UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

"EL ROL DE LOS HOMEOMORFISMOS EN LAS SERIES DE FOURIER"

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR:
FRANCISCO ASDRÚBAL HERNÁNDEZ RAMÍREZ

PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

CIUDAD UNIVERSITARIA, JUNIO DE 2008.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

"EL ROL DE LOS HOMEOMORFISMOS EN LAS SERIES DE FOURIER"

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR:

FRANCISCO ASDRÚBAL HERNÁNDEZ RAMÍREZ

PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ASESORES:

MSc. MARTÍN ENRIQUE GUERRA CÁCERES

C. a Dr. MAURICIO HERNÁN LOVO CÓRDOVA

CIUDAD UNIVERSITARIA, JUNIO DE 2008.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

MSc. Rufino Antonio Quezada Sánchez

SECRETARIO GENERAL:

Lic. Douglas Vladimir Alfaro Chávez

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

Dr. Rafael Antonio Gómez Escoto

SECRETARIA:

Licda. Maria Trinidad Trigueros de Castro

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR:

Lic. Ramón Arístides Paz Sánchez

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por haberme dado la oportunidad y capacidad en el curso de cada asignatura. A mis padres, que de manera directa me proporcionan los recursos necesarios y a mi hermano, quien ha sido de gran apoyo.

A mis asesores MSc. Martín Enrique Guerra Cáceres y C. a Dr. Mauricio Hernán Lovo Córdova. Dado que, cada uno me orientó de manera conveniente para el inicio y finalización del presente trabajo.

Resumen

En la solución de muchos problemas matemáticos con frecuencia de hace uso de un cambio de variables para transformar el problema original en otro equivalente, el cual, al resolverlo también resolvemos nuestro problema original. La ventaja de esta transformación es que nuestro problema equivalente puede ser más fácil de tratar con las herramientas matemáticas existentes o, aún más, mejorar sus propiedades analíticas. Así, en el presente trabajo centramos nuestra atención en dos propósitos. El primero consiste en mostrar para que clase de funciones es posible asegurar la convergencia uniforme de la serie de Fourier de f, mediante un cambio de variables y, demostrar que no existe un cambio de variables que nos asegure la convergencia absoluta de la serie de Fourier de f. El segundo propósito es proporcionar el material necesario para la compresión de los dos resultados anteriores.

En este sentido, el trabajo está ordenado en los siguientes capítulos.

Capítulo I: Nociones Básicas

En este capítulo tratamos las definiciones de nuestros objetos de estudio. Así como diferentes resultados sobre la convergencia de series de Fourier. Además se muesra que existen funciones continuas cuya serie de Fourier es divergente.

Capítulo II: Introducción a la teoría de convergencia de series de Fourier

Se tratan espacios de funciones, ambientes propios de nuestro estudio, algunos resultados sobre la función módulo de continuidad y estimaciones sobre la magnitud de los coeficientes de Fourier.

Capítulo III: Mejoramiento de la convergencia de las series de Fourier

En este capítulo se muestran los resultados principales de nuestro trabajo. El primer resultado es el que nos asegura la existencia de un cambio de variable g tal que $f \circ g$ converge uniformemente, y el segundo nos muestra que no existe un cambio de variable g tal que $f \circ g$ converge absolutamente.

Índice general

Introducción

El orígen de las series de Fourier se encuentra en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales en torno a los problemas de la cuerda vibrante y la difusión del calor. Las primeras aproximaciones las realizó D'Alembert(1747) en sus artículos titulados *Investigaciones sobre la curva que forma una cuerda al vibrar* y su tratado de las oscilaciones de la cuerda del violín. Si el desplazamiento $u = u(x,t)$ de una cuerda de violín, como función del tiempo t y de la posición x, es la solución de la ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; t > 0, \;\; 0 < x < 1 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \;\; \text{para } \; t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0, \;\; \text{para } \; 0 < x < 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces u es la superposición de dos ondas viajeras moviendose en direcciones opuestas a velocidad 1, como lo expresa la fórmula de D'Alembert:

$$u(x,t)) = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t)$$

en la cual f es una función impar de período 2 que se anula en los puntos $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Euler en 1748 propuso que tal solución podía ser expresada en una serie de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n sin(n\pi x)$$

y como consecuencia

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n cos(n\pi t) sin(n\pi x)$$

Las mismas ideas fueron luego expuestas por D.Bernoulli(1753) y Lagrange(1759). La fórmula

$$\widehat{f}(n) = 2\int_0^1 f(x) sin(n\pi x)\, dx$$

para calcular los coeficientes apareció por primera vez en un artículo escrito por Euler en 1777.
En 1807, Jean Baptiste Fourier publicó sus resultados iniciales en torno al problema del flujo del calor en cuerpos sólidos descrito por la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Fourier hizo un intento serio por demostrar que cualquier función diferenciable puede ser expandida en una serie trigonométrica de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

De hecho, Fourier consideró una función arbitraria[1] en $[-\pi, \pi]$ y la descompuso como suma de una función par y una función impar. Utilizando la serie de senos como una expresión de la parte impar y la serie de cosenos para la parte par, dedujo que toda función en $(-\pi, \pi)$ se podía expresar como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k cos(kx) + b_k sen(kx)]$$

Aunque Fourier no consiguio una demostración general de este hecho, ni dio condiciones suficientes para que una función se pueda desarrollar en serie de Fourier, estaba convencido de que ello podia hacerse para cualquier función y sus resultados, sobre la convergencia de algunas series particulares, fueron una excelente fuente de inspiración para grandes matemáticos de la época tales como Laplace, Cauchy, Poisson, Dirichlet, etc.
Así pués, el trabajo de Fourier planteó el problema de encontrar condiciones precisas que aseguren la convergencia de la serie de Fourier. Una prueba satisfactoria de este hecho fue dada por Dirichlet en 1829 (ver sec. 1.3.1), encontrando el primer conjunto de condiciones suficientes para que la serie de Fourier que representa a una función $f(x)$ converja a $f(x)$. Riemann también hizo contribuciones importantes al problema demostrando que si $f(x)$ está acotada y es integrable en $[-\pi, \pi]$ entonces los coeficientes de Fourier de $f(x)$, a_k y b_k tienden a cero cuando n tiende a infinito (ver sec. 1.3.1). También demostró que la convergencia de la serie de Fourier en un punto

[1]Las funciones más arbitrarias consideradas en la época eran las regulares por partes.

nada más depende de la función en el entorno de ese punto. La naturaleza de la convergencia de la serie de Fourier va a recibir mayor atención después de la introducción del concepto de convergencia uniforme por Stokes y Seidel. En 1870, Heine demuestra que una serie de Fourier que representa una función acotada que satistace las condiciones de Dirichlet es uniformemente convergente en el intervalo $[-\pi, \pi]$. También va a demostrar que si la convergencia es uniforme entonces la serie es única. En 1881, Jordan introduce el concepto de variación acotada y da condiciones suficientes para el problema de la unicidad de la Serie de Fourier. En 1903, Lebesgue desarrolla la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue y generaliza el resultado de Riemann, demostrando que para que los coeficientes de Fourier tiendan a cero cuando n tiende a infinito, basta que la función sea integrable en el sentido de Lebesgue. En 1904, Leopold Fejér aplica los conceptos de sumabilidad a las series de Fourier y obtiene resultados exitosos. Finalmente, en 1926 Kolmogorov da una ejemplo de una función integrable en $[-\pi, \pi]$ tal que su serie de Fourier diverge en todo punto. Y en 1966, Carleson demuestra que dada una función $f \in L^2(-\pi, \pi)$ entonces la serie de Fourier converge, salvo en un conjunto de medida cero. Poco después, en 1968, Hunt va a generalizar este resultado a L^p, $p > 1$. De esta manera, las Series de Fourier se han desarrollado hasta convertirse en la rama de las matemáticas que hoy día se llama análisis armónico, en la cual se estudia la representación de funciones en términos de ondas básicas llamadas armónicos. A lo largo de los siglos XIX y XX el análisis armónico se ha convertido en una materia enorme con aplicaciones en campos diversos como el procesamiento de señales, la mecánica cuántica o la neurociencia.

Ahora bién, en la solución de muchos problemas matemáticos con frecuencia se hace uso de un cambio de variables apropiado, para trasformar el problema original en otro equivalente, el cual puede ser tratado con mayor facilidad con la teoría y las herramientas matemáticas disponibles. Por tanto, surge de manera natural la pregunta siguiente: ¿Qué condiciones debe cumplir un cambio de variables para tener garantias de que pueden recuperarse las propiedades de la solución original a partir de las propiedades de la solución del problema equivalente?, dicho de otra manera, ¿Cuáles son las propiedades de la solución del problema equivalente que se conservan o no bajo un cambio de variables?

En Topología dados dos espacios topológicos (X, T_1), (Y, T_2) y una aplicación biyectiva de X en Y, se dice que h es un homeomorfismo si y sólo si tanto h como su inversa h^{-1} son funciones continuas. Los espacios topológicos X, Y se dice que son homeomorfos. Una propiedad P, enunciable en un espacio topológico, se dice que es una propiedad topológica o invariante topológico si al verificarla un espacio topológico la verifica cualquier espacio homeomorfo a él. Como $(h^{-1})^{-1}(U) = h(U)$ se verifica que h es un homeomorfismo si y sólo si para todo abierto $U \subset X$, $h(U)$ es abierto en Y, es decir, h es una función continua y abierta. Así un homeomorfismo h proporciona simultáneamente una biyección entre los espacios X e Y y las topologías T_1 y T_2 con la propiedad de que cualquier afirmación acerca de X como espacio topológico es válida para cada espacio homeomorfo a él, la relación de homeomorfismo es una relación de equivalencia, tal que, descompone todos los espacios topológicos en clases. Así la topología puede ser descrita como el estudio de los invariantes topológicos y los tipos de homeomorfismos.

Dada una función f definida en $D \subset X$ con valores en Y, no necesariamente continua, y un homeomorfismo h de D en $h(D)$ interesa conocer cuáles son las propiedades analíticas tanto del dominio D como de la función f que se conservan bajo homeomorfismos, es decir, cuál es el efecto de h sobre las propiedades analíticas de D y el comportamiento analítico de f. En particular, un cambio de variables sobre la Serie de Fourier de una función (composición de una función f con un auto homeomorfismo de $[-\pi, \pi]$ sobre la Serie de Fourier de una función), ¿en qué medida puede mejorar el comportamiento de la Serie de Fourier?, ¿existe un cambio de variable g de manera que para cada funcion real continua f, la serie de Fourier de $f \circ g$ converge uniformemente?.

En este sentido, en el presente trabajo se pretende realizar un estudio riguroso del efecto sobre la Serie de Fourier de una función f cuando se establece una composición de dicha función con un auto homeomorfismo de $[-\pi, \pi]$. Para la mejor comprensión y logro de este propósito, comenzamos este trabajo estudiando la convergencia de las series de Fourier en el sentido clásico; Luego espacios de funciones, de las funciones en estudio y consideraremos las propiedades de convergencia de la serie de Fourier bajo estos; Para finalizar esponiendo condiciones necesarias y suficiente para la convergencia de la serie de Fourier de $f \circ g$.

Capítulo 1

Nociones básicas

1.1. Preliminares

El lenguaje geométrico de los espacios euclideos puede ser usado en el espacio de funciones $L^2([a,b],\mu)$, que por simplicidad se denota por L^2, definiendo el producto escalar:

$$\forall f,g \in L^2, \quad (f,g) = \int_{\mathfrak{T}} f(t)\overline{g(t)}\, d\mu, \quad \text{con } \mathfrak{T} = [a,b].$$

El cual a su vez define la siguiente norma

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}.$$

La cual denotamos por $\|\cdot\|$. Donde se puede tener $(f,f) = 0$ sin ser $f = 0$. Esto se supera definiendo que dos funciones $f, g \in L^2$ son equivalentes si ellas difieren en un conjunto de medida cero. Así, el espacio que se considera es el espacio cociente cuyos elementos son clases de equivalencia de funciones. Pero, por simplificación se mantiene la notación anterior. Se dice que el conjunto $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\} \subset L^2$ es ortonormal si $(\phi_i, \phi_j) = 0$ para $i \neq j$ y $(\phi_i, \phi_j) = 1$ si $i = j$ y se dice que un conjunto ortonormal $\{\phi_n\}$ es completo si para $f \in L^2$

$$(f, \phi_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{implica que } \ \|f\| = 0.$$

De donde, se llama serie de Fourier de $f(x)$ respecto del conjunto ortonormal $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ a la siguiente serie determinada por f y el conjunto:

$$f(x) \sim C_0\phi_0(x) + C_1\phi_1(x) + \cdots + C_n\phi_n(x) + \cdots, \quad \text{con } C_n = (f, \phi_n).$$

El símbolo $\sim$ solamente significa que los C_n estan relacionados por (f, ϕ_n), y no implica que la serie sea convergente o mucho menos que converja a $f(x)$.

L^2 es el espacio funcional que nos proporciona las mejores propiedades para el desarrollo en series de Fourier de una función f. Esto es debido a que dada μ una medida positiva es posible tener un conjunto $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ortonormal completo en L^2, entonces para cada $f \in L^2$ la sucesión de sumas parciales, llamadas sumas parciales de la serie de Fourier de f respecto del conjunto $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$.

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} C_k(f)\phi_k(x)\ , \quad \text{con } C_k = \int_a^b f(y)\overline{\phi_k(y)}d\mu(y) \tag{1.1}$$

converge a f en L^2.

Es conocido que, por ser L^2 un espacio de Hilbert, se verifica la desigualdad de Bessel

$$\|S_n(f,x)\|^2 = \sum C_k(f)^2 \leq \|f\|_2 \tag{1.2}$$

En efecto, formemos la integral de error cuadrático: $(f - S_n(f,x), f - S_n(f,x)) = (f,f) - 2(f, S_n(f,x)) + (S_n(f,x), S_n(f,x))$ sabiendo que

$$\begin{aligned}
(f,f) &= \|f\|^2 ; \\
(f,S_n) &= C_0(f,\phi_0) + C_1(f,\phi_1) + \cdots + C_n(f,\phi_n) \\
&= C_0^2 + C_1^2 + \cdots + C_n^2; \\
(S_n(f,x), S_n(f,x)) &= C_0^2 + C_1^2 + \cdots + C_n^2
\end{aligned}$$

se tiene $\int_a^b \phi_i\phi_j = 0$, para $i \neq j$. Así, en definitiva, resulta esta fórmula fundamental:

$$\int_a^b [f(x) - S_n(f,x)]^2\, dx = \|f\|^2 - [C_0^2 + C_1^2 + \cdots + C_n^2] \geq 0$$

de donde rápidamente se identifica (1.2). Además;

1. la serie $\sum C_i^2$ es convergente y,

2. el error cuadrático decrece al aumentar n; o, al menos, no crece.

Es así como se verifica la convergencia $S_n(f,x) \to f$ en $\|\|_2$ para cada $f \in L^2([a,b], d\mu)$. Más aún, las sumas parciales de la serie de Fourier son las combinaciones lineales de $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ que mejor aproximan la función f en el sentido de que

$$\|S_n(f,x)-f\| \leq \left\|\sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k - f\right\| \quad \forall \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k \tag{1.3}$$

y la igualdad solo se alcanza cuando $a_k = C_k(f), \quad k = 0,1,2,\cdots,n$.

Uno de los ejemplos más conocidos es el de las funciones trigonométricas $\{1, cos(nx), sen(nx)\ n = 1,2,3,\cdots\}$ que forman un conjunto ortogonal completo en $[-\pi,\pi]$. En este caso

$$\begin{aligned} S_n(f,x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_n cos(2\pi kx/T) + b_n sen(2\pi kx/T)] \qquad (1.4)\\ &= \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{2\pi kx/T}, \quad C_k = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-2\pi ikt/T}dt \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

denota las sumas parciales de la serie de Fourier.

Para la última igualdad se usan las formulas de Euler $cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ y $sen(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, a partir de las que resultan las relaciones $a_n = C_n + C_{-n}$, $b_n = i(C_n - C_{-n})$, $C_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$, $C_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$.

Los coeficientes C_k se obtienen a partir de la representación de $f(t)$ como polinomio trigonométrico, ya que:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(t)e^{-2\pi ikt/T}dt &= \sum_{-n}^{n}\int_a^{a+T} C_n e^{2\pi(n-k)it/T}dt \\ &= TC_k \end{aligned}$$

Debido a la condición de ortogonalidad aplicada a la suma del miembro derecho, se eliminan todos los términos de la suma excepto el k-ésimo término.

Dado que nuestro interés será el estudio de la convergencia, vamos a enunciar diferentes tipos de convergencia que podemos encontrar.

Sea $\mathfrak{F}$ un espacio lineal normado de funciones de un espacio de Banach $\mathbf{B}$ en otro espacion de Banach $\mathbf{B}'$, y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{F}$. Decimos:

1. $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente si y solo si para cada x, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ tal que $\forall\, n \geq n_0, \quad \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$;

2. $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente si y solo si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ tal que $\forall\, n \geq n_0, \quad \forall\, x \ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$;

3. $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente casi en todo punto si y solo si $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente excepto en un conjunto de medida cero;

4. $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente casi en todo punto si la convergencia es uniforme excepto para un conjunto de medida cero;

5. $f_n(x) \to f(x)$ casi uniformemente si y solo si para cada $\varepsilon > 0$, hay un conjunto medible $\mathbf{F} \subset \mathbf{B}$ con $\mu(F) \leq \varepsilon$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente en $\mathbf{B} \setminus \mathbf{F}$;

6. $f_n(x) \to f(x)$ en media de orden p si y solo si $\int_{\mathbf{B}} |f_n - f|^p \, d\mu \to 0$, donde $p \geq 1$ es un número real fijo y las f_n son a valores reales;

7. $f_n(x) \to f(x)$ en medida si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$, $\exists n_0$ tal que $\forall n > n_0$, $\mu(\{x \in \mathbf{B} : \|f_n(x) - f(x)\| \geq \varepsilon\}) < \delta$;

8. $f_n(x) \to f(x)$ en norma si y solo si $\|f_n - f\| \to 0$.

El espacio $L^p([a,b],\mu)$ es definido como el espacio de funciones medibles en $[a,b]$ para las cuales $\int_a^b |f(x)|^p \, d\mu(x)$ existe. Es conocido que el espacio L^p es un espacio de Banach. En donde $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}$, si $1 \leq p < \infty$, y será $\|f\|_\infty = \ \inf\ \{M \geq 0; |f| \leq M$ casi en todo punto $\}$. Sus elementos son clases de equivalencia de funciones medibles.

Proposición 1.1.1 Sea $p \in (1,\infty)$ tal que las combinaciones lineales de $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ son densas en el espacio $L^p([a,b],\mu)$. Entonces

$$S_n(f,x) \to f \quad \text{en } L^p([a,b],\mu) \ \ \forall f \in L^p([a,b],\mu) \tag{1.5}$$

es equivalente a la acotación uniforme

$$\|S_n(f,x)\|_{L^p([a,b],\mu)} \leq C \, \|f\|_{L^p([a,b],\mu)}, \tag{1.6}$$

donde C es una constante positiva independiente de n y que puede no ser la misma en cada ocasión.

Por ejemplo, para $p = 2$ podemos tomar $C = 1$ ya que se satisface la desigualdad de Bessel. Cabe mencionar que $S_n(f, x)$ converge a f en la norma de L^2, pero no se puede asegurar en general que haya convergencia en L^p para $p \neq 2$. En realidad, la convergencia $S_n(f, x)$ es cierta para toda $f \in L^p(T)$ si $1 < p < \infty$, debido a Carleson y Hunt (1968). Además, supondremos que $\phi_n \in L^q([a, b], d\mu)$ siendo q el conjugado de p, es decir $1/p + 1/q = 1$, lo cual por la desigualdad de Hölder [1] garantiza (1.1) $\forall f \in L^p([a, b], d\mu)$. Antes de mostrar dicha equivalencia veremos que $S_n(f, x)$ es un operador lineal. Para tal fin, será suficiente mostrar las dos condiciones siguientes:

1. Su dominio de definición D es un campo lineal y
2. $S_n(\alpha f + \beta g, x) = \alpha S_n(f, x) + \beta S_n(g, x)$.

La primera condición es consecuencia del hecho que L^p es espacio vectorial. Para la segunda condición veamos que si $S_n(f, x) = \sum_{k=1}^n C_k \phi_k$, $S_n(g, x) = \sum_{k=1}^n C'_k \phi_k$ tenemos

$$\begin{aligned}
S_n(\alpha f + \beta g, x) &= \sum_{k=1}^n (C''_k)\, \phi_k\ ; \quad C''_k = \frac{1}{T} \int_T (\alpha f + \beta g) e^{-ikx} dx \\
&= \sum_{k=1}^n (\alpha C_k + \beta C'_k)\, \phi_k \\
&= \sum_{k=1}^n (\alpha C_k \phi_k + \beta C'_k \phi_k) \\
&= \sum_{k=1}^n \alpha C_k \phi_k + \sum_{k=1}^n \beta C'_k \phi_k \\
&= \alpha \sum_{k=1}^n C_k \phi_k + \beta \sum_{k=1}^n C'_k \phi_k \\
&= \alpha S_n(f, x) + \beta S_n(g, x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $S_n(f, x)$ es un operador lineal. En relación a operadores lineales hay un teorema muy importante que utilizaremos mas adelante. El teorema se conoce a veces como el principio de acotación uniforme.

[1] Si $f \in L^p$ y $g \in L^q$, entonces $\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{1/q}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Teorema 1.1.1 *(Banach-Steinhauss)* Supongamos que X es un espacio de Banach, que Y es un espacio vectorial normado, entonces toda familia de operadores $\{\Lambda_\alpha\}$, $\Lambda_\alpha : X \to Y$, puntualmente acotada es también uniformemente acotada, luego igualmente continua.

Corolario 1.1.1 Sea $\Lambda_n : X \to Y$ una sucesión de operadores lineales y continuos. Para que la sucesión $\Lambda_n x$ sea convergente (en Y) para todo punto $x \in X$, es necesario y suficiente que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

1. $\Lambda_n x$ converge para todas las x de un conjunto denso de X;

2. $\|\Lambda_n\| \leq c$, para todo n.

Ahora comprobaremos la proposición (1.1.1).
(1.5)$\Rightarrow$ (1.6): Por la desigualdad de Hölder,

$$|C_k(f)| = \left| \int_a^b \phi_k f \, d\mu \right| \leq \|\phi_k\|_q \|f\|_p$$

y por tanto S_n es un operador continuo para cada n. Además,

$$\|S_n(f,x)\|_p \leq \|S_n(f,x) - f\|_p + \|f\|_p \leq K(f)$$

por la desigualdad de Minkowski[2] aplicada a $\|S_n(f,x)\|_p = \|(S_n(f,x) - f) + f\|_p$ con $K(f)$ independiente de n. De aqui, por el teorema de Banach-Steinhaus se sigue (1.6).

(1.6)$\Rightarrow$(1.5): Dado $\varepsilon > 0$, sea $P = \sum_{k=0}^m a_k \phi_k$ tal que $\|P - f\|_p < \varepsilon$. Ya que las combinaciones lineales de $\{\phi_k\}_{n=0}^\infty$ son densas.
Por ser $S_n(P,x) = P \ \forall n \geq m$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|S_n(f,x) - f\|_p &\leq \|S_n(f,x) - S_n(P,x)\|_p + \|S_n(P,x) - f\|_p \\
&= \|S_n(f - P, x)\|_p + \|p - f\|_p \\
&\leq C\|f - P\|_p + \|P - f\|_p \\
&\leq (C+1)\varepsilon
\end{aligned}$$

lo que implica (1.5).

$\square$

[2] Supongamos $1 \leq p \leq \infty$, y $f \in L^p, g \in L^p$. Entonces $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

1.2. Integral de Dirichlet

De ahora en adelante centraremos nuestra atención en el grupo $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, el cual denotaremos por $\mathfrak{T}$ de aqui, representaremos cualquier intervalo de longitud $T = 2\pi$ por $\mathfrak{T}$. El conjunto de funciones continuas en $\mathfrak{T}$ se le designa mediante $C(\mathfrak{T})$ y el sistema que tomaremos será el sistema trigonométrico $1, cos(nx), sen(nx),\ n = 1, 2, \dots$ o $\{e^{inx}\}_{n\in Z}$, y las sumas parciales de la serie de Fourier de f respecto al sistema se denota como en (1.4).
Usaremos una expresión equivalente para representar a $S_n(f, x)$ que será útil en el estudio de la convergencia. Observese que,

$$\begin{aligned}
S_n(f,x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k cos(kx) + b_k sen(kx)) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[cos(kx)\int_{\mathfrak{T}} f(t)cos(kt)\,dt + sen(kx)\int_{\mathfrak{T}} f(t)sen(kt)\,dt\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t)\left[1/2 + \sum_{k=1}^{n} cos(kx)cos(kt) + sen(kx)sen(kt)\right] dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t)\left[1/2 + \sum_{k=1}^{n} cosk(x-t)\right] dt
\end{aligned}$$

pero sumando la identidad trigonométrica

$$sen(k + 1/2)s - sen(k - 1/2)s = 2sen(s/2)cos(ks)$$

desde $k = 1$ hasta n, se encuentra que

$$sen(n + 1/2)s - sen(s/2) = 2sen(s/2)\sum_{k=1}^{n} cos(ks),$$

ó

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(ks) = \frac{sen(n + 1/2)s}{2sen(s/2)} \tag{1.7}$$

de donde

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t)\frac{sen[(n + 1/2)(x-t)]}{2sen(\frac{x-t}{2})}\,dt \tag{1.8}$$

o demanera equivalente

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+s)\frac{sen[(n+1/2)s]}{2sen(\frac{s}{2})}\,ds$$

(1.8) se conoce como integral de Dirichlet. De ella se deducen los criterios de convergencia de Dini (teorema 1.3.2) y Jordan (teorema 1.3.4).

Como es de esperar, el mismo resultado obtenemos si utilizamos la forma compleja de la serie de Fourier. Veamos que,

$$\begin{aligned} S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikx} &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\, e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\,dt \end{aligned}$$

donde si hacemos

$$D_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iks} \tag{1.9}$$

$$(e^{is}-1)D_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+1)s} - \sum_{k=-n}^{n} e^{iks}$$

$$\begin{aligned} (e^{is}-1)D_n(s) &= e^{i(n+1)s} - e^{-ins} \\ e^{-is/2}(e^{is}-1)D_n(s) &= e^{-is/2}(e^{i(n+1)s} - e^{-ins}) \\ (e^{is/2}-e^{-is/2})D_n(s) &= e^{i(n+\frac{1}{2})s} - e^{-i(n+\frac{1}{2})s} \\ D_n(s) &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})s} - e^{-i(n+\frac{1}{2})s}}{e^{is/2}-e^{-is/2}} \\ \text{asi} & \\ D_n(s) &= \frac{sen[(n+\frac{1}{2})s]}{sen(s/2)}, \quad s \neq 2m\pi,\ m\in\mathbb{Z} \end{aligned} \tag{1.10}$$

de donde

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} = \frac{sen[(n+\frac{1}{2})(x-t)]}{sen((x-t)/2)}$$

por tanto
$$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{sen[(n+\frac{1}{2})(x-t)]}{sen((x-t)/2)}\,dt$$
lo que es equivalente a (1.8).
Hay dos polinomios trigonométricos especiales que encontraremos en el estudio de las serie trigonométricas de Fourier:
$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\,, \quad K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} D_m(x) \tag{1.11}$$
son los llamados nucleo de Dirichlet y nucleo de Fejer, respectivamente. Ambos muy importantes en el estudio de la convergencia de las series de Fourier. Además, vimos que,
$$D_n(x) = \frac{sen[(n+\frac{1}{2})x]}{sen((x/2)}$$
de donde
$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{n+1}.\frac{1-cos(n+1)x}{1-cosx} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{sen^2[(\frac{n+1}{2})x]}{sen^2(x/2)} \end{aligned}$$
en efecto
$$(n+1)K_n(x) = \sum_{m=0}^{n} D_m(x)$$

$$\begin{aligned} (n+1)K_n(x)(e^{ix}-1) &= \sum_{m=0}^{n}(e^{ix}-1)D_m(x) \\ &= \sum_{m=0}^{n}(e^{i(m+1)x}-e^{-imx}) \quad \text{como vimos en (1.10),} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(n+1)K_n(x)(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1) &= (e^{-ix}-1)\sum_{m=0}^{n}(e^{i(m+1)x}-e^{-imx}) \\
&= \sum_{m=0}^{n}\left[(e^{imx}-e^{i(m+1)x})+(e^{-imx}-e^{-i(m+1)x})\right] \\
&= (1-e^{i(n+1)x})+(1-e^{-i(n+1)x}) \\
&= 2-(e^{i(n+1)x}+e^{-i(n+1)x}) \\
&= \frac{2-(e^{i(n+1)x}+e^{-i(n+1)x})}{2-(e^{ix}+e^{-ix})}
\end{aligned}
$$

asi

$$
K_n(x) = \frac{1}{n+1}.\frac{1-cos(n+1)x}{1-cosx}. \tag{1.12}
$$

Donde, además es obvio que $K_n(x) \geq 0$.

Ambos núcleos antes mencionados tienen la propiedad

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1. \tag{1.13}
$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx
\end{aligned}
$$

se obtiene el resultado deseado por la ortogonalidad, pues:

$$
\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } k = 0 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} D_m(x) \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_m(x)\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{m=0}^{n} 1\right] \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

De (1.9) y (1.8) podemos ver que

$$
S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t)D_n(x-t)\,dt \tag{1.14}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
|D_n(t)| &\leq \frac{1}{|sen(\delta/2)|}, \quad \delta < |t| < \pi, \\
D_n(0) &= 2n+1 \ \to \infty \text{ si } n \to \infty
\end{aligned}
$$

que es una consecuencia inmediata de

$$
D_n(t) = \begin{cases} \frac{sen(n+\frac{1}{2})t}{sen(t/2)}, & \text{si } t \neq 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}; \\ \\ 2n+1, & \text{si } t = 2m\pi. \end{cases}
$$

La última integral (1.14) puede ser escrita en notación de convolución asi

$$
f * D_n(x)
$$

donde

$$
f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t)g(x-t)\,dt
$$

es la convolución de las dos funciones f y g.

1.3. Resultados clásicos

Para hablar de la convergencia de $S_n(f,x)$ cuando $|n| \to \infty$, esta por lo menos debe cumplir que el término general de la serie tienda a cero cuando $|k| \to \infty$. este resultado se cumple y es conocido como lema de Riemann-Lebesgue.

Teorema 1.3.1 *(Lema de Riemann-Lebesgue)* Si $f \in L^1(\mathfrak{T})$, entonces

$$\lim_{|k|\to\infty} C_k = 0$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{\frac{-2\pi kit}{T}}\,dt \\
&= -\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{\frac{-2\pi kit}{T}}e^{-i\pi}\,dt \\
&= -\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{\frac{-2\pi ki}{T}(t+\frac{T}{2k})}\,dt \\
&\quad \text{haciendo } u = t + \frac{T}{2k} \\
&= -\frac{1}{T}\int_{a+\frac{T}{2k}}^{T+a+\frac{T}{2k}} f(u-\frac{T}{2k})e^{\frac{-2\pi ki}{T}u}\,du \\
&= -\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t-\frac{T}{2k})e^{\frac{-2\pi kit}{T}}\,dt. \\
\text{Luego } 2C_k &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} [f(t)-f(t-\frac{T}{2k})]e^{\frac{-2\pi kit}{T}}\,dt \\
\text{entonces, } C_k &= \frac{1}{2T}\int_a^{a+T} [f(t)-f(t-\frac{T}{2k})]e^{\frac{-2\pi kit}{T}}\,dt
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$|C_k| \le \frac{1}{2T}\int_a^{a+T}\left|f(t)-f(t-\frac{T}{2k})\right|\,dt$$

Para $f \in L^1(\mathfrak{T})$ y $\varepsilon > 0$, existe $g \in C(\mathfrak{T})$ tal que $\|g-f\|_1 < \varepsilon/2$, pues $C(\mathfrak{T})$ es denso en $L^1(\mathfrak{T})$; así

$$\begin{aligned}
\|f_0 - f_{\frac{T}{2k}}\|_1 &\le \|f_0-g_0\|_1 + \|g_0 - g_{\frac{T}{2k}}\|_1 + \|g_{\frac{T}{2k}} - f_{\frac{T}{2k}}\|_1 \\
&= \|(f-g)_0\|_1 + \|g_0 - g_{\frac{T}{2k}}\|_1 + \|(g-f)_{\frac{T}{2k}}\|_1 \\
&< \varepsilon + \|g_0 - g_{\frac{T}{2k}}\|_1
\end{aligned}$$

por lo que $\lim\limits_{0\to\frac{T}{2k}} \|f_0 - f_{\frac{T}{2k}}\| < \varepsilon$, luego

$$|C_k| \leq \frac{1}{2T}\int_a^{a+T}\left|f(t)-f(t-\frac{T}{2k})\right|\,dt = \frac{1}{2T}\|f_0 - f_{\frac{T}{2k}}\|_1$$

dado que ε es arbitrario el resultado se tiene.

$\square$

Por su puesto, el resultado se mantiene para los coeficientes a_n, b_n dado que $C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$.

1.3.1. Funciones Continuas y divergencia de su Serie de Fourier

Una cuestión a la que durante mucho tiempo se trató de responder fue la de si la continuidad de la función era condición suficiente para la convergencia de la serie de Fourier hacia la función. du Bois-Reymond dió una respuesta negativa en 1873. Aunque las funciones con series de Fourier divergentes que construyó du Bois-Reymond son complicadas, los potentes métodos que el Análisis Funcional desarrolló a partir de principios del siglo XX permiten dar una prueba que no es constructiva y está basada en la teoría de operadores, más concretamente en el pricipio de acotación uniforme (Teorema 1.1.1).
Como mencionamos antes, no se puede asegurar en general que haya convergencia en L^p para $p \neq 2$. Además, dicha convergencia no es en general aún para funciones en $C(\mathfrak{T})$. En efecto, como $|sen(x)| \leq |x|$ para todo x real, muestra que

$$\begin{aligned}
\|D_n\|_1 &> \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |sen(n+1/2)t|\frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi} |sen(t)|\frac{dt}{t} \\
&> \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |sent|\,dt = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \to \infty, \\
&\boxed{\text{ya que } (k-1)\pi \leq t \leq k\pi}.
\end{aligned}$$

Esta propiedad de $D_n(t)$ es la que origina las dificultades encontradas en la teoria de la convergencia de las series de Fourier. Pues, junto con el teorema de Banach-Steinhaus muestra que el operador $S_n(f,x)$ no es acotado para $f \in G_\delta$, G_δ un subconjunto denso en $C(\mathfrak{T})$. Es decir, si definimos

$$\Lambda_n f = S_n(f,x) \quad (f \in C(\mathfrak{T});\ n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.15}$$

$C(\mathfrak{T})$ es un espacio de Banach, relativo a la norma del supremo $\|f\|_\infty$. Cada Λ_n es un funcional lineal acotado sobre $C(T)$, de norma

$$|\Lambda_n(f)| = |S_n(f,x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)||D_n(t)|\, dt$$

entonces

$$\sup_{\|f\|_\infty = 1} |\Lambda_n(f)| < \frac{1}{2\pi}\|D_n\|_1$$

es decir,

$$\|\Lambda_n(f)\| \leq \frac{1}{2\pi}\|D_n\|_1 = L_n$$

estos L_n son llamados números de Lebesgue.

A continuación, fijemos n y consideremos la función

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad D_n(t) \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad D_n(t) < 0 \end{cases}$$

y tomemos $x = 0$ en (1.15), y de este modo $\Lambda_n(f) = S_n(f,0)$.

El número de discontinuidades de g es finito, menor o igual que $2(n+1)$, bastaría ver el signo de $\dfrac{sen[(n+\frac{1}{2})x]}{sen(\frac{x}{2})}$ para cada n y $x \in [0, 2\pi]$. Luego, para cada $\epsilon > 0$ existe $f_\epsilon \in C(T)$ tal que $-1 \leq f_\epsilon(t) \leq 1$ y $f_\epsilon(t) \to g(t)$ para cada t, cuando $\epsilon \to 0$.

Veamos el método utilizado para construir estas f_ϵ. Dado ϵ, en cada punto de discontinuidad t_i de g consideramos un intervalo centrado en t_i, I_{t_i} de longitud 2ϵ de tal manera que $f_\epsilon(t) = g(t)$ si $t \notin \bigcup_i I_{t_i}$; y para cada $t \in \bigcup_i I_{t_i}$, f_ϵ es el segmento de recta que une los puntos de discontinuidad en el respectivo I_{t_i}. Se ve que $\lim\limits_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(t) = g(t)$ además $f_\epsilon \in C(\mathfrak{T})$ y $\|f_\epsilon\|_\infty = 1$. Por otro lado

$$f_\epsilon(t) D_n(t) \to |D_n(t)| \text{ cuando } \epsilon \to 0 \text{ y } |f_\epsilon(t) D_n(t)| \leq |D_n(t)|$$

en casi todo punto de $\mathfrak{T}$. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue [3] tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\Lambda_n f_\epsilon &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\epsilon D_n(t)\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)D_n(t)\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt = L_n.\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ existe $f_\epsilon \in C(\mathfrak{T})$, con $\|f_\epsilon\|_\infty = 1$, tal que

$$||\Lambda_n f_\epsilon| - L_n| \leq |\Lambda_n f_\epsilon - L_n| \text{ entonces } -\epsilon < |\Lambda_n f_\epsilon| - L_n < \epsilon$$

luego

$$L_n - \epsilon < |\Lambda_n f_\epsilon| \text{por lo tanto } L_n \leq \|\Lambda_n f_\epsilon\|\,.$$

De lo anterior podemos deducir que $\|\Lambda_n\| = L_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\|\Lambda_n\| = \infty.$$

Ahora, de una aplicación directa del teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 1.1.1) resulta que

$$\sup_{n\in N}|\Lambda_n f| = \sup_{n\in N}|S_n(f,x)| = \infty$$

para toda f en algún subconjunto denso en $C(\mathfrak{T})$.

En el procedimiento anterior se escongió $x = 0$ por conveniencia en los cálculos, pero debe ser claro que el mismo resultado se tiene para cada x, es decir, para cada número real x existe un correspondiente $E_x \subset C(\mathfrak{T})$ el cual es denso en $C(\mathfrak{T})$ tal que $\sup_{n\in N}|S_n(f,x)| = \infty$ para cada $f \in E_x$. En particular la serie de Fourier de cada $f \in E_x$ diverge en x.

Veremos que imponiendo algunas condiciones sobre la función $f \in L^1$ obtenemos convergencia puntual de su serie de Fourier. Dirichlet fue el primero en probar convergencia puntual de la serie de Fourier para una clase grande

[3] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones, $f_n \in L^1(\mathfrak{T})$ para todo n, tal que $f_n(x) \to f(x)$ c.t.p. de $\mathfrak{T}$ para alguna f medible. Si existe $g \in L^1(\mathfrak{T})$, tal que, para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p. de $\mathfrak{T}$, entonces $f \in L^1(\mathfrak{T})$, $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_1 = 0$ y $\int_{\mathfrak{T}} f\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathfrak{T}} f_n\,dt$

de funciones, él mostró que la serie de Fourier de una función f regular a trozos en $[-\pi, \pi]$ converge puntualmente en cada x a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k cos(kx) + b_k sen(kx)]$$

en los puntos de continuidad de f y al promedio de los valores límites $\dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ en los puntos de discontinuidad de f. Esta clase de funciones satisfacen:

1. $f(x)$ tiene solamente un número finito de discontinuidades;

2. $f(x)$ tiene un número finito de valores extremos, máximo y mínimo en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Tales funciones son llamadas regular a trozos. Cabe mencionar que estas condiciones son suficientes pero no necesarias. En este sentido, daremos tres teoremas que consideramos más importantes para asegurar la convergencia de $S_n(f, x)$ a f en $L^1(\mathfrak{T})$ y $C(\mathfrak{T})$.

1.3.2. Criterios de Convergencia

Sabemos que

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{T}} f(x+u) \frac{sen(n+1/2)u}{sen(\frac{1}{2}u)}\, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{sen(n+1/2)u}{sen(\frac{1}{2}u)}\, du, \end{aligned}$$

que, como mencionamos en la sección 1.2, se conoce como integral de Dirichlet, en que se funda la teoria rigurosa de las series de Fourier. Pues, fraccionando el intervalo de integración $(-\pi, \pi)$ en $(-\pi, 0)$,$(0, \pi)$, resulta:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{sen(n+1/2)u}{sen(\frac{1}{2}u)} [f(x+u) + f(x-u)]\, du\,. \tag{1.16}$$

Una consecuencia inmediata, muy importante, que algunos llaman teorema de localización de Riemann, demuestra que el comportamiento de la sucesión $\{S_n(f, x)\}$, depende solo de los valores de f en cierto (arbitrariamente pequeño) entorno de x. Veamos, en efecto, que para otra función $g(x) = f(x)$, en un entorno $(x-\delta, x+\delta)$, con valores arbitrarios (por ejemplo nulos) fuera de el, las sumas $S_n(f,x)$ y $S_n(g,x)$, tienen el mismo límite:

$$S_n(g,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{sen(n+1/2)u}{sen(\frac{1}{2}u)}[g(x+u)+g(x-u)]\,du,$$

pues la diferencia de integrales se reduce a la integral en (δ,π)

$$S_n(f,x) - S_n(g,x) = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \frac{[f(x+u)+f(x-u)]}{sen(\frac{1}{2}u)} sen(n+1/2)u\,du$$

y $\dfrac{[f(x+u)+f(x-u)]}{sen(\frac{1}{2}u)}$ es integrable en (δ,π). Por lo tanto, es aplicable el teorema de Riemann-Lebesgue. Luego, $S_n(f,x) - S_n(g,x) \to 0$ en ese punto x.

Asi, dos series de Fourier pueden tener el mismo comportamiento en un intervalo, pero pueden comportarse de modo totalmente diferente en algun otro.

La igualdad (1.16) para la función constante $f(x) = 1$ se reduce a esta

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{sen(n+1/2)u}{sen(\frac{1}{2}u)} 2\,du,$$

multiplicándola por el número s.

$$s = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{sen(n+1/2)u}{sen(\frac{1}{2}u)} 2s\,du$$

luego restandola de (1.16) resulta la formula fundamental:

$$S_n(f,x) - s = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{sen(n+1/2)u}{sen(\frac{1}{2}u)}[f(x+u)+f(x-u)-2s]\,du \quad (1.17)$$

cuya convergencia hacia 0 es la condición necesaria y suficiente para que la serie de Fourier tenga la suma s para un cierto x.

El teorema de Riemann (teorema de localización) permite reducir el intervalo a $(0,\delta)$, pues la integral en (δ,π) tiende a 0 para $n \to \infty$. En segundo lugar dado que

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{sen(\frac{1}{2}u)}-\frac{2}{u}\right] &= \lim_{u\to 0}\left[\frac{u-2sen(\frac{1}{2}u)}{usen(\frac{1}{2}u)}\right]\\
&= \lim_{u\to 0}\left[\frac{1-cos(\frac{1}{2}u)}{sen(\frac{1}{2}u)+\frac{1}{2}ucos(\frac{1}{2}u)}\right]\\
&= \lim_{u\to 0}\left[\frac{sen(\frac{1}{2}u)}{cos(\frac{1}{2}u)-\frac{1}{4}sen(\frac{1}{2}u)}\right]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Podemos simplificar el denominador poniendo $\frac{1}{2}u$ en vez de $sen(\frac{1}{2}u)$, y resulta una condición equivalente:

$$\int_0^\delta \frac{sen(n+1/2)u}{sen(\frac{1}{2}u)}\left[f(x+u)+f(x-u)-2s\right]\,du \approx$$

$$\int_0^\delta \frac{sen(n+1/2)u}{\frac{1}{2}u}\left[f(x+u)+f(x-u)-2s\right]\,du,$$

ya que la diferencia entre ambas integrales es:

$$\int_0^\delta sen(n+1/2)u\left[\frac{1}{sen(\frac{1}{2}u)}-\frac{2}{u}\right]\left[f(x+u)+f(x-u)-2s\right]\,du,$$

donde los factores que acompañan al seno son finitos en el origen; y por el teorema de Riemann tiende a 0, para $n\to\infty$. El criterio de convergencia hacia s se reduce, por tanto, a esta condición necesaria y suficiente:

$$\int_0^\delta \frac{sen(n+1/2)u}{u}\left[f(x+u)+f(x-u)-2s\right]\,du\ \to 0 \tag{1.18}$$

para $n\to\infty$, la cual se verifica, por el mismo teorema de Riemann, si es integrable absolutamente el coeficiente del seno. Después de esto, resulta fácil de comprender el criterio siguiente.

Teorema 1.3.2 *(Criterio de Dini)* Sea $f\in L^1(T)$. Supongamos que existe $\delta>0$ tal que

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|}{u}\,du<\infty\ ,\ \text{ó}$$

$$\int_{|t|<\delta} \left| \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \right| dt < \infty$$

entonces $\lim_{n\to\infty} S_n(f,x) = f(x)$, siendo uniforme la convergencia si δ es independiente de x.

Antes de establecer el siguiente criterio de convergencia es conveniente introducir las siguientes definiciones:

Definición 1.3.1 El conjunto

$$\Pi = \{x_k \in [a,b] \ / \ k = 1,2,\ldots,n \text{ y } a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n = b\},$$

se denomina una partición de $[a,b]$.

Definición 1.3.2 Sea f una función a valor complejo, defnida en $[a,b]$. Si $\Pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$, escribiremos $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, pra $k = 1,2,\ldots,n$. De donde

i) La variación de f respecto de una partición Π se define como $V_\Pi(f) = \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|$

ii) Si existe un número positivo M tal que $V(f) = \sup_{\Pi} V_\Pi(f) \le M$, para toda partición Π de $[a,b]$, entonces diremos que f es de variación acotada en $[a,b]$.

Su variación positiva y variación negativa respecto de Π son

$$P_\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})]^+ \text{ y } N_\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})]^-,$$

en donde $x^+ = \max(x,o)$ y $x^- = \max(-x,0)$. Evidentemente se cumplen $V_\Pi(f) = P_\Pi(f) + N_\Pi(f)$ y $P_\Pi(f) - N_\Pi(f) = f(t_n) - f(t_0)$. Además

$$V(f) = P(f) + N(f),$$

pues se puede tomar una sucesión de particiones $\Pi(n)$ tales que los términos de $V_{\Pi(n)}(f) = P_{\Pi(n)}(f) + N_{\pi(n)}(f)$ tiendan respectivamente a $V(f)$, $P(f)$ y $N(f)$. Cabe mensionar, que no toda función continua en un intervalo cerrado es de variación acotada. Como muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.3.1 Sea

$$f(x) = \begin{cases} xcos(\frac{\pi}{2x}) & \text{si} \quad 0 < x \leq \pi \\ \\ 0 & \text{si} \quad -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

En efecto, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Ahora, veamos que $f(x)$ no es de variación acotada, tomemos una sucesion de particiones π_n de $[-\pi, \pi]$ la cual genera $2n + 2$ subintervalos

$$\Pi(n) = \left\{ -\pi, 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \cdots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \pi \right\}$$

entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} |\Delta f_k| &= \sum_{k=1}^{2n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &= 2\,|\pi cos(1/2)| + \left|\frac{1}{2n}\right| + \left|\frac{1}{2n}\right| + \cdots + \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

pero esta suma no está acotada, pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Luego la función no es de variación acotada en ninguna vecindad de $x = 0$.

Teorema 1.3.3 *(Jordan 1887)* Si f es una función real de variación acotada sobre I, se descompone en diferencia de dos funciones crecientes

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{V_a^x(f) + f(x)}{2} - \frac{V_a^x(f) - f(x)}{2} \\ &= \left[P_a^x(f) + \frac{1}{2} f(a) \right] - \left[N_a^x(f) - \frac{1}{2} f(a) \right] \end{aligned}$$

(descomposición de Jordan). Si f es continua por la derecha o por la izquierda de un punto también lo son las dos funciones de la descomposición, suponiendo $f(a) = f(a^+)$ si $a \notin I$.

Demostración. Dado que $f(b) - f(a) = P_\Pi(f) - N_\Pi(f)$ obtenemos

$$P_\Pi(f) = N_\Pi(f) + f(b) - f(a) \leq N(f) + f(b) - f(a)$$

de donde resulta que

$$P(f) \leq N(f) + f(b) - f(a)$$

de manera análoga obtenemos

$$N_\Pi(f) = P_\Pi(f) + f(a) - f(b) \leq P(f) + f(a) - f(b)$$

$$\Rightarrow N_\Pi(f) \leq P(f) + f(a) - f(b)$$

$$\Rightarrow N(f) + f(b) - f(a) \leq P(f)$$

asi, $P(f) = N(f) + f(b) - f(a)$ de estas relaciones resulta que

$$P_a^x(f) = N_a^x(f) + f(x) - f(a) \text{ y,}$$

teniendo en cuenta que $P_a^x(f) = (1/2)(V_a^x(f) + f(x) - f(a))$ y $N_a^x(f) = (1/2)(V_a^x(f) - f(x) + f(a))$, se obtiene la descomposición de Jordan.

Para las propiedades de continuidad, consideremos, por ejemplo, el caso en que f es continua por la derecha en x. Se trata de probar que también es la función $V_a^x(f)$. Supongamos que $\delta = V_a^{x^+}(f) - V_a^x(f) > 0$.
Dado $\varepsilon > 0$, sea $h_0 > 0$ tal que

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon \text{ y } V_a^{x+h} - V_a^{x^+} < \varepsilon \ \ (0 < h \leq h_0)$$

esto es posible ya que $\lim\limits_{h \to 0^+} f(x+h) = f(x)$ y de la existensia de $V_a^{x^+}(f)$. Luego, existen h y particiones $\Pi = \{x_i\}_{i=0}^n$ de $[x, x+h]$ tales que $V_\Pi(f) \geq \frac{3\delta}{4}$, pues se cumple $V_a^{x+h}(f) - V_a^x(f) = V_x^{x+h}(f)$. Necesariamente

$$\begin{aligned}
\frac{3\delta}{4} \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= |f(x_1) - f(x_0)| + \sum_{i=2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&< \varepsilon + \sum_{i=2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
\frac{3\delta}{4} - \varepsilon &\leq \sum_{i=2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|
\end{aligned}$$

ya que $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$. Por otra parte, como hemos hecho con $[x, x+h]$, se puede tomar una partición $\Pi' = \{y_i\}$ de $[x, x_1]$ tal que $V_{\Pi'}(f) \geq \dfrac{3\delta}{4}$, lo que claramente es posible por nuestro supuesto hecho arriba ($\delta = V_a^{x^+}(f) - V_a^x(f) > 0$), y resulta

$$\delta + \varepsilon > V_a^{x+h}(f) - V_a^x(f) \geq V_{\Pi'}(f) + \sum_{i=2}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \geq \frac{3\delta}{2} - \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario, lo que es imposible.

$\square$

Lema 1.3.1 *(segundo teorema del valor medio)* Sea g no decreciente y no negativa en $[a, b]$ y h continua con un número finito de cambios de signo en $[a, b]$. Existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b g(t)h(t)\,dt = g(b)\int_c^b h(t)\,dt.$$

Demostración. Descomponemos (a, b) en los intervalos $(a_0, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{k-1}, a_k)$ en los que h tiene signo constante ($a_0 = a, a_k = b$). Entonces,

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} g(t)h(t)\,dt = \mu_j \int_{a_{j-1}}^{a_j} h(t)\,dt$$

donde $g(a_{j-1}+) \leq \mu_j \leq g(a_j-)$. Escribiremos $H(x) = \int_x^b h(x)\,dt$, de modo que

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(t)h(t)\,dt &= \sum_{j=1}^{k} \mu_j[H(a_{j-1}) - H(a_j)] \\
&= \mu_1 H(a) + [\mu_2 - \mu_1]H(a_1) + [\mu_3 - \mu_2]H(a_2) + \cdots + \\
&\quad [\mu_k - \mu_{k-1}]H(a_{k-1}) + [g(b) - \mu_k]H(b) \\
&= \mu_1 H(a) + \sum_{j=1}^{k-1}[\mu_{j+1} - \mu_j]H(a_j) + [g(b) - \mu_k]H(b).
\end{aligned}$$

(Hemos añadido $g(b)H(b)$ que es cero.) Los coeficientes que multiplican a la función H son todos no negativos por ser g no decreciente, de modo que

$$\begin{aligned}
\mu_1 \inf H(x) + \sum_{j=1}^{k-1} [\mu_{j+1} - \mu_j] \inf H(x) + [g(b) - \mu_k] \inf H(x) &\leq \\
\mu_1 H(a) + \sum_{j=1}^{k-1} [\mu_{j+1} - \mu_j] H(a_j) + [g(b) - \mu_k] H(b) &\leq \\
\mu_1 \sup H(x) + \sum_{j=1}^{k-1} [\mu_{j+1} - \mu_j] \sup H(x) + [g(b) - \mu_k] \sup H(x)
\end{aligned}$$

de donde sumando los coeficientes de $\inf H(x)$ y $\sup H(x)$ tenemos

$$g(b) \inf H(x) \leq \mu_1 H(a) + \sum_{j=1}^{k-1} [\mu_{j+1} - \mu_j] H(a_j) + [g(b) - \mu_k] H(b) \leq g(b) \sup H(x)$$

de modo que se puede escribir como el producto de la suma de los coeficientes por un valor comprendido entre el máximo y el mínimo de $H(x)$. Por la continuidad de $H(x)$, este valor será $H(c)$ para algún $c \in (a, b)$. Lo que demuestra el lema.

$\square$

si en (1.18) suponemos que f es de variación acotada y sea

$$\varphi(u; x) = \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - s,$$

con $s = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, diferencia de dos funciones crecientes, y razonemos como si $\varphi(u; x) > 0$ fuese creciente, tendiendo a cero con u. Para $v = n + 1/2$, aplicando a (1.18) el segundo teorema de valor medio (lema 1.3.1) sale:

$$\begin{aligned}
2 \int_0^\delta \varphi(u; x) \frac{sen(vu)}{u} \, du &= 2\varphi(\delta; x) \int_\varepsilon^\delta \frac{sen(vu)}{u} \, du \\
&= 2\varphi(\delta; x) \int_{v\varepsilon}^{v\delta} \frac{sen(t)}{t} \, dt
\end{aligned}$$

ya que

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{sen(t)}{t} \, dt < \int_0^\pi \frac{sen(t)}{t} \, dt$$

será $\displaystyle\int_{v\varepsilon}^{v\delta} \frac{sen(t)}{t}\, dt < \int_0^{\pi} \frac{sen(t)}{t}\, dt$ así

$$2\varphi(\delta; x) \int_{v\varepsilon}^{v\delta} \frac{sen(t)}{t}\, dt < 2\varphi(\delta; x) \int_0^{\pi} \frac{sen(t)}{t}\, dt$$

independientemente del valor de v. Y, $\varphi(\delta; x) \to 0$ con $\delta \to 0$. Así para $\delta = \delta_1$ suficientemente pequeño, podemos hacer primero $\varphi(\delta_1; x)$ arbitrariamente pequeño, y habiendo fijado así δ_1, por el teorema de Riemann (localización) es

$$\lim_{n\to\infty} 2 \int_0^{\delta_1} \varphi(u; x) \frac{sen(n + 1/2)u}{u}\, du = 0.$$

Ahora, veamos, el siguiente criterio que en lugar de referirse a cada punto x, como el criterio de Dini, se refiere a un intervalo

Teorema 1.3.4 *(Criterio de Jordan).* Sea $f \in L^1(T)$. La serie de Fourier de $f(x)$ converge en todo intervalo donde tenga variación acotada. La convergencia es uniforme hacia $f(x)$ en un intervalo interior a cada intervalo de continuidad, y en los puntos de discontinuidad por salto converge hacia el promedio $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$.

El siguiente ejemplo nos permitirá concluir que los dos criterios anteriores son independientes. Es decir, exiten funciones que satisfacen el criterio de Dini pero no el de Jordan y viceversa.

Ejemplo 1.3.2

Primero consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{Ln\left(\frac{x}{2\pi}\right)}, & \text{si} \quad 0 < x \leq \pi \\ \\ 0, & \text{si} \quad -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

f es creciente y continua en 0. Sea $\Pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[-\pi,\pi]$, existe $k \in N$ con $0<k<n$ tal que $x_{k-1} \leq 0 \leq x_k$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} |\Delta f_j| &= \sum_{j=0}^{k-1} |f(x_{j+1} - f(x_j))| + \sum_{j=k}^{n} |f(x_{j+1} - f(x_j))| \\
&= \sum_{j=k}^{n} |f(x_{j+1} - f(x_j))| \\
&= \sum_{j=k}^{n} f(x_{j+1} - f(x_j)) \text{ ya que } f \text{ es creciente} \\
&= f(\pi) - f(x_k) < f(\pi)
\end{aligned}$$

por lo tanto f es de variación acotada en $[-\pi,\pi]$, en particular en una vecindad de 0, y por ende satisface el criterio de Jordan en el punto $x=0$. Sin embargo f no satisface el criterio de Dini en el punto $x=0$, pues para todo $\delta \in (0,\pi)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{|t|<\delta} \left| \frac{f(t)-f(0)}{t} \right| dt &= \int_0^{\delta} \frac{-\frac{1}{Ln(t/2\pi)}}{t}\, dt \\
&= \int_0^{\delta} -\frac{1}{tLn(t/2\pi)}\, dt \\
&= \int_0^{-Ln(\delta/2\pi)} \frac{1}{u}\, du \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

donde $u = -Ln(t/2\pi)$, por tanto la integral diverge para todo $\delta > 0$.

En segundo lugar consideremos la función

$$h(x) = \begin{cases} xcos(\frac{\pi}{2x}), & \text{si} \quad 0 < x \leq \pi \\ \\ 0, & \text{si} \quad -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

en $x=0$, h satisface la condición de Dini pues,

$$\begin{aligned}
\int_{|t|<\delta} \left| \frac{h(t)-h(0)}{t} \right| dt &= \int_{|t|<\delta} \left| \frac{h(t)}{t} \right| dt \\
&= \int_0^{\delta} \left| cos(\frac{\pi}{2x}) \right| dt \leq \delta < \infty,
\end{aligned}$$

para $0 < \delta < \pi$. Y como vimos en le ejemplo (1.3.1) h no es de variación acotada en ninguna vecindad de $x = 0$, es decir, no satisface la condición de Jordan.

En general para cada $f \in L^p$, $p > 1$, $S_n(f, x) \to f(x)$ en casi todo punto de $\mathfrak{T}$ cuando $n \to \infty$, según el teorema de Carleson-Hunt. Además, por la existencia de funciones continuas en $\mathfrak{T}$ cuya serie de Fourier diverge en un conjunto de puntos no numerable, se exige condiciones complementarias a las funciones continuas. Sin embargo, esta situación poco satisfactoria se aclara de forma elegante cuando Fejer (1902) aplica a la serie el método de promedios de Cesaro y transforma la integral de Dirichlet (1.8) en la integral de Fejer, que viene a ser más eficaz.

En efecto, si en lugar de las sumas parciales $S_n(f, x)$ consideramos sus medias aritméticas o sumas de Césaro

$$\sigma_n(f, x) = \frac{S_0(f, x) + S_1(f, x) + \cdots + S_n(f, x)}{n + 1}$$

y dado que $S_n(f, x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathfrak{T}} f(t) D_n(x - t)\, dt$. Luego

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f, x) &= \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{T}} f(t) D_0(x - t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{T}} f(t) D_1(x - t)\, dt + \cdots + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{T}} f(t) D_n(x - t)\, dt \right] \\
&= \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{T}} f(t) \left(\sum_{k=0}^{n} D_k(x - t) \right) dt \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{T} f(t) \left[\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x - t) \right] dt
\end{aligned}$$

de (1.11) tenemos que

$$
\begin{aligned}
K_n(x-t) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x-t) \\
&= \frac{1}{n+1}.\frac{sen^2[(\frac{n+1}{2})(x-t)]}{sen^2[(x-t)/2]} \\
\text{así} \\
\sigma_n(f,x) &= \frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{\mathfrak{T}} f(t)\frac{sen^2[(\frac{n+1}{2})(x-t)]}{sen^2[(x-t)/2]}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t)K_n(x-t)\,dt \\
&= f * K_n(x)
\end{aligned}
$$

La noción de sumabilidad de Césaro[4], es una generalización de la noción de convergencia ordinaria y la suma de Césaro de una serie convergente siempre existe y es igual a la suma ordinaria de la serie.

En conclusión, se obtiene el siguiente teorema

Teorema 1.3.5 *(Teorema de Fejer)* Si $f \in C(\mathfrak{T})$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f,x) = f(x)$ *uniformente. Si* $f \in L^p$ $(1 \le p < \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\sigma_n(f,x) - f(x)\|_p = 0$.

Demostración: tenemos que

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)\,dt$$

y como muestra (1.13) $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)\,dt$ y, por tanto, implica

$$\sigma_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-t) - f(x)]K_n(t)\,dt.$$

Sea $\epsilon > 0$ dado, y elijamos M, tal que $|f(x)| \le M$ para todo x. Como f es uniformemente continua, podemos elegir $\delta > 0$, tal que $|x-y| < \delta$ implica

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

[4]Esto es algunas veces llamado sumable en el sentido de Cesaro o $(C,1)$ sumable.

y de (1.12) podemos deducir que

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-cos(\delta))} \ (0 < \delta \leq |x| \leq \pi).$$

Por lo que, podemos, elegir N, tal que $n \geq N$ y $\delta \leq |t| \leq \pi$ implica

$$K_n(t) \leq \frac{\epsilon}{4M} \tag{1.19}$$

Así,

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)||K_n(t)| \, dt < \frac{\epsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \, dt = \pi\epsilon \tag{1.20}$$

para todo n, pues, $K_n(t) \geq 0$; de igual modo (1.19) implica

$$\int_{-\pi}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|K_n(t) \, dt + \int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|K_n(t) \, dt \leq \frac{\epsilon}{4M} \int_{-\pi}^{\pi} 2M \, dt = \pi\epsilon \tag{1.21}$$

siempre que $n \geq N$. Finalmente (1.20) y (1.21), conjuntamente, dan

$$|\sigma_n(f,x) - f(x)| < \epsilon$$

para todo x y todo $n \geq N$, lo que completa la demostración.

$\square$

Observemos que si queremos probar esto mismo para $S_n(f,x)$ en lugar de $\sigma_n(f,x)$, esto es, si sustituimos $K_n(t)$ por $D_n(t)$, encontramos la integral

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \, dt,$$

que tiende hacia ∞ cuando $n \to \infty$, como vimos antes.

Capítulo 2

Introducción a la teoría de convergencia de series de Fourier

Vimos en el capítulo anterior (sección 1.3.2) que

$$\begin{aligned}
S_n(f,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{sen(n+1/2)u}{sen(\frac{1}{2}u)}\,du \\
&\approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+u)\frac{sen(n+1/2)u}{\frac{1}{2}u}\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\frac{sen(n+1/2)u}{u}\,du
\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
S_n(f,x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{sen(n+1/2)u}{sen(\frac{1}{2}u)}[f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\,du \\
&\approx \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} \frac{sen(n+1/2)u}{u}[f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} \varphi(u;x)\frac{sen(n+1/2)u}{u}\,du
\end{aligned}$$

siempre que $\delta \in (0,\pi]$ y $\varphi(u;x) = f(x+u)+f(x-u)-2f(x)$. Esto amenudo se escribe

$$\begin{aligned} S_n(f;x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\frac{sen(n+1/2)u}{u}\,du + o(1) \\ S_n(f;x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} \varphi(u;x)\frac{sen(n+1/2)u}{u}\,du + o(1) \end{aligned}$$

A continuación explicamos, más generalmente, el simbolo o(1) utilizado en las expresiones anteriores. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas para $x > x_0$, y $g(x) \neq 0$. Los simbolos

$$f(x) = o(g(x)), \quad f(x) = O(g(x))$$

significan respectivamente que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ cuando $x \to \infty$, y que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es acotada para x suficientemente grande. La misma notación es usada cuando x tiende a un límite finito o a $-\infty$, o aún cuando x tiende a su límite a través de una sucesión discreta de valores.

En particular, una expresión es o(1) ó O(1) si tiende a 0 o es acotada, respectivamente.

2.1. Espacios de funciones relacionados

Haremos una clasificación de funciones f definidas en $\mathfrak{T}$ de la siguiente manera:

$$E_0(\mathfrak{T}) = \{f : S_n(f;x), \text{ para cada } n = 1,2,\cdots, \text{ es uniformemente acotada}\}$$

y para cada $f \in E_0(\mathfrak{T})$, se define

$$\|f\|_U = \sup_{n,x} |S_n(f;x)|\,.$$

Dados $f, g \in E_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tendremos que

$$S_n(\alpha f + \beta g;x) = \alpha S_n(f;x) + \beta S_n(g;x), \quad n = 1,2,\ldots,$$

es, obviamente, uniformemente acotada y por tanto pertenece a $E_0(\mathfrak{T})$. Luego, $E_0(\mathfrak{T})$ es un espacio lineal

Como $\|f\|_U$ satisface $\forall f, g \in E_0(\mathfrak{T})$

1. $\|f\|_U \geq 0$

2. $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda f\|_U = |\lambda| \, \|f\|_U$

3.

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= \sup_{n,x} |S_n(f+g;x)| \\ &= \sup_{n,x} |S_n(f;x)+S_n(g;x)| \\ &\leq \sup_{n,x} |S_n(f;x)| + \sup_{n,x} |S_n(g;x)| \\ &= \|f\|_U + \|g\|_U \end{aligned}$$

4. $\|f\|_U = \sup_{n,x} |S_n(f;x)| = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Por el principio de localización.

Entoces $\|f\|_U$ es una norma en $E_0(\mathfrak{T})$. Y en conclusión $E_0(\mathfrak{T})$ es un espacio lineal normado con norma $\|\cdot\|_U$.

Definamos ahora tres subespacios lineales de $E_0(\mathfrak{T})$,

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{T}) &= \{f : S_n(f;x), n = 1,2,\ldots, \text{ converge uniformemente } \} \\ E(\mathfrak{T}) &= E_0(\mathfrak{T}) \cap \{f : S_n(f;x), n = 1,2,\ldots, \text{ converge casi en todo punto } \} \end{aligned}$$

y

$E_C(\mathfrak{T}) = E(\mathfrak{T}) \cap C(\mathfrak{T})$.

El siguiente resultado nos muestra que estos cuatro conjuntos son espacios de Banach y, ademas, cada subespacio es un subespacio propio.

Lema 2.1.1 $E_0(\mathfrak{T}), E(\mathfrak{T}), E_C(\mathfrak{T})$ y $U(\mathfrak{T})$ son espacios de Banach con la misma norma, es decir $\|\cdot\|_U$, y

$$E_0(\mathfrak{T}) \supset E(\mathfrak{T}) \supset E_C(\mathfrak{T}) \supset U(\mathfrak{T}).$$

Demostración. Por el teorema de Fejer (teorema 1.3.5) para cada f en $E_0(\mathfrak{T})$

y para casi todo x, tenemos

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \lim_{n\to\infty} |\sigma_n(f;x)| \\
|\sigma_n(f;x)| &= \left|\frac{S_0(f;x)+S_1(f;x)+\cdots+S_n(f;x)}{n+1}\right| \\
&\leq \frac{|S_0(f;x)|+|S_1(f;x)|+\cdots+|S_n(f;x)|}{n+1} \\
&\leq \frac{\|S_n(f;x)\|_\infty+\|S_n(f;x)\|_\infty+\cdots+\|S_n(f;x)\|_\infty}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\,\|S_n(f;x)\|_\infty}{n+1}
\end{aligned}$$

Luego

$$|\sigma_n(f;x)| \leq \|S_n(f;x)\|_\infty$$

y por lo tanto

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |\sigma_n(f;x)| \leq \|S_n(f;x)\|_\infty \leq \|f\|_U . \tag{2.1}$$

Así si $f_k, k = 1,2,\ldots$, es una sucesión de Cauchy de funciones en $E_0(\mathfrak{T})$, entonces es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mathfrak{T})$. Entonces hay una f en $L^\infty(\mathfrak{T})$ tal que $\|f-f_k\| \to 0$ cuando $k\to\infty$. Además, para cualquier n y cualquier x,

$$\begin{aligned}
|S_n(f;x)| &\leq |S_n(f-f_k;x)| + |S_n(f_k;x)| \\
&\leq \frac{1}{\pi}\|f-f_k\|_\infty \int_T |D_n(t)|\,dt + \|f_k\|_U .
\end{aligned}$$

Para cada n, podemos hacer $\|f-f_k\|_\infty$ tan pequeño como se quiera y por consiguiente $\frac{1}{\pi}\|f-f_k\|_\infty \int_T |D_n(t)|\,dt$, seleccionando k suficientemente grande, y $\|f_k\|_U$ no excede el número finito, $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|f_k\|_U$. Es decir, $f \in E_0(\mathfrak{T})$ y entonces $E_0(\mathfrak{T})$ es completo.

Para $f \in E(\mathfrak{T})$, podemos redefinir f en un conjunto de medida 0 de modo que $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f;x)$ para cada x. Entonces, para f en cualquiera de los espacios $E(\mathfrak{T}), E_C(\mathfrak{T})$ o $U(\mathfrak{T})$, tenemos, por (2.1) que

$$|f(x)| \leq \|f\|_U \text{ para cada } x.$$

Y, por el mismo argumento, convergencia en norma $\|\cdot\|_U$ implica convergencia en la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$. Así, una sucesión de Cauchy en los espacios $E_C(\mathfrak{T})$ o $U(\mathfrak{T})$ convergen a una función continua. Veamos, para $f_n \in E_C(\mathfrak{T})$ por ser una sucesión de Cauchy converge uniformemente a una f, y por tanto f es continua. Luego para $f_n \in U(\mathfrak{T})$, $f_n \to f$ uniformemente, y ya que $S_m(f_n; x) \to f_n$ uniformemente, f_n es continua [1], por lo tanto f es continua. Si $f_k \in E(\mathfrak{T})$ o $f_k \in E_C(\mathfrak{T}), k = 1, 2, \ldots$, es tal que $\|f - f_k\|_U \to 0$ cuando $k \to \infty$, entoneces para cada m, n, k y cada x

$$\begin{aligned} |S_m(f;x) - S_n(f;x)| &\leq \|S_m(f) - S_m(f_k)\|_\infty + |S_m(f_k;x) - S_n(f_k;x)| \\ &\quad + \|S_n(f_k;x) - S_n(f;x)\|_\infty \\ &\leq 2\|f - f_k\|_U + |S_m(f_k;x) - S_n(f_k;x)| \end{aligned}$$

y $|S_m(f_k;x) - S_n(f_k;x)| \to 0$ ya que $f_k \in E(\mathfrak{T})$ o $f_k \in E_C(\mathfrak{T})$ por hipótesis converge. Cuando $f \in U(\mathfrak{T})$, podemos reemplazar la evaluación por puntos, en esta desigualdad, por $\|\cdot\|_\infty$. Seleccionando k suficientemente grande, el lado derecho será pequeño para todo m, n grande, implicando que la serie de Fourier de f converge en casi todo punto siempre que $f_k \in E(\mathfrak{T})$ o $f_k \in E_C(\mathfrak{T})$ y converge uniformemente cuando $f \in U(\mathfrak{T})$. De este modo se establece la primera parte del lema.

□

2.2. Función módulo de continuidad

Sea $f(x)$ definida en $\mathfrak{T}$, y sea

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; f) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \delta = 0 \\ \\ \sup\{|f(x_2) - f(x_1)| : |x_2 - x_1| < \delta\} & \text{si} \quad \delta > 0 \end{cases}$$

La función $\omega(\delta)$ es llamada el módulo de continuidad de f. Si para algún $\alpha > 0$ tenemos que $\omega(\delta) \leq C\delta^\alpha$, con C independiente de δ, decimos que f satisface la condición de Lipschitz de orden α en (a, b), también decimos que f pertenece la la clase Λ_α; en simbolos

$$f \in \Lambda_\alpha.$$

[1] $\{S_m(f_n;x)\}_{m=0}^\infty$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente, para cada n.

Acontinuación vemos algunas propiedades de $\omega(\delta)$.

Lema 2.2.1 $\quad i)$ $\omega(\cdot; f)$ es continua siempre que $f \in C(\mathfrak{T})$

$ii)$ si K es un subconjunto compacto de $C(\mathfrak{T})$ y

$$\omega_K(\delta) = \ \sup \{\omega(\delta; f) : f \in K\} \text{ para } 0 \leq \delta,$$

entonces $\omega_K(\delta)$ es continua, creciente y tiende a 0 con δ.

Demostración. Dado que $i)$ es un caso especial de $ii)$, probaremos $ii)$. Lo siguiente es claro

a) si $\beta > \alpha$, entonces $\omega(\beta; f) \leq \omega(\alpha; f) + \omega(\beta - \alpha; f)$ para cualquier $f \in K$, por una aplicación directa de las propiedades del supremo.

b) $\omega(\eta; f) \to 0$ cuando $\eta \to 0$ para cualquier $f \in K$, en efecto, dado $\epsilon > 0, \exists \eta > 0$, tal que si $x_1 \in T$ y $|x_2 - x_1| < \eta$ entonces $|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$ y la continuidad uniforme de f lo garantiza $\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{T}$ con $|x_1 - x_2| < \eta$. Si $\eta \to 0$ y $0 < |f(x_1) - f(x_2)| = L$ tendriamos que $\exists\ 0 < \epsilon < L$ tal que $\forall\ 0 < \eta_1 < \eta,\ \epsilon < |f(x_1) - f(x_2)|$ siempre que $|x_1 - x_2| < \eta_1$ lo que contradice que $f \in C(T)$ por lo tanto, $|f(x_1) - f(x_2)| \to 0$ cuando $\eta \to 0$

c) $\omega_K(\delta)$ es creciente

Prueba de $ii)$. Dado $\epsilon > 0$ hay una colección finita $f_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, en K de modo que la union de los ϵ-vecindarios de los f_i cubren K. para $\delta > 0$, tenemos

$$\omega_K(\delta) \leq \max_i \ \omega(\delta; f_i) + 2\epsilon,$$

lo cual, por b), implica

$$\omega_K(\delta) \to 0 \text{ cuando } \delta \to 0.$$

Si $\delta' > \delta > 0$, entonces

$$\max_i \omega(\delta; f_i) - 2\epsilon \leq \omega_K(\delta) \leq \omega_K(\delta') \leq \max_i \ \omega(\delta'; f_i) + 2\epsilon$$

por a) y c), tenemos

$$0 \leq \omega_K(\delta') - \omega_K(\delta) \leq \max_i \ (\omega(\delta'; f_i) - \omega(\delta; f_i)) + 4\epsilon \leq \max_i \ \omega(\delta' - \delta; f_i) + 4\epsilon,$$

y entonces
$$\omega_K(\delta') - \omega_K(\delta) \to 0 \text{ cuando } \delta' - \delta \to 0.$$
Lo que demuestra la continuidad de ω_K.

$\square$

Una función $F(x)$ se dice que es suave en el punto x_0 si

$$\{F(x_0 + h) + F(x_0 - h) - 2F(x_0)\}/h = o(1) \tag{2.2}$$

Esta relación puede también ser escrita

$$\left\{\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}\right\} - \left\{\frac{F(x_0) - F(x_0 - h)}{h}\right\} = o(1).$$

Se sigue fácilmente que si $F'(x_0)$ existe y es finita entonces F es suave en x_0. Si F es continua y satisface (2.2) uniformemente en $x_0 \in I$, decimos que F es uniformemente suave y también que F pertenece a la clase λ_*.
La clase Λ_* es definida por la condición que F es continua y el lado izquierdo de (2.2) es $O(1)$ uniformemente en x_0.

Teorema 2.2.1 Sea $f(x)$ definida en un intervalo finito (a, b). Si $f \in \Lambda_*$, entonces
$$\omega(\delta; f) = O(\delta\, ln(\delta))$$

Prueba. Sea $M = \max|f(x)|$. La hipótesis $f \in \Lambda_*$ implica

$$|f(x + \tau) - 2f(x + \tau/2) + f(x)| \leq A\tau \tag{2.3}$$

para $x \in (a, b)$ y τ suficientemente pequeño, $0 < \tau \leq \gamma$.
Fijemos x y hagamos $g(\tau) = f(x + \tau) - f(x)$. El lado izquierdo de la desigualdad (2.3) es $|g(\tau) - 2g(\tau/2)|$. Reemplazando τ sucesivamente por $\tau/2, \tau/2^2, \ldots$, obtenemos

$$\begin{aligned} |g(\tau) - 2g(\tau/2)| &\leq A\tau, \\ |2g(\tau/2) - 2^2 g(\tau/2^2)| &\leq A\tau, \\ &\vdots \\ |2^{n-1} g(\tau/2^{n-1}) - 2^n g(\tau/2^n)| &\leq A\tau, \end{aligned}$$

donde n será definido en un momento. Sumando término a término, obtenemos

$$g(\tau) - 2^n g(\tau/2^n) \leq An\tau. \tag{2.4}$$

Supongamos ahora que h tiende a 0 a través de valores positivos. Sea $0 < h \leq 1/2\gamma$ y sea n entero positivo tal que $2^n h$ está en el intervalo $(1/2\gamma, \gamma)$. La desigualdad $2^n h \leq \gamma$ implica que $n = O(ln(h))$. De (2.4,) con $\tau = 2^n h$, obtenemos $|g(\tau) - 2^n g(h)| \leq An\tau$

$$-An\tau - g(\tau) \leq -2^n g(h) \leq An\tau - g(\tau)$$
$$g(\tau) - An\tau \leq 2^n g(h) \leq An\tau + g(\tau)$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
2^n g(h) &\leq An\tau + 2M \\
|g(h)| &\leq \frac{An\tau}{2^n} + \frac{2M}{2^n} \\
|g(h)| &\leq \frac{An\tau h}{2^n h} + \frac{2Mh}{2^n h} = Anh + \frac{2Mh}{2^n h}
\end{aligned}$$

así

$$|g(h)| \leq Anh + \frac{2Mh}{\frac{1}{2}\gamma}, \ (1/2\gamma < 2^n h < \gamma)$$

como $n = O(ln(h))$; $Anh = O(h\, ln(h))$ entonces

$$|g(h)| \leq O(h\, ln(h)) + \frac{2Mh}{\frac{1}{2}\gamma} = O(h\, ln(h))$$

o de manera equivalente

$$f(x+h) - f(x) = O(h\, ln(h)),$$

lo cual prueba el teorema.

$\square$

En particular f satisface el teorema (2.2.1) si $f \in \Lambda_\alpha$, para cada $\alpha < 1$. Si $f \in \lambda_*$, entonces $\omega(\delta; f) = o(\delta\, ln(\delta))$.

2.3. Orden de magnitud de los coeficientes de Fourier

Ahora haremos algunas estimaciones elementales de la magnitud de los coeficientes[2] de Fourier. Sabemos, hasta aqui, para $f \in L^1(\mathfrak{T})$

i) $\widehat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathfrak{T}} f(t)e^{-int}\,dt \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathfrak{T}} |f(t)|$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$, por el teorema de Riemann-Lebesgue (teorema 1.3.1).

Dada una $f \in L^p$, $p \geq 1$, la expresión

$$\omega_p(\delta) = \omega_p(\delta; f) = \sup_{0\leq h\leq \delta} \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx \right\}^{1/p}$$

es llamada la integral módulo de continuidad de f. A diferencia de $\omega(\delta)$, $\omega_p(\delta)$ no es afectada por un cambio de f en un conjunto de medida 0.
Por la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\omega_1(\delta) \leq \omega_p(\delta),$$

pues,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} |f(x+h) - f(x)|\,dx &\leq \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx \right\}^{1/p} \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} dx \right\}^{1/q} \\ &= \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx \right\}^{1/p} \end{aligned}$$

Además, si $\delta > 0$, $\omega(\delta) = \sup\{|f(x_2) - f(x_1)| : |x_2 - x_1| < \delta\}$ lo cual, con $h = |x_2 - x_1|$, implica que

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leq \omega(\delta) \\ \int_T |f(x+h) - f(x)|\,dx &\leq 2\pi\omega(\delta) \end{aligned}$$

y asi mostramos que

$$\omega_1(\delta) \leq \omega(\delta).$$

Luego de esto, veremos los dos teoremas principales de esta sección.

[2] Denotaremos por $\widehat{f}(n)$ a los coeficientes de Fourier

Teorema 2.3.1 Para $n \neq 0$, $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2}\omega_1\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Prueba.

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t)e^{-int}\,dt$$

reemplazando t por $t + \pi/n$

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t+\pi/n)e^{-int-i\pi}\,dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t+\pi/n)e^{-int}\,dt.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}2\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} \left(f(t) - f(t+\pi/n)\right)e^{-int}\,dt \\ \widehat{f}(n) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{T}} \left(f(t) - f(t+\pi/n)\right)e^{-int}\,dt \\ \Rightarrow |\widehat{f}(n)| &\leq \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{T}} |f(t) - f(t+\pi/n)|\,dt \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} |f(t+\pi/n) - f(t)|\,dt \\ &\leq \frac{1}{2}\omega_1(\pi/n)\end{aligned}$$

obviamente, también se cumple que

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2}\omega(\pi/n).$$

□

Teorema 2.3.2 Si f es de variación acotada en $\mathfrak{T}$, entonces

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{V(f;T)}{2\pi|n|} \quad \text{para } n \neq 0.$$

Prueba.

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t)e^{-int}\,dt$$

integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= -\frac{f(t)e^{-int}}{2\pi i n}\bigg|_{\mathfrak{T}} + \frac{1}{2\pi i n}\int_{\mathfrak{T}} e^{-int}\, df(t) \\
&= \frac{1}{2\pi i n}\int_{\mathfrak{T}} e^{-int}\, df(t)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi|n|}\int_{\mathfrak{T}} |df(t)| = \frac{V(f;\mathfrak{T})}{2\pi|n|}.$$

$\square$

Capítulo 3

Mejoramiento de la convergencia de las series de Fourier

Sabemos que hay funciones continuas cuya serie de Fourier no converge, la situación puede ser corregida, de una manera extraordinaria, por un cambio de variable. En relación con esto, el presente capítulo centra su atención en mostrar que para cada $f \in C(\mathfrak{T})$ hay un cambio de variable, es decir, un auto-homeomorfismo g de $\mathfrak{T}$ tal que $f \circ g \in U(\mathfrak{T})$. Además veremos que no es posible encontrar un homeomorfismo g tal que $f \circ g$ converja absolutamente, para cada $f \in C(\mathfrak{T})$.

3.1. Convergencia Uniforme

Con el propósito que la demostración del teorema principal sea completa, veamos antes los siguientes lemas

Lema 3.1.1 Sean V, W espacios Hausdorff, $D \subset V$ un conjunto denso, y $\varphi : D \to W$ una función continua. Supongamos que existe una funcion $\bar{\varphi} : V \to W$ la cual es una extensión de φ[es decir, para cada $x \in D$, $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$] y $\bar{\varphi}$ es continua. Entonces $\bar{\varphi}$ es la única extensión continua de φ a V.

Demostración. Cuando decimos que φ es continua en D, un subconjunto de V, significa que D es considerado como un espacio topológico con la topología relativa heredada de V. Sea $x \in V \setminus D$; x es un punto de acumulación de

D dado que D es denso; $\varphi(x)$no está definida pero $\bar{\varphi}(x)$ si lo está. Dado que $\lim_x \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(x)$, se sigue que $\lim_x \varphi = \bar{\varphi}(x)$. Dado que W es un espacio Hausdorff, si $b = \lim_x \varphi$, entonces $b = \bar{\varphi}(x)$, entonces para cada $x \in V \setminus D$, $\lim_x \varphi$ es único. Entonces no hay otra extensión posible de φ la cual sea continua.

$\square$

Lema 3.1.2 Sea $\mathfrak{T}$ partido en k intervalos de longitud no menor que un número positivo η y sea $0 < M < \infty$. Supongamos que E es el conjunto de funciones $f \in C(\mathfrak{T})$ las cuales son lineales en cada intervalo de la partición y para las cuales $\|f\|_\infty \leq M$. Entonces para cualquier positivo ε hay un N dependiendo de η, k, M, y ε tal que

$$\|S_n(f,x) - f\|_\infty < \varepsilon \text{ siempre que } n \geq N \text{ y } f \in E.$$

Demostración: Sea $x \in \mathfrak{T}$ y $S_n(x) = S_n(f,x)$. La $n-$esima suma parcial modificada de f es

$$\begin{aligned}
S_n^*(x) = S_n^*(f,x) &= \frac{1}{2}\left(S_n(x) + S_{n-1}(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)D_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)D_{n-1}(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)\frac{sen[(n+1/2)t]}{2sen(\frac{1}{2}t)}\,dt + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)\frac{sen[(n-1/2)t]}{2sen(\frac{1}{2}t)}(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)\left[\frac{sen[(n+1/2)t] + sen[(n-1/2)t]}{2sen(\frac{1}{2}t)}\,dt\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)\left[\frac{2sen(nt)cos(\frac{1}{2}t)}{2sen(\frac{1}{2}t)}\right]\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)\frac{sen(nt)}{2tan(\frac{1}{2}t)}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)D_n^*(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Donde $D_n^*(t) = \dfrac{sen(nt)}{2tan(\frac{1}{2}t)}$. Ya que $|f| \leq \|f\|_\infty$ implica que

$$|\Delta f| \leq 2\|f\|_\infty$$
$$\sum_{i=0}^{k} |\Delta f| \leq 2k\|f\|_\infty$$

de aqui

$$V(f,T) \leq 2k\|f\|_\infty \quad ^{1} \tag{3.1}$$

Además,

$$\begin{aligned}
|S_n(x) - S_n^*(x)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)D_n(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)D_n^*(t)\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)\left[D_n(t) - D_n^*(t)\right]\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)\left[\frac{sen[(n+1/2)t]}{2sen(\frac{1}{2}t)} - \frac{sen(nt)}{2tan(\frac{1}{2}t)}\right]\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)\left[\frac{sen[(n+1/2)t] - sen(nt)cos(\frac{1}{2}t)}{2sen(\frac{1}{2}t)}\right]\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)\left[\frac{cos(nt)}{2}\right]\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)cos(nt)\,dt\right|
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|\widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n)\right| &= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t)e^{-int}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t)e^{int}\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t)\left(\frac{e^{-int} + e^{int}}{2}\right)\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(t)cos(nt)\,dt\right|
\end{aligned}$$

como vimos en el capítulo anterior

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \frac{V(f,\mathfrak{T})}{2\pi|n|}, \quad n \neq 0$$

[1] esta condición solamente acota $V(f,\mathfrak{T})$ para cada k.

entonces

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(n)+\widehat{f}(-n)\right| &\leq \frac{V(f,\mathfrak{T})}{\pi\,|n|} \\
\frac{1}{2}\left|\widehat{f}(n)+\widehat{f}(-n)\right| &\leq \frac{V(f,\mathfrak{T})}{2\pi\,|n|}
\end{aligned}$$

y de (3.1)

$$\frac{1}{2}\left|\widehat{f}(n)+\widehat{f}(-n)\right| \leq \frac{V(f,\mathfrak{T})}{2\pi|n|} \leq \frac{2k\,\|f\|_\infty}{2\pi|n|} = \frac{k\,\|f\|_\infty}{\pi|n|}.$$

Por lo que también es obvio que

$$|S_n(x)-S_n^*(x)| \leq \frac{k\,\|f\|_\infty}{\pi|n|} \tag{3.2}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
S_n^*(x)-f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)D_n^*(t)\,dt - f(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} f(x+t)D_n^*(t)\,dt - f(x)\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} D_n^*(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[f(x+t)-f(x)\right] D_n^*(t)\,dt + \\
&\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[f(x-t)-f(x)\right] D_n^*(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Consideraremos solamente la primer integral ya que la segunda puede ser estimada de una manera análoga. Además, podemos escribir la función $f(x+t)-f(x)$, en la variable t, como la diferencia de dos funciones no decreciente en $[0,\pi]$, su variación positiva y negativa. Extendemos estas funciones a $\mathfrak{T}$ haciendolas igual a cero en $(-\pi,0)$. Luego bastará esta integral bajo el supuesto que $f(x+t)-f(x)$ es no decreciente en $[0,\pi]$, continua en $(-\pi,\pi)$ y con un salto en π, no mayor que la variación positiva de f en $\mathfrak{T}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[f(x+t)-f(x)\right] D_n^*(t)\,dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \left[f(x+t)-f(x)\right] D_n^*(t)\,dt + \\
&\quad \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \left[f(x+t)-f(x)\right] D_n^*(t)\,dt \\
&= I + II
\end{aligned}$$

Para cualquier δ en $(0,\pi)$. Por el segundo teorema del valor medio lema 1.3.1, para algún δ_1 en $(0,\delta)$, tenemos

$$|I| \leq \frac{1}{\pi} |f(x+\delta) - f(x)| \left| \int_{\delta_1}^{\delta} D_n^*(t)\, dt \right|$$

como $\frac{1}{\pi} \left| \int_{\delta_1}^{\delta} D_n^*(t)\, dt \right| \leq 1$ y f es continua,

$$|I| \leq |f(x+\delta) - f(x)| \leq \frac{2\,\|f\|_\infty \delta}{\eta} \tag{3.3}$$

II es el $n-$esimo coeficiente seno de Fourier de la función

$$h(t) = \frac{1}{2} (f(x+t) - f(x))\, \chi_{(\delta,\pi)(t)} cot \left(\frac{t}{2}\right)$$

y entonces

$$|II| \leq \frac{V(h,\mathfrak{T})}{\pi|n|} \leq \frac{1}{\pi|n|}(V(f,\mathfrak{T}) + \|f\|_\infty) cot(\delta/2) \tag{3.4}$$

dado que $cot(t)$ es decreciente en (δ,π).
Seleccionando δ de modo que

$$|I| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

lo que de (3.3) se ve que la selección depende de η y $\|f\|_\infty$. Entonces seleccionando N suficientemente grande tal que

$$|S_n(x) - S_n^*(x)| + |II| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ siempre que } x \in \mathfrak{T}.$$

Una selección la cual depende de k, $\|f\|_\infty$ y δ es claro de (3.2) y (3.4). Así

$$\begin{aligned} |S_n(x) - f(x)| &\leq |S_n(x) - S_n^*(x)| + |S_n^*(x) - f(x)| \\ &\leq |S_n(x) - S_n^*(x)| + |I| + |II| \end{aligned}$$

estableciendo la desigualdad

$$|S_n(f,x) - f(x)| < \varepsilon \text{ siempre que } x \in \mathfrak{T}.$$

$\square$

Teorema 3.1.1 Si K es un subconjunto compacto de $C(\mathfrak{T})$, entonces existe un cambio de variable g tal que $f \circ g \in U(\mathfrak{T})$ para cada f en K.

Demostración. Para un subconjunto compacto K de $C(\mathfrak{T})$ sea ω_K su correspondiente módulo de continuidad. Entonces $M = \max\{\|f\|_\infty : f \in K\}$ es finito y el módulo de continuidad de cada f en K satisface $\omega(\delta; f) < \omega_K(\delta)$, por la definición de $\omega_K(\delta)$.

El homeomorfismo g es construido en etapas. La primera etapa se construye dividiendo el intervalo $I^0 = \mathfrak{T} = [-\pi, \pi]$ en dos colecciones de intervalos

$$I_1^1, I_2^1, I_3^1; I_4^1 \text{ y } J_1^1, J_2^1; J_3^1; J_4^1$$

Seleccionando cuatro puntos

$$t_1^1 = -\pi, t_2^1 = -\pi + \varepsilon_1, t_3^1 = 0 \text{ y } t_4^1 = \varepsilon_1,$$

para formar los intervalos I_j^1, $j = 1, 2, 3, 4$, y seleccionamos cuatro puntos

$$x_1^1 = -\pi, x_2^1 = -\eta_1, x_3^1 = 0 \text{ y } x_4^1 = \pi - \eta_1,$$

para formar los intervalos J_j^1, $j = 1, 2, 3, 4$. Entonces definimos

$$g(x_j^1) = t_j^1 \text{ para cada } j, \tag{3.5}$$

obviamente, es una función que preserva el orden. [2]

En la $n-$esima etapa tendremos 4^n pares de intervalos

$$I_j^n \text{ y } J_j^n, \ \ j = 1, 2, \ldots, 4^n.$$

La función g satisface $g(x) = t$ siempre que x y t sean los extremos de los intervalos J_j^n y I_j^n para cada j.

Para definir la etapa $(n+1)$-esima, dividimos cada I_j^n y J_j^n en cuatro subintervalos en una manera análoga a la primera etapa usando los puntos medios de I_j^n y J_j^n y números ε_n y η_n, de ese modo obtenemos los nuevos intervalos I_j^{n+1} y J_j^{n+1}. La función g es definida en los puntos extremos de esos nuevos intervalos, de manera análoga. De este modo, g es una función que preserva el orden, definida en un subconjunto denso de $\mathfrak{T}$ sobre otro subconjunto denso de $\mathfrak{T}$. Claramente g puede ser extendido a un único homeomorfismo h de $\mathfrak{T}$

[2] por la definición de los x_j y t_j.

(lema 3.1.1).
Usando esos intervalos definimos una sucesión F_n, [3] de funciones continuas y lineales por partes en $\mathfrak{T}$. La función F_n es lineal en el intervalo J_j^n siendo los valores en los extremos los de f en los correspondientes puntos extremos de I_j^n. Es decir

$$F_n(x_j^n) = f(t_j^n)$$

por (3.5)

$$F_n(x_j^n) = f(g(x_j^n))$$

Los valores de ε_n y η_n serán determinados por el conjunto compacto K. Por conveniencia, haremos

$$\varepsilon_0 = \eta_0 = 2\pi.$$

Para enteros positivos n, los números ε_n, η_n y m_n son los que satisfacen

$$\varepsilon_n \leq 4^{-2n}\varepsilon_{n-1} \;\text{ y }\; \omega_K(\varepsilon_n) \leq 4^{-2n} \tag{3.6}$$

$$\eta_n \leq 4^{-2n}\eta_{n-1} \;\text{ y }\; 4^n m_n \omega_K(\pi 2^{-n+1})\eta_n < 2^{-n}. \tag{3.7}$$

La selección de η_n depende de la previa selección de m_n.
Fácilmente podemos seleccionar ε_1 para que satisfaga las condiciones (3.6).
Se define la función F_0 que sea la función constante $f(0)$. Entonces

$$\|S_m(F_0) - F_0\|_\infty = 0 \;\text{ para cada } m.$$

Seleccionamos $m_1 = 0$. Claramente podemos seleccionar η_1 que satisfaga las condiciones (3.7). Correspondiente a cada funcion $f \in K$ está una función F_1 continua y lineal por partes. Con E como la colección de funciones del lema (3.1.2) con la partición $x_j^1,\ j = 1, 2, 3, 4$ y el número positivo M determinado en el principio de la prueba, hay un entero positivo m_2 con $m_2 > m_1$ tal que

$$\|S_m(G) - G\|_\infty < \frac{1}{2^1} \text{ siempre que } m \geq m_2 \text{ y } G \in E.$$

El caso general n es directo. El entero m_n satisface la condición

$$\|S_m(G) - G\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}} \text{ siempre que } m \geq m_n \text{ y } G \in E. \tag{3.8}$$

[3] Cabe observar que el n se refiere a la etapa n de la construcción ya que en $J_j^n,\ j = 1, 2, \ldots, 4^n$, hay 4^n subintervalos, lo que también significa que F_n está definida en los 4^n subintervalos,asi para cada n. F_{n+1} es la función en la etapa $n+1$ y es un segmento de recta en cada subintervalo, lo que en los 4^{n+1} subintervalos construye una poligonal que coincide con f en $4^{n+1} + 1$ puntos.

Definimos

$$G_n = F_{n+1} - F_n \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Entonces

$$F - F_0 = \sum_{n=0}^{\infty} G_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(G_n^1 + G_n^2\right),$$

De la definición tenemos para $v \geq n$

$$\begin{aligned} F_v - F_0 &= \sum_{i=1}^{v-1} G_i, \text{ y} \\ F_n - F_0 &= \sum_{i=1}^{n-1} G_i, \text{ sumando} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_v - F_n = \sum_{i=1}^{v-1} G_i - \sum_{i=1}^{n-1} G_i &= \sum_{i=1}^{n-1} G_i + \sum_{i=n}^{v-1} G_i - \sum_{i=1}^{n-1} G_i \\ &= \sum_{i=n}^{v-1} G_i \\ &= \sum_{i=n}^{v-1} G_i^1 + \sum_{i=n}^{v-1} G_i^2 \\ F_v - F_n - \sum_{i=n}^{v-1} G_i^1 &= \sum_{i=n}^{v-1} G_i^2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde

$$G_n = G_n^1 + G_n^2$$

es la descomposición de G_n definida como sigue: G_n^1 igual a G_n en los intervalos J_j^n de longitud mas grande que η_{n-1} e igual a cero en los intervalos restantes J_j^n.

Esto podemos verlo de la siguiete manera, con algún abuso de notación,

$$G_n = \begin{cases} G_n^1 & \text{si} \quad \left|J_j^n\right| > \eta_{n-1} \\ \\ G_n^2 & \text{si} \quad \left|J_j^n\right| \leq \eta_{n-1} \end{cases}$$

Si $\left|J_j^n\right| > \eta_{n-1}$, entonces $\left|h[J_j^n]\right| = \left|I_j^n\right| = \varepsilon_{n-1}$, por la manera que han sido construidos los intervalos y la definición de g. Además tenemos

$$\max_{x\in J_j^n} |G_n(x)| = \max_{x\in J_j^n} |F_{n+1} - F_n| < \omega(\varepsilon_{n-1}) \tag{3.10}$$

y por (3.6)

$$\omega(\varepsilon_{n-1}) \leq 4^{2-2n} \text{ y } \left\|G_n^1\right\| < 4^{2-2n}$$

pues es claro que $\max F_n \leq \max f$, $\forall n$. Luego

$$\max\ |F_{n+1} - F_n| \leq\ \max\ |f(g(x_1)) - f(g(x_2))|$$

y $|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon_{n-1}$. [4] Así, para $x \in J_j^n$ se cumple (3.10). Además, en cada subintervalo tenemos [5]

$$\begin{aligned} V(G_n^1) \leq \int_{J_j^{n+1}} dF_{n+1} + \int_{J_j^n} dF_n \ &\leq\ 2\int_{I_j^{n-1}} \omega(\varepsilon_{n-1}) \\ &\leq\ 2\int_{I_j^{n-1}} 4^{2-2n}\, dt \\ &\leq\ 4\pi 4^{2-2n} \end{aligned}$$

y dado que tenemos 4^{n-1} subintervalos, implica que

$$V(G_n^1) \leq 4\pi 4^{2-2n} 4^{n-1} = \pi 4^{2-2n+n-1+1} = \pi 4^{2-n}$$

De esto podemos concluir que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} G_n^1$ es de variación acotada y, dado que es continua, por el teorema de Jordan (teorema 1.3.4) está en $U(\mathfrak{T})$. De la siguiente identidad

$$F = F_0 + \sum_{v=0}^{\infty} G_v^1 + \sum_{v=0}^{n} G_v^2 + \sum_{v=n+1}^{\infty} G_v^2,$$

[4] se excoge ε_{n-1} para que $\omega(\varepsilon_n) < \omega(\varepsilon_{n-1})$y de este modo con $|x_2 - x_1| < \varepsilon_{n-1}$ contiene cualquier punto en el dominio de los F_n, $\forall n$. Pues, $D_{F_{n+1}} \subset D_{F_n} \subset D_f$ si $|x_2 - x_1| < \varepsilon_{n-1}$.

[5] En realidad tenemos $V(F_{n+1}) + V(F_n)$ pero como son segmentos de recta en cada subintervalo, obviamente son de variación acotada, luego $V(F_{n+1}) = |F_{n+1}(x_i^{n+1}) - F_{n+1}(x_{i-1}^{n+1})| = |f(t_i^{n+1}) - f(t_{i-1}^{n+1})| \leq \omega(\varepsilon_{n+1}) \leq \omega(\varepsilon_{n-1})$ y $V(F_n) = |F_n(x_i^n) - F_n(x_{i-1}^n)| = |f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)| \leq \omega(\varepsilon_n) \leq \omega(\varepsilon_{n-1})$ ya que ω es creciente y $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon_{n-1}$.

basta mostrar que el último termino de la derecha (el resto) tiende a cero cuando $n \to \infty$ en la norma $\|\cdot\|_U$.
Para un n fijo y todo m, volvemos a la estimacion de $\|S_m(G_k^2)\|_\infty$ con $k \geq n$. La función G_k^2 puede pensarse como la suma de $2 \cdot 4^{k-1}$ funciones γ_j^k con soporte en el intervalo J_j^k de longitud η_{n-1} y con distancia entre los soportes[6] de dos tales funciones por lo menos $\frac{\eta_{k-2}}{2} - \eta_{k-1}$.
Ya que

$$\omega_K\left(\frac{\pi}{2^k}\right) = \sup \left\{|f(t_1) - f(t_2)| : |t_1 - t_2| < \frac{\pi}{2^k}\right\}$$

claramente

$$\int_T |\gamma_j^k| \, dt \leq \eta_{k-1}\omega_K(\pi 2^{-k}) \tag{3.11}$$

y la variación de una γ_j^k no excede $6\omega_K(\pi 2^{-k})$. Entonces, cualquier t en $\mathfrak{T}$, tenemos que la $m-$esima suma parcial de la serie de Fourier de γ_j^k cuyo soporte está a una distancia de t excediendo $\frac{1}{4}\eta_{k-2}$ satisfacerá

$$\begin{aligned}
\left|S_m(\gamma_j^k;t)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \gamma_j^k(u) \frac{sen[(m+1/2)(u-t)]}{sen[1/2(u-t)]} \, du\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\eta_{k-1}\omega_K(\pi 2^{-k}) \left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{|sen[1/2(u-t)]|}\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\eta_{k-1}\omega_K(\pi 2^{-k}) \left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{4}{\eta_{k-2}} \, du\right| \\
&= \frac{4\eta_{k-1}\omega_K(\pi 2^{-k})}{\eta_{k-2}}
\end{aligned}$$

puesto que

$$sen(u) \geq \frac{2}{\pi}u, \ \ (0 \leq u \leq \frac{1}{2}\pi)$$

y así,

$$\begin{aligned}
sen[1/2(u-t)] &\geq \frac{u-t}{\pi} \geq \frac{1}{4}\eta_{k-2} \\
\frac{1}{sen[1/2(u-t)]} &\leq \frac{\pi}{u-t} \leq \frac{4}{\eta_{k-2}}
\end{aligned}$$

Lo que justifica las desigualdades anteriores.

[6]Soporte de f real o compleja es la cerradura del conjunto de todos los $x \in D_f$ tales que $f(x) \neq 0$.

A lo sumo una γ_j^k esta acotada por dos veces la variación de γ_j^k. Así

$$\left\|G_k^2\right\|_U \leq 4^{k+1}\frac{\eta_{k-1}}{\eta_{k-2}}\omega_K(\pi 2^{-k}) + 12\omega_K(\pi 2^{-k}) = o(1) \text{ cuando } k \to \infty \quad (3.12)$$

de (3.8) tenemos

$$\left\|S_m(G_{k-2}^2) - G_{k-2}^2\right\|_\infty \leq \frac{1}{2^{k-2}} \text{ siempre que } m \geq m_{k-1}$$

y de (3.11)

$$\widehat{\gamma}_j^k(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} \gamma_j^k(t)e^{-ivt}\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int |\gamma_j^k| \leq \frac{1}{2\pi}\eta_{k-1}\omega_K(\pi 2^{-k})$$

de aqui los coeficientes de Fourier de G_k^2 no exceden

$$\pi^{-1}4^{k-1}\eta_{k-1}\omega_K(\pi 2^{-k})$$

ya que hemos considerado G_k^2 como la suma de $2\cdot 4^{k-1}$ funciones γ_j^k.

Entonces, para $m < m_{k-1}$

$$\begin{aligned}
\left\|S_m(G_k^2)\right\|_\infty &= \left\|\sum_{-m}^{m}\widehat{G}_k^2(v)e^{ivx}\right\|_\infty \\
&\leq \left|\sum_{-m}^{m}\pi^{-1}4^{k-1}\eta_{k-1}\omega_K(\pi 2^{-k})e^{ivx}\right| \\
&\leq \sum_{-m}^{m}\pi^{-1}4^{k-1}\eta_{k-1}\omega_K(\pi 2^{-k}) \\
&\leq (2m_{k-1}+1)\pi^{-1}4^{k-1}\eta_{k-1}\omega_K(\pi 2^{-k})
\end{aligned}$$

y por (3.7) [7]

$$\pi^{-1}(2m_{k-1}+1)4^{k-1}\eta_{k-1}\omega_K(\pi 2^{-k}) < 2^{-(k-1)}$$

Luego

$$\left\|S_m(G_k^2)\right\|_\infty < 2^{-(k-1)} \quad (3.13)$$

[7] Puesto que $\pi^{-1}(2m_{k-1}+1) < m_{k-1}$

Ahora estimamos $\left\| \sum_{v=n+1}^{\infty} G_v^2 \right\|_U$ para $n > 3$. Supongamos que $m \geq m_n$. Sea k tal que $m_{k-1} \leq m \leq m_k$. Es claro que $n \leq k-1$, tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{v=n+1}^{\infty} S_m(G_v^2) \right\|_\infty &\leq \left\| \sum_{v=n+1}^{k-2} S_m(G_v^2) \right\|_\infty + \left\| S_m(G_{k-1}^2) \right\|_\infty + \sum_{v=k}^{\infty} \left\| S_m(G_v^2) \right\|_\infty \\ &= I_n + II_n + III_n. \end{aligned}$$

Luego por (3.8) [8]

$$I_n \leq \left\| \sum_{n+1}^{k-2} G_v^2 \right\|_\infty + \sum_{n+1}^{k-2} 2^{-(v-1)}$$

por (3.12)

$$II_n \leq \left\| G_{k-1}^2 \right\|_U \leq \max_{v \geq n} \left\| G_v^2 \right\|_U$$

y por (3.13)

$$III_n \leq 2^{-k} \leq 2^{-(n+1)}$$

Entonces para $m > m_n$, tenemos

$$\left\| S_m \left(\sum_{v=n+1}^{\infty} G_v^2 \right) \right\|_\infty \leq \left\| \sum_{n+1}^{k-2} G_v^2 \right\| + \sum_{n+1}^{k-1} 2^{-(v-1)} + \max_{v \geq n} \left\| G_v^2 \right\|_U + \frac{1}{2^{n+1}}$$

y de 3.9

$$\left\| S_m \left(\sum_{v=n+1}^{\infty} G_v^2 \right) \right\|_\infty \leq \max_{v > n} \left\| F_v - F_n \right\|_\infty + \sum_{v=n+1}^{\infty} \left\| G_v^1 \right\|_\infty + \max_{v \geq n} \left\| G_v^2 \right\|_U + \frac{1}{2^{n-1}}$$

lo cual tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Solo falta considerar $m < m_n$. Para tal m tenemos por (3.13) que

$$\left\| S_m \left(\sum_{v=n+1}^{\infty} G_v^2 \right) \right\|_\infty \leq \sum_{v=n+1}^{\infty} \left\| S_m(G_v^2) \right\|_\infty \leq \sum_{v=n+1}^{\infty} 2^{-(v-1)}.$$

Por consiguiente, esto muestra que la $\|\cdot\|_U$ de $\sum_{v=n+1}^{\infty} G_v^2$ tiende a 0 cuando n tiende a ∞. La completitud del espacio $U(\mathfrak{T})$ nos asegura que $F = f \circ g \in U(\mathfrak{T})$, lo que completa la demostración.

[8] Por propiedades del valor absoluto $\|S_m(G)\|_\infty - \|G\|_\infty \leq \|S_m(G) - G\|_\infty \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ siempre que $m > m_n$ y $G \in E$.

$\square$

3.2. Convergencia Absoluta

Es conocido, por el criterio M de Weierstrass, que si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de funciones tal que para cada n, M_n es una constante tal que

$$|f_n(x)| \leq M_n; \forall x \in D_f$$

y si la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en D_f. De esto y dado que

$$\widehat{f}(n)e^{int} \leq \left|\widehat{f}(n)e^{int}\right| \leq \left|\widehat{f}(n)\right|,$$

tendremos que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}$ converge uniformemente si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|$ converge.

Una función f cuya serie de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}$ converge absolutamente es igual casi en todo punto a la función continua la cual es el límite uniforme de la suma parcial de esa serie. Por consiguiente, podemos considerar la clase $A(\mathfrak{T})$ de tales funciones, que es un subconjunto de $C(\mathfrak{T})$. $A(\mathfrak{T})$ es un espacio de Banach bajo la norma

$$\|f\|_{A(\mathfrak{T})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|,$$

si f_k, $k = 1, 2, \ldots,$ es una sucesión de Cauchy en esta norma entonces $\widehat{f_k}(n) \to c_n$ cuando $k \to \infty$ uniformemente en n y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$. Si

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \text{ entonces } f \in A(\mathfrak{T}) \text{ y } \|f_k - f\|_{A(\mathfrak{T})} \to 0.$$

En esta sección se mostrará que sin asumir propiedades adicionales a la continuidad de una f, puede no haber un cambio de variable g tal que $f \circ g \in A(\mathfrak{T})$, con $f \in C(\mathfrak{T})$. La prueba de este resultado depende de tres lemas los cuales se mostrarán a continuación.

Lema 3.2.1 Si $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ es una $n-$upla, $n \geq 3$, de números complejos con $|z_j| \leq 1$ para todo j, entonces

$$\left|1 - \frac{2}{n^2} - \frac{\sum_{k<j} z_k \bar{z}_j}{n^3}\right| + \frac{|\sum_{k=1}^{n} z_k|}{n^{5/2}} < 1.$$

Demostración. Sea $\displaystyle\sum_{k<j} z_k \bar{z_j} = P + iQ$, donde P y Q son la parte real e imaginaria. Considerando que

$$\begin{aligned}
(P+iQ)(P-iQ) = P^2 + Q^2 &= \left|\sum_{k<j} z_k \bar{z}_j\right|^2 \\
&\leq \left(\sum_{k<j} |z_k z_j|\right)^2
\end{aligned}$$

sabiendo que para cada $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
(|z_1 z_j| + \cdots + |z_{j-1} z_j|)^2 &= \{|z_j| \left(|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_{j-1}|\right)\}^2 \\
&\leq \{|z_j|(j-1)\} \quad (\text{ ya que } |z_j| \leq 1; \forall j)
\end{aligned}$$

tendremos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k<j} |z_k z_j|\right)^2 &= \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k<j} |z_k||z_j|\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n} (j-1)|z_j|\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n} (j-1)\right)^2 = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 \\
&\leq \frac{n^4}{4} \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Desarrollando vemos

$$\left|1-\frac{2}{n^2}-\frac{\sum_{k<j} z_k\bar{z}_j}{n^3}\right| = \left[\left\{\left(1-\frac{2}{n^2}\right)-\frac{\sum_{k<j} z_k\bar{z}_j}{n^3}\right\}\left\{\left(1-\frac{2}{n^2}\right)-\frac{\overline{\sum_{k<j} z_k\bar{z}_j}}{n^3}\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^2-\left(1-\frac{2}{n^2}\right)\frac{\sum_{k<j} z_k\bar{z}_j}{n^3}-\left(1-\frac{2}{n^2}\right)\frac{\sum_{k<j} \bar{z}_k z_j}{n^3}+\right.$$

$$\left.\frac{\left|\sum_{k<j} z_k\bar{z}_j\right|^2}{n^6}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^2-\left(1-\frac{2}{n^2}\right)\left(\frac{\sum_{k<j} z_k\bar{z}_j+\sum_{k<j} \bar{z}_k z_j}{n^3}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{|P+iQ|^2}{n^6}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

puesto que

$$\overline{\sum_{k<j} z_k\bar{z}_j} = \sum_{k<j} \bar{z}_k z_j = P-iQ$$

tenemos que

$$\sum_{k<j} z_k\bar{z}_j + \sum_{k<j} \bar{z}_k z_j = 2P.$$

Así

$$\left|1-\frac{2}{n^2}-\frac{\sum_{k<j} z_k\bar{z}_j}{n^3}\right| = \left\{\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^2-2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)\frac{P}{n^3}+\frac{P^2+Q^2}{n^6}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.15}$$

Además

$$
\begin{aligned}
0 \leq \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 &= (z_1+z_2+\cdots+z_n)\,(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\cdots\bar{z}_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} z_k\bar{z}_1 + \sum_{k=1}^{n} z_k\bar{z}_2 + \cdots + \sum_{k=1}^{n} z_k\bar{z}_n \\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2 + \sum_{k=2}^{n} z_k\bar{z}_1 + \left(z_1\bar{z}_2 + \sum_{k=3}^{n} z_k\bar{z}_2\right) + \cdots \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} z_k\bar{z}_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \sum_{k<j} z_k\bar{z}_j + \overline{\sum_{k<j} z_k\bar{z}_j}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow 0 \leq \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 \leq n+2P; \quad \text{ya que } |z_k| \leq 1, \forall k \tag{3.16}
$$

Así, de (3.14), (3.15) y (3.16) tenemos

$$
\begin{aligned}
\left\{\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^2 - 2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)\frac{P}{n^3} + \frac{P^2+Q^2}{n^6}\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_n\right|}{n^{5/2}} &\leq \\
\left\{\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^2 - 2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)\frac{P}{n^3} + \frac{1}{4n^2}\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{(n+2P)^{\frac{1}{2}}}{n^{5/2}} &= A^{\frac{1}{2}} + B^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

de (3.16) vemos que $P \geq -\dfrac{n}{2}$ y desarrollando las operaciones en A, tenemos

$$\begin{aligned}
A &= 1-\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^4}-\frac{2P}{n^3}+\frac{4P}{n^5}+\frac{1}{4n^2}\\
&= 1-\frac{15}{4n^2}+\frac{4}{n^4}-\frac{2P}{n^3}+\frac{4P}{n^5}\\
&= 1-\frac{15}{4n^2}+\frac{4}{n^4}-\frac{P}{n^3}-\frac{P}{n^3}+\frac{4P}{n^5}\\
&= 1-\frac{15}{4n^2}+\frac{4}{n^4}-\frac{P}{n^3}+\frac{-P(n^2-4)}{n^5}\\
&\leq 1-\frac{15}{4n^2}+\frac{4}{n^4}-\frac{P}{n^3}+\frac{n^2-4}{2n^4};\ \text{pues } -P\leq\frac{n}{2}\\
&= 1-\frac{15}{4n^2}+\frac{4}{n^4}-\frac{P}{n^3}+\frac{1}{2n^2}-\frac{2}{n^4}\\
&= 1-\frac{12}{4n^2}-\frac{1}{4n^2}-\frac{P}{n^3}+\frac{2}{n^4}\\
&= 1-\frac{3}{n^2}-\frac{P}{n^3}+\frac{2}{n^4}-\frac{1}{n^2}\\
&= 1-\frac{3}{n^2}-\frac{P}{n^3}+\frac{8-n^2}{4n^4};\ \text{ya que } n\geq 3\\
&< 1-\frac{3}{n^2}-\frac{P}{n^3}
\end{aligned}$$

así,

$$A < 1-\frac{3}{n^2}-\frac{P}{n^3}$$

Además, como se debe cumplir que $1-\left(\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{P}{n^3}\right)\geq 0$ implica que

$$\begin{aligned}
\frac{3}{n^2}+\frac{P}{n^3} &\leq 1\\
3+\frac{p}{n} &\leq n^2\\
\frac{p}{n} &\leq n^2-3 \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

de (3.16) tenemos que $\dfrac{P}{n}\geq -\dfrac{1}{2}$ de esto y de (3.17) tenemos que

$$-\frac{1}{2}\leq\frac{P}{n}\leq n^2-3$$

$$-\frac{1}{2n^2} \leq \frac{P}{n^3} \leq 1 - \frac{3}{n^2}$$
$$-\frac{1}{2n^2} + \frac{3}{n^2} \leq \frac{P}{n^3} + \frac{3}{n^2} \leq 1$$
$$\frac{5}{2n^2} \leq \frac{P}{n^3} + \frac{3}{n^2} \leq 1$$
por lo que $\frac{P}{n^3} + \frac{3}{n^2} > 0$, entonces $\frac{P}{n^3} + \frac{3}{n^2} > \frac{1}{2}\left(\frac{P}{n^3} + \frac{3}{n^2}\right) > 0$ así

$$-1 \leq -\frac{P}{n^3} - \frac{3}{n^2} < -\frac{1}{2}\left(\frac{P}{n^3} + \frac{3}{n^2}\right) < 0$$

por lo cual
$$A < 1 - \frac{P}{n^3} - \frac{3}{n^2} < 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{P}{n^3} + \frac{3}{n^2}\right)$$

entonces[9]

$$\begin{aligned}
A^{\frac{1}{2}} + B^{\frac{1}{2}} &< \left(1 - \frac{P}{2n^3} - \frac{3}{2n^2}\right) + \frac{1}{n^{5/2}}(n+2P)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{3}{2n^2} - \frac{P}{2n^3} + \frac{1}{n^2 n^{\frac{1}{2}}}(n+2P)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{1}{n^2}\left(\frac{3}{2} + \frac{P}{2n} - \frac{(n+2P)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{P}{2n} - \frac{(n+2P)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{(n+2P)}{4n} - \frac{(n+2P)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} + 1\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{4} + \left(\frac{(n+2P)^{\frac{1}{2}}}{2n^{\frac{1}{2}}} - 1\right)^2\right\} < 1
\end{aligned}$$

hemos probado que

$$A^{\frac{1}{2}} + B^{\frac{1}{2}} < 1$$

[9] Podemos ver que $A^{\frac{1}{2}} < \left(1 - \frac{P}{2n^3} - \frac{3}{2n^2}\right)$, probando que $0 < \left(1 - \frac{P}{2n^3} - \frac{3}{2n^2}\right)^2 - A$ con $A = 1 - \frac{15}{4n^2} + \frac{4}{n^4} - \frac{2P}{n^3} + \frac{4P}{n^5}$

Dado que

$$\left|1-\frac{2}{n^2}-\frac{\sum_{k<j} z_k\bar{z}_j}{n^3}\right|+\frac{|\sum_{k=1}^n z_k|}{n^{5/2}}<A^{\frac{1}{2}}+B^{\frac{1}{2}}<1$$

Por lo tanto

$$\left|1-\frac{2}{n^2}-\frac{\sum_{k<j} z_k\bar{z}_j}{n^3}\right|+\frac{|\sum_{k=1}^n z_k|}{n^{5/2}}<1$$

$\square$

Lema 3.2.2 Supongamos que f es de variación acotada en un intervalo I con variación $V(f,I)$, denotada por V. Dado un número positivo ε, un entero positivo n, y puntos x_i en $I, i=1,2,\ldots,m$, y puntos

$$t_1<\tau_1<t_2<\tau_2<t_3<\tau_3<\cdots<t_N<\tau_N$$

tal que

$$x_i+t_1-\tau_N\in I \text{ para todo } i,$$

donde

$$N>n(4m\varepsilon^{-1}V+1), \tag{3.18}$$

entonces hay enteros

$$0<v_1<v_2<\cdots<v_n$$

tal que para todo i

$$(*)\left|f(x_i+t_{v_k}-t_{v_j})+f(x_i+\tau_{v_k}-\tau_{v_j})-f(x_i+t_{v_k}-\tau_{v_j})-f(x_i+\tau_{v_k}-t_{v_j})\right|<\varepsilon$$

siempre que $1\leq k\leq j\leq n$.

Demostración. Sea

$$E(v,i)=E'(v,i)\cup E''(v,i)$$

donde

$$E'(v,i)=\left\{p:v<p\leq N,|f(x_i+t_v-t_p)-f(x_i+t_v-\tau_p)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$E''(v,i)=\left\{p:v<p\leq N,|f(x_i+\tau_v-t_p)-f(x_i+\tau_v-\tau_p)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

obviamente

$$\sum_{p>v}\frac{\varepsilon}{2}\leq\sum_{p>v}|f(x_i+t_v-t_p)-f(x_i+t_v-\tau_p)|\leq V$$

y

$$\sum_{p>v}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}\sum_{p>v}1=\frac{\varepsilon}{2}\text{card}E'(v,i)\leq V$$

similarmente para $E''(v,i)$

$$\sum_{p>v}\frac{\varepsilon}{2}\leq\sum_{p>v}|f(x_i+\tau_v-t_p)-f(x_i+\tau_v-\tau_p)|\leq V$$

y claramente $\text{card}E(v,i)=\text{card}E'(v,i)+\text{card}E''(v,i)\leq 4\varepsilon^{-1}V,\ \forall i\ (i=1,2,\ldots,m)$ y de aquí

$$\text{card}\cup_{i=1}^{m}E(v,i)\leq 4m\varepsilon^{-1}V$$

Fijemos

$$v_1=1,\ \ E_0=\{1,2,\ldots,N\},\ \ E_1=E_0\setminus(\cup_iE(v_1,i)\cup\{v_1\}) \tag{3.19}$$

Entonces

$$\text{card}E_1>N-(4m\varepsilon^{-1}V+1).$$

Supongamos ahora que $v_1,v_2,\ldots v_{k-1}$ y $E_0\supset E_1\supset\cdots\supset E_{k-1}$ estan definidos y

$$\text{card}E_{k-1}>N-(k-1)(4m\varepsilon^{-1}V+1)$$

para cada v_k hacemos lo hecho en (3.19).
Sea $v_k=\text{min}E_{k-1}$ y sea

$$E_k=E_{k-1}\setminus(\cup_iE(v_k,i)\cup\{v_k\}) \tag{3.20}$$

Claramente

$$\text{card}E_k>N-k(4m\varepsilon^{-1}V+1).$$

(esta desigualdad nos asegura que los $E_k\neq\emptyset$ y tiene mínimo por la definición de los E_k). Podemos continuar esta construcción hasta $k=n$ por la desigualdad (3.18) y $\text{card}E_n>N-n(4m\varepsilon^{-1}V+1)$. Entonces tendremos una sucesión creciente de números enteros $v_k,\ k=1,2,\ldots,n$, tal que

$$v_j\notin\cup_iE(v_k,i)\quad\text{siempre que } j>k.$$

Pues, si $v_j \in \cup_i E(v_k, i)$ entonces $v_j \notin E_k$ por (3.20), por lo que no sería un elemento de la sucesion $\{v_k\}_{k=1}^n$, asi construida. Entonces

$$|f(x_i + t_{v_k} - t_{v_j}) - f(x_i + \tau_{v_k} - t_{v_j})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$|f(x_i + t_{v_k} - \tau_{v_j}) - f(x_i + \tau_{v_k} - \tau_{v_j})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

lo cual implica la desigualdad (*) del lema.

$\square$

Antes de continuar con el tercer lema, consideramos conveniente las siguientes definiciones y comentarios, los cuales facilitarán la comprensión del último lema necesario para la demostración del teorema principal de esta sección.
Aunque nos interesa el caso real, un espacio vectorial será sobre el campo de los números reales o complejos. Para cualquiera de los dos casos, en las siguientes definiciones se representará el campo escalar por Φ

Definición 3.2.1 Si $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}$ son espacios vectoriales, el símbolo $L(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ es usado para representar el espacio lineal de todas las funciones continuas de $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{F}$. El símbolo $L(\mathfrak{E})$ es usado para $L(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$, y $\mathfrak{E}^*$ para $L(\mathfrak{E}, \Phi)$. El espacio $\mathfrak{E}^*$ es llamado el espacio conjugado, espacio adjunto o espacio dual de $\mathfrak{E}$. Así los elementos de $\mathfrak{E}^*$ son los funcionales lineales continuos en $\mathfrak{E}$.

Definición 3.2.2 sea $\mathfrak{X}$ un conjunto. Una $\sigma-$algebra de subconjuntos de $\mathfrak{X}$ es una colección de conjuntos que contiene a $\emptyset$ y que es cerrada por complementos y uniones numerables. Un espacio medible es un par ordenado $(\mathfrak{X}, \mathfrak{M})$ tal que $\mathfrak{X}$ es un conjunto y $\mathfrak{M}$ es un $\sigma-$algebra de subconjuntos de $\mathfrak{X}$. Un conjunto A se llama medible si $A \in \mathfrak{M}$. Una medida μ en el espacio medible$(\mathfrak{X}, \mathfrak{M})$ es una función no negativa definida para cada $A \in \mathfrak{M}$, que satisface

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ para cualquier colección numerable de conjuntos disjuntos $\{E_i\} \subset \mathfrak{M}$.

La terna $(\mathfrak{X}, \mathfrak{M}, \mu)$ se llama espacio de medida.

Definición 3.2.3 La más pequeña $\sigma-$algebra $\mathfrak{B}$ que contiene todos los conjuntos cerrados de un espacio topológico $\mathfrak{S}$ es llamada la $\sigma-$algebra de Borel. Llamamos medida de Borel sobre $\mathfrak{X}$ a toda medida μ sobre la $\sigma-$algebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ que sea finita sobre los compactos.

Definición 3.2.4 Una función de conjuntos aditiva μ definida en una algebra $\mathfrak{M}$ de subconjuntos de un espacio topológico $\mathfrak{S}$ se dice que es regular si para cada $E \in \mathfrak{M}$ y $\varepsilon > 0$ hay un conjunto $F \in \mathfrak{M}$ cuya cerradura esta contenida en E y un conjunto $G \in \mathfrak{M}$ cuyo interior contiene a E tal que $|\mu(C)| < \varepsilon$ para cada $C \in \mathfrak{M}$ con $C \subset G - F$.

En otras palabras, una función de conjuntos aditiva μ definida en $\mathfrak{M}$ es regular si es cierto lo siguiente: Para cada $E \in \mathfrak{M}$ y cada $\varepsilon > 0$, existen conjuntos $F \in \mathfrak{M}, G \in \mathfrak{M}$, tales que F es cerrado, G es abierto, $F \subset A \subset G$ y

$$\mu(G) - \varepsilon \leq \mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon.$$

Dada una medida de Borel μ diremos que es exteriormente regular en el boreliano E, si cumple para Uabierto

$$\mu(E) = \inf_{E \subset U} \mu(U) \quad \text{y}$$

diremos que es interiormente regular en el boreliano E, si para $K \subset E$, K compacto se cumple

$$\mu(E) = \sup_{K \subset E} \mu(K).$$

De esto, μ es regular si es exterior e interiormente regular en todo boreliano.

En varias situaciones en análisis es necesario trabajar con funciones que se comportan como medidas pero que no necesariamente son no negativas. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 3.2.5 Una medida con signo en el espacio medible $(\mathfrak{X}, \mathfrak{M})$ es una funcion $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ o $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tal que

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ para cada colección disjunta de conjuntos medibles $\{E_i\}$.

Si $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i)$ es finita se requiere que la serie que converja absolutamente; si $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \infty$ o $-\infty$ se requiere que la serie "no converja" a uno de estos valores.

Se obtienen este tipo de funciones de conjunto al efectuar diferencias

$$\mu = \mu_1 - \mu_2$$

de medidas sobre un mismo espacio medible, con una de ellas finita, o al considerar, sobre un espacio de medida dado, integrales como funciones del dominio de integración,

$$\mu_f(E) = \int_E f \, d\mu$$

si f es real medible y tal que f^+ o f^-es integrable.

Definición 3.2.6 Se llama medida de Radon a toda medida de Borel regular

Definición 3.2.7 Un espacio localmente compacto es un espacio topológico separado (o Hausdorff) con la propiedad de que cada uno de sus puntos tiene un entorno compacto.

Una forma lineal positiva será una forma lineal I sobre $C_c(\mathfrak{X})$, espacio vectorial de las funciones continuas sobre $\mathfrak{X}$ con soporte compacto, tal que $I(g) \geq 0$ si $g \geq 0$. Mediante

$$I_\mu(g) = \int g \, d\mu$$

queda definida una forma lineal positiva.

El resultado fundamental sobre medidas Radon[10] es que si I es una forma lineal positiva sobre $C_c(\mathfrak{X})$, existe una única medida de radon μ tal que $I_\mu = I$.

Sea $\mathfrak{X}$ un espacio localmente compacto. Denotamos por $M(\mathfrak{X})$ el espacio vectorial de medida signada de Radon y por $M^+(\mathfrak{X})$ la medida de Radon en $\mathfrak{X}$; es decir, las medidas asociadas con las formas lineales positivas[11]. El soporte de una medida signada de Radon μ es el conjunto cerrado F mas pequeño tal que $|\mu|(F^c) = 0$. Es decir, x está en el soporte, si y solo si, $\mu(B_r(x)) > 0$, para todo r.

[10] Análisis Real, Joan Cerda, pag 121, teorema 4.1

[11] $M(\mathfrak{X})$ algunas veces es llamado el espacio de medidas de Radon y $M^+(\mathfrak{X})$ el espacio de medidas positivas de Radon

Definición 3.2.8 La convolución de dos medidas $\mu, v \in M(\mathfrak{X})$ es el completamiento de la medida que a cada conjunto de Borel $E \subset \mathfrak{X}$ asigna el valor

$$(\mu * v)(E) = \int_{\mathfrak{X}} v(E - \tau)\, d\mu(\tau),$$

donde $E - \tau$ es el conjunto $\{s - \tau \mid s \in E\}$. La convolución $\mu * v$ de dos medidas definidas en T se obtiene en la misma manera.

Si χ_E es la función caracteristica del conjunto E, entonces $s \to \chi_E(s+t)$ es la función característica de $E - t$, y $v(E-t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(s+t)\, v(ds)$. También podemos escribir $(\mu * v)(E)$ en la forma

$$\begin{aligned}(\mu * v)(E) &= \int_{\mathfrak{X}} v(E - \tau)\, d\mu(\tau) \\ &= \int_{\mathfrak{X}} \int_{\mathfrak{X}} \chi_E(s + \tau)\, d\mu(\tau)\, dv(s) \\ &= \int_{\mathfrak{X}} \mu(E - s)\, dv(s)\end{aligned}$$

Definición 3.2.9 Sea $\mathfrak{X}$ un espacio localmente compacto y $t \in \mathfrak{X}$. La medida de Dirac en t es el funcional lineal

$$I_t(f) = f(t), \ \ \forall f \in C_K(\mathfrak{X}).$$

Este funcional lineal positivo es representado por una medida de Borel δ_t, cuya completación está definida en la $\sigma-$algebra $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ consitiendo de todos los subconjuntos de $\mathfrak{X}$.

δ_t se conoce como la medida de masa concentrada en el punto t.

Lema 3.2.3 Para $0 < \gamma \leq \pi$, sea φ una función continua y creciente en $[0, \gamma]$ con $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(\gamma) = \pi$. si

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \gamma \leq t \leq \pi, \\ sen(2N\varphi(t)), & 0 \leq t < \gamma, \\ 0, & -\pi \leq t < 0, \end{cases}$$

donde N es un entero con $N > 40^4$, entonces hay una constante positiva K tal que, para alguna μ en el espacio de medida signada de Radon $M(\mathfrak{T})$,

$$\int_{\mathfrak{T}} f\, d\mu > K log^{\frac{1}{12}} N \text{ y } \|\mu\|_{A^*(\mathfrak{T})} \leq 1,$$

donde

$$\|\mu\|_{A^*(T)} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu}(n)| .$$

Si I es un intervalo conteniendo el soporte de μ y si $h \in C(\mathfrak{T})$ con $\|\chi_I h\|_\infty < e^{-N}$, entonces

$$\|\lambda f + h\|_{A(\mathfrak{T})} \geq K\,|\lambda|\,log^{\frac{1}{12}} N - 1$$

para cada constante λ.

Demostración. A cada μ en $M(\mathfrak{T})$ le corresponde un funcional lineal Φ_μ en $A(\mathfrak{T})$ dado por

$$\Phi_\mu(G) = \int_{\mathfrak{T}} G\, d\mu = \int_{\mathfrak{T}} \sum \widehat{G}(n) e^{in\theta}\, d\mu(\theta) = 2\pi \sum \widehat{G}(n)\widehat{\mu}(-n),\ G \in A(\mathfrak{T})$$

y

$$\|\Phi_\mu\|_{A^*(T)} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu}(n)| .$$

Para establecer el lema construiremos una μ para la cual

$$\Phi_\mu(f) > K log^{\frac{1}{12}} N \ \text{ y } \ \| \mu\|_{A^*(\mathfrak{T})} \leq 1, \tag{3.21}$$

donde K es una constante apropiada. δ_t denota la medida de masa concentrada en el punto t. Nuestra medida μ es una combinación lineal de tales medidas. Denotamos la convolución $\mu * v$ de dos medidas μ y v, definida para los conjuntos de Borel E por

$$\mu * v(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{T}} \mu(E - \tau)\, dv(\tau),$$

la cual es lineal en cada argumento, $\delta_t * \delta_{t'} = \delta_{t+t'}$, y $\widehat{\mu * v} = \widehat{\mu} * \widehat{v}$.

Sean los puntos de $(0, \gamma)$ donde $|f| = 1$ los puntos

$$t_1 < \tau_1 < t_2 < \tau_2 < t_3 < \tau_3 < \cdots < t_N < \tau_N. \tag{3.22}$$

Pues facilmente, de la definición de f podemos ver que hay $2N$ puntos que satisfacen esta condición. Para cualquier entero positivo q sea n_q la parte entera de $\sqrt{q}$, y sea

$$\varepsilon\langle q\rangle = e^{-2q},\ m\langle q\rangle = q^q,\ \eta\langle q\rangle = (20q)^{q^2}.$$

definamos

$$Q_N = \max\{q : \eta\langle q+1\rangle \leq 2N\}$$

sea $\mu_1 = \delta_{t_1}$ y notemos que $1 \leq Q_N < \eta\langle Q_N+1\rangle \leq 2N$. Supongamos para q que hemos definido

$$\mu_q = \sum_{s=1}^{s_q} \alpha_s^{\langle q\rangle} \delta_{x_s^{\langle q\rangle}}$$

con

$$x_s^{\langle q\rangle} \in (-\tau_{\eta\langle q\rangle}, \tau_{\eta\langle q\rangle}),\ \ 1 \leq s \leq s_q < m\langle q\rangle,$$

y satisfaciendo las hipótesis inductivas

$$\|\mu_q\|_{M(\mathfrak{T})} = \sum_{s=1}^{s_q} |\alpha_s^{\langle q\rangle}| < e^q, \tag{3.23}$$

$$\left\|\Phi_{\mu_q}\right\|_{A^*(\mathfrak{T})} \leq 1, \tag{3.24}$$

y

$$\Phi_{\mu_q}(f) > 10^{-1} q^{\frac{1}{4}}. \tag{3.25}$$

ya que $q \leq Q_N$, procedemos inductivamente como sigue. escribimos

$$t_v^{\langle q\rangle} = t_{\eta\langle q\rangle+v} \text{ y } \tau_v^{\langle q\rangle} = \tau_{\eta\langle q\rangle+v} \quad \text{para} \quad v = 1, 2, \ldots N_q = \eta\langle q+1\rangle - \eta\langle q\rangle.$$

Entonces encontramos la variación de f en $(-\gamma, \tau_{\eta\langle q\rangle})$, denotada por V_q, de la siguiente manera: Tomando las particiónes $\Pi = \{-\gamma, t_1, \tau_1, t_2, \tau_2, \ldots, t_{\eta\langle q\rangle}, \tau_{\eta\langle q\rangle}\}$ de $(-\gamma, \tau_{\eta\langle q\rangle})$ tendremos

$$\begin{aligned}
V_q &= \sum_{i=1}^{\eta\langle q\rangle} |\Delta f| \\
&= \sum_{i=1}^{\eta\langle q\rangle} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&= |f(t_1) - f(-\gamma)| + |f(\tau_1) - f(t_1)| + |f(t_2) - f(\tau_1)| + \cdots |f(\tau_{\eta\langle q\rangle}) - f(t_{\eta\langle q\rangle})| \\
&= 1 + |f(\tau_1) - f(t_1)| + |f(t_2) - f(\tau_1)| + \cdots |f(\tau_{\eta\langle q\rangle}) - f(t_{\eta\langle q\rangle})| \\
&= 1 + 2(2\eta\langle q\rangle - 1), \quad \text{en la igualdad anterior tenemos } 2\eta\langle q\rangle \text{ puntos por lo} \\
&\qquad \text{que podemos construir solamente } 2\eta - 1 \text{ sumandos de esta forma. Así,} \\
V_q &= 4\eta\langle q\rangle - 1.
\end{aligned}$$

Esto por la definición de f y, como definimos antes, los puntos de la partición son puntos en los cuales $|f| = 1$. Y [12]

$$x_s^{\langle q\rangle} + t_1^{\langle q\rangle} - \tau_{N_q}^{\langle q\rangle} = x_s^{\langle q\rangle} + t_{\eta\langle q\rangle+1} - \tau_{\eta\langle q+1\rangle} > -\tau_{\eta\langle q\rangle} + t_{\eta\langle q\rangle+1} - \tau_{\eta\langle q+1\rangle} > -\tau_{\eta\langle q+1\rangle}.$$

pues [13], $-\tau_{\eta\langle q\rangle} + t_{\eta\langle q\rangle+1} > 0$, por 3.22.
Podemos aplicar el lema 3.2.2 previo para tener

$$\begin{aligned}
n_q(4m\langle q\rangle\varepsilon\langle q\rangle^{-1}V_q + 1) &< q^{\frac{1}{2}}(16\eta\langle q\rangle e^{2q}q^q + 1) = q^{\frac{1}{2}}(16e^{2q}(20q)^{q^2}q^q + 1) \\
&= (20q)^{q^2}(e^2q)^q(16q^{\frac{1}{2}}) + q^{\frac{1}{2}} \\
&< (20q)^{q^2}(20q)^q(20q^{\frac{1}{2}}) + q^{\frac{1}{2}} \\
&< (20q)^{q^2+q+\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}} \\
&< (20q)^{(q+1)^2} \\
&< (20(q+1))^{(q+1)^2} - (20q)^{q^2} = N_q.
\end{aligned}$$

Así podemos encontrar enteros positivos $v_1 < \cdots < v_{n_q}$ tal que para cada s

$$|f(x_s^{\langle q\rangle}+t_{v_k}^{\langle q\rangle}-t_{v_j}^{\langle q\rangle})-f(x_s^{\langle q\rangle}+t_{v_k}^{\langle q\rangle}-\tau_{v_j}^{\langle q\rangle})-f(x_s^{\langle q\rangle}+\tau_{v_k}^{\langle q\rangle}-t_{v_j}^{\langle q\rangle})+f(x_s^{\langle q\rangle}+\tau_{v_k}^{\langle q\rangle}-\tau_{v_j}^{\langle q\rangle})| < \varepsilon\langle q\rangle \tag{3.26}$$

siempre que $1 \leq k < j \leq n_q$. fijamos

$$\begin{aligned}
\mu_{q+1} = (1-2n_q^{-2})\mu_q &+ n^{-\frac{5}{2}}\sum_{k=1}^{n_q}\frac{1}{2}(\delta_{t_{v_k}^{\langle q\rangle}} - \delta_{\tau_{v_k}^{\langle q\rangle}}) \\
&- n_q^{-3}\mu_q * \sum_{1\leq k<j\leq n_q}\frac{1}{2}(\delta_{t_{v_k}^{\langle q\rangle}} - \delta_{\tau_{v_k}^{\langle q\rangle}}) * \frac{1}{2}(\delta_{-t_{v_k}^{\langle q\rangle}} - \delta_{-\tau_{v_k}^{\langle q\rangle}}).
\end{aligned}$$

Así μ_{q+1} es una combinación lineal de puntos de masa concentrada en los puntos

$$x_s^{\langle q\rangle}, t_{v_k}^{\langle q\rangle}, \tau_{v_k}^{\langle q\rangle}, x_s^{\langle q\rangle} + t_{v_k}^{\langle q\rangle} - t_{v_j}^{\langle q\rangle}, x_s^{\langle q\rangle} + t_{v_k}^{\langle q\rangle} - \tau_{v_j}^{\langle q\rangle}, x_s^{\langle q\rangle} + \tau_{v_k}^{\langle q\rangle} - t_{v_j}^{\langle q\rangle}, x_s^{\langle q\rangle} + \tau_{v_k}^{\langle q\rangle} - \tau_{v_j}^{\langle q\rangle}$$

lo cuales estan contenidos en le intervalo $(-\tau_{\eta\langle q+1\rangle}, \tau_{\eta\langle q+1\rangle})$ y para cuya cardinalidad, s_{q+1}, tenemos

$$s_{q+1} \leq s_q + 2N_q + 2s_q(N_q-1)(N_q-2) < q^q(1+2q) + 2q^{1/2} < (q+1)^{q+1} = m\langle q+1\rangle.$$

[12] En lo que sigue se hará uso de los dos lemas anteriores.

[13] no olvidando que $x_s^{\langle q\rangle} \in (-\tau_{\eta\langle q\rangle}, \tau_{\eta\langle q\rangle})$ entonces $-\tau_{\eta\langle q\rangle} < x_s^{\langle q\rangle}$

Entonces utilizando el lema 3.2.1 y $|\widehat{\mu}(n)| \leq 1$, lo cual es (3.24), tenemos

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mu}_{q+1}(n)| &= |(1-2n_q^{-2})\widehat{\mu}_q(n) + n_q^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^{n_q} \frac{1}{2}(e^{int_{v_k}^{\langle q\rangle}} - e^{in\tau_{v_k}^{\langle q\rangle}}) \\
&\quad -n_q^{-3}\widehat{\mu}_q(n) \sum_{1\leq k<j\leq n_q} \frac{1}{2}(e^{int_{v_k}^{\langle q\rangle}} - e^{in\tau_{v_k}^{\langle q\rangle}}) \cdot \frac{1}{2}(e^{-int_{v_k}^{\langle q\rangle}} - e^{-in\tau_{v_k}^{\langle q\rangle}})| < 1.
\end{aligned}$$

De la definición de μ_q y la hipótesis inductiva (3.23), tenemos

$$\|\mu_{q+1}\|_{M(T)} \leq (1-2n_q^{-2})e^q + n_q^{-\frac{3}{2}} + \frac{n_q^{-1}e^q}{2} < e^q(1+n_q^{-1/2}) + n_q^{-3/2} < e^{q+1}.$$

revisando la hipótesis inductiva (3.25),

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mu_{q+1}}(f) &= \int_{\mathfrak{T}} f \, d\mu_{q+1} \\
&= (1-2n_q^{-2}) \int_{\mathfrak{T}} f \, d\mu_q + n_q^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^{n_q} \frac{1}{2}(\delta_{t_{v_k}^{\langle q\rangle}} - \delta_{\tau_{v_k}^{\langle q\rangle}}) \\
&\quad -4^{-1}n_q^{-3} \sum_{s=1}^{s_q} \alpha_s^{\langle q\rangle} \sum_{k<j} \Big[f(x_s^{\langle q\rangle} + t_{v_k}^{\langle q\rangle} - t_{v_j}^{\langle q\rangle}) + f(x_s^{\langle q\rangle} + \tau_{v_k}^{\langle q\rangle} - \tau_{v_j}^{\langle q\rangle}) \\
&\quad -f(x_s^{\langle q\rangle} + t_{v_k}^{\langle q\rangle} - \tau_{v_j}^{\langle q\rangle}) - f(x_s^{\langle q\rangle} + \tau_{v_k}^{\langle q\rangle} - t_{v_j}^{\langle q\rangle}) \Big] \\
&\geq 10^{-1}(1-2n_q^{-2})q^{1/4} + n_q^{-3/2} - \frac{\varepsilon\langle q\rangle}{8n_q} \sum_{s=1}^{s_q} \alpha_s^{\langle q\rangle} \quad (*) \\
&> 10^{-1}q^{1/4} + q^{-3/4} - 8^{-1}e^{-q} \\
&> 10^{-1}(q+1)^{1/4}.
\end{aligned}$$

Se logra (*) por (3.23), (3.26) y porque

$$\sum_{k=1}^{n_q} \frac{1}{2} \left(\delta_{t_{v_k}^{\langle q\rangle}} - \delta_{\tau_{v_k}^{\langle q\rangle}} \right) = n_q,$$

pues[14] $\delta_{t_{v_k}^{\langle q\rangle}} - \delta_{\tau_{v_k}^{\langle q\rangle}} = 2$, además por hipótesis

$$\int_{\mathfrak{T}} f \, d\mu_q > 10^{-1}q^{1/4}.$$

[14]Por definición $\delta_{t_{v_k}^{\langle q\rangle}} = f(t_{v_k}^{\langle q\rangle})$ y $\delta_{\tau_{v_k}^{\langle q\rangle}} = f(\tau_{v_k}^{\langle q\rangle})$ y en tales puntos $|f| = 1$

Entonces
$$\Phi_{\mu_{Q_N}} > 10^{-1}(Q_N)^{1/4}$$
Luego, hemos mostrado que las hipotesis (3.23), (3.24) y (3.25) son válidas con q reemplazada por $q+1$ sujeto a la restricción $\eta\langle q+1\rangle \leq 2N$. Ahora, como $\eta\langle Q_N+2\rangle > 2N$, vemos que

$$Q_N > K_1(logN)^{1/3} > 0,$$

donde K_1 es una constante absoluta. Así, (3.21) se mantiene con $\mu = \mu_{Q_N}$ y la primera afirmación del lema ha sido probada.

Ahora supongamos que I es un intervalo conteniendo el soporte de μ_{Q_N}. Sea h en $C(\mathfrak{T})$ con $\|\chi_I h\|_\infty < e^{-N}$ y sea λ una constante. De (3.23), la variación de μ_{Q_N} es

$$\|\mu_{Q_N}\|_{M(\mathfrak{T})} = \int_T |d\mu_{Q_N}| < e^{Q_N} < e^N.$$

Así

$$\begin{aligned}
\|\lambda f + h\|_{A(\mathfrak{T})} &= \sup\left\{\frac{1}{\|\Phi\|_{A^*(\mathfrak{T})}}\Phi(\lambda f + h) : \|\Phi\|_{A^*(\mathfrak{T})} \leq 1\right\} \\
&\geq \left|\int_{\mathfrak{T}} (\lambda f + h)\, d\mu_{Q_N}\right| \\
&\geq |\lambda| \left|\int_{\mathfrak{T}} f\, d\mu_{Q_N}\right| - \left|\int_{\mathfrak{T}} h\, d\mu_{Q_N}\right| \\
&\geq K|\lambda| log^{1/12} N - \|\chi_I h\|_\infty \int_{\mathfrak{T}} |d\mu_{Q_N}| \\
&\geq K|\lambda| log^{1/12} N - 1,
\end{aligned}$$

lo cual es la última afirmación del lema 3.2.3

□

Ahora estamos en condiciones para la demostración del teorema principal de esta sección.

Teorema 3.2.1 Existe una f en $C(\mathfrak{T})$ tal que $f \circ g \notin A(\mathfrak{T})$ para cada cambio de variable g.

Demostración. Denotemos con I_k el intervalo $\left[\frac{\pi}{k+1}, \frac{\pi}{k}\right]$ y por ψ_k la función característica χ_{I_k} de I_k. Consideremos la función continua

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (log^{\frac{1}{24}} N_k) \psi_k sen[k(k+1)N_k x],$$

donde $N_k,\ k = 1, 2, \ldots$, es una sucesión creciente de enteros tal que

$$log^{\frac{1}{24}} N_k > e^{N_{k-1}} \quad \text{para todo } k.$$

Sea g un autohomeomorfismo de $\mathfrak{T}$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que g preserva el orden y $g(0) = 0$. Mostraremos que $F = f \circ g \notin A(\mathfrak{T})$. Claramente, hay un δ positivo tal que $F(t) = 0$ siempre que $t \in (-\delta, 0]$. hagamos

$$t_k = g^{-1}\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad \text{y} \quad \gamma_k = t_k - t_{k+1}.$$

Aplicamos el lema 3.2.3 a los sumandos de F. Fijado un entero positivo v para el cual $\gamma_v < \delta$, definiendo

$$\varphi_v(t) = v(v+1)g(t + t_{v+1}) - v\pi, \ \ t \in [0, \gamma_v].$$

Entonces

$$F_v(t) = F(t + t_{v+1}) = (log^{\frac{1}{24}} N_v) F_v^{(1)} + F_v^{(2)}$$

donde

$$F_v^{(1)} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad \gamma_v \leq t \leq \pi, \\ (-1)^{vN_v} sen(N_v \varphi_v(t)) & \text{para} \quad 0 \leq t \leq \gamma_v \\ 0 & \text{para} \quad -\pi \leq t < 0. \end{cases}$$

y $F_v^{(2)}$ es tal que $\displaystyle\sum_{v=1}^{\infty} F_v^{(2)} = 0$.

Sea μ_v la correspondiente medida de Radon probada en el lema 3.2.3. Además, el soporte$(\mu_v) \subset [-\gamma_v, \gamma_v]$.

Ahora supongamos que $f \circ g \in A(\mathfrak{T})$. Entonces

$$\|f \circ g\|_{A(T)} \geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathfrak{T}} f \circ g \, d\mu \right|$$

pues

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathfrak{T}} f\circ g\, d\mu\right| &= \left|\int_{\mathfrak{T}} \sum \widehat{f\circ g}(n)e^{inx}\, d\mu(x)\right| \\
&= \left|2\pi \sum \widehat{f\circ g}(n)\widehat{\mu}(-n)\right| \\
&\leq 2\pi \sum \left|\widehat{f\circ g}(n)\right| \left|\widehat{\mu}(-n)\right| \\
&\leq 2\pi \sum \left|\widehat{f\circ g}(n)\right| = 2\pi \left\|f\circ g\right\|_{A(T)}
\end{aligned}
$$

para cada μ en $M(\mathfrak{T})$ con $\|\mu\|_{A^*(\mathfrak{T})} \leq 1$. En particular, esto se cumple para μ_v. Además, observamos que

$$\left\|\chi_{[-\gamma_v,\gamma_v]} F_v^{(2)}\right\|_\infty < e^{-N_v},$$

del lema 3.2.3 tenemos que

$$\|f\circ g\|_{A(\mathfrak{T})} = \|F\|_{A(\mathfrak{T})} \geq \left|\int_{\mathfrak{T}} F_v\, d\mu_v\right| > K log^{\frac{1}{24}} N_v - 1.$$

Lo cual nos lleva a la contradicción

$$K log^{\frac{1}{24}} N_v - 1 < \|f\circ g\|_{A(T)} < +\infty.$$

Lo que prueba el teorema.

$\square$

Referencias bibliográficas

- Casper Goffman, Togo Nishiura, Daniel Waterman: Homeomorphisms in Analysis, Mathematical Surveys and monographs.
- A. Zygmund. Trigonometric series, tercera edición.
- Robert S. Borden: A course in advanced calculus, Dover pubications, Mineola, New York.
- Walter Rudin: Principios de Análisis Matemático segunda edición, McGraw-Hill Book company.
- Joan Cerda: Análisis Real, segunda edición, Edicions Universitat de Barcelona.
- Julio Rey Pastor, Pedro Pi Calleja, César A. Trejo: Análisis matemático, volumen III, Editorial Kapelusz.