UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Trabajo de graduación titulado

Algunos cálculos de K-grupos algebraicos

Presentado por
Juan José Moreno Ramírez

Para optar al grado de
Licenciado en Matemática

Ciudad Universitaria, 23 de Noviembre de 2,017

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Algunos cálculos de K-grupos algebraicos

Presentado por:
Juan José Moreno Ramírez

Para optar al grado de
Licenciado en Matemática

Bajo la dirección del
MSc. Gabriel Alexander Chicas Reyes

HACIA LA LIBERTAD POR LA CULTURA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Maestro Roger Armando Arias
Rector

Dr. Manuel de Jesús Joya
Vicerrector Académico

Ing. Nelson Bernabé Granados
Vicerrector Administrativo

Maestro Cristóbal Ríos
Secretario General

Licda. Beatriz Meléndez
Fiscal General

Licda. Claudia María Melgar de Zambrana
Defensora de los Derechos Universitarios

Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Lic. Mauricio Hernán Lovo Córdoba
Decano

Lic. Carlos Antonio Quintanilla Aparicio
Vicedecano

Lic. Damarys Melany Herrera Turcios
Secretaría de Facultad

Escuela de Matemática

Dr. José Nerys Funes Torres
Director

MSc. Alba Idalia Córdova Cuélla
Secretaria

Dedicatoria

Reflexioné muchas veces hacer mi dedicatoria, quizás no sea oportuno decir el número de ocasiones pero aclaro que los desvelos, los viajes de San Salvador hasta mi cantón fueron de algún modo componiendo todas las palabras que debían caber en este apartado muy personal e íntimo. Quiero dedicar la culminación de este trabajo a la memoria de mi hermano Óscar Manuel. ¿Qué puedo decir de vos? ¡Absolutamente *todo*! Aún siendo menor que yo y, en la lógica, aparentemente era tu mentor o "ejemplo", siempre fuiste de admiración. Nos convertimos en amigos y en cómplices de muchos logros junto con nuestra familia. Parezco un desquiciado escribiendo esto como si pretendiera que lo fueras a leer, no obstante, las palabras que acá residirán dentro una biblioteca o que sé yo, son palabras que siempre escuchaste de mí y todo eso me hace sentir seguro. No hay tormento en mi vida luego de tu ausencia, no estoy reprimido ni nada por el estilo. Solamente estoy triste, extranándote junto con todos en casa. Eso es todo actualmente. Pero en mi interior existe siempre ese grito que no es revulsivo sino más bien amargo y lleno de terror de saber que no iba a estar con vos jamás. Todo esto me estruja, constituye la parte más suceptible de mi vida. He estado clínicamente deprimido y he aparentado hasta donde puedo la estabilidad de mis emociones. Intenté devolverme a la vida y quisé iniciar desde alguna condición inicial pero los intentos han resultado equívocos porque no quiero adaptarme. Con vos soñábamos con celebrar mis logros como éste y por tanto, te doy un homenaje lleno de respeto y de muchísimo amor a través de cada ecuación o razonamiento lógico que acá exista. Todo es por vos y lucharé junto con *"los de la casa"* como si nada hubiera pasado. Lo digo con esperanza y todo el ánimo del universo, pues, no le daré tregua a lo que viene ni se la he dado; no le he dado ventaja de nada. Fuimos muchos los afectados luego de tu muerte y eso habla de lo especial que fuiste. A todos nos enseñaste a vivir con dignidad y darle la espalda a las incredulidades de las personas hacia uno. Fuiste un personaje increíble, lleno de vida, un completo artísta, un altruista incomparable. Tú legado es notable y así seguirá siéndolo. A pesar de lo mal que probablemente sonará pero reconstruir lo que hiciste en mi no será fácil, será como unir un rompecabezas sin simetría, sin idea de qué figura debo recrear, de piezas no numerables.

Insisto una vez más, comparto a tu memoria esta tesis y te doy el homenaje más modesto pero sincero. Término con un par de poemas hechos por Juan Ramón Jiménez y Américo Ochoa:

Melancolía CXXXV - ***Platero y yo***
Juan Ramón Jiménez

Esta tarde he ido con los niños a visitar la sepultura de Platero, que
está en el huerto de la Piña, al pie del pino redondo y paternal. En
torno, abril había adornado la tierra húmeda de grandes lirios
amarillos.
Cantaban los chamarices allá arriba, en la cúpula verde, toda pintada
de cenit azul, y su trino menudo, florido y reidor, se iba en el aire de
oro de la tarde tibia, como un claro sueño de amor nuevo.
Los niños, así que iban llegando, dejaban de gritar. Quietos y serios,
sus ojos brillantes en mis ojos, me llenaban de preguntas ansiosas.
-¡Platero amigo!-le dije yo a la tierra- ; si, como pienso, estás ahora en un prado del
cielo y llevas sobre tu lomo peludo a los ángeles
adolescentes, ¿me habrás, quizá, olvidado? Platero, dime: ¿te acuerdas
aún de mí?
Y, cual contestando a mi pregunta, una leve mariposa blanca, que antes
no había visto, revolaba insistentemente, igual que un alma, de lirio en lirio...

Versos obtenidos de *A la hora del sol*
Premio centroamericano Juan Ramón Molina (Poesía), 1988
escrito por **Américo Ochoa**

Yo no quería estar
encarcelado
y busqué la tierra
y encontré mis ojos
me ví a oscuras
se encendió la luz y mi reloj
y me ví descalzo.
Yo no quería estar
encarcelado
Busqué la tierra

se encendió la luz
Me ví por fin
encontré mis ojos
mi reloj
mi tugurio
mis remiendos
mi ropa blanca
mi hambre
mi tos
mis labios rotos
mi madre llorando
mi hermano muerto
Yo no quería estar encarcelado
busqué la tierra
y encontré la lucha
mi libertad
tus ojos

Óscar Manuel Moreno Ramírez
(1993 - 2015)
"Don't cry over the split milk!"

Agradecimientos

Tú que vas por el mundo en la hora del sueño
Por esas calles de San Salvador bañadas por la luna llena.
Das pasos de niño, de vuelo recién inaugurado,
Cuando la noche es oscura, el corazón es temeroso
Y mañana será otro día.-
Manlio Argueta.
"Réquiem por un poeta"

No es sencillo expresar el agradecimiento por todo el apoyo que he recibido. La razón no es porque no tenga palabras *suficientes*; es más, pudiera escribir muchos versos que denoten el inmenso cariño y el respeto por todo lo que recibí de quienes me rodearon. La poca sencillez que resulta de agradecer es debido a la extensa cantidad de personas que supieron estar conmigo en el trayecto de la elaboración de éste trabajo y, aún todavía más, aquellos que estuvieron durante el proceso de mis estudios en la licenciatura.
No quiero agradecer usando categorías ni estratos. *El aprecio que siento por todos es por igual.*

Quiero iniciar dando infinitas gracias a mi familia que han estado incondicionalmente conmigo. Agradezco a mi madre por la paciencia y por el respaldo que me ha dado; no sólo el apoyo que me has dado en la universidad sino en todo ámbito de mi vida. Has empujado toda idea por loca que fuere y jamás me juzgaste. Hemos estado en momentos muy devastadores, momentos en donde la gravedad no tiene una magnitud descriptible y en los cuales fuiste una columna sólida, la sombra que proyecto tu vida sobre la mía en medio de un desierto inhóspito, fuiste la brisa que me acarició la mejilla durantes las tardes, *en la hora del café.* Muchas gracias por la vida y por el sentido que me has dado. Gracias porque me enseñaste a que los retos se les afronta con valentía y ha dejar de lado los miedos y los complejos. Por todos tus consejos y por el amor que me otorgaste por las matemáticas: siempre recordamos con mucha simpatía cuando me ayudaste a comprobar el resultado de una división de dos enteros, sin saberlo me enseñaste el Algortimo de Euclides. ¡Sos excepcional! Agradezco tanto que me hayas mostrado que la vida se combate de pie y no de rodillas.

Agradezco inmensurablemente a mi padre por el espíritu de valor que estimuló en mí, con el cual logré encarar los desafíos de mi adolescencia. Por todos los consejos que me brindaste con el objetivo de ser un hombre independiente, lleno de objetivos y con una meta forjada, a pesar de no haber un camino cómodo para llegar a concluir dicha meta. Ser padre no es fácil y me expresaste con tus hechos el deseo por cumplir tus objetivos, trabajaste y estudiaste y aunque no fue fácil, lograste lo que humanamente se pudo, luego que todo contra. Sirvan mis palabras para expresarte el respeto que te tengo.

Gracias a mis hermanos. No saben lo díficil que es atreverse a romper los esquemas de una sociedad tan empobrecida de valores y que únicamente muestra la caoticidad de la violencia. Aún en medio de todo éso, debo decirles que todo es posible y que he sido testigo de cuántas personas luchan por sus metas y de cuántos ya han logrado disfrutarlas. Pese al putrefacto hedor del pántano en el que nos vemos sumergidos, créanme que en medio de todo existe un lirio hermoso, sinigual y que por el cual vale la pena luchar a ver: *no pierdan jamás la fe porque también van a ver y se admirarán de lo bello e inusal que resulta dicho lirio.*

Extiendo también un agradecimiento a todos los profesores de la Facultad, que me prepararon a lo largo de la carrera y que me enseñaron más que matemáticas: *me mostraron que todo en la vida es por mérito.* Les respetaré siempre y les honraré donde me encuentre. Gracias por la amistad que se cultivó y por todos los consejos dados con franqueza y estimulo.
En este sentido, quiero aprovechar y expresar mi agradecimiento al M.Sc Gabriel Chicas Reyes, que me guió y supervisó en el proceso de mi tesis hasta su culminación. Agradezco por la paciencia y por la revisión tan amable de cada uno de mis avances que fui dando. Y por enseñarme la afición por el café. ¡Muchas gracias, infinitas!
Además, agradezco de igual manera a las personas que leyeron el manuscrito preliminar de mi tesis y que dieron en su momento sus observaciones para embellecer el documento. Gracias especiales al M.Sc. José Palacios y al M.Sc. Mario Ruiz por los comentarios hechos y por su valioso aporte como Jurado en mi defensa y presentación final de mi tesis.

Estoy en gratitud también con todos mis amigos y amigas tanto dentro como fuera de la universidad. No olvidaré todas las veces que me animaron con sus palabras y hechos. No puedo olvidar las veces que me acompañaron aún estando muy mal. La amistad que me extendieron fue incondicional y eso lo valoraré mientras viva y sepan que dicho afecto es recíproco. Quiero darles homenaje a todos y todas sin detallar nombres porque puedo fácilmente olvidar a más de alguno pero siéntase representados con mis palabras: *gracias por la amistad forjada.*

Juan José Moreno Ramírez

Índice general

Resumen

Moreno Ramírez, Juan José. 2017. *Algunos cálculos de K-grupos algebraicos*. Trabajo de graduación de Licenciatura en Matemática. San Salvador, Universidad de El Salvador.

La teoría K algebraica es una rama de las matemáticas que cimenta su estudio en calcular ciertos grupos abelianos a partir de un anillo dado y que se conecta con áreas como geometría, teoría de anillos y teoría de números. Los K-grupos obtenidos tienen mucha información acerca de los anillos que los generan; sin embargo, existe mucha dificultad notoria de calcularlos. Esta investigación comprende un desarrollo progresivo de diferentes etapas que inicia desde la recopilación bibliográfica hasta la comprensión de muchas teorías que van inmersas y que son fundamentales, como teoría de módulos y teoría de categorías. En este sentido, pueden exhibirse los K-grupos K_0, K_1 y K_2 de manera sistemática a pesar de que la obtención de cada uno sigue métodos diferentes y nada predecibles. Lo antes mencionado dificultó hacer un resultado general que haga compacto la aprehensión de esta investigación. Por consiguiente, este trabajo exhibe: el cálculo de K_0 de un dominio de factorización única, el cálculo de K_1 de un cuerpo y una construcción para el cálculo del K-grupo de orden 2 del anillo $\mathbb{Z}$ y exponemos el teorema de Matsumoto para el cálculo de K_2 de un cuerpo.

Palabras clave: K-grupos, grupo de Grothendieck, grupo de Whitehead, grupo de Milnor, grupo de Steinberg, símbolos de Steinberg, extensiones centrales, teorema de Matsumoto.

Introducción

"El descubrimiento es el privilegio del niño:
el niño que no tiene miedo de estar una vez más equivocado,
de parecerse a un idiota,
de no ser serio,
de no hacer las cosas como todos los demás"
Alexander Grothendieck (1928-2014)

Estos versos parecen haber sido escritos expresamente, más que para cualquier otro campo del conocimiento, aún más que para cualquier espíritu artístico, sino que resuena a tremenda voz en el quehacer de un matemático; el cual se ve retado muchas veces a conseguir respuestas maravillosas y que el fruto más notorio de su trabajo es el *descubrimiento*.
El presente documento está dentro de una rama de la matemática relativamente nueva, que nació a finales de los cincuenta en algunos trabajos de A. Grothendieck sobre la *algebrización* de la teoría de categorías y la cual se conoce con el nombre de *Teoría K algebraica* y que tiene conexiones con geometría, topología, teoría de anillos y teoría de números. En palabras simples podemos definir a la teoría K algebraica como el estudio de funtores K_n que relaciona categorías pequeñas y la categoría de grupos abelianos. Las preocupaciones de los primeros pioneros en esta área fue estudiar la categoría de módulos proyectivos finitamente generados sobre un anillo arbitrario Λ y esto constituyó el centro del afán, pues, encontraron relaciones con grupos lineales los cuales tienen un rol de importancia en casi todos los objetos de las matemáticas. En este sentido, hemos indicado que fue Grothendieck quién fue el primero en estudiar el grupo $K_0(\mathcal{C})$ (en ese tiempo escrito como $K(\mathcal{C})$) donde para un esquema $\mathfrak{X}$, $\mathcal{C}$ es la categoría $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ de haces localmente libres de $O_{\mathfrak{X}}$-módulos. El grupo $K_0(\mathcal{C})$ clasifica las clases de isomorfismo en $\mathcal{C}$ y Grothendieck buscó nombrar a la teoría que refleja "clase". Él usó la letra K de la palabra alemana "Klassen" que su traducción es clases para nuestro idioma español. En pocas palabras, esta es la razón de por qué aparece la K en la teoría K. Todo esto se concibió allá por el año de 1,957 (al-

gunos asumen que fue en 1,958). Otra noción importante es que la teoría K algebraica se considera como las primeros intentos de generalizar partes del álgebra lineal, notablemente la teoría de la dimensión de espacios vectoriales, y determinantes, para módulos sobre anillos arbitrarios. Por consiguiente, al haber plasmado el origen de todo este meollo, coloquialmente hablando, los objetos aritméticos, topológicos o geométricos son asignados en otros objetos llamados K-grupos. Los objetos obtienen su nombre a partir de su notación, es decir, dado un anillo Λ, podemos construir grupos, que se denotan como $K_0(\Lambda)$, $K_1(\Lambda)$, $K_2(\Lambda)$,..., $K_n(\Lambda)$,... $n \in \mathbb{N}$ los cuales son los K-grupos de orden n, en este marco, aún más, debemos estudiar los funtores entre la categoría de anillos **Ring** y la categoría de grupos abelianos **Ab**

$$K_n : \mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Ab}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Los K-grupos son grupos en un sentido del álgebra abstracta. Ellos contienen información detallada sobre el objeto original pero calcularlos es una tarea notoriamente difícil. Por ejemplo, un ejemplo excepcional es el cálculo de los K-grupos del anillo de los números enteros.
Bajo toda esta perspectiva, este documento se compone de dos partes: la primera parte trata de los temas preliminares para poder entrar en esta área; constituimos un capítulo de los conceptos básicos y hacemos un repaso de las definiciones de *teoría de grupos, teoría de anillos y teoría de módulos*, concretando en cada sección un recuento de definiciones, proposiciones y resultados que nos dotarían para la comprensión exhaustiva de las secciones siguientes. En este sentido, continuamos el recorrido estudiando *teoría de categorías* y en la cual damos las definiciones y propiedades principales, para luego hablar de las *trasformaciones naturales* y dar la definición de *categoría abeliana*.
La segunda parte se desglosa en tres capítulos: *el grupo de Grothendieck K_0 de un anillo*, *el grupo de Whitehead K_1 de un anillo* y *el grupo de Steinberg y el grupo K_2*. Para el capítulo sobre el grupo de Grothendieck proveemos las definiciones, proposiciones y teoremas que dan claridad a la hora de calcular este K-grupo de orden 0 para un anillo arbitrario; los resultados principales es el cálculo de K_0 para dominios de factorización única y anillos locales. Algo importante es que el cálculo de K_0 de un anillo no necesariamente nos lleva a determinar todas las clases de isomorfismo, sino que el cálculo determina todas las clases de isomorfismo que son estables, por ende exponemos el concepto de *módulos establemente isomorfos*.
Asimismo, para el capítulo 3, sobre el grupo de Whitehead K_1, iniciamos con la definición de matriz elemental y el grupo de matrices de orden $n \times n$ con entradas en un anillo conmutativo que tienen determinante distinto de

cero que conoceremos como *grupo lineal general*. Por lo que iniciamos también dando diversos resultados para poder llegar la construcción del grupo de Whitehead (llamado también grupo de *Bass-Whitehead*). Establecemos las propiedades funtoriales de K_1 y exponemos el resultado que dice que el K-grupo de orden 1 de un cuerpo es isomorfo al grupo de sus elementos invertibles.
Y para terminar con la parte dos, en el capítulo sobre el grupo de Steinberg y el grupo K_2, iniciamos con los resultados sobre *extensiones centrales* de grupos. A continuación se propone la definición del grupo de Steinberg y se relaciona éste con el grupo de matrices elementales de orden n, y de ahí la concepción del K-grupo de orden 2, el cual debemos a John Milnor, que es el núcleo entre el grupo de Steinberg y el grupo de matrices elementales. Desde luego, analizamos las propiedades de K_1 y la propiedad más importante es su funtorialidad. En este sentido, de entre tantos resultados, uno de los más notables es que el K-grupo de orden 2 de un anillo es igual al centro del grupo de Steinberg, el cual, se le atribuye a Michel André Kervaire (1,927 - 2,007). Para continuar, trabajamos con los elementos del grupo de Steinberg para obtener relaciones muy importantes, la cual establece que el grupo de Steinberg es la extensión central universal del grupo de matrices elementales. Luego, nos embarcamos a mostrar el cálculo de K_2 para el anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$; la construcción es debida a Milnor y presentamos el lema de Silvester que es la base de dicha construcción. Para finalizar el capítulo, presentamos el cálculo de K_2 para un cuerpo, el cual se le conoce como *teorema de Matsumoto*, que afirma que K_2 de un cuerpo:

$$K_2(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}^\times / \langle a \otimes (1-a) | a \neq 0, 1 \rangle$$

y damos una explicación de cómo Matsumoto demostró este resultado, usando la definición de *símbolos*, los cuales son usados en teoría de números vastamente, y son usados en la construcción del teorema de Matsumoto para el cálculo del K-grupo de orden 2 de un cuerpo. Al mismo tiempo, presentamos las aplicaciones de K_2 en otros objetos, por ejemplo: *formas cuadráticas*.

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

Conceptos básicos

Referencias

A lo largo de dicho capítulo se hizo una revisión exhaustiva en los siguientes libros que se citarán a continuación con el propósito de abordar el estudio de los temas preliminares. El lector puede revisar cada referencia donde se le proveerá los detalles de las pruebas a cada proposición. Véanse entonces: (Northcott, 1960), (Weibel, 1994), (Cartan y Eilenberg, 1956), (Stammbach y Hilton, 1971), (Mac Lane, 1998), (Pareigis, 1970), (Borceux, 1994), (Anderson y Fuller, 1992), (Atiyah y MacDonald, 1969), (Fuchs, 1970), (Kashiwara y Schapira, 2005), (Gruenberg, 1970), (Mitchell, 1965), (Barr, Grillet, y van Osdol, 1971).

1.1. Teoría de Módulos

1.1.1. Definición

Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$.

Definición 1.1.1.1 *Un Λ-módulo o módulo sobre Λ es una pareja (M, μ) donde M es un grupo abeliano aditivo y $\mu : \Lambda \times M \to M$ es una función escrita $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ tal que los siguientes axiomas se satifacen:*

$$\begin{aligned} \alpha(x+y) &= \alpha x + \alpha y \\ (\alpha+\beta)x &= \alpha x + \beta x \\ (\alpha\beta)x &= \alpha(\beta x) \\ 1x &= x \end{aligned}$$

esto para $\alpha, \beta \in \Lambda$; $x, y \in M$

Añadimos que, un Λ-módulo es un sistema algebraico M con una operación binaria $+ : M \times M \to M$ con un conjunto de operaciones unarias $M \to M$, una para cada $\alpha \in \Lambda$. μ se llama *multiplicación escalar de* M y los elementos de Λ se llaman *escalares*. Si Λ es un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces un Λ-módulo es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Definición 1.1.1.2 *Sean M, N Λ-módulos. Una función $f : M \to N$ es un* homomorfismo de Λ-módulos *(o es* Λ-lineal*) si*

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) &= \alpha f(x) \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \Lambda$ y todo $x, y \in M$.

Así f es un homomorfismo de grupos abelianos los cuales conmutan con la acción de cada $\alpha \in \Lambda$. Si Λ es un cuerpo, un homomorfismo de Λ-módulos es la misma cosa que las transformaciones lineales de espacios vectoriales.

Proposición 1.1.1.3 *La composición entre dos homomorfismos de Λ-módulos es nuevamente un homomorfismo de Λ-módulos.*

El conjunto de todos los homomorfismos de Λ-módulos de M a N puede considerarse como un Λ-módulo como sigue: definamos $f + g$ y αf por las reglas

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in M$. Mediante esta definición, los axiomas para Λ-módulos se satisfacen. Este Λ-módulo es denotado por $Hom_\Lambda(M, N)$.

Los homomorfismos $u : M' \to M$ y $v : N \to N'$ inducen funciones $\bar{u} : Hom(M, N) \to Hom(M', N)$ y $\bar{v} : Hom(M, N) \to Hom(M, N')$ definidos como sigue:

$$\bar{u}(f) = f \circ u, \quad \bar{v}(f) = v \circ f.$$

Estas funciones son homomorfismos de Λ-módulos.

Para cualquier módulo M existe un isomorfismo natural $Hom_\Lambda(\Lambda, M) \cong M$: cualquier homomorfismo de Λ-módulos $f : \Lambda \to M$ es determinado unicamente por $f(1)$, el cual puede ser cualquier elemento de M.

Definición 1.1.1.4 *Un* submódulo *N de un Λ-módulo M es un subgrupo de M y para todo $\alpha \in \Lambda$, $\alpha N = \{\alpha x | x \in N\}$.*

Esto nos da a entender que, N es un submódulo de M si N es un subgrupo del grupo abeliano M y es cerrado bajo la multiplicación escalar.

Si consideramos el anillo Λ como un Λ-módulo, un submódulo de Λ es un subconjunto Γ de Λ cerrado bajo la suma y tal que $\alpha\Gamma \subset \Gamma$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Dicho subconjunto se llama *ideal* del anillo Λ.

Definición 1.1.1.5 *Sea $f : M \to N$ un homomorfismo de Λ-módulos. El* núcleo *de f, denotado con $\ker f$, es el conjunto de todos los elementos $x \in M$ tales que $f(x) = 0$. La imagen de f, denotada con $\operatorname{im} f$, es el conjunto de $f(x)$ tales que $x \in M$.*

Proposición 1.1.1.6 *Sea $f : M \to N$ un homomorfismo de Λ-módulos. Entonces, si M' es un submódulo de M, $f(M')$ es un submódulo de N y si N' es un submódulo de N, $f^{-1}(N')$ es un submódulo de M.*

Corolario 1.1.1.7 *La imagen de $f : M \to N$, $\operatorname{im} f$, es un submódulo de N; y el núcleo de f, $\ker f$, es un submódulo de M.*

Definición 1.1.1.8 *Llamaremos* endomorfismo *a un homomorfismo $f : M \to M$ y diremos que es* automorfismo *si dicha f es biyectiva.*

1.1.2. Teoremas de isomorfismo

Se proporcionarán tres teoremas que son útiles para determinar si dos módulos son isomorfos. Se seguirá considerando a Λ como un anillo conmutativo con $1 \neq 0$.

Proposición 1.1.2.1 *Sea $(N_i)_{i \in I}$ una familia de submódulos de un Λ-módulo M. Entonces $\bigcap_{i \in I} N_i$ es un submódulo de M.*

Sea S un subconjunto de un Λ-módulo M. S está contenido al menos en un submódulo de M. Por la proposición 1.1.2.1, la intersección de todos los submódulos de M que contienen a S es un submódulo de M. Dicha intersección es el submódulo más pequeño de M que contiene a S.

Definición 1.1.2.2 *La intersección* $\bigcap_{i\in I} N_i$ *de los submódulos* N_i *de un* Λ*-módulo* M *que contiene a un subconjunto* S *de* M *se llama* submódulo generado por S, *denotado por* $\langle S\rangle$. *Si* $\bigcap_{i\in I} N_i = M$, $S \subset N_i$, *decimos entonces que* M *está generado por* S *y que* S *es un* conjunto de generadores de M.

Definición 1.1.2.3 *Decimos que un elemento* x *de un* Λ*-módulo* M *es una* combinación lineal *de elementos de un subconjunto* S *de* M *si existe un número finito de elementos* $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ *de* S *tal que* $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, $\alpha_i \in \Lambda$.

Definición 1.1.2.4 *Sea* N *un submódulo de un* Λ*-módulo* M, *entonces el* módulo cociente M/N *es el grupo cociente abeliano* M/N *provisto de una multiplicación escalar* $\mu : \Lambda \times M/N \to M/N$ *dada por* $\mu(\alpha, x+N) = \alpha x + N$; $\alpha \in \Lambda$, $x + N \in M/N$.

Definición 1.1.2.5 *Llamamos* coimagen *y* conúcleo *de un homomorfismo de* Λ*-módulos* $f : M \to N$ *a los módulos cocientes de* M *y* N:

$$\begin{aligned} coim\ f &= M/ker\ f \\ coker\ f &= N/im\ f \end{aligned}$$

respectivamente.

Proposición 1.1.2.6 *Un homomorfismo de* Λ*-módulos* $f : M \to N$ *es*

1. *monomorfismo si, y sólo si,* $ker\ f = 0$.

2. *epimorfismo si, y sólo si,* $coker\ f = 0$.

Proposición 1.1.2.7 *Sean* $f : M' \to M$, $g : M \to M''$ *dos homomorfismos de* Λ*-módulos y* $h = g \circ f$ *la composición. Entonces,*

1. *si* h *es monomorfismo,* f *es monomorfismo, y*

2. *si* h *es epimorfismo,* g *es epimorfismo.*

Definición 1.1.2.8 *Diremos que un homomorfismo* $f : M \to N$ *es* trivial *si* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in M$. *Es decir,* $im\ f = 0$. *Equivalentemente,* $f = 0$ *si, y sólo si,* $ker\ f = M$.

Teorema 1.1.2.9 (Primer teorema de isomorfismo) *Sea N un submódulo del Λ-módulo M y $f : M \to M'$ un homomorfismo de Λ-módulos tal que $N \subset ker\ f$. Entonces existe un homomorfismo único $h : M/N \to M'$ tal que $h \circ \pi = f$*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, dotted, "f"] & M/N \arrow[d, "h"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

además, para dicho homomorfismo h, $im\ h = im\ f$ y $ker\ h = (ker\ f)/N$.

Si ocurre que $N = ker\ f$, entonces h es un monomorfismo. Así que $f(M) = im\ f \cong M/ker\ f = M/N$.

Definición 1.1.2.10 *El homomorfismo de* inclusión *de un submódulo N de un Λ-módulo se denotará con $\iota : N \to M$.*

Teorema 1.1.2.11 (Segundo teorema de isomorfismo) *Sean N, N' submódulos de un Λ-módulo M. Se tiene entonces que*

1. *Para el homomorfismo de inclusión $\iota : N \to N + N'$, $\iota(N \cap N') \subset N'$ y además*
2. *ι induce un isomorfismo $\iota' : N/(N \cap N') \xrightarrow{\cong} (N + N')/N'$*

¿Qué pasa cuando tomamos el módulo cociente de un módulo cociente? El siguiente teorema responde esta interrogante.

Teorema 1.1.2.12 (Tercer teorema de isomorfismo) *Sean $M'' \subset M' \subset M$ Λ-módulos, entonces, $(M/M'')/(M'/M'') \cong M/M'$.*

1.1.3. Sucesiones exactas

Definición 1.1.3.1 *Diremos que una sucesión de Λ-módulos*

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \ldots$$

es semiexacta *en M, si $im\ f_{i-1} \subset ker\ f_i$. Si es semiexacta en cada Λ-módulo, la llamaremos* sucesión semiexacta.

Proposición 1.1.3.2 *Una sucesión de Λ-módulos*

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \ldots$$

es semiexacta en M, si, y sólo si, la composición $f_i \circ f_{i-1} = 0$.

Definición 1.1.3.3 *Diremos que una sucesión de Λ-módulos*

$$\dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots$$

es exacta *en M, si es semiexacta e im $f_{i-1} \supset$ ker f_i. Si es exacta en cada Λ-módulo, la llamaremos* sucesión exacta.

Esto equivale a decir que una sucesión es exacta en M_i si, y sólo si, *im* $f_{i-1} =$ *ker* f_i. A una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

la llamaremos *sucesión exacta corta*.

Definición 1.1.3.4 *Sean M, M', N, N' Λ-módulos, con f, f', g, g' homomorfismos de Λ-módulos. Decimos que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & N \arrow[d, "f"] \\ M' \arrow[r, "g"] & N' \end{tikzcd}$$

conmuta si $f \circ f' = g \circ g'$.

Proposición 1.1.3.5 *Sean $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ y $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ dos sucesiones exactas cortas, y supongamos que, el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, tail] \arrow[d, "h'"] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[d, "h''"] \\ N' \arrow[r, tail] & N \arrow[r, two heads] & N'' \end{tikzcd}$$

dos de los tres homomorfismos h', h, h'' son isomorfismos. Entonces el tercero es también isomorfismo.

Proposición 1.1.3.6 *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con reglones exactos*

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "h''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "g"] & N'' & \end{tikzcd}$$

Entonces existe un homomorfismo ∂ : ker $h'' \longrightarrow$ coker h' tal que la siguiente sucesión es exacta

$$\text{ker } h' \longrightarrow \text{ker } h \xrightarrow{k} \text{ker } h'' \xrightarrow{\partial} \text{coker } h' \xrightarrow{k'} \text{coker } h''$$

1.1.4. Suma y producto directo

Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de Λ-módulos. Sea $\prod\limits_{i\in I} M_i$ su producto cartesiano, es decir, $\prod\limits_{i\in I} M_i = \left\{ f : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} M_i | f(i) \in M_i \text{ para todo } i \in I \right\}$. Queremos definir en $\prod\limits_{i\in I} M_i$ una estructura de Λ-módulo. Definamos

$$+ : \prod_{i\in I} M_i \times \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$$

mediante

$$\begin{aligned} f+g : I &\longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i \\ i &\mapsto (f+g)(i) = f(i) + g(i). \end{aligned}$$

$\prod\limits_{i\in I} M_i$ la operación $+$ forma un grupo abeliano. El elemento identidad es la función

$$\begin{aligned} 0 : I &\longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i \\ i &\mapsto 0(i) = 0. \end{aligned}$$

Definamos $\mu : \Lambda \times \prod\limits_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} M_i$ mediante

$$\begin{aligned} (\alpha, f) \mapsto \mu(\alpha, f) = \alpha f : I &\longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i \\ i &\mapsto (\alpha f)(i) = \alpha(f(i)). \end{aligned}$$

Y mediante esta definición junto a la de $+$ hemos dotado a $\prod\limits_{i\in I}$ una estructura de Λ-módulo.

Definición 1.1.4.1 $\prod\limits_{i\in I} M_i$ *se llama* producto directo *de la familia* $(M_i)_{i\in I}$ *de Λ-módulos M_i, $i \in I$.*

Definición 1.1.4.2 *Sea* $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i = \left\{ f \in \prod\limits_{i\in I} M_i | f(i) = 0 \text{ para casi toda } i \in I \right\}$.
$\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ *se llama suma directa de la familia (M_i), $i \in I$.*

Si el conjunto de índices I es finito, tenemos

$$\prod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i$$

Para cada $j \in I$ tenemos un epimorfismo de Λ-módulos

$$\begin{array}{rcll} p_j : \prod\limits_{i\in I} & \longrightarrow & M_i & \forall j \in I \\ f & \mapsto & p_j(f) = f(j), & \forall f \in \prod\limits_{i\in I} M_i \end{array}$$

al que llamaremos *proyección natural de producto directo* $\prod_{i\in I} M_i$ en M_j. La restricción de p_j a $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ se llamará *proyección natural de la suma directa* $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ en M_j.

También para cada $j \in I$ existe un monomorfismo $\iota_j : M_j \longrightarrow \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, dado por

$$x \mapsto \iota_j(x)(i) = \begin{cases} x & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

que se llama *inclusión natural* del Λ-módulo M_j en la suma directa $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$.

Vamos a denotar $f(i)$ con f_i. Entonces, los elementos de $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ son familias $(f_i)_{i\in I}$. Con la notación escogida, la suma y la multiplicación escalar son $(f_i)_{i\in I} + (g_i)_{i\in I} = (f_i + g_i)_{i\in I}$ y $\alpha(f_i)_{i\in I} = (\alpha f_i)_{i\in I}$.

Teorema 1.1.4.3 (Propiedad universal de la suma directa) *Si M es un Λ-módulo y $\left\{\varphi_j : M_j \longrightarrow M\right\}_{j\in I}$ es una familia de homomorfismos de Λ-módulos, entonces existe un homomorfismo único $\varphi : \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ tal que $\varphi \circ \iota_j = \varphi_j$, para toda $j \in I$.*

Se debe notar que el teorema caracteriza, junto con las inclusiones, a la suma directa, salvo un isomorfismo. Si $I = \{1, 2\}$, el teorema nos dice que, dados $\varphi_1 : M_1 \longrightarrow M$ y $\varphi_2 : M_2 \longrightarrow M$ junto con las inyecciones $\iota_1 : M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ y $\iota_2 : M_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_2$, existe un homomorfismo único $\varphi : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M & \\ M_1 \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\iota_1"] & M_1 \oplus M_2 \arrow[u, dotted, "\varphi"] & M_2 \arrow[ul, "\varphi_2"'] \arrow[l, "\iota_2"'] \end{tikzcd}$$

Ahora tomemos un S, S un Λ-módulo; y sea $\iota'_1 : M_1 \longrightarrow S$, $\iota'_2 : M_2 \longrightarrow S$ inyecciones que cumplen (1.1.4.3). Sea $M = M_1 \oplus M_2$ y $\varphi_j = \iota_j$, $j = 1, 2$. Como (S, ι'_j) satisface (1.1.4.3), existe un homomorfismo único $\varphi : S \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ tal que el siguente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & M_1 \oplus M_2 & \\ M_1 \arrow[ur, "\iota_1"] \arrow[r, "\iota'_1"'] & S \arrow[u, dotted, "\varphi"] & M_2 \arrow[ul, "\iota_2"'] \arrow[l, "\iota'_2"] \end{tikzcd}$$

Tomando a $M = S$ en (1.1.4.3) con $\varphi'_j = \iota'_j$ tal que $M_1 \oplus M_2$ cumplas las condiciones de (1.1.4.3). Entonces existe un homomorfismo $\varphi' : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow S$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & M = S & \\ M_1 \arrow[ur, "\varphi'_1 = \iota'_1"] \arrow[r, "\iota_1"] & M_1 \oplus M_2 \arrow[u, dotted, "\varphi'"] & M_2 \arrow[ul, "\varphi'_2 = \iota'_2"'] \arrow[l, "\iota_2"'] \end{tikzcd}$$

Luego obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & M_1 \oplus M_2 & \\ M_1 \arrow[ur, "\iota_1"] \arrow[r, "\iota'_1"'] \arrow[dr, "\iota_1"] & S \arrow[u, dotted, "\varphi'"] & M_2 \arrow[ul, "\iota_2"'] \arrow[l, "\iota'_2"] \arrow[dl, "\iota_2"] \\ & M_1 \oplus M_2 \arrow[u, dotted, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

Por la unicidad de (1.1.4.3) obtenemos que $\varphi \circ \varphi' = 1_{M_1 \oplus M_2}$. De igual manera se puede concluir que $\varphi' \circ \varphi = 1_S$. Entonces, φ y φ' son isomorfos.

A continuación estableceremos la propiedad llamada *universal del producto directo*. Un elemento del producto es una familia $(f_j)_{j \in I}$ de elementos $f_j \in M_j$ sin ninguna restricción, y las f_j pueden ser diferentes de cero para todo $j \in I$.

Teorema 1.1.4.4 (Propiedad universal del producto directo) *Si M es un Λ-módulo y $\left\{\psi_j : M \longrightarrow M_j\right\}_{j \in I}$ es una familia de homomorfismos, entonces existe un homomorfismo único $\psi : M \longrightarrow \prod_{j \in I} M_j$ tal que $p_j \circ \psi = \psi_j$, $j \in I$.*

Definición 1.1.4.5 *Diremos que una sucesión exacta corta*

$$M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$$

se escinde *si existe un homomorfismo $g' : M'' \longrightarrow M$ tal que $g \circ g' = 1_{M''}$.*

Proposición 1.1.4.6 *Si*

$$M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$$

es una sucesión exacta corta que se escinde, entonces $M \cong M' \oplus M''$.

Teorema 1.1.4.7 *Si un Λ-módulo M posee submódulos N y N' tales que $N \cap N' = 0$ y $N + N' = M$, entonces $\varphi : N \oplus N' \longrightarrow M$, dado por $\varphi((y, y')) = y + y'$, es isomorfismo.*

Corolario 1.1.4.8 *Sean $f : M' \longrightarrow M$ y $g : M \longrightarrow M''$ tales que $g \circ f$ es un isomorfismo. Entonces $M \cong im\ f \oplus ker\ g$.*

1.1.5. $\mathbf{Hom}_\Lambda(M, N)$

Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$.

Antes se estableció que $Hom_\Lambda(M, N)$ es el conjunto de homomorfismos de Λ-módulo M en el Λ-módulo N. Tomemos $f, g : M \longrightarrow N$ Λ-homomorfismos y definamos $f + g : M \longrightarrow N$ mediante $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. De inmediato se comprueba que esta definición hace de $Hom_\Lambda(M, N)$ un grupo abeliano. Definamos una multiplicación escalar: sea $\alpha f : M \longrightarrow N$, $\alpha \in \Lambda$, mediante $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$. Utilizando la conmutatividad de Λ, es fácil comprobar que $Hom_\Lambda(M, N)$ tiene una estuctura de Λ-módulo.

Sea $\psi : N' \longrightarrow N$ un homomorfismo de Λ-módulos y $(M \xrightarrow{f} N)$ un elemento de $Hom_\Lambda(M, N')$. Asociemos a f un homomorfismo $(M \xrightarrow{g} N) \in Hom_\Lambda(M, N)$ mediante una función

$$\psi_* = Hom_\Lambda(M, \psi) : Hom_\Lambda(M, N') \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N)$$

dada por $\psi_*(f) = \psi \circ f$. Por medio de esta definición ψ_* es un homomorfismo (de grupos abelianos si Λ es no conmutativo) de Λ-módulos, llamado *homomorfismo inducido por ψ*.

Proposición 1.1.5.1 *Sean $\psi : N' \longrightarrow N$ y $\psi' : N \longrightarrow N''$ homomorfismos de Λ-módulos y M un Λ-módulo.*

1. *si $1_N : N \longrightarrow N$ es la identidad, entonces*

$$1_{N*} : Hom_\Lambda(M, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N)$$

   es la identidad, y

2. $(\psi' \circ \psi)_* = \psi'_* \circ \psi_*$

Sea $\varphi : M' \longrightarrow M$ un homomorfismo de Λ-módulos y $(M \xrightarrow{g} N) \in Hom_\Lambda(M, N)$. Asociemos a g un homomorfismo $(M' \xrightarrow{f} N) \in Hom_\Lambda(M', N)$ mediante una función

$$\varphi^* = Hom_\Lambda(\varphi, N) : Hom_\Lambda(M, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M', N),$$

dada por $\varphi^*(g) = G \circ \varphi$. Es claro que φ^* es un homomorfismo de Λ-módulos, llamado *homomorfismo inducido por φ*.

Proposición 1.1.5.2 *Sean $\varphi : M' \longrightarrow M$ y $\varphi' : M \longrightarrow M''$ homomorfismo de Λ-módulos y N un Λ-módulo.*

1. *si $1_M : M \longrightarrow M$ es la identidad, entonces*

$$1_M{}^* : Hom_\Lambda(M, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N)$$

   es la identidad.

2. $(\varphi' \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \varphi'^*$.

Proposición 1.1.5.3 *Sean $\{M_i\}_{i \in I}$ y $\{N_i\}_{i \in I}$ familias de Λ-módulos, M y N son Λ-módulos. Entonces*

1. $Hom_\Lambda\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) \underset{\rho}{\xrightarrow{\cong}} \prod_{i \in I} Hom_\Lambda(M_i, N)$.

2. $Hom_\Lambda\left(M, \prod_{i \in I} N_i\right) \underset{\xi}{\xrightarrow{\cong}} \prod_{i \in I} Hom_\Lambda(M, N_i)$.

Proposición 1.1.5.4 *Sean*

$$N' \xrightarrow{\psi} N \xrightarrow{\psi'} N''$$

una sucesión exacta de Λ-módulos. Entonces, para cualquier Λ-móduloo M, la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N') \xrightarrow{\psi_*} Hom_\Lambda(M, N) \xrightarrow{\psi'_*} Hom_\Lambda(M, N'')$$

es exacta.

Proposición 1.1.5.5 *Sean*

$$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\varphi'} M''$$

una sucesión exacta de Λ-módulos. Entonces, para cualquier Λ-móduloo M, la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M'', N) \xrightarrow{\varphi'_*} Hom_\Lambda(M, N) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_\Lambda(M'', N)$$

es exacta.

1.1.6. Módulos libres y proyectivos

Consideraremos la suma directa $\bigoplus_{j \in J} \Lambda_j$ de la familia de anillos Λ_j, $j \in J$, donde cada Λ_j es isomorfo a un anillo fijo Λ, es decir, $\Lambda_j = \Lambda$, $j \in J$. Sea $\iota : \Lambda_j \longrightarrow \bigoplus_{j \in J} \Lambda_j$ la inclusión natural. Escribamos $\iota_j(1) = e_j$, donde

$$e_j = \delta_{j,j'} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ j = j' \\ 0 & \text{si } \ j \neq j', \quad j' \in J \end{cases}$$

Luego, cada $x \in \bigoplus_{j \in J} \Lambda_j$ puede escribirse en forma única como $x = \sum_{j \in J} x_j e_j$. A la función $g : J \longrightarrow \bigoplus_{j \in J} \Lambda_j$, dada por $g(j) = e_j$, la llamaremos *función canónica*. Veamos que la pareja $\left(\bigoplus_{j \in J} \Lambda_j, g \right)$ es una solución de un problema universal.

Proposición 1.1.6.1 *Para todo Λ-módulo M y para toda función $f : J \longrightarrow M$, existe un homomorfismo único $\phi : \bigoplus_{j\in J} \Lambda_j \longrightarrow M$ tal que $f = \phi \circ g$.*

Definición 1.1.6.2 *Diremos que la familia $(x_j)_{j\in J}$ de elementos de un Λ-módulo M es:*

1. linealmente independiente *si es ϕ es inyectiva.*

2. *una familia de* generadores *si ϕ es sobreyectiva.*

3. *una* base *si ϕ es biyectiva.*

En otras palabras, la familia $(x_j)_{j\in J}$ es linealmente independiente si $\phi\left(\sum_{j\in J} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0$ implica que $\lambda_j = 0$ para toda $j \in J$, $\lambda_j \in \Lambda$. Decir que ϕ es sobreyectiva equivale a decir que todo elemento de M se puede escribir como $\sum_{j\in J} \lambda_j x_j$, es decir, como una *combinación lineal*. Decir que ϕ es biyectiva equivale a decir que todo elemento $x \in M$ se puede escribir de una, y solamente una , manera en la forma $x = \sum_{j\in J} \lambda_j x_j$, para toda $j \in J$. Se dirá que una familia $(x_j)_{j\in J}$ es linealmente dependiente si dicha familia no es linealmente independiente.

Por definición, $\bigoplus_{j\in J} \Lambda_j$ es libre, y la familia $(e_j)_{j\in J}$ es una base (llamada *canónica*). Frecuentemente se identifica a J con el conjunto de e_j mediante una biyección dada por $j \mapsto e_j$. Diremos que un subconjunto X de M es *linealmente independiente* si la familia definida por la función identidad de X en X es linealmente independiente, y X será una *base* de M si la familia definida por la identidad de X en X es una base de M. Por lo tanto, toda familia definida por una función biyección de un conjunto de índices J en un conjunto X de M es linealmente independiente o base, respectivamente. También diremos que el subconjunto X es linealmente dependiente si X no es linealmente independiente.

Diremos que un Λ-módulo L es *libre* con base en el conjunto X si X es una base para L. Si un Λ-módulo posee un conjunto finito de generadores, diremos que es *finitamente generado*.

Proposición 1.1.6.3 *1.* $\bigoplus_{j\in J} \Lambda_j$ *es un* Λ*-módulo libre con base* $\{e_j\}_{j\in J}$.

2. Si L *es un* Λ*-módulo libre con base* X*, entonces es isomorfo a* $\bigoplus_{j\in J} \Lambda_j$.

Corolario 1.1.6.4 *Sea* $\{L_i\}_{i\in I}$ *una familia de* Λ*-módulos libres. Entonces* $\bigoplus_{i\in I} L_i$ *es un* Λ*-módulo libre.*

Proposición 1.1.6.5 *Todo* Λ*-módulo* M *es cociente de un* Λ*-módulo libre.*

Definición 1.1.6.6 *Una* Λ*-módulo* P *se llamará* proyectivo *si, para todo homomorfismo* $f : P \longrightarrow N$ *y para todo epimorfismo* $\varphi : M \twoheadrightarrow N$ *de* Λ*-módulos, existe un homomorfismo* $h : P \longrightarrow N$ *talque* $\varphi \circ h = f$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, two heads, "\varphi"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Proposición 1.1.6.7 *Si* P *es un* Λ*-módulo proyectivo y*

$$N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$$

es una sucesión exacta, entonces la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N') \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

Proposición 1.1.6.8 *Si* L *es un* Λ*-módulo libre, entonces, para todo homomorfismo* $f : L \longrightarrow N$ *y para todo epimorfismo* $\varphi : M \twoheadrightarrow N$*, existe un homomorfismo* $h : L \longrightarrow M$ *tal que* $f = \varphi \circ h$*.Es decir, si* L *es libre, entonces* L *es proyectivo.*

Proposición 1.1.6.9 $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$ *es un* Λ*-módulo proyectivo si, y sólo si,* P_i *es proyectivo.*

Teorema 1.1.6.10 *Sea* P *un* Λ*-módulo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. P *es proyectivo.*

2. *Toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

   se escinde.

3. *P es un sumando directo de un Λ-módulo libre.*

4. *Para cualquier sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

   la sucesión inducida siguiente es exacta:

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N') \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N'') \longrightarrow 0$$

1.1.7. Módulos inyectivos

Definición 1.1.7.1 *Un Λ-módulo I se llamará* inyectivo *si, para todo homomorfismo $f : M \longrightarrow I$ y para todo monomorfismo $\psi : M \rightarrowtail N$ de Λ-módulos, existe un homomorfismo $h : N \longrightarrow I$ tal que $h \circ \psi = f$.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, tail, "\psi"] \arrow[dr, "f"'] & N \arrow[d, dotted, "h"] \\ & & I \end{tikzcd}$$

Proposición 1.1.7.2 *Si I es un Λ-módulo inyectivo y*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\varphi'} M'' \longrightarrow 0$$

es un sucesión exacta, entonces la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M'', I) \xrightarrow{\varphi'^*} Hom_\Lambda(M, I) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_\Lambda(M', I) \longrightarrow 0$$

Proposición 1.1.7.3 *Si $I = \bigoplus_{j \in J} I_j$ es un Λ-módulo inyectivo, entonces I_j es inyectivo.*

Proposición 1.1.7.4 *Sea $\{I_j\}_{j \in J}$ una familia de Λ-módulos inyectivos, entonces el producto directo $\prod_{j \in J} I_j$ es inyectivo.*

Teorema 1.1.7.5 *Sea I un Λ-módulo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *I es inyectivo.*

2. *Toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

   se escinde.

3. *I es isomorfo a un sumando directo de un Λ-módulo inyectivo.*

4. *Para cualquier sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

   la sucesión inducida siguiente es exacta

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M'', I) \xrightarrow{\varphi'^*} Hom_\Lambda(M, I) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_\Lambda(M', I) \longrightarrow 0$$

1.1.8. $M \otimes_\Lambda N$

Definición 1.1.8.1 *Una función $f : M \times N \longrightarrow T$ es* bilineal *si cumple las siguientes propiedades:*

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2, y) &= f(x_1, y) + f(x_2, y) \\ f(x, y_1 + y_2) &= f(x, y_1) + f(x, y_2) \\ f(\lambda x, y) &= \lambda f(x, y) \\ f(x, \lambda y) &= \lambda f(x, y) \end{aligned}$$

para $x, x_1, x_2 \in M$; $y, y_1, y_2 \in N$ y $\lambda \in \Lambda$

Dados dos Λ-módulos M y N, vamos a construir un nuevo Λ-módulo T con la propiedad de las que las funciones bilineales $M \times N \longrightarrow U$ estén en correspondencia uno a un con los homomorfismos (funciones lineales) $T \longrightarrow U$ para todo Λ-módulo U.

Definición 1.1.8.2 *El* producto tensorial *de M y N es la pareja (T, f), donde $f : M \times N \longrightarrow T$ es bilineal, tal que si U es un Λ-módulo y $g : M \times N \longrightarrow U$*

es bilineal, entonces existe un homomorfismo único de Λ-módulos $h : T \longrightarrow U$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, dotted, "h"] \\ & U \end{tikzcd}$$

El producto tensorial de dos Λ-módulos, si existe, es único. Es decir, dados (T, f) y (T', f') dos productos tensoriales de M y N, existe un isomorfismo entre T y T'. Entonces podemos hablar del *producto tensorial* de M y N y lo denotaremos con $M \otimes_\Lambda N$. El producto tensorial posee una propiedad universal: dada una función bilineal $g : M \times N \longrightarrow U$, existe un homomorfismo único h que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & M \otimes N \arrow[d, dotted, "h"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Veamos que, dados dos Λ-módulos M y N, siempre existe su producto tensorial: sea L el Λ-módulo libre con base $M \times N$ (los elementos de L son combinaciones lineales con coeficientes en Λ de parejas ordenadas (x, y) tal que $x \in M$, $y \in N$). Sea K el submódulo de L generado por los elementos de la forma

1. $(x + x', y) - (x, y) - (x', y)$
2. $(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$
3. $(\lambda x, y) - (x, \lambda y)$, $\lambda \in \Lambda$.

Definamos $M \otimes N = L/K$. Denotemos con $x \otimes y$ la clase lateral $(x, y) + K$. Ahora, $f : M \times N \longrightarrow M \otimes N$ dado por $f(x, y) = x \otimes y$ es bilineal. Debido a lo anterior, podemos alternativamente definir $M \otimes N$ como el Λ-módulo generado por todos los símbolos $x \otimes y$, $x \in M$, $y \in N$, sujeto a las relaciones

1. $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$
2. $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$
3. $\lambda x \otimes y = x \otimes \lambda y$; $x, x_1, x_2 \in M$, $y, y_1, y_2 \in N$ y $\lambda \in \Lambda$.

Proposición 1.1.8.3 *Sean $\psi : N' \longrightarrow N$ y $\psi' : N \longrightarrow N''$ homomorfismos de Λ-módulos y M un Λ-módulo. Entonces*

1. *si $1_M : M \longrightarrow M$ y $1_N : N \longrightarrow N$ son los homomorfismos de identidad entonces $1_M \otimes 1_N$ es la identidad de $M \otimes N$, y*
2. $(1_M \otimes \psi') \circ (1_M \otimes \psi) = (1_M \otimes (\psi' \circ \psi))$.

Proposición 1.1.8.4 *Sean $\varphi : M' \longrightarrow M$ y $\varphi' : M \longrightarrow M''$ homomorfismos de Λ-módulos y N un Λ-módulo. Entonces*

1. *si $1_M : M \longrightarrow M$ y $1_N : N \longrightarrow N$ son los homomorfismos de identidad, entonces $1_M \otimes 1_N$ es la identidad de $M \otimes_\Lambda N$, y*
2. $(\varphi' \otimes 1_N) \circ (\varphi \otimes 1_N) = ((\varphi' \circ \varphi) \otimes 1_N)$.

Proposición 1.1.8.5 1. *Sean M y N Λ-módulos con $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$. Entonces*

$$M \otimes_\Lambda \left(\bigoplus_{i \in I} N_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_\Lambda N)$$

2. *Sean M y N Λ-módulos y $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Entonces*

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_\Lambda N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_\Lambda N)$$

Proposición 1.1.8.6 1. *Si*

$$N' \xrightarrow{\psi} N \xrightarrow{\psi'} N''$$

es una sucesión exacta de Λ-módulos y M un Λ-módulo, entonces

$$M \otimes_\Lambda N' \xrightarrow{1_M \otimes \psi} M \otimes_\Lambda N \xrightarrow{1_M \otimes \psi'} M \otimes_\Lambda N'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

2. *Si*

$$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\varphi'} M''$$

es una sucesión exacta de Λ-módulos y M un Λ-módulo, entonces

$$M' \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\varphi \otimes 1_N} M \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\varphi' \otimes 1_N} M'' \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Consideremos el caso en que Λ no necesariamente sea conmutativo. En general, no podemos proporcionar a $M \otimes N$ una estructura de módulo.

Definición 1.1.8.7 *Sea Λ un anillo con 1 (no necesariamente conmutativo), con M un Λ-módulo derecho y N un Λ-módulo izquierdo. El* producto tensorial de M y N sobre Λ, *$M \otimes_\Lambda N$, es el grupo abeliano obtenido como el cociente del grupo abeliano libre generado por $x \otimes y$, $x \in M$, $y \in N$ entre el subgrupo generado por*

1. $(x + x') \otimes y - (x \otimes y + x' \otimes y)$
2. $x \otimes (y + y') - (x \otimes y + x \otimes y')$
3. $\lambda x \otimes y - x \otimes \lambda y$, $x, x' \in M$, $y, y' \in N$, $\lambda \in \Lambda$.

$M \otimes_\Lambda N$ es el cociente de $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ bajo las relaciones $x\lambda \otimes y = x \otimes \lambda y$.

1.2. Categorías

Definición 1.2.0.8 *Una* categoría $\mathcal{C}$ *consta de*

1. *una clase de* objetos *A, B, C.*
2. *para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$, un conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ cuyos elementos se llaman* morfismos f de A en B, *denotados con $f : A \longrightarrow B$.*
3. *para cada terna de objetos $A, B, C \in \mathcal{C}$, una ley de composición $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ que satisface las siguientes axiomas:*
   a) *$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(D, E)$ si, y sólo si, $A = D$, $B = E$.*
   b) *Si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$, entonces $h(gf) = (hg)f$.*
   c) *Para todo objeto $A \in \mathcal{C}$ existe un morfismo $1_A : A \longrightarrow A$ tal que para cualesquiera $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow A$, se tiene que $f1_A = f$ y $1_A g = g$.*

Al morfismo 1_A lo llamaremos *morfismo de identidad*. En $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ diremos que A es el dominio y B el codominio de f. La composición de dos morfismos f y g, escrita indistintamente $g \circ f = gf$, estará definida si, y sólo si, el codominio de f es igual al dominio de g. Diremos que un morfismo $f : A \longrightarrow B$ es *invertible o isomorfismo* si existe un morfismo $g : B \longrightarrow A$ tal que $gf = 1_A$ y $fg = 1_B$. Diremos entonces que los objetos A y B son isomorfos, escribiéndolo $A \cong B$. Ahora, veamos cómo se relaciona una categoría con otra.

Definición 1.2.0.9 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías. Un* funtor covariante $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ *es una regla que asocia*

1. *a cada objeto $A \in \mathcal{C}$, un objeto $A' \in \mathcal{C}'$*

2. *a cada morfismo $(f : A \longrightarrow B) \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, un morfismo*

$$(F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)) \in Hom_{\mathcal{C}'}(F(A), F(B))$$

que satisface las siguientes condiciones:

3. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$*, y*

4. $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Definición 1.2.0.10 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías. Diremos que $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ es un* funtor contravariante *si satisface* ***(I)*** *y* ***(IV)*** *de la definición anterior y, además, las siguientes dos condiciones:*

1. *A cada morfismo $(f : A \longrightarrow B) \in Hom_{\mathcal{C}(A,B)}$ le asocia un morfismo*

$$(F(f) : F(B) \longrightarrow F(A)) \in Hom_{\mathcal{C}'}(F(B), F(A))$$

2. $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$*.*

1.2.1. Transformaciones naturales

Definición 1.2.1.1 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dos funtores. Una* transformación natural τ *de F a G, $\tau : F \longrightarrow G$, es una colección de morfismos $\tau_A : F(A) \longrightarrow F(A)$ en $\mathcal{D}$, uno para cada objeto $A \in \mathcal{C}$, tal que, para cualquier morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$, $(G(f)) \circ \tau_A = \tau_B \circ (F(f))$, es decir, que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Si esto sucede, diremos que $\tau_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ es *natural* en A.

Definición 1.2.1.2 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funtores y $\tau : F \longrightarrow G$ una transformación natural. Diremos que τ es una* equivalencia natural *o* isomorfismo natural *si $\tau_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ es un isomorfismo para toda $A \in \mathcal{C}$. Si esto sucede, diremos que los funtores F y G son* equivalentes *en forma natural.*

Definición 1.2.1.3 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor. Diremos que F es una* equivalencia *si existe un funtor $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $GF, 1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ con equivalentes en forma natural, y $FG, 1 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ también son equivalentes en forma natural. Si F es una equivalencia, diremos que las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son* equivalentes.

Se dirá que una categoría es una *categoría pequeña* si su clase de objetos es un conjunto. En el caso en que $\mathcal{C}$ sea una categoría pequeña y $\mathcal{D}$ es cualquier categoría, podemos hablar de la categoría de todos los funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y la denotamos con $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Definición 1.2.1.4 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías. El* producto cartesiano $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ *consiste en las parejas (A, A'), $A \in \mathcal{C}$, $A' \in \mathcal{C}'$ y los morfismos*

$$Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}'}((A, A'), (B, B')) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}'}(A', B').$$

Definición 1.2.1.5 *$\mathcal{C}$ se llamará* subcategoría *de $\mathcal{D}$ si*

1. *$\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$*
2. *$\mathcal{C}(A, B) \subset \mathcal{D}(A, B)$ para toda pareja $(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$*
3. *La composición de cualesquiera dos morfismos en $\mathcal{C}$ es la misma que su composición en $\mathcal{D}$, y*
4. *1_A es la misma en $\mathcal{C}$ que en $\mathcal{D}$.*

Diremos que una subcategoría $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ es *plena* si $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) = Hom_{\mathcal{D}}(A, B)$ para toda pareja $(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

Diremos que un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es *pleno* si F envía a $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ sobre $Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ para toda $A, B \in \mathcal{C}$. También diremos que F es *fiel* si F envía a $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ inyectivamente en $Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$. F se llamará *encaje pleno* si F es pleno, fiel e inyectivo en objetos. Se debe observar que $F(\mathcal{C})$ no es ni siquiera una subcategoría de $\mathcal{D}$ pero, si F es un encaje pleno, entonces $F(\mathcal{C})$ es una subcategoría plena de $\mathcal{D}$.

Ahora estableceremos el proceso de dualización: sea $\mathcal{C}$ una categoría. Podemos formar una nueva categoría $\mathcal{C}^{Op}$ llamada *categoría opuesta* de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son los mismos que los de $\mathcal{C}$, pero $Hom_{\mathcal{C}^{Op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$. Afirmamos que un funtor contravariante $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor covariante de $\mathcal{C}^{Op}$ en $\mathcal{D}$. Decimos que $\mathcal{C}^{Op}$ se obtiene de $\mathcal{C}$ invirtiendo flechas. Este proceso, llamado *dualización*, se puede aplicar a definiciones o teoremas, e incluso a demostraciones. No obstante, muchas veces se encuentran limitaciones para aplicarlo.

1.2.2. Categorías abelianas

Definición 1.2.2.1 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean A, B dos objetos de $\mathcal{C}$. El producto de A y B en $\mathcal{C}$ consta de un objeto P en $\mathcal{C}$ y dos morfismos, $p : P \longrightarrow A$ y $q : P \longrightarrow B$, tales que, para cualesquiera dos morfismos $f : X \longrightarrow A$ y $g : X \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$, existe un morfismo único $h : X \longrightarrow P$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & P \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & B \end{tikzcd}$$

es decir, $f = ph$ y $g = qh$.

Definición 1.2.2.2 *Se $\mathcal{C}$ una categoría y sean A, B dos objetos de $\mathcal{C}$. El* coproducto *de A y B en $\mathcal{C}$ consta de un objeto Q en $\mathcal{C}$ y dos morfismos $i : A \longrightarrow Q$ y $j : B \longrightarrow Q$ tales que, para cualesquiera dos morfismos $f : A \longrightarrow X$ y $g : B \longrightarrow X$ en $\mathcal{C}$ existe un morfismo único $h : Q \longrightarrow X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"'] & Q \arrow[u, "h"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "j"] \end{tikzcd}$$

es decir, $f = hi$ y $g = hj$.

Los morfismos p y q se llaman *proyecciones* y los morfismos i, j se llaman *inyecciones*. Se acostumbra escribir $P = A \times B$ y $Q = A \sqcup B$. Éstas definiciones se pueden generalizar de manera obvia para el caso de una familia de objetos $A_{i i \in J}$ de una categoría $\mathcal{C}$.

Dada una categoría $\mathcal{C}$ cualquiera, no se puede asegurar que el producto o coproducto exista siempre. Lo que se puede asegurar es que, si el producto o coproducto existe, entonces es único.

Proposición 1.2.2.3 *Sean P y P' dos productos para A y B, objetos de $\mathcal{C}$. Entonces existe un isomorfismo único $h' : P \longrightarrow P'$ tal que $f = ph'$ y $g = qh'$.*

Definición 1.2.2.4 *Sean $f : X \longrightarrow A$ y $g : Y \longrightarrow A$ morfismos en una categoría $\mathcal{C}$. El* producto fibrado o cuadrado cartesiano *de (f, g) es una pareja de morfismos $\varphi : B \longrightarrow X$, $\gamma : B \longrightarrow Y$ con $f\varphi = g\gamma$ tal que, si $\varphi' : C \longrightarrow X$ y $\gamma' : C \longrightarrow Y$ son tales que $f\varphi' = g\gamma'$, entonces existe una única $h : C \longrightarrow B$ tal que $\varphi' = \varphi h$ y $\gamma' = \gamma h$.*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, bend left, "\varphi'"] \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma'"'] & & \\
& B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}$$

Denotamos con $(B, (\varphi, \gamma))$, o simplemente con $B = Y \wedge X$, el producto fibrado de (f, g).

Definición 1.2.2.5 *Sean $f : A \longrightarrow X$ y $g : A \longrightarrow Y$ morfismos en una categoría $\mathcal{C}$. El* coproducto fibrado *(*suma fibrada o cuadrado cocartesiano*) de (f, g) es una pareja de morfismos $\varphi : X \longrightarrow B$ y $\gamma : Y \longrightarrow B$ con $\varphi f = \gamma g$ tal que si $\varphi' : X \longrightarrow C$ y $\gamma' : Y \longrightarrow C$ son, tales que $\varphi' f = \gamma' g$, entonces existe una única $h : B \longrightarrow C$ tal que $\varphi' = h\varphi$ y $\gamma' = h\gamma$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi'"] & \\
Y \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[drr, bend right, "\gamma'"'] & B \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

Denotamos con $(B, (\varphi, \gamma))$, o simplemente con $B = X \vee X$, el coproducto fibrado de (f, g).

Definición 1.2.2.6 *Una* categoría aditiva *$\mathcal{A}$ es una categoría con objeto cero en la cual cualesquiera dos objetos poseen un producto y el conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$ es un grupo abeliano tal que la composición*

$$Hom_{\mathcal{A}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{A}}(Y, Z) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(X, Z)$$

es bilineal.

Definición 1.2.2.7 *Una* categoría abeliana *es una categoría aditiva que además satisface las siguentes propiedades*

1. *Todo morfismo posee un núcleo y un conúcleo.*
2. *Para α un monomorfismo y β un epimorfismo, $\alpha \in \ker \beta$ si, y sólo si, $\beta \in \operatorname{coker} \alpha$.*
3. *Todo morfismo puede factorizarse como $\alpha = \beta\gamma$, con β monomorfismo y γ epimorfismo.*

Parte II

Teoría K algebraica clásica

Capítulo 2

El grupo de Grothendieck K_0 de un anillo

Referencias
Exponemos las principales referencias que se usaron durante la preparación del presente capítulo (como también sirvieron para los que le siguen). Véanse entonces: (Milnor, 1971), (Rosenberg, 1995), (Magurn, 2002), (Weibel, 2013), (Bass, 1968), (Swan, 1968), (Silvester, 1981), (Atiyah, 1967), (Arlettaz, 2000), (Kuku, 2007), (Steinberg, 1968).

2.1. Definiendo $K_0(\Lambda)$

La K-teoría algebraica se ocupa, ampliamente, de las propiedades de ciertos grupos $K_0(\Lambda)$, $K_1(\Lambda)$, $K_2(\Lambda)$, ..., construidos a partir de un cierto anillo Λ. Por lo cual, estamos en posición de describir el primero de éstos grupos.

Definición 2.1.1 *Sea Λ un anillo. Definimos el* grupo de Grothendieck $K_0(\Lambda)$ *como el grupo abeliano dado por los siguientes generadores y relaciones: tomamos un generador $[P]$ para cada clase de isomorfismo de Λ-módulos proyectivos finitamente generados P y una relación $[P] + [Q] = [P \oplus Q]$ para cada par P, Q de Λ-módulos proyectivos finitamente generados.*

Todavía más formalmente, escribamos con $F = F(\Lambda)$ al grupo abeliano cuyos generadores libres $\langle P \rangle$ son las clases de isomorfismo de Λ-módulos proyectivos finitamente generados P (es decir, $\langle P \rangle = \langle P_1 \rangle$ si y sólo si $P = P_1$)

y sea R el subgrupo de F generado por todas las expresiones de la forma $\langle P\rangle + \langle Q\rangle - \langle P \oplus Q\rangle$. Entonces, $K_0(\Lambda) = F/R$. De hecho, está es una definición particular del grupo de Grothendieck $K_0(\Lambda)$, pero es la, digamos, "tradicional" para el cálculo de K-grupos, ya que la definición ***no particular*** considera una categoría de Λ-módulos izquierdos ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$ (categoría abeliana) y de ésta se estudia una subcategoría $\mathcal{C}$ de ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$. Y ahora, tomamos la clase de isomorfismo $\langle M\rangle$ de un Λ-módulo M (objeto de la subcategoría $\mathcal{C}$) y se construye al grupo abeliano libre F con base $\{\langle M\rangle \,|M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$ y sea R el subgrupo de F generado por las expresiones de la forma $\langle M'\rangle + \langle M''\rangle - \langle M\rangle$ donde

$$0 \longrightarrow M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M'' \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

recorre todas las sucesiones exactas cortas en $\mathcal{C}$. Entonces se define $K_0(\mathcal{C}) = F/R$, el *grupo de Grothendieck de* $\mathcal{C}$; se denota con $[M]$ a la imagen de $\langle M\rangle$ en $K_0(\mathcal{C})$. Siempre que se tenga una sucesión exacta corta como en (2.1) se tendrán expresiones $[M] = [M'] + [M'']$ en $K_0(\mathcal{C})$. En particular, y fue lo que se definió al inicio, consideraremos una subcategoría específica de ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$. Sea $\mathcal{C} = {}_{\Lambda}\mathbf{P}$, la subcategoría de los Λ-módulos (izquierdos) proyectivos finitamente generados. Y se denota a $K_0({}_{\Lambda}\mathbf{P})$ simplemente con $K_0(\Lambda)$.

Definición 2.1.2 *Sea Λ un anillo. El grupo $K_0(\Lambda)$ es el grupo de Grothendieck $\boldsymbol{Proj}_{f.g.}(\Lambda)^+$ asociado al monoide $\boldsymbol{Proj}_{f.g.}(\Lambda)$ de las clases de isomorfismos de Λ-módulos proyectivos finitamente generados.*

Hablemos sobre las clases de isomorfismo de Λ-módulos proyectivos finitamente generados. Ellos forman un conjunto $\mathbf{Proj}_{f.g.}(\Lambda)$, que puede convertirse en un *monoide conmutativo* con una operación $+$ definida como $\langle P\rangle + \langle Q\rangle = \langle P \oplus Q\rangle$ y el 0-módulo como el elemento identidad; no es un grupo y tampoco un monoide con *cancelación* en general

$$P_1 \oplus Q \cong P_2 \oplus Q \not\Rightarrow P_1 \cong P_2.$$

Por tanto, es conveniente en dotar a $\mathbf{Proj}_{f.g.}(\Lambda)$ de una estructura de grupo para gozar de una propiedad de cancelación, aún si esto se traduzca en la pérdida de información. Al estudiar el K-grupo, $K_0(\Lambda)$, en sí mismo notamos que su naturaleza parte (y es una generalización) de la idea como surge $\mathbb{Z}$ a partir del monoide conmutativo $\mathbb{N}$ de los enteros positivos o de la manera en la que un anillo es "localizado" mediante el uso de inversos formales de ciertos elementos.

Proposición 2.1.3 *Sea S un monoide conmutativo. Entonces existe el* ***grupo de Grothendieck*** *asociado a S, que es un grupo abeliano $S^+ = G$ junto con un morfismo de monoides $\varphi : S \longrightarrow G$ tal que para cualquier grupo H y un morfismo de monoides $\psi : S \longrightarrow H$ existe un único morfismo $\theta : G \longrightarrow H$ haciendo que el siguiente diagrama conmute ($\psi = \theta \circ \varphi$):*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & G \arrow[d, dotted, "\theta"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Demostración. Construyamos el grupo de Grothendieck asociado a S. Definamos a G como el conjunto de clases de equivalencia de pares (x, y) con $x, y \in S$, donde $(x, y) \sim (u, v)$ si y sólo si existe un $k \in S$ tal que

$$x + v + k = u + y + k$$

en S. Denotemos por $[(x, y)]$ a la clase de equivalencia de (x, y). La suma está definida por la regla

$$[(x, y)] + [(x', y')] = [(x + x', y + y')].$$

Notar que para cualquier x y y en S, $[(x, x)] = [(y, y)]$, puesto que $x + y = y + x$ y denotemos a este elemento con 0, es decir, $[(x, x)] = 0$ el cual es el elemento identidad para G, ya que para cualquier x, y y z en S

$$(x + z, y + z) \sim (x, y)$$

lo cual es cierto si y sólo si existe un $k \in S$ tal que $x + z + y + k = x + y + z + k$ en S. De la definición vemos que también satisface la propiedad asociativa. Y por último observemos que

$$[(x, y)] + [(y, x)] = [(x + y, y + x)] = [(x + y, x + y)] = 0$$

y de está manera $[(x, y)] = -[(y, x)]$, es el elemento inverso en G. Estudiemos la existencia del morfismo θ. La aplicación $\psi : S \longrightarrow H$ se extiende a un mapeo $\mathbb{Z}$-lineal $\hat{\psi} : F_{\mathbb{Z}}(S) \longrightarrow H$. Para $x, y \in S$,

$$\hat{\psi}((x + y) - x - y) = \psi(x + y) - \psi(x) - \psi(y) = 0_H.$$

Así que $\hat{\psi}$ induce un homomorfismo de grupos $\theta : G \longrightarrow H$ con $\theta(\varphi(x)) = \theta(\bar{x}) = \bar{\psi}(x) = \psi(x)$ para cada $x \in S$. Completamos la prueba estudiando la unicidad del morfismo θ: Si G' y ψ' satisfacen la misma propiedad, entonces

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\psi'"] \arrow[dr, "\psi"'] & G' \arrow[d, shift left, "\theta"] \\ & H = G \arrow[u, bend left, "\theta'"] \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

En este caso tenemos que $\psi' = \theta' \circ \psi$ y por hipótesis que $\psi = \theta \circ \psi'$. Luego,

$$\begin{aligned} \psi &= \theta \circ \psi' \\ \psi &= \theta \circ \theta' \circ \psi \end{aligned}$$

Y por tanto, $\theta \circ \theta' = id_G$. De la misma manera vemos que

$$\begin{aligned} \psi' &= \theta' \circ \psi \\ \psi' &= \theta' \circ \theta \circ \psi' \end{aligned}$$

y así $\theta' \circ \theta = id_{G'}$. En otras palabras, $G \cong G'$ y el morfismo θ es único salvo isomorfismo.

■

Observación 2.1.4 *Podemos ver además que, $S \rightsquigarrow S^+$ es un funtor **Mon** $\longrightarrow$ **Grp**, adicionalmente para cualquier morfismo de monoides $f : S_1 \longrightarrow S_2$ obtenemos canonicamente*

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S_2 \arrow[d] \\ S_1^+ \arrow[r, dotted, "f^+"'] & S_2^+ \end{tikzcd}$$

*Este funtor $(-)^+ :$ **Mon** $\longrightarrow$ **Grp** es adjunto a la izquierda al funtor olvidadizo **Grp** $\longrightarrow$ **Mon**:*

$$Hom_{Grp}(S^+, G) \cong Hom_{Mon}(M, G)$$

Podemos aprovechar en este lenguaje otra forma de adaptar la definición del K-grupo $K_0(\Lambda)$.

Hemos dicho que $K_0(\Lambda)$ es un funtor; en otras palabras, si tenemos un homomorfismo de Λ-módulos $\varphi : R \longrightarrow R'$, existe un homomorfismo inducido $K_0(\varphi) = \varphi_* : K_0(R) \longrightarrow K_0(R')$ satisfaciendo las condiciones usuales $K_0(1_R) = 1_{K_0(R)}$, $K_0(\varphi \circ \psi) = (\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$.

Observación 2.1.5 *Sea $f : R \longrightarrow S$ un morfismo en **Ring** y M un R-módulo (izquierdo) proyectivo finitamente generado. Entonces $R^n \cong M \oplus N$ como R-módulos (izquierdo) para algún $n \in \mathbb{N}$, así viendo a S como un $S-R$-bimódulo, tenemos*

$$S^n \cong (S \otimes_R R)^n \cong S \otimes_R R^n \cong S \otimes_R (M \oplus N)$$

y por tanto

$$S^n \cong (S \otimes_R M) \oplus (S \otimes_R N)$$

y por consiguiente $S \otimes_R M$ es un S-módulo proyectivo finitamente generado. Además, si $M \cong N$ como R-módulos, entonces $S \otimes_R M \cong S \otimes_R N$ como S-módulos. Por tanto tenemos un mapeo bien definido

$$\boldsymbol{Proj}_{fg}(R) \longrightarrow \boldsymbol{Proj}_{fg}(S)$$

dado por

$$\langle M \rangle \mapsto \langle S \otimes_R M \rangle$$

De hecho, ya que el producto tensorial se distribuye sobre sumas directas, el mapeo anterior induce un homomorfismo de grupo

$$f_* : K_0(R) \longrightarrow K_0(S)$$

dado por

$$[M] \mapsto [S \otimes_R M].$$

En este momento, usando la observación (2.1.5) tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.1.6 *K_0 es un funtor covariante de **Ring** a la categoría **Ab** de grupos abelianos donde K_0 envía morfismos f a f_**

Demostración. Sean $f : R \longrightarrow S$ y $g : S \longrightarrow T$ morfismos en **Ring**. Entonces para un generador $[M] \in K_0(R)$ tenemos

$$\begin{aligned}(g \circ f)_*([M]) &= [T \otimes_R M] \\ &= [(T \otimes_S S) \otimes_R M] \\ &= [T \otimes_S (S \otimes_R M)] \\ &= g_*(f_*([M])) \\ &= (g_* \circ f_*)([M])\end{aligned}$$

Y por otro lado, si $id : R \longrightarrow R$ es un morfismo identidad en **Ring**, entonces

$$id_*([M]) = [R \otimes_R M] = [M] = id([M])$$

$\blacksquare$

En general, si $[M] = [N]$ no siempre tenemos que $M \cong N$. Veamos un criterio que constituirá cuando $[M] = [N]$ en $K_0(\Lambda)$.

Proposición 2.1.7 *Sean P y Q dos Λ-módulos proyectivos finitamente generados. Entonces $[P] = [Q]$ en $K_0(\Lambda)$ si, y sólo si, existe un entero $n \geq 0$ tal que $P \oplus \Lambda^n \cong Q \oplus \Lambda^n$.*

Demostración. ($\Longleftarrow$)
Supongamos que $P \oplus \Lambda^n \cong Q \oplus \Lambda^n$ entonces

$$[P \oplus \Lambda^n] = [Q \oplus \Lambda^n] \underset{\text{def}}{=} [P] + [\Lambda^n] = [Q] + [\Lambda^n]$$

y como $K_0(\Lambda)$ es un grupo, podemos cancelar y por lo tanto, $[P] = [Q]$ en $K_0(\Lambda)$.

($\Longrightarrow$)
Ahora supongamos que $[P] = [Q]$. Trabajemos en $\mathbf{Proj}_{fg}(\Lambda)$ y consideremos las clases de isomorfismo de los Λ-módulos P y Q, es decir, $\langle P \rangle$ y $\langle Q \rangle$ en $\mathbf{Proj}_{fg}(\Lambda)$. Dada la hipótesis, tenemos que $\langle P \rangle - \langle Q \rangle \in R$ (recordando que R es el subgrupo generado por las expresiones de la forma $\langle E \rangle + \langle F \rangle - \langle E \oplus F \rangle$), y por lo cual existen finitos Λ-módulos proyectivos finitamente generados P_i, Q_i, P'_j y Q'_j tales que

$$\langle P \rangle - \langle Q \rangle = \sum_i \left(\langle P_i \rangle + \langle Q_i \rangle - \langle P_i \oplus Q_i \rangle \right) - \sum_j \left(\langle P'_j \rangle + \langle Q'_j \rangle - \langle P'_j \oplus Q'_j \rangle \right)$$

por consiguiente

$$\langle P \rangle + \sum_j (\langle P'_j \rangle + \langle Q'_j \rangle) + \sum_i (\langle P_i \oplus Q_i \rangle) = \langle Q \rangle + \sum_i (\langle P_i \rangle + \langle Q_i \rangle) + \sum_j (\langle P'_j \oplus Q'_j \rangle)$$

$$\langle P \rangle + \left(\sum_j \langle P'_j \rangle + \sum_j \langle Q'_j \rangle + \sum_i \langle P_i \oplus Q_i \rangle \right) = \langle Q \rangle + \left(\sum_i \langle P_i \rangle + \sum_i \langle Q_i \rangle + \sum_j \langle P'_j \oplus Q'_j \rangle \right)$$

Los términos de cada lado de esta ecuación son los mismos, excepto posiblemente en el orden en el cual éstos se exhiben. Para captar esta idea, hagamos $A = \bigoplus_i P_i$, $B = \bigoplus_i Q_i$, $C = \bigoplus_j P'_j$ y $D = \bigoplus_j Q'_j$ y obtenemos que

$$P \oplus A \oplus B \oplus C \oplus D \cong Q \oplus A \oplus B \oplus C \oplus D$$

o que es lo mismo

$$P \oplus X \cong Q \oplus X$$

donde $X \cong A \oplus B \oplus C \oplus D$. Es de esta manera que X es un Λ-módulo proyectivo y finitamente generado, luego, existe un Λ-módulo Y tal que $X \oplus Y \cong \Lambda^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, de este modo

$$P \oplus \Lambda^n \cong P \oplus (X \oplus Y) \cong (P \oplus X) \oplus Y \cong (Q \oplus X) \oplus Y \cong Q \oplus (X \oplus Y)$$

y por tanto

$$P \oplus \Lambda^n \cong Q \oplus \Lambda^n.$$

■

Definición 2.1.8 *Dos Λ-módulos P y Q son* isomorfos establemente *si existe un número natural n tal que $P \oplus \Lambda^n \cong Q \oplus \Lambda^n$.*

Esta definición nos capacita para decir que dos elementos de $K_0(\Lambda)$ son iguales si, y sólo si, son isomorfos establemente. El cálculo de $K_0(\Lambda)$ no necesariamente nos lleva a determinar todas las clases de isomorfismo, sino que $K_0(\Lambda)$ determina todas las clases de isomorfismo estables.

Consideremos a V como un espacio vectorial de dimensión infinita sobre un cuerpo F. Luego, $V \oplus V \cong V$ (dos espacios vectoriales son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión). Expresemos $\Lambda \cong Hom_F(V,V) = End_F(V)$. Λ es un anillo si, para $f,g \in \Lambda$, definimos $f+g$ y fg por $(f+g)(v) = f(v)+g(v)$ y $(fg)(v) = f(g(v))$ para todo $v \in V$. Como Λ-módulos,

$$\begin{aligned}
\Lambda \oplus \Lambda &\cong Hom_F(V,V) \oplus Hom_F(V,V) \\
&\cong Hom_F(V \oplus V, V) \\
&\cong Hom_F(V,V) \\
&\cong \Lambda
\end{aligned}$$

Si describimos esto no tan implícitamente, vemos que si $v \mapsto (v_1, v_2)$ es un isomorfismo de $V \longrightarrow V \oplus V$, esto induce un isomorfismo $\Lambda \longrightarrow \Lambda \oplus \Lambda$ dado por $(f,g) \mapsto \overline{(f,g)}$, donde $\overline{(f,g)}(v) = f(v_1) + g(v_2)$. De esta manera, $\Lambda^2 \cong \Lambda$ y más generalmente, $\Lambda^n \cong \Lambda$. Ahora lo más importante, en $K_0(\Lambda)$, tenemos entonces que $[\Lambda] = [\Lambda \oplus \Lambda] = [\Lambda] + [\Lambda]$ lo cual implica que $[\Lambda] = 0$ y por lo tanto, $[\Lambda^n] = 0$. En conclusión, el K-grupo de orden 0 de Λ es trivial, es decir, $K_0(\Lambda) = 0$.

Observación 2.1.9 *Sea P un Λ-módulo proyectivo finitamente generado. Por consiguiente, tenemos que $P \oplus Q \cong \Lambda^n$, para algún módulo Q; pero $\Lambda^n \cong \Lambda$, es así que, $P \oplus Q \cong \Lambda$ y podemos considerar a P y Q como ideales (izquierdos) de Λ. Por lo que los elementos del anillo Λ son de la forma $x = p + q$ con $p \in P$ y $q \in Q$. Por un lado, si escribimos $1 = p + q$ con $p \in P$ y $q \in Q$ entonces consideremos un $r \in P$ y hagamos*

$$r = rp + rq.$$

Luego,

$$\underbrace{r}_{\in P} - \underbrace{rp}_{\in P} = rq \in P$$

pero como $q \in Q$, tenemos que $r - rp = rq \in P \cap Q = 0$. Así,

$$rq = 0 \ \ y \ \ r - rp = 0$$

por lo que $r = rp$. En particular, $p^2 = p$ y $pq = 0$. Y podemos estudiar similarmente el caso en que si $r \in Q$, $rp = 0$ y $rq = r$ y concluir que $q^2 = q$ y $qp = 0$.

De este modo, probemos que, como Λ-módulos, $P \cong Hom_F(pV, V)$ donde V es un espacio vectorial de dimensión infinita sobre un cuerpo F y $Hom_F(pV, V) = \{\alpha : pV \longrightarrow V$ (donde α es aplicación F-lineal)$\}$. Primero, definamos

$$\beta : P \longrightarrow Hom_F(pV, V)$$

tal que

$$\begin{aligned} m \mapsto \beta(m) &= m\alpha(pv) \\ &= m(pv) \qquad \text{para todo } v \in V \end{aligned}$$

y β está bien definida, pues dados $m_1, m_2 \in P$, $m_1 = m_2 \Longrightarrow m_1(pv) = m_2(pv)$ y por tanto $\beta(m_1) = \beta(m_2)$. Ahora, tomando $m_1, m_2 \in P$

$$\begin{aligned} \beta(m_1 + m_2) &= (m_1 + m_2)(pv) \\ &= m_1(pv) + (m_2)(pv) \\ \beta(m_1 + m_2) &= \beta(m_1) + \beta(m_2) \end{aligned}$$

y para $\lambda \in \Lambda$,

$$\beta(\lambda m) = \lambda m(pv) = \lambda(m(pv)) = \lambda\beta(m).$$

Es así que, β es un <u>homomorfismo</u> de Λ-módulos.

Estudiemos si β es un monomorfismo. En este apartado cabe hacer mención que β se puede definir por restricción, puesto que, $P \subset \Lambda \cong Hom_F(V,V)$ y $pV \subset V$. Sea $y \in ker\ \beta$, entonces

$$\begin{aligned} \beta(y) &= 0 \\ y(pv) &= 0 \\ (yp)v &= 0 \end{aligned}$$

lo cual implica que $yp = 0$. Pero por la observación (3.1.10), $yp = y$ y entonces $y = 0$. Luego, β es un homomorfismo inyectivo.

Veamos ahora que β es un epimorfismo. Sea $\lambda \in Hom_F(pV, V)$, λ es un mapeo F-lineal $pV \longrightarrow V$. Definamos para un $r \in \Lambda$ arbitrario que $\lambda(pv) = rv$ para todo $v \in V$. Entonces,

$$r\mathbf{q}v = \lambda(p\mathbf{q}v) = \lambda((p\mathbf{q})v) = \lambda(0 \cdot v) = \lambda(0) = 0$$

esto como consecuencia que $pq \in P \cap Q$. Es así que

$$rqv = 0 \Longrightarrow rq = 0$$

y así $r = rp + rq = rp$ pues $P \oplus Q \cong \Lambda$ y por tanto $r \in P$ por la observación (3.1.10). Luego, β es un epimorfismo.

Todavía un poco más, si ahora tomamos un $v \in V$, $v = vp + vq$, entonces obtenemos que $V = pV + qV$. Si escogemos que $pv = qu$ para algunos $v, u \in V$

$$pv = qu \Longrightarrow p^2v = pqu \Longrightarrow p^2v = (pq)u = 0 \cdot u = 0$$

$\Longrightarrow pV \cap qV = 0$. Por tanto, $V \cong pV \oplus qV$ y como V es un espacio vectorial de dimensión infinita debemos tener que o bien $V \cong pV$ ó $V \cong qV$, posiblemente ambas opciones. En el primer caso, si $V \cong pV$, entonces

$$\begin{aligned} P &\cong Hom_F(pV, V) \\ &\cong Hom_F(V, V) \\ &\cong \Lambda \end{aligned}$$

Por lo que en $K_0(\Lambda)$, $[P] = [\Lambda]$, y por lo discutido anteriormente, $[P] = [\Lambda] = 0$. Por un argumento análogo, podemos obtener que $Q \cong \Lambda$ y como $\Lambda \cong P \oplus Q$ obtenemos que $[\Lambda] = [P \oplus Q] = [P] + [Q]$ resulta que $[Q] = 0$

nuevamente. Y así, $K_0(\Lambda) = 0$.

A partir de la observación (2.1.5) el homomorfismo de grupos $K_0(f) = f_* : K(R) \longrightarrow K(S)$ está bien definido y por el teorema (2.1.6), K_0, resulta ser un funtor (covariante) entre las categorías **Ring** y **Ab** respectivamente. Sea ahora J un *ideal bilátero* del anillo R. Introducimos así el siguiente

Lema 2.1.10 *Sea $f : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos conmutativos sobreyectivo. Entonces $K_0(f) : K_0(R) \longrightarrow K_0(S)$ está dado por $[P] \mapsto [\overline{P}]$, donde $\overline{P} = P/JP$ y también $J = ker\ f$.*

Demostración. Sea P un R-módulo. Como J es un ideal de R entonces JP es un submódulo de P y luego P/JP es un R-módulo. Consideremos el mapeo

$$F : S \times P/JP \longrightarrow P/JP$$

dado por

$$(s, \overline{p}) \mapsto \overline{rp}$$

donde $f(r) = s$ y $\overline{p} = p + JP$. Comprobemos que F es un mapeo bien definido. Sean $(s_1, \overline{p}), (s_2, \overline{p}) \in S \times P/JP$. Si $(s_1, \overline{p}) = (s_2, \overline{p})$, como pares ordenados, $s_1 = s_2$ y como f es sobreyectivo tenemos que $s_1 = f(r_1)$ y $s_2 = f(r_2)$. Por lo que si $f(r_1) = f(r_2)$ entonces

$$\begin{aligned} f(r_1) - f(r_2) = f(r_1 - r_2) = 0 &\implies r_1 - r_2 \in J = ker\ f \\ &\implies (r_1 - r_2)p \in JP \\ &\implies r_1p - r_2p \in JP \end{aligned}$$

y de esta manera obtenemos que $\overline{r_1p} = \overline{r_2p}$. Veamos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} S \times P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "g"] & P \arrow[d, "\pi"] \\ S \times P/JP \arrow[r, "F"'] & P/JP \end{tikzcd}$$

F junto con la aplicación natural (proyección canónica) $\pi : P \longrightarrow P/JP$ buscamos que $g : S \times P \longrightarrow P/JP$ definida por $g(s,p) = \overline{rp}$, sea una aplicación bilineal, esto es,

1.

$$\begin{aligned} g(s, p_1 + p_2) &= \overline{r(p_1 + p_2)} \\ &= \overline{rp_1 + rp_2} \\ &= \overline{rp_1} + \overline{rp_2} \\ g(s, p_1 + p_2) &= g(s, p_1) + g(s, p_2). \end{aligned}$$

2. como $s = f(r)$ entonces para $s_1 + s_2 = f(r_1) + f(r_2) = f(r_1 + r_2)$

$$\begin{aligned} g(s_1+s_2,p) &= \overline{(r_1+r_2)p} \\ &= \overline{r_1p+r_2p} \\ &= \overline{r_1p}+\overline{r_2p} \\ g(s_1+s_2,p) &= g(s_1,p)+g(s_2,p). \end{aligned}$$

3. Sea $\lambda \in S$. Puesto que f es sobreyectivo existe un $\mu \in R$ tal que $f(\mu) = \lambda$, luego $\lambda s = f(\mu)f(r) = f(\mu r)$ y así

$$\begin{aligned} g(\lambda s,p) &= \overline{\mu rp} \\ &= \mu rp + JP \\ &= \mu(rp+JP) = \mu(\overline{rp}) \\ g(\lambda s,p) &= \lambda g(s,p). \end{aligned}$$

4. Sea $\lambda \in S$, entonces

$$\begin{aligned} g(s,\lambda p) &= \overline{r(\mu p)} \\ &= \overline{(r\mu)p} \\ &= \overline{(\mu r)p}, \quad \mu, r \in R \\ &= \mu(\overline{rp}) \\ g(s,\lambda p) &= \lambda g(s,p). \end{aligned}$$

Y por lo anterior la aplicación $g : S \times P \longrightarrow P/JP$ es una aplicación bilineal y por tanto induce $\hat{g} : S \otimes_R P \longrightarrow P/JP$ definida por $1 \otimes p \mapsto \overline{p}$ (por la propiedad universal). Pero ahora, $\hat{g}^{-1}$ dada por $\overline{p} \mapsto 1 \otimes p$ es bien definida, desde luego que, si $\overline{p_1}, \overline{p_2} \in P/JP$, y si $\overline{p_1} = \overline{p_2}$ entonces $p_1 - p_2 \in JP$, además

$$\begin{aligned} 1 \otimes (p_1 - p_2) &= 1 \otimes p_1 - 1 \otimes p_2 \\ (r_\lambda \in J,\ \text{todo } \lambda) \quad 1 \otimes \sum_\lambda r_\lambda p_\lambda &= \\ \sum_\lambda (1 \otimes r_\lambda p_\lambda) &= \\ \sum_\lambda (f(r_\lambda) \otimes p_\lambda) &= \\ (\text{puesto que } r_\lambda \in J) \quad \sum_\lambda (0 \otimes p_\lambda) &= \\ 0 &= \end{aligned}$$

Y de esta manera $\hat{g} \circ \hat{g}^{-1} = \hat{g}^{-1} \circ \hat{g} = Id$, por tanto $S \otimes_R P \cong P/JP$. Y es así como $K_0(f)$ dado por $[P] \mapsto [\overline{P}]$ tiene sentido.

∎

Ahora usemos el resultado del lema (2.1.10) para demostrar el siguiente teorema que nos asistirá muchísimo al momento de calcular los K_0-grupos de un *producto de anillos*.

Teorema 2.1.11 $K_0(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \cong K_0(\Lambda_1) \oplus K_0(\Lambda_2)$.

Demostración. Tenemos la aplicación $i_1 : K_0(\Lambda_1) \longrightarrow K_0(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$ que vamos a definir de esta manera: Sea P un Λ_1-módulo proyectivo finitamente generado; vamos a desvirtuar a P para considerarlo como un $(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$-módulo haciendo que Λ_2 actúe trivialmente, es decir, $(m,n)p = mp$ para $m \in \Lambda_1$, $n \in \Lambda_2$ y $p \in P$. Vamos a reconocer a éste módulo escribiendo $\widetilde{P}$ y definimos a i_1 haciendo que $[P] \mapsto [\widetilde{P}]$. Veamos que esta bien definido: sean $[P_1], [P_2] \in K_0(\Lambda_1)$, luego

$$\begin{aligned}
[P_1] = [P_2] \iff\ & \exists n \in \mathbb{N} : \Lambda_1^n \oplus P_1 \cong \Lambda_1^n \oplus P_2 \ \ (\text{como } \Lambda_1\text{-módulos}) \\
\implies\ & (\Lambda_1 \times \Lambda_2) \otimes_{\Lambda_1} \Lambda_1^n \oplus P_1 \cong (\Lambda_1 \times \Lambda_2) \otimes_{\Lambda_1} \Lambda_1^n \oplus P_2 \\
\implies\ & \left[(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \otimes_{\Lambda_1} \Lambda_1^n\right] \oplus \left[(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \otimes_{\Lambda_1} P_1\right] \cong \ldots \\
\ldots\ & \cong \left[(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \otimes_{\Lambda_1} \Lambda_1^n\right] \oplus \left[(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \otimes_{\Lambda_1} P_2\right] \\
\implies\ & \left[(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \otimes_{\Lambda_1} \Lambda_1\right]^n \oplus \left[(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \otimes_{\Lambda_1} P_1\right] \cong \\
\ldots\ & \left[(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \otimes_{\Lambda_1} \Lambda_1\right]^n \oplus \left[(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \otimes_{\Lambda_1} P_2\right] \\
\implies\ & (\Lambda_1 \times \Lambda_2)^n \oplus [(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \otimes_{\Lambda_1} P_1] \cong (\Lambda_1 \times \Lambda_2)^n \oplus [(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \otimes_{\Lambda_1} P_2] \\
\implies\ & (\Lambda_1 \times \Lambda_2)^n \oplus \widetilde{P_1} \cong (\Lambda_1 \times \Lambda_2)^n \oplus \widetilde{P_2} \ \ (\text{como } (\Lambda_1 \times \Lambda_2)\text{-módulos}) \\
\iff\ & [\widetilde{P_1}] = [\widetilde{P_2}].
\end{aligned}$$

luego, i_1 está bien definida. Y asimismo podemos definir $i_2 : K(\Lambda_2) \longrightarrow K_0(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$ de la misma manera, de modo que ahora al tomar un Λ_2-módulo proyectivo finitamente generado, digamos Q, debemos transformarlo a un $(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$-módulo haciendo que Λ_1 actúe trivialmente; por consiguiente estamos diciendo que $(m,n)q = nq$ para $m \in \Lambda_1$, $n \in \Lambda_2$ y $q \in Q$. Ahora tomemos una aplicación $\pi_1 : K_0(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \longrightarrow K_0(\Lambda_1)$, la cual conseguimos usando el funtor K_0 en la aplicación $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \longrightarrow \Lambda_1$, y π_1 esta dada por $[P] \mapsto [P/\Lambda_2 P]$ por el lema (2.1.10). Si P es un Λ_1-módulo entonces

$$\begin{aligned}
\Lambda_2\widetilde{P} &= \{t \cdot p |\ t \in \Lambda_1, p \in \widetilde{P}\}\\
&= \{t \cdot (\lambda p_1) | t \in \Lambda, \lambda \in (\Lambda_1 \times \Lambda_2), p_1 \in P\}\\
&= \{t \cdot ((m,n)p_1 := mp_1)\}, \ \ (\text{donde } \lambda = (m,n), m \in \Lambda_1, n \in \Lambda_2)\\
&= \{t \cdot (mp_1) = 0\} \ \ (\text{ya que } \Lambda_2 \text{ actúa trivialmente})\\
&= 0
\end{aligned}$$

de esta manera $\widetilde{P}/\Lambda_2\widetilde{P} = \{\overline{(m,n)p} = \overline{mp}\ |(m,n) \in (\Lambda_1 \times \Lambda_2),\ p \in P\} = P$ (como Λ_1-módulos) puesto que $mp \notin \Lambda_2\widetilde{P}$, de donde hemos obtenido que $\pi_1 \circ i_1 = Id$, explícitamente

$$\begin{tikzcd}
{[P]} \arrow[r, mapsto, "i_1"] & {[\widetilde{P}]} \arrow[r, mapsto, "\pi_1"] & {[\widetilde{P}/\Lambda_2\widetilde{P}]} \arrow[ll, bend left, "="]
\end{tikzcd}$$

Y podemos también considerar $\pi_2 : K_0(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \longrightarrow K_0(\Lambda_2)$ y definir de la misma manera y resultará que $\pi_2 \circ i_2 = Id$.

Para cualquier Λ_1-módulo P, tenemos que $\Lambda_1 P = P$, por consiguiente $\Lambda_1\widetilde{P} = \widetilde{P}$ y por tanto $\widetilde{P}/\Lambda_1\widetilde{P} = 0$. En otras palabras, $(\pi_2 \circ i_1)([P]) = \pi_2(i_1([P])) = \pi_2([\widetilde{P}]) = [\widetilde{P}/\Lambda_1\widetilde{P}] = [0] = 0$ y así $\pi_2 \circ i_1 = 0$. Y similarmente $\pi_1 \circ i_2 = 0$. Finalmente, sea M un $(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$-módulo y sea $x \in M$.

$$\begin{aligned}
x \in M &\implies x = (\lambda_1, \lambda_2)m,\ \lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2\\
&\implies x = ((\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2))m\\
&\implies x = (\lambda_1, 0)m + (0, \lambda_2)m\\
&\implies x = \underbrace{\lambda_1 m}_{\in \Lambda_1 M} + \underbrace{\lambda_2 m}_{\in \Lambda_2 M}\\
&\implies x \in \Lambda_1 M + \Lambda_2 M.
\end{aligned}$$

Y si además $y \in \Lambda_1 M + \Lambda_2 M$ tenemos

$$\begin{aligned}
y \in \Lambda_1 M + \Lambda_2 M &\implies y = \lambda_1 m + \lambda_2 m\\
&\implies y = (\lambda_1, p_2)m + (p_1, \lambda_2)m\\
&\implies y = ((\lambda_1, p_2) + (p_1, \lambda_2))m\\
&\implies y = (\lambda_1 + p_1, p_2 + \lambda_2)m\\
&\implies y = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)m,\ \lambda_1^* \in \Lambda_1, \lambda_2^* \in \Lambda_2\\
&\implies y \in M.
\end{aligned}$$

Esto resulta que $M = \Lambda_1 M + \Lambda_2 M$. Ahora consideremos a $z \in \Lambda_1 M \cap \Lambda_2 M$, esto es,

$$\begin{aligned}
z \in \Lambda_1 M \cap \Lambda_2 M &\Longrightarrow z \in \Lambda_1 M \text{ y } z \in \Lambda_2 M \\
&\Longrightarrow z = \lambda_1 m \text{ y } z = \lambda_2 m \;\text{ donde }\; m \in M, \lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2 \\
&\Longrightarrow z = (\lambda_1 m, 0) \text{ y } z = (0, \lambda_2 m) \\
&\Longrightarrow \lambda_1 m = 0 \text{ y } \lambda_2 m = 0 \\
&\Longrightarrow z = 0
\end{aligned}$$

y de esta manera, $\Lambda_1 M \cap \Lambda_2 M = 0$, y por tanto $M = \Lambda_1 M \oplus \Lambda_2 M$. Esto lo utilizamos con el objetivo, fenomenal por cierto, de que los $(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$-módulos pueden exhibirse como suma directa por el reciente resultado. Y en $K_0(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$:

$$\begin{aligned}
[M] \in K_0(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \Longrightarrow [M] &= [\Lambda_1 M \oplus \Lambda_2 M] \\
&= [\Lambda_1 M] + [\Lambda_2 M] \\
&= i_1 \pi_1 [\Lambda_1 M] + i_2 \pi_2 [\Lambda_2 M] \text{ esto en } K_0(\Lambda_1 \times \Lambda_2)
\end{aligned}$$

es decir, $Id_{K_0(\Lambda_1 \times \Lambda_2)} = i_1 \pi_+ i_2 \pi_2$, si M es finitamente generado y proyectivo. De donde, $K_0(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$ está creado por las imágenes de i_1 e i_2; y concluimos, por lo tanto, que se verifica que $K_0(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \cong K_0(\Lambda_1) \oplus K_0(\Lambda_2)$.

■

Observación 2.1.12 *Si deseamos calcular el K-grupo de orden cero del producto cartesiano de los anillos $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$, el teorema (3.2.3) nos ayuda a extender inductivamente el cálculo, pues*

$$K_0(\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \ldots \times \Lambda_k) \cong K_0(\Lambda_1) \oplus K_0(\Lambda_2) \oplus \ldots \oplus K_0(\Lambda_k) = \bigoplus_{j=1}^{k} K_0(\Lambda_j)$$

Vamos a iniciar el cálculo de K_0 de anillos de un interés más práctico. Sea Λ un anillo local. Si I es un ideal de Λ tenemos que Λ/I es un cuerpo ya que I es un ideal maximal. Hagamos $I = rad\ \Lambda$. Ahora, si M es un Λ-módulo proyectivo finitamente generado, podemos asumir que $M \oplus N \cong \Lambda^k$ para algún k. Por consiguiente, M/IM y N/IN son Λ/I-módulos, por tanto, son módulos libres, digamos de rangos m y n, respectivamente, con $m + n = k$. Elegimos elementos de la base y los ordenamos de una manera conveniente así: $x_1, \ldots, x_m \in M$ y $x_{m+1}, \ldots, x_k \in N$. Se desea mostrar que el conjunto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es una base libre para Λ^k; esto mostrará particularmente que

$\{x_1, \ldots, x_m\}$ es un conjunto generador linealmente independiente para M, además que M es libre con rango determinado únicamente por

$$rnk(M) := dim_{\Lambda/I} M/IM.$$

Sea $\{e_1, \ldots, e_k\}$ la base estándar de Λ^k. Como tenemos dos conjuntos generadores de Λ^k, cada elemento puede ser expresado en términos del otro, y existen elementos a_{ij} y b_{ij} de tal manera que

$$e_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j, \quad \text{y} \quad x_j = \sum_{j=1}^{k} b_{ij} e_j \quad .$$

Así conseguimos que

$$e_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \sum_{l=1}^{k} b_{il} e_l$$

y obtenemos entonces

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \left(a_{ij} b_{jl} - \delta_{ij} \right) e_l = 0 \quad ,$$

y si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, ésto significa que $AB - I = 0$ y entonces $AB = I$. Por otro lado, sustituyendo en la otra forma, obtenemos que:

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \left(b_{ij} a_{jl} - \delta_{ij} \right) x_l = 0$$

y como los x_l son linealmente independientes módulo el ideal I de Λ, esto muestra que $BA - I \in rad\ M_n(\Lambda)$ y por la Proposición (......), BA es invertible, por tanto B es invertible. Como A es inversa a la izquierda para B, esto muestra que también es inversa a la derecha, es decir, $BA = I$. Esto prueba $\{x_1, \ldots, x_m\}$ es una base libre para Λ^k. Por lo que todo Λ-módulo proyectivo generado finitamente es libre con rango definido únicamente. Así, para la clase de isomorfismo de un Λ-módulo proyectivo finitamente generado M, podemos definir un morfismo tal que $[M] \mapsto rnk(M)$. En este sentido, para un generador $[M] \in K_0(\Lambda)$ hemos de tener que

$$[M] = [\Lambda^n] = n[\Lambda]$$

donde $n = rnk\ (M)$. De lo que se concluye que $K_0(\Lambda)$ está generado por $[\Lambda]$. Ahora supongamos que

$$[0] = k[\Lambda] = [\Lambda^k]\ , \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que existe un $r \in \mathbb{N}$ y verifica que

$$\Lambda^r \oplus 0 \cong \Lambda^r \oplus \Lambda^k$$

entonces

$$r = rnk(\Lambda^r \oplus 0) = rnk(\Lambda^r \oplus \Lambda^k) = r + k$$

de donde $r = 0$. Por tanto $[\Lambda]$ no tiene orden finito en $K_0(\Lambda) = \langle [\Lambda] \rangle$, entonces

$$K_0(\Lambda) \cong \mathbb{Z}.$$

Este resultado lo resumimos en el siguiente

Teorema 2.1.13 *Sea Λ un anillo local. Entonces $K_0(\Lambda) \cong \mathbb{Z}$.*

De igual importancia es si Λ es un dominio de ideales principales (DIP) y consideramos los módulos proyectivos finitamente generados sobre Λ. Sea, entonces, M un Λ-módulo. Podemos asumir que M está contenido en algún Λ^n, con $n \in \mathbb{N}_0$. En este sentido, se argumenta por inducción sobre n que M es isomorfo a Λ^k,con $k \in \mathbb{N}_0$, para algún $k \leq n$. Si $n = 0$, no hay nada que probar (M está contenido en un módulo de rango 0, es decir, $M \subset \Lambda^0 = \{0\}$ y se deduce que $M \cong \{0\}$ mediante la inyección canónica). Asumamos que el resultado es válido para valores pequeños de n y sea $\pi : \Lambda^n \longrightarrow \Lambda$ la proyección canónica. Observar que π mapea a M sobre un Λ-submódulo de Λ, es decir, un ideal de Λ. Si $\pi(M) = 0$, entonces podemos ver a M contenido en $ker\ \pi \cong \Lambda^{n-1}$ y acá se usa la hipótesis inductiva. Por otro lado, $\pi(M)$ es un ideal distinto de cero y entonces es isomorfo a Λ como un Λ-módulo (esto porque Λ es un DIP). Luego al tomar la restricción de π sobre el módulo M,

$$0 \longrightarrow ker\ \pi|_M \longrightarrow M \xrightarrow{\pi|_M} \Lambda \longrightarrow 0$$

tenemos que M es isomorfo a $ker\ \pi|_M \oplus \Lambda$. Como podemos ver, $ker\ \pi|_M$ está contenido en Λ^{n-1}, aplicamos la hipótesis inductiva para concluir que es isomorfo a $\Lambda^{k'}$, con $k' \leq n - 1$.

Por lo tanto, $M \cong \Lambda^k$ con $k = k' + 1 \leq (n-1) + 1 = n$. Además esto nos dice que M es un módulo libre. El argumento anterior nos muestra adicionalmente que cada submódulo de un Λ-módulo libre es libre en dominio de ideales principales. Ahora estudiando éste tipo de Λ-módulo en las clases de isomorfismo, vemos que

$$\begin{aligned} M \cong \Lambda^k &\Longrightarrow [M] = [\Lambda^k] \\ &\Longrightarrow [M] = [\underbrace{\Lambda \oplus \ldots \oplus \Lambda}_{k \text{ veces}}] \\ &\Longrightarrow [M] = k[\Lambda] \end{aligned}$$

donde k es el rango de M, es decir, $k = rnk(M)$. Entonces $K_0(\Lambda)$ está generado por $[\Lambda]$ y podemos usar las nociones análogas que se exhibió para los anillos locales. Esto da lugar al siguiente

Teorema 2.1.14 *Sea Λ un dominio de ideales principales. Entonces $K_0(\Lambda) \cong \mathbb{Z}$.*

2.2. Resultados

Veamos, en el marco de lo expuesto anteriormente, algunos ejemplos para calcular el grupo de Grothendieck K_0 para varios anillos.

Ejemplo 2.2.1 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Entonces cada $\mathbb{K}$-módulo finitamente generado es un espacio $\mathbb{K}$-vectorial de dimensión finita. Tomemos un $\mathbb{K}$-módulo M y supongamos que la $dim_{\mathbb{K}}(M) = n$. Entonces tenemos que que $M \cong \mathbb{K}^n$. Tomando clases de isomorfismo esto da lugar a que $[M] = [\mathbb{K}^n] = n[\mathbb{K}]$ y así el grupo $K_0(\mathbb{K})$ está generado por $[\mathbb{K}]$. Pasemos a calcular su orden: supongamos que $[\mathbb{K}^p] = p[\mathbb{K}] = [0]$ para algún $p \in \mathbb{N}_0$. De la definición (2.1.8) tenemos que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\mathbb{K}^m \oplus 0 \cong \mathbb{K}^m \oplus \mathbb{K}^p$$

luego $m = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m \oplus 0) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m \oplus \mathbb{K}^p) = m + p$, por consiguiente $p = 0$. Por tanto, m no tiene orden finito en $K_0(\mathbb{K}) = \langle[\mathbb{K}]\rangle$. Por tanto de la clasificación de los grupos cíclicos obtenemos que

$$K_0(\mathbb{K}) \cong \mathbb{Z}$$

Es así, los $\mathbb{K}$-módulos son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, necesariamente libres y por tanto proyectivos. A este respecto, los $\mathbb{K}$-módulos proyectivos finitamente generados son los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita. También pudimos calcular el K-grupo K_0 considerando la función $dim_{\mathbb{K}} : K_0(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida como $[M] \mapsto dim_{\mathbb{K}}(M) = n$. Si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales que se escinde, entonces $M \cong M' \oplus M''$ y de lo cual $dim_{\mathbb{K}}(M) = dim_{\mathbb{K}}(M' \oplus M'') = dim_{\mathbb{K}}(M') + dim_{\mathbb{K}}(M'')$, ahora $dim_{\mathbb{K}}$ es un homomorfismo de $K_0(\mathbb{K})$ a $\mathbb{Z}$. Como $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$, $dim_{\mathbb{K}}$ es sobreyectivo. Sea $[P] \in ker\ (dim_{\mathbb{K}}) \Longrightarrow dim_{\mathbb{K}}(P) = 0$ lo que implica que $P \cong \mathbb{K}^0 = \mathbf{0}$ y así $ker\ (dim_{\mathbb{K}}) = \{[\mathbf{0}]\}$. Por lo tanto, $K_0(\mathbb{K}) \cong \mathbb{Z}$.

Ejemplo 2.2.2 *Dada una categoría abeliana $\mathcal{A}$ con sumas directas contables (o productos). Tomemos $A_k \in Ob(\mathcal{A})$ con $k \in J$, J un conjunto de índices numerable. Sea $B = \bigoplus_{i \in J} A_i$. Entonces $A_k \oplus B = A_k \oplus \bigoplus_{i \in J} A_i \cong \bigoplus_{i \in J} A_i = B$. Así $[B] = [A_k \oplus B] = [A_k] + [B]$ y entonces $[A_k] = 0$. Por tanto $K_0(A_k)$ es* trivial.

Este procedimiento es frecuentemente conocido como "**the Eilenberg swindle**" que literalmente se traduce al español como "la estafa de Eilenberg", y el cual, da un medio para probar que el grupo de Grothendieck de una gran variedad de categorías abelianas es cero. Está es un razón por la que, por ejemplo, se debe restringir a los módulos proyectivos finitamente generados en la definición de K_0 de un anillo. La idea esta basada, esencialmente, en la *paradoja del Hotel de Hilbert*.

Ejemplo 2.2.3 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías abelianas equivalentes. Escojamos dos funtores F y G tales que $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$; como son equivalentes implica que $FG : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, FG es naturalemente isomorfo a $id_{\mathcal{B}}$ y asimismo GF es naturalemente isomorfo a $id_{\mathcal{A}}$. Por lo tanto*

$$K_0(FG) = K_0(F)K_0(G) : K_0(\mathcal{B}) \longrightarrow K_0(\mathcal{B})$$

y también

$$K_0(GF) = K_0(G)K_0(F) : K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}).$$

Por lo que $K_0(FG)$ es naturalemente isomorfo a $id_{K_0(\mathcal{B})}$ y $K_0(GF)$ es naturalmente isomorfo a $id_{K_0(\mathcal{A})}$. Por lo tanto $K_0(\mathcal{A})$ es equivalente a $K_0(\mathcal{B})$.

Podemos observar con más claridad lo que este ejemplo muestra. Supongamos los anillos R y R' son isomorfos, esto es, hay un homomorfismo f tal que $f : R \longrightarrow R'$ es biyectivo. En consecuencia existe un homomorfismo $g : R' \longrightarrow R$ tal que $f \circ g = id_{R'}$ y $g \circ f = id_R$. Por el teorema (2.1.6), K_0 es un funtor covariante y entonces $K_0(f \circ g) = K_0(f) \circ K_0(g) = id_{K_0(R')}$ y también $K_0(g \circ f) = K_0(g) \circ K_0(f) = id_{K_0(R)}$. Es así que, $K_0(R) \cong K_0(R')$, esto es, la categoría de R-módulos proyectivos finitamente izquierdos ${}_R\mathbf{P}$ es equivalente a la categoría de R'-módulos proyectivos finitamente generados izquierdos ${}_{R'}\mathbf{P}$ (que al mismo tiempo ambas categorías son subcategorías de la categoría abeliana ${}_R\mathbf{Mod}$).

Capítulo 3

El grupo de Whitehead K_1 de un anillo

3.1. K_1 de un anillo Λ

Definición 3.1.1 *Se denotará con $M_n(\Lambda)$ al anillo de las matrices cuadradas de orden n, donde Λ es el anillo al cual pertenecen las entradas y, respecto a Λ, se dirá que es un anillo con unidad.*

Definición 3.1.2 *Sea $GL_n(\Lambda)$ el grupo de las unidades de $M_n(\Lambda)$, $M_n(\Lambda)^\times$, es decir, $GL_n(\Lambda)$ es el grupo de las matrices invertibles de $M_n(\Lambda)$. Reconoceremos a $GL_n(\Lambda)$ bajo el nombre de* grupo general lineal.

Definición 3.1.3 *Una matriz que difiere de la matriz identidad por un elemento $\lambda \in \Lambda$ fuera de la diagonal, se le conoce como* matriz elemental *y la denotaremos como e_{ij}^{λ}, con $i \neq j$, es decir, una matriz de la forma*

$$e_{ij}^{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Observación 3.1.4 *Una matriz elemental e_{ij}^{λ} tiene la forma tanto de una matriz superior y una matriz inferior según la posición que adopte el elemento λ en el* *arreglo. Entonces*

$$det(e_{ij}^{\lambda}) = 1$$

si λ no está en la diagonal principal de la matriz, y

$$det(e_{ij}^{\lambda}) = \lambda$$

si λ está en la diagonal principal. Esto se debe a que el determinante de una matriz triangular es igual al producto de todos los elementos de la diagonal de e_{ij}^{λ}.

De la Observación (3.1.4) vemos que una matriz elemental e_{ij}^{λ} tienen determinante distinto de cero, por tanto es <u>invertible</u> y así $e_{ij}^{\lambda} \in GL_n(\Lambda)$. Sin pérdida de generalidad, fijemos a $n = 3$ y calculemos la matriz inversa de e_{ij}^{λ} para $i = 2$ y $j = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - \lambda R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

por lo que la matriz inversa de $\underline{e_{ij}^{\lambda} \text{ es } e_{ij}^{-\lambda}}$. Es claro que podemos expresar cada matriz elemental en la forma

$$e_{ij}^{\lambda} = I_n + \lambda \epsilon_{ij}$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n y ϵ_{ij} es una matriz cuyas entradas son todas cero excepto en la posición ij-ésima que está 1.

Sean e_{ij}^{λ} y e_{ij}^{μ} dos matrices elementales de orden n con $i \neq j$. Entonces tenemos que el producto

$$\begin{aligned} e_{ij}^{\lambda} \cdot e_{ij}^{\mu} &= (I_n + \lambda\epsilon_{ij})(I_n + \mu\epsilon_{ij}) \\ &= I_n \cdot I_n + I_n \cdot \mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{ij} \cdot I_n + \underbrace{\lambda\epsilon_{ij} \cdot \mu\epsilon_{ij}}_{=0} \\ &= I_n + \mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{ij} \\ &= I_n + (\lambda + \mu)\epsilon_{ij} \\ e_{ij}^{\lambda} \cdot e_{ij}^{\mu} &= e_{ij}^{\lambda+\mu}. \end{aligned}$$

Y particularmente, $e_{ij}^{\lambda} \cdot (e_{ij}^{\lambda})^{-1} = e_{ij}^{\lambda} \cdot e_{ij}^{-\lambda} = e_{ij}^{\lambda-\lambda} = e_{ij}^{0} = I_n$.

Recordemos que el conmutador de dos elementos a y b de un grupo se define como

$$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

Sean $e_{ij}^{\lambda}, e_{kl}^{\mu} \in GL_n(\Lambda)$ con $i \neq j$ y $k \neq l$. El conmutador de e_{ij}^{λ} y e_{kl}^{μ} es

$$\begin{aligned}
[e_{ij}^{\lambda}, e_{kl}^{\mu}] &= e_{ij}^{\lambda} \cdot e_{kl}^{\mu} \cdot (e_{ij}^{\lambda})^{-1} \cdot (e_{kl}^{\mu})^{-1} \\
&= \underbrace{e_{ij}^{\lambda} \cdot e_{kl}^{\mu}}_{I} \cdot \underbrace{e_{ij}^{-\lambda} \cdot e_{kl}^{-\mu}}_{II}.
\end{aligned}$$

Dividamos los cálculos de los productos (I) y (II). Sabemos que $e_{ij}^{\lambda} = I_n + \lambda\epsilon_{ij}$ y que $e_{kl}^{\mu} = I_n + \mu\epsilon_{ij}$, entonces si $j \neq k$ e $i = l$:

$$\begin{aligned}
e_{ij}^{\lambda} \cdot e_{kl}^{\mu} &= (I_n + \lambda\epsilon_{ij})(I_n + \mu\epsilon_{kl}) \\
&= I_n + \mu\epsilon_{kl} + \lambda\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{ij} \cdot \mu\epsilon_{kl} \\
&= I_n + \mu\epsilon_{kl} + \lambda\epsilon_{ij} + (\lambda\mu)\underbrace{\epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{kl}}_{=0} \\
&= I_n + \mu\epsilon_{kl} + \lambda\epsilon_{ij}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
e_{ij}^{-\lambda} \cdot e_{kl}^{-\mu} &= [I_n + (-\lambda)\epsilon_{ij}][I_n + (-\mu)\epsilon_{kl}] \\
&= I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij} + (-\lambda)\epsilon_{ij} \cdot (-\mu)\epsilon_{kl} \\
&= I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij} + (\lambda\mu)\underbrace{\epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{kl}}_{=0} \\
&= I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij}.
\end{aligned}$$

Y esto implica que

$$\begin{aligned}
e_{ij}^{\lambda}\cdot e_{kl}^{\mu}\cdot e_{ij}^{-\lambda}\cdot e_{kl}^{-\mu} &= (I_n+\mu\epsilon_{kl}+\lambda\epsilon_{ij})[I_n+(-\mu)\epsilon_{kl}+(-\lambda)\epsilon_{ij}]\\
&= I_n+(-\mu)\epsilon_{kl}+(-\lambda)\epsilon_{ij}+\mu\epsilon_{kl}+\mu\epsilon_{kl}\cdot(-\mu)\epsilon_{kl}+\\
&+ \mu\epsilon_{kl}\cdot(-\lambda)\epsilon_{ij}+\lambda\epsilon_{ij}+\lambda\epsilon_{ij}\cdot(-\mu)\epsilon_{kl}+\lambda\epsilon_{ij}\cdot(-\lambda)\epsilon_{ij}\\
&= I_n+(-\mu)\epsilon_{kl}+(-\lambda)\epsilon_{ij}+\mu\epsilon_{kl}+(-\mu\mu)\underbrace{\epsilon_{kl}\cdot\epsilon_{kl}}_{=0}+\\
&+ (-\lambda\mu)\epsilon_{kl}\cdot\epsilon_{ij}+\lambda\epsilon_{ij}+(-\lambda\mu)\underbrace{\epsilon_{ij}\cdot\epsilon_{kl}}_{=0}+(-\lambda\lambda)\underbrace{\epsilon_{ij}\cdot\epsilon_{ij}}_{=0}\\
&= I_n+(-\mu)\epsilon_{kl}+(-\lambda)\epsilon_{ij}+\mu\epsilon_{kl}+(-\lambda\mu)\epsilon_{kl}\cdot\epsilon_{ij}+\lambda\epsilon_{ij}\\
&= I_n+\underbrace{(-\mu+\mu)\epsilon_{kl}}_{=0}+\underbrace{(-\lambda+\lambda)\epsilon_{ij}}_{=0}+(-\lambda\mu)\epsilon_{kl}\cdot\epsilon_{ij}\\
&= I_n+(-\lambda\mu)\epsilon_{kj},\quad \text{ya que } \epsilon_{kl}\cdot\epsilon_{ij}=\epsilon_{kj}\\
&= e_{kj}^{-\lambda\mu}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $[e_{ij}^{\lambda}, e_{kl}^{\mu}] = e_{kj}^{-\lambda\mu}$ cuando $i = l$ y $j \neq k$.

Si ahora tomamos que $i \neq l$ y $j = k$, obtendremos que

$$\begin{aligned}
e_{ij}^{\lambda}\cdot e_{kl}^{\mu} &= (I_n+\lambda\epsilon_{ij})(I_n+\mu\epsilon_{kl})\\
&= I_n+\mu\epsilon_{kl}+\lambda\epsilon_{ij}+\lambda\epsilon_{ij}\cdot\mu\epsilon_{kl}\\
&= I_n+\mu\epsilon_{kl}+\lambda\epsilon_{ij}+(\lambda\mu)\epsilon_{ij}\cdot\epsilon_{kl}\\
&= I_n+\mu\epsilon_{kl}+\lambda\epsilon_{ij}+(\lambda\mu)\epsilon_{il}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
e_{ij}^{-\lambda}\cdot e_{kl}^{-\mu} &= [I_n+(-\lambda)\epsilon_{ij}][I_n+(-\mu)\epsilon_{kl}]\\
&= I_n+(-\mu)\epsilon_{kl}+(-\lambda)\epsilon_{ij}+(-\lambda)\epsilon_{ij}\cdot(-\mu)\epsilon_{kl}\\
&= I_n+(-\mu)\epsilon_{kl}+(-\lambda)\epsilon_{ij}+(\lambda\mu)\epsilon_{ij}\cdot\epsilon_{kl}\\
&= I_n+(-\mu)\epsilon_{kl}+(-\lambda)\epsilon_{ij}+(\lambda\mu)\epsilon_{il}.
\end{aligned}$$

Posteriormente tendremos que

$$\begin{aligned}
e_{ij}^{\lambda} \cdot e_{kl}^{\mu} \cdot e_{ij}^{-\lambda} \cdot e_{kl}^{-\mu} &= \left[I_n + \mu\epsilon_{kl} + \lambda\epsilon_{ij} + (\lambda\mu)\epsilon_{il}\right]\left[I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij} + (\lambda\mu)\epsilon_{il}\right] \\
&= I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij} + (\lambda\mu)\epsilon_{il} + \mu\epsilon_{kl} + \mu\epsilon_{kl} \cdot (-\mu)\epsilon_{kl} + \\
&+ \mu\epsilon_{kl} \cdot (-\lambda)\epsilon_{ij} + \mu\epsilon_{kl} \cdot (\lambda\mu)\epsilon_{il} + \lambda\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{ij} \cdot (-\mu)\epsilon_{kl} + \\
&+ \lambda\epsilon_{ij} \cdot (-\lambda)\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{ij} \cdot (\lambda\mu)\epsilon_{il} + (\lambda\mu)\epsilon_{il} + (\lambda\mu)\epsilon_{il} \cdot (-\mu)\epsilon_{kl} + \\
&+ (\lambda\mu)\epsilon_{il} \cdot (-\lambda)\epsilon_{ij} + (\lambda\mu)\epsilon_{il} \cdot (\lambda\mu)\epsilon_{il} \\
&= I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij} + (\lambda\mu)\epsilon_{il} + \mu\epsilon_{kl} + (-\mu\mu)\underbrace{\epsilon_{kl} \cdot \epsilon_{kl}}_{=0} + \\
&+ (-\lambda\mu)\underbrace{\epsilon_{kl} \cdot \epsilon_{ij}}_{=0} + (\mu\lambda\mu)\underbrace{\epsilon_{kl} \cdot \epsilon_{il}}_{=0} + \lambda\epsilon_{ij} + (-\lambda\mu)\epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{kl} + \\
&+ (-\lambda\lambda)\underbrace{\epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{ij}}_{=0} + (\lambda\lambda\mu)\underbrace{\epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{il}}_{=0} + (\lambda\mu)\epsilon_{il} + (-\lambda\mu\mu)\underbrace{\epsilon_{il} \cdot \epsilon_{kl}}_{=0} + \\
&+ (-\lambda\mu\lambda)\underbrace{\epsilon_{il} \cdot \epsilon_{ij}}_{=0} + (\lambda\mu\lambda\mu)\underbrace{\epsilon_{il} \cdot \epsilon_{il}}_{=0} \\
&= I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij} + (\lambda\mu)\epsilon_{il} + \mu\epsilon_{kl} + +\lambda\epsilon_{ij} + \\
&+ (-\lambda\mu)\epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{kl} + (\lambda\mu)\epsilon_{il} \\
&= I_n + \underbrace{(-\mu + \mu)\epsilon_{kl}}_{=0} + \underbrace{(-\lambda + \lambda)\epsilon_{ij}}_{=0} + (\lambda\mu)\epsilon_{il} + \\
&+ (-\lambda\mu)\epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{kl} + (\lambda\mu)\epsilon_{il} \\
&= I_n + (\lambda\mu)\epsilon_{il} + (-\lambda\mu)\epsilon_{il} + (\lambda\mu)\epsilon_{il}, \quad \text{porque } \epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{kl} = \epsilon_{il} \\
&= I_n + (\lambda\mu)\epsilon_{il} + (\lambda\mu - \lambda\mu)\epsilon_{il} \\
&= I_n + (\lambda\mu)\epsilon_{il} \\
&= e_{il}^{\lambda\mu}.
\end{aligned}$$

Y es así que $[e_{ij}^{\lambda}, e_{kl}^{\mu}] = e_{il}^{\lambda\mu}$. Falta considerar el caso en que $i \neq l$ y $j \neq k$. Para ello consideramos de la misma manera a $e_{ij}^{\lambda} = I_n + \lambda\epsilon_{ij}$ y $e_{kl}^{\mu} = I_n + \mu\epsilon_{kl}$ y procedemos a calcular su producto:

$$\begin{aligned}
e_{ij}^{\lambda} \cdot e_{kl}^{\mu} &= (I_n + \lambda\epsilon_{ij})(I_n + \mu\epsilon_{kl}) \\
&= I_n + \mu\epsilon_{kl} + \lambda\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{ij} \cdot \mu\epsilon_{kl} \\
&= I_n + \mu\epsilon_{kl} + \lambda\epsilon_{ij} + (\lambda\mu)\underbrace{\epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{kl}}_{=0} \\
&= I_n + \mu\epsilon_{kl} + \lambda\epsilon_{ij}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
e_{ij}^{-\lambda} \cdot e_{kl}^{-\mu} &= [I_n + (-\lambda)\epsilon_{ij}][I_n + (-\mu)\epsilon_{kl}] \\
&= I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij} + (-\lambda)\epsilon_{ij} \cdot (-\mu)\epsilon_{kl} \\
&= I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij} + (\lambda\mu)\underbrace{\epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{kl}}_{=0} \\
&= I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij}.
\end{aligned}$$

A continuación, observamos que el producto de $e_{ij}^{\lambda} \cdot e_{kl}^{\mu} \cdot e_{ij}^{-\lambda} \cdot e_{kl}^{-\mu}$ es prácticamente la misma cosa cuando estudiamos el caso de $j \neq k$ e $i = l$; lo que cambiará será por la nueva consideración para los índices. Entonces, veamos el producto bajo esta restricción:

$$\begin{aligned}
e_{ij}^{\lambda} \cdot e_{kl}^{\mu} \cdot e_{ij}^{-\lambda} \cdot e_{kl}^{-\mu} &= (I_n + \mu\epsilon_{kl} + \lambda\epsilon_{ij})[I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij}] \\
&= I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij} + \mu\epsilon_{kl} + \mu\epsilon_{kl} \cdot (-\mu)\epsilon_{kl} + \\
&+ \mu\epsilon_{kl} \cdot (-\lambda)\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{ij} \cdot (-\mu)\epsilon_{kl} + \lambda\epsilon_{ij} \cdot (-\lambda)\epsilon_{ij} \\
&= I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij} + \mu\epsilon_{kl} + (-\mu\mu)\underbrace{\epsilon_{kl} \cdot \epsilon_{kl}}_{=0} + \\
&+ (-\lambda\mu)\underbrace{\epsilon_{kl} \cdot \epsilon_{ij}}_{=0} + \lambda\epsilon_{ij} + (-\lambda\mu)\underbrace{\epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{kl}}_{=0} + (-\lambda\lambda)\underbrace{\epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{ij}}_{=0} \\
&= I_n + (-\mu)\epsilon_{kl} + (-\lambda)\epsilon_{ij} + \mu\epsilon_{kl} + \lambda\epsilon_{ij} \\
&= I_n + \underbrace{(-\mu + \mu)\epsilon_{kl}}_{=0} + \underbrace{(-\lambda + \lambda)\epsilon_{ij}}_{=0} \\
&= I_n
\end{aligned}$$

Y por lo tanto, $[e_{ij}^{\lambda}, e_{kl}^{\mu}] = I_n$ cuando $j \neq k$ e $i \neq l$. En resumen, tenemos la siguiente

Proposición 3.1.5 *Sean e_{ij}^{λ}, $e_{kl}^{\mu} \in GL_n(\Lambda)$. Entonces se cumple que*

$$\left[e_{ij}^{\lambda}, e_{kl}^{\mu}\right] = \begin{cases} I_n, & si \quad j \neq k,\ i \neq l \\ e_{il}^{\lambda\mu}, & si \quad j = k,\ i \neq l \\ e_{kl}^{-\lambda\mu}, & si \quad j \neq k,\ i = l\ . \end{cases}$$

Sea
$$\mathbf{J} = \{\text{matrices elementales } e_{ij}^{\lambda},\ \lambda \in \Lambda\}.$$

$\mathbf{J}$ es no vacío, porque para $\lambda_1 = 0 = \lambda - \lambda \in \Lambda$, $e_{ij}^{0} = e_{ij}^{\lambda-\lambda} = e_{ij}^{\lambda} e_{ij}^{-\lambda} = I_n$ y al menos $I_n \in \mathbf{J}$. Por la Observación (3.1.4) vimos que $e_{ij}^{\lambda} \in GL_n(\Lambda)$ y por consiguiente $\mathbf{J} \subset GL_n(\Lambda)$. Ahora consideremos el subgrupo generado por el conjunto $\mathbf{J}$, $\langle \mathbf{J} \rangle$:

$$\langle \mathbf{J} \rangle = \left\{ \prod_{i=1}^{k} X_i^{\alpha_i} : X_i \in \mathbf{J},\ \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Veamos que $\langle \mathbf{J} \rangle$ es subgrupo de $GL_n(\Lambda)$. Sean $x, y \in \langle \mathbf{J} \rangle$, entonces

$$\begin{aligned}
x \cdot y^{-1} &= \prod_{i=1}^{k} X_i^{\alpha_i} \cdot \left(\prod_{j=1}^{l} Y_j^{\beta_j} \right)^{-1} \\
&= \prod_{i=1}^{k} X_i^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^{l} \left(Y_j^{\beta_j} \right)^{-1} \\
&= \prod_{i=1}^{k} X_i^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^{l} Y_j^{-\beta_j} \\
&= \underbrace{\prod_{i=1}^{k} X_i^{\alpha_i} \cdot \underbrace{\prod_{j=1}^{l} \left(\underbrace{Y_j^{-1}}_{\in \mathbf{J}} \right)^{\beta_j}}_{\in \langle \mathbf{J} \rangle}}_{\in \langle \mathbf{J} \rangle}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\langle \mathbf{J} \rangle \leq GL_n(\Lambda)$. Clásicamente, éste subgrupo es conocido como *grupo elemental lineal* y nos adaptaremos al contexto simbolizándolo como $E_n(\Lambda)$, es decir, $E_n(\Lambda) := \langle \mathbf{J} \rangle$.

Observación 3.1.6 *Sean m y n enteros positivos tales que $m \leq n$ y sea Λ un anillo con unidad. Consideremos la función*

$$\Omega_{m,n} : GL_m(\Lambda) \longrightarrow GL_n(\Lambda)$$

definida como

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

donde I_{n-m} es la matriz identidad de orden $(n-m) \times (n-m)$ y las matrices cero, 0, son de tamaño apropiado. Probemos que $\Omega_{m,n}$ es un homomorfismo de grupos. Tomemos dos matrices de orden m con determinante no nulo, $A, B \in GL_m(\Lambda)$. Entonces

$$\begin{aligned} \Omega_{m,n}(AB) &= \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \\ &= \Omega_{m,n}(A)\Omega_{m,n}(B) \end{aligned}$$

Luego efectivamente $\Omega_{m,n}$ es un homomorfismo entre los grupos $GL_m(\Lambda)$ y $GL_n(\Lambda)$.

Si reconocemos a cada matriz $A \in GL_n(\Lambda)$ con la matriz

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\Lambda)$$

conseguimos inclusiones $GL_1(\Lambda) \subset GL_2(\Lambda) \subset GL_3(\Lambda) \subset \ldots$.

Definición 3.1.7 *Para un anillo con unidad Λ definimos*

$$GL(\Lambda) = \bigcup_{n}^{\infty} GL_n(\Lambda)$$

al que llamamos grupo lineal general estable *de Λ.*

Por la Observación (3.1.6) la inclusión de

$$GL_n(\Lambda) \overset{\Omega_{n,n+1}}{\rightarrowtail} GL_{n+1}(\Lambda)$$

se restringe a la inclusión de $E_n(\Lambda) \subset GL_n(\Lambda)$, teniendo que

$$E_n(\Lambda) \rightarrowtail E_{n+1}(\Lambda).$$

Definición 3.1.8 *Para un anillo con unidad Λ definimos*

$$E(\Lambda) = \bigcup_{n}^{\infty} E_n(\Lambda)$$

que conoceremos como grupo elemental estable *de Λ.*

Lema 3.1.9 *[Whitehead] Para un anillo Λ tenemos que $E(\Lambda)$ es el subgrupo conmutador de $GL(\Lambda)$, es decir,*

$$E(\Lambda) = [GL(\Lambda), GL(\Lambda)]$$

Demostración. Probemos primero que $E(\Lambda) \supset [GL(\Lambda), GL(\Lambda)]$.
Sean $X, Y \in GL_n(\Lambda)$ entonces se tiene que $[X, Y] = XYX^{-1}Y^{-1} \in [GL_n(\Lambda), GL_n(\Lambda)]$. Luego identificamos a la matriz $[X, Y] = XYX^{-1}Y^{-1}$ en $GL_{2n}(\Lambda)$ mediante el morfismo $\Omega_{n,2n}$, es decir,

$$[X, Y] \mapsto \begin{pmatrix} [XY] & 0 \\ 0 & I_{2n-n} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

En $GL_{2n}(\Lambda)$, la ecuación (4.2) adopta lo siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} [XY] & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} XY(YX)^{-1} & 0 \\ 0 & (YX)^{-1}YX \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (YX)^{-1} & 0 \\ 0 & YX \end{pmatrix}. \quad (*) \end{aligned}$$

Lo que se desea es que (4.2) pueda ser expresado como el producto de matrices elementales en $GL_{2n}(\Lambda)$. Entonces bastará con que cada matriz en $(*)$ pueda reducirse a I_{2n} mediante operaciones elementales. Como para cada $X \in GL_n(\Lambda)$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

en $GL_{2n}(\Lambda)$ y también

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -X^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Luego vemos que las matrices

$$\begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -X^{-1} & I_n \end{pmatrix}$$

pertenecen a E_{2n}, puesto que

$$I_n + \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ n<j\leq 2n}} a_{ij}\epsilon_{ij} \;=\; \prod_{\substack{1\leq i\leq n \\ n<j\leq 2n}} (I_n + a_{ij}\epsilon_{ij})$$

y además la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

puede reducirse a I_{2n} mediante operaciones elementales de renglón, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Por tanto hemos obtenido que $[GL_n(\Lambda), GL_n(\Lambda)] \subset E_{2n}(\Lambda)$ y por lo tanto $[GL(\Lambda), GL(\Lambda)] \subset E(\Lambda)$.

Ahora probemos que $E(\Lambda) \subset [GL(\Lambda), GL(\Lambda)]$.

Mediante la Proposición (3.1.5), hemos visto que cada matriz elemental puede expresarse como el conmutador de otras dos matrices elementales, entonces podemos exhibir esta idea diciendo que

$$e_{ij}^{\lambda} = [e_{ik}^{\lambda}, e_{kj}^{1}] \quad (\blacktriangle)$$

es decir, para $i.j \in \{1, \ldots, n\}$ y $\lambda \in \Lambda$ existe un $k \in \{1, \ldots, n\}$ diferentes de i y j tal que se cumple $(\blacktriangle)$ para $n \geq 3$. Por lo que $[E_n(\Lambda), E_n(\Lambda)] = E_n(\Lambda)$ y, en conclusión, $[E(\Lambda), E(\Lambda)] = E(\Lambda) \subset GL(\Lambda)$.

Po lo tanto,

$$[GL(\Lambda), GL(\Lambda)] = E(\Lambda).$$

$\blacksquare$

Observación 3.1.10 *Para elementos x y y de un grupo de un grupo G, es claro que $xy = yx$ si, y sólo si, el conmutador $[x, y]$ es igual a la identidad. Para probarlo, vemos que*

$$\begin{aligned} xy = yx &\iff xy(yx)^{-1} = yx(yx)^{-1} \\ &\iff xyx^{-1}y^{-1} = e \\ &\iff [x, y] = e. \end{aligned}$$

Además, resulta que también

$$[x,y]^{-1} = [y,x].$$

Al subgrupo generado por todos los elementos de la forma $[x,y]$ se le conoce como *subgrupo conmutador* de G y se simboliza por $[G,G]$. Sea $[m,n] \in [G,G]$ y $g \in G$ entonce tenemos que

$$\begin{aligned} g[m,n]g^{-1} &= gmnm^{-1}n^{-1}g^{-1} \\ &= gm(g^{-1}g)n(g^{-1}g)m^{-1}(g^{-1}g)n^{-1}(g^{-1}g)g^{-1} \\ &= (gmg^{-1})(gng^{-1})(gm^{-1}g^{-1})(gn^{-1}g^{-1})(gg^{-1}) \\ &= (gmg^{-1})(gng^{-1})(gmg^{-1})^{-1}(gng^{-1})^{-1} \\ &= [gmg^{-1}, gng^{-1}] \in [G,G]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[G,G] \lhd G$. Al cociente

$$G_{\mathbf{ab}} = G/[G,G]$$

es conocido como la *abelianización* de G. Como se tiene que

$$\begin{aligned} [x[G,G], y[G,G]] &= [\pi_0(x), \pi_0(y)] \\ &= \pi_0([x,y]) \\ &= [x,y][G,G] \\ &= [G,G]\,, \end{aligned}$$

(donde $\pi_0 : G \longrightarrow G/[G,G]$ dada por $x \mapsto x[G,G]$) por la Observación (3.1.10) deducimos que $G_{\mathbf{ab}}$ es un grupo abeliano.

Proposición 3.1.11 *Supongamos que G es un grupo. Un subgrupo H contiene a $[G,G]$ si, y sólo si, $H \lhd G$ y G/H es abeliano.*

Demostración. "$\Longleftarrow$" Supongamos que $H \lhd G$ y que G/H es abeliano, entonces para todo $x, y \in G$,

$$\begin{aligned} [x,y]H &= xyx^{-1}y^{-1}H \\ &= (xH)(yH)(x^{-1}H)(y^{-1}H) \\ &= (xH)(x^{-1}H)(yH)(y^{-1}H) \\ &= (xx^{-1}H)(yy^{-1}H) \\ &= H. \end{aligned}$$

Entonces $[x, y] \in H$ y por tanto $[G, G] \subset H$.

"$\Longrightarrow$" Supongamos que $[G, G] \subset H$. Entonces

$$\begin{aligned}
(xH)(xH) &= xyH \\
&= xy(y^{-1}x^{-1}yx)H \\
&= x\underbrace{(yy^{-1})}_{=e}x^{-1}yxH \\
&= xx^{-1}yxH \\
&= yxH \\
&= (yH)(xH),
\end{aligned}$$

entonces G/H es un grupo abeliano y así $H \lhd G$ (todo subgrupo de un grupo abeliano es un subgrupo normal).

Definición 3.1.12 *Para cada anillo Λ, el* grupo de Whitehead *(*Bass-Whitehead*) de Λ es el K-grupo algebraico*

$$K_1(\Lambda) = GL(\Lambda)_{ab} = GL(\Lambda)/E(\Lambda).$$

3.2. Determinantes y SK_1

Ahora, sea $f \in Hom_{\mathbf{Ring}}(R, S)$, es decir, sea f un morfismo entre los objetos R y S de la categoría **Ring**, por tanto un homomorfismo de anillos. Entonces existen homomorfismos de grupos

$$f_n : GL_n(R) \longrightarrow GL_n(S)$$

dado por

$$(a_{ij}) \mapsto (f(a_{ij})),$$

puesto que

$$\begin{aligned}
f_n((a_{ij})(b_{ij})) &= f_n\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)\right) \\
&= \left(f\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} f(a_{ij})f(b_{ij})\right) \\
&= (f(a_{ij}))(f(b_{ij})) \\
&= f_n(a_{ij})f_n(b_{ij}).
\end{aligned}$$

Esto da lugar a construir un diagrama

$$\begin{tikzcd}
GL_n(R) \arrow[r, "f_n"] & GL_n(S) \\
GL_m(R) \arrow[u, "\Omega_m^R"] \arrow[r, "f_m"'] & GL_m(S) \arrow[u, "\Omega_m^S"']
\end{tikzcd}$$

conmutativo, es decir, que $f_n \circ \Omega_m^R = \Omega_m^S \circ f_m$ para $m \leq n$ pues, tomando una matriz $(x_{ij}) \in GL_m(R)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
(f_n \circ \Omega_m^R)((x_{ij})) &= f_n(\Omega_m^R((x_{ij}))) \\
&= f_n \begin{pmatrix} (x_{ij}) & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (f(x_{ij})) & f(0) \\ f(0) & f(I_{n-m}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (f(x_{ij})) & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(\Omega_m^S \circ f_m)((x_{ij})) &= \Omega_m^S(f_m((x_{ij}))) \\
&= \Omega_m^S(((f(x_{ij}))) \\
&= \begin{pmatrix} (f(x_{ij})) & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que $f_n \circ \Omega_m^R = \Omega_m^S \circ f_m$.

Recordando que $GL(\Lambda) = \bigcup_{n=1} GL_n(\Lambda)$ tenemos de nueva cuenta un homomorfismo

$$GL(R) \longrightarrow GL(S)$$

para anillos R y S. Esto a su vez induce un homomorfismo tomando su abelianización (cociente sobre su subgrupo conmutador) definido tal que

$$f^1_* : K_1(R) \longrightarrow K_1(S)$$

dado por

$$[A]E(R) \mapsto [f_n(A)]E(S).$$

Teorema 3.2.1 *K_1 : **Ring** $\longrightarrow$ **Ab** es un funtor donde K_1 envía morfismos f a f^1_*.*

Demostración. Supongamos que $f : R \longrightarrow S$ y $g : S \longrightarrow T$ son dos homomorfismos de anillos. Para cada $A \in GL_n(R)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(g \circ f)^1_*([A]E(R)) &= [(g \circ f)_n(A)]E(T) \\
&= [g_n(f_n(A))]E(T) \\
&= g^1_*([f_n(A)]E(S)) \\
&= g^1_*(f^1_*([A]E(R))) \\
&= g^1_* \circ f^1_*([A]E(R))
\end{aligned}$$

Así también si $id : R \longrightarrow R$ es el morfismo identidad en **Ring**, entonces

$$id^1_*([A]E(R)) = [id(A)]E(R) = [A]E(R).$$

■

▲▲

Podemos considerar el determinante de una matriz como una aplicación entre los grupos

$$det : GL(\Lambda) \longrightarrow U(\Lambda) = \Lambda^*$$

donde $U(\Lambda) = \Lambda^*$ denota las unidades del anillo Λ.

Sea

$$SL(\Lambda) := ker\ (det : GL(\Lambda) \longrightarrow \Lambda^*)$$

y lo llamaremos *grupo especial lineal* de Λ el cual es un subgrupo de $GL(\Lambda)$ que consiste de aquellas matrices con determinante igual a 1. Observemos que hemos podido definir det debido a que $det_n : GL_n(\Lambda) \longrightarrow \Lambda^*$

es invariante bajo la inclusión $GL_n(\Lambda) \rightarrowtail GL_{n+1}(\Lambda)$. Veamos que la aplicación det es un homomorfismo.

Sean $A, B \in GL_n(\Lambda)$ entonces por la definición del determinante aplicado al producto de matrices tenemos que

$$det_n(AB) = det_n(A)det_n(B)$$

y por lo cual det es un homomorfismo.

El homomorfismo det induce un homomorfismo

$$det^1 : GL(\Lambda)/E(\Lambda) = K_1(\Lambda) \longrightarrow \Lambda^*$$

puesto que $E(\Lambda) \subset SL(\Lambda) \subset ker(det)$ definido tal que para cada $[A] \in K_1(\Lambda)$ ($[A] = AE(\Lambda)$), $[A] \mapsto det^1([A]) = det(A)$.

Podemos construir una aplicación inversa

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^* = GL_1(\Lambda) \arrow[r, tail, "f"] \arrow[dr, dotted, "g\circ f"] & GL(\Lambda) \arrow[d, two heads, "g"] \\
& K_1(\Lambda) \arrow[ul, bend left, "det^1"]
\end{tikzcd}$$

$$u \xmapsto[f(u)]{\hspace{5em}} U \xmapsto[g(U)=(g\circ f)(u)]{} [U]$$

y sea entonces $\iota^1 := g \circ f$.

Definamos ahora

$$ker(det^1 : K_1(\Lambda) \longrightarrow \Lambda^*) = SL(\Lambda)/E(\Lambda) = SK_1(\Lambda).$$

Esto da lugar a considerar una sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow SK_1(\Lambda) \overset{\theta}{\rightarrowtail} K_1(\Lambda) \overset{det^1}{\twoheadrightarrow} \Lambda^* \longrightarrow 1$$

donde θ es la inclusión (se comprueba que $im(\theta) = ker(det^1)$) y puesto que existe $\iota^1 : \Lambda^* \longrightarrow K_1(\Lambda)$ como se dedujó, y tal que $det^1(\iota^1(u)) = u$ para todo $u \in \Lambda^*$ la sucesión exacta corta se escinde y

$$K_1(\Lambda) \cong SK_1(\Lambda) \oplus \Lambda^*. \tag{3.2}$$

Como puede considerarse conocido (en algunas ocasiones) Λ^*, el cálculo de $K_1(\Lambda)$ se limita al de $SK_1(\Lambda)$.

Observación 3.2.2 *Sea Γ un cuerpo y sea $A = (a_{ij}) \in GL_n(\Gamma)$. La primera columna de A no puede consistir solamente de ceros porque si así fuera, la matriz A no sería invertible. Luego, $a_{i1} \neq 0$ para algún $i = 1, \ldots, n$. Si $i = 1$, muy bien. Si no,*

$$e_{1i}^1 e_{il}^{-1} e_{li}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots \\ \vdots & 1 & \vdots & \\ -1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces usamos $e_{1i}^1 e_{il}^{-1} e_{li}^1$ para multiplicar a A y poner algo distinto de cero en la posición $(1,1)$. Luego podemos asumir muy bien que $a_{11} \neq 0$. Sumando $-a_{i1}a_{11}^{-1}$ veces la primera columna a la ij-ésima fila para $i \neq 1$. podemos cancelar todas las otras entradas en la primera columna. Esto reduce A a la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

con A' una matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$, y de hecho $det(A) = a_{11}det(A')$. Repetimos este proceso para A', así vamos transformando a la matriz A, por operaciones elementales de renglón, a la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 1 & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & A'' \end{pmatrix}$$

con A'' una matriz de orden $(n-2) \times (n-2)$. Continuando, por inducción, vemos que A puede ser transformada a una matriz triangular superior invertible a través de las operaciones elementales de renglón. Ahora asumamos que A es una matriz triangular superior invertible. Sumando múltiplos del último renglón a los otros renglones, podemos eliminar todas las entradas en la última columna a excepción de a_{nn}. Entonces sumando múltiplos de los $(n-1)$-ésimos renglones a los otros renglones, podemos cancelar todas las entradas de en la columna $(n-1)$-ésima excepto para $a_{n-1,n-1}$. Siguiendo por inducción, podemos reducir por renglones a A en una matriz diagonal invertible $D = (d_{ij})$. Además, las operaciones elementales de renglón no cambian el determinante, esta matriz diagonal D tiene el mismo determinante como nuestra matriz original A.

Finalmente, tenemos que transformar a D en una matriz diagonal con a lo sumo *una entrada en la diagonal diferente de* 1*. Así como en la prueba del Lema (3.1.9), hemos de concluir que las matrices de la forma*

$$diag(1,\ldots,1,a,a^{-1},1,\ldots,1) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

son matrices elementales. Multiplicando previamente a D por tales matrices, transformamos a D en una matriz diagonal con a lo sumo una entrada en la diagonal, decir en la posición $(1,1)$*, diferente de* 1*. Esta entrada debe ser la misma como el determinante, luego si A tiene determinante* 1*, vemos que puede ser transformada por operaciones elementales de renglón a la matriz identidad. En otras palabras,* $A \in E(\Gamma)$*.*

Así las cosas, para cualquier matriz $A \in SL(\Lambda) = ker(det)$, y podamos transformar la matriz

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix},$$

para una adecuada k, en la matriz identidad I_{n+k} mediante operaciones elementales por renglón o columna, afirmamos que A es una matriz elemental y por tanto $SL(\Lambda) = E(\Lambda)$. Esto depende sin duda alguna del anillo Λ. En el caso de la Observación (3.2.2), si Λ es un cuerpo $\mathbb{K}$, $SL(\mathbb{K}) = E(\mathbb{K})$. Y podemos establecer el siguiente

Teorema 3.2.3 *Si Λ es un cuerpo, entonces* $K_1(\Lambda) \cong \Lambda^*$

Demostración. De la ecuación (3.2) tenemos que

$$K_1(\Lambda) \cong SK_1(\Lambda) \oplus \Lambda^*.$$

Como $SK_1(\Lambda) = SL(\Lambda)/E(\Lambda)$ y para un cuerpo Λ se tiene $SL(\Lambda) = E(\Lambda)$, conseguimos que $SK_1(\Lambda)$ es trivial. Entonces

$$K_1(\Lambda) \cong 0 \oplus \Lambda^* \cong \Lambda^*.$$

$\blacksquare$

Observación 3.2.4 *El teorema (3.2.3) fue el resultado de que si cualquier matriz con entradas en un anillo Λ es reducida a la matriz identida mediante operaciones elementales por renglón o columna entonces $SK_1(\Lambda)$ es trivial. Como éste proceso de reducción puede ser aplicado no sólo a cuerpos sino también a un dominio euclidiano o un anillo local o un anillo conmutativo finito, podemos extender el teorema (3.2.3) en forma análoga.*

Ejemplo 3.2.5 *Calculemos $K_1(\mathbb{Z})$. Sabemos que $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$, por lo que nos podemos limitar al cálculo de $K_1(\Lambda)$ al cálculo de $SK_1(\mathbb{Z})$.*
Sea $X \neq I_n \in SL_n(\mathbb{Z})$. Está matriz posee como entradas números enteros e identifiquemos ésta matriz con una de orden $n+1$, es decir,

$$X' = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mediante un proceso finito de pasos podemos transformar X' en una matriz identidad como se extendió en la Observación (3.2.2). Por tanto, $X \in E_n(\mathbb{Z})$ y como fue arbritraria, $SL_n(\mathbb{Z}) = E(\mathbb{Z})$. Así, $K_1(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$.

Capítulo 4

El Grupo de Steinberg y el grupo K_2

4.1. Extensiones centrales

Definición 4.1.1 *Se define* el centro de *un grupo G como el conjunto de los elementos de G que conmutan con todos los elementos de G, y lo simbolizaremos por* $\mathbf{Z}(G)$*, es decir,*

$$\mathbf{Z}(G) = \{g \in G : xg = gx \ \ \forall x \in G\}.$$

Definición 4.1.2 *Un grupo G se dice* perfecto *si G es igual a su subgrupo conmutador, es decir,* $G = [G, G]$.

Definición 4.1.3 *Una* extensión central *de un grupo G por un grupo A es una sucesión exacta corta*

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow X \xrightarrow{\phi} G \longrightarrow 1$$

tal que A esta en $\mathbf{Z}(X)$*, el centro de X.*

Si ϕ y A son claros desde el contexto, es decir, si sabemos reconocer a ϕ y a A de algún modo según sea el caso, podemos, por abuso del lenguaje, refirnos al grupo X como una *extensión central* del grupo G. En este sentido, podemos dar, a continuación, una definición análoga a la definición (4.1.3).

Definición 4.1.4 *Por una* extensión central *de un grupo G se entiende a un par* (X, ϕ) *que consiste de un grupo X y un homomorfismo* ϕ *de X a G que cumple que ker* $\phi \subset \mathbf{Z}(X)$.

Definición 4.1.5 *Una extensión central (U, ν) de un grupo G es* universal *si, para cada extensión central (X, ϕ) de G, existe un único homomorfismo $h : U \longrightarrow X$ tal que $\nu = \phi \circ h$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, dotted, "\exists!"'] & G \\ & X \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

Proposición 4.1.6 *Si una extensión central universal existe, es única salvo isomorfismos.*

Demostración. Supongamos que (U, μ) y (V, ν) son extensiones centrales universales de un grupo G. Queremos probar que $U \cong V$. Por definición (4.1.5), sean $h : U \longrightarrow V$ y $h' : V \longrightarrow U$ tales que $\nu \circ h = \mu$ y $\mu \circ h' = \nu$, es decir, que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, bend right, "h"'] & G \\ & V \arrow[u, "\nu"'] \arrow[ul, dotted, "h'"] \end{tikzcd}$$

conmuta. De lo anterior,

$$\begin{aligned} \nu \circ h = \mu \quad &\Longrightarrow \quad \mu \circ h' \circ h = \mu \\ &\Longrightarrow \quad \mu \circ (h' \circ h) = \mu \end{aligned}$$

por tanto $h' \circ h = Id_V$. Asimismo tenemos que

$$\begin{aligned} \mu \circ h' = \nu \quad &\Longrightarrow \quad \nu \circ h \circ h' = \nu \\ &\Longrightarrow \quad \nu \circ (h \circ h') = \nu \end{aligned}$$

y por lo cual, $h \circ h' = Id_U$. Por lo tanto $U \cong V$.

■

Definición 4.1.7 *Una extensión central (X, ϕ) de un grupo G* se escinde *si admite una* sección, *esto es un homomorfismo $s : G \longrightarrow X$.*

Lema 4.1.8 *Sean (X, ϕ) y (Y, ψ) extensiones centrales de un grupo G. Si Y es perfecto existe al menos un homomorfismo de Y a X sobre G.*

Demostración. Supongamos que f_1 y que f_2 son homomorfismos de Y a X. Lo que se desea es mostrar que al tomar dos homomorfismos arbitrarios de Y a X ambos homomorfismos son iguales, es decir, $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)\ \forall \alpha \in Y$. Lo que tenemos por el momento, podemos verlo en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
& G & \\
X \arrow[ur, "\phi"] & & Y \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[ll, "f_2"'] \arrow[ll, bend left, "f_1"]
\end{tikzcd}$$

Puesto f_1 y f_2 son homomorfismos de Y a X, tenemos que para algún $y \in Y$, $\phi(f_1(y)) = \psi(y)$ y asimismo $\phi(f_2(y)) = \psi(y)$. Luego obtenemos que

$$\begin{aligned}
\phi(f_1(y)) &= \phi(f_2(y)) \\
f_1(y) &= f_2(y).
\end{aligned}$$

En todo caso hablamos de un isomorfismo y esto es trivial según lo mostrado. Sin embargo, seas $\beta, \beta' \in ker\ \phi \subset \mathbf{Z}(X)$ y tomemos $z, y \in Y$. Podemos considerar en X las relaciones

$$f_1(y) = f_2(y)\beta$$

y

$$f_1(z) = f_2(z)\beta'\ .$$

En este sentido vemos que

$$\begin{aligned}
\phi(f_1(y)) &= \phi(f_2(y)\beta) \\
&= \phi(f_2(y))\phi(\beta) \\
&= \phi(f_2(y))
\end{aligned}$$

y bajo condiciones ϕ es bien definida.

$$
\begin{aligned}
f_1(yz) &= f_1(y)f_1(z) \\
&= f_2(y)\beta f_2(z)\beta' \\
&= f_2(y)\underbrace{\left[f_2(y)^{-1}f_1(y)\right]}_{\in \mathbf{Z}(X)} f_2(z)\underbrace{\left[f_2(z)^{-1}f_1(z)\right]}_{\in \mathbf{Z}(X)} \\
&= f_2(y)f_2(z)\underbrace{\left[f_2(y)^{-1}f_1(y)\right]}_{\in \mathbf{Z}(X)}\underbrace{\left[f_2(z)^{-1}f_1(z)\right]}_{\in \mathbf{Z}(X)} \\
&= f_2(y)f_2(z)\underbrace{\left[f_2(z)^{-1}f_1(z)\right]}_{\in \mathbf{Z}(X)}\underbrace{\left[f_2(y)^{-1}f_1(y)\right]}_{\in \mathbf{Z}(X)} \\
f_1(yz)f_1(y)^{-1} &= f_2(y)f_2(z)\underbrace{\left[f_2(z)^{-1}f_1(z)\right]}_{\in \mathbf{Z}(X)} f_2(y)^{-1} \\
&= f_2(y)f_2(z)f_2(y)^{-1}\underbrace{\left[f_2(z)^{-1}f_1(z)\right]}_{\in \mathbf{Z}(X)} \\
f_1(yz)f_1(y)^{-1}f_1(z)^{-1} &= f_2(y)f_2(z)f_2(y)^{-1}f_2(z)^{-1} \\
f_1(yzy^{-1}z^{-1}) &= f_2(yzy^{-1}z^{-1}) \\
f_1([y,z]) &= f_2([y,z]).
\end{aligned}
$$

Ahora usamos la hipótesis que Y es perfecto, y como Y está generado por conmutadores, por tanto, esto prueba que $f_1 = f_2, \forall \alpha = [y,z] \in Y$.

■

Lema 4.1.9 *Sea (Y,ψ) una extensión central de G. Si Y no es perfecto, entonces para una extensión central (X,ϕ) elegida adecuadamente existe más que un homomorfismo de Y a X sobre G.*

Demostración. Si Y no es perfecto, existe un homomorfismo distinto de cero φ de Y sobre algún grupo abeliano, digamos $Y_{\mathbf{ab}} = Y/[Y,Y]$. Esto es así puesto que si por un momento asumimos que Y es, en efecto, un grupo perfecto, entonces al tomar el homomorfismo canónico $Y \longrightarrow Y/[Y,Y]$, definido por $\alpha \mapsto \alpha[Y,Y]\ \forall \alpha \in Y$, vemos que α es un producto finito de conmutadores $[a_j, b_j]$ con $j \in \{1,2,3,\ldots,k\}$, es decir, $\alpha = \prod_{j=1}^{k}[a_j,b_j]$, por lo tanto $\alpha \in [Y,Y]$

y $\alpha[Y,Y] = 0$. Asumiendo que Y es un grupo perfecto, el homomorfismo canónico se vuelve el homomorfismo nulo. Por consiguiente, el homomorfismo

$$\varphi : Y \longrightarrow Y/[Y,Y]$$

es no nulo.

Elijamos $X = G \times Y/[Y,Y]$ y un homomorfismo ϕ de $G \times Y/[Y,Y]$ a G definido por $\phi(g,\lambda) = g$, $\forall\ (g,\lambda) \in G \times Y/[Y,Y]$. Veamos,

$$\begin{aligned} ker\ \phi &= \{(a,b) \in G \times Y/[Y,Y]\ :\ \phi(a,b) = a = 0\} \\ &= \{(0,b) \in G \times Y/[Y,Y]\} \end{aligned}$$

y como para un $(x,y) \in G \times Y/[Y,Y]$,

$$\begin{aligned} (x,y)(0,b) &= (0,yb) \\ &= (0,by) \ \text{ ya que } yb \in Y/[Y,Y] \text{ y } Y/[Y,Y] \text{ es abeliano.} \\ &= (0,b)(x,y) \end{aligned}$$

y por lo tanto $(0,b) \in \mathbf{Z}(G \times Y/[Y,Y])$, por lo cual $ker\ \phi \subset \mathbf{Z}(G \times Y/[Y,Y])$ y de esta forma $(G \times Y/[Y,Y], \phi)$ es una extesión central sobre G. Haciendo

$$f(m) = (\psi(m), 1) \ \text{ y } \ g(m) = (\psi(m), \varphi(m))$$

tenemos dos homomorfismos de Y a $G \times Y/[Y,Y]$ sobre G.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, "g"'] \arrow[dr, "\psi"'] & & G \times Y/[Y,Y] \arrow[dl, "\phi"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Así el lema queda demostrado.

■

Lema 4.1.10 *Si (X,ϕ) es una extensión central de un grupo perfecto P, entonces el subgrupo conmutador $[X,X]$ es perfecto, y lo mapea sobre P.*

Demostración. Sea (X,ϕ) una extensión central de P. Probemos que ϕ es un homomorfismo sobreyectivo. Sea $p \in P$. Entonces p tiene la forma $p =$

$\prod_{j=1}^{l}[x_j, y_j]$ ya que P está generado por productos de conmutadores. Desarrollando $[x_j, y_j]$ obtenemos que

$$p = \prod_{j=1}^{l}[x_j, y_j] = \prod_{j=1}^{l}\left(x_j y_j x_j^{-1} y_j^{-1}\right).$$

Como ϕ es un homomorfismo sobreyectivo de X a P, puesto que es una extensión central, tenemos que para cada $q \in P$ existe un $\alpha \in X$ tal que $\phi(\alpha) = q$; es así que que para cada x_j y y_j en P existen μ_j y ν_j en X de manera que $\phi(\mu_j) = x_j$ y $\phi(\nu_j) = y_j$. Obtenemos entonces que

$$\begin{aligned} p &= \prod_{j=1}^{l}\left(\phi(\mu_j)\phi(\nu_j)\phi(\mu_j)^{-1}\phi(\nu_j)^{-1}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{l}\left(\phi(\mu_j)\phi(\nu_j)\phi\left(\mu_j^{-1}\right)\phi\left(\nu_j^{-1}\right)\right) \\ &= \prod_{j=1}^{l}\left(\phi\left(\mu_j\nu_j\mu_j^{-1}\nu_j^{-1}\right)\right) \\ &= \phi\left(\prod_{j=1}^{l}\left(\mu_j\nu_j\mu_j^{-1}\nu_j^{-1}\right)\right) \\ &= \phi\left(\prod_{j=1}^{l}[\mu_j, \nu_j]\right) \end{aligned}$$

luego para cada $p \in P$ existe un $\prod_{j=1}^{l}[\mu_j, \nu_j] \in [X, X]$ tal que se cumple que $\phi\left(\prod_{j=1}^{l}[\mu_j, \nu_j]\right) = p$. Así, ϕ de $[X, X]$ a P es sobreyectivo.

Ahora probemos que $[X, X]$ es un grupo perfecto, es decir, que $[X, X] = [[X, X], [X, X]]$. Veamos la inclusión $[[X, X], [X, X]] \subset [X, X]$.

Sea $w \in [[X, X], [X, X]]$ entonces w tiene la forma $w = \prod_{k=1}^{m}[r_k, s_k]$ con r_k y s_k en $[X, X]$. Por consiguiente, $r_k = [a, b]$ y $s_k = [c, d]$ con $a, b, c, d \in X$, electos así sin perder la generalidad de la prueba. Es así que

$$
\begin{aligned}
w &= \prod_{k=1}^{m}[r_k, s_k] \\
&= \prod_{k=1}^{m}\left(r_k s_k r_k^{-1} s_k^{-1}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{m}\left([a,b][c,d][a,b]^{-1}[c,d]^{-1}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{m}\underbrace{\left(\underbrace{(aba^{-1}b^{-1})}_{\in X}\underbrace{(cdc^{-1}d^{-1})}_{\in X}\underbrace{(aba^{-1}b^{-1})^{-1}}_{\in X}\underbrace{(cdc^{-1}d^{-1})^{-1}}_{\in X}\right)}_{\in X}
\end{aligned}
$$

por tanto, $w \in [X, X]$ y en consecuencia $[[X, X], [X, X]] \subset [X, X]$.

Ahora probemos que $[X, X] \subset [[X, X], [X, X]]$. Puesto que ϕ es un homomorfismo sobreyectivo de $[X, X]$ a P, todo elemento $x \in X$ puede ser escrito como el producto $x'c$ con $x' \in [X, X]$ y $c \in ker\ \phi \subset \mathbf{Z}([X, X])$. Entonces cada generador $[x, y]$ de $[X, X]$ adopta la forma

$$
\begin{aligned}
[x,y] &= [x'c', y'c''] \text{ para } x', y' \in [X,X] \text{ y } c', c'' \in ker\ \phi \\
&= (x'c')(y'c'')(x'c')^{-1}(y'c'')^{-1} \\
&= (x'c')(y'c'')(c'^{-1}x'^{-1})(c''^{-1}y'^{-1}) \\
&= x'(c'y')(c''c'^{-1})(x'^{-1}c''^{-1})y'^{-1} \\
&= x'(y'c')(c''c'^{-1})(x'^{-1}c''^{-1})y'^{-1} \\
&= x'(y'c')(x'^{-1}c''^{-1})(c''c'^{-1})y'^{-1} \\
&= x'y'(c'x'^{-1})(c''^{-1}c''c'^{-1})y'^{-1} \\
&= x'y'(x'^{-1}c')(c''^{-1}c''c'^{-1})y'^{-1} \\
&= x'y'x'^{-1}(c'c''^{-1}c''c'^{-1})y'^{-1} \\
&= x'y'x'^{-1}y'^{-1}(c'\underbrace{c''^{-1}c''}_{=e}c'^{-1}) \\
&= x'y'x'^{-1}y'^{-1} \\
&= [x', y'] \in [[X,X],[X,X]],
\end{aligned}
$$

y así $[X, X] \subset [[X, X], [X, X]]$. Por tanto $[X, X]$ es un grupo perfecto.

■

Observación 4.1.11 *A la pareja* $([X, X], \phi|_{[X,X]})$ *se le conoce como* extensión central perfecta *de* P*.*

4.2. Grupo de Steinberg

Introduciremos un grupo abstracto definido por generadores y relaciones las cuales están diseñadas para imitar el comportamiento de las matrices elementales. De nuevo, sean i, j enteros tales que $i \neq j$ entre 1 y n y sean $\lambda, \mu \in \Lambda$, donde Λ denota un anillo.

Definición 4.2.1 *Para* $n \geq 3$ *el* grupo de Steinberg $\mathbf{St}_n(\Lambda)$ *es el grupo definido por generadores (símbolos formales)* x_{ij}^{λ}, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, *y* $\lambda \in \Lambda$ *sujeto a las relaciones*

$$\begin{array}{rcl} x_{ij}^{\lambda} x_{ij}^{\mu} & = & x_{ij}^{\lambda+\mu} \\ \left[x_{ij}^{\lambda}, x_{kl}^{\mu}\right] & = & \begin{cases} 1 & \text{para } j \neq k, i \neq l, \\ & \\ x_{il}^{\lambda\mu} & \text{para } j = k, i \neq l. \end{cases} \end{array}$$

Definamos un homomorfismo canónico

$$\phi : \mathbf{St}_n(\Lambda) \longrightarrow GL_n(\Lambda)$$

dado por

$$x_{ij}^{\lambda} \mapsto \phi\left(x_{ij}^{\lambda}\right) = e_{ij}^{\lambda} \, .$$

Ésta asignación da lugar a un homomorfismo puesto que cada una de las relaciones entre generadores de $\mathbf{St}(\Lambda)$, tomemos x_{ij}^{λ} y x_{ij}^{μ}, obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} \phi\left(x_{ij}^{\lambda} x_{ij}^{\mu}\right) & = & \phi\left(x_{ij}^{\lambda+\mu}\right) \\ & = & e_{ij}^{\lambda+\mu} \\ & = & e_{ij}^{\lambda} e_{ij}^{\mu} \\ & = & \phi\left(x_{ij}^{\lambda}\right) \phi\left(x_{ij}^{\mu}\right) . \end{array}$$

La imagen de ϕ,

$$im\, \phi \;\; = \;\; \{y \in GL_n(\Lambda) : \exists\, x \in \mathbf{St}_n(\Lambda) \text{ tal que } \phi(x) = y\}$$

y así vemos que la imagen de ϕ contiene matrices elementales de orden n, de lo cual, podemos afirmar que $\phi\left(\mathbf{St}_n(\Lambda)\right) \subset GL_n(\Lambda)$ y que de hecho la imagen de ϕ es igual al subgrupo generado por todas las matrices elementales de orden n, $E_n(\Lambda)$.

Quitando las restricciones $1 \leq i, j \leq n$ sobre los generadores x_{ij}^{λ}, la misma presentación define el *grupo de Steinberg*

$$\mathbf{St}(\Lambda) := \mathbf{St}_{\infty}(\Lambda),$$

o podemos verlo como el límite $\varinjlim \mathbf{St}_n(\Lambda)$, dado por los mapeos

$$\mathbf{St}_n(\Lambda) \longrightarrow \mathbf{St}_{n+1}(\Lambda)$$

De esta manera obtenemos un grupo correspondiente y un homomorfismo correspondiente

$$\phi : \mathbf{St}(\Lambda) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow E(\Lambda).$$

Definición 4.2.2 *El grupo K_2 de un anillo Λ está dado por*

$$K_2(\Lambda) = ker\ \left(\mathbf{St}(\Lambda) \twoheadrightarrow E(\Lambda) \subset GL(\Lambda)\right).$$

Por consiguiente, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$1 \longrightarrow K_2(\Lambda) \longrightarrow \mathbf{St}(\Lambda) \xrightarrow{\phi} GL(\Lambda) \longrightarrow K_1(\Lambda) \longrightarrow 1\ .$$

Es claro que si $K_2(\Lambda)$, entonces $\mathbf{St}(\Lambda) \cong E(\Lambda)$, y así las relaciones de Steinberg forman un conjunto de relaciones que definen a $E(\Lambda)$. Podemos imaginar de alguna manera a $K_2(\Lambda)$ como el conjunto de relaciones no triviales entre matrices elementales.

Observación 4.2.3 *Cualquier relación*

$$e_{i_1 j_1}^{\lambda_1} e_{i_2 j_2}^{\lambda_2} \ldots e_{i_r j_r}^{\lambda_r} = \mathbf{I}$$

entre matrices elementales, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \prod_{k=1}^{r} e_{i_k j_k}^{\lambda_k} \\ &= \prod_{k=1}^{r} \phi\left(x_{i_k j_k}^{\lambda_k}\right) \\ &= \phi\left(\prod_{k=1}^{r} x_{i_k j_k}^{\lambda_k}\right) \end{aligned}$$

entonces $\prod_{k=1}^{r} x_{i_k j_k}^{\lambda_k} \in K_2(\Lambda)$. *Lo que nos indica que cada matriz elemental da origen a un elemento* $x_{i_1 j_1}^{\lambda_1} x_{i_2 j_2}^{\lambda_2} \ldots x_{i_r j_r}^{\lambda_r}$ *de* $K_2(\Lambda)$, *y cada elemento de* $K_2(\Lambda)$ *puede ser obtenido en esta forma.*

Como por ejemplo la matriz

$$e_{12}^{1} e_{21}^{-1} e_{12}^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\pi/2 & cos\pi/2 \\ -cos\pi/2 & sen\pi/2 \end{pmatrix}$$

en $E_2(\mathbb{Z})$ representa una rotación de 90º y al multiplicar 4 veces ésta matriz por ella misma obtenemos la matriz identidad $\mathbf{I}_2$, es decir, tienen un periodo 4. La relación

$$\left(e_{12}^{1} e_{21}^{-1} e_{12}^{1}\right)^4 = \mathbf{I}_2$$

en $E_2(\mathbb{Z})$ da origen a un elemento $\left(x_{12}^{1} x_{21}^{-1} x_{12}^{1}\right)^4$ en $K_2(\mathbb{Z})$.

Si $f : \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ es un homomorfismo de anillos, f induce un homomorfismo de grupos

$$\mathbf{St}(f) : \mathbf{St}(\Lambda) \longrightarrow \mathbf{St}(\Lambda')$$

dado por

$$x_{ij}^{\lambda} \mapsto x_{ij}^{f(\lambda)}.$$

Teorema 4.2.4 $\mathbf{St}(-)$ *es un funtor covariante de la categoría* ***Ring*** *hacia la categoría* ***Gr***.

Demostración. Sean los homomorfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ en la categoría **Ring**. Entonces tenemos que para un $x_{ij}^{\lambda} \in \mathbf{St}(A)$

$$\begin{aligned} \mathbf{St}(g \circ f)\left(x_{ij}^{\lambda}\right) &= x_{ij}^{g\circ f(\lambda)} \\ &= x_{ij}^{g(f(\lambda))} \\ &= \mathbf{St}(g)\left(x_{ij}^{f(\lambda)}\right) \\ &= \mathbf{St}(g)\left(\mathbf{St}(f)\left(x_{ij}^{\lambda}\right)\right) \\ &= \left(\mathbf{St}(f) \circ \mathbf{St}(g)\right)\left(x_{ij}^{\lambda}\right) \ . \end{aligned}$$

Por otro lado, si tenemos $Id : A \longrightarrow A$ en **Ring** entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{St}(Id)\left(x_{ij}^{\lambda}\right) &= x_{ij}^{Id(\lambda)}\\ &= x_{ij}^{\lambda}\\ &= Id\left(x_{ij}^{\lambda}\right)\ .\end{aligned}$$

En lo que concluimos que $\mathbf{St}(g\circ f) = \mathbf{St}(g)\circ\mathbf{St}(f)$ y que $\mathbf{St}(Id_A) = Id_{\mathbf{St}(A)}$, por lo tanto $\mathbf{St}(-)$ es un funtor covariante.

■

Como pudimos ver en la Definición (4.2.2), $K_2(\Lambda) = ker\ \phi \subset \mathbf{St}(\Lambda)$; si restringiésemos $\mathbf{St}(f) : \mathbf{St}(\Lambda) \longrightarrow \mathbf{St}(\Lambda')$ a un homomorfismo

$$K_2(f) : K_2(\Lambda) \longrightarrow K_2(\Lambda')\ ,$$

para cada homomorfismo $f : \Lambda \longrightarrow \Lambda'$, esto da origen a un diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & K_2(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "K_2(f)"] & \mathbf{St}(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{St}(f)"] & E(\Lambda)\subset GL(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, "E(f)"] & K_1(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, "K_1(f)"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & K_2(\Lambda') \arrow[r] & \mathbf{St}(\Lambda') \arrow[r] & E(\Lambda')\subset GL(\Lambda') \arrow[r] & K_1(\Lambda') \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

que conmuta. Esto hace que K_2 sea un funtor entre las categorías **Ring** y **Gr** en el sentido de la Observación (4.2.3).

Corolario 4.2.5 K_2 : **Ring** $\longrightarrow$ **Gr** *es un funtor covariante que envía homomorfismos entre anillos f a homomorfismos entre grupos $K_2(f) := f_*$*

Demostración. Sea $m \in K_2(A)$, entonces m tiene la forma $m = \prod_{k=1}^{r} x_{i_k j_k}^{\lambda_k}$. Necesitamos demostrar que $K_2(g\circ f) = K_2(g)\circ K_2(f)$. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ homomorfismos en **Ring**. Apliquemos $K_2(g\circ f)$ al generador

m y tenemos que

$$\begin{aligned}
K_2(g\circ f)(m) &= K_2(g\circ f)\left(\prod_{k=1}^{r} x_{i_kj_k}^{\lambda_k}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{r}\left(K_2(g\circ f)\left(x_{i_kj_k}^{\lambda_k}\right)\right)\\
&= \prod_{k=1}^{r}\left(x_{i_kj_k}^{(g\circ f)(\lambda_k)}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{r}\left(x_{i_kj_k}^{g(f(\lambda_k))}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{r}\left(K_2(g)\left(x_{i_kj_k}^{f(\lambda_k)}\right)\right)\\
&= K_2(g)\left(\prod_{k=1}^{r}\left(x_{i_kj_k}^{f(\lambda_k)}\right)\right)\\
&= K_2(g)\left(\prod_{k=1}^{r}K_2(f)\left(x_{i_kj_k}^{\lambda_k}\right)\right)\\
&= K_2(g)\circ K_2(f)\left(\prod_{k=1}^{r} x_{i_kj_k}^{\lambda_k}\right)\\
&= (K_2(g)\circ K_2(f))(m)\ ,
\end{aligned}$$

y hemos demostrado que $K_2(g\circ f) = K_2(g)\circ K_2(f)$. Sea ahora $Id : A \longrightarrow A$ en **Ring**. Luego obtenemos que

$$\begin{aligned}
K_2(Id)(m) &= K_2(Id)\left(\prod_{k=1}^{r} x_{i_kj_k}^{\lambda_k}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{r} x_{i_kj_k}^{Id(\lambda_k)}\\
&= \prod_{k=1}^{r} x_{i_kj_k}^{\lambda_k}\\
&= Id\left(\prod_{k=1}^{r} x_{i_kj_k}^{\lambda_k}\right)\\
&= Id(m)
\end{aligned}$$

y con ello llegamos a que $K_2(Id_A) = Id_{K_2(A)}$. Por lo tanto, $K_2(-)$ es un funtor covariante entre las categorías **Ring** y **Gr**.

■

Teorema 4.2.6 (Steinberg) *Para cada anillo Λ, $K_2(\Lambda) = \mathbf{Z}(\mathbf{St}(\Lambda))$.*

Demostración. Primero veamos que "$K_2 \supseteq \mathbf{Z}(\mathbf{St}(\Lambda))$".
Sea $p \in \mathbf{Z}(\mathbf{St}(\Lambda))$. Si p en $\mathbf{St}(\Lambda)$ conmuta con cada elemento de $\mathbf{St}(\Lambda)$, es decir, $pq = qp$ con $q \in \mathbf{St}(\Lambda)$, entonces $\phi(p)$ también conmuta *con cada* matriz elemental en $E(\Lambda)$. Pero

$$\mathbf{Z}(E(\Lambda)) = \{X \in E(\Lambda) \mid XY = YX,\ \forall Y \in E(\Lambda)\} = \{I_\infty\}\ ,$$

el centro de $E(\Lambda)$ es trivial, entonces $\phi(p) = I$ y por lo tanto $p \in ker\ \phi = K_2(\Lambda)$.

Ahora probemos que "$K_2 \subseteq \mathbf{Z}(\mathbf{St}(\Lambda))$".
Sea $m \in K_2(\Lambda)$, esto implica que $\phi(m) = I$. Debemos probar que *m conmuta* con cada generador x_{ij}^λ de $\mathbf{St}(\Lambda)$. Escojamos un entero α lo suficientemente grande tal que m puede ser expresado como un producto de generadores x_{ij}^λ con $i < \alpha$ y $j < \alpha$. En lo que sigue, vamos a apoyarnos en un subgrupo a partir de $\mathbf{St}(\Lambda)$, el cual denotaremos por $\mathfrak{P}_\alpha$ y se define como el *subgrupo generado por los elementos $x_{i\alpha}^\lambda$* con $1 \leq i \leq \alpha - 1$ y $\lambda \in \Lambda$. Por las relaciones de la Definición (4.2.1), vemos que $\mathfrak{P}_\alpha$ es un grupo abeliano; en efecto, dados dos generadores de $\mathfrak{P}_\alpha$, tomemos $x_{i\alpha}^\alpha$ y $x_{j\alpha}^\mu$, con $i \neq j$, calculando su conmutador obtenemos que $\left[x_{i\alpha}^\lambda, x_{j\alpha}^\mu\right] = 1 \Longrightarrow \mathbf{P}_\alpha$ es un grupo abeliano, y $\left(x_{j\alpha}^\lambda\right)^{-1} = x_{j\alpha}^{-\lambda}$.
Sea $\omega \in \mathfrak{P}_\alpha$. Éste elemento ω adopta la forma

$$\omega = \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(x_{i\alpha}^{\lambda_i}\right)^{\beta_i}\ , \tag{4.1}$$

y ésta es la única manera de escribir a cada elemento de $\mathfrak{P}_\alpha$. En efecto, supongamos que un ω en $\mathfrak{P}_\alpha$ puede ser expresado de dos maneras distintas

$$\omega = \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(x_{i\alpha}^{\lambda_i}\right)^{\beta_i}$$

y que también

$$\omega = \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(x_{i\alpha}^{\Delta_i} \right)^{\gamma_i} .$$

de donde $\beta_i \neq \gamma_i$. Ésto da lugar a una igualdad

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(x_{i\alpha}^{\lambda_i} \right)^{\beta_i} &= \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(x_{i\alpha}^{\Delta_i} \right)^{\gamma_i} \\
\Longrightarrow \quad \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(x_{i\alpha}^{\lambda_i} \right)^{\beta_i} \cdot \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(x_{i\alpha}^{\Delta_i} \right)^{-\gamma_i} &= e \\
\prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(x_{i\alpha}^{\lambda_i \beta_i} \right) \cdot \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(x_{i\alpha}^{-\Delta_i \gamma_i} \right) &= e \\
\prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(x_{i\alpha}^{\lambda_i \beta_i} \right) \cdot \left(x_{i\alpha}^{-\Delta_i \gamma_i} \right) &= e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{\alpha-1} x_{i\alpha}^{\lambda_i \beta_i - \Delta_i \gamma_i} &= e \\
&= \prod_{i=1}^{\alpha-1} x_{i\alpha}^{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \lambda_i \beta_i - \Delta_i \gamma_i &= 0 \\
\lambda_i \beta_i &= \Delta_i \gamma_i \\
\beta_i &= \gamma_i \left(\frac{\Delta_i}{\lambda_i} \right) \text{ pues } \lambda_i \neq 0 ,
\end{aligned}$$

si en este punto hacemos que $\lambda_i = \Delta_i$, seguimos en el caso de que ω está expresado de dos maneras distintas y en consecuencia $\dfrac{\Delta_i}{\lambda_i} = 1$ y por tanto $\beta_i = \gamma_i$. Lo que significa que ω se expresa de manera única como (4.1).
Tomando la imagen ϕ de este elemento ω tenemos que

$$\phi(\omega) = \prod_{i=1}^{\alpha-1} e_{i\alpha}^{\lambda_i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \lambda_1 \\ & 1 & & & \lambda_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \lambda_{\alpha-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

está en $E_\alpha(\Lambda)$, ϕ es inyectiva sobrer $\mathfrak{P}_\alpha$. Si para $i \neq j$ y $\{i,j,k\} \subseteq \{1,\ldots,\alpha-1\}$ y tomemos $\lambda,\mu \in \Lambda$, entonces

$$\begin{aligned} x_{ij}^\lambda x_{k\alpha}^\mu \left(x_{ij}^\lambda\right)^{-1} &= x_{ij}^\lambda x_{k\alpha}^\mu \left(x_{ij}^\lambda\right)^{-1} \underbrace{\left(x_{k\alpha}^\mu\right)^{-1} x_{k\alpha}^{mu}}_{=e} \\ &= \left[x_{ij}^\lambda, x_{k\alpha}^\mu\right] x_{k\alpha} \\ &= \begin{cases} x_{k\alpha}^\mu & \text{si} \quad j \neq k \\ x_{i\alpha}^{\lambda\mu} x_{k\alpha}^\mu & \text{si} \quad j = k \end{cases} \end{aligned}$$

y ambos resultados pertenecen a $\mathfrak{P}_\alpha$. Y esto muestra que

$$x_{ij}^\lambda \mathfrak{P}_\alpha \left(x_{ij}^\lambda\right)^{-1} = x_{ij}^\lambda \mathfrak{P}_\alpha x_{ij}^{-\lambda} \subset \mathfrak{P} ,$$

para $i,j < \alpha$. Ahora, como m es un producto de x_{ij}^λ con $i,j < \alpha$ se sigue que

$$m\mathfrak{P}_\alpha m^{-1} \subset \mathfrak{P}_\alpha .$$

Si $p \in \mathfrak{P}_\alpha$, entonces $mpm^{-1} \in \mathfrak{P}_\alpha$ también, entonces

$$\phi\left(mpm^{-1}\right) = \phi(m)\phi(p)\phi(m)^{-1}$$

y como tenemos por hipótesis que $\phi(m) = I$, obtenemos que

$$\phi\left(mpm^{-1}\right) = \phi(p) .$$

La inyectividad de ϕ sobre $\mathfrak{P}_\alpha$ implica que $mpm^{-1} = p$ y de ésta manera hemos obtenido que $mp = pm$ para todo $p \in \mathfrak{P}_\alpha$.

Existe un argumento similar, m conmuta con cada elemento de un subgrupo generado por aquellos $x_{\alpha i}^\lambda$ con $1 \leq i \leq \alpha - 1$. Podemos identificar a este subgrupo denotándolo como $\mathfrak{P}_\alpha^*$. Entonces si $i \neq j$ e $i,j \in \{1,\ldots,\alpha-1\}$, y $\lambda \in \Lambda$, entonces m conmuta con

$$x_{ij}^\lambda = \left[x_{i\alpha}^\lambda, x_{\alpha j}^1\right] .$$

Como α es arbitrariamente grande, podemos continuar incrementanto a α por cualquier cantidad y el argumento se sigue sosteniendo. Entonces m conmuta con cada generador de $\mathbf{St}(\Lambda)$, por lo tanto $m \in \mathbf{Z}(\mathbf{St}(\Lambda))$.

■

Observación 4.2.7 *Por el Teorema (4.2.6) vemos que $K_2(\Lambda)$ es un grupo abeliano. Por lo tanto, a partir del Corolario (4.2.5), K_2 es un funtor entre la categoría* ***Ring*** *y la categoría* ***Ab****.*

Teorema 4.2.8 *Una extensión central (U,ν) de G es* universal *si, y sólo si U es un grupo perfecto, y cada extensión central de U se escinde.*

Demostración. "$\Longleftarrow$" Supongamos que cada extensión central de U se escinde. Tomemos una extensión central (X,ϕ) de G. Debemos obtener un homomorfismo de U a X y demostrar que éste homomorfismo es único para concluir que (U,ν) es una extensión central universal.

A partir del producto cartesiano $U \times X$ (que es un grupo), formemos un conjunto con aquellos pares ordenados (u,x) de $U \times X$ que cumplen que $\nu(u)=\phi(x)$ en G. De hecho es cierto que

$$\{(u,x) \in U \times X \mid \nu(u)=\phi(x)\} \subset U \times X$$

y vemos que si $m,n \in \{(u,x) \in U \times X \mid \nu(u)=\phi(x)\}$ entonces $m=(u_1,x_1)$ y $n=(u_2,x_2)$ para $u_1,u_2 \in U,\ x_1,x_2 \in X$ de modo que $\nu(u_1)=\phi(x_1)$ y $\nu(u_2)=\phi(x_2)$, luego obtenemos que

$$\begin{aligned} mn^{-1} &= (u_1,x_1)(u_2,x_2)^{-1} \\ &= (u_1,x_1)\left(u_2^{-1},x_2^{-1}\right) \\ &= \left(\underbrace{u_1u_2^{-1}}_{\in U},\underbrace{x_1x_2^{-1}}_{\in X}\right) . \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \nu\left(u_1u_2^{-1}\right) &= \phi\left(x_1x_2^{-1}\right) \\ \nu(u_1)\,\nu\left(u_2^{-1}\right) &= \phi(x_1)\,\phi\left(x_2^{-1}\right) \\ \nu(u_1)\,\nu(u_2)^{-1} &= \phi(x_1)\,\phi(x_2)^{-1} \ , \end{aligned}$$

es así que $mn^{-1} \in \{(u,x) \in U \times X \mid \nu(u)=\phi(x)\}$ y este conjunto tiene estructura de grupo; aún más $\{(u,x) \in U \times X \mid \nu(u)=\phi(x)\} \leq U \times X$ y lo denotaremos por $U \times_G X$.

Podemos construir un homomorfismo π de $U \times_G X$ a U definiendo

$$(u,x) \mapsto \pi(u,x) = u, \ \forall (u,x) \in U \times_G X$$

puesto que dados (u_1, x_1) y (u_2, x_2) en $U \times_G X$:

$$\begin{aligned} \pi\left((u_1,x_1)(u_2,x_2)\right) &= \pi(u_1u_2, x_1x_2) \\ &= u_1u_2 \\ &= \pi(u_1,x_1)\pi(u_2,x_2) \ . \end{aligned}$$

π es sobreyectivo pues tomando un $w \in U$, por definición de como fue definido π, $w = \pi(p)$ con $p \in U \times_G X$; luego p es de la forma $p = (u,x)$ con $u \in U$ y $x \in X$.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \ w = \pi(p) = \pi(u,x) \underset{\textbf{def.}}{=} u \\ &\Longrightarrow \ w = u \\ &\Longrightarrow \ p = (w,x) \end{aligned}$$

luego existe un $p = (w,x) \in U \times_G X$ tal que $w = \pi(p) = \pi(w,x)$.

Sea ahora $w \in ker\ \pi$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \pi(w) &= e, \ w \in U \times_G X \\ \pi(u,x) &= e \\ u &= e \ ; \end{aligned}$$

Además con esto tenemos

$$\begin{aligned} \nu(u) = \nu(e) &= \pi(x) \\ e &= \pi(x) \\ \Longrightarrow \ x \in ker\ \pi \subset \mathbf{Z}(X); \end{aligned}$$

luego vemos que

$$ker\ \pi = \{(e,x) \mid x \in \mathbf{Z}(X)\}.$$

A este respecto, elijamos un $w \in ker\ \pi$ y un $z \in U \times_G X$ y vemos que

$$\begin{aligned} wz &= (e, x)(u_1, x_1) \\ &= (eu_1, xx_1) \\ &= (u_1, xx_1) \\ &= \left(u_1, \underbrace{x_1 x}_{\in X} \right),\ x \in \mathbf{Z}(X) \\ &= (u_1, x_1)(e, x) \\ &= zw\ , \end{aligned}$$

w conmuta con cada $z = (u_1, x_1) \in U \times_G X$, por lo que $w \in \mathbf{Z}\,(U \times_G X)$ y por supuesto que $ker\ \pi \subset \mathbf{Z}\,(U \times_G X)$.

Por lo tanto comprobamos que $(U \times_G X, \pi)$ es una extensión central de U. Y además, dicha extensión central admite una sección

$$U \xrightarrow{f} U \times_G X$$

definida por

$$u \mapsto f(u) = (u, \mathfrak{h}(u))$$

donde $\mathfrak{h} : U \longrightarrow X$ es un homomorfismo. Y vemos que

$$\begin{aligned} f(u_1 u_2) &= (u_1 u_2, \mathfrak{h}(u_1 u_2)) \\ &= (u_1 u_2, \mathfrak{h}(u_1)\mathfrak{h}(u_2)) \\ &= (u_1, \mathfrak{h}(u_1))(u_2, \mathfrak{h}(u_2)) \\ &= f(u_1) f(u_2)\ . \end{aligned}$$

De acuerdo a los Lemas (4.1.8) y (4.1.9), el homomorfismo $\mathfrak{h}$ es único pues por hipótesis U es un grupo perfecto. Por lo tanto, (U, ν) es una extensión central universal de G.

"$\Longrightarrow$" Sea (U, ν) una extensión central universal de G. Usando los Lemas (4.1.8) y (4.1.9), para cualquier otra extensión central de G, digamos (P, φ), existe un único homomorfismo de U a P, salvo isomorfismo. Luego U es un grupo perfecto. Ahora nuestro objetivo es demostrar que cada extensión central de U se escinde.

Tomemos una extensión central (X, ϕ) de U. Esto produce

$$X \xrightarrow{\phi} U \xrightarrow{\nu} G$$

y mostraremos que la composición $\nu \circ \phi$ produce una extensión central de G. Sea $x_0 \in X$. Si $\nu(\phi(x_0)) = e$ entonces $\phi(x_0) \in ker\ \nu \subset \mathbf{Z}(U)$. La aplicación

$$x \mapsto x_0 x x_0^{-1}$$

define un homomorfismo de X a X sobre U, pues

$$\begin{aligned} xy \mapsto x_0 xy x_0^{-1} &= x_0 x \underbrace{x_0^{-1} x_0}_{=e} y x_0^{-1} \\ &= \left(x_0 x x_0^{-1}\right)\left(x_0 y x_0^{-1}\right) . \end{aligned}$$

Restringiendo al subgrupo conmutador $[X, X]$ y usando los Lemas (4.1.8) y (4.5.21), observamos que el homomorfismo resultante de $[X, X]$ a $[X, X]$ sobre U es la identidad. Se argumenta esto pues $[X, X] \subset X$ y esto implica, que $X \lhd X$ y a su vez $X/[X, X]$ es un grupo abeliano. Entonces

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{k}\left[x_j, y_j\right] \mapsto x_0 \prod_{j=1}^{k}\left[x_j, y_j\right] x_0^{-1} &= \prod_{j=1}^{k}\left[x_j, y_j\right]\left(x_0 x_0^{-1}\right),\ \forall \prod_{j=1}^{k}\left[x_j, y_j\right] \in [X, X] \\ &= \prod_{j=1}^{k}\left[x_j, y_j\right] . \end{aligned}$$

Así x_0 conmuta con los elementos de $[X, X]$. Sin embargo, X está generado por $[X, X]$ junto con $ker\ \phi$, se sigue que x_0 conmuta con todos los elementos de X. De esta manera $(X, \nu \circ \phi)$ es una extensión central de G. Por hipótesis (U, ν) es universal, entonces existe un homomorfismo $\mathfrak{f} : U \longrightarrow X$ sobre G. La composición $\phi \circ \mathfrak{f}$ es un homomorfismo de U a U sobre G, que es por tanto igual a la identidad. Así $\mathfrak{f}$ es una sección de (X, ϕ). Esto muestra que cada extensión central de U se escinde.

■

4.3. Cálculos en el grupo de Steinberg

En esta sección, veremos un par de procedimientos para construir los elementos de $K_2(\Lambda)$. Tomemos en principio dos matrices $A, B \in E(\Lambda)$. Sean ahora dos representantes $a, b \in \mathbf{St}(\Lambda)$ de manera tal que

$$\phi(a) = A\ ,\ \phi(b) = B\ .$$

El conmutador $[a, b] = aba^{-1}b^{-1} \in ker\ \ (\phi : \mathbf{St}(\Lambda) \longrightarrow E(\Lambda)) = K_2(\Lambda)$. Se denotará a este elemento del grupo de Steinberg como

$$A \star B = [a, b]$$

para ése conmutador. Lo siguiente es muy interesante: las matrices elementales A y B no dependen de los representantes a y b en $\mathbf{St}(\Lambda)$. Por ejemplo, si para un $\hat{a} \in \mathbf{St}(\Lambda)$ tenemos que $\phi(\hat{a}) = A$, en consecuencia obtenemos que

$$\phi(\hat{a}) = A = \phi(a) .$$

Lo que implica que

$$\phi\left(a^{-1}\hat{a}\right) = 1 \implies a^{-1}\hat{a} := \mathfrak{z} \in K_2(\Lambda)$$

y que por tanto $\hat{a} = a\mathfrak{z}$. Luego,

$$\begin{aligned} A \star B &= [\hat{a}, b] \\ &= \hat{a}b\hat{a}^{-1}b^{-1} \\ &= (a\mathfrak{z})b(a\mathfrak{z})^{-1}b^{-1} \\ &= (a\mathfrak{z})b(\mathfrak{z}^{-1}a^{-1})b^{-1} \\ &= a(\mathfrak{z}b\mathfrak{z}^{-1})a^{-1}b^{-1} \\ &= aba^{-1}b^{-1} \\ &= [a, b] . \end{aligned}$$

Proposición 4.3.1 *$A \star B$ es invariante bajo automorfismos internos de $E(\Lambda)$*

$$\left(PAP^{-1}\right) \star \left(PBP^{-1}\right) = A \star B$$

Demostración. Sean $a, b, p \in \mathbf{St}(\Lambda)$ y consideremos el automorfismo definido por p. Entonces tenemos que $a \mapsto a^p = pap^{-1}$ y asimismo $b \mapsto b^p = pbp^{-1}$.

Entonces vemos que

$$\begin{aligned}
[a^p, b^p] &= [pap^{-1}, pbp^{-1}] = \left(PAP^{-1}\right) \star \left(PBP^{-1}\right) \\
&= \left(pap^{-1}\right)\left(pbp^{-1}\right)\left(pap^{-1}\right)^{-1}\left(pap^{-1}\right)^{-1} \\
&= \left(pap^{-1}\right)\left(pbp^{-1}\right)\left(pa^{-1}p^{-1}\right)\left(pb^{-1}p^{-1}\right) \\
&= p\left(aba^{-1}b^{-1}\right)p^{-1} \\
&= p[a,b]p^{-1} = [a,b]^p \\
&= [a,b] \\
&= A \star B\ .
\end{aligned}$$

■

Proposición 4.3.2 *La construcción $A \star B$ tiene la propiedad que*

$$B \star A = (A \star B)^{-1}$$

y es bimultiplicativa

$$(A_1 A_2) \star B = (A_1 \star B)(A_2 \star B)\ .$$

Demostración. Tenemos las siguientes identidades para conmutadores que se satisfacen dado un grupo G arbitrario y $x, y, z \in G$.

$$\begin{aligned}
[x,y] &= [y,x]^{-1} \\
[xy,z] &= [x,z]^y [y,z]\ .
\end{aligned}$$

Tomemos en este caso representantes en $a_1, a_2, b \in \mathbf{St}(\Lambda)$, luego, $\phi(a_1) = A_1$, $\phi(a_2) = A_2$ y $\phi(b) = B$. Entonces aplicando las identidades anteriores a la construcción $\star$ obtendremos por consiguiente que

$$\begin{aligned}
B \star A &= [b,a] \\
&= bab^{-1}a^{-1} \\
&= \left(b^{-1}\right)^{-1}\left(a^{-1}\right)^{-1} b^{-1}a^{-1} \\
&= \left(aba^{-1}b^{-1}\right)^{-1} \\
&= [a,b]^{-1} \\
&= (A \star B)^{-1}
\end{aligned}$$

Ahora, nos falta probar la bimultiplicidad.

$$\begin{aligned}(A_1A_2)\star B &= [a_1a_2,b]\\ &= [a_1,b]^{a_2}[a_2,b]\\ &= [a_1,b][a_2,b] \quad \text{... por la Proposición 4.3.1.}\\ &= (A_1\star B)(A_2\star B)\end{aligned}$$

■

Para $u\in\Lambda^\times$ consideremos los elementos

$$w_{ij}(u) := x_{ij}^{u}x_{ji}^{-u^{-1}}x_{ij}^{u}$$

y

$$h_{ij}(u) := w_{ij}(u)w_{ij}(-1)\ .$$

Observemos que

$$\begin{aligned}w_{ij}(u)w_{ij}(-u) &= x_{ij}^{u}x_{ji}^{-u^{-1}}x_{ij}^{u}\left(x_{ij}^{-u}x_{ji}^{-(-u^{-1})}x_{ij}^{-u}\right)\\ &= x_{ij}^{u}x_{ji}^{-u^{-1}}\underbrace{x_{ij}^{u}x_{ij}^{-u}}_{=1}x_{ji}^{-(-u^{-1})}x_{ij}^{-u}\\ &= x_{ij}^{u}\underbrace{x_{ji}^{-u^{-1}}x_{ji}^{-(-u^{-1})}}_{=1}x_{ij}^{-u}\\ &= x_{ij}^{u}x_{ij}^{-u}\\ w_{ij}(u)w_{ij}(-u) &= 1\end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned}h_{ij}(1) &= w_{ij}(1)w_{ij}(-1)\\ &= x_{ij}^{1}x_{ji}^{-1}x_{ij}^{1}\left(x_{ij}^{-1}x_{ji}^{-(-1)}x_{ij}^{-1}\right)\\ &= x_{ij}^{1}x_{ji}^{-1}\underbrace{\left(x_{ij}^{1}x_{ij}^{-1}\right)}_{=1}x_{ji}^{-(-1)}x_{ij}^{-1}\\ &= x_{ij}^{1}\underbrace{\left(x_{ji}^{-1}x_{ji}^{-(-1)}\right)}_{=1}x_{ij}^{-1}\\ &= x_{ij}^{1}x_{ij}^{-1}\\ h_{ij}(1) &= 1\ .\end{aligned}$$

Sean $a, b, c, d \in \Lambda$ y enteros positivos $i \neq j$, denotemos por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(i,j)}$$

a aquella matriz que es obtenida a partir de la matriz identidad $I \in GL(\Lambda)$ intercambiando la i, i-coordenada con a, la i, j-coordenada con b, la j, i-coordenada con c, y la j, j-coordenada con d. Entonces éstas matrices pueden ser multiplicadas de manera ordinaria como si trataran de matrices de 2×2:

$$A^{(i,j)} B^{(i,j)} = (AB)^{(i,j)}$$

Es así que:

$$\phi\left(x_{ij}^{\lambda}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{(i,j)}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \phi\left(w_{ij}(u)\right) &= \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{(i,j)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{(i,j)} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{(i,j)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{(i,j)} \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \phi\left(h_{ij}(u)\right) &= \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{(i,j)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{(i,j)} \\ &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}^{(i,j)} . \end{aligned}$$

Están matrices son muy cercanas a las matrices elementales usadas para la eliminación de Gauss-Jordan en la resolución de sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, para $\phi\left(x_{ij}^{\lambda}\right)$, al hacer unos ajustes por operaciones elementales de renglón, digamos sumar $-\lambda$ veces el j-renglón al i-renglón, éste ajuste nos resulta que $\phi\left(x_{ij}^{\lambda}\right) = e_{ij}^{\lambda}$. Cuando Λ es conmutativo tenemos que el determinante es invariante.

Definición 4.3.3 *Sea $\mathfrak{W} \subset \mathbf{St}(\Lambda)$ el subgrupo generado por los $w_{ij}(u)$ para enteros positivos $i \neq j$ y $u \in \Lambda^{\times}$. Sea $\mathfrak{H} \subset \mathbf{St}(\Lambda)$ el subgrupo generado por los $h_{ij}(u)$. Por construcción $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{W}$.*

Los subgrupos $\mathfrak{W}$ y $\mathfrak{H}$ de $\mathbf{St}(\Lambda)$ están relaciones mediante ϕ a un subgrupo *estándar* de $GL(\Lambda)$. Para cada entero positivo n, existe un homomorfismo P del grupo simétrico S_n a $GL(\Lambda)$, tomando σ a la matriz permutación

$$P(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{\sigma(i)i},$$

puesto que,

$$P(\sigma)P(\tau) = \sum \epsilon_{\sigma(i)i} \sum \epsilon_{\tau(j)j} = \sum \epsilon_{\sigma\circ\tau(j)j} = P(\sigma \circ \tau) \; .$$

Denotando por $P_n(\Lambda)$ (la imagen de P) al subgrupo generado por las matrices $P(\sigma)$ vemos que $P_n(\Lambda) \leq GL_n(\Lambda)$.

También existe un homomorfismo Δ del producto cartesiano de grupos $\Lambda^\times \times \ldots \times \Lambda^\times$ hacia $GL(\Lambda)$, tomando $(d_1, \ldots, d_n)$ a la matriz diagonal

$$\Delta(d_1, \ldots, d_n) = \sum_{i=1}^{n} d_i \epsilon_{ii} \; .$$

La imagen de Δ, $D_n(\Lambda)$ es un subgrupo de $GL_n(\Lambda)$. Vemos también que

$$\begin{aligned} \Delta(d_1, \ldots, d_n)P(\sigma) &= \sum d_i \epsilon_{ii} \sum \epsilon_{\sigma(j)j} \\ &= \sum d_{\sigma(j)} \epsilon_{\sigma(j)j} \\ &= \sum \epsilon_{\sigma(i)i} \epsilon d_{\sigma(i)} \epsilon_{jj} \\ &= P(\sigma)\Delta(d_{\sigma(1)}, \ldots, d_{\sigma(n)}) \; . \end{aligned}$$

Entonces $P_n(\Lambda)D_n(\Lambda)$ es un subgrupo de $GL_n(\Lambda)$. Los elementos en $P_n(\Lambda)D_n(\Lambda)$ son las *matrices monomiales*, a saber, las matrices de $n \times n$ en las que cada fila y cada columna tiene exactamente una entrada distinta de cero, y éstas entradas distintas de cero provienen de $\Lambda^\times$. En $GL(\Lambda)$, éstos subgrupos están encajados: $P_n(\Lambda) \subseteq P_{n+1}(\Lambda)$, $D_n(\Lambda) \subseteq D_{n+1}(\Lambda)$, y sus uniones

$$P(\Lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(\Lambda), \quad D(\Lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n(\Lambda)$$

son subgrupos de $GL(\Lambda)$. Los elementos de $P(\Lambda)$ son las matrices obtenidas a partir de I_∞ permutando finitamente sus filas (renglones); las matrices en $D(\Lambda)$ son las matrices diagonales con entrada en la diagonal desde $\Lambda^\times$, pero finitamente muchos de ésas entradas son iguales a 1. A su vez,

$$P(\Lambda)D(\Lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(P_n(\Lambda)D_n(\Lambda)\right) \; ,$$

el cual es el grupo de todas las matrices monomiales sobre Λ.

Como $P(\Lambda) \cap D(\Lambda) = \{I_\infty\}$, vemos que comparandon las entradas, cada matriz monomial tiene exactamente una expresión

$$P(\sigma)\Delta(d_1, d_2, \ldots)$$

con $\sigma \in S_\infty$ y $d_i \in \Lambda^\times$, con $d_i = 1$ para finitamente muchos i. Por lo tanto, para cada entero $i \neq j$ y para cualquier $u \in \Lambda^\times$,

$$\phi(w_{ij}(u)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{(i,j)} \begin{pmatrix} -u^{-1} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}^{(i,j)} ,$$

es una matriz monomial. Entonces $\phi\left(\mathfrak{W}\right)$ es un grupo de matrices monomiales:

$$\phi\left(\mathfrak{W}\right) \subseteq \left(P(\Lambda)D(\Lambda)\right) \cap E(\Lambda) .$$

Podemos resumir éste resultado en el siguiente

Lema 4.3.4 *Si Λ es conmutativo entonces la imagen $\phi(\mathfrak{W}) \subset GL(\Lambda)$ es el conjunto de todas las matrices monomiales con determinante 1.*

Como

$$\phi\left(h_{ij}(u)\right) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}^{(i,j)}$$

podríamos embeber de alguna manera la imagen de $h_{ij}(u)$ mediante ϕ en $E_3(\Lambda)$ haciendo el arreglo habitual,

$$\phi\left(h_{ij}(u)\right) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz de permutación en $E_3(\Lambda)$, podemos observar que el automorfismo interno definido por P en $E_3(\Lambda)$ produce que para toda $\phi\left(h_{ij}(u)\right)$

$$P\phi\left(h_{ij}(u)\right)P^{-1} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-1} \end{pmatrix} .$$

De esta manera $\phi\left(\mathfrak{H}\right)$ es un grupo de matrices diagonales:

$$\phi(\mathfrak{H}) \subseteq D(\Lambda) \cap E(\Lambda).$$

Proposición 4.3.5 *El núcleo del homomorfismo*

$$\phi|_{\mathfrak{W}} : \mathfrak{W} \longrightarrow GL_n(\Lambda)$$

está en el centro de $\mathbf{St}_n(\Lambda)$*.*

Demostración. Sea $C_n := ker\ \phi|_{\mathfrak{W}}$. Sea también $w \in C_n$ entonces $\phi(w) = I$ con $w \in \mathfrak{W}$. Queremos probar que w conmuta con cada símbolo x_{ij}^{λ}. Tomando la conjugación de x_{ij}^{λ} por el elemento w tenemos que

$$w x_{ij}^{\lambda} w^{-1} := x_{kl}^{\mu} \in \mathbf{St}_n(\Lambda)$$

para $k \neq l$ y $\mu \in \Lambda$. Ahora aplicando ϕ obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \phi\left(w x_{ij}^{\lambda} w^{-1}\right) & = & \phi\left(x_{ij}^{\mu}\right) \\ \phi(w)\phi\left(x_{ij}^{\lambda}\right)\phi(w)^{-1} & = & e_{kl}^{\mu} \\ I \cdot e_{ij}^{\lambda} \cdot I^{-1} & = & e_{kl}^{\mu} \\ I \cdot e_{ij}^{\lambda} & = & e_{kl}^{\mu} \cdot I \\ e_{ij}^{\lambda} & = & e_{kl}^{\mu} \end{array}$$

en $GL_n(\Lambda)$. Esto implica que $x_{ij}^{\lambda} = x_{kl}^{\mu}$ y que por tanto

$$w \cdot x_{ij}^{\lambda} = x_{ij}^{\lambda} \cdot w$$

y así $w \in \mathbf{Z}(\mathbf{St}_n(\Lambda))$.

■

Dado un $w \in \mathfrak{W}$ podemos expresar a $\phi(w)$ con una matriz monomial, es decir, como un producto PD entre una matriz permutación y una matriz diagonal, el siguiente lema nos permitirá hacer cálculos con elementos de $\mathfrak{W}$ y los símbolos $x_{ij}^{\lambda} \in \mathbf{St}_n(\Lambda)$.

Lema 4.3.6 *La conjugada* $w x_{ij}^{\lambda} w^{-1}$ *es igual a* $x_{\pi(ij)}^{v_i \lambda v_j^{-1}}$*.*

Demostración. Sea $e_{ij}^{\lambda} \in GL(\Lambda)$. Sin pérdida de generalidad, pensemos que e_{ij}^{λ} es una matriz de 2×2, es decir, $e_{ij}^{\lambda} \in GL_2(\Lambda)$ con $i = 1$ y $j = 2$. Ahora, para un $w \in \mathfrak{W}$ arbitrario su imagen mediante ϕ corresponde a una matriz monomial. Tomando la conjugación de e_{ij}^{λ} por $\phi(w)$ tenemos

$$\phi(w)\phi\left(x_{ij}^{\lambda}\right)\phi(w)^{-1} = \phi(w)e_{ij}^{\lambda}\phi(w)^{-1} \in GL_2(\Lambda).$$

Como $\phi(w)$ es monomial, significa que $\phi(w) := PD$, donde P es una matriz de permutación que corresponde a la permutación

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y D es una matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} .$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} PDe_{ij}^{\lambda}(PD)^{-1} &= PDe_{ij}^{\lambda}D^{-1}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{-1} & 0 \\ 0 & v_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & v_2 \\ v_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & v_1^{-1} \\ v_2^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & v_2 \\ v_1 & v_1\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & v_1^{-1} \\ v_2^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_1\lambda v_2^{-1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= e_{\pi(1),\pi(2)}^{v_1\lambda v_2^{-1}} , \end{aligned}$$

en $GL(\Lambda)$. Esto implica que en $\mathfrak{W}$

$$wx_{12}^{\lambda}w^{-1} = x_{\pi(1),\pi(2)}^{v_1\lambda v_2^{-1}} .$$

■

Lo anterior tiene por consecuencia el siguiente

Corolario 4.3.7 *La conjugación por w transforma $w_{ij}(u)$ en $w_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i u v_j^{-1}\right)$ y a su vez, $h_{ij}(u)$ en $h_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i u v_j^{-1}\right) h_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i v_j^{-1}\right)^{-1}$.*

Demostración. Vemos que

$$\begin{aligned}
ww_{ij}(u)w^{-1} &= wx_{ij}^{u}x_{ji}^{-u^{-1}}x_{ij}^{u}w^{-1} \\
&= wx_{ij}^{u}\underbrace{w^{-1}w}_{=1}x_{ji}^{-u^{-1}}\underbrace{w^{-1}w}_{=1}x_{ij}^{u}w^{-1} \\
&= \left(wx_{ij}^{u}w^{-1}\right)\left(wx_{ji}^{-u^{-1}}w^{-1}\right)\left(wx_{ij}^{u}w^{-1}\right) \\
&= x_{\pi(i),\pi(j)}^{v_iuv_j^{-1}}x_{\pi(j),\pi(i)}^{-v_iu^{-1}v_j^{-1}}x_{\pi(i),\pi(j)}^{v_iuv_j^{-1}} \\
&= w_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_iuv_j^{-1}\right) .
\end{aligned}$$

Mientras tanto

$$\begin{aligned}
wh_{ij}(u)w^{-1} &= w\left(w_{ij}(u)w_{ij}(-1)\right)w^{-1} \\
&= ww_{ij}(u)\underbrace{w^{-1}w}_{=1}x_{ij}(-1)w^{-1} \\
&= \left(ww_{ij}(u)w^{-1}\right)\left(ww_{ij}(-1)w^{-1}\right) \\
&= w_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_iuv_j^{-1}\right)w_{\pi(i),\pi(j)}\left(-v_iv_j^{-1}\right) ;
\end{aligned}$$

además, de la parte derecha de la ecuación anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
w_{\pi(i),\pi(j)}\left(-v_iv_j^{-1}\right) &= x_{\pi(i),\pi(j)}^{-v_iv_j^{-1}}x_{\pi(j),\pi(i)}^{-\left(-v_iv_j^{-1}\right)^{-1}}x_{\pi(i),\pi(j)}^{-v_iv_j^{-1}} \\
&= \left(x_{\pi(i),\pi(j)}^{v_iv_j^{-1}}\right)^{-1}\left(x_{\pi(j),\pi(i)}^{-\left(v_iv_j^{-1}\right)^{-1}}\right)^{-1}\left(x_{\pi(i),\pi(j)}^{v_iv_j^{-1}}\right)^{-1} \\
&= \left(x_{\pi(i),\pi(j)}^{v_iv_j^{-1}}x_{\pi(j),\pi(i)}^{-\left(v_iv_j^{-1}\right)}x_{\pi(i),\pi(j)}^{v_iv_j^{-1}}\right)^{-1} \\
w_{\pi(i),\pi(j)}\left(-v_iv_j^{-1}\right) &= w_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_iv_j^{-1}\right)^{-1} ;
\end{aligned}$$

por consiguiente hemos obtenido que

$$\begin{aligned}
wh_{ij}(u)w^{-1} &= w_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i u v_j^{-1}\right) w_{\pi(i),\pi(j)}\left(-v_i v_j^{-1}\right)\\
&= w_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i u v_j^{-1}\right) w_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i v_j^{-1}\right)^{-1}\\
&= w_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i u v_j^{-1}\right) \underbrace{w_{\pi(i),\pi(j)}(-1) w_{\pi(i),\pi(j)}(-1)^{-1}}_{=1} w_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i v_j^{-1}\right)^{-1}\\
&= \left(w_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i u v_j^{-1}\right) w_{\pi(i),\pi(j)}(-1)\right)\left(w_{\pi(i),\pi(j)}(-1)^{-1} w_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i v_j^{-1}\right)^{-1}\right)\\
&= \left(w_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i u v_j^{-1}\right) w_{\pi(i),\pi(j)}(-1)\right)\left(w_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i v_j^{-1}\right) w_{\pi(i),\pi(j)}(-1)\right)^{-1}\\
wh_{ij}(u)w^{-1} &= h_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i u v_j^{-1}\right) h_{\pi(i),\pi(j)}\left(v_i v_j^{-1}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

■

Veamos una aplicación directa del corolario (4.3.7) como una ilustración. En inicio, sea $w = w_{ij}(u)$ de tal manera que la permutación asociada π trasponga i y j y que $v_i = -u^{-1}$, $v_j = u$. Tomando la conjugada de clases de w asimismo tenemos

$$\begin{aligned}
ww_{ij}(u)w^{-1} &\overset{\text{Cor. 4.3.7}}{=} w_{\pi(i),\pi(j)}\left(-u^{-1}uu^{-1}\right)\\
w_{ij}(u)\underbrace{w_{ij}(u)w_{ij}(u)^{-1}}_{=1} &= w_{ji}\left(-u^{-1}\right)\\
w_{ij}(u) &= w_{ji}\left(-u^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos la siguiente

Proposición 4.3.8 $w_{ij}(u) = w_{ji}\left(-u^{-1}\right)$.

Ahora, si $w = h_{12}(u)$ y elejimos una permutación π que *no* trasponga los i y los j, es decir, la permutación identidad y tomamos $v_1 = u$ y $v_2 = u^{-1}$. Por consiguiente calculamos la conjugación de w a $h_{13}(v)$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}
wh_{13}(v)w^{-1} &\overset{\text{Cor. 4.3.7}}{=} h_{\pi(1),\pi(3)}\left(v_1 v v_3^{-1}\right) h_{\pi(1),\pi(3)}(v_1 v_3^{-1})^{-1}\\
&= h_{13}\left(uv(1)^{-1}\right) h_{13}\left(u(1)^{-1}\right)^{-1}\\
&= h_{13}(uv)h_{13}(u)^{-1}\\
&= h_{13}(uv)h_{13}(u)^{-1}\\
&= h_{13}(uv)h_{13}(u)^{-1}
\end{aligned}$$

y multiplicando a ambos lados de la ecuación anterior por $h_{13}(v)^{-1}$ conseguimos que

$$\begin{aligned} wh_{13}(v)w^{-1}h_{13}(v)^{-1} &= h_{13}(uv)h_{13}(u)^{-1}h_{13}(v)^{-1} \\ h_{12}(u)h_{13}(v)h_{12}(u)^{-1}h_{13}(v)^{-1} &= h_{13}(uv)h_{13}(u)^{-1}h_{13}(v)^{-1} \\ [h_{12}(u),h_{13}(v)] &= h_{13}(uv)h_{13}(u)^{-1}h_{13}(v)^{-1} , \end{aligned}$$

y lo podemos resumir como la siguiente

Proposición 4.3.9 *El conmutador de $[h_{12}(u),h_{13}(v)]$ es igual a la expresión $h_{13}(uv)h_{13}(u)^{-1}h_{13}(v)^{-1}$.*

O en general, tenemos la

Proposición 4.3.10 *Supongamos que $u,v \in \Lambda^{\times}$ y que $uv = vu$. Para cualesquiera tres diferentes enteros positivos i, j y k,*

$$\left[h_{ik}(u),h_{ij}(v)\right] = h_{ij}(uv)h_{ij}(u)^{-1}h_{ij}(v)^{-1} .$$

Demostración. Mediante un cálculo directo vemos que

$$\left[h_{ik}(u),h_{ij}(v)\right] = h_{ik}(u)h_{ij}(v)h_{ik}(u)^{-1}h_{ij}(v)^{-1} .$$

Hagamos $w = h_{ik}(u)$ y tomemos la permutación identidad y que las entradas en la diagonal de $\phi(w)$ tienen $u_i = u$ y $u_j = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} h_{ik}(u)h_{ij}(v)h_{ik}(u)^{-1}h_{ij}(v)^{-1} &= \left(wh_{ij}(v)w^{-1}\right)h_{ij}(v)^{-1} \\ &= h_{\pi(i),\pi(j)}(u_ivu_j^{-1})h_{\pi(i),\pi(j)}(u_iu_j^{-1})^{-1}h_{ij}(v)^{-1} \\ &= h_{ij}\,(uv)\,h_{ij}(u)^{-1}h_{ij}(v)^{-1} . \end{aligned}$$

■

Usando la proposición **??**, no resulta ser tan laborioso mostrar que, para cualquiera enteros positivos $m \neq n$ e $i \neq j$ con $\left[h_{mn}(u),h_{ij}(v)\right] \in K_2(\Lambda)$, este conmutador puede ser escrito en la forma $\left[h_{ik}(\mu),h_{ij}(\nu)\right]$ por la conmutatividad de las unidades μ y ν. La idea es la siguiente. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \left[h_{ij}(u),h_{ij}(v)\right] &= h_{ij}(u)h_{ij}(v)h_{ij}(u)^{-1}h_{ij}(v)^{-1} \\ &= h_{ij}(uvu)h_{ij}(uu)^{-1}h_{ij}(v)^{-1} \\ &= h_{ij}\left(u^2v\right)h_{ij}\left(u^2\right)^{-1}h_{ij}(v)^{-1} \\ &= \left[h_{ik}\left(u^2\right),h_{ij}(v)\right] . \end{aligned}$$

Y asimismo la proposición **??** nos demuestra que el conmutador $\left[h_{ik}(u), h_{ij}(v)\right]$ es independiente del subíndice k. Con el fin de identificar los elementos de $K_2(\Lambda)$, consideramos el comportamiento de los h_{ij}. Si tomamos $h, h' \in \mathfrak{H}$, todas las entradas en la diagonal de la matriz $\phi(h)$ *conmuta* con las correspondientes entradas de la matriz $\phi(h')$ si y sólo si

$$\phi\left([h, h']\right) = \left[\phi(h), \phi(h')\right] = 1\ ,$$

es decir, si y sólo si $[h, h']$ es un elemento de $K_2(\Lambda)$. La proposición **??** nos otorga el respaldo suficiente para calcular éstos tipos de conmutadores.

Definición 4.3.11 $\left[h_{ik}(u), h_{ij}(v)\right] = \{u, v\}_{ij}$

La siguiente proposición nos demostrará que $\{u, v\}_{ij}$ es también independiente de i y j.

Proposición 4.3.12 *Si $\mu, \nu \in \Lambda^\times$ con $\mu\nu = \nu\mu$, e $i \neq j$ son cualquiera enteros positivos, tenemos que*

$$\{\mu, \nu\}_{ij} = \{\mu, \nu\}_{12}\ .$$

Demostración. Al tomar la conjugación de clases de una *matriz diagonal* por la matriz $\phi\left(w_{pq}(1)\right)$, el efecto intercambia la entrada p, p con la entrada q, q. Entonces, conjugando con una $w \in \mathfrak{W}$ apropiada, dicha matriz permuta la diagonal mediante cualquier arreglo π en S_∞. Escojamos tal w de manera que $\pi(1) = i$, $\pi(2) = 2$ y $\pi(3) = k$. Luego

$$\begin{aligned}
\phi\left(wh_{13}(u)w^{-1}\right) &= \phi\left(h_{ik}(u)\right), \text{ y} \\
\phi\left(wh_{12}(u)w^{-1}\right) &= \phi\left(h_{ij}(u)\right)\ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $h_{ik}(u)\left(wh_{13}(u)w^{-1}\right)^{-1} = \beta_1$ y $h_{ik}(u)\left(wh_{12}(u)w^{-1}\right)^{-1} = \beta_2$ de donde $\beta_1, \beta_2 \in K_2(\Lambda)$. Es así que

$$\begin{aligned}
h_{ik}(u) &= \beta_1 wh_{13}(u)w^{-1}, \text{ y} \\
h_{ij}(u) &= \beta_2 wh_{12}(u)w^{-1}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\{\mu,\nu\}_{ij} &= \left[h_{ik}(\mu),h_{ij}(\nu)\right] \\
&= \left[\beta_1\left(wh_{13}(\mu)w^{-1}\right),\beta_2\left(wh_{12}(\nu)w^{-1}\right)\right] \\
&= \beta_1\left(wh_{13}(\mu)w^{-1}\right)\beta_2\left(wh_{12}(\nu)w^{-1}\right)\left(\beta_1\left(wh_{13}(\mu)w^{-1}\right)\right)^{-1}\left(\beta_2\left(wh_{12}(\nu)w^{-1}\right)\right)^{-1} \\
&= \beta_1\left(wh_{13}(\mu)w^{-1}\right)\beta_2\left(wh_{12}(\nu)w^{-1}\right)\left(wh_{13}(\mu)w^{-1}\right)^{-1}\beta_1^{-1}\left(wh_{12}(\nu)w^{-1}\right)^{-1}\beta_2^{-1} \\
&= \left(wh_{13}(\mu)w^{-1}\right)\left(wh_{12}(\nu)w^{-1}\right)\left(wh_{13}(\mu)w^{-1}\right)^{-1}\left(wh_{12}(\nu)w^{-1}\right)^{-1} \\
&= w\,\{\mu,\nu\}_{12}\,w^{-1} \\
&= \{\mu,\nu\}_{12}\ ,
\end{aligned}$$

puesto que $\{\mu,\nu\}_{12} \in K_2(\Lambda)$.

■

Definición 4.3.13 *Supongamos que Λ es un anillo. Un* símbolo de Steinberg *sobre Λ es un elemento*

$$\{\mu,\nu\}_\Lambda = \{\mu,\nu\}_{12}$$

de $K_2(\Lambda)$, donde μ y ν son unidades de Λ. Cuando la elección del anillo Λ es evidente apartir del contexto, solamente se escribirá $\{\mu,\nu\}$ por $\{\mu,\nu\}_\Lambda$.

Definición 4.3.14 *Denotemos por $\mathfrak{S}$ al subgrupo de $\mathbf{St}(\Lambda)$ generado por los símbolos de Steinberg.*

Veamos ahora una consecuencia que relaciona el símbolo de Steinberg $\{\mu,\nu\}$ con la estructura aditiva del anillo Λ.

Proposición 4.3.15 *Si ambos μ y $1-\mu$ son unidades, entonces $\{\mu,1-\mu\} = 1$. Además para cualquier unidad μ la identidad $\{\mu,-\mu\} = 1$ se verifica.*

Demostración. Tomemos un ν que lo podemos escoger igual a $1-\mu$ ó a $-\mu$ indistintamente. El objetivo es comprobar la igualdad

$$h_{12}(\mu)h_{12}(\nu) = h_{12}(\mu\nu)\ .$$

Sabemos por definición que $h_{12}(\xi) = w_{12}(\xi)w_{12}(-1)$ para todo $\xi \in \Lambda^\times$. Entonces ajustando la ecuación anterior obtenemos que

$$w_{12}(\mu)w_{12}(-1)w_{12}(\nu)w_{12}(-1) = w_{12}(\mu\nu)w_{12}(-1)$$

y ésto es suficiente para mostrar que

$$w_{12}(\mu)w_{12}(-1)w_{12}(\nu) = w_{12}(\mu\nu). \tag{4.2}$$

Si en principio $\nu = 1 - \mu$, por la Proposición 4.3.8

$$w_{12}(-1) = w_{21}(1) = x_{21}^{1}x_{12}^{-1}x_{21}^{1}\ ;$$

sustituyendo en la ecuación (4.2) vemos que

$$\begin{aligned} w_{12}(\mu)w_{12}(-1)w_{12}(\nu) &= w_{12}(\mu)w_{21}(1)w_{12}(\nu) \\ &= w_{12}(\mu)\left[x_{21}^{1}x_{12}^{-1}x_{21}^{1}\right]w_{12}(\nu) \\ &= \left[w_{12}(\mu)x_{21}^{1}w_{12}(\mu)^{-1}w_{12}(\mu)\right]x_{12}^{-1}\left[w_{12}(\nu)w_{12}(\nu)^{-1}x_{12}^{1}w_{12}(\nu)\right]\ . \end{aligned}$$

De acuerdo al corolario 4.3.7 obtenemos

$$\begin{aligned} w_{12}(\mu)w_{12}(-1)w_{12}(\nu) &= \left[x_{\pi(2),\pi(1)}^{\mu\cdot(-\mu^{-1})^{-1}}w_{12}(\mu)\right]x_{12}^{-1}\left[w_{12}(\nu)x_{\pi(2),\pi(1)}^{\nu\cdot(-\nu^{-1})^{-1}}\right] \\ &= x_{12}^{-\mu^2}w_{12}(\mu)x_{12}^{-1}w_{12}(\nu)x_{12}^{-\nu^2} \\ &= x_{12}^{-\mu^2}\left(x_{12}^{\mu}x_{21}^{-\mu^{-1}}x_{12}^{\mu}\right)x_{12}^{-1}\left(x_{12}^{\nu}x_{21}^{-\nu^{-1}}x_{12}^{\nu}\right)x_{12}^{-\nu^2} \\ &= x_{12}^{-\mu^2+\mu}x_{21}^{-\mu^{-1}}x_{12}^{\mu+\nu-1}x_{21}^{-\nu^{-1}}x_{12}^{-\nu^2+\nu} \\ &= x_{12}^{\mu(-\mu+1)}x_{12}^{-\mu^{-1}}x_{12}^{\mu+\nu-1}x_{12}^{-\nu^{-1}}x_{12}^{\nu(-\nu+1)}\ . \end{aligned}$$

Como $\nu = 1 - \mu$ entonces tenemos que $\mu + \nu - 1 = 0$; así también $-\mu^2 + \mu = \mu(-\mu + 1) = \mu\nu$ y también $-\nu^2 + \nu = \nu(-\nu + 1) = \nu\mu = \mu\nu$, sustituyendo en la ecuación anterior nos resulta que

$$\begin{aligned} x_{12}^{\mu(-\mu+1)}x_{12}^{-\mu^{-1}}x_{12}^{\mu+\nu-1}x_{12}^{-\nu^{-1}}x_{12}^{\nu(-\nu+1)} &= x_{12}^{\mu\nu}x_{12}^{-\mu^{-1}}x_{12}^{0}x_{12}^{-\nu^{-1}}x_{12}^{\mu\nu} \\ &= x_{12}^{\mu\nu}x_{12}^{-\mu^{-1}-\nu^{-1}}x_{12}^{\mu\nu} \\ &= x_{12}^{\mu\nu}x_{12}^{-(\mu\nu)^{-1}}x_{12}^{\mu\nu} \end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned}
-\mu^{-1}-\nu^{-1} &= -\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}\\
&= -\left(\frac{\nu+\mu}{\mu\nu}\right)\\
&= -\left(\frac{1-\mu+\mu}{\mu\nu}\right)\\
&= -\left(\frac{1}{\mu\nu}\right)\\
&= -(\mu\nu)^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Y por tanto $x_{12}^{\mu\nu}x_{12}^{-(\mu\nu)^{-1}}x_{12}^{\mu\nu}=w_{12}(\mu\nu)$ y desde luego, $h_{12}(\mu)h_{12}(\nu)=h_{12}(\mu\nu)$. A esta altura resulta claro ver que el símbolo de Steinberg de $\{\mu,\nu\}$ es

$$\begin{aligned}
\{\mu,\nu\} &= [h_{12}(\mu),h_{12}(\nu)]\\
&= h_{12}(\mu\nu)h_{12}(\mu)^{-1}h_{12}(\nu)^{-1}\\
&= h_{12}(\mu\nu)\left(h_{12}(\nu)h_{12}(\mu)\right)^{-1}\\
&= h_{12}(\mu\nu)h_{12}(\nu\mu)^{-1}\\
&= h_{12}(\mu\nu)h_{12}(\mu\nu)^{-1}\\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Para calcular el símbolo $\{\mu,-\mu\}$, procedemos como se hizo anteriormente partiendo de la relación (4.2) en la que es suficiente que

$$w_{12}(\mu)w_{12}(-1)w_{12}(-\mu)=w_{12}(-\mu^2)$$

para que

$$h_{12}(\mu)h_{12}(-\mu)=h_{12}(-\mu^2).$$

Ahora, el elemento $w_{12}(-\mu)$ es igual a $w_{12}(\mu)^{-1}$ puesto que

$$\begin{aligned}
w_{12}(-\mu) &= x_{12}^{-\mu}x_{21}^{-(-\mu)^{-1}}x_{12}^{-\mu}\\
&= \left(x_{12}^{\mu}\right)^{-1}\left(x_{21}^{-\mu^{-1}}\right)^{-1}\left(x_{12}^{\mu}\right)^{-1}\\
&= \left(x_{12}^{\mu}x_{21}^{-\mu^{-1}}x_{12}^{\mu}\right)^{-1}\\
&= w_{12}(\mu)^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} w_{12}(\mu)w_{12}(-1)w_{12}(-\mu) &= w_{12}(\mu)w_{21}(1)w_{12}(\mu)^{-1} \\ &= w_{\pi(2),\pi(1)}\left(-\mu^{-1}(-\mu^{-1})\right) \\ &= w_{12}\left(\mu^{-2}\right) \\ &= w_{12}(-\mu^2)\ . \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \{\mu,-\mu\} &= [h_{12}(\mu),h_{12}(-\mu)] \\ &= h_{12}(-\mu^2)h_{12}(\mu)^{-1}h_{12}(-\mu)^{-1} \\ &= h_{12}(-\mu^2)\left(h_{12}(-\mu)h_{12}(\mu)\right)^{-1} \\ &= h_{12}(-\mu^2)h_{12}(-\mu^2)^{-1} \\ &= 1\ . \end{aligned}$$

■

Teorema 4.3.16 *Si Λ es un cuerpo finito o si Λ es el anillo de los enteros módulo una potencia de un primo impar, entonces $\{\mu,\nu\}=1$ para todo μ y ν en $\Lambda^\times$.*

Demostración. Primero supongamos que $\Lambda=\mathbb{F}_q$ es un cuerpo con q elementos. Entonces $\mathbb{F}_q^\times$ es un grupo cíclico de orden $q-1$ generado por un elemento ν. Sean entonces $\nu^r,\nu^s\in\mathbb{F}_q^\times$ y calculemos su símbolo de Steinberg.

$$\begin{aligned} \{\nu^r,\nu^s\} &= \left\{\underbrace{\nu\ldots\nu}_{r \text{ veces}},\nu^s\right\} \\ &= \underbrace{\{\nu,\nu^s\}\ldots\{\nu,\nu^s\}}_{r \text{ veces}} \\ &= \{\nu,\nu^s\}^r \\ &= \{\nu,\nu\}^{sr}\ ; \end{aligned}$$

entonces $K_2(\mathbb{F}_q)$ es cíclico generado por $\{\nu,\nu\}$. Además como $\{\nu,\nu\}^{-1}=\{\nu,\nu\}$ por su antisimetría, entonces $\{\nu,\nu\}^2=1$. Por lo que $\{\nu,\nu\}^n$ es trivial si n es par. Por lo que sólo debemos ocuparnos en mostrar si $\{\nu,\nu\}^n=1$ si

n es impar.
Si q es par

$$\begin{aligned}\{\nu,\nu\}^{q-1} &= \{\nu^{q-1},\nu\}\\ &= \{1,\nu\}\\ &= 1\,;\end{aligned}$$

y esto es cierto pues

$$\begin{aligned}\{\nu,\nu\}^{2} &= \{\nu^{2},\nu\}\\ &= \{1,\nu\}\,.\end{aligned}$$

Supongamos en su lugar que q es impar. La mitad de los elementos de $\mathbb{F}_q^\times$ son cuadrados $1,\nu^2,\nu^4,\ldots,\nu^{q-3}$ y la otra mitad son no cuadrados. Eliminando al 1, el conjunto $\mathbb{F}_q^\times\setminus\{1\}$ tiene más no cuadrados que cuadrados. La función

$$\mathbb{F}_q^\times\setminus\{1\}\longrightarrow\mathbb{F}_q^\times\setminus\{1\}$$

definida por

$$\mu\mapsto 1-\mu$$

es su propia inversa. Es por tanto biyectiva. Entonces para algún no cuadrado μ, $1-\mu$ es también un no cuadrado. Entonces $\mu=\nu^t$ y $1-\mu=\nu^u$, entonces

$$\begin{aligned}1 &= \{\mu,1-\mu\}\\ &= \left\{\nu^t,\nu^u\right\}\\ &= \{\nu,\nu\}^{ut}\end{aligned}$$

y $ut:=n$ es impar. Por lo tanto, para un cuerpo finito $\mathbb{F}_q^\times$ con q elementos resulta que $\{\mu,\nu\}=1$ para $\mu,\nu\in\mathbb{F}_q^\times$.

Ahora si $\Lambda=\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ con p un primo impar, entonces un argumento similar al de antes se aplica ya que $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ es cíclico y además *un entero es un residuo cuadrático módulo p^n si, y sólo si, es un residuo cuadrático módulo p*. Luego si en $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ hay $q=2^k$ elementos entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\{\nu,\nu\}^{q-1} &= \left\{\nu^{q-1},\nu\right\}\\ &= \{1,\nu\}\end{aligned}$$

ahora por la antisimetría del símbolo de Steiberg

$$\{\nu,\nu\}^{-1} \;=\; \{\nu,\nu\}$$

y así

$$\begin{aligned} 1 &= \{\nu,\nu\}^2 \\ &= \left\{\nu^2,\nu\right\} \\ &= \{1,\nu\} \end{aligned}$$

para el caso en que $q = 2^1 = 2$. Por lo tanto, $\{\nu,\nu\}^{q-1} = 1$.

$\blacksquare$

Proposición 4.3.17 *Todos los símbolos $h_{jk}(\mu)$ pueden ser expresados en términos de los $h_{1k}(\mu)$ con $j = 1$. De hecho éstos símbolos satisfacen las identidades*

$$h_{jk}(\mu)h_{kj}(\mu) = 1, \;\; y \;\; h_{ij}(\mu)^{-1}h_{jk}(\mu)^{-1}h_{ki}(\mu)^{-1} = 1\ .$$

Demostración. Veamos, a partir del conmutador $\left[h_{ik}(\mu), w_{jk}(1)\right]$ se tiene

$$\begin{aligned} \left[h_{ik}(\mu), w_{jk}(1)\right] &= h_{ik}(\mu)w_{jk}(1)h_{ik}(\mu)^{-1}w_{jk}(1)^{-1} \\ &= \left(w_{ik}(\mu)w_{ik}(-1)\right)w_{jk}(1)\left(w_{ik}(\mu)w_{ik}(-1)\right)^{-1}w_{jk}(1)^{-1} \\ &= w_{ik}(\mu)w_{ik}(1)w_{jk}(1)w_{ik}(1)^{-1}w_{ik}(\mu)^{-1}w_{jk}(1)^{-1} \\ &= w_{ik}(\mu)w_{\pi(j),\pi(k)}(1)w_{ik}(\mu)^{-1}w_{jk}(1)^{-1} \\ &= w_{ik}(\mu)w_{jk}(1)w_{ik}(\mu)^{-1}w_{jk}(1)^{-1} \\ &= w_{\pi(j),\pi(k)}\left(v_jv_k^{-1}\right)w_{jk}(1)^{-1} \\ &= w_{jk}(\mu)w_{jk}(1)^{-1} \\ &= h_{jk}(\mu)\ ; \end{aligned}$$

sin embargo, por otro lado:

$$
\begin{aligned}
\left[h_{ik}(\mu), w_{jk}(1)\right] &= h_{ik}(\mu)w_{jk}(1)h_{ik}(\mu)^{-1}w_{jk}(1)^{-1} \\
&= h_{ik}(\mu)w_{jk}(-(-1))h_{ik}(\mu)^{-1}w_{jk}(1)^{-1} \\
&= h_{ik}(\mu)\left(w_{jk}(1)^{-1}\right)^{-1} h_{ik}(\mu)^{-1}w_{jk}(1)^{-1} \\
&= h_{ik}(\mu)\left(w_{jk}(1)h_{ik}(\mu)w_{jk}(1)^{-1}\right)^{-1} \\
&= h_{ik}(\mu)\left(h_{\pi(i),\pi(k)}\left(v_i \cdot \mu \cdot v_k^{-1}\right) h_{\pi(i),\pi(k)}\left(v_i \cdot v_k^{-1}\right)\right)^{-1} \\
&= h_{ik}(\mu)\left(h_{ij}(\mu)h_{ij}(1)\right)^{-1} \\
&= h_{ik}(\mu)h_{ij}(\mu)^{-1} .
\end{aligned}
$$

Entonces hemos obtenido que

$$
h_{jk}(\mu) = h_{ik}(\mu)h_{ij}(\mu)^{-1} . \tag{4.3}
$$

A partir de la ecuación (4.3) si multiplicamos por $h_{kj}(\mu)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
h_{jk}(\mu)h_{kj}(\mu) &= h_{ik}(\mu)h_{ij}(\mu)^{-1}h_{kj}(\mu) \\
&= h_{ik}(\mu)h_{ij}(\mu)^{-1}h_{ij}(\mu)h_{ik}(\mu)^{-1} \\
&= 1 .
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
h_{jk}(\mu)h_{kj}(\mu) = 1 . \tag{4.4}
$$

Y además, por (4.3)

$$
\begin{aligned}
h_{jk}(\mu) &= h_{ik}(\mu)h_{ij}(\mu)^{-1} \\
h_{ik}(\mu)^{-1}h_{jk}(\mu) &= h_{ij}(\mu)^{-1} \\
1 &= h_{ij}(\mu)^{-1}\left(h_{ik}(\mu)^{-1}h_{jk}(\mu)\right)^{-1} \\
1 &= h_{ij}(\mu)^{-1}h_{jk}(\mu)^{-1}h_{ik}(\mu)
\end{aligned}
$$

y por la ecuación (4.4), haciendo $h_{ik}(\mu) = h_{ki}(\mu)^{-1}$ tenemos

$$
h_{ij}(\mu)^{-1}h_{jk}(\mu)^{-1}h_{ki}(\mu)^{-1} = 1 .
$$

■

Teorema 4.3.18 *Sea Λ cualquier anillo conmutativo. El subgrupo*

$$ker\ \phi|_{\mathfrak{W}} := C_n = \mathfrak{W} \cap (ker\ \phi) \subset \mathbf{St}_n(\Lambda)$$

está generado por los símbolos $\{\mu, \nu\}$.

Demostración. Recordemos de la Definición 4.3.3 que $\mathfrak{H}$ es el subgrupo generado por todos los elementos $h_{ij}(\mu)$ con $\mu \in \Lambda^{\times}$. De acuerdo al Corolario 4.3.7, una consecuencia inmediata es que $\mathfrak{H} \lhd \mathfrak{W}$. En $\mathfrak{W}$, usaremos "$\equiv$" para denotar la congruencia módulo $\mathfrak{H}$. Como

$$h_{ij}(\alpha) = w_{ij}(\alpha)w_{ij}(-1) = w_{ij}(\alpha)w_{ij}(1)^{-1}$$

se sigue que

$$w_{ij}(\alpha) \equiv w_{ij}(1) \pmod{\mathfrak{H}} .$$

Tenemos además que

$$w_{ji}(1)w_{ij}(1)w_{ji}(1)^{-1} = w_{ji}(-1) = w_{ji}(1)^{-1} ,$$

y vemos a continuación que

$$w_{ji}(1) = w_{ij}(1)^{-1} = w_{ij}(-1)$$

y que por lo cual

$$w_{ji}(1) \equiv w_{ij}(1) \pmod{\mathfrak{H}} .$$

Así que cada $w \in \mathfrak{W}$ es congruente módulo $\mathfrak{H}$ a un producto de factores $w_{ij}(1)$ con $i < j$. Si π es una trasposición de (i, l) entonces

$$w_{il}(1)w_{jk}(1)w_{il}(1)^{-1} \equiv w_{\pi(j),\pi(k)}(1) \pmod{\mathfrak{H}} ,$$

entonces

$$w_{il}(1)w_{jk}(1) \equiv w_{\pi(j),\pi(k)}(1)w_{il}(1) \pmod{\mathfrak{H}} , \tag{4.5}$$

para $i, j > 1$. La relación (4.5) nos ayuda a colocar todas los casos de $w_{jk}(1)$ a la izquierda. Luego usemos las relaciones

$$w_{jk}(1)^2 \equiv w_{jk}(1)w_{jk}(-1) = 1 \pmod{\mathfrak{H}} ,$$

y

$$w_{jl}(1)w_{jk}(1) \equiv w_{jk}(1)w_{jl}(1) \pmod{\mathfrak{H}}$$

para $k \neq l$ para eliminar los $w_{jk}(1)$ uno o dos a la vez. Al final habrá como máximo un solo $w_{jk}(1)$ a la izquierda. Pero este único $w_{jk}(1)$ no puede ocurrir ya que de lo contrario $\phi(\mathcal{C})$ no correspondería a la permutación identidad. De igual manera podemos eliminar todas las veces que aparezca $w_{j+1,k}(1)$, y así, continuando inductivamente hasta que hayamos probado que $\mathcal{C} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{H}}$. Así $\mathcal{C}$ puede ser expresado como un producto de elementos h_{jl}. Aplicando la Proposición 4.3.17 se sigue que $\mathcal{C}$ puede ser expresado como un producto de elementos h_{1k} y sus inversas.

Ahora en $\mathfrak{S}$ tenemos que

$$h_{1k}(\mu\eta) \equiv h_{1k}(\mu)h_{1k}(\eta) \pmod{\mathfrak{S}}$$

y

$$h_{1l}(\mu)h_{1k}(\eta) \equiv h_{1k}(\eta)h_{1l}(\mu) \pmod{\mathfrak{S}} .$$

Se sigue que el elemento $\mathcal{C}$ puede expresarse como un producto de la forma

$$\mathcal{C} \equiv h_{12}(\mu_2)h_{13}(\mu_3)\dots h_{1n}(\mu_n) \pmod{\mathfrak{S}} .$$

Esto implica que $\phi(\mathcal{C})$ es la matriz diagonal

$$\operatorname{diag}\left(\mu_2, \dots \mu_n, \mu_2^{-1}, \dots, \mu_n^{-1}\right) .$$

Pero $\phi(\mathcal{C}) = 1$ por hipótesis, por tanto $\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_n = 1$ y tenemos que

$$\mathcal{C} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{S}} ,$$

es decir, todo elemento de C_n esta generado por los elementos de $\mathfrak{S}$.

■

Definición 4.3.19 *Sea T el subgrupo de $\mathbf{St}_n(\Lambda)$ generado por todos los x_{ij}^{λ} con $1 \leq i < j \leq n$ y $\lambda \in \Lambda$.*

Proposición 4.3.20 *Cada elemento de T puede ser escrito como un producto en orden lexicográfico*

$$\prod_{i<j} x_{ij}^{\lambda_{ij}} ,$$

con $\lambda_{ij} \in \Lambda$. Entonces ϕ es isomorfismo entre T y el grupo de matrices triangulares superiores en $GL(\Lambda)$ con 1 en la diagonal.

Demostración. Para cada i, sea T_i el subgrupo de $\mathbf{St}(\lambda)$ generado por aquellos x_{ij}^{λ} con $j > i$ y $\lambda \in \Lambda$. Éstos generadores conmutan pues si tomamos $x_{i_1 j_1}^{\lambda}$ y

$x^{\lambda'}_{i_2j_2}$ tal que $(i_1, j_1) < (i_2, j_2)$ entonces $\left[x^{\lambda}_{i_1j_1}, x^{\lambda'}_{i_2j_2}\right] = 1$ y así T_i es abeliano. Por la Definición 4.2.1 cada elemento de T_i puede ser escrito en la forma

$$\prod_{k=1}^{n} x^{\lambda_{i,i+k}}_{i,i+k} = x^{\lambda_{i,i+1}}_{i,i+1} x^{\lambda_{i,i+2}}_{i,i+2} \dots x^{\lambda_{i,i+n}}_{i,i+n} \,.$$

Supongamos que $i < k < l$ e $i < l$. Para $\alpha, \beta \in \Lambda$, por Definición 4.2.1 implica que

$$x^{\alpha}_{kl} x^{\beta}_{ij} = \begin{cases} x^{-\beta\alpha}_{il} x^{\beta}_{ij} x^{\alpha}_{kl} \,, & \text{si } j = k \\ x^{\beta}_{ij} x^{\alpha}_{kl} \,, & \text{si } j \neq k \,. \end{cases}$$

y

$$x^{\beta}_{ij} x^{\alpha}_{kl} = \begin{cases} x^{\alpha}_{kl} x^{\beta\alpha}_{il} x^{\beta}_{ij} \,, & \text{si } j = k \\ x^{\alpha}_{kl} x^{\beta}_{ij} \,, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Así que si $i < k < l$, entonces $x^{\alpha}_{kl} T_i = T_i x^{\alpha}_{kl}$. Por tanto $T_k T_i = T_i T_k$ si $i < k$, y por consiguiente para todos los pares i, k. Supongamos que $t \in T$. Entonces t pertenece a algún producto

$$\begin{aligned} T_{i(1)} T_{i(2)} \dots T_{i(r)} &\subseteq T_1 T_2 \dots T_{n-1} \\ &= T_{n-1} \dots T_2 T_1 \end{aligned}$$

para un suficientemente grande n. Entonces t tiene la expresión $t = \prod_{i<j} x_{ij}^{\lambda_{ij}}$ y si aplicamos ϕ

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= \phi\left(\prod_{i<j} x_{ij}^{\lambda_{ij}}\right) \\
&= \prod_{i<j} \phi\left(x_{ij}^{\lambda_{ij}}\right) \\
&= \prod_{i<j} e_{ij}^{\lambda_{ij}} \\
&= \prod_{i<j} \left(I_\infty + \lambda_{ij}\epsilon_{ij}\right) \\
&= I_\infty + \sum_{i<j} \lambda_{ij}\epsilon_{ij} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1n} \\ & 1 & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \lambda_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \oplus I_\infty
\end{aligned}
$$

es una matriz triangular superior con 1 en cada entrada de su diagonal. Para probar que ϕ es un isomorfismo necesitamos evaluar si ϕ es biyectivo. Para ello,

$$ker\ \phi|_T = \{\gamma \in T \ : \ \phi(\gamma) = I_\infty\}$$

por lo que si $\gamma \in T$ entonces $\phi(\gamma) = I_\infty$ y como $\gamma = \prod_{p<q} x_{pq}^{\lambda_{pq}}$ con $\lambda_{pq} \in \Lambda$ hemos obtenido que $e_{pq}^{\lambda_{pq}} = I_\infty \Longleftrightarrow \lambda_{pq} = 0$ para cada p, q y que por lo tanto $\gamma = 1 \in T \subseteq \mathbf{St}(\Lambda)$. Y de esta manera $ker\ \phi|_T = \left\{1_{\mathbf{St}(\Lambda)}\right\}$ y ϕ es inyectivo. Ahora vemos si ϕ es un epimorfismo. Tomemos una matriz triangular superior en $GL(\Lambda)$, $\mathfrak{T}$. Entonces $\mathfrak{T} := \phi|_T(\omega)$ con $\omega \in T$. Y por construcción, el epimorfismo es claro. Luego, en resumen, ϕ es un isomorfismo.

■

Proposición 4.3.21 *Si Λ es un cuerpo o un anillo con división entonces cada elemento de $\mathbf{St}_n(\Lambda)$ pertenece a $T\mathfrak{W}T$.*

Demostración. Naturalmente por la Definición 4.2.1, cada elemento del grupo $\mathbf{St}_n(\Lambda)$ está generado por los símbolos formales x_{ij}^{λ} con $j = i \pm 1$ (puesto que en principio tomamos los índices $i \neq j$). Ya que

$$\begin{aligned} w_{ij}(1)x_{ij}^{\lambda}w_{ij}(-1) &= x_{\pi(i),\pi(j)}^{v_i\lambda v_j^{-1}} \\ &= x_{\pi(i),\pi(j)}^{-\lambda} \in \mathbf{St}_n(\Lambda) \ , \end{aligned}$$

y si la permutación correspondiente a w, π, transpone los índices i en j tenemos

$$w_{ij}(1)x_{ij}^{\lambda}w_{ij}(-1) = x_{ji}^{-\lambda} \ ,$$

se sigue que $\mathbf{St}_n(\Lambda)$ está generado por T y los $w_{ij}(1) \in \mathfrak{W}$ con $j = i \pm 1$. Con lo que es suficiente para probar la proposición que $T\mathfrak{W}T$ es cerrado bajo multiplicación por la derecha por $w_{i,i+1}(1)$. Para ello hagamos para simplificar la notación que $j = i + 1$. Sea $\alpha \in T\mathfrak{W}T$ entonces $\alpha = t_1wt_2$ con $t_i \in T$ para $i = 1, 2$ y $w \in \mathfrak{W}$. Como en la Proposición 4.3.20, el elemento t_2 de T puede ser expresado como $x_{ij}^{\lambda}t_3$, donde t_3 es un producto de factores x_{kl}^{μ} con $k < l$ y $(k, l) \neq (i, j)$. Entonces

$$\begin{aligned} t_1wt_2w_{ij}(1) &= t_1w\left(x_{ij}^{\lambda}t_3\right)w_{ij}(1) \\ &= t_1wx_{ij}^{\lambda}w_{ij}(1)w_{ij}(-1)t_3w_{ij}(1) \\ &= t_1wx_{ij}^{\lambda}w_{ij}(1)t_4 \ , \end{aligned}$$

donde

$$t_4 = w_{ij}(-1)t_3w_{ij}(1) \in T \ .$$

Luego, basta con comprobar que $wx_{ij}^{\lambda}w_{ij}(1) \in T\mathfrak{W}T$.

Sea π la permutación correspondiente a w.

Caso 1. Si $\pi(i) < \pi(j) = \pi(i+1)$, entonces

$$\begin{aligned} wx_{ij}^{\lambda}w_{ij}(1) &= wx_{ij}^{\lambda}w^{-1}ww_{ij}(1) \\ &= x_{\pi(i),\pi(j)}^{v_i\lambda v_j^{-1}}ww_{ij}(1) \\ &= x_{\pi(i),\pi(j)}^{\lambda'}ww_{ij}(1) \in T\mathfrak{W} \subseteq T\mathfrak{W}T. \end{aligned}$$

Caso 2. Si $\pi(i) > \pi(j)$ y λ es una unidad, entonces

$$x_{ij}^{\lambda} = w_{ij}(\lambda)x_{ij}^{-\lambda}x_{ji}^{\lambda^{-1}} \ .$$

Ahora si sustituimos x_{ij}^{λ} en $wx_{ij}^{\lambda}w_{ij}(1)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
wx_{ij}^{\lambda}w_{ij}(1) &= w\left(w_{ij}(\lambda)x_{ij}^{-\lambda}x_{ji}^{\lambda^{-1}}\right)w_{ij}(1) \\
&= ww_{ij}(\lambda)x_{ij}^{-\lambda}x_{ji}^{\lambda^{-1}}w_{ij}(1) \\
&= ww_{ij}(\lambda)x_{ij}^{-\lambda}w_{ij}(\lambda)^{-1}w_{ij}(\lambda)x_{ji}^{\lambda^{-1}}w_{ij}(1) \\
&= wx_{\pi(i),\pi(j)}^{v_i(-\lambda)v_j^{-1}}w_{ij}(\lambda)x_{ji}^{\lambda^{-1}}w_{ij}(1) \\
&= wx_{\pi(i),\pi(j)}^{v_i(-\lambda)v_j^{-1}}w^{-1}ww_{ij}(\lambda)x_{ji}^{\lambda^{-1}}w_{ij}(1) \\
&= x_{(\pi\circ\pi)(i),(\pi\circ\pi)(j)}^{v_{\pi(i)}\left(v_i(-\lambda)v_j^{-1}\right)v_{\pi(j)}^{-1}}ww_{ij}(\lambda)x_{ji}^{\lambda^{-1}}w_{ij}(1) \\
&= \left(x_{(\pi\circ\pi)(i),(\pi\circ\pi)(j)}^{v_{\pi(i)}\left(v_i(-\lambda)v_j^{-1}\right)v_{\pi(j)}^{-1}}ww_{ij}(\lambda)\right)\left(w_{ij}(1)w_{ij}(-1)x_{ji}^{\lambda^{-1}}w_{ij}(1)\right) \\
&= \left(x_{(\pi\circ\pi)(i),(\pi\circ\pi)(j)}^{v_{\pi(i)}\left(v_i(-\lambda)v_j^{-1}\right)v_{\pi(j)}^{-1}}ww_{ij}(\lambda)\right)\left(w_{ij}(1)x_{\pi(j),\pi(i)}^{v'_j(\lambda^{-1})v'^{-1}_i}\right) \\
&= \left(x_{(\pi\circ\pi)(i),(\pi\circ\pi)(j)}^{v_{\pi(i)}\left(v_i(-\lambda)v_j^{-1}\right)v_{\pi(j)}^{-1}}ww_{ij}(\lambda)\right)\left(w_{ij}(1)x_{\pi(j),\pi(i)}^{-\lambda^{-1}}\right) \\
&= \left(x_{(\pi\circ\pi)(i),(\pi\circ\pi)(j)}^{\lambda'}ww_{ij}(\lambda)\right)\left(w_{ij}(1)x_{\pi(j),\pi(i)}^{-\lambda^{-1}}\right) \\
&= \underbrace{x_{(\pi\circ\pi)(i),(\pi\circ\pi)(j)}^{\lambda'}}_{\in T}\underbrace{ww_{ij}(\lambda)w_{ij}(1)}_{\in\mathfrak{W}}\underbrace{x_{\pi(j),\pi(i)}^{-\lambda^{-1}}}_{\in T} \in T\mathfrak{W}T\,.
\end{aligned}$$

Caso 3. Si $\lambda \notin \Lambda^{\times}$, entonces $\lambda = 0$ porque Λ es un cuerpo. Entonces

$$wx_{ij}^{\lambda}w_{ij}(1) = ww_{ij}(1) \in \mathfrak{W} \subseteq T\mathfrak{W}T\,.$$

Luego de los Casos *1, 2 y 3* demostramos que $T\mathfrak{W}T$ es cerrado por multiplicación a la derecha por $w_{i,i+1}(1)$. Y debido a ésto cada elemento del grupo de $\mathbf{St}_n(\Lambda)$ pertenece a $T\mathfrak{W}T$.

■

Teorema 4.3.22 *Si Λ es un cuerpo o un anillo con división entonces, entonces el kernel de $\phi : \mathbf{St}_n(\Lambda) \longrightarrow E_n(\Lambda) \subseteq GL_n(\Lambda)$, está contenido en $\mathfrak{W}$, y por lo tanto $\ker\phi = C_n$. Por consiguiente el grupo de Steinberg $\mathbf{St}_n(\Lambda)$ es una extensión central de $E_n(\Lambda)$.*

Demostración. Sea $\zeta \in ker\ \phi$. Entonces $\phi(\zeta) = I_n$.
Pero $\zeta = t_1 w t_2 \in \mathbf{St}_n(\Lambda)$ por la Proposición 4.3.21 con $t_i \in T$ para $i = 1, 2$ y $w \in \mathfrak{W}$. Es así que

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \phi\left(t_1 w t_2\right) \\ &= \phi(t_1)\phi(w)\phi(t_2)\ . \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \phi(t_1 w t_2) = I_n &\implies \phi(t_1)\phi(w)\phi(t_2) = I_n \\ &\implies \phi(w) = \phi(t_1)^{-1}\phi(t_2)^{-1} \\ &\implies \phi(w) = \phi\left(t_1^{-1}t_2^{-1}\right)\ . \end{aligned}$$

Hemos llegado a que la matriz monomial $\phi(w)$ es igual a una matriz triangular superior $\phi\left(t_1^{-1}t_2^{-1}\right)$ con entradas en su diagonal de 1. Por lo que

$$\phi(w) = \phi\left(t_1^{-1}t_2^{-1}\right) = I_n$$

y ésto implica que $w \in \phi|_{\mathfrak{W}} := C_n := \mathbf{Z}(\mathbf{St}_n(\Lambda))$ por Proposición 4.3.5 y

$$\begin{aligned} \phi\left(t_1^{-1}t_2^{-1}\right) &= I_n \\ \phi\left(t_1^{-1}\right) &= \phi(t_2) \\ t_1^{-1} &= t_2 \end{aligned}$$

puesto que por la Proposición 4.3.20 ϕ es un homomorfismo inyectivo sobre T. Es así que

$$\zeta = t_1 w t_2 \implies \zeta = t_1 w t_1^{-1} = w \in \mathfrak{W}\ .$$

Por consiguiente, $ker\ \phi \subseteq \mathfrak{W}$.
Y por la Proposición 4.3.5 tenemos que $ker\ \phi = C_n$.

■

Combinando los teoremas 4.3.16, 4.3.18 y 4.3.22 y pasando por el límite directo cuando $n \longrightarrow \infty$ como en la Definición 4.2.2, esto implica el siguiente

Corolario 4.3.23 *Si Λ es un cuerpo entonces $K_2(\Lambda)$ está generado por los símbolos de Steiberg $\{\mu, \nu\}$. En particular si Λ es un cuerpo finito entonces $K_2(\Lambda) = 1$.*

Demostración. Si Λ es un cuerpo entonces por la Definición 4.2.2 tenemos que el kernel de ϕ es $K_2(\Lambda)$. Por el teorema 4.3.22, $K_2 \subseteq \mathfrak{W}$ y por el teorema 4.3.18 $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} C_n = \mathfrak{W} \cap K_2(\Lambda) = K_2(\Lambda)$ y por lo tanto, $K_2(\Lambda)$ está generado por los símbolos $\{\mu, \nu\}$. Además, si Λ es un cuerpo finito, para $\mu, \nu \in \Lambda^\times$ tenemos que $\{\mu, \nu\} = 1$ por teorema 4.3.16, y de nuevo, por el teorema 4.3.18 obtenemos que $K_2(\Lambda) = 1$.

■

4.4. Cálculo de $K_2(\mathbb{Z})$

4.4.1. Construcción de Milnor

El objetivo más importante de esta sección es demostrar el siguiente

Teorema 4.4.1.1 *El grupo* $\mathbf{St}_n(\mathbb{Z})$ *es una extensión central*

$$1 \longrightarrow C_n \longrightarrow \mathbf{St}_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow E_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow 1$$

donde C_n *es el grupo cíclico de orden* 2 *generado por el símbolo*

$$\{-1, -1\} = \left(x_{12}^1 x_{21}^{-1} x_{12}^1\right)^4 .$$

Históricamente, la prueba del teorema 4.4.1.1 está basada en un trabajo clásico que se le atribuye Wilhelm Magnus[1] en su artículo *über n-dimensionale gitter transformationen* en el año de 1935 en la revista Acta Math número 64. Sin embargo, el espíritu de la demostración conlleva una idea más simplificada. John Milnor basó la prueba del Teorema 4.4.1.1 en un trabajo, que para la época, fue inédito y estaba por ser publicado. Estamos hablando de la investigación de John Richard Silvester que llevaba por título *A presentation of* $GL_n(\mathbb{Z})$ *y* $GL_n(\mathbb{K}[X])$ que estaba por aparecer en ese entonces. Una mención que se debe hacer es que Silvester y también K. Dennis, usaron el mismo método para probar el isomorfismo $K_2(F(X)) \cong K_2(F)$ donde $F(X)$ denota el anillo de polinomios en una indeterminada sobre un cuerpo F y luego Dennis extendió el resultado al caso de un anillo de división. Como la prueba de Silvester es inductiva, debemos considerar los casos para $n = 1,\ 2$. Para $n = 1$, simplemente definimos $\mathbf{St}_1(\mathbb{Z})$ como trivial. Para $n = 2$, la definición de acuerdo a Steinberg es como sigue.

[1] Matemático alemán (1907-1990).

Definición 4.4.1.2 *Para cualquier anillo Λ, sea $\mathbf{St}_2(\Lambda)$ el grupo con generadores x_{12}^{λ} y x_{21}^{λ}, con $\lambda \in \Lambda$, y definiendo las relaciones*

$$x_{ij}^{\lambda} x_{ij}^{\mu} = x_{ij}^{\lambda+\mu}$$

y

$$w_{ij}(\mu) x_{ji}^{\lambda} w_{ij}(-\mu) = x_{ij}^{-\mu\lambda\mu}$$

para $\mu \in \Lambda^{\times}$ donde $w_{ij}(\mu)$ por definición es igual a $x_{ij}^{\mu} x_{ji}^{-\mu^{-1}} x_{ij}^{\mu}$.

El análogo del teorema 4.4.1.1 es el siguiente. Introduciremos la notación x_{ij} para el generador x_{ij}^{1}.

Teorema 4.4.1.3 *El grupo $\mathbf{St}_2(\mathbb{Z})$ es una extensión central*

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \mathbf{St}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow E_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow 1$$

donde C_2 es un grupo cíclico libre generado por el elemento $\left(x_{12} x_{21}^{-1} x_{12}\right)^4$.

De esta manera, debemos demostrar los teoremas 4.4.1.1 y 4.4.1.3 mediante la propuesta hecha por Silvester. Manos a la obra.

Consideremos un conjunto que consiste de todas las n-adas de enteros $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, que denotaremos por $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}}$. Ahora, destaquemos la acción del grupo de Steinberg $\mathbf{St}_n(\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{Z}^n$ y consideremos a $\mathbb{Z}^n$ como un $\mathbf{St}_n(\mathbb{Z})$-módulo y que lo hacemos actuar a la derecha. Es decir

$$\mathbb{Z}^n \times \mathbf{St}_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^n$$

donde tomamos un elemento $\omega \in \mathbb{Z}^n \times \mathbf{St}_n(\Lambda)$ que tiene la forma $\omega = (z, \rho)$ con $z \in \mathbb{Z}^n$ y $\rho \in \mathbf{St}_n(\Lambda)$ respectivamente y lo mapeamos $\omega = (z, \rho) \mapsto z\rho$ y que vamos a definir la operación $z\rho$ como sigue. Por ejemplo, si $n = 2$ la acción está determinada por las relaciones

$$(a_1, a_2) x_{12} = (a_1, a_1 + a_2), \quad (a_1, a_2) x_{21} = (a_1 + a_2, a_2)$$

en donde $x_{ij} = x_{ij}^{1}$ para $i \neq j$ variando entre 1 y 2 para nuestro caso $n = 2$. Para el caso generalizado, si escojemos x_{ij}^{ϵ} y si $n = 2$ para darnos la idea más clara, tenemos que

$$(a_1, a_2) x_{12}^{\epsilon} = (a_1, \epsilon a_1 + a_2), \quad (a_1, a_2) x_{21}^{\epsilon} = (a_1 + \epsilon a_2, a_2) \; .$$

Definamos una <u>norma</u> sobre $\mathbb{Z}^n$ mediante

$$\|(a_1, a_2, \ldots, a_n)\| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \ .$$

Sea $\pm\beta$ una base canónica de vectores de $\mathbb{Z}^n$, tal que $\|\beta\| = 1$.

El subgrupo de $\mathbf{St}_n(\Lambda)$ generado por los elementos

$$w_{ij} = w_{ij}(1) = x_{ij}x_{ji}^{-1}x_{ij}$$

será denotado por $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_n$.
¿Qué ocurre si w_{ij} actúa sobre algún vector arbitrario en $\mathbb{Z}^n$? Si, de nuevo, $n = 2$

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2)w_{12} &= (a_1, a_2)x_{12}x_{21}^{-1}x_{12} \\
&= ((a_1, a_2)x_{12})\, x_{21}^{-1}x_{12} \\
&= (a_1, a_1 + a_2)x_{21}^{-1}x_{12} \\
&= (a_1 - a_1 - a_2, a_1 + a_2)x_{12} \\
&= (-a_2, a_1 + a_2)x_{12} \\
&= (-a_2, a_1 + a_2 - a_2) \\
(a_1, a_2)w_{12} &= (-a_2, a_1) \ .
\end{aligned}$$

A partir de éste resultado obtenemos la siguiente

Proposición 4.4.1.4 *La acción de $\mathfrak{W}$ sobre $\mathbb{Z}^n$ preserva la norma.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, hagamos $n = 2$ y observemos que

$$\begin{aligned}
\|(a_1, a_2)w_{ij}\| &= \|(-a_2, a_1)\| \\
&= |-a_2| + |a_1| \\
&= |a_1| + |a_2| \\
&= \|(a_1, a_2)\|
\end{aligned}$$

■

Lema 4.4.1.5 (Silvester) *Cada elemento en $\mathbf{St}_n(\Lambda)$ puede ser expresado como un producto*

$$g_1 g_2 \ldots g_r w$$

con $w \in \mathfrak{W}_n$, donde cada g_k es uno de los generadores de Steinberg $x_{ij}^{\pm 1}$, de tal forma que

$$\|\beta g_1\| \leq \|\beta g_1 g_2\| \leq \|\beta g_1 g_2 \ldots g_r w\| \ .$$

Demostración. Tomemos una sucesión $\{g_k\}_{k=1}^{r}$ de elementos de Steinberg. Podemos asociar una sucesión $1 = \tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ de enteros positivos que están definidos mediante la expresión

$$\tau_k = \|\beta g_1 g_2 \ldots g_k\| \ .$$

En la sucesión considerada $1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ pueden existir *cambios* a partir de la monotonicidad y la cual puede ser calculada aproximadamente por un par (λ, μ) de enteros positivos. Si la sucesión $1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ no es monótona, existe algún $\mathfrak{a}$ tal que $\tau_\mathfrak{a} > \tau_{\mathfrak{a}+1}$. Entonces hagamos que

$$\lambda := \text{Máx}\,\{\mathfrak{a} \text{ tal que } \tau_\mathfrak{a} > \tau_{\mathfrak{a}+1}\}$$

que es el valor más grande de $\tau_\mathfrak{a}$ para el cual la sucesión no es monótona. Pero pueden haber muchos valores distintos de $\mathfrak{a}$ para el cual éste máximo se alcanza; para manejar este problema hagamos

$$\mu := \text{Máx}\,\{\mathfrak{a} \text{ tal que } \tau_\mathfrak{a} = \lambda > \tau_{\mathfrak{a}+1}\} \ .$$

De otro modo, si la sucesión es monótona ($1 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_k$), hacemos $\lambda = \mu = 1$.

Los pares (λ, μ) están ordenados lexicográficamente, así que: $(\lambda, \mu) > (\lambda', \mu')$ si, y sólo si, $\lambda > \lambda'$ ó $\lambda = \lambda'$ y $\mu > \mu'$.

La demostración del consiste en mostrar que cada palabra $g_1 \ldots g_k w$ con $(\lambda, \mu) > (1, 1)$ puede ser alterada, usando las relaciones de Steinberg, para decrecer el par (λ, μ). Luego de repetir este proceso un número finito de veces, debemos conseguir la palabra requerida con $(\lambda, \mu) = (1, 1)$.

Supongamos que el par $(\lambda, \mu) > (1, 1)$. Luego

$$\lambda = \tau_\mu > \tau_{\mu+1} \ .$$

Si decidimos tomar a $\mu = 0$ tendríamos que

$$\lambda = \tau_0 > \tau_1$$

pero es imposible. Así que tengamos en cuenta que $\mu \geq 1$ y que

$$\tau_{\mu-1} \leq \tau_\mu \ .$$

Para establecer mejor las ideas y compendiar la notación, supongamos que el generador g_μ es igual a x_{12}. El caso general puede ser reducido a este caso especial de la siguiente manera: Si $g_\mu = x_{ij}$, podemos sin complicación alguna renumerar las coordenadas para sustituir i y j por 1 y 2 respectivamente. Si $g_\mu = x_{ij}^{-1}$ entonces conjugando cada $g_\mathfrak{a}$ por w_{ij} y reemplazando β por βw_{ij}^{-1} y w por $w_{ij}w$, obtenemos un problema equivalente, con g_μ sustituido por x_{ji}. Y luego procedemos como antes.

Asumamos entonces que $g_\mu = x_{12}$. Hagamos que

$$\beta g_1 g_2 \dots g_\mu = (a, b, c, \dots) \in \mathbb{Z}^n \ ,$$

resulta que

$$\beta g_1 g_2 \dots g_{\mu-1} = (a, b-a, c, \dots) \ .$$

Por tanto la desigualdad $\tau_{\mu-1} \leq \tau_\mu$ puede ser escrito como

$$|b-a| \leq |b|$$

ya que

$$\begin{array}{rcl} \tau_{\mu-1} & \leq & \tau_\mu \\ \|\beta g_1 g_2 \dots g_{\mu-1}\| & \leq & \|\beta g_1 g_2 \dots g_\mu\| \\ |a| + |b-a| + |c| + \dots & \leq & |a| + |b| + |c| + \dots \\ |b-a| & \leq & |b| \ . \end{array}$$

Como consecuencia, ésto es claramente equivalente a

$$|a| \leq 2|b| \ , \ \text{ y si } \ a \neq 0 \ \text{ entonces } \ ab > 0 \ . \tag{4.6}$$

La prueba del lema se dividirá en siete casos, dependiendo de $g_{\mu+1}$. Consideremos los casos donde $g_{\mu+1}$ conmuta con $g_\mu = x_{12}$.

`Caso 1`. Supongamos que $g_\mu = x_{1j}^\epsilon$ con $j \geq 3$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $j = 3$ y $n = 3$. Así $g_{\mu+1}$ transforma (a, b, c) en $(a, b, \epsilon a + c)$, con

$$|c| > |\epsilon a + c| \ .$$

Entonces la palabra $g_1 \dots g_k w$ reemplazando el producto $g_\mu g_{\mu+1} = x_{12} x_{13}^\epsilon$ por $x_{13}^\epsilon x_{12}$. Entonces la transformación

$$(a, b-a, c) \xrightarrow{g_\mu} (a, b, c) \xrightarrow{g_{\mu+1}} (a, b, a+c)$$

será reemplazado

$$(a, b-a, c) \longrightarrow (a, b-a, \epsilon a + c) \longrightarrow (a, b, \epsilon a + c)\ .$$

Los números asociados τ_α no han cambiado, excepto que $\tau_\mu = \|(a, b, c)\|$ es reemplazado por un número $\tau'_\mu = \|(a, b-a, \epsilon a + c)\|$ que satisface

$$\tau_{\mu-1} > \tau'_\mu\ .$$

Un poco de inspección muestra que el par (λ', μ') asociado con la nueva sucesión es menor que (λ, μ).

`Caso 2.` Si $g_{\mu+1} = x_{ij}^\epsilon$ con i y j mayores que 2, la demostración es la misma como en el caso 1.

`Caso 3.` Supongamos que $g_{\mu+1} = g_\mu^\epsilon = x_{12}^\epsilon$. Si $\epsilon = -1$, entonces podemos cancelar el factor $g_\mu g_{\mu+1}$, así reduciendo (λ, μ). Pero ϵ no puede ser $+1$, pues

$$(a, b, c) g_{\mu+1} = (a, b+a, c)$$

entonces debemos tener que

$$|b-a| \leq |b| < |b+a|$$

lo cual es imposible.

`Caso 4.` Si $g_{\mu+1} = x_{32}^\epsilon$ (ó x_{i2}^ϵ con $i \geq 3$) luego es necesario dar un argumento menos simple. Observemos que el producto $x_{12} x_{32}^\epsilon$ en el grupo de Steinberg también puede ser expresado como $x_{32}^\epsilon x_{12}$, ó como $x_{13}^\epsilon x_{32}^\epsilon x_{13}^{-\epsilon}$, ó como $x_{31}^\epsilon x_{12} x_{31}^\epsilon$. Esto significa que la transformación

$$(a, b-a, c) \longrightarrow (a, b, c) \longrightarrow (a, b+\epsilon c, c)$$

corresponde al producto $x_{12} x_{32}^\epsilon$; puede ser sustituido por

$$(a, b-a, c) \longrightarrow (a, b-a+\epsilon c, c) \longrightarrow (a, b+\epsilon c, c)$$

o por

$$(a, b-a, c) \longrightarrow (a, b-a, c+\epsilon a) \longrightarrow (a, b+\epsilon c, c+\epsilon a) \longrightarrow (a, b+\epsilon c, c)$$

o incluso por

$$(a, b-a, c) \longrightarrow (a+\epsilon c, b-a, c) \longrightarrow (a+\epsilon c, b+\epsilon c, c) \longrightarrow (a, b+\epsilon c, c)\ .$$

Eso nos muestra que la primera sustitución reducirá (λ, μ) dando que

$$|b-a| > |b-a+\epsilon c| \ . \tag{4.7}$$

De igual manera la segunda sustitución reducirá (λ, μ) si

$$|c| > |c+\epsilon a| \ , \tag{4.8}$$

y la tercera sustitución reducirá (λ, μ) si

$$|a| > |a+\epsilon c| \ . \tag{4.9}$$

Por lo que debemos demostrar que al menos una de las tres desigualdades anteriores es válida. Observemos primero que la desigualdad $\tau_\mu > \tau_{\mu+1}$ implica que

$$|b| > |b+\epsilon c| \ .$$

Por tanto, b y ϵc deben de tener el mismo signo. Si $a \neq 0$, entonces se tiene de la primera desigualdad (4.16), que a y ϵc tienen el *mismo signo* y por lo tanto las desigualdades (4.8) y (4.9) son verificables. Sin embargo, si $a = 0$ entonces (4.7) es también válida. Éstos detalles completan la discusión del caso 4.

`Caso 5.` Si $g_{\mu+1} = x_{21}^{\epsilon}$, entonces el producto $g_\mu g_{\mu+1}$ corresponde a la transformación

$$(a, b-a) \longrightarrow (a, b) \longrightarrow (a+\epsilon b, b) \tag{4.10}$$

con

$$|a| > |a+\epsilon b| \ .$$

Si ϵ fuera $+1$, entonces a y b deberían tener signo opuesto, contradiciendo (4.16); así que podemos asumir que $\epsilon = -1$. Sustituyendo el producto $x_{12}x_{21}^{-1}$ por $x_{21}w_{21}(-1)$, y notanto que el elemento $w_{21}(-1)$ puede pasar por $g_{\mu+2}g_{\mu+3}\cdots g_k$ por el Corolario 4.3.7, vemos que la transformación (4.10) puede ser sustituida por

$$(a, b-a) \xrightarrow{x_{21}} (b, b-a) \ \ .$$

Evidentemente esto disminuye a (λ, μ).

`Caso 6.` Supongamos que $g_{\mu+1}$ es igual a x_{23}^{ϵ} (ó x_{2j}^{ϵ} con $j \geq 3$). En este caso la palabra $x_{12}x_{23}^{\epsilon}$ puede ser sustituida por $x_{13}^{\epsilon}x_{23}^{\epsilon}x_{12}$ ó por $x_{23}^{\epsilon}x_{13}^{\epsilon}x_{12}$ ó por $x_{21}x_{13}^{\epsilon}x_{12}^{-1}w_{12}$. Concernientemente, la transformación

$$(a, b-a, c) \longrightarrow (a, b, c) \longrightarrow (a, b, c+\epsilon b)$$

puede ser sustituida por una de las siguientes:

$$(a, b-a, c) \longrightarrow (a, b-a, c+\epsilon a) \longrightarrow (a, b-a, c+\epsilon b) \longrightarrow (a, b, c+\epsilon b) \ ,$$

$$(a, b-a, c) \longrightarrow (a, b-a, c+\epsilon b-\epsilon a) \longrightarrow (a, b-a, c+\epsilon b) \longrightarrow (a, b, c+\epsilon b) \ ,$$

ó por

$$(a, b-a, c) \longrightarrow (b, b-a, c) \longrightarrow (b, b-a, c+\epsilon b) \longrightarrow (b, -a, c+\epsilon b) \ .$$

Así (λ, μ) pueden disminuir si

$$|c| > |c+\epsilon a| \ , \tag{4.11}$$

$$|c| > |c+\epsilon b-\epsilon a| \ , \text{ó} \tag{4.12}$$

$$|a| > |b| \ ; \tag{4.13}$$

usando la desigualdad $|b-a| \leq |b|$. La desigualdad $\tau_{\mu} > \tau_{\mu+1}$ implica que

$$|c| > |c+\epsilon b| \ ,$$

y que c y b tienen signo opuesto, y

$$|b| \leq 2|c| \ .$$

Si $a = 0$, entonces la desigualdad (4.12) es satisfecha. Pero si $a \neq 0$, entonces $ab > 0$, por la desigualdad (4.16), tenemos que ϵa y c tienen signo opuesto. Ahora bien $|a| \leq 2|c|$, lo cual implica (4.11), ó $|a| \geq 2|c|$ que implica (4.13).

`Caso 7.` Si $g_{\mu+1} = x_{31}^{\epsilon}$ (ó x_{i1}^{ϵ} con $i \geq 3$), entonces $x_{12}x_{31}^{\epsilon}$ es igual a $x_{31}^{\epsilon}x_{12}x_{32}^{-\epsilon}$ y a $x_{31}^{\epsilon}x_{13}^{-\epsilon}x_{32}^{-\epsilon}x_{13}^{\epsilon}$. Por tanto la transformación

$$(a, b-a, c) \longrightarrow (a, b, c) \longrightarrow (a+\epsilon c, b, c)$$

puede ser sustituida por

$$(a, b-a, c) \longrightarrow (a+\epsilon c, b-a, c) \longrightarrow (a+\epsilon c, b+\epsilon c, c) \longrightarrow (a+\epsilon c, b, c)$$

o incluso por

$$\begin{array}{c} (a, b-a, c) \longrightarrow (a+\epsilon c, b-a, c) \longrightarrow (a+\epsilon c, b-a, -\epsilon a) \longrightarrow (a+\epsilon c, b, -\epsilon a) \\ \hfill \downarrow \hfill \\ \hfill (a+\epsilon c, b, c) \end{array}$$

Por tanto (λ, μ) puede ser reducida si

$$|b+\epsilon c| \leq |b| \ , \ \text{ ó} \tag{4.14}$$

$$|c| \geq |a| \ . \tag{4.15}$$

La desigualdad $\tau_\mu > \tau_{\mu+1}$ para este caso implica que

$$|a| > |a+\epsilon c|$$

es así que a y ϵc tienen el mismo signo, y

$$|c| < 2|a| \ .$$

En conclusión b y ϵc tienen signo opuesto (esto por (4.16)), es así que $|c| \leq 2|b|$ lo cual implica (4.14), ó $|c| \geq 2|b|$ el cual junto con (4.16) implica (4.15).

■

Lema 4.4.1.6 *El núcleo del homomorfismo natural*

$$\phi : \mathbf{St}_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow E_n(\mathbb{Z})$$

está contenido en el subgrupo $\mathfrak{W}_n$.

Demostración. Como vector canónico β en $\mathbb{Z}^n$, tomemos el n-ésimo vector base $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Por el lemma 4.4.1.5, cualquier elemento dado en el núcleo de ϕ puede ser escrito como un producto $g_1 \ldots g_k w$ con

$$1 \leq \|\beta g_1\| \leq \|\beta g_1 g_2\| \leq \ldots \leq \|\beta g_1 \ldots g_k w\| = 1 \ .$$

La ecuación $\|\beta g_1\| = 1$ implica que el generador de Steinberg g_1 debe dejar invariante a β, y se sigue inductivamente que cada $g_{\mathfrak{a}}$ debe dejar invariante a β. Además, puesto que $\phi\,(g_1 \ldots g_k w) = 1$, el elemento $w \in \mathfrak{W}_n$ debe también dejar fijo a β.

Así la palabra $g_1 \ldots g_k w$ no puede contener a cualquier generador x_{ij}^{ϵ} con $i = n$. Puede contener a algunos x_{ij}^{ϵ} con $j = n$, pero si es así, usando las relaciones de Steinberg, podemos forzar a que los tales x_{in}^{ϵ} estén a la izquierda. Haciendo el producto de todos estos x_{in}^{ϵ} sea igual a x, significa que podemos escribir $g_1 \ldots g_k w$ como un producto

$$x\xi(y)w$$

donde ξ denota el homomorfismo natural

$$\xi : \mathbf{St}_{n-1}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{St}_n(\mathbb{Z}) \ .$$

Tomando el caso cuando $n = 4$ para ilustrar mejor esta idea, tenemos que ambas matrices $\phi(x)$ y $\phi(x\xi(y)w)$ tienen la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Pero el producto de estas matrices es I_n, entonces

$$\phi(x) = \phi(\xi(y)w) = I_n$$

y se sigue que $x = 1$.
Ahora escribamos a w como un producto $\xi(w')\mathfrak{z}$ con

$$w' \in \mathfrak{W}_{n-1}, \ \ \mathfrak{z} \in \mathfrak{W}_n \cap ker\ \phi \ .$$

Se sigue que el elemento original $g_1 \ldots g_k w$ del $ker\ \phi$ puede ser expresado como un producto $\xi(yw')\mathfrak{z}$. Ahora, yw' pertenece al núcleo de

$$\mathbf{St}_{n-1}(\mathbb{Z}) \longrightarrow E_{n-1}(\mathbb{Z}) \ ,$$

por tanto $yw' \in \mathfrak{W}_{n-1}$ por la hipótesis inductiva. Por lo tanto, $\xi(yw') \in \mathfrak{W}_n$.

∎

Ahora debemos demostrar los teoremas 4.4.1.1 y 4.4.1.3.

Demostración de 4.4.1.1. A partir del resultado del lema 4.4.1.6, el núcleo del homomorfismo natural $\phi : \mathbf{St}_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow E_n(\mathbb{Z})$ está contenido en el subgrupo $\mathfrak{W}_n$ de $\mathbf{St}_n(\mathbb{Z})$, se sigue inmediatamente que al tomar la restricción de ϕ a $\mathfrak{W}_n$ tenenemos que éste núcleo está contenido en el centro del grupo de Steinberg $\mathbf{St}_n(\mathbb{Z})$, lo cual muestra que $\mathbf{St}_n(\mathbb{Z})$ es una extensión central de $E_n(\mathbb{Z})$ y al tomar el límite directo cuando $n \to \infty$ tenemos que $K_2(\mathbb{Z} \subseteq \mathbf{Z}(\mathbf{St}_n(\mathbb{Z})))$ y que por tanto está generado por los símbolos $\{u, v\}$ donde $u, v \in \mathbb{Z}^\times$, es decir, u y v son 1 ó -1. Es así que en $K_2(\mathbb{Z})$ está por formado por los elementos $\{1, 1\}$, $\{-1, 1\}$, $\{1, -1\}$ y $\{-1, -1\}$.
Haciendo cálculos directos tenemos que

$$
\begin{aligned}
\{1,1\}_{ij} &= \left[h_{ik}(1), h_{ij}(1)\right] \\
&= h_{ij}((1)(1))h_{ij}(1)^{-1}h_{ij}(1)^{-1} \text{ por 4.3.10} \\
&= h_{ij}(1)h_{ij}(1)^{-1}h_{ij}(1)^{-1} \\
&= h_{ij}(1)^{-1} \\
&= \left(w_{ij}(1)w_{ij}(-1)\right)^{-1} \\
&= w_{ij}(-1)^{-1}w_{ij}(1)^{-1} \\
&= w_{ij}(-(-1))w_{ij}(-1) \\
&= w_{ij}(1)w_{ij}(-1) \\
&= x_{ij}^{1}x_{ji}^{-1}x_{ij}^{1}x_{ij}^{-1}x_{ji}^{1}x_{ij}^{-1} \\
&= 1\,.
\end{aligned}
$$

Además que

$$
\begin{aligned}
\{-1,1\}_{ij} &= \left[h_{ik}(-1), h_{ij}(1)\right] \\
&= h_{ij}((-1)(1))h_{ij}(-1)^{-1}h_{ij}(1)^{-1} \\
&= h_{ij}(-1)h_{ij}(-1)^{-1}h_{ij}(1)^{-1} \\
&= h_{ij}(1)^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

basándonos en el resultado precedente. También podemos ver que

$$\begin{aligned}
\{1,-1\}_{ij} &= \left[h_{ik}(1), h_{ij}(-1)\right] \\
&= h_{ij}((1)(-1))h_{ij}(1)^{-1}h_{ij}(-1)^{-1} \\
&= h_{ij}(-1)h_{ij}(1)^{-1}h_{ij}(-1)^{-1} \\
&= \left(w_{ij}(-1)w_{ij}(-1)\right)\left(w_{ij}(1)w_{ij}(-1)\right)^{-1}\left(w_{ij}(-1)w_{ij}(-1)\right)^{-1} \\
&= w_{ij}(-1)\underbrace{w_{ij}(-1)w_{ij}(-1)^{-1}}_{=1}w_{ij}(1)^{-1}w_{ij}(-1)^{-1}w_{ij}(-1)^{-1} \\
&= w_{ij}(-1)w_{ij}(1)^{-1}w_{ij}(-1)^{-1}w_{ij}(-1)^{-1} \\
&= w_{ij}(-1)w_{ij}(-1)w_{ij}(-1)^{-1}w_{ij}(-1)^{-1} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Mientras queda

$$\begin{aligned}
\{-1,-1\} &= \left[h_{ik}(-1), h_{ij}(-1)\right] \\
&= h_{ij}((-1)(-1))h_{ij}(-1)^{-1}h_{ij}(-1)^{-1} \\
&= h_{ij}(1)h_{ij}(-1)^{-1}h_{ij}(-1)^{-1} \\
&= h_{ij}(-1)^{-1}h_{ij}(-1)^{-1} \\
&= \left(h_{ij}(-1)h_{ij}(-1)\right)^{-1} \\
&= \left(w_{ij}(-1)w_{ij}(-1)w_{ij}(-1)w_{ij}(-1)\right)^{-1} \\
&= w_{ij}(-1)^{-1}w_{ij}(-1)^{-1}w_{ij}(-1)^{-1}w_{ij}(-1)^{-1} \\
&= w_{ij}(-(-1))w_{ij}(-(-1))w_{ij}(-(-1))w_{ij}(-(-1)) \\
&= w_{ij}(1)w_{ij}(1)w_{ij}(1)w_{ij}(1) \\
&= \left(w_{ij}(1)\right)^{4} \\
&= \left(x_{ij}^{1}x_{ji}^{-1}x_{ij}^{1}\right)^{4}\,.
\end{aligned}$$

Que por tanto

$$\{-1,-1\} = \left(x_{ij}^{1}x_{ji}^{-1}x_{ij}^{1}\right)^{4}\,,$$

y es así que

$$\begin{aligned}
\{-1,-1\}\{-1,-1\} &= \{(-1)(-1),(-1)(-1)\} \text{ por bimultiplicidad} \\
&= \{1,1\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

lo que muestra que $\{-1,-1\}\{-1,-1\} = \{-1,-1\}^2$ tiene orden 2. Por tanto $K_2(\mathbb{Z})$ es un grupo cíclico generado por $\{-1,-1\}$ y debido a la caracterización de los grupos cíclicos de orden finito tenemos que

$$K_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ .$$

■

Demostración de 4.4.1.3. La relación $w_{12}w_{21} = 1$ en $\mathbf{St}_n(\mathbb{Z})$ implica que el grupo $\mathfrak{W}_2$ es cíclico. Además $\phi\,(w_{12})$ tiene orden 4, el núcleo de ϕ esta generado por $(w_{12})^4$.

■

4.5. Teorema de Matsumoto

En esta sección, el principal objetivo es exhibir las ideas de la demostración del cálculo del grupo $K_2(\mathbb{F})$, donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo. El resultado al que estamos haciendo referencia se debe principalmente al aporte realizado por *Hideya Matsumoto* en 1969 y es comúnmente conocido como *teorema de Matsumoto*, ver en (Matsumoto, 1969).

Para cualquier cuerpo $\mathbb{F}$, H. Matsumoto, describió al grupo $K_2(\mathbb{F})$ mediante generadores y relaciones. Anteriormente en 4.3.23 hemos visto que $K_2(\mathbb{F})$ es generado por ciertos símbolos $\{x,y\}$ para $x,y \in \mathbb{F}^\times = \mathbb{F} - \{0\}$, y que para lo cual hemos hecho un estudio en los detalles que muestran la demostración en (Milnor, 1971). Habiendo dicho esto, lo que deseamos es estudiar el siguiente

Teorema 4.5.1 (Matsumoto) *El grupo abeliano $K_2(\mathbb{F})$ tiene una presentación, en términos de generadores y relaciones, de la siguiente manera. Los generadores $\{x,y\}$, con $x.y \in \mathbb{F}^\times$, están sujetos únicamente a las siguientes relaciones y a sus consecuencias:*

1. $\{x, 1-x\} = 1$ *para* $x \neq 0, 1$,
2. $\{x_1x_2, y\} = \{x_1, y\}\{x_2, y\}$,
3. $\{x, y_1y_2\} = \{x, y_1\}\{x, y_2\}$.

Idea de la demostración de 4.5.1

Brindaremos las ideas que giran entorno a la demostración del teorema 4.5.1. Previamente estudiamos que C_n, que es el núcleo de la extensión central

$$\mathbf{St}_n(\mathbb{F}) \longrightarrow SL_n(\mathbb{F}) ,$$

es generado por los símbolos $\{x, y\}$ (de Steinberg) correspondientes y satisfacen efectivamente 4.3.11, 4.3.18, 4.3.22 y 4.3.23. Y de acuerdo con tales resultados, una consecuencia inmediata es que $K_2(\mathbb{F}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

La demostración de 4.5.1 tiene a su base una reformulación de su enunciado usando los conceptos de *símbolos* que aparecen en el área de teoría de números. Entonces podemos embarcar camino a entender esta reformulación diciendo que

Definición 4.5.2 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo (conmutativo) y sea $\mathcal{A}$ un grupo abeliano. Un* símbolo de Steinberg *c o simplemente* símbolo *es una aplicación*

$$c : \mathbb{F}^{\times} \times \mathbb{F}^{\times} \longrightarrow \mathcal{A}$$

que satisface que

1. $c(x_1x_2, y) = c(x_1, y)c(x_2, y)$ *y* $c(x, y_1y_2) = c(x, y_1)c(x, y_2)$;
2. $c(x, y) = 1$ *para todo* $(x, y) \in \mathbb{F}^{\times} \times \mathbb{F}^{\times}$ *tal que* $x + y = 1$.

Desde luego podemos ahora reformular el enunciado de 4.5.1 como sigue

Teorema 4.5.3 (Teorema de Matsumoto usando símbolos) *Dado cualquier símbolo c sobre $\mathbb{F}^{\times}$, con valores en un grupo abeliano $\mathcal{A}$, satisfaciendo la identidad*

$$c(x, 1 - x) = 1 ,$$

existe uno y solamente un homomorfismo de $K_2(\mathbb{F})$ a $\mathcal{A}$, el cual lleva el símbolo $\{x, y\}$ a $c(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{F}^{\times}$.

¿Por qué usar símbolos? En primera instancia, se usa c para *construir* una extensión central

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow SL_n(\mathbb{F}) \longrightarrow 1 .$$

Ahora, para llegar a dicha extensión central, necesitamos hacer sistemáticamente lo siguiente:

1. Primero hacer la extensión central sobre el subgrupo D de $GL_n(\mathbb{F})$, el cual anteriormente denotamos como el subgrupo de las matrices diagonales;

2. luego la extensión se realiza sobre el grupo M de las matrices monomiales

3. y finalmente se realiza la extensión sobre el grupo $SL_n(\mathbb{F})$.

Paso 1

En primer término, como hemos indicado como bosquejo de lo que debe hacer, para realizar la extensión central sobre el subgrupo D, necesitamos construir

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow \mathfrak{H} \longrightarrow D \longrightarrow 1 ,$$

sea $\mathfrak{H} = D \times A$ y definamos la operación en $\mathfrak{H}$ como sigue:

$$(d,a)(d',a') = \left(dd', aa' \prod_{i \geq j} c(u_i, v_j) \right) .$$

donde $d = \operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_n)$ y $d' = \operatorname{diag}(v_1, \ldots, v_n)$.

Tomemos ahora

$$\phi : \mathfrak{H} \longrightarrow D$$

como la proyección canónica sobre la primera componente, es decir,

$$(d,a) \mapsto \phi(d,a) = d .$$

Vemos que

$$\begin{aligned} (d,a)(d',a') \mapsto \phi\left((d,a)(d',a')\right) &= \phi\left(dd', aa' \prod_{i \geq j} c(u_i, v_j) \right) \\ &= dd' \\ &= \phi(d,a)\phi(d',a') \end{aligned}$$

$\therefore \phi$ es en efecto un homomorfismo.

Ahora calculemos su núcleo,

$$\begin{aligned} ker\ \phi &= \{(d,a) \in \mathfrak{H} \ : \ \phi(d,a) = e_D = I\} \\ &= \{(d,a) \in \mathfrak{H} \ : \ d = e_D = I\} \\ &= \{(I,a) \in \mathfrak{H}\} \\ &= I \times A \,. \end{aligned}$$

Tomemos un $\lambda \in ker\ \phi = I \times A$ y elijamos un $\omega \in \mathfrak{H}$ arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda\omega &= (I,a)(x,y) \\ &= \left(Ix, ay \prod_{i \geq j} c(u_i, v_j)\right) \\ &= \left(xI, ya \prod_{i \geq j} c(u_i, v_j)\right) \quad y, a \in A \text{ y } A \text{ es abeliano.} \\ &= (x,y)(I,a) \\ &= \omega\lambda \end{aligned}$$

y esto implica que $\lambda \in \mathbf{Z}(\mathfrak{H})$. Por tanto, $ker\ \phi \subseteq \mathbf{Z}(\mathfrak{H})$. Y hemos comprobado que $(\mathfrak{H}, \phi)$ es una extensión central de D.

También tenemos dos resultados a partir de la extensión central de D.

Proposición 4.5.4 *Si $\phi(h) = diag(u_1, \ldots, u_n)$ y $\phi(k) = diag(v_1, \ldots, v_n)$, entonces $hkh^{-1}k^{-1}$ es igual al producto*

$$c(u_1, v_1)c(u_2, v_2) \ldots c(u_n, v_n)$$

Proposición 4.5.5 *Los símbolos $h_{ij}(u)$ satisfacen las identidades*

$$h_{ji}(u) = h_{ij}(u)^{-1} = h_{ik}(u)^{-1} h_{kj}(u)^{-1}$$

y

$$h_{ij}(u)h_{ij}(v) = c(u,v)h_{ij}(uv) \,.$$

y que podemos comprobar usando la propiedad antisimétrica del símbolo c y haciendo un tipo de distinción especial en los índices i y j que está detallado en (Milnor, 1971).

Paso 2

Habiendo abordado el primer paso, debemos ahora estudiar la extensión central del grupo de matrices monomiales. En este punto, la construcción es más laboriosa y quizás menos obvia que la anterior. Deseamos construir un grupo $\mathfrak{W}$ que contenga a $\mathfrak{H}$ y mapeando sobre el grupo de las matrices monomiales M. Como un primer paso construiremos un subgrupo $\mathfrak{W}_0$ generado por ciertos símbolos $w_{ij}(\pm 1)$. Hay dos posibilidades.

- *Caso 1.* Si $c(-1,-1) = 1$ definimos $\mathfrak{W}_0$ como el grupo M_0 que consiste de *matrices monomiales* en $SL_n(\mathbb{F})$ cuyas entradas distintas de cero son ± 1. Definimos $w_{ij}(1) = w_{ji}(-1)$ como la matriz monomial con entrada ij-ésima 1 y entrada ji-ésima -1, cuyas otras entradas distintas de cero son 1 a lo largo de la diagonal. Definimos $\phi_0 : \mathfrak{W}_0 \longrightarrow M_0$ como la aplicación identidad.

- *Caso 2.* Si $c(-1,-1) \neq 1$, entonces $\mathbb{F}$ debe ser un cuerpo de característica cero lo cual se argumento en 4.3.16. Por tanto $\mathbb{F}$ contiene al anillo $\mathbb{Z}$, y podemos identificar M_0 con el grupo de todas las matrices monomiales en $SL_n(\mathbb{Z})$. Sea $\mathfrak{W}_0$ el grupo *basado sobre* M_0 en la extensión central $\mathbf{St}_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow SL_n(\mathbb{Z})$. Así una aplicación natural $\phi_0 : \mathfrak{W}_0 \longrightarrow M_0$ está definida, y elementos $w_{ij}(\pm 1) \in \mathfrak{W}_0$ son definidos como en 4.4.

Es así que luego debemos relacionar este grupo $\mathfrak{W}_0$ al grupo $\mathfrak{H}$ definiendo una acción de $\mathfrak{W}_0$ sobre $\mathfrak{H}$. Además la acción de un elemento w_0 dependerá únicamente de $\phi_0(w_0)$, trabajaremos de primer momento con matrices monomiales.

Para cada permutación π de $\{1,\ldots,n\}$ sea p_π la matriz permutación asociada. Cada matriz monomial m puede ser escrita únicamente como el producto $p_\pi \mathrm{diag}(u_1,\ldots,u_n)$ de una matriz permutación y una matriz diagonal, dentro de $GL_n(\mathbb{F})$.

Proposición 4.5.6 *Para cada matriz monomial $m = p_\pi diag(u_1,\ldots,u_n)$ hay uno y sólo un automorfismo $\alpha(m)$ de $\mathfrak{H}$ el cual deja a A fijo puntualmente y lleva cada $h_{ij}(v)$ a $c(u_i u_j^{-1}, v) h_{\pi(i),\pi(j)}(v)$. Este automorfismo $\alpha(m)$ depende* homomorficamente *de m y coincide con el automorfismo interno $h \mapsto h_1 h h_1^{-1}$ cuando $m = \phi(h_1)$ es una matriz diagonal.*

A fin de construir un grupo $\mathfrak{W}$, generado por $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{W}_0$, también necesitamos descibir la intersección $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{W}_0$. Sea $\mathfrak{H}_0 \subset H$ el subgrupo generado por los símbolos $h_{ij}(-1)$. Éste subgrupo puede ser identificado con el subgrupo de $\mathfrak{W}_0$ generado por los símbolos correspondientes $d_{ij}(-1)$, en el caso que $\mathfrak{W}_0 \cong M_0$; o por los símbolos correspondientes $h_{ij}(-1)$ en el caso $\mathfrak{W}_0 \subset \mathbf{St}_n(\mathbb{Z})$.

Definición 4.5.7 *Sea $\mathfrak{W}$ el espacio $\mathfrak{H} \times \mathfrak{W}_0$ el cual es obtenido mediante la identificación de (hh_0, w_0) con (h, h_0w_0) para cada $h_0 \in \mathfrak{H}_0$. Definimos la operación producto en $\mathfrak{W}$ por*

$$(h, w_0)(h', w_0') = \left(h\left(w_0hw_0^{-1}\right), w_0w_0'\right) ,$$

usando la acción de $\mathfrak{W}_0$ sobre $\mathfrak{H}$ descrita en 4.5.6.

Proposición 4.5.8 *La operación producto en 4.5.7 es compatible con las identificaciones, y hace que el conjunto $\mathfrak{W}$ en un grupo. Además, definiendo $\phi : \mathfrak{W} \longrightarrow M$ mediante $\phi(h, w_0) = \phi(h)\phi(w_0)$, el grupo $\mathfrak{W}$ es una extensión central de M con kernel isomorfo a A.*

Sea T el grupo de las matrices triangulares superiores con ceros por debajo de la diagonal y unos sobre la diagonal.

Lema 4.5.9 *Cada matriz s en $SL_n(\mathbb{F})$ puede ser escrita como un producto tmt' con t y t' y m en M. A pesar de que las matrices t y t' no son determinadas de forma única, la matriz monomial m es únicamente determinada por s. Así una retracción*[2] *bien definida $\rho : SL_n(\mathbb{F}) \longrightarrow M$ está dada por la fórmula $\rho(tmt') = m$.*

Paso 3

Hasta acá nos hemos enfocado en dos de las tres observaciones. Estamos listos para dar la construcción ingeniosa de Matsumoto de una extensión central de $SL_n(\mathbb{F})$. Sea

$$\mathcal{X} \subset SL_n(\mathbb{F}) \times \mathfrak{W}$$

el conjunto de todos los pares (s, w) satisfaciendo la condición

$$\rho(s) = \phi(w) .$$

Además no hay manera obvia de hacer a este conjunto $\mathcal{X}$ en un grupo, hacemos algo más en su lugar. Sea G el grupo de las permutaciones de $\mathcal{X}$ el cual

[2]Sea X un espacio topológico y A un subespacio de X. Entonces un mapeo continuo $\rho : X \longrightarrow A$ es una *retracción* si la restricción de ρ a A es el mapeo identidad sobre A.

está generado por ciertas permutaciones $\lambda(h)$, $\mu(t)$ y η_α, definidas como lo hacemos en este momento.

Para cada $h \in \mathfrak{H}$ sea $\lambda(h)$ la permutación

$$\lambda(h)(s,w) = (\phi(h)s, hw)$$

del conjunto $\mathcal{X}$. Resulta ser claro que esta transformación preserva la condición $\rho(s) = \phi(w)$, y que λ mapea el grupo $\mathfrak{H}$ inyectivamente en el grupo de todas las permutaciones de $\mathcal{X}$.

Para cada $t \in T$ sea $\mu(t)$ denota la permutación

$$\mu(t)(s,w) = (ts, w)\ .$$

Claramente μ mapea a T inyectivamente en el grupo de las permutaciones de $\mathcal{X}$.

Para cada $\alpha = (i, i+1)$ sea η_α que denota la permutación definida haciendo $\eta_\alpha(s,w)$ igual tanto a $(m_\alpha(1)s, w_\alpha(1)w)$ a medida que $\rho\left(m_\alpha(1)s\right)$ es igual a $m_\alpha(1)\rho(s)$ ó $d_\alpha(u)^{-1}\rho(s)$. Claramente esta definición es elaborada para preservar la condición $\rho(s) = \phi(w)$. No es díficil ver que

$$\eta_\alpha\eta_\alpha = \lambda\left(h_{-\alpha}(-1)\right)\ ,$$

lo que muestra que η_α en efecto un permutación (se ha usado la identidad $c(u, -u) = 1$).

Éstas permutaciones $\lambda(h)$, $\mu(t)$ y η_α deben ciertamente generar algún subgrupo G del grupo de todas las permutaciones de $\mathcal{X}$.

Proposición 4.5.10 *Este grupo G actúa de modo **simplemente transitivo** sobre $\mathcal{X}$. En otras palabras, dado cualquier (s,w) y (s',w') en $\mathcal{X}$, hay uno y sólo un $g \in G$ con $g(s,w) = (s',w')$.*

Así como el prueba de 4.3.21, observamos que $SL_n(\mathbb{F})$ es generado por T y los elementos $m_\alpha(1)$. Así operando (s,w) por alguna sucesión de permutaciones $\mu(t)$ y η_α podemos ciertamente transformar la primera componente s de (s,w) a s'. Esto significa, podemos encontrar un $g_0 \in G$ con $g_0(s,w) = (s',w^*)$. Ahora ya que ambos (s',w') y (s',w^*) pertenecen a $\mathcal{X}$, concluimos que $w' = w^*$ módulo el subgrupo A de $\mathfrak{W}$. Por tanto operando sobre (s',w^*) por un $\lambda(a)$ adecuado obtenemos (s',w'). Esto prueba la existencia de g con $g(s,w) = (s',w')$.

Teorema 4.5.11 *El grupo G es una extensión central de $SL_n(\mathbb{F})$ con núcleo $\lambda(A) \cong A$.*

Conclusión

Ahora probaremos el teorema 4.5.1. Sea $c : \mathbb{F}^\times \times \mathbb{F}^\times \longrightarrow A$ un símbolo universal de Steinberg sobre el campo $\mathbb{F}$. En otras palabras sea A un grupo abeliano el cual está definido por generadores $c(u,v)$ sujetos únicamente a las relaciones

$$c(u_1u_2,v) - c(u_1,v)c(u_2,v), \;\; c(u,v_1v_2) - c(u,v_1)c(u,v_2)$$

y

$$c(u, 1-u) = 1$$

y a las consecuencias de éstas relaciones.

Sea $\{u,v\} \in K_2(\mathbb{F})$ el símbolo de Steinberg de la sección 4.3. Además $\{u,v\}$ es bimultiplicativo y satisface que $\{u,1-u\} = 1$, entonces existe uno y sólo un homomorfismo

$$\eta : A \longrightarrow K_2(\mathbb{F})$$

el cual lleva $c(u,v)$ a $\{u,v\}$ para todo u y v en $\mathbb{F}$. Lo que debemos probar es que η es un *isomorfismo*.

Sea

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow SL_n(\mathbb{F}) \longrightarrow 1$$

la extensión central universal del teorema 4.5.11. Pasando al límite directo cuando $n \to \infty$, obtenemos un extensión central correspondientes

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow SL(\mathbb{F}) \longrightarrow 1 \;.$$

Pero ya vimos que la extensión

$$1 \longrightarrow K_2(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbf{St}(\mathbb{F}) \longrightarrow SL(\mathbb{F}) \longrightarrow 1$$

es la extensión central universal de $SL(\mathbb{F})$. Es así que existe uno y sólo un homomorfismo

$$\xi : \mathbf{St}(\mathbb{F}) \longrightarrow G$$

el cual cubre a la identidad de $SL(\mathbb{F})$. Claramente ξ mapea $K_2(\mathbb{F})$ en A. Comparando con 4.5.4, y recordando que $\mathfrak{H} \cong \lambda(\mathfrak{H}) \subset G$, vemos que ξ lleva $\{u,v\}$ a $c(u,v)$ para todo u y v. Pero η lleva $c(u,v)$ a $\{u,v\}$ para todo u y v. Además $K_2(\mathbb{F})$ está generado por los símbolos $\{u,v\}$, y A está generado por los símbolos $c(u,v)$, y así completamos la prueba que $K_2(\mathbb{F}) \cong A$.

■

En (Dalawat, 2004) aparece un pregunta sumamente importante: ¿existe un símbolo *universal* $c : \mathbb{F}^\times \times \mathbb{F}^\times \longrightarrow \mathcal{U}_\mathbb{F}$ sobre $\mathbb{F}$? En otros términos, ¿existe un grupo conmutativo $\mathcal{U}_\mathbb{F}$ y un símbolo c sobre $\mathbb{F}$ con valores en $\mathcal{U}_\mathbb{F}$ tales que, dado cualquier símbolo $c' : \mathbb{F}^\times \times \mathbb{F}^\times \longrightarrow \mathcal{A}$ (siendo $\mathcal{A}$ un grupo conmutativo), existe un único homomorfismo $f : \mathcal{U}_\mathbb{F} \longrightarrow \mathcal{A}$ de grupos tal que $c' = f \circ c$? Claramente, si símbolo universal existe, es único, salvo isomorfismo.

La existencia de un símbolo universal no es difícil de ver: sólo tomemos $\mathcal{U}_\mathbb{F}$ como el cociente de $\mathbb{F}^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{F}^\times$ por el subgrupo generado por aquellos elementos $x \otimes y$ con $x, y \in \mathbb{F}^\times$ para lo cual $x + y = 1$.

Definición 4.5.12 *Sea $\mathbb{F}$ un campo. El símbolo universal sobre $\mathbb{F}$ es denotado por*

$$\{,\} : \mathbb{F}^\times \times \mathbb{F}^\times \longrightarrow K_2(\mathbb{F}) \, ,$$

o más precisamente por $\{,\}_\mathbb{F}$.

El teorema 4.5.1 junto a su genérico 4.5.3 sugieren una posible generalización algebraica del funtor $K_2(-)$ a dimensiones mayores: John Milnor definió en (Milnor, 1970) lo siguiente.

Definición 4.5.13 *Para cualquier cuerpo $\mathbb{F}$, el álgebra tensorial sobre $\mathbb{F}^\times$ es*

$$T_* \left(F^\times\right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} T_n \left(\mathbb{F}^\times\right) \ ,$$

donde $\mathbb{F}^\times$ es considerada como un grupo abeliano y

$$T_n \left(\mathbb{F}^\times\right) = \underbrace{\mathbb{F}^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{F}^\times \otimes_\mathbb{Z} \ldots \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{F}^\times}_{n \text{ veces}} \ .$$

En ésta álgebra, podemos considerar el ideal $\mathcal{I}$ generado por todos los elementos de la forma $u \otimes (1 - u)$ cuando $u \in \mathbb{F}^\times$. Entonces la *teoría K de Milnor* de $\mathbb{F}$ está definida por

$$K_*^M(\mathbb{F}) = T_* \left(\mathbb{F}^\times\right) / \mathcal{I} \, .$$

Para cada entero positivo n, los elementos de $K_n^M(\mathbb{F})$ son los símbolos $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ con los u_i en $\mathbb{F}^\times$ satisfaciendo las condiciones escritas multiplicativamente:

1. $\{u, u^{-1}\} = 1$,
2. $\{u, 1 - u\} = 1$,
3. $\{u, v\} = \{v, u\}^{-1}$.

Aplicaciones

El hecho que el grupo $K_2(\mathbb{F})$ es trivial para cada cuerpo finito $\mathbb{F}$ tendrá muchas consecuencias cuando K_2 sea relacionado con otros objetos, como formas cuadráticas, álgebras simples centrales (ASC), formas diferenciales, etcétera.

K_2 y formas cuadráticas

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo en el cual 2 es invertible.

Definición 4.5.14 *Un espacio cuadrático (regular) sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V (de dimensión finita) dotado con una forma bilineal simétrica b.*

Es posible elegir una base para V y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}^\times$ tales que tenemos

$$b(\gamma, \gamma) = a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2 + \cdots + a_n\gamma_n^2 \tag{4.16}$$

para todo $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ ($n = \dim\ V$) en V. Las *clases de isometría* de $\mathbb{F}$-espacios cuadráticos forman un monoide con suma directa ortogonal como la ley de la suma: este monoide es integral. El grupo correspondiente de las diferencias $\hat{\mathcal{W}}(\mathbb{F})$ es llamado el grupo de Grothendieck de $\mathbb{F}$. La clase de la forma 4.16 en $\hat{\mathcal{W}}(\mathbb{F})$ es denotada por $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle = \langle a_1\rangle + \langle a_2\rangle + \cdots + \langle a_n\rangle$. El producto tensorial sobre $\mathbb{F}$ vuelve a $\hat{\mathcal{W}}(\mathbb{F})$ en un anillo cuya multiplicación está caracterizada por $\langle xy\rangle = \langle x\rangle\langle y\rangle$ y donde $\langle 1\rangle$ es el elemento neutro. Tamando dimensiones nos da una sobreyección canónica de anillos $\dim : \hat{\mathcal{W}}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}$. Denotemos por $\hat{I}$ como el núcleo de éste aplicación, el cual se conoce como *ideal de aumentación*.

Sea $h = \langle 1, -1\rangle = \langle 1\rangle + \langle -1\rangle$ la clase del plano hiperbólico; esto corresponde a la espacio cuadrático $L \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(L, \mathbb{F})$, $(\gamma, \gamma^*) \mapsto \gamma^*(\gamma)$, donde L de un recta vectorial como $\mathbb{F}$-espacio vectorial. El subgrupo $\mathcal{H}$ generado por h es un ideal en $\hat{\mathcal{W}}(\mathbb{F})$ (un espacio cuadrático $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ "representa al 0" si, y solamente si, $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}\rangle + h$ para algún espacio cuadrático $\langle b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\rangle$); tenemos que $\mathcal{H} \cap \hat{I} = \{0\}$. El cociente $\mathcal{W}(\mathbb{F}) = \hat{\mathcal{W}}(\mathbb{F})/\mathcal{H}$ es llamado *anillo de Witt* de $\mathbb{F}$; la iamgen $I = \hat{I}/(H \cap \hat{I}) = \hat{I}$ del ideal $\hat{I}$ es un ideal maximal en $\mathcal{W}(\mathbb{F})$ con $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ como el cociente. Estamos principalmente interesados en la $\mathbb{F}_2$-álgebra graduada asociada al anillo filtrado

$$\cdots \subset I^3 \subset I^2 \subset I \subset \mathcal{W}(\mathbb{F})\ .$$

Existe un homomorfismo $c_1 : \mathbb{F}^\times \longrightarrow I/I^2$ dado por

$$c_1(x) = \langle x \rangle - \langle 1 \rangle \ .$$

Lema 4.5.15 ((Milnor, 1970)) *El mapeo $c_2(x,y) = s_1(x)s_1(y)$ es un símbolo con valores en I^2/I^3 sobre $\mathbb{F}$; el homomorfismo correspondiente de $K_2(\mathbb{F})$ es trivial sobre $2K_2(\mathbb{F})$.*

Existe por tanto un único homomorfismo de $\mathbb{F}_2$-álgebras graduadas

$$c : K(\mathbb{F})/2K(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \cdots \tag{4.17}$$

extendiendo c_1 y c_2.
Milnor mostró que el mapeo 4.5.15 es siempre sobreyectivo y conjeturó (1970) que este es biyectivo para todos los cuerpos $\mathbb{F}$ (en los cuales 2 es invertible). Él probó la biyectividad para cuerpos globales.
La conjetura finalmente fue probada por Orlov, Vishik y Voevodsky, en (Orlov, Vishik, y Voevodsky, 1996).

Teorema 4.5.16 ((Orlov y cols., 1996)) *El mapeo 4.5.15 es un isomorfismo de $\mathbb{F}_2$-álgebras graduadas.*

Continuando asumiendo que 2 es invertible en el cuerpo $\mathbb{F}$, sea $\overline{\mathbb{F}}$ una *clausura algebraica separable* de $\mathbb{F}$ y $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ el grupo de los automorfismos de $\overline{\mathbb{F}}$ sobre $\mathbb{F}$. Consideremos la sucesión exacta

$$\{1\} \longrightarrow \{1,-1\} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}^\times \longrightarrow \{1\}$$

de Γ-módulos discretos. La sucesión de cohomología larga asociada proporciona (al identificar al Γ-módulo $\{1,-1\} =_2 \overline{\mathbb{F}}^\times$ con $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) una inyección $\delta_1 : \mathbb{F}^\times/\mathbb{F}^{\times 2} \longrightarrow H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ el cual es un isomorfismo por el teorema 90 de Hilbert: $H^1(\Gamma, \overline{\mathbb{F}}^\times) = \{0\}$.

Lema 4.5.17 ((Tate, 1970)) *El mapeo $\delta_2(x,y) = \delta_1(x) \smile \delta_1(y)$ es un símbolo con valores en $H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{F}$; el homomorfismo correspondiente de $K_2(\mathbb{F})$ es trivial sobre $2K_2(\mathbb{F})$.*

Existe por tanto un homomorfismo único de $\mathbb{F}_2$-álgebras graduadas

$$\delta : K(\mathbb{F})/2K(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \cdots \tag{4.18}$$

extendiendo δ_1 y δ_2. Hemos visto que δ_1 es un isomorfismo; luego en 1981 Merkurjerv demostró que δ_2 es un isomorfismo. En 1970, Milnor demostró que δ es un isomorfismo cuando $\mathbb{F}$ es cuerpo finito, un cuerpo local, un cuerpo global o un cuerpo ordenado maximalmente. Su conjetura que mencionamos, que se refería a que éste es un isomorfismo para todos los cuerpos (en el que 2 es un elemento invertible), fue demostrada por Voevodsky en 1996 y obtuvo una medalla. Tiempo después, Rost y análogamente Merkurjev y Suslim probaron que δ_3 es un isomorfismo.

Teorema 4.5.18 ((Orlov y cols., 1996)) *El mapeo 4.18 es un isomorfismo de $\mathbb{F}_2$-álgebras graduadas.*

Una consecuencia de los teoremas 4.5.16 y 4.5.18, el anillo graduado asociado al anillo filtrado $\mathcal{W}(\mathbb{F})$ es canónicamente isomorfo al anillo de cohomología de los Γ-módulos $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Para ver hasta dónde llega este resultado, observar que los intentos previos para construir mapeos entre los dos ha sido éxitosa solamente en grados bajos o inferiores.

K_2 y álgebras simples centrales

Definición 4.5.19 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo (conmutativo). Un $\mathbb{F}$-álgebra (de dimensión finita, asociativa) $\mathcal{A}$ es llamada* simple *si los únicos ideales bilaterales de $\mathcal{A}$ son $\{0\}$ y $\mathcal{A}$.*

Definición 4.5.20 *Un $\mathbb{F}$-álgebra $\mathcal{A}$ se dice* central *si $\mathbb{F}$ es precisamente el centro de $\mathcal{A}$.*

Wedderburn demostró que cada $\mathbb{F}$-álgebra simple central $\mathcal{A}$ es isomorfo a la álgebra de matrices $M_n(D)$ de un cuerpo D (o dominio de integridad) sobre $\mathbb{F}$; el par (n, D) es únicamente determinado por $\mathcal{A}$, salvo isomorfismo. Dos tales álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ se dicen *similares* si los correspondientes cuerpos (dominios de integridad) con isomorfos. Las clases de similitud de $\mathcal{F}$-álgebras simples centrales forman un grupo $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$, conocido como el *grupo de Brouer de* $\mathbb{F}$ como producto tensorial como ley de multiplicación. Es un grupo de torsión, como un argumento de restricción-correstricción lo muestra.

El grupo $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ puede también ser visto como el grupo de las clases de $\mathbb{F}$-isomorfismo de $\mathbb{F}$-álgebras las cuales llegan a ser isomorfos, sobre una clausura algebraica separable $\overline{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}$, para $M_n\left(\overline{\mathbb{F}}\right)$ (algún n), con producto tensorial de álgebras dando una ley de grupo.

Ahora sea $n > 0$ un entero y asumamos que $\mathbb{F}$ contiene un raíz n-ésima primitiva α de 1, es decir, $\alpha \in \mathbb{F}^\times$ es de orden n, y así n es invertible en $\mathbb{F}$. Para $a, b \in \mathbb{F}^\times$, consideremos el $\mathbb{F}$-álgebra $\mathcal{A}_\alpha(a, b)$ con la presentación

$$x^n = a \quad y^n = b \quad xy = \alpha yx \ .$$

Es una $\mathbb{F}$-álgebra simple central cuya clase $c_\alpha(a, b) \in \mathfrak{B}(\mathbb{F})$ es anulada por n, es decir, pertenece a ${}_n\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ que es un grupo de n-torsión.

Lema 4.5.21 ((Tate, 1970)) *El mapeo $(a, b) \mapsto c_\alpha(a, b)$ es un símbolo con valores en ${}_n\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ sobre $\mathbb{F}$.*

Teorema 4.5.22 ((Merkurjev y Suslin, 1982)) *El mapeo asociado es un isomorfismo*

$$K_2(\mathbb{F})/nK_2(\mathbb{F}) \longrightarrow_n \mathfrak{B}(\mathbb{F}) \ .$$

Así cada álgebra simple central cuya clase es anulada por n es similar a un producto de álgebras en la de presencia de las raíces n-ésimas de 1. Al elegir a α como una raíz primitiva n-ésima de 1 en $\mathbb{F}$ nos permite identificar a ${}_n\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ con $H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. El lema implica que existe un único homomorfismo de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-álgebras graduadas

$$\delta_\alpha : K(\mathbb{F})/nK(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \cdots \quad (4.19)$$

la cual se restringe al símbolo c_α sobre $\mathbb{F}^\times \times \mathbb{F}^\times$. Pero veamos lo que sucede cuando una primitiva raíz n-ésima de 1 puede no estar a disposición en $\mathbb{F}$. Más generalmente, sin asumir la existencia de una raíz primitiva n-ésima de 1 en $\mathbb{F}$ pero simplemente que n es invertible en $\mathbb{F}$, tenemos una sucesión exacta

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1) \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}^\times \xrightarrow{O^n} \overline{\mathbb{F}}^\times \longrightarrow \{1\}$$

de Γ-módulos discretos, donde $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1) =_n \overline{\mathbb{F}}^\times$ es el grupo de las raíces n-ésimas de 1 en $\overline{\mathbb{F}}^\times$ con su Γ-acción natural. La sucesión exacta larga de cohomología y el teorema 90 de Hilbert proporciona un isomorfismo $\delta_1 : \mathbb{F}^\times/\mathbb{F}^{\times^n} \longrightarrow H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))$. Considerando el producto *cup* sobre la cohomología

$$\smile : H^r(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \times H^s(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(s)) \longrightarrow H^{r+s}(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r+s))$$

que da un mapeo bilineal $\delta_2 : \mathbb{F}^\times/\mathbb{F}^{\times^n} \times \mathbb{F}^\times/\mathbb{F}^{\times^n} \longrightarrow H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2))$.

Lema 4.5.23 ((Tate, 1970)) *El mapeo $\delta_2(x, y) = \delta_1(x) \smile \delta_1(y)$ es un símbolo sobre $\mathbb{F}$.*

Eligiendo una raíz n-ésima primitiva α de 1 cuando existe una en $\mathbb{F}$, y usando eso para identificar los grupos ${}_n\mathfrak{B}(\mathbb{F})$, $H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ y $H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$, el símbolo δ_2 se vuelve el mismo como el símbolo c_α del lema 4.5.21. El mapeo (4.19) asociado a c_α es así el mismo en este caso como el de la

Conjetura 4.5.24 ((Bloch y Kato, 1986)) *El homomorfismo asociado de las* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$*-álgebras graduadas*

$$\delta : K(\mathbb{F})/nK(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) \oplus H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)) \oplus \cdots \tag{4.20}$$

es un isomorfismo para todos los cuerpos $\mathbb{F}$ *en los cuales* n *es invertible.*

El teorema principal de (Merkurjev y Suslin, 1982) dice que el mapeo $\delta_2 : K_2(\mathbb{F})/nK_2(\mathbb{F}) \longrightarrow H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$ es siempre un isomorfismo; Tate probó en 1976 esto para cuerpos globales. Mientras que Bloch, Gabber y Kato probaron esta conjetura cuando $\mathbb{F}$ es un cuerpo de característica 0 dotado con una evaluación discreta de característica residual $p \neq 0$ y n es una potencia de p.

La conjetura de *Bloch-Kato* hace una predicción muy importante de el álgebra graduada $\bigoplus\limits_r H^r(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$ es generada por elementos de grado 1. Por lo tanto, los grupos de Galois deberían ser muy especiales entre los grupos profinitos a este respecto.

K_2 y extensiones abelianas

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo, $\widetilde{\mathbb{F}}$ la *extensión abeliana* maximal de $\mathbb{F}$ y $\Gamma = \mathrm{Gal}\left(\widetilde{\mathbb{F}}|\mathbb{F}\right)$ el grupo (conmutativo, profinito) de los $\mathbb{F}$-automorfismos de $\widetilde{\mathbb{F}}$.
Asumamos que $\mathbb{F}$ es finito. Sabemos que entonces existe un mapeo natural $\rho : K_0(\mathbb{F}) = \mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma$, dado por $n \mapsto \varphi^n$ donde φ es el automorfismo $x \mapsto x^q$, $q = \mathrm{Card}\mathbb{F}$. La imagen de ρ es densa en Γ.

Luego, sea $\mathbb{F}$ un cuerpo local, es decir, una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$ (p primo) o un cuerpo isomorfo a $\mathbb{K}((T))$ donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo finito. Entonces existe un mapeo natural

$$\rho : K_1(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^\times \longrightarrow \Gamma$$

cuya imagen es densa en Γ. Este mapeo y sus propiedades forman el contenido esencial de la *teoría de extensiones abelianas de cuerpos locales*.

Lo que acabamos de ver son las versiones en las dimensiones 0 y 1 de una teoría general de cuerpos locales de dimensión n. Tal cuerpo $\mathbb{F}$ ($n > 1$) es *completo* con respecto a una evaluación discreta cuyo cuerpo residual es un cuerpo local de dimensión $n-1$.

Teorema 4.5.25 ((Kato y Saito, 1986)) *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo local de dimensión n. Existe un homomorfismo natural*

$$\rho : K_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \Gamma = Gal\left(\widetilde{\mathbb{F}}|\mathbb{F}\right)$$

cuya imagen es densa.

Además, este "mapeo de reciprocidad" es compatible con las normas de extensiones abelianas finitas. Así para un cuerpo local $\mathbb{F}$ de dimensión 2, el grupo Gal $\left(\widetilde{\mathbb{F}}|\mathbb{F}\right)$ es generado por elementos de la forma $\rho(\{x,y\})$ $(x, y \in \mathbb{F}^\times)$, y todas las relaciones entre estos elementos son consecuencias de la bilinealidad y "$\{x,y\} = 1$ cuando $x + y = 1$".

K_2 y la unicidad de las leyes de reciprocidad

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo local distinto de $\mathbb{C}$ y sea $\mu(\mathbb{F}) =_\infty \mathbb{F}^\times$ el grupo de las raíces de 1 en $\mathbb{F}$. Éste grupo es cíclico y su orden m es invertible en $\mathbb{F}$. Consideremos la extensión $L = \mathbb{F}\left(\sqrt[m]{\mathbb{F}^\times}\right)$ de $\mathbb{F}$; es una extensión abeliana maximal de exponente m. Esto es de grado finito como subgrupo cerrado ${\mathbb{F}^\times}^m \subset \mathbb{F}^\times$ de índice finito.

El cociente $\mathbb{F}^\times/{\mathbb{F}^\times}^m$ admite *dos* descripciones. Primero, por la teoría de extensiones abelianas de cuerpos locales, el cociente es isomorfo al grupo $G = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{F})$ de $\mathbb{F}$-automorfismos de L. Por otro lado, obtenemos un isomorfismo

$$\delta : \mathbb{F}^\times/{\mathbb{F}^\times}^m \longrightarrow H^1(G, \mu(G))$$

a partir de la sucesión exacta corta

$$\{1\} \longrightarrow \mu(\mathbb{F}) \longrightarrow L^\times \xrightarrow{O^m} L^\times \longrightarrow \{1\}$$

de G-módulos discretos. Como la acción de G sobre $\mu(\mathbb{F})$ es trivial. tenemos $H^1(G, \mu(\mathbb{F})) = \mathrm{Hom}(G, \mu(\mathbb{F}))$. Así obtenemos un isomorfismo

$$\mathbb{F}^\times/{\mathbb{F}^\times}^m \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(\mathbb{F}^\times/{\mathbb{F}^\times}^m, \mu(\mathbb{F})\right) \ ,$$

es decir, una dualidad perfecta de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-módulos. El correspondiente mapeo bilineal

$$(-,-)_\nu : \mathbb{F}^\times \times \mathbb{F}^\times \longrightarrow \mu(\mathbb{F})$$

pasa a ser un símbolo, conocido como "símbolo residual de norma" traducido literalmente de "norm residue symbol" o todavía más conocido como *símbolo de Hilbert*. Este símbolo es un *símbolo continuo universal* sobre $\mathbb{F}$ el cual es un resultado que demostró Calvin Moore. Además, ésto muestra que el mapeo sobreyectivo natural

$$K_2(\mathbb{F}) \longrightarrow \mu(\mathbb{F})$$

admite una sección y su núcleo es un grupo divisible de forma única, cuya demostración debemos a Tate y a Merkurjerv. De hecho, para cualquier divisor d de m obtenemos un símbolo continuo con valores en ${}_d\mu(\mathbb{F})$ sobre $\mathbb{F}$ al elevar el símbolo residual de la norma a la potencia n/d. Ahora sea $\mathbb{F}$ un cuerpo global, $\mu(\mathbb{F}) \subset \mathbb{F}^\times$ el grupo de las raíces de 1 en $\mathbb{F}$ y, para cada elemento real o ultramétrico ν de $\mathbb{F}$, sea $\mu(\mathbb{F}_\nu)$ el grupo de las raíces de 1 en el cuerpo local $\mathbb{F}_\nu$. Poner $m = \mathrm{Card}(\mathbb{F}_\nu)$, $m_\nu = \mathrm{Card}\mu(\mathbb{F}_\nu)$; m divide a m_ν para cada ν. Tenemos también que los elementos *imaginarios* de $\mathbb{F}$ no desempeñan ninguna función en lo que sigue: $\mathbb{C}^\times$ es conexo y por tanto el símbolo continuo universal sobre $\mathbb{C}$ es trivial.

Consideremos a $\bigoplus_\nu \mu(\mathbb{F}_\nu)$; donde ν recorre a los elementos reales o ultramétricos de $\mathbb{F}$. Tenemos un homomorfismo natural de esta suma directa a $\mu(\mathbb{F})$ en la ν-ésima componente es el mapeo $\beta \mapsto \beta^{\frac{m_\nu}{m}}$. También, para $x, y \in \mathbb{F}^\times$, tenemos $(x,y)_\nu = 1$ para casi todo ν. Así conseguimos una sucesión

$$K_2(\mathbb{F}) \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_\nu \mu(\mathbb{F}_\nu) \longrightarrow \mu(\mathbb{F}) \longrightarrow 1\ . \tag{4.21}$$

La ley de reciprocidad "explícita" nos dice que está sucesión es un complejo. Tate probó que la sucesión (4.21) es exacta para $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$. En general, uno tiene una "ley de reciprocidad única" en el siguiente sentido:

Teorema 4.5.26 ((Chase, 1972)) *La sucesión (4.21) es exacta para cada cuerpo global* $\mathbb{F}$.

Cuando $\mathbb{F}$ es un cuerpo de característica p, Tate probó que *ker* (λ) es un grupo finito de orden primo para p. Para cuerpos de números, la finitud de *ker* (λ) fue probada por Brumer en el caso abeliano real completamente y por Garland en general, como una consecuencia de su teorema, en cuya prueba usó geometría riemanniana y formas ármonicas, sobre el anulamiento e $H^2(SL_n(\mathfrak{O}), \mathbb{R})$ $(n > 6)$ para el anillo de los enteros $\mathfrak{O}$ de $\mathbb{F}$. Ahora estos resultados finitos son corolarios de los resultados generales de Quillen.

K_2 y los valores especiales de funciones L (L-functions)

Sea $\mathcal{C}$ una curva absolutamente conexa, proyectiva, suave sobre $\mathbb{Q}$ de género $g > 1$. Sea $\mathcal{N}$ el conductor y $L(\mathcal{C}, s)$ la L-función o función L asociada la Gal $(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$-representación $H^1\left(\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l\right)$, para cualquier número primo l. $L(\mathcal{C}, s)$ converge cuando la parte real de s es mayor que $\frac{3}{2}$.

Conjetura 4.5.27 *La función*

$$\Lambda(\mathcal{C}, s) = \frac{\mathcal{N}^{s/2}}{(2\pi)^{gs}} \Gamma(s)^g L(\mathcal{C}, s)$$

admite una continuación analítica en todo $\mathbb{C}$ *y satisface la ecuación funcional*

$$\Lambda(\mathcal{C}, s) = \omega \Lambda(\mathcal{C}, s - 2),$$

con $\omega = +1$ *ó* $\omega = -1$.

Se seguiría que $\Lambda(\mathcal{C}, 0) \in \mathbb{R}^{\times}$. La conjetura es verdadera para curvas modulares. Es también verdadera para curvas de género 1, como un resultado de los trabajos de Wiles y otros mostrando que todas la $\mathbb{Q}$-curvas elípticas son cocientes (de los jacobianos) de curvas modulares. Nos interesa mucho el valor especial de $\Lambda(\mathcal{C}, 0)$.

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\mathcal{C})$ el cuerpo de las funciones de $\mathcal{C}$. Esto es también el cuerpo de funciones de cualquier haz sobre $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$-haz) plano, propio, regular cuya fibra genérica es $\mathcal{C}$. Fijemos ahora un haz Σ. Cada punto P de Σ da origen a una evaluación discreta ν_P de $\mathbb{F}$ y por tanto a un homomorfismo

$$h_P : K_2(\mathbb{F}) \longrightarrow k(P)^{\times} \ ,$$

donde $k(P)$ es un cuerpo residual en P. Denotamos por $K_2(\mathcal{C}, \mathbb{Z})$ a la intersección de núcleos de todos éstos homomorfismos; $K_2(\mathcal{C}, \mathbb{Z})$ es independiente del haz Σ. Pongamos $K_2(\mathcal{C}, \mathbb{Q}) = K_2(\mathcal{C}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Conjetura 4.5.28 *El espacio vectorial* $K_2(\mathcal{C}, \mathbb{Q})$ *es* g*-dimensional.*

Sea $X = \mathcal{C}(\mathbb{C})$ un curva analítica compleja deducida a partir de C. Esto es una superficie orientable conexa compacta de género g y viene dotada con una involución real analítica, inducida por la conjugación compleja.

Para $(f,g) \in \mathbb{F}^\times \times \mathbb{F}^\times$, recordemos que $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\mathcal{C})$, consideremos la 1-forma

$$\nu_{f,g} = \log|f| d\mathrm{Arg}(g) - \log|g| d\mathrm{Arg}(f) \tag{4.22}$$

sobre el complemento in X de los divisores de f y g; es bilineal en f y g. Esta 1-forma es cerrada, como $d\nu_{f,g}$ es la parte imaginaria de $d\log(f) \wedge d\log(g)$, lo cual se anula.

Sea S un subconjunto finito de X y ω una 1-forma cerrada (suave) sobre $X - S$. Para cualquier lazo suave orientado γ en $X - S$, tenemos el número

$$(\gamma, \omega)_{X,S} = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \omega$$

el cual depende solamente sobre la clase de γ en $H_1(X - S, \mathbb{Z})$.

Sean $f, g \in \mathbb{F}^\times$ tales que $f + g = 1$ y tomar a S como el complemento en X de los divisores de f, g. Tenemos que $(\gamma, \nu_{f,g})_{X,S} = 0$, puesto que $\nu_{f,g} = dD(f)$, donde D es la función dilogaritmo, una función real analítica de $z \neq 0, 1$ en $\mathbb{C}$:

$$D(z) = \mathrm{Arg}(1-z)\log|z| - \mathrm{Im}\left(\int_0^z \log(1-t)\frac{dt}{t}\right) .$$

Además, para $s \in S$, sea γ_s un lazo suave alrededor de s en X, y sea $f, g \in \mathbb{F}^\times$. Se puede comprobar que

$$\left(\gamma_s, \nu_{f,g}\right)_{X,S} = \log|t_s(\{f,g\})| ,$$

donde t_s es el símbolo en el lugar de $\mathbb{F}$ determinado por s. Así, si $\{f,g\}$ pasa a pertenecer en $K_2(\mathcal{C}, \mathbb{Z})$, entonces $\left(\gamma_s, \nu_{f,g}\right)_{X,S} = 0$ para cada $s \in S$. Así obtenemos un par

$$\langle -, - \rangle : H_1(X, \mathbb{Z}) \times K_2(\mathcal{C}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Los invariantes de $H_1(X,\mathbb{Z})^+$ bajo la conjugación compleja pertencen en el núcleo izquierdo de $\langle -, - \rangle$. Esta es la restricción a los "anti-invariantes" lo cuales dan un "mapeo regulador":

$$\langle -, - \rangle : H_1(X, \mathbb{Q})^- \times K_2(\mathcal{C}, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{R} , \tag{4.23}$$

viniendo cuando integramos la 1-forma contra los 1-ciclos, como se ha visto. Observar que $\dim H_1(X, \mathbb{Q})^- = g$.

Conjetura 4.5.29 *El par $\langle -, - \rangle$ (4.23) es perfecto.*

Eligiendo las $\mathbb{Q}$-bases para $H_1(X, \mathbb{Q})^-$ y $K_2(\mathcal{C}, \mathbb{Q})$, el par (4.23) da una matriz en $GL_g(\mathbb{R})$. La clase de sus determinantes en $\mathbb{R}^\times/\mathbb{Q}^\times$ es independiente de la elección de las $\mathbb{Q}$-bases.

Conjetura 4.5.30 *El determinante de (4.23) es igual a $\Lambda(\mathcal{C}, 0)$ en $\mathbb{R}^\times/\mathbb{Q}^\times$.*

Una versión débil ha sido probada para curvas elipticas teniendo multiplicación compleja. Similares conjeturas han sido avanzadas para curvas sobre cualquier cuerpo de números. La comprobación numérica sea ha llevado a cabo en algunos casos.

Referencias

Referencias

Anderson, F. W., y Fuller, K. R. (1992). *Rings and categories of modules* (2.ª ed., Vol. 13). Springer-Verlag; Graduate texts in mathematics.

Arlettaz, D. (2000). *Algebraic K-theory of rings from a topological viewpoint*. Publicacions matemàtiques, JSTOR.

Atiyah, M. F. (1967). *K-theory* (D. W. Anderson, Ed.). W.A. Benjamin New York.

Atiyah, M. F., y MacDonald, I. G. (1969). *Introduction to commutative algebra*. Adisson-Wesley Publishing Company.

Barr, M., Grillet, P. A., y van Osdol, D. H. (1971). *Exact categories and categories of sheaves* (A. Dold y B. Eckmann, Eds.). Springer.

Bass, H. (1968). *Algebraic K-theory*. W.A. Benjamin, Inc. New York-Amsterdam.

Bloch, S., y Kato, K. (1986). *p-adic étale cohomology*. Inst. Hautes Études sci. Publ. Math.

Borceux, F. (1994). *Handbook of categorical algebra 1: Basic category theory*. Cambridge University Press.

Cartan, H., y Eilenberg, S. (1956). *Homological algebra*. Princeton University Press.

Chase, W. W., Stephen U. (1972). Moore's theorem on uniqueness of reciprocity laws. *Inventiones mathematicae*, *16*, 267-270.

Dalawat, C. S. (2004). *Some aspects of the functor K_2 of fields* (Vol. 21). Journal of the Ramanujan Mathematical Society.

Fuchs, L. (1970). *Infinite abelian groups* (Vol. 1; S. Eilenberg y H. Bass, Eds.). Academic press.

Gruenberg, K. W. (1970). *Cohomological topics in group theory* (Vol. 143; A. Dold y B. Eckmann, Eds.). Springer.

Kashiwara, M., y Schapira, P. (2005). *Categories and sheaves* (Vol. 332). Springer; Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.

Kato, K., y Saito, S. (1986). *Global class field theory for arithmetic schemes*. Contemp. Math. Part I.

Kuku, A. (2007). *Representation theory and higher algebraic K-theory*. Chapman & Hall/CRC Press.

Mac Lane, S. (1998). *Categories for the working mathematician* (2.ª ed.). Springer.

Magurn, B. A. (2002). *An algebraic introduction to K-theory*. Cambrigde University Press.

Matsumoto, H. (1969). *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.

Merkurjev, A., y Suslin, A. (1982). *K-cohomology of severi-brauer varieties and the norm residue homomorphism,*. Mathematics of the USSR-Izvestiya.

Milnor, J. (1970). *Algebraic K-theory and quadratic forms* (Vol. 9). Inventiones mathematicae - Springer Verlag.

Milnor, J. (1971). *Introduction to algebraic K-theory*. Princeton University Press & University of Tokyo Press.

Mitchell, B. (1965). *Theory of categories* (Vol. 17; S. Eilenberg y H. Bass, Eds.). Academic Press.

Northcott, D. (1960). *An introduction to homological algebra*. Cambridge Academic Press, New York.

Orlov, D., Vishik, A., y Voevodsky, V. (1996). *An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms*. Prepint en `Arxiv`.

Pareigis, B. (1970). *Categories and functors* (Vol. 39; S. Eilenberg y P. A. Smith, Eds.). Academic Press New York – London.

Rosenberg, J. (1995). *Algebraic K-theory and its applications* (Vol. 147). Springer Science & Business Media.

Silvester, J. R. (1981). *Introduction to algebraic K-theory*. Chapman and Hall London.

Stammbach, U., y Hilton, P. J. (1971). *A course in homological algebra*. Spinger-Verlag, Graduate Texts in Mathematics 4.

Steinberg, R. (1968). *Lectures on Chevalley groups* (N. prepared by John Faulkner y R. Wilson, Eds.). Yale University.

Swan, R. G. (1968). *Algebraic K-theory* (Vol. 76). Springer.

Tate, J. (1970). *Symbols in arithmetic* (Vol. Tomo 1). Actes du Congrès International des Mathématiciens.

Weibel, C. A. (1994). *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press.

Weibel, C. A. (2013). *The K-book* (Vol. 145). American Mathematical Society Providence, Rhode Island.