

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA



Universidad de El Salvador
Hacia la libertad por la cultura

TRABAJO DE GRADUACIÓN:

“FIABILIDAD DE SISTEMAS COHERENTES”

PRESENTADO POR:

PATRICIA YOLANDA BARAHONA RIVERA

YASMIN GUADALUPE MARIONA

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO(A) EN ESTADÍSTICA

ASESOR:

Dr. JOSÉ NERYS FUNES TORRES

CIUDAD UNIVERSITARIA, JUNIO DE 2009.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

MSC. RUFINO ANTONIO QUEZADA

VICERECTOR ACADEMICO:

MSC. MIGUEL ÁNGEL PÉREZ RAMOS

SECRETARIO GEBERAL:

LIC. DOUGLAS VLADIMIR ALFARO CHÁVEZ

FISCAL GENERAL:

DR. RENE MADECADEL PERLA GIMENEZ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

DR. RAFAEL GÓMEZ ESCOTO

VICEDECANO:

LICDA. MARTHA NOEMÍ MARTÍNEZ HERNÁNDEZ

SECRETARIA:

LICDA. MARIA TRINIDAD TRIGUEROS DE CASTRO

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR:

ING. CARLOS MAURICIO CANJURA

TRABAJO DE GRADUACIÓN APROBADO POR:

ASESOR:

DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES

DEDICATORIAS

Agradezco a Dios padre, Hijo y Espíritu Santo por permitirme culminar esta etapa de mi vida, por haberme ayudado durante todo este tiempo, por ser mi mejor consejero, mejor amigo, mi apoyo incondicional, por tomarme de la mano, y darme fuerzas y guiarme en este caminar, por todas las dificultades que puso en mi camino, las cuales sirvieron para formarme como profesional pero sobre todo como ser humano. Gracias Señor por permitirme terminar mi trabajo de Graduación.

Mis queridos padres, Victor Manuel Barahona y Yolanda de Barahona por su sacrificio y ser el pilar fundamental para alcanzar mi meta, gracias por sus oraciones, por sus palabras de aliento, les agradezco infinitamente por lo que soy hasta el día de hoy, gracias a ustedes; asimismo, le doy gracias a mi hermana Aura Barahona que con todo su esfuerzo aportó a mi logro.

Mis amigos y hermanos en Cristo que con todas sus peticiones a Dios me ayudaron en cada uno de los momentos, y que cada uno tuvo un aporte especial para poder coronar esta etapa de mi vida.

A mi compañera de tesis porque formamos un equipo de trabajo, porque durante lo complicado que es el trabajo de graduación siempre salimos adelante.

A mi apreciado asesor de trabajo de graduación, Dr. José Nerys Funes Torres por compartir todos sus conocimientos y paciencia, en la realización de este trabajo de graduación que contribuyeron a mi formación tanto profesional, laboral como humano a lo largo de mi carrera.

A todos los mencionados en esta dedicatoria nuevamente gracias y que Dios los bendiga siempre.

Patricia Yolanda Barahona Rivera

Agradezco a Dios Todopoderoso, por sus bendiciones y permitirme llegar a cumplir mis metas. A mi madre Yanira Elizabeth Mariona, por ser mi guía y ejemplo en todo momento. A mis hermanos, Francisco Castro Mariona y Eduardo Castro Mariona, por su apoyo, confianza y amor, en este tiempo y siempre, gracias por animarme a seguir adelante. A mi Tía Dinora Medina, por estar pendiente de mí, darme el apoyo y la confianza para alcanzar esta meta. A mis amigos y conocidos, por animarme a seguir adelante a pesar de las adversidades.

A mi compañera de trabajo de graduación que con todo su esfuerzo compartió en esta etapa tan importante en mi vida, por esos momentos de amistad, solidaridad, entusiasmo y diversión, optimismo y fuerte esmero en la realización de nuestro trabajo de graduación

A mi asesor de trabajo de Graduación, Dr. José Nerys Funes Torres, por toda la paciencia y tiempo que nos brindo para culminar esta meta tan importante de mi vida.

Yasmin Guadalupe Mariona

ÍNDICE

	Pág.
INTRODUCCIÓN.....	ix
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN A LA FIABILIDAD.....	2
1.1 Fiabilidad y sus áreas de Aplicación.....	3
1.2 Fiabilidad del Test.....	4
1.2.1 Supuestos Fundamentales.....	5
1.2.2 Medidas Paralelas.....	7
1.2.2.1 Concepto de medidas paralelas.....	7
1.2.2.2 Implicaciones de la definición de mediciones paralelas.....	9
1.2.2.3 La Correlación entre mediciones paralelas como Coeficiente de Fiabilidad.....	10
1.2.3 Estimación y significado del Coeficiente de Fiabilidad.....	14
1.2.3.1 Método de los test paralelos o de formas paralelas de un test.....	15
1.2.3.2 Método test-retest.....	16
1.2.3.3 Métodos de las dos mitades.....	18
1.2.3.3.1 Método de las dos mitades mediante la corrección de Spearman-Brown.....	18
1.2.3.3.2 Método de las dos mitades mediante la fórmula de Rulon.....	20
1.2.3.3.3 Método de las dos mitades mediante la fórmula L_4 de Guttman.....	22
1.2.4 Consistencia Interna.....	23
1.2.4.1 Descomposición de la varianza total del test en varianzas y covarianzas de los ítems.....	24
1.2.4.2 Descomposición de la varianza de un test supuesto que los ítems son paralelos.....	26
1.2.4.3 Descomposición de la varianza verdadera del total de un test supuesto que los ítems son paralelos entre si.....	28
1.2.4.4 El Coeficiente de Fiabilidad del total del test.....	28
1.2.4.5 Descomposición de la varianza de un test en proporciones de varianza.....	30
1.2.4.6 Fiabilidad del test como función de sus componentes: El Coeficiente Alfa.....	32
1.2.4.6.1 El Coeficiente Alfa cuando los ítems son paralelos.....	34
1.2.4.6.2 El Coeficiente Alfa para ítems valorados dicotómicamente.....	35
1.2.4.6.3 Relación del Coeficiente Alfa con otros procedimientos de Fiabilidad.....	36

1.3	Fiabilidad en el área de Medicina (Análisis de Supervivencia).....	38
1.3.1	Funciones asociadas al análisis supervivencia	41
1.4	Fiabilidad en la Ingeniería.	43
CAPITULO II. SISTEMAS COHERENTES.		49
2.1	Propiedad de los Sistemas Coherentes.	49
2.1.1	Sistema de Componentes.....	49
2.1.2	Estructuras Básicas.	50
2.1.3	Estructura Coherente.	56
2.1.4	Representación de los sistemas coherentes en términos de caminos y cortes.	59
2.1.5	Tiempo de Fallo	63
2.1.6	Importancia Relativa de los componentes.....	64
2.1.7	Módulo de Sistemas Coherentes.	66
2.2	Fiabilidad de Sistemas Coherentes.....	69
2.2.1	Fiabilidad de los Sistemas de Componentes Independientes.	69
2.2.2	Propiedades básicas de la fiabilidad del sistema	71
2.2.3	Cálculo de la fiabilidad exacta del sistema.....	75
2.2.4	Importancia de la Fiabilidad de Componentes.	76
2.2.5	Asociación de Variables Aleatorias.....	79
2.2.6	Cotas de la Fiabilidad del Sistema	81
2.2.7	Propiedades de las cotas para el caso de que las componentes sean independientes.	87
2.2.8	Comparación de una cota inferior del corte mínimo y de la cota inferior de la serie.	89
2.2.9	Cotas Mínimo -Máximo en Fiabilidad del Sistema	90
CAPÍTULO III. MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA EL CÁLCULO DE LA FIABILIDAD		94
3.1.	Funciones más utilizadas en el cálculo de la Fiabilidad.	95
3.2.	Tipos de censura en las observaciones.	96
3.3.	Métodos para calcular la fiabilidad.....	100
3.3.1	Estimación no Paramétrica	100
3.3.1.1.	Método de Kaplan-Meier.....	101
3.3.1.2.	Método Actuarial	104
3.3.2.	Estimación Paramétrica.	106
3.3.2.1.	Funciones y variables de interés en fiabilidad.....	107

3.3.2.2. Distribución Exponencial.....	108
3.3.2.3. Distribución de Weibull.....	111
3.3.2.4. Función de Distribución Gamma.....	115
3.3.2.5. Aplicación del análisis paramétrico.....	118
3.3.2.5.1 Resultados obtenidos.....	118
 BIBLIOGRAFÍA.....	 125
 ANEXOS.....	 128
Anexo 1. Cronología de eventos previos a la Fiabilidad.....	128
Anexo 1. Datos de 65 ordenadores portátiles.....	130

INTRODUCCIÓN

En la actualidad todos los productos de consumo o de servicio, tienen el tiempo de duración o fecha de caducidad, este es el periodo que garantiza el fabricante que dicho producto funcionará adecuadamente o se encontrará en perfecto estado.

En estadística la garantía de un producto se conoce como fiabilidad y representa la probabilidad de que el producto se encuentre en buen estado, además la fiabilidad es utilizada en áreas como la medicina donde se estudia el análisis de supervivencia, por ejemplo la probabilidad de sobrevivir a cierta enfermedad cuando se está utilizando un medicamento X; en ingeniería se estudia el funcionamiento de sistemas, es decir, se calcula la probabilidad de que un sistema funcione adecuadamente, etc.

El término Fiabilidad se usa generalmente para expresar la capacidad de un dispositivo para funcionar satisfactoriamente bajo ciertas condiciones ambientales durante un determinado periodo de tiempo. Este dispositivo puede ser un componente o un sistema formado por un conjunto de dos o más componentes organizados para realizar una determinada función. La fiabilidad no hace referencia a la capacidad para realizar una función en un instante preciso, sino que está asociado al comportamiento que cabe esperar a lo largo del tiempo.

En fiabilidad, el objetivo de los modelos matemáticos desarrollados, es describir la frecuencia de fallo de un elemento o dispositivo, así como resolver problemas de optimización relativos al funcionamiento y utilización de los mismos. Además la fiabilidad se interesa también por el análisis y diseño de políticas de mantenimiento preventivo, de inspección y de reparación que permitan lograr un funcionamiento óptimo y minimizar costos. El contenido del documento se desglosa en tres capítulos.

El primer capítulo comprende una introducción a la fiabilidad, donde se describe el origen de la fiabilidad, la teoría matemática y las áreas donde se aplica el análisis de fiabilidad, en concreto se analiza la fiabilidad del test y la fiabilidad en medicina (análisis de supervivencia), determinando sus métodos e interpretaciones.

El segundo capítulo desarrolla los sistemas coherentes, en el cual se expresan las propiedades de los sistemas coherentes, estructuras básicas, tiempo de fallo, entre otros; y fiabilidad de los sistemas coherentes, en la que se detalla la fiabilidad de componentes independientes, propiedades básicas, cálculo de la fiabilidad, cotas de la fiabilidad, entre otras.

El tercer capítulo desglosa los métodos estadísticos para el cálculo de la fiabilidad, en donde se detalla las funciones utilizadas en el cálculo, tipo de censuras en las observaciones, estimación paramétrica y no Paramétrica, concluyendo con una aplicación del análisis paramétrico.

CAPÍTULO I.

INTRODUCCIÓN A LA FIABILIDAD.

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN A LA FIABILIDAD.

La Estadística como ciencia data desde el siglo XIX (Carl Gauss¹ y John F. Galton²) y se desarrolló fundamentalmente en el siglo XX (Karl Pearson³, y Ronald Fisher⁴, entre otros), período en el cual aparecieron facetas tan importantes como el Control de Calidad o Fiabilidad de Sistemas (a raíz de la segunda guerra mundial)⁵.

El origen de la fiabilidad puede atribuirse a estudios relacionados a evaluar la mortalidad derivada de las epidemias y a los métodos actuariales desarrollados por las compañías de seguros, para determinar los riesgos de sus pólizas.

La teoría matemática de la fiabilidad se desarrolla por las demandas de la tecnología moderna y en particular por las necesidades de los sistemas complejos militares (Análisis de fallos en equipamiento electrónico militar complejo); asimismo se utiliza en el área de mantenimiento de máquinas (La fiabilidad aplicando sofisticadas matemáticas), en la renovación y avances tecnológicos, además es esencial para resolver problemas de reparación e inspección de dispositivos.

¹ Matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría del número, la teoría de los errores, el análisis matemático, la geometría diferencial, el magnetismo y la óptica. También es considerado "el príncipe de las matemáticas" y "el matemático más grande desde la antigüedad". Enciclopedia libre Wikipedia.

² Científico británico al cual se le atribuye el primer trabajo sobre regresión, además, revolucionó los estudios sobre la herencia con la aplicación de métodos estadísticos. Enciclopedia Libre Wikipedia.

³ Científico, matemático, historiador y pensador británico, que estableció la disciplina de la estadística matemática. Asimismo desarrolló una intensa investigación sobre la aplicación de los métodos estadísticos en la biología y fue el fundador de la bioestadística. Además considerado como uno de los fundadores de la estadística, llevó a cabo investigaciones en el campo de la herencia y de la genética, creador del criterio de Chi-cuadrado. Enciclopedia Libre Wikipedia.

⁴ Estadístico, biólogo evolutivo y genetista inglés, que introdujo nuevos métodos procedentes del análisis y la teoría de conjuntos, desarrolló también, las técnicas de análisis de varianza y el método de máxima verosimilitud. Enciclopedia Libre Wikipedia.

⁵ Véase en el Anexo 1 la cronología de eventos previos a la Fiabilidad.

La fiabilidad se emplea en diferentes áreas, en medicina, ingeniería, psicología, economía, demografía, etc. En este capítulo se abordará la fiabilidad del test, fiabilidad en medicina y fiabilidad en ingeniería, en la primera parte se desarrolla la teoría de la fiabilidad del test, comenzando por los supuestos fundamentales los cuales es parte importante en la teoría, además se estima el coeficiente de fiabilidad por diferentes métodos los cuales están descritos y desarrollados con sus respectivos ejemplos para mayor comprensión, luego se presenta la consistencia interna en la cual se muestra la descomposición de la varianza del test con la utilización de correlación entre variables; en la segunda parte, de forma general se presentan las funciones de fiabilidad concernientes a la medicina; en la tercera parte, de manera ejemplificada se desarrolla la fiabilidad en ingeniería, ya que en el segundo capítulo se desarrollará la teoría que compete a esta área.

1.1 Fiabilidad y sus áreas de Aplicación.

En primer lugar es importante definir la **Fiabilidad** como la probabilidad de que un dispositivo realice adecuadamente su función prevista a lo largo del tiempo cuando opera en el entorno para el que ha sido diseñado, es así que la fiabilidad está asociada a distintas áreas, entre las que se tiene: Educación o Ciencias Sociales, Medicina, Demografía, Ingeniería entre otras, de estas se tiene como ejemplo de aplicación lo siguiente:

- **Área Educativa**
Se determina la fiabilidad de un test (cuestionario), que es aplicado para recoger un conjunto de datos de interés o variables que se quieran estudiar, es decir, se desea medir la confianza de los datos recolectados, para que estos sean íntegros.
- **Medicina**
Se investiga la fiabilidad (en esta área es conocido como Análisis de Supervivencia) de medicamentos para que la persona sobreviva a determinada enfermedad.
- **Demografía**
El término de fiabilidad está encaminado a estudiar o conocer la esperanza de vida de las personas en un determinado país.

- Ingeniería
La fiabilidad se plantea como la probabilidad de que un sistema funcione adecuadamente.
Por ejemplo: Duración de un componente eléctrico, una bombilla, etc.
- Economía
Se estudia el Tiempo que una persona se encuentra desempleada.

En vista de que existen diferentes áreas en las que se aplica la fiabilidad, se presentará el detalle del estudio de la fiabilidad en tres casos específicos como lo son:

- Fiabilidad del Test.
- Fiabilidad en Medicina.
- Fiabilidad en Ingeniería.

1.2 Fiabilidad del Test.

En las Ciencias Clásicas (Medicina, Física, Química, etc.) requieren instrumentos de medición, las cuales determinan características como la temperatura, la presión sanguínea, el peso, la concentración de determinados elementos químicos, etc.; pero existen áreas en las que no se tienen instrumentos de medición, tal es el caso de la Psicología en la que no puede medirse algunas características como lo es la introversión, la habilidad lectora, características que son susceptibles de una medición directa.

Es por eso que para medir los rasgos psicológicos existen teorías matemáticas o estadísticas que permiten inferir el nivel de rasgos a partir del rendimiento observado de la persona, entre estas teorías se encuentran la del test.

La fiabilidad de un test⁶ se puede entender como el grado en que diferentes subconjuntos de ítems miden un rasgo o comportamiento homogéneo, es decir el grado en que covarían, correlacionan o son consistentes entre sí diferentes partes del cuestionario.

⁶ Test es un instrumento de medición de un rasgo determinado. “introducción a la psicometría”, Facultad de Psicología, Universidad Autónoma de Madrid.

Los test son pruebas de atención a personas, obteniendo así una puntuación X , luego se plantea que tal puntuación representa una buena manifestación del rasgo auténtico de atención que tiene esta persona.

La teoría clásica del test propone un modelo formal, fundamentado en diversos supuestos a partir de los cuales se extrae determinadas consecuencias de aplicabilidad práctica para determinar el grado en que un test informa de los niveles de rasgo.

1.2.1 Supuestos Fundamentales.

Los supuestos fundamentales son:

- **Supuesto 1:** $X = V + E$

El modelo de puntuación verdadera indica que la puntuación empírica directa de persona en un test (X) está compuesta de dos componentes hipotéticos: el nivel de rasgo o puntuación verdadera de la persona (V) y un error de medida (E) que se comete al medir el rasgo con el test.

Por lo que el error de medida está establecido como la diferencia entre las puntuaciones empíricas y las verdaderas: $E = X - V$

- **Supuesto 2:** $V = E(X)$

Dado que el valor de E y V no se conocen, se utilizan estimadores, por lo que si asumimos que X y E son dos variables aleatorias, se obtiene que $E(E) = 0$ y la puntuación V de la persona es constante.

- **Supuesto 3:** $\rho_{VE} = 0$

Si asumimos que se conocen las puntuaciones V y E de los individuos, la correlación entre ambas variables sería nula.

- **Supuesto 4:** $\rho_{E_j, E_k} = 0$

Si asumimos que en la población se conocen los errores de medida de cada individuo en dos test diferentes (j y k), la correlación entre ambas variables también sería nula.

- **Supuesto 5:** $\rho_{E_j, V_k} = 0$

Indica que si en una población conociéramos las puntuaciones E en un test j y las puntuaciones V en un test k, para ambas variables su correlación es cero.

Ejemplo 1.1. En una población de 5 personas se aplicaron dos test diferentes denominados con los subíndices 1 y 2, de estos se conocen las puntuaciones V, E y X, estas se presentan en la tabla siguiente:

Tabla 1.1. Puntuaciones obtenidas en los test

V ₁	E ₁	X ₁	V ₂	E ₂	X ₂
12	-2	10	12	0	12
11	0	11	11	-2	9
11	0	11	11	2	13
12	2	14	12	0	12
4	0	4	4	0	4

Partiendo de estos datos puede probarse los supuestos planteados (véase tabla 1.2, resultados obtenidos utilizando el software SPSS):

- Al sumar el valor de (V + E) obtenemos X.
- La correlación entre V y E es cero.

Tabla 1.2. Correlación entre las puntuaciones y los errores para los test 1 y 2.

		v1	e1	e2	x2
v1	Pearson Correlation	1	.000	.000	.923*
	Sig. (2-tailed)		1.000	1.000	.025
	N	5	5	5	5
e1	Pearson Correlation	.000	1	.000	.000
	Sig. (2-tailed)	1.000		1.000	1.000
	N	5	5	5	5
e2	Pearson Correlation	.000	.000	1	.385
	Sig. (2-tailed)	1.000	1.000		.522
	N	5	5	5	5
x2	Pearson Correlation	.923*	.000	.385	1
	Sig. (2-tailed)	.025	1.000	.522	
	N	5	5	5	5

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

1.2.2 Medidas Paralelas.

Cuando un psicólogo aplica un test a una persona, únicamente conoce su puntuación directa X en la prueba, pero lo importante, como se viene indicando, es obtener información de las relaciones entre las X (empíricas) y las V (verdaderas). Un procedimiento sería obtener la correlación entre ambas para un grupo de N personas, pero se encuentra con el inconveniente de desconocer las auténticas V de las N personas. Por lo que resulta factible, obtener la correlación entre las puntuaciones empíricas que proporcionan dos formas paralelas de un test, diseñadas ambas para evaluar el mismo rasgo V de los individuos.

Según el modelo clásico, dos formas paralelas de un test se definen mediante dos condiciones:

- a) Un individuo tiene la misma puntuación V en ambas formas.
- b) La varianza de los errores de medida en ambas formas es la misma.

1.2.2.1 Concepto de medidas paralelas

Se puede decir que dos mediciones son paralelas si “*es indiferente cual de ambas se utilice*”. Es decir que para que dos mediciones sean paralelas las puntuaciones verdaderas que producen deben ser iguales:

$$V_{ig} = V_{ih}$$

La igualdad anterior expresa que para que dos mediciones, g y h, se consideren paralelas, para cada sujeto i ambas deben de presentar la misma puntuación verdadera V. Esta primera condición es necesaria pero no suficiente para considerar dos mediciones paralelas. Si la diferencia entre las puntuaciones verdaderas y los errores fuera en general mayor para una medición h que para otra g, entonces sería mejor utilizar la segunda, no sería 'indiferente' utilizar una u otra medida.

Este razonamiento parece llevar a establecer que:

$$E_{ig} = E_{ih}$$

Pero esta condición no puede sostenerse porque implicaría que $r_{EgEh}=1$, lo que entraría en contradicción con la afirmación de que la correlación entre el error de medida de dos mediciones (sean o no paralelas) es 0 debido a la aleatoriedad del error. Es decir, necesariamente hay que sostener que:

$$r_{EgEh} = 0$$

Lo que impide imponer como condición de mediciones paralelas la igualdad de los errores. Sin embargo, sí puede incluirse en la definición de mediciones paralelas el requisito de que la varianza de los errores sea igual:

$$s_{Eg}^2 = s_{Eh}^2$$

o su equivalente, que los errores típicos de medida sean iguales:

$$s_{Eg} = s_{Eh}$$

Las igualdades anteriores establecen la segunda condición para considerar dos mediciones g y h como paralelas: que sus varianzas de error sean iguales, o, lo que es equivalente, que sus errores típicos de medida sean iguales.

Esta condición impone que "en promedio", ambas mediciones presenten el mismo error de medida, si bien el error de medida sigue siendo aleatorio y por tanto se sigue cumpliendo que:

$$r_{EgEh} = 0$$

Condición que rige para cualesquiera dos medidas, sean o no paralelas, como consecuencia de la aleatoriedad insesgada del error de medida.

De este modo quedan definidas las mediciones paralelas, como aquellas que producen puntuaciones verdaderas iguales y varianzas de error iguales.

1.2.2.2 Implicaciones de la definición de mediciones paralelas.

Debido a que las mediciones paralelas producen las mismas puntuaciones verdaderas caso a caso, entonces, las medias de las puntuaciones verdaderas de dos mediciones paralelas son iguales:

$$\bar{V}_g = \bar{V}_h$$

Al igual que las puntuaciones verdaderas, la media de las puntuaciones verdaderas es igual a la media de las puntuaciones empíricas, así: $\bar{X}_g = \bar{V}_g$ y $\bar{X}_h = \bar{V}_h$, se tiene que la media de las puntuaciones empíricas de dos mediciones paralelas sean iguales:

$$\bar{X}_g = \bar{X}_h$$

Necesariamente, la correlación entre las puntuaciones verdaderas de dos mediciones paralelas es 1, dado que se trata de las mismas puntuaciones:

$$r_{vgvh} = 1$$

Por la condición del modelo clásico, la varianza de las puntuaciones verdaderas de dos mediciones paralelas son iguales:

$$s_{vg}^2 = s_{vh}^2$$

Por lo tanto, si la varianza de las puntuaciones verdaderas de dos mediciones paralelas son iguales, entonces, la desviación típica de las puntuaciones verdaderas de dos mediciones paralelas también son iguales:

$$s_{vg} = s_{vh}$$

Al igual que las medias de las puntuaciones verdaderas son iguales a las empíricas, se puede decir que la medición de la varianza de las puntuaciones empíricas es igual a la suma de la varianza de las verdaderas y la varianza de error:

$$s_x^2 = s_v^2 + s_e^2 \quad (1.1)$$

Por condición del modelo clásico, para que dos mediciones sean paralelas, sus varianzas de error deben de ser iguales. Según lo anterior, la varianza de las puntuaciones verdaderas de dos mediciones paralelas son iguales, por tanto se tiene que la varianza de las puntuaciones empíricas de dos mediciones paralelas también son iguales:

$$s_{xg}^2 = s_{xh}^2$$

Ciertamente, esta igualdad es también verdadera para las desviaciones típicas correspondientes:

$$s_{xg} = s_{xh}$$

Por tanto, dos medidas paralelas presentan medias y varianzas iguales tanto en sus puntuaciones empíricas como verdaderas y errores. Además, sus puntuaciones verdaderas correlacionan en 1 y sus errores en 0.

1.2.2.3 La Correlación entre mediciones paralelas como Coeficiente de Fiabilidad.

A continuación, se verá como la correlación entre las puntuaciones empíricas de dos mediciones paralelas equivale al coeficiente de fiabilidad.

La correlación entre las puntuaciones empíricas de dos mediciones paralelas g y h puede escribirse, según una definición del **Coefficiente de Correlación de Pearson**, como el cociente entre la covarianza y las desviaciones típicas correspondientes:

$$r_{xg,h} = \frac{s_{xg,h}}{s_{xg} s_{xh}} \quad (1.2)$$

Como la covarianza a su vez puede definirse como el sumatorio del producto de puntuaciones diferenciales (es decir, que a cada puntuación se le ha restado su media, por tanto se trabaja con la variable x que representa las puntuaciones diferenciales), para todos los individuos de las mediciones g y h ($\forall(g,h)$), dividido por N, se tiene:

$$s_{xg,h} = \frac{\sum_{\forall(g,h)} x_g x_h}{N}$$

Se puede escribir la correlación de este modo:

$$r_{xg,h} = \frac{\sum_{\forall(g,h)} x_g x_h}{N s_{xg} s_{xh}}$$

Retomando que, en dos mediciones paralelas, las desviaciones son iguales:

$$s_{xg} = s_{xh}$$

Se puede simplificar la expresión de esta manera:

$$r_{xgxh} = \frac{\sum_{\forall(g,h)} x_g x_h}{N s_x^2}$$

Descomponiendo la expresión en dos términos, se tiene:

$$r_{xgxh} = \left(\frac{\sum_{\forall(g,h)} x_g x_h}{N} \right) \left(\frac{1}{s_x^2} \right) \quad (1.3)$$

Operando ahora con el primer término (recordando que la x representa las puntuaciones diferenciales):

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{\forall(g,h)} x_g x_h}{N} &= \frac{\sum_{\forall(g,h)} (V_g + e_g)(V_h + e_h)}{N} \\ &= \frac{\sum_{\forall(g,h)} V_g V_h + \sum_{\forall(g,h)} V_g e_h + \sum_{\forall(g,h)} e_g e_h + \sum_{\forall(g,h)} e_g V_h}{N} \\ &= \frac{\sum_{\forall(g,h)} V_g V_h}{N} + \frac{\sum_{\forall(g,h)} V_g e_h}{N} + \frac{\sum_{\forall(g,h)} e_g e_h}{N} + \frac{\sum_{\forall(g,h)} e_g V_h}{N} \end{aligned}$$

Los cuatro términos de la última expresión son, respectivamente, la covarianza entre verdaderas g y h, la covarianza entre verdaderas g y errores h, la covarianza entre errores g y h, y la covarianza entre errores g y verdaderas h. Los tres últimos términos valen 0 debido a que, dada la naturaleza aleatoria insesgada de los errores, estos covarían en 0 entre si o con puntuaciones verdaderas. Lo que permite simplificar la expresión:

$$\frac{\sum_{\forall(g,h)} x_g x_h}{N} = \frac{\sum_{\forall(g,h)} V_g V_h}{N}$$

A su vez, por definición de mediciones paralelas, las puntuaciones verdaderas son iguales $V_g = V_h$.

Lo que permite simplificar todavía más la expresión anterior, que ahora puede reducirse a la varianza de las puntuaciones verdaderas (g o h, porque es la misma):

$$\frac{\sum_{\forall(g,h)} x_g x_h}{N} = \frac{\sum_{\forall(g,h)} V_g V_h}{N} = \frac{\sum_{\forall i} V_i^2}{N} = s_V^2 \quad (1.4)$$

Retomando ahora la última expresión de la correlación entre formas paralelas, ecuación (1.3), se tiene:

$$r_{xgjh} = \left(\frac{\sum x_g x_h}{\sqrt{(g,h)} N} \right) \left(\frac{1}{s_x^2} \right)$$

y sustituyendo por la expresión más sencilla del primer término que se obtuvo (ecuación (1.4)), se tiene:

$$r_{xgjh} = (s_V^2) \left(\frac{1}{s_x^2} \right)$$

Efectivamente, podemos escribir que la correlación entre las puntuaciones empíricas obtenidas en dos mediciones paralelas es igual al cociente entre varianza verdadera y varianza empírica:

$$r_{xgjh} = \frac{s_V^2}{s_x^2} \tag{1.5}$$

La expresión (1.5), es precisamente la definición formal del coeficiente de fiabilidad. Por ello podría utilizarse la correlación entre puntuaciones empíricas de dos mediciones paralelas como coeficiente de fiabilidad.

Siguiendo con el ejemplo 1.1, en los que se tienen los test 1 y 2, estos se consideran formas paralelas, dado que cumplen las dos condiciones planteadas. Estos test son dos formas paralelas puesto que las medias poblacionales de X en ambas son iguales, y también lo son las varianzas poblacionales de las puntuaciones X.

Ahora bien, si se asume que los datos anteriores se refieren a una población determinada, en la que conocemos las V y los E de los individuos; en la práctica se desconocen las puntuaciones y además se dispone generalmente de datos muestrales y no poblacional, por lo que puede hacerse uso de los procedimientos empleados en estadística inferencial; si se dispone de datos muestrales se puede realizar los contrastes oportunos para determinar, con cierta probabilidad, si dos formas son o no paralelas.

En la tabla siguiente, se presenta las hipótesis que se utilizan en los test para probar si dos mediciones son o no paralelas:

Tabla 1.3. Hipótesis que se utilizan en los test para probar si son o no dos mediciones paralelas.

Hipótesis	Estadístico	Donde
Contraste de medias $H_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1 = \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$T = \frac{\bar{D}\sqrt{N}}{S_D} \sim t_{N-1}$	\bar{D} : Media de las diferencias. N: Tamaño de la muestra. S_D : Desviación típica insesgada de las diferencias.
Contraste sobre diferencia de varianzas. $H_0 = \sigma_1 - \sigma_2 = 0$ $H_1 = \sigma_1 - \sigma_2 \neq 0$	$T = \frac{(S_1^2 - S_2^2)\sqrt{N-2}}{2S_1S_2\sqrt{1-r_{12}^2}}$ Con distribución t con N - 2 g. l.	r_{12} : Correlación de Pearson entre X_1 y X_2 .

Ejemplo 1.2. Aplicando dos test (1 y 2) a 5 personas, obteniendo así los estadísticos de la tabla 1.3. Con una probabilidad de 0.95 se desea conocer si estos son o no formas paralelas.

A continuación se presenta, la tabla de las puntuaciones obtenidas de dos test aplicados a 5 personas:

Tabla 1.4. Puntuaciones obtenidas en dos test aplicados a cinco personas.

X_1	X_2	$X_1 - X_2$
15	15	0
10	15	-5
13	20	-7
14	10	4
18	15	3

De estas puntuaciones se obtuvieron los siguientes resultados, mediante el software SPSS, se tiene:

- Para el contraste de diferencia de medias, obtenemos un valor de T:

$$T = \frac{\bar{D}\sqrt{N}}{s_D} = \frac{(0.2)(\sqrt{5})}{4.335896} = -0.515$$

lo que nos lleva a no rechazar H_0 , ya que el valor de t tablas es 2.13.

- Para el contraste sobre diferencia de varianzas obtenemos un estadístico:

$$T = \frac{(S_1^2 - S_2^2)\sqrt{N-2}}{2S_1S_2\sqrt{1-r_{12}^2}} = \frac{(8.468-12.460)\sqrt{3}}{2(2.91)(3.53)\sqrt{1-(0.846)^2}} = -0.631$$

lo anterior también nos lleva a no rechazar H_0 de igualdad de varianzas poblacionales, ya que t tablas es 2.35.

Según el resultado anterior, se puede decir, con probabilidad 0.95, que ambos tests son formas paralelas.

1.2.3 Estimación y significado del Coeficiente de Fiabilidad.

Si dos formas de un test pretenden medir un mismo rasgo, parece razonable esperar que los resultados empíricos de ambas en una población correlacionen de forma elevada. Si esto es así, ambas formas manifiestan un elevado grado de precisión a la hora de reflejar los diversos niveles de rasgo. Si ambas correlacionan de forma mínima, no puede garantizar que reflejen fidedignamente los niveles de rasgo.

Existen tres situaciones básicas en las que la teoría clásica puede encontrar mediciones paralelas: *los tests paralelos o formas paralelas de un test, la medición test-retest y la comparación entre mitades de un mismo test. Estos son los tres métodos de estimación del coeficiente de fiabilidad.* Se consideran tres aproximaciones empíricas o métodos prácticos de obtención de mediciones paralelas que permiten, mediante el cálculo de la correlación entre ellas, estimar el coeficiente de fiabilidad.

A continuación se detallan los métodos para estimar el coeficiente de fiabilidad.

1.2.3.1 Método de los test paralelos o de formas paralelas de un test.

Este método consiste en:

- Elaborar dos formas paralelas de un mismo test, o lo que es lo mismo, dos tests paralelos.
- Aplicar una forma del test a la muestra de interés, y, tras un lapso de tiempo que no sea relevante para la aparición de cambios en los sujetos, aplicar la segunda forma del test a la misma muestra.
- Calcular el coeficiente de correlación entre las puntuaciones empíricas obtenidas por los sujetos en las dos ocasiones. Si las formas son paralelas esa correlación es el coeficiente de fiabilidad del test, así:

$$r_{AB} = \frac{S_{AB}}{S_A S_B}$$

En caso de no efectuarse los cálculos mediante un paquete estadístico, que sería lo habitual, puede utilizarse cualquier fórmula del coeficiente de correlación de Pearson que resulte adecuada, por lo que se ha deducido la siguiente fórmula que resultará especialmente cómoda:

$$r_{AB} = \frac{\overline{X_A X_B} - \bar{X}_A \bar{X}_B}{S_A S_B} \quad (1.6)$$

Las denominaciones “tests paralelos” o “formas paralelas” son equivalentes y pueden usarse indistintamente.

Este método produce una estimación de la fiabilidad basada en la equivalencia entre formas paralelas, por ello al Coeficiente de Fiabilidad así estimado se le denomina *Coeficiente de equivalencia entre formas*.

Ejemplo 1.3. Se aplicó las formas A y B del test X a una muestra de 8 personas. El coeficiente de fiabilidad por el método de formas paralelas es el siguiente:

Tabla 1.5. Puntuaciones obtenidas en las formas A y B del test X aplicado a 8 personas.

Personas	A	B
1	13	15
2	38	39
3	12	12
4	11	10
5	3	4
6	4	3
7	40	38
8	15	13

Resultados:

- El valor de la media de la forma A: $\bar{X}_A = 17$
- El valor de la media de la forma B: $\bar{X}_B = 16.75$
- El valor de la desviación de la puntuación de la forma A: $s_{X_A} = 13.304135$
- El valor de la desviación de la puntuación de la forma B: $s_{X_B} = 13.15057$
- El valor del coeficiente de fiabilidad por ecuación (1.6) es:

$$r_{XX} = \frac{\overline{X_A X_B} - \bar{X}_A \bar{X}_B}{s_{X_A} s_{X_B}} = \frac{458.75 - (17)(16.75)}{(13.304135)(13.15057)} = 0.99453$$

Se puede interpretar que, con una confianza del 99% las dos formas del test miden el mismo rasgo, este resultado empírico manifiesta que las dos formas del test son test paralelos o formas paralelas y el test es muy consistente para medir el rasgo de interés.

1.2.3.2 Método test-retest.

El método consiste en:

- Administrar el mismo test en dos ocasiones diferentes separadas por cierto lapso temporal a una misma muestra de sujetos.

- Calcular el coeficiente de correlación entre las puntuaciones obtenidas por los sujetos en las dos ocasiones, con la ecuación (1.6):

$$r_{AB} = \frac{\overline{X_A X_B} - \bar{X}_A \bar{X}_B}{s_A s_B}$$

El método *test retest* evalúa la estabilidad de los resultados a través de cierto tiempo. Por ello, al coeficiente de fiabilidad que obtiene se le denomina *Coefficiente de estabilidad temporal*.

Ejemplo 1.4. Se aplicó el test X en el tiempo 1 a una muestra de 10 personas, y el retest en tiempo 2. El cálculo del coeficiente de fiabilidad por el método test-retest es el siguiente:

Tabla 1.6. Puntuaciones obtenidas en el test X y el retest a diez personas.

Personas	Test	Retest
1	17	17
2	18	19
3	12	12
4	11	10
5	7	7
6	4	3
7	19	18
8	10	11
9	3	4
10	27	28

Resultados:

- El valor de la media de la puntuación del test: $\bar{X}_1 = 12.8$
- El valor de la media de la puntuación del retest: $\bar{X}_2 = 12.9$
- El valor de la desviación de la puntuación del test: $s_{X_1} = 7.0964$
- El valor de la desviación de la puntuación del retest: $s_{X_2} = 7.3$
- El valor del coeficiente de fiabilidad es:

$$r_{XX} = \frac{\overline{X_1 X_2} - \bar{X}_1 \bar{X}_2}{s_{X_1} s_{X_2}} = \frac{216.6 - (12.8)(12.9)}{(7.0964)(7.3)} = 0.9937$$

Se puede interpretar que, el 99% de la varianza empírica se debe a la variabilidad de los individuos a nivel de puntuaciones verdaderas.

1.2.3.3 Métodos de las dos mitades.

Cuando se dispone de una sola forma de test resulta sencillo aplicar un método de "dos mitades". Hay tres métodos clásicos de "dos mitades": el *método basado en la fórmula de Spearman-Brown*, el *método basado en la fórmula de Rulon* y el *método basado en la fórmula de Guttman*. Los tres comparten la necesidad de partir el test en dos partes con igual número de ítems que cumplan las condiciones de paralelidad para después aplicar las fórmulas.

A continuación se presentan los tres métodos para calcular el coeficiente de fiabilidad:

1.2.3.3.1 Método de las dos mitades mediante la corrección de Spearman-Brown.

El método consiste en:

- Administrar el test a una muestra de sujetos una sola vez.
- Descomponer el test en dos partes de modo que tengan el mismo número de ítems y que puedan ser consideradas paralelas.
- Calcular la puntuación total en cada una de esas dos mitades.
- Obtener la correlación entre los totales de las partes. Esa correlación, si las mitades son paralelas, podría considerarse la fiabilidad de un test con la mitad de ítems que el test completo, con la ecuación (1.6):

$$r_{AB} = \frac{\overline{X_A X_B} - \bar{X}_A \bar{X}_B}{S_A S_B}$$

- Aplicar sobre esa correlación la corrección de *Spearman-Brown* para el caso de longitud doble:

$$r_{XX} = \frac{2r_{AB}}{1+r_{AB}} \quad (1.7)$$

Donde:

r_{AB} : Es la correlación entre las partes o mitades.

r_{XX} : Es la fiabilidad estimada para el test total.

Esta corrección estima la correlación que se hubiera obtenido entre las partes, si hubiesen tenido el mismo número de ítems que el test completo. Es decir, si hubiesen actuado como dos auténticos test paralelos de igual longitud al original. Por otra parte, al número de ítems se denomina *longitud del test*.

Ejemplo 1.5. Se aplicó un test que tiene 10 ítems a una muestra de 10 personas. El coeficiente de fiabilidad por el método de dos mitades aplicando la fórmula de Spearman-Brown es el siguiente:

Tabla 1.7. Puntuaciones obtenidas en un test de 10 ítems aplicado a 10 personas.

Caso (Personas)	Ítems									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C ₁	1	2	1	2	1	1	2	3	1	1
C ₂	2	2	3	3	3	3	4	2	2	2
C ₃	3	3	4	4	3	3	3	4	4	3
C ₄	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1
C ₅	5	5	4	4	4	4	4	5	5	4
C ₆	4	3	3	4	3	4	3	4	3	4
C ₇	1	1	2	3	1	1	1	3	2	1
C ₈	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2
C ₉	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2
C ₁₀	5	5	5	4	5	5	5	4	5	5

En primer lugar es necesario insertar en la tabla la columna "P₁" que refleje el total de la primera parte (suma de puntos de los cinco primeros ítems) y otra "P₂" que refleje el total de la segunda parte (suma de puntos de los ítems 6 a 10) y obtener la correlación entre ambas. (Para obtener la correlación, se realiza el producto de ambas variables obteniendo la columna "P₁ · P₂"). Además las filas **SUM**, **MED** y **DT** representan la suma, media y desviación estándar respectivamente de las columnas de ítems y de las variables P₁, P₂ y P₁ · P₂, a continuación se presenta la tabla con las puntuaciones.

Tabla 1.8. Puntuaciones obtenidas en un test de 10 ítems aplicado a 10 personas.

Caso (Personas)	Ítems										P ₁	P ₂	P ₁ P ₂
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
C ₁	1	2	1	2	1	1	2	3	1	1	7	8	56
C ₂	2	2	3	3	3	3	4	2	2	2	13	13	169
C ₃	3	3	4	4	3	3	3	4	4	3	17	17	289
C ₄	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	5	7	35
C ₅	5	5	4	4	4	4	4	5	5	4	22	22	484
C ₆	4	3	3	4	3	4	3	4	3	4	17	18	306
C ₇	1	1	2	3	1	1	1	3	2	1	8	8	64
C ₈	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	10	9	90
C ₉	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	6	6	36
C ₁₀	5	5	5	4	5	5	5	4	5	5	24	24	576
SUM	25	25	26	26	25	26	26	29	26	25	129	132	2105
MED	2.5	2.5	2.6	2.6	2.5	2.6	2.6	2.9	2.6	2.5	12.9	13.2	210.5
DT	1.565	1.432	1.356	1.166	1.285	1.356	1.356	1.3	1.497	1.36	6.457	6.274	186.1

La correlación de Pearson r_{AB} entre los totales P_1 y P_2 de ambas partes:

$$r_{AB} = \frac{\overline{X_A X_B} - \overline{X_A} \overline{X_B}}{s_{X_A} s_{X_B}} = \frac{\overline{X_1 X_2} - \overline{X_1} \overline{X_2}}{s_{X_1} s_{X_2}} = \frac{210.5 - 170.28}{6.456779 - 6.273755} = 0.992884$$

La estimación del coeficiente de fiabilidad del test aplicando la fórmula de Spearman-Brown, caso de longitud doble a la correlación anterior:

$$r_{XX} = \frac{2r_{AB}}{1+r_{AB}} = \frac{2(0.992884)}{1+(0.992884)} = 0.996429$$

Se puede decir que las dos mitades del test son muy consistentes entre sí, ya que el 99% de la varianza empírica se debe a la varianza de las puntuaciones verdaderas, se puede afirmar con suficiente certeza que ambas mitades miden con precisión el rasgo de interés.

1.2.3.3.2 Método de las dos mitades mediante la fórmula de Rulon.

Este método consiste en:

- Administrar el test a una muestra de sujetos una sola vez.
- Descomponer el test en dos partes de modo que tengan el mismo número de ítems y que puedan ser consideradas paralelas.
- Calcular la puntuación total en cada una de esas partes.

- Calcular para cada sujeto la *diferencia entre las puntuaciones* totales que ha obtenido en las partes:

$$d = X_1 - X_2$$

- Obtener la varianza del total del test y la varianza de la nueva variable **d**. Aplicar la *fórmula de Rulon* :

$$r_{xx} = 1 - \frac{S_d^2}{S_x^2} \quad (1.8)$$

Ejemplo 1.6. Se aplico un test que tiene 10 ítems a una muestra de 10 personas (utilizando los datos de la tabla 1.7). Calcular el Coeficiente de fiabilidad por el método de las dos mitades aplicando la fórmula de Rulon.

Es necesario insertar una columna P_1 que refleje el total de la primera parte (suma de puntos de los cinco primero ítems) y otra P_2 que refleje el total de la segunda parte (suma de puntos de los ítems 6 a 10) y, además, una columna "d" que refleje la diferencia entre ellas ($d = P_1 - P_2$), y otra X que refleje el total ($X = P_1 + P_2$) para obtener sus varianzas y aplicar la fórmula de Rulon.

Además las filas **SUM**, **MED**, **DT** y **VAR** representan la suma, media, desviación estándar y varianza respectivamente de las columnas de ítems y de las variables P_1 , P_2 y X .

Tabla 1.9. Puntuaciones obtenidas en un test de 10 ítems aplicado a 10 personas.

Caso (Personas)	Ítems										P ₁	P ₂	x	d
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				
C ₁	1	2	1	2	1	1	2	3	1	1	7	8	15	-1
C ₂	2	2	3	3	3	3	4	2	2	2	13	13	26	0
C ₃	3	3	4	4	3	3	3	4	4	3	17	17	34	0
C ₄	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	5	7	12	-2
C ₅	5	5	4	4	4	4	4	5	5	4	22	22	44	0
C ₆	4	3	3	4	3	4	3	4	3	4	17	18	35	-1
C ₇	1	1	2	3	1	1	1	3	2	1	8	8	16	0
C ₈	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	10	9	19	1
C ₉	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	6	6	12	0
C ₁₀	5	5	5	4	5	5	5	4	5	5	24	24	48	0
SUM	25	25	26	26	25	26	26	29	26	25	129	132	261	-3
MED	2.5	2.5	2.6	2.6	2.5	2.6	2.6	2.9	2.6	2.5	12.9	13.2	26.1	-0.3
DT	1.565	1.432	1.356	1.166	1.285	1.356	1.356	1.3	1.497	1.36	6.457	6.274	12.71	0.781
VAR	2.45	2.05	1.84	1.36	1.65	1.84	1.84	1.69	2.24	1.85	41.69	39.36	161.5	0.61

Aplicando la fórmula de Rulon obtenemos que el coeficiente de fiabilidad del test es:

$$r_{xx} = 1 - \frac{s_d^2}{s_x^2} = 1 - \frac{0.61}{161.5} = 0.9962$$

Se puede decir que las dos mitades del test son muy consistentes entre sí, ya que el 99% de la varianza empírica se debe a la varianza de las puntuaciones verdaderas, se puede afirmar con suficiente certeza que ambas mitades miden con precisión el rasgo de interés.

1.2.3.3.3 Método de las dos mitades mediante la fórmula L_4 de Guttman.

El método consiste en:

- Administrar el test a una muestra de sujetos una sola vez.
- Descomponer el test en dos partes de modo que tengan el mismo número de ítems y que puedan ser consideradas paralelas. Calcular la puntuación total en cada una de estas partes.
- Calcular la varianza del total de cada una de las partes así como la varianza del total del test.
- Aplicar la fórmula L_4 de Guttman:

$$r_{xx} = 2 \left[1 - \frac{s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2}{s_x^2} \right] \quad (1.9)$$

El numerador de la ecuación (1.9) expresa la suma de las varianzas de los totales de las dos partes y el denominador la varianza del total del test.

Ejemplo 1.7. Se aplicó un test de 10 ítems a una muestra de 10 sujetos (utilizando los datos de la tabla 1.7). Calcular el Coeficiente de fiabilidad por el método de las dos mitades aplicando la fórmula de Guttman.

En primer lugar es necesario obtener los datos de la tabla 1.9, pero se puede prescindir de la columna de diferencias **d**, ya que en este método no se utiliza, por tanto se tiene la tabla:

Tabla 1.10. Puntuaciones obtenidas en un test de 10 ítems aplicado a 10 personas.

Caso (Personas)	Ítems										P ₁	P ₂	x
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
C ₁	1	2	1	2	1	1	2	3	1	1	7	8	15
C ₂	2	2	3	3	3	3	4	2	2	2	13	13	26
C ₃	3	3	4	4	3	3	3	4	4	3	17	17	34
C ₄	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	5	7	12
C ₅	5	5	4	4	4	4	4	5	5	4	22	22	44
C ₆	4	3	3	4	3	4	3	4	3	4	17	18	35
C ₇	1	1	2	3	1	1	1	3	2	1	8	8	16
C ₈	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	10	9	19
C ₉	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	6	6	12
C ₁₀	5	5	5	4	5	5	5	4	5	5	24	24	48
SUM	25	25	26	26	25	26	26	29	26	25	129	132	261
MED	2.5	2.5	2.6	2.6	2.5	2.6	2.6	2.9	2.6	2.5	12.9	13.2	26.1
DT	1.565	1.432	1.356	1.166	1.285	1.356	1.356	1.3	1.497	1.36	6.457	6.274	12.71
VAR	2.45	2.05	1.84	1.36	1.65	1.84	1.84	1.69	2.24	1.85	41.69	39.36	161.5

Aplicando la fórmula de Guttman:

$$r_{xx} = 2 \left[1 - \left(\frac{s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2}{s_x^2} \right) \right] = 2 \left[1 - \left(\frac{41.69 + 39.36}{161.5} \right) \right] = 0.9962$$

Con base a este resultado, es evidente que las dos mitades del test son muy consistentes entre sí, ya que el 99% de la varianza empírica se debe a la varianza de las puntuaciones verdaderas, se puede afirmar con suficiente certeza que ambas mitades miden con precisión el rasgo de interés.

1.2.4 Consistencia Interna.

La fiabilidad de un test se puede entender también como el grado en que diferentes subconjuntos de ítems miden un rasgo o comportamiento homogéneo; es decir, el grado en que covarían, correlacionan o son consistentes entre sí diferentes partes del cuestionario.

El coeficiente de fiabilidad, que expresa la consistencia de los ítems entre sí, es el Coeficiente Alfa o α de Cronbach, este tipo de estimación de la fiabilidad se clasifica como *consistencia interna del test*. A continuación se detallan algunos apartados importantes, de los cuales algunos servirán para el cálculo del Coeficiente Alfa (α de Cronbach).

1.2.4.1 Descomposición de la varianza total del test en varianzas y covarianzas de los ítems.

La teoría clásica, que es básicamente para el caso sencillo en que la puntuación total de un sujeto en un test se obtiene como la simple suma de sus puntuaciones en los ítems que forman el test.

Es decir, siendo X_T la puntuación total y X_n la puntuación del ítem n , se tiene:

$$X_T = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

Esto puede escribirse más brevemente:

$$X_T = \sum_{i=1}^n X_i$$

En estas condiciones es fácil descomponer la varianza del test en la varianza y covarianza de sus ítems componentes.

Por ejemplo si un test tuviese solo dos ítems, entonces:

$$X_T = X_1 + X_2$$

Y su varianza, la del total del test sería:

$$s_x^2 = s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2 + 2s_{x_1x_2} \quad (1.10)$$

De la ecuación (1.10), se tiene que:

s_x^2 : simboliza la varianza del test total, es decir, la varianza de la variable x .

$s_{x_1}^2$ y $s_{x_2}^2$: representan respectivamente la varianza del primer y del segundo ítem.

$s_{x_1x_2}$: representa la covarianza entre ambos ítems.

Es decir, la varianza del total del test formado por dos ítems que puede descomponerse en la suma de las varianzas de los ítems más el doble de su covarianza.

Para mayor comodidad y representando por n el número de sujetos, se tiene:

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{\sum X^2}{N} = \frac{\sum (x_1 + x_2)^2}{N} = \frac{\sum (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2)}{N} \\ &= \frac{\sum x_1^2}{N} + \frac{\sum x_2^2}{N} + 2 \frac{\sum x_1x_2}{N} = s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2 + 2s_{x_1x_2} \end{aligned}$$

Se puede observar que la varianza del test total es igual a la suma de la matriz de varianzas-covarianzas entre los ítems.

Tabla 1.11. Matriz de Varianzas-Covarianzas de dos ítems.

Ítems:	X_1	X_2
X_1	$S_{X_1}^2$	$S_{X_1X_2}$
X_2	$S_{X_1X_2}$	$S_{X_2}^2$

En la matriz de varianzas-covarianzas, como se puede apreciar, la varianza de cada ítem aparece una vez, en la diagonal principal, por lo que para n ítem hay n varianzas.

Sin embargo la covarianza entre cada par de ítems aparece dos veces. Para n se tiene:

$$s_X^2 = \sum_{i=1}^n s_i^2 + \sum_{\forall(i,j)} s_{ij} \quad (1.11)$$

Es decir, que la varianza del total del test es igual a la suma de las n varianzas de los ítems más la suma de las $n(n-1)$ covarianzas entre ítems.

Por otra parte, el coeficiente de correlación de Pearson entre dos variables puede expresarse como el cociente entre su covarianza y el producto de sus desviaciones típicas, es decir:

$$r_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_i s_j} \quad (1.12)$$

De la ecuación (1.12) se puede deducir que la covarianza entre dos variables es igual al producto de su correlación por sus desviaciones típicas:

$$s_{ij} = r_{ij} s_i s_j \quad (1.13)$$

Considerando la ecuación (1.13) puede expresarse la ecuación (1.11) de descomposición de la varianza del total del test:

$$s_X^2 = \sum_{i=1}^n s_i^2 + \sum_{\forall(i,j)} r_{ij} s_i s_j \quad (1.14)$$

Después de esta descomposición del test, la cual es la sumatoria de las n varianzas más la sumatoria de las $n(n-1)$ covarianzas, expresadas a veces como productos de correlaciones y desviaciones típicas, servirá para deducir, bajo algunos supuestos, fórmulas destacadas de la teoría clásica de tests.

De forma similar, la *descomposición de la varianza verdadera del total del test* esta dada por:

$$s_V^2 = \sum_{i=1}^n s_{v_i}^2 + \sum_{\forall(i,j)} r_{v_i v_j} s_{v_i} s_{v_j} \quad (1.15)$$

1.2.4.2 Descomposición de la varianza de un test supuesto que los ítems son paralelos.

Si los ítems de un test fueran mediciones paralelas entre si entonces las puntuaciones verdaderas de un sujeto en cada ítem serían iguales y las varianzas de error de los ítems serían iguales. Al satisfacer estas dos condiciones se cumplirán también, necesariamente, las siguientes:

- Las medias de las puntuaciones empíricas de los ítems serían iguales.
- Las medias de las puntuaciones verdaderas de los ítems serían iguales.
- Las medias de las puntuaciones de error de los ítems serían iguales entre si e iguales a cero.
- Las varianzas de las puntuaciones verdaderas serían iguales entre si (lo que implica que las desviaciones típicas de las puntuaciones verdaderas serían iguales entre si).
- Las varianzas de las puntuaciones empíricas serían iguales entre si (lo que implica que las desviaciones típicas de las puntuaciones empíricas serían iguales).
- Las correlaciones entre las puntuaciones verdaderas de los ítems deben de ser todas iguales entre si y todas iguales a 1.
- Las correlaciones entre las puntuaciones empíricas de cualesquiera dos ítems paralelos entre si deben de ser iguales entre si (si un ítem j es paralelo a otro i , entonces la correlación entre ellos es el coeficiente de fiabilidad del ítem).

- Si las desviaciones típicas son iguales entre si y las correlaciones también son iguales entre si entonces las covarianzas también serán iguales entre si.

Estas igualdades entre los estadísticos de los diferentes ítems sugieren inmediatamente que, bajo el supuesto de ítems paralelos, las ecuaciones anteriores que relacionan la varianza total del test y las varianzas y covarianzas de los ítems se pueden simplificar.

En efecto, si las varianzas empíricas de los ítems son iguales, entonces la sumatoria de **n** varianzas de ítems es igual a **n** por la varianza de un ítem:

$$\sum_{\forall i} s_i^2 = ns_i^2 \quad (1.16)$$

Por otra parte, si las covarianzas son iguales entre si, entonces la sumatoria de **n(n-1)** covarianzas empíricas ha de ser igual a **n(n-1)** por la covarianza de dos ítems cualquiera:

$$\sum_{\forall (i,j)} s_{ij} = n(n-1)s_{ij} \quad (1.17)$$

Expresado en términos de correlaciones y desviaciones típicas:

$$\sum_{\forall (i,j)} s_{ij} = n(n-1)r_{ij} s_i s_j$$

A su vez, como las desviaciones típicas son iguales puede escribirse:

$$\sum_{\forall (i,j)} s_{ij} = n(n-1)r_{ij} s_i^2$$

Por tanto, la descomposición de la varianza del total del test, por la ecuación (1.11):

$$s_x^2 = \sum_{\forall i} s_i^2 + \sum_{\forall (i,j)} s_{ij}$$

Puede escribirse, si los ítems son mediciones paralelas, como:

$$s_x^2 = ns_i^2 + n(n-1)r_{ij} s_i^2$$

Puede sacarse factor común, para simplificar:

$$s_x^2 = ns_i^2 (1 + (n-1)r_{ij}) \quad (1.18)$$

Esta ecuación representa la varianza de las puntuaciones empíricas del total del test.

1.2.4.3 Descomposición de la varianza verdadera del total de un test supuesto que los ítems son paralelos entre si.

Nótese que, la varianza de las puntuaciones verdaderas del total del test puede descomponerse en la suma de las n varianzas de las puntuaciones verdaderas de los ítems más la suma de sus $n(n-1)$ sus covarianzas, por la ecuación 1.15, se tiene:

$$s_V^2 = \sum_{i=1}^n s_{V_i}^2 + \sum_{\forall(i,j)} r_{V_i V_j} s_{V_i} s_{V_j}$$

Suponiendo que los ítems son paralelos, entonces la n varianzas serán iguales entre si, y las $n(n-1)$ covarianzas iguales entre si, lo que permite eliminar las sumatorias de la ecuación 1.15:

$$s_V^2 = n s_{V_i}^2 + n(n-1) r_{V_i V_j} s_{V_i} s_{V_j}$$

Además, todas las correlaciones entre puntuaciones verdaderas de mediciones paralelas entre si, han de ser 1, y todas las desviaciones típicas han de ser iguales entre si.

Por tanto, de lo anterior se simplifica:

$$s_V^2 = n s_{V_i}^2 + n(n-1) s_{V_i}^2$$

Sacando factor común, se tiene:

$$s_V^2 = n s_{V_i}^2 (1 + (n-1)) = n^2 s_{V_i}^2 \quad (1.19)$$

Esta ecuación representa la varianza de las puntuaciones verdaderas del total de un test.

1.2.4.4 El Coeficiente de Fiabilidad del total del test.

Anteriormente se ha definido la fiabilidad de un test como el cociente entre la varianza verdadera y la varianza empírica, ecuación (1.5), así:

$$r_{xx} = \frac{s_V^2}{s_X^2}$$

Los análisis anteriores nos han permitido definir la varianza verdadera y empírica del total de un test formado por ítems paralelos.

Ahora se reescribirá la ecuación (1.5) en función de las nuevas expresiones que se han encontrado para varianza verdadera (ecuación 1.19) y varianza empírica (ecuación 1.18). De acuerdo con esas ecuaciones se puede decir, sustituyendo, que la fiabilidad de ese test cuyos ítems son paralelos entre si será igual a:

$$r_{xx} = \frac{s_v^2}{s_x^2} = \frac{n^2 s_{v_i}^2}{n s_i^2 (1 + (n-1) r_{ij})}$$

De modo más sencillo puede reescribirse, así:

$$r_{xx} = n \left(\frac{s_{v_i}^2}{s_i^2} \right) \left(\frac{1}{1 + (n-1) r_{ij}} \right)$$

La expresión $\frac{s_{v_i}^2}{s_i^2}$ es el cociente entre la varianza verdadera y empírica de un test, es decir, el coeficiente de fiabilidad del ítem, pero, bajo el supuesto que los ítems son paralelos, la correlación entre dos ítems paralelos, esta dada por:

$$\frac{s_{v_i}^2}{s_i^2} = r_{ij}$$

Esto permite escribir la fórmula de la fiabilidad del total de un modo más simple, a partir de la fiabilidad de los ítems:

$$r_{xx} = \frac{n r_{ij}}{1 + (n-1) r_{ij}} \quad (1.20)$$

La expresión anterior se conoce como fórmula general de Spearman-Brown⁷, y permite obtener la fiabilidad de un test de longitud n a partir de la fiabilidad de los ítems paralelos.

⁷ La fórmula general de Spearman-Brown es una expresión del efecto que tiene sobre la fiabilidad, el alargar una prueba, incluyendo más test del mismo tipo.

Ejemplo 1.7. Se aplicó un test de aptitud para una empresa determinada el cual esta formado por dos formas paralelas de 20 ítems cada una; estos se aplicaron a una población de directivos, en el que se obtuvo una correlación de 0.6 entre ambas formas.

El coeficiente de fiabilidad del test compuesto por la unión de las dos formas paralelas es el siguiente:

$$r_{xx} = \frac{nr_{ij}}{1+(n-1)r_{ij}} = \frac{2(0.6)}{1+(1)(0.6)} = 0.75$$

De lo anterior se comprueba que el coeficiente de fiabilidad del test alargado (de 40 ítems) es superior al coeficiente de fiabilidad de cualquiera de las formas iniciales de 20 ítems.

Esta propiedad del coeficiente de fiabilidad, es interesante, dado que nos indica que si alargamos un determinado test con formas paralelas, puede incrementar su fiabilidad.

El razonamiento expuesto puede generalizar al caso de que los k ítems que componen un test fueran formas paralelas.

En una determinada población, los k ítems de un test serán paralelos si todos tienen la misma media, la misma varianza y la misma fiabilidad. Según la fórmula general de Spearman-Brown, el coeficiente de fiabilidad del test se puede expresar como:

$$r_{xx} = \frac{kr_{ji}}{1+(k-1)r_{ji}} \quad (1.21)$$

Donde:

k = n° de ítems del test.

r_{ji} = Es la correlación de Pearson entre cualquier par de ítems.

1.2.4.5 Descomposición de la varianza de un test en proporciones de varianza.

Se ha visto que la varianza empírica de la puntuación total de un test puede descomponerse en la suma de las n varianzas de los ítems más la suma de las **n(n-1)** covarianzas de los ítems, de esta manera:

$$s_X^2 = \sum_{\forall i} s_i^2 + \sum_{\forall (i,j)} s_{ij}$$

Se puede expresar en términos de proporciones de la varianza total esta fórmula. Para ello dividimos a ambos lados por la varianza empírica del test:

$$1 = \frac{s_x^2}{s_x^2} = \frac{\sum s_i^2}{s_x^2} + \frac{\sum s_{ij}}{s_x^2}$$

Se puede apreciar que la proporción total (es decir, 1) de la varianza total se descompone en dos partes.

Donde:

$\frac{\sum s_i^2}{s_x^2}$: representa la proporción de la varianza total del test debida a las varianzas de los ítems.

$\frac{\sum s_{ij}}{s_x^2}$: representa la proporción de la varianza total del test debida a la covarianza entre los ítems.

Por tanto, puede decirse que una proporción de la varianza total del test se debe a las covariaciones entre los ítems y que la proporción restante se debe a las varianzas de los ítems.

La varianza total se descompone en estas dos partes, de modo que el incremento proporcional de una parte implicará la reducción proporcional de la otra.

La proporción de la varianza total debida a covariación entre los ítems puede reexpresarse de otro modo. Dado que:

$$1 = \frac{\sum s_i^2}{s_x^2} + \frac{\sum s_{ij}}{s_x^2} \quad \text{ó} \quad 1 - \frac{\sum s_i^2}{s_x^2} = \frac{\sum s_{ij}}{s_x^2} \quad (1.22)$$

Es decir, la proporción de varianza total debida a covariación puede expresarse como uno menos la proporción debida a la varianza de los ítems. Este resultado juega un papel importante para obtener o interpretar a continuación otras fórmulas de interés práctico.

1.2.4.6 Fiabilidad del test como función de sus componentes: El Coeficiente Alfa.

Como se ha analizado anteriormente, la varianza del test total puede descomponerse, dada la ecuación (1.11):

$$s_X^2 = \sum_{i=1}^n s_i^2 + \sum_{\forall(i,j)} s_{ij}$$

Si las varianzas entre los ítems son iguales, por un lado, y las correlaciones entre ítems son también iguales, entonces:

$$\sum_{i=1}^n s_i^2 = ns_i^2$$

Por otra parte:

$$\sum_{\forall(i,j)} s_{ij} = n(n-1)s_{ij} = n(n-1)r_{ij} s_i s_j = n(n-1)r_{ij} s_i^2 = (n-1)r_{ij} \cdot ns_i^2$$

De donde:

$$\sum_{\forall(i,j)} s_{ij} = (n-1)r_{ij} \cdot \sum_{\forall i} s_i^2$$

Se puede reescribir la descomposición de la varianza del test total teniendo en cuenta este último resultado:

$$s_X^2 = \sum_{i=1}^n s_i^2 + (n-1)r_{ij} \cdot \sum_{\forall i} s_i^2$$

De esta última expresión se puede despejar el término r_{ij} lo que permitirá tener una fórmula de la fiabilidad de un ítem:

$$r_{ij} = \frac{s_X^2 - \sum_{\forall i} s_i^2}{(n-1) \sum_{\forall i} s_i^2} \quad (1.23)$$

Si esto corresponde a la fiabilidad de un ítem, entonces a partir de la fórmula (1.20) de Spearman-Brown, se tiene:

$$r_{XX} = \frac{nr_{ij}}{1+(n-1)r_{ij}}$$

Se podrá obtener una fiabilidad para el test, para ello, se sustituirá r_{ij} en la ecuación (1.20), así:

$$r_{xx} = \frac{\frac{n}{(n-1)} \frac{s_x^2 - \sum_{\forall i} s_i^2}{\sum_{\forall i} s_i^2}}{1 + (n-1) \frac{s_x^2 - \sum_{\forall i} s_i^2}{\sum_{\forall i} s_i^2}}$$

Realizando operaciones algebraicas en la ecuación anterior, se tiene:

$$r_{xx} = \frac{\frac{n}{(n-1)} \frac{s_x^2 - \sum_{\forall i} s_i^2}{\sum_{\forall i} s_i^2}}{\frac{s_x^2}{\sum_{\forall i} s_i^2}} = \left(\frac{n}{(n-1)} \cdot \frac{s_x^2 - \sum_{\forall i} s_i^2}{\sum_{\forall i} s_i^2} \right) \cdot \frac{\sum_{\forall i} s_i^2}{s_x^2}$$

Ahora, utilizando que $\sum_{\forall i} s_i^2 = ns_i^2$, se tiene:

$$r_{xx} = \frac{n}{(n-1)} \frac{s_x^2 - \sum_{\forall i} s_i^2}{s_x^2} = \frac{n}{(n-1)} \left(1 - \frac{\sum_{\forall i} s_i^2}{s_x^2} \right) \quad (1.24)$$

Donde:

n = Número de ítems.

$\sum_{\forall i} s_i^2$ = Suma de varianzas de ítems.

s_x^2 = Varianza total del test.

La fórmula anterior se conoce como *Coefficiente Alfa* o α de Cronbach, la cual expresa la fiabilidad total en función de dos términos:

- El número de ítems.
- La proporción de la varianza total del test debida a la covariación entre los ítems.

Ejemplo 1.6. Se aplicó un cuestionario de 4 ítems a 6 sujetos, el detalle de las puntuaciones se presenta en el siguiente cuadro, a partir de esos datos debe calcularse el coeficiente alfa de Cronbach.

Tabla 1.12. Puntuaciones obtenidas de un cuestionario de 4 ítems.

Sujetos	Ítems				X
	1	2	3	4	
1	0	0	0	1	1
2	1	0	0	0	1
3	1	0	0	0	1
4	1	1	1	1	4
5	1	1	0	1	3
6	1	1	0	0	2
Varianzas	0.14	0.25	0.14	0.25	1.33

El valor del Coeficiente α de Cronbach es el siguiente:

$$\alpha = \frac{4}{4-1} \left(1 - \frac{0.14 + 0.25 + 0.14 + 0.25}{1.33} \right) = 0.55$$

En este caso el valor de α obtenido representa un valor medio, que nos indica que no existe un elevado grado de covariación entre los ítems. No podemos afirmar con alto grado de confianza que este test mide un rasgo unitario.

1.2.4.6.1 El Coeficiente Alfa cuando los ítems son paralelos.

Si los ítems son paralelos (supuesto de igual puntuación verdadera e igual varianza de error) alfa expresa la fiabilidad del test.

En ese caso, dado que todos los ítems tienen igual varianza y que ya deducimos la varianza total del test para este supuesto, la fórmula alfa puede escribirse así:

$$r_{xx} = \left(\frac{n}{n-1} \right) \left[1 - \left(\frac{ns_i^2}{ns_i^2(1+(n-1)r_{ij})} \right) \right]$$

Esta fórmula es fácilmente simplificable en pasos sucesivos:

$$r_{xx} = \left(\frac{n}{n-1} \right) \left[1 - \left(\frac{1}{1 + (n-1)r_{ij}} \right) \right]$$

$$r_{xx} = \left(\frac{n}{n-1} \right) \left(\frac{1 + (n-1)r_{ij} - 1}{1 + (n-1)r_{ij}} \right)$$

$$r_{xx} = \frac{nr_{ij}}{1 + (n-1)r_{ij}}$$

Esta última expresión es de nuevo la fórmula de Spearman-Brown. Es decir, cuando los ítems del test son paralelos el coeficiente alfa se reduce a la fórmula de Spearman-Brown. Es decir, cuando los componentes del test son paralelos basta conocer su fiabilidad (la correlación entre dos de ellos) y el número de componentes para conocer la fiabilidad del test completo. Esto muestra que se puede deducir alfa a partir de Spearman-Brown bajo el supuesto de componentes paralelos.

1.2.4.6.2 El Coeficiente Alfa para ítems valorados dicotómicamente.

Un caso particular de aplicación de alfa extraordinariamente común es aquel en que el test está formado por ítems con respuesta verdadera que se valoran, usualmente, 1 para el acierto y 0 para el error. Este es un caso muy frecuente en pruebas de inteligencia, aptitudes, rendimientos etc.

Un ítem i valorado dicotómicamente ($1 =$ Acierto y $0 =$ Error) para una muestra de N sujetos puede describirse por los siguientes estadísticos:

1. Índice de dificultad, p o media del ítem i :

$$p_i = (ID)_i = \bar{X}_i = \frac{A_i}{N} \tag{1.25}$$

En el índice de dificultad (ID), p es la proporción de sujetos que aciertan el ítem. Es decir, el número de sujetos que aciertan el ítem (A) partido por el número total de sujetos (N). Cuanto mayor es el ID más fácil es el ítem (mayor proporción de sujetos lo aciertan).

2. El valor de q es:

$$q_i = 1 - p_i = \frac{N - A_i}{N} \quad (1.26)$$

El estadístico q es simplemente la proporción de sujetos que no aciertan el ítem.

3. La varianza del ítem, S_i^2 :

$$S_i^2 = p_i q_i \quad (1.27)$$

Para un ítem dicotómico la varianza máxima se alcanza cuando: $p_i = q_i = 0.5$, en cuyo caso la varianza es 0.25. La varianza mínima posible es 0, caso que se produce si todas las respuestas son aciertos o todas no aciertos (es decir, p o q vale 1, con lo que, respectivamente q o p vale 0 y la varianza 0). Por tanto puede afirmarse que la varianza de un ítem dicotómico va entre 0 y 0.25. La desviación típica por tanto va entre 0 y 0.5.

Si en un ítem dicotómicamente valorado la varianza se expresa como el producto de p y q, entonces alfa puede escribirse:

$$r_{xx} = \left(\frac{n}{n-1} \right) \left[1 - \left(\frac{\sum p_i q_i}{S_x^2} \right) \right] \quad (1.28)$$

Esta fórmula del coeficiente alfa para ítems dicotómicos.

1.2.4.6.3 Relación del Coeficiente Alfa con otros procedimientos de Fiabilidad.

Alfa indica la consistencia interna entre los ítems. No indica la estabilidad temporal ni tampoco la relación entre formas paralelas. Estos tres métodos, aunque teóricamente pueden verse como tres aproximaciones a la obtención de mediciones paralelas, son prácticamente de naturaleza y significado bien distinto.

Estimar la fiabilidad por un procedimiento de consistencia interna, como el coeficiente alfa, evalúa un aspecto del comportamiento de las puntuaciones del test completamente distinto al método de las formas paralelas o al método test-retest. Este último evaluaba la estabilidad temporal de los resultados del test cuando no había variaciones en éstas debidas a los sujetos o a las circunstancias.

Sin embargo, el coeficiente alfa está muy relacionado con los métodos de las dos mitades. De hecho, las fórmulas de Rulon y la fórmula L₄ de Guttman son casos particulares del coeficiente alfa, para un test formado por dos componentes o partes.

En efecto, si tenemos un test con dos mitades y queremos obtener una estimación de la fiabilidad del test a partir de su covariación, tendremos, sustituyendo alfa:

$$r_{xx} = 2 \left(1 - \frac{s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2}{s_x^2} \right)$$

que es precisamente la fórmula L₄ de Guttman.

Por otra parte la fórmula de Rulon es simplemente otro modo de expresión de esta fórmula. La fórmula anterior puede, además, expresarse de otras formas más o menos sintéticas. Por ejemplo, dado que alfa es igual a:

$$r_{xx} = \left(\frac{n}{n-1} \right) \left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_x^2} \right) \quad \text{y} \quad 1 - \frac{\sum s_i^2}{s_x^2} = \frac{\sum s_{ij}}{s_x^2}$$

Entonces:

$$r_{xx} = \left(\frac{n}{n-1} \right) \left(\frac{\sum s_{ij}}{s_x^2} \right)$$

Ahora, supuesto que los componentes son paralelos ($n = 2$), tenemos:

$$r_{xx} = \frac{2}{2-1} \left(\frac{2s_{ij}}{s_x^2} \right)$$

$$r_{xx} = \frac{4s_{ij}}{s_x^2}$$

Es el coeficiente alfa para un test formado por dos componentes o partes.

1.3 Fiabilidad en el área de Medicina (Análisis de Supervivencia).

Otra de las áreas en las que se aplica la Fiabilidad es el campo de las ciencias medicas, en esta área es llamada Supervivencia, en el que se estudia la supervivencia de pacientes con enfermedades fatales a los que se les han aplicado determinados tratamientos; para realizar el análisis de supervivencia, se hace a través de un conjunto de técnicas que permiten estudiar la variable “Tiempo hasta que ocurre un evento” y su dependencia de otras posibles variables explicativas.

Entre los ejemplos en los que se aplica el análisis de supervivencia se tienen enfermedades crónicas o tratamientos muy agresivos, el tiempo hasta que ocurre la muerte del enfermo (tiempo de supervivencia) y su dependencia de la aplicación de distintos tratamientos, pero en otras enfermedades, el tiempo hasta la curación, o el tiempo hasta la aparición de la enfermedad.

Debido a que la variable *tiempo* es una variable continua podría ser, en principio, estudiada mediante las técnicas de análisis de varianza o modelos de regresión.

Hay, sin embargo, dos dificultades importantes para este planteamiento, las cuales son:

- En la mayor parte de los estudios, la variable *tiempo* no tiene una distribución normal, más bien suele tener una distribución asimétrica.
- Para observarlas se tiene que prolongar el estudio durante un período de tiempo suficientemente largo, en el cual suelen ocurrir *pérdidas*, que imposibilitan la observación del evento.

Existen tres motivos por los que pueden aparecer estas pérdidas:

- Fin del estudio: Un ejemplo de pérdida por fin de estudio se presentó en una investigación en el que se evaluaba una intervención quirúrgica arriesgada, a dos grupos de pacientes, en un periodo de un año.

A los de un grupo se les practicó la intervención y a los de otro no, y se registró la duración del intervalo de tiempo entre la intervención (o la entrada en el estudio, para el grupo no intervenido) y la muerte. Al final del estudio puede haber individuos que no hayan muerto.

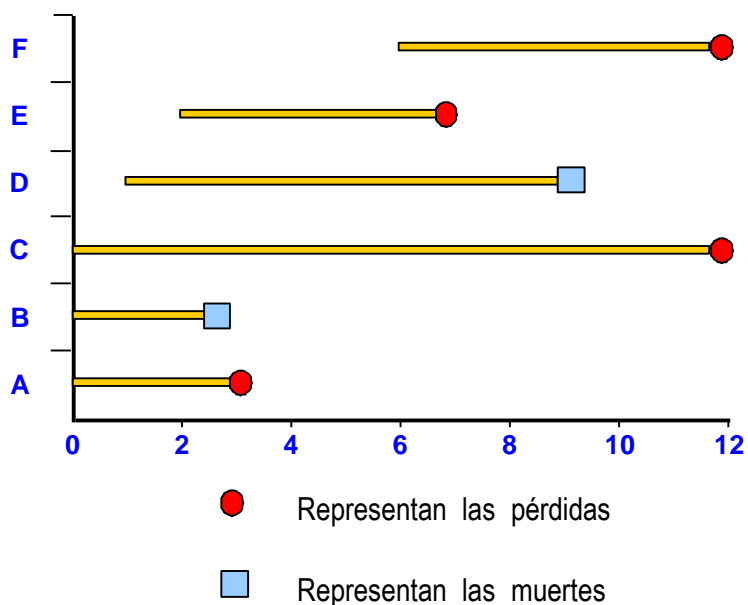
- Pérdida: Un ejemplo de pérdida se presentó en una investigación en el que se evaluaba la eficacia de un tratamiento preventivo para el SIDA, prolongándose durante cinco años, a individuos VIH+. Algunos de los individuos (un número importante, desaparecieron del estudio en algún momento del mismo por diversos motivos: cambio de domicilio, falta de interés, etc.).
- Ocurrencia de un evento competitivo: Tomando los ejemplos anteriores de ocurrencia de pérdida, ahora bien una ocurrencia de un evento competitivo puede ser la muerte por alguna otra causa ajena al estudio.

La variable “Tiempo hasta que ocurre un evento” está definida por la duración del intervalo temporal entre los instantes en que empieza la observación y ocurre el evento. En los ejemplos citados, la observación no comienza en el mismo instante para todos los individuos.

Lo anterior es conocido también por “pérdida por la izquierda”, esta variable es la no coincidencia de los tiempos en que comienza la observación, ya que, si el estudio está diseñado para acabar en un tiempo determinado, el efecto de esta no coincidencia es reducir, para los que empiezan más tarde, el tiempo de observación.

Dado que existen diferentes pérdidas a continuación se tiene un ejemplo de un estudio de supervivencia en una intervención quirúrgica, el que intervinieron seis individuos (A, B, C, D, E, F), el detalle puede verse en la figura 1.1.

Figura 1.1. Resultados de un estudio de supervivencia en una intervención quirúrgica.



Resultados obtenidos:

- Individuo **A**, desaparece del estudio 3 meses después de la intervención (sería una pérdida en sentido estricto).
- Individuo **B**, fallece a los 2.5 meses.
- Individuo **C**, sigue vivo al acabar el estudio (sería una pérdida a los 12 meses por fin del estudio).
- Individuo **D**, al que se le interviene en el mes 1, fallece en el 9, el tiempo de supervivencia sería 8 meses (hay 1 mes de pérdida por la izquierda).
- Individuo **E**, al que se le interviene en el mes 2, se pierde en el 7 (sería una pérdida a los 5 meses, ya que hay pérdida en sentido estricto y pérdida por la izquierda).
- Individuo **F**, al que se le interviene en el mes 6, sigue vivo al acabar el estudio, sería una pérdida a los 6 meses (existe pérdida por fin del estudio y pérdida por la izquierda).

Evidentemente, se pueden evitar las pérdidas por la izquierda diseñando el estudio para que acabe, no en un tiempo establecido con carácter general, sino, para cada individuo, en un tiempo determinado después del inicio de la observación.

Si se quisiera aplicar un modelo de regresión lineal a un estudio de este tipo, habría que eliminar del mismo las observaciones perdidas, ya que para ellas no se conoce el valor de la variable; sin embargo, sí se tiene alguna información útil sobre la misma, se sabe que es mayor que el tiempo en el que se produjo la pérdida. Para el análisis del tipo de datos descritos anteriormente se requiere la aplicación de técnicas estadísticas de análisis de supervivencia.

1.3.1 Funciones asociadas al análisis supervivencia.

- **Distribución de la variable tiempo de espera:** La variable tiempo de espera es una variable aleatoria continua y no negativa, cuya función de probabilidad puede especificarse de varias maneras.
- **Función de densidad de probabilidad $f(t)$:** para una variable continua se define como una función que permite calcular la probabilidad de que la variable tome valores en un intervalo a través de la fórmula:

$$P(a < T < b) = \int_a^b f(t) dt \quad 0 < t < \infty \quad (1.29)$$

- **Función de supervivencia $S(t)$** se define como:

$$S(t) = P(T \geq t) = \int_t^{\infty} f(u) du \quad (1.30)$$

Por lo tanto, la función de supervivencia da la probabilidad complementaria de la habitual Función de distribución acumulativa $F(t) = P(T \leq t)$, es decir $S(t) = 1 - F(t)$.

Otra forma de expresar la probabilidad para la variable *tiempo de espera* es por medio de la función de riesgo $h(t)$ que es la función de densidad de probabilidad de T , condicionada a que $T \geq t$.

Por ejemplo, la supervivencia a una intervención quirúrgica, la función de riesgo a los 2 años es la densidad de probabilidad de morir a los 2 años de la intervención, condicionada a que ya se ha

sobrevivido hasta entonces. Esta probabilidad sería, realmente, la que en cada momento le importa al enfermo intervenido.

Se puede demostrar que:
$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \quad (1.31)$$

A veces se usa la función de riesgo acumulada $H(t)$, que es más difícil de interpretar, esta se define como:

$$H(T) = \int_0^t h(x)dx \quad (1.32)$$

y que verifica

$$H(t) = -\ln(S(t)) \quad (1.33)$$

Es decir, las cuatro funciones están relacionadas; si se conoce una cualquiera de ellas, las otras funciones se pueden obtener a partir de las restantes.

A pesar de que el tiempo es una variable continua, sólo se tiene acceso a valores discretos de la misma. Los datos observados para cualquiera de las experiencias descritas en los ejemplos planteados son una serie de valores discretos.

Por lo que es conveniente definir las funciones anteriores en el caso (práctico) de considerar a la variable tiempo como discreta, es decir, como un conjunto discreto de n valores $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ (el suponerlos ordenados de menor a mayor no representa ninguna pérdida de generalidad, de hecho es así como se observa el tiempo).

Para una variable discreta, la Función de probabilidad $f(t)$ se define como:

$$f(t) = P(T = t_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

y la función de supervivencia:

$$S(t) = P(T > t) = \sum_{i: t(i) > t} p_i \quad (1.34)$$

La función de supervivencia mide, para cada valor t_i de T , la probabilidad de que la variable T sea mayor o igual que t_i (en este caso no es la complementaria de la función de distribución puesto que la probabilidad de que T sea igual a t_i , en las variables discretas en general no es cero, está incluida en ambas funciones), aunque existe la opción de que siga siendo la complementaria de la función de distribución, solamente que no se le incluye el igual.

Las funciones de riesgo y riesgo acumulado para una variable discreta también son:

$$h(t_i) = \frac{f(t_i)}{s(t_i)} \quad (1.35)$$

$$H(t_i) = -\ln(s(t_i)) \quad (1.36)$$

Para el análisis de Supervivencia existen métodos paramétricos y no paramétricos; y para plantear un modelo de riesgos se hace uso del modelo de Regresión de Cox, el cual permite comparar las variables explicativas que permita comparar dichas estimaciones, teniendo en cuenta el efecto de otras variables distintas de la que se utiliza para definir los grupos. Obviamente, no se pretende desarrollar la teoría de supervivencia, sino únicamente plantear las diferentes áreas donde se aplica la fiabilidad.

1.4 Fiabilidad en la Ingeniería.

En la Ingeniería se estudia el comportamiento de los productos fabricados, entre los objetivos de la fiabilidad para esta área es estudiar las causas de que los productos fallen, los efectos que producen los fallos y los aspectos de diseño, fabricación y mantenimiento que pueden afectar a los fallos.

La fiabilidad se define como la probabilidad de que un producto se comporte adecuadamente durante un tiempo establecido.

Uno de los objetivos en la ingeniería es diseñar y mantener un producto de forma tal que dure el mayor tiempo posible.

Existen diversos estudios realizados donde se aplica la teoría de fiabilidad, entre los cuales se puede mencionar:

- En 1978, se presentaron los resultados de los **“test de funcionamiento”** a los que fueron sometidos 4,156 circuitos integrados. Durante 1,370 horas se comprobó su funcionamiento bajo condiciones “aceleradas” de 80° C y al 80% de humedad. Las condiciones aceleradas se usan para acortar la duración de los tests provocando el fallo de las unidades defectuosas más rápidamente.

El test es el procedimiento que se aplica a cada circuito integrado⁸, al culminar el proceso de fabricación, para comprobar que dicho ejemplar (cada chip individual) se ha fabricado bien, es decir, para verificar que el resultado de la fabricación (en ese integrado particular) es correcto; el resultado del test es binario:

- Sí: el ejemplar es correcto, se encapsula y da lugar a un circuito integrado disponible para ser utilizado.
- No: tal ejemplar ha resultado «mal fabricado» y se desecha.

El objetivo inicial del experimento fue estimar la proporción de unidades defectuosas fabricadas actualmente, así como estimar la cantidad de tiempo de rodaje (“burn-in”) que se requeriría para eliminar la mayoría de las unidades defectuosas de todas las unidades producidas. Se observaron 25 fallos en las primeras 100 horas y tres más entre 100 y 600 horas.

- En 1983, se realizó un estudio llamado **“Fisuras en tubos intercambiadores de calor”**, tal estudio se aplicó a tres plantas nucleares. El objetivo de dicha inspección fue determinar la duración de los tubos sin presentar fisuras, en base a los resultados se debía desarrollar estrategias eficientes de inspección y reemplazamiento. Además se pretendía saber si la tasa de fallo era constante en el tiempo o como sospechaban existían unos mecanismos de

⁸ Un circuito integrado es un tablero muy delgado y pequeño en el que se encuentra una enorme cantidad de dispositivos microelectrónicos interconectados; son usados en computadoras y teléfonos móviles. “Circuito integrado Enciclopedia Libre”. Tomado de Enciclopedia Libre Wikipedia, www.wikipedia.com

envejecimiento debido a corrosión y fatiga que ocasionaba fallos con una mayor frecuencia cuando los tubos envejecían.

Es necesario aclarar que las plantas nucleares utilizan intercambiadores de calor para transferir energía entre el reactor y las turbinas de vapor. Cada intercambiador contiene miles de tubos que con la edad presentan fisuras debidas a una combinación de la corrosión y la fatiga. Si las fisuras son pequeñas el intercambiador puede continuar funcionando con normalidad pero, cuando éstas son suficientemente grandes se producen fugas y problemas de seguridad que pueden producir un paro de la planta. Para evitar estas fugas en los tubos, puestos previamente fuera de servicio, son sometidos a inspección, pudiéndose de este modo reparar aquellos que presentan fugas. Esta acción reduce la eficiencia de la planta pero alarga la vida de los intercambiadores que son muy costosos.

Los resultados de la inspección se obtuvieron a finales de 1983, correspondientes a las tres plantas diferentes, una con tres años de funcionamiento, otra con dos años y la tercera con un año. Debido a que todos los intercambiadores se fabricaron según el mismo diseño y materiales y son sometidos al mismo régimen de funcionamiento, parece razonable combinar los resultados de las tres plantas con el fin de realizar inferencias acerca de la duración de los tubos sin presentar fisuras, que era el interés de los ingenieros realizadores de la inspección

- En 1982, se realizó un estudio para estimar la distribución del tiempo hasta ***“El inicio de la rotura de ruedas de turbinas (máquina motriz compuesta de una rueda móvil sobre la que actúa la energía de un fluido propulsor)”***. Se inspeccionaron 432 ruedas para evaluar si existían indicios de rotura o no. En el momento de las inspecciones, las ruedas tenían diferentes tiempos de servicio. Si una rueda se detecta como defectuosa en la inspección significa que su tiempo hasta la rotura está censurado por la izquierda por su edad, ya que la rotura se ha iniciado en algún instante anterior al momento de inspección. La rueda que se encuentra en perfecto estado proporciona un dato de tiempo hasta la rotura que está censurado por la derecha por su edad, ya que la rotura se iniciará en un momento posterior a su edad actual. Los objetivos del estudio fueron: obtener información que pudiera ser utilizada para estimar la distribución del tiempo hasta el inicio de la rotura, programar inspecciones, evaluar si la tasa de inicio de rotura para las ruedas se incrementa con la

edad, ya que en este caso habría que programar operaciones de reemplazamiento preventivo.

Otros ejemplos en los que se utiliza la fiabilidad de sistemas son:

- Una avioneta monomotor después de 800 horas de funcionamiento”,
- El “tiempo de rotura de cierta pieza de un motor”, etc.

Es de mencionar que existen sistemas que han tenido fallos catastróficos en sus componentes como por ejemplo:

- La pérdida del motor de un avión comercial.
- Los accidentes de los transbordadores espaciales, ejemplo, Challenger.

También existen fallos de sistemas a menor escala:

- El desgaste de una batería,
- El fallo de una bombilla.

Por tales circunstancias es imprescindible conocer la probabilidad de que dichos accidentes o fallos acontezcan durante la vida del sistema, a fin de evitar o al menos prever que se avecina un fallo.

Existen sectores en los que la baja Fiabilidad es inaceptable por motivos de seguridad como los son: Aeronáutica, Energía, Sanidad, Militar, etc., en estos casos la fiabilidad es un requisito básico de la sociedad que hay que satisfacer.

Los consumidores actuales exigen un buen funcionamiento, es decir un producto o sistema confiable, duradero entre estos se tiene por ejemplo: TV, Electrodomésticos, Automóviles, viviendas, etc., estos se comparan o prueban en un determinado tiempo, por lo que la fiabilidad comprueba que el producto cumple ciertas especificaciones, y cuando esto ocurre, es enviado al consumidor. Por otra parte el consumidor acepta que el producto pueda fallar con el tiempo, y en algunos casos el período de garantía es una forma de prever esta posibilidad a corto plazo.

Evidentemente, la fiabilidad es un aspecto de incertidumbre, ya que el hecho de que un sistema funcione durante un cierto período de tiempo, sólo puede ser estudiado en términos de probabilidades, cuya probabilidad contribuye a detectar si un sistema realiza adecuadamente su función prevista a lo largo del tiempo.

CAPÍTULO II.

SISTEMAS COHERENTES.

CAPITULO II. SISTEMAS COHERENTES.

El término de fiabilidad en los sistemas está relacionado directamente con la probabilidad, en este caso con el funcionamiento de un sistema, el cual esta integrado por diferentes componentes.

El conocer las componentes que constituyen un sistema es importante, ya que dadas las características de las componentes podemos determinar la fiabilidad del sistema completo.

En este capítulo se desarrollará la fiabilidad de sistemas coherentes, la estructura, las propiedades, la representación de las diferentes formas de representar los componentes de los sistemas en general, el cálculo de la fiabilidad del sistema, para el cual se toma en cuenta el cálculo de la fiabilidad de sus componentes, ya sea por medio de vectores caminos o vectores corte; además se desarrollará el cálculo de las cotas o limites en fiabilidad.

2.1 Propiedad de los Sistemas Coherentes.

En primer lugar debemos definir el concepto de sistema, como una colección de componentes/subsistemas dispuestos de acuerdo a un diseño dado, con el propósito de lograr el cumplimiento de determinadas funciones con una adecuación y fiabilidad aceptable.

Para determinar la fiabilidad de este sistema debe de considerarse el tipo de componentes, su cantidad, su calidad y el modo en que están dispuestas, ya que estas tiene un efecto directo en la fiabilidad del sistema.

2.1.1 Sistema de Componentes.

Iniciaremos definiendo la **función de estructura** (estados) que representa la situación en que se encuentra el sistema o las componentes del sistema. En este sentido se distinguen dos estados:

- Estado funcional del sistema (el sistema funciona adecuadamente)
- Estado fallido del sistema (el sistema ha fallado)

Esta misma connotación se utiliza para representar el estado de las componentes de un sistema. Algebraicamente, se tiene que un sistema o dispositivo pueda estar en los siguientes estados:

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema funciona} \\ 0 & \text{si el sistema ha fallado} \end{cases}$$

Ahora, supongamos que un dispositivo (sistema) consta de n componentes, a las que denotamos por $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y que el estado del sistema está determinado por el estado de las componentes, entonces se define el vector de estado de las componentes como:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el componente } i\text{-ésimo funciona} \\ 0 & \text{si el componente } i\text{-ésimo ha fallado} \end{cases}$$

En consecuencia, la fiabilidad de un sistema depende tanto de la fiabilidad individual de cada una de sus componentes como del modo lógico en que están conectadas dichas componentes en relación con el funcionamiento o no del sistema. Esta información se recoge en la función de estructura del sistema.

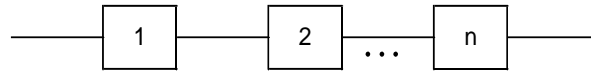
Entonces se dice que el estado del sistema, ϕ , es una función del vector de estado de los componentes, siendo esta la función de **Estructura del Sistema** y la denotamos por: $\phi = \phi(X)$.

2.1.2 Estructuras Básicas.

El modo lógico en que pueden estar conectadas las componentes de un sistema son: **Paralelo o Serie**.

- **Sistema Serie:** Un sistema serie es aquel en el que todos los componentes deben funcionar adecuadamente para que funcione el sistema.

Figura 2.1. Sistema serie de n componentes



En la estructura serie, se requiere que todos los componentes funcionen para que el sistema lo haga, esto es:

$$\phi(X) = 1 \text{ sí y sólo sí } x_i = 1 \quad \forall i.$$

Una forma algebraica lógica para esta condición es definir la función de estructura del sistema como:

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \prod_{i=1}^n x_i \dots & (2.1) \\ \phi(X) &= \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \end{aligned}$$

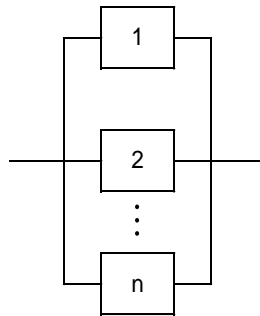
Ejemplo 2.1. Un ejemplo del sistema serie es el conjunto de neumáticos de un carro, para que éste funcione debe de poseer todos los neumáticos en buen estado. Es decir que:

$$\begin{aligned} x_1 = x_3 = x_4 = 1 \quad y \quad x_2 = 0 & \quad \phi(X) = 0 \\ x_2 = x_3 = x_4 = 0 \quad y \quad x_1 = 1 & \quad \phi(X) = 0 \\ x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1 & \quad \phi(X) = 1 \end{aligned}$$

- **Sistema Paralelo:** Un sistema paralelo es aquel en que el funcionamiento de cualquiera de los componentes implica el funcionamiento del sistema. La función de estructura para el sistema paralelo es:

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \prod_{i=1}^n x_i & (2.2) \\ \phi(X) &= \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \end{aligned}$$

Figura 2.2. Sistema Paralelo de n componentes.



Ejemplo 2.2. Como ejemplo del sistema paralelo es el conjunto de motores en un avión bimotor, si funciona al menos uno, el vuelo se mantiene. Es decir que:

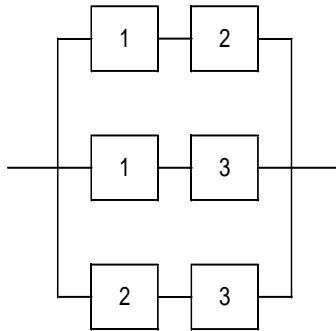
$$\begin{array}{ll} x_2 = 0 \text{ y } x_1 = 1 & \phi(X) = 1 \\ x_1 = x_2 = 0 & \phi(X) = 0 \end{array}$$

- **Sistema k de n:** En un sistema k de n, el funcionamiento de k cualesquiera de los n componentes del sistema implica el funcionamiento del sistema, la representación de la función de estructura para un sistema k de n está dada por:

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i < k \end{cases} \quad (2.3)$$

Es de considerar que un sistema serie es un sistema n de n y que un sistema paralelo es un sistema 1 de n. Para ilustrar el sistema k de n, consideremos el caso 2 de 3 componentes, la representación gráfica es:

Figura 2.3. Sistema de estructura 2 de 3



$$\begin{aligned}\phi(x) &= x_1x_2 \cup x_1x_3 \cup x_2x_3 \\ &\equiv x_1x_2x_3 + x_1x_2(1-x_3) + x_1(1-x_2)x_3 + (1-x_1)x_2x_3\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3. Un ejemplo de un sistema k de n es el eje trasero de un gran remolque-tractor en el que el funcionamiento de tres de las cuatro ruedas es suficiente para asegurar la movilidad. Es decir que:

$$\begin{aligned}x_2 = x_3 = x_4 = 1 \quad \text{y} \quad x_1 = 0 & \quad \phi(X) = 1 \\ x_2 = x_3 = 0 \quad \text{y} \quad x_1 = x_4 = 1 & \quad \phi(X) = 0\end{aligned}$$

Ejemplo 2.4. Otro ejemplo de un sistema 2 de 3 es un aeroplano que es capaz de funcionar si y solamente si por lo menos están funcionando dos de sus tres motores.

Ejemplo 2.5. Es un sistema estéreo (hi-fi) de alta fidelidad con los componentes siguientes:

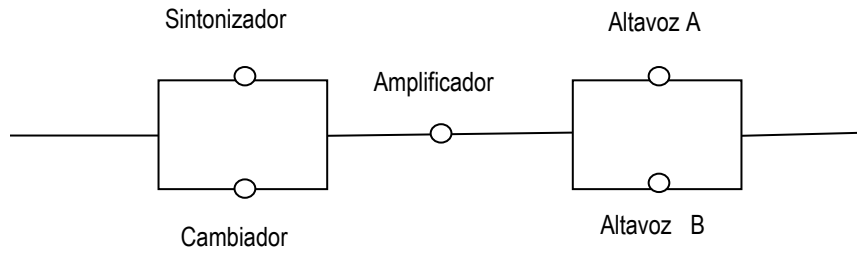
- Sintonizador FM
- Cambiador de salida (emisora)
- Amplificador
- Altavoz A
- Altavoz B

El sistema funciona si puede obtenerse música (monoaural o estéreo)⁹ a través de FM u otra salida.

⁹ Monoaural: Es un sistema de grabación y reproducción sonora dado a través de un solo canal.

El diagrama del sistema es el siguiente:

Figura 2.4. Sistema hi-fi



La función de estructura es la siguiente: $\phi(x) = (x_1 \cup x_2)x_3(x_4 \cup x_5)$, cada componente de los sistemas nos sirve para clasificar la función útil.

Definición 2.1. La componente i -ésima de un sistema es irrelevante para la estructura ϕ , si ϕ es constante en x_i . Es decir, $\phi(1_i, \mathbf{x}) = \phi(0_i, \mathbf{x})$ para todo (\bullet_i, \mathbf{x}) , donde

$$(\bullet_i, \mathbf{X}) \equiv (x_1, \dots, x_{i-1}, \bullet, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

En caso contrario el componente es relevante.

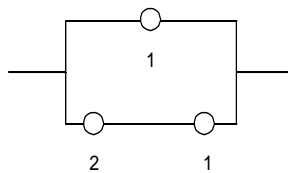
Componentes Relevantes. Una componente es relevante cuando el funcionamiento de la componente es imprescindible para que el sistema funcione.

$$(1_i, \mathbf{X}) \equiv (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$(0_i, \mathbf{X}) \equiv (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Ejemplo 2.6. El componente "2" es irrelevante a la estructura, siguiente:

Figura 2.5. Componente irrelevante.



Lema 2.1. Para cualesquier función de estructura ϕ de orden n :

Estéreo: Es un sonido registrado simultáneamente desde dos o más puntos convenientes distanciados para que al reproducirse de una sensación de relieve espacial.

$$\phi(x) = x_i \phi(1_i, x) + (1 - x_i) \phi(0_i, x) \text{ para todo } x \text{ (} i = 1, \dots, n \text{)} \quad (2.4)$$

Prueba:

Sea x_i una componente relevante $x_i \phi(1_i, x) + (1 - x_i) \phi(0_i, x) = \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = \phi(x)$, ya que $\phi(0_i, x) = 0$, por lo que se comprueba que $\phi(x) = x_i \phi(1_i, x) + (1 - x_i) \phi(0_i, x)$, de forma análoga se verifica si x_i es una componente irrelevante.

Sea X_i una componente irrelevante, entonces $\phi(0_i, x) = \phi(1_i, x)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} x_i \phi(1_i, x) + (1 - x_i) \phi(0_i, x) &= x_i \phi(0_i, x) + (1 - x_i) \phi(0_i, x) \\ &= [x_i + (1 - x_i)] \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = \phi(x) \end{aligned}$$

Por lo que se comprueba que $\phi(x) = x_i \phi(1_i, x) + (1 - x_i) \phi(0_i, x)$.

Definición 2.2. Dada una estructura ϕ , se define su **dual** ϕ^D , como $\phi^D(x) = 1 - \phi(1 - x)$, donde $1 - x = (1 - x_1, \dots, 1 - x_n)$.

El concepto de estructura dual es utilizado en el análisis de componentes de sistemas sujeto a dos tipos de falla, tal como sistema de relevo y monitoreo de un sistema de seguridad; el cual se verá en secciones posteriores.

Ejemplo 2.7. El dual de un sistema serie (paralelo) de n componentes es un sistema paralelo (serie) de n componentes. De manera general el dual de una estructura k de n es una estructura $(n - k + 1)$ de n , para comprobar que un sistema serie de n componentes es un sistema paralelo de n componentes, se tiene que:

Un sistema serie es considerado un sistema n de n , entonces según el dual de una estructura k de n , el dual del sistema serie sería $(n - k + 1)$ de n , es decir, $(n - n + 1)$ de n , por lo tanto el dual del sistema serie es el sistema paralelo de n componentes, considerado un sistema 1 de n componentes.

2.1.3 Estructura Coherente.

Un sistema real sería inusual, si al mejorar el funcionamiento de una componente (es decir, sustituir un componente que ha fallado por un componente que este funcionando) cause un deterioro al sistema.

Dado lo anterior, se restringe la función de estructura en una función monótona creciente en cada argumento. Así mismo, se tomarán aquellos sistemas cuyo estado dependa del estado de sus componentes.

Definición 2.3. Un sistema de componentes es coherente sí:

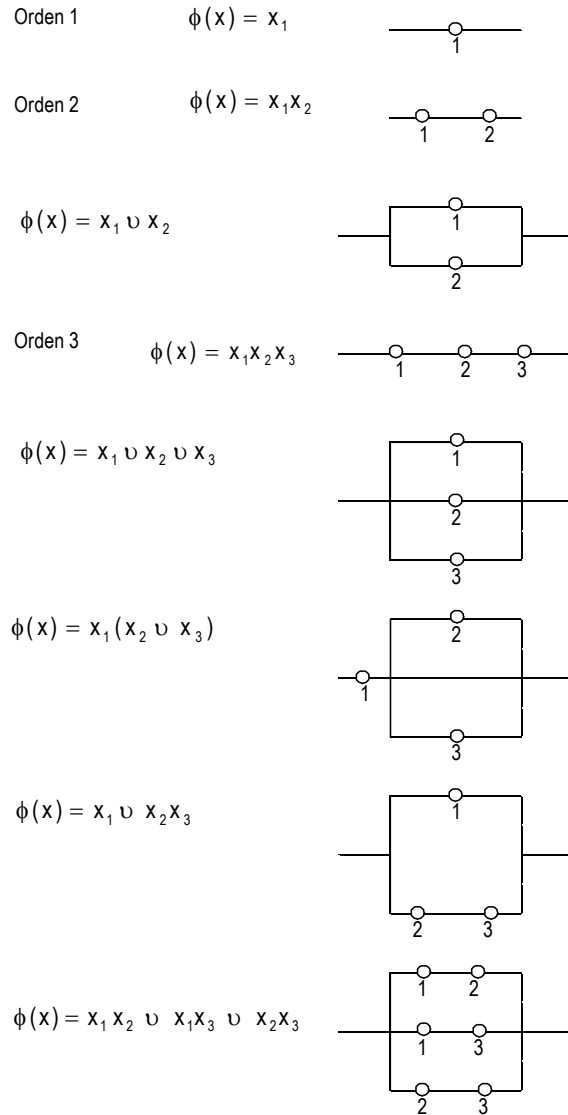
- (a) Su función de estructura ϕ es creciente en \mathbf{x} , y
- (b) Si cada componente del sistema es relevante.

En la mayoría de los casos, el único aspecto pertinente del sistema coherente es su estructura; en tales casos se tiene un sistema coherente ϕ .

En algunos casos se necesita tener un sistema de C componentes que abarcan el sistema coherente, en tales casos se tiene el sistema coherente (C, ϕ) , donde C es un sistema de números enteros designado a los componentes.

Ejemplo 2.8. Todas las distintas estructuras coherentes de orden 1, 2, y 3 se presentan en la figura siguiente:

Figura 2.6. Estructura coherentes de orden 1, 2 y 3.



Teorema 2.1. Sea ϕ una estructura coherente de n componentes, entonces

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \phi(x) \leq \prod_{i=1}^n x_i \quad (2.6)$$

El teorema anterior indica que el funcionamiento de un sistema coherente está acotado, en el límite inferior por el funcionamiento de un sistema serie y en el límite superior por el funcionamiento de un sistema paralelo.

Prueba:

Supóngase que $\prod_{i=1}^n x_i = 1$, entonces $x_1 = \dots = x_n = 1$, así $\phi(x) = 1$, por lo que se cumple la desigualdad de la izquierda.

Ahora, recordemos que $\prod_{i=1}^n x_i \equiv 1 - \prod_{i=1}^n (1-x_i) = 0$, entonces $x_1 = \dots = x_n = 0$, así $\phi(x) = 0$, por lo que se cumple la desigualdad de la derecha.

Teorema 2.2. Sea ϕ una estructura coherente, entonces:

$$(a) \quad \phi(x \cup y) \geq \phi(x) \cup \phi(y)$$

$$(b) \quad \phi(x \cdot y) \leq \phi(x) \phi(y)$$

La igualdad (a) se cumple para todo x si y sólo si la estructura es paralela, así mismo se cumple la igualdad (b) si y sólo si la estructura es en serie.

Prueba:

Utilizando las notaciones siguientes:

$$x \cup y \equiv (x_1 \cup y_1, \dots, x_n \cup y_n)$$

$$x \cdot y \equiv (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$$

Se tiene:

1) Literal a):

- $x_i \cup y_i \geq x_i \quad \forall i$, por lo que se tiene que $\phi(x \cup y) \geq \phi(x)$, ya que ϕ es creciente.
- De forma similar, $x_i \cup y_i \geq y_i \quad \forall i$, de modo que $\phi(x \cup y) \geq \phi(y)$, por lo tanto se tiene que

$$\phi(x \cup y) \geq \max[\phi(x), \phi(y)] \equiv \phi(x) \cup \phi(y)$$

2) Literal b):

- $x_i \cdot y_i \leq x_i \quad \forall i$, por lo que se tiene que $\phi(x \cdot y) \leq \phi(x)$, ya que ϕ es no decreciente.
- De forma similar, $x_i \cdot y_i \leq y_i \quad \forall i$, de modo que $\phi(x \cdot y) \leq \phi(y)$, por lo tanto se tiene que

$$\phi(x \cdot y) \leq \min[\phi(x), \phi(y)] \equiv \phi(x) \cdot \phi(y)$$

El teorema 2.2 (a) indica que la redundancia en el nivel de componente es más eficaz que la redundancia en el nivel de sistema.

2.1.4 Representación de los sistemas coherentes en términos de caminos y cortes.

Para analizar cualquier forma estructural, se ha definido un método de análisis estructural general. En este contexto, este método se designa como la construcción de estructuras equivalentes de sistema.

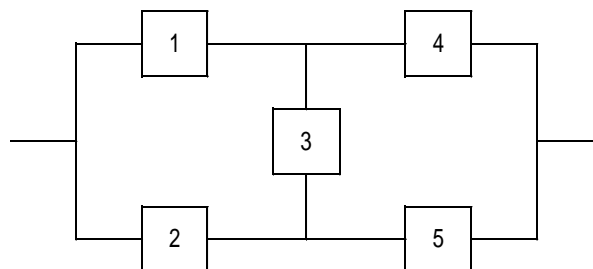
Definición 2.4. Si x indica los estados de un conjunto de componentes $C = \{1, \dots, n\}$. Entonces se define a $C_0(x) = \{i \mid x_i = 0\}$ y $C_1(x) = \{i \mid x_i = 1\}$. Asumiendo las condiciones anteriores, la función (C, ϕ) es coherente.

Definición 2.5. Un vector de camino es un vector de estado de los componentes x para el cual $\phi(x) = 1$. El correspondiente conjunto de camino es $C_1(x)$.

Los vectores de camino son aquellas realizaciones de los vectores de estado de los componentes para los que el sistema funciona. De hecho se puede decir que si x es un vector de camino e $y \geq x$, entonces y es también un vector de camino.

Ejemplo 2.9. Un ejemplo de vector de camino para el puente eléctrico, se presenta en la figura 2.7:

Figura 2.7. Puente Eléctrico.



Un vector de camino para el puente eléctrico es $x = (1, 1, 1, 0, 1)$ para el cual $\phi(x) = 1$ y $C_1(x) = \{1, 2, 3, 5\}$.

Definición 2.6. Un vector de camino mínimo es un vector de camino x para el cual $y < x$ implica que $\phi(y) = 0$.¹⁰

El correspondiente conjunto $C_1(x)$ se designa como un conjunto de camino mínimo.

Un vector de camino mínimo es aquél cuyo conjunto de camino no tiene ningún subconjunto que sea un conjunto de camino. Físicamente, es el conjunto más pequeño de componentes cuyo funcionamiento hace que el sistema funcione.

Recordemos que para cada vector de camino mínimo se tiene que $\phi(x) = 1$. De este modo, si los componentes de cualquier camino mínimo funcionan, el sistema funciona. Es decir, se puede considerar que el sistema está integrado por los caminos mínimo en paralelo, ya que sólo es necesario que uno de los caminos mínimo funcione para que el sistema lo haga.

Ejemplo 2.10. Un vector de camino mínimo para el puente eléctrico mostrado en la figura 2.7 es $x = (1, 0, 0, 1, 0)$ para el que $C_1(x) = \{1, 4\}$. Los subconjuntos de caminos mínimos para el puente eléctrico son: $C_1 = (1, 4)$; $C_2 = (2, 5)$; $C_3 = (1, 3, 5)$; $C_4 = (2, 3, 4)$.

Definición 2.7. Un vector de corte es un vector x de estado de los componentes para el que $\phi(x) = 0$. El correspondiente conjunto de corte es $C_0(x)$.

Los vectores de corte son las realizaciones de los vectores de estado de los componentes para los cuales ha fallado el sistema. De hecho, se puede decir que si x es un vector de corte e $y < x$, entonces y es también un vector de corte.

Ejemplo 2.11. Un ejemplo de vector de corte para el puente eléctrico mostrado en la figura 2.7 es $x = (0, 0, 1, 0, 1)$ para el que $C_0(x) = \{1, 2, 4\}$.

Definición 2.8. Un vector de corte mínimo es un vector x para el que $y > x \Rightarrow \phi(y) = 1$. Nos referimos al correspondiente conjunto $C_0(x)$, como a un conjunto de corte mínimo.

¹⁰ Si el vector de componentes $y < x$, entonces se tiene que $y_i < x_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Un vector de corte mínimo es aquel cuyo conjunto de corte no tiene un subconjunto que constituya un vector de corte. Físicamente es el conjunto más pequeño de componentes cuyo fallo asegura el fallo del sistema.

Ejemplo 2.12. Un ejemplo de vector de corte mínimo para el puente eléctrico mostrado en la figura 2.7 es $x = (0, 0, 1, 1, 1)$ para el que $C_0(x) = \{1, 2\}$.

Es de resaltar, que para cada vector de corte mínimo $\phi(x) = 0$. Por tanto, cada corte mínimo es suficiente para causar el fallo del sistema.

Todos los cortes mínimos deben funcionar para que el sistema funcione. Un corte mínimo funciona si cualquier de los componentes del conjunto de cortes mínimos funciona.

Sea P_j el j -ésimo conjunto de camino mínimo de una estructura ϕ , se puede asociar una función binaria con argumentos $x_i, i \in P_j$:

$$p_j(x) = \prod_{i \in P_j} x_i \quad (2.7)$$

La función anterior toma el valor de 1 si todos los componentes en el j -ésimo conjunto de camino mínimo funciona, en caso contrario toma el valor de 0 (para $j = 1, \dots, p$, donde p es el número de conjuntos de caminos mínimos del sistema ϕ).

La estructura p_j es el j -ésimo camino mínimo de la estructura serie, donde claramente p_j es la función de estructura de arreglos en serie de los componentes del j -ésimo conjunto de camino.

La función de estructura funciona si y sólo si por lo menos está funcionando uno de los caminos mínimos, lo anterior puede representarse en la siguiente igualdad:

$$\phi(x) \equiv \prod_{j=1}^p p_j(x) \equiv 1 - \prod_{j=1}^p [1 - p_j(x)] \quad (2.8)$$

La expresión anterior es una estructura que puede expresarse como un arreglo paralelo de los caminos mínimos de la estructura serie.

Similarmente, el j-ésimo conjunto de corte mínimo K_j de una estructura coherente ϕ , puede asociarse a una función binaria con sumatorias de x_i , donde $i \in K_j$.

$$k_j(x) = \prod_{i \in K_j} x_i$$

La función anterior toma el valor 0 si todos los componentes en el j-ésimo conjunto de corte mínimo del sistema han fallado, en caso contrario tomará el valor de 1 ($j = 1, \dots, k$, donde k es el número de corte mínimos del sistema ϕ).

La estructura K_j es el j-ésimo corte mínimo de la estructura paralela, puesto que K_j es la función de estructura de un arreglo paralelo, del j-ésimo conjunto de corte.

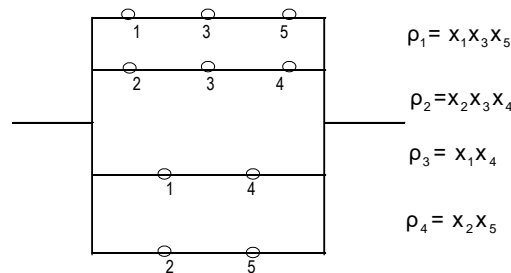
La estructura falla si y sólo si por lo menos una de las estructuras de corte mínimo falla, por tanto la ecuación es la siguiente:

$$\phi(x) \equiv \prod_{j=1}^k k_j(x) \tag{2.9}$$

Representando la estructura inferior como un arreglo serie de corte mínimo de estructura paralelo.

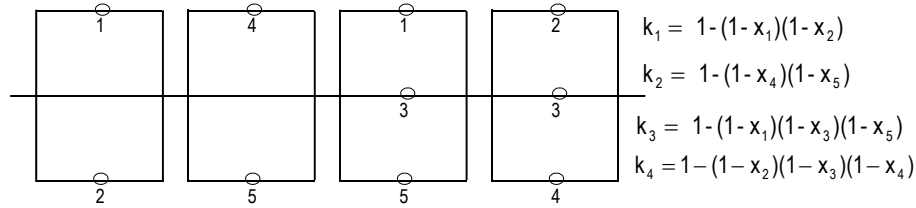
Ejemplo 2.13. Utilizando el ejemplo 2.10 sobre el puente eléctrico, en el que se presentó su sistema de caminos mínimos y los cortes, utilizando la fórmula 2.8 se puede presentar el puente como una estructura serie-paralela de la siguiente manera:

Figura 2.8. Representación del puente en términos de caminos mínimos



Para encontrar el corte mínimo para el sistema se utilizará la fórmula 2.9, por lo que el puente, en términos de una estructura serie-paralelo es de la siguiente manera:

Figura 2.9. Representación del puente en términos de cortes mínimos.



2.1.5 Tiempo de Fallo

Hasta el momento se ha considerado el funcionamiento del sistema de componentes en un punto fijo del tiempo. Ahora se enfatizará en el funcionamiento de componentes de sistemas hasta que falle sin tomar en cuenta el tiempo, sino el funcionamiento, es decir, cada componente (y el mismo sistema) funciona hasta que falla en un cierto momento; no se considera la reparación de éstos.

Recordemos que las siguientes identidades se cumplen para variables binarias x_1, \dots, x_k (no necesariamente para las variables generales):

$$\prod_{i=1}^k x_i \equiv \min(x_1, \dots, x_k),$$

$$\prod_{i=1}^k x_i \equiv \max(x_1, \dots, x_k)$$

Así podemos reescribir la identidad (2.8) como

$$\phi(x) \equiv \max_{1 \leq j \leq p} p_j(x) \equiv \max_{1 \leq j \leq p} \min_{i \in P_j} x_i \quad (2.10)$$

Y la ecuación (2.9) puede escribirse como

$$\phi(x) \equiv \min_{i \leq j \leq k} k_j(x) \equiv \min_{1 \leq j \leq k} \max_{i \in K_j} x_i \quad (2.11)$$

Las entidades (2.10) y (2.11) tienen una interpretación significativa no solamente en el caso de las variables binarias que indican el estado de la componente, sino también, en el caso del tiempo de fallo de las componentes.

Sea t_i el tiempo de fallo de la componente i -ésima, para $i = 1, \dots, n$ y $\tau_\phi(t)$ el tiempo de falla de una estructura ϕ en función del tiempo de fallo de las componentes.

Teorema 2.3. Si ϕ es una estructura coherente, con conjunto de caminos mínimos P_1, \dots, P_p y con conjunto de cortes mínimos K_1, \dots, K_k , entonces

$$\max_{1 \leq j \leq p} \min_{i \in P_j} t_i \equiv \tau_\phi(t) \equiv \min_{1 \leq j \leq k} \max_{i \in K_j} t_i \quad (2.12)$$

Prueba:

La primera identidad se deduce de:

- a) Un sistema coherente falla cuando falla el último camino mínimo de la estructura serie, es decir, han fallado todos los caminos mínimos.
- b) Una estructura serie falla cuando falla la primera componente.

La segunda se deduce de:

- c) Un sistema coherente falla cuando falla el primer corte mínimo de la estructura paralelo.
- d) Una estructura paralelo falla hasta que falla la última componente.

El teorema 2.3 nos dice que el dominio y el rango de la función ϕ , definida en (2.10) ó (2.11) para los argumentos binarios pueden ser extendidos a la recta real.

2.1.6 Importancia Relativa de los componentes.

Para un sistema coherente, algunos componentes son más importantes que otro en la determinación del funcionamiento del sistema. Por ejemplo, si una componente está en serie, el resto de componentes pareciera que son tan importantes como cualquier otra componente en el sistema. Claramente el valor designado y el análisis de fiabilidad tienen una medida cuantitativa de la importancia de las componentes individuales del sistema.

Debemos de preguntarnos ¿Cuán importante es la componente i , en el funcionamiento del sistema?.

En primer lugar debe de conocerse el estado de cada una de las componentes restantes (\bullet_i, x) .

Si $\phi(1_i, x) = 1$ mientras que $\phi(0_i, x) = 0$, es decir, si

$$\phi(1_i, x) - \phi(0_i, x) = 1 \quad (2.13)$$

Consideramos la componente i más importante que el resto de componentes, si $\phi(1_i, x) = 1 = \phi(0_i, x)$ ó $\phi(1_i, x) = 0 = \phi(0_i, x)$; en el primer caso, (2.13) determina el estado de la componente i , es decir si funciona o no, mientras que en el caso alternativo [(2.13) no es verdadero], el estado del componente i no tiene ninguna consecuencia. Cuando se cumpla (2.13), llamaremos $(1_i, x)$ un vector de camino crítico para i y $C_1(1_i, x)$ al correspondiente conjunto de caminos críticos para i , se tiene:

$$n_\phi(i) = \sum_{\{x|x_i=1\}} [\phi(1_i, x) - \phi(0_i, x)] \quad (2.14)$$

Representa el número total de los vectores de camino críticos para i (o equivalente, el número total de conjuntos de camino críticos para i).

Esto sugiere la siguiente medida de la importancia estructural de la componente i :

$$I_\phi(i) = \frac{1}{2^{n-1}} n_\phi(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\{x|x_i=1\}} [\phi(1_i, x) - \phi(0_i, x)] \quad (2.15)$$

La proporción 2^{n-1} resulta de fijar $x_i = 1$ y hacer variar el resto de componentes, los cuales son vectores de camino críticos para i .

Así para cualquier estructura dada ϕ , se puede ordenar las componentes de acuerdo a la importancia estructural por ordenación de los valores $I_\phi(1), \dots, I_\phi(n)$.

Ejemplo 2.14. Se tiene que:

(a) Sea ϕ una estructura 2 de 3. Entonces $I_\phi(1) = (1/2)^2 \cdot 2 = 1/2$ puesto que entre los cuatro resultados 100, 101, 110, 111, hay dos vectores de camino crítico para la componente 1 (101 y 110).

Por simetría, $I_\phi(2) = I_\phi(3) = 1/2$

(b) Sea $\phi(x) = x_1(x_2 \cup x_3)$, entonces $I_\phi(1) = (1/2)^2 \cdot 3 = 3/4$, puesto que entre los cuatro resultados 100, 101, 110, 111, hay tres vectores de camino crítico para la componente 1 (101, 110, y 111).

Sin embargo, $I_\phi(2) = (1/2)^2 \cdot 1 = 1/4$, puesto que entre los cuatro valores 010, 011, 110, 111, hay solamente un vector de camino crítico para la componente 2 es decir, 110. Por simetría, $I_\phi(3) = 1/4$.

Observemos que la componente 1 es más importante que la componente 2 ó 3. Esto es lo esperado, puesto que la componente 1 está en serie con el resto del sistema.

2.1.7 Módulo de Sistemas Coherentes.

Muchos productos, sistemas que son bastante complicados y constan de muchas componentes frecuentemente cientos o incluso miles. Para la mayoría de esos sistemas complejos, se pueden fortalecer los resultados obtenidos con estructuras equivalentes, ya que muchas veces es posible dividir el sistema en módulos (o subsistemas) que se pueden tratar simultáneamente como componentes del sistema total y como sistemas que constan de componentes. Al definir una jerarquía de dos o más niveles de este modo, se simplifica enormemente el análisis de estado, y por tanto las relaciones de fiabilidad. Nos referimos normalmente a ese proceso de definir una jerarquía anidada de componentes como una descomposición modular.

En el análisis práctico de la fiabilidad, el procedimiento frecuente es, en primer lugar calcular la fiabilidad de cada uno de los subsistemas disjuntos en los cuales se puede descomponer un sistema y después calcular la fiabilidad del sistema total con base a las fiabilidades de los subsistemas.

En el desarrollo de este apartado utilizaremos la siguiente notación:

Sea A un subconjunto de C, entonces:

- (a) X^A es el vector con los elementos X_i , $i \in A$, y
- (b) A^C denota el subconjunto de C complemento a A.

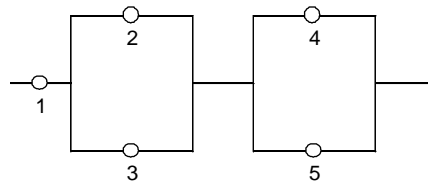
Definición 2.9. El sistema coherente (A, χ) es un módulo del sistema coherente (C, ϕ) si $\phi(x) = \psi[\chi(x^A, x^{A^c})]$, donde ψ es una función de estructura coherente y $A \subseteq C$. El sistema $A \subseteq C$ es llamado un conjunto modular de (C, ϕ) . Si $A \subset C$, entonces (A, χ) es un módulo propio de (C, ϕ) .

Intuitivamente, un módulo (A, χ) de (C, ϕ) es un subsistema coherente que actúa como si fuera exactamente un componente. Sabiendo que χ es 1 ó 0, es suficiente información para el valor de x_i para cada i dentro de A , en la determinación del valor de ϕ .

En el diagrama general del funcionamiento de un sistema, puede identificarse un módulo, por el hecho de que es un conjunto de componentes con una red principal en el sistema y una red principal fuera del sistema. Es inmediato que cada componente y su función indicador constituyen un módulo.

Ejemplo 2.15. Un sistema coherente (C, ϕ) , donde $\phi(x) = x_1(x_2 \cup x_3)(x_4 \cup x_5)$ y $C = \{1, \dots, 5\}$, entonces un módulo de (C, ϕ) , es (A, χ) .

Figura 2.10. Ejemplo "hi-fi"



Donde $A = \{2,3\}$ es conjunto modular y $\chi(x^A) = x_2 \cup x_3$ es la función modular de la estructura coherente. Por tanto la función estructura puede expresarse de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \psi(\chi(x^A), x^{A^c}) = x_1 \cdot \chi(x^A) \cdot (x_4 \cup x_5)$$

Otros módulos son:

$$\begin{aligned} & (\{4,5\}, x_4 \cup x_5) \\ & (\{2,3,4,5\}, (x_2 \cup x_3) \cdot (x_4 \cup x_5)) \\ & (\{1,2,3\}, x_1 \cdot (x_2 \cup x_3)) \\ & (\{1,4,5\}, x_1 \cdot (x_4 \cup x_5)) \end{aligned}$$

Los módulos restantes son simplemente las componentes individuales y el mismo sistema. En la práctica, el proceso de diseñar un sistema automáticamente nos lleva a una descomposición modular del sistema, es decir, el sistema se descompone en módulos disjuntos.

Definición 2.10. Una descomposición modular de un sistema coherente (C, ϕ) es un conjunto de módulos disjuntos $\{(A_1, \chi_1), \dots, (A_r, \chi_r)\}$ junto con una organización de estructura ψ .

- a) $C = \bigcup_{i=1}^r A_i$, donde $A_i \cap A_j = \emptyset$ (conjunto vacío) para $i \neq j$;
- b) $\phi(x) \equiv \psi[\chi_1(x^{A_1}), \chi_2(x^{A_2}), \dots, \chi_r(x^{A_r})]$

A menudo, en la práctica, dada una descomposición modular de un sistema coherente, puede ser útil obtener un refinamiento de la descomposición. Es decir, podemos descomponer cada uno de los módulos de la descomposición original en módulos más pequeños. Claramente, un refinamiento de una descomposición de un sistema coherente (C, ϕ) es una descomposición de (C, ϕ) . En la práctica, los refinamientos pueden darse por:

- Un sistema se descompone en sus subsistemas importantes.
- Cada subsistema importante se descompone en componentes.
- Cada componente se descompone en partes.

La fiabilidad de cada componente depende de los datos observados, a partir de esta información se calcula la fiabilidad de cada componente. Al conocer la fiabilidad de cada componente, puede calcularse la fiabilidad de cada subsistema. Finalmente, a partir de la fiabilidad de los subsistemas se calcula la fiabilidad del sistema.

2.2 Fiabilidad de Sistemas Coherentes.

Para conocer la fiabilidad de los sistemas coherentes, es importante en primer lugar conocer la fiabilidad de sus componentes, asimismo se debe conocer los límites de la fiabilidad en términos de caminos y cortes mínimos.

2.2.1 Fiabilidad de los Sistemas de Componentes Independientes.

Suponiendo que las componentes son estadísticamente independientes y que el estado X_i del i -ésimo componente es aleatorio con:

$$P[X_i = 1] = p_i = E(X_i) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.16)$$

También suponiendo que $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, nos referimos a p_i como la probabilidad de que el i -ésimo componente funcione, esto es la fiabilidad de la componente i . Similarmente la fiabilidad del sistema es dado por:

$$P[\phi(X) = 1] = h = E[\phi(X)] \quad (2.17)$$

Bajo la suposición que las componentes son independientes, la fiabilidad del sistema puede representarse como una función de fiabilidad de componentes: $h = h(p)$

Cuando, las probabilidades son iguales, es decir, $p_1 = \dots = p_n = p$ se utilizará a $h(p)$ como la función de la fiabilidad de la estructura ϕ . Ahora bien, si las componentes no son independientes la fiabilidad del sistema puede no ser una función únicamente de "p"; en este caso, $h(p)$ no debe ser utilizado.

Ejemplo 2.16. La estructura serie $\phi(x) = \prod_{i=1}^n x_i$ (ver figura 2.1), tiene función de fiabilidad $h(p) = \prod_{i=1}^n p_i$.

Ejemplo 2.17. La estructura paralelo $\phi(x) = \prod_{i=1}^n x_i$, (ver figura 2.2), tiene función de fiabilidad.

$$h(p) = \prod_{i=1}^n p_i \equiv 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i) .$$

Ejemplo 2.18. El sistema Hi-fi (ver figura 2.4), tiene función de fiabilidad

$$h(p) = (p_1 + p_2 - p_1 p_2) p_3 (p_4 + p_5 - p_4 p_5) .$$

Si asumimos que las probabilidades son iguales, es decir $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$, el sistema k de n, tiene estructura $\phi(x) = 1$ si y solamente si $\sum_{i=1}^n x_i \geq k$, tal situación se muestra en el ejemplo siguiente:

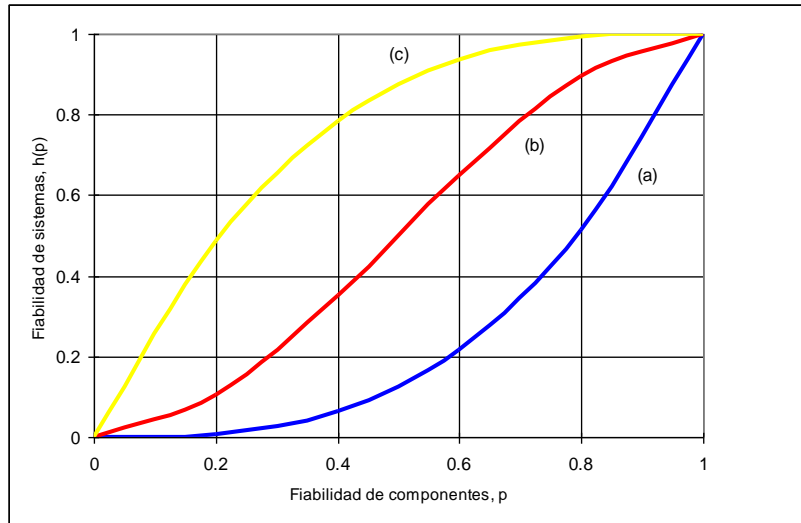
Ejemplo 2.19. Un sistema k de n tiene función de fiabilidad:

$$h(p) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Ejemplo 2.20. En la figura 2.11 trazamos la función de la fiabilidad $h(p)$ para los sistemas de tres componentes idénticos:

- a) Sistema serie: $h(p) = p^3$.
- b) Sistema 2 de 3: $h(p) = 3p^2(1-p) + p^3$.
- c) Sistema paralelo: $h(p) = 1 - (1-p)^3$.

Figura 2.11. Fiabilidad de sistema vrs. Fiabilidad de componentes para sistema de tres componentes



2.2.2 Propiedades básicas de la fiabilidad del sistema

Dentro de las propiedades se encuentra un procedimiento que en ocasiones es útil para expresar explícitamente una función de fiabilidad y se basa en el siguiente lema:

Lema 2.2 La identidad siguiente se cumple para la función de la fiabilidad:

$$h(p) = p_i h(1, p) + (1 - p_i) h(0, p) \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.18)$$

Prueba.

$$h(p) = E[\phi(X)] = E[X_i \phi(1, X) + (1 - X_i) \phi(0, X)] = E(X_i) E[\phi(1, X)] + (1 - E(X_i)) E[\phi(0, X)]$$

y sustituyendo los valores esperados correspondientes se llega a la ecuación (2.18).

De la ecuación (2.18), notemos que $h(p)$ es multilineal, es decir, es lineal en cada p_i , además, cuando $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$, es un polinomio en p .

Debemos recordar que las estructuras coherentes tienen funciones de estructura creciente. La correspondiente propiedad de monotonía para funciones de fiabilidad está dado en el teorema siguiente:

Teorema 2.4. Sea $h(p)$ la función de la fiabilidad de una estructura coherente. Entonces $h(p)$ es estrictamente creciente en cada p_i , para $0 << p << 1$.¹¹

Prueba.

Por la ecuación (2.18),

$$\frac{\partial h}{\partial p_i} = h(1_i, p) - h(0_i, p), \quad (2.19)$$

De modo que

$$\frac{\partial h}{\partial p_i} = E[\phi(1_i, X) - \phi(0_i, X)] \quad (2.20)$$

Ya que ϕ es creciente, entonces, $\phi(1_i, x) - \phi(0_i, x) \geq 0$. Además, $\phi(1_i, x^0) - \phi(0_i, x^0) = 1$ para algún x^0 , puesto que cada componente es relevante.

Puesto que $0 << p << 1$, x^0 tiene probabilidad de ocurrencia positiva. Así $E[\phi(1_i, X) - \phi(0_i, X)] > 0$,

en consecuencia $\frac{\partial h(p)}{\partial p_i} > 0$, por lo tanto $h(p)$ es estrictamente creciente en cada p_i .

En el teorema 2.2 se demostró para la estructura que la redundancia en el nivel de componente es más eficaz que la redundancia en el nivel de sistema.

Teorema 2.5. Sea h la función de fiabilidad de un sistema coherente. Entonces:

- a) $h(p \cup p') \geq h(p) \cup h(p')$,
- b) $h(p \cdot p') \leq h(p)h(p')$, para todos $0 \leq p \leq 1$ y $0 \leq p' \leq 1$.

Igualmente se cumple en:

- a) Para todo p, p' si y solamente si el sistema es paralelo.
- b) Para todo p, p' si y solamente si el sistema es serie.

¹¹ La notación $a << b \leftrightarrow a_i < b_i$ para todo i

Prueba.

Sea $X_1, \dots, X_n, X'_1, \dots, X'_n$ variables aleatorias binarias independientemente con $P[X_1=1]=p_i, P[X'_1=1]=p'_i$. Entonces por el teorema 2.2 (a) se tiene que:

$$h(p \cup p') - h(p) \cup h(p') = \sum_x \sum_{x'} [\phi(x \cup x') - \phi(x) \cup \phi(x')] P[X=x] P[X'=x'] \geq 0$$

La condición suficiente para que se cumplan las igualdades en (a) y (b), es la misma condición correspondiente a la igualdad del teorema 2.2.

Si $0 << p << 1$ y $0 << p' << 1$, entonces $P[X=x] > 0$ para todo x y $P[X'=x'] > 0$ para todo x' . Así en ambos (a) y (b) se tiene la condición necesaria para la igualdad del teorema 2.2.

Ejemplo 2.21. Dado el sistema de componentes mostrado en la figura 2.12. La función de estructura es $\phi(x) = x_1(x_2 \cup x_3)$ y al calcular la correspondiente función de fiabilidad, se tiene:

$$\begin{aligned} h(p) &= E[\phi(x)] = E[x_1(x_2 \cup x_3)] \\ &= E[x_1 - x_1(1-x_2)(1-x_3)] \\ &= p_1 - p_1(1-p_2)(1-p_3) \end{aligned}$$

Asumiendo común las fiabilidades de las componentes, es decir, $p_i = p$, se tiene:

$$\begin{aligned} h(p) &= p - p(1-p)(1-p) \\ h(p) &= p(2p - p^2) \end{aligned}$$

Considerando el sistema en general se tiene una función de fiabilidad:

$$\begin{aligned} h(p) \cup h(p) &= 1 - (1-h(p))(1-h(p)) \\ &= 1 - (1-h(p))^2 \\ &= 1 - [1 - p(2p - p^2)]^2 \end{aligned}$$

Considerando las componentes se obtiene una función de fiabilidad $h(p \cup p)$, tomando en cuenta que:

$$p \cup p = 1 - (1-p)(1-p) \\ = 2p - p^2$$

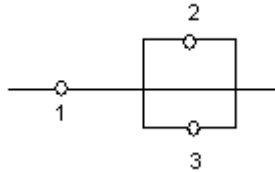
Entonces, la función de fiabilidad $h(p \cup p)$ viene dada por:

$$h(p \cup p) = (2p - p^2) \left[2(2p - p^2) + (2p - p^2)^2 \right]$$

Completando cuadrados en el corchete, se obtiene la función:

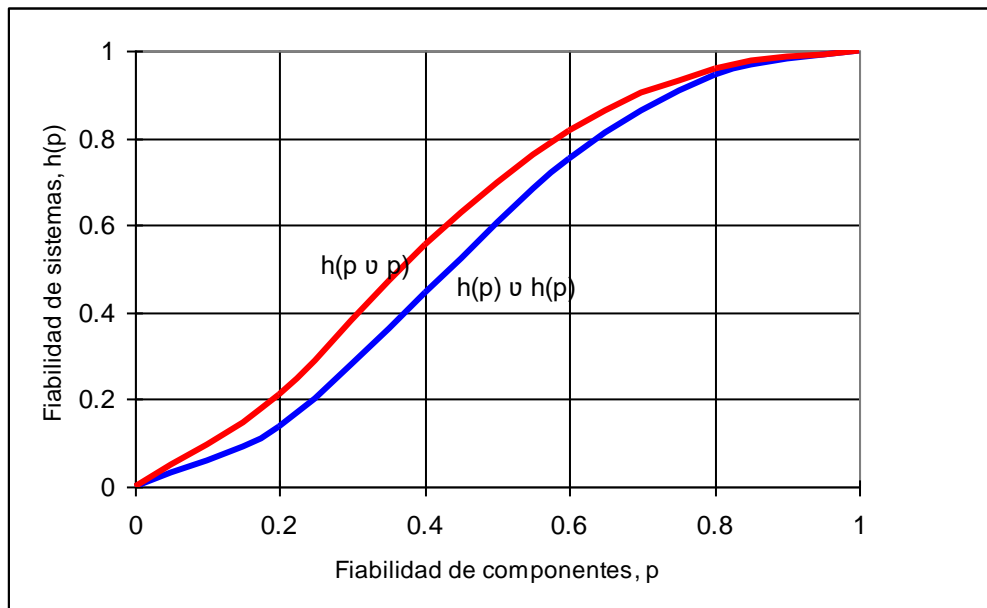
$$h(p \cup p) = \left[(2p - p^2) \right] \left[1 - (1-p)^4 \right]$$

Figura 2.12. Sistema de tres componentes



Las dos funciones de fiabilidad del sistema se muestran en la figura 2.13; desde luego $h(p \cup p)$ domina $h(p) \cup h(p)$, como se demostró en general en el teorema 2.5.

Figura 2.13. Redundancia de las componentes vrs. Redundancia del sistema.



2.2.3 Cálculo de la fiabilidad exacta del sistema.

El camino mínimo y el corte mínimo¹², proporcionan los medios para calcular sistemáticamente la fiabilidad de cualquier sistema coherente. De las ecuaciones (2.8) y (2.9) se tiene:

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^p \prod_{i \in P_j} x_i \quad y \quad (2.21)$$

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} x_i \quad (2.22)$$

Extendiendo los lados derechos en expresiones multinomiales en las x_i y usando que $x_i^2 = x_i$, se puede calcular la fiabilidad del sistema simplemente tomando la esperanza, de la siguiente manera:

$$h(p) = E \left(\prod_{j=1}^p \prod_{i \in P_j} X_i \right)$$

$$h(p) = E \left(\prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} X_i \right)$$

Ejemplo 2.22. Si tomamos la estructura del ejemplo 2.15 se tiene:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x_1(x_2 \cup x_3)(x_4 \cup x_5) \\ &= x_1(x_2 + x_3 - x_2x_3)(x_4 + x_5 - x_4x_5) \\ &= x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 - x_1x_2x_4x_5 + x_1x_3x_4 \\ &\quad + x_1x_3x_5 - x_1x_3x_4x_5 - x_1x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_3x_4x_5 \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(p)$ es,

$$\begin{aligned} h(p) = E(\phi(X)) &= p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 - p_1p_2p_4p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 \\ &\quad - p_1p_3p_4p_5 - p_1p_2p_3p_4 - p_1p_2p_3p_5 + p_1p_2p_3p_4p_5 \end{aligned}$$

Alternativamente, puede calcularse la fiabilidad del sistema pivoteando sobre el i -ésimo componente como en (2.18).

Éste es el método de tomar sucesivas esperanza condicional. También se calcula $h(p)$ sumando sobre todo las 2^n vectores X , con coordenadas 0 ó 1, así:

¹² Véase la Representación de los sistemas coherentes en términos de caminos y cortes.

$$h(p) = \sum_x \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_i p_i^{x_i} q_i^{1-x_i} \quad \text{donde } q_i = 1 - p_i, \text{ y } 0^0 \equiv 1 \quad (2.23)$$

Es evidente, del ejemplo anterior que el cálculo exacto de la fiabilidad del sistema es normalmente una tarea difícil para sistemas complejos.

2.2.4 Importancia de la Fiabilidad de Componentes.

Anteriormente se ha desarrollado una medida de importancia estructural de cada componente de un sistema coherente. Esta medida se basa únicamente en el conocimiento de la estructura del sistema. Se desarrolla después una medida de importancia de la fiabilidad de cada componente, tomando en cuenta la fiabilidad de las componentes tanto como la estructura del sistema. Tal medida se utiliza en el análisis de sistema, para determinar aquellas componentes en las que se debe tener investigación y desarrollo para obtener mejores resultados.

Lo anterior indica una relación entre la fiabilidad del sistema y la de sus componentes, puesto que la medida de la importancia de una componente contribuye a la fiabilidad del sistema, por la tasa en que la fiabilidad del sistema aumenta como la fiabilidad del componente aumenta.

Definición 2.11. La importancia de la fiabilidad $I_h(j)$ de la componente j está dada por

$$I_h(j) = \frac{\partial h(p)}{\partial p_j} \quad (2.24)$$

De (2.19), se tiene una definición equivalente

$$I_h(j) = h(1_j, p) - h(0_j, p)$$

O más explícitamente,

$$I_h(j) = E[\phi(1_j, X) - \phi(0_j, X)] \quad (2.25)$$

Observación.

a) De (2.25), vemos que si $p_i = \frac{1}{2}$ para $i \neq j$, la importancia de la fiabilidad $I_h(j) \equiv I_\phi(j)$, la importancia estructural.

Si $p_i = \frac{1}{2}$ para $i = 1, \dots, n$, entonces la importancia de la fiabilidad y la importancia estructural coinciden para cada componente del sistema.

b) Usando los argumentos del teorema 2.4, está claro que para un sistema coherente, la fiabilidad de cada componente pertenece al intervalo (0,1), la importancia de la fiabilidad de la componente satisface.

$$0 < I_h(j) < 1 \text{ Para } j = 1, \dots, n \text{ y } n > 1 \quad (2.26)$$

c) En el caso de que las componentes sean estadísticamente dependientes, se utilizará la fórmula (2.25) para definir la importancia de la fiabilidad de las componentes j-ésima.

La importancia de la fiabilidad de las componentes puede evaluar los efectos de mejora en la fiabilidad de las componentes sobre la fiabilidad del sistema, esto a través de la derivación de la regla de la cadena:

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial P_j} \frac{dP_j}{dt}$$

Donde t es un parámetro común, t es el tiempo transcurrido desde que el sistema comienza su funcionamiento.

Utilizando (2.24) se tiene:

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n I_h(j) \frac{dP_j}{dt} \quad (2.27)$$

Así, la tasa de cambio de la fiabilidad del sistema es una combinación ponderada de las tasas de cambio de la fiabilidad de componentes, donde los pesos son los valores de importancia de la fiabilidad.

De la fórmula (2.27) puede obtenerse

$$\Delta h \cong \sum_{j=1}^n I_h(j) \Delta P_j \quad (2.28)$$

Donde Δh es el incremento correspondiente a la fiabilidad del sistema y ΔP_j es el incremento en la fiabilidad de las componentes. Según la ecuación (2.28), la importancia de la fiabilidad son los pesos. Así pequeñas incrementos ΔP_j en la fiabilidad de las componentes lleva a un incremento Δh en la fiabilidad de sistemas.

Ejemplo 2.23. Supongamos que se han etiquetado las componentes, y la fiabilidad de las componentes están ordenadas de la siguiente forma:

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n .$$

a) Sistema Serie. Si $h(p) = \prod_{i=1}^n p_i$, entonces $I_h(j) = \prod_{i \neq j} p_i$ y $I_h(1) \geq I_h(2) \geq \dots \geq I_h(n)$, para

que la componente con fiabilidad baja sea la más importante para el sistema. Esta reflexión indica que “una cadena es tan buena como su eslabón más débil”.

b) Sistema paralelo. Si $h(p) = \prod_{i=1}^n p_i$ entonces $I_h(j) = \prod_{i \neq j} (1 - p_i)$ y $I_h(1) \leq I_h(2) \leq \dots \leq I_h(n)$, de

modo que la componente con fiabilidad más alta es la más importante del sistema.

c) Sistema 2 de 3. Para un sistema 2 de 3, $h(p) = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2 p_1 p_2 p_3$, entonces

$$I_h(1) = p_2 + p_3 - 2 p_2 p_3$$

$$I_h(2) = p_1 + p_3 - 2 p_1 p_3 \text{ y}$$

$$I_h(3) = p_1 + p_2 - 2 p_1 p_2$$

Si $p_i \geq \frac{1}{2}$, para $i = 1, 2, 3$, entonces

$$I_h(3) \geq I_h(2) \geq I_h(1)$$

Y la componente con mayor fiabilidad, es la más importante del sistema. Si $p_i \leq \frac{1}{2}$ para $i = 1, 2, 3$,

entonces

$$I_h(1) \geq I_h(2) \geq I_h(3)$$

Y el componente con fiabilidad más baja es el más importante en el sistema.

2.2.5 Asociación de Variables Aleatorias.

En muchas situaciones de la fiabilidad, las variables aleatorias de interés no son independientes, sino que están un poco asociadas. Como ejemplos se pueden considerar:

- a) Las estructuras de caminos mínimos de un sistema coherente que tiene componentes en común.
- b) Componentes sometidos al mismo sistema de tensiones.
- c) Estructuras en las cuales las componentes comparten la carga, de modo que la falta de un componente da como consecuencia un incremento en la carga creciente en cada uno de los componentes restantes.

Observemos que en cada caso las variables aleatorias de interés tienden a actuar similarmente. De modo que:

- a) La falla de una componente disminuirá el funcionamiento de toda la estructura del camino mínimo.
- b) Una alta tensión afectará a todas las componentes al contrario.
- c) El funcionamiento (fallo) de un componente contribuye al funcionamiento (fallo) de los componentes restantes.

Ahora debemos formular la definición de la asociación apropiada del estado de la fiabilidad. Si se tuviese dos variables aleatorias S y T , se considerarían asociadas si $\text{Cov}[S, T] \geq 0$. Un requisito más fuerte sería $\text{Cov}[f(S), g(T)] \geq 0$ para cualquier incremento en f y g . Finalmente, si $\text{Cov}[f(S, T), g(S, T)] \geq 0$ para cualquier incremento en f y g se tendría una mejor asociación.

El más fuerte de estos criterios tiene una generalización multivariante natural, la cual sirve como asociación útil de la definición o especialmente para los usos de la fiabilidad.

Definición 2.12. Sean T_1, \dots, T_n variables aleatorias (no necesariamente binarias) son asociadas si: $Cov[\Gamma(T), \Delta(T)] \geq 0$. Para todos los pares de funciones binarias crecientes Γ, Δ .

La asociación de variables aleatorias satisface las siguientes propiedades multivariantes:

- (P₁) Cualquier subconjunto de variables aleatorias asociadas es asociado.
- (P₂) El sistema que consiste en una sola variable aleatoria es asociado.
- (P₃) Las funciones crecientes de variables aleatorias asociadas son funciones asociadas.

Prueba (P₃).

Sea T_1, \dots, T_n , asociado, f_i creciente y $S_i \equiv f_i(T)$ para $i = 1, \dots, m$. Sea Γ y Δ funciones binarias crecientes, cuando $\Gamma(f_1(T), \dots, f_m(T))$ y $\Delta(f_1(T), \dots, f_m(T))$ son funciones binarias crecientes de T . Por definición de asociación.

$$Cov_S[\Gamma(S), \Delta(S)] = Cov_T[\Gamma(f(T)), \Delta(f(T))] \geq 0$$

- (P₄) Si dos conjuntos de variables aleatorias asociadas son independientes entre sí, su unión es un conjunto de variables aleatorias asociadas.

Prueba.

Si X e Y son asociadas e independientes entre si. Sea Γ, Δ funciones binarias crecientes. Podemos escribir Γ por $\Gamma(X, Y)$ y Δ por $\Delta(X, Y)$, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} Cov(\Gamma, \Delta) &= E_{X,Y} \Gamma \Delta - E_{X,Y} \Gamma E_{X,Y} \Delta \\ &= [E_X E_Y \Gamma \Delta - E_X (E_Y \Gamma \cdot E_Y \Delta)] + [E_X (E_Y \Gamma E_Y \Delta) - E_X E_Y \Gamma \cdot E_X E_Y \Delta] \\ &= E_X Cov_Y(\Gamma, \Delta) + Cov_X(E_Y \Gamma, E_Y \Delta) \end{aligned}$$

Donde para cualquier vector de variables aleatorias Z , E_z se denota como la esperanza de la distribución de Z . En la segunda ecuación se ha usado el hecho de que $E_{X,Y} = E_X E_Y$, partiendo de que X e Y son independientes entre si.

Dado que $Cov_Y[\Gamma(x, Y), \Delta(x, Y)] \geq 0$ para cada x fijo, entonces $E_X Cov_Y(\Gamma, \Delta) \geq 0$. Dado que $E_Y \Gamma(x, Y)$ y $E_Y \Delta(x, Y)$ son funciones crecientes de x , entonces:

$$Cov_X(E_Y \Gamma, E_Y \Delta) \geq 0.$$

Según la propiedad P₂ y P₄ de la asociación de variables aleatorias establece que los sistemas coherentes de componentes independientes son asociados. Por lo tanto, volviendo al ejemplo indicado en el caso (a), las funciones de estructura de camino mínimo de un sistema coherente son crecientes en el funcionamiento de las componentes indicada por las variables X_1, \dots, X_n . Así si X_1, \dots, X_n están asociados, el camino mínimo de las variable indicadas están asociadas.

En el caso especial en que las variables aleatorias asociadas son binarias, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.6. Si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias asociadas binarias entonces $(1 - X_1), \dots, (1 - X_n)$ son variables aleatorias asociadas binarias.

Prueba.

Sea Γ, Δ funciones crecientes binarias. Entonces el dual de la función $\Gamma^D(x) = 1 - \Gamma(1 - x), \Delta^D(x) = 1 - \Delta(1 - x)$, son también crecientes binarias. Podemos escribir:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Gamma(1-x), \Delta(1-x)) &= \text{Cov}[1 - \Gamma^D(x), 1 - \Delta^D(x)] \\ &= \text{Cov}[\Gamma^D(x), \Delta^D(x)] \geq 0 \end{aligned}$$

Esto por la propiedad P₃.

2.2.6 Cotas de la Fiabilidad del Sistema

Al calcular la fiabilidad de un sistema serie asumiendo que los componentes son independientes cuando de hecho están asociados, subestimaremos la fiabilidad del sistema. Lo contrario es verdadero para los sistemas paralelos. Esto se sigue del siguiente teorema

Teorema 2.7. Si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias asociadas binarias, entonces

$$p\left[\prod_{i=1}^n X_i = 1\right] \geq \prod_{i=1}^n p[X_i = 1] \tag{2.29}$$

$$p\left[\prod_{i=1}^n X_i = 1\right] \leq \prod_{i=1}^n p[X_i = 1] \quad (2.30)$$

Prueba.

Las variables x_1 y $\prod_{i=2}^n X_i$ son funciones crecientes de X , éstas están asociadas. Así

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left[X_1, \prod_{i=2}^n X_i\right] &= E\left(X_1 \prod_{i=2}^n X_i\right) - E(X_1)E\left(\prod_{i=2}^n X_i\right) \geq 0 \\ &= E[x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n] - E(x_1) \cdot E[x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n] \geq 0 \end{aligned}$$

a través de aplicaciones repetidas de este argumento se llega a:

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \geq \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

la cual es equivalente a (2.29).

Para la prueba de (2.30) se utilizará lo siguiente:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n x_i &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) \\ P\left[\prod_{i=1}^n x_i = 1\right] &= P\left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = 1\right] \\ &= P\left[\prod_{i=1}^n (1 - x_i) = 0\right] \end{aligned}$$

Sea $(1 - x_1)$ y $\prod_{i=2}^n (1 - x_i)$ funciones decrecientes de X , éstas están asociadas. Así:

$$\text{Cov}\left[(1 - X_1), \prod_{i=2}^n (1 - X_i)\right] \geq 0 \quad [\text{Por teorema 2.6}]$$

Desarrollando la covarianza, se tiene:

$$\text{Cov}\left[(1 - X_1), \prod_{i=2}^n (1 - X_i)\right] = E\left[(1 - x_1) \prod_{i=2}^n (1 - x_i)\right] - E[(1 - x_1)]E\left[\prod_{i=2}^n (1 - x_i)\right] \geq 0$$

Como $(1 - x_1) \prod_{i=2}^n (1 - x_i) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$, entonces:

$$E\left[\prod_{i=1}^n (1 - x_i)\right] \geq E[(1 - x_1)]E\left[\prod_{i=2}^n (1 - x_i)\right] \geq \dots \geq \prod_{i=1}^n E(1 - x_i)$$

Mediante procedimientos matemáticos se llega a lo siguiente:

$$E\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) \leq \prod_{i=1}^n E(x_i)$$

La cual es equivalente a (2.30).

Observación.

Un ejemplo extremo de la asociación (relación) ocurre si $X_1 = X_2 = \dots = X_n$ con probabilidad de 1.

Entonces:

$$P\left[\prod_1^n X_i = 1\right] = P[X_1 = 1]$$

mientras que

$$\prod_{i=1}^n P[X_i = 1] = P^n[X_1 = 1]$$

De modo que la ecuación (2.29) claramente se cumple. Similarmente se tiene

$$P\left[\prod_{i=1}^n X_i = 1\right] = 1 - P[X_1 = 0],$$

mientras que

$$\prod_{i=1}^n P[X_i = 1] = 1 - P^n[X_1 = 0],$$

De modo que (2.30) claramente se cumple.

Teorema 2.8. Si T_1, T_2, \dots, T_n son variables aleatorias asociadas (no necesariamente binarias), entonces

$$P[T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n] \geq \prod_{i=1}^n P[T_i > t_i] \tag{2.31}$$

Y

$$P[T_1 \leq t_1, \dots, T_n \leq t_n] \geq \prod_{i=1}^n P[T_i \leq t_i] \tag{2.32}$$

Prueba.

Sea $X_i(t_i)=1$, si $T_i > t_i$ y $X_i(t_i)=0$, si $T_i \leq t_i$. Entonces:

Para $X_i(t_i)=1$, obtenemos:

$$P\left[\prod_{i=1}^n x(T_i)=1\right] \geq \prod_{i=1}^n P[x(T_i)=1] \quad [\text{Por la ecuación (2.29)}]$$

Bajo la condición $T_i > t_i$, es decir, $x(T_i) > x(t_i)$ entonces:

$$P\left[\prod_{i=1}^n x(T_i) > x(t_i)\right] \geq \prod_{i=1}^n P[x(T_i) > x(t_i)]$$

$$P\left[\prod_{i=1}^n T_i > t_n\right] \geq \prod_{i=1}^n P[T_i > t_i]$$

$$P[T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n] \geq \prod_{i=1}^n P[T_i > t_i]$$

Y de esta manera se cumple (2.31)

Para $X_i(t_i)=0$, obtenemos:

$$P\left[\prod_{i=1}^n x(T_i)=0\right] \geq \prod_{i=1}^n P[x(T_i)=0] \quad [\text{Por la ecuación (2.29)}]$$

Bajo la condición $T_i \leq t_i$, es decir, $x(T_i) \leq x(t_i)$ entonces:

$$P\left[\prod_{i=1}^n x(T_i) \leq x(t_i)\right] \geq \prod_{i=1}^n P[x(T_i) \leq x(t_i)]$$

$$P\left[\prod_{i=1}^n T_i \leq t_n\right] \geq \prod_{i=1}^n P[T_i \leq t_i]$$

$$P[T_1 \leq t_1, \dots, T_n \leq t_n] \geq \prod_{i=1}^n P[T_i \leq t_i]$$

Y de esta manera se cumple (2.32)

Por tanto, $X_i(t_i)$ es no decreciente en T_i , y así que por la propiedad P_3 de la asociación de variables aleatorias, $X_1(t_1), \dots, X_n(t_n)$ son funciones asociadas.

Corolario 2.1. Si T_1, T_2, \dots, T_n asociados, entonces:

$$P\left[\min_{1 \leq i \leq n} T_i > t\right] \geq \prod_{i=1}^n P[T_i > t] \quad (2.33)$$

$$P\left[\max_{1 \leq i \leq n} T_i > t\right] \leq \prod_{i=1}^n P[T_i > t] \quad (2.34)$$

Para (2.33) se tiene:

$$P\left[\min(T_1, \dots, T_n) > t\right] \geq \prod_{i=1}^n P[T_i > t] \quad [\text{Por la ecuación (2.29)}]$$

$$P\left[T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_n > t\right] \geq \prod_{i=1}^n P[T_i > t]$$

Si el mínimo de T_i es mayor que t quiere decir que todos los demás T_i , son mayores que t , se cumple (2.33).

Para (2.34) se tiene:

$$P\left[\max(T_1, \dots, T_n) > t\right] \leq \prod_{i=1}^n P[T_i > t] \quad [\text{Por la ecuación (2.30)}]$$

$$P\left[T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_n > t\right] \leq \prod_{i=1}^n P[T_i > t]$$

Si el máximo de T_i es mayor que t quiere decir que todos los demás T_i , son menores que t , por lo tanto se cumple (2.34).

Ahora se obtendrán los límites de la fiabilidad de un sistema coherente comparándolo con un sistema serie (para la cota inferior) y un sistema paralelo (la cota superior).

Teorema 2.9. Sea ϕ una estructura coherente de componentes asociados con fiabilidades. p_1, \dots, p_n . Entonces:

$$\prod_{i=1}^n p_i \leq P[\phi(X) = 1] \leq \prod_{i=1}^n p_i \quad (2.35)$$

Prueba.

Tomando como referencia la fórmula (2.6). Se obtiene:

$$E\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] \leq E[\phi(X)] \leq E\left[\prod_{i=1}^n X_i\right]$$

Puesto que $E\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] \geq \prod E[X_i]$ por el teorema 2.8, (2.35) se tiene.

Teorema 2.10. Sea ϕ una estructura coherente de componentes asociados. Sea $p_1(x), \dots, p_p(x)$ el camino mínimo de la estructura serie y $k_1(x), \dots, k_k(x)$ los mínimos corte de la estructura paralela de ϕ . Entonces:

$$\prod_{j=1}^k P[k_j(X) = 1] \leq P[\phi(X) = 1] \leq \prod_{j=1}^p P[p_j(X) = 1] \quad (2.36)$$

Prueba.

$k_1(x), \dots, k_k(x)$ son funciones crecientes en x . Puesto que X son asociados bajo hipótesis, entonces $k_1(x), \dots, k_k(x)$ se asocian según las propiedades básicas de la fiabilidad específicamente la propiedad 3 (P3), de la definición 2.12.

Así

$$\begin{aligned} P[\phi(X) = 1] &= P\left[\prod_{j=1}^k k_j(X) = 1\right] \quad [\text{Por la ecuación (2.9)}] \\ &\geq \prod_{j=1}^k P[k_j(X) = 1] \quad [\text{Por la ecuación (2.29)},] \end{aligned}$$

Estableciendo la cota inferior. Similarmente,

$$\begin{aligned} P[\phi(X) = 1] &= P\left[\prod_{j=1}^p p_j(X) = 1\right] \quad [\text{Por la ecuación (2.8)}] \\ &\leq \prod_{j=1}^p P[p_j(X) = 1] \quad [\text{Por la ecuación (2.30)},] \end{aligned}$$

Se establece la cota superior.

Puede obtenerse las cotas más explícitas en fiabilidad del sistema en términos de fiabilidades de las componentes cuando los componentes son independientes.

Corolario 2.2. Sea ϕ un sistema coherente de componentes independientes. Entonces

$$\prod_{j=1}^k \prod_{i \in k_j} p_i \leq P[\phi(X) = 1] \leq \prod_{j=1}^p \prod_{i \in P_j} p_i \quad (2.37)$$

Prueba.

Para el j -ésimo camino mínimo de la estructura serie, $P[p_j(X) = 1] = \prod_{i \in p_j} p_i$.

Así de (2.36). $P[\phi(X) = 1] \leq \prod_{j=1}^p \prod_{i \in p_j} p_i$

Para el j -ésimo corte mínimo de la estructura paralela es $P[k_j(X) = 1] = \prod_{i \in k_j} p_i$

Así de la ecuación (2.36), $P[\phi(X) = 1] \geq \prod_{j=1}^k \prod_{i \in k_j} p_i$

Observemos que la cota inferior (superior) puede ser obtenida substituyendo cada componente asociada del sistema en la representación de corte mínimo (camino mínimo) ϕ , por un sistema correspondiente de componentes independientemente del funcionamiento de la misma fiabilidad, y después si se asume que todos los componentes de la estructura son estadísticamente independientes, es fácil demostrar las propiedades siguientes.

2.2.7 Propiedades de las cotas para el caso de que las componentes sean independientes.

Sea $l(p) \equiv \prod_{j=1}^k \prod_{i \in k_j} p_i$ y $u(p) \equiv \prod_{j=1}^p \prod_{i \in p_j} p_i$ entonces:

- a) $l(p)$ y $u(p)$ son funciones crecientes.
- b) $l(p) < h(p) < u(p)$ para $0 << p << 1$ si por lo menos dos conjuntos de corte mínimo se traslapan y por lo menos dos conjuntos de camino mínimo se traslapan.

Ejemplo 2.24. Cuando los componentes son independientes con altas (o bajas) fiabilidades, la cota inferior (o superior) dada en el corolario 2.2, es una buena aproximación a la fiabilidad del sistema. Como ejemplo, consideremos el puente eléctrico de la figura 2.7:

El conjunto de caminos mínimos son los siguientes:

14 25 135 234

Similarmente, el conjunto de cortes mínimos son:

12 45 135 234

La cota inferior viene dada por:

$$l(p) \equiv \prod_{j=1}^k \prod_{i \in k_j} p_i = \prod_{j=1}^k \left[1 - \prod_{i \in k_j} (1 - p_i) \right] \quad [\text{Por ecuación 2.8}]$$

Realizando procesos matemáticos y asumiendo que las componentes son independientes, con fiabilidad común p , la cota inferior $l(p)$ queda de la siguiente manera:

$$l(p) = (1 - (1 - p^2))^2 (1 - (1 - p^3))^2$$

La cota superior viene dada por:

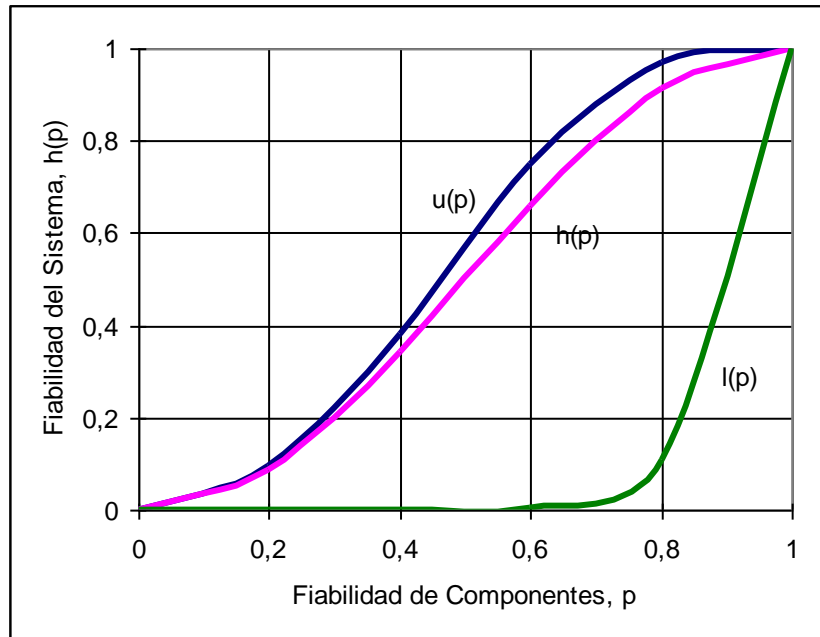
$$u(p) \equiv \prod_{j=1}^p \prod_{i \in p_j} p_i = 1 - \prod_{j=1}^p [1 - p_i] \quad [\text{Por ecuación 2.8}]$$

Realizando procesos matemáticos y asumiendo que las componentes son independientes, con fiabilidad común, la cota superior $u(p)$ queda de la siguiente manera:

$$u(p) = 1 - (1 - p^2)^2 (1 - p^3)^2$$

En la figura siguiente se presenta una comparación gráfica de la fiabilidad verdadera del sistema $h(p) = p(2p - p^2)^2 + (1 - p)(2p^2 - p^4)$ con los límites superiores e inferiores $u(p)$ y $l(p)$.

Figura 2.14. Límites de la fiabilidad de la estructura para el puente eléctrico.



2.2.8 Comparación de una cota inferior del corte mínimo y de la cota inferior de la serie.

Para la comparación de las cotas se utiliza la expresión de $I_\phi(p)$ de las propiedades de las cotas:

$$I_\phi(p) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in k_j} p_i \geq \prod_{i=1}^n p_i \quad (2.38)$$

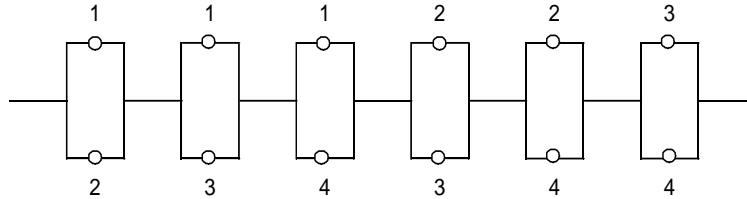
Tomando en cuenta lo anterior, es siempre verdad a partir de:

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^k \kappa_j(x) \geq \prod_{i=1}^n x_i \quad [\text{Por ecuación (2.6)}]$$

Pero, en la práctica existen situaciones en las que no se cumple la ecuación (2.6). A continuación se demuestra esto con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.25. Sea ϕ la función estructura para un sistema 3 de 4. El diagrama esquemático para el corte mínimo es el siguiente:

Figura 2.15. Representación del corte mínimo para un sistema 3 de 4



Y calculando la cota $I_\phi(p)$, donde $p_i = p$, se tiene:

$$\begin{aligned} I_\phi(p) &= \prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} p_i = (1 - (1 - p_1)(1 - p_2))(1 - (1 - p_1)(1 - p_3)) \dots (1 - (1 - p_3)(1 - p_4)) \\ &= (1 - (1 - p)^2)^6 \\ &= (2p - p^2)^6 \end{aligned}$$

Por otra parte, $\prod_{i=1}^4 p_i = p^4$, y se cumplirá la ecuación (2.38) si y solo si $(2 - p)^6 p^2 \geq 1$, sin embargo, cuando p es muy pequeño la ecuación (2.38) no se cumple.

El siguiente apartado mejorará las cotas descritas en (2.35).

2.2.9 Cotas Mínimo -Máximo en Fiabilidad del Sistema

Utilizando las ecuaciones (2.10) y (2.11), se obtiene las cotas superiores que dependen de los cortes mínimos y de cotas inferiores que dependen de los caminos mínimos, en contraste a los límites del teorema 2.9.

Teorema 2.11. (Límites Mínimo-Máximo). Sea ϕ una estructura coherente. Sea P_1, P_2, \dots, P_p las componentes de los caminos mínimos correspondientes a ϕ , y sea K_1, K_2, \dots, K_k las componentes de los cortes mínimos correspondientes a ϕ . Entonces los límites siguientes sostienen:

$$\max_{1 \leq r \leq p} P \left[\min_{i \in P_r} X_i = 1 \right] \leq P[\phi(X) = 1] \leq \min_{1 \leq r \leq k} P \left[\max_{i \in K_r} X_i = 1 \right] \quad (2.39)$$

Si, además, los componentes son asociados, entonces los límites más explícitos sostienen:

$$\max_{1 \leq r \leq p} \prod_{i \in p_r} p_i \leq P[\phi(X) = 1] \leq \min_{1 \leq s \leq k} \prod_{i \in k_s} p_i \quad (2.40)$$

Prueba.

Por las ecuaciones (2.10) y (2.11)

$$\phi(X) = \max_{1 \leq r \leq p} \min_{i \in p_r} X_i = \min \max X_i \quad (2.41)$$

Así

$$\min_{i \in p_r} X_i \leq \phi(X) \leq \max_{i \in k_s} X_i \quad (2.42)$$

Por consiguiente,

$$P\left[\min_{i \in p_r} X_i = 1\right] \leq P[\phi(X) = 1] \leq P\left[\max_{i \in k_s} X_i = 1\right]$$

Para $1 \leq r \leq p$ y $1 \leq s \leq k$, la ecuación (2.39), sigue aumentando el máximo de r y sigue minimizando el mínimo.

La ecuación (2.40), se han derivado de las ecuación (2.39), (2.29) y (2.30)

Observación.

Cuando el componente es asociado, se tiene:

$$\prod_{i=1}^n p_i \leq \max_{1 \leq r \leq p} \prod_{i \in p_r} p_i \leq \min_{1 \leq s \leq k} \prod_{i=1}^n p_i \quad (2.43)$$

Por (2.29) y (2.30), las cotas de (2.39) son siempre mejores que las cotas de la ecuación (2.35).

En general, cuando las componentes son independientes las mejores cotas vienen dadas de la siguiente manera:

$$\max \left[l_{\phi}(p), \max_{1 \leq r \leq p} \prod_{i \in p_r} p_i \right] \leq h_{\phi}(p) \leq \min \left[u_{\phi}(p), \min_{1 \leq s \leq k} \prod_{i \in k_s} p_i \right]$$

Cuando p_i es "grande" se tienen que $l_{\phi}(p)$ proporcionar la cota inferior, mientras que $\min_{1 \leq s \leq k} \prod_{i \in k_s} p_i$ proporcionará la mejor cota superior.

CAPÍTULO III.
MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA EL CÁLCULO
DE LA FIABILIDAD.

CAPÍTULO III. MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA EL CÁLCULO DE LA FIABILIDAD

Para el cálculo de la fiabilidad existen muchos métodos estadísticos, estos pueden clasificarse en paramétricos¹³ y no paramétricos¹⁴, siendo el más extenso el paramétrico, puesto que consta de varias distribuciones, las cuales se adaptan a diferentes áreas de aplicación; mientras que los métodos no paramétricos tienden a ser más sencillas por dos razones, la primera porque no requieren ninguna suposición relativa a la forma de la distribución de vida, y la segunda por la facilidad de cálculo y manipulación de los datos. Ambos métodos son útiles en varias aplicaciones, por lo que este capítulo se estudiará estos métodos.

Previo a conocer estos métodos es necesario definir ciertos términos que servirán para denotar las principales funciones que se utilizarán para el cálculo de la fiabilidad, las cuales son:

- **Variable aleatoria T:** Sea **T** la variable aleatoria continua que describe los tiempos de fallo de un determinado dispositivo, es decir, **T** es el tiempo transcurrido hasta que se produce el fallo.
- **Función de densidad:** Sea **f (t)** la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) de **T**.
- **Función de distribución:** Sea **F (t)** la función de distribución (f.d.).

Las funciones antes mencionadas cumplen las siguientes relaciones:

$$P(a \leq T \leq b) = \int_a^b f(t) dt \quad (3.1)$$

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(u) du \quad (3.2)$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \quad (3.3)$$

¹³ Se utilizan en áreas como la económica o la industria bajo el nombre de **análisis de tiempos de fallo**.

¹⁴ Se desarrollan en estudios médicos y biológicos bajo el nombre genérico de **análisis de supervivencia**.

3.1. Funciones más utilizadas en el cálculo de la Fiabilidad.

Las principales funciones para el cálculo de la fiabilidad se presentan a continuación:

- a) **Función de fiabilidad R (t) o función de supervivencia S (t):** Es la complementaria de la función de distribución de T. Por ejemplo para el área industrial, se determina la probabilidad de que el dispositivo “sobreviva” al instante t, es decir, que la función de fiabilidad determina la proporción de dispositivos iniciales que seguirán funcionando correctamente en el instante t.

$$R(t) \equiv S(t) = 1 - F(t) = P(T > t) \quad (3.4)$$

- b) **Vida media o tiempo medio hasta el fallo (MTTF)**¹⁵: Vida media o tiempo hasta el fallo es la esperanza de la variable aleatoria T, es decir, la vida media determina el tiempo de duración esperada.

$$MTTF = E[T] = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad (3.5)$$

- c) **Tasa media de fallo:** La tasa media de fallo en el intervalo (t₁, t₂) se denota de la siguiente manera:

$$h(t_1, t_2) = \frac{R(t_1) - R(t_2)}{(t_2 - t_1)R(t_1)} \quad (3.6)$$

Note que R (t₁) – R (t₂) representa la proporción de dispositivos totales que, habiendo sobrevivido al instante t₁, han fallado en el intervalo (t₁, t₂). Al dividir esta diferencia por R (t₁) se obtiene la proporción de dispositivos supervivientes a t₁ que han fallado en (t₁, t₂), es decir:

$$\frac{R(t_1) - R(t_2)}{R(t_1)}$$

¹⁵ Según sus siglas en ingles Mean Time To Failure (MTTF).

Lo anterior, refleja la probabilidad condicional de que un dispositivo que haya sobrevivido al instante t_1 , falle en el intervalo (t_1, t_2) . Finalmente, al dividir por la longitud del intervalo, obtenemos la proporción anterior (su media) por unidad de tiempo.

- d) **Tasa de fallo o tasa de riesgo:** Tasa de fallo o tasa de riesgo, se obtiene, haciendo tender t_2 a t_1 , como sigue:

$$h(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{R(t_1) - R(t_2)}{(t_2 - t_1)R(t_1)} = \frac{-R'(t_1)}{R(t_1)} = \frac{F'(t_1)}{R(t_1)} = \frac{f(t_1)}{R(t_1)} \quad (3.7)$$

La tasa de fallo puede interpretarse como la “velocidad” a la cual se producen los fallos, es decir, es una medida de lo vulnerable que resulta el dispositivo a fallar en función de su edad.

Note que, a partir de la última ecuación, es posible expresar $R(t)$ como función de $h(t)$:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\left(\frac{dF(t)}{dt}\right)}{R(t)} = -\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} \Rightarrow h(t)dt = -\frac{dR(t)}{R(t)} \quad (3.8)$$

Si ahora se aplican integrales en ambas partes se tiene:

$$\int_0^t h(u)du = -\int_0^t \frac{dR(u)}{R(u)} du = -[\log R(u)]_0^t = -\log R(t) \quad (3.9)$$

De donde:

$$R(t) = e^{\left[-\int_0^t h(u)du\right]} \quad (3.10)$$

3.2. Tipos de censura en las observaciones.

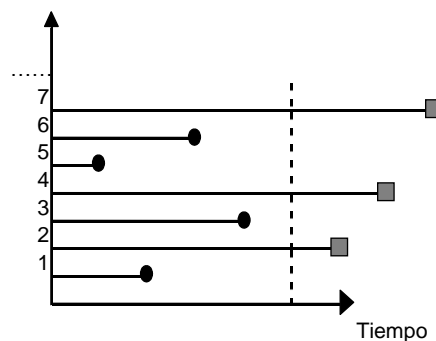
En los estudios de Fiabilidad y Análisis de Supervivencia, los datos observados presentan una particularidad que dificulta su análisis estadístico. Esta peculiaridad es la presencia de datos

censurados: de los cuales sólo se conoce el tiempo de fallo para una fracción de elementos, que puede ser pequeña de los individuos de la muestra, mientras que del resto se dispone sólo de información parcial; habitualmente el tiempo de vida es mayor que un valor dado.

Para llevar a cabo el estudio de fiabilidad con presencia de censura en los datos se deben identificar los siguientes tipos de censura:

- 1) **Censura por la derecha:** En los estudios de fiabilidad es característico la presencia de datos censurados por la derecha; lo que significa que para algunos elementos o unidades se desconoce el valor exacto del tiempo hasta el fallo, solamente se conoce que es superior a la duración del estudio. Cuando la censura ocurre para un $t > 0$, siendo $t = 0$ el instante en que se inicia el estudio de fiabilidad, estaremos ante lo que se conoce como censura a la derecha. Una representación de esta censura es la siguiente:

Figura 3.1. Censura a la derecha.

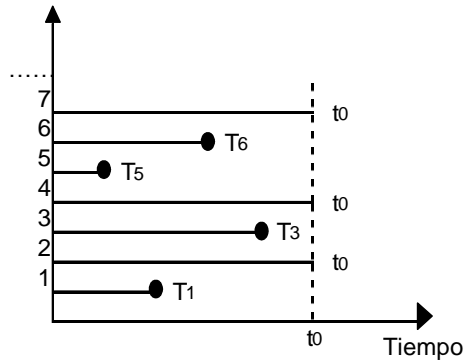


Los casos en que pueden aparecer los datos censurados por la derecha son los siguientes:

- **Las observaciones de censura por tiempo o de tipo I:** Este tipo de observaciones aparecen al finalizar un estudio de duración predeterminada. Por ejemplo, en las unidades “sobrevivientes” sólo se sabe que no han fallado hasta ese momento. En este caso, el

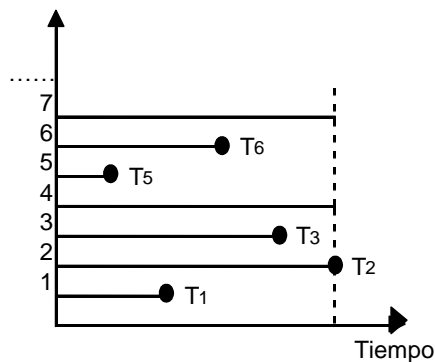
tiempo de duración del estudio es fijo, mientras que el número de productos que fallan es una variable aleatoria. La representación de este tipo de censura viene dada a continuación:

Figura 3.2. Censura por tiempo o de tipo I.



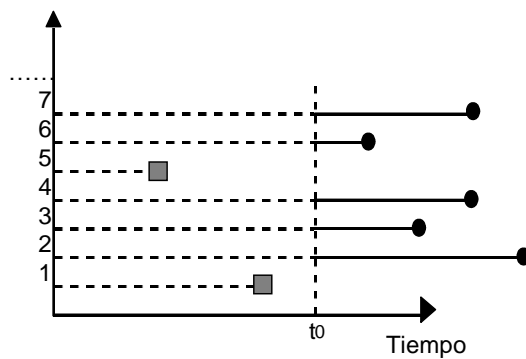
- **Las observaciones de censura por fallos o de tipo II:** Este tipo de observaciones aparecen cuando el estudio continúa hasta que una proporción predeterminada de unidades hayan fallado. Ahora, el número de productos que fallan es fijo, siendo el tiempo de duración del estudio una variable aleatoria. Una representación para este tipo de censura es como sigue:

Figura 3.3. Censura por fallos o de tipo II.



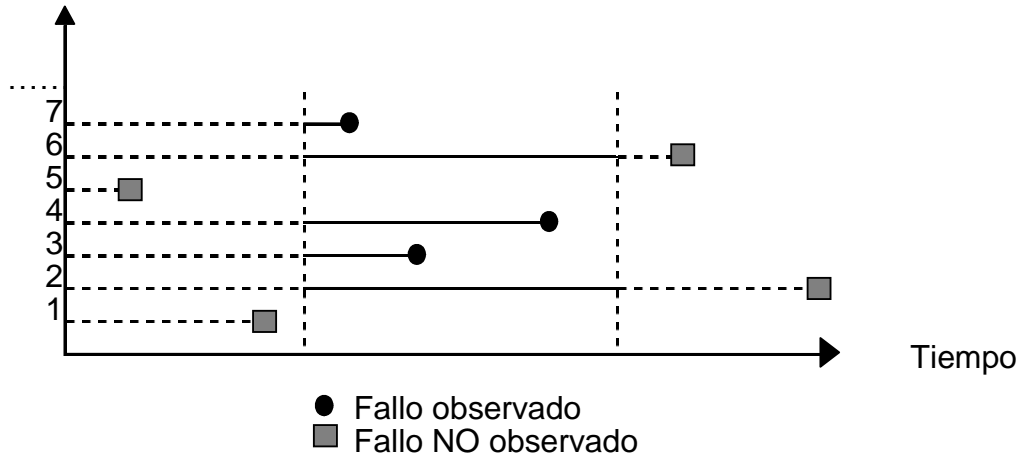
- 2) **Censura por la izquierda:** Este tipo de censura se produce cuando no se lleva a cabo un seguimiento durante el estudio, y tan solo se registra al final del mismo, si una unidad ha fallado o no, es decir, para aquellas que han fallado antes del final del estudio el dato se considera censurado por la izquierda. Además cuando la censura ocurre para un $t < 0$, siendo $t = 0$, el instante en que se inicia el estudio de fiabilidad, también es conocido como censura a la izquierda. La representación de este tipo de censura viene dada de la siguiente manera:

Figura 3.4. Censura por la izquierda.



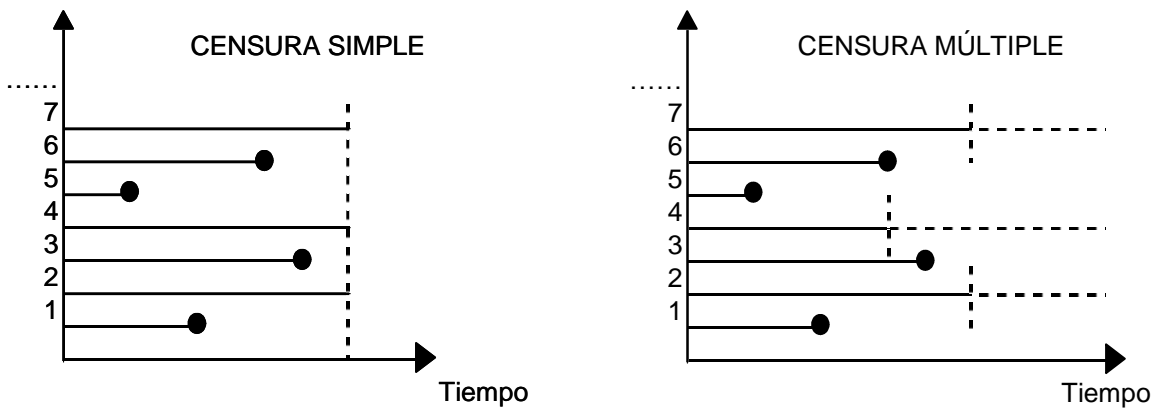
- 3) **Censura Arbitraria o por intervalos:** Un dato censurado en un intervalo se produce cuando durante el estudio se inspecciona una unidad en el instante t_i y se registra que funciona, pero al volver a inspeccionarla en un instante t_s ya ha fallado. Se suele hablarse de censura por intervalos o arbitraria para referirse a observaciones que han sido censuradas tanto a derecha como a izquierda (es decir, de ellas sólo sabemos que entran en el estudio, cuando ésta ya estaba inicializada y salen de la misma, sin haber fallado, antes de que finalice). La representación de este tipo de censura es como sigue:

Figura 3.5. Censura arbitraria o por intervalos.



- 4) **Censura simple o censura múltiple:** Finalmente, se puede tener censura simple (si el estudio finaliza en el mismo instante para todas las unidades observadas), o censura múltiple (si el estudio finaliza en diferentes instantes para todas las unidades observadas). Una representación de estos tipos de censuras se pueden apreciar a continuación:

Figura 3.6. Censura simple y múltiple.



3.3. Métodos para calcular la fiabilidad.

Los métodos para calcular la fiabilidad se encuentran dentro de los paramétricos y no paramétricos, a continuación se iniciará con los no paramétricos.

3.3.1 Estimación no Paramétrica

Los métodos no paramétricos para el estudio de la fiabilidad, no requieren de ninguna suposición relativa a la identidad o la forma de distribución, mientras que una desventaja de este método es que las estimaciones obtenidas normalmente no pueden permitir inferencias relativas a la forma.

Para examinar algunos de los métodos no paramétricos, supongamos que se pone a prueba una muestra de n copias de un dispositivo y que los tiempos de fallo de los elementos se registran como t_1, t_2, \dots, t_n .

El conjunto de tiempos, t_j , constituye un conjunto de datos muestrales de la distribución de vida. Por tanto, se puede analizar el conjunto de datos con cualquiera de los métodos estadísticos convencionales que son específicos de los estudios de fiabilidad. Por ejemplo, es razonable calcular una media muestral y tratar los números resultantes como una estimación de la media de la distribución de vida. Además, se pueden utilizar las técnicas usuales en el cálculo de intervalos de confianza sobre la estimación.

3.3.1.1. Método de Kaplan-Meier

El método de Kaplan Meier, conocido también como “límite producto”. La característica distintiva del análisis con este método es que la proporción acumulada que continúa funcionando o sobrevive se calcula hasta el tiempo de funcionamiento o supervivencia de cada elemento y no se agrupan los tiempos en intervalos. Por esta razón es especialmente útil para estudios que utilizan un número pequeño de pacientes-en el caso de análisis de supervivencia-. El método de Kaplan-Meier incorpora la idea del tiempo en que ocurren los eventos.

Para este método se utilizan las siguientes ecuaciones:

- El estimador de la Función de Fiabilidad (o Supervivencia):

$$\hat{S}(t_i) = \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{d_j}{n_j} \right) = \prod_{j=1}^i \left(\frac{n_j - d_j}{n_j} \right)$$

Donde:

d_j : Número de unidades que fallan en el intervalo $(t_{i-1}, t_i]$.

n_j : Número de unidades en riesgo en el tiempo t_j .

- El estimador de la Función de Riesgo:

$$\hat{h}(t_i) = \frac{d_i}{n_i}; \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

La validez de este método se basa en dos suposiciones:

1. Las personas que se retiran del estudio tienen un destino parecido a las que quedan.
2. El período de tiempo durante el cual una persona entra en el estudio no tiene efecto independiente en la respuesta.

Ejemplo 3.1. Se recogieron los datos sobre fallos de amortiguadores de 13 vehículos, considerando el tiempo hasta el fallo, expresado en kilómetros. La manera de calcular los estimadores de la Función de Fiabilidad o de Riesgo es disponer de datos como los que se muestran en la tabla 3.1:

Tabla 3.1. Datos de los amortiguadores.

t_i (Km.)	Individuos en riesgo n_i	Eventos d_i	Función de Riesgo $\hat{h}(t)$	Función de Fiabilidad $\hat{S}(t)$
6,700	13	0	--	--
6,950	12	0	--	--
7,820	11	1	1/11=0.0909	0.9091
8,790	10	1	1/10=0.1	0.81819
9,120	9	1	1/9=0.1111	0.72728
9,660	8	0	--	--
9,820	7	1	1/7=0.1428	0.6234

11,310	6	0	--	--
11,690	5	1	1/5=0.2	0.4987
11,850	4	0	--	--
11,880	3	0	--	--
12,140	2	1	1/2=0.5	0.2493
12,200	1	1	1/1=1	0.00

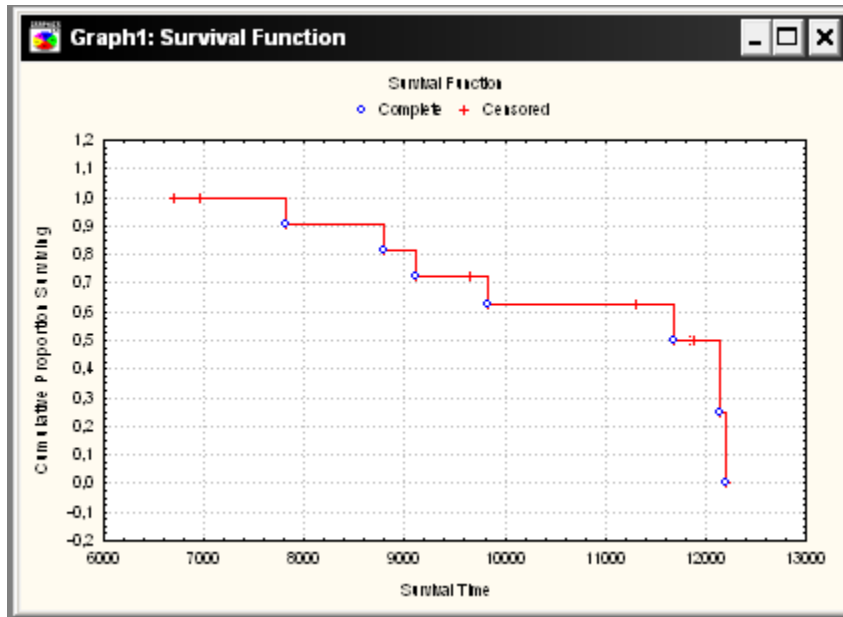
Para analizar estos datos en un paquete estadístico, por ejemplo el STATISTICA, hay que introducir las variables tiempo y estado. El resultado viene dado en la siguiente tabla:

Tabla 3.2. Análisis de Fiabilidad para la variable tiempo.

Número Caso	Tiempo	Fiabilidad Acumulad	Error Estándar
1+	6700,00	--	--
2+	6950,00	--	--
3	7820,00	,909091	,086678
4	8790,00	,818182	,116291
5	9120,00	,727273	,134282
6+	9660,00	--	--
7	9820,00	,623377	,150000
8+	11310,00	--	--
9	11690,00	,498701	,163814
10+	11850,00	--	--
11+	11880,00	--	--
12	12140,00	,249351	,194414
13	12200,00	0,000000	0,000000

La probabilidad de fiabilidad o supervivencia puede representarse en la figura 3.7, como se muestra:

Figura 3.7. Función de Fiabilidad para la variable tiempo.



3.3.1.2. Método Actuarial

Con el método actuarial, los tiempos de supervivencia se agrupan en intervalos. La longitud del intervalo depende de la frecuencia con que ocurre el suceso de interés.

Los intervalos no necesitan ser de la misma longitud. El método de la tabla de vida o análisis actuarial se conoce en la bibliografía médica como el método de Cutler-Ederer.

Este método asume que:

- 1) Las retiradas y las pérdidas se distribuyen homogéneamente en el intervalo. Por tanto, el número de personas en riesgo en un intervalo es igual al número de personas que entra menos la mitad del número que se pierde o retira del intervalo.
- 2) Las personas que se retiran del estudio tienen un destino parecido a las que se quedan.
- 3) El período de tiempo durante el cual una persona entra en el estudio no tiene efecto independiente en la respuesta.

Es de tener en cuenta que este método utiliza observaciones agrupadas por intervalos temporales, en vez de datos individuales de los eventos como el de kaplan-meier, por lo tanto, el método actuarial se basa en lo siguiente:

Supóngase que hay k intervalos, al principio de cada intervalo I_i

- El estimador de la Función de Fiabilidad (o Supervivencia):

$$\hat{S}(I_i) = \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{d_j}{n_j - \frac{m_j}{2}} \right)$$

Donde:

d_i : Número de unidades que fallan en el intervalo I_i .

n_i : Número de unidades en riesgo en el intervalo I_i .

m_i : Número de unidades perdidas en el intervalo I_i .

- El estimador de la Función de Riesgo:

$$\hat{h}(I_i) = \frac{d_i}{n_i - \frac{m_i}{2}}; \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Ejemplo 3.2. Se analizaron los tiempos de fallo en prototipos de 68 baterías sometidas a ciclos de carga y descarga en condiciones de funcionamiento normal. El objetivo del estudio es determinar las causas que provocan fallos tempranos y estimar las distribuciones de Fiabilidad y de Riesgo. Algunas baterías siguieron funcionando después del estudio, mientras que otras iban siendo retiradas durante el experimento para su análisis físico. En la presentación de los resultados no se dispuso de los tiempos exactos de fallo ni de los tiempos de retiro de las unidades, estando estos datos agrupados por intervalos, en la siguiente tabla:

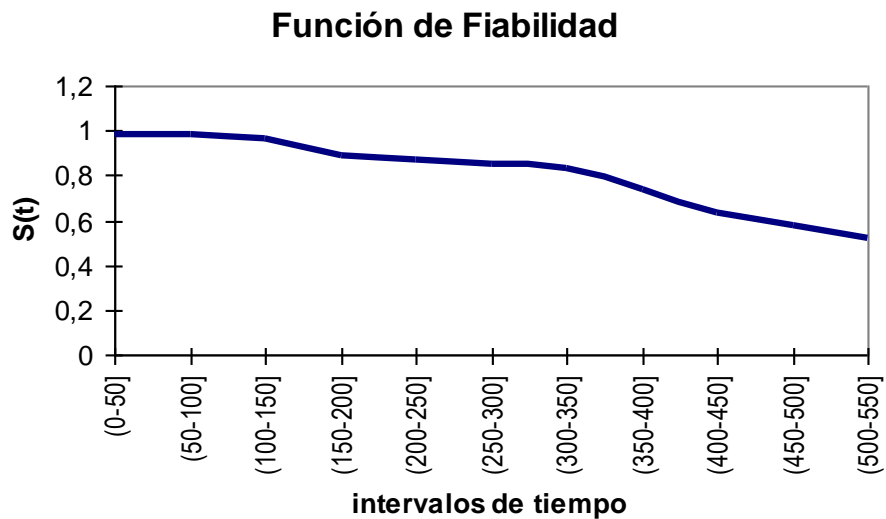
Tabla 3.3. Método Actuarial para calcular la función de supervivencia.

Intervalos de tiempo	Número de Eventos o fallos d_i	Censura o pérdida m_i	Número de unidades en riesgo n_i	$n_i - \frac{m_i}{2}$	$\hat{h}(i) = \frac{d_i}{n_i - \frac{m_i}{2}}$	$\hat{S}(I_i) = \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{d_j}{n_j - \frac{m_j}{2}} \right)$
----------------------	----------------------------------	-------------------------	------------------------------------	-----------------------	--	---

(0-50]	1	5	68	$68-5/2 = 65.50$	$1/65.5 = 0.0152$	0.9848
(50-100]	0	6	62	$62-6/2 = 59.00$	$0/59 = 0$	0.9848
(100-150]	1	1	56	$56-1/2 = 55.50$	$1/55.5 = 0.0180$	0.9670
(150-200]	4	6	54	$54-6/2 = 51.00$	$4/51 = 0.0784$	0.8912
(200-250]	1	2	44	$44-2/2 = 43.00$	$1/43 = 0.0232$	0.8705
(250-300]	1	1	41	$41-1/2 = 40.50$	$1/40.5 = 0.0246$	0.8491
(300-350]	1	2	39	$39-2/2 = 38.00$	$1/38 = 0.0263$	0.8268
(350-400]	4	2	36	$36-2/2 = 35.00$	$4/35 = 0.1142$	0.7324
(400-450]	4	3	30	$30-3/2 = 28.50$	$4/28.5 = 0.1403$	0.6296
(450-500]	2	1	23	$23-1/2 = 22.50$	$2/22.5 = 0.0888$	0.5736
(500-550]	2	0	20	$20-0/2 = 20.00$	$2/20 = 0.1$	0.5162

Con los datos de la tabla 3.3 se obtiene la gráfica de la Función de Fiabilidad, mediante el software Microsoft Excel, mostrada en la figura 3.8:

Figura 3.8. Función de Fiabilidad de los prototipos de 68 baterías.



Es evidente, una tendencia decreciente casi lineal del tiempo de funcionamiento de las baterías, lo cual era de esperarse.

3.3.2. Estimación Paramétrica.

Motivos por los que los modelos paramétricos son útiles:

- Pueden describirse proporcionando el valor a unos pocos parámetros (en general, de uno a cuatro). En los modelos no paramétricos es necesario describir toda la curva.
- Permiten calcular fiabilidades para valores extremos del tiempo.
- Proporcionan estimaciones suaves de la distribución del tiempo hasta el fallo.

En la práctica es conveniente realizar varios análisis paramétricos y no paramétricos de un conjunto de datos de fiabilidad.

3.3.2.1. Funciones y variables de interés en fiabilidad.

Sea T la variable que representa los tiempos de fallo de un determinado dispositivo ($T > 0$). El objetivo será conocer (si ello es posible) la función de distribución asociada a T , la cual será de la forma $F(t; \theta) = P(T \leq t)$, siendo θ un vector de parámetros.

En general, la mayoría de distribuciones usadas en fiabilidad tienen, a lo sumo, tres parámetros:

- **Parámetro de escala** α : este es el parámetro que caracteriza a las distribuciones uniparamétricas. El parámetro de escala define cuán dispersa se encuentra la distribución (en el caso de la distribución normal, el parámetro de escala es la desviación típica).
- **Parámetro de forma** β : este parámetro define la forma de la distribución. Algunas distribuciones (como la exponencial o la normal) carecen de este parámetro pues tienen una forma predeterminada que nunca varía (en el caso de la normal, ésta tiene siempre forma de campana).

- **Parámetro de localización** γ : se usa para desplazar una distribución hacia un lado u otro. Esto significa que, dada una distribución cuyo dominio habitual sea $[0, +\infty)$, la inclusión de un parámetro de localización γ cambiará el dominio a $[\gamma, +\infty)$. En el caso de la normal, el parámetro de localización es la media.

Las distribuciones que se emplean a la hora de modelar tiempos de fallo suelen ser:

- La Exponencial.
- La Weibull.
- La Gamma.
- La Lognormal.
- La Normal, entre otras.

Algunas de estas distribuciones serán desarrolladas en este apartado.

3.3.2.2. Distribución Exponencial

La Distribución Exponencial se utiliza para modelar el tiempo transcurrido entre dos sucesos aleatorios no muy frecuentes cuando la tasa de ocurrencia, λ , se supone constante.

En fiabilidad se usa para describir los tiempos de fallo de un dispositivo durante su etapa de vida útil, en la cual la tasa de fallo es (aproximadamente) constante, es decir: $h(t) = \lambda$. Una tasa de fallo constante significa que, para un dispositivo que no haya fallado con anterioridad, la probabilidad de fallar en el siguiente intervalo infinitesimal es independiente de la edad del dispositivo.

La tasa de fallo λ es el parámetro que caracteriza a esta distribución. Este valor es la inversa del tiempo medio que transcurre hasta el fallo (o entre dos fallos consecutivos, MTBF(Mean Time

Between Failure), si el dispositivo sigue funcionando), es decir, $\alpha = \text{MTTF} = \frac{1}{\lambda}$. Note que aquí α es el parámetro de escala, también llamado **vida característica**.

La función de densidad de probabilidad de una distribución exponencial es de la forma:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad 0 < t < \infty, \quad \lambda > 0$$

A continuación se presenta en la figura 3.9 y figura 3.10, la función de densidad de probabilidad y la función de distribución de una exponencial con valores de $\lambda = 0.125$ y $\lambda = 0.250$, así:

Figura 3.9. Función de Densidad de Probabilidad de una Exponencial.

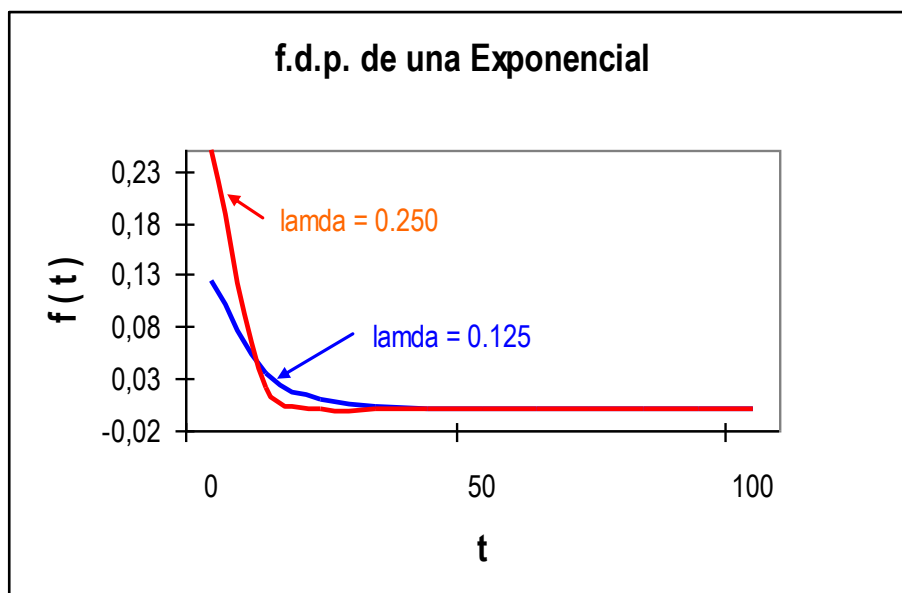
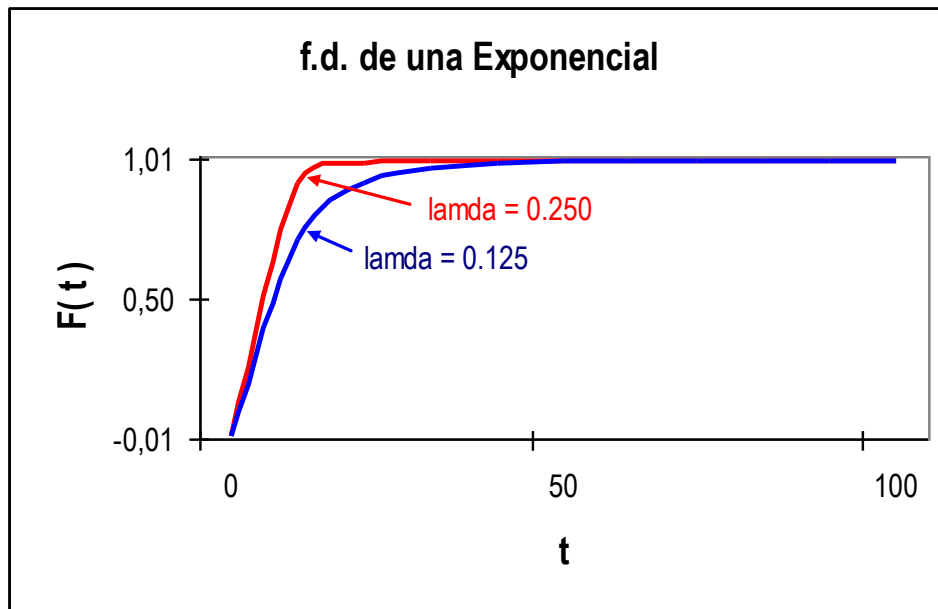


Figura 3.10. Función de Distribución de una Exponencial.



Al igual que las funciones de densidad y distribución, la representación de las funciones de fiabilidad y la tasa de riesgo viene dada por la figura 3.11 y figura 3.12, respectivamente, así:

Figura 3.11. Función de Fiabilidad de una Exponencial.

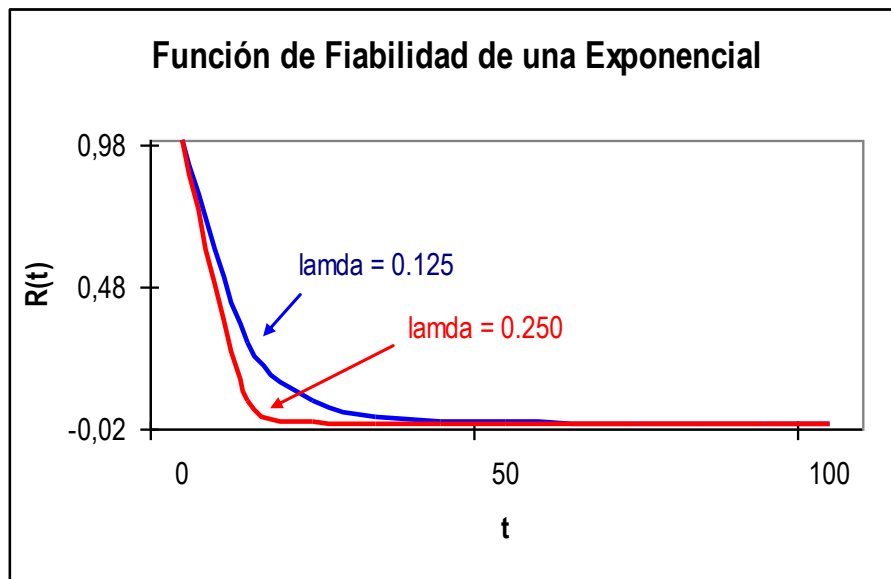
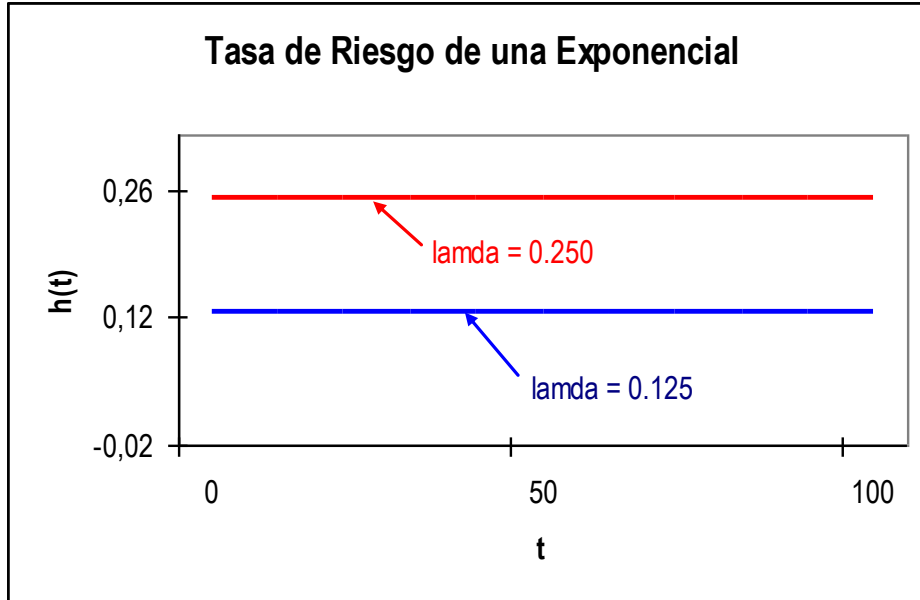


Figura 3.12. Tasa de Riesgo de una Exponencial.



Una generalización de la distribución anterior sería la distribución exponencial bi-paramétrica, cuya Función de probabilidad es de la forma:

$$f(t; \alpha, \gamma) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{t-\gamma}{\alpha}}$$

Donde $\alpha = \frac{1}{\lambda} > 0$ es el parámetro de escala, y γ es el parámetro de localización. Note que cuando $\gamma = 0$ se obtiene la distribución exponencial de un único parámetro.

Algunas características de la función Exponencial se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 3.4. Función Exponencial.

Nombre	Función	
Función de densidad	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$0 < t < \infty, \lambda > 0$
Función de distribución	$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$	$t > 0$
Esperanza de vida	$E(t) = \frac{1}{\lambda}$	
Varianza	$V(t) = \frac{1}{\lambda^2}$	
Función de Momentos	$M(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$	

Nombre	Función	
Función de Fiabilidad	$R(t) = e^{-\lambda t}$	
Función de Riesgo	$h(t) = \lambda$	

3.3.2.3. Distribución de Weibull

Se ha comentado antes que la distribución exponencial es utilizada a menudo para modelar los tiempos de fallo cuando la tasa de riesgo es constante. Si, por el contrario, la probabilidad de fallo varía con el tiempo resulta más apropiada una distribución Weibull (de hecho la exponencial puede verse como un caso particular de la distribución Weibull).

La distribución Weibull es tan flexible que, eligiendo adecuadamente sus parámetros, permite describir las tres etapas de la función tasa de fallos (curva de la bañera). Esta distribución viene caracterizada por dos parámetros: α (escala) y β (forma). Su función de densidad de probabilidad es:

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \quad 0 < t < \infty, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

Observar que cuando $\beta=1$, basta con tomar $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ para obtener la función de densidad de probabilidad de la distribución exponencial.

A continuación se presenta en la figura 3.13 y figura 3.14, la función de densidad de probabilidad y la función de distribución de una Weibull con valores de $\alpha = 10$, $\beta = 1$, $\beta = 2$ y $\beta = 4$, así:

Figura 3.13. Función de Densidad de Probabilidad de una Weibull.

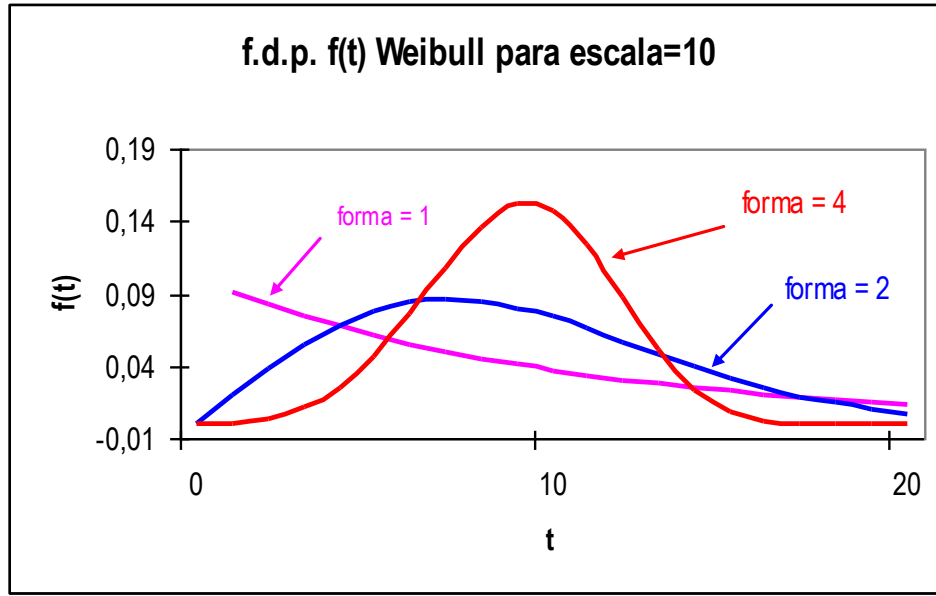
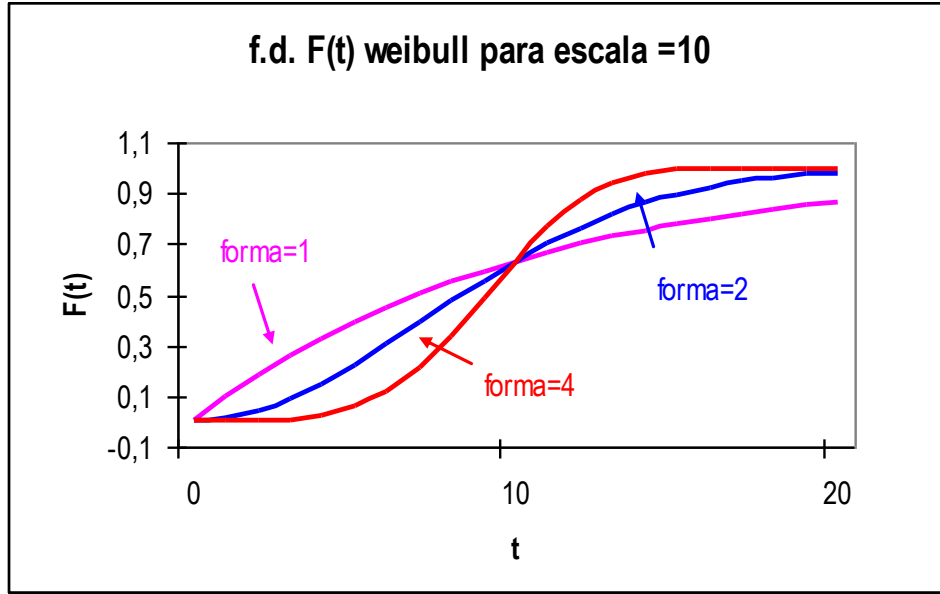


Figura 3.14. Función de Distribución de una Weibull.



Al igual que las funciones de densidad y distribución, la representación de las funciones de fiabilidad y la tasa de riesgo viene dada por la figura 3.15 y figura 3.16, respectivamente, así:

Figura 3.15. Función de Fiabilidad de una Weibull.

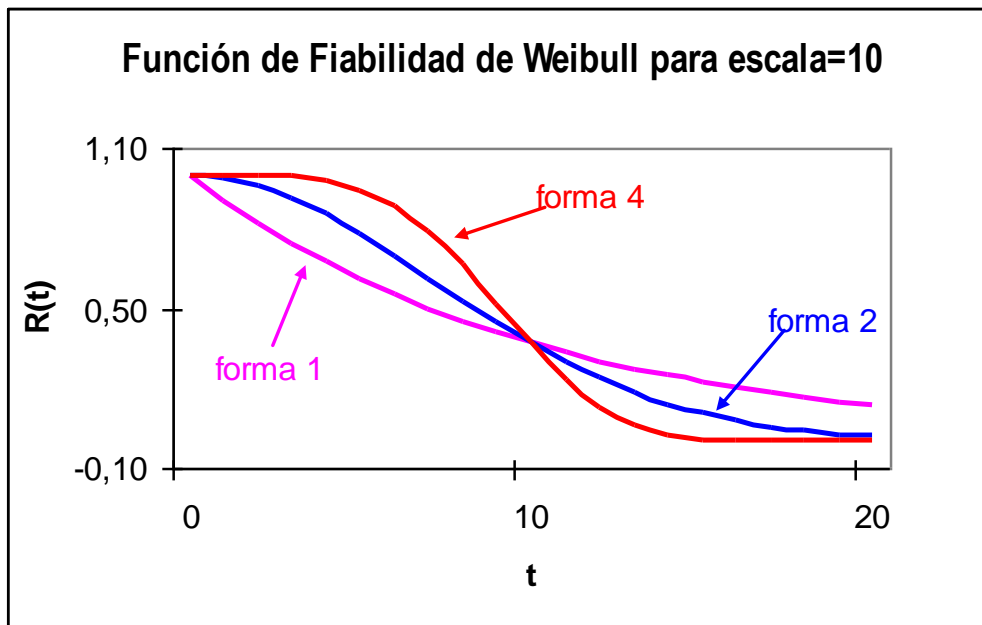
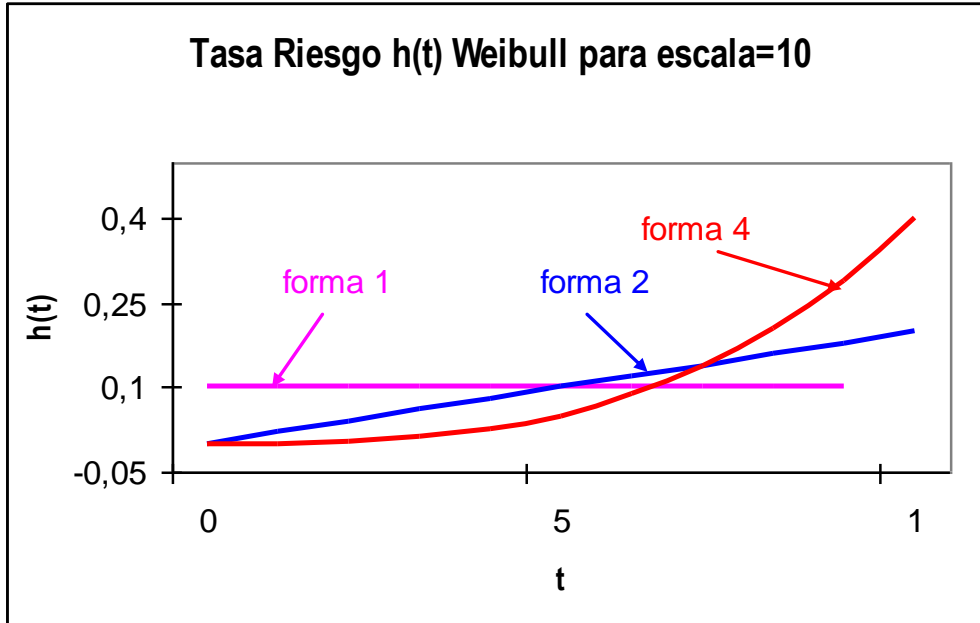


Figura 3.16. Función de Riesgo de una Weibull.



Algunas características de la función Weibull se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 3.5. Función Weibull

Nombre	Función	
Función de densidad	$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}$	$0 < t < \infty, \alpha > 0, \beta > 0$ Donde α , forma β
Función de distribución	$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}$	$t > 0$
Esperanza de vida	$E(t) = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	
Varianza	$E(t) = \alpha^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2$	
Función de Fiabilidad	$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}$	
Función de Riesgo	$h(t) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}$	

3.3.2.4. Función de Distribución Gamma.

El modelo gamma está definido por la función de probabilidad:

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}, \quad \text{para } t \geq 0, \text{ donde } \lambda, \alpha > 0.$$

Siendo $\Gamma(\alpha)$ la **función Gamma**, definida como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \text{para } x > 0.$$

Como $\Gamma(\alpha) = 1$, la función de probabilidad gamma cuando $\alpha = 1$ es la exponencial.

A continuación se presenta en la figura 3.17 y figura 3.18, la función de densidad de probabilidad y la función de distribución de una Gamma con valores de $\lambda = 1$, $\beta = 1$, $\beta = 2$ y $\beta = 4$, así:

Figura 3.17. Función de Densidad de Probabilidad de una Gamma.

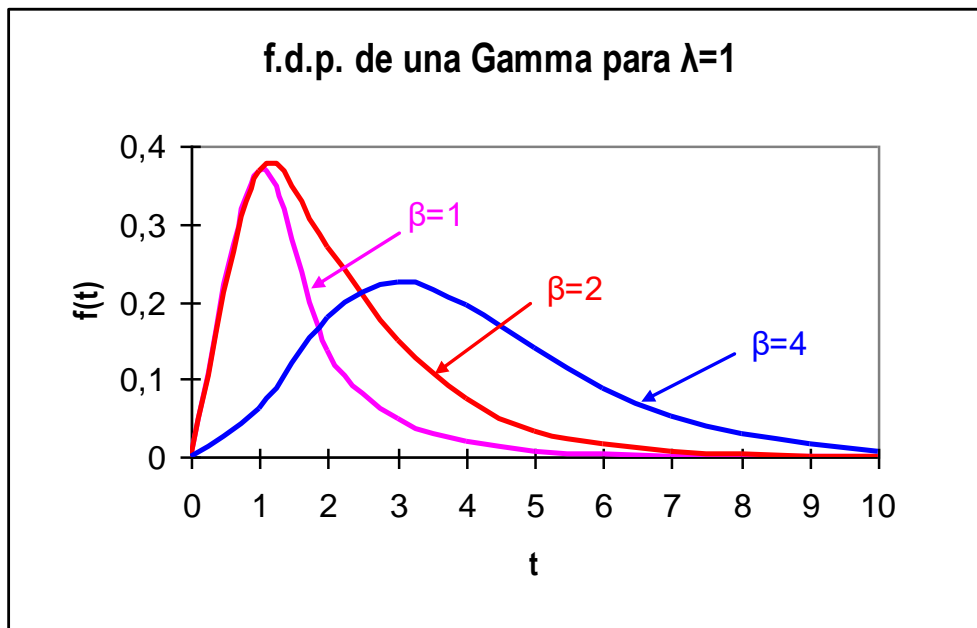
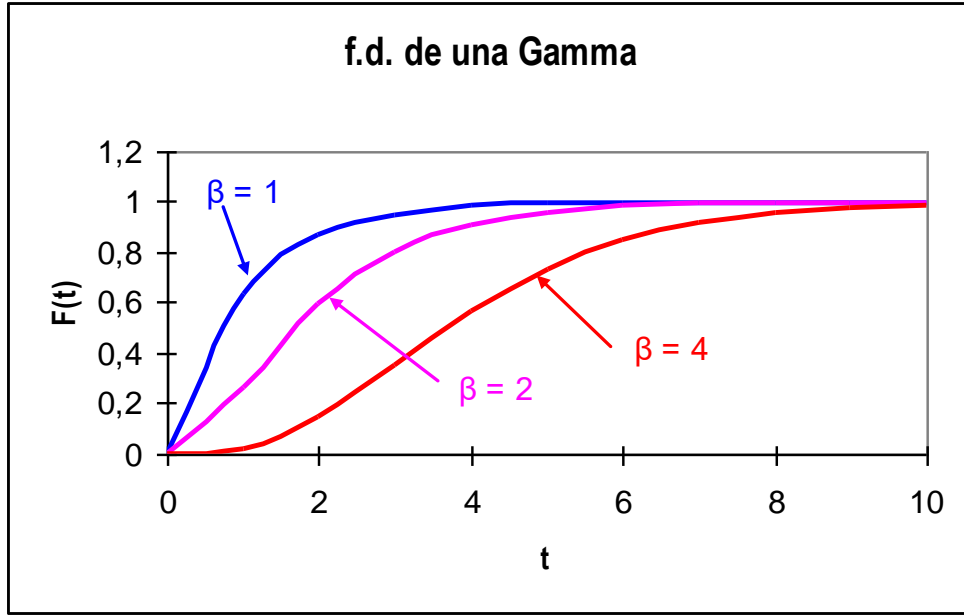


Figura 3.18. Función de Distribución de una Gamma.



Al igual que las funciones de densidad y distribución, la representación de las funciones de fiabilidad y la tasa de riesgo viene dada por la figura 3.19 y figura 3.20, respectivamente, así:

Figura 3.19. Función de Fiabilidad de una Gamma.

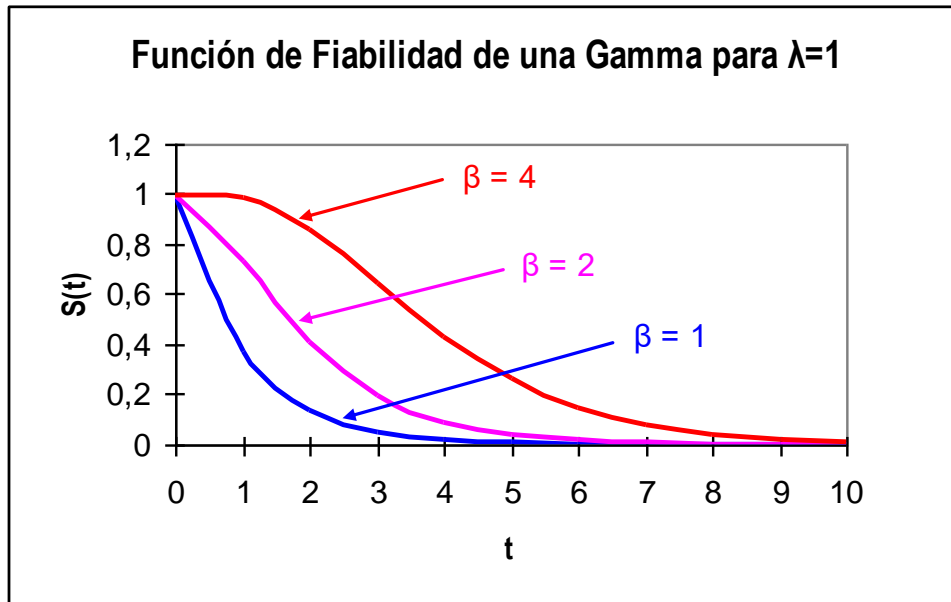
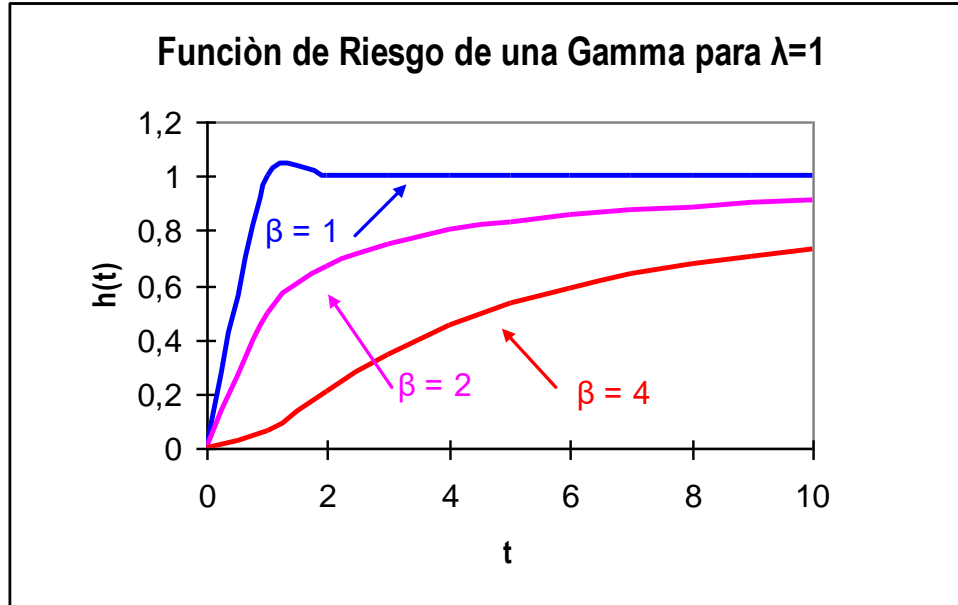


Figura 3.20. Función de Riesgo de una Gamma.



Algunas características de la función Gamma se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 3.6. Función Gamma.

Nombre	Función	
Función de densidad	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}$	$t \geq 0, \alpha > 0, \lambda > 0$ Parámetro de α , escala λ
Función de distribución	$F(t) = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$	$t \geq 0$
Esperanza de vida	$E(t) = \frac{\alpha}{\lambda}$	
Varianza	$V(t) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$	
Función de Momentos	$M(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha}$	
Función de Fiabilidad	$R(t) = 1 - F(t) = \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$	
Función de Riesgo	$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$	

3.3.2.5. Aplicación del análisis paramétrico.

Se disponen las fechas en que se repararon una serie de 65 ordenadores portátiles, los datos se presentan en el Anexo 2. Para realizar la aplicación del análisis paramétrico se utilizará el programa **STATISTICA** como herramienta para la identificación de la distribución de ajuste.

Tabla 3.7. Datos sobre 65 ordenadores portátiles.

Nº	MES_1	DIA_1	AÑO_1	MES_2	DIA_2	AÑO_2	CENSURA	AÑO	REP_ANT	TALLER
1	JANUARY	6	68	JANUARY	21	68	CENSURA	5,4	0	A
2	MAY	2	68	MAY	5	68	CENSURA	4	0	A
3	AUGUST	31	68	MAY	17	70	COMPLETA	5,1	0	A
4	AUGUST	22	68	OCTOBER	7	68	COMPLETA	4,2	0	B
5	SEPTEMBR	9	68	JANUARY	14	69	CENSURA	4,8	0	B
6	OCTOBER	5	68	DECEMBER	8	68	COMPLETA	5,4	0	B
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
65	MARCH	31	74	APRIL	1	74	CENSURA	3,5	0	B

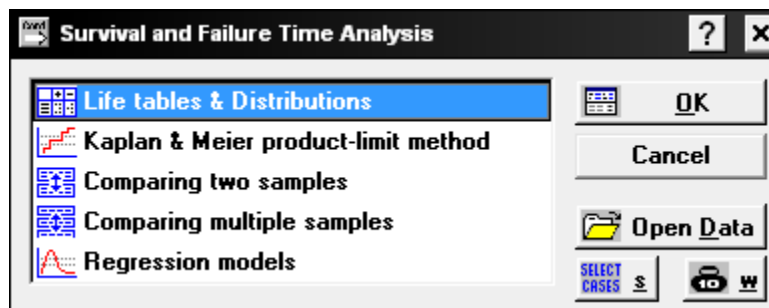
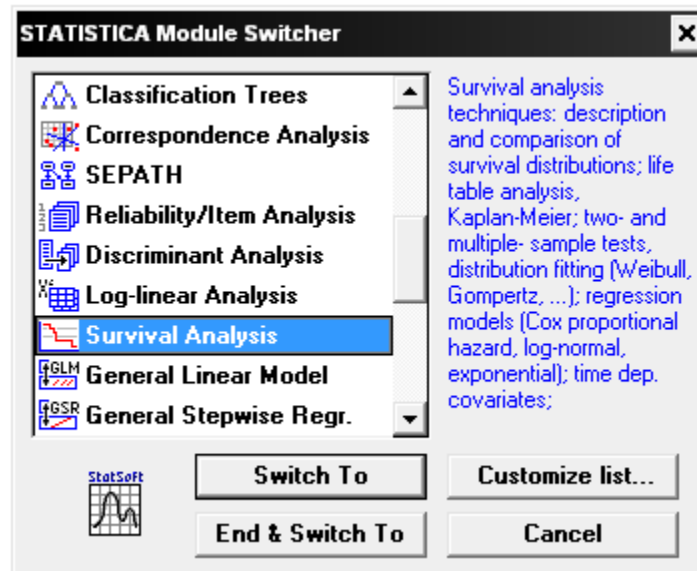
En las columnas se presenta lo siguiente:

- Las fechas en que dejaron de funcionar correctamente o bien se dejó de tener información de los ordenadores portátiles (columna MES_1 a la columna AÑO_2).
- La clasificación de cada observación como completa o censurada (columna CENSURA).
- La edad del portátil en el momento de su reparación (columna EDAD).
- El taller en el que fue reparado (columna TALLER).

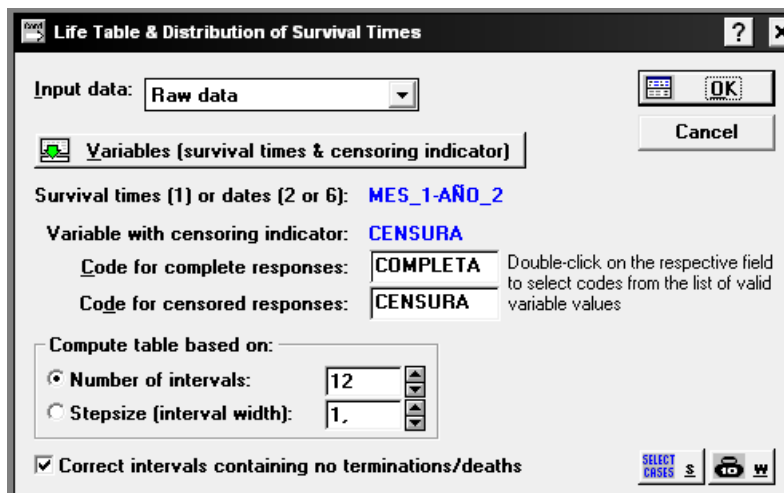
3.3.2.5.1 Resultados obtenidos

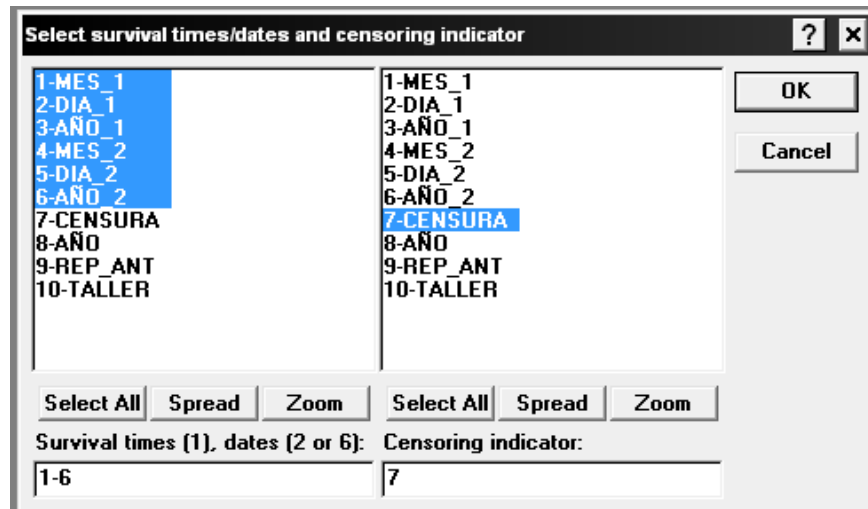
A. Entrada de datos

Entrada de datos (input): dentro del módulo *Survival Analysis*, se optará por la opción *Life Tables & Distributions*.

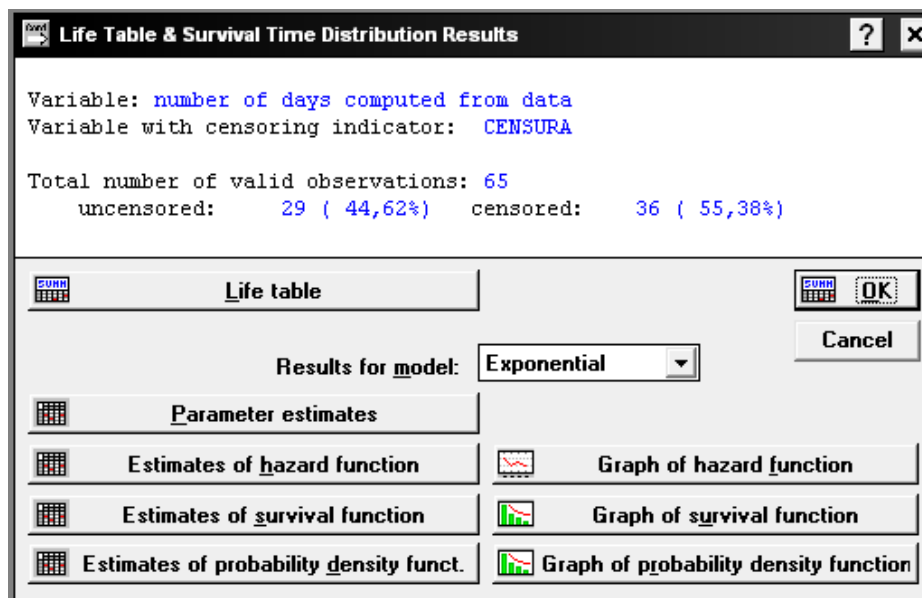


Ahora se accederá a la opción Variables y se escogerán las primeras 6 variables (Mes1, Dia1, Año1, Mes2, Dia2, Año2) en la lista de la izquierda. Después se escogerá, en la lista de la derecha, la variable CENSURA como el indicador de censura:





En este caso, se optará por la distribución exponencial, lo cual se deberá indicar en el menú desplegable *Results for model*:



B. Salida de datos

Salida de datos (output): pulsando sobre el botón *Parameter estimates* se obtendrán los estimadores para los tres diferentes pesos, así en la tabla 3.8, se tiene:

Tabla 3.8. Parámetros Estimados, Modelo Exponencial.

Parameter Estimates, Model: Exponential (fiabilidad.sta)							
Continue...	Note: Weights: 1=1., 2=1./V, 3=N(I)*H(I)						
Estimatn Method	Lambda	Variance Lambda	Std. Err. Lambda	Log-Likelhd.	Chi-Sqr.	df	p
Weight 1	,001319	,000000	,000590	-79,7120	22,06223	10	,014815
Weight 2	,000503	,000000	,000138	-86,7777	36,19370	10	,000078
Weight 3	,001263	,000000	,000224	-79,5474	21,73315	10	,016549

Si el test Chi-cuadrado resulta ser estadísticamente significativo ($p\text{-valor} \leq 0,05$), entonces se rechazará la hipótesis nula de que la distribución seleccionada, en este caso la Exponencial, se ajusta a los datos. En la tabla 3.8 se aprecia que las observaciones no corresponden a una exponencial, pues el test es significativo para los tres valores del parámetro Lambda. Si se repitiese la estimación paramétrica con cada una de las tres posibles distribuciones, se observaría que el único test no significativo es el correspondiente a la Weibull (en especial para el tercero de los pesos), como se muestra en la tabla 3.9:

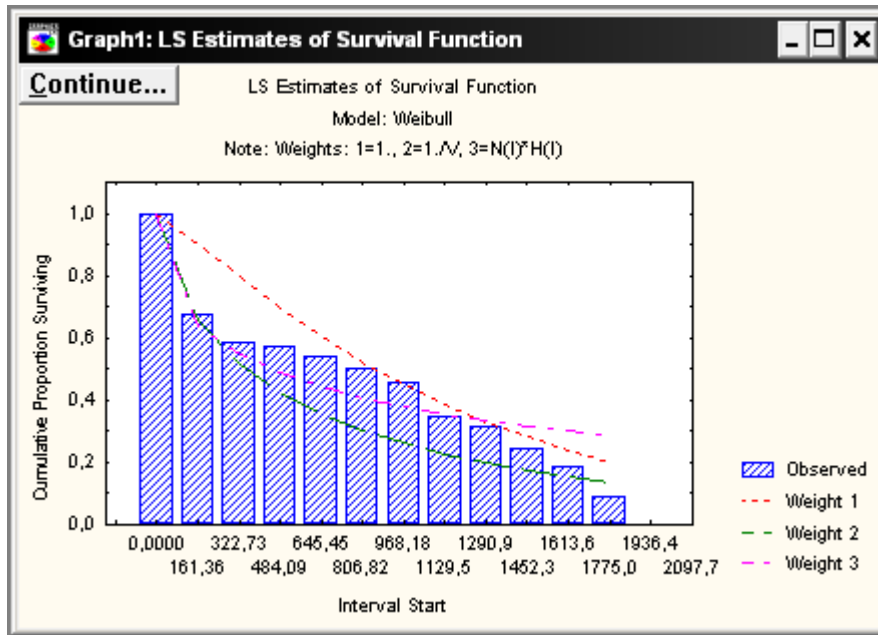
Tabla 3.9. Parámetros Estimados, Modelo Weibull.

Parameter Estimates, Model: Weibull (fiabilidad.sta)											
Continue...	Note: Weights: 1=1., 2=1./V, 3=N(I)*H(I)										
Estimatn Method	Lambda	Variance Lambda	Std. Err. Lambda	Gamma	Variance Gamma	Std. Err. Gamma	Covariance Gam-Lam	Log-Likelhd.	Chi-Sqr.	df	p
Weight 1	,000	,000	,001	1,142	,073	,269	-,000	-84,3	31,32	9	,0003
Weight 2	,016	,000	,018	,644	,027	,165	-,003	-75,4	13,51	9	,1410
Weight 3	,051	,005	,072	,428	,037	,192	-,014	-72,6	7,76	9	,5588

Por tanto, la distribución que mejor se ajusta a las observaciones es una Weibull de parámetros $\lambda = 0,0511$ y $\beta = 0,4277$.

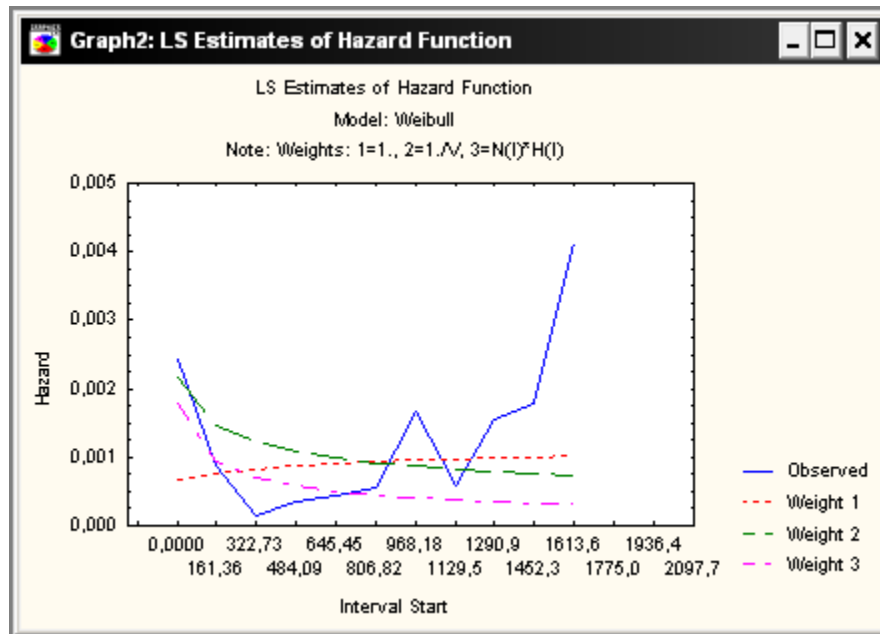
Con los gráficos de las funciones $R(t)$, $h(t)$, y $f(t)$, es posible comprobar visualmente la bondad del ajuste comparando la función de fiabilidad (supervivencia) observada con cada una de las tres funciones de fiabilidad que se obtienen al variar el parámetro λ estimado: Dicho gráfico se obtiene pulsando sobre el botón *Graph of survival function*, y se obtiene la figura 3.21:

Figura 3.21. Función de Fiabilidad para los ordenadores portátiles.



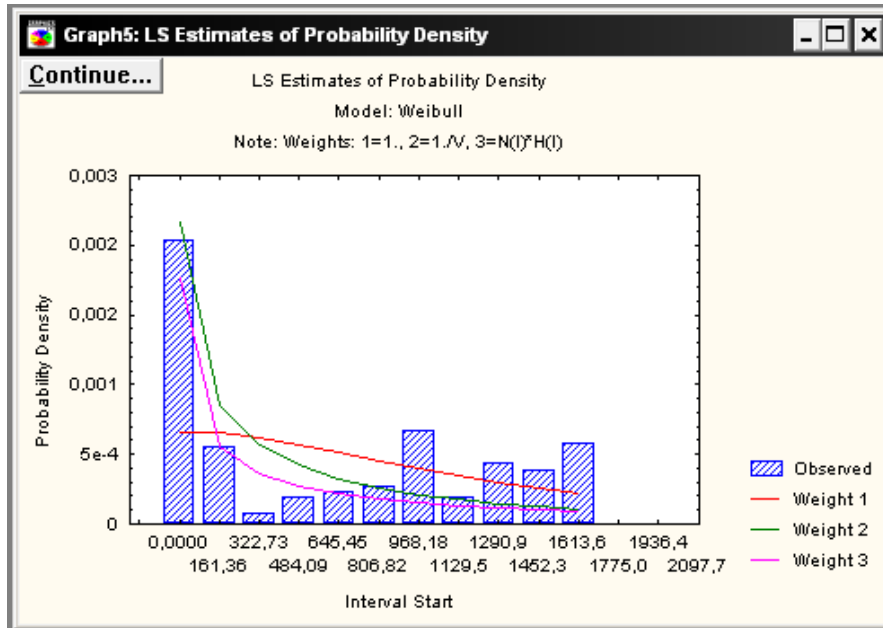
Resulta además conveniente representar la función tasa de fallo, la cual representa la probabilidad condicional de que el ordenador deje de funcionar correctamente en un determinado intervalo i -ésimo, sabiendo que no ha fallado hasta la fecha (desde que fue reparado). La gráfica esta representada en la figura 3.22:

Figura 3.22. Función de Riesgo para los ordenadores portátiles.



Finalmente, también es posible visualizar la gráfica de la función de densidad de probabilidad (f.d.p.), la cual suele ser decreciente debido a una reestructuración importante del sistema, es muy probable que los nuevos componentes no se adapten correctamente a lo que quede de la estructura anterior y, por tanto, se produzca un alto índice de fallos en las primeras etapas de la nueva situación. Esta gráfica se obtiene mediante la opción *Graph of probability density function* y se muestra en la figura 3.23:

Figura 3.23. Función de Densidad de Probabilidad para los ordenadores portátiles.



BIBLIOGRAFIA

1. Ángel A., Juan Pérez, y García Martín, Rafael. **Introducción a la Fiabilidad.** www.uoc.edu
2. Barlow, Richard E. & Proshan, Frank (1981). **Statistical theory of reliability and life testing.** Silver Spring.
3. Meliá, José Luis. (2001). **Teoría de la Fiabilidad y la Validez.** Valencia: Cristobal Serrano. www.uv.es/psicometria
4. Montgomery, Douglas C, y Runger, George C (1996). **Probabilida y Estasisitica Aplicada a la Ingenieria.**
5. Nachlas A., Joel. (1995). **Fiabilidad.** Publicaciones de ingeniería de sistemas (ISDEFE) de Madrid.
6. Villagarcía, Teresa. **Fiabilidad.** Universidad Carlos III de Madrid
7. Zacks, Shelemyahu. (1992). **Introduction to reliability analysis.** Springer-Verlag New Cork.

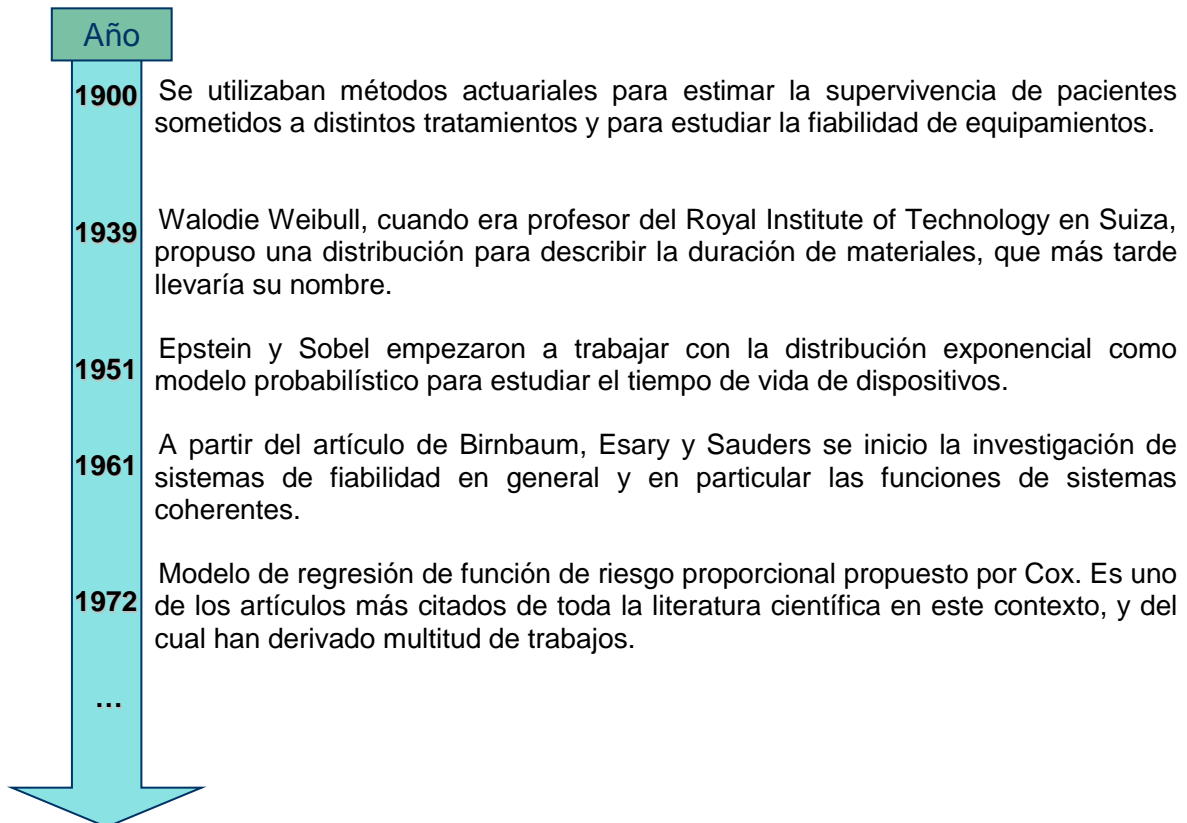
Paginas Web.

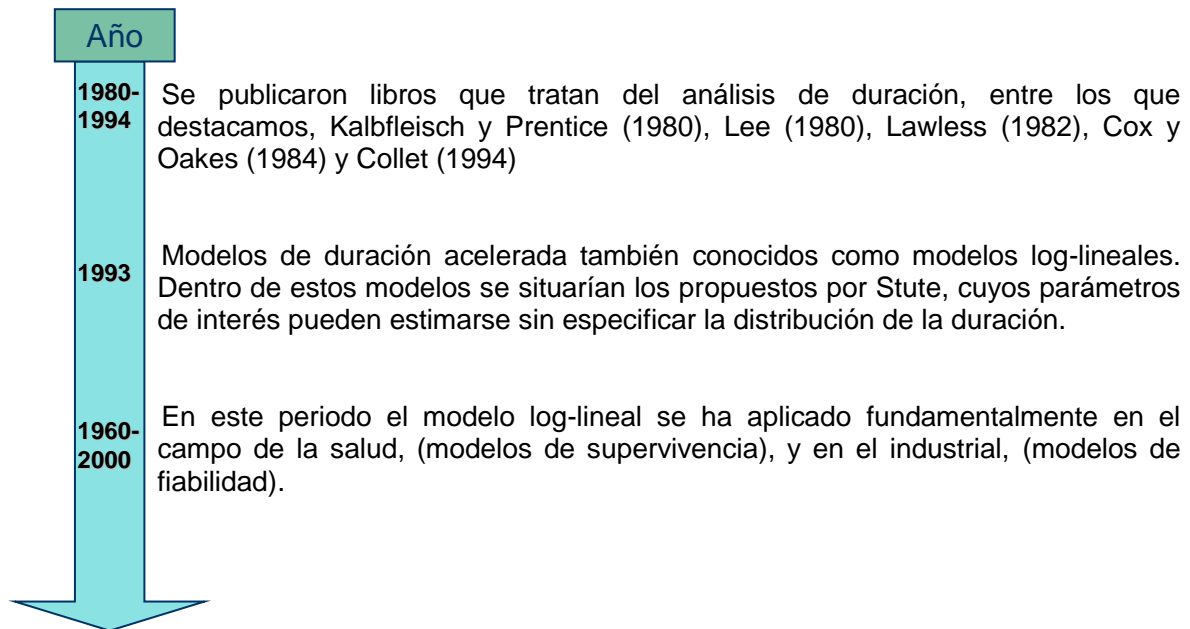
1. [www.est.us3m.es/esp/nueva_docencia.../fiabilidad%20 presentación.pdf](http://www.est.us3m.es/esp/nueva_docencia.../fiabilidad%20presentación.pdf).
Fiabilidad Industrial. Consultada en enero de 2007.
2. www.insht.es/InshtWeb/Contenido/Documentación/FihasTecnicas/NTP/Ficheros.
Notas Técnicas de Prevención, NTP 316: Fiabilidad de componentes: la distribución exponencial". Consultada en marzo de 2008.
3. www.insht.es/InshtWeb/Contenido/Documentación/FihasTecnicas/NTP/Ficheros.
Notas Técnicas de Prevención, NTP 331: Fiabilidad: La distribución Weibull. Consultada en marzo de 2008
4. www.madrid.org/es/satellite?pagename=hospitalramoncajal=/HRC_home. Distribuciones de probabilidad en la Fiabilidad. Hospital Ramón y Cajal. Consultada en marzo de 2008.
5. www.univarra.es/estadistica/lade/M:O:C/Tema2A.pdf. Modelos Parametricos en Fiabilidad. Fermín Mallor, Javier Santos. Consultada en abril de 2007.
6. www.univarra.es/estadistica/lade/M:O:C/Tema2B.pdf. Modelos Parametricos en Fiabilidad. Fermín Mallor, Javier Santos. Consultada en abril de 2007.
7. www.univarra.es/estadistica/lade/M:O:C/Tema4.pdf. Fiabilidad de Sistemas. Fermín Mallor, Javier Santos. Consultada en abril de 207.

Anexos

ANEXOS.

Anexo 1. Cronología de eventos previos a la Fiabilidad





Anexo 2. Datos de 65 ordenadores portátiles.

Nº	MES_1	DIA_1	AÑO_1	MES_2	DIA_2	AÑO_2	CENSURA	AÑO	REP_ANT	TALLER
1	JANUARY	6	68	JANUARY	21	68	CENSURA	5,4	0	A
2	MAY	2	68	MAY	5	68	CENSURA	4	0	A
3	AUGUST	31	68	MAY	17	70	COMPLETA	5,1	0	A
4	AUGUST	22	68	OCTOBER	7	68	COMPLETA	4,2	0	B
5	SEPTEMBR	9	68	JANUARY	14	69	CENSURA	4,8	0	B
6	OCTOBER	5	68	DECEMBER	8	68	COMPLETA	5,4	0	B
7	OCTOBER	26	68	JULY	7	72	COMPLETA	5,4	0	C
8	NOVEMBER	22	68	AUGUST	29	69	COMPLETA	4,9	0	C
9	NOVEMBER	20	68	DECEMBER	13	68	CENSURA	5,6	0	A
10	FEBRUARY	15	69	FEBRUARY	25	69	COMPLETA	5,5	1	A
11	FEBRUARY	8	69	NOVEMBER	29	71	COMPLETA	4,3	0	C
12	MARCH	29	69	MAY	7	69	COMPLETA	4,2	0	A
13	APRIL	13	69	APRIL	13	71	COMPLETA	5,8	0	B
14	JULY	16	69	NOVEMBER	29	69	COMPLETA	5,2	1	B
15	MAY	22	69	APRIL	1	74	CENSURA	3,3	0	B
16	AUGUST	16	69	AUGUST	17	69	CENSURA	5,4	0	C
17	SEPTEMBR	3	69	DECEMBER	18	71	COMPLETA	4,4	0	C
18	SEPTEMBR	14	69	NOVEMBER	13	69	COMPLETA	6,4	0	A
19	JANUARY	16	70	APRIL	1	74	CENSURA	4,9	0	C
20	JANUARY	3	70	APRIL	1	74	CENSURA	4	0	A
21	MAY	19	70	JULY	12	70	COMPLETA	4,9	0	A
22	MAY	13	70	JUNE	29	70	COMPLETA	6,1	1	B
23	MAY	9	70	MAY	9	70	CENSURA	4,1	0	B
24	JULY	4	70	APRIL	1	74	CENSURA	4,8	0	C
25	OCTOBER	15	70	APRIL	1	74	CENSURA	4,5	0	C
26	JANUARY	5	71	FEBRUARY	18	71	CENSURA	3,6	0	B
27	JANUARY	11	71	OCTOBER	1	73	COMPLETA	4,8	0	C
28	FEBRUARY	22	71	APRIL	14	71	COMPLETA	4,7	0	A
29	MARCH	22	71	APRIL	1	74	CENSURA	3,6	0	A
30	APRIL	24	71	JANUARY	2	72	COMPLETA	4,8	1	A
31	AUGUST	18	71	OCTOBER	8	71	COMPLETA	5,2	0	B
32	NOVEMBER	8	71	APRIL	1	74	CENSURA	3,8	0	B
33	OCTOBER	13	71	AUGUST	30	72	COMPLETA	4,8	1	B
34	DECEMBER	15	71	APRIL	1	74	CENSURA	4,1	0	C
35	NOVEMBER	20	71	JANUARY	9	72	COMPLETA	4,9	0	C
36	JANUARY	7	72	APRIL	1	74	CENSURA	3,2	1	C
37	MARCH	4	72	SEPTEMBR	6	73	CENSURA	4,8	0	A
38	MARCH	17	72	MAY	22	72	COMPLETA	5,1	0	A
39	MAY	18	72	JANUARY	1	73	CENSURA	1,9	0	A
40	APRIL	9	72	JUNE	13	72	COMPLETA	4,5	1	B
41	JUNE	10	72	APRIL	1	74	CENSURA	4,8	0	B
42	JUNE	21	72	JULY	16	72	COMPLETA	5,3	1	B

Nº	MES_1	DIA_1	AÑO_1	MES_2	DIA_2	AÑO_2	CENSURA	AÑO	REP_ANT	TALLER
43	AUGUST	20	72	APRIL	1	74	CENSURA	4,7	0	C
44	AUGUST	17	72	APRIL	1	74	CENSURA	2,6	1	C
45	OCTOBER	7	72	DECEMBER	9	72	COMPLETA	5,6	1	C
46	SEPTEMBR	22	72	OCTOBER	4	72	CENSURA	2,9	0	A
47	NOVEMBER	18	72	APRIL	1	74	CENSURA	5,2	1	A
48	MAY	31	73	APRIL	1	74	CENSURA	4,9	0	A
49	FEBRUARY	4	73	MARCH	5	73	COMPLETA	5,4	0	B
50	DECEMBER	31	72	APRIL	1	74	CENSURA	4,6	0	B
51	JANUARY	17	73	APRIL	1	74	CENSURA	5,2	1	B
52	FEBRUARY	24	73	APRIL	13	73	CENSURA	5,3	0	C
53	MARCH	7	73	DECEMBER	29	73	COMPLETA	4,2	0	C
54	MARCH	8	73	APRIL	1	74	CENSURA	4,8	1	C
55	MAY	19	73	JULY	8	73	COMPLETA	4,6	0	A
56	APRIL	27	73	APRIL	1	74	CENSURA	5,4	0	A
57	AUGUST	21	73	OCTOBER	28	73	COMPLETA	5,1	1	A
58	SEPTEMBR	12	73	OCTOBER	8	73	CENSURA	5,2	1	B
59	MARCH	2	74	APRIL	1	74	CENSURA	4,5	0	B
60	AUGUST	7	73	APRIL	1	74	CENSURA	4,7	0	B
61	SEPTEMBR	17	73	FEBRUARY	25	74	COMPLETA	4,3	0	C
62	OCTOBER	16	73	APRIL	1	74	CENSURA	2,6	0	C
63	DECEMBER	12	73	APRIL	1	74	CENSURA	2,3	1	C
64	MARCH	19	74	APRIL	1	74	CENSURA	2,8	1	A
65	MARCH	31	74	APRIL	1	74	CENSURA	3,5	0	B