Universidad de El Salvador

Hacia la libertad por la cultura

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE GRADUACIÓN:

INTRODUCCIÓN A LA APROXIMACIÓN DIOFÁNTICA

PRESENTADO POR:

FREDDY ERNESTO DURÁN NAVARRO

DN09002

MARVIN ENRIQUE GRACIAS CASTRO

GC07075

PARA OPTAR EL GRADO DE:

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, 10 DE NOVIEMBRE DEL 2016

Universidad de El Salvador

Hacia la libertad por la cultura

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE GRADUACIÓN:

INTRODUCCIÓN A LA APROXIMACIÓN DIOFÁNTICA

PRESENTADO POR:

FREDDY ERNESTO DURÁN NAVARRO

DN09002

MARVIN ENRIQUE GRACIAS CASTRO

GC07075

ASESOR:

MSC. WALTER OTONIEL CAMPOS GRANADOS

CIUDAD UNIVERSITARIA, 10 DE NOVIEMBRE DEL 2016

AUTORIDADES

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR UNIVERSITARIO:

LIC. LUIS ARGUETA ANTILLÓN (INTERINO)

SECRETARIA GENERAL:

DRA. ANA LETICIA ZAVALETA DE AMAYA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

LIC. MAURICIO HERNÁN LOVO

SECRETARIA:

LICDA. DAMARIS MELANY HERRERA TURCIOS

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR:

DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES

SECRETARIA:

MSc. ALBA IDALIA CÓRDOVA CUÉLLAR

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

ASESOR:

MSC. WALTER OTONIEL CAMPOS GRANADOS
CATEDRÁTICO ESCUELA DE MATEMÁTICA

AGRADECIEMIENTOS

Primeramente darle gracias a Dios por la oportunidad que me dio de haber culminado mis estudios universitarios, agradecer igual a mi asesor por su tiempo, sugerencias, revisiones y enseñanzas, y sin faltar a mis padres, por su apoyo incondicional y motivación constante. También a todos lo catedráticos que aportaron a mi crecimiento profesional.

Freddy Ernesto Durán Navarro.

Le doy gracias a Dios por haber cumplido mis metas, este logro se lo dedico a mi familia, gracias a mi asesor por haberme dirigido, enseñado y dado su tiempo, también les agradezco a todas aquellas personas que me apoyaron y a los catedráticos que me dieron sus sugerencias, para mi formación profesional, Dios los bendiga.

Marvin Enrique Gracias Castro.

Nuestros agradecimientos son para todos aquellos que de una u otra forma han colaborado, contribuido ó aportado en el desarrollo de este trabajo como:

1. A Dios y a la Santísima Virgen María, por esta maravillosa oportunidad.

2. A nuestros padres, por su apoyo incondicional y motivación constante.

3. A nuestro asesor Msc. Walter Otoniel Campos Granados, por su tiempo, sugerencias, revisiones y enseñanzas.

4. A todos los catedráticos que aportaron a nuestro crecimiento profesional.

5. A nuestra Gloriosa Universidad de El Salvador por nuestra formación profesional.

Freddy Ernesto Durán Navarro y Marvin Enrique Gracias Castro.

Índice general

0.1. Introducción

El presente trabajo pretende ser una introducción al tema de Aproximación Diofántica. Primeramente damos a conocer los Antecedentes, donde se da pequeña historia sobre las Aproximaciones Diofánticas.

Luego presentamos la justificación, que es donde se explica el porque nosotros estudiamos el tema Introducción a la Aproximación Diofántica, luego los objetivos, donde están los objetivos generales que estudiaremos, los teoremas de aproximación y para luego aplicarlos en una de las áreas de la matemáticas, también están los objetivos específicos, que la parte donde se trabaja más en el presente trabajo, donde daremos a conocer los diferentes métodos de aproximación, al igual analizaremos los teoremas más importantes de la investigación, para luego aplicarlos en el área de la geometría.

Continuamos con la parte del planteamiento del problema donde se explica el interés y el porque trabajamos en el tema de investigación, que es estudiar y analizar métodos de aproximación de números reales por medio de números racionales e irracionales.

El documento se encuentra estructurado en tres capítulos, el primero de ellos se da a conocer toda la teoría sobre las fracciones continuas, donde se dan los siguientes temas:

1. Fracciones Continuas
2. Fracciones Continuas Infinitas
3. Convergentes
4. Evaluación de Convergentes
5. Convergentes Como Determinantes
6. Algunas propiedades de los convergentes

Ya teniendo esta base procedemos a la introducción de teoría de aproximación diofántica, que es el capítulo dos, y que se desglosa:

1. Métricas de aproximación diofántica
2. Buenas aproximaciones
3. Fracciones continuas peródicas
4. Espectros Markov y Lagrange
5. Teorema de Khintchine

Por último el capitulo tres donde se realizan breves aplicaciones a la geometría de las fracciones continuas.

0.2. Antecedentes

En **Teoría de Números**, las aproximaciones diofánticas tratan de las aproximaciones de números reales por medio de números racionales.

Este tipo de aproximaciones lleva su nombre en honor a Diofanto, matemático griego del año 275 a.c que las estudió extensivamente y plantió ecuaciones y dió soluciones a algunas de ellas. Su vida se desconoce por completo; sin embargo ha llegado hasta nosotros un texto escrito por él llamado La Aritmética en el que se plantean y resuelven 189 problemas de álgebra que hoy resolveríamos utilizando ecuaciones de primero y segundo grado como sistemas de ecuaciones. Por este hecho se le conoce como el padre del Álgebra y a las ecuaciones de primer grado se les llama, también, **Ecuaciones Diofánticas**.

Resultados recientes En su ponencia plenaria en el **Congreso Internacional de Matemáticos** en Kyoto (1990), **Grigory Margulis** señaló un vasto programa basado en la **teoría ergódica** que permite demostrar resultados de la teoría de números utilizando las propiedades dinámicas y ergódicas de las acciones de subgrupos de **grupos de Lie semisimples.** El trabajo de D. Kleinbock, G. Margulis, y sus colaboradores, demostró el poder de este nuevo enfoque a los problemas clásicos de las aproximaciones diofánticas. Varias generalizaciones de los resultados precedentes por **Aleksandr Khinchin** en aproximaciones diofánticas métricas han sido obtenidas también dentro de este marco.

Como se expuso anteriormente, para obtener la solución a dichas aproximaciones no existen métodos únicos, y dependen en gran manera de la intuición. En nuestro caso, daremos algunos procesos teóricos para llegar a ellas. Siguiendo el estudio de las aproximaciones se llega a establecer la idea de la **Aproximación por números algebraicos** que se deriva de la teoría de las fracciones continuas aplicada a la raíz cuadrada y a otros números irracionales, fue estudiada por **Fermat y Euler**, entre otros. En 1840, **Joseph Liouville** obtiene un importante resultado relacionado con los números algebraicos, lo que le permitió construir las primeras demostraciones de ejemplos de números trascendentales.

0.3. Justificación

El estudio de la teoría analítica de números es muy importante en la actualidad ya que ofrecen herramientas de análisis que facilitan métodos de como abordar tema tales como; aproximaciones diofánticas, fracciones continuas, etc.

Una de las preguntas básicas de la teoría de aproximaciones diofánticas es investigar las aproximaciones racionales a un número real. Uno de los principales objetivos de esta teoría es comparar, por un lado la distancia entre un nímero real α y un número racional $\frac{p}{q}$ y por el otro, el denominador q de la aproximación.

Nos hemos propuesto a estudiar este tema porque a pesar de ser bastante antiguo produce curiosidad del porque los números racionales son indispensables para ser utilizado en la aproximación ya sea de funciones, ecuaciones, e incluso de los mismos números.

Es por eso que han surgido preguntas como: ¿cuándo un número es irracional?, ¿cuándo una ecuación tiene soluciones? etc, y así esto nos lleva constantemente a estudiar nuevos conocimientos que nos enseñen y desmuestren las respuestas de esas multiples preguntas.

Por otro lado en la escuela de Matemáticas hay pocos trabajos en el área de Teorías de los Números uno de los cuales es Grupos de Lie de Mtrices Reales o Complejos, esto debido en parte, a la carencia de materias electivas en el área de Teoría Analítica de Números, pues en los últimos 8 años solamente se han impartido dos veces el curso electivo de Tópicos en Teoría de Números.

0.4. Objetivos

Objetivo Generales

1. Estudiar y comprender los principales teoremas de Aproximación Diofántica.
2. Aplicar los diferentes métodos de la Teoría de Aproximación Diofántica en distintas áreas de la matemática.

Objetivos Especificos

1. Resolver ecuaciones diofánticas, utilizando los diferentes métodos de aproximación.
2. Analizar teoremas importantes para la aproximación diofántica.
3. Generar un documento que sirva de base para quienes quieran profundizar en el estudio de la teoría de las aproximaciones diofánticas.
4. Utilizar las fracciones continuas tanto para resolver ecuaciones diofánticas, como para dar aproximaciones a ciertos números irracionales.
5. Aproximar números racionales a través de la Geometría de las Fracciones Continuas.

0.5. Planteamiento del problema

La teoría de números es la rama que utiliza el análisis matemático y complejo para resolver los problemas sobre los números reales. El interés que encierra la resolución de una ecuación diofántica está en la relación directa con la naturaleza de las incógnitas. No obstante, no todas las ecuaciones diofánticas tienen un método que permita resolverlas de manera sistemática. La búsqueda de un método de resolución para ecuaciones concretas ha sido, durante mucho tiempo, objeto de estudio por matemáticos de la talla como Euler o Lagrange. Ésta investigación consiste en estudiar y analizar métodos que tratan las aproximaciones de números reales por medio de números racionales e irracionales.

Supongamos que α es un número real, irracional. Una aproximación diofántica de α es un racional $\dfrac{p}{q}$ tal que $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right|$ sea muy pequeña. La Teoría de las aproximaciones diofánticas estudia que tan pequeña puede ser la cantidad de arriba, o en otras palabras que tan bien podemos aproximar el número α por racionales. Hay números α tales que para cada $k > 0$ existen racionales $\dfrac{p}{q}$ tal que $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^k}$.

Un ejemplo de tal número es $\xi = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{10^{n!}}$ Este se llama Número de Liouville y es trascendente.

Solución:

Tomando $\dfrac{p}{q} = \sum_{n\geq 1}^{k} \dfrac{1}{10^{n!}}$ y $q = 10^{k!}$ entonces

$$\begin{aligned} \left|\xi - \frac{p}{q}\right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} &= \frac{1}{10^{(k+1)!}} + \left(\frac{1}{10^{(k+1)!}}\right)^{k+2} + \left(\frac{1}{10^{(k+1)!}}\right)^{(k+2)(k+3)} + \cdots \\ &\leq \frac{1}{10^{(k+1)!}} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} \cdots\right) < \frac{2}{10^{(k+1)!}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{2}{q^{k+1}}.$$

Puesto que esto ocurre para todo $k = 1, 2, \ldots$, entonces ξ no puede ser algebraico. ■

Para responder a la situación anteriormente planteada es lo que se propone esta investigación. También de tal manera que este trabajo coadyuve a resolver el tipo de preguntas como la anterior, y genere material de apoyo a quienes quieran seguir investigando en este tema de Aproximaciones Diofánticas. Para tal fin, daremos a conocer los diferentes métodos para las aproximaciones diofántica, también abordaremos teoremas que implementan al tema de investigación, y por último daremos aplicaciones sobre la teoría de ecuaciones diofántica.

Capítulo 1

Fracciones Continuas

1.1. Fracciones Continuas

En general, una expresión de la forma

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{4+\cfrac{7}{1+\cfrac{1}{2}}}} \tag{1.1}$$

es un ejemplo de una fracción continua. La fracción continua (1.1) puede ser evaluada calculando y simplificando las expresiones siguientes en el orden considerado:

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{2} &= \frac{3}{2}\\
4+\frac{7}{1+\frac{1}{2}} &= 4+\frac{7}{\frac{3}{2}}\\
3+\frac{5}{4+\frac{7}{1+\frac{1}{2}}} &= 3+\frac{5}{\frac{26}{3}}=\frac{93}{26}\\
2+\frac{1}{3+\frac{5}{4+\frac{7}{1+\frac{1}{2}}}} &= 2+\frac{1}{\frac{93}{26}}=\frac{212}{93}
\end{aligned}$$

esto es,

$$\tfrac{212}{93}=2+\tfrac{1}{3+\frac{5}{4+\frac{7}{1+\frac{1}{2}}}}$$

Una **fracción continua** es una expresión de la forma

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{\cdots}{+\cfrac{\cdots}{a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_n}}}}} \tag{1.2}$$

Donde, los a_i y b_i de (1.2) pueden ser números reales o complejos. Sin embargo, si cada b_i es igual a 1 y cada a_i es un entero mayor que 0, para $i > 1$, entonces la fracción se dice una **Fracción Continua Simple**. Nótese que en una fracción continua simple a_i puede ser un entero positivo, negativo o cero. En este capítulo nos ocuparemos principalmente de las fracciones continuas simples:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{\cdots}{+\cfrac{\cdots}{+\cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{1.3}$$

Los a_i de la fracción continua simple (1.3) se dicen los Términos de la fracción continua. Si el número de términos de una fracción continua simple es finito, tal como se indica, entonces se dice que la fracción continua es una **Fracción Continua Simple Finita**. Si el número de términos es infinito, entonces la fracción continua es una **Fracción Continua Simple Infinita**.

Todo número racional y todo número irracional puede ser expresado como una fracción continua simple. En los siguientes ejemplos ilustraremos el procedimiento para expresar un número racional como una fracción continua simple.

El problema de expresar un número irracional como una fracción continua simple será discutido mas adelante.

EJEMPLO 1.1 *Expresar $\frac{95}{43}$ como una fracción continua simple.*

$$\begin{aligned}
\frac{95}{43} &= 2 + \frac{9}{43} = 2 + \frac{1}{\frac{43}{9}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{7}{9}} \\
&= 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{9}{7}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}}} \\
&= 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}
\end{aligned}$$

La representión de $\frac{95}{43}$ como una fracción continua no es única. Existe una excepción trivial, ya que el último término 2 puede ser expresado como $1 + \frac{1}{1}$.

De aquí que,

$$\frac{95}{43} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}$$

Generalmente se prefiere la primera de las dos representaciones de $\frac{95}{43}$ como la representación en la fracción continua simple, ya que envuelve menos términos.

Algunas veces es conveniente escribir una fracción continua simple, tal como la del ejemplo 1, en la forma abreviada $[2, 4, 1, 3, 2]$; esto es

$$[2, 4, 1, 3, 2] = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}}$$

En general,

$$[a_1, a_2, a_3, ..., a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{\ddots+\frac{1}{a_n}}}}$$

EJEMPLO 1.2 *Evaluar la fracción continua simple* $[3, 4, 7, 4, 8]$.

$$\begin{aligned}
[3, 4, 7, 4, 8] &= 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7+\frac{1}{4+\frac{1}{8}}}} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7+\frac{1}{\frac{33}{8}}}} \\
&= 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7+\frac{8}{33}}} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{239}{33}}} \\
&= 3 + \frac{1}{4 + \frac{33}{239}} = 3 + \frac{1}{\frac{989}{239}} \\
&= 3 + \frac{239}{989} = \frac{3206}{989}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 1.3 *Expresar* $-\frac{16}{9}$ *como una fracción continua simple*

$$-\frac{16}{9} = -2 + \frac{2}{9} = -2 + \frac{1}{\frac{9}{2}} = -2 + \frac{1}{4+\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto

$$-\frac{16}{9} = [-2, 4, 2]$$

Se escogió -2 para el entero a_1 con el fin de que los términos restantes pudieran ser enteros positivos.

EJEMPLO 1.4 *Expresar* $\frac{58}{49}$ *como una fracción continua simple.*

$$\begin{aligned}\frac{58}{49} &= 1+\frac{9}{49}=1+\frac{1}{\frac{49}{9}}=1+\frac{1}{5+\frac{4}{9}}\\ &= 1+\frac{1}{5+\frac{1}{\frac{9}{4}}}=1+\frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$=\tfrac{58}{49}=[1,5,2,4]$$

Nótese que el divisor en cada paso del proceso para expresar $\frac{58}{49}$ como una fracción continua simple es el dividendo en el paso siguiente.

Nótese que en los ejemplos 1, 3 y 4 cada número racional fue expresado como una fracción continua simple finita; en el ejemplo 2 la fracción continua simple finita representó un número racional.

Teorema 1.1 *Todo número racional puede ser expresado como una fracción continua simple finita, y recíprocamente, Toda fracción continua simple finita representa un número racional.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\frac{p}{q}$ un número racional y supongamos $q>0$. Entonces, por la propiedad de la división, existen enteros a_i y r_i tales que

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= a_1+\frac{r_1}{q}=a_1+\frac{1}{\frac{q}{r_1}} \quad \text{donde} \quad a_1<\frac{p}{q} \quad \text{y} \quad 0<r_1<q_1;\\ \frac{q}{r_1} &= a_2+\frac{r_2}{r_1}=a_2+\frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}, \quad \text{donde} \quad a_2<\frac{q}{r_1} \quad \text{y} \quad 0<r_2<r_1;\\ \frac{r_1}{r_2} &= a_3+\frac{r_3}{r_2}=a_3+\frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}, \quad \text{donde} \quad a_3<\frac{r_1}{r_2} \quad \text{y} \quad 0<r_3<r_2;\\ \cdots &= \cdots\\ \frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= a_{n-1}+\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}=a_{n-1}+\frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}}\\ \text{donde} &\qquad a_{n-1}<\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} \quad \text{y} \quad 0<r_{n-1}<r_{n-3}\\ \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_n\end{aligned}$$

Nótese que $r_1,r_2,r_3,...,r_{n-1}$ es una sucesión decreciente de enteros positivos.
Como sólo existe un número finito de enteros positivos menores que q, este proceso debe terminar como se indicó; esto es, sólo existe un número finito de enteros positivos r_i que satisfacen las ecuaciones. Por sustitución, usando los pasos del proceso anterior.

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$
$$= [a_1, a_2, a_3, ..., a_n]$$

Por lo tanto, como sólo usamos un número finito de términos, el número racional $\frac{p}{q}$ queda representado como una fracción continua simple finita.

Recíprocamente, toda fracción continua simple finita es una suma y cociente de fracciones, y como sabemos que toda fracción de números enteros es un número racional, y que ambas operaciones, suma y cociente, son internas en el cuerpo Q de los números racionales, el resultado de todas las operaciones que se indican en la fracción continua simple finita es una fracción, esto es, un número racional. ■

La representación de un número racional como una fracción continua simple finita no es única. Debido a la manera en que los a_i son escogidos en el teorema 1, cada a_i es único. Sin embargo, si $a_n > 1$, entonces

$$a_n = (a_n - 1) + 1 = (a_n - 1) + \frac{1}{1}$$

y

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, a_3, ..., a_n] = [a_1, a_2, a_3, .., a_{n-1} - 1, 1]$$

si $a_n = 1$ entonces

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = a_{n-1} + \frac{1}{1} = a_{n-1} + 1$$

y

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, a_3, .., a_n] = [a_1, a_2, a_3, .., a_{n-1} + 1]$$

Así, todo número racional puede ser expresado como una fracción continua simple finita en exactamente dos formas. Además, una representación tiene un número impar de términos y la otra representación tiene un número par de términos.

1.2. Fracciones Continuas Infinitas

El método usado para expresar un número irracional como una función continua simple es básicamente el mismo método usado en la sección 1.1 para los números irracionales.

Sea x un número irracional. El número irracional x puede ser expresado en la forma

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1}$$

donde a_1 es el mayor entero menor que x y

$$0 < \frac{1}{x_1} < 1$$

Si x_1 es número racional, entonces (**por el teorema 1.1**), puede ser expresado como una fracción continua simple finita, por lo tanto, x puede ser expresado como una fracción continua simple finita, y (**por el teorema 1.2**) x es un número racional. Esto es contrario a la hipótesis. Por lo tanto, x_1 es un número irracional. Además $x_1 > 1$, ya que $0 < \frac{1}{x_1} < 1$. De aquí que x_1 puede ser expresado en la forma

$$x = a_2 + \frac{1}{x_2}$$

donde a_2 es el mayor entero menor que x_1 y

$$0 < \frac{1}{x_2} < 1$$

Además, x_2 es un entero positivo y x_2 es un número irracional. El proceso puede continuarse indefinidamente. Para cada x_i existe un a_{i+1} que es el mayor entero menor que x_i tal que

$$x_i = a_{i+1} + \frac{1}{x_{i+1}}$$

donde a_{i+1} es un entero positivo y x_{i+1} es un número irracional. Por lo tanto,

$$x = (a_1, a_2, a_3, ...).$$

Como a_1 es el mayor entero menor que x y cada a_{i+1}, para $i > 0$, es el mayor entero positivo menor que x_i, la representación del número irracional x como una fracción continua simple infinita es única. El argumento presentado aquí es una demostración del teorema siguiente.

Teorema 1.2 *Todo número irracional puede ser expresado como una única fracción continua simple infinita.*

Sea β cualquier número irracional, el cual puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\beta = a_0 + \frac{1}{\beta_1}$$

Donde a_0 es el mayor entero menor o igual a β y $0 < \dfrac{1}{\beta_1} < 1$.
Luego, supongamos que β_1 sea un número racional, entonces lo podemos expresar como una fracción continua simple finita, luego β lo podemos representar como una fracción continuada simple finita y β está determinado por un número racional.

Ahora, esto es contrario a la hipótesis, por lo tanto, β_1 es un número irracional. Por lo tanto, podemos representar β_1 como:

$$\beta_1 = a_1 + \frac{1}{\beta_2}$$

Donde a_1 es un entero positivo y β_2 es un número irracional. Este procedimiento se extenderá indefinidamente. Por lo tanto, para cada β_i, existe un número irracional a_{i+1}, tal que:

$$\beta_1 = a_{i+1} + \frac{1}{x_{i+1}}$$

Donde tenemos que a_{i+1} es un entero positivo y x_{i+1} es un número irracional. Por lo tanto, tenemos ahora que $\beta = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$

Por lo tanto, por lo expresado podemos concluir que la representación en fracción continua de un número irracional es única.

El reciproco del **Teorema 1.2** es una consecuencia directa del **Teorema 1.1** y del hecho de que todo número real es un racional o un irracional.

Teorema 1.3 *Toda fracción continua simple infinita representa un número irracional.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos una fracción continua simple infinita cualquiera. Sea x el número representado por la fracción continua. Por el **Teorema 1.1**, x no puede ser un número racional. Por lo tanto, x es un número irracional.

Nótese que todavía no hemos hecho ninguna interpretación del uso de la palabra (representar) en el caso de las fracciones continuas simples infinitas. Por ejemplo, toda fracción continua simple finita puede ser (evaluada) llevando a cabo un número finito de operaciones racionales, y en este sentido (representan) un número racional. ¿Cómo se podría (evaluar) una fracción continua simple infinita? Esta pregunta será en el caso general en la sección 1.8.

EJEMPLO 1.5 *Expresar* $\sqrt{8}$ *como una fracción continua simple.*

Solución: Como $2 < \sqrt{8} < 3$, entonces 2 es el mayor entero menor que $\sqrt{8}$.
Así,

$$\begin{aligned}
\sqrt{8} = 2 + (\sqrt{8} - 2) &= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{8}-2}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{8}+2}{4}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{8}-2}{4}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{\sqrt{8}-2}}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{8}-2}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + (\sqrt{8}-2)}}
\end{aligned}$$

Notar ahora que la expresión $\sqrt{8}-2$ aparece otra vez.El desarrollo de $\sqrt{8}-2$ como una fracción continua es otra vez

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+(\sqrt{8}-2)}}.$$

Por lo tanto, $\sqrt{8} = [2,1,4,1,4,1,4,...]$, donde los enteros 1 y 4 se repiten indefinidamente. Es preferible escribir $\sqrt{8} = [2,\overline{1,4}]$, donde la barra sobre los enteros 1 y 4 indica que ellos se repiten indefinidamente.

La representación en fracción continua de $\sqrt{8}$ es un ejemplo de una fracción continua infinita que es periódica. La sucesión de términos 1,4 es el periodo; la longitud del periodo es dos, ya que el número de términos que se repiten es dos. Las fracciones continuas periódicas y sus propiedades serán consideradas con cierto detalle en la sección 1.11

EJEMPLO 1.6 *Expresar $\sqrt{3}$ como fracción continua simple.*

Solución: Como $1 < \sqrt{3} < 2$,se tiene que 1 es el mayor entero menor que $\sqrt{3}$. Así,

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} &= 1 + (\sqrt{3}-1) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{3} = [1,1,2,1,2,1,2,...],$$

donde los enteros 1 y 2 se repiten indefinidamente, esto es, $\sqrt{3} = [1,\overline{1,2}]$.

La fracción continua simple infinita que representa $\sqrt{3}$ es otro ejemplo de una fracción periódica, cuya longitud de periodo es dos. Ilustraremos con el ejemplo siguiente una técnica interesante para expresar el número irracional $\sqrt{2}$ como una fracción continua simple infinita.

EJEMPLO 1.7 *Expresar $\sqrt{2}$ como una fracción continua simple.*

Solución: Sea $x = \sqrt{2}. \Longrightarrow x^2 - 1 = 1$, y $(x-1)(x+1) = 1$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
x - 1 &= \frac{1}{x+1},\\
x &= 1 + \frac{1}{1+x}\\
&= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{1+\left(1+\cfrac{1}{1+x}\right)}}\\
&= 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+x}}\\
&= 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\left(1+\cfrac{1}{1+x}\right)}}\\
&= 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+x}}}
\end{aligned}$$

$$\ldots$$

Así, continuando de esta manera, x puede ser expresado como la fracción continua simple infinita [1,2,2,2,...],esto es,

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}].$$

EJEMPLO 1.8 *Determinar el número irracional representado por la fracción continua simple infinita [4,1,8].*

Sea $x = [4, 1, 8]$. Entonces

$$x = 4 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cdots}}}}$$

y

$$x - 4 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \left(\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cdots}} \right)}}$$

La fracción continua simple infinita contenida en el paréntesis es simplemente la representación de $x - 4$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
x - 4 &= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + (x-4)}} \\
&= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x+4}} \\
&= \cfrac{1}{\cfrac{x+5}{x+4}} \\
&= \frac{x+4}{x+5}; \\
(x-4)(x+5) &= x + 4, \\
x^2 + x - 20 &= x + 4, \\
x^2 &= 24, \\
x &= \sqrt{24}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la fracción continua simple infinita $[4, \overline{1, 8}]$ representa el número irracional $\sqrt{24}$
Notar que aunque $\sqrt{x^2} = 24$, $x = -\sqrt{24}$, ya que el primer término de la fracción continua es un entero positivo. No existe un método sencillo para determinar la expresión en fracción continua para números irracionales que no son irracionales cuadráticos. Un irracional cuadrático es un número irracional que es solución de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son enteros. Existen métodos más sofisticados para obtener expresiones en fracciones continuas para otros números irracionales. Por ejemplo,

$$\sqrt[3]{2} = [1, 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, ...]$$
$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, ...]$$
$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, ...].$$

Nótese que estas fracciones continuas simples infinitas no son periódicas. En la sección 1.11 probaremos que toda fracción continua periódica representa un irracional cuadrático, y todo irracional cuadrático puede ser representado por una fracción continua periódica.

1.3. Convergentes

Una de las razones por las cuales las fracciones continua son importantes es que ellas pueden ser usadas para obtener aproximaciones numéricas de los números irracionales.
Las fracciones continuas simples finitas

$$\begin{aligned}
c_1 &= [a_1] = a_1 \\
c_2 &= [a_1, a_2] = a_1 + \frac{1}{a_2} \\
c_3 &= [a_1, a_2, a_3] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} \\
&\cdots \\
c_k &= [a_1, a_2, a_3, ..., a_k] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{\cdots}{\cfrac{\cdots}{+\cfrac{1}{a_k}}}}}
\end{aligned}$$

se dicen los **convergentes** o reducidos de la fracción continua simple $[a_1, a_2, ...,]$. (La fracción continua simple $[a_1, a_2, ...]$ puede ser fracción continua finita o infinita.) En esta sección examinaremos alguna de las propiedades de los convergentes de las fracciones continuas simples por medio de ejemplos. Más adelante se demostrarán algunas de estas propiedades de los convergentes, incluso las propiedades de los convergentes como aproximaciones de los números racionales e irracionales.

EJEMPLO 1.9 *Determinar los convergentes de la fracción continua simple finita* $[1,3,4,2,3]$.

$$\begin{aligned}
c_1 &= [1] = 1 \\
c_2 &= [1,3] = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\
c_3 &= [1,3,4] = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}} = \frac{17}{13} \\
c_4 &= [1,3,4,2] = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{38}{29} \\
c_5 &= [1,3,4,2,3] = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}} = \frac{131}{100}
\end{aligned}$$

Nótese que en el ejemplo 1.9, el quinto convergente c_5 es igual al valor de la fracción continua simple, pues consta de cinco términos, que son $[1,3,4,2,3]$.

En general, el último convergente de una fracción continua simple finita es siempre igual al racional representado por esa fracción continua.

Además, nótese que cada convergente de la fracción continua simple finita en el ejemplo 1.9, es una mejor aproximación del número racional $\frac{131}{100}$ que el convergente precedente; esto es,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{131}{100} - 1\right| &= \frac{31}{100} = 0{,}3100 = \left|\frac{131}{100} - \frac{4}{3}\right| = \frac{7}{300} = 0{,}0233 \\
\left|\frac{131}{100} - \frac{17}{13}\right| &= \frac{3}{1300} = 0{,}0023 \\
\left|\frac{131}{100} - \frac{38}{29}\right| &= \frac{1}{2900} = 0{,}0003 \\
\left|\frac{131}{100} - \frac{131}{100}\right| &= 0
\end{aligned}$$

EJEMPLO 1.10 *Derterminar los primeros cinco convergentes de la fracción continua simple infinita* $[2, \overline{2,4}]$.

$$c_1 = [2] = 2$$

$$c_2 = [2,2] = 2 + \frac{1}{2} = 2{,}5$$

$$c_3 = [2,2,4] = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}} = \frac{22}{9} = 2{,}444$$

$$c_4 = [2,2,4,2] = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{49}{20} = 2{,}45$$

$$c_5 = [2,2,4,2,4] == 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}} = \frac{218}{89} = 2{,}449$$

Como $\frac{218}{89} \approx 2{,}449$ y $\sqrt{6} \approx 2{,}449$, uno podrá conjeturar que la fracción continua simple infinita $[2, \overline{2,4}]$ del ejemplo 1.10 representa al número irracional $\sqrt{6}$. En verdad, este hecho puede ser verificado expresando $\sqrt{6}$ como una fracción continua simple infinita por el método de la sección 1.2.

Otra vez, nótese que el ejemplo 1.10 el segundo convergente c_2 es una mejor aproximación a $\sqrt{6}$ que el primer convergente c_1, el tercer convergente c_3 es una mejor aproximación de $\sqrt{6}$ que el segundo convergente c_2, el cuarto convergente c_4 es una mejor aproximación a $\sqrt{6}$ que el tercer convergente c_3, el quinto convergente c_5 es una mejor aproximación a $\sqrt{6}$ que el cuarto convergente c_4. Los convergentes c_1, c_2, c_3, c_4 y c_5 de la fracción continua que representa $\sqrt{6}$ forman una sucesión de números racionales que son aproximaciones cada vez mejores de $\sqrt{6}$. Consideremos el gráfico de los cinco primeros convergentes de la fracción continua simple que representa a $\sqrt{6}$ que aparece en la figura 1.1.

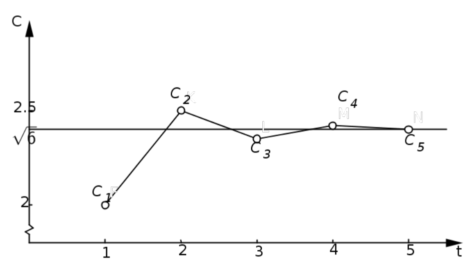


Figura 1.1

Los convergentes correspondientes a impares c_1, c_3, c_5 son menores que $\sqrt{6}$; los convergentes correspondientes a los pares c_2, c_4 son mayores que $\sqrt{6}$.

Además,

$$c_1 < c_3 < c_5 < \sqrt{6} < c_4 < c_2$$

Resultados similares fueron obtenidos en el ejemplo 1.9. En general se puede demostrar (mas adelante los teoremas) que

I) los convergentes correspondientes a índices impares de una fracción continua simple forman una sucesión creciente, esto es,

$$c_1 < c_3 < c_5 < \cdots$$

II) los convergentes correspondientes a índices pares de una fracción continua simple forman una sucesión decreciente, esto es,

$$c_2 > c_4 > c_6 > \cdots$$

III) todo convergente correspondiente a índice impar de una fracción continua simple infinita que representa a un número irracional x es menor que x, y todo convergente correspondiente a un par es mayor que x, esto es,

$$c_1 < c_3 < c_5 < \cdots < x < \cdots < c_6 < c_4 < c_2$$

.

Como la primera es una sucesión creciente acotada superiormente, y la segunda una sucesión decreciente acotada inferiormente y las dos sucesiones son acotadas por el teorema de convergencia monótona, convergen a un mismo valor x.

El enunciado (III) puede ser modificado para cubrir el caso de una fracción continua simple finita que representa a un número racional x sólo cambiando la desigualdad por igualar a partir de un cierto convergente. Este convergente c_j corresponde al último convergente de la representación de x.

EJEMPLO 1.11 *Encontrar una aproximación décima a* π*, calculando el cuarto convergente de* $[3, 7, 15, 1, 292, 1, \cdots]$.

El cuarto convergente de la fracción continua simple infinita que representa π es $[3, 7, 15, 1]$; esto es,

$$c_4 = [3, 7, 15, 1]$$

. Como $[3, 7, 15, 1] = [3, 7, 16]$,

$$\begin{aligned} c_4 &= [3, 7, 16] \\ &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} \\ &= \frac{355}{113} \\ &\approx 3{,}14159 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\pi \approx 3{,}14159.$$

1.4. Evaluación de convergente

Aunque cada convergente de una fracción continua simple representa una mejor aproximación al valor de la fracción continua que el precedente, no es eficiente calcular cada convergente a partir de su definición. Existen relaciones recursivas que nos permiten calcular cada convergente de una fracción continua simple a partir del convergente precedente y los términos de la fracción continua. El análisis siguiente motiva el enunciado de estas relaciones que se demuestra en el teorema 1.4.

Consideremos cada convergente c_n expresado como el cociente de dos enteros p_n y q_n , esto es, $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$. Ahora bien, por definición,

$$
\begin{aligned}
c_1 &= a_1, \quad \text{por lo cual} \quad p_1 = a_1 \quad \text{y} \quad q_1 = 1;\\
c_2 &= a_1 + \frac{1}{a_2}, \quad \text{por lo cual} \quad p_2 = a_1a_2 + 1 \quad \text{y} \quad q_2 = a_2;\\
c_3 &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}\\
&= \frac{a_3a_2a_1 + a_1 + a_3}{a_3a_2 + 1}\\
&= \frac{a_3(a_2a_1 + 1) + a_1}{a_3a_2 + 1}\\
&= \frac{a_3p_2 + p_1}{a_3q_2 + q_1}, \quad \text{por lo cual} \quad p_3 = a_3p_2 + p_1 \quad \text{y} \quad q_3 = a_3q_2 + q_1;\\
c_4 &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}\\
&= \frac{a_4a_3a_2a_1 + a_2a_1 + a_4a_1 + a_4a_3 + 1}{a_4a_3a_2 + a_2 + a_4}\\
&= \frac{a_4(a_3a_2a_1 + a_1 + a_3) + (a_2a_1 + 1)}{a_4(a_3a_2 + 1) + a_2}\\
&= \frac{a_4p_3 + p_2}{a_4q_3 + q_2}, \quad \text{por lo cual} \quad p_4 = a_p3 + p_2 \quad \text{y} \quad q_4 = a_4q_3 + q_2.
\end{aligned}
$$

Las expresiones $p_3, q_3, p_4,$ y q_4 sugieren que

$$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{para n=3,4,5,6,...}$$

$$q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{para n=3,4,5,6,...}$$

Teorema 1.4 *Si* $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, *donde* c_n *es el enésimo convergente de la fracción continua simple* $[a_1, a_2, a_3, ...]$, *entonces*

$$p_1 = a_1, \quad p_2 = a_2 a_1 + 1.$$
$$q_1 = 1, \quad q_2 = a_2$$

y

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad para \quad n \geq 3,$$
$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad para \quad n \geq 3,$$

DEMOSTRACIÓN: Las expresiones para p_1, q_1, p_2 y q_2 pueden ser obtenidas de la definición de convergente.

Las relaciones recursivas para p_n y q_n, donde $n \geq 3$, son demostradas por inducción matemática. Ya hemos demostrado que las relaciones son verdaderas para n=3. Supongamos que las relaciones recursivas son verdaderas para todo entero entre 3 y k. Entonces

$$c_k = [a_1, a_2, a_3, ..., a_k] = \frac{p_k}{q_k},$$

donde $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ y $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$. Ahora,

$$c_{k+1} = [a_1, a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1}] = \left[a_1, a_2, a_3, ..., a_k, \frac{a}{q_{k-1}}\right].$$

Por lo tanto,

$$c_{k+1} = \frac{\left(a_k + \dfrac{1}{a_k + 1}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}}$$

$$= \frac{a_{k+1}\left(a_k p_{k-1} + p_{k-2}\right) + p_{k-1}}{a_{k+1}\left(a_k q_{k-1} + q_{k-2}\right) + q_{k-1}}$$

$$= \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}.$$

Así $p_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-1}$ y $q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1}$

Por lo tanto,

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \text{ para } n \geq 3,$$
$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \text{ para } n \geq 3.$$

Ejemplo 1. Encontrar los convergentes de la fracción continua simple finita [1,3,5,1,2,4] usando el teorema 4.4.1.

Solución: Como $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 1, a_5 = 2$ y $a_6 = 4$,

$$p_1 = a_1 = 1$$

$$q_1 = 1$$

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1}$$

$$p_2 = a_2a_1 + 1 = 3(1) + 1 = 4,$$

$$q_2 = a_2 = 3,$$

$$c_2 = \frac{p_2}{q_2}$$

$$p_3 = a_3p_2 + p_1 = 5(4) + 1 = 21,$$

$$q_3 = a_3q_2 + q_1 = 5(3) + 1 = 16,$$

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{21}{16};$$

$$p_4 = a_4p_3p_1 = 5(4) + 1 = 21,$$

$$q_4 = a_4q_3 + q_2 = 1(16) + 3 = 19,$$

$$c_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{25}{19};$$

$$p_5 = a_5p_4 + p_3 = 2(25) + 21 = 71,$$

$$q_5 = a_5q_4 + q_3 = 2(19) + 16 = 54,$$

$$c_5 = \frac{p_5}{q_5} = \frac{71}{54};$$

$$p_6 = a_6p_5 + p_4 = 4(71) + 25 = 309,$$

$$q_6 = a_6q_5 + q_4 = 4(54) + 19 = 235,$$

$$c_6 = \frac{p_6}{q_6} = \frac{306}{235}.$$

A menudo es conveniente ordenar los cálculos y formar una tabla:

i	1	2	3	4	5	6
a_i	1	3	5	1	2	4
p_i	1	4	21	25	71	309
q_i	1	3	16	19	54	235
c_i	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{25}{19}$	$\frac{71}{54}$	$\frac{309}{235}$

El cálculo de los convergentes puede también ser llevado a cabo usando las definiciones formales $p_0 = 1, q_0 = 0, p_{-1} = 0$ y $q_{-1} = 1$.

Entonces

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \text{ para } n \geq 1$$
$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \text{ para } n \geq 1.$$

Ejemplo 2. Evaluar la fracción continua simple finita.

$$[3, 1, 2, 1, 1, 2, 2]$$

.

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
a_i			3	1	2	1	1	2	2
p_i	0	1	3	4	11	15	26	67	160
q_i	1	0	1	1	3	4	7	18	43

El valor de la fracción continua simple finita [3,1,2,1,1,2,2] es el valor del séptimo convergente c_7, esto es, $\dfrac{160}{43}$.

1.5. Convergentes Como Determinantes

Un método de cálculo de convergentes completamente diferente involucra el uso de determinantes. Los determinantes nos permiten calcular cada convergente de una fracción continua simple directamente a partir de los términos de la fracción continua, esto es, no es necesario conocer los valores de los convergentes precedentes. Como un ejemplo del proceso, consideremos el problema de calcular cada convergente c_4 de la fracción continua simple infinita $[a_1, a_2, ...]$. Como consecuencia del teorema 1.1, cada uno de los primeros cuatro convergentes c_n puede ser expresado como el cociente de dos enteros p_n y q_n, donde

$$\begin{aligned}
p_1 &= a_1, & q_1 &= 1\\
p_2 &= a_2 p_1 + 1, & q_2 &= a_2 q_1;\\
p_3 &= a_3 p_2 + p_1, & q_3 &= a_3 q_2 + q_1;\\
p_4 &= a_4 p_4 + p_2, & q_4 &= a_4 q_3 + q_2;
\end{aligned}$$

El conjunto de ecuaciones que contienen a p_1, p_2, p_3 y p_4 representa un sistema de cuatro ecuaciones lineales. Reordenando los términos de estas ecuaciones tenemos:

$$\begin{cases} -p_1 & = & -a_1 \\ a_2p_1 - p_2 & = & -1 \\ p_1 + a_3p_2 - p_3 & = & 0 \\ p_2 + a_4p_3 - p_4 & = & 0. \end{cases}$$

Usando la regla de Crámer para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales,

$$p_4 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -a_1 \\ a_2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 \end{vmatrix}}$$

Como todos los elementos sobre la diagonal principal en el determinante del denominador son ceros, el valor del determinante es a igual $(-1)^4$, esto es, 1. Por lo tanto, por las propiedades de los determinantes

$$p_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -a_1 \\ a_2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}$$

Análogamente, el conjunto de ecuaciones en las incógnitas $q_1, q_2, q_3 y q_4$ representa un sistema de cuatro ecuaciones lineales. Reordenando los términos de esas ecuaciones, tenemos

$$\begin{cases} -q_1 & = & -1 \\ a_2q_1 - q_2 & = & 0 \\ q_1 + a_3q_2 - q_3 & = & 0 \\ q_2 + a_4q_3 - q_4 & = & 0. \end{cases}$$

Otra vez, usando la regla de Crámer,

$$q_4 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$q_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & 0 \end{vmatrix}$$

Si evaluamos este determinante usando los menores correspondientes a los elementos de la cuarta columna,

$$q_4 = \begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 \\ 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}$$

Entonces, por definición,

$$c_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 \\ 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}}$$

Aunque los determinantes que representan p_4 y q_4 son de órdenes diferentes nótese la semejanza en el ordenamiento de los elementos. Además, nótese que los valores de los determinantes que representan p_4 y q_4 dependen directamente de los términos de la fracción continua simple infinita $[a_1, a_2, a_3, \cdots]$.

EJEMPLO 1.12 *Por medio de determinantes, evaluar la fracción continua simple finita* $[1, 5, 2, 4]$

El valor de la fracción continua simple finita $[1, 5, 2, 4]$ está dado por el cuarto convergente c_4. Como $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 2, a_4 = 4$, entonces por la ecuación anterior y las propiedades de los determinantes

$$\begin{aligned}
p_4 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 49 + 9 = 58 \\
q_4 &= \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 49; \\
c_4 &= \frac{p_4}{q_4} = \frac{58}{49}
\end{aligned}$$

La consideración del análisis anterior en una forma general sugiere el teorema siguiente, que define a los convergentes como determinantes.

Teorema 1.5 *Si* $\dfrac{p_n}{q_n}$ *es el enésimo convergente* c_n *de la fracción continua simple* $[a_1, a_2, a_3, \cdots]$, *entonces*

$$p_n = \|\alpha_{ij}\| \qquad\qquad q_n = \|\beta_{ij}\|$$

donde $\|\alpha_{ij}\|$ *y* $\|\beta_{ij}\|$ *son determinantes de orden* n *y* $n - 1$, *respectivamente, y*

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -1 & si\ i+1 = j \\ a_i & si\ i = j \\ 1 & si\ i-1 = j \\ 0 & para\ todo\ otro\ valor\ de\ i\ y\ j; \end{cases} \qquad \beta_{ij} = \begin{cases} -1 & si\ i+1 = j \\ a_{i+1} & si\ i = j \\ 1 & si\ i-1 = j \\ 0 & para\ todo\ otro\ valor\ de\ i\ y\ j; \end{cases}$$

EJEMPLO 1.13 *Determinar el quinto convergente de la fracción continua simple infinita* $[2, \overline{2, 4}]$ *por medio de determinantes.*

Como $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2$ y $a_5 = 4$, por teorema 1,5 y las propiedades de los determinantes

$$
\begin{aligned}
p_5 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 4\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 4 * 40 + 2 * 9 + 40 = 218 \\
&= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 2 * 40 + 9 = 89 \\
&= \frac{p_5}{q_5} = \frac{218}{89}.
\end{aligned}
$$

1.6. Algunas Propiedades de los Convergentes

Los teoremas siguientes relativos a las propiedades de los convergentes son extremadamente interesantes y útiles. Estos teoremas son los requisitos previos para entender el uso de convergentes en las aproximaciones numéricas a números irracionales que serán discutido más adelante.

Teorema 1.6 *Si* $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, *donde* c_n *es el convergente enésimo de la fracción continua simple, entonces*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n \quad = \quad (-1)^n; \tag{1.4}$$

esto es,

$$c_n - c_{n-1} \quad = \quad \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}. \tag{1.5}$$

Demostración:
La demostración es por inducción matemática. Sea $n = 1$. Entonces, usando las definiciones de p_0 y q_0,

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = a_1 * 0 - 1 * 1 = -1 = (-1)^1.$$

Como este caso es ms bien trivial y usa las definiciones adoptadas de p_0 y q_0, verificaremos también que esta relación (1,4) es válida para $n = 1$;

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = (a_2 a_1 + 1) * 1 - a_1 * a_2 = 1 = (-1)^2.$$

Supongamos que la relación (1,4) es válida para $n = k$. Entonces

$$\begin{aligned} p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} &= (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_k - p_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) \\ &= a_{k+1} p_k q_k + p_{k-1} q_k - a_{k+1} p_k q_k - p_k q_{k-1} \\ &= -(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k) \\ &= -(-1)^k \\ &= (-1^{k+1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$$

Para $n \geq 1$. Además,

$$\begin{aligned}
\frac{p_n q_{n-1}}{q_n q_{n-1}} - \frac{p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} &= \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} \\
\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} &= \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} \\
c_n - c_{n-1} &= \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 1.14 *Verificar el teorema* 1,6 *con la fracción continua simple finita* $[2, 3, 11, 2]$

i	-1	0	1	2	3	4
a_i			2	3	11	2
p_i	0	1	2	7	79	165
q_i	1	0	1	3	34	71

$$\begin{aligned}
p_1 q_0 - p_0 q_1 &= 2 * 0 - 1 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1; \\
p_2 q_1 - p_1 q_2 &= 7 * 1 - 2 * 3 = 7 - 6 = 1 = (-1)^2; \\
p_3 q_2 - p_2 q_3 &= 79 * 3 - 7 * 34 = 237 - 238 = -1 = (-1)^3; \\
p_4 q_3 - p_3 q_4 &= 165 * 34 - 79 * 71 = 5610 - 5609 = 1 = (-1)^4.
\end{aligned}$$

Teorema 1.7 *Cada convergente de una fracción continua simple es un número racional expresado en su forma irreducible, esto es, si* $\frac{p_n}{q_n}$ *es el convergente enésimo de una fracción continua simple, entonces* $(p_n, q_n) = 1$

Demostración:

Usando el teorema 1,6 puede ser expresado como una función lineal homogénea de p_n y q_n. Como (p_n, q_n) es el menor entero positivo que puede ser expresado como una función lineal homogénea de p_n y q_n, se tiene que $(p_n, q_n) = 1$.

Teorema 1.8 *Si* $c_n = \frac{p_n}{q_n}$, *donde* c_n *es el convergente enésimo de la fracción continua simple* $[a_1, a_2, a_3, \cdots]$, *entonces*

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^{n-1} a_n \tag{1.6}$$

esto es,

$$c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}}. \tag{1.7}$$

Demostración:

Como $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ y $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ para $n \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\
&= a_n p_{n-1} q_{n-2} + p_{n-2} q_{n-2} - a_n p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-2} q_{n-2} \\
&= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \\
&= (-1)^{n-1} a_n.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\frac{p_n q_{n-2}}{q_n q_{n-2}} - \frac{p_{n-2} q_n}{q_n q_{n-2}} &= \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}} \\
\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} &= \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}} \\
c_n - c_{n-2} &= \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 1.15 *Verificar el teorema* 1,8 *con la fracción continua simple finita* $[3, 4, 2, 1, 3]$.

i	-1	0	1	2	3	4	5
a_i			3	4	2	1	3
p_i	0	1	3	13	29	42	155
q_i	1	0	1	4	9	13	48

$$\begin{aligned}
p_1 q_{-1} &= 3 * 1 - 0 * 1 = 3 - 0 = 3 = (-1)^0 * 3 = (-1)^0 a_1; \\
p_2 q_0 - p_0 q_2 &= 13 * 0 - 1 * 4 = -4 = (-1)^1 * 4 = (-1)^1 a_2; \\
p_3 q_1 - p_1 q_3 &= 29 * 1 - 3 * 9 = 2 = (-1)^2 * 2 = (-1)^2 a_3; \\
p_4 q_2 - p_2 q_4 &= 42 * 4 - 13 * 13 = -1 = (-1)^3 * 1 = (-1)^3 a_4; \\
p_5 q_3 - p_3 q_5 &= 155 * 9 - 29 * 48 = 3 = (-1)^4 * 3 = (-1)^4 a_5.
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Introducción a la Teoría de Aproximación Diofántica.

2.1. Teoría de Aproximación Diofántica.

Primeramente damos a conocer unos teoremas importantes sobre los números racionales e irracionales que son muy importantes para el desarrollo de unos teoremas que se dan más adelante.

Teorema 2.1 Mostrar que, dados $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ y $n > 1$, un entero, existe un racional $\dfrac{p}{q}$, donde $1 < q < n$, tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq} \qquad (1)$$

Demostración:
Dividiendo el intervalo de $[0, 1]$ en n partes:

$$\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\right\}$$

Ahora consideremos los $n + 1$ números 0, $\alpha - [\alpha]$, $2\alpha - [2\alpha]$,..., $n\alpha - [n\alpha]$, donde la parte fraccionaria de un número $((x))$ es: $((x)) = x - [x]$.

Luego hacemos parejas de subintervalos de longitud $\frac{1}{n}$ y así obtenemos:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right), ..., \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right)$$

Observemos que $0 \leq x - [x] \leq 1$ y que $x - [x] = 0$, si y sólo si x es un entero.

Apartir de lo anterior decimos que existen s y t, $0 \leq s \leq t \leq n$, tal que $s\alpha - [s\alpha]$ ó $t\alpha - [t\alpha]$ pertenecen a un mismo subintervalo.

Sean $q = t - s$ y $p = [t\alpha] - [s\alpha]$. Tenemos, por lo tanto,

$$\begin{aligned} |q\alpha - p| &= |(t-s)\alpha - ([t\alpha] - [s\alpha])| \\ &= |(t\alpha - [t\alpha]) - (s\alpha - [s\alpha])| \\ &< \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}$

Si $q \leq n$, en efecto, se demuestra en (2) que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \qquad (2)$$

En (1) y (2) podemos, obviamente, suponer que p y q sean relativamente primos. Si α es un racional, $\alpha = \frac{a}{b}$, donde $(a, b) = 1$ y $b > 0$, entonces la desigualdad (2) tiene solamente un número finito de soluciones en números p y q relativamente primos porque, sea $\alpha \neq \frac{p}{q}$ y $p > 0$, tenemos

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|aq - bp|}{bq} \geq \frac{1}{bq}$$

donde concluimos que, siendo (2) verificado, $q < b$.

En el teorema siguiente, mostraremos que (2) posee infinitas soluciones para α un irracional.

Teorema 2.2 Si α es un irracional, entonces la desigualdad (2) posee un número infinito de soluciones para todos los p y q relativamente primos.

Demostración:

Sea n_1 un entero, $n_1 > 1$, pero por el teorema 2.1 obtenemos un par de enteros p_1 y q_1, relativamente primos, tal que

$$\beta_1 = \left(\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right) < \frac{1}{n_1 q_1}$$

donde $1 \leq q_1 \leq n_1$. Como α y es irracional, $\beta_1 \neq 0$. Luego podemos escoger un entero $n_2 > \frac{1}{\beta_1}$ y determinar enteros p_2 y q_2, relativamente primos, tales que,

$$\beta_2 = \left(\alpha - \frac{p_2}{q_2}\right) < \frac{1}{n_2 q_2} \leqslant \frac{1}{n_2} < \beta_1$$

Con $1 \leq q_2 \leq n_2$. Repitiendo este procedimiento, obtenemos una secuencia infinita de números positivos decreciente

$$\beta_1 > \beta_2 > ... > \beta_i > ...$$

donde el número

$$\beta_i = \left(\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right)$$

satisface las desigualdades $\beta_i < \frac{1}{q_i^2}$, concluimos la demostración del teorema.

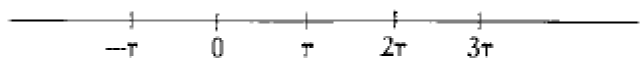
Teorema 2.3 Para todo α irracional el conjunto $\{m + n\alpha, m, n\epsilon Z\}$ es denso en R.

Demostración:

Debemos mostrar que para todo β real y $\epsilon > 0$, arbitrario, existen enteros m, n tales que $(\beta - (m + n\alpha)) < \epsilon$. Escojamos, inicialmente, N tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Para este N y el α dado, el teorema 2.1 nos garantice la existencia de enteros p y q tal que

$$(q\alpha - p) < \frac{1}{N}$$

Siendo α irracional. $(q\alpha - p) > 0$.
Podemos, de esta forma, dividir una recta en múltiplos de $r = (q\alpha - p)$.



donde concluimos que existe un entero M tal que $Mr \leq \beta < (M + 1)r$. Luego

$$\begin{aligned}
(\beta - Mr) &= (\beta - M(q\alpha - p)) \\
&= (\beta - ((-Mp) + (Mq)\alpha)) \\
&= (\beta - (m + n\alpha)) < \frac{1}{N} < \epsilon.
\end{aligned}$$

En la ultima igualdad admitimos $r = q\alpha - p$. Para $r = p - q\alpha$ tendríamos que tomar $m = Mp$ y $n = -Mq$, y concluimos la demostración.

En las inclusiones $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, el paso de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ es, sin duda el más complicado y conceptualmente el número real de representación está conectado directamente a la propia noción de número real. Una propiedad esencial de $\mathbb{R}$ es que todo número real puede ser aproximado por números racionales. Efectivamente, dado $x\epsilon\mathbb{R}$, existe $k = [x]\,\epsilon\mathbb{Q}$ tal que $0 \leq x - k \leq 1$. Podemos escribir una representación decimal de

$$x - k = 0, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots, \;\; a_i\epsilon \{0, 1, \ldots, 9\},$$

Que significa que si $r_n = a_n + 10.a_{n-1} + 100.a_{n-2} + ... + 10^{n-1}.a_1$, entonces $\frac{r_n}{10^n} \leq x - k < \frac{r_n+1}{10^n}$, y por lo tanto $k + \frac{r_n}{10^n}$ es una buena aproximación racional de x, aunque el error $\left(x - (k + \frac{r_n}{10^n})\right)$ es menor que $\frac{1}{10^n}$, y es un número muy pequeño si n es grande. La representación decimal de un número real proporciona una secuencia de aproximaciones por racionales cuyos denominadores son potencias de 10.

Dado cualquier $x \epsilon \mathbb{R}$ y q un natural no nulo, existe $p \epsilon \mathbb{Z}$ tal que $\frac{p}{q} \leq x \leq \frac{p+1}{q}$ (basta tomar $p = [qx]$), y por tanto $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$ y $x - \frac{p+1}{q} \leq \frac{1}{q}$.

En particular, existe aproximaciones de x por racionales con denominador q, con error menor que $\frac{1}{q}$. La representación decimal de x es equivalente a dar estas aproximaciones para los denominadores q que sean potencias de 10, y tiene méritos como una conveniencia para realizar cálculos que las representaciones más comunes de los números reales. Por otro lado, se trata de la selección arbitraria de la base 10 , y aproximaciones racionales de modo que x sea mucho más eficiente que el valor actual.
Por ejemplo.

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{700} < \left|\pi - \frac{314}{100}\right| \ y \ \left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{3000000} < \left|\pi - \frac{3141592}{1000000}\right|$$

Se muestra que $\frac{22}{7}$ y $\frac{355}{113}$ son mejores aproximaciones de π de aproximaciones decimales que con denominadores mucho más grandes son de hecho espectaculares de lo que podría esperarse.

El propósito de esta sección es presentar otra manera de representar a los números reales, la representación por fracciones continuas, que siempre proporciona sorprendentemente aproximaciones racionales y de hecho buenas aproximaciones, además de ser natural y conceptualmente simple.

Definimos recursivamente

$$\alpha_0 = x, \ a_n = [\alpha_n]$$

y

$$si \ \alpha_n \notin Z, \ \ \alpha_n + 1 = \frac{1}{\alpha_n - a_n} \ para \ todo \ n \in N.$$

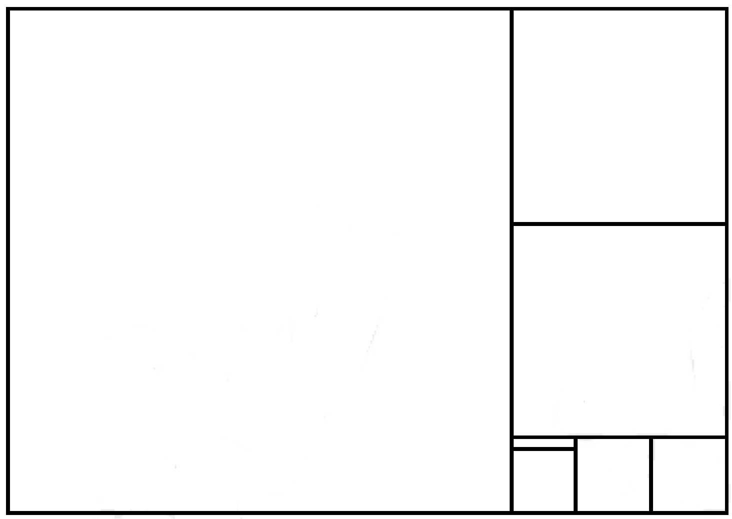
Si, para algún n, $\alpha_n = a_n$ tenemos

$$x = \alpha_0 = [a_0; a_1; a_2, ..., a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}}$$

se denota

$$x = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, \cdots] \overset{def}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}}$$

El significado de esta última notación se aclarará más adelante. La representación de arriba se llama representación por fracciones continuas de x.



La figura da una interpretación geométrica a la representación de un número por fracciones continuas. Llenamos un rectángulo de $1 \times x$, poniendo siempre el cuadrado más grande posible en el espacio libre. Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, ...$ indican el número de cuadrados de cada tamaño. En la figura, los lados del rectángulo son $c < d$ entonces

$$\frac{d}{c} = [1; 2; 2; 1, ...]$$

porque tenemos $a_0 = 1$ cuadrado grande, $a_1 = 2$ cuadrados más pequeños, $a_2 = 2$ cuadrados más pequeños, $a_3 = 1$ cuadrado aún más pequeño, y un gran número no está diseñando que son cuadrados todavía aún más pequeños.

Recíprocamente, si $x \in \mathbb{Q}$ su representación sera finita, y sus coeficientes a_n provienen del algoritmo de Euclides: si $x = \frac{p}{q}$ (*con con* $q > 0$) tenemos

$$p = a_0 q + r_1 \quad 0 \leq r_1 < q$$

$$q = a_1 r_1 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = a_2 r_2 + r_3 \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

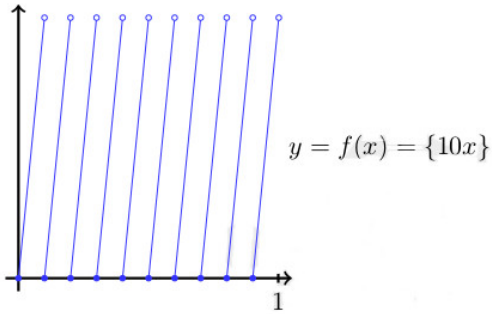
$$r_{n-1} = a_n r_n$$

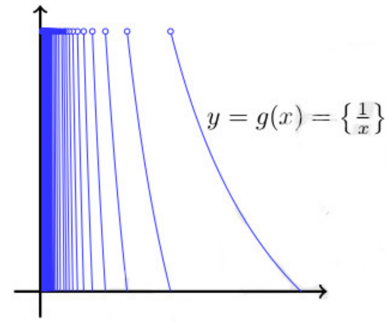
Entonces
$x = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_3}{r_2}}} = \cdots = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots \frac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1; a_2; \cdots, a_n].$
Esto ya es una ventaja de representación por fracciones continuas.

La representación decimal de números reales esta vinculada a la función $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = 10x - [10x]$, más precisamente, la función dinámica de f. La función dinámica de f nos referimos al estudio de composiciones sucesivas: para cada punto $x \in [0,1]$, estamos interesados en la secuencia $x,\ f(x)\ f(f(x)), \ldots \in [0,1]$, cuyos términos son llamados iteraciones sucesivas de f. De hecho, si $x \in [0,1]$ tienen representación decimal $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, entonces $a_1 [10x]$ y $f(x) = 0, a_2 a_3 a_4 \ldots$. Definiendo, así $f^1 = f\ y\ f^{n+1} = f \circ f^n$, tenemos $f^n(x) = 0, a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \ldots$ para todo $n \geq 1$. Así, por ejemplo, si $x = \frac{1}{3} = 0,333\ldots$, tenemos $f(x) = 0,333\ldots = x$ (en ese caso, decimos que $x = \frac{1}{3}$ y un punto fijo de f); si $x = \frac{4}{33} = 0,121212\ldots$, tenemos $f(x) = 0,212121\ldots\ y\ f(f(x)) = 0,121212\ldots = x$ (en este caso decimos que $x = \frac{4}{33}$ es un punto periódico de periodo de f^2) y, si $x \in [0,1]$ y no es racional, sus iteraciones por f será todas distintas, porque su representación decimal será periódicamente cualquier dígito.

La representación en fracciones continuas está vinculada a la función dinámica $g : (0,1) \to [0,1]$ dada por $g(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$, támbien conocida como transformación de Gauss; si $\alpha = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots] \in (0,1)$, entonces $a_1 = \left[\frac{1}{\alpha}\right]$ y $g(\alpha) = [0; a_2, a_3, a_4, \ldots]$. Por lo tanto, mediante el establecimiento de como antes $g^1 = g$ y $g^{n+1} = g \circ g^n$ para todo $n \geqslant 1$, tenemos $g^n(\alpha) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \cdots]$, para todo $n \geqslant 1$.

A continuación representamos los gráficos de $f(x) = 10x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.





Sea $x = [a_0; a_1; a_2; ...]$. Sea $p_n \in Z$, $q_n \in N_{>0}$ tal que los números primos $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1; a_2, ..., a_n]$, $n \geq 0$. Esta fracción $\frac{p_n}{q_n}$ se llama el n-ésimo convergente de la fracción continua de$x$.

Proposición 2.4

Dada una secuencia (finita o infinita) $t_0, t_1, t_2, ... \in R$ tal que $t_k > 0$, para todo $k \geq 1$, definimos las secuencias (x_m) y (y_m) por $x_0 = t_0$, $y_0 = 1$, $x_1 = t_0t_1 + 1$, $y_1 = t_1$, $x_{m+2} = t_{m+2}x_{m+1} + x_m$, $y_{m+2} = t_{m+2}y_{m+1} + y_m$, y para todo $m \geq 0$. Tenemos

$$[t_0; t_1; t_2, ..., t_n] = t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2 + \ddots \cfrac{1}{t_{n-1} + \cfrac{1}{t_n}}}}$$

Además, $x_{n+1}y_n - x_ny_{n+1} = (-1)^n$, para todo $n \geq 0$.

Demostración:

La prueba sera por inducción sobre n. Para $n = 0$ tenemos $[t_0] = t_0 = \frac{t_0}{1} = \frac{x_0}{y_0}$. Para $n = 1$, tenemos $[t_0; t_1] = t_0 + \frac{1}{t_1} = \frac{t_0t_1+1}{t_1} = \frac{x_1}{y_1}$ y, para $n = 2$, tenemos

$$[t_0; t_1; t_2] = t_0 + \frac{1}{t_1 + \frac{1}{t_2}} = t_0 + \frac{t_2}{t_1t_2 + 1} = \frac{t_0t_1t_2 + t_0 + t_2}{t_1t_2 + 1}$$
$$= \frac{t_2(t_0t_1 + 1) + t_0}{t_2t_1 + 1} = \frac{t_2x_1 + x_0}{t_2y_1 + y_0} = \frac{x_2}{y_2}$$

Supongamos que la afirmación sera valido para n. Para $n + 1$ en lugar de n tenemos

$$
\begin{aligned}
[t_0; t_1; t_2, ..., t_n; t_{n+1}] &= n[t_0; t_1; t_2, ..., t : n + \frac{1}{t_{n+1}}] \\
&= \frac{(t_n + \frac{1}{t_{n+1}})x_{n-1} + x_{n-2}}{(t_n + \frac{1}{t_{n+1}})y_{n-1} + y_{n-2}} \\
&= \frac{t_{n+1}(t_n x_{n-1} + x_{n-2}) + x_{n-1}}{t_{n+1}(t_n y_{n-1} + y_{n-2}) + y_{n-1}} \\
&= \frac{t_{n+1}x_n + x_{n-1}}{t_{n+1}y_n + y_{n-1}} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}
\end{aligned}
$$

ahora demostraremos por inducción, la segunda afirmación. Tenemos

$$x_1 y_0 - x_0 y_1 = (t_0 t_1 + 1) - t_0 t_1 = 1 = (-1)^0$$

y si $x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n$ para algún valor de n, entonces

$$
\begin{aligned}
x_{n+2}y_{n+1} - x_{n+1}y_{n+2} &= (t_{n+2}x_{n+1} + x_n)y_{n+1} - (t_{n+2}y_{n+1} + y_n)x_{n+1} \\
&= -(x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

$\square$

En los próximos resultado, $x = [a_0; a_1; a_2 : a_3, ..., a_n]$ será un número real, y $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in N}$, $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1; a_2, ..., a_n]$ se reducirá a una sucesión de fracción continua de x.

Corolario 2.5 Las sucesiones (p_n) y (q_n) satisfacen las recurrencias

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \;\; y \;\; q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$$

para todo $n \geq 0$, con $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_0 = 1$ y $q_1 = a_1$. Por otra parte,

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$$

para todo $n \geq 0$.

Demostración:
Las sucesiones (p_n) y (q_n) definidas por las recurrencias satisfacen, por la proposición anterior, las igualdades

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1; a_2, ..., a_n] \quad y \quad p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n, \; \forall n \geq 0$$

.

Como $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, para todo $n \in N$, tenemos que p_n y q_n dados por las recurrencias son primos entre si. Además, también la siguiente recurrencia $q_n > 0$, $\forall n \geq 0$. Estos hechos implican que $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in N}$ y la secuencia redujeron la fracción continua de x.

Corolario 2.6 Tenemos, para todo $n \in N$,

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \;\; y \;\; \alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}$$

Demostración:
La primera igualdad se sigue de la proporción anterior para $x = [a_o; a_1; a_2, ..., a_n]$ y la segunda es una consecuencia directa de la primera.

Proposición 2.7 Tenemos

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}$$

donde

$$\beta_{n+} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1]$$

.

En particular,

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2} < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

.

Demostración:

Por el corolario anterior

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}q_n} = \frac{-(-1)^{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}q_n)} \\ &= \frac{-(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} = \frac{-(-1)^{n-1}}{(\alpha\_n+1q_n + q_{n-1})q_n} \\ &= \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q}{}_n)q_n^2} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2} \end{aligned}$$

En particular,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}$$

Y como $[\alpha_{n+1}] = a_{n+1}$ y $0 < \beta_{n+1} < 1$, se deduce que $a_{n+1} < \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} < a_{n+1} + 2$, lo que implica la ultima afirmación.

La expansión de β_{n+1} de la siguiente fracción continua

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{a_nq_{n-1} + q_{n-2}} \Longrightarrow \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{1}{a_n + \frac{q_{n-2}}{qn-1}}$$

aplicando de forma recursiva. ∎

Observación 2.8 Como $\lim_{n\longrightarrow\infty} q_n = +\infty$ (debido a que (q_n) es estrictamente creciente), sigue esta proposición

$$lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{p_n}{q_n} = x$$

Lo que permite recuperar a x de $a_0, a_1, a_2, ...$, da sentido a la igualdad $x = [a_0; a_1; a_2, ...]$ cuando la fracción continua de x es infinita (es decir, cuando x es irracional).

Observación 2.9 La proposición implica que, para cada α irracional, la desigualdad $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ tiene infinitas soluciones racionales $\frac{p}{q}$. Este hecho se conoce como el Teorema de Dirichlet.
Es interesante observar que, $\alpha = \frac{r}{s} \in Q$, la desigualdad $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ tiene sólo un número finito de soluciones racionales $\frac{p}{q}$. Este hecho, $\left|\frac{r}{s} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ es igual a $|qr - ps| < \frac{s}{q}$, lo que implica que $q \leq s$.

La siguiente proposición muestra que los convergentes pares forman una sucesión creciente, y que los convergentes impares forman una sucesión decreciente.

Proposición 2.10 Para todo $k \geq 0$, tenemos

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq x \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

.

Demostración: Los resultados se deducen de los hechos generales. Para todo $n \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{a_{n+2}p_{n+1} + p_n}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n} - \frac{q_n}{q_n} \\ &= \frac{a_{n+2}(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1})}{q_n(a_{n+2}q_{n+1} + q_n)} = \frac{(-1)^n a_{n+2}}{q_{n+2}q_n}\end{aligned}$$

y positivo para n par y negativo para n impar. Por otra parte, para todo $n \geq 0$, tenemos que $x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}$ es positivo para n par y negativo para n impar. ■

Prposición 2.11 Sean $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ enteros con $a_k > 0$, $\forall k \geq 1$, y sea $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k\geq 0}$ la sucesión de fracciones continuas $[a_0; a_1; a_2, ..., a_n]$. Entonces, el conjunto de números reales cuya representación por fracción continua $a_0, a_1, ...a_n$ es el intervalo

$$I(a_0, a_1, a_2, ...a_n) = \frac{p_n}{q_n} \cup [a_0, a_1, ..., a_n, \alpha], \alpha > 1$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right) & n\ es\ par \\ \left(\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right] & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

Además, la función $G\,:\,(1, +\infty) \longrightarrow I(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$ dada por $G(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, \alpha]$ monótona, siendo creciente para n impar y decreciente para n par.

Demostración:

Es suficiente observar que, al igual que en la prueba del corolario anterior, $G(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, \alpha] = \frac{\alpha p_n + p_{n+1}}{\alpha q_n + q_{n+1}} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{(\alpha q_n + q_{n-1})q_n}$, y por tanto G es creciente para n par. Como, $G(1) = \frac{p_n+q_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}$ y $G(\alpha) = \frac{p_n}{q_n}$, tenemos:

$$G((1, +\infty)) = \begin{cases} \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right) & n\ es\ par \\ \left(\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right) & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} I(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n) &= \left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \cup \{[a_0, a_1, \cdots, a_n, \alpha], \alpha > 1\} \\ &= \left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \cup G((1, +\infty)) \\ &= \begin{cases} \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right) & n\ es\ par \\ \left(\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right] & si\ n\ es\ impar \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición 2.12 Dados enteros $a_0, a_1, a_2, ...$, con $a_k > 0$, $\forall k \geq 1$, existe un único número real α (que es irracional) cuya representación por fracciones continuas es $[a_0; a_1, a_2, ...]$

Demostración:

Consideremos las sucesiones p_n y q_n definidas por las recurrencias

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \quad y \quad q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1}q_n$$

para todo $n \geq 0$, con $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_0 = 1$ y $q_1 = a_1$. Tenemos, al igual que en la proposición 2.10,

$$\frac{2k}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{2k+1}{q_{2k+1}},\ \forall k \geq 0.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta los intervalos cerrados

$$I_k = \left[\frac{p_{2k}}{q_{2k}}, \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}\right],$$

tenemos $I_{k+1} \subset I_k$, $\forall k \geq 0$, y por tanto, como

$$|I_k| = \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \frac{p_{2k+1}q_{2k} - p_{2k}q_{2k+1}}{q_{2k+1}q_{2k}} = \frac{(-1)^{2k}}{q_{2k+1}q_{2k}} = \frac{1}{q_{2k+1}q_{2k}}$$

tiende a 0 cuando k tiende a infinito, tal que existe $\alpha \in R$

$$\bigcap_{k\geq 0} I_k = \alpha$$

.

Como, para todo $k \geq 0$,

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, ...a_{2k}] = \frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \alpha \geq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_{2k}, a_{2k+1}]$$

y la proposición anterior, $[a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_{2k}]$ y $[a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_{2k}, a_{2k+1}]$ pertenecen a $I(a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_{2k})$, que es una serie, se deduce que $\alpha \in I\left(a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{2k}\right)$, y por tanto la fracción continua de α comienza con $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2k}$ para todo $k \geq 0$, hay que tener en cuenta que, como la representación de fracciones continuas cuando α es infinito entonces α es irracional. ■

Ejemplo 1. Tenemos

1. $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, ...]$, por tanto

$$\frac{p_0}{q_0} = 3, \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}, \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}, \qquad \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} ...$$

2. $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, ...]$ porque

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}}$$

Esto demuestra que, en particular, $\sqrt{2}$ y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ son irracionales porque sus fracciones continuas son infinitas.De ahí se sigue también que $\sqrt{2} - 1 = [0; 2, 2, 2, \cdots]$ y $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0; 1, 1, 1, \cdots]$ son puntos fijos de la transformación de Gauss g.

2.2. Aproximaciones Reducidas

Teorema 2.13. Tenemos, para todo $n \in N$,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

Además

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \qquad \text{ó} \qquad \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}$$

.

Demostración: El número x siempre pertenece al segmento con extremos $\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ cuya longitud es

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \Longrightarrow \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Además

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} \qquad y \qquad \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{2q_{n+1}^2},$$

entonces

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} \Longrightarrow q_{n+1} = q_n$$

lo cual es absurdo, por lo tanto queda demostrado lo pedido. ■

Observación 2.14 De hecho $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$. Cuanto mayor sea a_{n+a} mejor será la aproximación $\frac{p_n}{q_n}$ de x.

Teorema 2.15 (Herwitz, Markov). Para cualquier α irracional y todo $n \geq 1$, tenemos

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

para al menos un racional

$$\frac{p}{q} \in \left\{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right\}$$

En particular, la desigualdad anterior tiene infinitas soluciones racionales $\frac{p}{q}$.

Demostración: Supongamos que el teorema es falso. Entonces, por la proposición 2,7, existe α irracional, $n \geq 1$ con $\alpha_n + \beta_n \leq \sqrt{5}$. Por lo tanto, tenemos $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$ como claramente $a_k \leq 2$ para $k = n, n+1, n+2$ y si cualquier $a_k = 2$ para $k = n+1, n+2$, sería $a_k + \beta_k \geq 2 + \frac{1}{2} \geq \sqrt{5}$, lo cual es absurdo.

Sean $x = \frac{1}{\alpha_{n+2}}$ y $y = \beta_{n+1}$. La desigualdad anterior se escribe

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{y} \leq \sqrt{5},\ f \leq \sqrt{5}\ y\ \frac{1}{x} + \frac{1}{1+y} \leq \sqrt{5}$$

.

Tenemos

$$\begin{aligned} 1 + x + y \leq \sqrt{5} \quad &\Longrightarrow \quad 1 + x \leq \sqrt{5} - y \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{1+x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{\sqrt{5}-y} + \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{5}}{1+y} \end{aligned}$$

y por lo tanto $y(\sqrt{5} - y) \geq 1 \Longrightarrow y \geq \frac{\sqrt{5}+2}{2}$. Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} x \leq \sqrt{5} - 1 - y \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{1}{\sqrt{5}-1-y} + \frac{1}{1+y} \\ &= \quad \frac{\sqrt{5}}{(1+y)(\sqrt{5}-1-y)} \end{aligned}$$

y por lo tanto $(1+y)(\sqrt{5} - 1 - y) \geq 1 \Longrightarrow y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, y por lo tanto $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, lo cual es absurdo porque

$$y = \beta_{n+1} = \frac{q_n - 1}{q_n} \in Q.$$

$\blacksquare$

Observación 2.16 En particular se demuestra que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ tiene infinitas soluciones racioales $\frac{p}{q}$, para todo α irracional. El número $\sqrt{5}$ y es el mayor con esa propiedad. De hecho, si

$$\epsilon > 0,\ \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ y\ \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+0\epsilon)q^2}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-p\right| &< \frac{1}{(\sqrt{5}+\epsilon)q} \\ \left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-p\right|\left|q\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-p\right| &< \frac{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{p}{q}\right|}{\sqrt{5}+\epsilon}, \end{aligned}$$

o sea,

$$\left|p^2-pq-q^2\right| < \frac{\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{p}{q}-\sqrt{5}\right|}{(\sqrt{5}+\epsilon)}$$

Si q es grande, $\frac{1}{q^2}$ es pequeño, y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{p}{q}$ es muy cercano de 0, donde el lado derecho de la desigualdad es cercano de $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\epsilon} < 1$, lo cual es absurdo, para $|p^2-pq-q^2| \geq 1$, de hecho si $p^2-pq-q^2 = 0$, haría

$$\left(\left(\frac{p}{q}\right)^2 - (\frac{p}{q}) - 1\right) = 0 \Longrightarrow \frac{p}{q} \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\},$$

lo cual es absurdo, porque $\frac{p}{q} \in Q$

El siguiente teorema (y su coralario 2.19) se caracteriza en términos de error por la aproximación reducida de x en $\frac{p}{q}$, lo cual por definición, $|qx-p|$, la relación entre $|x-\frac{p}{q}|$ y el error máximo de aproximación es por q como denominador.

Teorema 2.17 para todo $p,\ q\ \in Z$, con $0 < q < q_{n+1}$ tenemos

$$|q_n x - p_n| \leq |qx - p|\,.$$

Además, si $o < q < q_n$ la desigualdad seria estricta.

Prueba:

Como $mcd(p_n, q_n) = 1$, tenemos que $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ entonces $p = kp_n$ y $q = kq_n$ para algún entero $k \neq 0$ en cuyo caso el resultado es claro. Por lo tanto, podemos suponer que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ de manera que

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

ya que $q < q_{n+1}$. Así, $\frac{p}{q}$ está fuera del rango de los extremos $\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ y por lo tanto

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq min\left\{\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$$

lo que implica

$$|qx - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|\,.$$

Además, la igualdad solo puede ocurrir si $x = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, donde $a_{n+1} \geq 2$, y $q_{n+1} > 2q_n$, como una fracción continua finita, como el algoritmo de Euclides, el ultimo coeficiente a_n es siempre mayor que 1. En este caso, si $q < q_n$, tendremos

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{p}{q}\right| &\geq \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \\ &\geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} > \frac{1}{qq_{n+1}}\end{aligned}$$

lo que implica

$$|qx - p| > \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n| \qquad \blacksquare$$

Corolario 2.18 para todos $q < q_n$,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|$$

Corolario 2.19 Si $|qx - p| < |q'x - p'|$, para todos los p' y $q' \leq q$ tal que $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$, entonces $\frac{p}{q}$ es una fracción continua reducida de x.

Demostración: Tomando n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Por el teorema, $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|$, y por lo tanto $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ ■

Teorema 2.20 Si $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$ entonces $\frac{p}{q}$ se deduce la fracción continua de x.

Demostración: Sea n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Supongamos que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. Como la demostración del teorema anterior, $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$ y así $\frac{p}{q}$ esta fuera del intervalo de los extremos $\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Tenemos dos posibilidades:

1. Si $q \geq \frac{q_{n+1}}{2}$ entonces $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^2}$, es absurdo.

2. $q < \frac{q_{n+1}}{2}$,

$$\begin{aligned}
\left|x - \frac{p}{q}\right| &\geq \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \\
&\geq \frac{1}{qq_{n+1}} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} \\
&> \frac{1}{2qq_n} \geq \frac{1}{2q^2}
\end{aligned}$$

lo cual también es absurdo.

Dado $\alpha \in R$, definimos orden de α por

$$ord\alpha = sup\left\{v > o \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^v}\right\} \ tiene \ infinitas \ soluciones \ \frac{p}{q} \in Q$$

.

Observemos que el orden de cada número irracional puede calcularse a partir de su fracción continua.

Teorema 2.21 sea α es un número irracional, y sean $[a_0; a_1, a_2, a_3...]$ su fracción continua $\frac{p_n}{q_n}$ y su convergente, entonces

$$ord\alpha = 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{lnq_{n+1}}{lnq_n} = 2 + \limsup_{n\to\infty} \frac{lna_{n+1}}{lnq_n}.$$

Demostración Sabemos que las mejores aproximaciones por racionales se obtienen a partir de la convergencia de fracción continua, así para calcular el pedido, simplemente calcular el orden generada por la convergencia. Sea $s_n > 0$ un número real tal que $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n^{sn}}$. Por el teorema 2,13 sabemos que $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ y

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{2}\left(\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right) = \frac{1}{2}\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{2q_n q_{n+1}}.$$

Luego tenemos que

$$\frac{1}{2q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^{sn}} \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

y tomando logaritmo obtenemos

$$ln\ 2 + ln\ q_n + ln\ q_{n+1} \geq s_n ln\ q_n + ln\ q_{n+1}.$$

Por lo que $ord\ \alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{ln\ q_{n+1}}{ln\ q_n}$. Para mostrar la segunda igualdad, observemos que $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n+1}$, así

$$a_{n+1}q_n < q_{n+1} < (a_{n+1}+1)q_n,$$

ahora tomando el logaritmo y dividiendo por $ln\ q_n$ obtenemos

$$\frac{ln\ a_{n+1}}{ln\ q_n} + 1 < \frac{ln\ q_{n+1}}{lnq_n} < \frac{ln(a_{n+1}+1)}{ln\ q_n} + 1$$

por tanto $\limsup_{n\to\infty} \frac{ln\ q_{n+1}}{ln\ q_n} = 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{ln\ a_{n+1}}{ln\ q_n}$. ■

2.3. Fracciones Continuas Periódicas

En esta sección vamos a demostrar que los números reales con fracciones continuas periódicas son exactamente las raíces de ecuaciones de segundo grado con coeficientes enteros.

Recordemos que en la representación de x por la fracción continua, $a_n,\ \alpha_n$ de definen por la recursión

$$\alpha_0 = x, \ \ a_n = [\alpha_n] \ \ \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$$

y

$$\alpha_n = \frac{p_{n-1} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}, \ \ \forall \in N.$$

Esto da una prueba explícita del hecho de que la fracción continua de x es periódica, entonces x es una raíz de una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros. De hecho, si $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, $n \in N$, $k \in N_{>0}$ se sigue que

$$\frac{p_{n-2} - q_{n-2x}}{q_{n-1}x - p_{n-1}} = \frac{p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x}{q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}},$$

entonces $Ax^2 + Bx + C = 0$, donde

$A = q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1}$

$B = p_{n+k-1}q_{n-2} + p_{n+k-1} - p_{n+k-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+k-2}$

$C = p_{n-1}p_{n+k-2} - p_{n-2}p_{n+k-1}$.

Notese que el coeficiente de x^2 es no nulo, porque $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$ es una fracción irreducible de denominador q_{n-2}, porque $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$, y $\frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$ es una fracción irreducible de denominador $q_{n+k-2} > q_{n-2}$, donde $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \neq \frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$, luego $q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1} \neq 0$.

Probaremos un resultado, debido a Lagrange que dice, si x es irracionalidad cuadrática, es decir, si x es un irracional del tipo $r \pm \sqrt{(s)}$, $r, s \ \in Q$, $s > 0$, entonces la fracción continua de x es periódica, es decir, existe $n \in N$ y $k \in N_{>0}$ con $\alpha_{n+k} = \alpha_n$. En este caso, existen a, b, c enteros tales que $ax^2 + bx + c = 0$, con $b^2 - 4ac > 0$ y $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$ irracional.

Como $x = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$, tenemos:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Longrightarrow a\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right)^2 + b\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right) + c = 0$$

$$\Longrightarrow A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0,$$

donde

$A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2$

$B_n = 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}$

$C_n = ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2$.

Teniendo en cuenta que $C_n = A_{n-1}$. Vamos a demostrar que hay $M > 0$ tal que $0z\,|A_n| \leq M$ para todo $n \in N$, y por tanto $0 < |C_n| \leq M$, $\forall n \in N$:

$$A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 = aq_{n-1}^2\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\left(\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right),$$

donde x y $\bar{x}$ son raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, pero

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2} \leq 1 \Longrightarrow |A_n| \quad &= \quad aq_{n-1}^2\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\left|\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \\ &\leq \quad a\left(|\bar{x} - x| + \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\right) \\ &\leq \quad M = a\left(|\bar{x} - x| + 1\right).\end{aligned}$$

Observemos que, para cualquier $n \in N$,

$$B_n^2 - 4A_nC_n = \left(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}\right)^2\left(b^2 - 4ac\right) = b^2 - 4ac$$

Por tanto

$$\begin{aligned} & B_n^2 \leq 4A_nC_n + b^2 - 4ac \leq 4M^2 + b^2 - 4ac \\ \Longrightarrow \qquad & B_n \leq M' = \sqrt{4M^2 + b^2 - 4ac}. \end{aligned}$$

Probamos que A_n, B_n y C_n están delimitados de manera uniforme, donde sólo hay un número finito de posibles ecuaciones $A_nX^2+B_nX+C_n = 0$, y por tanto los posibles valores de α_n. Por lo tanto, necesariamente $\alpha_{n+k} = \alpha_n$ para cualquier $n \in N$, $k \in N_(> 0)$.

2.4. Espectros de Markov y Lagrange

Sea α un número irracional. De acuerdo con el teorema de Dirichlet, la desigualdad $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ tiene una infinitas soluciones racionales $\frac{p}{q}$. Markov y Hurwitz mejoraron este resultado, lo que demuestra que, todo irracional α, la desigualdad $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}*q^2}$ tienen infinitas soluciones racionales, y $\sqrt{5}$ esta constante con esta propiedad: para $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y para cualquier $\epsilon > 0$, la desigualdad $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\epsilon)q^2}$ tienen un solo número finito de soluciones (ver Teorema 2,17). Sin embargo, α determinó ser poco razonable, puede esperarse resultados mejores, lo que nos lleva a asociar a cada α, a su mejor constante de aproximación.

$$\begin{aligned} k(\alpha) &= sup\left\{k > 0 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{kq^2}\, tienen\ infinitas\ soluciones\ racionales\ \frac{p}{q}\right\} \\ &= \limsup_{p,q \in Z, q \to \infty} (|q(q\alpha - p)|^{-1}) \in R \cup \{+\infty\} \end{aligned}$$

Nuestra discusión inicial es, mostrar que $k(\alpha) \geq \sqrt{5}$ para todo $\alpha \in R$, y

$$k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$$

Estaremos interesado en $\alpha \in R$ tales que $k(\alpha) < +\infty$, y mas particularmente, la imagen de la función de k, es un conjunto $L = \{k(\alpha) | \alpha \in R\ Q\ y\ k(\alpha) < +\infty\}$. Este conjunto es conocido como el espectro de Lagrange.

Se sigue de la proposición 2.7 (y el Teorema 2.20) una fórmula para $k(\alpha)$: escribir α en la fracción continua, $\alpha = [0, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1]$. Tenemos entonces $k(\alpha) = \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n)$. En particular, $k(\alpha) < \infty \Longleftrightarrow (a_n)$ y limitado.

Es interesante observar que si cambiamos funciones un poco en la definición del Esprectro de Lagrange que sería un conjunto mucho menos interesante: si para $f:\ R \to R_+$ decreciente consideramos todo $k_f(\alpha)$ definido por

$$sup\left\{k > 1 \mid \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{k}\ tiene\ infinitas\ soluciones\ racionales\ \frac{p}{q}\right\}$$

entonces, si tenemos que $\lim_{q\to+\infty} q^2 f(q) = +\infty$, la imagen k_f seria $(0, +\infty)$ o $[0, +\infty]$, si consideramos $sup(\emptyset) = 0$ en este contexto y, si $\lim_{q\to+\infty} q^2 f(q) = +\infty$, entonces la imagen de k_f seria $+\infty$.

El conjunto L codifica una serie de propiedades diofanticas de números reales, y se ha estudiado durante mucho tiempo. Tal vez el primer resultado no trivial que se debe a Markov, que resúlto en 1879, que

$$L \cap (-\infty, 3) = \left\{k_1 = \sqrt{5} < k_2 = 2\sqrt{2} < k_3 = \frac{\sqrt{221}}{5} < ...\right\},$$

donde (k_n) es una sucesión del convergente 3 tal que $k_n \notin Q$ pero $k_n^2 \in Q$ para todo n Markov a probado que k_n son exactamente los números de la forma $\sqrt{9 - \frac{4}{z^2}}$, donde z es un entero positivo tal que existen enteros positivos x, y de modo que (x, y, z) una solución de la ecuación de Markov $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Por tanto, el principio del Espectro de Lagrange. Esa afirmación no es verdadera para todo conjunto L. Marshall Hall demostró en 1947 que L contiene un rayo (por ejemplo $[6, +\infty]$), G. Friman determino en 1975 el rayo mas grande que se encuentra en L, que es

$$\left[\frac{2221564096 + 283748\sqrt{462}}{491993569}, +\infty\right]$$

.

2.5. Teorema de Khintchine

Antes de proceder con la demostración del teorema de Khintchine, necesitamos los siguientes lemas. :

Lema 2.24 Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y sea $\alpha = [0; a_1, a_2, ...]$ la expansión de un número $\alpha \in [0, 1)$ como una fracción continua. La probabilidad de un término a_{n+1} sea igual a k dado que $a_1 = k_1, a_2 = k_2, ..., a_n = k_n$ está entre $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ y $\dfrac{2}{k(k+1)}$, $\forall\, k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{N}$

Demostración: Consideremos el convergente:

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}] \qquad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n]$$

Si $\alpha \in [0, 1)$, escribiendo $\alpha = [0; a_1, a_2, ..., a_n, \alpha_{n+1}]$ con $\alpha_{n+1} \in [1, +\infty)$ entonces $\alpha \in \left[\dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}, \dfrac{p_n}{q_n}\right)$, y por otra parte

$$a_{n+1} = k \Longrightarrow \alpha \in \left[\frac{kp_n + p_{n-1}}{kq_n + q_{n-1}}, \frac{(k+1)p_n + p_{n-1}}{(k+1)q_n + q_{n-1}}\right),$$

y el valor de los recíprocos (los extremos de los intervalos pueden ser cambiados). La longitudes de estos intervalos son respectivamente, $\dfrac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}$ y $\dfrac{1}{(kq_n + q_{n-1})((k+a)q_n + q_{n-1})}$ (ya que $|p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n| = 1$)
y por tanto la razón entre sus longitudes es:

$$\frac{q_n(q_n + q_{n-1})}{(kq_n + q_{n-1})((k+1)q_n) + q_{n-1})} = \frac{1 + \overline{\alpha}}{(k + \overline{\alpha})(k + 1\overline{\alpha})}$$

donde $\overline{\alpha} = \dfrac{q_{n-1}}{q_n} \in [0, 1]$. Por lo tanto la razón pertenece a $\left[\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}, \dfrac{2}{k(k+1)}\right]$.

Como $\sum\limits_{j \geq k} \dfrac{1}{(j+1)(j+2)} = \dfrac{1}{k+1}$ y $\sum\limits_{j \geq k} \dfrac{2}{j(j+1)} = \dfrac{2}{k}$, obtenemos lo siguiente

Corolario 2.25 La probabilidad de $a_{n+1} \geq k$, bajo el sentido del lema anterior pertenece a $\left[\dfrac{1}{(k+1)}, \dfrac{2}{k}\right]$.

Lema 2.26 Para casi todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $q_n \leq c^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prueba:

Sean $n, k \in \mathbb{N}$. La probabilidad de que k aparece al menos $\dfrac{4n}{k(k+1)}$ veces entre $a_1, a_2, ..., a_n$ y limitada por $\sum_{j=sn}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{s}{2}\right)^j \left(1-\frac{s}{2}\right)^{n-j}$, donde $s = \dfrac{4}{k(k+1)}$. Este número, es a su vez menor que $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\dfrac{n}{k(k+1)}}$, para $\dfrac{n}{k(k+1)}$ grande. De hecho si, $j \geqslant \dfrac{3sn}{4}$, $\dfrac{\binom{n}{j+1}\left(\frac{s}{2}\right)^{j+1}\left(1-\frac{s}{2}\right)^{n-j-1}}{\binom{n}{j}\left(\frac{s}{2}\right)^{j}\left(1-\frac{s}{2}\right)^{n-j}} = \dfrac{n-j}{j+1} \cdot \dfrac{s}{2-s} < \dfrac{4-3s}{3s} \cdot \dfrac{s}{2-s} = \dfrac{4-3s}{6-3s} < \dfrac{2}{3}$, luego como $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{s}{2}\right)^j \left(1-\frac{s}{2}\right)^{n-j} = 1$,
para $j = \dfrac{3sn}{4}$, $\binom{n}{j} \left(\frac{s}{2}\right)^j \left(1-\frac{s}{2}\right)^{n-j} \leqslant 1$, donde aplicando reiteradamente la desigualdad anterior obtenemos:
$\binom{n}{sn} \left(\frac{s}{2}\right)^{sn} \left(1-\frac{s}{2}\right)^{(1-s)} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{sn/4}$ y

$$\sum_{j=sn}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{s}{2}\right)^j \left(1-\frac{s}{2}\right)^{(n-j)} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{sn/4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{sn/4}$$

$$= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n/k(k+1)} < \left(\frac{3}{4}\right)^{n/k(k+1)},$$

Si $\dfrac{n}{k(k+1)}$ es lo suficientemente grande. Por lo tanto la probabilidad de que, para cualquier $k < [\sqrt[3]{n}\,]$, k aparece al menos $\frac{4n}{k(k+1)}$ veces entre $a_1, a_2, ..., a_n$ y como máximo $\sqrt[3]{n} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\sqrt[3]{n}}$, y que converge a cero cuando $n \longrightarrow +\infty$. Por otro lado, procediendo como en la prueba anterior y utilizando el hecho de que $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, tenemos la probabilidad total, que $a_n < n^2$ para todo n suficientemente grande. Por lo tanto, una probabilidad total para todo n grande es:

$$q_n < \prod_{k=1}^{n}(a_k+1) < \left(\prod_{r=1}^{\sqrt[3]{n}}(r+1)^{\dfrac{4n}{r(r+1)}}\right) \cdot \left(n^2\right)^{4n/\sqrt[3]{n}}$$

con $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{8\,log\, n}{\sqrt[3]{n}} = 0$, tenemos una probabilidad total

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{q_n} \leqslant exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{4\,log(r+1)}{r(r+1)}\right) < +\infty. \qquad \blacksquare$$

Observación 2.27 Se puede probar con métodos de la teoría ergódica que para casi todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n}$ vale:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n} = e^{\pi^2/12\,ln\,2} \approx 3,2758229...$$

Corolario 2.28. (i) Para casi todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2\,\log^2\, q}$ tienen un número finito de soluciones racionales $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, y por lo tanto, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\xi}}$ tiene solo un número finito de soluciones racionales p/q, para todo $\xi > 0$. En particular el $ord\,\alpha = 2$ para casi todo $\alpha \in \mathbb{R}$ donde

$$ord\; = sup\left\{\nu > 0 \;/\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\nu}}\;\; tienen\; infintas\; soluciones\;\; \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right\}.$$

(ii) Para casi todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2\,\log\, q}$ tienen infinitas soluciones racionales p/q, y por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{R}$, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{kq^2}$ tienen infinitas soluciones $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Teorema 2.22 (Khintchine). Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función decreciente tal que $h(n) = nf(n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ también sea decreciente.

(a) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$ entonces la ecuación $\left|\alpha - \frac{P}{Q}\right| < \frac{f(q)}{q}$ tiene un número finito de soluciones racionales $\frac{p}{q}$, para casi todo $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

(b) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$ entonces la ecuación $\left|\alpha - \frac{P}{Q}\right| < \frac{f(q)}{q}$ tiene un número infinito de soluciones racionales $\frac{p}{q}$, para casi todo $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Observación 2.23: La condición de que $nf(n)$ es decreciente, no es realmente necesario, como veremos más adelante, pero simplifica la prueba. Por otro lado, no podemos eliminar la hipótesis de que f es decreciente.

Demostración:

Observemos en primer lugar que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha \in [0,1)$. También tener en cuenta que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{q}$ tiene infinitas soluciones racionales $\frac{p}{q}$ si y solamente si , hay infinitos convergentes $\frac{p_n}{q_n}$ de α, tal que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{q}$. De hecho, si $\frac{p}{q}$ satisface la desigualdad anterior y $q_n \leqslant q \leqslant q_{n+1}$ y luego por el teorema 2.17 tenemos:

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{q}{q_n}\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{q}{q_n}.\frac{f(q)}{q} \leqslant \frac{f(q_n)}{q_n}.$$

(a) Supongamos ahora que $\sum f(n) < \infty$ y sea $\gamma = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Si aproximamos $\dfrac{p_n}{q_n}$ de α, tal que $\left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{f(q_n)}{q_n}$ entonces por la proposición 2.7 tenemos:

$$\frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})\, q_n^2} = \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{f(q_n)}{q_n}$$

$$\Longrightarrow \qquad a_{n+1} + 2 > \alpha_{n+1} + \beta n + 1 > \frac{1}{q_n f(q_n)}.$$

La última parte se da porque

como

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})q_n^2} < \frac{f(q_n)}{q_n}$$

entonces

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \frac{1}{(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})q_n^2}$$

y también

$$\frac{1}{(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})q_n^2} < \frac{f(q_n)}{q_n}$$

$$\frac{1}{q_n f(q_n)} < \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}$$

Utilizando lo anterior y haciendo operaciones algebraicas tenemos que

$$a_{n+1} + 2 > \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} > \frac{1}{q_n f(q_n)}$$

Por otra parte, tenemos que $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geqslant q_{n-1} + q_{n-2}$ y por inducción se tiene que $q_n \geqslant \gamma^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $nf(n)$ es decreciente, de manera que $a_{n+1} + 2 > \dfrac{1}{\gamma^{n-1} f(\gamma^{n-1})}$, entonces $a_{n+1} > A(n)$, donde $A(n) = \dfrac{1}{\gamma^{n-1} f(\gamma^{n+1})} - 2$.

Por lo tanto, para demostrar que solamente hay un número finito de convergentes tales que $\left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{f(q_n)}{q_n}$ para casi todo α, basta probar que con probabilidad total $a_{n+1} \leqslant A(n)$, para todo n suficientemente grande.
Antes probaremos que $q_n \geq \gamma^{n-1}$ por inducción
caso base $q_1 \geq \gamma^{1-1} = 1$, y $q_2 \geq \gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ esto es por hipótesis, además es raíz de $\gamma^2 = \gamma + 1$

ahora

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1} + q_{n-2} \geq \gamma^{n-2} + \gamma^{n-3} = \gamma^{n-3}(\gamma+1) = \gamma^{n-3}(\gamma^2) = \gamma^{n-1}$$

Lo cual queda demostrado que $q_n \geq \gamma^{n-1}$

Por el corolario 2.25, la probabilidad de $a_{n+1} \leqslant A(n)$ es al menos $1 - \dfrac{2}{A(n)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y por hipótesis de que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$ lo cual implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{A(n)} < \infty$, luego por comparación se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k f(\gamma^k) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma^{k+1} - \gamma^k) f(\gamma^{k+1}) \leqslant \frac{\gamma}{\gamma-1} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k f(\gamma^k) &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma^{k+1} - \gamma^k) f(\gamma^{k+1}) \\
&= \frac{\gamma}{\gamma-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma^k)(\gamma-1) f(\gamma^{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma}{\gamma-1} (\gamma^k)(\gamma-1) f(\gamma^{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma^{k+1}) f(\gamma^{k+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma^k) f(\gamma^k)
\end{aligned}$$

Lo anterior es el proceso de la comparación y también tener en cuenta que $1 < q < n$.

Así tenemos por lo tanto que $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{2}{A(n)}\right) > 0$, luego para cada $\xi > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{n=n_0}^{\infty}\left(1-\dfrac{2}{A(n)}\right) > 1-\xi$, donde la probabilidad total $a_{n+1} \leqslant A(n)$ para todo n suficientemente grande $\Longrightarrow \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{q}$. tiene un número finito de soluciones.

(b) Supongamos ahora que $\sum f(n) = +\infty$ fijemos $c > 0$ y vamos a restringir nuestra atención al conjunto X_c de los $\alpha \in [0,1]$ tales que $q_n < c^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (la unión de los conjuntos X_c para todo $c \in \mathbb{N}$ tiene probabilidad total en $[0,1]$ por el anterior lema).

Si $a_{n+1} > \dfrac{1}{q_n f(q_n)}$ entonces α pertenece al intervalo cuyos extremos son $\dfrac{p_n}{q_n}$ y $\dfrac{\frac{1}{q_n f(q_n)}p_n + p_{n-1}}{\frac{1}{q_n f(q_n)}q_n + q_{n-1}}$, donde $\left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{f(q_n)}{q_n}$, ya que $q_n < c^n$ y $\dfrac{1}{q_n f(q_n)} < \dfrac{1}{c^n f(c^n)}$. Vamos a demostrar que con probabilidad total tenemos que:

$$a_{n+1} \geqslant \frac{1}{c^n f(c^n)}$$

para infinitos $n \in \mathbb{N}$. Esto se sigue por el corolario 2.25 y del resultado $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{B(n)+1}\right) = 0$, donde $B(n) = \dfrac{1}{c^n f(c^n)}$, que a su vez se sigue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n f(c^n) \geqslant c^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(c^{n+1}-c^n)f(c^n) \geqslant c^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty.$$

Lo anterior se hace un procedimiento parecido como en el literal a).

Por lo tanto, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, tenemos que $\prod_{n=n_0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{B(n)+1}\right) = 0$, y con probabilidad total, existe $n \geqslant n_0$ con $a_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{c^n f(c^n)}$, en donde la ecuación $\left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{f(q_n)}{q_n}$ es satisfecha con probabilidad total para infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$.

■

Teorema de Khintchine Multidimensional

Primeramente vamos a demostrar un resultado que nos servirá de ayuda y es sobre función φ de Euler.

Lema 2.30 Para todo $k \in \mathbb{N}$ existen $c_k > 0$ tal que $\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\varphi(j)}{j}\right)^k \geqslant c_k n$ para todo n.

Demostración:

La demostración se hace por inducción sobre n.

El caso $k = 1$ se sigue de la proposición $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k} = \frac{6n}{\pi^2} + O(log\, n)$, que implica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(j)}{j} = \frac{6}{\pi^2}$$

haciendo $h(x) = x^k$ convexa para $k \geqslant 1$,tenemos

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\varphi(j)}{j}\right)^k \geqslant \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(j)}{j}\right)^k,$$

donde se sigue el resultado del caso general.

Teorema 2.29 (Khintchine). Sean $f_1, f_2, ..., f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funciones decrecientes y $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado por $F(k) = (f_1(k))\,(f_2(k))\ldots(f_n(k))\,$, y sea $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^N$ y el sistema de aproximaciones simultaneas

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{f_i(q)}{q},\ 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad (*)$$

y tal que

(a) Sea $\sum_{q=1}^{\infty} F(q) < +\infty$ entonces, para casi todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $(*)$ tiene finitas soluciones $\left(\frac{p_1}{q}, ..., \frac{p_n}{q}\right) \in \mathbb{Q}^n$.

(b) Sea $\sum_{q=1}^{\infty} F(q) = +\infty$ entonces, para casi todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $(*)$ tiene infinitas soluciones $\left(\frac{p_1}{q}, ..., \frac{p_n}{q}\right) \in \mathbb{Q}^n$.

Demostración del teorema de Khintchine Multidimensional

(a) Dado que $q_0 \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$S(q_0) = \bigcup_{q \geqslant q_0} \bigcup_{0 \leqslant p_1, \ldots, p_n < q} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{q} - \frac{f_i(q)}{q},\ \frac{p_i}{q} + \frac{f_i(q)}{q} \right),$$

donde el conjunto $\alpha \in [0,1)^n$ para los cuales el sistema $(*)$ enuncia que el teorema tiene cualquier solución con $q \geqslant q_0$, y por lo tanto , $S = \bigcap_{q_0 \in \mathbb{N}} S(q_0)$ y el conjunto de $\alpha \in [0,1)^n$ para los cuales $(*)$ tiene infinitas soluciones donde $\left(\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q} \right) \in \mathbb{Q}^n$. Particionando $\mathbb{R}^n$ en una cantidad numerable de cubos de arista 1, y suficientes para demostrar que S tiene medida cero. Tenemos:

$$m(S(q_0)) \leqslant \sum_{q=q_0}^{\infty} q^n \cdot \frac{2^n F(q)}{q^n} = 2^n \sum_{q=q_0}^{\infty} F(q),$$

tiende a 0 cuando $q_0 \to \infty$, pues la $\sum_{q=1}^{\infty} F(q)$ converge, y por lo tanto $m(S) = 0$.

(b) En primer lugar, vamos a sustituir las funciones $f_1, \ldots, f_n$ por las funciones $g_1, \ldots, g_n$, tales que cada g_i es decreciente, así $\lim_{q \to \infty} \frac{g_i(q)}{f_i(q)} = 0$ y
$G = g_1 g_2 \cdots g_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ se tiene:

$$\lim_{q \to \infty} qG(q) = 0 \qquad \sum_{q=1}^{\infty} G(q) = +\infty.$$

Para ello, simplemente basta tomar

$$G_1(k) = (F(1) + \cdots + F(k))^{-1} \cdot F(k) \qquad y$$

$$G(k) = (G_1(1) + G_1(2) + \cdots + G(k))^{-1} \cdot G_1(k),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Es fácil verificar que G_1 y G son decrecientes, luego $G_1(k) \leqslant \frac{1}{k}$, $kG(k) \to 0$, $\sum G_1(k) = \infty$. Definiendo $g_i(q) = f_i(q) \cdot \left(\frac{G(q)}{F(q)} \right)^{\frac{1}{n}}$, así todas la condiciones anteriores se cumplen.

Ahora, para $q_0 \in \mathbb{N}$, definimos los conjuntos

$$A(q_0) = \bigcup_{q \geqslant q_0} \bigcup_{0 \leqslant p_1, \ldots, p_n < q} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{q} - \frac{f_i(q)}{q}\ \frac{p_i}{q} + \frac{f_i(q)}{q} \right),$$

$$A_\infty = \bigcap_{q \in \mathbb{N}} A(q).$$

Afirmamos que para completar la demostración de (b) es suficiente para demostrar que $m(A_\infty) > 0$. De hecho, si $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \cdots, \overline{\alpha}_n) \in A_\infty$, el sistema $\left|\overline{\alpha}_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{g_i(q)}{q}$, para $i = 1, 2, ..., n$ tiene infinitas soluciones $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, ..., \frac{p_n}{q}\right) \in \mathbb{Q}^n$. Como $m(A_\infty) > 0$, dado que $\xi > 0$ existe un cubo $Q = \prod_{i=1}^n \left[\frac{b_i}{C}, \frac{b_i + 1}{C}\right] \subset \mathbb{R}^n, C \in \mathbb{N}, b_i \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant b_i < C$, tal que
$m(A_\infty \cap Q) \geqslant (1 - \xi)m(Q)$. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y teniendo en cuenta que

$$T(X_1, ..., X_n) = (CX_1 - b_1, CX_2 - b_2, ..., CX_n - b_n),$$

tenemos $T(Q) = [0, 1]^n$ y $m(T(Q \cap A_\infty)) \geqslant 1 - \xi$. además, si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in T(Q \cap A_\infty)$ con $\alpha = T(\overline{\alpha})$, $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_n) \in A_\infty \cap Q$, tenemos que
$\left|\alpha_i - \frac{r_i}{q}\right| < \frac{Cg_i(q)}{q}$ (y por lo tanto el sistema original $\left|\alpha_i - \frac{r_i}{q}\right| < \frac{f_i(q)}{q}$) tiene infinitas soluciones de la forma

$$\left(\frac{r_1}{q}, \frac{r_2}{q}, ..., \frac{r_n}{q}\right) = \left(\frac{Cp_1}{q} - b_1, \frac{Cp_2}{q} - b_2, ..., \frac{Cp_n}{q} - b_n\right) \in \mathbb{Q}^n,$$

y como $\xi > 0$ se puede hacer arbitrariamente pequeño, y $\mathbb{R}$ puede ser dividido en traslaciones de $[0, 1)^n$ y esto completa lo de la prueba del item (b).

Para probar que $m(A_\infty) > 0$, basta demostrar que existe $c > 0$ para el cual $m(A(q_0)) > c$ para todo q_0 suficientemente grande. Fijemos ahora $q_0 \in \mathbb{N}$ grande y definamos

$$s_0 = s_0(q_0) = min\,\{s \in \mathbb{N} \,|\, G(q_0) + G(q_0 + 1) + \cdots + G(s) \geqslant \tilde{c}\},$$

donde $\tilde{c}$ es una constante que se elige posteriormente. Notar que como G es decreciente y el $\lim\limits_{q\to\infty} qG(q) = 0$ tenemos que $\lim\limits_{q\to\infty} \frac{s_0(q)}{q} = +\infty$.

Para cada s fijo, $q_0 \leqslant s \leqslant s_0$, y cada punto $\left(\frac{r_1}{s}, ..., \frac{r_n}{s}\right)$, $0 \leqslant r_i < s$, donde el $mcd\,(r_i, s) = 1$ $1 \leqslant i \leqslant n$, ahora consideremos el bloque $\prod_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{s} - \frac{g_i(s)}{s}, \frac{r_i}{s} + \frac{g_i(s)}{s}\right)$contenido en $A(q_0)$. Para dar una cota inferior de $m(A(q_0))$, se estima que el número de nuevos bloques para cada s, esta en los bloques disjuntos de los puntos asociados con denominadores estrictamente menor que s. Para esto, fijamos s y calculamos el número de $\left(\frac{r_1}{s}, \frac{r_2}{s}, ..., \frac{r_n}{s}\right) \in \mathbb{Q}^n$ con $r_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r_i \leqslant s$, $1 \leqslant i \leqslant n$, tales que existen q con $q_0 \leqslant q < s$, $p_1 p_2, ..., p_n \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant p_i < q$, satisfaciendo

$$\left|\frac{r_i}{s} - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{g_i(s)}{s} + \frac{g_i(q)}{q} \qquad para\ todo \qquad i = 1, 2, ..., n. \qquad (**)$$

(es decir, los bloques asociados a $\left(\frac{r_1}{s}, \frac{r_2}{s}, ..., \frac{r_n}{s}\right)$ y $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, ..., \frac{p_n}{q}\right)$ se interceptan).

Ahora como cada g_i es decreciente, $(**)$ implica que

$$|r_i q - p_i s| < 2sg_i(q), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

de modo que si $q_0 \leqslant q < s$, el número de soluciones de $|r_i q - p_i s| < 2sg_i(q)$, con $0 \leqslant p_i < q$, $0 \leqslant r_i < s$ y siendo el máximo $4sg_i(q)$ ya que $mcd\,(r_i, s) = 1$. De hecho, estas condiciones $r_i q - p_i s$ sino se anulan,tendríamos $\dfrac{p_i}{q} = \dfrac{r_i}{s}$, que es una fracción irreducible con denominador $s > q$, $\rightarrow\leftarrow$ ya que $mcd\,(s, q) = d$.
Dado que $k \in \mathbb{Z}$, entonces la ecuación diofantina $rq - ps = k$ solo tiene soluciones cuando $d \mid k$, en nuestro caso hay d soluciones con $0 \leqslant r < s$ y por lo tanto $0 < rq - ps < x$ (y respectivamente $-x < rq - ps < 0$) tiene como máximo $d\left[\dfrac{x}{d}\right] \leqslant x$ soluciones (p, r) con $0 \leqslant r < s$, lo que implica claramente la afirmación. Por lo tanto el número total de soluciones $((p_1, r_1); ...; (p_n, r_n))$ del sistema de desigualdades es como máximo $4^n s^n G(q)$. Por lo tanto la cantidad de puntos $\left(\dfrac{r_1}{s}, \dfrac{r_2}{s}, ..., \dfrac{r_n}{s}\right)$ que satisfacen las condiciones anteriores y que no sean superior a $4^n s^n \sum_{q=q_0}^{s-1} G(q)$.

Hay $\varphi(s)^n$ de puntos $\left(\dfrac{r_i}{s}, ..., \dfrac{r_n}{s}\right)$, $0 \leqslant r_i < s$, $mcd\,(r_i, s) = 1$, $\quad 1 \leqslant i \leqslant n$. luego por tanto, hay al menos $\varphi(s)^n - 4^n s^n \sum_{q=q_0}^{s-1} G(q)$ nuevos bloques asociados con los puntos con denominador s. Como cada uno de estos bloques es nuevo de volumen $\dfrac{2^n G(s)}{s^n}$, obtenemos:

$$m(A(q_0)) \geqslant \sum_{s=q_0}^{s_0} \left(\varphi(s)^n - 4^n s^n \sum_{q=q_0}^{s-1} G(q)\right) \frac{2^n G(s)}{s^n}$$

$$= 2^n \sum_{s=q_0}^{s_0} \left(\frac{\varphi(s)}{s}\right)^n G(s) - 8^n \sum_{s=q_0}^{s_0} \left(\sum_{s=q_0}^{s-1} G(q)\right) G(s).$$

Para estimar el primer término, tenemos el lema anterior y la definición de $s_0 = min\left\{s \geqslant q_0 \mid \sum_{q=q_0}^{s} G(q) \geqslant \tilde{c}\right\}$, así :

$$\sum_{s=q_0}^{s_0} \left(\frac{\varphi(s)}{s}\right)^n G(s)$$

$$= \sum_{s=q_0}^{s_0-1} (G(s) - G(s+1)) \sum_{j=q_0}^{s} \left(\frac{\varphi(j)}{j}\right)^n + G(s_0) \sum_{j=q_0}^{s_0} \left(\frac{\varphi(j)}{j}\right)^n$$

$$\geqslant \sum_{s=q_0}^{s_0-1} (G(s) - G(s+1))\,(c_n s - q_0) + G(s_0)\,(c_n s_0 - q_0)$$

$$c_n \sum_{s=q_0+1}^{s_0} G(s) - (1-c_n)\, q_0 G(q_0)$$

$$\geqslant c_n \tilde{c} + \xi_1$$

donde $\xi_1 \to 0$ cuando $q_0 \to \infty$, porque $\lim\limits_{q_0 \to \infty} q_0 G(q_0) = 0$.
Por otra parte, de nuevo por definición de s_0 tenemos:

$$\sum_{s=q_0}^{s_0} \left(\sum_{q=q_0}^{s-1} G(q) \right) G(s) \leqslant \tilde{c} \sum_{s=q_0}^{s_0} G(s) \leqslant \tilde{c}\,(\tilde{c} + \xi_2)$$

donde $\xi_2 = G(s_0) \to 0$ cuando $q_0 \to \infty$. Así se tiene, $m(A(q_0)) \geqslant 2^n\,(c_n\tilde{c} + \xi_1) - 8^n \tilde{c}\,(\tilde{c} + \xi_2)$. Tomando $\tilde{c} = \dfrac{c_n}{4^{n+1}}$ tenemos que, si q_0 es suficientemente grande (ξ_1 y ξ_2 suficientemente pequeños), y el volumen de $A(q_0)$ y al menos $\frac{c_n^2}{2^{n+3}} > 0$, como queríamos demostrarlo.

Capítulo 3

Aplicaciones

Fracciones continuas desde un punto de vista geométrico.

El objetivo del capítulo es desarrollar un método para encontrar buenas aproximaciones fraccionarias de un número real dado. Como vamos a proceder geométricamente, primero vamos a dar las definiciones precisas de algunas nociones intuitivas.

Definición. Sea el punto P que tiene coordenadas (b, a) y supongamos que (b, c) es la intersección de una recta L con la recta vertical $x = b$. Si $a > c$, entonces se dice que P está sobre o por encima de L, mientras que si $a < c$, decimos que P está debajo o por debajo de L.

Definición. Sea el punto P que tiene coordenadas (b, a) con $b \neq 0$. Decimos que $\frac{a}{b}$ es la pendiente de P. En otras palabras, la pendiente de P es la pendiente de la recta que pasa por el origen $(0, 0)$ y P.

Teorema 1. Sea L una recta que pasa por el origen, teniendo como pendiente $\alpha > 0$. Si P es un punto en el primer cuadrante, entonces P está por encima de L si y sólo si la pendiente $P > \alpha$, si P está en L si y sólo si la pendiente $P = \alpha$, si P está por debajo de L si y sólo si la pendiente $P < \alpha$.

Prueba:

Sea P con coordenadas (b, a). La ecuación de L es

$$y = \alpha x,$$

y así la intersección de L con la recta $x = b$ es el punto $(b, \alpha b)$. Ya que $b > 0$ (P está en el primer cuadrante), se mira que:

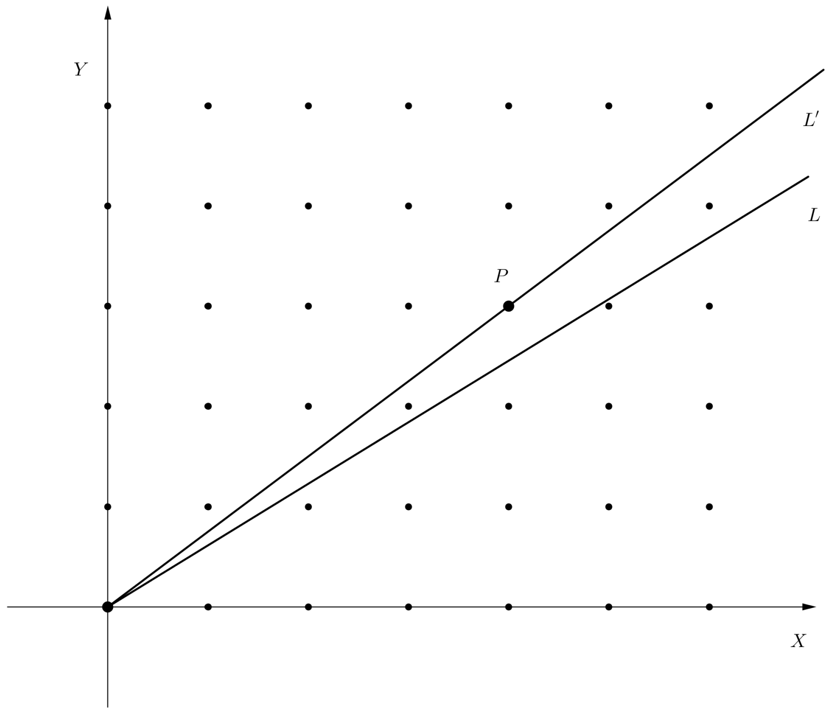
$$\begin{aligned}
a &> b\alpha && \textit{si y solo si } \frac{a}{b} > \alpha, \\
a &= b\alpha && \textit{si y solo si } \frac{a}{b} = \alpha \\
a &< b\alpha && \textit{si y solo si } \frac{a}{b} < \alpha.
\end{aligned}$$

El teorema se deduce de las definiciones de encima, por debajo y la pendiente de P. ■

Sea α un número real positivo y L la recta $y = \alpha x$. Sea el punto $P = (q, p)$ que está en el primer cuadrante y sea L' una recta que pasa por el origen y por P (ver figura 1).

Intuitivamente, cuanto más cerca está el punto (q, p) es la recta L, y cuanto más cerca este de $\frac{p}{q}$ (pendiente de L) será el del α (pendiente de L'). Hacemos esta sensación intuitiva preciso en el siguiente teorema.

Teorema 2 Sea α un número real positivo y L la recta $y = \alpha x$. Supongamos que el punto (q, p) tiene coordenadas enteras, está en el primer cuadrante, y tiene la propiedad de que si (n, m) es también un punto de coordenadas enteras y $0 < n < q$, entonces la distancia a partir de (q, p) para L es menor o igual que la distancia de (n, m) a L. Entonces



$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \left|\alpha - \frac{m}{n}\right|$$

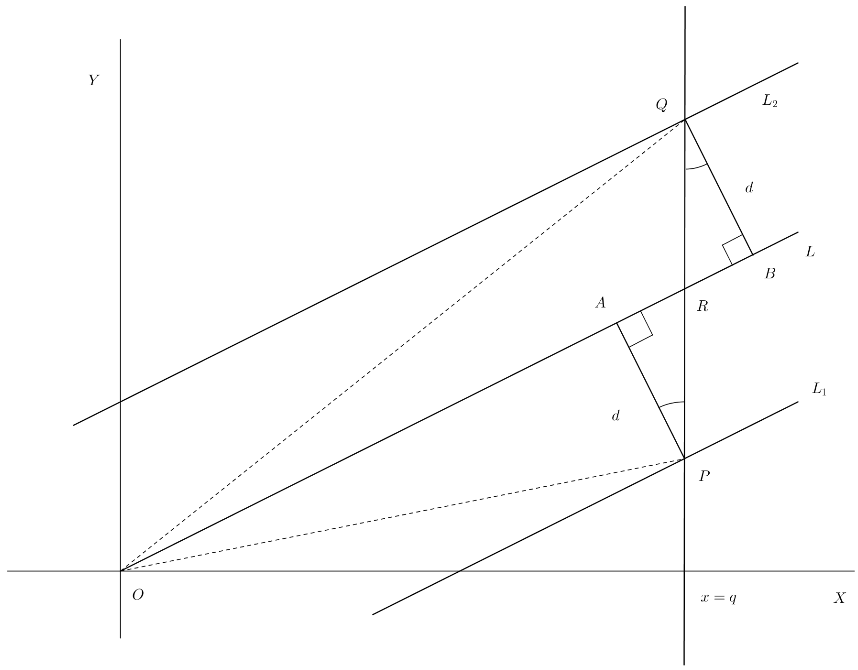
para todos los puntos (m, n) con $0 < n \leq q$ [en otras palabras, $\alpha - \frac{p}{q}$ es numéricamente mas pequeño que $\alpha - \frac{m}{n}$].

Demostración:

Si el punto (q, p) está en L (tenemos que $\frac{p}{q} = \alpha$), entonces el resultado del teorema es obvio. Por lo que podemos asumir que (q, p) está fuera de la recta L y luego $d > 0$ sea la distancia a partir de (q, p) a L [medida perpendicular a largo de la recta desde (q, p) a L]. Sea P el punto (q, p). P está por encima o por debajo de L. La figura 2 muestra el caso en el que P está por debajo de L; es este caso que consideramos ahora. Sea L_1 recta que pasa por P, que es paralela a recta L; por lo tanto la distancia de L_1 a L es d. Sea la recta L_2 paralela a la recta L y con misma distancia d a partir de L. Sea Q y R la intersección de la recta $x = q$ con L_2 y L, respectivamente. Por último, sean A y B los puntos de L tal que AP y BQ son perpendiculares a L. Así $AP||BQ$, y entonces $\angle APR = \angle BQR$. Así, $\triangle APR \cong \triangle BQR$ (por el teorema ángulo, lado, ángulo) y por lo tanto $QR = RP$. La coordenada x de R es q, y puesto que R está en la recta $y = \alpha x$, vemos que $R = (q, \alpha q)$. Ahora podemos encontrar las coordenadas de Q.

La coordenada x de Q es q. Ya que $QR = RP$, la coordenada de Q satisface la ecuación

$$y - q\alpha = q\alpha - p,$$



y por lo tanto

$$Q = (q, 2q\alpha - p).$$

Las pendientes de OP y OQ son $\dfrac{p}{q}$ y $\dfrac{(2q\alpha - P)}{q} = 2\alpha - \left(\dfrac{p}{q}\right)$ respectivamente. Supongamos ahora que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left|\alpha - \frac{m}{n}\right|,$$

donde $C = (n.m)$ tiene coordenadas enteras, $0 < n \leqslant q$. Como se muestra en la figura 7.2, la pendiente $L >$ pendiente OP, de modo que $\alpha > \dfrac{p}{q}$ y por lo tanto $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| = \alpha - \dfrac{p}{q}$. Uno de los números $\alpha - \dfrac{m}{n}$ y (m/n) $-\alpha$ es el número positivo de $\left|\alpha - \dfrac{m}{n}\right|$, el otro es negativo y por lo tanto

$$\alpha - \frac{p}{q} > \alpha - \frac{m}{n}, \qquad \alpha - \frac{p}{q} > \frac{m}{n} - \alpha.$$

A partir de la primera de estas desigualdades, se deduce que

$$La\ pendiente\ C = \frac{m}{n} > \frac{p}{q} = La\ pendiente\ OP,$$

y de la segunda,

$$La\ pendiente\ OP = 2\alpha - \frac{p}{q} > \frac{m}{n} = \ la\ pendiente\ C.$$

Así C está por encima de OP y por debajo de OQ, de modo que C está entre las líneas de OP y OQ (y no en ambos). Así mismo, puesto que estamos suponiendo que $0 < n \leqslant q$, vemos que C es en realidad el interior del triángulo ΔOPQ (o en el borde de PQ, pero $C \neq P$ y $C \neq Q$, ya que C no está en OP ó OQ). Por lo tanto, la distancia de C a L es menor que d y esto contradice nuestra hipótesis de que esto no suceda. Así tenemos,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \qquad como\ se\ afirma. \qquad \blacksquare$$

Definición:

Sea L la recta $y = \alpha x$. Definamos **el conjunto de los puntos cercanos a** L como el conjunto de todos los puntos (q, p) tales que q y p son números enteros $q \geqslant 1$ y que tiene la propiedad de que si n y m son enteros, $0 < n \leq q$, entonces la distancia a partir de (q, p) a L es menor o igual a la distancia de (n, m) a L, estas distancias son desiguales si $n < q$.

2 Algoritmo de la fracción continua.

Después del Teorema 2, es deseable encontrar un algoritmo para la localización de puntos cercanos a la recta $L : y = \alpha x$, de hecho, cuanto más cerca mejor. En esta sección vamos a describir un algoritmo que por su propia definición genera puntos más cercanos a L. Por lo tanto, será evidente desde el principio que va a obtener buenas aproximaciones fraccionales a α, y a su vez que algoritmo genere realmente el conjunto de puntos más cercanos a L y por lo tanto da las mejores aproximaciones fraccionales a α.

El algoritmo se basa en el siguiente teorema:

Teorema 3 Dada una recta L que pasa por el origen y los puntos U_1 y U_2 en lados opuestos de L, hay un único número entero a tal que, o bien $U_1 + aU_2$ se encuentra en la recta L ó $U_1 + aU_2$ y $U_1 + (a+1)U_2$ están en lados opuestos de L. El punto $U_1 + aU_2$ está más cerca de L que U_2 y si no está en L, entonces, $U_1 + aU_2$ está en el mismo lado de L como U_1. Además, si U_1 está más cerca de L que U_2, entonces $a = 0$, mientras que si U_2 está cerca o más cerca de L que U_1, implica que $a \geqslant 1$.

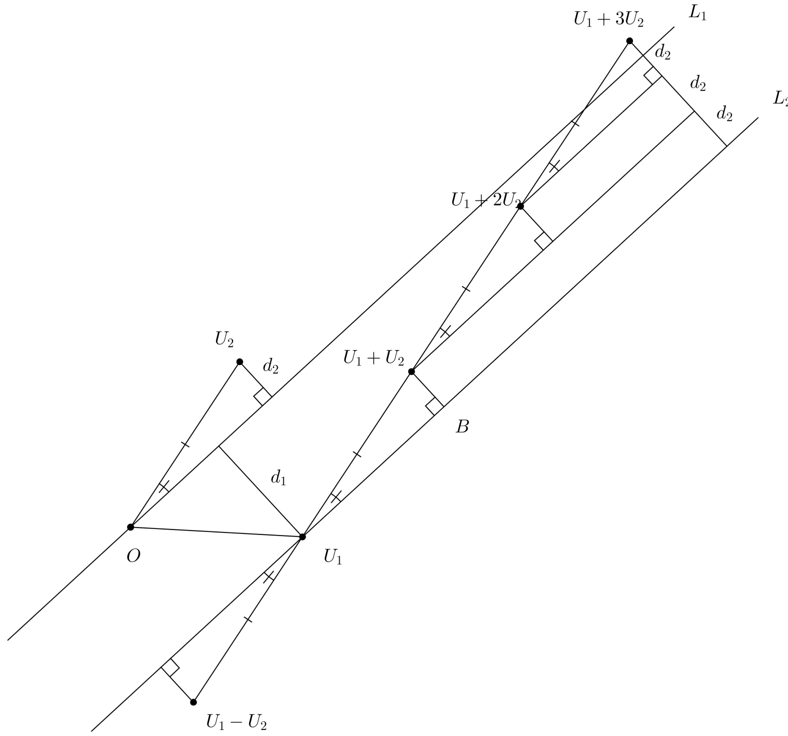
Prueba : La Figura 3 hace que el teorema se vea fácil, pero haremos la prueba. Sea A el punto de L tal que $AU_2 \perp L$. Sea L_1 la recta que pasa por U_1 que es paralela a L y sea B el punto en L_1 tal que $B(U_1 + U_2) \perp L1$. Ahora por la regla del paralelogramo suma de vectores dice que OU_2 es paralelo a $U_1(U_1 + U_2)$ y tienen la misma longitud. Por lo tanto obtenemos que $L \parallel L1$, y

$$\Delta U_2 OA = \Delta(U_1 + U_2)U_1 B.$$

Así resulta que los triángulos rectángulos $\Delta U_2 OA$ y $\Delta(U_1 + U_2)U_1 B$ son congruentes.
Luego

$$AU_2 = B(U_1 + U_2).$$

Sea d_1 y d_2 las distancias de U_1 y U_2 de L. Entonces la longitud de $B(U_1 + U_2)U_1$ es d_2 y por lo tanto es $d_1 < d_2$, el punto $U_1 + U_2$ estará en el otro lado de L de U_1 (esta es la situación del teorema cuando $a = 0$). Si $d_1 = d_2$, entonces el punto $U_1 + U_2$ estará en L, y si $d_1 > d_2$,entonces $U_1 + U_2$ estará en el mismo lado de L como U_1 pero a una distancia $d_1 - d_2$ de L. De la misma manera, vemos que $U_1 - U_2$, $U_1 - 2U_2, ...$ están todos en el mismo lado de L como U_1 (y están en realidad a una distancia $d_1 + d_2$, $d_1 + 2d_2$, ... de L). Además, los puntos $U_1 + U_2$, $U_1 + 2U_2, ...$ consiguen sucesivamente estar más cerca de L, así,la distancia de L comienza a reducirse cada vez por d_2, hasta llegar a un punto $U_1 + aU_2$ que sea en L ó en el mismo lado de L como U_1 pero dentro d_2 de L (y por tanto más cerca de L que U_2), mientras que $U_1 + (a+1)U_2$ está en el otro lado de L a partir de U_1. Los puntos $U_1 + (a+2)U_2$, $U_1 + (a+3)U_3$ son entonces todos los U_2 de L (y así son sucesivamente unidades d_2 más lejos de L). $\blacksquare$



Como se ilustra aquí, $a = 2$.

El Teorema 3 nos permite hacer la siguiente Definición:

Definicion. Sea α un número real positivo. El siguiente proceso se llama **el algoritmo de fracción continua para aproximar** α. Sea L la recta $y = \alpha x$ y sea $V_{-2} = (1, 0)$, $V_{-1} = (0, 1)$. Luego sea

$$V_0 = V_{-2} + a_0 V_{-1} = (1, a_0),$$

donde a_0 es el único entero tal que $V_{-2} + a_0 V_{-1}$ esta en L ó en el mismo lado de L como V_{-2}, pero $V_{-2} + (a_0 + 1)V_{-1}$ está en el lado opuesto de L desde V_{-2}. Si V_0 está en L, el proceso termina en V_0. Si V_0 no está en L, el proceso se repite. En general, si ya hemos definido V_{n-2} y V_{n-1} (y V_{n-1} no está en L), entonces establecemos

$$V_n = V_{n-2} + a_n V_{n-1},$$

donde a_n, es el único entero tal que $V_{n-2} + a_n V_{n-1}$ está en L ó en el mismo lado de L como V_{n-2}, pero $V_{n-2} + (a_n + 1)V_{n-1}$ está en el lado opuesto de L de V_{n-2}. Si V_n está en L, el proceso termina en V_n. Si V_n no está en L, se continúa el proceso.

Notación: Se supondrá que el α es un número real positivo, y L es la recta $y = \alpha x$, y que los números $a_0, a_1, a_2, ...$ y los puntos $V_{-2} = (1, 0)$, $V_{-1} = (0, 1)$, $V_0, V_1, V_2, ...$ están dados por el algoritmo de fracción continua para aproximar α. Así tendremos las coordenadas de V_n en términos de p_n y q_n tal que $V_n = (q_n, p_n)$.

donde $\dfrac{p_n}{q_n}$ es la pendiente de V_n y esta es nuestra mejor esperada aproximación de α

EJERCICIOS

Problema 1. Completa la prueba del teorema 2 considerando el caso que P esta por encima de L.

Solución:

Sea $P = (q, p)$, para nuestro caso vamos a demostrar el caso en el que P está por encima de L.

Si P esta en L. tenemos que $\alpha = \frac{p}{q}$ es trivial.

Sea L_1 la recta que pasa por P, que es paralela a L; por tanto la distancia de L_1 a L es d. Sea L_2 paralela a la recta L con misma distancia d a partir de L.

Sea Q y R la intersección de la recta $x = q$ con L_1 y L respectivamente. Y sean A y B los puntos de L tal que AP y BQ son perpendiculares a L. Así $AP||BQ$ y entonces $\measuredangle APR = \measuredangle BQR$. Así $\triangle\ APR \cong \triangle\ BQR$ por el teorema ángulo lado ángulo es una propiedad de congruencia de triángulos.

Las coordenadas de R son $(q, \alpha q)$, como $PR = RQ$ tenemos

$$p - \alpha q = \alpha q - y$$

$$y = 2\alpha q - p$$

entonces las de Q son $(q, 2\alpha q - p)$. Las pendientes de OQ y OP son $\frac{2\alpha q - p}{q}$ y $\frac{p}{q}$ respectivamente

Vamos a suponer que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left|\alpha - \frac{m}{n}\right|$, donde $C = (n, m)$, con $0 < n \leq q$.

Ahora la pendiente $L < OP$ entonces $\alpha < \frac{p}{q}$ y por lo tanto

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| = \frac{p}{q} - \alpha$$

Uno de los números $\alpha - \frac{m}{n}$ y $\frac{m}{n} - \alpha$ es el número positivo de $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right|$, el otro es el negativo y por tanto

(1) $\frac{p}{q} - \alpha > \frac{m}{n} - \alpha$ (2) $\frac{p}{n} - \alpha > \alpha - \frac{m}{n}$
de (1) la pendiente de $C = \frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ que la pendiente de OP

de (2) La pendiente
$OQ = \frac{p}{q} - 2\alpha > -\frac{m}{n}$ $2\alpha - \frac{p}{q} < \frac{m}{n}$ que es la pendiente de C

Así C está por debajo de OP y por encima de OQ, de modo que C está entre las lineas de OP y OQ. Así mismo, como suponemos que $0 < n \leq q$ vemos que C es el interior del triangulo OPQ (o en el borde de PQ, pero $C \neq P$ y $C \neq Q$, ya que no está en esas rectas). Por lo tanto, la distancia de C aL es menor que d y esto contradice la hipótesis. Entonces tenemos

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \left|\alpha - \frac{m}{n}\right|$$

Problema 2. Con la prueba del teorema 7.1 es valido cuando $\alpha < 0$ y P se encuentra en el primer o cuarto cuadrante?

Solución:

(1) Si $L = y = -\frac{3}{2}$ y $P = (1, 1)$ este punto se encuentra en el primer cuadrante entonces

$$\begin{aligned} 1 &> 1\left(-\frac{3}{2}\right) \\ 1 &> \left(-\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

esta desigualdad si la cumple quiere decir que esta encima de la recta L

$$1 = 1\left(-\frac{3}{2}\right)$$

no cumple la igualdad

$$1 < 1\left(-\frac{3}{2}\right)$$

no cumple la igualdad

solo podemos decir que el punto P esta por encima de la recta.

(2) Si $L = y = -\frac{3}{2}$ y $P = (-1, -1)$ este punto se encuentra en el cuarto cuadrante entonces

$$\begin{aligned} -1 &> -1\left(-\frac{3}{2}\right) \\ 1 &> \left(-\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

no cumple la igualdad

$$-1 = -1\left(-\frac{3}{2}\right)$$

no cumple la igualdad

$$-1 < -1\left(-\frac{3}{2}\right)$$

si cumple, lo que podemos decir es que el punto esta por debajo de la recta.

Problema 3. Encontrar el conjunto de puntos cercanos a la recta $L: y = x\sqrt{3}$.

Solución:

Utilizando el algoritmo de fracción continua para aproximar $\alpha = \sqrt{3}$, tenemos:
Por definición comenzamos por $V_{-2} = (1,0)$ luego vemos que ese punto está debajo de la recta L y $V_{-1} = (0,1)$ esta sobre L , Ahora utilizando la fórmula $V_n = V_{n-2} + a_n V_{n-1}$ para el lado de L y $V_{n-2} = (a_n+1)V_n - 1$ para el lado opuesto de L y así de manera análogo encontrando el conjunto de vectores tenemos:

$$\begin{aligned} Para\ n = 0\ y\ a_0 = 1 \Longrightarrow V_0 &= V_{-2} + 1V_{-1} = (1,1) \text{ este punto está debajo de L} \\ V_0 &= V_{-2} + 2V_{-1} = (1,2) \text{ este punto está sobre } L \end{aligned}$$

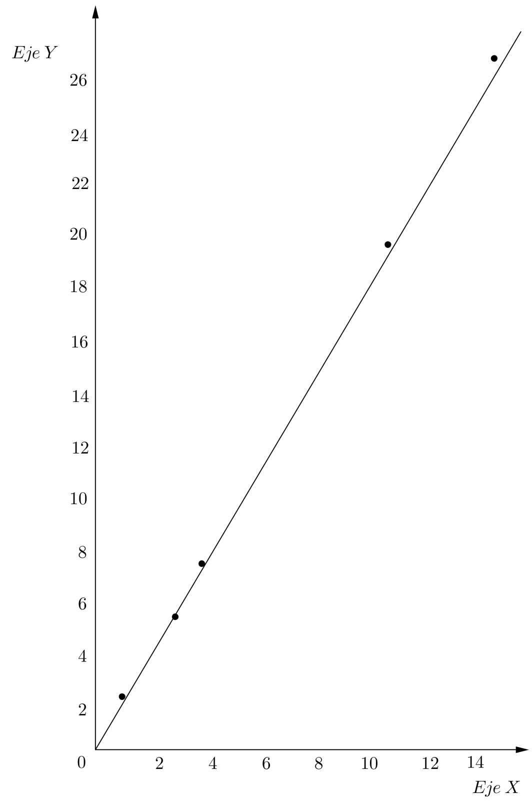
$$\begin{aligned} Para\ n = 1\ y\ a_1 = 1 \Longrightarrow V_1 &= V_{-1} + 1V_0 = (1,2) \text{ este punto está sobre } L \\ V_1 &= V_{-1} + 2V_0 = (2,3) \text{ este punto está debajo de L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Para\ n = 2\ y\ a_2 = 2 \Longrightarrow V_2 &= V_0 + 2V_1 = (3,5) \text{ este punto está debajo de L} \\ V_2 &= V_0 + 3V_1 = (4,7) \text{ este punto está sobre } L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Para\ n = 3\ y\ a_3 = 1 \Longrightarrow V_3 &= V_1 + 1V_2 = (4,7) \text{ este punto está sobre } L \\ V_3 &= V_1 + 2V_2 = (7,12) \text{ este punto está debajo de L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Para\ n = 4\ y\ a_4 = 2 \Longrightarrow V_4 &= V_2 + 2V_3 = (11,19) \text{ este punto está debajo de L} \\ V_4 &= V_2 + 3V_3 = (15,26) \text{ este punto está sobre } L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Para\ n = 5\ y\ a_5 = 1 \Longrightarrow V_5 &= V_3 + 1V_4 = (15,26) \text{ este punto está sobre } L \\ V_5 &= V_3 + 2V_4 = (26,45) \text{ este punto está debajo de L} \end{aligned}$$



L es la recta $y = x\sqrt{3}$. los puntos grandes representan el conjunto de puntos cercanos a L con coordenadas $x \leqslant 15$.

El punto anterior $V_5 = V_3 + 1V_4 = (15, 26)$ esta sobre L y mientras que $V_3 + 2V_4 = (26, 45)$ (no está en la figura) esta debajo de L y por lo tanto $a_5 = 1$ y $V_5 = (15, 26)$.

En resumen tenemos:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1,\ a_4 = 2,\ a_5 = 1,$$

$$V_0 = (1,1),\ V_1 = (1,2),\ V_2 = (3,5),\ V_3 = (4,7),\ V_4 = (11,19),\ V_5 = (15,26)$$

Los puntos V_{2k} (los pares) están debajo de L y mientras que los vectores V_{2k+1} (los impares) están sobre L.

Como podemos ver $\sqrt{3} = 1{,}732$ ahora del punto $V_5 = (15, 26)$ tenemos que $\dfrac{26}{15} = 1{,}7333$ y es la mejor aproximación de $\alpha = \sqrt{3}$.

Capítulo 4

Bibliografía

1. Teoría dos Números:Um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. Autores: Fabio Brochero, Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Nicolau C. Saldanha, Eduardo Tengan.

2. An Introducction to Number Theory. Autor: Harold M. Stark.

3. Approximaximation By Algebraic Numbers Autor: Yann Bugeaud.

4. On Some Aplications of Diophantine Approximations Autor: Umberto Zannier.

5. Curso de analise, Elon Lages Lima.

6. Fracciones Continuadas, Edward Parra Salazar, articulo.