UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

“RESOLUCIONES LIBRES DE VARIEDADES PROYECTIVAS Y TECNICAS DE COHOMOLOGIA DE FIBRADOS”

PRESENTADO POR:
LIC. INGRID CAROLINA MARTINEZ BARAHONA

PARA OPTAR AL GRADO DE:
MAESTRA EN MATEMÁTICA FUNDAMENTAL

CIUDAD UNIVERSITARIA, DICIEMBRE DE 2016.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

"RESOLUCIONES LIBRES DE VARIEDADES PROYECTIVAS Y TECNICAS DE COHOMOLOGIA DE FIBRADOS"

PRESENTADO POR:
LIC. INGRID CAROLINA MARTINEZ BARAHONA

PARA OPTAR AL GRADO DE:
MAESTRA EN MATEMÁTICA FUNDAMENTAL

MSC. JOSÉ RENÉ PALACIOS
ASESOR INTERNO

DR. FRANCISCO JAVIER RODRIGO GALLEGO
ASESOR EXTERNO

CIUDAD UNIVERSITARIA, DICIEMBRE DE 2016.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR INTERINO:

LIC. JOSÉ LUIS ARGUETA ANTILLÓN

SECRETARIA GENERAL:

DRA. ANA LETICIA ZAVALETA DE AMAYA

FISCAL GENERAL:

LICDA. NORA BEATRIZ MELÉNDEZ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

LIC. MAURICIO HERNÁN LOVO CÓRDOVA

VICEDECANO:

LIC. CARLOS ANTONIO QUINTANILLA APARICIO

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR:

DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES

SECRETARIA:

MSC. ALBA IDALIA CÓRDOVA CUELLAR

CIUDAD UNIVERSITARIA, DICIEMBRE DE 2016.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, mi familia, mis asesores Msc. José René Palacios y Dr. Francisco Javier Rodrigo Gallego. Muchas Gracias.

Índice general

Resumen

La Geometría Algebraica es una combinación entre Geometría y Álgebra. El objeto de estudio de la Geometría Algebraica son las variedades afines y proyectivas, las variedades son los ceros comunes de un conjunto polinomios. Geométricamente las variedades son curvas, superficies o variedades de dimensión superior. Es así que propiedades geométricas se pueden estudiar desde el punto de vista algebraico.

Las variedades proyectivas tienen propiedades geométricas intrínsecas (es decir que no dependen de la inmersión particular de la variedad) como por ejemplo la irreducibilidad, propiedad geométrica que puede estudiarse a través del ideal de la variedad, ya que si el campo sobre el que trabajamos es algebraicamente cerrado, la variedad es irreducible si y sólo si el ideal de la variedad es un ideal primo. Hay muchas propiedades geométricas como la dimensión, la naturaleza de la intersección de curvas o el carácter liso o singular de una varidad entre otras que se pueden estudiar de manera algebraica.

Una variedad tiene también propiedades extrínsicas, como el grado, que dependen de la inmersión en el espacio proyectivo. Tanto el grado como la dimensión se pueden obtener a partir del polinomio de Hilbert y este a su vez se obtiene de la resolución de un anillo de coordenadas de la variedad.

En este trabajo estudiaremos las propiedades geométricas de una variedad proyectiva sumergiéndola en un espacio proyectivo adecuado. Para ello será necesario estudiar las técnicas de cohomología y fibrados vectoriales. Esto nos permitirá demostrar el teorema de Green el cual nos indica cómo cambia la resolución de la variedad, concretamente, de una curva, según la inmersión de la misma ya que el anillo de coordenadas homogéneo y su resolución depende de la inmersión. De manera precisa, se trata de ver cómo va cambiando el aspecto de la resolución, haciéndose en cierta manera más sencilla, a medida que la curva se sumerge con un fibrado lineal de grado más alto y, por tanto, en un espacio proyectivo de dimensión cada vez mayor.

El trabajo está dividido en los siguientes capítulos:

Capítulo 1: Resoluciones libres graduadas. Se estudiarán la existencia y unicidad de resoluciones libres minimales para un módulo finitamente generado sobre el anillo graduado $\mathbf{k}[x_0, \ldots, x_n]$. Se darán ejemplos concretos sobre cómo constuir la resolución minimal para el anillo de coordenadas de una variedad. Se estudiará la función y el polinomio de Hilbert y los invariantes geométricos que pueden obtenerse de él.

Capítulo 2: Fibrados Vectoriales. Se verán las definiciones y las propiedades de los fibra-

dos vectoriales. Ejemplos de fibrados vectoriales: fibrado vectorial trivial, fibrado hiperplano, dual y producto tensorial de fibrados. Estamos interesados en los fibrados lineales pero en particular los fibrados lineales muy amplios ya que con ellos podemos sumergir a una curva en un espacio proyectivo de cierta dimensión, por lo cual nos centraremos en el estudio de ellos.

Capítulo 3: Técnicas de cohomología. Se revisará la contrucción del complejo de Koszul para un módulo M y el funtor Tor y su relación para el calculo de los números de Betti de una resolución libre minimal. Se darán ejemplos de cómo calcular dichos números con el programa Singular ya que en la práctica resulta muy complicado obtenerlos a mano.

Capítulo 4: Teorema de Green. Se desmostrará el teorema de Green haciendo uso de técnicas de cohomología y los resultados de los capítulos anteriores. Lo que se busca es traducir una propiedad geométrica de forma algebraica como la anulación de ciertos grupos de cohomología.

1 Resoluciones libres graduadas

En este capítulo haremos un breve estudio de los resultados más importantes sobre las resoluciones libres para un M módulo sobre un anillo graduado S. Las resoluciones libres minimales son una de las herramientas principales en esta tesis.

La idea de asociar una resolución a un S- módulo M finitamente generado fue presentada por Hilbert en 1890 en el artículo *Ueber die Theorie der algebraischen Formen*. En su artículo Hilbert construye resoluciones para módulos graduados sobre anillos de polinomios, usando nada más la regla de Cramer y el algoritmo de Euclides.
Esta construcción le permitió definir el polinomio de Hilbert y el teorema de las sicigias. Todos estos elementos son considerados la base de la Geometría Álgebraica.

1.1 Definiciones Básicas

Definición 1.1.1 Un módulo graduado sobre un anillo graduado S es un módulo M sobre S con una descomposición $M = M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots$, donde $(M_d, +)$ es un subgrupo de $(M, +)$ y tal que $S_i M_j \subset M_{i+j}$.

En este trabajo se utilizará el anillo $S := \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_n]$.

Definición 1.1.2 Sean M y N módulos graduados sobre S. Un homomorfismo $\varphi : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo graduado de grado d si $\varphi(M_t) \subset N_{t+d}$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.1.3 Sea M un módulo graduado y $d \in \mathbb{Z}$, definimos un nuevo módulo graduado $M(t)$ (M twistado o torcido por t) haciendo $[M(t)]_d = M_{t+d}$.

Definición 1.1.4 Un módulo libre graduado finitamente generado sobre un anillo graduado S es un módulo M generado por un conjunto finito de elementos homogéneos que son linealmente independientes sobre S.

Definición 1.1.5 Sea M un módulo graduado sobre S. Una resolución libre graduada de M es una resolución de la forma:

$$\cdots \to F_i \overset{\varphi_i}{\to} F_{i-1} \overset{\varphi_{i-1}}{\to} \cdots \to F_1 \overset{\varphi_1}{\to} F_0 \overset{\varphi_0}{\to} M \to 0$$

donde cada F_i es un módulo libre graduado finitamente generado, y cada homomorfismo φ_i es un homomorfismo graduado.

Definición 1.1.6 Consideremos la resolución libre graduada de M :

$$\cdots \to F_i \overset{\varphi_i}{\to} F_{i-1} \overset{\varphi_{i-1}}{\to} \cdots \to F_1 \overset{\varphi_1}{\to} F_0 \overset{\varphi_0}{\to} M \to 0$$

Se dice que la resolución es minimal si para todo $i \geq 1$ las entradas no nulas de la matriz graduada de φ_i tienen grado positivo, es decir, en las entradas de φ_i no aparecen nunca elementos de grado cero no nulos.

Mostraremos por construcción que cada $S-$ módulo finitamente generado M, tiene una resolución libre.

Paso 0. Hacemos $M_0 = M$. Elegimos un conjunto de generadores $m_1, ..., m_r$ minimales de M y sea $F_0 = S^r$. Sean $f_1, ..., f_r$ una base de F_0. Definimos:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_0 : F_0 & \longrightarrow & M \\ f_j & \longrightarrow & m_j, \quad 1 \leq j \leq r \end{array}$$

Paso i. Sea $M_i = ker(\varphi_{i-1})$, elegimos generadores $w_1, ..., w_t$ de M_i y sea $F_i = S^t$. Sean $g_1, \ldots, g_t$ una base de F_i. Definimos:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i : F_i & \longrightarrow & M_i \subset F_{i-1} \\ g_j & \longrightarrow & w_j, \quad 1 \leq j \leq t \end{array}$$

Por construcción $ker(\varphi_{i-1}) = Im(\varphi_i)$

El proceso anterior es finito y está garantizado por el teorema de las sicigias de Hilbert. El módulo M_1 es llamado **el módulo de sicigias de** M

Teorema 1.1 Teorema de las sicigias de Hilbert. Cualquier S - módulo graduado finitamente generado M tiene una resolución libre finita: $0 \to F_m \stackrel{\varphi_m}{\to} F_{m-1} \stackrel{\varphi_{m-1}}{\to} \cdots \to F_1 \stackrel{\varphi_1}{\to} F_0$ Aún más, podemos tomar $m \leq r+1$, el número de variables en S.

Definición 1.1.7 Dos resoluciones graduadas de un módulo $M : \cdots \to F_0 \stackrel{\varphi_0}{\to} M \to 0$ y $\cdots \to G_0 \stackrel{\phi_0}{\to} M \to 0$ son isomorfas si existe un isomorfismo graduado $\alpha_l : F_l \to G_l$ de grado cero tal que $\phi_0 \circ \alpha_0 = \varphi_0$ y para todo $l \geq 1$ el diagrama:

$$\begin{tikzcd} F_l \arrow[r, "\varphi_l"] \arrow[d, "\alpha_l"'] & F_{l-1} \arrow[d, "\alpha_{l-1}"] \\ G_l \arrow[r, "\psi_l"] & G_{l-1} \end{tikzcd}$$

conmuta, esto es, $\alpha_{l-1} \circ \varphi_l = \psi_l \circ \alpha_l$

Teorema 1.2 Dos resoluciones minimales cualquiera de M son isomorfas.

1.2 Ejemplos de Resoluciones Libres

Ejemplo 1.2.1 Como primer ejemplo vamos a encontrar una resolución libre del anillo de coordenadas de la cúbica alabeada

$$X = \{(t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3) \in \mathbb{P}^3 | (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}^1\}$$

Donde $I(X)$ está generado por $m_1 = x_0x_2 - x_1^2$, $m_2 = x_1x_3 - x_2^2$ y $m_3 = x_0x_3 - x_1x_2$. Tenemos entonces la primera parte de la resolución

$$S(-2)^3 \xrightarrow{\varphi} S \to S/I \to 0$$

donde $\varphi(A, B, C) = Am_1 + Bm_2 + Cm_3$.

Siguiendo el proceso descrito en la sección 1.1 , debemos encontrar el núcleo de φ. Observamos que los elementos $(x_2, x_0, -x_1)$ y $(x_3, x_1, -x_2)$ pertenecen al $Ker\varphi$ ya que

$$
\begin{aligned}
x_2m_1 + x_0m_2 - x_1m_3 &= 0 \qquad (1.1)\\
x_3m_1 + x_1m_2 - x_2m_3 &= 0 \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

Mostraremos que estos dos elementos generan al núcleo. Sea $(A, B, C) \in Ker\varphi$, entonces se cumple

$$Am_1 + Bm_2 + Cm_3 = 0 \text{ , por lo que } Cm_3 = (Ax_1 - Bx_3)X_1 + (-Ax_0 - Bx_2)x_2.$$

La última relación nos indica que $Cm_3 \in (x_1, x_2)$ pero como $m_3 \notin (x_1, x_2) \Rightarrow C \in (x_1, x_2)$, ya que (x_1, x_2) es primo, por lo que existen polinomios D y E tales que $C = Dx_1 + Ex_2$.

Sustituyendo

$$
\begin{aligned}
Am_1 + Bm_2 + Cm_3 &= Am_1 + Bm_2 + (Dx_1 + Ex_2)m_3\\
&= Am_1 + Bm_2 + Dx_1m_3 + Ex_2m_3\\
&= Am_1 + Bm_2 + D(x_2m_1 + x_0m_2) + E(x_3m_1 + x_1m_2)\\
&= (A + Dx_2 + Ex_3)m_1 + (B + Dx_0 + Ex_1)m_2 = 0,
\end{aligned}
$$

obtenenemos $(A + Dx_2 + Ex_3)m_1 = -(B + Dx_0 + Ex_1)m_2 = 0$. Así

$$
\begin{aligned}
A + Dx_2 + Ex_3 &= Fm_2\\
B + Dx_0 + Ex_1 &= -Fm_1
\end{aligned}
$$

Despejando obtenemos

$$
\begin{aligned}
A &= (-D - Fx_2)x_2 + (-E + Fx_1)x_3\\
B &= (-D - Fx_2)x_0 + (-E + Fx_1)x_1\\
C &= (D + Fx_2)x_1 + (E - Fx_1)x_2
\end{aligned}
$$

Por lo que $(A,B,C) \in \langle (x_2, x_0, -x_1), (x_3, x_1, -x_2) \rangle$.

Tenemos otro trozo de la resolución $S^2(-3) \xrightarrow{\psi} S^3(-2)$, donde $\psi(P,Q) = (Px_2 + Qx_3, Px_0 + Qx_1, -Px_1 - Qx_2)$.

Además ψ es inyectiva y ya que ψ cumple que $Img\psi = Ker\varphi$ tenemos la resolución

$$0 \to S^2(-3) \xrightarrow{\psi} S^3(-2) \xrightarrow{\varphi} S \to S/I \to 0.$$

Ejemplo 1.2.2 Resolución del anillo de coordenadas de la cuártica elíptica normal de $\mathbb{P}^3$. (Intersección completa de dos cuádricas).

Sean Q_1, Q_2 dos polinomios homogéneos de grado 2 y sin factores comunes. Sea $C = V(Q_1, Q_2)$ la intersección completa Q_1 y Q_2.

Tenemos la primera parte de la resolución:

$$S(-2)^2 \xrightarrow{\varphi} S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0,$$

donde $\varphi(A,B) = AQ_1 + BQ_2$.

Ahora debemos calcular el $Ker\varphi$, observamos que el elemento $(-Q_2, Q_1)$ pertenece al $Ker\varphi$ ya que $\varphi(-Q_2, Q_1) = -Q_2 \cdot Q_1 + Q_1 \cdot Q_2 = 0$.
Sea $(A,B) \in Ker\varphi$ entonces

$$\begin{aligned} AQ_1 + BQ_2 &= 0 \\ AQ_1 &= -BQ_2, \end{aligned}$$

dado que Q_1 y Q_2 no tienen factores en común se tiene que $A = -GQ_2$ y $B = GQ_1$.
Por tanto $Ker\varphi = \langle (-Q_2, Q_1) \rangle$ y tenemos el trozo de la resolución

$$S(-4) \xrightarrow{\psi} S(-2)^2 \xrightarrow{\varphi} S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0,$$

donde $\psi(P) = (-PQ_2, PQ_1)$.

Se tiene que ψ es inyectiva y satisface $Im\psi = Ker\varphi$, por tanto la resolución es

$$0 \longrightarrow S(-4) \xrightarrow{\psi} S(-2)^2 \xrightarrow{\varphi} S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0$$

Ejemplo 1.2.3 Resolución libre minimal para una curva racional normal de grado n.

Una curva C racional normal de grado n es definida por la imagen de la función

$$\begin{aligned} \upsilon_n : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0 : x_1) &\longrightarrow (x_0^n : x_0^{n-1}x_1 : \ldots : x_1^n) = (z_0 : \ldots : z_n). \end{aligned}$$

La curva C es el lugar de los ceros comunes de los polinomios $F_{i,j}(z) = z_i z_j - z_{i-1}z_{j+1}$, para $1 \leq i \leq j \leq n-1$ y además los $F_{i,j}$ generan el ideal homogéneo de C ([5, Ejemplo 1.14 y Ejercicio 5.3]).

La resolución asociada al anillo de coordenadas de C es de la forma

$$0 \longrightarrow S(-n)^{\oplus k_{n-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(-2)^{\oplus k_1} \longrightarrow S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0.$$

1.3 Polinomio de Hilbert

Definición 1.3.1 Si M es un módulo graduado finitamente generado sobre $S = \mathbf{k}[x_0, ..., x_n]$, entonces la función de Hilbert $H_M(t) = dim_{\mathbf{k}} M_t$

Ejemplo 1.3.1 El ejemplo más sencillo módulo graduado es el mismo $S = \mathbf{k}[x_0, ..., x_n]$. Como S_t es el espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado t en $n + 1$ variables se tiene que:

$$H_S(t) = dim_{\mathbf{k}} S_t = \left(\begin{array}{c} t+n \\ n \end{array} \right)$$

Proposición 1.3.1 Sea $S = \mathbf{k}[x_0, ..., x_n]$ y M un S- módulo graduado. Entonces, para cualquier resolución de M,

$$0 \longrightarrow F_k \longrightarrow F_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

se tiene:

$$H_M(t) = dim_{\mathbf{k}} M_t = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j dim_{\mathbf{k}} (F_j)_t = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j H_{F_j}(t)$$

Teorema 1.3 Si M es un S- módulo finitamente generado, existe un único polinomio HP_M tal que:

$$H_M(t) = HP_M(t)$$

para un t suficientemente grande.

El polinomio HP_M es llamado el *polinomio de Hilbert de* M.

1.3.1 Polinomio de Hilbert e invariantes geométricos

Sea X una variedad proyectiva y $X = V(I)$. El polinomio de Hilbert $HP_{S/I}$ nos da la siguiente información geométrica de la varidedad X:

1. El grado de $HP_{S/I}$ es la dimensión de la variedad X.

2. Si el polinomio de Hilbert $HP_{S/I}$ tiene grado $d = dimX$ entonces el término principal es $\frac{D}{d!} t^d$ para algún entero positivo D. El entero D se define como el grado de la variedad X. Se puede probar también que D es igual al número de puntos en que X corta a un subespacio lineal genérico de dimensión $(n - d)$ de $\mathbb{P}^n$.

Ejemplo 1.3.2 En el ejemplo 1.2.1 obtuvimos la resolución mínimal para el anillo de coordenadas de la cúbica alabeada

$$0 \to S^2(-3) \xrightarrow{\psi} S^3(-2) \xrightarrow{\varphi} S \to S/I \to 0,$$

ahora por los teoremas 1.3.1 y 1.3.2 podemos calcular el polinomio de Hilbert para S/I

$$\begin{aligned} HP_{S/I}(t) &= dim_{\mathbf{k}} S_t - dim_{\mathbf{k}} S^3(-2)_t + dim_{\mathbf{k}} S^2(-3)_t \\ &= dim_{\mathbf{k}} S_t - 3dim_{\mathbf{k}} S(-2)_t + 2dim_{\mathbf{k}} S(-3)_t \\ &= \binom{t+3}{3} - 3\binom{t+1}{3} + 2\binom{t}{3} \\ &= 3t+1 \end{aligned}$$

Concluimos que la cúbica alabeada tiene dimensión 1 y grado 3.

Ejemplo 1.3.3 Calcularemos el polinomio de Hilbert para el anillo de coordenadas de la cuártica elíptica normal de $\mathbb{P}^3$. En el ejemplo 1.2.2 obtuvimos la resolución

$$0 \longrightarrow S(-4) \xrightarrow{\psi} S(-2)^2 \xrightarrow{\varphi} S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0,$$

por lo que

$$\begin{aligned} HP_{S/I}(t) &= dim_{\mathbf{k}} S_t - dim_{\mathbf{k}} S^2(-2)_t + dim_{\mathbf{k}} S(-4)_t \\ &= dim_{\mathbf{k}} S_t - 2dim_{\mathbf{k}} S(-2)_t + dim_{\mathbf{k}} S(-4)_t \\ &= \binom{t+3}{3} - 2\binom{t+1}{3} + \binom{t-1}{3} \\ &= 4t \end{aligned}$$

Por tanto la cuártica elíptica normal de $\mathbb{P}^3$ tiene dimensión 1 y grado 4.

2 Fibrados Vectoriales

En este capítulo estudiaremos la definición y propiedades de los fibrados vectoriales. En particular estamos interesados en los fibrados lineales muy amplios, ya que dada una variedad proyectiva podemos sumergirla en un espacio proyectivo de cierta dimensión utilizando un fibrado lineal muy amplio.

Convención: En lo que resta del trabajo utilizaremos el campo $\mathbf{k} = \mathbb{C}$

2.1 Definiciones y propiedades de fibrados lineales

Definición 2.1.1 Un fibrado vectorial de rango n en una variedad algebraica X es una variedad algebraica E junto con un morfismo $\pi : E \to X$ llamado proyección que satisface las siguientes propiedades:

1. Existe un recubrimiento abierto $\bigcup U_i$ de X tal que $\pi^{-1}(U_i)$ es isomorfo al producto $U_i \times \mathbf{k}^n$ por aplicaciones que preservan las fibras, es decir, existen isomorfismos $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{k}^n$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & U_i \times \mathbf{k}^n \arrow[d, "p"] \\ & U_i \end{tikzcd}$$

2. Los isomorfismos φ_i son linealmente compatibles: La composición,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbf{k}^n & \longrightarrow & (U_i \cap U_j) \times \mathbf{k}^n \\ (x, v) & \mapsto & (x, (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(v)) \end{array}$$

   es una aplicación lineal de $\mathbf{k}^n$ para cada valor fijado de x.

La variedad E es llamada espacio total del fibrado vectorial. Denotaremos al fibrado vectorial por la notación de su espacio total. Los fibrados vectoriales de rango uno son llamados *fibrados lineales.*

Definición 2.1.2 Sea $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibrado vectorial de rango n sobre X y sea $x \in X$ un punto cualquiera de la variedad. La fibra de π sobre x es $\pi^{-1}(x)$ y se denota por E_x

Definición 2.1.3 Si $X \xrightarrow{f} Y$ y $E \xrightarrow{\pi} Y$ son dos aplicaciones, el producto fibrado es el conjunto

$$X \times_Y E = \{(x,v) | f(x) = \pi(v)\} \subset X \times E$$

junto con las proyecciones naturales $X \times_Y E \xrightarrow{\pi_1} X$ y $X \times_Y E \xrightarrow{\pi_2} E$

Observación 2.1.1 Sea X una variedad algebraica y $X \xrightarrow{f} Y$ un morfismo

1. El producto fibrado $X \times_Y E$ tiene estructura de variedad algebraica y las proyecciones son morfismos de variedades.

2. Sea $E \xrightarrow{\pi} Y$ un fibrado vectorial de rango n, la proyección $X \times_Y E \xrightarrow{\pi_1} X$ es un fibrado vectorial de rango n sobre X, se denota por $f^*(E)$ y se denomina el fibrado pullback de E.

3. Si X e Y son variedades algebraicas isomorfas entonces todo fibrado vectorial de X se corresponde con un único fibrado vectorial de Y, su pullback bajo el isomorfismo.

2.2 Secciones y secciones globales de un fibrado lineal

Definición 2.2.1 Sea $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibrado vectorial y sea $U \subseteq X$ un conjunto abierto. Una sección del fibrado vectorial sobre el conjunto U es un morfismo $U \xrightarrow{s} E$ tal que $\pi \circ s = id_U$. El conjunto de todas las secciones de E sobre U se denota por $\mathcal{E}(U)$.

Definición 2.2.2 Las secciones globales de un fibrado vectorial son simplemente las secciones de $\mathcal{E}(X)$ de E sobre toda la variedad X y se denotan por $\Gamma(X, \mathcal{E})$ o $H^0(X, \mathcal{E})$.

Observación 2.2.1

1. El conjunto de las secciones sobre U forma un espacio vectorial sobre $\mathbf{k}$. Para cada abierto $U \subseteq X$, se verifica que $\mathcal{E}(U)$ es un módulo sobre el anillo $\mathcal{O}_X(U)$. En efecto, sea $\mathcal{O}_X(U)$ el conjunto de todas las funciones regulares sobre U. Si $s_1, s_2 \in \mathcal{E}(U)$ son dos secciones sobre U de un fibrado vectorial E sobre X, también $s_1 + s_2$ es una sección sobre U. Para cualquier función regular $f \in \mathcal{O}_X(U)$ el producto fs es una sección de $\mathcal{E}(U)$ definiendo $U \xrightarrow{fs} \pi^{-1}(U)$ por $x \mapsto f(x)s(x)$.

2. Podemos definir un haz $\mathcal{E}$ de $\mathcal{O}_X$- módulos. Este haz asigna a cada abierto U el $\mathcal{O}_X(U)$-módulo $\mathcal{E}(U)$.
   Como $\mathcal{E}$ es localmente como $X \times \mathbf{k}^n$, el haz $\mathcal{E}$ es un haz localmente libre de $\mathcal{O}_X$ módulos de rango n, es decir, sobre conjuntos abiertos suficientemente pequeños,

$$\mathcal{E}(U) \cong \underbrace{\mathcal{O}_X(U) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(U)}_{n-copias}$$

   En efecto, para cada U, una sección es un morfismo

$$
\begin{array}{ccc}
U & \longrightarrow & \pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbf{k}^n \\
x & \mapsto & (x, f_1(x), \cdots, f_n(x))
\end{array}
$$

donde cada f_i es una función regular de U en $\mathbf{k}$.

A $\mathcal{E}$ se llama haz de secciones de E.

2.2.1 Ejemplos de fibrados vectoriales

Ejemplo 2.2.1 El fibrado lineal trivial.

El fibrado lineal trivial sobre X viene dado por:

$$
\begin{array}{rcl}
\pi : X \times \mathbf{k} & \longrightarrow & X \\
(p, \lambda) & \mapsto & p
\end{array}
$$

Las secciones son morfismos $p \mapsto (p, f(p))$, por lo que dar una sección del fibrado trivial sobre un conjunto abierto U es lo mismo que dar una función regular $f : U \to \mathbf{k}$. Por tanto el haz de secciones del fibrado lineal trivial sobre X puede identificarse con el haz $\mathcal{O}_X$ de la variedad X. De igual forma, el fibrado vectorial trivial sobre X es la variedad $X \times \mathbf{k}^n$ junto con la proyección natural. El haz de secciones es isomorfo a $\underbrace{\mathcal{O}_X \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X}_{n-copias}$.

Ejemplo 2.2.2 El fibrado lineal tautológico

Toda variedad proyectiva sumergida en $\mathbb{P}^n$ tiene un fibrado lineal natural llamado fibrado tautológico que es inherente a la inmersión. Como los puntos de $\mathbb{P}^n$ son las rectas vectoriales de $\mathbf{k}^{n+1}$, podemos hacer corresponder a cada punto $(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ la recta $L := (tx_0, \cdots, tx_n), t \in \mathbf{k}$ en $\mathbf{k}^{n+1}$. Restringiendo a cualquier subvariedad X de $\mathbb{P}^n$ podemos asociar a cada punto de X una recta vectorial. Para construir el fibrado tautológico en $\mathbb{P}^n$ consideramos la variedad algebraica

$$B = \{(x, l) | x \in l\} \subseteq \mathbf{k}^{n+1} \times \mathbb{P}^n$$

junto con la proyección natural $\pi : B \mapsto \mathbb{P}^n$. El fibrado tautológico en X es la restricción a X del fibrado tautológico en $\mathbb{P}^n$.

Ejemplo 2.2.3 Fibrado hiperplano

El fibrado hiperplano H sobre una variedad proyectiva X está definido por el dual del fibrado lineal tautológico. La fibra $\pi^{-1}(p)$ sobre un punto $p \in X \subseteq \mathbb{P}^n$ es el espacio vectorial de las funciones lineales $l \in \mathbf{k}^{n+1}$ que determina el punto p. La construcción formal de H como una subvariedad de $(\mathbf{k}^{n+1})^* \times \mathbb{P}^n$ es similar al fibrado tautológico. Sea $\sum_0^n a_i x_i$ una función lineal sobre $\mathbf{k}^{n+1}$, para $p = (\lambda_0 : \cdots : \lambda_n) \in X$, la forma lineal sobre $\mathbf{k}^{n+1}$ puede restringirse a la recta l correspondiente a p, es decir, $l = \{(t\lambda_0, ..., t\lambda_n)|t \in k\} \subseteq \mathbf{k}^{n+1}$. Esto proporciona una sección global bien definida en el fibrado hiperplano

$$\begin{array}{rcl} s : X & \longrightarrow & H \\ p & \mapsto & (p, \sum_{0}^{n} a_i x_i|_l) \end{array}$$

Es fácil ver que las secciones globales del fibrado hiperplano sobre $\mathbb{P}^n$ son precisamente polinomios lineales en $\mathbf{k}[x_0, ..., x_n]$. El haz de secciones globales del fibrado hiperplano sobre X se denota por $\mathcal{O}_X(1)$.

Ejemplo 2.2.4 Dual y productos en general. Sea $E \to X$ un fibrado vectorial con fibra sobre p denotada por E_p. Entonces podemos definir los fibrados vectoriales

1. $E^* \to X$ cuyas fibras son el espacio dual $(E_p)^*$.
2. $\bigwedge^i E \to X$ con fibras los productos exteriores $\bigwedge^i E_p$

Si $F \to X$ es otro fibrado vectorial sobre X, entonces existen los fibrados vectoriales

3. $E \otimes F \to X$ cuyas fibras son $E_p \otimes F_p$, y además $\underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{k-veces} = E^k$.
4. $E \oplus F \to X$ con fibras $E_p \oplus F_p$.

En particular si $X = \mathbb{P}^n$ y $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ el fibrado hiperplano sobre X, para todo $m \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) = \left\{ \begin{array}{cl} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^m & \text{si } m \geq 0, \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{|m|} & \text{si } m \leq 0 \end{array} \right.$$

Además si $m \geq 0$ las secciones del fibrado lineal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ pueden ser identificadas con los polinomios homogéneos de $\mathbf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ de grado m.

Ejemplo 2.2.5 El fibrado tangente. Sea X una variedad lisa cuasi-proyectiva de dimensión n. El fibrado tangente es el fibrado vectorial de rango n, $T.X \to X$, tal que la fibra sobre el punto $p \in X$ es el espacio vectorial tangente T_pX.

El fibrado cotangente $T^*X \to X$ es el dual del fibrado vectorial tangente, la fibra en un punto $p \in X$ es el espacio cotangente $(T_pX)^*$. Las secciones del espacio cotangente son llamadas 1-formas diferenciales.

Ejemplo 2.2.6 El fibrado lineal canónico Sea X una variedad lisa de dimensión n. El fibrado lineal canónico es la mayor potencia exterior de su fibrado contangente

$$\bigwedge^n T^*X.$$

2.3 Fibrados lineales globalmente generados

Definición 2.3.1 Sea X una variedad cuasiproyectiva y sea $L \xrightarrow{\pi} X$ un fibrado lineal sobre X. Sea $\{s_0, ..., s_n\}$ un conjunto de las secciones linealmente independientes del $\mathbf{k}$-espacio vectorial de sus secciones globales. El espacio vectorial generado por estas secciones se llama sistema lineal sobre X. Si este espacio vectorial esta formado por todas las secciones globales de L entonces se llama sistema lineal completo y se denotará por $|L|$.

Usando estas secciones, podemos definir una aplicación racional:

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & \mathbb{P}^n \\ x & \longrightarrow & (s_0(x) : \cdots : s_n(x)) \end{array}$$

Ejemplo 2.3.1 Consideremos el fibrado hiperplano de $\mathbb{P}^n$. Una base del espacio vectorial de sus secciones globales es $\{x_0, \ldots, x_n\}$ donde x_i son las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^n$. Si consideramos el sistema lineal incompleto generado por $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ la aplicación racional asociada:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \dashrightarrow & \mathbb{P}^{n-1} \\ (x_0 : \cdots : x_n) & \longrightarrow & (x_0 : \cdots : x_{n-1}) \end{array}$$

está definida en todo punto $\mathbb{P}^n$ salvo en el punto $(0 : \cdots : 0 : 1)$.

Ahora veremos el significado de $(s_0(x) : \cdots : s_n(x))$. En primer lugar las secciones s_i no son funciones. El sentido de $s_i(x)$ es construir la $(n+1)$- upla $(s_0(x) : \cdots : s_n(x))$, un punto de $\mathbb{P}^n$.

Eligiendo una trivalización local para $L \xrightarrow{\pi} X$, podemos identificar $\pi^{-1}(U) \subseteq L$ con $U \times \mathbf{k}$ en un entorno U de x. Esto permite identificar la sección

$$\begin{array}{c} U \xrightarrow{s} \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbf{k} \\ x \to s_i(x) \to (x, \tilde{s}_i(x)) \end{array}$$

con la función regular $U \xrightarrow{s_i} \mathbf{k}$.

Cuando escribimos la $(n+1)-$ upla $(s_0(x) : \cdots : s_n(x))$, realmente significa la $(n+1)-$ upla de escalares $(\tilde{s}_0(x) : \cdots : \tilde{s}_n(x))$.

Si elegimos una trivialización local distinta obtendremos un vector distinto, se tendrá que distintos vectores correponden al mismo punto de $\mathbb{P}^n$.

El único problema surge cuando todas las secciones se anulan en x. Desafortunadamente no hay forma de prevenir que las s_i no se anulen simultáneamente, ya que la aplicación $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ que asigna a cada punto punto x el punto $(s_0(x) : ... : s_n(x))$ de $\mathbb{P}^n$ es sólo una aplicación racional y no un morfismo definido en cualquier punto de la variedad. La aplicación racional está definida en el conjunto abierto de X complementario al conjunto de ceros comunes de las secciones s_i.

La aplicación racional $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ depende de la elección de la base del sistema lineal pero se puede comprobar que distintas bases producen aplicaciones que pueden transformarse unas en otras por automorfismos de $\mathbb{P}^n$.

La construcción puede hacerse a la inversa: Toda aplicación racional $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ está determinada por algún sistema lineal sobre X. Realmente, el fibrado lineal sobre X será el pullback del fibrado hiperplano sobre $\mathbb{P}^n$, y las s_i serán los pullbacks de las coordenadas homogéneas x_i de $\mathbb{P}^n$

Definición 2.3.2 El conjunto de ceros comunes de las secciones globales s_i del fibrado lineal es una subvariedad cerrada de X llamada puntos base del sistema lineal generado por las s_i. Si el sistema lineal es completo llamaremos a ese conjunto puntos base del fibrado lineal L. Si el conjunto de puntos base es vacío el sistema lineal L se dice que es libre de puntos base y el fibrado lineal asociado se dice que está globalmente generado. En este caso la aplicación $X \to \mathbb{P}^n$ es un morfismo.

El conjunto de los ceros de una sección global no nula de un fibrado lineal es el divisor asociado al fibrado lineal.

2.4 Fibrados lineales muy amplios

Definición 2.4.1 Se dice que un fibrado lineal $L \xrightarrow{\pi} X$ es muy amplio si la aplicación racional determinada por su sistema lineal completo $|L|$, $X \to \mathbb{P}^n$ es un morfismo definido en todo punto que define un isomorfismo en su imagen.

Las secciones s_i del fibrado lineal L se convierten bajo este morfismo en funciones coordenadas x_i de $\mathbb{P}^n$. Por lo tanto, después de sumergir X en $\mathbb{P}^n$ de esta forma, el fibrado lineal L se convierte en la restricción a X del fibrado hiperplano de $\mathbb{P}^n$. Así que podemos pensar que un fibrado lineal muy amplio es aquel, que para alguna inmersión de X en el espacio proyectivo es la restricción a X del fibrado hiperplano de $\mathbb{P}^n$.

El término muy amplio sugiere que un fibrado lineal tiene muchas secciones globales.

Primero para construir una aplicación dada por $|L|$ que sea un morfismo definido en todo punto, el fibrado L debe ser globalmente generado, es decir, debe admitir suficientes secciones globales de modo que para cada punto de X exista alguna sección global en L que no se anule ahí. Pero incluso en este caso el morfismo normalmente no es un isomorfismo en su imagen, ni siquiera es inyectivo. Para conseguir que la aplicación sea inyectiva, necesitamos todavía más secciones: Para cualquier par de puntos de X, debería haber una sección global de L que se anulara en uno pero no en otro. Pero un fibrado lineal muy amplio requiere todavía más secciones globales, pues no todo morfismo inyectivo es una inmersión. Para ser un fibrado lineal muy amplio, el fibrado debe separar vectores tangentes.

Definición 2.4.2 La aplicación racional asociada al fibrado lineal canónico se llama aplicación canónica.

3 Técnicas de Cohomología

3.1 El complejo de Kozsul

Definición 3.1.1 Si N es un S-módulo, se define el álgebra exterior $\wedge N$ como el álgebra libre $S \oplus N \oplus (N \otimes N) \oplus \cdots$ módulo las relaciones $x \otimes y = -y \otimes x$ y $x \otimes x = 0$ para todo x, y en N. El producto de dos elementos a y b en $\wedge N$ se denota por $a \wedge b$.

Observación 3.1.1

1. $\wedge N$ es un álgebra graduada. La parte de grado m, que escribiremos $\wedge^m N$, y es generada como un S- módulo por productos de exactamente m elementos de N.

2. $\wedge N$ es anticonmutativa. Si a y b son elementos homogéneos, entonces

$$a \wedge b = (-1)^{(dega)(degb)} b \wedge a,$$

   y si a tiene grado 1, entonces $a \wedge a = 0$. Además para cualquier N se tiene que $\wedge^0 N = S$.

3. La construcción de $\wedge N$ es funtorial: Esto es, si $f : N \to M$ es una aplicación de módulos, entonces $\wedge f : \wedge N \to \wedge M$ es una aplicación de álgebras que manda el elemento $a \wedge b \wedge ...$ a $f(a) \wedge f(b) \wedge ....$ Si N es libre de rango n, entonces $\wedge^n N \cong S$, y si $f : N \to N$ es una aplicación, entonces $\wedge^n f$ es la multiplicación por el determinante de cualquier matriz que represente f. En este caso $\wedge^m N = 0$ para $m > n$.

Definición 3.1.2 Dado un módulo N y un elemento $x \in N$, se define el complejo de Koszul como el complejo

$$K(x) : 0 \to N \to \wedge^2 N \to \cdots \to \wedge^i N \xrightarrow{d_x} \wedge^{i+1} N \to \cdots$$

donde d_x envía el elemento a al elemento $a \wedge x$; en particular, $1 \in S$ es envíado a $d_x(1) = x \in N$. Si N es libre de rango n y $x = (x_1, \dots, x_n) \in S^n \cong N$ escribiremos $K(x_1, \dots, x_n)$ en lugar de $K(x)$.

Si $f : N \to M$ es una aplicación de módulos que envía $x \in N$ a $y \in M$, entonces la aplicación $\wedge f : \wedge N \to \wedge M$ preserva la diferencial y, como es una aplicación de álgebras, es también una aplicación de complejos.

3.2 El funtor Tor

Definición 3.2.1 Un módulo M sobre un anillo S es plano si el funtor $M \otimes_S (-)$ es exacto, o equivalentemente, al tensorizar cualquier sucesión exacta corta por M resulta otra sucesión exacta corta.

Definición 3.2.2 Sean M y N dos S- modulos y $P.$, $Q.$ dos resoluciones proyectivas para M y N respectivamente. Escribimos $P. \otimes N$ el complejo obtenido al tensorizar $P.$ con N

$$P. \otimes N : \cdots \longrightarrow P_n \otimes N \longrightarrow P_{n-1} \otimes N \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \otimes N \longrightarrow 0.$$

De manera análoga se construye el complejo $M \otimes Q.$

$$M \otimes Q. : \cdots \longrightarrow M \otimes Q_n \longrightarrow M \otimes Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M \otimes Q_0 \longrightarrow 0.$$

También podemos definir el doble complejo $K..$ por $K_{p,q} = P_p \otimes_S Q_q$. Cada P_p es sumando directo de un módulo libre, y por tanto es plano. Así $H_n(K_{p.}) = H_n(P_p \otimes Q.) = 0$ para $n > 0$, y $H_0(K_{p.}) = H_0(P_p \otimes Q.) = P_p \otimes N$. De la misma manera, $H_n(K_{.q}) = 0$ para $n > 0$ y $H_0(K_{.q}) = M \otimes Q_q$ y por [8, Teorema B1], $H_n(P. \otimes N) \cong H_n(K..) \cong H_n(M \otimes Q.)$. Este módulo definido salvo isomorfismo se denota por $Tor_n^S(M, N)$, y es independiente de la elección de las resoluciones proyectivas para M y N.

Propiedades:

1. $Tor_0^S(M, N) = M \otimes_S N$.

2. Si M es plano entonces $Tor_n^S(M, N) = 0$ para cualquier S-módulo N y $n > 0$.

3. $Tor_n^S(M, N) \backsimeq Tor_n^S(N, M)$.

4. $Tor_n^S(M, N)$ es un funtor covariante en ambas entradas.

3.3 Cohomología de Koszul y los números de Betti

Lema 3.3.1 (Lema de Nakayama). Sean $S = \mathbf{k}[x_0, ..., x_r]$; $\mathfrak{m} = (x_0, ..., x_r)$ el ideal maximal irrelevante y M un S-módulo graduado finitamente generado. Supongamos que $m_1, ..., m_n \in M$ generan a $M/\mathfrak{m}M$. Entonces $m_1, .., m_n$ generan a M.

Proposición 3.3.1 Si $\mathbf{F} : \cdots \to F_1 \to F_0$ es una resolución libre minimal de un S-módulo finitamente generado M y $\mathbf{k} = S/\mathfrak{m}$, entonces cualquier conjunto minimal de generadores homogéneos de F_i contiene exactamente $dim_{\mathbf{k}} Tor_i^S(\mathbf{k}, M)_j$ generadores de grado j

Prueba:
Como $Tor_i^S(\mathbf{k}, M) = H_i(\mathbf{k} \otimes_S \mathbf{F})$, denotamos por $Tor_i^S(\mathbf{k}, M)_j$ su componente $j-$ésima. Como $\mathbf{F}$ es una resolución libre minimal las aplicaciones en $\mathbf{k} \otimes_S \mathbf{F}$ son todas ceros, por lo que $Tor_i^S(\mathbf{k}, M) = \mathbf{k} \otimes_S F_i$. Por el lema de Nakayama $Tor_i^S(\mathbf{k}, M)_j$ tiene la misma cantidad de generadores de grado j que F_i.

Sea $\mathbf{F}$ una resolución minimal para M

$$\mathbf{F} : 0 \longrightarrow F_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0$$

donde $F_i = \oplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}}$, esto es, F_i tiene $\beta_{i,j}$ generadores minimales de grado j.

El diagrama de Betti de $\mathbf{F}$ tiene la forma:

	0	1	$\cdots$	s
i	$\beta_{0,i}$	$\beta_{1,i+1}$	$\cdots$	$\beta_{s,i+s}$
$i+1$	$\beta_{0,i+1}$	$\beta_{1,i+2}$	$\cdots$	$\beta_{s,i+s+1}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
j	$\beta_{0,j}$	$\beta_{1,j+1}$	$\cdots$	$\beta_{s,j+s}$

Donde las $s+1$ columnas, etiquetadas $0, 1, ..., s$, se corresponden a los módulos libres $F_0, ..., F_s$ y las filas etiquetadas con enteros consecutivos correspondientes al grado. La columna m-ésima específica el grado de los generadores de F_m.

La entrada de la j-ésima fila de la $i$ésima columna es $\beta_{i,i+j}$ en lugar de $\beta_{i,j}$ dado que la resolución es mínimal, los homomorfismos no tienen elementos de grado cero no nulos.
Por ejemplo $\beta_{1,j}$ es el número de generadores de grado j necesarios para generar el ideal I de X. Si $X \neq \emptyset$, entonces no existen generadores de grado cero, por tanto $\beta_{1,0} = 0$.

3.4 Resolución mínimal y números de Betti con Singular

El programa Singular nos permite encontrar la resolución libre minimal del anillo de coordenadas de una variedad y los números de Betti haciendo uso de los comandos mres y betti.

Ejemplo 3.4.1 Usamos Singular para calcular la resolución libre del anillo de coordenadas de la cúbica alabeada (esta resolución ya la obtuvimos haciendo los cálculos a mano en el ejemplo 1.2.1). Para otros casos es difícil hallar la resolución libre minimal a mano, de ahí la importancia de poder cálcularla usando un programa.
Para simplificar la notación trabajaremos con $\mathbf{k}[x, y, z, w]$ y en este caso $I(X) = \langle xz - y^2, yw - z^2, xw - yz\rangle$.

Escribimos el siguiente código para escribir la resolución mínimal:

1. Calculamos la resolución minimal:

```
> ring S=0, (x,y,z,w), (c,dp);
> ideal I=xz-y2,yw-z2,xw-yz;
> resolution Re=mres(I,0);
> Re;
1      3      2
S <--  S <--  S

0      1      2
```

2. Podemos visualizar la matriz de cada homomorfismo graduado:

```
> print(matrix(Re[1]));
z2-yw,yz-xw,y2-xz
> print(matrix(Re[2]));
y, x,
-z,-y,
w, z
```

3. Se calcula la matriz de los números de Betti:

```
> betti(Re);
1,0,0,
0,3,2
```

4. También podemos visualizar los números de Betti utilizando el comando print:

```
> print(betti(Re),"betti");
           0      1      2
------------------------------
0:         1      -      -
1:         -      3      2
------------------------------
total:     1      3      2
```

5. Obtenemos así que la resolución libre minimal para S/I es:

$$0 \to S^2(-3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & x \\ -z & -y \\ w & z \end{pmatrix}} S^3(-2) \xrightarrow{(z^2-yw,yz-xw,y^2-xz)} S \to S/I \to 0$$

Ejemplo 3.4.2 Ahora calcularemos la resolución minimal para el anillo de coordenadas de la curva racional normal de grado 5. Utilizaremos $\mathbf{k}[x,y,z,u,v,w]$ y por el ejemplo 1.2.3. $I = \langle y^2-xz, yz-xu, yu-xv, yv-xw, z^2-yu, zu-yv, zv-yw, u^2-zv, uv-zw, v^2-uw\rangle$.

1. Calculamos la resolución.

```
> ring S=0, (x,y,z,u,v,w), (c,dp);
> ideal I=y2-xz,yz-xu,yu-xv,yv-xw,z2-yu,zu-yv,zv-yw,u2-zv,uv-zw,v2-uw;
> resolution Re=mres(I,0);
> Re;
 1        10        20        15        4
S <--    S <--     S <--     S <--     S

0        1         2         3         4
```

2. Calculamos los números de Betti

```
> print(betti(Re),"betti");
           0      1      2      3      4
------------------------------------------
0:         1      -      -      -      -
1:         -     10     20     15      4
------------------------------------------
total:     1     10     20     15      4
```

3. La matriz de cada uno de los homomorfismo graduados es:

```
> print(matrix(Re[1]));
v2-uw,uv-zw,zv-yw,yv-xw,u2-yw,zu-xw,yu-xv,z2-xv,yz-xu,y2-xz

> print(matrix(Re[2]));
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, u, z, y, x,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, u, z, y, x, -v,0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, u, z, y, x, 0, 0, 0, 0, -w,-v,0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, z, y, x, 0, -u,0, 0, -w,0, -u,0, 0, -w,-v,-u,
0, 0, z, y, x, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -v,0, 0, 0, w, 0, 0, 0,
0, 0, -u,-z,-y,-z,-y,-x,-v,0, -z,-y,w, -v,0, -z,0, w, 0, 0,
y, x, 0, -u,0, 0, z, 0, w, v, 0, z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, w, v,
-y,-x,0, u, 0, u, 0, y, 0, -v,u, 0, 0, w, 0, u, 0, 0, 0, 0,
z, y, w, 0, u, -v,0, -z,0, w, -v,0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0,
-u,-z,0, w, 0, 0, -v,0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0

> print(matrix(Re[3]));
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, w, v, z,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, w, v, 0, 0, -u,
0, 0, 0, 0, 0, 0, w, v, y, x, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, w, v, 0, 0, -z,0, 0, 0, 0, 0, -x,
0, 0, w, v, 0, 0, 0, 0, 0, -z,0, 0, 0, 0, y,
0, v, 0, u, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, y, -u,0, -x,
0, -w,0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, -z,0, -u,0,
w, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -v,-u,-v,0, 0, v, z,
0, 0, z, 0, 0, -z,v, 0, x, 0, 0, 0, -y,-x,0,
0, 0, -u,0, 0, u, -w,0, -y,0, -y,-x,0, 0, 0,
0, -v,0, 0, -w,0, 0, 0, z, 0, z, 0, u, 0, x,
v, 0, -w,-v,0, 0, 0, 0, -u,0, 0, z, 0, u, -y,
0, 0, 0, x, 0, y, 0, z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
-y,0, 0, 0, 0, 0, -v,-u,0, 0, x, 0, y, 0, 0,
z, 0, 0, 0, -v,-u,0, 0, 0, -x,0, x, -z,0, 0,
0, 0, -v,-u,0, 0, 0, 0, 0, y, -z,-y,0, 0, 0,
0, 0, -x,0, -y,0, -z,0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
x, -y,0, -x,0, 0, u, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, z, 0, 0, u, 0, 0, 0, -x,0, -x,0, 0, x, 0,
-z,0, u, z, 0, 0, 0, 0, y, 0, y, 0, 0, -y,0

> print(matrix(Re[4]));
0, 0, u, z,
u, x, 0, 0,
0, 0, z, y,
0, -y,0, z,
-z,0, 0, -x,
0, x, z, 0,
y, 0, -x,0,
0, 0, -y,-x,
```

```
-w,0 , v , 0 ,
0 , 0 , w, v ,
0 , 0 , -v,-u ,
0 , u , w, 0 ,
v , 0 , 0 , z ,
-w,-z ,0 , 0 ,
0 , v , 0 , -w
```

4. Así la resolución mínimal es:

$$0 \longrightarrow S^4(-5) \xrightarrow{\varphi_4} S^{15}(-4) \xrightarrow{\varphi_3} S^{20}(-3) \xrightarrow{\varphi_2} S^{10}(-2) \xrightarrow{\varphi_1} S \to S/I$$

En este último ejemplo vemos que el cálculo de una resolución en general es muy difícil, pero se puede hacer con programas como Singular, tanto la resolución como los números de Betti.

4 Teorema de Green

4.1 Introducción

Dada una variedad proyectiva abstracta X, esta se puede sumergir en distintos espacios proyectivos, usando distintos fibrados lineales muy amplios de X. Estamos interesados en ver cómo el grado de la inmersión i de X afecta la forma de la resolución libre del anillo de coordenadas de $i(X)$.

Veamos el siguiente ejemplo, donde se ha sumergido una curva elíptica tomando diferentes fibrados lineales.

Ejemplo 4.1.1 Sea X una curva elíptica, esto es, de género $g = 1$. Analizaremos qué ocurre con la resolución del anillo de coordenadas de la curva cuando tomamos diferentes fibrados lineales L. Veremos que la resolución tiene propiedades distintas según sea el grado de L.

1. Si $degL = 2$, como $degL \geq 2$, $|L|$ no tiene puntos de base; por tanto $|L|$ induce un morfismo $h^1(L) = 0$ ya que $degL > 2g - 2 = 0$. Utilizando Riemann- Roch

$$\begin{aligned} h^0(L) &= h^1(L) + degL - g + 1 \\ &= 2 - 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

En este caso el morfismo inducido por $|L|$ es a $\mathbb{P}^1$ y no es una inmersión ya que $\mathbb{P}^1$ tiene género 0 por lo que una curva elíptica no es isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

2. Si $degL = 3$. $h^1(L) = 0$ ya que $degL = 3 > 2g - 2$.
Utilizando la fórmula de Riemann - Roch

$$\begin{aligned} h^0(L) &= h^1(L) + degL - g + 1 \\ &= 3 - 1 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Además como $degL \geq 2g + 1 = 3$, L es muy amplio, así que tenemos la inmersión $X \hookrightarrow \mathbb{P}^2$. La imagen es una cúbica y su anillo de coordenadas homogéneo es normal. La resolución asociada al anillo de coordenadas es

$$0 \to S(-3) \to S \to S/I \to 0 \tag{4.1}$$

En este caso el ideal I no está generado por cuadráticas.

3. Si $degL = 4$. Entonces $h^0(L) = 4$ y L es muy amplio. Tenemos la inmersión $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$, que es una cuártica intersección completa de dos cuádricas. Además su anillo de coordenadas homogéneo es normal. La resolución asociada al anillo de coordenadas es

$$0 \to S(-4) \to S^2(-2) \to S \to S/I \to 0 \tag{4.2}$$

El ideal I está generado por cuadráticas

4. Si $degL = 5$. Se tiene que $h^0(L) = 5$ y L es muy amplio así que se tiene la inmersión $X \hookrightarrow \mathbb{P}^4$. La imagen es una curva de grado 5 y el anillo S/I es normal. La resolución asociada al anillo de coordenadas de la imagen es de la forma

$$0 \to S(-5) \to S(-3)^{\oplus 5} \to S(-2)^{\oplus 5} \to S \to S/I \to 0 \tag{4.3}$$

   El ideal I está generado por cuadráticas.

Vemos que a medida que aumentamos el grado del fibrado lineal, la resolución que obtenemos es lineal en número mayor de pasos, esto es, en las matrices de los homomorfismos graduados todos los elementos son de grado 1 . Bueno esto no es casualidad, la forma que tendrá la resolución depende del grado del fibrado lineal que tomemos. Esto es lo que indica el teorema de Green que más adelante enunciaremos y demostraremos.

4.2 Preliminares. Notaciones y Convenciones

Para iniciar el estudio del teorema de Green y Noether se recordaran algunas definiciones y se tomarán algunas convenciones que servirán a lo largo de este capítulo.

Convenciones

1. Trabajaremos exclusivamente con variedades definidas sobre los números complejos $\mathbb{C}$.
2. Si V es un espacio vectorial complejo, denotaremos por $\mathbb{P}(V)$ al espacio proyectivo de los cocientes de dimensión uno de V. Además se tiene que $H^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) = V$, ya que las secciones globales del fibrado hiperplano $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ son las formas lineales de V^*, y estas a su vez son los elementos de $(V^*)^*$ que es canónicamente isomorfo a V, por ser V de dimensión finita.
3. Si F es un haz coherente en una variedad proyectiva X, escribiremos $H^i(F)$ en lugar de $H^i(X, F)$. Denotaremos por $h^i(F) = dimH^i(F)$. Si V es un espacio vectorial denotaremos por $V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$ al fibrado vectorial trivial en X con fibras en V.

4.3 Las sicigias de curvas de grado alto

Sea X una curva lisa irreducible de género g y L un fibrado lineal muy amplio de X con $deg(L) \geq 2g + 1$. Hemos visto que en tal caso L determina un morfismo:

$$\phi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(L)) = \mathbb{P}^r$$

donde $r = r(L) = h^0(L) - 1$.
Como L es muy amplio, entonces ϕ_L es una inmersión.

Sea S el álgebra simétrica $SymH^0(L)$ en $H^0(L)$. S es el anillo de coordenadas homogéneas del espacio proyectivo $\mathbb{P}(H^0(L))$. Considere el anillo graduado

$$R = R(L) = \oplus_m H^0(X, L^m)$$

asociado a L. R es de forma natural un módulo finitamente generado sobre S, y por tanto tiene una resolución graduada minimal $E. = E.(L)$

$$0 \to E_{r-1} \to E_{r-2} \to \cdots \to E_1 \to E_0 \to R \to 0 \tag{4.4}$$

donde $r = r(L) = h^0(L) - 1$ y cada E_i es suma directa de torcidos de S, es decir, $E_i = \oplus S(-a_{i,j})$.

Definición 4.3.1 Fijado un entero $p \geq 0$. Diremos que un fibrado lineal L en X satisface la propiedad (N_p) si:

1. $E_0 = S$
2. $E_i(L) = \oplus S(-i-1)$ para todo $1 \leq i \leq p$

Observación 4.3.1

1. Si $E_0 = S$, entonces $E.$ determina una resolución del anillo de coordenadas de X en $\mathbb{P}(H^0(L))$.
2. Que L satisfaga la propiedad (N_0) equivale a que X es sumergida en $\mathbb{P}(H^0(L))$ como una variedad proyectivamente normal (i.e. su anillo de cooordenadas homogéneas es integramente cerrado).
3. Que L satisfaga la propiedad (N_1) equivale a que cumpla la propiedad (N_0) y que el ideal homogéneo I_X es generado por polinomios cuadráticos.
4. Que L satisfaga la propiedad (N_2) equivale a que cumpla las propiedades (N_0) y (N_1) y además el módulo de las sicigias entre los generadores cuadráticos $Q_i \in I$ está generado por las relaciones de la forma $\sum L_i Q_i = 0$, donde los L_i son polinomios lineales.

4.3.1 El fibrado vectorial M_L

Sea X una curva proyectiva lisa de género g, y sea L un fibrado lineal amplio y generado por sus secciones globales en X. Existe una función evaluación sobreyectiva de fibrados vectoriales:

$$\begin{array}{rcl} e_L : H^0(L) \otimes \mathcal{O}_X & \to & L \\ e_i & \to & s_i \end{array}$$

donde $H^0(L) = \langle s_0, \ldots, s_r \rangle$ y $H^0(L) \otimes \mathcal{O}_X = \langle e_0, e_1, \ldots, e_r \rangle$ es un fibrado libre de rango $r+1$.

Escribimos como $M_L = ker(e_L)$. Se tiene que M_L también es un fibrado vectorial de rango $r = r(L)$ y por construcción se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to M_L \to H^0(L) \otimes \mathcal{O}_X \to L \to 0$$

4.3.2 Propiedad N_0

Proposición 4.3.1 El fibrado lineal L es proyectivamente normal $\Leftrightarrow \beta_m : H^0(L^m) \otimes H^0(L) \longrightarrow H^0(L^{m+1})$ es sobreyectiva para todo $m \geq 1$.

Demostración.

Sea I ideal homogéneo de $i(X)$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to I \to S \to S/I \to 0 \tag{4.5}$$

Hacificando 4.5

$$0 \to \mathcal{I}_{i(X)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \to \mathcal{O}_X \to 0 \tag{4.6}$$

Twistando 4.6 por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)$:

$$0 \to \mathcal{I}(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m) \to \mathcal{O}_X(m) \to 0 \tag{4.7}$$

Tomando homología en 4.7

$$0 \to H^0(\mathcal{I}(m)) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)) \overset{\alpha_m}{\to} H^0(\mathcal{O}_X(m)) \to H^1(\mathcal{I}(m)) \to H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)) \tag{4.8}$$

Además $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)) = S_m$ y $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)) = 0$.

El fibrado lineal L es proyectivamente normal si y sólo si $S \to R$ es sobreyectiva, donde $S = \oplus_{m=0}^{\infty} S_m$ y $R = \oplus_{m=0}^{\infty} H^0(\mathcal{O}_X(m)) = \oplus_{m=0}^{\infty} H^0(L^{\otimes m})$.

Pero $S \to R$ es sobreyectiva si y sólo si $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)) \overset{\alpha_m}{\to} H^0(\mathcal{O}_X(m))$ es sobreyectiva $\forall m \geq 1$.

Ahora veremos por inducción que α_m es sobreyectiva si y sólo si β_m es sobreyectiva, $\forall m \geq 1$.

$m = 1$. $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{O}_X(1))$

$m = 2$. Tenemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2)) \arrow[r, "\alpha_2"] & H^0(L^2) \\
H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \arrow[u] \arrow[r] & H^0(L) \otimes H^0(L) \arrow[u, "\beta_2"']
\end{tikzcd}$$

$m = 3$ De manera similar:

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(3)) \arrow[r, "\alpha_3"] & H^0(L^3) \\
H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \arrow[u] \arrow[r] & H^0(L^2) \otimes H^0(L) \arrow[u, "\beta_3"']
\end{tikzcd}$$

$m = k$. Supongamos que es cierto para $m = k-1$, es decir, α_{k-1} es sobreyectiva si y solo si β_{k-1} es sobreyectiva.

Entonces el siguiente cuadrado también conmuta

$$\begin{tikzcd} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)) \arrow[r, "\alpha_m"] & H^0(L^m) \\ H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m-1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \arrow[u] \arrow[r] & H^0(L^{m-1}) \otimes H^0(L) \arrow[u, "\beta_m"'] \end{tikzcd}$$

por hipótesis inductiva $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m-1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \longrightarrow H^0(L^{m-1}) \otimes H^0(L)$ es sobreyectiva y en general $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m-1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m))$ es sobreyectiva, obtenemos así que α_m es sobreyectiva si y sólo si β_m. Por tanto L es proyectivamente normal si y sólo si β_m es sobreyectiva para todo $m \geq 1$. $\square$

Proposición 4.3.2 L es proyectivamente normal $\Leftrightarrow H^1(M_L \otimes L^k) \to H^0(L) \otimes H^1(L^k)$ es inyectiva.

Demostración.

Para L tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to M_L \to H^0(L) \otimes \mathcal{O}_X \to L \to 0. \tag{4.9}$$

Al twistarla por L^k y luego tomando homología obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(M_L \otimes L^k) \to H^0(L) \otimes H^0(L^k) \to H^0(L^{k+1}) \to H^1(M_L \otimes L^k) \\ \to H^0(L) \otimes H^1(L^k) \to H^1(L^{k+1}) \to 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

De 4.10 tenemos que

$$\begin{aligned} L \text{ es proyectivamente normal} \quad &\Leftrightarrow \quad H^0(L) \otimes H^0(L^k) \to H^0(L^{k+1}) \text{ es sobreyectiva} \\ &\Leftrightarrow \quad H^1(M_L \otimes L^k) \to H^0(L) \otimes H^1(L^k) \text{ es inyectiva.} \end{aligned}$$ $\square$

Proposición 4.3.3 Sea L no especial es decir, $H^1(L) = 0$. Entonces L satisface la propiedad $(N_0) \Leftrightarrow H^1(X, M_L \otimes L^m) = 0 \ \forall m \geq 1$

Demostración.

Como $H^1(L) = 0$ se tiene que $H^1(L^m) = 0$ para todo $m \geq 1$, entonces por la proposición 4.3.2

$$L \text{ es proyectivamente normal } \Leftrightarrow H^1(M_L \otimes L^k) = 0.$$

Veamos en efecto que si $H^1(L) = 0$ entonces $H^1(L^m) = 0 \ \forall m \geq 1$, demostrándolo por inducción.

Para $m = 1$ por hipótesis $H(L^1) = H(L) = 0$

Asumamos que para $m = k - 1$, $H^1(L^{k-1}) = 0$, probaremos que se cumple para $m = k$. Sea D un divisor efectivo de $|L|$, entonces $L = \mathcal{O}(D)$, $L^* = \mathcal{O}(-D)$ y tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0. \tag{4.11}$$

Al twistar 4.11 por L^k obtenemos la sucesión

$$0 \to L^{k-1} \to L^k \to L\mid_D^k \to 0, \tag{4.12}$$

ya que $\mathcal{O}_X(-D) \otimes L^k = L^{k-1}$. Es exacta porque L^k es un fibrado vectorial que al restrigir en abiertos adecuados es libre.

Tomando cohomología en 4.12 tenemos

$$0 \to H^0(L^{k-1}) \to H^0(L^k) \to H^0(L\mid_D^k) \to H^1(L^{k-1}) \to H^1(L^k) \to H^1(L\mid_D^k) \to \cdots \tag{4.13}$$

y como por $H^1(L^{k-1}) = 0$ y $H^1(L\mid_D^k) = 0$ por estar soportado en un número finito de puntos, de 4.13 concluimos que $H^1(L^k) = 0$. □

4.3.3 Propiedad N_p

Proposición 4.3.4 Asuma que L es no-especial i.e $H^1(L) = 0$. Entonces L satisface la propiedad (N_p) si y sólo si $H^1(X, \wedge^{p+1} M_L \otimes L^k) = 0$ y $H^1(X, M_L \otimes L^k) = 0$, para todo $k \geq 1$.

Prueba:

La demostración se hará en 3 pasos para demostrar las equivalencias:

$$\begin{aligned} L \text{ satisface la propiedad } (N_p) &\Leftrightarrow E_p(L) \text{ no tiene generadores de grados mayores o iguales a } p+2. \\ &\Leftrightarrow Tor_p(R(L), \mathbb{C})_{p+k} = 0 \\ &\Leftrightarrow H^1(\wedge^{p+1} M_L \otimes L^k) = 0 \end{aligned}$$

Paso 1: L satisface la propiedad $(N_p) \Leftrightarrow E_p(L)$ no tiene generadores de grados mayores o iguales a $p + 2$.

Sea n_i el mínimo de los grados de los generadores de $E_i(L)$. La sucesión $\{n_i\}$ es estrictamente creciente, ya que en caso contrario las matrices de las aplicaciones en 4.4 tendrían entradas constantes no nulas y esto contradice la minimalidad de la resolción.

Sea m_i el máximo de los grados de los generadores. Dualizando la resolución minimal hasta E_0

$$E_0^* \to E_1^* \to \cdots \to E_{r-2}^* \to E_{r-1}^* \to T \to 0$$

donde T es el conúcleo de $E^*_{r-2} \to E^*_{r-1}$.

Sabemos que $E^*_i = Hom_S(E_i, S)$ y que $S^* \cong S$, entonces E^*_i es un módulo libre del mismo rango que E_i, ya que si $E_i = S(a_{i1}) \oplus \cdots \oplus S(a_{ij})$ se tiene que $Hom_S(E_i, S) = Hom_S(S(a_{i1}), S) \oplus \cdots \oplus Hom_S(S(a_{ij}), S)$.

Ahora veamos la estructura graduada de E^*_i. La estructura graduada de $Hom_S(S(a), S)$ es:

$$Hom_S(S(a), S) = \oplus_{l \in \mathbb{Z}} Hom_l(S(a), S)$$

donde $Hom_l(S(a), S)$ son los homomorfismos graduados de grado l y un subgrupo de $Hom(S, S)$. Se tiene además que $Hom_l(S(a), S)$ y $S(-a)$ son isomorfos como módulos graduados. Por lo que si $E_i = S(a_{i1}) \oplus \cdots \oplus S(a_{ij})$ con $a_{i1} \geq ... \geq a_{ij}$ entonces $E^*_i = S(-a_{i1}) \oplus ... \oplus S(-a_{ij})$. Así que el máximo m_i de los generadores de E^*_i es $-a_{ij}$ por lo que $-m_i = a_{ij}$ es el mínimo de los grados de los generadores de E^*_i. Y dado que también es una resolución minimal, la sucesión $\{-m_i\}$ es estrictamente decreciente, por lo que la sucesión $\{m_i\}$ es estrictamente creciente.

Por otra parte, desde que $\phi_L(X)$ no está contenida en ningún hiperplano en $P(H^0(L))$ se tiene que $m_1 \geq n_1 \geq 2$. Por lo que $E_p(L)$ no tiene generadores de grados mayores o iguales que $p+2$ si y sólo si $m_p = p+1$. Entonces si $n_p = p+1$ se tiene $m_i = n_i = i+1$ para todo $1 \geq i \geq p$. Esto es si y solo si L satisface la propiedad (N_p).

Paso 2: L satisface la propiedad $(N_p) \Leftrightarrow Tor_p(R(L), \mathbb{C})_{p+k} = 0$

Sea $\mathbb{C}$ el cociente $S/\mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{m} = (x_0, ..., x_r)$ el ideal irrelevante. Consideremos los módulos graduados $Tor_i(R(L), \mathbb{C})_k$; como todas las aplicaciones de la resolución tienen entradas en $\mathfrak{m}$, ya que no pueden ser nunca constantes. Entonces por la proposición 3.3.1 $dimTor_i(R(L), \mathbb{C})_k$ es el número de generadores de $E_i(L)$ de grado k. Por ello

$$L \text{ satisface la propiedad } (N_p) \Leftrightarrow Tor_i(R(L), \mathbb{C})_{p+k} = 0, \text{ para todo } k \geq 2$$

Para calcular dichos Tor escribiremos la resolución de $\mathbb{C}$ dada por el complejo de Koszul. Sea $V = S_1 = H^0(L)$.

$0 \to \wedge^{r+1} H^0(L) \otimes S(r-1) \to \cdots \to \wedge^2 H^0(L) \otimes S(-2) \to H^0(L) \otimes S(-1) \to S \to \mathbb{C} \to 0$

Tensorizando por $R(L)$ obtenemos el complejo:

$0 \to R(L) \otimes \wedge^{r+1} H^0(L) \otimes S(r-1) \to \cdots \to R(L) \otimes \wedge^2 H^0(L) \otimes S(-2) \to R(L) \otimes H^0(L) \otimes S(-1) \to R(L) \otimes S \to R(L) \otimes \mathbb{C} \to 0$

Tomando la parte graduada tenemos:

$$\begin{aligned} [\wedge^p H^0(L) \otimes S(-p) \otimes_S R]_{p+k} &= [\wedge^p H^0(L) \otimes R(-p)]_{p+k} \text{ ya que } S \otimes_S R \simeq R \\ &= \wedge^p H^0(L) \otimes H^0(L^{\otimes k}) \text{ ya que } [R(-p)]_{p+k} = R_k \text{ y} \\ & R = \oplus_{m=0}^{\infty} H^0(L^{\otimes m}) \end{aligned}$$

Así $Tor_p(R(L), \mathbb{C})_{p+k}$ es isomorfo al grupo de homología en el termino medio de

$$\wedge^{p+1} H^0(L) \otimes H^0(L^{k-1}) \to \wedge^p H^0(L) \otimes H^0(L^k) \to \wedge^{p-1} H^0(L) \otimes H^0(L^{k+1}),$$

por lo que el problema se reduce a demostrar la exactitud de la sucesión anterior para $k \geq 2$.

Paso 3: L satisface la propiedad $(N_p) \Leftrightarrow H^1(\wedge^{p+1} M_L \otimes L^{k-1}) = 0$
Dado que tenemos la sucesión exacta

$$0 \to M_L \to H^0(L) \otimes \mathcal{O}_X \to L \to 0$$

de fibrados vectoriales donde L es un fibrado lineal, podemos aplicar el resultado [7, Teorema 4.1.3*] y obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \to \wedge^p M_L \to \wedge^p H^0(L) \otimes \mathcal{O}_X \to \wedge^{p-1} M_L \otimes L \to 0$$

Tensorizando por L^k obtenemos la sucesión (que también es exacta)

$$0 \to \wedge^p M_L \otimes L^k \to \wedge^p H^0(L) \otimes L^k \to \wedge^{p-1} M_L \otimes L^{k+1} \to 0 \tag{4.14}$$

De manera similar obtenemos:

$$0 \to \wedge^{p+1} M_L \otimes L^{k-1} \to \wedge^{p+1} H^0(L) \otimes L^{k-1} \to \wedge^p M_L \otimes L^k \to 0 \tag{4.15}$$

Por otra parte, como $\mathbb{C} = S/(x_0, \ldots, x_r)$ veremos que se puede identificar el complejo de Kozsul con el complejo de Kozsul dual de $x = (x_0, ..., x_r) \in (S^{r+1})^*$, como complejos de módulos graduados.

El complejo de Kozsul de $(x_0, \ldots, x_r) \in S^{r+1}$:

$$0 \to S \to \wedge S^{r+1} \to \wedge^2 S^{r+1} \to ... \to \wedge^{r-1} S^{r+1} \to \wedge^r S^{r+1} \to \wedge^{r+1} S^{r+1} \to \mathbb{C} \to 0$$

Sea $e_0, \ldots, e_r$ una base de S^{r+1}. En cada paso de la resolución la aplicación viene dada por:

$$\begin{array}{rcl} \phi_k : \wedge^k S^{r+1} & \longrightarrow & \wedge^{k+1} S^{r+1} \\ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{l_p} x_{l_p}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge e_{l_p}) \end{array}$$

donde $l_p \in \{l_0, \ldots, l_{r-k}\}$ y este es el complemento de $\{i_1, \ldots, i_k\}$ en $\{0, 1, \ldots, r\}$.

La aplicación anterior siempre es de grado 1, por lo que podemos torcer la resolución y obtenemos:

$$\begin{gathered} 0 \to S \to \wedge S^{r+1}(1) \to \wedge^2 S^{r+1}(2) \to \cdots \to \wedge^{r-1} S^{r+1}(r-1) \to \wedge^r S^{r+1}(r) \to \\ \wedge^{r+1} S^{r+1}(r+1) \to \mathbb{C} \to 0 \end{gathered}$$

Definimos el dual del complejo de Koszul

$$0 \to \wedge^{r+1}(S^{r+1})^* \to \wedge^r (S^{r+1})^* \to \cdots \to \wedge^2 (S^{r+1})^* \to \wedge^1 (S^{r+1})^* \to S \to 0,$$

donde ahora todos los homomorfismos son de grado 1.

Tomando $f_1, \ldots, f_r$ la base dual de $e_0, \ldots, e_r$ con $f_i : S^{r+1} \longrightarrow S$; $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ y definiendo en cada paso de la sucesión la función

$$\begin{array}{rcl} \phi_k^* : \wedge^k (S^{r+1})^* & \longrightarrow & \wedge^{k-1}(S^{r+1})^* \\ f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k} & \longrightarrow & \sum_j (-1)^j x_{i_j} (f_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{f}_{i_j} \cdots \wedge f_{i_k}) \end{array}$$

que también es de grado 1 en cada paso.

Ahora veremos que en efecto podemos identificar ambos complejos. Para ello mostraremos que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd} \wedge^{r-i+1}(S^{r+1})^* \arrow[r, "\phi^*_{r+1-i}"] \arrow[d, "\varphi_{(r+1)-i}"] & \wedge^{r-i}(S^{r+1})^* \arrow[d, "\varphi_{(r+1)-(i+1)}"] \\ \wedge^i S^{r+1} \arrow[r, "\phi_i"] & \wedge^{i+1} S^{r+1} \end{tikzcd}$$

Definimos el isomorfismo contracción $\varphi_k : \wedge^k (S^{r+1})^* \longrightarrow \wedge^{(r+1)-k} S^{r+1}$ de la siguiente manera:

$$\varphi_k(f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k}) = \pm e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{r-k}}$$

donde $\{j_1, \ldots, j_{r-k}\}$ es el complemento de $\{i_1, \ldots, i_k\}$ en $\{0, 1, \ldots, r\}$, y el signo es el que tenga la permutación $(i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{r-k})$.

De acuerdo con las definiciones de las aplicaciones del complejo de Kozsul y de su dual tenemos

$$\begin{array}{rcl} (\phi_i \circ \varphi_{r+1-i})(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_{r-i+1}}) & = & \phi_i(\pm e_{m_1} \wedge \cdots \wedge e_{m_i}) \\ & = & \sum_{l_p} (-1)^{l_p} x_{l_p} e_{m_1} \wedge \cdots \wedge e_{m_i} \wedge e_{l_p}, \end{array}$$

donde $l_p \in \{m_1, \ldots, m_i\}$ y $l_p \in \{m_1, \ldots, m_i\}$ es complemento de $\{j_1, \ldots, j_{r-i+1}\}$ en $\{0, \ldots, r\}$.

Por otra parte

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_{r-i} \circ \phi^*_{r-i+1})(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_{r-i+1}}) & = & \sum_{s=1}^{r-i+1} (-1)^{j_s} x_{j_s} \varphi_{r-i}(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge \hat{f}_{j_s} \wedge \cdots \wedge f_{j-i+1}) \\ & = & \sum_{s=1}^{r-i+1} (-1)^{j_s} x_{j_s} e_{n_1} \wedge \cdots \wedge e_{n_i}, \end{array}$$

donde $j_s \in \{n_1, \ldots, n_i\}$ y $\{n_1, \ldots, n_i\}$ es el complemento de $\{j_1, \ldots, j_{s-1}, j_{s+1}, \ldots, j_{r-i+1}\}$ en $\{0, 1, \ldots, r\}$.

Así tenemos que $(\phi_i \circ \varphi_{r+1-i})(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_{r-i+1}}) = (\varphi_{r-i} \circ \phi^*_{r-i+1})(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_{r-i+1}})$, por lo que ambos complejos son isomorfos. En particular el complejo dual del complejo de Koszul es una resolución graduada de $\mathbb{C}$.

Consideremos el complejo de Koszul en $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}(H^0(L))$

$$0 \to S \to \wedge S^{r+1} \to \wedge^2 S^{r+1} \to \cdots \to \wedge^{r-1} S^{r+1} \to \wedge^r S^{r+1} \to \wedge^{r+1} S^{r+1} \to \mathbb{C} \to 0$$

donde $x = X_0 e_0 + X_1 e_1 + \cdots + X_r e_e$ y $\{e_0, \ldots, e_r\}$ base de S^{r+1}.

Definimos $N := coker(S \longrightarrow S^{r+1}(1))$, así de la sucesión exacta $S \to S^{r+1}(1) \to N \to 0$ ([4, Prop. A2.2]) se sigue que

$$\wedge^{i-1}(S^{r+1}) \otimes S \to \wedge^i(S^{r+1}(1)) \to \wedge^i N \to 0$$

la aplicación de la izquierda es multiplicación exterior por lo que su imagen es la imagen de la diferencial del complejo de Koszul en el paso $i-1$, es decir, $\wedge^i N$ es el conúcleo de la diferencial en el paso $(i-1)$-iésimo. Por tanto tenemos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \arrow[r] & S^{r+1}(1) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \wedge^2 S^{r+1}(2) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \wedge^3 S^{r+1}(3) \arrow[r] & \cdots \\ & & & N \arrow[ur] \arrow[dr] & & \wedge^2 N \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & \end{tikzcd} .$$

Hacificando el complejo de Koszul y las sucesiónes exactas cortas obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}^{r+1}(1) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \wedge^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}^{r+1}(2) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \wedge^3 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}^{r+1}(3) \arrow[r] & \cdots \\ & & & \tilde{N} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \wedge^2 \tilde{N} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & \end{tikzcd} \tag{4.16}$$

dado que $\widetilde{\wedge^i N} = \wedge^i \tilde{N}$. Entonces tenemos

$$0 \to \wedge^{i-1} \tilde{N} \to \wedge^i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}^{r+1}(1) \to \wedge^i \tilde{N} \to 0 \tag{4.17}$$

Consideremos ahora la sucesión

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r+1}}^{r+1}(1) \to \tilde{N} \to 0 \tag{4.18}$$

El rango de la primera aplicación es siempre 1, ya que la sección 1 va a $X_0 e_0 + \cdots + X_r e_r$, donde $e_0, ..., e_r$ son base del fibrado vectorial libre de rango $r+1$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r+1}}^{r+1}$. Como en ningún punto de $\mathbb{P}^r$ se anulan $X_0, \ldots, X_n$ simultáneamente, la imagen de 1 no se anula en ningún punto. Así todas las fibras de $\tilde{N}$ (la fibra de $\tilde{N}$ en un punto p es $\tilde{N} \otimes k(p)$) tienen rango r. Entonces $\tilde{N}$ es un fibrado vectorial de rango r ([6, Ejercicio II.5.8.c]).

Por ello la sucesión 4.18 es una sucesión exacta de fibrados vectoriales y al dualizarla sigue siendo exacta, obtenemos

$$0 \to \tilde{N}^* \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}^{r+1}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \to 0$$

que twistando por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ resulta

$$0 \to \tilde{N}^*(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}^{r+1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1) \to 0. \tag{4.19}$$

Como la matriz de la aplicación de la izquierda de la sucesión 4.18 es $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ la matriz de la aplicación de la derecha de 4.19 es $\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_r \end{pmatrix}$, es decir, dicha aplicación es la aplicación de evaluación de secciones globales de $H^0(L)$, ya que el elemento e_i de la base de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}^{r+1}$ lo enviamos a la sección global x_i de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) = H^0(L)$. Podemos identificar dicha aplicación con la evaluación en

$$0 \to M_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)} \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1) \to 0, \tag{4.20}$$

de donde $\tilde{N}^*(1) \cong M_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)}$.
Restringiendo 4.20 a X obtenemos

$$0 \to M_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)} \mid_X \to H^0(L) \otimes \mathcal{O}_X \to L \to 0 \tag{4.21}$$

que sigue siendo exacta ya que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ es un fibrado por lo que $Tor_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1), \mathcal{O}_X) = 0$.
Por tanto

$$M_L \cong \tilde{N}^*(1) \otimes \mathcal{O}_X$$

Volviendo a 4.16, podemos dualizarla y twistarla con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k+p)$ para todo k, obteniendo

$$\cdots \to \wedge^2 H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k+p-2) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k+p-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k+p) \to 0 \tag{4.22}$$

que es exacta, ya que la sucesión se descompone en sucesiones exactas de fibrados vectoriales, por lo que al dualizar sigue descomponiendose así, por tanto la sucesión dual es una sucesión exacta larga.
Podemos tensorizar 4.22 con $\mathcal{O}_X$ y obtenemos:

$$\cdots \to \wedge^2 H^0(L) \otimes L^{k+p-2} \to H^0(L) \otimes L^{k+p-1} \to L^{k+p} \to 0 \tag{4.23}$$

que sigue siendo exacta ya que 4.22 se descompone en sucesiones exactas cortas de fibrados vectoriales, y al tensorizar con $\mathcal{O}_X$ siguen siendo exactas, por lo que al dualizar sigue descomponiendose así, por tanto sucesión dual es una sucesión exacta larga.

La sucesión exacta larga 4.23 se descompone en sucesiones exactas cortas:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\wedge^3 H^0(L)\otimes L^{k+p-3} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \wedge^2 H^0(L)\otimes L^{k+p-2} \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^0(L)\otimes L^{k+p-1} \arrow[r] & L^{k+p} \arrow[r] & 0 \\
& \wedge^2 M_L\otimes L^{k+p-2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_L\otimes L^{k+p-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

De 4.14, 4.15 y del resultado anterior obtenemos que el siguiente diagrama es exacto:

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & & & \\
\ddots \arrow[dr] & \wedge^{p+1} M_L\otimes L^{k-1} \arrow[d] & & & \\
& \wedge^{p+1} H^0(L)\otimes L^{k-1} \arrow[d] \arrow[dr] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \wedge^{p} M_L\otimes L^{k} \arrow[r] \arrow[d] & \wedge^{p} H^0(L)\otimes L^{k} \arrow[r] \arrow[dr] & \wedge^{p-1} M_L\otimes L^{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & & \wedge^{p-1} H^0(L)\otimes L^{k+1} \arrow[dr] & \\
& & & & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Por el paso 2 necesitamos ver la exactitud de

$$
\wedge^{p+1} H^0(L)\otimes H^0(L^{k-1}) \to \wedge^{p} H^0(L)\otimes H^0(L^{k}) \to \wedge^{p-1} H^0(L)\otimes H^0(L^{k+1}), \tag{4.24}
$$

así que tomamos cohomología en el diagrama anterior y obtenemos

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & & & \\
& H^0(\wedge^{p+1} M_L\otimes L^{k-1}) \arrow[d, "\gamma_1"] & & & \\
& \wedge^{p+1} H^0(L)\otimes H^0(L^{k-1}) \arrow[d, "\gamma_2"] \arrow[dr, "\theta_1"] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H^0(\wedge^{p} M_L\otimes L^{k}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\gamma_3"] & \wedge^{p} H^0(L)\otimes H^0(L^{k}) \arrow[r] \arrow[dr, "\theta_2"] & H^0(\wedge^{p-1} M_L\otimes L^{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& H^1(\wedge^{p+1} M_L\otimes L^{k-1}) \arrow[d] & & \wedge^{p-1} H^0(L)\otimes H^0(L^{k+1}) & \\
& 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

La sucesión 4.24 es exacta si y sólo si $Im\theta_1 = Ker\theta_2$. Pero como $ker\theta_2 = i(H^0(\wedge^p M_L \otimes L^k))$ e $Im\theta_1 \simeq Im\gamma_2$ entonces $Im\theta_1 = Ker\theta_2 = H^0(\wedge^p M_L \otimes L^k)$ si y sólo si $H^1(\wedge^{p+1} M_L \otimes L^{k-1}) = 0$. $\square$

4.4 Prueba del Teorema de Green

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema de Green, pero antes demostraremos un resultado necesario para ello.

Tenemos X una curva lisa irreducible de género g y L un fibrado lineal muy amplio de X generado por sus secciones globales.

Lema 4.4.1 Sean $x_1, \ldots, x_n \in X$ puntos distintos tales que:

i) $L(-\sum x_i)$ es generado por sus secciones globales.

ii) $h^1(L(-\sum x_i)) = h^1(L) = 0$.

Entonces se tiene la sucesión exacta

$$0 \to M_{L(-\sum x_i)} \to M_L \to \oplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X(-x_i) \to 0.$$

Prueba.
Sea $D = \sum x_i$, dado que la sucesión $0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0$ es exacta se tiene que $0 \to L(-D) \to L \to L\mid_D \to 0$ también es exacta.

Tomando cohomología y como $H^1(L(-D)) = 0$ obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to H^0(L(-D)) \to H^0(L) \to H^0(L\mid_D) \to 0,$$

que da lugar a la siguiente sucesión exacta de fibrados vectoriales

$$0 \to H^0(L(-D)) \otimes \mathcal{O}_X \to H^0(L) \otimes \mathcal{O}_X \to H^0(L\mid_D) \otimes \mathcal{O}_X \to 0. \tag{4.25}$$

Por otra parte, como $H^0(L\mid_D) \cong H^0(L\mid_{x_1}) \oplus \cdots \oplus H^0(L\mid_{x_n})$, al tensorizar por $\mathcal{O}_X$

$$H^0(L\mid_D) \otimes \mathcal{O}_X \cong (H^0(L\mid_{x_1}) \otimes \mathcal{O}_X) \oplus \cdots \oplus (H^0(L\mid_{x_n}) \otimes \mathcal{O}_X)$$

por lo que podemos definir

$$\begin{array}{rcl} u_i : H^0(L\mid_{x_i}) \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & L\mid_{x_i} \text{ y} \\ u : H^0(L\mid_D) \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & L\mid_D, \end{array}$$

donde $u = \oplus u_i$ y $ker u_i = \mathcal{O}(-x_i)$, así el $ker u = \oplus \mathcal{O}(-x_i)$.

Como la función u_i es sobreyectiva para todo i se tiene que u es sobreyectiva.

Además como $L(-D)$ está generado por sus secciones globales la aplicación

$$e_{L(-D)} : H^0(L(-D)) \otimes \mathcal{O}_X \to L(-D)$$

es sobreyectiva.
Por lo anterior tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(L(-D)) \otimes \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d, "e_{L(-D)}"] & H^0(L) \otimes \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d, "e_L"] & H^0(L\mid_D) \otimes \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L(-D) \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & L\mid_D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Como $e_{L(-D)}$ y u son sobreyectivas entonces e_L también es sobreyectiva. Utilizando el lema de la serpiente obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to M_{L(-\sum x_i)} \to M_L \to \oplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X(-x_i) \to 0.$$

$\square$

Para demostrar el teorema de Green necesitamos garantizar la existencia de puntos que cumplan el lema 4.4.1. A continuaci 'on veremos algunos resultados para ello.

Teorema 4.1 (Teorema de Posición General) Sea $X \subset \mathbb{P}^r$, $r \geq 2$, una curva irreducible de grado d. Entonces todo hiperplano general H corta a X en d puntos y r cualquiera de ellos son linealmente independientes.

Prueba: Ver [1, General Position Theorem pág. 109].

Lema 4.4.2 Existe un abierto U en $\mathbb{P}^{r*}$ tal que para todo $H \in U$, si $x_1, \ldots x_{r-1} \in H \cap X$, entonces se cumplen las condiciones del lema 4.4.1. Si coleccionamos los divisores D' de grado g formados por g puntos que pertenecen a $H \cap X$, obtenemos un abierto V de X^{r-1} donde se cumple que $h^1(\mathcal{O}\left(D'\right)) = 0$.

Prueba.

Por el teorema de posición general para cada hiperplano general H podemos formar la $(r-1)-$upla $(x_1, \ldots, x_{r-1})$ de puntos generales donde $x_i \in H \cap X$ para $i = 1, \ldots, r-1$. El conjunto formado por todas esas $(r-1)-$uplas forman un abierto denso de X^{r-1} al cual denotaremos por U.

Mostraremos en primer lugar que al tomar una de esas $(r-1)-$uplas del abierto U sus elementos $x_1, \ldots, x_{r-1}$ satisfacen las condiciones del lema 4.4.1.

i) Veamos si $L(-x_1 \cdots - x_{r-1})$ está generado por sus secciones globales. Tenemos que probar que para todo $x \in X$, $h^0(L(-x_1 \cdots - x_{r-1})(-x)) = 1$.
Por contradicción, supongamos que $h^0(L(-x_1 \cdots - x_{r-1} - x)) = 2$.

Sabemos que

$$\mathbb{P}(H^0(L(-x_1 \cdots - x_{r-1} - x))) = \{\text{hiperplanos de } \mathbb{P}^r \text{ que contienen a } x_1, \cdots, x_{r-1}, x\},$$

por lo que $dim\langle x_1, \ldots, x_{r-1}, x\rangle = r-2$. Tenemos entonces que

$$\langle x_1, \cdots, x_{r-1}, x\rangle = \langle x_1, \ldots, x_{r-1}\rangle.$$

Analizando los casos:

Caso 1: Si $x \neq x_1, \dots, x_{r-1}$, los $x_1, \dots, x_{r-1}, x$ puntos son linealmente dependientes, y $x_1, \dots, x_{r-1}, x \in H \cap X$, lo que contradice el teorema de posición general, ya que un hiperplano que corta a X en d puntos, cualquiera r de ellos son linealmente independientes.

Caso 2: Sabemos también que existe un abierto U' de $(\mathbb{P}^r)^*$ donde se satisface el teorema de Bertini, es decir, todo hiperplano de U' corta a la curva X de manera trasversal. Podemos tomar $H \in U \cap U'$. De igual manera que en el caso anterior podemos tomar $\{x_1, \dots, x_{r-1}\} \subset H$ puntos generales.
Si $x \in \{x_1, \dots, x_{r-1}\}$, sin perdida de generalidad podemos suponer que $x = x_1$. Entonces H corta a X en x_1 con multiplicidad 2, lo que contradice el teorema de Bertini ya que H es un hiperplano tal que $\{x_1, \dots, x_{r-1}\} \subset H \cap X$ pero $H \cap X$ no es regular en $x_1 = x$ (Ver [6, Teorema 8.18, capítulo II]).

Por tanto $L(-x_1 \cdots - x_{r-1})$ está generado por sus secciones globales.

ii) $h^1(L(-x_1 \cdots - x_{r-1})) = h^1(L) = 0$. En efecto

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H^0(L(-x_1 \cdots - x_{r-1}))) &= \mathbb{P}\{\text{secciones globales de } L \text{ que se anulan en } x_1, \dots, x_{r-1}\} \\ &= \{\text{hiperplanos de } \mathbb{P}^r \text{que contienen a } x_1, \dots, x_{r-1}\} \end{aligned}$$

Como $x_1, \dots, x_{r-1}$ son linealmente independientes $dim \mathbb{P}(H^0(L(-x_1 \cdots - x_{r-1}))) = r - (r-1) = 1 \Rightarrow h^0(L(-x_1 \cdots - x_{r-1})) = 2$. Utilizando el teorema de $\text{Riemann} - \text{Roch}$ se deduce que $h^1(L(-x_1 \cdots - x_{r-1})) = 0$.

Ahora veamos que existe un abierto de X^{r-1} donde los divisores formados por g de los $r-1$ puntos generales $x_1, \dots, x_{r-1}$, satisfacen $h^1(\mathcal{O}\left(D'\right)) = 0$.

Podemos tomar $x_{i_1}, \dots, x_{i_g}$ con $i_1, \dots, i_g \in 1, \dots, r-1$ puntos generales y escribir $D' = x_{i_1} + \cdots + x_{i_g}$ de grado g.

Por el teorema de $\text{Riemann} - \text{Roch}$:

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}(D')) - h^1(\mathcal{O}(D')) &= deg(D') - g + 1 \\ &= g - g + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

y como D' es efectivo, entonces $h^0(\mathcal{O}(D')) \geq 1$, por lo que:

$$h^1(\mathcal{O}(D')) = 0 \Leftrightarrow h^0(\mathcal{O}(D')) = 1.$$

Ahora utilizaremos el siguiente resultado:

Existe un abierto de $X \times \overset{g)}{\cdots} \times X$ donde los divisores correspondientes D'' tienen $h^0(\mathcal{O}(D'')) = 1$. Es decir, el divisor general D' de grado g, tiene $h^0(\mathcal{O}(D')) = 1$ y por tanto $h^1(\mathcal{O}(D')) = 0$.

Entonces dado el divisor $D = x_1 + \cdots + x_{r-1}$ definido en el abierto U de $X \times \overset{r-1)}{\cdots} \times X$, definimos las proyecciones $\pi_\lambda : X \times \overset{r-1)}{\cdots} \times X \rightarrow X \times \overset{g)}{\cdots} \times X$, tomando g de las $r-1$ coordenadas y luego proyectando en X^g. En total tenemos $\binom{r-1}{g}$ proyecciones.

Sabemos que existe un abierto U' de $X \times \overset{g)}{...} \times X$, donde los divisores definidos en ese abierto son no especiales. Entonces el abierto:

$$V = U \cap (\cap \pi^{-1}(U'))$$

es un abierto no vacío donde los divisores formados por g puntos de entre $x_1, \ldots, x_{r-1}$ son no especiales □

Ahora ya tenemos los elementos necesarios para demostrar el teorema de Green.

Teorema 4.2 (Green) Sea L un fibrado lineal sobre X de grado $2g+1+p$, sumergiendo a $X \subset \mathbb{P}(H^0(L)) = \mathbb{P}^{g+1+p}$. Entonces L satisface la propiedad (N_p).

Prueba.
Por la proposición 4.3.4, probaremos que $H^1(\wedge^{p+1} M_L \otimes L) = 0$.

Como $degL = 2g+1+p \geq 2g+1$, L es muy amplio. Sea i la inmersión inducida por $|L|$. Entonces $i(X)$ no está contenida en ningún hiperplano, ya que i está inducida por el sistema lineal completo de $H^0(L)$.

Además se tiene que $degL \geq 2g+1+p = 2g-2$ entonces $H^1(L) = 0$.

Ahora tomando $D = x_1 + \cdots + x_{r-1}$ donde $x_1, \ldots, x_{r-1}$ son puntos satifaciendo el lema 4.4.1 tenemos la sucesión exacta:

$$0 \to M_{L(-D)} \to H^0(L(-D)) \otimes \mathcal{O}_X \to L(-D) \to 0$$

y del hecho que $h^0(L(-D)) = 2$ obtenemos la sucesión exacta de fibrados vectoriales

$$0 \to M_{L(-D)} \to \mathcal{O}_X^{\otimes 2} \to L(-D) \to 0$$

de lo que resulta $\mathcal{O}_X = \wedge^2 \mathcal{O}_X^{\otimes 2} = M_{L(-D)} \otimes L(-D)$ por lo que $M_{L(-D)} = L^*(D)$, ver [6, Ejercicio 5.16 y Prop. 6.12].

Aplicando el lema 4.4.1, sustituyendo $M_{L(-D)} = L^*(D)$ y haciendo $\Sigma = \oplus \mathcal{O}_X(-x_i)$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to L^*(D) \to M_L \to \Sigma \to 0$$

Aplicando el [7, teorema 4.1.3.] para $p+1$ potencias exteriores

$$0 \to \wedge^p \Sigma \otimes L^*(D) \to \wedge^{p+1} M_L \to \wedge^{p+1} \Sigma \to 0.$$

Twistando por L y dado que $L^*(D) \otimes L = \mathcal{O}_X(D)$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \wedge^p \Sigma \otimes \mathcal{O}_X(D) \to \wedge^{p+1} M_L \otimes L \to \wedge^{p+1} \Sigma \otimes L \to 0. \tag{4.26}$$

Tomando cohomología en 4.26

$$H^1\left(\wedge^p \Sigma \otimes \mathcal{O}_X(D)\right) \to H^1\left(\wedge^{p+1} M_L \otimes L\right) \to H^1\left(\wedge^{p+1} \Sigma \otimes L\right). \tag{4.27}$$

El término de la derecha de 4.26 es suma directa de fibrados lineales de grados

$$(2g + 1 + p) - (p + 1) = 2g > 2g - 2 \Rightarrow H^1(\wedge^{p+1} \Sigma \otimes L) = 0.$$

Ahora analicemos el término de la izquierda de 4.26, tenemos que

$$\wedge^p \Sigma = \oplus_{i_1,...,i_p} \mathcal{O}(-x_{i_1} - ... - x_{i_p}),$$

con $i_1, ..., i_p \in \{1, ..., r - 1\}$ y $deg\left(\wedge^p \Sigma \otimes \mathcal{O}(D)\right) = r - 1 - p = (g + p) - p = g$.

Así que eligiendo D en el abierto V del lema 4.4.2 tenemos que $H^1(\wedge^p \Sigma \otimes \mathcal{O}_X(D)) = 0$ y por tanto $H^1(\wedge^{p+1} M_L \otimes L) = 0$. $\square$

Bibliografía

[1] E. Arbarello, M. Cornalba y P. Griffiths, *Geometry of Algebraic Curves. Volumen I* Springer (1984).

[2] D. Cox, J. Little y D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry* Springer (2005)

[3] D. Eisenbud, *The Geometry of Syzygies.* Springer (2005)

[4] D. Eisenbud, *Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry.* Springer (1999)

[5] J. Harris, *Algebraic Geometry a First Course.* Springer (2000)

[6] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry* Springer (1977)

[7] F. Hirzerbruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry* Springer (1978)

[8] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory* Cambridge University Press (2002)

[9] R. Lazarsfeld, *A sampling of vector bundles techniques in the study of linear series* Word Sci. Publ., Teaneck, NJ (1989)

[10] D. Perrin, *Algebraic Geometry. An Introduction.* Springer. (2008).

[11] K. Smith, L. Kahanpaa y P. Kekalainen *An Invitation to Algebraic Geometry.* Springer (2000).