 Segunda época Vol. 1 Marzo 1972 Nº 1

PROGRAMACION DINAMICA. PROBLEMA DE REEMPLAZO

Eduardo Castillo Urrutia
Departamento de Matemática
Universidad de El Salvador
(17 de Enero de 1972)

RESUMEN

Aquí se expone un ejemplo de Programación Dinámica el cual muestra una aplicación directa del Principio de Optimalidad en problemas de múltiples etapas. No obstante que la aplicación de este ejemplo se reduce a casos en que hay que tomar dos decisiones únicamente, en situaciones reales son diversos los problemas de este tipo y de allí su importancia. Por otra parte, la forma de solución aquí expuesta resulta accesible aun para aquellos poco versados en Programación Dinámica. Creador de Principios de Optimalidad y uno de los principales propulsores de los principios teóricos que gobiernan esta variedad reciente de la Programación Matemática es R. E. Bellman.

ooo

INTRODUCCION

En primer lugar se define lo que se conoce como un problema de Programación Dinámica. A continuación se enuncia el Principio de Optimalidad. Seguidamente se da una interpretación matemática de dicho Principio y finalmente se desarrolla un ejemplo de aplicación del mismo.

Los tipos de problemas que pueden ser analizados mediante la teoría de la Programación Dinámica son muy diversos y por ahora resulta difícil una aplicación mecánica de los conceptos fundamentales debido a que en su mayor parte son de muy reciente formulación y por lo tanto aún están expuestos a constantes modificaciones; sobre todo en lo que a métodos de solución práctica se refiere pues los algorítmos que resultan de su aplicación están sometidos a diversas variaciones con el fin de volverlos cada vez más efectivos en el cómputo.

PROGRAMACION DINAMICA

Si en un sistema de optimización podemos representar cada una de las variables como función de un parámetro común y si este parámetro es el tiempo, entonces se trata de un problema de Programación Dinámica. Las técnicas de solución son aplicables entre otros, a los procesos de decisiones de múltiples etapas en los cuales la decisión que se toma en cada etapa depende de las decisiones tomadas previamente. Una de las ventajas de dichas técnicas estriba en el hecho de que gran variedad de problemas de programación pueden ser convertidos a procesos de decisión de múltiples etapas.

PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD

El principio de Optimalidad fue establecido por Richard Bellman (1), y se enuncia así:

4. Una política óptima en un proceso de decisión de múltiples etapas tiene la propiedad de que, cualesquiera que sean las decisiones y situaciones (estados) iniciales, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de las primeras decisiones".

FORMULACION MATEMATICA GENERAL PARA UN PROBLEMA DE PROGRAMACION DINAMICA

Sea: $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$, el vector de estado.

Las variables: $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ describen completamente los estados del sistema en cualquier momento.

Sea: $F_i(\underline{X})$, el beneficio máximo que puede obtenerse de un proceso de etapas i, comenzando en el estado $\underline{X}$.

Lo anterior depende de la decisión hecha en la primera etapa del proceso de etapas i, y el máximo beneficio que puede ser derivado de i-1 procesos de etapas comenzando en la etapa resultante de dicha decisión, (por el Principio de Optimalidad).

Sea: u una decisión y sea la función: $\underline{H}(\underline{X},u)$, la que representa el vector de estado del estado resultante de la aplicación de la decisión u al estado $\underline{X}$.

Sea: $g(\underline{X},u)$, el beneficio derivado de ir del estado $\underline{X}$ al estado $\underline{H}(\underline{X},u)$, por la decisión u. Entonces el Principio de Optimalidad de la ecuación de recurrencia funcional así:

$$F_i(\underline{X}) = \max_u (g(\underline{X},u) + F_{i-1}(\underline{H}(\underline{X},u))), \text{ siempre que } i \geq 2 \tag{1}$$

Generalmente u será una función de $\underline{X}$ porque algunas decisiones son aplicables solamente a ciertos estados particulares; esto aparecerá en forma de limitaciones de u. Para comenzar el problema se necesita conocer F_i, pero la misma es generalmente obvia.

A partir de (1) se pueden obtener por recurrencia las sucesivas funciones así:

Sea: u' una decisión y sea: $\underline{H}'(\underline{H}(\underline{X},u),u')$, entonces:

$$F_{i-1} = \max_{u'} (g'(\underline{H},u') + F_{i-2}(\underline{H}',u')), \text{ o sea que:}$$

$$F_{i-1} = \max_{u} (g'(\underline{H},u') + F_{i-2}(\underline{H}(\underline{X},u),u')), \text{ etc.}$$

EL PROBLEMA DEL REEMPLAZO. (Dos decisiones)

El estado del proceso es dado por las edades de dos máquinas, es decir dos variables de estado: $X_{1,i}$; $X_{2,i}$; siendo i la edad en años.

Se tiene entonces que el vector de estado será:

$$\underline{X_i} = \begin{pmatrix} X_{1,i} \\ X_{2,i} \end{pmatrix}$$

Al final de cada año existen cuatro decisiones posibles:*

u_0, que consiste en no reemplazar ninguna máquina
u_1, que consiste en reemplazar la máquina 1

u_2, que consiste en reemplazar la máquina 2
u_3, que consiste en reemplazar ambas máquinas

*No confundir con las dos decisiones mencionadas anteriormente pues aquellas se refieren a que una máquina únicamente puede ser: o bien reemplazada, o bien no reemplazada.

De acuerdo con la decisión tomada existirán los siguientes vectores de estado:

$$\underline{X}_{i+1} = \begin{pmatrix} X_{1,i+1} \\ X_{2,i+1} \end{pmatrix} \quad \text{si se toma la decisión } u_o$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ X_{2,i+1} \end{pmatrix} \quad \text{si se toma la decisión } u_1$$

$$= \begin{pmatrix} X_{1,i+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{si se toma la decisión } u_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{si se toma la decisión } u_3$$

Además se establecen las siguientes limitaciones para este problema en particular:

a) Las máquinas 1 y 2 deben de reemplazarse después de cuatro y dos años respectivamente.

b) El proceso durará más de dos años.

c) Cuando falta únicamente un año para finalizar el proceso la decisión será u_o, es decir no reemplazar ninguna máquina.

d) El beneficio total sobre un año, usando la política y comenzando del estado inicial: $\underline{X}_1 = \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix}$, será igual al beneficio correspondiente al estado $\underline{X}_1$, ya que en esta etapa no existe otra alternativa sobre la política óptima a seguir.

e) El estado inicial es: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Según la limitación (a), se tiene:

$$0 \leq \underline{X}_1 \leq 3 \quad \text{y} \quad 0 \leq \underline{X}_2 \leq 1$$

Existen ocho posibles estados $\underline{X}$ diferentes. Sea: $L(\underline{X})$, el beneficio bruto correspondiente al estado $\underline{X}$, de tal manera que de acuerdo con cada uno de los ocho diferentes estados se tiene el correspondiente beneficio bruto así:

N°	1	2	3	4	5	6	7	8
Estado $\underline{X}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{3}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{1}$
Beneficio bruto $L(\underline{X})$	10	10	5	3	8	7	4	1

Por otra parte, los costos de reemplazar las máquinas usadas son: $K_1 = 6$ y $K_2 = 4$ respectivamente.

6. El "retorno" total en el año i: R_i, depende de $\underline{X_i}$ y de la decisión tomada al final de dicho año i, es decir que:

$$R_i = L(\underline{X_i}) \quad \text{si se toma la decisión } u_o$$

$$= L(\underline{X_i}) - 6 \quad \text{si se toma la decisión } u_1$$

$$= L(\underline{X_i}) - 4 \quad \text{si se toma la decisión } u_2$$

$$= L(\underline{X_i}) - 10 \quad \text{si se toma la decisión } u_3$$

El beneficio total sobre n años es: $I = \sum_{i=1}^{n} R_i$

Y el problema consiste entonces en establecer la serie de decisiones que maximizan I.

Sea $f_n(C_1, C_2)$, el beneficio total sobre n años, usando la política óptima y comenzando del estado inicial: $\underline{X}_1 = \binom{C_1}{C_2}$.

Sea $Y_n(C_1, C_2)$, la primera decisión de la política óptima cuando faltan n etapas por recorrer y el estado es $\underline{X} = \binom{C_1}{C_2}$. Entonces, aplicando el principio de Optimalidad se tiene que el problema es:

$$f_n(C_1, C_2) = \max \begin{cases} L(C_1, C_2) + f_{n-1}(C_{1+1}, C_{2+1}) \\ L(C_1, C_2) - 6 + f_{n-1}(0, C_{2+1}) \\ L(C_1, C_2) - 4 + f_{n-1}(C_{1+1}, 0) \\ L(C_1, C_2) - 10 + F_{n-1}(0,0) \end{cases} \qquad (2)$$

Sujeto a las limitaciones siguientes:

$Y_n(3, C_1)$, debe de ser u_1 ó u_3 de acuerdo con (a)

$Y_n(C_1, 1)$, debe de ser u_1 ó u_3 de acuerdo con (a)

$n \geq 2$ según (b)

$Y_1(C_1, C_2) = u_o$ según (c)

$f_1(C_1, C_2) = L(C_1, C_2)$ según (d)

El estado inicial es $\binom{0}{0}$, según (e)

Se empleará la tabla siguiente para mostrar los resultados parciales.

	1	2	3	4	5	6	7	8	
Estado $\underline{X}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{3}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{1}$	
$f_1(\underline{C})$	10	10	5	3	8	7	4	1	
$Y_1(\underline{C})$	u_o	u_o	u_o	u_o	u_o	u_o	u_o	u_o	decisiones
	(17)	(14)	6	-	-	-	-	-	u_o
	12	12	(7)	(5)	-	-	-	-	u_1
$f_2(\underline{C})$	16	11	4	-	(14)	(8)	3	-	u_2
	10	10	5	3	8	7	(4)	(1)	u_3
	18	14	6	%	-	-	-	%	u_o
	18	(18)	(13)	%	-	-	-	%	u_1
$f_3(\underline{C})$	(20)	13	6	%	(18)	10	5	%	u_2
	17	17	12	%	15	(14)	(11)	%	u_3
	(24)	21	%	%	-	-	%	%	u_o
	22	(22)	%	%	-	-	%	%	u_1
$f_4(\underline{C})$	(24)	19	%	%	(22)	16	%	%	u_2
	20	20	%	%	18	(17)	%	%	u_3
	27	%	%	%	%	%	%	%	u_o
	26	%	%	%	%	%	%	%	u_1
$f_5(\underline{C})$	(28)	%	%	%	%	%	%	%	u_2
	24	%	%	%	%	%	%	%	u_3

En la tabla anterior los números encerrados entre paréntesis representan la decisión óptima en cada etapa. Los (-), se deben a la limitación (a), y los (%), a la limitación (e).

A continuación se dan algunos ejemplos de la forma en que se obtuvieron los valores de la tabla.

i)

$$f_2(0,1) = \max \begin{cases} 8 & + f_1(1,2) \\ 8-6 & + f_1(0,2) \\ 8-4 & + f_1(1,0) \\ 8-10 & + f_1(0,0) \end{cases} = \max \begin{cases} 8 & + (-) \\ 8-6 & + (-) \\ 8-4 & + 10 \\ 8-10 & + 10 \end{cases}$$

$$f_2(0,1) = \max \begin{cases} \text{no existe} \\ \text{no existe} \\ (14) \\ 8 \end{cases} = (14), \text{ o sea que la decisión es } u_2$$

ii)

$$f_3(2,0) = \max \begin{cases} 5 & +1 & = 6 \\ 5-6 & +14 & = (13), \text{ o sea que la decisión es } u_1 \\ 5-4 & +5 & = 6 \\ 5-10 & +17 & =12 \end{cases}$$

La solución para un proceso de cinco etapas comenzando con el estado: $\binom{0}{0}$, es: $f_5(0,0) = 28$. Después de cinco años el proceso se repetiría. Observando la tabla - se puede decir que la primera decisión es:

$Y_5(0,0) = u_2$ es decir que el nuevo vector de estado es: $\underline{X}_2 = \binom{1}{0}$

(en la tabla, en las filas correspondientes a f_5; el valor es 28)

Para determinar la segunda decisión, buscamos el valor óptimo de la siguiente etapa, es decir en las filas correspondientes a f_4, sabiendo que el estado aquí será: $\binom{1}{0}$. Se puede ver que dicho valor óptimo es 22, de tal manera que la segunda decisión es: $Y_4(1,0) = u_1$; siendo el vector de estado ahora: $\underline{X}_3\binom{0}{1}$. Con este último dato acerca de la edad de las máquinas pasamos a la siguiente etapa, correspondiente a f_3 y entrando aquí con el vector de estado: $\binom{0}{1}$. En esta etapa el valor máximo - es de 18 y corresponde a la decisión: $Y_3(0,1) = u_2$. El nuevo vector es: $\underline{X}_4 = \binom{1}{0}$.- Continuando con el proceso que se ha seguido hasta aquí obtenemos en f_2 el óptimo 14, correspondiente al valor de estado de entrada: $\binom{1}{0}$; siendo entonces la decisión $Y_2 = (1,0) = u_o$ y el vector: $\underline{X}_5\binom{2}{1}$; finalmente y tomando en cuenta la condición (c) la próxima decisión tendrá que ser u_o, es decir que: $Y_1(2,1) = u_o$, a la cual corresponde un vector de estado $\underline{X}_6 = \binom{3}{2}$.

Del proceso anterior se puede decir que la política óptima a seguir consiste en - reemplazar la máquina 1 después de dos años y la máquina 2, después de uno y tres años. Siendo el beneficio máximo obtenido 28.

Comprobación:

Los sucesivos estados son:

$$\binom{0}{0},\ \binom{1}{0},\ \binom{0}{1},\ \binom{1}{0},\ \binom{2}{1}$$

De tal manera que el beneficio bruto sería: 10+10+8+10+4 = 42.

Los costos de reemplazo, siguiendo la política óptima son:

$$1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 14$$

El beneficio neto es entonces: 42 - 14 = 28.

CONCLUSIONES

Como puede observarse, los pasos seguidos en la solución del problema anterior no son más que una secuencia lógica de la aplicación del Principio de Optimalidad en cada una de las etapas del proceso. Sería interesante determinar la forma en que la solución se altera al hacer variar algunas de las condiciones a, b, c, d y e.

Los principios matemticos aquí expuestos fueron desarrollados por el señor E.Ellman Ph.D del departamento de Matemática de la Universidad de Leeds, Inglaterra en la cátedra Mathematical Programming II, y el ejemplo expuesto fue desarrollado en las conferencias sobre Programación no Lineal, elaboradas por el autor para el seminario "Formación Básica para el Análisis de Sistemas en el aprovechamiento de Recursos de Agua", desarrollando en el mes de Diciembre próximo pasado en la Facultad de Ingeniería y Arquitectura, con la colaboración de la Organización Panamericana de la Salud.

ABSTRACT

Here it is exposed a Dynamic Programming's example which shows a direct application of the Principle of Optimality in multi-stage problems. Although the application of the inside problem is reduced to those cases in which it is necessary to take only two decisions, there exist many problems of that kind in real situations, hence its importance. Moreover, the way of solution showed here can be followed even by those not very much acquainted with Dynamic Programming. First in stablishing the Principle of Optimality and one of the most important promoters of the theoretical principles which govern this recent variety of Mathematical Programming is R. E. Bellman.

EXTRAIT

Ici on expose un exemple de Programmation Dynamique, où on montre application directe du Principe d'Optimalité, dans des problèmes en etapes multiples. Néanmoins que l'application dans cet example est réduite aux cas où l'on doit prendere deux décisions seulement, dans des situations réelles il y a de multiples problèmes semblables et de là son importance. D'autre part, la forme de résoudre qu'on montre est accesible même pour les peu experimentés, dans la Programmation Dynamique. M. R. E. Bellman est le créateur des Principes d'Optimalité et l'un des principaux dans le domaine des principes thèoriques de cette nouvelle branche de la Programmation Dynamique.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

1. Bellman R. E. "Dynamic Programming". Princeton, N.J.
   Princeton University Press, 1957
   Operation research, Methods and Problems. Sasieni, Yaspan, Friedman, Wiley, 1959.