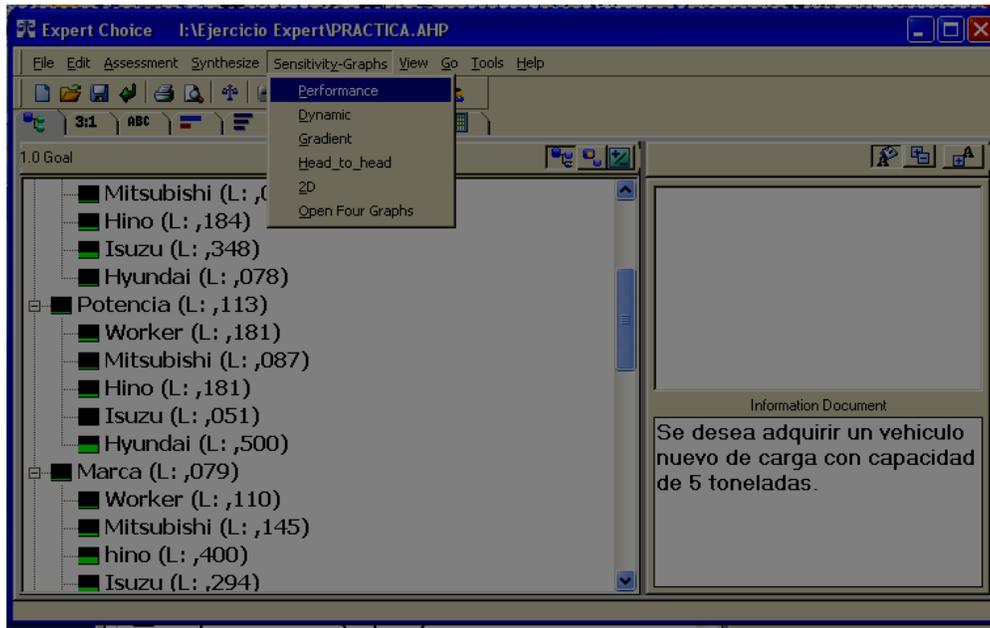
10. Donde nos aparece el árbol y despliega todos los criterios y subcriterios que deseemos.

Figura 11. Árbol jerárquico.



11. Posteriormente podemos hacer el análisis de sensibilidad para observar como cambian los pesos globales si cambiamos alguna de estas características. Para ello seleccionamos el menú “Sensitivity-Graphs”, luego damos clic en el tipo de gráfico que queremos seleccionar, en nuestro caso “Performance”.

Figura 12. Menú para crear análisis de sensibilidad.



Aparece la pantalla mostrándonos el gráfico, donde podemos cambiar los valores, para ver como cambian las alternativas, para tener los valores iniciales damos clic en el botón . Así, sucesivamente para cada uno de los gráficos.