UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADUACIÓN:

ESTIMACIÓN DE PRECIOS DE OPCIONES FINANCIERAS

PRESENTADO POR:

DIANA NOEMY IRAHETA NAVARRO

KARLA GUADALUPE FLORES ALVARENGA

PARA OPTAR EL GRADO DE:

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

CIUDAD UNIVERSITARIA, DICIEMBRE 2016

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADUACIÓN:

ESTIMACIÓN DE PRECIOS DE OPCIONES FINANCIERAS

PRESENTADO POR:

DIANA NOEMY IRAHETA NAVARRO

KARLA GUADALUPE FLORES ALVARENGA

PARA OPTAR EL GRADO DE:

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

Dr. JOSÉ NERYS FUNES

MIEMBRO DEL TRIBUNAL CALIFICADOR

Msc. PORFIRIO ARMANDO RODRÍGUEZ

MIEMBRO DEL TRIBUNAL CALIFICADOR

CIUDAD UNIVERSITARIA, DICIEMBRE 2016

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR INTERINO:

Licenciado Luis Argueta Antillón

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO INTERINO:

Ingeniero Carlos Villalta

SECRETARIA GENERAL:

Doctora Ana Leticia Zavaleta

FISCAL GENERAL:

Licenciada Nora Beatríz Meléndez

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

Licenciado Mauricio Hernán Lovo

VIDE-DECANO:

Licenciado Carlos Antonio Quintanilla Aparicio

SECRETARIA:

Licenciada Damaris Melany Herrera Turcios

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR DE ESCUELA:

Doctor José Nerys Funes Torres

ASESOR:

Master Carlos Ernesto Gámez Rodríguez

Índice

Dedicatoria.

Axel Dariel Machuca Iraheta.

Erick Mauricio Meléndez Álvarez.

Agradecimientos.

- Karla Flores.

  A Dios primeramente por su fidelidad.

  A mi familia y amigos por apoyarme siempre.

- Diana Iraheta.

  A mis padres, esposo y hermanos por su apoyo incondicional a lo largo de este trayecto.

- A nuestro asesor, MSc. Carlos Gámez, por su disponibilidad de tiempo, dedicación, esfuerzo y apoyo en cada aspecto de este trabajo.

- A nuestro tribunal calificador, Dr. José Nerys Funes y Msc. Porfirio Armando Rodríguez, por su dedicación, revisiones y correcciones de este trabajo.

1. Introducción

Matemática financiera no es solamente la predicción del precio de una acción. Uno de los asuntos que trata es de averiguar el precio de las opciones y derivados. Una opción es el hecho de vender o comprar algo en un futuro a un precio previamente pactado y donde un derivado es un producto financiero cuyo valor se basa en el precio de otro activo.

Para iniciar la investigación se describirá el Modelo Binomial de precios de activos de un paso y algunos conceptos y nociones básicas en Matemática financiera. También trataremos el Principio de No-Arbitraje que es una suposición más fundamental acerca del mercado, rara vez existen oportunidades de arbitraje en la practica, y cuando lo hacen, las ganancias son típicamente extremadamente pequeñas en comparación con el volumen de las transacciones, haciéndolas mas allá del alcance de los pequeños inversores.

Las opciones por sí mismas no llegan a un valor por su propia trayectoria, si no por la subida y bajada de su bien subyacente. Unos ejemplos de bienes subyacentes pueden ser índices, acciones, productos agrícolas, etc. Por ende, es lógico procurar las razones por la cual tiene ventajas significantes las opciones financieras. También es de mucha utilidad combinar cantidades y tipos de opciones para tener mayor utilidad. Esta iniciativa es nominada como una estrategia.

A primera vista, una opción te da un beneficio porque asegura (o da la opción) al que la posee, una fijación del precio y esto lo habilita a ponerle techo o límite a la suma total de una pérdida. Otro beneficio que tienen estas opciones generan información que puede usarse para utilizar el apalancamiento. Por ejemplo, si un inversionista, al cual le gusta gozar de el apalancamiento, especula que con sus conjuntos de opciones tiene significativamente más posibilidades de tener ganancias que pérdidas, ejecuta su orden con apalancamiento. Principalmente, se puede resumir que las dos razones con más peso de importancia para utilizar opciones son el aseguramiento y la especulación.

En el ámbito económico, las opciones ya son reconocidas como un fenómeno muy importante. El riesgo que llevan consigo es enorme (especialmente con el uso de el efecto de palanca) pueden tener consecuencias graves como burbujas financieras, que al tronar generan desempleo, pobreza, etc. Una forma de estudiar las opciones financieras es a través de la Ecuación de Black-Scholes ya que podemos conocer el valor de la opción al resolver dicha ecuación. Es por eso que en nuestro trabajo nos enfocaremos en resolver la ecuación de Black-Scholes utilizando métodos directos como el de diferencias finitas.

Además emplearemos algoritmos computacionales y simulación de variables aleatorias para obtener mediante la solución de la ecuación de Black-Scholes el precio de las opciones.

2. Sobre el Trabajo de Investigación

2.1. Bosquejo Histórico.

Las Matemáticas Financieras aparecieron inicialmente con los intereses, el ser humano se dio cuenta que si otro le debía dinero o algún otro bien, él debía recibir una compensación por el tiempo que esta persona tardara en cancelar la deuda. En la segunda mitad del siglo XX se noto una importante evolución de la economía financiera, que solo fue posible mediante la aplicación sistemática y con intensidad creciente del pensamiento matemático.

En 1973 Fischer Black y Myron Scholes publicaron su trabajo "The pricing of options and corporate liabilities". En este se especifica la primera formula exitosa de fijación de precios de opciones y se describe un marco general para la fijación de precios de derivados. Hoy nos encontramos ante cuestiones que tienen un gran contenido matemático y del máximo interés para las instituciones financieras, quienes se encuentran ante una competitividad muy intensa, un mercado con margenes cada vez menores y un mundo sin fronteras.

Las simulaciones por computadora se han convertido en una parte relevante y útil de los modelos matemáticos de muchos sistemas naturales de ciencias como la física, la astrofísica, la química y la biología; así como de sistemas humanos de economía, psicología y ciencias sociales. La simulación por computadora se desarrolló a la par que se produjo el vertiginoso progreso del ordenador. Su primer despliegue a gran escala fue en el Proyecto Manhattan, durante la Segunda Guerra Mundial, para recrear una detonación nuclear. Se empleó el Método de Montecarlo. Las simulaciones por computadora a veces complementan o incluso sustituyen a los sistemas de modelización para los que no es posible hallar soluciones analíticas de forma cerrada. Existen muchos tipos de simulación por computadora, pero todos ellos comparten una característica común: tratan de generar una muestra de escenarios representativos para un modelo en el que una relación completa de todos los estados posibles de este sería muy costoso o imposible. Los modelos informatizados se emplearon inicialmente como suplemento de otros parámetros, pero más adelante su uso se extendió a otros ámbitos.

En 1900 Louis Bachelier, matemático francés, fue el primero en modelar el movimiento browniano en su tesis “La Teoría de la Especulación”, en ella se discute el uso del movimiento browniano para evaluar las Opciones financieras. Este es el primer escrito histórico en el que se utilizan las matemáticas para el estudio de la economía. El primer trabajo sobre SDEs (Stocastics Differential Equations) se hizo para describir el movimiento browniano en el famoso artículo de Einstein. Este trabajo fue seguido sobre todo por Langevin. Más tarde Itō y Stratonovich ponen SDEs en una base matemática más sólida.

Robert C. Merton, economista estadounidense recibió en 1977 el Premio Nobel de Economía que compartió con Myron Scholes, por sus trabajos para calcular el precio de las opciones financieras. Junto a Fisher Black y Scholes desarrolló el modelo de Black-Scholes, que permitió la utilización de estos instrumentos financieros. Merton ayudó a introducir el cálculo estocástico en la economía financiera, lo que permitió que el comportamiento de los precios fuese descrito con el lenguaje preciso de la probabilidad.

2.2. Justificación

La Matemática Financiera es el campo de la matemática aplicada, que analiza, valora y calcula materias relacionadas con los mercados financieros, y especialmente, el valor del dinero en el tiempo. Así, las matemáticas financieras se ocupan del cálculo del valor, tipo de interés o rentabilidad de los distintos productos que existen en los mercados financieros (depósitos, bonos, préstamos, descuento de papel, valoración de acciones, cálculos sobre seguros, etc). La simulación y análisis de modelos financieros se aplican para los mercados, negociando activos como acciones y bonos. Prestando especial atención a financieros derivados, tales como opciones y futuros. Estos son los instrumentos financieros que derivan su valor de algún activo asociado.

Además las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas son de mucha importancia en las Matemáticas Financieras ya que se utilizan para modelar y estudiar diversas dinámicas gobernadas por fenómenos aleatorios como los precios de las acciones y opciones, utilizando el sistema computacional se puede modelar el precio de opciones y acciones financieras.

La importancia de matemáticas financieras también radica en el hecho de poder dar precios justos a una serie de productos financieros. Además se pueden crear nuevos instrumentos y productos financieros que sean de beneficio para las distintas partes en situaciones complicadas donde se pueden ocupar los recursos de manera más óptima, eficiente e inteligente. De igual manera hay interés por instituciones financieras por tener profesionales expertos en matemáticas financieras para sus trabajos internos y externos.Y es debido a la falta de estudio sobre Matemática Financiera que ha surgido la necesidad de realizar un trabajo en el que se investiguen los diferentes contenidos concernientes a dicho tema para que los estudiantes de la Escuela de Matemática conozcan sobre este y sepan otras áreas donde la matemática puede ser utilizada.

El alcance que espera el asesor de este trabajo de tesis es que Matemáticas Financieras sea un área principal de trabajo en la Escuela de Matemática , además desea ampliar la oferta laboral de los estudiantes graduados.

2.3. Antecedentes

En la Universidad de El Salvador se han estudiado algunas áreas de Matemática Financiera. En la biblioteca de la Facultad de Ciencias Económicas puede encontrarse una tesis titulada "Enfoque de Opciones Reales" en la cual se tratan distintos temas entre los cuales están Opciones Reales y Financieras, Aspectos Comparativos de las Opciones, La Clasificación de las Opciones, el Método de Black-Scholes y Métodos de Cálculos Alternativos como Árboles Binomiales y Simulación de Monte Carlo.

El área de Matemáticas Financieras ha sido una de las áreas de menos estudio en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática. En la malla curricular de la carrera de Licenciatura en Matemática no se encuentra ninguna asignatura en la que se imparta el tema de Matemática Financiera, sin embargo en el plan de estudio de la carrera de Profesorado en Matemática existe una asignatura llamada Matemática Financiera en la cual se imparten conceptos básicos como interés simple y compuesto, anualidades, fondos de amortización, entre otros. En dicha asignatura no se profundiza en Matemática Financiera debido a que el nivel de los estudiantes de ésta no tienen la base teórica necesaria para la comprensión total del tema.

En los cursos de la maestría en estadística que se han ofertado en la Escuela han habido temas en Matemática Financiera pero ninguno lidia con la modelación estocástica, específicamente la profesora Begoña Vitoriano impartió una sección en el curso de Matemática Financiera de la maestría en el año 2014. En el curso se desarrollaron métodos de simulación de variables aleatorias con ciertas distribuciones y se dieron algunas aplicaciones en Matemática Financiera pero ésto no está cerca de llegar a ser un trabajo de tesis. Finalmente en diciembre del año 2014 se realizó un seminario en métodos específicos de Matemática Financiera. En dicho curso se abordaron temas como matemáticas actuariales, ecuaciones Backward, Forward en otros temas que son incluidos al trabajo de esta tesis. Además en el año 2015 se realizó en la Escuela de Matemática un trabajo de investigación con el tema Introducción a Matemáticas Financieras del cual se hará referencia en este trabajo.

2.4. Objetivo General.

Realizar un estudio introductorio sobre la Simulación de Opciones Financieras.

2.5. Objetivos Específicos.

- Hacer uso de la simulación de modelos financieros.
- Conocer la base necesaria para entender las opciones financieras.
- Estudiar lo modelos de un sólo periodo y multiperiodo.
- Estudiar los métodos para la solución de la ecuación de Black-Scholes.
- Implementar los algoritmos de los métodos de solución a la ecuación de Black-Scholes para estimar el precio de las opciones de interés a nuestro estudio.

2.6. Planteamiento del Problema.

En general las matemáticas financieras se identifican como aquella parte del saber matemático que tiene por propósito fundamental seleccionar la mejor alternativa conveniente para inversionistas, desde el punto de vista económico. Por eso se dice que las matemáticas financieras constituyen el conjunto de estudios de técnicas y análisis útiles para comparación y evaluación económica de alternativas.

La importancia de la matemática financiera radica en su aplicación a las operaciones bancarias y bursátiles, en temas económicos y en muchas áreas de las finanzas, ya que le permite al administrador financiero tomar decisiones de forma rápida y acertada. Así mismo, es la base de casi todo análisis de proyectos de inversión, ya que siempre es necesario considerar el efecto del interés que opera en las cantidades de efectivo con el paso del tiempo.

La matemática financiera es una parte de la matemática aplicada que estudia los modelos matemáticos relacionados con los cambios cuantitativos que se producen en sumas de dinero, llamadas capitales.

En la actualidad, el uso de las Matemáticas Financieras es de vital importancia en el mundo de las entidades, ya sean públicas o privadas. Cualquier tipo de transacción se hace sobre la base de comparaciones de intereses, capitales, tasas, tiempos, montos, saldos. Debido a que a través de eso se toman las decisiones más trascendentales a la hora de realizar el manejo de los recursos financieros. La Matemática Financiera ha demostrado ser una disciplina fundamental en el mundo de la empresa y la banca.

Por lo tanto, la idea central de este trabajo se focaliza en facilitar los fundamentos básicos de la matemática financiera, fomentando el interés en el lector en esta área de la matemática aplicada e implementando la simulación de modelos para una fácil interpretación.

Durante el desarrollo de este trabajo se dará respuesta a las siguientes interrogantes:

- ¿Qué es la matemática financiera?
- ¿Cómo calcular el interés?
- ¿Cómo varia el dinero en el tiempo?
- ¿Cómo seleccionar la mejor opción financiera?
- ¿Cuál es la importancia de la simulación en la matemática financiera?

2.7. Metodología.

Se describe aquí los aspectos importantes de la metodología del presente trabajo de investigación:

1. Tipo de investigación.

Este proyecto de investigación tiene las característica siguientes:

- Bibliográfico, porque se ha hecho una extensa recopilación de libros impresos y de libros obtenidos por Internet para contar con el suficiente material que cubra las necesidades del estudio. El objetivo es compilar coherentemente la información más útil y destacada del tema.
- Descriptivo, ya que se pretende estudiar a detalle la teoría preliminar y del tema en sí.

2. Forma de Trabajo.

- Revisión de la bibliografía a utilizar.
- Se tendrán reuniones periódicas con el asesor del trabajo para tratar los diferentes aspectos de la investigación como estudiar y discutir la teoría y tratar los diferentes aspectos del trabajo escrito.
- Presentar mediante exposiciones los resultados.

3. Exposiciones.

Se tendrán dos exposiciones:

- Primera exposición: presentación del perfil del trabajo de investigación.
- Segunda exposición: presentación final del trabajo de investigación.

3. Matemática Financiera: conceptos básicos.

Matemática financiera, también conocida como las finanzas cuantitativas, es un campo de las matemáticas aplicadas, la cual se usa en la estimación de valores en los mercados financieros. Generalmente, matemática financiera derivará y extenderá los modelos matemáticos o numéricos sin establecer necesariamente un vínculo con la teoría financiera, tomando los precios de mercado observados como entrada. Se requiere coherencia matemática no compatibilidad con la teoría económica. Así, por ejemplo, mientras que un economista financiero podría estudiar las razones estructurales por las que una empresa puede tener un cierto valor de la acción, un matemático financiero pondrá el precio de la acción como algo dado, y el intento de utilizar el cálculo estocástico para obtener el valor correspondiente de los derivados de la acción. El teorema fundamental del precio libre de arbitraje es uno de los teoremas fundamentales de matemática financiera, mientras que la ecuación de Black-Scholes y la fórmula se encuentran entre los principales resultados.

Matemática financiera también se superpone en gran medida con los campos de las finanzas computacionales e ingeniería financiera. Este último se centra en las aplicaciones y el modelado, a menudo con la ayuda de modelos estocásticos de activos, mientras que el primero se centra, además de análisis, en la construcción de herramientas de aplicación de los modelos. En general, existen dos ramas separadas de financiación que requieren avanzadas técnicas cuantitativas: derivados de fijación de precios, por una parte, y de riesgos y gestión de la cartera por otra.

3.1. Conceptos básicos y suposiciones

A manera de introducción restringimos la escala de tiempo de sólo dos instantes: hoy, $t = 0$, y en algún momento futuro, dentro de un año, $t = 1$.

El precio de una acción en el tiempo t se denotará por $S(t)$. El precio actual de $S(0)$ es conocido por todos los inversionistas, pero el futuro precio $S(1)$ sigue siendo incierto: puede subir y bajar. La diferencia $S(1) - S(0)$ como una fracción del valor inicial representa la denominada tasa de subir o bajar

$$K_S = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)},$$

que también es incierto.

La posición libre de riesgo puede describirse como la cantidad que tuvo lugar en un banco. Como alternativa a mantener el dinero en un banco, los inversores pueden optar por invertir en bonos. El precio de un bono en el tiempo t se denota por $A(t)$. El rendimiento de los bonos se define de forma similar que en la acción,

$$K_A = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)}.$$

A continuación se especifican una serie de supuestos, el propósito de los cuales es encontrar un compromiso entre la complejidad del mundo real y las limitaciones y simplificaciones de un modelo matemático, impuesta con el fin de hacer que sea manejable. Los supuestos reflejan nuestra actual posición en este compromiso y se modificará en el futuro.

Supuesto 1 (Aleatoriedad)

El precio futuro de las acciones $S(1)$ es una variable aleatoria con al menos dos diferentes valores. El precio futuro $A(1)$ de la seguridad libre de riesgos es un número conocido.

Supuesto 2 (Positividad de precios)

Todos los precios de las acciones y los bonos son estrictamente positivos,

$$A(t) > 0 \;\; y \;\; S(t) > 0$$

para $t = 0, 1$.

La riqueza total de un inversionista en el instante de tiempo $t = 0, 1$ es

$$V(t) = xS(t) + yA(t).$$

El par (x, y) es llamado portafolio o cartera , $V(t)$ es el valor de esta cartera, es decir, la riqueza del inversionista en el tiempo t.

Los saltos de precios de los activos entre los tiempos 0 y aumento de 1 dan un cambio de el valor de la cartera:

$$V(1) - V(0) = x(S(1) - S(0)) + y(A(1) - A(0)).$$

Esta diferencia (que puede ser positiva, cero o negativa) como una fracción del valor inicial representa el rendimiento de la cartera,

$$K_V = \frac{V(1) - V(0)}{V(0)}.$$

3.1.1. Un modelo de Mercado simple

Los rendimientos de los bonos o acciones son casos particulares de la rentabilidad de una cartera (con $x = 0$ o $y = 0$, respectivamente).

Ejemplo 3.1. Sea $A(0) = 100$ y $A(1) = 110$ dólares.

A continuación, el rendimiento de una inversión en bonos será

$$K_A = 0.10,$$

es decir, 10 %. También, sea $S(0) = 50$ dólares y supongamos que la variable aleatoria $S(1)$ puede tomar dos valores,

- $S(1) = 52$ con probabilidad p.
- $S(1) = 48$ con probabilidad $1 - p$.

para un determinado $0 < p < 1$. El rendimiento de las acciones será entonces

$$K_S = \begin{cases} 0.04 \text{ si la acción sube,} \\ -0.04 \text{ si la acción baja,} \end{cases}$$

esto es 4 % ó −4 %.

Es matemáticamente conveniente y no demasiado lejos de la realidad permitir el uso de números reales, incluidos los negativos y fracciones, para representar las posiciones x e y en una cartera. Esto se refleja en la siguiente suposición, que no impone ninguna restricción en cuanto a las posiciones de negociación con que se trate.

Supuesto 3 (Divisibilidad, liquidez y las ventas cortas)

Un inversionista puede tener cualquier número x e y de acciones y bonos, ya sea número entero o fraccionario, negativo, positivo o cero. En general,

$$x, y \in \mathbb{R}.$$

El hecho de que uno puede tener una fracción de una acción o bono se conoce como la divisibilidad. Divisibilidad casi perfecta se logra en las relaciones del mundo real siempre que el volumen de transacciones es grande en comparación con los precios unitarios.

Si el número de valores de un tipo particular que tuvo lugar en una cartera es positivo, decimos que el inversionista tiene una posición larga. De lo contrario, decimos que una posición corta o que el activo está en corto. Una posición corta en el libre-riesgo de valores puede implicar la emisión y venta de bonos, pero en la práctica el mismo efecto financiero se consigue más fácilmente por los préstamos en efectivo, siendo la tasa de interés determinada por los precios de los bonos. Pagar el préstamo con interés se conoce como cerrar la posición corta. Una posición corta en la acción puede ser realizada por venta corta. Esto significa que el inversionista toma prestadas las acciones, las vende, y utiliza el procedente para hacer alguna otra inversión. El propietario de las acciones mantiene todos los derechos de la misma.

Supuesto 4 (Solvencia)

La riqueza de un inversor debe ser no negativa en todo momento,

$$V(t) \geq 0 \text{ para } t = 0, 1$$

es decir, en Matemática Financiera todo se vale menos perder dinero.

Una cartera o portafolio que satisface esta condición se llama admisible.

En el mundo real el número de posibles precios diferentes es finito porque se expresen en un número determinado de decimales y porque sólo hay una cierta cantidad final de dinero en todo el mundo, que suministra un límite superior para todos los precios.

Supuesto 5

El precio futuro $S(1)$ de una parte de la acción es una variable aleatoria tomando sólo un número finito de valores.

3.1.2. Principio de No-Arbitraje

Ahora vamos a declarar la suposición más fundamental acerca del mercado. En breve, vamos a suponer que el mercado no permite beneficios libres de riesgo sin inversión inicial. Por ejemplo, una posibilidad de ganancias sin riesgo, sin inversión inicial puede surgir cuando los participantes del mercado se equivocan. Supongamos que un comerciante en Nueva York ofrece comprar libras esterlinas a una tasa $d_A = 1.62$ dólares por libra, mientras el distribuidor B en Londres los vende a un tasa $d_B = 1.60$ dólares a una libra. Si éste fuera el caso, en efecto, se tendría entrega de dinero gratis. Un inversor sin capital inicial podría lograr un beneficio de $d_A - d_B = 0.02$ dólares por cada libra cotizada tomando simultáneamente una posición corta con el distribuidor B y una posición larga con el comerciante A.

La demanda por su generoso servicio obligaría rápidamente a los distribuidores a ajustar el tipo de cambio por lo que esta oportunidad rentable desaparecería.

Supuesto 6 (Principio de no arbitraje)

No hay portafolio admisible con el valor inicial $V(0) = 0$ tal que $V(1) > 0$ con una probabilidad distinta de cero.

En otras palabras, si el valor inicial de una cartera admisible es cero, $V(0) = 0$, entonces $V(1) = 0$ con probabilidad 1. Esto significa que ningún inversor puede obtener un beneficio sin riesgo y sin dotación inicial. Si una cartera viola este principio, diríamos que una oportunidad de arbitraje estaba disponible. Rara vez existen oportunidades de arbitraje en la práctica, y cuando lo hacen, la ganancias son típicamente extremadamente pequeñas en comparación con el volumen de las transacciones, haciéndolas más allá del alcance de los pequeños inversores.

La supresión del arbitraje en el modelo matemático está lo suficientemente cerca de la realidad y resulta ser el supuesto más importante y fructífero. Argumentos basados en el principio de no-arbitraje son las principales herramientas de las matemáticas financieras.

3.1.3. Contratos Forward

Un contrato Forward (plazo) es un acuerdo para comprar o vender un activo con riesgo en un determinado momento en el futuro, conocida como la fecha de entrega, por un precio fijo F fijado en el momento presente, llamado el precio forward. Si un inversionista se compromete a vender el activo, se habla de un contrato a plazo corto.

Ejemplo 3.2. Supongamos que el precio a plazo de un activo es de 80 dólares. Si el precio de mercado del bien resulta siendo 84 dólares en la fecha de entrega, el titular del contrato forward puede comprar el activo por 80 dólares y lo puede vender de inmediato por 84 dólares y cobrar la diferencia de 4 dólares.

En general, la parte que tiene un contrato a plazo con fecha de entrega 1 se beneficiará si el precio futuro de los activos $S(1)$ se eleva por encima del precio a plazo F. Si el precio de activos $S(1)$ cae por debajo del precio a plazo F, entonces el titular del contrato a plazo sufrirá una pérdida.

3.1.4. Opciones de compra y venta

Tenemos un breve ejemplo de como funciona el uso de una opción. Más adelante se aborda la teoría necesaria para opciones.

Sea $A(0) = 100$, $A(1) = 110$, $S(0) = 100$ dólares y

$$S(1) = \begin{cases} 120 \text{ con probabilidad } p \\ 80 \text{ con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

donde $0 < p < 1$.

Una opción de compra con precio de ejercicio \$100 y el tiempo de ejercicio 1 es un contrato que da al que la posee el derecho (pero no la obligación) de comprar una participación de acciones por \$100 en el tiempo 1.

Si el precio de la acción cae por debajo del precio de ejercicio, la opción no tendrá ningún valor. No tendría mucho sentido la compra de una participación por \$100 si su precio de mercado es \$80 y nadie querría ejercer el derecho. De lo contrario, si el precio de la acción se eleva a \$120, que está por encima del precio de ejercicio, la opción traerá un beneficio de \$20 a su titular, que tiene derecho a comprar una acción por \$100 en el tiempo 1 y puede venderla inmediatamente en el precio de mercado de \$120. Esto se conoce como el ejercicio de la opción. La opción sólo puede ejercerse, así simplemente recogiendo la diferencia de \$20 entre el precio de mercado de las acciones y el precio de ejercicio. En la práctica, este último es a menudo el método preferido porque la acción no necesita cambiar de manos.

Como resultado, la recompensa de la opción de compra, es decir, su valor en el momento 1 es una variable aleatoria

$$C(1) = \begin{cases} 20 \text{ si la acción sube} \\ 0 \text{ si la acción baja} \end{cases}$$

Mientras tanto, $C(0)$ denotará el valor de la opción en el tiempo 0, es decir, el precio a los que la opción puede ser comprada o vendida en la actualidad.

3.2. Activos libres de riesgo

3.2.1. Valor temporal del dinero y el interés simple

Es un hecho de la vida que de \$100 a ser recibidos después de un año valen menos que la misma cantidad hoy en día. La razón principal es que el dinero debido en el futuro o encerrado en una cuenta a plazo fijo no se puede gastar de inmediato. Por ello era de esperar a ser compensado por el consumo postergado. Además, los precios podrían subir en el ínterin y la cantidad no tendrá el mismo poder adquisitivo que tendría en la actualidad. Finalmente, siempre existe un riesgo, incluso uno insignificante, que nunca se recibirá el dinero. Siempre que un pago futuro es incierto, hasta cierto punto, su valor actual se reducirá para compensar el riesgo.

Supongamos ahora que una cantidad se abonará en una cuenta bancaria, donde se va a ganar interés. El valor futuro de esta inversión consiste en el depósito inicial, llamado principal y denotado por P, más todos los intereses devengados ya que el dinero era depositado en la cuenta. Para empezar, vamos a considerar el caso en que el interés es atraído sólo por el principal, que se mantiene sin cambios durante el período de inversión. Después de un año el interés ganado será rP, donde $r > 0$ es la tasa de interés. El valor de la inversión se convertirá así en $V(1) = P + rP = (1+r)P$. Después de dos años, la inversión crecerá a $V(2) = (1 + 2r)P$. Considere una fracción de un año. El interés se calcula normalmente a diario: el interés ganado en un día será $\frac{1}{365}rP$. Después de n días el interés será $\frac{n}{365}rP$ y el valor total de la inversión se convertirá en $V\left(\frac{n}{365}\right) = (1 + \frac{n}{365}r)P$. Esto motiva la siguiente regla de interés simple : El valor de la inversión en tiempo t , denotada por $V(t)$ viene dada por

$$V(t) = (1 + tr)P,$$

donde el tiempo t, expresado en años, puede ser un número real no negativo arbitrario. En particular, tenemos la igualdad obvia $V(0) = P$. El número $1 + rt$ se llama el factor de crecimiento . Aquí asumimos que la tasa de interés r es constante. Si el principal P se invierte en el momento s, en lugar de en el tiempo 0, entonces el valor en el tiempo $t \geq s$ será

$$V(t) = (1 + (t - s)\,r)P \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.3. Considere la posibilidad de un depósito de \$150, invertido durante 20 días y atrayendo el interés simple a una tasa del 8 %. Esto le da a $t = \frac{20}{365}$ y $r = 0.08$. Después de 20 días, el depósito crecerá a $V\left(\frac{20}{365}\right) = \left(1 + \frac{20}{365}\,0.08\right)\,150 \approx 150.66$.

El retorno de una inversión que comienza en el momento s y que termina en el tiempo t se denota por $K(s,t)$. Está dado por

$$K(s,t) = \frac{V(t) - V(s)}{V(s)}. \tag{3.2}$$

En el caso de interés simple

$$K(s,t) = (t - s)\,r,$$

que sigue claramente a partir de (3.1). En particular, la tasa de interés es igual a la rentabilidad en un año, $K(0,1) = r$.

3.2.2. La capitalización periódica

Una vez más, supongamos que una cantidad P se deposita en una cuenta bancaria, atrayendo interés a una constante $r > 0$. Sin embargo, en contraste con el caso de interés simple, se supone que los intereses devengados ahora se añadirán a el principal periódicamente, por ejemplo, anualmente, semestralmente, trimestral, mensual, o incluso sobre una base diaria. Posteriormente, el interés será atraído no sólo por el depósito original, sino también por todos los intereses devengados hasta la fecha. En esta situación, consideramos hablar de la capitalización discreta o periódica.

Ejemplo 3.4. En el caso de capitalización mensual el primer pago de intereses de $\frac{r}{12}P$ será debido después de un mes, lo que aumenta el principal para $\left(1+\frac{r}{12}\right)P$, todo lo cual atraerá el interés en el futuro. El próximo pago de intereses, debido a los dos meses, por lo tanto será $\frac{r}{12}\left(1+\frac{r}{12}\right)P$ y el capital se convertirá en $\left(1+\frac{r}{12}\right)^2 P$. Después de un año se convertirá en $\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} P$, después de n meses será $\left(1+\frac{r}{12}\right)^n P$ y después de t años $\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t} P$. La última fórmula admite t igual a un número entero de meses, es decir, un múltiplo de $\frac{1}{12}$.

En general, si los pagos de interés anual m se hacen por año, el tiempo entre dos pagos consecutivos medidos en años será de $\frac{1}{m}$, el primer pago será de interés debido al tiempo de $\frac{1}{m}$. Cada pago de interés aumentará el principal en un factor de $1+\frac{r}{m}$. Teniendo en cuenta que la tasa de interés r se mantiene sin cambios, después de t años el valor futuro de un principal P inicial se convertirá en

$$V(t) = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm} P, \tag{3.3}$$

ya que habrá tm pagos de intereses durante este periodo. En esta fórmula t debe ser un múltiplo entero del período de $\frac{1}{m}$. El número $\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}$ es el factor de crecimiento.

Proposición 3.5. El valor futuro $V(t)$ aumenta si uno cualquiera de los parámetros m, t, r o P aumenta, y las otras permanecen inalteradas.

3.2.3. Corrientes de pago

Una anualidad es una secuencia de un número finito de pagos de una cantidad fija debida a intervalos iguales de tiempo. Supongamos que los pagos de una cantidad C se efectuarán una vez al año durante n años. Suponiendo que se aplica interés compuesto anual, encontraremos el valor presente de un flujo de tales pagos. Calculamos los valores actuales de todos los pagos y sumando después obtenemos

$$\frac{C}{1+r}+\frac{C}{(1+r)^2}+\frac{C}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{C}{(1+r)^n}.$$

A veces es conveniente introducir el siguiente fragmento aparentemente complicado de notación:

$$PA\,(r,n)=\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\frac{1}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{1}{(1+r)^n}.$$

Este número se llama el factor del valor presente de una anualidad. Nos permite expresar el valor presente de una anualidad de una forma concisa:

$$PA\,(r,n)\times C.$$

La expresión $PA\,(r,n)$ puede ser simplificada utilizando la fórmula:
$a+qa+q^2a+\cdots+q^{n-1}a=a\frac{1-q^n}{1-q}$.
En nuestro caso $a=\frac{1}{1+r}$ y $q=\frac{1}{1+r}$, entonces

$$PA\,(r,n)=\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

Observación 3.6. Tenga en cuenta que en un depósito bancario inicial de

$$P=PA\,(r,n)\times C=\frac{C}{1+r}+\frac{C}{(1+r)^2}+\frac{C}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{C}{(1+r)^n},$$

la atracción de intereses compuestos a una tasa r anual produciría un flujo de n pagos anuales de C cada uno. Un depósito de $C\,(1+r)^{-1}$ crecería a C después de un año, que es justo lo que se necesita para cubrir el primer pago de la anualidad. Un depósito de $C\,(1+r)^{-2}$ se convertiría en C después de dos años para cubrir el segundo pago, y así sucesivamente. Por último, un depósito de $C\,(1+r)^{-n}$ entregaría el último pago de C debido después de n años.

Ejemplo 3.7. Considere la posibilidad de un préstamo de $\$1,000$ para ser pagado en 5 cuotas iguales debida en intervalos anuales. Las cuotas incluyen tanto los intereses a pagar cada año calculado en el 15 % del saldo pendiente actual y el pago de una fracción del préstamo. Un préstamo de este tipo se llama un préstamo amortizado. El monto de cada plazo se puede calcular como

$$\frac{1000}{PA\,(15\,\%, 5)} \cong 298.32.$$

Esto es debido a que el préstamo es equivalente a una anualidad desde el punto de vista del prestamista.

3.2.4. Compuesto continuo

La fórmula (3.3) para el valor futuro al tiempo t de un director P atrayendo el interés a una tasa $r > 0$ compuestas m veces de un año se puede escribir como

$$V\,(t) = \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{tr} P.$$

En el límite cuando $m \to \infty$, se obtiene

$$V\,(t) = e^{tr} P,$$

donde

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x},$$

es la base de los logaritmos naturales. Esto se conoce como la composición continua. El factor de crecimiento correspondiente es e^{tr}.

Proposición 3.8. Capitalización continua produce un mayor valor futuro de capitalización periódica con cualquier frecuencia m, dado el mismo principal inicial P y tasa de interés r.

El valor presente bajo capitalización continua está, obviamente, dada por

$$V\,(t) = V\,(0)\, e^{-tr}.$$

En este caso el factor de descuento es e^{-tr}. Dado el valor terminal $V\,(T)$, tenemos claramente

$$V\,(t) = e^{-r(T-t)} V\,(T)\,.$$

Se define el retorno logarítmico como

$$k\left(s,t\right)=\ln\frac{V\left(t\right)}{V\left(s\right)}.$$

Proposición 3.9. El retorno logarítmico es aditivo,

$$k\left(s,t\right)+k\left(t,u\right)=k\left(s,u\right).$$

Demostración. Esto es fácil de demostrar

$$k\left(s,t\right)+k\left(t,u\right)=\ln\frac{V\left(t\right)}{V\left(s\right)}+\ln\frac{V\left(u\right)}{V\left(t\right)},$$

$$k\left(s,t\right)+k\left(t,u\right)=\ln\frac{V\left(t\right)}{V\left(s\right)}\frac{V\left(u\right)}{V\left(t\right)},$$

$$k\left(s,t\right)+k\left(t,u\right)=\ln\frac{V\left(u\right)}{V\left(s\right)}=k\left(s,u\right).$$

□

3.2.5. ¿Cómo comparar métodos compuestos?

Supongamos que los certificados que prometen pagar 120 dólares después de un año se pueden comprar o vender ahora, o en cualquier momento durante este año, por \$100. Esto es consistente con una tasa de interés constante de 20 % bajo interés compuesto anual. Si un inversionista decidió vender un certificado de medio año después de la compra, ¿qué precio tendría que ir a buscar?

Supongamos que es de \$110, una primera aproximación frecuente en base a reducir a la mitad el beneficio anual de \$20. Sin embargo, esto resulta ser un precio demasiado alto, lo que lleva a la siguiente estrategia de arbitraje:

- Obtención de préstamos de \$1000 para comprar 10 certificados por \$100 cada uno.
- Después de seis meses venden los 10 certificados por \$110 cada uno y se compran 11 nuevos certificados por \$100 cada uno. El saldo de estas operaciones es nulo.
- Después de seis meses más venden los 11 certificados de \$110 cada uno, cambiando \$1210 en total, y pagando \$1200 para borrar el préstamo con intereses. El saldo de \$10 sería el beneficio del arbitraje.

Definición 3.10. Decimos que dos métodos de composición son equivalentes si los factores de crecimiento correspondientes durante un período de un año son los mismos. Si uno de los factores de crecimiento supera la otra, entonces el método de composición correspondiente se dice que es preferible.

Definición 3.11. Para un método de composición dada con tasa de interés r la tasa eficaz r_e es la que da el mismo factor de crecimiento durante un período de un año bajo la capitalización anual.

En particular, en el caso de la composición periódica con frecuencia m y la tasa r, la tasa efectiva r_e satisface

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = 1 + r_e.$$

En el caso de la composición continua con tasa r

$$e^r = 1 + r_e.$$

3.2.6. Mercado de dinero

El mercado de dinero consiste en valores libres de riesgo. Un ejemplo es un bono, que es una seguridad financiera prometiendo al titular una serie de pagos futuros garantizados. Libre de riesgo significa aquí que estos pagos se entregan con certeza. (Sin embargo, incluso en este caso el riesgo no puede evitarse por completo, ya que los precios de mercado de dichos valores pueden fluctuar de manera impredecible). Hay muchos tipos de bonos como las letras del tesoro, tesorería, hipoteca y títulos de crédito, papeles comerciales y otros con diversas disposiciones particulares relativas a la institución, duración, número de pagos, incrustado derechos y garantías que emiten.

3.2.7. Bonos de cupón

Bonos que prometen una secuencia de pagos se denominan bonos de cupón. Estos pagos consisten en el valor nominal debido a su vencimiento y los cupones pagados, por lo general, anualmente, semestralmente o trimestralmente, el último cupón pagadero al vencimiento. La asunción de los tipos de interés constantes nos permite calcular el precio de un bono cupón descontando todos los pagos futuros.

Ejemplo 3.12. Considere la posibilidad de un bono con valor nominal $F = 100$ dólares con vencimiento en cinco años, $T = 5$, con cupones de $C = 10$ dólares pagados anualmente, el último en la madurez. Esto significa un flujo de pagos de $10, 10, 10, 10, 110$ dólares al final de cada año consecutivo. Dada la tasa de capitalización continua r, digamos $112\,\%$, podemos encontrar el precio del bono:

$$V\left(0\right) = 10e^{-r} + 10e^{-2r} + 10e^{-3r} + 10e^{-4r} + 110e^{-5r} \cong \$90.27$$

4. Modelos Multiperiodos.

4.1. Introducción a precios: Modelos de un sólo periodo.

Comencemos con un ejemplo muy simple diseñado para ilustrar el enfoque de no arbitraje de derivados de precios. Considere la posibilidad de una acción cuyo precio en la actualidad es $\$s$. Durante un período determinado, el valor de la acción puede subir o bajar, subir a un valor su donde $u > 1$ con probabilidad p o bajar a un valor sd donde $d < 1$ con probabilidad $1-p$. En este modelo, estos son los únicos movimientos posibles para la acción en un sólo período. Durante un período más largo, por supuesto, muchos otros valores son posibles. En este mercado, también asumimos que existen los llamados bonos libres de riesgo disponible devolviendo una tasa garantizada de $r\,\%$ por período. Un bono de este tipo no puede caer en mora; no existe un mecanismo aleatorio que rige su regreso que se conoce después de la compra. Una inversión de \$1 al comienzo del período devuelve una garantía de $x(1+r)$ al final. A continuación, un portafolio comprado en el comienzo de un período que consiste de y acciones y x bonos volverá al final del período de una cantidad $\$x(1+r)+ysZ$ donde Z es una variable aleatoria tomando valores u o d con probabilidades p y $1-p$, respectivamente.

Definición 4.1. Un portafolio es un par (x, y) que representa el numero de bonos y el numero de acciones, respectivamente si $x, y < 0$ representa una venta corta en el activo correspondiente.

Dado un portafolio, denotamos por $V(sZ)$ el valor del portafolio en el tiempo t y esta dado por:

$$V(sZ) = x(1+r) + y(sZ)$$

Definición 4.2. Un portafolio (x, y) genera una posibilidad de arbitraje si $V(0) = 0$, $P(V(sZ) \geq 0) = 1$ y $P(V(sZ) > 0) > 0$.

Veamos ahora una condición necesaria y suficiente para que el modelo binomial no tenga oportunidades de arbitraje.

Teorema 4.3. El modelo es libre de arbitraje si y solo si se satisface que $u > 1+r > d$.

Demostración. Supongamos que $1+r \geq u > d$. Esto quiere decir que es mejor invertir en el bono que en la acción. Así que podemos construir el portafolio$(x, y) = (s, -1)$, es decir, vendemos en corto una acción y con esto compramos bonos. Entonces

$$V(0) = s(1) - 1(s) = 0$$

$$V(sZ) = s(1 + r) - 1(sZ) = s(1 + r - Z) \geq 0$$

Además, $P(V(sZ) > 0) = P(1 + r > Z) \geq P(Z = d) = p_d > 0$. Es decir, tenemos un portafolio que genera arbitraje.

Análogamente, si $u > d \geq 1 + r$ es mejor invertir en la acción, luego hacemos $(x, y) = (-s, 1)$. En este caso tenemos

$$V(0) = -s + s = 0$$

y

$$V(sZ) = -s(1 + r) + sZ = s(-1 - r + Z) = s(-(1 + r) + Z) \geq 0 :$$

Igualmente, $P(V(sZ) > 0) = P(1 + r < Z) \geq P(Z = u) = p_u > 0$ y tenemos de nuevo una oportunidad de arbitraje.

Supongamos ahora que $u > 1 + r > d$ y mostremos que no existe portafolio que genere arbitraje. Sea cualquier portafolio tal que $V(0) = 0$. Puesto que $V(0) = x + sy = 0$, entonces si $x = -sy$, luego

$$V(sZ) = -sy(1 + r) + y(sZ) = -sy - syr + ysZ = sy(-(1 + r) + Z)$$

Ahora, si $y > 0$, entonces $P(V(sZ) \geq 0) = P(Z = u) = p_u < 1$ y no hay arbitraje. Si $y < 0$ tampoco hay arbitraje pues $P(V(sZ) \geq 0) = P(Z = d) = p_d < 1$. Finalmente, si y $= 0$ entonces $P(V(sZ) > 0) = 0$.

$\square$

Un inversor ambicioso podría buscar un portafolio cuyo costo inicial es cero (es decir, $x + ys = 0$) de tal manera que el retorno es mayor que o igual a cero con una probabilidad positiva. Esto significa que el inversor es capaz de alcanzar una probabilidad positiva de los futuros beneficios sin riesgo,con una inversión neta de \$ 0. En términos matemáticos, el inversionista busca un punto (x, y) tales que $x + ys = 0$ (costo neto del portafolio es cero) y

$$x(1+r) + ysu \geq 0$$

$$x(1+r) + ysd \geq 0$$

donde cualquiera de las dos ecuaciones representa el valor de la riqueza al finalizar el periodo, con al menos una de las dos desigualdades estricta (por que nunca hay una pérdida y una oportunidad diferente de cero de un retorno positivo).

Bajo un supuesto no arbitraje desde $d \leq 1+r \leq u$, la garantía total de bonos es una combinación convexa o una media ponderada de los dos posibles garantías total de acciones; es decir, hay probabilidades $0 \leq q \leq 1$ y $(1-q)$ tal que $(1+r) = qu + (1-q)d$. De hecho, es fácil de resolver esta ecuación para determinar los valores de q y $1-q$.

$$1 + r = qu + (1-q)d$$

$$1 + r = q(u-d) + d$$

$$q = \frac{(1+r) - d}{u-d}, \text{ y } 1 - q = \frac{u - (1+r)}{u-d} \tag{4.1}$$

Definición 4.4. Denotemos por Q la distribución de probabilidad que pone probabilidades q y $1-q$ en los puntos su, sd. Entonces, si S_1 es el valor de la acción al final del período, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+r)} E_Q(S_1) &= \frac{1}{(1+r)}(qsu + (1-q)sd) \\
&= \frac{1}{(1+r)}(qsu + sd - qsd) \\
&= \frac{1}{(1+r)} s(qu + d(1-q) \\
&= \frac{1}{(1+r)} s(1+r) \\
&= s
\end{aligned}$$

donde E_Q denota la expectativa suponiendo que Q describe las probabilidades de los dos resultados.

En otras palabras, para que no haya arbitraje, debe existir una medida de probabilidad Q tal que el precio esperado del valor futuro de las acciones S_1 descontado hasta el presente con el regreso de un bono libre de riesgo es exactamente el valor presente de las acciones. La medida Q se denomina la medida de riesgo neutral y las probabilidades que esto asigne los posibles resultados de S, no son necesariamente los que determinan el comportamiento futuro de las acciones. La medida de riesgo neutral incluye tanto las creencias de consenso actuales en el valor futuro de las acciones y la actitud consensuada de los inversionistas para evitar riesgos. No suele ser cierto que $\frac{1}{(1+r)}E_P(S_1) = s$ con P denotando la distribución de probabilidad actual describiendo las probabilidades futuras de la acción. De hecho, es muy poco probable que un inversionista que desee adquirir una acción arriesgada, si él o ella podría lograr exactamente el mismo rendimiento esperado sin ningún riesgo en absoluto en el uso de un bono. Por lo general, esperamos que para hacer una inversión de riesgo atractivo, su rentabilidad esperada debe ser mayor que el de una inversión libre de riesgo. Observe en este ejemplo que la medida de riesgo neutral Q no utilizó las probabilidades p y $1-p$ que si la acción sube o baja y esto parece contrario a la intuición. Seguramente si una acción es más probable que suba, a continuación, ¡Una opción de compra sobre las acciones debe valorarse más alto!

Teorema 4.5. *El mercado es libre de arbitraje sí y sólo sí existe una medida de riesgo neutral.*

Supongamos por ejemplo que tenemos un amigo dispuesto, en una transacción privada conmigo, para comprar o vender una acción a un precio determinado a partir de su distribución subjetivamente asignada P, diferente de Q. El amigo cree que la acción está actualmente valorada en

$$\frac{1}{(1+r)}E_P(S_1) = \frac{psu + (1-p)sd}{(1+r)} \neq s \text{ ya que } p \neq q$$

Si el precio de evaluación del amigo es mayor que el precio actual de mercado, podemos comprar en el mercado abierto y vendemos al amigo. Si no es así, uno puede hacer lo contrario; de cualquier manera obtenemos ganancias.

Así que ¿por qué deberíamos utilizar la medida Q para determinar el precio de un activo determinado en un mercado (suponiendo, por supuesto, que Q es una medida de riesgo neutral y que son capaces de determinarlo)? No porque describe con precisión el comportamiento futuro de la acción, sino porque si utilizamos cualquier otra distribución, ofrecemos a un inversionista inteligente (de los cuales hay muchos!) Una oportunidad de arbitraje, o una oportunidad para hacer dinero sin ningún riesgo y a nuestra costa.

Observación 4.6. Los derivados son inversiones que derivan su valor de la de un activo correspondiente, como una acción.

Una opción de compra europea es una opción que le permite (pero no le obliga) para comprar las acciones en una fecha fija a futuro (la fecha de vencimiento) o para un precio predeterminado dado, el precio de ejercicio de la opción). Por ejemplo, una opción de compra con precio de ejercicio de \$ 10 en una acción cuyo valor futuro se designa S_1, vale la pena una vez expirado $S_1 - 10$ si $S_1 > 10$ pero nada en absoluto si $S_1 < 10$. La diferencia $S_1 - 10$ entre el valor de las acciones al vencimiento y el precio de ejercicio de la opción es el beneficio si se ejerce la opción, la compra de las acciones por \$10 y se venden en el mercado libre a \$ S_1. Sin embargo, si $S_1 < 10$, no hay ningún punto en el ejercicio de la opción, ya que no está obligado a hacerlo y su declaración es de \$ 0. En general, su garantía total desde la compra de la opción es una simple función del precio futuro de las acciones tales como $V(S_1) = max(S_1 - 10, 0)$. Denotamos esto como $(S_1 - 10)^+$.

Definición 4.7. El valor futuro de la opción es una variable aleatoria pero que deriva su valor de la acción, por lo que se llama un derivado y la acción es el subyacente.

Definición 4.8. Un derivado o derecho contingente $V(S_1)$ es cualquier variable aleatoria definida en un espacio muestral $\Omega = \{su, sd\}$.

Una función con el precio de las acciones $V(S_1)$ que puede representar el retorno de un portafolio de acciones y derivados se llama un reclamo contingente. $V(S_1)$ representa la garantía total a un inversionista de un determinado instrumento financiero derivado o cuando el precio de las acciones al final del período es S_1. En nuestro ejemplo anterior del simple binomio, la variable aleatoria toma sólo dos valores posibles $V(su)$ y $V(sd)$. Vamos a demostrar que existe un portafolio, llamado portafolio replicable.

Definición 4.9. Un portafolio replicable consistente en una inversión únicamente en el de acciones y bonos por encima del cual reproduce estos valores $V(su)$ y $V(sd)$ con exactitud.

Podemos determinar los pesos correspondientes en los bonos y acciones (x, y) simplemente resolviendo las dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$x(1 + r) + ysu = V(su)$$

$$x(1+r) + ysd = V(sd)$$

Resolviendo obtenemos:

$$\begin{cases} y^* = \dfrac{V(su) - V(sd)}{s(u-d)} \\ x^* = \dfrac{uV(sd) - dV(su)}{(1+r)(u-d)} \end{cases} \tag{4.2}$$

Al comprar y^* unidades de acciones y x^* unidades de bonos, que son capaces de replicar el derecho contingente $V(S_1)$ exactamente, es decir, producir un portafolio de acciones y bonos con exactamente el mismo rendimiento que el reclamo contingente. Así que en este caso, al menos, no puede haber sólo un posible valor actual para la reclamación de los contingentes y que es el valor actual del portafolio replicante $x^* + y^*s$.

Ejemplo 4.10. Supongamos que existe un derecho contingente $V(S_1)$ tal que $V(su) = 0$ y $V(sd) = 5$. El precio actual de la acción es $s = 100$, los valores de la variable Z son $u = 1.1$ y $d = 1.02$ con $p_u = 0.75$ y $q_d = 0.25$. La tasa de retorno libre de riesgo es $r = 0.05$. Como encontramos el valor de este derivado?

Veamos si este derecho es replicable, para eso debemos encontrar un portafolio (x, y) que satisfaga el siguiente sistema de ecuaciones

$$1.05x + 110y = 0$$

$$1.05x + 102y = 5$$

La solución de este sistema es $y = -0.625$ y $x = 65.48$. Esto quiere decir que para replicar el derecho se deben comprar 65.48 bonos y vender en corto 0.625 acciones. Para esto se requiere una inversión inicial de $V(0) = 65.48 - 62.5 = 2.98$.

El ejemplo anterior muestra que en este mercado todo derecho es replicable pues el sistema en 4.2 tiene solución única.

Si el mercado coloca cualquier otro valor en reclamo de los contingentes, a continuación, un comerciante podía garantizar un retorno positivo por un simple intercambio, una venta corta en el reclamo contingente y la compra del portafolio equivalente o la compra del reclamo contingente y una venta corta replicando el portafolio. Por lo tanto este es el único precio que se opone a una oportunidad de arbitraje.

El ejemplo 4.10, además sugiere la siguiente idea importante: Si un derivado es replicable, entonces el valor del derivado debe coincidir con el valor inicial del portafolio replicable, así que usando las ecuaciones 4.2, el valor de $x^* + sy^*$ del derecho $V(S_1)$ esta dado por:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+r} E_Q V(S_1) &= \frac{1}{1+r}(qV(su) + (1-q)V(sd)) \\
&= \frac{1}{1+r}(\frac{1+r-d}{u-d}V(su) + \frac{u-(1+r)}{u-d}V(sd)) \\
&= x^* + y^* s.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

La ecuación (4.3) nos dice que para valorar un derivado debemos calcular su valor esperado respecto a la medida de riesgo neutral y descontarlo usando la tasa de retorno libre de riesgo.

Continuando con el ejemplo 4.10. Usando las ecuaciones (4.1) tenemos que

$$q = \frac{1.05 - 1.02}{0.08} = 0.375$$

$$1 - q = \frac{1.1 - 1.05}{0.09} = 0.625$$

Entonces, de (4.3) se obtiene

$$x^* + sy^* = \frac{0.625}{1.05} * 5 = 2.98 = V(0)$$

En otras palabras, el valor esperado descontado de la reclamación contingente es igual al precio de no arbitraje del derivado en que se toma la expectativa usando la medida Q. De hecho cualquier reclamo contingente que es alcanzable debe su precio determinado de este modo. Si bien hemos desarrollado esto sólo en un caso extremadamente simple, que se extiende mucho más general.

4.1.1. Modelo General

Supongamos que tenemos un total de N activos de riesgo cuyos precios en los tiempos $t = 0, 1$, están dadas por (S_0^j, S_1^j), $j = 1, 2, ..., N$. Denotamos por S_0, S_1 el vector columna de precios inicial y final

$$S_0 = \begin{pmatrix} S_0^1 \\ S_0^2, \\ . \\ . \\ . \\ S_0^N \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} S_1^1 \\ S_1^2, \\ . \\ . \\ . \\ S_1^N \end{pmatrix}$$

donde en el tiempo 0, S_0 es conocido y S_1 es al azar. Supongamos también que hay un activo sin riesgo (un bono) con una garantía de pago de tasa de interés r más de una unidad de tiempo. Supongamos prestar dinero (esto es lo mismo que una venta corta en bonos) a la tasa libre de riesgo para comprar unidades de acciones w_j con j en el tiempo 0 para un costo total de $\sum w_j S_0^j$. El valor de este portafolio en el tiempo $t = 1$ es $T(w) = \sum w_j(S_1^j - (1+r)S_0^j)$.

Si hay pesos w_j de modo que esta suma es siempre no negativo, y $P(T(w) > 0) > 0$, entonces ésta es una oportunidad de arbitraje. Del mismo modo, mediante la sustitución de los pesos w_j por su negativa $-w_j$, hay una oportunidad de arbitraje si para algunos pesos la suma es no positiva y negativa con probabilidad positiva. En resumen, no hay oportunidades de arbitraje si por todos los pesos w_j, $P(T(w) > 0) > 0$ y $P(T(w) < 0) > 0$ por lo que $T(w)$ realiza tanto valores positivos y negativos. Suponemos que en el momento que genera la función $M(w) = E[\exp(\sum w_j(S_1^j - (1+r)S_0^j))]$ existe y es un función analítica de W. Aproximadamente la condición de que el momento generando la función es analítica asegura que podemos ampliar la función en un desarrollo en serie en W. Este es el caso, por ejemplo, si están delimitadas los valores de S_1, S_0. El siguiente teorema proporciona la equivalencia de las condiciones de no arbitraje y la existencia de una equivalencia de medida Q.

Teorema 4.11. Una condición suficiente y necesaria y tal que no haya oportunidades de arbitraje es que existe una medida Q equivalente a P tal que: $E_Q(S_1^j) = \frac{1}{1+r}S_0^j$ para todo $j = 1, 2, 3, ..., N$.

4.2. Modelos Multiperiodos.

Cuando un precio de activos evoluciona con el tiempo, el inversionista normalmente toma decisiones sobre la inversión en varios períodos durante su vida. Tales decisiones se toman con el beneficio de la información actual, y esta información, tanto si se utilizan o no, incluye el precio del activo y los activos relacionados en todos los períodos anteriores, a partir de un tiempo $t = 0$ cuando empezamos la observación del proceso. Denotamos como H_t a la información que está disponible para usarla en el tiempo t . Formalmente, H_t es lo que se llama una $\sigma-$álgebra generada por el pasado, y hay dos propiedades fundamentales de esta signa álgebra, las cuales son:

1. La primera es que las $\sigma-$álgebras aumentan con el tiempo.
2. La segunda característica de H_t es que incluye el valor del precio de los activos S_τ, $\tau \leq t$ en todo momento.

En lenguaje de teoría de medida, S_t se adapta o es medible con respecto a H_t. Ahora bien, el análisis anterior muestra que cuando nuestra vida la inversión comenzó en el tiempo $t = 0$ y estábamos planeando para el próximo período de tiempo, la ausencia de arbitraje implica una medida de riesgo neutral Q, tales que $E_Q(\frac{1}{1+r}S_1) = S_0$. Imaginemos ahora que estamos en una posición similar al tiempo t,planeando la inversión para la siguiente unidad de tiempo. Todos los valores esperados se deben tomar a la luz de nuestros conocimientos actuales, es decir, teniendo en cuenta la información H_t. Un análisis idéntico a lo anterior muestra que, bajo la medida de riesgo neutral Q, si S_t representa el precio de las acciones después de períodos t y rt la tasa de interés en un periodo libre de riesgo dado ese tiempo, entonces:

$$E_Q(\frac{1}{1+r}S_{t+1} \mid H_t) = S_t \tag{4.4}$$

Supongamos que B_t sea el valor de \$1 invertido en el tiempo $t = 0$ después de un total de períodos t. Entonces $B_1 = (1 + r_0)$, $B2 = (1 + r_0)(1 + r_1)$, y en general $B_t = (1 + r_0)(1 + r_1)...(1 + r_{t-1})$. Dado que la tasa de interés por período se anunció a principios de este período, el valor de B_t se conoce en el momento $t - 1$. Si usted debe exactamente \$ 1.00 para pagar en el tiempo t, entonces para cubrir esta deuda debe tener una inversión en el tiempo $t = 0$ de \$ $E(1/B_t)$, que podríamos llamar el valor actual de la promesa. En general, en el tiempo t, el valor actual de una cierta cantidad \$ V_t prometido en el tiempo T (es decir, el valor actual o el valor descontado al presente de este pago) es:

$$E(V_T \frac{B_t}{B_T} \mid H_t)$$

Ahora supongamos que dividimos (4.4) por encima de B_t. Obtenemos

$$E_Q(\frac{S_{t+1}}{B_{t+1}} \mid H_t) = E_Q(\frac{1}{B_t(1+r_t)} S_{t+1} \mid H_t) = \frac{1}{B_t} E_Q(\frac{1}{1+r_t} S_{t+1} | H_t) = \frac{S_t}{B_t} \quad (4.5)$$

Tenga en cuenta que estamos en condiciones de tomar el divisor B_t fuera de la expectativa ya B_t es conocido en el tiempo t. Ésta ecuación (4.5) describe una elegante propiedad matemática compartida por todos los valores negociables en un mercado completo. Bajo la medida de riesgo neutral, el precio con descuento $Y_t = S_t/B_t$ forma una martingala.

Definición 4.12. Una martingala es un proceso Y_t por el cual la expectativa de un valor futuro dado el presente es igual a el presente, es decir:

$$E(Y_{t+1}|H_t) = Y_t$$

para todo t.

Es fácil demostrar que para un proceso tal, cuando $T > t$

$$E(Y_T \mid H_t) = E[\cdots E[E(Y_T \mid H_{T-1}) \mid H_{T-2}] \cdots \mid H_t] = Y_t$$

Por lo tanto, en virtud de una medida de riesgo neutral Q en un mercado completo,todos los valores negociables descontados a la actual, forman una martingala. La medida Q, no la medida P, determina los precios derivados de un mercado de no arbitraje.

En general, los precios en un mercado se determinan como valores esperados, pero los valores esperados con respecto a la medida de Q. Esto es cierto en cualquier mercado completo, sin importar el número de activos negociados en el mercado. Para cualquier tiempo futuro $T > t$, y por cualquier derivado definido en los activos negociados en un mercado cuyo valor en el tiempo t está dada por V_t, $E_Q(\frac{B_t}{B_T} V_T|H_t) = V_t$= al precio de los derivados en el mercado en el tiempo t . Supongamos que queremos determinar un precio adecuado para un derivado cuyo valor está determinado por algún precio de una acción de proceso S_t. Supongamos que en el tiempo $T > t$, el valor del derivado es una función simple del precio de las acciones en ese momento $V_T = V(S_T)$. Simplemente podemos generar muchas simulaciones del valor futuro o de la acción y el correspondiente valor del derivado S_T, $V(S_T)$ dada la situación actual de la información H_T. Estas simulaciones deben llevarse a cabo bajo la medida Q. Con el fin de determinar un precio justo para el derivado, tenemos que la media de los valores descontados de los derivados, con descuentos hasta el presente, sobre todas estas simulaciones.

El problema es que la medida Q no es a menudo visible en los actuales precios de mercado ni estadísticamente estimable de su pasado. En otras palabras, un primer paso en la valoración de cualquier activo es determinar una medida Q para la cual este se mantiene. Ahora bien, en algunos modelos simples que involucran una sola acción, esto es bastante simple, y hay una única medida tal como Q.

4.2.1. Resolviendo para la Medida Q

Ejemplo 4.13. Durante cada período, el precio de una acción proporciona una rentabilidad mayor que, menor o igual que la de una inversión libre de riesgo, como un bono.Supongamos por simplicidad que los cambios de acción en las existencias por el factor de $u(1+r)$ (superior) o $(1+r)$ (la misma) $d(1+r)$ (menos) donde $u > 1 > d = 1/u$.

La probabilidad Q de aumentos y disminuciones se desconoce, y puede variar de un período a otro. Para más de dos períodos, se muestran los posibles caminos ejecutados por este precio de las acciones, a continuación suponiendo que la acción comienza en el instante $t = 0$ con precio $S_0 = 1$.

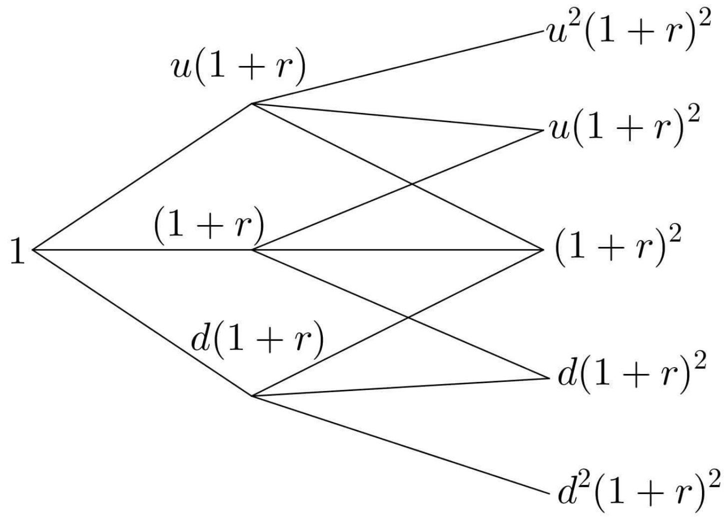


Figura 1: Árbol trinomial de el precio de acciones

En general, en tal árbol como hay tres ramas de cada uno de los nodos en los tiempos $t = 0, 1$ y hay un total de $1 + 3 = 4$ de dichos nodos. Por lo tanto, incluso si asumimos que las probabilidades de arriba y abajo de los movimientos no dependen de cómo el proceso llegó a un nodo dado, hay un total de $3 \times 4 = 12$ parámetros desconocidos. Por supuesto que hay condiciones; por ejemplo, la suma de las tres probabilidades en las ramas que salen de un nodo dado deben sumar uno y el proceso de precio debe ser una martingala. Para cada uno de los cuatro nodos, esto proporciona dos restricciones para un total de 8 condiciones, dejando 4 parámetros a estimar. Nosotros necesitamos el precio del mercado de 4 derivados diferentes u otros créditos contingentes para ser capaz de generar 4 ecuaciones con 4 incógnitas y resolver para ellos. Siempre estamos en condiciones de obtener precios de cuatro de estos derivados, entonces podemos resolver estas ecuaciones. Si denotamos la probabilidad de riesgo neutral de "arriba" en cada uno de los cuatro nodos de p_1, p_2, p_3, p_4 entonces la distribución condicional de S_{t+1} dado $S_t = s$ es:

Valor de la acción
$$su(1+r) \quad s(1+r) \quad sd(1+r)$$

Probabilidad
$$p_i \quad 1 - \frac{u-d}{1-d}p_i = 1 - kp_i \qquad \frac{u-1}{1-d}p_i = cp_i$$

Ejemplo 4.14. Considere el siguiente caso especial, con la tasa de interés r libre de riesgo por periodo, u $= 1.089$, $S_0 = \$ \ 1.00$. También suponemos que se nos da el precio de las cuatro opciones de compra que expiran en el tiempo $T = 2$. Los valores posibles del precio en el momento $T = 2$ que corresponde a subir dos veces, subir y mantenerse constante, subir y bajar, etc. son los valores de $S(T)$ en el conjunto

$$\{1.1859,\ 1.0890,\ 1.0000,\ 0.9183,\ 0.8432\}.$$

Ahora considere una "opción de compra" esta acción que expira en el tiempo $T = 2$ con el precio K de compra. Esta opción tiene un valor en el tiempo $t = 2$ igual a $(S_2 - K)$ si esto es positivo o cero en caso contrario. Por razones de brevedad denotamos esto $(S_2 - K)^+$. El valor actual de la opción es $E_Q(S_2 - K)^+$ descontado hasta el presente, donde K es el precio de ejercicio de la opción y S_2 es el precio de la acción en el momento 2. Así, el precio de la opción de compra en el tiempo 0 es dado por

$$V_0 = E_Q(S_2 - K)^+/(1 + r)^2.$$

En el ejemplo anterior, si consideramos las ecuaciones necesarias para determinar V_0 para construir un modelo flexible razonable en finanzas, con frecuencia hay más parámetros que valores negociables de los que podemos estimar estos parámetros. Es bastante común reaccionar al querer simplificar el modelo. Es por esta razón que los arboles binomiales (con solo dos ramas que emanan de cada nodo) se prefieren a menudo, que el ejemplo de árbol trinomial utilizado, a pesar de una aproximación peor a la distribución real de las acciones retornada.

En general, si existen n valores diferentes (excluidos los derivados cuyo valor es una función de uno o más de éstos) y si cada valor puede tomar cualquiera de los m valores diferentes, entonces hay un total de m^n posibles estados naturales en el tiempo $t = n$. La medida Q debe asignar una probabilidad a cada uno de ellos. Esto se traduce en un total de valores de probabilidad desconocidos m^n, que, por supuesto, debe agregar una, y resultando una expectativa razonable para cada uno de los n valores negociables. Para determinar únicamente Q requerimos un total de $m^n - n - 1$ ecuaciones o $m^n - n - 1$ derivados diferentes. Por ejemplo, para $m = 10$, $n = 100$, aproximadamente uno con cien ceros, se requieren para determinar únicamente Q. En un mercado completo, Q se determina únicamente por los valores comercializados, pero en efecto un mercado real puede ser completo. En los mercados reales, un activo no está perfectamente replicado por una combinación de otros activos porque no hay ningún valor en la duplicación. Si un activo es un derivado cuyo valor está determinado por otro valor comercializado, junto con las tasas de interés y las volatilidades, los mercados rara vez permiten la replicación exacta. Lo más probablemente que podemos esperar en la práctica es encontrar un modelo o medida Q en una subclase de las medidas con las características deseables en las que

$$E_Q[\frac{B_t}{B_T}V(S_T) \mid H_t] \approx V_t \quad \text{para todo V comercializable.} \tag{4.6}$$

Incluso si tuviéramos igualdades en (4.6), esto representaría normalmente menos ecuaciones que el número de probabilidades Q desconocidos por lo que se requiere cierta simplificación del modelo antes de decidirse por una medida Q. Uno podría, a su propio riesgo, ignorar el hecho de que ciertos factores en el mercado dependen de otros. Acciones similares comportándose de manera similar, y ninguno puede ser realmente independiente. Alguna simplificación del modelo es claramente necesario.

Como primer paso en la simplificación de un modelo, considere algunas de las medidas comunes de comportamiento. Las acciones pueden subir o bajar. El derivado de una acción es una tendencia en una u otra de estas dos direcciones. Pero también puede subir o bajar por mucho o poco. La medida de esto, la variación o variabilidad en los rendimientos de las acciones se llama la volatilidad de las acciones. Nuestro modelo debe tener como ingredientes de estas dos cantidades.

5. Opciones

Definición 5.1. Una opción es un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar o vender una cantidad determinada del activo subyacente a un precio predeterminado (strike o precio de ejercicio), en o hasta una fecha concreta (vencimiento).

Las opciones se pueden clasificar de varias formas. De forma muy genérica se pueden dividir en dos grupos: las "vainilla" que consisten en los contratos básicos de opciones "call" o "put" y las "exóticas" que incorporan variantes que hacen más complejo su tratamiento y su valoración.

5.1. Opciones vainilla.

Se trata de las opciones básicas que, dependiendo del tipo de derecho que nos den, son opciones call (de compra) y opciones put (de venta). En función de su forma de ser ejercidas podemos diferenciar:

- Opción europea: tan sólo se pueden ser ejercidas en una fecha determinada (fecha de ejercicio).
- Opción americana: pueden ser ejercidas a lo largo de su vida hasta la fecha de ejercicio.

Definición 5.2. Una opción se compra (o vende) a un precio o prima, que es el valor inicial de la opción. El precio del subyacente es observable en el tiempo y varía siguiendo un proceso estocástico. Según varía el precio del subyacente va variando el valor de la opción.

Definición 5.3. El cobro a que da lugar una opción en el momento del ejercicio por parte del comprador se denomina *pay-off*.

5.1.1. Opción Call.

Una opción call da a su comprador el derecho -pero no la obligación- a comprar un activo subyacente a un precio predeterminado en una fecha concreta. El vendedor de la opción call tiene la obligación de vender el activo en el caso de que el comprador ejerza el derecho a comprar.

El *pay-off* es la ganancia al vencimiento de la opción (sin incluir el coste de la prima). Por ejemplo, si K es el precio de ejercicio y S el valor del activo subyacente en el momento del ejercicio, el *pay-off* de una opción call será $max(S-K,0)=(S-K)^{+}$.

Posibles situaciones favorables para la compra de opciones call:

1. Cuando se prevé que una acción va a tener una tendencia alcista, ya que es más barato y rentable que la compra de acciones.

2. Cuando una acción ha tenido una tendencia alcista fuerte, el inversor no ha comprado y puede pensar que está cara, pero que puede seguir subiendo, la compra de una opción call permite aprovechar las subidas si la acción sigue subiendo y limitar las pérdidas si la acción cae.

3. Cuando se quiere comprar acciones en un futuro próximo porque se cree que van a subir pero hoy NO se dispone de los fondos necesarios, la opción call permite aprovechar las subidas sin tener que comprar las acciones.

En la venta de una opción call, el vendedor recibe la prima (el precio de la opción). A cambio, está obligado a vender la acción al precio fijado (precio de ejercicio), en el caso de que el comprador de la opción call ejerza su opción de compra.

Posibles situaciones favorables para la venta de opciones call:

1. Para asegurar ingresos adicionales una vez decidida la venta de las acciones.

2. Es el caso de que no importe vender las acciones a un precio considerado suficientemente alto y recibir, además, un ingreso extra previo. Este es el caso en que se vende una opción call fijando un precio de ejercicio en el nivel que se desee por encima del precio actual de la acción en Bolsa. Si la acción llega a alcanzar ese precio, habrá que vender la acción, pero a un precio alto y, además, se habrá ingresado el valor de la opción.

5.1.2. Opción Put.

Una opción put da a su comprador el derecho, pero no la obligación a vender un activo a un precio predeterminado hasta una fecha concreta. El vendedor de la opción put tiene la obligación de comprar el activo en el caso de que el comprador de la opción decida ejercer el derecho a vender el activo.

El *pay-off* o ganancia al vencimiento de la opción (sin incluir el coste de la prima), si K es el precio de ejercicio y S el valor del activo subyacente en el momento del ejercicio, será $max(K-S,0){=}(S-K)^{-}=(K-S)^{+}$.

La compra de opciones put se utiliza como *cobertura*, cuando se prevén caídas de precios en acciones que se poseen, ya que mediante la compra de put se fija el precio a partir del cual se gana dinero. Si la acción cae por debajo de ese precio, el inversor gana dinero. Las pérdidas quedan limitadas a la prima. Las ganancias aumentan a medida que el precio de la acción baje en el mercado.

Por cual, es interesante comprar una opción put:

1. Cuando se tiene acciones y se cree que hay grandes probabilidades de que su precio caiga a corto plazo, pero se piensa que el valor tiene una tendencia alcista a largo plazo, por lo que no se quiere vender dichas acciones. Con la opción put se obtienen beneficios si caen los precios y no se tiene que vender las acciones. De este modo se aprovecharía la futura subida de los precios de la acción. Es una forma de proteger beneficios no realizados cuando se tienen acciones compradas. A esta operación se le conoce como "Put protectora", porque protege la inversión de caídas.

2. Cuando se está convencido de que la acción va a caer y se quiere aprovechar esa caída para obtener beneficios. Si no se tienen acciones compradas previamente también interesa comprar una opción put, pues con ello se obtienen beneficios con las caídas de la acción.

El vendedor de una opción put está vendiendo un derecho por el que cobra la prima. Puesto que vende el derecho, contrae la obligación de comprar la acción en el caso de que el comprador de la put ejerza su derecho a vender.

Posibles situaciones favorables para la venta de opciones put:

1. Para comprar acciones con descuento. Cuando interese comprar acciones a un precio fijo por debajo del nivel actual de precios y además con un descuento. El descuento es la prima ingresada por la venta de la opción.

2. Cuando se piensa que el precio de la acción va a entrar en un período de estabilidad, se está convencido de que no va a caer y que es posible que tenga ligeras subidas. En esta situación se puede fijar un precio a partir del cual se está dispuesto a comprar; entretanto, se ingresa la prima. El precio límite de compra es el precio de ejercicio al que se venderá la opción put.

5.2. Opciones exóticas.

Son opciones que son más complejas que las opciones comúnmente tratadas hasta el momento. Estos productos son negociados normalmente over-the-counter (OTC). Incorporan distintas variantes ("exoticidades") que pueden llegar a complicar el cálculo de la valoración de la opción en gran medida, las cuales se clasifican en lo siguiente:

- Exoticidad en el cálculo del pago (*pay-off*):
  - Opción asiática: depende de la media del valor del subyacente en un periodo determinado.
  - Lookback option: se calcula en función del máximo (o mínimo) alcanzado por el subyacente en un periodo.
  - Opción binaria o digital: el pago puede ser una cantidad determinada (o un activo) o, por el contrario, no haber pago en absoluto.
  - Opción oscilante: el comprador puede "oscilar" el precio del subyacente.
  - Opción parisina: depende del tiempo que el activo esté por encima (o por debajo) del strike.
- Exoticidad en la fecha/forma de ejercicio:
  - Opción Bermuda: permite ser ejercida en varios momentos del tiempo (espaciados de forma discreta).
  - Opción con barrera: la opción deja de existir (o comienza a existir) cuando el subyacente alcanza (o se cruza) un determinado valor (barrier level).
  - Opción compuesta: consiste en una opción sobre otra opción, suponiendo, de este modo, dos fechas de ejercicio y modalidades distintas.
  - Opción grito: Consiste en dos fechas de ejercicio distintas. El comprador puede señalar –o "gritar"- una fecha en la que el precio del subyacente le parezca interesante. En el momento final de madurez de la opción, el comprador puede decidir si le conviene el pago (*pay- off)* a precio de la fecha final o a precio de la fecha del "grito".
- Exoticidad en función del subyacente:
  - Opción cesta: se basa en una media ponderada de distintos subyacentes.
  - Opción de intercambio: se intercambia un activo por otro.

5.3. Los valores subyacentes de las opciones.

Las opciones pueden ser emitidas sobre un buen número de valores, siendo los más comunes las acciones, los índices de mercados accionarios, las divisas extranjeras y los futuros.

¿Como se pone en funcionamiento un contrato de opciones?

1. Suponga que el inversionista le da instrucciones a su agente de bolsa para que compre un contrato de opción de compra de una acción de GCARSO con un precio de ejercicio de $150 y con vencimiento en octubre (estamos en julio).

2. El agente le pasará esta instrucciones al agente de piso de la bolsa de opciones y futuros (MMOF). Así, este último tratara de encontrar a otro agente o inversionista que este dispuesto a vender un contrato de opción de compra de acciones GCARSO y a un precio de $150.

3. Una vez que los dos se han identificado, el precio del contrato sera negociado; suponga aquí este fue de $6 por opción: el contrato tendrá 100 opciones cada una de las cuales será respaldada por una acción.

4. El comprador de la opción de compra entrega al vendedor de la misma $6*100=$600, cantidad que es transferida a nombre del vendedor a la Cámara de Compensación como parte del margen que él debe construir.

5. El vendedor deposita en la Cámara de Compensación un margen, es decir, una garantía por una cantidad igual a la primera mas otro monto definido por la cámara.

5.3.1. Uso de una opción con el propósito de protección.

Esquematizaremos con un ejemplo cómo un inversionista se protege del riesgo del precio de una acción.

Considere un inversionista que en agosto tiene 1000 acciones de GFB. El precio actual de cada una de ellas es de $52. Este inversionista está preocupado porque presiente que el precio de la acción puede bajar abruptamente en los próximos dos meses, mas sin embargo, no desea vender las acciones, por lo que quiere nada mas protegerse. La manera de como lo puede hacer es la siguiente.

Nuestro amigo el inversionista podría comprar opciones de venta al mes de octubre (si actualmente estamos en agosto) para vender las 1000 acciones a un precio de ejercicio de \$50. Debido a que el contrato de opción ampara 100 acciones, él necesitaría comprar 10 contratos de opciones. El precio de la opción fue pactado en \$200. Por tanto , si quiere protegerse necesita invertir \$200*10=\$2000.

Esta estrategia de protección le cuesta \$2000, pero le garantiza que las acciones pueden se vendidas por \$50 cada una. Si las opciones son ejercidas entonces se obtienen \$50,000, aunque tomando el costo en cuenta obtenemos \$48,000 . Sin embargo, si el precio de la acción permanece arriba de \$50, entonces las opciones no son ejercidas y expiran sin valor.

Como puede observarse, las opciones proveen un seguro, ya que protege de fluctuaciones en los precios de las acciones en el futuro, pero manteniendo la posibilidad de beneficiarse de movimientos favorables en los mismos.

5.3.2. Uso de una opción con el propósito de invertir.

Una opción también puede ser usada con el propósito de especular, es decir , para tratar de hacer una ganancia cuando uno tiene la creencia de un movimiento favorable en los precios. A continuación presentamos un ejemplo de este motivo.

Suponga que en septiembre, un inversionista quiere especular tomando una posición donde ella ganara si el precio de una acción ALFA se incrementa. Actualmente, este inversionista tiene \$3,900 para sus operaciones de especulación.

Ahora suponga que el precio actual de acción ALFA es de \$39 y que una opción de compra con vencimiento de 30 días que tiene un precio de \$40, se esta vendiendo por \$1.50. Con esta información, nuestro inversionista tiene las siguientes dos estrategias alternativas:

1. Comprar 100 acciones.
2. Comprar 2600 opciones.

Supongamos que existen unicamente dos casos posibles dentro de 30 días:

Caso 1. Que el precio de la acción ALFA se incremente a \$45.

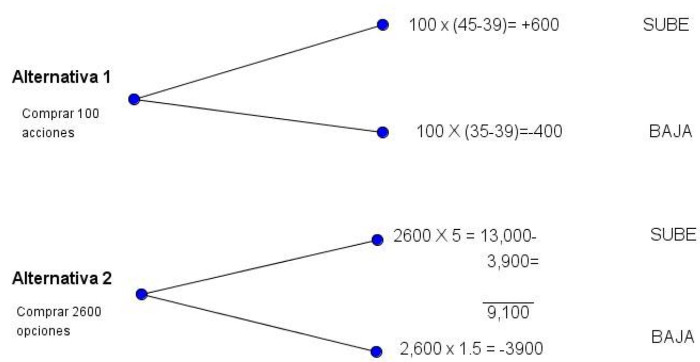
- Bajo la alternativa 1. El inversionista tendrá una ganancia equivalente a la diferencia de los precios multiplicada por el numero de acciones que compro en septiembre. Esto es: 2600*(45-39)=600,

- Bajo la alternativa 2. El inversionista podría ejercer sus 2600 opciones ya que le dan el derecho de comprar las acciones ALFA a \$40 cuando en realidad valen \$45. Así al ejercerlas tendrá 2600 acciones y su ganancia por acción sera de \$5, por lo que la ganancia total es: 2600*(5-1.50)= 9100.

Caso 2. Que el precio de la acción ALFA se baje a \$35.

- Bajo la alternativa 1. Esta alternativa arroja una perdida de \$4 por acción, por lo que la pérdida es de \$400, es decir: 100*(39-35)=400.
- Bajo la alternativa 2. La opción no se va a ejercer ya que carece de valor. La perdida aquí es el costo de las opciones, esto es, \$3,900. Se dice que una opción de compra, el día de la expiración, carece de valor si el precio de ejercicio es mayor al precio de la acción ese mismo día.

El siguiente cuadro muestra un resumen de la estrategia tomada para especular tanto con acciones como con opciones.



6. Procesos Estocásticos y Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

Definición 6.1. Un proceso estocástico describe la evolución temporal de una variable aleatoria.

En estadística, y específicamente en la teoría de la probabilidad, un proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para tratar con magnitudes aleatorias que varían con el tiempo, o más exactamente para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo. Cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y pueden o no, estar correlacionadas entre ellas.

Cada variable o conjunto de variables sometidas a influencias o efectos aleatorios constituye un proceso estocástico. Un proceso estocástico X_t puede entenderse como una familia uniparamétrica de variables aleatorias indexadas mediante el tiempo$t$. Los procesos estocásticos permiten tratar procesos dinámicos en los que hay cierta aleatoriedad.

Tipos de procesos estocásticos:

- De tiempo discreto: aquel en el que la variable puede cambiar de valor únicamente en instantes concretos del tiempo.
- De tiempo continuo: aquel en el que la variable puede cambiar de valor en cualquier instante del tiempo.
- De variable discreta: aquel en el que la variable sólo puede tomar determinados valores discretos.
- De variable continua: aquel en el que la variable puede tomar cualquier valor de la recta real.

Casos especiales

- Proceso estacionario: Un proceso es estacionario en sentido estricto si la función de distribución conjunta de cualquier subconjunto de variables es constante respecto a un desplazamiento en el tiempo. Se dice que un proceso es estacionario en sentido amplio (o débilmente estacionario) cuando se verifica que:

- La media teórica es independiente del tiempo; y
- Las autocovarianzas de orden s sólo vienen afectadas por el lapso de tiempo transcurrido entre los dos periodos y no dependen del tiempo.

- Proceso homogéneo: variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Son proceso donde el dominio tiene cierta simetría y las distribuciones de probabilidad finito-dimensionales tienen la misma simetría. Un caso especial incluye a los procesos estacionarios, también llamados procesos homogéneos en el tiempo.
- Proceso de Márkov: Aquellos procesos discretos en que la evolución sólo depende del estado actual y no de los anteriores.
- Procesos de tiempo discreto
  - Proceso de Bernoulli son procesos discretos en los que el número de eventos viene dado por una distribución binomial.
  - Proceso de Galton-Watson: es un tipo de proceso de Márkov con ramificación.
- Procesos de tiempo continuo:
- Proceso de Gauss: Proceso continuo en el que toda combinación lineal de variables es una variable de distribución normal.
- Proceso de Márkov continuo
  - Proceso de Gauss-Márkov: Son procesos, al mismo tiempo, de Gauss y de Márkov
  - Proceso de Feller: son procesos estocásticos que toman valores sobre espacios de operadores de algún espacio funcional.
  - Proceso de Lévy: son procesos homogéneos de Markov de "tiempo continuo" que generalizan el paseo aleatorio que usualmente se define como de "tiempo discreto".
  - Proceso de Poisson, es caso particular de proceso de Lévy donde el tiempo transcurrido entre saltos sigue una distribución exponencial y, por tanto, el número de eventos en un intervalo viene dado por una distribución de Poisson.
  - Proceso de Wiener, el incremento de la variable entre dos instantes tiene una distribución gaussiana y, por tanto, además de un proceso de Lévy es un proceso de Gauss simultáneamente.

- Proceso doblemente estocástico, es un tipo de modelo estocástico usado para modelar ciertas series temporales, en el que los parámetros que dan las distribuciones también varían aleatoriamente (de ahí el término de doblemente estocástico).
  - Proceso de Cox es un proceso doblemente estocástico que generaliza el proceso de Poisson, donde el parámetro de intensidad varía aleatoriamente.
- Proceso estocástico continuo, es un tipo de proceso estocástico de tiempo continuo en que las trayectorias son además caminos continuos.

6.1. Expresión analítica de un proceso estocástico.

Sabemos que el comportamiento de una variable aleatoria se describe mediante una adecuada distribución de probabilidad. En un proceso estocástico el comportamiento de la variable aleatoria considerada varía en el tiempo. Por tanto, la distribución de probabilidad utilizada para describirla también podrá variar en el tiempo. Para describir el proceso estocástico que sigue una variable aleatoria temporal x_t, deberemos indicar en cada instante t cual es la distribución de probabilidad asociada a x_t .

Ejemplo 6.2. Consideremos el proceso estocástico x_T dado por:

$$x_T \sim N\left(x_0 + \mu T,\ \sigma^2 T\right)$$

con x_0, μ y σ constantes conocidas.

En un instante final de tiempo T, x_T sigue una distribución de probabilidad con media $x_0 + \mu T$ y con la varianza $\sigma^2 T$

Cuando se está modelando un fenómeno real, resulta difícil establecer directamente cual va ser la distribución de probabilidad adecuada, así como determinar cómo van a variar sus parámetros en el tiempo.

Por ello es frecuente que los procesos estocásticos vengan dados mediante ecuaciones, similares a las de los modelos discretos en diferencias finitas , que es el método que utilizaremos más adelante. En dichas ecuaciones se relaciona el valor de la variable aleatoria x_t en el instante t, con su valor en el instante anterior x_{t-1}. Ahora bien , para que una ecuación en diferencias sea estocástica es necesario que en su expresión intervenga una variable aleatoria estándar ξ_t. De este modo el valor de x_t no se deduce de forma determinista a partir del valor de x_{t-1}, sino que depende también del comportamiento de la variable aleatoria ξ_t.

ξ_t inducirá en x_t una distribución de probabilidad variable en el tiempo. Es decir, x_t seguirá un proceso estocástico.

6.1.1. Procesos de Márkov.

Un proceso de Márkov es un tipo particular de proceso estocástico en el que únicamente el estado actual del proceso es relevante a la hora de predecir el estado futuro. Es decir, la historia pasada del proceso y la forma en que el presente ha emergido del pasado son irrelevantes. Más formalmente, el valor esperado de una variable aleatoria x_t en el instante t, depende únicamente del valor previo x_{t-1}. Generalizando, si poseemos información sobre x_r, con $r < t$, entonces a la hora de estimar x_t , la única información que necesitamos es la de x_r, para el mayor r para el que tengamos información.

En la teoría de la probabilidad y en estadística, un proceso de Márkov, llamado así por el matemático ruso Andréi Márkov, es un fenómeno aleatorio dependiente del tiempo para el cual se cumple una propiedad específica: la propiedad de Márkov. En una descripción común, un proceso estocástico con la propiedad de Márkov, o sin memoria, es uno para el cual la probabilidad condicional sobre el estado presente, futuro y pasado del sistema son independientes. Los procesos de Márkov surgen en probabilidad y en estadística en una de dos maneras:

- Un proceso estocástico, que se define a través de un argumento separado, puede demostrarse (matemáticamente) que tiene la propiedad de Márkov y como consecuencia tiene las propiedades que se pueden deducir de ésta para todos los procesos de Márkov.

- De más importancia práctica es el uso de la suposición que la propiedad de Márkov es válida para un proceso aleatorio con el fin de construir, abinitio, un modelo estocástico para este proceso. En términos de modelado, suponer que la propiedad de Márkov es válida es una de un limitado número de formas sencillas de introducir dependencia estadística en un modelo para un proceso estocástico, de tal manera que permita que la fuerza de la dependencia en los diferentes retardos decline a medida que el retardo aumenta.

Frecuentemente el término cadena de Márkov se usa para dar a entender que un proceso de Márkov tiene un espacio de estados discreto (infinito o numerable). Usualmente una cadena de Márkov sería definida para un conjunto discreto de tiempos (es decir, una cadena de Márkov de tiempo discreto),aunque algunos autores usan la misma terminología donde "tiempo" puede tomar valores continuos.

6.1.2. Procesos de Wiener.

Un proceso de Wiener es un tipo especial de proceso estocástico de Márkov. El proceso de Wiener desempeña un papel importante en la teoría de procesos estocáticos y sus aplicaciones. Entre otras aplicaciones, el proceso de Wiener proporciona un modelo para el movimiento browniano y el ruido y agitación térmica de los circuitos eléctricos.

Representemos $X(t)$ como el desplazamiento de un tiempo t de una partícula en movimiento browniano. Por definición $X(0) = 0$. Una partícula browniana está en movimiento perpetuo a causa de los impactos continuos que recibe debido a los campos de fuerza del medio que la rodea. El desplazamiento de la partícula en un intervalo de tiempo (s, t) grande comparado con el tiempo que transcurre entre dos impactos sucesivos, se puede considerar como la suma de un gran número de desplazamientos pequeños. Por consiguiente según el Teorema del Limite Central parece razonable suponer que $X(t) - X(s)$ tiene distribución normal. A continuación es razonable suponer que la distribución de probabilidad del desplazamiento $X(t) - X(s)$ será el mismo que $X(t+h) - X(s+h)$, para todo $h > 0$, ya que suponemos que el medio está en equilibrio y la ley de probabilidad dependerá de la longitud $t - s$ del intervalo, y no del instante en que comienza la observación. Ahora se supone que el movimiento de la partícula es debido enteramente a los muy frecuentes impactos moleculares irregulares. En matemática se interpreta esto diciendo que el proceso estocástico $X(t)$ tiene incrementos independientes; los desplazamientos a lo largo de intervalos que no se superponen son independientes ya que el número y la magnitud de los impactos en los intervalos que no se superponen son independientes. Por lo tanto hemos llegado a definir la noción de un proceso de Wiener. El proceso de Wiener también llamado proceso del movimiento browniano. Se dice que un proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un proceso de Wiener si:

a) $X(t), t \geq 0$ tiene incrementos independientes

b) para todo $t > 0$, $X(t)$ tiene una distribución normal

c) para todo $t > 0$, $E[X(t)] = 0$

d) $X(0) = 0$

Ejemplo 6.3. Sea una variable x_t, se dice que sigue un proceso de Wiener si cumple la ecuación:

$$x_t = x_{t-1} + \xi_t \sqrt{\triangle T}$$

• x_0 conocido.

• $t = t - 1 + \Delta t$.

• ξ_t sigue una distribución de probabilidad $N(0, 1)$.

• ξ_t es independiente de ξ_s para todo $t \neq s$.

Para un intervalo temporal Δt dado, el incremento de la variable aleatoria Δx se distribuye según una normal de media 0 y varianza Δt.

$$\triangle x \sim N\ (\ 0, \triangle t\ )$$

como:

$$x_t = x_{t-1} + \xi_t \sqrt{\triangle t} \implies \triangle x = x_t - x_{t-1} = \xi_t \sqrt{\triangle t}$$

Comoξ_t sigue una distribución de probabilidad normal, entonces $\triangle x$ sigue también una distribución normal. Veamos cual sería su media y su varianza:

$\mu = E[\triangle x] = E\left[\xi_t \sqrt{\triangle t}\right] = \sqrt{\triangle t} * E\left[\xi_t\right] = \sqrt{\triangle t} * 0 = 0$

$Var = E\left[(\Delta x - \mu)^2\right] = E\left[(\triangle x - 0)^2\right] = E\left[(\xi_t \sqrt{\triangle t})^2\right]$
$\quad = E\left[\xi_t^2 \triangle t\right] = \triangle t * E\left[\xi_t^2\right] = \triangle t * E\left[(\xi_t - 0)^2\right] = \triangle t * 1 = \Delta t$

6.1.3. Distribución Log-normal

La distribución normal logarítmica es una distribución de probabilidad de una variable aleatoria cuyo logaritmo está normalmente distribuido. Es decir, si X es una variable aleatoria con una distribución normal, entonces$exp(X)$ tiene una distribución log-normal. La base de una función logarítmica no es importante, ya que $log_a X$ está distribuida normalmente si y sólo si $log_b X$ está distribuida normalmente, sólo se diferencian en un factor constante. Log-normal también se escribe log normal o lognormal.

Una variable puede ser modelada como log-normal si puede ser considerada como un producto multiplicativo de muchos pequeños factores independientes. Un ejemplo típico es un retorno a largo plazo de una inversión: puede considerarse como un producto de muchos retornos diarios. La distribución log-normal tiende a la función densidad de probabilidad:

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(ln(x)-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Donde:

$\mu=E(X)=e^{\mu+\sigma^2/2}$
$\sigma^2=Var(X)=(e^{\sigma^2}-1)e^{2\mu+\sigma^2}$

6.1.4. Lema de Ito.

Sea x_t un proceso de difusión cuya dinámica es:

$$dx_t=f\,(x_t,t)dt+g\,(x_t,t)dz$$

Supongamos que $y_t=F(x_t,t)$ es función del proceso anterior. Entonces y_t es un proceso de difusión cuya diferencial estocástica viene dada por :

$$dy_t=\left(\frac{\partial F}{\partial t}+f(x_t,t)\frac{\partial F}{\partial x_t}+\frac{1}{2}g(x_t,t)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x_t^2}\right)dt+\left(g(x_t,t)\frac{\partial F}{\partial x_t}\right)dz$$

Demostración. Abordaremos la prueba de forma heurística.
Sea $F=F(S,t)$
$F(S+dS,t+dt)-F(S,t)$
$=\frac{\partial F}{\partial S}(S,t)\,dS+\frac{\partial F}{\partial t}(S,t)\,dt+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(S,t)\,dS^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial S}(S,t)\,dSdt+\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(S,t)\,dt^2\right)+R_2$
Pasando al límite el resto tiende a cero y algunos términos de mayor orden también. Para tener idea del por que tengamos presente que:

$$(dZ)^2\approx dt$$

Ahora siendo $dS=\mu Sdt+\sigma SdZ$, entonces:

$$dS^2=\mu^2S^2dt^2+2\mu\sigma S^2dtdZ+\sigma^2S^2dZ^2$$

El último de los términos es el único que «sobrevive».Luego reemplazando dS^2como corresponde:

$F(S + dS, t + dt) - F(S, t)$
$= \frac{\partial F}{\partial S}(S,t)\, dS + \frac{\partial F}{\partial t}(S,t)\, dt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(S,t)\, dS^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial S}(S,t)\, dSdt + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(S,t)\, dt^2\right) + R_2$
$= \frac{\partial F}{\partial S}(S,t)\, (\mu S dt + \sigma S dZ) + \frac{\partial F}{\partial t}(S,t)\, dt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(S,t)\, \sigma^2 S^2\right) + R_2$
$= \sigma S \frac{\partial F}{\partial S}(S,t)\, dZ + (\frac{\partial F}{\partial t}(S,t) + \mu S \frac{\partial F}{\partial S}(S,t) dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(S,t)\, \sigma^2 S^2)\, dt + R_2$
y en el límite se obtiene el resultado.

□

6.1.5. Movimiento Browniano

Es un proceso aleatorio que describe el comportamiento de ciertas variables aleatorias a medida que se desplazan en el tiempo. Este proceso se utiliza frecuentemente en los modelos financieros para describir la evolución de los precios a lo largo del tiempo. Cuando se aplica a los precios, el movimiento Browniano da por supuesto que el cambio de un período de tiempo al siguiente no está relacionado ni con el nivel de precios ni con las series pasadas de cambios de precio. Es decir, cada cambio de precio es independiente de los cambios de precio anteriores y la volatilidad de los cambios de precio es constante. El movimiento Browniano se divide en : Aritmético y Geométrico.

Para el caso de nuestro trabajo solo estudiaremos el movimiento Browniano Geométrico. El movimiento Browniano Geométrico (GBM) es un proceso estocástico continuo en el que el logaritmo de una cantidad que oscila sigue un movimiento Browniano al azar, o un proceso de Wiener. Es aplicable a la modelización matemática de ciertos fenómenos en los mercados financieros, que se utiliza sobre todo en el campo de opciones de precios, ya que una cantidad que sigue una GBM puede tomar cualquier valor positivo, y sólo los cambios porcentuales en las variables aleatorias son importantes. Esta es una buena aproximación de la dinámica de precios de acciones, a excepción de algunos eventos.

Un proceso estocástico S_t sigue un GBM sí satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Donde W_t es un proceso de Wiener con σ, μ constantes. Para cualquier ecuación de valor inicial S_0 tiene la solución analítica:

$$S_t = S_0 exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right)$$

Ya que:

Sea $P_t = R(S,t) = ln(S)$ una función en términos de S, según lema de Ito, para $P_t$se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial estocástica:

$$dP_t = \left(\frac{\partial R}{\partial t} + \mu S\frac{\partial R}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 R}{\partial S^2}\right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial R}{\partial S} dW\right)$$

Ahora dado que $P_t = R(S,t) = ln(S)$ encontraremos las derivadas parciales para $R(S,t)$

$$\frac{\partial R}{\partial S} = \frac{1}{S},\ \frac{\partial^2 R}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2},\ \frac{\partial R}{\partial t} = 0$$

sustituyendo las derivadas parciales anteriores en la ecuación resultante de Ito:

$$dP_t = \left(\mu S\frac{1}{S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(-\frac{1}{S^2}\right)\right) dt + \left(\sigma S \frac{1}{S} dW\right)$$

$$dP_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + (\sigma dW)$$

Ahora integrando

$$P_t = \int \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \int (\sigma dW)$$

$$ln(S) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + (\sigma W_t) + C$$

aplicando exponencial a ambos lados

$$S_t = e^c e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + (\sigma W_t)}$$

y dado que $S(0) = S_0$ tenemos que:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$$

que es una variable aleatoria con distribución logarítmica normal con valor esperado $E(S_t) = e^{\mu t} S_0$ y varianza $Var(S_t) = e^{2\mu t} S_0^2 \left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$ Un movimiento Browniano geométrico (GBM) es un proceso estocástico dado por:

- $x_t - x_{t-1} = \triangle x = \mu x_{t-1} \triangle t + \sigma x_{t-1} \triangle z$

- σ, μ constantes
- $\triangle z = \xi_t$ es un proceso de Wiener

6.1.6. Integral estocástica

Los movimientos brownianos se basan en la definición del proceso de Wiener. Las trayectorias del proceso de Wiener son continuas pero no derivables. Por tanto, el paso de un proceso estocástico de tiempo discreto a otro de tiempo continuo no es inmediato. Requiere de la construcción de una nueva herramienta matemática: la integral estocástica. En general podemos definir procesos estocásticos cuyos incrementos dependen de un proceso de Wiener. Un proceso de Ito o proceso de difusión es un proceso de Wiener generalizado en el que los parámetros μ y σ son ahora funciones de la propia variable y del tiempo:

$$x_{t+1} - x_t = f(x_t, t)\triangle t + g(x_t, t)\triangle z$$

• Si en la ecuación anterior hacemos tender $\Delta t \to 0$, entonces, en tiempo continuo, se puede escribir formalmente:

$$dx_t = f(x_t, t)dt + g(x_t, t)dz$$

• La variable estocástica x_t está definida si en la ecuación integral siguiente las integrales que aparecen tienen sentido y son calculables:

$$x_t = x_0 + \int_t^0 f(x_t, t)dt + \int_t^0 g(x_t, t)dz$$

7. Modelo Black-Scholes.

El modelo de Black-Scholes o ecuación de Black-Scholes es una ecuación usada en matemática financiera para determinar el precio de determinados activos financieros. Dicha ecuación se basa ampliamente en la teoría de procesos estocásticos en particular modela variaciones de precios como un proceso de Wiener. En 1973, Robert C. Merton publicó "Theory of Rational Option Pricing", en él hacía referencia a un modelo matemático desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes.

A este modelo lo denominó Black-Scholes y fue empleado para estimar el valor actual de una opción europea para la compra (Call), o venta (Put), de acciones en una fecha futura. Posteriormente el modelo se amplió para opciones sobre acciones que producen dividendos, y luego se adoptó para opciones europeas, americanas, y mercado monetario.

Algunas condiciones de frontera:

- (opción call)

  1. $V(S,T) = (S-K)^+$
  2. $V(0,t) = 0$
  3. $\lim_{S\to\infty} V(S,T) = S$

- (opción put)

  1. $V(S,T) = (K-S)^+$
  2. $V(0,t) = Ke^{-r(T-t)}$
  3. $lim_{S\to\infty} V(S,t) = 0$

La ecuación de Black-Scholes está dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- La ecuación de Black-Scholes es una Ecuación diferencial parabólica: Derivada primera respecto al tiempo y segunda respecto a la variable espacial S.

- Aparece una derivada primera respecto a S (término convectivo o de tendencia). Origina problemas numéricos
- Es una ecuación diferencial backwards: Partiendo de una condición final para el proceso la ecuación define un proceso de suavizado de ésta.
- El modelo Black-Scholes tiene un comportamiento lognormal del activo:

$$\frac{dS}{S} = \mu(t,s)\,dt + \sigma(t,s)\,dz$$

con $V(s,t)$ valor del activo derivado en el instante t y para un valor del subyacente S.

Ahora aplicamos el Lema de Ito a S. Supongamos que S cumple la ecuación estocástica:

$$dS = S\mu dt + S\sigma dZ \tag{7.1}$$

donde $Z(t)$ es un movimiento browniano. Sea R una función de dos variables, dada por $R(S,t)$, por el Lema de Ito entonces satisface que:

$$dR = \left(\frac{\partial R}{\partial t} + \mu S\frac{\partial R}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 R}{\partial S^2}\right)dt + \left(\sigma S\frac{\partial R}{\partial S}dZ\right)$$

μ : promedio

σ : volatilidad (desviación estándar)

dX : browniano (dZ) Ahora dividiendo (7.1) entre S, tenemos

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX$$

En el caso que $\sigma = 0$ se tiene que:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt,$$

$$\int \frac{dS}{S} = \int \mu dt,$$

$$Ln(S) = \mu(t+c),$$

Luego

$$S(t) = K\exp(\mu(t)),$$

y como $S(0) = S_0$, entonces:

$$S(0) = Kexp(0),$$

$$S(0) = K = S_0$$

$$\Longrightarrow S(t) = S_0 exp(\mu(t - t_0)).$$

Ahora definamos a $R(S, t) = ln(S)$, con lo que se obtienen las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial R}{\partial S} = \frac{1}{S}\ ,\ \frac{\partial^2 R}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}\ ,\ \frac{\partial R}{\partial t} = 0$$

Como hemos supuesto que satisface lema de Ito, entonces sustituyendo las derivadas anteriores:

$$dR = \left(\frac{\partial R}{\partial t} + \mu S\frac{\partial R}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 R}{\partial S^2}\right)dt + \left(\sigma S\frac{\partial R}{\partial S}dZ\right)$$

$$dR = \left(0 + \mu S\frac{1}{S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(-\frac{1}{S^2})\right)dt + \left(\sigma S\frac{1}{S}dZ\right)$$

$$dR = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + (\sigma)dZ. \tag{7.2}$$

Dicha expresión denota las variaciones del rendimiento compuesto (R), además como μ y σ son constantes , por lo que ésta ecuación indica que $R = ln(S)$ sigue un proceso de Wiener generalizado con tasa media de $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ y varianza σ^2. El cambio en $ln(S)$ entre el tiempo 0 y el tiempo T, es por lo tanto una distribución normal con media $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ y varianza $\sigma^2 T$.

7.1. Ecuación Black-Scholes a ecuación de calor.

Ahora veamos que la ecuación de Black-Scholes puede transformarse a una ecuación parabólica como la ecuación de de calor con las siguientes sustituciones:

Consideremos $G(S,t)$ el valor de una opción a través del tiempo t con precio inicial S
Tenemos la ecuación de Black-Scholes

$$rG = rS\frac{\partial G}{\partial S} + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S^2}$$

Ahora vamos a ver como se deduce la fórmula para calcular el valor de la opción Call Europea, para una Put Europea el razonamiento es similar.

Veremos las condiciones en un contrato Forward ya que fijaremos una condición inicial para S.

$$\begin{cases} C(S,T) = \acute{\max}\{S-K,0\} & \text{Condicioń final (t=T)} \\ C(0,T) = 0 & \text{Condicioń inicial} \\ \acute{\lim}\ {}_{S\to\infty\ C(S,t)=S-Ke^{-r(T-t)},} & \text{Condicioń en el infinito} \\ rC = rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} & \end{cases} \tag{7.3}$$

Ya vemos que este sistema depende de muchas variables, repasemos:

- σ es la volatilidad
- r es la tasa libre de riesgo
- T es el vencimiento
- K es el precio del ejercicio

Ahora haremos algunos cambios de variables para que quede una expresión más sencilla de manejar:

$$C(S,t) = KV(x,\tau)$$

$$S = Ke^x$$

$$\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$$

Así obtenemos $x = ln\left(\frac{S}{K}\right)$. Calculamos ahora las derivadas parciales

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = -\frac{2}{K\sigma^2}\frac{\partial C}{\partial t},\ \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{K}\frac{\partial C}{\partial S}S$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2 + \frac{\partial C}{\partial S}S\right) = \frac{1}{K}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2 + \frac{\partial V}{\partial x}$$

Ahora la condición inicial queda:

$$V(x,0) = \frac{1}{K}C(S,T) = \frac{1}{K}\text{máx}\{S-K,0\} = \text{máx}\{e^x-1,0\}$$

Para reemplazar las nuevas variables en la fórmula hay que usar la regla de la cadena y algunos resultados previos:

$$\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S},\ \ \frac{\partial x}{\partial t} = 0,\ \ \frac{\partial \tau}{\partial S} = 0,\ \ \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2$$

Ahora viendo las condiciones de contorno:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial V}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}K\frac{\partial V}{\partial x} = e^{-x}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{1}{S}\left(-e^{-x}\frac{\partial V}{\partial x} + e^{-x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = \frac{e^{-2x}}{K}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

Ahora podemos hacer sustituciones en la ecuación (7.3)

$$rKV = -\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{e^{-2x}}{K}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)\sigma^2 K^2 e^{-2x} + re^{-x}\frac{\partial V}{\partial x}Ke^x$$

podemos dividir a ambos lados por K:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{2r}{\sigma^2}\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{2r}{\sigma^2} = \frac{\partial V}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{2r}{\sigma^2} = \frac{\partial V}{\partial \tau}$$

Ahora reemplazando para las condiciones de contorno de la Call europea:

$$C(S,T) = KV(x(S,T),\tau(S,T)) = KV(x,0)$$

$$\text{máx}\{S-K,0\} = \text{máx}\{Ke^x - K,0\} = K\text{máx}\{(e^x-1),0\} \Longrightarrow$$

$$V(x,0) = \text{máx}\{(e^x - 1), 0\}$$

como $\text{lím}_{x\mapsto\infty} e^x = 0$ entonces:

$$C(0,t) = K \lim_{x\mapsto -\infty} V(x,\tau) = 0$$

Además tenemos que:

$$\lim_{S\mapsto\infty} C(S,T) = K \lim_{x\mapsto\infty} V(x,\tau) = Ke^x - Ke^{-r(T-t)} = Ke^x - Ke^{-\tau\frac{sr}{\sigma^2}}$$

Consideremos para aplicar la notación:

$$\lambda = \frac{2r}{\sigma^2}$$

Entonces el sistema con las nuevas variables resulta:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda - 1)\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda V = \frac{\partial V}{\partial \tau} \\ V(x,0) = \text{máx}\{(e^x - 1), 0\} \\ \text{lím}_{x\mapsto -\infty} V(x,\tau) = 0 \\ \text{lím}_{x\mapsto\infty} V(x,\tau) = e^x - e^{-\tau\lambda} \end{cases}$$

Ahora esta nueva ecuación con condiciones iniciales (Forward) tiene un único parámetro λ. Para eliminar términos de menos orden haremos un nuevo cambio de variable:

$$V(S,t) = e^{ax+b\tau} u(x,\tau)$$

Reescribimos todo ahora en función de este cambio de variables:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} &= e^{ax+b\tau} bu(x,\tau) + e^{ax+b\tau}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} = e^{ax+b\tau}\left(bu + \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau}\right) \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= e^{ax+b\tau} au(x,\tau) + e^{ax+b\tau}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} = e^{ax+b\tau}\left(au + \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= e^{ax+b\tau} a\left(au(x,\tau) + \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right) + e^{ax+b\tau}\left(a\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\right) \\ &= e^{ax+b\tau}\left(a^2 u(x,\tau) + 2a\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\right) \end{aligned}$$

Ahora dividimos por $e^{ax+b\tau}$ a ambos lados de la igualdad que conseguimos con las nuevas variables, y obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda-1)\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda V}{e^{ax+b\tau}} &= \left(a^2u + 2a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + (\lambda-1)\left(au + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \lambda u \\ &= bu + \frac{\partial u}{\partial \tau}\end{aligned}$$

Ordenando según las derivadas parciales de u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda-1)\frac{\partial u}{\partial x} + 2a\frac{\partial u}{\partial x} + a^2u + (\lambda-1)au - \lambda u - bu = \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

Como a y $b$son arbitrarios, los elegimos de forma conveniente como sigue:

$$a = \frac{1-\lambda}{2} \Longrightarrow \lambda - 1 + 2a = 0$$

ahora aplicando factor común u y por igualdad de polinomios tenemos:

$$b = a^2 + \lambda a - a - \lambda = (a+\lambda)(a-1) = -\frac{1+\lambda}{2}\frac{1+\lambda}{2}$$

$$-\frac{(1+\lambda)^2}{4} \Longrightarrow a^2 + \lambda a - a - \lambda - b = 0$$

Ahora sustituyendo este resultado, obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau} & \text{Ecuación de Calor} \\ u(x,0) = \max\{\frac{e^x-1}{e^{\frac{1-\lambda}{2}}}, 0\} = \max\{e^{\frac{\lambda+1}{2}x} - e^{\frac{\lambda-1}{2}}, 0\} & \\ \lim_{x\mapsto -\infty} u(x,\tau) = 0 & \\ \lim_{x\mapsto \infty} u(x,\tau) = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{e^x - e^{-\tau\lambda}}{e^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)x - \frac{1}{4}(\lambda-1)^2\tau}} = \infty & \end{cases} \tag{7.4}$$

Es decir que pudimos reescribir la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes a una ecuación diferencial parcial parabólica como la ecuación de calor.

7.1.1. Método de diferencias finitas.

Una diferencia finita es una expresión matemática de la forma $f(x+b) - f(x+a)$. Si una diferencia finita se divide por $b - a$ se obtiene una expresión similar al cociente diferencial, que difiere en que se emplean cantidades finitas en lugar de infinitesimales. La aproximación de las derivadas por diferencias finitas desempeña un papel central en los métodos de diferencias finitas del análisis numérico para la resolución de ecuaciones diferenciales.

Sólo se consideran normalmente tres formas de aproximación de derivadas: la anterior (backward), la posterior (forward) y la central.

- Una **diferencia progresiva**, adelantada o posterior es una expresión de la forma:

$$\triangle_h[f](x) = f(x+h) - f(x)$$

Dependiendo de la aplicación, el espaciado h se mantiene constante o se toma el límite $h \to 0$.

En las diferencias progresivas se obtiene las fórmulas para las derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2}$$

Luego estas diferencias progresivas se sustituyen en las ecuaciones diferenciales parciales que se deseen resolver, como en la ecuación de calor:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

En la siguiente imagen se muestra como en la malla se involucran los puntos resultantes de la sustitución de las diferencias progresivas en la ecuación de calor.

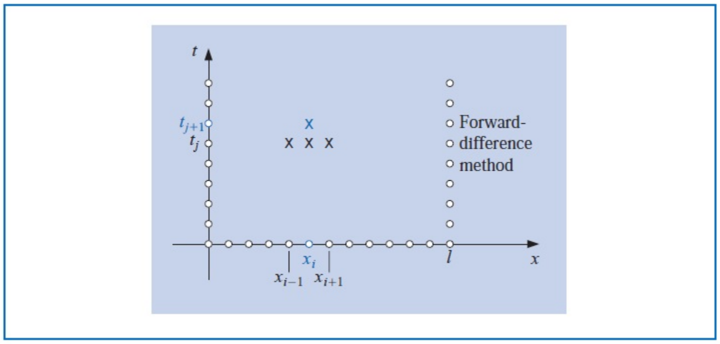


Figura 2: Puntos de la malla usando diferencias progresivas

- Una **diferencia regresiva** (backward), atrasada o anterior es de la forma:

$$\nabla_h[f](x) = f(x) - f(x-h)$$

En las diferencias progresivas (Forward) se obtienen las fórmulas para las derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de calor obtenemos

$$\frac{w_{ij} - w_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

En la siguiente imagen se muestra como en la malla se involucran los puntos resultantes de la sustitución de las diferencias regresivas en la ecuación de calor.

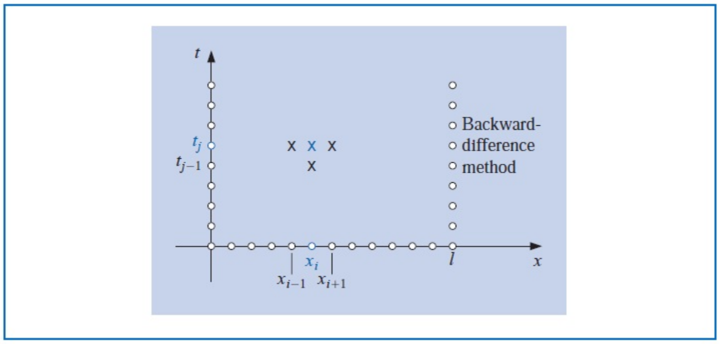


Figura 3: Puntos de la malla usando diferencias regresivas

- Finalmente, la **diferencia central** es la media de las diferencias anteriores y posteriores. Viene dada por:

$$\delta_h[f](x) = f(x + \frac{1}{2}h) - f(x - \frac{1}{2}h)$$

El método de diferencias finitas es un clásica aproximación para encontrar la solución numérica de las ecuaciones que gobiernan el modelo matemático de un sistema continuo. Es valioso familiarizarse con ésta aproximación porque tal conocimiento reforzará la comprensión de los procedimientos de elementos finitos.

Básicamente, en una solución por diferencias finitas, las derivadas son reemplazadas por aproximaciones en diferencias finitas, convirtiendo entonces un problema de ecuaciones diferenciales en un problema algebraico fácilmente resoluble por medios comunes (especialmente matriciales).

7.1.2. Resolución de la ecuación de Black-Scholes por diferencias finitas.

Para conocer de mejor forma el método de diferencias finitas los aplicaremos para la solución de la ecuación de Black-Scholes. Recordemos que la ecuación de Black-Scholes la hemos convertido en una ecuación de calor de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0$$

Con condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \;\; t > 0 \;\;\; y \;\;\; u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

Luego se escoge un entero m positivo, tal que para el eje-x se establece un tamaño de paso $h = l/m$, y luego un tamaño de paso para un k. Los puntos para la simulación de la malla son (x_i, t_j). Donde $x_i = ih$, y $t_j = jk$, con $i = 0, ..., m \; y \; j = 0, 1, ...$

Luego aplicamos las aproximaciones de las derivadas aplicando diferencias regresivas, progresivas o centrales. Al aplicar diferencias progresivas en la ecuación parabólica, resulta:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

con ecuación generatriz:

$$w_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{ij} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{i+1,j} + w_{i-1,j})$$

Ahora aplicando esta ecuación para generar los $w_{i,j}$ para generar una matriz de dimensión $(m-1) \times (m-1)$:

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix}$$

con $\lambda = \alpha^2(k/h^2)$. Luego esta matriz puede resolverse por algún método para solución de matrices como Gauss-Seidel. Donde la solución esta dada por:

$$\mathbf{w^{(j)}} = \mathbf{A}\mathbf{w^{(j-1)}}$$

Si aplicáramos el método de diferencia regresivas en la ecuación parabólica, tendríamos:

$$\frac{w_{ij} - w_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

Luego al hacer manejo algebráico y aplicar la ecuación generatriz que nos proporcione, se obtiene la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & (1+2\lambda) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

Donde la solución esta dada por:

$$\mathbf{w^{(j-1)}} = \mathbf{A}\mathbf{w^{(j)}}$$

Nuevamente obtenemos una matriz que puede resolverse por el método que se desee.

Ahora aplicando lo anterior a nuestro problema específico, realizamos los siguientes pasos:

- Primero debemos dividir el plano en una malla de puntos cuya dimensión depende de los valores de frontera. La solución solo se calculara en dichos puntos.

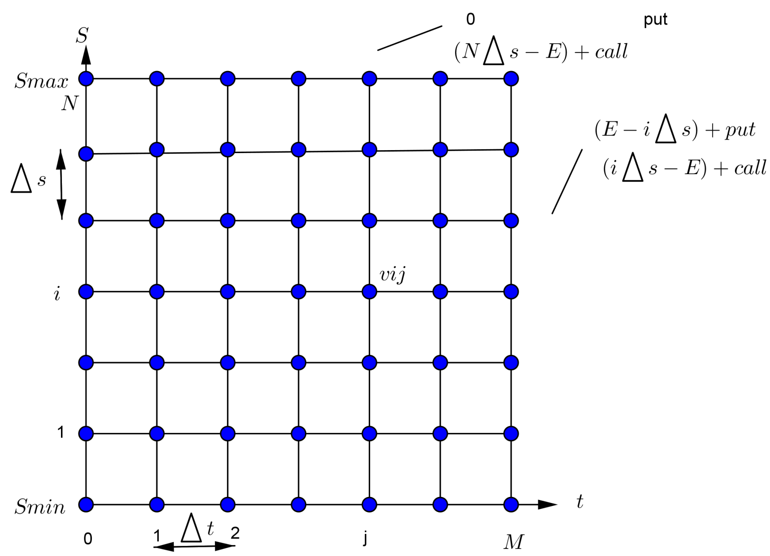


Figura 4: Malla inicial de orden N x M

$$\triangle s = (Smax - Smin)/N$$

$$\triangle t = T/M$$

Aproximación numérica de $V(S,t)$ sólo con puntos de la malla:

$$S_t = Smin + i\triangle s \qquad i = 0, ..., N$$

$$t_j = j\triangle t \qquad j = 0, ..., M$$

$$v_{ij} = V(Smin + i\triangle s,\ j\triangle t) \qquad i = 0, ..., N \quad , j = 0, ..., M$$

v_{ij} denota los valores de $V(S,t)$ en la malla de $(N+1) \times (M+1)$ puntos.

- Aplicamos las diferencias finitas para reescribir las derivadas:

$$V_t \approx \frac{v_{ij} - v_{ij-1}}{\triangle t}$$

$$V_S \approx \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\triangle s}$$

$$V_{SS} \approx \frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{\triangle^2 s}$$

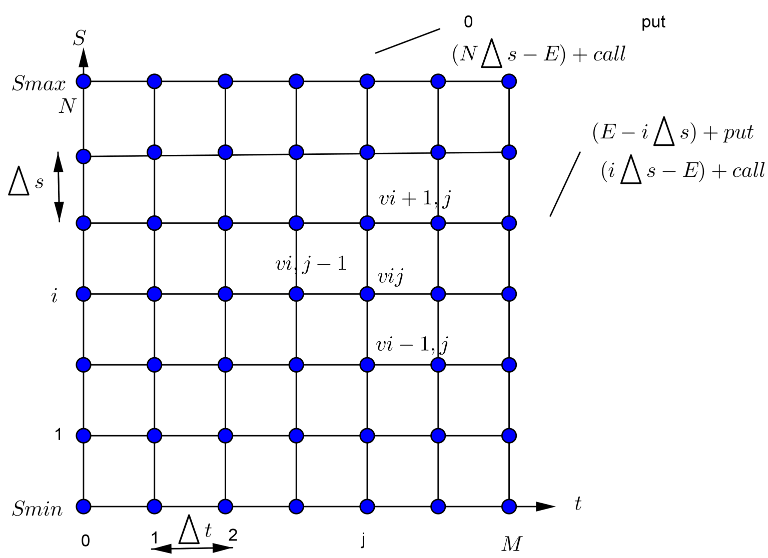


Figura 5: Puntos de la malla haciendo uso de las aproximaciones de las EDPs

Cuatro puntos de la malla están involucrados en la aproximación de la derivada de v_{ij}.

- Ahora reemplazaremos las derivadas por las aproximaciones en Black-Scholes:

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{ss} + (r-q)SV_s - rV = 0$$

$$\frac{v_{ij} - v_{ij-1}}{\triangle t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 (\frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{\triangle^2 s}) + (r-q)S_i(\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\triangle s}) - rv_{ij} = 0$$

Luego multiplicando todo por $\triangle t$, se denotan:

$$a_i = \frac{\triangle t}{2\triangle^2 S}\sigma^2 S_i^2$$

$$b_i = \frac{\triangle t \times (r-q)S_i}{2\triangle s} \qquad i = 1, ..., N$$

La ecuación de la columna j es:

$$v_{ij} - v_{i,j-1} + a_i(v_{i+1} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}) + b_i(v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) - \triangle t\, r\, v_{ij} = 0$$

Aplicando factor común y reordenando:

$$v_{ij} - v_{i,j-1} + (a_i - b_i)v_{i-1,j} + (-2a_i - \triangle t\, r)v_{ij} + (a_i + b_j)v_{i+1,j} = 0$$

donde

$$d_1 = a_i - b_i$$

$$m_1 = -2a_i - \triangle t\, r$$

$$u_1 = a_i + b_i$$

7.1.3. Formalización del sistema de ecuaciones de diferencias finitas.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
v_{1j} & - & v_{1j-1} & + & d_1v_{0j} & + & m_1v_{1j} & + & u_1v_{2,j} & = & 0 \\
v_{2j} & - & v_{2,j-1} & + & d_2v_{1j} & + & m_2v_{2j} & + & u_2v_{3,j} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & d_3v_{2j} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
v_{ij} & - & v_{i,j-1} & + & d_iv_{i-1,j} & + & m_iv_{i,j} & + & u_iv_{i+1,j} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
v_{N-1,j} & - & v_{N-1,j-1} & + & d_{N-1,}v_{N-2,j} & + & m_{N-1}v_{N-1,j} & + & u_{N-1}v_{N,j} & = & 0
\end{array}$$

en notación matricial:

$$v_{1:\,N-1,j} - v_{1:N-1,j-1} + P\ v_0\ :_{N,j}= 0$$

$$P = \begin{bmatrix}
d_1 & m_1 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & d_2 & m_2 & u_2 & & & \vdots \\
\vdots & & d_3 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & & u_{N-2} & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{n-1} & m_{N-1} & u_{N-1}
\end{bmatrix}$$

Ahora consideraremos la siguiente partición del conjunto $\overline{\Omega}$ de las filas de la malla:

$$\overline{\Omega}{=}\Omega\mathrm{U}\partial\Omega \text{ con } \Omega\cap\partial\Omega{=}\emptyset$$

- Ω el conjunto de puntos interiores $(i = 1, ..., N - 1)$
- $\partial\Omega$ el conjunto de puntos del borde $(i = 0, N)$

Aplicamos esta partición a las columnas de P, definiendo las matrices A y B.

- $v^j_{\overline{\Omega}} \equiv v_{ij}, i = 0, 1, ..., N$
- $v^j_{\Omega} \equiv v_{ij}, i = 1, ..., N-1$
- $v^j_{\partial\Omega} \equiv v_{ij}, i = 0, N$

Luego P puede escribirse de acuerdo a la partición, como sigue:

$$Pv^j_{\overline{\Omega}} = Av^j_{\Omega} + Bv^j_{\partial\Omega}$$

Introduciendo la notación previa a la ecuación:

$$v_{1:}\, N-1, j - v_{1:}N-1, j-1 + P\ v_0 : N, j = 0$$

se vuelve:

$$v^j_{\Omega} - v^{j-1}_{\Omega} + Av^j_{\Omega} + Bv^j_{\partial\Omega} = 0$$

la solución

$$v^{j-1}_{\Omega} = (I + A)v^j_{\Omega} + Bv^j_{\partial\Omega}$$

para $j = M, M-1, ..., 1$ (MÉTODO EXPLÍCITO)

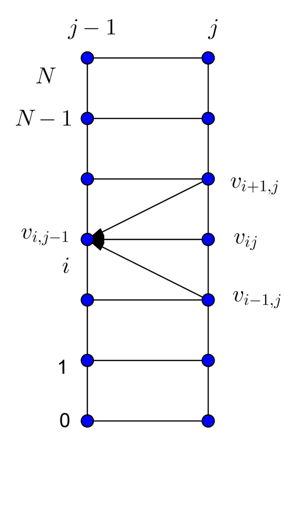


Figura 6: Puntos de malla con el método Explícito

Si aproximamos V_t con diferencias forward:

$$V_t \approx \frac{v_{i,j+1} - v_{ij}}{\triangle t}$$

la ecuación se vuelve:

$$v_{\Omega}^{j+1} - v_{\Omega}^{j} + Av_{\Omega}^{j} + Bv_{\partial\Omega}^{j} = 0$$

y la solución de v_{Ω}^{0} es obtenida resolviendo el sistema lineal

$$(I - A)v_{\Omega}^{j} = v_{\Omega}^{j+1} + Bv_{\partial\Omega}^{j}$$

Para $j = M - 1, ..., 1, 0$ (MÉTODO IMPLÍCITO)

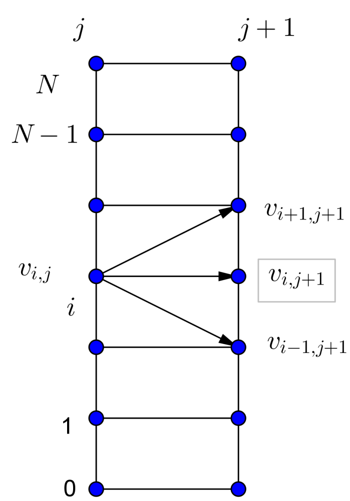


Figura 7: Puntos de malla con el método Implícito

Consideremos la ecuación $v_\Omega^{j+1} - v_\Omega^j + Av_\Omega^j + Bv_{\partial\Omega}^j = 0$ con paso $j\triangle_t$, y la ecuación $v_\Omega^{j+1} - v_\Omega^j + Av_\Omega^{j+1} + Bv_{\partial\Omega}^{j+1} = 0$ con paso $(j+1)\triangle_t$.
Considerando la combinación lineal de las dos ecuaciones anteriores tenemos: $\theta\epsilon[0,1]$

$$\theta(v_\Omega^{j+1} - v_\Omega^j + Av_\Omega^j + Bv_{\partial\Omega}^j) + (1-\theta)(v_\Omega^{j+1} - v_\Omega^j + Av_\Omega^{j+1} + Bv_{\partial\Omega}^{j+1}) = 0$$

y reagrupando se tiene:

$$A_m v_\Omega^j = A_P v_\Omega^{j+1} + \theta B v_{\partial\Omega}^j + (1-\theta) B v_{\partial\Omega}^{j+1}$$
$$(\theta - M\acute{E}TODO)$$

con $A_m = I - \theta A$ y $A_p = I + (1-\theta)A$. La solución de v_Ω^0 se obtiene resolviendo el sistema lineal anterior para $j = M-1, ..., 1, 0$
El θ método generalizado para todos los métodos:

θ	método	A$_m$	A$_p$
0	Explícito	I	I+A
1	Implícito	I-A	I
1/2	Crank-Nicolson	I-A/2	I+A/2

Cuadro 1: valores de θ,A$_m$ y A$_P$ según el método

- PRIMERO CREAMOS UNA MALLA

```
ALGORITMO # 1
function [Am,Ap,B,S] = GridU1D(r,q,T,sigma, Smin,Smax,M,N,theta)
% Crea una malla uniforme con las varibles originales
% Empleamos las notaciones definidas anteriormente
f7 = 1;
```

```
dt = T/M;
S = linspace(Smin,Smax,N+1)';
dS = (Smax - Smin) / N;
a = (dt*sigma^2*S(f7+(1:N-1)).^2) ./ (2*dS^2);
b = (dt*(r-q)*S(f7+(1:N-1))) / (2*dS);
d = a - b;
m = - 2*a - dt*r;
u = a + b;
P = spdiags([d m u], 0:2, N-1, N+1);
Am = speye(N-1) - theta *P(:,f7+(1:N-1));
Ap = speye(N-1) + (1-theta)*P(:,f7+(1:N-1));
B = P(:,f7+[0 N]);
```

- LUEGO IMPLEMENTAMOS EL ALGORITMO DE SOLUCIÓN PARA EL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES PARA UNA OPCIÓN EUROPEA PUT

```
ALGORITMO # 2
function P = FDM1DEuPut(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N,theta)
% Diferencias finitas para una opción Europea put
f7 = 1;
[Am,Ap,B,Svec] = GridU1D(r,q,T,sigma,Smin,Smax,M,N,theta);
V0 = max(E - Svec,0);
% Resuelve el sistema lineal por  pasos sucesivos
[L,U] = lu(Am); %factorización LU
for j = M-1:-1:0 V1 = V0;
V0(f7+0) = (E-Svec(f7+0))*exp(-r*(T-j*T/M));
% dt=T/M
b = Ap*V1(f7+(1:N-1)) + theta *B*V0(f7+[0 N]) + ...
(1-theta)*B*V1(f7+[0 N]); V0(f7+(1:N-1)) = U\(L\b);
end
P = interp1(Svec,V0,S,'spline');
```

- AHORA IMPLEMENTAMOS EL CÓDIGO ANTERIOR CON LOS DATOS ESPECIFICADOS EN LA ENTRADA:

```
    ALGORITMO # 3
OPCIÓN EUROPEA PUT
>> P = BSput(50,50,0.10,5/12,0.40)
P = 4.0760
>> P = FDM1DEuPut(50,50,0.10,5/12,0.40,0,0,150,100,500,1/2)
P = 4.0760
>> P = FDM1DEuPut(50,50,0.10,5/12,0.40,0,0,150,100,500,0)
P = -2.9365e+154
>> P = FDM1DEuPut(50,50,0.10,5/12,0.40,0,0,150,100,500,1)
P = 4.0695
```

- ALGORITMO DE SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BLACK-SCHOLES POR MÉTODO DIRECTO PARA UNA OPCIÓN EUROPEA PUT

```
ALGORITMO # 4
function P = BSput(S,E,r,T,sigma)
% Evaluación de una opción europea aplicando Black-Scholes
% método directo
% d1 = (log(S./E) + (r + sigma.^2 /2) .* T) ./ (sigma .* sqrt(T));
d2 = d1 - sigma .* sqrt(T);
Ee = E .* exp(-r .* T);
P = Ee .* normcdf(-d2) - S .* normcdf(-d1);


FDM1DEuPut(50,50,0.10,5/12,0.40,0,0,150,1000,100,0)
P = 4.0756



ALGORITMO #5 (COMPARACIÓN)
function CompareFDM(S,E,r,T,sigma,q, Smin,Smax,M,N)
%Este algoritmo compara el precio de una opción europea put
%con los diferentes valores %de theta de acuerdo al método empleado
%método explicito
Ex = FDM1DEuPut(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N,0);
%método implicito
Im = FDM1DEuPut(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N,1);
%método Crank-Nickolson
```

```
CN = FDM1DEuPut(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N,1/2);
%Método de Black-Scholes
BS = BSput(S,E,r,T,sigma);

Ex_err = BS - Ex;
Im_err = BS - Im; CN_err = BS - CN;
%En una misma gráfica se presenta los método empleados
figure plot(S,Ex_err,'b.-','LineWidth',1), hold on
plot(S,Im_err,'mo-','LineWidth',1)
plot(S,CN_err,'r^-','LineWidth',1)
plot([S(1) S(end)],[0 0],'k');
legend('Explicit','Implicit','Crank-Nicolson',2);
title(['N=',int2str(N),'M=',int2str(M),'sigma=',num2str(sigma,2),... '
r=',num2str(r,2),' T=',num2str(T,1),' E=',int2str(E)]);
xlabel('S');
ylim([-.005 .045]);
grid on
```

- COMPARAMOS SIMULTANEAMENTE LOS TRES MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES ASOCIADO A UNA ECUACIÓN DE BLACK-SCHOLES

```
E = 10; r = 0.05;
T = 6/12;
sigma = .2;
q = 0;
Smin = 0;
Smax = 100;
S = linspace(5,15,30);
 M = 30; N = 100;
CompareFDM(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N)
M = 500;
CompareFDM(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N)
M = 30; N = 200;
CompareFDM(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N)
M = 30; N = 200; sigma = 0.4;
CompareFDM(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N)
M = 30; N = 310; sigma = 0.2;
CompareFDM(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N)
```

```
M = 30; N = 700; sigma = 0.2;
CompareFDM(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N)
M = 30; N = 700; sigma = 0.5;
CompareFDM(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N)
```

Obtenemos los siguientes gráficos al implementar el código anterior de comparación de los métodos explícitos, implícitos y Crank-Nicolson, variando los valores de N, M y sigma.

Figura 8: Tiempo discreto

Figura 9: Aumenta la discretización del espacio con diferentes volatilidades

Figura 10: Aumenta la discretización espacial

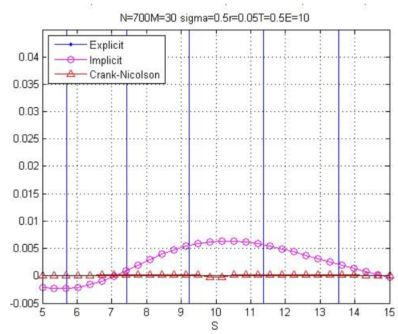


Figura 11: Alta volatilidad

Podríamos concluir de lo anterior que :

- El error depende de σ y r
- Sólo Crank-Nicolson produce gran precisión al incrementar N (M constante)

7.1.4. Opciones Americanas.

Son aquellas opciones que pueden ejercerse en cualquier momento o lapso de tiempo, el precio satisface la siguiente EDP:

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r-q)SV_S - rV \geq 0$$

excluyendo la oportunidad de arbitraje.

$$V(S,t) \geq (K-S)^{+} \qquad\qquad V(S,t) \geq V(S,T)$$

Condiciones de frontera (put)

$$V(S,T) = (K-S)^{+} \qquad\qquad V(0,t) = K \qquad \lim_{s \longrightarrow \infty} V(S,t) = 0$$

Denotaremos $S_f(t)$ como el valor más grande de S a través del tiempo t, por lo cual:

$$V(S_f(t),t) = \max(K - S_f(t))$$

$S_f(t)$ define la libertad o cercanía del ejercicio limite, esto significa que el precio del subyacente es el óptimo para ejercer la opción.

La solución se formaliza como:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{BS}}(V)\,(V(S,t) - V(S,T)) = 0$$

$$\mathcal{L}_{BS}(V) \;\geq 0 \quad\; y \quad (V(S,t) - V(S,T)) \geq 0$$

donde

$$\mathcal{L}_{\mathcal{BS}}(V) = V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV$$

es el operador diferencial de Black-Scholes

Usando la notación introducida para la formalización del $\theta - método$:

$$(A_m v_\Omega^j - b^j) \times (v_\Omega^j - v_\Omega^M) = 0$$

Donde:

$v_\Omega^M = pay - off$

$A_m = I - \theta A$ y $A_p = I + (1-\theta)A$

$b^j = A_P v_\Omega^{j+1} + \theta B v_{\partial\Omega}^j + (1-\theta) B v_{\partial\Omega}^{j+1}$

La solución puede aproximarse por el primer cálculo de x de la solución de

$$\underbrace{A_m v_{\Omega}^{j}}_{Ax} = \underbrace{b^j}_{b}$$

y corregirlo como $v_{\Omega}^{j} = max(x, v_{\Omega}^{M})$ Los dos método principales para la corrección son:

- PSOR (Projected Successive Over-relaxation)
- Explicit Payout.

```
ALGORITMO # 6 (Proyected Sucessive Over Relaxation)

function x1 = PSOR(x1,A,b,payoff,omega,tol,maxit)
% Este algoritmo utiliza el método PSOR para resolver
%el sistema de ecuaciones lineales Ax = b
if nargin == 4, tol=1e-6;
omega=1.2;
maxit=100;
end
it = 0;
converged = 0;
N = length(x1);
while ~converged x0 = x1;
for i = 1:N-1 x1(i) = omega*(b(i)-A(i,:)*x1)/A(i,i) + x1(i);
x1(i) = max(payoff(i), x1(i));
end
converged = all((abs(x1-x0)./(abs(x0)+1)) < tol ); it=it+1;
if it>maxit, error('Maxit reached'), end
end
```

- IMPLEMENTAMOS DOS MÉTODOS (PSOR Y EXPLICIT PAYOUT) PARA LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA MATRICIAL DE ECUACIONES LINEALES

```
ALGORITMO #7

function [P,Sf] = FDM1DAmPut(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N,theta,
    method)
% Método de dieferencias finitas  para opciones americanas
f7 = 1;
[Am,Ap,B,Svec] = GridU1D(r,q,T,sigma,Smin,Smax,M,N,theta);
V0 = max(E - Svec,0);
Payoff = V0(f7+(1:N-1));
Sf = repmat(NaN,M+1,1);
%resulve el sistema Ax = b utilizando dos método
%PSOR Y EXPLICIT PAYOUT
[L,U] = lu(Am);
% Solve linear system for successive time steps
for j = M-1:-1:0
V1 = V0;
V0(f7+0) = E;
b = Ap*V1(f7+(1:N-1)) + theta *B*V0(f7+[0 N]) + (1-theta)*B*V1(f7+[0 N
    ]);
if strcmp(method,'PSOR')
V0(f7+(1:N-1)) = PSOR(V1(f7+(1:N-1)),Am,b,Payoff);
else
% Explicit payout solunc = U\(L\b);
[V0(f7+(1:N-1)),Imax] = max([Payoff solunc],[],2);
p = find(Imax == 2);
i = p(1) - 1;
%Línea de la malla del último punto por debajo de la ganancia
Sf(f7+j) = interp1(solunc(i:i+2)-Payoff(i:i+2),Svec(f7+(i:i+2)),0,'
    cubic');
end
P = interp1(Svec,V0,S,'spline');
```

- IMPLEMENTAMOS EL CÓDIGO ANTERIOR CON LOS VALORES DE ENTRADA INDICADOS AL INICIO DEL SIGUIENTE CÓDIGO

```
S = 50;
E = 50;
r = 0.10;
T = 5/12;
sigma = 0.40;
q = 0;
Smin = 0;
Smax = 100;
N = 100;
M = 100;
theta = 1/2;
tic [P,Sf] = FDM1DAmPut(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N,theta,'PSOR');
fprintf('\n PSOR: P = %8.6f (%i sec)\n',P,ceil(toc));

PSOR: P = 4.279683 (2 sec) tic

[P,Sf] = FDM1DAmPut(S,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N,theta,'EPOUT');
fprintf('\n EPout: P = %8.6f (%i sec)\n',P,ceil(toc));

EPout: P = 4.277555 (1 sec)
```

Resulta evidente que el método más eficiente para solución es EXPLICIT PAYOUT en comparación con PSOR.

Ahora aplicamos el siguiente código para generar el gráfico en 3D de una opción Americana Put, haciendo uso del Algoritmo #7.

```
Smin = 0;
Smax = 100;
N = 100;
M = 100;
theta = 1/2;
P=zeros(101,101);
i=1;
for j=linspace(0,5/12,101);
T=j;
S = 50;
E = 50;
r = 0.10;
sigma = 0.40;
q = 0;
[P1,Sf] = FDM1DAmPut(0:100,E,r,T,sigma,q,Smin,Smax,M,N,theta,'PSOR');
%surf(0:100,0:0.00416:5/12,P1);
```

```
%plot(0:100,P1)
P(i,:)= P1;
i=i+1;
end
%disp P;
surf(0:100,linspace(0,5/12,101),P);
```

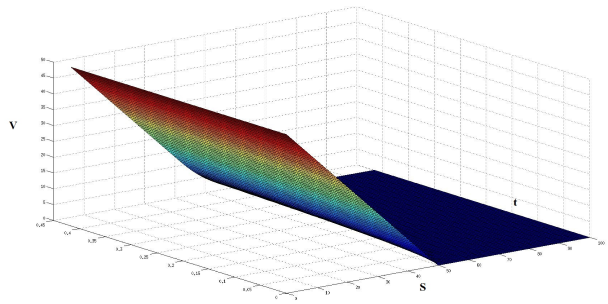


Figura 12: Gráfico 3D del valor de una opción Put Americana

Luego podemos generar de forma sencilla un gráfico en 2D, donde el eje-X representa el tiempo y el eje-Y representa S (subyacente), resultando el par ordenado (S, t), para la misma opción Americana Put.

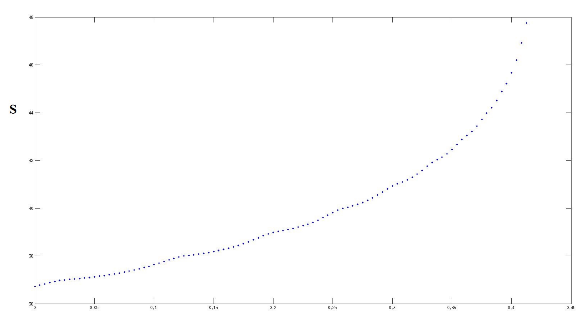


Figura 13: Gráfico 2D del precio del subyacente en un tiempo t

8. Introducción a la Simulación en Matemática Financiera.

La teoría avanzada de las finanzas, al igual que muchas áreas en las matemáticas avanzadas juega una parte importante. Está experimentando una revolución con la complicidad de la computadora y la proliferación de gran alcance de simulación y herramientas matemáticas simbólicas. El poder numérico y computacional, una vez reservado para los matemáticos, los científicos o ingenieros más altamente capacitados ya está disponible para cualquier programador competente. Uno de los primeros obstáculos que se enfrentan antes de adoptar cálculo estocástico o modelos al azar en las finanzas es el reconocimiento para todos los efectos prácticos, los precios de las acciones en un mercado eficiente son variables aleatorias, es decir que si bien pueden mostrar cierta dependencia fiscal, los procesos económicos y las políticas, tienen un componente de aleatoriedad que los hace impredecible, cada cambio en el precio de una acción debe ser impulsada por algún factor en la empresa o la economía. Ahora debemos recordar que los modelos aleatorios a menudo se aplican a los sistemas que son esencialmente causal en la medición y el análisis de los factores distintos que influyen en el proceso y su efecto es una enorme tarea.

Una de las herramientas más importantes para el análisis de un sistema estocástico es la simulación. En finanzas, un modelo básico para la evolución de precios de las acciones, tipos de interés, tipos de cambio, etc. Sería necesario determinar un precio justo de un valor derivado. Este modelo requiere insumos, a menudo llamado los parámetros del modelo y da salida a un resultado que podría medir el rendimiento de un sistema, el precio de un instrumento financiero dado, la distribución en un portafolio de alguna propiedad deseable. Simulación también se utiliza para responder a las preguntas que comienzan con "qué pasaría si". Por ejemplo, ¿Cuál sería el resultado si las tasas de interés subieron 3 puntos porcentuales en los próximos 12 meses?. La salida de una simulación es al azar, a veces es difícil de analizar alguna experiencia estadística, las herramientas son un activo valioso. Mientras que una simulación puede proporcionar una respuesta numérica aproximada en uno o más valores de parámetros posibles, solamente una expresión para la solución proporciona una idea de la forma en que responde a los parámetros individuales, las sensibilidades de la solución.

Ejemplo 8.1. Estamos considerando una oferta de compra completa de las acciones de una empresa. Aunque las acciones de la compañía está valorada actualmente en alrededor de \$11.50 por acción, un cuidadoso análisis ha determinado que encaja suficientemente bien con nuestro activo actual, que si la compra tuviera éxito, sería un valor aproximado de \$14.00 por acción en nuestras manos. Estamos considerando sólo tres alternativas, una oferta inmediata es de \$12.00, \$13.00 o \$14.00 por acción para las acciones en circulación de la empresa. Naturalmente nos gustaría hacer una oferta lo menos posible, pero esperamos un competidor para hacer casi simultáneamente una oferta por la compañía y el competidor valora la acciones diferentemente. El competidor tiene tres estrategias de apuesta que nos limitaremos a identificar como I, II, y III. Hay costos asociados con cualquier par de estrategias (estrategia de apuesta de la apuesta de nuestro competidor) incluyendo los costos asociados con la pérdida de una oferta dada al competidor o pagando demasiado por la empresa.). En otras palabras, nuestra garantía total firme depende de la cantidad ofrecida por el competidor y los posibles escenarios son los que figuran en la siguiente tabla.

	Estrategia del Competidor			
	Oferta	I	II	III
Nuestra Oferta	12	3	2	-2
	13	1	-4	4
	14	0	-5	5

Cuadro 2: Estrategias del competidor A

La garantía total al competidor es algo diferente y se indica a continuación

	Estrategia del Competidor			
		I	II	III
Nuestra Estrategia	12	-1	-2	3
	13	0	4	-6
	14	0	5	-5

Cuadro 3: Estrategias del competidor B

Por ejemplo, la combinación de la oferta = \$ 13 por acción y la estrategia II de nuestro competidor el resultado es una pérdida de 4 unidades (por ejemplo cuatro dólares por acción) para usted y una ganancia de 4 unidades a su competidor. Sin embargo, no es siempre el caso de que su pérdida es la misma que la ganancia de su competidor. Un juego con esta propiedad se llama un juego de suma cero y éstos son mucho más fáciles de analizar analíticamente. Definimos la matriz 3×3 de garantía total de nuestra empresa por A y la matriz de garantía total a el competidor por B.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Siempre que juegas estrategia $i = 1, 2, 3$ (es decir, una oferta \$12, \$13, \$14 con probabilidades $p1$,$p2$,$p3$, respectivamente, y las probabilidades de las estrategias de la competencia son $q1$, $q2$, $q3$. Entonces si denotamos

$$p = \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix}, \text{ y } \; q = \begin{pmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \end{pmatrix}$$

Podemos escribir el total de garantías esperadas de la siguiente forma $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} p_i A_{ij} q_j$ cuando se escribe el producto de vector-matriz, esto toma la forma $p^T Aq$. Esto puede ser pensado como la rentabilidad media a su firme en el largo plazo si este juego se repite muchas veces, aunque en el mundo real, el juego se juega sólo una vez. Si el vector q se conoce, usted elegiría claramente $p_i = 1$ para la fila i correspondiente al componente máximo de Aq ya que esto maximiza su garantía total. Del mismo modo si su competidor sabe p, el elegiría $q_j = 1$ para la columna j correspondiente al componente máximo de $p^T B$. En un largo plazo, si este juego fuera de hecho repetidas veces, es probable llevar un registro de las frecuencias de tu oponente y reemplazar las probabilidades desconocidas por las frecuencias. Sin embargo, suponemos que tanto el movimiento real hecho por su oponente y las probabilidades que se utilizan en la selección de sus movimientos son desconocidos para usted en el momento de comprometerse con su estrategia. Sin embargo, si el juego se repite muchas veces, cada jugador obtiene información acerca de los gustos de su oponente en movimientos, y esto parece ser un enfoque razonable para la construcción de un modelo de simulación para este juego.

Supongamos que el juego se juega en varias ocasiones, con cada uno de los dos jugadores actualizando sus probabilidades estimadas utilizando la información recopilada sobre el uso histórico de su oponente de sus estrategias disponibles, podemos registrar el número de veces que cada estrategia es utilizada por cada jugador y esperar que las frecuencias relativas se acercan a un límite razonable. Esto se lleva a cabo por la siguiente función de MATLAB.

```
function [p,q]=nonzerosum(A,B,nsim)
n=size(A);
p=ones(1,n(1)); q=ones(n(2),1);
for i=1:nsim
[m,s]=max(A*q);
[m,t]=max(p*B);
p(s)=p(s)+1;
q(t)=q(t)+1;
end
p=p-ones(1,n(1)); p=p/sum(p);
q=q-ones(n(2),1); q=q/sum(q);
```

Al ejecutarlo con las matrices A y B : [p,q]=nonzerosum(A,B,50000)

Este resultado es aproximadamente $p' = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ y $q' = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}^T$ con un pago promedio por el competidor de $pBq^T = 0$ y a nosotros de $pAq^T = 1/3$. Esto parece indicar que las estrategias deben ser "mixto" o al azar. Usted debe elegir una oferta de \$ 12.00 con una probabilidad de alrededor de 2/3 y \$ 14.00 con una probabilidad de 1/3. Parece que el competidor sólo tiene que tirar una moneda y seleccionar entre B y C en función de su resultado.

¿Por qué aleatorizar su elección? El valor medio del juego para tí es 0 si utilizas las probabilidades de arriba (de hecho si su competidor elige probabilidades $q' = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ no importa lo que sus frecuencias son, su promedio es 0). Si se va a creer que una sola estrategia fija es siempre su "mejor", entonces su competidor podría previamente determinar cuál es su "mejor" estrategia y actuar para reducir su declaración (es decir, sustancialmente menor que 0) mientras que él incrementa éstos, Sólo la aleatoriedad ofrece el seguro necesario que ninguno de los jugadores puede adivinar la estrategia para estar al servicio de los otros (Esto es que $A + B$ no es una matriz constante). El análisis matemático de este tipo de juegos puede ser bastante complejo. En tal caso, siempre y cuando podamos asegurar la cooperación.

No hay garantía de que la solución anterior es óptima. De hecho, la solución anterior es un valor promedio de 0 por partido para nosotros y un tercio de nuestro competidor. Si revisamos nuestra estrategia para $p' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$, por ejemplo, nuestra rentabilidad media sigue siendo 0 pero hemos tenido éxito en la reducción de la de nuestro oponente a 1/9. La solución que llegamos en este caso parece ser una solución sensata, logrado con poco esfuerzo. Evidentemente, en un juego como este, no existe una clara definición de lo que sería una estrategia óptima, ya que se podría planificar la propia obra de teatro basada en el peor de los casos, o en el mejor de los casos, o algo intermedio,

¿cómo un promedio? ¿Se intenta colaborar con su competidor de mayor rendimiento total y posteriormente dividir esto en alguna forma? Esta simulación ha emulado una forma simple del comportamiento del competidor y llegado a una solución razonable, lo mejor que podemos esperar sin más suposiciones.

Queda la cuestión de la forma en que realmente seleccionamos una oferta con probabilidades 2/3, 0 y 1/3 respectivamente. Primero supongamos que estamos en condiciones de elegir un "número aleatorio" U en el intervalo [0,1] de manera que la probabilidad de que caiga en cualquier subintervalo dado es proporcional a la longitud de ese subintervalo. Significa que el número aleatorio tiene una distribución uniforme en el intervalo [0,1]. Entonces podríamos determinar nuestra oferta basada en el valor de este número al azar en la siguiente tabla:

Si	$U < \frac{2}{3}$		$\frac{2}{3} \leqslant U < 1$
Oferta	12	13	14

para la presente nota que cada una de las tres ofertas alternativas tienen las probabilidades correctas.

9. Aplicaciones de la Simulación en Finanzas.

9.1. Valoración de Opciones y Futuros.

En este capitulo nos centraremos en encontrar el valor de las opciones europeas call y put, estimando el *pay-off* de dichas opciones, el cual depende del precio de ejercicio. Como ya hemos visto anteriormente el cobro al que da lugar una opción en el momento del ejercicio por parte del comprador se denomina *pay-off*. Obviamente, el día del vencimiento de la opción el *pay-off* es igual al valor de la opción. En una opción europea se ejercerá el derecho de la opción si el *pay-off* o valor en la fecha de vencimiento es positivo.

Como tratamos con cantidades en distinto momento del tiempo, hay que tener en cuenta que éstas han de ser actualizadas con la tasa de interés libre de riesgo, que llamaremos r, este interés r vendrá dado como interés anual. Es decir, una cantidad K al vencimiento de una opción, en t años antes de esa fecha tiene un valor de $\frac{K}{(1+r)^t}$. Así mismo utilizamos el interés continuo cuya relación con el interés anual es $e^{r_c t} = (1+r)^t$. En general, en todo lo que se refiere a diferenciales y variaciones instantáneas utilizaremos la notación r pero refiriéndonos al interés en continuo. Gran parte de la teoría financiera actual descansa en la Hipótesis del Mercado Eficiente ("Efficient Market hypothesis" EMH) la cual establece que:

"En un mercado con inversores que actúan racionalmente, los precios de las acciones reflejan en todo momento la información disponible y se dice que el mercado es eficiente. En un mercado eficiente ningún tipo de análisis puede conducir a estrategias que batan consistentemente a un índice apropiado ("benchmark")"

Observación 9.1. Si un mercado es eficiente, la trayectoria seguida a lo largo del tiempo por los precios de los valores debe seguir un proceso estocástico en el que la memoria del pasado no exista. Este tipo de proceso es un proceso Markoviano.

De la EMH no se deduce que las variaciones absolutas de los precios o los rendimientos relativos en un período tengan que seguir una distribución normal, sin embargo, el modelo más extendido sobre los precios bursátiles, aunque muy discutido, es que los precios bursátiles siguen un tipo de proceso de difusión que es un Movimiento Geométrico Browniano (GBM) cuya ecuación diferencial estocástica viene dada por:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Siendo μ la tendencia o drift, σ la volatilidad y W un proceso de Wiener (proceso markoviano cuyos incrementos tienen distribución normal de media 0 y varianza el tamaño del incremento de tiempo). Esta expresión viene a decir que la variación relativa del activo sigue una distribución $N(\mu dt, \sigma\sqrt{dt})$, y las variaciones absolutas de éste $N(S\mu dt, S\sigma\sqrt{dt})$. Sin embargo, estas variaciones son en periodos concretos, si se desea saber el rendimiento acumulado $R(t)$ en un intervalo $[0, t]$, se tiene

$$S(t) = S(0)e^{R(t)}$$

o equivalente

$$R(t) \quad = \quad ln(\frac{S(t)}{S(0)}) = ln(S(t)) - ln(S(0))$$

Aplicando (7.2), se llega a la ecuación diferencial estocástica que expresa las variaciones del rendimiento compuesto

$$dR \quad = \quad (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW$$

Integrando el rendimiento acumulado se tiene:

$$R = \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \int_0^t \sigma dW = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(W(t) - W(0))$$

por lo que retomando el valor del activo se tiene

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(W(t) - W(0))}$$

Utilizando propiedades de los incrementos en un proceso de Wiener, el valor del activo sigue una distribución log-normal. Por otra parte, dado que $W(0) = 0$, la expresión se reduce a

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + (W(t))}$$

Cabe mencionar que para la valoración de opciones se va a suponer la ausencia de arbitraje.

A la hora de valorar un contrato se busca una función de valor $V(S, t, T, K, \mu, \sigma, r)$, pero dado que todos son parámetros del contrato excepto el precio del subyacente y el tiempo, se considera una función $V(S, t)$ como la función de valor de una opción. El siguiente gráfico muestra una función de valor de una opción call a dos años con strike (precio) 14. Como puede observarse, al vencimiento el valor de la opción es el *pay-off*.

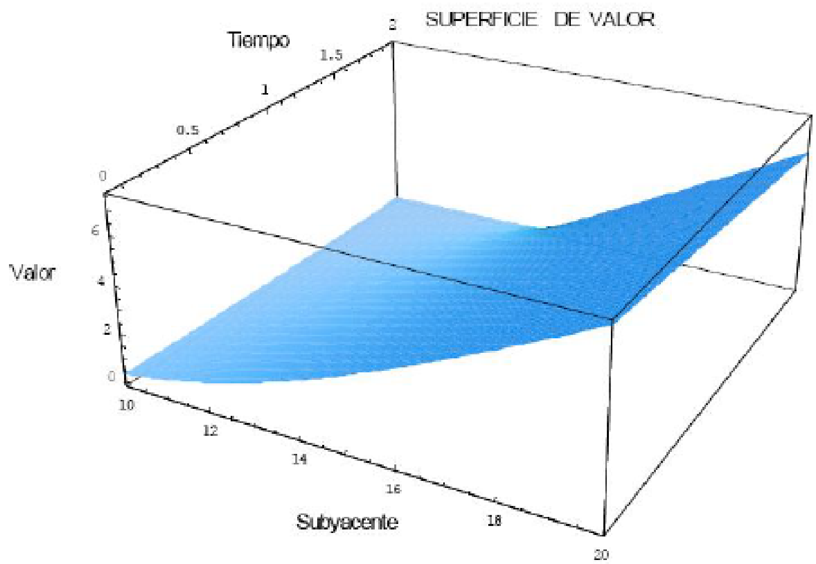


Figura 14: Precio de una opción Call Europea.

Para opciones europeas sobre subyacentes que no dan dividendos existe solución analítica, conocida como ecuación de Black-Scholes. En el caso del valor de una opción call europea cuya expresión es:

$$V_{call}(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2). \tag{9.1}$$

A continuación presentamos la deducción de la formula:

Para empezar de la ecuación (7.4), $u(x, 0)$ se puede reescribir considerando la siguiente condición:

$$e^{\frac{\lambda+1}{2}x} - e^{\frac{\lambda-1}{2}x} > 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda+1}{2}x - \frac{\lambda-1}{2}x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

En definitiva, lo podemos expresar así:

$$u(x,0) = u_0 = \begin{cases} e^{\dfrac{\lambda+1}{2}x} - e^{\dfrac{\lambda-1}{2}x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

La Ecuación de Calor tiene solución conocida, y varias maneras de calcularla, la misma está dada por:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-(x-s)^2} ds$$

en la formula $u(x,\tau)$, las variables x y τ quedan fijas, así que se puede hacer un cambio de variables más:

$$y = \frac{s-x}{2\tau}, \qquad ds = \sqrt{2\tau} dy$$

quedando así:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y + \sqrt{2\tau}x) e^{-\dfrac{1}{2}y^2} dy$$

Ademas $u_0(s) = 0$ si $s < 0$, así que no integramos en todo $\mathbb{R}$, sino que en el intervalo $[\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}, \infty)$ entonces la expresión anterior nos queda:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}}^{\infty} u_0(y + \sqrt{2\tau}x) e^{-\dfrac{1}{2}y^2} dy$$

y observando la fórmula de u_0, podemos separar la integral en dos términos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}}^{\infty} e^{\dfrac{1}{2}(\lambda+1)(x+\sqrt{2\tau})y} e^{-\dfrac{1}{2}y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}}^{\infty} e^{\dfrac{1}{2}(\lambda-1)(x+\sqrt{2\tau})y} e^{-\dfrac{1}{2}y^2} dy \\
=&\frac{e^{\dfrac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}}^{\infty} e^{\dfrac{1}{2}(\lambda+1)(\sqrt{2\tau})y} e^{-\dfrac{1}{2}y^2} dy - \frac{e^{\dfrac{1}{2}(\lambda-1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}}^{\infty} e^{\dfrac{1}{2}(\lambda-1)(\sqrt{2\tau})y} e^{-\dfrac{1}{2}y^2} dy \\
=&A_1 - A_2.
\end{aligned}$$

Ahora calculando cada integral por separado

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)(\sqrt{2\tau})y} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)(\sqrt{2\tau})y-\frac{1}{2}y^2} dy
\end{aligned}
$$

Primero completamos cuadrado en el exponente.

$$(y-(\lambda+1)\sqrt{\frac{\tau}{2}})^2 = y^2-(\lambda+1)\sqrt{2\tau}y+\frac{\tau}{2}(\lambda+1)^2.$$

Si sumo y resto $\frac{\tau}{2}(\lambda+1)^2$ en el exponente, completo cuadrado y sale otro termino fuera del integrando.

$$A_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau})^2} dy.$$

Ahora haciendo otro cambio de variable:

$$w = y-\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}$$

$$dw = dy$$

Y nos queda una nueva expresión de la integral:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}-\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w)^2} dw \\
&= e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}-\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w)^2} dw}_{(*)}.
\end{aligned}
$$

Observemos que el termino representado con (*) es la simétrica de la función de distribución N de una variable Normal donde, si llamamos:

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2}(\lambda + 1)\sqrt{2\tau}$$

y usando la igualdad propia de la función de distribución:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w)^2} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_1} e^{-\frac{1}{2}(w)^2} dw = N(d_1).$$

Así,

$$A_1 = e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x + \frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau} N(d_1).$$

Y como el cálculo de A_2 es idéntico al de A_1, salvo que en todo el proceso se debe cambiar $\lambda + 1$ por $\lambda - 1$ obtenemos:

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2}(\lambda - 1)\sqrt{2\tau}$$

$$A_2 = e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x + \frac{1}{4}(\lambda-1)^2\tau} N(d_2).$$

Ahora para llegar a nuestra fórmula deseada y para simplificar la notación definamos $w(x, \tau)$:

$$\begin{aligned}
w(x,\tau) &= e^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)x - \frac{1}{4}(\lambda+1)^2} u(x,\tau) \\
&= e^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)x - \frac{1}{4}(\lambda+1)^2} (A_1 - A_2) \\
&= e^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)x - \frac{1}{4}(\lambda+1)^2} (e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x + \frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x + \frac{1}{4}(\lambda-1)^2\tau} N(d_2)) \\
&= e^{x} N(d_1) - e^{-\lambda\tau} N(d_2)
\end{aligned}$$

ahora remplazamos los cambios de variables que se hicieron para encontrar la Ecuación de Calor:

$$\lambda = \frac{2r}{\sigma^2}, \qquad x = ln\frac{s}{k}, \lambda = \frac{2r}{\sigma^2}, \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t).$$

Finalmente obtenemos nuestra formula:

$$C(S,t) = V_{call}(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2).$$

Con d_1y d_2 así definidos:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \\ d_2 &= \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \\ &= d_1 - \sigma\sqrt{t} \end{aligned}$$

En la valoración de opciones europeas, se da la denominada relación de paridad. Si se tienen dos opciones con el mismo strike K , mismo vencimiento, pero una es call y otra put, ambas sobre el mismo subyacente, obsérvese que si S es el precio del subyacente, el *pay-off* de la cartera es $C - P = max(S-K,0) - max(K-S,0) = S-K$. Así en cualquier momento anterior, y en particular al inicio, se tiene que cumplir la relación de paridad:

$$C - P = S - \frac{K}{(1+r)^t} = S - e^{-r_c t}K. \tag{9.2}$$

Cabe mencionar que esta relación no tiene por que cumplirse en opciones americanas.

Luego aplicando (9.2) tenemos que $V(S,t)_{call} - V(S,t)_{put} = S - e^{-rt}K$ y operando se llega a:

$$V(S,t)_{put} = -SN(-d_1) + Ke^{-rt}N(-d_2).$$

Ejemplo 9.2. Se desea calcular el precio de una opción put y call sabiendo lo siguiente:

- Precio de la acción $(S)\rightarrow$ \$62

- Precio de Ejercicio(K)$\rightarrow$ \$60
- Tiempo de expiración(t) $\rightarrow$ 40 días$=$ $40/365$
- Volatilidad(σ)$\rightarrow$ 32 %
- Tasa libre riesgo(r)$\rightarrow$4 %

Primero calculemos d_1 y d_2.

$$d_1 = \frac{ln(\frac{62}{60}) + [0.04 + 0.5(0.32)^2]\,(\frac{40}{365})}{0.32 * \sqrt{\frac{40}{365}}} = \frac{0.04278}{0.10593} = 0.404 \approx 0.40$$

$$d_2 = 0.404 - 0.32 * \sqrt{\frac{40}{365}} = 0.298 \approx 0.30$$

Luego se tiene que $N(0.40) = 0.6554$ y $N(0.30) = 0.6179$, ahora utilizando la ecuación (9.1) calcularemos el valor de la opción call:

$$V_{call} = (0.62)(0.6554) - \left[\frac{60}{e^{0.04*(40/365)}}\right](0.6179) = 3.72$$

Lo cual indica que el precio para la opción call es de \$3.72, de la misma manera que se calculo la opción call, se calcula la opción put aprovechando la paridad de ambas opciones en la ecuación (9.2).

$$V_{put} = V_{call} - S + e^{-r_c t}K = 3.72 + \left[\frac{60}{e^{0.04*(40/365)}}\right] - 62 = 1.46.$$

Sin embargo, el objetivo en este capítulo no es derivar o utilizar esta expresión analítica, sino estimar el valor de una opción mediante la simulación del activo subyacente y la estimación del *pay-off* obtenido. De estos resultados se deduce que una valoración se puede obtener como $V_{opcion} = e^{-rt}E_Q(payoff(S))$ donde S se rige por la ecuación $dS = rSdt + \sigma SdW$. Y asumiendo que W fuera un proceso de Wiener:

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(W(t) - W(0))}.$$

Por último, dentro de estas nociones básicas, si el activo produce unos dividendos (o un interés si fuera una divisa) del tipo d como proporción del valor del activo, la posesión de éste puede verse como un interés adicional o lo que es lo mismo se puede ver como tener un drift de $r-d$. Si se tratara de una mercancía que por el contrario tuviera un coste c su posesión (coste de mantenimiento, etc.), el drift que habría de considerarse sería $r-c$.

El modelo de Black-Scholes supone la resolución de la esperanza planteada anteriormente bajo las hipótesis de que el mercado es eficiente y que el subyacente evoluciona según el proceso de Wiener, para una opción europea vainilla. El valor de la opción se puede obtener como:

$$V(S,t)_{call} = Se^{-dt}N(d_1) + Ke^{-rt}N(d_2).$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{ln\Big(\dfrac{S}{K}\Big) + \Big(r - d + \dfrac{1}{2}\sigma^2\Big)t}{\sigma\sqrt{t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{t} \end{aligned}$$

A continuación tenemos el siguiente algoritmo que estima el precio de una opción vainilla *call* y *put,* ejecutable en MATLAB, ocupando la ecuación de Black- Scholes, para $t = 1, 2, 3$.

```
S0 = 14;
K = 14;
sigma = 0.3;
r_anual = 0.03;
D = 0;
t = [1 2 3];
%r continuous r = log(1+r_anual);
%start computing
d1 = ( log(S0/K) + (r - D + 0.5 *sigma^2)*t ) ./ (sigma * sqrt(t)) ;
d2 = d1 - sigma * sqrt(t) ;
%value of a call
v_call = S0 * exp(-D) * normcdf(d1) - K * exp(-r*t) .* normcdf(d2)
v_put = v_call - S0 + K*exp(-r*t)
%v_put2 = v_call - S0 + K*(1+r_anual).^(-t)
%1.449019716010493 1.904412881880525 2.193055239143558
```

El resultado obtenido es el precio de la opción call para $t = 1, 2, 3$ correspondiente a 1.8568, 2.7081, 3.3811 respectivamente.

9.2. Estimación del valor de opciones

Se asume que el mercado financiero considerado admite una medida de probabilidad de riesgo neutro equivalente a la medida de probabilidad real, es decir, que ambas tienen el mismo conjunto de sucesos de probabilidad nula. En estas circunstancias, el teorema fundamental de la valoración de activos garantiza que el valor, en ausencia de arbitrajes, de cualquier contrato contingente viene dado por el valor presente a las tasa de interés libres de riesgo del valor esperado del *pay-off* en la medida de probabilidad de riesgo neutro. Es decir, que $V_{opcion} = e^{-rt}E_Q(payoff(S))$ siendo la ecuación diferencial estocástica de la variación de S de la forma $\frac{dS}{S} = rdt = rdW$.
En casos de contratos de tipo europeo en los que el *pay-off* dependa sólo del valor final no es necesario simular toda la trayectoria seguida por el subyacente durante la vida del contrato, sería suficiente simular el valor del subyacente en el día del vencimiento, si se conoce su distribución. Por ejemplo, si se trata de un subyacente que sigue un GBM en la medida de probabilidad de riesgo neutro gobernado por la ecuación diferencial estocástica $\frac{dS}{S} = r_c dt + \sigma dW$ donde r es la tasa de interés libre de riesgo en continuo, se sabe que su solución viene dada por:

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(W(t) - W(0))}.$$

$S(t)$ es una variable aleatoria que puede simularse directamente puesto que $W(t)$ es una variable aleatoria normal cuya varianza es t, y por lo tanto, no es necesario simular toda la trayectoria para simular el valor final del subyacente.En otros casos de contratos también de tipo europeo, es decir, sin la posibilidad de ejercicio anticipado, el *pay-off* puede depender de la trayectoria seguida por el subyacente durante la vida del contrato, en este caso no basta con simular el valor final hay que simular la trayectoria.

También puede ocurrir que la ecuación diferencial estocástica que gobierna el proceso seguido por el subyacente en la medida de probabilidad de riesgo neutro no sea tan sencilla como un GBM cuya solución es conocida y no se disponga de la forma explícita de la distribución de $S(t)$. De hecho, lo normal en una difusión de Ito es que se desconozca la solución explícita. Por ejemplo, en el caso que el subyacente siga el proceso $\frac{dS}{S} = rdt + \sigma(S)dW$ de volatilidad no constante. En estos casos se tiene que simular toda la trayectoria para calcular el $payoff$. La simulación de la trayectoria debe hacerse discretizando la ecuación diferencial estocástica que gobierna la dinámica del proceso seguido por el subyacente. Sin embargo, aunque se pudiera simular la trayectoria continua se incurriría en los errores propios de cualquier estimación, pero en el caso de discretización de la ecuación diferencial estocástica se tiene además el error de discretización.

La simulación de trayectorias es muy simple como un modelo continuo con incremento fijo de tiempo. Es decir, se divide el intervalo $[0,t]$ en el que se desea la simulación en n subintervalos de consecutivos de duración Δt, $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = t$ con $\Delta t = t_i - t_{i-1}\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$, siendo el mecanismo de transición $S \leftarrow S + Sr_{\Delta t} + \sigma(S)dW = Se^{r_c \Delta t} + \sigma(S)dW$
Si el proceso considerado es un proceso de Wiener, será más preciso si se utiliza la fórmula de actualización final en un intervalo, es decir, $S \leftarrow Se^{(r_c - \frac{1}{2}\sigma(S)^2)\Delta t + \sigma(S)(W(t)-W(0))}$, donde $W(t) = N(0, \sqrt{\Delta t})$.

Para cada trayectoria simulada se calcula el *pay-off* del contrato al que daría lugar. Se necesitan muchas trayectorias para poder evaluar con garantías el valor esperado del *pay-off* y su valor presente a la tasa libre de riesgo que será el valor de la opción. La simulación es uno de los mejores procedimientos para valorar una opción que no implique ninguna decisión durante el periodo de ejercicio, como son las opciones europeas. Sin embargo, no es apropiada para valoración de opciones americanas o bermudas en las que el ejercicio se puede hacer en diferentes momentos del tiempo.

El siguiente algoritmo estima el valor de una opción call Europea y la precisión del portafolio para $t = 1, 2, 3$.

```
n = 1000;
x0 = 123456789;
S0 = 14;
K = 14;
Kp = 16;
Kpp = 15;
sigma = 0.3;
r_anual = 0.03;
D = 0; %t = 3;
%r continuous
r = log(1+r_anual);
t_alpha = 1.962341;
%delta_t = 1/12;
t = 1:3 ;
payoffK = zeros(n,3);
payoffKp = zeros(n,3);
payoffKpp = zeros(n,3);
```

```
payoffPortfolio = zeros(n,3);
for i = 1:n
   [xbm ybm x0] = box_muller(x0);
   myExponent = (r-0.5*sigma^2)*t + sigma*sqrt(t)*ybm;
   s =  S0*exp(myExponent);
   %payoffK(i,:) = max(s - K,0);
   %payoffKp(i,:) = max(s - Kp,0);
   %payoffKpp(i,:) = max(s - Kpp,0);
   payoffPortfolio(i,:) = max(s - K,0)+ max(s - Kp,0) - 2* max(s - Kpp
      ,0);
end
callvaluePortfolio = exp(-r*t).*mean(payoffPortfolio)
presicionOfPortfolio =  t_alpha * sqrt(var(payoffPortfolio)/n) .*  exp
   (-r*t)
```

Su salida es:

```
callvaluePorfolio =
0.0887   0.0659   0.0529
```

La simulación no da respuesta a qué decisiones tomar sino que evalúa decisiones previamente planteadas. Por lo tanto, se presenta como una herramienta muy poderosa para valorar opciones en que no hay que tomar decisiones durante el periodo de ejecución. Sin embargo, no es una herramienta apropiada para valorar opciones que en su diseño implica tomar también alguna decisión en función del valor del subyacente durante el periodo de ejercicio, como son las opciones americanas o bermudas.

Un gráfico muy interesante para poder ver las diferencias entre el valor de opciones europeas y americanas es el gráfico de valor o del *pay-off*. Este gráfico representa lo que sería el *pay-off* en ese momento si se pudiera ejercer y el valor de la opción en función del valor del subyacente. Los dos gráficos mostrados a continuación representan los diagramas *pay-off* de una opción europea call y una put, respectivamente, ambas con strike 14 y a cierto plazo del vencimiento.

La línea azul es el supuesto *pay-off* y la línea roja el valor de la opción, ambas en función del valor del subyacente. Obsérvese que la línea roja sería una sección (la que determine el tiempo hasta el vencimiento) de la superficie de valor $V(S,t)$, y la línea azul la correspondiente a la fecha de vencimiento de esa misma superficie.

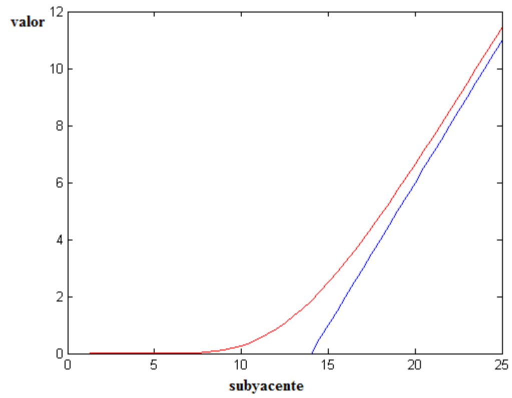


Figura 15: Valor de opcion call Europea.

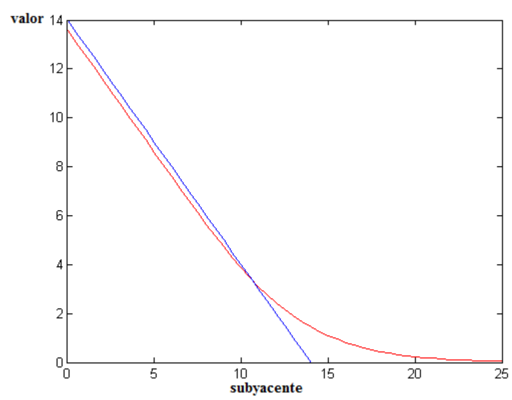


Figura 16: Valor de opcion put Europea.

Obsérvese, que en la opción put el valor de la opción puede estar por debajo del $pay{-}off$ que se recibiría en ese momento. Esto no puede ocurrir en una opción americana pues daría una opción de arbitraje, bastaría con comprar la opción (pagando su valor) y ejercerla de inmediato, obteniendo un $pay - off$ mayor sin riesgo alguno.

Los diagramas de valor de opciones americanas son los siguientes, también con strike 14 y al mismo plazo del vencimiento.

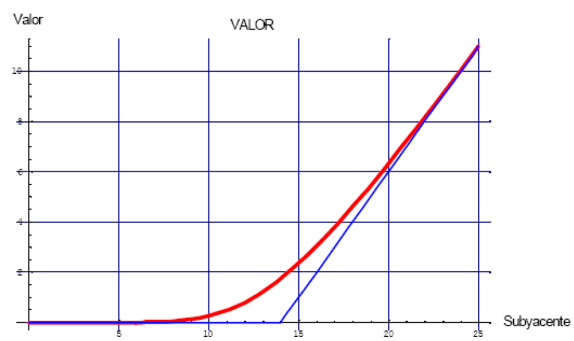


Figura 17: Valor de opcion call Americana.

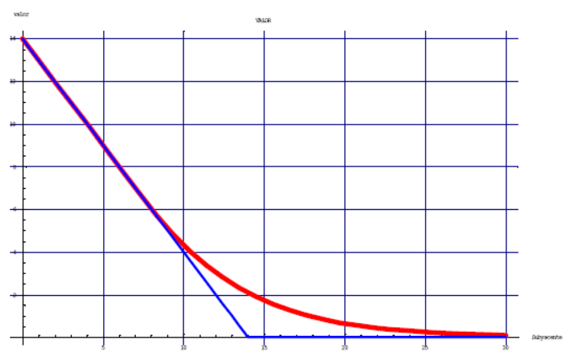


Figura 18: Valor de opcion put Americana.

Como puede verse en la opción put, el gráfico de valor descansa sobre el $pay - off$, como si fuera un obstáculo, tomando un contacto suave con él. El punto de contacto es justo el valor crítico para ese plazo. Además

$$V_{europea}(S,t) \leq V_{Bermudas}(S,t) \leq V_{americana}(S,t)$$

Sin embargo, se puede observar que el gráfico de la opción call es el mismo para una opción europea y americana. Sin entrar en detalles, una opción call americana nunca es óptimo ejercerla antes del vencimiento, ya que se compra el subyacente y se sigue sujeto a sus fluctuaciones (pudiendo perder más que con la opción y añadiendo los gastos financieros para poseer el activo). Por lo tanto, el valor de una opción call americana que no paga dividendos es el mismo que el de una europea. Aunque si el activo paga dividendos, ya sí puede interesar ejercer anticipadamente. En efecto, ejercer la opción significa pagar el strike y cargar con el coste de financiación de anticipar el pago del strike, pero la obtención anticipada de la opción da derecho a percibir el dividendo desde ese momento. Mientras la rentabilidad por dividendo sobre el precio de la acción sea inferior, en términos absolutos, al coste de financiación del strike, no será óptimo ejercer antes del vencimiento.

10. Conclusiones.

1. El método de Box-Muller resulta efectivo para la generación de variables aleatorias que se utilizan para la estimación del precio de una opción.

2. Existe una vasta cantidad de información bibliográfica sobre los diferentes tipos de opciones financieras, la cual resultó de importancia para este trabajo.

3. El estudio de los modelos de un sólo periodo y multiperiodo permite la comprensión del valor de un portafolio y su importancia al determinar el precio de una opción.

4. Los métodos numéricos como diferencias finitas y el cálculo estocástico resultan ser métodos efectivos para la solución de la ecuación de Black-Scholes.

5. La ejecución de los algoritmos en MATLAB para encontrar el valor del precio de una opción y sus respectivas gráficas, fue muy eficiente tardando a lo sumo un par de segundos.

Referencias

[McLeish] McLeish, Don L.(2005). Monte Carlo Simulation and Finance. Hoboken, NJ: J. Wiley, Print.

[Junca] Junca, Mauricio. Introducción a Matemáticas Financieras. Universidad de los Andes.

[Gilli] Manfred Gilli (2008). Numerical Methods in Finance . Department of Econometrics, University of Geneva and Swiss Finance.

[Vitoriano] Begoña Vitoriano (2015). Modelos y Métodos de Simulación: Técnicas de Monte Carlo, aplicaciones en Finanzas, Universidad Complutence de Madrid.

[Brandimarte] Paolo Brandimarte. Numerical Methods in Finance and Economics.A MATLAB-Based Introduction, Politecnico di Torino Torino, Italy. Segunda edicion.

11. Anexos

A continuación se muestran algoritmos necesarios para la implementación de otros, además se agregan dos algoritmos que estiman el precio de una opción call europea y algunos métodos utilizados.

Algoritmo 1

Función que se utiliza en el algoritmo 2, este genera variables aleatorias.

```
function [x u] = myUniform(x) % Genera una variable aleatoria uniforme
    en (0,1)
%parametros que recibe la formula
a = 16807;
m = (2^31) - 1;
b = 0;

x = mod(a*x+b,m);
u = x/m;

return
```

Algoritmo 2

Método de Box Muller.

```
function [xbm ybm x] = box_muller(x)
%Genera usando el metodo de box-muller las variables independientes
   box-muller
%Generando las primeras dos variabes uniformes
[x u1] = myUniform(x);
[x u2] = myUniform(x);
% variables box-muller
xbm = sqrt(-2*log(u1)) * cos(2*pi*u2);
ybm = sqrt(-2*log(u1)) * sin(2*pi*u2);
```

Algoritmo 3

Estima el precio de una opción call europea, utilizando el método de Box-Muller,

```
n = 1000;
S0 = 14;
```

```
K = 14;
sigma = 0.3;
r_anual = 0.03;
D = 0;
%r continuous
r = log(1+r_anual);
t_alpha = 1.962341;
delta_t = 1/12;
for t = 1:3
    fprintf('Valores calculados para t = %d\n',t);
    x0 = 123456789;
    payoff = zeros(n,1);

    for i = 1:n
       s = S0;
       for k = 1:12*t
          [xbm ybm x0] = box_muller(x0);
          [x0 u1] = myUniform(x0);
          [x0 u2] = myUniform(x0);
          [x0 u3] = myUniform(x0);
          denom = -2*(log(u1)+log(u2)+log(u3))/6;
          t_simul = ybm / sqrt(denom);
          s = s*exp(r*delta_t) + sigma*s*sqrt(delta_t)*t_simul/sqrt
             (6/(6-2));
       end

       payoff(i) = max(s-K,0);

    end
    meanPayoff =  mean(payoff);
    varPayoff =  var(payoff);
    accuracyPayoff = t_alpha*sqrt(varPayoff/n);

    meanValueCall = exp(-r*t)*meanPayoff
    accuracyValueCall = exp(-r*t)*accuracyPayoff
end
```

Algoritmo 4

Estima el precio de una opción call europea, también utiliza el método de Box Muller.

```
n = 100000;
```

```
S0 = 14;
K = 14;
sigma = 0.3;
r_anual = 0.03;
D = 0; %t = 3;
%r continuous
r = log(1+r_anual);
t_alpha = 1.962341;
delta_t = 1/12;
for t = 1:3
  fprintf('Valores calculados para t = %d\n',t);
    x0 = 123456789;
    payoff = zeros(n,1);
    for i = 1:n
      s = S0;
      for k = 1:12*t
        [xbm ybm x0] = box_muller(x0);
        s = s*exp((r-D)*delta_t) + sigma*s*sqrt(delta_t)*ybm;
      end
      payoff(i) = max(s-K,0);
    end
    meanPayoff =  mean(payoff);
    varPayoff =  var(payoff);
    accuracyPayoff = t_alpha*sqrt(varPayoff/n);
    meanValueCall = exp(-r*t)*meanPayoff
    accuracyValueCall = exp(-r*t)*accuracyPayoff
end
```

12. Cronograma

Descripción	Fecha
Inicio de reuniones, recolección de información.	22/Febrero/2016
Entrega de documentos al coordinador de procesos de graduación.	31/Marzo/2016
Presentación de solicitud de tema de graduación al coordinador de proceso de graduación.	21/Abril/2016
Defensa del trabajo de investigación.	10/Junio/2016
Acuerdo de ratificación de tribunal para evaluación de tesis.	8/Noviembre/2016
Defensa final del trabajo de investigación.	1/Diciembre/2016