Universidad de El Salvador

Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Matemática

LA CONEXIÓN DE LEVI-CIVITA

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Licenciada en Matemática

PRESENTA:
Br. Karla María Posada Menjivar, PM08067

DIRECTOR DEL TRABAJO:
Lic. Ernesto Américo Hidalgo Castellanos

Ciudad universitaria
28 de agosto de 2017

ASESOR:

Lic. Ernesto Américo Hidalgo Castellanos

Dedicatoria

La muerte es un misterio
y el entierro, un secreto.
E. King.

A mis hijos Jefferson y Tatiana por ser mi fuente de motivación e inspiración para poder superarme cada dia más y así poder luchar para que la vida nos depare un futuro mejor.

A mi esposo Armando, que siempre estuvo dandome palabras de aliento cuando todo era cuesta arriba, por regalarme lo más preciado en nuestras vidas (nuestros hijos), gracias por el amor, apoyo, constancia y sobre todo por la paciencia.

A mis padres y hermanos quienes con sus palabras no me dejaban decaer para que siguiera adelante y siempre sea perseverante y cumpla con mis ideales.

A mis compañeros y amigos presentes y pasados quienes sin esperar nada a cambio compartierón su conocimiento, alegrias y tristezas y a todas aquellas personas que durante estos años lograrón que este sueño se hiciera realidad.

Agradecimientos

En primer lugar, a mi director de Tesis, Lic. Ernesto Américo Hidalgo, mi más amplio agradecimiento por haberme confiado este trabajo, por su paciencia ante mi inconsistencia, por su valiosa dirección y apoyo para seguir este camino de Tesis y llegar a la conclusión del mismo. Cuya experiencia y educación han sido mi fuente de motivación y de curiosidad durante estos años.

Un especial agradecimiento a Any, gracias por ser mi chica y estar siempre a mi lado.

Me gustaría agradecer a mis profesores durante toda mi carrera ya que todos han aportado con un granito de arena a mi formación, es especial a MSc. Adony Sifontes, MSc. Gabriel Chicas, Lic. Mynor Ademar y al Ing. Carlos Canjura por su amistad y enseñanza.

De igual manera agradecer a mis compañeros: Saúl, Wilner, Ingrid, Kalita, Maury, Chelito, Carlos, Jenny, Mario, Jorge, Javichocho, Pedro, Cidia, y otros que están en mis pensamientos.

Y por último al Ing. Hernán Lemus, por su apoyo, su enseñanza, amistad y sobre todo por enseñarme que todo es posible, aunque ya no este con nosotros siempre lo tendré en mis pensamientos.

Karla Posada

¡Muchas gracias a todos!

Índice general

Resumen

La geometría semi-riemanniana es una rama de la geometría de Riemann, la cual tiene como base la geometría diferencial.
Clásicamente la geometría diferencial define las variedades diferenciales, que en geometría semi-riemanniana están dotados de un tensor metrico $(0,2)$ diferenciable, simetrico y no degenerado en cada punto de la variedad.
El término derivada covariante se utiliza a menudo para la conexión de Levi-Civita y la expresión en coordenadas de dicha conexión es utilizando los símbolos de Christoffel.

Introducción

El presente trabajo está estructurado en cuatro capítulos.
En el Capítulo I esta la teoría básica necesaria para la construcción de las variedades diferenciables, así como la variedad producto y los teoremas de la función inversa e implícita necesarias para sustentar dicha teoría. Se dan varios ejemplos para ilustrar la construccion de las diferentes variedades y clasificar grupos ya conocidos.
Luego, en el Capítulo II, desarrollamos los conceptos de función diferenciable, vectores tangentes a una variedad y a un punto para luego definir el espacio tangente y cotangente, el primero dotado de espacios vectoriales y el segundo de *1-formas*.
En el Capítulo III se muestra la importancia que tienen los campos vectoriales al momento de definir los tensores, aquí los tensores estan formados por campos vectoriales y por *1-formas*, antes de finalizar el capítulo introducimos las formas bilineales simetricas las que nos serán de utilidad al momento de establecer una metrica.
Para terminar introducimos el concepto de producto escalar y definimos el dual de un campo vectorial como dicho campo provisto de un producto interno.
En el último capítulo comenzamos definiendo el corchete de Lie, así como sus propiedades, luego hablamos de las isometrias como una aplicación que conserva distancias y tensores metricos.
Las variedades semi-riemannianas son aquellas provistas de una metrica, donde dicha metrica no es más que un $(0,2)$ tensor simetrico nodegenerado que esta definido por una forma bilineal, luego para derivar dos campos vectoriales definimos una conexión a la que llamaremos de Levi-Civita, que es la unica libre de torsión y además no depende del campo vectorial elegido, y terminamos con algunos ejemplos en los que encontramos la conexión de Levi-Civita utilizando los símbolos de Christoffel.

Metodología

Para cumplir satisfactoriamente con los objetivos propuestos en esta investigación se seguirán las siguientes etapas:

I. **Revisión bibliográfica:** Se indagará en diferentes libros, artículos y revistas de divulgación matemática, con la finalidad de conocer y relacionar los enfoques de cada autor, se espera tener un libro o documento como base, sin embargo es importante aclarar que se tendrá un banco de documentos que facilite el acceso a la información para superar dudas que se presenten durante la investigación.

II. **Demostración de los principales teoremas:** Se demostrarán con la mayor cantidad de detalles posible cada uno de los resultados enunciados, especialmente aquellos que fundamentan los resultados principales que se desean establecer.

III. **Forma de Trabajo.** Se realizarán reuniones periódicas con el Docente Director del trabajo, para discutir todos los aspectos de la investigación sobre el trabajo escrito y las presentaciones que se realizarán.

IV. **Exposiciones**. Se realizarán dos exposiciones:

- Primera exposición: presentación del perfil del trabajo de investigación.
- Segunfa exposición: presentación final del trabajo de investigación.

Capítulo 1

Variedades diferenciales

En este capítulo introduciremos una importante noción de las variedades diferenciables. Generalización de curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$ estudiado en la geometría diferencial clásica. Nuestras variedades tienen el modelo de las estructuras diferenciables de series en los espacios vectoriales a través de cartas locales compatibles. Damos muchos ejemplos, estudiando sus subvariedades y mapeos diferenciables.
Sea $\mathbb{R}^m$ el espacio vectorial real m-dimensional estándar dotado con la topología inducida por la métrica euclidiana dada por

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_m - y_m)^2}.$$

Para un entero r no negativo y un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^m$, los mapeos de la forma $C^r(U, \mathbb{R}^m)$ denotan los mapeos r-veces continuamente diferenciables de U en $\mathbb{R}^n$.
Por transformaciones **suaves** $U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ nos referimos a los elementos de

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{r=0}^{\infty} C^r(U, \mathbb{R}^m).$$

El conjunto de transformaciones **analíticas suaves** U de $\mathbb{R}^m$ lo denotamos por $C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$.

Definición 1.1 (*Curva parametrizada regular en $\mathbb{R}^m$.*)
Sea $I \in \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^m$ es una aplicación diferenciable $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^\infty$. La curva γ se dice que es regular si $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Definición 1.2 (*Superficie regular en $\mathbb{R}^m$.*)
Una superficie (diferenciable) regular en $\mathbb{R}^m$ es un subconjunto $S \in \mathbb{R}^m$ tal que para todo punto de S existe un entorno V del punto en S (con la topología relativa) y una aplicación $X : U \in \mathbb{R}^m \longrightarrow V$, U abierto, satisfaciendo las siguientes propiedades:
1) X es un homeomorfismo[1]*,*

[1] Función inyectica y continua con inversa continua

2) $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es diferenciable,*
3) dX *tiene rango 2 en todos los puntos de* U*.*

Como vemos por la definición anterior, que formalmente es idéntica a la correspondiente para superficies del espacio euclídeo tridimensional, la única diferencia consiste en la ampliación del espacio donde *vive* la superficie.

Definición 1.3 (*Carta.*)
Sea M *un conjunto. Una carta m-dimensional sobre* M *es una aplicación biyectiva* $\varphi : U \in M \to \mathbb{R}^m$ *cuya imagen* $V = \varphi(U)$ *es un conjunto abierto del espacio euclídeo.*

El conjunto U, dominio de la carta φ, se denomina *entorno coordenado*, ya que todos los puntos de U tienen asignadas, via φ, unas coordenadas.
En efecto, si $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ denota la función proyección en la i-ésima coordenada, entonces se definen las *funciones coordenadas* asociadas a la carta (U, φ) como $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Entonces, las coordenadas de un punto p en la carta φ son $(x_1(p), \ldots, x_m(p))$.
Al igual que ocurre con las superficies, hay conjuntos que no pueden cubrirse mediante una sola carta, de modo que necesitaremos colecciones de cartas entre las que exista cierta compatibilidad.

Definición 1.4 (*Cartas compatibles.*)
Dos cartas m-dimensionales (U, φ) *y* (V, ψ) *sobre un conjunto* M *son compatibles si* $U \cap V = \emptyset$ *o bien* $U \cap V \neq \emptyset$*, los conjuntos* $\varphi(U \cap V)$ *y* $\psi(U \cap V)$ *son abiertos de* $\mathbb{R}^m$ *y las aplicaciones* $\psi \circ \varphi^{-1}$ *y* $\varphi \circ \psi^{-1}$ *son difeomorfismos (de clase* $\mathcal{C}^\infty$*).*

Ahora estamos en condiciones de definir uno de los conceptos fundamentales de este capítulo.

Definición 1.5 (*Estructura diferenciable.*)
Un atlas diferenciable m-dimensional sobre un conjunto M *es una familia de cartas* $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ *satisfaciendo las siguientes condiciones:*
1) $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$*.*
2) Para todo par de índices α *y* β*, las cartas* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *y* (U_β, φ_β) *son compatibles.*
Diremos que el atlas $\mathcal{A}$ *determina una estructura diferenciable sobre* M *si es maximal para las condiciones anteriores, y lo denotaremos por* $\hat{\mathcal{A}}$*.*

Proposición 1.1 *Cualquier atlas diferenciable sobre un conjunto* M *se puede completar a un atlas maximal de manera única, es decir, todo atlas diferenciable sobre un conjunto está contenido en exactamente un atlas maximal.*

Entonces, para definir una estructura diferenciable no necesitamos especificar un atlas maximal sobre M, sino simplemente un atlas diferenciable.

Proposición 1.2 *Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ dos atlas diferenciables sobre un conjunto M. Los atlas son equivalentes si y sólo si, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ constituye un atlas.*

Definición 1.6 (*Variedad diferenciable.*)
Una variedad diferenciable de dimensión m es un par $(M, \hat{\mathcal{A}})$ formado por un conjunto M y una estructura diferenciable $\hat{\mathcal{A}}$ sobre M.

Para indicar la dimensión m, en algunas ocasiones escribiremos M^m en lugar de M, y cuando la estructura diferenciable sea conocida omitiremos cualquier referencia a ella.

Ejemplo 1.1 (*Un espacio vectorial.*)
Sea V un espacio vectorial real de dimensión m. Fijada una base $\{e_1, \ldots e_m\}$, la aplicación

$$x : V \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad x\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

determina una estructura de variedad diferenciable sobre V. Además, cualquier otra base da origen a la misma estructura diferenciable. La inyectividad de x es consecuencia de la propiedad según la cuál la expresión de un vector en una base es única. Por otro lado, la sobreyectividad es consecuencia de que toda base es un sistema generador del espacio vectorial. Consideremos ahora $y : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ otra carta global asociada a otra base $f_1, \ldots, f_m$. Entonces el cambio de cartas $x \circ y^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal cuya matriz asociada es la matriz del cambio de base. En consecuencia, $x \circ y^{-1}$ es diferenciable (al igual que $y \circ x^{-1}$) lo que implica que x e y determinan la misma estructura de variedad diferenciable sobre V.

Otro ejemplo interesante de variedad diferenciable es el espacio real proyectivo m-dimensional $\mathbb{RP}^m$.

Ejemplo 1.2 (*El espacio proyectivo real m-dimensional.*)
En el espacio euclideo $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ se define la siguiente relación de equivalencia

$$p \sim q \text{ si y solo si, } p \text{ y } q \text{ son colineales.}$$

Sea $\mathbb{R}P^m$ el espacio cociente de las clases de equivalencia. Vamos a dotar a $\mathbb{R}P^m$ de una estructura de variedad diferenciable.
$\mathbb{R}P^m$, con dicha estructura diferenciable, se denomina el espacio proyectivo real m-dimensional. Dado el punto $p = (p_1, \ldots, p_{m+1})$, denotaremos por $[(p_1, \ldots, p_{m+1})]$ a la clase de equivalencia determinada por p. Definimos los subconjuntos $V_i \subset \mathbb{R}P^m$ por $V_i = \{[(p_1, \ldots, p_{m+1})] \mid p_i \neq 0\}$, y consideremos las aplicaciones $\varphi_i : V_i \to \mathbb{R}^m$ dadas por $\varphi_i([p]) = \frac{1}{p_i}(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_{m+1})$, para $i = 1, \ldots, m+1$, donde $(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_{m+1})$ es una notación para indicar que hemos suprimido la coordenada i-ésima.

Entonces $\{[(V_i, \varphi_i)]\}_{i=1}^{m+1}$ *constituye un atlas sobre* $\mathbb{RP}^m$.
a) (V_i, φ_i) *es una carta* m*-dimensional.*
Comprobemos, en primer lugar, que φ_i *esta bien definida, es decir: si* $[p] = [q]$ *entonces* $\varphi([p]) = \varphi([q])$. *Si* $[p] = [q]$ *existe* $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$, *tal que* $q_j = \lambda p_j,\ j = 1, \ldots, m+1$.
Si $q_i \neq 0$ *y* $p_i \neq 0$ *entonces*

$$\varphi_i([q]) = \frac{1}{q_i}(q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_{m+1}) = \frac{1}{\lambda p_i}(\lambda p_1, \ldots, \lambda p_{i-1}, \lambda p_{i+1}, \ldots, \lambda p_{m+1}) = \varphi_i([p]).$$

La aplicación φ_i *es inyectiva, pues si* $\varphi([p]) = \varphi([q])$ *entonces* $p_j/p_i = q_j/q_i,\ j = 1, \ldots, m+1,\ j \neq i$. *Pero entonces* $q_j = (q_i/p_i)p_j$ *para todo* j, *por lo que* $q = \lambda p$, *con* $\lambda = q_i/p_i$, *y consecuentemente* $[p] = [q]$.
La aplicación φ_i *es sobreyectiva sobre* $\mathbb{R}^m$, *ya que si* $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ *entonces* $[p] = [(t_1, \ldots, t_{i-1}, 1, t_i, \ldots, t_m)] \in V_i$ *y* $\varphi_i([p]) = t$.
b) Trivialmente se tiene $\cup_{i=1}^{m+1} V_i = \mathbb{R}P^m$, *ya que si* $[p] \in \mathbb{R}P^m$ *entonces existe un índice i tal que* $p_i \neq 0$, *por lo que* $[p] \in V_i$.
c) Para finalizar debemos comprobar la diferenciabilidad de los cambios de cartas. Para ello, y sin pérdida de generalidad, consideremos las cartas (V_1, φ_1) *y* (V_2, φ_2). *Entonces* $\varphi_1(V_1 \cap V_2) = \{t \in \mathbb{R}^m |\ t_1 \neq 0\} = \varphi_2(V_1 \cap V_2)$ *y los cambios de cartas están definidos por*

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(t_1, \ldots, t_m) = \frac{1}{t_1}(1, t_2, \ldots, t_m) = \varphi_i([p])$$

que son diferenciables.

Ejemplo 1.3 *Sea* $\widehat{\mathbb{C}}$ *el plano complejo extendido dado por*

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

y un punto, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $U_0 = \mathbb{C}$ *y* $U_\infty = \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$.
A continuación definimos las coordenadas locales $x_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ *y* $x_\infty : U_\infty \to \mathbb{C}$ *de* $\hat{\mathbb{C}}$ *por* $x_0 : z \mapsto z$ *y* $x_\infty : w \mapsto 1/w$, *respectivamente. Los mapeos de transformación correspondientes*

$$x_\infty \circ x_0^{-1}, x_0 \circ x_\infty^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$$

estan dados por $z \mapsto 1/z$, *así* $\mathcal{A} = \{(U_0, x_0), (U_\infty, x_\infty)\}$ *es un* C^ω*-atlas de* $\widehat{\mathbb{C}}$. *La variedad analítica* $(\widehat{\mathbb{C}}, \hat{\mathcal{A}})$ *es llamada* **esfera estándar**.

Para el producto de dos variedades diferenciables tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3 (*La variedad producto.*)
Sean $(M_1, \hat{\mathcal{A}}_1)$ *y* $(M_2, \hat{\mathcal{A}}_2)$ *dos variedades diferenciables de clase* C^r. *Sea* $M = M_1 \times M_2$ *el espacio producto con la topología producto. Entonces existe un atlas* $\mathcal{A}$ *de* M *convirtiendose en* $(M, \mathcal{A})$ *una variedad diferenciable de clase* C^r *y la dimensión de* M *satisface*

$$dim M = dim M_1 + dim M_2$$

Demostración :
En efecto, sean $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ *y* $\{(V_\beta, y_\beta)\}_{\beta\in B}$ *atlas para* M_1 *y* M_2*, respectivamente. En el producto cartesiano* $U_\alpha \times V_\beta$*, para todo* α *y* β*, definimos una aplicación* $z_{\alpha\beta} : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^{m_1+m_2}$ *por* $z_{\alpha\beta}(p,q) = (x_\alpha(p), y_\beta(q))$*.*
Entonces, $\{(U_\alpha \times V_\beta, z_{\alpha\beta})| \mid (\alpha,\beta) \in A\times B\}$ *es un atlas sobre el producto cartesiano* $M_1 \times M_2$*.*
En primer lugar, el conjunto imagen $z_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta) = x_\alpha(U_\alpha) \times y_\beta(V_\beta)$ *es abierto (por ser producto de abiertos) y la aplicación* $z_{\alpha\beta}$ *es biyectiva, por serlo* x_α *y* y_β*.*
Esto prueba que $(U_\alpha \times V_\beta, z_{\alpha\beta})$ *es una carta sobre* M*. En segundo lugar,* $\cup_{(\alpha,\beta)} z_{\alpha\beta}(U_\alpha, V_\beta) = (\cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha)) \times (\cup_\beta y_\beta(V_\beta)) = M$*.*
Para finalizar resta comprobar que los cambios de cartas son diferenciables. Consideremos dos cartas $(U_\alpha \times V_\beta, z_{\alpha\beta})$ *y* $(U_\gamma \times V_\delta, z_{\gamma\delta})$ *tales que* $(U_\alpha \times V_\beta) \cap (U_\gamma \times V_\delta) \neq 0$*. Entonces* $U_\gamma \cap U_\delta \neq 0$ *y* $V_\beta \cap V_\gamma \neq 0$*, y entonces* $x_\alpha \circ x_\gamma^{-1}$ *e* $y_\beta \circ y_\delta^{-1}$ *son diferenciables.*
Ahora sólo queda notar que $z_{\alpha\beta} \circ z_{\gamma\delta}^{-1} = (x_\alpha \circ x_\gamma^{-1}) \times (y_\beta \circ y_\delta^{-1})$ *para deducir que el cambio de cartas es diferenciable.*

El concepto de subvariedad de una variedad diferenciable jugará un papel importante a medida que avanzamos y nos será de especial utilidad en la conexión entre la geometría de una variedad y la de su espacio ambiente.

Definición 1.7 *Si* m, n *son enteros positivos con* $m \leq n$ *y* $(N^n, \hat{A}_N)$ *es una* C^r*-variedad. Un subconjunto* M *de* N *se dice que es una* **subvariedad** *de* N *si para algún punto* $p \in M$ *existe una carta* $(U_p, \varphi_p) \in \hat{\mathcal{A}}_N$ *tal que* $p \in U_p$ *y* $\varphi : U_p \subset N \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ *satisface*

$$\varphi(U_p \cap M) = \varphi(U_p) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Proposición 1.4 *Si* m, n *son enteros positivos con* $m \leq n$ *y* $(N^n, \hat{\mathcal{A}}_N)$ *es una* C^r*-variedad. Sea* M *es una subvariedad de* N *dotado de la topología del subespacio y* $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ *la proyección natural del primer factor. Entonces*

$$\mathcal{A}_M = \{(U_p \cap M, (\pi \circ x_p)|_{U_p \cap M})|\ p \in M\}$$

es un C^r*-atlas de* M*. Por lo tanto el par* $(M, \hat{\mathcal{A}}_M)$ *es una* C^r*-variedad* m*-dimensional. La estructura diferenciable* $\hat{\mathcal{A}}_M$ *de* M *es llamada* **estructura inducida** *de* $\hat{\mathcal{A}}_N$*.*

Observación 1.1 *Nuestro proximo objetivo es demostrar el Teorema de la Función Implícita que es una herramienta útil para la construcción de subvariedades en* $\mathbb{R}^m$*.*
Para ello utilizamos el Teorema clásico de la Función Inversa que se indica a continuación. Notar que si

$$F : U \to \mathbb{R}^n$$

es un mapeo diferenciable definido en un subconjunto abierto U *de* $\mathbb{R}^m$*, entonces su diferencial* $dF_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *en el punto* $p \in U$ *es un mapeo lineal dado por la matriz de* $n \times m$*.*

$$dF_p = \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial x_1(p) & \cdots & \partial F_1/\partial x_m(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial F_n/\partial x_1(p) & \cdots & \partial F_n/\partial x_m(p) \end{pmatrix}.$$

Si $\gamma : \mathbb{R} \to U$ es una curva en U tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = \upsilon \in \mathbb{R}^m$ entonces la composición $F \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una curva en $\mathbb{R}^n$ y usando la regla de la cadena tenemos

$$dF_p \cdot \upsilon = \frac{d}{ds}(F \circ \gamma(0))|_{s=0}.$$

Este es el vector tangente de la curva $F \circ \gamma$ y $F(p) \in \mathbb{R}^n$.
Por tanto el diferencial dF_p puede ser visto como un mapeo lineal que lleva vectores tangentes en $p \in U$ a vectores tangentes en la imagen $F(p) \in \mathbb{R}^n$. Más adelante puede generalizarse al conjunto de variedades.

Observación 1.2 (*Teorema de la Función Inversa.*)
Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ y $F : U \to \mathbb{R}^m$ un C^r-mapeo. Si $p \in U$ y el diferencial

$$dF_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

de F y p son invertibles, entonces existen entornos abiertos U_p alrededor de p y U_q alrededor de $q = F(p)$ tal que $\hat{F} = F|_{U_p} : U_p \to U_q$ es biyectiva y la inversa $(\hat{F})^{-1} : U_q \to U_p$ es un C^r-mapeo. El diferencial $(d\hat{F}_p)^{-1}$ de $\hat{F}^{-1}$ satisface

$$(d\hat{F}^{-1})_p = (dF_p)^{-1}$$

es decir, es la inversa del diferencial dF_p de F en p.

Definición 1.8 *Sean m, n números naturales, U subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ y $F : U \to \mathbb{R}^n$ un C^r-mapeo. Un punto $p \in U$ se dice que es un punto* **crítico** *de F si el diferencial*

$$dF_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

no es de rango completo, y **regular** *si no es punto crítico. Un punto $q \in F(U)$ se dice que es un* **valor regular** *de F si todo punto en la pre-imagen $F^{-1}(\{q\})$ de q es regular y un* **valor crítico** *en otro caso.*

Observación 1.3 *Notar que si m, n son enteros positivos con $m \geq n$ entonces $p \in U$ es un punto regular de*

$$F = (F_1, ..., F_n) : U \to \mathbb{R}^n$$

si y sólo si el gradiente $gradF_1, ..., gradF_n$ de las funciones coordenadas $F_1, ..., F_n : U \to \mathbb{R}$ son linealmente independientes en p, o de manera equivalente, el diferencial dF_p de F a p satisface la siguiente condición

$$det(dF_p \cdot (dF_p)^t) \neq 0.$$

Teorema 1.1 (*Teorema de la Función Implícita.*)
Sean m, n enteros positivos con $m > n$ y $F : U \to \mathbb{R}^n$ un C^r-mapeo de un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^m$. Si $q \in F(U)$ es un valor regular de F, entonces la pre-imagen $F^{-1}(\{q\})$ de q es una subvariedad de dimensión $(m-n)$ de $\mathbb{R}^m$ de clase C^r.
Demostración:
Sea p un elemento de $F^{-1}(\{q\})$ y K_p el nucleo del diferencial dF_p, es decir, el subespacio $(m-n)$-dimensional de $\mathbb{R}^m$ dado por $K_p = \{v \in \mathbb{R}^m | \ dF_p \cdot v = 0\}$. Sea $\pi_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ es un mapeo lineal tal que $\pi_p|_{K_p} : K_p \to \mathbb{R}^{m-n}$ es biyectiva, $\pi_p|_{K_p^\perp} = 0$ y define el mapeo $G_p : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ por

$$G_p : x \mapsto (F(x), \pi_p(x)).$$

Entonces el diferencial $(dG_p)_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de G_p, con respecto a la descomposición de $\mathbb{R}^m = K_p^\perp \oplus K_p$ y $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{m-n}$, es dado por

$$(dG_p)_p = \begin{pmatrix} dF_p|_{K_p^\perp} & 0 \\ 0 & \pi_p \end{pmatrix},$$

por tanto biyectiva. Ahora se sigue del Teorema de la Función Inversa que existen entornos abiertos V_p alrededor de p y W_p alrededor de $G_p(p)$ tal que $\hat{G} = G_p|_{V_p} : V_p \to W_p$ es biyectiva, la inversa $\hat{G}_p^{-1} : W_p \to V_p$ es de clase C^r, $d(\hat{G}_p^{-1})_{G_p(p)} = (dG_p)_p^{-1}$ y $d(\hat{G}_p^{-1})_y$ es biyectiva para todo $y \in W_p$. Ahora tomemos $\tilde{U}_p = F^{-1}(\{q\}) \cap V_p$ tenemos

$$\tilde{U}_p = \hat{G}_p^{-1}((\{q\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap W_p)$$

así, si $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^{m-n}$ es la proyección natural sobre el segundo factor, entonces el mapeo

$$\tilde{\pi}_p = \pi \circ G_p|_{\tilde{U}_p} : \tilde{U}_p \to (\{q\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap W_p \to \mathbb{R}^{m-n}$$

es una carta en el entorno abierto $\tilde{U}_p$ de p. El punto $q \in F(U)$ es un valor regular por lo que el conjunto

$$\mathcal{B} = \{(\tilde{U}_p, \tilde{x}_p) | \ p \in F^{-1}(\{q\})\}$$

es un C^r-atlas de $F^{-1}(\{q\})$.

Empleando el Teorema de la Tunción Implícita, tenemos el siguiente interesante ejemplo de la esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n$ y sus tangentes $T\mathbb{S}^n$ que son subvariedades diferenciables de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbb{R}^{2n+2}$, respectivamente.

Ejemplo 1.4 (*La esfera n-dimensional.*)
Sea $\mathbb{S}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1\}$ la esfera unitaria n-dimensional. Para cada $j = 1, \ldots, n+1$ consideremos los conjuntos $U_j^+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_j > 0\}$ y $U_j^- = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_j < 0\}$ notemos que estos conjuntos son abiertos en $\mathbb{S}^n$ y que $\mathbb{S}^n = \cup_{j=1}^{n+1}(U_j^+ \cup U_j^-)$.

Denotemos por $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ *el disco abierto unitario* $\mathbb{D}^n = \{t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n | \ \sum_{j=1}^n t_j^2 < 1\}$ *y definimos las aplicaciones*

$$\varphi_j^\pm : U_j^\pm \to \mathbb{R}^n \quad por \quad \varphi_j^\pm(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1}),$$

donde $\hat{x}_j$ *significa que hemos omitido esa coordenada.*
Veamos en primer lugar, que $(U_j^\pm, \varphi_j^\pm)$ *es una carta n-dimensional para todo* j.
Un punto $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ *está en la imagen de* $U_j^\pm$ *si existe un valor* $t_0 \in (-1, 1)$ *tal que* $(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_0, t_j, \ldots, t_n) \in U_j^\pm$.
Entonces $t_1^2 + \ldots + t_n^2 = 1 - t_0^2 < 1$ *por lo que* t *está en el disco abierto unitario* $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$.
Además, $\varphi_j^\pm$ *es inyectiva ya que si*

$$\varphi_j^\pm(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \varphi_j^\pm(w_1, \ldots, w_{n+1})$$

entonces $x_i = w_i$ *para todo* $i \neq j$, *lo que también implica que*

$$x_j = 1 - \sum_{j \neq i} x_j^2 = 1 - \sum_{j \neq i} w_j^2 = w_j.$$

Hasta aqui hemos probado que $(U_j^\pm, \varphi_j^\pm)$ *es una carta n-dimensional.*
En segundo lugar, $\cup_j U_j^\pm = \mathbb{S}^n$, *dado que, si* $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ *entonces* $x \neq 0$ *por lo que tiene alguna componente* $x_j \neq 0$. *Si* $x_j > 0$ *se tiene que* $x \in U_j^+$, *mientras que si* $x_j < 0$ *entonces* $x \in U_j^-$.
Luego $\{(U_j^\pm, \varphi_j^\pm\}$ *es un atlas para* $\mathbb{S}^n$.
Finalmente, para analizar los cambios de coordenadas vamos a considerar, sin pérdida de generalidad, las cartas (U_1^+, φ_1^+), (U_2^+, φ_2^+), *cuya intersección es el conjunto de la esfera* $\mathbb{S}^n$ *dado por* $U_1^+ \cap U_2^+ = \{x | \ x_1 > 0, x_2 > 0\}$.
El cambio de coordenadas $\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1} : \varphi_1^+(U_1^+ \cap U_2^+) \to \varphi_2^+(U_1^+ \cap U_2^+)$, *donde*
$\varphi_1^+(U_1^+ \cap U_2^+) = \varphi_2^+(U_1^+ \cap U_2^+)$ *es el conjunto* $\{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{D}^n | \ t_1 > 0\}$, *está definido por*

$$\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1}(t_1, \ldots, t_n) = \left(\sqrt{1 - \sum_{j=1}^n t_j^2}, t_2, \ldots, t_n \right),$$

que es diferenciable, ya que $\sum_{j=1}^n t_j^2 < 1$.
Por tanto, $\mathbb{S}^n$ *posee estructura de variedad diferenciable.*

Ejemplo 1.5 *Sea* $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ *el* C^ω*-mapeo dado por*

$$F : (p_1, ..., p_{m+1}) \mapsto p_1^2 + p_2^2 + ... + p_{m+1}^2.$$

Entonces el diferencial dF_p *de* F *en* p *esta dado por* $dF_p = 2p$, *así*

$$dF_p \cdot (dF_p)^t = 4|p|^2 \in \mathbb{R}.$$

Esto significa que $1 \in \mathbb{R}$ *es un valor regular de* F *por lo que el fibrado*

$$S^m = \{p \in \mathbb{R}^{m+1} | \ |p|^2 = 1\} = F^{-1}(\{1\})$$

de F *es una subvariedad m-dimensional de* $\mathbb{R}^{m+1}$.

Ejemplo 1.6 *Sea $F : \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^2$ es un C^ω-mapeo definido por $F : (p, \upsilon) \mapsto ((|p|^2 - 1)/2, \langle p, \upsilon \rangle)$. Entonces el diferencial $dF_{(p,\upsilon)}$ de F y (p, υ) satisface*

$$dF_{(p,\upsilon)} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ \upsilon & p \end{pmatrix}.$$

Un simple cálculo muestra que

$$det(dF \cdot (dF)^t) = det\begin{pmatrix} |p|^2 & \langle p, \upsilon \rangle \\ \langle p, \upsilon \rangle & |\upsilon|^2 + |p|^2 \end{pmatrix} = 1 + |\upsilon|^2 > 0$$

en $F^{-1}(\{0\})$. Esto significa que

$$F^{-1}(\{0\}) = \{(p, \upsilon) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1} |\ |p|^2 = 1 \ y \ \langle p, \upsilon \rangle = 0\},$$

que denotamos por $T\mathbb{S}^m$, es una subvariedad de $\mathbb{R}^{2m+2}$ de dimensión $2m$. Más adelante veremos que $T\mathbb{S}^m$ es lo que comunmemte se llama un haz de tangentes de la esfera m-dimensional.

Aplicamos el Teorema de la Función Implícita para construir un importante grupo ortogonal $\mathbf{O}(m)$ que es una subvariedad del conjunto de vectores reales de la matriz $m \times n$ de $\mathbb{R}^{m \times m}$.

Ejemplo 1.7 *Sea $Sym(\mathbb{R}^m)$ el subespacio lineal $m(m+1)/2$-dimensional de $\mathbb{R}^{m \times m}$ constituido por todas las matrices simetricas de orden $m \times m$*

$$Sym(\mathbb{R}^m) = \{\ y \in \mathbb{R}^{m \times m} |\ y^t = y\}.$$

Sea $F : \mathbb{R}^{m \times m} \to Sym(\mathbb{R}^m)$ el mapeo definido por

$$F : x \mapsto x^t x.$$

Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^{m \times m}$ es una curva en $\mathbb{R}^{m \times m}$, entonces

$$\frac{d}{ds}(F \circ \gamma(s)) = \dot{\gamma}(s)^t + \gamma(s)^t \dot{\gamma}(s),$$

así, el diferencial dF_x de F a $x \in \mathbb{R}^{m \times m}$ satisface

$$dF_x : X \mapsto X^t x + x^t X.$$

Esto significa que para un elemento arbitrario p en

$$\mathbf{O}(m) = F^{-1}(\{e\}) = \{p \in \mathbb{R}^{m \times m} |\ p^t p = e\}$$

y $Y \in Sym(\mathbb{R})$ tenemos $dF_p(pY/2) = Y$.
Por tanto, el diferencial dF_p es sobreyectivo, y la matriz identidad $e \in Sym(\mathbb{R}^m)$ es un valor

regular de F.
Del Teorema de la Función Implícita tenemos que $\mathbf{O}(m)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^{m\times m}$ de dimensión $m(m-1)/2$.
El conjunto $\mathbf{O}(m)$ es el **grupo ortogonal**.
El concepto de mapeo diferenciable $U \to \mathbb{R}^n$, definido en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$, se puede generalizar a mapeos entre variedades. Veremos que las propiedades más importantes de estos objetos en el caso clásico también son validas en el conjunto de variedades.

Definición 1.9 *Si $(M^m, \hat{A}_M)$ y $(N^n, \hat{A}_N)$ son C^r-variedades. Un mapeo $\phi : M \to N$ se dice* **diferenciable** *de clase C^r si para toda carta $(U,x) \in \hat{\mathcal{A}}_M$ y $(V,y) \in \hat{\mathcal{A}}_N$ el mapeo*

$$y \circ \phi \circ x^{-1}|_{x(U\cap\phi^{-1}(V))} : x(U \cap \phi^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

es de clase C^r. El mapeo diferencial $\gamma : I \to M$ definido en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ es llamada una **curva diferenciable** *en M. Un mapeo diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$ es llamada una* **función diferenciable** *en M. El conjunto de funciones suaves de M es denotado por $C^\infty(M)$.*

Proposición 1.5 *Sean $(M_1, \hat{\mathcal{A}}_1), (M_2, \hat{\mathcal{A}}_2), (M_3, \hat{\mathcal{A}}_3)$ C^r-variedades y $\phi : (M_1, \hat{\mathcal{A}}_1) \to (M_2, \hat{\mathcal{A}}_2)$, $\psi : (M_2, \hat{\mathcal{A}}_2) \to (M_3, \hat{\mathcal{A}}_3)$, son mapeos diferenciables de clase C^r. Entonces la composición $\phi \circ \psi : (M_1, \hat{\mathcal{A}}_1) \to (M_3, \hat{\mathcal{A}}_3)$ es un mapeo deferenciable de clase C^r.*

Definición 1.10 *Dos variedades $(M, \hat{\mathcal{A}}_M)$ y $(N, \hat{\mathcal{A}}_N)$ de clase C^r se dice que son* **difeomorfas** *si existe un C^r-mapeo biyectivo $\phi : M \to N$ tal que la inversa $\phi^{-1} : N \to M$ es de clase C^r. En este caso el mapeo ϕ es llamado* **difeomorfismo**[2] *entre $(M, \hat{\mathcal{A}}_M)$ y $(N, \hat{\mathcal{A}}_N)$.*

Se puede demostrar que la esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{R}^3$ y la esfera de Riemann son difeomorfas.

Definición 1.11 *Para una variedad diferenciable $(M, \hat{\mathcal{A}})$ denotemos por $\mathcal{D}(M)$ al conjunto de todos los difeomorfismo. Si $\phi, \psi \in \mathcal{D}(M)$ entonces la composición $\phi \circ \psi$ y la inversa ϕ^{-1} son difeomorfismos. El par $(\mathcal{D}(M), \circ)$ se llama* **difeomorfismo de grupo** *de $(M, \hat{\mathcal{A}})$. La operación es claramente asociativa y la identidad mapea el elemento neutro.*

Definición 1.12 *Dos C^r-estructuras $\hat{\mathcal{A}}_1$ y $\hat{\mathcal{A}}_2$ en la variedad topológica M se dice que son* **diferentes** *si la identidad $id_M : (M, \hat{\mathcal{A}}_1) \to (M, \hat{\mathcal{A}}_2)$ no es difeomorfismo.*

[2]Homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable.

Ejemplo 1.8 (*Las proyecciones estereográficas.*)
En la esfera m-dimensional $\mathbb{S}^m$*, sean los puntos* $N = (0, 0, \ldots, 1)$ *y* $S = (0, 0, \ldots, -1)$ *y consideremos* $U = \mathbb{S}^m - N$ *y* $V = \mathbb{S}^m - S$*. Definamos las aplicaciones*

$$x : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad e \quad y : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

por

$$x_i(z_1, \ldots, z_{m+1}) = \frac{z_i}{1 - z_{m+1}} \quad e \quad y_i(z_1, \ldots, z_{m+1}) = \frac{z_i}{1 + z_{m+1}}, \quad i = 1, \ldots, m+1.$$

Veamos que $\{(U, x), (V, y)\}$ *constituye un atlas para* $\mathbb{S}^m$ *equivalente al de los hemisferios. Lo llamaremos el atlas estereográfico.*
En primer lugar, (U, x) *es una carta m-dimensional sobre la esfera. La aplicación* x *es inyectiva, ya que si*

$$x(z_1, \ldots, z_{m+1}) = x(w_1, \ldots, w_{m+1})$$

se tiene que

$$\frac{z_i}{1 - z_{m+1}} = \frac{w_i}{1 - w_{m+1}}, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

de donde elevando al cuadrado y sumando obtenemos

$$\frac{1}{(1 - z_{m+1})^2} \sum_{i=1}^{m} z_i^2 = \frac{1}{(1 - w_{m+1})^2} \sum_{i=1}^{m} w_i^2.$$

Como los puntos z *y* w *están sobre la esfera,* $\sum_{i=1}^m z_i^2 = 1 - z_{m+1}^2$ *y* $\sum_{i=1}^m w_i^2 = 1 - w_{m+1}^2$*, por lo que*

$$\frac{1 + z_{m+1}}{1 - z_{m+1}} = \frac{1 - z_{m+1}^2}{(1 - z_{m+1})^2} = \frac{1 - w_{m+1}^2}{(1 - w_{m+1})^2} = \frac{1 + w_{m+1}}{1 - w_{m+1}},$$

de donde se deduce que $z_{m+1} = w_{m+1}$ *y, en consecuencia,* $z_i = w_i$ *para* $i = 1, \ldots, m$*. La aplicación* x *es, también, sobreyectiva sobre* $\mathbb{R}^m$*, ya que si* $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$*, entonces tomando* $z = (z_1, \ldots, z_{m+1})$*, donde*

$$z_{m+1} = \frac{\|t\|^2 - 1}{\|t\|^2 + 1}, \quad z_i = \frac{2t_i}{\|t\|^2 + 1}, \quad i = 1, \ldots, m$$

es fácil ver que $x(z) = t$*. Esto prueba que* x *es una carta y de forma totalmente análoga se puede mostrar que* (V, y) *es, también, una carta m-dimensional sobre* $\mathbb{S}^m$*. Como* $U \cup V = \mathbb{S}^m$*, sólo resta comprobar que los cambios de cartas* $x \circ y^{-1}$ *e* $y \circ x^{-1}$ *son aplicaciones diferenciables. Sea* $t \in \mathbb{R}^m$*, entonces la aplicación* $x \circ y^{-1} : \mathbb{R}^m - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$ *está definida por*

$$x \circ y^{-1}(t) = \frac{t}{\|t\|^2},$$

que es claramente diferenciable en su dominio. Como $x \circ y^{-1} = y \circ x^{-1}$*, queda probado que* $\{(U, x), (V, y)\}$ *es un atlas sobre la esfera.*

Veamos a continuación que dicho atlas es equivalente al atlas de los hemisferios.
Para esto es suficiente probar que los cambios de cartas (entre cartas de un atlas y otro) son diferenciables. Sin pérdida de generalidad, consideremos las cartas (U, x) y (U_{10}, φ_{10}) pertenecientes al atlas estereográfico y al atlas de los hemisferios, respectivamente. Entonces $U \cap U_{10} = U_{10}$ y consecuentemente $x(U \cap U_{10}) = \{t \in \mathbb{R}^m \mid t_1 > 0\} \equiv H$ y $\varphi_{10}(U \cap U_{10}) = \{t \in \mathbb{R}^m \mid \|r\| < 1\} \equiv B(0;1)$.
Los cambios de cartas están, por tanto, definidos como sigue:

$$x \circ \varphi 10^{-1} : B(0;1) \to H, \quad x \circ \varphi_{10}^{-1}(t_1, \ldots, t_m) = \left(\frac{\sqrt{1 - \|t\|^2}}{1 - t_m}, \frac{t_1}{1 - t_m}, \ldots, \frac{t_{m-1}}{1 - t_m} \right)$$

$$\varphi_{10} \circ x^{-1} : H \to B(0;1), \quad \varphi_{10} \circ x^{-1}(t_1, \ldots, t_m) = \left(\frac{2t_2}{\|t\|^2 + 1}, \ldots, \frac{2t_m}{\|t\|^2 + 1}, \frac{\|t\|^2 - 1}{\|t\|1} \right)$$

que son claramente aplicaciones diferenciables.
En consecuencia, ambos atlas son equivalentes, por lo que determinan la misma estructura diferenciable sobre la esfera $\mathbb{S}^m$.

Observación 1.4 *Sean $(M, \hat{\mathcal{A}}_M)$, $(N, \hat{\mathcal{A}}_N)$ variedades diferenciables de clase C^r y de dimensión m. Si M y N son homeomorfismo de espacios topológicos y $m \leq 3$, entonces $(M, \hat{\mathcal{A}}_M)$ y $(N, \hat{\mathcal{A}}_N)$ son difeomorfismos.*

La siguiente proposición es muy útil ya que generaliza un resultado clásico de analisis real de varias variables.

Proposición 1.6 *Sean $(N_1, \hat{\mathcal{A}}_1)$ y $(N_2, \hat{\mathcal{A}}_2)$ dos variedades diferenciables de clase C^r y M_1, M_2 subvariedades de N_1 y N_2, respectivamente. Si $\phi : N_1 \to N_2$ es un mapeo diferenciable de clase C^r tal que $\phi(M_1)$ esta contenido en M_2, entonces la restricción $\phi|_{M_1} : M_1 \to M_2$ es diferenciable de clase C^r.*

Ejemplo 1.9 *Como resultado de la proposición 1.6 tenemos que los siguientes mapeos son suaves.*
(i) $\phi_1 : \mathbb{R}^1 \to S^1 \subset \mathbb{C}$, $\phi_1 : t \to e^{it}$,
(ii) $\phi_2 : \mathbb{R}^{m+1}\ \{0\} \to S^m \subset \mathbb{R}^m$, $\phi_2 : x \to x/|x|$,
(iii) $\phi_3 : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \to S^3 \subset \mathbb{R}^4$, $\phi_3 : (x, y, z) \to (x, y, z, 0)$,
(iv) $\phi_4 : S^3 \subset \mathbb{C}^2 \to S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $\phi_4 : (z_1, z_2) \to (2z_1\overline{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2)$,
(v) $\phi_5 : \mathbb{R}^1\ \{0\} \to \mathbb{R}P^m$, $\phi_5 : x \to [x]$,
(vi) $\phi_6 : S^m \to \mathbb{R}P^m$, $\phi_6 : x \to [x]$.

En geometría diferencial estamos especialmente interesados en las variedades diferenciables que llevan un grupo compatible estructuralmente con su estructura diferenciable. Tales variedades llevan el nombre del famoso matemático Sophus Lie (1842 - 1899) y jugarán un papel importante en este trabajo.

Definición 1.13 *Un* **grupo de Lie** *es una variedad suave G con estructura de grupo tal que el mapeo $\rho : G \times G \to G$ con*

$$\rho : (p, q) \mapsto p \cdot q^{-1}$$

es suave. Para un elemento p de G la **traslación izquierda** *por p es el mapeo $L_p : G \to G$ definida por $L_p : q \mapsto p \cdot q$.*

Ejemplo 1.10 *Sea $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ el espacio vectorial m-dimensional dotado con la estructura diferencial estandar. Entonces $(\mathbb{R}^m, +)$ con $\rho : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dado por*

$$\rho : (p, q) \mapsto p - q$$

es un grupo de Lie.

Corolario 1.1 *Si G es un grupo de Lie y p un elemento de G. Entonces la traslación izquierda $L_p : G \to G$ es un difeomorfismo suave.*

Proposición 1.7 *Sea $(G, \cdot)$ un grupo de Lie y K una subvariedad de G que además es subgrupo. Entonces $(K, \cdot)$ es un grupo de Lie.*

El conjunto de los números complejos diferentes del cero $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, junto al producto normal forman un grupo de Lie. El círculo unitario $(S^1, \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{C}, \cdot)$ que además es compacto y de Lie. Otro subgrupo es el conjunto de los números reales sin el cero $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ que contiene al subgrupo de los reales positivos $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.
El grupo de Lie de los números complejos diferentes de cero $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ tiene una conocida representación lineal $\rho : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por

$$\rho : a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Que es claramente inyectiva y respeta las estructuras multiplicativas estandar de $\mathbb{C}^*$ y $\mathbb{R}^{2\times 2}$, es decir

$$\begin{aligned} \rho(a + ib) \cdot (x + iy) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax - by & ay + bx \\ -(ay + bx) & ax - by \end{pmatrix} \\ &= \rho((ax - by) + i(ay + bx)) \\ &= \rho((a + ib)(x + iy)). \end{aligned}$$

Como introducción al siguiente ejemplo haremos lo mismo para el caso complejo: Sea $\sigma : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ el mapeo lineal complejo dado por

$$\sigma : (s, w) \mapsto \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}.$$

A continuación un fácil cálculo demuestra que se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} \sigma(z_1, w_1) \cdot \rho(z_2, w_2) &= \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 & z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2 \\ -\bar{z}_1 \bar{w}_2 - \bar{w}_1 z_2 & \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{w}_1 w_2 \end{pmatrix} \\ &= \sigma(z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2, z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.11 *Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de los* **cuaterniones** *dado por*

$$\mathbb{H} = \{z + wj |\ z, w \in \mathbb{C}\}.$$

Equipamos a $\mathbb{H}$ con la adición, la multiplicación y el conjugado, que satisfacen
(i) $\overline{(z + wj)} = \overline{z} - wj$,
(ii) $(z_1 + w_1 j) + (z_2 + w_2 j) = (z_1 + z_2) + (w_1 + w_2)j$,
(iii) $(z_1 + w_1 j) \cdot (z_2 + w_2 j) = (z_1 z_2 - w_1 \overline{w}_2) + (z_1 w_2 + w_1 \overline{z}_2)j$.
Este se extiende a las operaciones estandar de $\mathbb{C}$ como un subconjunto de $\mathbb{H}$. Se ve fácilmente que los cuaterniones no nulos de $(\mathbb{H}^*, \cdot)$ forman un grupo de Lie.
En $\mathbb{H}$ definimos el producto escalar

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad (p, q) \mapsto p \cdot \overline{q}$$

y una norma de valor real dada por $|p|^2 = p \cdot \overline{p}$. Entonces la esfera unitaria tridimensional $\mathbb{S}^3$ en $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, con el producto restringido, forma un subgrupo compacto de Lie $(\mathbb{S}^3, \cdot)$ de $(\mathbb{H}^*, \cdot)$. Ambos son no abelianos.

Ahora vamos a introducir algunos de los grupos de matrices reales y complejos de Lie.

Ejemplo 1.12 *Sea Nil^3 el subconjunto de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ dado por*

$$Nil^3 = \{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} |\ x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces Nil^3 tiene una estructura diferenciable natural determinada por las coordenadas globales $\phi : Nil^3 \to \mathbb{R}^3$ con

$$\phi : \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z).$$

Se puede ver que si $*$ es el producto estandar de matrices, entonces $(Nil^3, *)$ es un grupo de Lie.

Ejemplo 1.13 *Sea Sol^3 el subconjunto de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ dado por*

$$Sol^3 = \{ \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} | \ x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces Sol^3 tiene una estructura diferenciable natural determinada por las coordenadas globales $\phi : Sol^3 \to \mathbb{R}^3$ con

$$\phi : \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z).$$

Se puede ver que si $*$ es el producto estandar de matrices, entonces $(Nil^3, *)$ es un grupo de Lie.

Ejemplo 1.14 *El conjunto de matrices reales invertibles de $m \times m$*

$$\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{m\times m} | \ detA \neq 0\}$$

dotado del producto estandar de matrices tiene estructura de grupo de Lie. Este es llamado el **grupo general lineal** *y su elemento neutro e es la matriz identidad. El subconjunto $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^{m\times m}$ es abierto y de dimensión $dim\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) = m^2$. Como subgrupo de $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ tenemos el* **grupo especial lineal** $\mathbf{SL}_m(\mathbb{R})$ *dado por*

$$\mathbf{SL}_m(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{m\times m} | \ detA = 1\}.$$

Más adelante mostraremos que la dimensión de la subvariedad $\mathbf{SL}_m(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^{m\times m}$ es $m^2 - 1$. Otro subgrupo de $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ es el **grupo ortogonal**

$$\mathbf{O}(m) = \{A \in \mathbb{R}^{m\times m} | \ A^t A = e\}.$$

Como ya vimos en el ejemplo 1.7 la dimensión de $\mathbf{O}(m)$ es $m(m-1)/2$.
Un subgrupo de $\mathbf{O}(m)$ y $\mathbf{SL}_m(\mathbb{R})$ es el **grupo especial ortogonal** $\mathbf{SO}(m)$ *que definimos como*

$$\mathbf{SO}(m) = \mathbf{O}(m) \cap \mathbf{SL}_m(\mathbb{R}).$$

Puede mostrarse que $\mathbf{O}(m)$ es difeomorfo a $\mathbf{SO}(m) \times \mathbf{O}(1)$. Note que $\mathbf{O}(1) = \{\pm 1\}$ así que $\mathbf{O}(m)$ puede ser visto como la doble cobertura de $\mathbf{SO}(m)$. Esto significa que

$$dim\mathbf{SO}(m) = dim\mathbf{O}(m) = m(m-1)/2.$$

Ejemplo 1.15 *El conjunto de matrices reales invertibles y complejas de $m \times m$*

$$\mathbf{GL}_m(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{m\times m} |\ detA \neq 0\}$$

dotado del producto estandar de matrices tiene estructura de grupo de Lie.
Este es llamado el **grupo complejo general lineal** *y su elemento neutro e es la matriz identidad. El subconjunto $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}^{m\times m}$ es abierto y $dim\mathbf{GL}_m(\mathbb{C}) = 2m^2$. Como subgrupo de $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$ tenemos el* **grupo complejo especial lineal** $\mathbf{SL}_m(\mathbb{C})$ *dado por*

$$\mathbf{SL}_m(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{m\times m} |\ detA = 1\}.$$

La dimensión de la subvariedad $\mathbf{SL}_m(\mathbb{C})$ de $\mathbb{R}^{m\times m}$ es $2(m^2 - 1)$. Otro subgrupo de $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$ es el **grupo unitario** $\mathbf{U}(m)$ *dado por*

$$\mathbf{U}(m) = \{A \in \mathbb{C}^{m\times m} |\ \bar{A}^t A = e\}.$$

Cálculos similares a los del grupo ortogonal muestran que la dimensión de $\mathbf{U}(m)$ es m^2. Como subgrupo de $\mathbf{U}(m)$ y $\mathbf{SL}_m(\mathbb{C})$ tenemos el **grupo especial unitario** $\mathbf{SU}(m)$ *que se define como*

$$\mathbf{SU}(m) = \mathbf{U}(m) \cap \mathbf{SL}_m(\mathbb{C}).$$

Puede mostrarse que $\mathbf{U}(1)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1$ y que $\mathbf{U}(m)$ es difeomorfo a $\mathbf{SU}(m) \times \mathbf{U}(1)$. Esto significa $dim\mathbf{SU}(m) = m^2 - 1$.

Capítulo 2

Espacio tangente

2.1. Funciones y aplicaciones diferenciables

Vamos a establecer el concepto de función diferenciable en una variedad M y el de aplicaciones diferenciables entre variedades, para lo cual utilizaremos el lenguaje de cartas locales y poder utilizar así el concepto de diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$ del Cálculo.

Definición 2.1 *Sea M una variedad diferenciable. Una función $f : M \to \mathbb{R}$ se dice que es* **diferenciable** *(de clase C^∞) si para toda carta (U, φ), $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable de clase C^∞.*

Observación 2.1 *La diferenciabilidad de f depende de la estructura diferenciable de M y no de la eleción de las cartas; pues si (U, φ) y (V, ϕ) son dos cartas de M con $U \cap V \neq \varnothing$, $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable si y sólo si $f \circ \phi^{-1}$ es diferenciable. Esto es consecuencia del hecho de ser*

$$f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \varphi^{-1})$$

y de que $\phi \circ \varphi^{-1}$ es siempre diferenciable por la propia definición de variedad diferenciable.

Representamos por $\mathfrak{F}(M)$ el conjunto de las aplicaciones diferenciables sobre M.
Para el estudio local es natural no sólo considerar funciones $f : M \to \mathbb{R}$ definidas en todo M sino también admitir funciones que estén definidas solamente en un entorno de un punto de M.

Definición 2.2 *Sea x un punto de la variedad diferenciable M. Una función f se dice que es* **diferenciable de clase C^∞ en un entorno del punto** *x si su dominio D_f es abierto, $x \in D_f$ y $f \in \mathfrak{F}(D_f)$, cuando en D_f se considera la estructura diferenciable inducida por la de M.*

Así pues, f es diferenciable en un entorno del punto $x \in D_f$, si para toda carta (U, φ) en M con $x \in U$, la composición $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(D_f \cap U) \to \mathbb{R}$ es diferenciable de clase C^∞.

Denotaremos por $\mathfrak{F}(x)$ el conjunto de las funciones diferenciables en el entorno de x.

Algebra de las funciones diferenciables en un entorno de un punto x de una variedad M.

Si $f, g \in \mathfrak{F}(x)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $f+g, fg$ y λf, definidas por

$$(f+g)(y) = f(y) + g(y), \quad (fg)(y) = f(y)g(y), \quad (\lambda f)(y) = \lambda f(y), \qquad y \in D_f \cap D_g$$

son funciones con dominio la intersección de los dominios de f y de g, y trivialmente $f + g,\ fg,\ \lambda f \in \mathfrak{F}(x)$, dado que cada carta (U, φ), con $x \in U$, se tiene

$$(f+g) \circ \varphi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) + (g \circ \varphi^{-1}),$$

$$(fg) \circ \varphi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1})(g \circ \varphi^{-1}), \quad (\lambda f) \circ \varphi^{-1} = \lambda(f \circ \varphi^{-1}).$$

Con estas operaciones el conjunto $\mathfrak{F}(x)$ se convierte en un álgebra. Así mismo, el conjunto de las funciones diferenciables sobre M, $\mathfrak{F}(M)$, se dota de una estructura de álgebra.

Definición 2.3 *Sean M_1 y M_2 dos variedades diferenciables. Una aplicación $F : M_1 \to M_2$ se dice que es diferenciable (de clase C^∞) si para todo $x \in M_1$ existe una carta (U_1, φ_1) alrededor de x y una carta (U_2, φ_2) alrededor de $F(x)$ con $F(U_1) \subset U_2$ y tal que*

$$\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} : \varphi(U_1) \subset \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$$

es diferenciable.

Observación 2.2 *De esta definición se sigue que la aplicacion F es continua, pues si B es un abierto de M_2 que contiene a $F(x)$, $\varphi_2(U_2 \cap B)$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n_2}$ y $(\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})^{-1}(\varphi_2(U_2 \cap B))$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n_1}$ (n_1, n_2 dimensiones de M_1 y M_2, respectivamente), luego $A = \varphi_1^{-1}((\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})^{-1}(\varphi_2(U_2 \cap B)))$ es un abierto de M_1 y se verifica $F(A) \subset B$; es decir, F es continua.*

Si se impone que la aplicación $F : M_1 \to M_2$ sea continua, siempre se puede lograr la condición de la definición: $F(U_1) \subset U_2$.
Además la definición dada no depende de las cartas tomadas.
Veamos ahora una caracterización equivalente de aplicación diferenciable entre variedades.

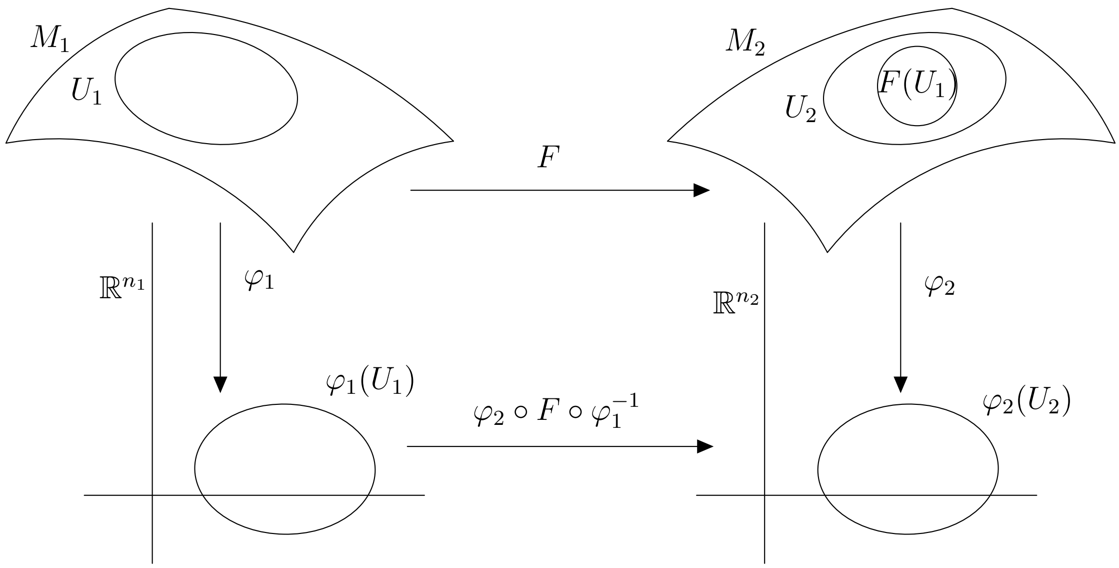


Figura 2.1: Aplicaciones diferenciables.

Proposición 2.1 *Sean M_1 y M_2 dos variedaes diferenciables y $F : M_1 \to M_2$ una aplicación continua, entonces F es diferenciable si y sólo si para toda función diferenciable $f : W \subset M_2 \to \mathbb{R}$, W abierto, $f \circ F$ es diferenciable en $F^{-1}(W)$.*

Demostración :

Sean $x \in M_1$, W un abierto de M_2 que contiene a $F(x)$ y una función $f \in \mathfrak{F}(W)$, demostremos que $f \circ F \in \mathfrak{F}(x)$. Si (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) son cartas alrededor de x y $F(x)$, respectivamente, tales que $F(U_1) \subset U_2$, entonces $U_1 \cap F^{-1}(U_2)$ es un entorno abierto de x.

Así, al ser F diferenciable en x y $f \in \mathfrak{F}(F(x))$, resulta que $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ es diferenciable en $\varphi_1(x)$ y $f \circ \varphi_2^{-1}$ es diferenciable en $\varphi_2(F(x))$. Luego

$$f \circ F \circ \varphi_1^{-1} = (f \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})$$

es diferenciable en $\varphi_1(x)$; lo que quiere decir que $f \circ F$ es diferenciable en x.

Reciprocamente, para probar que F es diferenciable, tenemos que establecer que $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ es difenciable, o, lo que es equivalente, que sus funciones componentes

$$s^j \circ \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} = y^j \circ F \circ \varphi_1^{-1}$$

son diferencibles, donde $s^j : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ y $\varphi_2 = (y^1, \ldots, y^{n_2})$. Lo que es cierto, pues basta tomar $f = y^j$, $(j = 1, \ldots, n_2)$. $\square$

Denotamos por $\mathfrak{F}(M_1, M_2)$ al conjunto de las aplicaciones diferenciables de M_1 en M_2.

Definición 2.4 *Dos variedades diferenciables M_1 y M_2 se dice que son* **difeomorfas** *si existe una aplicación diferenciable $F : M_1 \to M_2$ que admita inversa $F^{-1} : M_2 \to M_1$ diferenciable. A una tal F se le denomina* **difeomorfismo**.

Observación 2.3 *Dos variedades difeomorfas son necesariamente homeomorfas. El problema estriba en saber si dos variedades diferenciables homeomorfas son difeomorfas. Se demuestra que lo son si la dimensión es 1, 2 o 3. En el caso general es preciso decir que ello no es siempre posible.*

2.2. Espacio tangente y cotangente

Un concepto de gran importancia en la teoría local de las variedades diferenciables es el espacio tangente en un punto. Si se imagina que la variedad está inmersa en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, resulta intuitivo hacer corresponder a cada $p \in M$ un cierto espacio vectorial: el espacio de los vectores tangentes a M en p.
Para ello debemos recurrir a las cartas que forman el atlas que describe su estructura diferenciable. Así, y volviendo al caso de superficies en $\mathbb{R}^3$, un vector tangente $\vec{v}$ a una superficie M en un punto p contenido en la imagen de una representación paramétrica local

$$\vec{x} : A \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3 \qquad (u^1, u^2) \mapsto \vec{x}(u^1, u^2)$$

viene dado por

$$\vec{x} = v^1 \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} + v^2 \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}$$

es decir, un vector está determinado por un par de números reales (v^1, v^2), respecto a una representación paramétrica dada, que son sus componentes en la base $\{\partial\vec{x}/\partial u^1, \partial\vec{x}/\partial u^2\}$.
De nuevo aquí, recurrimos a vectores tangentes en $\mathbb{R}^3$, pero éstos se pueden entender como una aplicación que asigna a cada función diferenciable un número real determinado por el valor de la derivada direccional con respecto a ellos, en su punto de aplicación. Y a esta interpretación de vector es a la que acudiremos en una variedad.

Definición 2.5 *Un* **vector tangente** *a una variedad diferenciable M de dimensión n en un punto $x \in M$, es una aplicación*

$$v : \mathfrak{F}(x) \to \mathbb{R},$$

tal que fijada una carta coordenada (U, φ) en M con $x \in U$, existe una n-upla $(a^1, \ldots, a^n)$ de números reales tal que, para toda $f \in \mathfrak{F}(x)$:

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)}.$$

Observemos que si $v : \mathfrak{F}(x) \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica esta propiedad relativamente a una carta coordenada (U, φ) con $x \in U$, la misma propiedad se verifica también para cualquier carta coordenada (V, ϕ) con $x \in V$; es decir, existe una n-upla $(b^1, \ldots, b^n)$ de números reales tal que, $\forall f \in \mathfrak{F}(x)$,

$$v(f) = \sum_{j=1}^{n} b^i \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\phi(x)}.$$

En efecto, supongamos que v tiene a $(a^1, \ldots, a^n)$ como n-upla asociada a la carta (U, φ), entonces

$$\begin{aligned}
v(f) &= \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial (f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\varphi(x)} \frac{\partial (r^j \circ \phi \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\varphi(x)} J_i^j (\phi \circ \varphi^{-1})_{|\varphi(x)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a^i J_i^j (\phi \circ \varphi^{-1})_{|\varphi(x)} \right) \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\varphi(x)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\varphi(x)}
\end{aligned}$$

donde $(J_i^j(\phi \circ \varphi^{-1}))$ es la matriz jacobiana de la aplicación $\phi \circ \varphi^{-1}$. Por tanto

$$v(f) = \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\varphi(x)}$$

donde

$$b^j = \sum_{i=1}^{n} a^i J_i^j (\phi \circ \varphi^{-1})_{|\varphi(x)}.$$

En consecuencia, esto significa que, para que una aplicación $v : \mathfrak{F}(x) \to \mathbb{R}$ sea un vector tangente en $x \in M$, basta con que verifique la condición exigida en la definición con respecto a una carta coordenada (U, φ) para que automáticamente la satisfaga para todas las cartas coordenadas.
Para un punto $x \in M$, representamos por $T_x(M)$ el conjunto de los vectores tangentes a M en x, que llamaremos **espacio tangente** a la variedad M en x.

Sea ahora (U, φ) una carta coordenada con $x \in U$, y sean $(x^1, \ldots, x^n)$ las funciones coordenadas de esta carta. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, definimos:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : \mathfrak{F}(x) \to \mathbb{R} \quad \textit{por} \quad \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)}, \quad \forall f \in \mathfrak{F}(x)$$

y observemos que $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x(M)$ trivialmente, puesto que la n-upla de números reales que le corresponde, relativamente a la carta (U, φ), es $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, con el 1 en el i-ésimo lugar.

Proposición 2.2 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. El espacio tangente $T_x(M)$ en un punto x es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ de dimensión n. Si (U, φ) es una carta coordenada con $x \in U$ y $(x^1, \ldots, x^n)$ sus funciones coordenadas, $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ constituye una base de $T_x(M)$, denominada base canónica o natural asociada a la carta (U, φ).*

Demostración :

De forma natural, a $T_x(M)$ se le dota de una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales como sigue: si $v, v_1, v_2 \in T_x(M)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$v_1 + v_2 : \mathfrak{F}(x) \to \mathbb{R} \qquad \lambda v : \mathfrak{F}(x) \to \mathbb{R}$$

$$(v_1 + v_2)(f) = v_1(f) + v_2(f) \qquad (\lambda v)(f) = \lambda v(f) \quad \forall f \in \mathfrak{F}(x).$$

Para ver que $v_1 + v_2$, $\lambda v \in T_x(M)$, observemos que dada una coordenada (U, φ) con $x \in U$, $(a_1^1, \ldots, a_1^n)$, $(a_2^1, \ldots, a_2^n)$ y $(a^1, \ldots, a^n)$ las n-uplas de números reales asociados a v_1, v_2 y v respectivamente, entonces $(a_1^1 + a_2^1, \ldots, a_1^n + a_2^n)$ es la n-upla asociada a $v_1 + v_2$ y $(\lambda a^1, \ldots, \lambda a^n)$ es la n-upla asociada a λv, ambas relativamente a la carta (U, φ).

Veamos ahora que $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ constituyen un sistema generador de $T_x(M)$; entonces, asociado a la carta (U, φ), v determina una n-upla de números reales $(a^1, \ldots, a^n)$ de forma que, para $f \in \mathfrak{F}(x)$ arbitraria

$$v(f) = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right)(f),$$

luego

$$v = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

y, por tanto, $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ generan $T_x(M)$.

Veamos, finalmente, que son linealmente independientes. Para ello, supongamos que tenemos una combinación lineal

$$\sum_{i=1}^n \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0,$$

si se la aplicamos a cada $x^j \in \mathfrak{F}(x)$, tenemos

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^j}(x^j) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \frac{\partial (x^j \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \frac{\partial r^j}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \delta_i^j = \lambda^j$$

luego $\lambda^j = 0$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. $\square$

Cambio de base de vectores tangentes canónicos en un punto $x \in M$.

Sean (U, φ) y (V, ϕ) dos cartas alrededor de un punto $x \in M$, $(x^1, \dots, x^n)$ y $(y^1, \dots, y^n)$ las respectivas funciones coordenadas y, finalmente, $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\}$ las correspondientes bases canónicas de $T_x(M)$. Vamos a obtener la matriz que expresa el cambio de una base a otra.
Para obtenerla, observemos que, $\forall f \in \mathfrak{F}(x)$ y cada $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\phi(x)} \frac{\partial(r^j \circ \phi \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)}$$

pero $r^j \circ \phi = y^j$, para $j = 1, 2, \dots, n$, luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i}(f) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(y^j \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\phi(x)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(y^i) \frac{\partial}{\partial y^j}(f) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j) \frac{\partial}{\partial y^j} \right)(f), \end{aligned}$$

y como f es arbitraria, se sigue

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

lo que significa que $(\frac{\partial}{\partial x^i}(y^j))$ es la matriz cuadrada de orden n que da el cambio de base correspondiente a un cambio de cartas. Conviene observar, para clarificar las cosas, que se trata de una matriz numérica cuyos términos están dados por

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(y^j) = \frac{\partial(y^j \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \frac{\partial(r^j \circ \phi \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)},$$

se trata pues de la matriz jacobiana de la aplicación $\phi \circ \varphi^{-1}$ de cambio de coordenadas evaluada en el punto $\varphi(x)$.

Proposición 2.3 *Todo vector tangente $v \in T_x(M)$ satisface las siguientes propiedades, para $f, g \in \mathfrak{F}(x)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrarios:*

1. $v(f + g) = v(f) + v(g)$,

2. $v(\lambda f) = \lambda v(f)$,

3. $v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$.

Demostración :
Las tres propiedades se demuestran de forma análoga; centrémonos, por tanto, en una de ellas, por ejemplo la tercera.
Para ello, tomemos una carta (U, φ) *arbitraria con* $x \in U$ *y sea* $(a^1, \ldots, a^n)$ *la* n*-upla de números reales que determinan a* v *en este sistema de coordenadas.*
Entonces

$$
\begin{aligned}
v(fg) &= \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial((fg)\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial((f\circ\varphi^{-1})(g\circ\varphi^{-1}))}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} (g\circ\varphi^{-1})(\varphi(x)) + (f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x)) \frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{\varphi(x)} g(x) + \sum_{i=1}^{n} a^i f(x) \frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{\varphi(x)} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \right) g(x) + f(x) \left(\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \right) \\
&= v(f)g(x) + f(x)v(g). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Es importante señalar que las propiedades $1), 2), 3)$ de esta proposición caracterizan totalmente a los vectores tangentes en $x \in M$, las cuales se resumen diciendo que la aplicación $v : \mathfrak{F}(x) \to \mathbb{R}$ es una derivación. Es decir, de forma equivalente a la que hemos dado, se puede definir $T_x(M)$ como el conjunto de las derivaciones

$$\mathfrak{D}(x) = \{v : \mathfrak{F}(x) \to \mathbb{R} / \ v \ \ \textit{es} \ \ \textit{una} \ \ \textit{derivación}\}.$$

Para establecer esta equivalencia, observemos, en primer lugar, que $\mathfrak{D}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales con las operaciones

$$(v+w)(f) = v(f) + w(f), \qquad (\lambda v)(f) = \lambda v(f) \qquad \forall v, w \in \mathfrak{D}(x) \ y \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para ver que $T_x(M)$ y $\mathfrak{D}(x)$ coinciden, necesitamos el siguiente lema:

Lema 2.1 *Sea* (U, φ) *un sistema coordenado alrededor de* $x_0 \in M$*, con funciones coordenadas* $(x^1, \ldots, x^n)$ *y tal que* $x^i(x_0) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n$*, y* $\varphi(U) = B_0^n(\varepsilon)$*. Entonces para toda función*

$f \in \mathfrak{F}(x_0)$, existen n funciones $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{F}(x_0)$, tal que

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} x^i(x) f_i(x)$$

para x en un entorno de x_0.

Demostración :

Sea la función diferencial $F = f \circ \varphi^{-1} : B_0^n(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; para $(\xi^1, \ldots, \xi^n) \in B_0^n(\varepsilon)$, hacemos

$$\begin{aligned} F(\xi^1, \ldots, \xi^n) &= F(\xi^1, \ldots, \xi^n) - F(\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}, 0) + F(\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}, 0) \\ &\quad -F(\xi^1, \ldots, \xi^{n-2}, 0, 0) + F(\xi^1, \ldots, \xi^{n-2}, 0, 0) + \ldots \\ &\quad -F(\xi^1, 0, \ldots, 0) + F(\xi^1, 0, \ldots, 0) - F(0, \ldots, 0) + F(0, \ldots, 0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(\xi^1, \ldots, \xi^{i-1}, t\xi^i, 0, \ldots, 0)]_0^1 + F(0, \ldots, 0) \\ &= F(0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r^i}(\xi^1, \ldots, \xi^{i-1}, t\xi^i, 0, \ldots, 0)\xi^i dt \\ &= F(0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} \xi^i F_i(\xi^1, \ldots, \xi^n) \end{aligned}$$

donde las F_i, definidas por $F_i(\xi^1, \ldots, \xi^n) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r^i}(\xi^1, \ldots, \xi^{i-1}, t\xi^i, 0, \ldots, 0)dt$ es diferenciable. Tomando $f_i = F_i \circ \varphi$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, queda probado el lema. $\square$

Proposición 2.4 *Existe un isomorfismo*[1] *entre los vectores tangentes en x_0 a M y el conjunto de las derivaciones $\mathfrak{D}(x_0)$.*

Demostración :

Todo vector tangente $v \in T_{x_0}(M)$ verifica las propiedades de la proposición 2.3, luego es un elemento de $\mathfrak{D}(x_0)$. En particular los elementos de la base canónica $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\} \subset \mathfrak{D}(x_0)$. Para establecer la otra inclusión, observemos en primer lugar que

$$v(c) = 0 \qquad para \qquad v \in \mathfrak{D}(x_0) \;\; y \; c \in \mathbb{R}$$

pues $v(c) = v(c1) = cv(1) = cv(1 \cdot 1) = c(1v(1) + 1v(1)) = 2cv(1)$, así $cv(1) = 0$ y, por tanto, $v(c) = 0$.

Tomemos ahora una carta local (U, φ) de funciones coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ alrededor de x_0, tal que $\varphi(x_0) = 0$ y $\varphi(U) = B_0^n(\varepsilon)$. Demostraremos, que para todo $v \in \mathfrak{D}(x_0)$, se tiene:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

En efecto, $\forall f \in \mathfrak{F}(x_0)$ y utilizando el lema anterior:

[1] Homomorfismo que admite inversa.

$$\begin{aligned} v(f) &= v\left(f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} x^i f_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(v(x^i) f_i(x_0) + x^i(x_0) v(f_i)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\right)(f). \qquad \square \end{aligned}$$

Asociaremos a cada aplicación diferenciable entre variedades una aplicación lineal entre sus espacios tangentes.
Sean M y N variedades diferenciables de dimensión m y n, respectivamente, y $F : M \to N$ una aplicación diferenciable. Dado un punto $x \in M$, consideremos su punto imagen $F(x) \in N$, y los espacios tangentes $T_x(M)$ y $T_{F(x)}(N)$. Para $v \in T_x(M)$, vector tangente en el punto $x \in M$, definimos

$$F_*(v) : \mathfrak{F}(F(x)) \to \mathbb{R}$$

como la aplicación dada por

$$\boxed{[F_*(v)](h) = v(h \circ F), \qquad \forall h \in \mathfrak{F}(F(x)).}$$

Observemos que esta aplicación está bien definida, puesto que $h \circ F \in \mathfrak{F}(x)$, al ser h y F diferenciables.

Proposición 2.5 *Para cada $v \in T_x(M)$, $F_*(v) \in T_{F(x)}(N)$ y la aplicación*

$$F_* : T_x(M) \to T_{F(x)}(N) \qquad v \mapsto F_*(v)$$

es lineal (es decir homomorfismo entre espacios vectoriales).
Demostración :
Para ver que $F_*(v) \in T_{F(x)}(N)$ tendremos que probar que si (V, ϕ) es una carta local en N, con $F(x) \in V$, existe una n-upla $(b^1, \ldots, b^n)$ de números reales de forma que

$$[F_*(v)](h) = \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial(h \circ \phi^{-1})}{\partial s^j}_{|\phi(F(x))} \qquad \forall h \in \mathfrak{F}(F(x))$$

donde $s^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la j-ésima proyección.
Para ello, consideremos una carta local arbitraria (U, φ) en M con $x \in U$, y sea $(a^1, \ldots, a^m)$ la m-upla de números reales tales que

$$v(f) = \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \qquad \forall f \in \mathfrak{F}(x)$$

donde $r^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es la i-ésima proyección.
Recordemos que, si $(x^1, \ldots, x^m)$ y $(y^1, \ldots, y^n)$ son las funciones coordenadas de las cartas (U, φ) y (V, ϕ), entonces $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\}$ son bases de $T_x(M)$ y $T_{F(x)}(N)$ respectivamente. Se deduce, para $h \in \mathfrak{F}(F(x))$, que:

$$\begin{aligned}
[F_*(v)](h) &= v(h \circ F) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(h \circ F) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial (h \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial (h \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} a^i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial s^j}_{|\phi(F(x))} \frac{\partial (s^j \circ \phi \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a^i \frac{y^j \circ F \circ \varphi^{-1}}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \right) \frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial s^j}_{|\phi(F(x))} \\
&= \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial s^j}_{|\phi(F(x))}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $F_*(v) \in T_{F(x)}(N)$.
Como h es arbitraria, de aquí se sigue

$$F_*(v) = \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial}{\partial y^j} \quad \text{con} \quad b^j = v(y^j \circ F), \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Además, estas mismas expresiones nos permiten deducir que F_* es un homomorfismo entre espacios vectoriales y deducir cual es la matriz de números reales que tiene asociada con respecto a las bases canónicas $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\}$.
En efecto

$$F_*(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j \circ F) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

de lo que se sigue que F_* es lineal, y está determinada por la matriz de coeficientes:

$$(F_*)_i^j = \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j \circ F) = \frac{\partial (s^j \circ \phi \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \qquad i \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ y } j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

es decir, que F_* está representada por la matriz jacobiana, de m columnas y n filas, en el punto $\varphi(x)$, de la aplicación $\phi \circ F \circ \varphi^{-1}$. $\square$

Definición 2.6 *A la aplicación lineal $F_* : T_x(M) \to T_{F(x)}(N)$, inducida por la aplicación diferenciable $F : M \to N$, entre los espacios tangentes en puntos correspondientes, le llamamos* **aplicación lineal tangente de F**, **aplicación inducida por F** *o también* **diferencial** *de F.*

Proposición 2.6 *Sean $F : M \to N$ y $G : N \to P$ aplicaciones diferenciables entre variedades. Entonces*

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

Demostración :
Para un punto $x \in M$ se tienen las aplicaciones inducidas:

$$\begin{tikzcd} T_x(M) \arrow[r, "F_*"] \arrow[rr, bend right, "(G\circ F)_*"'] & T_{F(x)}(N) \arrow[r, "G_*"] & T_{G(F(x))}(P) \end{tikzcd}$$

Sean $v \in T_x(M)$ y $h \in \mathfrak{F}(G(F(x)))$ arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned} [(G \circ F)_*(v)](h) &= v(h \circ (G \circ F)) \\ &= v((h \circ G) \circ F) \\ &= [F_*(v)](h \circ G) \\ &= [G_*(F_*(v))](h) \\ &= [(G_* \circ F_*)(v)](h) \end{aligned}$$

y como v y h son arbitrarios se sigue: $G_* \circ F_* = (G \circ F)_*$. $\square$

Observación 2.4 Curvas sobre una variedad.
Consideremos las curvas como un caso particular de aplicaciones entre variedades, pues trataremos con curvas parametrizadas.
Una curva en una variedad M es una aplicación diferenciable de un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ en M. A menudo hablaremos de una curva

$$\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to M,$$

donde $[a, b]$ es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$, y en este caso suponemos que γ admite una extensión diferenciable a un abierto de $\mathbb{R}$ que contiene al intervalo $[a, b]$.
Sea $\gamma : I \to M$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, una curva diferenciable sobre M. Para cada $t \in I$, el vector tangente a la curva en el punto $\gamma(t)$ es, por definición

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma_* \left(\frac{d}{dr_{|t}} \right) \in T_{\gamma(t)}(M),$$

donde $\frac{d}{dr}$ es el vector básico asociado a la coordenada r de $\mathbb{R}$.

Si $(x^1, \ldots, x^n)$ es un sistema de coordenadas locales alrededor del punto $\gamma(t)$, entonces

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dr}_{|t} \frac{\partial}{\partial x^i}_{|\gamma(t)}.$$

Habiendo definido los conceptos de curvas y de vector tangente, podemos ahora dar una interpretación geométrica de la aplicación F_* inducida por la aplicación diferenciable entre variedades $F : M \to N$.
Si $v \in T_x(M)$ tomemos una curva γ sobre M tal que $\gamma(0) = x$ y $\dot{\gamma}(0) = v$; entonces $F_* \circ \gamma$ es una curva en N, verificándose $(F \circ \gamma)(0) = F(x)$ y también $\overline{F \circ \gamma}(0) = F_*(v)$.
Observemos que tal curva γ existe, sin más que considerar una carta (U, φ) alrededor de $x \in M$ y tomar, por ejemplo, la imagen mediante φ^{-1} de un segmento de la recta en $\mathbb{R}^n$ que pasa por $\varphi(x)$ y tiene la dirección del vector $\varphi_*(v)$. También observemos que la obtención del vector $F_*(v)$, no depende de la curva elegida con tal que pase por x y sea tangente a v.
Así pues, para hallar la imagen de un vector $v \in T_x(M)$, trazamos una curva a la que el vector v es tangente, hallamos su imagen en N y tomamos el vector tangente en esta curva, obteniéndose el vector F_*.

Definición 2.7 *Denominamos* **espacio cotangente** *en el punto x de la variedad diferenciable M al espacio vectorial real $T_x^*(M)$ dual del espacio tangente $T_x(M)$ en x.*

Un elemento $w \in T_x^*(M)$ es, por definición, una aplicación lineal $w : T_x(M) \to \mathbb{R}$, al cual denominaremos, indistintamente, **vector cotangente**, **covector** o **1-forma** en el punto x.
Si $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ es una carta local con $x \in U$, la base canónica $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ de $T_x(M)$ nos permite definir por dualidad una base natural en el espacio cotangente $T_x^*(M)$ cuyos elementos los representamos por $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ y que están definidos por

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i$$

donde δ_j^i son los delta de Kronecker: $\delta_j^i = 0$, si $i \neq j$; $\delta_j^i = 1$, si $i = j$.
Veamos ahora que la aplicación lineal tangente de una función real se puede considerar como un elemento del espacio cotangente.
Sea $f \in \mathfrak{F}(M)$ y $x \in M$, entonces f induce, de forma natural, una aplicación lineal

$$f_* : T_x(M) \to T_{f(x)}(\mathbb{R})$$

y, si se considera el isomorfismo natural,

$$\phi_{f(x)} : T_{f(x)}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad \textit{dado por} \quad \lambda \frac{d}{dr} \mapsto \lambda,$$

siendo $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función coordenada en $\mathbb{R}$. Obtenemos la aplicación

$$df = \phi_{f(x)} \circ f_* : T_x(M) \to \mathbb{R}.$$

Veamos como está definida df, para ello, si $v \in T_x(M)$, ponemos $f_*(v) = \lambda \frac{d}{dr}$, así

$$df(v) = (\phi_{f(x)} \circ f_*)(v) = \phi_{f(x)} \left(\lambda \frac{d}{dr} \right) = \lambda$$

y tan solo nos queda por determinar este número real λ:

$$\lambda = \left(\lambda \frac{d}{dr} \right)(r) = (f_*(v))(r) = v(r \circ f) = v(f)$$

por tanto

$$\boxed{df(v) = v(f) \qquad \forall v \in T_x(M).}$$

Como consecuencia de esta relación, se tienen las siguientes propiedades, para $v, v' \in T_x(M)$ y $a \in \mathbb{R}$:

$$df(v + v') = (v + v')(f) = v(f) + v'(f) = df(v) + df(v')$$

$$df(av) = (av)(f) = a(v(f)) = adf(v)$$

y, por tanto, $df \in T_x^*(M)$.

Definición 2.8 *Para cada $f \in \mathfrak{F}(x)$, el elemento $df \in T_x^*(M)$, definido por $df(v) = v(f)$, $\forall v \in T_x(M)$, se denomina* **diferencial** *de la función f en el punto $x \in M$.*

Observación 2.5 *Obsérvese que, en el caso particular de $M = \mathbb{R}^n$, df es la diferencial ordinaria. Además, queda justificada la notación para los elementos de la base dual $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ de $T_x^*(M)$, asociada a una carta local $(U, (x^1, \ldots, x^n))$, pues de hecho, como $x^i : U \to \mathbb{R}$, dx^i es la diferencial de x^i.*

Si $f \in \mathfrak{F}(x)$, $x \in U$, entonces

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(f) dx^i.$$

En particular, si $(V, (y^1, \ldots, y^n))$ es otra carta coordenada alrededor del punto x, entonces la relación entre las bases naturales $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ y $\{dy^1, \ldots, dy^n\}$ en $T_x^*(M)$ se expresa por

$$\boxed{dy^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j) dx^i.}$$

2.3. Rango de una aplicación diferenciable

Sea $F : N \to M$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables de dimensiones n y m, respectivamente, y sea $x \in N$. Si (U, φ) y (V, ϕ) son sistemas coordenados locales alrededor de x y de $F(x)$, respectivamente, tales que $F(U) \subset V$, entonces tenemos la correspondiente expresión de F en coordenadas locales

$$\hat{F} = \phi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \phi(V)$$

$$(\xi^1, \ldots, \xi^n) \mapsto \hat{F}(\xi^1, \ldots, \xi^n) = (F^1(\xi^1, \ldots, \xi^n), \ldots, F^m(\xi^1, \ldots, \xi^n)).$$

Definición 2.9 *El* **rango de F en x** *es el rango de la matriz jacobiana de $\hat{F}$ en $\varphi(x)$.*

Así, el rango de F en x es el rango en $\varphi(x)$ de la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial r^1} & \ldots & \frac{\partial F^1}{\partial r^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F^m}{\partial r^1} & \ldots & \frac{\partial F^m}{\partial r^n} \end{pmatrix}_{\varphi(x)}$$

Esta definición debe ser independiente de la elección de las coordenadas. Para lo cual basta observar que la matriz anterior es la asociada a la aplicación lineal inducida entre los espacios tangentes $T_x(N)$ en x a N y $T_{F(x)}(M)$ en $F(x)$ a M, relativamente a las cartas (U, φ) y (V, ϕ):

$$F_* : T_x(N) \to T_{F(x)}(M)$$

pues, $F^j = s^j \circ \phi \circ F \circ \varphi^{-1}$, para $j = 1, \ldots, m$. Así, podemos dar la siguiente definición equivalente:

Definición 2.10 *Se llama rango de F en x al rango de la aplicación lineal inducida $F_* : T_x(N) \to T_{F(x)}(M)$.*

Proposición 2.7 *Teorema del rango. Sea $F : N \to M$ una aplicación diferenciable entre variedades de dimension n y m, respectivamente, y supongamos que rango de $F = k$ en todo punto de N. Si $x \in N$, entonces existen sistemas coordenados (U, φ) y (V, ϕ) alrededor de x y de $F(x)$ tales que $\varphi(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(U) = C_0^n(\varepsilon)$ y $\phi(F(x)) = 0 \in \mathbb{R}^m$, $\phi(V) = C_0^m(\varepsilon)$ y la expresión de F en coordenadas, $\hat{F} = \phi \circ F \circ \varphi^{-1}$, está dada por*

$$\hat{F}(\xi^1, \ldots, \xi^n) = (\xi^1, \ldots, \xi^k, 0, \ldots, 0).$$

Demostración :

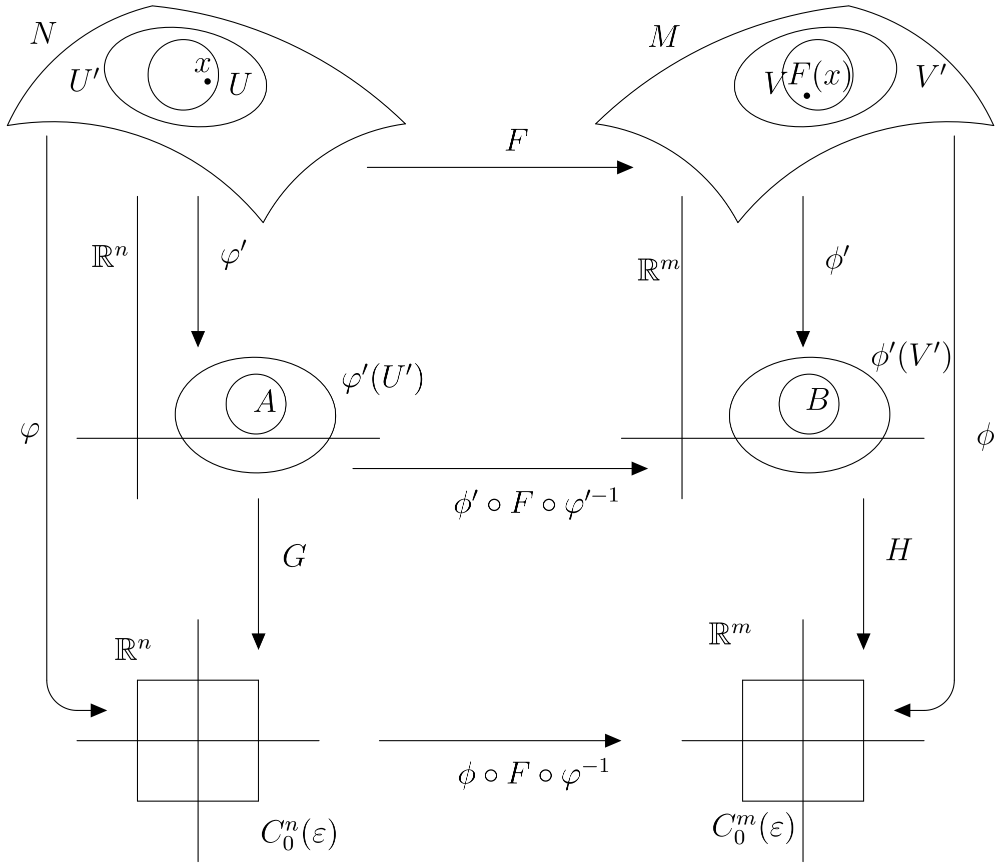


Figura 2.2: Teorema del rango.

Sean (U', φ') una carta alrededor de x en N y (V', ϕ') una carta alrededor del punto $F(x)$ en M, verificandose $F(U') \subset V'$, entonces la aplicación

$$\phi' \circ F \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(U') \subset \mathbb{R}^n \to \phi'(V') \subset \mathbb{R}^m$$

es diferenciable y de rango constante igual a k en $\varphi'(U')$, entonces existen (en virtud del teorema del rango entre espacios euclídeos) conjuntos abiertos $A \subset \varphi'(U')$ y $B \subset \phi'(V')$ con $\varphi'(x) \in A$ y $\phi'(F(x)) \in B$, y existen difeomorfismos $G : A \to C_0^n(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ y $H : B \to C_0^m(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$, verificando $(H \circ (\phi' \circ F \circ \varphi'^{-1}) \circ G^{-1})(C_0^n(\varepsilon)) \subset C_0^m(\varepsilon)$, tal que esta aplicación se expresa en la forma simple

$$(H \circ (\phi' \circ F \circ \varphi'^{-1}) \circ G^{-1})(\xi^1, \ldots, \xi^n) = (\xi^1, \ldots, \xi^k, 0, \ldots, 0).$$

Consideremos ahora las cartas

$$(U, \varphi) \equiv \left(\varphi'^{-1}(A), G \circ \varphi'_{|\varphi'^{-1}(A)}\right) \quad \textit{alrededor de } x;$$

$$(V, \phi) \equiv \left(\phi'^{-1}(B), H \circ \phi'_{|\phi'^{-1}(B)}\right) \quad \textit{alrededor de } F(x),$$

con lo que

$$\phi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) = C_0^n(\varepsilon) \to \phi(V) = C_0^m(\varepsilon),$$
$$(\xi^1, \ldots, \xi^n) \longmapsto (\xi^1, \ldots, \xi^k, 0 \ldots, 0). \qquad \square$$

2.4. Inmersiones, submersiones y embebimientos

Definición 2.11 *Decimos que una aplicación diferenciable $F : N \to M$ es una* **inmersión** *de N en M si el rango $F = dimN$ en todo punto; es decir, si $F_*(x)$ es inyectiva para todo $x \in N$. Se dice que F es* **submersión** *de N en M si el rango $F = dimM$ en todo punto; es decir, si $F_*(x)$ es sobreyectiva para todo $x \in N$.*

Definición 2.12 *F es un* **embebimiento** *si es una inmersión inyectiva que además es homeomorfismo de N sobre su imagen $F(N)$, con la topología como subespacio de M. La imagen de un embebimiento se llama* **subvariedad embebida***.*

Ejemplo 2.1 *Sea $m \leq n$. La aplicación*

$$j(m,n) : (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m \to (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

viene dada por las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y^1 & = & x^1 \\ & \vdots & \\ y^m & = & x^m \\ y^{m+1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ y^n & = & 0 \end{array} \right.$$

luego es C^∞ y su matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} I_{m\times m} \\ O_{(n-m\times m)} \end{pmatrix}$$

donde $I_{m\times m}$ es la matriz unidad $m\times m$ y $O_{(n-m)\times m}$ es la matriz nula $(n-m)\times m$. Esta matriz tiene un menor maximal no nulo, luego la aplicación lineal asociada, que es la derivada de $j(m,n)$, es inyectiva. Vemos así que $j(m,n)$ es una inmersión C^∞, que se llama inmersión canónica de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.2 *Nos proponemos averiguar en qué puntos es submersión la aplicación*

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow (xyz, x + y + z) \in \mathbb{R}^2.$$

El jacobiano es

$$\begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que solo dejará de ser submersión en las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} yz - xz &= 0 \\ yz - xy &= 0 \\ xz - xy &= 0 \end{aligned}$$

que puede escribirse

$$\begin{aligned} (y-x)z &= 0 \\ (z-x)y &= 0 \\ (z-y)x &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones con $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ vienen dadas por $x = y = z \neq 0$, las que cumplen $x = 0$ también cumplen $y = 0$ o $z = 0$, con lo que obtenemos los ejes y e z y de manera similar vemos que las restantes soluciones son los puntos del eje x. Así pues, f es submersión salvo en los ejes coordenados y en la recta $x = y = z$.

Ejemplo 2.3 *Se considera la aplicación $f : (x, y, z) \longrightarrow (xy + z, x + y + z, y + z)$. Su matriz jacobiana es*

$$\begin{pmatrix} y & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

luego f es inmersión en todo punto.
Para ver si es inyectiva y homeomorfismo planteamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} u &= xy + z \\ v &= x + y + z \\ t &= y \\ r &= y + z. \end{aligned}$$

De las tres últimas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} x &= v - r \\ y &= t \\ z &= r - t \end{aligned}$$

lo que quiere decir que f es inyectiva y que su inversa coincide con la restricción a la imagen $f(\mathbb{R}^3)$ de

$$g(u, v, t, r) = (v - r, t, r - t).$$

Dado que g es continua como aplicación de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$, su restricción a la imagen de f, que es f^{-1}, es continua cuando en la imagen se considera la topología relativa. Por tanto, $f(\mathbb{R}^3)$ es embebimiento.

Capítulo 3

Formas bilineales simétricas

La geometría semi-riemanniana implica un tipo particular de $(0,2)$ tensor en el espacio tangente. Para estudiar esto en general, sea V un espacio vectorial real (de dimensión finita en el contexto indicado). Una $forma\ bilineal$ en V es una función $\mathbb{R}$-bilineal $b : V \times V \to \mathbb{R}$, y consideremos sólo el caso simétrico: $b(v,w) = b(w,v)$ para todo v, w.

Definición 3.1 *Una forma bilineal simétrica b en V es:*

1. *definida positiva (negativa) si $v \neq 0$, entonces $b(v,v) > 0$ (< 0),*

2. *semidefinida positiva (negativa) si $b(v,v) \geq 0$ (≤ 0) para todo $v \in V$,*

3. *no degenerada si $b(v,w) = 0$ para todo $w \in V$, entonces $v = 0$.*

Si b es definida, entonces es semidefinida y no degenerada.
Si b es una forma bilineal simétrica en V, entonces para cualquier subespacio W de V la restricción $b|(W \times W)$, denotada simplemente $b|W$, es de nuevo simétrica y bilineal.
Si b es [semi-]definida, entonces también $b|W$ es [semi-]definida.

Definición 3.2 *El índice ν de una forma bilineal simétrica b en V es la mayor dimensión de los subespacios vectoriales en las que $b|W$ es definida negativa.*

Así, $0 \leq \nu \leq dim V$ y $\nu = 0$ si y sólo si b es semidefinida positiva.
La función $q : V \to \mathbb{R}$ dada por $q(v) = b(v,v)$ es la $forma\ cuadrática$ asociada a b. A menudo es más fácil de tratar que b, y no se pierde información ya que b puede ser reconstruida por la identidad de polarización

$$b(v,w) = \frac{1}{2}[q(v+w) - q(v) - q(w)].$$

Si $e_1, \ldots, e_n$ es una base para V, entonces la matriz $(b_{ij}) = b(e_i, e_j)$ de $n \times n$ es llamada la matriz de b relativa a $e_1, \ldots, e_n$.
Ya que b es simétrica, esta matriz es simétrica. Note que b esta determinada por

$$b\left(\sum v_i e_i, \sum w_j e_j\right) = \sum b_{ij} v_i w_j.$$

Lema 3.1 *Una forma bilineal simétrica es no degenerada si y sólo si su matriz en relación con una de las bases es invertible (por tanto cada una).*
Demostración :
Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base para V. Si $v \in V$, entonces $b(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ si y sólo si $b(v, e_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
Ya que (b_{ij}) es simétrica,

$$b(v, e_i) = b\left(\sum v_j e_j, e_i\right) = \sum b_{ij} v_j.$$

Así que b es degenerada si y sólo si existen números $v_1, \ldots, v_n$ todos diferentes de cero tales que $\sum b_{ij} v_j = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Pero esto es equivalente a la dependencia lineal de las columnas de (b_{ij}), esto es, (b_{ij}) es singular. $\square$

3.1. Producto escalar

Definición 3.3 *Un producto escalar g en un espacio vectorial V es una forma bilineal simétrica no degenerada en V.*

Los *productos interiores* son productos escalares positivos, un ejemplo es el *producto punto* en $\mathbb{R}^n$, para el cual $v \cdot w = \sum v_i w_i$.
Muchas propiedades de los productos interiores se transfieren a los productos escalares, sin embargo surgen algunos nuevos fenómenos distintivos cuando g es indefinida.
Cambiar el signo en la definición del producto punto en $\mathbb{R}^2$ da el ejemplo más simple de un producto escalar indefinido.

Vectores $v, w \in V$ son ortogonales, escribimos $v \perp w$ y satisfacen $g(v, w) = 0$.
Subconjuntos A y B de V son ortogonales, escribimos $A \perp B$ y satisfacen $v \perp w$ para todo $v \in A$ y $w \in B$.
Cuando el producto escalar g es indefinido ya no podemos representar los vectores ortogonales como ángulos rectos entre si.
Si W es un subespacio de V, entonces

$$W^{\perp} = \{v \in V : v \perp W\}.$$

$W^{\perp}$ es subespacio de V llamado W *ortogonal*.
No podemos llamar a $W^{\perp}$ el *complemento ortogonal* de W dado que $W + W^{\perp}$ generalmente no es todo V. Sin embargo la operación *ortogonal* tiene dos características familiares:

Lema 3.2 *Si W es un subespacio de un espacio con producto escalar V, entonces*

1. $dimW + dimW^{\perp} = n = dimV$,

2. $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Demostración :

1. *Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base para V asociada a W, es decir, para la cuál $e_1, \ldots, e_k$ es una base para W.*
   Ahora $v \in W^{\perp}$ si y sólo si $g(v, e_i) = 0$ para $1 \leq i \leq k$, que en términos de coordenadas es
   $$\sum_{j=1}^{n} g_{ij} v_j = 0 \qquad (1 \leq i \leq k).$$
   Esto es, k ecuaciones lineales con n incognitas, y por lema 3.1 las filas de la matriz de coeficientes son linealmente independientes, por lo que la matriz tiene rango k.
   Por lo tanto por álgebra lineal, el espacio de soluciones tiene dimensión $n - k$.
   Pero mediante la construcción de las n-uplas soluciones $(v_1, \ldots, v_n)$ obtenemos los vectores $v = \sum v_i e_i$ de $W^{\perp}$.

2. *Ya que $v \in (W^{\perp})^{\perp}$ significa $v \perp W^{\perp}$, tenemos $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$. Por 1) estos dos subespacios tienen la misma dimensión, por lo tanto son iguales.* □

Note que la nodegeneración de g en todo el espacio V es equivalente a $V^{\perp} = 0$.
Un subespacio W de V es llamado no-degenerado si $g|W$ es no-degenerado. Cuando V es un espacio con producto interior, todo subespacio W es de nuevo un espacio con producto interior (bajo $g|W$) por lo tanto es no-degenerado.
Sin embargo, cuando g es indefinida habrá siempre subespacios degenerados; por ejemplo, cualquier vector nulo seria uno. Por lo tanto, un subespacio de un espacio con productos escalares no necesariamente es un espacio con producto escalar.
Esta dificultad está vinculada a la anterior implicación de la operación *ortogonal*.

Definición 3.4 *Sea V un espacio vectorial con un producto escalar. Un subespacio vectorial $W \subset V$ se dice no-degenerado si $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.*

Lema 3.3 *Un subespacio W de V es no-degenerado si y sólo si V es suma directa de W y $W^{\perp}$.*
Demostración :
Por una identidad del espacio vectorial estandar

$$dim(W + W^{\perp}) + dim(W \cap W^{\perp}) = dimW + dimW^{\perp}.$$

De acuerdo al lema 3.2, el lado derecho es $n = dimV$.

$$dim(W + W^{\perp}) + dim(W \cap W^{\perp}) = dimV.$$

Entonces $W + W^{\perp} = V$ si y sólo si $W \cap W^{\perp} = 0$, pero por definición 3.4 se cumple $W \cap W^{\perp} = 0$. Por lo tanto $V = W \oplus W^{\perp}$.
De manera inversa, como $W \cap W^{\perp} = 0$, quiere decir $W \cap W^{\perp}$ se anula y por definición 3.4 es equivalente a la nodegeneración de W. □

Ya que $(W^{\perp})^{\perp} = W$, se sigue que W es no-degenerado si y sólo si $W^{\perp}$ lo es.

Dado que $q(v) = g(v, v)$ puede ser negativo, la norma $|v|$ de un vector es definida por $|g(v, v)|^{1/2}$. Un *vector unitario* u es un vector de norma 1, esto es $g(u, u) = \pm 1$. Es costumbre llamar al conjunto de vectores unitarios ortogonales, ortonormales, y para $n = dimV$, cualquier conjunto de n vectores ortonormales en V es necesariamente una base para V.

Lema 3.4 *Un espacio con producto escalar $V \neq 0$ tiene una base ortonormal.*
Demostración :
Ya que g es no-degenerada, existe un vector $v \in V$ tal que $g(v, v) \neq 0$. Ahora $v/|v|$ es un vector unitario. Por lo tanto es suficiente demostrar por inducción que cualquier conjunto ortonormal $e_1, \ldots, e_k$ con $k < n$ puede ser ampliado por uno. Por lema 3.1, estos vectores abarcan un (k-dimensional) subespacio no-degenerado W. Solo queda encontrar un vector unitario en $W^{\perp} \neq 0$. Pero como se ha indicado anteriormente $W^{\perp}$ es también no-degenerado, por lo que el argumento anterior muestra que contiene un vector unitario. □

La matriz de g relativa a una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ para V es diagonal: de hecho,

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varepsilon_j, \quad donde \;\; \varepsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1.$$

Siempre que sea conveniente, ordenaremos los vectores en una base ortonormal para que los signos negativos, si los hay, vienen primero y lo llamaremos *signatura* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.
Teniendo en cuenta estos signos, la expansión ortonormal se conserva.

Lema 3.5 *Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormal de V, con $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$. Entonces cada $v \in V$ tiene expresión única*

$$v = \sum \varepsilon_i g(v, e_i) e_i.$$

Para la prueba es suficiente demostrar que v menos la suma es ortogonal a cada e_i; así por la nodegeneración de g es cero.
La *proyección ortonormal* π de V sobre un espacio no-degenerado W es la transformación

lineal que envia $W^\perp$ a 0 y deja cada vector de W fijo.
Una base ortonormal $e_1, \ldots, e_k$ para W siempre puede ampliarse a una base para V; así

$$\pi(v) = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j g(v, -e_j) e_j.$$

Es costumbre hacer referencia al índice ν del producto escalar g de V como índice de V, escribimos $\nu = indV$.

Lema 3.6 *Para cualquier base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ de V, el número de signos negativos $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ es el índice ν de V.*
Demostración :
Supongamos que los primeros m signos ε_i son negativos. El resultado es trivial si g es definida, y $0 < m < n$. Observemos que g es definida negativa en el subespacio S por $e_1, \ldots, e_m$; así $\nu \geq m$.
Para demostrar la desigualdad inversa, sea W un subespacio arbitrario en el que g sea definida negativa, y definimos $\pi : W \to S$ por

$$\pi(w) = -\sum_{i \leq m} g(w, e_i) e_i.$$

Note que π es lineal. Eso es suficiente para demostrar que π es uno-a-uno, pero entonces $dimW \leq dimS = m$, por lo tanto $\nu \leq m$. Si $\pi(w) = 0$, por la expansión ortonormal

$$w = \sum_{j>m} g(w, e_j) e_j.$$

Pero tomando $w \in W$,

$$0 \geq g(w, w) = \sum_{j>m} g(w, e_j)^2.$$

Entonces $g(w, e_j) = 0$ para $j > m$, por tanto $w = 0$. $\square$

Se deduce que para un subespacio no-degenerado W de V

$$indV = indW + indW^\perp,$$

ya que la prueba del lema 3.5 muestra que existe una base ortonormal para V asociada a la suma directa $V = W + W^\perp$.
V y $\bar{V}$ tienen productos escalares g y $\bar{g}$. Una transformación lineal $T : V \to \bar{V}$ *conserva productos escalares*

$$\bar{g}(Tv, Tw) = g(v, w) \qquad \textit{para todo } v, w \in V.$$

En este caso T necesariamente es uno-a-uno, porque si $Tv = 0$, entonces $g(v, w) = 0$ para todo w, por lo tanto $v = 0$.

Note que T preserva productos escalares si y sólo si preserva sus formas cuadráticas asociadas, esto es,

$$\bar{q}(Tv) = q(v) \qquad \textit{para todo } v \in V.$$

Una implicación es obvia, la otra se sigue por las propiedades de polarización.
Un isomorfismo lineal $T : V \to W$ que conserva productos escalares se denomina *isometría lineal*[1]. Por las observaciones anteriores, una transformación lineal $T : V \to W$ es una isometría si y sólo si $dimV = dimW$ y T preserva productos escalares (o de forma equivalente, preserva sus formas cuadráticas).

Lema 3.7 *Los espacios de productos escalares V y W tienen la misma dimensión e índice si y sólo si existe una isometría lineal de V a W.*
Demostración :
Suponiendo que los invariantes son los mismos, tomando bases ortonormales $e_1, \ldots, e_n$ para V y $e'_1, \ldots, e'_n$ para W. Por el lema 3.6, podemos suponer que $\langle e_i, e_i \rangle = \langle e'_i, e'_i \rangle$ para todo i. Sea T una transformación lineal tal que $Te_i = e'_i$ para todo i. Entonces $\langle Te_i, Te_j \rangle = \langle e'_i, e'_j \rangle$ para todo i, j. Por lo tanto, por la linealidad T es una isometría lineal.

De manera inversa, si $T : V \to W$ es una isometría lineal, entonces T lleva una base ortonormal de V a una base ortonormal de W. Entonces $dimV = dimW$ y, por lema 3.6, $indV = indW$. $\square$

[1] Aplicación entre dos espacios métricos que conserva las distancias entre los puntos.

Capítulo 4

La conexión de Levi-Civita

4.1. Corchete de Lie

Si V, W son dos campos de vectores diferenciables y f es una función diferenciable, entonces $V(Y(f))$ e $Y(X(f))$ son funciones diferenciables. Sin embargo, este tipo de operaciones no conduce en general a nuevos campos de vectores diferenciables, ya que envuelven derivadas de orden superior a la primera. No obstante, la diferencia de ambas iteraciones sí produce un nuevo campo de vectores.
Si $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, entonces el operador $[V, W]$ definido por:

$$[V, W] : f \in \mathfrak{F}(M) \to [V, W](f) = V(W(f)) - W(V(f)) \in \mathfrak{F}(M)$$

define un campo tangente en M, que se denomina corchete de Lie de V y W.
Si $(\mathscr{U}, \varphi)$ es una carta de M, y V^j, W^i son las componentes de V, W respectivamente, se tiene:

$$[V, W] = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1} \left(V^j \frac{\partial W^i}{\partial u^j} - W^j \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

La aplicación *corchete de Lie* $(V, W) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to [V, W] \in \mathfrak{X}(M)$ verifica las siguientes propiedades:
$\forall U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$, $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$

1) Es $\mathbb{R}-$bilineal, y $[U, V] = -[V, U]$,

2) $[U, [V, W]] + [V, [W, U]] + [W, [U, V]] = 0$, $\forall U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$,

3) $[fV, W] = f[V, W] - W(f)V$,

4) $[V, fW] = V(f)W + f[V, W]$.

Un $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathfrak{X}(V)$, dotado de un operador *corchete* $(V,W) \in \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \rightarrow [V,W] \in \mathfrak{X}(V)$ que verifique las propiedades 1) y 2), se denomina *Álgebra de Lie.*
La propiedad 2) es conocida con el nombre de *identidad de Jacobi.*

Un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ induce un operador L_V denominado derivada de Lie que actua de la siguiente forma:

a) Sobre los campos: $L_V : W \in \mathfrak{X}(M) \rightarrow [V,W] \in \mathfrak{X}(M)$.

b) Sobre las funciones: $L_V : f \in \mathfrak{F}(M) \rightarrow V(f) \in \mathfrak{F}(M)$.

y se verifica para toda $f \in \mathfrak{F}(M)$ y todo $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ las propiedades:

1) L_V es $\mathbb{R}-$lineal y $L_V(fW) = L_V(f)W + fL_V(W)$.

2) $[L_V, L_W] = L_{[V,W]}$ (donde $[L_V, L_W] = L_V \circ L_W - L_W \circ L_V$).

4.2. Variedades semi-riemannianas

La geometría familiar del espacio euclídiano $\mathbb{R}^3$ puede ser rastreada hasta su producto interno natural, el producto punto. Por medio del isomorfismo natural $T_p(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{R}^3$ el producto punto puede ser desplegado en cada espacio geométrico tangente. Entonces se pueden realizar operaciones geométricas básicas tales como medir la longitud de un vector tangente o el ángulo entre ellos.
La teoría de superficies en $\mathbb{R}^3$ en su forma clásica es el trabajo de Gauss, que mostró en 1827 que la geometría intrínseca de una superficie S en $\mathbb{R}^3$ (aproximadamente, la geometría percibida por los habitantes de S) deriva únicamente del producto punto cuando se aplica a los vectores tangentes a S.
Ya, en 1854 Riemman vió lo que se necesitaba para generalizar estos dos casos especiales e introducir la geometría en una variedad $n-$dimensional arbitraria; un producto interior debe ser dado en cada espacio tangente. Este se cree que proporciona, en particular una medida infinitesimal de distancia. Crudamente, si p y $p + dp$ son puntos cercanos, la distancia entre ellos es la norma del *vector tangente dp.*
Bajo el impulso de Einstein en la teoría general de la relatividad (1915) una generalización más técnica del producto interior se debilitó a la nodegeneración.

Definición 4.1 *Un tensor métrico* $\mathbf{g}$ *en una variedad diferenciable* M *es un campo tensorial simétrico no-degenerado* $(0,2)$ *sobre* M *de índice constante.*

En otras palabras $\mathbf{g} \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ asigna diferenciablemente a cada punto p de M un producto escalar $\mathbf{g}_p$ en el espacio tangente $T_p(M)$, y el índice de $\mathbf{g}_p$ es el mismo para todo p.

Definición 4.2 *Una variedad semi-riemanniana es una variedad diferenciable M dotada con un tensor métrico* $\mathbf{g}$.

Así, estrictamente hablando una variedad semi-riemanniana es un par ordenado $(M, \mathbf{g})$; dos diferentes tensores métricos en la misma variedad constituyen diferentes variedades semi-riemannianas. Sin embargo solemos denotar una variedad semi-riemanniana por el nombre de su variedad diferenciable $M, N, \ldots$

El valor común ν del índice $\mathbf{g}_p$ en una variedad semi-riemanniana M es llamado el índice de M: $0 \leq \nu \leq n = dimM$. Si $\nu = 0$, M es una variedad riemanniana; cada $\mathbf{g}_p$ es entonces (definida positiva) un producto interior sobre $T_p(M)$. Si $\nu = 1$ y $n \geq 2$, M es una variedad de Lorentz.

Las variedades semi-riemannianas son a menudo llamadas *pseudo*$-$riemannianas, o incluso en terminología antigua variedades riemannianas, pero reservamos el último término para el caso distintivo definido positivo.

Usamos $\langle , \rangle$ como una notación alternativa para $\mathbf{g}$, escribimos $\mathbf{g}(v, w) = \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ para vectores tangentes, y $\mathbf{g}(V, W) = \langle V, W\rangle \in \mathfrak{F}(M)$ para campos vectoriales.

Si $x^1, \ldots, x^n$ es un sistema coordenado en $\mathscr{U} \in M$, las componentes del tensor métrico $\mathbf{g}$ en $\mathscr{U}$ son

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j\rangle \qquad (1 \leq i, j \leq n).$$

Por lo tanto, para los campos de vectores $V = \sum V^i\partial_i$ y $W = \sum W^j\partial_j$

$$\mathbf{g}(V, W) = \langle V, W\rangle = \sum g_{ij}V^iW^j.$$

Ya que $\mathbf{g}$ es no-degenerada, en cada punto p de $\mathscr{U}$ la matriz $(g_{ij}(p))$ es invertible, y su matriz inversa se denota por $(g^{ij}(p))$. La fórmula usual para la inversa de una matriz muestra que las funciones g^{ij} son diferenciables en $\mathscr{U}$.

Como $\mathbf{g}$ es simétrica, $g_{ij} = g_{ji}$ y por lo tanto $\mathbf{g}^{ij} = \mathbf{g}^{ji}$ para $1 \leq i, j \leq n$. Finalmente en $\mathscr{U}$ el tensor métrico se puede escribir como

$$\mathbf{g} = \sum g_{ij}dx^i \otimes dx^j.$$

Recordar del capítulo 2 que para cada $p \in \mathbb{R}^n$ existe un isomorfismo lineal canónico de $\mathbb{R}^n$ a $T_p(\mathbb{R}^n)$ que, en términos de coordenadas naturales, envía v a $v_p = \sum v^i\partial_i$. El producto punto sobre $\mathbb{R}^n$ da lugar a un tensor métrico sobre $\mathbb{R}^n$ con

$$\langle v_p, w_p\rangle = v \cdot w = \sum v^iw^i.$$

En adelante en cualquier contexto geométrico $\mathbb{R}^n$ denota el resultado de una variedad riemanniana, llamada $n-$espacio Euclídeo.

Para un entero ν con $0 \leq \nu \leq n$, cambiar los primeros ν más arriba a menos da un tensor métrico

$$\langle v_p, w_p\rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} v^iw^i + \sum_{j=\nu+1}^{n} v^jw^j$$

de índice ν. El espacio semi-euclídeo resultante $\mathbb{R}^n_\nu$ se reduce a $\mathbb{R}^n$ si $\nu = 0$. Para $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n_1$ es llamado el $n-$espacio de Minkowski.
Si $n = 4$ es el ejemplo más simple de un espacio-tiempo relativista.
Tomamos la notación

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & para \quad 1 \leq i \leq \nu, \\ +1 & para \quad \nu + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Entonces el tensor métrico de $\mathbb{R}^n_\nu$ puede escribirse

$$g = \sum \varepsilon_i du^i \otimes du^i.$$

El significado geométrico del índice de una variedad semi-riemanniana deriva de la siguiente tricotomía.

Definición 4.3 *Un vector tangente v de M es*

$$\begin{array}{ccc} espacial & si & \langle v, v\rangle > 0, \\ nulo & si & \langle v, v\rangle = 0, \\ temporal & si & \langle v, v\rangle < 0. \end{array}$$

El conjunto de todos los vectores nulos en $T_p(M)$ se denomina el *nullcone* en $p \in M$. La categoría en la que cae un determinado vector tangente se denomina su caracter causal.
Está terminología se deriva de la teoría de la relatividad, y particularmente el caso de Lorentz, también se dice que los vectores nulos son ligeros.
Sea $\mathbf{q}(v) = \langle v, v\rangle$ para cada vector tangente v de M. En cada punto p de M, $\mathbf{q}$ determina la forma cuadrática asociada del producto escalar en p; así $\mathbf{q}$ define el tensor métrico.
Si $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathfrak{F}(M)$, entonces $\mathbf{q}(fV) = f^2\mathbf{q}(V) \in \mathfrak{F}(M)$, luego $\mathbf{q}$ no es un campo tensorial. Clásicamente $\mathbf{q}$ se llama elemento de línea de M, y se denota por ds^2. En términos de un sistema de coordenadas

$$\mathbf{q} = ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j.$$

Aquí, la yuxtaposición de diferenciales denota la multiplicación ordinaria de funciones (en cada espacio tangente), así que

$$\mathbf{q}(V) = \sum g_{ij} dx^i(V) dx^j(V) = \sum g_{ij} V^i V^j.$$

Como en el capítulo 3, la norma $|v|$ del vector tangente es $|\mathbf{q}|^{1/2}$, y los vectores unitarios, ortogonalidad, y ortonormalidad se definen como anteriormente lo hicimos.
El origen de la notación inusual de ds^2 se puede ver intuitivamente como sigue. Asumamos por simplicidad que M es riemanniana. Si p y p' son puntos cercanos con sistemas de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ y $(x^1 + \Delta x^1, \ldots, x^n + \Delta x^n)$ relativo a algún sistema, entonces el vector tangente $\Delta p = \sum \Delta x^i \partial_i$ a p punto proximo a p'. Entonces el cuadrado de la distancia Δs de p a p' es aproximadamente

$$|\Delta p|^2 = \langle \Delta p, \Delta p\rangle = \sum g_{ij}(p) \Delta x^i \Delta x^j,$$

como en la fórmula $ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j$.

Existe una forma de obtener una nueva variedad a partir de una ya dada, esta forma consiste en dotar a la nueva variedad con la metrica de la otra.

Por ejemplo, supongamos primero que P es una subvariedad de una variedad riemanniana M. Ya que cada espacio tangente $T_p(P)$ de P se considera un subespacio de $T_p(M)$, obtenemos un tensor métrico Riemanniano $\mathbf{g}_p$ en P simplemente aplicando el tensor métrico $\mathbf{g}$ de M a cada par de vectores tangentes a P.
Formalmente, $\mathbf{g}_p$ es el pullback $j^*(\mathbf{g})$, donde $j : P \subset M$ es el mapeo inclusión. Por ejemplo, la esfera estandar $n-$dimensional de radio $r > 0$ es la subvariedad riemanniana

$$\mathbb{S}^n(r) = \{p : |p| = r\} \quad de\ \mathbb{R}^{n+1}.$$

Sin embargo, cuando el tensor métrico $\mathbf{g}$ de M es indefinido, entonces $j^*(\mathbf{g})$ no puede ser una métrica en P. Un $(0, 2)$ campo tensorial símetrico es una métrica si y sólo si cada $T_p(P)$ es no-degenerado en $T_p(M)$ relativo a $\mathbf{g}$ y el índice de $T_p(P)$ es el mismo para todo p.

Definición 4.4 *Sea P una subvariedad de una variedad semi-riemanniana M. Si el pullback $j^*(\mathbf{g})$ es un tensor métrico en P, entonces hace a P una subvariedad semi-riemanniana de M.*

Consideremos ahora el producto de variedades.
(Si se sabe que P es de Riemann o de Lorentz, estos términos reemplazan semi-riemanniana)

Lema 4.1 *Sean M y N variedades semi-riemannianas con tensores métricos $\mathbf{g}_M$ y $\mathbf{g}_N$. Si π y σ son las proyecciones de $M \times N$ sobre M y N, respectivamente, sea*

$$\mathbf{g} = \pi^*(\mathbf{g}_M) + \sigma^*(\mathbf{g}_N).$$

Entonces $\mathbf{g}$ es un tensor métrico en $M \times N$ haciendo una variedad producto semi-riemanniana.
Demostración :
Desde la notación del pullback: si $v, w \in T_{(p,q)}(M \times N)$, entonces

$$\mathbf{g}(v, w) = \mathbf{g}_M(d\pi(v), d\pi(w)) + \mathbf{g}_N(d\sigma(v), d\sigma(w)).$$

Así $\mathbf{g}$ es símetrico. Para mostrar la no-degeneración, supongamos $\mathbf{g}(v, w) = 0$ para todo $w \in T_{(p,q)}(M \times N)$.
En particular, para todo $w \in T_{(p,q)}M$ tenemos $\mathbf{g}_M(d\pi(v), d\pi(w)) = 0$, ya que $d\sigma(w) = 0$. Pero tal $d\pi(w)$ llena $T_p(M)$, por lo tanto $d\pi(v) = 0$. Similarmente $d\sigma(w) = 0$; por lo tanto $v = 0$.
Bases ortonormales de $T_p(M)$ y $T_q(N)$ combinadas dan una base ortonormal para $T_{(p,q)}(M \times N)$. Por tanto el índice de $\mathbf{g}$ tiene valores constantes $indM + indN$ $\square$

El mismo esquema se extiende a cualquier producto finito de variedades semi-riemannianas. Por ejemplo, el espacio semi-euclídeo $\mathbb{R}^n_\nu$, es

$$\underbrace{\mathbb{R}^1_1 \times \ldots \mathbb{R}^1_1}_{\nu\ factores} \times \underbrace{\mathbb{R}^1 \times \ldots, \mathbb{R}^1}_{n-\nu\ factores} = \mathbb{R}^\nu_\nu \times \mathbb{R}^{n-\nu}.$$

4.3. Isometrías

Una isometría es un tipo especial de mapeo que expresa la noción de isomorfismo para variedades semi-riemannianas.

Definición 4.5 *Sean M y N variedades semi-riemannianas con tensores métricos $\mathbf{g}_M$ y $\mathbf{g}_N$. Una isometría de M a N es un isomorfismo $\phi : M \to N$ que preserva tensores métricos: $\phi^*(\mathbf{g}_N) = \mathbf{g}_M$.*

Explicitamente, $\langle d\phi(v), d\phi(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ para todo $v, w \in T_p(M)$, $p \in M$. Ya que ϕ es un isomorfismo lineal, cada mapeo diferencial $d\phi_p$ es un isomorfismo lineal, la condición métrica significa que cada $d\phi_p$ es una isometría lineal. El pullback opera de forma usual en elementos lineales, y dado que estas determinan sus tensores métricos, la preservación de las métricas es equivalente a $\phi^*(\mathbf{q}_N) = \mathbf{q}_M$.
Es fácil ver que

(1) El mapeo identidad de una variedad semi-riemanniana es una isometría.

(2) La composición de isometrías es una isometría.

(3) El mapeo inverso de una isometría es una isometría.

La interpretación de $\mathbf{q} = ds^2$ como el cuadrado de la distancia infinitesimal sugiere pensar en la isometría como un movimiento rígido, en contraste con un difeomorfismo arbitrario que puede deformar a M en una aplicación en N.
Un objeto que conserva en algún sentido todas las isometrias se llama *invariante isométrico*; y la geometría semi-riemanniana se describe tradicionalmente como el estudio de tales invariantes. Si existe una isometría entre M y N, se dice que son isométricos; más o menos, variedades isométricas son geometricamente las mismas.
Sea V un espacio con producto escalar, esto es, un espacio vectorial real provisto de un producto escalar. Entonces V es una variedad, y así como en el caso $V = \mathbb{R}^n$, la fórmula $\langle v_p, w_p\rangle = \langle v, w\rangle$ define un tensor metrico en V, haciendolo una variedad semi-riemanniana.

Lema 4.2 *Si $\Psi : V \to W$ es una isometría lineal de espacios con productos escalares (con V, W semi-riemannianas), entonces $\Psi : V \to W$ es una isometría.*
Demostración :

Ya que los mapeos lineales son diferenciables, el isomorfismo lineal Ψ es un difeomorfismo. Si $v_p \in T_p(V)$, entonces $d\Psi(v_p)_{\Psi(p)} = (\Psi(v))_{\Psi(p)}$.
Así, Ψ preserva tensores metricos, ya que

$$\begin{aligned} \langle d\Psi(v_p), d\Psi(w_p)\rangle &= \langle(\Psi(v))_{\Psi(p)}, (\Psi(w))_{\Psi(p)}\rangle \\ &= \langle\Psi(v), \Psi(w)\rangle|_{\Psi(p)} \\ &= \langle v, w\rangle|_p \\ &= \langle v_p, w_p\rangle. \qquad \square \end{aligned}$$

Se tiene que, si V es un espacio de productos escalares de dimensión n e índice ν, entonces como una variedad semi-riemanniana, V es una isometría en $\mathbb{R}^n_\nu$. De hecho, el isomorfismo de coordenadas de cualquier base ortonormal para V es una isometría (lineal).
Si M es una variedad semi-riemanniana arbitraria, su tensor métrico hace que cada uno de sus espacios tangentes sea un espacio semi-euclídiano de la misma dimensión e índice que M. Esto es visto como la generalización de la geometría semi-euclídea a través de la geometría semi-riemanniana.

4.4. La conexión de Levi-Civita

Sean V y W campos vectoriales en una variedad semi-riemanniana M. El objetivo de esta sección es mostrar cómo definir un nuevo campo vectorial $D_V W$ en M cuyo valor en cada punto p es la velocidad vectorial de cambio de W en la dirección V_p. Existe una manera natural de hacer esto en $\mathbb{R}^n_\nu$.

Definición 4.6 *Sea $u^1, \ldots, u^n$ coordenadas naturales en $\mathbb{R}^n_\nu$. Si V y $W = \sum W^i \partial_i$ son campos vectoriales en $\mathbb{R}^n_\nu$, el campo vectorial*

$$D_V W = \sum V(W^i)\partial_i$$

es llamado la derivada natural covariante de W con respecto a V.

Ya que esta definición utiliza las coordenadas distintivas de $\mathbb{R}^n_\nu$ no es obvio como extenderla a una variedad semi-riemanniana arbitraria. Empezamos, por tanto, por axiomatizar sus propiedades.

Definición 4.7 *Una conexión D en una variedad diferenciable M es una función $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que*

(D1) $D_V W$ es $\mathfrak{F}(M)-$lineal en V,

(D2) $D_V W$ es $\mathbb{R}-$lineal en W,

(D3) $D_V(fW) = (Vf)W + f(D_VW)$ *para* $f \in \mathfrak{F}(M)$.

D_VW *es llamada la derivada covariante de* W *con respecto a* V *para la conexión* D.

El axioma $(D1)$ afirma que D_VW es un tensor en V; por lo tanto, por proposición A.5 para un vector tangente individual $v \in T_p(M)$ tenemos un vector tangente bien definido $D_VW \in T_p(M)$, en efecto, $(D_VW)_p$ donde V es cualquier campo vectorial tal que $V_p = v$. Por otra parte, $(D3)$ muestra que D_VW no es un tensor en W.
Ahora podemos afirmar con más presición nuestro objetivo; que es demostrar que en cada variedad semi-riemanniana existe una única conexión que comparte dos propiedades adicionales $(D4)$ y $(D5)$ de la conexión natural en $\mathbb{R}^n_\nu$.
El siguiente paso es algebraico.

Proposición 4.1 *Sea* M *una variedad semi-riemanniana. Si* $V \in \mathfrak{X}(M)$*, sea* V^* *una 1-forma en* M *tal que*

$$V^*(X) = \langle V, X\rangle \qquad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Entonces la función $V \to V^*$ *es un isomorfismo* $\mathfrak{F}(M)-$*lineal de* $\mathfrak{X}(M)$ *a* $\mathfrak{X}^*(M)$.
Demostración :
Ya que V^* *es* $\mathfrak{F}(M)-$*lineal, de hecho es una 1-forma, y la función* $V \to V^*$ *es también* $\mathfrak{F}(M)-$*lineal. Para mostrar que es un isomorfismo consideremos los siguientes resultados:*

a) *Si* $\langle V, X\rangle = \langle W, X\rangle$ *para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$*, entonces* $V = W$.

b) *Dada una 1-forma* $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$*, entonces existe un único campo vectorial* $V \in \mathfrak{X}(M)$ *tal que* $\theta(X) = \langle V, X\rangle$ *para todo* X.

Por la $\mathfrak{F}(M)-$*linealidad se cumple* $\langle V, X\rangle = \theta(X)$ *para todo* X *en* $\mathscr{U}$. □

Así, en la geometría semi-riemanniana podemos transformar libremente un campo vectorial en una *1-forma*, y viceversa. Pares correspondientes $V \longleftrightarrow \theta$ contienen exactamente la misma información, y se dice que son metricamente equivalentes. El siguiente resultado fundamental ha sido llamado el milagro de la geometría semi-riemanniana.

Teorema 4.1 *En una variedad semi-riemanniana* M *existe una única conexión* D *tal que*

(D4) $[V, W] = D_VW - D_WV$*, y*

(D5) $X\langle V, W\rangle = \langle D_XV, W\rangle + \langle V, D_XW\rangle$,

para todo $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$. D es llamada la conexión de Levi-Civita de M, y es caracterizada por la fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2\langle D_V W, X\rangle &= V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle \\ &\quad -\langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle. \end{aligned}$$

Demostración :
Supongamos que D es una conexión en M que satisface los axiomas $(D4)$ y $(D5)$. En la parte derecha de la fórmula de Koszul en los primeros tres términos usamos $(D5)$ y $(D4)$ en los siguientes tres. La mayoria de los términos se cancelan en pares quedando unicamente $2\langle D_V W, X\rangle$.
Entonces D satisface la fórmula de Koszul y por axioma $a)$ de la prueba anterior, es única.
Si partimos de la fórmula de Koszul podemos deducir $(D1) - (D5)$.
Para demostrar $(D3)$. Sea X un campo vectorial arbitrario, y dado que las funciones las podemos tomar como tensores, entonces

$$\begin{aligned} 2\langle D_V(fW), X\rangle &= V\langle fW, X\rangle + fW\langle X, V\rangle - X\langle V, fW\rangle \\ &\quad -\langle V, [fW, X]\rangle + \langle fW, [X, V]\rangle + \langle X, [V, fW]\rangle. \end{aligned}$$

Además, de las propiedades del corchete de Lie sabemos $[fW, X] = -XfW + f[W, X]$ y $[V, fW] = VfW + f[V, W]$, sustituyendo y agrupando de forma conveniente obtenemos

$$Vf\langle W, X\rangle + Vf\langle X, W\rangle + Xf\langle V, W\rangle - Xf\langle V, W\rangle + f\{2\langle D_V W, X\rangle - V\langle W, X\rangle + X\langle V, W\rangle\}$$
$$= 2\langle VfW + fD_V W, X\rangle.$$

Entonces por la unicidad $2\langle D_V(fW), X\rangle = \langle (Vf)W + fD_V W, X\rangle$ y en consecuencia $D_V(fW) = (Vf)W + fD_V W$.
Para probar $(D4)$ iniciamos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} 2\langle D_V W, X\rangle &= V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle \\ &\quad -\langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\langle D_W V, X\rangle &= W\langle V, X\rangle + V\langle X, W\rangle - X\langle W, V\rangle \\ &\quad -\langle W, [V, X]\rangle + \langle V, [X, W]\rangle + \langle X, [W, V]\rangle. \end{aligned}$$

Restando las igualdades anteriores

$$\begin{aligned} 2\langle D_V W, X\rangle - 2\langle D_W V, X\rangle &= \langle X, [V, W]\rangle + \langle [V, W], X\rangle \\ &= \langle [V, W], X\rangle + \langle [V, W], X\rangle \\ &= 2\langle [V, W], X\rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, $[V, W] = D_V W - D_W V$.
Para probar $D5)$, de la fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2\langle D_X V, W\rangle &= X\langle V, W\rangle + V\langle W, X\rangle - W\langle X, V\rangle \\ &\quad -\langle X, [V, W]\rangle + \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\langle D_X W, V\rangle &= X\langle W, V\rangle + W\langle V, X\rangle - V\langle X, W\rangle \\ &\quad -\langle X, [W, V]\rangle + \langle W, [V, X]\rangle + \langle V, [X, W]\rangle. \end{aligned}$$

Sumando las igualadades anteriores

$$2\langle D_X V, W\rangle + \langle D_X V, W\rangle = 2X\langle V, W\rangle.$$

Obtenemos el resultado.

$$X\langle V, W\rangle = \langle D_X V, W\rangle + \langle D_X V, W\rangle$$

Para la linealidad de W, tomamos $f \in \mathfrak{F}(M)$, entonces

$$\begin{aligned} 2\langle D_V(fW), X\rangle &= V\langle fW, X\rangle + fW\langle X, V\rangle - X\langle V, fW\rangle \\ &\quad -\langle V, [fW, X]\rangle + \langle fW, [X, V]\rangle + \langle X, [V, fW]\rangle. \end{aligned}$$

Utilizamos las propiedades de los tensores

$$\begin{aligned} 2\langle D_V(fW), X\rangle &= V\langle fW, X\rangle + fW\langle X, V\rangle - X\langle V, fW\rangle \\ &\quad -\langle V, (f[W, X] - WfX)\rangle + \langle fW, [X, V]\rangle + \langle X, (VfW + f[V, W])\rangle. \\ &= Vf\langle W, X\rangle + fW\langle X, V\rangle - Xf\langle V, W\rangle - f\langle V, [V, W]\rangle \\ &\quad +\langle V, XfW\rangle + f\langle W, [X, V]\rangle + \langle X, VfW\rangle + f\langle X, [V, W]\rangle. \\ &= 2f\langle D_V W, X\rangle. \end{aligned}$$

Finalmente para la linealidad en V, tomamos $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2\langle D_{\alpha V} W, X\rangle &= \alpha V\langle W, X\rangle + W\langle X, \alpha V\rangle - X\langle \alpha V, W\rangle \\ &\quad -\langle \alpha V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, \alpha V]\rangle + \langle X, [\alpha V, W]\rangle. \\ &= \alpha V\langle W, X\rangle + \alpha W\langle X, V\rangle - \alpha X\langle V, W\rangle - \alpha V, [W, X]\rangle \\ &\quad +\langle V, X\alpha W\rangle + \alpha\langle W, [X, V]\rangle + \langle X, V\alpha W\rangle + \alpha\langle X, [V, W]\rangle. \\ &= 2\alpha\langle D_V W, X\rangle \qquad \square \end{aligned}$$

Definición 4.8 *Sea $x^1, \ldots, x^n$ un sistema coordenado en un entorno $\mathscr{U}$ de una variedad semi-riemanniana. Los símbolos de Christoffel para este sistema coordenado son las funciones con valores reales Γ_{ij}^k en $\mathscr{U}$ tal que*

$$D_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \qquad (1 \leq i, j \leq n).$$

Ya que $[\partial_i, \partial_j] = 0$, se deduce de (D4) que $D_{\partial_i}(\partial_j) = D_{\partial_j}(\partial_i)$, por lo tanto $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

La conexión D no es un tensor, entonces los símbolos de Christoffel no obedecen la regla usual de las tansformaciones de los tensores bajo el cambio de coordenadas.

Proposición 4.2 *Para un sistema de coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ en $\mathscr{U}$,*

(1) $D_{\partial_i}(\sum W^j \partial_j) = \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} W^k + \sum_j \Gamma^k_{ij} W^j \right\} \partial_k$
donde los símbolos de Christoffel estan dados por

(2) $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ij} \right\}.$

Demostración :

1. *Tomando $V = \partial_i$, $X = \partial_j$ y $f = \sum W^j$ y sustituyendo en $D3)$*

$$D_{\partial_i}(\sum W^j \partial_j) = \partial_i(\sum W^j \partial_j) + \sum_j W^j (D_{\partial_i} \partial_j)$$

y por la definición de los símbolos de Christoffel

$$D_{\partial_i}(\sum W^j \partial_j) = \partial_i(\sum W^j \partial_j) + \sum_j W^j \sum_k \Gamma^k_{ij} \partial_k)$$

y por la linealidad de la derivada covariante

$$D_{\partial_i}(\sum W^j \partial_j) = \partial_i(W^1 \partial_1 + W^2 \partial_2 + \ldots + W^n \partial_n) + \sum_j W^j \sum_k \Gamma^k_{ij} \partial_k)$$

agrupando de manera conveniente

$$D_{\partial_i}(\sum W^j \partial_j) = \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} W^k + \sum W^j \Gamma^k_{ij} \right\} \partial_k.$$

2. *Tomando $V = \partial_i$, $W = \partial_j$ y $X = \partial_m$ y sustituyendo en la fórmula de Koszul*

$$\begin{aligned} 2\langle D_{\partial_i} \partial_j, \partial_m \rangle &= \partial_i \langle \partial_j, \partial_m \rangle + \partial_i \langle \partial_m, \partial_j \rangle - \partial_m \langle \partial_i, \partial_j \rangle \\ &\quad - \langle \partial_i, [\partial_j, \partial_m] \rangle + \langle \partial_j, [\partial_m, \partial_i] \rangle + \langle \partial_m, [\partial_i, \partial_j] \rangle. \end{aligned}$$

de la definición anterior tenemos que los corchetes son cero, es decir $[\partial_i, \partial_j] = 0$

$$2\langle D_{\partial_i} \partial_j, \partial_m \rangle = \partial_i \langle \partial_j, \partial_m \rangle + \partial_j \langle \partial_m, \partial_i \rangle - \partial_m \langle \partial_i, \partial_j \rangle$$

usando la definición de los símbolos de Christoffel y las componentes

$$2\langle \sum_k \Gamma^k_{ij} \partial_k, \partial_m \rangle = \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ij} = 2 \sum_a \Gamma^a_{ij} g_{am}$$

Aplicando $\sum_m g^{mk}$ *a la igualdad anterior, tenemos*

$$\sum_m g^{mk}\left(2\sum_a \Gamma^a_{ij} g_{am} = \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ij}\right)$$

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_m g^{mk}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ij}\right\} \qquad \square$$

Usando $(D1)$ podemos calcular cualquier $D_V W$ en entornos coordenados por la primera fórmula anterior, mientras que la segunda fórmula es la descripción en coordenadas de cómo determinar el tensor métrico en la conexión de Levi-Civita.

Lema 4.3 *La conexión natural D de la definición 4.6 es la conexión de Levi-Civita de un espacio semi-euclídiano $\mathbb{R}^n_\nu$ para todo $\nu = 0, 1, \dots, n$. Relativo al sistema de coordenadas en $\mathbb{R}^n_\nu$*

1. $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_j$, *donde* $\varepsilon_j = \begin{cases} -1 & para \quad 1 \le j \le \nu, \\ +1 & para \quad \nu + 1 \le j \le n, \end{cases}$

2. $\Gamma^k_{ij} = 0$,

para todo $1 \le i, j, k \le n$.
Demostración :

1. *Es esencialmente la definición del tensor métrico de $\mathbb{R}^n_\nu$. Para probar que D es una conexión de Levi-Civita de $\mathbb{R}^n_\nu$, hay que comprobar $(D1) - (D5)$.*
   Para comprobar $D5$). Sabemos que $\langle V, W\rangle = \sum \varepsilon_i V^i W^i$, entonces

$$\begin{aligned} X\langle V, W\rangle &= \sum \varepsilon_i X(V^i) W^i + \sum \varepsilon_i V^i X(W^i) \\ &= \langle D_X V, W\rangle + \langle V, D_X W\rangle. \end{aligned}$$

   Las demás propiedades se prueban de manera análoga.

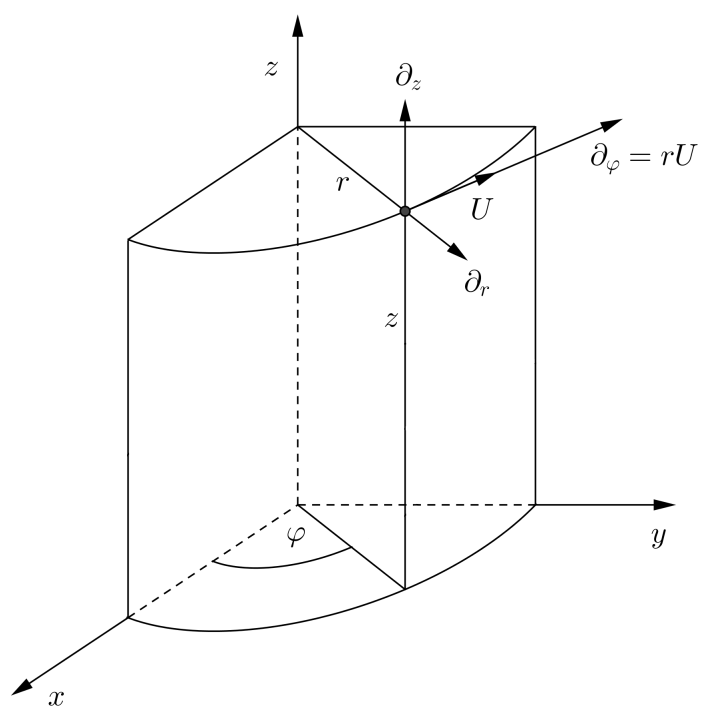
2. *De la proposición 4.2 sabemos*

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_m g^{mk}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ij}\right\} \\ \Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_m g^{mk}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} \delta_{jm}\varepsilon_m + \frac{\partial}{\partial x^j} \delta_{im}\varepsilon_m - \frac{\partial}{\partial x^m} \delta_{ij}\varepsilon_j\right\} \\ \Gamma^k_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

   Esto se cumple ya que los g_{ij} son constantes $\square$

Un campo vectorial V es paralelo siempre que su derivada covariante $D_X V$ sea cero para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Así, la anulación de los símbolos de Christoffel en el lema significa que los campos de coordenadas naturales del vector en $\mathbb{R}^n_\nu$ son paralelos.
En general, los símbolos de Christoffel de un sistema de coordenadas mide el fallo de los campos vectoriales de coordenadas para ser paralelo.

Ejemplo 4.1 (Coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$) *Sean r, φ, z las coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$ como se indican en la figura. Entonces (r, φ, z) es un sistema coordenado en el semiplano $x \geq 0$, $y = 0$.*
Las funciones de coordenadas están bien definidas y existe un mapeo inverso dado por
$x = r\cos\varphi$,
$y = r\sin\varphi$,
$z = z$.



Entonces por el teorema de la base

$$\begin{aligned}
\partial_r &= cos\varphi\partial_x + sen\varphi\partial_y; \\
\partial_\varphi &= rU, \quad donde\ U = -sen\varphi\partial_x + cos\varphi\partial_y; \\
\partial_z &= \partial_z.
\end{aligned}$$

Para calcular el elemento de linea debemos encontrar las componentes que lo conforman, para ello hacemos uso de la siguiente fórmula

$$dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Entonces
$dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi$
$dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi$
$dz = dz$
Si sustituimos en la ecuación del elemento de linea obtenemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ ds^2 &= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \end{aligned}$$

Retomando que el tensor metrico esta dado en términos de una forma cuadratica, y ya teniendo sus elementos, nos queda

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $g_{11} = g_{33} = 1$, $g_{22} = r^2$, *y* $g_{ij} = 0$ *para todo* $i \neq j$.
Calculamos los símbolos de Christoffel para este sistema coordenado, por supuesto haciendo uso de las componentes del tensor

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_m g^{mk} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ij} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2} g^{12} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} g_{21} + \frac{\partial}{\partial \varphi} g_{11} - \frac{\partial}{\partial r} g_{12} \right\} + \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} g_{22} + \frac{\partial}{\partial \varphi} g_{12} - \frac{\partial}{\partial \varphi} g_{12} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{32} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} g_{23} + \frac{\partial}{\partial \varphi} g_{13} - \frac{\partial}{\partial z} g_{12} \right\} \\ \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r^2 \right\} \\ \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2r^2}(2r) = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Ya que los símbolos de Christoffel son símetricos, entonces $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$.

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{11}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}g_{21} + \frac{\partial}{\partial\varphi}g_{21} - \frac{\partial}{\partial r}g_{22}\right\} + \frac{1}{2}g^{21}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}g_{22} + \frac{\partial}{\partial\varphi}g_{22} - \frac{\partial}{\partial\varphi}g_{22}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{32}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}g_{23} + \frac{\partial}{\partial\varphi}g_{23} - \frac{\partial}{\partial z}g_{22}\right\} \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{11}\left\{-\frac{\partial}{\partial r}r^2\right\} \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}(-2r) = -r.
\end{aligned}$$

En particular es un sistema coordenado ortogonal; esto es, los campos vectoriales de coordenadas son mutuamente ortogonales. Cálculos directos muestran que los símbolos de Christoffel de las coordenadas cilíndricas son cero excepto $\Gamma^1_{22} = -r$ *y* $\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = 1/r$. *Por lo tanto, todas las coordenadas covariantes son cero, excepto*

$$\begin{aligned}
D_{\partial_r}(\partial_\varphi) &= \Gamma^1_{12}\partial_r + \Gamma^2_{12}\partial_\varphi + \Gamma^3_{12}\partial_z \\
&= \frac{1}{r}\partial_\varphi \\
&= \frac{1}{r}(-r\sin\varphi\partial_x + r\cos\partial_y) \\
&= -\sin\varphi\partial_x + \cos\varphi\partial_y.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
D_{\partial_\varphi}(\partial_\varphi) &= \Gamma^1_{22}\partial_r + \Gamma^2_{22}\partial_\varphi + \Gamma^3_{22}\partial_z \\
&= -r\partial_r \\
&= -r(\cos\varphi\partial_x + \sin\varphi\partial_y) \\
&= -r\cos\varphi\partial_x - r\sin\varphi\partial_y.
\end{aligned}$$

De nuevo por la símetria de la derivada covariante

$$D_{\partial_r}(\partial_\varphi) = D_{\partial_\varphi}(\partial_r) = -\sin\varphi\partial_x + \cos\varphi\partial_y.$$

Estas fórmulas son consistentes con lo que podemos ver en la figura.
Dado que ∂_z es también un campo vectorial de coordenadas naturales que debe ser paralelo. Igualmente esperamos $D_{\partial_\varphi}(\partial_z) = D_{\partial_z}(\partial_\varphi) = 0$, ya que ∂_r y ∂_φ permanecen paralelos a medida que el punto p se mueve en la dirección de z.
La derivada covariante D_V puede extenderse para operar en campos tensoriales arbitrarios. De hecho $(D2)$ y $(D3)$ son exactamente lo que se necesita para aplicar el teorema 4.1.

Definición 4.9 *Sea* V *un campo vectorial en una variedad semi-riemanniana* M. *La (Levi-Civita) derivada covariante* D_V *es el único tensor derivación en* M *tal que*

$$D_V f = Vf \qquad \text{para todo } f \in \mathfrak{F}(M),$$

y $D_V W$ *es la derivada covariante de Levi-Civita para todo* $W \in \mathfrak{X}(M)$.

Si $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ entonces el (r,s) campo tensorial $D_V A$ es $\mathfrak{F}(M)-$lineal en $V \in \mathfrak{X}(M)$. De hecho, por corolario A.1 basta comprobar que los tensores derivación D_{fV+gW} y $fD_V + gD_W$ son equivalentes en $\mathfrak{F}(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$. Pero la primera es definición y la segunda es $(D1)$. Esta observación justifica la siguiente definición.

Definición 4.10 *La diferencial covariante de un (r,s) tensor A en M es el $(r, s+1)$ tensor DA tal que*

$$(DA)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s, V) = (D_V A)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)$$

para todo $V, X_i \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta^j \in \mathfrak{X}^*(M)$.

En el caso excepcional, $r = s = 0$ la diferencial covariante de una función f es la diferencial usual $df \in \mathfrak{X}^*(M)$, ya que

$$(Df)(V) = D_V f = Vf = df(V) \quad \textit{para todo } V \in \mathfrak{X}(M).$$

DA es simplemente una manera conveniente de recoger todas las derivadas covariantes de A. Al igual que para un campo vectorial, un campo tensorial A es paralelo siempre que su diferencial covariante sea cero, esto es, $D_V A = 0$ para todo $V \in \mathfrak{X}(M)$. Por ejemplo, utilizando la regla del producto resulta que $(D5)$ es equivalente al paralelismo del tensor métrico g.
Si $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ las componentes de DA relativas a un sistema coordenado son denotadas por $A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s;k} = (\partial/\partial u^k) A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}$.

Ejemplo 4.2 *Calculamos los símbolos de Christoffel de la esfera.*
La fórmula de los símbolos de Christoffel es

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_m g^{mk} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ij} \right\}.$$

y la métrica inducida mediante el pullback es

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 sen^2 \theta d\varphi^2.$$

Tenemos que encontrar

$$\Gamma^1_{11},\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21},\ \Gamma^1_{22},\ \Gamma^2_{11},\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21},\ \Gamma^2_{22}.$$

Calculamos por ejemplo $\Gamma^1_{22} = \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}$ y para ello utilizamos las componentes del tensor

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{11}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}g_{21}+\frac{\partial}{\partial\varphi}g_{21}-\frac{\partial}{\partial\theta}g_{22}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{2}g^{21}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}g_{22}+\frac{\partial}{\partial\varphi}g_{22}-\frac{\partial}{\partial\varphi}g_{22}\right\}\\
&= \frac{1}{2a^2}\left\{-\frac{\partial}{\partial\theta}(a^2\sin^2\theta)\right\}\\
&= \frac{1}{2a^2}(-2a^2\sin\theta\cos\theta)\\
\Gamma_{22}1 &= -\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned}
$$

De la misma forma se calculan los restantes.
Cuando hacemos todos los cálculos finalmente para $\mathbb{R}^2$ obtenemos que todos los símbolos de Christoffel con cero, de manera que la derivación parcial coincide con la derivación covariante, como esperábamos.

Ejemplo 4.3 *El teorema de Whitney nos dice que toda variedad diferenciable admite una métrica. La idea es sencilla: como toda variedad M admite una inmersión $f : M \to \mathbb{R}^m$ en un espacio euclídeo de dimensión m, entonces f^*h es una métrica de Riemann en M donde h es la metrica ordinaria de $\mathbb{R}^m$.*
Dada una variedad de Riemann $(M, bf\ g)$ siempre podemos construir una conexión ∇ compatible con la métrica $\nabla_g = 0$, y libre de torsión, $T(\nabla) = 0$ a la que llamaremos conexión de Levi-Civita.
La condición $\nabla_{bf\ g} = 0$ hace que

$$X(bf\ g(Y,Z)) = bf\ g(\nabla_X Y, Z) + bf\ g(Y, \nabla_X Z).$$

Si las escribimos tres veces permutando los campos X, Y, Z, obtenemos

$$X(bf\ g(Y,Z)) = bf\ g(\nabla_X Y, Z) + bf\ g(Y, \nabla_X Z)$$

$$Z(bf\ g(X,Y)) = bf\ g(\nabla_Z X, Y) + bf\ g(X, \nabla_Z Y)$$

$$Y(bf\ g(X,Z)) = bf\ g(\nabla_Y X, Z) + bf\ g(X, \nabla_Z Y).$$

Sumando las dos primeras, restando la última y aplicando $T(\nabla) = 0$, es decir, que $\nabla_X Y - \nabla_Y Z = [X,Y]$, tenemos

$$
\begin{aligned}
X(bf\ g(Y,Z)) + Z(bf\ g(X,Y)) - Y(bf\ g(X,Z)) &= bf\ g([X,Y],Z) + bf\ g([Z,Y],X) + bf\ g([X,Z],Y)\\
&\quad+2bf\ g(\nabla_Z X, Y)
\end{aligned}
$$

despejando tenemos

$$
\begin{aligned}
2bf\ g(\nabla_Z X, Y) &= \frac{1}{2}\{X(bf\ g(Y,Z)) + Z(bf\ g(X,Y) + Y(bf\ g(Z,X)) - bf\ g([X,Y],Z)\\
&= -([Z,Y],X) + bf\ g([X,Z],Y))\}.
\end{aligned}
$$

Si $(U,(x^i))$ es un abierto de coordenadas en $(M, bf\ g)$, veamos la expresión de los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita ∇.
En la expresión anteror hacemos $Z = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^r}$ y como el corchete de Lie para estos campos es cero, entonces

$$2bf\ g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^r}) = \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial x^j}g_{ir} + \frac{\partial}{\partial x^i}g_{jr} + \frac{\partial}{\partial x^r}g_{ij}\}$$

es decir

$$\Gamma^l_{ij}g_{ir} = \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial x^j}g_{ir} + \frac{\partial}{\partial x^i}g_{jr} + \frac{\partial}{\partial x^r}g_{ij}\}$$

y utilizando la matriz inversa g^{ij} de g_{ij} resulta

$$\Gamma^l_{ij}g_{ir}g^{rk} = \Gamma^l_{ij}\delta^k_l = \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial x^j}g_{ir} + \frac{\partial}{\partial x^i}g_{jr} + \frac{\partial}{\partial x^r}g_{ij}\}g^{rk}.$$

Por lo que los símbolos de Christoffel se obtienen a partir de la métrica y de sus primeras derivadas.

Definición 4.11 *Sea M una variedad diferenciable. Llamaremos campo tensorial métrico o, simplemente, métrica sobre M a cualquier campo de tensores 2-covariante simétrico bf g sobre M. En este caso se dice que la métrica g es:*

1. *riemanniana si g_p es un producto escalar euclídeo de $T_p(M)$ para todo $p \in M$.*
2. *lorentziana si g_p si es un producto escalar lorentziano de $T_p(M)$ para todo $p \in M$.*
3. *semi-riemanniana si g_p es un producto escalar de $T_p(M)$ con índice s constante para todo $p \in M$*[1]

Ejemplo 4.4 *La métrica riemanniana usual de $\mathbb{R}^n$ es*

$$g_0 = dx^1 \otimes dx^1 + \ldots + dx^n \otimes dx^n \equiv \sum_{i=1}^n (dx^i)^2.$$

Análogamente, la métrica lorentziana usual se define como

$$g_L = -dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + \ldots + dx^n \otimes dx^n \equiv -(dx^1)^2 + \sum_{i=2}^n (dx^i)^2.$$

[1] Si M es conexa entonces la condición de que la métrica sea no degenerada implica que el índice sea constante.

Ejemplo 4.5 *Sea S una subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Como $T_p(S)$ es un subespacio de $T_p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in S$, la métrica usual g_0 de $\mathbb{R}^n$ puede restringirse a $T_p(S)$ para proporcionar un producto escalar euclídeo g_p^S sobre cada $T_p(S)$. Es decir*

$$\begin{array}{rcl} g_p^S : T_p(S) \times T_p(S) & \to & \mathbb{R} \\ (v, w) & \mapsto & g_0(v, w). \end{array}$$

El campo de tensores g^S sobre S así determinado es una métrica riemanniana. Esto ocurre, por ejemplo, en la esfera bidimensional $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (así como en cualquier superficie de $\mathbb{R}^3$), sobre la que se puede inducir la métrica usual de $\mathbb{R}^3$. Con más generalidad, para cualquier variedad riemanniana (M, g), su métrica puede inducirse por restricción a cualquier variedad suya S, generándose así una nueva variedad riemanniana (S, g^S).

Observación 4.1 *En el ejemplo anterior, si la métrica de partida g fuera semi-riemanniana, habría que tener la precaución de que el campo de tensores inducido g^S sobre la subvariedad no degenerase en ningún punto. Con esta restricción, (S, g^S) también es una nueva variedad semi-riemanniana, aunque no necesariamente del mismo índice que (M, g).*

Ejemplo 4.6 *Consideremos sobre $\mathbb{R}^2$ un campo de tensores arbitrario*

$$bf\ g = g_{11}(x, y)dx^2 + g_{12}(x, y)(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + g_{22}(x, y)dy^2.$$

Si el determinante

$$\begin{vmatrix} g_{11}(x, y) & g_{12}(x, y) \\ g_{21}(x, y) & g_{22}(x, y) \end{vmatrix}$$

es distinto de 0 en todo punto de $\mathbb{R}^2$ entonces g es una métrica semi-riemanniana.
Si el determinante es mayor que 0 y $g_{11} > 0$ entonces g es riemanniana.
Finalmente, si el determinante es menor que 0 entonces g es lorentziana.
Esto se mantiene aun cuando (x, y) representaran coordenadas de cualquier variedad bidimensional (en el abierto donde estén definidas). El criterio para comprobar cuándo es riemanniana se generaliza fácilmente a dimensiones superiores.

Ejemplo 4.7 *Consideremos dos variedades semi-riemannianas (M, g), (N, g').*
Para la variedad producto $M \times N$ se tiene la identificación natural $T_{(p,p')}(M \times N) \equiv T_p(M) \times T_{p'}(N)$, de modo que cada vector tangente en (p, p') se puede ver como un par $(v_p, v'_{p'}) \in T_p(M) \times T_{p'}(N)$. De modo natural, podemos considerar g y g' como tensores métricos sobre $M \times N$ y definir

$$(g + g')((v_p, v'_{p'}), (w_p, w'_{p'})) = g(v_p, w_p) + g'(v'_{p'}, w'_{p'}).$$

Por tanto, $g + g'$ es una nueva métrica semi-riemanniana cuyo índice es la suma de los índices de g y g' (en particular, si ambas son riemannianas entonces $g + g'$ también lo es). Si $h, f \in \mathfrak{F}(M \times N)$, $h > 0, f > 0$ entonces $hg + fg'$ es también una métrica semi-riemanniana.

Ejemplo 4.8 (Onda plana en coordenadas locales.) *Para el caso de la onda plana, la métrica está dada por*

$$\mathbf{g} = du \otimes dv + F(x^1, x^2) du \otimes du + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2$$

esta tiene una representación matricial dada por

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con $F = F(x^1, x^2)$.
Calcularemos los símbolos de Christoffel para este tensor, los cuales están dados por la expresión:

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_k \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right)$$

en donde g^{km} son las componentes de la matriz de los coeficientes de la base dual, que está dada por la inversa de $\mathbf{g}^{-1}$. Así, necesitamos calcular $\mathbf{g}^{-1}$.
Recordando que

$$\mathbf{g}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{g})} Adj(\mathbf{g}).$$

Tenemos entonces que

$$\mathbf{g}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -F \end{pmatrix}$$

Ahora que ya tenemos las componentes inversas del tensor $\mathbf{g}$, podemos calcular los símbolos de Christoffel, entonces

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2} \underbrace{g^{11}}_{=1} \left(\underbrace{\frac{\partial g_{31}}{\partial u}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g_{31}}{\partial u}}_{=0} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) + \frac{1}{2} \underbrace{g^{12}}_{=0} \left(\underbrace{\frac{\partial g_{32}}{\partial u}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g_{32}}{\partial u}}_{=0} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \underbrace{g^{13}}_{=0} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial u} + \frac{\partial g_{33}}{\partial u} - \frac{\partial g_{33}}{\partial u} \right) \\ \Gamma^1_{33} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x^1}. \end{aligned}$$

Cálculos directos nos permiten encontrar los restantes símbolos de Christoffel, y para está *métrica son:*

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{33} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^1}, \\
\Gamma^2_{33} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^2}, \\
\Gamma^4_{31} &= \Gamma^4_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^1}, \\
\Gamma^4_{23} &= \Gamma^4_{32} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^2}, \\
\Gamma^k_{ij} &= 0, \ \textit{para el resto de los casos.}
\end{aligned}$$

Para finalizar debemos encontrar la conexión de Levi-Civita de esta curva plana, y lo hacemos utilizando la definición.

$$\begin{aligned}
D_{\partial_{x^1}}(\partial_{x^1}) &= \sum_{k=1}^{4}\Gamma^k_{11}\partial_k = \underbrace{\Gamma^1_{11}}_{=0}\partial_{x^1} + \underbrace{\Gamma^2_{11}}_{=0}\partial_{x^2} + \underbrace{\Gamma^3_{11}}_{=0}\partial_u + \underbrace{\Gamma^4_{11}}_{=0}\partial_v \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\partial_{x^1}}(\partial_u) &= \sum_{k=1}^{4}\Gamma^k_{13}\partial_k = \underbrace{\Gamma^1_{13}}_{=0}\partial_{x^1} + \underbrace{\Gamma^2_{13}}_{=0}\partial_{x^2} + \underbrace{\Gamma^3_{13}}_{=0}\partial_u + \Gamma^4_{13}\partial_v \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^1}\partial_v.
\end{aligned}$$

De manera análoga se calculan las restantes coordenadas covariantes, que son:

$$\begin{aligned}
D_{\partial_{x^1}}(\partial_{x^1}) &= D_{\partial_{x^2}}(\partial_{x^2}) = D_{\partial_v}(\partial_v) = 0, \\
D_{\partial_u}(\partial_u) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^1}\partial_{x^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^2}\partial_{x^2}, \\
D_{\partial_{x^1}}(\partial_{x^2}) &= D_{\partial_{x^2}}(\partial_{x^1}) = 0, \\
D_{\partial_{x^1}}(\partial_u) &= D_{\partial_u}(\partial_{x^1}) = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^1}\partial_v, \\
D_{\partial_{x^1}}(\partial_v) &= D_{\partial_v}(\partial_{x^1}) = 0, \\
D_{\partial_{x^2}}(\partial_u) &= D_{\partial_u}(\partial_{x^2}) = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^2}\partial_v, \\
D_{\partial_{x^2}}(\partial_v) &= D_{\partial_v}(\partial_{x^2}) = 0, \\
D_{\partial_u}(\partial_v) &= D_{\partial_v}(\partial_u) = 0.
\end{aligned}$$

Apéndice A

Tensores

La noción de campo tensorial generaliza la función real, campo vectorial y *1-formas*; y por lo tanto proporciona los medios matemáticos de describir objetos más complicados en una variedad.
Los tensores se dan en muchas formas, pero su propiedad característica es siempre la *multilinealidad*. La definición que utilizamos de tensores se convierte fácilmente en la descripción clásica de coordenadas del tensor.
Los tensores sobre una variedad diferenciable son a los tensores sobre un espacio vectorial lo que un campo de vectores es a un vector tangente.
La última parte del capítulo trata de la generalización del *producto interno* en la cuál se basa la geometría semi-riemanniana.

Definición A.1 *Una 1-forma θ sobre una variedad M es una correspondencia que asigna a cada punto $p \in M$ un covector $\theta_p \in T_p^*(M)$.*

Decimos entonces que, si $\pi^* : TM^* \to M$ es la proyección canónica del fibrado cotangente en M, entonces una *1-forma* es una aplicación $\theta : M \to TM^*$ tal que $\pi^* \circ \theta = 1_M$. La *1-forma* se dice *diferenciable* si es una aplicación diferenciable de M en TM^*. El conjunto de las *1-formas* diferenciables será denotado por $\mathfrak{X}^*(M)$.
En otras palabras, toda *1-forma* puede interpretarse, de una manera natural, como una aplicación entre el conjunto de los campos de vectores diferenciables $\mathfrak{X}(M)$ y el conjunto de las funciones continuas, lo que nos conduce a caracterizar las *1-formas* diferenciables θ como aquellas para las que $\theta(X)$ es una función diferenciable, siempre que X sea un campo de vectores diferenciables. Es decir:

Proposición A.1 *Sea M una variedad diferenciable. Una 1-forma θ es diferenciable si y sólo si, $\theta(X) \in \mathfrak{F}(M)$ para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

En el conjunto de las *1-formas* diferenciables sobre M podemos definir dos operaciones naturales, la suma y el producto por funciones diferenciables, de la manera siguiente:

Suma: Si $\theta, \omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ entonces $\theta + \omega : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ está definida por

$$(\theta + \omega)(X) : M \to \mathbb{R}, \quad (\theta + \omega)(X)(p) = \theta p(X_p) + \omega_p(X_p)$$

Producto: Si $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $f \in \mathfrak{F}(M)$ entonces $f\theta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ está definida por

$$(f\theta)(X) : M \to \mathbb{R}, \quad (f\theta)(X)(p) = f(p)\theta_p(X_p)$$

Con las dos operaciones anteriores, el conjunto $\mathfrak{X}^*(M)$ admite estructura de módulo[1] sobre el anillo $\mathfrak{F}(M)$ de las funciones diferenciables.
Entre los covectores tangentes existen unos que son especiales, y son aquellos que provienen de una función diferenciable. Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y p es un punto de M, podemos pensar en la aplicación diferencial df_p como un covector en p, después de hacer la natural identificación entre el espacio tangente $T_{f(p)}\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$. Esta interpretación nos permite considerar la *1-forma* df, que a cada p le asocia la aplicación diferencial df_p, y que se denomina la diferencial de f.

Proposición A.2 *Sea M una variedad diferenciable y $f \in \mathfrak{F}(M)$ una función diferenciable. Entonces df es una 1-forma diferenciable.*

Esta manera de construir *1-formas* nos conduce a definir una aplicación d entre las funciones diferenciables $\mathfrak{F}(M)$ y las *1-formas* diferenciables $\mathfrak{X}^*(M)$, denominada la aplicación diferencial y que posee interesantes propiedades:

Proposición A.3 *(1) $d : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal.*

(2) Si $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, entonces $d(fg) = gdf + fdg$.

(3) Si $f \in \mathfrak{F}(M)$ y $h \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ entonces $d(h(f)) = h'(f)df$.

La siguiente definición cubre los dos casos principales que necesitamos: el módulo $\mathfrak{X}(M)$ sobre $\mathfrak{F}(M)$, y el espacio vectorial $T_p(M)$ sobre $\mathbb{R}$. Sean $V_1, \ldots, V_s$ módulos sobre el anillo K. Entonces $V_1 \times \ldots \times V_s$ es el conjunto de todas las s-uplas $(v_1, \ldots, v_s)$ con $v_i \in V_i$. La definición componente a componente habitual de suma y multiplicación por un elemento de K hace a $V_1 \times \ldots \times V_s$ un módulo sobre K, llamado *producto directo* (o suma directa y la notación $\times$ es reemplazada por $\oplus$).
Si W es un módulo sobre K, una función

$$A : V_1 \times \ldots \times V_s \to W$$

es K-multilineal si A es K-lineal en cada espacio, esto es, para $1 \leq i \leq s$ y $v_j \in V_j$ $(i \neq j)$, la función

$$v \to A(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_s)$$

[1]Generalización de espacio vectorial sobre un cuerpo, donde los escalares son los elementos del anillo y donde esta definida la multiplicación entre elementos del anillo y el módulo

es K-lineal.
Si V es un módulo sobre K, sea V^* el conjunto de todas las funciones K-lineales de V a K. La definición usual de adición y producto de funciones por elementos de K hace a V^* un módulo sobre K, llamado el *módulo dual* de V.
Si $V_i = V$ para $1 \leq i \leq s$, la notación $V_1 \times \ldots \times V_s$ es abreviada a V^s.

Definición A.2 *Para enteros $r \geq 0$, $s \geq 0$ diferentes de cero, una función K-multilineal $A : (V^*)^r \times V^s \to K$ es llamado un tensor de tipo (r, s) sobre V.*
(Aquí, entendemos $A : V^s \to K$ si $r = 0$, y $A : (V^*)^r \to K$ si $s = 0$).

El conjunto $\mathfrak{T}_s^r(V)$ de todos los tensores de tipo (r, s) sobre V es un módulo sobre K, de nuevo con la definición de suma y producto de funciones por un elemento de K.
Un tensor de tipo $(0, 0)$ sobre V es simplemente un elemento de K.

A.1. Campo tensorial

Introducimos a continuación los campos tensoriales de tipo (r, s) sobre una variedad M como las aplicaciones $\mathfrak{F}(M)$-multilineales de $\mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s$ en $\mathfrak{F}(M)$.

Definición A.3 *(1) Un campo tensorial A de tipo (r, s) sobre una variedad M es una aplicación $\mathfrak{F}(M)-$multilineal $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M)$. Diremos que $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$.*

(2) Un campo tensorial covariante de orden s sobre una variedad M es una aplicación $\mathfrak{F}(M)-$multilineal $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M)$.

(3) Un campo tensorial contravariante de orden r sobre una variedad M es una aplicación $\mathfrak{F}(M)-$multilineal $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \to \mathfrak{F}(M)$.

Ejemplo A.1 *La función evaluación $E : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ es dada por $E(\theta, X) = \theta X$. Naturalmente E es $\mathfrak{F}(M)$-lineal en cada espacio, por lo que es un campo de tensores en M de tipo $(1, 1)$.*

Ejemplo A.2 *Toda 1-forma θ puede considerarse un tensor de tipo $(0, 1)$.*

Ejemplo A.3 *Todo campo de vectores diferenciable puede interpretarse como un tensor de tipo $(1, 0)$, considerando $X : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{F}(M)$ definido por $X(\theta) = \theta(X)$.*

Cuando disponemos de varios tensores los podemos operar de diversas maneras. Las operaciones son las siguientes:

Suma : Sean $A, B \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, entonces $A+B : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M)$ se define como sigue:

$$(A+B)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) + B(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s).$$

Note que $A + B \in \mathfrak{F}(M)$.
Producto por funciones : Sea $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ y $f \in \mathfrak{F}(M)$. Definimos $fA : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M)$ por

$$(fA)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) = f \cdot A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)$$

de igual forma notar que $fA \in \mathfrak{T}^r_s(M)$.
Producto : Mientras que sólo podemos sumar dos tensores del mismo tipo, podemos realizar el producto de dos tensores de cualquier tipo. Sean $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ y $B \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'}(M)$. Definimos $A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \to \mathfrak{F}(M)$ por

$$(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \theta^{r+r'}, X_1, \ldots, X_{s+s'})$$

$$= A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \cdot B(\theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'}).$$

Puede probarse que $A \otimes B \in \mathfrak{T}^{r+r'}_{s+s'}(M)$. La operación $\otimes$ se denomina *producto tensorial*.
Como toda función diferenciable f puede considerarse un tensor de tipo $(0,0)$, entonces si $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ se tiene que

$$f \otimes A = A \otimes f = fA.$$

Proposición A.4

1. *El producto tensorial $\otimes$ es $\mathfrak{F}(M)-$bilineal.*

2. *El producto tensorial $\otimes$ es asociativo y no conmutativo.*

3. *Si $f \in \mathfrak{F}(M)$, $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ y $B \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'}(M)$, entonces*

$$f(A \otimes B) = (fA) \otimes B = A \otimes (fB).$$

Así, si A es también de tipo $(0,0)$ el producto tensorial se reduce a la multiplicación ordinaria en $\mathfrak{F}(M)$.
Evidentemente, el producto tensorial es $\mathfrak{F}(M)$-bilineal, es decir

$$(fA + gA') \otimes B = fA \otimes B + gA' \otimes B,$$

con una identidad similar para B. Además, es inmediato a partir de la definición que el producto tensorial es asociativo. Sin embargo, el producto tensorial generalmente no es conmutativo. Por ejemplo, en un entorno coordenado

$$\begin{aligned}(dx^1 \otimes dx^2)(\partial_1, \partial_2) &= dx^1(\partial_1)dx^2(\partial_2) = 1,\\ (dx^2 \otimes dx^1)(\partial_1, \partial_2) &= dx^2(\partial_1)dx^1(\partial_2) = 0,\end{aligned}$$

así que $dx^1 \otimes dx^2 \neq dx^2 \otimes dx^1$. Por otra parte, las funciones conmutan con todo:

$$f(A \otimes B) = fA \otimes B = A \otimes fB.$$

Tensores de tipo $(0, s)$ se dice que son *covariantes*, mientras que el tensor de tipo $(r, 0)$ con $r \geq 1$ es *contravariante*. Por ejemplo, las funciones reales y *1-forma*s son covariantes; los campos vectoriales son contravariantes.
Un (r, s) tensor es un tensor mixto si r, s son diferentes de cero.
Observe que la definición de producto tensorial muestra que si A es covariante y B es contravariante, entonces $A \otimes B = B \otimes A$.

A.2. Tensor en un punto

Si V es un espacio vectorial y V^* denota el espacio vectorial dual, entonces los tensores de tipo (r, s) sobre V son las aplicaciones multilineales $t : V^{*r} \times V^s \to \mathbb{R}$. El objetivo de esta sección es mostrar que todo campo tensorial sobre una variedad diferenciable M puede interpretarse como una aplicación que asigna a cada punto p de M un tensor en su espacio tangente. Al igual que para un campo vectorial o de una *1-forma*, cualquier campo tensorial A en M de hecho puede ser visto como un campo en M, la asignación de un valor A_p en cada punto $p \in M$. El hecho esencial es que cuando A se evalúa en una *1-forma* o un campo vectorial de una función de valor real

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s),$$

el valor de esta función en un punto $p \in M$ no depende de la totalidad de cada *1-forma* o campo vectorial, o incluso en sus valores en un entorno de p, sino únicamente de los valores en el mismo punto p.
Formalmente:

Proposición A.5 *Sea $p \in M$ y $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Sea $\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^r$ y $\theta^1, \ldots, \theta^r$ 1-formas tales que $\bar{\theta}^i|_p = \theta^i|_p$ $(1 \leq i \leq r)$. Sea $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_s$ y $X_1, \ldots, X_s$ campos vectoriales tales que $\bar{X}_j|_p = X_j|_p$ $(1 \leq j \leq s)$. Entonces*

$$A(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^r, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_s)(p) = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p)$$

la prueba será fácil una vez establezcamos el siguiente resultado.

Lema A.1 *Si cualquiera de las 1-formas $\theta^1, \ldots, \theta^r$ o campos vectoriales $X_1, \ldots, X_s$ es cero en p, entonces*

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = 0$$

Demostración :
Supongamos que $X_s|_p = 0$.

Sea $x^1, \ldots, x^n$ un sistema de coordenadas en un entorno $\mathscr{U}$ de p. Entonces $X_s = \sum X^i \partial_i$ en $\mathscr{U}$, donde $X^i = X_s x^i \in \mathfrak{F}(\mathscr{U})$. Sea f una función bache en p con soporte en $\mathscr{U}$.
A continuación como de costumbre fX^i es una función suave en todo M, y análogamente $f\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$.
Por lo tanto

$$\begin{aligned} f^2 A(\theta^1, \ldots, X_s) &= A(\theta^1, \ldots, f^2 X_s) \\ &= A(\theta^1, \ldots, \sum f X^i f \partial_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f X^i A(\theta^1, \ldots, f\partial_i). \end{aligned}$$

Ya que $X_s|_p = 0$, cada $X^i(p) = 0$; además $f(p) = 1$.[2] *Por lo tanto, de la evaluación de la fórmula anterior en p tenemos $A(\theta^1, \ldots, X_s)(p) = 0$.* $\square$

Demostración de la proposición anterior:
Para mayor claridad supongamos $r = 1$, $s = 2$.
Consideremos la siguiente identidad telescópica (extensible de alguna manera para cualquier r, s).

$$\begin{aligned} A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y}) - A(\theta, X, Y) &= A(\bar{\theta} - \theta, \bar{X}, \bar{Y}) + A(\theta, \bar{X} - X, Y) \\ &\quad + A(\theta, X, \bar{Y} - Y). \end{aligned}$$

Por hipótesis $\bar{\theta} - \theta$, $\bar{X} - X$ y $\bar{Y} - Y$ se cancelan en el punto p. Por lo tanto, por el lema anterior,

$$A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y})(p) = A(\theta, X, Y)(p). \qquad \square$$

Se desprende directamente de la proposición A.5 que un campo de tensores $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ tiene un valor A_p en cada punto p de M, es decir, la función

$$A_p : (T_p(M)^*)^r \times (T_p(M))^s \to \mathbb{R}$$

se define como sigue.
Si $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in T_p(M)^*$ y $x_1, \ldots, x_s \in T_p(M)$, sea

$$A_p(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, x_1, \ldots, x_s) = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p),$$

[2] Dado un entorno $\mathscr{U}$ de un punto $p \in M$, existe una función $f \in \mathfrak{F}(M)$, llamada función bache en p, tal que

1. $0 \leq f \leq 1$ en M,
2. $f = 1$ en algún entorno de p,
3. *soporte*$f \in \mathscr{U}$.

donde $\theta^1, \ldots, \theta^r$ son cualquiera de las *1-formas* en M tal que $\theta^i|_p = \alpha^i$ $(1 \leq i \leq r)$ y $X_1, \ldots, X_s$ son los campos vectoriales tales que $X_i|_p = x^i$ $(1 \leq j \leq s)$.
Es fácil comprobar que la función A_p es $\mathbb{R}$-multilineal; entonces, por la definición A.2 es un (r, s) tensor sobre $T_p(M)$. Por lo tanto podemos considerar $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ como un campo de asignación sin problemas a cada $p \in M$, el tensor A_p.
Al igual que un campo vectorial es una sección lisa del haz de tangentes TM, un campo $p \to A_p$ es una sección lisa del (r, s) haz de tensores, este último se obtiene, más o menos, mediante la sustitución de cada $T_p(M)$ en TM por el espacio $T_p(M)^r_s$ de (r, s) tensor sobre $T_p(M)$. A la invesa, una sección transversal lisa, es decir $p \to B_p \in T_p(M)^1_2$, por simplicidad, surge del único tensor $B \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ dado por

$$B(\theta, X, Y)(p) = B_p(\theta_p, X_p, Y_p)$$

para todo punto p, *1-forma* θ, y campos vectoriales X, Y. (Que la sección es suave significa que el valor de B esta en $\mathfrak{F}(M)$.)
En particular, la interpretación de la sección transversal muestra que si $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ y $\mathscr{U}$ es un conjunto abierto de M, entonces la restricción $A|\mathscr{U}$ de A a $\mathscr{U}$ es un campo tensorial bien definido en $\mathscr{U}$.

A.3. Tensor componente

En esta parte vamos a generalizar a campos tensoriales las ecuaciones que nos daban las componentes de un campo de vectores o de una *1-forma* en función de las bases canónicas asociadas a un sistema de coordenadas. Surgen, de este modo, las componentes tensoriales, que identifican unívocamente el campo tensorial del que proceden y permiten dar, al mismo tiempo, la interpretación clásica de los tensores en coordenadas.
Las fórmulas coordenadas $X = \sum X(x^i)\partial_i$ de un campo vectorial y para una *1-forma* $\theta = \sum \theta(\partial_i)dx^i$ se puede extender fácilmente a un campo tensorial arbitrario.

Definición A.4 *Sea $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ un sistema de coordenadas en $\mathscr{U} \subset M$. Si $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, entonces las componentes de A con respecto a ξ son las funciones reales*

$$A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} = A(dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_s}) \quad en\ \mathscr{U}$$

donde todos los índices varian de 1 a $n = dimM$.

Note que, para $(0, 1)$ tensor, es decir, una *1-forma*, estos componentes son exactamente los de la fórmula $\theta = \sum \theta(\partial_i)dx^i$. Para ver que el acuerdo correspondiente es válido para un campo vectorial X debemos usar su interpretación como un $(1, 0)$ campo tensorial. Por la definición anterior, la i-ésima componente de X relativa a ξ es $X(dx^i)$, que se interpreta como $dx^i(X) = Xx^i$.

Similarmente, cuando un $(1,s)$ campo tensorial es dado en la forma $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ sus componentes se determinan directamente por la ecuación

$$A(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}) = \sum_j A^j_{i_1,\ldots,i_s} \partial_j,$$

ya que para su interpretación $\bar{A} \in \mathfrak{T}^1_s(M)$

$$\begin{aligned} \bar{A}(dx^j, \partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}) &= dx^j(A(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s})) \\ &= \sum_k A^k_{i_1,\ldots,i_s} dx^j(\partial_k) \\ &= A^j_{i_1,\ldots,i_s}. \end{aligned}$$

La evaluación de un campo tensorial en una *1-forma* y campos de vectores puede ser descrito en términos de coordenadas. Por ejemplo, supongamos que A es un $(1,2)$ tensor. Escribimos $\theta = \sum \theta_k dx^k$ para una *1-forma* arbitraria y $X = \sum X^i(\partial_i)$, $Y = \sum Y^j(\partial_j)$ campos de vectores arbitrarios. De la $\mathfrak{F}(M)$-multilinealidad de A obtenemos

$$A(\theta, X, Y) = \sum_{i,j,k} A(dx^k, \partial_i, \partial_j)\theta_k X^i Y^j = \sum_{i,j,k} A^k_{ij} \theta_k X^i Y^j.$$

Para un sistema fijo de coordenadas, las componentes de una suma de tensores son sólo la suma de las componentes (recordar que sólo se añaden tensores del mismo tipo). Las componentes de un producto tensorial están dadas por

$$(A \otimes B)^{i_1,\ldots,i_{r+r'}}_{j_1,\ldots,j_{s+s'}} = A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \cdot B^{i_{r+1},\ldots,i_{r+r'}}_{j_{s+1},\ldots,j_{s+s'}},$$

donde, es usual, todos los índices van de 1 a $n = dim M$. Para comprobar esta fórmula, supongamos que A es de tipo $(1,2)$ y B es de tipo $(1,1)$. Entonces $A \otimes B$ es un $(2,3)$ tensor con componentes:

$$\begin{aligned} (A \otimes B)^{kq}_{ijp} &= (A \otimes B)(dx^k, dx^q, \partial_i, \partial_j, \partial_p) \\ &= A(dx^k, \partial_i, \partial_j) \cdot B(dx^q, \partial_p) \\ &= A^k_{ij} B^q_p. \end{aligned}$$

Sea ξ un sistema de coordenadas en $\mathscr{U} \subset M$. A continuación, al igual que un campo vectorial o *1-forma*, cualquier tensor tiene una expresión única en $\mathscr{U}$ en términos relativos a las componentes de ξ. Supongamos por ejemplo que $r = 1$ y $s = 2$. Entonces $\partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j$ es un $(1,2)$ tensor en $\mathscr{U}$ para todo $1 \leq i,j,k \leq n$. Afirmamos que si A es cualquier $(1,2)$ tensor, entonces

$$A = \sum A^k_{ij} \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j \qquad en\ \mathscr{U},$$

donde cada índice se suma de 1 a n. Ya que ambos lados son $\mathfrak{F}(\mathscr{U})$-multilineales basta con comprobar que tienen el mismo valor en $dx^m, \partial_p, \partial_q$ para todo $1 \leq m,p,q \leq n$. Esto sigue inmediatamente de

$$(\partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j)(dx^m, \partial_p, \partial_q) = dx^m(\partial_k)dx^i(\partial_p)dx^j(\partial_q) = \delta_k^m \delta_p^i \delta_q^j,$$

donde equilibramos el índice para extender la delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \delta_i^j = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j, \\ 0 & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

En general:

Lema A.2 *Sea $x^1, \dots, x^m$ un sistema coordenado en $\mathscr{U} \subset M$. Si A es un (r,s) campo tensorial, entonces en $\mathscr{U}$,*

$$A = \sum A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s},$$

donde cada índice varia de 1 a n.

A.4. Contracción

No obstante, una de las operaciones más destacables que podemos hacer con los tensores es la contracción, la cual transforma tensores de tipo (r,s) en tensores de tipo $(r-1, s-1)$, y cuya definición general deriva del caso especial denominado contracción $(1,1)$, que transforma tensores de ese tipo en funciones diferenciables.

Lema A.3 *Existe una única función $\mathfrak{F}(M)$-lineal $\mathbf{C} : \mathfrak{T}^1_1(M) \to \mathfrak{F}(M)$, llamado $(1,1)$ contracción, tal que $\mathbf{C}(X \otimes \theta) = \theta X$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$.*

Demostración :
Ya que es $\mathfrak{F}(M)$-lineal, $\mathbf{C}$ será una operación puntual. En un entorno coordenado $\mathscr{U}$ del $(1,1)$ campo tensorial A puede escribirse como $\sum A^i_j \partial_i \otimes dx^j$. Ya que $\mathbf{C}(\partial_i \otimes dx^j)$ debe ser $dx^j(\partial_i) = \delta_i^j$, no tenemos más remedio que definir

$$\mathbf{C}(A) = \sum A^i_i = \sum A(dx^i, \partial_i).$$

Entonces $\mathbf{C}$ conserva las propiedades de tensor en $\mathscr{U}$. Para obtener la función global que se necesita es suficiente demostrar que esta definición es independiente de la elección del sistema de coordenadas.

Pero

$$\begin{aligned}
\sum_m A\left(dy^m, \frac{\partial}{\partial y^m}\right) &= \sum_m A\left(\sum \frac{\partial y^m}{\partial x^i} dx^i, \sum \frac{\partial x^j}{\partial y^m}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i,j,m} \frac{\partial y^m}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial y^m} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i,j} \delta_i^j A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_i A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i}\right). \qquad \square
\end{aligned}$$

Evidentemente, la contracción $(1,1)$ está intimamente relacionada con la noción de traza. Extender la contracción $(1,1)$ a un tensor de tipo superior del esquema es especificar un espacio covariante y un contravariante y aplicar $\mathbf{C}$ a estos dos espacios.
Supongamos $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$. Fijamos *1-formas* $\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}$, y campos vectoriales $X_1, \ldots, X_{s-1}$. Entonces la función

$$(\theta, X) \to A(\theta^1, \ldots, \theta, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X, \ldots, X_{s-1})$$

es un $(1,1)$ tensor que se puede escribir como

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{s-1}).$$

Aplicando la contracción $(1,1)$ a este tensor produce una función de valor real denotada por

$$(C^i_j A)(\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{s-1}).$$

Note que $C^i_j A$ es $\mathfrak{F}(M)$-multilineal en este argumento. Por lo tanto es un tensor de tipo $(r-1, s-1)$ llamada la *contracción* de A sobre i, j.
Por ejemplo, si A es un $(2,3)$ campo tensorial, entonces $C^1_3(A)$ es el $(1,2)$ campo tensorial dado por

$$(C^1_3 A)(\theta, X, Y) = \mathbf{C}\{A(\cdot, \theta, X, Y, \cdot)\}.$$

Relativo a sistemas de coordenadas, las componentes de $C^1_3 A$ están dadas por

$$\begin{aligned}
(C^1_3 A)^k_{ij} &= (C^1_3 A)(dx^k, \partial_i, \partial_j) \\
&= \mathbf{C}\{A(\cdot, dx^k, \partial_i, \partial_j, \cdot)\} \\
&= \sum_m A(dx^m, dx^k, \partial_i, \partial_j, \partial_m) \\
&= \sum_m A^{mk}_{ijm},
\end{aligned}$$

donde utilizamos la fórmula de coordenadas para **C** de la prueba anterior.

Si pensamos en un tensor de tipo $(1,1)$ como una correspondencia que a cada punto p le asigna un operador lineal A_p sobre $T_p(M)$, entonces la contracción $(1,1)$ sobre A es la función diferenciable que a cada punto le asocia la traza del operador A_p.

A.5. Tensor covariante

Un hecho básico de los covectores, que se generaliza a cualquier tensor de orden covariante $s > 0$, es que toda aplicación lineal entre espacios vectoriales V y W induce una aplicación lineal entre los espacios $\mathfrak{T}^0_s(V)$ y $\mathfrak{T}^0_s(W)$. En exacta analogía, cualquier aplicación diferenciable $f : M \to N$ entre dos variedades diferenciables induce una aplicación $f^* : \mathfrak{T}^0_s(N) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$ que a cada tensor covariante A sobre N le asigna un tensor del mismo orden sobre M, $f^*(A)$, que se denomina el pullback de A mediante f.

Definición A.5 *Sea $\phi : M \to N$ un mapeo suave. Si $A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ con $s \geq 1$, sea*

$$(\phi^* A)(v_1, \ldots, v_s) = A(d\phi v_1, \ldots, d\phi v_s)$$

para todo $v_i \in T_p(M)$, $p \in M$. Entonces $\phi^*(A)$ es llamado el pullback de A por ϕ.

En cada punto p de M, $\phi^*(A)$ da una función $\mathbb{R}$-multilineal de $T_p(M)^s$ a $\mathbb{R}$, esto es, un $(0,s)$ tensor sobre $T_p(M)$. Los cálculos de coordenadas muestran que $\phi^*(A)$ es un campo tensorial covariante y suave en M. En el caso especial de un $(0,0)$ tensor $f \in \mathfrak{F}(N)$, el *pullback* de M se define como $\phi^*(f) = f \circ \phi \in \mathfrak{F}(M)$.
Notar que $\phi^*(df) = d(\phi^* f)$.
Las siguientes propiedades de la operación pullback pueden ser fácilmente verificadas.

Lema A.4 *1. Si $\phi : M \to N$ es un mapeo suave, entonces $\phi^* : \mathfrak{T}^0_s(N) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal para cada $s \geq 0$, y*

$$\phi^*(A \otimes B) = \phi^*(A) \otimes \phi^*(B)$$

para tensores covariantes arbitrarios $(0,s)$ y $(0,t)$.

2. Si $\psi : N \to P$ es también un mapeo suave, entonces

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : \mathfrak{T}^0_s(P) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$$

para cada $s \geq 0$.

Definición A.6 *1. Diremos que un tensor $A \in \mathfrak{T}^2_0(M)$ es simétrico si $A(x,y) = A(y,x)$, $\forall x, y \in V$.*

2. Diremos que un tensor $A \in \mathfrak{T}^2_0(M)$ es antisimétrico si $A(x,y) = -A(y,x)$, $\forall x, y \in V$.

En caso de tensores de tipo $(0,2)$ se puede dar una definición análoga; en cambio, para tensores tipo $(1,1)$ esto no tiene sentido.

A.6. Tensor derivación

El apartado anterior ha tratado del álgebra tensorial, de ahora en adelante consideremos el cálculo tensorial.

Definición A.7 *Un tensor derivación $\mathscr{D}$ en una variedad suave M es un conjunto de funciones $\mathbb{R}$-lineales*

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}_s^r : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_s^r(M) \qquad (r \geq 0, s \geq 0)$$

tal que para cualesquier tensores A y B

1. $\mathscr{D}(A \otimes B) = \mathscr{D}A \otimes B + A \otimes \mathscr{D}B$,

2. $\mathscr{D}(\mathbf{C}A) = \mathbf{C}(\mathscr{D}A)$ *para cualquier contracción* $\mathbf{C}$.

Así, $\mathscr{D}$ es $\mathbb{R}$-lineal, preserva el tipo de tensores, obedece la regla del producto de Leibniz, y conmuta con todas las contracciones.
Para una función $f \in \mathfrak{F}(M)$ recordar que $fA = f \otimes A$; por lo tanto $\mathscr{D}(fA) = (\mathscr{D}f)A + f\mathscr{D}A$.
En el caso especial $r = s = 0$, $\mathscr{D}_0^0$ es la derivada en $\mathfrak{T}_0^0(M) = \mathfrak{F}(M)$ así, como se discutió en el capítulo 2, existe un único campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$\mathscr{D}f = Vf \qquad \textit{para todo } f \in \mathfrak{F}(M).$$

Dado que la derivación del tensor generalmente no es $\mathfrak{F}(M)$-lineal, el valor de $\mathscr{D}A$ en un punto $p \in M$ no se puede encontrar simplemente de A_p. Sin embargo se puede encontrar a partir de los valores de A en una vecindad pequeña y arbitraria de p.
Esta propiedad local del tensor derivación puede expresarse de la siguiente forma.

Proposición A.6 *Si $\mathscr{D}$ es un tensor derivado en M y $\mathscr{U}$ es un conjunto abierto de M, entonces existe un único tensor derivación $\mathscr{D}_{\mathscr{U}}$ en $\mathscr{U}$ tal que*

$$\mathscr{D}_{\mathscr{U}}(A|\mathscr{U}) = (\mathscr{D}A)|\mathscr{U} \qquad \textit{para todo tensor } A \textit{ en } M.$$

($\mathscr{D}_{\mathscr{U}}$ es llamado la restricción de $\mathscr{D}$ a $\mathscr{U}$, y en lo sucesivo se omite el subíndice $\mathscr{U}$.)

Demostración :
Esquema de la prueba:
Sea $B \in \mathfrak{T}_s^r(\mathscr{U})$. Si $p \in \mathscr{U}$ sea f una función bache en p, con soporte en $\mathscr{U}$.
Así $fB \in \mathfrak{T}_s^r(\mathscr{U})$. Se define

$$(\mathscr{D}_{\mathscr{U}}B)_p = \mathscr{D}(fB)_p.$$

A continuación mostrar

1. *Esta función es independiente de la función bache.*

2. $\mathscr{D}_{\mathscr{U}} B$ *es un campo tensorial suave en* $\mathscr{U}$.

3. $\mathscr{D}_{\mathscr{U}}$ *es el tensor derivación en* $\mathscr{U}$.

4. $\mathscr{D}_{\mathscr{U}}$ *tiene la propiedad de restricción habitual.*

5. $\mathscr{D}_{\mathscr{U}}$ *es única.* $\square$

La fórmula de Leibniz $\mathscr{D}(A \otimes B) = \mathscr{D}A \otimes B + A \otimes \mathscr{D}B$ puede ser reescrita como sigue:

Proposición A.7 (Regla del producto) *Sea* $\mathscr{D}$ *el tensor derivación en* M. *Si* $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, *entonces*

$$\begin{aligned} \mathscr{D}[A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)] &= (\mathscr{D}A)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \ldots, \mathscr{D}\theta^i, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, \mathscr{D}X_j, \ldots, X_s). \end{aligned}$$

(*La situación de los paréntesis es crucial aquí, en el lado izquierdo se aplica a una función, en el lado derecho del tensor* A *a 1-formas, y a campos vectoriales*).

Demostración :
Por simplicidad, sea $r = s = 1$. *Afirmamos que*

$$A(\theta, X) = \bar{C}(A \otimes \theta \otimes X),$$

donde $\bar{C}$ *es la composición de dos contracciones. De hecho, con relación al sistema de coordenadas* $A \otimes \theta \otimes X$ *tiene compontes* $A^i_j \theta_k X^i$, *mientras* $A(\theta, X) = \sum A^i_j \theta_i X^j$.
Así

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(A(\theta, X)) &= \mathscr{D}\bar{C}(A \otimes \theta \otimes X) \\ &= \bar{C}\mathscr{D}(A \otimes \theta \otimes X) \\ &= \bar{C}(\mathscr{D}A \otimes \theta \otimes X) + \bar{C}(A \otimes \mathscr{D}\theta \otimes X) + \bar{C}(A \otimes \theta \otimes \mathscr{D}X) \\ &= (\mathscr{D}A)(\theta, X) + A(\mathscr{D}\theta, X) + A(\theta, \mathscr{D}X). \qquad \square \end{aligned}$$

Para un $(1, s)$ tensor expresado en una función $\mathfrak{F}(M)$-multilineal $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ el tensor derivación obedece la regla del producto habitual, es decir,

$$\mathscr{D}(A(X_1, \ldots, X_s)) = (\mathscr{D}A)(X_1, \ldots, X_s) + \sum_{i=1}^{s} A(X_1, \ldots, \mathscr{D}X_i, \ldots, X_s).$$

Ambas versiones de la regla del producto se resolverán con frecuencia para el término que implica $\mathscr{D}A$. Esto da una fórmula para $\mathscr{D}$ de un tensor arbitrario en términos de $\mathscr{D}$, aplicado únicamente a funciones, campos vectoriales y *1-formas*. Pero para una *1-forma*

$$(\mathscr{D}\theta)(X) = \mathscr{D}(\theta X) - \theta(\mathscr{D}X).$$

Luego, la fórmula del producto satisface funciones y campos vectoriales.

Corolario A.1 *Si las derivaciones de los tensores $\mathscr{D}_1$ y $\mathscr{D}_2$ coinciden en las funciones $\mathfrak{F}(M)$ y los campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$, entonces $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2$.*

Además, a partir de datos adecuados de $\mathfrak{F}(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$ podemos construir un tensor derivación.

Teorema A.1 *Dado un campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ y una función $\mathbb{R}$-lineal $\delta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que*

$$\delta(fX) = VfX + f\delta(X) \quad \textit{para toda } f \in \mathfrak{F}(M),\ X \in \mathfrak{X}(M),$$

existe un único tensor derivación $\mathscr{D}$ en M tal que $\mathscr{D}_0^0 = V : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ y $\mathscr{D}_0^1 = \delta$.

Demostración :
$\mathscr{D}_0^0$ y $\mathscr{D}_0^1$ son dados. La fórmula que precede el corolario A.1 muestra que $\mathscr{D}$ en una 1-forma, θ debe ser definida por

$$(\mathscr{D}\theta)(X) = V(\theta X) - \theta(\delta X) \quad \textit{para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Usando la fórmula dada para δ es fácil de comprobar que $\mathscr{D}\theta$ es $\mathfrak{F}(M)$-lineal, por lo tanto es una 1-forma, y que $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1^0 : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal.
Por la regla del producto, $\mathscr{D}$ en un (r,s) tensor A con $r+s \geq 2$ debe ser definido por

$$\begin{aligned}(\mathscr{D}A)(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s) &= V(A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s))\\ &\quad -\sum_{i=1}^{r} A(\theta^1,\ldots,\mathscr{D}\theta^i,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)\\ &\quad -\sum_{j=1}^{s} A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,\delta X_j,\ldots,X_s).\end{aligned}$$

(En el lado derecho $\mathscr{D}$ es una 1-forma y se define como anteriormente lo hicimos.)
De nuevo es fácil verificar que $\mathscr{D}A$ es $\mathfrak{F}(M)$-multilineal, por lo tanto es un (r,s) tensor, y que $\mathscr{D} : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_s^r(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal.
Además, un cálculo directo muestra que $\mathscr{D}(A\otimes B) = \mathscr{D}A\otimes B + A\otimes\mathscr{D}B$. (Tomar A y B de tipo $(1,1)$ para ver como funciona.)

Para probar que $\mathscr{D}$ *es conmutativa con contracción, considere primero el caso* $\mathbf{C} : \mathfrak{T}_1^1(M) \to \mathfrak{F}(M)$.
Mostrar que $\mathscr{D}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathscr{D}$ *en el producto tensorial* $\theta \otimes X$ *es inmediato a partir de la definición de* $\mathscr{D}$ *que es una 1-forma. Por lo tanto* $\mathscr{D}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathscr{D}$ *es suma de términos de la forma* $\theta \otimes X$*. Ya que* $\mathscr{D}$ *es local y* $\mathbf{C}$ *es puntual, es suficiente probar* $\mathscr{D}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathscr{D}$ *en los entornos coordenados. Pero el lema 5 muestra que todo* $(1,1)$ *tensor se puede escribir como una suma.*
La extensión de las contracciones arbitrarias es un ejercicio de paréntesis.
Tomando $A \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ *por ejemplo,*

$$\begin{aligned}
(\mathscr{D}C_2^1 A)(X) &= \mathscr{D}((C_2^1 A)(X)) - (C_2^1 A)(\mathscr{D}X) \\
&= \mathscr{D}(\mathbf{C}\{A(\cdot, X, \cdot)\}) - \mathbf{C}\{A(\cdot, \mathscr{D}X, \cdot)\} \\
&= \mathbf{C}\{\mathscr{D}(A)(\cdot, X, \cdot) - A(\cdot, \mathscr{D}X, \cdot)\} \\
&= \mathbf{C}\{(\mathscr{D}A)(\cdot, X, \cdot)\} \\
&= (C_2^1 \mathscr{D}A)(X).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathscr{D}C_2^1 A = C_2^1 \mathscr{D}A$. $\square$

Conclusiones

$\star$ Una buena parte de los conceptos y resultados del análisis en $\mathbb{R}^m$ se puede extender a espacios más generales que denominaremos variedades diferenciales, que intuitivamente es un espacio localmente equivalente a $\mathbb{R}^m$.

$\star$ Muchos sistemas físicos, sobre todo en Mecánica, pueden modelarse usando una variedad diferenciable.

$\star$ Para generalizar el concepto de diferencial de una función se requiere construir previamente el espacio tangente en un punto de una variedad abstracta. Para ello debemos ver los vectores tangentes como operadores que actuan en el anillo de funciones.

$\star$ Los campos vectoriales son aplicaciones que asignan de forma diferenciable a cada punto, un vector apoyado en él, y puede interpretarse como un operador de derivación con valores reales que generaliza la idea clásica de derivada direccional.

$\star$ En el espacio euclídeo sabemos derivar un campo diferenciable Y en la dirección de otro X, y obtenemos otro campo diferenciable. Pero si tenemos una variedad abstracta sobre la que no podemos servirnos de una estructura intrínseca, como podemos definir el equivalente a la derivada?. Está cuestion la resolvemos utilizando la conexión de Levi-Civita, herramienta que nos abrira una puerta para estudiar geodesicas, curvatura y otros objetos de la geometria semi-riemanniana.

Bibliografía

[1] Barret O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry whith applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[2] Sergio Plaza, *Variedades Diferenciables*, En curso, 2008.

[3] Sigmundur Gudmundsson, *An Introduction to Riemannian Geometry*, En preparación, 2016.

[4] M. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.

[5] Bert Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, España, 2013.

[6] Mickaël Crampon, *Introducción a la Geometría Diferencial y Riemanniana*, Chile, 2014.

[7] José Manuel Sánchez Muñoz, *El Álgebra de la Teoría Especial de la Relatividad*, Madrid España, 2011.