

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR



**Universidad de El Salvador**

*Hacia la libertad por la cultura*

MSc. RUFINO ANTONIO QUEZADA SÁNCHEZ  
RECTOR

Lic. DOUGLAS VLADIMIR ALFARO CHÁVEZ  
SECRETARIO GENERAL

Dr. RENÉ PERLA JIMÉNEZ  
FISCAL GENERAL

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. RAFAEL ANTONIO GÓMEZ ESCOTO  
DECANO

Lic. ARISTIDES PAZ SÁNCHEZ  
DIRECTOR DE LA ESCUELA DE MATEMÁTICA

CIUDAD UNIVERSITARIA, SAN SALVADOR, JULIO DE 2008.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA  
ESCUELA DE MATEMÁTICA



**Universidad de El Salvador**

*Hacia la libertad por la cultura*

**Geometría y otros delirios.**  
*(Geometría Proyectiva desde las perspectivas Sintética y Algebraica)*

PRESENTADO POR:  
AARÓN ERNESTO RAMÍREZ FLORES  
CARNÉ: RF-01007

PARA OPTAR AL GRADO DE:  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Ing. CARLOS MAURICIO CANJURA LINARES  
DOCENTE DIRECTOR

Ing. FRANCISCO MARROQUÍN  
DOCENTE DIRECTOR

CIUDAD UNIVERSITARIA, SAN SALVADOR, JULIO DE 2008.

**Geometría y otros delirios.** (*Geometría Proyectiva desde  
las perspectivas Sintética y Algebraica*)

*aa*

# Índice general

<b>Introducción.</b>	<b>3</b>
<b>1. Geometría Proyectiva desde la perspectiva Sintética.</b>	<b>4</b>
1.1. Hileras y Haces. . . . .	6
1.1.1. Teoremas de Menelao y Teorema de Ceva. . . . .	7
1.1.2. Teorema de Desargues. . . . .	13
1.1.3. Teorema de Pappus. . . . .	16
1.2. Razón Armónica. . . . .	17
1.2.1. Equivalencia entre el Teorema de Meneleao y Teorema de Ceva. . . . .	20
1.2.2. Transversal a un haz armónico. . . . .	21
1.2.3. Cuadrángulo y cuadrilátero completo. . . . .	21
1.2.4. Principio de Dualidad 1. . . . .	23
1.3. Inversión. . . . .	24
1.3.1. Circunferencias de Apolonio. Rectas y Circunferencias ¿una misma cosa? . . . . .	24
1.3.2. Inversión de “circunferencias”. . . . .	27
1.3.3. Polos y Polares. . . . .	30
1.3.4. Teorema Fundamental de polos y polares. . . . .	31
1.3.5. Principio de Dualidad 2. . . . .	32
1.4. Razón Doble. . . . .	33
1.4.1. Construcción del Cuarto Conjugado. . . . .	34
1.4.2. Los seis valores de la razón doble. . . . .	35
1.4.3. Teorema de Pascal y Teorema de Pappus. . . . .	36
1.4.4. Otras propiedades de la Razón Doble. . . . .	37
<b>2. Geometría Proyectiva desde la perspectiva Algebraica.</b>	<b>39</b>
2.1. Espacios Vectoriales. . . . .	39
2.1.1. Dimensión y Base de en Espacio Vectorial. . . . .	41
2.1.2. Cambio de Base. . . . .	41
2.1.3. Subespacios, Suma e Intersección de Subespacios. . . . .	42
2.1.4. Dualidad. . . . .	44
2.1.5. Aplicaciones Lineales y Semilineales entre Espacios Vectoriales. . . . .	48
2.2. El Espacio Proyectivo de n dimensiones. . . . .	51
2.2.1. Coordenadas Homogéneas y cambio de coordenadas. . . . .	52
2.2.2. Subespacios en el Espacio Proyectivo. . . . .	54
2.2.3. Aplicaciones Lineales y Semilineales Proyectivas, Colineaciones. . . . .	57
2.2.4. Teoremas Fundamentales de la Geometría Proyectiva. . . . .	59
2.2.5. Dualidad, Correlaciones y Reciprocidades. . . . .	63

<b>3. Aplicaciones.</b>	<b>67</b>
3.1. El Plano Proyectivo. . . . .	67
3.1.1. Teorema de Menelao y Teorema de Ceva. . . . .	72
3.1.2. Teorema de Desargues. . . . .	75
3.1.3. El Teorema de Pappus y conmutatividad del Cuerpo Base. . . . .	76
3.2. Modelo de Geometría Hiperbólica de Poincaré. . . . .	77
3.2.1. Transformaciones de Moebius. . . . .	78
3.2.2. Cuatro teoremas sobre circunferencias ortogonales. . . . .	86
3.2.3. M-Transformaciones. . . . .	88
3.2.4. Modelo de Poincaré. . . . .	91
3.3. Algunas incidencias “sencillas” no tan sencillas. . . . .	94
 <b>Bibliografía.</b>	 <b>100</b>

# Introducción.

La idea central del presente texto es hacer un contrapunto entre el desarrollo teórico de la Geometría desde sus distintas facetas, específicamente de la Geometría Proyectiva. Por una parte se tiene el conocimiento profundo de la Geometría Sintética, elegante legado de los griegos, y por otra parte, la visión contemporánea, con su desarrollo teórico amplio y general. La combinación de estos modos de pensamiento impactó profundamente la matemática de los últimos tres siglos, como resultado, la visión geométrica actual dista mucho de la original, con mucha variedad en cuanto a sus vínculos con otras áreas matemáticas, y con muchas ideas primitivas para nada obsoletas.

En la primera Unidad se hace un recorrido bastante completo de los problemas clásicos sobre Incidencia, se abordan los teoremas de Menelao, Ceva, Desargues, Pascal, Pappus, Brianchon, y se contextualiza todos ellos en la teoría usual, es decir Razones de Segmentos Dirigidos, Conjugación Armónica, Razón Doble, Potencia de Punto, Eje Radical, Inversión, Polos y Polares. Además se aborda el tema de las Circunferencias de Apolonio, que permite desvanecer el concepto de circunferencia de tal forma que la línea recta es un tipo de circunferencia. También se hace un trato especial a las rectas paralelas, para definir los Puntos al Infinito y la Recta al Infinito de un plano, es decir, se trabaja sobre el Plano Proyectivo.

En la segunda unidad se estudia el Espacio Proyectivo  $n$ -dimensional desde la visión de los Espacios Vectoriales. Aquí se aborda una teoría lo suficientemente suave como para permitir que ciertos fenómenos considerados evidentes sean demostrables, por ejemplo que “dos puntos determinan una única línea recta”. Las coordenadas homogéneas son el centro de toda esta teoría y derivan en cierto punto a un tema de rigor, la Dualidad. También se aborda el concepto de Incidencia en este Espacio Proyectivo, demostrando los llamados teoremas fundamentales de la Geometría Proyectiva, que abordan de una manera impresionante el concepto de Colineación.

Finalmente, en la tercera unidad se hace un recorrido breve sobre las Aplicaciones más usuales de los contenidos anteriores. En primer lugar se aborda el Plano Proyectivo como caso particular del Espacio Proyectivo  $n$ -dimensional, en esta sección se demuestran algunos teoremas importantes como el teorema de Desargues y el teorema de Pappus. En otra sección se aborda el Modelo Geométrico no Euclidiano de Poincaré, que hace uso importante de las Transformaciones de Moebius así como de teoría de circunferencias ortogonales. En la última sección se muestra algunas aplicaciones de éstos contenidos en la resolución de problemas sintéticos de alto nivel de dificultad.

# Capítulo 1

## Geometría Proyectiva desde la perspectiva Sintética.

Para establecer convención, los puntos se denotarán por letras mayúsculas  $A, B, \dots$ , mientras que las rectas por letras minúsculas  $a, b, \dots$ . Por otra parte, una recta  $a$  que pase por los puntos  $B$  y  $C$  será llamada *la recta  $BC$* , y esto se escribe  $a = BC$ ; análogamente, si por un punto  $A$  pasan las rectas  $b$  y  $c$  se forma entonces *el punto  $A = bc$* . También, si se especifica, o según el contexto, es posible que se maneje términos como *el segmento  $AB$* , *el segmento dirigido  $AB$*  o *el rayo  $AB$* . El segmento  $AB$  se refiere a la unión de  $A$  y  $B$  con la región de la recta  $AB$  comprendida entre  $A$  y  $B$ , y se le agrega intrínsecamente el concepto de distancia entre  $A$  y  $B$ . El segmento dirigido representa el mismo conjunto de puntos que el segmento, pero se le agrega *orientación* al concepto de distancia, positiva y negativa según se convenga. Y finalmente, el rayo o semirecta  $AB$  son todos de la recta  $AB$  que están del mismo lado que  $B$  con respecto a  $A$ .

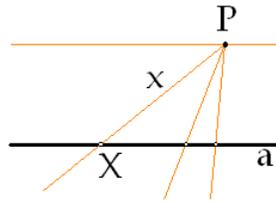
La Geometría Proyectiva tiene como objeto de estudio aquellas propiedades que no involucran medida, siendo la *incidencia* el tema principal. Así, se tiene interés en puntos alineados y rectas concurrentes, que son respectivamente, puntos que inciden en una recta dada, y rectas que inciden en un punto dado.

Un detalle importante es que se considerará que dos rectas paralelas se cortan en un *punto impropio* llamado *punto al infinito*. Esto, aunque el sentido común parezca contradictorio (lo cual no es erróneo, simplemente práctico), matemáticamente (aún más práctico) tiene el sustento necesario, como se verá a lo largo de este texto. De momento, basta conformarse con la justificación que se busca eliminar ese “caso excepcional”, que dos rectas coplanares dejan de cortarse si son paralelas. Así, al igual que dos puntos definen una recta (existe y es única), también, dos rectas coplanares definen un punto. En el espacio, las rectas pierden un poco de protagonismo, dado que si son alabeadas (no coplanares) definitivamente no se cortan, sin embargo los planos retoman tal rol, en el espacio dos planos siempre se cortan. Esta claro que este análisis se puede extender a espacios de mayor dimensión, siendo los puntos y los hiperplanos los dueños de la escena, y el escenario la incidencia.

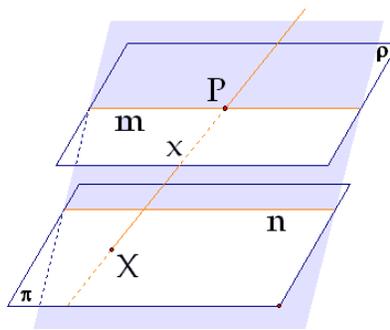
Con respecto al *punto al infinito* hay aún varios detalles importantes que comentar. Otra justificación paleativa para aceptar el hecho que “dos rectas en el plano siempre se cortan” radica en la percepción visual que tenemos de la realidad. Por ejemplo, si se observa una

carretera recta muy larga desde el punto de vista de un peatón suicida que se encuentra justo a media calle y la observa longitudinalmente, da la impresión que los bordes de la carretera se cortan en un punto sobre el horizonte. Si se trazaran líneas paralelas a los bordes (digamos las líneas punteadas de la carretera), esas líneas irían a parar al mismo punto sobre el horizonte, en cambio, los bordes de otra carretera perpendicular a la primera, se cortan también en un punto ideal, pero distinto al primero. Así, existe todo un conjunto de puntos al infinito (el horizonte), tales puntos forman la *la recta al infinito*. Un observador perspicaz se puede sentir mareado con esto, porque percibe que el horizonte forma más bien una circunferencia que lo rodea y no una recta, no se equivoca (Poincaré lo apoya), y la confusión entre recta y circunferencia no es del todo descabellada, sin embargo, hay motivos para considerar el horizonte como una recta propiamente dicha. Considere el siguiente razonamiento:

Dada la recta  $a$  y un punto  $P$  fuera de ella, a cada recta  $x$  que pasa por  $P$  puede asociársele un punto  $X$  sobre  $a$ , la forma de hacer esto es simplemente forzando que se cumpla la relación  $x = PX$ .



¿Qué pasa entonces con la recta paralela a  $a$  por  $P$ ? El punto que corresponde (permitiendo biyectividad) a esa recta es el punto al infinito de la recta  $a$ , y suponiendo que tal recta tiene un único punto ideal, entonces todas las rectas paralelas a  $a$  se cortan en un mismo punto. Así, en el plano, hay tantos puntos al infinito como *direcciones*. Llamemos  $I$  a ese conjunto. La intersección de una recta cualquiera  $a$  con  $I$  es **un** punto al infinito, es decir, existe y es único, y de allí que se considere a este conjunto como una recta.



Todo este razonamiento adquiere más sentido si se analiza el comportamiento desde el espacio. Consideramos que dos planos siempre se intersectan en una línea recta. Tomando un plano  $\pi$  y un punto  $P$  fuera de este, se puede hacer una asociación biyectiva entre los puntos  $X$  de  $\pi$  y las rectas  $x$  que pasan por  $P$ , de nuevo, tomando  $x = PX$ . Esta asociación queda perfectamente definida si  $x$  no es paralela a  $\pi$ , ¿qué pasa entonces con el plano  $\rho$  paralelo a  $\pi$  por  $X$ ? (que es justamente el lugar geométrico de las rectas  $x$  paralelas a  $\pi$ ), por las consideraciones hechas, estos dos planos deben cortarse en una línea recta. Tomando una recta  $m$  por  $P$  en  $\rho$  y

una recta  $n$  en  $\pi$  tal que  $m \parallel n$ , por lo visto anteriormente, como son coplanares, se cortan en un punto al infinito que pertenece al plano que las contiene, y que claramente pertenece tanto a  $\pi$  como a  $\rho$ . Así, a cada punto ideal de  $\pi$  se le asocia una recta de  $\rho$  que pasa por  $P$ , y el lugar geométrico de todos estos puntos es la intersección de  $\pi$  con  $\rho$ , la recta al infinito de  $\pi$  y de  $\rho$ . También se observa que se forma una biyección entre las rectas de  $\pi$  y los planos que pasan por  $P$ , tomando simplemente el plano que contiene a la recta en cuestión y a  $P$ , y en tal caso, el plano que se asocia a la recta al infinito de  $\pi$  es  $\rho$ .

## 1.1. Hileras y Haces.

(1) **Definición: Hilera de Puntos.** Un conjunto de puntos  $P_1, P_2, \dots$  forman una hilera si todos se ubican (inciden) en una misma línea recta dada.

(2) **Definición: Haz de Rectas.** Un conjunto de rectas  $p_1, p_2, \dots$  forman un haz si todas pasan (inciden) por un mismo punto dado.

Por lo dicho anteriormente, dados dos puntos, existe una única recta que pasa por ellos, y dadas dos rectas, existe un único punto que pertenece a ambas, es decir, dos puntos siempre inciden en una única recta y dos rectas siempre inciden en un único punto. Otro axioma fundamental es que no todos los puntos pasan por una misma línea recta ni todas las rectas pasan por un mismo punto, es decir, dados tres puntos, estos no están necesariamente alineados, y dadas tres rectas, estas no son necesariamente concurrentes. Con estos elementos es posible formular el concepto de triángulo (y trilátero), y también dos teoremas básicos que son a la vez criterio para determinar si tres puntos están alineados o si tres rectas son concurrentes, el Teorema de Menelao y el Teorema de Ceva, respectivamente. Antes de estudiarlos, se definirá una función muy útil para hileras y haces.

Así como anteriormente se agregó un punto ideal a la recta tal cual la conocemos (el punto al infinito), también, será necesario agregar un número ideal a los números reales (y a los números complejos posteriormente), el número real *infinito*. Este número cumple propiedades contrarias a las del *cero*, tales como  $a + \infty = \infty$  y  $\frac{a}{\infty} = 0$ , mientras que el *cero* cumple  $a + 0 = a$  y  $\frac{a}{0} = \infty$ . Observe que no se está haciendo consideración en cuanto a signo,  $+\infty$  o  $-\infty$ , se define como una única estructura, esto debido al desarrollo anterior, en el cual el punto al infinito de una recta es el mismo sin importar hacia que lado la recta  $PX$  tienda a ser la paralela de  $a$ .

(3) **Definición: Reales Extendidos.** Es el conjunto de los números reales unido con infinito:  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Este conjunto lo denotaremos por  $\mathbb{R}^*$ .

(4) **Propiedad:** Dados dos puntos  $A, B$  y la recta que éstos definen  $AB$ , la función  $f: AB \mapsto \mathbb{R}^*$  definida como  $f(P) = \frac{AP}{PB}$  es una función biyectiva.

*Demostración:*

Considere la siguiente figura. Si  $P = A \Rightarrow f(P) = 0$ , si  $P = B \Rightarrow f(P) = \infty$ , si  $P = \infty \Rightarrow f(P) = -1$ , si  $P$  está al interior del segmento  $AB \Rightarrow f(P) \in \mathbb{R}^+$ , si  $P$  está a la izquierda de  $A \Rightarrow f(P) \in (-1, 0)$ , si  $P$  está a la derecha de  $B \Rightarrow f(P) \in \mathbb{R}^- - (-1, 0)$ .



Todas las relaciones se obtienen considerando que  $f(P) = \frac{AP}{PB} = \frac{AB+BP}{PB} = \frac{AB}{PB} - 1$ ,<sup>1</sup> donde  $PB = t$  es un parámetro ( $t \in \mathbb{R}^*$ ) y  $AB \neq 0$  un valor fijo, es decir, queda definida una función  $g : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$

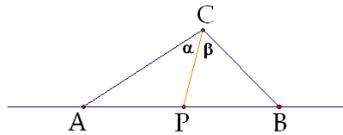
$$f(P) = g(t) = \frac{c}{t} - 1$$

Por la forma de  $g$ ,<sup>2</sup> está claro que  $P = P' \Leftrightarrow t = t' \Leftrightarrow g(t) = g(t') \Leftrightarrow f(P) = f(P')$ . Con esto,  $f$  es tanto sobreyectiva como inyectiva, es decir, biyectiva.

**(5) Propiedad:Teorema Generalizado de la Bisectriz.**<sup>3</sup> Si  $C$  es un punto fuera de  $AB$ , entonces  $f(P) = \frac{CA \text{sen} \angle ACP}{BC \text{sen} \angle PCB}$ .

*Demostración:*

Considere la siguiente figura. Aplicando Ley de Seno a los triángulos  $APC$  y  $PBC$ , y dado que  $\angle APC$  y  $\angle CPB$  son suplementarios, se tiene  $\frac{CA}{AP} \text{sen} \angle PCA = \text{sen} \angle APC = \text{sen} \angle CPB = \frac{BC}{PB} \text{sen} \angle BCP \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{CA \text{sen} \angle ACP}{BC \text{sen} \angle BCP}$ . Cambiando la orientación de los ángulos (ángulos dirigidos) y tomando en cuenta (4) se obtiene el resultado desado.



### 1.1.1. Teoremas de Menelao y Teorema de Ceva.

**(6) Teorema: Teorema de Menelao.** Dado el triángulo  $ABC$  y los puntos  $X, Y, Z$  sobre las rectas  $AB, BC, CA$  respectivamente, se cumple que  $X, Y, Z$  están alineados si y sólo si

$$\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ}{ZA} = -1$$

*Demostración:*

Es de aclarar que la expresión del teorema se refiere el producto de razones de segmentos dirigidos. Considere la siguiente figura, asumamos que  $X, Y, Z$  están alineados y sea  $W$  un punto sobre la recta  $XYZ$  tal que  $AC \parallel WB$ .

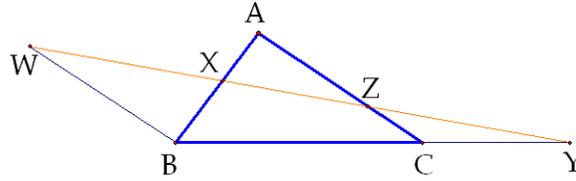
Se observa que  $\Delta AXZ \approx \Delta BXW$  y  $\Delta BYW \approx \Delta CYZ$ , por lo que

$$\frac{AX}{BX} = \frac{AZ}{BW} \wedge \frac{BY}{CY} = \frac{BW}{CZ} \Rightarrow \frac{AX}{BX} \frac{BY}{CY} \frac{CZ}{AZ} = 1$$

<sup>1</sup>Esto es debido a la relación de Chasles, si  $A, B, C$  están alineados, entonces  $AB + BC + CA = 0$ .

<sup>2</sup>Gráficamente, una hipérbola en  $\mathbb{R}^{*2}$ .

<sup>3</sup>Si  $CP$  es la bisectriz del  $\angle ACB$  se obtiene el conocido **Teorema de la Bisectriz:**  $\frac{AP}{PB} = \frac{CA}{BC}$ .



Tomando en cuenta el signo de los segmentos, se llega a la expresión buscada

$$\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ}{ZA} = -1$$

Para demostrar el recíproco, el camino más fácil es por contradicción. Asumiendo que  $X, Y, Z$  cumplen  $\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ}{ZA} = -1$  y sin embargo NO están alineados, se puede contruir  $Z' \neq Z$  como la intersección de  $XY$  con  $CA$ , y es tal que  $X, Y, Z'$  están alineados; utilizando lo probado en el párrafo anterior,  $\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ'}{Z'A} = -1$ . Igualando,  $f(Z) = f(Z')$  (con respecto a  $CA$ ), y por (4),  $Z = Z' \rightarrow \leftarrow$ . Por lo tanto  $X, Y, Z$  SÍ están alineados.

Aplicando (5) a (6) se obtiene un Teorema de Menelao un poco distinto, pero muy útil.

**(7) Corolario: Versión Trigonométrica del Teorema de Menelao.**  $X, Y, Z$  están alineados si y sólo si

$$\frac{\text{sen}\angle ACX}{\text{sen}\angle XCB} \frac{\text{sen}\angle BAY}{\text{sen}\angle YAC} \frac{\text{sen}\angle CBZ}{\text{sen}\angle ZBA} = -1$$

Otro teorema muy importante es el Teorema de Ceva, que aborda una temática muy similar a la del Teorema de Menelao, y es en si un criterio para determinar si tres rectas son o no concurrentes (tomando de referencia un triángulo). Estos dos teoremas, a pesar que para la matemática contemporánea están obviamente relacionados, históricamente tienen raíces muy alejadas, Menelao (que para su tiempo, el teorema que lleva su nombre era ya un resultado conocido) es de la época de la antigua Alejandría, mientras que Ceva es un matemático italiano de la época del renacimiento. Esto es a penas una muestra de lo que significa descuidar la Ciencia, la Matemática y particularmente la Geometría.

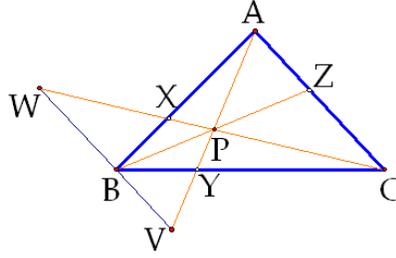
**(8) Teorema: Teorema de Ceva.** Dado el triángulo  $ABC$  y los puntos  $X, Y, Z$  sobre las rectas  $AB, BC, CA$  respectivamente, se cumple que  $CX, AY, BZ$  concurren si y sólo si

$$\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ}{ZA} = 1$$

*Demostración:*

Considere la siguiente figura. Sea  $P$  el punto de intersección de las cevianas,<sup>4</sup> y sean  $V$  y  $W$  sobre  $AP$  y  $CP$  respectivamente, tal que  $VW$  pasa por  $B$  y es paralela a  $AC$ .

<sup>4</sup>La línea recta que une un vértice con un punto cualquiera del lado opuesto es llamada *ceviana* en referencia a este teorema y su autor.



Como  $\Delta PWB \approx PCZ$  y  $\Delta PVB \approx \Delta PAZ$  entonces

$$\frac{VB}{AZ} = \frac{BP}{ZP} \wedge \frac{WB}{CZ} = \frac{BP}{ZP} \Rightarrow \frac{CZ}{AZ} = \frac{WB}{VB}$$

También, como  $\Delta XCA \approx \Delta XWB$  y  $\Delta YAC \approx \Delta YVB$  entonces

$$\frac{AX}{BX} = \frac{CA}{WB} \wedge \frac{BY}{CY} = \frac{VB}{AC}$$

De estas relaciones se tiene

$$\frac{AX}{BX} \frac{BY}{CY} \frac{CZ}{AZ} = \frac{CA}{WB} \frac{VB}{AC} \frac{WB}{VB} = -1 \Rightarrow \frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ}{ZA} = 1$$

La demostración del recíproco es idéntica a la del recíproco del Teorema de Menelao (6). Suponemos  $X, Y, Z$  que satisfacen  $\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ}{ZA} = 1$  pero que forman cevianas no concurrentes; si  $P$  es la intersección de  $AY$  con  $CX$ , se define  $Z' \neq Z$  como la intersección de  $BP$  con  $CA$ , y utilizando lo recién demostrado  $\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ'}{Z'A} = 1$ . Simultaneando, se llega de nuevo a  $f(Z) = f(Z') \Rightarrow Z = Z' \rightarrow \leftarrow$ . Por lo tanto concurren.

Este teorema también tiene su versión trigonométrica, aplicando (5) a (8) se tiene

**(9) Corolario: Versión Trigonométrica del Teorema de Ceva.**  $CX, AY, BZ$  concurren si y sólo si

$$\frac{\text{sen} \angle ACX}{\text{sen} \angle XCB} \frac{\text{sen} \angle BAY}{\text{sen} \angle YAC} \frac{\text{sen} \angle CBZ}{\text{sen} \angle ZBA} = 1$$

Estos dos teoremas tienen muchas aplicaciones de interés, como se verá a lo largo del texto y por lo tanto es necesario preguntarse si funciona adecuadamente en casos excepcionales, como por ejemplo, cuando  $X$  es el punto al infinito de  $AB$ , que según lo planteado al inicio de la Unidad, no tiene propiedades distintas a un punto finito.

**(10) Corolario: Teorema de Menelao con un punto al infinito.** El Teorema de Menelao con un único punto al infinito se deforma en un el Teorema de Thales.<sup>5</sup>

*Demostración:*

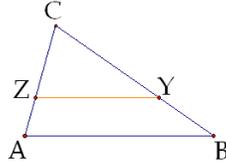
Sin pérdida de generalidad, se supone  $X$ , la intersección de  $AB$  con  $YZ$ , como el punto al infinito de  $AB$ ; esto es cierto si y sólo si  $AB \parallel YZ$ . Por lo dicho en la demostración de (4)

<sup>5</sup>En su versión fundamental, también conocido como **Primer Teorema de Thales**.

$\frac{AX}{XB} = -1$ . Aplicando el Teorema de Menelao (6) al triángulo  $ABC$  con la transversal  $XYZ$  se tiene

$$\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ}{ZA} = -1 \Leftrightarrow \frac{AZ}{ZC} = \frac{BY}{YC}$$

Es decir que  $AB \parallel YZ \Leftrightarrow \frac{AZ}{ZC} = \frac{BY}{YC}$ , que es el conocido Teorema de Tales.



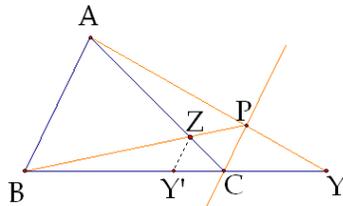
El caso del Teorema de Ceva con un punto al infinito se deforma en una relación un poco extraña pero útil para la construcción del cuarto armónico.

**(11) Corolario: Teorema de Ceva con un punto al infinito.** Si  $X$  es el punto al infinito de  $AB$  y  $Y'$  es la intersección de la  $ZX$  con  $BC$  entonces

$$\frac{BY}{YC} = -\frac{BY'}{Y'C}$$

*Demostración:*

Las ceviana  $CX$  es la recta paralela a  $AB$  por  $C$ , por lo tanto  $P$ , la intersección de las cevianas está sobre dicha recta; también, la recta que define  $Y'$ ,  $ZX$ , es paralela a  $AB$ , tal como muestra la figura.



Aplicando el Teorema de Ceva (8) a las cevianas concurrentes  $CX, AY, BZ$  y dado que  $\frac{AX}{XB} = -1$  resulta que  $\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ}{ZA} = 1 \Rightarrow \frac{BY}{YC} = -\frac{AZ}{ZC}$ , pero por el Teorema de Tales (10) al triángulo  $ABC$  con paralela  $ZY'$  se tiene que  $-\frac{AZ}{ZC} = -\frac{BY'}{Y'C}$ , por lo tanto

$$\frac{BY}{YC} = -\frac{BY'}{Y'C}$$

Este resultado es en si un algoritmo para construir el cuarto armónico con regla y compás.

Cabe ahora preguntarse qué pasa cuando dos puntos, digamos  $X$  y  $Y$ , son puntos al infinito. Bajo tal consideración se plantean los siguientes dos corolarios, versiones degeneradas del Teorema de Menelao y Ceva respectivamente.

**(12) Corolario: Teorema de Menelao con dos puntos al infinito.** Si dos puntos de la transversal del Teorema de Menelao son puntos al infinito, el tercero también.

*Demostración:*

Sin pérdida de generalidad, se supone  $X$  y  $Y$  puntos al infinito de  $AB$  y  $BC$  respectivamente. Luego  $\frac{AX}{XB} = \frac{BY}{YC} = -1$ , y si  $Z$  es un punto sobre  $CA$ , por el Teorema de Menelao  $X, Y, Z$  están alineados si y sólo si  $\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ}{ZA} = -1 \Leftrightarrow \frac{CZ}{ZA} = -1$ , y de nuevo, por la demostración de (4), esto último es cierto si y sólo si  $Z$  es el punto al infinito de  $CA$ .

Este corolario da una justificación de peso para aceptar como modelo geométrico sólido el hecho que los puntos al infinito de un plano forman una línea recta. Si se deja fijo el punto  $B$  al igual que las direcciones de  $AB$  y  $BC$ , y se varía  $CA$  sobre todas las direcciones posibles, los puntos al infinito  $X$  y  $Y$  están fijos, mientras que  $Z$  recorre toda la recta al infinito, y por lo anterior, incide en  $XY$ .

Por otra parte, el Teorema de Ceva con dos puntos al infinito se deforma en una propiedad sumamente conocida de paralelogramos, y es que las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

**(13) Corolario: Teorema de Ceva con dos puntos al infinito.** Si  $X$  y  $Y$  son puntos al infinito de  $AB$  y  $BC$  respectivamente, se cumple que  $ABCP$  es un paralelogramo y

$$\frac{CZ}{ZA} = 1 = \frac{BZ}{ZP}$$

*Demostración:*

Aplicando el Teorema de Ceva a las cevianas concurrentes en  $P, CX, AY, BZ$ , del triángulo  $ABC$ , y a las cevianas concurrentes en  $C, PX, BY, AZ$ , del triángulo  $BAP$ , se tiene

$$\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ}{ZA} = 1 = \frac{BX}{XA} \frac{AY}{YP} \frac{PZ}{ZB} \Rightarrow \frac{CZ}{ZA} = 1 = \frac{PZ}{ZB}$$

Dado que por las condiciones,  $\frac{AX}{XB} = \frac{BY}{YC} = -1 = \frac{BX}{XA} = \frac{AY}{YP}$ .

Si se pide que el Teorema de Ceva se cumpla con los puntos al infinito  $X, Y, Z$ , en principio se espera que no se pueda (dado que el producto de los cocientes sería  $-1$ ), y además, eso sería equivalente a pedir que los tres lados del triángulo  $ABC$  fueran concurrentes; sin embargo, si se deforma el triángulo  $ABC$  a un punto, tal teorema puede quedar perfectamente definido aceptando el hecho que el cociente entre cero e infinito sea 1, aunque probablemente estas consideraciones no tengan aplicación práctica. Para evitar casos extraños como éste se considerará que tanto en el Teorema de Menelao como en el Teorema de Ceva, el triángulo  $ABC$  es un triángulo propio, es decir, un triángulo formado por tres puntos distintos no alineados, y los puntos  $X, Y, Z$  son distintos entre si y distintos a los vértices. Sin embargo, es posible considerar que los vértices sean puntos al infinito. Así, se crea toda una nueva serie de variantes interesantes.

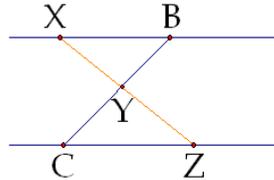
(14) **Corolario: Teorema de Menelao y Teorema de Ceva con un vértice al infinito.** Si  $A$  es un punto al infinito se cumple que

$$\frac{BY}{YC} = \frac{XB}{CZ}$$

*Demostración:*

Considere la siguiente figura, en la que se cumple el Teorema de Menelao. Las rectas  $BX$  y  $CZ$  se cortan en el punto al infinito  $A$ . Como  $AX = ZA$ , al aplicar el Teorema de Menelao al triángulo  $ABC$  con la secante  $XYZ$  se tiene

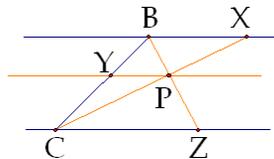
$$\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ}{ZA} = -1 \Rightarrow \frac{BY}{CY} = \frac{XB}{ZC}$$



Observe que según las restricciones impuestas,  $X$  no puede ser un punto al infinito porque coincidiría con  $A$ , igual pasa con  $Z$ , sin embargo no hay restricción para  $Y$ , es decir, puede darse el caso  $BC \parallel XY$ ; aplicando el resultado anterior y sabiendo que  $\frac{BY}{YC} = -1$  se obtiene la igualdad de segmentos  $BX = CZ$ , es decir, otra propiedad conocida de paralelogramos: *Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.* Si se considera  $Y$  como punto medio de  $BC$ , se obtiene el recíproco de (13).

Veamos ahora qué pasa con el Teorema de Ceva. Considere la siguiente figura. Como  $A$  es un punto al infinito, la recta  $PY$  es paralela a  $BX$  y  $CZ$ . De nuevo,  $AX = ZA$  y aplicando el Teorema de Ceva

$$\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ}{ZA} = 1 \Rightarrow \frac{BY}{CY} = \frac{XB}{ZC}$$



Este corolario y (10) sirven para establecer que los lados de una pareja de triángulos semejantes son proporcionales.

Inclusive es posible utilizar estos teoremas con dos vértices al infinito, aunque su manejo es bastante complicado y su alcance muy poco investigado, no significa que no tenga utilidad.

<sup>6</sup>Utilizando el Teorema de Tales (10) al triángulo  $XBC$  y línea paralela  $YP$ , se tiene que  $\frac{BY}{CY} = \frac{XP}{CP} \Rightarrow \frac{XB}{ZC} = \frac{XP}{CP}$ , una relación más familiar.

La siguiente propiedad es una muestra de ello.

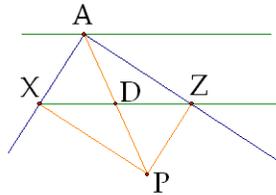
**(15) Propiedad. Aplicación del Teorema de Menelao y Ceva con dos vértices al infinito.** Dado el triángulo  $AXZ$ ,  $D$  es el punto medio de  $XZ$  si y sólo si

$$\frac{\text{sen}\angle XAD}{\text{sen}\angle DAZ} = -\frac{\text{sen}\angle AXZ}{\text{sen}\angle XZA}$$

*Demostración:*

Considere la siguiente figura. El triángulo  $ABC$  tiene dos vértices como puntos al infinito, digamos  $B$  y  $C$ , y tiene una transversal  $XYZ$ , con  $X, Y$  puntos finitos sobre  $AB$  y  $CA$  respectivamente, y  $Y$  el punto al infinito definido como la intersección de  $XZ$  con  $BC$ . Aplicando el Teorema de Menelao, y de nuevo utilizando el hecho que  $\frac{AX}{XB} = \frac{CZ}{ZA} = -1$  se tiene que  $\frac{BY}{YC} = -1$ .<sup>7</sup> Por otra parte, si se define  $P$  como la intersección de  $BZ$  con  $CX$  (es decir,  $AX \parallel ZP$  y  $AZ \parallel XP$ ) y  $Y'$  como la intersección de  $AP$  con  $BC$ , es posible aplicar el Teorema de Ceva, con las cevianas concurrentes  $CX, AY', BZ$  en el triángulo  $ABC$ , y de allí se obtiene que  $\frac{BY'}{Y'C} = 1$ . Entonces  $\frac{BY}{YC} = -\frac{BY'}{Y'C}$ , y por el Teorema Generalizado de la Bisectriz (5), esta expresión se convierte en  $\frac{\text{sen}\angle BAY}{\text{sen}\angle YAC} = -\frac{\text{sen}\angle BAY'}{\text{sen}\angle Y'AC}$ . Pero además, como  $Y$  es el punto al infinito de  $XZ$ , entonces  $AY \parallel XZ \Rightarrow \angle BAY = 180^\circ - \angle AXZ$  y  $\angle YAZ = \angle XZA$ , y de aquí se concluye rápidamente que

$$\frac{\text{sen}\angle XAD}{\text{sen}\angle DAZ} = -\frac{\text{sen}\angle AXZ}{\text{sen}\angle XZA}$$



### 1.1.2. Teorema de Desargues.

Un teorema que vincula lo expuesto anteriormente es el Teorema de Desargues, podría decirse que reúne en un solo teorema el Teorema de Menelao y el Teorema de Ceva, quitando la necesidad de medir longitudes de segmentos o senos de ángulos para dar criterios de incidencia de puntos o rectas en función de incidencia de rectas o puntos. Este es entonces el primer gran paso hacia la Geometría Proyectiva, estudiando el problema de incidencia sin necesidad de medir. Antes, dos definiciones sencillas.

**(16) Definición: Triángulos en Perspectiva con respecto a un punto.** Los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  están en perspectiva con respecto al punto  $P$  si las rectas  $AA', BB', CC'$  inciden en  $P$ .

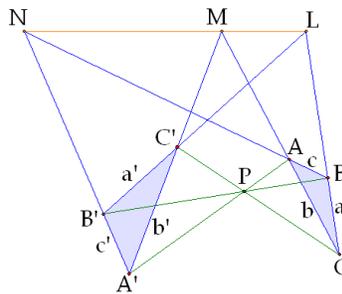
<sup>7</sup>Note que se está utilizando un cociente entre dos segmentos sobre la recta al infinito.

(17) **Definición: Triángulos en Perspectiva con respecto a una recta.** Los triángulos<sup>8</sup>  $abc$  y  $a'b'c'$  están en perspectiva con respecto a la recta  $p$  si los puntos  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  inciden en  $p$ .

(18) **Teorema: Teorema de Desargues.** Dos triángulos están en perspectiva con respecto a un punto (centro de perspectiva o perspector) si y sólo si están en perspectiva con respecto a una recta (eje de perspectiva o perspectriz).

*Demostración:*

Considere la siguiente figura. Asumiendo que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  están en perspectiva con respecto al punto  $P$ , se busca probar que las intersecciones<sup>9</sup>  $L = aa'$ ,  $M = bb'$ ,  $N = cc'$  están alineadas.



Aplicando el Teorema de Menelao (6)

$$\text{Al } \triangle PAB \text{ y transversal } A'NB': \frac{PA'}{A'A} \frac{AN}{NB} \frac{BB'}{B'P} = -1$$

$$\text{Al } \triangle PBC \text{ y transversal } B'LC': \frac{PB'}{B'B} \frac{BL}{LC} \frac{CC'}{C'P} = -1$$

$$\text{Al } \triangle PCA \text{ y transversal } C'MA': \frac{PC'}{C'C} \frac{CM}{MA} \frac{AA'}{A'P} = -1$$

Multiplicando estas expresiones resulta

$$\frac{AN}{NB} \frac{BL}{LC} \frac{CM}{MA} = -1$$

Esta última expresión, nuevamente por el Teorema de Menelao, significa que  $LMN$  es una transversal al triángulo  $ABC$ , es decir,  $L, M, N$  están alineados.

Para demostrar el recíproco se asume que  $L, M, N$  están alineados, y si se define  $P$  como la intersección de  $AA'$  con  $CC'$ , se busca probar que  $BB'$  pasa también por  $P$ . Se observa que los triángulos  $ANA'$  y  $CLC'$  están en perspectiva con respecto al punto  $M$ , dado que las rectas  $AC, NL, A'C'$  inciden en  $M$ , y por lo recién demostrado,  $B', P, B$  deben estar alineados.

<sup>8</sup>El triángulo  $abc$  formado por las rectas  $a, b, c$ , y análogamente  $a'b'c'$ .

<sup>9</sup>La recta  $a$  es la que se opone al vértice  $A$  del triángulo  $ABC$ , y análogamente para  $b, c$ ; así, el triángulo  $ABC$  es el mismo que  $abc$ . Lo mismo pasa con los triángulos  $A'B'C'$  y  $a'b'c'$ .

Una demostración alternativa y sumamente elegante de este teorema es como sigue:

Los triángulos dibujados en el plano  $ABC$  y  $A'B'C'$  se pueden interpretar como su representación en papel de dos triángulos en el espacio ubicados sobre planos distintos. Si suponemos que los triángulos están en perspectiva con respecto a  $P$ , significa que hay un punto en el espacio fuera de los planos en el que concurren las rectas  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ . Como las rectas  $AA'$  y  $BB'$  concurren en  $P$ , el plano que contiene al  $\Delta PAB$  es el mismo que contiene al  $\Delta PA'B'$ , por lo tanto las rectas coplanares  $AB$  y  $A'B'$  se cortan en un punto  $N$ . Análogamente, las rectas  $BC$  y  $B'C'$  se cortan en un punto  $L$ , y las rectas  $CA$  y  $C'A'$  se cortan en un punto  $M$ . Con esto, está claro que  $L$ ,  $M$  y  $N$  pertenecen al plano formado por  $\Delta ABC$ , pero también pertenecen al plano formado por  $\Delta A'B'C'$ , es decir, pertenecen a su intersección, que es una recta, y por tanto los puntos  $L$ ,  $M$ ,  $N$  están alineados en el espacio. Dado que la representación en papel de una recta en el espacio es una recta (en el papel), los puntos  $L$ ,  $M$ ,  $N$  están alineados en el plano.<sup>10</sup>

Hay un caso particular del Teorema de Desargues de mucho interés y frecuentemente utilizado, y es cuando un par de triángulos son homotéticos.

**(19) Definición: Triángulos Homotéticos.** Dos triángulos son homotéticos si tienen parejas de lados correspondientes paralelos.

**(20) Corolario: Centro de Homotecia.** Si  $ABC$  y  $A'B'C'$  son homotéticos en ese orden, las rectas  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  concurren en un punto llamado el Centro de Homotecia.

*Demostración:*

Por hipótesis,  $AB \parallel A'B'$ ,  $BC \parallel B'C'$ ,  $CA \parallel C'A'$ , entonces, si  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  son los puntos al infinito de  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , respectivamente, éstos pertenecen también a  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'A'$ , respectivamente. Por (12),  $XYZ$  es la recta al infito del plano y forma una transversal para  $\Delta ABC$  y  $\Delta A'B'C'$ , ambos triángulos están en perspectiva con respecto a la recta al infinito, y por el Teorema de Desargues (18), deben estar en perspectiva desde un punto, es decir,  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  concurren.

Otra aplicación del Teorema de Desargues muy útil, que muestra la potencia y la dificultad en el manejo de tal teorema, es la siguiente.

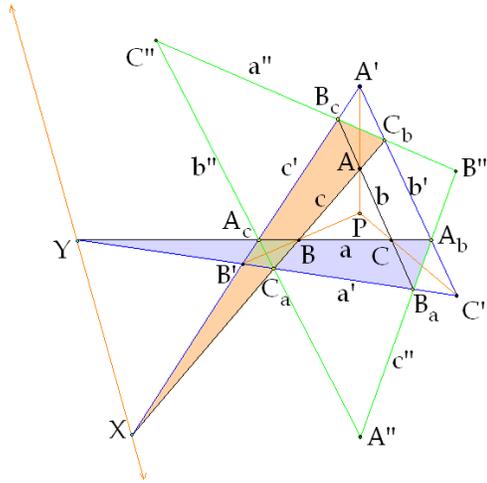
**(21) Teorema: Teorema de Desargues iterado.** Sean  $abc$  y  $a'b'c'$  dos triángulos en perspectiva con respecto a un punto  $P$ . La recta  $a''$  es aquella que pasa por los puntos  $bc'$  y  $cb'$ , análogamente se definen  $b''$  y  $c''$ . Entonces, el triángulo  $a''b''c''$  está en perspectiva a  $abc$  y  $a'b'c'$  con respecto al punto  $P$ .

---

<sup>10</sup>De interpretaciones como ésta dan el nombre de *Geometría Projectiva* a esta de la Geometría, entendiéndose que el triángulo  $ABC$  se proyecta en el triángulo  $A'B'C'$  con respecto a una "luz", y más aún, un pintor puede proyectar lo que mira (su ojo es el punto  $P$ , la "luz") en un lienzo, en el cual se deben transferir las propiedades como la incidencia. Esta corriente artística de la época del Renacimiento tiene como máximo representante a Leonardo da Vinci.

*Demostración:*

Considere la siguiente figura. Sea  $A$  el vértice que se opone a la recta  $a$  del triángulo  $abc$ , y análogamente para el resto de puntos  $B, C''$ , etc. También se denota por  $A_b$  el punto de intersección de  $a$  y  $b'$ , y de igual manera quedan definidos el resto de puntos  $A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$ . Se sabe que  $AA', BB', CC'$  concurren en  $P$ , y se demostrará que  $A'', B'', C''$  pertenecen a cada una de estas rectas, respectivamente, demostrando así el teorema. Por el Teorema de Desargues (18), los puntos  $X = cc', Y = aa', Z = bb'$  están alineados, es el eje de perspectiva de los triángulos  $abc$  y  $a'b'c'$ . Con esto, los triángulos  $aa'c''$  y  $cc'a''$  están en perspectiva con respecto a  $Z = bb'$ , dado que  $B_aB_c = b, A_bC_b = b', XY$  pasan por  $Z$ , y de nuevo, por el Teorema de Desargues, el eje de perspectiva es  $BB'B''$ , es decir, estos tres puntos están alineados. Similarmente para el resto de casos.<sup>11</sup>



### 1.1.3. Teorema de Pappus.

Otro teorema de suma importancia es el Teorema de Pappus. Es un teorema que expresa de excelente manera las Propiedades Proyectivas, dado que da un criterio de incidencia de puntos a partir de únicamente incidencia de puntos.

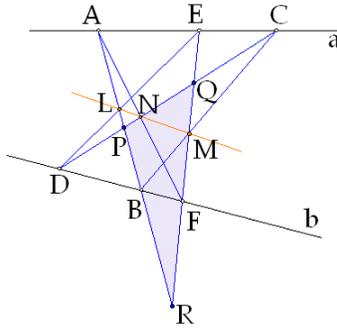
**(22) Teorema: Teorema de Pappus.** Si los puntos  $A, B, C, D, E, F$  son puestos alternadamente sobre dos rectas  $a$  y  $b$ , entonces las intersecciones de los lados opuestos del hexágono  $ABCDEF$  están alineadas.

*Demostración:*

Considere la siguiente figura. Se definen  $L, M, N$  como las intersecciones de  $AB$  con  $DE$ ,  $BC$  con  $EF$ ,  $CD$  con  $FA$ , respectivamente. Se busca probar que estos tres puntos están alineados. Para ello, se construye el triángulo  $PQR$ , formado por las intersecciones de las rectas  $AB, CD, EF$ .

Aplicando el Teorema de Menelao (6) sobre el triángulo  $PQR$

<sup>11</sup>Note que en esta demostración se manipula únicamente incidencias y no se realiza cálculo alguno.



Con la transversal  $NFA$ :  $\frac{PN}{NQ} \frac{QF}{FR} \frac{RA}{AP} = -1$

Con la transversal  $BMC$ :  $\frac{PC}{CQ} \frac{QM}{MR} \frac{RB}{BP} = -1$

Con la transversal  $DEL$ :  $\frac{PD}{DQ} \frac{QE}{ER} \frac{RL}{LP} = -1$

Además, por hipótesis,  $A, C, E$  están alineados, al igual que  $B, D, F$ , entonces también se aplica el Teorema de Menelao sobre el mismo triángulo:

Con la transversal  $CEA$ :  $\frac{PC}{CQ} \frac{QE}{ER} \frac{RA}{AP} = -1$

Con la transversal  $DFB$ :  $\frac{PD}{DQ} \frac{QF}{FR} \frac{RB}{BP} = -1$

Multiplicando las primeras tres expresiones y dividiendo por las últimas dos, se tiene que

$$\frac{PN}{NQ} \frac{QM}{MR} \frac{RL}{LP} = -1$$

Y de nuevo, por el Teorema de Menelao,  $NML$  es una transversal del triángulo  $PQR$ , es decir, están alineados.

## 1.2. Razón Armónica.

Una relación de segmentos muy importante es la llamada *Razón Armónica*. Según la notación de (4), dado un segmento de recta fijo  $AB$ , a cada punto  $P$  es posible asociarle un número real  $f(P)$ , y se dirá que el punto  $P'$  sobre  $AB$  es el conjugado armónico de  $P$  si  $f(P) = -f(P')$ . Con esto, se forma lo que se conoce como una *Cuaterna Armónica*:

**(23) Definición: Cuaterna Armónica.** La hilera de puntos  $A, B, C, D$  forman una cuaterna armónica si

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

Si se toma el segmento  $AB$  de referencia para definir  $f$ , se observa que  $f(C) = -f(D)$ , por lo que  $C$  y  $D$  son llamados conjugados armónicos con respecto a  $AB$ . Por otra parte, si

se define  $f$  con respecto a  $BC$ , también se verifica que  $f(A) = -f(B)$ , y de igual manera,  $A$  y  $B$  son conjugados armónicos con respecto a  $BC$ . Es por ello que estos cuatro puntos son llamados una *cuaterna armónica*, que se denotará por  $(A, B; C, D)$ .

Es fácil verificar que al permutar los conjugados entre si, la nueva cuaterna sigue siendo armónica, y por lo dicho en párrafo anterior, al intercambiar la pareja de referencia, también se cumple que la nueva cuaterna sigue siendo armónica. Así se plantea la siguiente propiedad que se deja sin demostración y que se verifica fácilmente.

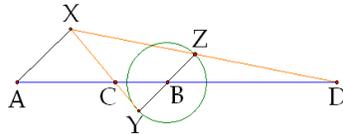
**(24) Propiedad: Permutando una cuaterna armónica.** Si  $(A, B; C, D)$  entonces  $(A, B; D, C)$ ,  $(B, A; C, D)$ ,  $(B, A; D, C)$ ,  $(C, D; A, B)$ ,  $(C, D; B, A)$ ,  $(D, C; A, B)$ ,  $(D, C; B, A)$ .

De (4), como  $f$  es una función biyectiva, si se tiene el segmento de referencia  $AB$ , a cada punto  $C$  sobre la recta  $AB$  le corresponde un único conjugado  $D$ . De aquí que sea de nuestro interés la forma de construir el llamado *cuarto armónico*,<sup>12</sup> ya que  $f$ , si bien garantiza la existencia y la unicidad, no da ninguna pista de cómo obtenerlo. Afortunadamente, hay muchísimas formas de construirlo, a lo largo este texto se conocerán algunas de ellas, de hecho, en (11) se detallaba ya un método, y a continuación se da otro.

**(25) Algoritmo: Construcción del cuarto armónico.** Dados tres puntos  $A, B, C$ , para construir  $D$ , el conjugado armónico de  $C$  con respecto a  $AB$ , se trazan dos rectas paralelas por  $A$  y  $B$ , y una recta por  $C$  que las corte en  $X$  y  $Y$ , respectivamente, luego,  $Z$  es la reflexión de  $Y$  con respecto a  $B$ , y la intersección de  $XZ$  con  $AB$  es el punto buscado  $D$ .

*Demostración:*

Considere la siguiente figura. Se observa que  $\triangle ACX \approx \triangle BCY \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{XA}{YB}$ . También  $\triangle ADX \approx \triangle BDZ \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{XA}{ZB}$ . Como  $YB = -ZB$ , se concluye que  $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$ .



Es de notar que cuando  $C$  es el punto medio de  $AB$ ,  $XZ \parallel AB$ , por lo que  $D$  es el punto al infinito de  $AB$ , que justamente coincide con el modelo utilizado  $f(C) = 1 \Rightarrow f(D) = -1 \Leftrightarrow D$  es punto al infinito.

Una propiedad muy útil que vincula los conjugados con el punto medio del otro par de conjugados.

**(26) Propiedad:** Si  $(A, B; C, D)$  y  $O$  es el punto medio de  $AB$  entonces  $OC \cdot OD = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ .

<sup>12</sup>Dados tres puntos, se busca el cuarto que convierta la hilera en cuaterna armónica.

*Demostración:*

$$(A, B; C, D) \Rightarrow \frac{AO + OC}{CO + OB} = -\frac{AO + OD}{DO + OB}$$

Desarrollando y utilizando el hecho que  $O$  es punto medio de  $AB$ , y por tanto  $AO = OB = \frac{AB}{2}$  se tiene<sup>13</sup>

$$2AO \cdot OB - 2OC \cdot OD + OC(AO + BO) + OD(OA + OB) = 0 \Rightarrow AO^2 = OB^2 = OC \cdot OD = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

La siguiente propiedad es la que le da el nombre de razón armónica a (23).

**(27) Propiedad: Progresión armónica.**  $(A, B; C, D)$  si y sólo si los segmentos  $AC$ ,  $AB$  y  $AD$  están progresión armónica. Esto es

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

*Demostración:*

Mediante una sencilla manipulación algebraica se tiene  $(A, B; C, D) \Leftrightarrow \frac{CB}{AC} + \frac{DB}{AD} = 0$ , y dado que  $AB = AC + CB = AD + DB$  se tiene

$$\Leftrightarrow \frac{CA + AB}{AC} + \frac{DA + AB}{AD} = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{AB}{AC} - 1 + \frac{AB}{AD} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}$$

También, la razón armónica puede ser llevada a un haz de rectas  $OA, OB, \dots$ . Así se define un haz armónico como sigue.

**(28) Definición: Haz Armónico.** El haz de rectas  $OA, OB, OC, OD$ , se dirá que es un haz armónico, denotado por  $O(A, B; C, D)$  si

$$\frac{\text{sen} \angle AOC}{\text{sen} \angle COB} = -\frac{\text{sen} \angle AOD}{\text{sen} \angle DOB}$$

**(29) Teorema: Vínculo entre hileras armónicas y haces armónicos.** Dada la hilera  $A, B, C, D$  y el punto  $O$  fuera de la recta que los contiene, se cumple que

$$(A, B; C, D) \Leftrightarrow O(A, B; C, D)$$

*Demostración:*

Aplicando el Teorema Generalizado de la Bisectriz (5) se tiene

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} \Leftrightarrow \frac{AO \text{sen} \angle AOC}{BO \text{sen} \angle COB} = -\frac{AO \text{sen} \angle AOD}{BO \text{sen} \angle DOB} \Leftrightarrow \frac{\text{sen} \angle AOC}{\text{sen} \angle COB} = -\frac{\text{sen} \angle AOD}{\text{sen} \angle DOB}$$

<sup>13</sup>De nuevo, se trabaja con segmentos dirigidos, y por la identidad de Chasles  $AB + BC + CA = 0$ .

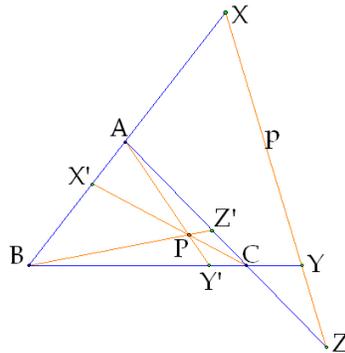
Un caso muy importante de haces armónicos es cuando un par de conjugados son las bisectrices del otro par. Aplicando (5) a la bisectriz interna  $AC$  y la bisectriz externa  $AD$  del  $\Delta OAB$ , se tiene que  $\frac{AC}{CD} = \frac{OA}{BO} = -\frac{AD}{DB}$ .<sup>14</sup> Además, se verifica rápidamente que  $OC \perp OD$ . Así se tiene

**(30) Propiedad: Criterio de rectas conjugadas armónicas perpendiculares.** Dado el haz armónico  $O(A, B; C, D)$ , se cumple que  $OC \perp OD \Leftrightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{OA}{BO} = -\frac{AD}{DB} \Leftrightarrow OC$  y  $OD$  bisecan  $\angle AOB$ .

### 1.2.1. Equivalencia entre el Teorema de Menelao y Teorema de Ceva.

Una de las aplicaciones más importantes de la razón armónica es la demostración que el Teorema de Menelao (6) y el Teorema de Ceva (8) son equivalentes. Esto quiere decir que un teorema puede ser demostrado a partir del otro. Hay muchas formas de hacer esto, una muy útil para este texto es la siguiente:

Dado el triángulo  $ABC$ , sean  $X, Y, Z$  puntos sobre  $AB, BC, CA$  tal que inciden en una recta, y se define  $X', Y', Z'$  como los conjugados armónicos de  $X, Y, Z$  con respecto a  $AB, BC, CA$ , respectivamente. Por (23),  $\frac{AX}{XB} = -\frac{AX'}{X'B}, \frac{BY}{YC} = -\frac{BY'}{Y'C}, \frac{CZ}{ZA} = -\frac{CZ'}{Z'A}$ .



Aplicando el Teorema de Menelao y tomando en cuenta el Teorema de Ceva

$$\frac{AX}{XB} \frac{BY}{YC} \frac{CZ}{ZA} = -1 \Leftrightarrow \frac{AX'}{X'B} \frac{BY'}{Y'C} \frac{CZ'}{Z'A} = 1$$

Y de allí se sigue la equivalencia.<sup>15</sup>

La consecuencia más importante de este hecho es que con respecto al  $\Delta ABC$ , se puede hacer una correspondencia biyectiva entre los puntos del plano  $P$  que no inciden en los lados y las rectas del plano  $p$  que no inciden en los vértices.<sup>16</sup> Esto se debe a (4), si se restringe el dominio de  $f$  a la recta  $AB$  sin los puntos  $A, B$ , su rango se restringe a  $\mathbb{R}^* - \{0\} - \{\infty\}$ ,

<sup>14</sup>También se cumple el recíproco.

<sup>15</sup>Este es un caso particular del Teorema de Desargues (18), los triángulos  $ABC$  y  $Y'Z'X'$  están en perspectiva, con perspector  $P$  y perspectriz la transversal  $p = XYZ$ .

<sup>16</sup>Incluyendo la recta al infinito, que corresponde al baricentro, punto de intersección de las medianas, del  $\Delta ABC$

es decir,  $\mathbb{R} - \{0\}$ , que claramente se asocian biyectivamente entre positivos y negativos. Para completar la biyección, a cada vértice se asocia el lado opuesto del triángulo, y a cada punto  $P$  de lado  $AB$  se le asocia la recta  $CP$ , y análogamente para el resto de lados. Con esto se tiene

**(31) Teorema: Biyección entre Rectas y Puntos en el plano vía Menelao y Ceva.** Dado un triángulo en el plano, a cada hilera de puntos sobre los lados del triángulo corresponde un único haz de rectas que parten de los vértices, y viceversa. Es decir, el Teorema de Menelao y el Teorema de Ceva son equivalentes.

Para nuestro interés, esta biyección es importante, dado que se toma como verdadera en la construcción matemática que se está haciendo, sin embargo, tal biyección tiene la desventaja que a tres puntos alineados  $P, Q, R$  no necesariamente le corresponden rectas concurrentes  $p, q, r$ .

### 1.2.2. Transversal a un haz armónico.

Un resultado fundamental para la definición en secciones posteriores de *proyectividad* es el hecho que la razón armónica se mantiene invariante para cualquier transversal que corte a un haz armónico dada, o para cualquier haz que pase por una hilera armónica dada.

En (29) se demostró que dada una hilera armónica  $(A, B; C, D)$ , cualquier haz que se forme con esta hilera será un haz armónico  $O(A, B; C, D)$ .<sup>17</sup> Ahora se probará algo similar, dado un haz armónico, cualquier transversal que no pase por el centro del haz intersecta al mismo en una hilera armónica.

**(32) Teorema: Transversal a un haz armónico.** Si una recta que no pasa por  $O$  corta al haz armónico  $O(A, B; C, D)$  en  $A', B', C', D'$ , entonces  $(A', B'; C', D')$ .

*Demostración:*

Como se forman los haces armónicos  $O(A, B; C, D)$  y  $O(A', B'; C', D')$ , por (29) se sigue que se forman las hileras armónicas  $(A, B; C, D)$  y  $(A', B'; C', D')$ .

### 1.2.3. Cuadrángulo y cuadrilátero completo.

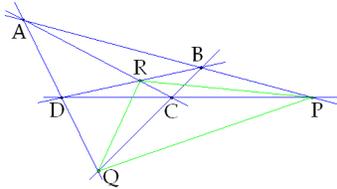
Hasta el momento se ha utilizado el término de *triángulo* para llamar a aquella figura geométrica formada o bien por tres puntos y los lados que define, o bien por tres rectas y los vértices que define, y al final de cuenta, el triángulo  $ABC$  o el triángulo  $abc$  resulta indistinto. Sin embargo, cuando se tienen ya cuatro elementos (puntos o rectas), la figura así definida tiene sus pequeñas diferencias. Así, se utilizará dos términos distintos, *cuadrángulo*<sup>18</sup> cuando se esté hablando de cuatro puntos, y *cuadrilátero* cuando se refiera a cuatro rectas. Extrapolando la terminología, pasa lo mismo con el  $n$ -ágono y el  $n$ -ángulo, y para el caso más sencillo, *triángulo* y *trilátero*.

<sup>17</sup> $O$  fuera de la recta que contiene a la hilera.

<sup>18</sup>También conocido como *cuadrivértice*.

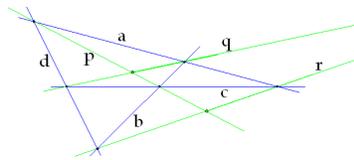
(33) **Definición: Cuadrángulo Completo.** Es la figura formada por cuatro puntos en el plano que tomados por tercias no están alineados, y de seis rectas que éstos definen.

Los cuatro puntos son llamados *vértices* y las seis rectas *lados*. Dos lados son *lados opuestos* si no tienen vértice común. Las intersecciones de dos lados opuestos forman un *punto diagonal*, y el triángulo formado por estos puntos es llamado *triángulo diagonal*. En la siguiente figura, se tiene el el cuadrángulo completo  $ABCD$ , con lados  $AB, BC, CD, DA, AC, BD$  y triángulo diagonal  $PQR$ , con  $P = AB \cap CD, Q = BC \cap DA, R = AC \cap BD$ .



(34) **Definición: Cuadrilátero Completo.** Es la figura formada por cuatro rectas en el plano que tomadas por tercias no son concurrentes, y de seis puntos que éstas definen.

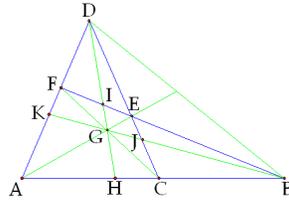
Las cuatro rectas son llamadas *lados* y los seis puntos *vértices*. Dos vértices son *vértices opuestos* si no tienen lado en común. Las rectas que pasan por dos vértices opuestos forman una *recta diagonal*, y el trilátero formado por estas rectas es llamado *trilátero diagonal*. En la siguiente figura, se tiene el cuadrilátero completo  $abcd$ , con vértices  $ab, bc, cd, da, ac, bd$  y trilátero diagonal  $pqr$ , con  $p = ab \cup cd, q = bc \cup da, r = ac \cup bd$ .<sup>19</sup>



El hecho que la definición y las partes de un cuadrángulo y un cuadrilátero sean tan parecidas no es algo que pasará desapercibido, ese fenómeno de intercambiar *punto* por *recta*, *concurrentes* por *alineados*, *intersección* por *unión*, es la idea fundamental de *Dualidad*, concepto que se aborda en la siguiente sección.

Considere la siguiente figura. En el  $\Delta ACD$ , las cevianas  $AE, CF, DH$  concurren, mientras que la recta  $FE$  corta a  $AC$  en  $B$ . Por la demostración de (31),  $(A, C; H, B)$ . Así, por (29), se forma  $D(A, C; H, B)$ , y por (32), se forman también  $(K, J; G, B), (F, E; I, B)$ . Análogamente  $(A, F; K, D) \Rightarrow B(A, F; K, D) \Rightarrow (H, I; G, D) \Rightarrow (C, E; J, D) \Rightarrow G(C, E; J, D)$ . Con esto se han demostrado las siguientes dos propiedades armónicas de cuadriláteros y cuadrángulos completos, basta utilizar el cuadrilátero formado por las rectas  $AC, CE, EF, FA$ , y el cuadrángulo  $ACEF$ , respectivamente.

<sup>19</sup>Esta “unión” de puntos se refiere a “unir” los puntos con una línea recta.



(35) **Teorema: Hileras armónicas en un cuadrilátero completo.** En cada recta diagonal de un cuadrilátero completo hay una cuaterna armónica, que consiste en los dos vértices del cuadrilátero que pasan por la diagonal, y los dos puntos de corte de ésta con las otras diagonales.

(36) **Teorema: Haces armónicos en cuadrángulo completo.** Por cada punto diagonal de un cuadrángulo completo hay un haz armónico, que consiste en los dos lados que pasan por éste y las dos líneas que lo unen con los otros dos puntos diagonales.

#### 1.2.4. Principio de Dualidad 1.

Observando el comportamiento de los Cuadrilátero y los Cuadrángulos Completos, pareciera que *punto* y *recta* tienen una estructura similar. Intercambiando estas dos palabras y haciendo pequeñas modificaciones como *punto de intersección de dos rectas* por *línea por la que pasan dos puntos*, en si, las propiedades son las mismas en ambos casos. En (31) se demostró que en efecto, hay una biyección entre rectas y puntos en el plano, y mediante la transformación que se utilizó en la prueba del mismo, es posible establecer nuestro Primer Principio de Dualidad:

- Dos puntos determinan una recta.
- Dos rectas determinan un punto.
- Tres puntos en un plano dado, o están alineados, o determinan un triángulo.
- Tres rectas en un plano dado, o concurren, o determinan un trilátero.
- Es posible asociar biyectivamente los puntos del plano con las rectas del plano.

Sin embargo, hay todavía dos elementos fundamentales que escapan a las posibilidades de lo desarrollado hasta el momento, que son

- Al punto de intersección de dos rectas dadas es posible asociarle la recta por la que pasan los puntos asociados a las rectas.
- A la recta por la que pasan dos puntos dados es posible asociarle un punto en el que concurren las rectas asociadas a los puntos.

Una vez demostrado esto, se deduce casi de inmediato la **Incendencia** vista desde Dualidad:

- A tres rectas que concurren se le asocian tres puntos alineados.
- A tres puntos alineados se le asocian tres rectas que concurren.

Y con esto, por ejemplo el Teorema de Desargues (19) y su dual son exactamente el mismo, mientras que los teoremas de Cuadriláteros y Cuadrángulos completos son distintos pero uno el dual del otro. Este vacío se cubre en la sección siguiente.

### 1.3. Inversión.

El objetivo primordial de esta sección es establecer una biyección entre rectas y puntos en el plano de tal forma que la incidencia se matenga, es decir, a puntos alineados se asocie rectas concurrentes y viceversa, dado que (31) no tiene ese alcance. Además de cubrir esta necesidad, la visión de Dualidad desde el punto de vista de la Inversión Geométrica gana además un elemento nuevo, una *Circunferencia de Inversión*, la cual, tomándose como referencia, permitirá asociar biyectivamente puntos sobre ella a rectas tangentes a la misma.

La Inversión Geométrica es una transformación que mueve puntos en el plano a puntos en el plano. De manera más precisa, se define así:

**(37) Definición: Inversión Geométrica.** Si  $\Pi$  es el plano y  $\Gamma$  es una circunferencia dada<sup>20</sup> de centro  $O$  y radio  $r$ , la inversión geométrica  $I_\Gamma : \Pi \mapsto \Pi$  es una transformación tal que, si  $P' = I_\Gamma(P)$  cumple pertenecer al rayo  $OP$  y

$$OP \cdot OP' = r^2$$

De la definición se deriva rápidamente que si  $P$  está al interior de  $\Gamma$ ,  $P'$  está al exterior, y viceversa. También, si  $P$  pertenece a  $\Gamma$  entonces  $P = P'$ , mientras que si  $P = O$ ,  $P'$  debe ser un punto al infinito. En esto hay un problema, para cualquier punto finito  $P$  excepto  $O$ , la asociación con  $P'$  es biyectiva, sin embargo, para el caso  $P = O$  tenemos infinitas posibilidades para  $P'$ , que puede tomar cualquier punto de la recta al infinito. Así, por motivos prácticos, la inversión geométrica sólo se considerará bien definida para puntos finitos, y para  $O$ , se tomará a conveniencia algún punto al infito como su *invertido*.<sup>21</sup>

Otro detalle importante que se deriva de la definición es que la Inversión tiene la *Propiedad Involutiva*, esto es  $I_\Gamma^2(P) = P$ , es decir, el invertido del invertido de  $P$  es el mismo  $P$ .

#### 1.3.1. Circunferencias de Apolonio. Rectas y Circunferencias ¿una misma cosa?

Antes de conocer la *Circunferencia de Apolonio* se revisarán algunas propiedades de circunferencias, que además de ser importantes para el tema de Inversión brindan una herramienta elegante para demostrar otras propiedades.

**(38) Definición: Potencia de Punto.** Dada una circunferencia  $\Gamma$  de centro  $O$  y radio  $r$ ,<sup>22</sup> a cada punto  $P$  del plano es posible asociarle un número real  $d^2 - r^2$ , donde  $d$  es la distancia de  $P$  a  $O$ . Este número real es llamado la *Potencia de Punto de  $P$  con respecto a  $\Gamma$* , y

<sup>20</sup>Llamada *Circunferencia de Inversión*.

<sup>21</sup>La imagen tras la inversión.

<sup>22</sup>También se utilizarán las notaciones  $\Gamma(O, r)$  o bien  $(O)_r$ .

se denota por  $Pot(P, \Gamma)$ .

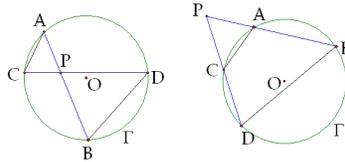
De la definición se derivan de inmediato los siguiente hechos:

1.  $Pot(P, \Gamma) > 0 \Leftrightarrow P$  está afuera de  $\Gamma$ .
2.  $Pot(P, \Gamma) = 0 \Leftrightarrow P$  pertenece a  $\Gamma$ .
3.  $Pot(P, \Gamma) < 0 \Leftrightarrow P$  está adentro de  $\Gamma$ .
4. Si  $f(x, y) \equiv 0$  es la ecuación de la circunferencia, por la forma de la función Potencia de Punto, se observa que  $f(x, y) = Pot(P, \Gamma)$ .

**(39) Teorema: Potencia de Punto como producto de segmentos dirigidos.** Si  $A, B$  y  $P$  son puntos alineados tal que  $A, B \in \Gamma$ , entonces  $Pot(P, \Gamma) = PA \cdot PB$ .

*Demostración:*

Lo primero que se debe probar es que  $PA \cdot PB$  es un número constante, es decir, tomando dos rectas distintas que parten de  $P$  y cortan a  $\Gamma$  en  $A, B$  y  $C, D$  respectivamente, habría que probar que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ . Observando la siguiente figura, está claro que  $\Delta PAC \approx \Delta PDB \Rightarrow \frac{PA}{PD} = \frac{CP}{BP} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$ , como se quería.



Ahora, tomando  $A$  y  $B$  de tal manera que formen un diámetro, se tiene que  $PA = PO + OA$ ,  $PB = PO + OB$ , desarrollando el producto  $PA \cdot PB$  y tomando en cuenta que  $OA = -OB = r$ , en efecto  $PA \cdot PB = PO^2 - r^2$ , o lo que es lo mismo,  $d^2 - r^2 = Pot(P, \Gamma)$ .

**(40) Corolario: Potencia de Punto con una recta tangente.** Si  $A = B$ , la recta  $PAB$  es tangente a  $\Gamma$  en  $A$ , y además  $Pot(P, \Gamma) = PA^2$ .

Cabe preguntarse ahora, dadas dos circunferencias ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia de punto a ambas circunferencias? Este lugar geométrico es el *Eje Radical* de las dos circunferencias, sin embargo, estudiaremos una construcción y definición alternativa de este lugar geométrico vía Circunferencias de Apolonio.

**(41) Definición: Circunferencia de Apolonio.** Dado dos puntos  $A, B$ , se llama *Circunferencia de Apolonio* al lugar geométrico de los puntos del plano  $P$  que cumplen  $\frac{AP}{PB} = k$  para algún  $k \in \mathbb{R}^*$ .<sup>23</sup>

El hecho que este lugar geométrico sea una circunferencia se detalla en el siguiente teorema.

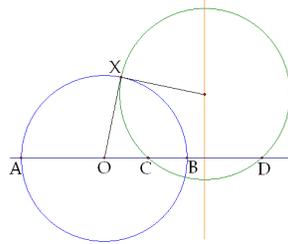
<sup>23</sup>Por cuestión de simplicidad se consideran segmentos no dirigidos.

(42) **Teorema: Construcción de la Circunferencia de Apolonio.** El lugar geométrico de (41) es la circunferencia de diámetro  $CD$ , tal que  $(A, B; C, D)$  y  $\frac{AC}{CB} = k$ .

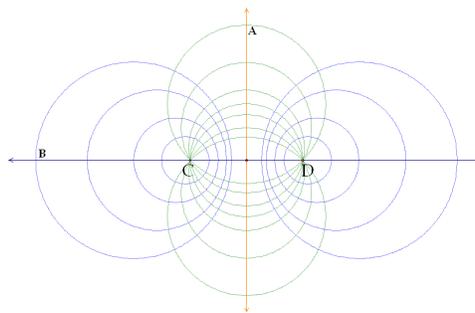
*Demostración:*

Sean  $C$  y  $D$  los puntos sobre la recta  $AB$  tal que  $\frac{AC}{CB} = k = \frac{AD}{DB}$ ,<sup>24</sup> es decir,  $(A, B; C, D)$ ; luego, si  $P$  es un punto fuera de la recta  $AB$  tal que  $\frac{AP}{PB} = k$  se tendría entonces  $\frac{AC}{CB} = \frac{AP}{PB} = \frac{AD}{DB}$ , y por (30), esto se da si  $PC$  y  $PD$  son bisectrices interna y externa del  $\angle APB$ , y por tanto  $PC \perp PD$ . Ahora bien, si  $P$  es un punto tal que  $\angle CPD = 90^\circ$ , es resultado conocido que  $P$  debe estar sobre la circunferencia de diámetro  $CD$ .

Ahora, dejando fijo el valor de  $k$ , si  $A$  representa la familia de circunferencias que pasan por  $C$  y  $D$ ,<sup>25</sup> por (26), si  $O$  es el punto medio de  $AB$  se cumplirá que  $OC \cdot OD = OA^2$ . Además, si  $\Gamma_k$  es la circunferencia de diámetro  $AB$  y corta en  $X$  a una circunferencia de  $A$ , se cumplirá entonces que  $OX^2 = OC \cdot OD$ , y por (40), significa que  $OX$  es tangente a la circunferencia de  $A$ . Esto significa que  $\Gamma_k$  es ortogonal a la circunferencia de  $A$ .



Repetiendo este análisis con toda la familia  $A$ , resulta que  $\Gamma_k$  es ortogonal a todas ellas. Por otra parte, dejando fijo  $CD$ , existen infinitas parejas de  $A, B$  tal que  $(A, B; C, D)$ , basta variar  $k$  en todos los  $\mathbb{R}^*$ , si a esta familia la llamamos  $B$ , cada miembro de ella será ortogonal a cualquier miembro de  $A$ , estas dos familias de circunferencias ortogonales entre si son llamadas las *Circunferencias de Apolonio*.



Si  $W$  es el centro de una circunferencia  $\Omega$  de  $A$ , si esta corta en  $Y$  y  $Z$  a dos circunferencias  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  de  $B$ , como  $\Omega$  es ortogonal a éstas, al calcular la potencia de punto de  $W$  a  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  se tendrá  $Pot(W, \Gamma) = WY^2$  y  $Pot(W, \Gamma') = WZ^2$ , pero como  $WY = WZ$  por ser radios de  $\Omega$ , la potencia a ambas circunferencias es la misma, es decir, pertenece al eje radical de  $\Gamma$  y  $\Gamma'$ . Si se toma ahora cualquier pareja de  $B$ , por el mismo razonamiento,  $W$  pertenecerá al eje radical de

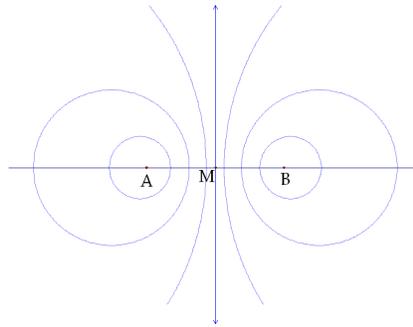
<sup>24</sup>La forma de construirlos no tiene interés, lo importante es que por (4) su existencia está garantizada

<sup>25</sup>Es decir, tienen su circuncentro sobre la mediatriz de  $CD$ .

ellas. Finalmente, como  $W$  se ubica sobre la mediatriz de  $CD$ , el eje radical de cualquier pareja de circunferencias de  $\mathcal{B}$  es la mediatriz de  $CD$ , el lugar geométrico de los centros de  $\mathcal{A}$ . Es decir

**(43) Definición: Eje Radical.** *La mediatriz de  $CD$  es lugar geométrico de puntos que tienen igual Potencia de Punto a cualquier par de circunferencias de la familia  $\mathcal{B}$ . Este lugar geométrico es llamado Eje Radical.*

Otro detalle importante para los propósitos de este texto es dar una primera aproximación para considerar las rectas y las circunferencias como una misma estructura matemática. Retomando el concepto de Circunferencia de Apolonio y su manera de construirla, (41) y (42), si se construyen circunferencias de Apolonio tal que  $\frac{AC}{CB} = k$  se aproxima a 1 por la derecha,  $C$  se aproxima cada vez más al punto medio de  $AB$ , mientras que  $D$  tiende al punto al infinito de la misma recta, es decir, la circunferencia de Apolonio se aproxima cada vez más a la mediatriz de  $AB$ .



En efecto, el lugar geométrico de los puntos  $P$  tal que  $\frac{AP}{PB} = 1$  es justamente la mediatriz de  $AB$ , es decir, tal recta puede considerarse como una circunferencia de diámetro infinitamente grande  $CD$ , con  $C$  el punto medio y  $D$  el punto al infinito de  $AB$ , respectivamente. También se observa que el centro de esa circunferencia es el punto medio de  $CD$ , que claramente es el punto al infinito de  $AB$ , es decir,  $D$ . El mismo fenómeno sucede al aproximarse  $k$  a 1 por la izquierda.

**(44) Propiedad: Recta, una Circunferencia excepcional.** *Una recta puede interpretarse como una circunferencia de diámetro infinitamente grande, cuyo centro es el punto al infinito de una recta perpendicular a ella.*

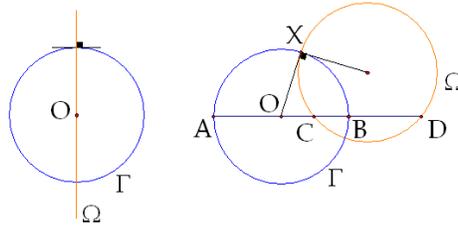
### 1.3.2. Inversión de “circunferencias”.

La inversión geométrica es una transformación que toma y devuelve un punto en el plano, pero quizás la aplicación más útil es la inversión de lugares geométricos completos, y de momento la “circunferencia” es el lugar geométrico de supremo interés. En primer lugar se estudiará aquellas circunferencias que permanecen invariantes tras la inversión.

**(45) Teorema: Inversión de Circunferencias Ortogonales a la Circunferencia de Inversión.** *Dada la circunferencia de inversión  $\Gamma$  y una circunferencia  $\Omega$  ortogonal a ella, entonces  $I_{\Gamma}(\Omega) = \Omega$ .*

*Demostración:*

Suponga  $\Gamma$  una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$ . Analizamos dos casos, que  $\Omega$  sea una circunferencia propia o que sea una recta (44). Si  $\Omega$  es una recta, para que sea ortogonal a  $\Gamma$  es necesario que pase por  $O$ , luego, por la definición de inversión (37),  $P'$  pertenece al rayo  $OP$ , es decir, a  $\Omega$ . Entonces, a un punto  $P$  de  $\Omega$  corresponde un punto  $P'$  de  $\Omega$ , y de allí que  $I_\Gamma(\Omega) = \Omega$ . Si en cambio  $\Omega$  es una circunferencia propia que corta a  $\Gamma$  en  $X$ , y si  $AB$  es diámetro de  $\Gamma$  que al prolongarlo corta a  $\Omega$  en  $C$  y  $D$ , entonces  $Pot(O, \Omega) = OX^2 = OC \cdot OD$ , pero  $OX = r$ , es decir  $D = C'$ . Con esto, a todo punto  $C$  de  $\Omega$  el corresponde un punto  $D$  de  $\Omega$ , por lo que  $I_\Gamma(\Omega) = \Omega$ .

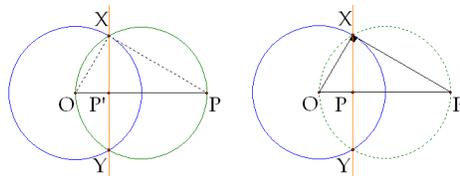


Observe que por (42),  $\Gamma$  es una circunferencia de Apolonio para  $C$  y  $D$  tal que  $(A, B; C, D)$ , y si  $A$  tiende al punto al infinito de  $CD$ ,  $\Gamma$  se convierte finalmente en la mediatriz de  $CD$ , y la inversión en tal caso<sup>26</sup> sería una Reflexión Axial. De aquí que

**(46) Propiedad: Reflexión Axial como un caso excepcional de Inversión.** *La reflexión con respecto a una recta puede interpretarse como la inversión geométrica con respecto a una circunferencia degenerada en una recta.*

Se observa también que la Reflexión Axial cumple (45), ya que una circunferencia ortogonal al Eje de Reflexión debe tener su centro sobre tal Eje (en caso extremo, el centro puede ser el punto al infinito del Eje, en cuyo caso la circunferencia ortogonal será una recta perpendicular al Eje) y por tanto se mantiene invariante tras la Reflexión Axial.

**(47) Algoritmo: Construcción del Punto Inverso.** *Dada la circunferencia  $\Gamma$  de centro  $O$  y un punto  $P$  fuera de ella, el inverso  $P' = I_\Gamma(P)$  es la intersección de  $XY$  con  $OP$ , donde  $X$  y  $Y$  son las intersecciones de  $\Gamma$  con la circunferencia de diámetro  $OP$ . Si en cambio,  $P$  está al interior de  $\Gamma$ ,  $XY$  es cuerda perpendicular a  $OP$  que contiene a  $P$ , y  $P'$  es la intersección de  $OP$  con la perpendicular en  $X$  a  $OX$ .*



<sup>26</sup>Inversión con respecto a una Recta.

*Demostración:*

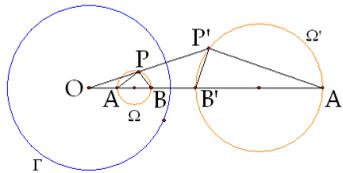
Los algoritmos propuestos, en dependencia si el punto  $P$  está al interior o al exterior de  $\Gamma$ , es uno el algoritmo inverso del otro, dado el hecho que la construcción de una circunferencia de diámetro  $OP$  o un ángulo recto  $OXP'$  son procesos equivalentes, que pueden resumirse como la *construcción de una recta tangente* a  $\Gamma$ . El hecho que  $P$  y  $P'$  así construidos sean inversos entre si se deriva del hecho que  $\Delta OXP \approx \Delta OP'X$  entonces  $\frac{OX}{OP'} = \frac{OP}{OX} \Rightarrow OP \cdot OP' = r^2$ .

Ahora nos enfocamos a un problema más general, el de invertir una circunferencia cualquiera, la manera de hacerlo se detalla en el siguiente teorema.

**(48) Teorema: Inversión de una “circunferencia” cualquiera.** *Dada la circunferencia de inversión  $\Gamma$  de centro  $O$ , la inversión de una circunferencia  $\Omega$ , cuyo diámetro  $AB$  pasa por  $O$  es la circunferencia  $\Omega'$  de diámetro  $A'B'$ , tal que  $A' = I_{\Gamma}(A)$  y  $B' = I_{\Gamma}(B)$ .*

*Demostración:*

Considere la siguiente figura.  $P$  es un punto variable sobre  $\Omega$ , y se define  $P' = I_{\Gamma}(P)$ . Se demostrará que  $P'$  es un punto variable sobre una circunferencia de diámetro  $A'B'$ , con  $A' = I_{\Gamma}(A)$  y  $B' = I_{\Gamma}(B)$ , llamada  $\Omega'$ . Como  $OA \cdot OA' = r^2 = OP \cdot OP'$ , por (39), el cuadrilátero  $APP'A'$  es cíclico. Análogamente,  $BPP'B'$  es cuadrilátero cíclico. Con esto  $\angle OPA = \angle AA'P'$  y  $\angle BPP' = \angle P'B'A'$ , pero como  $AB$  es diámetro,  $\angle APB = 90^\circ$  y por tanto  $\angle OPA + \angle BPP' = 90^\circ \Rightarrow \angle AA'P' + \angle P'B'A' = 90^\circ$ , o equivalentemente  $\angle A'P'B' = 90^\circ$ , lo cual significa que  $P'$  varía sobre una circunferencia de diámetro  $A'B'$ .

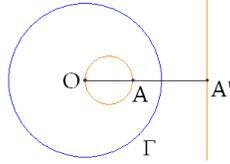


Según (44), la recta es una circunferencia muy peculiar, analizando este hecho se deriva un corolario importante del teorema anterior.

**(49) Corolario: Inversión de una recta.** *La inversión de una recta es una circunferencia que pasa por el centro de inversión.*

*Demostración:*

Dada la circunferencia de inversión  $\Gamma$  de centro  $O$ , si la recta  $a$  pasa por  $O$  es un caso trivial dado (45), sin en cambio no pasa por  $O$ , sea  $A'$  el pie de la perpendicular trazada desde  $O$  hacia  $a$ , por (44), el centro  $O'$  de la circunferencia  $a$  es el punto al infinito de la recta  $OA'$ . Así,  $a$  tiene por diámetro  $A'O'$ , y aplicando (48), la figura invertida es una circunferencia con puntos diametralmente opuestos  $I_{\Gamma}(A')$ ,  $I_{\Gamma}(O')$ , pero este último punto es  $O$ . Si se nombra  $A$  al punto inverso de  $A'$ , la inversión de  $a$  es la circunferencia de diámetro  $OA$ .



Si consideramos que  $a$  deslaza paralelamente con  $A'$  alejándose hacia el infinito,  $a$  convierte en la recta al infinito,  $A$  coincide con  $O$ , y la circunferencia de diámetro  $OA$  se degenera en un único punto  $O$ , que puede considerarse como una circunferencia de radio cero. Así, la inversión de la recta al infinito es una circunferencia de radio cero, el centro de inversión.

Como la Inversión es una función involutiva, este proceso puede llevarse a cabo perfectamente en reversa, es decir

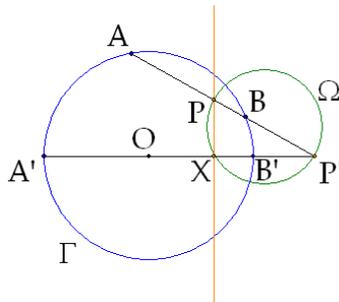
**(50) Corolario: Inversión de una circunferencia que pasa por  $O$ .** La inversión de una circunferencia que pasa por el centro de inversión  $O$  es una recta que no pasa por  $O$ .

Tomando la circunferencia degenerada que pasa por  $O$  y radio cero, como ya se explicó, su inversión son todos los puntos al infinito del plano, pero por (50), es una **recta** que no pasa por  $O$ . Esta es en si una segunda justificación para considerar el conjunto de los puntos al infinito como una recta.

### 1.3.3. Polos y Polares.

**(51) Definición: Polar de un punto.** Dada una circunferencia  $\Gamma$  y un punto  $P'$  fijos, si se trazan rectas por  $P'$  que cortan a  $\Gamma$  en puntos variables  $A$  y  $B$ , el lugar geométrico de los puntos  $P$  tal que  $(A, B; P, P')$  es una recta llamada la Polar de  $P$ , y la denotaremos por  $p$ .

Se probará que en efecto tal lugar geométrico es una recta. Considere que  $P'$  está al exterior de  $\Gamma$ , tal como muestra la siguiente figura.



De (42) se sabe que si  $\Omega$  es la circunferencia de diámetro  $PP'$ , esta es un circunferencia de Apolonio para los puntos  $A$  y  $B$ , y además, se sabe que  $\Omega$  será ortogonal a cualquier circunferencia que pase por dichos puntos, en particular, ortogonal a  $\Gamma$ . Si  $X$  es el punto de intersección de  $OP'$  con  $\Omega$  y  $\Gamma$  tiene centro  $O$  y radio  $r$ , calculando la potencia de punto de  $O$  con respecto a  $\Omega$  se tendrá que  $r^2 = OX \cdot OP'$ , por (26) eso significa que si  $OP'$  corta a  $\Gamma$  en  $A'$  y  $B'$  entonces  $(A', B'; X, P')$ , es decir,  $X$  pertenece al lugar geométrico. Además, como

$X$  pertenece a  $\Omega$ ,  $\angle PXP' = 90^\circ$ . Por lo tanto, todos los puntos  $P$  del lugar geométrico pasan por una recta perpendicular a  $X$ . Pero tal como se ha definido el lugar geométrico, únicamente cumplirían los puntos  $P$  al interior de la circunferencia o sobre ella, sin embargo, dada la demostración se considerará la polar  $p$  de  $P'$  como toda la recta perpendicular a  $OP'$  en  $X$ , donde  $X = I_\Gamma(P')$ .

Es de observar que si  $P'$  pertenece a  $\Gamma$ ,  $p$  será la recta tangente a  $\Gamma$  por  $P'$ , y por otra parte, si  $O$  se aleja hasta el punto al infinito,  $\Gamma$  se deforma en la mediatriz de  $XP'$ , por lo tanto, en ese caso,  $p$  será una recta paralela a  $\Gamma$ , con  $p$  y  $P$  equidistantes de  $\Gamma$ .

E inversamente, a una recta  $p$  se le puede asociar un punto  $P'$  llamado su *Polo*

**(52) Definición: Polo de una recta** Dada una recta  $p$ , el polo  $P'$  es el punto tal que  $p$  es la polar de  $P'$ .

Con respecto al problema de construir la Polar de un punto, o el Polo de una recta, básicamente pasa por el problema de construir el punto inverso del punto, o del pie de la perpendicular del centro de inversión a la recta, respectivamente, lo cual ya se estudió en (47). Es de observar que el la Polar de un punto es aquella que pasa por los puntos de tangencia de las tangentes a la circunferencia de inversión trazadas desde el punto; inclusive, tal definición cumple si el punto está al interior, pero las “tangentes” en tal caso quedan definidas analíticamente utilizando números complejos.

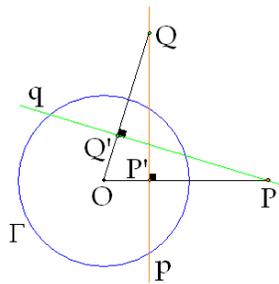
### 1.3.4. Teorema Fundamental de polos y polares.

La importancia de los Polos y Polares para nuestro interés se expresa en el corolario del siguiente teorema

**(53) Teorema: Teorema Fundamental de Polos y Polares.** Dados dos puntos  $P$  y  $Q$  de polares  $p$  y  $q$  respecto a una circunferencia  $\Gamma$ , se cumple que  $q$  pasa por  $P$  si y sólo si  $p$  pasa por  $Q$ .

*Demostración:*

Considere la siguiente figura. Sea  $\Gamma$  una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$ . Suponga que  $Q$  pertenece a  $p$ .



Por lo anterior, si  $P' = I_{\Gamma}(P)$  y  $Q' = I_{\Gamma}(Q)$ , se tiene que  $p$  es la recta por  $P'$  perpendicular a  $OP$ , y como  $OP \cdot OP' = r^2 = OQ \cdot OQ'$ , entonces el cuadrilátero  $PP'Q'Q$  es cíclico, por lo que  $\angle PP'Q = \angle PQ'Q$ , la recta  $QP$  es perpendicular a  $OQ$ , es decir, tal recta es  $q$ . La otra dirección es completamente análoga.

**(54) Corolario: Hilera de Polos y Haz de Polares.** *Las polares de una hilera de puntos  $P_1, P_2, \dots$  genera un haz de rectas  $p_1, p_2, \dots$ , sus respectivas polares, y viceversa.*

*Demostración:*

Considerando (53), si  $P_1, P_2, \dots$  pertenecen a  $q$ , entonces  $p_1, p_2, \dots$  pasan por  $Q$ , forman un haz, y esto se cumple en ambas direcciones.

Con esto, se puede hacer una biyección entre puntos alineados y rectas concurrentes, un hecho fundamental para un concepto de Dualidad mucho más útil que el desarrollado hasta el momento.

### 1.3.5. Principio de Dualidad 2.

El Principio de Dualidad completo relaciona además de lo visto en la sección 1.2.4 puntos alineados y rectas concurrentes, y puntos sobre una circunferencia con rectas tangentes a la misma. Así se tiene:

- Dos puntos determinan una recta.
- Dos rectas determinan un punto.
- Tres puntos en un plano dado, o están alineados, o determinan un triángulo.
- Tres rectas en un plano dado, o concurren, o determinan un triángulo.
- Es posible asociar biyectivamente los puntos del plano con las rectas del plano.
- A una circunferencia corresponde la misma circunferencia.<sup>27</sup>
- Es posible asociar biyectivamente las hileras<sup>28</sup> y los haces<sup>29</sup> del plano.
- A un punto sobre la circunferencia corresponde la recta tangente en ese punto a la circunferencia.
- A una recta tangente a la circunferencia corresponde el punto de tangencia sobre la circunferencia.

En resumen, se intercambian las palabras *punto* por *recta*, *hilera* por *haz*, *triángulo* por *trilátero*, *vértices* por *lados*, *rectas que se inciden en un punto* por *puntos que inciden en una*

<sup>27</sup>La circunferencia de Inversión.

<sup>28</sup>Polos.

<sup>29</sup>Polares.

*recta.* Con esto, se tiene la posibilidad de derivar ciertos resultados a partir de otros, por ejemplo, el Dual del Teorema de Desargues y el Dual del Teorema de Pappus.

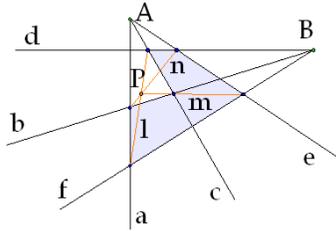
El Teorema de Desargues (18) dice que triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  forman las rectas  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  que inciden en un punto  $P$  si y sólo si los triláteros correspondientes  $abc$  y  $a'b'c'$  forman los puntos  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  que inciden en una recta  $p$ . Así, su teorema dual diría

**(55) Teorema: Teorema Dual del Teorema de Desargues.** *Los triláteros  $abc$  y  $a'b'c'$  forman los puntos  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  que inciden en una recta  $p$  si y sólo si los triángulos correspondientes  $ABC$  y  $A'B'C'$  forman rectas  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  que inciden en un punto  $P$ .*

Es decir, el Teorema de Desargues es tal que coincide con su Teorema Dual.

Por otra parte, el Teorema de Pappus (22) dice que el hexa-ángulo  $ABCDEF$  que incide alternadamente sobre dos rectas  $a$  y  $b$  forma puntos con las intersecciones de los lados opuestos  $L = AB \cap DE$ ,  $M = BC \cap EF$ ,  $N = CD \cap FA$  que inciden sobre una recta  $p$ . Y su dual

**(56) Teorema: Teorema Dual del Teorema de Pappus.** *El hexa-látero que incide alternadamente sobre dos puntos  $A$  y  $B$  forma rectas que pasan por los vértices opuestos  $l = ab \cup de$ ,  $m = bc \cup ef$ ,  $n = cd \cup fa$  que inciden sobre un punto  $P$ .*



### 1.4. Razón Doble.

Un concepto muy importante que generaliza la razón armónica es el de *Razón Doble*. Según (4),  $(A, B; C, D)$  si y sólo si  $f(C) = -f(D)$  con respecto a  $AB$ . Si en lugar de esto se considera mejor el cociente de  $f(B)/f(D)$  se genera lo que se conoce como razón doble, cuyo nombre viene justamente de hacer un cociente de cocientes.

**(57) Definición: Razón Doble.** *Dada una hilera de puntos  $A, B, C, D$ , se define la razón doble de estos cuatro puntos como*

$$\{A, B; C, D\} = \frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}$$

De nuevo, los puntos  $C$  y  $D$  son llamados *conjugados* con respecto a los puntos  $A$  y  $B$ , y por una simple manipulación algebraica se tiene que  $A$  y  $B$  son conjugados con respecto a  $C$  y  $D$ .

Es de observar que  $(A, B; C, D)$  si y sólo si  $\{A, B; C, D\} = -1$ , por lo que la razón armónica es solo un caso particular. La riqueza de la razón armónica no es que se conserve entre

transversales a haces o haces que comparten hilera, dado que como se verá enseguida, esta es una propiedad de la razón doble, sino que se encuentra en problemas de mucho interés, por ejemplo, en la Inversión, transformación fundamental que luego dio pie a transformaciones más importante, como la de Moebius, la cual está intrínsecamente conectada con la Teoría de la Relatividad y muchas otras aplicaciones.

**(58) Definición: Razón doble para haces de rectas.** Dado un haz  $a = OA$ ,  $b = OB$ ,  $c = OC$ ,  $d = OD$ , se define la razón doble para estas cuatro rectas como

$$\{a, b; c, d\} = O \{A, B; C, D\} = \frac{\text{sen}\angle AOC}{\text{sen}\angle COB} / \frac{\text{sen}\angle AOD}{\text{sen}\angle DOB}$$

Utilizando de nuevo el Teorema Generalizado de la Bisectriz (5) se cumple que  $\{A, B; C, D\} = O \{A, B; C, D\}$  siempre que  $O$  esté fuera de la recta que contiene a la hilera. Así, se ha demostrado el siguiente teorema

**(59) Teorema: Vínculo de la razón doble de hileras y haces.** Dada la hilera  $A, B, C, D$  y  $O$  un punto fuera de la recta que la contiene, entonces

$$\{A, B; C, D\} = O \{A, B; C, D\}$$

Fijada la hilera,  $O$  puede ser cualquier punto fuera de la recta que la contiene, y fijado el haz, cualquier transversal que no pase por  $O$  corta en una hilera que mantiene la razón doble.

**(60) Corolario: Haces que comparten hilera.** Dada la hilera  $A, B, C, D$ , cualquier haz que pase por esos puntos,  $OA, OB, OC, OD$  tiene la misma razón doble que la hilera.

**(61) Corolario: Transversal a un haz.** Dado el haz  $a, b, c, d$  que pasan por  $O$ , cualquier recta que no pase por  $O$  forma una transversal al haz que lo corta en la hilera  $A, B, C, D$ , que tiene la misma razón doble que el haz.

#### 1.4.1. Construcción del Cuarto Conjugado.

Cabe preguntarse si dados tres puntos de una hilera ¿será posible construir de manera única un cuarto punto tal que defina una razón doble dada?

Retomando una vez más la notación de (4), definiendo  $f$  con respecto a la recta dada  $AB$  y  $C$  un punto fijo sobre ella, al tomar un  $k$  cualquiera perteneciente a  $\mathbb{R}^*$ , si se busca construir un  $D$  tal que  $\{A, B; C, D\} = k$ , esto es equivalente a construir  $D$  sobre  $AB$  tal que  $k' = \frac{f(C)}{k} = f(D)$ , lo cual, por el mismo teorema, el punto  $D$  existe y es único, pero una vez más nos encontramos con el problema de la construcción de tal punto, llamado el *cuarto conjugado*.

Para la construcción del cuarto conjugado, es necesario considerar que se tiene ya construido un segmento de longitud  $k$  y uno de longitud 1. Con esto, mediante el Teorema de Thales, es fácil construir sobre una recta que pase por  $C$  dos puntos  $A'$  y  $B'$  tal que  $\frac{CA'}{CB'} = k$ .



Finalmente, permutando una pareja de conjugados de los anteriores se obtiene  $\{A, D; C, B\} = \{D, A; B, C\} = \{B, C; D, A\} = \{C, B; A, D\} = \frac{1}{\frac{k}{k-1}} = \frac{k}{k-1}$ .

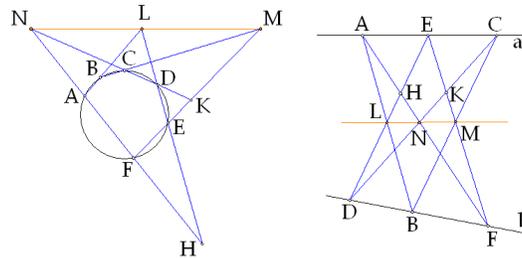
**1.4.3. Teorema de Pascal y Teorema de Pappus.**

Una manera muy elegante de probar estos teoremas es utilizando propiedades de Razón Doble. La demostración es exactamente la misma, y de hecho, se considerará que el Teorema de Pappus (22) está dado con un hexágono tal que sus vértices están ubicados alternadamente sobre una cónica degenerada en dos líneas rectas.

**(62) Teorema: Teorema de Pascal y Teorema de Pappus.** *Sea  $ABCDEF$  un hexágono inscrito en una circunferencia, o puesto alternadamente sobre dos rectas, entonces, la intersección de lados opuestos  $L = AB \cap DE$ ,  $M = BC \cap EF$ ,  $N = CD \cap FA$ , están alineados. La recta que pasa por tales puntos es llamada Recta de Pascal para el hexágono  $ABCDEF$ .*

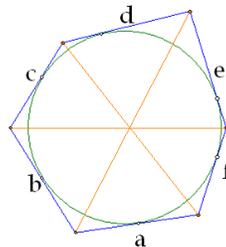
*Demostración:*

Considere la siguiente figura. Sean  $H = AF \cap ED$  y  $K = EF \cap CD$ . Así, dado que en una circunferencia, los ángulos inscritos que comparten arco son iguales, o bien por (60),  $A \{E, B; D, F\} = C \{E, B; D, F\}$ , entonces por (61)  $\{E, L; D, H\} = \{E, M; K, F\}$ . Uniendo  $N$  a estas hileras se tiene que  $N \{E, L; D, H\} = N \{E, M; K, F\}$ , y dado que se cumple las igualdades de rectas  $NE = NE$ ,  $ND = NK$ ,  $NH = NF$ , y por lo desarrollado en la sección anterior debe darse también  $NL = NM$ , por lo que  $L, M, N$  están alineados.



Dualizando el teorema anterior se obtiene:

**(63) Teorema: Teorema de Brianchon.** *Dado un hexágono  $abcdef$  tal que sus lados son tangentes a una circunferencia, se cumple que las rectas de unión de los vértices opuestos  $l = ab \cup de$ ,  $m = bc \cup ef$ ,  $n = cd \cup fa$ , concurren.*

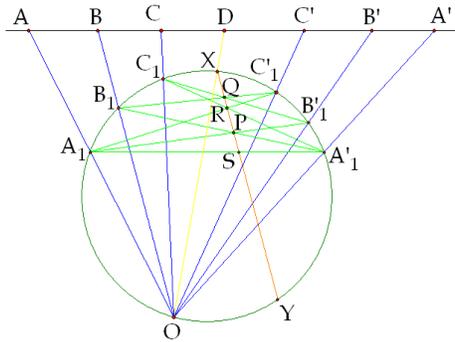


**1.4.4. Otras propiedades de la Razón Doble.**

Dados dos conjuntos de tres puntos sobre una misma recta  $A, B, C$  y  $A', B', C'$ , a cada punto  $D$  corresponde un valor de razón doble  $k = \{A, B; C, D\}$ , y por lo anterior, existe un único punto  $D'$  tal que  $\{A, B; C, D\} = \{A', B'; C', D'\}$ . En tal caso  $D$  y  $D'$  son llamados *Correspondientes*. Cabe preguntarse si existe un punto  $D$  tal que  $\{A, B; C, D\} = \{A', B'; C', D\}$ . Si tal punto existe es llamado *Punto Autocorrespondiente*, y como se verá enseguida, es posible que existan dos, uno o ninguno de éstos puntos para cada configuración de hileras.

**(64) Definición: Punto Autocorrespondiente.** Dada la hilera  $A, B, C, A', B', C'$ , el punto  $D$  es llamado *Punto Autocorrespondiente* si  $\{A, B; C, D\} = \{A', B'; C', D\}$ .

Para hacer la construcción de tales puntos se dibuja una circunferencia cualquiera con un punto  $O$  cualquiera sobre ella, al trazar las rectas desde  $O$  a la hilera, se genera un hexágono cíclico  $A_1B'_1C_1A'_1B_1C'_1$  sobre la circunferencia, con recta de Pascal (62) formada por los puntos  $P = A_1B'_1 \cap A'_1B_1$ ,  $Q = B'_1C_1 \cap B_1C'_1$ ,  $R = C_1A'_1 \cap C'_1A_1$ , tal como muestra la siguiente figura.



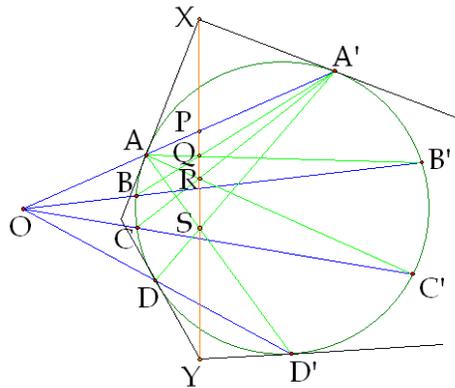
La mencionada recta de Pascal puede cortar en dos, uno o ningún punto a la circunferencia, y los puntos autocorrespondientes son los generados sobre la recta de la hilera, intersecciones de ésta con las rectas que van de  $O$  a las intersecciones de la recta de Pascal con la circunferencia. Para justificar esto, supongamos que la recta de Pascal corta a la circunferencia en  $X$  y  $Y$ , sea  $D = AB \cap OX$  y  $S = A_1A'_1 \cap XY$ . Entonces, utilizando (59) y el hecho que ángulos inscritos en una circunferencia que sostienen el mismo arco son iguales o suplementarios, se cumple que  $\{A, B; C, D\} = O \{A_1, B_1; C_1, X\} = A'_1 \{A_1, B_1; C_1, X\} = \{S, P; R, X\} = A_1 \{A'_1, B'_1; C'_1, X\} = O \{A'_1, B'_1; C'_1, X\} = \{A', B'; C', D\}$ . Análogamente se hace definiendo  $D = AB \cap OY$ .

Una propiedad muy útil con respecto a la razón doble de un haz y su “proyección” sobre una circunferencia es el hecho que la razón doble se mantiene invariante para la cuaterna de puntos que se forma con la primera intersección como para la que se forma con la segunda. Es decir

**(65) Teorema: Intersección de un haz con una circunferencia.** Dado el haz  $a, b, c, d$  y una circunferencia cualquiera. Entonces, si  $a$  corta a la circunferencia en  $A$  y  $A'$ , y análogamente se definen  $B, B', C, C', D, D'$ , se cumple que si  $S$  y  $S'$  son puntos cualquiera sobre la circunferencia  $S \{A, B; C, D\} = S' \{A', B'; C', D'\}$ .

*Demostración:*

Considere la siguiente figura. Suponga que el haz tiene como punto de incidencia  $O$ . Se demostrará que por ejemplo  $S = AD' \cap A'D$  pertenece a la polar de  $O$  con respecto a la circunferencia. Análogamente se cumplirá para  $R = AC' \cap A'C$  y  $Q = AB' \cap A'B$ . Si  $X$  y  $Y$  son los polos respectivos a  $AA'$  y  $DD'$ , se cumple que las tangentes a la circunferencia por  $A$  y  $A'$  se cortan en  $X$ , y análogamente para  $Y$ . Así, estas tangentes forman un cuadrilátero inscribible, y como corolario del Teorema de Brianchon (63), se puede probar que en tales cuadriláteros, las diagonales y los rectas que unen puntos de tangencia de lados opuestos concurren, es decir,  $XY$ ,  $AD'$ ,  $A'D$  concurren, es decir,  $S$  pertenece a  $XY$ . Ahora, por el Teorema Fundamental de Polos y Polares (53), como  $AA'$ , la polar de  $X$  pasa por  $O$  entonces la polar de  $O$  pasa por  $X$ , y análogamente la polar de  $O$  pasa por  $Y$ , es decir,  $XY$  es la polar de  $O$ .



Así,  $R$  y  $Q$  también pertenecen a  $XY$ , y si se define  $P = AA' \cap XY$  se cumplirá entonces que  $A \{A', B'; C', D'\} = \{P, Q; R, S\} = A' \{A, B; C, D\}$  y de aquí es inmediato que  $S \{A, B; C, D\} = S' \{A', B'; C', D'\}$  para cualquier par de puntos  $S$  y  $S'$  sobre la circunferencia.

## Capítulo 2

# Geometría Proyectiva desde la perspectiva Algebraica.

### 2.1. Espacios Vectoriales.

**(66) Definición: Cuerpo.** Un conjunto no vacío  $K$  de elementos  $a, b, \dots$  forma un cuerpo si entre sus elementos están definidas dos leyes de composición: la suma  $a + b$  y el producto  $ab$ , las cuales cumplen las siguientes condiciones:

- Respecto a la suma:
  - La suma forma una ley de composición  $a + b : K \times K \mapsto K$ . Cerradura.
  - $(a + b) + c = a + (b + c) \forall a, b, c \in K$ . Ley Asociativa.
  - $\exists 0 \in K$  tal que  $\forall a \in K$  se cumple  $a + 0 = 0 + a = a$ . Elemento Neutro.
  - $\forall a \in K \exists -a \in K$  tal que  $a + (-a) = 0$ . Elemento Inverso Aditivo. Con esta definición se observa además que dado  $a$ , su inverso aditivo  $-a$  es único.
  - $a + b = b + a \forall a, b \in K$ . Ley Conmutativa.
- Respecto al producto:
  - El producto forma una ley de composición  $ab : K \times K \mapsto K$ . Cerradura.
  - $a(bc) = (ab)c \forall a, b, c \in K$ . Ley Asociativa.
  - $\exists 1 \in K$  tal que  $\forall a \in K - \{0\}$  se cumple  $a1 = 1a = a$ . Elemento Unidad.
  - $\forall a \in K - \{0\} \exists a^{-1} \in K$  tal que  $aa^{-1} = 1$ . Elemento Inverso Multiplicativo. Con esta definición se observa además que dado  $a$ , su inverso aditivo  $a^{-1}$  es único.
  - $a0 = 0a = 0 \forall a \in K$
- Respecto a ambas: Leyes Distributivas.
  - $a(b + c) = ab + ac \forall a, b, c \in K$ .
  - $(a + b)c = ac + bc \forall a, b, c \in K$ .

Con esta definición se deducen todas las propiedades aritméticas, es decir, es en si una generalización de tales propiedades. Por ejemplo  $0 = a0 = a(1 + (-1)) = a1 + a(-1) = a + a(-1) \Rightarrow -a = a(-1)$  y de manera análoga  $-a = (-1)a$ . En particular, tomando  $a = \pm 1$

se deducen las leyes de los signos  $(1)(1) = (-1)(-1) = 1$  y  $(1)(-1) = (-1)(1) = -1$ . Con esto, al sumar un inverso aditivo se está definiendo una *resta* tal que  $a + (-b)$  se puede escribir simplemente  $a - b$ , entendiéndose que se está sumando por el inverso aditivo de  $b$  y ese elemento se define como el producto de  $-1$  por  $b$ .

También, las Leyes Distributivas se pueden resumir en  $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + ad + bc + bd$ , que también es aplicable para la resta, es decir, cambiando un signo  $+$  por un signo  $-$  y aplicando las Leyes de los Signos según sea el caso.

Además, si la operación producto es conmutativa, es decir,  $ab = ba \forall a, b \in K$ , entonces se dice que  $K$  es un *Cuerpo Conmutativo*, también llamado *Campo*.

**(67) Definición: Espacio Vectorial.** Dado el cuerpo  $K$ , cuyos elementos  $a, b, \dots$  se llamarán *escalares*, y un conjunto  $E$ , cuyos elementos  $U, V, \dots$  se llamarán *vectores*, se dice que  $E$  forma un *Espacio Vectorial* si se cumplen las siguientes propiedades:

- Los elementos de  $E$  cumplen las propiedades:
  - Hay definida una ley de composición suma  $U + V : E \times E \mapsto E$ . Cerradura.
  - $(U + V) + W = U + (V + W) \forall U, V, W \in E$ . Ley Asociativa.
  - $\exists \hat{0} \in E$  tal que  $\forall U \in E$  se cumple  $U + \hat{0} = \hat{0} + U = U$ . Vector Nulo.
  - $\forall U \in E \exists -U \in E$  tal que  $U + (-U) = \hat{0}$ . Vector Inverso Aditivo. También cumple unicidad.
  - $U + V = V + U \forall U, V \in E$ . Ley Conmutativa.
- Hay definida una ley de composición  $aU : K \times E \mapsto E$ .
- Se cumplen las siguientes propiedades con  $1, a, b \in K$  y  $U, V \in E$ :
  - $a(U + V) = aU + aV$
  - $(a + b)U = aU + bU$
  - $a(bU) = (ab)U$
  - $1U = U$

Es de observar que para cualquier  $U \in E$  se cumple que  $aU = (a + 0)U = (0 + a)U = aU + 0U = 0U + aU$ , es decir  $0U = \hat{0}$ .

Un ejemplo de Espacio Vectorial finito muy útil para nuestro interés el es siguiente.

**(68) Ejemplo: Espacio Vectorial Finito visto como una  $n$ -ada.** El conjunto formado por las  $n$ -adas  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$ , con las operaciones suma y producto por un escalar  $a \in K$  definidas como:

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- $a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$

Define un espacio vectorial llamado *Espacio Vectorial de las  $n$ -adas de  $K$* , que es la representación más usual de un *Espacio Vectorial de dimensión finita*.

**2.1.1. Dimensión y Base de en Espacio Vectorial.**

**(69) Definición: Vectores Linealmente Independientes.** Los vectores  $U_1, U_2, \dots, U_m$  de un espacio vectorial  $E$  se dice que son *linealmente independientes*, si no existe relación de la forma:

$$a_1U_1 + a_2U_2 + \dots + a_mU_m = \hat{0}$$

Siendo  $a_1, a_2, \dots, a_m \in K$  no todos nulos. En caso contrario, se dice que los vectores son *linealmente dependientes*.

**(70) Definición: Dimensión de un Espacio Vectorial.** Se llama *dimensión* de un espacio vectorial al número máximo de vectores linealmente independientes.

Dado el espacio vectorial  $E$  de dimensión  $n$ , tomando un conjunto máximo de vectores linealmente independientes  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , si se toma un vector adicional  $U$ , se cumplirá que  $U, U_1, U_2, \dots, U_n$  son linealmente dependientes, es decir, existen  $a, a_1, a_2, \dots, a_n \in K$  no todos nulos<sup>1</sup> tal que  $aU + a_1U_1 + a_2U_2 + \dots + a_nU_n = \hat{0}$ . Tomando  $u_i = -a^{-1}a_i$  se observa que

$$U = u_1U_1 + u_2U_2 + \dots + u_nU_n$$

Es decir, cualquier vector  $U$  de un espacio vectorial  $E$  de dimensión  $n$  se puede expresar como una *combinación lineal* de un conjunto de  $n$  vectores linealmente independientes de  $E$ . También es importante observar que tomando la  $n$ -ada  $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in K^n$  se obtiene una representación alternativa de  $E$  descrita en el ejemplo (68).

**(71) Definición: Base de un Espacio Vectorial.** Se llama *base* de un espacio vectorial a un conjunto máximo de vectores linealmente independientes.

En particular, si  $E$  es de dimensión finita  $n$ , cualquier conjunto  $B$  de  $n$  vectores linealmente independientes forman una base, y eso quiere decir que todo vector  $U$  de  $E$  se puede expresar como una combinación lineal de  $B$ , o de manera alternativa, como una  $n$ -ada en  $K^n$ .

**2.1.2. Cambio de Base.**

En esta sección consideramos a un espacio vectorial  $E$  de dimensión finita  $n$ . La definición de Base sólo exige tener un conjunto  $B$  de  $n$  vectores linealmente independientes, pero por lo general, tal conjunto no es único, y por lo tanto es menester saber las reglas de correspondencia para cambiar la representación de un vector dado  $U$  con respecto a dos o más bases. Por simplicidad en la escritura se utilizará notación de matrices, así, por ejemplo, dos bases  $B$  y  $B'$  serán representados por las matrices columna  $(U_i)_{n \times 1}$  y  $(U'_i)_{n \times 1}$ , mientras que las *componentes* de un vector dado  $U$  en  $E$  se representarán por matrices fila  $(u_i)_{1 \times n}$  y  $(u'_i)_{1 \times n}$ , respectivamente.

Así, por la definición de base,  $U$  es una combinación lineal de  $B$  y una combinación lineal de  $B'$ , y expresando estas relaciones matricialmente queda el producto de las matrices definidas anteriormente, es decir

---

<sup>1</sup>Y de manera muy importante  $a \neq 0$ , porque en caso contrario  $U_1, U_2, \dots, U_n$  serían linealmente dependientes.

$$U = (u_i)_{1 \times n} (U_i)_{n \times 1} = u_1 U_1 + u_2 U_2 + \dots + u_n U_n$$

$$U = (u'_i)_{1 \times n} (U'_i)_{n \times 1} = u'_1 U'_1 + u'_2 U'_2 + \dots + u'_n U'_n$$

Entonces, si se quiere saber cuál es la matriz  $(u'_i)_{1 \times n}$  en función de la matriz  $(u_i)_{1 \times n}$ , es decir, hacer un cambio de coordenadas de  $u_i$  a  $u'_i$ , hay que poner todos los vectores de B como combinación lineal de los vectores de B'.<sup>2</sup> Si llamamos  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  a la matriz de coeficientes de tales combinaciones lineales, se tendrá que

$$(U_i)_{n \times 1} = (a_{ij})_{n \times n} (U'_i)_{n \times 1}$$

Por lo tanto

$$U = (u_i)_{1 \times n} (U_i)_{n \times 1} = (u_i)_{1 \times n} (a_{ij})_{n \times n} (U'_i)_{n \times 1} = (u'_i)_{1 \times n} (U'_i)_{n \times 1}$$

$$\Rightarrow (u_i)_{1 \times n} (a_{ij})_{n \times n} = (u'_i)_{1 \times n}$$

Con esto se ha demostrado el siguiente teorema

**(72) Teorema: Cambio de Base.** En un espacio vectorial  $E$  de dimensión  $n$  se tienen dos bases  $B = (U_i)_{n \times 1}$  y  $B' = (U'_i)_{n \times 1}$  y un vector  $U$  en  $E$  de matrices componentes  $(u_i)_{1 \times n}$  y  $(u'_i)_{1 \times n}$ , respectivamente, entonces el cambio de coordenadas viene dado por la relación

$$(u_i)_{1 \times n} (a_{ij})_{n \times n} = (u'_i)_{1 \times n}$$

Donde  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  es la matriz tal que  $B = AB'$ .

### 2.1.3. Subespacios, Suma e Intersección de Subespacios.

**(73) Definición: Subespacio Vectorial.** Dado un espacio vectorial  $E$ ,<sup>3</sup> un subconjunto  $E' \subseteq E$  es un subespacio vectorial de  $E$  si hereda todas las operaciones y sus propiedades definidas en  $E$  por (67).

Es decir,  $E'$  es un espacio vectorial. Es muy importante además conocer la representación de un subespacio, en función de una base propia y en función de una base de  $E$ , llamadas representación *paramétrica* y representación *cartesiana*, respectivamente.

Sean  $n$  y  $n'$  las dimensiones de  $E$  y  $E'$ . Si se consideran  $B = (U_i)_{n \times 1}$  y  $B' = (U'_i)_{n' \times 1}$  bases de  $E$  y  $E'$  respectivamente, dado que  $E' \subseteq E$  entonces  $n' \leq n$ , y como  $B$  es base de  $E$  y  $B'$  es subconjunto de  $E$ , es posible escribir los elementos de  $B'$  como combinación lineal de los elementos de  $B$ . También, todos los elementos de  $E'$  pueden ser representados como combinación lineal de los elementos de  $B'$ . Es decir, si  $U \in E' \subseteq E$  se tendrá

<sup>2</sup>Lo cual es posible, dado que  $B$  es base y  $B'$  es subconjunto de  $E$ .

<sup>3</sup>De dimensión finita o infinita.

$$\begin{aligned} (U'_i)_{n' \times 1} &= (a_{ij})_{n' \times n} (U_i)_{n \times 1} \\ U &= (u'_i)_{1 \times n'} (U'_i)_{n' \times 1} \quad \forall (u'_i)_{1 \times n'} \in K^{n'} \quad \text{Forma Paramétrica.} \\ \Rightarrow U &= (u'_i)_{1 \times n'} (a_{ij})_{n' \times n} (U_i)_{n \times 1} = (u_i)_{1 \times n} (U_i)_{n \times 1} \\ &\Rightarrow (u'_i)_{1 \times n'} (a_{ij})_{n' \times n} = (u_i)_{1 \times n} \end{aligned}$$

La matriz  $A = (a_{ij})_{n' \times n}$  es fija, dado que  $B$  y  $B'$  son bases dadas y se cumple que  $B' = AB$ . Por otra parte  $(u'_i)_{1 \times n'}$  varía sobre  $K^{n'}$  para formar todo el subespacio  $E'$ , es decir, toma el papel de *parámetro*, mientras que  $(u_i)_{1 \times n}$  varía sobre  $K^n$ , pero forman el subespacio  $E'$  *sólo aquellas* que cumplen la última condición, que es un sistema de  $n$  ecuaciones,  $n$  incógnitas  $u_i$  y  $n'$  parámetros  $u'_i$ . Dado que  $n' \leq n$ , es posible eliminar los parámetros  $u'_i$  para dejar un sistema de  $n - n'$  ecuaciones homogéneas<sup>4</sup> únicamente en función de las incógnitas  $u_i$ , el cual tiene la forma

$$(u_i)_{1 \times n} (\lambda_{ij})_{n \times (n-n')} = \hat{0}_{1 \times (n-n')} \quad \text{Forma Cartesiana.}$$

Todo lo anterior se resume en el siguiente teorema

**(74) Teorema: Representación Paramétrica y Cartesiana de un Subespacio Vectorial.** Dado un espacio vectorial  $E$  y un subespacio  $E'$  de bases respectivas  $B = (U_i)_{n \times 1}$  y  $B' = (U'_i)_{n' \times 1}$ , los vectores  $U$  de  $E'$  son aquellos que tengan cualquiera de las siguientes formas:

- Forma Paramétrica:  $U = (u'_i)_{1 \times n'} (U'_i)_{n' \times 1} \quad \forall (u'_i)_{1 \times n'} \in K^{n'}$ .
- Forma Cartesiana:  $U = (u_i)_{1 \times n} (U_i)_{n \times 1}$  tal que la  $n$ -ada variable  $(u_i)_{1 \times n} \in K^n$  satisface la relación matricial<sup>5</sup>  $(u_i)_{1 \times n} (\lambda_{ij})_{n \times (n-n')} = \hat{0}_{1 \times (n-n')}$

Unos subespacios muy importantes de un espacio vectorial de dimensión  $n$  son los de dimensión 1 y los de dimensión  $n - 1$ , llamados *recta homogénea* e *hiperplano homogéneo*, respectivamente.

**(75) Corolario: Recta Homogénea.** Si  $n' = 1$ ,  $E'$  es una recta homogénea de  $E$  y está formado por los vectores  $U$  de la forma:

- Forma Paramétrica:  $U = (u'_i)_{1 \times 1} (U'_i)_{1 \times 1} \quad \forall (u'_i)_{1 \times 1} \in K^1$ . Es decir  $U = u'_1 U'_1$ .
- Forma Cartesiana:  $U = (u_i)_{1 \times n} (U_i)_{n \times 1}$  tal que la  $n$ -ada variable  $(u_i)_{1 \times n} \in K^n$  satisface la relación matricial<sup>6</sup>  $(u_i)_{1 \times n} (\lambda_{ij})_{n \times (n-1)} = \hat{0}_{1 \times (n-1)}$ .

---

<sup>4</sup>El proceso puede hacerse de manera rudimentaria, despejando primero  $u'_1$  y sustituyendo en las  $n - 1$  ecuaciones restantes, luego despejando  $u'_2$  y sustituyendo en las  $n - 2$  ecuaciones restantes, ..., despejando  $u'_n$ , y sustituyendo en las  $n - n'$  ecuaciones restantes.

<sup>5</sup>Un sistema de  $n - n'$  ecuaciones homogéneas.

<sup>6</sup>Un sistema de  $n - 1$  ecuaciones homogéneas.

**(76) Corolario: Hiperplano Homogéneo.** Si  $n' = n - 1$ ,  $E'$  es un hiperplano homogéneo de  $E$  y está formado por los vectores  $U$  de la forma:

- Forma Paramétrica:  $U = (u'_i)_{1 \times (n-1)} (U'_i)_{(n-1) \times 1} \forall (u'_i)_{1 \times (n-1)} \in K^{n-1}$ .
- Forma Cartesiana:  $U = (u_i)_{1 \times n} (U_i)_{n \times 1}$  tal que la  $n$ -ada variable  $(u_i)_{1 \times n} \in K^n$  satisface la relación matricial<sup>7</sup>  $(u_i)_{1 \times n} (\lambda_{ij})_{n \times 1} = \hat{0}_{1 \times 1}$ . Es decir  $u_1 \lambda_{11} + u_2 \lambda_{21} + \dots + u_n \lambda_{n1} = 0$ .

**(77) Definición: Suma e Intersección de Subespacios Vectoriales.** Sean  $E_1$  y  $E_2$  dos subespacios de un espacio vectorial  $E$ , se define el *Espacio Vectorial Suma*  $E_1 + E_2$ , formado por todos los vectores  $U$  de la forma  $U_1 + U_2$ , con  $U_1 \in E_1$  y  $U_2 \in E_2$ , y el *Espacio Vectorial Producto*  $E_1 \cdot E_2$ , formado por todos los vectores que pertenecen a  $E_1$  y  $E_2$ .

El Espacio Suma es el formado por todas las combinaciones lineales de los vectores de  $E_1$  y  $E_2$ , mientras que el Espacio Producto es el formado por los vectores que pertenecen a ambos, es decir, pertenecen a la intersección, razón por la cual también es llamado *Espacio Intersección*. Se verifica rápidamente que en efecto tales espacios cumplen todas las propiedades de Espacio Vectorial (67). Si se definen  $n$  y  $m$  como las dimensiones de  $E_1 + E_2$  y  $E_1 \cdot E_2$  respectivamente, y suponiendo que las dimensiones de  $E_1$  y  $E_2$  son  $n_1$  y  $n_2$ , se cumple la relación  $n + m = n_1 + n_2$ . Es decir

**(78) Teorema:** *Dados dos subespacios  $E_1$  y  $E_2$  de un espacio vectorial  $E$ , se cumple que*

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cdot E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$$

*Demostración:*

Como antes de definió, sean  $n_1, n_2, n, m$  las dimensiones de  $E_1, E_2, E_1 + E_2, E_1 \cdot E_2$ . si  $\{W_1, W_2, \dots, W_m\}$  es una base de  $E_1 \cdot E_2$ ,  $\{W_1, W_2, \dots, W_m, U_1, U_2, \dots, U_{n_1-m}\}$  es una base de  $E_1$  y  $\{W_1, W_2, \dots, W_m, V_1, V_2, \dots, V_{n_2-m}\}$  es una base de  $E_2$  entonces  $\{U_1, U_2, \dots, U_{n_1-m}, W_1, W_2, \dots, W_m, V_1, V_2, \dots, V_{n_2-m}\}$  es una base de  $E_1 + E_2$ , cuya cardinalidad es  $n = n_1 - m + m + n_2 - m$ , de donde se sigue el resultado. La independencia lineal de este último conjunto de vectores se debe a que por hipótesis, los  $W_i$  son linealmente independiente tanto con los  $U_i$  como con los  $V_i$ , y éstos son linealmente independiente entre si dado que en caso contrario, algún  $U_i$  pertenecería a  $E_2$  o algún  $V_i$  pertenecería a  $E_1$ , es decir, pertenecería a  $E_1 \cdot E_2$ , siendo linealmente dependiente los  $W_i$ , lo cual es contradictorio.

#### 2.1.4. Dualidad.

**(79) Definición: Aplicación Lineal.** Dado el espacio vectorial  $E$  sobre el cuerpo  $K$ , la aplicación<sup>8</sup>  $\varphi : E \mapsto K$  se llama *lineal* si cumple

$$(aU + bV) \varphi = aU\varphi + bV\varphi$$

Para todo  $a, b \in K$  y para todo  $U, V \in E$ .

<sup>7</sup>Un sistema de  $n - (n - 1) = 1$  ecuaciones homogéneas.

<sup>8</sup>Por conveniencia, se definirá a la derecha.

Si se considera  $E$  de dimensión  $n$ , siendo  $B = (U_i)_{n \times 1}$  una base, todo  $U \in E$  puede escribirse como combinación lineal de los elementos de la base, y si suponemos definida una aplicación lineal  $\varphi$  entonces

$$U\varphi = (u_i)_{1 \times n}(U_i)_{n \times 1}\varphi = (u_i)_{1 \times n}(U_i\varphi)_{n \times 1} = (u_i)_{1 \times n}(e_i)_{n \times 1}$$

Con  $U_i\varphi = e_i \in K$ .

Además, si al considerar el conjunto de todas las aplicaciones lineales de  $E$  en  $K$ , se definen entre éstas una operación *Suma*  $\varphi + \psi$  y una operación *Producto por Escalar*  $\varphi a$  (que hacen corresponder al vector  $U \in E$  el escalar  $U\varphi + U\psi \in K$  y el escalar  $(U\varphi)a$ , respectivamente), se tiene que dicho conjunto forma un Espacio Vectorial. Este espacio es llamado *Espacio Dual* de  $E$  y se denota por  $E^*$ .

**(80) Definición: Espacio Dual.** Dado el espacio vectorial  $E$  sobre un cuerpo  $K$ , al conjunto de todas las aplicaciones lineales  $\varphi : E \mapsto K$  con las operaciones siguientes definidas:

- $U(\varphi + \psi) = U\varphi + U\psi$
- $U(\varphi a) = (U\varphi)a$

Forma un Espacio Vectorial  $E^*$  llamado *Espacio Dual* de  $E$ .

En efecto, tal espacio forma un espacio vectorial, dado que la operación Suma forma un grupo abeliano,<sup>9</sup> dado que hereda las propiedades de  $K$ , y la operación Producto por Escalar también satisface las condiciones debido a las propiedades de  $K$ .

Si suponemos que  $B = (U_i)_{n \times 1}$  es base de  $E$ , si se definen las aplicaciones lineales  $\varphi_j$  tal que  $U_i\varphi_j = \delta_{ij}$ ,<sup>10</sup> haciendo el mismo desarrollo que antes  $U\varphi_j = (u_i)_{1 \times n}(U_i)_{n \times 1}\varphi_j = (u_i)_{1 \times n}(\delta_{ij})_{n \times 1} = u_j$  dado que  $U_i\varphi_j = \delta_{ij}$ , es decir que  $U\varphi = (u_i)_{1 \times n}(e_i)_{n \times 1} = (U\varphi_i)_{1 \times n}(e_i)_{n \times 1} = U(\varphi_i)_{1 \times n}(e_i)_{n \times 1}$  entonces

$$\varphi = (\varphi_i)_{1 \times n}(e_i)_{n \times 1}$$

Con  $(e_i)_{n \times 1} \in K^n$ . Es decir,  $B^* = (\varphi_i)_{1 \times n}$  es una base de  $E^*$ . Falta verificar únicamente que este conjunto es linealmente independiente, y esto se debe a que si existe una relación del tipo  $(\varphi_i)_{1 \times n}(a_i)_{n \times 1} = 0$  con  $a_i \in K$ , entonces, al aplicar esto a la base  $B$  se tendría que  $U_i(\varphi_i)_{1 \times n}(a_i)_{n \times 1} = a_i = 0$  para todo  $i$ , por lo tanto  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , es decir, son linealmente independiente. Con esto se tiene

**(81) Teorema: Dimensión del Espacio Dual.** Dado un espacio vectorial  $E$  de dimensión finita y su dual  $E^*$ , se cumple que  $E$  y  $E^*$  tienen la misma dimensión. Más aún, si  $B = (U_i)_{n \times 1}$  es base de  $E$ , escogiendo  $\varphi_j$  en  $E^*$  tal que  $U_i\varphi_j = \delta_{ij}$  se cumple que  $B^* = (\varphi_i)_{1 \times n}$  es base de  $E^*$ .

Ahora, iterando este proceso, suponga  $E^{**}$  el conjunto de todas las aplicaciones lineales<sup>11</sup>  $U : E^* \mapsto K$ , es decir, por (79) se cumple que  $U(\varphi a + \psi b) = U\varphi a + U\psi b$ , y definiendo la operación Suma y Producto por Escalar como  $(U + V)\varphi = U\varphi + V\varphi$  y  $(aU)\varphi = a(U\varphi)$ ,

<sup>9</sup>Únicamente falta definir la función lineal nula, que es la aplicación lineal constante  $\varphi_0 \in K^* : E \mapsto \{0\}$ .

<sup>10</sup>Delta de Kronecker.

<sup>11</sup>Por conveniencia, a la izquierda.

respectivamente, por (80)  $E^{**}$  es un Espacio Vectorial, y por (81), si  $E^*$  es de dimensión finita, entonces  $E^{**}$  tiene la misma dimensión.

Si además suponemos que  $B^* = (\varphi_i)_{1 \times n}$  es base de  $E^*$  y que para todo  $U \in E^{**}$  se define  $U\varphi_i = u_i \in K$ , se tiene que  $U\varphi = (U\varphi_i)_{1 \times n} (e_i)_{n \times 1} = (u_i)_{1 \times n} (e_i)_{n \times 1}$ . Así, definiendo  $U_i \in K^{**}$  tal que  $U_i\varphi_j = \delta_{ij}$  se tendrá que  $U_i\varphi = U_i(\varphi_i)_{1 \times n} (e_i)_{n \times 1} = e_i$  y por lo tanto  $U\varphi = (u_i)_{1 \times n} (e_i)_{n \times 1} = (u_i)_{1 \times n} (U_i\varphi)_{n \times 1} = (u_i)_{1 \times n} (U_i)_{n \times 1} \varphi$ , es decir

$$U = (u_i)_{1 \times n} (U_i)_{n \times 1}$$

Con esto se ha probado el siguiente teorema

**(82) Teorema: Dual del Dual.** Si  $E$  es un espacio vectorial de dimensión finita, es isomorfo al espacio dual del dual  $E^{**}$ . Más aún, si  $B^* = (\varphi_i)_{1 \times n}$  y  $B^{**} = (U_i)_{n \times 1}$  son bases de  $E^*$  y  $E^{**}$  se cumplirá que

- $\forall U \in E \exists (u_i)_{1 \times n} \in K^n$  tal que  $U = (u_i)_{1 \times n} (U_i)_{n \times 1}$
- $\forall \varphi \in E^* \exists (e_i)_{n \times 1} \in K^n$  tal que  $\varphi = (\varphi_i)_{1 \times n} (e_i)_{n \times 1}$

Si además se pide que  $U_i\varphi_j = \delta_{ij}$ , se cumplirá entonces que  $E = E^{**}$  y son válidas las relaciones

- $u_j = U\varphi_j$
- $e_i = U_i\varphi$

Por lo tanto<sup>12</sup>

$$U\varphi = (u_i)_{1 \times n} (e_i)_{n \times 1}$$

Utilizando esta nueva noción de Dualidad en Espacios Vectoriales, es posible hacer una correspondencia entre *Estructuras Duales*. Explícitamente, las estructuras duales se definen así

**(83) Definición: Estructuras Duales.** Dado un espacio vectorial  $E$  y su dual  $E^*$ , a un subconjunto  $A \subseteq E$  le corresponde un subconjunto  $A^* \subseteq E^*$  tal que  $U\varphi = 0$  para todo  $U \in A$  y para todo  $\varphi \in A^*$ .

Un caso de mucho interés es la correspondencia entre rectas homogéneas e hiperplanos homogéneos de un espacio vectorial de dimensión finita. Considere un espacio vectorial  $E$  de dimensión  $n$  y su dual  $E^*$  también de dimensión  $n$  (81), de bases  $(U_i)_{n \times 1}$  y  $(\varphi_i)_{1 \times n}$  con la condición  $U_i\varphi_j = \delta_{ij}$ , por (82) se tendrá que  $U\varphi = (u_i)_{1 \times n} (e_i)_{n \times 1}$  tal que  $U = (u_i)_{1 \times n} (U_i)_{n \times 1}$  y  $\varphi = (\varphi_i)_{1 \times n} (e_i)_{n \times 1}$ . Considere ahora todas las soluciones de la ecuación  $U\varphi = 0$ , se tendrá entonces

$$U\varphi = (u_i)_{1 \times n} (e_i)_{n \times 1} = 0$$

Observe que tanto las  $u_i$  como las  $e_i$  pertenecen a  $K$ . La expresión anterior es una ecuación lineal homogénea, si se deja  $U$  fijo y se determina todos los  $\varphi$  que satisfacen la ecuación, se tendrá entonces una ecuación con  $n$  incógnitas  $e_i$ , y por (76), tal expresión representa un

<sup>12</sup>Note que en tal caso  $(U_i)_{n \times 1} (\varphi_i)_{1 \times n} = I_{n \times n}$ , la matriz identidad.

hiperplano homogéneo en  $E^*$ , que se puede denotar por  $H^*_U$ . Además, si en lugar de  $U$  se coloca  $aU$  para cualquier  $a \in K$  se tendrá entonces  $(aU)\varphi = a(U\varphi) = a0 = 0$ , es decir, el conjunto solución  $H^*_U$  cumple para cualquier elemento del conjunto  $aU$ , que por (75), es una recta homogénea en  $E$ , y la denotaremos como  $R_U$ . De aquí que fijado un  $U \in E$  es posible hacer una correspondencia entre una recta homogénea  $R_U \subseteq E$  y un hiperplano homogéneo  $H^*_U \subseteq E^*$  tal que  $U\varphi = 0 \forall U \in R_U$  y  $\forall \varphi \in H^*_U$ . Análogamente, dejando  $\varphi$  fijo, se hace una correspondencia entre un hiperplano homogéneo  $H_\varphi \subseteq E$  y una recta homogénea  $R^*_\varphi \subseteq E^*$ . Además, tal correspondencia es biyectiva, dado que una recta homogénea se distingue de otra si los vectores que las generan son linealmente independientes, y un hiperplano se distingue de otro si los valores constantes son componentes de dos vectores linealmente independiente.

Más importante aún, si  $S$  es un subespacio de  $E$  de dimensión  $r$ , y si  $(U_i)_{r \times 1}$  es una base de  $S$ , dada la forma paramétrica de (74) y la definición (77) se tiene que  $S = R_{U_1} + R_{U_2} + \dots + R_{U_r}$ , es decir  $U = (u_i)_{1 \times r} (U_i)_{r \times 1}$ ,  $\forall (u_i)_{1 \times r} \in K^r$ , mientras que su estructura dual  $S^*$  será el conjunto de aplicaciones lineales  $\varphi$  que satisfacen la relación  $U\varphi = 0$ . Desarrollando  $U$  como combinación lineal de la base de  $S$  y dada la linealidad de  $\varphi$  se tiene  $(u_i)_{1 \times r} (U_i\varphi)_{r \times 1} = 0$  y dado que las  $u_i$  recorren todos los valores de  $K$ , en particular  $\varphi$  debe satisfacer para  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = u_3 = \dots = u_r = 0$ , es decir,  $U_1\varphi = 0$ . Esta expresión, como  $U_1$  es fijo, si asumimos que toma la forma de ecuación final de (82) y dada la forma cartesiana de (75) representa un hiperplano  $H_{U_1} \subseteq E^*$  y  $\varphi \in H_{U_1}$ . De manera análoga  $\varphi$  debe satisfacer  $U_2\varphi = 0$ , es decir  $\varphi \in H_{U_2}$ , y así sucesivamente, por lo que  $\varphi$  pertenece a la intersección de tales hiperplanos  $H_{U_i}$ . Así, por (77)  $S^* = H_{U_1} \cdot H_{U_2} \cdot \dots \cdot H_{U_r}$ , que por la forma cartesiana de (74) representa un subespacio de dimensión  $n - r$  en  $E^*$ . Partiendo de la representación cartesiana de  $S$  se llega a la representación paramétrica de  $S^*$  y el resultado es el mismo.

Haciendo el mismo trabajo, si  $S_1$  y  $S_2$  son subespacios de  $E^{13}$  mientras que  $S_1^*$  y  $S_2^*$  son sus respectivas estructuras duales en  $E^*$  se cumple que  $S_1 + S_2 = S_1^* \cdot S_2^*$  y  $S_1 \cdot S_2 = S_1^* + S_2^*$ .

Con esto, se ha demostrado el siguiente teorema

**(84) Teorema: Suma e intersección de subespacios en un espacio vectorial y en su dual.** Dado un espacio vectorial  $E$  de dimensión finita y su dual  $E^*$ , si  $S_1$  y  $S_2$  son subespacios de  $E$ ,  $S_1^*$  y  $S_2^*$  las estructuras duales respectivas y subespacios de  $E^*$ , entonces

- $(S_1 + S_2)^* = S_1^* \cdot S_2^*$
- $(S_1 \cdot S_2)^* = S_1^* + S_2^*$

Este resultado es posible extenderlo a cualquier número finito de subespacios  $S_i$ , iterando el mismo razonamiento, es decir  $(\sum_{i=1}^n S_i)^* = \prod_{i=1}^n S_i^*$  y  $(\prod_{i=1}^n S_i)^* = \sum_{i=1}^n S_i^*$ . Y en particular, interesa este caso cuando los  $S_i$  son rectas homogéneas, o bien cuando son hiperplanos homogéneos.

---

<sup>13</sup>Pueden intersectarse o no, si sus bases tienen entre si vectores linealmente dependientes no afecta el resultado.

**2.1.5. Aplicaciones Lineales y Semilineales entre Espacios Vectoriales.**

**(85) Definición: Aplicación Lineal.** Dados dos espacios vectoriales  $E$  y  $E'$  sobre un cuerpo  $K$ , la aplicación  $\phi : E \mapsto E'$  define una aplicación lineal si

$$\phi(aU + bV) = a\phi(U) + b\phi(V)$$

Para todo  $U, V \in E$  y para todo  $a, b \in K$ .

Ahora bien, esta definición se puede generalizar, suponiendo que  $E$  y  $E'$  son espacios vectoriales sobre cuerpos distintos, digamos  $K$  y  $K'$  respectivamente. Si además, suponemos que  $K$  y  $K'$  son isomorfos, puede entonces definirse una *Aplicación Semilineal* como sigue

**(86) Definición: Aplicación Semilineal.** Dados dos espacios vectoriales  $E$  y  $E'$  sobre los cuerpos  $K$  y  $K'$  respectivamente, tal que existe un isomorfismo  $\tau : K \mapsto K'$ ,<sup>14</sup> la aplicación  $\phi : E \mapsto E'$  define una aplicación semilineal si

$$\phi(aU + bV) = a^\tau \phi(U) + b^\tau \phi(V)$$

Para todo  $U, V \in E$  y para todo  $a, b \in K$ .

Es decir, (85) es el caso particular de (86) cuando  $K = K'$  y  $\tau = \iota$ , el isomorfismo identidad:  $a^\iota = a \forall a \in K$ . Si se particulariza aún más, si consideramos la aplicación lineal de un espacio vectorial en si mismo,<sup>15</sup> y  $\tau = \iota$ , se tiene una *Transformación Lineal* que se define así

**(87) Definición: Transformación Lineal.** Dado el espacio vectorial  $E$  sobre un cuerpo  $K$ , la aplicación  $\phi : E \mapsto E$  define una transformación lineal si

$$\phi(aU + bV) = a\phi(U) + b\phi(V)$$

Para todo  $U, V \in E$  y para todo  $a, b \in K$ .

Una propiedad muy importante es que la composición de aplicaciones semilineales es otra aplicación semilineal. Por simplicidad, se denotará un Espacio Vectorial  $E$  sobre un cuerpo  $K$  así  $E(K)$ , mientras que una aplicación semilineal  $\phi : E(K) \mapsto F(Q)$  con isomorfismo entre los cuerpos  $\tau : K \mapsto Q$  se denotará por  $\phi(\tau)$ .

**(88) Teorema: Composición de Aplicaciones Semilineales.** Dadas las aplicaciones semilineales  $\phi(\tau) : E(K) \mapsto F(L)$  y  $\xi(\nu) : F(L) \mapsto G(M)$ , entonces la aplicación  $\xi \circ \phi(\nu \circ \tau) : E(K) \mapsto G(M)$  es una aplicación semilineal.

*Demostración:*

En primer lugar, dados los isomorfismos  $\tau : K \mapsto L$  y  $\nu : L \mapsto M$ , la composición  $\nu \circ \tau : K \mapsto M$  es también un isomorfismo, dado que  $\nu \circ \tau$  es biyectiva, al ser  $\nu$  y  $\tau$  biyectivas, para todo  $a, b \in K$  se cumple  $(a + b)^{\tau\nu} = (a^\tau + b^\tau)^\nu = a^{\tau\nu} + b^{\tau\nu}$  y  $(ab)^{\tau\nu} = (a^\tau b^\tau)^\nu = a^{\tau\nu} b^{\tau\nu}$ . Por otra parte si  $U, V \in E$  y  $a, b \in K$ , como  $\phi$  y  $\xi$  satisfacen (86) se cumple

<sup>14</sup> $\tau$  es una aplicación biyectiva tal que  $(a + b)^\tau = a^\tau + b^\tau$  y  $(ab)^\tau = a^\tau b^\tau$  para todo  $a, b \in K$ .

<sup>15</sup>Tomando  $E = E'$  y por tanto  $K = K'$ .

$$\xi \circ \phi(aU + bV) = \xi(a^\tau \phi(U) + b^\tau \phi(V)) = a^{\tau\nu} \xi \circ \phi(U) + b^{\tau\nu} \xi \circ \phi(V).$$

Para futuras aplicaciones, es importante la asociación que se hace de las Aplicaciones Semilineales con matrices, sin embargo es de mencionar que tal asociación es válida únicamente para espacios vectoriales finitos.

Considere una aplicación semilineal  $\phi(\tau) : E_m(K) \mapsto E'_n(K')$ ,<sup>16</sup> sean  $B = (U_i)_{m \times 1}$ ,  $B' = (U'_i)_{n \times 1}$  bases de los espacios, por (71), si  $U \in E$  se tiene  $U = (u_i)_{1 \times m} (U_i)_{m \times 1} = uB$  y  $\phi(U) = (u'_i)_{1 \times n} (U'_i)_{n \times 1} = u'B'$ , con  $u \in K^m$  y  $u' \in K'^n$ . Además, como  $\phi$  es semilineal  $\phi(U) = (u_i^\tau)_{1 \times m} (\phi U_i)_{m \times 1}$ . Sea  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  con  $a_{ij} \in K'$  tal que  $(\phi U_i)_{m \times 1} = (a_{ij})_{m \times n} (U'_i)_{n \times 1}$ , entonces

$$\phi(U) = (u_i^\tau)_{1 \times m} (a_{ij})_{m \times n} (U'_i)_{n \times 1} = (u'_i)_{1 \times n} (U'_i)_{n \times 1}$$

Es decir  $(u_i^\tau)_{1 \times m} (a_{ij})_{m \times n} = (u'_i)_{1 \times n}$  o equivalentemente  $u' = u^\tau A$ .

Es decir que a la aplicación semilineal  $\phi$  puede asociarse una matriz  $A$  que representa el cambio de coordenadas de  $E$  a  $E'$ . Observe que el cambio de base (72) es un caso particular de lo desarrollado anteriormente, tomando  $E = E'$ , es decir, el cambio de coordenadas al hacer un cambio de base es una transformación lineal. Todo esto se engloba en el siguiente teorema

**(89) Teorema: Aplicación Semilineal vista como matriz.** *Dados los espacios vectoriales  $E_m(K)$  y  $E'_n(K')$  de bases respectivas  $B = (U_i)_{m \times 1}$  y  $B' = (U'_i)_{n \times 1}$ , y la aplicación semilineal  $\phi(\tau) : E_m(K) \mapsto E'_n(K')$ , como  $U = uB$  y  $\phi(U) = u'B'$  para todo  $U \in E$ , entonces  $\phi(\tau)$  puede ser representada por una matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $a_{ij} \in K'$  tal que  $\phi B = AB'$  y además la relación de cambio de coordenadas es*

$$u' = u^\tau A$$

La ventaja del uso de matrices en las aplicaciones semilineales es que compactan la notación enormemente, cuando existen definidos sistemas coordenados en los espacios vectoriales, pero más importante, que una matriz dada puede ser interpretada como una aplicación semilineal.

Por otra parte, si se hace la composición de dos aplicaciones semilineales, por (88), resulta otra aplicación semilineal; por medio de matrices resulta que la matriz correspondiente a la composición de aplicaciones es el producto de sus matrices asociadas, aplicando el isomorfismo apropiado sobre sus elementos.

**(90) Teorema: Composición de Aplicaciones Semilineales por medio de su representación matricial.** *Si  $E_m(K)$ ,  $E'_n(K')$ ,  $E''_r(K'')$  son espacios vectoriales de bases  $B$ ,  $B'$ ,  $B''$  respectivamente, y se definen las aplicaciones semilineales  $\phi(\tau) : E_m(K) \mapsto E'_n(K')$  y  $\xi(\nu) : E'_n(K') \mapsto E''_r(K'')$ , de matrices asociadas  $A$  y  $A'$ , entonces la matriz asociada a  $\xi \circ \phi(\nu \circ \tau) : E_m(K) \mapsto E''_r(K'')$  es  $A^\nu A'$ .*

*Demostración:*

Por (89),  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $a_{ij} \in K$ , y  $A' = (a'_{ij})_{n \times r}$ ,  $a'_{ij} \in K'$ , tales que  $\phi B = AB'$  y  $\xi B' = A'B''$ . Además, haciendo los cambios de coordenadas se tiene  $u' = u^\tau A$  y  $u'' = (u')^\nu A'$ ,

<sup>16</sup>Espacios de dimensión  $m$  y  $n$ , respectivamente.

entonces  $u'' = u^{\tau\nu} A^\nu A'$ , y de allí se sigue el resultado.

Una propiedad muy importante de Aplicaciones Semilineales **biyectivas** es que dos vectores linealmente independientes tienen por imagen dos vectores linealmente independientes, esto se basa en propiedades de Isomorfismos. Suponga dos cuerpos  $K$  y  $L$  y un isomorfismo  $\tau : K \mapsto L$ ; dado que  $(a + b)^\tau = a^\tau + b^\tau$  y  $(ab)^\tau = a^\tau b^\tau$ , tomando  $a = b = 0_K$  se tiene  $0_K^\tau = (0_K + 0_K)^\tau = 0_K^\tau + 0_K^\tau$  de donde  $0_K^\tau = 0_L$ , mientras que al tomar  $a = b = 1_K$  se tiene  $1_K^\tau = (1_K 1_K)^\tau = 1_K^\tau 1_K^\tau$  de donde  $1_K^\tau = 1_L$ . Además, como  $\tau$  es biyectiva, no existe  $a \neq 0_K$  tal que  $a^\tau = 0_L$  ni  $a \neq 1_K$  tal que  $a^\tau = 1_L$ . De manera similar se obtiene que la imagen del inverso aditivo de  $a \in K$  corresponde el inverso aditivo de su imagen  $a^\tau \in L$ , es decir  $(-a)^\tau = -a^\tau$ , y análogamente con el inverso multiplicativo  $(a^{-1})^\tau = (a^\tau)^{-1}$ .

Con esto, dada la aplicación semilineal  $\phi(\tau) : E(K) \mapsto F(L)$  se tiene que  $\phi(\hat{0}_E) = \phi(0_K U) = 0_L \phi(U) = \hat{0}_F$ , y dado que asumimos que  $\phi$  es biyectiva, no existe  $V \neq \hat{0}_E$  tal que  $\phi(V) = \hat{0}_F$ .

Así, si  $U, V \in E(K)$  son linealmente independientes (69), se cumple  $aU + bV = \hat{0}_E \Rightarrow a = b = 0_K$ . Tomando todas las combinaciones lineales de  $\phi(U)$  y  $\phi(V)$  que formen  $\hat{0}_F$  se tendrá  $c\phi(U) + d\phi(V) = \hat{0}_F$ , con  $c, d \in L$ . Como  $\tau$  es un isomorfismo, sean  $a, b \in K$  tal que  $a^\tau = c$  y  $b^\tau = d$ , y como  $\phi$  es semilineal  $a^\tau \phi(U) + b^\tau \phi(V) = \phi(aU + bV) = \hat{0}_F \Rightarrow aU + bV = \hat{0}_E \Rightarrow a = b = 0_K \Rightarrow a^\tau = b^\tau = 0_L$ , por lo tanto  $\phi(U)$  y  $\phi(V)$  son linealmente independientes en  $F(L)$ .

**(91) Teorema: Independencia Lineal de Vectores tras una aplicación semilineal.** Si la aplicación semilineal  $\phi : E \mapsto F$  es biyectiva, entonces las imágenes de  $U, V \in E$  linealmente independientes son  $\phi(U), \phi(V) \in F$  también linealmente independientes.

La condición exigida a  $\phi$  para que se cumpla esta propiedad puede suavizarse a  $\phi(U) = \hat{0}_F \Leftrightarrow U = \hat{0}_E$ , sin embargo la condición que  $\phi$  sea biyectiva es más utilizada, y además tiene vínculo con la existencia de la aplicación inversa  $\phi^{-1}$ , ya que es condición necesaria. Si  $\phi^{-1}$  existe,  $\phi$  debe ser biyectiva, y por (91), la base de  $E$  tiene por imagen vectores linealmente independientes en  $F$ , entonces  $\dim(E) \leq \dim(F)$ . Si  $\phi^{-1}$  fuera una aplicación semilineal, como  $\phi$  es además la función inversa de  $\phi^{-1}$ , utilizando este mismo razonamiento  $\dim(F) \leq \dim(E)$ , entonces  $\dim(F) = \dim(E)$ . Verificando que  $\phi^{-1}$  cumple (86): como  $\phi(aU + bV) = a^\tau \phi(U) + b^\tau \phi(V)$ , si se aplica  $\phi^{-1}$  a ambos lados se tiene  $aU + bV = \phi^{-1}(a^\tau \phi(U) + b^\tau \phi(V))$ , si  $U = \phi^{-1}(U')$ ,  $V = \phi^{-1}(V')$ , con  $U', V' \in F$ , entonces  $a\phi^{-1}(U') + b\phi^{-1}(V') = \phi^{-1}(a^\tau U' + b^\tau V')$ , es decir  $\phi^{-1}(\tau^{-1}) : F(L) \mapsto E(K)$  es una aplicación semilineal.

**(92) Definición: Aplicación Semilineal Regular y Singular.** Si la aplicación semilineal  $\phi : E \mapsto F$  posee inversa<sup>17</sup> es llamada *Regular*. En caso contrario, es llamada *Singular*.

**(93) Teorema: Aplicación Semilineal Regular y Dimensión de los Espacios Vectoriales.** Si existe una aplicación semilineal regular  $\phi : E \mapsto F$  entonces  $\dim(E) = \dim(F)$ .

Si además, se suponen los espacios vectoriales  $E$  y  $F$  de dimensión finita, la matriz asociada a  $\phi$  debe ser cuadrada e invertible. De (89), si  $A$  es la matriz asociada a  $\phi$  y  $B$  es la matriz

<sup>17</sup>Que es a su vez aplicación semilineal.

asociada a  $\phi^{-1}$  se cumplirá que  $v = u^\tau A$  y  $u = v^{1/\tau} B$ , de donde se deriva rápidamente que  $B^\tau A = I_{n \times n} = A^{1/\tau} B$ , con  $n = \dim(E) = \dim(F)$ , de donde  $A^{-1} = B^\tau$  y  $B^{-1} = A^{1/\tau}$ .

También, retomando (88) y además agregado el supuesto que  $\phi$  y  $\xi$  son regulares, se observa rápidamente que  $\xi \circ \phi$  es una aplicación semilineal regular, ya que su aplicación inversa es  $\phi^{-1} \circ \xi^{-1} (\tau^{-1} \circ \nu^{-1})$ . Y este resultado, también tiene su formato utilizando matrices, resultando entre otras cosas que el producto de matrices invertible (de igual dimensión) es otra matriz invertible.

## 2.2. El Espacio Proyectivo de n dimensiones.

Tal como se discutió al inicio de la **Unidad 1**, es posible establecer una biyección entre puntos sobre una recta y rectas sobre un punto, simplemente tomando un punto  $P$  exterior a la recta  $p$  y asociando el punto  $X \in p$  con la recta  $x = PX$ . De igual manera, es posible hacer una biyección entre los puntos del plano con las rectas que pasan por un punto externo al plano. Sin embargo, a la recta se le añadió un punto ideal, llamado *punto al infinito*, y al plano un conjunto formado por todos los puntos al infinito, la *recta al infinito*. Esta es la noción básica de Geometría Proyectiva, define estructuras como puntos, recta y planos con puntos “adicionales” impropios, pero que en forma de rectas que salen de un mismo punto (en un espacio de dimensión mayor) pierden toda característica especial, y son entonces puntos, rectas y planos como cualquier otro; pero más importante, utilizando herramientas de Espacios Vectoriales este proceso se generaliza de manera muy natural.

Si en un espacio vectorial de dimensión  $n + 1$   $E$  sobre el cuerpo  $K$  se toman todas las rectas homogéneas  $aU$ , con  $a \in K - \{0\}$  y  $U \in E - \{\hat{0}\}$ , entonces se crea una nueva estructura isomorfa a un subespacio de dimensión  $n$ , llamada *Espacio Proyectivo de dimensión n* asociado a  $E(K)$ , y que se denota  $P_n(E, K)$ , o simplemente  $P_n$  si se sobreentiende en qué espacio vectorial se está trabajando. Las rectas homogéneas del espacio vectorial representan los *puntos* del espacio proyectivo, que según el modelo tomado con  $\mathbb{R}^3$ , el espacio proyectivo es un plano que no pasa por el origen añadiéndole la recta al infinito para hacer la correspondencia biyectiva entre las rectas que salen del origen y los puntos de tal plano. Con esto, los puntos del espacio proyectivo no tienen representación única, su unicidad se determina salvo la relación de equivalencia  $U \sim aU$ .

**(94) Definición: Espacio Proyectivo de dimensión n.** Dado el espacio vectorial  $E_{n+1}(K)$ , el conjunto de las rectas homogéneas  $aU$ ,  $\forall U \in E - \{\hat{0}\}$ ,  $a$  variando en  $K - \{0\}$ , es el *Espacio Proyectivo de dimensión n* asociado a  $E$ , denotado por  $P_n(E, K)$ . Las rectas homogéneas  $aU$  son los *puntos* de  $P_n$  y están únicamente determinados salvo la relación de equivalencia  $U \sim aU$ .

**2.2.1. Coordenadas Homogéneas y cambio de coordenadas.**

Se denotará con la misma letra a un vector de  $E$  (que define una recta homogénea) y a un punto de  $P_n$ . Si se considera definida una base en  $E$ , los puntos de  $S_n$  están representados por una matriz fila de longitud  $n + 1$  salvo la relación de equivalencia ya descrita, es decir  $(u_0, u_1, \dots, u_n) \sim (au_0, au_1, \dots, au_n)$ , con  $a, u_i \in K$  y  $a \neq 0$ .

De las operaciones con los vectores de  $E$ , el producto de un escalar por un vector carece de significado especial en  $P_n$ , dado que el punto se mantiene invariante por la relación de equivalencia, mientras que la suma de vectores  $U + V$  engendra un único punto en  $P_n$  salvo la relación de equivalencia  $U + V \sim a(U + V)$ .

Un concepto importante es el de *Independencia Lineal* entre los puntos de  $P_n$ , tal concepto se basa en la definición (69) de Independencia Lineal entre vectores del espacio vectorial  $E$ .

**(95) Definición: Independencia Lineal entre puntos del Espacio Projectivo.** Los puntos  $A_1, A_2, \dots, A_m$  de un espacio projectivo  $P$  se dice que son *linealmente independientes* si no existe relación de la forma:

$$a_1U_1 + a_2U_2 + \dots + a_mU_m = \hat{0}$$

Siendo  $a_1, a_2, \dots, a_m \in K$  no todos nulos. En caso contrario, se dice que los puntos son *linealmente dependientes*.

Tal definición es independiente de la representación escogida de  $A_i$ , dado que  $a_1(x_1A_1) + \dots + a_m(x_mA_m) = a'_1A_1 + \dots + a'_mA_m$ , es decir que si no existe  $(a_i)_{1 \times m} \in K^m$  no todos nulos tal que  $(a_i)_{1 \times m}(A_i)_{m \times 1} = \hat{0}$  tampoco debiera existir  $(a'_i)_{1 \times m}$ , y por lo tanto, cambiando  $A_i$  por cualquier miembro de la clase de equivalencia  $x_iA_i$  y tomando  $a_ix_i = a'_i$  la independencia lineal se mantiene.

Está claro de la definición que la independencia lineal de puntos en el espacio projectivo se da si y sólo si los vectores generadores de las rectas homogéneas respectivas en el espacio vectorial son linealmente independientes. De aquí se deduce fácilmente el siguiente teorema, que tiene relación intrínseca con el concepto de *base* de un espacio projectivo.

**(96) Teorema: Máximo número de puntos linealmente independientes en un espacio projectivo.** El máximo número de puntos linealmente independientes en  $P_n$  es  $n + 1$ .

La idea de base en un espacio projectivo es análoga a la de espacios vectoriales (71), tal definición lleva entre líneas el hecho que cualquier vector  $U \in E$  puede ser escrito como combinación lineal de un conjunto máximo de vectores linealmente independientes, y por tanto, puede ser representado por una matriz fila que contiene los coeficientes en  $K$  que lo generan. Lo mismo se espera que suceda en  $P_n$ , al tomar  $n + 1$  puntos linealmente independientes, para que estos formen una base, cualquier otro punto del espacio debería poder representarse de manera única como combinación lineal de los puntos de la base, salvo la relación de equivalencia. Sin embargo esto ya no es tan fácil:

Suponga un conjunto máximo en  $P_n$  de puntos linealmente independientes  $(U_i)_{(n+1) \times 1}$ , entonces cualquier  $U \in P_n$  tiene la forma  $U = (u_i)_{1 \times (n+1)} (U_i)_{(n+1) \times 1}$ , es decir,  $(u_i)_{1 \times (n+1)} \in K^{n+1}$  debería ser única salvo la relación de equivalencia  $(u_i)_{1 \times (n+1)} \sim (au_i)_{1 \times (n+1)}$ , pero como  $U_i \sim a_i U_i$  se tiene  $U = (u_i)_{1 \times (n+1)} (a_i^{-1} U'_i)_{(n+1) \times 1} = (u_i a_i^{-1})_{1 \times (n+1)} (U'_i)_{(n+1) \times 1}$  y se tendría que cumplir  $(au_i)_{1 \times (n+1)} \sim (u_i a_i^{-1})_{1 \times (n+1)}$ , lo cual **no es en general** cierto.

De aquí que para formar una base en  $P_n$  debe exigirse una representación **fija** de los  $U_i$ , o dicho de otra forma, un vector en  $E$ . Es decir, un sistema de coordenadas en  $P_n$  queda bien definido si se escoge de manera única un punto de cada clase de equivalencia  $a_i U_i$ , y así, todo punto  $U$  en  $P_n$  tiene una representación única como combinación lineal de éstos salvo la relación de equivalencia  $U \sim aU$ .

**(97) Definición: Base de un Espacio Proyectivo y Coordeandas Homogéneas.** Dado el espacio proyectivo  $P_n$ , cualquier conjunto máximo de puntos linealmente independientes con **representación fija**  $B = (U_i)_{(n+1) \times 1}$  forma una base, y se cumple que todo  $U \in P_n$  puede ser escrito de manera única salvo la relación de equivalencia  $U \sim aU$ , es decir

$$U = (u_i)_{1 \times (n+1)} (U_i)_{(n+1) \times 1} \sim aU = (au_i)_{1 \times (n+1)} (U_i)_{(n+1) \times 1}$$

Donde  $(u_i)_{1 \times (n+1)} \sim (au_i)_{1 \times (n+1)} \in K^{n+1}$ ,  $a \neq 0$  y  $a_i$  (no todas nulas) son las coordenadas homogéneas de  $U$  con respecto a la base  $B$ . Es de mencionar que no hay punto en  $P_n$  al que correspondan las coordenadas  $(0)_{1 \times (n+1)}$ .

Ahora, repitiendo el proceso sintetizado en (72) para espacios vectoriales, si se tienen dos bases  $B = (U_i)_{(n+1) \times 1}$  y  $B' = (U'_i)_{(n+1) \times 1}$  en  $P_n$ , como los  $U_i$  y  $U'_i$  son puntos fijos en  $P_n$ , o bien, vectores en  $E$ , existe una matriz cuadrada invertible  $A$  de  $(n+1) \times (n+1)$  tal que  $B = AB'$ , y si representamos por  $u$  y  $u'$  a las matrices fila  $(u_i)_{1 \times (n+1)}$  y  $(u'_i)_{1 \times (n+1)}$  respectivamente, tal que  $U = uB = u'B'$ , se cumplirá que  $u' = uA$ , pero además, como  $u' \sim au'$ , con  $a \in K - \{0\}$ , se tiene que la relación de cambios de coordenadas es

$$au' = uA$$

**(98) Teorema: Cambio de Coordenadas Homogéneas.** En un espacio proyectivo  $P_n$  se tienen dos bases  $B = (U_i)_{(n+1) \times 1}$  y  $B' = (U'_i)_{(n+1) \times 1}$  y un punto cualquiera  $U \in P_n$  de matrices componentes  $u = (u_i)_{1 \times (n+1)}$  y  $u' = (u'_i)_{1 \times (n+1)}$ , respectivamente, entonces la relación de cambio de coordenadas homogéneas es

$$au' = uA$$

Con  $a \in K - \{0\}$  y  $A = (a_{ij})_{(n+1) \times (n+1)}$  es la matriz invertible tal que  $B = AB'$ .

Hay una manera cómoda de construir una determinación fija para puntos de  $P_n$ , sin embargo, se necesita la condición que el cuerpo  $K$  sea conmutativo. Sea  $X$  un punto de  $P_n$  que no está en ningún hiperplano determinado por  $n$  de los  $n+1$  puntos linealmente independientes  $(U_i)_{(n+1) \times 1}$ ,<sup>18</sup> entonces se cumple que  $X = (a_i)_{1 \times (n+1)} (U_i)_{(n+1) \times 1}$  con  $a_i$  todos no nulos. Entonces, por las relaciones de  $U_i \sim a_i U_i$ , normalizando esta expresión

<sup>18</sup>Son hiperplanos en  $E$  definidos como la suma  $n$  rectas homogéneas, es decir,  $n$  puntos de  $P_n$ .

$X = (1)_{1 \times (n+1)} (U_i)_{(n+1) \times 1}$ , y así, queda fijada una determinación para los  $U_i$  salvo la relación de equivalencia  $X \sim aX$ . Con esto, dado  $V \in P_n$ ,  $V = (b_i)_{1 \times (n+1)} (U_i)_{(n+1) \times 1}$  y  $V = (b_i)_{1 \times (n+1)} (aU_i)_{(n+1) \times 1}$  son equivalentes, siempre que  $ab_i = b_i a$ , es decir, la condición que  $K$  se conmutativo es necesaria.

**(99) Teorema: Base en un espacio projectivo sobre un cuerpo conmutativo.** Dado el espacio vectorial  $P_n(E, K)$  con  $K$  un cuerpo conmutativo, un sistema de coordenadas homogéneas queda determinados por  $n + 2$  puntos tales que  $n + 1$  son puntos linealmente independientes,  $(U_i)_{(n+1) \times 1}$ , y hay un punto unidad que no pertenece a ninguno de los hiperplanos formados por  $n$  de estos puntos y satisface la relación  $X = (1)_{1 \times (n+1)} (U_i)_{(n+1) \times 1}$ . Con esta condición, los  $U_i$  forman una base de  $P_n$ .

Es importante notar que las las componentes homogéneas de  $U_i$  son  $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \sim (0, 0, \dots, a, \dots, 0)$ , donde el 1 se ubica en la posición  $i$  y el resto son 0,<sup>19</sup> mientras que las de  $X$  son  $(1, 1, \dots, 1) \sim (a, a, \dots, a)$ , y de aquí el nombre de *punto unidad*.

### 2.2.2. Subespacios en el Espacio Projectivo.

**(100) Definición: Subespacio Projectivo.** Dado un espacio projectivo  $P_n(E_{n+1}, K)$  a todo subespacio vectorial (73)  $E'_{n'+1} \subseteq E_{n+1}$  se asocia un espacio projectivo  $P'_{n'}(E'_{n'+1}, K)$  tal como se define en (94). En tal caso  $P'_{n'}$  es un subespacio projectivo de  $P_n$ .

De aquí está claro que  $P'_{n'}$  tendrá a lo sumo  $n' + 1$  puntos linealmente independientes, y escogiendo una determinación fija de éstos, se forma una base para el subespacio projectivo. Por otra parte, repitiendo el mismo proceso para derivar (74) y tomando en cuenta que se trabaja con coordenadas homogéneas, se obtiene

**(101) Teorema: Representación Paramétrica y Cartesiana de un Subespacio Projectivo.** Dado un espacio projectivo  $P_n$  y un subespacio  $P'_{n'}$  de bases  $B = (U_i)_{(n+1) \times 1}$  y  $B' = (U'_i)_{(n'+1) \times 1}$  respectivamente, los puntos  $U \sim aU$  ( $a \in K - \{0\}$ ) de  $P'_{n'}$  son aquellos que tengan cualquiera de las siguientes formas:

- Forma Paramétrica:  $U = (u'_i)_{1 \times (n'+1)} (U'_i)_{(n'+1) \times 1} \forall (u'_i)_{1 \times (n'+1)} \sim (au'_i)_{1 \times (n'+1)} \in K^{n'+1}$ .
- Forma Cartesiana:  $U = (u_i)_{1 \times (n+1)} (U_i)_{(n+1) \times 1}$  tal que la  $(n+1)$ -ada variable  $(u_i)_{1 \times (n+1)} \sim (au_i)_{1 \times (n+1)} \in K^{n+1}$  satisface la relación matricial<sup>20</sup>  $(u_i)_{1 \times (n+1)} (\lambda_{ij})_{(n+1) \times (n-n')} = \hat{0}_{1 \times (n-n')}$

En particular interesa la representación paramétrica de un subespacio projectivo de dimensión 1, la *recta projectiva*  $P'_1$ , y la representación cartesiana de un subespacio projectivo de dimensión  $n - 1$ , el *hiperplano projectivo*  $P'_{n-1}$ .<sup>21</sup>

<sup>19</sup>Por comodidad, se recorre  $i$  de 0 a  $n$ , es decir,  $U_0, U_1, \dots, U_n$  es la base de  $P_n$ .

<sup>20</sup>Un sistema de  $(n + 1) - (n' + 1) = n - n'$  ecuaciones homogéneas.

<sup>21</sup>Visto los puntos del  $P_n$  como rectas homogéneas de  $E_{n+1}$ ,  $P_1$  es un plano en  $E$  y  $P_{n-1}$  es un hiperplano de dimensión  $n$  en  $E$ .

**(102) Corolario: Recta Proyectiva.** Si  $n' = 1$ ,  $P'_1$  es una recta proyectiva de  $P_n$  y está formado por los puntos  $U \sim aU$  de la forma:

- Forma Paramétrica:  $U = (u'_i)_{1 \times 2} (U'_i)_{2 \times 1} \forall (u'_i)_{1 \times 2} \sim (au'_i)_{1 \times 2} \in K^2$ .
- Forma Cartesiana:  $U = (u_i)_{1 \times (n+1)} (U_i)_{(n+1) \times 1}$  tal que la  $(n+1)$ -ada variable  $(u_i)_{1 \times (n+1)} \sim (au_i)_{1 \times (n+1)} \in K^{n+1}$  satisface la relación matricial<sup>22</sup>  $(u_i)_{1 \times (n+1)} (\lambda_{ij})_{(n+1) \times (n-1)} = \hat{0}_{1 \times (n-1)}$

**(103) Corolario: Hiperplano Proyectivo.** Si  $n' = n - 1$ ,  $P'_{n-1}$  es un hiperplano proyectivo de  $P_n$  y está formado por los puntos  $U$  de la forma:

- Forma Paramétrica:  $U = (u'_i)_{1 \times n} (U'_i)_{n \times 1} \forall (u'_i)_{1 \times n} \sim (au'_i)_{1 \times n} \in K^n$ .
- Forma Cartesiana:  $U = (u_i)_{1 \times (n+1)} (U_i)_{(n+1) \times 1}$  tal que la  $(n+1)$ -ada variable  $(u_i)_{1 \times (n+1)} \sim (au_i)_{1 \times (n+1)} \in K^{n+1}$  satisface la relación matricial<sup>23</sup>  $(u_i)_{1 \times (n+1)} (\lambda_{ij})_{(n+1) \times 1} = \hat{0}_{1 \times 1}$ . Es decir  $u_0 \lambda_{01} + u_1 \lambda_{11} + \dots + u_n \lambda_{n1} = 0$ .

Análogamente a (77) y asociando a los espacios vectoriales Suma e Intersección sus respectivos espacios proyectivos se tiene

**(104) Definición: Suma e Intersección de Subespacios Proyectivos.** Dados dos subespacios  $P_1$  y  $P_2$  de un espacio proyectivo  $P$ , se define el *Espacio Proyectivo Suma*  $P_1 + P_2$ , formado por todos los puntos  $U$  de la forma  $U_1 + U_2$  para cualquier representación  $U_1 \sim a_1 U_1 \in P_1$  y  $U_2 \sim a_2 U_2 \in P_2$ , y el *Espacio Proyectivo Producto*  $P_1 \cdot P_2$ , formado por todos los puntos que pertenecen a  $P_1$  y  $P_2$ .

Es de observar que por la forma cartesiana de (101) y (103), todo subespacio proyectivo  $P'_{n'}$  de  $P_n$  puede ser interpretado como la intersección de  $n - n'$  hiperplanos proyectivos, y viceversa.

Por otra parte, para un hiperplano proyectivo  $P'_{n-1} \subseteq P_n$  es posible escoger una determinación fija de  $n$  puntos linealmente independientes en él, digamos  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , y escogiendo una determinación fija para un punto  $U_0$  que no pertenezca a  $P'_{n-1}$ , se ha formado una base  $B = (U_i)_{(n+1) \times 1}$  para  $P_n$ , de tal forma que para todo  $U \in P_n$  se tiene que  $U = u_0 U_0 + u_1 U_1 + \dots + u_n U_n$ , y se cumple que  $u_0 = 0$  si y sólo si  $U \in P'_{n-1}$ , es decir, el resto de coordenadas homogéneas  $u_1, u_2, \dots, u_n$  no tienen restricción, por lo tanto, la ecuación cartesiana del hiperplano  $P'_{n-1}$  es  $u_0 = 0$ . Con esto, los puntos de  $P_n$  que no estén en  $P'_{n-1}$  tendrán coordenadas homogéneas  $(u_0, u_1, \dots, u_n) \sim (1, v_1, \dots, v_n)$ , dado que  $u_0 \neq 0$ . A este conjunto de puntos se le da el nombre de *Espacio Afín*, denotado por  $A_n$ , dado que está determinado biunívocamente por  $n$ -adas en  $K$   $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,<sup>24</sup> mientras que al hiperplano excluido  $P'_{n-1}$  forma el conjunto de puntos impropios o *hiperplano al infinito* de  $P_n$ .

<sup>22</sup>Un sistema de  $n - 1$  ecuaciones homogéneas.

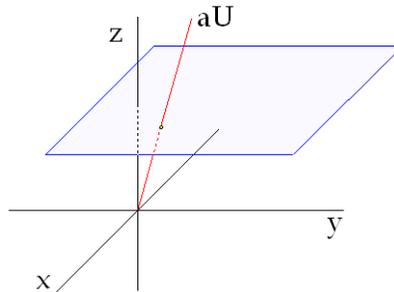
<sup>23</sup>Un sistema de 1 ecuación homogénea.

<sup>24</sup>Note que  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  está asociado a  $(1, v_1, v_2, \dots, v_n)$ , mientras que  $(av_1, av_2, \dots, av_n)$  está asociado a  $(1, av_1, av_2, \dots, av_n)$ , por lo que no son coordenadas homogéneas.

(105) **Definición: Espacio Afín e Hiperplano al Infinito.** El conjunto de puntos de  $P_n$  que quedan al excluir un hiperplano proyectivo cualquiera es llamado *Espacio Afín* de  $n$  dimensiones sobre el cuerpo  $K$ , denotado por  $A_n(K)$ , mientras que el hiperplano excluido es el *Hiperplano al Infinito* del espacio proyectivo. Eligiendo convenientemente una base para  $P_n$  se pueden representar biunívocamente a los puntos de  $A_n$  por  $n$ -adas en  $K^n$   $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  llamadas *coordenadas afines* o *coordenadas no homogéneas* del punto.

Todos estos conceptos misteriosos se dilucidan remontándose a nuestra experiencia primitiva en el Espacio Euclidiano.

Suponga  $E_3 = \mathbb{R}^3$  con la base canónica  $B = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ , todo  $U \in E_3$  puede escribirse de la forma  $U = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ , es decir, viene representado por la terna ordenada  $(u_1, u_2, u_3)$ , mientras que la recta homogénea  $aU$  viene dado por todos los puntos en la clase de equivalencia  $(u_1, u_2, u_3) \sim (au_1, au_2, au_3)$ , y a estas ternas ordenadas ahora grupadas en clases de equivalencia corresponden los puntos del plano proyectivo  $P_2$ . Para aclarar los términos de plano y proyectivo, suponga los ejes coordenados rectangulares  $x, y, z$  y el plano  $z = 1$ , todas las rectas homogéneas  $aU$  se *proyectan* sobre dicho plano en un punto, es decir, hay una correspondencia biyectiva entre tales rectas y los puntos de este plano, y la correspondencia, como es natural, se define como el punto en el que la recta homogénea  $aU$  corta al plano  $z = 1$ . Está claro que el plano  $xy$ , que es un hiperplano homogéneo con la ecuación  $z = 0$ , según la noción clásica, no tiene rectas homogéneas que corten al plano  $z = 1$ , sin embargo, para excluir este caso peculiar (el resto de hiperplanos homogéneos cortan en una recta al plano  $z = 1$ ), se dice que tales rectas, con coordenadas homogéneas  $(u_1, u_2, 0)$  cortan al plano proyectivo en puntos impropios llamados *puntos al infinito* del plano proyectivo, mientras que el resto de rectas homogéneas, con coordenadas homogéneas ya normalizadas  $(v_1, v_2, 1)$  cortan en puntos propios al plano proyectivo. Así, los puntos propios del plano proyectivo pueden representarse de manera biunívoca por el par ordenado  $(v_1, v_2)$ , y forman el *Espacio Afín*, mientras que los puntos impropios del espacio proyectivo asociados al hiperplano  $z = 0$  forman la recta al infinito.



Es de observar que los subespacios proyectivos satisfacen la relación (78), porque basta disminuir una unidad a la dimensión del subespacio vectorial para obtener la dimensión del subespacio proyectivo asociado. De manera más explícita, si  $E'$  y  $E''$  son los espacios vectoriales asociados a  $P$  y  $P'$ , por (104)  $P' + P''$  y  $P' \cdot P''$  son los espacios proyectivos asociados a  $E' + E''$  y  $E' \cdot E''$  respectivamente, además  $\dim(E') - \dim(P') = \dim(E'') - \dim(P'') = \dim(E' + E'') - \dim(P' + P'') = \dim(E' \cdot E'') - \dim(P' \cdot P'') = 1$ , y de aquí es inmediato el resultado siguiente

**(106) Teorema:** *Dados dos subespacios proyectivos  $P'$  y  $P''$  de un espacio proyectivo  $P$ , se cumple la relación*

$$\dim(P' + P'') + \dim(P' \cdot P'') = \dim(P') + \dim(P'')$$

Sin embargo es de observar que el espacio proyectivo asociado al espacio vectorial vacío  $E_0$  es un espacio proyectivo al cual se le define su dimensión como  $-1$ , para evitar irregularidad, mientras que a las rectas homogéneas de  $E$  se asocian subespacio de dimensión 0 en  $P$ , que son justamente los puntos del espacio proyectivo. Tomando en cuenta la primera consideración, si  $P'$  y  $P''$  tienen intersección vacía, se cumplirá entonces la relación  $\dim(P' + P'') = \dim(P') + \dim(P'') + 1$ .

**(107) Corolario:** *Si  $P'$  y  $P''$  son subespacios proyectivos del espacio proyectivo  $P$  con intersección vacía, entonces*

$$\dim(P' + P'') = \dim(P') + \dim(P'') + 1$$

**(108) Corolario:** *Si  $P'$  es un subespacio proyectivo de dimensión  $r$  y  $P''$  un punto<sup>25</sup> no perteneciente a  $P'$ , entonces*

$$\dim(P' + P'') = r + 1$$

Además, retomando (102), este último subespacio  $P' + P''$  puede interpretarse como el conjunto de todas las rectas proyectivas que unen al punto  $P''$  con los puntos de  $P'$ . Inversamente, dado un subespacio proyectivo de dimensión  $r + 1$ , al escoger un punto el subespacio queda formado por todas las rectas proyectivas que unen ese punto con el resto de puntos.

### 2.2.3. Aplicaciones Lineales y Semilineales Projectivas, Colineaciones.

Las aplicaciones lineales y semilineales definidas en la sección 2.1.5 para espacios vectoriales engendran aplicaciones lineales y semilineales a sus espacios proyectivos asociados, y los resultados se mantienen, salvo la consideración que se trabaja con coordenadas homogéneas.

**(109) Definición: Aplicación Lineal Projectiva.** *Dados dos espacios proyectivos  $P$  y  $P'$  sobre un cuerpo  $K$ , la aplicación  $\phi : P \mapsto P'$  define una aplicación lineal projectiva si*

$$\phi(aU + bV) = a\phi(U) + b\phi(V)$$

Para todo  $U, V \in P$  y para todo  $a, b \in K$ .

**(110) Definición: Aplicación Semilineal Projectiva.** *Dados dos espacios proyectivos  $P$  y  $P'$  sobre los cuerpos  $K$  y  $K'$  respectivamente, tal que existe un isomorfismo  $\tau : K \mapsto K'$ , la aplicación  $\phi : P \mapsto P'$  define una aplicación semilineal projectiva si*

$$\phi(aU + bV) = a^\tau \phi(U) + b^\tau \phi(V)$$

---

<sup>25</sup>Un subespacio proyectivo de dimensión 0.

Para todo  $U, V \in P$  y para todo  $a, b \in K$ .

Note que este tipo de aplicaciones son muy adecuadas para puntos de espacios proyectivos, dado que  $U \sim aU$  y  $\phi(U) \sim a^T \phi(U)$ , por lo que básicamente, una aplicación semilineal es aquella que transforma rectas en rectas, resultado que se estudiará a detalle más adelante.

Se observa que el teorema (88) sigue siendo válido para aplicaciones semilineales proyectivas, dado que las condiciones son idénticas. Retomando la notación de dicho teorema, si  $P$  es un espacio proyectivo sobre el cuerpo  $K$  se escribe  $P(K)$ , así

**(111) Teorema: Composición de Aplicaciones Semilineales Proyectivas.** Dadas las aplicaciones semilineales  $\phi(\tau) : P(K) \mapsto Q(L)$  y  $\xi(\nu) : Q(L) \mapsto R(M)$ , entonces la aplicación  $\xi \circ \phi(\nu \circ \tau) : P(K) \mapsto R(M)$  es una aplicación semilineal.

Por otra parte, si se consideran bases establecidas  $B$  y  $B'$  en los espacios proyectivos, retomando (89), una aplicación semilineal puede ser expresada mediante una matriz  $A$  con entradas en  $K'$  tal que  $\phi B = AB'$ , y la relación de cambio de coordenadas tiene la forma  $u' = u^T A$ , sin embargo, dado que se trata de coordenadas homogéneas se tendrá

$$au' = u^T A$$

Para todo  $a \in K' - \{0\}$ .

**(112) Definición: Colineación.** Dados los espacios proyectivos de igual dimensión  $P$  y  $Q$ , se llama colineación a toda aplicación biyectiva  $P \mapsto Q$  tal que a puntos alineados en el primer espacio corresponden puntos alineados en el segundo.

De aquí está claro que toda aplicación semilineal biyectiva (regular) es una colineación, sin embargo el recíproco, siendo verdadero, es un problema a resolver mucho más complejo, y además representa uno de los temas centrales de toda la Geometría Proyectiva. De momento, se demostrará un teorema equivalente a (91), fundamental para determinar el nexo entre una colineación y una aplicación semilineal.

**(113) Teorema: Independencia Lineal de Vectores tras una Colineación.** Dados los espacios proyectivos de igual dimensión  $P$  y  $Q$ , toda colineación  $\phi : P \mapsto Q$  aplica puntos linealmente independientes en puntos linealmente independientes.

*Demostración:*

Dado el hiperplano  $L_{n-1} \subseteq P_n$ , se consideran  $U_0, U_1, \dots, U_{n-1}$  puntos linealmente independientes en él, y  $\phi(U_0), \phi(U_1), \dots, \phi(U_{n-1})$  sus imágenes al aplicar la colineación, que generan un subespacio  $M_k \subseteq Q_n$ . Por la forma paramétrica de (103), si  $X \in L_{n-1}$  se cumple  $X = u_0 U_0 + u_1 U_1 + \dots + u_{n-1} U_{n-1}$ . Si  $X_1 = u_0 U_0 + u_1 U_1$ , por la forma paramétrica de (102)  $X_1$  pertenece a la recta proyectiva  $U_0 U_1$ , y por hipótesis  $\phi(X_1)$  pertenece a la recta proyectiva  $\phi(U_0) \phi(U_1)$ , que claramente está contenida en  $M_k$ . Si  $X_2 = u_0 U_0 + u_1 U_1 + u_2 U_2 = X_1 + u_2 U_2$ , por el mismo razonamiento,  $X_2 \in X_1 U_2$  y por lo tanto  $\phi(X_2) \in \phi(X_1) \phi(U_2)$ , que también está contenida en  $M_k$ . Iterando este proceso  $\phi(X_{n-1}) = \phi(X) \in M_k$ , por lo tanto  $\phi(L_{n-1}) \subseteq M_k$ . Si  $X_n \notin L_{n-1}$ , por el comentario de (108), el espacio proyectivo  $P_n$  es el conjunto de rectas

que unen a  $X_n$  con los puntos de  $L_{n-1}$ , y además, como  $\phi$  es biyectiva,  $\phi(P_n) = Q_n$ , por lo que el espacio proyectivo  $Q_n$  es el conjunto de rectas que unen  $\phi(X_n)$  con los puntos de  $M_k$ , es decir  $Q_n = X_n + M_k$ , y por (108), dado que  $\dim(Q_n) = n + 1$  entonces  $\dim(M_k) = n$ , es decir,  $M_k = M_{n-1}$ . Finalmente, si suponemos  $Y \notin L_{n-1}$  tal que  $\phi(Y) \in M_{n-1}$ , tomando  $X_n = Y$  resultaría que  $\phi(P_n) = M_{n-1}$  lo cual es contradictorio. De aquí que  $\phi(L_{n-1}) = M_{n-1}$ .

Con esto,  $\phi : L_{n-1} \mapsto M_{n-1}$  es biyectiva, y por tanto, es una colineación bien definida. Tomando ahora un hiperplano de  $L_{n-1}$ , por el mismo razonamiento  $\phi : L_{n-2} \mapsto M_{n-2}$  es una colineación, y así sucesivamente, hasta llegar a las rectas, de tal forma que  $\phi : L_1 \mapsto M_1$  es una colineación, es decir, una aplicación biyectiva entre ambas rectas proyectivas  $L_1$  y  $M_1$ .<sup>26</sup> Con esto se han probado las siguientes propiedades.

**(114) Propiedad: Colineación entre subespacios proyectivos.** *Toda colineación entre dos espacios proyectivos  $\phi : P_n \mapsto Q_n$  aplica subespacios de dimensión  $r$  en subespacios de la misma dimensión. Además  $\phi : L_r \mapsto M_r$  es una colineación.*

De esta propiedad, es necesario que  $U_0, U_1, \dots, U_r$  puntos linealmente independientes en  $L_r$  se apliquen en  $\phi(U_0), \phi(U_1), \dots, \phi(U_r)$  puntos linealmente independientes en  $M_r$ , porque en caso contrario la propiedad sería falsa. Esto termina la demostración del teorema.

**(115) Propiedad: Inversa de una Colineación.** *La aplicación inversa de una colineación es una colineación.*

**(116) Propiedad: Colineación entre rectas proyectivas.** *Dado que  $\phi(L_1) = M_1$ , todos los puntos de  $L_1$  se aplican a todos los puntos de  $M_1$ .*

#### 2.2.4. Teoremas Fundamentales de la Geometría Projectiva.

De las definiciones de Aplicación Semilineal Projectiva (110) y Colineación (112) se notó con anterioridad que una aplicación semilineal biyectiva  $\phi : P_n \mapsto Q_n$  es una colineación, dado que fijando dos puntos  $U, V \in P_n$ , los puntos  $X = aU + bV$  describen la recta proyectiva  $UV$  en  $P_n$ , mientras que  $\phi(X) = a^\tau \phi(U) + b^\tau \phi(V)$  describe la recta proyectiva  $\phi(U)\phi(V)$  en  $Q_n$ , es decir, a puntos alineados aplica puntos alineados. El recíproco de este resultado es también cierto, y es llamado el *Teorema Fundamental de la Geometría Projectiva*. La importancia de este resultado es evidente dado que da “forma” concreta a una Colineación, concepto bastante vago, muy distinto a la depurada forma de una aplicación semilineal.

**(117) Teorema: Primer Teorema Fundamental de la Geometría Projectiva.** *Toda colineación entre dos espacios proyectivos de dimensión  $n \geq 2$  es una aplicación semilineal regular proyectiva entre ambos espacios.*

---

<sup>26</sup>Por lo tanto  $\phi^{-1}$  también es una colineación.

*Demostración:*

Dados los espacios proyectivos  $P_n(K)$  y  $P'_n(K')$  y la colineación  $\phi : P_n \mapsto P'_n$ , al definir una base  $B = (U_0, U_1, \dots, U_n)^T$  en  $P_n$ ,<sup>27</sup> por (113)  $\phi(U_0), \phi(U_1), \dots, \phi(U_n)$  serán linealmente independientes, y escogiendo una determinación fija de éstos, es decir, conformando una base  $B' = (U'_0, U'_1, \dots, U'_n)^T$  en  $P'_n$ , con  $U'_i = \phi(U_i)$ , se probará que existe una aplicación biyectiva  $\tau : K \mapsto K'$  tal que al aplicar  $\phi$  a cualquier punto  $U = U_0 + u_1U_1 + \dots + u_nU_n$  en  $P_n$  se obtiene  $\phi(U) = U'_0 + u'_1\phi(U_1) + \dots + u'_n\phi(U_n)$ . La base  $B'$  se formará tal que  $\forall i, \phi(U_0 + U_i) = U'_0 + U'_i$ . Esta prueba se desarrolla por Inducción.

*Proposición Inicial:*  $\phi(U_0 + u_iU_i) = U'_0 + u'_iU'_i$ .

Si  $U \in P_n$  tiene la forma  $U = u_0U_0 + u_1U_1 + \dots + u_nU_n$  mientras que su homólogo  $\phi(U) = U' = u'_0U'_0 + u'_1U'_1 + \dots + u'_nU'_n$ . Por (102) la recta proyectiva  $U_0U_1$  viene dada por todos los puntos de la forma  $U_0 + xU_1$  con  $x$  variando en  $K$ , mientras que la recta homóloga  $U'_0U'_1$  está formada por los puntos de la forma  $U'_0 + x'U'_1$  con  $x'$  variando en  $K'$ . Por (116) la aplicación  $x \rightarrow x'$  es biyectiva, y dado que  $U_0$  y  $U_0 + U_1$  se corresponden respectivamente a  $U'_0$  y  $U'_0 + U'_1$  se cumple que  $0 \rightarrow 0$  y  $1 \rightarrow 1$ . Análogamente, la recta  $U_0U_2$  de puntos  $U_0 + xU_2$  se corresponde a la recta  $U'_0U'_2$  de puntos  $U'_0 + x''U'_2$ , y se probará que la aplicación  $x \rightarrow x''$  coincide con la anterior, es decir,  $x' = x''$ . Si  $A_1 = U_0 + xU_1$ ,  $A_2 = U_0 + xU_2$ ,  $M_1 = U_0 + U_1$ ,  $M_2 = U_0 + U_2$ , el punto  $Q = U_2 - U_1 = (U_0 + U_2) - (U_0 + U_1) \sim (U_0 + xU_2) - (U_0 + xU_1)$  pertenece por tanto a las rectas  $U_1U_2$ ,  $M_1M_2$ ,  $A_1A_2$ . Su punto homólogo  $\phi(Q) = Q'$  pertenece a las rectas homólogas  $U'_1U'_2$ ,  $M'_1M'_2$ ,  $A'_1A'_2$ , con  $M'_1 = U'_0 + U'_1$ ,  $M'_2 = U'_0 + U'_2$ ,  $A'_1 = U'_0 + x'U'_1$ ,  $A'_2 = U'_0 + x''U'_2$ . Claramente el punto  $U'_2 - U'_1 = (U'_0 + U'_2) - (U'_0 + U'_1)$  pertenece a  $U'_1U'_2$  y  $M'_1M'_2$ , por lo que es  $Q'$ , mientras que los puntos de  $A'_1A'_2$  son de la forma  $(U'_0 + x'U'_1) + \alpha(U'_0 + x''U'_2)$ , y para que  $Q'$  pertenezca a dicha recta es necesario que  $\alpha = -1$  y  $x' = x''$  con lo que  $Q' = U'_2 - U'_1 = (U'_0 + U'_2) - (U'_0 + U'_1) \sim (U'_0 + x'U'_2) - (U'_0 + x'U'_1)$ . Repitiendo el mismo razonamiento  $\forall i$  se cumple que  $\phi(U_0 + xU_i) = U'_0 + x'U'_i$  siendo  $x \rightarrow x'$  cierta aplicación biyectiva  $K \mapsto K'$ , y escribiendo  $x' = x^\tau$ , se tiene completa la proposición inicial.

*Proposición  $r$  (HI):*  $\phi(U_0 + u_1U_1 + \dots + u_{r-1}U_{r-1}) = U'_0 + u'_1U'_1 + \dots + u'_{r-1}U'_{r-1}$ .

Sin pérdida de generalidad, suponemos cierta la proposición para las primeras  $r$  componentes.

*Proposición  $r+1$ :* Se demostrará que  $\phi(U_0 + u_1U_1 + \dots + u_rU_r) = U'_0 + u'_1U'_1 + \dots + u'_rU'_r$ .

Si  $B = U_0 + u_1U_1 + \dots + u_{r-1}U_{r-1}$  y  $P = B + u_rU_r$ , está claro que  $P$  pertenece a la recta proyectiva  $BU_r$ , pero también pertenece al subespacio  $L_{r-1}$  generado por los puntos  $U_0 + u_rU_r, U_1, \dots, U_{r-1}$ , por lo tanto el punto  $\phi(P) = P'$  debe pertenecer a  $B'U'_r$  y a  $L'_{r-1}$ . Por la hipótesis inductiva  $B' = U'_0 + u'_1U'_1 + \dots + u'_{r-1}U'_{r-1}$ , por lo tanto, la recta  $B'U'_r$  está formada por los puntos de la forma  $U'_0 + u'_1U'_1 + \dots + u'_{r-1}U'_{r-1} + \mu U'_r$ ; por otra parte, dada la proposición inicial,  $L'_{r-1}$  está generado (113) por los puntos  $U'_0 + u'_rU'_r, U'_1, \dots, U'_{r-1}$ . De aquí está claro que  $B' + u'_rU'_r$  pertenece a ambos subespacios, por lo que  $P' = U'_0 + u'_1U'_1 + \dots + u'_rU'_r$ , lo que queríamos demostrar. Esta demostración es válida para  $1 \leq r \leq n$ .

Hay que verificar que  $\tau : K \mapsto K'$  es un isomorfismo. Considerando  $P = U_0 + (x + y)U_1 + U_2$ , por lo recién demostrado  $P' = U'_0 + (x + y)^\tau U'_1 + U'_2$ . Como  $P$  pertenece a la recta determinada por los puntos  $U_0 + xU_1$  y  $yU_1 + U_2$ ,  $P'$  debe estar sobre la recta homóloga, que son

<sup>27</sup>La matriz transpuesta, recuerde que las bases se han representado por matrices columna.

los puntos de la forma  $U'_0 + x^\tau U'_1 + \lambda(y^\tau U'_1 + U'_2)$ . Comparando estas relaciones, es necesario que  $\lambda = 1$  y de allí que  $(x + y)^\tau = x^\tau + y^\tau$ . Análogamente, si  $Q = U_0 + (xy)U_1 + xU_2$  entonces  $Q' = U'_0 + (xy)^\tau U'_1 + x^\tau U'_2$ , pero como  $Q$  pertenece a la recta determinada por los puntos  $U_0$  y  $yU_1 + U_2$ ,  $Q'$  tiene la forma  $U'_0 + \lambda(y^\tau U'_1 + U'_2)$ , luego  $\lambda = x^\tau$  y por lo tanto  $(xy)^\tau = x^\tau y^\tau$ . Esto demuestra que en efecto  $\tau$  es un isomorfismo.

Como  $\tau$  es un isomorfismo se cumple que  $(x^{-1})^\tau = (x^\tau)^{-1}$ . Si  $U = u_0U_0 + u_1U_1 + \dots + u_nU_n$  con  $u_0 \neq 0$ , dado que  $U \sim aU$ , se puede reescribir como  $U = U_0 + u_0^{-1}u_1U_1 + \dots + u_0^{-1}u_nU_n$ , y aplicando  $\phi$  se tendrá  $U' = U'_0 + (u_0^{-1})^\tau u_1^\tau U'_1 + \dots + (u_0^{-1})^\tau u_n^\tau U'_n$ , y dado que  $U' \sim aU'$  y  $(u_0^{-1})^\tau = (u_0^\tau)^{-1}$ , reescribiendo  $U' = u_0^\tau U'_0 + u_1^\tau U'_1 + \dots + u_n^\tau U'_n$ . Por otra parte, si  $u_0 = 0$ , basta hacer el mismo análisis para el subespacio proyectivo generado por  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , tomando en cuenta que cuando  $u_1 = 0$ , se itera el análisis para el subespacio generado por  $U_2, \dots, U_n$ , y así sucesivamente.

Finalmente, si  $U = u_0U_0 + u_1U_1 + \dots + u_nU_n$  y  $V = v_0V_0 + v_1V_1 + \dots + v_nV_n$  entonces

$$\begin{aligned} \phi(aU + bV) &= \phi((au_0 + bv_0)U_0 + \dots + (au_n + bv_n)U_n) \\ &= (au_0 + bv_0)^\tau U'_0 + \dots + (au_n + bv_n)^\tau U'_n \\ &= a^\tau (u_0^\tau U'_0 + \dots + u_n^\tau U'_n) + b^\tau (v_0^\tau U'_0 + \dots + v_n^\tau U'_n) \\ &= a^\tau \phi(U) + b^\tau \phi(V) \end{aligned}$$

por lo que  $\phi : P_n \mapsto P'_n$  es una aplicación semilineal proyectiva.

**(118) Corolario: Ecuaciones de una Colineación.** *Dados los espacios proyectivos  $P_n(K)$  y  $P'_n(K')$  de bases respectivas  $B$  y  $B'$ , las ecuaciones de una colineación  $\phi : P_n \mapsto P'_n$  son de la forma*

$$au' = u^\tau A$$

Para todo  $a \in K' - \{0\}$  y con  $u$  y  $u'$  las respectivas matrices fila componentes en  $K^{n+1}$  y  $K'^{m+1}$  de  $U \in P_n$  y  $\phi(U) \in P'_n$ , es decir  $U = uB$  y  $\phi(U) = U' = u'B'$ , mientras que  $A$  es una matriz invertible de  $(n+1) \times (n+1)$  con entradas en  $K'$  tal que  $\phi B = AB'$ .

Suponiendo que  $K = K'$ ,  $\tau : K \mapsto K$  es un automorfismo, y si además es un *Automorfismo Interior*, es decir, existe  $\kappa \in K - \{0\}$  tal que  $u^\tau = \kappa^{-1}u\kappa$ ,<sup>28</sup> por el corolario anterior, las coordenadas tras la colineación serán de la forma  $au' = \kappa^{-1}u\kappa A$ , es decir  $\kappa au' = u\kappa A$ , y haciendo el cambio de variables  $a_1 = \kappa a$ ,  $A_1 = \kappa A$  se tiene

$$a_1 u' = u A_1$$

que es una Aplicación Lineal Proyectiva con isomorfismo Identidad, es decir, es de la forma de la relación es un cambio de coordenadas homogéneas (98).

**(119) Definición: Homografía.** *Las colineaciones  $\phi(\tau) : P_n(K) \mapsto P'_n(K)$  tal que  $\tau$  es un automorfismo interior se llaman Homografías. Las ecuaciones de una homografía son de la forma*

$$au' = uA$$

---

<sup>28</sup>Observe que se está haciendo un abuso de notación, suponemos que  $\tau$  funciona igual para todas las coordenadas de  $u$ , es decir  $u_i^\tau = \kappa^{-1}u_i\kappa$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Así como con el Primer Teorema Fundamental (117) asocia a una *Colineación* una *Aplicación Semilineal Projectiva*, lo dicho anteriormente asocia a una *Homografía* una *Transformación Lineal Projectiva*, es decir, una Aplicación Lineal Projectiva de un Espacio Projectivo sobre si mismo.

Es observar que si  $K$  es conmutativo y  $\tau$  un automorfismo interior  $u^\tau = \kappa^{-1}u\kappa = \kappa^{-1}\kappa u = u = u^\iota$ , donde  $\iota : K \mapsto K$  es el automorfismo Identidad, es decir, todos los automorfismos interiores son la identidad. Si además  $K$  sólo acepta a  $\iota$  como automorfismo, toda colineación será una homografía y viceversa. Dos cuerpos de mucho interés con los Números Reales y los Números Complejos, y es resultado conocido de Álgebra que  $\mathbb{R}$  tiene un único automorfismo, la Identidad  $\iota$ , mientras que  $\mathbb{C}$  tiene sólo dos automorfismos continuos, la Identidad  $\iota$  y el Conjugado  $\bar{\iota}$ , que asigna a cada número complejo  $a + bi$  su conjugado  $a - bi$ . Con esto

**(120) Teorema: Colineaciones en  $\mathbb{R}$ .** *Toda colineación entre espacios proyectivos reales de dimensión  $n \geq 2$  es una homografía.*

**(121) Teorema: Colineaciones continuas en  $\mathbb{C}$ .** *Toda colineación continua entre espacios proyectivos complejos de dimensión  $n \geq 2$  es una Homografía o una colineación Conjugado:*

- $au' = uA$  Homografía.
- $au' = \bar{u}A$  Colineación Conjugado.

Haciendo el proceso parecido a la conformación de una base en  $P_n$  (99), si  $U_0, \dots, U_n, U_{n+1}$  son  $n+2$  puntos tal que no hay  $n+1$  en un mismo hiperplano, es posible fijar una determinación tal que  $U_{n+1} = U_0 + U_1 + \dots + U_n$  que es fija salvo un factor de proporcionalidad para todos, dado que  $U_{n+1} \sim aU_{n+1}$ . Fijando una de estas determinaciones,<sup>29</sup> se forma una base en  $P_n$ . Si  $\phi$  es una homografía y  $\phi(U_i) = U'_i$ , estos también forman una base de  $P_n$ ;  $u$  y  $u'$  representan las matrices componentes de un punto  $U$  con respecto a ambas bases, y se sabe que existe un  $\kappa$  tal que  $u' = \kappa^{-1}u\kappa$  o equivalentemente

$$\kappa u' = u \kappa$$

Si  $K$  es conmutativo, claramente  $u' = u$  por lo que el automorfismo asociado y la homografía en si es la Identidad, por lo que  $U_i = U'_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ , es decir, hay  $n+2$  puntos unidos. En cambio, si  $K$  no es conmutativo, en general  $u' = u$  no es cierta.

**(122) Teorema: Segundo Teorema Fundamental de la Geometría Projectiva.** *Toda homografía entre espacios proyectivos superpuestos de dimensión  $n \geq 2$  que tenga  $n+2$  puntos unidos, de los cuales no hay  $n+1$  en el mismo hiperplano, es la Identidad si  $K$  es conmutativo. En cambio, no es necesariamente la Identidad si  $K$  no es conmutativo.*

Por otra parte, para que pueda existir una colineación  $\phi : P_n(K) \mapsto P'_n(K')$  por el Primer Teorema Fundamental (117) es claro que debe existir un isomorfismo  $\tau : K \mapsto K'$ , y si  $K$  es conmutativo,  $K'$  lo es también. Un Tercer Teorema Fundamental está relacionado con Espacios

<sup>29</sup>En (99), asumiendo que  $K$  es conmutativo no es necesario fijar determinación alguna en este paso, mientras que en el caso actual, dado que  $K$  puede no ser conmutativo, es necesario escoger una y fijarla.

Proyectivos sobre cuerpos conmutativos, que son importantes dado que  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  son conmutativos.

**(123) Teorema: Tercer Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva.** Si los cuerpos  $K$  y  $K'$  son conmutativos, toda colineación  $\phi : P_n(K) \mapsto P'_n(K')$  queda determinada por  $n + 2$  puntos del primer espacio y sus imágenes en el segundo, tal que en ninguno de los espacios haya  $n + 1$  de ellos en un mismo hiperplano, más un isomorfismo  $\tau : K \mapsto K'$ .

*Demostración:*

En primer lugar, con los  $n + 2$  puntos y sus imágenes se forman bases en  $P_n$  y  $P'_n$  como indica (99), de manera que  $\phi(U_i) = U'_i$  y al punto unidad en  $P_n$  corresponda el punto unidad en  $P'_n$ . Si  $u$  y  $u'$  representan las matrices coordenadas de un punto cualquiera  $U \in P_n$  y su imagen  $U' \in P'_n$  con respecto a estas bases, considere el isomorfismo  $u' = u^\tau$ , por el primer teorema fundamental (117) este isomorfismo genera una colineación. Si  $\varphi$  es otra colineación con el mismo isomorfismo  $\tau$ , la colineación  $\varphi^{-1}\phi$  sería una homografía de  $P_n$  sobre si mismo con  $n + 2$  puntos unidos, y por el Segundo Teorema Fundamental (122)  $\varphi^{-1}\phi = \iota$  y por lo tanto  $\varphi = \phi$ . Con esto, la colineación existe y es única.

### 2.2.5. Dualidad, Correlaciones y Reciprocidades.

Dado que los espacios proyectivos son en si espacios vectoriales, el concepto de Dualidad es exactamente el mismo que el desarrollado en la sección 2.1.4, salvo pequeños cambios de notación. Lo que antes era una *Recta Homogénea* del Espacio Vectorial ahora será un *Punto* del Espacio Proyectivo, mientras que un *Hiperplano Homogéneo* de  $E$  ahora es un *Hiperplano* de  $P_n$ . De acuerdo a las definiciones (80) y (94) se tiene

**(124) Definición: Espacio Proyectivo Dual.** El Espacio Proyectivo Dual de un espacio proyectivo  $P_n$  generado por un espacio vectorial  $E$  es el Espacio Proyectivo generado de  $E^*$ , el dual de  $E$ . Naturalmente, a este espacio se le denotará por  $P_n^*$ .

Con esta definición, los teoremas (81), (82), (84) y la definición (83) se mantienen prácticamente íntegros, basta hacer referencia al Espacio Proyectivo respectivo y no al Espacio Vectorial, y tomando en cuenta que las coordenadas proyectivas son homogéneas. Reescribiendo se tiene

**(125) Teorema: Dimensión del Espacio Proyectivo Dual.** Dado un espacio proyectivo  $P_n$  y su dual  $P_n^*$ , se cumple que  $P_n$  y  $P_n^*$  tienen la misma dimensión. Más aún, si  $B = (U_i)_{(n+1) \times 1}$  es base de  $P_n$ , escogiendo  $\varphi_j$  en  $P_n^{**}$  tal que  $U_i \varphi_j = \delta_{ij}$  se cumple que  $B^* = (\varphi_i)_{1 \times (n+1)}$  es base de  $P_n^*$ .

**(126) Teorema: Dual del Dual.** Si  $P_n$  es un espacio proyectivo, es isomorfo al espacio dual del dual  $P_n^{**}$ . Más aún, si  $B^* = (\varphi_i)_{1 \times (n+1)}$  y  $B^{**} = (U_i)_{(n+1) \times 1}$  son bases de  $P_n^*$  y  $P_n^{**}$  se cumplirá que

- $\forall U \in P_n \exists (u_i)_{1 \times (n+1)} \sim (au_i)_{1 \times (n+1)} \in K^{n+1}$  tal que  $U = (u_i)_{1 \times (n+1)} (U_i)_{(n+1) \times 1}$
- $\forall \varphi \in P_n^* \exists (e_i)_{(n+1) \times 1} \sim (e_i b)_{(n+1) \times 1} \in K^{n+1}$  tal que  $\varphi = (\varphi_i)_{1 \times (n+1)} (e_i)_{(n+1) \times 1}$

Si además se pide que  $U_i \varphi_j = \delta_{ij}$ , se cumplirá entonces que  $P_n = P_n^{**}$  y son válidas las relaciones

- $u_j = U \varphi_j \sim au_j = aU \varphi_j$
- $e_i = U_i \varphi \sim e_i b = U_i \varphi b$

Por lo tanto

$$U \varphi = (u_i)_{1 \times (n+1)} (e_i)_{(n+1) \times 1} \sim aU \varphi b = (au_i)_{1 \times (n+1)} (e_i b)_{(n+1) \times 1}$$

**(127) Definición: Estructuras Proyectivas Duales.** Dado un espacio proyectivos  $P_n$  y su dual  $P_n^*$ , a un subconjunto  $A \subseteq P_n$  le corresponde un subconjunto  $A^* \subseteq P_n^*$  tal que  $U \varphi = 0$  para todo  $U \in A$  y para todo  $\varphi \in A^*$ .

**(128) Teorema: Suma e intersección de subespacios proyectivos en un espacio proyectivo y en su dual.** Dado un espacio proyectivo  $P_n$  y su dual  $P_n^*$ , si  $S_1$  y  $S_2$  son subespacios proyectivos de  $P_n$ ,  $S_1^*$  y  $S_2^*$  las estructuras duales respectivas y subespacios de  $P_n^*$ , entonces

- $(S_1 + S_2)^* = S_1^* \cdot S_2^*$
- $(S_1 \cdot S_2)^* = S_1^* + S_2^*$

En particular interesan los puntos y los hiperplanos proyectivos. Dado el punto de coordenadas homogéneas  $(u_0, \dots, u_n)$  su hiperplano dual es el formado por todos aquellos puntos de coordenadas homogéneas  $(e_0, \dots, e_n)^T$  tal que

$$u_0 e_0 + \dots + u_n e_n = 0$$

De manera similar, si las  $e_j$  están fijas, al hiperplano representado por la ecuación anterior le corresponde un punto dual representado por  $(e_0, \dots, e_n)^T$ .

De la misma manera, dado un subespacio  $A$  de dimensión  $r$  en  $P_n$  generado como la suma de los puntos  $U_0, \dots, U_n$  le corresponde un subespacios  $A^*$  de dimensión  $(n+1) - (r+1) - 1 = n - r - 1$  generado como la intersección de los hiperplanos asociados a los puntos  $U_i$ .

**(129) Principio de Dualidad en el Espacio Projectivo  $P_n$ :**

- El dual de un punto en  $P_n$  es un hiperplano en  $P_n^*$ .
- El dual de un hiperplano en  $P_n$  es un punto en  $P_n^*$ .

- *El dual de un subespacio en  $P_n$  de dimensión  $r$  visto como la suma de  $r + 1$  puntos es un subespacio en  $P_n^*$  de dimensión  $n - r - 1$  visto como la intersección de  $n - r$  hiperplanos.*

En el caso particular del Plano Proyectivo, dada una Recta Proyectiva en  $P_2$  formada por los puntos  $U_0$  y  $U_1$ , es decir,  $U_0 + U_1$ , corresponde su dual  $U_0^* \cdot U_1^*$ , que es un subespacio en  $P_2^*$  de dimensión  $2 - 1 - 1 = 0$ , es decir, un punto. De manera análoga, tomando un punto en  $P_2$ , su dual será una recta en  $P_2^*$ . Por lo tanto, si  $A$  es un punto que pertenece a la recta  $U_0 + U_1$ , su estructura dual es una recta  $A^*$  que pasa por el punto  $U_0^* \cdot U_1^*$ , es decir, este principio de Dualidad encaja perfectamente con lo definido en la sección 1.2.4.

En el concepto de Colineación (112) aunque no se especifica, se asume que los espacios proyectivos son ambos a la izquierda, dada la notación que se ha seguido a lo largo de este documento. Sin embargo, puede darse el caso que un espacio esté a la izquierda y el otro a la derecha, digamos  $P_n(K)$  y  $Q_n(K')$  respectivamente, así, basta con definir el nuevo espacio proyectivo  $Q'_n(K'^o)$  definido a la izquierda, donde  $K'^o$  es el *Cuerpo Opuesto* a  $K'$ , es decir, el cuerpo que se obtiene al aplicar la transformación biyectiva que cambia el orden de los productos: al elemento  $ab \in K'$  se le asigna el elemento  $ba \in K'^o$ . Así es posible definir una colineación  $\phi : P \mapsto Q'$  que por el Primer Teorema Fundamental (117) es una aplicación semilineal con un isomorfismo definido  $\tau : K \mapsto K'^o$ . En tal caso,  $\tau : K \mapsto K'$  es llamado un *Anti-Isomorfismo* y  $\phi : P \mapsto Q$  una aplicación *Anti-Semilineal*.

Recordando un poco el trabajo realizado para demostrar (89) que da lugar a (118), se tiene que

$$U = (u_i)_{1 \times (n+1)} (U_i)_{(n+1) \times 1} \in P_n$$

$$\phi(U) = U' = (u'_i)_{1 \times (n+1)} (U'_i)_{(n+1) \times 1} = (u_i^\tau)_{1 \times (n+1)} (\phi(U_i))_{(n+1) \times 1} \in Q'_n$$

Es decir, escribiendo de forma reducida  $U' = u'B' = u^\tau \phi B$ , donde  $u$  y  $u'$  son las matrices componentes de  $U$  y  $U'$  con respecto a las bases respectivas  $B$  y  $B'$ . Observe que tanto  $u^\tau$  como  $u'$  tiene entradas en  $K'^o$ , mientras que si se transpone esta expresión únicamente se altera el orden de los productos, y se trabaja entonces en  $K'$ , por lo que  $U' = {}_{B'} U'^T = \phi B^T (u^\tau)^T \in Q_n$ . Además, se sabe que existe una matriz regular  $A$  tal que  $\phi B = AB'$ , pero  $A$  tiene entradas en  $K'^o$ , de nuevo, sacando la transpuesta  $\phi B^T = {}_{B'} A^T$  y con esto, recordando que se trata de coordenadas homogéneas a la derecha, se obtiene un resultado similar a (118):  $u'^T a = A^T (u^\tau)^T$ .

**(130) Teorema:** *Toda colineación de un espacio proyectivo a la izquierda sobre un espacio proyectivo a la derecha, ambos de dimensión  $n \geq 2$ , es una aplicación anti-semilineal regular proyectiva entre ambos espacios. Las ecuaciones de esta aplicación son de la forma*

$$u'^T a = A^T (u^\tau)^T$$

Donde  $u$  y  $u'^T$  son las matrices componentes de  $U$  y  $U' = \phi(U)$ ,  $a \in K' - \{0\}$  un escalar arbitrario,  $A^T$  es una matriz regular con entradas en  $K'$ , y  $\tau : K \mapsto K'$  es un anti-isomorfismo.

Extender así el Primer Teorema Fundamental es importante, porque la definición de Colineación no distingue si el orden de los productos de los Espacios Proyectivos, además, como ya se estudió, el Espacio Dual de un Espacio Proyectivo a la izquierda resulta ser un espacio proyectivo a la derecha.

**(131) Definición: Correlación.** Dados dos espacios proyectivos a la izquierda  $P_n(K)$  y  $P'_n(K')$ ,  $n \geq 2$ , se llama *correlación* a toda colineación entre  $P$  y  $P'^*$ , el dual de  $P'$ .

**(132) Definición: Reciprocidad.** Dados dos espacios proyectivos a la izquierda de dimensión  $n \geq 2$  sobre un mismo cuerpo conmutativo  $K$ , se llama *reciprocidad* a toda homografía entre el primero y el dual del segundo.

## Capítulo 3

# Aplicaciones.

En esta Unidad se abordarán algunas temáticas interesantes que muestran de manera muy superficial la aplicación de la teoría desarrollada anteriormente, además, se incluye un apartado sobre el modelo geométrico de Poincaré, para mostrar el alcance y la vinculación con otras áreas, específicamente con los números complejos. Finalmente, se presenta una lista de problemas geométricos bastante complejos resueltos con herramientas sintéticas siempre vinculadas con la Geometría Projectiva.

### 3.1. El Plano Projectivo.

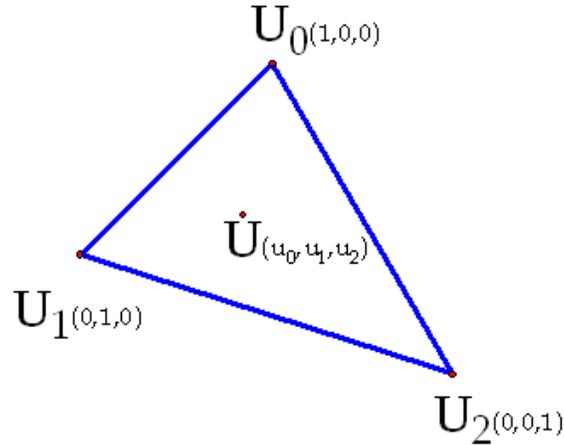
Consideramos el caso el caso  $P_2(K)$ , que es el llamado *Plano Projectivo*. Dado que este espacio está asociado a un Espacio Vectorial de dimensión 3, un conjunto de puntos linealmente independientes tiene a lo sumo cardinalidad 3, y tomando una determinación fija de estos se tiene formada una base. Si suponemos que  $U_0, U_1, U_2$  forman una base, cualquier punto  $U \in P_2$  es de la forma  $U = u_0U_0 + u_1U_1 + u_2U_2$ ,<sup>1</sup> es decir, tiene coordenadas  $(u_0, u_1, u_2)$ , no todas nulas, pero como un punto en  $P_2$  es una recta homogénea en el Espacio Vectorial asociado, se tiene la relación de equivalencia  $U \sim aU$  para todo  $a \in K - \{0\}$ , por lo que  $(u_0, u_1, u_2) \sim (au_0, au_1, au_2)$ , que son las llamadas *Coordenadas Homogéneas* de  $U$ . Con esto, si dos puntos  $U$  y  $V$  en  $P_2$  son tales que sus coordenadas homogéneas respectivas  $(u_0, u_1, u_2)$  y  $(v_0, v_1, v_2)$  cumplen ser proporcionales, es decir  $u_0 : u_1 : u_2 = v_0 : v_1 : v_2$ , entonces  $U \sim V$ , pertenecen a la misma clase de equivalencia, lo que se escribe simplemente  $U = V$ . Así, lo realmente importante de las coordenadas homogéneas son las razones  $u_0 : u_1 : u_2$ .

Si retomamos el modelo intuitivo de  $P_2$ , que es por ejemplo el plano de ecuación  $z = 1$  en  $\mathbb{R}^3$  más la recta al infinito, los puntos  $U_0, U_1, U_2$  son tres rectas en el espacio que salen del origen y cortan en tres puntos al plano projectivo, al hacer variar  $a$  en  $\mathbb{R} - \{0\}$  en la clase de equivalencia  $U_i \sim aU_i$ . Estos tres puntos de corte forman así un *Triángulo de Referencia*, cualquier punto  $U$  del plano puede ser expresado como combinación lineal de la base  $U_0, U_1, U_2$ , y esto significa que la recta homogénea  $U \sim aU$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $U = u_0U_0 + u_1U_1 + u_2U_2$ , corta al plano projectivo  $z = 1$  en un único punto, y este punto tiene coordenadas homogéneas  $(u_0, u_1, u_2) \sim (au_0, au_1, au_2)$ . Así, se puede tomar este sistema de coordenadas homogéneas

---

<sup>1</sup>Dado que  $U_0, U_1, U_2, U$  son linealmente dependientes, y por tanto existe una relación con coeficientes en  $K$  no todos nulos de la forma  $\alpha_0U_0 + \alpha_1U_1 + \alpha_2U_2 + \alpha U = \hat{0}$ .

como sistema de referencia, que a cada punto corresponde una única terna  $(u_0, u_1, u_2)$ , donde la unicidad se da por las razones  $u_0 : u_1 : u_2$ , es decir, que pertenezcan a distinta clase de equivalencia  $(u_0, u_1, u_2) \sim (au_0, au_1, au_2)$ .



Regresando al caso general  $P_2$ , si las coordenadas de  $U$  son variables  $(x, y, z)$ , se observa que la ecuación cartesiana de la recta  $U_0U_1$  es  $z = 1$ , de la recta  $U_1U_2$  es  $x = 0$ , y de la recta  $U_2U_1$  es  $y = 0$ .

Recapitulando un poco, una *Recta* en  $P_2$  es el conjunto de combinaciones lineales de dos puntos distintos,<sup>2</sup> digamos  $U$  y  $V$ . Así, todos los puntos  $X$  de la recta  $UV$  son de la forma  $X = uU + vV$ ; además, como  $u$  y  $v$  no pueden ser nulos a la vez, suponiendo sin pérdida de generalidad que  $u \neq 0$  la expresión anterior se puede normalizar quedando de la forma  $X = U + xV$ ,  $x$  al variar en  $K$  describe todos los puntos de la recta. También es de observar que en  $P_2$  los hiperplanos son las rectas, por lo que según la forma cartesiana, los puntos  $X = (x_0, x_1, x_2)$  que pertenecen a la recta son aquellos que satisfacen la relación  $x_0\lambda_0 + x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 = 0$ , donde los  $\lambda_i$  son elementos fijos en  $K$  que se obtienen al eliminar los parámetros  $u$  y  $v$  de la ecuación paramétrica de la recta (o bien los parámetros  $1$  y  $x$  en su forma normalizada). La terna ordenada  $[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2]$  forma las *Coordenadas Homogéneas de la Recta UV*, y en efecto son homogéneas en el sentido que  $[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2] \sim [\lambda_0a, \lambda_1a, \lambda_2a]$  para todo  $a \in K - \{0\}$ , dado que la recta  $x_0\lambda_0a + x_1\lambda_1a + x_2\lambda_2a = 0$  representa la misma recta  $UV$ , esto es, los puntos de la recta  $UV$  satisfacen esta relación y cualquier punto fuera de ésta no. De nuevo se observa que lo realmente importante son las razones  $\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2$  para distinguir una recta de otra, siempre tendiendo el cuidado que la proporcionalidad en las coordenadas de rectas es a la derecha, mientras que en las coordenadas homogéneas de puntos es a la izquierda.

De aquí es inmediato el concepto de *Dualidad* que asocia puntos con hiperplanos, e hiperplanos con puntos, que para el caso sería puntos con rectas y rectas con puntos. Observando la ecuación cartesiana de la recta

$$x_0\lambda_0 + x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 = 0$$

Si se dejan fijas las  $\lambda_i$  representan un hiperplano en  $P_2$  de coordenadas homogéneas  $[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2]$

<sup>2</sup>Es decir, que no pertenezcan a la misma clase de equivalencia, y por tanto, linealmente independientes.

mientras que en  $P_2^*$  es un punto de coordenadas homogéneas  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ , y hay una correspondencia biyectiva entre estas estructuras. De manera análoga, dejando fijas las  $x_i$ , se obtiene que al punto  $(x_0, x_1, x_2)$  se corresponde el hiperplano  $[x_0, x_1, x_2]$ . Este es en síntesis el principio de Dualidad, a cualquier punto  $X$  que incida en una recta en  $P_2$  (y por tanto satisface la relación de hiperplano anterior, para algunos  $\lambda_i$  fijos), corresponde una recta dual en  $P_2^*$  (aquella que se forma al dejar fijas las coordenadas de  $X$  y variar  $\lambda_i$ ) que contiene en particular a aquella determinación de las  $\lambda_i$  que son las coordenadas homogéneas de la recta primitiva en  $P_2$ . Es decir: *A todo punto sobre una recta corresponde una recta sobre un punto.* Si finalmente se verifica que por dos puntos pasa una única recta, y que dos rectas se cortan en un único punto, entonces se tendría terminado el Principio de Dualidad, dado que *a tres puntos alineados corresponden tres rectas concurrentes y a tres rectas concurrentes corresponden tres puntos alineados.*

Falta entonces verificar los Teoremas de Incidencia

**(133) Teorema: Dos puntos determinan una recta.** *Dados dos puntos distintos  $A$  y  $B$  en  $P_2$ , existe una única recta que incide en  $A$  y  $B$ .*

*Demostración:*

Este teorema es prácticamente un axioma, dada la teoría desarrollada. La forma paramétrica de la recta  $AB$  nos dice que todos los puntos  $U = \alpha A + \beta B$  forman una recta  $\mathbb{L}$  en  $P_2$ , esto es,  $\mathbb{L}$  es el lugar geométrico de los puntos linealmente dependientes a  $A$  y  $B$ .<sup>3</sup> Falta verificar que  $\mathbb{L}$  es única, si suponemos que hay otra recta  $\mathbb{L}'$  que contiene a  $A$  y  $B$  pero no coincide con la anterior, existe un punto  $C$  en  $P_2$  que pertenece  $\mathbb{L}'$  pero no a  $\mathbb{L}$ ; por pertenecer a  $\mathbb{L}'$ ,  $A, B, C$  son linealmente dependientes, pero por no pertenecer a  $\mathbb{L}$ ,  $A, B, C$  son linealmente independientes, lo cual es contradictorio.

**(134) Teorema: Dos rectas determinan un punto.** *Dados dos rectas distintas  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{B}$  en  $P_2$ , existe un único punto que incide en  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{B}$ .*

*Demostración:*

Dadas la recta  $\mathbb{A}$  formada por los puntos  $A = aU + bV, \forall a, b \in K, U \neq V$ , y la recta  $\mathbb{B}$  formada por los puntos  $B = cW + dX, \forall c, d \in K, W \neq X$ . Supongamos  $U, V, W, X$  todos distintos (porque en caso contrario el resultado es trivial), dado que se trabaja en  $P_2$ , deben ser linealmente dependientes, esto es, existe una relación de la forma  $uU + vV + wW + xX = \hat{0}$ , y con esto, el punto  $C = uU + vV = -wW - xX$  pertenece a  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{B}$ . En ambos casos, el punto de intersección debe ser único, ya que si existiera un segundo punto, la recta  $\mathbb{A}$  los contendría a ambos, al igual que la recta  $\mathbb{B}$ , y por el teorema anterior debería cumplirse que  $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ , lo cual contradice la hipótesis.

En este punto se puede comenzar a deducir resultados basándose únicamente en estas propiedades elementales, tal como Euclides lo hizo en el famoso libro *Los Elementos* con sus cinco Postulados. Un ejemplo de esto es lo que se mencionó anteriormente del Principio de

<sup>3</sup>Un punto  $C$  es linealmente dependiente con  $A$  y  $B$  si y sólo si pertenece a  $\mathbb{L}$ .

Dualidad: si suponemos tres puntos alineados  $A, B, C$  en  $P_2$ , es decir, que inciden en una recta  $\mathbb{L}$ , como  $A$  incide en  $\mathbb{L}$  entonces en  $P_2^*$  la recta  $\mathbb{A}$ , que es la estructura dual de  $A$ , incide en el punto  $L$ , estructura dual de  $\mathbb{L}$ , y análogamente las rectas  $\mathbb{B}$  y  $\mathbb{C}$  pasan por  $L$ . Así se puede enunciar el Principio de Dualidad en el Plano Projectivo

**(135) Principio de Dualidad en  $P_2$ :**

- A un punto en  $P_2$  corresponde una recta en  $P_2^*$ .
- A una recta en  $P_2$  corresponde un punto en  $P_2^*$ .
- A un punto sobre una recta en  $P_2$  corresponde la recta dual que pasa sobre el punto dual en  $P_2^*$ .
- A puntos alineados en  $P_2$  corresponden rectas concurrentes en  $P_2^*$ .
- A rectas concurrentes en  $P_2$  corresponden puntos alineados en  $P_2^*$ .

Quedan todavía algunas propiedades importantes que estudiar. El siguiente teorema nos remonta a la raíz del concepto de recta, la recta es esa estructura que satisface lo siguiente

**(136) Teorema:** *Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma recta.*

*Demostración:*

Suponga la recta determinada por  $A$  y  $B$ , que es el conjunto formado por todos los puntos de la forma  $aA + bB$ ; si se toman dos puntos distintos  $C$  y  $D$  sobre la recta, se tendrá que  $C = a_1A + b_1B$  y  $D = a_2A + b_2B$  con  $a_1 : a_2 \neq b_1 : b_2$  porque en caso contrario  $a_1 = ka_2$ ,  $b_1 = kb_2$  y  $C = a_1A + b_1B = k(a_2A + b_2B) = kD$ , o lo que es lo mismo  $C \sim D$  lo cual es contrario a la hipótesis. Con esto la recta formada por  $C$  y  $D$  son todos los puntos de la forma  $cC + dD = c(a_1A + b_1B) + d(a_2A + b_2B) = (ca_1 + da_2)A + (cb_1 + db_2)B$ . Para que ambas rectas coincidan  $a = ca_1 + da_2$  y  $b = cb_1 + db_2$ , y este sistema de ecuaciones debe poder resolverse en  $c$  y  $d$  para cualquier par de valores que se le asignen a  $a$  y  $b$ . Si suponemos que no se puede resolver, entonces el determinante debe ser cero, es decir  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \Leftrightarrow a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ , lo cual es contradictorio.

Otra manera muy sencilla de probar este teorema es: si suponemos que  $C$  y  $D$  dos puntos distintos que pertenecen a la recta  $AB$  pero  $CD$  es otra recta, entonces las rectas  $AB$  y  $CD$  tienen dos puntos de intersección, a saber,  $C$  y  $D$ , lo cual contradice (134), a menos que  $C = D$ , lo cual no es posible.

Se han tomado ambas demostraciones para hacer notar algo importante: Según la construcción que se ha hecho del Espacio Projectivo  $n$ -dimensional, en particular para el Plano Projectivo, tanto (134) como (136) se pueden demostrar como consecuencia pura de la definición de  $P_n$ , mientras que en una Geometría Sintética, alguno de esos dos resultados es tomado como Axioma y luego se demuestra el otro, pero no es posible prescindir de ambos. Esto deja en evidencia la radicalidad de la definición tomada para  $P_n$ , es decir, axiomáticamente suave.

Un resultado igualmente evidente, o quizás más, remontándose a la noción sintética del Plano Euclídeo, es el siguiente resultado que es el Dual del anterior

**(137) Teorema:** *Dos rectas cualesquiera de un haz determinan el mismo punto.*

Por ser el dual del teorema anterior, la demostración no es necesaria, sin embargo, hacerla directamente no es difícil y se centra en la idea que si lo suponemos falso, entonces hay un par de rectas que se cortan en dos puntos, contrario a (134).

**(138) Teorema:** *El plano proyectivo tiene al menos cuatro puntos distintos, de los cuales no hay tres en la misma recta. De manera dual, el plano proyectivo tiene al menos cuatro rectas distintas, de las cuales no hay tres que pasen por el mismo punto.*

*Demostración:*

Retomando lo del triángulo de referencia, los puntos de coordenadas homogéneas  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$  son todos distintos y además se verifica fácilmente que no hay tres en la misma recta, de hecho, las ecuaciones cartesianas de tres rectas distintas  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$  contienen a exactamente dos de los cuatro puntos, y el punto  $(1, 1, 1)$  no pertenece a ninguna de ellas. Tomando la recta que une a este punto con cualquiera de los otros tres, se obtiene una cuarta recta, tal que con las primeras tres, forman un conjunto de cuatro rectas tal que no hay tres que pasen por el mismo punto.

**(139) Corolario:** *No todos los puntos del plano proyectivo pertenecen a la misma recta. De manera dual, no todas las rectas del plano proyectivo pasan por el mismo punto.*

**(140) Teorema:** *Toda recta tiene por lo menos tres puntos distintos. De manera dual, por todo punto pasan al menos tres rectas.*

*Demostración:*

Tomando la recta  $AB$  de los puntos de la forma  $aA + bB$  para todo  $(a, b) \in K^2$ , como  $K$  es un cuerpo tiene al menos dos elementos, 0 y 1, y al sustituir  $(a, b)$  por  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  se obtienen tres puntos distintos,  $A$ ,  $B$ ,  $A + B$ . Para el dual, tomando un punto  $X$  y una recta que no pasa por él, la cual existe, dado (139), tomando los tres puntos distintos de tal recta y uniendo estos puntos con  $X$  se obtienen tres rectas distintas.

Un resultado importante desde el punto de vista práctico es la ecuación de una recta dadas las coordenadas homogéneas de dos puntos.

**(141) Teorema: Ecuación cartesiana de una recta.** *La ecuación cartesiana de la recta que pasa por los puntos  $A = (a_0, a_1, a_2)$  y  $B = (b_0, b_1, b_2)$  es*

$$(u_0 a_0^{-1} - u_1 a_1^{-1}) (b_0 a_0^{-1} - b_1 a_1^{-1})^{-1} = (u_0 a_0^{-1} - u_2 a_2^{-1}) (b_0 a_0^{-1} - b_2 a_2^{-1})^{-1}$$

Si  $K$  es un cuerpo conmutativo, esta expresión puede escribirse como

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

*Demostración:*

La primera expresión es simplemente el resultado de la eliminación de parámetros, cuando la recta tiene la forma  $\alpha A + \beta B$ , para cualquier par de valores  $\alpha, \beta \in K$ . Para la segunda, basta ver que al desarrollar el determinante (lo cual necesita de la conmutatividad de  $K$ ) queda una expresión de la forma  $u_0\lambda_0 + u_1\lambda_1 + u_2\lambda_2 = 0$ , y por propiedades de determinante, si  $(u_0, u_1, u_2)$  toma los valores de  $A \sim \alpha A$  o bien  $B \sim \alpha B$ , el determinante se anula, por lo tanto, esta recta en efecto pasa por  $A$  y  $B$ , y por (133) la recta queda determinada de manera única.

### 3.1.1. Teorema de Menelao y Teorema de Ceva.

La utilización del Triángulo de Referencia es muy útil para remontarse a la Geometría Sintética, y se pueden derivar muchos resultados de éstas con esta nueva herramienta. Cabe mencionar que a pesar que se asociará las demostraciones al modelo geométrico clásico, éstas son válidas para cualquier Plano Projectivo, que en general no se parece al Plano Euclídeo.

Se tomarán tres puntos linealmente independientes  $A, B, C$  en  $P_2$ , formando así el triángulo de referencia, cualquier otro punto  $U$  del plano puede representarse como combinación lineal de  $A, B, C$  y por tanto, por una terna ordenada de coordenadas homogéneas  $(u_0, u_1, u_2)$ .

**(142) Teorema: Teorema de Menelao.** *Dado el triángulo de referencia  $ABC$ <sup>4</sup> y tres puntos distintos de los vértices  $L = B + xC$ ,  $M = C + yA$ ,  $N = A + zB$  sobre los lados  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  respectivamente, entonces  $L, M, N$  están alineados si y sólo si*

$$xyz = -1$$

*Demostración:*

Suponga que la ecuación cartesiana de la línea  $LMN$  es  $u_0e + u_1f + u_2g = 0$ , es decir, una recta de coordenadas homogéneas  $[e, f, g]$ . Como esta recta no pasa por los vértices entonces  $e \neq 0$ ,  $f \neq 0$ ,  $g \neq 0$ , dado que  $ABC$  es el triángulo de referencia, es decir  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$ ,  $C = (0, 0, 1)$ , y si por ejemplo  $e = 0$  entonces  $A$  pertenece a la recta. Además  $L = (0, 1, x)$ ,  $M = (y, 0, 1)$ ,  $Z = (1, z, 0)$ . Sustituyendo las coordenadas homogéneas de  $L$  en la recta  $u_0e + u_1f + u_2g$  se tiene  $f + xg = 0$  lo cual implica  $x = -fg^{-1}$ . De manera análoga, al sustituir las coordenadas de  $M$  y  $N$  en la ecuación de la recta se obtiene  $y = -ge^{-1}$  y  $z = -ef^{-1}$ , por lo tanto  $xyz = -fg^{-1}ge^{-1}ef^{-1} = -1$ .

---

<sup>4</sup>Recuerde que cualquier triángulo puede escogerse como triángulo de referencia.

Para el recíproco, suponemos que  $xyz = -1$  y  $L, M, N$  no están alineados, así si  $N' \neq N$  es la intersección de  $LM$  con  $BC$ , se observa que  $N'$  no coincide con ninguno de los vértices  $A, B$ , porque eso obligaría a que  $M = C$  o  $M = A$ , lo cual es contradictorio; por lo tanto existe un  $z' \in K - \{0\}$  tal que  $N' = A + z'B$ , y como  $L, M, N'$  están alineados, por lo demostrado anteriormente  $xyz' = -1$ . De esta relación y la hipótesis  $xyz = -1$  se concluye que  $z = z'$  lo cual implica  $N = N'$ , contradicción. Entonces si  $xyz = -1$  los puntos  $L, M, N$  deben estar alineados.

**(143) Teorema: Teorema de Ceva.** *Dado el triángulo de referencia  $ABC$  y tres puntos distintos de los vértices  $L = B + xC, M = C + yA, N = A + zB$  sobre los lados  $BC, CA, AB$  respectivamente, entonces las rectas  $AL, BM, CN$  concurren si y sólo si*

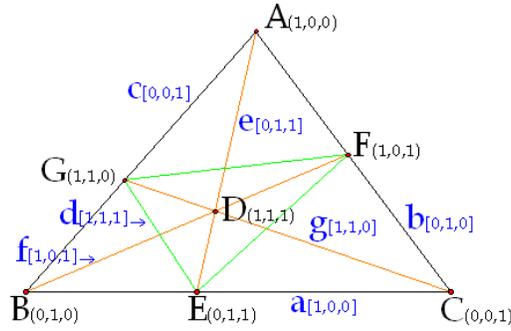
$$xyz = 1$$

*Demostración:*

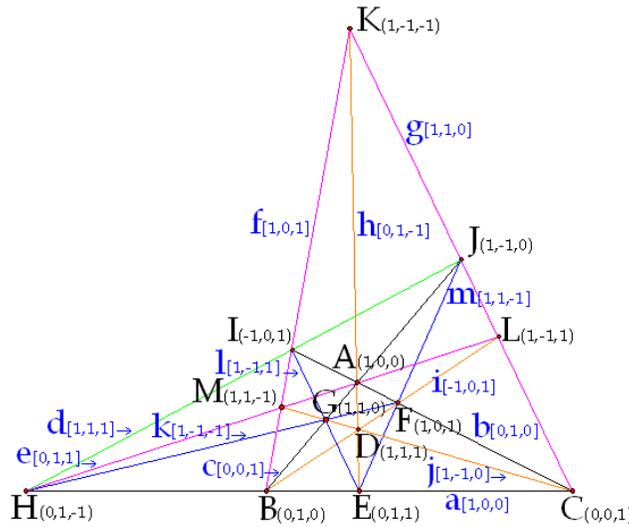
De nuevo  $L = (0, 1, x), M = (y, 0, 1), Z = (1, z, 0)$ , con  $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$  ya que si por ejemplo  $x = 0$  entonces  $L = B$ , lo cual contradice una hipótesis. Se observa que la ecuación que pasa por  $A$  y  $L$  tiene coordenadas homogéneas  $[0, -x, 1]$ , es decir, es la ecuación  $-u_1x + u_2 = 0$ . Análogamente, las ecuaciones cartesianas de las rectas  $BM$  y  $CN$  son respectivamente  $u_0 - u_2y = 0$  y  $-u_0z + u_1 = 0$ . Dado que estas tres rectas concurren, existe un punto  $P$  de coordenadas homogéneas  $(a, b, c)$  que satisface las tres ecuaciones a la vez, es decir  $-bx + c = 0, a - cy = 0, -az + b = 0$ . Se observa que  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ , dado que si por ejemplo  $a = 0$  entonces  $P$  estaría sobre la recta  $BC$  y por lo tanto  $BM$ , que coincide con  $BP$  (dado que  $B, M, P$  están alineados), tendría dos puntos sobre  $BC$ , a saber,  $B$  y  $P$ , por lo tanto, coinciden ambas rectas y  $M$  pertenece entonces a  $BC$ ; pero como  $M$  por hipótesis pertenece a  $AC$ , debe ser la intersección de  $BC$  con  $AC$ , es decir  $M = C$ , lo cual es contradictorio. Con esto, se puede despejar  $x, y, z$  de las relaciones anteriores, y se tiene  $xyz = b^{-1}cc^{-1}aa^{-1}b = 1$ . Para el recíproco se procede igual que en el teorema anterior.

Por otra parte, puede demostrarse además que si aún no están normalizados los puntos  $L, M, N$ , es decir  $L = xB + x'C, M = yC + y'A, N = zA + z'B$  entonces el Teorema de Menelao dice que  $L, M, N$  están alineados si y sólo si  $x'^{-1}xz'^{-1}zy'^{-1}y = -1$ , y si suponemos que  $K$  es un cuerpo conmutativo, esto es equivalente a  $xyz = -x'y'z'$ . Análogamente, con  $K$  conmutativo el Teorema de Ceva diría que  $AL, BM, CN$  concurren si y sólo si  $xyz = x'y'z'$ .

Por otra parte, ya en (138) se observó que cualquier plano proyectivo tiene como mínimo cuatro puntos, tal que no hay terna alineada. Si se considera un cuerpo  $K$  tal que  $1 + 1 = 0$ , o equivalentemente  $1 = -1$ , en realidad hay 7 puntos como mínimo, pero agrupados por ternas alineadas:  $A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1), D = (1, 1, 1), E = (0, 1, 1), F = (1, 0, 1), G = (1, 1, 0)$ . Estos puntos forman las rectas  $BCE, CAF, ABG, EFG, ADE, BDF, CDG$ , de coordenadas homogéneas respectivas  $a = [1, 0, 0], b = [0, 1, 0], c = [0, 0, 1], d = [1, 1, 1], e = [0, 1, 1], f = [1, 0, 1], g = [1, 1, 0]$ . Considere la siguiente figura, es un esquema basado en el plano euclídeo, note que los puntos  $E, F, G$  están alineados, lo cual a primera vista no parece razonable. La incongruencia con nuestra percepción radica que tal plano es un espacio afín (espacio proyectivo sin la recta al infinito) sobre  $\mathbb{R}$ , que es un cuerpo en el que  $1 + 1 \neq 0$ , contrario a lo supuesto, pero en cambio  $\mathbb{Z}_2$  cumple perfectamente.



Si en cambio suponemos que  $K$  es un cuerpo tal que  $1 + 1 \neq 0$ , entonces  $P_2$  tiene al menos 13 puntos distintos y al menos 13 rectas distintas. Esto se debe a que  $\{0, 1, -1\} \subseteq K$ , y como los elementos de  $P_2$  se pueden representar por las ternas ordenadas  $(a, b, c)$ , tal que en cada posición puede ubicarse  $0, 1, -1$ , es decir, hay 27 posibles permutaciones, de las cuales se elimina  $(0, 0, 0)$  que no pertenece a  $P_2$ , y como son coordenadas homogéneas, las 26 restantes se agrupan en parejas  $(a, b, c)$  y  $(-a, -b, -c)$ , que representan al mismo punto. De manera dual, tomando las coordenadas homogéneas de la recta  $[a, b, c]$ , se llega al mismo resultado. Este conjunto de puntos y rectas cumplen todos los axiomas de incidencia, tal como se muestra en la siguiente figura, la cual hace referencia nuevamente al plano euclídeo. Observe que toda recta tiene al menos tres puntos, por cada punto pasan al menos tres rectas, cada recta se ve determinada por dos puntos, cada par de rectas determinan un único punto, pero lo más importante, todo resultado que se cumpla para  $K$  tal que  $1 + 1 \neq 0$  se cumplirá para  $\mathbb{R}$  y para  $\mathbb{C}$ .



Si  $K = \{0, 1, -1\}$ , el espacio sólo está formado por las letras  $A, B, \dots, M$  y las rectas del plano sólo son conjuntos de puntos de 3 ó 4 puntos, por ejemplo, la recta  $a$  está formada por  $B, C, E, H$ . En cambio, si consideramos  $K = \mathbb{R}$ , el esquema queda íntegro (de hecho, habría que agregar las prolongaciones de las rectas), y se observa algunas propiedades interesantes.

Dado el triángulo  $ABC$ , si se tienen tres cevianas *concurrentes*  $AE, BF, CG$ , se forma un triángulo  $EFG$ , que al prolongar sus lados y formar las intersecciones con los lados del triángulo  $ABC$  genera los puntos  $H, I, J$  que *están alineados*, hecho para nada trivial, y que según el estudio del Capítulo 1, es debido al Teorema de Desargues. Más aún, las rectas  $BI$  y  $CJ$  se cortan un punto  $K$  que *está alineado* con  $A$  y  $D$ . Análogamente se definen los puntos  $L$  y  $M$ , y por lo anterior, el triángulo  $KLM$  tiene tres cevianas  $KA, LB, MC$  que *concurrer* en  $D$ , es decir que la intersección de los lados del triángulo  $ABC$  (formado por los pies de las cevianas del triángulo  $KLM$ ) con los lados del triángulo  $KLM$  forman tres puntos *alineados*  $H, I, J$ . Esto es en síntesis una manera de probar propiedades geométricas sintéticas utilizando el plano proyectivo, y de nuevo, tales resultados se cumplirán para cualquier plano  $P_2$  sobre un cuerpo con la condición  $1 + 1 \neq 0$ .

### 3.1.2. Teorema de Desargues.

Se retoman las definiciones (16) y (17), con el cuidado que ahora los vértices y los lados de los triángulos son puntos y rectas el Plano Projectivo  $P_2$ . El Teorema de Desargues (18) sigue siendo válido, así como todos los derivados que se vinculen únicamente con propiedades de incidencia. Ya en la demostración alternativa de (18) se observa que el verdadero problema del Teorema de Desargues se encuentra cuando los triángulos son coplanares, ya que cuando no lo son, es verdadero simplemente utilizando propiedades de incidencia, tales como *Dos planos se cortan en una recta*.<sup>5</sup> Por ello se centra el esfuerzo en demostrar que en el Plano Projectivo, este resultado sigue siendo válido, y no es derivado de propiedades métricas, tal como muestra la demostración en (18) basándose en el Teorema de Menelao (6), que tiene una caracterización métrica, es decir, depende del concepto de *Distancia*.<sup>6</sup>

Se sobreentiende que *Triángulo* o *Trilátero* es el formado por tres puntos no alineados, o tres rectas no concurrentes, respectivamente, en  $P_2$ . Recordando un poco la notación, el triángulo  $ABC$  se relaciona con el trilátero  $abc$ , donde  $a$  es la recta  $BC$ ,  $b = CA$  y  $c = AB$ . También se utilizaba la notación  $C = ab$  para decir que el punto  $C$  es la intersección de las rectas  $a$  y  $b$ . Si consideramos la estructura completa formada por el triángulo  $ABC$ , es decir, los tres vértices y sus tres lados, entonces, con un pequeño abuso se dice que  $ABC = abc$ .

**(144) Teorema: Teorema de Desargues.** *Dados dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  en  $P_2$ , las rectas  $p = AA', q = BB', r = CC'$  concurren en un punto  $O$  si y sólo si los puntos  $P = aa', Q = bb', R = cc'$  están sobre una recta  $o$ .*

*Demostración:*

Suponemos que  $O$  no coincide con ningún vértice, y que todos los vértices son distintos entre si, ya que en cualquiera de esos casos el resultado es trivial. Suponemos que las rectas

---

<sup>5</sup>Este tipo de propiedades son totalmente válidas en  $P_3$ , que serían en el Espacio Projectivo  $P_3$  las equivalentes a los resultados desde (133) hasta (140) válidos en  $P_2$ , tomando en cuenta que la *Recta* es un hiperplano de  $P_2$ , mientras que un hiperplano de  $P_3$  es un *Plano*, por lo que hay que hacer el intercambio de *Recta* por *Plano*, y hay que agregar algunos otros que se obtienen de manera muy natural, por ejemplo: *Un plano en  $P_3$  está únicamente determinado por tres puntos no alineados*.

<sup>6</sup>Ya se observó que el Teorema de Menelao en el Plano Projectivo (142) tampoco tiene un vínculo métrico, sin embargo, esto es un éxito de la Geometría Projectiva, en la visión clásica lo tiene inherente.

$p, q, r$  concurren, escogiendo una determinación fija para  $O, A, B, C$ , se pueden expresar los otros tres puntos restantes como  $A' = O + \alpha A$ ,  $B' = O + \beta B$ ,  $C' = O + \gamma C$ . De aquí se observa que el punto  $R = A' - B' = \alpha A - \beta B$  por lo que pertenece a la recta  $A'B' = c'$  y a la recta  $AB = c$  (por la forma paramétrica de una recta), es decir, es el punto de intersección de tales rectas  $R = cc'$ . Análogamente  $Q = C' - A' = \gamma C - \alpha A = bb'$  y  $P = B' - C' = \alpha B - \gamma C = aa'$ . Entonces  $P + Q + R = (B' - C') + (C' - A') + (A' - B') = \hat{0}$ , son linealmente dependientes, y por lo tanto, están alineados.

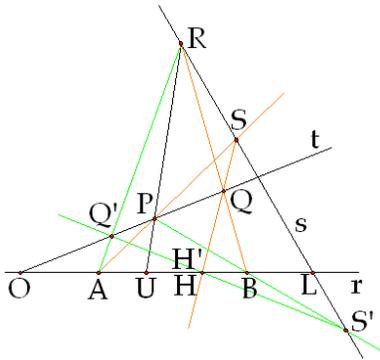
Para la otra dirección, se puede seguir el mismo camino de (18), que es totalmente válido. Otra manera de justificarlo es por Dualidad, y de allí la notación utilizada.

En notación de  $P_2$ , se dice que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son *Homológicos*, con  $O$  el *Centro de Homología* y  $o$  el *Eje de Homología*. Utilizando estas palabras en lugar de *Perspectiva*, el resultado (21) es válido, ahora para cualquier Espacio Projectivo  $P_2$ .

### 3.1.3. El Teorema de Pappus y conmutatividad del Cuerpo Base.

El Teorema de Pappus, que es el resultado (62) cuando el hexágono está inscrito alternadamente en un par de rectas distintas, también es válido en el Plano Projectivo, si y sólo si el cuerpo base  $K$  es conmutativo, de allí que este resultado se tome como criterio para la determinar la conmutatividad de  $K$ .

Dada la recta  $r$  y dos puntos  $O$  y  $L$  con una determinación fija sobre ésta, sean  $A = O + \alpha L$ ,  $B = O + \beta L$  y se quiere construir un punto  $H = O + \beta\alpha L$ . Se utilizará el punto unidad  $U = O + L$  y una recta  $s$  que pasa por  $L$  y es distinta a  $r$ . Sobre  $s$  se toma un punto  $R$  cualquiera distinto de  $L$  y se consideran las rectas  $RU$  y  $RB$ . Sea  $t$  una recta cualquiera distinta de  $r$  que pasa por  $O$  y no por  $R$ , y se define  $P$  como la intersección de  $t$  con  $RU$ , mientras que  $Q$  es la intersección de  $t$  con  $RB$ . Todas las construcciones anteriores son válidas dado las propiedades de incidencia. Suponiendo que  $P = R + \lambda U$  entonces  $Q = R + xB = P - (\lambda - x)O - (\lambda - x\beta)L$ , entonces para que  $Q$  esté sobre la recta  $t$  debe ser que  $x = \lambda\beta^{-1}$  y por lo tanto  $Q = R + \lambda\beta^{-1}B = P + \lambda(\beta^{-1} - 1)O$ . Determinando  $S$ , la intersección de  $AP$  con  $s$  se tiene que  $S = P + yA = R + (\lambda + y)O + (\lambda + y\alpha)L$ , para que  $S$  esté sobre la recta  $s$  es necesario  $y = -\lambda$  y por lo tanto  $S = P - \lambda A = R + \lambda(1 - \alpha)L$ . Finalmente se define  $H$  como la intersección de  $SQ$  con  $r$ , si  $H = S + zQ = R + \lambda(1 - \alpha)L + zR + z\lambda\beta^{-1}B$ , para que este punto esté sobre  $r$  es necesario que  $z = -1$  y por lo tanto  $H = S - Q = -\lambda\alpha L - \lambda\beta^{-1}O = -\lambda\beta^{-1}(O + \beta\alpha L)$  y por la relación de equivalencia  $H \sim -\lambda\beta^{-1}H$  se tiene  $H = O + \beta\alpha L$ , el punto buscado.



Invirtiendo los papeles de  $A$  y  $B$ , siguiendo el mismo procedimiento paso por paso se llega a un punto  $H' = O + \alpha\beta L$ , y se observa que  $H = H'$  si y sólo si  $\beta\alpha = \alpha\beta$ , y además, el hecho que tales puntos coincidan significa que se cumple el Teorema de Pappus para el hexágono  $APBQHQ'$ , con sus vértices alternados sobre las rectas  $r$  y  $t$ , y las intersecciones de lados opuestos  $S = AP \cdot QH$ ,  $S' = PB \cdot H'Q'$ ,  $R = BQ \cdot Q'A$  se ubican sobre la recta  $s$ .

**(145) Teorema: Teorema de Pappus y Conmutatividad del cuerpo base  $K$ .** *El Teorema de Pappus (62)<sup>7</sup> es válido en un espacio proyectivo  $P_2(K)$  si y sólo si  $K$  es conmutativo.*

### 3.2. Modelo de Geometría Hiperbólica de Poincaré.

En esta Sección se hará un estudio de algunas aplicaciones geométricas utilizando herramientas sintéticas y algebraicas, sin embargo, se desvincula un poco de Geometría Proyectiva tal como se ha estudiado, principalmente el trato algebraico. Este es otro enfoque algebraico para temas geométricos, y coincide con lo desarrollado anteriormente en la utilización de números complejos (sería entonces el Espacio Proyectivo definido sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$ ), sin embargo tiene sus divergencias importantes, como es en el manejo del infinito, además tiene muchas nociones de continuidad. Tales detalles de verán a continuación.

Este modelo se basa en las *Transformaciones de Moebius*, aplicaciones de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$  muy conocidas y utilizadas, sin embargo, para evitar problemas de casos particulares degenerados, es necesario trabajar en  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

La manera clásica para justificar la existencia de este conjunto, y mejor dicho, para darle un soporte teórico riguroso, es mediante la *Proyección Estereográfica*.<sup>8</sup> Suponga una esfera transparente ubicada sobre un plano, que será el Plano Complejo,<sup>9</sup> de tal forma que sea tangente en el origen del plano. El punto de tangencia será el polo sur de la esfera, y sobre el polo norte se ubica una luz, entonces los rayos de luz “proyectan” los puntos de la esfera sobre los puntos del plano, y hay así una relación biunívoca, salvo para el polo norte, que según nuestra noción, se asocia a todos los puntos al infinito del plano. Esta es la diferencia fundamental entre el Plano Proyectivo y este nuevo plano, llamado *Plano Inversivo*, y es que no considera puntos al infinito, ni la recta al infinito, sino simplemente un punto adicional  $\infty$ .

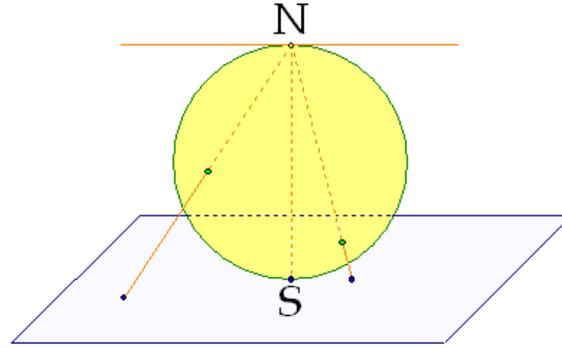
Así, el Plano Inversivo será la representación gráfica de  $\mathbb{C}^*$ . Esto lo dejaremos así, por cuestión de formalismo, sin embargo, para efectos prácticos, todas nuestras figuras se elaborarán en el Plano Complejo usual (sabiendo que luego hay que aplicar una aplicación estereográfica), de lo contrario, la elaboración de las figuras se vuelve un problema aún más difícil que resolver la cuestión en si.

Sobre el número infinito hay que detallar algunas cuestiones:

<sup>7</sup>Restringido al caso de un hexágono con sus vértices alternados sobre dos rectas distintas.

<sup>8</sup>Una hermosa y útil invención debida a Riemann

<sup>9</sup>Comunmente conocido como Plano de Gauss, aunque según Needham, fue descubierto independiente y simultáneamente por Wessel y Argand también.



- Para todo  $c \in \mathbb{C}$  se cumple:  $c \pm \infty = \infty$ ,  $c/\infty = 0$ .
- Para todo  $c \in \mathbb{C} - \{0\}$  se cumple:  $c \cdot \infty = \infty$ ,  $c/0 = \infty$ .
- También se cumple:  $\infty + \infty = \infty$ ,  $\infty \cdot \infty = \infty$ .
- Mientras que estas expresiones son consideradas indefinidas:  $\infty - \infty$ ,  $\infty/\infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $0/0$ .

### 3.2.1. Transformaciones de Moebius.

(146) **Definición: Transformación de Moebius.** La aplicación  $z' : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  definida como

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

con  $a, b, c, d$  números complejos fijos no todos nulos, es llamada *Transformación de Moebius*.

Si  $a = c = 0$  entonces  $z' = \frac{b}{d}$ , se degenera en una aplicación constante. Suavizando este fenómeno, si  $ad - bc = 0$  y suponiendo  $c \neq 0$ , dado que  $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)}$ , entonces  $z' = \frac{a}{c}$  y de nuevo se vuelve una aplicación constante (en particular será  $z' = 0$  si  $a = 0$ ). Por otra parte, si  $c = 0$ , al suponer  $ad - bc = 0$  esto implica que  $a = 0$  o  $d = 0$ , es decir  $z' = \frac{b}{d}$  o  $z' = \infty$  respectivamente, lo cual de nuevo es una aplicación constante. Todos estos casos carecen de significado especial para nuestro interés, por lo que consideraremos únicamente Transformaciones de Moebius no degeneradas, es decir, tales que  $ad - bc \neq 0$ . A este complejo se le llamará el *Determinante* de  $z'$ , y de denotará por  $\Delta = ad - bc$ .

(147) **Teorema: Transformaciones de Moebius biyectivas.** Si  $z'$  es una Transformación de Moebius no degenerada, es decir, con  $\Delta \neq 0$ , entonces es una transformación biyectiva.

*Demostración:*

Un primer problema se da si  $az + b = 0 = cz + d$  (o equivalentemente  $az + b = \infty = cz + d$ ), en cuyo caso  $-\frac{b}{a} = z = -\frac{d}{c}$ , lo cual es equivalente a  $ad - bc = 0$ , y esto es imposible dada la hipótesis  $\Delta \neq 0$ . Por otra parte,  $z'$  es inyectiva, ya que si suponemos que  $z'_1 = \frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d} = z'_2$ , acomodando esta expresión queda  $(ad - bc)(z_1 - z_2) = 0$  y dado que  $\Delta \neq 0$  esto implica  $z_1 = z_2$ . Para ver la sobreyectividad, basta observar que la aplicación inversa está bien definida  $z = \frac{-dz'+b}{cz'-a}$ , y además es una transformación de Moebius no degenerada, dado que el Determinante de  $z$  es  $(-d)(-a) - bc = \Delta \neq 0$  y por lo tanto a todo  $z'$  corresponde un  $z$  (a menos que

$-dz' + b = 0 = cz' - a$ , o equivalentemente  $ad - bc = 0$ , imposible).

Una propiedad importante de las Transformaciones de Moebius es que forma parte de las *Transformaciones Circulares*, que se definen como aquellas que transforman circunferencias en circunferencias, entendiendo que una recta es un caso particular de una circunferencia. Ya cuando se estudió la Circunferencia de Apolonio (41) se entendió la recta como una circunferencia cuyo centro es el punto al infinito de la recta, y de radio infinito, además, la circunferencia se “cierra” en ese mismo punto. Ahora se verá que al aplicar una Transformación de Moebius a una Circunferencia de Apolonio, ésta se transforma en otra Circunferencia de Apolonio.

**(148) Teorema: Transformaciones de Moebius como Transformaciones Circulares.** Una Transformación de Moebius no degenerada transforma circunferencias en circunferencias.

*Demostración:*

Considere la circunferencia de Apolonio determinada por los puntos  $z$  tal que  $|z - \alpha| = k|z - \beta|$ , donde  $k \in \mathbb{R}$  y  $p, q \in \mathbb{C}$  fijos.<sup>10</sup> Al aplicar la Transformación de Moebius  $z' = \frac{az+b}{cz+d}$  se tendrá

$$\left| \frac{-dz' + b}{cz' - a} - \alpha \right| = k \left| \frac{-dz' + b}{cz' - a} - \beta \right| \Leftrightarrow \left| z' - \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \right| = k \left| \frac{d + \beta c}{d + \alpha c} \right| \left| z' - \frac{a\beta + b}{c\beta + d} \right|$$

Es decir que  $z'$  describe la Circunferencia de Apolonio  $|z' - \alpha'| = k'|z' - \beta'|$ , con  $\alpha' = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$ ,  $\beta' = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$ ,  $k' = k \left| \frac{d + \beta c}{d + \alpha c} \right|$ .

Otra manera de deducir este resultado se basa en los conceptos de *Movimientos*, *Similitudes* e *Inversión Compleja*. No se entrará en detalle sobre estos temas, sin embargo se puede esbozar la prueba que resulta muy natural:

La transformación de Moebius  $z' = \frac{az+b}{cz+d}$  se puede descomponer en otras Transformaciones Complejas como sigue:

- Una Traslación:  $z_1 = z + \frac{d}{c}$
- Una Inversión Compleja:  $z_2 = \frac{1}{z_1}$
- Una Rotación Dilatativa con centro en el origen:  $z_3 = \frac{bc-ad}{c^2} z_2$
- Otra Traslación:  $z_4 = \frac{a}{c} + z_3$

Verificando:  $z_4 \circ z_3 \circ z_2 \circ z_1 = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \left( \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \right) = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d} = z'$ . Ahora, se utiliza el hecho que cada una de estas transformaciones transforma circunferencias en circunferencias, y por lo tanto, la composición también. De todas, la única que hay que analizar a fondo es la Inversión Compleja, pero se tomará como resultado conocido.

<sup>10</sup>Para corresponder con (41),  $z$  es el complejo afijo al punto  $P$ , mientras que  $\alpha$  y  $\beta$  los complejos afijos a los puntos fijos  $A$  y  $B$ .

Un resultado importante, aunque no se estudiará a detalle, es que la Transformaciones de Moebius no degeneradas tienen estructura de *Grupo*, considerando como la operación de grupo a la *Composición de Aplicaciones*. Esto se detalla en el siguiente teorema.

**(149) Teorema: Transformaciones de Moebius y su estructura de Grupo.** *Las transformaciones de Moebius no degeneradas forman un Grupo bajo la Composición de Aplicaciones. Además, si  $z_1$  y  $z_2$  son dos transformaciones de Moebius no degeneradas de determinantes respectivos  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ , entonces  $z' = z_2 \circ z_1$  es otra Transformación de Moebius no degenerada de determinante  $\Delta = \Delta_2 \Delta_1$ .*

*Demostración:*

La composición de aplicaciones cumple la Ley Asociativa siempre que las aplicaciones sean biyectivas, y por (147) es cierto para este caso; además en la demostración de ese mismo teorema, se observó que la Aplicación Inversa de una Transformación de Moebius no degenerada es otra Transformación de Moebius no degenerada. Por otra parte, la Transformación Identidad  $z' = z$  también es una Transformación de Moebius no degenerada. Falta verificar la cerradura, y con esto formaría Estructura de Grupo. Suponga  $z_1 = \frac{az+b}{cz+d}$  y  $z_2 = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$  entonces

$$z' = z_2 \circ z_1 = \frac{a' \left( \frac{az+b}{cz+d} \right) + b'}{c' \left( \frac{az+b}{cz+d} \right) + d'} = \frac{(aa' + b'c)z + (a'b + b'd)}{(ac' + cd')z + (bc' + dd')}$$

Es decir,  $z'$  es otra Transformación de Moebius y como además se verifica rápidamente que se cumple  $\Delta = (aa' + b'c)(bc' + dd') - (a'b + b'd)(ac' + cd') = (a'd' - b'c')(ad - bc) = \Delta_2 \Delta_1$ , y dado que  $\Delta_1 \neq 0$  y  $\Delta_2 \neq 0$  entonces  $\Delta \neq 0$ , por lo que  $z'$  es no degenerada.

Otro resultado importante es que una Transformación de Moebius queda únicamente determinada si se conoce las imágenes de tres puntos dados. Para demostrar este resultado, antes es necesario recordar el concepto de Razón Doble (57). Se definió la razón doble como un cociente de cocientes de segmentos dirigidos, ahora que se está trabajando sobre número complejos, se puede considerar en lugar de segmentos dirigidos los complejos asociados a los segmentos, y la razón doble queda entonces en función de cocientes entre números complejos.

En (57) se consideró que  $\{A, B; C, D\} = \frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}$ , donde por ejemplo  $AC$  representa el segmento dirigido que va de  $A$  hacia  $B$ , una primera transición de concepto consiste en considerar tales segmentos como vectores, lo cual es una generalización. Entonces  $\{A, B; C, D\} = \frac{\vec{AC}}{\vec{CB}} / \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}}$ , sin embargo, el cociente entre vectores no está siempre definido, pero si en lugar de tomar los vectores se toman los complejos asociados, este problema se resuelve, y se tiene una segunda transición de concepto, definiendo la razón doble como sigue:

**(150) Definición: Razón Doble en el Plano Complejo.** *Dados cuatro puntos  $A, B, C, D$ , de complejos afijos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , se define la Razón Doble como  $\{A, B; C, D\} = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma} / \frac{\delta-\alpha}{\beta-\delta}$ .*

Esta razón doble así definida cumple las mismas propiedades que (57) al permutar el orden de los puntos, en total hay 24 permutaciones, agrupadas en conjuntos de cuatro permutaciones con igual valor, por lo que hay en total 6 posibles valores.

Con esta herramienta se puede determinar una Transformación de Moebius no degenerada tal que los complejos distintos dados  $z_1, z_2$  y  $z_3$  sean aplicados en los complejos distintos  $z'_1, z'_2, z'_3$ , luego nos centraremos en demostrar su unicidad. Para formalizar, suponemos que  $z_1, z_2$  y  $z_3$  son los complejos afijos a los puntos distintos  $P_1, P_2$  y  $P_3$ , respectivamente, y de igual forma  $z'_1, z'_2$  y  $z'_3$  los complejos afijos a  $P'_1, P'_2$  y  $P'_3$ . Considere también el punto variable  $P$  de complejo afijo  $z$ . Se define la aplicación

$$B : w_B = \{P_1, P_2; P_3, P\} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} / \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \frac{z(z_1 - z_3) + z_2(z_3 - z_1)}{z(z_2 - z_3) + z_1(z_3 - z_2)}$$

Se observa que  $B$  es una Transformación de Moebius, y además es no degenerada dado que  $\Delta_B = (z_1 - z_3)z_1(z_3 - z_2) - z_2(z_3 - z_1)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) \neq 0$ .<sup>11</sup> Esta aplicación cumple que las imágenes de  $z_1, z_2, z_3$ <sup>12</sup> son respectivamente  $\infty, 0, 1$ . Análogamente se define la Transformación de Moebius no degenerada  $C : w_C = \{P'_1, P'_2; P'_3, P'\}$ , que tiene el mismo comportamiento, las imágenes de  $z'_1, z'_2, z'_3$  son  $\infty, 0, 1$ . Por la estructura de grupo de las Transformaciones de Moebius no degeneradas (149), la aplicación  $C^{-1}B$  definida como  $z' = w_C^{-1} \circ w_B$  es una Transformación de Moebius no degenerada, y cumple que al aplicarla sobre  $z_i$  devuelve  $z'_i$ , es decir  $z'(z_i) = z'_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , lo que se buscaba.

Para la unicidad, si suponemos que  $A$  es otra Transformación de Moebius no degenerada tal que las imágenes de  $z_1, z_2, z_3$  sean respectivamente  $z'_1, z'_2, z'_3$ , entonces  $A^{-1}C^{-1}B$  será una transformación de Moebius no degenerada que deja tres puntos fijos  $z_i \mapsto z_i$  para  $i = 1, 2, 3$ , y si se demuestra que ésta es forzosamente la aplicación Identidad, se tendrá  $A = C^{-1}B$ , garantizando la unicidad.

**(151) Teorema: Puntos Fijos en las Transformaciones de Moebius.** *Una transformación de Moebius no degenerada tiene a lo sumo dos puntos fijos, a menos que sea la aplicación Identidad.*<sup>13</sup>

*Demostración:*

Sea  $z' = \frac{az+b}{cz+d}$  una Transformación de Moebius no degenerada. Los puntos fijos  $w$  satisfacen la relación

$$w = \frac{aw + b}{cw + d} \Leftrightarrow cw^2 + (d - a)w - b = 0$$

Resolviendo la cuadrática para  $w$ , pueden existir una o dos soluciones (dependiendo si se anula o no el discriminante de ésta cuadrática, o bien  $c = 0$ ), y para que existan más de dos, entonces tal relación debe ser idénticamente nula, es decir  $0 \cdot w^2 + 0 \cdot w + 0 = 0$ , lo que implica  $c = d - a = -b = 0$  y por lo tanto  $z' = \frac{az}{a} = z$ ,<sup>14</sup> la aplicación Identidad.

Este teorema rellena el hueco faltante en la demostración anterior, y con esto queda probado el siguiente teorema

<sup>11</sup>Recuerde que  $z_1, z_2, z_3$  son complejos distintos.

<sup>12</sup>Es decir,  $P$  coincide con  $P_{i=1,2,3}$ .

<sup>13</sup>En cuyo caso, todos los puntos del plano son puntos fijos.

<sup>14</sup>Dado que por definición, no pueden  $a, b, c, d$  ser todos nulos a la vez.

**(152) Teorema: Determinación de una Transformación de Moebius.** Una transformación de Moebius no degenerada queda únicamente determinada si se conoce la imagen de tres puntos distintos dados, y tales imágenes son también tres puntos distintos.

La razón doble está intrínsecamente relacionada con las Transformaciones de Moebius, tal como se acaba de ver, y una propiedad fundamental es que la razón doble de cuatro puntos coincide con la razón doble de sus imágenes, tras una Transformación de Moebius. Esto se puede verificar directamente, tomando una Transformación de Moebius general, cuatro puntos, sus cuatro imágenes, y calcular las respectivas razones dobles, pero es un trabajo algebraico demasiado arduo. En lugar de eso, utilizando las nociones del teorema anterior, tomando tres puntos  $z_1, z_2, z_3$  y sus imágenes  $z'_1, z'_2, z'_3$  tras la transformación de Moebius únicamente determinada  $C^{-1}B$ , al aplicarla a un complejo arbitrario  $z$  se tendrá que  $z' = w_C^{-1} \circ w_B(z)$ , o lo que es lo mismo

$$w_B(z) = w_C(z') \Leftrightarrow \{z, z_3; z_2, z_1\} = \{z', z'_3; z'_2, z'_1\}$$

Por lo que al variar  $z$ , la razón doble que éste forma con los  $z_i$  es la misma que forma  $z'$  con los  $z'_i$ . Así

**(153) Teorema: Razón Doble en Transformaciones de Moebius.** La razón doble es invariante tras una Transformación de Moebius no degenerada.

Una propiedad muy utilizada en Geometría sobre la razón doble tal como se ha definido, es que dado cuatro puntos  $A, B, C, D$  se cumple  $\{A, B; C, D\} \in \mathbb{R}$  si y sólo si los cuatro puntos están sobre una circunferencia.<sup>15</sup> Las pruebas geométricas hacen uso de la razón doble y su interpretación geométrica, y el resultado es cierto debido a que la suma de ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico es  $180^\circ$ . A continuación se muestra una manera netamente algebraica

Si suponemos que  $z_1, z_2, z_3, z_4$  son tales que  $\{z_1, z_2; z_3, z_4\} \in \mathbb{R}$ , y si se considera la transformación de Moebius<sup>16</sup>  $z'$  tal que las imágenes  $z'_1, z'_2, z'_3$  están sobre el eje real, definiendo

$$k = \frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_3} / \{z'_1, z'_2; z'_3, z'_4\} = \frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_3} / \{z_1, z_2; z_3, z_4\}$$

se concluye que  $k \in \mathbb{R}$ , por lo tanto  $z'_4 = \frac{z'_1 + kz'_2}{k+1} \in \mathbb{R}$ . Como la preimagen de la recta real en la cual se ubican  $z'_1, z'_2, z'_3$  es la circunferencia en la cual se ubican  $z_1, z_2, z_3$ ,<sup>17</sup> y dado que  $z'_4$  pertenece a la recta real, su preimagen  $z_4$  pertenece a la circunferencia de  $z_1, z_2$  y  $z_3$ . Con esto  $z_1, z_2, z_3, z_4$  pertenecen a una misma circunferencia. Para demostrar el recíproco, suponemos  $z_1, z_2, z_3, z_4$  sobre una circunferencia, y de nuevo, una transformación de Moebius tal que  $z'_1, z'_2, z'_3$  están sobre el eje real, como la imagen de la circunferencia tras la transformación es el eje real, entonces  $z_4$  se mueve a un punto sobre el eje real, entonces  $\{z'_1, z'_2; z'_3, z'_4\} \in \mathbb{R}$ , y por tanto  $\{z_1, z_2; z_3, z_4\} \in \mathbb{R}$ .

<sup>15</sup>Entendiendo la recta como un caso particular de circunferencia.

<sup>16</sup>Que existe y es única.

<sup>17</sup>Es el circuncírculo del  $\Delta z_1 z_2 z_3$ , el cual existe y es único, que puede ser también una recta como caso particular de circunferencia.

Una propiedad importante es el comportamiento de las transformaciones de Moebius con respecto al interior de una circunferencia dada. Suponiendo  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  dos circunferencias en el plano complejo tal que  $\Gamma'$  es la imagen de  $\Gamma$  tras una transformación de Moebius  $z'$ , se cumple que

**(154) Teorema: La Transformación de Moebius sobre un círculo.** *El interior de un circunferencia  $C$  es transformado por  $z'$  en el exterior o en el interior de la circunferencia imagen  $C'$ .*

*Demostración:*

En primer lugar, dada la disección de una transformación de Moebius,  $z'$  se descompone en aplicaciones que convierten el interior en el interior, a excepción de la Inversión Compleja, dado que a su vez está compuesta por una Inversión Geométrica, respecto a la circunferencia unitaria centrada en el origen, y una Reflexión, respecto al eje real, y de estas aplicaciones, la Reflexión convierte el interior en el interior mientras que la Inversión Geométrica puede convertir el interior en el exterior o el interior. Analizando este problema algebraicamente, considere el plano complejo como  $\mathbb{R}^2$ , si se aplica una Inversión Geométrica (37) con respecto a la circunferencia centrada en el origen  $\Gamma(x, y) \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$ , utilizando coordenadas rectangulares y polares, el punto  $P = (X, Y) = [\rho, \theta]$  se transforma en el punto  $P' = (X', Y') = \left[ \frac{r^2}{\rho}, \theta \right]$ . Como  $\cos\theta = \frac{X}{\rho} = \frac{X'}{r^2/\rho}$ , implica que  $X = \frac{X'r^2}{r^2/\rho}$ , pero  $\rho^2 = r^4 / (X'^2 + Y'^2)$  entonces

$$X = \frac{X'r^2}{X'^2 + Y'^2}$$

y análogamente

$$Y = \frac{Y'r^2}{X'^2 + Y'^2}$$

Invirtiéndolo la circunferencia  $C(X, Y) \equiv X^2 + Y^2 + 2aX + 2bY + c = 0$  con respecto a  $\Gamma$ , la circunferencia inversa será

$$C'(X', Y') \equiv \left( \frac{X'r^2}{X'^2 + Y'^2} \right)^2 + \left( \frac{Y'r^2}{X'^2 + Y'^2} \right)^2 + 2a \left( \frac{X'r^2}{X'^2 + Y'^2} \right) + 2b \left( \frac{Y'r^2}{X'^2 + Y'^2} \right) + c = 0$$

Simplificando queda

$$C'(X', Y') \equiv X'^2 + Y'^2 + \frac{2ar^2}{c}X' + \frac{2br^2}{c}Y' + \frac{r^4}{c} = 0$$

Haciendo este mismo proceso sobre un punto cualquiera  $(x, y)$  y utilizando el mismo cambio de variables  $(x', y')$ , la función en dos variables  $C(x, y)$ <sup>18</sup> puede ser escrita como

$$C(x, y) \equiv \frac{c}{x'^2 + y'^2} \left( x'^2 + y'^2 + \frac{2ar^2}{c}x' + \frac{2br^2}{c}y' + \frac{r^4}{c} \right) \equiv \frac{c}{x'^2 + y'^2} C'(x', y')$$

<sup>18</sup>En particular  $C(x, y) \equiv 0$  es la circunferencia  $C$ .

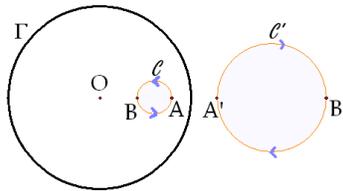
O lo que es lo mismo<sup>19</sup>

$$Pot(P, C) = \frac{c}{x'^2 + y'^2} Pot(P', C')$$

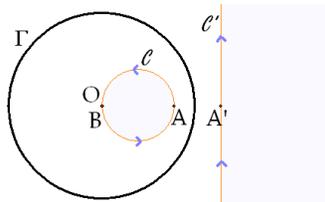
Si ahora suponemos que el origen  $(0, 0)$  está al interior de  $C$  se tendrá que  $C(0, 0) = c < 0$ , entonces  $c / (x'^2 + y'^2) < 0$ . Considerando los puntos  $(X, Y)$  interiores a  $C$ , éstos satisfacen  $C(X, Y) < 0$ , entonces por la relación anterior  $C'(X', Y') > 0$ , por lo tanto  $(X', Y')$ , los puntos inversos de  $(X, Y)$  con respecto a  $\Gamma$ , están en el exterior de  $C'$ . En resumen, si el origen está en el interior de  $C$ , entonces los puntos interiores de  $C$  se invierten en los puntos exteriores de  $C'$ , y análogamente, si el origen está en el exterior de  $C$ , entonces los puntos interiores de  $C$  se invierte en los puntos interiores de  $C'$ . Así, la transformación de Moebius transforma el interior de una circunferencia  $C$  en el exterior o el interior de la circunferencia imagen  $C'$ .

Una manera gráfica de ver este problema es considerarle movimiento a las curvas (es decir, se parametriza y se señala la dirección del recorrido de la curva al evaluar el parámetro), y la región que queda “a la izquierda” de una curva parametrizada será la preimagen de la región que queda “a la derecha” de la curva imagen. En la demostración se observa que de todas las componentes de una transformación de Moebius, la “problemática” es la Inversión Geométrica; a continuación se proporcionan algunas circunferencias y sus inversas geométricas, para visualizar el comportamiento: El punto  $B$  se mueve en dirección al origen, así, la circunferencia de diámetro  $AB$  pasa de no contener a  $O$  a sí contenerlo

- $C$  no contiene a  $O$ , el interior se invierte en el exterior

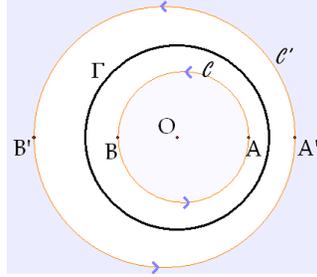


- $C$  pasa por  $O$ ,  $C'$  es una circunferencia especial, una línea recta, y no define claramente su interior o su exterior



<sup>19</sup>Recordando el concepto de Potencia de Punto (38), dada la circunferencia de centro  $(h, k)$  y radio  $R$ :  $\Phi(x, y) \equiv (x - h)^2 + (y - k)^2 - R^2 = 0$ , y un punto cualquiera  $T = (u, v)$ , la Potencia de Punto se define como  $Pot(T, \Phi) = d^2 - R^2 = (u - h)^2 + (v - k)^2 - R^2 = \Phi(u, v)$ . Con esto, la función en dos variables  $\Phi(x, y)$  es la Potencia de Punto, y cumple  $\Phi(u, v) = 0$  si y sólo si  $T$  pertenece a la circunferencia  $\Phi$ ,  $\Phi(u, v) < 0$  si y sólo si  $T$  está en el interior de  $\Phi$ ,  $\Phi(u, v) > 0$  si y sólo si  $T$  está en el exterior de  $\Phi$ .

- $C$  contiene a  $O$ , el interior se invierte en el exterior



Un resultado derivado del anterior y de mucho interés es el siguiente

**(155) Corolario:** Si un punto interior de  $\Gamma$  se transforma en un punto interior de  $\Gamma'$ , entonces todo el interior de  $\Gamma$  se transforma en todo el interior de  $\Gamma'$ .

Está claro que puede intercambiarse *interior* por *exterior*, y el resultado es igualmente válido.

Otra propiedad importante de las Transformaciones de Moebius es que son *Transformaciones Conformes*, esto significa que conserva el ángulo entre curvas<sup>20</sup> en magnitud y orientación. Una manera de probar esta propiedad se basa en la disección de una transformación de Moebius, de nuevo, la transformación problemática es la Inversión Compleja, dado que el resto son Similitudes Directas y por tanto Conformes. Pero la Reflexión es una transformación *Anti-Conforme*,<sup>21</sup> y por vía sintética es relativamente sencillo probar que la Inversión Geométrica también es Anti-Conforme, y por lo tanto la Inversión Compleja, que es la composición de una Inversión Geométrica y una Reflexión, es una transformación Conforme. Sin embargo, a continuación se abordará una vía fundamentalmente algebraica para demostrar esta propiedad.

**(156) Teorema: Transformación de Moebius Conforme.** Las Transformaciones de Moebius no degeneradas son Transformaciones Conforme.

*Demostración:*

Sean  $\psi$  y  $\zeta$  dos curvas continuas que se cortan en un punto  $A$ , de complejo afijo  $z_0$ . Si  $z' = (az + b) / (cz + d)$  es una transformación de Moebius no degenerada se cumple que  $ad - bc \neq 0$ . Suponemos que las tangentes a las curvas existen en el punto  $A$  y  $A'$ , para que nuestro problema tenga sentido. De igual manera, suponemos que  $cz_0 + d \neq 0$ , porque en caso contrario  $z'_0 = \infty$ , y de nuevo, nuestro problema pierde sentido. Si  $P_1$  es un punto que se mueve continuamente sobre  $\psi$  acercándose a  $A$ , la recta  $P_1A$  tiende a la recta tangente a  $\psi$  por  $A$ , y de igual manera, la recta  $P'_1A'$  tiende a la recta tangente a  $\psi'$  por  $A'$ . Un fenómeno análogo sucede si se considera un punto  $P_2$  variando sobre  $\zeta$  y acercándose continuamente a  $A$ . Si  $z_1$  y  $z_2$  son los complejos

<sup>20</sup>Cuando existe. El ángulo entre dos curvas está definido como el formado por las rectas tangentes en un punto de intersección.

<sup>21</sup>Mantiene la magnitud de los ángulos entre curvas pero cambia su orientación.

afijos a  $P_1$  y  $P_2$ , se cumplen las siguientes relaciones

$$z'_0 - z'_1 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{(ad - bc)(z_0 - z_1)}{(cz_0 + d)(cz_1 + d)}$$

$$z'_0 - z'_2 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = \frac{(ad - bc)(z_0 - z_2)}{(cz_0 + d)(cz_2 + d)}$$

Por otra parte, como  $P_1$  y  $P_2$  tienden a  $A$ , entonces en el límite  $cz_1 + d = cz_2 + d$  y en tal caso

$$\frac{z'_0 - z'_1}{z'_0 - z'_2} = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2}$$

Es decir, en el límite  $\Delta P_1 A P_2$  es semejante en orden directo al  $\Delta P'_1 A' P'_2$ , con  $\angle P_1 A P_2 = \angle P'_1 A' P'_2$ , y dado que  $P_1 A$  y  $P_2 A$  son las tangentes a  $\psi$  y  $\zeta$  por  $A$ , mientras que  $P'_1 A'$  y  $P'_2 A'$  son las tangentes a  $\psi'$  y  $\zeta'$  por  $A'$ , entonces la transformación de Moebius  $z'$  es Conforme.

### 3.2.2. Cuatro teoremas sobre circunferencias ortogonales.

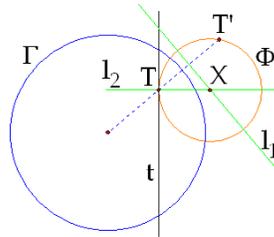
Hay algunas propiedades geométricas sobre circunferencias ortogonales que necesitaremos más adelante. Considere una circunferencia  $\Gamma$

**(157) Propiedad: Circunferencia Ortogonal dado una recta y un punto sobre ella.** Dada una recta  $t$  y un punto  $T$  sobre ella, existe una única circunferencia ortogonal a  $\Gamma$  que es tangente a  $t$  en  $T$ .

*Demostración:*

En la construcción de las familias ortogonales que conformaban las Circunferencias de Apolonio (42), la familia A estaba formada por todas aquellas que pasaban por dos puntos inversos  $C$  y  $D$ , con respecto a una circunferencia fija de la familia B, y se cumple que todas las circunferencias de A son ortogonales a esta circunferencia dada de B. Esta misma propiedad la utilizaremos nuevamente, y puede enunciarse como sigue:

Una circunferencia  $\Phi$  pasa por  $T$  y es ortogonal a  $\Gamma$  si y sólo si pasa por  $T'$ , el punto Inverso de  $T$  con respecto a  $\Gamma$ .



Esto es equivalente a decir que el centro de  $\Phi$  pertenece a la mediatriz de  $TT' = l_1$ . Por otra parte, para que  $\Phi$  sea tangente a  $t$  en  $T$ , el centro de  $\Phi$  pertenece a la recta  $l_2$  perpendicular a  $t$  por  $T$ . Así, el punto de corte  $X$  de  $l_1$  y  $l_2$  es el centro de  $\Phi$ , el cual existe y es único y el radio de  $\Phi$  será  $XT$ .<sup>22</sup>

<sup>22</sup> $X$  puede ser un punto al infinito, cuando  $t$  pasa por el centro de  $\Gamma$ , en cuyo caso  $\Phi = t$ . Otro caso extremo a considerar es cuando  $T$  pertenece a  $\Gamma$ , entonces  $T = T'$  y  $l_1$  será la tangente a  $\Gamma$  por  $T$ . También, si  $T$  coincide con el centro de  $\Gamma$  entonces  $l_2 = \Phi$ .

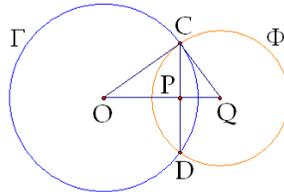
**(158) Propiedad: Circunferencia Ortogonal dados dos puntos.** *Dados dos puntos distintos, existe una única circunferencia ortogonal a  $\Gamma$  que pasa por ambos puntos.*

*Demostración:*

Si los puntos dados son  $A$  y  $B$ , basta aplicar en ambos el algoritmo que se utilizó anteriormente para determinar  $l_1$ ; si  $l_A$  y  $l_B$  son las recta así obtenidas,  $X$  es la intersección de  $l_A$  y  $l_B$ . Falta únicamente verificar  $XA = XB$ , y esto es cierto dado que  $A, A', B, B'$  se ubican en una misma circunferencia, porque si  $O$  y  $r$  son el centro y el radio de  $\Gamma$ , se cumple  $OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB'$ , y esta es condición suficiente para que dichos puntos formen un cuadrilátero cíclico. Así  $\Phi$  es la circunferencia de centro  $X = l_A \cap l_B$  y radio  $XA = XB$ .

**(159) Propiedad: Centros de circunferencias ortogonales.** *Si  $\Phi$  es una circunferencia ortogonal a  $\Gamma$ , entonces el centro  $O$  de  $\Gamma$  está en el exterior de  $\Phi$ , y el centro  $Q$  de  $\Phi$  está en el exterior de  $\Gamma$ . Además, la intersección del eje radical de las circunferencias con la recta que une los centros forma un punto  $P$  tal que es el inverso de cada centro con respecto a la otra circunferencia, es decir  $P = Inv(O, \Phi) = Inv(Q, \Gamma)$ .*

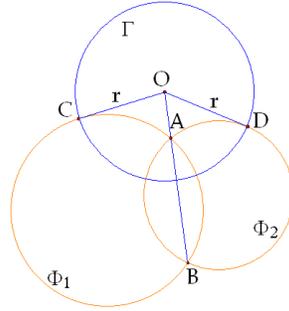
Suponga que las intersecciones de  $\Gamma$  y  $\Phi$  son  $C$  y  $D$ , entonces  $CD$  es el eje radical de  $\Gamma$  y  $\Phi$ . Claramente, cada centro debe estar en el exterior de la otra circunferencia, dado que el triángulo rectángulo  $OCQ$  tiene por hipotenusa la distancia entre los centros y de catetos los radios. Se sabe que  $CD \perp OQ$  por propiedades de eje radical, y  $CO \perp CQ$  dada la ortogonalidad de las circunferencias. Con esto se observa fácilmente que  $\triangle COQ \cong \triangle POC \cong \triangle PCQ$  y de allí se deduce  $OP \cdot OQ = OC^2$  y  $QP \cdot QO = QC^2$ , lo que se quería demostrar.



**(160) Propiedad: Dos circunferencias ortogonales a  $\Gamma$ .** *Si  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son circunferencias ortogonales a  $\Gamma$ , los puntos de intersección  $A$  y  $B$  (si existen) de  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son tales que uno es inverso del otro respecto a  $\Gamma$ . Además, si  $A$  está en el interior de  $\Gamma$  entonces  $B$  está en el exterior, y en caso extremo, ambos coinciden y están sobre  $\Gamma$ .*

*Demostración:*

Sean  $O$  y  $r$  el centro y el radio de  $\Gamma$ ,  $C$  una intersección de  $\Phi_1$  con  $\Gamma$ ,  $D$  una intersección de  $\Phi_2$  con  $\Gamma$ . Como  $\Gamma$  y  $\Phi_1$  son ortogonales se cumple que  $Pot(O, \Phi_1) = OC^2$ . Análogamente, como  $\Gamma$  y  $\Phi_2$  son ortogonales,  $Pot(O, \Phi_2) = OD^2$ . Además,  $OC = r = OD$  por lo que  $Pot(O, \Phi_1) = Pot(O, \Phi_2)$ , es decir,  $O$  pertenece al eje radical de  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ , que es la recta  $AB$ . Con esto  $OA \cdot OB = r^2$ , lo cual significa que  $A$  y  $B$  son puntos inversos con respecto a  $\Gamma$ . Si ahora suponemos que  $A$  está en el interior de  $\Gamma$  entonces  $OA < r \Rightarrow OB > r$ , es decir,  $B$  está en el exterior. Como caso extremo,  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son tangentes en  $A = B$  y se cumple  $OA = r = OB$ , por lo que el punto de tangencia pertenece a  $\Gamma$ .



### 3.2.3. M-Transformaciones.

Un subgrupo de las Transformaciones de Moebius que necesitaremos para la Geometría de Poincaré, las cuales juegan el mismo rol aquí que las *Isometrías Conformes* en la Geometría Euclidiana, son las Transformaciones de Moebius que dejan invariante la circunferencia unitaria y además, transforman el interior de ésta en el interior. A tales transformaciones las llamaremos *M-Transformaciones*. Este conjunto de M-Transformaciones no es vacío, por ejemplo la Identidad, o las rotaciones  $z' = az$ , con  $|a| = 1$ , pertenecen al conjunto, además, es fácil verificar que tal conjunto en efecto tiene estructura de Grupo. A la circunferencia unitaria la llamaremos  $\omega$  y a su interior  $\Omega$ . El conjunto de los puntos la Geometría no Euclidiana de Poincaré son los puntos de  $\Omega$ , y de allí la necesidad de tener transformaciones que muevan puntos de  $\Omega$  a  $\Omega$ , que son las M-Transformaciones.

Ahora bien, el hecho de considerar únicamente este tipo de M-Transformaciones, que conservan la orientación de los ángulos (Conformes), causa problema al momento de definir la semejanza de triángulos, que según la literatura clásica, no hace distinción de la orientación de los ángulos, por ello, se necesita definir también las M-Transformaciones Anti-Conformes (cambia la orientación de los ángulos) basadas en las Transformaciones de Moebius Anti-Conformes, que son de la forma

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

Así, las M-Transformaciones Anti-Conformes son aquellas Transformaciones de Moebius Anti-Conformes que dejan invariante a  $\omega$  y transforman  $\Omega$  en  $\Omega$ . Está claro que las M-Transformaciones Anti-Conformes no forman un Grupo por sí solas, pero en conjunto, las M-Transformaciones Conformes y Anti-Conformes sí, a tal grupo de transformaciones las denominaremos  $M^*$ -Transformaciones.

A continuación se derivarán algunos teoremas con M-Transformaciones Conformes.

**(161) Teorema: M-Transformación dado un punto y una dirección.** *Dados dos puntos A y B en  $\Omega$ , y dos direcciones (vectores)  $\alpha$  y  $\beta$  por A y B respectivamente, se cumple que existe una única M-Transformación que  $A \rightarrow B$  y cambia la dirección de  $\alpha$  a  $\beta$ .*

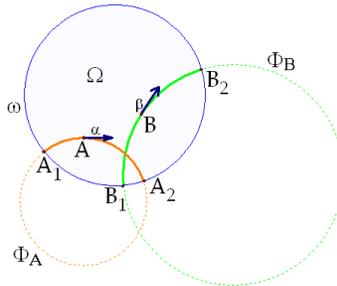
*Demostración:*

Por (157), sea  $\Phi_A$  la circunferencia<sup>23</sup> ortogonal a  $\omega$  que pasa por A con dirección  $\alpha$  en

---

<sup>23</sup>Existe y es única.

$A$  (esto quiere decir que es tangente en  $A$  a una recta que contiene al vector  $\alpha$ ). Análogamente se define  $\Phi_B$ . Como las transformaciones de Moebius son Conformes (156), y las M-Transformaciones dejan invariante  $\omega$ , cualquier circunferencia ortogonal a  $\omega$  se M-transforma en una circunferencia ortogonal a  $\omega$ . De aquí que si aplicamos a  $\Phi_A$  cualquier M-Transformación tal que  $(A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ , se M-transformará en una circunferencia ortogonal a  $\omega$  que pasa por  $B$  y con dirección  $\beta$ , y esta es justamente la definición de  $\Phi_B$ . En conclusión, cualquier M-Transformación que  $(A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$  también  $\Phi_A \rightarrow \Phi_B$ . Sean  $A_1$  y  $A_2$  las intersecciones de  $\Phi_A$  con  $\omega$ , y análogamente se define  $B_1$  y  $B_2$ . Suponga que estos puntos han sido etiquetados de tal forma que al recorrer la intersección de  $\Phi_A$  con  $\Omega$  en la dirección de  $\alpha$  se inicia en  $A_1$  y se termina en  $A_2$ , y análogamente para  $B_1$  y  $B_2$ . Entonces, si una M-transformación existe tal que  $(A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ , debe cumplir que  $A_1 \rightarrow B_1$  y  $A_2 \rightarrow B_2$ , pero una Transformación de Moebius está determinada de manera única si se sabe las imágenes de tres puntos dados (152), que para nuestro caso son<sup>24</sup>  $A, A_1, A_2$  de imágenes respectivas  $B, B_1, B_2$ . Ahora hay que verificar que esta transformación de Moebius es una M-Transformación. Esto es cierto, dado que tal transformación en principio  $\Phi_A \rightarrow \Phi_B$ , además, dado que  $A \rightarrow B$  por (155) mueve  $\Omega$  a  $\Omega$ , y finalmente, mueve una circunferencia  $\omega$  ortogonal a  $\Phi_A$  que pasa dos puntos<sup>25</sup>  $A_1$  y  $A_2$  en otra circunferencia que debe ser ortogonal a  $\Phi_B$  y pasar por los puntos  $B_1$  y  $B_2$ , que es nuevamente  $\omega$ , es decir, deja invariante a  $\omega$ . Por lo tanto, la transformación de Moebius que mueve  $(A, \alpha)$  en  $(B, \beta)$  y deja invariante a  $\omega$  existe, es única y es una M-Transformación que mueve  $\Phi_A$  a  $\Phi_B$ , y en particular, mueve la intersección de  $\Phi_A$  con  $\Omega$  a la intersección de  $\Phi_B$  con  $\Omega$ .



Es de observar que en esta demostración, si en lugar de tomar la dirección  $\alpha$  se hubiera tomado la  $-\alpha$ , se obtiene una M-Transformaciones muy parecida a la anterior, con la única diferencia que  $A_2 \rightarrow B_1$  y  $A_1 \rightarrow B_2$ . Es decir, para llegar a  $\Phi_B$  mediante una M-Transformación que  $A \rightarrow B$ , se llega desde  $\Phi_A$  con una dirección  $\alpha$  o  $-\alpha$  en  $A$ , y no hay más porque direcciones tangentes a  $\Phi_A$  por  $A$  sólo son esas dos, que generan los mismos puntos de intersección  $A_1$  y  $A_2$ . Así, se tiene el siguiente corolario:

**(162) Corolario:** *Dados dos puntos  $A$  y  $B$  en  $\Omega$ ,  $\Phi_A$  y  $\Phi_B$  son circunferencias ortogonales a  $\omega$  que pasan por  $A$  y  $B$  respectivamente, entonces hay exactamente dos M-Transformaciones tal que  $A \rightarrow B$  y  $\Phi_A \rightarrow \Phi_B$ .*

**(163) Teorema: Intercambiando puntos con M-Transformaciones.** *Existe una única M-Transformación que intercambia dos puntos distintos dados  $A$  y  $B$  en  $\Omega$ .*

<sup>24</sup>Los cuales no dependen de la existencia o no de la M-Transformación.

<sup>25</sup>Que está determinada de manera única por (158).

*Demostración:*

Sea  $\Phi$  la circunferencia ortogonal a  $\omega$  que pasa por  $A$  y  $B$ , por (158) existe y es única. Se cumple entonces que cualquier M-Transformación que intercambie  $A$  y  $B$  debe dejar invariante a  $\Phi$ . Tomando  $\Phi_A = \Phi = \Phi_B$ , por el corolario anterior, hay únicamente dos M-Transformaciones que dejan invariante a  $\Phi$  y  $A \rightarrow B$ , por tanto son las únicas candidatas para intercambiar a  $A$  y  $B$ . Llamando a  $A_1 = X_1 = B_1$  y a  $A_2 = X_2 = B_2$ , estas se clasifican así:

- Cumple que  $X_1 \rightarrow X_1$  y  $X_2 \rightarrow X_2$ .
- Cumple que  $X_1 \rightarrow X_2$  y  $X_2 \rightarrow X_1$ .

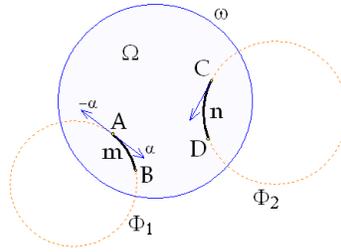
En el primer caso, utilizando el conocido *Teorema del Punto Fijo*, como la M-Transformación es una aplicación continua tal que  $\Omega \rightarrow \Omega$  debe existir al menos un punto fijo  $P$  en  $\Omega$ . Con esto,  $X_1, X_2, P$  serían puntos fijos y por (151) la M-Transformación debe ser la aplicación Identidad, que claramente no intercambia a  $A$  y  $B$  a menos que  $A = B$ , contradicción. En el segundo caso, el arco  $X_1X_2 = \Phi \cap \Omega$  se transforma en el mismo arco pero con orientación cambiada  $X_2X_1$ , se sabe además que  $A \rightarrow B$  y se corroborará que  $B \rightarrow A$ ; en primera instancia suponga que  $B \rightarrow A'$ , como cualquier Transformación de Moebius deja invariante la Razón Doble (153) se cumple que  $\{X_1, X_2; A, B\} = \{X_2, X_1; B, A'\}$ , por propiedades de razón doble se cumple además que  $\{X_2, X_1; B, A'\} = \{X_1, X_2; A', B\}$  entonces  $\{X_1, X_2; A, B\} = \{X_1, X_2; A', B\}$  de donde  $A = A'$ , lo que se quería demostrar.

La generalización de este teorema no se puede realizar para dos puntos y sus imágenes, sin embargo, se verá en seguida que si existe alguna M-Transformación que a dos puntos dados los mueve a otros dos puntos dados, ésta queda determinada de manera única. Así, el teorema anterior aborda un caso en el que tal transformación siempre existe.

**(164) Teorema: Transformando arcos con M-Transformaciones.** *Dados cuatro puntos  $A, B, C, D$  en  $\Omega$ , si existe una M-Transformación tal que  $A \rightarrow C$  y  $B \rightarrow D$  entonces ésta es única. Además, si  $\Phi_1$  es la circunferencia única que pasa por  $A$  y  $B$  y es ortogonal a  $\omega$ ,  $\Phi_2$  es la circunferencia única que pasa por  $C$  y  $D$  y es ortogonal a  $\omega$ , se cumple que la M-Transformación antes descrita también mueve los arcos completos de  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  contenidos en  $\Omega$ :  $\widehat{AB} \rightarrow \widehat{CD}$ .*

*Demostración:*

Cualquier M-Transformación tal que  $A \rightarrow C$  y  $B \rightarrow D$ , por ser Transformación de Moebius y por tanto Conforme (156), transforma una circunferencia ortogonal a  $\omega$  que pasa por  $A$  y  $B$  en una circunferencia ortogonal a  $\omega$  que pasa por  $C$  y  $D$ , es decir,  $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ . Por (162), se sabe que hay únicamente dos M-Transformaciones tal que  $A \rightarrow C$  y  $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ , y por hipótesis, suponemos también que  $B \rightarrow D$ . Estas dos transformaciones son las únicas candidatas. Llamando  $m$  y  $n$  a los arcos de circunferencia  $\widehat{AB}$  y  $\widehat{CD}$  de  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  respectivamente, que están contenidos en  $\Omega$ , como las transformaciones de Moebius candidatas son M-Transformaciones, transforman  $\Omega$  en  $\Omega$  entonces  $m \rightarrow n$ . Con esto, si consideramos la siguiente figura, de las direcciones posibles en  $A$  (cada cual genera una M-Transformación distinta) está claro que se escogerá la dirección  $\alpha$ , y de allí que la M-Transformación, si existe, es única.



### 3.2.4. Modelo de Poincaré.

El conjunto de puntos del Modelo Geométrico de Poincaré está compuesto por los puntos de  $\Omega$ , que son los Puntos Propios, y los puntos de  $\omega$  representan los Puntos al Infinito o Puntos Impropios. A estos puntos se les denomina *p-puntos*. En total, el círculo unitario representa el plano completo en este modelo. Por otra parte, las rectas son los arcos de circunferencia contenidas en  $\Omega$  y ortogonales a  $\omega$ , cuyos extremos están sobre esta circunferencia. A estas rectas las llamaremos *p-rectas*. Se considera que los puntos de  $\omega$  sean los puntos ideales para garantizar que las rectas se puedan extender infinitamente sobre los puntos propios, y que así la recta no pierda esa característica descrita por Euclides como “prolongable infinitamente”. La *incidencia* se define de la manera usual, una *p-recta* está compuesta por todos los *p-puntos* que inciden en ella, que son infinitos, y también, por un *p-punto* inciden infinitas *p-rectas*. Por otra parte, los ángulos se definen de la manera usual, es decir, en términos de las tangentes locales a los puntos de intersección de las figuras.

Por (158) se tiene

- *Por dos p-puntos distintos incide una única p-recta.*

Entonces dos *p-rectas* distintas se cortan en a lo sumo un *p-punto*, ya que en caso contrario, habrían dos *p-rectas* distintas que incidieren sobre dos *p-puntos* distintos, contradiciendo el resultado anterior. Una manera directa de obtener este mismo resultado es en base a (160), que en términos de *p-rectas* diría que dos *p-rectas* se cortan en dos puntos (considerando la circunferencia completa que contiene a cada *p-recta*), un *p-punto* y otro un no *p-punto*. Así

- *Por dos p-rectas distintas incide a lo sumo un p-punto.*

En (160) se consideró un caso extremos en el que las circunferencias ortogonales a  $\omega$  son tangentes entre si, se demostró que el punto de tangencia pertenece a  $\omega$ . Este caso extremo sirve para definir las *p-rectas paralelas*, que serán aquellas que se cortan en algún punto al infinito del modelo, es decir un punto de  $\omega$ .

- *Dos p-rectas distintas son paralelas si y sólo si cortan en un punto de  $\omega$ .*

Otro concepto importante es el de *p-segmento*. Un *p-segmento*  $AB$  se define como el conjunto de *p-puntos* sobre una *p-recta* que se ubican entre los *p-puntos*  $A$  y  $B$  que inciden en ella. Según (164), las *M-Transformaciones* pueden tomar el rol de movimientos rígidos en esta nueva geometría (Isometrías), y se dirá entonces que dos *p-segmentos*  $AB$  y  $CD$  son iguales si existe una *M-Transformación* tal que  $A \rightarrow C$  y  $B \rightarrow D$ . En tal caso se escribirá  $AB \stackrel{p}{=} CD$ . Esto sería la igualdad considerando “segmentos dirigidos” según nuestra noción con la Geometría Euclídea, si se quiere librar de la orientación, entonces deberá admitirse que tal igualdad sea en base a *M\**-Transformaciones. Resumiendo

- Dos  $p$ -segmentos  $AB$  y  $CD$  son iguales y con igual orientación si y sólo si existe una  $M$ -Transformación tal que  $A \rightarrow C$  y  $B \rightarrow D$ . Para librar la orientación se considera entonces una  $M^*$ -Transformación con la misma característica. En ambos casos se escribirá  $AB \stackrel{p}{=} CD$ , y se distinguirá dependiendo del contexto.

Si se considera ahora tres  $p$ -puntos distintos no  $p$ -alineados y las tres  $p$ -rectas distintas que éstos definen se llega al  $p$ -triángulo, y así como en la Geometría Euclídea se considera que dos triángulos son congruentes cuando hay un *movimiento* que permite hacerlos coincidir, en el modelo de Poincaré se definirá de la misma manera, pero en base a  $M$ -Transformaciones, es decir

- Dos  $p$ -triángulos  $\Delta ABC$  y  $\Delta A'B'C'$  son congruentes y con igual orientación si y sólo si existe una  $M$ -Transformación tal que  $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow B'$ ,  $C \rightarrow C'$ . Para librar la orientación se considerará entonces una  $M^*$ -Transformación con la misma característica. En ambos casos se escribirá  $\Delta ABC \stackrel{p}{=} \Delta A'B'C'$  y se distinguirá dependiendo del contexto.

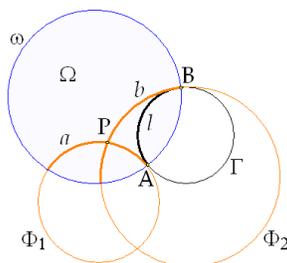
Es de notar que como las  $M$ -Transformaciones son Conformes (y en general, las  $M^*$ -Transformaciones también, salvo orientación), los  $p$ -triángulos congruentes tienen ángulos respectivos iguales.

A continuación se probarán algunos resultados importantes, pero cabe mencionar que con esto se tiene ya las herramientas para obtener resultados propios de esta geometría, lamentablemente no se entrará en detalles en este texto.

**(165) Teorema:  $p$ -rectas paralelas.** Dada una  $p$ -recta  $l$  y un  $p$ -punto  $P$  que no incide en  $l$ , existen dos  $p$ -rectas paralelas a  $l$  que inciden en  $P$ .

*Demostración:*

Suponga que  $l$  tiene por puntos al infinito a  $A$  y  $B$ , es decir,  $\Gamma$ , la circunferencia ortogonal a  $\omega$  que contiene a  $l$ , corta a  $\omega$  en tales puntos. Por (158), sea  $\Phi_1$  la circunferencia única ortogonal a  $\omega$  que pasa por  $A$  y  $P$ , entonces  $a = \Phi_1 \cap \Omega$  define una  $p$ -recta paralela a  $l$  que pasa por  $P$ . Análogamente, definiendo  $\Phi_2$  como la circunferencia única ortogonal a  $\omega$  que pasa por  $B$  y  $P$  se genera otra  $p$ -recta paralela a  $l$  que pasa por  $P$ , que es  $b = \Phi_2 \cap \Omega$ . Está claro que  $a$  y  $b$  existen y son distintas, ya que  $A$  y  $B$  existen y son distintos.



**(166) Teorema: Suma de ángulos internos de un  $p$ -triángulo.** La suma de los ángulos internos de un  $p$ -triángulo es menor que  $180^\circ$ .

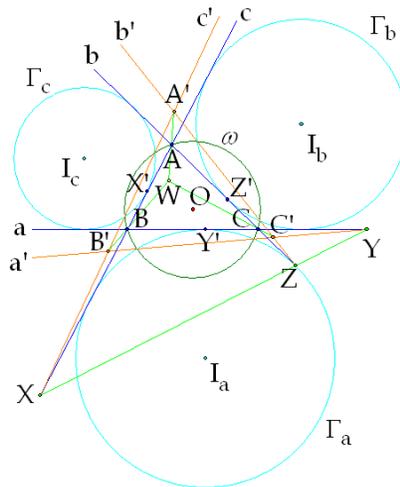


Euclideana. Ambos resultados son equivalentes entre si y equivalentes a la negación del quinto postulado de Euclides, en el sentido que tal postulado establece equivalentemente que *por un punto fuera de una recta pasa exactamente una recta paralela*, o que *la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$* , mientras que los resultados anteriores establecen relaciones no compatibles a la vez con el quinto postulado.

### 3.3. Algunas incidencias “sencillas” no tan sencillas.

A continuación se presentan algunos resultados variados de Geometría Sintética relacionados con la Geometría Proyectiva. Las soluciones presentadas se basan en los Teoremas de *Menelao*, *Ceva*, *Desargues* y otro teorema al que en este texto se le llamó *Teorema Iterado de Desargues*, dado que como su nombre lo sugiere, la demostración mostrada se basó en la utilización iterada del teorema de Desargues. A pesar de la aparente sencillez de las soluciones, éstas son en realidad bastante difíciles de “cazar”, es necesaria mucha experiencia para encontrar las relaciones adecuadas.

**(167) Teorema: Punto de Clawson.** *Dado el triángulo  $ABC$ , sea  $\omega$  el circuncírculo,  $\Gamma_k$  el excírculo respecto al vértice  $K$ , y  $k'$  el eje radical de  $\omega$  y  $\Gamma_k$ , con  $k = a, b, c$ . Se definen los puntos  $A' = b'c'$ ,  $B' = c'a'$ ,  $C' = a'b'$ . Entonces el triángulo  $A'B'C'$  está en perspectiva con el triángulo  $ABC$  respecto a un punto, llamado el Punto de Clawson del triángulo  $ABC$ .*



*Demostración:*

Sean  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ . Hay que probar que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$ , en ese orden, están en perspectiva desde un punto, es decir  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  concurren en el punto de Clawson  $W$  del  $\Delta ABC$ . Por el Teorema de Desargues (18) esto es equivalente a probar que  $X = cc'$ ,  $Y = aa'$  y  $Z = bb'$  están alineados. Sean  $Y'$ ,  $Z'$ ,  $X'$  los puntos de tangencia de  $\Gamma_a$ ,  $\Gamma_b$ ,  $\Gamma_c$  con  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , respectivamente. Como  $Y$  pertenece a  $a'$ , entonces  $YC \cdot YB = YY'^2$ , y luego de algunos ajustes algebraicos  $YY' \cdot CY' = YC \cdot Y'B$ , o bien

$$\frac{BY'}{Y'C} = \frac{YY'}{YC} \Rightarrow -\left(\frac{BY'}{Y'C}\right)^2 = -\frac{YY'^2}{YC^2} = \frac{BY}{YC}$$

Y análogamente se obtiene  $AX/XB = -(AX'/X'B)^2$  y  $CZ/ZA = -(CZ'/Z'A)^2$ . Por otra parte  $AY', BZ', CX'$  concurren en el punto de Gergonne del  $\Delta ABC$ , entonces por el teorema de Ceva (8) se cumple

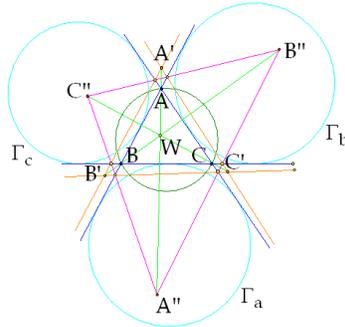
$$\frac{AX'}{X'B} \cdot \frac{BY'}{Y'C} \cdot \frac{CZ'}{Z'A} = 1$$

Y dadas las relaciones anteriores se concluye

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1$$

Por el Teorema de Menelao (6),  $X, Y, Z$  están alineados.

**(168) Corolario: Aplicación de (21) al punto de Clawson.** Definimos los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  como en el teorema anterior. Sea  $K_j = kj'$ , con  $k, j = a, b, c$ . Sean  $a'' = B_cC_b$ ,  $b'' = C_aA_c$  y  $c'' = A_bB_a$ , y con estas rectas se definen los puntos  $A'' = b''c''$ ,  $B'' = c''a''$ ,  $C'' = a''b''$ . Entonces, los triángulos  $ABC$ ,  $A'B'C'$  y  $A''B''C''$  están en perspectiva con respecto al punto de Clawson.



*Demostración:*

Los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  están en perspectiva con respecto al punto de Clawson (167), y la deducción que  $ABC$  y  $A''B''C''$  están en perspectiva desde  $W$  es una aplicación directa del Teorema de Desargues iterado (21).

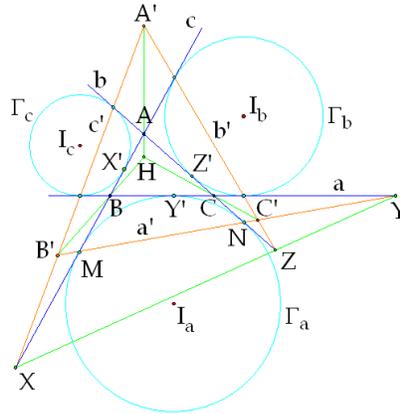
**(169) Teorema: Problema de Yiu sobre los excírculos.** Dado el triángulo  $ABC$ , sea  $\Gamma_k$  el excírculo respecto al vértice  $K$ ,  $k'$  la polar de  $K$  respecto a  $\Gamma_k$ , con  $k = a, b, c$ . Sean  $A' = b'c'$ ,  $B' = c'a'$ ,  $C' = a'b'$ . Entonces los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  están en perspectiva respecto a un punto.<sup>26</sup>

*Demostración:*

Se probará que las rectas  $AA', BB'$  y  $CC'$  concurren en un punto  $H$ . Sean  $X = cc', Y = aa', Z = bb'$ , por el Teorema de Desargues (18), el problema es equivalente a probar que  $X, Y$  y  $Z$  están alineados. Sean  $Y', M$  y  $N$  los puntos de tangencia de  $\Gamma_a$  con  $a, c, b$ , respectivamente. La recta  $a' = MN$  corta a los lados del  $\Delta ABC$  en  $Y, M, N$ ; entonces, usando el teorema de Menelao (6)

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$$

<sup>26</sup>Tal punto resulta ser el ortocentro del triángulo  $ABC$ .

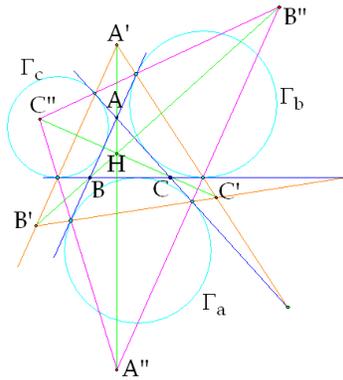


Pero como  $AM = NA = s$ ,  $MB = -BY'$ ,  $CN = -Y'C$ , entonces

$$\frac{BY}{YC} = -\frac{BY'}{Y'C}$$

de donde  $Y$  y  $Y'$  son conjugados armónicos respecto a  $B$  y  $C$ , es decir  $\{B, C; Y, Y'\} = -1$ . Definiendo de manera análoga los puntos  $Z'$ ,  $X'$  se tiene  $\{C, A; Z, Z'\} = \{A, B; X, X'\} = -1$ . Es de notar que las rectas  $AY'$ ,  $BZ'$ ,  $CX'$  concurren en el punto de Nagel del  $\Delta ABC$ , por lo tanto, siguiendo la demostración de (31), los puntos  $X, Y, Z$  están alineados.

**(170) Corolario: Aplicación de (21) al problema de Yiu.** Definimos los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  como en el teorema anterior, y el triángulo  $A''B''C''$  como en (168). Entonces los triángulos  $ABC$ ,  $A'B'C'$  y  $A''B''C''$  están en perspectiva respecto a  $H$ .

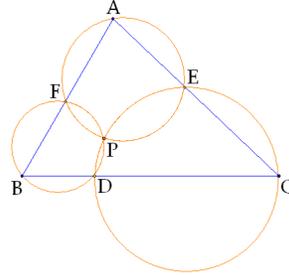


*Demostración:*

De nuevo, es una aplicación directa del Teorema de Desargues iterado (21) sobre el problema de los excírculos de Yiu.

Siempre sobre el tema de concurrencias, pero ahora considerando circunferencias que inciden en lugar de rectas (dado que básicamente son la misma cosa) se tienen los siguientes teoremas.

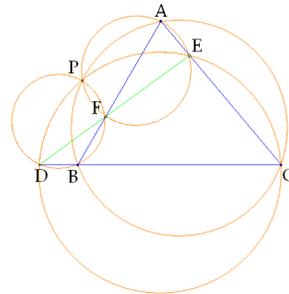
(171) **Teorema: Teorema de Miquel.** Dado el triángulo  $ABC$ , si  $D, E, F$  son puntos cualesquiera sobre  $BC, CA, AB$  entonces los circuncírculos de los triángulos  $AFE, BDF, CED$  inciden en un punto.



*Demostración:*

Si los circuncírculos de  $AFE$  y  $BDF$  se cortan en  $F$  y  $P$  se forman los cuadriláteros cíclicos  $AFPE$  y  $BDPF$ , entonces  $\angle FPE = 180^\circ - \hat{A}$  y  $\angle DPF = 180^\circ - \hat{B}$ , y por lo tanto  $\angle EPD = 360^\circ - \angle FPE - \angle DPF = 180^\circ - \hat{C}$ , así, el cuadrilátero  $CEPD$  es cíclico y  $P$  pertenece al circuncírculo de  $CED$ .

(172) **Corolario: Circuncírculos de un cuadrilátero completo.** Si además  $D, E, F$  están alineados entonces el circuncírculo de  $ABC$  también pasa por  $P$ .

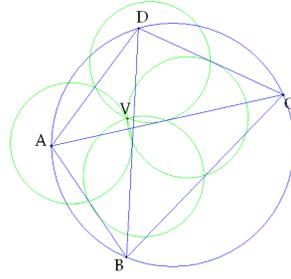


*Demostración:*

Aplicando el teorema de Miquel (171) al triángulo  $AFE$  resulta que los circuncírculos de  $ABC, FDB, EDC$  inciden en un punto  $P'$ , que es el otro punto de intersección de los circuncírculos de  $FDB$  y  $EDC$ , que es justamente la definición de  $P$ , por lo tanto  $P' = P$  y el circuncírculo de  $ABC$  pasa por  $P$ .<sup>27</sup>

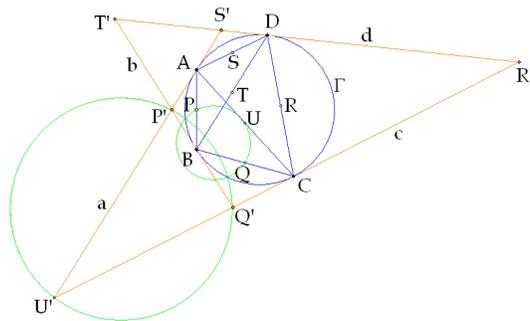
(173) **Teorema: Circunferencias de 9 puntos incidentes.** Si  $ABCD$  es un cuadrilátero cíclico entonces las circunferencias de 9 puntos de los triángulos  $ABC, ABD, ACD, BCD$  inciden en un punto.

<sup>27</sup>Esta es una propiedad muy útil y conocida de cuadriláteros completos.

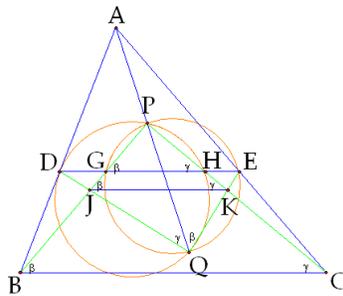


*Demostración:*

Sea  $\Gamma$  el circuncírculo del  $\Delta ABC$ . Se definen los puntos  $P, Q, R, S, T, U$  como los puntos medios de  $AB, BC, CD, DA, BD, AC$ . Si  $x$  es la recta tangente a  $\Gamma$  en el vértice  $X$ , con  $x = a, b, c, d$ , entonces el punto  $P' = ab$  es el inverso geométrico de  $P$  con respecto a  $\Gamma$ , y lo mismo se cumple para  $Q', \dots, U'$ . Se sabe que la circunferencia de 9 puntos del  $\Delta ABC$  es el circuncírculo del  $\Delta PQU$ , este circuncírculo se invierte en el circuncírculo del  $\Delta P'Q'U'$ , entonces las circunferencias de 9 puntos de los triángulos  $ABC, ABD, ACD, BCD$  inciden en un punto si y sólo si sus figuras inversas, los circuncírculos de los triángulos  $P'Q'U', P'T'S', U'R'S', Q'R'T'$  inciden en un punto, lo cual es cierto por (172) aplicado al cuadrilátero completo  $abcd$ .



**(174) Teorema: Aplicación de Desargues en caso extremo.** Dado el triángulo  $ABC$ , sean  $D$  y  $E$  puntos sobre  $AB$  y  $AC$  respectivamente, tal que  $DE \parallel BC$ . Sea  $P$  un punto interior al triángulo  $ADE$ ,  $G$  la intersección de  $PB$  con  $DE$ ,  $H$  la intersección de  $PC$  con  $DE$ . Pruebe que  $A$  pertenece al eje radical de los circuncírculos de  $PDH$  y  $PEG$ .



*Demostración:*

Sea  $Q$  el otro punto de corte de los circuncírculos de  $PDH$  y  $PEG$ ,  $J$  la intersección de  $PB$  con  $DQ$ ,  $K$  la intersección de  $PC$  con  $EQ$ . Como  $BC \parallel DE$  entonces  $\angle PBC = \angle PGE$ . Como  $PGQE$  es cíclico, entonces  $\angle PGE = \angle PQE$ . Así  $\angle PBC = \angle PQE$ , y análogamente  $\angle PCB = \angle PQD$ . Con esto, el ángulo  $BPC$ , que es suplementario la suma de los ángulos  $PBC$  y  $PCB$ , será también suplementario al ángulo  $DQE$ , por lo tanto  $PJQK$  es cíclico. Por este cíclico  $\angle PJK = \angle PJK$ , y de aquí es inmediato que  $\angle PGE = \angle PJK$ , y por tanto  $JK \parallel DE \parallel BC$ . Los triángulos  $PBC$  y  $QDE$  están entonces en perspectiva (en ese orden) con respecto a la recta  $JK$ , dado que la intersección de  $BC$  con  $DE$  está sobre la recta  $JK$  (las tres rectas se cortan en el mismo punto al infinito), y aplicando el Teorema de Desargues en esta versión degenerada implica que las rectas  $BD$ ,  $PQ$ ,  $CE$  concurren, es decir,  $A$  pertenece a  $PQ$ .

# Bibliografía.

- **Andreescu, Titu; Andrica, Dorin.** *Complex Numbers from A to Z.* Editorial Birkhäuser. Estados Unidos. 2006.
- **Blumenthal, Leonard.** *A modern view of geometry.* Editorial Dover Publications. Estados Unidos. 1980.
- **Faulkner, Ewan.** *Projective Geometry.* Editorial Oliver and Boyd. Gran Bretaña. 1952.
- **Grinberg, Darij.** *Synthetic proof of Paul Yiu's excircles theorem.*  
[http://de.geocities.com/darij\\_grinberg/YiuSynth/Support.html](http://de.geocities.com/darij_grinberg/YiuSynth/Support.html)
- **Hadamard, Jacques.** *Leçons de Géométrie, Tomo I.* Editorial Jacques Gabay. Francia. 1988.
- **Lebossé, C.; Hémary, C.** *Géométrie.* Editorial Jacques Gabay. Francia. 1997.
- **Levinson, Norman; Redheffer, Raymond.** *Curso de variable compleja.* Editorial Reverté. España. 1975.
- **Needham, Tristan.** *Visual Complex Analysis.* Editorial Oxford University Press. Gran Bretaña. 2002.
- **Rosenbaum, Robert.** *Introduction to Projective Geometry and Modern Algebra.* Editorial Addison-Wesley. Estados Unidos. 1963.
- **Rouché, Eugène; Comberousse, Charles de; Poincaré, Henri.** *Traité de Géométrie.* Editorial Jacques Gabay. Francia. 1997.
- **Salazar, Juan.** *Concurrencias y Colinealidades.*  
<http://www.acm.org.ve/files/imovzljcsfinal.pdf>

- **Santaló**, Luis. *Geometría Projectiva*. Editorial Universitaria de Buenos Aires. Argentina. 1966.
  
- **Shively**, Levi. *Introducción a la Geometría Moderna*. Editorial Continental. México. 1984.