UNIVERSITAT AUTONOMA DE BARCELONA
DEPATAMENT DE DIDACTICA DE LAS MATEMATIQUES I DE LAS CIENCIES EXPERIMENTALES

Proyecto de Tesis Doctoral

"Diseño, implementación y evaluación de una descomposición genética de los procesos y conceptos de la noción de ecuación diferencial de primen orden."

Presenta
MSc. Martín Enrique Guerra Cáceres

Director
Dr. Lluís Bibiloni

Bellaterra, Barcelona, 10 de mayo de 2002

Indice

Proyecto de Tesis Doctoral
"Diseño, implementación y evaluación de una descomposición genética de los procesos y conceptos de la noción de ecuación diferencial de primer orden."

Autor: Martín Enrique Guerra Cáceres[1]

Director: Dr. Lluís Bibiloni

1 Introducción

En muchas investigaciones didácticas (Artigue, 1991; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Bookman y Friedman, 1994; Cornu, 1991; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Monk y Nemirovsky, 1994; Hauk, Mason, Selden y Selden, 1999) se reporta que limitar el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo al registro algebraico y algorítmico no garantiza en absoluto la comprensión de los conceptos básicos. Y, por el contrario, se generan en los estudiantes esquemas conceptuales y habilidades demasiado rígidas, así como capacidades muy pobres para transferir los conocimientos más allá del contexto en el cual éstos se adquirieron, impidiéndose así su progreso hacia niveles superiores de pensamiento.

Sin embargo, en el sistema educativo universitario salvadoreño, por diversas causas, el primer curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) pervive aún exclusivamente como la continuación algebraica y algorítmica de las asignaturas de cálculo diferencial e integral, marginando los aspectos gráficos, numéricos y fenomenológicos (ver Guerra, 2002). En particular, se olvida el hecho de que en el momento que los estudiantes llegan a este curso poseen ya unos ciertos conocimientos y/o habilidades gráficas necesarias, aunque no suficientes, para resolver una EDO mediante métodos cualitativos elementales (campos de pendientes, isóclinas, determinación de zonas de monotonía y concavidad, plano o línea fase, series temporales, etc.). Tampoco se toma en cuenta que el estudio gráfico permite retroalimentar tanto el concepto de derivada como su interpretación geométrica y física.

[1]Profesor de Matemáticas en la Universidad de El Salvador desde 1988. Licenciado en Matemáticas por la Universidad de El Salvador, MS*c*. en Matemáticas Aplicadas por el CINVESTAV-IPN, México, MS*c*. en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona.

Evidentemente esta situación contrasta con las exigencias de orden científico, tecnológico y educativo que se demandan hoy en día a los diferentes currículos.

Por tanto, se plantea la necesidad urgente de promover cambios curriculares que se fundamentan en la investigación didáctica, así como en las ventajas que ofrecen otros currículos en otras realidades. Es decir, se requiere enriquecer la metodología de la enseñanza del primer curso de EDO y hacer evolucionar los sistemas didácticos de tal manera que se rompa con la exclusividad de los procesos de algebrización y algoritmización a que ha estado sometida la enseñanza y el aprendizaje de ésta disciplina durante mucho tiempo.

En este sentido, en los últimos veinte años se han escrito algunos trabajos de investigación y de innovación curricular del proceso de enseñanza y aprendizaje de las EDO. En estos trabajos (Artigue, 1989, 1992; Arrowsmith, 1991; Blanchard, 1994; Blanchard, Devaney y Hall, 1999; Devaney, 1995; Hernández, 1994; Hubbard y West, 1991), en los que se supone hacer uso intensivo de la tecnología, se promueve la articulación de los diferentes sistemas de representación semiótica: algebraico, gráfico y numérico.

Evidentemente, esta perspectiva se debe a dos razones fundamentales:

- La convicción de que el conocimiento matemático es como el invariante de múltiples representaciones y que, por tanto, llegar a comprender un concepto matemático implica ser flexible en los procesos de conversión entre diferentes sistemas de representación (Artigue, 1992; Dreyfus, 1994; Duval, 1993), y
- La posibilidad de contar con la tecnología en la clase de matemáticas con todas las facilidades que se suponen para representar y transformar el contenido matemático y promover ambientes de aprendizajes interactivos.

Sin embargo, es preciso señalar que el énfasis en estas tareas de conversión entre representaciones no es sinónimo de una mayor comprensión por parte de los estudiantes como tampoco tiene que ser un contenido a ser aprendido *per se*. Y por tanto, es necesario articular éstas representaciones con los aspectos fenomenológicos[2] relacionados a los conceptos matemáticos, así como con el

[2] Freudenthal nos habla de un proceso creciente, y cada vez más abstracto, de creación de objetos matemáticos como medios de organización de fenómenos en el cual esos nuevos medios de organización se constituyen y objetivan en nuevos medios de organización. Así el crecimiento de la actividad matemática y los fenómenos que organiza se configura mediante un proceso recursivo de pares fenómenos/medios de organización, en el que se crean sistemas matemáticos de signos que objetivan, describen y explican a los conceptos (Freudenthal, 1983; Puig, 1997).

desarrollo de las habilidades cognitivolingüísticas[3] de los estudiantes (Jorba, 2000; Sfard, 1999).

Esto, pues, más el hecho de que la práctica educativa aún permanece impermeable a tales orientaciones (Moreno, 2000), nos muestra un panorama muy atractivo para realizar investigaciones didácticas que coadyuven a cambiar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias tanto en carreras de matemáticas como no matemáticas.

2 Antecedentes

En nuestro estudio previo (Guerra, 2002)[4] se ha realizado una aproximación a la problemática didáctica en torno al primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias y se han caracterizado los elementos que conforman el sistema didáctico: *conocimiento-alumno-profesor*.

En primer lugar allí, el curso tradicional se ha caracterizado como una secuencia de métodos para encontrar fórmulas para las soluciones de cierto tipo de EDO, que eran ya bien conocidos hacia 1740. También se observa que, desde los tiempos de Euler o Cauchy, son pocos los cambios que se han realizado en los contenidos, el lenguaje y su tratamiento (Kline, 1992; Rota, 1997). Y por tanto, los contenidos, ejercicios, énfasis como la misma secuenciación del programa tradicional de EDO pueden caracterizase hoy día como obsoletos y poco prácticos.

Asimismo, se señala que, aunque la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias se ha desarrollado matemáticamente en tres cuadros: algebraico, numérico y geométrico (o cualitativo), existen ciertos factores que son determinantes para que todavía prevalezca en muchos currículos el enfoque tradicional (ver Artigue, 1992, 1995). A saber:

---

[3] Jorba (2000, p.31) escribe: el desarrollo de determinadas habilidades cognitivas (analizar, comparar, clasificar, identificar, interpretar, inferir, deducir, transferir, valorar, operar, etc) requiere de determinadas habilidades para producir y comprender las diferentes tipologías textuales (descriptivo, narrativo, explicativo, justificativo y argumentativo), las denominadas **habilidades cognitivolingüísticas**: describir, definir, resumir, explicar, justificar, argumentar y demostrar. Recíprocamente, estas habilidades cognitivolingüísticas se potencian y desarrollan a partir de esas habilidades cognitivas que están en la base del aprendizaje.

[4] Tesis de Maestría presentada recientemente en el Programa de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas de la UAB, en la que se realiza un estudio de casos utilizando una metodología de orientación cualitativa: descriptiva, exploratoria e interpretativa. El estudio de casos lo constituye un grupo de estudiantes de la carrera de matemáticas de la Universidad de El Salvador que habían cursado la asignatura Ecuaciones Diferenciales I durante 18 semanas entre los meses de febrero y junio del año 2000. La información se recogió mediante un cuestionario y varias entrevistas grabadas.

En el nivel epistemológico se encuentran:

- El largo predominio histórico del cuadro algebraico – analítico,
- El status del cuadro numérico,
- El desarrollo tardío de la aproximación geométrica,
- La independencia relativa de las distintas aproximaciones,
- La dificultad de los problemas que motivaron el nacimiento y subsiguiente desarrollo de la aproximación cualitativa,
- Predominio, por lo general implícito, de una concepción epistemológica de las matemáticas en la práctica docente y su entorno que, por una parte, sobrevalora la manipulación lógica, simbólica y analítica y, por otra, desprecia los aspectos gráficos y visuales, considerándolos como no matemáticos. Estos últimos son considerados sólo como cierto soporte heurístico, un mero auxiliar didáctico para presentar los conceptos matemáticos y sus interrelaciones, pero una vez que han sido usados estos deben ser retirados de la urdimbre conceptual (Eisenberg, 1991; Guerra, 2002; Moreno, 1997, 2000). De manera general, podría decirse que esta concepción se gesta a través de los tres grandes proyectos epistemológicos de las matemáticas: algebrización del cálculo, aritmetización del análisis y los estudios fundacionales (logicismo y formalismo).

En el nivel cognitivo:

- Las dificultades relacionadas al hecho de que la resolución cualitativa requiere el uso y razonamiento con funciones que no se expresan explícitamente,
- El uso coordinado y simultáneo de los registros algebraicos y gráficos, tanto para una función como para sus derivadas,
- Las pruebas en la aproximación numérica y cualitativa requieren un manejo sofisticado y apropiado del cálculo elemental.

En el nivel didáctico:

- Lo atractivo de los algoritmos y la imposibilidad de crear algoritmos en la aproximación cualitativa,
- El status del marco gráfico,
- El rechazo de los problemas que no pueden ser resueltos completamente, y
- Frente a las grandes dificultades de comprensión de los estudiantes, la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algebraica y algorítmica y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en ese dominio. Se genera así un círculo vicioso: para obtener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor y esto es, a

su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial ya que es lo que se evalúa. De otra manera, puede decirse que subsisten unos ciertos niveles de exigencia mínimos tanto para los profesores como para los alumnos y un control absoluto del proceso por parte del profesor (Artigue, 1995).

A estos factores se debe sumar también la poca difusión de los escasos estudios didácticos que tratan con esta área problemática; estudios que muchas veces o suponen que es imprescindible hacer un uso intensivo y masivo de la tecnología o proponen un planteamiento inadecuado (Campillo y Devesa, 1999).

En segundo lugar, se han descrito, interpretado y caracterizado las producciones de los estudiantes en torno al concepto de solución de una EDO de primer orden. En particular, se ha realizado un diagnóstico de las habilidades y/o conocimientos con que se quedan los estudiantes y se han comparado éstas con las que se supone deberían haber adquirido después de concluir un curso tradicional de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para ese fin, se han utilizado dos constructos del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), a saber: la noción de *imagen del concepto* o *esquemas conceptual* (*concept image*), introducida por Tall y Vinner (1981), y la noción de *procepto* (*procept*), introducida por Gray y Tall (1991, 1994). Así como, la noción propuesta por Duval (1993) de *registro de representación.*

2.1 Noción de esquema conceptual

La noción de *imagen del concepto o esquema conceptual* hace referencia a la estructura cognitiva[5] asociada con un concepto e incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados a dicho concepto (Tall y Vinner, 1981). Vinner (1991) agrega que es algo no verbal asociado en la mente con el nombre del concepto: una representación mental, un ejemplo genérico, un contraejemplo, una colección de experiencias, impresiones o creencias. Bajo

[5] La Estructura Cognitiva se refiere al contenido total y a la organización de las ideas en torno a un área particular del conocimiento, almacenados en nuestras mentes que crece y se desarrolla desde la más temprana infancia. Se refiere, también, al significado del concepto: lo qué podemos hacer, decir, pensar o producir con él. Y, por lo tanto, es mucho más que la evocación de un símbolo o cualquier imagen mental. En el transcurso del proceso de recordar y manipular un concepto, muchos procesos son traídos a escena de manera que consciente o inconscientemente afectan su uso (Tall, 1991). Según Rivière (1987, p.21), lo más general que se puede decir de la Psicología Cognitiva es que remite la explicación de la conducta a entidades mentales, procesos y disposiciones de naturaleza mental que conforman una Estructura Cognitiva Mediadora (Estructura de Representación). Es decir, se presupone la idea de que las funciones de conocimiento no sólo están determinadas por funciones “bottom-up”, sino también, en mayor o menor grado, por funciones “top-down”. Así, por ejemplo, la percepción de un objeto no es un proceso exclusivamente “de abajo arriba”, sino que aquello que percibimos está determinado por procesos “de arriba abajo”, es decir, por la Estructura Cognitiva.

diferentes situaciones un sujeto puede evocar diferentes partes de un esquema conceptual. Esto es llamado *esquema conceptual evocado*. También, es posible que en un esquema conceptual coexistan, inconsciente o conscientemente, ideas inconsistentes (considerar compatible una proposición y su negación), incoherentes (respuestas en diferentes sistemas de representación contradictorias entre sí), y conflictivas. Tales conflictos serán patentes cuando y sólo cuando esas ideas sean evocadas simultáneamente. Así, para que se den los procesos de construcción y expansión del conocimiento matemático y del desarrollo cognitivo del sujeto, se supone que los esquemas conceptuales evolucionan. Es decir, se reconstruyen y enriquecen, posibilitando el pensamiento lógico, las habilidades cognitivolingüísticas, el pensamiento axiomatico-deductivo, el crecimiento del conocimiento matemático y, en fin, ensanchando los límites de competencia de los estudiantes.

2.2 La noción de Procepto

La noción de *procepto*[6] tiene que ver con el uso dual, ambiguo y flexible que un sujeto puede hacer de un símbolo para referirse tanto a un proceso (representación cognitiva de una operación matemática) como al producto de ese proceso (concepto). Y, según Tall, esta noción es la responsable del pensamiento matemático exitoso. Por su parte, Sfard (1991) se refiere a esta dualidad usando los términos *concepciones operacionales y concepciones estructurales*. Es decir, la noción de *procepto*, está relacionada a la dualidad: *conocimiento conceptual y conocimiento procedimental*. Empero es importante observar que no todo conocimiento puede describirse ya sea como conceptual o procedimental, pues existen conocimientos que pueden concebirse como una combinación de ambos o no estar en absoluto relacionados a dicha dualidad. Hiebert y Lefevre (1986) dicen: "*El conocimiento conceptual se caracteriza como un conocimiento que es rico en relaciones, y puede ser concebido como una red de conexiones entre conocimientos…Una unidad de conocimiento conceptual no puede ser una pieza aislada de información; por definición, ella es parte de un conocimiento conceptual sólo si el sujeto reconoce sus relaciones con otras piezas de información" (pp. 3-4). Asimismo, "El conocimiento procedimental está formado por dos partes distintas. Una parte contiene el lenguaje formal o el sistema de representación simbólico de las matemáticas. La otra contiene los algoritmos, las reglas o procedimientos usados para resolver una tarea*

[6] La noción de procepto es un ejemplo de lo que Tall de manera más general denomina Unidad Cognitiva: una parte de la estructura cognitiva en la que puede mantenerse todo el centro de atención en un momento dado. Ésta puede ser un símbolo, un hecho especifico como "3+4 es 7", un hecho general tal como "la suma de dos números pares es par", una relación, un paso en un argumento, un teorema tal como " una función continua en un intervalo cerrado toma su máximo y su mínimo en ese intervalo", etc. Lo que para una persona es una unidad cognitiva puede no serlo para otra.

matemática, es decir, instrucciones paso a paso que prescriben como realizar una tarea" (p. 6).

En fin, se llama *procepto* al constructo cognitivo que resulta de la combinación de un proceso y un concepto que pueden ser evocados por un mismo símbolo (Gray y Tall, 1993, 1994; Tall, 2000). Y para que esta noción refleje la realidad cognitiva del sujeto se define:

- *procepto elemental* como la amalgama de tres componentes: proceso-símbolo-objeto: un proceso que produce un objeto matemático y un símbolo que representa ya sea al proceso o al objeto.

Evidentemente, la noción de ecuación diferencial y sus soluciones, es un ejemplo potencial de procepto. En efecto, el símbolo $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ puede evocar en la estructura cognitiva de un sujeto ciertos conceptos (por ejemplo: expresión algebraica, pendiente de una curva solución, razón de cambio) y determinados procesos como la búsqueda de una solución *y(t)* mediante métodos algebraicos, gráficos o numéricos.

Ahora bien, además de concebir un símbolo en una forma flexible, un mismo objeto puede ser representado simbólicamente en diferentes formas que se corresponden no sólo a diferentes procesos sino también a nombres diferentes del mismo objeto. Y por tanto,

- *procepto* como una colección de proceptos elementales que tienen el mismo objeto.

Por ejemplo, el *procepto* 6 incluye el proceso de contar 6 y una colección de representaciones tales como 3+3, 4+2, 2+4, 2*3, 8-2, etc. Todos estos símbolos representan el mismo objeto e indican la forma flexible en la cual el concepto de número 6 puede ser descompuesto usando diferentes procesos.

Así pues un *procepto elemental* es el primer estado en la dinámica del crecimiento de un procepto y depende del crecimiento cognitivo de la persona. En este sentido, puede afirmarse que el pensamiento proceptual en tanto combinación del pensamiento conceptual y procedimental está en un nivel superior del pensamiento que se caracteriza por la habilidad de encapsular información en forma simbólica y, a la vez, usar estos símbolos como objetos que pueden ser descompuestos en formas flexibles que permiten tanto manipulaciones mentales como reflexiones poderosas que conllevan a construir nuevas teorías. Así, pues, desde esta perspectiva, el desarrollo cognitivo consiste en el uso progresivo de los símbolos, cada vez de manera más sofisticado con diferentes grados de flexibilidad y habilidad para pensar matemáticamente.

2.3 La noción de Sistema de Representación

El concepto de representación es uno de los conceptos cognitivos más poderosos usado hoy día en el campo de la Didáctica de las Matemáticas para explicar los procesos de construcción y adquisición de conceptos (ver, por ejemplo, la agenda de trabajo del grupo sobre la representaciones y la visualización del PME-NA XXI, en http:/www.cinvestav.mx/mat_edu/Adalira2000.html). En general, esta noción incluye diferentes actividades de significación: creencias acerca de algo, diversas formas de evocar y denotar los objetos, formas de codificar la información, etc.

Varios investigadores (Artigue, 1992; Duval, 1993, 1999; Dreyfus, 1991; Janvier, 1978, 1987), entre otros, afirman que las representaciones semióticas de los objetos y los procesos matemáticos juegan un papel fundamental tanto en la actividad matemática como en su proceso de enseñanza y aprendizaje. Y dado que el conocimiento matemático es como el invariante de múltiples representaciones, la coordinación de estas representaciones y el desarrollo de las habilidades cognitivas para convertir una representación en otra se vuelven actividades sumamente importantes pues, por un lado, favorecen no llegar a confundir los objetos con sus representaciones y, por otro, permiten que se les pueda reconocer en cada una de ellas.

Artigue (1992) dice: "*las nociones matemáticas funcionan por lo general en varios cuadros*[7] *y una de las características de la actividad de los matemático/as es su habilidad para realizar interacciones entre estos cuadros cuando resuelven problemas matemáticos*"(p. 109).

Por otra parte, Dreyfus señala que cuando hablamos o pensamos sobre un concepto o un proceso matemático determinado no lo hacemos directamente sobre ellos, sino que nos servimos de signos o imágenes mentales que se refieren a ellos y los representan. Por ejemplo, S_n es un signo (representación externa) que se refiere y representa, o simboliza, el grupo simétrico de grado n. Y también S_n puede evocar en nuestra mente, algunas imágenes (representaciones internas), como los movimientos del plano que dejan

---

[7] Douady escribe: un cuadro contiene: objetos matemáticos y sus relaciones, así como las expresiones e imágenes mentales asociadas con estos objetos y sus relaciones. Dos cuadros pueden contener los mismos objetos, pero diferir en las imágenes mentales y la problemática desarrollada en torno a ellos, esto es por la clase de problemas y métodos (ver Artigue, 1992, p.1).

invariante un cuadrado (ver Dreyfus, 1991, p.30-31). Agrega, además, que la representación y la abstracción son procesos complementarios: "*por un lado, un concepto se abstrae a partir de varias de sus representaciones y, por otro, las representaciones son siempre representaciones de algún concepto más abstracto*" (p. 38). En consecuencia, si se utiliza una sola representación del concepto, puede suceder que la atención se centre en la representación en lugar del objeto abstracto representado. Empero, cuando se consideran simultáneamente varias representaciones, la relación al concepto abstracto subyacente se vuelve importante.

También, en los planteamientos Vygotskianos la actividad externa (proceso de apropiación cultural) es concebida en términos de procesos sociales mediatizados semióticamente. Los signos son producto de la función de representación y a la vez la posibilitan; son producto de una construcción social y a la vez son objeto de apropiación personal; primero tienen una forma material externa y se pueden interpretar como instrumentos para la comunicación que progresivamente se convierten en internos y se usan de manera individual. El uso y el dominio progresivo de los signos permiten la transformación del mundo interno, es decir, la formación y el desarrollo de los procesos psicológicos superiores, a la vez que permiten operar mentalmente con los datos de la realidad y sus representaciones para obtener construcciones nuevas de pensamiento.

Así, pues, observamos que según el modo de producción, las representaciones se pueden dividir en dos clases:

- *Representaciones externas* que tienen una traza o soporte físico tangible (por ejemplo, un signo) sujeta a determinadas reglas sintácticas y de procedimiento, es decir, que pertenecen a un sistema de representación (ver Duval, 1993, p. 2). Estas a la vez pueden subdividirse en *representaciones simbólicas* (*o linguísticas*) y *representaciones analógicas* (*o no-linguisticas*).
- *Representaciones internas o mentales* que son imágenes o esquemas internos asociados al concepto que nos sirven para pensar sobre los conceptos y los procesos matemáticos e interactuar con el mundo.

Nosotros, no obstante, hemos adoptado el planteamiento y los términos que propone Duval (1993, 1999). En primer lugar, este autor señala que la distinción anterior entre *mental/ externa* se refiere sólo al modo de producción y no a su naturaleza (ver Duval, 1999, p. 5). En realidad para Duval la división básica no es esa, sino que para él hay dos clases de representación cognitiva:

- Las *representaciones semióticas* que son producidas intencionalmente usando un sistema de signos de representación que tiene sus propios constreñimientos de significancia y funcionamiento (sistema semiótico). Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, todos son ejemplos de representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes.
- Las *representaciones físicas/orgánicas* que son producidas causal y automáticamente por un sistema orgánico o un sistema físico.

Ahora bien, la producción o el uso de una representación semiótica puede ser mental o externo. Pero esto no significa que ellas sean dominios diferentes e independientes ni que las primeras están subordinadas a las segundas, sino que en el transcurso de su desarrollo interactúan y se condicionan ente sí: ellas son signos que funcionan en la interface entre la realidad exterior e interior del sujeto. Por ejemplo, tanto el cálculo aritmético mental como el cálculo escrito utilizan el sistema decimal, pero no así las mismas estrategias debido al costo cognitivo.

El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones externas; la diversificación de representaciones externas de un mismo concepto u objeto aumenta la capacidad cognitiva del sujeto, y por consiguiente, su capacidad de pensamiento sobre él. De manera recíproca, las representaciones externas, como son los enunciados en lenguaje natural, las tablas, las gráficas, las fórmulas, las figuras geométricas, entre otras muchas, son el medio por el cual los sujetos exteriorizan sus imágenes o representaciones internas haciéndolas accesibles a los demás (Duval, 1993).

Duval enfatiza que las representaciones semióticas no solamente son necesarias para fines comunicativos, sino que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del sujeto: objetivación, tratamiento y producción de conocimientos. Así las representaciones semióticas tienen una doble función, muy interrelacionadas entre si:

- Actúan como estímulos para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales y aprehensión de conceptos.
- Permiten la expresión o producción de conceptos e ideas a los sujetos para que las utilicen en sus actividades cognitivas.

En segundo lugar, Duval (1993) propone una noción totalmente relacionada a las funciones esenciales de cualquier actividad cognitiva. A saber:

- *Registro de representación* como un sistema semiótico que permite las tres actividades cognitivas asociadas a la semiótica: 1) *formación de una representación identificable* como una representación de un registro dado: enunciación de una frase (comprensible en una lengua natural dada), composición de un texto, dibujo de una figura geométrica, elaboración de un esquema, dibujo de una gráfica, escritura de una formula, etc., 2) *el tratamiento* de una representación, es decir, su transformación en el registro donde ha sido formada. Por ejemplo, el cálculo y la reconfiguración son formas de tratamiento propios de las escrituras simbólicas y las figuras geométricas respectivamente, y 3) *la conversión* de una transformación, esto es, su transformación a otra representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. Por ejemplo, la ilustración es la conversión de una representación lingüística en una representación figural y la descripción es la conversión de una representación no verbal (esquema, figura, gráfica) en una representación lingüística. La transformación de ecuaciones en gráficos cartesianos y viceversa, son ejemplos de conversión.

Por ejemplo, tres registros de representación diferentes para los números son los siguientes: la escritura decimal, la escritura fraccionaria y la escritura con exponentes.

Duval señala que de las tres actividades ligadas a la semiosis, sólo las dos primeras, la formación y el tratamiento, son tomadas en cuenta en la enseñanza. Pues se considera generalmente que, por una parte, la conversión de las representaciones resultaría por sí misma, en forma rápida y espontánea, desde el momento en que se es capaz de formar representaciones en registros diferentes y de efectuar tratamientos sobre las representaciones, y, por otra, la conversión no tiene importancia real para la comprensión de los objetos o los contenidos conceptuales representados, puesto que su resultado se limita a un cambio de registro. Descuidándose así, el hecho de que en una fase del aprendizaje la conversión juega un papel esencial en la conceptualización.

Generalmente, los contenidos matemáticos (objetos, conceptos o situaciones) vienen expresados mediante sistemas de representación específicos que proporcionan una caracterización diferente y parcial en el sentido cognitivo (en tanto hay una selección de los elementos significativos o informativos del contenido al que representan) y que no agotan en su totalidad la complejidad de relaciones que cada contenido encierra.
Por lo tanto, formar y dominar un concepto matemático implica o supone conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas,

operar con las reglas de cada sistema y traducir o convertir unas representaciones en otras, detectando que sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades (ver Duval, 1993).

Así, pues, creemos que, desde la perspectiva de las aplicaciones y las necesidades académicas y profesionales de los estudiantes de carreras no matemáticas, no es tan importante exigirles que alcancen cierto nivel de matemáticas formales (dominio del método axiomatico-deductivo) como potenciarles para que desarrollen esquemas conceptuales flexibles y robustos construidos a partir de su actividad sensorial, motora, visual, proceptual, y semiótica.

2.4 Resultados y Caracterización de los Esquemas Conceptuales

En concreto, en (Guerra, 2002), reportamos que, ante tareas que demandan dibujar la gráfica de la solución de un problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),\ y(t_0) = y_0,$$

donde $f(t, y)$ es una función suave dada mediante una expresión algebraica o una gráfica, las producciones de los estudiantes muestran claramente una tendencia dominante, en la cual no se toma en cuenta sí la información relevante contenida en el lado derecho de la EDO está dada o bien en el registro algebraico o bien en el gráfico (ver Anexo 1). A saber: primero encontrar una fórmula para la solución de la EDO utilizando el método de separación de variables y luego intentar dibujar la gráfica de esa solución utilizando las técnicas escolares del cálculo diferencial.

Para lograr esto nos preguntamos: ¿Qué estrategias se utilizan para dibujar la gráfica de una solución de una EDO? ¿Cuáles son las dificultades encontradas? ¿Son los estudiantes capaces de construir la gráfica de una solución derivando las propiedades necesarias y suficientes de ella directamente de la EDO o, por el contrario, primero sienten la necesidad de encontrar una fórmula para dicha solución y posteriormente intentan dibujar su gráfica?.

Los resultados obtenidos siguiendo esta ruta son reveladores:

Ninguno de los 4 estudiantes investigados fue capaz de resolver eficientemente las tareas propuestas, es decir, discriminar las propiedades relevantes de la gráfica de la solución y coordinarlas con la información que proporciona la ecuación diferencial, así como darse cuenta de la equivalencia de los problemas 1 y 2, y los problemas 3 y 4 respectivamente.

Tampoco ninguno se dio cuenta que la estrategia en cuestión es circular puesto que la primera derivada ya está dada en la EDO, o porque la estrategia podría ser poco fructífera debido a que la fórmula obtenida podría resultar ser poco práctica para poder reproducir eficientemente los esquemas previos del cálculo diferencial.

También es muy sugerente la reacción atónita de todos los estudiantes a los ítems 3.2 y 3.4 del cuestionario propuesto en los que se pedía encontrar $\lim_{t \to \infty} y(t)$ de la solución, debido a no contar a priori con una fórmula para la solución, así como los intentos inconsistentes de encontrar una fórmula para los problemas 2 y 4 (ver anexo). Es más, ante la ausencia de una fórmula para la solución, ningún estudiante es capaz de movilizar adecuadamente sus conocimientos previos del cálculo diferencial.

Evidentemente, esa necesidad fuerte de querer contar con una fórmula para dibujar la gráfica de la solución o poder aplicar sus esquemas previos del cálculo, condición necesaria autoimpuesta, refleja la presencia de una *concepción de acción y proceso* (ver sección 3.2) de los conceptos básicos del Cálculo limitada a un solo registro: el registro algebraico - analítico.

Otros estudiantes logran resolver con éxito el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = x^2(x-2)^2(x+2),\ y(0) = 1$ en el registro algebraico, así como derivar algunas propiedades cualitativas necesarias para dibujar la gráfica de la solución. Pero fracasan en la tarea de construcción. Esto es consecuencia, según lo que pudo observarse, de poseer unos conocimientos y/o habilidades muy pobres para relacionar la función derivada en los registros gráfico y algebraico, así como muchas dificultades para articular la información cualitativa y verbal disponible sobre una función (intervalos de monotonía, de concavidad, etc.) en el momento de construir su gráfica.

Además las competencias que se suponen que estos estudiantes deberían haber adquirido al finalizar la asignatura de ecuaciones diferenciales son cuestionables:

Pues su dominio, en particular, del método de separación de variables se limita a una mera manipulación simbólica, inconsistente y poco adecuado que se aplica sin sentido de pertinencia o se utiliza separando mal las variables.

Y algo muy importante, es la ausencia de conocimientos y habilidades generales y conceptuales que les permitan reflexionar y controlar sus producciones a fin resolver con éxito las tareas propuestas. Sin duda alguna, creemos que esto último debería ser una componente vital de tales competencias.

La estrategia de derivar directamente de la EDO las propiedades necesarias de la solución para poder dibujar su gráfica sin conocer explícitamente la fórmula (ruta cualitativa) no surge de manera natural y espontánea (lo que evidentemente está condicionado por las experiencias previas) y, por tanto, esta estrategia debe ser sugerida por el investigador. No obstante, se observa que el modo de pensamiento algebraico y algorítmico o conocimiento procedimental persiste con muchas limitaciones, incoherencias e inconsistencias con una profusión de aprendizajes mecánicos y una tendencia muy fuerte a rutinizar la estrategia de solución cualitativa. De hecho, después de negociar que para resolver las tareas la ruta cualitativa es plausible y lograr obtener dibujos bastante aproximados, se genera en el investigador la ilusión de que los estudiantes habían asimilado significativamente tal método. No obstante, al cambiar las condiciones iniciales en los problemas 3 y 4, todos los estudiantes, después de darse cuenta que los análisis y las conclusiones que ya se habían obtenido se mantienen válidos y que la única condición que cambia es el punto por donde pasa la gráfica, producen gráficas totalmente incoherentes.

Por tanto, podemos concluir que en los *esquemas conceptuales* de los sujetos investigados, el *procepto* de EDO de primer orden sólo evoca, por una parte, el concepto de expresión algebraica para referirse tanto al concepto de EDO como a sus soluciones y, por otra, a un proceso algebraico-algorítmico para obtener una fórmula para dichas soluciones. De otra manera, podemos decir que el *esquema conceptual evocado* del concepto de EDO contiene, por una parte, sólo una expresión algebraica en la que se relaciona una función, la variable independiente y su derivada y, por otra, una noción de resolver una EDO que supone usar algún método algebraico para encontrar una fórmula que satisfaga la ecuación diferencial. Estos *esquemas* contienen conexiones cognitivas muy débiles para: 1) leer, interpretar y tratar un problema de valor inicial planteado en el registro gráfico y 2) coordinar y usar simultáneamente los registros gráficos y algebraicos para tratar con una función implícita y sus derivadas a fin de poder construir su gráfica. Asimismo, no existe una red de relaciones gráficas e intuitivas sobre el comportamiento cualitativo de una función, que permita obtener ciertas propiedades cualitativas (concavidad, puntos de inflexión, etc.) o, de manera más general, dar argumentos y justificaciones en el registro gráfico a fin dibujar la gráfica en cuestión. Por ejemplo, observamos que la noción subyacente de extremo local se limita sólo a puntos donde la función es derivable y no contiene una imagen geométrica para el comportamiento de la función en torno a un punto no diferenciable. De tal manera que ello aparece como un obstáculo epistemológico para razonar en el registro gráfico. También, existe una tendencia muy fuerte a compartimentalizar y rutinizar los conocimientos y estrategias que exige la ruta de solución cualitativa.

Así pues, los *esquemas conceptuales* se pueden caracterizar por: el predominio de un modo de pensamiento algebraico y algorítmico, una concepción de acción y proceso de los conceptos implicados (función, ecuación diferencial, solución de un problema de valor inicial) y profusión de conocimientos procedimentales; también ausencia de conocimientos y habilidades metacognitivas, es decir, conocimientos conceptuales y estrategias generales que les permitan reflexionar y controlar sus cogniciones y producciones (como resultados de esos procesos) a fin resolver de manera eficiente las tareas propuestas. En fin, todo esto, en conjunto, permite caracterizar los esquemas conceptuales como pobres, débiles, incoherentes y rígidos. Además, tales esquemas pueden ser considerados como un obstáculo didáctico y cultural para el modo de pensamiento y los conocimientos conceptuales que demanda la ruta cualitativa.

Finalmente, en nuestro trabajo (Guerra, 2002) se logran confirmar algunas tesis ya mencionadas en otros estudios del área de la didáctica del Cálculo. A saber: 1) el desarrollo de habilidades algebraicas y algorítmicas por sí solas no garantizan la comprensión de los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias, 2) los conocimientos y/o habilidades adquiridas en el registro algebraico no se transfieren de manera automática al registro gráfico, y 3) la actividad de conversión entre representaciones no resulta por sí misma en forma automática, rápida y espontánea por el solo hecho de haber sido capaz de formar esas representaciones y efectuar tratamientos sobre ellas.

De esta manera, pues, hemos contribuido a generar más evidencias que vienen a minar la creencia generalizada entre el profesorado en la superioridad del enfoque algebraico y algorítmico frente al enfoque gráfico/visual y numérico, considerado secundario y subsidiario; creencia que, por una parte, permite sostener que un estudiante que tenga un buen desempeño en el primer enfoque automáticamente también lo tendrá en el segundo y, por otra, que la actividad de conversión entre las representaciones algebraica y gráfica resulta por sí misma en forma automática y espontánea.

Pero, es más, las capacidades para tratar, leer, interpretar y convertir información cuantitativa en un formato cualitativo y viceversa (lo que tiene un valor práctico y educativo incuestionable), no logran desarrollarse siguiendo un enfoque tradicional, lo que desfavorece la formación científica de los estudiantes y el desarrollo de sus competencias comunicativas.

En este sentido, otro ejemplo ilustrativo de tal situación, sería el comportamiento de mis estudiantes cuando se les pide resolver el problema de valor inicial

$$y' - 2xy = 1,\ y(0) = -\frac{1}{2}.$$

Todos son capaces de obtener la solución siguiente

$$y(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt - \tfrac{1}{2}e^{x^2}.$$

Sin embargo, unos tienen serias dificultades para acceder a las propiedades cualitativas de *y(x),* careciendo de una imagen gráfica para ella. Otros el único significado que atribuyen a la expresión de *y(x)* se reduce a una mera fórmula y, en el mejor de los casos, algunos llegan a afirmar que para calcular $y(x_0)$ es necesario utilizar algún método de integración numérica. Y están aquéllos que no creen que tales expresiones sean respuestas tan aceptables como aquellas en las que sólo aparecen funciones elementales.

Evidentemente estos hechos no podrían ser de otro modo y la responsabilidad de ese estado de cosas, poco deseadas y decepcionantes, no puede atribuírsele sólo a los estudiantes. Pues, creemos que es determinante lo que los otros componentes del sistema didáctico (profesor y currículo) y todo su entorno les niegan a éstos: los medios cognitivos y culturales para su desarrollo intelectual y formación científico-técnica. Por ejemplo, en Zill (1988, pp. 40-41), un libro de texto muy usado en el curso de EDO (en el sistema universitario salvadoreño), se resuelve el problema de valor inicial $y' = y^2 - 4,\ y(0) = 2,$ con el objeto de mostrar las limitaciones de proceder sólo en el registro algebraico y darse por satisfecho una vez encontrada la solución general. Sin embargo, las explicaciones a las que recurren este autor y muchos de los profesores que siguen este texto se quedan en el mismo registro algebraico, mostrando solamente que existen soluciones que no pueden obtenerse de la solución general. Es cierto que se muestra ahí un dibujo con algunas soluciones, pero no se hacen explícitas las relaciones de ese dibujo con la ecuación diferencial.

En fin, el trabajo subsiguiente será diseñar y experimentar propuestas didácticas alternativas para enriquecer la perspectiva del primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias en contextos educativos que no disponen de las condiciones materiales para utilizar de manera intensiva la tecnología. Pero, que demandan urgentemente romper con la exclusividad de los procesos de algebrización y algoritmización a que ha estado sometida la enseñanza y el aprendizaje de ésta disciplina durante mucho tiempo. En este sentido, adoptaremos el marco teórico y metodológico de la Teoría Apos.

3 Marco Teórico

3.1 Introducción

Tal como ya se ha dicho, este trabajo se ubica dentro del área de la Didáctica de las Matemáticas denominada Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y, específicamente, dentro del programa de investigación cognitivo que propone la denominada Teoría APOS[8] (*Actions, Process, Objects, Schemas*).

Evidentemente, esto significa que asumimos como hipótesis básica que los fenómenos relativos al aprendizaje pueden ser explicados, en gran medida, a partir de las características individuales de los estudiantes: cognitivas, lingüísticas, psicológicas, motivacionales, actitudinales, etc. El fin es obtener una comprensión teórica más profunda de los mecanismos subyacentes en el PMA de la que se posee actualmente. Y decimos en gran medida, porque es patente (de lo cual somos conscientes) que el currículo, la actuación del profesor, la ideología, el contexto sociocultural condicionan y determinan el desarrollo cognitivo de los estudiantes (ver Tall, 1991). Y en consecuencia para tener una perspectiva global y pragmática de los fenómenos de la enseñanza y del aprendizaje esos aspectos deben ser tomados en cuenta. Así, creemos que bajo esta perspectiva, en ningún momento se supone la primacía de las estructuras y procesos del sujeto en la explicación de los fenómenos didácticos y, tal como puede verse más adelante, se insiste mucho en el aprendizaje cooperativo. Así, pues, adoptándola no caemos en el reduccionismo subjetivo e individualista que la crítica señala.

En fin, creemos que es válido y muy útil cuestionar y reflexionar sobre las características de la práctica docente, el currículo y su entorno a partir de las características de las competencias y habilidades y los esquemas que desarrollan los estudiantes.

El PMA, en general, es un campo difuso que puede caracterizarse en función o bien del nivel de las matemáticas implicadas o bien de las operaciones

[8] Una mejor traducción sería Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema).

cognitivas requeridas por la actividad matemática (Heid y Ferrini-Mundy, 1999).

Así, para unos, el PMA es un término que se refiere en conjunto a los modos de pensamiento que le permiten a un sujeto aprender, producir, valorar y aplicar las matemáticas. Bajo esta perspectiva, no se supone que esas habilidades deberían ser adquiridas sólo después que el pensamiento matemático no - avanzado ha sido aprehendido. Y por tanto, en todos los niveles educativos, desde el nivel elemental al superior, se requiere de él. Ejemplos de PMA son: reconocer un concepto en diferentes sistemas de representación, razonar deductivamente, conjeturar, razonar algorítmicamente, encapsular un proceso, convertir una representación en otra, etc.

Otros, consideran que el PMA debería ser definido en términos del nivel de los contenidos curriculares (Dreyfus, 1991). Así, se identifica el PMA con el tipo de pensamiento que demandan las matemáticas avanzadas, es decir, con el cálculo y más allá. Tall (1991) dice que el paso del Pensamiento Matemático Elemental al PMA supone unas transiciones muy importantes: 1) *pasar de describir a definir*, y 2) *de convencer a demostrar*.

Otra perspectiva (Robert & Schwarzenberg, 1991) considera que cuando todas esas características específicas que podríamos atribuirle al PMA se conjugan, ocurre un cambio cuantitativo muy importante: más conceptos, menos tiempo, más reflexión, más abstracción, más énfasis en las pruebas, más necesidad de un pensamiento versátil, más necesidad de habilidades metacognitivas, etc. que genera un cambio cualitativo que es lo que caracteriza la transición al PMA. Y lo que de hecho caracteriza el PMA es el tipo de pensamiento lógico, flexible y preciso que es necesario que una persona ponga en juego para tratar con la complejidad (ver Dreyfus, 1991).

Entre las diferentes perspectivas teóricas que coexisten en el PMA: concept definition *versus* concept image (Tall & Vinner, 1981), la noción de obstáculo (Brousseau, 1997), la dualidad proceso-objeto (Gray & Tall, 1991, 1994; Dubinsky, 1991; Sfard, 1991), hemos optado por la Teoría APOS porque nos proporciona una marco teórico y metodológico (la metodología RUMEC[9]) cognitivo coherente para diseñar, experimentar y evaluar propuestas didácticas y situaciones de aprendizaje para las EDO que favorezcan en los estudiantes pasar de unos esquemas conceptuales pobres, débiles, incoherentes, inconsistentes a otros ricos, flexibles y robustos.

[9] Research in Undergraduate Mathematics Education Community

Sin más preámbulo, la perspectiva de la teoría APOS y la metodología RUMEC surgen de la interpretación y reconstrucción de la obra de Piaget con el objeto de describir y explicar el desarrollo de pensamiento matemático avanzado en el nivel universitario (Dubinsky, 1991, 1996; DeVries, 2001). Y ella como metodología de investigación en el campo de la didáctica se basa en un ciclo recursivo de tres componentes dinámicas: 1) un análisis teórico que proporciona un modelo epistemológico del concepto en cuestión, es decir, qué significa entender ese concepto y cómo esa comprensión puede ser construida por el estudiante, 2) diseño e implementación de una secuencia instruccional que permite que los estudiantes elaboren tales construcciones y al investigador recopilar datos, y 3) la observación, evaluación y revisión del análisis teórico inicial y de la secuencia instruccional para realizar otra iteración del ciclo (ver Asiala et al., 1997, p. 4). Así, una de las características de este marco teórico y metodológico es que está en constante desarrollo (ver Clark *et al.*, 1997).

Siguiendo (Asiala *et al.* 1997; DeVr,ies, 2001; Dubisnky, 1991), revisemos, pues, las principales ideas piagetianas que a juicio de estos autores pueden ser aplicadas para concebir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario.

3.2 La Teoría APOS

En primer lugar, Dubinsky señala que el concepto de *abstracción reflexiva,* introducido por Piaget para describir la construcción de estructuras lógico-matemáticas durante el desarrollo cognitivo de la persona, puede ser una herramienta potente en el estudio del pensamiento matemático avanzado (PMA). La *abstracción reflexiva* es el proceso cognitivo por medio del cual una acción o un objeto, ya sea físico o mental, se reconstruye y organiza en un plano superior del pensamiento. Esta es el resultado de dos mecanismos: uno, *la proyección* sobre un nivel superior de lo que ha sido derivado de un nivel inferior y, el otro, *la reflexión* que permite reconstruir y reorganizar dentro de un sistema más grande eso que ha sido transferido por la proyección. Además, agrega que el estudio de la abstracción reflexiva, en tanto que intenta describir o explicarnos qué se necesita que suceda, es complementario a la investigación de nociones tales como los obstáculos epistemológicos de G. Brousseau o la del conflicto entre imagen del concepto y definición del concepto de D. Tall, que explican por qué las cosas no suceden (Dubinsky, 1991, p.103).

En Dubinsky (1991, p. 97) también encontramos las tres grandes clases de abstracción definidas por Piaget: *empírica, pseudo-empírica y reflexiva.*

La abstracción empírica deriva conocimiento de las propiedades de los objetos. El sujeto, a través de su acción sobre los objetos del mundo, extrae propiedades comunes a los objetos y hace generalizaciones extensionales, esto es, el tránsito de lo específico a lo general. Pero, el conocimiento de estas propiedades por parte del sujeto es el resultado de construcciones internas.

La abstracción pseudo-empírica saca propiedades de las acciones que el sujeto introduce en los objetos.

La abstracción reflexiva se refiere al proceso cognitivo, completamente interno, de construcción de nuevas estructuras a partir de las ya existentes por medio de la observación y la abstracción.

Estas tres clases de abstracción no son independientes entre sí. Las acciones que conllevan a la abstracción pseudo-empírica o a la reflexiva son realizadas sobre objetos cuyas propiedades, el sujeto sólo llega a conocer a través de la abstracción empírica. Por otro lado, la abstracción empírica se posibilita gracias a esquemas de asimilación[10] que fueron construidos por la abstracción reflexiva. Esta interdependencia puede resumirse de la siguiente manera: la abstracción empírica y pseudo-empírica deriva conocimiento de los objetos realizando (o imaginando) acciones sobre estos. La abstracción reflexiva interioriza y coordina estas acciones para formar nuevas acciones y, por último, nuevos objetos (que pueden no ser físicos, sino matemáticos como una función o un grupo). La abstracción empírica extrae datos de estos nuevos objetos a través de acciones mentales sobre estos objetos, y así progresivamente se van construyendo las entidades matemáticas en la mente del sujeto hasta llegar a ser plasmadas en teorías axiomáticas.

Para Dubinsky, en el proceso de abstracción reflexiva, el ordenador se muestra como un sustituto ideal para la manipulación de los objetos físicos o mentales. Pues, de hecho, éste es una herramienta poderosa y útil para presentar y manipular sus representaciones semióticas. En particular, considera que la programación (usando un lenguaje de programación adecuado) puede ser una herramienta más, tal como lo son los otros recursos tecnológicos, que ayuda a potenciar el desarrollo cognitivo. No obstante, creemos que un estudiante que haya tenido experiencias tecnológicas, también debería ser capaz de resolver

[10] Para Piaget el proceso de desarrollo cognitivo se basa en dos mecanismos o procesos: la organización y la adaptación. El proceso de adaptación es considerado como el equilibrio entre los procesos de asimilación y de acomodación. La asimilación permite al sujeto incorporar los objetos a su estructura cognoscitiva, a sus esquemas previos en un proceso activo mediante el cual el sujeto transforma la realidad a la cual se adapta. La acomodación es el proceso inverso por el cual el sujeto transforma su estructura cognoscitiva, sus esquemas, para poder incorporar los objetos de la realidad.(Tall,1991, p.9)

una situación problema por otros medios, prescindiendo del ordenador si fuera posible.

Tal como ya se ha dicho el concepto de abstracción reflexiva lo introdujo Piaget como la pieza clave para describir la construcción cognitiva de conceptos lógico-matemáticos. Y se considera que la abstracción reflexiva, en su forma más avanzada, es la que conlleva a la clase de pensamiento matemático que permite separar los procesos de su contenido y convertir los procesos mismos en objetos. Así la abstracción reflexiva se muestra como una descripción del mecanismo del desarrollo intelectual. Además, en esta dinámica del desarrollo puede apreciarse ese mecanismo más general que se encuentra tanto en la psicogénesis como en la historia del pensamiento matemático, la triada dialéctica que conduce de lo intra-objetal o análisis de los objetos, a lo inter-objetal, es decir, al estudio de las relaciones y transformaciones entre dichos objetos, y de allí a lo trans-objetal o estudio de las estructuras construidas tomando como soporte dichas tranformaciones (Piaget y Garcia, 1983).

En este sentido, Dubinsky (1991, p. 101-102), retoma los hallazgos de Piaget, y propone cinco tipos de abstracción reflexiva que considera son sumamente importantes para el PMA.: a) *la interiorización*, que consiste en trasladar una sucesión de acciones materiales a un sistema de operaciones interiorizadas, b) *la coordinación* de dos o más procesos para construir otro nuevo, c) *la encapsulación*, esto es conversión de un proceso (dinámico) en un objeto (estático), o la tematización de un esquema d) *la generalización* y e) *la reversión*, cuando un proceso que existe internamente permite construir un nuevo proceso que consiste en revertir el proceso original (*desencapsular o destematizar*).

Las ideas esenciales de la teoría APOS acerca de lo que significa aprender y comprender algo en matemáticas y de cómo acceder a un conocimiento cuando se lo necesita, según Dubinsky y sus colaboradores, están contenidas en el siguiente párrafo:*"El conocimiento matemático de una persona es su tendencia[11] a responder ante una situación-problema[12] matemática por medio de: la reflexión sobre los problemas y sus soluciones en un contexto social[13], la construcción o reconstrucción de las acciones, los procesos y los objetos matemáticos y la organización de estos en esquemas para usarlos al enfrentarse con las situaciones*"(Asiala y col, 1997, p. 5)

---

11 La tendencia de una persona tiene que ver con las relaciones que establece entre sus constructos mentales y con las interconexiones que usa para comprender un concepto, y la forma en que los usa (o fracasa al usarlos) en una situacion-problema.

12 El término situación-problema hace referencia a la dicotomía desequilibración/reequilibración.

13 El contexto social se refiere, al menos, al papel del aprendizaje cooperativo.

La acción de reflexionar, dice Dubinsky, en el sentido de poner atención consciente a las operaciones que son realizadas, es una parte importante tanto del aprendizaje como de la comprensión. La comprensión en matemáticas va mucho más allá de la habilidad para realizar cálculos sofisticados: es necesario ser consciente de cómo los procedimientos funcionan, de mirar el resultado sin llegar a realizar todos los cálculos, de ser capaz de trabajar con variaciones de un algoritmo, de ver relaciones y de organizar las experiencias–tanto matemáticas como no-matemáticas.

Poseer un conocimiento consiste en esa tendencia a hacer construcciones mentales que son usadas para tratar con una situación-problema. Las construcciones más frecuentes son recordar algo previamente establecido o repetir un método conocido. Pero el desarrollo del conocimiento matemático se da cuando se hacen una reconstrucción, bastante diferente, de un problema previamente tratado. Entonces la reconstrucción no es exactamente lo que ya existía, y puede contener algunos logros de un nivel más sofisticado. Así, surgen las preguntas siguientes: ¿Cuál es la naturaleza de estas reconstrucciones? ¿De qué manera se construyen?

En la teoría APOS la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales ya construidos para formar *acciones*; las acciones son entonces interiorizadas para formar *procesos* los cuales, a su vez, son encapsulados para formar *objetos*. Los objetos pueden ser desencapsulados para volver a los procesos de los cuales fueron formados. Finalmente las acciones, los procesos y los objetos pueden ser organizados en *esquemas*.

Es importante observar que las construcciones mentales - de procesos y objetos y de sus interrelaciones - no ocurren necesariamente en una secuencia lógica simple, y por el contrario, ellas pueden aparecer simultáneamente y requerirse la una a la otra.

En (Asiala y col. ,1997; DeVries, 2001) encontramos las siguientes definiciones de los términos acción, proceso, objeto y esquema y de las respectivas concepciones:

Acción/Concepción de acción. Una *acción* es una transformación mental o física de un objeto que la persona percibe como algo que es hasta cierto punto externo. La transformación se realiza reaccionando a indicaciones externas precisas de los pasos a seguir. Una persona está en una *concepción de acción de una transformación* si su nivel de comprensión está limitado sólo a realizar las acciones que supone dicha transformación. Esto es, una persona cuya comprensión de una transformación se limita a una concepción de acción puede realizar la transformación sólo reaccionando a indicaciones externas precisas. Aquí la acción tiende a controlar a la persona. Es importante señalar que una persona con una comprensión profunda de una transformación también puede llegar realizar una acción si así lo considera apropiado, sin estar supeditado a ella.

Ejemplos de acción/concepción de acción. Una persona realiza una acción o tiene una concepción de acción cuando:

- Dada una función mediante una fórmula y un punto, se calcula el valor de la función en dicho punto. Un estudiante que sea incapaz de interpretar una situación como una función, a menos que tenga una fórmula para calcular valores, está restringido a una concepción de acción de función. En tal caso, este estudiante es incapaz de hacer mucho con esta función, salvo evaluarla en un punto especifico y manipular la fórmula.
- Resuelve una ecuación siguiendo los pasos de un ejemplo similar. Si se entiende que resolver una ecuación significa buscar un ejemplo que pueda ser imitado, entonces se tiene una concepción de acción de la noción de resolución de ecuaciones.
- Dada la regla general para encontrar la derivada de una función polinomial y una función específica de esta clase, se encuentra la derivada sustituyendo los números específicos en dicha fórmula general. Un sujeto está en una concepción de acción de la diferenciación si en cada paso dado sólo es capaz de encontrar la derivada de una función siguiendo unas reglas (ya sean memorizadas o consultando una lista).

Así, si un sujeto que está en una concepción de acción de una transformación, digamos, la noción de función, entonces las nociones derivadas tales como las funciones definidas por tramos, la inversa de función, la composición de funciones, los conjuntos de funciones, la función derivada y las soluciones de una ecuación diferencial serán fuente de grandes dificultades para él.

De acuerdo a la teoría APOS, la dificultad radica en que el estudiante no es capaz de ir más allá de una concepción de acción y que, por el contrario, todas estas nociones requieren las concepciones de proceso y/o objeto. Por tanto, es necesario que el estudiante desarrolle habilidades para interiorizar estas acciones en procesos, o encapsular procesos en objetos.

Proceso/Concepción de proceso. Cuando una acción se repite y la persona reflexiona sobre ella, entonces puede ser interiorizada en un proceso. Esto es, se puede hacer una construcción interna que realiza la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Una persona que ha construido un proceso puede reflexionar, describir o incluso revertir todos los pasos del proceso sin llegar realizarlos en realidad. En contraste a una acción, un proceso es percibido como algo interno y bajo el control consciente de la persona. Una persona está o tiene una concepción de proceso de una transformación si su nivel de comprensión está limitado a pensar la transformación como un proceso.

Ejemplos de proceso/concepción de proceso. Una persona realiza un proceso o tiene una concepción de proceso cuando:

- Piensa o imagina que una función puede recibir uno o más inputs, o valores de la variable independiente, y realizar una o más operaciones sobre ellos y devolver los resultados como outputs, o valores de la variable dependiente, sin realizar efectivamente los cálculos. Por ejemplo, Dubinsky señala que para entender una función tal como *sen(x),* se necesita una concepción de proceso de función ya que no hay instrucciones explícitas para obtener un output para un input dado, y con el objeto de implementar la función, se debe imaginar el proceso de asociar un número real con su seno. Creemos, sin embargo, que este ejemplo es cuestionable, pues podemos imaginar el proceso geométrico de asociar con cada punto del círculo unitario su ordenada y así mediante traslación de segmentos se puede imaginar o construir la función *sen(x).*
- Resuelve una ecuación guiado por la forma posible de la solución. En este caso, es capaz de describir, sin llegar a plasmar, los pasos necesarios para resolver la ecuación o revertir los pasos para mostrar que una posible solución es en efecto una solución. La persona tiene una concepción de proceso de la noción de resolución de ecuaciones si tiene un proceso para encontrar soluciones, pero no es capaz de realizar una acción sobre el conjunto solución sin encontrar de hecho las soluciones.
- Encuentra la función derivada de una función dada usando las reglas estándar. La persona tiene a lo más una concepción de proceso de la diferenciación si puede encontrar la derivada de funciones elementales, pero no puede utilizar la idea de la segunda derivada a menos que la primera derivada haya sido calculada explícitamente (para una función dada).

Una vez que la persona ha construido un proceso, éste puede ser transformado de varias formas. Un proceso puede ser revertido o puede ser coordinado con otros procesos.

Con una concepción de proceso de función, se pueden relacionar dos o más funciones para construir una composición, o revertir el proceso para obtener funciones inversas, etc.

Objeto/Concepción de Objeto. Una persona puede construir objetos cognitivos de dos maneras. Primero, cuando esa persona reflexiona sobre las acciones aplicadas a procesos particulares, se vuelve consciente del proceso como una totalidad, se da cuenta de las transformaciones (ya sean, acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y en verdad es capaz de construir tales transformaciones, entonces se dice que la persona ha construido este proceso como un objeto cognitivo. En este caso, se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. Segundo, cuando reflexiona sobre un esquema, se vuelve consciente del esquema como una totalidad, y es capaz de realizar acciones sobre él, se dice que la persona ha tematizado el esquema en un objeto. Una persona tiene una concepción de objeto de un concepto matemático cuando su nivel de comprensión de esa idea o concepto le permite tratarla como un objeto: es capaz de realizar acciones, de desencapsular el objeto para volver al proceso del cual se obtuvo si fuera necesario (con el fin de usar sus propiedades y manipularlo), o en el caso de un esquema tematizado destematizarlo en sus diversas componentes.

Ejemplos de objetos/concepciones de objeto. Se ha encapsulado (tematizado) un proceso (esquema) en un objeto cuando una persona:

- Es capaz de pensar o visualizar una función como la suma de dos funciones sin hacer referencia a ejemplos específicos. Una persona tiene una concepción de objeto de una función si es capaz de descomponer una función en la suma de otras dos funciones.
- Analiza una nueva situación y reconoce en ella cómo y por qué la regla de la cadena está implicada. Tal persona tiene una concepción de objeto de la regla de la cadena, como resultado de haber tematizado el esquema correspondiente, si puede actuar sobre él, combinándolo con otras reglas.
- Selecciona los métodos apropiados y comprende las relaciones entre distintos procedimientos para encontrar las posibles soluciones de una ecuación algebraica.
- Reconoce, selecciona y usa correctamente las reglas generales de la diferenciación implicadas en una situación, así como combina las reglas y puede explicar cómo lo ha hecho.

En matemáticas es muy importante que una persona sea capaz de moverse entre una concepción de proceso y una concepción de objeto de una idea matemática.

La encapsulación de procesos en objetos y la desencapsulación de los objetos para volver a los procesos que los engendraron, se dan cuando se piensan, por ejemplo, en las operaciones con funciones o en conjuntos de funciones.

En general, se considera que la operación de encapsular procesos en objetos es sumamente difícil. De hecho, esta es un área que demanda más experimentación (Dubinsky, 1996).

Esquema. Una vez construidos los objetos y los procesos, estos pueden ser interconectados de varias formas: por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados; procesos y objetos se pueden relacionar por el hecho de que el primero actúa sobre el segundo. Así un esquema para cierta parcela de las matemáticas es una colección personal de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están conectados, consciente o inconscientemente, en una estructura coherente en la mente de la persona. Estos son movilizados para enfrentar una situación problema. Una función y una característica sumamente importante de la coherencia de un esquema es su uso para decidir si algo está o no al alcance de ese esquema.

Los mismos esquemas pueden ser tratados como objetos y formar parte de un esquema de nivel superior (tematización de un esquema). Por ejemplo, el esquema de espacio de funciones puede ser aplicado a conceptos como espacio dual, espacio de transformaciones lineales y álgebra de funciones.

Resumiendo, un esquema es una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas previamente construidos.

Y tal como ya se ha mencionado, hay al menos dos formas de construir objetos: a partir de procesos y de esquemas. Los objetos pueden ser transformados por acciones de nivel superior que conllevan a otros procesos, objetos y esquemas nuevos. Por tanto, tenemos un mecanismo que puede ser visto como una espiral ascendente de acciones, procesos y objetos dentro de esquemas que se reconstruyen y crecen.

Ejemplos de esquemas.

- Un esquema para resolver ecuaciones puede incluir varios métodos para transformar ecuaciones y una concepción de lo que significa resolver una ecuación.
- Un esquema individual para la diferenciación puede incluir varias reglas para encontrar la derivada de una función.

- Un esquema individual de la noción de límite puede permitirle a la persona coordinar, en alguna forma, las representaciones cognitivas de cercanía ya sea en el dominio o en el rango, y una concepción de función.
- Las reglas matemáticas, tales como la regla de la cadena para la diferenciación, que requieren coordinar dos o más acciones, procesos u objetos, pueden también ser entendidos vía un esquema. El problema de entender tales reglas parece ser más complejo que aquél de encapsular un proceso en un objeto.

Por otra parte, el primer paso en la metodología RUMEC es proponer un análisis teórico de un concepto matemático que describa las construcciones mentales que un estudiante debería elaborar con el fin de desarrollar su comprensión de ese concepto. El resultado es un modelo de cognición llamado *descomposición genética del concepto*.

Una descomposición genética de un concepto matemático es, pues, una descripción detallada, un conjunto estructurado de constructos mentales que una persona debe hacer para tratar exitosamente con ese concepto. Es necesario observar que no se asume que una descomposición genética particular, sea única (de hecho no tiene por que serlo).

Para proponer una descomposición genética para un concepto matemático en particular (o elaborar el análisis teórico inicial) debemos tomar en consideración: una teoría del aprendizaje, nuestra propia comprensión del conocimiento matemático implicado, todas nuestras experiencias y observaciones como investigadores y profesores y las investigaciones previas. Así, una descomposición genética funciona como un posible guía para el aprendizaje individual de ese concepto.

Ejemplos de descomposición genética.

Descomposición genética para la comprensión gráfica de una función y su derivada (Asiala, Cottrill y Dubinsky, 1997).

1. **Prerrequisitos:** Comprensión y conocimientos y/o habilidades para tratar con: la representación gráfica de puntos, el concepto de pendiente de una recta y el concepto de función. Específicamente,
   1.1 Representación gráfica de objetos matemáticos
   a) Representación gráfica de un punto.
   b) Representación gráfica de una recta y determinación del concepto de pendiente.
   1.2 Coordinar representaciones de puntos con la noción de función

a) Interpretar gráficamente (x, y) cuando $y = f(x)$.

Porque no todos son capaces de hacer dicha interpretación.

b) Vencer la necesidad de contar con una fórmula para una función.

Pues un estudiante puede mostrar una concepción de proceso de una función cuando ésta se representa por expresiones algebraicas, ecuaciones o conjuntos de pares ordenados, pero estar en el nivel de acción para una situación gráfica. Una concepción de acción es patente cuando se tiene necesidad de una fórmula para la función. Esta necesidad puede provocar respuestas sin sentido, incoherentes o inconsistentes.

2. Rutas gráficas y analíticas hacia la derivada

1a. Gráfica: acción de conectar dos puntos de una curva para dibujar una cuerda, y acción de calcular la pendiente de la recta secante que pasa por dichos puntos.

1b. Analítica: acción de calcular la razón de cambio promedio usando el cociente de incrementos en un punto.

2a. Gráfica: interiorización de las acciones en el punto la) como un proceso individual (o aislado), cuando los puntos de la gráfica se aproximan tanto como se quiera.

2b. Analítica: interiorización de las acciones en el punto 1b) como un proceso individual (o aislado), cuando la longitud de los intervalos de tiempo se aproxima a cero.

3a. Gráfica: encapsulación los procesos en el punto 2a para obtener la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes y, también, la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función.

3b. Analítica: encapsulación del proceso en el punto 2b para obtener la razón de cambio instantánea de una variable con respecto la otra.

4a. Interiorización de los procesos en los puntos 2a y 2b para obtener la definición de la derivada de una función en un punto como el límite del cociente de incrementos en ese punto.

3. Interpretación gráfica de la derivada

3.1 Interpretación gráfica de la derivada en un punto

a) Vencer la necesidad de diferenciar una fórmula

Un estudiante que muestra una necesidad de calcular la derivada en una situación gráfica tiene una concepción de pre-acción en el registro gráfico, es decir, carece de tal interpretación.

b) Coordinar con el punto 1 para concebir $f'(a)$ como la pendiente de la recta tangente.

En el nivel de acción, se puede identificar la recta tangente en un punto y calcular su pendiente. Hay al menos dos formas de construir esta acción. Una memorizar la regla de que *la derivada de una función en un punto es* *la pendiente de la recta tangente al gráfico en ese punto*. Y otra construcción más rica se obtiene al concebir la “tangente como el límite de las secantes”. De esta última el estudiante construirá el proceso de la función derivada.

c) Coordinar varias representaciones de $f'(a)$.

Aquí el estudiante relaciona conjuntamente las ideas de límite del cociente de incrementos, velocidad media, costo marginal, etc. y es capaz de moverse entre varias interpretaciones.

3.2 Interpretación gráfica de la derivada como una función

a) Concebir la derivada como la función, $x \to \textit{pendiente en } (x, f(x))$

Esta es la concepción de proceso de la derivada en el registro gráfico. Esta construcción puede ser concurrente con la comprensión de que la derivada de una función también es una función.

b) Superar el error de identificar $f'(a)$ con la recta tangente en un punto.

Este error puede aparecer cuando el estudiante concibe que la derivada es una función, pero no ha coordinado la interpretación gráfica con la analítica.

4. **Uso del concepto de derivada**

4.1 Hacer varias coordinaciones para obtener el gráfico de f

a) Interpretación gráfica de $f(x)$ para una x fijo

b) Interpretación de $f'(x)$ para una x fija como la pendiente

c) Realizar el proceso de que x recorra el intervalo

- Monotonía de la función y el signo de la derivada
- Pendiente infinita (tangente vertical) y derivada infinita
- Concavidad de la función y signo de la segunda derivada

d) Dibujar una gráfica completamente.

4.2 Usar la noción de derivada para dibujarla gráfica de la función. Esto indicaría una clara concepción de proceso de la interpretación de la derivada que puede ser des-encapsulada de una concepción de objeto.

En Dubinsky (2000b, p. 233-235) podemos encontrar otros dos ejemplos más de descomposiciones genéticas para los conceptos de convergencia puntual y convergencia uniforme de funciones respectivamente.

En principio, Dubinsky y colaboradores, postulan que el esquema de una persona para un concepto incluye su versión del concepto que está descrito por la descomposición genética, como también otros conceptos que la persona percibe que tienen que estar conectados al concepto en el contexto de una situación-problema. En otras palabras, la distinción entre esquema y otras construcciones mentales es como la distinción entre órgano y célula en biología. Ambos son objetos, pero el órgano (esquema) proporciona la organización necesaria para el funcionamiento de las células en beneficio del organismo. El esquema de una persona es la totalidad de conocimiento que para él o ella está conectado (consciente o inconscientemente) a un tema matemático particular. Una persona tendrá un esquema de función, un esquema de derivada, un esquema de grupo, etc. El esquema de una persona puede incluir acciones o respuestas tales como. "*Cada vez que veo este símbolo yo hago eso*". Evidentemente, esta noción de esquema coincide con la noción ya mencionada de esquema conceptual (*concept image*) de Tall y Vinner.

Los esquemas son muy importantes para el fortalecimiento matemático de la persona. Empero, según palabras de Dubinsky, la investigación en este campo está lejos de conocer toda su especificidad y de saber cómo éstos determinan o se relacionan con el rendimiento matemático. Todo lo que se puede hacer, por el momento, es conectar conjuntamente las construcciones mentales para un concepto en una guía genérica de desarrollo y comprensión (descomposición genética) y ver cómo esto es asimilado por cada persona (esquema).

Respecto a la naturaleza del desarrollo de los esquemas resulta que éstos puede describirse a través de ciertos *niveles o estadios* que ocurren en un orden específico: *intra nivel* $\rightarrow$ *inter nivel* $\rightarrow$ *trans nivel* (Clark *et al*, 1997; DeVries, 2001). Por ejemplo, en un esquema de la geometría estos niveles podrían llamarse*: intrafigural, interfigural, transfigural*. Y en un esquema analítico*: intraoperacional, interoperacional, transoperacional*. La existencia de estos estadios, uno de los principios fundamentales de la epistemología genética, expresa que el desarrollo del sistema cognoscitivo no es ni un crecimiento continuo, ni un proceso lineal[14]. *"[Esta progresión] no consiste en simples rebasamientos, puramente lineales, tales como los encontrados en toda sucesión dialéctica elemental, sino que es necesario referirse a un rebasamiento continuo de los instrumentos mismos de rebasamiento, lo cual le confiere a los instrumentos cognoscitivos su riqueza y complejidad particular. […]Cada estadio no puede ser concebido como un crecimiento natural a partir del estadio precedente, puesto que consiste en una reorganización de la totalidad de los instrumentos anteriormente utilizados por el sujeto*" (Piaget y García, 1983).

En (DeVries, 2001) encontramos las definiciones siguientes:

[14] El sistema cognoscitivo se considera como un sistema abierto cuya dinámica está determinada en gran medida por los intercambios con el medio. Su evolución se caracteriza por períodos de equilibrio dinámico o de equilibración (estadios), seguidos de rupturas de equilibrio (desequilibración) y de reorganizaciones (reequilibración) que conduce al sistema a nuevas condiciones estacionarias (nuevo estadio). Así pues, los estadios son períodos de estabilidad relativa que involucran todo tipo de fluctuaciones que surgen de las situaciones cambiantes con las cuales está confrontado permanentemente el sujeto. Y la transición de un estadio cognoscitivo al siguiente es un ejemplo típico de la inestabilidad de un sistema que no logra ya absorber ciertas perturbaciones (contradicciones internas, incapacidad de resolver ciertos problemas, etc) y debe por lo tanto reorganizar los instrumentos asimiladores para incorporar nuevas situaciones.

Intra nivel de un esquema: se caracteriza por centrarse en ítems o características individuales aisladas de otras acciones, procesos y objetos de naturaleza similar. La persona aún no ha construido ninguna relación entre ellos, y menos aun estructuras. Por ejemplo, en el desarrollo de un esquema de la regla de la cadena, un estudiante puede usar indistintamente reglas especiales de la regla de la potencia general y no llegar a relacionarlas como casos especiales de dicha regla.

Inter nivel de un esquema: se caracteriza por la construcción de relaciones entre acciones, procesos y objetos. En este nivel una persona comienza a agrupar ítems o características de naturaleza similar y tal vez pueda denominarlas por un mismo nombre. Por ejemplo, al encontrar la derivada de una función, un estudiante que visualiza conjuntamente la regla de la potencia general y otras situaciones especiales (tales como las funciones trigonométricas) bajo la descripción de la regla de la cadena, podría estar en el inter nivel del desarrollo de un esquema de la regla de la cadena. El estudiante no entiende porque ellos son casos especiales de la regla de la cadena, sino que piensa en términos de procedimientos similares que involucran funciones interiores y exteriores. En Clark *et al.*(1997, p. 360) se llama a este nivel *pre-esquema*: colección de elementos relacionados de alguna manera.

Trans nivel de un esquema: se caracteriza porque la persona ha construido una estructura subyacente que permite entender las relaciones descubiertas en el inter nivel y que a la vez da coherencia al esquema. Esta coherencia determina lo que está o no al alcance del esquema. En este nivel, la comprensión pasa de una lista a una regla general. Por ejemplo, un estudiante está en el trans nivel de desarrollo del esquema de la regla de la cadena si entiende que varios casos especiales son aplicaciones de ésta regla e identifica las funciones que dan origen a la composición en cuestión. El estudiante también es capaz de aplicar la regla de la cadena a nuevas situaciones buscando una composición de funciones. En este caso, se dice que este estudiante tiene un esquema de la regla de la cadena.

Es importante observar que no se habla de tematizar un esquema antes de que haya alcanzado el trans nivel, es decir, antes de que se convierta en un esquema. En este sentido, es mejor pensar en términos de una versión débil (instrumental) de un trans nivel: observar cómo la persona decide lo que está dentro y lo que está fuera del esquema. Evidentemente, esto conduce a esquemas tematizados que no siempre funcionan de la mejor manera posible. Empero, esto es lo que lo sucede en la realidad y, por tanto, es sumamente importante detectar tales esquemas para poder corregirlos. Así, el esquema tiene que ser desequilibrado y reconstruido.

También, a veces, suele usarse la misma etiqueta para referirse a dos esquemas que comparten casi la misma colección de elementos, pero con una estructura subyacente diferente que les da coherencia. Por ejemplo, alguien puede estar en el *trans nivel* con respecto al esquema de la regla de la cadena para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, pero puede estar en el *intra nivel* con respecto al esquema de la regla de la cadena para funciones reales de varias variables.

Por otra parte, cuando se habla de un esquema a secas, se supone que nos estamos refiriendo a un esquema que ya ha alcanzado el trans nivel de desarrollo.

La etiqueta "*madurez del esquema*" (Clark *et al.*, 1997; DeVries, 2001) suele utilizarse para referirse a la fuerza o potencia de un esquema. Esta noción es similar a lo que sucede con el concepto de función. Si el proceso de construcción se reduce a un proceso sintáctico que organiza símbolos en una fórmula de acuerdo a ciertas reglas sintácticas, y si éste es el proceso que es encapsulado en un objeto, entonces el estudiante acaba con una concepción de función débil. Aquí la causa no es el fracaso del proceso de encapsulación, sino la encapsulación de un proceso que no era lo suficientemente rica. De igual manera, una persona puede tematizar un esquema que tiene una estructura coherente débil y, en consecuencia, está persona puede no ser capaz de aplicar ese esquema en situaciones nuevas. Por ejemplo, un estudiante puede tener un esquema de la regla de la cadena que le permite diferenciar funciones definidas mediante fórmulas algebraicas estándares, pero no es capaz de reconocer una composición de funciones cuando aparecen funciones definidas mediante integrales y, por tanto, de aplicar la regla de la cadena. Un esquema de composición de composición de funciones débil puede conducir a un esquema de regla de la cadena también débil.

3.3 El diseño instruccional

Ya se ha dicho que la teoría APOS postula que la comprensión de una persona de los conceptos matemáticos es el resultado de su construcción o reconstrucción mental de acciones, procesos, objetos y otros esquemas matemáticos, organizándolos en un nuevo esquema de tal manera que pueda usarlos de forma eficiente para resolver situaciones problemas. Asimismo, se postula que la descomposición genética de un concepto en tanto que conecta conjuntamente todas esas construcciones mentales se convierte en una guía genérica del desarrollo del aprendizaje y la comprensión. Además, lo único que podemos observar de esa descomposición genética es cómo ha sido asimilada por una persona (esquema). Y el mecanismo responsable de la dinámica del desarrollo de un esquema son los procesos de desequilibración/equilibración que recorren progresivamente los tres niveles: intra, inter y trans.

Esto nos conduce a diseñar *ex profeso* estrategias instruccionales para fomentar estas construcciones específicas. Ejemplos de tales estrategias son: el ciclo de enseñanza ACE (Activities, Class discussion, Exercises), el aprendizaje cooperativo y la programación (ver Dubinsky, 1996). Estas últimas pretenden fomentar la reflexión, considerada la herramienta clave en dichos procesos de construcción, así como para construir nuevos tipos de comprensión. También se habla de colocar al estudiante en un medio intencionalmente desequilibrado y global, de tal manera que cada estudiante, trabajando solo o en grupo, con los medios necesarios, intenta darle sentido a la situación y adquiere un entendimiento global de la misma.

La siguiente lista (Dubinsky, 1996) reúne algunas de las ideas piagetianas que el grupo RUMEC ha tratado de implementar tanto en la investigación didáctica como en su práctica docente:

- Concentrarse en los mecanismos mediante los cuales se lleva acabo el desarrollo intelectual. Es decir, la abstracción reflexiva y la dualidad desequilibración-reequilibración.
- Ayudar a los estudiantes a construir acciones, a interiorizarlas en procesos y a encapsular éstos últimos en objetos.
- Ayudar a los estudiantes a tomar conciencia de las estructuras que han construido.
- Prestar la atención necesaria a todas las producciones de los estudiantes: los errores, las dificultades, los obstáculos, lo que dicen, lo que hacen, etc.
- Permitir que los estudiantes construyan las bases de los conceptos sobre la experiencia antes de enfrentar el formalismo matemático: "*Cuando se objeta que los aspectos formales de las matemáticas son una cadena de símbolos carente de sentido para los estudiantes, la dificultad no permanece en la naturaleza de la expresión formal, sino en la pérdida de las conexiones entre estas y las situaciones*" (Dubinsky, 2000b).
- Crear ambientes para la clase en los que se promuevan interacciones sociales ricas tanto entre los estudiantes como con el profesor.

4 Planteamiento del Problema

Este trabajo pretende ser el punto de inicio para plantear un cambio curricular de las ecuaciones diferenciales ordinarias en el sistema universitario salvadoreño. Este cambio se quiere fundamentar en: la investigación del pensamiento de los estudiantes, las ventajas que nos ofrecen otros currículos, la articulación y coordinación de las diferentes representaciones semióticas, los aspectos fenomenológicos conectados a los conceptos implicados, el desarrollo de las habilidades cognitivolingüísticas de los estudiantes y, en la medida de lo posible, en el uso de la tecnología de manera que no se dependan de un uso intensivo de ella, pero si que se la integra adecuadamente (v.gr. usando los Applets disponibles en Internet).

En concreto, siguiendo las pautas que la Teoría APOS nos señala, primero, debemos elaborar un análisis epistemológico del concepto de EDO y del concepto de solución.

Segundo, elaborar una *descomposición genética* para esos conceptos de las EDO que tome en cuenta las diferentes representaciones semióticas y los aspectos fenomenológicos conectados a dichos conceptos, es decir, describir qué constructos mentales deben construirse en la mente del sujeto para que pueda llegar a comprender y dominar el enfoque cualitativo de las EDO.

En tercer lugar, debemos diseñar e implementar situaciones de enseñanza y secuencias de aprendizaje acordes con la descomposición genética para recopilar datos que nos permitan evaluar, confrontar y modificar el análisis teórico inicial.

Por otra parte, queremos estudiar si efectivamente el pensamiento de los estudiantes sometidos a estas situaciones evoluciona, es decir, si sus esquemas cambian de unos esquemas pobres, débiles, incoherentes, inconsistentes a otros ricos, flexibles y robustos.

En la introducción y los antecedentes, ya hemos señalado de manera general la importancia de este proyecto. Pero ahora, es momento de señalar otra característica que le imprime a éste una relevancia especial. Contrariamente, a lo que sucede con el cálculo diferencial e integral, son escasas las investigaciones cognitivas que se han llevado a cabo para evaluar el efecto sobre el pensamiento de los estudiantes y determinar los nuevos problemas cognitivos, didácticos y epistemológicos que surgen bajo estas nuevas propuestas curriculares en contextos que no pueden hacer un uso intensivo de la tecnología. Y es precisamente ahí donde radica la importancia de este estudio.

Ya en nuestro trabajo previo (Guerra, 2002) hemos realizado una aproximación al análisis epistemológico de los conceptos implicados. Así, pues, nuestro trabajo iniciará con en el diseño de una descomposición genética del concepto de ecuación diferencial de primer orden y de sus soluciones bajo la perspectiva estratégica señalada antes. Y posteriormente, abordaremos el diseño, experimentación y evaluación de propuestas didácticas y secuencias de aprendizaje consecuentes con la descomposición genética propuesta.

En este sentido, las preguntas de investigación que podemos plantearnos son las siguientes.

Respecto al diseño de la descomposición genética:

- ¿Qué construcciones mentales (acciones, procesos, objetos, esquemas) se requieren para desarrollar una comprensión cualitativa de las EDO? ¿Cómo se observan estas construcciones? ¿Con qué instrumentos?
- ¿Cómo la descomposición genética modela (describe y explica) esas construcciones mentales que se ponen en juego cuando se realizan tareas de tratamiento y conversión entre representaciones semióticas? ¿Qué poder de predicción tiene la descomposición genética?
- ¿Cómo se explica la tematización de los posibles esquemas?
- ¿Cuáles son las características de los esquemas de los conceptos de las EDO que se construye a partir del estudio cualitativo?
- ¿De qué otros esquemas depende? ¿Qué niveles de esos esquemas se requieren?
- ¿Cómo podemos describir y caracterizar los niveles intra, inter y trans del desarrollo de los esquemas? ¿Qué pre-esquemas se forman? ¿Cómo tratar la transición de un nivel a otro?

Respecto al diseño instruccional:

- ¿Cómo se transita de la descomposición genética a la propuesta didáctica y las secuencias de aprendizaje?
- ¿Qué características deben reunir los problemas y el sistema de ejercicios para que coadyuven a esas construcciones?
- ¿Cómo elaborar una propuesta didáctica con las características deseadas de manera que no dependan de un uso intensivo de la tecnología, pero si que se la integra adecuadamente haciendo, por ejemplo, un uso efectivo de los Applets y otros recursos disponibles a través de Internet?

- ¿En qué contexto se llevara a cabo la investigación?
- ¿Qué papel jugará el aprendizaje cooperativo?

Respecto a la incidencia del diseño instruccional sobre el pensamiento de los estudiantes:

- ¿Qué efectos tienen la propuesta didáctica y las secuencias de aprendizaje sobre la comprensión de los estudiantes del enfoque cualitativo? ¿Sobre su habilidad para realizar los cálculos básicos? ¿Sobre sus actitudes y concepciones de las matemáticas? ¿Cómo evolucionan los esquemas conceptuales de los estudiantes? ¿Sobre las habilidades cognitivas que los estudiantes desarrollan? ¿Qué conocimientos y habilidades metacognitivas se adquieren?
- ¿Qué papel juega la tendencia hacia el modo de pensamiento algebraico y algorítmico cuando se implementa la ruta cualitativa?
- ¿Qué papel juega la coordinación de las representaciones semióticas en la conceptualización de la noción de EDO y la noción de solución? ¿Cómo las usan?
- ¿Cuáles son las dificultades y obstáculos específicos que los estudiantes enfrentan cuando coordinan estas representaciones? ¿Qué dificultades y obstáculos enfrentan los estudiantes? ¿Cómo se caracterizan? ¿Cuál es su naturaleza?

En este punto, creemos que es oportuno revisar los trabajos (Artigue, 1992; Habre, 2000; Rasmussen, 1996) que ponen en evidencia que los efectos esperados de las nuevas propuestas didácticas sobre en el pensamiento y las capacidades de los estudiantes pueden ser mínimos, por una parte. Así como los nuevos problemas y desafíos didácticos y matemáticos que surgen, por otra. Y por tanto, es necesario ejercer algún control sobre todo el proceso instruccional, los materiales y las actividades.

En efecto, el estudio de Habre (2000) es uno de los pocos que abordan el impacto del currículo reformado de las EDO sobre el pensamiento de los estudiantes y sus capacidades. La evidencia experimental reportada por Habre (2000) indica que tal impacto puede ser mínimo y que, por el contrario, el conocimiento conceptual permanece fuertemente ligado a esquemas algebraicos, mostrándose así que el modo de pensamiento algebraico y algorítmico aparece como un obstáculo epistemológico.

Este estudio se llevó a cabo con estudiantes de tercer semestre (en su mayoría de Biología, Estadística, Química) al final de un curso de cálculo en el que se habían enfatizado los aspectos geométricos y visuales de los contenidos de las

EDO, haciendo muy poco análisis cuantitativo. Por ejemplo, la primera lección se dedicó al estudio cualitativo (usando tecnología) de la ecuación $y' = y^2 - t$, mostrándose que no puede ser resuelta en términos de funciones elementales.

Un estudio previo sobre las habilidades para la visualización durante un curso de cálculo de varias variables, permitió seleccionar una muestra de 9 estudiantes con las características siguientes:

- Jim y Paul, prefieren la aproximación visual a la analítica porque ésta pemite obtener una idea general del problema.
- John, Grace, Justin, Bob y Jill, prefieren la aproximación analítica sobre la visual porque ella da respuestas exactas.
- Doug y Jack, dependiendo del problema, dicen que utilizarían una u otra aproximación.
- Además, un diagnóstico al inicio del curso permitió establecer que todos los sujetos, salvo Jim, tenían algún conocimiento de los métodos cuantitativos para resolver EDO sencillas, pero sólo Doug, Jack, Bob y Jill tenían algún conocimiento de los aspectos cualitativos elementales.

Durante la última semana del curso se realizó una entrevista a cada uno en la que se incluían las cuestiones siguientes:

1. ¿En qué piensas primero cuando se te pide resolver una EDO?
2. Resuelve $y' = 2y - y^2$.
3. Resuelve $y' + ky = -t,\ \text{t un parámetro}$.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

- En la cuestión 1), todos los entrevistados (9/9) pensaron primero en buscar una solución analítica. Y sólo después que se les pidiera pensar otras alternativas, 6/9 consideraron el enfoque cualitativo. Pero de éstos últimos sólo 2/6 expresaron su beneplácito y satisfacción con él. Veamos:
- Paul: "*También podríamos resolverla gráficamente y no tendrías que encontrar una expresión*".
- Doug: "*Seguro que hay otras formas de resolver una EDO: graficando el campo de pendientes. Yo supongo que me siento cómodo, si, resolviéndola de esta manera*".

Los otros 4/6, por diversas razones, expresaron ciertas reservas para usar la aproximación geométrica. Veamos:

- Bob: "*Bien, no es usualmente en la forma que yo mismo pienso…cuando veo un problema por primera vez, no lo pienso geométricamente porque no es la forma en que mi mente trabaja*".

- Grace: "*Yo me siento mejor haciendo matemáticas que visualizándolas. Yo trabajo mejor de esa forma".*
- Jack: "*Yo creo que podría mira esa opción después de no ser capaz de encontrar una forma de resolverla*".
- Jill: "*Si puedo hacerlo de esta manera (analíticamente), yo lo haría de esta forma. No quisiera hacerlo (geométricamente) usando el ordenador*".

Evidentemente, estas respuestas no sólo muestran cierta renuencia de los estudiantes para aceptar el pensamiento visual, sino que existe cierta diversidad en el desarrollo cognitivo que es necesario tener en cuenta. De hecho los estudiantes pueden dividirse en dos grupos: 1) los que siguen una vía formal, y 2) los que reconstruyen sus esquemas conceptuales y articulan las representaciones semióticas (ver Pinto, 1988, 2001).

- 3/9 rechazaron la aproximación geométrica debido a la creencia en el poder y superioridad de la respuesta simbólica frente a la gráfica:
- Jim: "*Bien…yo podría hacer el gráfico, pero no podría conocer la ecuación. Yo podría ser capaz de bosquejar la gráfica, pero eso sólo sería una conjetura*".
- Justin: "*Una solución geométrica algunas veces es satisfactoria; pero no, si puedo encontrar una solución analítica a partir de la cual tu puedes conocer todo*".
- John: "*Los gráficos no te dan una solución, sólo te dan un dibujo. Si tienes una fórmula, ella te va a decir todo…un dibujo te da una idea general…Si tienes una fórmula, yo creo que eso tiende a ser mejor*".

- En la cuestión 2), otra vez todos (9/9) escogieron en primer lugar una aproximación analítica. Sólo después de fracasar en el intento de integrar $\int \frac{dy}{2y-y^2}$, 7/9 optaron por resolver el problema geométricamente; mientras los otros 2/9 insistieron en integrar para encontrar una fórmula analítica para la solución de la EDO.

- En la cuestión 3), a pesar de haber fracasado con la ecuación de variables separables, todos los entrevistados escogieron la aproximación analítica. Y con alguna guía todos obtienen la respuesta simbólica $y = \frac{C}{e^{kt}} - \frac{t}{k} + \frac{1}{k^2}$. Sin embargo, debido a la presencia en la fórmula de *y* de la constante C y el parámetro k, ninguno fue capaz de interpretar la fórmula obtenida. Veamos:

  Jim: *Nada! (la solución no dice nada)*
  I: *¿Por qué nada?*

Jim: *Porque tu no sabes quien es k*
I: *Supongamos que sabemos que k es, digamos k=1*
Jim: *Ok, así la fórmula va a ser* $-t+1+\frac{C}{e^t}$
I: *Ahora, sabrías decir cómo es la solución?*
Jim: *Ummm…bien…como…No!*

En conclusión, ante la tarea de resolver una EDO, todos los entrevistados en primer lugar intentan una aproximación cuantitativa. Y, a pesar de que el curso tuvo una orientación cualitativa, los esquemas de los estudiantes para la noción de resolver una EDO permanecen anclados en los aspectos algebraicos. Para todos los entrevistados, una solución necesita tener una fórmula algebraica explícita; 7/9 mostraron algunas reservas con la aproximación geométrica y, sorprendentemente, ninguno tuvo éxito en relacionar los aspectos algebraicos y geométricos de la ecuación $y' = 2y - y^2$.

Otro estudio, muy ilustrativo tanto en lo metodológico como por los resultados a que se llegan, es el de Rasmussen (1996). En este estudio, exploratorio e interpretativo, se investiga el pensamiento de una estudiante de Ciencias del Mar (Amy, con muy buenos antecedentes de cálculo y algún conocimiento de dinámica de poblaciones) en torno a los métodos de análisis cualitativos de EDO de primer orden, durante un curso introductorio siguiendo un enfoque cualitativo.

Las cuestiones que este autor se plantean son las siguientes: 1) ¿qué significa para esta estudiante analizar cualitativamente una EDO de primer orden?, 2) ¿qué estrategias usa para relacionar un campo de pendientes y una ecuación diferencial?, y 3)¿qué es lo que caracteriza su comprensión de la noción de estabilidad de una EDO de primer orden?

La evidencia recogida señala: 1) que Amy ha desarrollado un conocimiento proceptual de las EDO adecuado, y 2) que una comprensión conceptual y gráfica profunda del concepto de la derivada, por una parte, y algún conocimiento de los procesos que modela una EDO, por otra, son factores que coadyuvan en la adquisición de los conocimientos y/o habilidades específicas para analizar e interpretar una EDO de primer orden usando los métodos cualitativos.

Empero, a pesar del éxito de Amy cuando analiza una EDO usando técnicas cualitativas, durante su trabajo surgen algunos conflictos potenciales nada desdeñables, ilustrándonos, pues, que con la introducción de la tecnología surgen nuevos problemas y desafíos didácticos. Por ejemplo, Amy extiende la estrategia para encontrar soluciones constantes de ecuaciones autónomas a ecuaciones no autónomas, lo que la conduce a considerar funciones que tienen pendiente cero cuando se aproximan a una asíntota vertical. Así, al considerar las ecuaciones $\frac{dy}{dt}=t+1$ y $\frac{dy}{dt}=y^2+y$, afirma que la primera tiene una asíntota vertical en t=-1 y la segunda tiene una asíntota horizontal en y=0.

Por su parte, Artigue (1992) analiza la naturaleza de las dificultades encontradas en la resolución cualitativa, distinguiendo tres niveles de interacción entre los registros de representación gráficos y algebraicos:

- *El nivel de la interpretación*: una tarea se dice que pertenece a este nivel si tiene las características siguientes:
  - La información está dada simultáneamente en los dos registros. Por ejemplo, una ecuación diferencial (registro algebraico) y un dibujo del campo de direcciones (registro gráfico).
  - El problema a resolver requiere la interacción entre las dos formas de información.

  Tareas típicas en este nivel son:
  - Relacionar dibujos de campos de direcciones y planos fase con ecuaciones diferenciales.
  - Dibujar usando algún software matemático el plano fase de algunas ecuaciones diferenciales y describir sus principales características
  - Dada una ecuación dependiente de un parámetro, determinar y analizar los diferentes planos fase.

- *El nivel de la predicción*: una tarea se dice que pertenece a este nivel si tiene las características siguientes:
  - La información está dada sólo en un registro, por ejemplo una ecuación diferencial o un plano fase.
  - El problema a resolver requiere una solución en el otro registro. Por ejemplo, si se da una ecuación diferencial, se precisa dibujar su plano fase, y si se da un plano fase se debe crear una ecuación diferencial compatible cualitativamente con el plano fase dado.

  Tareas típicas en este nivel para una ecuación de la forma $y'=f(x,y)$ son:
  - Identificar, a partir de la ecuación diferencial, los invariantes geométricos del plano fase.
  - Dividir el plano de acuerdo al signo de $f(x,y)$
  - Determinar algebraicamente los conjuntos abiertos del plano donde las condiciones de Cauchy-Lipschitz se cumplen e interpretar las

propiedades correspondientes de existencia, unicidad y maximalidad de las soluciones en términos gráficos.
    - Ligar las características de la ecuación diferencial y las asíntotas de las soluciones.

- *El nivel de la justificación* (ver Hubbard y West, 1991, cap. 1)
  Tareas típicas en este nivel son:
    - Probar que una solución intersecta una curva dada
    - Probar que una solución no puede intersectar una curva
    - Probar que una solución tiene una asíntota.

Finalmente, Artigue (1992) reporta que los estudiantes acceden al nivel de la interpretación sin mostrar problemas particulares y que su actuación en el nivel de la predicción es satisfactoria. Por el contrario, en el nivel de la justificación el porcentaje de éxito baja sensiblemente debido, en gran parte, al hecho de que el registro gráfico es usado sólo como un sub-registro para la representación y nunca para la justificación.

5. Objetivos

5.1 Objetivos generales

- Contribuir al desarrollo teórico de la didáctica de las matemáticas en el nivel superior, mediante la descripción y caracterización de los mecanismos de funcionamiento y del desarrollo del PMA (postulados en el marco teórico en torno al tópico de las EDO).
- Contribuir a desarrollar la metodología de investigación cualitativa para el estudio de los procesos cognitivos que demanda la actividad matemática en el dominio del PMA.
- Coadyuvar a promover una aproximación didáctica de las EDO más acorde con su epistemología específica y las prácticas científicas de referencia de los destinatarios, y que estimula el desarrollo cognitivo de los estudiantes en aquellos contextos educativos que demandan de manera urgente romper con la larga exclusividad de los procesos de algebrización y algorítmización y que no cuentan con las condiciones objetivas para hacer un uso intensivo y masivo de la tecnología (constante en casi todas las propuestas curriculares encontradas).

5.2 Objetivos específicos

- Diseñar una Descomposición Genética para los conceptos de las EDO que toma en cuenta: una base de significados pertinente, es decir, que está en sintonía con las prácticas científicas de referencia de los estudiantes, y que integra y coordina las diferentes representaciones semióticas.

- Estudiar el efecto que produce implementar la estructura hipotética sugerida por la Descomposición Genética (secuencias de aprendizaje) sobre la apropiación (uso y conceptualización) de los conceptos y los métodos de resolución de las EDO por parte de los estudiantes, así como identificar y caracterizar las dificultades encontradas por éstos en los procesos instruccionales.

- Enriquecer la metodología de la enseñanza de las EDO con lecciones y materiales en los que, contrario al acercamiento convencional algebraico y algorítmico, se usan las diferentes representaciones semióticas e incorpora una base de significados pertinentes de acuerdo a las prácticas científicas de referencia de los destinatarios.

- Crear materiales de enseñanza en los que se integran estratégicamente los recursos disponibles en Internet.

- Estudiar la puesta en funcionamiento de dichas lecciones y materiales didácticos.

6. Metodología de Investigación

Nuestro interés se centra en realizar una descripción (rica y densa) y un análisis detallado e interpretativo de los mecanismos de construcción de los estudiantes de los conceptos y procesos de la noción de EDO de primer orden cuando éstos últimos participan de un proceso de enseñanza y aprendizaje que articula las dimensiones fenomenológica y semiótica de la actividad matemática.

En este sentido, la metodología de investigación tendrá una orientación cualitativa y, en gran medida, ha sido ya sugerida por el marco teórico y metodológico de la Teoría Apos. En particular, pretendemos realizar un estudio de casos de estudiantes (probablemente, estudiantes de la Licenciatura en Estadística de la Universidad de El Salvador) que participen en un curso experimental diseñado expresamente para romper con la exclusividad de los procesos de algebrización y algoritmización de las EDO.

Así pues la metodología constará de tres fases:

6.1 Fase I

Se centra en la elaboración de una Descomposición Genética Experimental (DGE) de los conceptos y procesos en torno a la noción de EDO y de sus soluciones. Para este fin, distinguimos los momentos siguientes:

- Análisis y reflexión teórica sobre los problemas (epistemológicos, cognitivos y didácticos) y las recomendaciones de otras investigaciones centradas en el tema de estudio.
- Anticipación o identificación de los esquemas y niveles (o concepciones) de otras nociones matemáticas necesarias para comenzar un estudio de enfoque cualitativo de las EDO.
- Elaboración de una Descomposición Genética Preliminar (DGP), que conjuga nuestro análisis inicial.
- Validación de la Descomposición Genética Preliminar (DGP), que dará como resultado nuestra Descomposición Genética Experimental (DGE). Para esto, recurriremos:
    - A la evaluación de la DGP por parte de expertos (investigadores del campo y profesores de Matemáticas),

- Aplicación y evaluación de dicho modelo a un estudiante.

6.2 Fase II

De acuerdo con la DGE anterior, crear un contexto de investigación y de enseñanza y aprendizaje. Es decir:

- Diseño y elaboración de una propuesta didáctica. Esto incluye elaboración de actividades, materiales, lecciones, tareas, así como diseño de un modelo de intervención estratégico y de las situaciones de enseñanza y aprendizaje.
- Implementar esa propuesta didáctica en un grupo de estudiantes (probablemente de la Carrera Licenciatura en Estadística) durante un curso experimental de EDO.
- Realizar un seguimiento detallado del comportamiento de los estudiantes con el fin de recoger datos de investigación, utilizando diversos instrumentos de investigación (cuestionarios, entrevistas grabadas, observación de interacciones y producciones durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, revisión de los cuadernos de tareas, etc.).
- Definir los criterios que nos permitirán centrar la investigación en el caso de estudio (antecedentes académicos, disposición, madurez matemática, etc.): una muestra del grupo de estudiantes que participen en el curso con ciertas características a precisar.
- En principio, podemos pensar en administrar cuatro cuestionarios: antes durante y al final del proceso didáctico, y otro después de un cierto tiempo para evaluar el efecto sobre la memoria a largo plazo. Asimismo podemos complementar la información de los cuestionarios llevando acabo varias entrevistas grabadas.

6.3 Fase III

Se construirán ciertas categorías para analizar los datos obtenidos y se hará una evaluación de la DGE. Para el análisis de los datos utilizaremos: tablas de respuestas de los cuestionarios, redes sistémicas, extractos de las transcripciones de las entrevistas y contrastación con opiniones de los expertos.

7 Calendario

Elaboración del marco teórico	04/2002 a 06/2002
Elaboración de instrumentos de investigación	05/2002 a 12/2002
Recogida de datos	01/2003 a 12/2003
Análisis de datos	01/2004 a 06/2004
Elaboración del primer informe	05/2004 a 08/2004
Redacción de la Tesis	06/2004 a 09/2004
Lectura de la Tesis	12/2004

8. Referencias

Artigue, M. (1989). Une recherche d'ingenierie didactique sur l' enseignement des equations differentielles en premier cycle universitarie, IREM, Université Paris 7, Cahiers du Séminarie de Didactique des mathématiques et de l'informatique No 107, 284-209.

Artigue, M. (1991). Analysis, en Tall, D. (ed*): Advanced mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press.*

Artigue, M. (1992). Functions from an Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices, *en Dubinsky, E. & Harel, G (eds),The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25. Washington, DC: MAA.*

Artigue, M. (1994).Didactical Engineeering as a Framework for the Conception of Teaching Products, *en Bielher & col. (eds), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Kluwer Academic Press, 27-29.*

Artigue, M.(1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, *en Gómez, P.(ed), Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamerica.*

Artigue, M.(1998). L' evolution des problematiques en didactique de l'analyse, *en Recherches en Didactique des Mathématiques, 18(2), 231-262.*

Artigue, M.(2000). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué nos enseñanlas investigaciones didácticas y los cambios curiculares?, *en El futuro del Calculo Infinitesimal, ICME-8, Sevilla, España.*

Asiala, M, Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, *en Research in Collegiate Mathematics Education 2, 1-32.*

Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000) A Calculus Graphing Scheman, en Journal for Research in Mathematics Education, *Vol. 31*

Blanchard, P. (1994) Teaching differential equations with a dynamical systems viewpoint, *en The College Mathematics Journal*, 25, 385-393.

Blanchard, P., Devaney, R. y Hall, G. (1999) *Ecuaciones Diferenciales*, International Thomson.

Bliss, J. & Ogborn, J. (1979). L'anàlisi de dades qualitatives, *en European Journal of Science Education*, 1(4), 427-440.

Bookman, J. & Friedman, C. (1994). A comparison of the problem solving performance of students in lab based and traditional calculus, *en Dubinsky, E., Schoenfeld, A. y Kaput, J. (eds), Issues in Mathematics Education*, volumen 4, pp. 101-116.

Campillo, P. y Devesa, A. (1999). Uso adecuado e inadecuado de un asistente matemático, en *Epsilon*, 45, pp. 263-274.

Chau, O. & Pluvinage, F. (1999) Comparaison de compétences dans les approches algébrique, qualitative et informatique des équations différentielles ordinaires en premiére année universitaire, *en Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 195-220.*

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., John, D., Tolias, G. y Vidakovic (1997). Constructing a schema: the case of the chain rule, en *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345-364.

DeVries, D.J. (2001). Rumec/Apos Theory Glossary, en http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html

Devaney, R. (1995) Introduction to differential equations, en http://math.bu.edu/odes.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes, *en Tall, D. (ed): Advanced mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press*

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992).The nature of the process of function, *en Dubinsky, E. & Harel, G (eds),The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25, p. 85-126. Washington, DC: MAA.*

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, *en Tall, D. (ed): Advanced mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press.*

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria, en *Educación Matemática*, 8.3, pp. 24-41.

Eisenberg, T. (1991). Functions and Associated Learning Difficulties, *en Tall, D. (ed): Advanced mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press*

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994) Research in calculus learning: understanding of limits, derivates, and integrals, en *Dubinsky, E. & Kaput, J.,(eds),Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning, MAA notes 33, p. 31-45. Washington, DC: MAA.*

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*, Dordrecht: Reidel.

Guerra, M. (2002). *Descripción y caracterización de los esquemas conceptuales del concepto de solución de una ecuación diferencial de primer orden en estudiantes que han concluido una asignatura bajo el enfoque tradicional. Un estudio de casos*. Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Barcelona.

Gray, E. & Tall, D. (1993).Success and Failure in Mathematics:The flexible meaning of symbols as process and concept, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic*, en Journal for Research in Mathematics Education 25(2), 115-141.*

Habre, S. (2000) Exploring students'strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting*, en Journal of Mathematical Behaivor, 18(4), 455-472.*

Harel, G. & Trgalová, J.(1996). Higher Mathematics Education, en A.J Bishop et al. (eds), *International Handbook of Mathematics Education*, 675-700.

Hauk, S., Mason, A., Selden, A. y Selden, J. (1999). Do calculus students eventually learn to solve non-routine problems, *Technical Report, No 1999-5, Department of Mathematics, Tennessee Technological University.*

Hernández, A. (1994). *Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, algebraico y gráfico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias*, Cuadernos de Investigación No 30, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: An introductory analysis*, en J. Hiebert (ed). Hillsdale, NJ: Elbaum.

Hubbard, J.H. & West, B.H. (1991) Differential Equations, a Dynamical Systems Approach part I. Editorial Springer-Verlag.

Jorba, J., Gómez, I.& Prat, A. (2000). Hablar y escribir para aprender, Instituto de Ciencias de la Educación, Editorial Síntesis.

Monk, S. & Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes, en *Dubinsky, E., Schoenfeld, A. y Kaput, J. (eds), Issues in Mathematics Education*, volumen 4, pp. 139-168.

Moreno, M. & Azcárate,C.(1997) Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de química y biología. Estudio de casos*, en Enseñanza de las Ciencias,* 15(1), 21-24.

Moreno, M. (2000). *El profesor universitario de matemáticas: Estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos*. Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona.

Piaget, J. y García, R. (1983). Psicogénesis e historia de la ciencia, Ed. Siglo XXI, México, D.F.

Pinto, M. & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning, *en Proceedings of the* 23rd *Conference of PME, Haifa, Israel*, 3, 281-288.

Pinto, M. & Tall, D. (2001). Following students' develoment in a traditional university analysis course, *en* http://www,warwick.ac.uk/staff/David.Tall

Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico, en *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, ICE Universidad de Barcelona/Horsori. Barcelona.

Rasmussen, C. (1996). Qualitative problem solving strategies of first order differential equations: The case of Amy, en.

Rivière, A. (1987). *El sujeto de la Psicología Cognitiva*, Alianza Editorial.

Robert y Schwarzenberg, (1991). Research in teaching and learning mathematics at an advanced level, en *Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press*.

Rota, G. (1997). Ten lessons I wish I had learned before I started teaching differential equations, en http://space.tin.it/scuola/vdepetr/Text07.htm.

Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as differents sides of the same coin, *en educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A. (1999). Steering (dis)course between mathaphors and rigor: using focal analisys to investigate an emergence of mathematical objects, *en* http://construct.haifa.ac.il/~annasd/sfard_Wd8_2.htm

Tall, D. & Dreyfus, T. (1989) Images and definitions for the concept of function, *en Journal for research in Mathematics Education*, 20, 356-366.

Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity, *en Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Tall, D. (1991). Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press.

Tall, D.(1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof, *en Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Douglas A. Grows (editor). NCTM

Tall, D. (1996). Functions and Calculus, en A.J Bishop et al. (eds), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325.

Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, en *Zaslavsky, O. (Ed.), Proceedings of 23rd Conference of PME, Haifa, Israel*, 1, 111-118.

Tall, D. (2000a). Cognitive Development In Advanced Mathematics Using Technology, en Mathematics Education Research Journal, Vol. 12, No. 3, p. 210-230.

Tall, D. (2000c). Technology and versatile thinking en mathematics, en *en* http://www,warwick.ac.uk/staff/David.Tall .

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. & Yusof, Y. (2000). Simbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking, en Canadian Journal of Science, Mathematics and Tchnology Education, Vol. , http://www,warwick.ac.uk/staff/David.Tall

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitios for the concept of function, *en Journal for research in Mathematics Education 20, 356-366.*

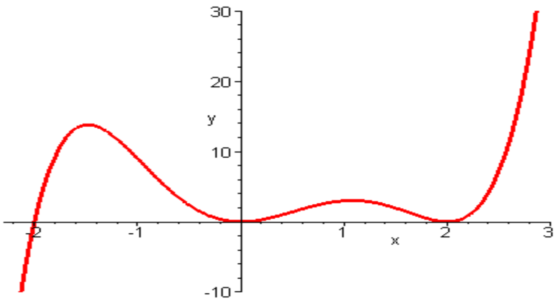
Vinner, S. (1991) The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, *en Tall, D. (ed): Advanced mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press*

Zill, D. (1988). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones, Ed. Ibeoamérica.

Anexo 1: El cuestionario

1. Considera la ecuación diferencial dada por $\frac{dy}{dx}=x^2(x-2)^2(x+2)$.
   Bosqueja la gráfica de la curva solución que pasa por el punto (0, 1) y explica tu construcción.

2. Considera la ecuación diferencial dada por $\frac{dy}{dx}=g(x)$, donde g(x) es el gráfico de la función polinomial de la figura de abajo.



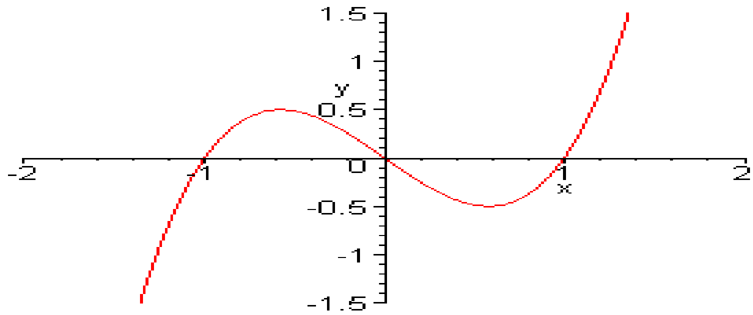
Bosqueja la grafica de la solución que pasa por el punto (0, -1)

3. Considera la siguiente ecuación diferencial $\frac{dy}{dt}=sen(y(t))$.

3.1. Bosqueja la grafica de la curva solución que pasa por el punto $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y escribe todas las suposiciones que hagas y hechos que utilices.

3.2 Encuentra $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

4. Considera la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt}=f(y)$, donde el gráfico de f(y) esta dado en la figura abajo.



4.1 Bosqueja la grafica de la solución que pasa por el punto (0, ½).

4.2 Encuentra $\lim_{t\to\infty} y(t)$.