UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

"INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS"

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR:

GERMAN ALEXANDER ACOSTA GONZÁLEZ

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

OPCIÓN: ÁLGEBRA-ANÁLISIS

DICIEMBRE DE 2004

San Salvador El Salvador Centro América

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS.

Rectora	**: Dra. María Isabel Rodríguez.**
Secretaria General	**: Licda. Margarita Muñoz.**
Fiscal General	**: Lic. Pedro Rosalío Escobar.**

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA.

Decano	**: MSc. José Héctor Elías Díaz.**

ESCUELA DE MATEMÁTICA.

Director	**: Lic. Mauricio Hernán Lovo Córdova.**

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

Trabajo de graduación:

“INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS”

Presentado por:

Br. German Alexander Acosta González

Para optar al título de:

Licenciado en Matemática

Opción Álgebra-Análisis

Asesores:

Lic. Mauricio Hernán Lovo : ______________________________

Lic. Manuel de Jesús Cortez Álvarez : ______________________________

Ciudad Universitaria, Diciembre de 2004.

Agradecimientos

A Dios: por permitirme, salud, fortaleza, trabajo y voluntad para terminar este escrito.

A mis asesores: por orientar las ideas expuestas en este trabajo.

A mi familia: mis padres José Rutilio y María Hilda, mis hermanos Nelson, Will, Hugo, Beatriz y Norma.

A mi querida esposa: Margarita, quien tuvo la paciencia de soportar mis angustias, me dispensó parte de su tiempo y me animó hasta que concluyera este trabajo.

A todos mis maestros y compañeros de la Escuela de Matemática: quienes han marcado siempre una huella en mi persona, les agradezco por los conocimientos que me proporcionaron y por la amistad que siempre me han brindado.

A todos mis alumnos y amigos: con quienes he compartido estos nueve años de docencia tanto en el Externado San José como en la Universidad de El Salvador.

A mi ex-compañero de tesis: Mario Chávez, quien por motivos personales no pudo terminar el trabajo, pero fue pilar importante para que se llevara a cabo.

TABLA DE CONTENIDOS

Resumen

El desarrollo de este trabajo, está conformado por cuatro capítulos, en los que se exponen los conceptos básicos del cálculo de diferencias, las ecuaciones en diferencia, sus respectivas clasificaciones y los distintos métodos que se utilizan para resolver dichas ecuaciones. Se desarrollan variados ejemplos para poner en práctica la teoría.

Capítulo I.. Operaciones Elementales con diferencias y sumas.

Se estudian en este capítulo los conceptos básicos de dominio discreto, la diferencia de una función, definiendo dicha operación y estableciendo la relación con otros operadores. Se deduce la diferencia de funciones básicas, y la diferencia del producto y cociente de funciones, se define la operación inversa de la diferencia, conocida como la suma de una función.

Capítulo II. Ecuaciones en Diferencias Finitas

En este capítulo se inicia con la terminología básica sobre ecuaciones en diferencias finitas, tales como ecuación en diferencias finitas, solución de una ecuación en diferencias finitas, clasificaciones de estas ecuaciones de acuerdo a orden, linealidad, de coeficientes constantes o variables y se aborda el método para resolver ecuaciones en diferencias finitas homogéneas con coeficientes constantes.

Capítulo III. Solución General de Ecuaciones en Diferencias Lineales no Homogéneas con Coeficientes Constantes.

En este capítulo se procede a resolver ecuaciones en diferencias finitas no homogéneas, conocidas también como ecuaciones completas. Se inicia presentando una proposición que establece cómo será la solución general para dicho tipo de ecuaciones; luego se estudian tres métodos de cómo poder encontrar una solución particular de dicha ecuación. Los métodos son: el método de coeficientes indeterminados, el método de variación de parámetros y el método de operadores.

Capítulo IV. Ecuaciones en Diferencias con Coeficientes Variables.

En este capítulo se estudian algunos métodos para resolver ecuaciones en diferencias con coeficientes variables, limitándose a ecuaciones de primer y segundo orden.

Introducción

La información que se dispone de los fenómenos estudiados por las diferentes disciplinas científicas se presenta usualmente de forma discreta. Este hecho fundamental plantea la necesidad de manejar herramientas y técnicas para el estudio, representación, análisis y simulación de variables discretas.

En el presente trabajo se pretende desarrollar los elementos básicos del Análisis de Ecuaciones en Diferencias Finitas, punto medular para el abordaje y estudio de una gran gama de fenómenos tanto para las ciencias básicas como las tecnológicas.

El desarrollo de estas técnicas data de inicios del Renacimiento cuando se desarrollan las ciencias experimentales, en las cuales las bases de observación son discretas. El refinamiento e interpolación del modelaje fue dando como resultado una representación continua de los fenómenos pero cuya base está fundamentada en el desarrollo de técnicas de tratamiento de datos muestrales.

El modelado de diversos fenómenos económicos, físicos, biológicos, que establecen relaciones de cambio entre variables, pueden ser abordados recurriendo a técnicas discretas y continuas. Las técnicas continuas usualmente hacen uso de ecuaciones diferenciales como modelo matemático que describe el fenómeno, las cuales son representaciones estándar que pueden no responder apropiadamente a investigaciones que arrojen datos de tipo discreto, surgiendo la necesidad de manejar técnicas de matemática discreta, una de cuyas áreas más importantes es la de las ecuaciones en diferencias finitas. Mediante éstas es posible modelar o simular fenómenos de los cuales se dispone un número finito (discreto) de datos.

Siendo las ecuaciones en diferencias finitas, un área no desarrollada en la Escuela de Matemática, existe escasez y dispersión de material bibliográfico que apoye el desarrollo de cursos específicos de esta área, así como otras áreas de conocimiento matemática y/o proyectos de investigación en los cuales las ecuaciones en diferencias se constituyan en un instrumento de apoyo.

En este trabajo se van a establecer las bases para el estudio y abordaje del Análisis de las Ecuaciones en Diferencias Finitas, a partir de un acopio bibliográfico que integre desarrollos teóricos, enfoques y aplicaciones de las ecuaciones en diferencias que se constituyan en material de apoyo con el objeto de disponer de un trabajo propedéutico para la iniciación y profundización de dicha área de investigación.

Los objetivos que se tienen al desarrollar este trabajo son:

- Presentar los conceptos y métodos básicos del Análisis de Ecuaciones en Diferencias Finitas.
- Crear material bibliográfico para la escuela de Matemática de la Universidad de El Salvador.

CAPÍTULO I. OPERACIONES ELEMENTALES CON DIFERENCIAS Y SUMAS

1.0 INTRODUCCIÓN.

Se abordarán en este capítulo los conceptos básicos de dominio discreto, la diferencia de una función, se definirá dicha operación y se establecerá la relación con otros operadores. Se deducirá la diferencia de funciones básica, y la diferencia del producto y cociente de funciones, se definirá la operación inversa de la diferencia, conocida como la suma de una función.

1.1 DEFINICIONES BÁSICAS Y TERMINOLOGÍA.

1.1.1 Funciones reales de una variable real. Dominio discreto.

Uno de los conceptos más útiles en matemática es el de función. Ésta se define como la regla de correspondencia que asocia a cada elemento x de un conjunto X uno y sólo un elemento y de un conjunto Y. El elemento y se llama imagen de x bajo f y se denota por $y = f(x)$ ó $y = f_x$. El conjunto X se conoce como el dominio de la función, mientras que el subconjunto de Y, constituido por todas la imágenes de los elementos de X, se conoce como rango o recorrido.

El dominio de una función puede ser continuo o discreto. El dominio será continuo si los elementos x pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo especificado de números reales. Un dominio discreto es aquel que toma solamente valores específicos dentro de un conjunto contable. Existen dos posibilidades para que se produzca la variación discreta:

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$k = T, 2T, 3T, \ldots \quad T \in \mathbb{R}$$

En la primera opción k es una variable entera $(k \in \mathbb{Z})$, mientras que en la segunda, es una variable real que sólo toma ciertos valores espaciados uniformemente. En este escrito, el dominio de trabajo serán los enteros no negativos, los cuales serán representado por $\mathbb{N}_0$, es decir

$$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,5,\ldots\}$$

Mientras que

$\mathbb{N}_a = \{a, a+1, a+2, \ldots\}$ para enteros no negativos iniciando desde a y
$\mathbb{N}_{(a,b-1)} = \{a, a+1, a+2, \ldots, b-1\}$ para los enteros no negativos comprendidos entre a y $b-1$

En general, para representar cualquiera de los conjuntos anteriores se usará el símbolo $\mathbb{N}$.

En este escrito se trabajará con funciones de valor real definidas sobre $\mathbb{N}$ cuyas imágenes se representan por $f(k)$ ó y_k.

1.1.2 Diferencias Progresivas y Regresivas.

Definición 1. Sea f una función definida sobre $\mathbb{N}$ tal que $y_k = f(k)$. Si $k,\ k+1,\ k+2$ están definidas en $\mathbb{N}$, entonces:

a) La **Diferencia Progresiva**, denotada por el operador Δ, está definida como:

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k) \text{ ó } \Delta y_k = y_{k+1} - y_k. \quad (1.1)$$

b) La **Diferencia Regresiva** denotada por el operador ∇, está definida como:

$$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1) \text{ ó } \nabla y_k = y_k - y_{k-1}. \quad (1.2)$$

Ejemplo 1. Si $f(k) = 2k^2$, encuentre $\Delta f(k)$ y $\nabla f(k)$

$$\begin{aligned}\Delta f(k) &= f(k+1) - f(k) \\ &= 2(k+1)^2 - 2k^2. \\ &= 4k+2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla f(k) &= f(k) - f(k-1) \\ &= 2k^2 - 2(k-1)^2 \\ &= 4k-2.\end{aligned}$$

1.1.3 Operadores I , E (identidad y traslación).

Definición 2. Sea f una función definida sobre □ tal que $y_k = f(k)$. Si $k, k+1$ están definidas en □ entonces:

a) El operador **Identidad I** se define por

$$If(k) = f(k) \quad \text{ó} \quad Iy_k = y_k \ . \quad (1.3)$$

Por lo general, se identifica I con 1.

b) El operador **Traslación** u operador **Siguiente E** se define por:

$$Ef(k) = f(k+1) \ \text{ ó } \ Ey_k = y_{k+1}. \quad (1.4)$$

Reescribiendo la diferencia progresiva en término de los operadores anteriores se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta f(k) &= f(k+1) - f(k) \\ &= Ef(k) - If(k) \\ &= (E-I)f(k)\end{aligned}$$

Así,

$$\Delta \equiv E - I \ \text{ ó } \ \Delta \equiv E - 1 \quad (1.5)$$

Teorema 1. **(Linealidad de los operadores Δ y E).** Supóngase que f y g son funciones definidas en □, con $\alpha \in$ □**,** entonces si αf y $f \pm g$ están definidas en □, se cumple:

$$i)\Delta\left[f_k+\alpha g_k\right]=\Delta f_k+\alpha\Delta g_k \qquad i')\, E\left[f_k+\alpha g_k\right]=Ef_k+\alpha Eg_k \quad (1.6)$$

Demostración.

$$\begin{array}{rcl} i) \quad \Delta\left[f_k+\alpha g_k\right] & = & f_{k+1}+\alpha g_{k+1}-\left(f_k+\alpha g_k\right) \\ & = & \left(f_{k+1}-f_k\right)+\alpha\left(g_{k+1}-g_k\right) \\ & = & \Delta f_k+\alpha\Delta g_k \end{array}$$

De forma idéntica se prueba i' considerando que $E \equiv \Delta+1$.

Definición 3. $\Delta^2 y_k = \Delta\Delta y_k$ y en general, si n es un entero no negativo, $\Delta^n y_k = \Delta\Delta^{n-1} y_k$. Análogamente se define $I^n y_k$ y $E^n y_k$.

Teorema 2. $E^p y_k = y_{k+p}$ (1.7). Con p cualquier número entero.

Demostración. Aplicando inducción matemática se tiene:

$i)$ Si $p=1$, $Ey_k = y_{k+1}$

$ii)$ Supóngase se cumple para $p=m-1$, $E^{m-1} y_k = y_{k+m-1}$

$iii)$ Verificar que se cumple para $p=m$,

$$\begin{array}{rcl} E^m y_k & = & EE^{m-1} y_k \\ & = & Ey_{k+m-1} \\ & = & y_{k+m-1+1} \\ & = & y_{k+m} \\ & = & y_{k+p} \end{array}$$

Teorema 3. Las diferencias de orden mayor de una función se calculan de la manera siguiente

$$\Delta^n y_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \, y_{k+n-i} \qquad \textbf{(1.8)}$$

Demostración. De (1.5) se tiene $\Delta y_k = (E-1)y_k$, luego

$$\Delta^n y_k = (E-1)^n y_k \ ,$$

desarrollando el lado derecho de la ecuación, aplicando la forma binomial de Newton, se tiene:

$$(E-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i E^{n-i}$$

entonces:

$$(E-1)^n y_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i E^{n-i} y_k$$

pero:

$E^{n-i} y_k = y_{k+n-i}$, por el teorema 2, entonces se cumple el teorema 3.

Ejemplo 3. Hallar $\Delta^2 f(k)$, $\Delta^3 f(k)$.

Aplicando el teorema 3 se tiene:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f_k &= \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} (-1)^i \, y_{k+2-i} \\
&= \binom{2}{0}(-1)^0 y_{k+2} + \binom{2}{1}(-1)^1 y_{k+1} + \binom{2}{2}(-1)^2 y_k \\
&= y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 f_k &= \sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}(-1)^i\, y_{k+3-i}\\ &= \binom{3}{0}(-1)^0 y_{k+3}+\binom{3}{1}(-1)^1 y_{k+2}+\binom{3}{2}(-1)^2 y_{k+1}+\binom{3}{3}(-1)^2 y_k\ .\\ &= y_{k+3}-3y_{k+2}+3y_{k+1}-y_k\end{aligned}$$

<u>Ejemplo 4.</u> Dado $f_k = k^2$, hallar $\Delta^2 f_k$

Aplicando el desarrollo del ejemplo 3, se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta^2 k^2 &= (k+2)^2-2(k+1)^2+(k)^2\\ &= 2\end{aligned}$$

<u>Ejemplo 5.</u> Dado $f_k = k^2$, hallar $\Delta^3 f_k$

Aplicando el desarrollo del ejemplo 3, se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta^3 k^2 &= (k+3)^2-3(k+2)^2+3(k+1)^2-k^2\\ &= 0\end{aligned}$$

Es de notar que si se saca la diferencia de un orden mayor que el grado la función, dicha diferencia resulta cero.

1.2 REGLAS PARA LA DIFERENCIA DE UNA FUNCIÓN.

1.2.1 Función constante

Si $f_k = c,$ donde c es una constante, para cualquier $c \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta f_k &= f_{k+1}-f_k\\ &= c-c \qquad\qquad (1.9)\\ &= 0\end{aligned}$$

1.2.2 Función identidad

Si $f(k) = k,$ con $f(k)$ la función identidad, entonces:

$$\begin{aligned}\Delta f(k) &= f(k+1) - f(k) \\ &= k+1-k \\ &= 1\end{aligned} \qquad (1.10)$$

1.2.3 Función exponencial

Si $f(k) = a^k$, con $a \neq 0$ y k variable, entonces

$$\begin{aligned}\Delta a^k &= a^{k+1} - a^k \\ &= a^k(a-1).\end{aligned} \qquad (1.11)$$

La $m-ésima$ diferencia de la función exponencial $\Delta^m a^k$, está dada por

$$\Delta^m a^k = (a-1)^m a^k.$$

Demostración (por inducción matemática)

i. Verificando con $m = 1$

$$\Delta \ a^k = (a-1) \ a^k. \text{ por regla 1.2.3}$$

ii. Suponiendo que se cumple para $m = n-1$

$$\Delta^{n-1} a^k = (a-1)^{n-1} a^k.$$

iii. Verificar que se cumple para $m = n$

$$\begin{aligned}\Delta^n a^k &= \Delta[\Delta^{n-1}a^k]\\ &= \Delta[(a-1)^{n-1}a^k]\\ &= (a-1)^{n-1}[\Delta a^k]\\ &= (a-1)^{n-1}[(a-1)a^k]\\ &= (a-1)^n a^k.\end{aligned}$$

<u>Ejemplo 6.</u> Calcular $(\Delta^2-\Delta)(n^2-1)$

$$\begin{aligned}(\Delta^2-\Delta)(n^2-1) &= \Delta(\Delta(n^2-1))-\Delta(n^2-1)\\ &= \Delta\left(\left(n+1\right)^2-1-\left(n^2-1\right)\right)-\left(\left(n+1\right)^2-1-\left(n^2-1\right)\right)\\ &= \Delta(2n+1)-(2n+1)\\ &= 2\left(n+1\right)+1-\left(2n+1\right)-2n-1\\ &= 1-2n.\end{aligned}$$

1.2.4 Diferencia de un producto de funciones.

i. Sean $y(k)$ y $z(k)$ funciones cuyas diferencias existen, entonces la diferencia del producto de dichas funciones, se obtiene por:

$$\begin{aligned}\Delta\left[y(k)z(k)\right] &= y(k+1)\,z(k+1)-y(k)\,z(k)\\ &= y(k+1)\,z(k+1)-y(k)\,z(k)+y(k+1)\,z(k)-y(k+1)\,z(k)\\ &= y(k+1)\,z(k+1)-y(k+1)\,z(k)+y(k+1)\,z(k)-y(k)\,z(k)\\ &= y(k+1)[\Delta z(k)]+z(k)[\Delta y(k)]\end{aligned}\qquad(1.12)$$

ii. Ya que $\Delta\left[y(k)z(k)\right]=\Delta\left[z(k)y(k)\right]$, se puede obtener de la fórmula anterior

$$\Delta\left[z(k)y(k)\right]=z(k+1)\left[\Delta y(k)\right]+y(k)\left[\Delta z(k)\right]\quad(1.13)$$

Ejemplo 7. Calcular $\Delta\left(n^2 2^n\right)$

$$\begin{aligned}\Delta(n^2 2^n) &= (n+1)^2\Delta(2^n) + 2^n\,\Delta n^2\\ &= (n^2+2n+1)(2^{n+1}-2^n) + 2^n\left[(n+1)^2 - n^2\right]\\ &= 2^n(n^2+2n+1) + 2^n(n^2+2n+1-n^2)\\ &= 2^n(n^2+4n+2).\end{aligned}$$

o bien usando (1.13)

$$\begin{aligned}\Delta\left(2^n n^2\right) &= 2^{n+1}\Delta\left(n^2\right) + n^2\Delta\left(2^n\right)\\ &= 2^{n+1}\left(2n+1\right) + n^2\,2^n\\ &= 2^n\,(4n+2) + n^2\,2^n\\ &= 2^n\,(n^2+4n+2).\end{aligned}$$

1.2.5 Diferencia de un cociente de funciones.

Sean $y(k)$ y $z(k)$ dos funciones cuyas diferencias existen y $z(k) \neq 0$, $z(k+1) \neq 0$, entonces la diferencia de un cociente puede expresarse como:

$$\begin{aligned}\Delta\left[\frac{y(k)}{z(k)}\right] &= \frac{y(k+1)}{z(k+1)} - \frac{y(k)}{z(k)}\\ &= \frac{y(k+1)z(k) - y(k)z(k+1)}{z(k+1)z(k)}\\ &= \frac{y(k+1)z(k) - y(k)z(k) + y(k)z(k) - y(k)z(k+1)}{z(k+1)z(k)} \qquad (1.14)\\ &= \frac{z(k)\Delta y(k) - y(k)\Delta z(k)}{z(k+1)z(k)}\end{aligned}$$

Ejemplo 8. Calcular $\Delta\left(\dfrac{n^2}{2^n}\right)$. Aplicando la fórmula de (1.14) se tiene

$$\Delta\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = \frac{2^n\Delta(n^2)-n^2\Delta 2^n}{2^{n+1}2^n}$$
$$= \frac{2^n(2n+1)-n^2 2^n}{22^n 2^n}$$
$$= \frac{2n+1-n^2}{2^{n+1}}$$

1.2.6 Diferencia de polinomios. Funciones factoriales.

El cálculo de la diferencia de un polinomio se reduce a calcular la diferencia de x^n. Sin embargo ésta diferencia no resulta expresada con una fórmula muy sencilla. Por ejemplo:

$$\Delta x^3 = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2+3x+1$$
$$\Delta x^4 = (x+1)^4 - x^4 = 4x^3+6x^2+4x+1.$$

Para simplificar la representación de la diferencia de un polinomio se define la función factorial $x^{(n)}$.

$$x^{(n)} = \begin{cases} x(x-1)(x-2)...(x-n+1) & n=1,2,3,... \\ 1 & n=0 \end{cases}$$

Por ejemplo

$$x^{(1)} = x\,, \qquad x^{(2)} = x(x-1) = x^2 - x$$
$$x^{(3)} = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

<u>Teorema 4.</u> Dado $x^{(n)}$, la función factorial, entonces $\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$

Demostración.

$$(x+1)^{(n)} = (x+1)x(x-1)(x-2)...(x+1-n+1)$$
$$= (x+1)\underbrace{x(x-1)(x-2)...(x-(n-1)+1)}$$
$$= (x+1)x^{(n-1)}$$

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
x^{(n)} &= x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2)(x-n+1) \\
&= \underbrace{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1)+1)}(x-n+1) \\
&= x^{(n\text{-}1)}(x+1-n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta x^{(n)} &= (x+1)^{(n)} - x^{(n)} \\
&= \left(x+1\right)x^{(n-1)} \text{ - } (x-n+1)\,x^{(n-1)} \\
&= [x+1-x+n-1]\,x^{(n-1)} \\
&= n\,x^{(n-1)}. \qquad\qquad\qquad (n=1,2,3,\ldots)
\end{aligned}
$$

<u>Ejemplo 9.</u> Calcular $\Delta x^{(3)}$.

$$
\begin{aligned}
\Delta x^{(3)} &= 3x^{(2)} \\
&= 3x(x-1) \\
&= 3x^2 - 3x.
\end{aligned}
$$

<u>Ejemplo 10.</u> Hallar $\Delta\left(x^3 - 2x^2 + x - 5\right)$

Existen varias alternativas para hallar dicha diferencia,

i) Por definición:

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(x^3 - 2x^2 + x - 5\right) &= \Delta x^3 - \Delta\left(2x^2\right) + \Delta x - \Delta 5 \\
&= \Delta x^3 - 2\left(\Delta x^2\right) + \Delta x - \Delta 5 \\
&= \left(x+1\right)^3 - x^3 - 2\left[\left(x+1\right)^2 - x^2\right] + \left[x+1-x\right] - (5-5) \\
&= 3x^2 - x.
\end{aligned}
$$

ii) Buscar expresar el polinomio en términos de funciones factoriales, y calcular su diferencia.

Expresar

$$
x^3 - 2x^2 + x - 5 = Ax^{(3)} + Bx^{(2)} + Cx^{(1)} + D
$$

como suma de funciones factoriales con coeficientes desconocidos. Por ser un polinomio de grado 3, no hay necesidad de incluir una función factorial mayor de $x^{(3)}$, pero lo que se tratará de encontrar son los coeficientes desconocidos, A, B, C y D para lo cual se le dan a x los valores de $0,\ 1,\ 2$ obteniendo $D = -5,\ C = 0$ y $B = 1$ con lo cual se puede calcular el coeficiente restante.

Este cálculo se puede hacer también por medio de la división sintética. Como se muestra a continuación:

0	1	-2	1	-5
		0	0	0
1	1	-2	1	$-5 = D$
		1	-1	
2	1	-1	$0 = C$	
		2		
	$1 = A$	$1 = B$		

Por lo tanto

$$x^3 - 2x^2 + x - 5 = Ax^{(3)} + Bx^{(2)} + Cx^{(1)} + D = x^{(3)} + x^{(2)} - 5$$

de donde

$$\begin{aligned}
\Delta(x^3 - 2x^2 + x - 5) &= \Delta\left(x^{(3)} + x^{(2)} - 5\right) \\
&= \Delta x^{(3)} + \Delta x^{(2)} + \Delta 5 \\
&= 3x^{(2)} + 2x^{(1)} - 0 \\
&= 3x(x-1) + 2x \\
&= 3x^2 - x
\end{aligned}$$

La anterior respuesta, viene a coincidir con la diferencia del polinomio obtenido por definición.

En conclusión, para obtener la diferencia de un polinomio, se puede hacer por medio de la definición o bién expresándolo en términos de funciones factoriales y luego sacando la diferencia de cada uno de dichos términos.

1.2.6.1 Extensión de las funciones factoriales.

Cuando n toma valores negativos la función $x^{(n)}$ se define como:

$$x^{(n)} = \frac{1}{(x-n)^{(-n)}}. \qquad (1.15)$$

<u>Ejemplo 11.</u> $$x^{(-3)} = \frac{1}{(x+3)^{(3)}}.$$

<u>Teorema 5.</u> $\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$, también se cumple para $n < 0$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\Delta x^{(n)} &= (x+1)^{(n)} - x^{(n)} \\
&= \frac{1}{(x+2)(x+3)...(x+1-n)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)...(x-n)} \\
&= \frac{x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)...(x+1-n)} - \frac{x+1-n}{(x+2)(x+3)...(x+1-n)} \\
&= \left(x+1\right)x^{(n-1)} - \left(x+1-n\right)x^{(n-1)} \\
&= nx^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

con lo que, $\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$ se cumple para los valores de $n \in \mathbb{Z}$.

1.3 LA OPERACIÓN SUMA.

<u>Definición 4</u>. Sean y_k e Y_k dos funciones tales que $\Delta Y_k = y_k$. A Y_k se le llama una antidiferencia o suma de y_k y se denota por:

$$Y_k = \Delta^{-1} y_k \qquad (1.16)$$

Δ^{-1} es el operador suma y cumple

$$\Delta\Delta^{-1} y_k = y_k \qquad (1.17).$$

Además $\Delta^{-1} y_k$ se lee suma de y_k.

Ejemplo 12. Hallar $\Delta^{-1}(1)$, $\Delta^{-1}a^n$, $\Delta^{-1}x^{(n)}$.

$$\Delta^{-1}(1) = n + A, \quad \text{con } A \text{ constante, ya que}$$

$$\begin{aligned}\Delta(n+A) &= \Delta n + \Delta A \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\Delta^{-1}a^n = \frac{a^n}{a-1} + A, \quad \text{con } A \text{ constante, ya que}$$

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{a^n}{a-1} + A\right) &= \Delta \frac{a^n}{a-1} + \Delta A \\ &= \frac{(a-1)a^n}{a-1} \\ &= a^n.\end{aligned}$$

$$\Delta^{-1}x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + A, \quad \text{con } A \text{ constante, ya que}$$

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{x^{(n+1)}}{n+1} + A\right) &= \Delta \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + \Delta A \\ &= \frac{(n+1)x^{(n)}}{n+1} \\ &= x^{(n)}.\end{aligned}$$

Teorema 6. La suma de una función y_k está dada por:

$$\Delta^{-1}y_k = \sum_{k=1}^{n-1} y_k + A, \text{ con } A \text{ una constante..}$$

Demostración:

Sea $z_n = \Delta^{-1}y_n$

$$
\begin{aligned}
\Delta z_n &= \Delta\Delta^{-1} y_n \\
z_{n+1} - z_n &= y_n \\
z_n - z_{n-1} &= y_{n-1} \\
z_{n-1} - z_{n-2} &= y_{n-2} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
z_3 - z_2 &= y_2 \\
\underline{z_2 - z_1} &= \underline{y_1} \quad \text{sumando miembro a miembro se tiene:} \\
z_n - z_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} y_k \\
z_n &= \sum_{k=1}^{n-1} y_k + z_1 \\
\Delta^{-1} y_n &= \sum_{k=1}^{n-1} y_k + A \quad \text{con } A = z_1 = \Delta^{-1} y_1
\end{aligned}
$$

<u>Teorema 7.</u> Los operadores Δ y Δ^{-1} no son conmutativos $\Delta^{-1}\Delta y_n \neq \Delta\Delta^{-1} y_n$, pero pueden llegar a ser iguales , tomándose una constante adecuada.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\Delta^{-1}\Delta y_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(y_{k+1} - y_k\right) + A \\
&= y_n - y_1 + A \\
&= y_n + (A - y_1) \\
&= \Delta\Delta^{-1} y_n + B, \quad \text{con } B \text{ constante}
\end{aligned}
$$

Pero B es arbitrario, entonces se puede hacer cero cumpliéndose en ese caso la igualdad.

La fórmula para calcular la suma de una función y_k, puede interpretarse como la suma de una serie, de la manera siguiente:

<u>Teorema 8.</u> Si F_k es una antidiferencia de f_k, la $\sum_{k=1}^{n} f_i = F_{n+1} - F_1$ (analogía entre este resultado y el teorema fundamental del cálculo)

Demostración:

Se tiene que

$$
\begin{aligned}
z_n - z_1 &= \sum_{i=1}^{n-1} f_i \\
z_{n+1} - z_1 &= \sum_{i=1}^{n} f_i
\end{aligned}
$$

pero $z_{n+1} = \Delta^{-1} f_{n+1} = F_{n+1}$,

entonces $F_{n+1} - F_1 = \sum_{i=1}^{n} f_i$

<u>Ejemplo 13.</u> Dado $\Delta y_k = c,$ hallar la suma de c, $\left(\Delta^{-1} c\right)$ o bien, hallar y_k

$$\Delta y_k = c$$

$$
\begin{aligned}
y_k &= \sum_{k=1}^{n-1} c + A \\
&= (n-1)c + A
\end{aligned}
$$

<u>Ejemplo 14.</u> Dado $\Delta y_n = 2(n+1)$, hallar la suma de $2(n+1)$, $\left(\Delta^{-1}(2(n+1))\right)$ o bien, hallar y_n.

$$\Delta y_n = 2(n+1)$$

$$y_n = \Delta^{-1} y_n + A$$
$$y_n = \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) + A$$
$$= 2\sum_{k=2}^{n} k + A$$
$$= 2\left[\sum_{k=1}^{n} k - 1\right] + A$$
$$= 2\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1\right] + A$$
$$= n(n+1) - 2 + A$$
$$= n(n+1) + (A-2)$$
$$= n(n+1) + B$$

<u>Ejemplo 15.</u> Dado $\Delta y_n = \alpha^n$, con $\alpha \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, hallar la suma de α^n, $\left(\Delta^{-1}\alpha^n\right)$ o bien, hallar y_n.

$$\Delta y_n = \alpha^n$$

$$y_n = \Delta^{-1}\alpha^n + A$$
$$y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^n + A$$
$$= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots \alpha^{n-1} + A$$

Haciendo $S_n = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots \alpha^{n-1}$, y luego multiplicando S_n por α, se tiene:

$\alpha S_n = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \ldots \alpha^n$, restando S_n de αS_n, se tendrá:

$$\alpha S_n - S_n = \alpha^n - \alpha \text{, despejando } S_n$$
$$S_n = \frac{\alpha(\alpha^{n-1} - 1)}{\alpha - 1}$$

Entonces:

$$y_n = \frac{\alpha(\alpha^{n-1} - 1)}{\alpha - 1} + A.$$

Ejemplo 16. Dado $\Delta y_n = n(n-1)$, hallar la suma de $n(n-1)$, $\left(\Delta^{-1} n(n-1)\right)$ o bien, hallar y_n.

Es fácil verificar que $y_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3} + A$.

Ejemplo 17. Aplicando la fórmula del teorema 8, **c**alcular $1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1)$.

Representando la suma de dicha serie por S_n. Entonces:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n} (i+1)^{(2)} = \left[\Delta^{-1}\left(i+1\right)^{(2)}\right]_1^{n+1} \\ &= \left[\frac{\left(i+1\right)^{(3)}}{3}\right]_1^{n+1} = \frac{1}{3}\left[\left(n+2\right)^{(3)} - 2^{(3)}\right] = \frac{1}{3}(n+2)(n+1)n \end{aligned}$$

Ejemplo 19. Calcular $3.5 + 5.7 + 7.9 + ... + (2n+1)(2n+3)$.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} (2i+1)(2i+3)$. Obsérvese que $(2i+1)(2i+3) = 4\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(i+\frac{3}{2}\right) = 4\left(i+\frac{3}{2}\right)^{(2)}$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} S_n &= 4\left[\Delta^{-1}\left(i+\frac{3}{2}\right)^{(2)}\right]_1^{n+1} \\ &= \frac{4}{3}\left\{\left(n+\frac{5}{2}\right)^{(3)} - \left(\frac{5}{2}\right)^{(3)}\right\} \\ &= \frac{4}{3}\left\{\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{6}(2n+5)(2n+3)(2n+1) - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

1.3.1 Suma por partes.

Partiendo de la diferencia de un producto de dos funciones, se encontrará una expresión para la suma de un producto.

Sean g_k e y_k dos aplicaciones. Se sabe que:

$$\Delta(g_k y_k) = g_{k+1}\Delta y_k + y_k \Delta g_k \text{ o bién } \Delta(g_k y_k) = y_{k+1}\Delta g_k + g_k \Delta y_k$$

Escogiendo la última expresión y despejando $g_k \Delta y_k$, se tiene:

$$g_k \Delta y_k = \Delta(g_k y_k) - y_{k+1}\Delta g_k \text{ , aplicando suma en ambos miembros se tiene :}$$

$$\Delta^{-1}(g_k \Delta y_k) = g_k y_k - \Delta^{-1}(y_{k+1}\Delta g_k) + A \text{, con } A \text{ una constante.}$$

Debe tenerse cuidado de escoger g_k, como la función que fácilmente puede sacarse la diferencia, y y_k, la función cuya suma pueda obtenerse fácilmente.

<u>Ejemplo 20.</u> Aplicando la suma por partes, determinar la serie $\sum_{k=1}^{n} k2^k$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k2^k &= n2^n + \sum_{k=1}^{n-1} k2^k \\ &= n2^n + \Delta^{-1}k2^k\end{aligned}$$

Para calcular $\Delta^{-1}k2^k$, se aplicará la suma por partes, tomando $g_n = n$, se obtiene que $\Delta g_n = 1$, y tomando $\Delta y_n = 2^n$, se tiene que $y_n = 2^n$. Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k2^k &= n2^n + \sum_{k=1}^{n-1} k2^k \\ &= n2^n + \Delta^{-1}n2^n \\ &= n2^n + n2^n - \Delta^{-1}2^{n+1} \\ &= 2n2^n - 2^{n+1} + A \\ &= (n-1)2^{n+1} + A\end{aligned}$$

para $n = 1$, $A = 2$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k2^{k} = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Ejemplo 21. Aplicando la suma por partes, calcule $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) &= n(n-1)(n-2) + \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)(k-2)\\ &= n(n-1)(n-2) + \sum_{k=1}^{n-1} (k-2)k^{(2)}\\ &= n(n-1)(n-2) + \Delta^{-1}(n-2)n^{(2)}\end{aligned}$$

Para calcular $\Delta^{-1}(n-2)n^{(2)}$, se aplicará la suma por partes, tomando $g_n = (n-2)$, se obtiene que $\Delta g_n = 1$, y tomando $\Delta y_n = n^{(2)}$, se tiene que $y_n = \frac{n^{(3)}}{3}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) &= n(n-1)(n-2) + \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)(k-2)\\ &= n(n-1)(n-2) + \Delta^{-1}(n-2)n^{(2)}\\ &= n(n-1)(n-2) + (n-2)\frac{n^{(3)}}{3} - \Delta^{-1}\left[\frac{(n+1)^{(3)}}{3}\right]\\ &= n(n-1)(n-2) + (n-2)\frac{n^{(3)}}{3} - \frac{(n+1)^{(4)}}{12} + A\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} + A\text{ ,}\quad \text{con } A \text{ una constante.}\end{aligned}$$

pero si $n = 1,\ A = 0,\ entonces:$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$

CAPÍTULO II. ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS.

Equation Chapter (Next) Section 1

2.0 INTRODUCCIÓN

Las palabras ecuaciones y diferencias hacen pensar en la solución de cierto tipo de ecuaciones que contengan diferencias. En este trabajo se presentarán los diversos métodos para resolver ecuaciones en diferencias finitas de una variable, y en este capítulo en particular, se va definir cierta terminología básica y algunos métodos para resolver cierto tipo de ecuaciones en diferencias.

Problema (Malthus) el tamaño de la población en un año es proporcional al tamaño en el año anterior

$$y(k) = Ay(k-1), \quad A \in \mathbb{R}$$

Problema (Verhulst) modelo más realista: el crecimiento está limitado por alguna causa (espacio, alimento,…)

$$y(k) - y(k-1) = Ay(k-1)(M - y(k-1)), \quad A > 0,\ M \in \mathbb{R}$$

Problema (se tienen n puntos en el plano no colineales, y si se denota por y_n el número de rectas que se pueden formar uniendo los n puntos en el plano y y_{n+1} la cantidad de rectas que se pueden formar con los $n+1$ puntos, existe una relación entre el número de rectas con $n+1$ y n puntos la cual está dada por $y_{n+1} = y_n + n$

Que se interperpreta: el número de rectas que se pueden construir con $n+1$ puntos es igual a las rectas que se pueden construir con n puntos más n rectas que se pueden contruir entre el punto $(n+1)$-ésimo y los n puntos restantes.

2.1 DEFINICIONES BÁSICAS Y NOTACIONES

Definición 1. Una ecuación que relacione una función incógnita $u(x)$ con la función $u(x+1), u(x+2), ..., u(x+n)$ se llama ecuación en diferencias o ecuación en diferencias finitas de orden n con $x \in \mathbb{Z}$. A menos que se diga específicamente otra cosa, se supondrá que x y $u(x)$ varían en el conjunto de los números enteros y el de los reales respectivamente.

La forma funcional de una ecuación en diferencias es:

$$f(x, u(x), u(x+1), u(x+2), ...u(x+n)) = 0 \qquad (2.1)$$

Dado que:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= u(k+1) - u(k) \\ \Delta^2 u(k) &= u(k+2) - u(k+1) - \left[u(k+1) - u(k)\right] \\ \Delta^2 u(k) &= u(k+2) - u(k+1) - \Delta u(k) \end{aligned}$$

la ecuación (2.1) toma la forma:

$$g(x, u(x), \Delta u(x), \Delta^2 u(x), ..., \Delta^n u(x+n)) = 0 \qquad (2.2)$$

La forma de (2.2) es lo que sugiere el nombre de Ecuaciones en Diferencias.

Las ecuaciones en diferencias en este trabajo se clasificarán según el tipo, el orden y según la linealidad. Pero antes de iniciar la clasificación debe tomarse en cuenta otras notaciones equivalentes a $u(x), u(x+1), ..., u(x+n)$ pueden ser $y(x), y(x+1), ...y(x+n)$ o bien $y_x, y_{x+1}, ..., y_{x+n}$ o bien $y_k, y_{k+1}, ..., y_{k+n}$.

2.1.1 Clasificación según su tipo.

Si una ecuación en diferencias contiene solamente funciones constantes como coeficientes, se dice que es una **Ecuación en diferencias con coeficientes constantes,** y puede representarse por:

$$a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + ... + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = h(x) \text{ con } a_i \text{ constantes}$$

ya que $E^n y_k = y_{k+n}$, por teorema 2 del capítulo uno, la ecuación anterior se puede representar por

$$(a_n E^n + a_{n-1}E^{n-1} + ... + a_1 E + a_0) y_x = h(x) \text{ con } a_i \text{ constantes}$$

Ejemplo 1. Son representantes de ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes los siguientes

a) $u(x+1) - 3u(x) = 2x - 5$

b) $y_{x+2} - 7y_{x+1} + 10y = x^{(2)} 5^x + 5^x$

c) $f_{x+2} + f_x = \cos(30^0 x) + isen\left(30^0 x\right)$

d) $V_{x+2} - \frac{5}{2} V_{x+1} + V_x = 0$

e) $y_{x+2} = (y_x + 2)(y_x + 1)$

Si una ecuación como en la forma general, donde $a_0, a_1, \dots, a_r$ son constantes, cumple con $h(x) = 0$, entonces se dice que la ecuación es ***homogénea,*** de lo contrario, es decir si $h(x) \neq 0,$ la ecuación en diferencias se dice que es ***no homogénea*.**

Ahora, si los coeficientes de la ecuación en diferencias son funciones que dependen de la variable independiente, se dirá que es una ***ecuación con coeficientes variables*.**

Ejemplo 2. Las siguientes ecuaciones son representantes de ecuaciones en diferencias con coeficientes variables.

a) $x^2 y_{x+1} - (x+1)^2 y_x = x(x+1)$

b) $y_{x+1} - A^{2x} y_x = 3x^2 A^{2x} + x$, $A \in$

c) $y_{x+1}^2 - a^x y_x^2 = a^{\frac{1}{2}x(x-1)}$

d) $\dfrac{u_{x+1}}{u_x} = e u_{x+1}^{\frac{-1}{n}}$

2.1.2 Clasificación según su orden.

El orden de una ecuación en diferencias se define como la diferencia entre el mayor y el menor argumento que aparece explícitamente en la ecuación.

Ejemplo 3.

a) $k(k+1)-3k(k+2)=0$; no tiene orden ya que no hay argumento
b) $u_{k+7}-k(k+6)=0$, de orden cero ya que $k+7$ es el mayor y menor argumento
c) $y_{k+7}-2y_{k+3}=0$, de cuarto orden cero $\left[k+7-(k+3)=4\right]$
d) $V_{x+n+1}-7V_{x+1}=0$, de orden *n.*

Una ecuación en diferencias de orden n en general se representa a menudo de la forma

$$\begin{gathered} y_{x+n}+a_{n-1}y_{x+n-1}+\ldots+a_1y_{x+1}+a_0y_x=h(x) \\ \text{ó} \\ L(y_x)=h(x) \end{gathered} \qquad (2.3)$$

donde:

$$L=a_n(x)E^n+a_{n-1}(x)E^{n-1}+\ldots+a_1(x)E+a_0(x)$$

y $a_0(x),\ldots,a_{n-1}(x),a_n(x)$, $f(x)$ son funciones conocidas de x .

O sea que

$$h(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)u(x+i) \quad (2.4)$$

2.1.3 Clasificación según su linealidad.

Se dice que una ecuación en diferencias es lineal si tiene la forma

$$a_n(x)\,u_{x+n}+a_{n-1}(x)\,u_{x+n-1}+\ldots+a_1(x)\,u_{x+1}+a_0(x)\,u_x=h(x)\ ,\quad \forall x\in\mathbb{Z} \quad (2.5)$$

Se caracteriza por que la variable dependiente u (en este caso) tiene potencia 1 en cada uno de sus términos. De no ser este caso, se le llama **No Lineal.**

Ejemplo 4. Son ejemplos de ecuaciones no lineales

a) $y_{x+1}^2 - y_x^2 = 1$

b) $u_{k+4}u_{x+1}^6 u_x = u_{x+1}u_{x+3}^4$

2.1.4 Solución de una ecuación en diferencias.

Definición 2. Una función φ_x definida en $\mathbb{N}$, se dice que es solución de una ecuación en diferencias $f(x, u_x, u_{x+1}, \ldots, u_{x+n}) = 0$, si al sustituir $u_x, u_{x+1}, \ldots, u_{x+n}$ por $\varphi_x, \varphi_{x+1}, \ldots, \varphi_{x+n}$ respectivamente en la ecuación, ésta se reduce a una identidad en $\mathbb{N}_0$, es decir si

$$f(x, \varphi_x, \varphi_{x+1}, \ldots, \varphi_{x+n}) \equiv 0, \ \forall x \in \mathbb{N}_0.$$

2.1.5 Solución general de una ecuación en diferencias.

En este apartado se definirá lo que se entenderá por solución general de una ecuación en diferencias finitas, pero antes se revisarán algunos ejemplos y propiedades de las soluciones de una ecuación en diferencias.

Ejemplo 5. Las funciones $u_k = C2^k$, $u_k = 3\left(2^k\right)$, $u_k = -\left(2^k\right)$ son soluciones de la ecuación en diferencias $u_{k+1} - 2u_k = 0,$ ya que al sustituir cada una de ellas en la ecuación dada resulta una identidad como se muestra a continuación.

Sean $u_k = c_1 2^k$ y $u_{k+1} = c_1 2^{k+1}$. Si las anteriores expresiones se sustituyen en la ecuación original, resulta:

$$\begin{aligned} u_{k+1} - 2u_k &= c_1 2^{k+1} - 2c_1 2^k \\ &= 2c_1 2^k - 2c_1 2^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

De igual manera, sean $u_k = 3\left(2^k\right)$ y. $u_{k+1} = 3\left(2^{k+1}\right)$ Si las anteriores expresiones se sustituyen en la ecuación original, resulta:

$$\begin{aligned} u_{k+1} - 2u_k &= 32^{k+1} - 2(3)2^k \\ &= 3(2)2^k - 2(3)2^k \\ &= 0. \end{aligned}$$

De forma idéntica se tiene para $u_k = -\left(2^k\right)$ y $u_{k+1} = -\left(2^{k+1}\right)$, las cuales sustituyendo en la ecuación original resulta:

$$\begin{aligned} u_{k+1} - 2u_k &= -2^{k+1} - 2\left(-2^k\right) \\ &= -2\left(2^k\right) + 22^k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Las funciones $u_k = c_1 2^k + c_2 3^k$, $u_k = -3\left(2^k\right) + 3^k$, $u_k = \sqrt{2}\left(2^k\right)$, $u_k = \frac{1}{2}\left(3^k\right)$ son soluciones de la ecuación en diferencias $u_{k+2} - 5u_{k+1} + 6u_k = 0$ ya que al sustituir cada una de ellas en la ecuación dada resulta una identidad como se muestra a continuación:

Sean $u_k = c_1 2^k + c_2 3^k$; $u_{k+1} = c_1 2^{k+1} + c_2 3^{k+1}$; $u_{k+2} = c_1 2^{k+2} + c_2 3^{k+2}$. Si las anteriores expresiones se sustituyen en la ecuación original, resulta:

$$\begin{aligned} u_{k+2} - 5u_{k+1} + 6u_k &= c_1 2^{k+2} + c_2 3^{k+2} - 5c_1 2^{k+1} - 5c_2 3^{k+1} + 6c_1 2^k + 6c_2 3^k \\ &= 2^2 c_1 2^k + 3^2 c_2 3^k - 5(2)c_1 2^k - 5(3)c_2 3^k + 6c_1 2^k + 6c_2 3^k \\ &= 4c_1 2^k + 9c_2 3^k - 10c_1 2^k - 15c_2 3^k + 6c_1 2^k + 6c_2 3^k \\ &= 0c_1 2^k + 0c_2 3^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

De igual manera, sean $u_k = -3\left(2^k\right)+3^k$; $u_{k+1} = -3\left(2^{k+1}\right)+3^{k+1}$; $u_{k+2} = -3\left(2^{k+2}\right)+3^{k+2}$. Si las anteriores expresiones se sustituyen en la ecuación original, resulta:

$$\begin{aligned} u_{k+2}-5u_{k+1}+6u_k &= -3\left(2^{k+2}\right)+3^{k+2}-5(-3)\left(2^{k+1}\right)-5\left(3^{k+1}\right)+6(-3)2^k+6\left(3^k\right) \\ &= (-3)2^2 2^k+3^2 3^k-5(-3)22^k-5(3)3^k+6(-3)2^k+63^k \\ &= -12\left(2^k\right)+9\left(3^k\right)+30\left(2^k\right)-15\left(3^k\right)-18\left(2^k\right)+6\left(3^k\right) \\ &= 0\left(2^k\right)+0\left(3^k\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De forma idéntica se pueden probar las otras soluciones.

Dada la ecuación en diferencias finitas de orden n

$$y_{x+n}+a_1(x)y_{x+n-1}+\ldots+a_{n-1}(x)y_{x+1}+a_n(x)y_x = h(x)$$

si se especifican los valores que debe tomar la función incógnita en n puntos consecutivos, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, se pueden calcular sucesivos términos de la solución mediante el método de recurrencia que se muestra a continuación.

Escribiendo la función como

$$y_{x+n} = h(x)-a_1(x)y_{x+n-1}-\ldots-a_{n-1}(x)y_{x+1}-a_n(x)y_x$$

y considerando los valores dados de y_x se tiene

$$\begin{aligned} y_n &= h(0)-a_1(0)y_{n-1}-\ldots-a_{n-1}(0)y_1-a_n(0)y_0 \\ y_{n+1} &= h(1)-a_1(1)y_{n-1}-\ldots-a_{n-1}(1)y_1-a_n(1)y_0 \\ y_{n+2} &= h(2)-a_1(2)y_{n-1}-\ldots-a_{n-1}(2)y_1-a_n(2)y_0 \end{aligned}$$

y así se obtienen sucesivos valores de la solución de la ecuación que verifica las n condiciones iniciales impuestas. La dificultad puede aparecer cuando se intenta calcular la expresión formal de esta solución, es decir el término general de la sucesión y_n, que en ocasiones es imposible encontrarlo.

El proceso anterior de iteraciones sucesivas, permite enunciar el siguiente teorema de existencia y unicidad de solución de ecuaciones en diferencias finitas lineales.

Teorema 1.

Sea la ecuación en diferencias finitas lineal de orden n

$$y_{x+n} + a_{n-1}(x)y_{x+n-1} + ... + a_1(x)y_{x+1} + a_0(x)y_x = h(x)$$

Dados n valores, $y_0, y_1, ...y_{n-1}$, arbitrarios, existe una única función z_x que es solución de la ecuación y que verifica $z_0 = y_0, z_1 = y_1, ..., z_{n-1} = y_{n-1}$.

Ejemplo 7. Sea la ecuación en diferencias finitas lineal de orden 1, $y_{x+1} - 2y_x = 0$ y la condición inicial $y_0 = 1$. Escribiendo la ecuación de la forma $y_{x+1} = 2y_x$ se obtiene:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2y_0 = 2.1 = 2 \\ y_2 &= 2y_1 = 2.2 = 4 \\ y_3 &= 2y_2 = 2.4 = 8 \end{aligned}$$

Reiterando el proceso se obtienen términos consecutivos de la solución, cuya expresión es $y_x = 2^x$.

Si la condición inicial es una constante cualquiera $y_0 = C$, entonces la solución de la ecuación que verifica la condición inicial impuesta es $y_x = C2^x$.

Dada la ecuación en diferencias finitas, $y_{x+n} + a_{n-1}(x)y_{x+n-1} + ... + a_1(x)y_{x+1} + a_0(x)y_x = h(x)$ se abordará en esta sección el caso en que $a_i(x)$ es constante, para $i = 1, 2, 3, ...n$. Se conoce esta ecuación como ***ecuación en diferencias finita lineal de orden*** n ***con coeficientes constantes.***

Este tipo de ecuaciones se pueden representar por

$$y_{x+n} + a_{n-1}y_{x+n-1} + ... + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = h(x) \text{ con } a_0 \neq 0 \quad (2.6)$$

De la ecuación (2.6), se conocerá como su ***ecuación homogénea asociada*** a la ecuación de la forma $y_{x+n}+a_{n-1}y_{x+n-1}+...+a_1y_{x+1}+a_0y_x=0$ donde el término independiente de la ecuación se ha eliminado.

Teorema 2.

El conjunto de soluciones de una ecuación en diferencias finitas lineal con coeficientes constantes homogénea, con las operaciones suma y producto por un número real, tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Demostración

Dada la ecuación $y_{x+n}+a_{n-1}y_{x+n-1}+...+a_1y_{x+1}+a_0y_x=0$, sean $y_x^{(1)},y_x^{(2)}$ dos soluciones y t_1,t_2 dos números reales, se trata de demostrar que $z_x=t_1y_x^{(1)}+t_2y_x^{(2)}$ también es una solución de la ecuación homogénea.

Sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned}
&z_{x+n}+a_1z_{x+n-1}+...+a_{n-1}z_{x+1}+a_nz_x=t_1y_{x+n}^{(1)}+t_2y_{x+n}^{(2)}+a_1\left(t_1y_{x+n-1}^{(1)}+t_2y_{x+n-1}^{(2)}\right)+...+\\
&a_{n-1}\left(t_1y_{x+1}^{(1)}+t_2y_{x+1}^{(2)}\right)+a_n\left(t_1y_x^{(1)}+t_2y_x^{(2)}\right)=t_1(y_{x+n}^{(1)}+a_1y_{x+n-1}^{(1)}+...+\\
&+a_{n-1}y_{x+1}^{(1)}+a_ny_x^{(1)})+t_2\left(y_{x+n}^{(2)}+a_1y_{x+n-1}^{(2)}+...+a_{n-1}y_{x+1}^{(2)}+a_ny_x^{(2)}\right)=t_10+t_20=0
\end{aligned}$$

Por consiguiente, si se conocen n soluciones, $y_x^{(1)},y_x^{(2)},...,y_x^{(n)}$, de la ecuación en diferencias homogénea se tiene que cualquier combinación lineal de ellas también es una solución. Así, $C_1y_x^{(1)}+C_2y_x^{(2)}+...+C_ny_x^{(n)}$, con $C_1,C_2,...,C_n$ constantes reales arbitrarias, es una solución de dicha ecuación en diferencias.

Definición 3. Un conjunto de n soluciones linealmente independientes de una ecuación en diferencias finitas lineal de orden n con coeficientes constantes y homogénea se denomina ***sistema fundamental de soluciones*** de dicha ecuación.

Teorema 3.

Sean $y_x^{(1)},...,y_x^{(n)}$ n soluciones de la ecuación en diferencias finitas homogénea de orden n, .

$y_{x+n}+a_{n-1}y_{x+n-1}+...+a_1y_{x+1}+a_0y_x=0$. Entonces $y_x^{(1)},y_x^{(2)},...,y_x^{(n)}$ son linealmente dependientes si y solo si

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} & ... & y_0^{(n)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & ... & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & ... & y_2^{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{n-1}^{(1)} & y_{n-1}^{(2)} & ... & y_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

Demostración

$\Rightarrow]$ Si $y_x^{(1)},y_x^{(2)},...,y_x^{(n)}$ son funciones linealmente dependientes, entonces una de ellas es combinación lineal del resto y, sin pérdida de generalidad se puede suponer que ésta es la función $y_x^{(1)}$, es decir, $y_x^{(1)}=t_2y_x^{(2)}+...+t_ny_x^{(n)}$.

Por tanto, se tiene que $y_k^{(1)}=t_2y_k^{(2)}+...+t_ny_k^{(n)}$, para $k=0,1,...n-1$.

De esta manera,

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} & ... & y_0^{(n)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & ... & y_0^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & ... & y_2^{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{n-1}^{(1)} & y_{n-1}^{(2)} & ... & y_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} t_2y_0^{(1)}+...+t_ny_0^{(n)} & y_0^{(2)} & ... & y_0^{(n)} \\ t_2y_1^{(2)}+...+t_ny_1^{(n)} & y_1^{(2)} & ... & y_0^{(n)} \\ t_2y_2^{(2)}+...+t_ny_2^{(n)} & y_2^{(2)} & ... & y_2^{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ t_2y_{n-1}^{(2)}+...+t_ny_{n-1}^{(n)} & y_{n-1}^{(2)} & ... & y_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

ya que la primera columna es combinación lineal de las restantes.

$\Leftarrow]$ Se considera el sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{aligned}
&s_1 y_0^{(1)} + s_2 y_0^{(2)} + \ldots + s_n y_0^{(n)} = 0 \\
&s_1 y_1^{(1)} + s_2 y_1^{(2)} + \ldots + s_n y_1^{(n)} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&s_1 y_{n-1}^{(1)} + s_2 y_{n-1}^{(2)} + \ldots + s_n y_{n-1}^{(n)} = 0
\end{aligned}$$

Es un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas homogéneo, cuya matriz de coeficientes tiene determinante nulo, por tanto, existe solución no trivial. Es decir, existen escalares no todos nulos $c_1, c_2, ..., c_n$ que satisfacen las n ecuaciones del sistema.

Se define la función $z_x = c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)} + \ldots + c_n y_x^{(n)}$ que es una solución de la ecuación en diferencias finitas por ser una combinación lineal de las soluciones $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, ..., y_x^{(n)}$. Además, dicha solución verifica las siguientes condiciones: $z_0 = z_1 = \ldots = z_{n-1} = 0$, ya que los escalares c_i, $i = 1, 2, ..., n$, son soluciones del sistema considerado.

Por otro lado, es inmediato comprobar que la función nula es también solución de la ecuación en diferencias homogénea y verifica las mismas condiciones iniciales que z_x.

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones se tiene que $z_x = 0$, es decir, que $c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)} + \ldots + c_n y_x^{(n)} = 0$, con algún c_i no nulo, y, por tanto, $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, ..., y_x^{(n)}$ son linealmente dependientes.

Teorema 4.

Toda ecuación en diferencias finitas lineal con coeficientes constantes homogénea tiene un sistema fundamental de soluciones.

Demostración

Sea la ecuación homogénea de orden n, $y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \ldots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = 0$.

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones, se sabe que existe una única solución de la ecuación homogénea, $y_x^{(1)}$, verificando que $y_0^{(1)} = 1, y_1^{(1)} = \ldots = y_{n-1}^{(1)} = 0$.

Análogamente , para $j = 2,3,...,n$, existe una única solución de la ecuación homogénea, $y_x^{(1)}$, verificando que para $k = 0,1,...,n-1$ se tiene

$$y_k^{(1)} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = j-1 \\ 0 \text{ si } k \neq j-1 \end{cases}$$

Así, se tienen n soluciones de la ecuación en diferencias finitas homogénea,

$$y_x^{(1)}, y_x^{(2)} ... y_x^{(n)}$$

Es preciso demostrar que las soluciones $y_x^{(1)}, y_x^{(2)} ... y_x^{(n)}$ son linealmente independientes. Para ello se considera $t_1 y_x^{(1)} + t_2 y_x^{(2)} + ... + t_n y_x^{(n)} = 0$.

Sustituyendo en esta igualdad $x = 0$ se tiene $t_1 y_0^{(1)} + t_2 y_0^{(2)} + ... + t_n y_0^{(n)} = 0$, de donde $t_1 = 0$, ya que $y_0^{(1)} = 1, y_0^{(j)} = 0,$ para $j = 2,3,...,n.$

Análogamente, sustituyendo $x = k$ se tiene $t_1 y_k^{(1)} + t_2 y_k^{(2)} + ... + t_n y_k^{(n)} = 0$, de donde $t_{k+1} = 0,$ para $k = 1,2,...,n-1$, es decir $y_x^{(1)}, y_x^{(2)} ... y_x^{(n)}$ son linealmente independientes.

En definitiva, $\left\{ y_x^{(1)}, y_x^{(2)} ... y_x^{(n)} \right\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación en diferencias finitas homogénea.

Teorema 5.

Si $\left\{ y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, ..., y_x^{(n)} \right\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación en diferencias finitas homogénea $y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + ... + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = 0$ de orden n, entonces cualquier solución de dicha ecuación se puede escribir como una combinación lineal de $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, ..., y_x^{(n)}$

Demostración

Como $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, ..., y_x^{(n)}$ son linealmente independientes se tiene $\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} & ... & y_0^{(n)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & ... & y_0^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & ... & y_2^{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{n-1}^{(1)} & y_{n-1}^{(2)} & ... & y_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$

Dada una solución y_x de la ecuación, se consideran los n valores siguientes: $s_0 = y_0, s_1 = y_1, ..., s_{n-1} = y_{n-1}$. Con estos valores se construye el sistema de ecuaciones lineales con incógnitas $t_1, t_2, ..., t_n$.

$$\begin{array}{l} t_1 y_0^{(1)} + t_2 y_0^{(2)} + ... + t_n y_0^{(n)} = s_0 \\ t_1 y_1^{(1)} + t_2 y_1^{(2)} + ... + t_n y_1^{(n)} = s_1 \\ .... \\ t_1 y_{n-1}^{(1)} + t_2 y_{n-1}^{(2)} + ... + t_n y_{n-1}^{(n)} = s_{n-1} \end{array}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es no nulo, por tanto, existe una única solución $c_1, c_2, ...c_n$.

Se considera la función $z_x = c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)} + ... + c_n y_x^{(n)}$ que es una solución de la ecuación en diferencias por ser una combinación lineal de las soluciones $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, ..., y_x^{(n)}$. Además, dicha solución satisface $z_0 = s_0, z_1 = s_1, ..., z_{n-1} = s_{n-1}$, ya que los escalares c_i, $i = 1, 2, ..., n$, son soluciones del sistema considerado.

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones se tiene que $y_x = z_x$, es decir $y_x = c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)} + ... + c_n y_x^{(n)}$ es solución. A esta solución se le llama la ***solución general*** de la ecuación en diferencias finitas, la cual se caracteriza por tener n constantes arbitrarias ya que la ecuación en diferencias es de orden *n*.

Ejemplo 8. Verificando que $u_k = c_1 2^k + c_2 3^k$ es la solución general de la ecuación en diferencias $u_{k+2} - 5u_{k+1} + 6u_k = 0$.

Primeramente se verificará que tanto $u_k^{(1)} = 2^k$ como $u_k^{(2)} = 3^k$ son soluciones de dicha ecuación en diferencias.

San $u_k^{(1)} = 2^k$, $u_{k+1}^{(1)} = 2^{k+1}$, $u_{k+2}^{(1)} = 2^{k+2}$, que sustituyendo en la ecuación en diferencias se tendrá:

$$\begin{aligned} u_{k+2} - 5u_{k+1} + 6u_k &= 2^{k+2} - 5\left(2^{k+1}\right) + 6\left(2^k\right) \\ &= 2^2\left(2^k\right) - 5(2)\left(2^k\right) + 6\left(2^k\right) \\ &= 4\left(2^k\right) - 10\left(2^k\right) + 6\left(2^k\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De manera similar se prueba con $u_k^{(2)} = 3^k$.

A continuación se comprobará que dichas funciones son linealmente independientes

$$\begin{vmatrix} 2^0 & 3^0 \\ 2^1 & 3^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ya que el determinante es distinto de cero y además cada función es una solución de la ecuación en diferencias, se tiene que $\left\{2^k, 3^k\right\}$ es un sistema fundamental de soluciones de $u_{k+2} - 5u_{k+1} + 6u_k = 0,$ y por lo tanto la solución general de ésta ecuación es

$$u_k = c_1 2^k + c_2 3^k$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Nótese que el número de constantes arbitrarias que aparecen en la solución coincide con el orden de la ecución en diferencias correspondiente.

Si en la solución de una ecuación en diferencias no aparecen constantes arbitrarias, dicha solución se conoce como ***solución particular de una ecuación en diferencias.***

Revisando el siguiente ejemplo

Ejemplo 9. Como se comprobó en el ejemplo 8, $u_k = c_1 2^k + c_2 3^k$ es la solución general de $u_{k+2} - 5u_{k+1} + 6u_k = 0$. Haciendo $c_1 = 3$ y $c_2 = -2$. Se obtiene la solución $u_k = 3(2^k) - 2(3^k)$, la cual es una solución particular como se verifica a continuación.

$$\begin{aligned}
u_{k+2} - 5u_{k+1} + 6u_k &= 32^{k+2} - 23^{k+2} - 5(3)2^{k+1} - 5(-2)3^{k+1} + 6(3)2^k + 6(-2)3^k \\
&= 2^2 32^k + 3^2(-2)3^k - 5(2)32^k - 5(3)(-2)3^k + 6(3)2^k + 6(-2)3^k \\
&= (12)2^k - (18)3^k - (30)2^k + (30)3^k + (18)2^k - (12)3^k \\
&= 02^k + 03^k \\
&= 0
\end{aligned}$$

De igual manera $y_k = -\frac{1}{2}\left(2^k\right) + \sqrt{5}\left(3^k\right)$, $y_k = -\left(2^k\right) - 4\left(3^k\right)$ e $y_k = 3^k$, son otras soluciones particulares de $u_{k+2} - 5u_{k+1} + 6u_k = 0$.

2.1.7 Problemas de valor inicial de una ecuación en diferencias.

Un problema de valor inicial para una ecuación en diferencias finitas de orden n es el que consiste en resolver una ecuación en diferencias de orden ¨n¨ que se encuentra sujeta a ¨n¨ condiciones iniciales. En forma simbólica se escribe

Resolver

$$f(k, u(k), u(k+1), \ldots, u(k+n)) = 0$$

sujeta a:

$$u(a) = u_1, \Delta u(a) = u_2, \Delta^2 u(a) = u_3, \ldots, \Delta^{n-1} u(a) = u_n$$

Ejemplo 10. Sea $u_n = (4n-7)2^{n-2}$, verificar que la anterior función es una solución particular de $u_{k+1} - 2u_n = 2^{n+1}$ y que satisface la condición inicial $u_2 = 1$.

$$\begin{aligned}
u_2 &= \left(4(2) - 7\right)2^{2-2} \\
&= (1)2^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - 2u_n &= \left(4(n+1)-7\right)2^{n+1-2} - 2(4n-7)2^{n-2} \\
&= \frac{1}{2}(4n-3)2^n - \frac{1}{2}(4n-7)2^n \\
&= \frac{2^n}{2}\left(4n-3-4n+7\right) \\
&= 2^n 2 \\
&= 2^{n+1}
\end{aligned}$$

cumpliéndose la igualdad.

<u>Ejemplo 11.</u> Para $k \in \square_{(1)}$ la función *Gamma* está definida por $\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-t} t^{k-1} dt$. Probar que $\Gamma(k)$ es una solución particular de $\Gamma(k+1) - k\Gamma(k) = 0$, sujeta a la condición $\Gamma(1) = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma(k) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{k-1} dt \\
\Gamma(k+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^k dt \\
&= \int_0^\infty t^k d\left(-e^{-t}\right), \text{ aplicando integración por partes} \\
&= \left.\frac{-t^k}{e^t}\right|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} k t^{k-1} dt \\
&= k\int_0^\infty e^{-t} t^{k-1} dt = k\Gamma(k) \\
\Rightarrow \Gamma(k+1) - k\Gamma(k) &= 0
\end{aligned}$$

Además $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = e^{-t}\Big|_0^\infty = \left.\frac{-1}{e^t}\right|_0^\infty = -\frac{1}{e^\infty} + \frac{1}{e^0} = 0 + 1 = 1$

2.1.8 Cálculo de la solución general de la ecuación en diferencias finitas homogénea.

Sea la ecuación en diferencias finitas lineal homogénea

$$y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + \ldots + a_{n-1} y_{x+1} + a_n y_x = 0$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $a_n \neq 0$.

<u>Definición 5.</u> Se llama ***ecuación característica*** asociada a la ecuación en diferencias finitas lineal homogénea de orden n a la ecuación polinómica,

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda^n + a_n = 0$$

<u>Ejemplo 12.</u> La ecuación característica asociada a la ecuación en diferencias finitas $y_{x+3} + 3y_{x+1} + 6y_x = 0$ es $\lambda^3 + 3\lambda + 6 = 0$.

A continuación se establecerá la relación entre las raíces de la ecuación característica y la solución fundamental de una ecuación en diferencias finitas lineal de orden n y homogénea.

Teorema 5.

Si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ es una raíz de la ecuación característica asociada a la ecuación en diferencias finitas lineal homogénea, entonces λ_0^x es una solución de dicha ecuación homogénea.

Demostración

Si $z_x = \lambda_0^x$, se tiene que $z_{x+k} = \lambda_0^{x+k}, \forall k \in \mathbb{N}$, y sustituyendo en la ecuación homogénea.

$$\begin{aligned} &z_{x+n} + a_1 z_{x+n-1} + \ldots + a_{n-1} z_{x+1} + a_n z_x = \lambda_0^{x+n} + a_1 \lambda_0^{x+n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda_0^{x+1} + a_n \lambda_0^x = \\ &= \lambda_0^x \left(\lambda_0^n + a_1 \lambda_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda_0 + a_n \right) = \lambda_0^x 0 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $z_x = \lambda_0^x$ es una solución de la ecuación homogénea.

De esta manera, calculando las n raíces de la ecuación característica se obtienen n soluciones de la ecuación en diferencias finitas homogénea. Si son linealmente independientes se tendrá un sistema fundamental de soluciones y por lo tanto se puede construir la solución general de la ecuación en diferencias. Así si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son las n raíces de la ecuación característica, se distinguen cuatro casos.

<u>Caso 1.</u> Las n raíces de la ecuación características son reales y simples.

Teorema 6.

El conjunto $\left\{\lambda_1^x, \lambda_2^x, ..., \lambda_n^x\right\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación en diferencias finitas lineal homogénea, es decir $y_x = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x + ... + C_n\lambda_n^x$ es la solución general de dicha ecuación.

Demostración

Por la proposición anterior λ_1^x es una solución de la ecuación en diferencias finitas homogénea para $i = 1, 2, ..., n$. Es preciso demostrar que las n funciones son linealmente independientes.

En efecto

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & ... & \lambda_n^0 \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & ... & \lambda_n^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & ... & \lambda_n - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & ... & \lambda_n^2 - \lambda_1^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & ... & \lambda_n - \lambda_1 \\ \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & ... & \lambda_n^2 - \lambda_1^2 \\ ... & ... & ... \\ \lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\ldots\left(\lambda_n-\lambda_1\right)\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1_1 \\ \lambda_2+\lambda_1 & \ldots & \lambda_n+\lambda_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_2^{n-1}+\lambda_2^{n-2}\lambda_1+\ldots+\lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1}+\lambda_n^{n-2}\lambda_1+\ldots\lambda_1^{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(\lambda_3-\lambda_1\right)\ldots\left(\lambda_n-\lambda_1\right)\left(\lambda_3-\lambda_2\right)\ldots\left(\lambda_n-\lambda_2\right)\ldots\left(\lambda_n-\lambda_{n-1}\right)\neq 0$$

ya que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$.

Por tanto, se concluye que $\lambda_1^x, \lambda_2^x, ..., \lambda_n^x$ son linealmente independientes y, en consecuencia, forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea. ■

<u>Ejemplo 13.</u> La ecuación característica asociada a la ecuación en diferencias finitas $y_{x+2}+2y_{x+1}-3y_x=0$ es $\lambda^2+2\lambda-3=0$, cuyas raíces son -3 y 1.

Por tanto $\left\{(-3)^x, 1^x\right\}=\left\{(-3)^x, 1\right\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación en diferencias y su solución general es $y_x=C_1(-3)^x+C_2$.

<u>Caso 2.</u> Las n raíces de la ecuación características son reales y existe alguna múltiple.

En un primer momento, se demuestra el resultado para una ecuación de orden dos.

Teorema 7.

Sea una ecuación en diferencias finitas lineal homogénea de orden 2, $y_{x+2}+a_1y_{x+1}+a_2y_x=0$ cuya ecuación característica asociada, $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$, tiene una raíz real doble. Entonces $\left\{\lambda_0^x, x\lambda_0^x\right\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea, es decir, $y_x=C_1\lambda_0^x+C_2x\lambda_0^x=\left(C_1+C_2x\right)\lambda_0^x$ es la solución general de dicha ecuación.

Demostración

La función λ_0^x es una solución de la ecuación en diferencias homogénea, es preciso demostrar que $x\lambda_0^x$ es otra solución y que ambas funciones son linealmente independientes.

- La función $z_x = x\lambda_0^x$ es una solución de la ecuación puesto que

$$\begin{aligned} &z_{x+2} + a_1 z_{x+1} + a_0 z_x = (x+2)\lambda_0^{x+2} + a_1(x+1)\lambda_0^{x+1} + a_0 x\lambda_0^x = \\ &= x\lambda_0^x\left(\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2\right) + \lambda_0^{x+1}\left(2\lambda_0 + a_1\right) = x\lambda_0^x 0 + \lambda_0^{x+1} 0 = 0 \end{aligned}$$

ya que al ser λ_0 una raíz doble del polinomio $\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2$ anula a dicho polinomio y a su diferencia $2\lambda + a_1$.

- Las funciones λ_0^x y $x\lambda_0^x$ son linealmente independientes, puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_0 \end{vmatrix} = \lambda_0 \neq 0$, por ser λ_0 raíz de la ecuación característica. ■

A continuación, se enuncia el resultado general cuya demostración es análoga a la anterior.

Teorema 8.

Sea $y_{x+n} + a_{n-1}y_{x+n-1} + \ldots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = 0$ una ecuación en diferencias finitas lineal homogénea de orden n, cuya ecuación característica tiene s raíces reales, λ_1 de multiplicidad m_1, λ_2 de multiplicidad $m_2, \ldots, \lambda_s$ de multiplicidad m_s, siendo $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n$, con algún $m_i > 1$. Entonces $\left\{\lambda_1^x, x\lambda_1^x, \ldots, x^{m_1-1}\lambda_1^x, \lambda_2^x, x\lambda_2^x, \ldots, x^{m_2-1}\lambda_2^x, \ldots, \lambda_s^x, x\lambda_s^x, \ldots, x^{m_s-1}\lambda_s^x\right\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea, es decir, la solución general de dicha ecuación es:

$$\begin{aligned} &y_x = C_0^1\lambda_1^x + C_1^1\lambda_1^x + \ldots + C_{m_1-1}^1 x^{m_1-1}\lambda_1^x + C_0^2\lambda_2^x + C_1^2 x\lambda_2^x + \ldots + C_{m_2-1}^1 x^{m_2-1}\lambda_2^x + \ldots + \\ &+ C_0^s\lambda_s^x + C_1^s x\lambda_s^x + \ldots + C_{m_s-1}^s x^{m_s-1}\lambda_s^x = \left(C_0^1 + xC_1^1 + \ldots + C_{m_1-1}^1 x^{m_1-1}\right)\lambda_1^x + \left(C_0^2 + xC_1^2 + \ldots + C_{m_2-1}^2 x^{m_2-1}\right)\lambda_2^x + \ldots + \\ &\left(C_0^s + xC_1^s + \ldots + C_{m_s-1}^s x^{m_s-1}\right)\lambda_s^x = P_{m_1-1}(x)\lambda_1^x + P_{m_2-1}(x)\lambda_2^x + \ldots + P_{m_s-1}(x)\lambda_s^x \end{aligned}$$

donde $P_{m_i-1}(x)$ es un polinomio de grado m_i-1 cuyos coeficientes son constantes reales arbitrarias, para $i=1,2,\ldots,s$. ■

<u>Ejemplo 14.</u> La ecuación característica asociada a la ecuación en diferencias finitas $y_{x+2}-4y_{x+1}+4y_x=0$ es $\lambda^2-4\lambda+4=0$, que tiene $\lambda=2$ como raíz doble.

Por tanto, $\left\{2^x, x2^x\right\}$ es un sistema fundamental de soluciones y la solución general de la ecuación es $y_x=C_1 2^x+C_2 x2^x=\left(C_1+C_2 x\right)2^x$.

<u>Caso 3.</u> Las raíces de la ecuación características son complejas y simples.

En un primer momento, se demuestra el resultado para una ecuación de orden dos.

Teorema 9.

Sea una ecuación en diferencias finitas lineal homogénea de orden 2, $y_{x+2}+a_1 y_{x+1}+a_2 y_x=0$ cuya ecuación característica asociada, $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$, tiene una raíz compleja, $a+bi$, y su conjugada $a-bi$. Entonces la solución general de dicha ecuación está dada por

$$y_x=r^x\left(C_1\cos\theta x+C_2 sen\theta x\right)$$

Demostración

La solución general es $y_x=K_1\left(a+bi\right)^x+K_2\left(a-bi\right)^x$, donde K_1 y K_2 son constantes complejas conjugadas arbitrarias, es decir, $K_1=A+iB$ y $K_2=A-iB$, con $A,B\in\mathbb{R}$.

La solución se puede expresar en términos reales considerando la forma trigonométrica del número complejo $a+ib$, que es $re^{i\theta}=r\left(\cos\theta+isen\theta\right)$, donde r es el módulo, $r=\sqrt{a^2+b^2}$ y θ es el argumento, $\theta=arctg\,\frac{b}{a}$.

Entonces

$$
\begin{aligned}
y_x &= K_1(a+ib)^x + K_2(a-ib)^x = K_1(r\cos\theta + isen\theta)^x + K_2(r\cos\theta - isen\theta)^x \\
&= r^x\left(K_1\left(\cos\theta + isen\theta\right)^x + K_2\left(\cos\theta - isen\theta\right)^x\right) \\
&= r^x\left(\left(K_1+K_2\right)\cos\theta x + \left(K_1-K_2\right)isen\theta x\right) = r^x\left(2A\cos\theta x - 2Bsen\theta x\right)
\end{aligned}
$$

En definitiva, la solución general de la ecuación homogénea considerada es

$$y_x = r^x\left(C_1\cos\theta x + C_2 sen\theta x\right)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. ■

En el caso de una ecuación en diferencias finitas de orden n, por cada par de raíces complejas conjugadas simples de la ecuación característica aparece un sumando de este tipo en la solución de la ecuación en diferencias. Es decir, dada una ecuación en diferencias finitas homogénea de orden n cuya ecuación característica asociada tiene como raíces $a_j + b_j$ y su conjugada $a_j - b_j$, para $j = 1, 2, ..., s,$ donde $n = 2s,$ su solución general es

$$y_x = r_1^x\left(C_1^1\cos\theta_1 x + C_2^1 sen\theta_1 x\right) + r_2^x\left(C_1^2\cos\theta_2 x + C_2^2 sen\theta_2 x\right) + ... r_s^x\left(C_1^s\cos\theta_s x + C_2^2 sen\theta_s x\right)$$

con $r_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$, $\theta_j = arctg\,\frac{a_j}{b_j}$ y C_1^j, C_2^j para $j = 1, 2, ..., s$ constantes reales arbitrarias.

Ejemplo 15. La ecuación característica asociada a la ecuación en diferencias finitas $y_{x+2} - 2y_{x+1} + 2y_x = 0$ es $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, cuyas raíces son $1+i$ y $1-i$.

El módulo de $1+i$ es

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

y el argumento

$$\theta = arctg\,\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

por lo tanto, la solución general de la ecuación es

$$y_x = \left(\sqrt{2}\right)^x \left(C_1 \cos\frac{\pi}{4}x + C_2\, \mathrm{s}en\frac{\pi}{4}x \right)$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias.

Caso 4. Las raíces de la ecuación características son complejas y existe alguna múltiple.

Se considera una ecuación en diferencias finitas homogénea cuya ecuación característica tiene dos raíces compleja, $a+ib$ y $a-ib$ de multiplicidad $m>1$.

Razonando como en los dos casos anteriores, la parte de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente a estas dos raíces es

$$r^x \left(\left(A_1 + A_2 x + ... + A_m x^{m-1} \right) \cos\theta x + \left(B_1 + B_2 x + ... + B_m x^{m-1} \right) sen\theta x \right)$$

donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = arctg\,\frac{b}{a}$, y $A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_m$ son constantes reales arbitrarias.

Ejemplo 16. La ecuación característica asociada a la ecuación en diferencias finitas $y_{x+4} + 2y_{x+2} + y_x = 0$ es $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$ cuyas raíces son $-i$ e i dobles .

El módulo de i es $r=1$ y el argumento, $\theta = \frac{\pi}{2}$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$y_x = 1^x \left(\left(C_1 + C_2 x\right)\cos\frac{\pi}{2}x + \left(C_3 + C_4 x\right)\mathrm{s}en\frac{\pi}{2}x \right) = \left(\left(C_1 + C_2 x\right)\cos\frac{\pi}{2}x + \left(C_3 + C_4 x\right)\mathrm{s}en\frac{\pi}{2}x \right)$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes reales arbitrarias.

En general, dada cualquier ecuación en diferencias finitas lineal de coeficientes constantes, homogénea, la solución general es la suma de términos del tipo descrito en los cuatro casos anteriores de acuerdo con las raíces de la ecuación característica asociada.

Ejemplo 17. La ecuación característica asociada a la ecuación en diferencias finitas $y_{x+3} - 5y_{x+2} + 7y_{x+1} - 3y_x = 0$ es $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = 0,$ cuyas raíces son 3 simple y 1 doble.

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$y_x = C_1 3^x + (C_2 + xC_3)1^x = C_1 3^x + (C_2 + xC_3)\ ,$$

donde C_1, C_2 y C_3 son constantes reales arbitrarias.

Nota: la solución de una ecuación lineal homogénea de primer orden de la forma

$$y(x+1) - ay(x) = 0 \quad (2.5)$$

que tiene la ecuación característica asociada $\lambda - a = 0$, tendrá por solución general

$$y(x) = Ca^x \quad (1.1)$$

donde C, es una constante arbitraria.

Ejemplo 18. Resolver la ecuación: $u(x+1) - 5u(x) = 0$.

Por la conclusión a que se llegó en el apartado anterior, se tiene que la función que satisface la ecuación será: $u(x) = C5^x$, la cuál es fácilmente verificable.

En el caso que $a = 1$, se tendrá que $u(x) = C$. Si existe alguna condición inicial, el valor de C, se podrá sustituir por un valor específico, para el caso:

Ejemplo 19. Resolver la ecuación: $3u(x+1) + 5u(x) = 0$, con $u(0) = 4$

Primero se llevará a la forma $u(x+1) + \frac{5}{3}u(x) = 0$, entonces la función que verifica tal ecuación debe ser de la forma $u(x) = C\left(-\frac{5}{3}\right)^x$ pero $u(0) = 4$, entonces $u(x) = 4\left(-\frac{5}{3}\right)^x$ tiene que ser la solución particular. Verificando tal solución:

$$\begin{aligned} 3u_{x+1} + 5u_x &= 3(4)\left(-\tfrac{5}{3}\right)^{x+1} + 5(4)\left(-\tfrac{5}{3}\right)^x \\ &= 3(4)\left(-\tfrac{5}{3}\right)\left(-\tfrac{5}{3}\right)^x + 5(4)\left(-\tfrac{5}{3}\right)^x \\ &= 0. \end{aligned}$$

CAPÍTULO III. SOLUCIÓN GENERAL DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES NO HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES.

3.0 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se procederá a resolver ecuaciones en diferencias finitas no homogéneas, conocidas también como ecuaciones completas. Se inicia presentando una proposición que establece cómo es la solución general para dicho tipo de ecuaciones, y luego se abordan tres métodos para hallar una solución particular de dicha ecuación.

Teorema 1.

Dada la ecuación en diferencias finitas lineal de orden n con coeficientes constantes no homogénea $y_{x+n}+a_{n-1}y_{x+n-1}+...+a_1y_{x+1}+a_0y_x=b(x)$, su solución general es $y_x^h+y_x^p$, donde y_x^h es la solución general de la ecuación homogénea asociada e y_x^p es una solución particular de la ecuación no homogénea. Además, cualquier solución de la ecuación es de esta forma.

Demostración

Sustituyendo $z_x=y_x^h+y_x^p$ en la ecuación queda

$$
\begin{aligned}
&z_{x+n}+a_1z_{x+n-1}+...+a_{n-1}z_{x+1}+a_nz_x=\\
&=y_{x+n}^h+y_{x+n}^p+a_1\left(y_{x+n-1}^h+y_{x+n-1}^p\right)+...+a_{n-1}\left(y_{x+1}^h+y_{x+1}^p\right)=\\
&=\left(y_{x+n}^h+a_1y_{x+n-1}^h+...+a_{n-1}y_x^h\right)+\left(y_{x+n}^p+a_1y_{x+n-1}^p+...+a_{n-1}y_{x+1}^p+a_ny_x^p\right)=\\
&=0+b(x)=b(x)
\end{aligned}
$$

Por tanto $z_x=y_x^h+y_x^p$ es solución de la ecuación completa.

Falta demostrar que cualquier solución, v, de la ecuación completa es de esta forma. Para ello se trata de comprobar que $z_x=v_x-y_x^p$ es solución de la ecuación homogénea.

$$
\begin{aligned}
& z_{x+n} + a_1 z_{x+n-1} + \ldots + a_{n-1} z_{x+1} + a_n z_x = \\
& = \left(v_{x+n} - y_{x+n}^p\right) + a_1\left(v_{x+n-1} - y_{x+n-1}^p\right) + \ldots + a_{n-1}\left(v_{x+1} - y_{x+1}^p\right) + a_n\left(v_x - y_x^p\right) = \\
& = \left(v_{x+n} + a_1 v_{x+n-1} + \ldots + a_{n-1} v_{x+1} + a_n v_x\right) - \left(y_{x+n}^p + a_1 y_{x+n-1}^p + \ldots + a_{n-1} y_{x+1}^p + a_n y_x^p\right) = \\
& = b(x) - b(x) = 0
\end{aligned}
$$

Por tanto, $v_x - y_x^p$ es solución de la ecuación homogénea.

El objetivo en este capítulo es hallar una solución particular de la ecuación completa, para lo cual se van a revisar tres métodos. Éstos se aplicarán dependiendo de la forma que presenten tanto sus coeficientes como su término independiente $b(x)$. Antes de revisar el primer método estudiaremos un primer apartado sobre el operador anulador de una función.

Dada una función de la forma u, que sea combinación lineal de funciones de la forma $k(\text{constante}), x^m, x^m a^x, x^m a^x \cos\beta x$ y $x^m a^x\, \mathrm{s}en\beta x$, se determinarán polinomios en E, tales que al ser aplicados sobre $u(x)$ reduzcan a cero dicho expresión, es decir $P(E)u(x) = 0$. Tales polinomios en E son conocidos como ***polinomios anuladores***. Se van a considerar los siguientes casos:

<u>Caso 1.</u> Supóngase que $u(x) = K \ \ (K \text{ constante})$. Se busca un $P(E)$ tal que $P(E)u(x) = 0$, es decir $P(E)K = 0$. Es obvio que si $P(E) = E - 1$, se tendrá

$$(E-1)K = EK - K = 0$$

luego $P(E) = E - 1$ anula a $u(x) = K$.

<u>Caso 2.</u> Supóngase que $u(x) = \lambda^x$. Se busca un $P(E)$ tal que $P(E)u(x) = 0$ es decir $P(E)\lambda^x = 0$. Si se escoge $P(E) = E - \lambda$, se tendrá

$$(E-\lambda)\lambda^x = E\lambda^x - \lambda\lambda^x = \lambda^{x+1} - \lambda^{x+1} = 0$$

luego $P(E) = E - \lambda$ anula a $u(x) = \lambda^x$.

Para el caso anterior si $u(x) = (-3)^x$, su polinomio anulador deberá ser $P(E) = E + 3$

Caso 3. Supóngase que $u(x) = x\lambda^x$. Se busca un $P(E)$ tal que $P(E)u(x) = 0$. Dicho polinomio es de la forma $P(E) = (E-\lambda)^2$, ya que

$$\begin{aligned}(E-\lambda)^2 x\lambda^x &= E^2 x\lambda^x - 2\lambda x\lambda^x + \lambda^2 x\lambda^x \\ &= (x+2)\lambda^{x+2} - 2\lambda(x+1)\lambda^{x+1} + x\lambda^{x+2} = 0\end{aligned}$$

En general el polinomio anulador para una función $u(x) = \left(P_0 + P_1 x + ... + P_n x^n\right)\lambda^x$ es de la forma $P(E) = (E-\lambda)^{n+1}$. Por ejemplo un polinomio anulador de $u(x) = \left(3x + x^3\right)2^x$ está dado por $P(E) = (E-2)^4$.

Caso 4. Supóngase que $u(x) = r^x \cos(\theta x)$, ó $u(x) = r^x\, \mathrm{s}en(\theta x)$. Se busca un $P(E)$ tal que $P(E)u(x) = 0$ Tómese en cuenta que la fórmula cuadrática de la forma

$\lambda^2 - 2a\lambda + \left(a^2 + b^2\right) = 0$ tiene las soluciones $\lambda = a + ib$ y $\lambda = a - ib$, que pueden representarse por el Teorema de DeMoivre por $\lambda = r\cos\theta + irsen\theta$ y $\lambda = r\cos\theta - irsen\theta$ con $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\theta = arctg\,\frac{b}{a}$. Por lo tanto, $(\lambda - r\cos\theta - irsen\theta)(\lambda - r\cos\theta + irsen\theta) = 0$ de donde se obtiene que $\lambda^2 - 2r\lambda\cos\theta + r^2 = 0$. Por lo tanto el polinomio anulador adecuado será $P(E) = E^2 - 2r\cos\theta E + r^2$. Por ejemplo si $u(x) = 2^x\cos(45^o x)$. Su polinomio anulador será $P(E) = E^2 - 2(2)\cos 45^o E + 2^2 = E^2 - 2\sqrt{2}E + 4$.

En general si $u(x) = x^n r^x \cos(\theta x)$ ó $u(x) = x^n r^x\, \mathrm{s}en(\theta x)$ su anulador será de la forma $P(E) = \left(E^2 - 2r\cos\theta E + r^2\right)^{n+1}$.

Al iniciar el capítulo se especificó que la solución general de una función en diferencias finitas lineal de orden n con coeficientes constantes completa

$y_{x+n} + a_{n-1}y_{x+n-1} + ... + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = b(x)$, es $y_x = y_x^h + y_x^p$, donde y_x^h es la solución de la ecuación homogénea asociada e y_x^p es una solución particular de la ecuación completa. En el capítulo anterior se estudió como hallar la solución de la ecuación homogénea asociada. En lo que sigue se procederá a explicar cómo hallar una solución particular de la ecuación completa.

3.1 MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Este método se utiliza únicamente cuando los coeficientes de la ecuación en diferencias completa son constantes y el término independiente es de cualquiera de las formas siguientes

$K, x^n, \lambda^x, r^x \cos(\theta x), r^x \, sen(\theta x)$ o combinación lineal de ellos.

El proceso para hallar una de dichas soluciones particulares se describe a continuación:

1. Encontrar la solución de la ecuación homogénea asociada y_x^h.
2. Determine el anulador para el término independiente $b(x)$ de la ecuación completa, y aplicando este anulador a los miembros de la ecuación en diferencias, se obtiene una nueva ecuación homogénea que se le llamará $v(x)$, para la cual se hallará su solución.
3. En esta nueva solución estarán involucradas las soluciones de la homogénea original, por lo que la solución particular y_x^p será la diferencia entre las soluciones de la ecuación homogénea original y las soluciones de la nueva ecuación homogénea que se creó.
4. Cuando ya se conoce la forma de y_x^p, se sustituye en la ecuación original para encontrar los coeficientes desconocidos.

Nota: si el polinomio anulador incluye una raiz que ya estaba incluida en la solución da la homogénea asociada, éste y todos los términos deben multiplicarse por la menor potencia entera positiva de la variable independiente para eliminar toda duplicación.

Algunos autores presentan la forma de la y_x^p, donde hay que determinar los coeficientes, como se resume a continuación:

$b(x)$	Forma que debe tomar y_x^p
α (constante)	A (constante)
αx^n (n entero positivo)	$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$
$\alpha\lambda^x$	$A\lambda^x$
$\alpha \cos kx$	$A\cos kx + Bsenkx$
$\alpha\, senkx$	$A\cos kx + Bsenkx$
$\alpha x^n \lambda^x \cos tx$	$A\cos kx + Bsenkx$
$\alpha x^n \lambda^x\, sentx$	$A\cos kx + Bsenkx$

Cuando $b(x)$ está formado por la suma de varios términos, la selección apropiada para y_x^p es la suma de las expresiones de y_x^p correspondientes a cada uno de los términos por separado. Este principio se llama ***principio de superposición.***

Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $u(x+1) - 3u(x) = 2x - 5$

$u(x+1) - 3u(x) = 0$ es la ecuación homogénea, entonces:

$$u_h = A3^x, \text{ con } A \text{ constante arbitraria.}$$

Ahora se encontrará una solución particular. Como $2x - 5$ es un polinomio de primer grado la forma de una solución particular es $u_x^p = k_1 x + k_2$.

Al sustituir en la ecuación original se tiene

$$-2k_1 x + (k_1 - 2k_2) = 2x - 5$$

Así,

$$-2k_1 = 2 \quad \wedge \quad k_1 - 2k_2 = -5$$

$$k_1 = -1 \quad \wedge \quad k_2 = 2$$

$$u_x^p = -x + 2$$

La solución general es $u_x = A3^x - x + 2$.

<u>Ejemplo 2.</u> Resolver la ecuación: $u(x+1) - u(x) = 2x - 5$

$u(x+1) - u(x) = 0$ es la ecuación homogénea, entonces:

$$u_x^h = A \text{ con } A \text{ constante arbitraria.}$$

Analizando la solución particular se observa que tiene la forma

$$u_x^p = k_1 x + k_2$$

pero u_x^h ya involucra a la constante entonces la u_x^p, debe ser de la forma $u_x^p = k_1 x + k_2 x^2$, que al sustituir se tendrá

$$u_{x+1}^* - u_x^* = 2k_1 x + (k_1 + k_2)$$

es decir,

$$2k_1 x + (k_1 + k_2) = 2x - 5$$

Entonces

$$k_1 = 1 \quad \wedge \quad k_2 = -6$$

Así,

$$u_x^p = x(x-6)$$

y la solución general es:

$$u_x = A + x(x-6).$$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación: $u_{x+1} - 2u_x = x3^x.$

Analizando la solución particular se observa que tiene la forma

$$u_p = 3^x\left(k_1 x + k_2\right)$$

al sustituir dicha u_p en la ecuación en diferencias se tiene

$$3(3)^x k_1(x+1) + 3(3)^x k_2 - 2(3)^x (k_1 x + k_2) = x3^x$$

dividiendo toda la ecuación por 3^x, se tiene:

$$k_1 x + (3k_1 + k_2) = x$$

Entonces

$$k_1 = 1 \wedge k_2 = -3.$$

Así,

$$u_x^p = 3^x(x-3)$$

obteniendo la solución general

$$u_x = C2^x + 3^x x - 3(3)^x.$$

Ejemplo 4. Resolver la ecuación: $u_{x+2} - 2u_{x+1} + u_x = 3^x.$

El polinomio anulador debe ser de la forma $P(E) = E - 3$, que aplicándose a toda la ecuación se tendrá

$$(E-3)(E-1)^2 u(x) = (E-3)3^x$$
$$(E-3)(E-1)^2 u(x) = 0$$

entonces $v(x) = A3^x + B + Cx$, con $u_x^p = A3^x$, que sustituyendo en la ecuación original quedará:

$9A3^x - 2(3A3^x) + A3^x = 3^x$, obteniéndose que $A = \frac{1}{4}$, por lo tanto la solución general de la ecuación completa será:

$$u_x = B + Ax + \frac{3^x}{4}.$$

Ejemplo 5. Resolver la ecuación: $u_{x+2} - 5u_{x+1} + 6u_x = x + 2^x$.

La solución de la ecuación homogénea asociada es de la forma $u_x^h = c_1 3^x + c_2 2^x$, y u_x^p debería ser de la forma $u_x^p = c_3 + c_4 x + c_5 2^x$, pero como 2^x ya està incluida dentro de las soluciones de la ecuación homogénea, la función u_x^p, tiene que modificarse para que sea de la forma $u_x^p = c_3 + c_4 x + c_5 x 2^x$. Sustituyendo en la ecuación completa, se puede verificar que $c_3 = \frac{3}{4}, c_4 = \frac{1}{2}$ y $c_5 = -\frac{1}{2}$, entonces la solución de la ecuación completa está dada por

$$u_x = c_1 3^x + c_2 2^x + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{x}{2}2^x.$$

3.2 MÉTODO DE VARIACION DE PARÁMETROS

Es otro método para hallar una solución particular de una ecuación en diferencias no homogénea. Como se verá tiene una clara ventaja sobre el método de los coeficientes indeterminados, la cual consiste en que *siempre* proporciona una solución particular y_p, a condición de que la ecuación homogénea correspondiente se pueda resolver. El presente método no se limita a una función $b(x)$ que sea como una combinación de las que aparecen en la página 49. Además el método de variación de parámetros, a diferencia del de los coeficientes indeterminados, es aplicable a ecuaciones en diferencias con coeficientes variables.

Pasos: (se presentará el proceso suponiendo que es una ecuación en diferencias de segundo orden, no perdiendo generalidad para el orden que sea)

Sea $u(x+2)+A_1(x)u(x+1)+A_0(x)u(x)=R(x)$ una ecuación en diferencias, donde se supone que las soluciones de la homogénea asociada son $u_1(x)$ y $u_2(x)$.

1) La solución general de la homogénea asociada será $u_x^h=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$.
2) Colocando las constantes de la homogénea asociada en función de x se tomará la solución particular de la forma $u_x^p=c_1(x)u_1(x)+c_2(x)u_2(x)$.
3) Si se forma $u_{x+1}^p=c_1(x+1)u_1(x+1)+c_2(x+1)u_2(x+1)$, y tomando en consideración $\Delta c_1(x)=c_1(x+1)-c_1(x)$ y $\Delta c_2(x)=c_2(x+1)-c_2(x)$, se puede obtener $u_{x+1}^p=c_1(x)u_1(x+1)+c_2(x)u_2(x+1)+\underbrace{\Delta c_1(x)u_1(x+1)+\Delta c_2(x)u_2(x+1)}$
4) Si se hace $\Delta c_1(x)u_1(x+1)+\Delta c_2(x)u_2(x+1)=0$ (ec. 1), la forma de u_x^{p+1} se reduce a $u_{x+1}^p=c_1(x)u_1(x+1)+c_2(x)u_2(x+1)$
5) Calculando u_{x+2}^p, se tiene $u_{x+2}^p=c_1(x+1)u_1(x+2)+c_2(x+1)u_2(x+2)$ que se puede representar por $u_{x+2}^p=\left[\Delta c_1(x)+c_1(x)\right]u_1(x+2)+\left[\Delta c_2(x)+c_2(x)\right]u_2(x+2)$, pero también por $u_{x+2}^p=\Delta c_1(x)u_1(x+2)+c_1(x)u_1(x+2)+\Delta c_2(x)u_2(x+2)+c_2(x)u_2(x+2)$
6) Sustituyendo u_{x+1}^p, u_{x+2}^p en la ecuación original se formará la ecuación

$$c_1(x)\left[u_1(x+2)+A_1(x)u_1(x+1)+A_0(x)u_1(x)\right]+c_2(x)\left[u_2(x+2)+A_1(x)u_2(x+1)+A_0(x)u_2(x)\right]+$$
$$\Delta c_1(x)u_1(x+2)+\Delta c_2(x)u_2(x+2)=R(x)$$

donde los primeros dos términos del miembro izquierdo de la ecuación son cero por ser $u_1(x),u_2(x)$ soluciones de la ecuación homogénea asociada. Entonces la ecuación se reduce a la forma

$$\Delta c_1(x)\ u_1(x+2)+\Delta c_2(x)\ u_2(x+2)=R(x) \quad \text{(ec.2)}$$

7) Se resuelve el sistema formado por (ec. 1) y (ec. 2) utilizando Cramer, donde las incógnitas son $\Delta c_1(x)$ y $\Delta c_2(x)$, se tiene

$$\begin{cases} \Delta c_1(x)u_1(x+1) + \Delta c_2(x)u_2(x+1) = 0 \\ \Delta c_1(x)\ u_1(x+2) + \Delta c_2(x)\ u_2(x+2) = R(x) \end{cases}$$

Luego

$$\Delta c_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2(x+1) \\ R(x) & u_2(x+2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(x+1) & u_2(x+1) \\ u_2(x+2) & u_2(x+2) \end{vmatrix}} \text{ y } \Delta c_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(x+1) & 0 \\ u_2(x+1) & R(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(x+1) & u_2(x+1) \\ u_2(x+2) & u_2(x+2) \end{vmatrix}}$$

Si $\Phi(x) = \begin{vmatrix} u_1(x+1) & u_2(x+1) \\ u_1(x+2) & u_2(x+2) \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & u_2(x+1) \\ R(x) & u_2(x+2) \end{vmatrix} = -R(x)\,u_2(x+1)$

$D_2 = \begin{vmatrix} u_1(x+1) & 0 \\ u_1(x+2) & R(x) \end{vmatrix} = R(x)u_1(x+1).$

Entonces: $\Delta c_1(x) = \dfrac{-R(x)u_2(x+1)}{\Phi(x)}$

Y así $c_1(x) = -\Delta^{-1}\left(\dfrac{R(x)u_2(x+1)}{\Phi\ (x)}\right).$

De igual manera $c_2(x) = \Delta^{-1}\left(\dfrac{R(x)u_1(x+1)}{\Phi(x)}\right)$

y $c_2(x) = -\Delta^{-1}\left(\dfrac{R(x)u_1(x)}{\Phi\ (x)}\right)$

<u>**Ejemplo 6.**</u> Resolver $u(x+2) - 2u(x+1) + u(x) = 3^x$

De los coeficientes de la ecuación homogénea asociada, se deduce que hay una raíz doble, luego la solución general es de la forma:

$$u_x^h = c_1 + c_2 x$$

haciendo

$$u_x^p = c_1(x) + x c_2(x)$$

se forma el sistema

$$\begin{cases} \Delta c_1(x) + \Delta c_2(x)(x+1) = 0 \\ \Delta c_1(x) + \Delta c_2(x)(x+2) = 3^x \end{cases}$$

Así $\Delta c_2(x) = 3^x$, obteniendo $c_2(x) = \frac{1}{2}\left(3^x\right)$

Además $\Delta c_1(x) = -3^x$(x+1) y aplicando suma por partes se obtiene

$$c_1(x) = -\tfrac{(x+1)}{2}\left(3^x\right) + \tfrac{3}{4}3^x \ .$$

La solución general obtenida es de la forma

$$u_x = c_1 + c_2 x + \tfrac{(x+1)}{2}\left(3^x\right) + \tfrac{3}{4}3^x + \tfrac{1}{2}3^x x$$

Si se tiene una ecuación en diferencias de la forma

$$u(x+3) + A_2(x)u(x+2) + A_1(x)u(x+1) + A_0(x)u(x) = R(x)$$

de modo que la solución de la homogénea asociada está dada por

$$u_x^h = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + c_3 u_3(x)$$

y si se construye por el método de variación de parámetro una solución particular de la forma

$$u_x^p = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) + c_3(x)u_3(x)$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} &\Delta c_1(x)u_1(x+1) + \Delta c_2 u_2(x+1) + \Delta c_3 u_3(x+1) = 0 \\ &\Delta c_1(x)u_1(x+2) + \Delta c_2 u_2(x+2) + \Delta c_3 u_3(x+2) = 0 \\ &\Delta c_1(x)u_1(x+3) + \Delta c_2 u_2(x+3) + \Delta c_3 u_3(x+3) = R(x) \end{aligned}$$

se determinan los valores de $c_1(x), c_2(x)$ y $c_3(x)$ aplicando similar proceso que la de segundo orden .

3.3 SOLUCIONES PARTICULARES POR MEDIO DE OPERADORES

Se analizará un tercer método para hallar una solución particular de una ecuación en diferencias no homogénea de la forma

$$f(x) = u(x+n) + a_{n-1}u(x+n-1) + ... + a_1u(x+1) + a_0u(x).$$

Utilizando el hecho que $E^n u(x) = u(x+n)$, se puede expresar la anterior ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= E^n u(x) + a_{n-1}E^{n-1}u(x) + ... + a_1Eu(x) + a_0u(x) \\ &= \left(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + ... + a_1E^n + a_0\right)u(x) \\ \text{y haciendo} \quad & \left(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + ... + a_1E^n + a_0\right) = L(E), \text{ se tiene} \\ \text{se tiene } f(x) &= L(E)u(x) \end{aligned}$$

Se supondrá que $f(x)$, tiene alguna de las siguientes formas

- $f(x) = k,$ constante
- $f(x) = kc^x,$ k y c constantes
- $f(x) = P(x),$ polinomio en $x,$ de grado "m"
- $f(x) = c^x P(x)$

Se analizará el comportamiento del polinomio $L(E)$ en cada uno de los casos anteriores.

<u>Caso 1.</u> Cuando $f(x) = k$.
Ya que $E^r k = k$, para todo r entero, entonces se tiene que $L(E)k = L(1)k$, por lo tanto

$L(E)\left\{ {k}\big/{L(1)} \right\} = k$, si $L(1) \neq 0$ donde ${k}\big/{L(1)}$ es la forma de una solución particular de la ecuación en diferencias por lo tanto $u_x^p = \dfrac{k}{L(1)}$.

Ejemplo 7. Resolver $(E-3)(E+2) = 4$, se tiene que la solución de la homogénea es de la forma $u_x^h = A3^x + B(-2)^x$, y la forma de la particular es $u_x^p = \dfrac{4}{(1-3)(1+2)} = -\dfrac{2}{3}$, que resulta de sustituir los valores de E por uno, entonces la solución completa es:

$$u_x = A3^x + B(-2)^x - \tfrac{2}{3}$$

Ejemplo 8. ¿Qué ocurre si $L(E) = 1$?, Por ejemplo, resolver $(E-1)(E-2)y_n = 1$, tomando en cuenta que $E - 1 \equiv \Delta$. La ecuación se convierte en $(E-2)\Delta y_n^p = -1$, de donde aplicando el resultado del caso 1, se tiene que $\Delta y_n^p = \dfrac{1}{1-2} = -1$. Aplicando suma en ambos miembros quedará $y_n^p = \sum_{r=0}^{n-1} -1 = -n$. Así la solución general de la ecuación es

$$y_n = A + B2^n - n$$

Caso 2. Cuando $f(x) = kc^x$ $(k, c$ constantes)

Ya que $E^r kc^x = kc^{x+r} = kc^x c^r$, entonces

$$\begin{aligned} L(E)\left(kc^x\right) &= k(a_0 c^x + a_1 c^{x+1} + \ldots + c^{x+r}) \\ &= kc^x L(c) \end{aligned}$$

Si $L(c) \neq 0$, se tiene $L(E)\left\{ {kc^x}\big/{L(c)} \right\} = kc^x$, convirtiéndose $\dfrac{kc^x}{L(c)}$, en la solución particular es decir $u_x^p = \dfrac{kc^x}{L(c)}$, siempre que $L(c) \neq 0$

Ejemplo 9. Resolver $(E+2)(E+3)y_n = 4^n$. Una solución particular se obtiene sustituyendo E por 4, teniéndose $y_n^p = 4^n/6*7 = 4^n/42$, quedando la solución general de la forma

$$y_n = A(-2)^n + B\left(-3\right)^n + \frac{4^n}{42}$$

El caso en que $L(c)=0$, se analizará como un caso particular del caso 4.

Caso 3. Cuando $f(x)=P(x)$

Donde $P(x)$ es un polinomio de grado m. Así $L(E)\,u(x)=P(x)$.

Se supone una solución particular de la forma $u_x^p = \dfrac{P(x)}{L(E)} = \dfrac{P(x)}{L(1+\Delta)}$

entonces buscando un desarrollo en potencias crecientes de Δ, se tiene

$$\frac{1}{L(\Delta+1)} = b_0 + b_1\Delta + b_2\Delta^2 + \ldots + b_m\Delta^m + \ldots$$

Nótese que Δ^{m+1} anula a $P(x)$, por ello es inmediato que sólo se necesita un desarrollo en potencias, que contenga hasta Δ^m, luego

$$u_x^p = (b_0 + b_1\Delta + \ldots + b_m\Delta^m + \ldots)P(x)$$

Ejemplo 10. Resolver $(E-2)(E-3)y_n = n^2-1$.Una solución particular tiene que ser de la forma

$$y_n^p = \left\{ 1/(E-3)(E-2) \right\}\left(n^2-1\right)$$

$$
\begin{aligned}
y_n^p &= \left\{ \frac{1}{E-3} - \frac{1}{E-2} \right\} (n^2-1) \quad \text{(introduciendo fracciones parciales)}\\
&= \left\{ \frac{1}{-2+\Delta} - \frac{1}{-1+\Delta} \right\} (n^2-1)\\
&= \left\{ (1-\Delta)^{-1} - \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\Delta\right) \right\} (n^2-1)\\
&= \left\{ (1+\Delta+\Delta^2+\ldots) - \tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}\Delta+\tfrac{1}{4}\Delta^2+\ldots\right) \right\} (n^2-1) \quad \text{(expresando en series de potencias)}\\
&= \left\{ \tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}\Delta+\tfrac{7}{8}\Delta^2+\ldots \right\} (n^2-1)
\end{aligned}
$$

Ya que $\Delta(n^2-1) = \left[(n+1)^2-1\right] - \left[n^2-1\right] = 2n+1$ y además $\Delta^2(n^2-1) = 2$, la solución particular obtenida es

$$y_n^p = \tfrac{1}{2}(n^2-1) + \tfrac{3}{4}(2n+1) + \tfrac{7}{8}\left(2\right) = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{3}{2}n + 2$$

y la solución general de la ecuación completa es de la forma

$$y_n = A2^n + B3^n + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{3}{2}n + 2$$

<u>Caso 4.</u> Cuando $f(x) = c^x P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio en x de grado m y c una constante.

Para todo real r se tiene que

$$
\begin{aligned}
E^r c^x P(x) &= c^{x+r} P(x+r)\\
&= c^x c^r E^r P(x)\\
&= c^x (cE)^r P(x) \ ,
\end{aligned}
$$

entonces

$$L(E)\left\{c^x P(x)\right\} = c^x L(cE) P(x) \ ,$$

lo cual sugiere el siguiente resultado

$$L^{-1}(E) = \left\{c^x P(x)\right\} = c^x L^{-1}(cE) P(x) \ ,$$

por lo tanto

$$L(E)\left\{L^{-1}(E)\left[c^x P(x)\right]\right\} = L(E)\left\{c^x L^{-1}(cE)P(x)\right\} = c^x L(cE)\left\{L^{-1}(cE)P(x)\right\} = c^x P(x)$$

Tomando en cuenta que $E \equiv 1+\Delta$, una solución particular es

$$y_x^p = c^x L^{-1}(c + c\Delta)P(x)$$

Ejemplo 11. Resolver $(E-2)(E-3)y_n = 4^n\left(n^2 - n + 5\right)$.

Una solución particular tiene que ser de la forma

$$\begin{aligned}
y_n^p &= \left\{(E-2)(E-3)\right\}^{-1}\left\{4^n(n^2-n+5)\right\} \\
&= 4^n\left\{(4E-2)(4E-3)\right\}^{-1}(n^2-n+5) \quad \text{(sustituyendo E por } cE\text{)} \\
&= 4^n\left\{6-20E+16E^2\right\}^{-1}(n^2-n+5) \\
&= 4^n\left\{6-20(1+\Delta)+16(1+2\Delta+\Delta^2)\right\}^{-1}(n^2-n+5) \\
&= 4^n\left\{2+12\Delta+16\Delta^2\right\}^{-1}(n^2-n+5) \\
&= 4^n.\tfrac{1}{2}\left\{1+6\Delta+8\Delta^2\right\}^{-1}(n^2-n+5) \\
&= 4^n.\tfrac{1}{2}\left\{1-6\Delta+28\Delta^2+\ldots\right\}(n^2-n+5). \quad \text{(haciendo el desarrollo en series de potencias)}
\end{aligned}$$

Ya que $\Delta(n^2-n+5) = 2n$ y $\Delta^2(n^2-n+5) = 2$, entonces una solución particular es

$$\begin{aligned}
y_n^p &= 4^n\left\{\tfrac{1}{2}(n^2-n+5) - 6n + 28\right\} \\
&= 4^n.\tfrac{1}{2}(n^2-13n+61)
\end{aligned}$$

y así la solución general es

$$y_n = A2^n + B3^n + 4^n.\tfrac{1}{2}(n^2-13n+61)$$

Ejemplo 12. Resolver $(E-2)(E-3)y_n = 2^n$. Con este ejemplo se muestra cómo tratar el caso 2 cuando el $L(c)=0$, trabajando como si fuera el caso 4 con $P(x)=1$.

Por lo anterior, una solución particular será

$$\begin{aligned} y_n^p &= \{(E-2)(E-3)\}^{-1}(2^n.1) \\ &= 2^n\{2\Delta(2\Delta-1)\}^{-1}1 \\ &= -2^{n-1}\Delta^{-1}(1-2\Delta)^{-1}(1) \\ &= -2^{n-1}\Delta^{-1}(1+2\Delta)(1) \\ &= -2^{n-1}\Delta^{-1}(1) = -2^{n-1}n \end{aligned}$$

entonces la solución general es

$$y_n = A2^n + B3^n - n2^{n-1}$$

En los cuatro casos anteriores se pueden reducir a tres ya que si $c=1$ en el caso 4, se cae en el caso 3, como se vio en el anterior ejemplo. Incluso si en el caso 2, $c=1$, se estaría llegando al caso 1.

El siguiente ejemplo involucra el caso cuando $f(x)=sen(kx)$ ó $f(x)=\cos(kx)$. Para resolver dicho tipo de ecuaciones es necesario apoyarse en los anteriores conocimientos, así como en las identidades trigonométricas básicas

Se sabe que:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \text{ y } senx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} .$$

y además

$$e^{ix} = \cos x + isenx \text{ y } e^{-ix} = \cos x - isenx .$$

Retomando lo antes visto, se puede afirmar que

$$e^{ix} = (e^i)^x = c^x \text{, tomando } c = e^i$$

<u>Ejemplo 13.</u> Resolver $(E^2+1)\,u(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right).$

La solución de la homogénea asociada está dada por

$$u_x^h = c_1 \cos\tfrac{\pi}{2}x + c_2\, \mathrm{s}en\tfrac{\pi}{2}x\ .$$

Dado que

$$\lambda = \pm i$$
$$|\lambda| = 1$$
$$(0,1) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

la solución particular será :

$$u^*(x) = \frac{1}{E^2+1} sen\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{E^2+1}\left(\frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{E^2+1}e^{\frac{ix}{2}} - \frac{1}{E^2+1}e^{-\frac{ix}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i\left(\frac{x}{2}-1\right)} - e^{-i\left(\frac{x}{2}-1\right)} + e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}{2+e^{i}+e^{i}}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{2i\, sen\left(\frac{x}{2}-1\right) + 2i\,\mathrm{sen}\,\frac{\mathrm{x}}{2}}{2+2\cos(1)}\right]$$

$$= \frac{sen\left(\frac{x}{2}-1\right) + sen\left(\frac{x}{2}\right)}{2(2\cos^2\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2sen\left(\frac{x-1}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\right)}{4\cos^2\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{sen\left(\frac{x-1}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{1}{2}\right)}$$

La solución general es:

$$u_x = A\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + B\,sen\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{sen\left(\frac{x-1}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{1}{2}\right)}$$

CAPÍTULO IV. ECUACIONES EN DIFERENCIAS CON COEFICICENTES VARIABLES

4.0 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se abordará la solución de ecuaciones lineales en diferencias con coeficientes variables. Se resolverán casos muy particulares de ecuaciones de este tipo, limitándose a ecuaciones de primer y segundo orden

4.1 LA ECUACIÓN DE PRIMER ORDEN CON COEFICIENTES VARIABLES

Sea $u(n+1)-p(n)u(n)=R(n)$, una ecuación de primer orden con coeficientes variables. Se supondrá que $R(n)=0$, resolviéndola por un método iterativo**.** Si se conoce $u(1)$**,** se tiene a partir de $u(n+1)=p(n)u(n)$

$$
\begin{aligned}
u(2) &= p(1)u(1) \\
u(3) &= p(2)u(2) \quad = p(1)p(2)u(1) \\
u(4) &= p(3)u(3) \quad = p(1)p(2)p(3)u(1) \\
u(5) &= p(4)u(4) \quad = p(1)p(2)p(3)p(4)u(1) \\
&\vdots \\
u(n+1) &= p(n)u(n) = p(n-1)u(n-1) \quad = p(1)p(2)p(3)\ldots p(n-1)u(1) \\
u(n) &= u(1)\prod_{k=1}^{n-1} p(k) \\
u(n) &= A\prod_{k=1}^{n-1} p(k); \quad \text{con } A=u(1). \\
\text{ó } u(1) &= u(n)/\prod_{k=1}^{n-1} p(k)
\end{aligned}
$$

Otro método para resolver la ecuación en diferencias anterior consiste en multiplicar la ecuación homogénea (o la no homogénea) por el factor $1/\prod_{k=1}^{n} p(k)$. Procediendo de dicha manera se obtiene

$$\frac{u(n+1)}{\prod_{k=1}^{n} p(k)} - \frac{p(n)u(n)}{\prod_{k=1}^{n} p(k)} = \frac{R(n)}{\prod_{k=1}^{n} p(k)}$$

$$\frac{u(n+1)}{\prod_{k=1}^{n} p(k)} - \frac{u(n)}{\prod_{k=1}^{n-1} p(k)} = \frac{R(n)}{\prod_{k=1}^{n} p(k)}$$

$$\Delta\left[\frac{u(n)}{\prod_{k=1}^{n-1} p(k)}\right] = \frac{R(n)}{\prod_{k=1}^{n} p(k)}$$

$$\frac{u(n)}{\prod_{k=1}^{n-1} p(k)} = A + \Delta^{-1}\left(\frac{R(i)}{\prod_{k=1}^{i} p(k)}\right)$$

$$u(n) = A\prod_{k=1}^{n-1} p(k) + \left(\prod_{k=1}^{n-1} p(k)\right)\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{R(i)}{\prod_{k=1}^{i} p(k)}\right)$$

donde, la última ecuación se puede reducir a $u(n) = A\prod_{k=1}^{n-1} p(k)$, si $R(n) = 0.$

Se obtiene de esta manera una fórmula en lugar de estar haciéndolo por métodos recurrentes.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $u(n+1) - nu(n) = 1$

$$u(n) = A\prod_{1}^{n-1} n + \left(\prod_{1}^{n-1} n\right)\sum_{1}^{n-1} 1/\prod_{1}^{n} n$$

$$u(n) = A(n-1)! + (n-1)!\sum_{1}^{n-1} 1/n!$$

$$u(n) = \left[\sum_{1}^{n-1} 1/n! + A\right](n-1)! \quad \text{donde } A \text{ es una constante arbitraria}$$

<u>Ejemplo 2.</u> Resolver la ecuación $y_{n+1}^2 - a^n y_n^2 = a^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, esta ecuación no es lineal pero se puede hacer lineal escribiendo $y_n^2 = z_n$, reduciéndose a $z_{n+1} - a^n z_n = a^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, la solución obtenida es $z_n = a^{\frac{1}{2}n(n+1)}\left[\frac{a^{-n+1}}{(a-1)} + C\right]$

Por lo tanto $y_n^2 = a^{\frac{1}{2}n(n+1)}\left[\frac{a^{-n+1}}{(a-1)} + C\right]$.

<u>Ejemplo 3</u>. Resolver $y(x+1) - y(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

Este tipo de ecuaciones en diferencias, tiene la particularidad de que la varible x no es discreta, sino continua. En este caso en lugar de una constante arbitraria se tomará una función periódica A, lo que significa que $A(x+1) = A(x)$, en el caso de que su periodo fuera uno. De no ser así, se tendría que $A(x+p) = A(x)$ si su período fuera p.

Entonces de la ecuación homogénea asociada se tiene que $y_h(x) = A$, donde A es una función periódica de período 1 que se escribirá como $y_h(x) = A$

Ya que $f(x) = e^x$ se tiene

$$y_x^p = \frac{e^x}{\mathrm{L(c)}} \quad , \ \mathrm{L(c)} \neq 0.$$

Por lo tanto $y_x^p = \dfrac{e^x}{e-1}$, siendo la solución general

$$y(x) = A(x) - \frac{e^x}{1-e}$$

<u>Ejemplo 4</u>. Resolver $y(x+1)-y(x)=\dfrac{1}{x}$

Se tiene dificultad con $\frac{1}{x}$, pues $\Delta^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ no se ha definido, pero se le puede dar otra estructura a $\frac{1}{x}$ de la forma siguiente.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+1}+\ldots+\frac{1}{x+}-\frac{1}{x+n}+\ldots\ ;$$

agrupando se tiene que

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x+n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x+n+1}$$

Tomando en cuenta lo anterior la ecuación original queda escrita en forma equivalente así:

$$\begin{aligned}y(x+1)-y(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{x+k}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{x+k+1}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{(x+n)(n+1)(x+n+1)}.\end{aligned}$$

Utilizando fracciones parciales

$$\frac{(n+1)}{(n+1)(x+n)(x+n+1)}=\frac{A}{(x+n)}+\frac{B}{(x+n+1)}\quad ,$$

obteniendo $\mathrm{A}=1-x$ y $\mathrm{B}=x$.

Luego

$$y(x+1)-y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left[\frac{1-x}{x+n}+\frac{x}{x+n+1}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{(n+1)(x+n+1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x-1}{(n+1)(x+n)}.$$

Así:

$$y_x^p=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x-1}{(n+1)(x+n)}.$$

La solución general está dada por:

$$y(x)=A(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x-1}{(n+1)(x+n)}$$

4.2 CAMBIO DE VARIABLE DEPENDIENTE

Cuando la ecuación en diferencias $F(n, y_n, y_{n+1,} y_{n+2,\ldots,} y_{n+r})=0$ es conocida, también lo es la ecuación $G\big(n, f(z_n), f(z_{n+1}),..., f(z_{n+r})\big)=0$ donde

$y_n = f(z_n)$; $y_{n+1} = f(z_{n+1})$; $y_{n+2} = f(z_{n+2})$; $y_{n+r} = f(z_{n+r})$.

<u>Ejemplo 5.</u> Resolver $y_{n+2}^2-5y_{n+1}^2+6y_n^2=0.$

Haciendo $z_n = y_{\mathrm{n}}^2$, $\mathrm{z}_{n+1} = y_{n+1}^2$, $\mathrm{z}_{n+2} = y_{n+2}^2$ y sustituyendo en la ecuación original se tiene

$$u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n=0$$
$$E^2u_n-5Eu_n+6u_n=0$$
$$(E^2-5E+6)\,u_n=0$$
$$(E-3)(E-2)\,u_n=0$$

Luego:

$$z_n = A3^x + B2^x,$$

regresando a la variable original se obtiene

$$y_n^2 = A3^x + B2^x.$$

<u>Ejemplo 6</u>. Resolver $\left[y_{n+2} - (n+1)y_{n+1}\right] - n\left[y_{n+1} - ny_n\right] = 0.$

Haciendo $z_n = y_{n+1} - ny_n$ y sustituyendo en la ecuación original se tiene

$$z_{n+1} - nz_n = 0$$
$$z_n = A(n-1)!$$

regresando a la variable original queda

$$y_{n+1} - ny_n = A(n-1)!$$

dividiendo por $n!$, como se vio al principio del capítulo, se tiene que

$$\Delta\left[y_n/(n-1)!\right] = A/n$$

entonces $y_n/(n-1)! = A\sum_1^{n-1} 1/n + B$ donde A y B son constantes arbitrarias.

<u>Ejemplo 7.</u> Resolver $y_{n+1}/y_n = ey_{n+1}{}^{-1/n}$.

Sacando logaritmo natural en ambos lados de la ecución se obtiene $\ln y_{n+1} - \ln y_n = 1 - \frac{1}{n}\ln y_{n+1}$,

y luego haciendo $z_n = \ln y_n$, se tiene:

$$\begin{aligned}
z_{n+1} - z_n &= 1 - \tfrac{1}{n} z_{n+1} \\
(n+1)z_{n+1} - nz_n &= n \\
\Delta(nz_n) &= n \\
nz_n &= \sum_1^{n-1} i + A = \tfrac{1}{2}n(n-1) + A \\
y_n &= e^{\frac{1}{2}(n-1)+\frac{A}{n}} = e^{\frac{1}{2}(n-1)}B^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

donde B es una constante arbitraria.

4.3 LA FUNCIÓN GAMMA

La función Gamma denotada con la letra Γ está definida por $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ para valores reales positivos de x y cumple con la ecuación en diferencias

$$y(x+1)=xy(x)$$

La solución general de la ecuación anterior es de la forma $y_x = A\Gamma(x)$, donde A es una función arbitraria con perídodo uno, determinada según las condiciones iniciales.

Si x es un entero positivo n se tendrá que la ecuación en diferencias se convierte en

$$y(n+1)=ny(n)$$

cuya solución, por lo que se revisó al principio del capítulo, es de la forma $\Gamma(n)=(n-1)!$, de donde es fácil verificar que $\Gamma(1)=(1-1)!=1$

Además la función cumple con esta segunda propiedad:

$$\underset{x\to 0}{Lím}\ x\Gamma(x)=\underset{x\to 0}{Lím}\ \Gamma(x+1)=\Gamma(1)=1\ ,$$

por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0} x\Gamma(x)=1.$$

Por otro lado

$$\underset{x\to 0}{Lím}\ x\Gamma(x)\ =\underset{x\to 0}{Lím}\ \frac{\Gamma(x+1)}{x}\to\infty$$

¿Qué sucede con $\Gamma(x)$ para $x=-1,-2,-3,\ldots$

$$-\Gamma(-1)=\Gamma(0)\to\infty$$
$$-2\Gamma(-2)=\Gamma(-1)\to\infty$$
$$-3\Gamma(-3)=\Gamma(-2)\to\infty$$

y en general $\Gamma(x)\to\infty$ para valores de x enteros negativos.

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \frac{\Gamma(x+1)}{x} \\
\Gamma(x) &= \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} \\
&\vdots \\
\Gamma(x) &= \frac{\Gamma(x+r)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+r-1)}.
\end{aligned}$$

Una solución especial de la ecuación $y(x+1) = xy(x)$, se obtiene por:

$$\ln y(x+1) = \ln x + \ln y(x),$$

derivando se tiene:

$$\frac{y'(x+1)}{y(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{y'(x)}{y(x)}$$

Haciendo el cambio el cambio de variable

$$z(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$$

en la ecuación original se obtiene:

$$z(x+1) - z(x) = \frac{1}{x}$$

$$z(x) = c + (x-1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+x)}, \quad \text{c es constante.}$$

luego

$$\begin{aligned}
z(x) &= c + (x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(n+x)}\right] \\
&= c + (x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+x)}\right],
\end{aligned}$$

Sustituyendo $z(x)$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = c + (x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+x)}\right],$$

integrando desde 1 hasta $x+1$

$$\int_{1}^{x+1}\frac{y'(x)}{y(x)}dx = c + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{1}^{x+1}\frac{dx}{n+1} - \int_{1}^{x+1}\frac{dx}{n+x}\right]$$

$$\ln\left(y(x)\Big|_{1}^{x+1}\right) = cx + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x}{(n+1)} - \ln(n+x)\Big|_{1}^{x+1}\right]$$

$$\ln(y(x+1)) - \ln(y(1)) = cx + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x}{(n+1)} - \ln(n+x+1) + \ln(n+1)\right]$$

$$\ln(y(x+1)) = cx + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x}{(n+1)} - \ln\left(\frac{n+1}{n+x+1}\right)\right]$$

$$= cx - \sum_{n=0}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{n+1}{n+x+1}\right) - \frac{x}{(n+1)}\right]$$

$$= \ln e^{cx} - \ln\prod_{n=0}^{\infty} e^{\left[\ln\left(\frac{n+1}{n+x+1}\right) - \frac{x}{(n+1)}\right]}$$

$$= \ln e^{cx} - \ln\left(\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+x+1}{n+1}\right)\left(e^{\left(-\frac{x}{n+1}\right)}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^{cx}}{\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+x+1}{n+1}\right)\left(e^{\left(-\frac{x}{n+1}\right)}\right)}\right)$$

$$\ln y(x+1) = \ln\left(e^{cx}\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+x+1}\right)\left(e^{\left(\frac{x}{n+1}\right)}\right)\right)$$

Por la inyectividad del logaritmo natural se tiene

$$e^{-c}=\frac{1}{x+1}\prod_{n\geq 1}\left(\frac{n+x}{n+x+1}\right)e^{\left(\frac{1}{n}\right)},$$

aplicando logaritmo natural en ambos miembros

$$-c=\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)+\sum_{n\geq 1}\ln\left(\frac{n+x}{n+x+1}e^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)+\sum_{n\geq 1}\left(\ln\left(\frac{n+x}{n+x+1}\right)+\frac{1}{n}\right),$$

o sea

$$e^{-c}=\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\left(\frac{x+2}{x+3}\right)\cdots\left(\frac{x+n}{x+n+1}\right)\left(e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots}\right)$$

$$e^{-c}=\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{1}{x+n+1}e^{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}1/k\right)}$$

$$-c=\underset{x\to\infty}{Lím}\ln\left(\frac{1}{x+n+1}e^{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}1/k\right)}\right)$$

$$-c=\underset{x\to\infty}{Lím}\left(\sum_{k=1}^{n}k-\ln(n+k+1)\right)$$

$$-c=\underset{x\to\infty}{Lím}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\dots+\tfrac{1}{n}-\ln(n)\right)$$

en donde el miembro derecho es la constante de Euler que se denota con γ, así:

$$\Gamma(x)=\frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n\geq 1}\tfrac{n}{n+1}e^{\left(\frac{x}{n}\right)}$$

Ya se sabe que la función Gamma, es una solución de la ecuación en diferencias de la forma

$$y(x+1)=xy(x)$$

con una solución general de la forma $A\Gamma(x)$ donde A es una función con período uno. Considérense las siguientes variantes de ecuaciones en diferencias con coeficiente variables y cuyas soluciones quedan expresadas en términos de funciones Gamma.

Casos a considerar

Caso 1. $y(x+1)=(x-\alpha)y(x)$, hágase $z=x-\alpha$ $y\left(z+\alpha\right)=u(z)$ entonces $u(z+1)=zu(z)$

ó $u(z)=A\Gamma(z)$ por lo tanto $y(z+\alpha)=A\Gamma(z)$ ó $y(x)=A\Gamma(x-\alpha).$

Caso 2. $y(x+1)=(x-\alpha)(x-\beta)y(x)$

Una solución de dicha ecuación es de la forma $\Gamma(x-\alpha)\Gamma(x-\beta)$, como se muestra a continuación

$$(x-\alpha)\Gamma(x-\alpha).(x-\beta)\Gamma(x-\beta)=\Gamma(x-\alpha+1)\Gamma(x-\beta+1)$$

Así la solución general de

$$y(x+1)=(x-\alpha)(x-\beta)y(x)$$

es

$$y(x)=A\Gamma(x-\alpha)\Gamma(x-\beta)$$

Caso 3. La solución general de $y(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_r)$ es

$$y(x)=A\Gamma(x-\alpha_1)\Gamma(x-\alpha_2)...\Gamma(x-\alpha_r)$$

Caso 4. La solución general de $y(x+1)=c(x-\alpha)y(x)$, $c\neq 0$ es $y(x)=Ac^x\Gamma(x-\alpha)$.

Considerar la transformación $y(x)=c^x z(x)$, con la que la ecuación original se convierte en

$$\begin{aligned} c^{x+1}z(x+1) &= c(x-\alpha)c^x z(x) \\ c^{x+1}z(x+1) &= (x-\alpha)c^{x+1}z(x)\ ,\ c\neq 0 \end{aligned}$$

simplificando c^{x+1} se obtiene $z(x+1)=(x-\alpha)z(x)$, cuya solución es de la forma $A\Gamma(x-\alpha)$.

Caso 5. La solución general de

$$y(x+1)=c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_r)\ ,\ c\neq 0$$

es

$$y(x)=Ac^x\Gamma(x-\alpha_1)\Gamma(x-\alpha_2)...\Gamma(x-\alpha_r)$$

Caso 6.. Cualquier polinomio $f(x)$ de grado r puede ser escrito en la forma

$$f(x)=c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_r)\ ,\ c\neq 0$$

donde algunos de los factores pueden ser idénticos. Ahora se podrá escribir la solución general de cualquier ecuación de la forma

$$y(x+1)=f(x)y(x).$$

Ejemplo 8. Resolver

$$\begin{aligned} y(x+1) &= (2x^2-x-1)y(x) \\ &= (2x+1)(x-1)y(x) \\ &= 2(x+\tfrac{1}{2})(x-1)y(x) \end{aligned}$$

por lo tanto la solución general está dada por

$$y(x)=A2^x\Gamma(x+\tfrac{1}{2})\Gamma(x-1)$$

Ejemplo 9. Resolver

$$\begin{aligned} y(x+1) &= (x-x^2)y(x) \\ &= x(1-x)y(x) \\ &= -x(x-1)y(x) \end{aligned}$$

Así la solución general está dada por

$$
\begin{aligned}
y(x) &= A(-1)^x\,\Gamma(x)\Gamma(x-1)\\
&= A(-1)^x(x-1)\Gamma^2(x-1) \text{ ya que } \Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)
\end{aligned}
$$

Caso 7. Para la ecuación de la forma $y(x+1)=\dfrac{f(x)}{g(x)}y(x)$ donde $f(x)$ y $g(x)$ son de grado r y s respectivamente con $f(x)=a\prod_{r=1}^{r}(x-\alpha_r)$ y $g(x)=b\prod_{s=1}^{s}(x-\alpha_s)$, $a\neq 0$ y $b\neq 0$ se tiene la solución general de la forma

$$
y(x)=\left(\frac{a}{b}\right)^x\frac{\prod_{k=1}^{r}\Gamma(x-\alpha_k)}{\prod_{n=1}^{s}\Gamma(x-\beta_n)}
$$

4.4 SOLUCION DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES CON COEFICIENTES VARIABLES POR SERIES FACTORIALES

Denotando con ρ el operador definido por $\rho = xE$, es decir

$$
\begin{aligned}
\rho y(x) &= xEy(x)\\
&= xy(x+1)\\
\rho^2 y(x) &= \rho\rho y(x)\\
&= xExy(x+1)\\
&= x(x+1)y(x+2)\\
\rho^3 y(x) &= \rho\rho^2 y(x)\\
&= xE(x(x+1)y(x+2))\\
&= x(x+1)(x+2)(y(x+3)\\
\rho^4 y(x) &= \rho\rho^3 y(x)\\
&= xE(x(x+1)(x+2)y(x+3))\\
&= x(x+1)(x+2)(x+3)y(x+4), \quad \text{en general se tiene que}\\
\rho^n y(x) &= \rho\rho^{n-1}y(x)\\
&= xE(x(x+1)\ldots(x+n-2)y(x+n-1))\\
&= x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)y(x+n)
\end{aligned}
$$

Si se toma $y(x) \equiv 1$ entonces se tiene

$$
\begin{aligned}
\rho &= x \\
\rho^2 &= x(x+1) \\
\rho^3 &= x(x+1)\ldots(x+r-1)
\end{aligned}
$$

pero también se puede escribir $\rho.1 = \rho, \rho^2.1 = \rho^2$, etc.

Algunas ecuaciones en diferencias, se pueden expresar en términos de ρ. Por ejemplo

$$
\begin{aligned}
x(x+1)y(x+2) - 5xy(x+1) + 6y(x) &= 0 \\
\left(\rho^2 - 5\rho + 6\right)y(x) &= 0
\end{aligned}
$$

E**s** fácil verificar que ρ cumple con las siguientes reglas algebraicas

$i)$ $\rho + a = a + \rho$ con a independiente de x

Prueba

$$
\begin{aligned}
(\rho + a)y(x) &= (xE + a)y(x) \\
&= xEy(x) + ay(x) \\
&= ay(x) + xEy(x), \quad \text{por estar } a \text{ en } \mathbb{R} \\
&= (a + xE)y(x) \\
&= (a + \rho)y(x)
\end{aligned}
$$

Luego $\rho + a = a + \rho.$

$ii)$ $a\rho = \rho a,$ con $a \in \mathbb{R}$

Prueba

$$
\begin{aligned}
\left(a\rho\right)y(x) &= axEy(x) \\
&= xEay(x) \\
&= \rho ay(x)
\end{aligned}
$$

Luego $a\rho = \rho a.$

iii) $\rho(a+\rho)=a\rho+\rho^2.$

Prueba

$$
\begin{aligned}
(\rho(a+\rho))y(x) &= xE(a+E)y(x)\\
&= xEay(x)+xExEy(x)\\
&= axEy(x)+(xE)^2\,y(x)\\
&= (axE+(xE)^2)y(x)\\
&= (a\rho+\rho^2)y(x).
\end{aligned}
$$

$$\text{Luego}\quad \rho(a+\rho)=a\rho+\rho^2$$

iv) $\rho^m\rho^n=\rho^{m+n}=\rho^n\rho^m,$ con $m,n\in\square.$

Prueba

$$
\begin{aligned}
\left(\rho^m\rho^n\right)y(x) &= \rho^m\underbrace{\left[(xE)(xE)...(xE)\right]}_{n-veces}y(x)\\
&= \underbrace{\left[(xE)(xE)...(xE)\right]}_{m-veces}\underbrace{\left[(xE)(xE)...(xE)\right]}_{n-veces}\\
&= (xE)^{m+n};\ x\in\square\\
&= \underbrace{\left[(xE)(xE)...(xE)...(xE)\right]}_{(m+n)-veces}\\
&= \left[\underbrace{(xE)(xE)...(xE)}_{n-veces}(xE)...(xE)\right]y(x)\\
&= \rho^n\underbrace{\left[(xE)(xE)...(xE)\right]}_{m-veces}y(x)\\
&= \rho^n\left(\rho^m\right)y(x)\\
\text{Luego } \rho^m\rho^n &= \rho^{m+n}=\rho^n\rho^m.
\end{aligned}
$$

Las anteriores reglas se utilizarán para justificar algunos pasos algebraicos en la solución de ecuaciones en diferencias con coeficientes variables.

Por otro lado $\left(\rho - a\right) y(x) = 0$, puede representarse por $\rho y(x) - a y(x) = 0$ o bién por $xy(x+1) = ay(x)$, cuya solución general es de la forma

$$y(x) = Aa^x / \Gamma(x)$$

donde A, es una función periódica, con período unitario

Teorema. Si una ecuación en diferencias se puede escribir de la forma

$$\left(\rho^n + \lambda_{n-1}\rho^{n-1} + ... + \lambda_1\rho + \lambda_0\right) y(x) = 0$$

donde λ_0, λ_1, …, λ_{n-1} son constantes, y si además se puedeexpresar el polinomio en ρ de la forma $(\rho - a_1)(\rho - a_2)(\rho - a_3)\ldots(\rho - a_n)$, se tiene que la solución general de la anterior ecuación es

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_1 a^x}{\Gamma(x)}.$$

<u>**Ejemplo 10.**</u> Resolver $x(x+1)y(x+2) - 5xy(x+1) + 6y(x) = 0$

Dicha ecuación puede expresarse por medio del operador ρ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x(x+1)y(x+2) - 5xy(x+1) + 6y(x) &= 0 \\ \rho^2 y(x) - 5\rho y(x) + 6y(x) &= 0 \\ (\rho^2 - 5\rho + 6)y(x) &= 0 \\ (\rho - 3)(\rho - 2)y(x) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución es $y(x) = \dfrac{3^x A + 2^x B}{\Gamma(x)}$.

Ejemplo 11. Resolver $(\rho-2)(\rho-1)y(x)=0$ es fácil verificar que $y(x)=\dfrac{A2^{x}+B}{\Gamma(x)}$

¿Qué hacer si las soluciones son dobles, triples, etc.?

Ejemplo 12. Resolver $(\rho^2-2a\rho+a^2)y(x)=0$

$$(\rho^2-2a\rho+a^2)y(x)=0$$
$$(\rho-a)(\rho-a)y(x)=0$$
$$(\rho-a)y(x)=z(x),\qquad \mathrm{z(x)}=\frac{A_1a^x}{\Gamma(x)}$$
$$(\rho-a)y(x)=\frac{A_1a^x}{\Gamma(x)}$$
$$xy(x+1)-ay(x)=\frac{A_1a^x}{\Gamma(x)}$$
$$\Gamma(x+1)y(x+1)-a\Gamma(x)y(x)=A_1a^x,\ \text{ dividiendo por } a^x$$
$$\frac{\Gamma(x+1)y(x+1)}{a^x}-\frac{\Gamma(x)y(x)}{a^{x-1}}=A_1$$
$$\Delta\left(\frac{\Gamma(x)y(x)}{a^{x-1}}\right)=A_1$$
$$\frac{\Gamma(x)y(x)}{a^{x-1}}=A_1x+B_1$$
$$\frac{\Gamma(x)y(x)}{a^x}=\frac{A_1x}{a}+\frac{B_1}{a}$$
$$y(x)=\frac{(Ax+B)}{\Gamma(x)}a^x$$

en donde A y B son funciones arbitrarias con período unitario.

En general

$(\rho-a)^n y(x)=0 \Rightarrow y(x)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a^xA_kx^k}{\Gamma(x)}$. Donde $A_n\,(n=0,1,2,...n-1)$ son funciones arbitrarias de período uno.

Conclusiones y recomendaciones

- Es evidente la similitud del desarrollo de los contenidos del cálculo de diferencias y las ecuaciones en diferencias con el desarrollo del cálculo diferencial y las ecuaciones diferenciales. Aunque pueden estudiarse separadamente, el conocimiento de ambos complementa el conocimiento del alumno en formación.
- Este trabajo es una introducción al Análisis de Ecuaciones en Diferencias. El cálculo de diferencias fue desarrollado brevemente para empezar a resolver ecuaciones que involucraran las anteriores expresiones funcionales.
- Tiene sus limitaciones. Por ejemplo no se abordaron los sistemas de ecuaciones en diferencias, y las aplicaciones han sido presentadas en casos muy abstractos, Una vez el alumno se haya ubicado con los métodos de resolución de ecuaciones en diferencias, podrá orientar sus aplicaciones a casos muy particulares en otras áreas del conocimiento, tales como economía, sociología, ingeniería o la matemática misma como las ecuaciones diferenciales parciales utilizando diferencia finitas.
- Este trabajo puede utilizarse como una guía para el desarrollo de un curso de una materia electiva en el área de las ecuaciones en diferencias finitas, la que podrá profundizarse, particularmente en toda la teoría del cálculo de las diferencias, en conceptos tales como Teorema de Rolle Discreto, Teorema del Valor Medio Discreto, Fórmula de Taylor Discreta, la Regla de L´Hopital discreta, diferencias de funciones trigonométricas, logarítmicas, etc. así como en la teoría de los sistemas de ecuaciones en diferencias finitas.
- Un aspecto muy importante en el desarrollo de la Matemática misma es tratar de poner su comprensión al nivel de todos los individuos, ya que como docentes en esta área del conocimiento debemos de procurar lograrlo presentando los contenidos referenciados a situaciones concretas del diario vivir y que luego podamos trascender a su representación abstracta. Muchas veces es al contrario: se parte del concepto abstracto, negando la posibilidad de que el alumno asocie los conceptos con situaciones concretas, poniéndo el paradigma de ser las áreas de la matemática más difíciles de lo que realmente son.

- Es necesario trascender tanto con las ecuaciones diferenciales, así como con las ecuaciones en diferencias finitas, buscar los espacios interdisciplinarios con otras áreas del conocimiento como la biología, la química, la física, la economía, las ciencias sociales, la sociología, la agronomía, la medicina, para poner a disposición de ellas las herramientas matemáticas, y no estar limitando la aplicación de éstos conceptos a casos ideales que aparecen en los textos, sino que buscar referentes concretos, donde poder establecer funciones que modelen los fenómenos en estudio.

Referencias bibliográficas

- Takehito Takahashi.
  1990, Ecuaciones en Diferencias con Aplicaciones.
  Primera Edición. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Glym James.
  2002. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería.
  Segunda Edición. Editorial Prentice Hall.
- H. Levy, F Lessman.
  1963. Finite Difference Equations.
  Second Edition. Sir Isaac Pitman & Sons Ltd. Press.
- Richard L. Burden / J. Douglas Faires.
  Análisis Numérico.
  Tercera Edición. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Frank Chorlton.
  1965. Ordinary Differential and Difference Equations. Theory and Aplications.
  First Edition. Elliots Bros & Yeoman Ltd Press.
- Jean E. Weber.
  1984. Matemáticas para Administración y Economía.
  Cuarta edición. Editorial HARLA.
- Universidad de El Salvador. Facultad de Ingeniería y Arquitectura.
  Manual de Matemática IV.
  Imprenta de la Universidad de El Salvador.
- Dennis G. Zill.
  1997. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones.
  Sexta Edición. Internacional Thompson Editores.
- Golberg, S
  Introducción a las ecuaciones en diferencias finitas
  Editorial Marcombo S.A.,1964