UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADUACIÓN TITULADO:

MODELOS ESTOCÁSTICOS DINÁMICOS EN MATEMÁTICA ACTUARIAL

PRESENTADO POR:

MARGARITA FAUSTINA RAMÍREZ VÁSQUEZ

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

Ciudad Universitaria, 12 de julio de 2017

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADUACIÓN TITULADO:

MODELOS ESTOCÁSTICOS DINÁMICOS EN MATEMÁTICA ACTUARIAL

PRESENTADO POR:

MARGARITA FAUSTINA RAMÍREZ VÁSQUEZ

ASESOR:

MSc. PORFIRIO ARMANDO RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ

Ciudad Universitaria, 12 de julio de 2017

AUTORIDADES

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR UNIVERSITARIO

ING. MARIO ROBERTO NIETO LOVO

SECRETARIA GENERAL:

DRA. ANA LETICIA ZAVALETA DE AMAYA:

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA:

DECANO:

LIC. MAURICIO ERNESTO HERNÁN LOVO

SECRETARIA:

LIC. DAMARIS MELANY HERRERA TURCIOS

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR:

DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES:

SECRETARIA:

LIC. ALBA IDALIA CÓRDOBA CUELLAR

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

ASESOR:

MSc. PORFIRIO ARMANDO RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ

ESCUELA DE MATEMÁTICA

Ciudad Universitaria, 12 de julio de 2017

Dedicatoria:

A mis padres, hermanos, por sus consejos, cariño y comprensión. A todas las personas que me quieren y aprecian.

Agradecimientos:

A Dios, por la fortaleza, bendición y fuerza para mantenerme económicamente, saludable, con esperanzas y voluntad para estudiar cada día.

A mis padres, por sus consejos, compañía, cariño, comprensión.

A mis hermanos, por sus consejos.

A la Alcaldía Municipal de Panchimalco y equipo del FMLN en período 2009, por su aporte económico durante toda mi carrera.

A mi asesor MSc. Porfirio Armando Rodríguez Rodríguez por su disposición, instrucción, apoyo y guía en cada contenido de este trabajo.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN **1**

2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA **3**

2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 3

2.2. ANTECEDENTES 3

2.3. JUSTIFICACIÓN 4

2.4. OBJETIVOS 4

2.4.1. OBJETIVO GENERAL 4

2.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS 4

3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN **5**

4. LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS **6**

4.1. PROCESOS ESTOCÁSTICOS 6

4.2. FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN. CONDICIONES DE CONSISTENCIA DE KOLMOGOROV 8

4.3. PROCESOS MARTINGALAS 9

4.4. PROCESOS DE POISSON 11

4.5. PROCESO DE MARKOV 13

4.5.1. PROPIEDADES BÁSICAS 13

4.5.2. ANÁLISIS POR TRAYECTORIAS: 19

4.5.3. PROCESOS DE TIEMPO CONTINUO ESTACIONARIO 21

4.6. CADENAS DE MARKOV 26

4.6.1. CADENAS DE MARKOV DE ESTADO FINITO 26

4.6.2. PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN. 26

4.6.3. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD INICIAL. 28

4.6.4. ECUACIÓN DE CHAPMAN-KOLMOGOROV. 29

4.6.5. DISTRIBUCIONES DE X_n 30

4.6.6. CADENAS DE MARKOV NO ESTACIONARIAS. 31

4.7. ELEMENTOS DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO 32

4.7.1. PROCESOS DE WIENER 32

4.7.2. PROCESO DE WIENER GENERALIZADO. 33

4.7.3. PROCESOS DE DIFUSIÓN 34

4.7.4. LEMA DE ITO 35
4.7.5. TEOREMA DE GIRSANOV 36

5. ACTUARÍA **39**
5.1. CONCEPTOS EN EL ÁREA DE SEGUROS DE VIDA 39
5.2. SEGURO DE VIDA 41
5.2.1. RIESGOS Y SEGUROS. 42
5.3. LA ADECUACIÓN Y LA EQUIDAD. 43
5.4. PROBABILIDAD DE SUPERVIVENCIA Y MORTALIDAD 44
5.5. CONSTRUCCIÓN DE LA TABLA DE VIDA 45
5.6. LA FUERZA DE LA MORTALIDAD 47
5.7. FUERZAS DE MORTALIDAD SELECTA 48
5.7.1. TABLAS ULTIMADAS Y SELECTAS 49

6. MODELOS EN MATEMÁTICA ACTUARIAL **51**
6.1. MODELO DE TIEMPO DISCRETO. 51
6.1.1. MODELOS MULTIESTADOS 52
6.1.2. SEGUROS MULTIESTADOS DE TIEMPO DISCRETO 54
6.2. APLICACIÓN ESTOCÁSTICA DISCRETA 55
6.3. APLICACIÓN ESTOCÁSTICA CONTINUA 63

7. CONCLUSIONES **67**

8. RECOMENDACIONES **68**

9. Anexos **71**
9.1. DEFINICIÓN DE FUNCIONES 71
9.1.1. CÁLCULO MATRICES DE TRANSICIÓN 71
9.1.2. CÁLCULO DE MATRICES DE TRANSICIÓN PARA DIFERENTES ESTADOS. . . 73
9.1.3. COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES DE SUPERVIVENCIA 75
9.2. FUERZAS DE MORTALIDAD MODELO DE MARKOV RESPECTO A LA DE TABLAS . 77
9.3. OBTENCIÓN PROBABILIDADES DE SUPERVIVENCIA. 80
9.4. CÁLCULO DE FUERZAS DE TRANSICIÓN. 82
9.5. DEFINICION DE FUNCIONES EN ARCHIVO PROCESOS.R 86
9.5.1. Procesos de riesgo 86
9.5.2. Proceso de riesgo 89
9.5.3. Martingala 90
9.5.4. Proceso de riesgo discreto 90
9.5.5. Proceso de Wiener 90

Índice de tablas

5.1. Modelo de tabla de vida. 42
5.2. Tabla selecta y ultimadada para un período selecto de 2, $X = 60$. 49

6.1. Comparación de fuerzas de mortalidad con duración de póliza del seguro de 0.5 a 10.5 años para $x = 45$. 57
6.2. Fuerzas de transición. 59
6.3. Valores propios de M. 60
6.4. Comparación probabilidades de supervivencia. 62

Índice de figuras

4.1. Simulaciones de un modelo Black-Scholes con $Z_n \sim N(0, 0.01)$ y $M_0 = 10$. 12
4.2. Simulaciones de un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 2$. 13
4.3. Simulaciones de un proceso de riesgo con $\lambda = 1.5$, $u = 1000$, $c = 50$ y el monto de reclamaciones sigue una distribución exponecial con parámetro $\alpha = 0.05$ 14
4.4. Modelo de tres estados. 15
4.5. Modelo de dos estados. 23
4.6. Simulaciones de un proceso de riesgo discreto con $u = 100$ y el monto de reclamaciones sigue una distribución de Poisson con parámetro $\alpha = 0.8$ 28
4.7. Trayectoria de n pasos de transición. 30
4.8. Simulaciones de un proceso de Wiener estándar $\{W(t), t \in [0, 10]\}$ 33

6.1. Modelo de cuatro estados. 52
6.2. Modelo de tres estados. 53
6.3. Modelo de tres estados. 56
6.4. Comparación de fuerzas de mortalidad para edad alcanzada de 45 años. 58
6.5. Gráfico de comparación probabilidades de supervivencia. 63

RESUMEN

Con base al nivel de conocimiento sobre el resultado del fenómeno sobre el que se ha construido un modelo, éste puede clasificarse en determinista, donde el resultado se conoce a priori sin incertidumbre, o estocástico [1], donde no se tiene certeza sobre el mismo sino tan solo se conoce la probabilidad de diversas opciones [2].

En cuanto a modelos estocásticos, cuando se trata de representar una situación concreta en un momento dado, el modelo en cuestión será de naturaleza estática, mientras que cuando se pretenda recoger su evolución a lo largo del tiempo, tendremos un modelo dinámico. La teoría de la probabilidad engloba el estudio de los modelos estáticos, mientras que el análisis de los dinámicos corresponde a la teoría de procesos estocásticos [2].

La actuaría o ciencia actuarial es una disciplina que aplica modelos estadísticos y matemáticos para la evaluación de riesgos en las industrias aseguradora y financiera, ligados a los seguros de personas, bienes o servicios y que sobre la base de ellos se establecen las primas, los riesgos, tiempos de vida o utilidad esperados [3].

En esta investigación se pretende sintetizar los modelos estocásticos dinámicos que han surgido en matemática actuaríal, involucrados en el seguro de vida. Se parte de tablas de mortalidad, creando modelos, tratando las fuerzas de mortalidad para luego encontrar las probabilidades de supervivencia para cada año.

Se hace comparaciones por medio de gráficos cuánto es la diferencia entre los resultados obtenidos por los modelos respecto a los resultados de las Tablas de Mortalidad[2].

[1] El término estocástico procede del griego stokhos, que se refiere al lanzamiento de los dardos hacia el centro del blanco, por lo que se considera sinónimo de aleatoriedad

[2] Dichas tablas fueron tomadas del Instituto de Actuarios de Canada, cuya dirección electrónica es la siguiente http://mort.soa.org

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Modelos multi-estado son un intento de ver una variedad de contratos de seguros de vida y anualidades de manera unificada, haciendo uso de los procesos de Markov. Como motivación, tomar un individuo de edad x y considerar una cadena de Markov de dos estados, donde la persona se encuentra en estado 0 (vivo) o el estado 1 (fallecido) en cualquier momento. Contratos de seguros de vida ofrecen beneficios tras la transferencia del estado 0 al estado 1, mientras que los contratos de anualidad de vida proporcionan beneficios siempre que el proceso permanece en el estado de 0.

De manera más general, considereremos un modelo de múltiples decrementos de (x) con m causas de fallo. Podemos considerar una cadena con $M + 1$ estados. El estado 0 significa que (x) no ha sido involucrado en cualquier causa y se refiere a menudo como el estado activo. El estado j se refiere a haber sido involucrado a la primera causa j. Involucrando en este tema los beneficios del seguro discutidos se pueden ver como los pagos provenientes de la transferencia del estado 0 a otros estados. Un seguro de vida conjunta se puede considerar como dos contratos, un pago de beneficios tras la transferencia del estado 0 al estado 1, y los otros beneficios pagados en el momento de la transferencia del estado 0 al estado 2. Una anualidad de dos, de vida en general puede ser considerado como independiente de tres contratos, cuando el contrato i, $i = 0, 1, 2$, paga beneficios siempre y cuando el proceso está en el estado i. Esto se puede generalizar a los contratos relativos de n vidas donde tendremos $2n$ estados.

La situación más simple consiste en sólo dos estados: “viva” y “muerta”. Un individuo puede hacer sólo una transición. Por un simple anualidad de vida, los beneficios se pagan mientras que el beneficiario se encuentra en estado 1 y cesar en la transición al estado 2. En el caso de un seguro de vida política entera, las primas se pagan mientras el asegurado se encuentre en el estado 1, y el beneficio por muerte se paga en el momento de la transición al estado 2.

En el proceso de tres estados comúnmente utilizado para describir el estado de una persona asegurada en virtud de una política de ingresos por incapacidad. En este caso, las primas se pagan mientras el asegurado se encuentre en el estado 1, y los beneficios se pagará mientras el asegurado se encuentre en el estado 2 (por lo general después de un período de espera). Los cálculos actuariales para este ejemplo son más difícil porque el individuo puede hacer visitas repetidas a cada uno de los estados 1 y 2.

Por esta razón, a menudo se supone que las transiciones del estado 2 al estado 1 no son posibles. Gran parte de este trabajo se ha basado en la teoría de los procesos estocásticos para obtener nuevos resultados de interés y generalizar los resultados. Tales modelos son más manejable cuando se asume que el proceso satisface la propiedad de Markov.

Una suposición no es apropiada. Por tanto, necesitamos un método general de la búsqueda de las probabilidades $p_{ij}(t, x+t)$ en los modelos de estado múltiple con tres o más estados.

El enfoque fue desarrollado suponiendo que las fuerzas de transición son constantes dentro de los intervalos de edad de una longitud fija. Matrices de probabilidad de transición se pueden calcular de forma recursiva durante períodos de tiempo que son múltiplos de este intervalo de edad. El método conduce a expresiones de las probabilidades de transición que son más convenientes para ciertos tipos de cálculos. También proporciona una estrategia para tratar con dependencia de la duración.

Una descomposición de la fuerza de la matriz de transición conduce a una cómoda representación de la matriz de probabilidades de transición. Este último se expresa explícitamente en términos del intervalo de tiempo de interés. Además, las probabilidades son combinaciones lineales de funciones exponenciales. Por lo tanto, la integración necesaria para calcular los tiempos esperadas en los distintos estados así como los valores actuariales pueden llevarse a cabo analíticamente. Esto es también cierto cuando las fuerzas de la transición son constantes a trozos.

Este modelo de Markov de tres estados con fuerzas constantes por trozos da rendimientos de probabilidades de transición que están muy cerca a los obtenidos directamente de la tabla de mortalidad.

Este artículo describe un enfoque por el cual los actuarios pueden determinar probabilidades necesarias para los cálculos en las aplicaciones que están representadas como procesos multiestados. Nos hemos basado en matemáticas. Resultados disponibles cuando se asume que el proceso es de Markov con fuerzas constantes de transición (es decir, un Proceso de Markov de tiempo homogéneo). La extensión a las fuerzas constantes por pieza es directa en los casos de dependencia de la duración.

Se desarrolla una aplicación del cálculo actuarial que modela un proceso multiestado en general. Se pretende calcular a futuro probabilidades de supervivencia o muerte de un grupo de personas que obtengan un seguro de vida a cierta edad x, y esto mediante la intervención de procesos estocásticos.

El método se basa en los resultados de la matriz conveniente cuando un modelo de Markov de tiempo continuo con fuerzas constantes de transición se supone.

Capítulo 2

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En ninguna de las carreras que administra la Escuela de Matemática de la Universidad de El Salvador se ha considerado el estudio de la ciencia actuarial ni en las materias obligatorias, ni en las materias electivas. Por lo tanto la idea es aportar al conocimiento del área en cuestión, mostrar su importancia mediante la aplicación de modelos estocásticos dinámicos y dejar constancia documental para que en futuro sea considerado para las carreras de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática u otra facultad afín.

El problema central es:

Estudiar modelos estocásticos dinámicos en la ciencia actuarial aplicados en seguros de vida.

2.2. ANTECEDENTES

El trabajo titulado "IMPACTO DE LA PRIVATIZACIÓN DEL SISTEMA DE PENSIONES EN LA SITUACIÓN DE POBREZA DE LAS PERSONAS PENSIONADAS EN EL SALVADOR " se presento en la Escuela de Economía de la Universidad de El Salvador, como tesis de la Licenciatura en Economía, en el año 2006.

En el año 2013, se presento el trabajo de grado de la Licenciatura en Economía titulado "CRISIS ECONÓMICA Y RENDIMIENTO DEL FONDO DE AHORRO DE PENSIONES DE EL SALVADOR: 2007-2012"; ambos trabajos tocan aspectos financieros pero no tanto actuariales.

En la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas no se han elaborado ni tomado en cuenta documentos actuariales, para materias obligatorias ni electivas, sin embargo en la Escuela de Matemática existen algunos Trabajos en Actuaría:

El que realizo el Msc. Otoniel Campos en su tesis de maestría que se titula “ ESTUDIO DE MODELOS DE RIESGO ACTUARIAL Y DE LA PROBABILIDAD DE RUINA” en el año 2009,

La Tesis de Licenciatura en Estadística presentada por Rosa Matilde Rivera Sosa y titulada “ ESTADÍSTICA APLICADA AL ANÁLISIS ACTUARIAL ” en el año 2011, que reune aspectos teóricos muy importantes en el ámbito actuarial.

En la Facultad Multidisciplinaria de Occidente, Santa Ana, Departamento de Matemáticas, en Marzo de 2016; se presentó la tesis denominada “FUNDAMENTOS DE ESTADÍSTICA ACTUARIAL”, para obtener grado de Licenciatura en Estadística. La tesis describe distribuciones útiles, teoría de supervivencia, tarifación, modelos probabilísticos relacionados a siniestros, funciones generatrices, elaboración de tablas de mortalidad, teoría de credibilidad.

2.3. JUSTIFICACIÓN

La importancia de estudiar procesos estocásticos aplicados a matemática actuarial se debe a que los riesgos financiero-actuariales implican situaciones que se desarrollan y evolucionan a lo largo del tiempo y los modelos basados en procesos estocásticos resultan ser los más adecuados para estas situaciones.

El propósito es analizar modelos estocásticos dinámicos para resaltar su aporte a las ciencias actuariales y su aplicabilidad en las compañías aseguradoras.

2.4. OBJETIVOS

2.4.1. OBJETIVO GENERAL

Analizar modelos de procesos estocásticos en matemática actuarial.

2.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Analizar modelos estocásticos dinámicos en seguros de vida.
2. Aplicar modelos estocásticos dinámicos en seguros de vida.

Capítulo 3

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Para el desarrollo de la investigación se realizarán las actividades:

1. Búsqueda y lectura de artículos relacionados con el tema publicados en Internet y en bibliotecas.
2. Recolección y redacción de ideas, conceptos y teorías principales del tema.
3. Reuniones semanales con asesor para la revisión de avances.
4. Defensas públicas del proyecto de investigación.

Capítulo 4

LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS

4.1. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

En los modelos estáticos la variable tiempo no es importante; mientras que en los modelos dinámicos, uno o varios de los elementos modelizados toma valores dependientes del tiempo, describiendo trayectorias temporales [10].

Si nos centramos en los modelos dinámicos, podemos distinguir también entre modelos dinámicos deterministas y estocásticos. En los primeros, tanto los parámetros como las variables temporales, tienen asignados ciertos valores, mientras que en los modelos dinámicos estocásticos, alguna variable o parámetro sigue un proceso estocástico, con lo cual las variables temporales siguen una distribución de probabilidad [10].

Para introducirnos a la definición de un proceso estocástico que se utilizará en el presente trabajo, presentaremos definiciones equivalentes de diferentes autores. En su devenir, los procesos estocásticos han sido definidos de diferentes formas:

1. **Khintchine** [5, 6] lo define como un sistema uniparamétrico de variables aleatorias.

2. La concepción de **Doob** [5, 7] es eminentemente abstracta. Todo proceso regido por leyes de probabilidad o una familia de variables aleatorias:

$$\{X(t), t \in T\}$$

   dependiendo de un parámetro t que si representa tiempo se denomina proceso y si no función aleatoria. Dependiendo de T, el proceso puede ser de tipo discreto (finito o infinito numerable) o continuo.

   Para todo conjunto, finito o infinito, de realizaciones de $X(t)$ se puede asociar una variable simbólica $\omega \in \Omega$, donde Ω es el espacio muestral, lo que permite considerar $X(t)$ para un valor particular de ω

como cierta función $X(\omega, t)$, discreta o continua, en la variable t, pudiendo representar una trayectoria para cada valor de $\omega \in \Omega$.

3. Para **Lévy:** un proceso estocástico es, en principio, un procedimiento de definición de una función aleatoria en el tiempo t en el que el azar interviene en cada instante, cualquiera que sea el valor $t \in T$ y su incremento τ, el conocimiento de $X(t)$ en el instante t_0 hasta el instante t_1 no determina lo valores de esta función en el intervalo (t, t+τ) y estos valores son aleatorios, evolucionando en el tiempo. Teoricamente puede definirse dando un conjunto Ω de realizaciones posibles de $X(t)$ y definiendo una distribución de probabilidad en Ω [8, 5].

4. Citaremos a **Karhunen** quien concibe los procesos estocásticos como funciones cuyos valores son puntos de un espacio abstracto. Establece condiciones restrictivas: son funciones cuadrado integrables ($\mathcal{L}^2$); tienen dispersión finita [1], por lo que pueden considerarse como elementos de un espacio de Hilbert[2] [9, 1].

5. La definición de A. Férnadez de Trocóniz [25] supone una previa definición de un espacio de probabilidades:
$$(\Omega, \mathcal{F}, P),$$
y el conjunto de índices (espacio parámetrico): $T = \{t\}$, en el que para cada $t \in T$ se supone definida una variable aleatoria $X_t(\omega)$ o $X(\omega, t)$.

   Tróconiz define un proceso estocástico como una familia de variables aleatorias,
$$\{X(\omega, t), t \in T\},$$
definidas conjuntamente sobre el espacio de probabilidades dado, de modo que a cada índice $t \in T$ corresponda una variable aleatoria.

Utilizaremos la siguiente definición en nuestro investigación y en caso que sea necesario se hará énfasis en una definición equivalente tal como se ha desarrollado previamente.

DEFINICIÓN 1 *Un proceso estocástico es una familia uniparamétrica de variables aleatorias $\{X(w, t), t \in T\}$ definidas todas ellas sobre un mismo espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y que toman valores en un conjunto denominado espacio de estados, el cual puede ser discreto o continuo. Generalmente, el parámetro t es el tiempo, aunque puede tener otros significados [11].*

De acuerdo a la definición, un proceso estocástico es una colección o familia de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T}$, ordenadas según el subíndice t que en general se suele identificar con el tiempo. Por tanto, para cada instante t tendremos una variable aleatoria distinta representada por X_t, con lo que un proceso estocástico puede interpretarse como una sucesión de variables aleatorias cuyas características pueden variar a lo largo del tiempo [2].

[1] Toda sucesión de Cauchy es convergente.

[2] Espacio de Hilbert es un espacio vectorial con producto interno que es completo con respecto a la norma dada por el producto interno, por lo que es una generalización del concepto de espacio euclídeo.

Denotaremos un proceso estocático como $\{X(\omega,t), t\in T\}$, o simplemente $\{X(t)\}$ o $\{X_t\}$. De acuerdo con cuanto antecede, de un proceso estocástico, se tiene lo siguiente:

- Una familia de funciones de t (t y ω variables). Es el proceso propiamente dicho. Representa el conjunto de realizaciones del proceso. La denotaremos de la siguiente manera:

$$\{X(\omega,t), t\in T\}_{\omega\in\Omega}.$$

- Una función de t (t variable y ω fijo) la cual es un elemento del conjunto de realizaciones del proceso, también llamada función muestral, realización o trayectoria. La denotaremos de la siguiente manera:

$$\{X(\omega_0,t)\}_{t\in T}.$$

- Una variable aleatoria (t fijo, ω variable). La denotaremos de la siguiente manera:

$$\{X(\omega,t_0)\}_{\omega\in\Omega}.$$

- Un valor numérico (t y ω fijos). La denotaremos de la siguiente manera:

$$X(\omega_0,t_0)=x_{t_0}.$$

Por simplicidad, denotaremos a cada uno de los elementos de un proceso estocástico como $X(t)$ o X_t. El contexto definirá a cuál elemento se refiere.

4.2. FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN. CONDICIONES DE CONSISTENCIA DE KOLMOGOROV

Sea $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad y sea el proceso:

$$\{X(t), t\in T\} \tag{4.1}$$

definido sobre el referido espacio. Si elegimos cualquier subconjunto finito

$$\{t_1,t_2,...,t_n\} \tag{4.2}$$

del conjunto índice T, los valores que tome (4.1) en el conjunto (4.2)

$$\{X(t_1),X(t_2),...,X(t_n)\} \tag{4.3}$$

es denominado vector aleatorio y constituye un suceso elemental de Ω. Con el vector aleatorio (4.3) perteneciente a Ω formaremos sucesos S,

$$S=\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2,...,X(t_n)\le x_n\}$$

y que pertenece al álgebra de sucesos $\mathcal{F}$. La aplicación univoca de cada suceso con la medida perteneciente a P, la denominamos función de distribución de orden n y la representaremos así:

$$F_n(x_1,x_2,..,x_n;t_1,t_2,..,t_n)=P(X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,...,X(t_n)\le x_n) \tag{4.4}$$

Si existe la Función (4.4) para todo subconjunto (4.2) perteneciente a T y n arbitrario, habremos definido el proceso estocástico (4.1) en el sentido de Slutsky [24].

Para que la función (4.4) sea una funcion de distribución tiene que cumplir las siguientes condiciones de consistencia de Kolmogorov [11].

a) Condiciones de simetría.

   La función de distribución (4.4), correspondiente al proceso estocástico (4.1) para $n \in N$ arbitrario y $\forall t_1, t_2, ...t_n \in T$, es invariante para toda permutación de los pares (x_i, t_i), (x_j, t_j); esto es:

$$F_n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_j, \ldots, t_n) \\ = F_n(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_i, \ldots, t_n).$$

b) Condiciones de compatibilidad.

   Toda función de distribución multidimensional (4.4) de orden $n+m$ deberá cumplir siempre:

$$\lim_{\substack{x_{n+1}\to\infty \\ \vdots \\ x_{n+m}\to\infty}} F_{n+m}(x_1...x_{n+m}; t_1...t_{n+m}) = F_n(x_1...x_n; t_1 t_2...t_n).$$

Las funciones de distribución n dimensional generan funciones de distribución de órdenes inferiores. El número de funciones de distribución de orden k obtenidas de una de orden n $(n > k)$ son las combinaciones $\binom{n}{k}$ y cada una de ellas deberá igualmente cumplir las condiciones de consistencia indicadas.

Se llama sistema de funciones de distribución $n-$ dimensional a todas las funciones de distribución obtenidas a partir de la dada. Así, el número total será:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1.$$

Kolmogorov demuestra que todo sistema de funciones de distribución que cumplan las condiciones de consistencia expuestas define una función de probabilidad en el espacio H_n [3], y que puede extenderse ilimitadamente, satisfaciendo los axiomas del cálculo de probabilidades, lo que determina la existencia unívoca de un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ definido sobre Ω [5].

A continuación se definirán algunos procesos estocásticos que se utilizarán en las aplicaciones.

4.3. PROCESOS MARTINGALAS

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad para modelar un cierto experimento aleatorio, donde Ω es el espacio muestral, $\mathcal{F}$ es una estructura σ-algebra que agrupa a los eventos de Ω del experimento aleatorio a los cuales se les puede calcular su probabilidad mediante P. Suponga ahora que se consideran dos sub σ-algebras $\mathcal{F}_1$

[3] H_n es el espacio de Hilbert de dimensión n

y $\mathcal{F}_2$ tales que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Entonces $\mathcal{F}_1$ contiene más información que $\mathcal{F}_2$ en el sentido de que, en general, un mayor número de conjuntos son considerados como eventos. En general, se puede considerar una sucesión no decreciente de sub σ-algebras $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots$. Este tipo de estructuras surgen de manera natural, por ejemplo, para un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, pues puede construirse la sucesión $\mathcal{F}_n$ de la siguiente forma

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, ..., X_n\},$$

en donde efectivamente se cumple que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq ....$ En este caso la σ-algebra $\mathcal{F}_n$ contiene los eventos para los cuales puede determinarse su ocurrencia o no ocurrencia, sólo con la información del proceso disponible hasta el tiempo n.

EJEMPLO 1 *Si las variables X_n representan los resultados de lanzar sucesivamente un dado, y si se define el evento A como los puntos muestrales cuya suma de los dos primeros resultados es mayor a 3, entonces es claro que $A \notin \mathcal{F}_1$, sin embargo $A \in \mathcal{F}_2$. Por supuesto, si sucede por ejemplo que $X_1 = 4$, entonces sabemos que el evento A ocurre, pero sin esta información adicional la ocurrencia o no ocurrencia del evento A no puede determinarse sino hasta el segundo lanzamiento del dado.*

Estas consideraciones sobre sucesiones no decrecientes de σ-álgebras llevan a la definición de filtración.

DEFINICIÓN 2 *Una filtración es una colección de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ tal que $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$, cuando $n \leq m$. En particular, la filtración natural de un proceso $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es aquella sucesión de σ-álgebras definidas por $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \geq 1$ [12]. Se dice que un proceso $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ si la variable X_n es $\mathcal{F}_n$-medible, para cada $n \geq 1$.*

En el caso de un proceso a tiempo continuo, se tiene la siguiente definición de filtración:

DEFINICIÓN 3 *Una filtración es una colección no numerable de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ tal que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, cuando $0 \leq s \leq t$. En particular, la filtración natural de un proceso a tiempo continuo $\{X_t, t \geq 0\}$, es la colección de σ-álgebras definidas por $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s | 0 \leq s \leq t\}$ [12]. Se dice que un proceso $\{X_t, t \geq 0\}$ es adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ si la variable X_t es $\mathcal{F}_t$-medible, para cada $t \geq 0$.*

DEFINICIÓN 4 *Se dice que un proceso $\{X_n, n \geq 1\}$ es una martingala respecto de una filtración $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ si cumple las siguiente tres condiciones:*

a) Es integrable, o sea $E[\mid X_n \mid] < \infty$ para todo n.

b) Es adaptado a la filtración, es decir, $\{X_n, n \geq 1\}$ es medible en $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$.

c) Para cualesquiera $n \leq m$,

$$E[X_m | \mathcal{F}_n] = X_n, \tag{4.5}$$

Cuando en lugar de (4.5) se cumple la desigualdad $E[X_m | F_n] \geq X_n$, entonces el proceso es una submartingala, y si $E[X_m | \mathcal{F}_n] \leq X_n$, entonces es una supermartingala.

Para procesos a tiempo continuo, la condición de martingala se escribe $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$, para cualesquiera tiempos s y t tales que $0 \leq s \leq t$, sin olvidar la condiciones de adaptabilidad e integrabilidad para poder llamar a tal proceso una martingala.

En cualquier caso, si una martingala es adaptado a su filtración natural, la condición (4.5) se puede enunciar de manera equivalente: para cualquier sucesión de tiempos, $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1}$, y sucesión de estados $(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ se tiene:

$$E\left[X(t_{n+1})|X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0\right] = x_n.$$

Se usa el concepto de martingala en teoría de la probabilidad entre otras muchas cuestiones para hacer referencia al juego equitativo, consistente en un juego reiterativo a partir de un valor, con la información, hasta el tiempo t. El juego será equitativo, si los valores esperados futuros de $\{X_u\}_{u \geq t}$, según una medida de probabilidad P, dada la información hasta el momento t, es precisamente el valor actual de X_t [2].

Las martingalas son procesos que están relacionados con los juegos justos. Por ejemplo, si X_t representa la fortuna de un jugador al tiempo t, y quien supondremos apuesta de manera continua, entonces la igualdad anterior se interpreta del siguiente modo: en promedio la fortuna del jugador al tiempo t dada toda la historia del juego hasta el tiempo s anterior a t es la fortuna del jugador al tiempo s, es decir, el juego es justo pues el jugador en promedio no pierde ni gana. Cuando se cumple que $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$ se dice que el proceso es una supermartingala, se trata entonces de un juego desfavorable al jugador pues en promedio su fortuna disminuye. En caso de la desigualdad contraria el proceso es una submartingala, juego favorable al jugador. Cuando se toma esperanza sobre la igualdad (4.5), se obtiene $E[X_t] = E[X_s]$. Esto quiere decir que todas las variables aleatorias que conforman una martingala tienen la misma esperanza. En particular, si la variable inicial X_0 es cero o su esperanza es cero, entonces $E[X_t] = 0$ para cualquier $t > 0$ [4].

Un ejemplo de un proceso martingala es el modelo Black-Scholes[29] en tiempo discreto en donde M_n es el precio de la acción en el tiempo n, y $\{Y_n = e^{Z_n}, Z_n \sim N(0, \sigma)\}_{n \geq 0}$ son variables aleatorias independientes y positivas tal que $(Y_n - 1) \times 100$ representa la variabilidad de la acción:

$$\{M_{n+1} = M_n Y_n, n \geq 0\}.$$

Una simulación de tres posibles trayectorias de un modelo Black-Scholes con $Z_n \sim N(0, 0.01)$ y $M_0 = 10$ se muestra en Figura 4.1.

4.4. PROCESOS DE POISSON

DEFINICIÓN 5 *Decimos que la variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0, X \in Pois(\lambda)$, cuando su soporte o conjunto de valores es el conjunto de los enteros no negativos, y su función de cuantía viene dada $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $k \in \mathbb{Z}_0^+$.*

DEFINICIÓN 6 *Un proceso estocástico de tiempo continuo $\{N_t, t \geq 0\}$, y con espacio de estados el conjunto discreto $\{0, 1, \ldots\}$, es un proceso de Poisson de parámetro o intensidad $\lambda > 0$, si cumple las siguientes propiedades:*

a) $N_0 = 0$, es decir el elemento inicial del proceso es cero.

b) Si $s \leq t$ entonces $N_s \leq N_t$.

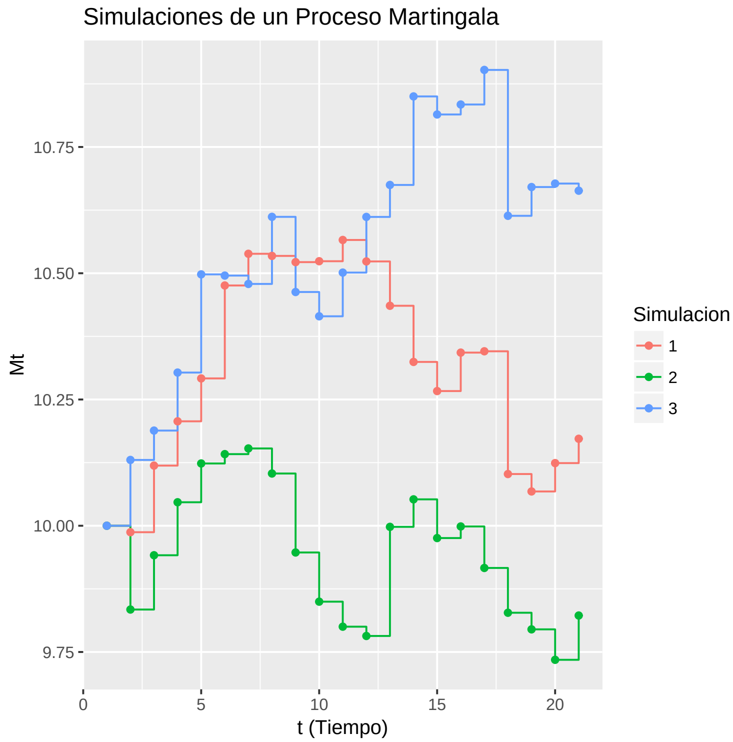


Figura 4.1: Simulaciones de un modelo Black-Scholes con $Z_n \sim N(0, 0.01)$ y $M_0 = 10$.

c) *Tiene incrementos independientes, es decir,* $\forall n > 0$ *y* $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, *las variables aleatorias,* $N_{t_1} - N_0, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ *son independientes.*

d) $N_{t+s} - N_s$ *tiene distribución de Poisson con parámetro* λt, *para cualesquiera* $s \geq 0$, $t > 0$.

El proceso de Poisson se utiliza para modelar situaciones de conteo de ocurrencias de un evento particular en un intervalo de tiempo dado. Por ejemplo, N_t puede representar el número de llamadas telefónicas recibidas en un conmutador, o el número de accidentes ocurridos en un cierto lugar, o el número de clientes que buscan un servicio durante el intervalo de tiempo $[0, t]$, etc. Una simulación de tres posibles trayectorias de un proceso de Poisson con parámetro de intensidad $\lambda = 2$ se muestra en Figura 4.2.

Por definición se tiene que $\forall t \geq 0$, $E[N_t] = \lambda t$, y $Var[N_t] = \lambda t$. Además, se tiene que para $t \geq 0, s > 0$, se cumple que $E[N_{t+s}|N_r, 0 \leq r \leq t] \geq N_t$, puesto que

$$E[N_{t+s}|N_r, 0 \leq r \leq t] = N_t + \lambda s,$$

donde $\lambda s \geq 0$. Por lo tanto, un proceso de Poisson es una submartingala.

Uno de los objetos de estudio acerca de este proceso es la variable T_k definida como el tiempo que transcurre entre el evento $k-1$ y el evento k, llamado también tiempo de interarribo. Puede demostrarse que los tiempos $T_1, T_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes, y cada una de ellas tiene distribución exponencial con parámetro λ. Recíprocamente, a partir de esta colección de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidadas puede construirse el proceso de conteo de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ [4].

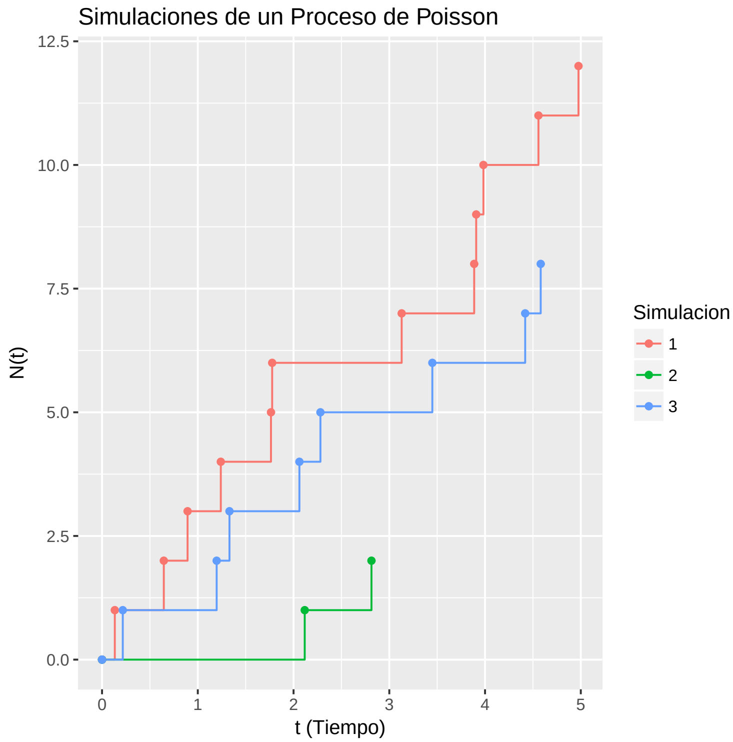


Figura 4.2: Simulaciones de un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 2$.

Una importante aplicación del proceso de Poisson se encuentra en la probabilidad de ruina de una compañía aseguradora. El modelo clásico de Crámer -Lundberg es el proceso estocástico a tiempo continuo $\{C_t, t \geq 0\}$ dado por

$$C_t = u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j,$$

en donde u es el cápital inicial de la compañia seguradora, ct es la entrada por primas hasta el tiempo t con c una constante positiva, Y_j es una variable aleatoria que representa el monto de la j-ésima reclamación, $\{N_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de parámetro λ, de modo que $\{R_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j, t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson Compuesto. La variable estocástica C_t representa el balance más sencillo de ingresos menos egresos de una compañía aseguradora. Al proceso $\{C_t, t \geq 0\}$ se le llama proceso de riesgo. Tres trayectorias de este proceso se muestran en la Figura 4.3.

4.5. PROCESO DE MARKOV

4.5.1. PROPIEDADES BÁSICAS

En esta sección consideramos problemas actuariales en el que los flujos de efectivo dependen del resultado de un proceso de varios estados.

Para empezar, sea $X(t)$ el estado de un individuo en el tiempo (edad) $t > 0$. Denotamos el proceso estocástico

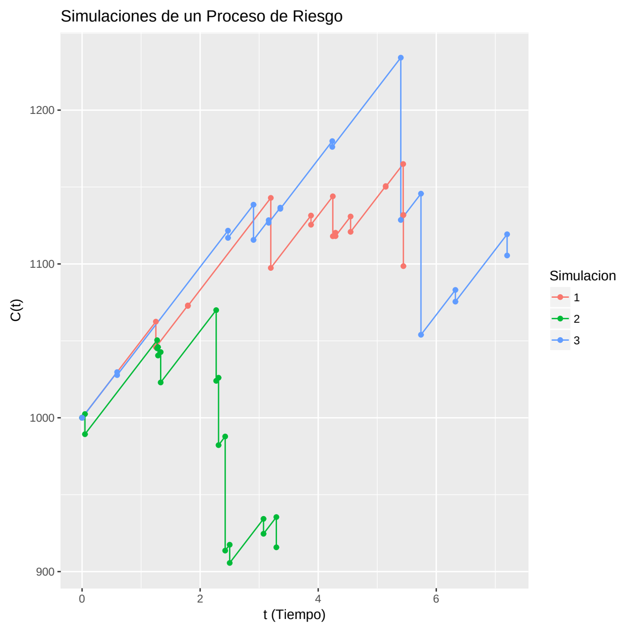


Figura 4.3: Simulaciones de un proceso de riesgo con $\lambda = 1.5$, $u = 1000$, $c = 50$ y el monto de reclamaciones sigue una distribución exponecial con parámetro $\alpha = 0.05$

por $\{X(t), t \geq 0\}$. Asumimos que el proceso tiene como espacio de estados, el conjunto $\{1, 2, ..., k\}$. Ahora, se tiene la siguiente definición del tipo de proceso estocático a considerar [21]

DEFINICIÓN 7 $\{X(t), t \geq 0\}$ *es un proceso de Markov si, para todo* $s, t \geq 0$ *e* i, j, $x(u) \in \{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$, *se cumple la siguiente propiedad*

$$P\left(X(s+t) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\right) = P\left(X(s+t) = j | X(s) = i\right).$$

Por lo tanto, el futuro del proceso (después del tiempo s) depende sólo del estado s en el momento actual y no de la historia del proceso hasta el momento s.

La razonabilidad de la condición de Markov depende del nivel de detalle en la descripción del estado en el futuro, en el modelo considerado. Por ejemplo, consideremos el modelo de tres estados, mostrado en la Figura 4.4. En este caso, la condición de Markov puede ser inapropiada. El futuro de la salud de una persona discapacitada recientemente es probable que difiera de la de una persona de la misma edad que ha estado inactiva por un largo tiempo; esto se discute en el siguiente capítulo.

La propiedad de Markov, de puede enunciar de manera equivalente: para cualquier sucesión de tiempos, $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1}$, y sucesión de estados $(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ se tiene:

$$P\left(X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0\right)$$
$$= P\left(X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n\right).$$

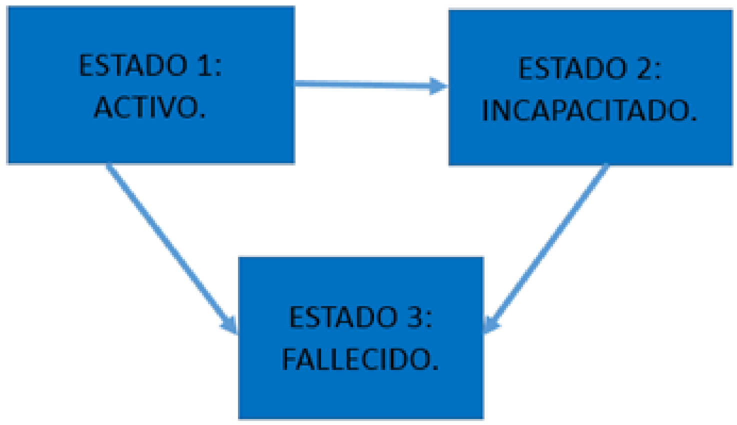


Figura 4.4: Modelo de tres estados.

DEFINICIÓN 8 *La función de probabilidad de transición, para $s, t \geq 0$ y dos estados $i, j \in \{1, 2, \dots k\}$ cualquiera, se define como:*

$$p_{ij}(s, s+t) = P(X(s+t) = j | x(s) = i),$$

la cual es la probabilidad de alcanzar el estado j en el tiempo t comenzando en el estado i en el tiempo s.

Dada la definición de función de probabilidad de transición se tiene que $\sum_{j=1}^{k} p_{ij}(s, s+t) = 1$ para todo $t \geq 0$ [4]. Se necesitan las funciones de probabilidad de transición en el cálculo de valores actuariales.

DEFINICIÓN 9 *Se asume la existencia de los límites $\mu_{ij}(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(t,t+h) - \delta_{ij}}{h}, i, j \in \{1, 2.....k\}$, donde*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

los cuales representan la fuerza de transición del estado i al estado j en el tiempo t.

Se observa que μ_{ii} es siempre no positivo. La negatividad de μ_{00}, por ejemplo, refleja la acción de otras fuerzas de transición, las cuales causan la transferencia fuera del estado 0. Este argumento, se fundamenta en el siguiente resultado.

TEOREMA 1 *Para todo i y t, se cumple que*

$$\sum_{j=0}^{k} \mu_{ij}(t) = 0.$$

Demostración. Fijemos cualquier i y t. Utilizando la notación de la o pequeña [5], de la definición anterior se tiene que para todos los estados j y $h > 0$,

[4] Para el caso $s = t$ se cumplen las condiciones iniciales (4.13) del sistema de ecuaciones diferenciales (4.11)

[5] Se dice que un función f definida sobre un intervalo $[0, b]$ es de la clase $o(h)$ si $\lim_{h \to 0} f(h)/h = 0$. Se escribe $o(h)$ para representar tal función.

$$p_{ij}(t, t+h) = h\mu_{ij}(t) + o(h), i \neq j, \tag{4.6}$$

$$p_{ii}(t, t+h) = h\mu_{ii}(t) + o(h) + 1. \tag{4.7}$$

Sumando sobre el índice j resulta:

$$1 = h \sum_{j=0}^{k} \mu_{ij}(t) = o(h) + 1.$$

Luego, sustrayendo 1 de cada lado, dividiendo por h y tomando el limite mientras $h \to 0$ se prueba el teorema.

Es fácil ver que, para $s \geq 0, t, u > 0$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$

$$p_{ij}(s, s+t+u) = \sum_{l=1}^{k} p_{il}(s, s+t) p_{lj}(s+t, s+t+u), \tag{4.8}$$

las cuales son conocidos como las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov. El sistema (4.8) representa las ecuaciones en dos saltos de tiempo a partir del tiempo inicial s, lo cual refleja que para llegar al estado j en el tiempo $s+t+u$ desde el estado i en el tiempo s, es necesario considerar todos los estados posibles a los cuales se llega en el tiempo intermedio $s+t$.

Las fuerzas de la transición y la funciones de probabilidad de transición están relacionadas por las ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante y hacia atrás:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s, s+t) = \sum_{l=1}^{k} p_{il}(s, s+t) \mu_{lj}(s+t) \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{ij}(s, s+t) = \sum_{l=1}^{k} -\mu_{il}(s) p_{lj}(s, s+t), \tag{4.10}$$

respectivamente, con condiciones iniciales $p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}$. En general, estos sistemas de ecuaciones diferenciales deben resolverse numéricamente para obtener las funciones de probabilidad de transición.

TEOREMA 2 (Ecuaciones hacia progresivas de Kolmogorov) *Para todo par de estados i, j y los tiempos $0 \leq s < t$.*

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s, t) = \sum_{l=0}^{k} p_{il}(s, t) \mu_{lj}(t) \tag{4.11}$$

Demostración. Empezamos por derivar la versión discreta de la fórmula anterior. Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov (4.8) se pueden reformular de manera equivalente para los estados i, j y tiempos $0 \leq s < t$ y $h > 0$.

$$p_{ij}(s, t+h) = \sum_{l=0}^{k} p_{il}(s, t) p_{lj}(t, t+h), \tag{4.12}$$

reflejando el hecho de que con el fin de alcanzar el estado j desde el estado i en el intervalo de tiempo $s, t+h$ debemos primero llegar a un estado k en el tiempo t, y luego ir de un estado l a otro estado j en las unidades de tiempo próximo h.

Sustituyendo de (4.6) y (4.7) en el segundo factor del sumando (4.12),

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(s,t+h) &= h\sum_{l=0}^{k}(p_{il}(s,t)(\mu_{lj}(t)+\delta_i j+o(h)) \\
p_{ij}(s,t+h) &= h\sum_{l=0}^{k}p_{il}(s,t)\mu_{lj}(t)+\sum_{l=0}^{k}p_{il}(s,t)\delta_{ij}+\sum_{l=0}^{k}p_{il}(s,t)o(h) \\
p_{ij}(s,t+h) &= h\sum_{l=0}^{k}p_{il}(s,t)\mu_{lj}(t)+p_{ij}(s,t)+o(h).
\end{aligned}
$$

Restando $p_{ij}(s,t)$ de ambos lados, dividiendo por h, y tomando el límite cuando $h \to 0$ da (4.11). El teorema asociado al sistema de ecuaciones regresivas de Kolmogorov se demuestra de manera semejante.

El sistema (4.11) es un sistema de ecuaciones diferenciales en la variable t para un valor fijo de s. En general, habrá muchas soluciones a un sistema de ecuaciones diferenciales de este tipo. Sin embargo, existe una solución única si especificamos las condiciones iniciales apropiadas. En nuestro contexto, estas condiciones son los requerimientos obvios que para todo t,

$$
p_{ij}(t,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{4.13}
$$

Hay una formulación matricial simple de la matriz de (4.11). Al fijar s, t, se tiene que $P(s,t)$ es la matriz de transición para el intervalo de tiempo (s,t). Ésta es la matriz con una entrada en la fila i-ésima y la columna j-ésima de $p_{ij}(s,t)$. También se tiene una matriz correspondiente $M(t)$ cuya entrada en la fila i-esima y columna j-ésima es $\mu_{ij}(t)$. $M(t)$ es llamada a menudo como la matriz de intensidad.

Sea $P^{'}(s,t)$ la matriz en la que cada entrada es la derivada parcial con respecto a t de la entrada correspondiente en $P(s,t)$. Las ecuaciones hacia adelante de Kolmogorov con las condiciones iniciales, pueden expresarse como:

$$
P'(s,t) = P(s,t)M(t), \tag{4.14}
$$

$$
P(s,s) = I. \tag{4.15}
$$

La siguiente es una consecuencia simple pero útil de las ecuaciones hacia adelante, el cual generaliza un resultado del modelo de dos estados de vida o muerte, cuando se tiene un estado, como el de estar vivo, el cual no se puede acceder desde cualquier otro estado.

DEFINICIÓN 10 *Un estado es llamado anti-absorvente, si para todo $j \neq i$ y $s < t$, se tiene $p_{ji}(s,t) = 0$.*

En el siguiente teorema, se adopta una hipótesis formalmente más débil que involucra fuerzas en lugar de probabilidades, que por la segunda declaración resultan ser equivalente.

TEOREMA 3 *Sea un estado tal que* $\mu_{ji}(t) = 0$, $\forall j \neq i$ *y* t. *Entonces, para* $s < t$,

$$p_{ii}(s,t) = e^{\int_s^t \mu_{ii}(r)dr},$$

y

$$p_{ji}(s,t) = 0, \textit{para } j \neq i.$$

Demostración. De (4.11) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ji}(s,t) = p_{ji}(s,t)\mu_{ii}(t),$$

una ecuación diferencial que se resuelve fácilmente con solución

$$p_{ji}(s,t) = K(s)e^{\int_s^t \mu_{ii}(r)dr},$$

para alguna función $K(s)$ independiente de t. Ya que $p_{ji}(s,s) = 0$ para $j \neq i$, se debe tener que $K(s) = 1$, si $j = i$ o $K(s) = 0$, si $j \neq i$, de donde sigue la conclusión del teorema.

Otra cantidad de interés es la denominada probabilidad de permanencia para un estado. Definimos:

DEFINICIÓN 11 *La probabilidad de permanencia de un estado* i *se define de la siguiente manera:*

$$p_{\bar{i}\bar{i}}(s,t) = P(X_r = i, s \leq r \leq t | X_s = i).$$

Tenga en cuenta que la probabilidad de permanencia difiere, en general, de $p_{ii}(s,t)$, puesto que el correspondiente evento requiere que el proceso permanezca en el estado i por un intervalo entero de tiempo, en lugar de sólo en los puntos extremos. Sin embargo, las dos probabilidades serán la misma para un estado anti-absorbente.

Puesto que las probabilidades de permanencia son utilizadas en las sección siguiente, se determinará una manera de evaluarlos. Sea

$$q_i(s,t) = p_{ii}(s,t) - p_{\bar{i}\bar{i}}(s,t)$$

Esta es la probabilidad de que a partir del estado i en el momento s, el proceso está de regreso en el estado i en el tiempo t, habiendo dejado el estado i en algún momento durante el intervalo. Sea

$$v_i(t) = \lim_{h \to 0^+} \tfrac{q_i(t,t+h)}{h}.$$

Ahora empleamos la técnica de añadir estados. Dado un proceso y un estado i, añadimos un nuevo estado i^* que es un clon del estado i. Transiciones fuera del estado i^* sigue el mismo patrón que las transiciones fuera del estado i, mientras que las transiciones que originalmente llegaron al estado i serán desviadas al estado clonado i^*. Ahora bien, decir que el nuevo proceso está en el estado i en un momento s y además en un tiempo posterior t significa que debe haber permanecido allí todo el tiempo ya que no puede volver a entrar. Además, las fuerzas de transición del estado i permanecen siendo igual en ambos procesos. Entonces tenemos:

$$p^*_{ii}(s,t) = p_{\bar{i}\bar{i}}(s,t), \mu^*_{ij} = \mu_{ij}, j \neq i, i^*.$$

Tomemos en cuenta la cantidad $\mu^*_{ii^*}$. Ahora

$$p^*_{ii^*}(s,t) = q_i(s,t),$$

ya que el nuevo proceso se moverá desde el estado i al estado i^*, precisamente cuando el proceso original se mueve desde el estado i de regreso al estado i habiendo dejado el estado i en algún momento. De la definición (9),

$$\mu^*_{ii_*}(t) = v_i(t).$$

Aplicando el teorema (3) al estado i en el nuevo proceso, conduce a la fórmula

$$p_{\bar{i}\bar{i}}(s,t) = e^{\int_s^t (\mu_{ii}(r) - v_i(r))dr}.$$

Esta fórmula no permite, sin embargo, calcular el término de la izquierda exactamente ya que v_i también implica probabilidades de permanencia. Todo lo que podemos decir sin hipótesis adicionales es que

$$p_{\bar{i}\bar{i}}(s,t) \leq e^{\int_s^t \mu_{ii}(r)dr}.$$

Sin embargo, supongamos que tenemos un proceso tal que, para todos los estados i, t y $h > 0$, se cumple

$$q_i(t, t+h) = o(h). \tag{4.16}$$

Esta hipótesis dice que es muy poco probable que en un pequeño intervalo de tiempo haya un movimiento hacia fuera de un estado y de regreso a él. Cuando esta suposición es válida, tenemos que $v_i(t) = 0$ para todo t y ahora podemos declarar el siguiente teorema.

TEOREMA 4 *Para un proceso que satisface (4.16),*

$$p_{\bar{i}\bar{i}}(s,t) = e^{\int_s^t \mu_{ii}(r)dr}.$$

OBSERVACIÓN 1 *Podemos ver la primera declaración en el Teorema (3) como el caso especial del Teorema (4) , cuando q_i de hecho igual a* 0.

Para resumir nuestras conclusiones en esta sección hemos demostrado que, dadas las fuerzas de transición, podemos en teoría resolver un sistema de ecuaciones diferenciales para llegar a las requeridas probabilidades que nos interesan para nuestras aplicaciones. Sin embargo, en la práctica, la solución puede ser difícil o imposible de obtener con exactitud.

4.5.2. ANÁLISIS POR TRAYECTORIAS:

Supongamos entonces que se nos da $\mu_{ij}(t)$ para todo i, j y t, y queremos determinar la probabilidad que a partir del estado i en cualquier momento s, estemos en el estado j en el tiempo t. Lo que podemos hacer de forma sencilla es lo siguiente. Dado cualquier camino que va desde el estado i al estado j, podemos deducir una fórmula para la probabilidad de que a partir del estado i en el momento s, el proceso esté en el estado j en el tiempo t, siguiendo la trayectoria prescrita con exactitud. Precisamente, se nos da un camino π que es una secuencia de estados, $i_0, i_1, \ldots, i_M$, donde $i_0 = i$ e $i_M = j$. A continuación, queremos que la probabilidad de que el proceso haga una transición desde el estado i a i_1, siga por una transición desde i_1 a i_2, seguido por una transición de i_2 a i_3, y así sucesivamente, continuando de tal manera, sin visitar ningún otro estado, y, finalmente, alcanzar el estado j en o antes del tiempo t, y permanenciendo en el estado j hasta el momento t. Denotemos tal probabilidad por $p^{\pi}_{i.j}(s,t)$. Estas probabilidades pueden calcularse por integración, utilizando sólo las fuerzas de transición y las probabilidades de permanencia. Así que asumiendo que (4.16) se cumple, por lo que hemos reducido el problema a la evaluación de integrales.

Como ejemplo, consideremos el caso más simple posible de un camino de longitud 1, es decir $\pi = (i,j)$.

A continuación, tanto en modelos de dos estados como aquellos de múltiples estados se tiene,

$$p^{\pi}_{i.j}(s,t) = \int_s^t p_{\bar{i}\bar{i}}(s,r)\mu_{ij}(r)p_{\bar{j}\bar{j}}(r,t)dr.$$

La fórmula anterior deriva en un caso especial en el cual todos los estados no activos son absorbentes, por lo que no se puede salir de ellos, lo que significa que el tercer factor en el integrando no aparece ya que es igual a 1. En resumen, la fórmula anterior muestra que con el fin de pasar de i a j a lo largo de la ruta de un solo paso, tres eventos tienen que ocurrir. En primer lugar, el proceso debe permanecer en el estado i hasta algún tiempo r entre el tiempo s y el tiempo t. Este evento tiene probabilidad $p_{\bar{i}\bar{i}}(s,r)$. No puede ir primero a otro estado y luego volver, ya que constituiría un camino diferente del considerado. En segundo lugar, debe haber una transición al estado j en el momento r. Pensemos en la probabilidad de esto como $\mu_{ij}(r)dr$. Finalmente, el proceso debe permanecer en el estado j desde el tiempo r al tiempo t. No puede dejar el estado j y regresar, ya que esto constituiría de igual manera un camino diferente. Se obtiene la probabilidad requerida mediante la integración del producto de estas probabilidades sobre los tiempos r entre s y t.

A medida que la longitud de la trayectoria aumenta la fórmula se vuelve más complicada. Considere un camino de dos pasos, $\pi = (i,k,j)$. Ahora necesitamos una integral doble. La fórmula es

$$p^{\pi}_{i.j}(s,t) = \int_s^t \int_{r_1}^t p_{\bar{i}\bar{i}}(s,r_1)\mu_{ik}(r_1)p_{\bar{k}\bar{k}}(r_1,r_2)\mu_{kj}(r_2)p_{\bar{j}\bar{j}}(r_2,t)dr_2dr_1.$$

La fórmula anterior parece extremadamente compleja, pero simplemente registra lo que ahora son cinco pasos para cumplir las condiciones requeridas. El proceso debe permanecer en el estado i hasta algún tiempo r_1, luego se transfiere al estado k, entonces permanece en el estado k hasta algún tiempo r_2, a continuación se transfiere al estado j, y, finalmente, permanecerá en el estado j hasta el momento t.

Un cálculo similar que se plantea para un camino dado π, es encontrar la probabilidad de que a partir del estado i en el momento s, el proceso se transfiere al estado j antes del tiempo t, habiendo seguido exactamente el camino prescrito. Obtenemos la misma integral múltiple como se ha descrito anteriormente, excepto que la probabilidad de permanencia final se omite, ya que el proceso sólo tiene que entrar, pero no necesariamente permanecer en el estado final en el camino prescrito. Por supuesto, cuando el estado final es absorbente, los dos problemas son idénticos.

EJEMPLO 2 *Considere un modelo de tres estados saludable-enfermo-fallecido como en la Figura 4.4. Las fuerzas de la transición son constantes con* $\mu_{01} = 2$, $\mu_{02} = 1$, $\mu_{10} = 1$, $\mu_{12} = 3$. *Encontrar la probabilidad* *que una vida saludable se convierta en estado enferma, y luego muera sin recuperarse antes del tiempo 1 (que podrían ser años).*

Solución. Tenemos $\mu_{00} = -3$, $\mu_{11} = -4$. La ruta en cuestión es $\pi = (0, 1, 2)$ y la probabilidad necesaria es:

$$p_{02}(0,1) = \int_0^1 \int_{r_1}^1 e^{-3r_1} 2e^{-4(r_2-r_1)} 3dr_2dr_1.$$

La integral doble se evalúa a

$$\frac{6}{4}\left[\frac{1-e^{-3}}{3} - e^{-4}(e-1)\right] = 0.4279.$$

En general, un camino de longitud n requerirá una integral n-dimensional con un integrando que consta de $2n+1$ factores, por lo que puede convertirse rápidamente en computacionalmente infactible. Aparte de que hay otra dificultad. Por lo general, lo que realmente queremos es $p_{ij}(s,t)$. En algunos casos esto podría ser obtenido sumando $p_{ij}^{\pi}(s,t)$ para todos los posibles caminos π de i a j. Sin embargo, incluso en el más simple de los modelos, podría de hecho ser un número infinito de caminos y este procedimiento no funcionará. Esto normalmente se producirá cada vez que hay una probabilidad positiva de transiciones de dos vías, como en el modelo de tres estados salud, enfermedad, fallecido donde personas sanas pueden recuperarse. Una persona puede pasar de un estado saludable al estado fallecido, por enfermar y luego morir, o enfermarse, a continuación, recuperarse, luego, volver a enfermarse y morir, o recuperarse dos veces antes de la muerte, o cualquier número de infinitas posibilidades.

4.5.3. PROCESOS DE TIEMPO CONTINUO ESTACIONARIO

FUERZAS CONSTANTES DE TRANSICIÓN

Expresiones explícitas para las funciones de probabilidad de transición están disponibles cuando se supone que $\mu_{ij}(t) = \mu_{ij}$ para todo t. Tal proceso de Markov hace referencia a tiempo homogéneo o estacionario. La hipótesis de fuerzas constantes de transición implica que el tiempo de permanencia en cada estado es exponencialmente repartido. Además, las funciones $p_{ij}(s, s+t)$ son las mismas para todo $s \geq 0$ y por lo tanto se puede escribir $p_{ij}(t)$.

A modo de ejemplo, podemos escribir completamente la solución para el proceso estacionario general de dos estados. Supongamos que la matriz de intensidad es:

$$M = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \nu & -\nu \end{pmatrix}$$

Sea $\rho(t) = e^{-t(\mu+\nu)}$. A continuación, la matriz de transición $P(t)$, que tiene la entrada de $p_{ij}(t)$ en la fila i-ésima y la columna j-ésima, está dada por:

$$P(t) = (\mu+\nu)^{-1} \begin{pmatrix} \mu\rho(t)+\nu & -\mu\rho(t)+\mu \\ -\nu\rho(t)+\nu & \nu\rho(t)+\mu \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar que $P(t)$ satisface ecuaciones 4.14 y 4.15 por cálculo directo, observando que:

$$d\rho(t)/dt = -(\mu + v)\rho(t), \rho(0) = 1.$$

Es conveniente expresar las fuerzas de la transición y las funciones de probabilidad de transición en forma matricial. Sea M la matriz $k \times k$ con entrada (i, j) igual a μ_{ij} y $P(t)$ la matriz $k \times k$ con la entrada (i, j) igual a $p_{ij}(t)$. Correspondiente a (4.8), las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov están dadas por

$$P(t + u) = P(t)P(u). \tag{4.17}$$

También, correspondiente a (4.9) y (4.10), las ecuaciones hacia adelante y hacia atrás de Kolmogorov se pueden escribir como

$$P'(t) = P(t)M \tag{4.18}$$

y

$$P'(t) = MP(t) \tag{4.19}$$

Con la condición inicial $P(0) = I$. El problema de valor inicial formulado por 4.18 y 4.19 dan la solución:

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{Mt} \\ &= I + Mt + \frac{M^2t^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Este resultado es de poco uso debido a que la serie puede converger con bastante lentitud. Sin embargo, como se ha señalado por Cox y Miller [4], si M tiene valores propios distintos, $d_1, d_2, \dots, d_k$, entonces $M = ADC$ donde $C = A^{-1}$, $D = \mathrm{diag}(d_l, \dots, d_k)$ [6], y la columna i-ésima de A es el vector propio por la derecha asociado con d_i. Por lo tanto,

$$P(t) = A\ \mathrm{diag}(e^{d_1t}, \dots, e^{d_kt})C \tag{4.20}$$

Entonces, el problema de encontrar las funciones de probabilidad de transición se reduce al problema de la determinación de los valores propios y los vectores propios de la matriz de fuerzas de transición M. Esta tarea se realiza con software apropiado disponible libremente. El requisito que M tenga valores propios distintos no implica restricción práctica. En las situaciones que se considera, esto será el caso para casi todos los valores de los parámetros. Podemos ilustrar esto en el caso del modelo de tres estados que se muestra en la Figura 4.4. Tenemos:

$$M = \begin{pmatrix} -(\mu_{12} + \mu_{13}) & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & -(\mu_{21} + \mu_{23}) & \mu_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de M son las soluciones de [7]

[6] $\mathrm{diag}(d_l, \dots, d_k)$ es la matriz diagonal $k \times k$ cuya diagonal principal es $(d_l, \dots, d_k)$ y tiene 0 en las demás entradas.

[7] El polinomio característico de M en términos de d y sus raíces son los valores propios de M.

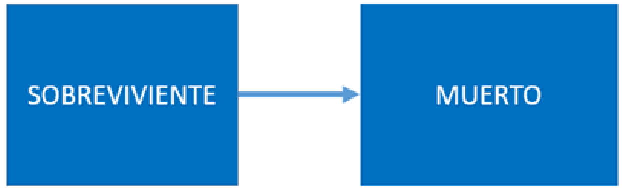


Figura 4.5: Modelo de dos estados.

$$d[d^2 + (\mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{21} + \mu_{23})d + \mu_{12}\mu_{23} + \mu_{13}\mu_{21} + \mu_{13}\mu_{23}] = 0 \tag{4.21}$$

Claramente, 0 es un valor propio. Ninguno de los otros dos valores propios puede ser 0, porque esto requeriría que al menos una fuerza de la mortalidad sea 0. Por lo tanto, si los tres valores propios no son distintos, la ecuación cuadrática entre corchetes de (4.21) debe tener una sola raíz. Es decir,

$$(\mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{21} + \mu_{23})^2 - 4(\mu_{12}\mu_{23} + \mu_{13}\mu_{21} + \mu_{13}\mu_{23}) = 0$$

Esto implica que, para cualquier elección de tres valores de parámetros, el cuarto debe satisfacer una ecuación de segundo grado. Por lo tanto, un máximo de dos valores de cualquiera de los cuatro parámetros resultarán en valores propios que no son distintos. Es entonces muy poco probable que las estimaciones de los parámetros resulten en valores propios que no son distintos. En el caso de que esto ocurre, un ligero cambio en un parámetro eliminará el problema. Si, al tratar con modelos más complicados, valores propios distintos no pueden lograrse, una descomposición análoga a la forma canónica de Jordan es posible (Véase Cox y Miller [5])

De la ecuación (4.20) ahora podemos escribir

$$p_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{k} a_{in} c_{nj} e^{d_n t}$$

donde a_{ij} y c_{ij} son las entradas (i, j) de A y C, respectivamente. Por lo tanto, las funciones de probabilidad de transición pueden expresarse explícitamente como simples funciones de t.

Por ejemplo, en el caso de dos estados (Véase Figura 4.5), tenemos:

$$M = \begin{bmatrix} -\mu_{12} & \mu_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces $d_1 = -\mu_{12}$ y $d_2 = 0$. Los vectores propios correspondientes son $(1, 0)$y $(1, 1)$. Así,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y

$$C = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la ecuación(4.20) entonces tenemos:

$$\begin{aligned} P(t) =& A \ \mathrm{diag}(e^{d_1 t}, e^{d_2 t}) C \\ =& \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\mu_{12} t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} e^{-\mu_{12} t} & 1 - e^{-\mu_{12} t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, como se esperaba, $p_{11}(t) = e^{-\mu_{12} t}$, $p_{12}(t) = 1 - e^{-\mu_{12} t}$, $p_{22}(t) = 1$, y $p_{21}(t) = 0$.

Tenga en cuenta ahora que, dado cualquier vector propio $a = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ y cualquier i fijo, la matriz $P(t)$ que tiene todas las entradas cero a excepción la fila i-ésima la cual es $(a_0 e^{\lambda t}, a_1 e^{\lambda t}, \ldots, a_k e^{\lambda t})$ es una solución de $P(t)' = P(t)M$. Esto se sigue del hecho que la entrada (ij)-ésima de $P(t)M$ será $\lambda a_j e^{\lambda t}$ que es la derivada de la correspondiente entrada en $P(t)$.

Note que dado cualquier número finito de soluciones a $P(t)' = P(t)M$, la linealidad implica que cualquier combinación lineal de estas soluciones también será una solución. Por lo tanto, buscamos una combinación lineal que satisfaga las condiciones iniciales. Esto siempre se puede hacer en el caso de que podamos encontrar k vectores propios linealmente independientes. Esto se ilustra con un ejemplo sencillo:

EJEMPLO 3 *Para los datos dados en el Ejemplo 2, encuentre las probabilidades de los siguientes eventos.*

a) Una vida ahora incapacitada estará activa en el tiempo 0.5.

b) Una vida ahora activa estará fallecida en el tiempo 1.

Solución. La matriz intensidad es:

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver inmediatamente que 0 es un valor propio con un vector propio de $(0, 0, 1)$.

También podemos señalar que puesto que las filas de $P(t)$ suman 1, las filas de M suman 0, y la última fila de P es $(0, 0, 1)$, es suficiente resolver el sistema reducido $P^{r'}(t) = P^r(t)M^r$ en el que r superíndice indica una matriz con la fila k y columna k eliminada. Así podemos considerar vectores propios de

$$M^r = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

El determinante de $M^r - \lambda I$ es $\lambda^2 + 7\lambda + 10$ el cual igualando a 0, resulta en valores propios de -5 y -2. Resolviendo, encontramos respectivos vectores propios de $(1, -2)$ y $(1, 1)$ [8].

Para satisfacer las condiciones iniciales, se necesita que la primera fila de P^r sea la combinación lineal particular de los vectores $a = e^{-5t}(1, -2)$ y $b = e^{-2t}(1, 1)$ que da el vector $(1, 0)$ cuando $t = 0$. Se resuelve esto para obtener un primer vector fila de $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$. Para la segunda fila, se necesita una combinación lineal que da el vector $(0, 1)$ cuando $t = 0$. Se resuelve esto para conseguir un segundo vector fila igual a $-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b$. Las probabilidades de transición son dadas por

$$p_{00}(t) = \tfrac{1}{3}e^{-5t} + \tfrac{2}{3}e^{-2t},\ p_{01}(t) = -\tfrac{2}{3}e^{-5t} + \tfrac{2}{3}e^{-2t},$$

$$p_{10}(t) = -\tfrac{1}{3}e^{-5t} + \tfrac{1}{3}e^{-2t},\ p_{11}(t) = \tfrac{2}{3}e^{-5t} + \tfrac{1}{3}e^{-2t}.$$

Las respuestas a las preguntas particulares formuladas son:

a) $p_{10}(0.5) = 0.0953$.

b) $1 - p_{00}(1) - p_{01}(1) = 0.8218$.

La respuesta a la parte *b)* es, por supuesto, más grande que la del Ejemplo 2 ya que aquí permite un número arbitrario de recuperaciones, así como la muerte de una persona en buen estado de salud.

FUERZAS CONSTANTESANTES DE TRANSICIÓN POR PARTES

Se ha asumido en la sección anterior de que las fuerzas de transición eran constantes con respecto al tiempo t . Esto permite la representación conveniente de las funciones de la probabilidad de transición. Desafortunadamente, en muchas aplicaciones actuariales, esto es poco práctico. Se requiere fuerzas que varíen con la edad. En el ejemplo de dos estados que se muestra en la Figura 4.5 necesitamos claramente una fuerza de mortalidad que varía con la edad de la persona. Podemos lograr esto, preservando al mismo tiempo la tratabilidad de las fuerzas constantes, utilizando las funciones de fuerza de transición que son constantes por partes. Es posible que se desee utilizar fuerzas de transición que varíen con cada año de edad. En algunos casos, sin embargo, será razonable utilizar grupos de edad más amplios.

Sea $\mu_{ij}(t) = \mu_{ij}^{(m)}$ si $t \in [t_{m-1}, t_m)$, para $m = l, 2, \ldots$, donde $t_0 = 0$. También, sea $p_{ij}^{(m)}(t)$ la función de probabilidad de transición asociada con intervalos de tiempo $[u, u+t)$ contenidos en $[t_{m-l}, t_m)$. En forma de matriz, tenemos $M^{(m)}$ y $P^{(m)}(t)$. Ahora definamos m_t, siendo el número entero tal que $t_{m_t-1} \leq t < t_{m_t}$. Luego de la ecuación (4.17) tenemos

$$P(s,t) = P^{(m_s)}(t_{m_s} - s)P^{(m_s+1)}(t_{m_s+1} - t_{m_s}) \ldots P^{m_t}(t - t_{m_t-1}). \tag{4.22}$$

Por lo tanto, dado s y t, la matriz de probabilidad de transición se puede calcular. Primero determinamos $A^{(m)}$, $D^{(m)}$, y $C^{(m)} = (A^{(m)})^{-1}$ de $M^{(m)}$ para cada m, como se describe en la sección anterior. $P^{(m)}(t)$ se obtiene entonces utilizando la ecuación (4.20). Finalmente, $P(s,t)$ se puede encontrar utilizando la ecuación(4.22). Como se mencionó anteriormente, una ventaja del enfoque descrito es que las funciones de probabilidad de transición se expresan de una manera muy conveniente para obtener cantidades tales como el tiempo de

[8] Tenga en cuenta que los vectores propios no son únicos puesto que pueden ser multiplicados por una constante distinta de cero.

espera esperado en un determinado estado, o el valor actual esperado de pagos realizados de forma continua mientras se permanece en un estado dado. La integración requerida se puede realizar analíticamente.

4.6. CADENAS DE MARKOV

DEFINICIÓN 12 *Una cadena de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ con espacio de estados discreto y tal que satisface la propiedad de Markov, es decir, para cualquier $n \geq 0$ y cualesquiera estados $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ se satisface la identidad:*

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n). \tag{4.23}$$

Si el tiempo $n+1$ se considera como un tiempo futuro, el tiempo n como el presente y los tiempos $0, 1, \dots, n-1$ como el pasado, entonces la condición (4.23) establece que la distribución de probabilidad del estado del proceso al tiempo futuro $n+1$ depende únicamente del estado del proceso en el tiempo n, y no depende de los estados en los tiempos pasados $0, 1, \dots, n-1$ [12].

4.6.1. CADENAS DE MARKOV DE ESTADO FINITO

A veces, es conveniente reetiquetar con enteros los valores posibles que pueden ser tomados por las variables aleatorias en una cadena de Markov. Nos referimos a estos enteros como los estados del sistema. Y decir que el sistema está en el estado i en el tiempo k si X_k toma el valor i. Las probabilidades fundamentales $p_{ij}(k, n)$ serán la probabilidad de estar en el estado j en el tiempo n dado que el proceso estaba en el estado i en el tiempo k. En esta sección consideramos cadenas de Markov con un número finito de estados, nos limitamos nuestra atención al caso estacionario.

EJEMPLO 4 *Una caja contiene dos bolas, cualquiera de las cuales puede ser roja o amarilla. En cada etapa, una bola es elegida al azar y substituida por una bola del color opuesto. Sea X_n el número de bolas rojas en el cuadro en el momento n. Encuentre la matriz de transición.*

Solución. Aquí tenemos una cadena de Markov de tres estados. Vamos a numerar los estados por el número de bolas rojas en la caja. Si hay 0 ó 2 bolas rojas, estamos seguros de pasar al estado 1, mientras que si hay una bola roja, nos movemos a cualquiera de los estados 0 ó 2, con igual probabilidad. Por lo tanto la matriz de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.6.2. PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN.

La probabilidad $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$ se denota por $p_{ij}(n, n+1)$, y representa la probabilidad de transición del estado i en el tiempo n, al estado j en el tiempo $n+1$. Adicionalmente se dice que la cadena es estacionaria u homogénea en el tiempo si estas probabilidades, $p_{ij}(n, n+1)$, no dependen de n, lo cual se denota como p_{ij} ó $p_{ij}(1)$.

Así, se forma la matriz de probabilidades de transición en un paso:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0k} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ p_{20} & p_{21} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k0} & p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

Las entradas de esta matriz son números no negativos y la suma de ellos en cada renglón es uno. A tales matrices cuadradas se les llama matrices estocásticas. Recíprocamente, a partir de una matriz con estas características junto con una distribución inicial para X_0, se puede construir una cadena de Markov. Las cadenas de Markov son modelos ampliamente conocidos y la propiedad de Markov hace que estos procesos sean atractivos de modelar pues dicha propiedad hace que ciertas probabilidades sean fáciles de calcular.

Las cadenas de Markov con frecuencia aparecen dentro de otros modelos estocásticos de interés teórico o aplicado. El proceso de riesgo a tiempo discreto, por ejemplo, el cual modela de manera simplificada la evolución a lo largo del tiempo del capital de una compañía aseguradora, resulta ser una cadena de Markov. El proceso de riesgo en tiempo discreto $\{C_n, n \geq 0\}$ está dado por

$$C_n = u + n - \sum_{j=1}^{n} Y_j,$$

donde se supone que $u \in \{0, 1, \ldots\}$ es el capital inicial, que en cada unidad de tiempo la compañía recibe una unidad monetaria por concepto de primas, y $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valores en el conjunto $\{0, 1, \ldots\}$ tal que $E[Y_i] < 1$ [9], representan el monto de las reclamaciones en los períodos sucesivos. Tres trayectorias de este proceso se muestran en la Figura 4.6

Proposición. La matriz de probabilidades de transición $P = (p_{ij})$ cumple las siguientes dos propiedades:

a) $p_{ij} \geq 0$,

b) $\sum_{j=0}^{k} p_{ij} = 1$.

Demostración. La primera condición es evidente a partir del hecho de que estos números son probabilidades. Para la segunda propiedad se tiene que para cualquier estado i y cualquier entero $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} 1 &= P(X_{n+1} \in \{0, 1, \ldots, k\} | X_n = i) \\ &= P(\cup_{j=0}^{k} (X_{n+1} = j) | X_n = i) \\ &= \sum_{j=0}^{k} P(X_{n+1} = j | X_n = i) \\ &= \sum_{j=0}^{k} p_{ij} \end{aligned}$$

[9] A esta condición se le llama condición de ganancia neta.

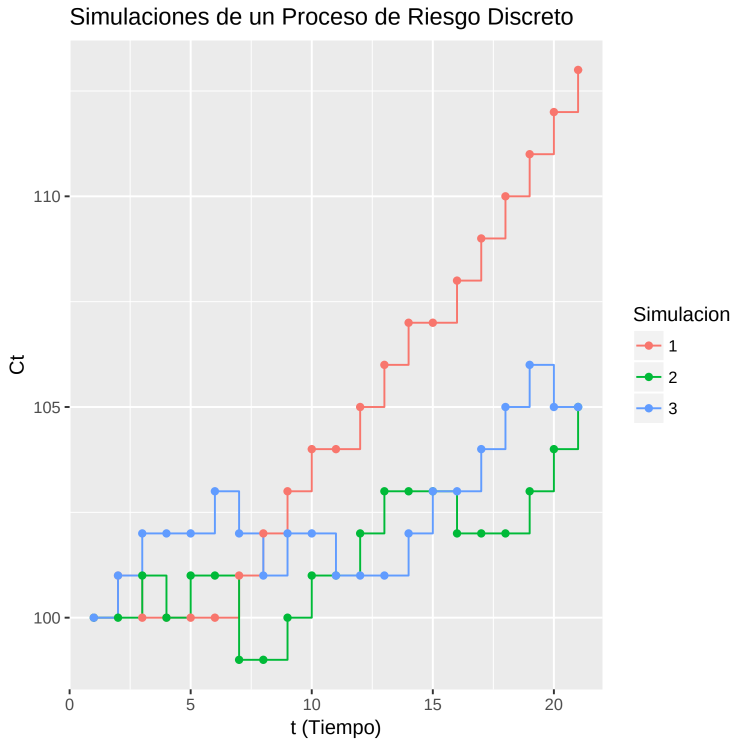


Figura 4.6: Simulaciones de un proceso de riesgo discreto con $u = 100$ y el monto de reclamaciones sigue una distribución de Poisson con parámetro $\alpha = 0.8$

Esto último significa que a partir de cualquier estado i con probabilidad uno la cadena pasa necesariamente a algún elemento del espacio de estados en el siguiente momento. En general toda matriz cuadrada que cumpla estas dos propiedades se dice que es una matriz estocástica. Debido a la propiedad de Markov, esta matriz captura la esencia del proceso y determina el comportamiento de la cadena en cualquier tiempo futuro. Si además la matriz satisface la condición $\sum_{i=0}^{k} p_{ij} = 1$ es decir, cuando la suma por columnas también es uno, entonces se dice que es doblemente estocástica [12].

4.6.3. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD INICIAL.

En general puede considerarse que una cadena de Markov inicia su evolución partiendo de un estado i cualquiera, o más generalmente considerando una distribución de probabilidad inicial sobre el espacio de estados. Una distribución inicial para una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$ es simplemente una distribución de probabilidad sobre este conjunto, es decir, es una colección de números $\{p_0, p_1, p_2 \ldots, p_k\}$ que son no negativos y que suman uno. El número p_i corresponde a la probabilidad de que la cadena inicie en el estado i. En general, la distribución inicial juega un papel secundario en el estudio de las cadenas de Markov [4].

EXISTENCIA

La propiedad de Markov es equivalente a la igualdad

$$p(x_0, x_1, \ldots, x_n) = p(x_0)p(x_1|x_0)\ldots, p(x_n|x_{n-1}).$$

Esta identidad establece que las distribuciones conjuntas $p(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ se encuentran completamente especificadas por la matriz de probabilidades de transición y una distribución inicial. En el texto de Chung [28] puede encontrarse una demostración del hecho de que dada una matriz estocástica y una distribución de probabilidad inicial, existe un espacio de probabilidad y una cadena de Markov con matriz de probabilidades de transición y distribución inicial las especificadas [4].

4.6.4. ECUACIÓN DE CHAPMAN-KOLMOGOROV.

Este resultado es análogo a (4.8) para el caso continuo. Permite descomponer la probabilidad de pasar del estado i al estado j en n pasos, en la suma de probabilidades de las trayectorias que van de i a j, y que atraviesan por un estado k cualquiera en un tiempo intermedio r.

TEOREMA 5 ***Ecuación de Chapman-Kolmogorov.*** *Para cualesquiera números enteros r y n tales que $0 \leq r \leq n$, y para cualesquiera estados i y j se cumple:*

$$p_{ij}(n) = \sum_{l=0}^{k} p_{il}(r)p_{lj}(n-r).$$

Demostración. Por el teorema de probabilidad total y la propiedad de Markov,

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= P(X_n = j|X_0 = i) \\ &= \sum_{l=0}^{k} P(X_n = j, X_r = l, X_0 = i)/P(X_0 = i) \\ &= \sum_{l=0}^{k} P(X_n = j|X_r = l)P(X_r = l|X_0 = i) \\ &= \sum_{l=0}^{k} p_{lj}(n-r)p_{il}(r). \end{aligned}$$

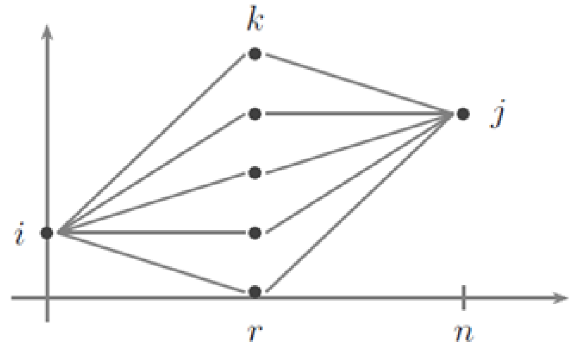
Gráficamente, las trayectorias que van del estado i al estado j en n pasos se descomponen como se muestra en la Figura 4.7. Para fines ilustrativos se dibujan las trayectorias de manera continua pero en realidad no lo son.

Esta ecuación es importante para hacer ciertos cálculos, y se usa con regularidad en el estudio de las cadenas de Markov. En particular, la siguiente desigualdad es un consecuencia del teorema.

Para cualquier estado k y para $0 \leq r \leq n$, se tiene que $p_{ij}(n) \geq p_{ik}(r)p_{kj}(n-r)$.

Como una consecuencia importante de la ecuación de Chapman-Kolmogorov se tiene el siguiente resultado:

Figura 4.7: Trayectoria de n pasos de transición.



TEOREMA 6 *La probabilidad de transición en n pasos, $p_{ij}(n)$, está dada por la entrada (i, j) de la n-ésima potencia de la matriz P, es decir, $p_{ij}(n) = (P^n)_{ij}$.*

Demostración: Esta identidad es consecuencia de la ecuación de Chapman-Kolmogorov aplicada $n-1$ veces. La suma que aparece abajo corresponde a la entrada (i, j) de la matriz resultante de multiplicar P consigo misma n veces.

$$\begin{aligned}
p_{ij}(n) &= \sum_{i_1}^{k} p_{i,i_1}(1)p_{i_1,j}(n-1)\\
&= \sum_{i_1,i_2}^{k} p_{i,i_1}(1)p_{i_1,i_2}(1)p_{i_2,j}(n-2)\\
&\vdots\\
&= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}} p_{i,i_1}(1)p_{i_1,i_2}(1)\ldots p_{i_{n-1},j}(1)\\
&= (P^n)_{ij}.
\end{aligned}$$

4.6.5. DISTRIBUCIONES DE X_n

Dada una cadena de Markov de estado finito, ¿cuál es la distribución de X_n? Esta es una pregunta básica sobre cualquier proceso estocástico. La distribución se puede dar como un vector π_n $(k+1)-$ dimensional, cuya i-ésima entrada, denotada por $\pi_n(i)$, es igual a $P(X_n = i)$. Esto dependerá, por supuesto, de π_0, el vector que da la distribución inicial en el tiempo 0. (En ciertas aplicaciones, podríamos saber el valor de X_0, en cuyo caso, π_0 será simplemente un vector con una sola entrada de uno, y las otras entradas iguales a 0). Comenzando con $n = 1$, calculamos

$$P(X_1 = j) = \textstyle\sum_{i=0}^{k} \pi_0(i)p_{ij},$$

que es sólo la entrada j-ésima del vector obtenido multiplicando el vector π_0 (visto como una matriz de $1 \times (k+1)$) a la derecha de P. El mismo argumento vale para cualquier n, y podemos concluir

$$\pi_n = \pi_0 P^n \tag{4.24}$$

EJEMPLO 5 *Una caja contiene dos bolas, cualquiera de las cuales puede ser roja o amarilla. En cada etapa, una bola se elije aleatoriamente y reemplazada con una bola de color opuesto. Sea X_n el número de bolas rojas en la caja en el tiempo n. Supongamos que comenzamos con una distribución uniforme, es decir, hay una probabilidad $1/3$ de que se tome cada uno de los valores $0, 1, 2$. ¿Cuál es la probabilidad de que $X_{101} = 1$?*

Solución. La matriz de transición es la siguiente,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La probabilidad que pide es el componente dos de $\pi_{101} = \pi_0 P^{101}$ según (4.24). La computación de grandes potencias de matrices se hace a menudo calculando valores propios, pero podemos evitar eso aquí. Después de un par de multiplicaciones, vemos que $P^3 = P$. Por lo tanto $P^5 = P^3 P^2 = P P^2 = P$, y de manera similar, cualquier potencia impar de P es igual a P. Por lo tanto,

$$\pi_{101} = (1/3, 1/3, 1/3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1/6, 2/3, 1/6).$$

La probabilidad de que X_{101} sea igual a 1 es 2/3.

4.6.6. CADENAS DE MARKOV NO ESTACIONARIAS.

Las transiciones en los modelos multi-estado son normalmente dependiente de la edad. Para controlar esto, necesitamos extender los conceptos y notación que hemos introducido para la matriz de transición para que se apliquen al caso no estacionario.

Para una cadena de Markov no estacionaria, en lugar de la única matriz de transición P, necesitamos para cada entero no negativo n, una matriz P_n cuya entrada (i, j) es $p_{ij}(n, n+1)$.

Los principales parámetros de interés son las probabilidades $p_{ij}(k, n)$ de estar en el estado j en el instante n condicionada a estar en el estado i en el instante k. Al derivar el análogo del Teorema 6 no necesitamos que las matrices sean iguales, y el argumento dado se pueden adaptar fácilmente mostrando que $p_{ij}(k, k+n)$ es la entrada (i, j) de $P_k P_{k+1} ... P_{k+n-1}$, es decir,

$$p_{ij}(k, k+n) = (P_k P_{k+1} ... P_{k+n-1})_{ij}, \tag{4.25}$$

lo que reduce al resultado del Teorema 6 del caso estacionario. La ecuación (4.24) ahora toma la forma:

$$\pi_{k+n} = \pi_k P_k P_{k+1} ... P_{k+n-1}. \tag{4.26}$$

4.7. ELEMENTOS DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

4.7.1. PROCESOS DE WIENER

DEFINICIÓN 13 *Decimos que un proceso estocástico* $\{X_t, t \ \geq 0\}$ *es un proceso de Wiener o movimiento browniano estándar (MBE) si cumple:*

1. $X_0 = 0$.

2. *Tiene incrementos normalmente distribuidos, es decir,* $\forall u > t \geq 0$ *se cumple que* $X_u - X_t \sim N(0, u-t)$.

3. *Tiene incrementos mutuamente independientes, es decir,* $\forall t_n > t_{n-1} > \ldots > t_0 \geq 0$ *se cumple que* $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_n - X_{n-1}$.

4. *Tiene trayectorias muestrales continuas con probabilidad* 1.

De la condición 2 y 3 deviene que $\forall t \geq 0, X_t \sim N(0,t)$ y $\text{Cov}[X_u, X_t] = \text{mín}(u,t)$, ya que $\forall u \geq t \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
\text{Cov}[X_t, X_u] &= E[((X_u - X_t) + X_t)X_t] \\
&= E[(X_u - X_t)X_t] + E[X_t^2] \\
&= E[X_u - X_t]E[X_t] + t \\
&= 0 + t \\
&= t.
\end{aligned}
$$

De este modo un movimiento browniano estándar está definido según una medida de probabilidad P bajo la que los incrementos tienen las propiedades anteriores. Por lo tanto,

$$
P\left(\frac{X_u - X_t}{\sqrt{u-t}} < h\right) = \phi(h) = \int_{-\infty}^{h} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{s^2}{2}} ds
$$

siendo $\phi(\cdot)$ la función de distribución acumulada de una normal estándar.

OBSERVACIÓN 2 *Un movimiento browniano estándar es un proceso de Markov, ya que el incremento desde el presente a cualquier período futuro es independiente del pasado. También, es martingala por ser el cambio esperado en el valor del proceso igual a 0.*

Por otra parte Mikosch (1999) [2] demuestra que las trayectorias muestrales de un movimiento browniano estándar no son diferenciables en ningún tiempo. A esta irregularidad se ha de añadir que la variabilidad de estas trayectorias no se hallan acotadas en ningún intervalo finito $[0, t]$. Estas dos irregularidades son las que obligan a recurrir al cálculo estocástico. Tres trayectorias de un proceso de Wiener estándar $\{W(t), t \in [0, 10]\}$ se muestran en la Figura 4.8.

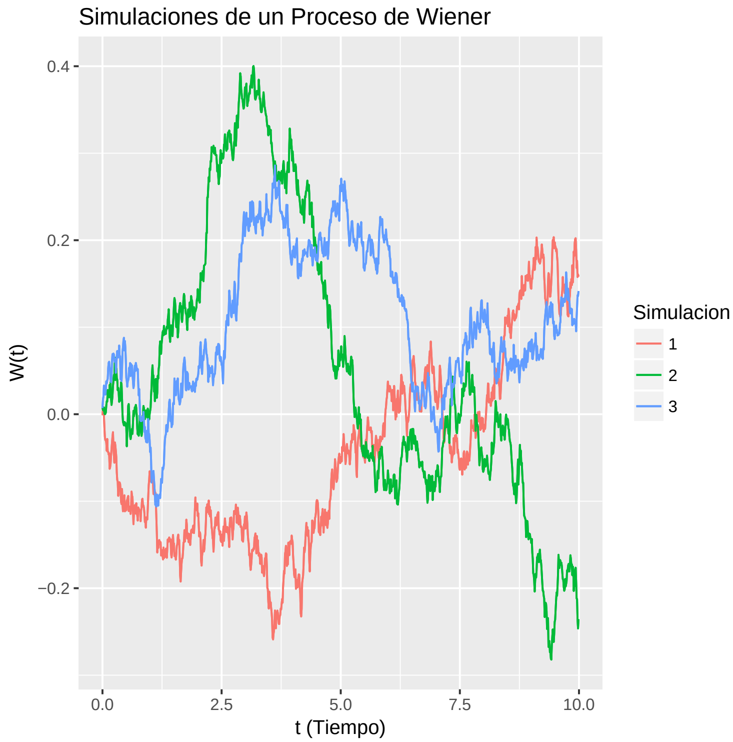


Figura 4.8: Simulaciones de un proceso de Wiener estándar $\{W(t), t \in [0, 10]\}$

4.7.2. PROCESO DE WIENER GENERALIZADO.

Consideremos un movimiento browniano estándar $\{W_t, t \geq 0\}$ y un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ definido por:

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t, \qquad t \geq 0$$

siendo μ, σ constantes y X_0 el valor inicial del proceso.

A partir de las propiedades del movimiento browniano estándar, tenemos que X_t se distribuye normalmente con media μt y varianza $\sigma^2 t$. Así el cambio del proceso $\{X_t, t \geq 0\}$ se determinará a partir de

$$X_u - X_t = \mu(u - t) + \sigma(W_u - W_t) \qquad \forall u > t \geq 0.$$

El incremento en el proceso para un intervalo infinitesimal será

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t,$$

en el que dW_t, se puede considerar cómo una variable aleatoria con distribución $N(0, dt)$. De este modo el proceso $\{X_t, t \geq 0\}$ se denomina proceso de Wiener generalizado o Movimiento Browniano Geométrico (MBG) donde el parámetro μ denominado componente tendencial, determina el cambio esperado por unidad de tiempo, y el parámetro σ denominado volatilidad del proceso, refleja la incertidumbre acerca de los valores futuros del proceso.

El proceso de Wiener generalizado sigue siendo un proceso de Markov, y sus trayectorias son continuas no diferenciables en ningún punto, pero ya no es necesariamente una martingala como si lo era el movimiento browniano estándar. Sólo será una martingala cuando el componente tendencial tome el valor 0.

Cuando los parámetros μ y ρ varían determinísticamente en el tiempo, $\{X_t, t \geq 0\}$ será un proceso de Wiener generalizado no homogéneo con respecto al tiempo y se puede escribir como

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t.$$

Para un intervalo de tiempo relativamente pequeño Δ t, tendremos un incremento esperado en el proceso de aproximadamente $\mu \Delta t$ y su varianza será aproximadamente $\sigma^2 \Delta t$. Rigurosamente el incremento para este intervalo será de

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \int_t^{t+\Delta t} \mu_u du + \int_t^{t+\Delta t} \sigma_u dW_u,$$

siendo $\int_t^{t+\Delta t} \sigma_u dW_u$ la denominada integral estocástica o integral de Ito.

De entre las muchas propiedades de la integral de Ito, aquí destacaremos que si $\sigma(u)$ es una función determinística entonces $\int_t^{t+\Delta t} \sigma_u dW_u$ tiene distribución $N\left(0, \int_t^{t+\Delta t} \sigma_u^2 d_u\right)$.

4.7.3. PROCESOS DE DIFUSIÓN

DEFINICIÓN 14 *Un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ será un proceso de difusión unidimensional si se puede representar para un intervalo de tiempo infinitesimal*

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t,$$

pasando a ser ahora el componente tendencial y la volatilidad, funciones del tiempo y del valor actual del proceso. Cuando el proceso estocástico se halla en las dos partes de la igualdad, ésta se denomina ecuación diferencial estocástica (EDE).

Dado que dW_t tiene una distribución $N(0, dt)$, la media y varianza de los incrementos en el proceso para un intervalo infinitesimal $[t, t + dt]$ condicionadas a la información disponible en el instante t serán

$$E_t[dX_t] = \mu(X_t, t)dt$$
$$V_t[dX_t] = \sigma^2(X_t, t)dt$$

Rigurosamente el incremento en el proceso de difusión para el intervalo $[t, t + \Delta t]$ será

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \int_t^{t+\Delta t} \mu(X_s, s)ds + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(X_s, s)dW_s,$$

siendo

$$\int_t^{t+\Delta t} \mu(X_s, s)ds$$

una integral de Riemann y

$$\int_t^{t+\Delta t} \sigma(X_s, s)dW_s$$

una integral de Ito.

Un proceso de difusión es un proceso de Markov debido a que tanto el componente tendencial como la volatilidad dependen exclusivamente del valor actual del proceso. Al igual que el proceso de Wiener generalizado no es una martingala, salvo en este caso que $\mu(X_t, t) = 0$, $\forall X_t, t \geq 0$. Igualmente las trayectorias muestrales serán continuas y no diferenciables en ningún punto. En cuanto al espacio de estados S y la distribución de los valores futuros dependerán de las funciones μ y σ.

4.7.4. LEMA DE ITO

TEOREMA 7 *Un proceso estocástico unidimensional $\{X_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Ito si sigue la siguiente dinámica*

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

con $X_t \in \mathbb{R}$, donde μ_t, σ_t son a su vez procesos estocásticos.

El Lema de Ito se puede considerar como la correspondiente estocástica de la regla de la cadena del cálculo ordinario. Se hace indispensable para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas en las cuales el proceso estocástico, sigue una dinámica en la que se incluyen a su vez otros procesos estocásticos.

Sea el proceso de Ito anterior y $f(X_t, t) \in \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable dos veces respecto a X_t y una vez respecto a t. Entonces el proceso estocástico $\{Y_t, t \geq 0\}$ definido por

$$Y_t = f(X_t, t), \qquad t \geq 0,$$

será también un proceso de Ito, determinándose su dinámica como sigue:

$$dY_t = \left[\frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X}\mu_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X^2}\sigma_t^2\right] dt + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X}\sigma_t dW_t.$$

La expresión anterior se puede escribir cómo

$$dY_t = \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X^2}(dX_t)^2$$

donde hemos de tener en cuenta para el cálculo de $(dX_t)^2$ que

$$(dt)^2 = dtdW_t = 0$$

y

$$(dW_t)^2 = dt,$$

de manera que

$$(dX_t)^2 = (\mu_t dt + \sigma_t dW_t)^2 = \mu_t^2 (dt)^2 + 2\mu_t\sigma_t dt + \sigma_t^2 (dW_t)^2 = (\sigma_t^2)dt.$$

4.7.5. TEOREMA DE GIRSANOV

Una importante aplicación del Teorema de Girsanov, es recoger la probabilidad de valoración, en la ecuación diferencial estocástica que recoge la evolución del proceso estocástico referente al precio de instrumentos financieros.

Según este teorema un proceso de Wiener generalizado con componente tendencial, es decir, que no es martingala, se puede ver como un proceso de Wiener sin componente tendencial, mediante un cambio sobre la medida de probabilidad, P.
Así, definido un espacio de probabilidad, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, consideramos una variable aleatoria, $L \geq 0$ con esperanza la unidad, tal que

$$Q(A) = E[1_A L]$$

define una nueva medida de probabilidad. El hecho de que la esperanza de L sea igual a 1 garantiza que

$$Q(\Omega) = E[L] = 1.$$

Decimos que L es la densidad de Q respecto a P, en términos matemáticos

$$\frac{dQ}{dP} = L$$

La esperanza matemática de la variable aleatoria X en el nuevo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ será

$$E_Q[X] = E[XL].$$

Rigurosamente en términos generales, el teorema es el siguiente.

TEOREMA 8 *Sea $\{X_t, t \geq 0\}$ un proceso adaptado a P que cumple la condición de Novikov:*

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T X_t^2 dt\right)\right] < \infty,$$

y $\{W_t, t \in [0,T]\}$ *un movimiento browniano estándar. Entonces, el proceso*

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t X_s ds$$

es un movimiento browniano respecto a la nueva medida de probabilidad Q*.*

Este teorema nos permitirá aplicar la nueva medida de probabilidad Q con riesgo neutro, usada en la valoración de instrumentos financieros cotizados, en lugar de la probabilidad real, P con riesgo positivo.

Consideraremos como ejemplo el modelo de Black-Scholes, según el cual el precio de un activo con riesgo, será

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$

donde interpretamos μ como el tanto de rendimiento medio y σ como la volatilidad del rendimiento.

Por otra parte tenemos el activo sin riesgo que evoluciona

$$\beta_t = \beta_0 e^{rt}.$$

A continuación pretendemos encontrar la medida de probabilidad Q, que determina que para esa probabilidad

$$E_Q\left[\frac{S_t}{\beta_t}\right] = \frac{S_0}{\beta_0}$$

Por otra parte tenemos que según la medida de probabilidad real, P, se da

$$\begin{aligned} E\left[\frac{S_t}{\beta_t}\right] &= \frac{S_0}{\beta_0} E_P\left[\exp(\sigma)W_t + (\mu - (1/2)\sigma^2 - r)t\right] \\ &= \frac{S_0}{B_0}\exp((\mu - r)t). \end{aligned}$$

De este modo, la medida de probabilidad, Q, riesgo neutro, ha de cambiar μ por r. Llamando

$$\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma dW_t \\ &= r dt + \sigma d\left(W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t\right) \\ &= r dt + \sigma d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

Así según el Teorema de Girsanov, existe una probabilidad, Q bajo la cual el proceso $\tilde{W}_t$ es un movimiento browniano estándar, con lo cual el rendimiento del activo S_t, será equivalente al de β_t, es decir el rendimiento libre de riesgo. En definitiva, valorar bajo la medida de probabilidad Q, será equivalente a valorar con el tipo libre de riesgo, mas una prima de riesgo, $\pi(t)$, que recoge el precio de mercado del riesgo inherente al instrumento financiero, es decir, una medida de la aversión al riesgo agregado en el mercado.

Se dice que se dá una situación de ausencia de oportunidad de arbitraje (AOA), si existe una medida de probabilidad Q, riesgo neutro, equivalente a la medida de probabilidad real P, en los términos mencionados arriba. Asimismo, se dice que el mercado es completo, si esta medida de probabilidad, Q, es única.

Capítulo 5

ACTUARÍA

5.1. CONCEPTOS EN EL ÁREA DE SEGUROS DE VIDA

DEFINICIÓN 15 ***Prima:*** *[4] es un pago por adelantado que un asegurado realiza a una compañía aseguradora para obtener una cobertura parcial o completa contra un riesgo determinado, en los términos y condiciones que establece la del seguro.*

DEFINICIÓN 16 ***¿Qué es el seguro?*** *Básicamente, el seguro es un contrato que realiza el Asegurado y el Asegurador en el cual se compromete este último, mediante el cobro de una prima, a indemnizar los daños causados por el siniestro ocurrido, siempre y cuando éste se encuentre cubierto por la póliza o contrato [3].*

Para comprender todo lo relacionado con la actividad aseguradora es necesario definir varios términos que intervienen en la misma y que deben estar claros antes de realizar el análisis de cualquier resultado o más aún, antes de empezar con el estudio, la búsqueda y el cálculo de las pólizas o planes de pensión a realizar. En primer lugar, se tienen tres conceptos básicos en el seguro: el riesgo, la incertidumbre y el siniestro [17].

DEFINICIÓN 17 *Carlos Trujillo define en [15]* ***el riesgo*** *como un acontecimiento futuro e incierto que al momento de producirse da lugar a consecuencias perjudiciales.*

DEFINICIÓN 18 ***La incertidumbre*** *la describe como el desconocimiento acerca de cuándo un hecho o suceso va a ocurrir, así como la duración e intensidad [15].*

DEFINICIÓN 19 *El término* ***siniestro*** *se refiere a la materialización del riesgo.[3]*

Se tienen los siguientes conceptos que son clave en una empresa de seguros y los personas que participan en el contrato de seguro:[17]

DEFINICIÓN 20 ***Asegurador:*** *persona jurídica que acepta el riesgo y se compromete a pagar o indemnizar, en caso de ocurrir un siniestro.*

DEFINICIÓN 21 ***Tomador:*** *persona natural o jurídica que, obrando por cuenta propia, traslada los riesgos al Asegurador y se obliga a pagar la prima.*

DEFINICIÓN 22 ***Asegurado:*** *persona natural o jurídica cuyos bienes, enfermedades, accidentes o vida se protegen a través del contrato de seguros. El asegurado tamién es la persona sobre la que recae la cobertura del riesgo.*

DEFINICIÓN 23 ***Beneficiario:*** *persona designada para recibir la indemnización.*

DEFINICIÓN 24 *La* ***póliza*** *es el contrato de seguro donde se especifican las condiciones bajo las cuales el Asegurador acepta el riesgo y se obliga a indemnizar las pérdidas o daños económicos que puedan sobrevenir al Asegurado, los cuales estén cubiertos por la misma. Asimismo, el tomador se obliga a cumplir dichas reglas y se obliga al pago de la prima correspondiente. En otras palabras, es un convenio legal entre el Asegurador y el Tomador que cumple ciertas cláusulas.[16]*

Las partes en que se divide la póliza son:

1. **Condiciones Generales:** cláusulas que son iguales para todos los contratos del mismo género.
2. **Condiciones Particulares:** aquellas que se confeccionan para adaptar la póliza a cada caso en especial.
3. **Anexos:** documentos que se agregan a la póliza para hacer algún cambio o modificación en ella.

Además, para soportar cualquier evento numeroso que pueda ocurrir o que traiga como consecuencia múltiples asegurados afectados y por tanto, múltiples indemnizaciones, la compañía de seguros debe contar con reservas que le permitan afrontar dicha situación. En otros términos, la reserva no representa una utilidad para la empresa de seguros sino que se conserva como garantía de que cubrirán las reclamaciones de los tenedores de póliza. Se define en forma amplia como la diferencia entre el valor actual de la suma asegurada y el de las primas futuras.

Las pólizas de vida consisten en indemnizar al asegurado o al (los) beneficiario (s) en el momento del fallecimiento del inscrito o al tiempo que éste haya acordado en el contrato de seguro. El riesgo que está en juego es el fallecimiento del asegurado, por lo tanto lo que se mide es la probabilidad de que el inscrito, asegurado o beneficiario (depende del contrato que se haya realizado) llegue con vida a cierta edad o al final del contrato. Para el cálculo de la prima se utilizan fórmulas actuariales con variables que son sustituidas por los valores de la tabla de mortalidad a usar. Por ejemplo, si se quiere saber la probabilidad de que una persona de edad x esté viva n años después, es decir, a la edad $x+n$; se calcula la probabilidad de supervivencia denotándose de la siguiente manera:

$$ {}_{n}p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \tag{5.1} $$

donde el numerador se refiere al número de personas vivas a la edad $x+n$ (los casos favorables) que será menor que el denominador o el número de personas vivas a la edad x (casos posibles) y, la probabilidad de mortalidad como,

$$ {}_{n}q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \tag{5.2} $$

donde el numerador se refiere al número de personas vivas a la edad x menos la cantidad de personas vivas a la edad $x+n$ que será menor que el número de personas vivas a la edad x.

Por otra parte, se tiene que sólo hay dos posibilidades para esa persona, está viva o está muerta a la edad $x+n$. Sabiendo que la suma de las probabilidades individuales es igual a la probabilidad total, se tiene lo siguiente:

$$ {}_np_x +_n q_x = 1. \tag{5.3}$$

5.2. SEGURO DE VIDA

En seguros, el área actuarial es aquella que equilibra y sostiene el mercado asegurador. Se hacen estudios estadísticos, análisis de datos, de resultados, se predice lo que pueda ocurrir, se calcula la probabilidad de ocurrencia de un suceso y se halla la tasa que, en términos actuariales, es el costo matemático del riesgo. Se observa entonces que a fin de cuentas son las aplicaciones matemáticas y los conocimientos que se puedan tener sobre ellas los que forman en cierta parte a un actuario [15].

Se desea saber cuál será el número aproximado de personas que sobrevivan luego de una cantidad dada de años, que es lo mismo a hallar aproximadamente la probabilidad de supervivencia o mortalidad de un individuo en ese grupo de personas. Se aplicaría entonces el recíproco del Teorema de Bernoulli (Ley de los grandes números), donde se permite determinar un valor tan aproximado como se quiera de la probabilidad de un acontecimiento observado, repitiendo un gran número de veces el experimento. Es así como se obtienen los valores que servirán para construir la tabla de mortalidad que permita hallar el valor de las primas [15].

Para el actuario trabajando en el área del seguro de vida, el principal objetivo es estimar el patrón de mortalidad, que se exhibe por un grupo de individuos. Un dispositivo básico para llevar a cabo esto es conocido como una tabla de vida o tabla de mortalidad.

Sea l_0 un número arbitrario, usualmente tomamos una cifra redonda como 100000. Supongamos que iniciamos con un grupo l_0 de recién nacidos. Podríamos predecir cuántos de estos individuos sobrevivirán en cualquier tiempo dado en el futuro. Por supuesto, no podemos esperar calcular esto exactamente, pero podemos esperar llegar a una estimación cercana si tenemos estadísticas suficientemente buenas. Sea l_x el número de aquellas vidas originales de 0 años de edad quienes todavía estén vivos a la edad x, y sea d_x el número de aquellas vidas originales de 0 años de edad quienes mueren entre la edad x y $x+1$. La relación básica entre estas cantidades es:

$$l_{x+1} = l_x - d_x.$$

DEFINICIÓN 25 *Una tabla de vida es una estructura matricial de l_x y d_x donde x es un entero no negativo (Véase Tabla 5.1). La tabla terminará en alguna edad, denotado por ω, tal que $l_\omega = 0$. Éste es la edad límite de la tabla, y denota la primera edad en la cual todos los del grupo original han muerto. El valor real ω variará con la tabla de vida particular, pero típicamente se toma alrededor de 110 ó más [14].*

Tabla 5.1: Modelo de tabla de vida.

x	lx	dx
0	100000	2000
1	98000	1500
2	96500	1000
3	96500	900
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ω	0	

Se sabe entonces que Graunt fue el primero en crear una tabla de mortalidad, pero en la búsqueda de mejorar esta tabla y darle un enfoque lógico a los resultados en la misma, continuaron los científicos Jan Witt y Jan Hudde, quienes partieron del supuesto de una fuerza constante de mortalidad, lo cual fue de vital importancia cuando se empezaron a realizar los estudios sobre la matemática actuarial. Se tiene que las tablas de mortalidad y de vida tienen sus orígenes en estudios estadísticos y probabilistas. Actualmente, cada región o país puede generar su propia tabla basada en el comportamiento demográfico de la población. En las ciencias actuariales el uso de estas tablas y se aplica en el el ramo de **seguros de vida** [15].

5.2.1. RIESGOS Y SEGUROS.

Un actuario típico se refiere a muchos problemas, pero podemos identificar dos grandes temas abordados por esta profesión: riesgo y finanzas. No importa cuáles son las precauciones que toma, usted no puede librarse por completo de la posibilidad eventos desafortunados, pero lo que se puede hacer es tomar medidas para mitigar la pérdida financiera en cuestión. Uno medida es adquirir un seguro.

Los orígenes fueron hace muchos años y se puede remontar a los miembros de una comunidad que ayudan a otros que ha sufrido la pérdida de una forma u otra. Por ejemplo, la gente ayudaba los vecinos que habían sufrido una muerte o enfermedad de un familiar. Si bien este tipo de ayuda fue en muchos casos sin duda debido a sentimientos altruistas, también había una motivación de interés. Debemos estar preparados para ayudar a un vecino que sufre alguna calamidad, ya que la familia podrían necesitar dicha asistencia. Esto a la larga se formalizó, dando lugar a las compañías de seguros que conocemos hoy en día.

Con la institución de las compañías de seguros, el intercambio ya no se limita al ámbito de vecinos o miembros de la comunidad, sino que podría ser entre todos los que eligieron adquirir un seguro de una compañía en particular. Aunque hay muchos tipos diferentes de seguro, el principio básico es similar. Una empresa conocida como el asegurador se compromete a pagar dinero, el cual nos referiremos como beneficios, en momentos determinados, ante la ocurrencia de eventos específicos que causan la pérdida financiera. A cambio, el seguro de la compra de la persona, conocida como el asegurado, se obliga a los pagos de las cantidades prescritas para la empresa, estos pagos normalmente se conocen como las **primas**. El contrato entre el asegurador y el asegurado es a menudo conocida como la **póliza de seguro**.

El Riesgo se transfiere así de las personas que enfrentan pérdida a la aseguradora. La aseguradora a su vez reduce su riesgo al asegurar un número suficientemente grande de individuos, de modo que las pérdidas se pueden predecir con precisión. Consideremos el siguiente ejemplo, que simplificado pero diseñado para ilustrar la idea básica.

Supongamos que un cierto tipo de evento es poco probable que ocurra, pero si es así, provoca una pérdida financiera de $100,000$. El asegurador estima que aproximadamente 1 de cada 100 personas que se enfrentan a la posibilidad de dicha pérdida en realidad lo experimentará. Si se asegura a $1,000$ personas, entonces se puede esperar 10 pérdidas. Sobre la base de este modelo, el asegurador cargaría cada persona una prima de $1,000$. (Estamos ignorando ciertos factores, tales como los gastos y ganancias.) Sería recoger un total de $1,000,000$ y se tiene la suficiente precisión para cubrir la pérdida de $100,000$ para cada uno de los 10 individuos que experimentan esto. Cada individuo ha eliminado su riesgo, y en la medida en que la estimación de 10 pérdidas es correcta, la aseguradora ha eliminado asimismo su propio riesgo.

Concluimos esta sección con unas cuantas palabras sobre la conexión entre el seguro y juegos de azar. Muchas personas creen que el seguro es en realidad una forma del último, pero en realidad es exactamente lo contrario. Los juegos de azar intercambian cierto por lo incierto. La cantidad de dinero que se tiene en el bolsillo está ahí con certeza si tu no juegas, pero está sujeto a incertidumbre si se decide apostar. Por otro lado, el seguro negocia incertidumbre por certeza. el consumo incierto de tu riqueza, debido a la posibilidad de pérdida financiera se convierte a certidumbre de pagos mucho más pequeños de primas si tu contratas un seguro en contra de la pérdida.

5.3. LA ADECUACIÓN Y LA EQUIDAD.

Ahora podemos dar una descripción general de las responsabilidades de un actuario. La imperiosa tarea es asegurar que las primas, junto con las ganancias de inversión, son **adecuados** para proporcionar el pago de los beneficios. Si esto no es cierto, entonces no será posible que el asegurador cumpla con sus obligaciones y algunos de los asegurados necesariamente no recibirán compensación por sus pérdidas. El desafío en el cumplimiento de este objetivo surge de las diversas áreas de la incertidumbre. La cantidad y el momento en que los beneficios tendrán que ser pagados, así como las ganancias de la inversión, no se conocen y están sujetas a fluctuaciones aleatorias. El actuario hace uso sustancial de métodos probabilistas para manejar esta incertidumbre.

Otro de los objetivos es lograr la **equidad** en la fijación de las primas. Si un asegurador ha de atraer a los compradores, debe cobrar tasas que se perciben como justas. Aquí también, la aleatoriedad significa que no resulta fácil cómo definir la equidad en este contexto. No se puede decir que dos personas que pagan la misma cantidad de las primas recibirá exactamente el mismo beneficio, ya que negaría el arreglo compartido inherente en la idea de seguros. Mientras existen diferentes puntos de vista posibles, la equidad en seguros se espera generalmente que signifique el hecho que la esperanza matemática de estos dos individuos deberían ser los mismos [14].

En los modelos y cálculos actuariales o financieros que se lleven a cabo debe cumplirse la equidad para que sea confiable la operación. Los cálculos se realizan en el momento actual y se denomina **ecuación de equilibrio financiero-actuarial**, donde se verifica la igualdad entre valor actual de las aportaciones y el valor actual de las prestaciones. Ahora bien, éste es el valor actual que debe pagar el participante por un intervalo de tiempo y que a su vez sea igual al valor que recibirá luego de ese tiempo, calculado éste en el tiempo presente. En otras palabras, según la definición dada por el diccionario de finanzas, el valor actual es el resultado de descontar cantidades futuras de la cantidad presente, utilizando una determinada tasa de descuento. Esta tasa de descuento refleja los tipos de interés del dinero y el elemento de riesgo que existe en la operación. Se tiene que mientras mayor sea el lapso de tiempo, menor será el valor actual.

Ahora bien, este principio de equivalencia es fundamental para que permanezca explícita la confiabilidad de los cálculos y la finalidad que se desea, la cual se relaciona con que ambas partes, la institución aseguradora o financiera y el asegurado o cliente respectivamente, salgan beneficiados en dicha operación.

5.4. PROBABILIDAD DE SUPERVIVENCIA Y MORTALIDAD

Aunque suponemos que podemos predecir con exactitud l_x, todavía hay aleatoriedad en nuestro modelo, ya que no se sabe si cualquier individuo dado será uno de los supervivientes en un punto determinado de tiempo. Es conveniente introducir algunas nociones elementales de probabilidad. Para enteros no negativos n y x, sea:

$$ {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}. \tag{5.4} $$

¿Cuál es el significado de este término? Tomemos en cuenta que l_x denota la cantidad de sobrevivientes a la edad x y l_{x+n}, cantidad de personas que sobrevivirá a la edad $x+n$ del grupo considerado. El cociente entonces nos da la probabilidad de que una persona de edad x, denotada por (x), sobrevivirá a la edad $x+n$ años.

De igual manera se define:

$$ {}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}. \tag{5.5} $$

Esto nos da la probabilidad de que (x) muera entre las edades de x y $x+n$. Está claro que

$$ {}_n q_x = 1 -_n p_x. \tag{5.6} $$

A modo de ejemplo, de la Tabla 5.1 se tendría ${}_2p_0 = 965/1000$, ${}_2q_1 = 25/980$.

OBSERVACIÓN 3 *Puesto que el subíndice 1 a la izquierda se presenta con frecuencia se omite por conveniencia de notación. Es decir, p_x, denota ${}_1p_x$, y q_x denota ${}_1q_x$. La cantidad q_x se refiere a menudo como la tasa de mortalidad a la edad x.*

¿Cuál es la probabilidad de que (x) morirá entre las edades de $x+n$ y $x+n+k$? Esto es una cantidad que vamos a utilizar con frecuencia. Hay tres maneras principales de expresarla:

$$
\begin{aligned}
{}_{n|k}q_x &= \frac{l_{x+n} - l_{x+n+k}}{l_x} && (5.7)\\
&= {}_np_x - {}_{n+k}p_x && (5.8)\\
&= {}_np_x\ {}_kq_{x+n} && (5.9)
\end{aligned}
$$

El numerador es el número de las personas que viven a la edad $x+n$, menos el número de personas viviendo a la edad $x+n+k$. Esta diferencia debe ser el número de personas que murieron entre las dos edades. Dividiendo por el número de personas con las que se empezó nos dará la probabilidad requerida. En la segunda expresión expresamos la cantidad como la probabilidad de que (x) vivirá n años, pero no vivirá $n+k$ años. En la tercera expresión se consideran dos etapas al morir entre las edades especificadas, (x) debe vivir primero en la edad $x+n$ y, luego, el individuo, siendo entonces de la edad $x+n$, debe morir en los próximos años k.

Otra identidad útil, que nos referiremos como la regla de la multiplicación, es:

$$
{}_{n+k}p_x = {}_np_x\ {}_kp_{x+n} \tag{5.10}
$$

para todos los enteros no negativos n, k y x. Intuitivamente, se dice que, para que (x) viva $n+k$ años, el individuo debe primero vivir n años, y luego, siendo de la edad $x+n$, debe vivir otros k años [1].

OBSERVACIÓN 4 *Hay que notar que,*

$$
\begin{aligned}
{}_{n+k}p_x &= {}_np_x\ {}_kp_{x+n}\\
&= {}_np_x(1 - {}_kq_{x+n})\\
&= {}_np_x - {}_np_x\ {}_kq_{x+n}\\
&= {}_np_x - {}_{n|k}q_x\\
&= {}_{n|k}p_x
\end{aligned}
$$

Por lo que,

$$
\begin{aligned}
{}_{n|k}p_x + {}_{n|k}q_x &= {}_np_x\\
\frac{{}_{n|k}p_x}{{}_np_x} + \frac{{}_{n|k}q_x}{{}_np_x} &= 1.
\end{aligned}
$$

Las probabilidades del miembro izquierdo de la igualdad son condicionales.

5.5. CONSTRUCCIÓN DE LA TABLA DE VIDA

La tabla de vida se construye en la práctica, obteniendo en primer lugar los valores de q_x para $x = 0, 1, ..., w-1$. La obtención de estos valores es un problema estadístico que no vamos a discutir en detalle. Se trata básicamente de la realización de un estudio en el que se observa cuánto tiempo la gente de diferentes edades vivirán.

Por ejemplo, si observamos un grupo de $1,000$ personas de 50 años de edad exacta y 10 de ellos mueren dentro de 1 año, entonces podríamos estimar q_{50} como $0,01$. Por supuesto, esto es una simplificación extrema y el proceso es mucho más complicado. No es práctico reunir un grupo de personas de exactamente 50 años de edad en un momento dado de tiempo, y luego observarlos durante un año entero. En la práctica, las personas entrarán en el estudio en varias ocasiones, y lo abandonará por razones distintas de la muerte. Además, se debe lograr la coherencia entre los valores en las diferentes edades. El área estadística conocida como análisis de supervivencia se ocupa de estos problemas. La tabla de vida puede ser construida inductivamente, a partir de l_0, a partir de las fórmulas:

$$d_x = l_x q_x, \qquad l_{x+1} = l_x - d_x, \tag{5.11}$$

sin embargo, no es, por lo general, necesario calcular realmente l_x y d_x. En la práctica, las tablas de vida se especifican por sólo dar los valores de q_x, que es suficiente para los cálculos necesarios. La ventaja de la forma tradicional reside principalmente en su atractivo intuitivo, en lugar de su utilización como herramienta de cálculo [16].

En la rama de Seguros de Vida se llevan a cabo estudios para la creación de nuevas pólizas o para renovar los cálculos de las tasas respectivas. Se debe tener en cuenta la probabilidad de que el asegurado o beneficiario de la póliza contratada siga con vida al momento de recibir la indemnización. Para efectuar estos cálculos, se utiliza una tabla de mortalidad cuyos valores en cada variable dependen del interés técnico que se use, el cual puede tener un valor máximo de 12 %, ya que a mayor interés técnico menor prima pero más riesgo para la empresa, por lo que suele aplicarse un interés técnico de 6 %. Después de fijar este interés, debe hallarse el valor actual que está dado por:

$$v = \frac{1}{1+i},$$

el cual servirá para conseguir los valores de algunas columnas en la tabla. Se tiene entonces que la tabla de mortalidad para cálculos actuariales está compuesta por las siguientes columnas:

- q_x: Probabilidad de que una persona de edad x fallezca antes de alcanzar la edad $x + 1$.
- l_x: Número de personas vivas a la edad x.
- p_x: Probabilidad de que una persona de edad x sobreviva un año más.
- d_x: Número de personas fallecidas entre la edad x y $x + 1$.
- D_x: Columna de valores conmutativos que vienen dado por la fórmula: $D_x = v^x l_x$.
- N_x: Columna de valores conmutativos que se obtienen mediante el siguiente cálculo $N_x = \sum D_x$.
- C_x:Columna de valores conmutativos alcanzados al aplicar $C_x = v^{x+1} d_x$.
- M_x: Columna de valores conmutativos que se obtienen mediante el siguiente cálculo $M_x = \sum c_x$.

Esas son las columnas que componen los tipos de tablas de mortalidad utilizadas para realizar los cálculos relacionados con seguros sobre personas. Las últimas cuatro columnas son consecuencia de los valores dados por las anteriores, los cuales a su vez dependerán del interés técnico que se utilice. Hay sociedades de actuarios que construyen tablas en base a la recopilación de datos que hacen sobre la mortalidad de la población estudiada, realizan los estudios estadísticos necesarios y así calculan los valores que componen la columna de la variable q_x, referidos a la probabilidad de que una persona de edad x muera antes de llegar a la edad $x+1$. Es importante tener en cuenta que se debe llevar a cabo el estudio estadístico de tal forma que los resultados sean confiables, por lo que se deben clasificar, coordinar los resultados experimentales, distribuirlos de manera racional en grupos comparables entre sí, en fin, hacer los estudios estadísticos necesarios. Pero debe considerarse también las condiciones de la población que se está analizando, que estén sometidas a las mismas influencias y que además, las observaciones provengan de una muestra probabilística. Esto limita la construcción de las tablas de mortalidad, ya que es forzoso conseguir grupos lo suficientemente grandes como para alcanzar resultados estables, se sabe que en estadística eso es muy relevante para validar los resultados.

Se tiene entonces que los valores de la columna q_x son los que marcan la diferencia entre las distintas tablas de mortalidad ya que dependen de las condiciones de la población que se haya estudiado. Luego, entre las más conocidas o usadas para los cálculos del Seguro de Vida están: Comisionado Ordinario Estándar (Commissionary Standard Ordinary C.S.O.) y Sociedad Ordinaria de Actuarios (S.O.A.) [15].

5.6. LA FUERZA DE LA MORTALIDAD

Una motivación intuitiva. ¿Cuál es la probabilidad de que (x) morirá en el instante siguiente de tiempo. Podríamos aproximar esto observando ${}_hq_x$, pero si asumimos la continuidad y tomamos el límite cuando h tiende a 0, obtendríamos 0. Pero la respuesta 0 no nos da ninguna información sobre la mortalidad de (x) en ese punto. En su lugar, calculemos una tasa anual de mortalidad en la edad (x), dividiendo por h antes de tomar el límite. Esto conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 26 ***La fuerza de la mortalidad*** *en la edad* (x) *es la cantidad:*

$$\mu(x) = \lim_{h\to 0} \frac{{}_hq_x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{l_x - l_{x+h}}{hl_x} = -\frac{\frac{d}{d_x} l_x}{l_x} = -\frac{d}{dx}\log(l_x) \tag{5.12}$$

La expresión después de la tercera igualdad es útil para obtener información adicional. Tenemos un grupo de vidas decreciente con el tiempo debido a la mortalidad. La cantidad $\mu(x)$ nos da la tasa relativa de disminución en este grupo de edad x.

En muchos casos estamos buscando a una edad x fijo y queremos que la variable sea el tiempo t. De acuerdo con ello, definiremos:

$$\mu_x(t) = \mu(x+t).$$

Podemos ver $\mu_x(t)$ como la fuerza de la mortalidad en el momento t para un individuo de edad x en el tiempo 0. De la cuarta expresión en (5.12),

$$\mu_x(t) = -\frac{\frac{d}{dt}({}_tp_x)}{{}_tp_x}, \tag{5.13}$$

de la cual se deriva:

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_x(r)dr}. \tag{5.14}$$

EJEMPLO 6 *Supongamos que la fuerza de la mortalidad está dada por*

$$\mu(x) = \frac{1}{w-x}, \qquad x < \omega.$$

Encontrar una expresión para ${}_tp_x$.

Solución. Para $t < \omega - x$ de (6.2),

$$\begin{aligned}
-\int_0^t \mu_x(r)dr &= -\int_0^t \frac{1}{\omega - x - r}dr \\
&= \log(\omega - x - t) - \log(\omega - x) \\
&= \log(\frac{\omega - x - t}{\omega - x}),
\end{aligned}$$

a continuación, sustituimos en (5.14) para obtener

$${}_tP_x = (\frac{\omega - x - t}{\omega - x}) = 1 - \frac{t}{\omega - x} \tag{5.15}$$

5.7. FUERZAS DE MORTALIDAD SELECTA

Las tasas de mortalidad, q_x, son una función de la edad alcanzada solamente. Los datos observados muestran que para los compradores de seguros de vida, la mortalidad no sólo depende de la edad, sino también de la duración desde que la póliza fue comprada. Para ver por qué esto debe ser cierto, vamos a comparar dos personas ambos de 60 años, por igual en todos los aspectos excepto que A hace poco adquirió una póliza de seguros, y B compró una póliza hace 1 año a 59 años Durante el próximo año, es de esperar que A tendrá una mayor probabilidad de vivir 61 años de edad que B. Esto surge del hecho de que el asegurador no tiene que aceptar a todos los que solicitan una póliza. Las aseguradoras pueden solicitar a los individuos someterse a exámenes médicos, o que proporcionen información sobre su salud, estilo de vida y otros factores, con el fin de verificar que se trata de riesgos razonables. Por otra parte, si tenemos en cuenta un tercer individuo, C, también de 60 años de edad, de forma similar a A y B, excepto que a C se le vendió una póliza a los 58 años, su oportunidad de vivir durante el próximo años puede esperarse que sea incluso menos que el de B. Esta persona ha tenido 2 años de decaimiento.

Se mantiene la convención de que los subíndices denotan la edad alcanzada, pero ponemos corchetes alrededor de la edad en que se emitió la póliza, con el fin de separar edad y la duración. Por lo tanto, el símbolo ${}_sq_{[x]+t}$ indica la probabilidad de que una persona ahora de edad $x+t$, a la cual le fue vendido el seguro a la edad x, morirá en los próximos s años. Esto es conocido como una tasa de mortalidad selecta, ya que incorpora los efectos de la capacidad de la aseguradora para seleccionar.

DEFINICIÓN 27 *Definimos:*

Tabla 5.2: Tabla selecta y ultimadada para un período selecto de 2, $X = 60$.

x	$q[x]$	$q[x]+1$	$q[x]+2$	$x+2$
60	0.10	0.12	0.15	62
61	0.11	0.14	0.17	63
62	0.12	0.15	0.18	64

$$_sp_{[x]+t} = 1 -_s q_{[x]+t}.$$

Como de costumbre omitimos subíndices izquierda de 1 para q y p. La discusión que acabamos de hacer sobre mortalidad selecta nos muestra que:

$$q_{[60]} \leq q_{[59]+1} \leq q_{[58]+2} \leq \cdots,$$

y en general,

$$q_{[x]+t} \leq q_{[x-s]+t+s}, \tag{5.16}$$

para todo x y t no negativo, y $0 \leq s \leq x$.

5.7.1. TABLAS ULTIMADAS Y SELECTAS

Para modelar plenamente este fenómeno necesitaríamos una tabla de mortalidad independiente para cada edad x para cubrir las pólizas emitidas a esa edad. Por supuesto, las tablas se hacen más cortas con el aumento de la edad de emisión. La edad x de la tabla consistiría de las $\omega - x$ entradas $\{x_{q[x]+t}, \quad t = 0, 1, ..., \omega - x - 1\}$. Las observaciones muestran, sin embargo, que los efectos de selección disminuyen con el tiempo y pueden tender a desaparecer después de un cierto periodo de tiempo, conocido como el período de selección. Si el período de selección es r, se puede esperar que dos individuos de la misma edad, que han emitido un seguro hace r o más años, exhibirá las mismas tasas de mortalidad, aunque la edad de emisión sea diferente. Esto permite alguna simplificación. Podemos volver al símbolo q_y significando la probabilidad de que una persona de edad y que le fue emitido el seguro r o más años atrás morirá dentro de un año. En otras palabras postulamos que la igualdad (5.16). se cumple cuando $t \geq r$, para que podamos eliminar los corchetes cuadrados y denotar el valor común por q_{x+t}. Las tasas de q_y se conocen como las tasas ultimadas, y la tabla de vida resultante se conoce como una tabla de mortalidad selecta y ultimada. Una opción común para cada período selecto es de 15 años, aunque algunas tablas recientes han utilizado tanto como 25. La tabla 5.2 tiene un periodo selecto de 2, pero que es suficiente para ilustrar la idea básica.

Para encontrar las tasas de mortalidad aplicables a una póliza emitida a la edad x, empezamos en la columna izquierda, leyendo hasta llegar a la columna final, y después hacia abajo. Así, por ejemplo, las tasas utilizadas para una póliza emitida a los 60 años sería en orden,

$$q_{[60]}, q_{[60]+1}, q_{[60]+2} = q_{62}, q_{63}, q_{64}, \cdots,$$

lo cual en este ejemplo son $0.10, 0.12, 0.15, 0.17, 0.18, \ldots$. Podemos imaginar las tasas de mortalidad como los flujos de varios arroyos, todos corriendo al mismo río, que es la columna final. Por lo tanto, no necesitamos una tabla separada completa para cada edad, sino sólo $r+1$ columnas. Tablas con un período selecto de 0 años, que es precisamente lo que hemos estado discutiendo en capítulos anteriores, se conocen como tablas de agregación.

Algunas personas prefieren construir una tabla selecta y ultimada de l_x, aunque esto no es realmente necesario, ya que como hemos visto, siempre se puede trabajar directamente con los valores de q_x. El proceso es directo, aunque requiere un poco de cuidado. Uno completa la primera columna ultimada, para calcular los valores de l_x, comenzando con un valor arbitrario para l_r que es la primera entrada de esta columna. Uno simplemente recorre hacia atrás para completar las otras entradas, utilizando la ecuación de recursividad:

$$l_{[x]+k} = \frac{l_{[x]+k+1}}{1 - q_{[x]+k}}. \tag{5.17}$$

Por ejemplo, en la tabla anterior, si $l_{63} = 5000$, entonces $l_{[61]+1} = \frac{5000}{0.86} = 5814$ y $l_{[61]} = \frac{5814}{0.89} = 6353$.

Cambiar las fórmulas anteriores para incorporar la mortalidad selecta es, por lo general, sólo una cuestión de inserción de un corchete alrededor de la edad de emisión. Vamos a ver algunos de ellos en detalle:

- La regla de la multiplicación (5.10), ${}_{s+t}p_x = {}_s p_x \ {}_t p_{x+s}$, se convierte en

$$ {}_{s+t}p_{[x]} = {}_s p_{[x]} \ {}_t p_{[x]+s}. \tag{5.18}$$

- Definimos

$$\mu_x(t) = \lim_{h \to 0} \frac{{}_h q_{[x]+t}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+h}}{h l_{[x]+t}},$$

  siguiendo la notación estándar, el corchete no es necesario ya que la x es ya separado de la t.

- La identidad básica (5.14), puede escribirse

$$ {}_t p_{[x]} = e^{-\int_0^t \mu_x(r) dr}. \tag{5.19}$$

Por supuesto, si el período de selección es 0 entonces $\mu_x(t)$ es exactamente igual a $\mu(x+t)$ y está de acuerdo con la notación que ya hemos presentado en el tema de la fuerza de mortalidad.

Capítulo 6

MODELOS EN MATEMÁTICA ACTUARIAL

6.1. MODELO DE TIEMPO DISCRETO.

Modelos multi-estado son un intento de mirar a una variedad de contratos de seguros de vida y anualidades de manera unificada, haciendo uso de los procesos de Markov. Como motivación, tomar un individuo ahora de edad x y considerar una cadena de Markov de dos estados, donde la persona se encuentra en estado 0 (vivo) ó el estado 1(fallecido) en cualquier momento. Contratos de seguros de vida ofrecen beneficios tras la transferencia del estado 0 al estado 1, mientras que los contratos de anualidad de vida proporcionan beneficios siempre que el proceso permanece en el estado de 0.

De manera más general, considere un modelo de decrementos múltiples para (x) con m causas de fracaso. Podemos considerar una cadena con $m+1$ estados. El estado 0 significa que (x) no ha sucumbido a cualquier causa y se refiere a menudo como el estado activo. El estado j se refiere a haber sucumbido a la primera causa j. Los beneficios del seguro se pueden ver como los pagos provenientes de la transferencia del estado 0 a otros estados.

Para otro ejemplo, considere un contrato de vida conjunta emitida a (x) e (y). Ahora podemos tener una cadena con cuatro estados, como se ilustra en la Figura 6.1 Las flechas indican que hay posibles transiciones de estado 0 al estado 1 o el estado 2, ocasionados por la muerte de (y) ó (x) respectivamente, y luego más transiciones desde el estado 1 o el estado 2 al estado 3, cuando se produce la muerte del segundo. La línea de puntos, muestra una transición directa del estado 0 al 3. Un seguro de vida conjunta se puede considerar como dos contratos, un pago de beneficios tras la transferencia del estado 0 al estado 1, y los otros beneficios pagados en el momento de la transferencia del estado 0 al estado 2. Una anualidad de vida doble en general puede ser considerado como tres contratos separados, donde el contrato $i = 0, 1, 2$, paga beneficios siempre y cuando el proceso está en el estado i. Esto se puede generalizar a los contratos relativos de n vidas donde tendremos 2^n estados.

Por supuesto, podemos imaginar patrones más generales de transisión. Podemos desear investigar un modelo

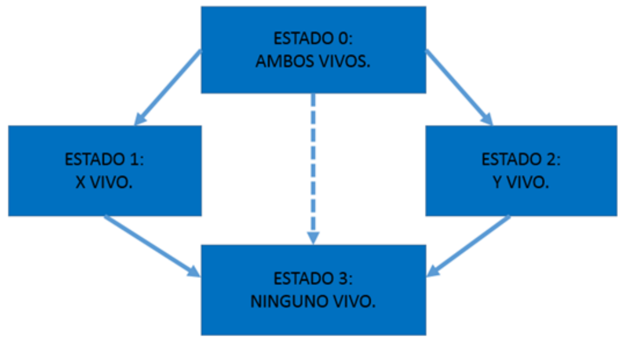


Figura 6.1: Modelo de cuatro estados.

de múltiples decrementos más enriquecido donde los particulares pueden ser transferidos entre los estados varias veces. Una persona con discapacidad puede recuperar y volver a entrar en el grupo principal de la vida. En nuestro modelo original ignoramos lo que le pasó a una vida una vez que dejó el grupo por cualquier causa, pero tal vez desee modelar el hecho de que alguien que deja por una causa fuera de la muerte posteriormente fallezca.

Hay muchos ejemplos de beneficios de seguros y anualidades aplicables a ese caso general. Cuando la discapacidad es uno de los decrementos, podemos tener un contrato que paga beneficios cuando una persona se convierte en beneficiario por discapacidad, y luego aún más cuando muere una persona con discapacidad, y pagos adicionales, posiblemente, que continúan durante la incapacidad. En esta sección vamos a tratar el modelo general de varios estados. Primero discutimos el modelo de tiempo discreto, donde las transiciones entre estados pueden ocurrir sólo en los momentos enteros.Enseguida tratamos modelos de tiempo continuo más complicado, donde tenemos en cuenta transiciones en momentos arbitrarios.

De hecho, una disposición común en muchas pólizas de seguro de vida es una cláusula de exención de prima de incapacidad, lo que significa que la persona no tiene que pagar las primas durante el tiempo que están desactivados. Consideramos que ésta es una anualidad proporcionando los pagos durante un estado de discapacidad, que cesa cuando hay un traslado de regreso a un estado activo. Estas son sólo algunas de las posibilidades, y que invitan al lector a pensar aplicaciones adicionales.

6.1.1. MODELOS MULTIESTADOS

En figura 6.2 se representa los estados saludable-enfermo-fallecido.

Por ejemplo, en nuestra cadena simple de vida o muerte de las matrices de transición son dadas por

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{x+n} & q_{x+n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo de decremento múltiple, la matriz P_n será similar a la anterior, excepto la primera fila será $(p^{(\tau)}_{x+n}, q^{(1)}_{x+n}, q^{(2)}x+n, ..., q^{(m)}_{x+n},)$ y las restantes filas tendrán uno en la principal diagonal y ceros en las otras columnas.

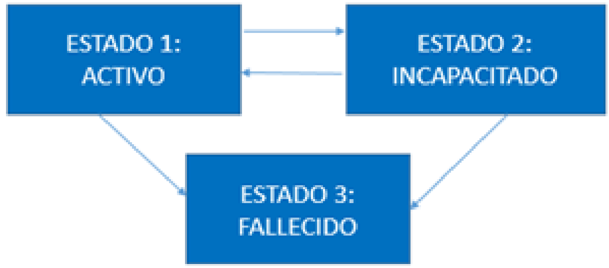


Figura 6.2: Modelo de tres estados.

Ahora introducimos un modelo de multi-estado que no está cubierta por nuestros casos anteriores de múltiples vidas o la teoría de decrementos múltiples. Además, permite una transición bidireccional entre ciertos estados, que es realmente donde la generalidad del modelo multi-estado es el más útil. Esta es la cadena tal como se representa en figura 6.2, donde la persona puede estar saludable o enferma, pero ahora permite la recuperación de el estado saludable.

Existen varias aplicaciones, el estado enfermo podría referirse a ser discapacitado, ó un número de otras posibilidades para un estado que deseamos distinguir de un grupo principal de vida, pero que puede transferir de nuevo al grupo principal.

EJEMPLO 7 *Considere el modelo de la figura 6.2 y supongamos que las matrices de transición para tiempos* $0, 1, 2$ *se dan como sigue:*

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la probabilidad de que una persona que está viva en el tiempo 0*, esté viva en el tiempo* 2 *y fallezca en el tiempo* 3*?*

Solución: Primero calculamos la matriz de transición para pasar de un estado a otro en el primer año.

$$P_0 P_1 = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.65 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando la fórmula 3.4, la probabilidad requerida es:. $p_{00}(0,2)p_{01}(2,3) = 0.35 \times 0.6 = 0.21.$

6.1.2. SEGUROS MULTIESTADOS DE TIEMPO DISCRETO

Para modelar el contrato general de este tipo, tomaremos una cadena de Markov con estados numerados de 0 a N. Supongamos que el proceso comienza en el estado a en el tiempo 0. Fijemos dos estados i y j, y considerar un contrato que paga un beneficio de b_k en el instante $k+1$, condicionado a una transferencia del estado i al estado j que se produce entre el tiempo k y el tiempo $k+1$. Esto es, el proceso estaba en el estado i en el instante k, y luego en el estado j en el instante $k+1$.

NOTACIÓN 1 *Si tenemos varios beneficios diferentes de transferencia que se distinguirá por b_k como b_k^{ij}. En general, para las cantidades como los beneficios, primas, reservas y gastos, superíndices se refieren a los estados, y se mantiene nuestro uso previo de subíndices para referirse al tiempo. Esto difiere de nuestra convención de probabilidades donde utilizamos subíndices para referirse a los estados, y escritura entre paréntesis.*

Un método conveniente para discutir los beneficios de varios estados en el contexto de modelo estocástico es hacer uso de variables aleatorias de los indicadores. Para cada número entero no negativo k, sea I_k la variable aleatoria que toma los valores de 0 ó 1, respectivamente, en consecuencia como una transferencia de i a j ocurrido o no entre el instante k y $k+1$. El valor actual de los beneficios de el contrato se da por

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v(k+1) I_k \tag{6.1}$$

Ya que

$$E(I_k) = p_{ai}(0,k)p_{ij}(k,k+1), \tag{6.2}$$

el valor presente actuarial es

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k v(k+1) I_k 0 p_{ai}(0,k) p_{ij}(k,k+1) \tag{6.3}$$

De nuevo tenemos nuestro patrón familiar con una suma de tres factores denominados. De hecho, podemos considerar cada sumando como un factor de cuatro denominado donde es en sí misma la probabilidad de recibir un pago en el producto de dos factores, la probabilidad de transición al estado i a travez del tiempo k y la probabilidad de transición del estado i al estado j en el período siguiente.

EJEMPLO 8 *Considere la cadena dada en el ejemplo 4. Un contrato de 3 años escrito en una vida saludable, proporciona beneficios al final del año de la muerte. La ventaja de muerte es 3 si la persona muere mientras está sana y 2 si la persona muere mientras está en el proceso de sanación. Si el interés es constante del 5 %, encontrar el valor presente actuarial.*

Solución: Podemos ver esto como dos contratos separados, uno que pagan 3 para la transferencia del estado 0 al estado 2, y el segundo pago de 2 para la transferencia del estado 1 al estado 2. Utilizamos las matrices en ejemplo 4 y la fórmula (3.4). Para el primer contrato,

$$p_{02}(0,1) = 0.1,\ p_{00}(0,1)p_{02}(1,2) = 0,14,\ p_{00}(0,2)p_{02}(2,3) = 0,37x0,3 = 0.111.$$

así que:

$$\text{Valor presente actuarial }^{1} = 3[(0,1)(1,05)-1+0,14(1,05)-2+0,111(1,05)-3] = 0,9543.$$

Para el segundo contrato,

$$p_{01}(0,1)p_{12}(1,2) = 0.06, p_{01}(0,2)p_{12}(2,3) = 0,33x0,4 = 0.132$$

así que

$$\text{Valor presente actuarial} = 2(0,06)(1,05)-2+0,132(1,05)-3] = 0.3369.$$

Por lo tanto, el valor presente actuarial total es de 1.2912.

EJEMPLO 9 *Tomar la misma cadena como en el ejemplo anterior. Considere la posibilidad de un contrato que paga* 1 *al final de cualquier año de la transferencia sea considerada saludable para ser poco saludable, siempre que esta se produce dentro de los próximos* 3 *años. Encuentre el valor esperado y la varianza de los beneficios.*

Solución. Ahora tenemos

$$p_{01}(0,1) = 0,2, p_{00}(0,1)p_{01}(1,2) = 0,21 p_{00}(0,2)p_{01}(2,3) = 0,37x0,3 = 0.111,$$

así que

$$\text{Valor presente actuarial} = 0,2(1,05)-1+0,21(1,05)-2+0,111(1.05)-3 = 0,4768.$$

La determinación de desviaciones aquí es diferente del modelo de decrementos múltiples donde los beneficios son pagado a la transición a un estado absorbente. En este caso, no debe recibir beneficios en más de un año. Debemos utilizar el enfoque adoptado en la fórmula de pago actual de la anualidad de varianzas. Tenga en cuenta sin embargo, que los cálculos de

$$E(I_0 I_2) = p_{01}(0,1)p_{10}(1,2)p_{01}(2,3) = 0.006,$$

que es la probabilidad de tener problemas de salud, recuperación, y luego tener problemas de salud de nuevo, con lo que la remuneración que perciben es tanto el tiempo 1 y en en el tiempo 3. Podemos entonces calcular las covarianzas

$$Cov(I_0 I_1) = -0,042, cov(I_0 I_2) = -0,0162, Cov(I_1 I_2) = -0,02331,$$

que conduce al cálculo de la varianza como

$$(0.2)(0.8)(1.05)^(-2)+(0.21)(0.79)(1.05)-4+(0.111)(0.889)(1.05)-6-2[0.042(1.05)-3+0.0162(1,05)-4+0.02331(1,05)-5 = 0.2195.$$

6.2. APLICACIÓN ESTOCÁSTICA DISCRETA

Para un modelo de tres estados la fuerza de transición en forma matricial y en el rango de edad $(x, x+1)$, es decir en intérvalos de un año, es la siguiente:

[1]Valor presente actuarial:es el valor estimado, a una fecha determinada, de un flujo de egresos o ingresos proyectados de acuerdo con un conjunto determinado de hipótesis actuariales.

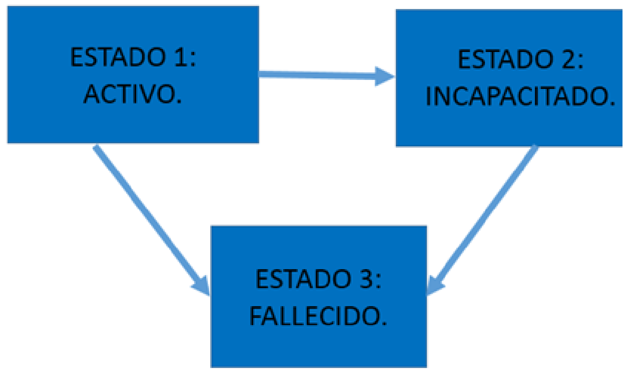


Figura 6.3: Modelo de tres estados.

$$M = \begin{pmatrix} -(\mu_{12}^{(x)} + \mu_{13}^{(x)}) & \mu_{12}^{(x)} & \mu_{13}^{(x)} \\ 0 & -\mu_{23}^{(x)} & \mu_{23}^{(x)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En nuestro modelo de tres estados(ilustrado en Figura 6.3) siendo μ_{ij} las fuerzas de transición se tiene que la probabilidad de sobrevivir un período de tiempo t es:

$$p_{11}(t)+p_{12}(t)$$

Por Teorema 4,

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= e^{\int_0^t \mu_{11}(r)dr} \\ &= e^{[\mu_{11}r]_0^t} \\ &= e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t} \end{aligned} \tag{6.4}$$

ya que las fuerzas μ_{ij} son constantes y según la matriz de fuerza de transición anterior.

Luego por teoría de caminos:

$$\begin{aligned} p_{12}(t) &= \int_0^t p_{11}(0,x)\mu_{12}(x)p_{22}(x,t)dx \\ &= \int_0^t e^{\int_0^x \mu_{11}(r)dr}\mu_{12}(x)e^{\int_x^t \mu_{22}(r)dr}dx \\ &= \int_0^t e^{[\mu_{11}r]_0^x}\mu_{12}(x)e^{[\mu_{22}r]_x^t}dx \\ &= \int_0^t e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})x}\mu_{12}(x)e^{-\mu_{23}(t-x)}dx \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} p_{11}(t) + P_{12}(t) &= e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t} + \int_0^t e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})x}\mu_{12}(x)e^{-\mu_{23}(t-x)}dx \\ &= e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t} + \frac{\mu_{12}e^{-\mu_{23}t}[1-e^{-(\mu_{12}+\mu_{13}-\mu_{23})t}]}{\mu_{12}+\mu_{13}-\mu_{23}} \\ &= \frac{\mu_{13}-\mu_{23}e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t}+\mu_{12}e^{-\mu_{23}t}}{\mu_{12}+\mu_{13}-\mu_{23}} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Tabla 6.1: Comparación de fuerzas de mortalidad con duración de póliza del seguro de 0.5 a 10.5 años para $x = 45$.

DURACIÓN	ESTIMACIÓN	$TABLA$	$\lvert DIFERENCIA \rvert$
0.5	0.001074479947551	0.001030530814524	0.0000439491
1.5	0.001252486563121	0.001310858800101	0.0000583722
2.5	0.001403399097258	0.001441037796404	0.0000376387
3.5	0.001531380293049	0.001541187018829	0.0000980673
4.5	0.001639942505756	0.001631329895349	0.0000861261
5.5	0.001732052325901	0.001701446639758	0.0000306057
6.5	0.001810217545144	0.001771568300868	0.0000386492
7.5	0.001876559668377	0.001841694879371	0.0000348648
8.5	0.001932874535901	0.001901807289596	0.0000310672
9.5	0.001980683122152	0.001961923313541	0.0000187598
10.5	0.002021274187352	0.002012022760954	0.000925143
11.5	0.002055740149779	0.002062124718448	0.0000063846
12.5	0.002085007300416	0.002112229186274	0.0000272219
13.5	0.002109861284178	0.002162336164683	0.0000524749
14.5	0.002130968612322	0.002212445653928	0.000081477
15.5	0.002148894840867	0.002252535053294	0.00010364
16.5	0.002164119943750	0.002252535053294	0.0000884151
17.5	0.002177051322331	0.002252535053294	0.0000754837
18.5	0.002188034820924	0.002252535053294	0.0000645002
19.5	0.002197364058518	0.002252535053294	0.000055171
20.5	0.002205288337339	0.002252535053294	0.0000472467

Calculando la fuerza de transición de acuerdo a la Definición 26, Ecuación 5.12 tenemos lo siguiente:

$$\mu_x(t) = -\frac{\frac{d}{dt}({}_tp_x)}{{}_tp_x},$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= -\frac{\frac{d}{dt}[p_{11}(t) + p_{12}(t)]}{p_{11}(t) + p_{12}(t)} \\ &= \frac{(\mu_{23} - \mu_{13})(\mu_{12} + \mu_{13})e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t} - \mu_{12}\mu_{23}e^{-\mu_{23}t}}{(\mu_{23} - \mu_{13})e^{(-\mu_{12}+\mu_{13})t} - \mu_{12}e^{-\mu_{23}t}} \end{aligned} \tag{6.7}$$

Por lo tanto, μ_{12}, μ_{13} y μ_{23} debe ser elegido de modo que la ecuación 6.7 represente mejor el efecto de selección para este grupo de edad. Encontramos que, para cualquier elección de los tres valores de parámetros, hay una segunda elección que produce exactamente de la misma $\mu(t)$.

Entonces, para cada $\mu(t)$, la parametrización es única. En ausencia de información previa acerca de los valores de los parámetros, una elección arbitraria del subconjunto pueden ser hechas. Nuestro objetivo es simplemente

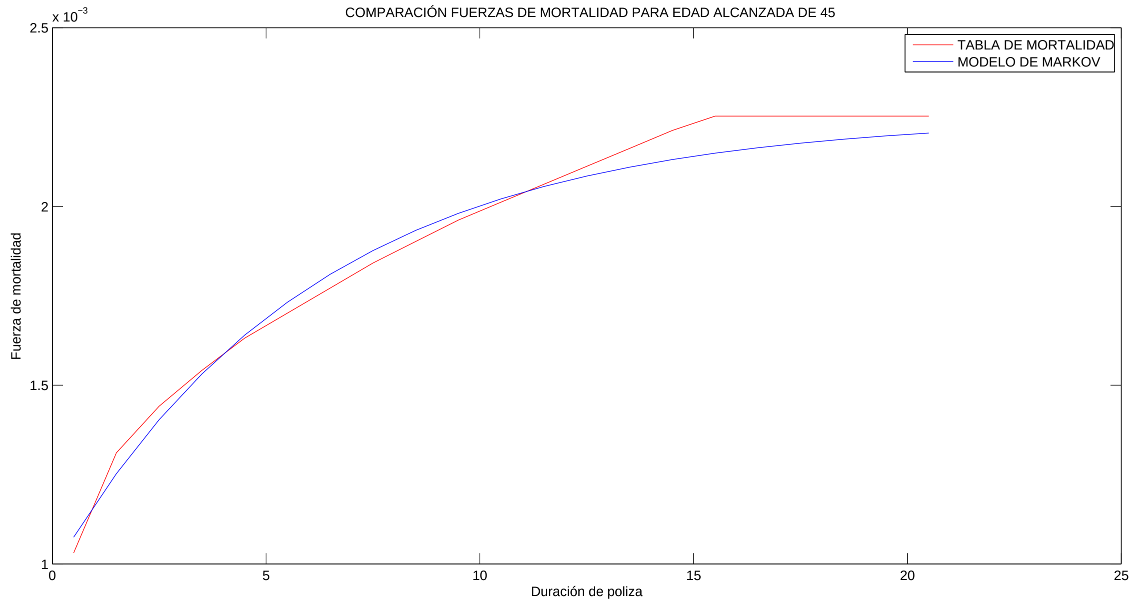


Figura 6.4: Comparación de fuerzas de mortalidad para edad alcanzada de 45 años.

encontrar la mejor $\mu_x(t)$ basado en esta configuración de tres estados.

Puesto que la fuerza de transición del estado 1 al estado 2 es probable que sea bastante grande en relación con las fuerzas de la mortalidad, parece razonable suponer que $\mu_{23} < \mu_{12} + \mu_{13}$. Se deduce de la Ecuación 6.7 que $\lim_{h\to\infty} \mu(t), = \mu_{23}$. También tenemos $\mu(0) = \mu_{13}$. Para $0 < t < \infty$, $\mu(t)$ es la media ponderada de la fuerza selecta, μ_{13}, y la fuerza máxima, μ_{23}. Los pesos son las probabilidades condicionales de estar en los estados seleccionados, y en última instancia a la duración t dada la supervivencia de duración t.

Para ilustrar el procedimiento descrito anteriormente, se utiliza el modelo de tres estados se muestra en la figura 6.3 para describir mortalidad selecta. Se obtienen valores de los parámetros de modo que el modelo refleja la mortalidad agregada masculina en la Individual Ordinary Mortality Table [2] 1982- 1988, publicado por el Instituto Canadiense de Actuarios [18]. El desarrollo de esta tabla es descrito por Panjer y Russo [19].

Asumimos que las fuerzas de la transición son constantes dentro de cada año de edad. Por lo tanto, para el rango de edad $[x, x+1]$, hemos utilizado las diversos tasas de mortalidad por edad cumplida x para determinar las estimaciones de $\mu_{12}^{(x)}$, $\mu_{13}^{(x)}$, y $\mu_{23}^{(x)}$. En primer lugar, se calcularon las fuerzas tabulares de mortalidad de las tasas de mortalidad asumiendo que, para $k = 0, 1.....14$,

$$\mu^T_{[x-k]+k+\frac{1}{2}} = -log(1 - q^T_{[x-k]+k})$$

y para $k > 14$,

$$\mu^T_{x+\frac{1}{2}} = -Log(1 - q^T_x).$$

[2]Dicha tabla se encuentra en la dirección electrónica siguiente http://mort.soa.org

Tabla 6.2: Fuerzas de transición.

x	μ_{12}^x	μ_{13}^x	μ_{23}^x	x	μ_{12}^x	μ_{13}^x	μ_{23}^x
45	0.00097	0.16439	0.00225	58	0.00303	0.16552	0.00929
46	0.00107	0.16415	0.00251	59	0.00327	0.16593	0.01031
47	0.00117	0.16378	0.00280	60	0.00355	0.16585	0.01143
48	0.00128	0.16346	0.00313	61	0.00381	0.16661	0.01266
49	0.00140	0.16292	0.00349	62	0.00409	0.16707	0.01401
50	0.00154	0.16293	0.0039	63	0.00439	0.16798	0.01548
51	0.00167	0.16396	0.00436	64	0.00471	0.16839	0.0171
52	0.00183	0.16445	0.00487	65	0.00502	0.16918	0.01887
53	0.00199	0.16526	0.00543	66	0.00535	0.17003	0.02080
54	0.00218	0.16430	0.00606	67	0.00568	0.17094	0.02291
55	0.00237	0.16503	0.00675	68	0.00603	0.17213	0.02521
56	0.00258	0.16443	0.00752	69	0.00637	0.17322	0.02772
57	0.00280	0.16474	0.00836	70	0.00671	0.17450	0.03046

T indica un valor tabular. Aunque las fuerzas de mortalidad aparecen en la tabla publicada, utilizamos el superíndice para distinguirlos de las fuerzas de la mortalidad que resultan de nuestro modelo de Markov.

Como una función de la duración de la póliza(con edad alcanzada fija), la fuerza de mortalidad aumenta durante el período de 15 años y se mantiene constante a partir de entonces. Nuestra correspondiente fuerza "ajustada" de mortalidad, $\mu^{(x)}(t)$, determinada por la Ecuación 6.7, muestra este comportamiento. Aumenta hacia su límite a medida que la duración de la poliza se acerca al infinito. Sea nuestra estimación de $\mu_{23}^{(x)}$ igual a la fuerza última tabular de mortalidad para la edad $x+1/2$. Las estimaciones de $\mu_{23}^{(x)}$ y $\mu_{23}^{(x)}$ se obtuvieron para minimizar las desviaciones cuadradas de $\mu^{(x)}(t)$ de las fuerzas tabulares de mortalidad en las duraciones $0.5, 1.5, 2.5$.....14.5. Es decir, minimizamos

$$\sum_{k=0}^{14} \left[\mu_{[x-k]+k+\frac{1}{2}}^{T} - \mu^{x}(k+1/2)\right]^2$$

El resultante $\mu^{(45)}(t)$ se representa en la Figura 6.4 junto con $\mu_{[45-t]+t}$. Demuestra que, aunque hemos utilizado un modelo con sólo tres parámetros, nuestra fuerza resultante de mortalidad es bastante similar a la que se basa en la tabla en casi todas las duraciones selectas. Es sólo cerca del final del período selecto que nuestra fuerza de mortalidad parece ser significativamente menor. La razón es que nuestra fuerza ajustada de mortalidad debe tener un camino mucho más suave hacia el último nivel. La gráfica también muestra que las dos curvas están muy cerca después de 30 años y casi indistinguibles después de 40. Los resultados son similares para otras edades alcanzadas. Los parámetros estimados obtenidos para las edades de 45 a 70 se muestran en Tabla 6.2. Como es de esperar, hay muy poca variación en las estimaciones de $\mu_{12}^{(x)}$. Todos se encuentran en el intervalo de 0.163 a 0.174. Las estimaciones de $\mu_{13}^{(x)}$ son ligeramente inferiores a las fuerzas tabulares de duración 1. Tal como se ha indicado anteriormente, las estimaciones $\mu_{23}^{(x)}$ son iguales a las fuerzas ultimadas tabulares correspondientes.

Tabla 6.3: Valores propios de M.

$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$
-0.00225	-0.165366241	0

Los parámetros estimados muestran que la Tabla 6.2 puede ser usada para encontrar varias probabilidades de interés. Para el rango de edad $(x, x+1)$, la fuerza de transición de la matriz es

$$M = \begin{pmatrix} -(\mu_{12}^{(x)} + \mu_{13}^{(x)}) & \mu_{12}^{(x)} & \mu_{13}^{(x)} \\ 0 & -\mu_{23}^{(x)} & \mu_{23}^{(x)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde los valores propios para M son $\lambda_1 = -\mu_{23}^{(x)}$, $\lambda_2 = -\mu_{12}^{(x)} + \mu_{13}^{(x)}$, $\lambda_3 = 0$. Y los correspondientes vectores propios son:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\mu_{12}^{(x)}/[-(\mu_{12}^{(x)} + \mu_{13}^{(x)}) + \mu_{23}^{(x)})] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $x = 45$, tendremos que los valores y vectores propios son los siguientes:

Presentamos ahora la matriz $P^{45}(1)$, definida por $P(t) = Adiag(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_k t})A^{-1}$, para $t = 1$, donde la i-ésima columna de A es el vector asociado a λ_i, $diag$ es la matriz diagonal de $e^{\lambda_1(t)}, e^{\lambda_2(t)}, \ldots, e^{\lambda_k(t)}$ y A^{-1} es la inversa de la matriz A. Aquí t representa 1 año después de la edad x, es decir, estas probabilidades están dentro del intérvalo $[x, x+1)$ donde las fuerzas de mortalidad son constantes.

$$\begin{aligned} P^{45}(1) &= \begin{pmatrix} 1.0078 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9978 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8476 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1.0078 & 0.0078 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.8476 & 0.1513 & 0.0011 \\ 0 & 0.9978 & 0.0022 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Análogamente para $x = 45$, encontramos $P^{45}(2)$, para $t = 2$, donde t representa 2 años después de la edad x, es decir, estas probabilidades están dentro del intérvalo $[x, x + 2)$.

Para ello primero calculamos

$$P^{46}(1) = \begin{pmatrix} 1.0089 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9975 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8477095 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & -1.0089 & 0.0089 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.8477 & 0.1511 & 0.0012 \\ 0 & 0.9975 & 0.0025 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Ahora para obtener $p(45, 47)$ efectuamos,

$$P^{45}(1)P^{46}(1) = \begin{pmatrix} 0.8476 & 0.1513 & 0.0011 \\ 0 & 0.9978 & 0.0022 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8477 & 0.1511 & 0.0012 \\ 0 & 0.9975 & 0.0025 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$p(45, 47) = \begin{pmatrix} 0.7185 & 0.2790 & 0.0025 \\ 0 & 0.9953 & 0.0047 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $x = 45$, encontramos $P^{45}(3)$, para $t = 3$, donde t representa 3 años después de la edad x, es decir, estas probabilidades están dentro del intérvalo $[x, x + 3)$.

Análogamente debemos calcular:

$$P^{47}(1) = \begin{pmatrix} 1.0101 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9972 & 0.0 & 0 \\ 0 & 0.8479 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1.0000 \\ 1 & -1.0101 & 0.0101 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$P^{47}(1) = \begin{pmatrix} 0.8479 & 0.1508 & 0.0013 \\ 0 & 0.9972 & 0.0028 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora efectuamos

$P^{45}(1)P^{46}(1)P^{47}(1)$, ya que necesitamos $P^{45}(3)$ o sea $P(45, 48)$.

$$P(45, 48) = P^{45}(1)P^{46}(1)P^{47}(1)$$
$$P(45, 48) = \begin{pmatrix} 0.6092 & 0.3866 & 0.0042 \\ 0 & 0.9925 & 0.0075 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tabla 6.4: Comparación probabilidades de supervivencia.

t	${}_tp_{45}^T$	$1-p_{13}(45,45+t)$	t	${}_tp_{45}^T$	$1-p_{13}(45,45+t)$
1	0.99897	0.9989274	14	0.9436032	0.9438404
2	0.9975214	0.9975492	15	0.9347888	0.9341106
3	0.9957658	0.9958387	16	0.9234337	0.9247601
4	0.9936747	0.9937653	17	0.9117430	0.9136896
5	0.9912203	0.9912967	18	0.8989695	0.9015096
6	0.9883657	0.9883912	19	0.8850534	0.8881620
7	0.9850546	0.9850103	20	0.8699190	0.8735737
8	0.9812228	0.9811063	21	0.8535037	0.8576851
9	0.9768171	0.9766351	22	0.8357508	0.8404424
10	0.9717767	0.9715398	23	0.8166037	0.8217924
11	0.9660141	0.9657719	24	0.7960171	0.8016933
12	0.9594548	0.9592690	25	0.7739516	0.7801094
13	0.9520191	0.9519802	26	0.7503770	0.7570154

La probabilidad de que una persona esté viva a la edad de t años, habiendo adquirido el seguro a los x años tiene la siguiente fórmula:

$$ {}_tp_{[x]}^T = \frac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}} $$

Al encontrar los valores propios correspondientes y los vectores propios por derecha, podemos obtener la matriz de probabilidad de transición para intervalos de tiempo dentro de este rengo de edad, utilizando la Ecuación (4.20). Si este procedimiento se repite para todo entonces podemos usar la Ecuación (4.22) para determinar la matriz de probabilidad de transición.

Para cualquier rango de edad la Tabla 6.4 muestra las probabilidades supervivencia obtenidas de esta manera. Los números representan la probabilidad de que un individuo con contrato de seguro a la edad de 45 años sobrevive en los próximos 50 años, es decir, $1 - P_{13}(45, 45+t)$. Estos se comparan con las probabilidades de ${}_tP_{[45]}^{\tau}$, determinado a partir de la tabla de mortalidad. La Tabla 6.4 indica que las probabilidades de supervivencia obtenidas utilizando un modelo simple de tres estados de Markov son muy cercanos a los obtenidos directamente de la tabla de mortalidad. Se presenta en la Figura 6.5 la comparación de éstas probabilidades.

Mortalidad selecta y mortalidad final se discutió porque es un simple caso de dependencia de duración. Las técnicas desarrolladas en esta tesis es más útil para tratar las aplicaciones que requieren un mayor número de estados.

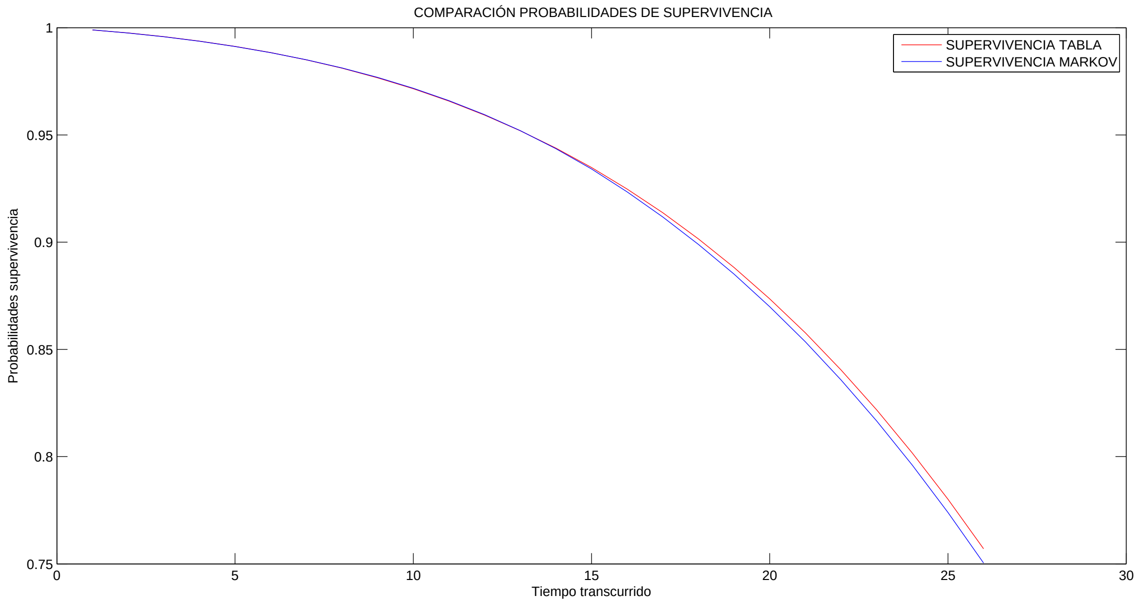


Figura 6.5: Gráfico de comparación probabilidades de supervivencia.

6.3. APLICACIÓN ESTOCÁSTICA CONTINUA

Partiendo de la tabla de mortalidad dinámica, que establece para cada generación una cohorte de 10^n individuos, cuyo descenso gradual hasta la edad máxima, ω, determina la esperanza matemática de las probabilidades de supervivencia y fallecimiento, se define:

$$_{T-t}P_{x+t} = \frac{l_{x+T}}{l_{x+t}}$$

como la probabilidad de supervivencia en el intervalo $[t, T]$, según la probabilidad real, P.

El tanto instantáneo o fuerza de mortalidad, cómo

$$\mu_x(t) = \left[-\frac{\ln({}_{T-t}P_{x+t})}{\partial_t} \right]_{T=1}$$

que sigue un proceso estocásico que se rige por la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica:

$$d\mu_x(t) = ((\theta)(t) - a\mu_x(t))dt + \rho dW(t) \tag{6.8}$$

Ahora de acuerdo a las anteriores ecuaciones se introduce la probabilidad de supervivencia del asegurado en t,

$$_tp_x = exp\left(-\int_0^t \mu_x(s)ds \right)$$

para considerar que existe una medida de probabilidad, Q, riesgo neutro, para la cual las probabilidades de supervivencia del asegurado en $[t, T]$, condicionadas a la supervivencia en t,

$$\frac{t}{{}_{\tau}p_x} = ({}_tp_x)({}_{T-t}p_{x+t})$$

son martingala, Esto permite determinar la probabilidad de supervivencia en el intervalo $[T-t]$, ${}_{T-t}p_{x+t}$, la cual se considera que tiene un solo factor de riesgo, identificado con el tanto instantáneo de mortalidad, $\mu_x(t)$, y representado por, ${}_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t))$, siendo $\tau = T-t$. Aplicando Itô-Taylor se obtiene

$$d_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t)) = \left(\frac{\partial p}{\partial t}dt + \frac{\partial p}{\partial \mu}d\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial \mu^2}(d\mu)^2\right)(t, T)$$

Luego sustituyendo Ecuación (6.8)

$$= \left(\frac{\partial p}{\partial t}dt + m\frac{\partial p}{\partial \mu} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 p}{\partial \mu^2}\right)(t, T)dt + \sigma\frac{\partial p}{\partial \mu}(t, T)dW(t)$$

donde se ha incluido el coeficiente de deriva $m(t) = (\theta(t) - a\mu_x(t))$.

Ahora si se identifica, por teoría de movimiento browmiano.

$$\begin{aligned}
{}_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t))m_p(t, T) &= \left(\frac{\partial p}{\partial t}dt + m\frac{\partial p}{\partial \mu} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 p}{\partial \mu^2}\right)(t, T). \\
{}_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t))\sigma_p(t, T) &= \sigma(t, \mu)\frac{\partial p}{\partial \mu}(t, T).
\end{aligned}$$

De lo cual se obtiene:

$$d_{\tau}p_{x+t}\left[\mu_x(t)\right] =_{\tau} p_{x+t}(\mu_x(t))(m_p(t, T) + \sigma_p(t, T)dW(t))$$

En cuanto al cambio a la medida de probabilidad, Q, riesgo neutro, se considera

$$\pi(t) = -\frac{m_p(t, T) - \mu(t)}{\rho_p(t, T)}$$

Como una prima asociada al factor riesgo, e independiente del plazo $[t, T]$. Así bajo ésta nueva medida de probabilidad ${}_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t))$, cumple:

$$d_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t)) = d_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t))\left((\mu_x(t) - \sigma_p(t, T)\pi(t))dt + \sigma_p(t, T)dW(t)\right)$$

Aplicando el teorema de Girsanov se puede escribir lo siguiente como

$$d_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t)) =_{\tau} p_{x+t}(\mu_x(t))\left(\mu_x(t)dt + \sigma_p(t, T)d\tilde{W}(t)\right) \tag{6.9}$$

donde $d\tilde{W} = W(t) - \pi(t)dt$

Asi mismo bajo ésta medida, la difusión de la probabilidad de supervivencia futura tendría lugar bajo un nuevo coeficiente de deriva, así:

$$_\tau p_{x+t}(\mu_x(t))\tilde{m}_p(t,T) = \left(\frac{\partial p}{\partial t}dt + (m + \sigma\pi(t))\frac{\partial p}{\partial \mu} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\sigma^2 p}{\partial \mu^2}\right)(t,T)$$

por lo que se tiene

$$d_\tau p_{x+t}(\mu_x(t)) =_\tau p_{x+t}(\mu_x(t))(\tilde{m}_p(t,T) + \sigma_p(t,T)d\tilde{W}(t)) \tag{6.10}$$

Combinando (6.9) y (6.10) se llega a:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (m + \rho\pi(t))\frac{\partial p}{\partial \mu} + \frac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2 p}{\partial \mu^2} - \mu p = 0$$

asi como la condición final $_0P_{x+T} = 1$ para todo μ en $t = T$.

Se puede comprobar que este modelo presenta características de los modelos afines de tipos de interés, al encontrar el anterior problema de valor final una solución de la forma

$$_tP_{x+t} = A(\tau)exp\left[-\beta(\tau)\mu_x(t)\right]$$

Diferenciando en el problema de valor final ésta expresión respecto a t y μ_x se tiene:

$$[A' - \theta tAB + \frac{1}{2}\rho^2 AB^2 - (B' - aB + 1)\mu_x(t)]_\tau p_{x+t}(\mu_x(t)) = 0$$

siendo $A'(\tau) = \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau}$ y $B'(\tau) = \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau}$.

Dividiendo por $_\tau p_{x+t}(\mu_x(t))$ y teniendo en cuenta que para todo μ_x se ha de cumplir la anterior expresión se llega a:

$$A' - \theta(t)AB + \frac{1}{2}\sigma^2 AB^2 = 0$$
$$B' - aB + 1 = 0.$$

La condición $_0p_{x+T}(\mu_x(t)) = 1$ equivale a decir que A(0)=1 y B(0)=0.

Se obtiene:

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-a\tau}}{a}$$

La primera ecuación se resuelve a partir de lo anterior e integrando en $s \in [t, T]$,

$$A(\tau) = exp\left[-\int_t^\tau \theta(s)B(\tau)ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(\bar{B}(\tau) - \tau) - \frac{\sigma^2}{4a}B(\tau)^2\right]$$

.

Capítulo 7

CONCLUSIONES

1. Tratar los problemas actuariales por medio de procesos estocásticos multiestados, hace más fácil los cálculos de probabilidades de transición, que por medio de las Tablas de Mortalidad de grupos seleccionados.
2. Es necesario seleccionar subgrupos de personas con cierta característica, dentro de grupos generales, ya que así se enfocarán problemas específicos del área de seguros de vida, anualidades y primas netas. sí se evitarán pérdidas.
3. Las estimaciones de las fuerzas de mortalidad obtenidas tienen un error del 0.001 %, con respecto a las obtenidas usando valores de la Tabla de Mortalidad.
4. Las estimaciones de probabilidad de supervivencia obtenidas tienen un error del 0.001 %, con respecto a los valores de la Tabla de Mortalidad.
5. Los procesos estocásticos son modelos precisos para representar estimaciones en actuaría, en especial en seguros de vida, que dependen del tiempo.

Capítulo 8

RECOMENDACIONES

1. Aplicar los cálculos a tablas de vida de El Salvador.
2. Investigar procedimientos de construcción de tablas de vida.

Bibliografía

[1] Xavier Cabezas, Fernando Sandoya. *CÁLCULO ACTUARIAL CON CADENAS DE MARCOV, UNA APLICACIÓN.*

[2] D. Emiliano Pozuelo de Gracia. *MODELIZACIÓN ACTUARIAL DEL VALOR RAZONABLE EN LAS ENTIDADES ASEGURADORAS DE VIDA.*, Universidad Compluense de Madrid, Facultad de CC. Económicas y Empresariales, Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I, Madrid 2006.

[3] Eva Ferreira María Araceli Garín. *ESTADÍSTICA ACTUARIAL: MODELOS ESTOCÁSTICOS.* Departamento de Economía Aplicada III, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Bilbao.

[4] Luis Rincón. *INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE RIESGO.* Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM, México 2012.

[5] Doctor Fco. Javier Urbelz Ibarrola. *INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS.*

[6] A. Khintchine. *KORRELATIONS THEORIEDER STATIONAREN STOCHASTISCHEN PROCESSE. Mathematische Annalen, 109, 1934*

[7] J.L Doob. STOCHASTIC PROCESSES,II pag. 46, 2da. edición, 1967.

[8] P.Levy. PROCESSUS STOCHASTIANES ET MOUVEMENT PROWNIEN. Gautier Villar, 1065 pag. 27

[9] Karl Karhunen. MÉTODOS LINEALES EN EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1952, pag 10.

[10] Norman Giraldo Gómez. *MODELOS ESTOCÁSTICOS EN ECONOMETRÍA FINANCIERA, GESTIÓN DE RIESGOS Y ACTUARÍA.* Universidad Nacional de Colombia

[11] Mariano J. Valderrama Bonnet. *MODELOS ESTOCÁSTICOS DINÁMICOS.* Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada

[12] Luis Rincón. *INTRODUCCIÓN A LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS.* Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM, México 2011.

[13] Ross, S.M.. *STOCHASTIC PROCESSES.* New York, 1983.

[14] Doctor S. David Promislow. *FUNDAMENTALS OF ACTUARIAL OF MATHEMATICS.* York University, Toronto, Canadá.

[15] Diana Yesenia Cárdenas Jaimes. *DESARROLLO DE TÉCNICAS ACTUARIALES MEDIANTE EL APRENDIZAJE DE APLICACIONES MATEMÁTICAS RELACIONADAS CON SEGUROS.* Universidad Simón Bolívar, Decanato de Estudios Profesionales, Coordinación de Matemática.

[16] Cox, D.R., y Miller, H.D. *THE THEORY OF STOCHASTIC PROCESSES.* London, 1965.

[17] Tenenbein, A., and Vanderhoof, I.T. *NEW MATHEMATICAL LAWS OF SELECT AND ULTIMATE MORTALITY.* TSA XXXII, 1,980.

[18] Canadian Institute of Institute of Actuaries. *INDIVIDUAL ORDINARY MORTALITY.* Ottawa, 1992.

[19] Panjer, H. H, y Russo G. *GRADUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA EXPERIENCIA INDIVIDUAL DEL SEGURO DE LA MORTALIDAD.* Canadian Institute of Actuaries XXIII, $n_0 2$, 1992.

[20] Currie, I. D, y Waters, H. R. *ON MODELLING SELECT MORTALITY.* 1990.

[21] Bruce L. Jones *ACTUARIAL CALCULATIONS USING A MARKOV MODEL.* 1994.

[22] Currie, I. D, y Waters, H. R. *CALCULO ACTUARIAL CON CADENAS DE MARKOV, UNA APLICACIÓN.* 1990.

[23] Enrique Pociello García. *MODELIZACIÓN Y COBERTURA DE OPERACIONES ACTUARIALES EN COLECTIVOS CON MÚLTIPLES ESTADOS.* 2000.

[24] G. Arnaiz Vellando. *INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA TEÓRICA I.* Lex Nova, 1965.

[25] A. Fernández de Trocóniz. *CONCEPTOS GENERALES DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS.*

[26] Canadian Institute of Institute of Actuaries. *INDIVIDUAL ORDINARY MORTALITY.* Ottawa, 1992.

[27] Currie, I. D, y Waters, H. R. *ON MODELLING SELECT MORTALITY.* 1990.

[28] Chung K. L. Markov. *MARKOV CHAINS WITH STATIONARY TRANSITION PROBABILITIES.* Springer, 1960.

[29] Raul Jiménez. *MARTINGALAS.* Marzo, 2012.

Capítulo 9

Anexos

9.1. DEFINICIÓN DE FUNCIONES

9.1.1. CÁLCULO MATRICES DE TRANSICIÓN

```
format long;
y=[1.007823824841410;
1.008869492692340;
1.010057759676490;
1.011460940531540;
1.012988055431520;
1.014711154061780;
1.016664276546620;
1.018853595007750;
1.021227643292750;
1.024207922282740;
1.027251105712610;
1.030963046149860;
1.034923314131180;
1.039284862304400;
1.044276374573440;
1.049908447207770;
1.056081487132500;
1.063073855219730;
1.070670740125490;
1.079438543508790;
1.089153700159710;
1.099953209918600;
1.112066413518690;
```

```
1.125432135486970;
1.140592103222060;
1.157573801661010];

q = [-0.00225   -0.165366241224380;
     -0.00251          -0.165217240179543;
     -0.00280          -0.164948758587571;
     -0.00313          -0.164733553055137;
     -0.00349          -0.164325677800446;
     -0.00390          -0.164464544044076;
     -0.00436          -0.165633372754123;
     -0.00487          -0.166280122052106;
     -0.00543          -0.167250201377171;
     -0.00606          -0.166481186174481;
     -0.00675          -0.167399432186599;
     -0.00752          -0.167008906907421;
     -0.00836          -0.167543180906017;
     -0.00929          -0.168557447237695;
     -0.01031          -0.169204300426705;
     -0.01143          -0.169392346632700;
     -0.01266          -0.170422205535238;
     -0.01401          -0.171165014426039;
     -0.01548          -0.172374179255060;
     -0.01710          -0.173093337562531;
     -0.01887          -0.174201492735008;
     -0.02080          -0.175376342499578;
     -0.02291          -0.176622039147094;
     -0.02521          -0.178151885241616;
     -0.02772          -0.179591432149858;
     -0.03046          -0.181207560698695];

ak = cell(1, 26);
c = cell(1, 26);
b = cell(1, 26);
mult = cell(1, 26);
multk = cell(1, 26);
for k = 1:26
  ak{k} = [y(k) 1 1; 1  0 1; 0 0 1 ];
  ak{k};
  c{k}  = ak{k}^(-1);
  c{k};
  b{k}  = [exp(q(k,1)) 0 0 ; 0 exp(q(k, 2)) 0 ; 0 0 1 ];
```

```
  b{k};
  mult{k} = ak{k}*b{k}*c{k};
  k
  m = mult{k}

  if k == 1
      multk{k} = mult{k};
  else
      multk{k} = multk{k-1}*mult{k};
  end
  mk = multk{k}
end
```

9.1.2. CÁLCULO DE MATRICES DE TRANSICIÓN PARA DIFERENTES ESTADOS.

```
format long;
y=[1.007823824841410;
1.008869492692340;
1.010057759676490;
1.011460940531540;
1.012988055431520;
1.014711154061780;
1.016664276546620;
1.018853595007750;
1.021227643292750;
1.024207922282740;
1.027251105712610;
1.030963046149860;
1.034923314131180;
1.039284862304400;
1.044276374573440;
1.049908447207770;
1.056081487132500;
1.063073855219730;
1.070670740125490;
1.079438543508790;
1.089153700159710;
1.099953209918600;
1.112066413518690;
1.125432135486970;
1.140592103222060;
```

```
1.157573801661010];

q = [
-0.00225        -0.165366241224380;
-0.00251        -0.165217240179543;
-0.00280        -0.164948758587571;
-0.00313        -0.164733553055137;
-0.00349        -0.164325677800446;
-0.00390        -0.164464544044076;
-0.00436        -0.165633372754123;
-0.00487        -0.166280122052106;
-0.00543        -0.167250201377171;
-0.00606        -0.166481186174481;
-0.00675        -0.167399432186599;
-0.00752        -0.167008906907421;
-0.00836        -0.167543180906017;
-0.00929        -0.168557447237695;
-0.01031        -0.169204300426705;
-0.01143        -0.169392346632700;
-0.01266        -0.170422205535238;
-0.01401        -0.171165014426039;
-0.01548        -0.172374179255060;
-0.01710        -0.173093337562531;
-0.01887        -0.174201492735008;
-0.02080        -0.175376342499578;
-0.02291        -0.176622039147094;
-0.02521        -0.178151885241616;
-0.02772        -0.179591432149858;
-0.03046        -0.181207560698695];

ak = cell(1, 26);
c = cell(1, 26);
b = cell(1, 26);
mult = cell(1, 26);
multk = cell(1, 26);
for k = 1:26
  ak{k} = [y(k) 1 1; 1  0 1; 0 0 1 ];
  ak{k};
  c{k}  = ak{k}^(-1);
  c{k};
  b{k}  = [exp(q(k,1)) 0 0 ; 0 exp(q(k, 2)) 0 ; 0 0 1 ];
  b{k};
```

```
    mult{k} = ak{k}*b{k}*c{k};
    k;
   m = mult{k};

    if k == 1
        multk{k} = mult{k};
    else
        multk{k} = multk{k-1}*mult{k};
    end
   mk = multk{k};
end

%%%%obteniendo cada matriz por separado
A_46= ak{2};
Diagonal_46= b{2};
AinversA_46= c{2};

A_47= ak{3};
Diagonal_47= b{3};
Ainversa_47= c{3};
P_47=A_47*Diagonal_47*AinversA_47
P_46=A_46*Diagonal_46*AinversA_46
p45_47=multk{1}*PYO_46;

%Para obtener la matriz de transición de (45,47)
P_45=multk{1};
P_46=multk{2};
P_45_47=P_45*P_46;

M45_47 = mult{1}*mult{2};
M45_48 = mult{1}*mult{2}*PYO_47;
```

9.1.3. COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES DE SUPERVIVENCIA

```
for i=1:26
    T(i)=i;
end

SUPEVI_TABLA=[
0.998927428;
0.997549282;
0.995838734;
```

```
0.993765321;
0.991296708;
0.988391167;
0.985010266;
0.981106294;
0.976635149;
0.971539816;
0.965771873;
0.959269008;
0.95198024  ;
0.943840382;
0.934788785;
0.924760098;
0.913689603;
0.90150959;
0.888162031;
0.873573677;
0.857685112;
0.840442429;
0.821792437;
0.801693275;
0.78010947  ;
0.75701535  ]

SUPERV_MARKOV=
[0.99897;
 0.9975215;
 0.9957659;
 0.9936747  ;
 0.9912204  ;
 0.9883657  ;
 0.9850546  ;
 0.9812228  ;
 0.9768171  ;
 0.9717767  ;
 0.9660141  ;
 0.9594548  ;
 0.9520191  ;
 0.9436032  ;
 0.9341106  ;
 0.9234337  ;
 0.9117430  ;
```

```
 0.8989695 ;
 0.8850534 ;
 0.8699190 ;
 0.8535037 ;
 0.8357508 ;
 0.8166037 ;
 0.7960171 ;
 0.7739516 ;
 0.7503770 ]

plot(T, SUPEVI_TABLA,'r'); hold on;
plot(T, SUPERV_MARKOV);
xlabel('Tiempo transcurrido');
ylabel('Probabilidades supervivencia');
legend('SUPERVIVENCIA TABLA','SUPERVIVENCIA MARKOV');
title('COMPARACIÓN PROBABILIDADES DE SUPERVIVENCIA');
```

9.2. FUERZAS DE MORTALIDAD MODELO DE MARKOV RESPECTO A LA DE TABLAS

```
% Grafica fuerzas de mortalidad con  modelo de Markov respecto al de
tablas de mortalidad.
format long;
tiempo=[
1;
2;
3;
4;
5;
6;
7;
8;
9;
10;
11;
12;
13;
14;
15];

probabilidadtabla=[
```

```
0.00103;
0.00131;
0.00144;
0.00154;
0.00163;
0.00170;
0.00177;
0.00184;
0.00190;
0.00196;
0.00201;
0.00206;
0.00211;
0.00216;
0.00221;
0.00225;
0.00225;
0.00225;
0.00225;
0.00225;
0.00225];

probtablaya=zeros(21,1);
for i=1:21;
% de la tabla MU^T.
probtablaya(i,1)=-log(1-probabilidadtabla(i,1));
end
probtablaya;

% ESTA ES LA TABLA PARA TOMAR LOS Mij
M=[0.164392434124508   0.000973807099872   0.00225;

0.164150370857307   0.001066869322236   0.00251;

0.163779611833286   0.001169146754285   0.00280;

0.163455681766388   0.001277871288749   0.00313;

0.162924620499085   0.001401057301361   0.00349;

0.162926633788368   0.001537910255708   0.00390;
```

```
0.163960876837304    0.001672495916819    0.00436;

0.164453283123428    0.001826838928678    0.00487;

0.165255262889566    0.001994938487605    0.00543;

0.164304649781897    0.002176536392584    0.00606;

0.165027306845786    0.002372125340813     0.00675;

0.164427169292386    0.002581737615035    0.00752;

0.164742385137199    0.002800795768818    0.00836;

0.165524246972001    0.165524246972001   0.00929;

0.165929563989982    0.165929563989982    0.01031;

0.165846002070434    0.165846002070434    0.01143,

0.166609744634957    0.166609744634957    0.01266;

0.167067387053002    0.167067387053002    0.01401;

0.167982007024396    0.167982007024396  0.01548;

0.168385221095573    0.168385221095573    0.01710;

0.169179870063665    0.169179870063665    0.01887;

0.170026744109887    0.170026744109887    0.02080;

0.170937996088954    0.170937996088954     0.02291;

0.172125712512875    0.172125712512875    0.02521;

0.173223356215153    0.173223356215153    0.02772;

0.174501426929112    0.174501426929112    0.03046];

i=0;
for t=.5:20.5
```

```
    i=i+1;
    tiempo2(i,1)=t;
end
tiempo2;

% Éstos son los lamdas  para cada edad.
mut=zeros(21,1);
i=0;
for t=.5:20.5
   i=i+1;
         mut(i,1)=((M(1,3)-M(1,2))*(M(1,1)+M(1,2))*
         exp(-(M(1,1)+M(1,2))*t)-M(1,1)*M(1,3)*
         exp(-M(1,3)*t))/[(M(1,3)-M(1,2))*
         exp(-(M(1,1)+M(1,2))*t)-M(1,1)*exp(-M(1,3)*t)];
end
mut;
plot(tiempo2, probtablaya,'r'); hold on;
plot(tiempo2, mut);
xlabel('Duración de poliza');
ylabel('Fuerza de mortalidad');
legend('TABLA DE MORTALIDAD','MODELO DE MARKOV');
title('COMPARACIÓN FUERZAS DE MORTALIDAD PARA EDAD ALCANZADA DE 45')
```

9.3. OBTENCIÓN PROBABILIDADES DE SUPERVIVENCIA.

```
%  Éste algoritmo calcula las probabilidades de transición M_{13} obtenidas
de la matriz de transición.
y=[1.007823824841410;
1.008869492692340;
1.010057759676490;
1.011460940531540;
1.012988055431520;
1.014711154061780;
1.016664276546620;
1.018853595007750;
1.021227643292750;
1.024207922282740;
1.027251105712610;
1.030963046149860;
1.034923314131180;
1.039284862304400;
1.044276374573440;
```

```
1.049908447207770;
1.056081487132500;
1.063073855219730;
1.070670740125490;
1.079438543508790;
1.089153700159710;
1.099953209918600;
1.112066413518690;
1.125432135486970;
1.140592103222060;
1.157573801661010];

q = [
-0.00225        -0.165366241224380;
-0.00251        -0.165217240179543;
-0.00280        -0.164948758587571;
-0.00313        -0.164733553055137;
-0.00349        -0.164325677800446;
-0.00390        -0.164464544044076;
-0.00436        -0.165633372754123;
-0.00487        -0.166280122052106;
-0.00543        -0.167250201377171;
-0.00606        -0.166481186174481;
-0.00675        -0.167399432186599;
-0.00752        -0.167008906907421;
-0.00836        -0.167543180906017;
-0.00929        -0.168557447237695;
-0.01031        -0.169204300426705;
-0.01143        -0.169392346632700;
-0.01266        -0.170422205535238;
-0.01401        -0.171165014426039;
-0.01548        -0.172374179255060;
-0.01710        -0.173093337562531;
-0.01887        -0.174201492735008;
-0.02080        -0.175376342499578;
-0.02291        -0.176622039147094;
-0.02521        -0.178151885241616;
-0.02772        -0.179591432149858;
-0.03046        -0.181207560698695];

ak = cell(1, 26);
c = cell(1, 26);
```

```
b = cell(1, 26);
mult = cell(1, 26);
multk = cell(1, 26);

PROBABILIDAD=zeros(26,1);
for k = 1:26
  ak{k} = [y(k) 1 1; 1  0 1; 0 0 1 ];
  ak{k};
  c{k}  = ak{k}^(-1);
  c{k};
  b{k}  = [exp(q(k,1)) 0 0 ; 0 exp(q(k, 2)) 0 ; 0 0 1 ];
  b{k};
  mult{k} = ak{k}*b{k}*c{k};
  k
  m = mult{k}

  if k == 1
      multk{k} = mult{k};
  else
      multk{k} = multk{k-1}*mult{k};
  end
  mk = multk{k}
  PROBABILIDAD(k,1)=mk(1,3);
end
  PROBABILIDAD
```

9.4. CÁLCULO DE FUERZAS DE TRANSICIÓN.

```
% Éste algoritmo calcula las fuerzas de transición  para cada año,
desde 45 hasta 70 años, siempre y cuando se digite el respectivo año;
q=[
0.00050 0.00060 0.00066 0.00071 0.00077 0.00082 0.00089 0.00098
0.00108 0.00120 0.00135 0.00152 0.00172 0.00195 0.00221 0.00225

0.00050 0.00061 0.00067 0.00073 0.00079 0.00086 0.00095 0.00105
0.00117 0.00131 0.00149 0.00168 0.00191 0.00216 0.00246 0.00251

0.00051 0.00063 0.00069 0.00076 0.00083 0.00091 0.00101 0.00113
0.00128 0.00145 0.00164 0.00186 0.00211 0.00241 0.00274 0.00280

0.00052 0.00065 0.00072 0.00079 0.00088 0.00098 0.00110 0.00124
0.00141 0.00160 0.00181 0.00206 0.00235 0.00268 0.00306 0.00313
```

0.00054 0.00067 0.00075 0.00084 0.00094 0.00106 0.00120 0.00137
0.00155 0.00177 0.00201 0.00230 0.00262 0.00299 0.00342 0.00349

0.00055 0.00069 0.00079 0.00089 0.00101 0.00116 0.00132 0.00150
0.00172 0.00196 0.00224 0.00256 0.00292 0.00334 0.00382 0.00390

0.00057 0.00073 0.00084 0.00097 0.00111 0.00127 0.00145 0.00166
0.00190 0.00218 0.00249 0.00285 0.00326 0.00373 0.00427 0.00436

0.00060 0.00078 0.00091 0.00105 0.00122 0.00140 0.00160 0.00184
0.00211 0.00242 0.00278 0.00318 0.00364 0.00417 0.00476 0.00487

0.00063 0.00084 0.00099 0.00116 0.00134 0.00154 0.00177 0.00204
0.00235 0.00270 0.00310 0.00355 0.00407 0.00465 0.00531 0.00543

0.00068 0.00091 0.00108 0.00127 0.00147 0.00170 0.00197 0.00227
0.00262 0.00301 0.00346 0.00396 0.00454 0.00519 0.00592 0.00606

0.00073 0.00099 0.00119 0.00140 0.00163 0.00189 0.00219 0.00253
0.00291 0.00335 0.00385 0.00442 0.00506 0.00578 0.00660 0.00675

0.00080 0.00109 0.00131 0.00154 0.00180 0.00210 0.00243 0.00281
0.00325 0.00374 0.00430 0.00493 0.00564 0.00644 0.00734 0.00752

0.00087 0.00119 0.00144 0.00171 0.00200 0.00233 0.00271 0.00313
0.00362 0.00417 0.00479 0.00549 0.00628 0.00716 0.00816 0.00836

0.00094 0.00131 0.00159 0.00189 0.00222 0.00259 0.00301 0.00349
0.00403 0.00464 0.00533 0.00610 0.00698 0.00796 0.00907 0.00929

0.00103 0.00145 0.00176 0.00210 0.00247 0.00288 0.00335 0.00389
0.00449 0.00516 0.00593 0.00679 0.00775 0.00884 0.01006 0.01031

0.00113 0.00160 0.00195 0.00233 0.00274 0.00321 0.00373 0.00432
0.00499 0.00574 0.00659 0.00754 0.00861 0.00981 0.01115 0.01143

0.00124 0.00176 0.00216 0.00258 0.00305 0.00357 0.00415 0.00480
0.00554 0.00638 0.00731 0.00836 0.00954 0.01087 0.01235 0.01266

0.00136 0.00195 0.00240 0.00287 0.00338 0.00396 0.00461 0.00534
0.00615 0.00707 0.00811 0.00927 0.01057 0.01203 0.01366 0.01401

0.00149 0.00216 0.00265 0.00318 0.00375 0.00440 0.00511 0.00592
0.00683 0.00784 0.00898 0.01026 0.01170 0.01330 0.01509 0.01548

0.00164 0.00238 0.00294 0.00352 0.00416 0.00487 0.00567 0.00656
0.00756 0.00868 0.00994 0.01135 0.01293 0.01469 0.01667 0.01710

0.00179 0.00263 0.00325 0.00390 0.00461 0.00540 0.00628 0.00727
0.00837 0.00961 0.01099 0.01254 0.01428 0.01622 0.01838 0.01887

0.00196 0.00291 0.00359 0.00432 0.00510 0.00598 0.00695 0.00804
0.00925 0.01062 0.01214 0.01385 0.01575 0.01788 0.02026 0.02080

0.00215 0.00320 0.00397 0.00477 0.00564 0.00661 0.00768 0.00888
0.01022 0.01172 0.01340 0.01527 0.01737 0.01970 0.02231 0.02291

0.00235 0.00353 0.00438 0.00527 0.00623 0.00730 0.00848 0.00980
0.01128 0.01293 0.01477 0.01683 0.01913 0.02169 0.02454 0.02521

0.00257 0.00389 0.00483 0.00581 0.00687 0.00805 0.00935 0.01081
0.01243 0.01425 0.01627 0.01853 0.02105 0.02386 0.02698 0.02772

0.00280 0.00427 0.00532 0.00640 0.00758 0.00887 0.01031 0.01191
0.01369 0.01568 0.01790 0.02038 0.02314 0.02622 0.02964 0.03046

0.00305 0.00469 0.00585 0.00705 0.00834 0.00977 0.01135 0.01311
0.01507 0.01725 0.01969 0.02240 0.02542 0.02879 0.03253 0.03345

0.00332 0.00514 0.00643 0.00775 0.00918 0.01074 0.01248 0.01441
0.01656 0.01896 0.02163 0.02460 0.02791 0.03159 0.03568 0.03670

0.00360 0.00564 0.00705 0.00851 0.01008 0.01181 0.01372 0.01583
0.01819 0.02082 0.02374 0.02699 0.03061 0.03464 0.03911 0.04023

0.00391 0.00617 0.00773 0.00934 0.01107 0.01296 0.01506 0.01738
0.01997 0.02284 0.02604 0.02960 0.03355 0.03795 0.04284 0.04408

0.00423 0.00674 0.00847 0.01024 0.01214 0.01422 0.01652 0.01906
0.02189 0.02504 0.02854 0.03243 0.03675 0.04156 0.04689 0.04826

0.00457 0.00736 0.00926 0.01121 0.01330 0.01558 0.01810 0.02089
0.02399 0.02743 0.03126 0.03551 0.04023 0.04547 0.05129 0.05280

```
0.00493 0.00803 0.01012 0.01226 0.01456 0.01706 0.01982 0.02287
0.02626 0.03003 0.03421 0.03885 0.04400 0.04972 0.05606 0.05773

0.00532 0.00874 0.01105 0.01340 0.01592 0.01866 0.02169 0.02503
0.02873 0.03285 0.03741 0.04247 0.04810 0.05433 0.06124 0.06308

0.00572 0.00952 0.01206 0.01464 0.01740 0.02040 0.02371 0.02736
0.03141 0.03590 0.04088 0.04641 0.05254 0.05933 0.06685 0.06889

0.00614 0.01034 0.01314 0.01597 0.01899 0.02229 0.02590 0.02990
0.03432 0.03922 0.04465 0.05067 0.05735 0.06474 0.07293 0.07517

0.00659 0.01124 0.01431 0.01741 0.02072 0.02432 0.02828 0.03264
0.03747 0.04281 0.04873 0.05529 0.06256 0.07061 0.07950 0.08198

0.00706 0.01219 0.01557 0.01897 0.02259 0.02653 0.03085 0.03561
0.04087 0.04670 0.05315 0.06030 0.06820 0.07695 0.08662 0.08934

0.00755 0.01321 0.01692 0.02065 0.02461 0.02891 0.03363 0.03882
0.04456 0.05091 0.05794 0.06571 0.07431 0.08381 0.09431 0.09730

0.00806 0.01431 0.01838 0.02246 0.02679 0.03149 0.03663 0.04230
0.04855 0.05546 0.06311 0.07156 0.08090 0.09122 0.10261 0.10589];

x = 70;
UT = zeros(15,1);

for k = 0:14
    UT(k+1) = -log(1-q(x-k-30,k+1));
end
u23 = -log(1-q(x-14-30,15+1));
u23 = 0.03093;
u13 = x0(1);
u12 = x0(2);
U = zeros(15,1);
for k = 0:14
    U(k+1) = UT(k+1) - ((u23 - u13)*(u12+u13)*exp(-(u12 + u13)*
    (k+1/2))-u12*u23*exp(-u23*(k+1/2))) / ...
    ((u23 - u13)*exp(-(u12 + u13)*(k+1/2))-u12*exp(-u23*(k+1/2)));
```

```
end
end
% Esta es la función para obtener los valores que devuelve el
 algoritmo anterior.

x0 = [.1 .1];                        %Estimación inicial
options = optimset('Algorithm', {'levenberg-marquardt',.00001},
   'TolFun', 1e-10);
x = lsqnonlin(@forcesofmortality68,x0, [], [],
options) %Invoca optimizador
```

9.5. DEFINICION DE FUNCIONES EN ARCHIVO PROCESOS.R

9.5.1. Procesos de riesgo

```
library(plyr)

ProcesoPois <- function(t,lambda){
  N<- rpois(1,t*lambda) #Paso 1
  C<- sort(runif(N,0,t)) #Paso 2 y 3
  data.frame(x=c(0,0,C),y=c(0,0:N))
}

NPois<-function(n,t,rate){
  C<- lapply(1:n, function(n) data.frame(ProcesoPois(t,rate),
Simulacion=n)) #Genera N dataframes con los procesos
  C<-ldply(C, data.frame) #Une en una sola dataframe
  C$Simulacion<-factor(C$Simulacion) #Convierte en factores
  qplot(x,y,data=C,geom=c("step","point"),color=Simulacion,xlab=
"t (Tiempo)",ylab="N(t)",main=sprintf("Simulaciones de un Proceso de Poisson"))
}
ProcesoRisk <- function(N,rate1, rate2){
# SIMULACION DEL PROCESO DE RIESGO A PARTIR DEL LA SIMULACION DE
EXPONENCIALES#

#N=10 #NUMERO DE RENOVACIONES
lambda1=rate1 #INTENSIDAD
lambda2=rate2 #INTENSIDAD
u=1000 # Capital inicial de aseguradora
c=50 # Constante para el cálculo de primas

S=0 #Variable que servira para guardar los tiempos entre renovaciones.
```

```
T=0 #Variable que servira para guardar los tiempos de renovacion
t=0 #Variable auxiliar para acumular la sumas de los tiempos entre
renovaciones
d=0
R=0
D=0 # Balance de aseguradora
T[1] = 0
D[1] = u
for(i in 1:N){
 S[i]=rexp(1,lambda1) #Simulacion de una variable exponencial
 R[i] =rexp(1, lambda2)
 T[(i-1)*2+1+1]=t
 D[(i-1)*2+1+1]= u + c*T[(i-1)*2+1+1] - d
 d = R[i] + d;
 t=S[i]+t
 for(j in 2:2) {
        T[(i-1)*2 + j +1] =  T[(i-1)*2 +1+1] + j*S[i]/2
        D[(i-1)*2 + j +1]= u + c*T[(i-1)*2 + j +1] - (d - R[i])
 }
}
T[N*2+1+1]=t
D[N*2+1+1]= u + c*T[i*2+1+1] - d

#Nt=seq(1:N)
Nt=D
data.frame(x=T,y=Nt)
}

NRisk<-function(n,N,rate1, rate2){
  C<- lapply(1:n, function(n) data.frame(ProcesoRisk(N,rate1, rate2),
Simulacion=n)) #Genera N dataframes con los procesos
  C<-ldply(C, data.frame) #Une en una sola dataframe
  C$Simulacion<-factor(C$Simulacion) #Convierte en factores
  qplot(x,y,data=C,geom=c("line","point"),color=Simulacion,xlab="t (Tiempo)",
ylab="C(t)",main=sprintf("Simulaciones de un Proceso de Riesgo"))
}

ProcesoMartin <- function(N, P0, sigma){
# SIMULACION DEL PROCESO MARTINGALA A PARTIR DEL LA SIMULACION DE NORMALES#
```

```
S=0 #Variable que servira para guardar los tiempos entre renovaciones
Y=0

M=P0

M[1] = M

for(i in 1:N){
 S[i]=rnorm(1, 0, sigma) #Simulacion de una variable normal de
media 1 y desviación sigma

 Y[i]=exp(S[i])
 M[i+1] = M[i]*Y[i]
}

Nt=seq(1:(N+1))

data.frame(x=Nt,y=M)
}

NMartin<-function(n,N, P0, sigma){
  C<- lapply(1:n, function(n) data.frame(ProcesoMartin(N, P0, sigma),
Simulacion=n)) #Genera N dataframes con los procesos
  C<-ldply(C, data.frame) #Une en una sola dataframe
  C$Simulacion<-factor(C$Simulacion) #Convierte en factores
  qplot(x,y,data=C,geom=c("step","point"),color=Simulacion,xlab="t (Tiempo)",
ylab="Mt",main=sprintf("Simulaciones de un Proceso Martingala"))
}

ProcesoRisk2 <- function(N,rate){
#SIMULACION DEL PROCESO DE RIESGO A PARTIR DEL LA SIMULACION DE EXPONENCIALES#

#N=10 #NUMERO DE RENOVACIONES
lambda=rate #INTENSIDAD

u=100 # Capital inicial de aseguradora

d=0
R=0
D=0 # Balance de aseguradora

D[1] = u
```

```
for(i in 1:N){
 R[i] = rpois(1, lambda)

 d = R[i] + d;
 D[i+1]= u + i - d
}
T=seq(1:(N+1))
data.frame(x=T,y=D)
}
NRisk2<-function(n,N,rate){
  C<- lapply(1:n, function(n) data.frame(ProcesoRisk2(N,rate),Simulacion=n))
#Genera N dataframes con los procesos
  C<-ldply(C, data.frame) #Une en una sola dataframe
  C$Simulacion<-factor(C$Simulacion) #Convierte en factores
  qplot(x,y,data=C,geom=c("step","point"), color=Simulacion,xlab="t (Tiempo)",
ylab="Ct",main=sprintf("Simulaciones de un Proceso de Riesgo Discreto"))
}
ProcesoWiener <- function(T, N){
#N <- 100
x <- seq(0,T-1/N,by = 1/N)
y <- cumsum(rnorm(T*N,0,1/N))
data.frame(x=x,y=y)
}

NWiener<-function(n, T, N){
  C<- lapply(1:n, function(n) data.frame(ProcesoWiener(T, N),Simulacion=n))
 #Genera N dataframes con los procesos
  C<-ldply(C, data.frame) #Une en una sola dataframe
  C$Simulacion<-factor(C$Simulacion) #Convierte en factores
  qplot(x,y,data=C,geom=c("line","line"),color=Simulacion,xlab="t
m (Tiempo)",ylab="W(t)",main=sprintf("Simulaciones de un Proceso de Wiener"))
}
```

9.5.2. Proceso de riesgo

```
library(ggplot2)
#source("C:/Users/PCMaster/Dropbox/TESIS-RV08020/Simulaciones/
ProcesoPoisson.R")
source("C:/Users/Usuario/Dropbox/TESIS-RV08020/Simulaciones/
ProcesoPoisson.R")
P<-ProcesoRisk(20,3, 0.5)
```

```
qplot(x,y,data=P,xlab="t (Tiempo)",ylab="X(t)",main="Proceso de Riesgo",
geom=c("line","line"))

NRisk(3,10, 1.5, 0.05) #Intensidad = 2

rexp(10, 0.9)
```

9.5.3. Martingala

```
library(ggplot2)
source("C:/Users/PCMaster/Dropbox/TESIS-RV08020/Simulaciones/
ProcesoPoisson.R")
#source("C:/Users/Usuario/Dropbox/TESIS-RV08020/Simulaciones/
ProcesoPoisson.R")
P<-ProcesoMartin(20, 10, 0.01)
qplot(x,y,data=P,xlab="t (Tiempo)",ylab="Mt",main="Proceso Martingala",
geom=c("step", "point"))

NMartin(3, 20, 10, 0.01)

z = rnorm(10, 1, 0.002)
exp(z)
```

9.5.4. Proceso de riesgo discreto

```
library(ggplot2)
source("C:/Users/PCMaster/Dropbox/TESIS-RV08020/Simulaciones/
ProcesoPoisson.R")
#source("C:/Users/Usuario/Dropbox/TESIS-RV08020/Simulaciones/
ProcesoPoisson.R")
P<-ProcesoRisk2(20, 0.8)
qplot(x,y,data=P,xlab="t (Tiempo)",ylab="Ct",main=
"Proceso de Riesgo Discreto",geom=c("step", "point"))

NRisk2(3, 20, 0.8)

rpois(10, 1.5)
```

9.5.5. Proceso de Wiener

```
library(ggplot2)
source("C:/Users/PCMaster/Dropbox/TESIS-RV08020/Simulaciones/
ProcesoPoisson.R")
```

```
#source("C:/Users/Usuario/Dropbox/TESIS-RV08020/Simulaciones/
ProcesoPoisson.R")
P<-ProcesoWiener(10, 100)
qplot(x,y,data=P,xlab="t (Tiempo)",ylab="W(t)",main=
"Proceso de Wiener",geom=c("line", "line"))

NWiener(3, 10, 100)
```