

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR



MsC. RUFINO ANTONIO QUEZADA SANCHEZ
RECTOR

Lic. DOUGLAS VLADIMIR ALFARO CHAVEZ
SECRETARIO GENERAL

Dr. RENE PERLA JIMENEZ
FISCAL GENERAL

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA

Dr. RAFAEL ANTONIO GOMEZ ESCOTO
DECANO

Ing. CARLOS MAURICIO CANJURA LINARES
DIRECTOR DE LA ESCUELA DE MATEMATICA

CIUDAD UNIVERSITARIA, SAN SALVADOR, MARZO DE 2008.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
ESCUELA DE MATEMATICA



ALGUNAS APLICACIONES CON COMPLEJOS Y GEOMETRIA

PRESENTADO POR:
Prof. ALFREDO ANTONIO CANIZALEZ LANDAVERDE

PARA OPTAR AL GRADO DE:
LICENCIADO EN MATEMATICA
OPCION ALGEBRA Y ANALISIS

Ing. CARLOS MAURICIO CANJURA LINARES
ASESOR

Lic. JUAN AGUSTIN CUADRA
ASESOR ADJUNTO

CIUDAD UNIVERSITARIA, SAN SALVADOR, MARZO DE 2008.

Algunas Aplicaciones con Complejos y Geometría.

Alfredo Canizález

Índice general

Agradecimientos.	3
Introducción.	4
1. Álgebra y complejos en conexión a los efectos geométricos.	6
1.1. El Cuerpo de los Números Complejos.	6
1.2. Perspectiva Algebraica.	6
1.3. Estructura Algebraica.	7
1.4. Inexistencia de la relación de orden en los complejos.	11
1.5. Perspectiva Geométrica.	12
1.6. Propiedades de conjugados.	15
1.7. El módulo de un número complejo.	17
1.8. Desigualdad triangular.	20
1.9. Números complejos en forma polar.	22
1.10. Números complejos en forma exponencial.	25
1.11. Ecuaciones e identidades trigonométricas con complejos.	27
1.12. Producto cruz y producto punto con complejos.	31
1.13. Teorema de De Moivre.	34
1.14. Raíces n-ésimas de un complejo y raíces n-ésimas de la unidad.	35
2. Geometría del triángulo.	41
2.1. Introducción a las aplicaciones geométricas.	41
2.1.1. Semejanza de triángulos.	41
2.1.2. Puntos colineales, rectas paralelas y perpendiculares.	47
2.1.3. Determinación de rectas y circunferencias.	50
2.2. Rectas y puntos notables del triángulo.	54
2.2.1. Mediatrices.	54
2.2.2. Medianas.	57
2.2.3. Alturas.	60
2.3. Aplicaciones de los complejos a la geometría.	65
2.3.1. Teorema de Napoleón.	65
2.3.2. Teorema Ptolomeo-Euler.	67
2.3.3. Teorema de Clifford.	69
2.3.4. Circunferencia de los nueve puntos.	74
2.3.5. Teorema línea de Simson - Wallace.	78

3. Transformaciones.	85
3.1. Movimientos o isometrías.	85
3.2. Similitudes.	92
3.3. Inversiones.	99
3.3.1. Inversión compleja.	99
3.3.2. Inversión geométrica.	102
3.4. Proyección estereográfica.	106
3.4.1. Punto al infinito.	106
3.5. Transformación de Möbius.	108
3.6. Razón cruzada	112
Anexo	117
Potencia de un punto con respecto al círculo	117
Reflexión del ortocentro sobre los lados.	118
Condición que debe cumplir toda transformación de Möbius.	118
Aplicación de los números complejos a la geometría en algunos problemas de olimpiadas de matemática.	120
Antecedente histórico de los números complejos y la geometría.	127

Agradecimientos.

Este trabajo esta dedicado a mis padres, mi esposa Fiorella, mis hijos Daniel Alfredo y Ariel Alonso, a dos personas muy especiales, Carlos Muricio Canjura Linares y Juan Agustín Cuadra que fungieron como asesores en el desarrollo del trabajo, así como a mis amigos: Aarón Ramírez Flores, Riquelmi Cardona, Eder Jacobo que se mantuvieron a la expectativa para animarme y ayudarme.

Introducción.

El trabajo de investigación consta de tres capítulos y el anexo.

El capítulo I se compone de trece secciones, en ellas, se proporciona la forma binómica y cartesiana de los números complejos junto con las operaciones básicas, se muestra que el conjunto de los números complejos tiene la estructura de cuerpo, se garantiza que los números complejos no se pueden ordenar, se muestra la relación entre el número complejo y el punto en el plano complejo, se proporciona la ilustración geométrica de la suma, la resta y la multiplicación. Se utiliza al inverso multiplicativo para establecer la división de complejos, el conjugado de un número complejo y algunas propiedades, así como el módulo de un número complejo y propiedades, se desarrolla la desigualdad triangular utilizando números complejos incluyendo algunas propiedades y la generalización de la desigualdad triangular. Se muestra al número complejo de forma polar, que ayuda con asimilar la interpretación geométrica y algebraica de la multiplicación, otra interpretación de un complejo es por la forma exponencial que se constituye como una herramienta fundamental en la resolución de ecuaciones y verificación de identidades trigonométricas, se abordan las operaciones vectoriales de producto cruz y producto punto en el plano complejo, se da a conocer el teorema de De Moivre y sus aplicaciones, se detallan los pasos para conocer las raíces n -ésimas de un complejo y de la unidad, se utilizan las raíces primitivas de la unidad para obtener las raíces n -ésimas de cualquier complejo.

El capítulo II, esta constituido por tres secciones, la primera, que se denomina introducción a las aplicaciones geométricas, se aborda a la semejanza de triángulos de manera compleja y algunas aplicaciones, se establecen las condiciones para la colinealidad, paralelismo y la perpendicularidad con complejos, se determinan las formas que identifican a rectas y circunferencias en el plano complejo.

En la segunda sección, que se titula rectas y puntos notables del triángulo, se deducen las ecuaciones de las mediatrices, medianas y alturas conocidas como rectas notables del triángulo, también se deducen los puntos de concurrencia de las rectas antes mencionadas.

Aplicaciones de los complejos a la geometría, se titula la tercera sección, en la que se desarrolla el teorema de Napoleón, de Ptolomeo - Euler, de Clifford, de la circunferencia de los nueve puntos y de la línea de Simson - Wallace, abordados por complejos e ilustraciones geométricas.

Son seis las secciones del capítulo III, la primera se titula movimientos o isometrías, donde se aborda con números complejos los movimientos como: traslaciones, rotaciones y reflexiones. Similitudes es la segunda sección, donde se estructura de forma compleja las similitudes directas como composición de un movimiento directo con una homotecia. La tercera sección nombrada por inversiones, esta compuesta por la inversión compleja y la inversión geométrica que son

desarrolladas desde el punto de vista de los números complejos. En la cuarta sección titulada proyección estereográfica, primero se da una interpretación del punto al infinito para abordar la correspondencia biunívoca entre los puntos de la esfera y los puntos del plano complejo. Transformación de Möbius es el nombre de la quinta sección en donde se detalla a la transformación de Möbius como una composición de una similitud y una inversión. Razón cruzada es la última sección, donde se demuestra que la transformación de Möbius se mantiene invariante por medio de la razón cruzada.

Como última parte, el anexo, que esta constituido por cinco apartados, tres de ellos son aportes importantes para el desarrollo del trabajo, el cuarto apartado trata de tres problemas de olimpiadas que son resueltos por geometría como por complejos, y el restante es una recopilación histórica de complejos y geometría.

Capítulo 1

Álgebra y complejos en conexión a los efectos geométricos.

1.1. El Cuerpo de los Números Complejos.

1.2. Perspectiva Algebraica.

Los números complejos son una extensión de los números reales, admitiendo la existencia de $\sqrt{-1}$. Claramente en los números reales, no existe un número real que cumpla con la condición que al elevarse al cuadrado el resultado sea -1 ; debido a la ley de los signos cualquier número real al cuadrado debe ser no negativo.

El número $\sqrt{-1}$ se simboliza por i , haciendo alusión al número “imaginario”, nombre que adquirió debido a su naturaleza tan abstracta que le valió incluso el rechazo de la comunidad matemática por mucho tiempo. La necesidad de buscar estos números tan extraños surge con la resolución de ecuaciones cúbicas, en las cuales se encontró que el tratar i como un número real cualquiera, heredándole sus características algebraicas, se obtenían resultados válidos, y aún cuando el concepto de i se saliera de lo que se entendía hasta el momento por un número (necesariamente real), se demostró que sería una herramienta de gran utilidad. De aquí que se decidió extender los números reales a los números de la forma binómica $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, dicha extensión es la que se conoce actualmente como el cuerpo de los números complejos, y denotado por \mathbb{C} .

Dado que $z \in \mathbb{C}$, posee la forma $z = a + ib$, se dice que a es la parte real de z , y se denota por $\Re(z)$, de igual manera b es la parte imaginaria de z denotada por $\Im(z)$. Si $b = \Im(z) = 0$ se dice que z es real, mientras que si $a = \Re(z) = 0$, se dice que z es imaginario puro.

Como i hereda todas las propiedades algebraicas de los números reales, también las heredará el conjunto de los números complejos y se operará tal y como se ésta acostumbrado a operar con números reales. De aquí que si $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$,

la suma es $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

De manera similar, el producto $z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 + i^2 b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$, pero como $i^2 = -1$ se tiene $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

En el cuerpo de los números complejos, el cero está representado por $0 + i0$, y de nuevo, como i hereda las propiedades de los números reales, $i0 = 0$ y de allí la justificación de por que ese es el elemento nulo, coincide con el elemento nulo de los reales. A partir de aquí se define la igualdad de elementos, si se dice que $z, w \in \mathbb{C}$ y $z = w$, se debería cumplir que la resta de estos

números, $z + (-w) = z - w$ resulte $0 + i0$, y para ello deben cumplirse que $\Re(z) - \Re(w) = 0$ y $\Im(z) - \Im(w) = 0$, es decir, $z = w \Leftrightarrow \Re(z) = \Re(w) \wedge \Im(z) = \Im(w)$.

Se ha trabajado con el número $-w$, que es el inverso de w con respecto a la suma, de igual manera se hace para el inverso multiplicativo, dado que la identidad multiplicativa es 1 en los reales también lo es en los complejos, o más bien $1 + i0$. El número $\frac{1}{w}$ representa el inverso multiplicativo de w , con la única condición de que $w \neq 0 + i0$. Ahora bien, este nuevo número debe ser un número complejo, es decir, de la forma $a + ib$.

Otra forma de representar a un número complejo $z = a + ib$, es mediante la forma cartesiana $z = (a, b)$, en donde la primera componente del par ordenado representa la parte real del complejo z , y la segunda componente representa su parte imaginaria, luego que cualquier número complejo que carece de parte imaginaria tiene la forma $(a, 0)$, mientras que cualquier número imaginario puro tiene la forma $(0, b)$, que en la forma binómica es ib , de allí que el complejo $z = i$ se representa por $(0, 1)$; en este caso las operaciones de suma y producto se definen de la siguiente forma:

Sea $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$ dos complejos, en donde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Para la suma

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1, b_1) + (a_2, b_2) \\ &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2). \end{aligned}$$

Para el producto

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

De manera general, se tiene que $z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + ib$, es de mencionar que en este trabajo se hará uso de la forma binómica en algunos casos y de la forma cartesiana en otros.

1.3. Estructura Algebraica.

Las operaciones de suma y producto en el conjunto de los números complejos ya fueron definidas, por lo que se puede verificar que dicho conjunto es un cuerpo.

El conjunto de los números complejos forma la estructura algebraica denominada cuerpo.

Prueba:

I) Dos números complejos arbitrarios z_1, z_2 determinan de manera única un tercer número complejo llamado suma, denotado por $z_1 + z_2$, con las siguientes propiedades:

A_1 . Ley conmutativa. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Prueba:

Sea $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d)$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a, b) + (c, d) \\
&= (a + c, b + d), \text{ ya que la suma de números reales es conmutativa.} \\
&= (c + a, d + b) \\
&= (c, d) + (a, b) \\
&= z_2 + z_1.
\end{aligned}$$

A_2 . Ley asociativa. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Prueba:

Sea $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$, $z_3 = (e, f)$, donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_3 &= [(a, b) + (c, d)] + (e, f) \\
&= (a + c, b + d) + (e, f) \\
&= ((a + c) + e, (b + d) + f) \\
&= (a + (c + e), b + (d + f)) \\
&= (a, b) + (c + e, d + f) \\
&= (a, b) + [(c, d) + (e, f)] \\
&= z_1 + (z_2 + z_3).
\end{aligned}$$

A_3 . Identidad aditiva. Hay un único número complejo, denotado por $(0, 0) = 0$, tal que $z + 0 = 0 + z = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Prueba:

Sea $z = (x, y)$ cualquier número complejo, donde $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
z + 0 &= (x, y) + (0, 0) \\
&= (x + 0, y + 0) \\
&= (x, y) \\
&= z.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 + z &= (0, 0) + (x, y) \\
&= (0 + x, 0 + y) \\
&= (x, y) \\
&= z.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $z + 0 = 0 + z = z$.

A_4 . Inverso aditivo. Para cada $z \in \mathbb{C}$ hay un único $w \in \mathbb{C}$ que satisface $z + w = w + z = 0$.

Prueba:

Sea $z = (a, b)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, hay que encontrar al número complejo $w = (x, y)$ tal que cumpla con la condición.

$$\begin{aligned} z + w &= (a, b) + (x, y) \\ &= (a + x, b + y) \\ &= (0, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Y por el otro lado, se tiene que:

$$\begin{aligned} w + z &= (x, y) + (a, b) \\ &= (x + a, y + b) \\ &= (0, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lo cual implica que $x = -a$ $y = -b$.

Al sustituir en w los valores encontrados, se verifica que es el inverso aditivo de z .

II) Dos números complejos arbitrarios z_1, z_2 determinan de manera única un tercer número complejo llamado producto, denotado por $z_1 z_2$, con las siguientes propiedades:

M_1 . Ley conmutativa. $z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Prueba:

Sea $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d)$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a, b)(c, d) \\ &= (ac - bd, bc + ad) \\ &= (ca - db, cb + da), \text{ el producto de números reales es conmutativo} \\ &= (ca - db, da + cb), \text{ el orden de los sumandos no altera el resultado en los reales.} \\ &= (c, d)(a, b) \\ &= z_2 z_1. \end{aligned}$$

M_2 . Ley asociativa. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Prueba:

Sea $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d), z_3 = (e, f)$, donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= [(a, b)(c, d)](e, f) \\ &= (ac - bd, bc + ad)(e, f) \\ &= ((ac - bd)e - (bc + ad)f, (bc + ad)e + (ac - bd)f) \\ &= (ace - bde - bcf - adf, bce + ade + acf - bdf) \\ &= (a(ce - df) - b(de + cf), a(de + cf) + b(ce - df)) \\ &= (a, b)(ce - df, de + cf) \\ &= (a, b)[(c, d)(e, f)] \\ &= z_1(z_2 z_3). \end{aligned}$$

M_3 . Identidad multiplicativa. Hay un único número complejo, denotado por $(1, 0) = 1$ tal que $(z)(1) = (1)(z) = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Prueba:

Sea $z = (x, y)$

$$\begin{aligned}(z)(1) &= (x, y)(1, 0) \\ &= (x1 - y0, y1 + x0) \\ &= (x - 0, y + 0) \\ &= (x, y) \\ &= z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1)(z) &= (1, 0)(x, y) \\ &= (1x - 0y, 0x + 1y) \\ &= (x - 0, 0 + y) \\ &= (x, y) \\ &= z.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(z)(1) = (1)(z) = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

M_4 . Inverso multiplicativo. Para cada $z \in \mathbb{C} (z \neq 0)$, hay un único $w \in \mathbb{C}$ que satisface $zw = wz = 1$.

Prueba:

Sea $z = (a, b)$ no nulo, hay que encontrar a $w = (x, y)$ tal que cumpla con la condición.

$$\begin{aligned}zw &= (a, b)(x, y) \\ &= (ax - by, bx + ay) \\ &= (1, 0), \text{ por igualdad de pares ordenados.}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Como el determinante del sistema es diferente de cero, el sistema tiene solución única.

Resolviendo el sistema por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Esta solución única es denotada por:

$$w = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = z^{-1} = \frac{1}{z}.$$

Solamente resta verificar que $zw = wz = 1$

$$\begin{aligned} zw &= (a, b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{0}{a^2 + b^2} \right) \\ &= (1, 0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

III) Ley distributiva: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Prueba:

Sean $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$, $z_3 = (e, f)$, donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a, b)[(c, d) + (e, f)] \\ &= (a, b)(c + e, d + f) \\ &= (a[c + e] - b[d + f], a[d + f] + b[c + e]). \end{aligned}$$

Desarrollando el miembro de la derecha

$$\begin{aligned} z_1z_2 + z_1z_3 &= (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) \\ &= (ac - bd, bc + ad) + (ae - bf, be + af) \\ &= (ac - bd + ae - bf, bc + ad + be + af) \\ &= (a[c + e] - b[d + f], a[d + f] + b[c + e]), \text{ por transitividad se cumple la propiedad} \\ &\hspace{15em} \text{distributiva.} \end{aligned}$$

1.4. Inexistencia de la relación de orden en los complejos.

Se mostrará que el conjunto de los números complejos no es ordenado, para esto se debe tener presente que:

Un cuerpo K se dice ordenado, si es posible definir en el un subconjunto positivo P , $P \subset K$, que cumpla las siguientes condiciones:

- $1 \in P$
- Si $(x \in P) \wedge (y \in P)$
 $(x + y) \in P$
 $xy \in P$

- Tricotomía ($\forall x \in K$) : $\vee(x \in P)$,
 $\vee(-x \in P)$,
 $\vee(x = 0)$

Si \mathbb{C} estuviese ordenado como cuerpo, entonces una de las condiciones que debe cumplir es la tricotomía.

Se sabe que $i \in \mathbb{C}$, y que $i \neq 0$, para que \mathbb{C} sea ordenado se debería probar que $i > 0$ ó $i < 0$. Si $i > 0$, entonces

$$\begin{aligned} (i)(i) &> 0 \\ -1 &> 0 \end{aligned} \quad \text{es una contradicción.}$$

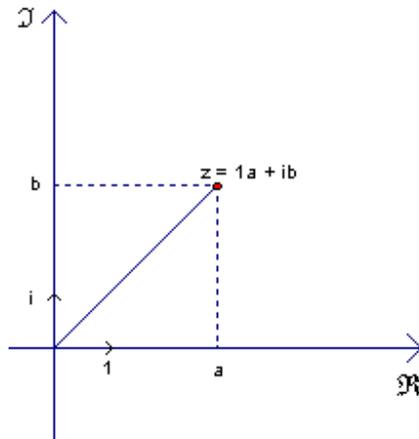
Si fuera $i < 0$, entonces existe su opuesto $-i > 0$,
 $(-i)(-i) = i^2 = -1 > 0$, también es una contradicción.

No cumple con ninguno de los casos de la tricotomía, por lo tanto \mathbb{C} no puede ser ordenado.

1.5. Perspectiva Geométrica.

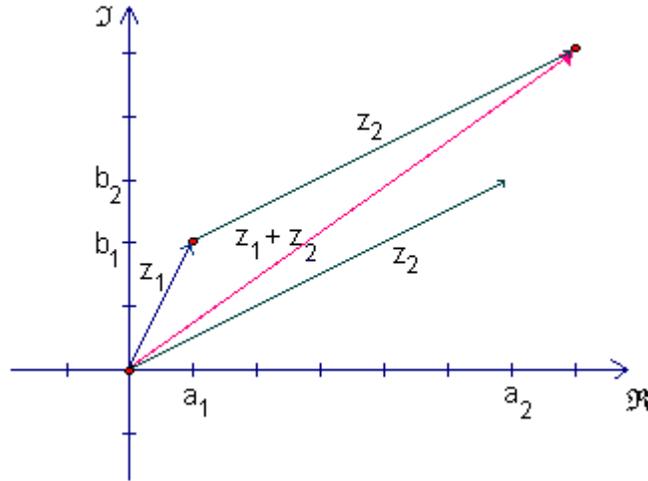
Hasta el momento lo único que se ha hecho es hacer un recorrido por las justificaciones del por que los números complejos se les considera cuerpo, ahora se está en el punto que se puede dar el salto de ver un número complejo como ente algebraico a una perspectiva geométrica.

Dado que un número complejo $z = a + ib$ depende de dos componentes, la parte real a y la parte imaginaria b , la representación geométrica de un número complejo es el punto en el plano cartesiano de coordenadas (a, b) , con el eje x representando la recta real, y el eje y representando la recta imaginaria, a este plano se le nombra plano complejo. Claramente, por cada número complejo hay un punto y viceversa. Otra manera de representarlo es como vector, siempre en el mismo plano, y con base ortonormal $(1, 0)$ y $(0, 1)$, que son las coordenadas correspondientes a 1 y a i respectivamente.

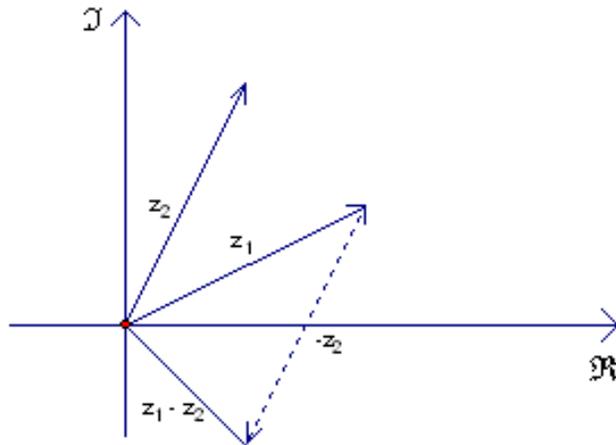


Geométicamente, para sumar dos complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, se puede pensar en ello como la suma de dos vectores del plano xy apuntando desde el origen al punto (a_1, b_1) y (a_2, b_2) , respectivamente. Al trasladar (mover) el segundo vector, sin cambiar su sentido, tal

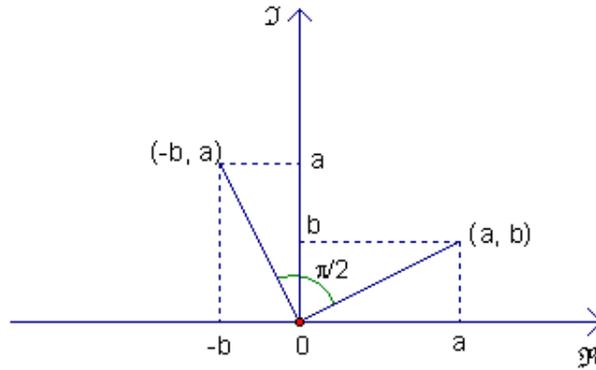
que su punto de aplicación coincida con el punto final del primer vector; el segundo vector así ubicado apuntará al complejo $z_1 + z_2$.



La diferencia $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ corresponde a la suma de los vectores de z_1 y $-z_2$ como lo indica la siguiente figura. Es de notar que el segundo vector se traslada y cambia el sentido, tal que su punto de aplicación coincida con el punto final del primer vector; el segundo vector así ubicado apuntará al complejo $z_1 + (-z_2)$.



Multiplicar cualquier complejo por i corresponde a una rotación de 90° ó $\frac{\pi}{2}$ en dirección contraria a las agujas del reloj, para tener una mejor idea geométrica, $(0, 1)(a, b) = (-b, a)$.



Asimismo el que $(-1)(-1) = +1$ puede ser entendido geoméricamente como la combinación de dos rotaciones de $\frac{\pi}{2}$.

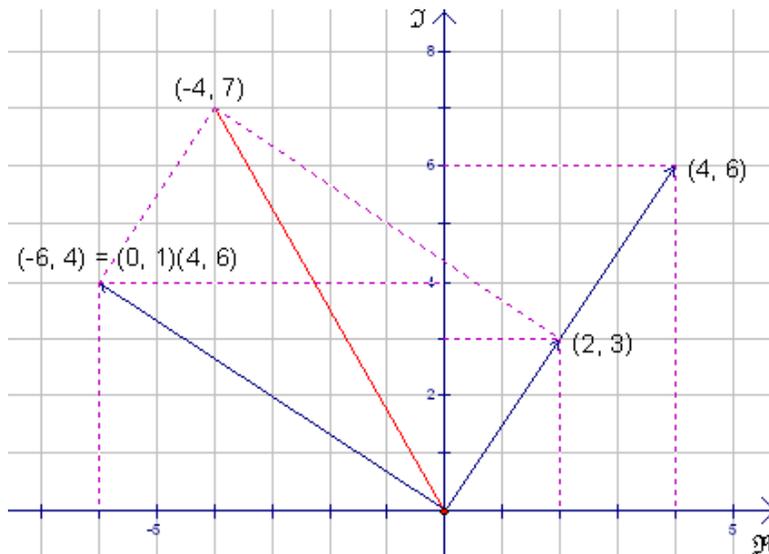
En general el producto de los complejos $z_1 = (x, y)$ y $z_2 = (a, b)$, se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} (x, y)(a, b) &= [(x, 0) + (0, 1)(y, 0)](a, b) \\ &= (x, 0)(a, b) + (0, 1)(y, 0)(a, b) \\ &= (xa, xb) + (0, 1)(ya, yb). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la multiplicación compleja involucra la suma de dos alargamientos o acortamientos de z_2 , con el segundo de ellos rotado $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

En particular,

$$\begin{aligned} (1, 2)(2, 3) &= [(1, 0) + (2, 0)(0, 1)](2, 3) \\ &= (1, 0)(2, 3) + (2, 0)(0, 1)(2, 3) \\ &= (1(2), 1(3)) + (0, 1)(2(2), 2(3)) \\ &= (2, 3) + (0, 1)(4, 6) \\ &= (2, 3) + (-6, 4) \\ &= (-4, 7) \end{aligned}$$

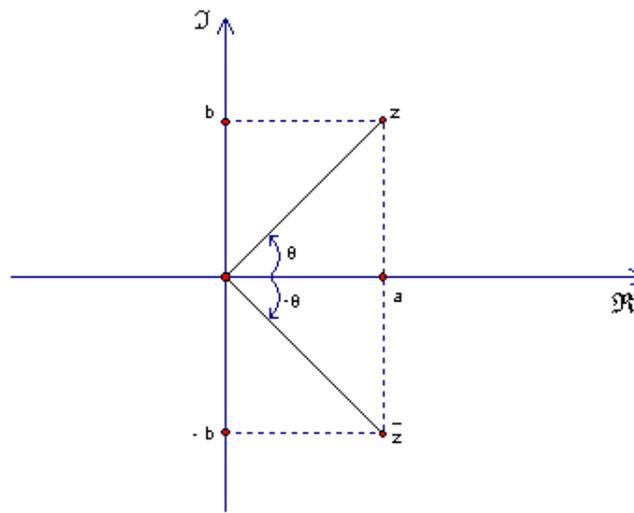


El esquema ilustra que el complejo $(2, 3)$ es el primer vector a sumar, mientras que el segundo vector se forma de dilatar en dos unidades al complejo $(2, 3)$ seguido de una rotación de $\frac{\pi}{2}$.

1.6. Propiedades de conjugados.

El conjugado de un complejo z (denotado como \bar{z}) es un nuevo número complejo, definido así: $\bar{z} = a - ib \Leftrightarrow z = a + ib$.

Es de mencionar que desde el punto de vista geométrico, el conjugado de un complejo no es más que su reflexión sobre el eje real.



Propiedades.

1. $z = \overline{\bar{z}}$
2. $\overline{w \pm z} = \bar{w} \pm \bar{z}$
3. $\overline{wz} = \bar{w} \bar{z}$
4. $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$
5. $z + \bar{z} = 2\Re(z)$
6. $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$
7. $z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z$ es imaginario puro.
8. $z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z$ es real.
9. $z\bar{z} \geq 0$.

Para la prueba de la propiedad 1. Al considerar a $z = a + ib$, se tiene por definición de conjugado que $\bar{z} = a - ib$, al aplicar nuevamente esta definición a \bar{z} , $\overline{\bar{z}} = a + ib = z$.

La propiedad 2 esta compuesta por dos operaciones, donde una de ellas es $\overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z}$.
Demostración

Sean $w = a + ib$ y $z = a' + ib'$ dos números complejos.

$$\overline{w + z} = \overline{(a + ib) + (a' + ib')} = \overline{(a + a') + i(b + b')} = (a + a') - i(b + b') = (a - ib) + (a' - ib') = \bar{w} + \bar{z}.$$

La prueba de $\overline{w - z} = \bar{w} - \bar{z}$ es análoga.

Prueba de la propiedad 3.

Sean $w = a + ib$ y $z = a' + ib'$ dos números complejos.

$$\overline{wz} = \overline{(aa' - bb') + i(ab' + ba')} = (aa' - bb') - i(ab' + ba') = (a - ib)(a' - ib') = \bar{w} \bar{z}.$$

Prueba de la propiedad 4.

Sean $w = a + ib$ y $z = a' + ib'$ dos números complejos.

$$\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{(aa' + bb') + i(a'b - b'a)}{(a')^2 + (b')^2}\right)} = \frac{(aa' + bb') - i(a'b - b'a)}{(a')^2 + (b')^2} = \frac{(aa' + bb') + i(ab' - ba')}{(a')^2 + (b')^2} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}.$$

Prueba de la propiedad 5.

Sea $z = a + ib$ un número complejo.

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a + i0 = 2\Re(z).$$

Prueba de la propiedad 6.

Sea $z = a + ib$ un número complejo.

$$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 0 + i(2b) = 2i\Im(z).$$

En la propiedad 7, decir que z es imaginario puro, significa que el complejo se ubica sobre el eje imaginario y se cumplirá si y sólo si $z = -\bar{z}$, es decir que $z + \bar{z} = 0$.

Mientras que la propiedad 8, en donde z es real, se da cuando el número complejo esta ubicado sobre el eje real y se cumplirá si y sólo si $z = \bar{z}$, es decir que $z - \bar{z} = 0$.

En la propiedad 9.

Sea $z = a + ib$ un número complejo.

$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = (a^2 + b^2) + i(ba - ab) = a^2 + b^2$, obviamente este resultado tiene dos posibilidades que sea positivo o cero, positivos si a y b no son nulos, y cero si a y b son nulos, en otras palabras el resultado siempre es no negativo.

1.7. El módulo de un número complejo.

Otro elemento importante de un número complejo es el módulo, que es la longitud del vector asociado al número complejo, se denota por $|z|$ y se define como $|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} = \sqrt{z\bar{z}}$, la propiedad 9 del apartado anterior garantiza de que es un número real no negativo.

Al pensar en z como un punto en el plano; se puede ver, por el teorema de Pitágoras, que el valor absoluto de un número complejo coincide con la distancia euclídea desde el origen al punto.

Se tiene aquí una identidad muy importante,

$$|z|^2 = z\bar{z} \tag{1.1}$$

Propiedades.

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|z| = |\bar{z}|$
3. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
4. $|wz| = |w||z|$
5. $\Re(z) \leq |\Re(z)| \leq |z|$
6. $\Im(z) \leq |\Im(z)| \leq |z|$
7. $|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$
8. $|z| = |-z|$
9. $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$
10. $|wz| = |\bar{w}z| = |w\bar{z}| = |\bar{w}\bar{z}| = |\overline{wz}| = |wz| = |w||z|$
11. $\left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z|^n}$

Para la propiedad 1.

Sea $z = a + ib$.

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\Rightarrow \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ &\Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \end{aligned}$$

Prueba de la propiedad 2.

Sea $z = a + ib$, por definición de módulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y por la definición de conjugado

$$\bar{z} = a - ib.$$

Utilizando la definición módulo para \bar{z} ,

$$\begin{aligned} |\bar{z}| &= |a - ib| \\ &= \sqrt{a^2 + (-b)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|z| = |\bar{z}|$.

Prueba de la propiedad 3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \\ &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \end{aligned}$$

Para la propiedad 4.

Se tiene que $(wz)\overline{(wz)} = (wz)\bar{w}\bar{z} = w\bar{w}z\bar{z}$, se utiliza la propiedad 3 del apartado anterior.

$$\begin{aligned} |wz| &= \sqrt{(wz)\overline{(wz)}} \\ &= \sqrt{w\bar{w}z\bar{z}} \\ &= \sqrt{w\bar{w}}\sqrt{z\bar{z}} \\ &= |w||z| \end{aligned}$$

Prueba de la propiedad 5.

Sea $z = a + ib = \Re(z) + i\Im(z)$.

Como $a^2 \leq a^2 + b^2$, al tomar la raíz cuadrada positiva de los dos miembros de la expresión, se tiene que $|a| \leq |z|$, es decir,

$$|\Re(z)| \leq |z|.$$

Por otra parte, $\Re(z) \leq |\Re(z)|$ se puede garantizar ya que, siempre dará la igualdad si la parte real de z es positiva o nula, pero si la parte real de z es negativa se da la desigualdad estricta, ya que el módulo de z es no negativo.

Por lo tanto, $\Re(z) \leq |\Re(z)| \leq |z|$.

La prueba de la propiedad 6, es análoga a la prueba de la propiedad 5.

Para la propiedad 7.

Sea $z = a + ib$

$$\begin{aligned}
 |a + ib|^2 &= (a + ib)(\overline{a + ib}), && \text{por la propiedad 2 de conjugados.} \\
 &= (a + ib)(\bar{a} + \bar{ib}) \\
 &= (a)(\bar{a}) + (a)(\bar{ib}) + (ib)(\bar{a}) + (ib)(\bar{ib}), && \text{por la identidad (1.1).} \\
 &= |a|^2 + (a)(\bar{ib}) + (\bar{a})(ib) + |b|^2 \\
 &= |a|^2 + (a)(\bar{ib}) + \overline{(a)(\bar{ib})} + |b|^2 \\
 &= |a|^2 + 2\Re[(a)(\bar{ib})] + |b|^2, && \text{por la propiedad 5 de conjugados.} \\
 &\leq |a|^2 + 2|(a)(\bar{ib})| + |b|^2, && \text{por la propiedad 5 de m\u00f3dulos.} \\
 &\leq |a|^2 + 2|a||\bar{ib}| + |b|^2, && \text{por la propiedad 4 de m\u00f3dulos.} \\
 &\leq |a|^2 + 2|a||ib| + |b|^2, && \text{por la propiedad 2 de m\u00f3dulos.} \\
 &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2, && \text{por definici\u00f3n de m\u00f3dulo.} \\
 &\leq (|a| + |b|)^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$.

Prueba de la propiedad 8.

Sea $z = a + ib$, por definici\u00f3n de m\u00f3dulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned}
 |-z| &= |-(a + ib)| \\
 &= |-a - ib| \\
 &= \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|z| = |-z|$.

La Prueba de la propiedad 9 se deduce f\u00e1cilmente al utilizar la identidad (1.1).

$$\begin{aligned}
 \left|\frac{w}{z}\right|^2 &= \left(\frac{w}{z}\right)\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} \\
 &= \left(\frac{w}{z}\right)\left(\frac{\bar{w}}{\bar{z}}\right) \\
 &= \frac{w\bar{w}}{z\bar{z}} \\
 &= \frac{|w|^2}{|z|^2} \\
 &= \left(\frac{|w|}{|z|}\right)^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$.

La Prueba de la propiedad 10 se deduce f\u00e1cilmente al utilizar la identidad (1.1) y las propiedades 2 y 4.

Prueba de la Propiedad 11.

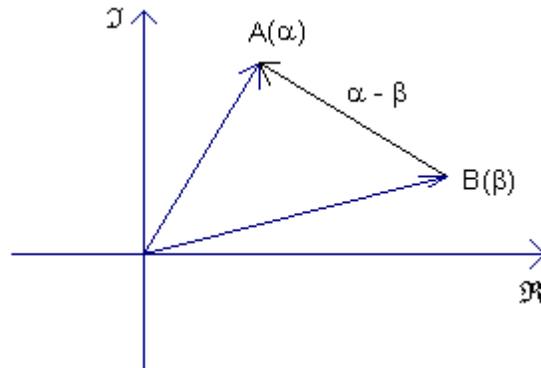
$$\begin{aligned}
 \left|\frac{1}{z^n}\right|^2 &= \left(\frac{1}{z^n}\right)\overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)}, && \text{por la identidad (1.1).} \\
 &= \left(\frac{1}{z^n}\right)\left(\frac{1}{\overline{z^n}}\right), && \text{por la propiedad 4 de conjugados.} \\
 &= \frac{1}{z^n\overline{z^n}}
 \end{aligned}$$

Como el módulo es un número no negativo se puede extraer la raíz cuadrada positiva en ambos miembros,

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \left|\frac{1}{z^n}\right| &= \frac{1}{\sqrt{z^n\overline{z^n}}}, && \text{por propiedades de radicación.} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(z\overline{z})^n}}, && \text{por propiedades de potenciación.} \\
 &= \frac{1}{(\sqrt{z\overline{z}})^n}, && \text{por definición de módulo.} \\
 &= \frac{1}{|z|^n}.
 \end{aligned}$$

1.8. Desigualdad triangular.

Geoméricamente es claro que si se tiene tres puntos no alineados, la distancia entre cualquiera de ellos dos es menor que la suma de las distancias del tercer punto a éstos. Si se asocia a estos puntos números complejos, la desigualdad triangular quedaría planteada de la siguiente manera: sin pérdida de generalidad(spg) suponer que uno de los puntos del triángulo coincide con el origen, y que $|\alpha - \beta|$ es la distancia entre los puntos que representan a α y β , hay que probar entonces que $|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$



Se probará dicha relación utilizando únicamente números complejos. Comenzando del lado izquierdo de la desigualdad se tiene que $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta})$ por la definición de módulo

de un complejo dada en la sección anterior, pero por propiedades de módulo y conjugados, esto se convierte en:

$$\begin{aligned}
 |\alpha - \beta|^2 &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + (-\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha}) \\
 &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\Re(-\alpha\bar{\beta}) \\
 &\leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha\bar{\beta}| \\
 &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta| \\
 &= (|\alpha| + |\beta|)^2
 \end{aligned}$$

Como los módulos son no negativos, se obtiene la expresión que se quería demostrar.

La desigualdad triángular, proporciona una cota superior al módulo de la suma de dos números complejos α y β :

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \quad (1.2)$$

La desigualdad triangular se puede generalizar por medio de la inducción matemática a sumas de cualquier número finito de términos:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (1.3)$$

Para entrar en los detalles de la demostración, se puede decir que la base inductiva es cuando $n = 2$, implica que la desigualdad (1.3) es justamente la desigualdad (1.2). Además por hipótesis inductiva, se supone que la desigualdad (1.3) es válida cuando $n = m$, ha de serlo también para $n = m + 1$, puesto que por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2 + \cdots + z_m + z_{m+1}| &\leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_m| + |z_{m+1}| \\
 &\leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_{m-1}| + |z_m| + |z_{m+1}| \\
 &\leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_{m+1}|.
 \end{aligned}$$

También, se cuenta con la propiedad

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (1.4)$$

Para deducir la desigualdad (1.4), se procede escribiendo

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|,$$

ya que la suma de valores absolutos se acota superiormente al valor absoluto de la suma, de modo que

$$|z_1| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$$

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \quad (1.5)$$

Pero, también se puede expresar a

$$|z_2| = |(z_2 + z_1) + (-z_1)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_1|,$$

y como la suma de valores absolutos se acota superiormente al valor absoluto de la suma, se tiene que

$$\begin{aligned} |z_2| &\leq |z_1 + z_2| + |z_1| \\ |z_2| - |z_1| &\leq |z_1 + z_2| \\ -(|z_1| - |z_2|) &\leq |z_1 + z_2| \\ |z_1| - |z_2| &\geq -|z_1 + z_2| \end{aligned} \quad (1.6)$$

De las desigualdades (1.5) y (1.6), se tiene

$-|z_1 + z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$ que es justamente la desigualdad (1.4).

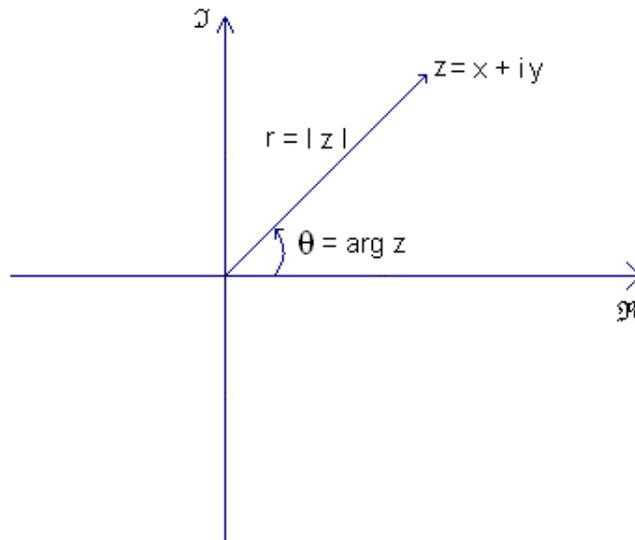
1.9. Números complejos en forma polar.

Para dar una mejor interpretación geométrica y algebraica de la multiplicación de números complejos se debe conocer las coordenadas polares. Como los números complejos pueden ser identificados con los puntos en \mathbb{R}^2 , se puede pensar en ellos como vectores en el plano. Dado un $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, su longitud está dada por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

También se puede medir el ángulo en radianes que hace dicho vector con la parte positiva del eje real. Si se denota este ángulo como θ , se obtiene la expresión polar de z ,

$$a + ib = r \cos \theta + i r \sin \theta, \text{ donde } r = |z|.$$

Es evidente que r es un número positivo ya que es la longitud de un vector. Al número θ se conoce como un argumento de z , y se denota por $\theta = \arg z$ así pues, geoméricamente $\arg z$ denota el ángulo, medido en radianes, que forma z con el eje real positivo, y z se interpreta como un radio vector.



Lo cual significa que las coordenadas polares r y θ representan el punto (x, y) que corresponde al número complejo no nulo $z = x + iy$. Como $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$, z puede ser expresado en forma polar como $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

Ahora se sabe que el ángulo toma infinidad de valores posibles, que difieren en múltiplos de 2π . Estos valores se pueden determinar mediante la ecuación $\tan \theta = \frac{y}{x}$, donde el cuadrante que contiene al punto complejo debe ser especificado. En general, se tiene que $z = r[\cos(\theta + 2n\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2n\pi)]$ para $n \in \mathbb{Z}$, donde r es el módulo de z y θ es cualquier valor particular de $\arg z$.

En particular, se puede decir que el número complejo $-1 + i$, está ubicado en el segundo cuadrante, y en forma polar se expresa como $-1 + i = \sqrt{2}[\cos(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi) + i \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi)]$, $n \in \mathbb{Z}$, es de observar que cualquiera de los valores $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$ pueden ser utilizados, es decir que $-1 + i = \sqrt{2}[\cos(\frac{15\pi}{4}) + i \operatorname{sen}(\frac{15\pi}{4})]$ cuando $n = 1$.

Si $z = 0$, θ es indefinido, porque $\arctan(\frac{y}{x})$ es indefinido. De modo que cualquier número complejo que vaya a ser escrito en polares se sobreentiende que debe ser distinto de cero.

El valor principal de $\arg z$, denotado $\operatorname{Arg} z$ se define como el único valor de $\arg z$ tal que $-\pi < \arg z \leq \pi$. El valor principal para el número $-1 + i$ es $\frac{3\pi}{4}$. Según la teoría, se tiene que $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$. Si z es un número real positivo, el $\operatorname{Arg} z = 0$; si z es un número real negativo, el $\operatorname{Arg} z = \pi$; si z es un número imaginario puro positivo, el $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2}$; si z es un número imaginario puro negativo, el $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{2}$.

Entre los datos importantes que se deben tener en cuenta es el cálculo del argumento principal, si el punto se ubica en el primer cuadrante, el ángulo está entre 0 y $\frac{\pi}{2}$; si el punto se ubica en el segundo cuadrante, el ángulo está entre $\frac{\pi}{2}$ y π ; pero, si el punto se ubica en el tercer cuadrante, el ángulo estará entre $-\pi$ y $-\frac{\pi}{2}$; si fuese en el cuarto cuadrante, el ángulo está entre $-\frac{\pi}{2}$ y 0 .

Dado que el vector asociado al número complejo $a + bi$ tiene módulo, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y un ángulo con respecto al eje real positivo llamado argumento, $\operatorname{Arg}(z) = \arctan(b/a) \operatorname{mod}(2\pi)$, o bien denotado por θ_z , puede asociarse a z la notación en coordenadas polares de $[|z|, \theta_z]$. Está claro que $z = w$ si y sólo si $|z| = |w|$ y $\theta_z = \theta_w \operatorname{mod}(2\pi)$.

Al relacionar la forma binómica y polar de un complejo se tiene que $z = a + ib = |z| \cos(\theta_z) + i|z| \operatorname{sen}(\theta_z)$, o de manera más sintética, $z = |z| \operatorname{cis}(\theta_z)$. Esta forma de expresar un complejo se conoce como forma trigonométrica de un complejo. De aquí es sencillo demostrar que

$$wz = |w| \operatorname{cis}(\theta_w) |z| \operatorname{cis}(\theta_z) = |w||z| \operatorname{cis}(\theta_w + \theta_z),$$

así como

$$\frac{w}{z} = \frac{|w| \operatorname{cis}(\theta_w)}{|z| \operatorname{cis}(\theta_z)} = \frac{|w|}{|z|} \operatorname{cis}(\theta_w - \theta_z).$$

Si se tiene que $z = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\text{sen}(\frac{\pi}{6})$, entonces

$$\begin{aligned} zz &= \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) + i\text{sen}(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) \\ z^2 &= \cos(\frac{\pi}{3}) + i\text{sen}(\frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2})i \end{aligned}$$

Significa que z ha sido rotado $\frac{\pi}{6}$

Al considerar el complejo $(1, 0)$ ubicado en la circunferencia unitaria y efectuar la multiplicación con $z = (\cos \frac{\pi}{2}, \text{sen} \frac{\pi}{2})$, se tiene que:

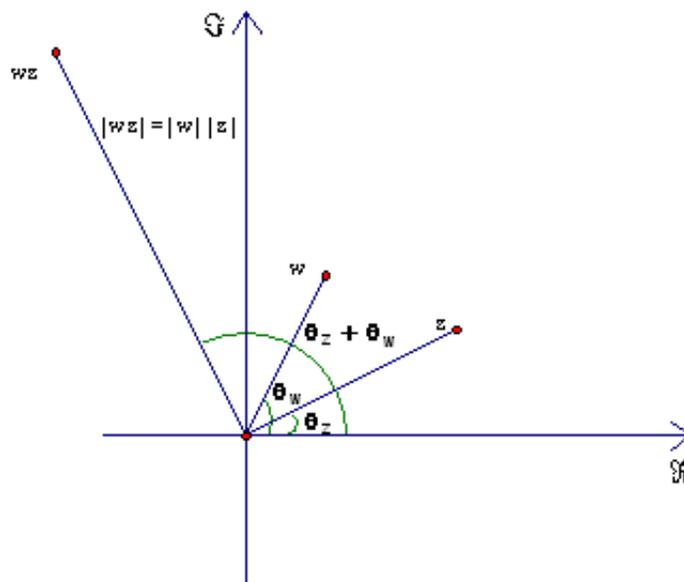
$$\begin{aligned} (1)(z) &= (1, 0)(\cos \frac{\pi}{2}, \text{sen} \frac{\pi}{2}) \\ &= (0, 1) \\ &= i \end{aligned}$$

Lo cual muestra que el punto $(1, 0)$ es rotado $\frac{\pi}{2}$.

Pero regresando a la búsqueda de nuevas formas de expresar un número complejo, la interpretación geométrica de la multiplicación de dos complejos, como $wz = [|w||z|, \theta_w + \theta_z]$, muestra que el módulo del complejo resultante es igual a la mutiplicación de los módulos de los factores, y el argumento resultante es la suma de los argumentos de los factores.

Para demostrarlo, hay que partir de w y z en forma polar: sean $w = |w|\text{cis}(\theta_w)$, y $z = |z|\text{cis}(\theta_z)$. Efectuando el producto se tiene que

$wz = |w||z|[(\cos \theta_w \cos \theta_z - \text{sen} \theta_w \text{sen} \theta_z) + (\text{sen} \theta_w \cos \theta_z + \cos \theta_w \text{sen} \theta_z)i]$, y esto se reduce a la forma polar del producto $wz = |w||z|[\cos(\theta_w + \theta_z) + i\text{sen}(\theta_w + \theta_z)]$



Prueba para la división de complejos en forma trigonométrica.

$$\begin{aligned}
 \frac{w}{z} &= \frac{|w|\text{cis}(\theta_w)}{|z|\text{cis}(\theta_z)} \\
 &= \frac{|w|(\cos \theta_w + i\text{sen}\theta_w)(\cos \theta_z - i\text{sen}\theta_z)}{|z|(\cos \theta_z + i\text{sen}\theta_z)(\cos \theta_z - i\text{sen}\theta_z)} \\
 &= \frac{|w|}{|z|}[(\cos \theta_w \cos \theta_z + \text{sen}\theta_w \text{sen}\theta_z) + i(\text{sen}\theta_w \cos \theta_z - \text{sen}\theta_z \cos \theta_w)] \\
 &= \frac{|w|}{|z|}(\cos(\theta_w - \theta_z) + i\text{sen}(\theta_w - \theta_z)) \\
 &= \frac{|w|}{|z|}(\cos(\theta_w - \theta_z) + i\text{sen}(\theta_w - \theta_z)) \\
 &= \frac{|w|}{|z|}\text{cis}(\theta_w - \theta_z).
 \end{aligned}$$

Esto muestra que el módulo del complejo resultante es igual al cociente de los módulos, y el argumento resultante es la diferencia de los argumentos.

En particular, $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|\text{cis}(\theta_z)} = \frac{1}{|z|}\text{cis}(-\theta_z)$.

1.10. Números complejos en forma exponencial.

Es de observar que en el producto y la división de complejos en forma polar, la función $\text{cis } \theta = \cos \theta + i\text{sen}\theta$ parece tener propiedades exponenciales, como $e^x e^y = e^{x+y}$ y $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$, de hecho, tiene éstas y muchas otras, y fue un gran avance para Euler hacer la conjetura de la identidad $z = |z|e^{i\theta_z} = |z|(\cos\theta_z + i\text{sen}\theta_z)$ lo cual implica que $e^{i\theta_z} = (\cos\theta_z + i\text{sen}\theta_z)$, aún cuando se demostró tiempo después. A la expresión $|z|e^{i\theta_z}$ es la que se conoce como forma exponencial de un complejo. En ésta sección y las siguientes, es de observar los resultados que se obtienen al utilizar la fórmula de Euler.

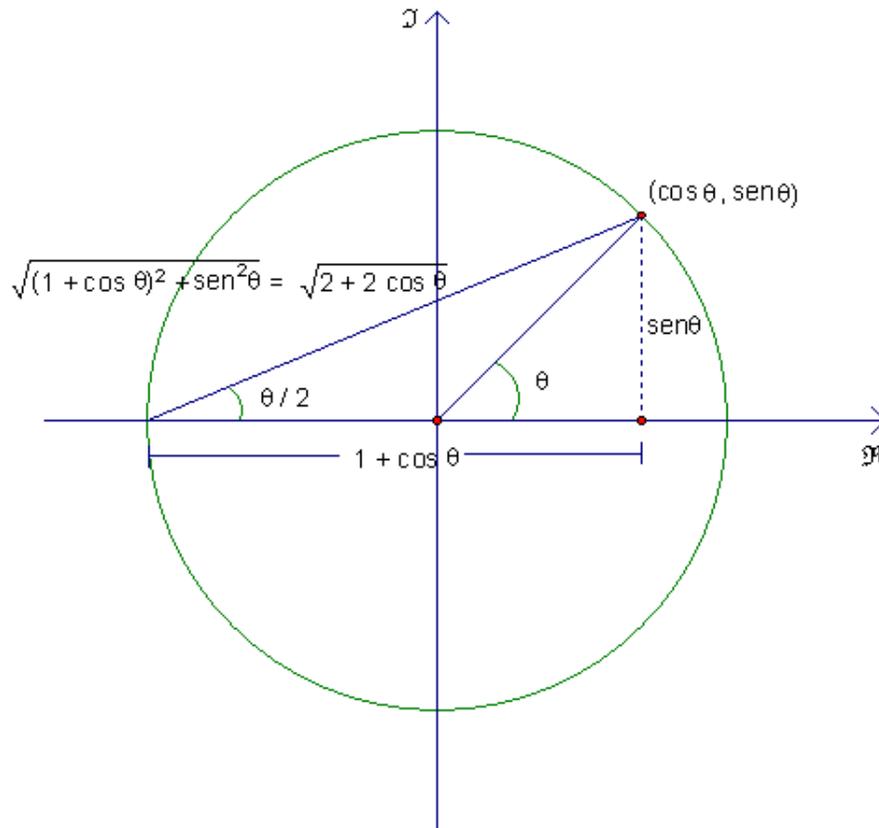
Si el complejo z se ubica sobre el eje real positivo, entonces $\theta_z = 0 \text{ mód } 2\pi$, por lo que $\cos 0 + i\text{sen}0 = 1 = e^0$.

$$\begin{aligned}
 e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\text{sen}(-\theta) \\
 &= \cos(\theta) - i\text{sen}(\theta) \\
 &= \left(\frac{\cos(\theta) - i\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)}\right)(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) \\
 &= \frac{1}{\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)} \\
 &= \frac{1}{e^{i\theta}}.
 \end{aligned}$$

Algunas propiedades.

- $wz = |w||z|e^{i(\theta_w+\theta_z)}$
- $z^{-1} = \frac{1}{|z|}e^{-i\theta_z}$, el inverso multiplicativo del complejo z .
- $\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|}e^{i(\theta_w-\theta_z)}$
- $\bar{z} = |z|e^{-i\theta_z}$

Teniendo en cuenta la parte teórica de la forma polar, propiedades de potenciación y la relación entre el ángulo central y cualquier ángulo inscrito en una circunferencia, se puede resolver con comodidad el siguiente problema. Para todo entero natural n , y para todo número real θ tal que $0 < \theta < 2\pi$, expresar en forma trigonométrica el complejo $z = (1 + \cos \theta + i(\operatorname{sen} \theta))^n$. El complejo dado se puede escribir como $z = [(1 + \cos \theta) + i(\operatorname{sen} \theta)]^n$, esto da una pauta para pensar en las coordenadas polares de la circunferencia unitaria, y por geometría se sabe que en una circunferencia, el ángulo central tiene el doble de la medida de cualquier ángulo inscrito que subtienda al mismo arco. En base a esto se tiene la siguiente figura.



Por medio de la figura se cuenta con que $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos \theta}{\sqrt{2 + 2 \cos \theta}}$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2 + 2 \cos \theta}}$; al

sustituir estos valores se tiene que:

$$\begin{aligned}
 z &= [(1 + \cos \theta) + i(\operatorname{sen} \theta)]^n \\
 &= [\sqrt{2 + 2 \cos \theta} \cos(\frac{\theta}{2}) + i\sqrt{2 + 2 \cos \theta} \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})]^n \\
 &= [\sqrt{2 + 2 \cos \theta} e^{i(\frac{\theta}{2})}]^n \\
 &= (2 + 2 \cos \theta)^{\frac{n}{2}} e^{i(\frac{n\theta}{2})}
 \end{aligned}$$

1.11. Ecuaciones e identidades trigonométricas con complejos.

Se tiene que: $\cos \theta = \Re[e^{i\theta}]$, $\operatorname{sen} \theta = \Im[e^{i\theta}]$
 Las funciones trigonométricas y las propiedades son conocidas, por lo que se deduce que $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta$, esto conduce a $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta$, $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \operatorname{sen} \theta$.

La utilidad se da por ejemplo al resolver una ecuación como:
 $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 0$.

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= \cos x + i \operatorname{sen} x \\
 e^{i2x} &= \cos 2x + i \operatorname{sen} 2x \\
 e^{i3x} &= \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x \\
 e^{i4x} &= \cos 4x + i \operatorname{sen} 4x
 \end{aligned}$$

Al efectuar la suma se tiene que $e^{ix} + e^{i2x} + e^{i3x} + e^{i4x} = (\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x) + i(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x)$

Además, un producto puede ser expresado como una suma o viceversa, al considerar los dos primeros términos de la suma exponencial se cuenta con que $e^{ix} + e^{i2x} = e^{i\frac{3}{2}x}(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}})$, mientras que al considerar los últimos dos términos $e^{i3x} + e^{i4x} = e^{i\frac{7}{2}x}(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}})$

Al efectuar de nuevo la suma

$$\begin{aligned}
 e^{ix} + e^{i2x} + e^{i3x} + e^{i4x} &= (e^{i\frac{3}{2}x} + e^{i\frac{7}{2}x})(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}), \text{ efectuando el mismo proceso al primer factor} \\
 &= e^{i\frac{10}{4}x}(e^{-ix} + e^{ix})(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}) \\
 &= (\cos(\frac{5x}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{5x}{2}))(2 \cos x)(2 \cos(\frac{x}{2})) \\
 &= (4 \cos(\frac{5x}{2}) \cos(x) \cos(\frac{x}{2})) + i(4 \operatorname{sen}(\frac{5x}{2}) \cos(x) \cos(\frac{x}{2}))
 \end{aligned}$$

Esto implica que $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 4 \cos(\frac{5x}{2}) \cos(x) \cos(\frac{x}{2}) = 0$

Igualando cada uno de los factores trigonométricos a cero, para obtener los valores de x que satisfacen la ecuación.

Así, $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

O bien, $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} &= \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ x &= \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

O bien, $\cos\left(\frac{5x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{5x}{2} &= \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ 5x &= \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ x &= \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Por medio de complejos resulta muy ventajoso deducir muchas identidades trigonométricas, siempre y cuando se deduzcan correctamente los términos numéricos de cualquier binomio, por ejemplo: verificar que $\cos(5x) = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$

Como $\cos(5x) = \Re(e^{5ix})$

$\Re(e^{5ix}) = \Re(e^{ix})^5$, por propiedades de potenciación.

$$\begin{aligned}(e^{ix})^5 &= (\cos x + i \operatorname{sen} x)^5 \\ &= \binom{5}{0}(\cos x)^5 + \binom{5}{1}(\cos x)^4(i \operatorname{sen} x) + \binom{5}{2}(\cos x)^3(i \operatorname{sen} x)^2 + \binom{5}{3}(\cos x)^2(i \operatorname{sen} x)^3 + \\ &\quad \binom{5}{4}(\cos x)(i \operatorname{sen} x)^4 + (i \operatorname{sen} x)^5 \\ &= \cos^5 x + 5i \cos^4 x \operatorname{sen} x - 10 \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x - 10i \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x + 5 \cos x \operatorname{sen}^4 x + i \operatorname{sen}^5 x\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\cos(5x) = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x + 5 \cos x \operatorname{sen}^4 x$

Deducir que $\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\theta) &= \Im(e^{2i\theta}) \\ \Im(e^{2i\theta}) &= \Im(e^{i\theta})^2, \text{ por propiedades de potenciación.} \\ (e^{i\theta})^2 &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2 \\ &= \binom{2}{0}(\cos \theta)^2 + \binom{2}{1}(\cos \theta)(i \operatorname{sen} \theta) + \binom{2}{2}(i \operatorname{sen} \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta + 2i \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^2 \theta\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

Si se requiere encontrar la particularidad que tiene un triángulo ABC que satisface la relación: $\operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C}$, se tendría que utilizar la forma exponencial de un complejo, algunas identidades trigonométricas y el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

Como

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C &= \Im(e^{iB} + e^{iC}) \\ &= \Im\left(e^{i\left(\frac{B+C}{2}\right)}\left[e^{i\left(\frac{B-C}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{B-C}{2}\right)}\right]\right) \\ &= \Im\left[\left(\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)\right)2 \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right] \\ &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\end{aligned}$$

De esto mismo, se tiene que $\Re(e^{iB} + e^{iC}) = \cos B + \cos C = 2 \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$
 Así que,

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C} &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}, \text{ simplificando se tiene que} \\
 &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}, \text{ como } A+B+C = \pi, B+C = \pi - A \\
 &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi - A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi - A}{2}\right)} \\
 &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)}, \text{ por la diferencia de ángulos de las funciones seno y coseno} \\
 &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)} \\
 &= \frac{\cos \frac{A}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A}{2}} = \operatorname{sen}(A) \quad , \text{ por hipótesis}
 \end{aligned}$$

Ahora, al despejar la función coseno de la última igualdad, se tiene que $\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)$, pero el ángulo A se puede expresar como la suma de dos ángulos.

$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right)$, al efectuar la sustitución en la última expresión, se cuenta con que $\cos\left(\frac{A}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right)$, y luego se deduce que

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right) &= 1 \\
 \operatorname{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\
 \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \Leftrightarrow \frac{A}{2} &= \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ donde } k \in \mathbb{Z} \\
 \Leftrightarrow A &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Lo cual significa que el ángulo A es recto, y por lo tanto el triángulo ABC es rectángulo.

El proceso a seguir para linealizar un polinomio trigonométrico consiste en expresar el o los términos del polinomio en grado uno, y para ello se utiliza la forma exponencial junto con la expansión de el o de los binomios.

En particular, el proceso de linealizar $\cos^4 x$ es:

$$\text{Como, } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 \\ &= \left(\frac{1}{2^4}\right)[\binom{4}{0}(e^{ix})^4 + \binom{4}{1}(e^{ix})^3(e^{-ix}) + \binom{4}{2}(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 + \binom{4}{3}(e^{ix})(e^{-ix})^3 + \binom{4}{4}(e^{-ix})^4] \\ &= \left(\frac{1}{16}\right)[(e^{4ix}) + 4(e^{2ix}) + 6 + 4(e^{-2ix}) + (e^{-4ix})] \quad , \text{ asociando términos.} \\ &= \left(\frac{1}{16}\right)[2 \cos(4x) + 8 \cos(2x) + 6] \\ &= \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

El trabajo se incrementa si el polinomio trigonométrico tiene varios términos, por ejemplo.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \left[\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)\right]^2 \\ &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \frac{(e^{2ix} - e^{-2ix})^2}{-16} \\ &= -\frac{1}{32i} [(e^{ix} - e^{-ix})(e^{4ix} - 2 + e^{-4ix})] \\ &= -\frac{1}{32i} [e^{5ix} - 2e^{ix} + e^{-3ix} - e^{3ix} + 2e^{-ix} - e^{-5ix}] \\ &= -\frac{1}{32i} [(e^{5ix} - e^{-5ix}) - (e^{3ix} - e^{-3ix}) - 2(e^{ix} - e^{-ix})] \\ &= -\frac{1}{32i} (2i \operatorname{sen} 5x - 2i \operatorname{sen} 3x - 2(2i \operatorname{sen} x)) \\ &= -\frac{1}{16} \operatorname{sen} 5x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{8} \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Verificar que $\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x \cos^4 x = -\frac{1}{16} \operatorname{sen} 5x - \frac{7}{16} \operatorname{sen} 3x + \frac{5}{8} \operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 - \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 \\ &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \left[\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 - \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \left[\frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} - \frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{4ix}}{16} \right] \\
&= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \left[\frac{16e^{2ix} - 32 + 16e^{-2ix} + 4e^{4ix} + 16e^{2ix} + 24 + 16e^{-2ix} + 4e^{-4ix}}{-64} \right] \\
&= -\frac{1}{128i} (e^{ix} - e^{-ix}) [4e^{4ix} + 32e^{2ix} - 8 + 32e^{-2ix} + 4e^{-4ix}] \\
&= -\frac{1}{128i} [4e^{5ix} + 32e^{3ix} - 8e^{ix} + 32e^{-ix} + 4e^{-3ix} - 4e^{3ix} - 32e^{ix} + 8e^{-ix} - \\
&\quad 32e^{-3ix} - 4e^{-5ix}] \\
&= -\frac{1}{128i} [4e^{5ix} + 28e^{3ix} - 40e^{ix} + 4e^{-ix} - 28e^{-3ix} - 4e^{-5ix}] \\
&= -\frac{1}{128i} [8i \operatorname{sen} 5x + 56i \operatorname{sen} 3x - 80 \operatorname{sen} x] \\
&= -\frac{1}{16} \operatorname{sen} 5x - \frac{7}{16} \operatorname{sen} 3x + \frac{5}{8} \operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

La demostración de la fórmula $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$ es:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B) &= \Im[e^{i(A+B)} + e^{i(A-B)}] \\
&= \Im(e^{iA}[e^{iB} + e^{-iB}]) \\
&= \Im[(\cos A + i \operatorname{sen} A)(2 \cos B)] \\
&= 2 \operatorname{sen} A \cos B
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$.

1.12. Producto cruz y producto punto con complejos.

En esta sección se pretende dar el enfoque complejo para las operaciones vectoriales (producto cruz y producto punto). Los resultados que se obtendrán, se garantizarán a través de las definiciones de producto punto y producto cruz definidas en \mathbb{R} .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right| &= \left| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix} \right| \\
&= |\hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(xy' - x'y)| \\
&= |xy' - x'y|
\end{aligned}$$

Ahora, se establecerá como se define el producto cruz y producto punto en el plano complejo.
Sea $a = |a|e^{i\alpha}$ y $b = |b|e^{i\beta}$

Al efectuar el producto entre el conjugado de a y el complejo b , se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{a}b &= |a||b|e^{i(\beta-\alpha)}, \quad \beta - \alpha = \theta \\ &= |a||b|e^{i(\theta)} \\ &= |a||b|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ &= |a||b| \cos \theta + i|a||b| \operatorname{sen} \theta\end{aligned}$$

Por otra parte el producto de a y el conjugado de b es:

$$\begin{aligned}a\bar{b} &= |a||b|e^{i(\alpha-\beta)}, \quad \alpha - \beta = -\theta \\ &= |a||b|e^{-i(\theta)} \\ &= |a||b|(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) \\ &= |a||b| \cos \theta - i|a||b| \operatorname{sen} \theta\end{aligned}$$

En coordenadas cartesianas se tiene que: $a = x + iy \Rightarrow \bar{a} = x - iy$ y $b = x' + iy'$

Ahora, se puede afirmar:

$$\begin{aligned}\bar{a}b &= (x - iy)(x' + iy') \\ &= (xx' + yy') + i(xy' - x'y) \\ &= a \bullet b + i|a \times b|\end{aligned}$$

De igual manera, en coordenadas cartesianas se tiene que: $b = x' + iy' \Rightarrow \bar{b} = x' - iy'$ y $a = x + iy$

Se puede afirmar:

$$\begin{aligned}a\bar{b} &= (x + iy)(x' - iy') \\ &= (xx' + yy') - i(xy' - x'y) \\ &= a \bullet b - i|a \times b|\end{aligned}$$

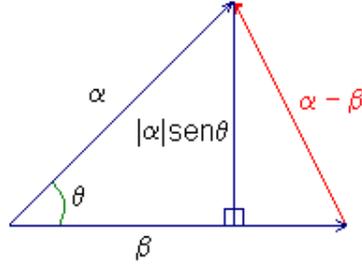
Por consiguiente,

$$\Re(\bar{a}b) = \Re(a\bar{b}) = |a||b| \cos \theta = a \bullet b \quad (1.7)$$

$$\Im(\bar{a}b) = |a||b| \operatorname{sen} \theta \quad (1.8)$$

$$\Im(a\bar{b}) = -|a||b| \operatorname{sen} \theta \quad (1.9)$$

Una alternativa para abordar el contenido es por medio del siguiente problema. Demostrar que el ángulo θ entre dos vectores α y β no nulos satisface $|\alpha||\beta| \cos \theta = \Re(\alpha\bar{\beta})$, $\pm|\alpha||\beta| \operatorname{sen} \theta = \Im(\alpha\bar{\beta})$ y que, por lo tanto, el área del triángulo formado por α , β , y $\beta - \alpha$ es $\frac{1}{2}[\Im(\alpha\bar{\beta})]$.



Utilizando el teorema del coseno.

$$\begin{aligned}
|\alpha - \beta|^2 &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \cos \theta \\
(\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \cos \theta \\
\alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \cos \theta \\
|\alpha|^2 - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + |\beta|^2 &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \cos \theta \\
\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta &= 2|\alpha||\beta| \cos \theta \\
2\Re(\alpha\bar{\beta}) &= 2|\alpha||\beta| \cos \theta \\
\Re(\alpha\bar{\beta}) &= |\alpha||\beta| \cos \theta.
\end{aligned}$$

Es de observar que el resultado del producto punto no cambia aunque se intercambien los vectores, mientras que el producto cruz cambia de signo, es por ello que $\Im(\alpha\bar{\beta}) = \pm|\alpha||\beta|\text{sen}\theta$.

La prueba de última igualdad, se deduce si:

$$\begin{aligned}
\alpha\bar{\beta} &= \Re(\alpha\bar{\beta}) + i\Im(\alpha\bar{\beta}) \\
&= |\alpha||\beta| \cos \theta + i\Im(\alpha\bar{\beta}),
\end{aligned}$$

Por propiedades de módulo, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\alpha\bar{\beta}|^2 &= ||\alpha||\beta| \cos \theta + i\Im(\alpha\bar{\beta})|^2 \\
(\alpha\bar{\beta})(\bar{\alpha}\beta) &= (|\alpha||\beta| \cos \theta + i\Im(\alpha\bar{\beta}))(|\alpha||\beta| \cos \theta - i\Im(\alpha\bar{\beta})) \\
(\alpha\bar{\beta})(\bar{\alpha}\beta) &= |\alpha|^2|\beta|^2 \cos^2 \theta + (\Im(\alpha\bar{\beta}))^2 \\
|\alpha|^2|\beta|^2 &= |\alpha|^2|\beta|^2 \cos^2 \theta + (\Im(\alpha\bar{\beta}))^2 \\
|\alpha|^2|\beta|^2(1 - \cos^2 \theta) &= (\Im(\alpha\bar{\beta}))^2 \\
|\alpha|^2|\beta|^2 \text{sen}^2 \theta &= (\Im(\alpha\bar{\beta}))^2 \\
(|\alpha||\beta| \text{sen}\theta)^2 &= (\Im(\alpha\bar{\beta}))^2 \\
\pm|\alpha||\beta| \text{sen}\theta &= \Im(\alpha\bar{\beta}).
\end{aligned}$$

Y para finalizar, se tiene que el área de cualquier triángulo es el semiproducto de la base y la altura, Por medio del bosquejo geométrico se tiene que la base es $|\beta|$ y de altura $|\alpha|\text{sen}\theta$, por lo que el área es:

$$\frac{1}{2}[|\beta|(|\alpha|\text{sen}\theta)] = \frac{1}{2}(|\beta||\alpha|\text{sen}\theta) = \frac{1}{2}[\Im(\alpha\bar{\beta})].$$

1.13. Teorema de De Moivre.

Teorema 1.13.1 para $z = |z|e^{i\theta}$ y $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta))$

Teniendo en mente la representación polar, $z = |z|e^{i\theta}$ claramente $z^n = |z|^n e^{ni\theta}$, y en forma trigonométrica $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta))$ y $z^n = (|z|(\cos \theta + i\text{sen}\theta))^n$. Al igualar estas últimas dos expresiones se obtiene la fórmula de De Moivre:

$$(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))^n = (\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por cierto, en algún momento ya se ha utilizado

$$(e^{i\theta})^n = (e^{in\theta})$$

$$(\cos \theta + i\text{sen}\theta)^n = (\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta))$$

Ejemplo, calcular $(1 - i)^{23}$.

Se sabe que, al multiplicar $(1 - i)$ por sí mismo 23 veces, se obtendrá la respuesta, pero si se utiliza el teorema de De Moivre la respuesta se encontrará más fácilmente.

Al expresar a $1 - i$ en polar se tiene que $1 - i = \sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k) + i\text{sen}(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k)]$

Usando el valor principal del argumento, se tiene $1 - i = \sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\text{sen}(-\frac{\pi}{4})]$

Aplicando el teorema de De Moivre,

$$\begin{aligned} (1 - i)^{23} &= (\sqrt{2})^{23}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\text{sen}(-\frac{\pi}{4})]^{23} \\ &= (2)^{\frac{23}{2}}[\cos(-\frac{23\pi}{4}) + i\text{sen}(-\frac{23\pi}{4})] \end{aligned}$$

El argumento con el que se cuenta, puede ser expresado de tal forma que tenga un valor del argumento principal más un múltiplo de 2π , así $-\frac{23\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 6\pi$, al efectuar los cálculos de las funciones trigonométricas del seno y coseno para el argumento principal, se tiene

$\text{sen}(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, por lo que

$$\begin{aligned} (1 - i)^{23} &= ((2)^{\frac{23}{2}})(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)) \\ &= ((2)^{\frac{23}{2}})(\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2}(1 + i)) \\ &= \frac{2^{12}}{2}(1 + i) \\ &= 2^{11}(1 + i) \\ &= 2048(1 + i) \end{aligned}$$

El teorema de De Moivre tiene varias aplicaciones útiles, por ejemplo, expresar $\cos 5\theta$ en función de $\cos \theta$.

Por teorema de De Moivre se tiene que:

$\cos 5\theta + i\text{sen}5\theta = (\cos \theta + i\text{sen}\theta)^5$, es decir

$\cos 5\theta + i\text{sen}5\theta = \cos^5 \theta + 5i \cos^4 \theta \text{sen}^3 \theta - 10 \cos^3 \theta \text{sen}^2 \theta - 10i \cos^2 \theta \text{sen}^3 \theta + 5 \cos \theta \text{sen}^4 \theta + i\text{sen}^5 \theta$.

De las partes reales de cada miembro, se obtiene
 $\cos 5\theta = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \operatorname{sen}^2 \theta + 5 \cos \theta \operatorname{sen}^4 \theta$
 como, $\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, se tiene

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 5 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 \\ &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta + 10 \cos^5 \theta + 5 \cos \theta (1 - 2 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) \\ &= 11 \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta + 10 \cos^3 \theta + 5 \cos^5 \theta \\ &= 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta \end{aligned}$$

El teorema de De Moivre también se utiliza para encontrar las raíces de un número complejo no nulo.

1.14. Raíces n-ésimas de un complejo y raíces n-ésimas de la unidad.

La posición del problema es la siguiente: dado un número w , se buscan los números z tales que $z^n = w$, donde n es un entero natural no nulo. Se pretende demostrar que, si w es un número no nulo, la ecuación $z^n = w$ admite n soluciones en \mathbb{C} . Las soluciones de esta ecuación son las raíces n-ésimas de w .

Definición. Sea w un número complejo, y n un entero mayor o igual a 2. Se define la raíz n-ésima de w , al número complejo z tal que $z^n = w$.

Existencia.

- Si $w = 0$, entonces z admite sólo una raíz n-ésima: 0.
- Si $w \neq 0$, entonces z admite n raíces n-ésimas: z_0, z_1, \dots, z_{n-1} .

Para el primer caso, se tiene que si $w = 0$, entonces los módulos de z y w son nulos. Prueba: sea $|z|$ el módulo de z ; entonces el módulo de z^n es $|z|^n$: en consecuencia de esto se tiene que $|z|^n = 0$ de donde $|z| = 0$. La ecuación $z^n = 0$ admite sólo una solución $z = 0$.

La prueba para el segundo caso es:

Sea $w = |\rho|(\cos t + i \operatorname{sen} t)$ un complejo con $\rho > 0$ y $t \in [0, 2\pi[$.

Se demostrará que el número w tiene n raíces distintas, dadas por la fórmula:

$$Z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{t + 2k\pi}{n} \right), \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Prueba:

usando la representación trigonométrica del número complejo Z , $Z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, por el teorema de De Moivre, se tiene que $Z^n = w$ es equivalente a:

$$r^n = \rho \text{ y } n\theta = t + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \text{ así } r = \sqrt[n]{\rho} \text{ y } \theta_k = \frac{t}{n} + k \frac{2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De aquí que las raíces de $Z^n - w = 0$ son

$$Z_k = \sqrt[n]{\rho} (\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k) \quad k \in \mathbb{Z},$$

pero θ_k está acotado, es decir,

$0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} < 2\pi$, θ_k es de argumento reducido, con $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, así $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}$.

Al considerar a los enteros k y sea $s \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ los residuos de k módulo n . Entonces $k = nq + s$, $q \in \mathbb{Z}$, y

$$\begin{aligned}\theta_k &= \frac{t}{n} + (nq + s) \frac{2\pi}{n} \\ &= \frac{t}{n} + s \frac{2\pi}{n} + 2q\pi \\ &= \theta_s + 2q\pi\end{aligned}$$

es lo que indica que $\theta_k \equiv \theta_s \pmod{2\pi}$, hay exactamente n raíces diferentes.

Raíz n-ésima de un complejo bajo la forma exponencial.

Sea $w = |w|e^{i\alpha}$ se buscan los números $z = |z|e^{i\theta}$ tales que $z^n = w$ (los números z son las raíces n-ésimas de w).

Se tiene:

$$\begin{aligned}z^n = w &\Leftrightarrow |z|^n e^{in\theta} = |w|e^{i\alpha} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = |w| \\ n\theta = \alpha + 2\pi k \end{cases}\end{aligned}$$

donde

$$|z| = \sqrt[n]{|w|} = |w|^{\frac{1}{n}} \quad (1.10)$$

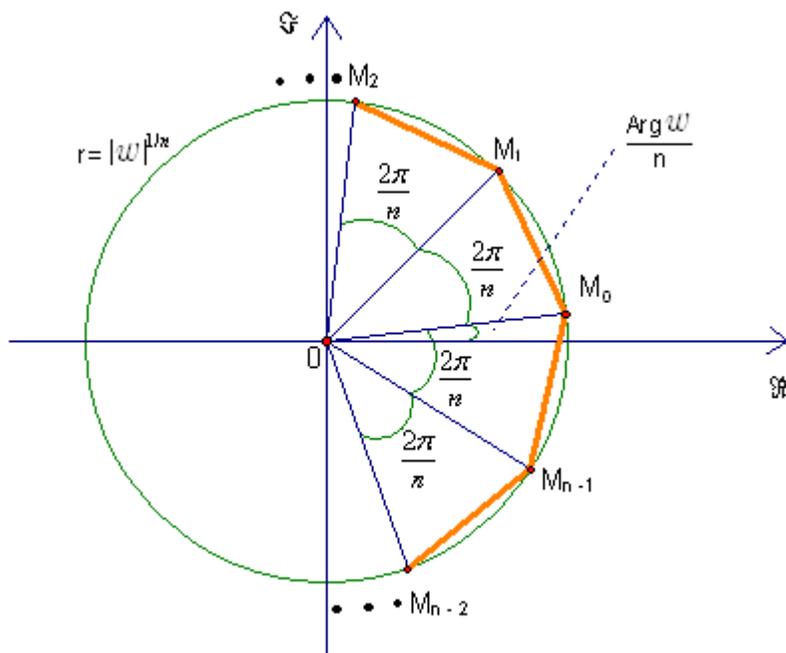
y

$$\theta = \frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n}. \quad (1.11)$$

Así, las raíces n-ésimas de $w = |w|e^{i\alpha}$ son:

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n})} \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Se tiene que el conjunto solución es una sucesión geométrica $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ que conforma las raíces n-ésimas y cada uno de estos términos se ubican sobre una circunferencia centrada en el origen y de radio $|w|^{\frac{1}{n}}$, mientras el ángulo entre dos raíces consecutivas es $\frac{2\pi}{n}$, por lo que dichas raíces son los vértices de un n-ágono regular, como lo muestra la siguiente figura.



La prueba de este resultado es:

Primero, hay que denotar a M_0, M_1, \dots, M_{n-1} como los puntos con coordenadas complejas de z_0, z_1, \dots, z_{n-1} .

A causa de $OM_k = |z_k| = |w|^{1/n}$, para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ se sigue que los puntos M_k se sitúan en una circunferencia $C(0, |w|^{1/n})$. Por otra parte, las medidas de los arcos $\widehat{M_k M_{k+1}}$ es igual a:

$$\begin{aligned} \arg z_{k+1} - \arg z_k &= \left(\frac{\alpha}{n} + (k+1)\frac{2\pi}{n}\right) - \left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= \frac{2\pi}{n}, \text{ para todo } k \in [0, n-1]. \end{aligned}$$

Ya que los arcos $\widehat{M_0 M_1}, \widehat{M_1 M_2}, \dots, \widehat{M_{n-1} M_0}$ son iguales, el polígono $M_0 M_1 \dots M_{n-1}$ es regular.

Por ejemplo, encontrar las raíces cúbicas de $w = 1 - i$.

Sea z una raíz cúbica de $1 - i$. Entonces $z^3 = 1 - i$, por el teorema de De Moivre,

$$|z|^3 (\cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta)) = \sqrt{2} [\cos(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k) + i \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k)],$$

de donde $|z|^3 = \sqrt{2}$ implica que $|z| = 2^{1/6}$ y $3\theta = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ implica que $\theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

Por lo que las tres raíces cúbicas de $1 - i$ son:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{1/6} [\cos(-\frac{\pi}{12}) + i \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{12})] \\ &= \sqrt[6]{2} [\cos(\frac{\pi}{12}) - i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{12})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^{\frac{1}{6}} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &= \sqrt[6]{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 2^{\frac{1}{6}} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) \right] \\ &= \sqrt[6]{2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned}$$

Ya que el módulo de las raíces es constante, y es obvio que si este es menor que la unidad los puntos que representan a dichas raíces se ubican dentro de la circunferencia unitaria, pero si el módulo es mayor que uno se ubican fuera, mientras que si el módulo es igual a la unidad se ubican en la circunferencia unitaria.

Raíces n-ésimas de la unidad.

Si se tiene que $w = 1 = |w|e^{i\alpha}$, donde $|w| = 1$ y $\alpha = 0$; las propiedades del apartado anterior se aplican naturalmente a este caso en particular.

Si $R_n(1)$ denota las raíces n-ésimas de la unidad, se tiene:

$$R_n(1) = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\} \text{ o } z_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}, \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Utilizando la notación en polar, se tiene que,

$$\begin{aligned} z_1 &= \left[1, \frac{2\pi}{n}\right] = z_1 \\ z_1^2 &= \left[1, \frac{4\pi}{n}\right] = z_2 \\ z_1^3 &= \left[1, \frac{6\pi}{n}\right] = z_3 \\ &\vdots \\ z_1^{n-1} &= \left[1, \frac{2\pi(n-1)}{n}\right] = z_{n-1} \\ z_1^n &= 1 = z_0. \end{aligned}$$

Es de observar que $z_k = z_1^k$.

Otro de los resultados, es que la suma de las raíces es cero, ya que:

$$0 = (z_1^n - 1) = \underbrace{(z_1 - 1)}_{\neq 0} \underbrace{(1 + z_1 + z_1^2 + \dots + z_1^{n-1})}_{=0}$$

Pero si $1 + z_1 + z_1^2 + \dots + z_1^{n-1} = 0$, se confirma que:

$$1 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0.$$

El conjunto solución resulta ser una sucesión geométrica, $\{z_1^0, z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^{n-1}\}$, por lo que $z_1^0 + z_1^1 + z_1^2 + \dots + z_1^{n-1} = \frac{z_1^n - z_1^0}{z_1 - 1}$, ahora bien, z_1 es una raíz de z^n por lo que $z_1^n = 1$, y además se tiene que $z_1^0 = 1$, de igual manera, esto también garantiza que la suma anterior es

cero.

Se puede obtener fácilmente las raíces cúbicas de la unidad.

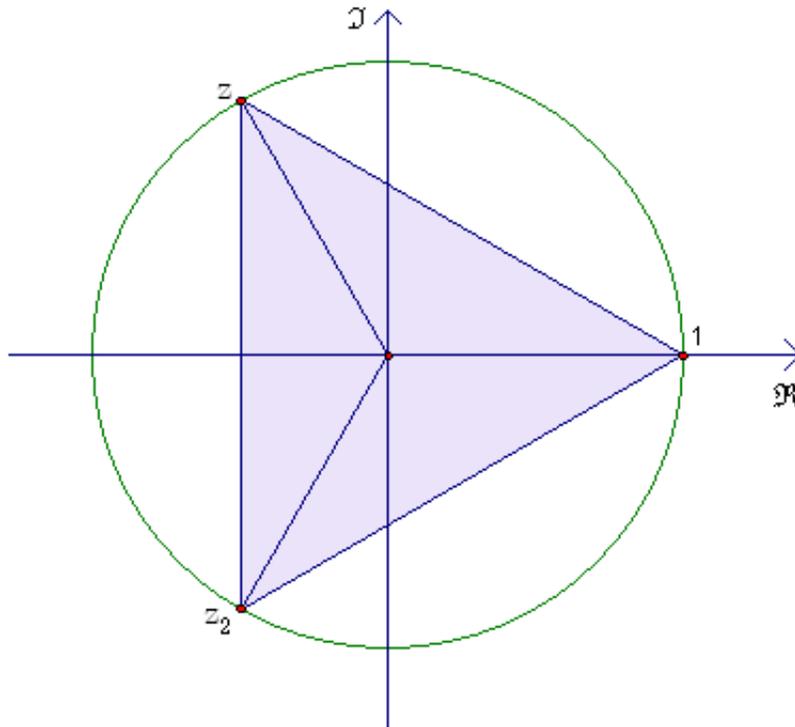
$$z_0 = [1, 0] = z_3 = z_6 = z_9 = \dots = z_{-3} = z_{-6} = \dots$$

$$z_1 = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right] = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = z_4 = z_7 = z_{10} = \dots = z_{-2} = z_{-5} = \dots$$

$$z_2 = \left[1, \frac{4\pi}{3}\right] = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = z_5 = z_8 = z_{11} = \dots = z_{-1} = z_{-4} = \dots$$

Y de forma exponencial, se tiene $R_3(1) = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$.

Estos tres puntos son los vértices del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia unitaria con uno de sus vértices en 1. Además, al referirse al gráfico se sabe que $z = z_1$, entonces $z^2 = z_2$ y que $z_2 = \bar{z}$. También, se sabe que al sumar los puntos z^2 , z y 1, se tiene que $z^2 + z + 1 = 0$



Es la hora poner en práctica lo aprendido en álgebra sobre las raíces primitivas de la unidad, las cuales son generadoras del conjunto solución, y que además facilita el proceso para obtener las raíces n -ésimas de cualquier complejo.

Se hace la aclaración, de que siempre se obtiene el mismo resultado de las raíces n -ésimas con el intervalo $[0, n - 1]$ que de $[1, n]$ ya que se utiliza la congruencia módulo n , ahora bien el único efecto producido es una permutación de las raíces.

Definición. Una raíz es primitiva si las potencias n -ésimas genera a todas las raíces n -ésimas de la unidad.

En otras palabras, una raíz de la unidad se dice que es primitiva, si las potencias de ésta generan el conjunto solución, es decir si $z_m \neq 1$ es una primitiva si y sólo si $z_m^1, z_m^2, \dots, z_m^n$ son todas diferentes.

Por ejemplo. Si $n = 12$, las raíces primitivas de $z^{12} = 1$ son:
 z_1, z_5, z_7, z_{11} .

Únicamente se verificará que z_1 es una primitiva, ya que el proceso es análogo para las restantes.

Como $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, entonces

$$\begin{aligned} z_1^2 &= e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ z_1^3 &= e^{i\frac{3\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z_1^4 &= e^{i\frac{4\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ z_1^5 &= e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ z_1^6 &= e^{i\frac{6\pi}{6}} = e^{i\pi} \\ z_1^7 &= e^{i\frac{7\pi}{6}} \\ z_1^8 &= e^{i\frac{8\pi}{6}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ z_1^9 &= e^{i\frac{9\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ z_1^{10} &= e^{i\frac{10\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{3}} \\ z_1^{11} &= e^{i\frac{11\pi}{6}} \\ z_1^{12} &= e^{i\frac{12\pi}{6}} = e^{i2\pi} = 1. \end{aligned}$$

Así, z_1^k con $k \in [1, 12]$ son las raíces doceavas de la unidad (todas distintas).

En el caso de que n sea un número primo, todas las raíces de la unidad, distintas de 1, son primitivas, es decir que si n es primo, entonces se tienen $n - 1$ primitivas.

Ejemplo. En $z^5 = 1$, las raíces son $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$, $z_5 = e^{i2\pi}$. Denotando a $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 3$, $z_4 = 4$ y $z_5 = 5$, una forma alternativa de ver los que forman un grupo cíclico, es por medio de la siguiente tabla:

x	$(x)^1$	$(x)^2$	$(x)^3$	$(x)^4$	$(x)^5$
z_1	1	2	3	4	5
z_2	2	4	1	3	5
z_3	3	1	4	2	5
z_4	4	3	2	1	5
z_5	5	5	5	5	5

Capítulo 2

Geometría del triángulo.

2.1. Introducción a las aplicaciones geométricas.

Se discutirán las aplicaciones de los números complejos al plano geométrico. Es importante tener presente en las aplicaciones geométricas propiedades vectoriales, así como algunas propiedades básicas de geometría. Los números complejos son en particular efectivos para cierto tipo de problemas.

La congruencia y la semejanza de triángulos son conceptos fundamentales de geometría elemental.

A través de los números complejos se observará que la naturaleza de las rectas y las circunferencias son muy parecidas, de hecho en el tercer capítulo se mostrará que una recta puede considerarse como una circunferencia con centro el punto al infinito.

2.1.1. Semejanza de triángulos.

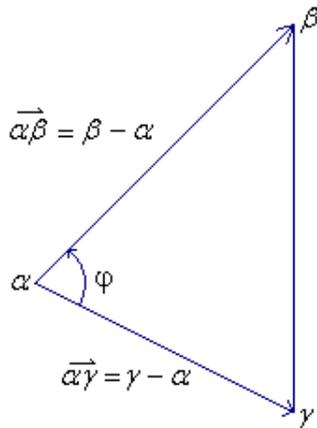
Para comenzar, se debe tener presente la definición de semejanza de dos triángulos en términos de los números complejos, ya que es base fundamental en todo el capítulo.

Se dice que, $\Delta z_1 z_2 z_3$ y $\Delta w_1 w_2 w_3$ son semejantes, y se denotará por $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$ si y sólo si las razones de las longitudes de los lados correspondientes son iguales y los correspondientes ángulos entre ellos son iguales incluyendo la orientación (el recorrido de los vértices), quiere decir que, el ángulo z_k es igual al ángulo w_k con $k = 1, 2, 3$, ahora bien los dos triángulos deben tener el recorrido de los vértices bajo la misma orientación, es decir, que esten en contra de las agujas del reloj o a favor de éstas.

Si tiene orientación opuesta, entonces se escribirá

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3 \text{ (inversa)}$$

Para tres puntos distintos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, se tiene:



$\varphi = \arg \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \arg(\beta - \alpha) - \arg(\gamma - \alpha)$, donde la orientación del ángulo φ es desde el vector $\vec{\alpha\gamma}$ al vector $\vec{\alpha\beta}$.

Teorema 2.1.1 (Semejanza de triángulos) $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$

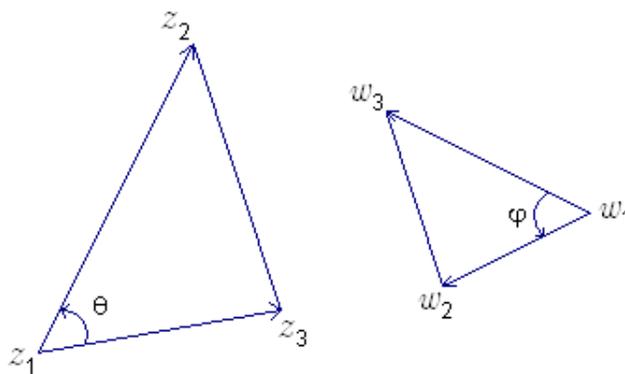
$$\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Prueba:

Por definición, se sabe que dos triángulos son semejantes si y sólo si las razones de las longitudes de los lados correspondientes son iguales y los correspondientes ángulos entre ellos son iguales incluyendo la orientación.

Así, $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$.



$$\Leftrightarrow \frac{|z_2 - z_1|}{|z_3 - z_1|} = \frac{|w_2 - w_1|}{|w_3 - w_1|}, \text{ donde } \theta = \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}, \varphi = \arg \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z_2 - z_1|}{|z_3 - z_1|} = \frac{|w_2 - w_1|}{|w_3 - w_1|} \wedge \theta = \varphi; \text{ así, siendo iguales sus módulos y sus argumentos, se tiene:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

La anterior igualdad conduce a:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \Leftrightarrow (z_2 - z_1)(w_3 - w_1) = (z_3 - z_1)(w_2 - w_1), \text{ al desarrollar los productos}$$

$$\Leftrightarrow z_2w_3 - z_2w_1 - z_1w_3 + z_1w_1 = z_3w_2 - z_3w_1 - z_1w_2 + z_1w_1, \text{ ordenando se tiene que}$$

$$\Leftrightarrow (z_2w_3 - z_3w_2) - (z_1w_3 - z_3w_1) + (z_1w_2 - z_2w_1) = 0$$

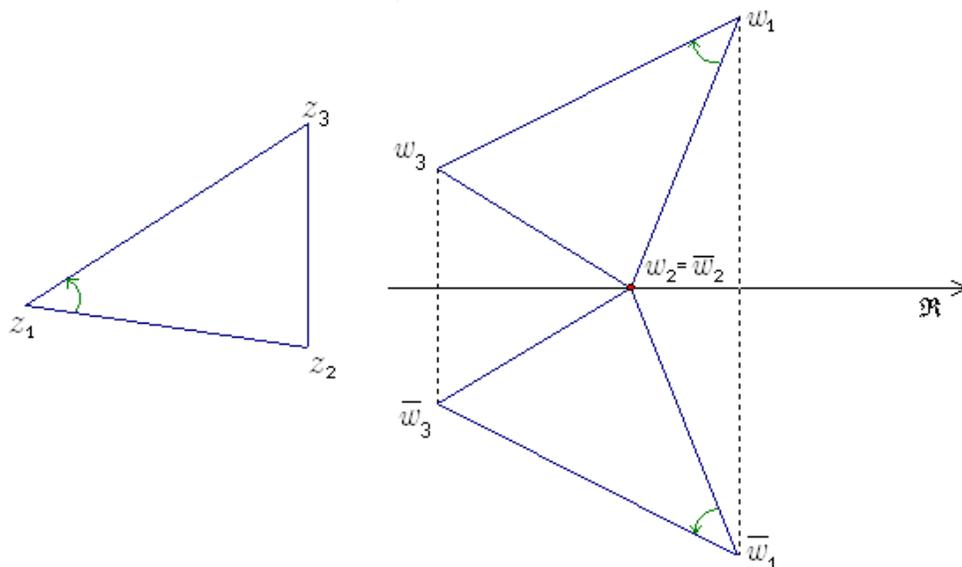
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Corolario 1. $\Delta z_1z_2z_3$ y $\Delta w_1w_2w_3$ son semejantes, con orientación inversa si y sólo si

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\overline{w_2 - w_1}}{\overline{w_3 - w_1}} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & \overline{w_1} & 1 \\ z_2 & \overline{w_2} & 1 \\ z_3 & \overline{w_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Prueba:

Se considerará sin pérdida de generalidad que el vértice w_2 se ubica sobre el eje real.



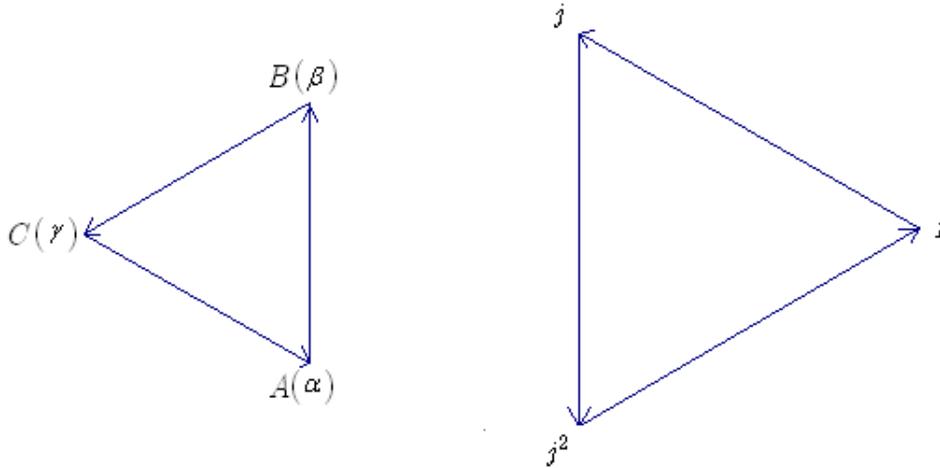
Al considerar la reflexión de $\Delta w_1 w_2 w_3$ sobre el eje real, se tiene $\Delta w_1 w_2 w_3 \sim \Delta \overline{w_1} \overline{w_2} \overline{w_3}$ (inversa), luego que $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \overline{w_1} \overline{w_2} \overline{w_3}$ con la misma orientación, y por el teorema 2.1.1, se tiene

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{w_1} & 1 \\ z_2 & \overline{w_2} & 1 \\ z_3 & \overline{w_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

El triángulo ABC es equilátero si y sólo si ABC es semejante al triángulo formado por $1, j, j^2$.

Prueba:

Sean α, β, γ los complejos respectivos asociados al ΔABC y $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ representa a una raíz cúbica de la unidad.



Por hipótesis, si ΔABC es equilátero, entonces

$$\begin{aligned} \gamma - \beta &= j(\beta - \alpha) \\ \alpha - \gamma &= j(\gamma - \beta) = j^2(\beta - \alpha) \\ j(\alpha - \gamma) &= \beta - \alpha \end{aligned}$$

Por semejaza,

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha\beta\gamma \sim \Delta 1jj^2 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \beta & j & 1 \\ \gamma & j^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\beta j^2 - j\gamma) - (j^2\alpha - \gamma) + (j\alpha - \beta) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\gamma - \beta) + j(\alpha - \gamma) + j^2(\beta - \alpha) = 0 \\
&\Leftrightarrow j(\beta - \alpha) + (\beta - \alpha) + (\alpha - \gamma) = 0 \\
&\Leftrightarrow j\beta + \beta - j\alpha - \gamma = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta(1 + j) - j\alpha - \gamma = 0, \text{ como } 1 + j + j^2 = 0 \Rightarrow 1 + j = -j^2 \\
&\Leftrightarrow -j^2\beta - j\alpha - \gamma = 0 \\
&\Leftrightarrow j^2\beta + j\alpha + \gamma = 0 \quad \text{multiplicando por } j^2 \text{ y ordenando} \\
&\Leftrightarrow \alpha + j\beta + j^2\gamma = 0.
\end{aligned}$$

La otra implicación, es:

si $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, entonces ABC es equilátero.

En este caso, se tendrá que probar que:

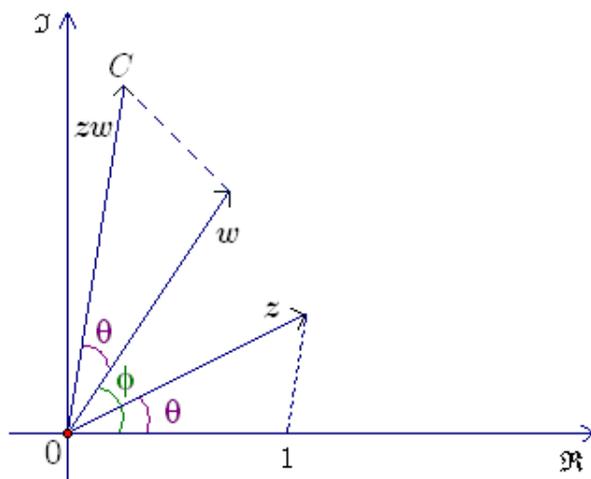
$$\begin{aligned}
j(\beta - \alpha) &= \gamma - \beta \\
j(\gamma - \beta) &= \alpha - \gamma = j^2(\beta - \alpha) \\
j(\alpha - \gamma) &= \beta - \alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j(\beta - \alpha) &= j(\beta - (-j\beta - j^2\gamma)) \quad \text{por hipótesis, } \alpha = -j\beta - j^2\gamma \\
&= j(\beta + j\beta + j^2\gamma) \\
&= j\beta + j^2\beta + j^3\gamma \\
&= (j + j^2)\beta + \gamma, \quad 1 + j + j^2 = 0 \Rightarrow j + j^2 = -1 \\
&= -\beta + \gamma \\
&= \gamma - \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j(\gamma - \beta) &= j\left(\gamma - \frac{-(\alpha + j^2\gamma)}{j}\right) \quad \text{por hipótesis, } \beta = \frac{-(\alpha + j^2\gamma)}{j} \\
&= j\gamma + \alpha + j^2\gamma \\
&= \alpha + \gamma(j + j^2), \quad 1 + j + j^2 = 0 \Rightarrow j + j^2 = -1 \\
&= \alpha - \gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j(\alpha - \gamma) &= j\left(\alpha - \frac{-(\alpha + j\beta)}{j^2}\right) \text{ por hipótesis, } \gamma = \frac{-(\alpha + j\beta)}{j^2} \\
&= j\alpha + \frac{\alpha + j\beta}{j} \\
&= j\alpha + \frac{\alpha}{j} + \beta \\
&= \alpha\left(j + \frac{1}{j}\right) + \beta \\
&= \alpha\left(\frac{j^2 + 1}{j}\right) + \beta, \quad 1 + j + j^2 = 0 \Rightarrow 1 + j^2 = -j \\
&= \alpha(-1) + \beta \\
&= \beta - \alpha
\end{aligned}$$

La semejanza sirve también, para tener una interpretación geométrica del producto y cociente de números complejos, como lo muestran los siguientes esquemas:



Para la multiplicación, el ángulo entre w y zw debe ser idéntico al ángulo entre 1 y z , de ello que $\Delta 01z \sim \Delta 0wzw$.

Se asumirá que $\overline{0C}$ representa al complejo zw , $\overline{0w}$ a w , $\overline{0z}$ a z y $\overline{01}$ a la unidad.

Por semejanza, se tiene que: $\frac{\overline{0z}}{\overline{01}} = \frac{\overline{0C}}{\overline{0w}}$ implica que $(\overline{0z})(\overline{0w}) = (\overline{0C})(\overline{01})$, pero $\overline{01} = 1$. Por lo tanto

$$(\overline{0z})(\overline{0w}) = (\overline{0C})$$

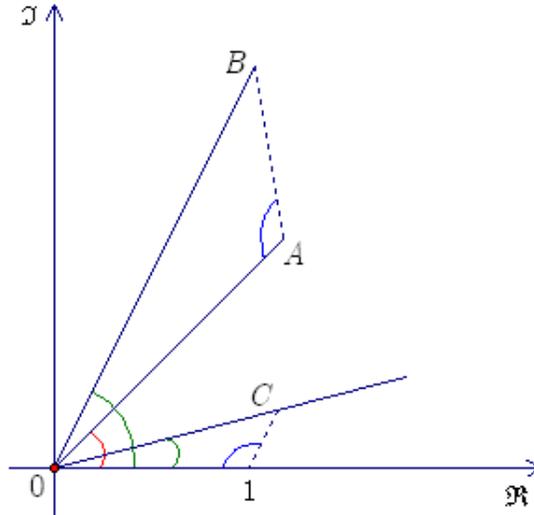
$$zw = (\overline{0C}).$$

Mientras que para la representación geométrica del cociente por medio de semejanza se obtiene efectuando los siguientes pasos:

Sobre el eje real y desde el origen se traza un ángulo que es igual a la diferencia entre los

ángulos proporcionados que justamente coincide con el ángulo generado desde $\overline{0A}$ hasta $\overline{0B}$. Asimismo se toma la unidad de medida sobre dicho eje.

En 1 se traza un ángulo igual al $\angle 0AB$ quedando determinado $\Delta 01C$ que es semejante a $\Delta 0AB$.



Por semejanza,

$$\frac{\overline{0B}}{\overline{0A}} = \frac{\overline{0C}}{1}$$

$$\frac{\overline{0B}}{\overline{0A}} = \overline{0C}, \text{ si } \overline{0B} \text{ representa al número complejo } z \text{ y } \overline{0A} \text{ a } w, \text{ entonces}$$

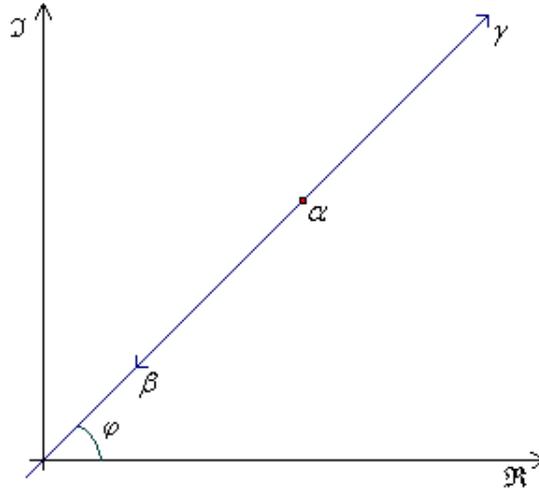
$$\frac{z}{w} = \overline{0C}, \text{ representa al cociente de dos complejos.}$$

2.1.2. Puntos colineales, rectas paralelas y perpendiculares.

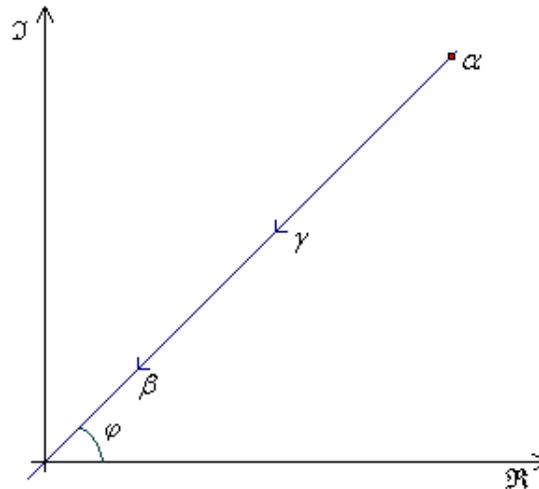
Se mostrará por medio de complejos como se expresan las condiciones de colinealidad, para que dos rectas sean ortogonales o paralelas.

Se dirá que α, β, γ son colineales si sólo si el cociente de $\beta - \alpha$ y $\gamma - \alpha$ es un número real; es decir: $\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R}$

Geoméricamente se tiene:



Se podría presentar el caso en que α se ubicará a la derecha de γ ,



Y cuando α se ubica a la izquierda de β .

Para el primer caso:

Si $\arg(\gamma - \alpha) = \varphi$, entonces $\arg(\beta - \alpha) = \varphi + \pi$. Se sabe que

$$\begin{aligned} \arg \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} &= \arg(\beta - \alpha) - \arg(\gamma - \alpha) \\ &= (\varphi + \pi) - \varphi \\ &= \pi \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ es un número real.

Para el segundo caso, se tiene que:

$$\begin{aligned} \arg \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} &= \arg(\beta - \alpha) - \arg(\gamma - \alpha) \\ &= 0, \text{ ya que los argumentos son iguales.} \end{aligned}$$

Y el último caso, es cuando α se ubica a la izquierda de β , que es análogo al caso anterior, ya que los argumentos son iguales.

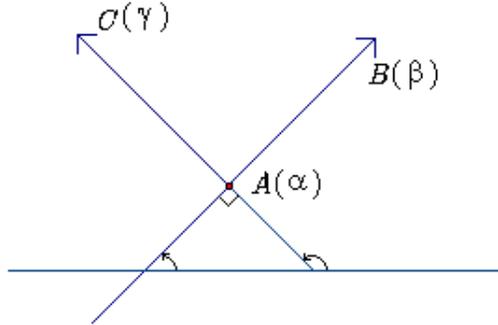
Esto significa que $\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R}$.

Por complejos:

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, \gamma \text{ colineales} &\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}}, \text{ por la propiedad 8 de conjugados} \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 , representados por los complejos z_1, z_2, z_3, z_4 respectivamente, son colineales si y sólo si $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Se usará la notación \parallel, \perp para indicar que dos líneas (segmentos de recta o vectores) son paralelos o perpendiculares, respectivamente.



Se dirá que los vectores $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \arg(\beta - \alpha) = \arg(\gamma - \alpha) \pm \frac{\pi}{2}$

$$\arg\left(\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$, es imaginario puro.

$$\text{Si } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = ki, \quad k \in \mathbb{R}$$

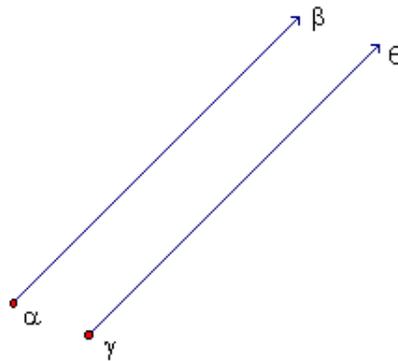
Pero, el cociente se puede expresar como $\frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_1}$, donde $z_1 \bar{z}_2$ es imaginario puro puesto que

$z_2\bar{z}_2 \in \mathbb{R}^+$, o bien, escribiéndolo de otra manera $\frac{z_1\bar{z}_1}{z_2\bar{z}_1}$, donde $z_2\bar{z}_1$ es imaginario puro puesto que $z_1\bar{z}_1 \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}\text{Así, } (\beta - \alpha)\overline{(\gamma - \alpha)} &= (\beta - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) \text{ es imaginario puro} \\ (\gamma - \alpha)\overline{(\beta - \alpha)} &= (\gamma - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \text{ es imaginario puro}\end{aligned}$$

Proposición. Para cuatro puntos distintos $\alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\alpha\beta} \parallel \overrightarrow{\gamma\theta} &\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\theta - \gamma} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\theta - \gamma} = \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\theta} - \bar{\gamma}}.\end{aligned}$$



2.1.3. Determinación de rectas y circunferencias.

Ecuación de una recta.

Proposición 1. La ecuación de una recta en el plano complejo es de la forma:

$$\bar{\alpha} \bar{z} + \alpha z + \beta = 0, \quad (2.1)$$

donde $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Prueba:

La ecuación general de una recta en el plano cartesiano es

$$ax + by + c = 0.$$

Donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a^2 + b^2 \neq 0$. Si $z = x + iy$, entonces $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ y $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Así,

$$a \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + b \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + c = 0.$$

$$a \frac{z}{2} + a \frac{\bar{z}}{2} - ib \frac{z}{2} + ib \frac{\bar{z}}{2} + c = 0.$$

Equivalente a

$$\bar{z} \left(\frac{a+ib}{2} \right) + z \left(\frac{a-ib}{2} \right) + c = 0.$$

Sea $\alpha = \frac{a-ib}{2} \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $\beta = c \in \mathbb{R}$, entonces la ecuación de la recta es

$$\bar{\alpha} \bar{z} + \alpha z + \beta = 0.$$

Se considerará una recta R del plano de ecuación $ax + by + c = 0$. Sea $z = x + iy$ el complejo que representa al punto $M(x, y)$ del plano y $w = a + ib$ el complejo asociado al vector $\vec{v} = (a, b)$, que representa a un vector normal a la recta R .

Se mostrará que al utilizar los complejos, se puede verificar que los puntos de la recta satisfacen la relación

$$\bar{w}z + w\bar{z} + 2c = 0. \quad (2.2)$$

Prueba:

De la ecuación cartesiana de la recta, se tiene que $y = \frac{-ax - c}{b}$, al sustituir en $z = x + iy$,

$z = x - i \left(\frac{ax + c}{b} \right)$, y si $w = a + ib$, entonces $\bar{w} = a - ib$; retomando (2.2)

$$\begin{aligned} (a-ib)\left(x - i\left(\frac{ax+c}{b}\right)\right) + (a+ib)\left(x + i\frac{ax+c}{b}\right) + 2c &= ax - ia\left(\frac{ax+c}{b}\right) - ibx - b\left(\frac{ax+c}{b}\right) + ax + \\ &\quad ia\left(\frac{ax+c}{b}\right) + ibx - b\left(\frac{ax+c}{b}\right) + 2c \\ &= 2ax - 2b\left(\frac{ax+c}{b}\right) + 2c \\ &= 2ax - 2ax - 2c + 2c \\ &= 0. \end{aligned}$$

c es nulo \Leftrightarrow la recta R pasa por el origen.

Si $c = 0$ la ecuación de la recta es $\bar{w}z + w\bar{z} = 0$, en efecto $z = 0$ la satisface, por lo que pasa por el origen.

Si pasa por el origen $z = 0$, por lo que la ecuación queda $2c = 0$ y esto implica que $c = 0$.

Si en (2.1) se considera a $\bar{\alpha} = w$ y $\beta = 2c$, se obtiene (2.2), por lo que ambas expresiones representan a una recta.

Un resultado particular de (2.1) es: si $\alpha = \bar{\alpha}$, entonces $b = 0$ y se tiene una recta vertical. Prueba:

Como $\bar{\alpha} \bar{z} + \alpha z + \beta = 0$ es la ecuación de una recta, pero $\beta = c$
 $\bar{\alpha} \bar{z} + \alpha z + c = 0$, por hipótesis

$\alpha(z + \bar{z}) + c = 0$, pero si $\alpha = \frac{a-ib}{2}$ y $\alpha = \bar{\alpha}$, entonces $\alpha = \frac{a}{2}$, es decir que $b = 0$; además, $z + \bar{z} = 2x$, por lo que

$$\frac{a}{2}(2x) + c = 0,$$

y $ax + c = 0$, representa la ecuación general de una recta vertical.

Si $\alpha \neq \bar{\alpha}$, entonces se define la pendiente de la recta como

$$m = -\frac{a}{b} = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}} = i \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}}.$$

Teorema 2.1.2 Si A y B son dos puntos distintos representados por α y β respectivamente, entonces se tienen las siguientes equivalencias:

1. Existe un número real t tal que $z = (1 - t)\alpha + t\beta$, donde z es un número complejo arbitrario.

2. $\arg(z - \alpha) = \arg(\beta - \alpha)$

Prueba:

$$z = (1 - t)\alpha + t\beta, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z - \alpha = t(\beta - \alpha), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} = \arg t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \arg(z - \alpha) - \arg(\beta - \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \arg(z - \alpha) = \arg(\beta - \alpha).$$

$z = (1 - t)\alpha + t\beta$, se conoce como la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos A, B y con $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 2. La ecuación de una circunferencia en el plano complejo es

$$z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + \beta = 0. \tag{2.3}$$

Donde $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\beta \in \mathbb{R}$.

Prueba:

La ecuación canónica de una circunferencia es

$$\begin{aligned} (x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

haciendo, $D = -2h, E = -2k, F = h^2 + k^2 - r^2$, se tiene que la ecuación general de una circunferencia en el plano cartesiano es

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ donde } D, E, F \in \mathbb{R}.$$

En base a que $D = -2h, E = -2k, F$ se puede reexpresar como $F = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - r^2$, por lo que se puede decir que $F < \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$.

Teniendo en cuenta que $x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ y $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$ se obtiene

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$|z|^2 + D \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + E \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + F = 0$$

$$z\bar{z} + \frac{D}{2}z + \frac{D}{2}\bar{z} - \frac{Ei}{2}z + \frac{Ei}{2}\bar{z} + F = 0$$

$$z\bar{z} + \left(\frac{D - Ei}{2} \right) z + \left(\frac{D + Ei}{2} \right) \bar{z} + F = 0$$

Tomando $\alpha = \frac{D - iE}{2} \in \mathbb{C}$ y $\beta = F \in \mathbb{R}$, se tiene la ecuación que se quería demostrar.

El radio de la circunferencia se deduce de $F = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - r^2$, por lo que $r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$, y en términos de α y β es $r = \sqrt{\alpha\bar{\alpha} - \beta}$.

Ahora que se sabe que (2.3) representa una circunferencia, se puede sumar y restar $\alpha\bar{\alpha}$ que es una cantidad real, así

$$\begin{aligned} z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + \beta &= 0 \\ z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + \beta + \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\alpha} &= 0 \\ z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + \alpha\bar{\alpha} &= \alpha\bar{\alpha} - \beta \\ (z + \bar{\alpha})(\bar{z} + \alpha) &= r^2 \end{aligned}$$

Si se considera a $\omega = -\bar{\alpha} = -\frac{D}{2} - i\frac{E}{2}$, la ecuación de la circunferencia se transforma en

$$(z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) = |z - \omega| = r^2,$$

que representa a la ecuación de una circunferencia con centro ω y radio r .

Si en (2.3) se considera a $\alpha = \bar{w}$ y $\beta = c$, entonces la expresión de la circunferencia se transforma en

$$z\bar{z} + \bar{w}z + w\bar{z} + c = 0. \tag{2.4}$$

La constante c es nula si y sólo si la circunferencia pasa por el origen.

Si c es nula, la expresión que denota a una circunferencia es $z\bar{z} + \bar{w}z + w\bar{z} = 0$, pero $z = 0$ satisface la ecuación, por lo que pasa por el origen.

Por el otro lado, se tiene que si la circunferencia pasa por el origen $z = 0$ y al sustituir en (2.4), se tiene como resultado que $c = 0$.

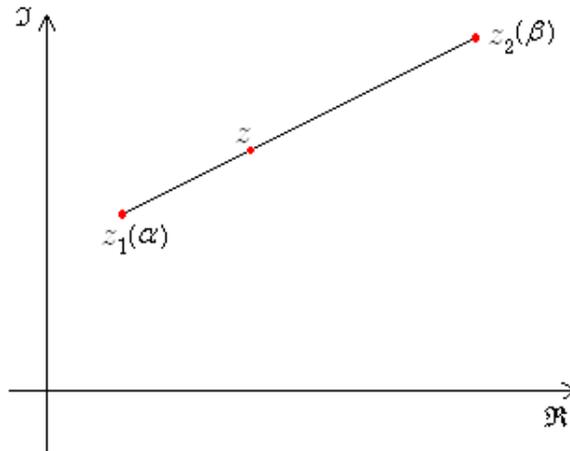
2.2. Rectas y puntos notables del triángulo.

Se mostrará como se obtienen las rectas notables de un triángulo y los puntos de concurrencia haciendo uso de los complejos.

Se iniciará con la división de un segmento conocida la proporción.

Dados dos puntos z_1 y z_2 en el plano complejo, representados por α y β respectivamente, el punto z que divide al segmento $[z_1, z_2]$ en la proporción $m : n$ está dado por:

$$z = \frac{n\alpha + m\beta}{n + m} \quad (2.5)$$



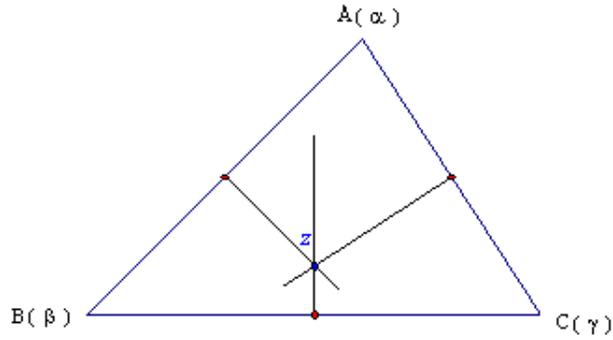
Para deducir a z hay que formar la siguiente razón:

$$\begin{aligned} \frac{z - \alpha}{\beta - z} &= \frac{m}{n} \\ nz - n\alpha &= m\beta - mz \\ (n + m)z &= n\alpha + m\beta \\ z &= \frac{n\alpha + m\beta}{n + m}. \end{aligned}$$

2.2.1. Mediatrices.

Proposición. Las mediatrices de los tres lados de un triángulo arbitrario concurren en un punto llamado circuncentro.

Sean A, B, C los vértices del triángulo, representados por los complejos α, β, γ respectivamente.



Por la definición de mediatriz de un segmento, se sabe que las distancias de los dos extremos del segmento hasta un punto arbitrario z de la mediatriz son iguales; es decir, que para cualquier z arbitrario sobre la mediatriz de $[A, B] \Leftrightarrow |z - \alpha| = |z - \beta|$, mientras que $|z - \alpha| = |z - \beta| = |z - \gamma| \Leftrightarrow z$ es el circuncentro.

Mediatriz de $[B, C]$

$$(z - \beta)(\bar{z} - \bar{\beta}) = (z - \gamma)(\bar{z} - \bar{\gamma}),$$

o sea

$$|\beta|^2 - |\gamma|^2 = z(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{z}(\beta - \gamma). \quad (2.6)$$

Mediatriz de $[A, B]$

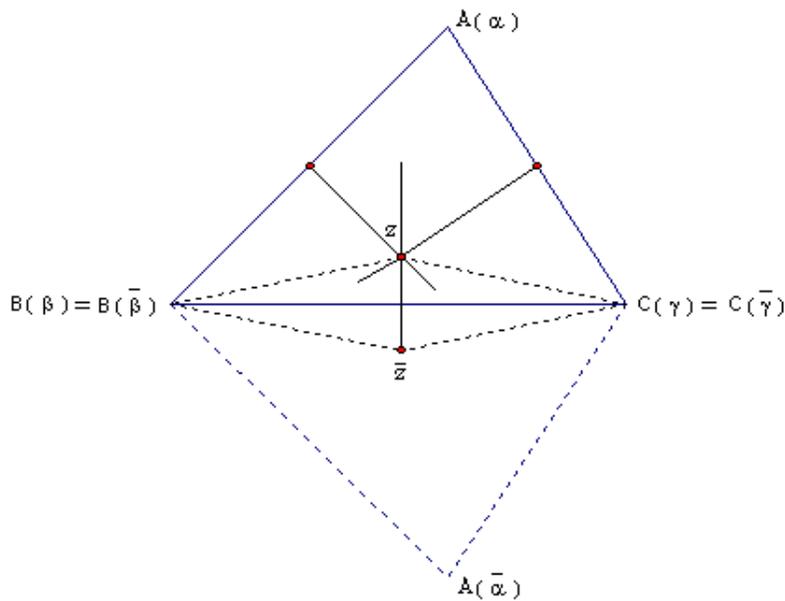
$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{z}(\alpha - \beta). \quad (2.7)$$

Si z pertenece a la mediatriz de $[B, C]$ y $[A, B]$, entonces sumando (2.6) y (2.7), se tiene

$$|\alpha|^2 - |\gamma|^2 = z(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) + \bar{z}(\alpha - \gamma),$$

Lo que significa que pertenece a la mediatriz de $[A, C]$.

Otra forma alternativa para la deducción de las mediatrices.



Se pretende deducir la mediatriz de $[B, C]$, y para ello se asumirá sin pérdida de generalidad, que $[B, C]$ se ubica sobre el eje real. La mediatriz de dicho segmento contiene al punto z que equidista de β y γ , por la suposición \bar{z} , también equidista de β y γ , por lo que $\Delta z\beta\gamma$ y $\Delta \bar{z}\bar{\beta}\bar{\gamma}$ son congruentes en orientación inversa.

Pero $\Delta z\beta\gamma \sim \Delta \bar{z}\bar{\gamma}\bar{\beta}$ son congruentes en orden directo

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \beta & \bar{\gamma} & 1 \\ \gamma & \bar{\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & z(\bar{\gamma} - \bar{\beta}) - \bar{z}(\beta - \gamma) + \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} = 0 \\ \Leftrightarrow & z(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{z}(\beta - \gamma) = |\beta|^2 - |\gamma|^2, \text{ es la mediatriz de } [B, C] \end{aligned}$$

De manera análoga para deducir las mediatrices de los lados CA y AB que son:

$$\begin{aligned} z(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) + \bar{z}(\gamma - \alpha) &= |\gamma|^2 - |\alpha|^2 \\ z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{z}(\alpha - \beta) &= |\alpha|^2 - |\beta|^2, \text{ respectivamente.} \end{aligned}$$

Al sumar las mediatrices AB y BC

$$\begin{aligned} z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{z}(\alpha - \beta) &= |\alpha|^2 - |\beta|^2 \\ z(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{z}(\beta - \gamma) &= |\beta|^2 - |\gamma|^2 \end{aligned}$$

$$z(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) + \bar{z}(\alpha - \gamma) = |\alpha|^2 - |\gamma|^2,$$

equivalente a:

$$z(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) + \bar{z}(\gamma - \alpha) = |\gamma|^2 - |\alpha|^2$$

Al sumar dos de las ecuaciones que representan a las mediatrices resulta la tercera, implica que la solución de dos cualesquiera de estas ecuaciones automáticamente satisface la tercera. En otras palabras, la intersección de dos cualesquiera de las mediatrices pertenece a la tercera mediatriz.

Al resolver el sistema formado por dos de las ecuaciones de las mediatrices se obtiene el punto de concurrencia llamado circuncentro denotado por z .

Para la mediatriz de $[C, A]$

$$\begin{aligned} z(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) + \bar{z}(\gamma - \alpha) &= |\gamma|^2 - |\alpha|^2 \\ \Rightarrow z &= \frac{|\gamma|^2 - |\alpha|^2 - \bar{z}(\gamma - \alpha)}{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Para la mediatriz de $[AB]$

$$z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{z}(\alpha - \beta) = |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2 - z(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{\alpha - \beta} \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.9) en (2.8)

$$\begin{aligned} z &= \frac{|\gamma|^2 - |\alpha|^2 - \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2 - z(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{\alpha - \beta} \right) (\gamma - \alpha)}{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}} \\ &= \frac{(\alpha - \beta)(|\gamma|^2 - |\alpha|^2) - (|\alpha|^2 - |\beta|^2 - z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}))(\gamma - \alpha)}{(\alpha - \beta)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})} \end{aligned}$$

$$z(\alpha - \beta)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) - z(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(\gamma - \alpha) = (\alpha - \beta)(|\gamma|^2 - |\alpha|^2) - (\gamma - \alpha)(|\alpha|^2 - |\beta|^2)$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{|\alpha|^2(\beta - \alpha - \gamma + \alpha) + |\beta|^2(\gamma - \alpha) + |\gamma|^2(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) - (\bar{\alpha} - \bar{\beta})(\gamma - \alpha)} \\ &= \frac{|\alpha|^2(\beta - \gamma) + |\beta|^2(\gamma - \alpha) + |\gamma|^2(\alpha - \beta)}{\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

Si se supone que los vértices se encuentran sobre la circunferencia unitaria, entonces los módulos de dichos vértices son iguales a la unidad, y en consecuencia

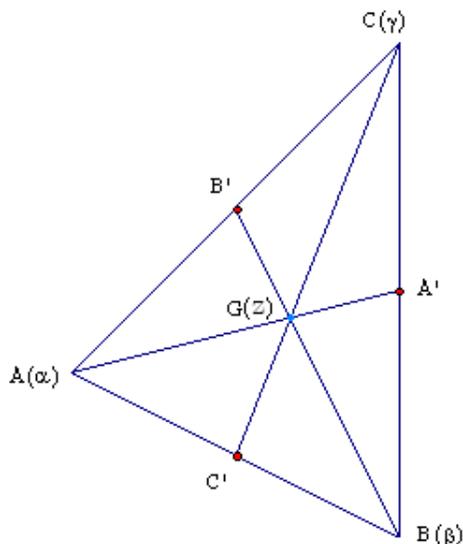
$$z = \frac{(\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) + (\alpha - \beta)}{\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)} = 0,$$

su circuncentro sería el origen.

2.2.2. Medianas.

Sea ABC un triángulo, en donde los vértices son representados por α, β, γ ; $A'B'C'$ los puntos medios respectivos de los lados opuestos a los vértices. Se demostrará que el punto G , representado por z , que divide al segmento AA' en la proporción 2 : 1 satisface la relación:

$$z = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$$



Utilizando la ecuación (2.5), se puede determinar el punto medio A' : $\frac{\beta + \gamma}{2}$; utilizando nuevamente la ecuación (2.5) con proporción 2 : 1 para AA' , se tiene que:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\alpha + 2\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)}{2 + 1} \\ &= \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

Este resultado se mantiene invariante al considerar la mediana BB' o CC' . Como se sabe tal punto es conocido como baricentro o centro de gravedad del triángulo ABC .

Es fácil deducir las ecuaciones de las medianas, ya que se conocen dos puntos que se ubican sobre cada una de éstas.

La mediana AA' :

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \frac{\beta + \gamma}{2} & \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\bar{\alpha} - \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{2}\right)z - \left(\alpha - \frac{\beta + \gamma}{2}\right)\bar{z} + \left[\alpha\left(\frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{2}\right) - \bar{\alpha}\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)\right] = 0 \quad (2.10)$$

La mediana BB' :

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \frac{\alpha + \gamma}{2} & \frac{\bar{\alpha} + \bar{\gamma}}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\bar{\beta} - \frac{\bar{\alpha} + \bar{\gamma}}{2}\right) z - \left(\beta - \frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \bar{z} + \left[\beta \left(\frac{\bar{\alpha} + \bar{\gamma}}{2}\right) - \bar{\beta} \left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)\right] = 0 \quad (2.11)$$

La mediana CC' :

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \\ \frac{\alpha + \beta}{2} & \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

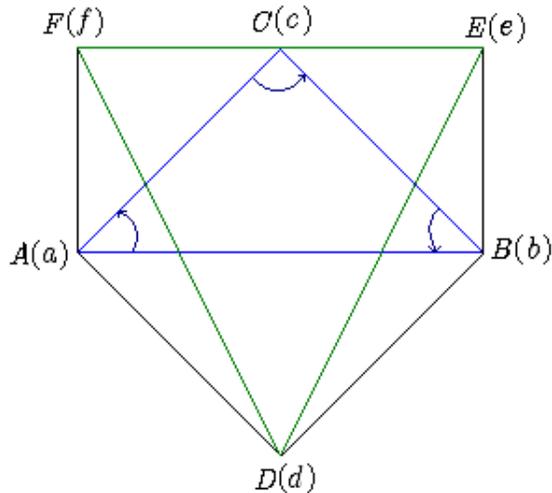
$$\left(\bar{\gamma} - \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}{2}\right) z - \left(\gamma - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \bar{z} + \left[\gamma \left(\frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}{2}\right) - \bar{\gamma} \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right] = 0 \quad (2.12)$$

Al sumar cualquiera dos de estas ecuaciones se obtiene la tercera, esto implica que la solución de dos de estas ecuaciones automáticamente satisface la tercera, en otras palabras la intersección de dos medianas pertenece a la tercer mediana.

Simultaneando dos de estas ecuaciones, se obtiene el centro de gravedad conocido por:

$$z = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$$

Problema. Sobre los lados AB, BC, CA del triángulo ABC se construyen los triángulos semejantes ADB, BEC, CFA , con la misma orientación. Se probará que los triángulos ABC y DEF tienen el mismo centro de gravedad.



Denotando con las letras minúsculas las coordenadas de los puntos dados.

Por hipótesis los triángulos ADB, BEC, CFA son semejantes con la misma orientación, por

lo que la razón de los complejos es constante

$$z = \frac{d-a}{b-a} = \frac{e-b}{c-b} = \frac{f-c}{a-c}, \text{ en consecuencia}$$

$$d = a + (b-a)z, e = b + (c-b)z, f = c + (a-c)z$$

$$\begin{aligned} d + e + f &= a + bz - az + b + cz - bz + c + az - cz \\ &= a + b + c \end{aligned}$$

Entonces, $\frac{d+e+f}{3} = \frac{a+b+c}{3}$, así se tiene que los triángulos ABC y DEF tienen el mismo centro de gravedad.

2.2.3. Alturas.

Definición. El producto real de los números complejos a y b , es el número dado por

$$a * b = \frac{1}{2} (\bar{a}b + a\bar{b})$$

Es de observar que la definición se refiere al producto punto definido en 1.2.7.

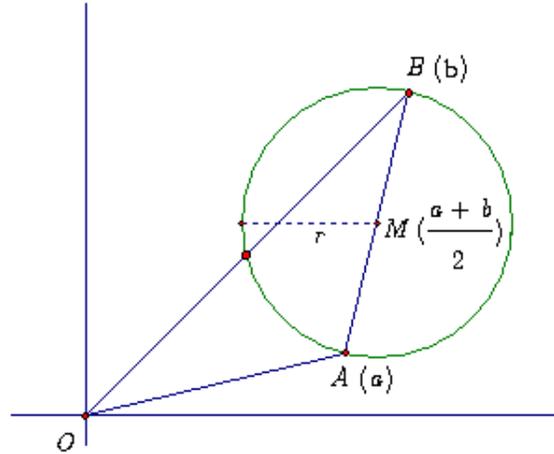
Proposición 1. Para todos los números complejos a, b, c, z se tienen las siguientes relaciones:

1. $a * a = |a|^2$.
2. $a * b = b * a$; el producto real es conmutativo.
3. $a * (b + c) = a * b + a * c$ el producto real es distributivo con respecto a la adición.
4. $(\alpha a) * b = \alpha(a * b) = a * (\alpha b)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
5. $a * b = 0$ si y sólo si $OA \perp OB$. donde A tiene coordenada a y B tiene coordenada b .
6. $(az) * (bz) = |z|^2(a * b)$.

Nota. Suponer que A y B son dos puntos con coordenadas a y b . Entonces el producto $a * b$ es igual a la potencia del origen con respecto a un círculo de diámetro AB .

Si M es el punto medio de $[AB]$, este se representa por $\frac{a+b}{2}$, que coincide con el centro del círculo, y $r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}|a-b|$ el radio del círculo. La potencia¹ del origen con respecto al círculo es

¹ver anexo



$$\begin{aligned}
 OM^2 - r^2 &= \left| \frac{a+b}{2} \right|^2 - \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 \\
 &= \frac{(a+b)(\bar{a} + \bar{b})}{4} - \frac{(a-b)(\bar{a} - \bar{b})}{4} \\
 &= \frac{a\bar{b} + b\bar{a}}{2} \\
 &= a * b
 \end{aligned}$$

Para la propiedad 1.

Por definición $a * b = \frac{1}{2} (a\bar{b} + b\bar{a})$

Si $b = a$ entonces

$$\begin{aligned}
 a * a &= \frac{1}{2} (a\bar{a} + a\bar{a}) \\
 &= \frac{1}{2} (2a\bar{a}) \\
 &= a\bar{a} \\
 &= |a|^2
 \end{aligned}$$

Para la propiedad 2.

$$\begin{aligned}
 b * a &= \frac{1}{2} (b\bar{a} + a\bar{b}) \\
 &= \frac{1}{2} (a\bar{b} + b\bar{a}) \\
 &= a * b
 \end{aligned}$$

Para la propiedad 3.

$$\begin{aligned}
 a * b + a * c &= \frac{1}{2} (a\bar{b} + b\bar{a}) + \frac{1}{2} (a\bar{c} + c\bar{a}) \\
 &= \frac{1}{2} (a\bar{b} + b\bar{a} + a\bar{c} + c\bar{a}) \\
 &= \frac{1}{2} (a(\bar{b} + \bar{c}) + \bar{a}(b + c)) \\
 &= \frac{1}{2} (a(\overline{b+c}) + (b+c)\bar{a}) \\
 &= a * (b+c)
 \end{aligned}$$

Para la propiedad 4.

$$\begin{aligned}
 (\alpha a) * b &= \frac{1}{2} (\alpha a\bar{b} + b(\overline{\alpha a})) \\
 &= \frac{1}{2} (\alpha a\bar{b} + b\bar{\alpha} \bar{a}), \alpha \in \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2} (\alpha a\bar{b} + b\alpha \bar{a}) \\
 &= \alpha \frac{1}{2} (a\bar{b} + b\bar{a}) \\
 &= \alpha (a * b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a * (\alpha b) &= \frac{1}{2} (a(\overline{\alpha b}) + (\alpha b)\bar{a}) \\
 &= \frac{1}{2} (a\bar{\alpha} \bar{b} + \alpha b\bar{a}), \alpha \in \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2} (a\alpha \bar{b} + \alpha b\bar{a}) \\
 &= \alpha \frac{1}{2} (a\bar{b} + b\bar{a}) \\
 &= \alpha (a * b) \text{ por transitividad, se cumple la propiedad 4. } \forall \alpha \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Para la propiedad 5.

$$\begin{aligned}
 a * b = 0 &\Leftrightarrow \frac{a\bar{b} + b\bar{a}}{2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow a\bar{b} + \bar{a}b = 0 \\
 &\Leftrightarrow a\bar{b} + \overline{a\bar{b}} = 0 \\
 &\Leftrightarrow a\bar{b} \text{ es imaginario puro, } a\bar{b} = ki
 \end{aligned}$$

$\frac{a}{b}(\bar{b}b) = ki$, lo que significa que $a\bar{b}$ es imaginario puro, por lo que $a \perp b$.

Para la propiedad 6.

$$\begin{aligned}
 (az) * (bz) &= \frac{1}{2} ((az)(\overline{bz}) + (bz)(\overline{az})) \\
 &= \frac{1}{2} (az\overline{b\overline{z}} + bz\overline{a\overline{z}}) \\
 &= \frac{1}{2} (a\overline{b}z\overline{z} + b\overline{a}z\overline{z}) \\
 &= \frac{1}{2} (z\overline{z}) (a\overline{b} + b\overline{a}) \\
 &= \frac{1}{2} |z|^2 (a\overline{b} + b\overline{a}) \\
 &= |z|^2 (a * b).
 \end{aligned}$$

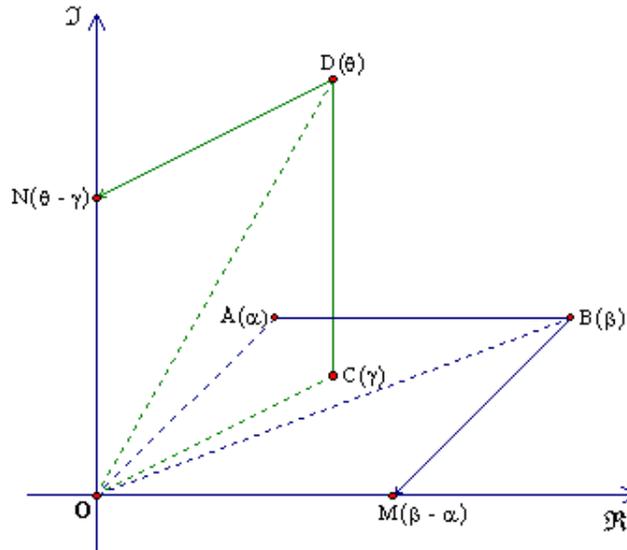
Proposición 2.

Si A, B, C, D son cuatro puntos distintos representados por los complejos $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ respectivamente, entonces son equivalentes:

1. $AB \perp CD$;
2. $(\beta - \alpha) * (\gamma - \theta) = 0$;
3. $\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \theta}$ es imaginario puro, equivalente a $\left(\Re\left(\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \theta}\right) = 0 \right)$

Prueba:

1. \Leftrightarrow 2. Tomando los puntos $M(\beta - \alpha)$ y $N(\theta - \gamma)$ tales que $OABM$ y $OCDN$ son paralelogramos. Se tiene que $AB \perp CD$ si y sólo si $OM \perp ON$.



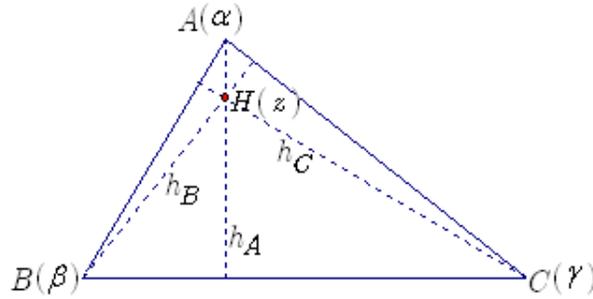
Es decir, $(\beta - \alpha) * (\theta - \gamma) = 0$, usando la propiedad 5 del producto real.

2. \Leftrightarrow 3. Se obtiene de la definición del producto real.

$$\begin{aligned}
 (\beta - \alpha) * (\gamma - \theta) &= \frac{1}{2} ((\overline{\beta - \alpha})(\gamma - \theta) + (\beta - \alpha)(\overline{\gamma - \theta})) \\
 &= \frac{1}{2} ((\overline{\beta - \alpha})(\gamma - \theta) + \overline{(\beta - \alpha)(\gamma - \theta)}) \\
 &= \frac{1}{2} (2\Re((\overline{\beta - \alpha})(\gamma - \theta))) \\
 &= \Re((\overline{\beta - \alpha})(\gamma - \theta)) = 0 \Leftrightarrow (\overline{\beta - \alpha})(\gamma - \theta) \text{ es imaginario puro.}
 \end{aligned}$$

Se cuenta con una buena herramienta para obtener las ecuaciones de las alturas de un triángulo.

Sean A, B, C los vértices del triángulo ABC representados por los números complejos α, β, γ respectivamente, y H el punto de concurrencia representado por el complejo z .



Usando el producto real de números complejos, las ecuaciones de las alturas h_A, h_B, h_C del triángulo son:

$$h_A : (z - \alpha) * (\beta - \gamma) = 0$$

$$h_B : (z - \beta) * (\gamma - \alpha) = 0$$

$$h_C : (z - \gamma) * (\alpha - \beta) = 0$$

Que también pueden ser expresadas como

$$\begin{aligned}
 h_A : \frac{1}{2} [(z - \alpha)(\beta - \gamma) + (z - \alpha)(\overline{\beta - \gamma})] &= 0 \\
 \frac{1}{2} [(\beta - \gamma)\bar{z} + (\overline{\beta - \gamma})z - (\beta - \gamma)\bar{\alpha} - (\overline{\beta - \gamma})\alpha] &= 0 \\
 (\beta - \gamma)\bar{z} + (\overline{\beta - \gamma})z - (\beta - \gamma)\bar{\alpha} - (\overline{\beta - \gamma})\alpha &= 0 \\
 h_A : (\beta - \gamma)\bar{z} + (\overline{\beta - \gamma})z &= (\beta - \gamma)\bar{\alpha} + (\overline{\beta - \gamma})\alpha = 0
 \end{aligned}$$

Al desarrollar el mismo proceso para las alturas restantes se tiene que:

$$\begin{aligned}
 h_B : (\alpha - \gamma)\bar{z} + (\overline{\alpha - \gamma})z &= (\alpha - \gamma)\bar{\beta} + (\overline{\alpha - \gamma})\beta = 0 \\
 h_C : (\alpha - \beta)\bar{z} + (\overline{\alpha - \beta})z &= (\alpha - \beta)\bar{\gamma} + (\overline{\alpha - \beta})\gamma = 0
 \end{aligned}$$

Al sumar cualquiera dos de estas ecuaciones se obtiene la tercera, esto implica que la solución de dos de estas ecuaciones automáticamente satisface la tercera, en otras palabras la intersección de dos alturas pertenece a la tercer altura.

Al simultanear dos ecuaciones de las alturas, se obtiene el ortocentro que está dado por:

$$z = \alpha + \beta + \gamma - 2 \frac{|\alpha|^2 (\beta - \gamma) + |\beta|^2 (\gamma - \alpha) + |\gamma|^2 (\alpha - \beta)}{\bar{\alpha} (\beta - \gamma) + \bar{\beta} (\gamma - \alpha) + \bar{\gamma} (\alpha - \beta)}$$

$$z = \alpha + \beta + \gamma - 2(\text{circuncentro}).$$

Si se supone que los vértices se encuentran sobre el círculo unitario, se tiene que el ortocentro esta en:

$$z = \alpha + \beta + \gamma.$$

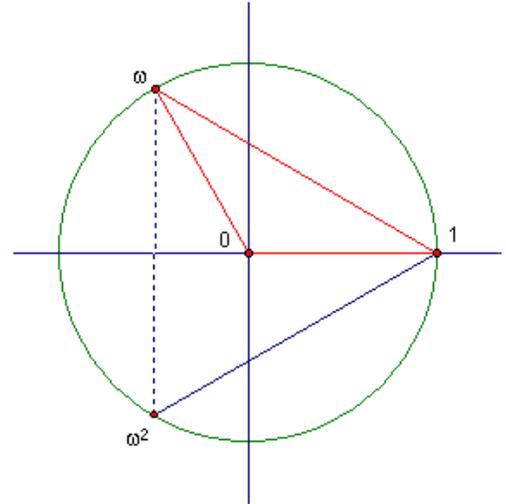
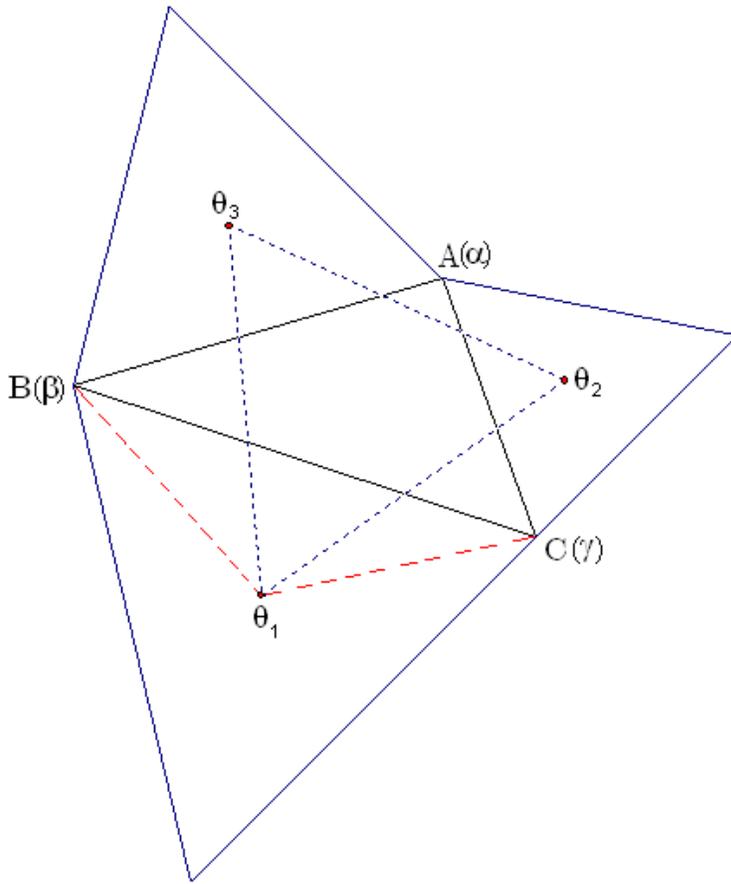
2.3. Aplicaciones de los complejos a la geometría.

2.3.1. Teorema de Napoleón.

Teorema 2.3.1 *Sobre los lados de un triángulo cualquiera se construyen exteriormente (o interiormente) tres triángulos equiláteros. Entonces los circuncentros de estos triángulos son vertices de otro triángulo equilátero.*

La prueba se desarrollará construyendo los triángulos equiláteros externos sobre cada uno de los lados del triángulo dado.

Sea $\triangle ABC$ dado y α, β, γ los números que representan a los vértices, sean los circuncentros $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ de los triángulos exteriores.



Por propiedades de semejanza bajo la misma orientación, se tiene que $\Delta\theta_1\gamma\beta \sim \Delta\omega 1\omega$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \theta_1 & 0 & 1 \\ \gamma & 1 & 1 \\ \beta & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \omega)\theta_1 + (\omega\gamma - \beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_1 = \frac{\beta - \omega\gamma}{1 - \omega}.$$

Análogamente, $\Delta\theta_2\alpha\gamma \sim \Delta\omega 1\omega$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \theta_2 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \gamma & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \omega)\theta_2 + (\omega\alpha - \gamma) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_2 = \frac{\gamma - \omega\alpha}{1 - \omega}.$$

Y, $\Delta\theta_3\beta\alpha \sim \Delta 01\omega$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \theta_3 & 0 & 1 \\ \beta & 1 & 1 \\ \alpha & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \omega)\theta_3 + (\omega\beta - \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_3 = \frac{\alpha - \omega\beta}{1 - \omega}.$$

En la sección de semejanza se vio que el $\Delta\theta_1\theta_2\theta_3$ es equilátero si y sólo si cumple la relación $\theta_1 + \omega\theta_2 + \omega^2\theta_3 = 0$.

$$\begin{aligned} \theta_1 + \omega\theta_2 + \omega^2\theta_3 &= \frac{1}{1 - \omega} [(\beta - \omega\gamma) + \omega(\gamma - \omega\alpha) + \omega^2(\alpha - \omega\beta)] \\ &= \frac{1}{1 - \omega} [\beta - \omega\gamma + \omega\gamma - \omega^2\alpha + \omega^2\alpha - \omega^3\beta], \quad \omega^3 = 1 \\ &= \frac{1}{1 - \omega} [\beta - \beta] \\ &= \frac{1}{1 - \omega} [0] \\ &= 0. \end{aligned}$$

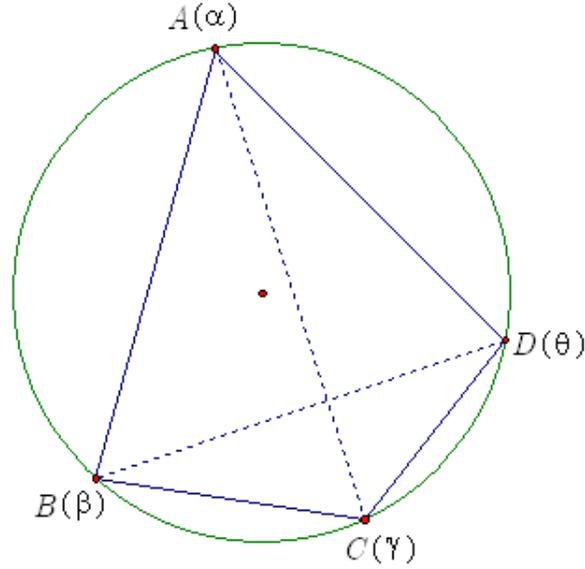
Por lo tanto, $\theta_1\theta_2\theta_3$ son los vértices de un triángulo equilátero.

2.3.2. Teorema Ptolomeo-Euler.

Definición: Si un cuadrilátero tiene sus cuatro vértices sobre una circunferencia, se dice que es cuadrilátero cíclico.

Teorema 2.3.2 (Ptolomeo - Euler) *Para un cuadrilátero cualquiera $ABCD$ se cumple la relación $(AB)(CD) + (BC)(DA) \geq (AC)(BD)$, y se cumple la igualdad si y sólo si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico.*

La siguiente figura muestra un cuadrilátero cíclico $\alpha, \beta, \gamma, \theta$. Ptolomeo descubrió que la suma de los productos de los lados opuestos es igual al producto de las diagonales.



Para cuatro números complejos $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ la identidad

$$(\alpha - \beta)(\gamma - \theta) + (\alpha - \theta)(\beta - \gamma) = (\alpha - \gamma)(\beta - \theta)$$

es fácil de verificar, al desarrollar los productos.

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)(\gamma - \theta) + (\alpha - \theta)(\beta - \gamma) &= \alpha\gamma - \alpha\theta - \beta\gamma + \beta\theta + \alpha\beta - \alpha\gamma - \theta\beta + \theta\gamma \\ &= \alpha\beta - \alpha\theta - \beta\gamma + \theta\gamma \\ &= \alpha(\beta - \theta) - \gamma(\beta - \theta) \\ &= (\alpha - \gamma)(\beta - \theta). \end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular, se tiene

$$|\alpha - \beta||\gamma - \theta| + |\alpha - \theta||\beta - \gamma| \geq |\alpha - \gamma||\beta - \theta|,$$

lo que prueba la desigualdad.

En el caso de la desigualdad triangular, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, la igualdad ocurre si y sólo si $\frac{z_1}{z_2}$ es un número real positivo (con tal de que $z_1 z_2 \neq 0$). Por lo que la condición para que se

cumpla la igualdad en el teorema es que: $\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \theta)}{(\alpha - \theta)(\beta - \gamma)}$ sea un número real positivo.

Pero,

$$\begin{aligned} &\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \theta)}{(\alpha - \theta)(\beta - \gamma)} \text{ es un número real positivo.} \\ \Leftrightarrow &\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \theta} / \frac{\beta - \gamma}{\gamma - \theta} \text{ es un número real positivo.} \\ \Leftrightarrow &\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \theta} / \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \theta} \text{ es un número real negativo.} \\ \Leftrightarrow &\arg \left\{ \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \theta} / \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \theta} \right\} = \arg \left\{ \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \theta} \right\} - \arg \left\{ \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \theta} \right\} \equiv \pi \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

La igualdad fue descubierta por Ptolomeo (85 – 165 a de C.), mientras que el caso general fue encontrado dos mil años más tarde por Euler (1707 – 1783).

La expresión $(\alpha, \gamma; \beta, \theta) = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \theta}\right) / \left(\frac{\gamma - \beta}{\gamma - \theta}\right)$ es llamada razón cruzada de cuatro puntos².

2.3.3. Teorema de Clifford.

Antes de entrar al teorema de Clifford, se establecerá la siguiente proposición.

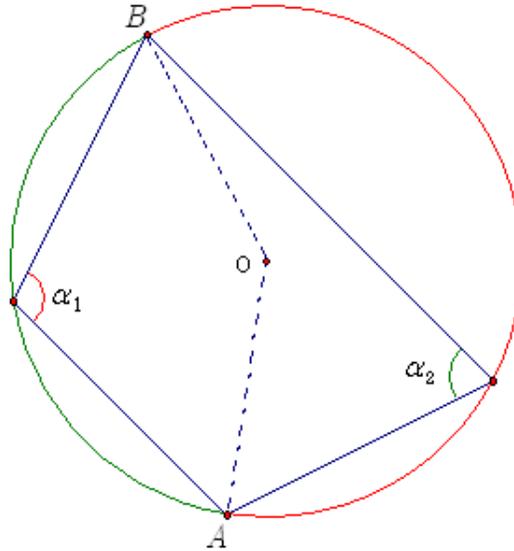
Proposición. Los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 todos distintos y representados por los complejos z_1, z_2, z_3, z_4 respectivamente son cíclicos o colineales si y sólo si

$$k = \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right) / \left(\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4}\right) \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Como preámbulo se desarrollarán algunas propiedades con cuadriláteros cíclicos.

Cualquier estructura cíclica tiene $(n - 1)!$ arreglos diferentes, así el cuadrilátero cíclico tiene $(4 - 1)! = 3! = 6$ arreglos diferentes.

Es de recordar que, un cuadrilátero es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos internos opuestos suman π . Éste resultado se deriva de la propiedad que dice, la medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo central, así

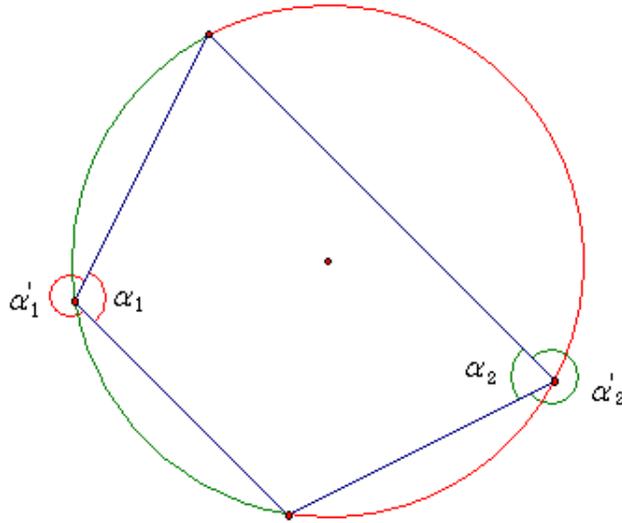


$$\angle AOB + \angle BOA = 2\pi$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\angle AOB + \angle BOA}{2} = \pi.$$

Otra propiedad, un cuadrilátero es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos externos opuestos suman 3π .

²más aplicaciones en el capítulo III



$$\alpha'_1 + \alpha_1 = 2\pi \Rightarrow \alpha'_1 = 2\pi - \alpha_1,$$

$$\begin{aligned} \alpha'_1 + \alpha'_2 &= (2\pi - \alpha_1) + (2\pi - \alpha_2) \\ &= 4\pi - (\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= 4\pi - \pi \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

Inicia la prueba de la proposición. Primero se supondrá que los cuatro puntos son colineales, y se mostrará que la razón cruzada es un número real distinto de cero.

Por hipótesis, los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 , representados por los complejos z_1, z_2, z_3, z_4 respectivamente, son colineales si y sólo si $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R} - \{0\}$

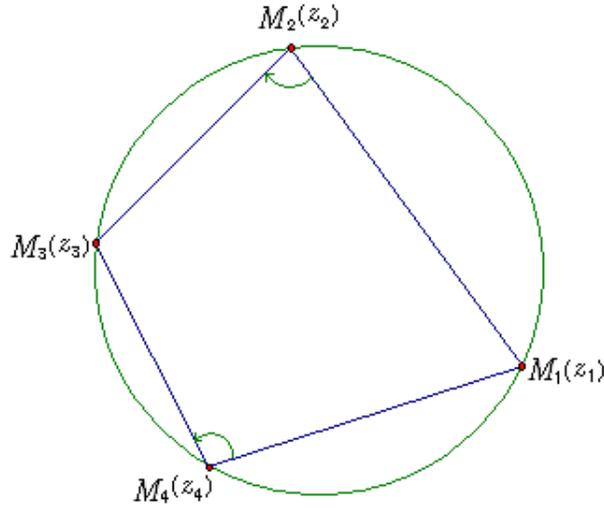
$$\text{y } \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R} - \{0\},$$

por lo que al formar el cociente de cantidades distintas de cero, se tiene que:

$$\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \right) / \left(\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \right) = k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Ahora, se supondrá que son cíclicos, y se mostrará que la razón cruzada es un número real distinto de cero.

Se considerará el caso M_1, M_2, M_3, M_4 que es cuando están en orden. Entonces M_1, M_2, M_3, M_4 son cíclicos si y sólo si $\angle M_1 M_2 M_3 + \angle M_1 M_4 M_3 \in \{\pi, 3\pi\}$



que es,

$$\arg k = \arg \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \right) + \arg \left(\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \right) \in \{\pi, 3\pi\}$$

$$\arg k = \arg \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \right) + \arg(z_1 - z_4) - \arg(z_3 - z_4) \in \{\pi, 3\pi\}$$

$$\arg k = \arg \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \right) - (\arg(z_3 - z_4) - \arg(z_1 - z_4)) \in \{\pi, 3\pi\}$$

$$\arg k = \arg \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \right) - \arg \left(\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \right) \in \{\pi, 3\pi\}$$

es decir que, al expresar a k en forma polar, el argumento siempre es $\{\pi, 3\pi\}$, por lo que $k < 0$.

Otro de los casos que se considerará, es M_1, M_4, M_2, M_3 . En donde

$$\angle M_1 M_4 M_3 \equiv \angle M_1 M_2 M_3 \pmod{2\pi}$$

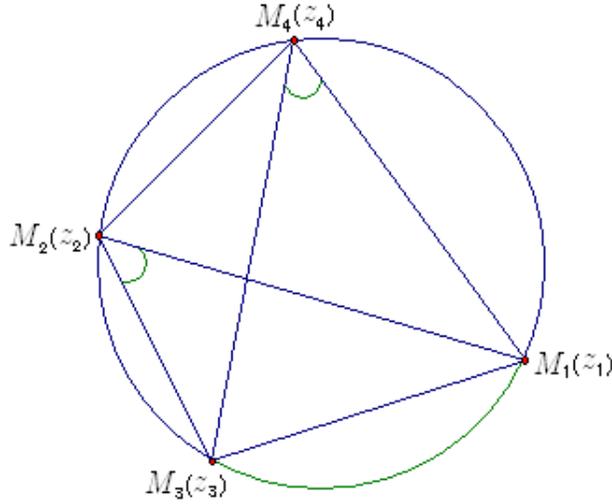
como lo muestra la siguiente figura.

Y esto se da si y sólo si,

$$\arg \left(\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \right) = \arg \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \right)$$

$$\arg k = \arg \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \right) - \arg \left(\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \right) = \{0, 2\pi\}$$

es decir que, al expresar a k en forma polar, el argumento siempre es $\{0, 2\pi\}$ y por lo tanto $k > 0$.



Las pruebas restantes son análogas, son tres casos en donde $k > 0$ y tres para $k < 0$.

Nota:

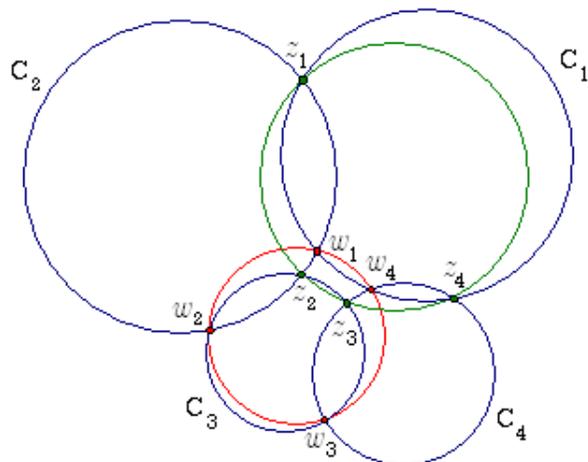
- Los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 son cíclicos si y sólo si

$$k = \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \right) / \left(\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \right) \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad \text{pero } \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \notin \mathbb{R} \text{ y } \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \notin \mathbb{R},$$

el argumento de porque no puede ser un real es: si es un real distinto de cero, los puntos estarían colineales; para que el cociente este definido el divisor tiene que ser distinto de cero, pero a la vez el dividendo no puede ser cero ya que, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Por ejemplo, las imágenes geométricas de los números complejos $1, i, -1, -i$ son cíclicas. Efectivamente la razón cruzada $k = \left(\frac{-1-i}{1-i} \right) / \left(\frac{-1+i}{1+i} \right) = -1 \in \mathbb{R} - \{0\}$, claramente $\frac{-1-i}{1-i} \notin \mathbb{R}$ y $\frac{-1+i}{1+i} \notin \mathbb{R}$.

Teorema 2.3.3 (Teorema de Clifford.) *Dadas cuatro circunferencias en el plano C_1, C_2, C_3, C_4 , sean C_1 y C_2 intersectadas en z_1 y w_1 , C_2 y C_3 intersectadas en z_2 y w_2 , C_3 y C_4 intersectadas en z_3 y w_3 , C_4 y C_1 intersectadas en z_4 y w_4 , entonces los puntos z_1, z_2, z_3, z_4 son cíclicos si y sólo si w_1, w_2, w_3, w_4 son cíclicos.*



Prueba:

Por la proposición anterior, se puede formar las siguientes razones cruzadas.

$$(z_1, w_2; z_2, w_1) = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - w_1} \right) / \left(\frac{w_2 - z_2}{w_2 - w_1} \right) = \left(\frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} \right) / \left(\frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1} \right),$$

$$(z_2, w_3; z_3, w_2) = \left(\frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} \right) / \left(\frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2} \right),$$

$$(z_3, w_4; z_4, w_3) = \left(\frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} \right) / \left(\frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3} \right),$$

$$(z_4, w_1; z_1, w_4) = \left(\frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} \right) / \left(\frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4} \right).$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} & \frac{(z_1, w_2; z_2, w_1)}{(z_2, w_3; z_3, w_2)} \frac{(z_3, w_4; z_4, w_3)}{(z_4, w_1; z_1, w_4)} \\ &= \frac{\frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} / \frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1}}{\frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} / \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2}} \frac{\frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} / \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3}}{\frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} / \frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4}} \\ &= \frac{\frac{(z_1 - z_2)(w_2 - w_1)}{(w_2 - z_2)(z_1 - w_1)}}{\frac{(z_2 - z_3)(w_3 - w_2)}{(w_3 - z_3)(z_2 - w_2)}} \frac{\frac{(z_3 - z_4)(w_4 - w_3)}{(w_4 - z_4)(z_3 - w_3)}}{\frac{(z_4 - z_1)(w_1 - w_4)}{(w_1 - z_1)(z_4 - w_4)}} \\ &= \frac{(z_1 - z_2)(w_2 - w_1)(w_3 - z_3)(z_2 - w_2)}{(w_2 - z_2)(z_1 - w_1)(z_2 - z_3)(w_3 - w_2)} \frac{(z_3 - z_4)(w_4 - w_3)(w_1 - z_1)(z_4 - w_4)}{(w_4 - z_4)(z_3 - w_3)(z_4 - z_1)(w_1 - w_4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(z_1 - z_2)(w_1 - w_2)(z_3 - w_3)(z_2 - w_2)}{(z_2 - w_2)(w_1 - z_1)(z_3 - z_2)(w_3 - w_2)} \frac{(z_3 - z_4)(w_3 - w_4)(w_1 - z_1)(w_4 - z_4)}{(w_4 - z_4)(z_3 - w_3)(z_1 - z_4)(w_1 - w_4)} \\
&= \frac{(z_1 - z_2)(w_1 - w_2)}{(z_3 - z_2)(w_3 - w_2)} \frac{(z_3 - z_4)(w_3 - w_4)}{(z_1 - z_4)(w_1 - w_4)} \\
&= \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_3 - z_2)(z_1 - z_4)} \frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(w_3 - w_2)(w_1 - w_4)} \\
&= \left\{ \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} / \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \right\} \left\{ \frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2} / \frac{w_1 - w_4}{w_3 - w_4} \right\} \\
&= (z_1, z_3; z_2, z_4) (w_1, w_3; w_2, w_4)
\end{aligned}$$

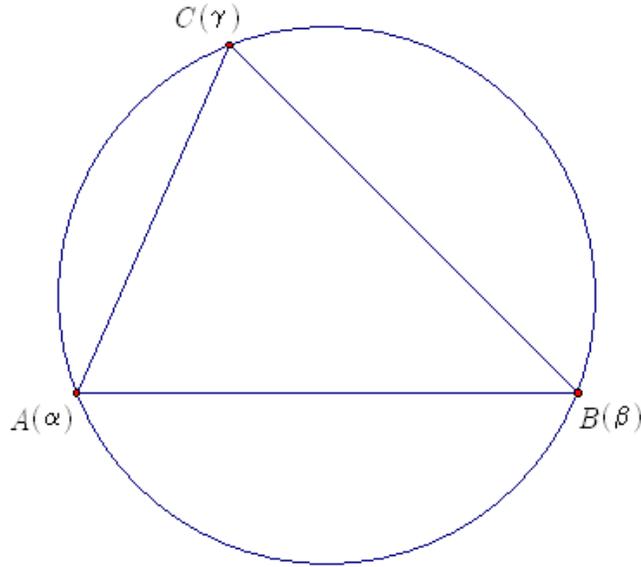
en vista de que el producto de cocientes de cantidades reales distintas de cero, se puede expresar como un producto, dichos factores tienen que ser reales distintos de cero, por consiguiente $(z_1, z_3; z_2, z_4)$ es real distinto de cero si y sólo si $(w_1, w_3; w_2, w_4)$ es real distinto de cero. Por la proposición anterior, están alineados o sobre una circunferencia.

2.3.4. Circunferencia de los nueve puntos.

Teorema 2.3.4 *En todo triángulo, los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos acotados por el ortocentro y los vértices se encuentran sobre una misma circunferencia.*

Prueba:

Sean A, B, C los vértices del triángulo, representados por los números complejos α, β, γ respectivamente.



Sin pérdida de generalidad se tomará el triángulo ABC inscrito en el círculo unitario y su centro O se pondrá en el origen del sistema de coordenadas. Se sabe que el ortocentro H es

$\sigma = \alpha + \beta + \gamma$. El punto medio N del segmento definido por el circuncentro y el ortocentro es $\frac{\sigma}{2}$, la distancia de $\frac{\sigma}{2}$ al punto medio A' del lado BC es

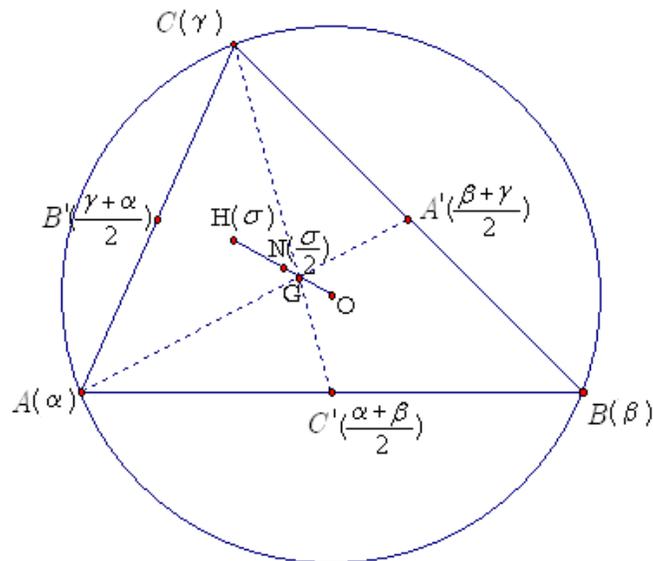
$$\begin{aligned} \left| \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| &= \left| \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \right| \\ &= \left| \frac{\alpha}{2} \right| \\ &= \frac{|\alpha|}{2}, \text{ por el hecho de que } \alpha \text{ pertenece al círculo unitario } |\alpha| = 1 \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

de manera similar la distancia de $\frac{\sigma}{2}$ al punto medio B' del lado CA es

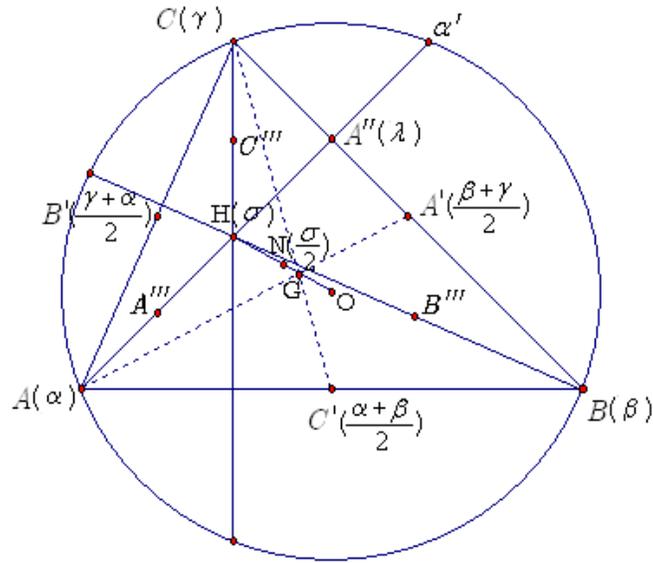
$$\left| \frac{\gamma + \alpha}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\beta}{2} \right| = \frac{1}{2},$$

y la distancia de $\frac{\sigma}{2}$ al punto medio C' del lado AB es

$$\left| \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\gamma}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$



La distancia de $\frac{\sigma}{2}$ al punto medio A''' del segmento que une el ortocentro con el vértice A es $\left| \frac{\alpha + \sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{1}{2}$, similarmente la distancia de $\frac{\sigma}{2}$ al punto medio B''' y C''' es igual a $\frac{1}{2}$.



Sea λ el complejo que representa el pie de la perpendicular A'' trazada desde A sobre el lado BC , y sea α' el punto de corte de la perpendicular con el circuncirculo, entonces α' satisface:

$$\overrightarrow{\alpha\alpha'} \perp \overrightarrow{\beta\gamma}, |\alpha'| = 1, \alpha \neq \alpha'$$

Por la proposición 2 de 2.2.3, se puede decir de la primera condición que $\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma}$ es un imaginario puro; es decir $\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} + \frac{\bar{\alpha} - \bar{\alpha}'}{\bar{\beta} - \bar{\gamma}} = 0$.

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} + \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha'}}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}} = 0$$

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} + \frac{\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha\alpha'}}{\frac{\gamma - \beta}{\beta\gamma}} = 0$$

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} + \left(\frac{\alpha' - \alpha}{\gamma - \beta}\right) \frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'} = 0$$

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} + \left(\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma}\right) \frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'} = 0$$

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'}\right) = 0,$$

como $\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} \neq 0$, se debe tener:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'} &= 0 \\ \frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'} &= -1 \\ \beta\gamma &= -\alpha\alpha' \\ \alpha' &= -\frac{\beta\gamma}{\alpha}. \end{aligned}$$

Las distancias del vértice B a α' y a σ son:

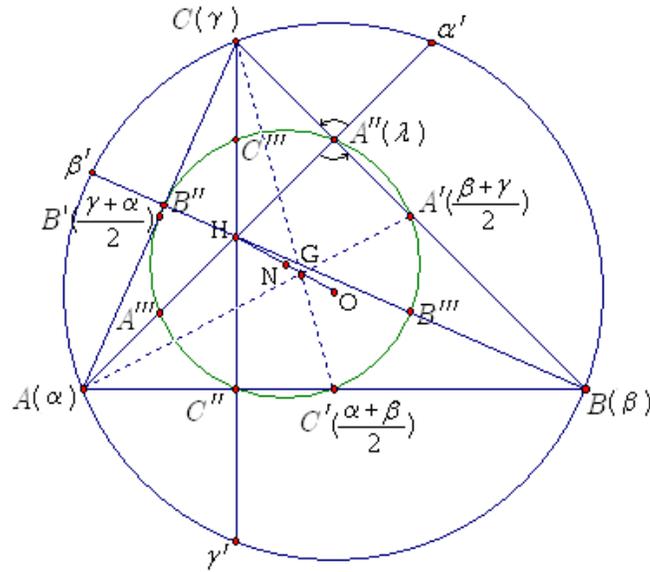
$$\begin{aligned} \left| \beta + \frac{\beta\gamma}{\alpha} \right| &= \left| \frac{\beta\alpha + \beta\gamma}{\alpha} \right| \\ &= \left| \beta \frac{(\alpha + \gamma)}{\alpha} \right| \\ &= \left| \frac{\beta}{\alpha} (\alpha + \gamma) \right| \\ &= \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| |\alpha + \gamma|, \text{ como } \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = 1 \text{ se tiene} \\ \left| \beta + \frac{\beta\gamma}{\alpha} \right| &= |\alpha + \gamma|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\sigma - \beta| &= |(\alpha + \beta + \gamma) - \beta| \\ &= |\alpha + \gamma| \end{aligned}$$

por lo tanto, BC es mediatriz y como consecuencia de esto, el pie de la perpendicular trazada desde A sobre el lado BC es $\lambda = \frac{1}{2}(\sigma + \alpha')$. Y la distancia de $\frac{\sigma}{2}$ a λ es

$$\left| \lambda - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\alpha' + \sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

De manera similar la distancia de $\frac{\sigma}{2}$ a los pies de las alturas es $\frac{1}{2}$. Y los nueve puntos estan sobre el círculo con centro en el punto medio de OH y de radio igual a $\frac{1}{2}$.

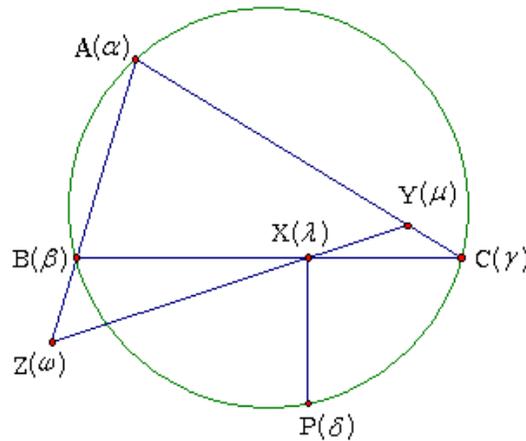


En la figura, se denota por A', B', C' a los puntos medios de los lados BC, CA, AB , por A'', B'', C'' los pies de las alturas y A''', B''', C''' los puntos medios de los segmentos AH, BH, CH respectivamente. En otras palabras, quiere decir que, para todo triángulo, los pies de las perpendiculares, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada uno de vértices, pertenecen todos a un mismo círculo, cuyo centro es el punto medio del segmento que une el circuncírculo con el ortocentro y cuyo radio es la mitad del radio del circuncírculo. A este círculo se le denomina círculo de los nueve puntos.

2.3.5. Teorema línea de Simson - Wallace.

Teorema 2.3.5 Sea P un punto cualquiera sobre el circuncírculo de un ΔABC , los pies de las perpendiculares desde P hasta los lados del triángulo son colineales.

Sin pérdida de generalidad, se tomará el ΔABC inscrito en el círculo unitario, y los puntos A, B, C, P son representados por los complejos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ respectivamente.



Si se asume que la recta BC se ubica sobre el eje real, la ecuación de dicha recta es

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\bar{\beta} - \bar{\gamma})z - (\beta - \gamma)\bar{z} + (\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma) = 0$$

Utilizando al hecho de que $|\beta| = 1$, $\bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$, y $\bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$, se tiene que

$$\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)z - (\beta - \gamma)\bar{z} + \left(\beta\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\gamma\right) = 0$$

$$\left(\frac{\gamma - \beta}{\beta\gamma}\right)z - (\beta - \gamma)\bar{z} = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\beta\gamma}$$

$$(\gamma - \beta)z - \beta\gamma(\beta - \gamma)\bar{z} = \gamma^2 - \beta^2$$

$$z - \frac{\beta\gamma(\beta - \gamma)}{(\gamma - \beta)}\bar{z} = \frac{(\gamma - \beta)(\gamma + \beta)}{(\gamma - \beta)}$$

$$z + \beta\gamma\bar{z} = \gamma + \beta \tag{2.13}$$

La ecuación de la perpendicular desde P a el lado BC es

$$(\gamma - \beta) * (z - \delta) = 0$$

$$\frac{1}{2} [(\bar{\gamma} - \bar{\beta})(z - \delta) + (\gamma - \beta)(\bar{z} - \bar{\delta})] = 0$$

$$z - \delta + \frac{\gamma - \beta}{\bar{\gamma} - \bar{\beta}}\bar{z} - \frac{\gamma - \beta}{\bar{\gamma} - \bar{\beta}}\bar{\delta} = 0$$

$$z - \delta + \frac{\gamma - \beta}{\beta\gamma}\bar{z} - \frac{\gamma - \beta}{\beta\gamma}\bar{\delta} = 0$$

$$z - \delta - \beta\gamma\bar{z} + \beta\gamma\bar{\delta} = 0$$

$$z - \beta\gamma\bar{z} = \delta - \beta\gamma\bar{\delta} \tag{2.14}$$

Sumando (2.13) y (2.14), se obtiene la intersección $X(\lambda)$

$$\lambda = \frac{1}{2} (\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\bar{\delta}) = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_3\bar{\delta}}{\alpha} \right)$$

Similarmente $Y(\mu)$ y $Z(\omega)$ están dadas por

$$\mu = \frac{1}{2} (\gamma + \alpha + \delta - \gamma\alpha\bar{\delta}) = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \beta + \delta - \frac{\sigma_3\bar{\delta}}{\beta} \right)$$

$$\omega = \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\bar{\delta}) = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \gamma + \delta - \frac{\sigma_3\bar{\delta}}{\gamma} \right)$$

Ahora X, Y, Z son colineales si y sólo si $\frac{\lambda - \omega}{\mu - \omega} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda - \omega}{\mu - \omega} &= \frac{(\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\bar{\delta}) - (\alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\bar{\delta})}{(\gamma + \alpha + \delta - \gamma\alpha\bar{\delta}) - (\alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\bar{\delta})} \\
&= \frac{\gamma - \alpha + \alpha\beta\bar{\delta} - \beta\gamma\bar{\delta}}{\gamma - \beta + \alpha\beta\bar{\delta} - \gamma\alpha\bar{\delta}} \\
&= \frac{\gamma(1 - \beta\bar{\delta}) - \alpha(1 - \beta\bar{\delta})}{\gamma(1 - \alpha\bar{\delta}) - \beta(1 - \alpha\bar{\delta})} \\
&= \frac{(\gamma - \alpha)(1 - \beta\bar{\delta})}{(\gamma - \beta)(1 - \alpha\bar{\delta})} \\
&= \frac{(\gamma - \alpha)\left(\frac{\delta - \beta}{\delta}\right)}{(\gamma - \beta)\left(\frac{\delta - \alpha}{\delta}\right)} \\
&= \frac{(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}{(\gamma - \beta)(\delta - \alpha)} \\
&= \frac{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)} \\
&= \left(\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}\right) / \left(\frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}\right) \\
&= (\alpha, \beta; \gamma, \delta)
\end{aligned}$$

$\frac{\lambda - \omega}{\mu - \omega} \in \mathbb{R}$, o sea que X, Y, Z son colineales si y sólo si $(\alpha, \beta; \gamma, \delta) \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son cíclicos.

Se determinará la ecuación de esta recta.

El pie X de la perpendicular desde P hacia BC esta dada por

$$z = \frac{1}{2} \left(\beta + \gamma + \delta - \frac{\beta\gamma}{\delta} \right); \text{ sea } \sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma, \sigma_2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \sigma_3 = \alpha\beta\gamma$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_1 &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \\
&= \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} \\
&= \frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \\
\bar{\sigma}_3 &= \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sigma_3}
\end{aligned}$$

Entonces z puede escribirse como:

$$z = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_3}{\alpha\delta} \right) \quad (2.15)$$

y

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\delta} - \frac{\alpha\delta}{\sigma_3} \right) \quad (2.16)$$

De (2.15) se tiene que

$$2z = \left(\sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_3}{\alpha\delta} \right)$$

$$\alpha + \frac{\sigma_3}{\alpha\delta} = -2z + \sigma_1 + \delta$$

$$\frac{\alpha^2\delta + \sigma_3}{\alpha\delta} = -2z + \sigma_1 + \delta$$

$$\alpha^2\delta + \sigma_3 = (-2z + \sigma_1 + \delta) \alpha\delta \quad (2.17)$$

De (2.16) se tiene que

$$2\bar{z} = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\delta} - \frac{\alpha\delta}{\sigma_3} \right)$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha\delta}{\sigma_3} = -2\bar{z} + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} + \frac{1}{\delta}$$

$$\frac{\sigma_3 + \alpha^2\delta}{\alpha\sigma_3} = -2\bar{z} + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} + \frac{1}{\delta}$$

$$\sigma_3 + \alpha^2\delta = \left(-2\bar{z} + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} + \frac{1}{\delta} \right) \alpha\sigma_3 \quad (2.18)$$

igualando (2.17) y (2.18) se obtiene:

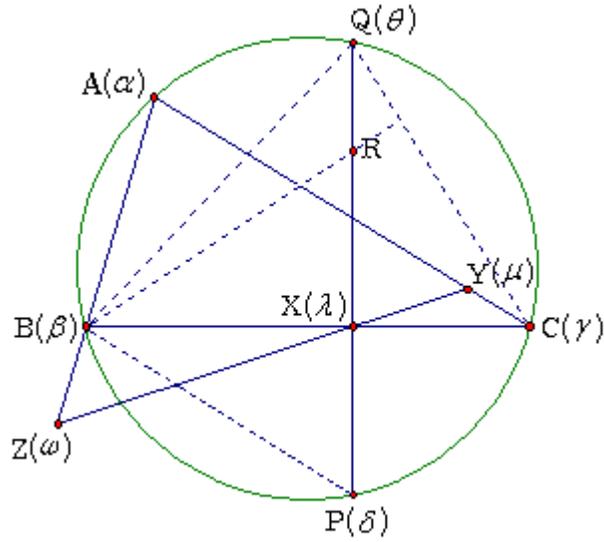
$$\delta z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2} \left(\delta^2 + \sigma_1\delta - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\delta} \right) \quad (2.19)$$

Esta relación es satisfecha por X . Además por la forma de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ la relación es simétrica con respecto a α, β, γ . Por lo tanto, esta relación también satisface contener a Y y a Z los pies de las perpendiculares desde P a los lados CA y AB respectivamente, por lo tanto esa ecuación es la que determina la línea de Simson - Wallace.

Teorema 2.3.6 *Con las anotaciones del teorema anterior, sea Q el otro punto de corte de la recta PX con el circuncírculo del ΔABC , entonces AQ es paralela a la línea de Simson - Wallace determinada por P .*

Prueba:

Sea θ el complejo correspondiente al punto Q , se encontrará el valor de θ en terminos de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.



En el ΔQBC el ortocentro está definido por $R = \theta + \beta + \gamma$, se sabe que³ BC es mediatriz de RP y que X es el punto medio de RP . Así, $RX = XP$

$$\begin{aligned} \lambda - (\theta + \beta + \gamma) &= \delta - \lambda \\ \theta &= 2\lambda - \delta - \beta - \gamma \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} (\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\delta) \right] - \delta - \beta - \gamma \\ &= -\frac{\beta\gamma}{\delta} \end{aligned}$$

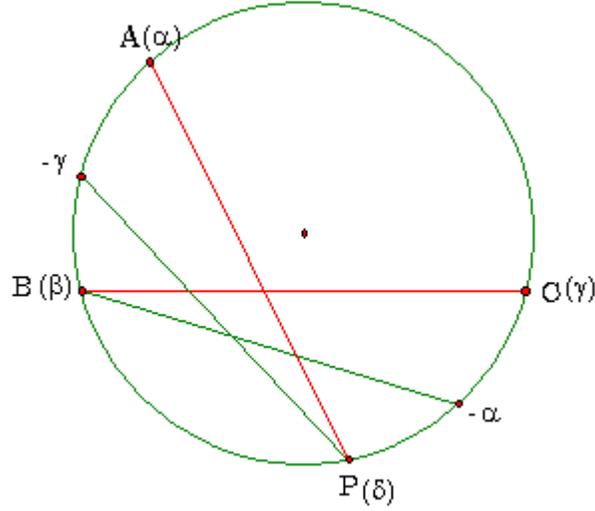
Se tiene que $\vec{\theta\alpha} \parallel \vec{\mu\omega} \Leftrightarrow \frac{\alpha - \theta}{\omega - \mu} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \theta}{\omega - \mu} &= \frac{\alpha + \frac{\beta\gamma}{\delta}}{\frac{1}{2} \left(\alpha + \beta + \delta - \frac{\alpha\beta}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\gamma + \alpha + \delta - \frac{\gamma\alpha}{\delta} \right)} \\ &= \frac{\frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\delta}}{\frac{1}{2} \left(\beta - \frac{\alpha\beta}{\delta} - \gamma + \frac{\gamma\alpha}{\delta} \right)} \\ &= \frac{2 \left(\frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\delta} \right)}{\frac{\beta\delta - \alpha\beta - \gamma\delta + \gamma\alpha}{\delta}} \end{aligned}$$

³ver anexo, reflexión del ortocentro sobre un lado.

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(\delta\alpha + \gamma\beta)}{(\beta - \gamma)(\delta - \alpha)} \\
&= \frac{2(\delta\alpha + \gamma\beta) + \delta\beta + \alpha\gamma - \delta\beta - \alpha\gamma}{(\beta - \gamma)(\delta - \alpha)} \\
&= \frac{\delta\alpha + \gamma\beta + \delta\beta + \alpha\gamma}{(\beta - \gamma)(\delta - \alpha)} - \frac{\delta\beta + \alpha\gamma - \delta\alpha - \gamma\beta}{(\beta - \gamma)(\delta - \alpha)} \\
&= \frac{\delta(\beta + \alpha) + \gamma(\beta + \alpha)}{(\beta - \gamma)(\delta - \alpha)} - \frac{\delta(\beta - \alpha) - \gamma(\beta - \alpha)}{(\beta - \gamma)(\delta - \alpha)} \\
&= \frac{(\delta + \gamma)(\beta + \alpha)}{(\beta - \gamma)(\delta - \alpha)} - \frac{(\delta - \gamma)(\beta - \alpha)}{(\beta - \gamma)(\delta - \alpha)}
\end{aligned}$$

usando siguiente esquema, cuadriláteros cíclicos y la razón cruzada, se establece porque $\frac{(\delta + \gamma)(\beta + \alpha)}{(\beta - \gamma)(\delta - \alpha)} \in \mathbb{R} - \{0\}$



de

$$\frac{(\delta - \gamma)(\beta - \alpha)}{(\delta - \alpha)(\beta - \gamma)} = \frac{(\delta + \alpha)(\beta + \gamma)}{(\delta + \gamma)(\beta + \alpha)}$$

se tiene que

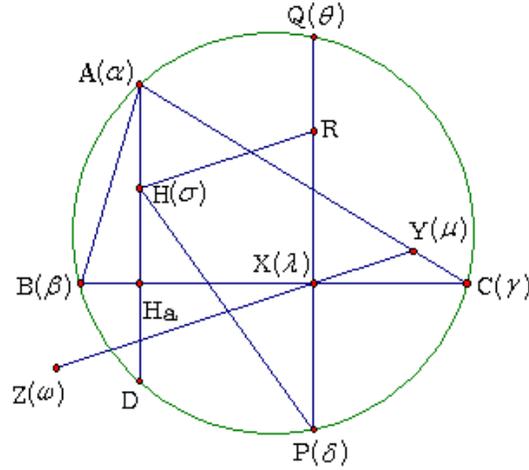
$$\frac{(\delta + \gamma)(\beta + \alpha)}{(\delta - \alpha)(\beta - \gamma)} = \frac{(\delta + \alpha)(\beta + \gamma)}{(\delta - \gamma)(\beta - \alpha)}$$

Por lo que al regresar a la última diferencia, se tiene como resultado un real distinto de cero.

Teorema 2.3.7 *La línea de Simson - Wallace de un punto P biseca al segmento entre P y el ortocentro del ΔABC .*

Prueba:

Sin pérdida de generalidad se tomará el ΔABC inscrito en el círculo unitario, y los puntos A, B, C, P son representados por los complejos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ respectivamente, al ortocentro H se le asocia el complejo σ .



La ubicación del ortocentro esta dada por $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$, entonces el punto medio de HP esta dada por $z = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$. Ahora se verificará que este punto pertenece a la línea de Simson - Wallace (2.19) cuya ecuación es: $\delta z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2}(\delta^2 + \sigma_1 \delta - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\delta})$

$$\begin{aligned}
 \delta \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \right] - \sigma_3 \overline{\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta)} &= \frac{1}{2}[\delta^2 + (\alpha + \beta + \gamma)\delta] - \frac{1}{2}\sigma_3 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} \right) \\
 &= \frac{1}{2}(\delta^2 + \sigma_1 \delta) - \frac{1}{2}\sigma_3 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3} + \frac{1}{\delta} \right) \\
 &= \frac{1}{2}(\delta^2 + \sigma_1 \delta) - \frac{1}{2} \left(\sigma_2 + \frac{\sigma_3}{\delta} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\delta^2 + \sigma_1 \delta - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\delta} \right)
 \end{aligned}$$

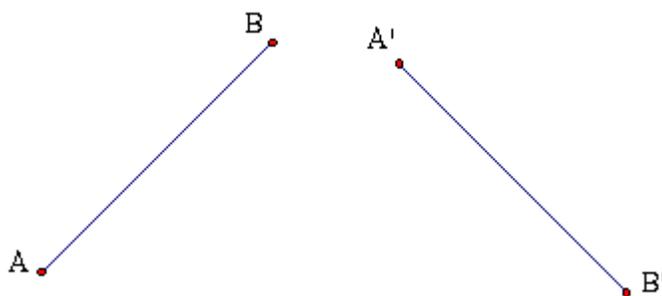
Por lo tanto, la línea de Simson - Wallace contiene al punto medio de HP .

Capítulo 3

Transformaciones.

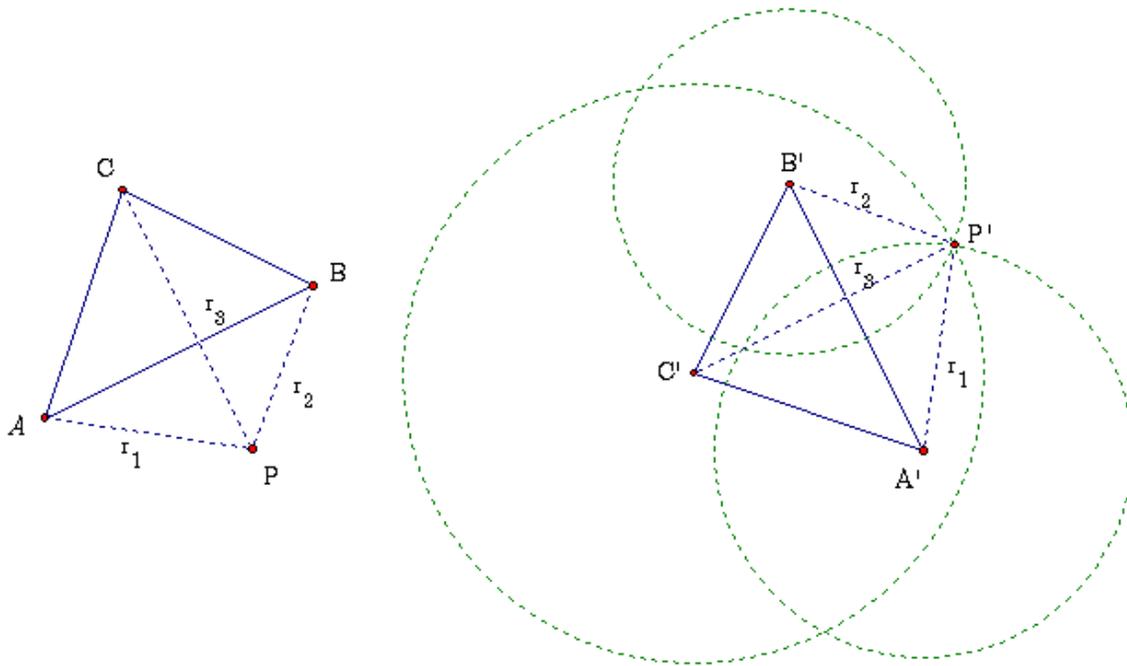
3.1. Movimientos o isometrías.

Un movimiento es una transformación del plano que conserva la distancia entre puntos, es decir, que la distancia entre dos puntos se conserva entre la distancia de sus imágenes. En otras palabras, son movimientos rígidos en el plano.



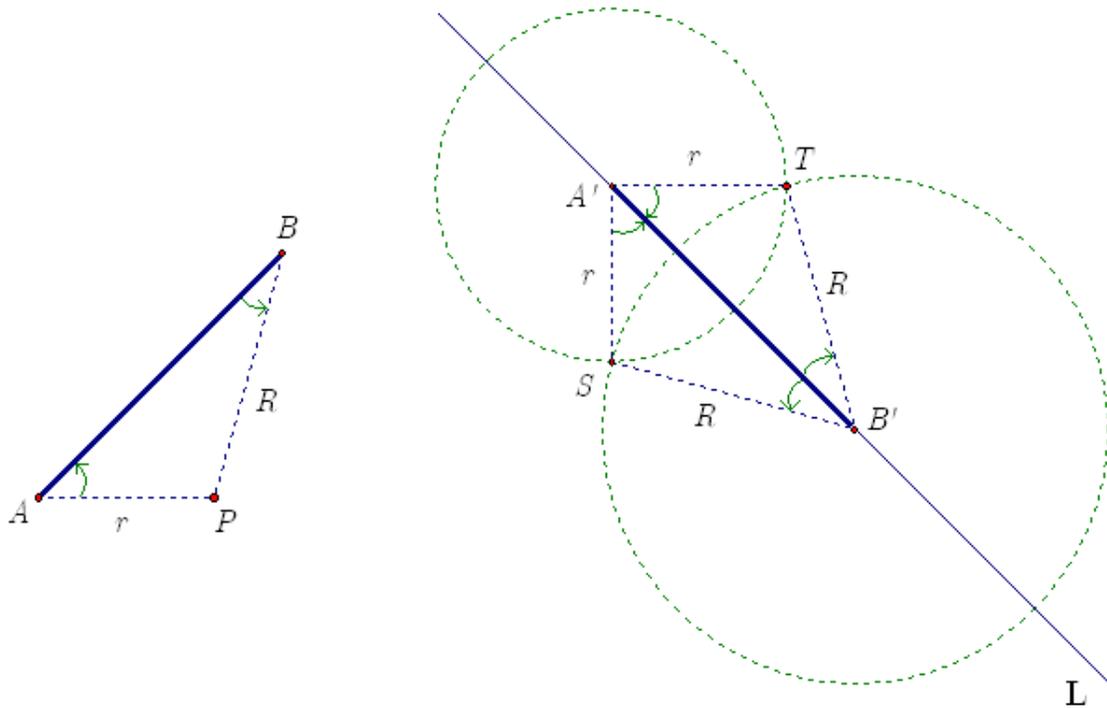
Se verificará que con tres puntos no alineados un movimiento queda determinado de manera única:

Dados tres puntos A, B, C , y sus imágenes, A', B', C' ; si se coloca un punto P variable sobre el plano, se pueden determinar las distancias PA, PB, PC , nombradas por r_1, r_2, r_3 respectivamente. Trazando las circunferencias con centros en las imágenes con los respectivos radios, claramente, tres circunferencias no se pueden interceptar en más de un punto (a menos que sean la misma circunferencia, lo cual, no es el caso), por lo que P' queda determinado de manera única.

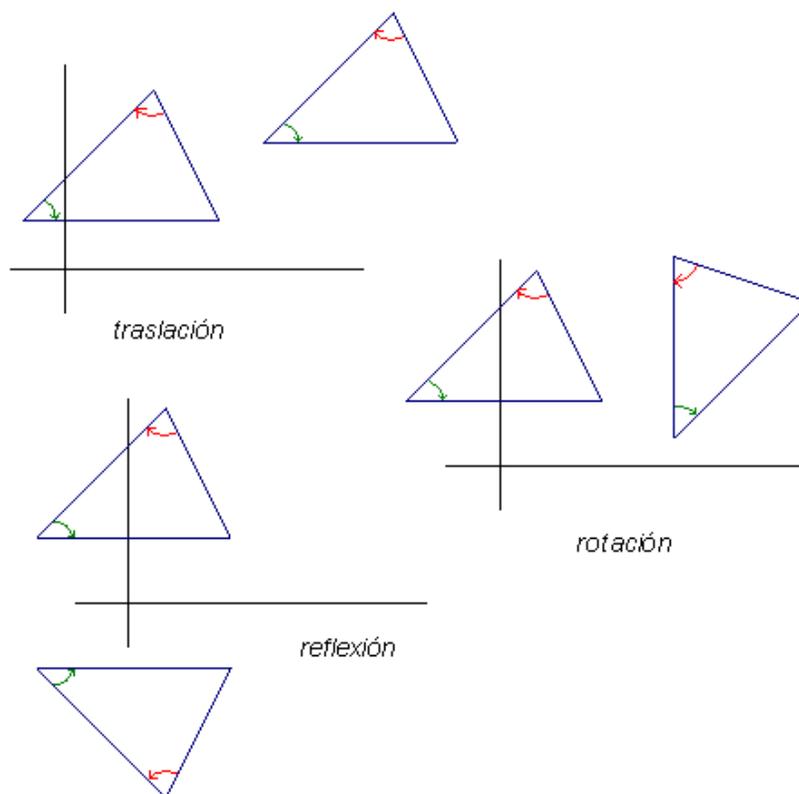


El proceso anterior es llamado Triangulación, y se ocupa para la navegación, o para determinar los epicentros de terremotos (suponiendo que la distancia recorrida es proporcional al tiempo que tarda en llegar la onda a la estación receptora).

Se supondrá que se tienen dos puntos A y B y sus imágenes A' y B' tras el movimiento, y que P es un tercer punto variable en el plano; se sabe que la imagen de P debe cumplir con la siguiente condición: la distancia entre la imagen de P y A' como la distancia entre la imagen de P y B' debe ser igual a la distancias PA y PB respectivamente, que han sido llamados r y R respectivamente, haciendo alusión a radios de circunferencias, en la figura se muestran los puntos S y su reflexión T en la recta L a través de A' y B' , que son las únicas posibilidades para la imagen de P . Hay precisamente dos movimientos M y \tilde{M} , que mapean A, B en A', B' : M envía P a S , y \tilde{M} envía P a T .



Una distinción se puede hacer entre M y \tilde{M} al notar la orientación de los ángulos. Todo movimiento preserva la magnitud de los ángulos, pero M también preserva la orientación de los ángulos, mientras que \tilde{M} la invierte. A los movimientos que preservan la orientación de los ángulos se les llaman directos y a aquellos que invierten la orientación de ángulos se llaman indirectos. Así rotaciones y traslaciones son movimientos directos, mientras que las reflexiones son indirectos.



Resumiendo: hay exactamente un movimiento directo M (y exactamente un movimiento indirecto \widetilde{M}) que mapea un segmento AB en otro segmento $A'B'$ de igual longitud. Es más, \widetilde{M} es el movimiento M seguido de una reflexión en la recta $A'B'$.

Se demostrará que todo movimiento directo puede expresarse como una función compleja de la forma $M(z) = e^{i\theta}z + v$.

En primer lugar se verá que toda función de esa forma es un movimiento. Si se toman dos complejos cualesquiera z_1 y z_2 tal que se conoce $|z_1 - z_2|$, debe cumplirse que $|M(z_1) - M(z_2)| = |z_1 - z_2|$. Para toda función M de la forma antes mencionada, se tiene:

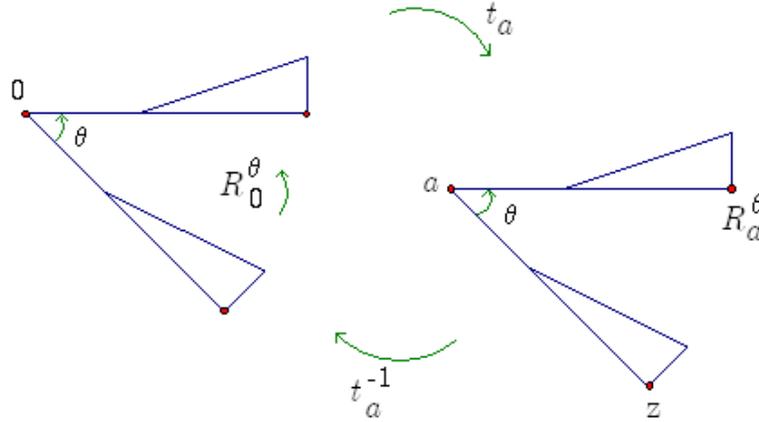
$$\begin{aligned}
 |M(z_1) - M(z_2)| &= |(e^{i\theta}z_1 + v) - (e^{i\theta}z_2 + v)| \\
 &= |e^{i\theta}(z_1 - z_2)|, \text{ pero se sabe que } |e^{i\theta}| = 1, \\
 &= |z_1 - z_2|, \text{ por lo que } M \text{ es en efecto un movimiento.}
 \end{aligned}$$

Resta mostrar que las rotaciones, traslaciones o combinaciones de estas se pueden expresar de la forma $M(z) = e^{i\theta}z + v$.

Por lo que es indispensable conocer o dar a conocer un poco sobre las rotaciones y traslaciones en el plano en terminos de funciones complejas.

Sea T_v una traslación en el plano por el vector v , en términos generales, el punto z es mapeado a $T_v(z) = z + v$. El inverso de T_v , se escribirá T_v^{-1} , es la transformación inversa; formalmente, T_v^{-1} está definido por $T_v^{-1} \circ T_v = \epsilon = T_v \circ T_v^{-1}$, donde ϵ es una transformación (llamada identidad) que mapea cada punto en sí mismo: $\epsilon(z) = z$. Ya que $T_v(z) = z + v$, y $T_{-v}(z) = z - v$, es claro que $T_v^{-1} = T_{-v}$.

$R_0^\theta(z) = e^{i\theta}(z)$ es la representación de una rotación de ángulo θ y de centro el origen.
 $R_a^\theta(z)$ denota una rotación de ángulo θ y de centro a .



En general, la rotación $R_a^\theta(z)$ se puede representar por la traslación inversa (de 0 a a), rotando θ alrededor de 0 , y la traslación de 0 a a :

$$\begin{aligned}
 R_a^\theta(z) &= (t_a \circ R_0^\theta \circ t_a^{-1})(z) \\
 &= t_a(R_0^\theta(t_a^{-1}(z))) \\
 &= t_a(R_0^\theta(z-a)) \\
 &= t_a(e^{i\theta}(z-a)) \\
 &= e^{i\theta}(z-a) + a \\
 &= e^{i\theta}z + (a - ae^{i\theta}), \quad a - ae^{i\theta} = v \\
 &= e^{i\theta}z + v
 \end{aligned}$$

Se ha encontrado que la rotación alrededor de cualquier punto puede ser expresada como una rotación alrededor del origen, seguida de una traslación: $R_a^\theta = (t_v \circ R_0^\theta)$. Recíprocamente, una rotación de ángulo α y centro el origen, seguida de una traslación de w siempre puede reducirse a una simple rotación:

$$\begin{aligned}
 (t_w \circ R_0^\alpha)(z) &= t_w(R_0^\alpha(z)) \\
 &= t_w(e^{i\alpha}z) \\
 &= e^{i\alpha}z + w, \quad w \text{ tiene que ser de la forma: } w = c - ce^{i\alpha} \Rightarrow c = \frac{w}{1 - e^{i\alpha}} \\
 &= R_c^\alpha
 \end{aligned}$$

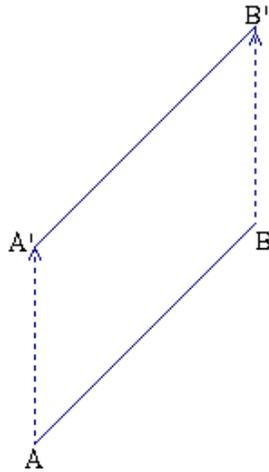
Se concluye, que todo movimiento directo puede escribirse de la forma $M(z) = e^{i\theta}z + v$.

Teorema 3.1.1 *Todo movimiento directo es una rotación o una traslación en caso excepcional.*

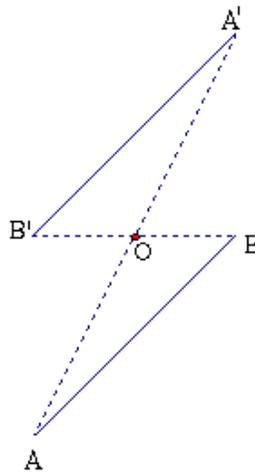
Demostración Geométrica:

Consideremos el efecto del movimiento sobre un segmento.

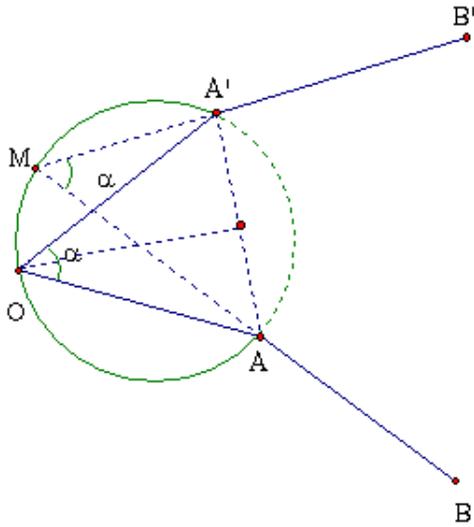
Caso 1: El segmento imagen es paralelo al segmento original. Este caso se subdivide en dos, el primero es una traslación,



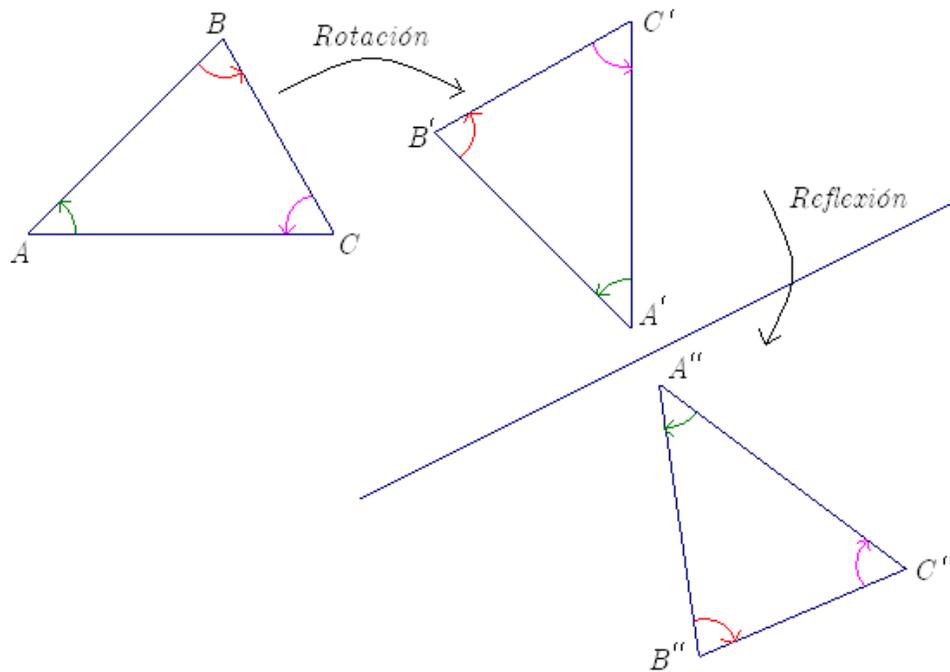
y el segundo es una rotación de π con centro en O .



Caso 2: Si los segmentos no son paralelos, estos se prolongan hasta que ellos se encuentren en un punto M , sea α el ángulo entre AB y $A'B'$. Primero se trazará una circunferencia que pase por A , M y A' , luego hay que recordar una propiedad elemental del círculo: la cuerda AA' subtiende el mismo ángulo α para cada punto del arco AMA' . Luego, se denota por O al punto de la intersección de este arco con la mediatriz de $[AA']$. Ahora se ve que el movimiento directo que lleva AB a $A'B'$ es una rotación de ángulo α sobre O ; para aclarar, A es rotado hasta A' , y la dirección de AB se rota en la dirección de $A'B'$. En conclusión se tiene una rotación de ángulo α , de donde se observa que O es el centro de rotación que transforma A en A' y B en B' .



Un movimiento indirecto se define como la composición de un movimiento directo y un movimiento que invierte la orientación de los ángulos (reflexión), el siguiente esquema es un caso en particular:

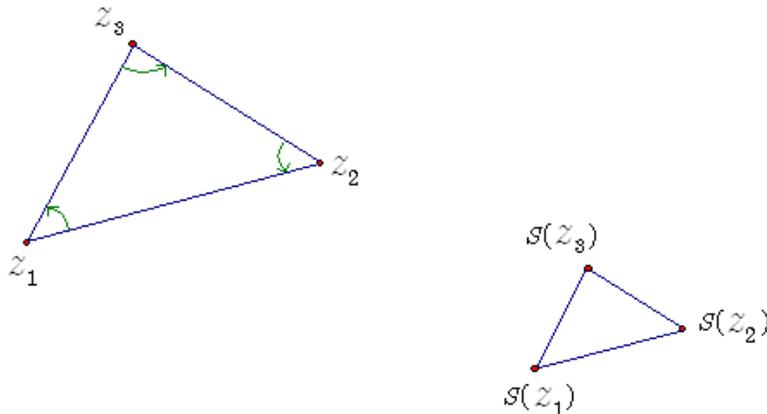


El movimiento indirecto más usual en números complejos es la función conjugado, $g(z) = \bar{z}$, por lo que un movimiento indirecto \tilde{M} queda definido de la forma

$$\tilde{M}(z) = (M \circ g)(z) = M(\bar{z}) = e^{i\theta} \bar{z} + v.$$

3.2. Similitudes.

Una similitud es una transformación del plano que deja invariante las razones de las distancias.



$$\frac{|z_2 - z_1|}{|s(z_2) - s(z_1)|} = \frac{|z_3 - z_1|}{|s(z_3) - s(z_1)|} = \frac{|z_3 - z_2|}{|s(z_3) - s(z_2)|} = r$$

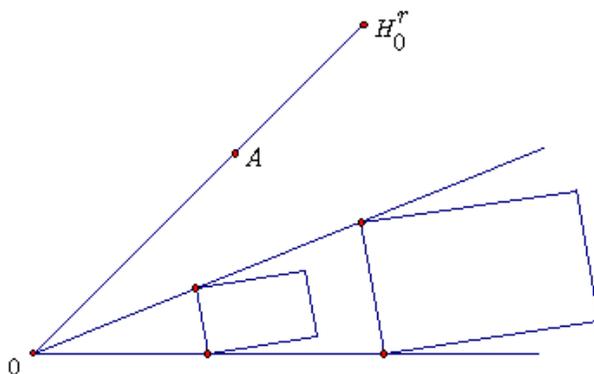
Si las razones de las distancias tiene un factor r , entonces la similitud se denotará por S^r .

Los movimientos son similitudes de razón unitaria (S).

Una homotecia de razón r y centro Ω , H_Ω^r es una transformación en el mismo plano P , tal que la imagen de un punto p es p' , donde p' se determina vectorialmente por:

$$\overrightarrow{\Omega p'} = r \overrightarrow{\Omega p} = r(p - \Omega),$$

en términos de números complejos $H_\Omega^r(z) = r(z - \Omega)$. La siguiente figura, muestra que el centro es un punto (el origen) fijo y aumenta el punto A del segmento $[0A]$ por un factor r , sucede igual con cada punto del rectángulo.



La inversa de una homotecia central, es otra homotecia central: $(H_0^r)^{-1} = H_0^{\frac{1}{r}}$.

Teorema 3.2.1 *Toda similitud se puede expresar como la composición de un movimiento y una homotecia, $S = H \circ M$.*

En primer lugar se verificará que $H \circ M$ cumple con la definición de similitud. Sin pérdida de generalidad, se considerará a la homotecia central $H_0^r = rz$, y al movimiento directo $M(z) = e^{i\theta}z + v$.

$$\begin{aligned} S(z) &= (H \circ M)(z) \\ &= H(M(z)) \\ &= r(e^{i\theta}z + v) \\ &= (re^{i\theta})z + rv, \end{aligned}$$

se considera a tres puntos no alineados y a sus imágenes,

$$\begin{aligned} S(z_1) &= (re^{i\theta})z_1 + rv \\ S(z_2) &= (re^{i\theta})z_2 + rv \\ S(z_3) &= (re^{i\theta})z_3 + rv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|s(z_2) - s(z_1)|}{|z_2 - z_1|} &= \frac{|(re^{i\theta})z_2 - (re^{i\theta})z_1|}{|z_2 - z_1|} \\ &= \frac{|(re^{i\theta})(z_2 - z_1)|}{|z_2 - z_1|} \\ &= \frac{|r||e^{i\theta}||z_2 - z_1|}{|z_2 - z_1|} \\ &= |r|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|s(z_3) - s(z_1)|}{|z_3 - z_1|} &= \frac{|(re^{i\theta})z_3 - (re^{i\theta})z_1|}{|z_3 - z_1|} \\ &= \frac{|(re^{i\theta})(z_3 - z_1)|}{|z_3 - z_1|} \\ &= \frac{|r||e^{i\theta}||z_3 - z_1|}{|z_3 - z_1|} \\ &= |r|, \end{aligned}$$

de forma análoga,

$$\begin{aligned} \frac{|s(z_3) - s(z_2)|}{|z_3 - z_2|} &= \frac{|(re^{i\theta})z_3 - (re^{i\theta})z_2|}{|z_3 - z_2|} \\ &= \frac{|(re^{i\theta})(z_3 - z_2)|}{|z_3 - z_2|} \\ &= \frac{|r||e^{i\theta}||z_3 - z_2|}{|z_3 - z_2|} \\ &= |r|. \end{aligned}$$

Por lo que cumple con la definición de similitud, en vista de que el movimiento es directo, a esta similitud se le denomina similitud directa (mantiene la orientación de los ángulos tras la

similitud).

Si mantiene la orientación de los ángulos, se debe probar que $\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{S(z_2) - S(z_1)}{S(z_3) - S(z_1)}\right)$

$$\begin{aligned}
 \arg\left(\frac{S(z_2) - S(z_1)}{S(z_3) - S(z_1)}\right) &= \arg(S(z_2) - S(z_1)) - \arg(S(z_3) - S(z_1)) \\
 &= \arg(re^{i\theta}z_2 - re^{i\theta}z_1) - \arg(re^{i\theta}z_3 - re^{i\theta}z_1) \\
 &= \arg(re^{i\theta}(z_2 - z_1)) - \arg(re^{i\theta}(z_3 - z_1)) \\
 &= [\arg(re^{i\theta}) + \arg(z_2 - z_1)] - [\arg(re^{i\theta}) + \arg(z_3 - z_1)] \\
 &= \arg(z_2 - z_1) - \arg(z_3 - z_1) \\
 &= \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right).
 \end{aligned}$$

Al movimiento directo compuesto con una homotecia, también se le denomina rotación dilatativa $D_p^{r,\theta}$ de centro p , razón r y ángulo θ .

Si se considera que O es el origen de \mathbb{C} , geoméricamente la multiplicación por un complejo $A = re^{i\theta}$ es una rotación del plano a través de un ángulo θ y una dilatación del plano de razón r , por este resultado, se dice que $D_O^{r,\theta}$ corresponde a multiplicar por $re^{i\theta}$:

$$D_O^{r,\theta}(z) = (re^{i\theta})z = Az$$

Ahora, se hará la composición de una homotecia central y un movimiento indirecto $\widetilde{M}(z) = e^{i\theta}\bar{z} + v$.

$$\begin{aligned}
 S(z) &= (H \circ \widetilde{M})(z) \\
 &= H(\widetilde{M}(z)) \\
 &= r(e^{i\theta}\bar{z} + v) \\
 &= (re^{i\theta})\bar{z} + rv,
 \end{aligned}$$

se considera a tres puntos no alineados y a sus imágenes,

$$\begin{aligned}
 S(z_1) &= (re^{i\theta})\bar{z}_1 + rv \\
 S(z_2) &= (re^{i\theta})\bar{z}_2 + rv \\
 S(z_3) &= (re^{i\theta})\bar{z}_3 + rv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{|s(z_2) - s(z_1)|}{|z_2 - z_1|} &= \frac{|(re^{i\theta})\bar{z}_2 - (re^{i\theta})\bar{z}_1|}{|z_2 - z_1|} \\
 &= \frac{|(re^{i\theta})(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)|}{|z_2 - z_1|} \\
 &= \frac{|r||e^{i\theta}||\bar{z}_2 - \bar{z}_1|}{|z_2 - z_1|}, \text{ por la propiedad 2 de módulo} \\
 &= \frac{|r||z_2 - z_1|}{|z_2 - z_1|} \\
 &= |r|,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|s(z_3) - s(z_1)|}{|z_3 - z_1|} &= \frac{|(re^{i\theta})\bar{z}_3 - (re^{i\theta})\bar{z}_1|}{|z_3 - z_1|} \\
&= \frac{|(re^{i\theta})(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)|}{|z_3 - z_1|} \\
&= \frac{|r||e^{i\theta}||\bar{z}_3 - \bar{z}_1|}{|z_3 - z_1|}, \text{ por la propiedad 2 de módulo} \\
&= \frac{|r||z_3 - z_1|}{|z_3 - z_1|} \\
&= |r|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|s(z_3) - s(z_2)|}{|z_3 - z_2|} &= \frac{|(re^{i\theta})\bar{z}_3 - (re^{i\theta})\bar{z}_2|}{|z_3 - z_2|} \\
&= \frac{|(re^{i\theta})(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)|}{|z_3 - z_2|} \\
&= \frac{|r||e^{i\theta}||\bar{z}_3 - \bar{z}_2|}{|z_3 - z_2|}, \text{ por la propiedad 2 de módulo} \\
&= \frac{|r||z_3 - z_2|}{|z_3 - z_2|} \\
&= |r|.
\end{aligned}$$

Por lo que cumple con la definición de similitud, como el movimiento es indirecto, a esta similitud se le denomina similitud indirecta (cambia la orientación de los ángulos tras la similitud indirecta).

Para ver que cambia la orientación de los ángulos, se debe probar que

$$\arg\left(\frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}\right) = \arg\left(\frac{S(z_2) - S(z_1)}{S(z_3) - S(z_1)}\right)$$

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{S(z_2) - S(z_1)}{S(z_3) - S(z_1)}\right) &= \arg(S(z_2) - S(z_1)) - \arg(S(z_3) - S(z_1)) \\
&= \arg(re^{i\theta}\bar{z}_2 - re^{i\theta}\bar{z}_1) - \arg(re^{i\theta}\bar{z}_3 - re^{i\theta}\bar{z}_1) \\
&= \arg(re^{i\theta}(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)) - \arg(re^{i\theta}(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)) \\
&= [\arg(re^{i\theta}) + \arg(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)] - [\arg(re^{i\theta}) + \arg(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)] \\
&= \arg(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \arg(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) \\
&= \arg\left(\frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}\right).
\end{aligned}$$

Se hará únicamente la revisión geométrica de las similitudes directas.
Si $A'B'$ y AB son paralelos pero las longitudes no son iguales, entonces se tienen dos casos

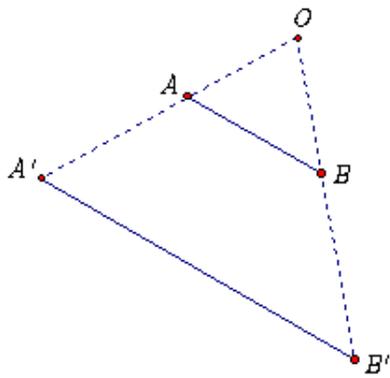


fig. 1

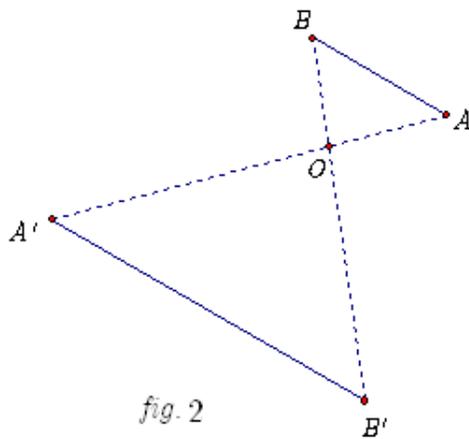
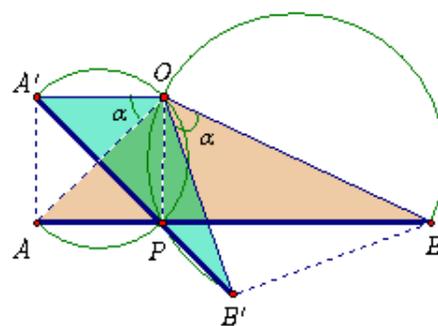
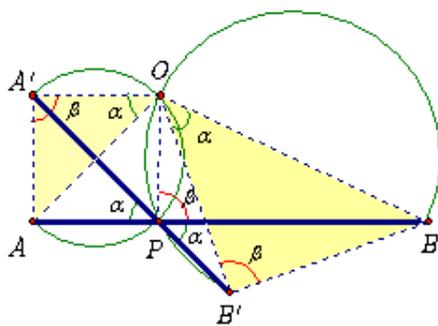


fig. 2

en ambos casos se tiene que las rectas $A'A$ y $B'B$ se interceptan en O . Tomando en cuenta la semejanza de triángulos en estas figuras, se tiene que la fig. 1 es una similitud directa de centro O , razón r y ángulo 0 ($D_O^{r;0}$), mientras que fig. 2 es una similitud directa de centro O , razón r y ángulo π , en ambos casos $r = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$

Nota: La homotecia central H_O^r , es un caso particular de una rotación dilatativa $D_O^{r;\theta}$ donde $\theta = 0$ ó π .

Otro de los casos, es que el segmento preimagen e imagen son no paralelos. Hay que considerar la siguiente figura. Se tiene el segmento AB y su imagen $A'B'$, que se cortan en P . Se trazan las circunferencias que pasan por A, A' y P , y por B, B' y P , dichas circunferencias se cortan en otro punto O . Se tiene que $\angle AOA' = \angle APA'$ por sostener ambos al arco AA' , mientras que $\angle BPB' = \angle BOB'$ por sostener el arco BB' , pero además $\angle APA' = \angle BPB'$ por ser opuestos por el vértice, por lo que $\angle AOA' = \angle BOB'$. Por otra parte $\angle AA'O = \angle OPB$ dado que el cuadrilátero $AA'OP$ es cíclico, y $\angle OPB = \angle BB'O$ por sostener el arco OB , de donde $\angle AA'O = \angle BB'O$. De aquí que los triángulos $AA'O$ y $BB'O$ sean semejantes, y se tiene $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$, pero se observa que $\angle A'OB' = \angle AOB$ por lo que los triángulos OAB y $OA'B'$ también son semejantes y uno es la rotación del otro con ángulo α , por lo que O es el centro de una rotación dilatativa que transforma AB en $A'B'$.



Con esto, se muestra que toda similitud directa es una rotación dilatativa, además el mismo proceso muestra como se construyen los centros de similitud O .

Para demostrar que toda similitud directa puede ser expresada como una función compleja del tipo $S(z) = Az + B$ $A, B \in \mathbb{C}$, se utilizará un camino similar al de los movimientos. En primer lugar se verá que toda función de esa forma es una similitud directa. Si se toman tres complejos no alineados cualesquiera z_1, z_2 y z_3 tal que $S(z_1) = Az_1 + B$; $S(z_2) = Az_2 + B$ y $S(z_3) = Az_3 + B$ sean sus respectivas imágenes.

Se tiene que

$$S(z_2) - S(z_1) = A(z_2 - z_1)$$

$$S(z_3) - S(z_1) = A(z_3 - z_1)$$

Si

$$\frac{|S(z_2) - S(z_1)|}{|z_2 - z_1|} = \frac{|A||z_2 - z_1|}{|z_2 - z_1|} = |A|$$

$$\frac{|S(z_3) - S(z_1)|}{|z_3 - z_1|} = \frac{|A||z_3 - z_1|}{|z_3 - z_1|} = |A|,$$

entonces

$$\frac{|S(z_2) - S(z_1)|}{|z_2 - z_1|} = \frac{|S(z_3) - S(z_1)|}{|z_3 - z_1|}$$

Cumple con la condición de similitud, hay que demostrar que mantiene la orientación de los ángulos tras la similitud.

$$\begin{aligned} \arg \frac{S(z_2) - S(z_1)}{S(z_3) - S(z_1)} &= \arg(S(z_2) - S(z_1)) - \arg(S(z_3) - S(z_1)) \\ &= \arg(Az_2 - Az_1) - \arg(Az_3 - Az_1) \\ &= \arg(A(z_2 - z_1)) - \arg(A(z_3 - z_1)) \\ &= [\arg(A) + \arg(z_2 - z_1)] - [\arg(A) + \arg(z_3 - z_1)] \\ &= \arg(z_2 - z_1) - \arg(z_3 - z_1) \\ &= \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right). \end{aligned}$$

Y para terminar hay que verificar que toda similitud directa se puede expresar de la forma $S(z) = Az + B$.

Del teorema 3.2.1, se tiene que toda similitud es la composición de de un movimiento directo y una homotecia.

Al considerar a la homotecia central $H_0^r = rz$, y al movimiento directo $M(z) = e^{i\theta}z + v$.

$$\begin{aligned} S(z) &= (H \circ M)(z) \\ &= H(M(z)) \\ &= r(e^{i\theta}z + v) \\ &= (re^{i\theta})z + rv \quad , (re^{i\theta}) = A, rv = B \\ &= Az + B \end{aligned}$$

Por lo que S es en efecto una similitud directa.

Ya que las similitudes directas tienen la forma $S(z) = Az + B$ con $A, B \in \mathbb{C}$.
 Si $A = 1$, entonces S es una traslación, $S(z) = z + B$

Si $A \neq 1$, $|A| = 1$, $A = e^{i\theta}$, entonces $S(z) = e^{i\theta}z + B$ es una rotación acompañada de una traslación.

Si $|A| \neq 1$, entonces $S(z) = |A|e^{i\theta}z + B$ es una rotación con dilatación acompañada de una traslación.

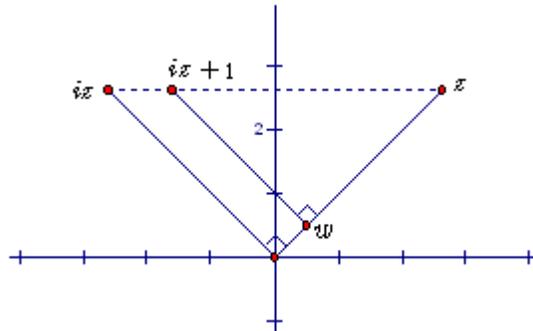
Si $A = 1$ y $B = 0$, entonces $S(z) = z$, es decir que todos los puntos son fijos.
 Si w es un punto fijo de una similitud S , entonces $S(w) = w$
 $S(w) = w \Leftrightarrow w = Aw + B$
 $w(1 - A) = B$
 $w = \frac{B}{1 - A}$, $A \neq 1$, donde w es un número complejo que representa al centro de la similitud.
 Se tiene que $S(z) = Az + B$ y $S(w) = Aw + B$, al efectuar la operación $S(z) - S(w) = A(z - w)$,
 $S(z) - w = A(z - w)$, es una homotecia y rotación de centro w .

Por ejemplo, si se desea estudiar la transformación $S(z) = iz + 1$, para cualquier $z \in \mathbb{C}$.
 Se sabe que es una rotación seguida de una traslación con centro en el origen, por medio de este ejemplo se tratará mostrar que se puede obviar la traslación.

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{1 - i} \\ &= \frac{1 + i}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

es el centro de rotación, con esto se cambia al centro anterior y se obvia la traslación

así, $S(z) - S(w) = (iz + 1) - (iw + 1)$
 $S(z) - w = i(z - w)$, es una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ y centro $w = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$
 El siguiente esquema ilustra el resultado obtenido.



Teorema 3.2.2 *La composición de dos similitudes directas es otra similitud directa.*

Sean $S(z) = Az + B$ y $S'(z) = Cz + D$ dos similitudes directas

Al realizar $(S \circ S')_{(z)}$, se tiene

$$\begin{aligned} (S \circ S')_{(z)} &= S(Cz + D) \\ &= A(Cz + D) + B \\ &= ACz + AD + B \quad \text{haciendo que } AC = E \text{ y que } AD + B = F, \text{ entonces} \\ &= Ez + F \end{aligned}$$

luego, se debe verificar $(S' \circ S)_{(z)}$, también es una similitud

$$\begin{aligned} (S' \circ S)_{(z)} &= S'(Az + B) \\ &= C(Az + B) + D \\ &= ACz + CB + D \quad \text{haciendo que } AC = E \text{ y que } CB + D = G, \text{ entonces} \\ &= Ez + G. \end{aligned}$$

Se determinará la representación compleja de una similitud, y se usará la notación:

Sim(centro, razón, ángulo).

Dado que $\text{Sim}((1, 0), 2, -\frac{\pi}{2}) = S$, entonces

$$\begin{aligned} S(z) &= Az + B \\ S(w) &= w = Aw + B \\ \frac{S(z) - S(w)}{z - w} &= A \end{aligned}$$

$$S(z) = A(z - w) + S(w)$$

$$S(z) = A(z - w) + w$$

$$\text{Como } w = (1, 0), r = 2, \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$S(z) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - 1) + 1.$$

3.3. Inversiones.

3.3.1. Inversión compleja.

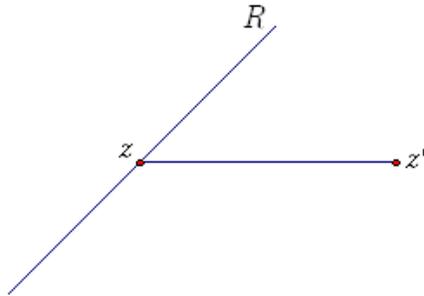
Se considerará la aplicación $I : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $I(z) = \frac{1}{z}$. Dos observaciones son importantes a destacar:

- La aplicación sólo está definida sobre \mathbb{C}^* , es decir el complejo nulo no tiene imagen.
- La aplicación es involutiva, es decir $I \circ I$ es la identidad de \mathbb{C}^* . Lo anterior significa que $z' = I(z) \Leftrightarrow I(z') = z$.

En base a la observación, se puede demostrar que:

1. La imagen de una recta R por la inversión compleja es también una recta, si y sólo si la recta R pasa por el origen. Se determinará un vector director de la recta imagen. También se mostrará que si la recta R no pasa por el origen, su imagen por la inversión compleja es una circunferencia que pasa por el origen con su respectivo centro.
2. Se mostrará que la imagen de una circunferencia C que pasa por el origen según la inversión compleja, es una recta que no pasa por el origen de la que se determinará un vector normal.¹ Además se demostrará que la imagen de una circunferencia que no pasa por el origen es otra circunferencia que no pasa por el origen.

Pruebas: 1.



R es de la forma $z\bar{w} + \bar{z}w = 0$, ya que pasa por el origen.

Por definición $I(z) = \frac{1}{z} = z' \in \text{Imagen}(R) \Leftrightarrow I(z') \in R$

$$\frac{1}{z}\bar{w} + \frac{1}{\bar{z}}w = \frac{\bar{z}\bar{w} + zw}{z\bar{z}} = 0, \quad z\bar{z} \neq 0$$

$\bar{z}\bar{w} + zw = 0$, es otra recta que pasa por el origen.

Ahora, si R no pasa por el origen, su ecuación es de la forma (2.2), así

$$\frac{1}{z}\bar{w} + \frac{1}{\bar{z}}w + 2c = 0$$

$$\frac{\bar{z}\bar{w} + zw + 2cz\bar{z}}{z\bar{z}} = 0, \quad z\bar{z} \neq 0$$

$$\bar{z}\bar{w} + zw + 2cz\bar{z} = 0$$

$$z\bar{z} + \frac{\bar{z}\bar{w}}{2c} + \frac{zw}{2c} = 0$$

$z\bar{z} + z\left(\frac{w}{2c}\right) + \bar{z}\left(\frac{\bar{w}}{2c}\right) = 0$, es la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen.

Por lo desarrollado en 2.1.3 se tiene que el centro es $-\frac{\bar{w}}{2c}$.

2. Como la circunferencia C pasa por el origen, es de la forma $z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w = 0$, donde $z \in C$

¹ver sección 2.1.3

$$\frac{1}{z} = z' \in \text{Imagen}(C) \Leftrightarrow I(z') \in C$$

$$\left(\frac{1}{z}\right) \left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + \frac{1}{z}\bar{w} + \frac{1}{\bar{z}}w = \frac{1 + \bar{z}\bar{w} + zw}{z\bar{z}} = 0, \quad z\bar{z} \neq 0$$

$1 + \bar{z}\bar{w} + zw = 0$, es la ecuación de una recta que no pasa por el origen, donde el vector normal es \bar{w} .

Ahora, se considerará que C no pasa por el origen, es decir que tiene la forma de (2.4), donde $z \in C$

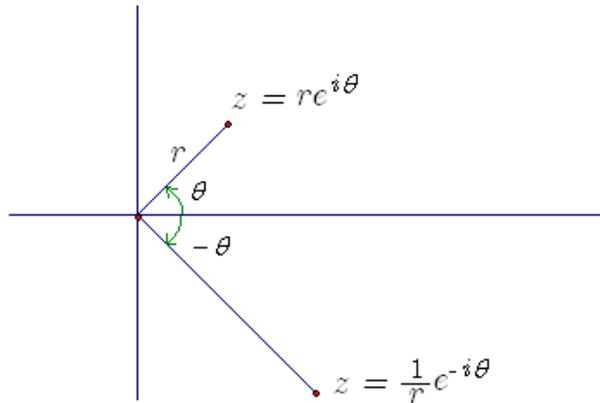
Por inversión compleja $\frac{1}{z} = z' \in \text{Imagen}(C) \Leftrightarrow \text{Imagen}(z') \in C$

$$\left(\frac{1}{z}\right) \left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + \frac{1}{z}\bar{w} + \frac{1}{\bar{z}}w + c = \frac{1 + \bar{z}\bar{w} + zw + z\bar{z}c}{z\bar{z}} = 0, \quad z\bar{z} \neq 0$$

$1 + \bar{z}\bar{w} + zw + z\bar{z}c = 0$, por hipótesis $c \neq 0$

$z\bar{z} + \frac{zw}{c} + \frac{\bar{z}\bar{w}}{c} + \frac{1}{c} = 0$, es una circunferencia que no pasa por el origen.

Por la inversión compleja, $f(z) = \frac{1}{z}$, la imagen de $z = re^{i\theta}$ es el complejo $z' = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$. Así, el módulo de la imagen es el recíproco del módulo de z ; mientras que su argumento es el opuesto del argumento de z .



Si $r > 1$, entonces $\frac{1}{r} < 1$;

Si $r < 1$, entonces $\frac{1}{r} > 1$;

Si $r = 1$, entonces $\frac{1}{r} = 1$.

Según esta operación, si se considera el círculo unitario centrado en el origen del plano complejo, los puntos del interior del círculo son transformados en puntos del exterior; los del exterior en puntos del interior, mientras que los puntos sobre la circunferencia permanecen sobre ella.

3.3.2. Inversión geométrica.

Se considerará la función $I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, es fácil verificar que según esta función, la imagen de $z = re^{i\theta}$ es el complejo $z' = \frac{1}{r}e^{i\theta}$, en el que resulta tener el mismo argumento, pero su módulo es el recíproco del módulo de z . A esta operación se le llama inversión geométrica. Al hacer el mismo análisis que la inversión compleja, la inversión geométrica intercambia el interior con el exterior del círculo unitario, mientras que los puntos sobre la circunferencia quedan invariantes por la transformación.

Ahora, se verá cómo esta operación transforma rectas en rectas o circunferencias y las circunferencias las transforma en circunferencias o rectas.

Se demostrará que toda recta que pasa por el origen es transformada, según la inversión geométrica, en la misma recta; es decir, estas rectas quedan globalmente invariantes.

Prueba:

En vista de que pasan por el origen, son de la forma $\bar{w}z + w\bar{z} = 0$, por inversión geométrica $I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, la recta se transforma en $\bar{w}\frac{1}{\bar{z}} + w\frac{1}{z} \stackrel{?}{=} 0$

$\bar{w}\frac{1}{\bar{z}} + w\frac{1}{z} = \frac{\bar{w}z}{|z|^2} + \frac{w\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2}(\bar{w}z + w\bar{z})$, como $z \neq 0$, implica que $\bar{w}z + w\bar{z} = 0$, y por lo tanto,

$$\bar{w}\frac{1}{\bar{z}} + w\frac{1}{z} = \bar{w}z + w\bar{z} = 0.$$

Ahora se mostrará, en qué se transforma una recta que no pasa por el origen ($\bar{w}z + w\bar{z} + 2c = 0$), tras la inversión geométrica ($I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$):

$$\begin{aligned} \bar{w}\frac{1}{\bar{z}} + w\bar{z} + 2c &= \frac{\bar{w}z}{|z|^2} + \frac{w\bar{z}}{|z|^2} + 2c \\ &= \frac{\bar{w}z + w\bar{z} + 2c|z|^2}{|z|^2}, \end{aligned}$$

como $z \neq 0$, implica que $\bar{w}z + w\bar{z} + 2c|z|^2 = 0$, por lo desarrollado en 2.1.3, se sabe por que c es un real distinto de cero, y $|z|^2 = z\bar{z}$,

así, al dividir por $2c$, se tiene $\frac{\bar{w}}{2c}z + \frac{w}{2c}\bar{z} + z\bar{z} = 0$,

como $\frac{\bar{w}}{2c} = \overline{\left(\frac{w}{2c}\right)} = \overline{w^*}$,

$\overline{w^*}z + w^*\bar{z} + z\bar{z} = 0$ presenta la forma de la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen.

Se mostrará, en qué se transforma una circunferencia que pasa por el origen

$(\bar{z}z + \bar{w}z + w\bar{z} = 0)$, tras la inversión geométrica ($I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{z}} \frac{1}{z} + \bar{w} \frac{1}{\bar{z}} + w \frac{1}{z} &= \frac{1}{|z|^2} + \frac{\bar{w} z}{|z|^2} + w \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ &= \frac{1 + \bar{w} z + w \bar{z}}{|z|^2}, \end{aligned}$$

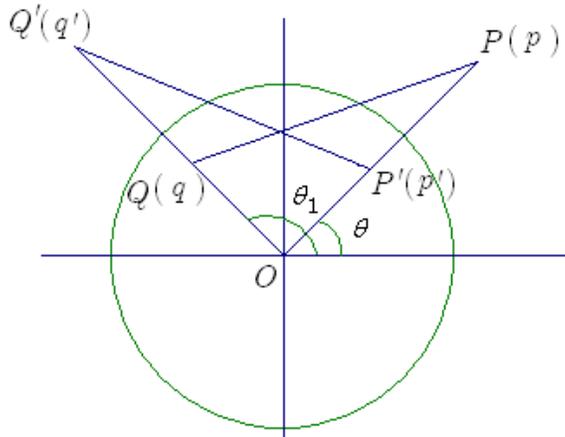
Como $z \neq 0$, implica que $1 + \bar{w} z + w \bar{z} = 0$, con $1 = c$ es la forma de la ecuación de una recta que no pasa por el origen.

Para finalizar, se mostrará, en qué se transforma una circunferencia que no pasa por el origen ($\bar{z}z + \bar{w}z + w\bar{z} + c = 0$), tras la inversión geométrica ($I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{z}} \frac{1}{z} + \bar{w} \frac{1}{\bar{z}} + w \frac{1}{z} + c &= \frac{1}{|z|^2} + \frac{\bar{w} z}{|z|^2} + \frac{w \bar{z}}{|z|^2} + \frac{c|z|^2}{|z|^2} \\ &= \frac{1 + \bar{w} z + w \bar{z} + c|z|^2}{|z|^2}, \end{aligned}$$

como $z \neq 0$, implica que $1 + \bar{w} z + w \bar{z} + c|z|^2 = 0$, considerando al número real $\frac{1}{c} = k$ y $k\bar{w} = \overline{(kw)} = \bar{w}^*$, se tiene $k + \bar{w}^* z + w^* \bar{z} + |z|^2 = 0$, es la forma de la ecuación de una circunferencia que no pasa por el origen.

Se considerará a dos puntos P, Q y sus respectivas imágenes P' y Q' , donde los complejos asociados a los puntos y a las imágenes son p, q, p' y q' , respectivamente. Para demostrar que los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle OQ'P'$ son semejantes.



$$\begin{aligned} p &= re^{i\theta}, & p' &= \frac{1}{r}e^{i\theta} \\ q &= se^{i\theta_1}, & q' &= \frac{1}{s}e^{i\theta_1} \end{aligned}$$

Para que $\Delta OPQ \sim \Delta OQ'P'$, debe cumplir con el siguiente criterio:

$\angle QOP = \angle P'OQ'$, lo cual es cierto ya que comparten el mismo ángulo, y

$\frac{PO}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$, implica que se debe verificar que $\frac{p}{q} = \frac{q'}{p'}$

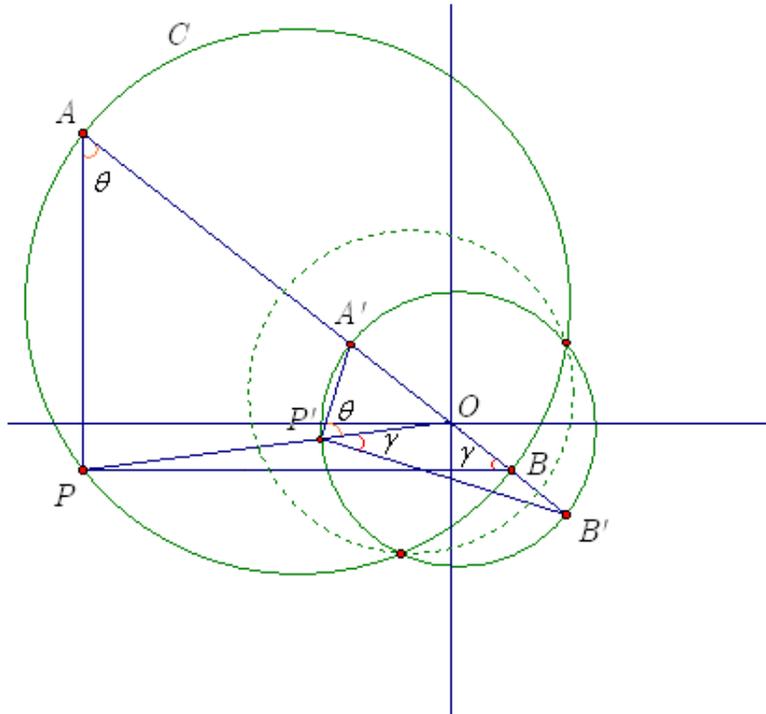
En vista de que ya se ha definido los complejos p, q , y sus imágenes, se sabe que

$$\frac{p}{q} = \frac{re^{i\theta}}{se^{i\theta_1}} = \frac{r}{s}e^{i(\theta-\theta_1)}, \text{ y}$$

$$\frac{q'}{p'} = \frac{\frac{1}{s}e^{i\theta_1}}{\frac{1}{r}e^{i\theta}} = \frac{r}{s}e^{i(\theta-\theta_1)}$$

Por lo tanto, $\Delta OPQ \sim \Delta OQ'P'$.

Sea C una circunferencia que no pasa por el origen. Se consideran los puntos A y B , extremos del diámetro de C que pasa por el origen y un punto P de la circunferencia C . Se sabe que ΔABP es rectángulo en P . Se demostrará que los puntos imágenes de los tres puntos de la circunferencia C : A', B' y P' forman también una circunferencia de diámetro $A'B'$.



De ΔABP , se sabe que $\angle APB = 90^\circ$, y por la propiedad que la suma ángulos internos se

tiene que $\gamma + \theta = 90^\circ$; por el resultado anterior, se tiene la semejanza:

$$\begin{aligned} \Delta OAP' &\sim \Delta OPA' \\ \Rightarrow \frac{OA}{OP} &= \frac{OP'}{OA'} \\ \Rightarrow \frac{OA}{OP'} &= \frac{OP}{OA'} \quad , \text{ dado que } \angle AOP = \angle P'OA \\ \Rightarrow \Delta OAP &\sim \Delta OP'A' \\ \Rightarrow \angle OAP &= \angle OP'A' = \theta \end{aligned}$$

de igual forma, se tiene que

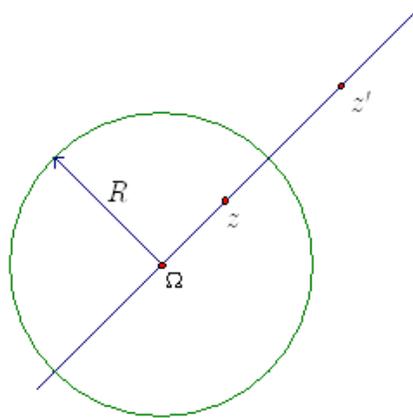
$$\begin{aligned} \Delta OPB' &\sim \Delta OBP' \\ \Rightarrow \frac{OP}{OB} &= \frac{OB'}{OP'} \\ \Rightarrow \frac{OP}{OB'} &= \frac{OB}{OP'} \quad , \text{ dado que } \angle POB = \angle B'OP' \\ \Rightarrow \Delta OBP &\sim \Delta OP'B' \\ \Rightarrow \angle OBP &= \angle OP'B' = \gamma \end{aligned}$$

Por hipótesis $\gamma + \theta = 90^\circ$, se llega a que $\angle A'P'B' = \gamma + \theta$

Por la inversión geométrica, se sabe que una recta que pasa por el origen es transformada en la misma recta, es decir que las imágenes de A y B están ubicadas en la misma recta, además se sabe que, una circunferencia que no pasa por el origen es transformada en otra circunferencia que no pasa por el origen, por lo que A' y B' están diametralmente opuestos. Con este resultado también se puede concluir que $\Delta A'B'P'$ es rectángulo en P' .

Definición. Sea Ω un punto fijo en el plano, y sea R un número fijo positivo. Para cada punto Q del plano se define su inverso Q' en el círculo de centro Ω y de radio R considerando a Q' como un punto en el rayo ΩQ tal que $\|\overrightarrow{\Omega Q}\| \|\overrightarrow{\Omega Q'}\| = |Q - \Omega| |Q' - \Omega| = R^2$, donde $Q \neq \Omega$.

La inversión I puede ser definida de la siguiente forma: si z es un punto del plano cuya distancia al centro de C es igual a ρ , entonces su imagen es el punto z' de manera que la dirección del segmento que une al centro con z' , sea la misma que la determinada por el segmento que une el centro a z y cuya distancia al centro sea igual a $\frac{R^2}{\rho}$.

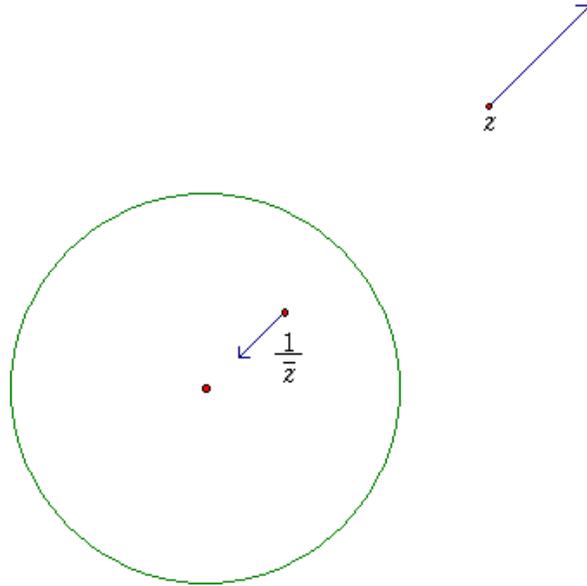


Por la definición anterior, se sabe que $|z - \Omega||z' - \Omega| = R^2$, y por hipótesis $|z - \Omega| = \rho$, lo cual implica que $|z' - \Omega| = \frac{R^2}{\rho}$.

3.4. Proyección estereográfica.

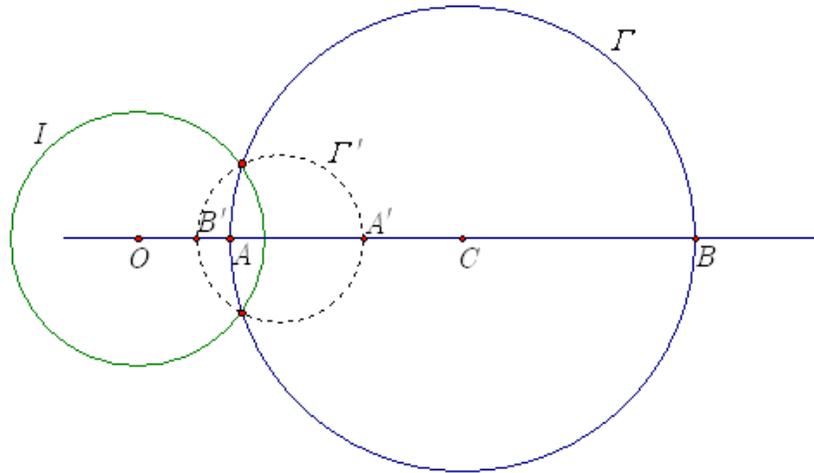
3.4.1. Punto al infinito.

Se recordara a la transformación que produce la inversión geométrica, para introducir el punto al infinito, se sabe que transforma a los puntos del interior en puntos del exterior y viceversa, mientras que los puntos de la circunferencia permanecen invariantes.



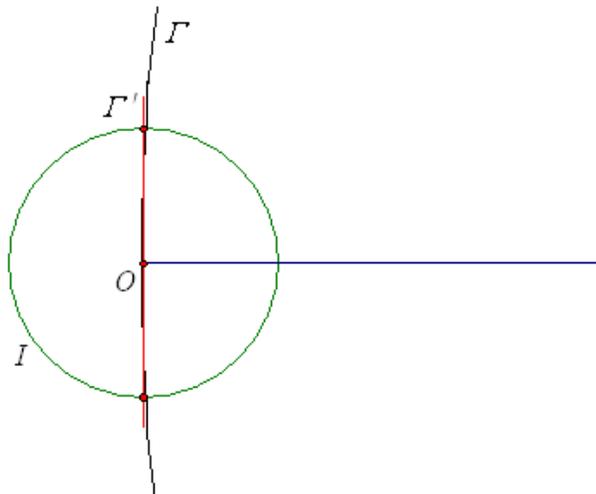
Por la figura anterior y la inversión geométrica, se debe entender que la imagen del punto z es el punto $\frac{1}{z}$, así, entre más próximo se esté del centro (cero), su imagen se aleja al infinito, es razonable asignarle a la función $f(0) = \infty$; por otra parte, mientras más alejados de la circunferencia unitaria se esté, su imagen esta más próxima al centro (cero), y también es razonable asignarle a $f(\infty) = 0$.

Se analizará qué pasa con la transformación, si se desea invertir una circunferencia:



En el esquema anterior, se denota por I a la circunferencia de inversión, Γ a la circunferencia a invertir. Como el punto A se encuentra en el interior de I , su imagen se ubica en el exterior, como el punto B se ubica en el exterior, su imagen esta en el interior de I , y en este caso solamente existen dos puntos que quedan invariantes, los cuales son los puntos de cortes entre I y Γ , por lo que, los cuatro puntos imágenes están situados sobre la circunferencia Γ' , es de recordar uno de los resultados de la inversión compleja, la imagen de una circunferencia que no pasa por el origen es otra circunferencia que no pasa por el origen.

Una recta se puede interpretar como una circunferencia que se cierra en ∞ y cuyo centro también es el punto al infinito, se puede ver como un caso particular de la inversión de una circunferencia.

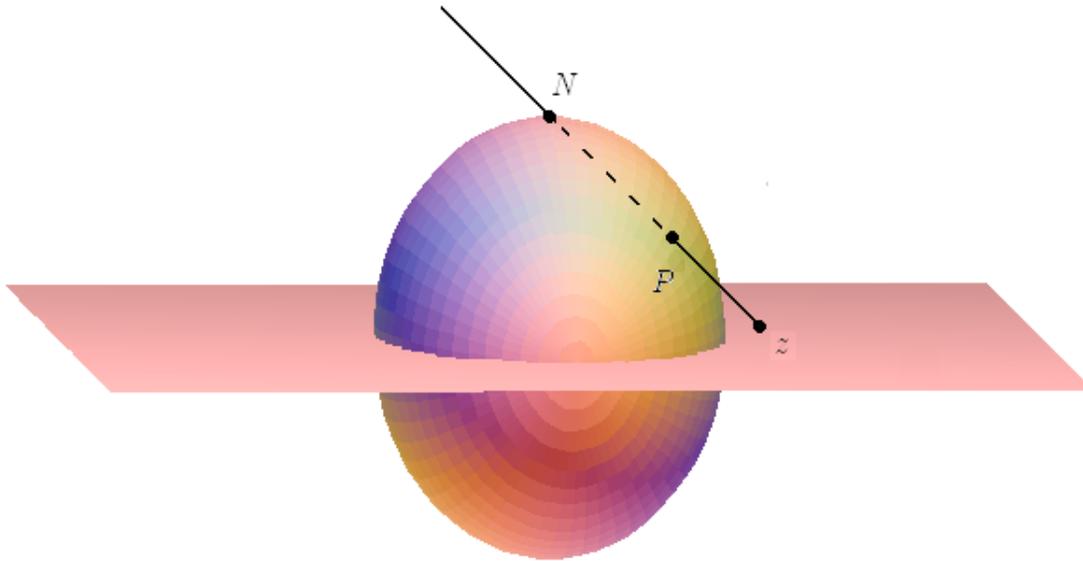


Por el esquema, se puede interpretar que, la imagen del centro (∞) de Γ es cero, el punto que se ubica diametralmente opuesto a 0 en Γ es ∞ cuya imagen es cero, existen dos puntos que quedan invariantes, los cuales son los puntos de cortes entre I y Γ , por lo que, los cuatro puntos imágenes están situados sobre la recta Γ' , este es otro de los resultados de la inversión compleja, que dice, si una recta pasa por el origen su imagen es otra recta que pasa por el origen.

Se ha visto que es conveniente incluir con el plano complejo el punto al infinito, y usar los límites relacionados con él. El plano complejo junto con ese punto se llama plano complejo

extendido.

Proyección estereográfica. Con el fin de visualizar la correspondencia entre los puntos de una esfera y los puntos del plano, se puede pensar que el plano complejo pasa por el ecuador de la esfera unidad centrada en el origen (según la siguiente figura). A cada punto z del plano le corresponde exactamente un punto P en la superficie de la esfera. El punto P se determina por intersección de la recta que pasa por el polo norte N y por el punto z con la superficie de la esfera. De igual forma, cada P sobre la esfera, excepto el polo norte N , corresponde a un punto z del plano. Haciendo corresponder el polo norte N al punto infinito, se obtiene una correspondencia uno a uno entre los puntos de la esfera y los del plano complejo extendido. La esfera se llama esfera de Riemann, y la correspondencia se llama proyección estereográfica.



Nota, observaciones importantes:

- El interior del círculo unitario es mapeado en el hemisferio sur de la esfera, y en particular, cero es mapeado en el polo sur.
- Si se observa el ecuador de la esfera, cada punto del círculo unitario es mapeado en sí mismo.
- El exterior del círculo unitario es mapeado al hemisferio norte de la esfera, exceptuando que N no es la imagen de ningún punto definido en el plano.

Sin embargo, es claro que mientras z se mueva lejos del origen, P se mueva más cerca de N . Esto sugiere fuertemente que N es la imagen estereográfica del punto al infinito.

3.5. Transformación de Möbius.

Una transformación de Möbius² es un mapeo de la forma

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (3.1)$$

²también conocida como bilineal, racional lineal, o transformación homográfica.

donde a, b, c, d son constantes complejas. Este mapeo tiene muchas propiedades, en ellas se encuentra una variedad de aplicaciones en el análisis complejo. A pesar de su aparente simplicidad, las transformaciones de Möbius se hallan en varias áreas de matemática moderna existente. Esto se debe en gran parte a su conexión íntima con la geometría no euclídeana. Han pasado más de 150 años desde que August Ferdinand Möbius estudiará en primera instancia las transformaciones que ahora llevan su nombre.

La ecuación (3.1) puede ser expresada en otra forma:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

$$cwz - az + dw - b = 0 \quad \text{si } c = A, -a = B, d = C, -b = D,$$

entonces

$$Awz + Bz + Cw + D = 0 \quad (AD - BC \neq 0) \quad (3.2)$$

y recíprocamente, toda ecuación del tipo (3.2) puede ponerse en la forma (3.1). Como esta forma alternativa es lineal en z y lineal en w , o sea, bilineal en z y w , he de allí su otra denominación.

Cuando $c = 0$, la condición $ad - bc \neq 0$ para (3.1) se convierte en $ad \neq 0$, y la transformación se reduce a una función lineal no constante

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

Cuando $c \neq 0$, la ecuación (3.1) admite la expresión

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} \\ &= \frac{acz + ad + bc - ad}{c(cz + d)} \\ &= \frac{a(cz + d) + (bc - ad)}{c(cz + d)} \\ T(z) &= \frac{a}{c} + \left(\frac{bc - ad}{c} \right) \left(\frac{1}{cz + d} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nuevamente, la condición $ad - bc \neq 0$ asegura que no se trata de una función constante. La ecuación (3.3) revela que, cuando $c \neq 0$, una transformación de Möbius es composición de dos aplicaciones.

Si $Z = cz + d$, $W = \frac{1}{Z}$, entonces $w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}W \quad (ad - bc \neq 0)$.

En general, las transformaciones de Möbius se pueden expresar en función de traslaciones (t_a), inversiones (I), homotecias (H), sean:

$$t_{a1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z + \frac{d}{c} \quad c, d \in \mathbb{C}$$

$$t_{a2} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z + \frac{a}{c} \quad a, c \in \mathbb{C}$$

$$I : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

$$H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto -\frac{(ad - bc)}{c^2}z \quad \text{centro cero y razón } -\frac{(ad - bc)}{c^2}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

La composición que se debe realizar para llegar a la transformación de Möbius es:

$$\begin{aligned} (t_{a2} \circ H \circ I \circ t_{a1})(z) &= t_{a2}(H(I(z + \frac{d}{c}))) \\ &= t_{a2}\left(H\left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}}\right)\right) \\ &= t_{a2}\left(-\frac{(ad - bc)}{c^2}\left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}}\right)\right) \\ &= -\frac{(ad - bc)}{c^2}\left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}}\right) + \frac{a}{c} \\ &= \frac{(bc - ad)}{c^2(z + \frac{d}{c})} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{bc - ad + c(z + \frac{d}{c})a}{c^2(z + \frac{d}{c})} \\ &= \frac{bc - ad + acz + ad}{c^2z + cd} \\ &= \frac{c(b + az)}{c(cz + d)} \\ &= \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

Por la composición, se puede decir que las similitudes son casos particulares de las transformaciones Möbius.

Ya que las transformaciones de Möbius están en función de traslaciones, inversiones y homotecias, y dado que las traslaciones de rectas son rectas, como las traslaciones de circunferencias son circunferencias; en las inversiones se pueden dar 4 casos, que se estudiaron en la inversión geométrica (toda recta que pasa por el origen es transformada en la misma recta, toda recta que no pasa por el origen es transformada en una circunferencia que pasa por el origen, toda circunferencia que pasa por el origen es transformada en una recta que no pasa por el origen, y toda circunferencia que no pasa por el origen es transformada en una circunferencia que no pasa por el origen); y las homotecias transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias, por lo que se puede decir, que las transformaciones de Möbius transforman rectas en rectas o circunferencias y circunferencias en rectas o circunferencias.

Al despejar z de (3.1), se llega a:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$(cz + d)w = az + b$$

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (3.4)$$

con esto se tiene que, cuando un punto w dado es imagen de algún punto z bajo la transformación (3.1), el punto z se recupera mediante la ecuación (3.4). Si $c = 0$, de modo que a y d son ambos no nulos, cada punto del plano w es obviamente imagen de un punto, y sólo uno, del plano z . Lo mismo es cierto si $c \neq 0$, excepto cuando $w = \frac{a}{c}$, pues el denominador de la ecuación (3.4) se anula. Sin embargo se puede ampliar el dominio de la transformación (3.1) con el fin de definir una transformación de Möbius sobre el plano z extendido de manera tal que el punto $w = \frac{a}{c}$ sea la imagen de $z = \infty$ cuando $c \neq 0$

Para que T sea continua sobre el plano z extendido, debe (3.1) cumplir con³

$$T(\infty) = \infty \quad \text{si } c = 0,$$

$$T(\infty) = \frac{a}{c} \text{ y } T(-\frac{d}{c}) = \infty \quad \text{si } c \neq 0$$

Cuando ese dominio de definición se amplía de este modo, la transformación (3.1) es una aplicación uno a uno del plano z extendido sobre el plano w extendido. Es decir, $T(z_1) \neq T(z_2)$ siempre que $z_1 \neq z_2$, y para cada punto w existe un punto z tal que $T(z) = w$. Por lo tanto, asociada con la transformación T existe una transformación inversa T^{-1} que se define sobre el plano w extendido como

$$T^{-1}(w) = z \Leftrightarrow T(z) = w$$

De la ecuación (3.4), se tiene

$$T^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad (ad - bc \neq 0)$$

Es claro que T^{-1} es ella misma una transformación de Möbius, con

$$T^{-1}(\infty) = \infty \quad \text{si } c = 0,$$

³ver prueba en anexo

$$T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty \text{ y } T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} \quad \text{si } c \neq 0$$

Se determinará cuándo una transformación de Möbius es su propia inversa. Es decir, debe cumplir que: $T(T^{-1}(z)) = T^{-1}(T(z)) = z$.

$$T(z) = T^{-1}(z) \Leftrightarrow \frac{az + b}{cz + d} = \frac{-dz + b}{cz - a}$$

Si $z = 0$,

$$\frac{b}{d} = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow d = -a$$

$$\text{Así, } T(z) = \frac{az + b}{cz - a} = T^{-1}(z) = \frac{-az - b}{-cz + a}$$

Si $b \neq 0$, y $c = 0$, existen dos casos:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az - b}{d} = T^{-1}(z) = \frac{-dz - b}{-a} & b < 0 \\ T(z) &= \frac{az + b}{d} = T^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{-a} & b > 0 \end{aligned}$$

Mientras que si $b = 0$, también existen dos casos:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az}{cz + d} = T^{-1}(z) = \frac{-dz}{cz - a} & c \neq 0 \\ T(z) &= \frac{az}{d} = T^{-1}(z) = \frac{-dz}{-a} = \frac{dz}{a} & c = 0 \end{aligned}$$

3.6. Razón cruzada

En las aplicaciones de los complejos a la geometría, se hace uso de esta herramienta. Para ser más específico en los teoremas 2.3.2, 2.3.3 y 2.3.5. Ahora, se retoma la definición para aplicarla en las transformaciones de Möbius.

Dados z_1, z_2, z_3 y z_4 cuatro puntos distintos del plano complejo extendido. Se define su razón cruzada por:

$$(z_1, z_3; z_2, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}$$

En la definición anterior, si alguno de los puntos es el punto ∞ , la fracción que lo contiene se define por 1. Si en particular, se cuenta con el hecho de que $z_2 = \infty$, esto implica que $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$, tiende a 1 cuando z_2 tiende a ∞ .

Se sabe, que las transformaciones de Möbius son inyectivas, de manera que cuatro puntos distintos son enviados a cuatro puntos distintos. Se puede entonces preguntar por el cambio que se opera en la razón cruzada de cuatro puntos, cuando se aplica a estos una transformación de Möbius. El resultado está contenido en la siguiente proposición:

Proposición 1. Si una transformación de Möbius transforma z_1, z_2, z_3 y z_4 en los puntos w_1, w_2, w_3 y w_4 , respectivamente, entonces $(z_1, z_3; z_2, z_4) = (w_1, w_3; w_2, w_4)$

Prueba:

La prueba de esta proposición, se logra con demostrar que la razón cruzada permanece invariante por traslaciones, rotaciones, homotecias e inversiones y que en consecuencia debe ser invariante por las transformaciones de Möbius.

Sean

$$\begin{aligned} \text{Rotación Dilatativa} & \begin{cases} \text{Rotaciones} \\ \text{Homotecias} \end{cases} & E(z) = Az \\ \text{Traslaciones} & & D(z) = z + A \\ \text{Inversiones} & & I(z) = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Por traslación,

$$\begin{aligned} D(z_1) &= z_1 + A \\ D(z_2) &= z_2 + A \\ D(z_3) &= z_3 + A \\ D(z_4) &= z_4 + A \end{aligned}$$

si $D(z_k) = z_k^D$, $k = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} (z_1^D, z_3^D; z_2^D, z_4^D) &= \frac{(z_1 + A) - (z_2 + A)}{(z_1 + A) - (z_4 + A)} \frac{(z_3 + A) - (z_4 + A)}{(z_3 + A) - (z_2 + A)} \\ &= (z_1, z_2; z_3, z_4) \end{aligned}$$

Por rotación dilatativa,

$$\begin{aligned} E(z_1) &= Az_1 \\ E(z_2) &= Az_2 \\ E(z_3) &= Az_3 \\ E(z_4) &= Az_4 \end{aligned}$$

si $E(z_k) = z_k^E$, $k = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} (z_1^E, z_3^E; z_2^E, z_4^E) &= \frac{Az_1 - Az_2}{Az_1 - Az_4} \frac{Az_3 - Az_4}{Az_3 - Az_2} \\ &= (z_1, z_2; z_3, z_4) \end{aligned}$$

Ahora, por inversión,

$$\begin{aligned} I(z_1) &= \frac{1}{z_1} \\ I(z_2) &= \frac{1}{z_2} \\ I(z_3) &= \frac{1}{z_3} \\ I(z_4) &= \frac{1}{z_4} \end{aligned}$$

si $I(z_k) = z_k^I$, $k = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned}
(z_1^I, z_3^I; z_2^I, z_4^I) &= \frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4}} \frac{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_4}}{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}} \\
&= \frac{\frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}}{\frac{z_1 - z_4}{z_1 z_4}} \frac{\frac{z_3 - z_4}{z_3 z_4}}{\frac{z_3 - z_2}{z_3 z_2}} \\
&= \frac{z_1 z_4}{z_1 z_2} \frac{z_3 z_2}{z_3 z_4} \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \\
&= \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \\
&= (z_1, z_2; z_3, z_4)
\end{aligned}$$

Como resultado, se tiene que la transformación de Möbius preserva la razón cruzada.

Ahora, se determinará la transformación de Möbius $w = T(z)$ que transforma z_1, z_2, z_3 en w_1, w_2, w_3 , respectivamente.

Se pretende determinar $T(z)$ en función de tres puntos z_1, z_2, z_3 , transformados en w_1, w_2, w_3 através de razón cruzada.

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z} \frac{z_3 - z}{z_3 - z_2} = \frac{w_1 - w_2}{w_2 - w} \frac{w_3 - w}{w_3 - w_2}$$

Sea $z_1 - z_2 = \alpha$, $z_3 - z_2 = \beta$, $w_1 - w_2 = \theta$, $w_3 - w_2 = \gamma$
sustituyendo,

$$\frac{\alpha(z_3 - z)}{\beta(z_1 - z)} = \frac{\theta(w_3 - w)}{\gamma(w_2 - w)}$$

$$\alpha\gamma(z_3 w_2 - z_3 w - w_2 z + z w) = \beta\theta(w_3 z_1 - z_1 w - w_3 z + z w)$$

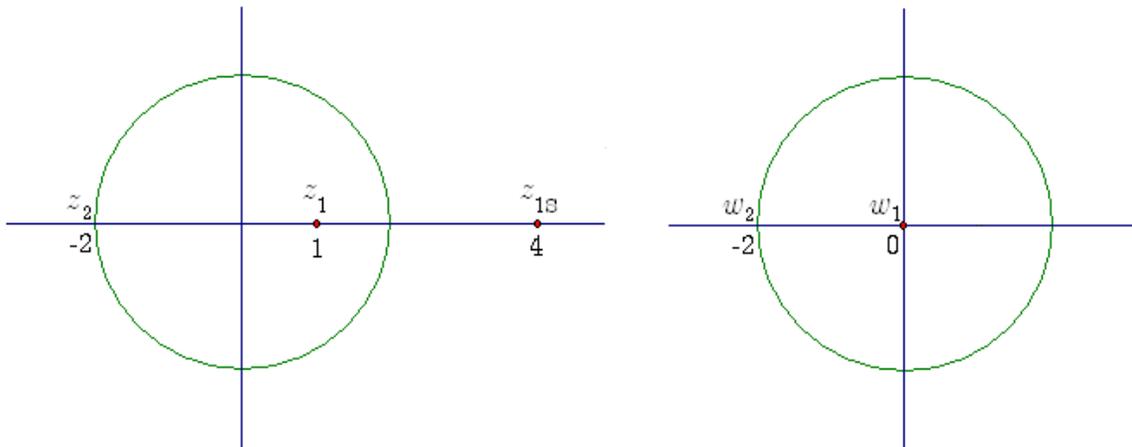
$$\alpha\gamma z_3 w_2 - \alpha\gamma z_3 w - \alpha\gamma w_2 z + \alpha\gamma z w = \beta\theta w_3 z_1 - \beta\theta z_1 w - \beta\theta w_3 z + \beta\theta z w$$

$$w(\alpha\gamma z - \alpha\gamma z_3 + \beta\theta z_1 - \beta\theta z) = z(\alpha\gamma w_2 - \beta\theta w_3) + (\beta\theta w_3 z_1 - \alpha\gamma z_3 w_2)$$

$$w = \frac{z(\alpha\gamma w_2 - \beta\theta w_3) + (\beta\theta w_3 z_1 - \alpha\gamma z_3 w_2)}{\alpha\gamma z - \alpha\gamma z_3 + \beta\theta z_1 - \beta\theta z}$$

$$w = \frac{z(\alpha\gamma w_2 - \beta\theta w_3) + (\beta\theta w_3 z_1 - \alpha\gamma z_3 w_2)}{z(\alpha\gamma - \beta\theta) + (\beta\theta z_1 - \alpha\gamma z_3)}$$

Con el siguiente ejemplo, se determinará a la transformación de Möbius que proyecta el disco $|z| < 2$ en $|w| < 2$ y que lleva el 1 al origen, dejando invariante el -2.



Por definición de punto inverso, se puede conocer la imagen (punto simétrico) de z_1 , ya que

$$z_1 z_{1s} = 2^2, \quad z_1 = 1$$

$$z_{1s} = 4$$

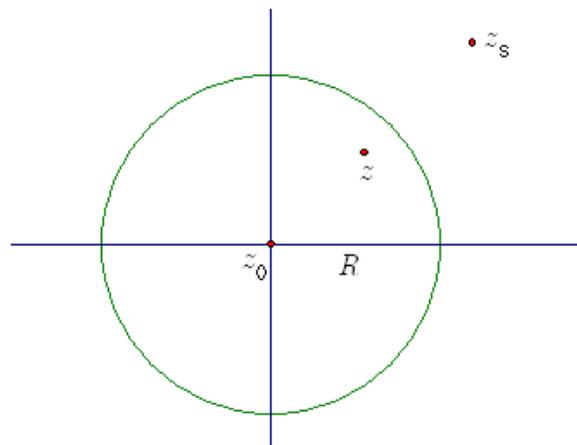
así,

$$z_1 = 1 \mapsto w_1 = 0$$

$$z_2 = -2 \mapsto w_2 = -2$$

$$z_{1s} = 4 \mapsto w_{1s} = ?$$

Al considerar



Por la definición de punto inverso,

$$(z - z_0)(z_s - z_0) = R^2$$

$$z_0 = 0 \Rightarrow z z_s = R^2$$

pero z hace las veces de w_1 y z_s las veces de w_{1s} , de qué que

$$w_{1s} = \frac{R^2}{0} = \infty$$

Por lo que el simétrico de cero en la circunferencia centrada es ∞ , así

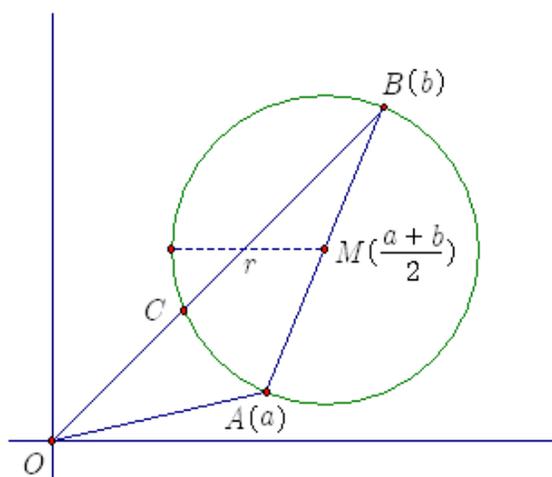
$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 0 \\ -2 &\mapsto -2 \\ 4 &\mapsto \infty, \text{ por la razón cruzada} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z, -2; 1, 4) &= (w, -2; 0, \infty) \\ \frac{z-1}{z-4} \frac{-2-4}{-2-1} &= \frac{w-0}{w-\infty} \frac{-2-\infty}{-2-0} \\ 2 \frac{z-1}{z-4} &= -\frac{w}{2} \\ w &= -4 \frac{z-1}{z-4} = T(z) \end{aligned}$$

Anexo

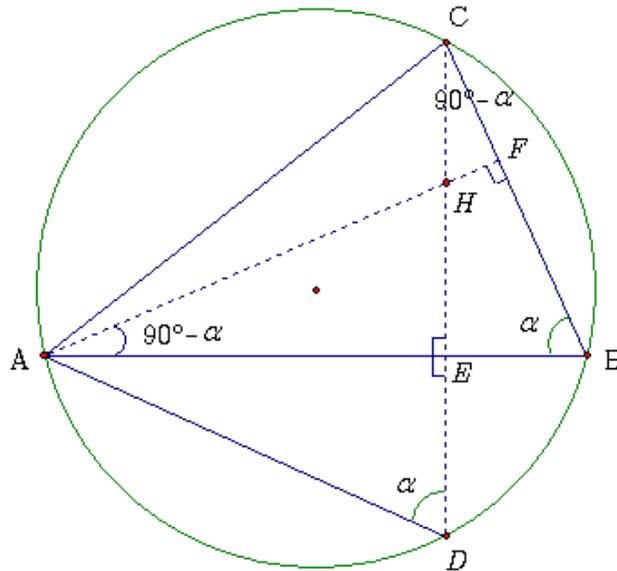
Potencia de un punto con respecto al círculo

Se demuestra que la potencia del punto O respecto a un círculo de centro M y radio r es $OM^2 - r^2$



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OC} * \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} * \overrightarrow{OB} \quad \text{como } AB \text{ es diámetro de la circunferencia, y } \angle BCA = \frac{\pi}{2} \text{ por} \\
 &\quad \text{ser la proyección de } OA \text{ sobre } OB, \text{ se aplica el producto escalar de vectores} \\
 &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) * (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) \\
 &= \overrightarrow{OM} * \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM} * \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} * \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} * \overrightarrow{MB}, \text{ por la multiplicación de un} \\
 &\quad \text{mismo escalar } \overrightarrow{OM} * \overrightarrow{OM} = OM^2 \\
 \overrightarrow{OC} * \overrightarrow{OB} &= OM^2 + \overrightarrow{OM} * (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + \overrightarrow{MA} * \overrightarrow{MB} \quad \text{como } \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = 0 \text{ se obtiene} \\
 &= OM^2 + \overrightarrow{MA} * \overrightarrow{MB} \\
 &= OM^2 + \left(a - \frac{a+b}{2}\right) * \left(b - \frac{a+b}{2}\right) \\
 &= OM^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right) * \left(\frac{-a+b}{2}\right) \\
 &= OM^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right) * \left(\frac{a-b}{2}\right), \quad \text{para } \frac{a-b}{2} \in \mathbb{C} \text{ y cuyo módulo es } \left(\frac{a-b}{2}\right) = r \\
 &= OM^2 - r^2.
 \end{aligned}$$

Reflexión del ortocentro sobre los lados.



La reflexión del ortocentro sobre cada uno de los lados del triángulo cae sobre el circuncírculo.

Se desarrollará la prueba para el lado AB . En este caso se considera la altura de A como la de C , al prolongar la altura de C , se forman los triángulos rectángulos $\triangle AFB$ y $\triangle BEC$ que son semejantes. Dado que $\angle ABC = \alpha$ y $\angle AFB = 90^\circ$ y por el teorema de los ángulos internos de un triángulo, se tiene que $\angle FAB = 90^\circ - \alpha$. Del triángulo $\triangle AEC$, se sabe que $\angle AEC = 90^\circ$, por lo que $\angle AED = 90^\circ$, es evidente que $\angle ADC = \angle ABC = \alpha$, ya que subtenden el mismo arco, por lo que de $\triangle AED$, el $\angle DAE = 90^\circ - \alpha$; en este momento es más claro que $\triangle AEH$ y $\triangle AED$ son congruentes, por lo que la reflexión de H con respecto al lado AB es D , equivale a decir que E es punto medio de $[D, H]$. De forma análoga se procede para los lados restantes.

Condición que debe cumplir toda transformación de Möbius.

Se demostrará que en toda transformación de Möbius se tiene:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

a)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \infty \quad \text{si } c = 0$$

b)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \frac{a}{c}$$

y

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} T(z) = \infty \quad \text{si } c \neq 0$$

Prueba:

a)

$$\text{si } c = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{d} = \infty$$

b)

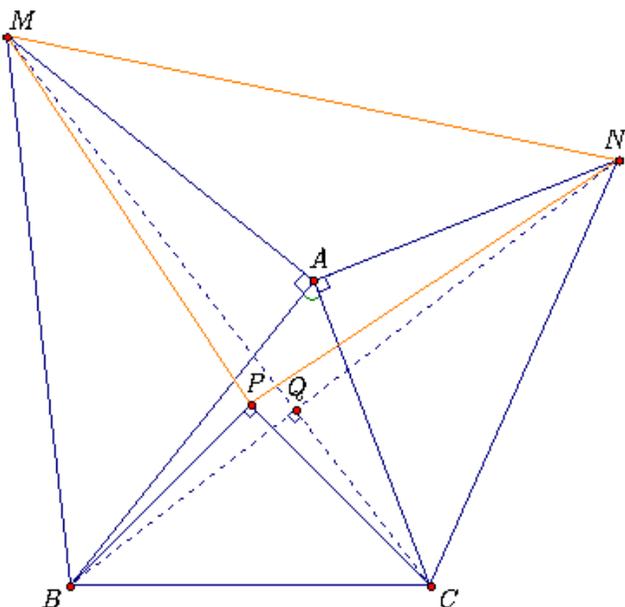
$$\text{si } c \neq 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

y

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a - \frac{b}{\frac{d}{c}}}{c - \frac{d}{\frac{d}{c}}} = \frac{ad - bc}{c - c} = \infty \quad \text{ya que } (ad - bc \neq 0)$$

Aplicación de los números complejos a la geometría en algunos problemas de olimpiadas de matemática.

1. (Irán, 1999) Sea el triángulo ABC , con ángulo en B como C mayor que $\frac{\pi}{4}$. Se construyen exteriormente los triángulos rectángulos isósceles ABM y ACN , e interiormente el triángulo rectángulo isósceles BCP , de manera que $\angle BAM = \angle CAN = \angle BPC = \frac{\pi}{2}$. Probar que el triángulo MNP también es rectángulo isósceles.



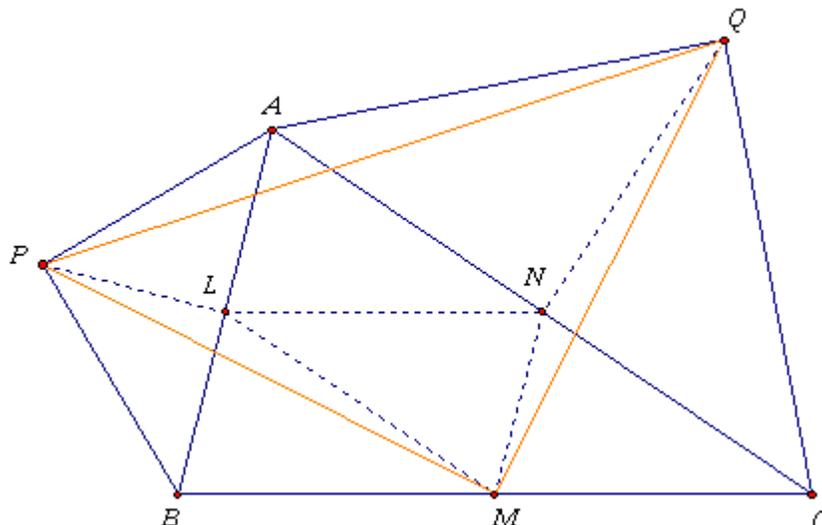
Es fácil ver que los triángulos ABN y ACM son congruentes por el criterio LAL; luego $BN = CM$. Además, puesto que se puede convertir un triángulo en otro mediante una rotación de centro A y ángulo $\frac{\pi}{2}$ (en el sentido antihorario), se sigue que BN y CM son perpendiculares. Si Q es su punto de intersección, entonces el cuadrilátero $BCQP$ es cíclico, de donde $\angle PBQ = \angle PCQ$. Por lo tanto, los triángulos BPN y CPM son congruentes, pues $PB = PC$, $CM = BN$ y $\angle PBN = \angle PCM$. En consecuencia $PM = PN$. Finalmente, dado que se puede transformar uno de estos triángulos en el otro mediante una rotación de centro P y ángulo $\frac{\pi}{2}$ (en el sentido antihorario), se puede concluir que PM y PN son perpendiculares, esto es, el triángulo MPN es rectángulo isósceles.

Ahora, se considerará la figura en el plano complejo, y se colocará el origen en el punto P . Sin pérdida de generalidad se supondrá que A , B y C se recorren en sentido antihorario. A los puntos A , B , C , M y N se le asignan los números complejos a , b , c , m y n , respectivamente. Si el punto P está en el origen, entonces $c = bi$.

$$\begin{aligned} n &= a + \vec{an}, & \vec{an} &= i(\vec{ac}) \\ &= a + i(\vec{ac}), & (\vec{ac}) &= (c - a) \\ &= a + i(c - a), & c &= bi \\ &= a + i(bi - a) \end{aligned}$$

Así mismo, $m = a + i(a - b)$. Luego $in = ia - (bi - a) = a + i(a - b) = m$.

2. (Irlanda, 1996) Dado el triángulo ABC , se construyen exteriormente los triángulos isósceles ABP y ACQ , con $\angle APB = \angle AQC = \frac{\pi}{2}$. Sea M el punto medio de BC . Mostrar que el triángulo MPQ es también rectángulo isósceles.



Sean L y N los puntos medios respectivos de AB y AC . Es fácil ver que $\angle BLM = \angle CNM$. Además, es claro que $AL = BL = PL$, y $AN = CN = QN$. Entonces los triángulos LPM y MQN son congruentes, ya que $PL = MN$, $LM = NQ$, y $\angle MLP = \frac{\pi}{2} + \angle BLM$, $\angle MNQ = \frac{\pi}{2} + \angle CNM$. Por tanto, $MP = MQ$. Finalmente, dado que PL y AB son perpendiculares, y que AB y MN son paralelas, se tiene que PL y MN son perpendiculares; asimismo se ve que QN y LM son perpendiculares. En consecuencia MP y MQ también son perpendiculares, esto es, el triángulo MPQ es rectángulo isósceles.

Ahora se considerará a la figura en el plano complejo, y se le asignará a los puntos A, B, C, L, M, N, P y Q los complejos a, b, c, l, m, n, p y q , respectivamente. Sin perder generalidad se supondrá que el triángulo se recorre en sentido antihorario.

Al rotar en $\frac{\pi}{2}$ el segmento $[LA]$, se obtiene el segmento $[LP]$, vectorialmente, se tiene

$$\begin{aligned} \vec{lp} &= i\vec{la} \\ p - l &= i(a - l) \\ p &= l + i(a - l), \quad l = \frac{a + b}{2} \\ p &= \frac{a + b}{2} + i\left(a - \frac{a + b}{2}\right) \\ p &= \frac{a + b}{2} + i\left(\frac{a - b}{2}\right) \end{aligned}$$

Con la misma idea, de que al rotar el segmento $[NC]$ en $\frac{\pi}{2}$, se obtiene el segmento $[NQ]$, se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{nq} &= i\vec{nc} \\ q - n &= i(c - n) \\ q &= n + i(c - n), \quad n = \frac{a + c}{2} \\ q &= \frac{a + c}{2} + i\left(c - \frac{a + c}{2}\right) \\ q &= \frac{a + c}{2} - i\left(\frac{a - c}{2}\right)\end{aligned}$$

Dado que M es punto medio de $[BC]$, $m = \frac{b + c}{2}$, y en base a esto,

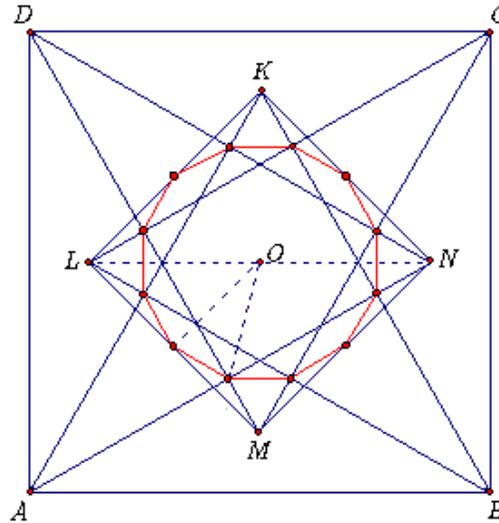
$$\begin{aligned}\vec{mp} &= p - m \\ &= \frac{a + b}{2} + i\left(\frac{a - b}{2}\right) - \frac{b + c}{2} \\ &= \frac{a - c}{2} + i\left(\frac{a - b}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{mq} &= q - m \\ &= \frac{a + c}{2} - i\left(\frac{a - c}{2}\right) - \frac{b + c}{2} \\ &= \frac{a - b}{2} - i\left(\frac{a - c}{2}\right)\end{aligned}$$

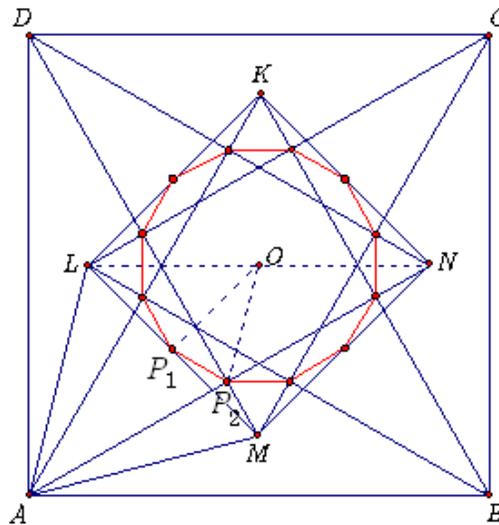
Al sacar el módulo, se garantiza que son iguales e iguales a $\sqrt{\frac{2a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac}{4}}$, resta verificar que al rotar uno de los vectores, se obtiene el otro.

$$\begin{aligned}i(mq) &= i\left(\frac{a - b}{2} - i\left(\frac{a - c}{2}\right)\right) \\ &= \frac{a - c}{2} + i\left(\frac{a - b}{2}\right) \\ &= mp\end{aligned}$$

3. (IMO 1977) Sobre los lados del cuadrado $ABCD$, se construyen interiormente los triángulos equiláteros ABK , BCL , CDM y DAN . Probar que los puntos medios de los cuatro segmentos KL , LM , MN , NK , junto con los puntos medios de los ocho segmentos AK , BK , BL , CL , CM , DM , DN , AN , son los 12 vértices de un dodecágono regular.



Se denotará a los puntos medios de los segmento LM , AN , BL , MN , BK , CM , NK , CL , DN , KL , DM , AK , por P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6 , P_7 , P_8 , P_9 , P_{10} , P_{11} , P_{12} , respectivamente.



Se probará que el dodecágono $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{12}$ es regular. De $BL = BA$, se tiene que $\triangle ABL$ es isósceles, por ángulos complementarios $\angle ABL = 30^\circ$, en consecuencia $\angle BAL = 75^\circ$ y es claro que $\angle DAL = 15^\circ$, de forma similar $\angle DAM = 75^\circ$ por ser AM y AL las bases de triángulos isósceles congruentes, y de allí que $\angle LAM = \angle DAM - \angle DAL = 60^\circ$.

- BL es mediatriz del segmento AK ; lo cual implica que

$$AL = LK; \tag{3.5}$$

- DM es mediatriz del segmento AN ; lo cual implica que

$$AM = MN; \quad (3.6)$$

$\triangle ALK$ y $\triangle AMN$ son congruentes, ya que es aplicable el criterio LLL. La argumentación es la siguiente, $AK = AN$ porque son las longitudes de triángulos equiláteros congruentes, de $\triangle BKL$ y $\triangle DMN$ se sabe que $BK = BL = DM = DN$, por consiguiente, se está en presencia de triángulos isósceles, es decir, $KL = MN$, luego por (3.5) y (3.6), se puede decir que $\triangle BKL \approx \triangle DMN$. Como resultado inmediato, se tiene que $\triangle AML$ es equilátero y que $KLMN$ es un cuadrado.

De $\triangle OP_1L$ los ángulos en O como en L son iguales e iguales a 45° , es decir que los lados subtendidos son iguales, y como P_1 es punto medio del segmento LM , se tiene que $OP_1 = \frac{LM}{2}$, ahora de OP_2 es base media de $\triangle ALN$, porque O es punto medio de LN y P_2 es punto medio de AN , de ello que $OP_2 = \frac{AL}{2}$ y $OP_2 \parallel AL$. Así, $OP_1 = OP_2$, $\angle P_1OP_2 = \angle P_1AL = 30^\circ$ y $\angle P_2OM = \angle LAD = 15^\circ$, por simetría se pueden efectuar las construcciones restantes, para garantizar que los puntos están igualmente espaciados.

Ahora, se considera a la figura anterior en el plano complejo. Sin perder generalidad, se asignarán a los puntos A, B, C, D los números complejos $-1 - i, 1 - i, 1 + i, -1 + i$, respectivamente, entonces los números correspondientes a K, L, M, N son $(\sqrt{3} - 1)i, -(\sqrt{3} - 1), -(\sqrt{3} - 1)i, (\sqrt{3} - 1)$, respectivamente.

En base a las hipótesis y la suposición anterior, se tiene:

$$P_1 = \frac{LM}{2}, P_2 = \frac{AN}{2}, P_3 = \frac{BL}{2}, P_4 = \frac{MN}{2}, P_5 = \frac{BK}{2}, P_{12} = \frac{AK}{2}.$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{-(\sqrt{3}-1) - i(\sqrt{3}-1)}{2}, & \text{y su conjugado es} & P_{10} = \frac{-(\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}-1)}{2} \\ P_2 &= \frac{(\sqrt{3}-2) - i}{2}, & \text{y su conjugado es} & P_9 = \frac{(\sqrt{3}-2) + i}{2} \\ P_3 &= \frac{-(\sqrt{3}-2) - i}{2}, & \text{y su conjugado es} & P_8 = \frac{-(\sqrt{3}-2) + i}{2} \\ P_4 &= \frac{(\sqrt{3}-1) - i(\sqrt{3}-1)}{2}, & \text{y su conjugado es} & P_7 = \frac{(\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}-1)}{2} \\ P_5 &= \frac{1 + i(\sqrt{3}-2)}{2}, & \text{y su conjugado es} & P_6 = \frac{1 - i(\sqrt{3}-2)}{2} \\ P_{12} &= \frac{-1 + i(\sqrt{3}-2)}{2}, & \text{y su conjugado es} & P_{11} = \frac{-1 - i(\sqrt{3}-2)}{2} \end{aligned}$$

En vista que P_1, P_4, P_7, P_{10} , son de la forma $\frac{\pm(\sqrt{3}-1) \pm i(\sqrt{3}-1)}{2}$; P_2, P_3, P_8, P_9 , son de la forma $\frac{\pm(\sqrt{3}-2) \pm i}{2}$; P_5, P_6, P_{11}, P_{12} , son de la forma $\frac{\pm 1 \pm i(\sqrt{3}-2)}{2}$, se ahorrara un poco de tiempo en verificar

$$|OP_1| = |OP_2| = \dots = |OP_{12}|$$

Por este hecho, se seleccionará en particular uno de cada caso:

$$\begin{aligned}
 |OP_1| &= \sqrt{\left(\frac{-(\sqrt{3}-1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{-(\sqrt{3}-1)}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1}{4}} \\
 &= \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{4}} \\
 &= \sqrt{2-\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |OP_2| &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{3-4\sqrt{3}+4+1}{4}} \\
 &= \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{4}} \\
 &= \sqrt{2-\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |OP_5| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1+3-4\sqrt{3}+4}{4}} \\
 &= \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{4}} \\
 &= \sqrt{2-\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

Ahora, se debe verificar que al rotar $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ el punto P_1 , se obtiene el punto P_2 , es decir

$$\begin{aligned}
 P_1 e^{i\frac{\pi}{6}} &= \left(\frac{-(\sqrt{3}-1) - i(\sqrt{3}-1)}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \\
 &= \frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}-1)}{4} + i \left(\frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}-1)}{4} \right) \\
 &= \frac{-3 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 + i(-3 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1)}{4} \\
 &= \frac{(2\sqrt{3}-4) - 2i}{4} \\
 &= \frac{(\sqrt{3}-2) - i}{2}
 \end{aligned}$$

Si se utiliza al eje imaginario como eje de simetría, se tiene que P_3 es punto simétrico de P_2 , y P_4 es punto simétrico de P_1 , verificar que al rotar $\frac{\pi}{6}$ el punto P_1 se obtiene el punto P_2 , es equivalente a rotar $\frac{\pi}{6}$ el punto P_3 para obtener el punto P_4 .

De la misma manera, al considerar el eje real como eje de simetría, se tiene que los puntos simétricos de P_1, P_2, P_3, P_4 son P_{10}, P_9, P_8, P_7 respectivamente, en otra palabras son los conjugados. Para cerrar el ciclo hay que verificar que al rotar $-30^\circ = -\frac{\pi}{6}$ el punto P_1 , se obtiene el punto P_{12} ,

$$\begin{aligned}
 P_1 e^{-i\frac{\pi}{6}} &= \left(\frac{-(\sqrt{3}-1) - i(\sqrt{3}-1)}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) \\
 &= \frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}-1)}{4} + i \left(\frac{(\sqrt{3}-1) - \sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{4} \right) \\
 &= \frac{-3 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3}-1 - 3 + \sqrt{3})}{4} \\
 &= \frac{-2 + i(2\sqrt{3}-4)}{4} \\
 &= \frac{-1 + i(\sqrt{3}-2)}{2}
 \end{aligned}$$

Nuevamente, por simetría con respecto al eje imaginario, se sabe que P_1 tiene como simétrico a P_4 y que P_{12} tiene como simétrico a P_5 , ahora por simetría con respecto al eje real, se tiene que el punto simétrico de P_5 es P_6 , y el de P_{12} es P_{11} , por lo tanto, se trata de un dodecágono regular.

Antecedente histórico de los números complejos y la geometría.

El tiempo y la historia son, desde luego, totalidades completas y sin suturas, lo mismo que el continuo matemático, y cualquier subdivisión en períodos es obra de la mano del hombre; pero al igual que un sistema de coordenadas puede ser útil en geometría, así también la subdivisión de los acontecimientos en eras y períodos resulta ser conveniente en la historia.

Nicolas Chuquet (1500 d. C)

Escribió una obra titulada *Triparty en la science des hommes*, de Chuquet no se sabe nada salvo que nació en París, se hizo bachiller en medicina y ejerció en Lyon.

La segunda mitad de la última parte del *Triparty* está dedicada a la resolución de ecuaciones. Al estudiar ecuaciones de la forma $ax^m + bx^{m+n} = cx^{m+2n}$, donde los coeficientes y los exponentes son todos positivos, se encontró con que en algunas casos habría raíces imaginarias, limitándose a añadir en estos casos que "el nombre est ineperible".

Luca Pacioli (1445 - 1509 d. C)

El libro *la Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita* del fraile Luca Pacioli eclipsó el *Triparty* de una manera tan completa que las historias antiguas del álgebra solían pasar de *Liber Abaci* de 1202 a la *Summa* de 1494, sin mencionar a la obra de Chuquet ni ninguna otra intermedia.

El libro consiste en una impresionante recopilación de material de 4 campos distintos (sin indicar generalmente las fuentes de donde está tomada la información): aritmética, álgebra, geometría euclídea muy elemental y contabilidad de doble entrada.

La *summa*, que fue escrita en lengua vernácula como el *Triparty*, resulta ser un compendio tanto de otras obras no publicadas que había compuesto anteriormente el mismo autor, como de conocimientos generales de la época. La parte relativa a la aritmética trata, con mucho detalle, diversos artificios para multiplicar y para hallar raíces cuadradas, y en la sección dedicada al álgebra incluye las soluciones usuales de las ecuaciones lineales y cuadráticas. Pacioli creía, haciendo eco con ello a una idea que había formulado ya Omar Khayyam, que las ecuaciones cúbicas no podrían ser resueltas algebraicamente.

La parte geométrica carece de importancia, sin embargo en la última parte que contiene aspectos comerciales, fue con la que destacó, al grado que lo hicieron popular, tal es el caso que se considera al autor como el padre de la moderna contabilidad de doble entrada.

En el año 1545, se divulgó la solución no sólo de la ecuación cúbica, sino también de la cuártica, gracias a la publicación del *Ars magna* de Jerónimo Cardano (1501 - 1576 d. C). Un avance tan sorprendente e inesperado como éste produjo un impacto tan fuerte en el mundo de los algebristas, en el año 1545 se suele considerar a menudo como el que marca el comienzo del período moderno en la matemática. Hay que advertir inmediatamente, sin embargo, que Cardano (o Cardan) no fue el descubridor original de la solución de la ecuación cúbica ni de la cuártica, tal como él mismo admite francamente en su libro. La sugerencia para resolver la cúbica, la obtuvo de Niccolo Tartaglia (1500 - 1557 d. C), mientras que la solución de la cuártica fue descubierta por primera vez por el antiguo secretario de Cardano, Ludovico Ferrari (1522 - 1565 d. C). Lo que no menciona Cardano en el *Ars magna* es el juramento solemne que le había hecho a Tartaglia, en el sentido de que no desvelaría el secreto, ya que éste intentaba labrarse su reputación como matemático publicando la solución de la cúbica como la parte

culminante de su futuro trabajo de álgebra.

Tartaglia, publicó una traducción de Arquimides (1543) derivada del traductor William de Moerbeke, dejando la impresión de que era suya, y más tarde en su obra *Quesiti et inventioni diverse* (Venecia, 1546), da la ley del plano inclinado, derivada presumiblemente de la obra de Jordano Nemorario, pero sin atribuirle adecuadamente a su verdadero autor. De hecho, es posible incluso que el mismo Tartaglia obtuviese la pista conducente a la resolución de la cúbica de alguna fuente anterior. Cualquiera que sea la verdad en el fondo de la controversia, complicada y un tanto sórdida, entre los partidarios de Cardano y los de Tartaglia, lo que está claro es que ninguno de los dos protagonistas fue el primero en hacer el descubrimiento. El héroe del caso fue evidentemente un personaje cuyo nombre apenas recuerda nadie hoy, Scipione del Ferro (1465 - 1526 d. C), que fue profesor de matemática en Bolonia, una de las más antiguas universidades medievales y una escuela de gran tradición matemática. Cómo y cuándo hizo del Ferro su asombroso descubrimiento no se sabe, pero si se sabe que no publicó la solución, sino que se la reveló antes de su muerte a uno de sus alumnos, Antonio María Fior (o Floridus, en forma latinizada), un matemático mediocre.

Alguna noticia sobre la existencia de una solución algebraica de la ecuación cúbica debió filtrarse, al parecer, y Tartaglia nos dice que al tener conocimiento de la posibilidad de resolverla, se le ocurrió dedicarse intensamente a descubrir el método por sí mismo. Ya fuera independientemente o sobre la base de alguna sugerencia, lo cierto es que Tartaglia consiguió aprender, hacia el año 1541, a resolver ecuaciones cúbicas. Cuando se extendió esta noticia, se organizó un desafío matemático entre Fior y Tartaglia. Cada uno de los dos contendientes propondría treinta cuestiones al otro para resolverlas en un intervalo de tiempo fijo. Cuando llegó el día de decidir el resultado, Tartaglia había resuelto todas las cuestiones propuestas por Fior, mientras que éste no había conseguido resolver ni una sola de las propuestas por su contrincante. La explicación de este resultado es relativamente sencilla. Hoy consideramos a todas las ecuaciones cúbicas como esencialmente un tipo único y susceptible por lo tanto de ser tratadas por un método de resolución unificado, pero en la época de Tartaglia, en que los coeficientes negativos todavía no se utilizaban prácticamente, había tantos tipos distintos de cúbicas como posibilidades en los signos positivos o negativos de los coeficientes, Fior sólo sabía resolver ecuaciones del tipo en el que son "los cubos y las raíces igual a un número".

No tardaron en llegar a Cardano las noticias del triunfo de Tartaglia, e inmediatamente invitó a su casa al ganador, sugiriéndole que arreglaría las cosas para presentarle a un personaje que lo patrocinaría en el futuro. Tartaglia se encontraba sin ningún tipo de apoyo importante, debido quizá en parte a sus dificultades con el habla. De pequeño había recibido un sablazo en la caída de Brescia en manos de los franceses, en 1512, lo que le impedía hablar correctamente. Este hecho le ganó el apodo de Tartaglia o tartamudo, nombre que él mismo usó más tarde sin ninguna inhibición en lugar de su nombre propio Niccolo Fontana.

El *Ars magna* fue el enorme estímulo que dieron a la investigación algebraica en distintas direcciones. El resultado de este trabajo iba a producir mucha y muy buena matemática, pero llevaría inevitablemente a una conclusión, y es que la solución de cúbica fue que condujo a las primeras consideraciones significativas acerca de un nuevo tipo de número. Los números irracionales habían sido aceptados ya con normalidad en la época de Cardano, a pesar de que no estaban fundamentados aún de una manera rigurosa, puesto que se les podía aproximar fácilmente por números racionales. Los números negativos producían más dificultades puesto que no se les podía aproximar en ningún sentido natural por números positivos, pero la idea

de sentido o de dirección sobre una recta los hacía plausibles en tanto que magnitud orientada. De hecho, Cardano los utilizó, a pesar de llamarlos *numeri ficti*. Si un algebrista decide negar la existencia de los números irracionales o los negativos, simplemente tendría que decir, como hacían los antiguos griegos, que las ecuaciones $x^2 = 2$ o $x + 2 = 0$ son insolubles. De manera análoga habían podido evitar los algebristas los números imaginarios diciendo sencillamente que las ecuaciones del tipo $x^2 + 1 = 0$ son insolubles. No parecía haber ninguna necesidad de animales tales como las raíces cuadradas de números negativos. Pero con la solución algebraica de la cúbica la situación cambió radicalmente. Siempre que las tres raíces de una ecuación cúbica sean reales y no nulas, la fórmula de Cardano - Tartaglia conduce inevitablemente a raíces cuadradas de números negativos. La meta buscada se sabía que era un número real, pero se veía cómo alcanzarla sin entender el comportamiento de los "números imaginarios".

En esta situación de perplejidad, otro importante algebrista italiano, Rafael Bombelli (1526 - 1573 d. C), tuvo lo que él mismo llamó "una idea loca", puesto que todo el asunto "parecía basarse en sofística". Los dos radicandos bajo las raíces cúbicas sólo difieren en un signo. Bombelli tuvo la feliz idea de imaginar que los radicales mismos podrían estar relacionados entre sí de la misma manera que lo están los radicandos, es decir, como diríamos ahora, son complejos conjugados. Por medio de su ingenioso razonamiento venía a mostrar Bombelli el importante papel que estaban destinados a jugar el futuro de los números complejos conjugados, pero en aquel momento la observación en cuestión no tenía la menor utilidad para la tarea concreta de resolver ecuaciones cúbicas, puesto que Bombelli necesitaba conocer de antemano una de las raíces.

René Descartes (1596 - 1650 d. C)

No está claro el hecho de si Descartes había descubierto ya su geometría analítica, en toda su generalidad, para el año 1628 o no, pero en cualquier caso, la fecha concreta de la invención de la geometría cartesiana no puede ser muy posterior a ésta. Por esta misma época Descartes abandonó Francia y se instaló en Holanda, donde vivió los siguientes veinte años de su vida. Al cabo de tres o cuatro años de establecerse allí, un amigo holandés, un estudioso de los clásicos, llamó su atención sobre el problema de las tres y cuatro rectas, de Pappus. Partiendo de la impresión errónea de que los antiguos habían sido incapaces de resolver este problema, Descartes le aplicó los nuevos métodos y consiguió resolverlo sin dificultad. Esto le hizo darse cuenta claramente de la potencia y la generalidad de su punto de vista. y en consecuencia decidió escribir su famosa obra *La géométrie*, cuya lectura permitió conocer la geometría analítica a sus contemporáneos.

Hoy en día la geometría cartesiana es sinónimo de geometría analítica, pero la finalidad principal que perseguía Descartes estaba muy lejos de la que persiguen los libros de texto modernos. La motivación general queda determinada por la primera frase del libro:

Cualquier problema de geometría puede reducirse fácilmente a términos tales que el conocimiento de las longitudes de determinados segmentos es suficiente para su construcción.

En el apéndice de la *géométrie*, Descartes se había ocupado de discutir los méritos que corresponden al álgebra y a la geometría, sin llegar a inclinarse a favor de una o de la otra. Acusaba a la geometría de apoyarse excesivamente de diagramas y figuras que llegan a fatigar de manera innecesaria la imaginación, y a la vez acusaba al álgebra de ser un arte confuso y oscuro que desconcierta la mente. El objetivo de su mente era doble: 1) el de liberar en lo posible a la geometría, a través de los métodos algebraicos, del uso de las figuras, y 2) darle un significado concreto a las operaciones del álgebra por medio de su interpretación geométrica.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716 d. C) nació en Leipzig, en cuya Universidad ingreso a los quince años y debuto a los diecisiete su bachillerato en artes. Estudió teología, derecho, filosofía y matemática en la Universidad, y se le ha considerado a veces como el último erudito que consiguió unos conocimientos universales para su época. A la edad de veinte años estaba ya preparado para obtener el grado de doctor en derecho, pero le fue denegado por la Universidad debido a su juventud. En vista de ello abandonó Leipzig y consiguió su doctorado en la Universidad de Altdorf, en Nuremberg.

Entre las contribuciones menores de Leibniz están las que se refieren a los números complejos, en una época en que casi habían sido olvidados. Leibniz factorizó la expresión $x^4 + a^4$ de la forma

$$(x + a\sqrt{\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{\sqrt{-1}})(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}})$$

y demostró que $\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}$, dando así descomposición de un número real positivo en términos de números imaginarios que sorprendió a sus contemporáneos. Sin embargo, Leibniz no dio la fórmula para las raíces cuadradas de un número complejo dadas en la forma compleja.

Abraham De Moivre (1667 - 1754 d. C) fue uno de los más importantes en aportar a la teoría de probabilidades.

De Moivre publicó en 1730 la *Miscellanea analytica* que es considerada importante no sólo desde el punto de vista de la teoría de probabilidades, sino también del desarrollo del aspecto analítico de la trigonometría. El teorema de De Moivre $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$ no viene dado explícitamente, pero está perfectamente claro a partir de su obra sobre ciclometría y de otros contextos que el autor estaba muy familiarizado con esta relación, probablemente tan pronto desde 1707. En un artículo publicado en 1707 en las *Philosophical Transactions*, escribe De Moivre que

$$\frac{1}{2}(\operatorname{sen} n\theta + \sqrt{-1} \cos n\theta)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} n\theta - \sqrt{-1} \cos n\theta)^{\frac{1}{n}} = \operatorname{sen} \theta$$

y su *Miscellanea analytica* de 1730 utiliza una fórmula equivalente a

$$(\cos \theta \pm i \operatorname{sen} \theta)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi \pm \theta}{n} \pm i \operatorname{sen} \frac{2k\pi \pm \theta}{n}$$

para descomponer $x^{2n} + 2x \cos n\theta + 1$ en factores cuadráticos de la forma $x^2 + 2x \cos \theta + 1$, Y de nuevo en otro artículo de las *Philosophical Transactions* de 1739 halla las raíces n-ésimas del binomio imposible $a + \sqrt{-b}$ por el procedimiento que usamos ahora de tomar la raíz n-ésima del módulo, dividir por n el argumento y sumar múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$.

Uno de los motivos que llevó a De Moivre a interesarse en la factorización de $x^{2n} + 2x \cos n\theta + 1$ en factores cuadráticos fue el deseo completar algunos de los trabajos de Roger Cotes (1682 - 1716 d. C) sobre integración de fracciones racionales por descomposición de fracciones parciales. La vida de Cotes es un ejemplo trágico de una carrera científica muy prometedora interrumpida repentinamente por una muerte prematura; como Newton comentó en cierta ocasión: "si viviera Cotes podríamos haber sabido algo".

Desde el Renacimiento hasta el siglo XVIII, el centro de la actividad matemática se desplazó repetidas veces: de Alemania a Italia, después a Francia, a Holanda, a Inglaterra y si las persecuciones religiosas no hubieran forzado a la familia Bernoulli a huir de Antwerp, Bélgica podría haber ocupado este puesto a su vez, pero lo cierto es que dicha familia emigró a Basilea, y como consecuencia de ello Suiza el lugar de nacimiento de muchas de las figuras más importantes de la matemática de finales del siglo XVII y comienzos del XVIII. El matemático más importante que produjo Suiza durante esta época (o en cualquiera de su historia) fue Leonhard Euler (1707 - 1783), que nació en Basilea.

El padre de Euler era un pastor calvinista que, lo mismo que el padre de Jacques Bernoulli, esperaba que su hijo siguiera también el camino del sagrado ministerio. El mucho, sin embargo, estudió con Jean Bernoulli junto a sus hijos Nicolaus y Daniel, y en este ambiente favorable descubrió su vocación. El viejo Euler también tenía una buena preparación matemática, habiendo sido discípulo de Jacques Bernoulli en su juventud, y colaboró en la instrucción de su hijo en los elementos básicos de la matemática, a pasar de mantener la esperanza de que Leonhard siguiese una carrera teológica. En cualquier caso, el joven Euler recibió una educación muy completa, ya que al estudio de la matemática se unió el de la teología, la medicina, la astronomía, la física y las lenguas orientales. Esta amplitud de conocimientos le resultó muy útil cuando en 1727 recibió noticias procedentes de Rusia en el sentido de que se convocaba un puesto en la sección de medicina de la Academia de San Petersburgo, adonde se habían trasladado dos años antes los jóvenes hermanos Bernoulli como profesores de matemática. Esta importante institución había sido fundada pocos años antes por Catalina I, siguiendo las líneas trazadas por su difunto esposo Pedro el Grande, aconsejado por Leibniz. Por recomendación de los Bernoulli, que eran dos de las más brillantes lumbreras durante los primeros tiempos de la Academia, se llamó a su amigo Euler como miembro de la sección de fisiología y medicina. Desgraciadamente, el mismo en que Euler llegaba a Rusia moría la emperatriz Catalina, y la casi recién nacida Academia estuvo a punto de sucumbir con ella, debido a que los nuevos gobernantes mostraron menos simpatía por los sabios extranjeros que la que habían manifestado Pedro y Catalina.

De una u otra manera la Academia consiguió sobrevivir, sin embargo, y Euler se encontró, en 1730, ocupando la cátedra de filosofía natural, en vez de en la sección de medicina. Su amigo Nicolaus Bernoulli había muerto de fiebres en San Petersburgo un año antes de la llegada de Euler, y en 1733 Daniel Bernoulli abandonó Rusia para ocupar la cátedra de matemática en la Universidad de Basilea. Así pues, Euler se convirtió en el matemático más importante de Academia a la edad de veintiséis años. Se casó y organizó su vida para dedicarse diligentemente a la investigación matemática y a crear una familia que terminó por incluir a trece hijos. La Academia de San Petersburgo había comenzado a publicar una revista de investigación, los *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, y casi desde sus comienzos recibió un verdadero torrente de artículos matemáticos procedentes de Euler. Los editores no tenían por qué preocuparse de una eventual escasez de material que publicar en tanto la pluma de Euler permaneciese. En cierta ocasión dijo el académico Francés François Arago que Euler podía calcular sin ningún esfuerzo aparente, " exactamente igual que los hombres respiran y que las águilas se mantienen en el aire". Como resultado de esta increíble capacidad, Euler escribía memorias matemáticas mientras jugaba con sus hijos, por ejemplo. En 1735 perdió la vista de su ojo derecho, según se dijo por exceso de trabajo, pero este accidente desgraciado no frenó en absoluto la marcha de su producción investigadora. Se cuenta que él mismo decía que su lápiz parecía sobrepasarlo en inteligencia, por la gran facilidad con la que fluían de

él las memorias, una tras otras, y a lo largo de su vida publicó más de 500 libros y artículos. Durante casi medio siglo después de su muerte continuaron apareciendo obras inéditas de Euler en las publicaciones de la Academia de San Petersburgo. Una lista bibliográfica de las obras conocidas de Euler, incluidas las póstumas, contiene 886 trabajos, y se calcula que sus obras completas, que se están publicando bajo los auspicios de la Academia de Ciencias Suiza, superaran probablemente los 90 grandes volúmenes. A lo largo de su vida su investigación matemática vino a suponer una producción de unas 800 páginas anuales en promedio; ningún matemático a superado jamás (ni tampoco se ha aproximado) la producción de este hombre, al que Arago llamó " el Análisis Encarnado".

Euler adquirió muy pronto fama internacional, e incluso antes de abandonar Basilea había recibido ya una mención honorífica de la Academia de ciencias de París por un trabajo sobre la mejor disposición de los mástiles en un buque. En años sucesivos Euler presentó a menudo memorias a los concursos convocados por la Academia, y obtuvo doce veces el codiciado premio que se otorgaba bianualmente. Los temas de estos concursos eran muy variados, y en una ocasión, en 1724 Euler compartió con Maclaurin y Daniel Bernoulli un premio por un trabajo sobre las mareas. (El primer premio de la Academia de París lo ganaron dos veces Jean Bernoulli y diez veces su hijo Daniel Bernoulli) Euler no se mostró nunca vanidoso, y escribió con la misma naturalidad obras de todos los niveles, incluidos textos para ser usados en las escuelas rusas. Normalmente escribía en latín y también en francés, a pesar que su lengua materna era el alemán. Euler tenía una extraordinaria facilidad para los idiomas, como podía esperarse, en parte, a causa de su origen suizo, lo que constituyó una gran ventaja para él, debido al hecho de que una de las características de la matemática del siglo XVIII fue la gran facilidad con que se desplazaban los matemáticos de un país a otro, y en este sentido Euler no tubo ningún problema con los distintos idiomas. En 1741, Euler recibió una invitación de Federico el Grande de Prusia para incorporarse a la Academia de Berlín, invitación que fue aceptada (Jean y Daniel Bernoulli, que se encontraban en Suiza, también fueron invitados, pero rechazaron la invitación).

Euler pasó veinticinco años en la corte de Federico el Grande, pero a lo largo de este período continuó recibiendo una pensión de Rusia, y envió numerosos artículos a la Academia de San Petersburgo al mismo tiempo que la Academia Prusiana.

La estancia de Euler en Berlín no fue todo lo feliz que él hubiera deseado, pues Federico prefería a los intelectuales brillantes, como el caso de Voltaire. El monarca, que apreciaba más a los filósofos que a los geómetras, se refería al sencillo Euler como " el cíclope matemático"(broma de dudoso gusto, dado que Euler era tuerto), y las relaciones en la corte terminaron por hacerse intolerables.

Catalina la Grande estaba precisamente deseosa de que el prolífico matemático volviese a ocupar su lugar en la Academia de San Petersburgo, y como resultado de todo ello Euler regresó a Rusia en 1766. Este mismo año supo Euler que estaba perdiendo la vista del único ojo que le quedaba, por una afección de cataratas, y se preparó para la ceguera casi total que le esperaba practicando en escribir con tiza en grandes caracteres en una pizarra preparada a propósito, y distando a sus hijos.

En 1771 sufrió una operación y volvió a ver durante unos días, pero el éxito de la operación y la consiguiente alegría duraron poco, y Euler vivió casi durante los diecisiete últimos años de su vida en una ceguera total. Ni siquiera esta tragedia consiguió interrumpir sus investigaciones y publicaciones, que continuo al mismo e incluso a mayor ritmo hasta 1783 en que, a la edad de 76 años murió de una manera casi repentina mientras tomaba el té y jugaba con uno de sus nietos.

Un poco más sobre la vida de Euler y las notaciones.

Desde 1727 hasta 1783 la pluma de Euler no había cesado de extender las fronteras de prácticamente todas las ramas tanto de la matemática pura como aplicada, desde los niveles más elementales a los más avanzados. Además, Euler escribía casi siempre utilizando el lenguaje y las notaciones que aún usamos hoy, pues ningún otro matemático contribuyó en tal medida como él a dar su forma actual a la matemática que hoy llamamos clásica, siendo el más feliz inventor de notaciones de toda la historia de la matemática. A su llegada a San Petersburgo en 1727 se vio encargado de ciertos experimentos relativos al disparo de cañones, y en la exposición manuscrita de los resultados obtenidos, escrita probablemente en 1727 o 1728, Euler utilizaba ya la letra e más de una docena de veces para presentar la base del sistema de logaritmos naturales. La idea que presentaba este número había sido bien conocida prácticamente desde que se inventaron los logaritmos más de un siglo antes, y, sin embargo, no se había introducido ninguna notación estándar para representarlo. En una carta a Goldbach en 1731, Euler vuelve a utilizar su letra e para el "número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a 1"; esta notación apareció impresa por primera vez en la *Mechanica* de Euler, publicada en 1736, obra en la se presenta por primera vez la mecánica newtoniana en forma analítica. Este símbolo que quizá le vino sugerido a Euler por la primera letra de la palabra "exponencial", no tardó en ser admitido universalmente. La consagración definitiva del uso de la letra griega π para representar la razón de la longitud de la circunferencia al diámetro, se debe también en buena medida a Euler aunque ya se había utilizado en 1706, un año antes del nacimiento de Euler, en la *Synopsis Palmariorum Matheseos*, o "Nueva introducción a las matemáticas", por William Jones (1675 - 1749 d. C). Fue, sin embargo, la adopción del símbolo π por Euler, en 1737 en primer lugar, y después en sus popularísimos textos, lo que extendió su uso universalmente. El símbolo i para $\sqrt{-1}$ es otra de las notaciones introducidas por Euler por primera vez, aunque en este caso lo adoptó hacia finales de su vida, en 1777. Probablemente este retraso se deba a que en sus obras anteriores había utilizado la letra i de una manera bastante sistemática para representar a un "número infinito", en un sentido análogo (pero no idéntico) al de ∞ de Wallis; así, Euler escribía $e^x = (1 + \frac{x}{i})^i$, lo que nosotros preferiríamos escribir como

$$e^x = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{h}\right)^h$$

De hecho, aunque Euler utilizó i para $\sqrt{-1}$ en un manuscrito fechado en 1777, tal manuscrito no se publicó hasta 1794, de manera que fue la adopción de dicho símbolo por Gauss en su obra clásica *Disquisitiones arithmeticae*, de 1801, la que le aseguró un puesto definitivo en la historia de las notaciones de la matemática. Los tres símbolos e , π e i , de los que Euler fue en gran medida responsable, como hemos visto, se relacionan con los dos enteros más importantes, 0 y 1, por medio de la famosa igualdad

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

en la que figuran los cinco números más importantes y las más importantes operaciones y relación de toda la matemática. Lo equivalente a esta igualdad, en forma generalizada, aparece en el más famoso de todos los textos de Euler, la *Introductio in analysin infinitorum*, publicado en 1748, pero el nombre de Euler no aparece hoy asociado a ninguno de los símbolos que intervienen en esta relación, sino que la llamada "constante de Euler", que se suele representar por la letra griega γ y que es una sexta constante matemática, es el número definido por

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

No sólo se utilizan hoy las notaciones introducidas por Euler para designar números importantes. También en geometría, en álgebra, en trigonometría y en análisis nos encontramos a cada momento con el uso de los símbolos, terminología e ideas debidas a Euler. El uso de las letras minúsculas a, b, c , para los lados de un triángulo y de las correspondientes letras mayúsculas A, B, C , para los ángulos respectivamente opuestos a ellos, proviene de Euler, así como la adopción de las letras r, R y s para los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita y el semiperímetro del triángulo, respectivamente. La fórmula $4rRs = abc$ que relaciona esas seis longitudes es también uno de los muchos resultados elementales que se le atribuyen, aunque pueden encontrarse equivalentes de este resultado en la geometría antigua. La notación $\log x$ para el logaritmo de x , el uso tan familiar hoy de la \sum para representar una suma y, quizá la más importante de todas, la notación $f(x)$ para una función de x , utilizada en los Commentarii de San Petersburgo de 1734 - 1735, son otras de las notaciones de Euler que seguimos utilizando en la actualidad. Se puede afirmar, pues, sin ninguna duda, que nuestro sistema de notaciones matemáticas es hoy lo que es debido más a Euler que a ningún otro matemático a lo largo de la historia.

Los primeros descubrimientos de Gauss.

Los matemáticos más importantes de la época de la Revolución Francesa fueron, casi sin excepción, franceses, pero coincidiendo con los comienzos del siglo XIX Francia tuvo que compartir los honores del liderazgo con otros países. El matemático más grande de la primera mitad del siglo XIX, y quizá de todos los tiempos, fue tan decididamente alemán que nunca viajó fuera de Alemania, ni siquiera en lo que llamaríamos de vista. Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855 d. C) fue un verdadero niño prodigio. Su padre era un obrero en Brunswick, obstinado en sus puntos de vista, que intentó evitar que su hijo recibiera una educación adecuada, pero en cambio su madre, que tampoco había recibido ningún tipo de educación, animó siempre a su hijo en sus estudios, y más tarde se mostró muy orgullosa de sus logros, hasta su muerte a la edad de 97 años. De niño asistió Gauss a la escuela local, dirigida por un maestro de costumbres rutinarias. Un día, con objeto de mantener la clase atareada y en silencio durante un buen rato, el maestro tuvo la idea de hacer sumar a sus alumnos todos los números del 1 al 100, ordenándoles además que, según fuera terminado cada uno esta tarea, deberían colocar su pizarra sobre la mesa del maestro. Casi inmediatamente colocó Carl su pizarra sobre la mesa, diciendo: " ya está"; el maestro lo miró desdeñosamente mientras los demás trabajaban con ahínco. Cuando todos hubieron terminado y el maestro revisó al fin los resultados obtenidos, se encontró con la sorpresa notable de que la única pizarra en la que aparecía la respuesta correcta, 5050, sin ningún cálculo accesorio, era la de Gauss. El muchachito de diez años había hecho evidentemente el cálculo mental de sumar la progresión aritmética $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$ asociando parejas de términos igualmente alejados de los extremos, es decir, esencialmente utilizando la fórmula $(n + 1)\frac{n}{2}$. A los quince años comenzó Gauss en Brunswick su enseñanza media, gracias a la ayuda del duque de Brunswick, y en 1795, gozando siempre de la protección del duque, entró en la Universidad de Gotinga. Gauss estaba entonces indeciso, dudando entre hacerse filólogo o matemático, a pesar de que había inventado ya, y justificado, el método de mínimos cuadrados, una década antes de que Legendre publicara el mismo artificio. El 30 de marzo de 1796 se decidió al fin por la matemática, porque ese mismo día, cuando le faltaba aún un mes para cumplir los 19 años, hizo un brillante descubrimiento. Desde hacía más de 2000 años se sabía se sabía cómo construir con regla y compás el triángulo equilátero, el cuadrado y el pentágono regular (así como algunos otros polígonos regulares cuyos números de lados son múltiplos de dos, de tres o de cinco), pero ningún otro polígono regular con un número

primo de lados. El crítico día de 1796 que acabamos de mencionar consiguió Gauss concluir, de acuerdo con las normas euclídeas, el polígono regular de 17 lados. Y ese mismo día comenzó a llevar un diario en el que fue apuntando, durante los 18 años siguientes, algunos de sus más grandes descubrimientos, y el primer registro es, naturalmente, el de la construcción del polígono regular de 17 lados.

La representación gráfica de los números complejos.

El sello de Gauss llevaba escrito el lema: *pauca sed matura* (poco pero maduro) y lo cierto es que su mente estaba tan rebotante de ideas originales que no tenía materialmente tiempo de verlas madurar a todas ellas hasta el punto de perfección en que insistía antes de publicarlas. Sin embargo, su descubrimiento decisivo del 30 de marzo de 1796 sí lo anunció públicamente en una revista literaria; siempre estuvo tan orgulloso de este descubrimiento que, a imitación de Arquímedes, antiguo rival en talla matemática, expresó el deseo de que se grabara sobre su tumba un polígono regular de 17 lados. Este deseo no se cumplió nunca porque el obtuso cantero encargado de tallar la lápida se negó en redondo, insistiendo en que la figura resultante no se distinguiría de una circunferencia, pero al menos en el monumento a Gauss en Brunswick puede verse tallado realmente el egregio polígono.

Durante breves períodos de tiempo de Gauss abandonaba Gotinga para asistir a la Universidad Helmstädt, y fue en esta última en la que recibió su doctorado en 1798. La tesis, publicada en Helmstädt en 1799, lleva en latín el aplastante título siguiente: "Nueva Demostración del Teorema Que Afirma Que Toda Función Algebraica Racional y Entera de Una Variable Puede Resolverse en Factores Reales de Primero o de Segundo Grado". Este teorema, al que se refería Gauss más tarde con el nombre de "teorema fundamental del álgebra", es esencialmente la proposición conocida en Francia como el "teorema de d'Alembert", pero Gauss demostró que todos los intentos de demostración anteriores, incluyendo algunos de Euler y de Lagrange, eran incorrectos. La representación gráfica de los números complejos había sido descubierta ya en 1797 por Gaspar Wessel (1745 - 1818) y publicada en la revista de la Academia danesa en 1798, pero lo cierto es que la obra de Wessel pasó desapercibida prácticamente, y así el plano de los números complejos se suele denominar hoy como "plano de Gauss", a pesar de que Gauss no publicó sus ideas al respecto hasta unos 30 años más tarde. Desde la época de Girard era bien conocido que los números reales, positivos, cero y negativos se pueden representar en correspondencia con los puntos de una recta. El Inglés John Wallis (1616 - 1703) había llegado a sugerir incluso que los números imaginarios puros se podrían representar por los puntos de una recta perpendicular al eje de los números reales. Y, sin embargo, sorprendentemente nadie antes que Wessel y Gauss pensó en franquear la obvia etapa de considerar las partes real e imaginaria pura de un número complejo $a + bi$ como las dos coordenadas rectangulares de un punto en el plano, al cual estaría asociado dicho número complejo. El cubrir esta simple etapa hizo sentirse a los matemáticos mucho más cómodos con los números imaginarios, ya que podían visualizarse en el sentido de que todo punto del plano correspondía a un número complejo y viceversa. Ver es creer, bien cierto es, y las viejas ideas acerca de la no existencia de los números imaginarios fueron abandonados por casi todos los matemáticos.

Este antecedente fue extraído textualmente del libro titulado Historia de la matemática de Carl B. Boyer.

Bibliografía.

1. L'ÉPREUVE MATHÉMATIQUES au baccalauréat C et E.
2: nombres complexes, algèbre, géométrie.
Editorial Armand COLIN.
2. MATHÉMATIQUES terminales C et E.
GÉOMÉTRIE ET ALGÈBRE.
Librería ISTRÁ, 1983.
3. Complex Numbers and Geometry.
Autor: Liang-shin Hahn.
Spectrum Editorial Board, 1991.
4. VARIABLE COMPLEJA CON APLICACIONES.
William R Derrick.
Grupo Editorial Iberoamérica, segunda edición 1987
5. Euclidean Geometry and Transformations.
Clayton W. Dodge
Library of Congress Cataloging -in- Publication Data,1972
6. Variable compleja
George Polya y Gordon Latta
EDITORIAL LIMUSA , S. A. 1976
Primera edición.
7. CURSO DE VARIABLE COMPLEJA
Norman Levinson y Raymond M. Redheffer
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
8. Visual Complex Analysis.
Tristan Needham
Publicado en los Estados Unidos por Oxford University Press
9. GEOMETRÍA. CUADERNOS DE OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS.
Radmila Bulajich Mafrino y José Antonio Gómez Ortega.
Comité Editorial, primera reimpresión 2003.
10. VARIABLE COMPLEJA Y APLICACIONES
Ruel V. Churchill y James Ward Brown
Traducido de la quinta edición en inglés por McGraw - Hill
11. Historia de la Matemática
Carl B. Boyer
Alianza Editorial
Versión española de Mariano Martínez Pérez.