UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

SECCIÓN DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADUACIÓN:

“INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DE BROCARD”.

PRESENTADO POR:

FRANCISCA ELIZABETH AGUILAR ORTIZ

SERGIO DAVID TORRES SOTO

ANGEL ROBERTO GONZÁLEZ

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

DOCENTE DIRECTOR:

LIC. PEDRO FLORES SÁNCHEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, MARZO DE 2016

SAN MIGUEL **EL SALVADOR** **CENTROAMÉRICA**

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

LIC. LUIS ARGUETA ANTILLÓN

RECTOR INTERINO

VICERRECTOR ACADÉMICO

DRA. ANA LETICIA ZAVALETA DE AMAYA

SECRETARIA GENERAL

LIC. NORA BEATRIZ MELÉNDEZ

FISCAL GENERAL INTERINA

ING. CARLOS ARMANDO VILLALTA

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO INTERINO

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

ING. JOAQUÍN ORLANDO MACHUCA

DECANO

LIC. CARLOS ALEXANDER DÍAZ

VICE-DECANO

LIC. JORGE ALBERTO ORTÉZ HERNÁNDEZ

SECRETARIO

AGRADECIMIENTOS

A Dios todopoderoso, que es el dador de todas las cosas, por haber permitido culminar uno de nuestros mayores triunfos.

A nuestro Asesor Director de trabajo de graduación, Lic. Pedro Flores Sánchez, que con su apoyo y sugerencias hemos llegado a tocar la culminación de lo que se pretendía, y cuyo conocimiento queda enmarcado a lo largo de este texto.

A nuestro jurado, Licenciada Sonia del Carmen Martínez de López y Licenciado Tobías Humberto Martínez Lovo, por su apoyo y confianza.

AGRADECIMIENTOS PERSONALES.

Francisca Elizabeth Aguilar Ortiz,

A mis padres: José Oscar Aguilar Ventura y Francisca Ortiz de Aguilar que con amor se esforzaron y apoyaron en cada necesidad que se presentó. Con especial dedicación a mi papá que suplió todas las necesidades económicas.

A mis hermanos: Brenda Ivania Aguilar Ortiz y Joel Alexander Aguilar Ortiz, porque siempre me brindaron su ayuda.

Angel Roberto González,

A mis madres: Patricia González Mejía (Madre) y Marta Luz Mejía Vda. De Aparicio (Abuela), por ser mi apoyo y mis motivos de superación.

Mis apoyos: Pedro Flores Sánchez y María del Tránsito Velásquez de Flores, por su gran amistad, confianza, apoyo, aliento y cuidados, infinitamente agradecido con Dios por unir nuestros caminos.

A mi novia: Jacqueline Vanessa Avalos Álvarez, por su enorme amor, ser mi apoyo incondicional, mi siempre amiga, acompañarme en estos siete años y darme ánimos a seguir, ser un motivo más para avanzar.

A mi familia: A cada uno de mis hermanos, cuñadas, sobrinas por su apoyo a mi tío por siempre tratar de ayudarme en lo económico.

A mis compañeros: Por brindarme su amistad, su apoyo económico cuando lo necesite y sobre todo por tolerarme.

Sergio David Torres Soto,

A mis padres: Pedro Pablo Torres Zelaya y Marina de Jesús Soto Carvallo que con su esfuerzo y dedicación suplieron cada necesidad que se me presento a lo largo de esta etapa de mi vida y que son mi inspiración para dar lo mejor de mí en el día a día.

A mis hermanos: A cada uno de mis hermanos les agradezco su apoyo y sus consejos que supieron darme en toda esta trayectoria de mi estudio.

ÍNDICE

Capítulo II- INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA MODERNA.

Capitulo III- INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DE BROCARD.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de graduación está orientado al estudio de una de las ramas de la matemática: la geometría, y comprende como estudio específico la investigación de temas que abarca la Geometría Moderna.

Los matemáticos de la era moderna han extendido la geometría más allá de la heredada por los griegos. Éstos son los actores de descubrimiento de muchas proposiciones nuevas relacionadas con las circunferencias y las figuras rectilíneas, éstas deducidas de las enumeradas en “Los Elementos” de Euclides. A este nuevo descubrimiento de proposiciones se le conoce como Geometría Moderna, y constituye una continuación o extensión de “Los Elementos” y herramientas que Euclides ya aportó.

El trabajo de investigación se denomina: **INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DE BROCARD**. Éste hace referencia a los puntos de Brocard, ángulo de Brocard, circunferencia de Brocard, y finalizando con los triángulos de Brocard.

Para el desarrollo del análisis del tema a abordar se consideran tres capítulos que se describen a continuación.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES: ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA.

Este comprende los elementos básicos de la Geometría Euclidiana; como rectas, segmentos, ángulos, triángulo, cuadriláteros y circunferencia.

CAPÍTULO II

ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA MODERNA.

En este capítulo se desarrollará –en el contexto de la Geometría Moderna- algunos temas como: segmentos dirigidos y partiendo de ésta noción se estudian los teoremas de Ceva y Menelao; la cuaterna armónica y posteriormente haz armónico. Para los triángulos se estudia un nuevo concepto "simedianas"; éste se relaciona con algunas rectas notables que se desarrollan en el capítulo I, considerando a su vez algunas propiedades importantes para el desarrollo del capítulo III.

CAPÍTULO III

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DE BROCARD.

En este capítulo se desarrolla el tema de interés, comenzando con los puntos de Brocard, dando a conocer su construcción y sus propiedades, partiendo de las propiedades de dichos puntos se define el ángulo de Brocard, por último se estudia circunferencia y triángulos de Brocard con sus respectivas construcciones.

JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA.

Se ha elegido investigar el tema **Introducción a la Geometría de Brocard**, para indagar e investigar campos más avanzadas que hasta ahora son poco tratados en la geometría impartida en los cursos actuales de la carrera Licenciatura en Matemática, se abordan conceptos que permiten la conexión con otros nuevos y que sirven como base para construir nuevas teorías, ésto es; a partir de los conceptos básicos de la Geometría Euclidiana se construyen conceptos de la **Geometría de Brocard**.

El enfoque principal en esta investigación se hará alrededor de la teoría de la Geometría Moderna, se extenderán las definiciones, propiedades y teoremas más importantes que servirán como base para la construcción y comprensión de la **Geometría de Brocard**.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL.

Conocer los conceptos involucrados para las construcciones en la **Geometría de Brocard**.

OBJETIVO ESPECÍFICOS.

- Investigar el contexto histórico de la geometría moderna y geometría de Brocard.
- Entender e Interpretar definiciones de la geometría moderna que ayuden en la construcción de los elementos de la **Geometría de Brocard.**
- Aplicar conceptos y teoremas de la geometría moderna en la construcción y demostraciones en la **Geometría de Brocard**.

SIMBOLOGÍA

Puntos	$\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{L_1}\ldots$
Recta	$\overleftrightarrow{PQ}$, l, l', $l_1\ldots$
Rectas paralelas	$l_1 \parallel l_2$
Perpendicularidad de rectas	$l_1 \perp l_2$
Semirrecta o rayo	$\overrightarrow{OC}$
Segmento	$\overline{AB}$
Medida de segmentos	$m\overline{AB}$ o AB
Segmento nulo	$\bar{0}$
Ángulo	$\angle A$ o $\angle ABC$
Medida de ángulos	$m\angle HOF$ o $\measuredangle HOF$
Valor numérico del ángulo $\angle \boldsymbol{AOB}$	α, θ, $\delta\ldots$
Congruencia de ángulos	$\angle APD \cong \angle CPB$
Polígono	$ABCDEFGH$
Triángulo	ΔABC
Triángulo rectángulo	$\triangle ABC$
Congruencia de triángulos	$\Delta ABC \cong \Delta PQR$
Área triangular	(ABC)
Semejanza de triángulos	$\Delta ABC \sim \Delta PQR$
Cuadrilátero	$ABCD$
Proporción	$extremo : medio :: medio : extremo$ o $\frac{extremo}{medio} = \frac{medio}{extremo}$
Circunferencia	(A) o (AB)
Radio de una circunferencia	r o R
Arco	$\overset{\frown}{AC}$
Cuaterna armónica	$(ABCD) = -1$
Haz armónico	$O(ABCD) = -1$

CAPÍTULO I

PRELIMINARES: ELEMENTOS Y RESULTADOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

En este capítulo, se comienza dando los términos y relaciones preliminares de la Geometría Euclidiana y su conexión por medio de los axiomas a medida se vayan enunciando y notar como de éstos se deducen los teoremas, a su vez identificar como las definiciones necesarias se desprenden de éstos con el propósito de caracterizar los nuevos objetos.

1.1 DEFINICIÓN DE GEOMETRÍA.

Geometría, palabra griega cuyo significado es medición de la tierra, es la ciencia que trata de las propiedades de las figuras geométricas las cuales se emplean para la medición de extensiones.

Las **Extensiones** a las que se refiere la definición de geometría, son porciones de espacio que ocupa, una figura geométrica, llamándose extensión volumétrica en el caso de ser un sólido, extensión superficial si fuese una superficie y extensión lineal en el caso de una línea.

1.2 OBJETO DE LA GEOMETRÍA.

La **Geometría Euclidiana** es la rama de la geometría que está basada en los postulados de Euclídes. A partir de estos postulados y una lógica rigurosa, se demostraron un gran número de teoremas, que desarrollaron los cimientos de la geometría Euclidiana. Ésta tiene como propósito primitivo el estudio de las figuras geométricas, basándose en la forma, extensión y relaciones que guardan entre sí.

La Geometría Euclidiana está dividida en dos partes, éstas son:

Planimetría, parte de la geometría que trata de las figuras en el plano. También se conoce como Geometría Plana, llamándosele figuras geométricas planas a aquellas cuyos puntos están en un mismo plano. Entre estas figuras planas tenemos: el triángulo, el círculo, el cuadrado, etc...

Estereometría, conocida como Geometría del Espacio, ésta es la rama de la geometría que se encarga del estudio de las figuras geométricas voluminosas que ocupan un lugar en el espacio; a su vez estudia también las propiedades y medidas de las figuras geométricas en el **espacio tridimensional** o **espacio euclídeo**, en dicho espacio la forma de las figuras geométricas corresponde a nuestras ideas intuitivas sobre cómo son. En esta rama a las figuras geométricas también se les denomina sólidos, entre éstos se encuentran el cono, el cubo, el cilindro, la pirámide, la esfera, el prisma, etc..

En los siglos V-XV la Matemática comienza nuevos caminos y la Geometría apenas tiene nuevas aportaciones, excepto algunos teoremas de carácter no regular.

En Occidente, a pesar de que la Geometría era una de las siete Artes Liberales, en las escuelas y universidades se limitaban a enseñar Los “Elementos”, y no había aportaciones, excepto en la investigación sobre la disputa del V postulado, que se pretendía llegar a dilucidar en este periodo (era o no independiente de los otros cuatro). Después de esto se abrió un gran campo de posibilidades para la resolución del problema (siglo XVI) y se empiezan a formular una serie de hipótesis. La geometría amplía su campo de acción hacia nuevos problemas (siglo XVI-XX) y así comienzan los nuevos descubrimientos en esta rama, los cuales posteriormente serán conocidos como “Geometrías no Euclídeas”, llegándose a dar nuevas formulaciones en las cuales no se acepta el V postulado de Euclides, sino que se aceptan otros principios que dan origen a las llamadas “geometrías no euclidianas”.

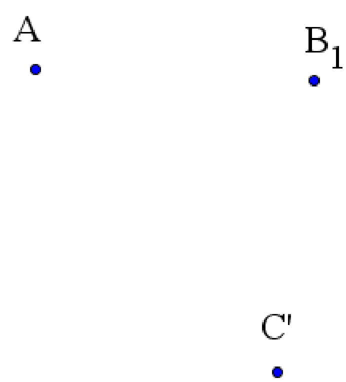
Las nuevas ramas son: la Geometría Proyectiva, la Geometría Descriptiva, la Geometría No-Euclideana o Hiperbólica (Lobatschewski), y en la actualidad la Topología y la Geometría Vectorial. El extenso tratado de Euclides, “Los Elementos" de geometría deja de ser un texto autorizado de geometría en el siglo XIX.

En lo siguiente de este capítulo, todos los términos y definiciones se refieren y se trabajan en la Geometría Euclidea.

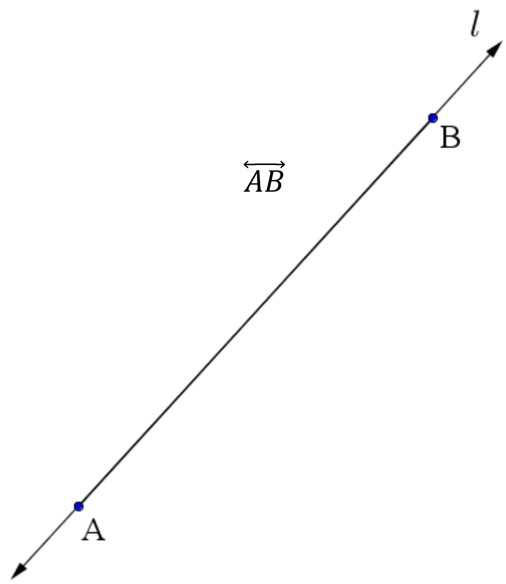
1.3 ELEMENTOS GEOMÉTRICOS.

Las figuras geométricas elementales en el plano son el *punto* y la *recta*, cuyos conceptos son fundamentales o primitivos y no se definen; simplemente se enuncian estableciendo su existencia. Estas ideas básicas de la Geometría permiten pensar en el mundo físico, en cada objeto que se ve y se conoce con detalle; sin embargo, es importante notar que los conceptos de punto y recta son simples abstracciones de la mente y se aceptan sin definición.

Para designar los puntos se emplean letras latinas mayúsculas: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B'}$, $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{D_1}$, …. En la siguiente figura se observan los puntos A, B_1, C'.



La idea de una *recta* se aprecia al hacer uso de la regla y un lápiz bien afilado, trazando con el lápiz de extremo a extremo de la regla sobre un papel, al final de los extremos se coloca una flecha, indicando que la recta se extiende indefinidamente. El trazo que resulta no es realmente una recta, sino simplemente su representación ya que este concepto solo es una idea en la mente, y por tal razón no puede verse ni tocarse. La $figura\ 1$ es la representación de la recta que pasa por los puntos A y B.



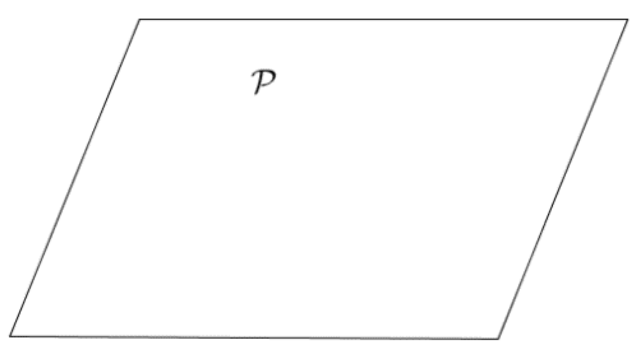
$Figura\ 1$

Para designar una recta se puede hacer de dos maneras:

1. Se emplean letras latinas minúsculas: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{l_1}$, $\boldsymbol{l_2}$, $\boldsymbol{l'}$, $\boldsymbol{l''}$ ($figura\ 1$).
2. $\overleftrightarrow{AB}$, A y B son puntos por los que pasa la recta ($figura\ 1$).

El plano.

La superficie de algunos objetos conocidos nos puede dar la idea de lo que es un plano, no son realmente el plano, sino simplemente representan la idea de él. Por ejemplo: la superficie de una mesa, de una pizarra del aula, etc., nos da la idea de plano. La mayoría de veces se representa un plano por un paralelogramo, tal como se muestra en la $Figura\ 2$, y se leerá plano $\mathcal{P}$.



$Figura\ 2$

1.4 ALGUNOS TEOREMAS, AXIOMAS Y POSTULADOS DE LOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS.

Al tener la idea intuitiva de un punto, recta y plano se verá que existen teoremas, postulados, axiomas de incidencia; estos últimos se refieren al número de axiomas nuevos que surgieron a partir de la idea intuitiva de punto, recta y plano. Primero se definirán los siguientes términos:

Proposición: Es el enunciado que consta de una hipótesis o suposición, y de una tesis o conclusión.

Axioma: Es una proposición evidente en sí misma, y por tanto se admite sin demostración.

Postulado: Es una proposición no evidente por sí misma, no es demostrada, pero que se acepta ya que no existe otro principio del que pueda ser deducida.

Teorema: Es una proposición que hay que demostrar.

Lema: Es un teorema preliminar que nos sirve de base para demostrar otras proposiciones.

Corolario: Es un teorema cuya verdad puede deducirse de otro ya demostrado.

AXIOMAS DE INCIDENCIA.

Definición. *Puntos colineales.*
Los puntos son colineales cuando están en una misma recta.

Definición. *Puntos coplanares.*
Los puntos son coplanares cuando están en un mismo plano.

Axioma 1. Dos puntos distintos determinan una recta y sólo una a la cual pertenecen. Por un punto pasa al menos una recta.

Axioma 2. A toda recta pertenecen al menos dos puntos distintos.

Axioma 3. Tres puntos distintos que no están en una misma recta, determinan un plano y sólo uno al cual pertenecen. Por dos puntos distintos pasa al menos un plano.

Axioma 4. A todo plano pertenecen al menos tres puntos distintos no colineales.

Axioma 5. Si dos puntos de una recta están en un plano, la recta está contenida en el plano.

Axioma 6. Si dos planos diferentes se cortan, su intersección es una recta.

Postulado 1. Existen infinitos puntos.

Postulado 2. Existen infinitas rectas.

Teorema I. ≪Si dos rectas diferentes se intersectan, su intersección es un solo punto.≫

Teorema II. ≪Si dos rectas diferentes se intersectan, existe un plano único que las contiene.≫

Teorema III. ≪Si l es una recta y A un punto que no pertenece a ella, existe un plano único que contiene a la recta y al punto.≫

1.5 RECTAS Y SEGMENTOS.

1.5.1 Rectas.

Definición. *Línea*.

Es una figura geométrica unidimensional que se forma por una sucesión infinita de puntos.

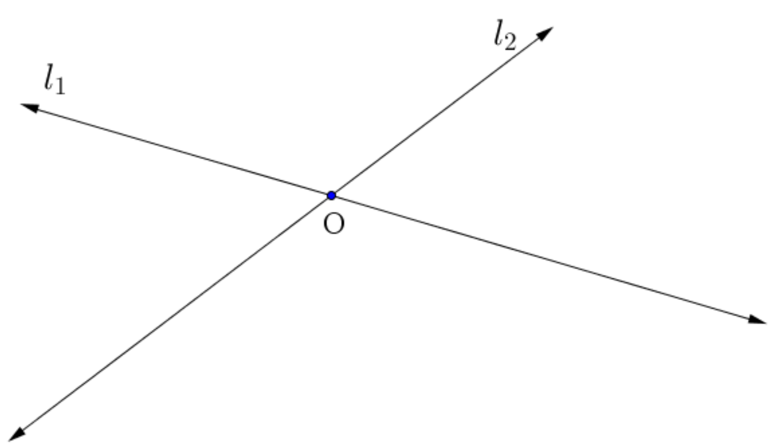
A partir de la definición, una línea se caracteriza por no tener grosor y se extiende sin fin en el plano.

Las líneas pueden adoptar la forma de recta ($figura\ 3.a$), curva ($figura\ 3.b$), mixta ($figura\ 3.c$) y quebrada o poligonal ($figura\ 3.d$).

$Figura\ 3$

Definición. *Rectas secantes.*
Son dos rectas que tienen un punto en común.

En la $figura\ 4$, O es el punto común de las rectas l_1 y l_2, así las rectas son secantes.



$Figura\ 4$

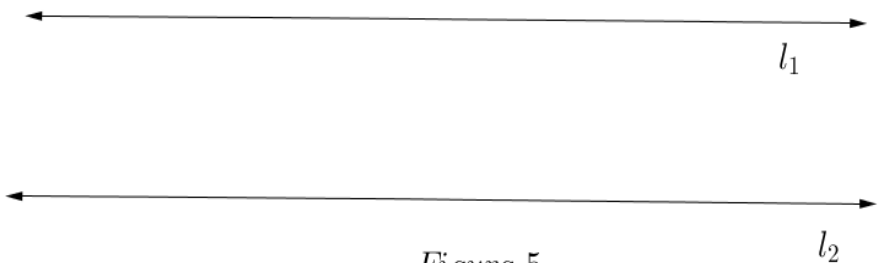
Rectas paralelas.

Definición. *Rectas Paralelas*.

Dos rectas son paralelas si están en un mismo plano, y su intersección es vacía.

Para designar que las rectas l_1 y l_2 son paralelas se escribe $l_1 \parallel l_2$.

En la $figura\ 5$, l_1 es paralela a l_2.

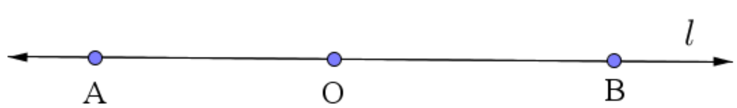


$Figura\ 5$

Semirrectas.

Definición. *Semirrecta o rayo*.

Es cada una de las dos partes en que queda dividida una línea recta al ser cortada en cualquiera de sus puntos.



$Figura\ 6$

En la $figura\ 6$, el punto O corta la recta l obteniéndose así dos semirrectas, el punto O se llama punto de origen de las semirrectas. Para denotar una semirrecta, se coloca en primer lugar el punto de origen, es decir; $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ($figura\ 6$), también se puede designar semirrectas con las letras latinas minúsculas.

1.5.2 Segmentos.

Definición. *Segmento de recta.*

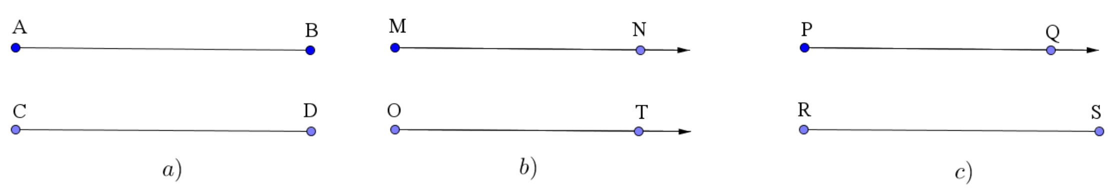
Porción de línea recta limitada por dos puntos ($Figura\ 7$).

$Figura\ 7$

Para designar un segmento se utiliza la notación $\overline{AB}$, los puntos A y B se denominan extremos del segmento y los demás puntos entre A y B forman un conjunto llamado interior del segmento $\overline{AB}$.

El segmento $\overline{AB}$ es una parte de la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ o sea, esto indica que todo punto del segmento $\overline{AB}$ es un punto de la semirrecta $\overrightarrow{AB}$.

Además del paralelismo de dos rectas, se puede referir al paralelismo de dos segmentos ($figura\ 8.a$), al de dos semirrectas o rayo ($figura\ 8.b$), y al de una semirrecta y un segmento ($figura\ 8.c$).



$Figura\ 8$

1.5.2.1 Tipos de segmentos.

Definición. *Segmento nulo.*

Un segmento es nulo cuando sus extremos coinciden.

Un segmento nulo se denota por $\bar{0}$.

Definición. *Segmentos consecutivos.*

Dos segmentos son consecutivos cuando tienen un extremo en común.

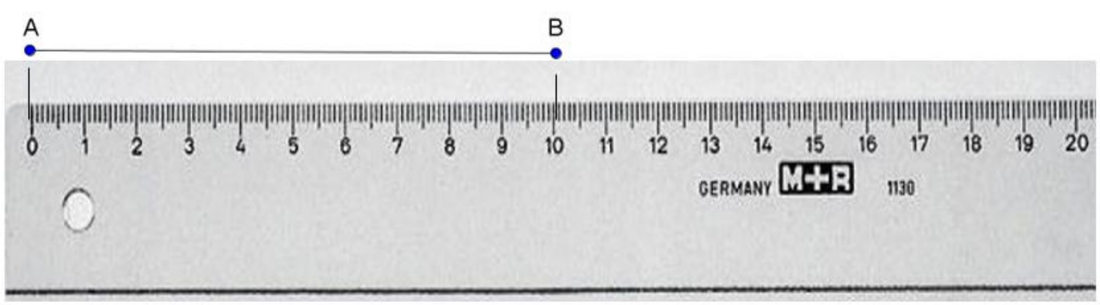
1.5.2.2 Medición de un segmento.

Definición. *Medida de un segmento*.

Es un número positivo que compara la longitud del segmento dado con la longitud del segmento unitario. [1]

Para denotar la medida de $\overline{AB}$ se utiliza la notación $m\overline{AB}$ o AB. La medida de un segmento puede ser dada en las unidades de kilómetros, metros, centímetros, yardas, pulgadas, pies, etc..

Para medir un segmento se emplean diversos instrumentos de medición, el más sencillo es la regla graduada. En $figura\ 9$ la medida de $\overline{AB}$ es igual a 10 centímetros.



$Figura\ 9$

Definición. *Punto medio de un segmento*.

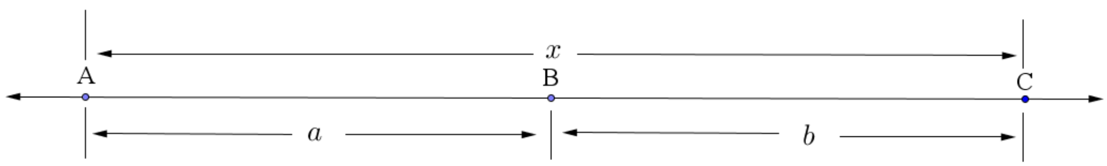
Es el punto que divide al segmento en dos segmentos iguales.

[1] **El Segmento unitario:** *es el segmento cuya longitud es una unidad.*

Todo segmento se caracteriza por tener un punto medio que lo biseca. Si O es el punto medio de $\overline{AB}$, se verifica que $m\overline{AO} = m\overline{OB} = \frac{m\overline{AB}}{2}$.

1.5.2.3 Operaciones con segmentos.

Si se ubican en una recta los puntos A, B y C en forma consecutiva, claramente se determina $\overline{AC}$ y los segmentos consecutivos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ $(figura\ 10)$.



$Figura\ 10$

Adición y sustracción de la medida de segmentos.

A partir de las medidas de los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se observa que la longitud del segmento $\overline{AC}$ es igual a la suma de las longitudes de los segmentos consecutivos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Así,

$$m\overline{AC} = m\overline{AB} + m\overline{BC} \Longrightarrow x = a + b$$

Además, esto implica que

$$m\overline{AB} = m\overline{AC} - m\overline{BC} \Longrightarrow a = x - b$$

$$m\overline{BC} = m\overline{AC} - m\overline{AB} \Longrightarrow b = x - a$$

Donde $x = m\overline{AC}$ $\ a = m\overline{AB} \wedge b = m\overline{BC}$.

Observación: La medida de un segmento nulo es 0.

Producto de la medida de segmentos.

En la $figura\ 10$, B divide el segmento $\overline{AC}$, las longitudes de los segmentos que resultan son: $m\overline{AB} = a$ y $m\overline{BC} = b$. El producto de la medida de estos dos segmentos es:

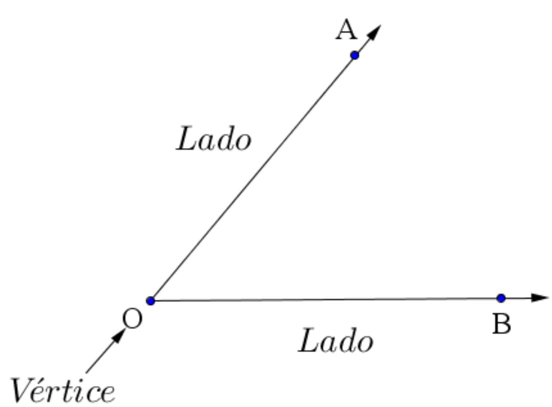
$$m\overline{AB} \cdot m\overline{BC} = a \cdot b$$

1.6 ÁNGULOS.

Definición. *Ángulo*.

Es la abertura entre dos rayos de origen común.

Los elementos de un ángulo son: *el vértice y sus dos lados*. Los dos lados del ángulo son los dos rayos y el punto común es el vértice ($Figura\ 11$).



$Figura\ 11$

Para denotar un ángulo cuyos lados son $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$($figura\ 11$), se escribe $\angle AOB$. Es indiferente el orden de los lados que se tomen para denotar un ángulo, es decir; también se puede escribir $\angle BOA$ o para abreviar simplemente se escribe $\angle O$ "ángulo O" utilizando solamente el vértice del ángulo.

1.6.1 Interior y exterior de un ángulo.

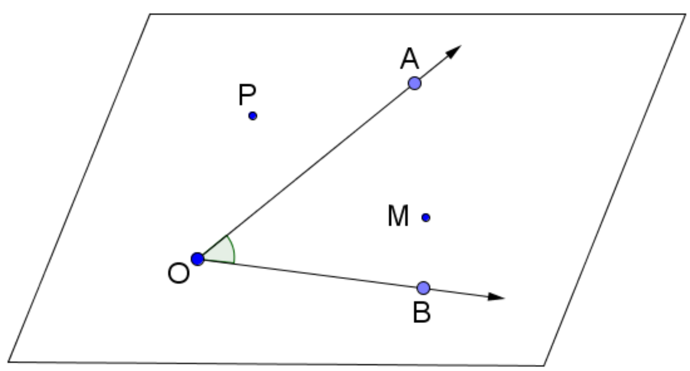
Definición. *Interior de un ángulo*.

Subconjunto de puntos que pertenecen a la parte del plano que se encuentra entre los lados del ángulo.

Definición. *Exterior de un ángulo.*

Subconjunto de puntos que pertenecen a la parte del plano que se encuentra fuera de los lados del ángulo.

En la $figura\ 12$, M es un punto interior del ángulo y P un punto exterior del ángulo.



$Figura\ 12$

1.6.2 Medida de un ángulo.

De manera semejante que se usa una regla graduada para estimar la medida de un segmento, se puede determinar la medida de un ángulo utilizando un transportador, que es un instrumento para medir y construir ángulos.

Definición. *Medida de un ángulo.*

Es el número de grados sexagesimales de un ángulo.[2]

Para denotar la medida de un ángulo se escribe $m\angle AOB$ o $\measuredangle AOB$ y se lee "medida del ángulo AOB". Para designar el número de grados que un ángulo mide se utiliza las letras del alfabeto griego, así; si el número de grados que mide $\angle AOB$ es α, se escribe $m\angle AOB = \alpha$.

La medida de un ángulo es un número real positivo comprendido entre 0 *y* 2π *rad.* [3]

Nota: Relación entre grados sexagesimales y radianes.

La equivalencia entre grados sexagesimales y radianes es:

2π rad≡ $360°$, esto es

π rad≡ $180°$

Por tanto

1 radián ≈ 57.29577951 grados sexagesimales y

1 grado sexagesimal ≈ 0.01745329252 radianes.

1.6.3 Clasificación de los ángulos por su medida.

Los ángulos por su medida se clasifican en: *agudo, recto, obtuso y llano.*

1. **Ángulo Agudo**: es el ángulo que mide menos de 90º ($Figura\ 13.a$).

---

[2] **Un grado sexagesimal:** *es el ángulo central de una circunferencia subtendido por un arco cuya longitud es igual a 1/360 de la circunferencia.*

[3] **Un radián:** *es el arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio. Un radian se denota por* 1 ***rad.***

2. **Ángulo Recto**: es el ángulo que mide 90º ($Figura\ 13.b$).
3. **Ángulo Obtuso**: es el ángulo que mide más de 90º y menos de 180º ($Figura\ 13.c$).
4. **Ángulo Llano**: es el ángulo que mide 180º ($Figura\ 13.d$).

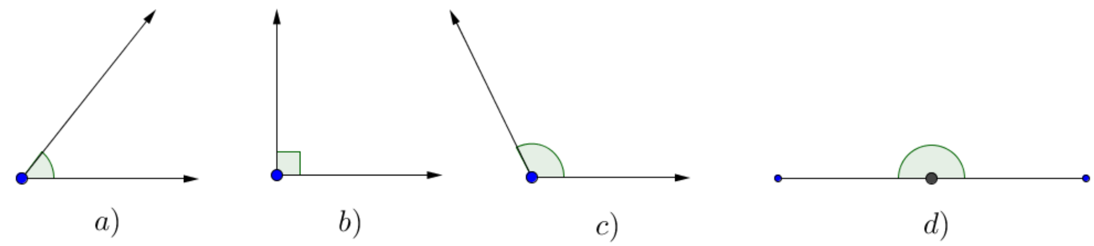


Figura 13

1.6.4 Adición y sustracción de ángulos.

Las operaciones de suma y sustracción de ángulos se abordarán de manera semejante a las operaciones con segmentos.

Axioma 7. *Adición de ángulos.*

Si P es un punto interior del $\angle ABC$, entonces $m\angle ABC = m\angle ABP + m\angle PBC$ ($Figura\ 14$).

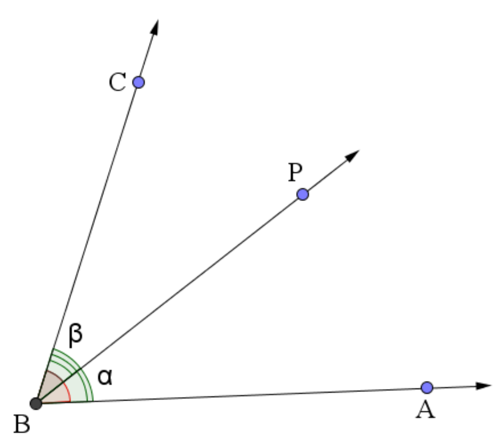


Figura 14

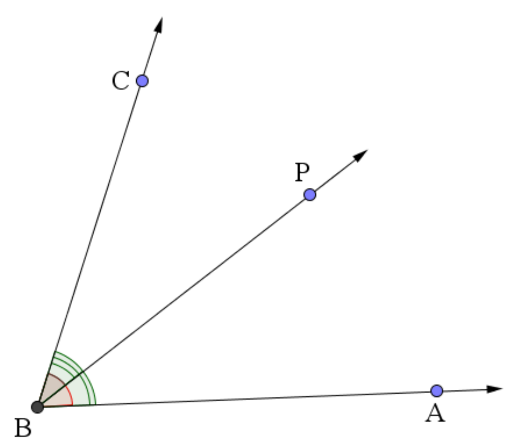
Además de la adición se tienen las siguientes relaciones ($Figura$ 14).

$$m\angle ABP = m\angle ABC - m\angle PBC$$

$$m\angle PBC = m\angle ABC - m\angle ABP.$$

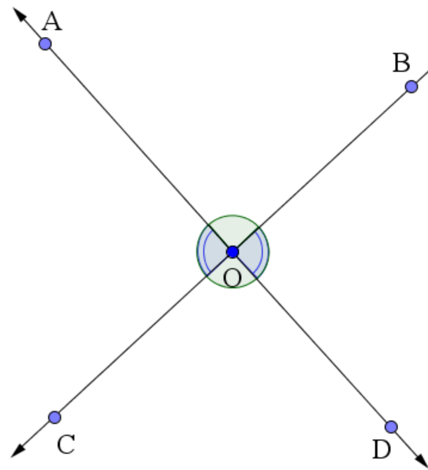
1.6.5 Clasificación de los ángulos de acuerdo a su posición y característica.

1. **Ángulos adyacentes:** Son aquellos que poseen el vértice y un lado en común; y los lados no comunes están en distintos semiplanos determinados por el lado común ($figura$ 15).



$Figura$ 15

2. **Ángulos opuestos por el vértice:** Son los ángulos que se forman cuando dos rectas se cortan en un punto y los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro ($figura$ 16).

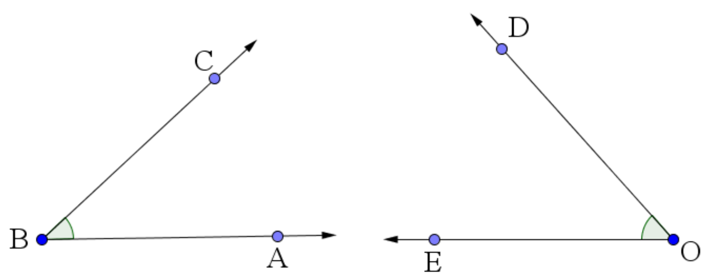


$Figura\ 16$

3. **Ángulos Complementarios:** Son dos ángulos cuyas medidas suman 90º.

Así, si $\angle ABC$ y $\angle DOE$ ($figura$ 17) son complementarios se cumple que:

$$m\angle ABC + m\angle DOE = 90°$$



$Figura\ 17$

Además, como los ángulos son complementarios, cada uno de ellos es el complemento del otro, $m\angle ABC$ es el complemento de $m\angle DOE$ y viceversa.

4. **Ángulos suplementarios:** Son dos ángulos cuyas medidas suman 180º.

Así, si $\angle ABC$ y $\angle DOE$ ($Figura$ 18) son suplementarios se cumple que:

$$m\angle ABC + m\angle DOE = 180°$$

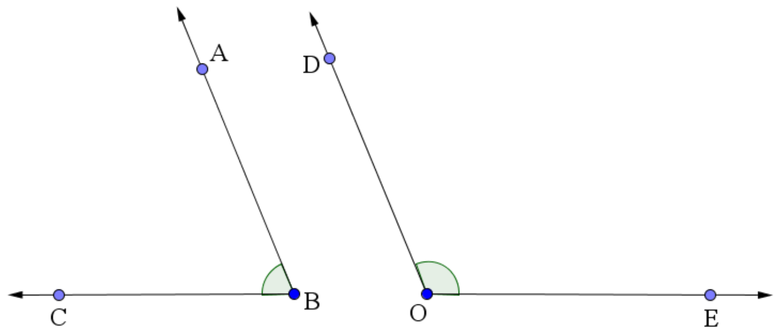


Figura 18

Además, como los ángulos son suplementarios, cada uno de ellos es el suplemento del otro, $m\angle ABC$ es el suplemento de $m\angle DOE$ y viceversa.

1.6.6 Congruencia de ángulos.

Definición. *Congruencia de ángulos.*

Son los ángulos que tienen igual medida.

La congruencia de $\angle AOB$ y $\angle CDE$ se denota por $\angle AOB \cong \angle CDE$. En la $figura$ 19, $\angle AOB \cong \angle CDE$ porque tienen la misma medida.

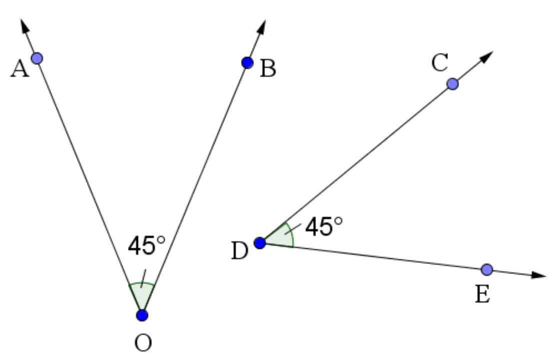


Figura 19

Axioma 8.

a) Todo ángulo es congruente consigo mismo, esto es $\angle AOB \cong \angle AOB$.

b) Si $\angle AOB \cong \angle DEF$, entonces $\angle DEF \cong \angle AOB$.

c) Dos ángulo congruentes a un tercero ángulo, son congruentes entre sí: $\angle AOB \cong \angle CDE \wedge \angle CDE \cong \angle HIJ \Rightarrow \angle AOB \cong \angle HIJ$.

Teorema IV. ≪*Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.* ≫

Demostración:

Sean $\angle AOB$ y $\angle COD$ ángulos opuestos por el vértice. De la $figura\ 20$ los ángulos $\angle DOB$ y $\angle AOB$ son adyacentes suplementarios, y también $\angle COD$ y $\angle DOB$ son adyacentes suplementarios. Entonces se tienen las siguientes relaciones:

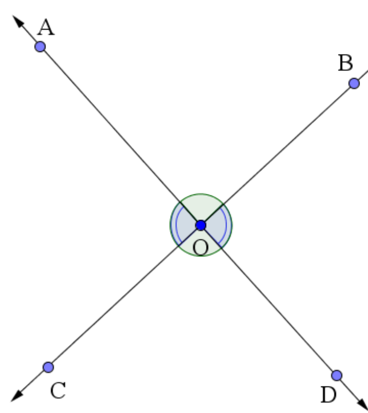
$$m\angle DOB + m\angle AOB = 180°$$

$$m\angle COD + m\angle DOB = 180°$$

$$\Rightarrow m\angle DOB + m\angle AOB = m\angle COD + m\angle DOB$$

$$\Rightarrow m\angle AOB = m\angle COD$$

$$\Rightarrow \angle AOB \cong \angle COD$$



$Figura\ 20$

■

1.6.7 Ángulos formados por rectas paralelas y una transversal.[4]

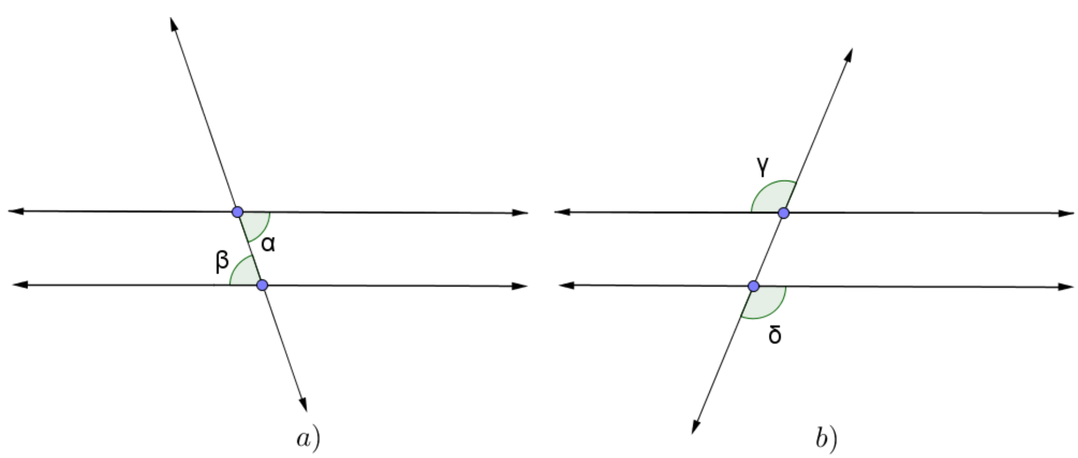
Dos rectas paralelas que son cortadas por una transversal forman ocho ángulos, éstos se clasifican en:

a) **Ángulos Alternos.** Son los pares de ángulos que se encuentran en semiplanos distintos con respecto a la transversal y pueden estar dentro o fuera de la paralelas. Estos son de dos tipos:

Ángulos alternos internos: Éstos están dentro de las dos rectas paralelas en distintos semiplanos con respecto a la transversal ($Figura\ 21.a$).

Ángulos alternos externos: Son los que están fuera de las dos rectas paralelas y en semiplanos diferentes con respecto a la transversal ($Figura\ 21.b$).

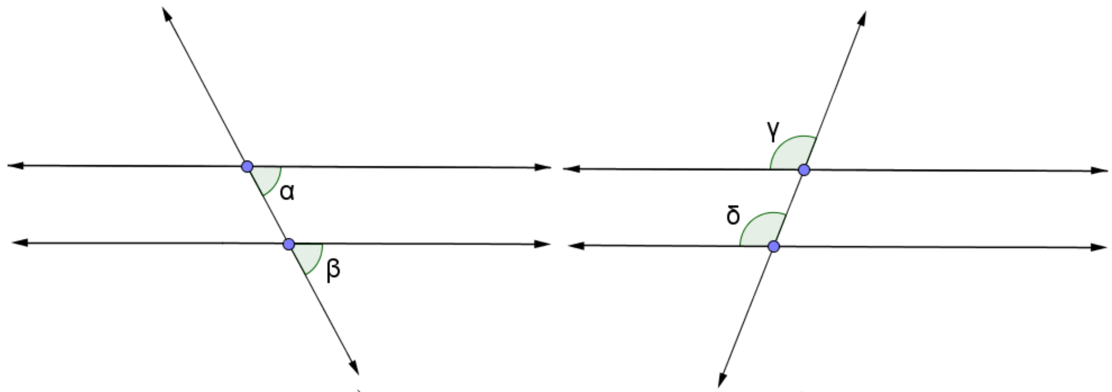
Los ángulos alternos son congruentes.



$Figura\ 21$

[4] *Existen ángulos alternos y correspondientes formados por rectas que no son paralelas cortados por una transversal.*

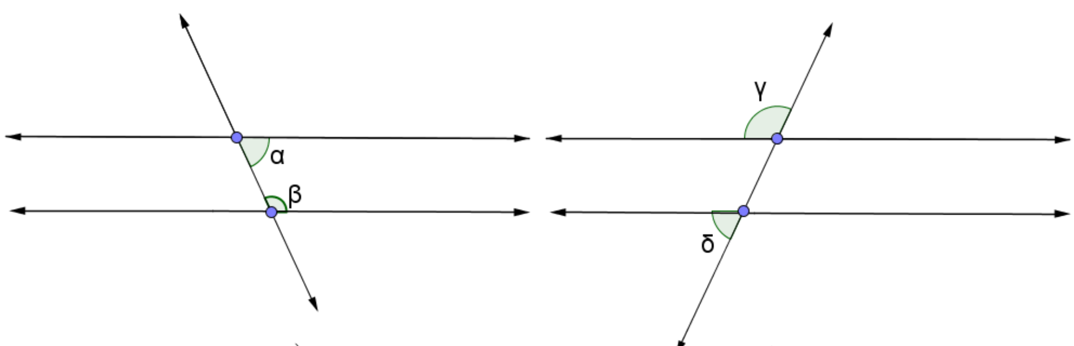
b) **Ángulos Correspondientes.** Son los que se encuentran en un mismo semiplano con respecto a la transversal. Éstos pueden ser correspondientes agudos ($Figura\ 22.a$) y correspondientes obtusos ($Figura\ 22.b$). Estos ángulos son congruentes.



$a)$ $b)$

$Figura\ 22$

c) **Ángulos conjugados.** Son ángulos que se encuentran internos ($Figura\ 23.a$) o externos ($Figura\ 23.b$) a las rectas paralelas y en el mismo semiplano con respecto a la transversal, éstos son suplementarios.



$a)$ $b)$

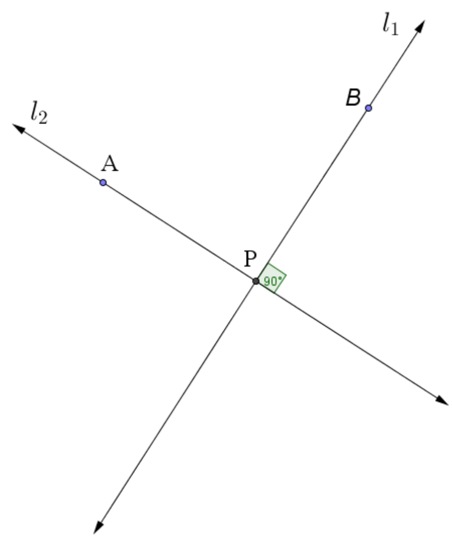
$Figura\ 23$

1.6.8 Rectas perpendiculares.

Definición. *Rectas Perpendiculares.*

Son las rectas que al cortarse forman ángulos rectos.

Para denotar que las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares se escribe $l_1 \perp l_2$.

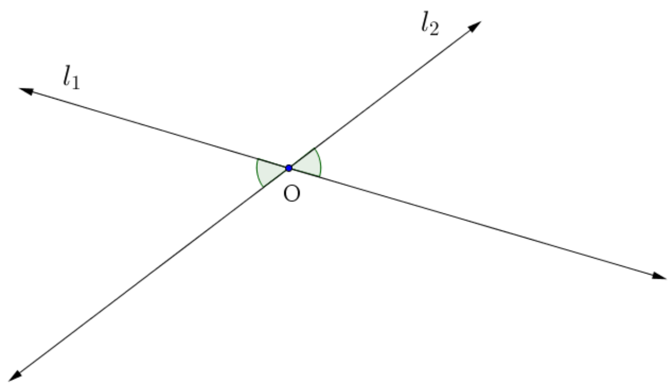


$Figura\ 24$

En la $figura$ 24, las rectas l_1 y l_2 se cortan en P, claramente $l_1 \perp l_2$. El punto A que pertenece a la recta l_2 y B que pertenece a la recta l_1 forman el segmento $\overline{PA}$ y segmento $\overline{PB}$, así; por definición de rectas perpendiculares $\overline{PA} \perp \overline{PB}$ y $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$, concluyéndose que se puede referir a la perpendicularidad de segmentos y semirrectas o rayos.

Definición. *Rectas oblicuas.*

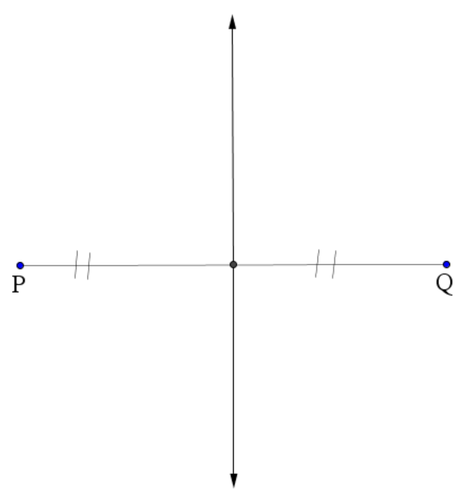
Son las rectas secantes que no son perpendiculares ($Figura$ 25).



$Figura\ 25$

Definición. *Mediatriz de un segmento.*

Es la recta perpendicular al segmento en su punto medio ($Figura$ 26).



$Figura\ 26$

1.6.9 Bisectriz de un ángulo.

Definición. *Bisectriz de un ángulo.*

Es la semirrecta que divide a un ángulo en dos ángulos congruentes ($Figura$ 27).

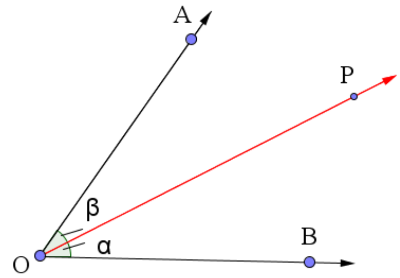


Figura 27

$$\beta = \alpha \;\Rightarrow \angle AOP \cong \angle POB$$

Si el rayo $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle AOB$, se verifica que $m\angle AOB = 2\alpha$, así $m\angle AOP = \frac{m\angle AOB}{2}$ y $m\angle POB = \frac{m\angle AOB}{2}$.

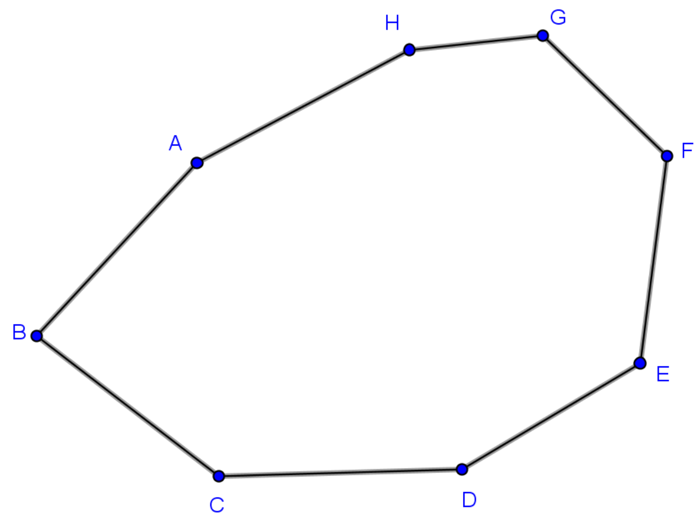
Propiedad. Las bisectrices de los ángulos adyacentes suplementarios forman un ángulo recto.

1.7 POLÍGONOS.

1.7.1 Polígono.

Definición. *Polígono*.

Dados los puntos $P_1, P_2, \dots, P_n$ de los cuales no hay tres colineales, y con $n \geq 3$, entonces, a la reunión de los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$ se le denomina polígono abierto y a la reunión de los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_nP_1}$ se le denomina polígono cerrado.



$Figura\, 28$

Para nombrar o referirse a un polígono se utilizan letras latinas mayúsculas, en caso de la figura anterior el polígono $ABCDEFGH$.

Definición. *Diagonal.*

Segmento de recta formado por la unión de dos vértices no consecutivos de un polígono.

Definición. *Polígono convexo.*

Un polígono es *convexo* si se encuentra en un mismo semiplano respecto a la recta que contiene cualquiera de sus lados ($Figura$ 29), se dirá *cóncavo* en caso contrario.

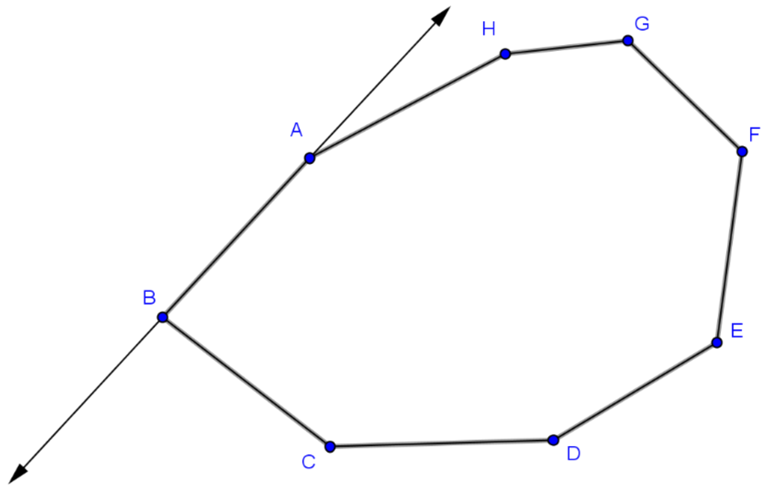


Figura 29

1.7.2 Triángulos.

Definición. *Triángulo*.

Es un polígono cerrado de tres lados.

Las partes de un triángulo ($Figura\ 30$**).**

1. Sus tres lados: son los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$.
2. Sus tres vértices: son los puntos A, B, C.
3. Sus tres ángulos, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ están determinados por los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$.

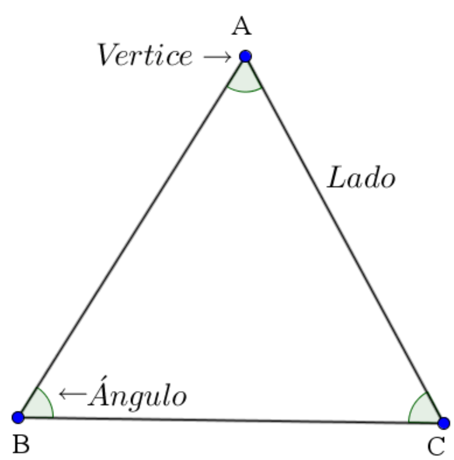


Figura 30

Para referirse al triángulo determinado por los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ ($Figura$ 30), se utiliza la notación ΔABC.

1.7.2.1 Interior y exterior del triángulo.

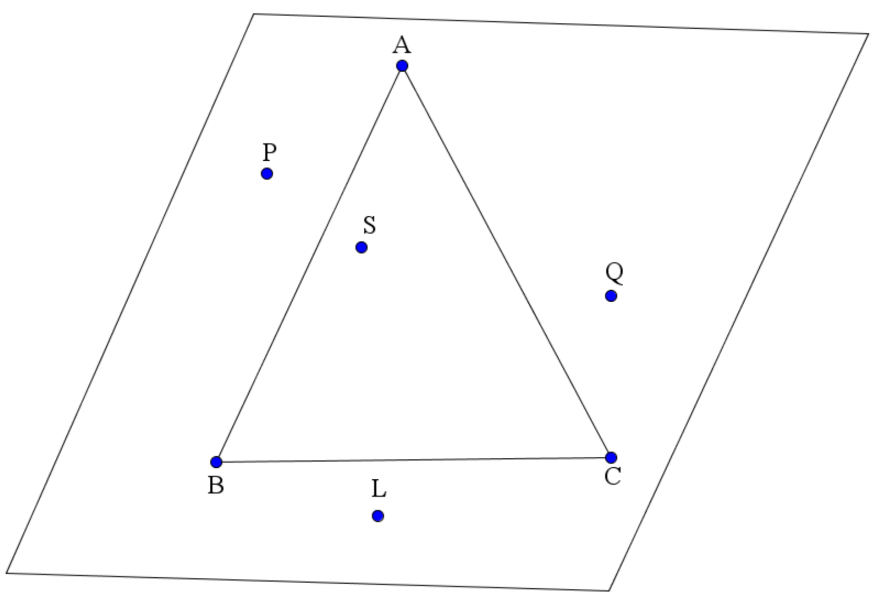
Definición. *Interior del triángulo.*

Subconjunto de puntos que pertenecen a la parte del plano que se encuentra dentro de la reunión de los tres segmentos.

Definición. *Exterior de un triángulo.*

Subconjunto de puntos que pertenecen a la parte del plano que se encuentran fuera de la reunión de los tres segmentos.

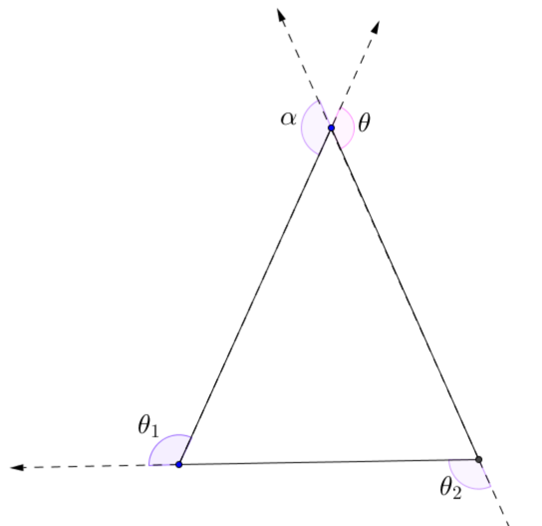
En la $figura$ 31, P, Q y L son puntos exteriores del triángulo y S es un punto interior.



$Figura$ 31

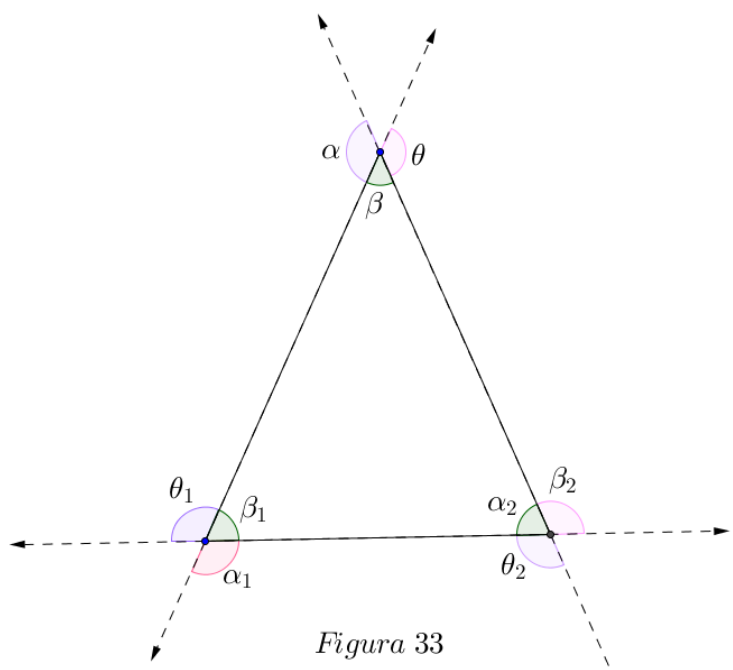
Definición. *Ángulos exteriores de un triángulo*.

Son los ángulos que se encuentran en el exterior de un triángulo determinado por un lado y por la prolongación del otro que le es adyacente ($Figura\ 32$).



$Figura\ 32$

En un triángulo, un ángulo interior con uno exterior son suplementarios ($Figura\ 33$).



$Figura\ 33$

Definición. *Región triangular*.

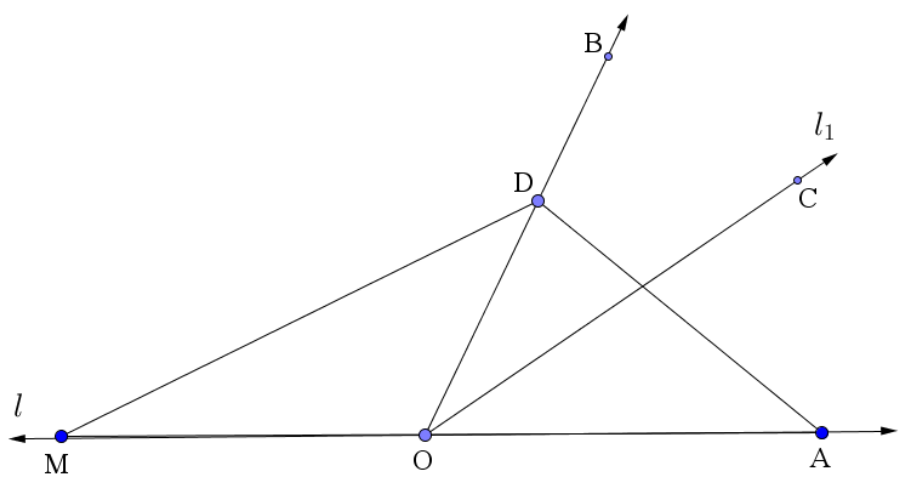
Es la reunión del triángulo con su interior.

Teorema V. ≪Si a partir de una semirrecta $\overrightarrow{OA}$ se construyen en un mismo semiplano dos ángulos distintos $\angle AOB$ y $\angle AOC$, el rayo $\overrightarrow{OB}$ pasará entre los lados de $\angle AOC$ o el rayo $\overrightarrow{OC}$ pasará entre los lados del ángulo $\angle AOB$.≫

Demostración:

Sea $\overrightarrow{OM}$ la semirrecta complementaria de $\overrightarrow{OA}$, a partir de esto se construye la $figura\ 34$, se observa que los ángulos $\angle MOB$ y $\angle MOC$ son diferentes, así; se tiene que $\angle MOB$ es menor que $\angle MOC$.

La recta l_1 que contiene a $\overrightarrow{OC}$ corta el lado $\overline{MA}$ de $\Delta\ ADM$, entonces l_1 corta el lado $\overline{MD}$ o $\overline{AD}$ de ΔADM.



$Figura\ 34$

El punto de intersección se halla en $\overrightarrow{OC}$ ya que los segmentos $\overline{MD}$, $\overline{AD}$ y el rayo $\overrightarrow{OC}$ se encuentran en un mismo semiplano respecto a la recta l, es decir el rayo $\overrightarrow{OC}$ corta el segmento $\overline{MD}$ o el segmento $\overline{AD}$.

Si el rayo $\overrightarrow{OC}$ cortase el segmento $\overline{MD}$, pasaría entre los lados de $\angle MOB$, entonces se tiene $m\angle MOC + m\angle COB = m\angle MOB$ de este modo $m\angle MOC$ sería menor que $m\angle MOB$. Pero ésto es imposible ya que $\angle MOB$ es menor que $\angle MOC$ $\rightarrow\leftarrow$.

Por tanto, el rayo $\overrightarrow{OC}$ no corta el segmento $\overline{MD}$ y, entonces corta el segmento $\overline{AD}$. Ésto también quiere decir que el rayo $\overrightarrow{OC}$ pasa entre los lados de $\angle AOB$.

■

1.7.2.2 Clasificación de los triángulos.

Los triángulos se clasifican de acuerdo a sus lados y a sus ángulos.

Con relación a sus lados.

1. **Equilátero:** Cuando sus tres lados son congruentes ($Figura\ 35.a$).

En un triángulo equilátero la medida de los ángulos es 60º cada uno.

2. **Isósceles:** Cuando al menos dos de sus lados son congruentes ($Figura\ 35.b$).

En un triángulo isósceles que no es equilátero -por conveniencia al lado desigual se le llama base ($\overline{PR}$ en $figura\ 35.b$)- los ángulos adyacentes a la base son congruentes.

3. **Escaleno:** Cuando sus tres lados son desiguales ($Figura\ 35.c$).

En un triángulo escaleno, los tres ángulos no son congruentes.

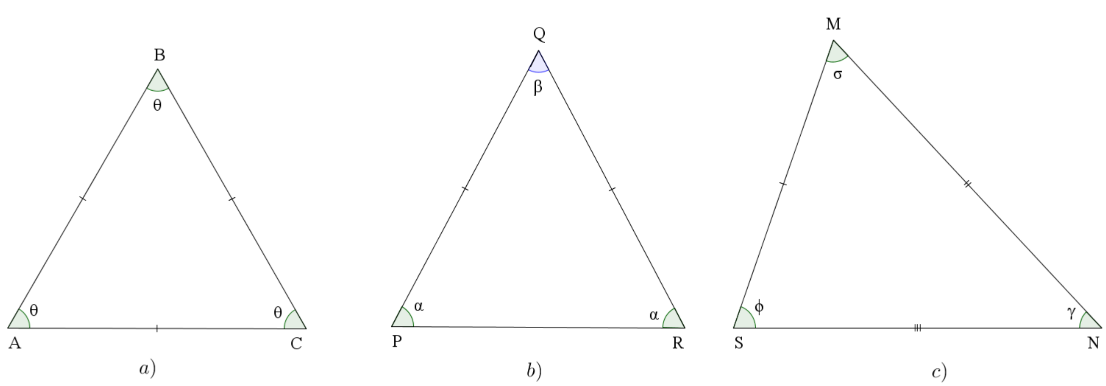


Figura 35

Con relación a sus ángulos.

1. Acutángulo: Es aquel triángulo que tiene sus tres ángulos agudos ($Figura\ 36.a$).

En este triángulo sus ángulos exteriores son obtusos.

2. Obtusángulo: Es aquel triángulo que tiene un ángulo obtuso ($Figura\ 36.b$).

En un triángulo obtusángulo el lado mayor es el que se opone al ángulo obtuso.

3. Rectángulo: Es aquel triángulo que tiene un ángulo recto ($Figura\ 36.c$).

En los lados de un triángulo rectángulo, al lado que se opone al ángulo recto se le llama hipotenusa a los otros dos se les llama catetos y, además; los ángulos agudos son complementarios. Al referirse a un triángulo rectángulo se utilizará la notación $\triangle ABC$.

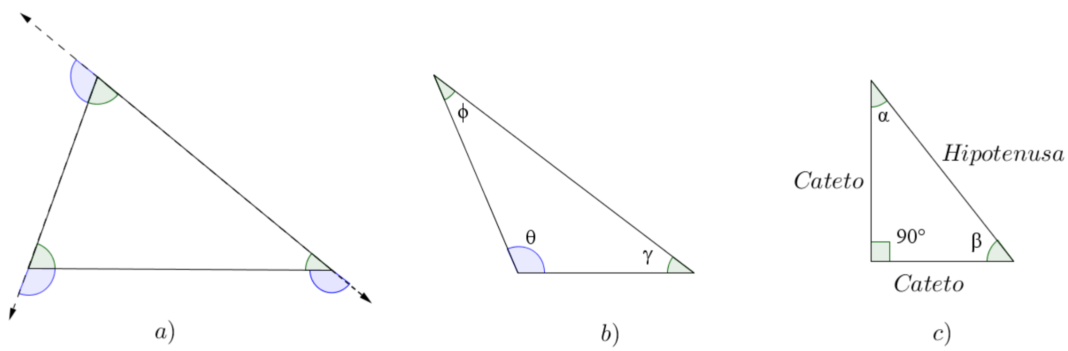


Figura 36

1.7.2.3 Teoremas fundamentales en todo triángulo.

Teorema VI. ≪ *En todo triángulo la suma de las medidas de sus tres ángulos interiores es igual a 180º*. ≫

Teorema VII.≪*En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo no adyacentes a él.*≫

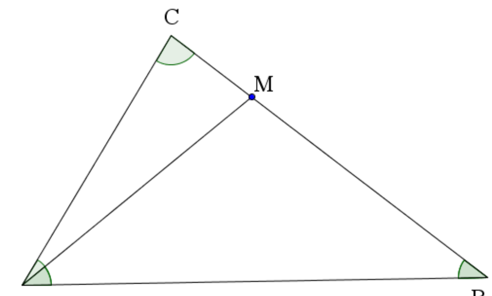
Teorema VIII. ≪*En todo triángulo se cumple que a mayor lado se le opone mayor ángulo.*≫

Demostración:

"$\Longrightarrow$"

Sea el ΔABC ($Figura$ 37), se demostrará que:

$$m\overline{CB} > m\overline{AC} \Rightarrow m\angle A > m\angle B$$



$Figura$ 37

Sobre $\overline{BC}$, se ubica el punto M tal que:

ΔAMB es isósceles.

Luego:

$$m\angle MAB = m\angle B$$

Pero,

$$m\angle A > m\angle MAB$$

$$\Rightarrow m\angle A > m\angle B$$

■

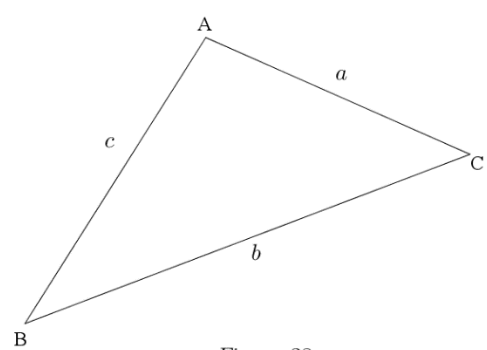
Teorema IX. ≪*En todo triángulo la longitud de uno de sus lados está comprendida entre la suma y la diferencia de las longitudes de los otros dos lados.* ≫

Demostración:

Sea el ΔABC dado en $figura$ 38.

La menor distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une. Así, en el triángulo dado $b < a + c$. También

$a < b + c$. Por tanto, $a - c < b < a + c$.



$Figura$ 38

■

1.7.2.4 Puntos y rectas notables de un triángulo.

1. Altura.

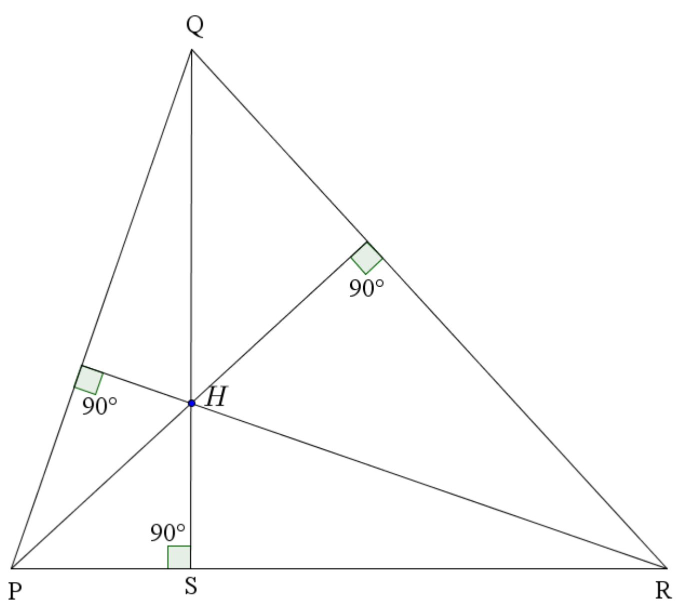
Definición. *Altura de un triángulo.*

Es el segmento que parte de uno de sus vértices y llega en forma perpendicular al lado opuesto o a su prolongación ($\overline{QS}$ en $figura\ 39$).

Todo triángulo tiene tres alturas.

Definición. *Ortocentro.*

Es el punto donde concurren las tres alturas de un triángulo (H en $figura\ 39$).



$Figura\ 39$

Definición. *Área triangular.*

El área triangular es igual a la mitad del producto de una base con su respectiva altura.

Para denotar el área triangular de ΔABC se utiliza la notación (ABC).

En $figura\ 39, (PQR) = \frac{PR \cdot QS}{2}$.

2. Mediana.

Definición. *Mediana de un triángulo.*

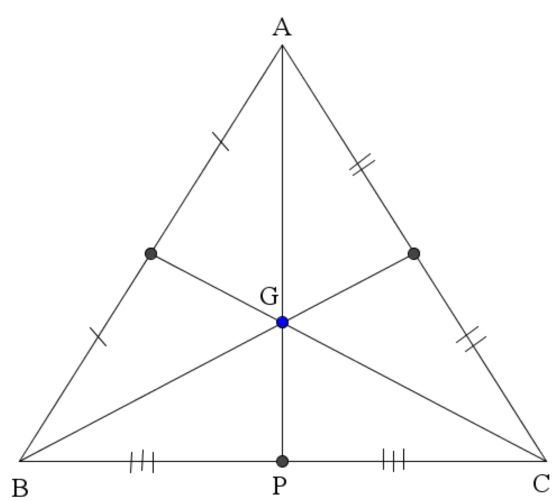
Es el segmento de recta determinado por un vértice y el punto medio del lado opuesto ($\overline{BP}$ en $figura\ 40$).

Todo triángulo tiene tres medianas.

Definición. *Baricentro (centroide).*

Es el punto donde concurren las tres medianas de un triángulo (G en $figura\ 40$). [5]

Propiedad: El segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une el baricentro con el punto medio del lado opuesto ($Figura\ 40$).



$Figura\ 40$

[5] *El centroide es el punto donde un soporte simple puede equilibrar un objeto.*

3. Mediatriz.

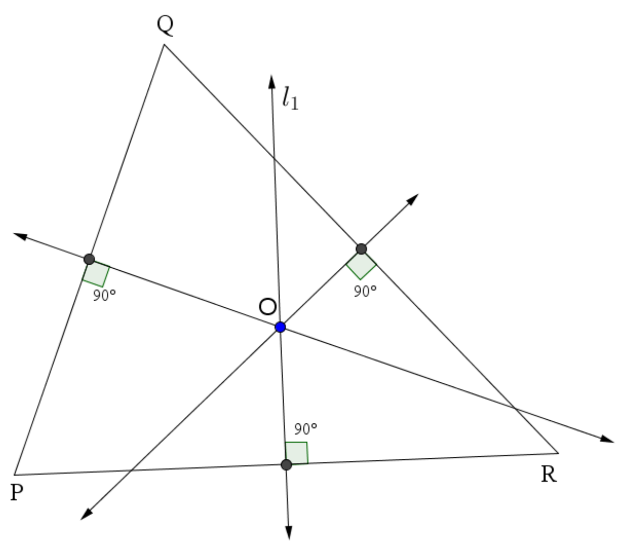
Definición. *Mediatriz de un triángulo.*

Es la recta perpendicular a cada lado del triángulo en su punto medio (l_1 en $figura$ 41).

Todo triángulo tiene tres mediatrices.

Definición. *Circuncentro.*

Es el punto donde concurren las tres mediatrices relativas a los lados de un triángulo (O en $figura$ 41).

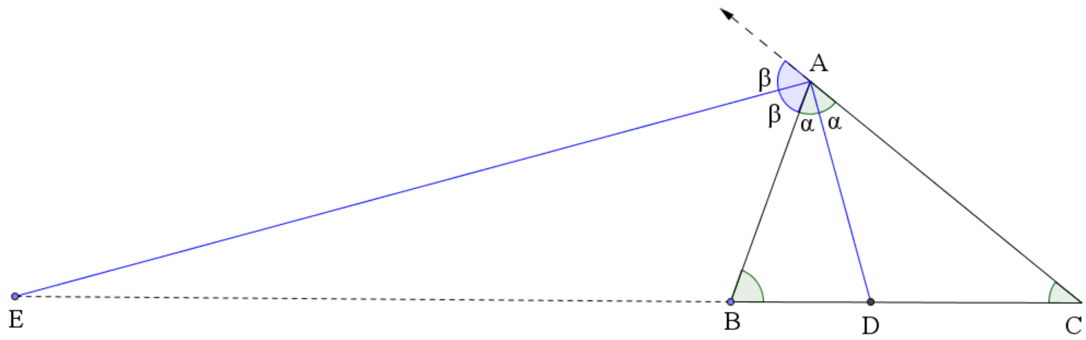


$Figura$ 41

4. Bisectriz.

Todo triángulo tiene tres bisectrices correspondiente a sus ángulos interiores, cuya prolongación está limitada por el lado opuesto ($\overline{AD}$ en $figura$ 42).

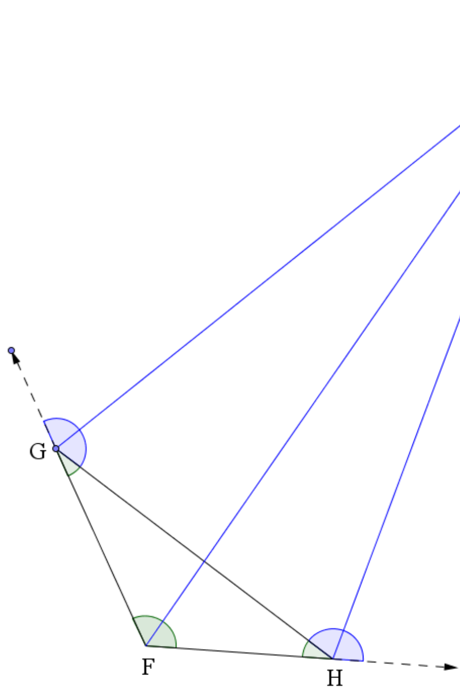
Además de dibujar las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo, también se pueden dibujar bisectrices correspondientes a los ángulos exteriores ($\overline{AE}$ en $figura$ 42).



$Figura\ 42$

Definición. *Excentro.*

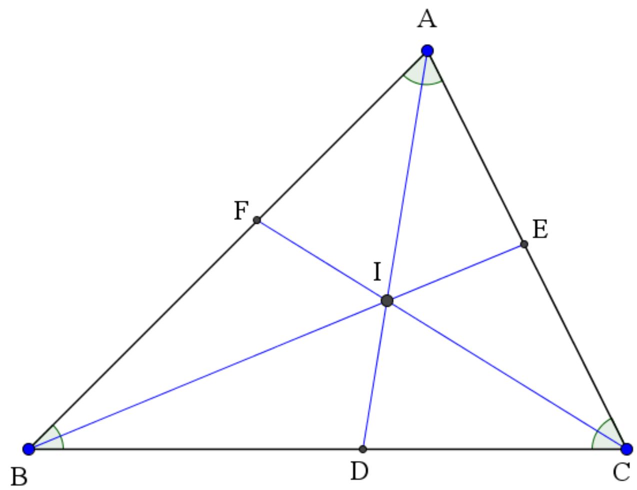
Es el punto donde concurren las bisectrices de dos ángulos exteriores de un triángulo y la bisectriz del tercer ángulo interior (E en $Figura$ 43).



$Figura\ 43$

Definición. *Incentro.*

Es el punto donde concurren las tres bisectrices interiores de un triángulo (I en $figura$ 44).



$Figura$ 44

1.7.2.5. Congruencia de triángulos.

Definición. *Triángulos congruentes.*

Dos triángulos son congruentes, si tienen la misma forma y el mismo tamaño.

Para denotar que dos triángulos son congruentes, se utiliza la notación $\Delta MNL \cong \Delta PRS$, en $figura$ 45

$$\overline{MN} \cong \overline{PR} \quad \angle\mathrm{M} \cong \angle\mathrm{P}$$

$$\overline{NL} \cong \overline{RS} \quad \angle\mathrm{N} \cong \angle\mathrm{R}$$

$$\overline{ML} \cong \overline{PS} \quad \angle\mathrm{L} \cong \angle S$$

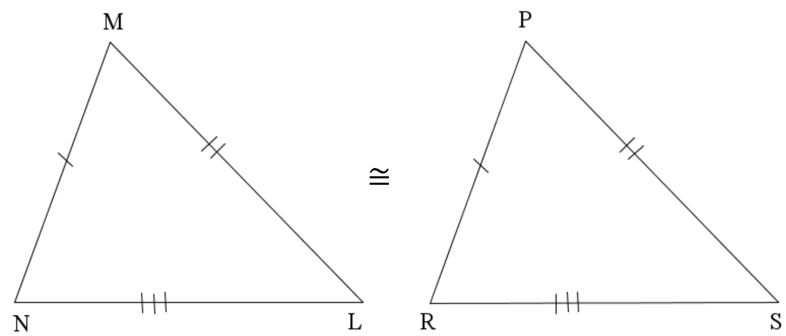


Figura 45

Para que un par de triángulos sean congruentes, no necesariamente se debe verificar que todos los pares de elementos señalados en la $figura\ 45$ deben ser congruentes, ésto se enuncia en los siguientes criterios, que garantizan la congruencia de dos triángulos.

Primer criterio: *LAL (Lado – Ángulo - Lado).*

Dos triángulos son congruentes, si tienen congruentes dos lados y el ángulo comprendido entre ellos ($figura\ 46$).

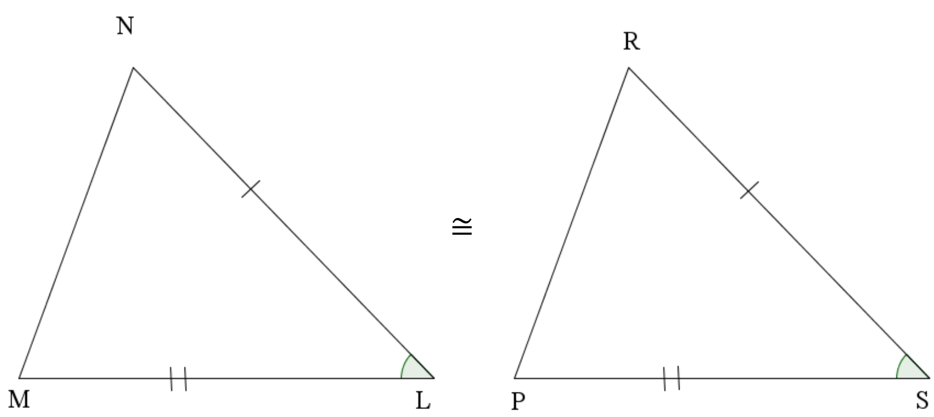


Figura 46

$$\overline{NL} \cong \overline{RS} \quad \angle L \cong \angle S \quad \overline{ML} \cong \overline{PS}$$

Segundo Criterio: *ALA (Ángulo - Lado - Ángulo).*

Dos triángulos son congruentes, si tienen congruentes un lado y los ángulos adyacentes a él ($figura$ 47).

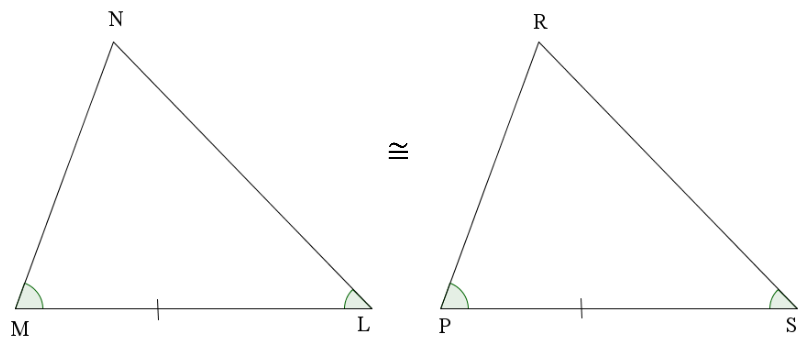


Figura 47

$$\angle M \cong \angle P \qquad \overline{ML} \cong \overline{PS} \quad \angle L \cong \angle S$$

Demostración:

Se quiere probar que:

$$\angle M \cong \angle P \wedge \overline{ML} \cong \overline{PS} \wedge \angle L \cong \angle S \Longrightarrow \Delta MNL \cong \Delta PRS.$$

Supóngase que $MN \neq PR$, entonces $MN > PR$ o $MN < PR$.

a. Caso en que $MN > PR$.

Sea $Q \in \overline{MN}$ tal que $MQ = PR$ ($figura$ 48), entonces por el criterio LAL $\Delta MQL \cong \Delta \mathrm{PRS}$.

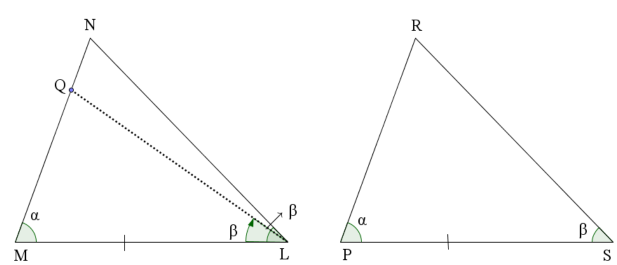


Figura 48

Así; $\angle QLM \cong \angle RSP \rightarrow\leftarrow$

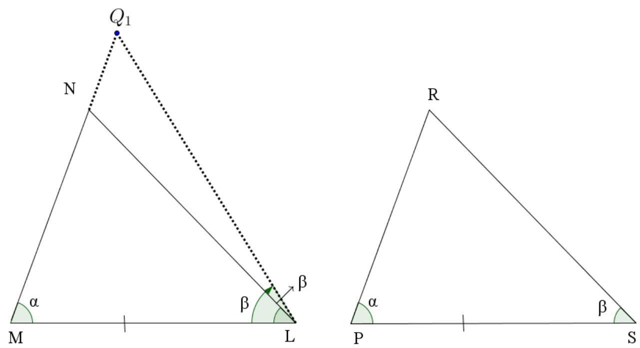
Ya que $\angle NLM \cong \angle RSP$, entonces $MN \leq PR$.

b. Caso en que $MN < PR$.

Se demuestra de manera similar, llegándose a la misma contradicción ($Figura\ 49$). Así, $MN \geq PR$.

Por lo tanto $MN = PR$.

$$\Longrightarrow \Delta MNL \cong \Delta PRS$$

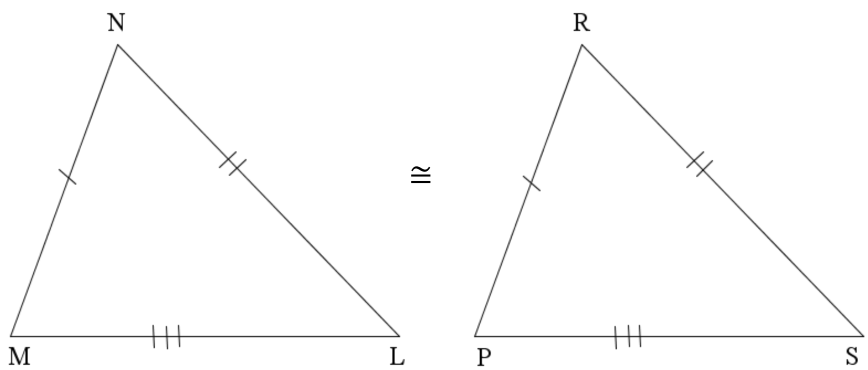


$Figura\ 49$

■

Tercer criterio: *LLL (Lado – Lado - Lado).*

Dos triángulos son congruentes, si los tres lados del primer triángulo son congruentes con los tres lados correspondientes del segundo ($figura\ 50$).



$Figura\ 50$

$$\overline{MN} \cong \overline{PR} \quad \overline{NL} \cong \overline{RS} \quad \overline{ML} \cong \overline{PS}$$

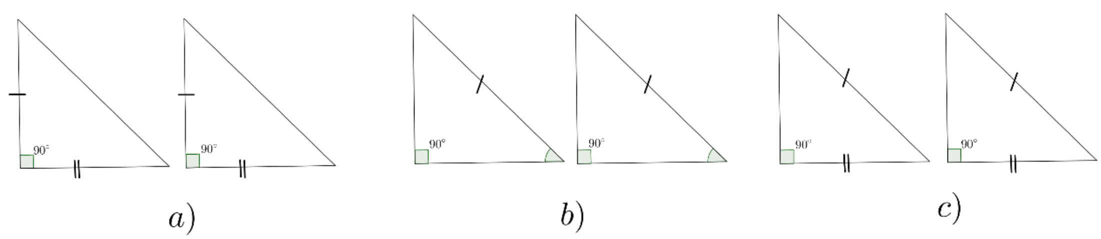
Caso especial de congruencia: triángulos rectángulos (CTR).

En los criterios anteriores se observa que es necesario que tres elementos sean congruentes, en los triángulos rectángulos basta que se verifique la congruencia de dos pares de elementos, como se muestra a continuación:

1. ≪ *Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen sus catetos congruentes.*≫ ($figura\ 51.a$)

2. ≪*Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen congruentes la hipotenusa y un ángulo agudo.*≫ ($figura\ 51.b$)

3. ≪*Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen congruentes la hipotenusa y un cateto.*≫ ($figura\ 51.c$)



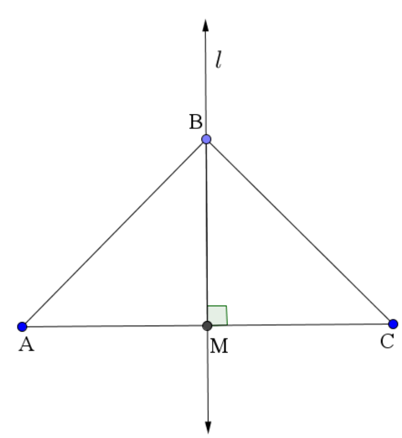
$Figura\ 51$

Teorema X. Punto de la mediatriz.

≪ *Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.*≫

Demostración:

Lo que se quiere demostrar es que:



$Figura\ 52$

l es la mediatriz de $\overline{AC}$ y $\forall\ B \in l \ \Rightarrow AB = BC$.

Como $\triangle AMB \cong \triangle BMC$; (CTR 1)

$\Rightarrow AB = BC$

■

Propiedad. El circuncentro equidista de los vértices del triángulo.

Teorema XI. Altura de un triángulo isósceles relativo a la base.

≪En todo triángulo isósceles la altura relativa a la base, es también una mediatriz, mediana y una bisectriz interior.≫

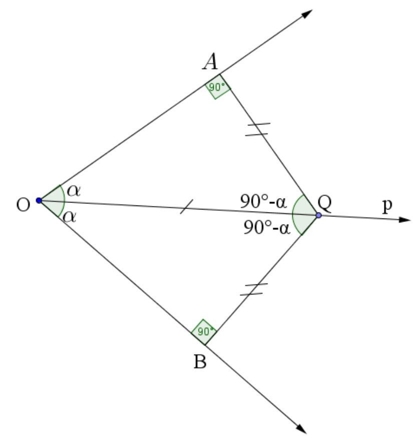
Demostración:

En la $figura\ 53$, ΔABC es isósceles, con base $\overline{BC}$ y altura $\overline{AH}$ (relativo a la base). Lo que se quiere demostrar es que: $\overline{AH}$ es mediatriz, mediana y bisectriz interior del $\Delta\ ABC$.

El $\measuredangle ABH \cong \measuredangle AHC$; (CTR 2)

$$\Rightarrow BH = HC\ \wedge m\angle BAH = m\angle CAH$$

Por tanto, $\overline{AH}$ es mediana, mediatriz y una bisectriz interior del ΔABC.



$Figura\ 54$

■

Teorema XII. Punto de una bisectriz de un ángulo.

≪Todo punto de una bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.≫

Demostración:

Lo que queremos demostrar es que:

$\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del $\angle AOB$ y $Q \in \overrightarrow{OP} \Rightarrow QA = QB$ ($Figura\ 54$).

Como $\measuredangle OAQ \cong \measuredangle OBQ$; (CTR 2)

$\Rightarrow QA = QB$

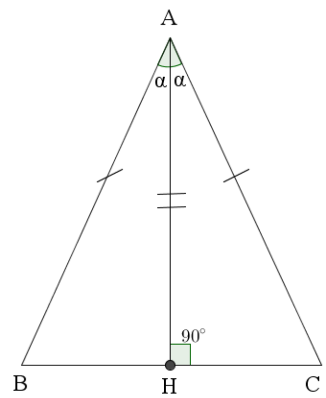


Figura 53

■

Teorema XIII. Puntos medios.

≪*Toda recta trazada por el punto medio de un lado de un triángulo paralela a uno de sus otros dos lados, interseca al tercer lado en su punto medio.*≫

Demostración:

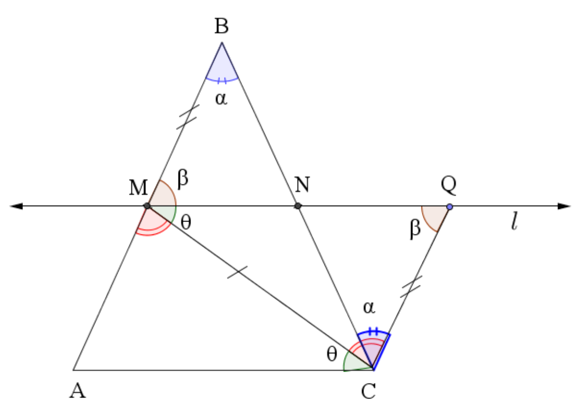


Figura 55

Lo que se quiere probar es que:

$BM = MA$ y $l \parallel \overline{AC} \Rightarrow BN = NC$

Sea $\overline{CQ} \parallel \overline{AB}$ $(Figura\ 55)$

$\Rightarrow \angle AMC \cong \angle MCQ\ \wedge\ \angle QMC \cong \angle MCA$; Por ángulos alternos.

De donde, se tiene que $\Delta MAC \cong \Delta CQM$ (criterio ALA).

$$\Rightarrow AM = QC$$

M es punto medio de $\overline{AB}$, así $MB = QC$ y por ángulos alternos $\angle NCQ \cong \angle NBM$, $\angle BNM \cong \angle QNC$ por ser opuestos por el vértice, así; $\angle BMN \cong \angle NQC$. Por el criterio ALA se tiene que: $\Delta MNB \cong \Delta QNC$,

$\Rightarrow BN = NC$

■

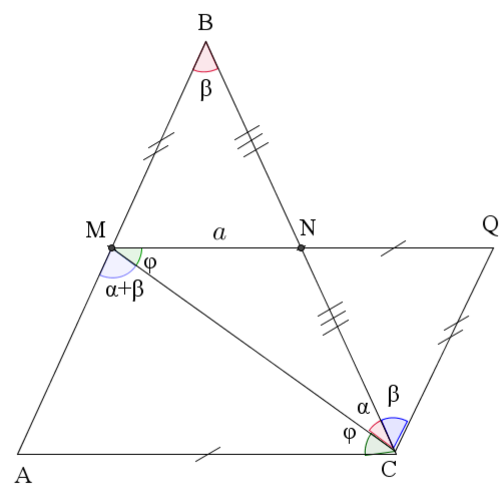
Definición. *Base media.*

Es el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo.

Teorema XIV. Base media.

≪En todo triángulo una base media es paralela al tercer lado e igual a su mitad.≫

Demostración:



$Figura$ 56

Lo que se quiere probar es que:

$\overline{MN}$ es base media $\Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AC} \wedge MN = \frac{AC}{2}$.

Sea $\overline{CQ} \parallel \overline{AB}$ $(Figura$ 56)

Por ángulos alternos,

$$m\angle CMQ = \varphi = m\angle MCA \wedge m\angle AMC = m\angle MCQ$$
$$= \alpha + \beta$$

Además, $\overline{MC}$ es lado de $\Delta AMC \wedge \Delta QCM$, luego $\Delta AMC \cong \Delta QCM$, asi; $AC = MQ$.

Luego como $MA = QC \Rightarrow MB = QC$.

Como N es punto medio de $\overline{BC}$, $BN = NC$ y por ángulos alternos

$m\angle MBN = m\angle NCQ = \beta$, asi; $\Delta MBN \cong \Delta CQN$ (criterio LAL).

$$\Rightarrow MN = NQ = a$$

Como $AC = MQ = 2a$

$$MN = \frac{AC}{2}$$

Si se traza l_1 paralela a $\overline{AC}$ que pase por M por el teorema anterior (*teorema* XIII) dicha recta pasara por el punto medio de $\overline{BC}$, es decir, pasa por N, así; el segmento $\overline{MN}$ está contenida en la l_1, entonces $\overline{MN}$ es paralela a $\overline{AC}$.

■

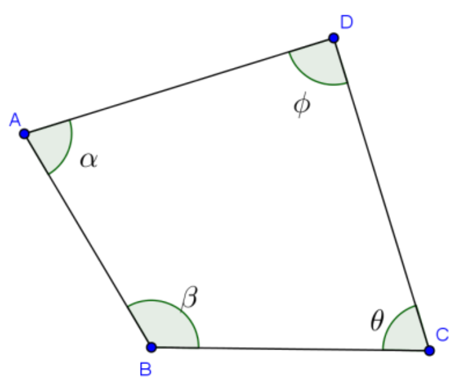
1.7.3 Teoría de cuadriláteros.

Definición. *Cuadrilátero*.

Es un polígono de cuatro lados.

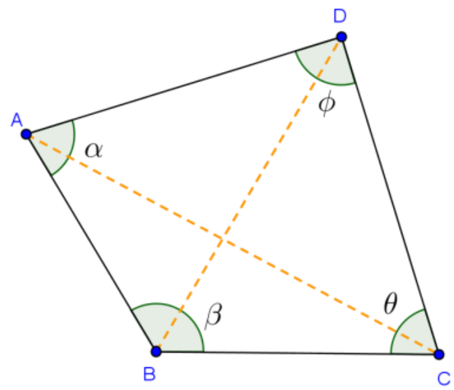
Se estudiara únicamente los cuadriláteros convexos.

En la $figura\ 57$, A, B, C y D son los vértices, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ son los lados y $\alpha, \beta, \theta, \phi$ son los ángulos interiores del cuadrilátero.



$Figura\ 57$

En la $figura$ 58, $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$ son diagonales del cuadrilátero.



$Figura$ 58

Teorema XV. ≪*Las diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan.*≫

Demostración:

Por hipótesis el cuadrilátero es convexo, como en la $figura$ 58.

Los puntos B y C se encuentran en el mismo semiplano con respecto a la recta que contiene a $\overline{AD}$ por hipótesis, además $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ se encuentran en dicho semiplano.

Según el *teorema* V, $\overrightarrow{AC}$ pasa entre los lados que forman el ángulo $\angle BAD$ o $\overrightarrow{AB}$ pasa entre los lados que forman el ángulo $\angle CAD$.

Pero $\overrightarrow{AB}$ no puede pasar entre los lados que forman $\angle CAD$ ya que los puntos C y D se hallan en el mismo semiplano con respecto a la recta que contiene a $\overline{AB}$. Por lo que $\overrightarrow{AC}$ pasa entre los lados que forman el ángulo $\angle BAD$, así por el *teorema V* $\overline{BD}$ corta a la recta que contiene $\overline{AC}$, es decir, $\overline{BD}$ se interseca con la recta que contiene a $\overline{AC}$. Análogamente, para los puntos D, C y $\overline{BD}$, $\overline{DC}$ que se encuentran en el mismo semiplano con respecto a la recta que contiene a $\overline{AD}$.

Utilizando los mismos teoremas analizando $\angle ABC$ y $\angle ABD$, se demuestra que la diagonal $\overline{AC}$ corta a la recta que contiene a $\overline{BD}$, así $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ se cortan, y dicho punto es único.

Pero dicho punto pertenece a la diagonal $\overline{BD}$ y también a la diagonal $\overline{AC}$ por lo que las diagonales se cortan.

■

Teorema XVI. ≪*Las suma de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo es igual a 360°.*≫

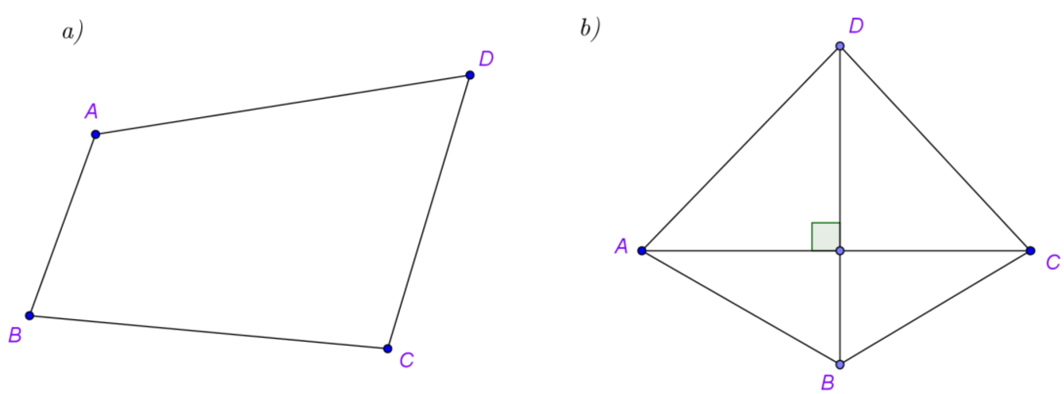
1.7.3.1 Clasificación de los Cuadriláteros.

Definición. *Trapezoide*

Es el cuadrilátero que no tiene lados paralelos.

Se le conoce también como **cuadrilátero asimétrico** ($Figura. 59. a$).

Un caso especial de este tipo de cuadrilátero es el *trapezoide simétrico o contraparalelogramo,* en el cual una diagonal es mediatriz de la otra ($Figura. 59. b$).



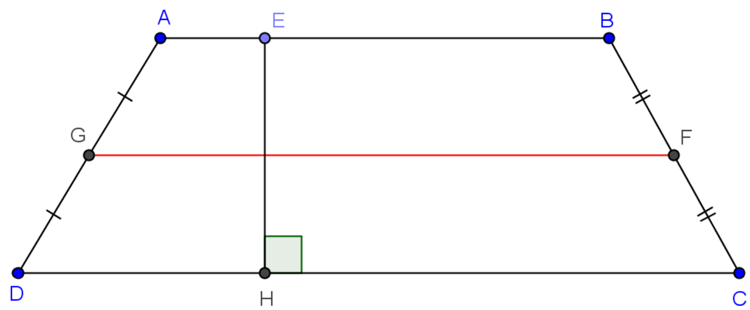
$Figura\, 59$

Definición. *Trapecio*.

Cuadrilátero que consta de dos lados paralelos denominados bases.

El segmento perpendicular a las bases se denomina **altura** y al segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos se le denomina **mediana**.

En la $figura\ 60$, $ABCD$ es un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{EH}$ la altura y $\overline{GF}$ mediana.

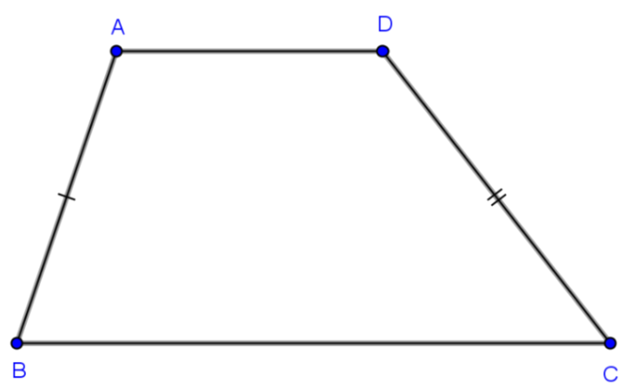


$Figura\ 60$

Clases de trapecios.

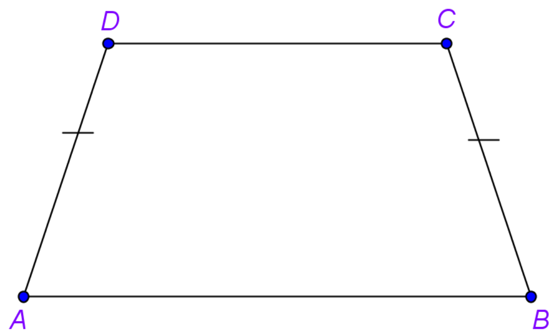
Los trapecios se clasifican mediante sus lados no paralelos.

✓ Si los lados no tienen igual longitud, se denomina trapecio *Escaleno*, ($Figura\ 61$).



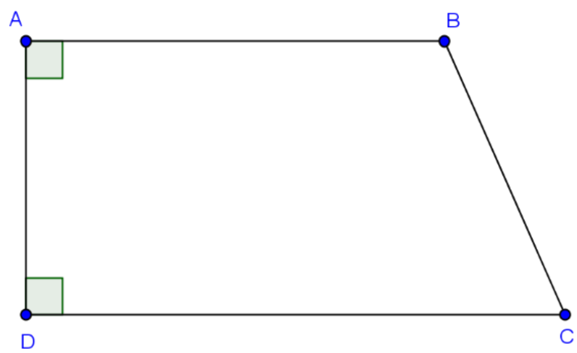
$Figura\ 61$

- ✓ Si los lados tienen igual longitud, se denomina trapecio *Isósceles*, ($Figura\ 62$).



$Figura\ 62$

- ✓ Si uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases, se denomina trapecio *Rectángulo* ($Figura. 63$).



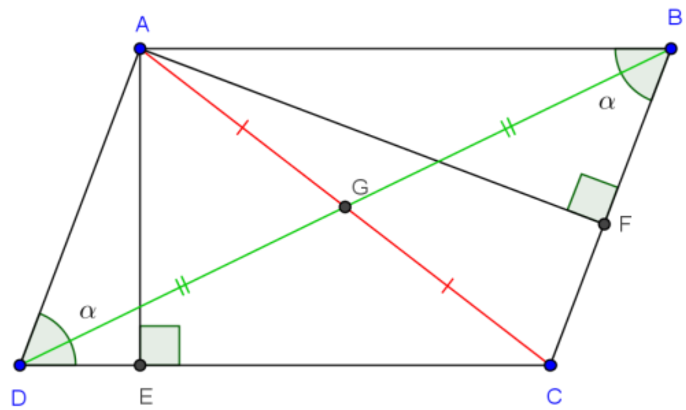
$Figura\ 63$

Definición. *Paralelogramo*.

Cuadrilátero que posee sus lados opuestos paralelos.

En todo paralelogramo se cumple que sus ángulos opuestos son congruentes y además sus diagonales se bisecan.

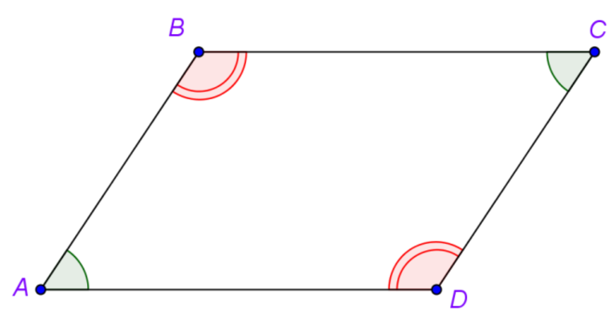
En la $figura\ 64$, $ABCD$ es un paralelogramo y cumple que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ con $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DA}$, $\overline{AC}$ se biseca con $\overline{BD}$, $\angle ABC \cong \angle CDA$ además $\overline{\mathrm{AE}}$ y $\overline{AF}$ son alturas.



$Figura\ 64$

Clases de paralelogramos.

- ✓ **Romboide:** Se le conoce también como paralelogramo ($Figura\ 65$).



$Figura\ 65$

- ✓ **Rectángulo:** Paralelogramo equiángulo; también llamado *cuadrilongo* ($Figura\ 66$).

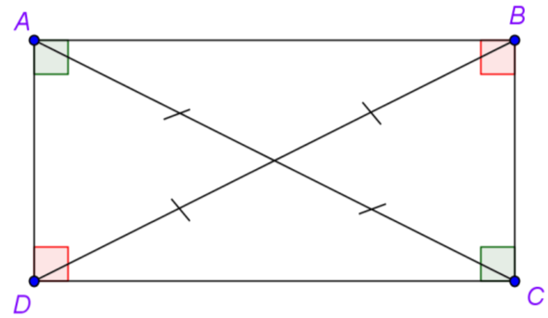


Figura 66

- ✓ **Rombo:** Paralelogramo equilátero ($Figura$ 67).

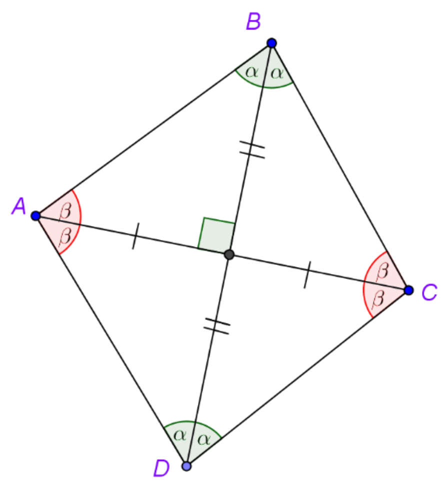


Figura 67

- ✓ **Cuadrado:** Paralelogramo equilátero y equiángulo ($Figura$ 68).

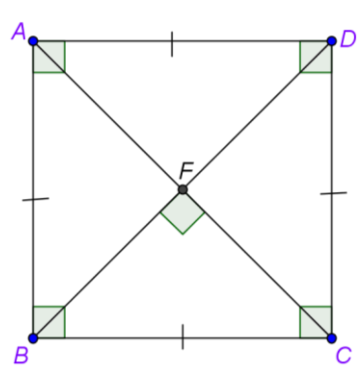


Figura 68

1.8 SEGMENTOS PROPORCIONALES.

1.8.1 Proporcionalidad.

Una proporción es una igualdad formada por dos razones.

Se tienen dos formas de expresar una proporción:

1. $extremo\ :\ medio\ ::\ medio\ :\ extremo$
2. $\frac{extremo}{medio} = \frac{medio}{extremo}$

***Media proporcional*:** Es cuando el valor de los términos medios o extremos son iguales.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{c} \quad \text{o} \quad \frac{x}{b} = \frac{c}{x}$$

Propiedad general de proporcionalidad. El producto de sus medios es igual producto de sus extremos.

Definición. *Razón de dos segmentos.*

Es el cociente que se obtiene al dividir las correspondientes medidas de los segmentos expresadas en la misma unidad.

En la $figura\ 69$, la razón de los segmentos es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{8}{2} = 4$$

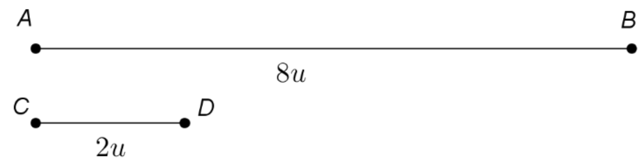


Figura 69

1.8.2 Segmentos proporcionales.

Definición. *Segmentos proporcionales.*

Dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a otros dos $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$ cuando sus correspondientes medidas lo son, es decir; $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

Los segmentos en $figura$ 69 y $figura$ 70 son proporcionales.

$$\frac{MN}{OP} = \frac{AB}{CD} = 4\,.$$

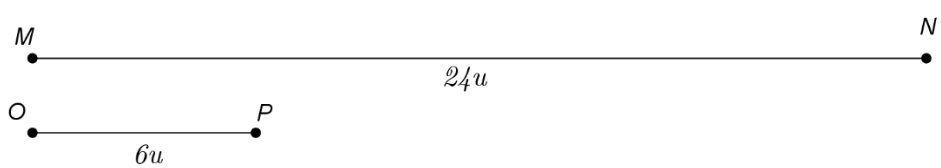


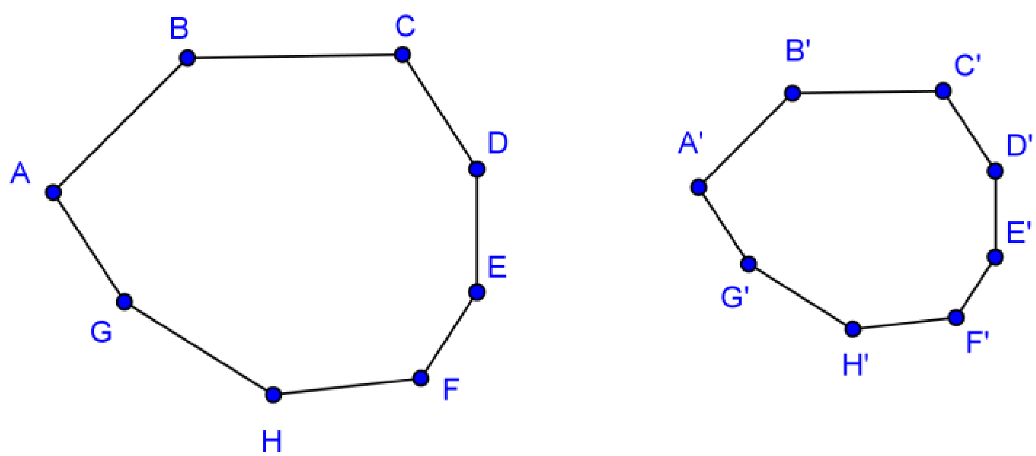
Figura 70

1.9 SEMEJANZA.

1.9.1 Polígonos semejantes.

Definición. *Polígonos semejantes.*

Dos polígonos se denominaran semejantes, si poseen el mismo número de lados, sus lados correspondientes son proporcionales y la medida de sus ángulos correspondientes son congruentes.



$Figura\ 71$

En la $figura$ 71, se tiene que el polígono $ABCDEFHG$ es semejante al polígono $A'B'C'D'E'F'H'G'$, se denota esta característica como sigue: $ABCDEFHG \sim A'B'C'D'E'F'H'G'$.

Definición. *Lados homólogos.*

Son los lados cuyos extremos están en vértices correspondientes a ángulos congruentes.

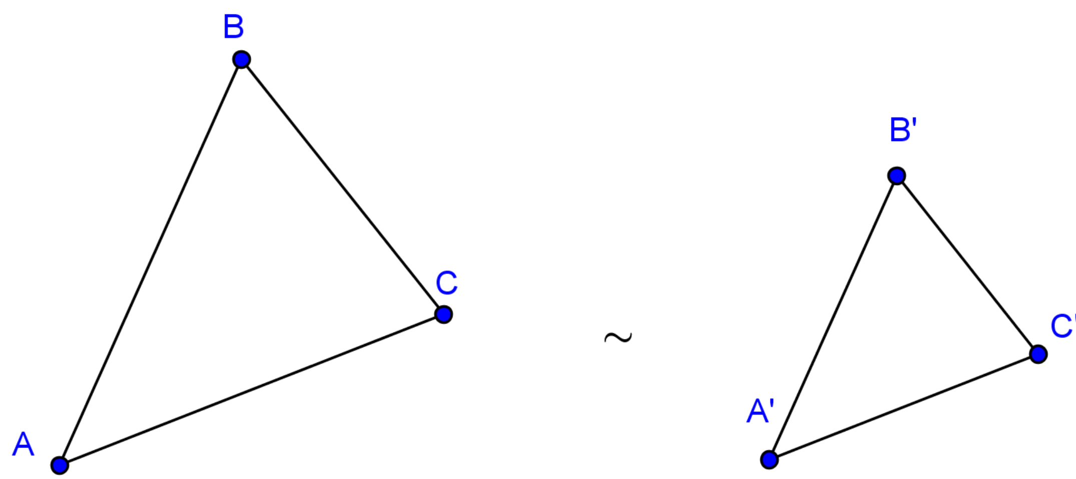
La razón que mantienen los lados homólogos es un número real denominado *razón de semejanza.*

1.9.2 Triángulos semejantes.

Definición. *Triángulos semejantes.*

Dos triángulos serán semejantes, si cumplen las condiciones de la semejanza de los polígonos.

Sea $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, como se muestra en la $figura\ 72$:



$Figura\ 72$

Satisfaciéndose: $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$, además;

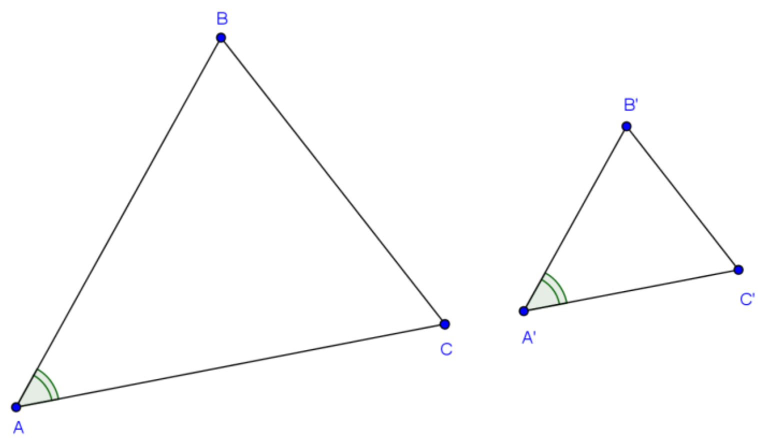
$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$, donde k es la razón de semejanza.

Para establecer la semejanza entre triángulos, no es necesario que se verifiquen todas las relaciones anteriores como se muestra a continuación.

1.9.2.1 Criterios de semejanza en triángulos.

Primer criterio: Ángulo- Ángulo.

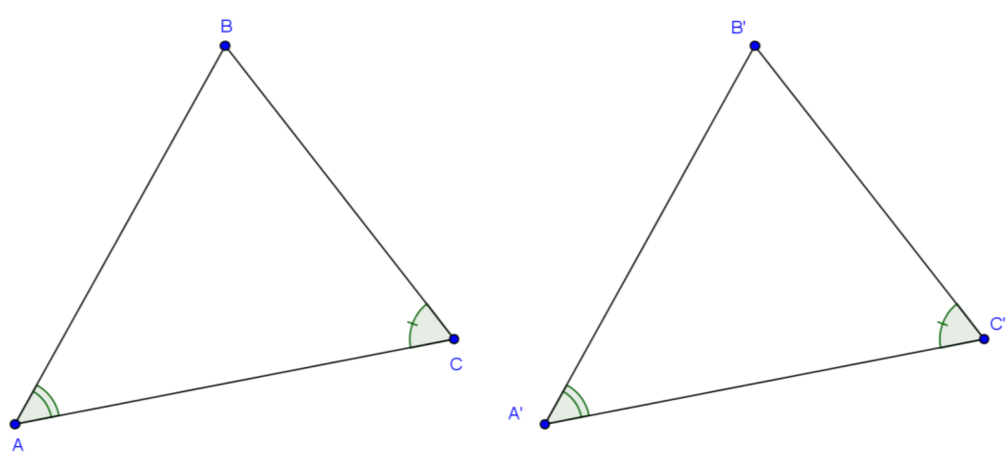
≪Dos triángulos son semejantes si dos ángulos del primero son congruentes a dos ángulos del segundo.≫ ($Figura\ 73$)



$Figura\ 73$

Segundo criterio: Lado-Ángulo-Lado.

≪Si dos triángulos poseen dos pares de sus lados proporcionales y el ángulo formado entre ellos congruentes entonces son semejantes.≫ ($Figura\ 74$)



$Figura\ 74$

Tercer criterio: Lado-Lado-Lado.

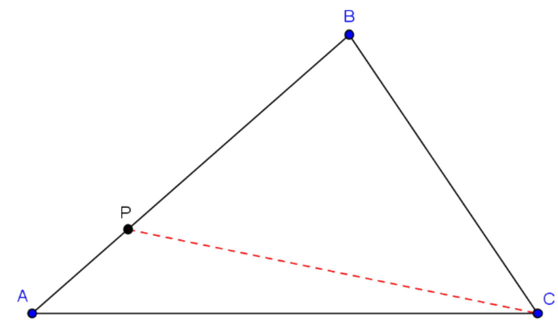
≪Si dos triángulos poseen sus tres lados proporcionales, entonces son semejantes.≫

Lema 1: Sea P un punto sobre uno de los lados (o su prolongación) del ΔABC, entonces

$$\frac{AP}{PB} = \frac{(\text{APC})}{(PBC)}.$$

Demostración:

Al tomar la condición con P perteneciente a $\overline{AB}$ $(Figura\ 75)$, formando los triángulos ΔAPC y ΔPBC, al trazar la altura desde el vértice C en ambos triángulos se tiene que dicha altura es común de donde se tiene que:



$Figura\ 75$

$$(APC) = \frac{AP \cdot h}{2}$$

$$(PBC) = \frac{PB \cdot h}{2}$$

$$\frac{(APC)}{(PBC)} = \frac{\frac{AP \cdot h}{2}}{\frac{PB \cdot h}{2}} = \frac{AP}{PB} \Longrightarrow \frac{(APC)}{(PBC)} = \frac{AP}{PB}$$

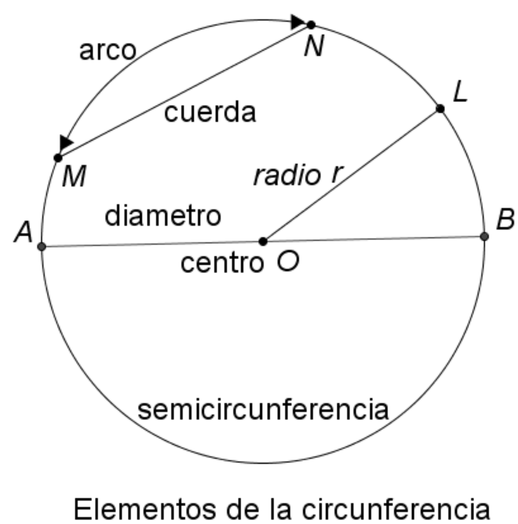
El caso en el que P se encuentra sobre la prolongación de $\overline{AB}$, el análisis es similar, por lo que el lema queda demostrado.

■

1.10 CIRCUNFERENCIA.

Definición. *Circunferencia.*

Es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una misma distancia de un punto fijo, llamado *centro* de la circunferencia. (En la $figura\ 76$ el centro es denotado por la letra O).



$Figura\ 76$

Definición. *Puntos concíclicos.*

Es el conjunto de puntos que están en una misma circunferencia.

1.10.1 Líneas en la circunferencia.

Definición. *Radio.*

Es el segmento que une cualquier punto de la circunferencia con su centro (r en $figura\ 76$).

Definición. *Cuerda.*

Es un segmento de recta que tiene por extremos dos puntos de la circunferencia ($\overline{MN}$ $figura\ 76$).

Definición. *Arco.*

Es cada parte de la circunferencia limitada por dos puntos de la misma.

Para denotar un arco se utiliza la notación $\widehat{MN}$ ($Figura\ 76$).

Definición. *Diámetro.*

Es toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia ($\overline{AB}$ $figura\ 76$).

La medida del diámetro es igual a dos veces la medida del radio.

Definición. *Semicircunferencia.*

Es cada uno de los arcos determinados por los extremos de un diámetro ($\widehat{AB}$ en $figura\ 76$).

En lo sucesivo se denotará a una circunferencia con la expresión (O), con O como centro de ésta, y en ocasiones necesarias se expresará como (MN), con $\widehat{MN}$ al arco que caracteriza a dicha circunferencia ($Figura\ 76$).

1.10.2 Posiciones relativas de un punto respecto a una circunferencia.

Definición. *Punto interior.*

Es el punto cuya distancia al centro de la circunferencia es menor que el radio ($Figura\ 77.a$).

Definición. *Punto sobre la circunferencia.*

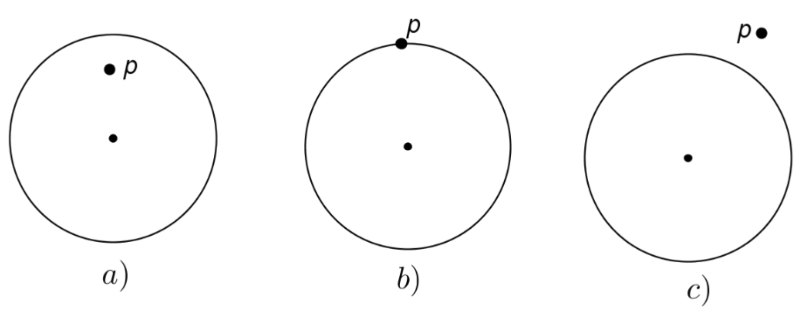
Es el punto que pertenece a la circunferencia ($Figura\ 77.b$).

La distancia de este punto al centro de la circunferencia es igual al radio.

Definición. *Punto exterior a la circunferencia.*

Es el punto que está fuera de la circunferencia ($Figura\ 77.c$).

La distancia de este punto al centro de la circunferencia es mayor que el radio.



$Figura\ 77$

1.10.3 Posiciones relativas de una recta y una circunferencia.

Definición. *Recta secante***.**

Es la recta que tiene dos puntos comunes con la circunferencia ($Figura\ 78.a$).

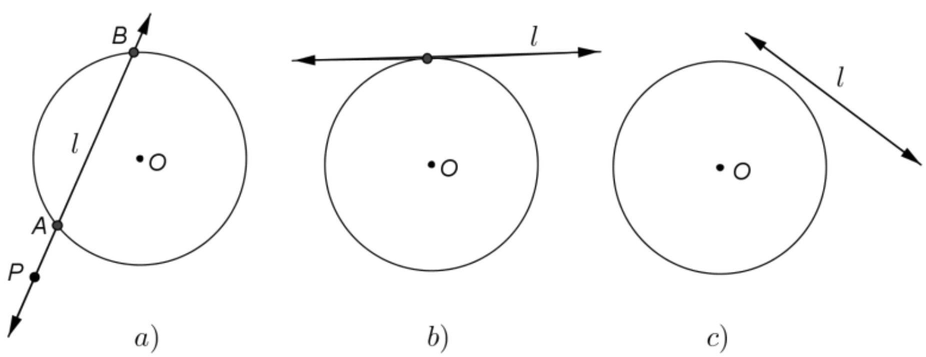
Sea A y B los puntos que corta la recta l a la circunferencia (O) y un punto P de la recta pero exterior a la circunferencia ($Figura\ 78.a$). El segmento $\overline{PB}$ se llama segmento secante y $\overline{PA}$ se llama segmento exterior del segmento secante.

Definición. *Recta tangente***.**

Es la recta que tiene un punto común con la circunferencia. A este punto se le denomina punto de tangencia ($Figura\ 78.b$).

Definición. *Recta exterior.*

Es la recta que no tiene puntos en común con la circunferencia ($Figura\ 78.c$).



$Figura\ 78$

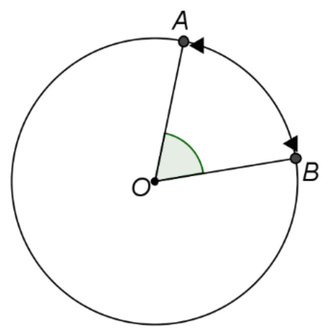
1.10.4 Ángulos con relación a una circunferencia.

Definición. *Ángulo central.*

Es el ángulo formado por la abertura de dos radios de una circunferencia.

La medida del arco que subtienden dos radios es igual a la medida del ángulo central que éstos forman ($Figura$ 79), es decir:

$$m\widehat{AB} = m\angle AOB$$



$Figura$ 79

Definición. *Ángulo inscrito.*

Es el ángulo cuyo vértice esta sobre la circunferencia y sus lados son semirrectas secantes a está.

Mide la mitad de la medida del arco que abarca dichas semirrectas ($Figura$ 80), es decir:

$$m\angle APB = \frac{1}{2} m\widehat{AB}.$$

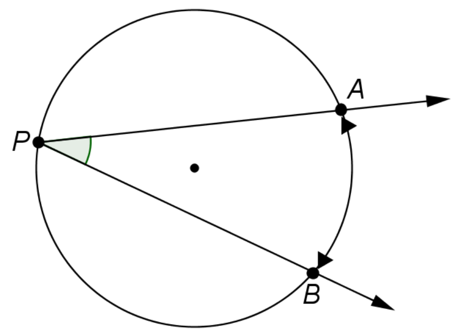


Figura 80

Definición. *Ángulo semi-inscrito.*

Es el ángulo formado por una recta tangente y una cuerda que parte desde el punto de tangencia.

Mide la mitad de la medida del arco que abarca dichas líneas ($Figura\ 81$), es decir:

$$m\angle APB = \frac{1}{2} m\widehat{PB}$$

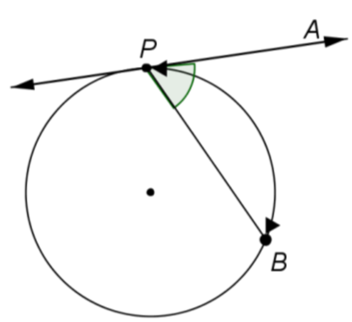


Figura 81

Definición. *Ángulo ex-inscrito.*

Es el ángulo suplementario a un ángulo inscrito formado por una recta secante y una cuerda.

Su medida es igual a la mitad de la medida del arco que intersectan dichas líneas ($Figura$ 82), es decir:

$$m\angle BPC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CPA}$$

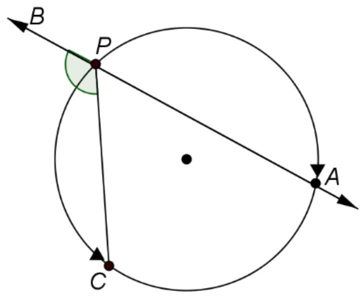


Figura 82

Definición. *Ángulo interior.*

Es el ángulo cuyo vértice es interior a la circunferencia y es formado por dos rectas secantes.

Su medida es igual a la semisuma de las medidas de los arcos opuestos a los ángulos iguales que abarcan dichas rectas ($Figura$ 83), es decir:

$$m\angle APB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}).$$

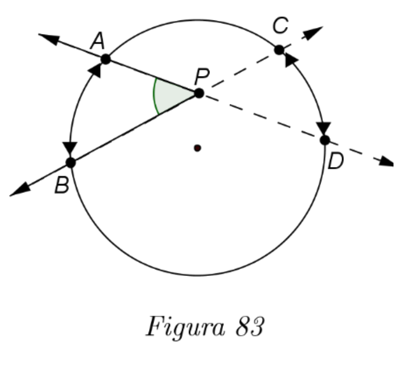


Figura 83

Definición. *Ángulo exterior.*

Es el ángulo que tiene su vértice en el exterior de la circunferencia y sus lados son rectas que cumplen una de las siguientes condiciones: $a)$ dos secantes, $b)$ una tangente y una secante, y $c)$ dos tangentes a ella.

Su medida es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos que abarcan dichas rectas es decir:

Para $a)$ $Figura\ 84.a$

$$m\angle APB = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{CD})$$

para $b)$ $Figura\ 84.b$

$$m\angle APB = \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{AB})$$

Y $c)$ $Figura\ 84.c$

$$m\angle APB = \frac{1}{2}(\widehat{AMB} - \widehat{AB})$$

Además, para $c)$ se cumple que

$$m\angle APB = 180^o - \widehat{AB}.$$

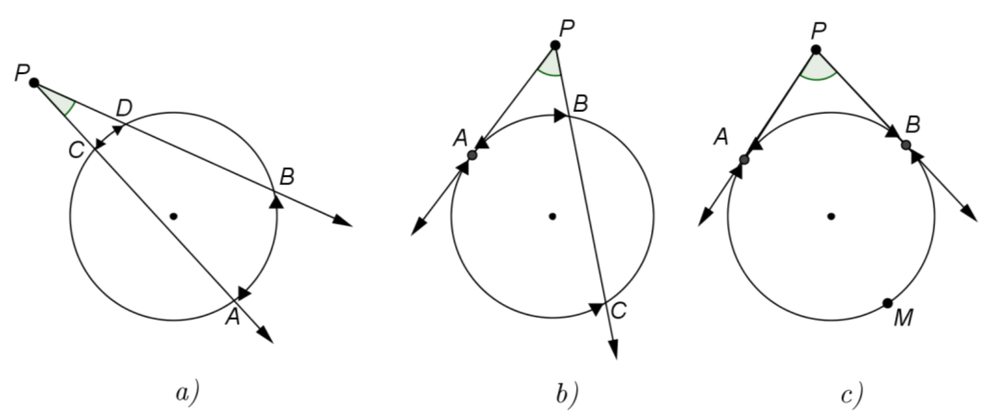


Figura 84

Teorema XVII. ≪En toda circunferencia se cumple que a cuerdas congruentes le corresponden arcos congruentes, y viceversa.≫

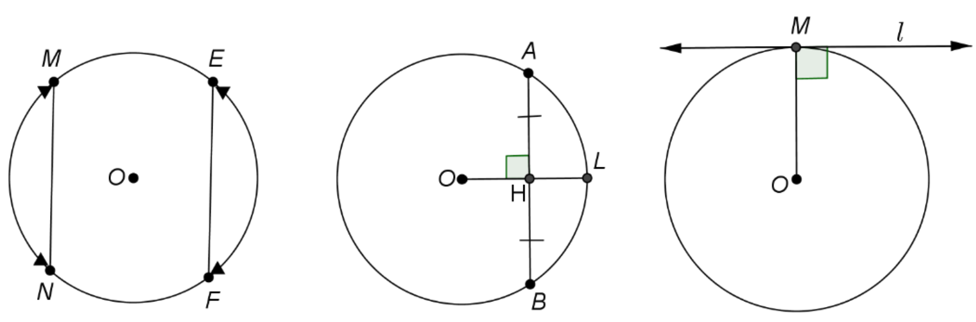
De la $figura\ 85.a$, $MN = EF \Leftrightarrow \overset{\frown}{MN} \cong \overset{\frown}{EF}$.

Teorema XVIII. ≪Si un radio es perpendicular a una cuerda, entonces dicho radio bisecará a la cuerda.≫

Así; en la $figura\ 85.b$, se establece que: $\overline{OL} \perp \overline{AB} \Rightarrow AH = HB$.

Teorema XIX. ≪Si en una circunferencia se traza una recta tangente, al trazar un segmento desde el centro al punto de tangencia, éste segmento caerá perpendicularmente a la recta.≫

Es decir, si M es punto de tangencia entonces, $\overline{OM} \perp l$ ($Figura\ 85.c$).



a) *b)* *c)*

Figura 85

1.10.5 Posiciones relativas entre dos circunferencias.

Sean las circunferencias de centro O y O' de radios R y r, respectivamente y la distancia entre sus centros $OO' = d$; luego las circunferencias serán:

Circunferencias exteriores: Si la distancia entre sus centros es mayor que la suma de la medidas de sus radios ($Figura\ 86.a$), es decir:

$$d > R + r\,.$$

Circunferencias interiores: Si la distancia entre sus centros es menor que la diferencia de las medidas de sus radios ($Figura\ 86.b$), es decir:

$$d < R - r\,.$$

Circunferencias tangentes interiores: Si la distancia entre sus centros es igual a la diferencia de las medidas de sus radios ($Figura\ 86.c$), es decir:

$$d = R - r\,.$$

Donde l es la recta tangente común a las circunferencias.

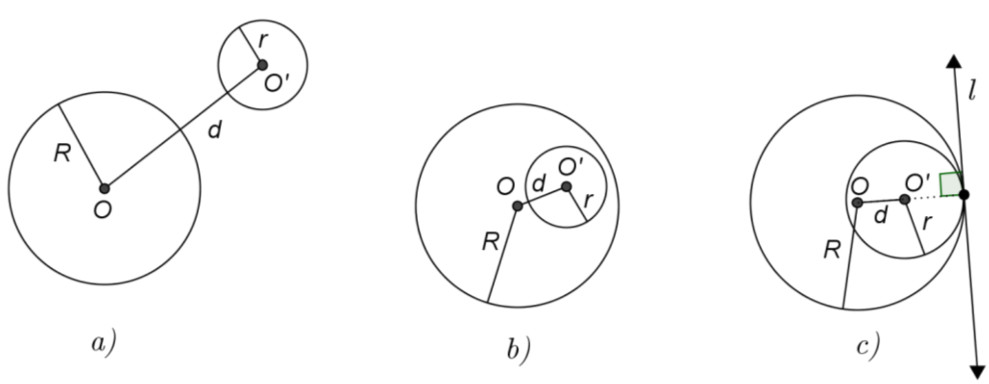


Figura 86

Circunferencias tangentes exteriores: Si la distancia entre sus centros es igual a la suma de las medidas de sus radios ($Figura$ 87.a), es decir:

$$d = R + r\,.$$

Donde l es la recta tangente común a las dos circunferencias.

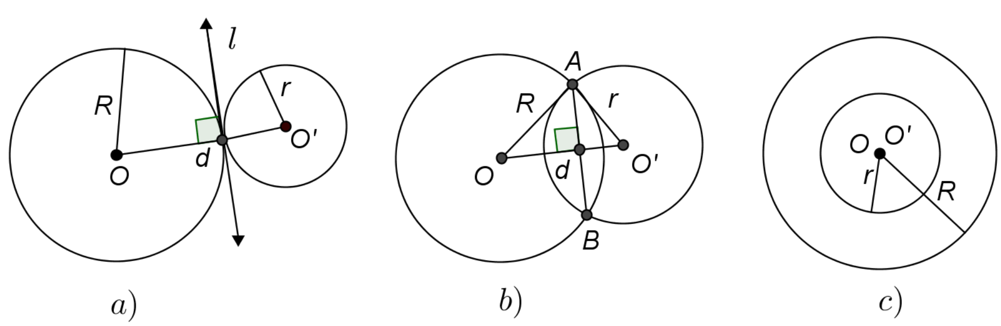
Circunferencias secantes: Si la distancia entre sus centros es mayor que la diferencia de las medidas de sus radios y menor que la suma de las medidas de sus radios ($Figura$ 87.b), es decir:

$$R - r < d < R + r.$$

Donde $\overline{AB}$ es la cuerda determinada por los puntos de intersección de las dos circunferencias.

Circunferencias concéntricas: Si sus centros coinciden ($Figura$ 87.c), es decir:

$$d = 0\,.$$



$Figura$ 87

1.10.6 Circunferencia inscrita y circunscrita.

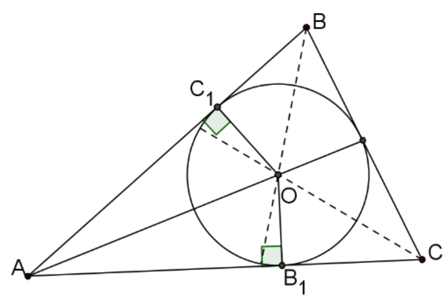
Definición. *Circunferencia inscrita en el triángulo.*

Es la circunferencia que tiene su centro dentro del triángulo y es tangente a sus lados.

Teorema XX. ≪*El centro de la circunferencia inscrita en el triángulo se encuentra en el punto de intersección de sus bisectrices*.≫

Demostración:

Sea O el centro de la circunferencia inscrita ($Figura$ 88). Como se desea que el punto O esté dentro del triángulo, $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{AB}$ se encuentra en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{AC}$ y en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{AB}$ se encuentra $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{AC}$. Por lo tanto, $\overrightarrow{AO}$ pasa entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Sean C_1 y B_1



$Figura$ 88

los puntos de tangencia de la circunferencia con $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ del triángulo. De los triángulos rectángulos $\triangle AC_1O$ y $\triangle AB_1O$ tienen la hipotenusa $\overline{AO}$ en común y los catetos $\overline{OC}_1$ y $\overline{OB}_1$ iguales por ser radios así, resulta que el $\triangle AC_1O$ y el $\triangle AB_1O$ son congruentes por CTR3. De aquí se deduce la congruencia del $\angle OAC_1$ con él $\angle OAB_1$. Pero esto significa que el centro de la circunferencia se encuentra en la bisectriz del triángulo, trazada desde el vértice A. Análogamente se demuestra que el centro de la circunferencia está en las otras dos bisectrices del triángulo.

■

Nota. En todo triángulo se puede inscribir una circunferencia, determinada por el incentro.

Definición. *Circunferencia circunscrita al triángulo*.

Es la circunferencia que pasa por cada uno de los vértices del triángulo.

Teorema XXI. Existencia y unicidad de la circunferencia.
≪*Por tres puntos distintos, no colineales pasa una y solo una circunferencia.*≫

Demostración:

Existencia. Sean A, B, C tres puntos distintos y no colineales ($Figura$ 89); sean m y m' las mediatrices de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente y por el *teorema* I, existe un único punto $\{O\} = m \cap m'$. Como $O \in m$, por las propiedades de la mediatriz se tiene que, $OA = OC$ y similarmente, como $O \in m'$ entonces $OA = OB$, por lo tanto $OA = OB = OC$ luego, O es el centro y OA el radio de una circunferencia que pasa por los puntos A, B y C, que se le llamara (O).

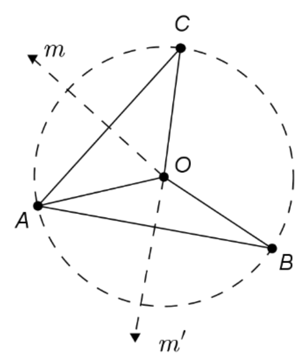


Figura 89

Unicidad. Supongamos que por los puntos A, B y C pasa otra circunferencia (O'); como $O'A = O'B$ entonces por las propiedades de la mediatriz $O' \in m'$ y como $O'A = O'C$ entonces $O' \in m$, luego $\{O'\} = m \cap m'$ y como $\{O\} = m \cap m'$ por tanto $O' = O$. De esta manera se concluye que la circunferencia de centro O' y de radio $O'A$ y la circunferencia (O) son la misma.

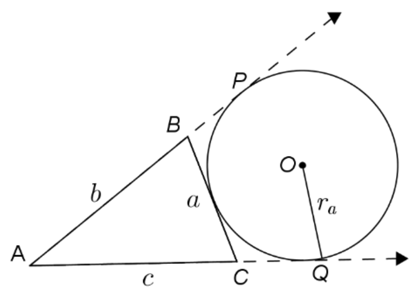
■

Nota. En todo triángulo se puede circunscribir una circunferencia, determinada por el circuncentro.

1.10.7 Circunferencia exinscrita a un triángulo.

Definición. *Circunferencia exinscrita a un triángulo.*
Es la circunferencia que es tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos lados de un triángulo.

En la $figura\ 90$, la circunferencia de centro O esta exinscrita en ΔABC, y es tangente al lado $\overline{BC}$.



$Figura\ 90$

Al radio de la circunferencia ex-inscrita se le denomina ex-radio (r_a). El subíndice indica que corresponde al $\overline{BC}$ ($BC = a$). En un ΔABC se pueden dibujar tres circunferencias ex-inscritas cuyos radios serían denominados r_a, r_b y r_c.

1.10.8 Cuadrilátero inscrito (cuadrilátero cíclico).

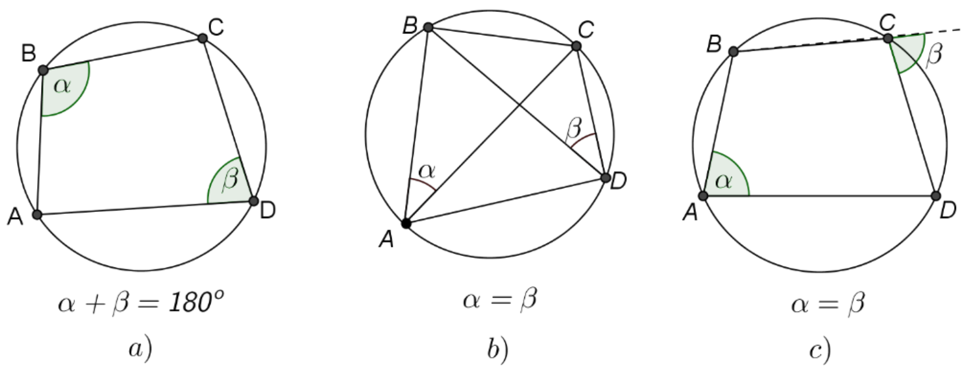
Definición. *Cuadrilátero inscrito.*
Es el cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a una circunferencia.

En todo cuadrilátero inscrito se cumple las siguientes propiedades:

1. Los ángulos opuestos son suplementarios ($Figura\ 91.a$).

2. Las diagonales forman ángulos congruentes con los lados opuestos ($Figura\ 91.b$).

3. Un ángulo interior del cuadrilátero inscrito es congruente con el opuesto exterior ($Figura\ 91.c$).



$Figura\ 91$

1.10.9 Cuadrilátero inscriptible.

Definición: *Cuadrilátero inscriptible.*

Es el cuadrilátero que puede inscribirse en una circunferencia.

Para que esto suceda, dicho cuadrilátero debe cumplir con cualquiera de las tres propiedades dadas para un cuadrilátero inscrito. En la $figura\ 92.a$, el cuadrilátero $ABCD$ es inscriptible, ya que sus ángulos opuestos $\angle B$ y $\angle D$ son suplementarios. El cuadrilátero $PQEF$ ($Figura\ 92.b$) también es inscriptible, puesto que cumple con la segunda propiedad. Todo trapecio isósceles es inscriptible ($Figura\ 92.c$) ya que cumple con la primera propiedad.

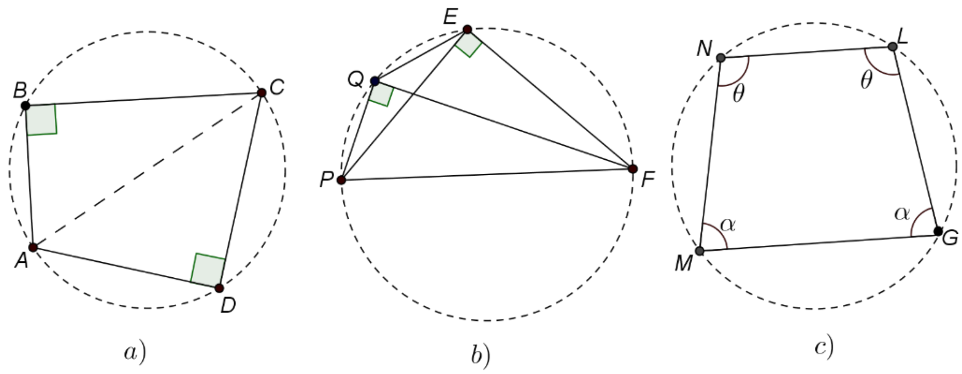


Figura 92

Observaciones.

1. En la $figura\ 92.a$, $\overline{AC}$ es diámetro de la circunferencia circunscrita.
2. En la $figura\ 92.b$, $\overline{PF}$ es diámetro de la circunferencia circunscrita.
3. En la $figura\ 92.c$, el trapecio isósceles $MNLG$ es inscriptible, ya que $\alpha + \theta = 180^o$.

CAPÍTULO II.

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA MODERNA.

Se le llama geometría moderna a aquella que históricamente surge entre la geometría deductiva desarrollada después de Euclides, y anterior a las geometrías no euclidianas.

Caracterizada por los nuevos estudios al cual se hace referencia a esta geometría, como son el empleo de signos en segmentos de rectas, así como también el asignar sentido a ángulos que están en un mismo plano.

En este capítulo se desarrolla el teorema de Ceva y Menelao los cuales están estrechamente relacionados, estos son potentes herramientas que permiten tratar elegantemente muchos problemas en los que interviene la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas. También se abordan algunos temas relacionados con triángulos, segmentos de recta y circunferencia, que comprende las propiedades que se refieren a: Triángulo pedal, polos, polares, simedianas –se le recomienda al lector que tenga conocimiento de simetrías y relaciones trigonométricas-, punto simediano y exmedianas. También se dan a conocer algunos temas referentes a la geometría de Lemoine que son importantes para el desarrollo de este trabajo.

A continuación se presentan los elementos básicos de la geometría moderna.

2.1 SEGMENTOS DIRIGIDOS.

Un paso adelante en el sistema de los números fue el de incluir los números negativos, de lo cual han resultado grandes avances de los que pudieron imaginar aquellos que tomaron parte en este hecho. Así también gran progreso fue en geometría asociarle a algunos de los conceptos fundamentales la noción de signo y longitud.

Recordando que, si en una recta se toman dos puntos distintos A y B ($Figura$ 93), ellos nos determinarán un segmento de recta.

$Figura\ 93$

En geometría elemental se refiere a este segmento como segmento $\overline{AB}$ y usualmente su interés radica en su longitud. Sin embargo, se puede asociar la idea de dirección. Así, si la porción de recta entre estos dos puntos se imagina desarrollada desde A a B, se tiene el *segmento dirigido* $\overline{AB}$, mientras si se desarrolla de B a A, se tiene el segmento dirigido $\overline{BA}$. Las longitudes de los segmentos dirigidos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ son las mismas, pero sus direcciones son opuestas. Esta diferencia de direcciones es análoga a la diferencia en signos de los números y que es convenientemente indicada por medio de tales signos.

En lo sucesivo, cuando se hable de un segmento de recta, se entenderá un segmento dirigido, a menos que se aclare lo contrario.

Relaciones entre segmentos de rectas dirigidos.

Los segmentos dirigidos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ son, como se ha señalado anteriormente, iguales en longitud pero opuestos en dirección.

Estos hechos están indicados por la ecuación

$$\overline{AB} = -\overline{BA}\,.$$

O por la ecuación equivalente

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{0}\,.$$

Si A, B y C son tres puntos colineales y consecutivos,

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{0}.$$

2.2 RAZÓN DE PARTICIÓN DE UN SEGMENTO DE RECTA.

Si P es punto cualquiera en $\overleftrightarrow{AB}$ ya sea entre A y B o externo a $\overline{AB}$, se dice que divide a $\overline{AB}$ en la razón $r = \frac{AP}{PB}$**.** Si P está entre A y B divide al segmento *internamente* y la razón de partición es positiva; si está fuera de $\overline{AB}$ divide al segmento *externamente*, y la razón de partición es negativa.

Teorema XXII. ≪*Sean P y Q dos puntos en la recta determinada por los puntos A y B. Si P y Q divide al segmento $\overline{AB}$ en la misma razón entonces coinciden.*≫

Demostración:

Sean P y Q tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} = r$, por tanto, se tiene que

$$AP = rPB \qquad (1)$$

$$AQ = rQB \qquad (2).$$

Pero además,

$$AP + PB = AB \qquad (3)$$

$$AQ + QB = AB \qquad (4).$$

De (3) y (4) se tiene,

$$PB = AB - AP,$$

$$QB = AB - AQ.$$

Sustituyendo estos valores en (1) y (2) se tiene que:

$$AP = r(AB - AP), \qquad (5)$$

$$AQ = r(AB - AQ) \qquad (6).$$

De (5) y de (6) se obtiene:

$$AP = rAB - rAP \Rightarrow AP + rAP = rAB \Rightarrow AP = \frac{rAB}{1+r}.$$

$$AQ = rAB - rAQ \Rightarrow AQ + rAQ = rAB \Rightarrow AQ = \frac{rAB}{1+r}.$$

Por tanto $AP = AQ$, asi; los puntos P y Q coinciden.

■

2.3 TEOREMAS DE CEVA Y MENELAO.

En esta sección se estudiarán un par de teoremas que resultan de gran utilidad cuando se trata con problemas sobre rectas concurrentes o puntos colineales. Estos teoremas son conocidos como *Teorema de Ceva y Teorema de Menelao.* Cada uno de ellos tiene una doble utilidad, ya que se pueden aplicar para demostrar que ciertas rectas son concurrentes (ciertos puntos son colineales), o una vez que se sabe que ciertas rectas son concurrentes (puntos colineales) se quiere obtener información sobre estás.

Antes de enunciar los teoremas mencionados, se introducirá el término *ceviana*.

Definición. *Ceviana.*

Es el segmento de recta que une un vértice de un triángulo con un punto cualquiera del lado opuesto o de su prolongación.

Teorema XXIII. Teorema de Ceva.

≪Dado un ΔABC, sean L, M y N puntos sobre los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Entonces, las cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ concurren si y sólo si

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1. \gg$$

Demostración:

"$\Longrightarrow$"

Supóngase primero que las cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ son concurrentes en un punto S $(Figura\ 94)$.

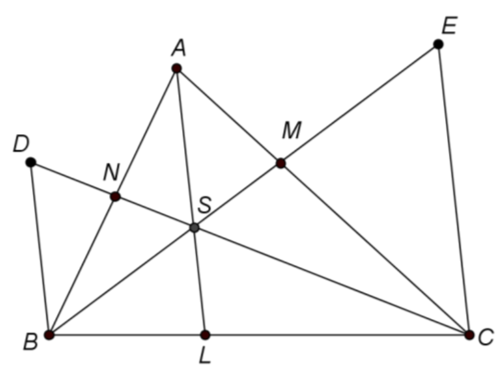


Figura 94

Y sean las paralelas $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ a $\overline{ASL}$ a través de B y C respectivamente, intersectando a las prolongaciones de $\overline{CN}$, $\overline{BM}$ en D y E respectivamente. De lo cual resulta que:

$$\Delta ANS \sim \Delta DNB \Longrightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{SA}{BD},$$

$$\Delta EBC \sim \Delta SBL \Longrightarrow \frac{BL}{BC} = \frac{LS}{CE},$$

$$\Delta BDC \sim \Delta LSC \Longrightarrow \frac{BC}{LC} = \frac{BD}{LS},$$

$$\Delta ASM \sim \Delta EMC \Longrightarrow \frac{CM}{MA} = \frac{CE}{SA};$$

Entonces, multiplicando se tiene:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{BC} \cdot \frac{BC}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AS}{BD} \cdot \frac{LS}{CE} \cdot \frac{BD}{LS} \cdot \frac{CE}{SA}$$

Y simplificando se tiene

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1\,.$$

"$\Longleftarrow$"

Ahora supóngase que los puntos L, M y N cumplen que:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Y supóngase además que $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ no son concurrentes. Considérese el punto S donde se intersectan $\overline{BM}$, $\overline{CN}$ y supóngase que $\overline{AS}$ intersecta a $\overline{BC}$ en un punto L'. Dado que $\overline{AL'}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ son concurrentes, por lo demostrado anteriormente tenemos que

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM}{MA}=1=\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}.$$

De esto se tiene que

$$\frac{BL'}{L'C}=\frac{BL}{LC}.$$

De aquí se sigue que $L'=L$, ya que si un segmento es divido en la misma razón por dos puntos entonces, estos puntos coinciden. Así; las cevianas son concurrentes.

■

Teorema XXIV. Teorema de Menelao.

≪Dado un ΔABC, sean M, N y L, puntos cualesquiera sobre los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Entonces M, N y L son colineales si y sólo si

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=-1.\gg$$

Demostración:

"⟹"

Sean L, M y N las intersecciones de $\overline{LMN}$ con los segmentos de ΔABC en $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en su prolongacion ($Figura\ 95$), y sea una paralela a $\overline{AB}$ que pasa por C intersectando a $\overline{LMN}$ en D. Entonces se tiene que:

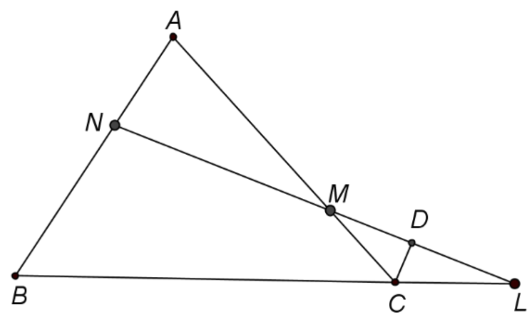


Figura 95

$$\Delta NBL \sim \Delta DCL \Longrightarrow \frac{NB}{DC} = \frac{BL}{-LC}; \qquad (1)$$

$$\Delta MAN \sim \Delta MDC \Longrightarrow \frac{DC}{AN} = \frac{CM}{MA}; \qquad (2)$$

Multiplicando (1) y (2) se tiene

$$\frac{NB}{DC} \cdot \frac{DC}{AN} = -\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA}$$

$$\frac{NB}{AN} = -\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA}$$

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

“$\Longleftarrow$”

Supóngase ahora que los puntos L, M y N cumplen que

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1.$$

Supóngase además que la prolongación de $\overline{MN}$ corta a la prolongación de $\overline{BC}$ en L' , entonces

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=-1=\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM}{MA}$$

De donde se tiene que

$$\frac{BL'}{L'C}=\frac{BL}{LC}$$

De lo cual se deduce que $L'=L$, ya que si un segmento es divido en la misma razón por dos puntos entonces estos puntos coinciden. De lo cual se concluye que L, M y N son colineales.

■

2.4 DIVISIÓN ARMÓNICA.

Definición. *División armónica.*

Dos puntos dividen a un segmento armónicamente si lo dividen interna y externamente en la misma razón.

Es decir dos puntos C y D dividen armónicamente a un segmento dado $\overline{AB}$ si

$$\frac{AC}{CB}=-\frac{AD}{DB}$$

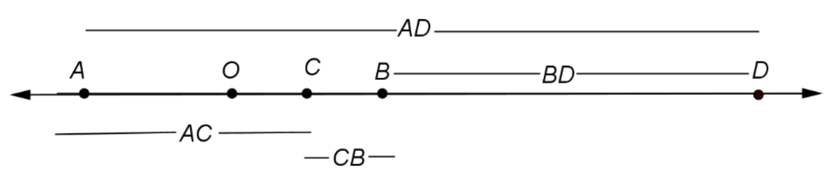


Figura 96

Donde el punto C está en el interior de $\overline{AB}$ y D en su prolongación tal como se presenta en la $figura$ 96. Los puntos C y D se llaman *conjugados armónicos* con respecto a A y B y viceversa.

Los cuatros puntos A, B, C y D se dice que forman una cuaterna armónica.

Se usará la notación $(ABCD) = -1$ para denotar una cuaterna armónica.

2.4.1 Construcción de conjugados armónicos.

Dado un segmento $\overline{AB}$ y un punto C ($Figura$ 97), para construir el cuarto armónico, es decir el conjugado armónico de C respecto a $\overline{AB}$, se puede proceder de la siguiente manera:

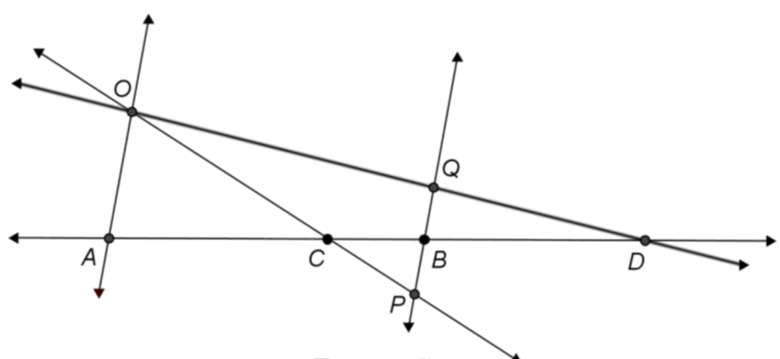


Figura 97

Se trazan dos rectas paralelas cualesquiera por A y B, se traza una recta por C que corte a estas paralelas en O y P respectivamente. En la recta $\overleftrightarrow{PB}$ se ubica Q tal que $PB = BQ$. Se traza la recta $\overleftrightarrow{OQ}$. El punto D donde se intersectan $\overleftrightarrow{OQ}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ es el cuarto armónico buscado.

En el caso especial en que C es el punto medio de $\overline{AB}$, D es el punto al infinito de $\overleftrightarrow{AB}$.

Para demostrar que efectivamente este es el punto buscado, basta comprobar que $\Delta AOC \sim \Delta CPB$ y que $\Delta OAD \sim \ \Delta QBD$, por tener sus ángulos correspondientes iguales, de donde:

$$\Delta OAC \sim \Delta CPB \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{OA}{BP},$$
$$\Delta OAD \sim \ \Delta QBD \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{OA}{QB}$$

Por tanto

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OA}{-PB}, \qquad \frac{AD}{-DB} = \frac{OA}{-BQ} \qquad \Longrightarrow \quad \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

Teorema XXV. *≪Si, en una cuaterna armónica* $(ABCD) = -1$*, todos los segmentos son medidos desde el punto* B*, tenemos que*

$$\frac{2}{BA} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{BD}.\text{≫}$$

Demostración:

Dada la relación

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

Se tiene que ($Figura\ 96$) $AC = AB - CB = AB - (-BC) = AB + BC$,

$$AD = AB + BD$$

$$\Longrightarrow \frac{AB + BC}{CB} = -\frac{AB + BD}{DB}$$

$$\Longrightarrow -\frac{AB + BC}{BC} = \frac{AB + BD}{BD}$$

$$\Rightarrow -\frac{AB}{BC}-\frac{BC}{BC}=\frac{AB}{BD}+\frac{BD}{BD}$$

$$\Rightarrow -\frac{(-BA)}{BC}-1=-\frac{BA}{BD}+1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{BA}{BC}-1=-\frac{BA}{BD}+1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{BA}{BC}+\frac{BA}{BD}=2$$

$$\Rightarrow \quad BA\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{BD}\right)=2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{BA}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{BD}\ .$$

■

Teorema XXVI. *≪Si O es el punto medio de $\overline{AB}$, y si C, D son dos puntos de $\overleftrightarrow{AB}$, y los segmentos formados por dichos puntos son medidos desde el punto O. Entonces, A, B, C y D forman una cuaterna armónica si y sólo si*

$$OA^2=OC\cdot OD.\gg$$

Demostración:

"⟹"

De la proporción

$$\frac{AC}{CB}=-\frac{AD}{DB}$$

Y sabiendo que $BD=-DB$ entonces

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}$$

Además, si se escriben las relaciones de los segmentos de recta dada en $figura\ 96$ se tiene:

$$\frac{AO+OC}{AO-OC}=\frac{AO+OD}{OD-AO}$$

$$\Rightarrow \frac{-OA+OC}{-OA-OC}=\frac{-OA+OD}{OD+OA}$$

$$\Rightarrow (-OA+OC)(OD+OA)=(-OA+OD)(-OA-OC)$$

$$\Rightarrow -OA\cdot OD-OA^2+OC\cdot OD+OC\cdot OA=OA^2+OA\cdot OC-OD\cdot OA-OD\cdot OC$$

$$\Rightarrow -OA^2+OC\cdot OD=OA^2-OD\cdot OC$$

$$\Rightarrow 2OA^2=2OC\cdot OD$$

$$\Rightarrow OA^2=\ OC\cdot OD\ .$$

"$\Leftarrow$"

La prueba se hace en sentido contrario a la de la parte anterior.

■

2.5 HAZ ARMÓNICO.

Definición. *Haz armónico.*

Es el conjunto de cuatro rectas concurrentes que pasan por cuatro puntos colineales y consecutivos que forman una cuaterna armónica.

En la $figura\ 98$, si los puntos A, B, C y D forman una cuaterna armónica, entonces $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$, $\overleftrightarrow{OC}$ y $\overleftrightarrow{OD}$ forman un haz armónico. El punto O se llama centro del haz y $\overleftrightarrow{OC}$ y $\overleftrightarrow{OD}$ se dicen que son conjugados armónicos respecto a $\overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OB}$ y viceversa.

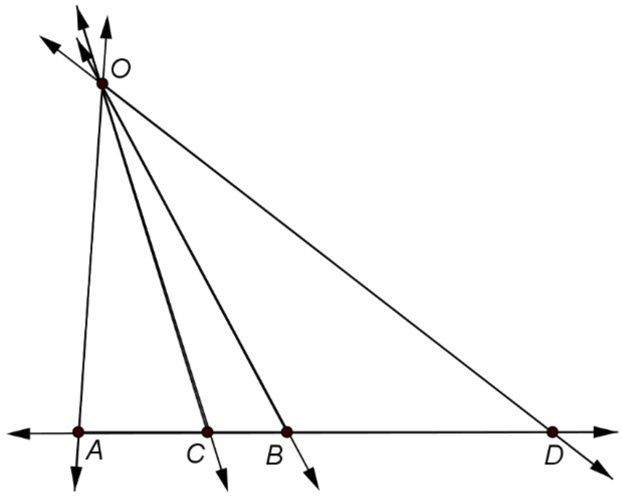


Figura 98

Para denotar un haz armónico se utilizará la notación $O(ABCD) = -1$.

Teorema XXVII. *≪Dado $(ABCD) = -1$ y un punto O exterior a $\overleftrightarrow{AB}$, si se traza una paralela a $\overrightarrow{OA}$ por B que corte a $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ en P y Q, entonces $PB = BQ$.≫*

Demostración:

De los dos pares de triángulos semejantes ΔOAC, ΔPCB y ΔOAD, ΔBQD ($Figura$ 99) se tiene:

$$\frac{AO}{PB} = \frac{AC}{CB}, \qquad \frac{AO}{BQ} = -\frac{AD}{DB}$$

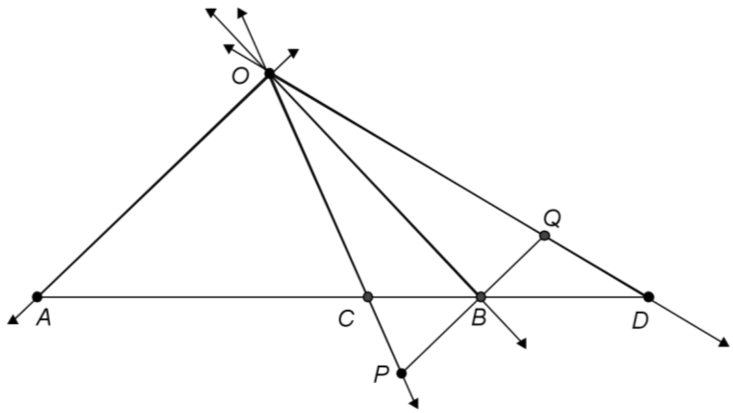


Figura 99

Ahora dado que $(ABCD) = -1$, las dos razones del lado derecho de las igualdades son igual; entonces

$$\frac{AO}{PB} = \frac{AO}{BQ} \Longrightarrow PB = BQ.$$

■

Teorema XXVIII. ≪*Si dos rayos conjugados de un haz armónico son perpendiculares, entonces éstos son bisectrices del ángulo formado por los otros dos rayos del haz*.≫

Demostración:

Sea $O(ABCD) = -1$ y $\overline{GH}$ paralela a $\overrightarrow{OA}$ que intersecta a $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ en F,G y H. Se tiene por el teorema anterior que $GF = FH$, y si $\overrightarrow{OA}$ es perpendicular a $\overrightarrow{OB}$, se forman los triángulos $\triangle OFG$ y $\triangle OFH$ ($Figura$ 100).

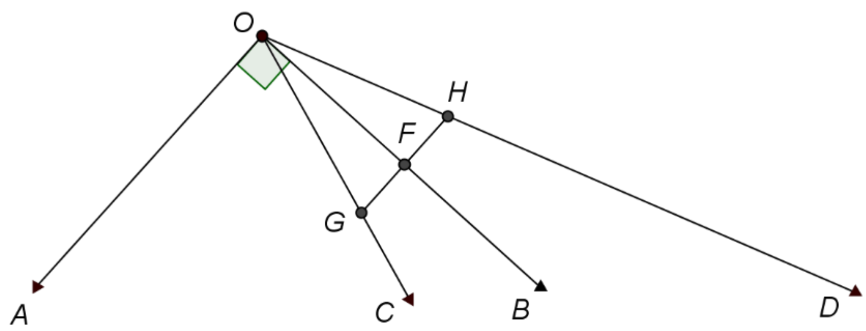


Figura 100

Entonces por el criterio de congruencia *CTR1*, los triángulo $\triangle OFG \cong \triangle OFH$, de ésto resulta que $m\angle GOF = m\angle HOF$, por lo tanto $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz del ángulo formado por los rayos $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$, y por la *propiedad* de la sección 1.6 $\overrightarrow{OA}$ es bisectriz exterior del ángulo formado por los rayos $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$.

■

2.6 POTENCIA DE UN PUNTO CON RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA.

Definición. *Potencia de un punto con respecto a una circunferencia.*

Es el producto constante de las medidas de los segmentos de cualquier secante trazada desde el punto, comprendidos entre dicho punto y las intersecciones de la secante con la circunferencia.

En la $figura$ 101, la potencia de P con respecto a la circunferencia es:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PM \cdot PN = k.$$

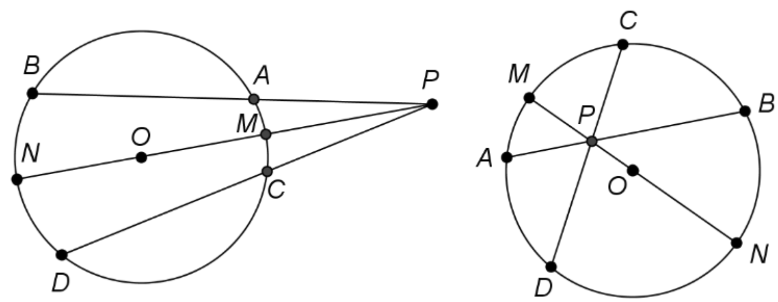


Figura 101

Teorema XXIX. ≪*Si por un punto se trazan rectas secantes a una circunferencia, el producto de las medidas de un segmento secante por su segmento externo es igual al producto de las medidas del otro segmento secante por su segmento externo*.≫

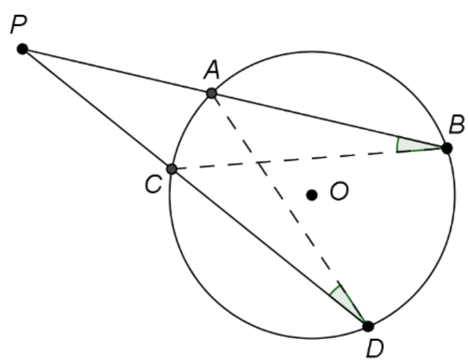


Figura 102

Es decir; si $\overline{PAB}$ y $\overline{PCD}$ ($figura\ 102$), son secantes de la circunferencia (O), entonces $PB \cdot PA\ = PD \cdot PC$.

Demostración:

Por hipótesis se tiene que $\overline{PAB}$ y $\overline{PCD}$ son secantes de (O). Si se traza $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. Los ángulos en D y en B subtienden el arco $\widehat{AC}$, luego resulta que ΔPBC y ΔPDA son semejantes (*primer criterio de semejanza*), por tanto

$$\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA} \Longrightarrow PB \cdot PA \ = \ PC \cdot PD$$

■

Teorema XXX. *≪Si dos cuerdas se intersecan en un punto interior de una circunferencia, entonces el producto de las medidas de los segmentos determinados en una de ellas es igual al producto de las medidas de los otros dos segmentos determinadas en la otra secante.≫* ($Figura\ 103$)

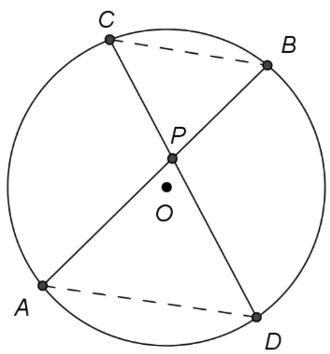


Figura 103

Demostración:

Si se trazan los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$. Se tiene que $\Delta APD \sim \Delta CPB$ (*primer criterio de semejanza)*, así; se tiene que el $\angle D \cong \angle B$ y $\angle APD \ \cong \ \angle CPB$.

Por tanto

$$\frac{AP}{CP} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow AP \cdot PB = PC \cdot PD.$$

■

Teorema XXXI. ≪*La potencia de un punto con respecto a una circunferencia es igual a la diferencia entre el cuadrado de su distancia al centro de la circunferencia y el cuadrado del radio*.≫

Es decir; dadas las secantes en $Figura\ 104$, $PO = d$, $OM = r$, entonces

$$Potencia = d^2 - r^2 = PM \cdot PN$$

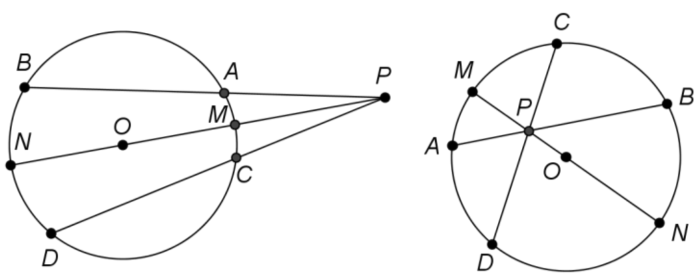


Figura 104

Demostración:

Como las secantes trazadas son arbitrarias entonces se elige como una de ellas la secante que pasa por el centro de la circunferencia. Si se designa por d la distancia de un punto P al centro y por r el radio de la circunferencia, se obtiene:

$$PM \cdot PN = (d - r) \cdot (d + r) = potencia.$$

■

Del teorema de la potencia se tienen las siguientes **observaciones**.

a. Si el punto P es exterior a la circunferencia ($Figura\ 104$), $d > r$ y $d^2 > r^2$, luego $d^2 - r^2 > 0$ y la potencia es positiva.
b. Si el punto P esta sobre la circunferencia, $d = r$ y $d^2 - r^2 = 0$ y la potencia es nula.

c. Si el punto P es interior a la circunferencia ($Figura$ 104), $d < r$ y $d^2 - r^2 < 0$ y la potencia es negativa.

Teorema XXXII. ≪*Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la medida del segmento tangente es media proporcional entre todo el segmento secante y su segmento externo.*≫ ($Figura$ 105).

Es decir; si $\overrightarrow{PT}$ es tangente a (O) y $\overline{PAB}$ secante a (O) entonces, $PT^2 = PB \cdot PA$

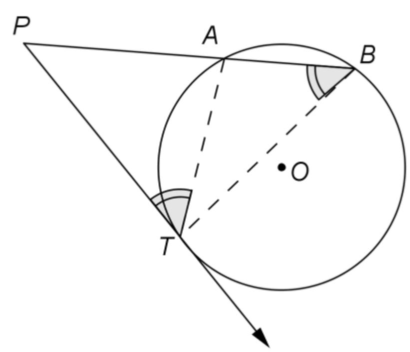


Figura 105

Demostración:

Se traza $\overline{BT}$ y $\overline{AT}$, se observa que $\angle PTA \cong \angle B$, por subtender el mismo arco y $\angle P$ es un ángulo común, así; $\Delta PBT \sim \Delta PTA$ (*primer criterio de semejanza*), por tanto:

$$\frac{PB}{PT} = \frac{PT}{PA} \Longrightarrow PT^2 = PA \cdot PB$$

■

Corolario 1. La potencia de un punto exterior a una circunferencia es igual al cuadrado del segmento tangente trazado desde el mismo punto:

$$Potencia = PA \cdot PB = PT^2 .$$

Teorema XXXIII. ≪*La tangente* l *a la circunferencia circunscrita de un* ΔABC *a través de un vértice (*$Figura$ 106*) cumple que*

$$\frac{LB}{LC} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Donde el punto L *es el intersecto de* l *con la recta que contiene el lado opuesto del vértice considerado.*≫

Demostración:

Sea $\overline{AL}$ el segmento de la tangente l a la circunferencia en el vértice de ΔABC, y $\overline{LB}$ el segmento determinado por L y B de ΔABC formándose el ΔALB y ΔALC.

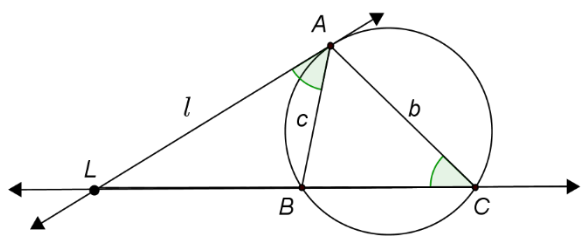


Figura 106

Entonces el $\angle LAB$ y $\angle C$ son congruentes, ya que subtienden el mismo arco, además tienen el mismo ángulo $\angle L$ en común, de aquí resulta que el ΔALB y ΔALC son semejantes; entonces

$$\frac{LB}{AL} = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \frac{LB^2}{AL^2} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Ahora $AL^2 = LB \cdot LC$ por el teorema anterior; entonces

$$\frac{LB^2}{LB \cdot LC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$\frac{LB}{LC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2}.$$

■

2.6.1 Eje radical de dos circunferencias.

Definición. *Eje radical de dos circunferencias*.

Es el conjunto de puntos que tienen igual potencia con respecto a dichas circunferencias ($Figura\ 107$).

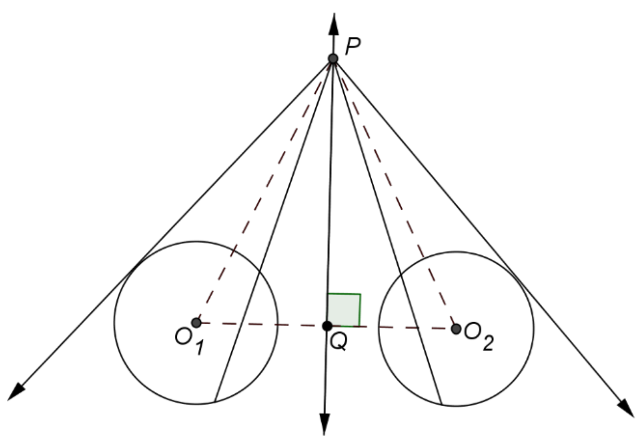


Figura 107

Observaciones.

1. El eje radical es perpendicular al segmento determinado por los centros de las circunferencias.

$\overleftrightarrow{PQ}$ en $figura\ 107$.

2. El eje radical de dos circunferencias tangentes es la tangente común en el punto de tangencia.

3. El eje radical de dos circunferencias secantes es la cuerda común.

Teorema XXXIV. ≪*Los ejes radicales de tres circunferencias, con centros no colineales, tomadas en pares son concurrentes.*≫

Demostración:

Si el eje radical de las circunferencias (A), (B) intersecta el eje radical de las circunferencias (A), (C) en el punto R y $R_a,\ R_b, R_c$ son potencias de R para (A), (B), (C) respectivamente, tenemos:

$$R_a = R_b\ , \qquad R_a = R_c \Longrightarrow \ R_b = R_c\ ,$$

Es decir, el punto R se encuentra en el eje radical de las circunferencias (B) y (C), por lo tanto los ejes radicales de (A), (B), (A), (C) y (B), (C) concurren en el punto R.

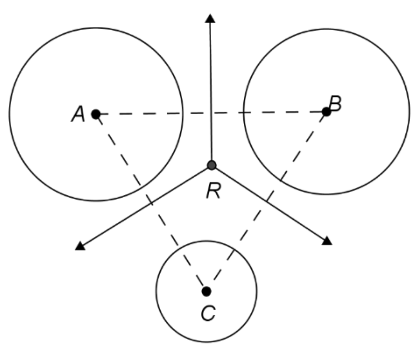


Figura 108

■

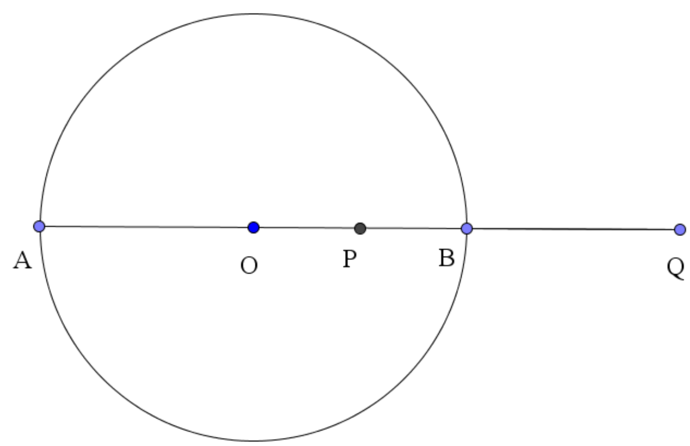
2.7 PUNTOS INVERSOS EN UNA CIRCUNFERENCIA.

Definición. *Puntos inversos.*

Dos puntos P y Q colineales con el centro de una circunferencia (O) ubicados en un mismo semiplano con respecto a la recta que contiene a un diámetro, se dirán puntos inversos, si el producto de sus distancias al centro de (O) es igual al cuadrado del radio.

En $figura$ 109, P y Q son inverso, es decir;

$$OP \cdot OQ = AO^2$$



$Figura$ 109

Observación.

1. Si un punto se toma en la circunferencia, su inverso coincide con el punto considerado (B en $figura$ 109).
2. Si un punto se toma exterior a la circunferencia su inverso se encuentra en el interior, y si el punto es interior a la circunferencia su inverso es exterior (P, Q en $figura$ 109).

Teorema XXXV. ≪*Dos puntos inversos dividen el diámetro correspondiente armónicamente. El recíproco también se cumple*.≫

Demostración:

"⇒"

Sea P, Q dos puntos inversos de la circunferencia (0) ($Figura$ 109) y A, B los extremos del diámetro que contiene a P, y en su prolongación a Q.

Por hipótesis se tiene que $OP \cdot OQ = OB^2$; por lo tanto por *teorema* XXVI de los puntos armónicos $(ABPQ) = -1$.

"⇐"

Si $(ABPQ) = -1$, aplicando el recíproco de *teorema* XXVI se tiene que

$OP \cdot OQ = OB^2$; por lo tanto, los puntos P, Q son inversos con respecto a la circunferencia dada.

∎

2.8 CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES.

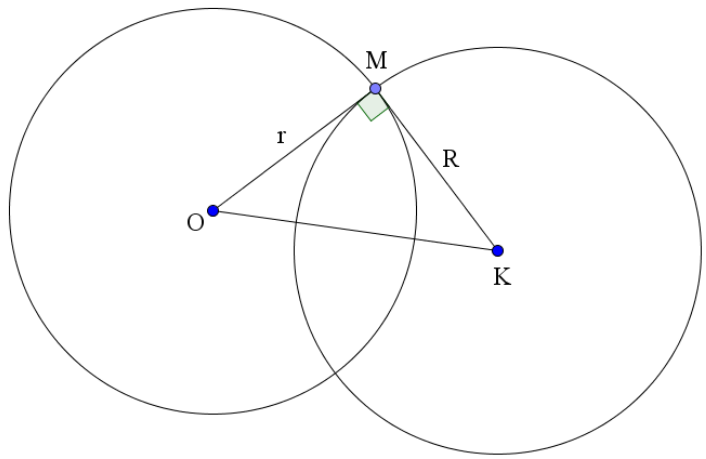
Definición. *Circunferencias ortogonales.*

Son dos circunferencias cuyo cuadrado de la longitud del segmento que une los centros es igual a la suma de los cuadrados de sus radios.

Teorema XXXVI. ≪*En dos circunferencias ortogonales los dos radios que pasan a través de un punto común a las dos circunferencias forman un ángulo recto. El recíproco también se cumple*.≫

Demostración:

"⟹"



$Figura$ 110

Sea (O) y (K) dos circunferencias ortogonales ($Figura$ 110) y r, R los radios respectivos, por definición se tiene que $OK^2 = R^2 + r^2$, por lo tanto por el recíproco del teorema de Pitágoras el triángulo es rectángulo, de esta forma el ángulo formado por los radios es recto.

"⟸"

Considérese las circunferencias (O), (K) en $figura$ 110, y r, R los radios respectivos que pasan a través de un punto común M, tal que $\measuredangle OMK = 90°$ por hipótesis, así por el teorema de Pitágoras el triángulo ΔOMK es triángulo rectángulo por lo tanto

$OK^2 = R^2 + r^2$.

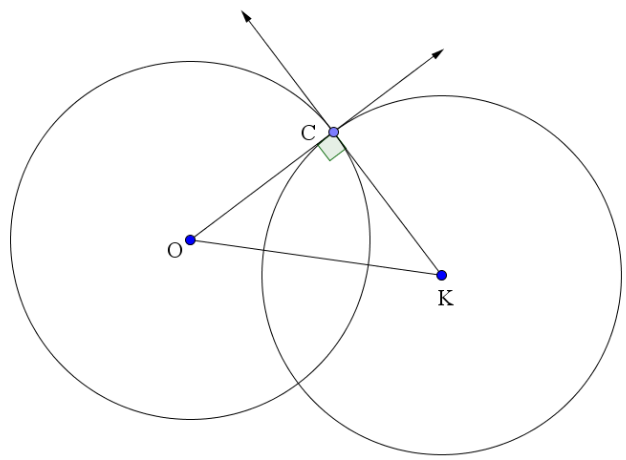
■

Teorema XXXVII. ≪*Si dos circunferencias son ortogonales, el radio de una circunferencia que pasa a través de un punto común a las dos circunferencias es tangente a la segunda circunferencia. El recíproco también se cumple.*≫

Demostración:

"⇒"

Sea C un punto común a las dos circunferencias ortogonales (O), (K). Por *teorema* XXXVI ("⇒"), los radios de (O) y (K) forman ángulo recto pasando a través del punto común C. Si se traza una tangente a (K) por C ($Figura\ 111$) el radio $\overline{KC}$ de (K) es perpendicular a la tangente (por *teorema* XIX), de donde se verifica que la tangente a (K) en C coincide con el radio $\overline{OC}$ de (O).



$Figura\ 111$

"⇐"

Los dos radios pasan por un punto común C considerado, sea $\overline{OC}$ tangente a (K) en C, por lo que el radio $\overline{KC}$ es perpendicular a la tangente por C de (K), así $\measuredangle OCK = 90°$; por lo tanto, las circunferencias son ortogonales (por *teorema* XXXVI "⇐").

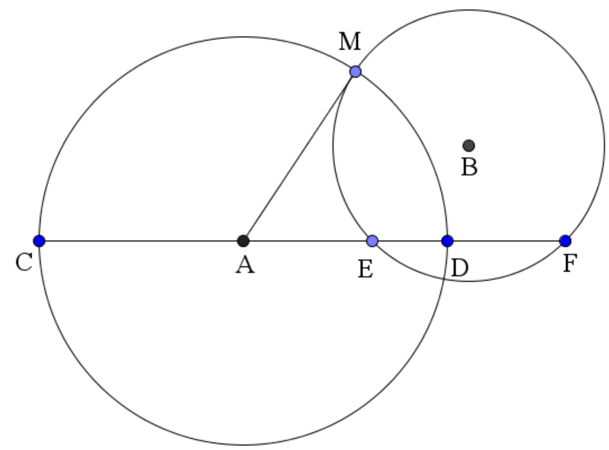
■

Teorema XXXVIII. ≪*Si dos circunferencias son ortogonales, cualesquiera dos puntos de una de ellas colineal con el centro de la segunda circunferencia son inversos para esta segunda circunferencia. El recíproco también se cumple*.≫

Demostración:

"⇒"

Sea (A), (B) dos circunferencias ortogonales ($Figura$ 112), sea E, F dos puntos de (B) colineales con el centro de (A), y sean C, D, los extremos del diámetro de (A), si M es un punto común para (A) y (B) tenemos $AM^2 = AE \cdot AF$ (*teorema* XXXII). Pero $AM = AC = AD$; así, $AC^2 = AE \cdot AF$ por lo tanto, por *teorema* XXVI $(CDEF) = -1$, por lo que E, F son puntos inversos de (A) (por *teorema XXXV*).



$Figura$ 112

"⇐"

Por hipótesis, los dos puntos E, F de (B) son colineales con el centro de (A) y son inversos con respecto a (A), por lo tanto: $AC^2 = AE \cdot AF$; por consiguiente para M un punto común a las dos circunferencias, $AM^2 = AE \cdot AF$. De este modo, $\overrightarrow{AM}$ tiene que ser tangente a (A) (*teorema* XXXII); por lo tanto, las circunferencias son ortogonales (por *teorema* XXXVII).

■

2.9 POLOS Y POLARES CON RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA.

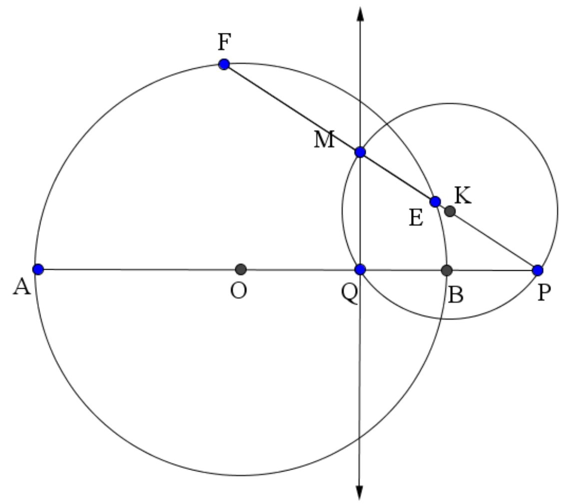
2.9.1 Rectas polares y polos.

Teorema XXXIX. ≪*El conjugado armónico de un punto fijo con respecto a un par de puntos que se encuentran en la circunferencia dada y que son colineales con el punto fijo, describe una línea recta perpendicular al diámetro*.≫.

Demostración:

Caso 1: Punto fijo es exterior a la circunferencia.

Sea la circunferencia de centro (O) dada en la $figura$ 113 y P un punto fijo dado que se encuentra en la prolongación de $\overline{AB}$, se eligen dos puntos E, F que se encuentran sobre (O) y que son colineales con P. Sea M el conjugado armónico de P con respecto a E, F y Q el pie de la perpendicular sobre el diámetro $\overline{AB}$ que pase por M.

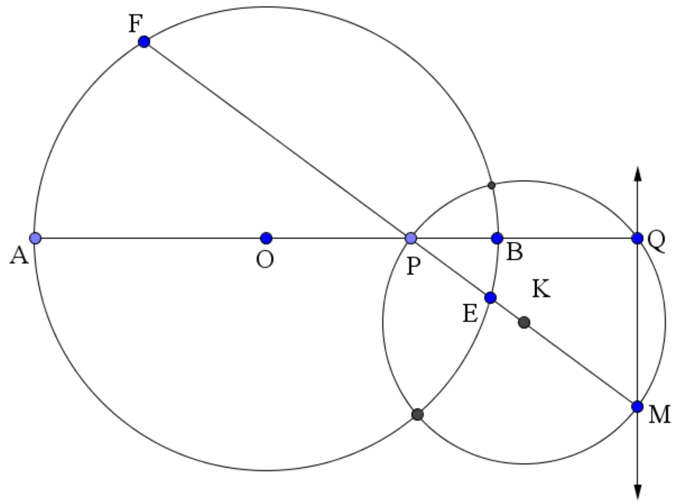


$Figura$ 113

Se dibuja la circunferencia (K) que pasa por los puntos P, M y Q (por *teorema* XXI por tres puntos pasa una y sólo una circunferencia), (K) tiene por diámetro a $\overline{PM}$ ya que $\overleftrightarrow{MQ}$ es perpendicular a $\overline{AB}$, por hipótesis los puntos E, F dividen $\overline{PM}$ armónicamente de este modo E, F son inversos con respecto a (K), por lo tanto las circunferencias (0) y (K) son ortogonales (*teorema* XXXVIII). En consecuencia, por el *teorema* XXXVIII los puntos P, Q en la circunferencia (K) que están en $\overline{AB}$ son inversos con respecto a (0), y como todo inverso es único el punto Q es fijo, además es un conjugado armónico de P. Por lo que el conjugado armónico M de P para E, F siempre generará una recta que pase por el punto Q, lo que demuestra la proposición.

Caso 2: punto fijo es interior a la circunferencia.

Análogamente, si el punto P es interior a la circunferencia tal como lo muestra la $figura$ 114.



$Figura\ 114$

■

Definición. *Recta polar con respecto a una circunferencia.*

Es la recta perpendicular al diámetro que pasa a través del punto inverso de un punto dado ($\overleftrightarrow{MQ}$ en $figura$ 113 y $figura$ 114).

Definición. *Polo de una recta.*

Es el punto inverso del pie de la perpendicular al diámetro que es colineal con el centro de la circunferencia (P en $figura$ 113 y $figura$ 114).

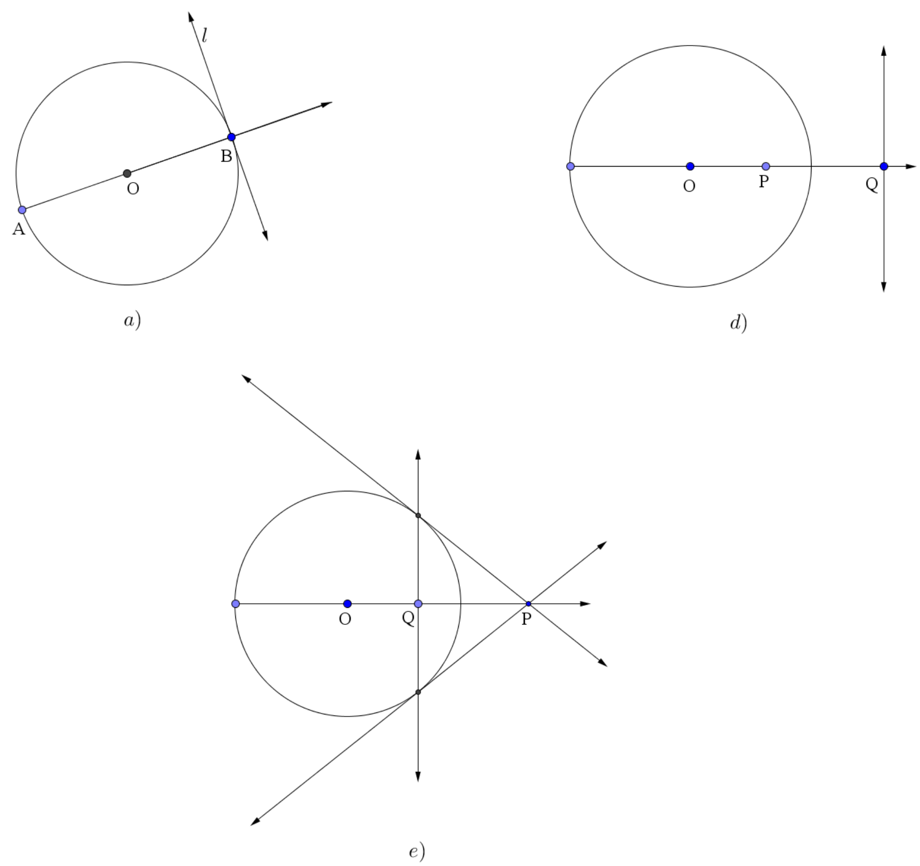
Observaciones.

a) La polar de un punto sobre la circunferencia es la tangente a la circunferencia en ese punto (l en $figura\ 115.a$), y el polo es su punto de tangencia (B en $figura\ 115.a$).
b) Cada punto en el plano tiene una polar con respecto una circunferencia, excepto el centro de la circunferencia.

c) Cada recta en el plano tiene un polo con respecto a una circunferencia, a excepción de las rectas que pasan a través del centro de la circunferencia.

d) Si el polo es un punto interior a la circunferencia, la recta polar no corta la circunferencia ($Figura\ 115.d$).

e) Si el polo se encuentra fuera de la circunferencia, su recta polar coincide con la recta que une los puntos de tangencia de las tangentes desde el polo a la circunferencia ($Figura\ 115.e$).



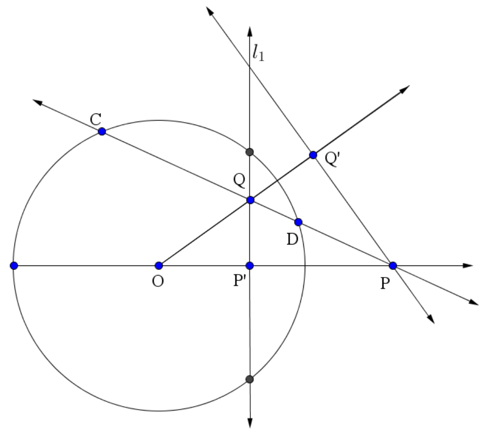
$Figura\ 115$

Teorema XL. *≪Si la recta polar del punto P pasa por el punto Q, la recta polar de Q pasa por el punto P ≫.*

Demostración:

Caso 1. El punto Q de la polar de P es interior a la circunferencia.

Sea l_1 la polar de P y Q un punto de l_1 ($Figura$ 116), si la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ toca la circunferencia en los puntos C, D, entonces $(PQCD) = -1$ (*teorema* XXXIX); por lo que P es el conjugado armónico de Q para C, D, entonces el polar de Q pasará a través de P.

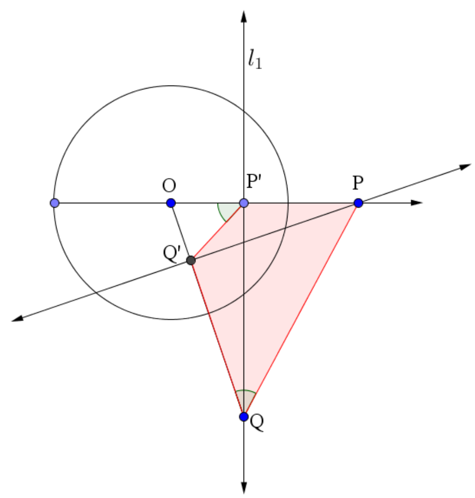


$Figura$ 116

Caso 2. El punto Q de la polar de P es exterior a la circunferencia ($Figura$ 117).

Sea l_1 la polar de P, Q un punto de l_1 exterior a (O) y P', Q' los polos respectivos. Ya que

$OP \cdot OP' = R^2$ y $OQ \cdot OQ' = R^2$, entonces $\Delta OQ'P' \sim \Delta OPQ$, por lo tanto los puntos P, Q y sus inversos P', Q' son cíclicos, así; $\angle PP'Q$, $\angle PQ'Q$ del cuadrilátero cíclico $PQQ'P'$ son iguales.



$Figura$ 117

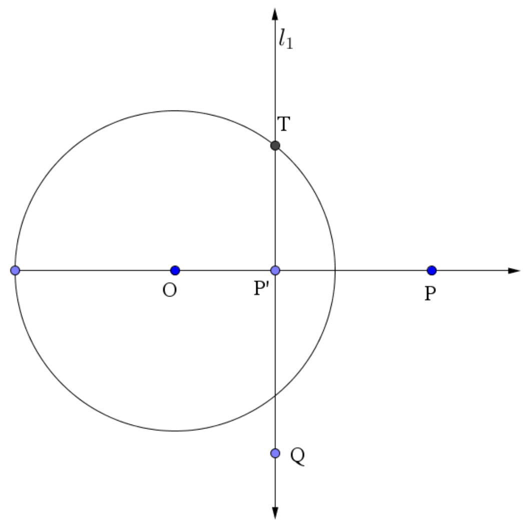
Por hipótesis $\overleftrightarrow{QP'}$ es la polar de P, ya que pasa por Q y a través de P' el polo de P de esto se tiene que $\measuredangle PP'Q = 90°$, por lo tanto $\measuredangle PQ'Q = 90°$, . Así, la recta $\overleftrightarrow{PQ'}$ que pasa a través de Q' el inverso de Q es perpendicular a $\overline{OQ}$, es decir, $\overleftrightarrow{PQ'}$ es la recta polar de Q que pasa a través de P.

■

2.9.2 Puntos y rectas conjugadas.

Definición. *Puntos conjugados con respecto a una circunferencia.*

Dos puntos tales que la recta polar de un punto pasa a través del otro punto (P, Q en $figura$ 118).



$Figura$ 118

Observaciones.

a) Un punto dado tiene un número infinito de puntos conjugados, esto es, todos los puntos de su polar (T, Q en $figura$ 118 son puntos conjugados de P).
b) Si dos puntos conjugados son colineales con el centro de la circunferencia, ellos son puntos inversos para la circunferencia (P', P en $figura$ 118).

Teorema XLI. ≪*Si el polo de la recta l_1, está en la recta l_2, el polo de la recta l_2 se encuentra en la recta l_1* ≫.

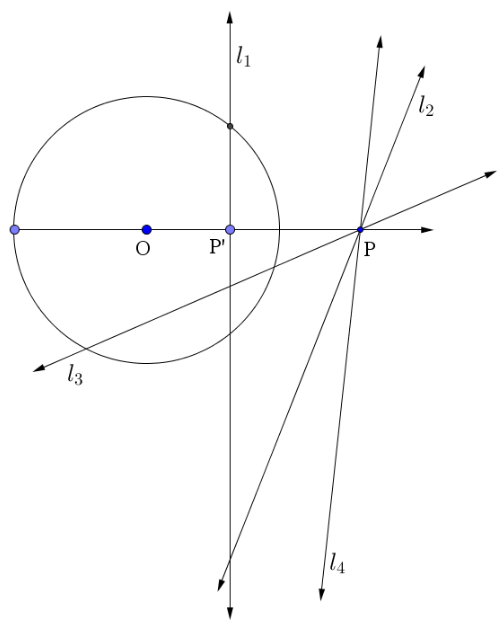
Demostración:

Sea P, Q los polos de las rectas l_1, l_2 respectivamente. Por hipótesis P se encuentra en l_2 , es decir; la polar l_2 de Q pasa a través de P. Por lo tanto, por el *teorema XL*, la polar l_1 de P pasa por Q.

■

Definición. *Rectas conjugadas de una circunferencia.*

Son dos rectas de tal manera que el polo de una se encuentra en la otra (l_1 y l_2 en $figura$ 119).



$Figura$ 119

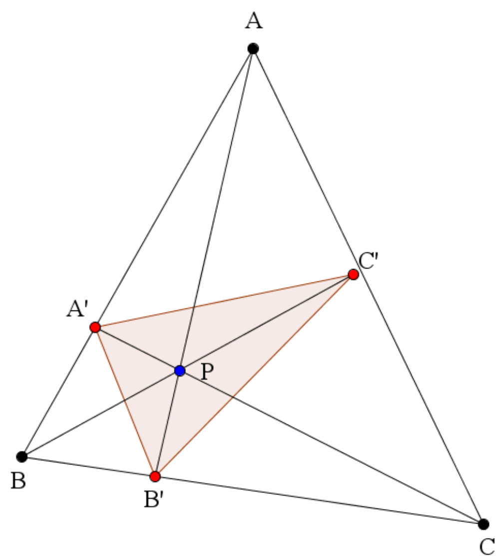
Observación.

Una recta dada tiene un número infinito de rectas conjugadas, es decir, todas las rectas a través del polo de la recta dada (l_2, l_3, l_4 en $figura$ 119 son rectas conjugadas para l_1).

2.10 TRIÁNGULO CEVIANO.

Definición. *Triángulo ceviano.*

Para cada punto P interior a ΔABC, las cevianas $\overline{AB'}$, $\overline{BC'}$, $\overline{CA'}$ que pasan por P cortan a los lados del triángulo en A', B', C'. El triángulo $A'B'C'$, es el triángulo ceviano de P ($Figura$ 120).



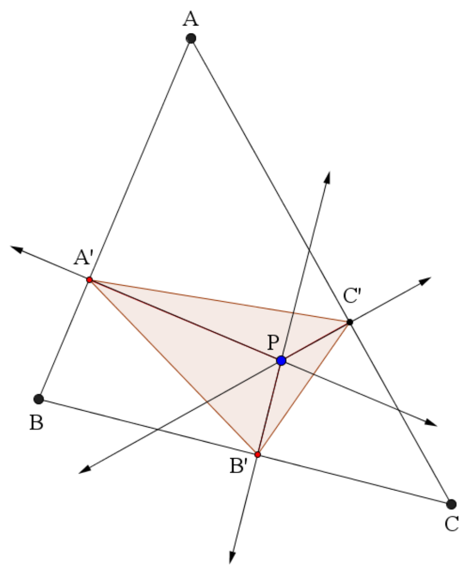
$Figura$ 120

2.11 TRIÁNGULO PEDAL.

El triángulo ceviano mencionado en *2.10* es un tipo más general de un triángulo asociado dado un punto P arbitrario interior a dicho triángulo. El triángulo pedal sugiere una característica especial para obtener los vértices del nuevo triángulo que resulte como lo muestra la definición a continuación.

Definición. *Triángulo pedal.*

Sea P cualquier punto interior del triángulo ABC dado, las perpendiculares a los tres lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ que pasan por P y tienen pies A', B', C' son los vértices de un triángulo $A'B'C'$ llamado triángulo pedal de ABC para el "punto pedal" P ($\Delta A'B'C'$ en $figura$ 121).

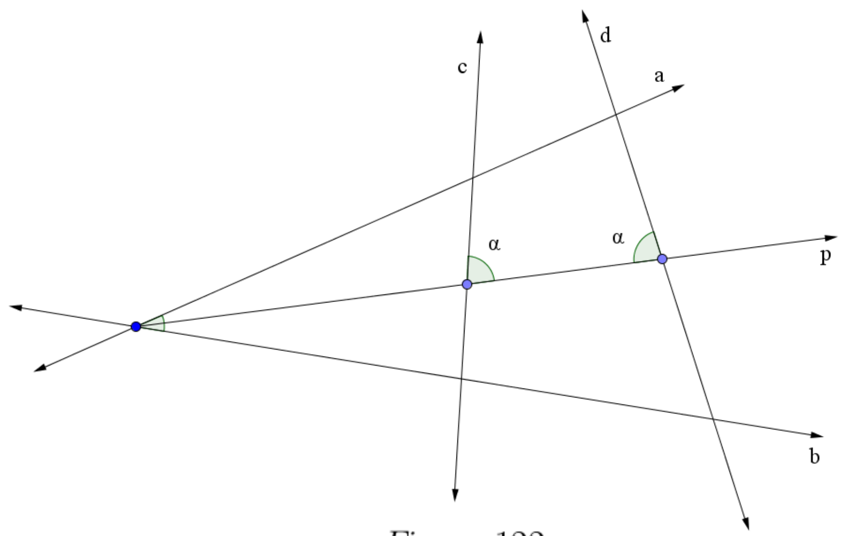


$Figura$ 121

2.12 RECTAS ANTIPARALELAS.

Definición. *Rectas antiparalelas.*

Dadas dos rectas a y b no paralelas y p la bisectriz del ángulo formado por a y b. Las rectas c y d son antiparalelas con respecto a las rectas a y b si los ángulos que c y d forman con la bisectriz son iguales (α en $figura$ 122).



$Figura\ 122$

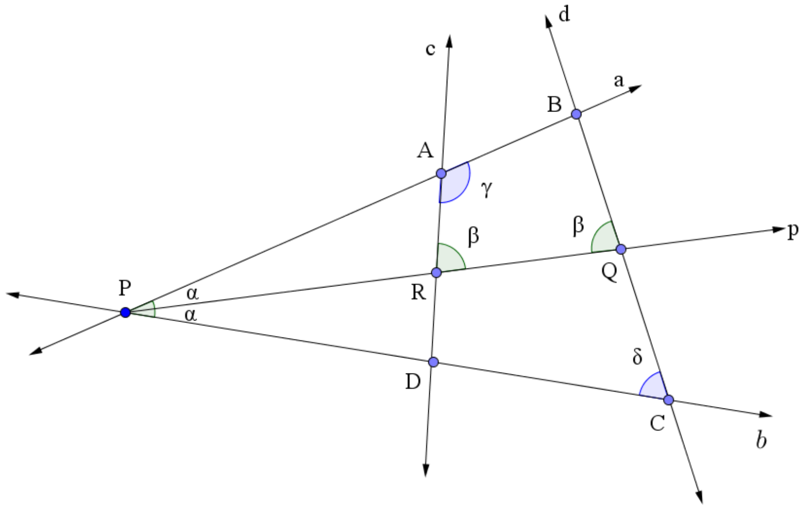
Teorema XLII. *≪Si las rectas c y d son antiparalelas con respecto a las rectas a y b, y si A, B, C y D son los puntos de intersección entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.≫*

Demostración.

Caso 1.

Sean A, B C, D, P, R y Q puntos de intersección como en la $figura$ 123. Haciendo $\alpha = \measuredangle APR$ $\alpha = \measuredangle CPR$ $\beta = \measuredangle ARQ$, $\beta = \measuredangle BQR$ $\gamma = \measuredangle BAD$ $\delta = \measuredangle BCD$. Para demostrar este caso, $\gamma + \delta = 180°$.

Como $\measuredangle PQC = 180° - \beta$ y $\alpha + \delta + \measuredangle PQC = 180°$, puesto que son los ángulos interiores del triángulo ΔPQC, entonces $\delta = 180° - \alpha - \measuredangle PQC = \beta - \alpha$. Consideremos ahora el triángulo ΔPAR. Como $\measuredangle PRA = 180° - \beta$ y $\alpha + \measuredangle PRA + \measuredangle PAR = 180°$ por ser los ángulos interiores de triángulo ΔPAR, se tiene $\measuredangle PAR = 180° - \alpha - \measuredangle PRA = \beta - \alpha$ y como $\gamma = 180° - \measuredangle PAR = 180° - \beta + \alpha$, entonces $\gamma + \delta = (180° - \beta + \alpha) + (\beta - \alpha) = 180°$. Así son suplementarios. Además $\gamma + \delta + \measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 360°$, por lo que $\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 180°$. De esta forma se obtiene un cuadrilátero convexo con ángulos opuestos suplementarios; y por lo tanto $ABCD$ es inscriptible.

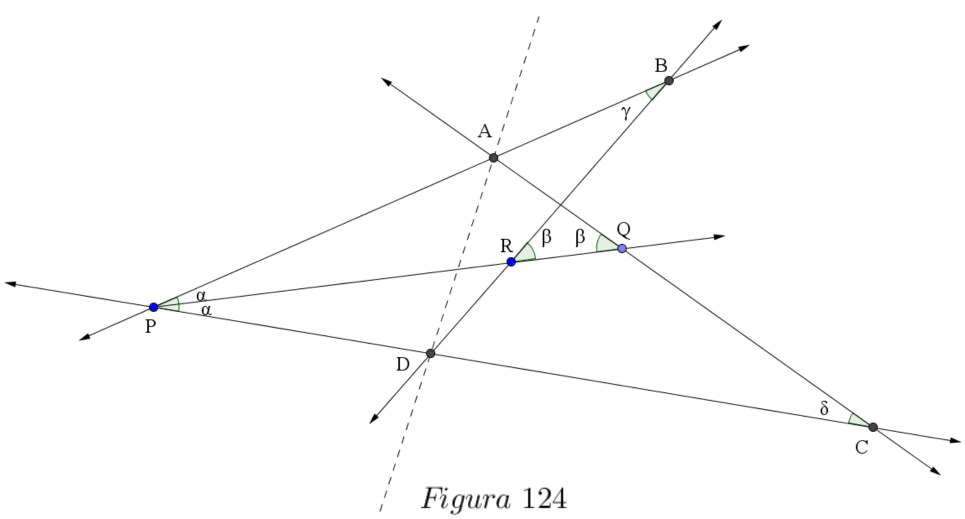


$Figura$ 123

Caso 2.

Sean A, B, C, D, P, R y Q como en la $figura$ 124, y $\alpha = \measuredangle APR = \measuredangle DPR$, $\beta = \measuredangle AQR = \measuredangle BRQ$, $\gamma = \measuredangle ACD$ y $\delta = \measuredangle ABD$. Para este caso se traza la recta que pasa por el segmento $\overline{AD}$ para que los puntos B y C queden en el mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AD}$. Se demostrara que $\delta = \gamma$.

Los ángulos interiores del triángulo ΔPQC suman $180°$, por lo tanto $\beta = \alpha + \delta$. Y por otro lado, considerando el triángulo ΔPRB, se tiene que $\beta = \alpha + \gamma$. Lo anterior implica que $\gamma = \ \beta - \alpha = \ \delta$. Por lo tanto el cuadrilátero $ABCD$ es inscriptible.



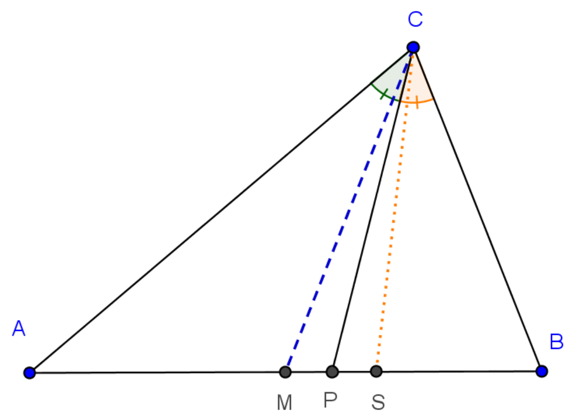
$Figura$ 124

■

2.13 SIMEDIANAS.

Definición. *Simediana.*

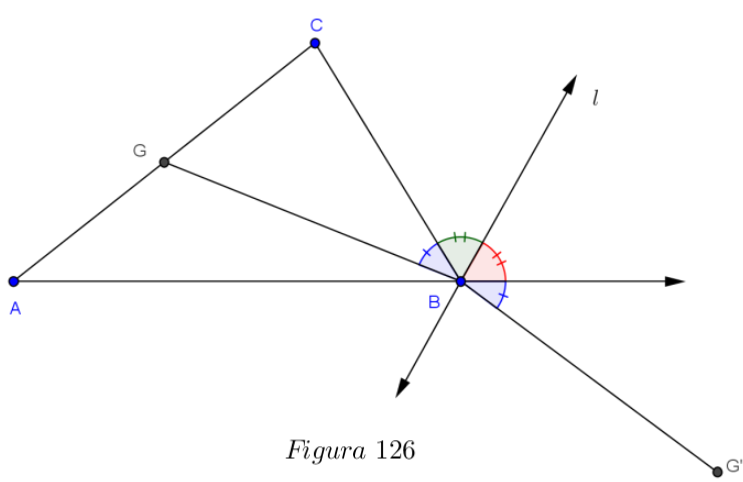
Es la recta simétrica de una mediana de un triángulo respecto a una bisectriz que pasa por el mismo vértice ($\overline{CS}$ en $figura$ 125).



$Figura$ 125

En un triángulo hay tres simedianas interiores.

Observe que puede obtenerse la simediana respecto a la bisectriz exterior trazada desde el mismo vértice ($\overline{BG'}$ en $figura$ 126).

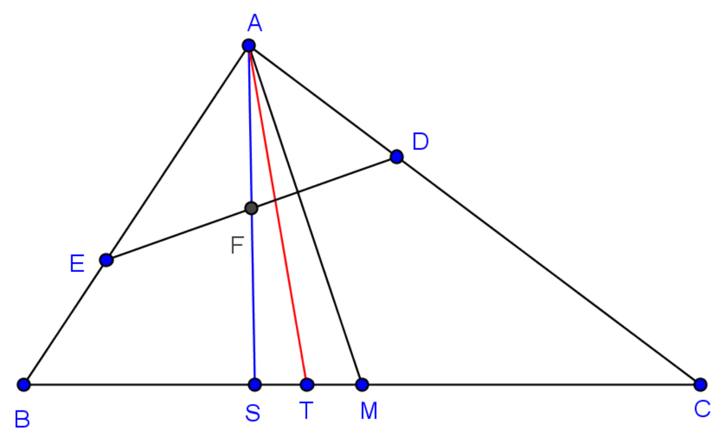


$Figura$ 126

Teorema XLIII. ≪*La simediana con respecto a un ángulo es el lugar geométrico de los puntos medios de las antiparalelas del lado opuesto a dicho ángulo.*≫

Demostración:

La recta que contiene a $\overline{ED}$ es antiparalela respecto del lado $\overline{BC}$ en el triángulo ΔABC ($Figura$ 127). Luego $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ son semejantes.



$Figura$ 127

Si ahora se toman los puntos medios M de $\overline{BC}$ y F de $\overline{DE}$ se construyen ΔAFE y ΔACM que son semejantes entre sí, ya que $\angle C \cong \angle E$ y la razón entre los lados que lo determinan: $AE/AC = FE/CM$, ya que $CM = \frac{BC}{2}$ y $FE = \frac{ED}{2}$.

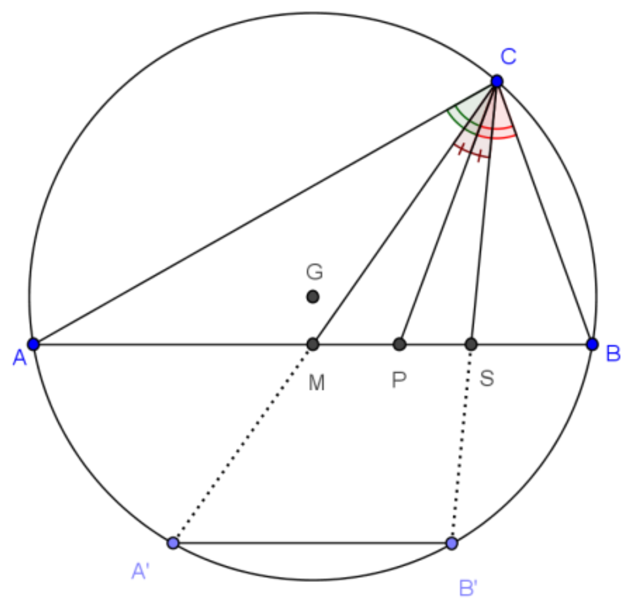
Por tanto, los ángulos $\angle EAF$ y $\angle MAC$ son congruentes. Así; el punto F, punto medio de la antiparalela a $\overline{BC}$ de ΔABC pertenece a la simediana de $\angle A$.

■

Teorema XLIV. ≪*Las intercepciones, sobre la circunferencia circunscrita de un triángulo, de la prolongación de una mediana y la simediana correspondiente determinan una recta paralela al lado del triángulo opuesto al vértice considerado.*≫

Demostración:

El $\overset{\frown}{AA'B'}$ es equivalente a $\overset{\frown}{A'B'B}$ ($Figura$ 128) formados por las intercepciones de la circunferencia circunscrita de ΔABC con las prolongaciones de la mediana $\overline{CM}$ y la simediana $\overline{CS}$ y los extremos de $\overline{AB}$, se deduce que $\measuredangle BAA' = \measuredangle ABB'$ y dado que $\overset{\frown}{AA'} \cong \overset{\frown}{BB'}$ puesto que $AA' = BB'$, se tiene que el cuadrilátero $AA'B'B$ es un trapecio isósceles (**Observación 1.10.9**) de donde $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$.



$Figura$ 128

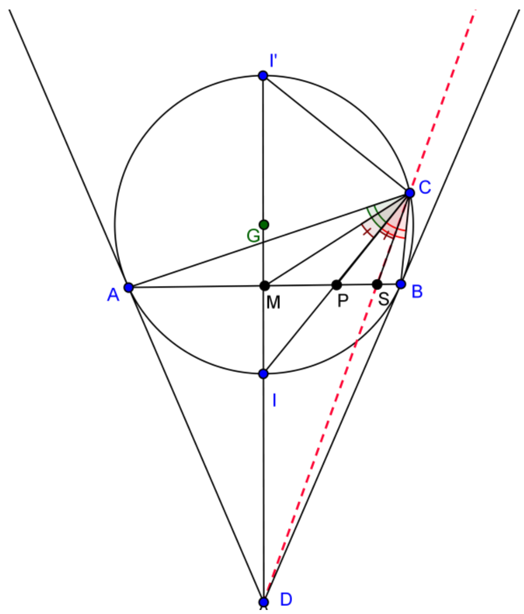
■

La proposición anterior proporciona una construcción simple de las simedianas de un triángulo.

Teorema XLV. ≪*La simediana de un triángulo pasa a través del punto de intersección de las tangentes a la circunferencia circunscrita que tienen por puntos de tangencia a los otros dos vértices del triángulo.*≫ (D en $Figura$ 129)

Demostración:

El punto de intersección D de las tangentes $\overline{DB}$ y $\overline{DA}$ a la circunferencia circunscrita (G) de ΔABC en A y B es el polo de $\overleftrightarrow{AB}$ para (G) (según *observación* b) y e) en sección *2.9.1*); por lo tanto, la recta que contiene al diámetro $\overline{II'}$ de (G) ($Figura$ 129) que pasa por D es la mediatriz de $\overline{AB}$, por *teorema* XXXIX. Ya que M y D dividen $\overline{II'}$ armónicamente se tiene que $(DMII') = -1$ (*teorema* XXXV), y por lo tanto $C(DMII') = -1$. Ahora $\angle ICI'$ es un ángulo recto; por lo tanto, $\overline{CI}$ y $\overline{CI'}$ son las bisectrices del ángulo $\angle DCM$ *Teorema* XXVIII, es decir, $\angle MCI \cong \angle ICD$.



$Figura$ 129

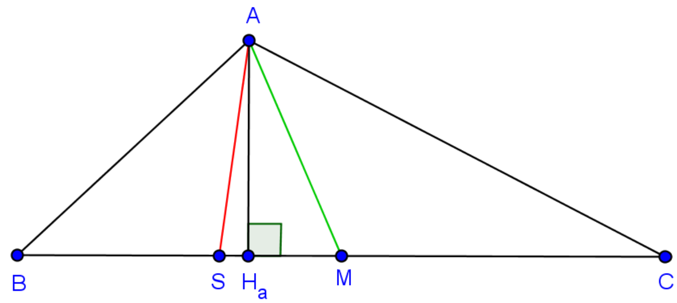
Pero $\overline{CI}$ es la bisectriz interna de $\angle C$ de ΔABC, y dado que $\overline{CM}$ es la mediana de ΔABC; por lo tanto, $\overline{CD}$ es la simediana de ΔABC trazada desde C, por definición.

■

Teorema XLVI. *≪La simediana correspondiente a un vértice de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los cuadrados de los otros dos.≫*

Demostración:

De la $figura$ 130, se tienen las siguientes relaciones:



$Figura$ 130

$$(BAM) = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot AM \cdot sen\,(\measuredangle BAM) = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot AH_a \qquad (1)$$

$$(CAS) = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot AS \cdot sen\,(\measuredangle CAS) = \frac{1}{2} \cdot SC \cdot AH_a \qquad (2)$$

$$(BAS) = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot AS \cdot sen\,(\measuredangle BAS) = \frac{1}{2} \cdot BS \cdot AH_a \qquad (3)$$

$$(MAC) = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot AM \cdot sen\,(\measuredangle MAC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot AH_a \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta las igualdades de ángulos $\angle BAM \cong \angle CAS$; $\angle BAS \cong \angle MAC$

Entonces al realizar (1)÷(4)

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot BA \cdot AM \cdot sen\,(\measuredangle BAM)}{\frac{1}{2} \cdot CA \cdot AM \cdot sen\,(\measuredangle MAC)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot AH_a}{\frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot AH_a} = 1$$

De donde:

$$\frac{BA \cdot sen\ (\measuredangle BAM)}{CA \cdot sen\ (\measuredangle MAC)} = 1 \qquad (5)$$

Al realizar (3)÷(2)

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot CA \cdot AS \cdot sen\ (\measuredangle CAS)}{\frac{1}{2} \cdot BA \cdot AS \cdot sen\ (\measuredangle BAS)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot SC \cdot AH_a}{\frac{1}{2} \cdot BS \cdot AH_a} = \frac{SC}{BS}$$

De donde:

$$\frac{SC}{BS} = \frac{CA \cdot sen\ (\measuredangle CAS)}{BA \cdot sen\ (\measuredangle BAS)} \qquad (6)$$

Realizando (6)÷(5)

$$\frac{\frac{SC}{BS}}{1} = \frac{\frac{CA \cdot sen\ (\measuredangle CAS)}{BA \cdot sen\ (\measuredangle BAS)}}{\frac{BA \cdot sen\ (\measuredangle BAM)}{CA \cdot sen\ (\measuredangle MAC)}} \Leftrightarrow \frac{SC}{BS} = \frac{CA^2}{BA^2}$$

■

Definición. *Simediana externa.*

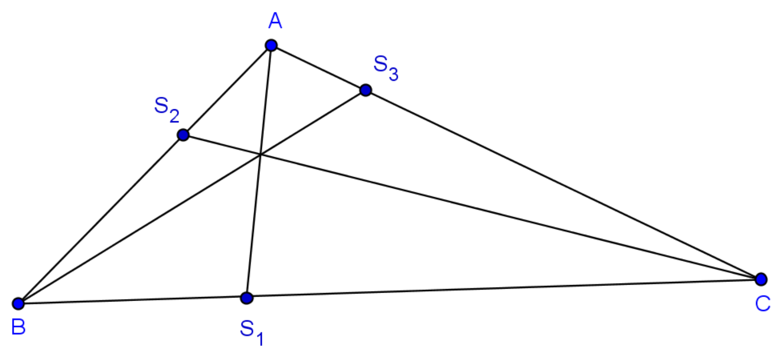
Es la tangente a la circunferencia circunscrita de un triángulo en el vértice de éste, siendo ésta la conjugada armónica de la simediana correspondiente con respecto a dicho vértice.

2.13.1 El punto simediano o punto de Lemoine.

Teorema XLVII. ≪*Las tres simedianas de un triángulo concurren*.≫

Demostración:

Se trazan las simedianas correspondientes a cada vértice de ΔABC ($Figura$ 131), éstas por *teorema* XLVI cumplen que:



$Figura$ 131

$$\frac{BS_1}{S_1C} = \frac{AB^2}{AC^2}\ ;\ \frac{CS_3}{S_3A} = \frac{BC^2}{AB^2} \text{ y } \frac{AS_2}{S_2B} = \frac{AC^2}{BC^2}.$$

Luego aplicando el teorema de Ceva se tiene:

$$\frac{BS_1}{S_1C} \cdot \frac{CS_3}{S_3A} \cdot \frac{AS_2}{S_2B} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{BC^2}{AB^2} \cdot \frac{CA^2}{BC^2} = 1$$

Por lo que las cevianas $\overline{AS_1}$, $\overline{BS_3}$ y $\overline{CS_2}$ son concurrentes.

■

Definición. *Punto Simediano.*

El punto común de las tres simedianas de un triángulo es llamado el punto simediano, o el punto de Lemoine, del triángulo. El punto es denotado usualmente por K.

Teorema XLVIII. ≪*Las distancias de un punto sobre una simediana de un triángulo a los dos lados que forman el ángulo del cual parte, son proporcionales a estos lados.*≫

Demostración:

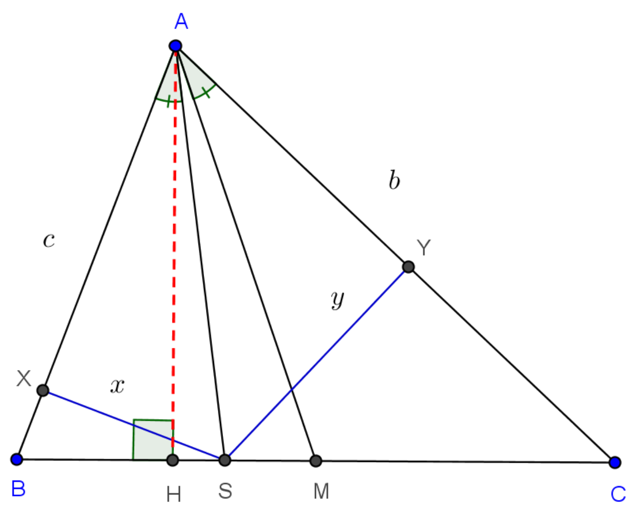
Sean x e y las distancias desde el pie de la simediana $\overline{AS}$ ($Figura$ 132) a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de ΔABC.

Dado que ΔASC y ΔASB tiene una altura común trazada desde A ($\overline{AH}$), se tiene que:

$$\frac{(ASC)}{(ASB)} = \frac{SC}{SB}$$

$$\Rightarrow \frac{(ASC)}{(ASB)} = \frac{b^2}{c^2} \text{ (\textit{Teorema} XLVI),}$$

pero $(ASC) = \frac{y \cdot b}{2}$ y $(ASB) = \frac{x \cdot c}{2}$



$Figura$ 132

Se tiene pues:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{\frac{y \cdot b}{2}}{\frac{x \cdot c}{2}} \Longrightarrow \frac{b}{c} = \frac{y}{x}.$$

Ahora las distancias desde cualquier punto de $\overline{AS}$ a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son proporcionales a x e y (por *semejanza de triángulos*); de ahí la proposición.

■

Corolario 2. Las distancias del punto de Lemoine K hacia los lados del triángulo son proporcionales a los respectivos lados, y K es el único punto, dentro del triángulo, que tiene esta propiedad.

$$\frac{x}{AB} = \frac{y}{AC} = \frac{z}{BC}.$$

Teorema XLIX. ≪*Dos antiparalelas a dos lados de un triángulo son de igual longitud, si y sólo si éstas se intersectan sobre la simediana relativa al tercer lado del triángulo*.≫

Demostración:

" $\Longrightarrow$ "

Por hipótesis se tiene que las antiparalelas a los lados del triángulo son de igual longitud.

Sean $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{FH}$ $(Figura\ 133)$ las antiparalelas a los lados $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, de ΔABC, y sea M el punto de intersección. Se tiene pues:

$$\measuredangle HFC = \measuredangle DEB = \measuredangle A$$

Entonces ΔFME es isósceles, por lo que $FM = ME$, pero $FH = DE$ de donde

$MH = MD$.

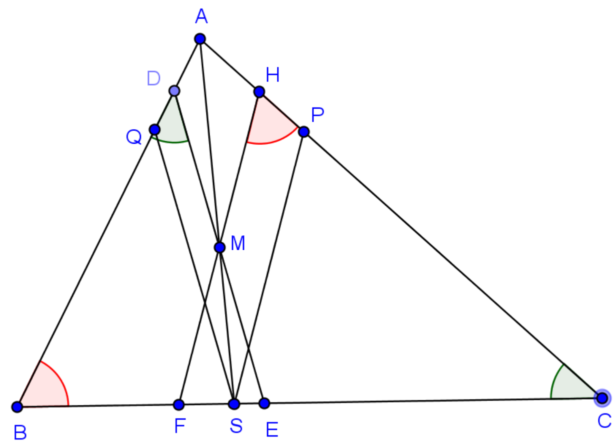


Figura 133

Sea S el intercepto de $\overline{AM}$ con $\overline{BC}$, y $\overline{SQ}$ con $\overline{SP}$ las paralelas a $\overline{DE}$ y $\overline{FH}$ que pasan por S. Se tiene pues que en los triángulo ΔAQS y ΔADM los ángulos $\angle ASQ$ y $\angle AMD$ son congruentes y comparten el ángulo $\angle SAD$, por lo que éstos son semejantes.

Análogamente para los triángulos ΔAPS y ΔAHM, se tienen las siguientes razones:

$$\frac{DM}{QS} = \frac{AM}{AS} \text{ y } \frac{HM}{PS} = \frac{AM}{AS}$$

De donde:

$$\frac{DM}{QS} = \frac{HM}{PS}$$

Pero, se tiene que $DM = HM$, por lo que $QS = PS$.

Ahora, observando que ΔBSQ y ΔCSP son semejantes a ΔABC, se tiene:

$$\frac{BS}{SQ} = \frac{c}{b}, \ \frac{SP}{SC} = \frac{c}{b};$$

Entonces, $\frac{BS}{QS} \cdot \frac{PS}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$, y dado que $QS = PS$, se tiene:

$$\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$$

Y por *teorema* XLVI, $\overline{AS}$ es la simediana relativa a $\overline{BC}$.

" $\Leftarrow$ "

La prueba se hace en sentido contrario a la de la parte anterior.

■

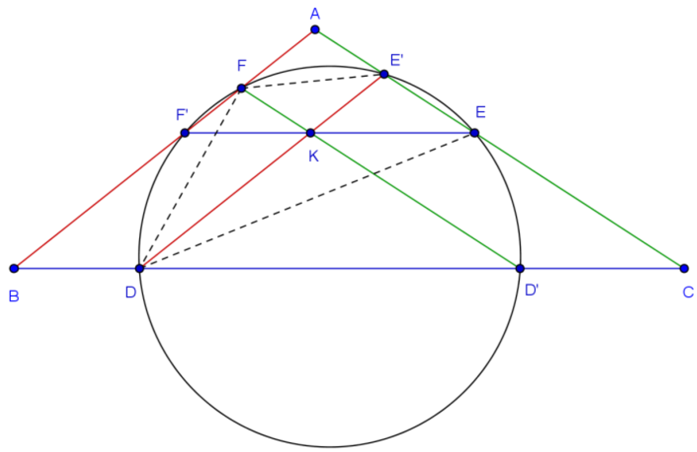
2.13.2 Las circunferencias de Lemoine.

Teorema L. ≪*Las tres paralelas a los lados de un triángulo a través del punto de Lemoine determinan sobre éstos seis puntos concíclicos.*≫

Demostración:

Sean las tres paralelas $\overleftrightarrow{EKF'}$, $\overleftrightarrow{FKD'}$ y $\overleftrightarrow{DKE'}$ a los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ respectivamente ($Figura$ 134), intersectando a éstos en los puntos D, D'; E, E' y F, F'.

Dado que $AFKE'$ es un paralelogramo, la línea $\overleftrightarrow{E'F}$ es cortada por la simediana $\overline{AK}$ y ésta es entonces antiparalela a $\overline{BC}$ por *teorema* XLIII, entonces también a $\overline{EF'}$, es decir, los cuatro puntos E, E', F y F' son concíclicos por *teorema* XLII.



$Figura\ 134$

Además $\overline{FE'}$ es antiparalelo a $\overline{DD'}$ por lo que el cuadrilátero $FE'DD'$ es cíclico.

De manera análoga, lo mismo ocurre para los grupos de puntos F, F', D y D' (ya que $\overleftrightarrow{DF'}$ es antiparalela a $\overline{AC}$) y D, D', E y E'.

Puesto que F, D' y D se encuentran en la circunferencia de E', F, D y D' y también en la circunferencia de F, F', D y D' estas circunferencias coinciden por *teorema* XXI.

Se concluye que los puntos D, D', E, E', F y F' son concíclicos.

$\blacksquare$

Definición. *Primera circunferencia de Lemoine.*

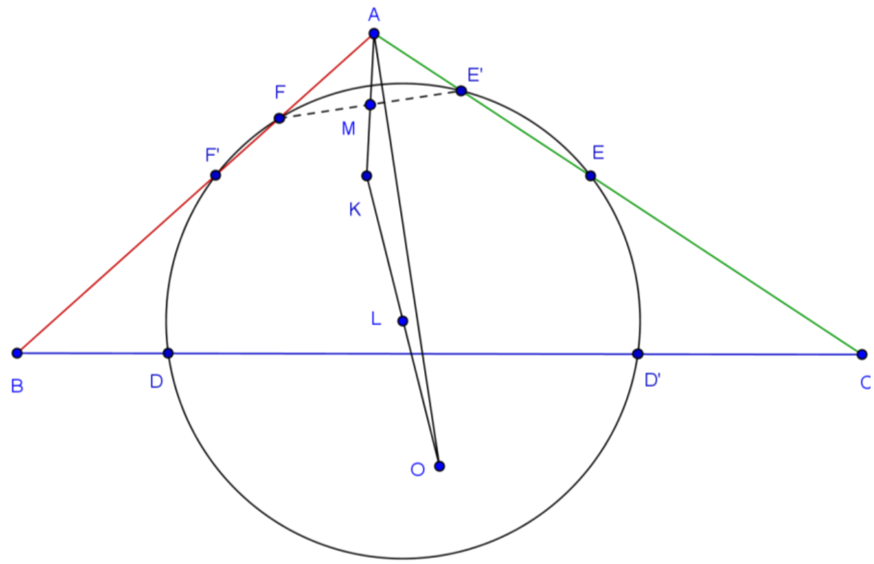
Es la circunferencia definida por los seis puntos del teorema anterior.

Las paralelas consideradas son frecuentemente llamadas las *paralelas de Lemoine*.

Teorema LI. ≪*El centro de la primera circunferencia de Lemoine de un triángulo se encuentra a la mitad de la distancia entre el circuncentro y el punto de Lemoine del triángulo.*≫

Demostración:

Sea O el circuncentro de ΔABC ($Figura\ 135$), L el punto medio de $\overline{OK}$, y M el punto medio común de $\overline{AK}$ y $\overline{E'F}$.



$Figura\ 135$

La recta $\overleftrightarrow{ML}$ formada por los puntos medios de dos lados de ΔKOA es paralela al tercer lado $\overline{OA}$, por ser base media; pero el circunradio $\overline{OA}$ es perpendicular a $\overline{E'F}$, dado que $\overline{E'F}$ es antiparalela a $\overline{BC}$; entonces $\overline{ML}$ también es perpendicular a $\overline{E'F}$ y como pasa por el punto medio M, $\overline{ML}$ se encuentra en la mediatriz de $\overline{E'F}$; y como todo punto de la mediatriz equidista de los extremos se tiene que E' y F equidistan del punto L. Similarmente las mediatrices de $\overline{DF'}$ y $\overline{D'E}$ pasan a través de L. Entonces la proposición se cumple.

■

Teorema LII. ≪*Las tres antiparalelas a los lados de un triángulo a través del punto de Lemoine del triángulo determinan sobre los respectivos pares de lados no correspondientes seis puntos contenidos en una circunferencia cuyo centro coincide con el Punto de Lemoine.*≫

Demostración:

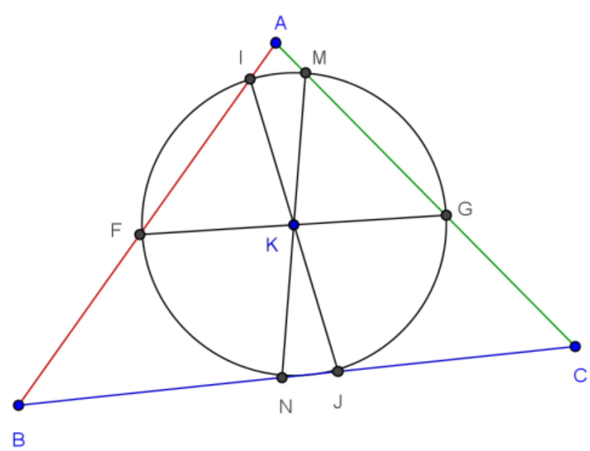
Las tres antiparalelas son iguales y son cortadas por el punto simediano K; por *teorema* XLIX, así pues K es equidistante desde los extremos de estas antiparalelas y entonces K es el centro de una circunferencia que pasa a través de los seis puntos considerados ($Figura$ 136).

■

Definición. *Antiparalelas de Lemoine*

Son las tres antiparalelas consideradas en el teorema anterior.

Esta circunferencia es conocida como la *segunda circunferencia de Lemoine o circunferencia coseno* del triángulo.



$Figura$ 136

CAPÍTULO III

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DE BROCARD.

Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard, nació el 12 de mayo de 1845 en Vignot (parte de Commercy), Francia y murió el 16 de enero de 1922 en Bar-le-Duc, Francia; sus padres fueron Elizabeth Auguste Liouville y Jean Sebastien Brocard. Brocard estudió en la Escuela Politécnica de donde la mayoría de los graduados en este momento se convirtieron en oficiales técnicos de las fuerzas militares y de hecho eso es exactamente el camino que tomó Brocard, unirse al Cuerpo de Ingenieros del Ejército francés.

Sus dos publicaciones importantes fueron los dos volúmenes de Notas de “Bibliographie des Corbes géométriques” (1897, 1899) y los dos volúmenes de “géométriques Courbes REMARKABLES” el primero de los cuales fue publicado en 1920, el segundo en 1967 después de su muerte. Las notas pueden ser consideradas como un libro de consulta de las curvas geométricas, con un índice elaborado minuciosamente que contiene más de un millar de curvas nombradas. El texto consta de breves párrafos descriptivos, con diagramas y ecuaciones de estas curvas.

En 1876, Brocard preguntó si las únicas soluciones para $n! + 1 = m^2$, en números enteros positivos (n, m) son: $(4,5), (5,11), (7,71)$. Este problema sigue abierto, ni siquiera se sabe si hay sólo un número finito de soluciones.

Una contribución adicional, referente a curvas de persecución es la siguiente.

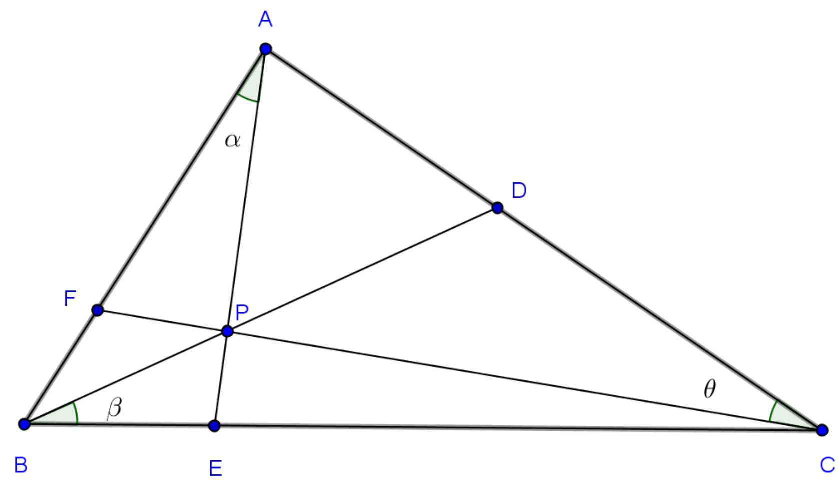
Una curva de persecución es aquella que trazada por un punto P siempre se dirige hacia un punto X , donde ambos puntos se mueven con la misma velocidad. La idea fue introducida por Bouguer alrededor de 1732.

En 1877 el matemático Edouard Lucas preguntó: ¿qué curvas serían las dibujadas por el recorrido de tres perros, si éstos inicialmente se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero y se ejecutan una después de otra?

En 1880 Brocard demostró que la curva de persecución de cada perro sería la de una espiral logarítmica y que los perros se reunirían en un punto común. Este punto se conoce ahora como el punto de Brocard.

3.1 LOS PUNTOS DE BROCARD.

Sea un punto P interior de ΔABC, se une éste a cada vértice, formando los tres ángulos α, β y θ mostrados en la figura.

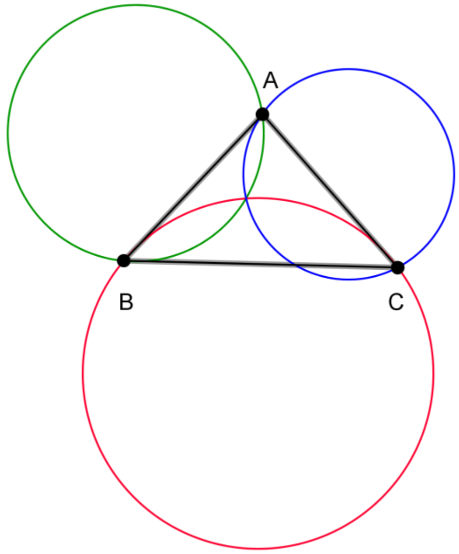


$Figura\ 137$

En muchos casos, estos ángulos son diferentes.

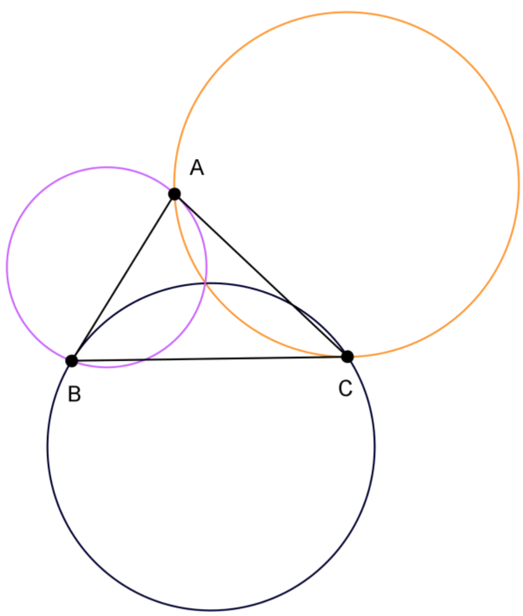
¿Existe un punto P interior de ΔABC que hará de estos tres ángulos iguales?

Considérese la circunferencia (AB) que pasa por los vértices A y B de ΔABC ($Figura$ 138) y tangente en B al lado $\overline{BC}$. Del mismo modo una circunferencia (BC) se puede describir en el lado $\overline{BC}$ tangente en C a $\overline{CA}$, y de nuevo una circunferencia (CA) en el lado $\overline{CA}$ tangente en A a $\overline{AB}$.



$Figura\ 138$

Tomando los vértices A, B y C de dos en dos en la permutación circular en sentido anti-horario, se obtiene el grupo de circunferencias y se dirá que este grupo es ***directo***; el ***grupo indirecto*** de circunferencias es el descrito por $(AC), (CB)$ y (BA) en sentido horario ($Figura\ 139$).



$Figura\ 139$

Teorema LIII ≪*Las tres circunferencias del grupo directo tienen un punto en común.*≫

Demostración:

Las dos circunferencias (AB), (BC) tienen el punto B en común ($Figura$ 140); por lo tanto, se reúnen en otro punto Ω, dentro del ΔABC. Ahora la circunferencia (AB) es tangente a $\overline{BC}$ en B, $\measuredangle A\Omega B = 180° - \measuredangle B$, y de manera similar ángulo

$$\measuredangle B\Omega C = 180° - \measuredangle C,$$

Así,

$$\measuredangle A\Omega C = 360° - (180° - \measuredangle B) - (180° - \measuredangle C) = \measuredangle B + \measuredangle C = 180° - \measuredangle A$$

Se analizan los casos en que Ω es un punto exterior a (AB) y cuando es un punto interior.

Para Ω un punto exterior se tiene:

Al trazar $\overline{A\Omega}$, éste corta a la circunferencia (AB) en P y al trazar $\overline{C\Omega}$ en Q.

Por ser un ángulo exterior se tiene que:

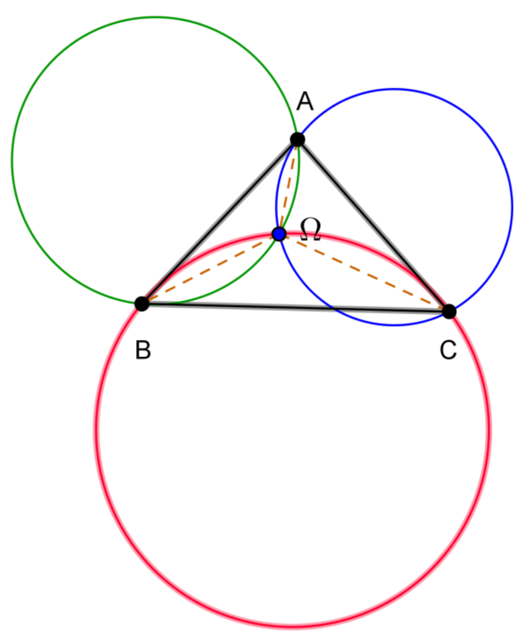
$$\measuredangle A\Omega C = \frac{m\widehat{AC} - m\widehat{PQ}}{2}$$

$$\measuredangle A\Omega C = \frac{360° - m\widehat{CA} - m\widehat{PQ}}{2}$$

$$180° - \measuredangle A = \frac{360°}{2} - \frac{m\widehat{CA}}{2} - \frac{m\widehat{PQ}}{2}$$

$$180° - \measuredangle A = 180° - \measuredangle A - \frac{m\widehat{PQ}}{2}$$

$$m\widehat{PQ} = 0°$$



$Figura$ 140

El análisis es similar para Ω un punto interior a (CA).

Así, el punto Ω pertenece también al arco de la circunferencia (CA) que se encuentra en el interior de ΔABC; de ahí la proposición.

■

Teorema LIV. ≪Las tres circunferencias del grupo indirecto tienen un punto en común Ω'.≫

La prueba se realiza de manera análoga a la del teorema anterior.

■

Definición. *Puntos de Brocard.*

Los dos puntos Ω, Ω' mencionados en los teoremas anteriores se conocen como los puntos de Brocard del triángulo.

El punto Ω se conoce como el punto positivo de Brocard, dado que resulta de la intersección de las circunferencias del grupo directo (sentido anti-horario); y Ω' se conoce como punto negativo de Brocard.

Definición. *Rayos de Brocard.*

Son los rayos que tienen por extremo uno de los vértices del triángulo y pasan por uno de los puntos de Brocard.

$\overrightarrow{A\Omega}$, $\overrightarrow{B\Omega}$ y $\overrightarrow{C\Omega}$ para el punto positivo y $\overrightarrow{A\Omega'}$, $\overrightarrow{B\Omega'}$ y $\overrightarrow{C\Omega'}$ para el negativo.

Teorema LV.

≪(a) $\measuredangle \Omega AB = \measuredangle \Omega BC = \measuredangle \Omega CA$, y el punto Ω es el único que tiene esta propiedad.

(b) $\measuredangle \Omega' AC = \measuredangle BC\Omega' = \measuredangle \Omega' BA$, y el punto Ω' es el único que tiene esta propiedad.≫

Demostración:

Tomando como base la $figura\,140$ se observa que: $\measuredangle \Omega AB$ es inscrito en la circunferencia (AB) se mide por medio del arco $\overline{B\Omega}$, y el $\measuredangle \Omega BC$ formado por la cuerda $\overline{B\Omega}$ y la tangente $\overline{BC}$ a la misma circunferencia se mide también por medio del arco $\overline{B\Omega}$; por lo tanto, estos ángulos son congruentes.

Del mismo modo para $\measuredangle \Omega BC$ y $\measuredangle \Omega CA$ en la circunferencia (BC). Ahora bien, si Ω'' es cualquier otro punto tal que el $\measuredangle \Omega'' AB = \measuredangle \Omega'' BC$, la circunferencia que pasa por los puntos Ω'', A, B será tangente a $\overline{BC}$ en B, es decir, Ω'' será un punto de la circunferencia (AB). Del mismo modo, con el fin de satisfacer la condición $\measuredangle \Omega'' BC = \measuredangle \Omega'' CA$, el punto Ω'' tendrá que estar sobre (BC); por lo tanto, Ω'' es idéntico a Ω. De manera similar para la parte (b).

■

Definición. *Ángulo de Brocard.*

A los ángulos $\measuredangle \Omega AB$ y $\measuredangle \Omega' AC$ se llama el ángulo de Brocard del triángulo y con frecuencia se denota por ω.

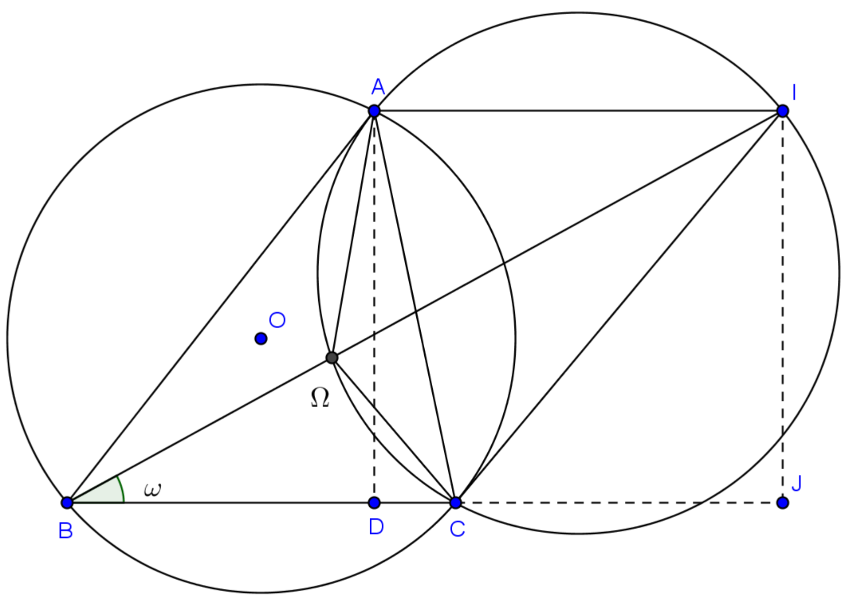
Los ángulos de Brocard cumplen con $\measuredangle \Omega AB = \measuredangle \Omega' AC$, puesto que por la construcción subtienden los mismos arcos.

3.1.1 Construcción de los puntos de Brocard.

Sea ΔABC ($Figura\ 141$) y una circunferencia del grupo directo, (CA), el punto Ω de Brocard y el ángulo de Brocard puede ser construido como sigue.

A través del punto de contacto A de (CA) trazar una paralela al lado opuesto $\overline{BC}$ encontrándose nuevamente a (CA) en I.

La recta que contiene a $\overline{BI}$ unirá I al tercer vértice B que se encuentra nuevamente con (CA) en el punto Ω requerido, y $\measuredangle IBC$ es el ángulo de Brocard del ΔABC.



$Figura\ 141$

De hecho, se tiene que:

$$\measuredangle \Omega AB = \measuredangle \Omega CA = \measuredangle \Omega IA = \measuredangle \Omega BC$$

Similarmente para el segundo punto de Brocard.

Observación.

En los $\Delta ACI, \Delta\, ACB$ ($Figura\ 141$), se cumple $\measuredangle AIC = \measuredangle BAC$, $\measuredangle LAC = \measuredangle ACB$; por lo tanto, $\measuredangle ACI = \measuredangle ABC$; la recta que contiene a $\overline{CI}$ es por lo tanto tangente a la circunferencia circunscrita (O) del ΔABC. En consecuencia, el punto I se puede determinar por $\overline{AI}$ paralelo a $\overline{BC}$ e $\overline{IC}$ tangente en C a la circunferencia circunscrita (O) del ΔABC. Así, el ángulo de Brocard puede estar construido sin la ayuda de una de las circunferencias del grupo directo; repitiendo esta construcción dos veces podemos determinar el punto de Brocard.

Observación.

Sean D, J los pies de las perpendiculares de A, I sobre $\overline{BC}$ ($Figura\ 141$). Se tiene:

$$\frac{\overline{BJ}}{\overline{IJ}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{IJ}} + \frac{\overline{DC}}{\overline{IJ}} + \frac{\overline{CJ}}{\overline{IJ}} = \frac{\overline{CJ}}{\overline{IJ}} + \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}$$

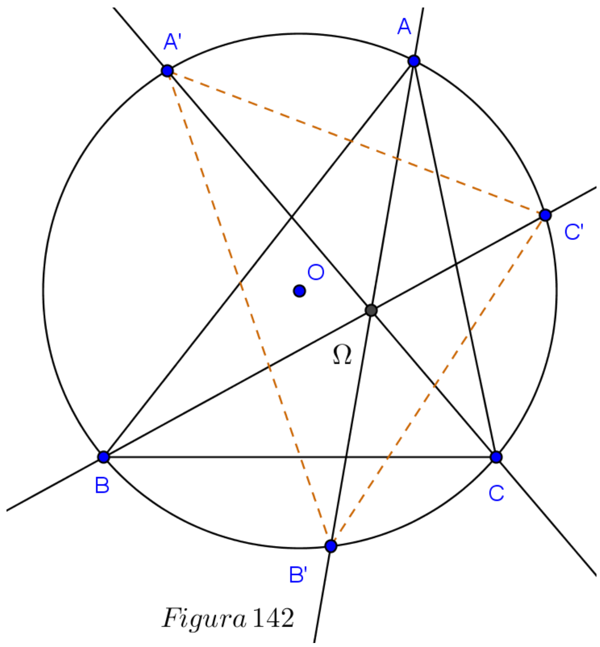
Por los triángulos rectángulos $\angle IJB$, $\angle ADB$, $\angle ADB$ y $\angle IJC$ ($\measuredangle \Omega CI = \measuredangle B$) :

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C.$$

De acuerdo a la relación anterior entre el ángulo de Brocard y los ángulos del triángulo dado, se deduce que:

$$\omega \leq 30°$$

Teorema LVI. ≪*Las intercepciones en la circunferencia circunscrita de un triángulo de las rectas que unen los vértices con uno de los puntos de Brocard forman un triángulo congruente con el triángulo dado*.≫



$Figura\ 142$

Demostración:

Sean las rectas $A\Omega$, $B\Omega$ y $C\Omega$, que cortan a la circunferencia (O) en A', B' y C' ($Figura$ 142). En el triángulo $\Delta A'B'C'$ se tiene:

$$\measuredangle A' = \measuredangle B'A'C + \measuredangle C'A'C = \measuredangle B'AC + \measuredangle C'BC = \measuredangle B'AC + \measuredangle BAB' = \measuredangle A$$

Igualmente para los ángulos $\angle B'$ y $\angle C'$. Así los dos triángulos ΔABC y$\Delta A'B'C'$ son semejantes.

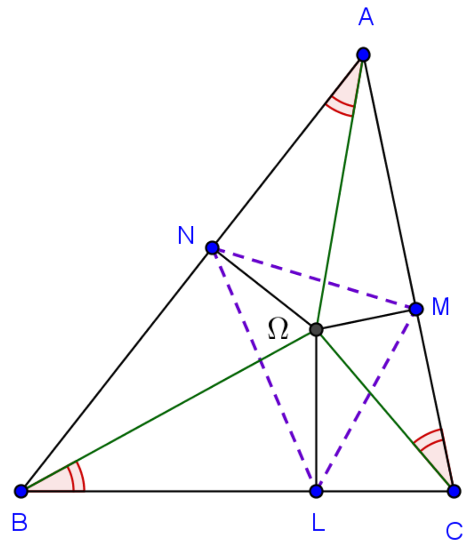
Dado que están inscritos en la misma circunferencia; entonces $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{A'B'}$ por lo que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y por tanto $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

■

Teorema LVII. ≪*El triángulo pedal de un punto de Brocard es semejante al triángulo dado.*≫

Demostración:

Sean L, M y N las proyecciones del punto de Brocard Ω a los lados de ΔABC ($Figura$ 143).



$Figura$ 143

Teniendo en cuenta la definición del punto de Brocard y los dos cuadriláteros cíclicos ΩMAN y ΩNBL, se tienen:

$$\measuredangle A = \measuredangle \Omega AN + \measuredangle \Omega AM$$

$$\measuredangle A = \measuredangle \Omega BL + \measuredangle \Omega AM$$

$$\measuredangle A = \measuredangle \Omega NL + \measuredangle \Omega AM$$

$$\measuredangle A = \measuredangle \Omega NL + \measuredangle \Omega NM = \measuredangle MNL$$

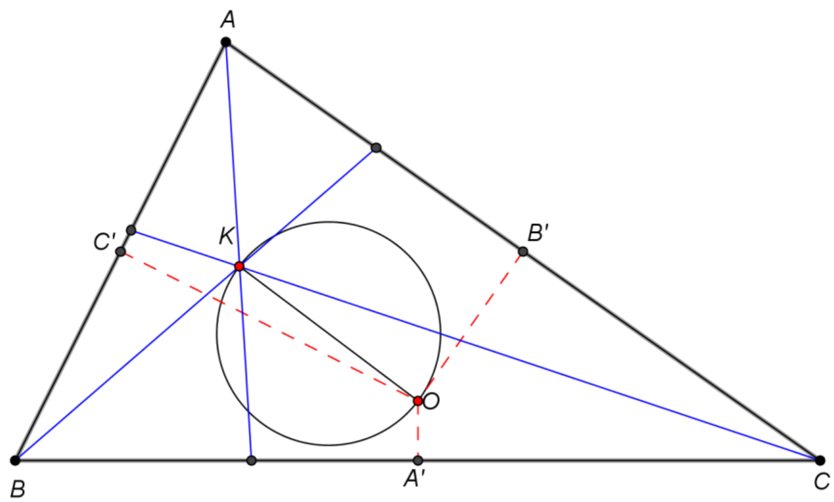
Del mismo modo para los otros pares de ángulos de los triángulos ΔABC y ΔMNL, se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta MNL$. De manera análoga para Ω'.

■

3.2 CIRCUNFERENCIA DE BROCARD.

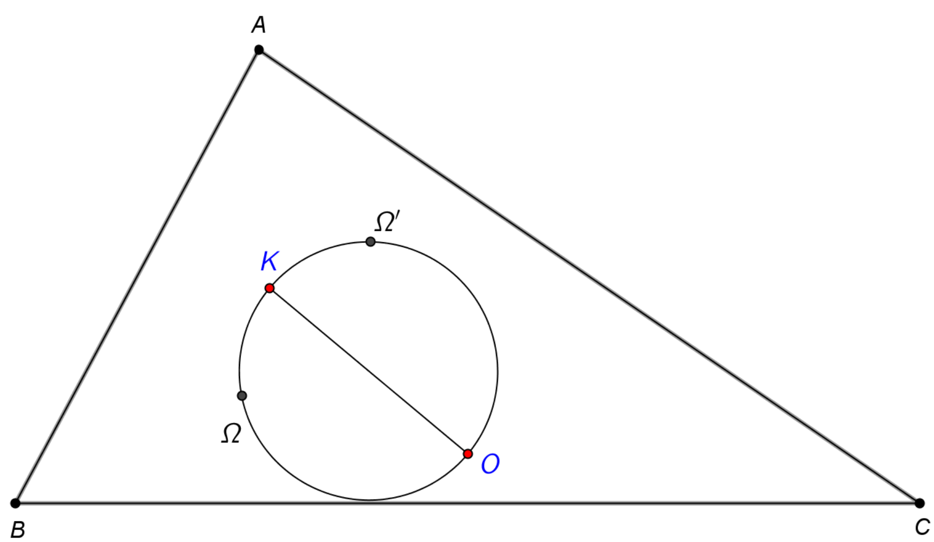
Definición. *Circunferencia de Brocard.*

Es la circunferencia (OK), que tiene por diámetro el segmento determinado por el circuncentro O y el punto simediano de un ΔABC ($Figura$ 144).



$Figura\ 144$

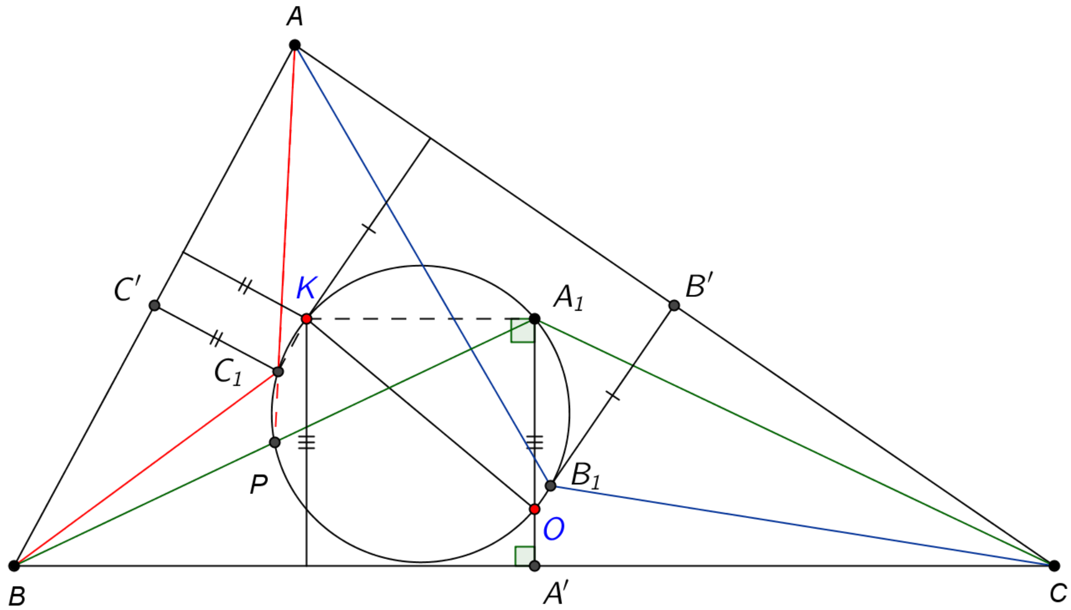
Teorema LVIII. *≪Los puntos de Brocard están en la circunferencia de Brocard.≫* ($Figura$ 145)



$Figura\ 145$

Demostración:

Sean A_1, B_1 y C_1 los segundos puntos de intersección de las mediatrices con la circunferencia de Brocard, además; A', B' y C' los pies de las mediatrices de ΔABC. Trácense los segmentos $\overline{AC_1}$, $\overline{BC_1}$, $\overline{BA_1}$, $\overline{CA_1}$, $\overline{CB_1}$ y $\overline{AB_1}$, formándose los triángulos isósceles ABC_1, BCA_1 y ACB_1, dado que A_1, B_1 y C_1 se encuentran en las mediatrices. Por ser $\overline{KO}$ diámetro el ángulo $\angle KA_1O$ es recto por lo tanto $\overline{KA_1}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y las distancias de K y A_1 a $\overline{BC}$ son iguales, como se muestra en la $figura$ 146.



$Figura$ 146

Resultados similares se obtiene con respecto a los otros dos lados del triángulo, entonces del **corolario2** se deduce que:

$$\frac{A_1A'}{BC} = \frac{B_1B'}{CA} = \frac{C_1C'}{AB}. \qquad (1)$$

Se va a demostrar que el punto de intersección P de $\overline{AC_1}$ con $\overline{BA_1}$ se encuentra en la circunferencia (OK), $figura$ 147.

A partir de (1) se deduce que los triángulos isósceles ABC_1, BCA_1 y ACB_1 son semejantes; por tanto:

$$\angle BA_1A' \cong \angle AC_1C' \cong \angle PC_1O\,.$$

Así los puntos A_1, C_1 son concíclicos con O, P; por tanto, P se encuentran en (OK).

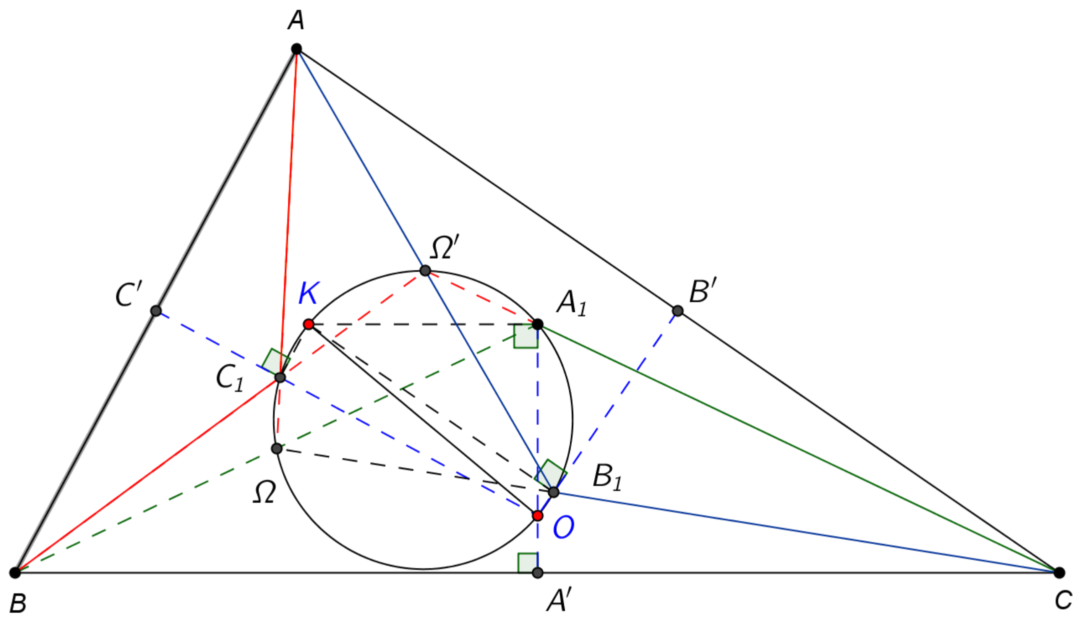


Figura 147

Una vez más teniendo en cuenta los triángulos semejantes BCA_1, CAB_1 se va a demostrar que la intersección (P) de $\overline{BA_1}$ y $\overline{CB_1}$ se encuentra en (OK).

Entonces, de la semejanza de los triángulos isósceles se tiene que:

$$\angle BA_1A' \cong \angle CB_1B' \cong \angle PB_1O\,.$$

Así los puntos A_1, B_1 son concíclicos con O, P; por tanto P se encuentra en (OK).

De ahí los tres segmentos $\overline{BA_1}$, $\overline{CB_1}$ y $\overline{AC_1}$ se intersectan en un mismo punto P en (OK).

Ahora, de la semejanza de los tres triángulos isósceles ΔA_1BC, ΔB_1CA y ΔC_1AB se tiene:

$$\angle PAB \cong \angle PBC \cong \angle PCA\,;$$

Por tanto P, coincide con el punto de Brocard Ω.

De manera similar, se puede demostrar que los tres segmentos $\overline{B_1A}$, $\overline{A_1C}$ y $\overline{C_1B}$ se encuentra en (OK) en el segundo punto de Brocard Ω'.

■

Teorema LIX. *≪La circunferencia de Brocard es concéntrica con la primera circunferencia de Lemoine de un triángulo.≫*

Demostración:

Como ambas circunferencias tienen como centro el punto medio del segmento determinado por el circuncentro y el punto simediano del triángulo (por definición y *Teorema* LI); de ahí la proposición.

■

3.3 TRIÁNGULOS DE BROCAR.

3.3.1 PRIMER TRIÁNGULO DE BROCARD.

Definición. *Primer triángulo de Brocard de ΔABC.*

Triángulo formado por los segundos puntos de intersección de las mediatrices con la circunferencia Brocard de ΔABC (P, Q y R en $figura$ 148).

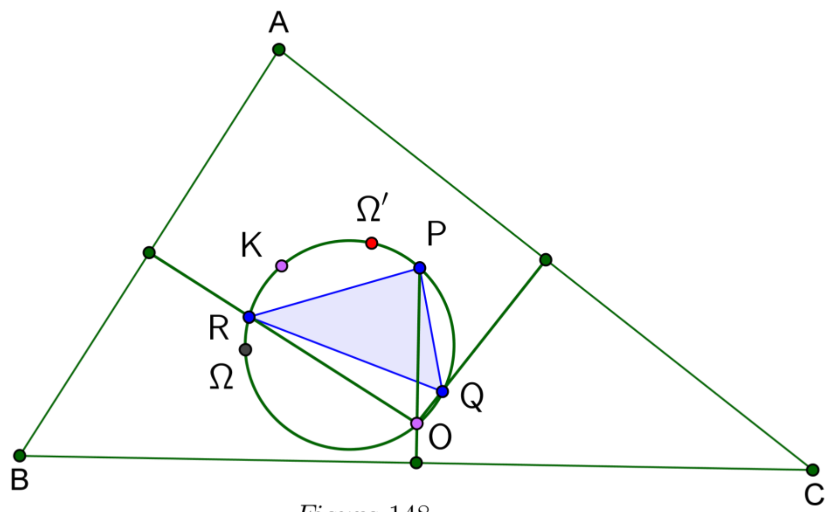


Figura 148

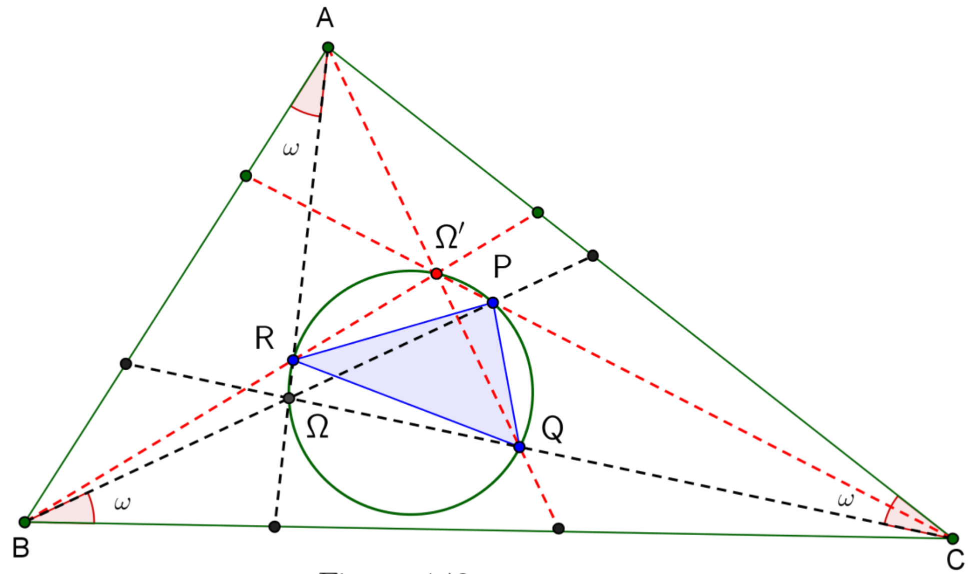
Construcción del primer triángulo de Brocard.

Por definición P, Q y R están en las mediatrices de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, asi los triángulos ΔPBC, ΔQCA y ΔRAB son isósceles ($Figura\ 149$).

En el ΔPBC, Ω se encuentra en $\overline{BP}$ (demostración del *teorema* LVIII), los ángulos de la base en ΔPBC son iguales a ω.

Así, puesto que por *teorema* LV el punto negativo de Brocard Ω' requiere que el ángulo $\measuredangle\Omega' CB = \omega$ ($Figura\ 149$), se deduce entonces que Ω' se encuentra en $\overline{PC}$. Por lo tanto:

P es el punto de intersección de $\overline{B\Omega}$ y $\overline{C\Omega'}$.



$Figura\ 149$

De manera similar en el ΔQCA, Ω se encuentra en $\overline{QC}$, por lo que:

$\measuredangle QCA = \measuredangle QAC = \omega.$

Así, para el punto negativo de Brocard $\angle\Omega' AC$ debe ser ω ($Figura\ 149$), se deduce entonces que Ω' se encuentra en $\overline{AQ}$. Por lo tanto:

Q es el punto de intersección de $\overline{C\Omega}$ y $\overline{A\Omega'}$ R es punto de intersección de $\overline{A\Omega}$ y $\overline{B\Omega'}$.

Así, se tiene: No importa que punto de Brocard se tome para generar el primer triángulo de Brocard los mismos tres puntos P, Q y R se obtienen en la circunferencia de Brocard si se une de los vértices a Ω o para Ω'.

Observación. De la deducción anterior, para construir el primer triángulo de Brocard se tomarán los vértices de ΔABC por parejas, se dibujaran los primeros y segundos rayos de Brocard correspondiente según los vértices tomados y considerando la dirección cíclica de ΔABC, esto es; si el sentido cíclico es $A \rightarrow B \rightarrow C$ para A, B

dibujar $\overrightarrow{A\Omega}$, $\overrightarrow{B\Omega'}$, para B, C dibujar $\overrightarrow{B\Omega}$, $\overrightarrow{C\Omega'}$, para C, A dibujar $\overrightarrow{C\Omega}$, $\overrightarrow{A\Omega'}$. Si el sentido cíclico es $A \to C \to B$ dibujar segundos rayos de Brocard y primeros rayos de Brocard como anteriormente.

Teorema LX. *Semejanza del primer triángulo de Brocard y el triángulo dado.*

≪*El primer triángulo Brocard de ΔABC es semejante al triángulo ABC* ≫.

Demostración:

Referente a la $figura\ 149$, $\measuredangle \Omega CA = \omega$, además; se tiene $\measuredangle \Omega CB = \measuredangle C - \omega$. Por lo tanto, en $\Delta\Omega BC$, el ángulo exterior $\measuredangle P\Omega Q = \omega + (\measuredangle C - \omega) = \measuredangle C$ (por *teorema* VII)

$\Rightarrow \angle P\Omega Q \cong \angle C$.

Ahora, en la circunferencia de Brocard, $\angle P\Omega Q$ subtiende el mismo arco que $\angle PRQ$, así; $\angle R$ en el triángulo de Brocard es congruente a $\angle C$. Del mismo modo, en $\Delta\Omega AB$ se tiene que $\measuredangle \Omega AB = \omega$ y $\measuredangle \Omega BA = \measuredangle B - \omega$, luego el ángulo exterior $\measuredangle R\Omega P = \omega + (\measuredangle B - \omega) = \measuredangle B$ (por *teorema* VII)

$\Rightarrow \angle R\Omega P \cong \angle B$.

En la circunferencia de Brocard $\angle R\Omega P$ subtiende el mismo arco que $\angle RQP$, así; $\angle Q$ en el triángulo de Brocard es congruente con $\angle B$. Luego el $\angle P \cong \angle A$. Así, por el primer criterio de semejanza, los triángulos ΔPQR y ΔABC son semejantes.

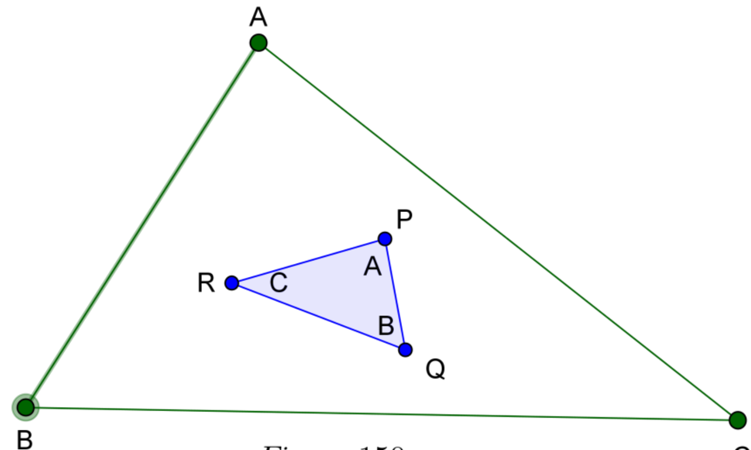
■

Del teorema anterior se tiene que los ángulos homólogos son:

$\angle A$ y $\angle P$

$\angle B$ y $\angle Q$

$\angle C$ y $\angle R$



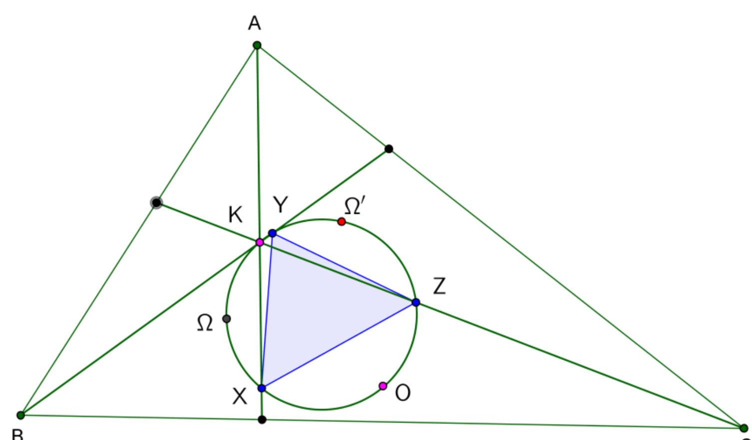
$Figura\ 150$

De esta forma las direcciones cíclicas $P \to Q \to R$ son opuestas a $A \to B \to C$, y se tiene que un triángulo dado y su primer triángulo de Brocard son inversamente semejantes ($Figura$ 150).

3.3.2 SEGUNDO TRIÁNGULO DE BROCARD.

Definición. *Segundo triángulo de Brocard de un triángulo ABC.*

Triángulo formado por los segundos puntos de intersección de las simedianas con la circunferencia de Brocard de ΔABC (X, Y y Z en $figura$ 151).



$Figura\ 151$