UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

"FUNDAMENTOS DE ESTADÍSTICA ACTUARIAL"

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN ESTADÍSTICA

PRESENTADO POR:

EDWIM ANSELMO RAMÍREZ MARTÍNEZ
WILLIAM ERNESTO SANDOVAL CALDERÓN
WILLIAN ALEXANDER GONZÁLEZ ROQUE

DOCENTES ASESORES:

LICDO. JUAN HAROLDO LINARES MARTÍNEZ
MSc. RENÉ ARMANDO PEÑA AGUILAR

MARZO DE 2016
SANTA ANA, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN ESTADÍSTICA

"FUNDAMENTOS DE ESTADÍSTICA ACTUARIAL"

PRESENTADO POR:

BR. EDWIM ANSELMO RAMÍREZ MARTÍNEZ

BR. WILLIAM ERNESTO SANDOVAL CALDERÓN

BR. WILLIAN ALEXANDER GONZÁLEZ ROQUE

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN ESTADÍSTICA

SANTA ANA, MARZO DE 2016

SANTA ANA EL SALVADOR CENTRO AMÉRICA

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN ESTADÍSTICA

“FUNDAMENTOS DE ESTADÍSTICA ACTUARIAL”

PRESENTADO POR:

BR. EDWIM ANSELMO RAMÍREZ MARTÍNEZ

BR. WILLIAM ERNESTO SANDOVAL CALDERÓN

BR. WILLIAN ALEXANDER GONZÁLEZ ROQUE

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN ESTADÍSTICA

DOCENTES DIRECTORES:

LICDO. JUAN HAROLDO LINARES MARTÍNEZ

MSc. RENÉ ARMANDO PEÑA AGUILAR

SANTA ANA, MARZO DE 2016

SANTA ANA EL SALVADOR CENTRO AMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES CENTRALES

LICDO. JOSÉ LUIS ARGUETA ANTILLÓN

RECTOR INTERINO

ING. CARLOS ARMANDO VILLALTA

VICE – RECTOR ADMINISTRATIVO INTERINO

DRA. ANA LETICIA ZAVALETA DE AMAYA

SECRETARIA GENERAL

LICDA. CLAUDIA MARÍA MELGAR DE ZAMBRANA

DEFENSORA DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS

LICDA. NORA BEATRIZ MELÉNDEZ

FISCAL GENERAL INTERINA

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE

AUTORIDADES

ING. JORGE WILLIAM ORTÍZ SÁNCHEZ

DECANO INTERINO

LICDO. DAVID ALFONSO MATA ALDANA

SECRETARIO INTERINO DE LA FACULTAD

LICDA. MEDARDA DEL ROSARIO CÁCERES AGUILAR

JEFA INTERINA DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Contenido

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

La estadística actuarial en su amplio campo nos permite el análisis de funciones de probabilidad para diversos eventos y fines dentro de una población, en éste documento nos dedicaremos al análisis de modelos probabilísticos asociados a eventos aleatorios llamados siniestros, que perjudican la integridad de bienes materiales o personas para poder cuantificar las posibilidades de ocurrencia en el ámbito cotidiano, es decir, cuantificar el riesgo que una persona o bien material corre de ser afectada por un siniestro específico. Este riesgo cuantificado representa el factor más importante dentro del entorno del asegurador para poder hacer el cálculo de la prima del seguro y poder formalizar la póliza.

El análisis de las distribuciones de probabilidad, principalmente su media y varianza así como las funciones generatrices de momentos de estas distribuciones son el requerimiento primordial para abordar el área fundamental de la estadística actuarial, lo cual se presenta en el capítulo primero.

También es importante el conocimiento del área de economía como lo son los tipos de interés, anualidades, entre otros conceptos del área económica. Además se describen las principales áreas de aplicación de la estadística actuarial.

La estadística Actuarial comprenderá la creación de modelos probabilísticos que hace referencia a la teoría de la supervivencia, sujeto a un proceso de desgaste o envejecimiento del ente, sea este un objeto, persona, animal, empresa, entre otros; basándose en variables biométricas actuariales aleatorias que generarán las funciones de distribuciones y de supervivencia, así como también la elaboración de las tablas de mortalidad mediante las funciones biométricas actuariales. Además se estudiaran algunas estructuras biométricas basadas en modelos teóricos que dependen de parámetros, con el fin de explicar de una mejor manera el comportamiento de una función biométrica actuarial. Algunos modelos teóricos a estudiar son, ley de Moivre, ley de Gompertz y las leyes de Makenham.

La estadística actuarial utiliza funciones de probabilidad construidas especialmente para analizar las probabilidades de sobrevivencia de los individuos y transformaciones de funciones que permiten calcular primas de reaseguros.

La teoría de la credibilidad estima las primas de seguros basándose principalmente en la experiencia de reclamaciones ocurridas, en donde las fórmulas de credibilidad son una especie de media ponderada entre la prima pura colectiva del riesgo y la media empírica de los siniestros reclamados. El factor de ponderación utilizado es conocido como factor de credibilidad, así como también se analiza Modelo de Bühlmann de distribución libre y las formas de reaseguros más utilizados en el ámbito actuarial.

La realización de esta tesis es con el objetivo de fomentar el estudio de la estadística actuarial para los estudiantes que cursan la Licenciatura el Estadística de la Universidad de El Salvador en la Facultad Multidisciplinaria de Occidente.

1. ALGUNAS DISTRIBUCIONES ÚTILES EN ESTADÍSTICA ACTUARIAL

En nuestro diario vivir la ocurrencia de eventos aleatorios es más frecuente de lo que podemos imaginar, por tanto para conocer los indicadores de esos eventos podemos asignar una variable que mida la magnitud de dichos eventos, y así poder construir una función matemática que genere una aproximación muy aceptable a las medidas obtenidas con la variable aleatoria y con esto poder conocer sus tendencias.

1.1 Algunas Distribuciones Discretas

Las distribuciones discretas son aquellas que la variable aleatoria toma estrictamente valores enteros.

A continuación se presentan algunas distribuciones discretas que son de uso cotidiano y principalmente utilizadas para la evaluación del control de calidad de una línea de producción de artículos.

1.2.1 Distribución Hipergeométrica

Para establecer las condiciones que lleva a otra distribución discreta de probabilidad conocida como distribución hipergeométrica, considérese el siguiente problema. Sea N el número de representantes de un determinado estado que asisten a una convención política nacional, y sea k el número de los que apoyan al candidato A, mientras que el resto $N-k$ apoya el candidato B. supóngase que una organización informativa selecciona aleatoria n representantes y les pregunta sus razones para apoyar a los candidatos. Si X es una variable aleatoria que sustituye al número de representantes en la muestra que apoyan al candidato A, ¿Cuál es la función de probabilidad de X?

Esta situación parece ser binomial porque entre N representantes de un estado existen dos grupos distintos con probabilidad $\frac{k}{N}$ y $\frac{N-k}{N}$. Sin embargo, considérese con más detalle el proceso de selección para la muestra de n representantes. Es razonable suponer que se selecciona a un representante se le preguntan sus razones y no vuelve a ser seleccionado (El resultado es que no existe independencia entre la selección de un representante y el siguiente). Por ejemplo supóngase que el primer representante seleccionado apoya al candidato A, entonces quedan $N-1$ representantes de los cuales $k-1$ apoya a A. por lo tanto, la probabilidad condicional de que el siguiente candidato apoye también a A es $\frac{k-1}{N-1}$ y no $\frac{k}{N}$, y la probabilidad condicional de que el siguiente representante apoye a B es $\frac{N-k}{N-1}$ y no $\frac{N-k}{N}$.

Para determinar la probabilidad de que, de manera exacta, se seleccionen x representantes que apoyen a A y $n-x$ que apoyen a B, se procederá de la siguiente forma: el número de maneras distintas en que se puede seleccionarse una muestra de n representantes de un total de N es $\binom{N}{n}$ y cada muestra tiene una probabilidad de selección igual a $\frac{1}{\binom{N}{n}}$. De manera similar, la selección de x que apoyen a A es un evento que puede ocurrir de $\binom{k}{x}$ maneras distintas, y la selección de $(n-x)$ representantes que apoyen a B es un evento que puede suceder de $\binom{N-k}{n-x}$ maneras. El número total de maneras en que ambos eventos pueden ocurrir es $\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}$. De esta forma, la probabilidad de seleccionar x representantes que apoyen al candidato A es:

$$p(x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

Definición 1.3 Sea N el número total de objetos en una población finita, de manera tal que k de éstos es de un tipo y $N-k$ de otros. Si se selecciona una muestra aleatoria de la población constituida por n objetos, la probabilidad de que x sea exactamente de un tipo y $n-x$ sea del otro está dada por la función de probabilidad hipergeométrica:

$$p(x;N,n,k)\begin{cases}\dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}},\ x=0,1,2...;\ x\le k,\ (n-x)\le(N-k); & N,n,k \textit{ enteros positivos.}\\[2ex] 0;\ \textit{en otro caso.}\end{cases}$$

La función de probabilidad acumulada, está definida por:

$$P(X\le x)=F(x;N,n,k)=\sum_{i=0}^{x}\frac{\binom{k}{i}\binom{N-k}{n-i}}{\binom{N}{n}}.$$

Media	Varianza
$E(X)=\mu=\dfrac{nk}{N}$	$Var(X)=\dfrac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$

Tabla 1: Media y la varianza de la distribución hipergeométrica.

Ejemplo 1. Supóngase que se tienen 50 representantes de cierto estado, en una convención política nacional, de los cuales 30 apoyan al candidato A y el resto al candidato B. si se seleccionan al azar a 5 representantes ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de ellos apoyen al candidato A?

Solución: del problema se obtienen los datos: N=50, n=5, k=30, luego la función de probabilidad es:

$$P(x;50,5,30)=\frac{\binom{30}{x}\binom{20}{5-x}}{\binom{50}{5}};\ x=1,2,3,4,5.$$

Y la probabilidad que $X\ge 2$ es:

$$P(x\ge 2)=1-P(x\le 1)$$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P[0;50,5,30] - P[1;50,5,30] \\
&= 1 - \frac{\binom{30}{0}\binom{20}{5}}{\binom{50}{5}} - \frac{\binom{30}{1}\binom{20}{4}}{\binom{50}{5}} \\
&= 1 - 0.007317 - 0.068597 \\
&= 0.9241.
\end{aligned}
$$

1.2.2 Distribución Binomial Negativa.

Sea un escenario binomial que se observa una secuencia de ensayos independientes; la probabilidad de éxito en cada en sayo es constante e igual a p. En lugar de fijar el número de ensayos n y observar el número de éxitos, supóngase que se continúan los ensayos hasta que han ocurrido k éxitos. En este caso la variable aleatoria es el número de ensayos necesarios para observar k éxitos. A esta situación se le conoce como distribución binomial negativa.

Definición 1.4 Sea $X+k$, el número de ensayos independientes necesarios para alcanzar, de manera exacta, k éxitos en un experimento binomial en donde la probabilidad de cada evento es p. Se dice entonces que X es una variable binomial negativa con función de probabilidad:

$$
p(x,k,p) = \begin{cases} \binom{k+x-1}{k-1} p^k (1-p)^x & \begin{array}{c} x = 0,1,2,3,\ldots \\ k = 1,2,3,4,\ldots \\ 0 \leq p \leq 1 \end{array} \\ 0, \; Para\, cualquier\, otro\, valor. & \end{cases}
$$

La función se llama "binomial negativa" debido a que las probabilidades dadas corresponden a los términos sucesivos de la expresión binomial de:

$$
\left(\frac{1}{p} - \frac{1-p}{p} \right)^{-k}
$$

Los parámetros de la función binomial negativa son k y p, en donde k no necesita ser un entero. Si es así, la distribución se conoce como distribución de pascal, misma que se interpreta como el tiempo que hay que esperar para que ocurra el k-ésimo éxito. Si k no es entero la función de probabilidad se escribe de manera tal que se involucre la función gama:

$$p(x;k,p)=\frac{\Gamma(k+x)}{x!\Gamma(k)}p^{k}(1-p)^{x}\ ;\quad \begin{matrix} x=0,1,2,3,\ldots \\ k>0,\ 0\le p\le 1 \end{matrix}$$

En este caso la distribución binomial negativa es un caso particular de la distribución de Poisson compuesta. Una distribución compuesta de una variable aleatoria X es aquella que depende de un parámetro que a su vez es una variable aleatoria con distribución dada.

Debe de notarse que si $k=1$ la función binomial negativa, surge un caso especial de la distribución binomial negativa, que se conoce con el nombre de *distribución geométrica* cuya función de probabilidad está dada por:

$$p(x;p)=p(1-p)^{x};\quad x=0,1,2,3,\ldots\ ;\ 0\le p\le 1$$

La variable aleatoria geométrica representa el número de fallas que ocurren antes de que se presente el primer éxito.

La aplicación primaria de la distribución binomial negativa es la modelación de estadísticas de accidentes, datos psicológicos, compras del consumidor y otras situaciones similares, en donde la frecuencia de ocurrencia entre grupos o individuos no se espera que sea la misma. Por ejemplo la estadística de accidentes automovilísticos indica de manera consistente que los causantes de éstos son en su mayoría personas de edades jóvenes.

Media	Varianza
$E(X)=\mu=\frac{k}{p}$	$Var(X)=\frac{k(1-p)}{p^{2}}$

Tabla 2: Media y la varianza de la distribución binomial negativa.

Propiedades de la distribución binomial negativa:

$$p=\frac{E(X)}{Var(X)}$$

$$k=\frac{E^{2}(X)}{Var(X)-E(X)}$$

Ejemplo 1. Los registros de una compañía constructora de pozos, indican que la probabilidad de que uno de sus pozos nuevos, requiera de reparaciones en el término de un año es de 0.20.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el sexto pozo construido por esta compañía en un año dado sea el segundo en requerir reparaciones en un año?

   Solución:

$$x + k = 6$$
$$k = 2$$
$$p = 0.2$$
$$p(4;2,0.2) = \binom{2+4-1}{2-1}(0.2)^2(1-0.2)^4$$
$$p(4;2,0.2) = 0.08192$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el octavo pozo construido por esta compañía en un año dado sea el tercero en requerir reparaciones en un año?

   Solución:

$$x + k = 8$$
$$k = 3$$
$$p = 0.2$$
$$p(5;3,0.2) = \binom{3+5-1}{3-1}(0.2)^3(1-0.2)^5$$
$$p(5;3,0.2) = 0.05505$$

1.2.3 Distribución de Poisson.

Es una distribución discreta de probabilidad muy útil en la que la variable aleatoria representa el número de eventos independientes que ocurren a una velocidad constante. Muchos eventos aleatorios ocurren de manera independiente con una velocidad constante en el tiempo o en el espacio. Algunos ejemplos típicos son el número de personas que llegan a una tienda de autoservicio en un tiempo determinado, el número de defectos en piezas similares para el material, el número de bacterias en un cultivo, etc. De hecho, la distribución de Poisson es el principal modelo de probabilidad empleado para analizar problemas de líneas de espera. Además, ofrece una aproximación excelente a la función de probabilidad binomial cuando p es pequeño y n es grande.

Definición 1.5 Sea X una variable aleatoria que representa el número de eventos aleatorios independientes que ocurren a una rapidez constante sobre el tiempo o el espacio. Se dice entonces que la variable aleatoria X tiene una distribución de Poisson con función de probabilidad.

$$p(x;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x=0,1,2,...,;\lambda>0\\ 0 \text{ para cualquier otro valor}\end{cases}$$

El parámetro de la distribución de Poisson es λ, el número promedio de ocurrencias del evento aleatorio por unidad de tiempo. Para valores mayores que cero, λ define una familia de distribuciones con una función de probabilidad determinada por $p(x;\lambda)$.

Media	Varianza
$E(X)=\mu=\lambda$	$Var(X)=\lambda$

Tabla 3: Media y varianza de la distribución de Poisson.

Ejemplo 1: El 8% de los registros contables de una empresa presentan algún problema. Si un auditor toma una muestra de 40 registros, calcular la probabilidad de que existan 5 registros con problemas.

Solución:

Si $n=40, p=0.08\, y\, \lambda=3.2$, entonces;

$$p(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$p(5)=\frac{e^{-3.2}(3.2)^{5}}{5!}=0.1139793$$

1.2 Algunas Distribuciones Continuas de Probabilidad.

En una distribución continua de probabilidad, la variable aleatoria toma valores de un intervalo bien definido.

A continuación se presentan las distribuciones de probabilidad más frecuentes utilizadas en la estadística actuarial.

1.3.1 Distribución Normal

La distribución normal o Gaussiana es indudablemente la más importante y la de mayor uso de todas las distribuciones continuas de probabilidad.

Definición 1.6 Se dice que una variable aleatoria X se encuentra normalmente distribuida si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \; ; \left.\begin{array}{c} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > 0 \end{array}\right]$$

Ahora se denota por $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ cuando una variable aleatoria X sigue una distribución normal con media μ y desviación estándar σ.

Considere ahora lo tedioso que será estar calculando la probabilidad para valores distintos de $\mu\, y\, \sigma$, por lo que se procede a hacer una estandarización de la variable aleatoria X por medio de una variable auxiliar que generalmente es llamada Z en donde $Z=\frac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$ y cumple que $Z \sim N(0,1)$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mu = E(Z) &= E\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{Var(X)}}E\left(X-E(X)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{Var(X)}}\left(E(X)-E(E(X))\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{Var(X)}}\left(E(X)-E(X)\right) \\
&= 0 \Rightarrow \mu = 0.
\end{aligned}$$

$$\sigma^2 = Var(Z) = Var\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right)$$

$$Var(Z) = \left(\frac{1}{\sqrt{Var(X)}}\right)^2 Var\left(X - E(X)\right)$$

$$Var(Z) = \left(\frac{1}{\sqrt{Var(X)}}\right)^2 \left(Var(X) - Var(E(X))\right)$$

$$Var(Z) = \frac{1}{Var(X)}\left(Var(X) - 0\right)$$

$$Var(Z) = 1 \Rightarrow \sigma^2 = 1.$$

Esta forma de estandarización es de uso tan frecuente que existen tablas, calculadoras científicas y programas de hojas de cálculo las cuales nos facilitan las probabilidades para los valores de Z .

Media	Varianza
$E(X) = \mu$	$Var(X) = \sigma^2$

Tabla 4: Media y varianza de la distribución normal.

Propiedades de la distribución normal:

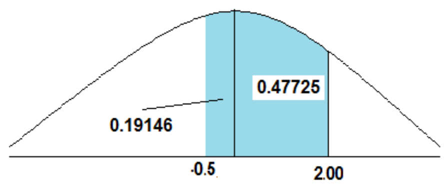
- Es simétrica con respecto a la media.
- La media, mediana y moda coinciden en el punto central.
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x; \mu, \sigma) = 0$
- Los puntos de inflexión de la curva se dan para x = $\mu - \sigma$ y x = $\mu + \sigma$.
- Distribución de probabilidad en un entorno de la media:
  - En el intervalo [μ - σ, μ + σ] se encuentra comprendida, aproximadamente, el 68,26% de la distribución;
  - En el intervalo [μ - 2σ, μ + 2σ] se encuentra, aproximadamente, el 95,44% de la distribución.
  - Por su parte, en el intervalo [μ -3σ, μ + 3σ] se encuentra comprendida, aproximadamente, el 99,74% de la distribución.

Ejemplo 1. Sea X una variable aleatoria que representa la inteligencia medida por utilizando pruebas de CI. Si X sigue una distribución normal con media 100 y desviación estándar igual a 10. Calcular:

a) La probabilidad que X esté entre 95 y 120.

Solución

$$Z_1 = \frac{95-100}{10} = -0.5$$
$$Z_2 = \frac{120-100}{10} = 2.00$$

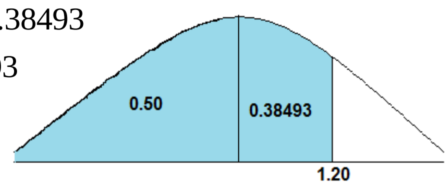


$$p(95 \le x \le 120) = 0.47725 + 0.19146$$
$$= 0.66871$$

b) Que X sea menor que 112.

Solución:

$$Z_1 = \frac{112-100}{10} = 1.20$$
$$p(x < 112) = 0.5 + 0.38493$$
$$= 0.88493$$



1.3.2 Distribución Uniforme.

Supóngase que ocurre un evento en que una variable aleatoria toma valores de un intervalo finito, de manera que estos se encuentran distribuidos igualmente sobre el intervalo. Esto es, La probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor en cada sub intervalo de igual magnitud es la misma. Se dice entonces que la variable aleatoria se encuentra *distribuida uniformemente* sobre el intervalo.

Definición 1.7 Se dice que una variable aleatoria X está distribuida uniformemente sobre el intervalo (a,b), si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b,\\ 0 & \text{para cualquier otro valor}\end{cases}$$

La función de densidad de probabilidad de una distribución uniforme es constante en el intervalo (a,b), como se ilustra en la figura 1. Por eso, tal distribución se conoce como distribución "rectangular".

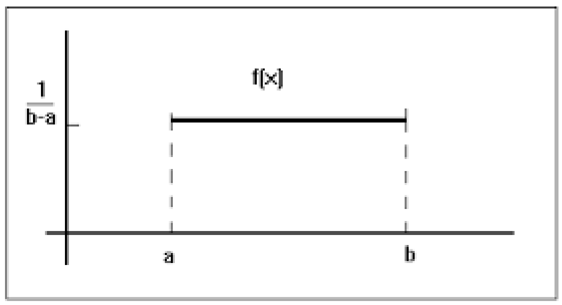


Figura 1: Gráfico de la distribución uniforme en [a,b]

La función de distribución acumulativa se determina de manera fácil y está dada por:

$$p(X=x)=F(x;a,b)=(b-a)^{-1}\int_a^x dt$$

$$p(X=x)=F(x;a,b)=\begin{cases}0 & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b,\\ 1 & x>b.\end{cases}$$

Se sigue entonces que, para cualquier sub intervalo (a_1,b_1) interior a (a,b):

$$\begin{aligned}p(a_1\le x\le b_1)&=F(b_1;a,b)-F(a_1;a,b)\\ &=\frac{(b_1-a_1)}{(b-a)}\end{aligned}$$

Este resultado ilustra la probabilidad de que X tome valores del sub intervalo (b_1-a_1) es $1/(b-a)$ por la longitud del sub intervalo y, de esta forma, igual a la probabilidad de que X tome un valor en cualquier otro sub intervalo de la misma longitud. La distribución uniforme proporciona una representación adecuada redondear las diferencias que surgen al medir cantidades físicas entre los valores observados y los reales. Por ejemplo, si el peso si el peso de un individuo se redondea al kilogramo más cercano, entonces la diferencia entre éste y el peso verdadero será algún valor entre -0.5 y 0.5

La media de la Distribución uniforme es la siguiente:

$$E(X)=\frac{a+b}{2},$$

Mientras que la varianza es:

$$Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Ejemplo 1: Un reloj de manecillas se detuvo en un punto que no sabemos. Determine la probabilidad que se haya detenido en los primeros 25 minutos luego de señalar la hora en punto.

Solución: el intervalo es $[0,60]$,

$$f(x)=\frac{1}{60}$$
$$p(0\le x\le 25)=\int_0^{25}\frac{1}{60}dx=\frac{5}{12}$$

1.3.3 Distribución de Weibull

La distribución de Weibull fue establecida por el físico suizo del mismo nombre, quien demostró, con base en una evidencia empírica, que el esfuerzo al que se someten los materiales puede modelarse de una manera adecuada mediante el empleo de esta distribución. En los últimos años esta distribución se empleó como modelo para situaciones del tipo tiempo-falla y con el objetivo de lograr una amplia variedad de componentes mecánicos y eléctricos.

Definición 1.8. Se dice que una variable aleatoria X tiene una *distribución de weibull* si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x;\alpha,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\theta^{\alpha}}\,x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}} & x>0;\ \ \alpha,\theta>0,\\ 0 \quad \text{para cualquier otro valor.} & \end{cases}$$

La distribución de Weibull es una familia de distribuciones que dependen de dos parámetros: el de forma α y el de escala θ, se puede introducir un parámetro adicional al reemplazar la variable aleatoria de Weibull X por $X-a$, en donde a es un parámetro de localización que representa un valor umbral o tiempo de garantía.

La función de distribución acumulativa de Weibull es:

$$F(x;\alpha,\theta)=\frac{\alpha}{\theta^{\alpha}}\int_{0}^{x} t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}\,dt$$

Puede obtenerse en forma cerrada mediante la evaluación directa de la integral, esto es:

$$F(x;\alpha,\theta)=\frac{\alpha}{\theta^{\alpha}}\left(\frac{\theta^{\alpha}}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha}}\Bigg|_{0}^{x}$$

$$=1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha}}, \qquad x>0.$$

De lo anterior, el valor cuantil x_q es:

$$1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{x_q}{\theta}\right)^{\alpha}}=q$$

$$x_q=-\theta\left[\ln(1-q)\right]^{1/\alpha}$$

$$x_q=\theta\left[\ln\left(\frac{1}{1-q}\right)\right]^{1/\alpha}$$

La media de X es:

$$E(X)=\theta\Gamma\left[1+\frac{1}{\alpha}\right],$$

Y la varianza de X es:

$$Var(X) = \theta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right].$$

Ejemplo 1: Un fabricante de lavadoras garantiza sus productos contra cualquier defecto durante el primer año de uso normal. El fabricante ha estimado un costo por reparación de $75 durante el período de garantía. Con base en la experiencia, se sabe que el tiempo en que ocurre la primera falla es una variable aleatoria de Weibull con parámetros de forma y escala iguales a 2 y 40, respectivamente. Si el fabricante espera vender 100 mil unidades y si, para una misma unidad, se descuenta el valor de reparaciones, se determina el costo esperado de la garantía para el fabricante.

Solución: sea X la variable aleatoria que representa el tiempo que transcurre hasta que se presenta la primera descompostura. Por hipótesis, la función de probabilidad de X es:

$$F(x;2,40) = \frac{2}{40^2} x \,\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{40}\right)^2}, \quad x > 0$$

La probabilidad de que la primera descompostura ocurra durante el período de garantía es igual a la probabilidad de que X sea menor o igual a 12, esta probabilidad es:

$$p(x \le 12) = 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{12}{40}\right)^2} = 0.0861$$

Por lo tanto, si se supone que la operación de las lavadoras es independiente entre sí, se puede esperar (100000). (0.861)=8610 fallas durante el tiempo de garantía con un costo total de $645750.

1.3.4 Distribución Gamma.

La función Gamma, $\Gamma(\alpha)$, es una función que extiende el concepto de factorial a los números complejos, y se define como:

Definición 1.9. Sea $\Gamma : (0,\infty) \to R,$ donde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \text{ para}, \alpha > 0$$

Distribución Gamma. Se le conoce también como una generalización de la distribución exponencial, además de la distribución de Erlang y la distribución Ji-cuadrada. Es una distribución de probabilidad continua adecuada para modelizar el comportamiento de variables aleatorias con asimetría positiva y/o los experimentos donde está involucrado el tiempo.

Definición 1.9.1 Se dice que la variable aleatoria X tiene una distribución gamma si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$\text{f(x;}\alpha,\theta\text{)=}\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \exp\left(\dfrac{-x}{\theta}\right) & x>0, \alpha, \theta>0, \\ 0 \quad \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

Media	Varianza
$E(X)=\mu=\alpha\,\theta$	$Var(X)=\sigma^2=\alpha\,\theta^2$

Tabla 5: Media y varianza de la distribución gamma.

Ejemplo 1: Supóngase que cierta pieza metálica se romperá después de sufrir dos o más ciclos de esfuerzo. Si estos ciclos ocurren de manera independiente a una frecuencia promedio de dos por cada 100 horas, obtener la probabilidad de que el intervalo de tiempo se encuentre hasta que ocurre el segundo ciclo dentro de una desviación estándar del tiempo promedio.

Solución: sea X la variable aleatoria que representa el lapso que transcurre hasta que la pieza sufre el segundo ciclo de esfuerzo. Si X tiene una distribución gama con $\alpha=2$ y $\theta=50$ horas debido a que la frecuencia promedio es 0.02 por hora. La función de densidad de probabilidad es:

$$f(x;2,50)=\frac{1}{\Gamma(2)50^2}xe^{-\frac{x}{50}}$$

Los valores de la media y la desviación estándar respectivamente son:

$$\mu=\alpha\theta \Rightarrow \mu=100$$

$$\sigma=\sqrt{\alpha\theta^2} \Rightarrow \sigma=50\sqrt{2}$$

Se busca la probabilidad de que la variable X tome valores dentro del intervalo $\left[100\pm50\sqrt{2}\right]$

$$p\left(100-50\sqrt{2}\le x\le 100+50\sqrt{2}\right)=\frac{1}{\Gamma(2)50^2}\int_{100-50\sqrt{2}}^{100+50\sqrt{2}} xe^{-\frac{x}{50}}dx$$

Resolviendo $\Gamma(2)$ se tiene

$$\Gamma(2)=\int_0^\infty xe^{-x}dx$$
$$\Gamma(2)=\underset{b->\infty}{Lim}\int_0^b xe^{-x}dx$$

Usando integración por partes

$$\Gamma(2)=\underset{b->\infty}{Lim}\left[\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)\Big|_0^b\right]$$
$$\Gamma(2)=\underset{b->\infty}{Lim}\left(-be^{-b}-e^{-b}\right)+1$$
$$\Gamma(2)=1$$

Luego

$$p\left(100-50\sqrt{2}\le x\le 100+50\sqrt{2}\right)=\frac{1}{50^2}\int_{100-50\sqrt{2}}^{100+50\sqrt{2}} xe^{-\frac{x}{50}}$$
$$p\left(100-50\sqrt{2}\le x\le 100+50\sqrt{2}\right)=\frac{1}{50^2}\left[\left(50^2\right)\left(-\frac{x}{50}e^{-\frac{x}{50}}-e^{-\frac{x}{50}}\right)\Bigg|_{100-50\sqrt{2}}^{100+50\sqrt{2}}\right]$$
$$p\left(100-50\sqrt{2}\le x\le 100+50\sqrt{2}\right)=0.7376$$

La probabilidad de que la variable X tome valores dentro del intervalo $\left[100\pm 50\sqrt{2}\right]$ es de 0.7376

1.3.5 Distribución exponencial

La distribución de probabilidad exponencial (negativa) es un caso especial de los modelos de Weibull y gama. Ya que es un caso especial de la distribución gama (Earlang), la variable aleatoria exponencial es el tiempo que transcurre hasta que se da el primer evento de poisson. Es decir, la distribución exponencial puede modelar el lapso entre dos eventos consecutivos de Poisson que ocurren de manera independiente y a una frecuencia constante. Esta distribución se emplea con bastante frecuencia con objeto de modelar problemas de tipo tiempo-falla y como modelo para el intervalo en problemas de líneas de espera. La distribución exponencial no tiene “memoria”. Es decir, la probabilidad de ocurrencia de eventos presentes o futuros no depende de los que hayan ocurrido en el pasado. De esta forma, la probabilidad de que una unidad falle en un lapso específico depende nada más de la duración de éste, no del tiempo en que la unidad ha estado en operación.

Definición 1.10 Si una variable aleatoria X tiene una distribución exponencial, su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\exp\left\{\dfrac{-x}{\theta}\right\} & x>0,\ \theta>0,\\ 0 \text{ para cualquier otro valor.}\end{cases}$$

La distribución exponencial se caracteriza por un parámetro θ, que representa el lapso promedio de tiempo entre dos eventos independientes de Poisson. En el contexto de la confiabilidad, θ recibe el nombre de tiempo promedio entre fallas, y $1/\theta$ es la frecuencia de falla. La función de distribución acumulativa es:

$$P(X\leq x)=F(x:\theta)=1-\exp\left\{\frac{-x}{\theta}\right\}$$

Media	Varianza
$E(X)=\mu=\theta$	$Var(X)=\theta^2$

Tabla 6: Media y varianza de la distribución exponencial.

Ejemplo 1: Un componente eléctrico tiene una vida media de 8 años. Si su vida útil se distribuye en forma exponencial. ¿Cuál debe ser el tiempo de garantía que se debe otorgar, si se desea reemplazar a lo más 15% de los componentes que fallen dentro de este periodo?

Solución: sea x el tiempo de vida del componente eléctrico y t el tiempo de garantía del componente eléctrico. Entonces $P(X<T)=0.15$, y si se toma en cuenta que $\theta=8$

Por lo que se tiene que:

$$0.15=P(X<T)=1-e^{\frac{-T}{\theta}}=1-e^{\frac{-T}{8}}$$

Es la probabilidad que el componente eléctrico dure menos que el tiempo de garantía.

Luego:

$$e^{\frac{-T}{8}} = 0.85$$
$$\frac{-T}{8} = \ln(0.85) \rightarrow T = -8\ln(0.85) = 1.3\,años$$

1.3 Función Generadora de Momentos

Como método alternativo se presenta la esperanza de cierta función conocida como función generadora de momentos, para determinar los momentos de una variable aleatoria dada su distribución de probabilidad.

Definición 1.1 Sea X una variable aleatoria. El valor esperado de e^{tX} recibe el nombre de función generadora de momentos, y se denota por $m_X(t)$, si el valor esperado existe para cualquier valor de t en algún intervalo de $-c < t < c$ en donde c es un número positivo. En otras palabras:

$m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_x e^{tX} pr(x)$ Si X es discreta o

$m_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x)dx$ Si X es continua.

Nótese que $m_X(t)$ nada más es función del argumento t, si $t = 0$ entonces $m_X(0) = E[e^0] = 1$. Si la función generadora de momentos existe, puede demostrarse que es única y que determina por completo la distribución de probabilidad de X. En otras palabras si dos variables aleatorias tienen la misma función generadora de momentos entonces tienen la misma distribución de probabilidad.

Si la función generadora de momentos existe para $-c < t < c$, entonces existen las derivadas de ésta de todas las órdenes para $t = 0$. Lo anterior asegura que $m_X(t)$ generará todos los momentos de X alrededor del origen. Para demostrar lo anterior, se diferencia $m_X(t)$ con respecto a t, y se evalúa la derivada en $t = 0$. Suponiendo que pueden intercambiarse los símbolos de diferenciación y esperanza, se tiene:

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}E[e^{tX}]\Big|_{t=0}$$

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = E\left\{\frac{d}{dt}[e^{tX}]\right\}$$

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = E\left[Xe^{tX}\right]\Big|_{t=0}$$

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = E(X)$$

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \mu$$

Al tomar la segunda derivada y evaluar en $t = 0$:

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}E[e^{tX}]\Big|_{t=0}$$

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = E\left\{\frac{d^2}{dt^2}[e^{tX}]\right\}$$

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = E\left\{\frac{d}{dt}[Xe^{tX}]\right\}$$

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = E\left[X^2 e^{tX}\right]\Big|_{t=0}$$

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = E(X^2)$$

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \mu_2^{'}$$

Al continuar el proceso de diferenciación, es decir para calcular el r-ésimo momento de una función se tiene:

$$\left.\frac{d^r m_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \frac{d^r}{dt^r}E[e^{tX}]\Big|_{t=0}$$

$$\left.\frac{d^r m_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = E\left\{\frac{d^r}{dt^r}[e^{tX}]\right\}$$

$$\left.\frac{d^r m_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = E\left[X^r e^{tX}\right]\Big|_{t=0}$$

$$\left.\frac{d^r m_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = E(X^r)$$

$$\left.\frac{d^r m_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \mu_r^{'}$$

Definición 1.2 Sea X una variable aleatoria. El valor esperado de $e^{t(X-\mu)}$ recibe el nombre de función generadora de momentos central y se denota por $m_{X-\mu}(t)$, si el valor esperado existe para cualquier t en un intervalo $-c < t < c$ en donde c es un número positivo.

$m_{X-\mu}(t) = E[e^{t(X-\mu)}] = \sum_x e^{t(X-\mu)} pr(x)$ Si X es discreta, o

$m_{X-\mu}(t) = E[e^{t(X-\mu)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(X-\mu)} f(x)dx$ Si X es continua.

Ejemplo 1. Sea X una variable con función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}},\ x > 0 \\ 0,\ para\, cualquier\, otro\, valor \end{cases}$$

En donde θ es un número mayor que cero. Determinar la unción generadora de momentos de X

Solución:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \frac{1}{\theta}\int_0^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \\ &= \frac{1}{\theta}\lim_{a\to\infty}\int_0^{a} e^{-x(\frac{1}{\theta}-t)} dx \\ &= -\frac{\theta}{\theta(1-\theta t)}\lim_{a\to\infty} \left. e^{-x(\frac{1}{\theta}-t)} \right|_0^a \\ &= (1-\theta t)^{-1} \end{aligned}$$

Y luego:

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \theta(1-\theta t)^{-2}\Big|_{t=0}$$

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \theta$$

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = E(X).$$

Y

$$\left.\frac{dm^2{}_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = 2\,\theta^2(1-\theta t)^{-3}\Big|_{t=0}$$

$$= 2\theta^2$$

$$= E(X^2)$$

$$\text{Re}\,cordemos\,que\;por\;propiedad\;de\,la\,esperanza\,matemática$$

$$E(X^2) = Var(X) = 2\theta^2 - \theta^2$$

$$= \theta^2.$$

Ejemplo 2. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad:

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}; x = 0,1,2,...$$

En donde λ es un número mayor que cero. Determinar la función generadora de momentos para la variable X .

Solución:

Por definición se tiene:

$$m_x(t) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda^x e^{-\lambda}\right)e^{xt}}{x!}$$

$$m_x(t) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda^x e^t\right)^x}{x!}$$

Dado que:

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda^{x}e^{t}\right)^{x}}{x!}=1+\lambda e^{t}+\frac{\lambda^{2}e^{2t}}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^{r}e^{rt}}{r!}+\ldots$$

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda^{x}e^{t}\right)^{x}}{x!}=e^{\lambda e^{t}}$$

Entonces:

$$m_x(t)=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{t}}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\left.\frac{dm_x(t)}{dt}\right|_{t=0} &= \lambda e^{-\lambda}e^{t}e^{\lambda e^{t}}\Big|_{t=0}\\ &= \lambda\\ &= E(X).\end{aligned}$$

1.4 Transformaciones de Probabilidad

Teorema 1.1 Sea x una variable aleatoria con función de distribución F_x. Si F_x es continua, la variable aleatoria Y producida por la transformación $Y = F_x(X)$ sigue una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo $(0,1)$.

Demostración: Puesto que $0 \leq F_x(x) \leq 1$ para todo x, tenemos $F_Y(y) = 0$ para $y \leq 0$ y $F_Y(y) = 1$ para $y \geq 1$. Para $0 < y < 1$, definimos u como el mayor valor que satisface la ecuación $F_x(u) = y$. Entonces, $F_x(X) \leq y$ si y sólo si $X \leq u$, y conlleva que:

$$F_Y(y) = P[F_X(X) \leq y] = P(X \leq u) = F_X(u) = y$$

La cual es una distribución uniforme.

Como resultado de este teorema, podemos concluir que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de cualquier población con función de distribución continua F_X, entonces $F_X(X_1), F_X(X_2), \ldots, F_X(X_n)$ constituye una muestra aleatoria de la población uniforme. De manera similar, si $X_1 < X_2 < \cdots < X_n$ son los estadísticos de orden para la muestra original, entonces:

$$F_X(X_1) < F_x(X_2) < \cdots < F_X(X_n)$$

Son los estadísticos de orden de la distribución uniforme en $(0,1)$ en cualquier caso siempre y cuando la función de distribución F_X siempre que sea continua.

Una importante aplicación práctica de la transformación de probabilidad integral es la generación de observaciones de distribuciones de probabilidad continuas específicas. Por ejemplo, supóngase que deseamos generar una observación X de una distribución exponencial con media. Podemos proceder de la manera siguiente. La función de distribución de X es $F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$, y por el teorema 1.1 la variable aleatoria transformada $Y = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$ está distribuida como U, una observación de la distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Ahora, haciendo $1 - e^{-\frac{x}{2}} = U$ y resolviendo para x se tiene: $X = -2\ln(1-u)$. Utilizando un generador de números aleatorios uniformes (La mayoría de paquetes informáticos y algunas calculadoras de bolsillo proveen uno), obtenemos U y luego la X deseada a partir de la transformación $X = -2\ln(1-u)$. Varias otras aplicaciones de la transformación de probabilidad integral están dadas en el problema 2.4. Con el objetivo de generar una muestra aleatoria de tamaño 2 o más de una distribución de probabilidad continua específica, podemos generar una muestra aleatoria de la distribución uniforme $(0,1)$ y aplicar la transformación apropiada a cada observación en la muestra.

Algunas aplicaciones comunes de los estadísticos de orden y que son obvias a simple observación son:

1. X_n, el máximo valor en la muestra, es de interés en el estudio de fluidos y otros fenómenos meteorológicos extremos.
2. X_1, el mínimo valor, es útil en fenómenos donde, por ejemplo, la fuerza de cadena depende del eslabón más débil.
3. La mediana de la muestra, definida como $X_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ para n impar y cualquier número entre $X_{\frac{n}{2}}$ y $X_{\frac{n}{2}+1}$ para n par, es una medida de localización y estimación de la tendencia central poblacional.
4. El rango medio de la muestra, definido como $\frac{X_n - X_1}{2}$, es también una medida de tendencia central.
5. El rango de la muestra $X_n - X_1$ es una medida de dispersión.

6. El rango intercuartil de la muestra $\frac{Q_3-Q_2}{2}$ es también una medida de dispersión.
7. En muestras censuradas, el proceso de muestreo en algunas ocasiones termina después de completar r observaciones de n. Por ejemplo, en una prueba de tiempo de vida de bombillos eléctricos, se puede iniciar con un grupo de n bombillos pero detener la toma de observaciones después de que el $r - ésimo$ bombillo se queme. Entonces la información estará disponible sólo para $X_1, X_2, \ldots, X_r$ donde $r \leq n$.

Los estadísticos de orden usados para el estudio de valores atípicos u observaciones extremas, son dudosos cuando se trata de los así llamados "datos sucios".

1.4.1 Transformaciones de Probabilidades Continuas

a) Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra de n variables aleatorias continuas con función de probabilidad conjunta $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ no se anula y estrictamente creciente o estrictamente decreciente en una región n-dimensional R_X.

Se define la transformación:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= u_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\
y_2 &= u_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\
&\vdots \\
y_n &= u_n(x_1, x_2, ..., x_n)
\end{aligned}
$$

Una transformación biunívoca de $R^n \, en \, R^n$, es decir, existe una transformación inversa en el recorrido de la transformación,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= w_1(y_1, y_2, ..., y_n) \\
x_2 &= w_2(y_1, y_2, ..., y_n) \\
&\vdots \\
x_n &= w_n(y_1, y_2, ..., y_n)
\end{aligned}
$$

b) Suponemos que tanto la transformación como su inversa son continuas.
c) Suponemos que existen derivadas parciales

$$\begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \frac{\partial x_1}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1}, \frac{\partial x_n}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{matrix}$$

Y que estas son continuas.

d) Suponemos que el Jacobiano de la transformación

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Es distinto de cero en el recorrido de la transformación.

Bajo estas hipótesis la variable aleatoria n-dimensional $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es continua y tiene por función de densidad conjunta:

$$l(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(w_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), w_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, w_n(y_1, y_2, \ldots, y_n))\left|J\right|.$$

Ejemplo 1: para el caso n=1.

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f_X que satisface $f_X(x) > 0 \ para \ a < x < b$, y $Y = H(x)$ es una función de x continua y estrictamente creciente o decreciente, entonces la variable aleatoria $Y = H(x)$ tiene la función de densidad.

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Con $x = H^{-1}(y)$ expresada en términos de y.

Ejemplo 1: sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional uniformemente distribuida sobre el círculo de unidad.

Sea la variable aleatoria:

$$\begin{cases} Y_1 = \sqrt{X_1^{\,2} + X_2^{\,2}} \\ Y_2 = \arctan\left(\frac{X_1^2}{X_2^2}\right) \end{cases}$$

Determine la función de densidad conjunta del vector (Y_1, Y_2).

Primeramente se debe determinar la función de densidad conjunta (X_1, X_2).

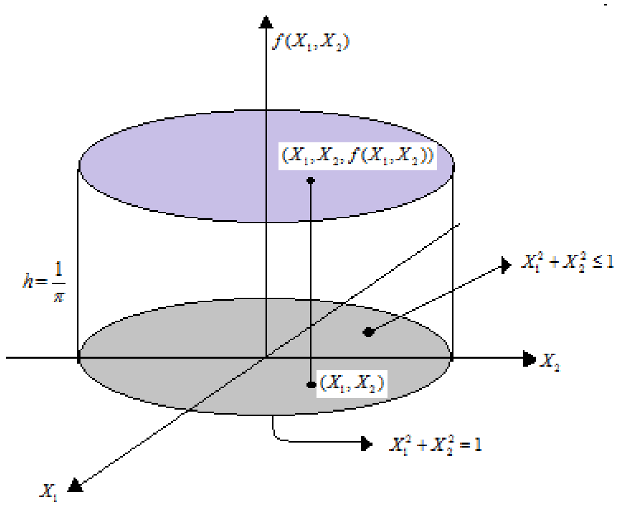


Figura 2: Gráfico de la función de densidad conjunta (X_1, X_2)

De esta manera nos interesa conocer el volumen del cilindro de radio igual a uno.

$$V = (altura)(área\,del\,círculo)$$
$$V = \left(\frac{1}{\pi}\right)(\pi(1)^2)$$
$$V = 1$$

Es una función no negativa, con volumen igual a 1. Por tanto determinamos la función de densidad bidimensional uniforme como:

$$f(X_1, X_2)\begin{cases} \frac{1}{\pi}; & 0 < X_1^2 + X_2^2 \leq 1 \\ 0; & en\, otro\, caso \end{cases}$$

Continuando con la definición se deben encontrar las transformaciones inversas, para éste caso nos auxiliamos de las transformaciones polares. Sean:

$$X_1 = r\cos(\theta)$$
$$X_2 = rsen(\theta)$$

$$X_1^2 + X_2^2 = r^2$$
$$\sqrt{X_1^2 + X_2^2} = r$$
$$Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

Ahora la transformación inversa es:

$$X_1 = r\cos(\theta) = \left(\sqrt{X_1^2 + X_2^2}\right)\cos(\theta) = Y_1\cos(\theta)$$
$$X_2 = rsen(\theta) = \left(\sqrt{X_1^2 + X_2^2}\right)sen(\theta) = Y_1 sen(\theta)$$

$$\begin{cases} X_1 = Y_1\cos(\theta) \\ X_2 = Y_1 sen(\theta) \end{cases}$$

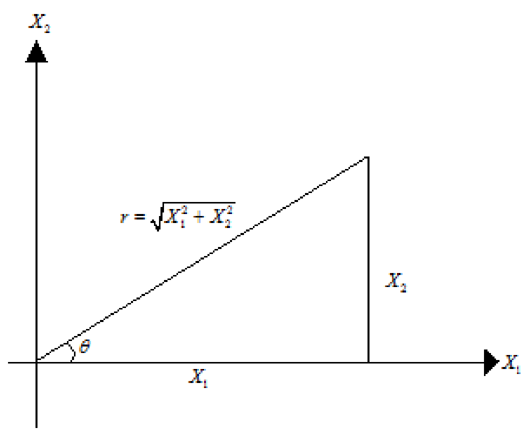


Figura 3: Triángulo auxiliar para transformación a coordenadas polares

$$\theta = \arctan\left(\frac{X_2}{X_1}\right) = Y$$

Finalmente quedan determinadas las transformadas de las funciones inversas en términos de (Y_1, Y_2).

$$\begin{cases} X_1 = Y_1 \cos(Y_2) \; ; \; 0 \le Y_1 \le 1; 0 \le Y_2 \le 2\pi \\ X_2 = Y_1 sen(Y_2); \; 0 \le Y_1 \le 1; 0 \le Y_2 \le 2\pi \end{cases}$$

Evidentemente estas transformaciones son continuas.

El siguiente paso es encontrar las derivadas parciales con respecto a la transformación inversa encontradas anteriormente

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \cos(Y_2) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = -Y_1 sen(Y_2)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = sen(Y_2) \qquad \frac{\partial x_2}{\partial y_2} = Y_1 \cos(Y_2)$$

Determinamos el Jacobiano

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos(Y_2) & -Y_1 sen(Y_2) \\ sen(Y_2) & Y_1 \cos(Y_2) \end{vmatrix}$$

$$J = Y_1 \cos^2(Y_2) + Y_1 sen^2(Y_2)$$
$$J = Y_1$$

Y así, la función de densidad del vector (Y_1, Y_2) será:

$$f_{Y_1,Y_2}(Y_1, Y_2) = f_{(X_1,X_2)}(X_1, X_2).|J|$$
$$f_{Y_1,Y_2}(Y_1, Y_2) = f_{(X_1,X_2)}(Y_1 \cos(Y_2), Y_1 sen(Y_2)).|J|$$
$$f_{Y_1,Y_2}(Y_1, Y_2) = \frac{1}{\pi} Y_1$$

Y de manera equivalente

$$f_{Y_1,Y_2}(Y_1,Y_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}Y_1 \ ; \ 0\le Y_1\le 1; 0\le Y_2\le 2\pi \\ \quad 0 \ ; \ en\, otro\, caso\end{cases}.$$

Se ha estudiado el caso para una función conjunta biunívoca, en donde su inversa también es una función, pero también existe el caso particular en donde para una función de probabilidad conjunta su inversa no es una función sino una relación.

Teniendo en cuenta que la función de densidad debe de ser una función estrictamente creciente o decreciente en un intervalo [a,b], suponga que se tiene una función de densidad que es creciente y decreciente en el intervalo [a,b], para esto veamos de manera gráfica se tiene:

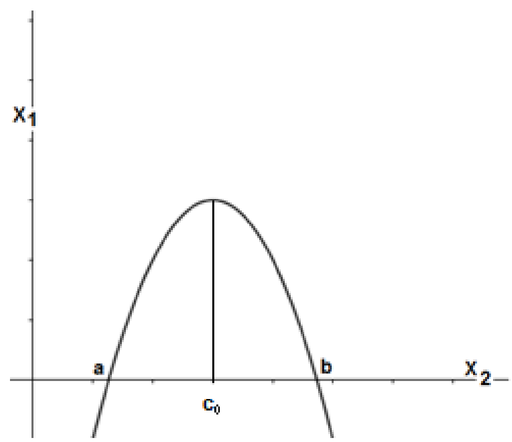


Figura 4: Función de probabilidad creciente y decreciente en [a,b]

Se tiene que la función no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente en [a,b].

En éste caso existe un valor c_0 tal que se cumple que

$$f(x)=\begin{cases} g(x) \ ; \ a\le x\le c_0 \\ p(x) \ ; \ c_0 < x\le b\end{cases}$$

En donde $g(x)$ define completamente la parte creciente y $p(x)$ define completamente la parte decreciente.

Una vez obtenida la partición se procede a encontrar la inversa de cada una de sus secciones con el método ya estudiado.

Ejemplo 2: Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(X) = \begin{cases} \dfrac{X^2}{9} \ ; \ 0 < X < 3 \\ 0 \ ; \ en\, otro\, caso \end{cases}$$

Y sea $Y = H(X) = X^2$ la variable aleatoria transformada.

En este caso es una función estrictamente creciente, de manera que la función inversa será:

$$H^{-1}(y) = \sqrt{y}$$
$$(H^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Es continua y está definida en $0 < y < 9$. Así pues Y es una función continua con dominio $0 < y < 9$ y función de densidad

$$f_Y(Y) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{y}}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right) = \dfrac{\sqrt{y}}{18} \ ; \ 0 < y < 9 \\ 0 \ ; \ en\, otro\, caso \end{cases}$$

Ejemplo 3.: Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(X) = \begin{cases} \dfrac{X^2}{9} \ ; \ 0 < X < 3 \\ 0 \ ; \ en\, otro\, caso \end{cases}$$

Y sea $Y = H(X) = \left(X - \dfrac{3}{2}\right)^2$ la variable aleatoria transformada.

La variable transformada es continua en $0 < X < 3$, pero no es biunívoca en el dominio como se puede apreciar en la gráfica siguiente:

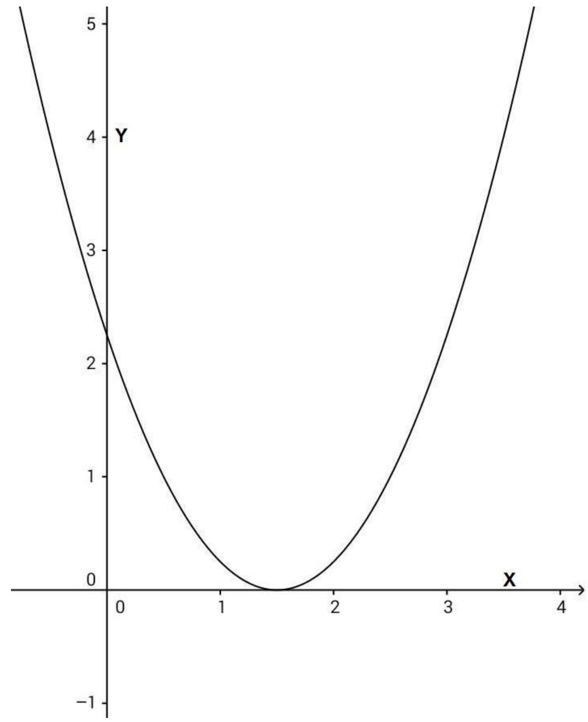


Figura 5: Gráfico de la variable transformada

Nótese que la función de la variable transformada es decreciente en el intervalo $0 < X < \frac{3}{2}$ y creciente en $\frac{3}{2} \le X < 3$, además el rango de la Y es en el intervalo es $\left(0, \frac{9}{4}\right)$.

Obteniendo así la inversa de la variable transformada:

$$Y = \left(X - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{y} = \left|X - \frac{3}{2}\right|$$

Luego

$$\begin{cases} \sqrt{y} = -\left(X - \frac{3}{2}\right); \; Si \;\; 0 < X \le \frac{3}{2} \\ \sqrt{y} = \left(X - \frac{3}{2}\right); \;\; Si \;\; \frac{3}{2} < X < 3 \end{cases}$$

Y así

$$\begin{cases} H_1^{-1}(y) = \frac{3}{2} - \sqrt{y} \ \ ; \ 0 \le y < \frac{9}{4} \ (Parte\, decreciente) \\ H_2^{-1}(y) = \sqrt{y} + \frac{3}{2} \ \ ; \ 0 \le y < \frac{9}{4} \ (Parte\, creciente) \\ 0 \quad en\, otro\, caso \end{cases}$$

Ahora la derivada de $H^{-1}(y)$ es:

$$\begin{cases} (H_1^{-1})'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}} \ \ ; \ 0 < y < \frac{9}{4} \\ (H_2^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \ \ ; \ 0 < y < \frac{9}{4} \\ 0 \quad en\, otro\, caso \end{cases}$$

$\left|\left(H^{-1}\right)'(y)\right|$ No está definida en $y = 0$, el dominio de y sería $0 < y < \frac{9}{4}$.

Ahora:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{2} f_X\left(H_i^{-1}(y)\right)\left|\frac{d\left(H_i^{-1}(y)\right)}{dy}\right|$$

$$f_Y(y) = f_X\left(H_1^{-1}(y)\right)\left|\frac{d\left(H_1^{-1}(y)\right)}{dy}\right| + f_X\left(H_2^{-1}(y)\right)\left|\frac{d\left(H_2^{-1}(y)\right)}{dy}\right|$$

$$f_Y(y) = \frac{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{y}\right)^2}{9}\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| + \frac{\left(\sqrt{y} - \frac{3}{2}\right)^2}{9}\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{18\sqrt{y}}\left(2\left(\frac{9}{4}\right) + 2y\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{9\sqrt{y}}\left(\frac{9}{4} + y\right) \;\; ; \; 0 < y < \frac{9}{4}$$

De manera que:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{9\sqrt{y}}\left(\dfrac{9}{4} + y\right) \;\; ; \; 0 < y < \dfrac{9}{4} \\ 0; \;\; En \;\; otro \;\; caso. \end{cases}$$

Ahora que se encontró la función, se procede a verificar que $\int_0^{\frac{9}{4}} f_Y(y)dy = 1$

$$\int_0^{\frac{9}{4}} \frac{1}{9\sqrt{y}}\left(\frac{9}{4} + y\right)dy = \int_0^{\frac{9}{4}} \frac{1}{4\sqrt{y}}\,dy + \int_0^{\frac{9}{4}} \frac{\sqrt{y}}{9}\,dy$$

$$\int_0^{\frac{9}{4}} \frac{1}{9\sqrt{y}}\left(\frac{9}{4} + y\right)dy = \frac{1}{2}\sqrt{y}\Big|_0^{\frac{9}{4}} + \frac{2}{27}\,y^{\frac{3}{4}}\Big|_0^{\frac{9}{4}}$$

$$\int_0^{\frac{9}{4}} \frac{1}{9\sqrt{y}}\left(\frac{9}{4} + y\right)dy = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - 0\right] + \frac{2}{27}\left[\frac{27}{8} - 0\right]$$

$$\int_0^{\frac{9}{4}} \frac{1}{9\sqrt{y}}\left(\frac{9}{4} + y\right)dy = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{9}{4}} \frac{1}{9\sqrt{y}}\left(\frac{9}{4} + y\right)dy = 1$$

2. INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA ACTUARIAL

En la aplicación de la estadística actuarial es imprescindible tener el conocimiento básico sobre finanzas, ya que tenemos que tener presente que se tendrá la intervención económica en todo momento, por tal motivo se estudiarán las formas más básicas sobre los intereses que pueden generar un préstamo económico a lo largo de un determinado periodo de tiempo, y se presentan a continuación algunos conceptos que se usarán a lo largo de éste capítulo.

2.1 Conceptos Básicos.

Activo: llámese activo a todo bien que posee una empresa o persona y es netamente propio.

Pagaré: promesa unilateral escrita que hace una persona, por la cual se compromete a pagar a otra, o a su orden, una determinada suma de dinero en una fecha determinada. En el vínculo que establece un pagaré, a diferencia de lo que sucede con otros documentos mercantiles, sólo intervienen dos partes, la persona que se compromete a pagar y el beneficiario.

Seguro: es la transferencia equitativa de los riesgos de una pérdida, que una entidad toma de otra a cambio de una remuneración o compra de pólizas de seguros.

Póliza de seguro: es un contrato entre un asegurado y una compañía de **seguros**, que establece los derechos y obligaciones de ambos, en relación al **seguro** contratado.

Actuario: persona que se dedica a la aplicación de la estadística actuarial.

Biometría Actuarial: lo referente a la teoría de la supervivencia y la elaboración de tablas de mortalidad, el estudio de invalides, etc.

2.1.1 ¿Qué es la estadística actuarial?

La estadística actuarial o actuaría es una disciplina que aplica modelos estadísticos y matemáticos para la evaluación de riesgos principalmente en las industrias aseguradoras y financieras. Los actuarios son profesionales de negocios que abordan la gestión y evaluación del impacto financiero del riesgo y la incertidumbre de una entidad.

El objetivo de la estadística actuarial es el estudio de fenómenos aleatorios que pueden afectar directa o indirectamente un bien. En otras palabras, es valorar las consecuencias económicas de la ocurrencia de encontrarse con un suceso que se ha predicho con anterioridad.

La estadística actuarial comprenderá la elaboración de los correspondientes modelos de probabilidad principalmente sobre la vida humana.

2.1.2 Principales Campos de Aplicación de la Estadística Actuarial

Históricamente el actuario ha utilizado modelos determinísticos en la construcción de tablas de vida y el cálculo de primas. La disciplina ha pasado por diversos cambios acompañados del desarrollo tecnológico y la incorporación de computadoras de alto rendimiento ha conducido al trabajo con los modelos estocásticos implementados en la teoría financiera moderna, permitiendo así, evaluaciones de riesgo mucho más complejas y análisis con cantidades masivas de información del posible evento con una calidad superior.

Como ya se ha mencionado antes, la actuaría es una disciplina de la estadística que aplica modelos estocásticos y matemáticos para la evaluación de riesgos en industrias aseguradoras y financieras.

El actuario debe tener la capacidad de inclusión de los principales conceptos de probabilidad, finanzas, economía y programación de computadoras.

Una persona con conocimientos de actuaría podrá desarrollarse en los siguientes campos:

- Análisis de riesgo de entidades privadas para sustentar la toma de decisiones a través de modelos matemáticos y estadísticos, así como elaborar propuestas y modelos de planeación estratégica, tanto comercial como financiera.
- Hechos económico-sociales sometidos a leyes probabilísticas o financieras, con el fin de proponer diagramas de acción que permitan lograr la relación técnica necesaria para el cumplimiento de las prestaciones recíprocas de las condiciones de cambio de valores presentes por valores futuros estableciendo la equivalencia técnica y las cotizaciones y compensaciones necesarias.
- Cualquier tipo de hecho, circunstancia o acontecimiento que involucre riesgos y pueda afectar los bienes económicos o financieros de personas o entes públicos o privados.
- Condiciones de funcionamiento de los entes públicos o privados, con o sin fines de lucro, de adhesión libre u obligatoria, a los efectos de administrar científicamente el riesgo económico o financiero estableciendo los mecanismos que garanticen la viabilidad y la estabilidad de las operaciones.

- Condiciones de "certeza" en el presente (primas de seguro, cotizaciones a la seguridad social, requerimientos de capital propio, determinación de compromisos por prestaciones futuras - también llamados reservas matemáticas -) relacionados con flujos de fondos por ingresos o egresos en condiciones de incertidumbre.
- El desarrollo de productos, formulación de estrategias integradas de comercialización, planificación y simulación de estados patrimoniales y de resultados de entidades sujetas a riesgos a los efectos de desarrollar políticas y procedimientos tendientes a la estabilidad, la solvencia y la rentabilidad en el largo plazo.
- Económicamente, la vida humana, elaborando las tablas y las probabilidades con relación a la muerte, invalidez, accidente, enfermedad, incendio y pérdidas industriales, desastres naturales, así como también calcular las primas correspondientes.
- Minimizar y/o maximizar los riesgos y/o beneficios de cualquier ente financiero o social.

2.2 Conceptos Sobre Finanzas

Interés:

- Se denomina interés al pago por el uso de dinero ajeno y se denota por **I.**
- El cambio del valor del dinero con el paso del tiempo.
- Es el precio que tiene el dinero como cualquier otro bien; es el pago por la adquisición de bienes y servicios en operaciones de crédito.

Plazo: es el número de días u otras unidades de tiempo que transcurren entre la fecha inicial y la fecha final en una operación financiera.

Capital: es la cantidad de dinero ahorrada o invertida, se denota por C.

Monto: es el resultado de sumar el capital con los intereses ganados después de un determinado tiempo.

De manera gráfica se tiene

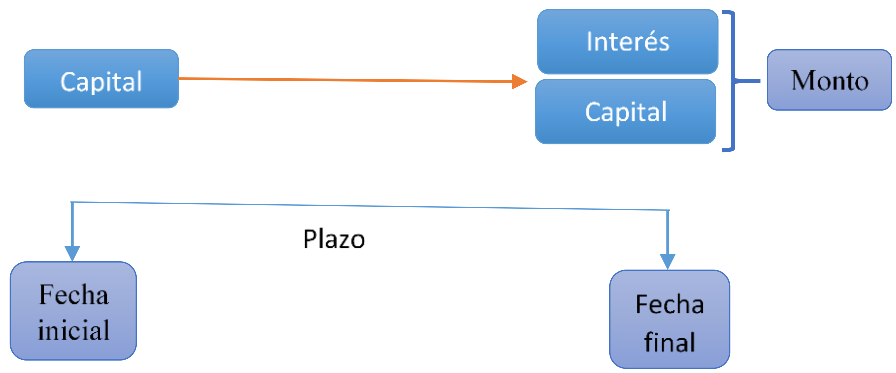


Figura 6: Relación entre capital, plazo y monto.

2.2.1 Tasa de Interés

Definición 2.1 La tasa de interés **i** es la razón que existe entre el interés I y el capital C, por una unidad de tiempo es decir: $i = \frac{I}{C}$

Definición 2.2 El tiempo entre dos fechas sucesivas en las que los intereses se agregan al capital se llama **periodo de capitalización** y el número de veces por año en que los intereses se capitalizan se llaman **frecuencia de conversión** o **frecuencia de capitalización** y se denota **por n.**

Definición 2.3 Se dice que un interés es simple cuando sólo el capital gana intereses durante los **n** periodos.

Es decir que si un capital C tiene una tasa de interés i durante un periodo el interés sería $I = iC$, durante dos periodos $I = 2iC$, de manera formal se tiene:

Definición 2.4 Los intereses I que devenga un capital C con una tasa de interés simple i durante n periodos están dados por:

$$I = Cin$$

Ejemplo 1. ¿Cuánto será el valor de los intereses que genera un capital de $15,000 con una tasa de interés simple del 6% anual, durante un periodo de 5 años?

Solución: se tiene que i=0.06, C=15000 y n=5

$$I = Cin$$
$$I = 15000(0.06)(5)$$
$$I = 4,500$$

Por lo tanto los intereses que genera un capital de $15000 durante 5 años con un interés del 6% anual es $4,500.

Ejemplo 2. Determine el capital que generó una cantidad de $800 durante 7 años con una tasa de interés simple de 12% anual.

Solución: se tiene que I=800, n=7 e i=0.12.

Despejando la fórmula para C y sustituyendo los valores tenemos:

$$\frac{I}{in} = C$$
$$\frac{800}{0.12(7)} = C$$
$$C = 952.3809$$

Por lo tanto el capital que genera $800 de interés en 7 años con una tasa de interés simple del 12% anual es $952.38.

2.2.1.1 Capital y Monto en el Interés Simple

En la economía el capital C y el monto M están fuertemente relacionados ya que el monto, también llamado valor futuro por algunos especialistas, depende exclusivamente de un capital C, llamado por algunos valor presente, de tal manera que el monto es la suma del capital y los intereses, así: $M = C + I$, pero además se puede reemplazar lo equivalente en el interés y se obtiene $M = C + Cin$ luego se factoriza la expresión y se obtiene $M = C(1+in)$, de manera formal:

Definición 2.5 El monto M de un capital C que devenga intereses con una tasa de interés simple i , al final de n periodos es:

$$M = C(1+in)$$

Ejemplo 1: ¿Cuánto dinero acumulará en 2 años en su cuenta bancaria una persona, si invierte \$28,000 ganando un interés del 7.3% simple anual?

Solución: C=28,000, n=2, i=0.073

$$\begin{aligned} M &= C(1+in) \\ M &= 28000(1+2(0.073)) \\ M &= 32088 \end{aligned}$$

Por lo tanto el monto será de \$32,088.

Ejemplo 2: Calcular el capital que se invirtió hace 6 años a una tasa de interés del 9% simple anual, si el monto es de \$150,000.

Solución: M=15000, i=0.09 y n=6

$$\begin{aligned} M &= C(1+in) \\ \frac{M}{1+in} &= C \\ \frac{15000}{1+2(0.09)} &= C \\ C &= 83333.3333 \end{aligned}$$

Por lo cual el capital invertido fue de \$83,333.33.

2.2.1.2 Capital y Monto en el Interés compuesto

Ya antes se ha tratado la teoría básica del interés simple, es ahora el momento de introducir los conceptos del interés compuesto, en el cual una vez vencido el periodo de tiempo y los intereses generados durante el periodo no son retirados, éstos pasan a formar parte del capital para el próximo periodo, es decir si C es el capital inicial, al final del primer periodo se tendrá un monto $M_1 = C + Ci$, tomando para el segundo periodo M_1 como el capital inicial. De esta manera, al final del segundo periodo se tendrá $M_2 = M_1 + M_1 i$ pero expresando M_1 en términos del capital e intereses se tiene:

$$\begin{aligned} M_2 &= M_1 + M_1 i \\ M_2 &= C(1+i) + C(1+i)(i) \\ M_2 &= C(1+i)^2 \end{aligned}$$

Para cuando se tengan tres periodos el monto correspondiente será $M_3 = M_2 + M_2 i$ al sustituir M_2 obtenemos

$$
\begin{aligned}
M_3 &= M_2 + M_2 i \\
M_3 &= C(1+i)^2 + C(1+i)^2(i) \\
M_3 &= C(1+i)^2(1+i) \\
M_3 &= C(1+i)^3
\end{aligned}
$$

Observando M_2 y M_3 se tiene que la potencia de $(1+i)$ coincide con el número del periodo, por inducción matemática si generalizamos para n periodos se tendrá que

$$
\begin{aligned}
M_n &= M_{n-1} + M_{n-1}(i) \\
M_n &= C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-1}(i) \\
M_n &= C(1+i)^{n-1}(1+i) \\
M_n &= C(1+i)^n
\end{aligned}
$$

Definición 2.6 El monto M de un capital C con una tasa de interés i por cada periodo, durante n periodos es:

$$M_n = C(1+i)^n$$

Ejemplo 1. Se sabe que el valor presente de un préstamo es de \$10,001 con una tasa de interés del 8% anual. Después de 6 años, ¿Cuál será el monto actual?

Solución: C=10001, i=0.08 y n=6

$$
\begin{aligned}
M_n &= C(1+i)^n \\
M_6 &= (10001)(1+0.08)^6 \\
M_6 &= 15,870.33
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el monto actual después de 6 años es \$15,870.33.

Ejemplo 2. El valor actual de un préstamo es de $\$20{,}656$. Si el préstamo fue adquirido hace 5 años por un valor de $\$10{,}000$. Determine la tasa de interés.

Solución: M=20,656, C= 10,000 y n=5

$$M_n = C(1+i)^n$$
$$i = \sqrt[n]{\frac{M_n}{C}} - 1$$
$$i = \sqrt[5]{\frac{20,656}{10,000}} - 1$$
$$i = 0.15$$

La tasa de interés con el cual se tiene el monto actual es 15% anual.

2.2.2 Tasa De Interés Nominal y Tasa De Interés Efectiva

Las tasas efectivas son indicadores que ayudan a los inversionistas y a los asesores financieros a tomar la mejor decisión para invertir sus capitales.

Es evidente que resulta más rentable invertir un capital con tasa anual capitalizable por meses, que con la misma tasa capitalizable por semestres. Pero, ¿Cuánto es más rentable? o, más precisamente, ¿Qué tasa compuesta por meses es igual de productiva que otra que se capitaliza cada semestre?

A continuación se verá cómo resolver las interrogantes antes planteadas.

Definición 2.7 Se dice que dos tasas de interés son equivalentes si con diferentes periodos de capitalización producen iguales intereses en el mismo plazo.

Definición 2.8 La tasa nominal es el interés que no se capitaliza más de una vez por año.

La tasa nominal generalmente es dada en años por las entidades financieras, siendo ellas mismas las que proponen que ese interés capitalizable o convertible en periodos más pequeños dentro de ese año.

Definición 2.9 La tasa de interés efectiva ℓ compuesta convertible una vez en el año $p=1$, equivalente a la tasa nominal i capitalizable o convertible en p periodos durante un año, se denomina **tasa efectiva.**

Con la definición anterior nos es posible obtener una relación entre la tasa efectiva con la tasa nominal, de tal forma que con una tasa efectiva al término de un año el monto es:

$$M_1 = C(1+e)^1 \, con \, p=1 \; y \; n=1$$

Con una tasa i capitalizable durante p periodos el monto acumulado es:

$$M_2 = C(1+\tfrac{i}{p})^p$$

Si se igualan los montos y se dividen por el capital inicial C se tiene:

$$(1+\tfrac{i}{p})^p = (1+e)$$

Y si ahora despejamos e se tiene:

$$e = (1+\tfrac{i}{p})^p - 1$$

Lo que da lugar a lo siguiente.

Definición 2.10 La tasa efectiva e equivalente a una tasa nominal i capitalizable en p periodos por año está dada por:

$$e = (1+\tfrac{i}{p})^p - 1$$

Ejemplo 1. Calcular la tasa efectiva equivalente al 11.8% anual por trimestres.

Solución: se tiene que p=4 trimestres en el año, i=0.118

$$\begin{aligned} e &= (1+\tfrac{i}{p})^p - 1 \\ e &= (1+\tfrac{0.118}{4})^4 - 1 \\ e &= 1.123324947 - 1 \\ e &= 0.123324947 \end{aligned}$$

Por lo tanto la tasa efectiva equivalente es 12.33%

Ejemplo 2: sabiendo que la tasa de interés efectiva es del 20.98% y fue capitalizada semestralmente, calcular la tasa de interés nominal.

$$e = (1+\tfrac{i}{p})^p - 1$$

$$i = p(\sqrt[p]{e+1} - 1)$$

$$i = 2(\sqrt{0.2098+1}-1)$$
$$i = 0.199818$$

Por lo tanto la tasa de interés nominal es de 19.9818%.

Ahora que ya se tiene conocimiento de la tasa de interés nominal y efectiva, es momento de aplicarla al interés compuesto:

Tomando la fórmula del interés compuesto y teniendo en cuenta que el periodo de capitalización puede ser seccionado en p partes menores se dice que $i \cong e$ entonces $e = \frac{i}{p}$, por lo que el monto al final de n periodos capitalizados p veces durante cada periodo será:

$$M_n = C(1+\tfrac{i}{p})^{np}$$

De manera formal se tiene la definición.

Definición 2.11 El monto M de un capital C al final de np periodos es:

$$M_n = C(1+\tfrac{i}{p})^{np}$$

En donde: n es el pazo.

np es el número de periodos

i es la tasa de intereses capitalizables o tasa nominal.

Ejemplo 1. Calcular el monto que se debe pagar después de 4 años a un banco el cual prestó un capital de $5,000 con una tasa de interés del 8% anual capitalizable bimestralmente.

Solución: se tiene que c=5000, i=0.08, n=4 y p=6 porque en un año hay 6 bimestres.

$$M_4 = (5000)(1+\tfrac{0.08}{6})^{6(4)}$$
$$M_4 = 6{,}871.0941$$

De manera que al final del cuarto año el monto será de $6871.0941.

Ejemplo 2. Encontrar el valor acumulado de $10 000 invertidos durante un año a la tasa nominal de 7.025% pagadera (capitalizable o convertible) cada 28 días, además encuentre el equivalente de la tasa efectiva y haga un cuadro el cual muestre el monto al final de cada periodo de 28 días.

Solución: Si se considera que la unidad de tiempo es de 28 días, entonces la tasa i por periodo de 28 días es:

$$i = \frac{0.07025}{\frac{365}{28}}$$

Luego el monto al final del año será:

$$M = (10,000)(1+\frac{0.07025}{\frac{365}{28}})^{\frac{365}{28}}$$
$$M = 10725.74022$$

La tasa efectiva es

$$e = (1+\frac{i}{p})^{p} - 1$$
$$e = (1+\frac{0.07025}{\frac{365}{28}})^{\frac{365}{28}} - 1$$
$$e = 0.072574$$

Es decir que la tasa efectiva equivalente a la nominal es 7.2574% anual.

Como el ejercicio pide que calculemos el monto al final de cada periodo, se utilizará el equivalente a la tasa efectiva.

Período	Días Período	Días acumulados	Capital Inicial	Capital Final
1	28	28	10000.00	10053.89
2	28	56	10053.89	10108.07
3	28	84	10108.07	10162.54
4	28	112	10162.54	10217.31
5	28	140	10217.31	10272.37
6	28	168	10272.37	10327.73
7	28	196	10327.73	10383.39
8	28	224	10383.39	10439.34
9	28	252	10439.34	10495.60
10	28	280	10495.60	10552.16
11	28	308	10552.16	10609.03
12	28	336	10609.03	10666.20
13	28	364	10666.20	10723.68
14	1	365	10723.68	10725.74

Tabla 7: Cálculo de monto por cada periodo de 28 días durante un año.

Como podemos observar, al aplicar la tasa de interés efectiva, el monto coincide con el obtenido al aplicar la tasa de interés nominal.

2.3 Anualidades

Se ha estudiado anteriormente que el interés simple trata las operaciones en forma de plazos; es decir se han analizado procedimientos de cómo distribuir cantidades de dinero de manera simple o en forma de pagos irregulares, por ello en el presente apartado se estudiará la distribución de cantidades de dinero en forma de pagos regulares.

Definición 2.12 Una anualidad es una sucesión de pagos, depósitos o retiros iguales, que se realizan en intervalos de tiempo iguales con interés compuesto.

Las anualidades son de gran utilidad en problemas de carácter financiero y de inversión, tales como: **los pagos de seguros,** de casas o propiedades, bonos, pensiones, amortizaciones; etc.

Al tiempo que transcurre entre un pago (o abono) y otro, se refiere al intervalo de pago o intervalo de abono, según sea el caso, que se desee calcular. Y el tiempo de contrato o convenio, se refiere al plazo de la anualidad, esto es, el rango de tiempo que transcurre entre el primer y último de los pagos o abonos.

De tal forma podríamos entender a la Anualidad o Renta, como el pago periódico que se realiza en un lapso de tiempo, considerando una tasa de interés y una capitalización en cuyo caso se fija al inicio de la firma del convenio.

Definición 2.13 Renta de una anualidad es el pago o reembolso de una cuota de dinero que realiza al principio o al final de un determinado período de tiempo, de ahí que la renta puede ser anual, mensual, semanal o diaria

Definición 2.14 Intervalo de pago de una renta, período de renta o simplemente período: es la duración de tiempo que hay entre dos pagos sucesivos; es decir que los pagos pueden efectuarse anualmente, trimestralmente o en cualquier otro período, además el tiempo que transcurre entre la fecha de inicio y de terminación se llama: Plazo de la anualidad**.**

2.4 Clases de Anualidades

Los pagos sucesivos en una anualidad pueden hacerse al inicio o al final de cada período; puede ser que se haga desde el primer período o a partir de algunos períodos después que se inició el plazo, por esos motivos y por otras variantes las anualidades se pueden clasificar según el momento en que se efectúen las rentas, entregas o pagos; es decir:

- Anualidad Anticipada o adelantada
- Anualidad ordinaria o vencida

Anualidad Anticipada o Adelantada

Cuando los pagos o rentas se entregan al inicio de cada período, un ejemplo es el pago de alquiler de casas.

Anualidad ordinaria o vencida

En este caso los pagos o rentas se efectúan al final de cada período, ejemplo pago de seguros

Valor De Las Anualidades

El valor de una anualidad calculado a su terminación es el monto de ella. El valor de la anualidad calculado a su comienzo es su valor actual o presente. Estos valores pueden, también, calcularse en fechas intermedias; en tal caso, se refiere a: monto de la parte vencida o valor actual de las anualidades por vencer. Así, por ejemplo, una renta de $2000 pagaderos cada final de año, durante 6 años, tendrá un monto M, o valor futuro F, al finalizar los 6 años Y tendrá un valor actual o presente C, en su fecha inicial

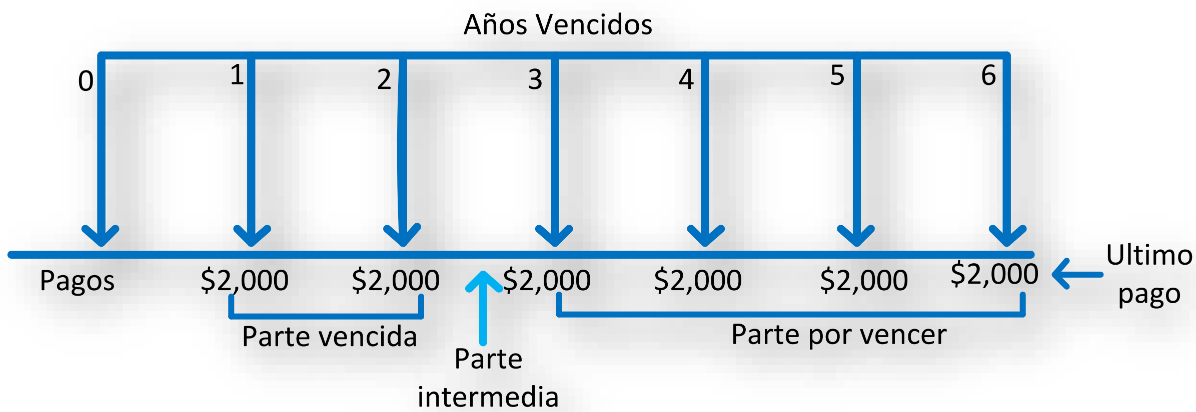


Figura 7: Ejemplo de anualidad vencida.

Trascurridos 2 años se tiene una fecha intermedia que separa la parte vencida de la anualidad, de la parte por vencer, tal como se muestra en el gráfico.

2.4.1 Anualidad Anticipada O Adelantada

Puesto que ya se ha estudiado, una anualidad anticipada se refiere a una serie de pagos periódicos e iguales de dinero que se hacen al inicio de cada período ahora se presenta la manera de cómo encontrar la anualidad anticipada mediante el uso de una fórmula matemática como sigue:

El monto total de la anualidad anticipada es el valor resultante de la suma de los montos compuestos de cada una de las rentas, acumuladas hasta su término.

Dicho de otra manera:

$$M_T = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_{np}$$

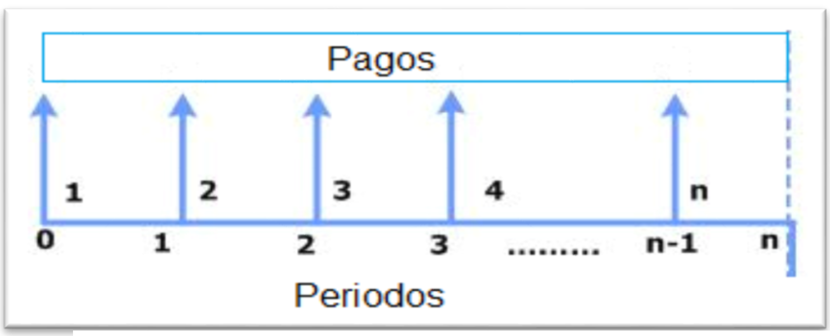


Figura 8: Ejemplo de anualidad adelantada o anticipada.

Definición 2.15 El monto acumulado por np depósitos anticipados en las anualidades simples y ciertas es:

$$M = R\left(1+\frac{i}{p}\right)\left[\frac{\left(1+\frac{i}{p}\right)^{np}-1}{\frac{i}{p}}\right]^{np} \quad donde:$$

R es el rango periódico y n es el plazo en años.

Por cuanto; al interesarse en el valor actual de una anualidad anticipada se tiene que:

$$C = R + R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-(np-1)}}{i/p}\right]$$

$$C = R\left[1 + \frac{1-(1+i/p)^{-(np-1)}}{i/p}\right]$$

$$C = R\left[\frac{i/p + 1 - (1+i/p)^{-(np-1)}}{i/p}\right]$$

Definición 2.16 El valor presente de C de una anualidad anticipada es:

$$C = R(1+i/p)\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right] \quad donde:$$

R es la renta

i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos .

n es el plazo en años y np el número total de rentas.

2.4.2 Anualidad Ordinaria o Vencida

Se dijo que una anualidad es vencida si los depósitos o rentas se hacen al final del período y que una anualidad de este tipo sería asociada con su valor presente o capital.

Cabe hacer recordar que la anualidad anticipada comienza y termina un período antes que la anualidad ordinaria.

Para generalizar y obtener una fórmula para esta clase de anualidades, se tiene que el primer término es $a_1 = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{-1}$donde i como siempre, es la tasa anual compuesta en p períodos por año. También es cierto que cualquier término dividido entre el anterior da como resultado la razón constante y que el número de términos de la progresión geométrica es el resultado de multiplicar el plazo en años por la frecuencia de conversión p. Entonces la suma np términos es en general:

$$suma = \left(1+\tfrac{i}{p}\right)^{-1}\left[\frac{1-\left(1+\tfrac{i}{p}\right)^{-np}}{1-\left(1+\tfrac{i}{p}\right)^{-1}}\right]$$

$$suma = \frac{1}{\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-1}}\left[\frac{1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}}{1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-1}}\right]$$

$$suma = \frac{1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}}{\frac{i}{p}}$$

Definición 2.17 El valor presente C de una anualidad vencida simple cierta e inmediata está dado por:

$$\mathrm{C} = \mathrm{R}\left[\frac{1-\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{p}}\right)^{-\mathrm{np}}}{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{p}}}\right] \qquad \text{donde:}$$

R es la renta

i es la tasa de interés compuesto (nominal)

p es el número de intervalos de pago por año o la frecuencia de conversión, y

n es el plazo en años

El monto en una anualidad vencida con el que se pretende encontrar el valor M de un semestre cualquiera que sea equivalente a n periodos en el que el valor M es igual a la suma de la última renta y el monto acumulado de los np-1 pagos anteriores:

$$M = R + R(1+\tfrac{i}{p})\left[\frac{(1+\tfrac{i}{p})^{np-1}}{\frac{i}{p}}\right]$$

$$M = R\left[1+(1+\tfrac{i}{p})\frac{(1+\tfrac{i}{p})^{np-1}-1}{\frac{i}{p}}\right]$$

$$M = \left[\tfrac{i}{p}+(1+\tfrac{i}{p})\frac{(1+\tfrac{i}{p})^{np-1}-1}{\frac{i}{p}}\right]$$

Definición 2.18 El monto M de anualidad vencida es:

$$M = R\frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}$$

R es la renta periódica

i es la tasa anual capitalizable en p periodos por año

n es el plazo en años y *np* el número de rentas

Ejemplo 1. Hallar el monto de una anualidad de $5000 que se pagara semestralmente durante 6 años 6 meses con una capitalizable al 7,9% semestralmente
R = 5000, i=0.079, p=2, n=6.5, np= 6.5(2)=13

$$M = R\frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}$$

por lo que utilizando la expresión anterior se tiene sustituyendo:

$$M = (5000)(((1 + 0.0395)^{13} - 1)/0.0395)$$
$$M = 82873.01$$
$$M = \$82873.01$$

Ejemplo 2. Encontrar el valor actual de una anualidad de $5000 pagadera semestralmente durante 7 años 6 meses al 8,6%, capitalizable semestralmente
P=2, i=0.086, n=7.5, i/p = 0.086/2 = 0.043;

Valor actual:

$$A= R\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

$$A=5000\,\frac{1-(1+0.043)^{-15}}{0.043}$$

$$A=5000\,\frac{1-(1.043)^{-15}}{0.043}$$

$$A=5000(10.88874)\ A=\$54,443.71$$

Ejemplo 3. Calcular el valor presente y el valor futuro de una anualidad adelantada en la que la renta es de $2000 semestralmente durante 8 años y medio al 8% capitalizable semestralmente.

Solución:

a) el monto es: $M = \frac{2000[(1+0,04)^{17} - 1]}{0.04}$

$$M = 47,395.07$$

b) el valor presente es:

$$A = \frac{2000[1 - (1 + 0.04)^{17}]}{0.04}$$

$$A = 24,331.34$$

Por lo que el valor presente será $24331.34 mientras que el valor futuro es $47.

En el anexo 1 se presenta el proceso de deducción para calcular el monto de una anualidad en base a una sucesión geométrica.

3. TEORÍA DE LA SUPERVIVIENCIA

La teoría de la supervivencia en la rama actuarial es la presentación de un ajuste mediante un modelo matemático que se encarga de brindar la probabilidad de que un ente pueda vivir hasta un determinado rango de edad, cuando este está sujeto a varias variables que lo afectan. Dicho de otra manera la estadística actuarial se encarga de estudiar la biometría actuarial, es decir la supervivencia humana.

Todo gira en torno a la variable aleatoria X "edad de sobrevivencia" que representa el tiempo biológico transcurrido desde el nacimiento hasta la muerte. De tal forma que la variable tome valores entre:

0: Edad de nacimiento

ω: Infinito actuarial; la edad máxima esperada de los individuos (105 años).

Para saber la probabilidad de que un individuo esté muerto llegado a una edad, o que uno muera en un determinado rango de edad, es necesario trabajar con las funciones de probabilidad (campo discreto) y las funciones de densidad (campo continuo) de la mortalidad.

En cuanto a cómo accionar la teoría de la supervivencia se tienen dos casos, el primero, en el que se pretende encontrar la probabilidad de vida de cierto individuo, trabajando bajo el punto de vista de mortalidad; mientras que si se pretende encontrar las probabilidad de estar vivo a una edad determinada o en un rango de años determinado es hablar de funciones de supervivencia.

Dentro de los cálculos que se pueden efectuar se tienen:

- Probabilidad de fallecer. Es decir que se pueden encontrar ya sea la probabilidad de fallecer antes de una edad determinada (Diferida) y entre una edad y otra (Temporal)
- La probabilidad de fallecer en un instante (campo continuo)
- Cantidad de vivos/muertos a partir de una población inicial
- Esperanza de vida y Vida residual.

3.1 El Modelo Biométrico y sus Variables

La biometría actuarial es el conjunto de métodos de la estadística actuarial que se ocupa, fundamentalmente, del estudio de la supervivencia de los elementos de cualquier población sujeta a un proceso de envejecimiento entre ellos pueden estar por ejemplo: Las personas, objetos, animales o empresas entre otros; esta supervivencia es determinada por un conjunto de características agrupadas en las denominadas tablas de mortalidad. La modelización de estas características se dice que representan el modelo biométrico actuarial cuya variable independiente principal es el denominado tiempo biométrico actuarial de los individuos, que no es más que la edad de los mismos. Este es un modelo estocástico, en el sentido que incluye en su estructura por lo menos a una variable aleatoria, esta es la variable **X**, que llamaremos edad de sobrevivencia, y que representa el tiempo biológico transcurrido desde el instante del nacimiento del individuo hasta su edad actual.

Obviamente la edad de sobrevivencia **X** intrínsecamente es una variable aleatoria continua. Sin embargo, la información que de la que se dispone referente a la edad de sobrevivencia de los individuos a través de registros censuales o muestrales de poblaciones concretas, suministra únicamente los años completos que ha vivido el individuo, por lo que en la práctica de se debe describir a la variable **X** como una variable aleatoria discreta.

Por otra parte en algunos modelos que se han deducido se toma en cuenta éstas dos situaciones posibles y esto depende de las características a modelizar.

Las hipótesis básicas sobre las que descansa el modelo son las siguientes:

H1: Homogeneidad. Se supone que los individuos forman un grupo homogéneo, en el sentido de que el comportamiento estadístico de su edad de sobrevivencia es idéntico. En otras palabras la función de distribución **F** es la misma para todos los individuos del grupo (las variables *edad de sobrevivencia* para los distintos individuos están igualmente distribuidas). Formalmente si, x_i y x_j son las edades de fallecimiento de dos individuos cualesquiera, i y j.

$$F_{x_i}(x) = F_{x_j}(x) \quad \forall x \geq 0$$

Esta hipótesis permite estudiar el comportamiento probabilístico de un individuo genérico y utilizar sus conclusiones para el conjunto de ellos; por ejemplo si la población incluye hombres y mujeres, la homogeneidad implica que la probabilidad que un hombre o una mujer superen los 50 años es la misma.

H2: Independencia. Las variables que describen las edades de fallecimiento de los distintos individuos son estadísticamente independientes. Formalmente así como antes, x_i y x_j son las edades de fallecimiento de los individuos cualesquiera i y j, se cumplirá

$$F_{(x_i/x_j=y)}(x) = F(x) \quad \forall x \geq 0$$

En concreto la hipótesis de independencia se traduce en que las probabilidades para la edad de sobrevivencia de un individuo no dependen de la edad de sobrevivencia de otro individuo cualquiera que sea. Esta propiedad se utiliza para el cálculo de probabilidades de más de una vida.

H3: Estacionalidad. Las probabilidades biométricas de los individuos no dependen de su fecha de nacimiento, sino sólo de su edad. Dicho de otra forma, ninguna de las consideraciones probabilísticas que se hagan sobre la edad de sobrevivencia de un individuo dependen del tiempo físico, sino únicamente del tiempo biométrico actuarial.

Por ejemplo la probabilidad de que un individuo nacido en el día 27/02/69 fallezca antes del día 27/02/99 es la misma que la que tiene un individuo nacido 27/02/98 de fallecer antes de 27/02/2028; ya que las dos pueden describirse como la probabilidad de que un individuo fallezca antes de cumplir 30 años.

Estas tres hipótesis permiten que muchos de los estudios biométricos actuariales a realizar sobre un grupo puedan reducirse al comportamiento de un individuo genérico, extendiendo posteriormente los resultados a grupos numerosos mediante la relación existente frecuencia y probabilidades.

3.1.1 Variables Biométricas Actuariales

La variable biométrica actuarial básica es la que se ha denominado, X, edad de sobrevivencia, que tras lo ya antes mencionado se puede adscribir a un individuo genérico, se trata de una variable aleatoria definida en el conjunto de los números reales positivos, esto es, $[0, \omega)$

Se trabaja además con la variable *vida residual a la edad x, T* que recoge los años que restan por vivir a un individuo que ha alcanzado la edad *x*. Formalmente si *X>x*, se define:

$$T = W - x$$

La variable *T(x)*, es por tanto, una variable que toma valores dentro del intervalo $[0, \omega - x[$, que se muestra en la figura 9:

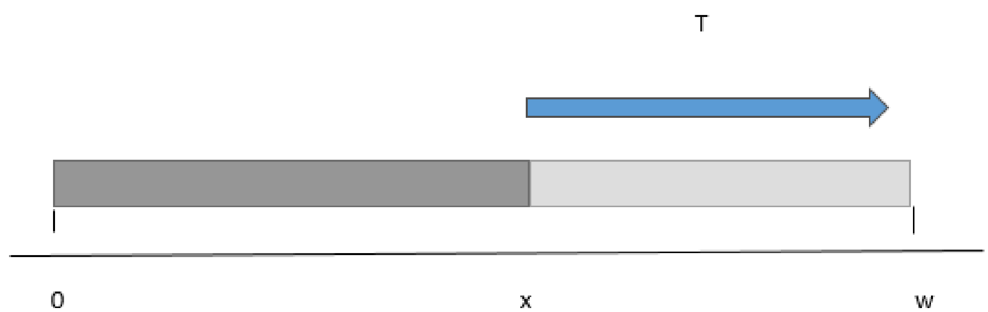


Figura 9: Grafico de la función T(x).

3.1.1.1 Función de Distribución

Teorema 3.1 Sea ***F*** la función de distribución acumulada de la edad de sobrevivencia, es sabido que para un número real, *x*

$$F(x) = p\left[X \leq x, x \geq 0\right]$$

Esto es, su valor es la probabilidad de que la edad de sobrevivencia no supere un cierto valor *x*. Son conocidas las propiedades generales de una función de distribución. En este caso las propiedades de *F* concretan además que el hecho de que la edad de sobrevivencia es no negativa y puede existir una edad límite de fallecimiento ω *:*

- $F(0) = 0$

  Es decir la probabilidad de fallecer en la edad 0 es cero (es el momento de nacer). $F(1)$ es la probabilidad de haber fallecido antes o justo en el momento en el que el individuo cumple un año.

- $\lim_{x \to \omega} F(x) = 1$, con ω = infinito actuarial.
- *F* es una función no decreciente, habitualmente creciente en las aplicaciones prácticas
- *F* es una función continua por la derecha

Implica que la función tiene un salto (de un año a otro no hay continuidad y la probabilidad "salta" de 0,2 a 0,3 p.ej.) no hay perdida de continuidad a la derecha de la función; tal como se muestra en el gráfico en la figura 10.

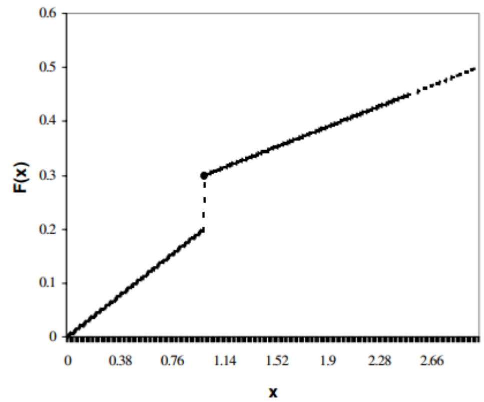


Figura 10: Gráfico de la función de la edad de sobrevivencia x

La distribución de probabilidad a la edad *x*, teniendo en cuenta $T = W - x$, es la $X - x$ condicionada por X>x, esto es, $T > 0$.Más en concreto, su función de distribución, $F_{T(x)}$, que denominaremos abreviadamente como $F(T)$, es la probabilidad de vivir **t** años dado que ha vivido **x** años y se representa como:

$$F(T) = p[T \leq t] = p[X - x \leq t \mid X > x] = p[X \leq t + x \mid X > x] = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \quad (3.1)$$

Gráficamente se explica en el siguiente diagrama en la figura 11.

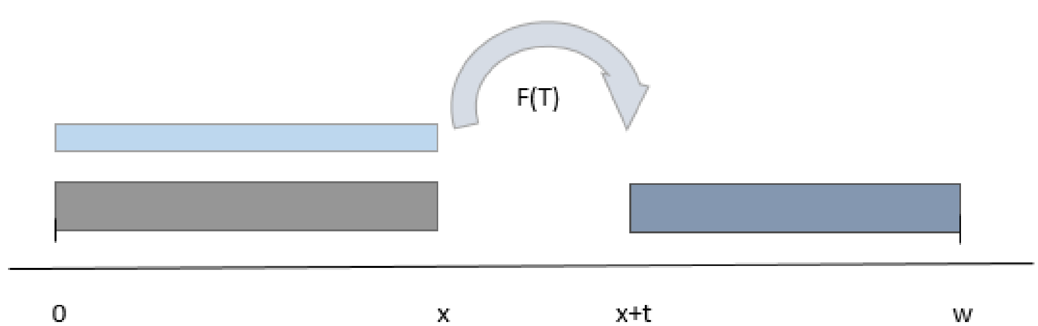


Figura 11: Gráfico de la función F(T).

3.1.1.2 Función de Supervivencia

Teorema 3.2 Sea ***x*** la edad, en años enteros, de un ente (individuo, empresa, máquina, etc.), es decir, *x = 0, 1, 2,3,....,* y consideremos un ente recién nacido (recién creada, recién comprada, etc.) al cual le asociamos la variable aleatoria ***X*** que representa la edad de sobrevivencia (quiebra, daño, etc.) del ente considerado. Si *F(x)* es la distribución de probabilidad acumulada $(F(x) = P(X \leq x,\ x \geq 0))$ definimos *la función de supervivencia de x por:*

$$S(x) = p\left[X > x\right] = 1 - F(x)$$

Es decir $S(x) = p\left[X > x\right]$, es la probabilidad de que el ente llegue con vida a la edad *x*.

Propiedades:

- La distribución de X queda determinada completamente por *F(x) o S(x)*
- $S(x)$ es una función monótona decreciente.
- $S(0) = 1$, esto es, puesto que S(x)=1-F(x), entonces S(0)=1-F(0)=1

  Es decir, la probabilidad de sobrevivir en la edad cero es uno (es el momento de nacer). $S(1)$ es la probabilidad de estar vivo hasta 1º cumpleaños.

- $\lim\limits_{x \to \omega} S(x) = 0$

  Por lo tanto la probabilidad de que un recién nacido fallezca entre *x e y,* sobreviviendo a la edad *x* se puede expresar como:

$$P(x < X \leq y \mid X > x) = \frac{P(x < X \leq y)}{P(X > x)}$$

$$P(x < X \leq y \mid X > x) = \frac{F(y) - F(x)}{1 - F(x)}$$

$$P(x < X \leq y \mid X > x) = \frac{S(x) - S(y)}{S(x)}$$

3.2 Probabilidades de Supervivencia y Mortalidad para una Cabeza.

Representamos con $\{x\}$, al ente de edad *x* y por T al tiempo futuro de supervivencia de $\{x\}$, $T = W - x$, se definen:

- La probabilidad de que $\{x\}$ sobreviva a lo sumo *t* años:

$$ {}_tq_x = P(T \le t) = \frac{p[x < X < x+t]}{p[X > x]} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \quad (3.2) $$

- La probabilidad de que $\{x\}$ sobreviva por lo menos *t* años más

$$ {}_tp_x = p(T > t) = 1 - {}_tq_x $$

En cambio, la probabilidad que $\{x\}$ sobreviva *t* años y fallezca en los *n* años siguientes se representa con ${}_{t+n}q_x$.

$$ {}_{t+n}q_x = \frac{p[x+t < X < x+n+t]}{p[X > x]} = \frac{F(x+n+t) - F(x+t)}{1 - F(x)} $$

Aunque estas probabilidades temporales de fallecimiento y sobre vivencia, ${}_tq_x \;\; y \;\; {}_tp_x$ están definidas para cualquier valor real de *t,* en la práctica son calculadas para valores enteros de **t** a partir de las tablas de mortalidad.

Teorema 3.3 Probabilidades de supervivencia y mortalidad, Propiedades:

- ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$
- En el caso de recién nacidos

$$ \begin{aligned} T(0) &= X \\ T(0) &= S(x), \forall x \ge 0 \end{aligned} $$

- ${}_{t+n}q_x = {}_tp_x \; {}_nq_{x+t}$ y también es equivalente a:

$$ {}_{t+n}q_x = P(t < T > t+n) = \frac{P(t < X < x+t+n)}{P(X > x)} \frac{P(X > x+t)}{P(X > x+t)}; $$

$$ \begin{aligned} &= {}_tp_x * {}_nq_{x+t} \\ &= {}_{t+n}q_x - {}_tq_x \\ &= {}_tp_x - {}_{n+t}p_x \end{aligned} $$

- ${}_t p_x = \dfrac{s(x+t)}{s(x)}$

Demostración: Se demostrará la tercera parte de teorema anterior:

$$
\begin{aligned}
{}_{t+n}q_x &= P(t < T \le t+n) \\
{}_{t+n}q_x &= P(T \le t+n) - P(T \le t) = \frac{P(X \le t+n+x)}{P(X > x)} - \frac{P(X \le t+x)}{P(X > x)} \\
{}_{t+n}q_x &= {}_{t+n}q_x - {}_{t}q_x \\
&\textit{asì} \\
{}_{t+n}q_x &= \frac{F(x+t+n) - F(x)}{S(x)} - \frac{F(t+x) - F(x)}{S(x)} \\
{}_{t+n}q_x &= \frac{S(x) - S(x+t+n)}{S(x)} - \frac{S(x) - S(x+t)}{s(x)} \\
{}_{t+n}q_x &= \frac{S(x+t) - S(x+t+n)}{S(x)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{t+n}q_x &= \left[\frac{S(x+t)}{S(x)}\right]\frac{S(x+t) - S(x+t+n)}{S(x+t)} \\
{}_{t+n}q_x &= {}_t p_x \; {}_n p_{x+t}
\end{aligned}
$$

Nota: Nótese que: $F(T) = {}_t q_x$, por las ecuaciones (3.1) y (3.2)

3.2.1 Tiempo de Vida Futura

En el caso discreto, se representan con K(x) al tiempo de vida futura, y se le denomina: *tiempo de vida abreviado,* con distribución:

$$
\begin{aligned}
P(K(x) = k) &= P(k < T \le k+1) \\
P(K(x) = k) &= {}_k p_x - {}_{k+1} p_x \\
P(K(x) = k) &= {}_{k+1}P - {}_k q_x
\end{aligned}
$$

También:

$$P(K(x)=k) \; = \; {}_k p_x q_{k+x} \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots$$

En definitiva *K(x)* representa el número de años completos de sobrevivencia.

Las tablas de mortalidad generalmente contienen valores tabulados de $d_x, l_x \; y \; q_x$ que corresponden a estimación de parámetros de supervivencia y mortalidad de una población obtenidas a partir de datos demográficos de nacimientos y defunciones en la misma. Por lo tanto se denota con l_0 al número de recién nacidos. Cada recién nacido tiene asociada una distribución $S(x)$, si $\lambda(x)$ es el número de sobrevivientes a la edad x. Se define $l_x = E(\lambda(x))$; es decir, l_x es el número esperado de sobrevivientes a la edad x.

De esta manera se tiene que $\lambda(x)$ es una variable aleatoria con distribución binomial cuyos parámetros son l_0 (número de intentos) y S(x) probabilidad de éxito.

$$\begin{aligned} &\lambda \to \beta(l_o,\ S(x)) \\ &\Rightarrow l_x = l_0 S(x) \end{aligned}$$

De forma análoga si ${}_n\delta_x$ es el número de fallecimientos entre las edades *x y x + n* de entre los l_0 iniciales y ${}_n d_x = E({}_n\delta_x)$; es decir, el número esperado de fallecimientos entre estas edades.

$$\begin{aligned} {}_n d_x &= l_0(S(x) - S(x+n)) \\ &= l_x - l_{x+n} \end{aligned}$$

Tantos de supervivencia y tanto de mortalidad.

Las funciones temporales pueden expresarse en función de la cohorte (función de supervivientes l(x).) cuando se hace así se habla de tantos de supervivencia o de mortalidad en la medida en que se expresan tales probabilidades como tantos o frecuencias relativas.

$${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{(x+t)}}{l_{(x)}} \quad \text{Tanto de Supervivencia}$$

$${}_t q_x = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} = \frac{l_{(x)} - l_{(x+t)}}{l_{(x)}} = \frac{{}_t d_x}{l_{(x)}} \quad \text{Tanto de mortalidad}$$

3.3 Estimación Instantánea de Mortalidad

Ya se ha dicho que l_x es el número esperado de sobrevivientes a la edad x; como se está tratando con número de sobrevivientes para poder encontrar las respectivas tasas instantáneas de mortalidad; se estimará la manera de efectuar los cálculos mediante procesos estadísticos como sigue:

El tanto o tasa instantánea de fallecimiento, $r(x)$ es una medida de la fuerza o la intensidad de la mortalidad a la edad *x,* para los individuos que han alcanzado esa edad. Formalmente se define como:

$$r(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{{}_{\Delta t} q_x}{\Delta t} \right]$$

De hecho se le denomina también fuerza de la mortalidad a la edad *x,* A la vista de su definición recoge el valor del límite de la probabilidad temporal del fallecimiento fraccionada dentro del año, no debe confundirse con la derivada de la probabilidad de fallecimiento anual, q_x ni con la de la probabilidad temporal de fallecimiento al nacer ${}_x q_0$

Nótese que

$${}_{\Delta t} q_x = P\left[X \leq x + \Delta t \mid X < x \right] = \frac{F(x+\Delta t) - F(x)}{1 - F(x)},$$

Luego

$$\frac{{}_{\Delta t} q_x}{\Delta t} = \frac{1}{1 - F(x)} . \left[\frac{F(x+\Delta t) - F(x)}{\Delta t} \right]$$ Y tomando límites

$$r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Donde *f* es la función de densidad de *X,* en donde $r(x)$ se le denomina la fuerza de la mortalidad, y es en definitiva una medida de la intensidad de la mortalidad a la edad x. El tanto instantáneo de mortalidad se puede calcular conociendo las funciones de distribución y de densidad de la edad de sobrevivencia, lo que evita calcular la derivada propuesta en la definición. Las probabilidades relevantes pueden así mismo obtenerse a partir de $r(x)$. Así, para la probabilidad temporal de supervivencia,

Puede escribirse la función de distribución de X en función del tanto instantáneo de mortalidad. Si se integra la función $r(x)$ se tiene:

$$\int_0^x r(y)dy = \int_0^x \frac{f(y)}{1-F(y)}dy = -\ln\left[1-F(y)\right]_0^x = -\ln\left[1-F(x)\right]$$

Cambiando de signo la expresión $\int_0^x r(y)dy = -\ln\left[1-F(x)\right]$ y tomando exponentes a ambos miembros,

$$1-F(x) = e^{-\int_0^x r(y)dy}\text{, Así}$$

$$_t p_x = \frac{1-F(x+t)}{1-F(x)} = \frac{e^{-\int_0^{x+t} r(x)dx}}{e^{-\int_0^x r(x)dx}} = e^{-\int_0^{x+t} r(x)dx + \int_0^x r(x)dx} = e^{-\int_x^{x+t} r(x)dx} \quad \text{(a)}$$

Dado que la expresión anterior no es más que el hecho posible que el individuo **l** cualquiera que sea sobreviva *t* años más dado que ya vivió *x* se puede deducir que De forma inmediata, para la probabilidad temporal de fallecimiento,

$$_t q_x = 1 - {_t p_x} = 1 - e^{-\int_x^{x+t} r(x)dx}$$

A veces conviene relacionar el tanto instantáneo de mortalidad con la función de supervivencia. Recuérdese que para una edad *x, S(x)* es la probabilidad de sobrevivir a dicha edad, esto es, *si x>0,*

$$S(x) = P[X > x] = 1 - F(x)$$

Nótese que:

$$S'(x) = \left[1-F(x)\right]' = -f(x)$$
$$\therefore r(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{d}{dx}\ln(S(x)) = -\frac{d}{dx}\ln(l_x)$$

En conclusión la fuerza de mortalidad satisface las siguientes propiedades:

i). $r(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

ii). $r(x)=-\frac{S'(x)}{S(x)}=-\frac{l'(x)}{l(x)}$

iii). ${}_{n}p_{x}=e^{-\int_{x}^{x+n}r(x)dx}=e^{-\int_{0}^{n}r(x+t)dt}$

iv). ${}_{n}q_{x}=\int_{0}^{n}{}_{t}p_{x}\,r(x+t)dt$

Puesto que en (a), se ha demostrado la parte iii de las propiedades de la fuerza de mortalidad a continuación se demostrará la parte iv:

$$-\frac{l'_{x}}{l_{x}}=r(x)$$

$$\int_{x}^{x+n}d\,l_{x}=-\int_{x}^{x+n}l_{x}r(x)dx$$

$$l_{x+n}-l_{x}=-\int_{x}^{x+n}l_{y}r(y)dy$$

$$l_{x}-l_{x+n}=\int_{0}^{n}l_{x+t}r(x+t)dt$$

Dividiendo para l_{x}:

$${}_{n}q_{x}=\int_{0}^{n}l_{x+t}r(x+t)dt$$

Que se deducen de los procesos anteriores. A partir de esto se construyen las relaciones que tienen las principales funciones biométricas entre sí como se muestra en la tabla 8:

	$f(x)$	$F(x)$	$S(x)$	$r(x)$	l_x
$f(x)$		$F'(x)$	$-S'(x)$	$r(x)\exp\left(-\int_0^x r(t)dt\right)$	$\frac{l'_x}{l_0}$
$F(x)$	$\int_0^x f(t)dt$		$1-S(x)$	$1-\exp\left(-\int_0^x r(t)dt\right)$	$1-\frac{l_x}{l_0}$
$S(x)$	$\int_0^{+\infty} f(t)dt$	$1-F(x)$		$\exp\left(-\int_0^x r(t)dt\right)$	$\frac{l_x}{l_0}$
$r(x)$	$\frac{f(x)}{1-\int_0^x f(t)dt}$	$\frac{F(x)}{1-F(x)}$	$\frac{-S(x)}{S'(x)}$		$\frac{l'_x}{l_x}$

Tabla 8: Relación entre las principales funciones biométricas.

3.4 Vida Residual, Esperanza de Vida

La esperanza de vida se representa en los casos discretos y continuos como e_x y $\overline{e}_x$ respectivamente y se define de la siguiente manera, Sea:

K= años de sobrevivencia (completos)

ω = *tiempo máximo de vida* de un individuo en la población (siendo este la edad máxima alcanzada por un individuo en la población o también infinito actuarial).

Se le denomina *esperanza de vida abreviada (*años esperados completos de vida) al valor esperado de *K,* es decir:

$$e_x = E(K)$$
$$e_x = \sum_{K=0}^{\omega-(x+1)} KP(K=k)$$

$$e_x = \sum_{K=0}^{\omega-(x+1)} K_1 p_x$$

La vida residual *T= W-x es,* como ya antes se ha mencionado, una variable aleatoria que nos indica la vida que le resta a un individuo de edad *x*. Obviamente el valor de esta variable se relaciona directamente con las primas que restan por cobrar o con las compensaciones que habrá que abonar en un seguro de vida o supervivencia: por lo que entonces; a la esperanza matemática de esta variable se le conoce como **esperanza de vida** a la edad *x*.

Teorema 3.4 Esperanza de vida residual, que es una variable aleatoria viene dada por la expresión:

$$\overline{e}_x = E[T] = \int_0^{\omega-x} t\, f(T)dt$$

Donde La función de densidad de la vida residual será:

$$f(T) = \frac{\partial}{\partial t}F(T) = \frac{f(t+x)}{1-F(x)}$$

De igual manera la probabilidad temporal de supervivencia es:

$${}_t p_x = p((X > x+t)|(X > x)) = \frac{P(X > x+t)}{P(X > x)} = \frac{1-F(x+t)}{1-F(x)} = \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

El tanto instantáneo de mortalidad

$$r(x) = \frac{f(t+x)}{1-F(x)}$$

Con lo que se tiene que:

$$\overline{e}_x = E[T] = \int_0^{\omega-x} t\, f(T)dt = \int_0^{\omega-x} t\frac{f(t+x)}{1-F(x)}dt = \int_0^{\omega-x} t\frac{1-F(t+x)}{1-F(x)}\frac{f(x+t)}{1-F(x+t)}dt$$

$$\overline{e}_x = \int_0^{\omega-x} t *_t p_x * r(x+t)dt$$

Se sabe que:

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}\, y,\; r(x) = -\frac{l_x^{'}}{l_x},$$

Sustituyendo lo que se conoce

$$\overline{e}_x = \int_0^{\omega-x} t *_t p_x * r(x+t)dt = \int_0^{\omega-x} t \frac{l_{(x+t)}}{l_x}\left(-\frac{l'_{(x+t)}}{l_{(x+t)}}\right)dt = -\int_0^{\omega-x} t \frac{l'_{(x+t)}}{l_x} dt = -\frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} t\, l'_{(x+t)}dt$$

Aplicando integración por partes,

$$\begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ dv = l'_{x+t}dt & v = l_{x+t} \end{vmatrix}$$

De esa manera la integral es:

$$\overline{e}_x = -\frac{1}{l_x}.\left[t.l_{x+t}\right]_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{l_x}dt = \int_0^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{l_x}dt$$

(Puesto que el primer sumando se anula)

Por lo que la expresión se reduce a:

$$\overline{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x dt$$

Es decir, la esperanza de vida en x se puede contemplar como la suma de infinitas probabilidades temporales de supervivencia de la edad actual x hasta el infinito actuarial.

De igual manera si no se toma en cuenta la última transformación y se parte del hecho del número de años que vivirá el individuo. La llamada cantidad de existencia, T, se tiene:

$$T_x = \int_0^{\omega-x} l_{x+t}dt$$

$$\overline{e}_x = \frac{T_x}{l_x}$$

Observación: Se puede aproximar el caso continuo por el caso discreto de la siguiente manera:

$$\overline{e}_x \sim e_x + \frac{1}{2}$$

3.5 Estructuras Biométricas

Históricamente desde el siglo XIX muchos investigadores desarrollaron algunos modelos teóricos que buscan explicar el comportamiento de las funciones biométricas, de esta manera investigadores como Moivre, Makeham, Gompertz, entre otros; plantearon algunas leyes teóricas para poder describir la mortalidad en una población. Los modelos proponen una forma funcional para la supervivencia de una población; se habla de dos ventajas de desarrollar modelos teóricos.

- Una metodología, Estudios sobre fenómenos biológicos terminan concluyendo en una determinada forma funcional para las funciones biométricas.
- De orden práctica: Una función que depende de unos cuantos parámetros para el fácil manejo de estos.

3.5.1 Ley de Moivre

Esta ley propone el uso de una función lineal en la que el número de sobrevivientes l_x se ajusta a esta de forma decreciente, es decir:

$$l_x = a + bx$$

Los parámetros *a y b* son fáciles de encontrar, así:

$$l_0 = a + b.o = a\text{, de donde, } \omega = -\frac{b}{a} = -\frac{l_0}{b}$$

Así, la función que determina el número de sobrevivientes esperado bajo la ley de Moivre es: $l_x = L_0\left(1 - \frac{x}{\omega}\right);\ \ 0 \le x \le \omega$

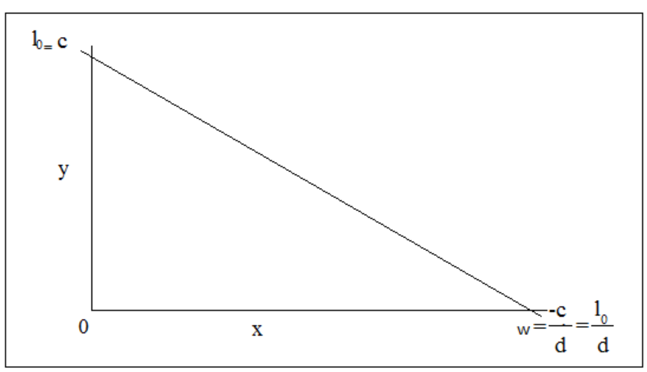


Figura 12: Gráfico de l_x según la Ley de Moivre.

El gráfico anterior muestra la forma que tiene l_x bajo la ley de Moivre

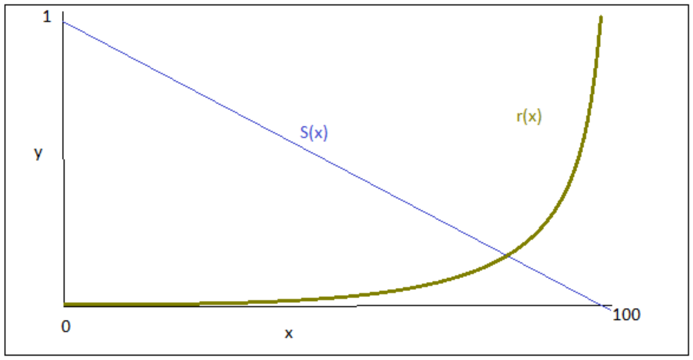


Figura 13: $r(x)$ comparado con S(x)

La figura 13 muestra la forma que tiene la función $r(x)$ bajo la ley de Moivre. De esa manera al encontrar los modelos de supervivencia bajo esta ley se obtiene:

Las defunciones anuales quedan de la siguiente manera.

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_0\left(1-\frac{x}{\omega}\right) - l_0\left(1-\frac{x+1}{\omega}\right) = \frac{l_0}{\omega}$$

Las probabilidades de fallecimiento serán:

$$r(x) = \frac{l_x^{'}}{l_x} = \frac{\frac{l_0}{\omega}}{l_0\left(1-\frac{x}{\omega}\right)} = \frac{1}{\omega - x}$$

En cuanto a las probabilidades temporales de fallecimiento y supervivencia para más de un tendremos:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_0\left(1-\frac{x+n}{\omega}\right)}{l_0\left(1-\frac{x}{\omega}\right)} = \frac{\omega - x - n}{\omega - x} = 1 - \frac{n}{\omega - x} = 1 - nr(x)$$

Entonces:

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$$

De la misma manera que las anteriores se pueden determinar las restantes distribuciones bajo esta ley. La tabla 9 se presenta el uso de la ley de Moivre en las distintas distribuciones que ya se han estudiado, es decir, que solo se sustituirá la variable l_x en cada distribución para poder encontrar expresión correspondiente como sigue

l_x	$l_0(1-\frac{x}{w});0\leq x\leq w$
dx	$\frac{l_0}{w}$
$r(x)$	$\frac{1}{w-x}$
$_n p_x$	$1-nr(x)$
$S(x)$	$1-\frac{x}{w}$
e_x	$\frac{w-x}{2}$

Tabla 9: Ley de Moivre en las distintas distribuciones.

3.5.2 Ley de Gompertz (1825)

Para poder deducir esta ley es necesario considerar la variable $r(x)$ como una medida de propensión a la muerte; entonces por lo tanto una media de resistencia a la muerte será $\frac{1}{r(x)}$, Gompertz supuso que la resistencia a la muerte decrece proporcionalmente en otras palabras el crecimiento relativo $r(x)$ debe ser constante.

$$\frac{r'(x)}{r(x)}=-h$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{r(x)}=-h\frac{1}{r(x)}$$

$$\int d\frac{1}{r(x)}=-\frac{1}{r(x)}h\int dx$$

$$\ln\left(\frac{1}{r(x)}\right) = -hx - c$$
$$\ln r(x) = hx - c$$
$$r(x) = e^{hx}e^{-c}$$

Tomando $e^{-c} = B$ se tiene que:

$$r(x) = Be^{hx}$$

Por lo que se cumple la ley de Gompertz; la Fuerza de mortalidad crece geométricamente entonces:

$$l_x = l_0 e^{\int_0^x r(y)dy}$$
$$l_x = l_0 e^{-\frac{Be^{hy}}{h}\Big|_0^x}$$
$$l_x = l_0 e^{-\frac{Be^{hx}}{h}} e^{\frac{B}{h}}$$

Si, $e^h = c, \delta = e^{\frac{B}{h}}, k = \frac{l_0}{\delta}$

$$l_x = l_0 e^{-\frac{B}{h}c^x} \delta^{-1}$$
$$l_x = l_0 \delta^{c^x - 1}$$

Obteniendo ${}_t p_x$ por esta ley;

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$
$${}_t p_x = \frac{k\,\delta^{c^{c+t}}}{k\,\delta^{c^x}}$$
$${}_t p_x = \delta^{c^{x+t} - c^x}$$
$${}_t p_x = \delta^{c^x (c^t - 1)}$$

Que representa la probabilidad de que un individuo de edad x alcance la edad $x+t$ bajo la hipótesis de Gompertz.

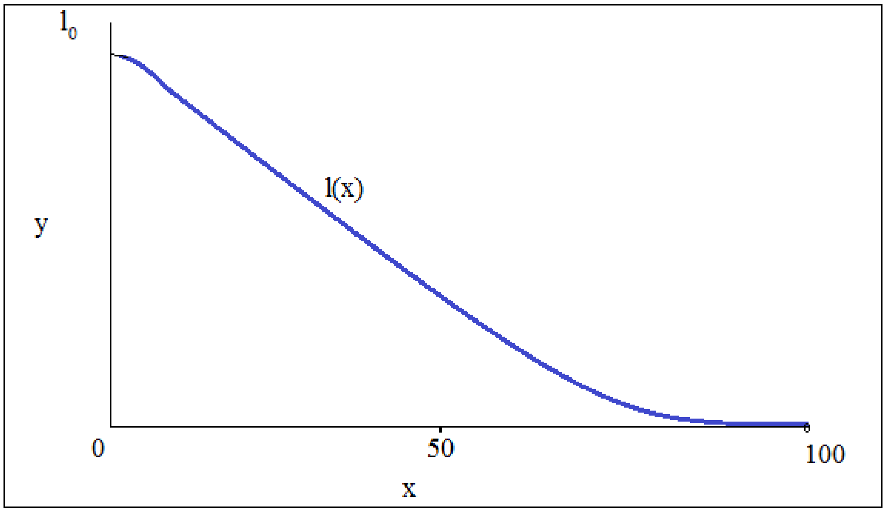


Figura 14: Función l_x según la ley de Gompertz para valores c= 1.03 y $\delta = 0.7$

La figura 15 muestra las funciones $S(x), p_x, r(x)$ para una ley de Gompertz con valores c= 1.03 y $\delta = 0.7$

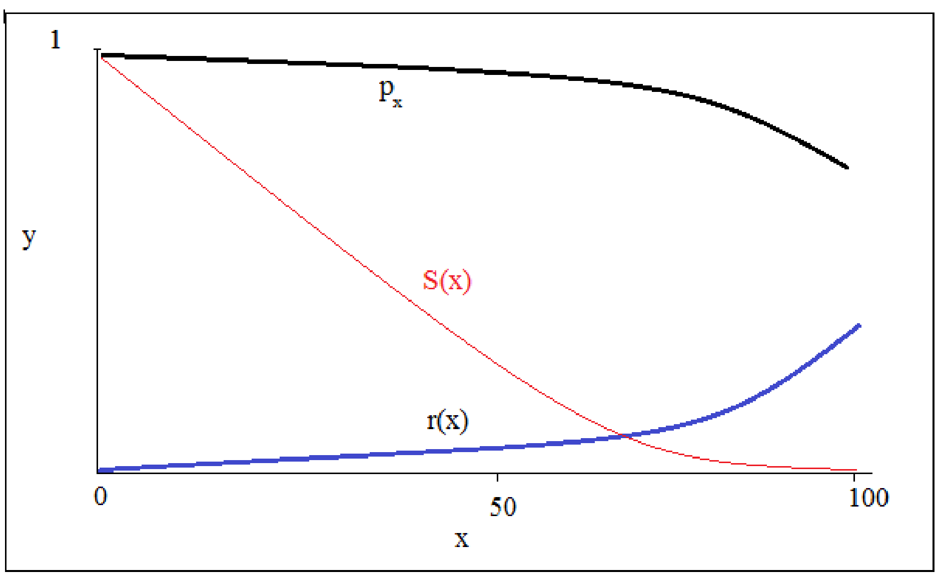


Figura 15: Funciones $S(x), p_x, r(x)$ para una ley de Gompertz con valores c= 1.03 y $\delta = 0.7$

l_x	$l_0 \delta^{c^x - 1}; 0 \leq x \leq +\infty; \delta < 1; c > 1$
dx	$l_0 \delta^{c^x - 1}(1 - \delta^{c^x(c-1)})$
$r(x)$	$-(\ln \delta)(lnc)c^x$
${}_n p_x$	$\delta^{c^x(c^n - 1)}$
$S(x)$	$\delta^{c^x - 1}$
e_x	$\int_0^{+\infty} \delta^{c^x(c^n-1)} dt$

Tabla 10 Principales funciones biométricas bajo la ley de Gompertz.

3.5.3 Primera Ley de Makeham

Constituye una mejora de la ley de Gompertz. Este modelo supone que el tanto de fallecimiento obedece a la expresión:

$$r(x) = A + BC^x$$

Como en el caso de la ley de Gompertz considerar la resistencia decreciente a la muerte, Makemhan considera la presencia de la *propensión* a la muerte en cualquier edad *x* esto no es más que aumentar una constante en el modelo Gompertz; esta ley describe relativamente bien la mortalidad humana en edades adultas; describe además el tanto instantáneo de mortalidad como una función con dos componentes: uno fijo para cualquier edad (A) y otro que crece exponencialmente con la edad BC^x de tal manera que:

$$r(x) = A + BC^x$$

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x r(y)dy} = l_0 e^{-\int_0^x (A+BC^y)dy} = l_0 e^{-Ax} e^{-\int_0^x (BC^y)dy} = l_0 e^{-Ax} \delta^{c^x - 1}$$

Por la ley de Gompertz

$l_x = l_0 S^x \delta^{c^x - 1}$, Donde claramente, $S = e^{-A}$

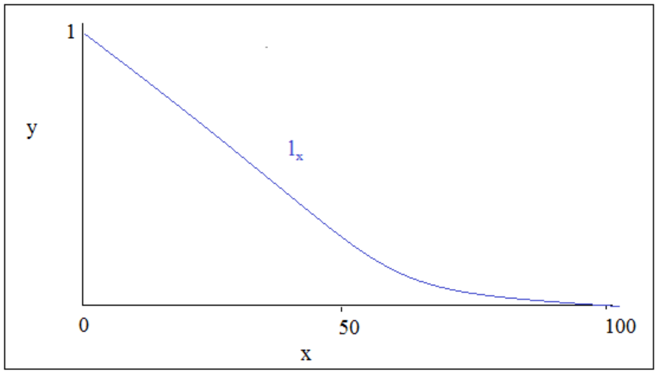


Figura 16: Función l_x con c= 1.03 y $\delta = 0.7$ y S=0.998 bajo la ley de Makeham.

De manera similar en la figura 17 se muestran las funciones $S(x), r(x)\, y\, p_x$ para el caso de la primera ley de Makeham con parámetros, con c= 1.03 y $\delta = 0.7$ y S=0.998; se observa que el perfil es muy similar al de la ley de Gompertz

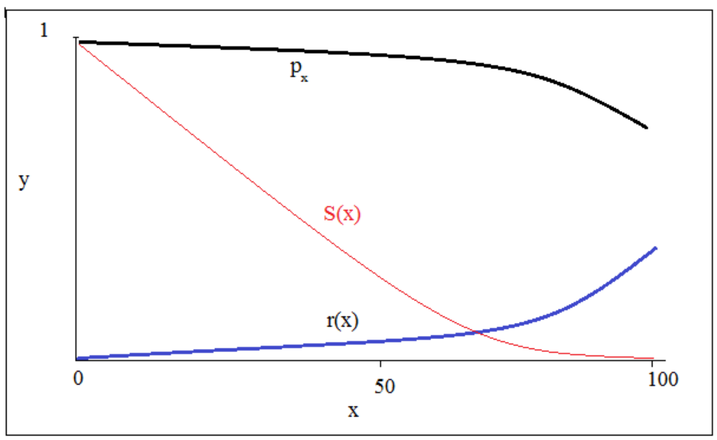


Figura 17: Comparación de la primera ley de Makeham y la ley de Gompertz.

A continuación se escribirá de donde provienen estas funciones: para el caso de $r(x)$

$$r(x) = -\frac{l_x^{'}}{l_x} = \frac{l_0 S^x \delta^{c^x - 1}\left(\ln(S) - \ln(\delta).\ln C.C^x\right)}{l_0 S^x \delta^{c^x - 1}} = -\left(\ln(S) + (\ln \delta)(\ln C)C^x\right)$$

Las probabilidades temporales de supervivencia y fallecimiento son:

$${}_n p_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{l_o S^{x+n} \delta^{C^{x+n}-1}}{l_o S^x \delta^{C^x - 1}} = S^n \delta^{C^x (C^n - 1)}$$

Por lo que entonces ${}_nq_x = 1 - {}_n p_x$; además

$$S(x) = \frac{l_x}{l_0} = S^x \delta^{C^x - 1}$$

También

$$F(x) = 1 - S(x)$$

De esa manera se obtiene

l_x	$l_0 S^x \delta^{c^x-1} ; 0 \leq x \leq +\infty ; \delta < 1 ; c > 1$
dx	$l_0 S^x \delta^{c^x-1}(1 - S\delta^{c^x(c-1)})$
$r(x)$	$-lnS - (\ln\delta)(lnc)c^x$
${}_np_x$	$S^n \delta^{c^x(c^n-1)}$
$S(x)$	$S^x \delta^{c^x-1}$
e_x	$\int_0^{+\infty} s^t \delta^{c^x(c^n-1)} dt$

Tabla 11: Principales leyes biométricas según la primera ley de Makeham.

3.5.4 Segunda Ley de Makeham

En una población típica, la mortalidad por edades en menores suele ser más alta; es decir que puesto que se observó que la primera ley de Makeham tiene problemas de ajuste con las mortalidades de edades jóvenes entonces; se determinó que el diseño de este modelo es más real si a este se le añade un término lineal, como sigue:

$$r(x) = A + Hx + BC^x$$

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x r(y)dy} = l_0 e^{-\int_0^x \left(A + HX + BC^y\right)dy} = l_0 e^{-Ax} e^{Hx^2} e^{-\int_0^x \left(BC^y\right)dy} = l_0 e^{-Ax} e^{Hx^2} \delta^{c^x - 1}$$

Y por la ley de Gompertz:

$$l_x = l_0 S_1^x S_2^x \delta^{c^x - 1}$$

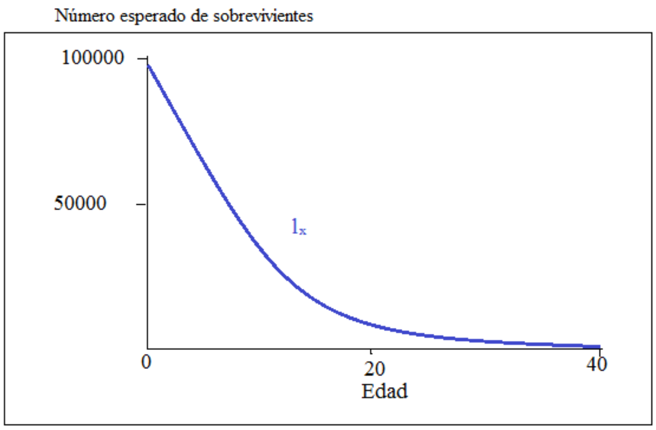


Figura 18: Número esperado de sobrevivientes según la segunda ley de Makeham

La figura anterior muestra la forma que tiene la función l_x bajo la segunda ley de Makeham.

A continuación en el siguiente gráfico se tiene la forma que adopta la función $r(x)$ bajo la segunda ley de Makeham

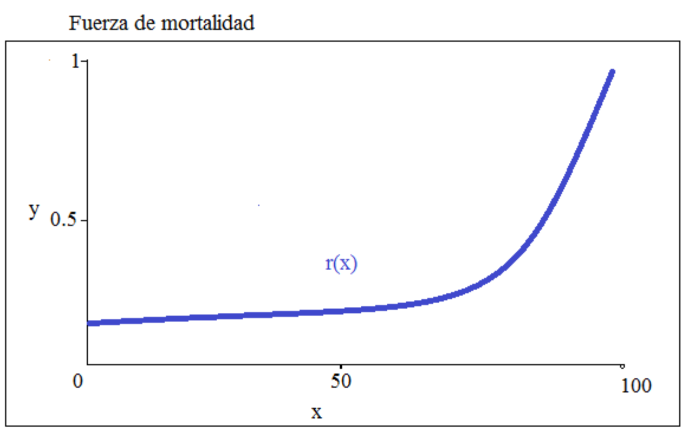


Figura 19: Fuerza de mortalidad según la segunda ley de Makeham.

Al igual que en las leyes anteriores en esta ley se puede obtener cada expresión de las funciones.

Nótese que las funciones mostradas tanto como para la primera y segunda ley de Makeham tienen cierta similitud entre ellas.

Ejercicios.

Problema 1.

Si $S(x)=1-\frac{x}{100}$ con $0\le x\le 100$ calcular:

a) $r(x)$

b) F(x)

c) $f(x)$

d) $p(10<x<40)$

Solución

a)

$$r(x)=\frac{-S'(x)}{S(x)}=\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{x}{100}}$$

$$r(x)=\frac{1}{100-x}$$

b)

$$S(x)=1-F(x)$$

$$F(x)=1-\left(1-\frac{x}{100}\right)$$

$$F(x)=\frac{x}{100}$$

c)

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{100}$$

d)

$$p(10 < x < 40) = \int_{10}^{40} \frac{1}{100} dx$$

$$= \frac{1}{100} x \Big|_{10}^{40}$$

$$p(10 < x < 40) = \frac{3}{10} = 0.3$$

Problema 2.

Si se conoce que la función de supervivencia de un sector industrial viene dado por la expresión:

$$S(x) = 1 - \frac{x}{100}; \quad 0 \leq x \leq 100$$

Se pide calcular el tanto instantáneo de quiebra del sector que lleva funcionando 25 años.

Solución

$$r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

$$= \frac{-S'(x)}{S(x)}$$

Como $S(x) = \frac{x}{100}$ y $S\,'(x) = \frac{1}{100}$

$$r(x)=\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{x}{100}}$$

$$r(x)=\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{25}{100}}=\frac{1}{75}=0.013$$

Problema 3.

Si la función de supervivientes a la edad x viene dada por:

$$l_x=10\,(100-x)^2 \quad con \quad 0\le x\le 100$$

Se pide calcular la varianza de la variable aleatoria tiempo de vida futura $\operatorname{var}(T(x))$

<u>Solución:</u>

$$Var(T)=E\left[T^2\right]-\left(E\left[T\right]\right)^2$$

$$E\left[T^2\right]=\int_0^{100-x} t^2\,\frac{l_{x+t}}{l_x}\,\frac{-l'_{x+t}}{l_{x+t}}\,dt$$

$$E\left[T^2\right]=-\int_0^{100-x} t^2\,\frac{-l'_{x+t}}{l_x}\,dt$$

$$l'_{x+t}=10(100-(x+t))^2$$

$$l'_{x+t}=-20\left(100-(x+t)\right)$$

$$l'_{x+t}=2000+20\,x-20\,t$$

$$l'_{x+t}=-2000-20\,x+20t$$

$$E\left[T^2\right] = \int_0^{100-x} \frac{2000t^2 - 20xt^2 - 20t^3}{10(100-x)^2}\,dt$$

$$E\left[T^2\right] = \frac{2}{(100-x)^2} \int_0^{100-x} 100t^2 - xt^2 - t^3 dt$$

Por lo que:

$$Var(T) = \frac{(100-x)^2}{18}$$

Problema 4.

Calcular las probabilidades: ${}_6P_{60}$ ${}_{10}q_{56}$ ${}_4p_{56}$ si se conoce que el número esperado de sobrevivientes a los 56 años es 876,286 a los 60 años 841,349 y a los 66 años es 763,626

Solución

$${}_6p_{60} = \frac{l_{66}}{l_{60}} = \frac{763626}{841349} = 0.90762$$

$${}_{10}q_{56} = 1 - \frac{l_{66}}{l_{56}} = 1 - \frac{763626}{876286} = 0.12857$$

$${}_4p_{56} = \frac{l_{60}}{l_{56}} = \frac{841349}{876286} = 0.96013$$

Problema 5.

Si $l_{25} = 100, l_{28} = 955, q_{25} = 0.010,\ p_{27} = \frac{955}{975}$ se pide obtener el valor de q_{26}

Solución.

$$q_{26}=\frac{d_{26}}{l_{26}} \quad p_{27}=\frac{l_{28}}{l_{27}}=\frac{955}{975}$$

$$d_{26} = l_{26} - l_{27}$$
$$d_{26} = 990 - 975$$
$$d_{26} = 15$$
$$q_{25} = 1 - \frac{l_{26}}{l_{25}}$$
$$0.010 = 1 - \frac{l_{26}}{l_{25}};\ l_{26} = (1 - 0.010) x l_{25} = 990$$
$$\text{entonces } q_{26} = \frac{15}{26}$$

Problema 6.

Para una función de densidad de probabilidad de la edad de sobrevivencia

$f(x) = \left(\frac{2x}{6400}\right)$ con $0 \le x \le 80$ y, *(x)=40* se pide una expresión de la función de densidad de probabilidad de la variable *T=T(40)*

Solución: La densidad de la variable tiempo de vida futuro *T=T(40) es:*

$${}_t p_{40} r_{40+t} = \frac{S(40+t)}{S(40)}\left(\frac{-S'(40+t)}{S(40+t)}\right)$$

Y como

$$S(x) = 1 - \frac{x^2}{6400}$$
$$S'(x) = -\frac{x}{3200}$$

Entonces

$${}_t p_{40}\, r_{40+t} = \frac{1 - \frac{(40+t)^2}{6400}}{1 - \frac{40^2}{6400}}$$

Problema 7.

Un colectivo tiene como tanto instantáneo de fallecimiento $r(x) = A + e^x$ para $x \geq 0$ y se verifica que ${}_{0.5}p_0 = 0.5$ Se pide calcular el valor de A

Solución

$$
\begin{aligned}
{}_{0.5}p_0 &= e^{\int_0^{0.5} r(x)dx} \\
{}_{0.5}p_0 &= e^{\int_0^{0.5} (A+e^x)dx}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}_{0.5}p_0 = e^{\int_0^{0.5} Adx + \int_0^{0.5} e^x dx} \\
&\ln(0.5) = -(A(0.5) + e^{0.5}) \\
&0.693147 = 0.5A + 1.6487 - 1 \\
&A = 0.088
\end{aligned}
$$

Problema 8

Confirme que la siguiente función puede servir como una fuerza de mortalidad.

Por la ley de Gompertz.

$Bc^x \quad B > 0, c > 1$

Solución

$$
\begin{aligned}
&a. \forall x (r(x) \geq 0) \\
&b. si\, x \to +\infty \Rightarrow r(x) \to +\infty
\end{aligned}
$$

Sirve como fuerza de mortalidad dado que cumple las propiedades.

$$S(x) = e^{\int_0^x r(t)dt}$$

$$\int_0^x Bc^t dt = B\int_0^x c^t dt$$

$$\int_0^x Bc^t dt = B\left.\frac{c^t}{\ln c}\right|_0^x$$

$$\int_0^x Bc^t dt = \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)$$

$$S(x) = e^{-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)}$$

Problema 9

Confirmar que la función $S(x) = e^{-\frac{x^3}{12}}; \quad con\ x \geq 0$ puede servir como una función de sobrevivencia.

Solución: Basta con probar que:

$$S(0) = 1$$

Entonces:

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x^3}{12}} = 0$$

S(x) Es decreciente. Por tanto *S(x)* si es una función de sobrevivencia.

4. CANTIDADES ALEATORIAS DE USO EN LA ESTADÍSTICA ACTUARIAL

En este capítulo se presentarán una serie de funciones y transformaciones que nos serán útiles y genéricamente se denominan cantidades aleatorias de uso en la estadística actuarial.

4.1 Funciones de Supervivencia y Azar

Considérese una variable aleatoria X continua y no negativa con función de distribución $F(x)$ y función de densidad $f(x)$.

Definición 4.1 La función:

$$S(x) = p(X > x) = 1 - F(x)$$

Se denomina función de supervivencia.

La función $S(x)$ proporciona la probabilidad de que un individuo sobreviva más que x o que una variable de pérdida X exceda el valor x.

Definición 4.2 Se denomina función de azar a la cantidad:

$$r(x) = \frac{f(x)}{p(X > x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

La función de azar se conoce como tasa de fallo en la fiabilidad y fuerza de mortalidad en seguros de vida.

Ejemplo 1. Obtener la función de azar de la variable aleatoria continua con función de distribución,

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{2 + x^2}}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

Solución: la función de densidad está dada por:

$$f(x) = F'(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{\left(2 + x^2\right)^{3/2}}$$

De donde la función de azar es,

$$r(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)}$$

$$r(x)=\frac{2}{\left(2+x^2\right)\left(\sqrt{2+x^2}-x\right)}, \quad -\infty<r<\infty$$

Ejemplo 2. Considérese una variable aleatoria de tipo Weibull con función de distribución $(\beta>0)$

$$F(x)=1-e^{-x^{\beta}}, \quad x>0$$

Solución: la función de densidad está dada por:

$$f(x)=F'(x)$$

$$f(x)=\beta x^{\beta-1}e^{-x^{\beta}}$$

La función de azar es,

$$r(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)}$$

$$r(x)=\frac{\beta x^{\beta-1}e^{-x^{\beta}}}{e^{-x^{\beta}}}$$

$$r(x)=\beta x^{\beta-1}$$

Supongamos ahora que X representa el tiempo de vida de un elemento. Entonces, la función de azar se puede interpretar como la probabilidad de que el elemento sobreviva un tiempo δ después del momento x, es decir, hasta la edad $x+\delta$, sabiendo que ha sobrevivido hasta el momento x. En efecto:

$$r(x)=\lim_{\delta\to 0}\frac{p(x<X\leq x+\delta / X>x)}{\delta}$$

$$r(x)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\frac{F(x+\delta)-F(x)}{1-F(x)}}{\delta}$$

$$r(x)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\frac{F(x+\delta)-F(x)}{\delta}}{1-F(x)}$$

$$r(x) = \frac{F'(x)}{1-F(x)}$$
$$r(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

Por tanto, la función de azar se puede interpretar como la probabilidad instantánea de fallo dado que el elemento ha sobrevivido hasta el instante x.

A partir de la definición de la función de supervivencia se cumple que:

$$r(x)S(x) = \left(\frac{f(x)}{1-F(x)}\right)\left(1-F(x)\right)$$
$$r(x)S(x) = f(x)$$

Es decir, la función de densidad es el producto de la función de azar por la función de supervivencia. Existe una correspondencia uno a uno entre la función de distribución y función de supervivencia.

Teorema 4.1 Sea X una variable aleatoria con una función de azar $r(x)$. Entonces, la función de distribución viene dada por:

$$F(x) = 1 - e^{-\int_{-\infty}^{x} r(t)dt}$$

Demostración: para probar este resultado calculamos la derivada del logaritmo natural de la función de supervivencia:

$$\frac{d}{dx}\ln[1-F(x)] = \frac{-F'(x)}{1-F(x)}$$
$$\frac{d}{dx}\ln[1-F(x)] = -\frac{f(x)}{1-F(x)}$$
$$\frac{d}{dx}\ln[1-F(x)] = -r(x)$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{d}{dx}\ln[1-F(x)]dt = -\int_{-\infty}^{x} r(t)dt$$
$$\ln[1-F(x)] = -\int_{-\infty}^{x} r(t)dt$$

$$1-F(x)=e^{-\int_{-\infty}^{x} r(t)dt}$$
$$F(x)=1-e^{-\int_{-\infty}^{x} r(t)dt}$$

Para lograr este resultado se utilizó la fórmula de derivada bajo el símbolo del integral, el anexo 2 proporciona más información de dicha fórmula.

A partir de la relación entre $F(x)$ y $r(x)$ establecida por el teorema anterior se puede obtener inequívocamente una a partir de la otra. Partiendo de la definición de función de supervivencia y apoyados en el teorema 4.1.1 se establece la relación entre $S(x)$ y $r(x)$.

$$S(x)=1-F(x)$$
$$S(x)=1-\left(1-e^{-\int_{-\infty}^{x} r(t)dt}\right)$$
$$S(x)=e^{-\int_{-\infty}^{x} r(t)dt}$$

Ejemplo 3. Una variable aleatoria X no negativa tiene como función de azar,

$$r(x)=\lambda+2c\lambda^2 x, \quad x\geq 0, \lambda>0\, y\, c\geq 0$$

Y $r(x)=0$ si $x<0$. Obtener la función de distribución de X.

Solución: Integrando función de azar cuando $x=t$, tenemos:

$$\int_0^x r(t)dt = \int_0^x \lambda + 2c\lambda^2(t)dt$$
$$\int_0^x r(t)dt = \lambda t + c\lambda^2 t^2\Big|_0^x$$
$$\int_0^x r(t)dt = \lambda x + c\left(\lambda x\right)^2$$

Por el teorema 4.1.1, se tiene:

$$F(x)=1-e^{-\lambda x-c\left(\lambda x\right)^2}$$

4.2 Vida Residual Media

Sea X una variable aleatoria no negativa de tipo continuo con función de distribución $F(x)$. Supongamos que $E(X)$ es finita y no nula. Definimos a continuación la variable aleatoria vida residual.

Definición 4.3 Se denomina vida residual de X y se denota por X_t, a la variable aleatoria que representa el tiempo de vida restante de un individuo, sabiendo que ha sobrevivido hasta t, es decir:

$$X_t = \{X - t / X > t\},\ t > 0$$

La función de distribución de la variable residual viene dada por:

$$F_{X_t}(x_t) = p(X_t \le x_t)$$
$$F_{X_t}(x_t) = p(X - t \le x_t / X > t)$$
$$F_{X_t}(x_t) = \frac{p(t < X \le x_t + t)}{p(X > t)}$$
$$F_{X_t}(x_t) = \frac{F(x_t + t) - F(t)}{1 - F(t)}$$
$$F_{X_t}(x_t) = \frac{S(t) - S(x_t + t)}{S(t)}$$
$$F_{X_t}(x_t) = 1 - \frac{S(x_t + t)}{S(t)},\ \ x_t \ge 0$$

Ejemplo 4. Para una variable con función de distribución gamma, encontrar $F_{x_t}(x_t)$

Solución.

$$F(x)=1-\left[1+\sum_{i=1}^{\alpha-1}\tfrac{x^i}{i\theta}\right]\exp(-\tfrac{x}{\theta})$$
$$S(x)=1-F(x)$$
$$S(x)=\left[1+\sum_{i=1}^{\alpha-1}\tfrac{x^i}{i\theta}\right]\exp(-\tfrac{x}{\theta})$$
$$F_{x_t}(x_t)=1-\frac{\left[1+\sum_{i=1}^{\alpha-1}\frac{(x_t+t)^i}{i\theta}\right]}{\left[1+\sum_{i=1}^{\alpha-1}\frac{x_t{}^i}{i\theta}\right]}\exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)$$

A continuación definimos la vida residual media de X como la esperanza matemática de la vida residual.

Definición 4.4 Se denomina vida residual media de la variable X, y la denotaremos por $e_x(.)$ a la esperanza matemática de la variable aleatoria vida residual,

$$e_x(t)=E(X_t)$$
$$e_x(t)=E(X-t/X>t)$$
$$e_x(t)=\int_0^{\infty}\frac{S(x+t)}{S(t)}dx$$
$$e_x(t)=\frac{1}{S(t)}\int_t^{\infty}S(x)dx$$

Para $t\geq 0$ siempre qué $S(x)>0$ y $e_x(t)=0$ para todos los valores t tales que $S(t)=0$.

Observemos que hemos hecho uso de la fórmula de la esperanza matemática en términos de la función de distribución. La vida residual media permite estudiar el peso de la cola de la distribución. La función residual media viene determinada por la función de distribución. Por otro lado la distribución se puede expresar en términos de la vida residual media como veremos en la sección siguiente.

El siguiente resultado establece una relación entre la vida residual media y la función de azar.

Teorema 4.2 Sea X una variable aleatoria continua con vida residual media $e(x)$ y función de supervivencia $S(x)$. Entonces, la función de azar viene dada por:

$$r(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)}$$

$$r(x) = \frac{1+e'(x)}{e(x)}$$

Demostración: Se verifica que $S(x).e(x) = \int_x^\infty S(t)dt$. Derivando,

$$S(x)e'(x) + S'(x)e(x) = -S(x),$$

Dividiendo todo por $S(x)$ y teniendo en cuenta que $r(x) = -S'(x)/S(x)$ obtenemos,

$$e'(x) - r(x)e(x) = -1$$

$$-r(x)e(x) = -(1+e'(x))$$

$$r(x) = \frac{1+e'(x)}{e(x)}$$

Ejemplo 5. La función de distribución del coste de un siniestro tiene como función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{x^a} & , \ x>1 \\ 0 & , \ x \le 1 \end{cases}$$

Obtener la función de azar y vida residual media.

Solución: la función de densidad de X es:

$$f(x) = F'(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} ax^{-(a+1)} & , \ x>1 \\ 0 & , \ x \le 1 \end{cases}$$

De donde la función de azar es:

$$r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

$$r(x) = \frac{ax^{-(a+1)}}{x^{-a}}$$

$$r(x) = \frac{a}{x}, \quad x > 1$$

Según la definición 4.2.2, la vida residual media es:

$$e(x) = \frac{\int_x^{\infty} S(t)dt}{S(x)}$$

$$e(x) = \frac{\int_x^{\infty} t^{-a}dt}{x^{-a}}$$

$$e(x) = \frac{\left.\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right|_{t=x}^{\infty}}{x^{-a}}$$

$$e(x) = \frac{\frac{x^{-a+1}}{-a+1}}{x^{-a}}$$

$$e(x) = \frac{x}{a-1}, \quad x > 1$$

4.3 Distribución Estacionaria de Renovación

La siguiente distribución de probabilidad juega un papel importante en la teoría de la ruina en tiempo continuo.

Definición 4.5 Sea X una variable aleatoria continua no negativa. Se denomina variable aleatoria estacionaria de renovación X_e a la variable con función de densidad:

$$f_{x_e}(x) = \begin{cases} \dfrac{S(x)}{E(x)} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

La expresión anterior define una función de densidad genuina, puesto que si X es no negativa, entonces:

$$E(X)=\int_0^{\infty} S(x)dx$$
$$1=\int_0^{\infty}\frac{S(x)}{E(x)}dx$$

La función de supervivencia de X_e es:

$$S(x_e)=\int_x^{\infty} f(x_e)dx$$
$$S(x_e)=\frac{\int_x^{\infty} S(t)dt}{E(X)},\ \ x\geq 0$$

La función de azar de la distribución estacionaria es:

$$r_{x_e}(x)=\frac{f_{x_e}(x)}{S_{x_e}(x)}$$

$$r_{x_e}(x)=\frac{S_X(x)}{\int_x^{\infty} S_X(t)dt}$$

$$r_{x_e}(x)=\frac{1}{e_X(x)}$$

Por tanto la inversa de la función de azar de la distribución estacionaria es la vida residual media.

Por medio de estos resultados podemos probar el teorema de inversión de la vida residual media.

Teorema 4.3 Sea X una variable aleatoria no negativa con función vida residual media $e(x)$. Entonces, la función de distribución se puede obtener como:

$$F(x)=1-\frac{e_X(0)}{e_X(x)}e^{-\int_0^x \frac{1}{e_X(t)}dt}$$

Demostración. Por la relación establecida entre la función de densidad y la función de supervivencia aplicada a la distribución estacionaria, se tiene:

$$f(x) = r(x)S(x)$$
$$f(x) = r(x)e^{-\int_0^x r(t)dt}$$

Lo que equivale a:

$$S(x) = \frac{e(0)}{e(x)} e^{-\int_0^x \frac{1}{e(t)}dt}$$
$$1 - F(X) = \frac{e(0)}{e(x)} e^{-\int_0^x \frac{1}{e(t)}dt}$$
$$F(X) = 1 - \frac{e(0)}{e(x)} e^{-\int_0^x \frac{1}{e(t)}dt}$$

Puesto que $e(0) = E(X)$.

4.4 Transformaciones Útiles en Reaseguros

En este apartado se estudiarán algunas transformaciones de variables aleatorias de aplicación en reaseguros, que se trataran en el próximo capítulo. La variable aleatoria X representa la cantidad reclamada, y suponemos que X es no negativa y que tiene como función de distribución $F(x)$.

4.4.1 Transformación Stop-loss

Definición 4.6 Supóngase que la variable aleatoria X representa una pérdida y por tanto es no negativa. Sea d un número real positivo que llamaremos retención. Se denomina transformación stop-loss de X a:

$$\left(x-d\right)_+ = máx\{X-d, 0\}$$
$$\left(x-d\right)_+ = \begin{cases} x-d & si\, x > d, \\ 0 & si\, x \le d. \end{cases}$$

Definimos a continuación la prima neta en un contrato de reaseguro de tipo stop-loss.

Definición 4.7 Se define la cantidad $\pi_x(d)$ como la esperanza matemática de la variable stop-loss $\left(x-d\right)_+$

$$\pi_x(d) = E\left[\left(x-d\right)_+\right], \; d \ge 0.$$

A $\pi_x(d)$ la llamaremos posteriormente prima neta del reaseguro. La existencia de π_x presupone que $E(X) < \infty$. Obviamente si $d = 0$, $\pi_x(0) = E(X)$.

Si la variable aleatoria X es de tipo discreto con función de probabilidad $p_k = p(X = x_k)$, $k = 0,1,2,...$ entonces:

$$\pi_x(d) = E\left[\left(x-d\right)_+\right]$$
$$\pi_x(d) = \sum_{\{x_k > d\}} (x_k - d)\, p_k$$

Si ahora X es continua con función de densidad $f(x)$, entonces:

$$\pi_x(d) = E\left[\left(x-d\right)_+\right]$$
$$\pi_x(d) = \int_d^{\infty} (x-d)\, f(x)dx$$

Si queremos calcular los momentos de orden superior a uno de la variable $\left(x-d\right)_+$ aplicamos las fórmulas usuales. Por ejemplo si X es de tipo continuo,

$$E\left[\left(x-d\right)_+^k\right] = \int_d^{\infty} (x-d)^k f(x)dx$$

Para el cálculo práctico de $\pi_x(d)$ conviene tener en cuenta las siguientes fórmulas:

- Caso discreto:

$$\pi_x(d) = E(X-d)_+$$
$$\pi_x(d) = E(x) - d - \sum_{\{x_k \le d\}} x_k p_k + d \sum_{\{x_k \le d\}} p_k$$

- Caso continuo:

$$\pi_x(d) = E(X-d)_+$$
$$\pi_x(d) = E(x) - d - \int_0^d xf(x)dx + d\int_0^d f(x)dx$$

Una fórmula alternativa para el cálculo de $\pi_x(d)$ es:

$$\pi_x(d) = E(X-d)_+$$
$$\pi_x(d) = \int_d^{\infty} [1-F(x)]dx, \ \ d \geq 0.$$

Finalmente nótese que:

$$\pi'_x(d) = F(d) - 1$$

Lo que en ocasiones puede ayudar al cálculo de la prima neta.

Ejemplo 6. La distribución de las pérdidas X de un tipo de accidente se puede modelizar por medio de una variable aleatoria continua de tipo exponencial con función de distribución:

$$F(x) = 1 - e^{-x/\sigma}, \ \ x \geq 0$$

Y $F(x) = 0$ si $x < 0$, donde $E(x) = \sigma$. Obtener $\pi_x(d)$, para $d > 0$.

Solución: usando la fórmula alternativa para el cálculo de $\pi_x(d)$, el valor medio de la transformación stop-loss es:

$$\pi_x(d) = E\left[(X-d)_+\right]$$
$$\pi_x(d) = \int_d^{\infty} [1-F(x)]dx$$
$$\pi_x(d) = \int_d^{\infty} e^{-x/\sigma}dx$$
$$\pi_x(d) = \sigma e^{-d/\sigma}$$

4.4.2 Variable de Pérdida

Sea X la pérdida en que ha incurrido un asegurado, y supongamos que la póliza de su seguro sólo cubre hasta un límite de u. Por tanto, la cantidad que paga la compañía al asegurado es:

$$\text{mín}\{X, u\} = X \wedge u.$$

Donde $\text{mín}\{X, u\}$ significa el menor valor entre X y u. Esto nos conduce a la siguiente definición.

Definición 4.8 Se denomina variable límite de pérdida X a:

$$X \wedge u = \text{m}ín\{X, u\}$$

$$X \wedge u = \begin{cases} X & si\, X < u \\ u & si\, X \geq u \end{cases}$$

Se denomina valor límite de pérdida esperado a la esperanza matemática de la variable límite de pérdida, es decir $E\left(X \wedge u\right)$.

La variable límite de pérdida es en realidad una variable censurada por la derecha. Si observamos que

$$X = (X \wedge u) + (X - d)_+$$

Entonces

$$E(X) = (X \wedge u) + (X - d)_+$$

Esto significa que comprando una póliza con un límite de d (un seguro) y otra con un deducible d, es equivalente a comprar toda la cobertura del riesgo. Para el cálculo del valor límite de pérdida esperado y en general para los momentos de $X \wedge u$ se usan las siguientes fórmulas.

- Caso discreto:

$$E\left[(X \wedge u)^k\right] = \sum_{x_i \leq u} x_i^k\, p(X = x_i) + u^k\left[1 - F(u)\right]$$

- Caso continuo:

$$E\left[(X \wedge u)^k\right] = \int_{-\infty}^{u} x^k f(x)dx + u^k\left[1 - F(u)\right]$$

En particular, en el caso continuo:

$$E(X \wedge u) = \int_{-\infty}^{u} xf(x)dx + u\left[1 - F(u)\right]$$

A partir de la ecuación anterior se puede deducir una fórmula alternativa en términos de las funciones de distribución y supervivencia, que viene dada por:

$$E(X \wedge u) = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx + \int_{0}^{u} S(x)dx$$

Ejemplo 7. Obtener el valor límite de pérdida esperado, suponiendo una distribución de pérdidas de tipo exponencial con función de distribución $F(x)=1-e^{-x/\sigma},\ x>0$.

Solución: puesto que se trata de una variable aleatoria no negativa, se reduce a

$$E(X\wedge u)=\int_0^u S(x)dx$$
$$E(X\wedge u)=\int_0^u e^{-x/\sigma}dx$$
$$E(X\wedge u)=\sigma(1-e^{-d/\sigma})$$

4.4.3 Otras Transformaciones

Los siguientes resultados permiten obtener las funciones de densidad y distribución de las transformaciones de escala y de las potencias. Comenzamos por las transformaciones de escala, que permite incluir el efecto inflación en una variable monetaria.

Teorema 4.4 Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución $F(x)$ y función de densidad $f(x)$. Entonces, la variable aleatoria $Y=aX$, donde $a>0$, tiene respectivamente como funciones de distribución y densidad:

$$F(y)=F_X\left(\frac{y}{a}\right)$$
$$f(y)=\frac{1}{a}f_x\left(\frac{y}{a}\right)$$

El siguiente resultado se refiere a la transformación potencial.

Teorema 4.5 Sea X una variable aleatoria continua no negativa con función de distribución $F(x)$ y función de densidad $f(x)$. Entonces, la variable aleatoria $Y=X^a$, donde $a>0$, tiene respectivamente como funciones de distribución y densidad:

$$F(y)=F_x\left(y^{1/a}\right)$$
$$f(y)=\frac{1}{a}y^{1/a-1}f_x\left(y^{1/a}\right)$$

Si $a<0$, las funciones vienen dadas por:

$$F(y)=1-F_x\left(y^{1/a}\right)$$
$$f(y)=-\frac{1}{a}y^{1/a-1}f_x\left(y^{1/a}\right)$$

Si $a=-1$, la transformación $Y=\frac{1}{x}$ se denomina transformación inversa.

4.5 Mezclas de Distribuciones

Considérese una variable aleatoria X que representa una distribución de pérdidas y cuya función de distribución F depende de un parámetro θ. Supongamos que todos los sucesos de pérdidas son el resultado de una realización de la variable aleatoria X, pero que el parámetro θ puede variar de un suceso a otro. Por ejemplo, si la variable X representa las pérdidas por accidentes de automóvil, dichas pérdidas pueden depender de la antigüedad del vehículo o bien de la experiencia del conductor. Esto significa que F está condicionada por θ. Puesto que el parámetro θ también es aleatorio, esto nos lleva a tener que especificar una distribución de probabilidad (discreta o continua) para θ. La distribución que se obtiene de este modo se dice que es una mezcla de distribuciones o mixturas de distribuciones.

Teorema 4.6 Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_{X/\Theta}\left(x/\theta\right)$ y función de densidad $f_{X/\Theta}\left(x/\theta\right)$, donde θ es un parámetro. Supóngase que θ es la realización de una variable aleatoria continua Θ con función de densidad $f_{\Theta}\left(\theta\right)$. Entonces, la distribución incondicional de X tiene como función de densidad y función de distribución

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X/\Theta}\left(x/\theta\right)f_{\Theta}\left(\theta\right)d\theta$$
$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_{X/\Theta}\left(x/\theta\right)f_{\Theta}\left(\theta\right)d\theta$$

Respectivamente.

Demostración: la función de densidad conjunta de $\left(X,\Theta\right)$ se puede escribir como

$$f_{x,\theta}(x,\theta)=f_{X/\Theta}\left(x/\theta\right)f_{\Theta}\left(\theta\right)d\theta$$

Y la función de densidad marginal de X se obtiene integrando la densidad conjunta.

Los momentos de la distribución X se pueden obtener a partir de los momentos condicionales por medio de la fórmula

$$E(X^r) = E_{\Theta}\left[E\left(X^r / \Theta \right) \right]$$

4.6 Estadísticos de Orden

Partimos de n variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas $X_1, \ldots, X_n$ con función de distribución común $F(x)$ y función de densidad $f(x)$. Si ordenamos de menor a mayor todas las n variables

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n},$$

Se dice que $X_{r:n}$ es el estadístico de orden r, y $X_{1:n}$ $X_{n:n}$ los extremos, mínimo y máximo, respectivamente. Vamos a obtener las funciones de distribución y de densidad de estos estadísticos.

4.6.1 Distribuciones de Extremos

Las funciones de distribución y densidad del mínimo vienen dadas respectivamente por,

$$F_{X_{1:n}}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$
$$f_{X_{1:n}}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)$$

Efectivamente

$$F_{X_{1:n}}(x) = p(X_{1:n} \leq x)$$
$$F_{X_{1:n}}(x) = 1 - p(X_{1:n} > x)$$
$$F_{X_{1:n}}(x) = 1 - p(X_1 > x, \ldots, X_n > x)$$
$$F_{X_{1:n}}(x) = 1 - p(X_1 > x), \ldots, p(X_n > x)$$
$$F_{X_{1:n}}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

Y la función de densidad

$$f_{X_{1:n}}(x) = F'_{X_{1:n}}(x)$$
$$f_{X_{1:n}}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)$$

Para el caso del máximo de las n variables, las funciones de distribución y de densidad vienen dadas por

$$F_{X_{n:n}}(x) = [F(x)]^n$$
$$f_{X_{n:n}}(x) = n[F(x)]^{n-1}\ f(x)$$

Para obtener estos resultados hacemos

$$F_{X_{n:n}}(x) = p(X_{n:n} \le x)$$
$$F_{X_{n:n}}(x) = p(X_1 \le x, \ldots, X_n \le x)$$
$$F_{X_{n:n}}(x) = p(X_1 \le x), \ldots, p(X_n \le x)$$
$$F_{X_{n:n}}(x) = [F(x)]^n$$

Y la función de densidad

$$f_{X_{1:n}}(x) = F'_{X_{1:n}}(x)$$
$$f_{X_{1:n}}(x) = n[F(x)]^{n-1}\ f(x)$$

4.6.2 Distribución de un Estadístico de Orden.

La función de distribución del r-ésimo estadístico de orden es

$$F_{X_{r:n}}(x) = p(X_{r:n} \le x)$$
$$F_{X_{r:n}}(x) = p(al\, menor\, r\, de\, los\, X_i\, son\, menores\, o\, iguales\, que\, x)$$
$$F_{X_{r:n}}(x) = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} F^i(x)[1 - F(x)]^{n-i}$$

Donde los términos dentro del sumatorio son la probabilidad binomial de que exactamente i de los $X_1, \ldots, X_n$ sean menores o iguales que x. Usando la relación entre las sumas de probabilidades binomiales y la función beta incompleta, la fórmula anterior se puede expresar como:

$$F_{X_{r:n}}(x) = I_{F(x)}(r, n - r + 1),$$

Donde $I_p(.,.)$ es la función beta incompleta definida por:

$$I_p(a,b) = \frac{\int_0^p t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt}{B(a,b)}$$

La función de densidad del estadístico de orden r es:

$$f_{X_{r:n}}(x) = \frac{1}{B(r,n-r+1)} \frac{d}{dx}\int_0^{F(x)} t^{r-1}(1-t)^{n-r}\,dt$$

$$f_{X_{r:n}}(x) = \frac{1}{B(r,n-r+1)} F^{r-1}(x)\left[1-F(x)\right]^{n-r} f(x)$$

Haciendo $r=1$en el resultado anterior obtenemos la función de densidad del mínimo y haciendo $r=n$ la función del máximo.

Ejemplo 8. Un seguro cubre pérdidas a viviendas por inundaciones. Supóngase que la cantidad reclamada es una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \frac{4}{x^5},\ \ x>1$$

Y $f(x)=0$ si $x<1$. Se realizan cuatro reclamaciones de este tipo. Obtener la función de densidad de la máxima cantidad reclamada y el valor reclamado medio.

Solución: La función de distribución de un valor X individual es:

$$F(x) = \int_1^x \frac{4}{t^5}dt$$

$$F(x) = 1-\frac{1}{x^4},\ \ x>1$$

Puesto que se trata de la función de densidad del máximo de variables, usando la función de densidad del valor extremo máximo

$$f_{X_{4:4}}(x) = 4\left[F(x)\right]^3 f(x)$$

$$f_{X_{4:4}}(x) = 4\left(1-\frac{1}{x^4}\right)\frac{4}{x^5}$$

$$f_{X_{4:4}}(x) = \frac{16(x^4-1)^3}{x^{17}}$$

Si $x>1$ y 0 en otro caso. El valor medio es,

$$E(X_{4:4}) = \int_1^{\infty} \frac{16(x^4 - 1)^3}{x^{17}}\, dx = 1.7732$$

5. TARIFICACIÓN

La cobertura de un riesgo por parte de una compañía aseguradora se establece con la garantía de un contrato, la *póliza* y exige al asegurado pagar un precio, la prima.

En este capítulo se introducen los diferentes sistemas de tarificación más utilizados en la estadística actuarial. Se estudiaran sus propiedades, así como el sistema de tarificación comúnmente empleado en países europeos.

Ajustar una prima como una suma convexa que debería pagar un asegurado de acuerdo a su experiencia personal y la que debería pagar por pertenecer a un colectivo (la cartera) con unas características peculiares, forma parte del atractivo escenario en la estadística actuarial denominado teoría de la credibilidad.

Comprobaremos que la metodología Bayesiana conduce en ocasiones a primas que se pueden expresar de esta forma.

En este capítulo estudiaremos el reaseguro, un instrumento que permite a la compañía aseguradora acomodar su estructura de riesgos a su capacidad financiera.

5.1 Principios de Cálculo de Prima.

La prima es el precio para el seguro (o reaseguro) vendido por la compañía aseguradora. Ya que la compañía lo que vende es la cobertura de un riesgo, podemos especificar más la definición anterior como sigue:

Definición 5.1 La prima es el pago que un asegurado hace a un asegurador por la cobertura total o parcial contra un determinado riesgo.

De forma reducida, una prima mínima técnica está compuesta de los siguientes elementos:

- Prima pura de riesgo.
- Sobreprima de seguridad.
- Costo adicional para el beneficio.

Por tanto, la prima o precio del servicio es el coste que para la empresa suponen los siniestros más el margen de beneficios. En este texto nos centraremos en las dos primeras componentes y no haremos mención a la tercera, que en principio no parece tener un componente estocástico.

El precio correcto que es llamado *rating*, es vital, pues si es demasiado bajo representa una pérdida para la compañía aseguradora y si es demasiado alto se pierde competitividad frente a otras. Por tanto, una de las labores del actuario consiste en encontrar métodos de cálculo de primas, generalmente llamados en la estadística actuarial *principios de cálculo de primas.*

Para un actuario un riesgo es lo mismo que una variable aleatoria. Si denotamos por X la variable aleatoria "Numero de reclamos o cantidad reclamada (o una combinación de ambas)", un principio de cálculo de primas se define como sigue:

Definición 5.2 Un principio de cálculo de prima es una función $H(X)$ que asigna a un riesgo X un número real, que es la prima.

En la práctica, el principio de cálculo de primas dependerá de la función de distribución $F(x)$ que siga la variable aleatoria X, por lo que en vez de tratar a $H(X)$ como una función debería tratarse en términos más precisos del funcional $H(F(x))$.

5.1.1 Propiedades

Una prima debe satisfacer una serie de propiedades ideales o axiomas. Sin embargo, no existe en la estadística actuarial un sistema axiomático comúnmente aceptado de propiedades que un principio de cálculo de prima debería satisfacer. Sin ser exhaustivos, contribuciones importantes en esta materia pueden encontrarse en Gerber (1979), Heilman (1989) y Hiirlimann (1994).

Gerber (1979) sostiene que las cinco propiedades que un principio de cálculo de prima $H(X)$ debería satisfacer son:

1. *Sobreprima de seguridad no negativa.*

$$H(X) \geq E(X)$$

Esto significa que para evitar la ruina técnica la ganancia esperada $H(X) - E(X) \geq 0$, es decir, será no negativa.

2. *No estafa.* La prima no excederá a la reclamación máxima posible $r(x)$

$$H(X) \leq r(x)$$

En donde $r(x)=\frac{f(t+x)}{1-F(x)}$, ya definida en el capítulo tres.

3. *Consistencia*. Para cada riesgo X y cada constante c:

$$H(X+c)=H(X)+c$$

Esto significa que si el beneficio reclamado se incrementa en una constante c, ésta contante tiene que ser añadida a la prima.

4. *Aditividad.* Si $X_1\ y\, X_2$ son riesgos independientes entonces :

$$H(X_1+X_2)=H(X_1)+H(X_2)$$

Esto quiere decir que la incorporación de riesgos independientes no afecta a la prima total.

5. *Iteratividad.* Si $X\ y\,\Theta$ son dos riesgos arbitrarios dependientes, entonces:

$$H(X)=H[H(X\,|\,\Theta)]$$

Esto significa que la prima para X puede calcularse en dos pasos. Primero calcular la prima condicionada para X, $H(X\,|\,\Theta)$ aplicando a H a la 104distribución condicional de X. Esta prima condicional es una función de Θ y por lo tanto una variable aleatoria en sí misma. Entonces se aplica H a la distribución de $H(X\,|\,\Theta)$ para obtener $H[H(X\,|\,\Theta)]$.

Heilmann (1989) solo presta atención a la primera de estas propiedades, mientras que Hiirliman (1994) no considera la quinta y, sin embargo, añade otras:

6. $H(c)=c$, para toda constante $c\geq 0$.

Esto significa que para un riesgo no aleatorio $X=c$ con $\Pr(X=c)=1$, la prima a cobrar será c.

7. *Homogeneidad Positiva.*

$$H(cX)=cH(X)\ para\ todo\ c\geq 0$$

que resulta conveniente para corregir efectos inflacionarios.

La lista de propiedades que debería satisfacer un buen principio de cálculo de prima no acaba aquí. Otras propiedades pueden encontrarse en Young (2004).

5.2 Prima de Riesgo Colectiva

Una vez establecido un principio de cálculo de prima a aplicar a un riesgo X el siguiente paso consistirá en calcular la prima asociada a X conforme a una determinada distribución de probabilidad asociada al riesgo. En este sentido es conveniente comentar que en algunos casos las variables aleatorias que intervienen en el proceso de riesgos que se generan en variables aleatorias deterministas. Por ejemplo en muchas de las formas de los seguros de vida la cantidad reclamada es fija. En otras ocasiones, tanto los costes como el número de siniestros o reclamaciones son variables aleatorias, como ocurre en seguros de accidentes, especialmente en seguros de automóviles. En este caso el asegurador desconoce las siguientes cuestiones:

- ¿Qué persona asegurada informará sobre un siniestro ocurrido a el/lo asegurado?
- ¿Cuántos ocurrirán?
- ¿Cuántos siniestros se declararán?
- ¿De qué magnitud serán los siniestros?

Por otro lado, la forma de recogida de datos por parte de las compañías aseguradoras determinará la metodología de trabajo. Señalamos las siguientes:

1. En algunas ocasiones, las compañías recogen datos solamente de la cantidad total reclamada en unidades monetarias generada por cada póliza y año. En este caso la única vía para trabajar es utilizar esta cantidad y todos los modelos y/o estimadores, se referirán a la distribución de la cantidad total reclamada.
2. Los datos se recogen separadamente para el número de reclamaciones y el coste de cada uno de ellos. En este caso, el modo en que se trabaja es componer los dos modelos, del número de reclamaciones y de la magnitud de los mismos, para obtener la distribución de la cantidad total reclamada, esto es, la distribución de la variable aleatoria compuesta $X=\sum_{i=1}^{N} X_i$, donde N es la variable asociada al número de reclamaciones y X_i la variable aleatoria asociada a la cuantía de $i-ésimo$ siniestro.
3. Por último, en algunas ocasiones se cree que una vez ocurrido un siniestro, la magnitud del mismo está fuera de control del asegurador, de modo que el número de reclamaciones o siniestros es la única componente a considerar. En este caso, el modo de trabajar es por

medio del número de reclamaciones y no de la cantidad total reclamada. Este es el caso habitual en el ramo de seguro de automóviles, en el que para conductores precavidos, y mediante bonificaciones en la prima, se puede estimular al mismo a tomar una conducta más prudente.

De aquí en adelante cuando nos refiramos a un riesgo X y salvo que se diga lo contrario, este presentará indistintamente el número, la magnitud o la cantidad total agregada.

La siguiente metodología de cálculo de prima se basa en Heilmann (1989), donde se construyen diversos principios de cálculo de prima mediante el uso de funciones de pérdidas en el escenario de la teoría de la decisión, equivalente en algunas ocasiones a utilizar funciones de utilidad.

Consideremos ahora una función de pérdida $L: R^2 \to R$ que atribuya a algún $(x,P) \in R^2$ la perdida soportada por un decisor que toma la acción P y se encuentra con el resultado x de algún experimento aleatorio. La prima de riesgo se define de la siguiente manera:

Definición 5.3 Dado un riesgo X con función de densidad $f(x)$ y una función de pérdida $L: R^2 \to R$, la prima de riesgo es el valor de P que minimiza la pérdida esperada.

$$\int_x L(x,P) f(x) dx = E_f[L(x,P)]$$

Donde x es el resultado del experimento aleatorio X y P la prima cobrada por tomar x.

Obviamente, si X es discreta P debería minimizar la pérdida esperada:

$$\sum_{x=0}^{\infty} L(x,P) f(x)$$

En donde ahora $f(x) = \Pr(X = x)$ es la función de densidad discreta.

Para obtener las diversas primas de riesgo consideramos funciones de pérdidas de la forma

$$L(x,P) = g(x)[h(x) - h(P)]^2$$

Donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones apropiadas cuyas esperanzas bajo $f(\cdot)$ existen.

Ahora utilizando la definición 5.1.2 y el siguiente resultado podemos obtener la prima de riesgo.

Teorema 5.1 Si $h(x)$ es estrictamente creciente y diferenciable (y por tanto invertible) y $g(x)$ es no negativa, entonces para todo riesgo X con $E_f[g(X)] < \infty \, y \, E_f[g(X)h(X)] < \infty$, se entiende que:

$$H(X) = h^{-1}\left(\frac{E_f[g(X)h(X)]}{E_f[g(X)]}\right)$$

Demostración:

$$\int L(x,P)\, f(x)dx = \int g(x)[h(x) - h(P)]^2 f(x)dx$$

Resulta

$$-2\int g(x)[h(x) - h(P)]h'(P)\, f(x)dx = 0$$

De donde

$$h'(P)\int g(x)h(x)\, f(x)dx - h(P)h'(P)\int g(x)\, f(x)dx = 0$$

Ahora, puesto que $h'(P) > 0$, resulta:

$$h(P) = \frac{\int g(x)h(x)\, f(x)dx}{\int g(x)\, f(x)dx} \; y \, luego$$

$$P = H(X) = h^{-1}\left(\frac{\int g(x)h(x)\, f(x)dx}{\int g(x)\, f(x)dx}\right) = h^{-1}\left(\frac{E_f[g(X)h(X)]}{E_f[g(X)]}\right)$$

Ésta metodología de cálculo de prima utilizando funciones de pérdida, fue propuesta por Heilmann (1989), obteniendo de esta manera muchos de los principios de cálculo de prima que ya se utilizaban así como otros nuevos.

Las siguientes corolarios son consecuencias de aplicar el teorema 5.2.1 a funciones particulares $f(x) \, y \, g(x)$.

Corolario 5.1 Si consideramos la función de perdida cuadrática, dada por $L(x,P)=(x-P)^2$ resulta $P=E_f(X)$, denominado principio de prima neta o de equivalencia.

Corolario 5.2 Si consideramos la función de pérdida exponencial, dada por $L(x,P)=\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x}-e^{\alpha P})^2$ con $\alpha>0$, resulta $P=\frac{1}{\alpha}\log(E_f(e^{\alpha X}))$, denominado *principio de utilidad exponencial.* Siendo α *la constante de adversión al riesgo.*

Observemos que este principio de cálculo de prima viene dado en términos del logaritmo de la función generatriz de momentos de la variable aleatoria X. En La teoría de la decisión a α también se le llama *Medida de Arrow-Pratt,* asociada al decisor que toma la función de pérdida $L(x,P)$. Cuanto mayor es α más adverso al riesgo será el decisor (en nuestro caso la compañía aseguradora).

Corolario 5.3 Si consideramos la función de pérdida cuadrática ponderada, con peso $g(x)=e^{\alpha x}$, dada por $L(x,P)=e^{\alpha x}(x-P)^2$ con $\alpha>0$ entonces.

$$P=\frac{E_f(Xe^{\alpha X})}{E_f(e^{\alpha X})}$$

Denominado principio de Esscher.

Corolario 5.4 Si consideramos la función de pérdida cuadrática ponderada, con peso $g(x)=x$, dada por $L(x,P)=e^{\alpha x}(x-P)^2$, entonces:

$$P=\frac{E_f(X^2)}{E_f(X)}=E_f(X)+\frac{Var_f(X)}{E_f(X)}$$

Denominado principio de varianza.

La ventaja de este principio es que no solo estima la siniestralidad media del riesgo, sino que además proporciona el recargo de seguridad que debe de llevar la prima para atender a las desviaciones aleatorias de la siniestralidad. En muchos textos la expresión de P se presenta como: $P=E(X)+\delta Var(X)$, siendo $\delta>0$ un parámetro y se dice entonces que la sobreprima de seguridad es proporcional a la varianza.

El siguiente resultado se muestra útil para probar la propiedad de sobreprima de seguridad no negativa de los principios de cálculo de prima antes presentados.

Teorema 5.2 Si $h(x)=x$, es decir $L(x,P)=g(x)(x-P)^2$ y $g:R^+ \to R^+$, entonces $g(x)$ es creciente (decreciente) si y solo si para todo riesgo X con $\Pr(X>0)=1$, se verifica que

$$H(X)=\frac{E_f[Xg(X)]}{E_f[g(X)]} \geq \ (\leq) \, E_f(X)$$

Ejemplo 1: Verificar que las propiedades verifican el principio de Esscher para un cálculo de prima.

Solución:

1. Puesto que el principio de Esscher se deriva de la función de pérdida $L(x,P)=e^{\alpha x}(x-P)^2$, se puede escribir como

$$H(X)=P=\frac{E_f[Xe^{\alpha X}]}{E_f[e^{\alpha X}]} \geq E_f[X]$$

2. Se tiene que $X \leq r(x)$, si multiplicamos ambos miembros de la inecuación se tiene que

$$Xe^{\alpha X} \leq r(x)e^{\alpha X}$$
$$E_f[Xe^{\alpha X}] \leq r(x)E_f[e^{\alpha X}]$$
$$P=\frac{E_f[Xe^{\alpha X}]}{E_f[e^{\alpha X}]} \leq r(x)$$

3.

$$H(X+c)=\frac{E_f[(X+c)e^{\alpha(X+c)}]}{E_f[e^{\alpha(X+c)}]}$$

$$H(X+c)=\frac{E_f[Xe^{\alpha(X+c)}+ce^{\alpha(X+c)}]}{E_f[e^{\alpha(X+c)}]}$$

$$H(X+c)=\frac{E_f[Xe^{\alpha(X+c)}]+cE_f[e^{\alpha(X+c)}]}{E_f[e^{\alpha(X+c)}]}$$

$$H(X+c)=\frac{E_f[Xe^{\alpha(X+c)}]}{E_f[e^{\alpha(X+c)}]}+c$$

$$H(X+c)=H(X)+c$$

4. Sean $X_1\, y\, X_2$ dos riesgos independientes, entonces :

$$H(X_1+X_2)=\frac{E_f[(X_1+X_2)e^{\alpha(X_1+X_2)}]}{E_f[e^{\alpha(X_1+X_2)}]}$$

$$=\frac{E_f[X_1e^{\alpha(X_1+X_2)}+X_2e^{\alpha(X_1+X_2)}]}{E_f[e^{\alpha(X_1)}e^{\alpha(X_2)}]}$$

$$=\frac{E_f[X_1e^{\alpha(X_1+X_2)}]+E_f[X_2e^{\alpha(X_1+X_2)}]}{E_f[e^{\alpha(X_1)}e^{\alpha(X_2)}]}$$

$$=\frac{E_f[X_1e^{\alpha(X_1)}e^{\alpha(X_2)}]+E_f[X_2e^{\alpha(X_1)}e^{\alpha(X_2)}]}{E_f[e^{\alpha(X_1)}e^{\alpha(X_2)}]}$$

$$=\frac{E_f[X_1e^{\alpha(X_1)}]E_f[e^{\alpha(X_2)}]+E_f[X_2e^{\alpha(X_2)}]E_f[e^{\alpha(X_1)}]}{E_f[e^{\alpha(X_1)}]E_f[e^{\alpha(X_2)}]}$$

$$=\frac{E_f[X_1e^{\alpha(X_1)}]}{E_f[e^{\alpha(X_1)}]}+\frac{E_f[X_2e^{\alpha(X_2)}]}{E_f[e^{\alpha(X_2)}]}$$

$$=H(X_1)+H(X_2)$$

5.

$$H(c)=\frac{E_f[ce^{\alpha c}]}{E_f[e^{\alpha c}]}$$

$$=\frac{cE_f[e^{\alpha c}]}{E_f[e^{\alpha c}]}$$

$$=c$$

6. Homogeneidad positiva.

Se tiene una variable de la forma $Y=cX \quad ; c\geq 0$, entonces:

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= H(Y) + \alpha D(Y) \\
&= E(cX) + \alpha D(cX) \\
&= cE(X) + \alpha.cD(X) \\
&= c\left[E(X) + \alpha D(X)\right] \\
&= cH(X)
\end{aligned}
$$

Los principios anteriormente analizados son los más usados, sin embargo existen otros que se detallan a continuación.

- Principio de valor esperado. La prima viene dada mediante

$$P = (1+\lambda)E(X), \;\; \lambda > 0$$

- Principio de desviación típica. La prima de riesgo, en este caso, viene dada por:

$$P = E(X) + \lambda\sqrt{Var(X)}, \;\; \lambda > 0$$

- Principio de prima Suizo. La prima de riesgo P es la solución de la ecuación:

$$E[v(X - zP)] = v((1-z)P),$$

En donde $v(\cdot)$ es una función de peso, verificando que $v'(z)^\wedge > 0$, $v''(z) \geq 0, si\ z > 0$.

- Principio de Orliez. La prima de riesgo es la solución de la ecuación :

$$E\left[\Phi\left(\frac{X}{P}\right)\right] = 1$$

Donde $\Phi\left(\cdot\right)$ es una función de peso con $\Phi' > 0\ y\ \Phi'' \geq 0$.

- Principio de Wang. La prima de riesgo viene dada por:

$$P = \int_0^\infty g[S_X(t)]dt$$

Donde $S_X(t) = \Pr(X > t)$, es la función de supervivencia de X y g una función no decreciente con dominio y rango en $[0,1]$.

- Principio holandés. La prima de un riesgo es:

$$P = E(X) + \lambda E[(X - \alpha E(X))]_+ \,;\; \alpha \geq 1 y \;\; 0 < \lambda \leq 1$$

En dónde $(X-\alpha E(X))_{+}=máx\{(X-\alpha E(X)),0\}$.

Young (2004) ha estudiado algunas de las propiedades que verifican estos principios.

Por otro lado, cabe también la posibilidad de generar principios de cálculo de primas considerando otras funciones de pérdidas. De este modo bajo la función de pérdida:

$$L(x,P)=\frac{(x-P)^2}{x};\ x>0\ \ y\ \ \Pr(X>0)=1\ \ en\ donde:$$

$$\left.\begin{aligned} g(x)&=\tfrac{1}{x}\\ h(x)&=x\\ P&=\frac{E_f\left(\frac{1}{x}(x)\right)}{E_f\left(\frac{1}{x}\right)}\end{aligned}\right\}$$

Se obtiene la prima de riesgo:

$$P=\frac{1}{E\left(\frac{1}{x}\right)}$$

si se considera la función e pérfida

$$L(x,P)=\frac{(x-P)^2}{x(x+1)};\ x>0\ \ y\ \ \Pr(X>0)=1$$

Se obtiene la prima de riesgo:

$$P=\frac{E\left(\frac{1}{x+1}\right)}{E\left(\frac{1}{x(x+1)}\right)}$$

Finalmente bajo la función de pérdida

$$L(x,P)=(\log x-\log P)^2;\ x>0\ \ y\ \ \Pr(X>0)=1$$

La prima de riesgo resultante es:

$$P=\exp\{E[\log(X)]\}.$$

Los principios de cálculo de prima mostrados pueden estudiarse siempre y cuando la función de densidad $f(x)$ sea conocida. En la estadística actuarial es habitual considerar todos o algunos parámetros de los que depende esta densidad de probabilidad son desconocidos. Así, ahora suponemos que la densidad $f(x)$ depende de un parámetro desconocido $\theta, \theta \in \Theta$, entonces la densidad de probabilidad será $f(x;\theta)$ ó $f(x \mid \theta)$ dependiendo si el parámetro es fijo o aleatorio. Podemos ahora suponer que dicho parámetro se distribuye completamente dentro de una cartera de seguros con función $\pi(\theta)$. Desde un punto de vista Bayesiano ésta no es más que la función de distribución a priori, denominada en la estadística actuarial como ***función estructura.*** Ahora la prima de riesgo P depende del parámetro desconocido y por lo tanto será denotada por $P(\theta)$. En un principio, la mejor estimación que puede obtenerse de la misma es la prima colectiva que se define de la siguiente forma.

Definición 5.4 Dado un riesgo X con función de densidad $f(x \mid \theta)$, siendo θ un parámetro desconocido con función de densidad a priori $\pi(\theta)$ y una función de pérdida $L: R^2 \to R$, la prima colectiva es el valor P' que minimiza la pérdida esperada

$$\int_{\Theta} L(P(\theta), P')\pi(\theta)d\theta$$

Siendo $P(\theta)$ la prima de riesgo.

La prima colectiva tal y como está definida anteriormente representa la mejor decisión que estima la prima de riesgo (obviamente desconocida). Observemos que para calcularla es necesario que el actuario defina una distribución de probabilidad (distribución a priori) para el valor del parámetro desconocido θ. Para ello será fundamental la experiencia de lo acontecido en periodos precedentes o en otros contratos similares.

Ejemplo 2.

Sea un riesgo X con función de densidad de probabilidad $f(x \mid \theta)$ dependiente del parámetro θ desconocido y aleatorio con distribución a priori $\pi(\theta)$. Calcular la prima colectiva para los principios de prima neta, exponencial, Esscher y de varianza.

Solución:

a) Principio de prima neta (corolario 5.2.1) se tiene que la función de pérdida $L(P(\theta),P') = (P(\theta)-P')^2$ de manera que

$$
\begin{aligned}
P' &= \int_{\Theta}\left[\int_X xf(x\,|\,\theta)dx\right]\pi(\theta)d\theta \\
&= E_{\pi}\left[E_f(x\,|\,\theta)\right]
\end{aligned}
$$

b) Para el principio de prima exponencial (corolario 5.2.2) tenemos:

$$L(P(\theta),P') = (e^{\alpha P(\theta)} - e^{\alpha P'})^2 \;; \alpha > 0$$

Entonces podemos escribir que

$$
\begin{aligned}
P' &= \frac{1}{\alpha}\log\int_{\Theta} e^{\alpha P(\theta)}\pi(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{\alpha}\log E_{\pi}\left[e^{\alpha P(\theta)}\right]
\end{aligned}
$$

c) Para el principio de Esscher (corolario 5.2.3) tememos que :

$$L(P(\theta),P') = e^{\alpha P(\theta)}(P(\theta)-P')^2 ; \alpha > 0$$

Luego

$$
\begin{aligned}
P' &= \frac{\int_{\Theta} P(\theta)e^{\alpha P(\theta)}\pi(\theta)d\theta}{\int_{\Theta} e^{\alpha P(\theta)}\pi(\theta)d\theta} \\
&= \frac{E_{\pi}\left[P(\theta)e^{\alpha P(\theta)}\right]}{E_{\pi}\left[e^{\alpha P(\theta)}\right]}
\end{aligned}
$$

d) Para el principio de varianza (corolario 5.2.4) tenemos:

$$L(P(\theta),P') = P(\theta)(P(\theta)-P')^2 \,,$$

$$
\begin{aligned}
P' &= \frac{\int_{\Theta} P(\theta)^2\pi(\theta)d\theta}{\int_{\Theta} P\pi(\theta)d\theta} \\
&= \frac{E_{\pi}\left[P(\theta)^2\right]}{E_{\pi}\left[P(\theta)\right]}
\end{aligned}
$$

Para finalizar este apartado se analiza el caso en el que la distribución de X esta especificada mediante un parámetro desconocido aleatorio y además se incorpora experiencia de siniestralidad individual.

Teorema 5.3 Sean $X_1,...,X_t$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $E[X_i\,|\,\theta]=\theta\,;\quad i=1,2,...,t$, entonces $E[X_{t+1}\,|\,x_1,...,x_t]=E[\theta\,|\,x_1,...,x_t]$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
&E[X_{t+1}\,|\,x_1,...,x_t]=\int_X xf(x_{t+1}\,|\,x_1,...,x_t)dx\\
&=\int_X x\left(\int_\Theta f(x_{t+1}\,|\,\theta)\pi(\theta\,|x_1,...,x_t)d\theta\right)dx\\
&=\int_\Theta\left(\int_X xf(x_{t+1}\,|\,\theta)dx\right)\pi(\theta\,|\,x_1,...,x_t)d\theta\\
&=E[\theta\,|\,x_1,...,x_t]
\end{aligned}
$$

5.3 Teoría de la Credibilidad.

Las primeras teorías de la credibilidad aparecen a principios del siglo *XX* en los trabajos de Mowbray (1914) y Whitney (1918). El problema básico es el siguiente.

Supongamos que disponemos para un asegurado o contratado de la experiencia de siniestralidad $X_1,\cdots,X_t$ de modo que $E[X_j]=\varepsilon \;\; y \;\; Var(X_j)=\sigma^2$ para todo $j=1,\cdots,t$. El objetivo de la aseguradora es decidir que prima cargar a esa póliza o asegurado. Existen tres alternativas posibles.

1. Ignorar la experiencia de siniestralidad y cargar lo que en estadística actuarial es conocido como ***prima manual o de libro*** M. Esta prima está basada en la experiencia de otros contratos similares. Por ejemplo, en el seguro de automóviles son contratos similares los que incluyen asegurados con la misma edad o propietarios de un vehículo con igual cilindrada.
2. Cobrarle $\overline{X}=\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}X_j$, es decir, dar credibilidad total a la experiencia del asegurado.
3. Cobrar una prima que venga dada como un punto medio de combinación lineal convexa entre la experiencia individual y M. Esto es:

$$P = Z(t)\overline{X} + [1 - Z(t)]M$$

Donde el factor $Z \in [0,1]$, recibe el nombre de factor de credibilidad y la fórmula anterior se llama Fórmula de credibilidad.

Lo razonable es que el asegurador se decante por $\overline{X}$, si la experiencia es estable, es decir si tiene una varianza pequeña. Esta idea tan simple no admite una respuesta sencilla y han surgido distintas ramas dentro de la teoría de la credibilidad, cada una con nombre propio los cuales se especifican a continuación.

5.3.1 Credibilidad Total

Parece lógico que los asegurados con una experiencia de reclamación que le sea favorable quieran que la prima que tengan que pagar está basada únicamente en su propia experiencia de siniestralidad, es decir que la aseguradora le asigna a ésta un 100% de credibilidad. Sin embargo, desde el punto de vista de la aseguradora, esto sólo será posible si la experiencia de reclamación es estable. Una manera de resolver este problema es suponer que $\overline{X}$ es estable, si existe una probabilidad alta de que la diferencia entre $\overline{X}\ y\ \varepsilon$ sea pequeña. En términos matemáticos esto supondría tener credibilidad total si:

$$\Pr(|\overline{X} - \varepsilon| \leq c\varepsilon) = \Pr((1-c)\varepsilon \leq \overline{X} \leq (1+c)\varepsilon)) \geq P$$

Siendo $0 < P < 1\ y\ c > 0$. En la práctica lo razonable es elegir un valor de P cercano a 1 y un valor de c cercano a cero. Normalmente suelen considerarse 0.9 y 0.05 para $P\ y\ c$, respectivamente.

Reescribimos la fórmula anterior de la siguiente manera:

$$\Pr\left(\left| \frac{\overline{X} - \varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{t}}} \right| \leq \frac{c\varepsilon\sqrt{t}}{\sigma} \right) \geq P$$

Y definimos ahora x_p como

$$x_p = \underset{x}{ínf} \left\{ \Pr\left(\left| \frac{\overline{X} - \varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{t}}} \right| \leq x \right) \geq P \right\}.$$

Suponiendo que $\overline{X}$ sigue una distribución continua, esta última expresión es equivalente a:

$$\Pr\left(\left|\frac{\overline{X}-\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{t}}}\right| \leq x_p\right) = P$$

Por tanto, la condición que ha de verificarse para suponer credibilidad total es

$$\frac{c\varepsilon\sqrt{t}}{\sigma} \geq x_p$$

O de forma equivalente

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} \leq \frac{c}{x_p}\sqrt{t} = \sqrt{\frac{t}{\lambda_0}},$$

Siendo $\lambda_0 = \left(\frac{x_p}{c^2}\right)^2$, por lo que la expresión anterior puede interpretarse en el sentido siguiente: se supone credibilidad total si el coeficiente de variación es menor o igual que $\sqrt{\frac{t}{\lambda_0}}$

También a si

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{t} \leq \frac{\varepsilon^2}{\lambda_0}$$

Y, por otro lado el valor que ha de tomar t para suponer credibilidad total debe cumplir que:

$$t \geq \lambda_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

En la práctica, si la experiencia del asegurado es suficientemente grande, de acuerdo al teorema del límite central, entonces $(\overline{X}-x)/(\sigma\sqrt{t})$ sigue aproximadamente una distribución normal con media cero y varianza 1. De esta manera

$$P = \Pr\left(\left|\frac{\overline{X}-\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{t}}}\right| \leq x_p\right)$$
$$P = 2\Phi(x_p) - 1$$

Donde $\Phi(x)$ es la función de distribución normal tipificada, luego x_p es el $\frac{P+1}{2}$ cuantil de la distribución normal tipificada.

Ejemplo 1. Supongamos que se encuentra con la experiencia $X_j \; con \; j=1,...,t$ de un contrato de seguro perteneciente a una cartera de seguros y que $X_1, \ldots, X_t$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas Poisson de parámetro $\theta = 200$. Obtener el valor más pequeño de t para suponer credibilidad total a la experiencia observada, suponiendo $c = 0.04$, $p = 0.95$ y que la aseguradora atiende sólo al número de reclamaciones.

Solución:

Para este caso tenemos que $\varepsilon = \sigma^2 = 200.$ Dados los valores de c y p resulta que $x_p = 1.96$, luego se tiene:

$$\lambda_0 = \left(\frac{x_p}{c^2}\right)^2$$
$$\lambda_0 = \left(\frac{1.96}{0.04^2}\right)^2$$
$$= 2401$$

Luego

$$t \geq \lambda_0 \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$
$$t \geq 2401 \left(\frac{\sqrt{200}}{200}\right)^2$$
$$t \geq 12.005$$

5.3.2 Credibilidad Parcial

Para muchos asegurados la experiencia de siniestralidad es insuficiente para suponer credibilidad total, es decir que el factor $Z(t)$ sea igual a 1. Ahora se supone que la prima a cargar sea una combinación lineal entre la experiencia del asegurado y la del colectivo o prima manual, de modo que:

$$P = Z(t)\overline{X} + [1 - Z(t)]M$$

Y habrá que determinar el valor de $Z(t)$ para obtener la prima, dado que:

$$\begin{aligned} Var(P) &= Var[Z(t)\overline{X} + [1 - Z(t)]M] \\ &= \left(Z(t)\right)^2 Var(\overline{X}) \\ &= \left(Z(t)\right)^2 \left(\frac{\sigma^2}{t}\right) \end{aligned}$$

Igualando éste último término a $\frac{\varepsilon^2}{\lambda_0}$ resulta

$$Z(t) = \left(\tfrac{\varepsilon}{\sigma}\right)\sqrt{\tfrac{t}{\lambda_0}}$$

De tal manera que se elige de acuerdo a la expresión

$$Z(t) = mín\left\{\left(\tfrac{\varepsilon}{\sigma}\right)\sqrt{\tfrac{t}{\lambda_0}}, 1\right\}.$$

Ejemplo 1. Con los mismos datos del ejemplo anterior se pide ahora calcular el factor de credibilidad para una experiencia de reclamaciones correspondientes a 10 años. Además calcule el factor de credibilidad cuando se han observado 850 reclamaciones para ese grupo de asegurados.

Solución. Recordemos los datos.

$$c = 0.04\ ,\ p = 0.95, \theta = 200,\ x_p = 1.96, \lambda_0 = 2401$$

a)

$$\begin{aligned} &Z(t) = mín\left\{\left(\tfrac{\varepsilon}{\sigma}\right)\sqrt{\tfrac{t}{\lambda_0}}, 1\right\} \\ &Z(t) = mín\left\{\left(\tfrac{200}{\sqrt{200}}\right)\sqrt{\tfrac{10}{2401}}, 1\right\} \\ &Z(t) = mín\left\{0.9126, 1\right\} \\ &\therefore\ Z(t) = 0.9126 \end{aligned}$$

b)

$$Z(t) = mín\left\{\sqrt{\tfrac{850}{2401}},1\right\}$$
$$Z(t) = mín\{0.595,1\}$$
$$\therefore\ Z(t) = 0.595.$$

5.3.3 Modelo de Bühlmann de Distribución Libre.

Dentro de los modelos de credibilidad clásicos más destacados figuran el modelo de **Bühlmann** de distribución libre y el modelo **Bühlmann-Estaub.** Ambo modelos constituyen un punto de partida moderno de la teoría de la credibilidad.

El objetivo de ambos modelos es estimar la prima correspondiente a un asegurado o grupo de asegurados que conforman una póliza en una cartera de seguros, restringiéndose a las primas lineales y utilizando el método de mínimos cuadrados. La diferencia fundamental entre ambos modelos radica en que el segundo admite observaciones ponderadas. En este apartado se abordará únicamente el modelo de **Bühlmann** de distribución libre. Lo relevante del modelo es no necesitar suponer hipótesis alguna, no sobre la distribución que gobierna los riesgos individuales, ni sobre la distribución a priori de los parámetros de riesgo. Y de ahí sobre el nombre de distribución libre.

Para una mejor descripción consideremos la siguiente tabla:

		Contratos (θ_j)					
		1	2	…	J	…	K
Experiencias	1	x_{11}	x_{11}	…	x_{j1}	…	x_{k1}
	2	x_{12}	x_{22}	…	x_{j2}	…	x_{k2}
	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮
	T	x_{1t}	x_{2t}	…	x_{jt}	…	x_{kt}

Tabla 12: Cartera de seguros.

La cuestión básica de la teoría de la credibilidad es determinar una prima establecida como una combinación lineal o convexa entre la experiencia particular de un asegurado y la experiencia del colectivo, esto es de toda la cartera. Una expresión válida seria:

$$P_j = \left[1 - Z(t)\right] P_0 + Z(t)\overline{P}_{j.}$$

En donde:

P_j : prima a aplicar a los asegurados al riesgo j.

P_0 : prima a aplicar a un colectivo al que pertenece el asegurado j.

$\overline{P}_j$: prima obtenida en base a la experiencia del asegurado j.

$Z(t)$: factor de credibilidad que verifica $\lim_{t \to \infty} Z(t) = 1$, siendo t el número de expuestos al riesgo j o el periodo de observación de la póliza j. Por tanto, si $Z(t) = 1$ la experiencia del asegurado es creíble al 100%, mientras que si $Z(t) = 0$, $P_j = P_0$ y la prima del asegurado j coincide con la del colectivo al que pertenece dicha póliza.

De la tabla 12: Cartera de seguros θ_j representa el parámetro de riesgo para la póliza j-ésima. Se trata de una variable estructural que describe las características de riesgo del contrato j-ésimo. En la estadística actuarial es costumbre considerar dicho parámetro desconocido y aleatorio.

La variable X_{ij} representa la experiencia de reclamaciones para la póliza j-ésima en el periodo i-ésimo. Se trata de una variable aleatoria con realizaciones observables.

Denotaremos como $\mu(\theta_j) = E(X_{ij} \mid \theta_j)$ a la prima de riesgo para la póliza j, $m = E[P(\theta_j)]$ al valor esperado de todas las primas de riesgo, es decir la prima colectiva. Y finalmente $a = Var[\mu(\theta_j)]$, es la varianza de las primas de riesgo que es un indicador de la heterogeneidad de la cartera.

El objetivo del modelo de Bühlmann consiste en calcular la mejor prima lineal $H(\mu(\theta_j) \mid X_{j1}, X_{j2}, ..., X_{jt})$, dependiente de los datos observados, mediante el modelo de los mínimos cuadrados. Para ello se establece la siguiente notación previa, en la que prescindiremos del sub índice “j”:

- $\mu(\theta_j) = E(X_{js} \mid \theta_j)$: la prima del riesgo individual.
- $m = E_{Total}(X_{js}) = [\mu(\theta_j)]$: prima de riesgo colectiva. Valor esperado de todas las primas de riesgo individuales.
- $a = Var[E(X_{js} \mid \theta_j)] = Var[\mu(\theta_j)]$: varianza de las primas de riesgo individuales, indicador de la heterogeneidad de la cartera.
- $s^2 = E[Var(X_{js} \mid \theta_j)] = E\left[\sigma^2(\theta_j)\right]$: medida global de la dispersión de la siniestralidad individual.

Se supone también que $X_1 \mid \theta, X_2 \mid \theta, ..., X_t \mid \theta$ están idénticamente distribuidas con media y varianza comunes $\mu(\theta)\ y\ \sigma^2(\theta)$, respectivamente. Antes de entrar en el módulo de Bühlmann se necesita el siguiente resultado:

Teorema 5.4 Si $X\ e\ Y$ son variables aleatorias con distribución conjunta dependiente de la variable Θ se tiene que:

- $E(X) = E_\Theta[E_X(X \mid \Theta)]$
- $Cov(X,Y) = E[Cov(X,Y \mid \Theta)] + Cov[E(X \mid \Theta), E(Y \mid \Theta)].$

Demostración: Para la primera parte tenemos que:

$$\begin{aligned} E_\Theta[E_X(X \mid \Theta)] &= \int E_X(X \mid \Theta = \theta) f_\Theta(\theta) d\theta \\ &= \iint x f_{X|\Theta}(x \mid \theta) f_\Theta(\theta) d\theta dx \\ &= \int x \int f_{X|\Theta}(x \mid \theta) f_\Theta(\theta) d\theta dx \\ &= \int x f_X(x) dx \\ &= E(X). \end{aligned}$$

En cuanto a la segunda parte tenemos:

$$Cov(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$
$$Cov(X,Y) = E\{[X - E(X \mid \Theta) + E(X \mid \Theta) - E(X)]x[Y - E(Y \mid \Theta) + E(Y \mid \Theta) - E(Y)]\}$$

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E_{\Theta}E_{X,Y|\Theta}\{[X-E(X\mid\Theta)][[Y-E(Y\mid\Theta)]\} \\
&+E_{\Theta}E_{X,Y|\Theta}\{[X-E(X\mid\Theta)][E(Y\mid\Theta)-E(Y)]\} \\
&+E_{\Theta}E_{X,Y|\Theta}\{[E(X\mid\Theta)-E(X)][Y-E(Y\mid\Theta)]\} \\
&+E_{\Theta}E_{X,Y|\Theta}\{[E(X\mid\Theta)-E(X)][E(Y\mid\Theta)-E(Y)\} \\
Cov(X,Y) &= E[Cov(X,Y\mid\Theta)]+0+0+Cov[E(X\mid\Theta),E(Y\mid\Theta)] \\
Cov(X,Y) &= E[Cov(X,Y\mid\Theta)]+Cov[E(X\mid\Theta),E(Y\mid\Theta)].
\end{aligned}
$$

También podemos deducir que

$$Var(X)=E[Var(X\mid\Theta)]+Var[E(X\mid\Theta)] \text{ haciendo } X=Y.$$

Teorema 5.5 La mejor aproximación lineal a $H(\mu(\theta_j)\,|\,X_1,X_2,...,X_t)$ es:

$$a+b\overline{X}=a+b\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}X_i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&Donde: \\
&a=(1-b)m
\end{aligned}
$$

$$b=\frac{t}{t+k};\ con\ k=\frac{E[\sigma^2(\theta)]}{Var[\mu(\theta)]}$$

Demostración: queremos encontrar la mejor estimación de la prima neta de riesgo que dependa linealmente de los datos observados, esto es:

$$H(\mu(\theta_j)\,|\,X_1,X_2,...,X_t)=c_0+\sum_{s=1}^{t}c_{sj}X_{sj}$$

Para ello se hace la mínima esperanza del cuadrado de la desviación de la prima de riesgo individual respecto a $H(\mu(\theta_j)\,|\,X_1,X_2,...,X_t)$. Esto es:

$$\underset{c_i}{mín}\ E\left[\left(\mu(\theta_j)-c_0-\sum_{s=1}^{t}c_{sj}X_{sj}\right)^2\right]$$

Y calculando las derivadas pertinentes se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} E\left[\mu(\theta_j)-c_0-\sum_{s=1}^{t} c_{sj} X_{sj}\right]=0 \\ E\left[X_r\left(\mu(\theta_j)-c_0-\sum_{s=1}^{t} c_{sj} X_{sj}\right)\right]=0;\ r=1,2,\ldots,t. \end{array}\right\}$$

Si se multiplica la primera ecuación por $E(X_r)$ y restándosela a la segunda ecuación se obtiene el siguiente resultado:

$$Cov[\mu(\theta_j), X_r]=\sum_{s=1}^{t} c_s Cov(X_r, X_s)\ ,\ r=1,2,\ldots,t.$$

Teniendo este resultado en cuenta ahora:

$$\begin{array}{l} Cov(X_r, X_s)=E[Cov(X_r, X_s \mid \theta)]+Cov[E(X_r \mid \theta), E(X_s \mid \theta)]=s^2+a;\ r=s \\ Cov(X_r, X_s)=Cov[\mu(\theta), \mu(\theta)]=Var[\mu(\theta)]=a;\ r \neq s \end{array}$$

$Cov[\mu(\theta), X_r]=\sum_{s=1}^{t} c_s Cov(X_r, X_s)\ ,\ r=1,2,\ldots,t.$ Se puede escribir como:

$$\left.\begin{array}{l} s^2 c_r+\sum_{s=1}^{t} c_s a=a \\ c_0=m-m\sum_{s=1}^{t} c_s \end{array}\right\}$$

De donde $E\left[\mu(\theta_j)-c_0-\sum_{s=1}^{t} c_s X_{sj}\right]=0$ y por lo tanto:

$$c_0=E[\mu(\theta_j)]-\sum_{s=1}^{t} c_s E[X_{sj}]=m-m\sum_{s=1}^{t} c_s.$$

Debido a la simetría del sistema resulta $c_1=\ldots=c_t$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} s^2 c+atc=a. \\ c_0+mtc=m. \end{array}\right\}$$

De donde

$$c = \frac{a}{s^2 + at}$$
$$c_0 = m(1 - tc)$$
$$c_0 = m\left(1 - \frac{at}{s^2 + at}\right)$$
$$c_0 = m\left(\frac{s^2}{s^2 + at}\right)$$

Por lo tanto

$$H(\mu(\theta_j) \mid X_1, X_2, ..., X_t) = c_0 + \sum_{s=1}^{t} c_s X_{sj} = m\left(\frac{s^2}{s^2 + at}\right) + ct\overline{x}$$
$$= m\left(\frac{s^2}{s^2 + at}\right) + \left(\frac{at}{s^2 + at}\right)\overline{x}$$

$$= [1 - Z(t)]]m + Z(t)\overline{x}$$
$$con$$
$$Z(t) = \frac{at}{s^2 + at} = \frac{tVar[\mu(\theta_j)]}{tVar[\mu(\theta_j)] + E[\sigma^2(\theta_j)]}$$
$$= \frac{t}{t + k}.$$

Obsérvese que el resultado no depende de la distribución de probabilidad de X ni de la distribución de probabilidad de θ, de ahí el termino de distribución libre.

Las cantidades $a = Var[\mu(\theta)]$, $s^2 = E[\sigma^2(\theta)]$ y $m = \overline{X}$ suelen llamarse parámetros estructurales del modelo y pueden estimarse a partir de las siguientes fórmulas.

$$\hat{m} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\overline{x}_j = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{t}\frac{x_{js}}{t}$$
$$\hat{s}^2 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j^2; \quad \hat{s}^2 = \frac{1}{t-1}\sum_{s=1}^{t}(x_{js} - \overline{x}_j)^2$$
$$\hat{a} = \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}(x_j - \overline{x})^2 - \frac{1}{t}\hat{s}^2.$$

Finalmente puede probarse que estos estimadores son insesgados y consistentes.

$$E[\hat{m}] = m$$
$$E[\hat{s}]^2 = s^2$$
$$E[\hat{a}] = a$$
$$(\hat{m}, \hat{s}^2, \hat{a}) \to (m, s^2, a),\ cuando\, t \to \infty.$$

Resulta interesante destacar las propiedades del factor de credibilidad.

1. $Z(t)$ es una función creciente en t, de modo que $Z(t) \to 1$ cuando $t \to \infty$, mientras que $Z(t) \to 0$ cuando $t \to 0$, por lo tanto $t = 0$ supone que no se dispone de experiencia para el asegurado (Se trata de un contrato nuevo), y la prima a cobrar en este caso es simplemente la prima colectiva. En la medida en que aumenta t, y por tanto se dispone de más datos, pesa más la información individual.
2. $Z(t)$ es también una función creciente de la varianza de las medidas teóricas, $a = Var[E(X \mid \theta_j)]$, con límite 1 cuando aquella tiende al infinito y cero cuando tiende a cero. Esto es lógico, pues si la cartera no es heterogénea $a = 0$ entonces la prima colectiva es el mejor estimador de la prima individua, mientras que en una mayor heterogeneidad la cartera debe suponer mayor peso a la información individual.
3. $Z(t)$ es una función decreciente con respecto al valor esperado de la varianza teórica $s^2 = E[Var(X \mid \theta_j)]$, de modo que cuando mayor sea la varianza del individuo menor peso se da a su experiencia individual y mayor a la del colectivo.

Ejemplo 1. Una compañía de seguros tiene dos grupos de asegurados en una póliza que cubre un determinado riesgo. La cantidad reclamada (en miles) para los tres primeros años de vigencia se recogen en la siguiente tabla:

	Grupos	
año	$k=1$	$k=2$
$t=1$	5	10
$t=2$	6	13
$t=3$	17	13

Tabla 13: Grupos de asegurados.

Utilizar el modelo de Bühlmann de distribución libre para estimar la prima neta para el cuarto año de la póliza para cada uno de los grupos asegurados.

Solución: el estimador del factor de credibilidad es:

$$Z(t)=\frac{at}{s^2+at}$$

De donde se calculan

$$\hat{m}_1=9.33 \quad \hat{m}_2=12 \quad \hat{m}=\overline{x}=10.665$$
$$\hat{s}_1^2=44.33 \quad \hat{s}_2^2=3 \quad \hat{s}^2=47.33$$
$$\hat{a}=13.177 \quad \hat{Z}(t)=0.4714$$

El estimador de la prima neta para los dos grupos de asegurados es:

$$\hat{Z}(t)\overline{x}_1+[1-\hat{Z}(t)]\hat{m}=0.4714(9.33)+0.5286(10.665)=10.035681.$$
$$\hat{Z}(t)\overline{x}_2+[1-\hat{Z}(t)]\hat{m}=0.4714(12)+0.5286(10.665)=11.294319.$$

Hágase notar que la prima individual contribuye un 47.14% a la prima, mientras que en el grupo en un 52.86%.

5.4 Reaseguros

El reaseguro es un instrumento que dispone la empresa aseguradora para acomodar la estructura de riesgos asumido a su capacidad financiera. De forma muy simple, podemos decir que el reaseguro es el seguro de las compañías de seguros.

Definición 5.5 Un reaseguro es una operación por la cual un asegurador distribuye sus riesgos, cediendo parte de los mismos a otra u otras entidades reaseguradoras, con el objetivo de reducir el volumen de las pérdidas a unos límites soportables por la entidad aseguradora.

A través de este instrumento una compañía aseguradora, la compañía *cedente* traslada la totalidad o parte de los riesgos asumidos a otra empresa aseguradora, la compañía *aceptante* alguien se paga una prima de reaseguro por el riesgo asumido. La parte de riesgo transferida se denomina c*esión* y la parte no cedida *retención o pleno*. Aunque por un lado mediante el reaseguro se reduce el riesgo para la compañía cedente, por otro lado tiene como contrapartida una reducción del beneficio esperado.

El contrato de reaseguro implica que si se produce un siniestro, el responsable frente al asegurado es el asegurador directo (la empresa cedente) que posteriormente repercutirá en la parte correspondiente a la empresa reaseguradora en la forma que estipule el contrato entre las partes. A su vez la compañía reaseguradora puede hacer lo mismo, reasegurando parte del riesgo a una tercera compañía, y así sucesivamente.

De manera gráfica se tiene:

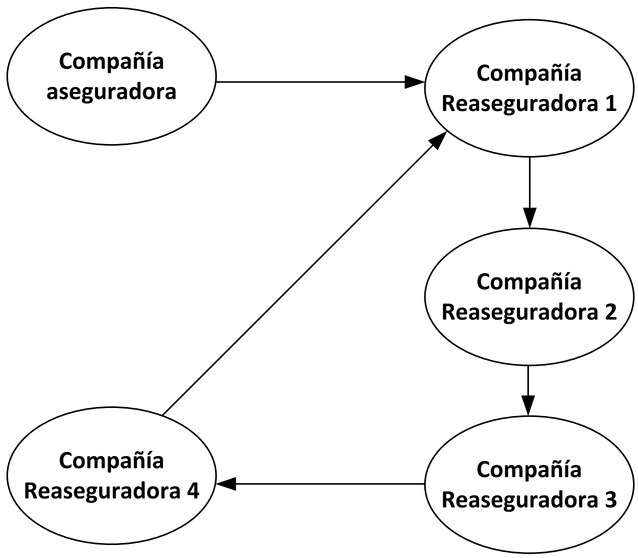


Figura 20: Reaseguros

Esta línea de actuación es común en los seguros contra grandes catástrofes, como terremotos, inundaciones o accidentes en centrales nucleares, por poner algunos ejemplos. Aunque también resulta conveniente el reaseguro para cubrir aumentos inesperados en la inflación. En general esta modalidad de seguros es susceptible de aplicarse cuando se espera que la varianza de un riesgo sea grande.

Entre las modalidades de reaseguros, se estudiarán aquí las más conocidas, el reaseguro proporcional y el reaseguro Excess loss. El reaseguro stop-loss es una adaptación del reaseguro excess loss a la cartera en su totalidad, de manera que todo lo que se comente en reaseguros excess loss es totalmente aplicable a los seguros stop-loss. Las franquicias que no constituyen de por si un tipo de reaseguro, pueden también ser contempladas como un caso particular de los reaseguros excess loss.

5.4.1 Reaseguro Proporcional.

Definición 5.6 Un reaseguro proporcional es la modalidad de reaseguro por la que el reasegurador recibe una cierta proporción de la prima original pagando la misma proporción de todas las pérdidas.

Si X es la variable representativa de un riesgo con función de distribución $F(x)$, entonces la compañía cedente paga una proporción fija a, mientras que el porcentaje restante $1-a$, lo paga la compañía aceptante. Si denominamos Y a la parte pagada por el asegurador y Z a la parte pagada por el reasegurador, se tiene que:

$$Y = aX \;,\; Z = (1-a)X,\;\; X = Y + Z$$

Entonces las variables $Y \; y \; Z$ son transformaciones de escala de la variable aleatoria X y por lo tanto en términos de función de distribución se tiene que:

$$\Pr(Y \leq x) = \Pr(aX \leq x) = \Pr(X \leq x/a) = F_X(x/a).$$

Ejemplo 1. Una compañía de reaseguro ha suscrito un contrato de reaseguro en modalidad proporcional. Calcular la prima neta de riesgo de reaseguro, suponiendo que el riesgo X sigue una distribución Gamma $G(c, 1/\theta)$.

Solución:

$$f_Z(z) = f_X(z/(1-a))\frac{1}{1-a} = \frac{\theta^c z^{c-1}}{\Gamma(c)(1-a)^c} e^{\frac{-\theta z}{1-a}},$$

Que es una distribución gamma con parámetros $c \; y \; (1-a)/\theta$ por lo tanto la prima neta de riesgo por reaseguro es: $P(\theta) = (1-a)\dfrac{c}{\theta}$.

5.4.2. Reaseguros Excess Loss

Definición 5.7 un reaseguro excess loss es una modalidad de reaseguros por la cual el asegurador cubre la parte del siniestro que cubre la parte que excede del pleno fijado por la cedente para cada siniestro.

En esta modalidad, también se le llama semicolectiva, el reasegurador el reasegurador asume la parte de cada siniestro que supera una determinada cantidad. Esta cantidad recibe el nombre de ***cesión*** en los seguros de vida y ***deducible*** en los seguros de no vida.

Así denotaremos por M el pleno o deducible fijado por la cedente para cada siniestro, de tal manera que las condiciones siguientes son aplicadas:

1. Si $X \leq M$, el responsable es el asegurador y no hay reaseguro.
2. $X > M$, existe el reaseguro y éste cubre $X - M$, donde X es la variable aleatoria asociada a la cuantía del siniestro. Por lo tanto, el asegurador paga $Y = mín\{X, M\}$, mientras que la aseguradora paga $Z = máx\{0, X - M\}$. También $máx\{0, X - M\} = (X - M)_+$.

Ahora hay que estudiar el efecto que tiene el reaseguro excess loss sobre el asegurador y el reasegurador.

- Desde la perspectiva del asegurador:

Si $F_Y(x)$ es la función asociada a la variable $Y = mín\{x, M\} = x \wedge M$ se verificará que:

$$F_Y(x) = \begin{cases} F(x), & x \leq M \\ 1; & x \geq M \end{cases}$$

Tenemos ahora entonces que

$$E(Y^n) = \int_0^{\infty} [mín\{X, M\}]^n f(x)dx$$

Y teniendo en cuenta:

$$mín\{x, M\} = \begin{cases} x; & 0 \leq x \leq M \\ M; & x \geq M \end{cases}$$

Y también:

$$E(X \wedge M)^n = \int_0^M x^n f(x)dx + M^n[1 - F(M)],$$

De tal manera que los pagos medios del asegurador son:

$$E(Y) = \int_0^M x^n f(x)dx + M[1 - F(M)],$$

La primera relación, nos dice que el pago medio es una función creciente de M, que es lógico ya que un incremento de la retención, tendrá como consecuencia un incremento de los pagos por parte de la compañía aseguradora. Esto puede verse en la siguiente gráfica así como la interpretación de las otras dos relaciones.

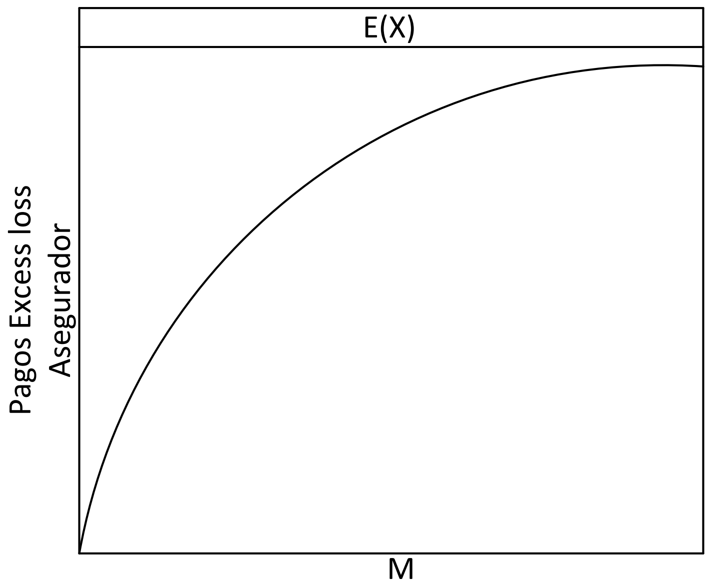


Figura 21: Pagos medios en función de M desde el punto de vista del asegurador.

- Punto de vista del reasegurador.

Si $F_Z(x)$ es la función asociada a la variable $Z = (X - M)_+$ se tiene:

$$F_z(x) = \begin{cases} F(M), & x = 0 \\ F(x+M); & x \geq 0 \end{cases}$$

Ahora:

$$E(Z^n) = \int_0^{\infty} [mín\{0, x-M\}]^n f(x)dx$$

Y puesto que $máx\{0, x-M\} = 0 \ si \ 0 \leq x \leq M$ se tiene:

$$E(Z^n) = \int_M^{\infty} (x-M)^n f(x)dx$$

Ejemplo 2. Si X sigue una función exponencial con parámetro $\lambda > 0$, se pide calcular la función generatriz de momentos, $M_Z(t),$ así como $E(Z^j),\ j = 0,1,...$

Solución:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \int_0^{\infty} e^{tZ} f(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{tmáx\{0,x-M\}} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{M} e^{tmáx\{0,x-M\}} \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_M^{\infty} e^{tmáx\{0,x-M\}} \lambda e^{-\lambda x} dx \end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta que en $[0, M], X - M < 0$, entonces $máx\{0, X - M\} = 0$ y que en $[M, \infty), X - M > 0$ y por tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \int_0^{M} \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_M^{\infty} \lambda e^{t(x-M)} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 - e^{-\lambda M} + \lambda e^{-tM} \int_M^{\infty} \lambda e^{x(t-\lambda)} dx \\ &= 1 - e^{-\lambda M} + \frac{\lambda e^{-\lambda M}}{\lambda - t}; \lambda > t \end{aligned}$$

Por lo tanto $E(Z) = M_Z'(0) = \lambda^{-1} e^{-tM}$, y se deduce también que

$E(Z^j) = \lambda^{-j} e^{-tM}\ cuando\ j = 0,1,...$

Ejemplo 3: Calcular la prima excess loss para los principios de prima neta y el principio exponencial si la función de $X\ es\ F(x)$.

Solución: Para el principio de prima neta.

$$
\begin{aligned}
P_R(M) &= \int_0^{\infty} [máx\{0, x-M\}] f(x)dx \\
&= \int_0^{M} [máx\{0, x-M\}] f(x)dx + \int_M^{\infty} [máx\{0, x-M\}] f(x)dx \\
&= \int_M^{\infty} (x-M) f(x)dx
\end{aligned}
$$

Ya que $máx\{0, x-M\}=0$ para $x \in [0, M]$ y es $x-M$ para todo $x \in [M, \infty)$. Si hacemos un cambio de variable $t = x-M$, resulta que:

$$
\begin{aligned}
P_R(M) &= \int_M^{\infty} (x-M) f(x)dx \\
&= \int_0^{\infty} tf(t+M)dt \\
&= \int_0^{\infty} [1-F(t+M)]dt \\
&= \int_M^{\infty} tf(t+M)dt \\
&= \int_M^{\infty} [1-F(x)]dx
\end{aligned}
$$

Para el principio de prima exponencial.

$$
\begin{aligned}
P_R(M) &= \frac{1}{\alpha} \log \int_0^{\infty} e^{\alpha máx\{0, x-M\}} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\alpha} \log \left\{ \int_0^{M} f(x)dx + \int_M^{\infty} e^{\alpha(x-M)} f(x)dx \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha} \log \left\{ 1 + \alpha \int_M^{\infty} e^{\alpha(x-M)} [1-F(x)] \right\}.
\end{aligned}
$$

También de manera gráfica podemos apreciar el puno de vista del reasegurador.

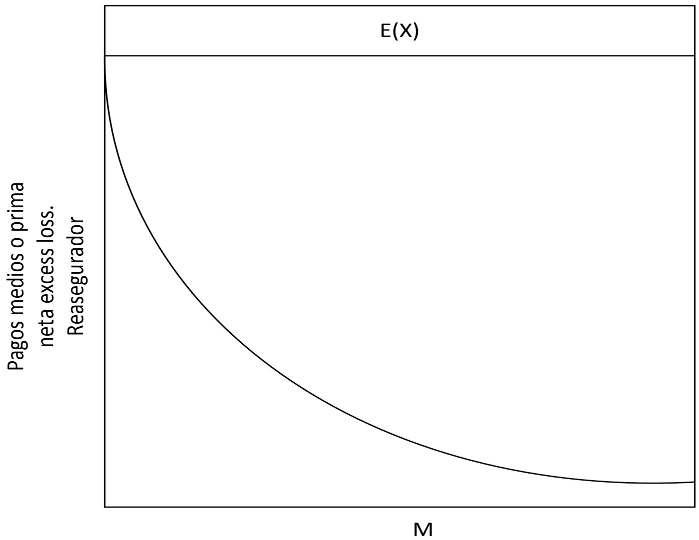


Figura 22: Prima neta excess loss en función de M. Punto de vista del reasegurador.

5.4.3 Reaseguros Stop-loss

Se trata de una modalidad de reaseguro excess loss referente a toda la cartera.

Definición 5.8 El reaseguro Stop-loss es una modalidad de reaseguro por la que el reasegurador se obliga a cubrir total o parcialmente el montante de las indemnizaciones correspondientes a un tiempo dado, siempre que aquel supere un límite M .

De aquí deriva la nomenclatura ***stop-loss,*** ya que desde el punto de vista del asegurador, la pérdida se detiene en M . En este caso el reasegurador paga:

$$máx\left\{0,\sum_{i=1}^{N} X_i - M\right\} = máx\left\{0, S - M\right\},$$

Donde $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ es la cantidad total reclamada de la cartera de seguros, N es la variable aleatoria asociada al número de reclamaciones y X_i es la cantidad de reclamaciones en el i-ésimo siniestro.

También es conocido por muchos como *reaseguro totalmente colectivo,* por el hecho de referirse a toda la cartera.

5.4.4 Otras Formas de Reaseguros.

En los últimos años se han tratado otras formas de reaseguros, entre los cuales se han destacado los siguientes:

- ECOMOR: se trata de las siglas ***Exédent du Coût Moyen Relatif Treaty,*** que significa Excedente del Coste Medio Relativo. Pensado para protegerse de la inflación es una modalidad de reaseguros *excess loss* con una retención aleatoria que cubre las indemnizaciones que superan la p-ésima mayor reclamación, se denota con:

$$ECOMOR_{(P)}$$

- POOL: se trata de la asociación de compañías aseguradoras que se unen para ampliar su capacidad de acción. Suelen llevarse a cabo para una línea específica de seguros, como seguro de aeronaves, central nucleares, por ejemplo.

5.4.5 Franquicias.

Estrictamente no constituyen una modalidad de reaseguro. Se trata de una modalidad de seguro muy extendida en el ramo de automóviles, pudiendo ser estudiadas de la misma manera que los reaseguros excess loss. En este caso, el asegurado participa en el pago de toda cantidad igual o menor que M, mientras que paga M para cualquier siniestro que exceda a M. Por lo tanto el asegurado paga $mín\{X, M\}$ y el asegurador paga $máx\{0, X - M\}$. Por lo tanto el tratamiento que se le da a este tipo de seguros es igual al que se le da al tipo ***excess loss.***

CONCLUSIONES

Después de investigar y organizar la teoría fundamental para la Estadística Actuarial de manera programática para que pueda ser una materia electiva que amplié el currículo de un futuro Licenciado en Estadística, se presenta a continuación un programa modelo para que el contenido de ésta tesis sea impartido como una materia electiva para la carrera Licenciatura en Estadística de la Universidad de El Salvador, en donde se plantea los prerrequisitos para poder inscribirla y se deja a criterio de las autoridades competentes asignar un código a la materia y a libertad del catedrático que la impartirá la metodología de enseñanza y evaluación.

Cabe mencionar que por los requisitos propuestos, la materia electiva "Fundamentos de Estadística Actuarial" puede ser impartida a partir del séptimo ciclo académico según el pensum vigente autorizado por el Consejo Superior Universitario, acuerdo 128-99-2003 (V – 3.3).

I. GENERALIDADES

ACCIÓN ACADÉMICA: FUNDAMENTOS DE ESTADÍSTICA ACTUARIAL

PRERREQUISITOS: CÁLCULO III, MUESTREO I

CICLO: 7 O SUPERIOR

AÑO ACADÉMICO: CUARTO O SUPERIOR

II. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

El curso está estructurado con cinco unidades teóricas con las cuales se pretende formar parte del cúmulo de conocimientos necesarios para que el estudiante tenga una formación académica adecuada y logre sustentar una base sólida para su desarrollo.

Se presentan distribuciones discretas y continuas, así como también los conceptos más utilizados en el ámbito de la economía como lo son el interés simple y compuesto, anualidades, que son una base fundamental.

Finalmente los contenidos de teoría de la supervivencia, cantidades aleatorias de uso en estadística actuarial y tarificación, lo fundamentales para la aplicación en las pólizas y primas de seguros.

III. OBJETIVO GENERAL

Dotar al estudiante de los contenidos y habilidades específicas que proporciona el área de Estadística Actuarial.

IV. CONTENIDO PROGRAMÁTICO

UNIDAD I: ALGUNAS DISTRIBUCIONES ÚTILES EN ESTADÍSTICA ACTUARIAL

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

A) Diferenciar las funciones de probabilidad discreta y continua.
B) Identificar correctamente los parámetros de cada distribución de probabilidad.

CONTENIDO

1.1 FUNCION GENERADORA DE MOMENTOS

1.2 Algunas Distribuciones Discretas

1.2.1 Distribución Hipergeométrica

1.2.2 Distribución Binomial Negativa.

1.3 Algunas Distribuciones Continuas De Probabilidad.

1.3.1 Distribución Normal

1.3.2 Distribución Uniforme.

1.3.3 Distribución de Weibull

1.3.4 Distribución Gamma.

1.4 Transformaciones De Probabilidad

DURACIÓN: 18 HORAS

UNIDAD II: INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA ACTUARIAL

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A) Conocer los principales campos de aplicación de la Estadística Actuarial.

B) Aplicar mediante problemas prácticos la teoría de interés simple y compuesto

C) Saber reconocer las principales diferencias entre las anualidades

CONTENIDO

2.1 Conceptos Básicos.

2.1.1 ¿Qué es la estadística actuarial?

2.1.2 Principales Campos de Aplicación de la Estadística Actuarial

2.2 Conceptos Sobre Finanzas

2.2.1 Tasa de Interés

2.2.2 Tasa De Interés Nominal y Tasa De Interés Efectiva

2.3 Anualidades

2.4 Clases de Anualidades

2.4.1 Anualidad Anticipada O Adelantada

2.4.2 Anualidad Ordinaria o Vencida

DURACÍON: 18 HORAS

UNIDAD III: TEORÍA DE LA SUPERVIVENCIA

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A) Aplicar los conocimientos previos para la estimación instantánea de mortalidad.

B) Reconocer y aplicar las principales estructuras biométricas.

CONTENIDO

3.1 El modelo biométrico y sus variables

3.1.1 Variables biométricas Actuariales

3.2 Probabilidades de supervivencia y mortalidad para una cabeza.

3.2.1 Tiempo de vida futura

3.3 Estimación instantánea de mortalidad

3.4 Vida residual, Esperanza de vida

3.5 Estructuras biométricas

3.5.1 Ley de Moivre

3.5.2 Ley de Gompertz (1825)

3.5.3 Primera ley de Makeham

3.5.4 Segunda ley de Makeham

DURACIÓN: 20 HORAS

UNIDAD IV: CANTIDADES ALEATORIAS DE USO EN ESTADÍSTICA ACTUARIAL.

OBJETIVOS ESPECIFICOS:

a) Aplicar transformaciones a distribuciones de probabilidad.
b) Analizar distribuciones para estadísticos de orden.

CONTENIDO

4.1 Funciones de Supervivencia y Azar

4.2 Vida Residual Media

4.3 Distribución Estacionaria de Renovación

4.4 Transformaciones Útiles en Reaseguros

4.4.1 Transformación Stop-loss

4.4.2 Variable de Pérdida

4.4.3 Otras Transformaciones

4.5 Mezclas de Distribuciones

4.6 Estadísticos de Orden

4.6.1 Distribuciones de Extremos

4.6.2 Distribución de un Estadístico de Orden.

DURACIÓN: 20 HORAS

UNIDAD V: TARIFICACIÓN

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

A) Formar los principios de cálculo de prima.

B) Analizar y comprender los tipos de reaseguros.

CONTENIDO:

5.1 Principios de Cálculo de Prima.

5.1.1 Propiedades

5.2 Prima de Riesgos, Colectiva

5.3 Teoría de la Credibilidad.

5.3.1 Credibilidad Total

5.3.2 Credibilidad Parcial

5.3.3 Modelo de Bühlmann de Distribución Libre.

5.4 Reaseguros

5.4.1 Reaseguro proporcional

5.4.2. Reaseguros Excess Loss

5.4.3 Reaseguros Stop-loss

5.4.4 Otras Formas de Reaseguros.

5.4.5 Franquicias.

DURACIÓN: 20 HORAS.

V. METODOLOGÍA DE TRABAJO.

A CRITERIO DEL DOCENTE

VI. EVALUACIÓN

A CRITERIO DEL DOCENTE

BIBLIOGRAFÍA:

- Edwim Ramírez, Willian Roque, William Sandoval, 2016
  "Fundamentos de Estadística Actuarial"
- Mª Angeles Pons Gardell, 1991
  "Teoria de la Credibilidad y su Aplicacion a los Seguros Colectivos"
- Sarabia Alegría, José María; Gómez Déniz, Emilio y Vásquez Polo, Francisco José (2007), Estadística Actuarial Teoría y Aplicaciones. Pearson Educación S.A.
- José Luis Villalobos, Matemáticas Financieras, Grupo Editorial Iberoamérica SA de CV.
- George C. Canavos (1988), Probabilidad y estadística Aplicaciones y métodos, McGraw Hill/Interamericana de México S.A. de C.V

ANEXOS

Anexo 1: Monto de Anualidad Acumulado

En matemática se usa la palabra sucesión para describir una lista de números llamados términos que se acomodan en un orden definido.
Con generalidad sea una sucesión de n términos tales que el primer término es a la razón común es la constante r, entonces la sucesión tiene la forma:

$$a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}$$

Obsérvese que el n-ésimo término en la sucesión es ar^{n-1}

La suma indicada de los términos de la sucesión geométrica $a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}$ se llama:

Serie geométrica

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}.$$

Ahora bien sea s la suma de la serie geométrica

$$s = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}$$

Por lo que al expresar s de forma más compacta se obtendrá lo siguiente

$$rs = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... + ar^n$$

Al efectuar la resta de las ecuaciones $s - rs$ se obtendrá

$$s - rs = a - ar^n$$

$$s(1-r) = a(1-r^n)$$

$$s = a\frac{(1-r^n)}{(1-r)}$$

Análogamente, puesto que una anualidad está definida matemáticamente como:

$$A = R(1+r)^{-1} + R(1+r)^{-2} + ... + R(1+r)^{-n}$$

De esta manera, A es una serie geométrica de n términos con $R(1+r)^{-1}$ como primer término y razón común $(1+r)^{-1}$, entonces:

$$A\left[1-(1+r)^{-1}\right]=R(1+r)^{-1}\left[1-(1+r)^{-n}\right]$$

$$A=\frac{R(1+r)^{-1}\left[1-(1+r)^{-n}\right]}{\left[1-(1+r)^{-1}\right]}$$

$$A=\frac{R\left[1-(1+r)^{-n}\right]}{(1+r)\left[1-(1+r)^{-1}\right]}$$

$$A=\frac{R\left[1-(1+r)^{-n}\right]}{(1+r)-1}$$

$$A=R.\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

De manera análoga se obtiene la fórmula para cualquiera de las modalidades de anualidad.

Anexo 2 Derivada Bajo el Símbolo del Integral.

Teorema de Leibnittz: Sea $f:[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función continua y sean $\alpha,\beta:[c,d]\to\mathbb{R}$ funciones derivables tales que $a\le\alpha(y)\le\beta(y)\le b$ para cada $y\in[c,d]$.

Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua en el conjunto

$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\alpha(y)\le x\beta(y), c\le y\le d\right\}$. Entonces la función

$$F(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

Existe y es derivable $\forall y\in[c,d]$ y se cumple

$$F'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx+f\left(\beta(y),y\right)\beta'(y)-f\left(\alpha(y),y\right)\alpha'(y)$$

Demostración: Sea $y_0\in[c,d]$. Escribimos la función $F(y)$ por

$$F(y)=\int_{\alpha(y)}^{a(y_0)} f(x,y)dx+\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx+\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

$$\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{y-y_0}\int_{\alpha(y)}^{a(y_0)} f(x,y)dx+\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \tfrac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}dx+\frac{1}{y-y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

Como f es continua, podemos poner

$$\frac{1}{y-y_0}\int_{a(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)dx=\frac{\alpha(y_0)-\alpha(y)}{y-y_0}\,f(\overline{x},y)$$

Donde $\overline{x}$ es un valor intermedio entre $\alpha(y)$ y $\alpha(y_0)$, luego

$$\lim_{y\to y_0}\tfrac{1}{y-y_0}\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)dx=\lim_{y\to y_0}\tfrac{\alpha(y_0)-\alpha(y)}{y-y_0}\,f(\overline{x},y)=-\alpha'(y_0)\,f\left(\alpha(y_0),y_0\right)$$

Análogamente

$$\lim_{y\to y_0}\tfrac{1}{y-y_0}\int_{\beta(y)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx=\beta'(y_0)\,f\left(\beta(y_0),y_0\right)$$

Y sabemos que

$$\lim_{y\to y_0}\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)dx$$

De donde se sigue el teorema. ■