**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR.**
**FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL.**
**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA.**
**SECCIÓN DE MATEMÁTICA.**

**TRABAJO DE GRADO:**

# TEORÍA DE LA REPRESENTACIÓN DEL GRUPO SIMÉTRICO.

**PRESENTADO POR:**

SARA MARGARITA BATRES PÁIZ.
FRANKLIN DUVÁN ESCOBAR MOREIRA.

**PARA OPTAR AL GRADO DE:**

LICENCIADO EN MATEMÁTICA.

**DOCENTE DIRECTOR:**

MSc. MARCELINO MEJÍA GONZÁLEZ.
MSc. GABRIEL CHICAS REYES.

**CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, MARZO 2017.**

**SAN MIGUEL EL SALVADOR CENTROAMÉRICA**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR.**

**AUTORIDADES.**

MAESTRO ROGER ARMANDO ARIAS.

**RECTOR**

DR. MANUEL DE JESÚS JOYA.

**VICE−RECTOR ACADÉMICO**

ING. NELSON BERNABÉ GRANADOS.

**VICE−RECTOR ADMINISTRATIVO INTERINO**

MAESTRO CRISTOBAL RÍOS.

**SECRETARÍA GENERAL**

LDA. BEATRIZ MELENDEZ.

**FISCAL GENERAL INTERINA**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR ORIENTAL.**

**AUTORIDADES.**

ING. JOAQUÍN ORLANDO MACHUCA GÓMEZ.

**DECANO**

LIC. CARLOS ALEXANDER DÍAZ.

**VICE−DECANO**

LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNÁNDEZ

**SECRETARIO**

# Índice general

**Capítulos** **Página**

# Agradecimientos.


- A Dios todo poderoso por darnos salud, confianza y la sabiduría para lograr levantarnos ante las adversidades surgidas en nuestra carrera.

- A nuestros familiares y amigos por sus consejos y apoyo incondicional para alcanzar este triunfo.

- A todos los maestros que participaron en nuestra formación académica, en especial a nuestros asesores **MSc. Marcelino Mejía** y **MSc. Gabriel Chicas** por sus aportes valiosos en todo el transcurso de nuestra investigación, pues siempre estuvieron disponibles y muchas veces hicieron a un lado sus actividades para colaborar con nosotros. También por haber aceptado colaborar con su experiencia y dedicación para lograr terminar con éxito nuestro trabajo de tesis.

- A **Lic. Ulises Lizama** por orientarnos en la parte metodológica del trabajo. También a todos los que estuvieron pendientes de cada una de las defensas, especialmente a los que formaron parte del jurado ya que de esa forma colaboraron con el desarrollo de la investigación.

# Introducción.

En la vida cotidiana cada día vemos diferentes tipos de conjuntos, particularmente en matemáticas existen conjuntos que cumplen con propiedades específicas las cuales hacen que algunos conjuntos contengan a otros o que no tengan elementos en común (su intersección es vacía), además existen conjuntos que no están completamente contenidos en otros y en este caso la intersección entre los conjuntos no es vacía.

Desde la antigüedad se estudia el comportamiento de conjuntos, ya sea de personas, animales, plantas entre otras cosas. Un ejemplo claro es el estudio social, económico o religioso de las relaciones interpersonales de la gente en cualquier lugar del mundo. Así también en las matemáticas hay conjuntos que cumplen con ciertas características las cuales hacen que se diferencien unos de otros y además con los elementos de estos conjuntos podemos hacer ciertas operaciones (por ejemplo: unión, intersección y diferencia); estas operaciones junto con el conjunto forman una estructura matemática. En particular un conjunto no vacío G en el cual existe una operación binaria que satisface las siguientes propiedades: la operación es asociativa, existe un elemento neutro que pertenece a G y existe el elemento inverso (único); a este conjunto se le denomina grupo.

El presente trabajo se divide en tres capítulos, el primero inicia con la parte de la teoría preliminar la cual incluye lo necesario de la teoría de grupos para poder abordar con claridad la teoría sobre la representación del grupo simétrico. En particular se estudia el conjunto de aplicaciones inyectivas de S a sí mismo denotado por A(S), además, se aborda una introducción a la teoría de grupos en la cual describimos las definiciones y propiedades más importantes de estos. Este capítulo finaliza con el teorema de órbita-estabilizador el cual es de suma importancia para posteriores demostraciones.

En el capítulo II se presentan algunos resultados generales sobre el grupo de representaciones que serán de gran utilidad para el estudio del grupo simétrico. La teoría de representaciones puede ser expresada en términos de matrices o mediante el lenguaje de módulos. Una representación de matrices puede ser pensada como un medio para modelar un grupo abstracto con un grupo concreto de matrices y debido a que las matrices corresponden a las transformaciones lineales, se establecen representaciones en estos términos; de esto se introduce la idea de módulo.

En el capítulo III se desarrolla la descripción de la teoría del grupo simétrico y su representación, abordando temas principales como la teoría de Módulos de Specht, diagramas, tablas de Young junto a la teoría relacionada a subgrupos de Young.

# Justificación.

La teoría de representaciones consiste, a grandes rasgos, en el estudio de grupos a través de sus acciones en espacios lineales. El caso del grupo simétrico es notable ya que es de los pocos ejemplos en los que se puede dar una descripción explícita de todas sus representaciones, y además esto puede hacerse de manera elemental a través de objetos combinatorios: las tablas de Young.

Los grupos simétricos siempre han jugado un papel central en la teoría de grupos y en los últimos años ha habido un resurgimiento del interés en las representaciones de estos grupos.

Este tema puede ser abordado desde tres direcciones: mediante la aplicación de los resultados de la teoría general de representaciones de grupos, mediante el empleo de técnicas combinatorias, o mediante el uso de funciones simétricas; en nuestro trabajo lo abordaremos en la dirección de la teoría de representaciones de grupos.

El objetivo del trabajo es describir la construcción de las representaciones irreducibles del grupo simétrico mediante los módulos de Specht.

Se considera que lo atractivo y novedoso de la propuesta radica en aplicar la teoría abstracta de representaciones a un caso especial en el que pueden hacerse cálculos explícitos de manera sencilla, presentando asimismo aspectos interesantes de la combinatoria algebraica.

Es por ello que el propósito de la investigación es motivar a los estudiantes de la carrera de licenciatura en matemática, para que se interesen por el estudio del álgebra, mediante un estudio de la teoría de la representación del grupo simétrico. Además se espera que con el desarrollo de todos los conceptos y definiciones de esta investigación se logre enriquecer el conocimiento matemático de los interesados en el área del álgebra.

# Objetivos de la Investigación.

## Objetivo General:

- Conocer la teoría fundamental de la representación del grupo simétrico.

## Objetivos Específicos:

- Presentar una visión general de la teoría de grupos.
- Mostrar los preliminares básicos para introducir la teoría de representación del grupo simétrico.
- Describir la construcción de las representaciones irreducibles del grupo simétrico mediante los módulos de Specht.
- Expresar una descripción explícita de la representación de los grupos simétricos mediante las tablas de Young.

# CAPÍTULO 1

# PRELIMINARES.

## 1.1. Funciones o Aplicaciones (Mapeos).

Uno de los conceptos verdaderamente universales que abarca casi todos los aspectos de las matemáticas, es el de *función o aplicación* de un conjunto en otro. Se puede decir con toda seguridad que no hay parte de las matemáticas donde esta noción no se presente o no desempeñe un papel principal.

**Definición 1.1.1.** *Sean $S$ y $T$ conjuntos; una función o aplicación $f$ de $S$ en $T$ es una regla que asigna a cada elemento $s \in S$ un elemento único $t \in T$.*

Si $s$ es un elemento dado de $S$, entonces hay solamente un elemento $t$ de $T$ que es asociado a $s$ por la aplicación.

**Definición 1.1.2.** *Una aplicación $f : S \to T$ es* ***suprayectiva o sobre*** *si todo $t \in T$ es imagen bajo $f$ de algún $s \in S$; esto es, si y sólo si, dado $t \in T$, existe un $s \in S$ tal que $t = f(s)$.*

Si se define $f(S) = \{f(s) \in T | s \in S\}$, otra manera de expresar que la aplicación $f : S \to T$ es suprayectiva, es diciendo que $T = f(S)$.

**Definición 1.1.3.** *Se dice que una aplicación $f : S \to T$ es* ***inyectiva o uno a uno (abreviado 1-1)*** *si para $s_1 \neq s_2$ en $S$, $f(s_1) \neq f(s_2)$ en $T$. En forma equivalente, $f$ es 1-1 si $f(s_1) = f(s_2)$ implica $s_1 = s_2$.*

**Definición 1.1.4.** *Se dice que una aplicación $f : S \to T$ es una* ***correspondencia biyectiva o biyección*** *si $f$ es a la vez inyectiva y suprayectiva.*

Luego de contar ya con la noción de aplicación y haber señalado varios tipos especiales, nos podríamos preguntar: ¿qué se puede realizar con ellas?. Como se verá a continuación, se puede introducir una operación de combinación de aplicaciones en ciertas circunstancias.

**Definición 1.1.5.** *Si $g : S \to T$ y $f : T \to U$, entonces la* ***composición*** *(o producto) denotado por $f \circ g$, es la aplicación $f \circ g : S \to U$ definida mediante*
*$(f \circ g)(s) = f(g(s))$ para todo $s \in S$.*

Para que la composición de las aplicaciones $g$ y $f$ tenga sentido, el conjunto terminal $T$ de la aplicación $g$ debe ser el conjunto inicial de la aplicación $f$. Un caso especial en el que siempre se pueden componer dos aplicaciones cualesquiera, es cuando $S = T = U$, esto es, cuando $S$ se aplica a sí mismo.

**Lema 1.1.1.** *Si $g : S \to T$ y $f : T \to U$ son ambas inyectivas, entonces $f \circ g : S \to U$ también es inyectiva.*

**Demostración:** Supongamos que

$$(f \circ g)(s_1) = (f \circ g)(s_2) \text{ donde } s_1, s_2 \in S$$

Así tenemos:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(s_1) = (f \circ g)(s_2) &\Longrightarrow f(g(s_1)) = f(g(s_2)); \quad \text{por definición} \\
&\Longrightarrow g(s_1) = g(s_2); \quad f \text{ es 1-1} \\
&\Longrightarrow s_1 = s_2; \quad g \text{ es 1-1}
\end{aligned}$$

Así como $(f \circ g)(s_1) = (f \circ g)(s_2) \Longrightarrow s_1 = s_2$, entonces concluimos que la aplicación $f \circ g$ es inyectiva.■

## 1.2. $A(S)$ (Conjunto de las aplicaciones inyectivas de $S$ sobre sí mismo)

Se concentrará el interés en aplicaciones particularmente de un conjunto no vacío $S$ en sí mismo, es decir, se considerará el conjunto $A(S)$ de todas las aplicaciones inyectivas de $S$ sobre sí mismo. En nuestro trabajo se abordará el caso en el que $S$ sea un conjunto finito.

Cuando $S$ tiene un número finito de elementos, digamos $n$, $A(S)$ recibe el nombre de **grupo simétrico de grado** $n$ y se denota por $S_n$, en el capítulo 2 se le dedicará un estudio más profundo a $S_n$.

**Lema 1.2.1.** *$A(S)$ satisface lo siguiente:*

a) *$f, g \in A(S)$ implica que $f \circ g \in A(S)$.*

b) *$f, g, h \in A(S)$ implica que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.*

c) *Existe un elemento (la aplicación identidad $i$) tal que $f \circ i = i \circ f = f$ para toda $f \in A(S)$ .*

d) *Dada $f \in A(S)$, existe una $g \in A(S)(g = f^{-1})$ tal que $f \circ g = g \circ f = i$.*

**Demostración:** Definimos $A(S) = \{f \in S | f : S \to S,\ con \quad f \quad inyectiva\}$.

a) Se cumple por el lema 1.1.1.

b) Sean $f, g, h \in A(S)$ y $s \in S$. Entonces,

$$((f \circ g) \circ h)(s) = (f \circ g)(h(s)) = f(g(h(s)))$$

$$(f \circ (g \circ h))(s) = f \circ ((g \circ h)(s)) = f(g(h(s)))$$

De esto se concluye que: $((f \circ g) \circ h)(s) = (f \circ (g \circ h))(s)$ para todo $s \in S$. Así por definición concluimos que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

c) Sea $f \in A(S)$. Sabemos que la aplicación identidad $i$ esta definida como $i : S \to S | i(s) = s$ para todo $s \in S$; además $i$ es inyectiva, por lo tanto $i \in A(S)$. Falta probar la igualdad.

Sea $s \in S$, entonces

$(f \circ i)(s) = f(i(s)) = f(s) \quad$ y $\quad (i \circ f)(s) = i(f(s)) = f(s)$

Por lo tanto se cumple que $i \circ f = f \circ i = f$ para todo $f \in A(S)$.

d) Sea $f \in A(S)$. Como $S$ es finito y $f$ es inyectiva, entonces $f$ es sobreyectiva. Así, dado $s' \in S$, existe un $s \in S$ tal que $f(s) = s'$ y por ser $f$ inyectiva este $s'$ es único. Ahora falta probar las igualdades.

Definimos

$$f^{-1} : S \longrightarrow S$$

$$s' \longmapsto f^{-1}(s') = s; \quad s' = f(s)$$

Sea $s' \in S$,

$(f \circ f^{-1})(s') = f(f^{-1}(s')) = f(s') = s' = i_S$

Por otra parte sea $s' \in S$,

$(f^{-1} \circ f)(s) = f^{-1}(f(s)) = f^{-1}(s') = s = i_S$

Por lo tanto se cumple que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i$. ■

Nos gustaría saber ahora cuántos elementos hay en $A(S)$ cuando $S$ es un conjunto finito que consta de $n$ elementos.

Para tal efecto, supóngase que cierta cosa se puede efectuar de $r$ maneras diferentes y que una segunda cosa independiente de la primera se puede hacer de $s$ maneras diferentes. ¿De cuantas maneras diferentes se pueden llevar a cabo ambas cosas juntas? La mejor forma de averiguarlo es hacer una ilustración de esto en un contexto concreto. Supóngase que hay $r$ caminos que van de Chicago a Detroit y $s$ caminos que van de Detroit a Chicago ($r$ no es necesariamente igual a $s$, puesto que algunos de estos caminos pueden ser de un solo sentido). ¿De cuantas maneras se puede realizar el viaje redondo de Chicago a Detroit? Evidentemente, por cada camino que se tome de Chicago a Detroit se tienen $s$ opciones para el regreso. Se puede empezar el viaje desde Chicago de $r$ maneras distintas, por lo tanto se puede completar el viaje redondo de

$$\underbrace{s+s+...+s}_{r \quad veces} = rs \quad maneras \quad diferentes$$

Resulta claro que se puede extender la realización de dos cosas independientes a $m$ de ellas, para cualquier entero $m > 2$. Si la primera se puede efectuar de $r_1$ maneras distintas, la segunda de $r_2$ modos, $\ldots$, la m–ésima de $r_m$ maneras distintas, entonces todas juntas se pueden llevar a cabo de $r_1 r_2 ... r_m$ modos diferentes.

**Lema 1.2.2.** *Si $S$ tiene $n$ elementos, entonces $A(S)$ consta de $n!$ elementos.*

**Demostración:** Sea $f \in A(S)$, donde $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. De aquí $f$ tiene $n$ opciones para enviar a $x_1$, porque se puede enviar bajo $f$ a cualquier elemento de $S$. Pero ahora $f$ no es libre de enviar a $x_2$ a cualquier lugar, porque como $f$ es inyectiva, se debe tener $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Así que $x_2$ se puede enviar a cualquier elemento excepto a $f(x_1)$. Por lo tanto, $f$ puede asignar a $x_2$, $n-1$ imágenes diferentes. Continuando de esta manera, tenemos que $f$ puede enviar $x_i$ hacia $n-(i-1)$ imágenes diferentes. Por lo tanto, el número de opciones de lugares para enviar a los $x_i$; donde $i = 1, \ldots, n$ bajo la función $f$ es de $n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) = n!$.

Por lo tanto queda demostrado el teorema.■

## 1.3. Definiciones y Propiedades de Grupo.

Dado cualquier conjunto no vacío $S$, el conjunto $A(S)$ no es nada más un conjunto solo, sino que tiene una estructura mucho más rica. La posibilidad de combinar dos elementos de $A(S)$ para obtener otro elemento de $A(S)$, dota a este conjunto de una estructura algebraica. Si $f, g \in A(S)$, se combinan luego para formar la aplicación $fg$ definida por $(fg)(s) = f(g(s))$ para todo $s \in S$. Se llamó a $fg$ el producto de $f$ con $g$ y se verificó que $fg \in A(S)$, y que este producto obedecía ciertas reglas. De las innumerables posibilidades se seleccionaron de algún modo cuatro reglas particulares que gobiernan el comportamiento de $A(S)$ referente a dicho producto.

Estas cuatro reglas fueron:

1. **Cerradura**, a saber, si $f, g \in A(S)$, entonces $fg \in A(S)$. Se dice que $A(S)$ es cerrado respecto a este producto.

2. **Asociatividad**, esto es, dadas $f, g, h \in A(S)$, entonces $f(gh) = (fg)h$.

3. **Existencia de un elemento unidad**, a saber, existe un elemento particular $i \in A(S)$ (la aplicación identidad) tal que $fi = if = f$ para toda $f \in A(S)$.

4. **Existencia de inversas**, esto es, dada $f \in A(S)$ existe un elemento en $A(S)$, denotado por $f^{-1}$, tal que $ff^{-1} = f^{-1}f = i$.

En realidad, la historia de esta materia transcurrió bastante tiempo para reconocer que estas cuatro propiedades desempeñaban el papel clave. Sin más que decir pasamos a la siguiente definición:

**Definición 1.3.1.** *Se dice que un conjunto no vacío $G$ es un **grupo** si en él hay una operación $*$ tal que:*

1. *$a, b \in G$ implica que $a * b \in G$. (Esto se describe diciendo que $G$ es **cerrado** respecto a $*$).*

2. *Dados $a, b, c \in G$ implica que $a * (b * c) = (a * b) * c$. (Esto se describe diciendo que es válida la **ley asociativa** en $G$)*

3. *Existe un elemento especial $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in G$ ($e$ se llama **elemento identidad o unidad** de $G$) .*

4. *Para todo $a \in G$, existe un elemento $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$.(Este elemento $b$ se escribe como $a^{-1}$ y se llama **inverso** de $a$ en $G$).*

Estos cuatro postulados definen un grupo (llamados **los axiomas de grupo**) fueron modelados, después de todo, a la manera de aquellos que son válidos en $A(S)$.

A la operación $*$ en $G$ se le suele llamar producto, pero no tiene nada que ver con el producto tal como se conoce en los enteros, racionales, reales o complejos. De hecho, un grupo en general no necesita en absoluto tener relación con un conjunto de números.

**Ejemplo 1.3.1.** *Sea $G = \mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y $*$ la adición ordinaria, $+$, en $\mathbb{Z}$. Probar que $G$ es un grupo.*

**Prueba:**

i) ¿$\mathbb{Z}$ es cerrado?

Sea $a, b \in \mathbb{Z}$. Como la suma de un número entero es nuevamente un número entero entonces $a + b \in \mathbb{Z}$. Como $a * b = a + b \in \mathbb{Z}$ entonces concluimos que $\mathbb{Z}$ es cerrado.

ii) ¿$\mathbb{Z}$ es asociativo?.

Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
a * (b * c) &= a + (b * c); \quad \text{por definición de } * \\
&= a + (b + c); \quad \text{por definición de } * \\
&= (a + b) + c; \quad \text{ley asociativa} \\
&= (a * b) + c; \quad \text{por definición de } * \\
&= (a * b) * c; \quad \text{por definición de } *
\end{aligned}$$

Así, se tiene que $a * (b * c) = (a * b) * c$. Por lo tanto concluimos que $\mathbb{Z}$ es asociativo.

iii) ¿Existe el elemento identidad?

Sea $a, b, e \in \mathbb{Z}$, donde $e$ es el elemento identidad en $\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} a * e = a &\implies a + e = a; \quad \text{por definición de } * \\ &\implies -a + a + e = -a + a; \quad \text{existencia del inverso aditivo} \\ &\implies e = 0; \quad -a + a = 0 \end{aligned}$$

Así el elemento identidad existe y es $e = 0$. Falta probar que éste es único. Sea $e, e' \in \mathbb{Z}$ identidades, entonces

$$\begin{aligned} a * e = a \wedge a * e' = a &\implies a + e = a \wedge a + e' = a; \quad \text{por definición de } * \\ &\implies a + e = a + e'; \quad \text{igualación} \\ &\implies -a + a + e = -a + a + e'; \quad \text{existencia del inverso} \\ &\implies e = e'; \quad -a + a = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que el elemento identidad existe y es único.

iv) ¿Existe el elemento inverso?

Sea $a, b \in \mathbb{Z}$, donde $b$ es el elemento inverso de $a$ en $\mathbb{Z}$. Además sabemos que $e = 0$, entonces

$$\begin{aligned} a * b = e &\implies a + b = 0 \quad \text{por definición de } * \\ &\implies -a + a + b = -a + 0'; \quad \text{existencia del inverso} \\ &\implies 0 + b = -a; \quad -a + a = 0 \\ &\implies b = -a; \quad 0 + b = b \end{aligned}$$

Así el elemento inverso existe y es $b = -a$. Falta probar que éste es único.

Sean $b, b' \in \mathbb{Z}$ inversos, entonces

$$\begin{aligned} a * b = e \wedge a * b' = e &\implies a + b = e \wedge a + b' = e; \quad \text{por definición de } * \\ &\implies a + b = a + b'; \quad \text{igualación} \\ &\implies -a + a + b = -a + a + b'; \quad \text{existencia del inverso} \\ &\implies b = b'; \quad -a + a = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que el elemento inverso existe y es único.

De todo lo anterior concluimos que $G = \mathbb{Z}$ es un grupo ya que satisface todos los axiomas de éste.

**Definición 1.3.2.** *Se dice que un grupo $G$ es un grupo finito si consta de un número finito de elementos. El número de elementos de $G$ se llama orden de $G$ y se denota por $|G|$.*

Si $S$ tiene tres o más elementos, se pueden encontrar $f, g \in A(S)$ tales que

$fg \neq gf$. Esto sugiere señalar como especiales aquellos grupos $G$ en los cuales $a * b = b * a$ para todo $a, b \in G$.

**Definición 1.3.3.** *Se dice que un grupo $G$ es abeliano si $a * b = b * a$ para todo $a, b \in G$.*

**Lema 1.3.1.** *Si $G$ es un grupo, entonces:*

a) *Su elemento identidad es único.*

b) *Todo $a \in G$ tiene un inverso único $a^{-1} \in G$.*

c) *Si $a \in G$, $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.*

d) *Para $a, b \in G$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$*

**Demostración:**

a) Sean $e, e' \in G$ identidades.

Como $e$ es identidad en $G$ tenemos $a = e * a = a * e$ ; para todo $a \in G$.

Así $e = e' * e = e * e' = e'$. Por lo tanto $e = e'$ y queda probado a).

b) Sea $a \in G$ y $a^{-1}, b$ inversos de $a$.

Por ser inversos se cumple que, $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$ y $b * a = a * b = e$.

Luego, $b = b * e = b * \left(a * a^{-1}\right) = (b * a) * a^{-1} = e * a^{-1} = a^{-1}$. De donde se concluye que $b = a^{-1}$ así el inverso es único.

c) Sea $a, a^{-1} \in G$.

Sabemos que $\left(a^{-1}\right)^{-1} * \quad a^{-1} = e$ y $a^{-1} * \left(a^{-1}\right)^{-1} = e$.

Pero además $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$. Así que $a$ es un inverso de $a^{-1}$, luego por b) se tiene que $a \in G$, $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

d) Sean $a, b \in G$.

Sabemos que $(a * b) * (a * b)^{-1} = e$, entonces

$$
\begin{aligned}
(a * b) * (a * b)^{-1} = e &\Longrightarrow a * (b * (a * b)^{-1}) = e; \quad \text{ley asociativa} \\
&\Longrightarrow (a^{-1} * a) * (b * (a * b)^{-1}) = a^{-1} * e; \quad \text{existencia del} \\
&\qquad\qquad \text{inverso multiplicativo} \\
&\Longrightarrow e * (b * (a * b)^{-1}) = a^{-1}; \quad \text{existencia de la identidad} \\
&\Longrightarrow (b^{-1} * b) * (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}; \quad \text{existencia del} \\
&\qquad\qquad \text{inverso multiplicativo} \\
&\Longrightarrow e * (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}; \quad \text{existencia de la identidad} \\
&\Longrightarrow (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}; \quad \text{existencia de la identidad}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto hemos probado el lema. ■

**Lema 1.3.2.** *En todo grupo $G$ si $a, b \in G$ y:*

a) *$ab = ac$, entonces $b = c$.*

b) *$ba = ca$, entonces $b = c$.*

**Demostración:** a) Sea $a * b = a * c$, entonces

$$\begin{aligned} a * b = a * c &\implies a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c); \quad \text{existencia del inverso} \\ &\implies (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c; \quad \text{ley asociativa} \\ &\implies e * b = e * c; \quad \text{existencia de la identidad} \\ &\implies b = c; \quad \text{existencia de la identidad} \end{aligned}$$

b) Sea $b * a = c * a$, entonces

$$\begin{aligned} b * a = c * a &\implies (b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1}; \quad \text{existencia del inverso} \\ &\implies b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1}); \quad \text{ley asociativa} \\ &\implies b * e = c * e; \quad \text{existencia de la identidad} \\ &\implies b = c; \quad \text{existencia de la identidad} \end{aligned}$$

Por lo tanto queda probado el lema. ■

## 1.4. Subgrupos.

Un grupo $G$ se distingue de un conjunto ordinario por el hecho de que está dotado de una operación y que cumple ciertos axiomas establecidos. Así que es natural exigir que dichos axiomas se cumplan en $G$ con respecto a la operación establecida. Una vez que se tiene esto, se llega casi de inmediato al concepto de subgrupo de un grupo.

**Definición 1.4.1.** *Un subconjunto no vacío $H$ de un grupo $G$ se llama subgrupo de $G$, si $H$ mismo forma un grupo relativo al producto de $G$ y se denota por $H < G$.*

Todo grupo $G$ tiene automáticamente dos subgrupos obvios, a saber, $G$ mismo y el subgrupo que consiste solo del elemento identidad $e$. A estos dos subgrupos se les llama **subgrupos triviales**.
Cuando se trata de verificar si un subconjunto dado de un grupo es o no un subgrupo, ya no es preciso comprobar uno de los axiomas que definen un grupo, a saber, la ley asociativa. Puesto que la ley asociativa es válida universalmente en un grupo $G$, dado cualquier subconjunto $A$ de $G$ y tres elementos cualesquiera de $A$, la ley asociativa desde luego es válida para ellos. Así que para un subconjunto dado $A$ de $G$, se debe comprobar si $A$ es cerrado respecto a la operación de $G$, si $e$ esta en $A$ y finalmente, dado $a \in A$, entonces $a^{-1}$ también está en $A$. En otras palabras:

**Lema 1.4.1.** *Un subconjunto no vacío $A \subset G$ es un subgrupo de $G$ si y sólo si $A$ es cerrado con respecto a la operación de $G$, y dado $a \in A$, entonces $a^{-1} \in A$.*

**Demostración:**

$'' \Longrightarrow ''$. Supongamos que un subconjunto no vacío $A \subset G$ es un subgrupo de $G$.

Si $A \subset G$, por ser $A$ un subgrupo se tiene que $A$ es cerrado con respecto a la operación de $G$ y se cumple que $a^{-1} \in A$.

$'' \Longleftarrow ''$. Supongamos que $A$ es cerrado con respecto a la operación de $G$, y dado $a \in A$, entonces $a^{-1} \in A$.

Probaremos que $A$ forma un grupo relativo al producto de $G$.

Por la definición 1.3.1 solo falta probar que se cumple la ley asociativa en $G$ y que existe el elemento identidad.

**Asociatividad:** Sean $a, b, c \in A$.

$$a, b, c \in A \Longrightarrow a, b, c \in G; A \subset G$$

Así se cumple $(a * b) * c = a * (b * c)$; por lo tanto $A$ es asociativo.

**Elemento identidad:** Sean $a \in A$.

$$\begin{aligned} a \in A \quad &\Longrightarrow \quad a^{-1} \in A; \quad \text{por hipótesis} \\ &\Longrightarrow \quad a * a^{-1} = e \in A; \quad \text{por hipótesis} \\ &\Longrightarrow \quad e \in A \end{aligned}$$

Así concluimos que $A$ es subgrupo de $G$. ■

**Definición 1.4.2.** *Si $H$ es un subgrupo de $G$, y $a \in G$, entonces $Ha = \{ha|h \in H\}$. A $Ha$ se le llama* ***clase lateral derecha*** *de $H$ en $G$. Similarmente $aH = \{ah|h \in H\}$ es llamada* ***clase lateral izquierda*** *de $H$ en $G$.*

## 1.5. Teorema de Lagrange.

El teorema simplemente dice que en un grupo finito el orden de un subgrupo divide al orden del grupo.

Para refinar el argumento de este teorema el cual se debe a Lagrange y para emplearlo posteriormente muchas veces haremos una breve descripción hacia la teoría de conjuntos.

**Definición 1.5.1.** *Una relación $\sim$ en un conjunto $S$ se llama relación de equivalencia si satisface: para todo $a, b, c \in S$*

a) *$a \sim a$ (reflexiva).*

b) *$a \sim b$ implica que $b \sim a$ (simetría).*

c) *$a \sim b, b \sim c$ implica que $a \sim c$ (transitividad).*

Desde luego, la igualdad $'' = ''$ es una relación de equivalencia, de modo que la noción general de relación de equivalencia es una generalización de la de igualdad.

**Ejemplo 1.5.1.** *Sea* $S = \{a/b \quad con \quad a, b \in Z, b \neq 0\}$ *el conjunto de expresiones cocientes. Verifíquese directamente que* $m/n \sim r/s$ *si y sólo si* $ms = nr$ *es una relación de equivalencia en el conjunto* $S$*.*

Para probar que existe una relación de equivalencia basta probar que se satisfacen las propiedades de la definición 1.5.1.

**Reflexividad:** $m/n \sim m/n$, ya que $mn = nm$.

**Simetría:** Si $m/n \sim r/s$, entonces, $ms = nr$. De donde $rn = sm$, por lo tanto se concluye que $r/s \sim m/n$.

**Transitividad:** Sean $m/n, r/s, u/v \in S$ tales que $m/n \sim r/s$ y $r/s \sim u/v$, entonces

$m/n \sim r/s \Longrightarrow ms = nr \quad$ 1)

$r/s \sim u/v \Longrightarrow rv = us \qquad$ 2)

Por otra parte tenemos:

$$\begin{aligned} mvs &= vms; && \text{propiedad conmutativa} \\ &= vnr; && \text{por 1)} \\ &= nrv; && \text{propiedad conmutativa} \\ &= nus; && \text{por 2)} \end{aligned}$$

Como $mvs = nus$; además $s \neq 0$, tenemos $mv = nu$. Así $m/n \sim u/v$.

Así se establece que $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto $S$.

**Ejemplo 1.5.2.** *Sean $G$ un grupo y $H$ un subgrupo de $G$. Para $a, b \in G$, defínase $a \sim b$ si $ab^{-1} \in H$.*

Probaremos que la relación definida es una relación de equivalencia:

**Reflexividad:** Puesto que $e \in H$ y $aa^{-1} = e$, se tiene que $a \sim a$.

**Simetría:** Si $ab^{-1} \in H$, entonces puesto que $H$ es un subgrupo de $G$, $(ab^{-1})^{-1} \in H$. Pero $(ab^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}a^{-1} = ba^{-1}$, así que $ba^{-1} \in H$, por consiguiente $b \sim a$. Así que $a \sim b$ implica $b \sim a$.

**Transitividad:** Si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $ab^{-1} \in H$ y $bc^{-1} \in H$. Pero $(ab^{-1})(bc^{-1}) = ac^{-1}$, de donde $ac^{-1} \in H$ y por tanto $a \sim c$.

Así tenemos que la relación $\sim$ definida es una relación de equivalencia.

**Definición 1.5.2.** *Si $\sim$ es una relación de equivalencia en $S$, entonces se define $[a]$ la clase de $a$ mediante $[a] = \{b \in S | b \sim a\}$.*

**Teorema 1.5.1.** *Si $\sim$ es una relación de equivalencia en $S$, entonces $S = \cup [a]$, donde esta unión pasa sobre un elemento de cada clase, y donde $[a] \neq [b]$ implica que $[a] \cap [b] = \phi$ .*

**Demostración:** Puesto que $a \in [a]$, se tiene que $S = \cup_{a \in S} [a]$. Ahora para demostrar que $[a] \neq [b]$ implica que $[a] \cap [b] = \phi$ lo haremos por el contrarecíproco, es decir, probaremos que si $[a] \cap [b] \neq \phi$ entonces $[a] = [b]$.

Supongamos que $[a] \cap [b] \neq \phi$ y sea $c \in [a] \cap [b]$.

$$\begin{aligned} c \in [a] \cap [b] &\implies c \in [a] \wedge c \in [b]\,; \quad \text{deficnición de intersección} \\ &\implies c \sim a \wedge c \sim b: \quad \text{definición 1.5.2} \\ &\implies a \sim b; \quad \text{definición 1.5.1 c)} \\ &\implies a \in [b]\,; \quad \text{definición 1.5.2} \end{aligned}$$

Ahora sea $x \in [a]$, entonces $x \sim a$, pero por el hecho anterior tenemos que $a \sim b$ y esto da lugar a $x \sim b$ de donde $x \in [b]$, así $[a] \subset [b]$. Por otra parte sea $x \in [b]$, entonces $x \sim b$, pero como $a \sim b$ esto da lugar a $x \sim a$ de donde $x \in [a]$. Así $[b] \subset [a]$.

Por lo tanto se ha probado $[a] = [b]$. y queda probado el teorema. ■

**Lema 1.5.1.** *Hay una correspondencia biyectiva entre dos clases laterales derechas cualesquiera de $H$ en $G$.*

**Demostración:** Por la definición 1.5.2 tenemos $Ha = \{ha | h \in H\}$. Ahora definimos:

$$f : Ha \longrightarrow Hb$$

$$f : ha \longrightarrow hb$$

Para probar que $f$ es biyectiva basta con probar que está bien definida, que es inyectiva y sobreyectiva.

$f$ **está bien definida:** Sea $h_1a, h_2a \in Ha$ tales que $h_1a = h_2a$.

$$\begin{aligned} h_1a = h_2a &\implies h_1aa^{-1} = h_2aa^{-1}; \quad \text{existencia del inverso multiplicativo} \\ &\implies h_1 = h_2; \quad \text{existencia de la identidad} \\ &\implies h_1b = h_2b; \quad \text{multiplicación por } b \\ &\implies f(h_1a) = f(h_2a); \quad \text{definición de } f \end{aligned}$$

Así $f$ está bien definida.

**Inyectiva:** Sea $h_1a, h_2a \in Ha$ tales que $f(h_1a) = f(h_2a)$.

$$\begin{aligned} f(h_1a) = f(h_2a) &\implies h_1b = h_2b; \quad \text{definición de } f \\ &\implies h_1bb^{-1} = h_2bb^{-1}; \quad \text{existencia del inverso multiplicativo} \\ &\implies h_1 = h_2; \quad \text{existencia de la identidad} \\ &\implies h_1a = h_2a; \quad \text{multiplicación por } a \end{aligned}$$

Por tanto $f$ es inyectiva.

**Sobreyectiva:** Sea $y \in Hb$.

$$\begin{aligned} y \in Hb &\implies y = hb; \quad \text{para algún } h \in H \\ &\implies yb^{-1} = h; \quad \text{existencia del elemento inverso} \\ &\implies (yb^{-1})a = ha; \quad \text{multiplicación por } a \\ &\implies m = ha; \quad m = (yb^{-1})a \in Ha \end{aligned}$$

Así $f$ es sobreyectiva. Por lo tanto existe una biyección entre las clases laterales derechas. ■

**Teorema 1.5.2.** ***(Teorema de Lagrange)*** *Si G es un grupo finito y H es un subgrupo de G, entonces el orden de H divide al orden de G.*

**Demostración:** En el ejemplo 1.5.2 se estableció que la relación $a \sim b$ si $ab^{-1} \in H$ es una relación de equivalencia, además por la definición 1.5.2 tenemos:

$$[a] = Ha = \{ha|h \in H\}$$

Sea $k$ el número de clases distintas denotadas por $Ha_1, Ha_2, \ldots, Ha_k$. Por el teorema 1.5.1 se tiene que $G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \ldots \cup Ha_k$ y que $Ha_i \cap Ha_j = \phi$ si $i \neq j$. Por el lema anterior hay una correspondencia biyectiva entre dos clases laterales. Por tanto $He$ y $Ha_i$ tienen el mismo número de elementos y es $|H|$. Como $G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \ldots \cup Ha_k$ entonces $|G| = |Ha_1| + |Ha_2| + \ldots + |Ha_k| = k|H|$;

así se tiene $|G| = k|H|$. Por consiguiente $|H|$ divide a $|G|$ y con esto se prueba el teorema de Lagrange. ■

**Definición 1.5.3.** *Sean $G$ un grupo y $a \in G$. El conjunto $A = \{a^i | i \quad \text{es cualquier entero}\}$ se llama **subgrupo cíclico** de $G$ generado por $a$.*

## 1.6. Homomorfismos y Subgrupos Normales.

En cierto sentido el tema de la teoría de grupos es elaborado a partir de tres conceptos básicos: el de homomorfismos, el de subgrupo normal y el de grupo o factor cociente de un grupo por un subgrupo normal. A continuación se habla un poco sobre teoría de homomorfismos.

Sabemos que una aplicación relaciona elementos de un conjunto con los de otro.

**Definición 1.6.1.** *Sean $G, G'$ dos grupos; entonces una aplicación $\varphi : G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo si se cumple:*

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b); para \quad todo \quad a, b \in G.$$

Examinemos la idea que hay detrás de la condición $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para que $\varphi : G \to G'$ sea homomorfismo. Esta condición es lo único que distingue a un homomorfismo de una simple transformación de $G$ en $G'$ . Asegura que $\varphi$ es una transformación que relaciona estructuras. La estructura algebraica de $G$ está por completo determinada por la operación binaria en $G$ , y la de $G'$ está por completo determinada por la operación binaria en $G'$. En la condición $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, la operación $ab$ en el lado izquierdo ocurre en $G$, mientras que la operación $\varphi(a)\varphi(b)$ del lado derecho, ocurre en $G'$. Así, la condición para ser homomorfismo relaciona la estructura de $G$ con la de $G'$.

Mostramos un ejemplo para ilustrar la idea de Homomorfismo. Pero antes definamos a $\mathbb{Z}_n$: Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros y $n > 1$, un entero fijo. Y definamos $a \equiv b \, mod \, n$, si $n|(a-b)$.

La clase de $a$, $[a]$, consiste de todos los $a + nk$, donde $k$ recorre todos los enteros y se llama clase de congruencia de $a$.

Dado cualquier entero $b$ se tiene por el teorema de Euclides, $b = qn + r$, donde $0 \leq r < n$. Así que las $n$ clases $[0], [1], ..., [n-1]$ proporcionan todas las clases de congruencia. Así $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], ..., [n-1]\}$.

**Ejemplo 1.6.1.** *La transformación natural $\gamma$ de $Z$ en $Z_n$ dada por $\gamma(m) = r$; donde $r$ es el residuo de $m$ al dividirlo entre $n$, es un homomorfismo.*

Es necesario observar que:

$$\gamma(s+t) = \gamma(s) + \gamma(t)$$

$s = q_1 n + r_1 \rightarrow (1);$

$t = q_2 n + r_2 \rightarrow (2); 0 \leq r_i < n.$

Entonces $\gamma(s) = r_1, \gamma(t) = r_2$. Así: $\gamma(s) + \gamma(t) = (r_1 + r_2) \, mod \, n.$

Esto es $r_1 + r_2 = q_3 n + r_3$ para $0 \leq r_3 < n$, entonces $\gamma(s) + \gamma(t) = r_3$.

Sumando (1) y (2) obtenemos:

$$\begin{aligned} s + t &= q_1 n + r_1 + q_2 n + r_2; \quad \text{por (1) y (2)} \\ &= (q_1 + q_2)n + r_1 + r_2; \quad \text{factor común} \\ &= (q_1 + q_2)n + (q_3 n + r_3); \quad \text{por definición} \\ &= (q_1 + q_2 + q_3)n + r_3; \quad \text{factor común} \end{aligned}$$

y $0 \leq r_3 < n$. Así también tenemos: $\gamma(s + t) = r_3$ y por lo tanto hemos probado el homomorfismo.

En las funciones reales de variable real encontramos funciones inyectivas y sobreyectivas, algo similar ocurre con los homomorfismos. Es decir.

**Definición 1.6.2.** *El homomorfismo $\varphi : G \to G'$ se llama **monomorfismo** si $\varphi$ es inyectiva. Un homomorfismo que es sobreyectivo se denomina **epimorfismo**. Los homomorfismos que son monomorfismo y epimorfismo a la vez se denominan **isomorfismos**.*

Existe una relación de homomorfismos entre las identidades de los grupos $G, G'$, que se plantea en el lema siguiente:

**Lema 1.6.1.** *Si $\varphi$ es un homomorfismo de $G$ en $G'$, entonces:*

a) *$\varphi(e) = e'$, el elemento unidad de $G'$.*

b) *$\varphi(a^{(-1)}) = (\varphi(a))^{(-1)}$ para todo $a \in G$.*

**Demostración:** Sean $\varphi : G \to G'$, un homomorfismo entre grupos.

a) Sea $e$ y $e'$ las identidades de $G$ y $G'$, respectivamente. Y sea $x \in G$.

$$\begin{aligned}
x \in G \implies & x = xe; \quad \text{elemento neutro.} \\
\implies & \varphi(x) = \varphi(xe); \quad \text{aplicamos } \varphi. \\
\implies & \varphi(x) = \varphi(x)\varphi(e); \quad \varphi \text{ es homomorfismo.} \\
\implies & \varphi(x)e' = \varphi(x)\varphi(e); \quad \text{elemento neutro en } G'. \\
\implies & e' = \varphi(e); \quad \text{por cancelación de } \varphi(x) \text{ en } G'.
\end{aligned}$$

b) Sea $a \in G$.

$$\begin{aligned}
a \in G \implies & aa^{-1} = e; \quad \text{existencia del elemento inverso en } G \\
\implies & \varphi(aa^{-1}) = \varphi(e); \quad \text{aplicamos } \varphi. \\
\implies & \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = e'; \quad \varphi \text{ es homomorfismo.} \\
\implies & (\varphi(a))^{-1}(\varphi(a)\varphi(a^{-1})) = (\varphi(a))^{-1}e'; \quad \text{existencia del inverso en } G' \\
\implies & ((\varphi(a))^{-1}\varphi(a))\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}; \quad \text{ley asociativa.} \\
\implies & e'(\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}; \quad G' \text{ es grupo.} \\
\implies & \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}; \quad \text{elemento neutro en } G'. \blacksquare
\end{aligned}$$

La imagen de $\varphi$, que es $\varphi(G)$, se define como $\varphi(G) = \{\varphi(a) | a \in G\}$.

**Teorema 1.6.1.** *Si $\varphi$ es un homomorfismo de $G$ en $G'$, entonces la imagen de $\varphi$ es un subgrupo de $G$.*

**Demostración:** Aplicando el Lema 1.4.1, tenemos:

1. ¿$\varphi(G)$ es cerrado?. Sean $y_1, y_2 \in \varphi(G)$, entonces:

   $y_1, y_2 \in \varphi(G) \Longrightarrow y_1 = \varphi(x_1) \wedge y_2 = \varphi(x_2);$ para algunos $x_1, x_2 \in G$.

   Luego:

$$\begin{aligned} y_1 y_2 = \varphi(x_1)\varphi(x_2) &\Longrightarrow y_1 y_2 = \varphi(x_1 x_2); \quad \varphi \text{ es homomorfismo.} \\ &\Longrightarrow y_1 y_2 = \varphi(x); \quad x = x_1 x_2 \in G \\ &\Longrightarrow y_1, y_2 \in \varphi(G) \end{aligned}$$

   Así se tiene que $\varphi(G)$ es cerrado bajo la operación de G′.

2. ¿Todo elemento de $\varphi$(G) posee inverso?. Sean $y \in \varphi(G)$.

$$\begin{aligned} y \in \varphi(G) &\Longrightarrow y = \varphi(x) \in \varphi(G) \subset G'; \text{ para algún } x \in G. \\ &\Longrightarrow y^{-1} = (\varphi(x))^{-1}, y^{-1} \in G'; \text{ elemento inverso en } G' \\ &\Longrightarrow y^{-1} = \varphi(x^{-1}), x^{-1} \in G; \ \varphi \text{ es homomorfismo} \\ &\Longrightarrow y^{-1} = \varphi(w), w = x^{-1} \\ &\Longrightarrow y^{-1} \in \varphi(G); \text{ por definición de } \varphi(G) \end{aligned}$$

Por lo que todo elemento de $\varphi(G)$ posee inverso en $\varphi(G)$. De los resultados de los incisos 1) y 2) se concluye que $\varphi(G)$ es un subgrupo de $G$. ■

**Teorema 1.6.2.** ***(DE CAYLEY)*** *Todo grupo $G$ es isomorfo a algún subgrupo de $A(S)$, para un $S$ apropiado.*

**Demostración:** Sea $G$ un grupo dado, $A(G)$ el conjunto de todas las aplicaciones inyectivas de $G$ en $G$ (se considera a $G$ simplemente como un conjunto en $A(G)$). Definamos la aplicación $T_a : G \to A(G)$ mediante la regla de correspondencia $T_a(x) = ax$ para todo $x \in G$ y $a \in A$.
Ahora veamos a que es igual el producto $T_aT_b$, de $T_a$ y $T_b$ como aplicaciones de $A(G)$:

$$\begin{aligned}
(T_aT_b)(x) &= T_a(T_b(x)); \text{definición de aplicación en } A(G) \\
&= T_a(bx); \text{por definición de } T_b \\
&= a(bx); \text{por definición de } T_a \\
&= (ab)x; \text{ley asociativa} \\
&= T_{ab}(x); \text{por definición de } T_{ab}
\end{aligned}$$

Así se tiene que $T_aT_b = T_{ab}$. Ahora definamos la aplicación $\varphi : G \to A(G)$ mediante $\varphi(a) = T_a$, para $a \in G$. Comprobemos que $\varphi$ es un homomorfismo de grupos.

Sean $a, b \in G$.

$$\begin{aligned} a, b \in G &\implies \varphi(ab) = T_{ab}; \text{ por definición de } \varphi \\ &\implies \varphi(ab) = T_a T_b; \text{ por propiedad de } T_a \\ &\implies \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b); \text{ por definición de } \varphi \end{aligned}$$

Así tenemos que $\varphi$ es un homomorfismo de $G$ en $A(G)$.

Probemos que $\varphi$ es inyectiva. Sean $a, b \in G$ tal que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

$$\begin{aligned} \varphi(a) = \varphi(b) &\implies T_a = T_b; \text{por definición de } \varphi \\ &\implies a = T_a(e) = T_b(e) = b; \text{por definición de } T_i \text{ con } i \in G \\ &\implies a = b; \text{por igualdad} \end{aligned}$$

Por lo que $\varphi$ es inyectiva.

Pero $\varphi$ en general no es sobre, es decir, si $G$ tiene orden $n > 2$, entonces $A(G)$ tiene orden $n!$, y puesto que $n! > n$, no existe la posibilidad de que $\varphi$ sea sobre. Dado que $\varphi$ es un homomorfismo de grupos, por el Lema 2.4.5, tenemos que $\varphi(G)$ es un subgrupo de $A(G)$. Restringiendo el rango de $\varphi$ a $ran(\varphi) = \varphi(G)$, tenemos que $\varphi$ es sobreyectivo. Y así tenemos que $\varphi$ es un isomorfismo de $G$ en $\phi(G)$, por lo que se concluye $G \simeq \varphi(G)$. ■

**Definición 1.6.3.** *Si $\varphi$ es un homomorfismo de $G$ en $G'$, entonces el **núcleo** de $\varphi, K(\varphi)$, se define por $K(\varphi) = \{a \in G|\varphi(a) = e'\}$.*

**Lema 1.6.2.** *Si $w' \in G'$ es de la forma $\varphi(x) = w'$, entonces*

$$\{y \in G|\varphi(y) = w'\} = k(\varphi)x.$$

**Demostración:** Por hipótesis tenemos, si $w' \in G'$ es de la forma $\varphi(x) = w'$. Sea $A = \{y \in G|\varphi(y) = w'\}$ y sea $k(\varphi)x = \{nx|n \in k(\varphi)\}$. Probaremos el lema por doble inclusión.

$'' \subseteq ''$. Sea $y \in A$.

$$\begin{aligned}
y \in A &\implies \varphi(y) = w';\ \text{por hipótesis}\\
&\implies \varphi(y) = \varphi(x);\ \text{por hipótesis.}\\
&\implies \varphi(y)(\varphi(x))^{-1} = \varphi(x)(\varphi(x))^{-1};\ \text{existencia del elemento inverso}\\
&\implies \varphi(y)\varphi(x^{-1}) = e';\ \varphi \text{ es homomorfismo y propiedad de grupo.}\\
&\implies \varphi(yx^{-1}) = e';\ \varphi \text{ es homomorfismo}\\
&\implies yx^{-1} \in K(\varphi);\ \text{definición de K}(\varphi)\\
&\implies yx^{-1} = n;\ \text{definición de K}(\varphi)\\
&\implies y = nx;\ \text{existencia del elemento inverso}\\
&\implies y \in K(\varphi)x;\ \text{por hipótesis}
\end{aligned}$$

Así se tiene que $A \subseteq k(\varphi)x$.

$'' \supseteq ''$. Sea $y \in K(\varphi)x$.

$$\begin{aligned}
y \in K(\varphi)x &\implies y = nx; \text{ por hipótesis} \\
&\implies yx^{-1} = n; \text{ existencia del elemento inverso} \\
&\implies yx^{-1} \in K(\varphi); \text{ definición de K}(\varphi) \\
&\implies \varphi(yx^{-1}) = e'; \text{ definición de K}(\varphi) \\
&\implies \varphi(y)\varphi(x^{-1}) = e'; \ \varphi \text{ es homomorfismo} \\
&\implies \varphi(y)(\varphi(x))^{-1}(\varphi(x)) = e'\varphi(x); \text{ existencia del inverso.} \\
&\implies \varphi(y) = \varphi(x); \text{ propiedad de grupo.} \\
&\implies \varphi(y) = w'; \text{ por hipótesis} \\
&\implies y \in A; \text{ por definición de } A
\end{aligned}$$

Así se tiene que $A \supseteq k(\varphi)x$. Luego concluimos $A = k(\varphi)x$. ■

**Teorema 1.6.3.** *Si $\varphi$ es un homomorfismo de G en $G'$, entonces*

*a. $k(\varphi)$ es un subgrupo de G.*

*b. Dado $a \in G$, $a^{-1}K(\varphi)a \subset K(\varphi)$.*

**Demostración:**

a. Por definición sabemos que $k(\varphi) = \{a \in G | \varphi(a) = e'\}$, aplicando el Lema 1.4.1.

I. $k(\varphi) \neq \phi$ ya que $\varphi(e) = e'$; $\varphi$ es homomorfismo.

II. $k(\varphi)$ es cerrado. Sean $a, b \in k(\varphi)$.

$$\begin{aligned} a, b \in k(\varphi) &\implies \varphi(a) = e' \wedge \varphi(b) = e'; \text{ definición del } k(\varphi). \\ &\implies \varphi(a)\varphi(b) = e'; \text{ multiplicación de } e' \text{ por } e'. \\ &\implies \varphi(ab) = e'; \ \varphi \text{ es homomorfismo.} \\ &\implies ab \in k(\varphi); \text{ por definición de núcleo.} \end{aligned}$$

III. Existencia del inverso. Sea $a \in k(\varphi)$.

$$\begin{aligned} a \in k(\varphi) &\implies \varphi(a) = e'; \text{ definición del } k(\varphi) \\ &\implies [\varphi(a)]^{-1} = (e')^{-1}; \text{ existencia del inverso.} \\ &\implies \varphi(a^{-1}) = e', \ \varphi \text{ es homomorfismo} \\ &\implies a^{-1} \in k(\varphi); \text{ por definición de núcleo} \end{aligned}$$

Por I), II), III) concluimos que $k(\varphi)$ es un subgrupo de $G$.

b. Sea $y \in a^{-1}k(\varphi)a$.

$$\begin{aligned}
y \in a^{-1}k(\varphi)a &\implies y = a^{-1}xa, x \in k(\varphi); \text{definición de } a^{-1}k(\varphi)a \\
&\implies \varphi(y) = \varphi(a^{-1}xa); \text{Aplicación de } \varphi \\
&\implies \varphi(y) = \varphi(a^{-1})\varphi(x)\varphi(a); \varphi \text{ es homomorfismo} \\
&\implies \varphi(y) = [\varphi(a)]^{-1}e'\varphi(a); \varphi \text{ es homomorfismo} \\
&\implies \varphi(y) = [\varphi(a)]^{-1}\varphi(a); \text{Elemento neutro} \\
&\implies \varphi(y) = e'; \text{Multiplicación por el Inverso.} \\
&\implies y \in k(\varphi);\ \text{por definición de núcleo}
\end{aligned}$$

De donde concluimos que $a^{-1}k(\varphi)a \subset k(\varphi)$. ■

**Teorema 1.6.4.** *Si $\varphi$ es un homomorfismo de $G$ en $G'$, entonces $\varphi$ es un monomorfismo si y sólo si $K(\varphi) = \{e\}$.*

**Demostración:**

$'' \implies ''$. Supongamos que $\varphi$ es un monomorfismo de $G$ en $G'$. Probaremos que $K(\varphi) = \{e\}$, es decir $a)$ $K(\varphi) \subseteq \{e\}$, $b)$ $K(\varphi) \supseteq \{e\}$.

a) $K(\varphi) \subseteq \{e\}$. Sea $x \in K(\varphi)$.

$x \in K(\varphi) \implies \varphi(x) = e'$; por definición del $K(\varphi)$

Y dado que $\varphi(e) = e'$, por el Lema 1.6.1, tenemos:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = \varphi(e) \quad &\Longrightarrow \quad x = e; \varphi \text{ es monomorfismo} \\
&\Longrightarrow \quad x \in \{e\}; \text{ por definición de } \{e\}
\end{aligned}$$

b) $K(\varphi) \supseteq \{e\}$. Dado que $\varphi(e) = e'$, por Lema 1.6.1 se tiene que $K(\varphi) \supseteq \{e\}$.

De los resultados de $a)$ y $b)$ concluimos que $K(\varphi) = \{e\}$.

$'' \Longleftarrow ''$. Supongamos que $K(\varphi) = \{e\}$. Y sean $x_1, x_2 \in G$ tales que

$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(x_1)(\varphi(x_2))^{-1} = e'; \text{ propiedad de grupo} \\
&\Longrightarrow \quad \varphi(x_1)\varphi((x_2)^{-1}) = e'; \text{ lema 1.6.1 b)} \\
&\Longrightarrow \quad \varphi(x_1(x_2)^{-1}) = e'; \ \varphi \text{ es homomorfismo} \\
&\Longrightarrow \quad x_1(x_2)^{-1} \in K(\varphi); \text{ definición del } K(\varphi) \\
&\Longrightarrow \quad x_1(x_2)^{-1} = e; \text{ por hipótesis } K(\varphi) = \{e\} \\
&\Longrightarrow \quad x_1 = x_2; \text{ propiedad de Grupo}
\end{aligned}$$

Así se tiene que $\varphi$ es un monomorfismo. ∎

**Definición 1.6.4.** *Se dice que un subgrupo $N$ de $G$ es un subgrupo normal de $G$ si $a^{-1}Na \subset N$ para todo $a \in G$.*

Expresamos "$N$ es un subgrupo normal de $G$" mediante el símbolo abreviado

$N \lhd G$.

**Teorema 1.6.5.** *$N \lhd G$ si y sólo si toda clase lateral izquierda de $N$ en $G$ es una clase lateral derecha de $N$ en $G$.*

**Demostración:**

"$\Longrightarrow$": Sean los conjuntos $Na = \{na|n \in N\}$, $aN = \{an|n \in N\}$ las clases laterales izquierda y derecha de $N$ en $G$, y supongamos que $N \lhd G$.

Sea $x \in Na$

$$
\begin{aligned}
x \in Na &\Longrightarrow x = na;\ \text{para algún } n \in N \\
&\Longrightarrow a^{-1}x = a^{-1}na;\ \text{existencia del inverso en } G \\
&\Longrightarrow a^{-1}x \in a^{-1}Na;\ \text{definición de } a^{-1}Na \\
&\Longrightarrow a^{-1}x \in N;\ \text{por hipótesis } N \lhd G \\
&\Longrightarrow a^{-1}x = h;\ \text{para algún } h \in N \\
&\Longrightarrow aa^{-1}x = ah;\ \text{multiplicación por } a \\
&\Longrightarrow x = ah;\ \text{existencia de la identidad en } G \\
&\Longrightarrow x \in aN;\ \text{definición de } aN
\end{aligned}
$$

Por lo que $Na \subseteq aN$. La otra inclusión se obtiene similar, así $Na = aN$.

"$\Longleftarrow$". Sea $x \in a^{-1}Na$.

$$\begin{aligned}
x \in a^{-1}Na &\Longrightarrow x = a^{-1}na; \text{ por definición de } a^{-1}Na \\
&\Longrightarrow ax = aa^{-1}na; \text{ multiplicación por } a \\
&\Longrightarrow ax = na; \text{ existencia de la identidad} \\
&\Longrightarrow ax \in Na = aN; \text{ por hipótesis } Na = aN \\
&\Longrightarrow ax = ah; \text{ para algún } h \in N \text{ y definición de } aN \\
&\Longrightarrow a^{-1}ax = a^{-1}ah; \text{ existencia del inverso en } G \\
&\Longrightarrow x = h; \text{ existencia de la identidad} \\
&\Longrightarrow x \in N; \text{ dado que } h \in N
\end{aligned}$$

Así tenemos que $a^{-1}Na \subset N$, es decir $N \triangleleft G$. ■

## 1.7. Grupos Factores y Teoremas de Homomorfismos.

**Definición 1.7.1.** *Si $N$ es un subgrupo normal de un grupo $G$, el grupo de las clases laterales de $N$ bajo la operación inducida es el grupo factor de $G$ módulo $N$ y se denota por $G/N$. Las clases laterales son las clases residuales de $G$ módulo $N$.*

**Teorema 1.7.1.** *Si $N \triangleleft G$ y $G/N = \{[a] | a \in G\} = \{Na | a \in G\}$, entonces $N \triangleleft G$ es un grupo relativo a la operación $[a][b] = [ab]$.*

**Demostración:** Probaremos que $G/N$ es un grupo.

I. **Cierre.** Dados $Na$, $Nb$, entonces $NaNb = Nab$; Por definición

II. **Asociatividad.** Probaremos que dados $Na, Nb, Nc \in G/N$, entonces $(NaNb)Nc = Na(NbNc)$.

$$\begin{aligned}
(NaNb)Nc &= (Nab)Nc;\ \text{definición de clases} \\
&= N(ab)c;\ \text{definición de clases} \\
&= Na(bc);\ \text{asociatividad} \\
&= Na(Nbc);\ \text{definición de clases} \\
&= Na(NbNc);\ \text{definición de clases}
\end{aligned}$$

III. **Elemento neutro.** Sabemos que $Ne = N$. Entonces $NaNe = Nae = Na$ y $NeNa = Nea = Na$, asi que $NaNe = NeNa = Na$.

IV. **Elemento inverso.** Sea $Na \in G/N$.Entonces, $Na(Na)^{-1} = NaNa^{-1} = Naa^{-1} = Ne$.

De los resultados de los incisos anteriores se tiene que $G/N$ es un Grupo.■

Ahora empezamos una parte esencial en la teoría de homomorfismos, son los conocidos teoremas de homomorfismos.

Sea $G$ un grupo y $\varphi$ un homomorfismo de $G$ sobre $G'$. Si $K$ es el núcleo de $\varphi$, entonces $K$ es un subgrupo normal de $G$, por consiguiente se puede formar $G/K$. Resulta realmente natural que debe haber una relación muy estrecha entre $G'$ y

$G/K$. Dicha relación la describe el primer teorema de homomorfismos.

**Teorema 1.7.2.** ***(PRIMER TEOREMA DE HOMOMORFISMOS).*** *Sea $\varphi$ un homomorfismo de $G$ sobre $G'$ con núcleo $K$. Entonces $G' \simeq G/K$, y el isomorfismo entre ellos es efectuado por la aplicación*

$$\psi : G/K \to G'$$

*Definida por $\psi(Ka) = \varphi(a)$.*

**Demostración:** A continuación probaremos que $\psi$ está bien definido, que es homomorfismo, que es un epimorfismo y que es un monomorfismo.

I. $\psi$ es función: Sea $Ka$, $Kb$ tal que $Ka = Kb$.

$$\begin{aligned}
Ka = Kb &\implies k_1a = k_2b; \text{ para algunos } k_1, k_2 \in K \\
&\implies \varphi(k_1a) = \varphi(k_2b); \text{ aplicamos } \varphi \\
&\implies \varphi(k_1)\varphi(a) = \varphi(k_2)\varphi(b); \ \varphi \text{ es homomorfismo} \\
&\implies e'\varphi(a) = e'\varphi(b); \text{ definición de } \varphi \\
&\implies \varphi(a) = \varphi(b); \text{ elemento neutro} \\
&\implies \psi(Ka) = \psi(Kb); \text{ definición de } \psi
\end{aligned}$$

II. $\psi$ es homomorfismo: Sea $Ka, Kb \in G/K$, entonces

$$\begin{aligned}\psi(KaKb) &= \psi(Kab);\ \text{por definición de producto de clases}\\ &= \varphi(ab);\ \text{definición de } \psi\\ &= \varphi(a)\varphi(b);\ \varphi \text{ es homomorfismo}\\ &= \psi(Ka)\psi(Kb);\ \text{definición de } \psi\end{aligned}$$

Por lo que $\psi$ es un homomorfismo.

III. $\psi$ es un epimorfismo: Sea $y \in G'$.

$$\begin{aligned}y \in G' &\implies \exists a \in G \text{ tal que } \varphi(a) = y;\ \varphi \text{ es sobre}\\ &\implies Ka \in G/K;\ \text{definición de } G/K\\ &\implies \psi(Ka) = y;\ \text{definición de } \psi\end{aligned}$$

De donde $\psi$ es un Epimorfismo.

IV. $\psi$ es Monomorfismo: Sean $Ka, Kb \in G/K$ tal que $\psi(Ka) = \psi(Kb)$.

$$
\begin{aligned}
\psi(Ka) = \psi(Kb) &\implies \varphi(a) = \varphi(b);\ \text{definición de } \psi \\
&\implies \varphi(a)(\varphi(b))^{-1} = \varphi(b)(\varphi(b))^{-1};\ \text{existencia del inverso} \\
&\implies \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = e';\ \text{existencia de la identidad} \\
&\implies \varphi(ab^{-1}) = e';\ \varphi \text{ es homomorfismo} \\
&\implies ab^{-1} \in K;\ \text{definición del núcleo} \\
&\implies ab^{-1} = k_1,\ \text{con } k_1 \in K \\
&\implies ab^{-1}b = k_1 b;\ \text{existencia del inverso} \\
&\implies ae = k_1 b;\ \text{existencia del inverso} \\
&\implies a = k_1 b;\ \text{elemento neutro.} \\
&\implies a \in Kb;\ \text{definición del } Kb \\
&\implies Ka = Kb;\ \text{definición de clases}
\end{aligned}
$$

Así $\psi$ es monomorfismo. ■

**Teorema 1.7.3.** ***(SEGUNDO TEOREMA DE HOMOMORFISMOS).***

*Supóngase que la aplicación $\varphi : G \to G'$ es un homomorfismo de $G$ en $G'$ con núcleo $K$. Si $H'$ es un subgrupo de $G'$ y si*

$$H = \{a \in G | \varphi(a) \in H'\}$$

*entonces $H$ es un subgrupo de $G$, $H \supset K$, y $H/K \simeq H'$. Finalmente si $H' \lhd G'$, entonces $H \lhd G$.*

**Demostración:** Vamos a demostrar que $H$ es un subgrupo de $G$.

I) $H$ **cumple la propiedad de cierre.** Sean $a, b \in H$.

$$\begin{aligned} a, b \in H &\implies \varphi(a) \in H', \varphi(b) \in H'; \text{ definición de } \varphi \\ &\implies \varphi(a)\varphi(b) \in H'; \ H' \text{ es cerrado dado que es subgrupo de } G' \\ &\implies \varphi(ab) \in H'; \ \varphi \text{ es homomorfismo} \\ &\implies ab \in H; \text{ definición de } H \end{aligned}$$

II) **Todo elemento de** $H$ **es invertible.** Sea $a \in H$.

$$\begin{aligned} a \in H &\implies \varphi(a) \in H'; \text{ definición de } H \\ &\implies (\varphi(a))^{-1} \in H'; \text{ dado que } H' < G' \text{ existe el inverso} \\ &\implies \varphi(a^{-1}) \in H'; \ \varphi \text{ es homomorfismo} \\ &\implies a^{-1} \in H; \text{ deficinición de } H \end{aligned}$$

Así por el Lema 1.4.1, se concluye que $H$ es subgrupo de $G$.

Ahora demostramos que $H \supset K$. Sea $a \in K$.

$$\begin{aligned} a \in K &\Longrightarrow \varphi(a) = e';\ \text{definición del núcleo} \\ &\Longrightarrow \varphi(a) \in H';\ \text{dado que } H' < G', H' \text{ contiene a } e' \\ &\Longrightarrow a \in H;\ \text{definición de } H. \end{aligned}$$

De donde $H \supset K$.

Ahora probaremos que $H/K \simeq H'$.

Restringiendo $\varphi|_H : H \to H'$. Se tiene que $\varphi$ es inyectiva y sobreyectiva y por el teorema anterior se tiene que $H/K \simeq H'$.

Ahora probaremos que si $H' \lhd G'$, entonces $H \lhd G$.

Sea $x \in a^{-1}Ha$.

$$\begin{aligned} x \in a^{-1}Ha &\Longrightarrow x = a^{-1}ha, \text{ para algún } h \in H \\ &\Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(a^{-1}ha); \text{ aplicando } \varphi \\ &\Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(a^{-1})\varphi(h)\varphi(a); \ \varphi \text{ es homomorfismo} \\ &\Longrightarrow \varphi(x) = (\varphi(a))^{-1}h'\varphi(a), h' \in H; \ \varphi \text{ es homomorfismo} \\ &\Longrightarrow \varphi(x) = b^{-1}h'b; \ b = \varphi(a) \\ &\Longrightarrow \varphi(x) \in b^{-1}H'b; \text{ por definición} \\ &\Longrightarrow \varphi(x) \in H'; \ H' \lhd G' \\ &\Longrightarrow x \in H; \text{ definición de } H \end{aligned}$$

Por lo tanto $a^{-1}Ha \subset H$.. Así $H \lhd G$.

**Teorema 1.7.4.** ***(TERCER TEOREMA DE HOMOMORFISMOS).***

*Si la aplicación $\varphi : G \to G'$ es un homomorfismo de $G$ sobre $G'$ con núcleo $K$, entonces si $N' \lhd G'$ y $N = \{a \in G | \varphi(a) \in N'\}$, se concluye que $G/N \simeq G'/N'$. En forma equivalente, $G/N \simeq (G/K)/(N/K)$.*

**Demostración:** Definamos $\psi : G \to G'/N'$ dada por $\psi(a) = N'\varphi(a)$.

**Epimorfismo:** Sea $x \in G'/N'$.

Como $\varphi$ es sobreyectiva,para $x \in G' \exists\, a \in G$ tal que $\varphi(a) = x$.

$$\varphi(a) = x \Longrightarrow N'x = N'\varphi(a) = \psi(a)$$

De donde $\psi$ es sobreyectiva.

**Homomorfismo:** Sean $a, b \in G$.

$$\begin{aligned} a, b \in G &\implies \psi(ab) = N'\varphi(ab); \text{ definición de } \psi \\ &\implies \psi(ab) = N'\varphi(a)\varphi(b); \ \varphi \text{ es homomorfismo} \\ &\implies \psi(ab) = (N'\varphi(a))(N'\varphi(b)); \text{ definición} \\ &\implies \psi(ab) = \psi(a)\psi(b); \text{ definición de } \psi \end{aligned}$$

De donde $\psi$ es homomorfismo. ¿Quién es el núcleo de $\psi$?

Sea $M$ el núcleo de $\psi$ y sea $a \in M$.

$$\begin{aligned} a \in M &\implies \psi(a) = N'\varphi(a); \text{ definición de } \psi \\ &\implies \psi(a) = N'; \text{ definición del núcleo de } \psi \\ &\implies \varphi(a) \in N'; \text{ definición del núcleo de } \psi \\ &\implies M \subset N. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \in N &\implies \varphi(a) \in N'; \text{ Por definición de } N \\ &\implies N' = N'\varphi(a) = \psi(a); \text{ Definición de } \psi \\ &\implies a \in M; \text{ Definición de núcleo de } \psi \\ &\implies N \subset M \end{aligned}$$

Así se tiene que $M = N$.

Y luego por el primer teorema de homomorfismos $G/N \simeq G'/N'$.

Por el segundo teorema de homomorfismos $N/K \simeq N'$. Así concluimos que $G/N \simeq (G/K)/(N/K)$.

## 1.8. El Teorema de Órbita-estabilizador.

**Definición 1.8.1.** *Sea $G$ un grupo, y $X$ un conjunto.* ***Una acción*** *de $G$ sobre $X$ es una familia de aplicaciones.*

$$\Phi = \{\phi_g : X \longrightarrow X : g \in G\}$$

*que cumple los siguientes axiomas:*

*(A1)* $\phi_e(x) = x$

*(A2)* $\phi_a(\phi_b(x)) = \phi_{ab}(x)$

**Definición 1.8.2.** *Dada una acción $\Phi$ de un grupo $G$ sobre un conjunto $X$, y un elemento $x \in X$, se llama estabilizador de $x$ al conjunto*

$$G_x = \{g \in G : \phi_g(x) = x\}$$

**Teorema 1.8.1.** *En las condiciones de la definición anterior, $G_x \leq G$.*

**Demostración:** El axioma (A1) de la definición anterior asegura que el elemento neutro de $G$ pertenece a $G_x$.

El axioma (A2) asegura que, si $a, b \in G_x$, entonces,

$$\phi_{ab}(x) = \phi_a\left(\phi_b(x)\right) = \phi_a(x) = x$$

Por lo que $ab \in G_x$.

Ahora sea $a \in G_x$ se tiene que

$$\phi_{a^{-1}}(x) = \phi_{a^{-1}}(\phi_a(x)) = \phi_e(x) = x$$

por lo que $a^{-1} \in G_x$. Así se concluye que $G_x \leq G$.

**Teorema 1.8.2.** *Dada una acción $\Phi$ de un grupo $G$ sobre un conjunto $X$, la relación definida según*

$$x \quad \sim_{\Phi} \quad y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists g \in G : \phi_g(x) = y$$

*es de equivalencia y se lee $x$ relacionado $y$ bajo la acción de $\Phi$.*

**Demostración:** Por el axioma (A1) tenemos $x \sim_{\Phi} x$.

Ahora sea $x \sim_{\Phi} y$, entonces $\phi_g(x) = y$ para algún $g \in G$. Así,

$$\phi_{g^{-1}}(y) = \phi_{g^{-1}}(\phi_g(x)) = \phi_{g^{-1}g}(x) = \phi_e(x) = x$$

de esto se obtiene que $y \sim_{\Phi} x$.

Por último, si $x \sim_\Phi y$ y $y \sim_\Phi z$, entonces $\phi_g(x) = y$ y $\phi_h(y) = z$. Así,

$$z = \phi_h(y) = \phi_h(\phi_g(x)) = \phi_{hg}(x)$$

Por lo tanto $x \sim_\Phi z$. Así queda demostrado el teorema. ■

**Definición 1.8.3.** *La clase de equivalencia de un elemento $x \in X$ bajo la relación de la proposición anterior recibe el nombre de órbita de $x$. Se define como:*

$$orb(x) = \{y \in X | y \sim_\Phi x\}$$

**Teorema 1.8.3.** ***(Órbita-estabilizador)*** *Sea $\Phi$ una acción de un grupo $G$ sobre un conjunto $X$. Para cada $x \in X$,*

$$|orb| = \frac{G}{G_x}$$

**Demostración:** Definamos $\theta : orb(x) \longrightarrow \frac{G}{G_x}$ mediante $\theta(x) = \theta(\phi_g(x)) = gG_x$ para todo $x$ en $orb(x)$

$\theta$ **esta bien definida:** Supongamos que $\phi_g(x) = \phi_h(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
\phi_g(x) = \phi_h(x) &\implies \phi_{h^{-1}}(x)\phi_g(x) = \phi_{h^{-1}}(x)\phi_h(x); \quad \text{existencia del inverso} \\
&\implies \phi_{h^{-1}g}(x) = \phi_{h^{-1}h}(x); \quad \text{homomorfismo} \\
&\implies \phi_{h^{-1}g}(x) = x; \quad \text{existencia de la identidad} \\
&\implies h^{-1}g \in G_x; \quad \text{definición} \\
&\implies gG_x = hG_x; \quad \text{definición}
\end{aligned}$$

Así concluimos que $\theta$ esta bien definida.

$\theta$ **es inyectiva:** Supongamos que $\theta\left(\phi_g(x)\right) = \theta\left(\phi_h(x)\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
\theta\left(\phi_g(x)\right) = \theta\left(\phi_h(x)\right) &\implies gG_x = hG_x; \quad \text{por definición} \\
&\implies h^{-1}g \in G_x; \quad \text{por definición} \\
&\implies \phi_{h^{-1}g}(x) = x; \quad \text{por definición}
\end{aligned}$$

Así $\phi_h(x) = \phi_h\left(\phi_{h^{-1}g}(x)\right) = \phi_{hh^{-1}g}(x) = \phi(x)$. De donde $\theta$ es inyectiva.

$\theta$ **es sobreyectiva:** Como cada $gG_x$ es $\theta\left(\phi_g(x)\right)$ por definición, entonces $\theta$ es sobreyectiva.

Por tanto, $\theta$ es una biyección, y sus conjuntos dominio e imagen poseen el mismo cardinal. Así queda probado el teorema. ■

# CAPÍTULO 2

# REPRESENTACIONES DE GRUPOS.

Iniciamos nuestro estudio del grupo simétrico estableciendo algunos conceptos de éste, así también, con sus representaciones. En primer lugar, debemos presentar algunos resultados generales sobre las representaciones del grupo que serán de utilidad en nuestro caso especial (grupo simétrico). La teoría de la representación puede ser expresada en términos de matrices o de módulos, consideramos ambos enfoques y luego volvemos a la teoría asociada de caracteres. Todo nuestro trabajo utilizará los números complejos como el campo de base con el fin de facilitar algunos aspectos de nuestro trabajo.

## 2.1. Conceptos Fundamentales.

En esta sección se presentan algunas terminologías básicas y la notación de las representaciones del grupo simétrico.

Sea $G$ un grupo escrito en forma multiplicativa con la identidad $e$; a lo largo de este trabajo, $G$ es finito a menos que se indique lo contrario. Ya familiarizados con las propiedades elementales de los grupos (clases laterales, el teorema de Lagrange, etc.) que se encuentran en el capítulo 1, procedemos a estudiar el **grupo simétrico**, $S_n$, que consta de todas las biyecciones de $\{1, 2, ..., n\}$ a sí mismo utilizando la composición como la multiplicación. Los elementos $\pi \in S_n$ se llaman **permutaciones**. Multiplicamos permutaciones de derecha a izquierda. (De hecho, componemos todas las funciones de esta manera.) Por lo tanto $\pi\sigma$ es la biyección obtenida aplicando primero $\sigma$, seguido de $\pi$.

Si $\pi$ es una permutación, entonces hay tres notaciones diferentes que podemos usar para este elemento. **Notación de dos líneas** es la matriz

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & ... & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si $\pi \in S_5$ está dada por

$\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 1$, $\pi(4) = 4$, $\pi(5) = 5$.

Entonces su forma de dos líneas es:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Debido a que la línea superior es fija, podemos omitirla para obtener la notación de **una línea**.

Por último, podemos presentar $\pi$ usando la **notación de ciclo**. Dado que $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $\pi(i) \in \{1, 2, ..., n\}$, los elementos de la sucesión $i, \pi(i), \pi^2(i)$, $\pi^3(i), ...$ no pueden ser todos distintos. Tomando la primer potencia $p$ tal que $\pi^p(i) = i$, tenemos el ciclo

$$(i, \pi(i), \pi^2(i), ..., \pi^{p-1}(i))$$

De manera equivalente, el ciclo $(i, j, k, ..., l)$ significa que $\pi$ envía $i$ a $j$, $j$ a $k$, ..., y $l$ de nuevo a $i$. Ahora recoger un elemento que no esté en el ciclo que contiene $i$ e iterar este proceso hasta que todos los miembros de $1, 2, ..., n$ se han utilizado. Nuestro ejemplo del último párrafo se convierte en

$$\pi = (1, 2, 3)(4)(5)$$

en notación de ciclo. Cíclicamente permutar los elementos dentro de un ciclo o ciclos de reordenación de los mismos no cambia la permutación. Así

$$(1, 2, 3)(4)(5) = (2, 3, 1)(4)(5) = (4)(2, 3, 1)(5) = (4)(5)(3,1,2)$$

Un $k$**-ciclo o ciclo de longitud** $k$, es un ciclo que contiene $k$ elementos. La permutación anterior consta de un ciclo de 3 y dos de 1-ciclo. El tipo de ciclo, o simplemente el tipo, de $\pi$ es una expresión de la forma

$$(1^{m_1}, 2^{m_2}, ..., n^{m_n}),$$

donde $m_k$ es el número de ciclos de longitud $k$ en $\pi$. En el ejemplo anterior de la permutación $\pi$ el tipo de ciclo es

$$(1^2, 2^0, 3^1, 4^0, 5^0).$$

Un 1-ciclo de $\pi$ se llama **un punto fijo**. Los números 4 y 5 son puntos fijos en nuestro ejemplo. Una involución es una permutación tal que $\pi^2 = e$.

Otra forma de dar el tipo de ciclo es como una partición. Una **partición** de $n$ es una secuencia ordenada

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l)$$

donde los $\lambda_i$ van decreciendo y $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = n$. Así $k$ se repite $m_k$ veces en la partición correspondiente al tipo de ciclo de $\pi$. Nuestro ejemplo corresponde a la partición

$$\lambda = (3, 1, 1).$$

Recordemos que en cualquier grupo $G$, los elementos $g$ y $h$ son conjugados si

$$g = khk^{-1}$$

para algunos $k \in G$. El conjunto de todos los elementos conjugados a un determinado $g$ se llama la **clase de conjugación** de $G$ y se denota por $K_g$.

Volviendo a $S_n$, podemos probar que si

$$\pi = (i_1, i_2, ..., i_l) \cdots (i_m, i_{m+1}, ..., i_n)$$

en notación de ciclo, entonces para cualquier $\sigma \in S_n$

$$\sigma\pi\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), ..., \sigma(i_l)) \cdots (\sigma(i_m), \sigma(i_{m+1}), ..., \sigma(i_n))$$

Probaremos que esto se cumple para una permutación de un ciclo. Tomemos un ciclo $\pi' = (i_p, i_{p+1}, ..., i_q);\ p < q$.

Fijamos un elemento $j$ de cualquier permutación de $S_n$. Se tienen dos casos, el primero cuando $j \in \pi$ y el otro cuando $j \notin \pi$.

**Caso 1**: Supongamos que $j \in \pi$.

$$j \in \pi \Rightarrow \sigma^{-1}(j) \in \pi \ \vee \ \sigma^{-1}(j) \notin \pi.$$

Suponemos que $\sigma^{-1}(j) \in \pi$.

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(j) \in \pi \quad &\Rightarrow \quad \sigma^{-1}(j) = i_r \ ; \ p \leq r \leq q \\ &\Rightarrow \quad j = \sigma(i_r) \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}
(\sigma(i_p, i_{p+1}, ..., i_q)\sigma^{-1})(j) &= \sigma(i_p, i_{p+1}, ..., i_q)\sigma^{-1}(j) \\
&= \sigma(i_p, i_{p+1}, ..., i_q)(i_r)\,;\; p \leq r < q \\
&= \begin{cases} \sigma(i_{r+1}) & ;\; p \leq r < q \quad \rightarrow (*) \\ \sigma(i_p) & ;\; r = q \quad\quad \rightarrow (**) \end{cases}
\end{aligned}$$

Consideremos $(*)$:

$$\begin{aligned}
(\sigma(i_p, i_{p+1}, ..., i_q)\sigma^{-1})(j) &= \sigma(i_{r+1})\;;\; p \leq r \leq q \\
&= (\sigma(i_p), \sigma(i_{p+1}), ..., \sigma(i_q))\sigma(i_r)\;;\; p \leq r < q \\
&= (\sigma(i_p), \sigma(i_{p+1}), ..., \sigma(i_q))(j)\;;\; p \leq r < q
\end{aligned}$$

Por lo que $\sigma(i_p, i_{p+1}, ..., i_q)\sigma^{-1} = (\sigma(i_p), \sigma(i_{p+1}), ..., \sigma(i_q))$

Ahora consideremos $(**)$

$$\begin{aligned}
(\sigma(i_p, i_{p+1}, ..., i_q)\sigma^{-1})(j) &= \sigma(i_p)\;;\; r = q \\
&= (\sigma(i_p), \sigma(i_{p+1}), ..., \sigma(i_q))\sigma(i_r)\;;\; r = q \\
&= (\sigma(i_p), \sigma(i_{p+1}), ..., \sigma(i_q))(j)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sigma(i_p, i_{p+1}, ..., i_q)\sigma^{-1} = (\sigma(i_p), \sigma(i_{p+1}), ..., \sigma(i_q))$$

Ahora suponemos que $\sigma^{-1} \notin \pi$, entonces $(i_p, i_{p+1}, ..., i_q)(\sigma^{-1}(j)) = \sigma^{-1}(j)$

Así

$$\begin{aligned}
(\sigma(i_p, i_{p+1}, ..., i_q)\sigma^{-1})(j) &= \sigma((i_p, i_{p+1}, ..., i_q)\sigma^{-1})(j)) \\
&= \sigma(\sigma^{-1}(j)) \\
&= j \\
&= (\sigma(i_p), \sigma(i_{p+1}), ..., \sigma(i_q))(j)
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$\sigma(i_p, i_{p+1}, ..., i_q)\sigma^{-1} = (\sigma(i_p), \sigma(i_{p+1}), ..., \sigma(i_q))$$

**Caso 2**: Similar al anterior.

Así concluimos que dicha igualdad se cumple para cualquier permutación de $S_n$. La demostración para el caso 2 $j \notin \pi$, es similar. De ello se desprende que dos permutaciones están en la misma clase de conjugación si y sólo si tienen el mismo tipo de ciclo. Así, hay una correspondencia biyectiva natural entre las particiones de $n$ y clases de conjugación de $S_n$.

Podemos calcular el tamaño de una clase de conjugación de la siguiente manera. Sea $G$ cualquier grupo y considere el centralizador del $g \in G$ definido por

$$Z_g = \{h \in G : hgh^{-1} = g\},$$

es decir, el conjunto de todos los elementos que conmutan con $g$. Ahora por el teorema 1.8.3 de órbita-estabilizador, hay una biyección entre las clases laterales de $Z_g$ y los elementos de $K_g$, de manera que

$$|K_g| = \frac{|G|}{|Z_g|} \tag{1}$$

donde $|\cdot|$ denota la cardinalidad. Ahora sea $G = S_n$ y utilizar $K_\lambda$ por $K_g$ cuando $g$ tiene el tipo $\lambda$.

**Proposición 2.1.1.** *Si $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, ..., n^{m_n})$, y $g \in S_n$ es de tipo $\lambda$, entonces $|Z_g|$ depende sólo de $\lambda$ y*

$$z_\lambda \stackrel{def}{=} {}^1|Z_g| = 1^{m_1}m_1!2^{m_2}m_2!\cdots n^{m_n}m_n!$$

**Prueba:** Cualquier $h \in Z_g$ puede permutar cualquiera de los ciclos de longitud $i$ entre ellos mismos o llevar a cabo una rotación cíclica en cada uno de los ciclos individuales (o ambos).

Como hay $m_i!$ maneras de hacer la primera operación, es decir, de permutar los ciclos y $i^{m_i}$ maneras de llevar a cabo una rotación, por el principio de la multiplicación obtenemos la igualdad. ∎

---

[1] $\stackrel{def}{=}$ : igual por definición

Por lo tanto la ecuación 1 se especializa en el caso del grupo simétrico a la formula

$$k_\lambda = \frac{n!}{z_\lambda} = \frac{n!}{1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \cdots n^{m_n} m_n!} \tag{2}$$

donde $k_\lambda = |K_\lambda|$.

De particular interés es la clase de conjugación de las transposiciones, que son aquellas permutaciones de la forma $\tau = (i, j)$. Las transposiciones generan $S_n$ como grupo; de hecho, el grupo simétrico es generado por las transposiciones adyacentes $(1, 2), (2, 3), ..., (n-1, n)$.

**Definición 2.1.1.** *Si $\pi = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$, donde el $\tau_i$ son transposiciones, a continuación, definimos el signo de $\pi$ como*

$$sgn(\pi) = (-1)^k$$

Se puede demostrar que $sgn$ está bien definida, es decir, es independiente de cualquier descomposición particular de $\pi$ en transposiciones. Sea $\pi = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$ y $\sigma = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_l$, donde las $\tau_i$ y $\rho_i$ son transposiciones tales que $\sigma = \pi$, a continuación definimos $sgn(\pi) = (-1)^k$ y $sgn(\sigma) = (-1)^l$, de donde tenemos que $sgn(\pi) = sgn(\sigma)$ siempre y cuándo $k, j$ sean ambos pares o impares a la vez. Una vez que se estableció que $sgn$ está bien definida, se deduce que

$$sgn(\pi) sgn(\sigma) = (-1)^k (-1)^l = (-1)^{k+l} = sgn(\pi\sigma)$$

Por lo tanto

$$sgn(\pi)sgn(\sigma) = sgn(\pi\sigma) \tag{3}$$

lo cual demuestra que $S_n \to \pm 1$ es un homomorfismo de grupos. De hecho, este es un ejemplo de un carácter(representación de grado 1).

## 2.2. Representaciones Matriciales.

Una representación matricial puede ser pensada como un medio para modelar un grupo abstracto con un grupo concreto de matrices. Después de dar la definición precisa, nos fijamos en algunos ejemplos.

Sea $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos. Sea $Mat_d(\mathbb{C})$ el conjunto de todas las matrices $d \times d$ con las entradas en $\mathbb{C}$. Esto es el **álgebra**[2] **de matrices complejas de grado** $d^2$.

**Definición 2.2.1.** *El **grupo lineal general complejo de grado** d, denotado por* $GL_d(\mathbb{C})$*, es el grupo de todos los* $X = (x_{i,j})_{d\times d} \in Mat_d(\mathbb{C})$ *que son invertibles con respecto a la multiplicación.*

**Definición 2.2.2.** *Una **representación matricial** de un grupo G es un homomorfismo de grupos*

$$X : G \longrightarrow GL_d(\mathbb{C})$$

[2]Un álgebra es un espacio vectorial con una multiplicación asociativa de vectores (por tanto también la imposición de una estructura de anillo en el espacio.)

De manera equivalente, a cada $g \in G$ se le asigna $X(g) \in Mat_d(\mathbb{C})$ de tal manera que:

1. $X(e) = I$ la matriz identidad

2. $X(gh) = X(g)X(h)$ para todo $g, h \in G$.

El parámetro $d$ se llama el **grado, o dimensión**, de la representación y es denotado por $degX$.

Sea $e \in G$, sabemos que $e = gg^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned}
X(e) = X(gg^{-1}) &\implies I = X(g)X(g^{-1});\ \text{por las condiciones 1 y 2} \\
&\implies X(g)^{-1}I = X(g)^{-1}X(g)X(g^{-1});\ \text{existencia del inverso} \\
&\implies X(g)^{-1} = X(g^{-1});\ \text{existencia de la identidad}
\end{aligned}$$

Así las condiciones 1 y 2 implican que $X(g)^{-1} = X(g^{-1})$, por lo que estas matrices están en $GL_d(\mathbb{C})$.

Las representaciones más simples son las de grado 1. Nuestros dos primeros ejemplos son de este tipo.

**Ejemplo 2.2.1.** *Todos los grupos tienen la representación trivial, que es el envío de cada $g \in G$ a la matriz $(1)$.*

Esto es claramente una representación porque $X(e) = (1)$ y

$$X(g)X(h) = (1)(1) = (1) = X(gh)$$

para todo $g, h \in G$. A menudo usamos $1_G$ o simplemente el número 1 en sí para denotar la representación trivial de $G$.

**Ejemplo 2.2.2.** *Encontrar todas las representaciones unidimensionales del grupo cíclico de orden $n$, $C_n$.*

Sea $g$ un generador de $C_n$, es decir,

$$C_n = \{g, g^2, g^3, \ldots, g^n = e\}$$

Si $X(g) = c, c \in \mathbb{C}$, entonces determinamos la matriz de todos los elementos de $C_n$, como sigue

$$\begin{aligned} X(g^n) &= X(\underbrace{gg\cdots g}_{n\ veces}); \quad \text{por definición} \\ &= \underbrace{X(g)X(g)\cdots X(g)}_{n\ veces}; \quad \text{por propiedad 2} \\ &= \underbrace{cc\cdots c}_{n\ veces}; \quad X(g) = c \\ &= c^n; \quad \text{por definición} \end{aligned}$$

Pero por la propiedad 1 tenemos

$$(c^n) = X(g^n) = X(e) = (1)$$

por lo que $c$ debe ser una enésima raíz de la unidad. Es evidente que cada una de tales raíces da lugar a una representación, por lo que hay exactamente $n$ representaciones unidimensionales para $C_n$.

**Ejemplo 2.2.3.** *Encontrar todas las representaciones unidimensionales del grupo cíclico de orden* 4*,* $C_4$*.*

En particular, sea $n = 4$ y $C_4 = \{e, g, g^2, g^3\}$. Por el ejemplo 2.2.2 sabemos que si definimos $X : C_4 \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces

$$e \longmapsto X(e) = 1, \quad g \longmapsto X(g) = c, \quad g^2 \longmapsto X(g^2) = c^2,$$

$$g^3 \longmapsto X(g^3) = c^3 \quad y \quad g^4 \longmapsto X(g^4) = c^4 = 1$$

De donde $c$ debe ser una raíz cuarta de la unidad. Calculando estas raíces obtenemos $1, i, -1, -i$. Si las cuatro representaciones correspondientes se denotan por $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, X^{(4)}$, entonces podemos construir una tabla:

| | $e$ | $g$ | $g^2$ | $g^3$ |
|---|---|---|---|---|
| $X^{(1)}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $X^{(2)}$ | 1 | $i$ | $-1$ | $-i$ |
| $X^{(3)}$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| $X^{(4)}$ | 1 | $-i$ | $-1$ | $i$ |

Cuadro 2.1: Representaciones unidimendionales de $C_4$

donde la entrada en la fila $i$ y la columna $j$ es $X^{(i)}(g^j)$. Este es un ejemplo de una **tabla de caracteres**, un concepto que vamos a desarrollar más adelante. Además la representación trivial forma la primera fila de la tabla.

Por supuesto hay otras representaciones de $C_4$ de mayor grado. Por ejemplo, podemos dejar

$$X(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Sin embargo, esta representación es en realidad una combinación de $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$. Veremos que cada representación de $C_n$ se puede construir de esta manera usando las $n$ representaciones de grado 1 como bloques de construcción.

Ya hemos visto una representación no trivial de $S_n$ que es el signo. De hecho, la ecuación 3 se limita a decir que la aplicación $X(\pi) = (sgn(\pi))$ es una representación, llamada la **representación signo**.

También es de gran importancia la **representación de definición** de $S_n$, la cual es de grado $n$. Si $\pi \in S_n$, entonces establecemos que $X(\pi) = (x_{i,j})_{n\times n}$, donde se define como

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(j) = i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las matrices $X(\pi)$ se llaman **matrices de permutación**, ya que contiene sólo ceros y unos, con un único uno en cada fila y columna.

**Ejemplo 2.2.4.** *Sea $S_3$ con sus permutaciones escritas en notación ciclo. Encontrar, las matrices de la representación de definición.*

Sea $S_3 = \{e, (1,2,3), (1,2), (1,3), (2,3), (1,3,2)\}$ y definimos

$$X : S_3 \longrightarrow GL_3(\mathbb{C}) \text{ tal que } \pi \mapsto X(\pi)$$

Ahora para calcular el conjunto de matrices de la representación de definición tenemos.

Por la definición anterior se tiene que $X(e) = Id_{3\times 3}$.

Sea $\pi = (1,2)$ entonces

$x_{1,1} = 0$ ya que $\pi(1) = 2 \neq i$ $\quad$ $x_{1,2} = 1$ ya que $\pi(2) = 1 = i$

$x_{1,3} = 0$ ya que $\pi(3) = 3 \neq i$ $\quad$ $x_{2,1} = 1$ ya que $\pi(1) = 2 = i$

$x_{2,2} = 0$ ya que $\pi(2) = 1 \neq i$ $\quad$ $x_{2,3} = 0$ ya que $\pi(3) = 3 \neq i$

$x_{3,1} = 0$ ya que $\pi(1) = 2 \neq i$ $\quad$ $x_{3,2} = 0$ ya que $\pi(2) = 1 \neq i$

$x_{3,3} = 1$ ya que $\pi(3) = 3 = i$

Asi formamos la matriz

$$X((1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que la permutacion $(1,2)$ lo que hace es permutar la columna

1 con la 2 de nuestra matriz identidad. Similarmente obtenemos

$$X(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X((1,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X((2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X((1,2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X((1,3,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.3. G-Módulos y Álgebra de Grupo.

Debido a que las matrices corresponden a las transformaciones lineales, podemos pensar en representaciones en estos términos. Esta es la idea de un $G$-módulo. Sea $V$ un espacio vectorial. A menos que se indique lo contrario, todos los espacios vectoriales serán sobre los números complejos y de dimensión finita.

**Definición 2.3.1.** *Sea $V$ un espacio vectorial, $GL(V)$ representa el conjunto de todas las transformaciones lineales invertibles de $V$ en sí mismo, llamado el **grupo lineal general** de $V$.*

**Definición 2.3.2.** *Sea $V$ un espacio vectorial y $G$ un grupo. Entonces $V$ es un $G$-**módulo** si existe un homomorfismo de grupos*

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

De manera equivalente.

$V$ es un $G$-**módulo** si existe una multiplicación, $g\boldsymbol{v}$, de elementos de $V$ por elementos de $G$ tal que, para cualesquiera $g, h \in G$; $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$; y escalares $c, d \in \mathbb{C}$ se satisface lo siguiente:

1. $g\boldsymbol{v} \in V$,

2. $g(c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}) = c(g\boldsymbol{v}) + d(g\boldsymbol{w})$,

3. $(gh)\boldsymbol{v} = g(h\boldsymbol{v})$, y

4. $e\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

Más adelante, "G-módulo"se reducirá a "módulo"siempre y cuando no haya confusión sobre el grupo en el que estemos trabajando.

Vamos a comprobar que las definiciones 2.2.2 y 2.3.2 son equivalentes. De hecho, sólo estamos utilizando $g\boldsymbol{v}$ como una abreviatura para la aplicación de la transformación $\rho(g)$ al vector $\boldsymbol{v}$. Probaremos que partiendo de un $G-$módulo podemos llegar a una representación matricial y viceversa. Para ello definimos lo siguiente:

$$\rho : G \longrightarrow Gl(V)$$

$$g \longmapsto \rho_g : V \longrightarrow V$$

$$\boldsymbol{v} \longmapsto \rho_g(\boldsymbol{v}) = g\boldsymbol{v}$$

Por definición de acción 1.8.1 se cumple que:

1. $\rho_g(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}$

2. $\rho_g(\rho_h(\boldsymbol{v})) = \rho_{gh}(\boldsymbol{v})$

Por lo tanto para llegar a una representación matricial solo falta probar que $\rho_g$ es lineal, homomorfismo y que es invertible.

**¿$\rho_g$ es lineal?**

Sean $g, h \in G$, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, y $\lambda \in \mathbb{C}$; por la equivalencia de la definición anterior tenemos:

$$\rho_g(\lambda \boldsymbol{v}) = g(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda(g\boldsymbol{v}) = \lambda \rho_g(\boldsymbol{v})$$

$$\rho_g(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = g(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = g\boldsymbol{v} + g\boldsymbol{w} = \rho_g(\boldsymbol{v}) + \rho_g(\boldsymbol{w})$$

Por lo tanto concluimos que $\rho_g$ es lineal.

**¿$\rho_g$ es homomorfismo?**

Sean $g, h \in G$ y $\boldsymbol{v} \in V$, por la propiedad 3 de la equivalencia de un $G$-módulo tenemos,

$$\rho_{gh}(\boldsymbol{v}) = gh(\boldsymbol{v}) = g(h\boldsymbol{v}) = \rho_g(\rho_h(\boldsymbol{v}))$$

Por lo tanto concluimos que $\rho_g$ es homomorfismo.

**¿$\rho_g$ es invertible?**

Sean $g, g^{-1} \in G$ y $\boldsymbol{v} \in V$. Por existencia del inverso en $G$ tenemos,

$$\rho_{gg^{-1}}(\boldsymbol{v}) = \rho_g(g^{-1}\boldsymbol{v}) = g(g^{-1}\boldsymbol{v}) = (gg^{-1})\boldsymbol{v} = e\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$

$$\rho_{g^{-1}g}(\boldsymbol{v}) = \rho_g^{-1}(g\boldsymbol{v}) = g^{-1}(g\boldsymbol{v}) = (g^{-1}g)\boldsymbol{v} = e\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$

Por lo tanto tenemos que $\rho_{gg^{-1}}(\boldsymbol{v}) = \rho_{g^{-1}g}(\boldsymbol{v}) = I_V$, donde $I_V$ es la función identidad en $V$, por lo que $\rho$ es invertible. Por lo tanto un $G$-módulo es equivalente a una representación matricial.

Ahora partiremos de una representación matricial y llegaremos a un $G-$módulo;

para ello definimos lo siguiente:

Dada una representación matricial $X$ de grado $d$, sea $V$ el espacio vectorial $\mathbb{C}^d$ de todos los vectores columna de longitud $d$. Entonces podemos multiplicar $\boldsymbol{v} \in V$ por $g \in G$ usando la definición

$$g\boldsymbol{v} \stackrel{def}{=} X(g)\boldsymbol{v},$$

donde la operación de la derecha es la multiplicación de matrices. Así para llegar a un $G-$módulo falta probar los cuatro axiomas de la equivalencia de esta definición.

Sean $g \in G$, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ y $c, d \in \mathbb{C}$

1. $g\boldsymbol{v} \in V$ por definición

2. $g(c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}) = c(g\boldsymbol{v}) + d(g\boldsymbol{w})$

$$\begin{aligned} g(c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}) &= X(g)(c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}); \text{ producto de matrices} \\ &= X(g)(c\boldsymbol{v}) + X(g)(d\boldsymbol{w}); \text{ ley distributiva} \\ &= c(X(g)\boldsymbol{v}) + d(X(g)\boldsymbol{w}); \text{ propiedad de matrices} \\ &= c(g\boldsymbol{v}) + d(g\boldsymbol{w}); \text{ producto de matrices} \end{aligned}$$

Luego los axiomas 3 y 4 se cumplen por definición de acción 1.8.1. Por lo tanto hemos probado que las dos definiciones son equivalentes.

Si $S$ es cualquier conjunto con una multiplicación por elementos de $G$ satisfaciendo $1, 3$, y $4$, entonces se dice que $G$ **actúa sobre** $S$. De hecho, siempre es posible tomar un conjunto en el que actúa $G$ y convertirlo en un $G$-módulo de la siguiente manera. Sea $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ y sea $\mathbb{C}\boldsymbol{S} = \mathbb{C}\{\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, ..., \boldsymbol{s_n}\}$ que denota el espacio vectorial generado por $\boldsymbol{S}$ sobre $\mathbb{C}$; es decir, $\mathbb{C}\boldsymbol{S}$ consiste de todas las combinaciones lineales formales

$$c_1\boldsymbol{s_1} + c_2\boldsymbol{s_2} + ... + c_n\boldsymbol{s_n}$$

donde $c_i \in \mathbb{C}$ para todo $i$. La adición vectorial y la multiplicación por escalar en $\mathbb{C}\boldsymbol{S}$ se definen por

$$(c_1\boldsymbol{s_1} + c_2\boldsymbol{s_2} + ... + c_n\boldsymbol{s_n}) + (d_1\boldsymbol{s_1} + d_2\boldsymbol{s_2} + ... + d_n\boldsymbol{s_n})$$

$$= (c_1 + d_1)\boldsymbol{s_1} + (c_2 + d_2)\boldsymbol{s_2} + ... + (c_n + d_n)\boldsymbol{s_n}$$

Y

$$c(c_1\boldsymbol{s_1} + c_2\boldsymbol{s_2} + ... + c_n\boldsymbol{s_n}) = (cc_1)\boldsymbol{s_1} + (cc_2)\boldsymbol{s_2} + ... + (cc_n)\boldsymbol{s_n})$$

respectivamente. Ahora la acción de $G$ sobre $S$ puede extenderse a una acción en $\mathbb{C}\boldsymbol{S}$ por linealidad:

$$g \cdot (c_1\boldsymbol{s_1} + c_2\boldsymbol{s_2} + ... + c_n\boldsymbol{s_n}) = c_1(g\boldsymbol{s_1}) + c_2(g\boldsymbol{s_2}) + ... + c_n(g\boldsymbol{s_n})$$

para todo $g \in G$. Esto convierte a $\mathbb{C}\boldsymbol{S}$ en un $G$-módulo de dimensión $|S|$.

**Definición 2.3.3.** *Si un grupo $G$ actúa sobre un conjunto $S$, entonces el módulo asociado $\mathbb{C}\boldsymbol{S}$ se llama la* ***representación de permutación*** *asociada con $S$. Además, los elementos de $S$ forman una base para $\mathbb{C}\boldsymbol{S}$ llamada la* ***base estándar****.*

El ejemplo siguiente de $G-$módulo es de esta forma.

**Ejemplo 2.3.1.** *Consideremos el grupo simétrico $S_n$ con su acción habitual sobre $S = \{1, 2, ..., n\}$. Ahora*

$$\mathbb{C}\boldsymbol{S} = \{c_1\mathbf{1} + c_2\mathbf{2} + ... + c_n\boldsymbol{n}, c_i \in \mathbb{C} \textit{ para todo } i\}$$

*Este es un $S_n$- módulo bajo la acción*

$$\pi \cdot (c_1\mathbf{1} + c_2\mathbf{2} + ... + c_n\boldsymbol{n}) = c_1\pi(\mathbf{1}) + c_2\pi(\mathbf{2}) + ... + c_n\pi(\boldsymbol{n})$$

*para todo $\pi \in S_n$.*

En particular, podemos seleccionar una base y determinar las matrices $X(\pi)$ para $\pi \in S_n$ en esa base. Consideremos $S_3$ y el uso de la base estándar $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$. Para encontrar la matriz para $\pi = (1, 2)$, calculamos

$\pi \cdot \mathbf{1} = \pi(\mathbf{1}) = \mathbf{2}$

$\pi \cdot \mathbf{2} = \pi(\mathbf{2}) = \mathbf{1}$

$\pi \cdot \mathbf{3} = \pi(\mathbf{3}) = \mathbf{3}$

La matriz correspondiente a $X(\pi)$ es la transpuesta de los vectores fila canónicos, la cual es:

$$X((1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al determinar el resto de las matrices de $S_3$, se obtienen exactamente las mismas que las de la representación que se define en el ejemplo 2.2.4.

Ahora describimos una de las representaciones más importantes para cualquier grupo, **la representación regular (izquierda)**. Sea $G$ un grupo arbitrario. Entonces $G$ actúa sobre sí mismo por la multiplicación a la izquierda: si $g \in G$ y $h \in S = G$, entonces la acción de $g$ en $h$, $g \cdot h$, se define como el producto usual en el grupo. Así, si $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$, entonces tenemos el $G-$módulo correspondiente

$$\mathbb{C}[\boldsymbol{G}] = \{c_1\boldsymbol{g_1} + c_2\boldsymbol{g_2} + ... + c_n\boldsymbol{g_n}; c_i \in \mathbb{C} \text{ para todo } i\}$$

que se llama el **álgebra de grupo de** $G$. Nótese el uso de corchetes para indicar que se trata de un álgebra, no sólo un espacio vectorial. La multiplicación se obtiene haciendo $\boldsymbol{g_i g_j} = \boldsymbol{g_k}$ en $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$ si $g_i g_j = g_k$ en $G$, y la extensión lineal. Ahora la acción de $G$ en el álgebra de grupo se puede expresar como

$$g \cdot (c_1\boldsymbol{g_1} + c_2\boldsymbol{g_2} + ... + c_n\boldsymbol{g_n}) = c_1(g\boldsymbol{g_1}) + c_2(g\boldsymbol{g_2}) + ... + c_n(g\boldsymbol{g_n})$$

para todo $g \in G$.

**Ejemplo 2.3.2.** *Encontrar la representación regular de $g^2$ del grupo cíclico $C_4$*

Sea $C_4 = \{e, g, g^2, g^3\}$, entonces

$$\mathbb{C}[\boldsymbol{C_4}] = \{c_1\boldsymbol{e} + c_2\boldsymbol{g} + c_3\boldsymbol{g^2} + c_4\boldsymbol{g^3} : c_i \in \mathbb{C} \text{ para todo } i\}$$

Ahora para encontrar la matriz de $g^2$ en la base estándar tenemos

$g^2 \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{g^2}$

$g^2 \cdot \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g^2 g} = \boldsymbol{g^3}$

$g^2 \cdot \boldsymbol{g^2} = \boldsymbol{g^2 g^2} = \boldsymbol{g^4} = \boldsymbol{e}$

$g^2 \cdot \boldsymbol{g^3} = \boldsymbol{g^2 g^3} = \boldsymbol{g}$

Así la matriz correspondiente a $g^2$ es la transpuesta de los vectores fila canónicos calculados, la cual es:

$$X(g^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $G$ actúa sobre cualquier espacio vectorial $V$, entonces también lo hace $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$. En concreto, si $c_1\boldsymbol{g_1} + c_2\boldsymbol{g_2} + ... + c_n\boldsymbol{g_n} \in \mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$ y $\boldsymbol{v} \in V$, entonces podemos definir la acción

$$(c_1\boldsymbol{g_1} + c_2\boldsymbol{g_2} + ... + c_n\boldsymbol{g_n}) \cdot \boldsymbol{v} = c_1(g_1\boldsymbol{v}) + c_2(g_2\boldsymbol{v}) + ... + c_n(g_n\boldsymbol{v}).$$

De hecho, podemos ampliar el concepto de representación de álgebras: Una representación de un álgebra A es un homomorfismo del álgebra $A$ en $GL(V)$. De esta manera, cada representación de un grupo $G$ da lugar a una representación de su álgebra de grupo $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$.

Sea $H$ subgrupo de $G$. Una generalización de la **representación regular izquierda** es la representación de la clase lateral de $G$ con respecto a $H$. Sea $g_1, g_2, ..., g_k$ una transversal para $H$; es decir, $\mathcal{H} = \{g_1H, g_2H, ..., g_kH\}$ es un conjunto completo de clases laterales por la izquierda disjuntas para $H$ en $G$. Entonces $G$ actúa sobre $\mathcal{H}$ haciendo

$$g \cdot (g_iH) = (gg_i)H$$

para todo $g \in G$. El módulo correspondiente

$$\mathbb{C}\mathcal{H} = \{c_1\boldsymbol{g_1H} + c_2\boldsymbol{g_2H} + ... + c_k\boldsymbol{g_kH} : c_k \in \mathbb{C} \text{ para todo } i\}$$

hereda la acción

$$g \cdot (c_1\boldsymbol{g_1H} + c_2\boldsymbol{g_2H} + ... + c_k\boldsymbol{g_kH}) = c_1(\boldsymbol{gg_1H}) + c_2(\boldsymbol{gg_2H}) + ... + c_k(\boldsymbol{gg_2H}).$$

Si $H = G$, entonces esto se reduce a la representación trivial. Por otra parte, cuando $H = \{e\}$, entonces $\mathcal{H} = G$ y obtenemos la representación regular de nuevo. En general, la representación por clases laterales es un ejemplo de una representación inducida.

**Ejemplo 2.3.3.** *Sea $G = S_3$ y $H = \{e, (2,3)\}$. Calculemos la matriz de $(1,2)$ en la base estándar $\mathcal{H} = \{H, (1,2)H, (1,3)H\}$.*

$(1,2) \cdot \boldsymbol{H} = \mathbf{(1,2)}\boldsymbol{H}$,

$(1,2) \cdot \mathbf{(1,2)}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}$,

$(1,2) \cdot \mathbf{(1,3)}\boldsymbol{H} = \mathbf{(1,3,2)}\boldsymbol{H} = \mathbf{(1,3)}\boldsymbol{H}$, dado que $\mathbf{(1,3,2)}$ y $\mathbf{(1,3)}$ están en la misma clase. Así se tiene que la matriz correspondiente a la permutación $(1,2)$ es :

$$X((1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Después de encontrar algunas matrices, podemos darnos cuenta que aun no hemos redescubierto la representación de definición. La razón de esto se explica cuando consideramos isomorfismo de módulos en la sección 1.6.

## 2.4. Reducibilidad.

Una idea que impregna toda la ciencia es que las grandes estructuras pueden ser entendidas dividiéndolas en sus piezas más pequeñas. Lo mismo ocurre en la teoría de la representación.

**Definición 2.4.1.** *Sea $V$ un $G$-módulo. Un* ***submódulo*** *de $V$ es un subespacio $W$ que es cerrado bajo la acción de $G$, es decir,*

$$\boldsymbol{w} \in W \Rightarrow g \cdot \boldsymbol{w} \in W$$

*para todo $g \in G$. También se dice que $W$ es un* ***subespacio $G$-invariante****. Equivalentemente $W$ es un subconjunto de $V$ que es un $G$-módulo derecho. Escribimos $W \leq V$ si $W$ es un submódulo de $V$.*

Como es habitual, exponemos la definición con algunos ejemplos.

**Ejemplo 2.4.1.** *Cualquier $G$-módulo, $V$, tiene los submódulos $W = V$, así como $W = \{\mathbf{0}\}$, donde $\mathbf{0}$ es el vector cero. Estos dos submódulos se llaman* ***submódulos triviales****. Todos los otros submódulos se llaman* ***no triviales****.*

Ahora veamos un ejemplo no trivial de un submódulo.

**Ejemplo 2.4.2.** *Considere $G = S_n$, $n \geq 2$, y $V = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$ (la representación de definición). Con ello, tomar*

$$W = \mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \boldsymbol{n}\} = \{c(\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \boldsymbol{n}) : c \in \mathbb{C}\};$$

*es decir, $W$ es el subespacio unidimensional generado por el vector $\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \boldsymbol{n}$. Comprobar que $W$ es un submódulo.*

Para comprobar que $W$ es cerrado bajo la acción de $S_n$, es suficiente demostrar que

$$\pi \cdot \boldsymbol{w} \in W \text{ para todo } \boldsymbol{w} \text{ en alguna base para } W \text{ y todo } \pi \in S_n.$$

Pero

$$\pi \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \boldsymbol{n}) = \pi(\mathbf{1}) + \pi(\mathbf{2}) + ... + \pi(\boldsymbol{n}) = \mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \boldsymbol{n} \in W,$$

debido a que la aplicación de $\pi$ a $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$ simplemente devuelve el mismo conjunto de números en un orden diferente. Por lo tanto $W$ es un submódulo de $V$ que no es trivial, ya que $dim\, W = 1$ y $dim\, V = n \geq 2$.

Puesto que $W$ es un módulo para $G$ situado en el interior de $V$, podemos preguntarnos qué representación obtenemos si se restringe la acción de $G$ a $W$. Pero acabamos de demostrar que cada $\pi \in S_n$ envía el vector de la base $\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \boldsymbol{n}$ a sí mismo. Por lo tanto $X(\pi) = I_W$ es la matriz correspondiente donde $I_W$ es la función identidad en $W$, y hemos encontrado una copia de la representación trivial en $\mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$. En general, para un espacio vectorial $W$ de cualquier dimensión, si $G$ fija todos los elementos de $W$, decimos que $G$ **actúa trivialmente en** $W$.

Veamos de nuevo a la representación regular. Supongamos que

$G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ con el álgebra de grupo $V = \mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$. Usando la misma idea que en el ejemplo anterior, sea

$$W = \mathbb{C}[\boldsymbol{g_1} + \boldsymbol{g_2} + ... + \boldsymbol{g_n}]$$

el subespacio unidimensional generado por el vector suma de todos los elementos de $G$. Para verificar que W es un submódulo, tomar cualquier $g \in G$ y calcular:

$$g \cdot (\boldsymbol{g_1} + \boldsymbol{g_2} + ... + \boldsymbol{g_n}) = g\boldsymbol{g_1} + g\boldsymbol{g_2} + ... + g\boldsymbol{g_n} = \boldsymbol{g_1} + \boldsymbol{g_2} + ... + \boldsymbol{g_n} \in W$$

porque multiplicando por $g$ simplemente permuta los elementos de $G$, dejando la suma sin cambios. Como antes, $G$ actúa trivialmente en $W$.

Ahora introducimos las representaciones irreducibles que serán los componentes básicos de todos los demás.

**Definición 2.4.2.** *Un G-módulo distinto de cero V es* ***reducible*** *si contiene un submódulo no trivial W. De lo contrario, V se dice que es* ***irreducible****. Equivalente, V es reducible si tiene una base $\mathcal{B}$ en el que a cada $g \in G$ se le asigna una matriz de bloques de la forma*

$$X(g) = \left(\begin{array}{c|c} A(g) & B(g) \\ \hline 0 & C(g) \end{array}\right) \tag{4}$$

*donde los $A(g)$ son matrices cuadradas, todas del mismo tamaño, y 0 es una matriz no vacía de ceros.*

Para ver la equivalencia, supongamos que $V$ de dimensión $d$ tiene un submódulo $W$ de dimensión $f, 0 < f < d$. Luego sea

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_f, \boldsymbol{v}_{f+1}, \boldsymbol{v}_{f+2}, ..., \boldsymbol{v}_d, \}$$

donde los primeros $f$ vectores son una base para $W$. Ahora podemos calcular la matriz de cualquier $g \in G$ con respecto a la base $B$. Puesto que $W$ es un submódulo, $g\boldsymbol{w}_i \in W$ para todo $i, 1 \leq i \leq f$. Por lo tanto las últimas coordenadas $d - f$ de $g\boldsymbol{w}_i$ serán todas cero. Como se observa en la matriz $X(g)$ la cual tiene la matriz cero en la esquina inferior izquierda. También hemos demostrado que la $A(g), g \in G$, son las matrices de la restricción de $G$ a $W$. Por lo tanto, todas ellas deben ser cuadradas y del mismo tamaño.

Por el contrario, supongamos que cada $X(g)$ tiene la forma dada con cada $A(g)$

siendo $f \times f$. Sea $V = \mathbb{C}^d$ y considerar

$$W = \mathbb{C}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_f\},$$

donde $e_i$ es el vector columna con un 1 en la fila $i$-ésima y ceros en el resto (la base estándar para $\mathbb{C}^d$. A continuación, la colocación de los ceros en $X(g)$ nos asegura que $X(g)\boldsymbol{e}_i \in W$ para $1 \leq i \leq f$ y todo $g \in G$. Por lo tanto $W$ es un $G$-módulo, y es no trivial porque la matriz de ceros es no vacía.

Claramente, cualquier representación de grado 1 es irreducible (por definición). De los ejemplos anteriores, tanto la representación de definición para $S_n$ y el álgebra de grupo para un $G$ arbitrario son reducibles si $n \geq 2$ y $|G| \geq 2$, respectivamente.

**Ejemplo 2.4.3.** *Vamos a ilustrar el enfoque alternativo a través de matrices usando la representación de definición de $S_3$.*

Debemos extender la base $\{\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}\}$ para $W$ a una base para $V = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$. Para ello tomemos elementos que sean linealmente independientes, así elegimos

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$$

$X(e)$ sigue siendo la matriz identidad $3 \times 3$. Para calcular $X((1, 2))$, fijamos la acción en $\pi = (1, 2)$ de nuestra base,

$\pi \cdot \mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3} = \pi(\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}) = \mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}$

$\pi \cdot \mathbf{2} = \pi(\mathbf{2}) = \mathbf{1} = (\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}) - \mathbf{2} - \mathbf{3}$

$\pi \cdot \mathbf{3} = \pi(\mathbf{3}) = \mathbf{3}$

Así que

$$X((1,2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haciendo los cálculos similares en los elementos restantes de $S_3$ verificamos que:

$$X(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X((1,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X((2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X((1,2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X((1,3,2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que todas estas matrices tienen la forma:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array}\right).$$

El 1 que esta en la esquina superior izquierda viene del hecho que $S_3$ actúa trivialmente sobre $W$.

## 2.5. Reducibilidad Completa y Teorema de Maschke.

En esta sección llevaremos las matrices de un $G$-módulo reducible a la forma diagonal por bloques

$$X(g) = \left(\begin{array}{c|c} A(g) & 0 \\ \hline 0 & B(g) \end{array}\right)$$

para todos $g \in G$. Esta es la noción de una suma directa.

**Definición 2.5.1.** *Sea $V$ un espacio vectorial con subespacios $U$ y $W$. Entonces $V$ es la* ***suma directa (interna)*** *de $U$ y $W$, denotado $V = U \bigoplus W$, si cada $\boldsymbol{v} \in V$ puede escribirse de manera única como una suma*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W.$$

*Si $V$ es un $G-$módulo y $U, W$ son $G-$submódulos, entonces se dice que $U$ y $W$ son* ***complementos uno de otro****.*

*Si $X$ es una matriz, entonces $X$ es* **la suma directa de las matrices** *$A$ y $B$, denotado $X = A \bigoplus B$, si $X$ tiene la forma del bloque diagonal*

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

Para ver la relación entre las definiciones del módulo y la matriz, sea $V$ un $G-$módulo con $V = U \bigoplus W$, donde $U$, $W \leq V$. Dado que se trata de una suma directa de espacios vectoriales, podemos elegir una base para $V$

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_f}, \boldsymbol{w_{(f+1)}}, \boldsymbol{w_{(f+2)}}, \ldots, \boldsymbol{w_d}\},$$

tal que $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_f}\}$ es una base para $U$ y $\{\boldsymbol{w_{(f+1)}}, \boldsymbol{w_{(f+2)}}, \ldots, \boldsymbol{w_d}\}$, es una base para $W$. Como $U$ y $W$ son submódulos, tenemos

$$g\boldsymbol{u_i} \in U \text{ y } g\boldsymbol{w_j} \in W$$

para todos $g \in G, \boldsymbol{u_i} \in U$ y $\boldsymbol{w_j} \in W$. Por lo tanto la matriz de cualquier $g \in G$ en la base $\mathcal{B}$ es

$$X(g) = \left(\begin{array}{c|c} A(g) & 0 \\ \hline 0 & B(g) \end{array}\right)$$

donde $A(g)$ y $B(g)$ son las matrices de la acción de $G$ restringiendo a $U$ y $W$, respectivamente.

Volviendo a la representación de definición de $S_3$, vemos que

$$V = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\} = \mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}\} \oplus \mathbb{C}\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$$

como espacios vectoriales. Pero mientras que $\mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}\}$ es un $S_3-$submódulo,

$\mathbb{C}\{\mathbf{2},\mathbf{3}\}$ no lo es (por ejemplo, $(1,2)\cdot\mathbf{2}=\mathbf{1}$ que no esta en $\mathbb{C}\{\mathbf{2},\mathbf{3}\}$). Así que tenemos que encontrar un complemento para $\mathbb{C}\{\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}\}$, es decir, un **submódulo** $U$ tal que

$$\mathbb{C}\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}=\mathbb{C}\{\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}\}\oplus U$$

Para encontrar un complemento, se introduce un producto interno en $\mathbb{C}\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}$. Dados dos vectores $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ en la base $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}$, sea su producto interior

$$\langle\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle=\delta_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{5}$$

donde $\delta_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}$ es delta de Kronecker.

Ahora extendemos por linealidad en la primera variable y conjugado de linealidad en la segunda para obtener un producto interno en todo el espacio vectorial. De manera equivalente, tenemos la definición del producto de dos vectores dados $\boldsymbol{v}=x\mathbf{1}+y\mathbf{2}+z\mathbf{3},\boldsymbol{w}=\alpha\mathbf{1}+\beta\mathbf{2}+\gamma\mathbf{3}$ como

$$\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle=x\overline{\alpha}+y\overline{\beta}+c\overline{\gamma},$$

donde $x,y,z,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ y la barra denota la conjugación compleja.

Ahora probaremos que ésta definición satisface todos los axiomas de un producto interno.

Sea $\boldsymbol{u} = a\mathbf{1} + b\mathbf{2} + c\mathbf{3}$, $\boldsymbol{v} = x\mathbf{1} + y\mathbf{2} + z\mathbf{3}$ y $\boldsymbol{w} = \alpha\mathbf{1} + \beta\mathbf{2} + \gamma\mathbf{3}$

con $a, b, c, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

1. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle}$

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle &= a\overline{x} + b\overline{y} + c\overline{z} \text{ ; por definición de producto interior} \\
&= \overline{x\overline{a}} + \overline{y\overline{b}} + \overline{z\overline{c}} \text{ ; propiedad de conjugación} \\
&= \overline{x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c}} \text{ ; propiedad de conjugación} \\
&= \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle} \text{ ; por definición de producto interior}
\end{aligned}
$$

2. $\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle &= (a + x)\overline{\alpha} + (b + y)\overline{\beta} + (c + z)\overline{\gamma} \text{ ; producto interior} \\
&= a\overline{\alpha} + x\overline{\alpha} + b\overline{\beta} + y\overline{\beta} + c\overline{\gamma} + z\overline{\gamma} \text{ ; ley distributiva} \\
&= a\overline{\alpha} + b\overline{\beta} + c\overline{\gamma} + x\overline{\alpha} + y\overline{\beta} + z\overline{\gamma} \text{ ; ley conmutativa} \\
&= (a\overline{\alpha} + b\overline{\beta} + c\overline{\gamma}) + (x\overline{\alpha} + y\overline{\beta} + z\overline{\gamma}) \text{ ; ley asociativa} \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \text{ ; definición de producto interior}
\end{aligned}
$$

3. Sea $k \in \mathbb{C}$, por definición tenemos $k\boldsymbol{u} = ka\mathbf{1} + kb\mathbf{2} + kc\mathbf{3}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle &= ka\overline{x} + kb\overline{y} + kc\overline{z} \text{ ; por defìnción de producto interior} \\ &= k(a\overline{x} + b\overline{y} + c\overline{z}) \text{ ; ley distributiva} \\ &= k\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \text{ ; por definición de producto interior} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = k\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$

4. $\langle \boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v} \rangle = \overline{k}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ con $k \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v} \rangle &= a\overline{kx} + b\overline{ky} + c\overline{kz} \text{ ; por definición de producto interior} \\ &= a\overline{k}\overline{x} + b\overline{k}\overline{y} + c\overline{k}\overline{z} \text{ ; propiedad de conjugación} \\ &= \overline{k}(a\overline{x} + b\overline{y} + c\overline{z}) \text{ ; Ley distributiva} \\ &= \overline{k}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \text{ ; por definición de producto interior} \end{aligned}$$

Así tenemos que $\langle \boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v} \rangle = \overline{k}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$

5. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geq 0$ y $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ sólo si $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

   $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = a\overline{a} + b\overline{b} + c\overline{c} = ||a|| + ||b|| + ||c|| \geq 0$

   Para probar el otro hecho, si suponemos que $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ entonces se cumple que $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$, por otra parte sea $\boldsymbol{u} = a\mathbf{1} + b\mathbf{2} + c\mathbf{3}$ si suponemos que $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$

entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0 &\implies a\overline{a} + b\overline{b} + c\overline{c} = 0 \\
&\implies a\overline{a} = 0 \;\; \wedge \;\; b\overline{b} = 0 \;\; \wedge \;\; c\overline{c} = 0 \\
&\implies \boldsymbol{u} = 0\mathbf{1} + 0\mathbf{2} + 0\mathbf{3} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumplen todos los axiomas de un producto interno. Además cumple la propiedad de ser invariante bajo la acción de $G$:

$$\langle g\boldsymbol{v}, g\boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \text{ para todo } g \in G \text{ y } \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \tag{6}$$

Sea $\boldsymbol{v} = x\mathbf{1} + y\mathbf{2} + z\mathbf{3}, \boldsymbol{w} = \alpha\mathbf{1} + \beta\mathbf{2} + \gamma\mathbf{3}$ y $\pi \in S_3$,entonces tenemos:
$\pi\boldsymbol{v} = x(\pi\mathbf{1}) + y(\pi\mathbf{2}) + z(\pi\mathbf{3})$ y $\pi\boldsymbol{w} = \alpha(\pi\mathbf{1}) + \beta(\pi\mathbf{2}) + \gamma(\pi\mathbf{3})$. Así

$$\begin{aligned}
\langle \pi\boldsymbol{v}, \pi\boldsymbol{w} \rangle &= \langle x(\pi\mathbf{1}) + y(\pi\mathbf{2}) + z(\pi\mathbf{3}), \alpha(\pi\mathbf{1}) + \beta(\pi\mathbf{2}) + \gamma(\pi\mathbf{3}) \rangle \\
&= x\overline{\alpha} + y\overline{\beta} + c\overline{\gamma} \\
&= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto el producto interior es invariante bajo la acción de $G$.

**Definición 2.5.2.** *Dado cualquier producto interior en un espacio vectorial $V$ y $W$ un subespacio, podemos formar el* ***complemento ortogonal:***

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V : \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0 \text{ para todo } \boldsymbol{w} \in W\}$$

Siempre es cierto que $V = W \bigoplus W^{\perp}$ como $G$-módulos. Cuando $W \leq V$ y el producto interno es $G$-invariante.

**Proposición 2.5.1.** *Sea $V$ un $G-$módulo, $W$ un submódulo, y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interior invariante bajo la acción de $G$. Entonces $W^{\perp}$ es también es un $G-$submódulo.*

**Prueba**

Probaremos que $W^{\perp}$ es un subespacio de $V$, es decir

$$\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} \in W^{\perp}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ y } \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W^{\perp}.$$

Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W^{\perp}$ y $\boldsymbol{w} \in W$.

$$\begin{aligned} \langle \alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle &= \langle \alpha \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \beta \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle; \text{ propiedad de producto interior} \\ &= \alpha \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle; \text{ propiedad de producto interior} \\ &= \alpha \mathbf{0} + \beta \mathbf{0}; \text{ puesto que } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W^{\perp} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Así se tiene que $\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} \in W^{\perp}$, por lo que $W^{\perp}$ es un subespacio de $V$.

Ahora probaremos que para todo $g \in G$ y $\boldsymbol{u} \in W^{\perp}$ se tiene que $g\boldsymbol{u} \in W^{\perp}$.

Sea $\boldsymbol{w} \in W$, entonces

$$\begin{aligned}\langle g\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle &= \left\langle g^{-1}g\boldsymbol{u}, g^{-1}\boldsymbol{w}\right\rangle, \text{ ya que } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ es invariante bajo la acción de } G\\ &= \left\langle \boldsymbol{u}, g^{-1}\boldsymbol{w}\right\rangle, \text{ propiedad de acción de grupo}\\ &= 0,\ \boldsymbol{u} \in W^{\perp} \text{ y } g^{-1}\boldsymbol{w} \in W \text{ ya que } W \text{ es submódulo}\end{aligned}$$

Por lo tanto $W^{\perp}$ es cerrado bajo la acción de $G$. Y concluimos que $W^{\perp}$ es un $G$-submódulo de $V$. ■

Por la definición anterior tenemos:

$$\mathbb{C}\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\} = \mathbb{C}\{\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}\} \oplus \mathbb{C}\{\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}\}^{\perp}$$

Donde

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\{\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}\}^{\perp} &= \{\boldsymbol{v} = a\mathbf{1} + b\mathbf{2} + c\mathbf{3} : \langle \boldsymbol{v}, \mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}\rangle = 0\}\\ &= \{\boldsymbol{v} = a\mathbf{1} + b\mathbf{2} + c\mathbf{3} : a+b+c = 0\}\end{aligned}$$

Para calcular las matrices de la suma directa, elegimos las bases $\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}$ para $\mathbb{C}\{\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}\}$ y $\{\mathbf{2}-\mathbf{1}, \mathbf{3}-\mathbf{1}\}$ para $\mathbb{C}\{\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}\}^{\perp}$.

$X(e)$ sigue siendo la matriz identidad $3 \times 3$.

Para calcular $X((1,2))$, fijamos la acción en $\pi = (1,2)$ de nuestra base, entonces

$\pi \cdot (\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}) = \pi(\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}) = \mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}$

$\pi \cdot (\mathbf{2}-\mathbf{1}) = \pi(\mathbf{2}) - \pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}-\mathbf{2} = -(\mathbf{2}-\mathbf{1})$

$\pi \cdot (\mathbf{3}-\mathbf{1}) = \pi(\mathbf{3}) - \pi(\mathbf{1}) = \mathbf{3}-\mathbf{2} = -(\mathbf{2}-\mathbf{1}) + (\mathbf{3}-\mathbf{1})$

Así que

$$X((1,2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haciendo los cálculos similares se puede verificar que

$$X(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; X((1,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; X((2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X((1,2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X((1,3,2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas son todas las matrices de suma directa, de la forma

$$X(g) = \left(\begin{array}{c|cc} A(g) & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & B(g) \end{array}\right)$$

Por supuesto, $A(g)$ es irreducible (siendo de grado 1), y vamos a ver en la Sección 1.9 que $B(g)$ lo es también. Por lo tanto hemos descompuesto la representación de definición de $S_3$ en sus partes irreducibles. El contenido del teorema de Maschke es que lo mencionado anteriormente se puede hacer para cualquier grupo finito.

**Teorema 2.5.1.** ***(Teorema de Maschke.)*** *Sea $G$ un grupo finito y sea $V$ un $G$-módulo distinto de cero. Entonces*

$$V = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus ... \oplus W^{(k)},$$

*donde cada $W^{(i)}$ es un $G$-submódulo irreducible de $V$.*

**Prueba**

Trabajaremos sobre $d = dim\, V$. Si $d = 1$, entonces $V = W^{(1)}$ es irreducible.

Ahora supóngase que $d > 1$. Si $V$ es irreducible, entonces terminamos como antes. Si $V$ no es irreducible, entonces tiene un $G$-submódulo no trivial, $W$. Trataremos de construir un submódulo complementario para $W$ como hicimos en el ejemplo anterior.

Escojemos cualquier base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_d\}$ para $V$. Consideremos el único producto interno que satisface

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = \delta_{i,j}$$

para elementos de $\mathcal{B}$. Este producto puede no ser $G$-invariante (en el resultado anterior funciona porque las permutaciones son biyectivas), pero podemos llegar a otro que si lo es. Para cualesquier $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ definimos

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle' = \sum_{g \in G} \langle g\boldsymbol{v}, g\boldsymbol{w} \rangle.$$

Anteriormente probamos que $\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = \delta_{i,j}$ define un producto interno, entonces, como $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle'$ es la suma de productos internos, concluimos que $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle'$ tambien es un producto interno.

Para probar que es $G$-invariante, probaremos

$$\langle h\boldsymbol{v}, h\boldsymbol{w} \rangle' = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle'$$

para todo $h \in G$ y $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$. Pero

$$\begin{aligned} \langle h\boldsymbol{v}, h\boldsymbol{w} \rangle' &= \sum_{g \in G} \langle gh\boldsymbol{v}, gh\boldsymbol{w} \rangle; \text{ definición de } \langle \cdot, \cdot \rangle' \\ &= \sum_{f \in G} \langle f\boldsymbol{v}, f\boldsymbol{w} \rangle; \text{ como } g \text{ varía sobre } G\text{, también lo hace } f = gh \\ &= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle'; \text{ definición de } \langle \cdot, \cdot \rangle' \end{aligned}$$

Asi $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ es $G$-invariante como deseábamos.

Si dejamos $W^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V : \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle' = 0 \text{ para todo } \boldsymbol{w} \in W\}$, entonces por la proposición 2.5.1 tenemos que $W^{\perp}$ es un $G$-submódulo de $V$ con

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Ahora podemos aplicar el mismo procedimiento a $W$ y $W^{\perp}$ para escribir cada uno como una suma directa, como $G$ es finito este procedimiento en algún momento terminará, y así finalmente tendremos a $V$ escrito como la suma directa de $G$-submódulos irreducibles. ■

El teorema de Maschke sigue siendo cierto si $\mathbb{C}$ se sustituye por cualquier campo de característica cero, o bien de característica positiva que es coprima con el orden de $G$.

Como corolario, tenemos la versión matricial del teorema de Maschke. Aquí y mas adelante, podemos quitar las líneas horizontales y verticales que indican matrices de bloques.

**Corolario 2.5.1.** *Sea $G$ un grupo finito y sea $X$ una representación matricial de $G$ de dimensión $d > 0$. Entonces existe una matriz $T$ fija de tal manera que cada matriz $X(g), g \in G$, tiene la forma*

$$TX(g)T^{-1} = \begin{pmatrix} X^{(1)}(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X^{(2)}(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X^{(k)}(g) \end{pmatrix},$$

*donde cada $X^{(i)}$ es una representación matricial irreducible de $G$.*

**Prueba:** Sea $V = \mathbb{C}^d$ con la acción

$$g\boldsymbol{v} = X(g)\boldsymbol{v}$$

para todo $g \in G$ y $\boldsymbol{v} \in V$. Por el teorema de Maschke,

$$V = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus ... \oplus W^{(k)},$$

donde cada $W^{(i)}$ es irreducible de dimensión $d_i$. Elegimos una base $\mathcal{B}$ para $V$ tal que los primeros $d_1$ vectores forman una base para $W^{(1)}$, los siguientes $d_2$ forman una base para $W^{(2)}$ y así sucesivamente.

Como todos los $W^{(i)}$ son subespacios de $V$ y están escritos como una suma directa, con un cambio de base y por la definición 2.5.1 para un $g \in G$ la representación matricial tiene la forma deseada como se muestra en el teorema. ■

**Definición 2.5.3.** *Una representación es* ***completamente reducible*** *si puede ser escrita como una suma directa de irreducibles.*

Así el teorema de Maschke podría reafirmarse como: *Toda representación de un grupo finito que tiene dimensión positiva es completamente reducible.*

Estamos trabajando bajo los supuestos más sencillos, que todos nuestros grupos son finitos y todos nuestros espacios vectoriales son sobre $\mathbb{C}$.

## 2.6. G-Homomorfismos y el Lema de Schur.

Podemos conocer más acerca de los objetos matemáticos (por ejemplo, espacios vectoriales, grupos, espacios topológicos) mediante el estudio de las funciones que conservan su estructura (por ejemplo, transformaciones lineales, homomorfismos continuos, aplicaciones, etc). Para un $G$-módulo, la función correspondiente se denomina $G$-homomorfismo.

**Definición 2.6.1.** *Sean $V$ y $W$ $G$-módulos. Entonces un $G$**-homomorfismo (o simplemente un homomorfismo)** es una transformación lineal $\theta : V \to W$ tal que*

$$\theta(g\boldsymbol{v}) = g\theta(\boldsymbol{v})$$

*para todo $g \in G$ y $\boldsymbol{v} \in V$. También decimos que $\theta$ **conserva** o **respeta** la acción de $G$.*

Podemos traducir esto en términos de matrices,tomando bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ para $V$ y $W$, respectivamente. Sean $X(g)$ y $Y(g)$ las correspondientes representaciones matriciales. Además, elegimos $T$ la matriz de $\theta$ en las dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$. Entonces, la propiedad de $G$-homomorfismo se convierte en:

$$TX(g)\boldsymbol{v} = Y(g)T\boldsymbol{v}$$

para cada vector columna $\boldsymbol{v}$ y $g \in G$. Como esto es válido para todo $\boldsymbol{v}$, debemos tener:

$$TX(g) = Y(g)T \text{ para todo } g \in G. \tag{7}$$

Por lo tanto tener un $G$-homomorfismo $\theta$ es equivalente a la existencia de una matriz $T$ de tal manera que (7) se cumple. A menudo vamos a escribir esta condición simplemente como $TX = YT$.

**Ejemplo 2.6.1.** *Sea $G = S_n$, $V = \mathbb{C}\{\boldsymbol{v}\}$, con la acción trivial de $S_n$, y sea $W = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$ con la acción de definición de $S_n$. Definamos una transformación $\theta : V \to W$ por*

$$\theta(\boldsymbol{v}) = \mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \boldsymbol{n}$$

*y la extensión lineal; es decir:*

$$\theta(c\boldsymbol{v}) = c(\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \boldsymbol{n})$$

*para todo $c \in \mathbb{C}$. Probar que $\theta$ es un $G$-homomorfismo.*

Para comprobar que $\theta$ es un $G$-homomorfismo, basta con comprobar que la acción de $G$ se conserva en una base de $V$. Sea $\pi \in S_n$,

$$\theta(\pi \cdot \boldsymbol{v}) = \theta(\pi(\boldsymbol{v})) = \theta(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{i} = \pi \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{i} = \pi\theta(\boldsymbol{v}).$$

En un sentido similar, sea $G$ un grupo arbitrario que actúa trivialmente en $V = \mathbb{C}\{\boldsymbol{v}\}$, y sea $W = \mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$ el álgebra de grupo. Ahora tenemos el

$G$-homomorfismo $\theta : V \to W$ dado por la extensión lineal:

$$\theta(\boldsymbol{v}) = \sum_{g \in G} \boldsymbol{g}.$$

Si $G = S_n$, podemos hacer que $G$ actúe sobre $V = \mathbb{C}\{\boldsymbol{v}\}$, mediante el uso de la representación del signo:

$$\pi \cdot \boldsymbol{u} = sgn(\pi)\boldsymbol{u}$$

para todo $\pi \in S_n$ y $\boldsymbol{u} \in V$. Manteniendo la acción habitual en el álgebra de grupo, se puede verificar que

$$\eta(\boldsymbol{v}) = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi)\boldsymbol{\pi}$$

se extiende a un homomorfismo de $V$ en $W$.

Definimos el álgebra de grupo $W$ como:

$$W = \mathbb{C}\{\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + ... + \boldsymbol{\sigma}_{n!}\};\ \ \forall \sigma_i \in S_n.$$

Manteniendo la acción habitual en el álgebra de grupo:

$\pi \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + ... + \boldsymbol{\sigma}_{n!}) = \boldsymbol{\pi\sigma_1} + \boldsymbol{\pi\sigma_2} ... + \boldsymbol{\pi\sigma_{n!}}$

Con la extensión lineal $\eta(c\boldsymbol{u}) = c\eta(\boldsymbol{u})$.

Verificaremos que

$$\eta(\sigma\boldsymbol{u}) = \sigma\eta(\boldsymbol{u});\ \forall \sigma \in S_n,\ \boldsymbol{u} \in V.$$

Sea $\sigma \in S_n,\ \boldsymbol{u} \in V$. Consideraremos los casos en que $sgn\,(\sigma) = 1$ y $sgn\,(\sigma) = -1$.

Caso 1: $sgn\,(\sigma) = 1$.

$$\eta(\sigma \cdot \boldsymbol{u}) = \eta(sgn\,(\sigma)\,\boldsymbol{u}) = \eta(\boldsymbol{u})$$

$$\sigma \cdot \eta(\boldsymbol{u}) = \sigma \cdot \sum_{\pi \in S_n} sgn\,(\pi)\boldsymbol{\pi} = \sum_{\pi \in S_n} \boldsymbol{\pi} = \eta(\boldsymbol{u})$$

por lo que $\eta(\sigma \cdot \boldsymbol{u}) = \sigma \cdot \eta(\boldsymbol{u})$

Caso 2: $sgn\,(\sigma) = -1$.

$$\begin{aligned}
\eta(\sigma \cdot \boldsymbol{u}) &= \eta(sgn\,(\sigma)\,\boldsymbol{u});\ \text{por definición de acción en } V \\
&= \eta(-1\boldsymbol{u}),\ -1 \in \mathbb{C} \\
&= -1\eta(\boldsymbol{u});\ \text{por extensión lineal.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma \cdot \eta(\boldsymbol{u}) &= \sigma \cdot \sum_{\pi \in S_n} sgn\,(\pi)\boldsymbol{\pi};\ \text{por definición} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} -sgn\,(\pi)\boldsymbol{\pi};\ \text{acción en } W \\
&= -\sum_{\pi \in S_n} sgn\,(\pi)\boldsymbol{\pi};\ \text{extensión lineal} \\
&= -\eta(\boldsymbol{u});\ \text{definición de } \eta
\end{aligned}$$

Por lo que $\eta(\sigma \cdot \boldsymbol{u}) = \sigma \cdot \eta(\boldsymbol{u})$.

De los resultados de los dos casos anteriores concluimos que $\eta$ es un

$G$-homomorfismo.

Es importante saber cuándo dos representaciones de un grupo son diferentes y cuándo no lo son (a pesar de que puede haber algo de diferencias). Por ejemplo, dos representaciones de la matriz que se diferencian sólo por un cambio de base son realmente la misma. El concepto de $G$-equivalencia captura esta idea.

**Definición 2.6.2.** *Sean $V$ y $W$ módulos para un grupo $G$. Un $G$-isomorfismo es un $G$-homomorfismo $\theta : V \to W$ que es biyectivo. En este caso decimos que $V$ y $W$ son $G$-isomorfos, o $G$-equivalentes, escrito como $V \cong W$. En caso contrario se dice que $V$ y $W$ son $G$-no equivalentes.*

En términos de matrices, si $\theta$ es una biyección se traduce en la matriz correspondiente $T$ que es invertible. Por lo tanto de la ecuación (7), vemos que las representaciones de la matriz $X$ e $Y$ de un grupo $G$ son equivalentes si y sólo si existe una matriz $T$ fija de tal manera que

$$Y(g) = TX(g)T^{-1}$$

para todos $g \in G$.

**Ejemplo 2.6.2.** *Explicaremos por qué la representación por clases laterales de $S_n$ al final del ejemplo 2.3.3 es la misma que la representación de definición.*

Habíamos tomado un subgrupo $H = \{e, (2,3)\} \subset S_3$ dando lugar al módulo de representación de clase lateral $\mathbb{C}\mathcal{H}$, donde

$$\mathcal{H} = \{H, (1,2)H, (1,3)H\}.$$

Dado cualquier conjunto $A$, sea $S_A$ el grupo simétrico de $A$, es decir, el conjunto de todas las permutaciones de $A$. Ahora el subgrupo $H$ se puede expresar como un producto directo (interno)

$$H = \{(1)(2)(3), (1)(2,3)\} = \{(1)\} \times \{(2)(3), (2,3)\} = S_{\{1\}} \times S_{\{2,3\}}. \tag{8}$$

Un dispositivo conveniente para la visualización de dichos subgrupos de productos de $S_n$ es el tabloide. Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ una partición, como se habló en la Sección 1.1. Un **tabloide de Young de forma** $\lambda$ es una matriz con $l$ filas de tal manera que la fila $i$ contiene $\lambda_i$ números enteros y el orden de las entradas en una fila, no importa. Para mostrar que cada fila puede reordenarse de manera arbitraria, ponemos líneas horizontales entre las filas. Por ejemplo, si $\lambda = (4,2,1)$, entonces, algunos de los posibles tabloides de Young son

$$\begin{array}{cccc} \hline 3 & 1 & 4 & 1 \\ \hline 5 & 9 \\ \cline{1-2} 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{cccc} \hline 3 & 1 & 1 & 4 \\ \hline 9 & 5 \\ \cline{1-2} 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \neq \quad \begin{array}{cccc} \hline 9 & 5 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

La ecuación (8) dice que $H$ se compone de todas las permutaciones en $S_3$ que permutan los elementos del conjunto $\{1\}$ entre sí (dando sólo la permutación $(1)$) y permutar los elementos de $\{2,3\}$ entre sí (dando $(2)$ $(3)$ y $(2,3)$). Esto es modelado por el tabloide

$$\begin{array}{cc} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

ya que el orden de 2 y 3 no tiene importancia, pero 1 debe permanecer fijo. El conjunto $S$ completo de los tabloides de forma $\lambda = (2,1)$ cuyas entradas son exactamente 1, 2, 3 es

$$S = \left\{ \begin{array}{cc} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{cc} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{cc} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} \end{array}, \right\}$$

Por otra parte, hay una acción de cualquier $\pi \in S_3$ sobre $S$ dada por

$$\pi \begin{array}{cc} \hline i & j \\ \hline k & \\ \cline{1-1} \end{array} = \begin{array}{cc} \hline \pi(i) & \pi(j) \\ \hline \pi(k) & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Por lo tanto, tiene sentido considerar la aplicación $\theta$ que envía

$$\boldsymbol{H} \xrightarrow{\theta} \begin{array}{cc} \hline \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{1} & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$
\begin{array}{lcl}
(\mathbf{1},\mathbf{2})\ \boldsymbol{H} & \xrightarrow{\theta} & (1,2)\ \begin{array}{l}\hline \mathbf{2}\ \ \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{l}\hline \mathbf{1}\ \ \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{2} \\ \hline \end{array} \\
(\mathbf{1},\mathbf{3})\ \boldsymbol{H} & \xrightarrow{\theta} & (1,3)\ \begin{array}{l}\hline \mathbf{2}\ \ \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{l}\hline \mathbf{1}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{3} \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

Por extensión lineal, $\theta$ se convierte en un isomorfismo de espacios vectoriales de $\mathbb{C}\mathcal{H}$ a $\mathbb{C}\boldsymbol{S}$. Para comprobar que $\theta$ es un $G$-isomorfismo, se demuestra que la acción de cada $\pi \in S_3$ se preserve en cada vector de la base en $H$. Probaremos en particular para $\pi = (1,2)$, entonces

$$\theta((1,2)\boldsymbol{H}) = \theta((\mathbf{1},\mathbf{2})\boldsymbol{H}) = \begin{array}{l}\hline \mathbf{1}\ \ \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{2} \\ \hline \end{array} = (1,2)\begin{array}{l}\hline \mathbf{2}\ \ \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{1} \\ \hline \end{array} = (1,2)\theta(\boldsymbol{H}).$$

$$\theta((1,2)(\mathbf{1},\mathbf{2})\boldsymbol{H}) = \theta(\boldsymbol{H}) = \begin{array}{l}\hline \mathbf{2}\ \ \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{1} \\ \hline \end{array} = (1,2)\begin{array}{l}\hline \mathbf{1}\ \ \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{2} \\ \hline \end{array} = (1,2)\theta((\mathbf{1},\mathbf{2})\boldsymbol{H}).$$

$$\theta((1,2)(\mathbf{1},\mathbf{3})\boldsymbol{H}) = \theta((\mathbf{1},\mathbf{3})\boldsymbol{H}) = \begin{array}{l}\hline \mathbf{1}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{3} \\ \hline \end{array} = (1,2)\begin{array}{l}\hline \mathbf{2}\ \ \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{3} \\ \hline \end{array} = (1,2)\theta((\mathbf{1},\mathbf{3})\boldsymbol{H}).$$

Así

$$\mathbb{C}\mathcal{H} \cong \mathbb{C}\boldsymbol{S} \tag{9}$$

Otro hecho sobre tabloides en nuestro conjunto $\boldsymbol{S}$ es que están completamente determinados por los elementos que están en el segundo renglón. Así que tenemos una aplicación natural, $\eta$, entre la base $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}$ para la representación de definición y $\boldsymbol{S}$, esto es,

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{1} & \xrightarrow{\eta} & \begin{array}{l} \hline \mathbf{2}\ \ \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{1} \\ \hline \end{array} \\
\mathbf{2} & \xrightarrow{\eta} & \begin{array}{l} \hline \mathbf{1}\ \ \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{2} \\ \hline \end{array} \\
\mathbf{3} & \xrightarrow{\eta} & \begin{array}{l} \hline \mathbf{1}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{3} \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

Ahora $\eta$ se extiende por la linealidad a un $G$-isomorfismo de $\mathbb{C}\{1,2,3\}$ a $\mathbb{C}\boldsymbol{S}$ y en combinación con la ecuación (9), $\mathbb{C}\mathcal{H}$ y $\mathbb{C}\{1,2,3\}$ efectivamente son equivalentes. Volvemos ahora a la exposición general. Dos conjuntos usuales asociados con cualquier aplicación de espacios vectoriales $\theta : V \rightarrow W$ son el **núcleo**,

$$ker\ \theta = \{\boldsymbol{v} \in V : \theta(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\},$$

donde $\mathbf{0}$ es el vector cero, y su **imagen**,

$$im\ \theta = \{\boldsymbol{w} \in W : \boldsymbol{w} = \theta(\boldsymbol{v}) \text{ para algún } \boldsymbol{v} \in V\}$$

Cuando $\theta$ es un $G$-homomorfismo, el núcleo y la imagen tienen cierta estructura, a saber:

**Proposición 2.6.1.** *Sea $\theta : V \to W$ un G-homomorfismo. Entonces*

1. *$ker\ \theta$ es un G-submódulo de $V$, y*

2. *$im\ \theta$ es un G-submódulo de $W$.*

**Prueba:**

1. Para probar que $ker\ \theta$ es un $G$-submódulo de $V$ primero verificamos que es un subespacio de $V$.

   Sea $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in ker\ \theta$, entonces

$$\begin{aligned} \theta(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) &= \theta(\alpha\boldsymbol{u}) + \theta(\beta\boldsymbol{v}),\ \theta \text{ es } G\text{-homomorfismo} \\ &= \alpha\theta(\boldsymbol{u}) + \beta\theta(\boldsymbol{v}),\ \theta \text{ es } G\text{-homomorfismo} \\ &= \alpha\mathbf{0} + \beta\mathbf{0},\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in ker\,\theta \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

   De lo anterior se concluye que $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} \in ker\,\theta$ y así $ker\,\theta$ es subespacio de $V$. Ahora probaremos que $ker\,\theta$ es cerrado bajo la acción de $G$.

   Sea $\boldsymbol{v} \in ker\,\theta$ y $g \in G$

$$\begin{aligned} \theta(g\boldsymbol{v}) &= g\theta(\boldsymbol{v}),\ \theta \text{ es } G\text{-homomorfismo} \\ &= g\mathbf{0},\ \boldsymbol{v} \in ker\,\theta \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Por lo tanto $ker\,\theta$ es cerrado bajo la acción de $G$.

Así se ha demostrado que $ker\,\theta$ es un $G$-submódulo de $V$.

2. ¿ $im\ \theta$ es $G$-submódulo de $W$ ?.

   Sea $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\alpha\boldsymbol{w} + \beta\boldsymbol{w}' &= \alpha\theta(\boldsymbol{v}) + \beta\theta(\boldsymbol{v}');\ \theta \text{ es } G\text{-homomorfismo}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V \\
&= \theta(\alpha\boldsymbol{v}) + \theta(\beta\boldsymbol{v}');\ \theta \text{ es } G\text{-homomorfismo} \\
&= \theta(\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}');\ \theta \text{ es } G\text{-homomorfismo} \\
&= \theta(\boldsymbol{u});\quad \boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}' \in V.
\end{aligned}$$

   ¿$im\,\theta$ es cerrado bajo la acción de $G$?.

   Sea $g \in G\ \ \boldsymbol{w} \in W$

$$\begin{aligned}
g\boldsymbol{w} &= g\theta(\boldsymbol{v});\ \text{por hipótesis} \\
&= \theta(g\boldsymbol{v});\ \theta \text{ es } G\text{-homomorfismo} \\
&= \theta(\boldsymbol{v}');\ \ \boldsymbol{v}' = g\boldsymbol{v} \in V
\end{aligned}$$

   $\therefore$ $im\ \theta$ es un $G$-submódulo de $W$.$\blacksquare$

**Teorema 2.6.1.** ***(Lema de Schur)***

*Sea $V$ y $W$ dos G-módulos irreducibles. Si $\theta : V \longrightarrow W$ es un G-homomorfismo, entonces ya sea*

1. *$\theta$ es un G-isomorfismo, o*

2. *$\theta$ es la aplicación cero*

**Prueba:** Como $V$ es irreducible y $ker\ \theta$ es un submódulo,por la proposición anterior tenemos que ya sea $ker\ \theta = \{\mathbf{0}\}$ o $ker\ \theta = V$. De la misma manera si $W$ es irreducible y $im\ \theta$ es un submódulo, tenemos que ya sea $im\ \theta = \{\mathbf{0}\}$ o $im\ \theta = W$. Si $ker\,\theta = \{\mathbf{0}\}$ y $im\,\theta = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\theta$ es la aplicación cero. Además si $ker\,\theta = V$ y $im\,\theta = W$, entonces $\theta$ es la aplicación cero.
Si $ker\ \theta = \{\mathbf{0}\}$ y $im\ \theta = W$, entonces tenemos que $\theta$ es un $G$-isomorfismo. Por otra parte si $ker\ \theta = V$ y $im\ \theta = \{\mathbf{0}\}$ entonces $\theta$ es la aplicación cero.
Así queda demostrado el teorema. ■

**Corolario 2.6.1.** *Sean $X$ e $Y$ dos representaciones matriciales irreducibles de $G$. Si $T$ es cualquier matriz tal que $TX(g) = Y(g)T$ para todo $g \in G$, entonces se cumple cualquiera de las dos afirmaciones.*

1. *$T$ es invertible, o*

2. *$T$ es la matriz cero.*

**Demostración:**

Sean $X$ e $Y$ representaciones matriciales irreducibles tal que $TX(g) = Y(g)T$ con

$T$ cualquier matriz, es decir, existe un homomorfismo en términos de matrices. Como $X(g)$, $Y(g)$ son las representaciones irreducibles correspondientes a las bases $\beta$ y $\zeta$ para $V$ y $W$ respectivamente, por el corolario anterior tenemos que $V$ y $W$ son irreducibles y existe $\theta : V \to W$ un homomorfismo, que satisface

1. $\theta$ es un isomorfismo o
2. $\theta$ es la aplicación cero.

Si $\theta$ es un isomorfismo, mediante la equivalencia de matrices tenemos que existe una matriz $T$ que es invertible tal que $Y(g) = TX(g)T^{-1}$. Con esto se cumple la parte 1) del corolario.

Si $\theta$ es la aplicación cero, en términos de matrices $T$ es la matriz cero.

Así queda demostrado el corolario. ■

También tenemos un análogo del lema de Schur en el caso donde el dominio de la aplicación no es irreducible. Este resultado se expresa convenientemente en términos del espacio vectorial $Hom(V, W)$ de todos los $G$-homomorfismos de $V$ en $W$.

**Corolario 2.6.2.** *Sean $V$ y $W$ dos $G$-módulos con $V$ irreducible. Entonces*

$dim\ Hom(V, W) = 0$ *si y sólo si $W$ no contiene submódulos isomorfos a $V$.*

**Prueba:**

"$\Longrightarrow$". Por el contrarrecíproco, supongamos que $dim\ Hom(V, W) \neq 0$, entonces existe $\theta \in Hom(V, W)$ tal que $\theta$ es distinto de la aplicación cero y por el corolario

2.6.1 es un isomorfismo, por lo tanto $W$ contiene submódulos isomorfos a $V$. Así concluimos que si $dim\ Hom(V, W) = 0$ entonces $W$ no contiene submódulos isomorfos a $V$.

"$\Longleftarrow$". Suponemos que $W$ no contiene submódulos isomorfos a $V$, entonces si definimos el homomorfismo $\theta : V \longrightarrow W$, por el corolario 2.6.1 $\theta$ debe ser la aplicación cero y así $dim\ Hom(V, W) = 0$.

Por lo tanto queda probado el corolario. ■

**Corolario 2.6.3.** *Sea $X$ una representación matricial irreducible de $G$ sobre los números complejos. Entonces las únicas matrices que conmutan con $X(g)$ para todo $g \in G$ son las de la forma $T = cI$, es decir, múltiplos escalares de la matriz identidad.*

**Prueba:** Cuando el campo es $\mathbb{C}$, supóngase que $T$ es una matriz tal que

$$TX(g) = X(g)T \tag{10}$$

para todo $g \in G$. Se sigue que

$$(T - cI)X = X(T - cI),$$

donde $I$ es la matriz identidad y $c \in \mathbb{C}$ es cualquier escalar. Ahora $\mathbb{C}$ es algebráicamente cerrado, así podemos tomar a $c$ como un valor propio de $T$. Por lo que $T - cI$ satisface que para dos representaciones matriciales irreducibles de $G$ se cumple que $(T - cI)X = X(T - cI)$ y por el corolario 2.6.1 (con $Y = X$) la matriz $T - cI$ no es invertible por la elección de $c$. Nuestra única alternativa es que $T - cI = 0$, de donde $T = cI$ y tenemos demostrado el corolario. ■

## 2.7. Grupo de Caracteres.

Resulta que la mayor parte de la información contenida en una representación puede ser extraída en una simple estadística: las trazas de matrices correspondientes. Esta es la interesante teoría de caracteres de grupo que trabajaremos durante el resto de este capítulo.

**Definición 2.7.1.** *Sea $X(g)$, $g \in G$, una representación matricial. Entonces el **carácter** de $X$ es*

$$\chi(g) = tr\ X(g),$$

*donde tr denota la traza de una matriz que es la suma de los elementos de la diagonal principal. De otra forma representar, $\chi$ como la aplicación*

$$G \xrightarrow{tr\ X} \mathbb{C}.$$

*Si $V$ es un $G$-módulo, entonces , su **carácter** es el carácter de una representación matricial $X$ correspondiente a $V$.*

Como hay muchas representaciones matriciales correspondientes a un solo $G$-módulo, debemos comprobar que el carácter de un módulo está bien definido, para ello sea $h, g \in G$ tal que $h = g$ entonces

$$\chi(g) = tr\ X(g) = tr\ X(h) = \chi(h)$$

de donde la aplicación $\chi$ está bien definida. Pero si $X$ e $Y$ ambos corresponden a $V$, entonces $Y = TXT^{-1}$ para alguna T fija. Por lo tanto, para todo $g \in G$ y por propiedades de la traza de matrices tenemos

$$tr\ Y(g) = tr\ TX(g)T^{-1} = tr\ TT^{-1}X(g) = tr\ I\,X(g) = tr\ X(g),$$

ya que por definición la traza es invariante bajo conjugación[3]. Por lo tanto, $X$ e $Y$ tienen el mismo carácter y nuestra definición tiene sentido.

Gran parte de la terminología que hemos desarrollado para las representaciones se llevarán a cabo sin cambio en los caracteres correspondientes. Así, si $X$ tiene carácter $\chi$, diremos que $\chi$ es irreducible cuando $X$ lo es, etc. Pasemos ahora a algunos ejemplos.

**Ejemplo 2.7.1.** *Supongamos que $G$ es arbitrario y $X$ es una representación de grado 1. Entonces el carácter $\chi(g)$ es la única entrada de $X(g)$ para cada $g \in G$. Tales caracteres son llamados* ***caracteres lineales****.*

[3] $tr(A.B) = tr(B.A)$ siempre que $A$ y $B$ sean multiplicables aunque $A.B$ sea distinto a $B.A$.

**Ejemplo 2.7.2.** *Consideremos la representación de definición de $S_n$ con su carácter $\chi^{def}$. Si tomamos $n = 3$, entonces calculamos los valores de caracteres directamente tomando las trazas de las matrices en el ejemplo 2.2.4.*

Los resultados son

$$\chi^{def}((1)(2)(3)) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \qquad \chi^{def}((1,2)(3)) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\chi^{def}((1,3)(2)) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad \chi^{def}((1)(2,3)) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\chi^{def}((1,2,3)) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \chi^{def}((1,3,2)) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

En general, si $\pi \in S_n$, entonces

$$\begin{aligned} \chi^{def}(\pi) &= \text{el número de unos en la diagonal de } X(\pi) \\ &= \text{el número de puntos fijos de } \pi \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.7.3.** *Sea $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ y considerar la representación regular con el módulo $V = \mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$ y carácter $\chi^{reg}$. Dado $g \in G$ encontrar $\chi^{reg}(g)$.*

Suponemos que $g = e$, entonces

$$\chi^{reg}(e) = trX(e) = trI_n = |G|$$

Para calcular los valores de caracteres para $g \neq e$ utilizaremos las matrices que obtenemos de la base estándar $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2}, ..., \boldsymbol{g_n}\}$. Ahora $X(g)$ es la matriz de permutación de la acción de $g$ en $\mathcal{B}$, por lo que $\chi^{reg}(g)$ es el número de puntos fijos para esa acción. Pero si $g \cdot \boldsymbol{g_i} = \boldsymbol{g_i}$ para cualquier $i$, entonces debemos tener $g = e$, que no es el caso; es decir, no hay puntos fijos si $g \neq e$. Por lo tanto,

$$\chi^{reg}(g) = \begin{cases} |G|, & \text{si } g = e \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Proposición 2.7.1.** *Sea $X$ una representación matricial de un grupo $G$ de grado $d$ con carácter $\chi$.*

1. *$\chi(e) = d$.*

2. *Si $K$ es una clase de conjugación de $G$, entonces*

$$g, h \in K \Rightarrow \chi(g) = \chi(h).$$

3. *Si $Y$ es una representación de $G$ con carácter $\psi$, entonces*

$$X \cong Y \Rightarrow \chi(g) = \psi(g)$$

*para todo $g \in G$.*

**Prueba:**

1. $\chi(e) = trX(e) = trI_d = d.$

2. Por hipótesis sabemos que para $g, h \in K$ se tiene que $g = khk^{-1}$, así

$$\begin{aligned}
\chi(g) &= tr\ X(g);\ \text{por definición} \\
&= tr\ X(khk^{-1});\ g = khk^{-1} \\
&= tr\ X(k)X(h)X(k)^{-1};\ X \text{ es una representación y } X(k^{-1}) = X(k)^{-1} \\
&= tr\ X(h);\ tr \text{ es invariante bajo conjugación} \\
&= \chi(h)
\end{aligned}$$

3. Sea $Y(g)$ una representación de $G$ con carácter $\psi$. Supongamos que $X \cong Y$, entonces, por definición de isomorfismo de matrices existe una matriz fija $T$ invertible tal que $Y(g) = TX(g)T^{-1}$, así

$$\psi(g) = tr\ Y(g) = tr\ TX(g)T^{-1} = tr\ X(g) = \chi(g).$$

Por lo tanto queda probada la proposición. ■

Es sorprendente que el recíproco de 3 también es cierto, es decir, si dos representaciones tienen el mismo carácter, entonces deben ser equivalentes. Este resultado (que se demuestra como Corolario 2.8.1, parte 5) es la motivación para el párrafo con el que iniciamos esta sección.

En la proposición anterior, el inciso 2 dice que los caracteres son constante sobre las clases de conjugación. Estas funciones tienen un nombre especial.

**Definición 2.7.2.** *Una* ***función de clase*** *en un grupo* $G$ *es una aplicación* $f : G \to \mathbb{C}$ *tal que* $f(g) = f(h)$ *cuando* $g$ *y* $h$ *están en la misma clase de conjugación. El conjunto de todas las funciones de clases en* $G$ *se denota por* $R(G)$.

Probaremos que $R(G)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Para ello elegimos $g, h \in K$ donde $K$ es una clase de conjugación, ahora probaremos lo siguiente:

1. $\alpha f \in R(G)$; $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f \in R(G)$.

$$(\alpha f)(g) = \alpha f(g) = \alpha f(h) = (\alpha f)(h)$$

   Por lo tanto $\alpha f \in R(G)$.

2. $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f;\ f \in R(G)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
(\alpha f + \beta f)(g) &= (\alpha f)(g) + (\beta f)(g);\ \text{propiedad de funciones}\\
&= \alpha f(g) + \beta f(g);\ \text{propiedad de funciones}\\
&= (\alpha+\beta) f(g);\ \text{propiedad de funciones}\\
&= ((\alpha+\beta) f)(g);\ \text{propiedad de funciones}
\end{aligned}$$

Así concluimos que $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$.

3. $\alpha(f+f') = \alpha f + \alpha f';\ f, f' \in R(G)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
(\alpha f + \alpha f')(g) &= (\alpha f)(g) + (\alpha f')(g);\ \text{propiedad de funciones}\\
&= \alpha f(g) + \alpha f'(g);\ \text{propiedad de funciones}\\
&= \alpha(f(g) + f'(g));\ \text{propiedad de funciones}\\
&= \alpha(f + f')(g);\ \text{propiedad de funciones}\\
&= (\alpha(f + f'))(g);\ \text{propiedad de funciones}
\end{aligned}$$

Así concluimos que $\alpha(f+f') = \alpha f + \alpha f'$.

Por lo tanto concluimos que $R(G)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Además, $R(G)$ tiene una base natural que consiste de aquellas funciones que tienen el valor 1 en una clase de conjugación dada y 0 en cualquier otra posición.

Así

$$dim\ R(G) = \text{número de las clases de conjugación de G.} \tag{11}$$

Si $K$ es una clase de conjugación y $\chi$ es un carácter, definimos $\chi_k$ como el valor del carácter dado sobre la clase dada:

$$\chi_k = \chi(g)$$

para todo $g \in K$. Esto nos lleva a la definición de la tabla de caracteres de un grupo.

**Definición 2.7.3.** *Sea G un grupo. La* ***tabla de caracteres de*** *G es cualquier arreglo con filas indexadas por los caracteres irreducibles no equivalentes de G y columnas indexadas por las clases de conjugación. La entrada en la tabla en el renglón $\chi$ y columna K es $\chi_K$:*

$$\begin{array}{c|ccc} & \cdots & K & \cdots \\ \hline \vdots & & \cdots & \\ \chi & \cdots & \chi_K & \\ \vdots & & & \end{array}$$

Por conveniencia, el primer renglón corresponde al carácter trivial, y la primer columna a la clase de la identidad, $K = \{e\}$.

No está claro que la tabla de caracteres es siempre finita: Puede haber un número infinito de caracteres irreducibles de $G$. Afortunadamente, esto resulta no ser el caso. Examinemos algunos ejemplos:

**Ejemplo 2.7.4.** *Sea $G = C_n$ el grupo cíclico con $n$ elementos, encontrar la tabla de caracteres para $G$.*

Para encontrar la tabla de caracteres debemos encontrar todas las representaciones unidimensionales de $C_n$, que por el ejemplo 2.2.2 sabemos que son todas las raíces $n$-ésimas de la unidad . Por lo tanto encontramos $n$ representaciones de grado 1 y son no equivalentes por pares ya que todas ellas tienen diferente carácter.

Ahora para encontrar las clases de conjugación. Sea $C_n$ el grupo cíclico abeliano de orden $n$, y sea $K$ una clase de conjugación de $C_n$. Sean $g_i, g_j \in K$ tales que $g_i \neq g_j$.

$$\begin{aligned} g^i \neq g^j &\Rightarrow g^i = hg^jh^{-1};\ \text{para algún } h \in G \\ &\Rightarrow g^i = (hg^j)h^{-1};\ \text{asociatividad en } G \\ &\Rightarrow g^i = g^j(hh^{-1});\ G \text{ es abliano} \\ &\Rightarrow g^i = g^j(e);\ \ \text{existencia del inverso en } G \\ &\Rightarrow g^i = g^j\ (\rightarrow\leftarrow) \end{aligned}$$

Así tenemos que dos elementos diferentes no pueden pertenecer a la misma clase de conjugación por lo tanto cada elemento de $C_n$ se encuentra en una clase de conjugación por sí mismo, de manera que hay $n$ clases de conjunción.

Así nuestra tabla de caracteres está formada por $n$ columnas que son las clases de conjugación y $n$ filas que son las representaciones.

De esta manera, el cuadro del ejemplo 2.2.3 es el cuadro de caracteres para $C_4$.

**Ejemplo 2.7.5.** *Sea $G = S_3$. Encontrar la tabla de caracteres de $G$.*

Recordemos que una clase de conjugación en $G = S_n$ consiste de todas las permutaciones de un tipo de ciclo dado, en particular, para $S_3$ tenemos tres clases de conjugación,

$$K_1 = \{e\}, \;\; K_2 = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}, \;\; \text{y} \;\; K_3 = \{(1,2,3),(1,3,2)\}$$

Construiremos la tabla, usando las representaciones triviales y de signos. Así tenemos la tabla de caracteres para $S_3$:

La primer fila de la tabla $\chi^{(1)}$ corresponde a la representación trivial, es decir,

$\chi_{K_1} = \chi(e) = tr\ X(e) = tr\ (1) = 1$

$\chi_{K_2} = \chi((1,2)) = \chi((1,3)) = \chi((2,3)) = tr\ X((2,3)) = tr\ (1) = 1$

$\chi_{K_3} = \chi((1,2,3)) = \chi((1,3,2)) = tr\ X((1,3,2)) = tr\ (1) = 1$

La segunda fila de la tabla $\chi^{(2)}$ corresponde a la representación de signos, es decir,

$\chi_{K_1} = \chi(e) = tr\ X(e) = tr\ (sgn(e)) = tr\ 1 = 1$

$\chi_{K_2} = \chi((1,2)) = tr\ X((1,2)) = tr\ (sgn(1,2)) = tr\ -1 = -1$

$\chi_{K_3} = \chi((1,2,3)) = tr\ X((1,3,2)) = tr\ (sgn(1,2,3)) = tr\ 1 = 1$

Por lo tanto ahora podemos completar la tabla para las representaciones trivial y de signos, de la siguiente manera: La siguiente sección se trata de completar la

| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ |
|---|---|---|---|
| $\chi^{(1)}$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi^{(2)}$ | 1 | -1 | 1 |
| $\chi^{(3)}$ | ? | ? | ? |

última fila de la tabla de caracteres usando los productos internos.

## 2.8. Productos Internos de Caracteres.

En esta sección estudiaremos la potente herramienta del producto interno de caracteres. Tomar productos internos es un método simple para determinar si una representación es irreducible. Esta técnica también se puede utilizar para demostrar que la igualdad de caracteres implica la equivalencia de las representaciones y para demostrar que el número de irreducibles es igual al número de clases de conjugación.

Podemos pensar en un carácter $\chi$ de un grupo $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ como un vector fila de números complejos:

$$\chi = (\chi(g_1), \chi(g_2), ..., \chi(g_n)).$$

Si $\chi$ es irreducible, entonces este vector se obtiene del cuadro de caracteres, simplemente repitiendo el valor para la clase $K$ un total de$|K|$-veces. Por ejemplo, los dos primeros caracteres para $S_3$ en el cuadro se convierte en:

$$\chi^{(1)} = (1,1,1,1,1,1) \text{ y } \chi^{(2)} = (1,-1,-1,-1,1,1).$$

Por definición tenemos el producto interno usual de vectores fila dado por:

$$(c_1, c_2, ..., c_n) \cdot (d_1, d_2, ..., d_n) = c_1\overline{d_1} + c_2\overline{d_2} + \cdots + c_n\overline{d_n},$$

donde la barra representa conjugado complejo. Calculando el producto de caracteres con nuestro $S_3$, se cumple que:

$\chi^{(1)} \cdot \chi^{(1)} = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 6$

$\chi^{(2)} \cdot \chi^{(2)} = 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 6$

$\chi^{(1)} \cdot \chi^{(2)} = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 0$

Ahora calculemos los caracteres irreductibles de $C_4 = \{e, g, g^2, g^3\}$, representados como $\chi^{(1)},\ \chi^{(2)}$, con $\chi^{(1)}$ el carácter trivial; y $\chi^{(2)}$ como sigue:

$\chi_{K_1} = \chi(e) = tr\ X(e) = tr\ (1) = 1$

$\chi_{K_2} = \chi(g) = tr\ X(g) = tr\ (i) = i$

$\chi_{K_3} = \chi(g^2) = tr\ X(g^2) = tr\ (-1) = -1$

$\chi_{K_4} = \chi(g^3) = tr\ X(g^3) = tr\ (-i) = -i$

Así la tabla de caracteres es:

| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\chi^{(1)}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi^{(2)}$ | 1 | $i$ | $-1$ | $-i$ |

En forma de vectores:

$\chi^{(1)} = (1, 1, 1, 1)$

$\chi^{(2)} = (1, i, -1, -i)$

También se comprueba que:

$\chi^{(1)} \cdot \chi^{(1)} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4$

$\chi^{(2)} \cdot \chi^{(2)} = 1 \cdot 1 + i \cdot (-i) + (-1) \cdot (-1) + (-i) \cdot i = 4$

$\chi^{(1)} \cdot \chi^{(2)} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-i) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot i = 0\,.$

Lo que nos conduce a conjeturar que si $\chi^{(i)}$ y $\chi^{(j)}$ son caracteres irreducibles de $G$, entonces

$$\chi^{(i)} \cdot \chi^{(j)} = \begin{cases} |G| & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Dividiendo por $|G|$ para la normalidad nos da una definición del carácter del producto interno.

**Definición 2.8.1.** *Sean $\chi$ y $\psi$ dos funciones cualesquiera de un grupo $G$ en los números complejos $\mathbb{C}$. El **producto interno** de $\chi$ y $\psi$ es*

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}.$$

**Definición 2.8.2.** *Una matriz $A \in M\{\mathbb{C}\}$ es llamada **unitaria** si*

$$\overline{A}^t = A^{-1},$$

*donde la $t$ denota la transpuesta.*

**Proposición 2.8.1.** *Sean $\chi$ y $\psi$ caracteres; entonces*

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}) \tag{12}$$

**Demostración:** Supongamos que $V$ es un $G$-módulo con carácter $\psi$. Hemos visto, en la demostración del teorema de Maschke, que hay un producto interno en $V$ que es invariante bajo la acción de $G$. Al escoger una base ortonormal para $V$, obtenemos una representación matricial $Y$ para $\psi$, donde cada $Y(g)$ es unitario, es decir:

$$Y(g^{-1}) = Y(g)^{-1} = \overline{Y(g)}^t.$$

Ahora sean $\chi$, $\phi$ caracteres, y $Y(g)$ una representación matricial unitaria, entonces tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\langle \chi, \psi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}; \text{ definición 2.8.1} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \; \overline{tr\ Y(g)}; \text{ definición de carácter} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) tr\ \overline{Y(g)}; \text{ propiedad de traza de matrices} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) tr\ \left(\overline{Y(g)}^{t}\right)^{t}; \text{ por propiedad de matrices} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) tr\ \left(Y(g)^{-1}\right)^{t}; \; Y(g) \text{ es unitaria} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) tr\ Y(g^{-1})^{t}; \text{ propiedad de acción} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) tr\ Y(g^{-1}); \text{ propiedad de traza de matrices} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}); \text{ definición de carácter.}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1})$ ■

Cuando el campo es arbitrario, la ecuación (12) se toma como la **definición** del producto interno. De hecho, para cualquier par de funciones $\chi$ y $\psi$ de $G$ a un campo, se puede definir

$$\langle \chi, \psi \rangle' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}),$$

pero sobre los números complejos este **"producto interno"** es sólo una forma bilineal. Por supuesto, cuando se está restringido a los caracteres tenemos

$\langle \chi, \psi \rangle = \langle \chi, \psi \rangle'$. Siempre que $\chi$ y $\psi$ sean constantes en las clases de conjugación, tenemos

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{K} |K| \chi_K \overline{\psi_K},$$

donde la suma es sobre todas las clases de conjugación de $G$. Ahora podemos demostrar que los caracteres irreducibles son ortonormales con respecto al producto interno de la ecuación 12.

**Teorema 2.8.1.** ***(Relaciones de Caracteres del Primer Tipo)****. Sea $\chi$ y $\psi$ caracteres irreducibles de un grupo $G$. Entonces*

$$\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi, \psi}.$$

**Demostración** Suponga que $\chi, \psi$, son los caracteres de las representaciones de las matrices $A, B$ de grados $d$, $f$ respectivamente. Para la prueba utilizaremos el lema de Schur, y así hallaremos una matriz $T$ que cumpla las condiciones de el Corolario 2.6.1. Sea $X = (x_{i,j})$ una matriz $d \times f$ de indeterminados $x_{i,j}$ y considerar la matriz

$$Y = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(g) X B(g^{-1}) \tag{13}$$

Probaremos que $A(h)Y = YB(h)$ para todo $h \in G$. Lo que es equivalente a:

$$\begin{aligned}
A(h)YB(h)^{-1} &= A(h)\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}A(g)XB(g^{-1})\right)B(h)^{-1};\ Y=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}A(g)XB(g^{-1})\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}A(h)A(g)XB(g^{-1})B(h^{-1});\ \text{ proipiedades de sumatoria}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}A(hg)XB(g^{-1}h^{-1});\ \text{propiedad de acción}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}A(\widetilde{g})XB(\widetilde{g}^{-1});\ \widetilde{g}=hg\\
&= Y;\ \text{por (13)}
\end{aligned}$$

y nuestra afirmación está probada. Así, por los corolarios 2.6.1 y 2.6.3,

$$Y=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad A\ncong B,\\ cI_d & \text{si} \quad A\cong B.\end{cases} \tag{14}$$

Considere el primer caso donde $A \ncong B$, entonces $\chi \neq \psi$, así que $A$ y $B$ son no equivalentes. Dado que esto obliga a que $y_{i,j} = 0$ para cada elemento de $Y$, podemos tomar la entrada $(i, j)$ de la ecuación (13) para obtener

$$\frac{1}{|G|}\sum_{k,l}\sum_{g\in G}a_{i,k}(g)x_{k,l}b_{l,j}(g^{-1})=0$$

para todo $i, j$. Si este polinomio es cero, el coeficiente de cada $x_{k,l}$ también es cero, así

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a_{i,k}(g)b_{l,j}(g^{-1}) = 0$$

para todo $i, j, k, l$. Además la última ecuación puede simplificarse como

$$\langle a_{i,k}, b_{l,j}\rangle = 0 \ \ \forall\ i, j, k, l, \tag{15}$$

ya que nuestra definición de producto interior se aplica a todas las funciones de $G$ en $\mathbb{C}$. Ahora,

$$\chi = tr\ A = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{d,d}$$

y

$$\psi = tr\ B = b_{1,1} + b_{2,2} + \cdots + b_{f,f},$$

así

$$\langle \chi, \psi\rangle = \langle \chi, \psi\rangle' = \sum_{i,j}\langle a_{i,i} b_{j,j}\rangle' = 0$$

como se deseaba.

Ahora supóngase que $\chi = \psi$. Puesto que sólo estamos interesados en los valores de caracteres, que bien podrían tomar $A = B$ también. Por la ecuación (14), existe un escalar $c \in \mathbb{C}$ tal que $y_{i,j} = c\delta_{i,j}$. Así, como en el párrafo anterior, tenemos $\langle a_{i,k}, a_{l,j}\rangle' = 0$, siempre y cuando $i \neq j$. Para el caso $i = j$, considere

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} A(g)XA(g^{-1}) = cI_d$$

y tomar la traza en ambos lados:

$$\begin{aligned}
cd &= tr\ cI_d;\ \text{por definición}\\
&= tr\ \left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} A(g)XA(g^{-1})\right);\ \text{sustitución de } cI_d\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} tr\ A(g)XA(g^{-1});\ \text{propiedad de traza}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} tr\ X;\ \text{propiedad de traza}\\
&= \frac{1}{|G|}\ |G|\ tr\ X\\
&= tr\ X.
\end{aligned}$$

Así $y_{i,i} = c = \frac{1}{d}tr\ X$, el cual puede reescribirse como

$$\frac{1}{|G|}\sum_{k,l}\sum_{g\in G} a_{i,k}(g)x_{k,l}a_{l,i}(g^{-1}) = \frac{1}{d}(x_{1,1} + x_{2,2} + \cdots + x_{d,d}).$$

Igualando los coeficientes de monomios en esta ecuación obtenemos

$$\langle a_{i,k}, a_{l,i}\rangle' = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a_{i,k}(g)a_{l,i} = \frac{1}{d}\delta_{k,l}. \tag{16}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\langle \chi, \chi \rangle &= \sum_{i,j=1}^{d} \langle a_{i,i}, a_{j,j} \rangle' \\ &= \sum_{i=1}^{d} \langle a_{i,i}, a_{i,i} \rangle' \\ &= \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{d} \\ &= 1,\end{aligned}$$

Asi

$$\langle \chi, \psi \rangle = \begin{cases} 1, & \chi = \psi \\ 0, & \chi \neq \psi \end{cases} = \delta_{\chi,\psi}$$

y queda probado el teorema. ■

**Definición 2.8.3.** *Sea $Y$ una representación, si $mY = \overbrace{Y \oplus Y \oplus ... \oplus Y}^{m}$, entonces el número entero no negativo $m$ se llama multiplicidad de $Y$.*

**Corolario 2.8.1.** *Sea $X$ una representación matricial de $G$ con carácter $\chi$. Supóngase que*

$$X \cong m_1 X^{(1)} \oplus m_2 X^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_k X^{(k)},$$

*donde los $X^{(i)}$ son irreducibles no equivalentes por pares con carácter $\chi^{(i)}$. Entonces se cumple que:*

1. $\chi = m_1 \chi^{(1)} + m_2 \chi^{(2)} + \cdots + m_k \chi^{(k)}$

2. *$\langle \chi, \chi^{(j)} \rangle = m_j$ para todo $j$.*

3. *$\langle \chi, \chi \rangle = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_k^2$*

4. *$X$ es irreducible si y sólo si $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.*

5. *Sea $Y$ otra representación matricial de $G$ con carácter $\psi$. Entonces*

$$X \cong Y \text{ si y sólo si } \chi(g) = \psi(g)$$

*para todo $g \in G$.*

**Demostración:**

1. Por propiedades de matrices se sabe que la traza de una suma directa es la suma de las trazas. Así tenemos que:

$$\chi = tr\ X = tr\ \bigoplus_{i=1}^{k} m_i X^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} m_i \chi^{(i)}.$$

Por lo tanto $\chi = m_1\chi^{(1)} + m_2\chi^{(2)} + \cdots + m_k\chi^{(k)}$.

2. $\langle \chi, \chi^{(j)} \rangle = m_j$ para todo $j$.

$$\begin{aligned}
\langle \chi, \chi^{(j)} \rangle &= \langle \sum_i m_i \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \rangle; \text{ por 1)} \\
&= \sum_i m_i \langle \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \rangle; \text{ axiomas de producto interno} \\
&= m_1 \langle \chi^{(1)}, \chi^{(j)} \rangle + ... + m_j \langle \chi^{(j)}, \chi^{(j)} \rangle + ... + m_k \langle \chi^{(k)}, \chi^{(j)} \rangle; \text{ por definición} \\
&= m_1 \cdot 0 + ... + m_j \cdot 1 + ... + m_k \cdot 0; \text{ por el teorema 2.8.1} \\
&= m_j
\end{aligned}$$

Así concluimos que $\langle \chi, \chi^{(j)} \rangle = m_j$ para todo $j$.

3. $\langle \chi, \chi \rangle = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_k^2$.

$$\begin{aligned}
\langle \chi, \chi \rangle &= \langle \sum_i m_i \chi^{(i)}, \sum_j m_j \chi^{(j)} \rangle; \text{ por 1)} \\
&= \sum_{i,j} m_i m_j \langle \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \rangle; \text{ axiomas de producto interno y } \overline{m_j} = m_j \\
&= m_1 m_1 \langle \chi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle + ... + m_j m_j \langle \chi^{(j)}, \chi^{(j)} \rangle + ... \\
&\quad ... + m_k m_k \langle \chi^{(k)}, \chi^{(k)} \rangle; \text{ por definición de sumatoria} \\
&= m_1^2 \cdot 1 + ... + m_j^2 \cdot 1 + ... + m_k^2 \cdot 1; \text{ por el teorema 2.8.1} \\
&= m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_k^2
\end{aligned}$$

Así concluimos que $\langle \chi, \chi \rangle = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_k^2$

4. "$\Longrightarrow$". Si $X$ es irreducible implica que $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ como se probó en el teorema 2.8.1.

"$\Longleftarrow$". Supongamos que $\langle \chi, \chi \rangle = 1$. Probaremos que $X$ es irreducible.

Por 3) tenemos que $\langle \chi, \chi \rangle = \sum_i m_i^2 = 1$, entonces hay exactamente un índice $j$ tal que $m_j = 1$ y el resto de los $m_i$ deben ser cero. Pero

$$X \cong m_1 X^{(1)} \oplus \cdots \oplus m_j X^{(j)} \cdots \oplus m_k X^{(k)} \cong 0X^{(1)} \oplus \cdots \oplus 1X^{(j)} \oplus \cdots \oplus 0X^{(k)} \cong X^{(j)}$$

como $X^{(j)}$ es irreducible por hipótesis, entonces concluimos que $X$ es irreducible.

Así hemos probado que $X$ es irreducible si y sólo si $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

5. "$\Longrightarrow$". Por la Proposición 2.7.1 parte 3) se cumple que:

$$X \cong Y \Longrightarrow \chi(g) = \psi(g); \forall g \in G.$$

"$\Longleftarrow$". Supongamos que $\chi(g) = \psi(g)$ y sea $Y \cong \bigoplus_{i=1}^k n_i X^{(i)}$.

Ahora

$$\begin{aligned} \chi(g) = \psi(g) &= \langle \chi, \chi^{(i)} \rangle = \langle \psi, \chi^{(i)} \rangle; \text{ axiomas de producto interno} \\ &= m_i = n_i \ \ \forall i; \text{ por 2)} \end{aligned}$$

Así $Y \cong \bigoplus_{i=1}^k n_i X^{(i)} \cong \bigoplus_{i=1}^k m_i X^{(i)} \cong X$, es decir, $X \cong Y$.

Por lo tanto $X \cong Y$ si y sólo si $\chi(g) = \psi(g)$ ■

Como un ejemplo de cómo estos resultados se aplican en la práctica, volvemos a la representación de definición de $S_n$. Para simplificar las cosas, recordar que tanto

$\pi, \pi^{-1} \in S_n$ tienen el mismo tipo de ciclo y por tanto son de la misma clase de conjugación. Así que si $\chi$ es un carácter de $S_n$, entonces $\chi(\pi) = \chi(\pi^{-1})$, ya que los caracteres son constantes en las clases de conjugación. De ello se desprende que la fórmula del producto interior para $S_n$ puede ser reescrita como

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \chi(\pi)\psi(\pi). \tag{17}$$

**Ejemplo 2.8.1.** *Sea $G = S_3$ y considerar $\chi = \chi^{def}$. Sea $\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$ los tres caracteres irreducibles de $S_3$, donde los primeros dos son los caracteres trivial y signo, respectivamente. Entonces por el teorema de Maschke 2.5.1, sabemos que*

$$\chi = m_1\chi^{(1)} + m_2\chi^{(2)} + m_3\chi^{(3)}.$$

*Encontrar $\chi$.*

Utilizaremos la ecuación 17 y la parte 2 del Corolario 2.8.1 para calcular $m_1$ y $m_2$ (valores de caracteres para $\chi = \chi^{def}$ que fueron encontrados en el ejemplo 2.7.2):

$$\begin{aligned}
m_1 &= \langle \chi, \chi^{(1)} \rangle; \text{ por 2) de teorema 2.8.1} \\
&= \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} \chi(\pi)\chi^{(1)}(\pi); \text{ por ecuación 17} \\
&= \frac{1}{6} \left[ \chi(e)\chi^{(1)}(e) + ... + \chi((1,3,2))\chi^{(1)}((1,3,2)) \right]; \ \forall \pi \in S_3 \\
&= \frac{1}{6}(3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= \langle \chi, \chi^{(2)} \rangle; \text{ por 2) de teorema 2.8.1} \\
&= \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} \chi(\pi)\chi^{(2)}(\pi); \text{ por ecuación 17} \\
&= \frac{1}{6} \left[ \chi(e)\chi^{(2)}(e) + ... + \chi((1,3,2))\chi^{(2)}((1,3,2)) \right]; \ \forall \pi \in S_3 \\
&= \frac{1}{6}(3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = 0
\end{aligned}$$

Así

$$\chi = 1 \cdot \chi^{(1)} + 0 \cdot \chi^{(2)} + m_3\chi^{(3)} = \chi^{(1)} + m_3\chi^{(3)}.$$

De hecho, ya habíamos establecido que el carácter de definición contenía una copia de la trivial. Esto se observó cuando se descompuso las matrices correspondientes como $X = A \oplus B$, donde $A$ es la matriz de la representación trivial. La excelente noticia es que las matrices $B$ corresponden a una o más copias del carácter desconocido $\chi^{(3)}$. Estas matrices resultaron ser

$$B(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B((1,2)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B((1,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B((2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B((1,2,3)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B((1,3,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si elegimos que $\psi$ como el carácter correspondiente, entonces

$\psi(e) = tr\ B(e) = 2$

$\psi((1,2)) = \psi((1,3)) = \psi((2,3)) = tr\ B((2,3)) = 0$

$\psi((1,2,3)) = \psi((1,3,2)) = tr\ B((1,3,2)) = -1$

Si $\psi$ es irreducible, entonces

$$\begin{aligned} m_3 &= \langle \chi, \psi \rangle;\ \text{por 2) de teorema 2.8.1} \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} \chi(\pi)\psi(\pi);\ \text{por ecuación 17} \\ &= \frac{1}{6} \left[ \chi(e)\psi(e) + ... + \chi((1,3,2))\psi((1,3,2)) \right];\ \forall \pi \in S_3 \\ &= \frac{1}{6}(3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)) = 1 \end{aligned}$$

así hemos encontrado $\chi^{(3)} = \psi$. Si no es irreducible, $\psi$, siendo de grado 2, debe contener dos copias de $\chi^{(3)}$. Por la parte 4 del Corolario 2.8.1 podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\langle \psi, \psi \rangle &= \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} \psi(\pi)\psi(\pi); \text{ por ecuación 17} \\
&= \frac{1}{6} \left[ \psi(e)\psi(e) + ... + \psi((1,3,2))\psi((1,3,2)) \right]; \; \forall \pi \in S_3 \\
&= \frac{1}{6}(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2) = 1
\end{aligned}$$

Así concluimos que $B$ es irreducible. Y por lo tanto la tabla de caracteres completa para $S_3$ es:

| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ |
|---|---|---|---|
| $\chi^{(1)}$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi^{(2)}$ | 1 | $-1$ | 1 |
| $\chi^{(3)}$ | 2 | 0 | $-1$ |

En general, el módulo de definición para $S_n$, $V = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$, siempre tiene $W = \mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \boldsymbol{n}\}$ como un submódulo. Si $\chi^{(1)}$ y $\chi^{\perp}$ son los caracteres correspondientes a $W$ y $W^{(\perp)}$, respectivamente, entonces $V = W \oplus W^{\perp}$. Esto se traduce a

$$\chi^{def} = \chi^{(1)} + \chi^{\perp}$$

un término de carácter. Ya sabemos que $\chi^{def}$ contiene puntos fijos y que $\chi^{(1)}$ es el carácter trivial. Así

$$\chi^{\perp}(\pi) = \text{ (número de puntos fijos de } \pi\text{) } - 1$$

es también un carácter de $S_n$· De hecho, $\chi^{\perp}$ es irreducible, aunque eso no es obvio.

# CAPÍTULO 3

# REPRESENTACIONES DEL GRUPO SIMÉTRICO.

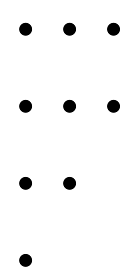
En este capítulo construiremos todas las representaciones irreducibles del grupo simétrico. Sabemos que el número de estas representaciones es igual al número de clases de conjugación, en el caso de $S_n$ es el número de particiones de $n$. Puede que no sea obvio cómo asociar una representación irreducible con cada partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l)$ pero es fácil de encontrar un subgrupo correspondiente $S_\lambda$, que sea isomorfo a $S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times ... \times S_{\lambda_l}$ en $S_n$. Así podremos construir la cantidad adecuada de representaciones mediante la inducción de la representación trivial en cada $S_\lambda$ hasta $S_n$.

## 3.1. Subgrupos de Young, Tablas y Tabloides.

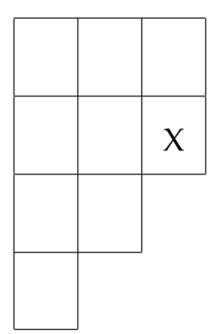
Nuestro objetivo en ésta sección es la construcción de los módulos $M^\lambda$. Antes que todo, introduciremos algunas notaciones y definiciones para las particiones. Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l)$ es una partición para $n$, entonces escribimos $\lambda \vdash n$. También usamos la notación $|\lambda| = \sum_i \lambda_i = n$

**Definición 3.1.1.** *Supóngase que* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l) \vdash n$*. El* ***diagrama de Ferrers o forma****, de* $\lambda$ *es un arreglo de* $n$ *puntos con* $l$ *filas justificadas a la izquierda, donde el renglón* $i$ *contiene* $\lambda_i$ *puntos para* $1 \leq i \leq l$*.*

El punto en la fila $i$ y columna $j$ tiene coordenada $(i, j)$, como en una matriz. Las celdas se utilizan a menudo en lugar de puntos. Como un ejemplo, la partición $\lambda = (3, 3, 2, 1)$ tiene diagrama de Ferrers



o también




donde la celda en la posición $(2, 3)$ tiene a $X$ en ella.

Ahora deseamos asociar a $\lambda$ un subgrupo de $S_n$. Recordemos que si $T$ es cualquier conjunto, entonces $S_T$ es el conjunto de permutaciones de $T$.

**Proposición 3.1.1.** *Si $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ es cualquier conjunto finito con $n \geq 1$ elementos, entonces se tiene un isomorfismo entre $S_n$ y $S_X$.*

**Demostración:**

Sea $I_n = \{1, 2, ..., n\}$, sabemos que $S_n = \{\pi : I_n \to I_n | \; \pi \text{ es inyectiva}\}$.

Ahora si $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, entonces, $S_X = \{\Phi : X \to X \,|\, \Phi \text{ es inyectiva}\}$. Con esto construimos cómo deben ser $\Phi$.

Ahora definimos una función que enumere los elementos de $X$, es decir:

$$\begin{array}{lcccl} \phi : & I_n & \longrightarrow & & X \\ & i & \longmapsto & \phi(i) = & a_i \end{array}$$

**$\phi$ inyectiva:**

Sean $i, j \in I_n$ tales que $\phi(i) = \phi(j)$.

$\phi(i) = \phi(j) \Rightarrow a_i = a_j$; por definición de $\phi$.

Por lo que $\phi$ es inyectiva.

Dado que $I_n$ y $X$ poseen el mismo cardinal, entonces se tiene que $\phi$ es sobreyectiva.

Así tenemos que $\phi$ es biyectiva y por lo tanto tiene una función inversa biyectiva que aplica como: $\phi^{-1} : X \longrightarrow I_n$.

Consideremos el diagrama.

$$\begin{array}{cccc} & I_n & \overset{\phi^{-1}}{\longleftarrow} & X & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \Phi(\pi) \\ & I_n & \underset{\phi}{\longrightarrow} & X & \end{array}$$

Así definimos $\Phi(\pi) : X \longrightarrow X$ mediante la composición $\Phi(\pi) = \phi \circ \pi \circ \phi^{-1}$.

De aquí $\Phi(\pi)$ es biyectiva ya que cada una de las funciones involucradas lo es.

Ahora probaremos el isomorfismo:

$$\begin{array}{llll} \Phi: & S_n & \rightarrow & S_X \\ & \pi & \longmapsto & \Phi(\pi) = \phi \circ \pi \circ \phi^{-1}. \end{array}$$

**Bien definida:**

Sean $\pi, \sigma \in S_n \mid \pi = \sigma$.

$$\Phi(\pi) = \phi \circ \pi \circ \phi^{-1} = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} = \Phi(\sigma).$$

Así tenemos que $\phi$ está bien definida.

**Inyectiva:** Sean $\pi, \sigma \in S_n \mid \Phi(\pi) = \Phi(\sigma)$.

$$\begin{aligned} \Phi(\pi) = \Phi(\sigma) &\Rightarrow \phi \circ \pi \circ \phi^{-1} = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1};\ \text{por definición} \\ &\Rightarrow \phi \circ \pi \circ \phi^{-1} \circ \phi = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} \circ \phi;\ \phi\ \text{biyectiva} \\ &\Rightarrow \phi \circ \pi \circ Id = \phi \circ \sigma \circ Id;\ \text{prodiedad de funciones} \\ &\Rightarrow \phi \circ \pi = \phi \circ \sigma;\ \text{composición con la función identidad} \\ &\Rightarrow \phi^{-1} \circ \phi \circ \pi = \phi^{-1} \circ \phi \circ \sigma;\ \phi\ \text{es biyectiva} \\ &\Rightarrow Id \circ \pi = Id \circ \sigma;\ \text{propiedad de funciones} \\ &\Rightarrow \pi = \sigma; \text{composición con la función identidad} \end{aligned}$$

Así se tiene $\Phi$ es inyectiva.

**Sobreyectiva:**

Como $S_n$ y $S_X$ tienen el mismo cardinal, se sigue que la inyectividad de $\Phi$ implica que es sobreyectiva.

**Homomorfismo:**

Sean $\pi, \sigma \in S_n$.

$$\begin{aligned}
\Phi(\pi \circ \sigma) &= \phi \circ (\pi \circ \sigma) \circ \phi^{-1}; \text{ por definición} \\
&= \phi \circ (\pi \circ (Id) \circ \sigma) \circ \phi^{-1}; \text{ composición con la función identidad} \\
&= \phi \circ (\pi \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \sigma) \circ \phi^{-1}; \; Id = \phi^{-1} \circ \phi \\
&= (\phi \circ \pi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}); \text{ asociatividad} \\
&= \Phi(\pi) \circ \Phi(\sigma); \text{ por definición de } \Phi
\end{aligned}$$

Así $\Phi$ es homomorfismo. Por lo que concluimos $S_n \cong S_X$. ■

**Definición 3.1.2.** *Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l) \vdash n$. Entonces el correspondiente* ***subgrupo de Young*** *de $S_n$ es*

$$\begin{aligned}
S_\lambda &= S_{\{1,2,...,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,...,\lambda_1+\lambda_2\}} \times S_{\{\lambda_1+\lambda_2+1,\lambda_1+\lambda_2+2,...,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\}} \times \\
&\quad ... \times S_{\{n-\lambda_l+1,n-\lambda_l+2,...,n\}}
\end{aligned}$$

Estos subgrupos se nombran en honor a Alfred Young, que fue uno de los primeros en construir las representaciones irreducibles de $S_n$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} S_{(3,3,2,1)} &= S_{\{1,2,3\}} \times S_{\{4,5,6\}} \times S_{\{7,8\}} \times S_{\{9\}} \\ &\cong S_3 \times S_3 \times S_2 \times S_1 \end{aligned}$$

Ahora probaremos que $S_\lambda$ es isomorfo a $S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times ... \times S_{\lambda_l}$ como grupos. Sabemos que

$$\begin{aligned} S_\lambda &= S_{\{1,2,...,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,...,\lambda_1+\lambda_2\}} \times S_{\{\lambda_1+\lambda_2+1,\lambda_1+\lambda_2+2,...,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\}} \times ... \\ &\quad ... \times S_{\{n-\lambda_l+1,n-\lambda_l+2,...,n\}} \\ &\cong S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times S_{\lambda_3} \times ... \times S_{\lambda_l} \end{aligned}$$

**Definición 3.1.3.** *Considere $H \leq G$ y una representación matricial $X$ de $G$.* ***La restricción*** *de $X$ a $H$, denotada $X \downarrow_H^G (h)$, está dada por*

$$X \downarrow_H^G (h) = X(h)$$

*para todo $h \in H$. Si $X$ tiene carácter $\chi$, entonces denotamos el carácter de $X \downarrow_H^G$ por $\chi \downarrow_H^G$.*

**Definición 3.1.4.** *Considérese $H \leq G$ y fijemos una transversal(diagonal) para las clases laterales izquierdas de $H$, es decir, $G = t_1 H \uplus ... \uplus t_l H$, donde $\uplus$ denota uniones de disjuntos. Si $Y$ es una representación de $H$, entonces la correspondiente* ***representación inducida*** *$Y \uparrow_H^G$ asigna a cada $g \in G$ la matriz cuadrada.*

$$Y \uparrow_H^G (g) = (Y(t_i^{-1} g t_j)) = \begin{pmatrix} Y(t_1^{-1} g t_1) & Y(t_1^{-1} g t_2) & \cdots & Y(t_1^{-1} g t_l) \\ Y(t_2^{-1} g t_1) & Y(t_1^{-1} g t_2) & \cdots & Y(t_1^{-1} g t_l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(t_l^{-1} g t_1) & Y(t_l^{-1} g t_2) & \cdots & Y(t_l^{-1} g t_l) \end{pmatrix}$$

*, donde $Y(g)$ es la matriz cero si $g \notin H$.*

**Proposición 3.1.2.** *Sea $H \subseteq G$ y sea $\{t_1, ..., t_l\}$ una transversal para $H$, y formamos el conjunto de clases laterales $\mathcal{H} = \{t_1 H, t_2 H, ..., t_l H\}$. Entonces las matrices de $1 \uparrow_H^G$ son las mismas que las de $G$ actuando en la base $\mathcal{H}$ para el conjunto de módulos $\mathbb{C}\mathcal{H}$.*

**Demostración:** Encontraremos la representación inducida $1 \uparrow_H^G$ y las matrices para $G$ actuando en la base $\mathcal{H}$ para el conjunto de módulos $\mathbb{C}\mathcal{H}$ y verificaremos que son las mismas.

Sea $g \in G$, $H \subseteq G$ y $\{t_1, ..., t_l\}$ una transversal para $H$. Usando la representación trivial, tenemos que su respectiva representación inducida es la siguiente:

$$\begin{aligned} 1\uparrow_H^G(g) &= (1(t_i^{-1}gt_j)) \\ &= \begin{cases} 1; & t_i^{-1}gt_j \in H \\ 0; & t_i^{-1}gt_j \notin H \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1; & gt_jH = t_iH \\ 0; & gt_jH \neq t_iH \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora hacemos actuar $g \in G$ sobre la base $\mathcal{H}$ para el conjunto de módulos $\mathbb{C}\mathcal{H}$.

Sea $\mathcal{H} = \{t_1H, t_2H, ..., t_lH\}$ y $g \in G$, entonces

$$g \cdot t_1H = (gt_1)H = \begin{cases} 1; & gt_1H = t_1H \\ 0; & gt_1H \neq t_1H \end{cases}$$

$$g \cdot t_2H = (gt_1)H = \begin{cases} 1; & gt_2H = t_2H \\ 0; & gt_2H \neq t_2H \end{cases}$$

$\vdots$

$$g \cdot t_iH = (gt_i)H = \begin{cases} 1; & gt_iH = t_iH \\ 0; & gt_iH \neq t_iH \end{cases}$$

En general tenemos

$$1(g) = \begin{cases} 1; & gt_jH = t_iH \\ 0; & gt_jH \neq t_iH \end{cases}$$

Entonces las matrices de $1\uparrow_H^G$ son las mismas que las de $G$ actuando en la base

$\mathcal{H}$ para el conjunto de módulos $\mathbb{C}\mathcal{H}$, es decir:

$$1 \uparrow_H^G (g) = X(g)$$

Y se tiene que $\mathbb{C}\mathcal{H}$ es un módulo para $1 \uparrow_H^G (g)$.■

Ahora consideremos la representación inducida de $1 \uparrow_{S_\lambda}^{S_n}$. Si $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k$ es una transversal para $S_\lambda$, entonces por la proposición anterior el espacio vectorial

$$V^\lambda = \mathbb{C}\{\pi_1 S_\lambda,\ \pi_2 S_\lambda,\ ...,\ \pi_k S_\lambda\}$$

es un módulo para nuestra representación inducida.

**Ejemplo 3.1.1.** *Encuentre las matrices de la representación trivial inducida de $S_2$ en $S_3$, es decir $1 \uparrow_{S_2}^{S_3}$.*

Sea $S_2 = \{e, (1,2)\}$ y $S_3 = \{e, (1\,2), (1\,3), (2\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$. Sabemos que el número de las clases de conjugación es: $\frac{|S_3|}{|S_2|} = 3$.

Sea $H = \{e, (1\,2)\}$, entonces $\frac{S_3}{S_2} = \{H, (1\,3)H, (2\,3)H\} = \mathcal{H}$. Así elegimos la transversal $\{t_1, t_2, t_3\} = \{e, (1\,3), (2\,3)\}$.

Ahora encontraremos las representación inducida para $g = (1\,2) \in S_3$.Por definición sabemos que:

$$
\begin{aligned}
1\uparrow_{S_2}^{S_3}((1,2)) &= (1(t_i{}^{-1}(1\,2)t_j)) \\
&= \begin{pmatrix}
1(e^{-1}(1\,2)e) & 1(e^{-1}(1\,2)(1\,3)) & 1(e^{-1}(1\,2)(2\,3)) \\
1((1\,3)^{-1}(1\,2)e) & 1((1\,3)^{-1}(1\,2)(1\,3)) & 1((1\,3)^{-1}(1\,2)(2\,3)) \\
1((2\,3)^{-1}(1\,2)e) & 1((2\,3)^{-1}(1\,2)(1\,3)) & 1((2\,3)^{-1}(1\,2)(2\,3))
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Calculando cada uno de estos valores tenemos:

$1(e^{-1}(1\,2)e) = 1((1\,2)) = 1;\ (1\,2) \in H$

$1(e^{-1}(1\,2)(1\,3)) = 1((1\,2)(1\,3)) = 1((1\,3\,2)) = 0;\ (1\,3\,2) \notin H$

$1(e^{-1}(1\,2)(2\,3)) = 1((1\,2)(2\,3)) = 1((1\,2\,3)) = 0;\ (1\,2\,3) \notin H$

$1((1\,3)^{-1}(1\,2)e) = 1((1\,3)(1\,2)) = 1((1\,2\,3)) = 0;\ (1\,2\,3) \notin H$

$1((1\,3)^{-1}(1\,2)(1\,3)) = 1((1\,3)(1\,3\,2)) = 1((2\,3)) = 0;\ (2\,3) \notin H$

$1((1\,3)^{-1}(1\,2)(2\,3)) = 1((1\,3)(2\,3\,1)) = 1((1\,2)) = 1;\ (1\,2) \in H$

$1((2\,3)^{-1}(1\,2)e) = 1((2\,3)(1\,2)) = 1((1\,3\,2)) = 0;\ (1\,3\,2) \notin H$

$1((2\,3)^{-1}(1\,2)(1\,3)) = 1((2\,3)(1\,3\,2)) = 1((1\,2)) = 1;\ (1\,2) \in H$

$1((2\,3)^{-1}(1\,2)(2\,3)) = 1((2\,3)(1\,2\,3)) = 1((1\,3)) = 1;\ (1\,3) \notin H$

Por lo que se tiene la siguiente representación:

$$1 \uparrow_{S_2}^{S_3} ((1,2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora procedemos a calcular la representación regular para $g = (1\,2) \in S_3$ en la base $\mathcal{H} = \{H, (1\,3)H, (2\,3)H\}$. Hacemos actuar $g = (1\,2)$ sobre los elementos de $\mathcal{H}$:

$(1\,2) \cdot H = H$

$(1\,2) \cdot (1\,3)H = (1\,3\,2)H = (2\,3)H$

$(1\,2) \cdot (2\,3)H = (1\,2\,3)H = (1\,3)H$

Por lo que se tiene la representación:

$$X((1\,2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto se concluye que las marices de $1 \uparrow_{S_2}^{S_3}$ son las mismas que las de $S_3$ actuando en la base $\mathcal{H}$ para el conjunto de módulos $\mathbb{C}\mathcal{H}$.

**Definición 3.1.5.** *Supóngase que $\lambda \vdash n$. Una **tabla de Young de forma** $\lambda$ es un arreglo $t$ obtenido mediante el reemplazo de puntos del diagrama de Ferrers de $\lambda$ con los números* $1, 2, ..., n$ *biunívocamente.*

Sea $t_{(i,j)}$ fijo para la entrada de $t$ en la posición $(i,j)$. Una tabla de Young de forma $\lambda$ es también llamada una $\lambda-$**tabla** y se denota por $t^{\lambda}$. Alternativamente escribimos $sh\, t = \lambda$ (sh del inglés shape que se traduce como "forma"). Existen $n!$ tablas de Young para cualquier forma $\lambda \vdash n$. Como ilustración, si

$$\lambda = (2,1) = \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \end{array}$$

entonces una lista de todos las posibles tablas de forma $\lambda$ es:

$$t : \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}, \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & \end{array}, \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & \end{array}, \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & \end{array}, \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & \end{array}, \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

La primer tabla tiene las entradas $t_{1,1} = 1$, $t_{1,2} = 2$ y $t_{2,1} = 3$. Ahora podemos introducirlos formalmente como clases de equivalencia de tablas.

**Definición 3.1.6.** *Dos $\lambda-$tablas $t_1$ y $t_2$ son **equivalentes por filas**, $t_1 \sim t_2$, si los correspondientes renglones de las dos tablas contienen los mismos elementos. Un **tabloide de forma** $\lambda$, o $\lambda$-**tabloide** es entonces*

$$\{t\} = \{t_i | t_i \sim t\}$$

*donde $sh\, t = \lambda$.*

Al igual que antes, utilizaremos líneas entre las filas de un arreglo para indicar que es un tabloide. Así, para

$$t = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array},$$

entonces

$$\{t\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}, \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & \end{array} \right\} = \begin{array}{cc} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}.$$

Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l) \vdash n$, entonces el número de tablas en cualquier clase de equivalencia dada es $\lambda_1!\lambda_2! \cdots \lambda_l! \overset{def}{=} \lambda!$. Así que el número de $\lambda$-tabloides es justamente $n!/\lambda!$, esto se demuestra en la proposición 3.1.3.

Ahora $\pi \in S_n$ actúa sobre una tabla $t = (t_{i,j})$ de forma $\lambda \vdash n$ como sigue:

$$\pi \cdot t = \pi(t) = (\pi(t_{i,j}))$$

Por ejemplo: si $\pi = (1,2,3)$ y $t = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}$, entonces

$$\pi \cdot t = \pi \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array} = \begin{array}{cc} \pi(1) & \pi(2) \\ \pi(3) & \end{array} = \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & \end{array}.$$

Esto induce una acción sobre tabloides de la siguiente forma:

$$\pi \cdot \{t\} = \{\pi \cdot t\}$$

Probaremos que esta acción está bien definida, es decir , dados $\{t\}$ y $\{t'\}$ se cumple lo siguiente: $\{t\} \sim \{t'\} \Rightarrow \pi \cdot \{t\} \sim \pi \cdot \{t'\}$.

Para ello basta probar que se cumple para tablas.

$$\begin{aligned}
t \sim t' &\Rightarrow t = \sigma \cdot t';\ \sigma \in R_t \\
&\Rightarrow (t_{i,j}) = \sigma \cdot (t'_{i,k});\ k \in \{1, 2, ..., \lambda_j\} \\
&\Rightarrow (t_{i,j}) = (t_{i,j}) \\
&\Rightarrow \pi \cdot (t_{i,j}) = \pi \cdot (t_{i,j}) \\
&\Rightarrow (\pi(t_{i,j})) = (\pi(t_{i,j})) \\
&\Rightarrow (\pi(t_{i,j})) = (\sigma^{-1}(\pi(t'_{i,k}))) \\
&\Rightarrow \pi(t_{i,j}) = \beta(t'_{i,k});\ \beta = \sigma^{-1}\pi \\
&\Rightarrow \pi \cdot t \sim \pi \cdot t'
\end{aligned}$$

Extendiendo a tabloides se tiene que $\{t\} \sim \{t'\} \Rightarrow \pi \cdot \{t\} \sim \pi \cdot \{t'\}$. Por lo tanto la acción esta bien definida.

**Definición 3.1.7.** *Supóngase que $\lambda \vdash n$. Sea*

$$M^{\lambda} = \mathbb{C}\{\boldsymbol{\{t_1\}, ..., \{t_k\}}\},$$

*donde $\{t_1\}, ..., \{t_k\}$ es una lista completa de $\lambda$-tabloides. Entonces $M^{\lambda}$ es llamado **módulo de permutación correspondiente** a $\lambda$.*

Dado que estamos considerando sólo las clases de equivalencia por renglones, podríamos enumerar los renglones de $M^{\lambda}$ en cualquier orden y producir un isomorfismo de módulos. Así $M^{\mu}$ se define para cualquier partición ordenada $\mu$.

**Ejemplo 3.1.2.** *Si $\lambda = (n)$, encontrar $M^{\lambda}$.*

El correspondiente diagrama de Ferrers para $\lambda$ está dado por: $\underbrace{\bullet \;\; \bullet \;\; \dots \;\; \bullet}_{n\ puntos}$.

Así que una tabla de Young $t$ de forma $\lambda$ puede ser:

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \quad \dots \quad & n \\ \hline \end{array}$$

y se tiene el tabloide $\{t\} = \overline{\underline{\;1 \;\; 2 \;\; \cdots \;\; n\;}}$ ; así, el módulo de permutación correspondiente a $\lambda = (n)$ es:

$$M^{(n)} = \mathbb{C}\left\{ \overline{\underline{\;\mathbf{1} \;\; \mathbf{2} \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{n}\;}} \right\}$$

Ahora falta verificar como actúa un elemento de $S_n$ en $M^{(n)}$. Sea $\pi \in S_n$ y $\overline{\underline{\;\mathbf{1} \;\; \mathbf{2} \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{n}\;}}$ un básico de $M^{(n)}$, entonces

$$\pi \cdot \overline{\underline{\;\mathbf{1} \;\; \mathbf{2} \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{n}\;}} \;=\; \overline{\underline{\;\boldsymbol{\pi}(\mathbf{1}) \;\; \boldsymbol{\pi}(\mathbf{2}) \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n})\;}} = \overline{\underline{\;\mathbf{1} \;\; \mathbf{2} \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{n}\;}}$$

Por lo tanto en $M^{(n)}$ actúa la acción trivial.

**Ejemplo 3.1.3.** *Considere* $\lambda = (1^n) = \underbrace{(1,1,...,1)}_{n-veces}$*, encontrar* $M^\lambda$ *y establecer un isomorfismo con el módulo* $\mathbb{C}S_n$ *.*

Cada clase de equivalencia $\{t\}$ consiste de una sola tabla, y ésta tabla puede ser identificada con una permutación en notación de una línea. El diagrama de Ferrers está compuesto por $n$ puntos de la forma:

$$n - puntos \left\{ \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \right.$$

Como las tablas de Young están formadas sustituyendo los puntos por los números de 1 a $n$, al permutarlos en la columna obtenemos diferentes tablas por lo que tenemos $n!$ tablas de Young y cada una de ellas es un tabloide. Por lo tanto el módulo $M^{(1^n)}$ está constituido por estos tabloides y su dimensión es $n!$. Así podemos formar una correspondencia biyectiva entre una base para $M^{(1^n)}$ y una base para $\mathbb{C}S_n$ y por lo tanto tenemos que

$$M^{(1^n)} \cong \mathbb{C}S_n$$

Como grupos, sin embargo debemos probar que existe el isomorfismo como $S_n-$módulos. Definimos la aplicación

$$\theta : \mathbb{C}S_n \longrightarrow M^{(1^n)} \quad \text{con la correspondencia} \quad \boldsymbol{\pi} \longmapsto \begin{array}{c} \hline \boldsymbol{\pi(1)} \\ \hline \boldsymbol{\pi(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\pi(n)} \\ \hline \end{array}$$

Probaremos que dado un elemento básico $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{C}S_n$ y $\sigma \in S_n$, se cumple que $\theta(\sigma \cdot \boldsymbol{\pi}) = \sigma \cdot \theta(\boldsymbol{\pi})$.

$$\theta(\sigma \cdot \boldsymbol{\pi}) = \begin{array}{c} \hline \boldsymbol{(\sigma \cdot \pi)(1)} \\ \hline \boldsymbol{(\sigma \cdot \pi)(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{(\sigma \cdot \pi)(n)} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \hline \boldsymbol{\sigma(\pi(1))} \\ \hline \boldsymbol{\sigma(\pi(2))} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\sigma(\pi(n))} \\ \hline \end{array} = \sigma \cdot \begin{array}{c} \hline \boldsymbol{\pi(1)} \\ \hline \boldsymbol{\pi(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\pi(n)} \\ \hline \end{array} = \sigma \cdot \theta(\boldsymbol{\pi})$$

Así concluimos que $\theta$ es un isomorfismo cómo $S_n$-módulos.

Ahora falta verificar como actúa un elemento de $S_n$ en $M^{(1^n)}$. Sea $\pi \in S_n$ y $\begin{array}{c} \hline \boldsymbol{a_1} \\ \hline \boldsymbol{a_2} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{a_n} \\ \hline \end{array}$ un elemento básico de $M^{(1^n)}$ donde los $\boldsymbol{a_i} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$, entonces tenemos:

$$\pi \cdot \begin{array}{c} \hline \boldsymbol{a_1} \\ \hline \boldsymbol{a_2} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{a_n} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \hline \boldsymbol{\pi(a_1)} \\ \hline \boldsymbol{\pi(a_2)} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\pi(a_n)} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \hline \boldsymbol{b_1} \\ \hline \boldsymbol{b_2} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{b_n} \\ \hline \end{array}$$

Donde los $\boldsymbol{b_i} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$. Así como al hacer actuar $\pi$ en un elemento de $M^{(1^n)}$ obtenemos otro tabloide unicamente permutando las filas, entonces concluimos que su representación es la regular.

**Ejemplo 3.1.4.** *Sea $\lambda = (n-1, 1)$, calcular $M^{\lambda}$ y establecer un isomorfismo con el módulo $\mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$.*

Cada $\lambda$-tabloide es determinado únicamente por los elementos en la segunda fila, los cuales son un número de 1 a $n$. Así $M^{\lambda}$ esta formado por $n$ $\lambda$-tabloides y el diagrama de Ferrers está compuesto de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \overbrace{\bullet \quad \bullet \quad \ldots \quad \bullet}^{n-1 \quad \textit{puntos}} \\ \bullet \end{array}$$

Ahora probaremos $M^{(n-1,1)} \cong \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \boldsymbol{n}\}$. Para ello definimos $\theta : \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\} \to M^{(n-1,1)}$, dada por $\theta(\boldsymbol{k}_i) = \{t_i\}$ donde $\boldsymbol{k}_i \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$ y es el elemento fijo del segundo renglón. A continuación probaremos que $\theta$ está bien definido y es isomorfismo:

1) **Bien definido:** Sean $\boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{k}_j \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$ elementos básicos de $\mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$ tales que $\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{k}_j$.

$$
\begin{aligned}
\theta(\boldsymbol{k}_i) &= \{t_i\};\ \text{definición de } \theta \\
&= \begin{array}{l} \hline k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_{i-1} \quad k_{i+1} \quad \ldots \quad k_n \\ \hline k_i \\ \hline \end{array};\ \text{definición del tabloide en } M^{(n-1,1)} \\
&= \begin{array}{l} \hline l_1 \quad l_2 \quad \ldots \quad l_n \\ \hline k_j \\ \hline \end{array};\ \text{por hipótesis y } \boldsymbol{l}_i \ \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\} - \{\boldsymbol{k_j}\} \\
&= \{t_j\};\text{por definición del tabloide en } M^{(n-1,1)} \\
&= \theta(\boldsymbol{k}_j);\ \text{por definición de } \theta
\end{aligned}
$$

Y se tiene que $\theta$ está bien definida.

2) $\theta$ **es homomorfismo de** $S_n-$**módulo:** Sea $\pi \in S_n$, $\boldsymbol{k_i} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$.

$$
\begin{aligned}
\pi \cdot \theta(\boldsymbol{k_i}) &= \pi \cdot \begin{array}{l} \hline k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_{i-1} \quad k_{i+1} \quad \ldots \quad k_n \\ \hline k_i \\ \hline \end{array};\ \text{definición de } \theta \\
&= \begin{array}{l} \hline \pi(k_1) \quad \pi(k_2) \quad \ldots \quad \pi(k_{i-1}) \quad \pi(k_{i+1}) \quad \ldots \quad \pi(k_n) \\ \hline \pi(k_i) \\ \hline \end{array};\ \text{acción en } M^{(n-1,1)} \\
&= \theta(\pi((k_i)));\ \text{definición de } \theta \\
&= \theta(\pi \cdot (\boldsymbol{k_i}));\ \text{definición de acción en } \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\}
\end{aligned}
$$

Así tenemos que $\theta$ es un homomorfismo de $S_n$ módulos.

3) $\theta$ **es inyectiva:** Sean $\boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{k}_j \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$ y ł$_i \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\} - \{\boldsymbol{k}_j\}$ tal que $\theta(\boldsymbol{k}_i) = \theta(\boldsymbol{k}_j)$.

$$\theta(\boldsymbol{k}_i) = \theta(\boldsymbol{k}_j) \Rightarrow \begin{array}{llllll} \hline k_1 & k_2 & ... & k_{i-1} & k_{i+1} & ... \; k_n \\ \hline k_i & & & & & \\ \cline{1-1} \end{array} = \begin{array}{llll} \hline l_1 & l_2 & ... & l_n \\ \hline k_j & & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$\Rightarrow k_i = k_j$$

Y se tiene que $\theta$ es inyectiva.

4) $\theta$ **es sobreyectiva:** Sea $\boldsymbol{a}$ un elemento básico de $M^{(n-1,1)}$.

$$\boldsymbol{a} \in M^{(n-1,1)} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \{t_i\}; \text{ definición en } M^{(n-1,1)}$$

$$\Rightarrow a = \begin{array}{llllll} \hline k_1 & k_2 & ... & k_{i-1} & k_{i+1} & ... \; k_n \\ \hline k_i & & & & & \\ \cline{1-1} \end{array}; \text{ definición en } M^{(n-1,1)}$$

$$\Rightarrow a = \theta(\boldsymbol{k_i}); \; \boldsymbol{k_i} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$$

Y se tiene que $\theta$ es sobreyectiva, por lo tanto es biyectiva y así, $\theta$ es un isomorfismo de $S_n$ módulos.

Ahora falta verificar como actúa un elemento de $S_n$ en $M^{(n-1,1)}$. Sea $\pi \in S_n$ y

$$\begin{array}{l}\hline k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_{i-1} \quad k_{i+1} \quad \ldots \quad k_n \\ \hline k_i \\ \hline \end{array}$$ un básico de $M^{(n-1,1)}$, entonces

$$\pi \cdot \begin{array}{l}\hline k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_{i-1} \quad k_{i+1} \quad \ldots \quad k_n \\ \hline k_i \\ \hline \end{array} = \begin{array}{l}\hline \pi(k_1) \quad \pi(k_2) \quad \ldots \quad \pi(k_{i-1}) \quad \pi(k_{i+1}) \quad \ldots \quad \pi(k_n) \\ \hline \pi(k_i) \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{l}\hline l_1 \quad l_2 \quad \ldots \quad l_{i-1} \quad l_{i+1} \quad \ldots \quad l_n \\ \hline l_i \\ \hline \end{array}$$

donde los $l_i \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$. Como $\pi$ actúa permutando unicamente un elemento en cada fila entonces, entonces $M^{(n-1,1)}$ tiene la representación de definición.

**Ejemplo 3.1.5.** *Calculemos el conjunto completo de caracteres de estos módulos cuando $n = 3$.*

En este caso las únicas particiones son $\lambda = (3)$, $(2, 1)$, y $(1^3)$. De los ejemplos anteriores, los $M^\lambda$ módulos corresponden al trivial, de definición (ejemplo 2.7.2) y representaciones regulares (ejemplo 2.7.3) de $S_3$, respectivamente. Todos éstos valores de carácter han sido calculados en el Capítulo 2. Se denota el carácter de $M^\lambda$ por $\phi^\lambda$ y se representa a la clase de conjugación de $S_3$ correspondiente a $\mu$ por $K_\mu$. Entonces tenemos la siguiente tabla de caracteres:

| | $K_{(1^3)}$ | $K_{2,1}$ | $K_{(3)}$ |
|---|---|---|---|
| $\phi^{(3)}$ | 1 | 1 | 1 |
| $\phi^{(2,1)}$ | 3 | 1 | 0 |
| $\phi^{(1^3)}$ | 6 | 0 | 0 |

Los $M^\lambda$ tienen las siguientes propiedades generales de módulos.

**Definición 3.1.8.** *Decimos que un G-módulo M es **cíclico** si existe un $\boldsymbol{v} \in M$ tal que*

$$M = \mathbb{C}G\boldsymbol{v},$$

*donde $G\boldsymbol{v} = \{g\boldsymbol{v}|g \in G\}$. En este caso decimos que M es generado por $\boldsymbol{v}$.*

*Dado que cualquier $\lambda$-tabloide puede ser llevado a cualquier otro tabloide de la misma forma por alguna permutación, $M^\lambda$ es cíclico.*

Esto se resumen en la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.3.** *Si $\lambda \vdash n$, entonces $M^\lambda$ es cíclico, generado por cualquier $\lambda$-tabloide dado. Añadiendo, dim $M^\lambda = n!/\lambda!$, el número de $\lambda$-tabloides.*

**Demostración:**

Sean $G = S_n$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$. Probaremos que: $M^\lambda = \mathbb{C}S_n\{t_i\}$ donde $S_n\{t_i\} = \{\pi\{t_i\}|$ para algún $\{t_i\} \in M^\lambda$, $\pi \in S_n\}$.

I. $M^\lambda \subseteq \mathbb{C}S_n\{t_i\}$.

Sea $\{t_j\} \in M^\lambda$, $\pi \in S_n$.

$$\begin{aligned} \{t_j\} &= e\{t_j\}; \text{ propiedad de acción} \\ &= \sigma\sigma^{-1}\{t_j\}; \text{ definición 1.3.1 (4).} \\ &= \sigma(\sigma^{-1}\{t_j\}) \text{ ley asociativa} \\ &= \sigma\{t_i\}; \{t_i\} = \sigma^{-1}\{t_j\}, i \neq j \end{aligned}$$

Y tenemos que $M^\lambda \subseteq \mathbb{C}S_n\{t_i\}$.

II. $M^\lambda \supseteq \mathbb{C}S_n\{t_i\}$

Sea $a \in \mathbb{C}S_n\{t_i\}$

$$\begin{aligned} a &= \pi\{t_i\}; \text{ definición de } \mathbb{C}S_n\{t_i\} \\ &= \{\pi t_i\}; \text{ definición de acción en } M^\lambda \\ &= \{t_m\} \in M^\lambda;\ t_m = \pi t_i,\ i \neq m \end{aligned}$$

Y tenemos $M^\lambda \supseteq \mathbb{C}S_n\{t_i\}$. Por lo que concluimos $M^\lambda = \mathbb{C}S_n\{t_i\}$

Ahora probaremos que $dim\, M^\lambda = n!/\lambda!$, para ello sea $\lambda \vdash n$. Sabemos que cada tabla de Young consta de $n$ puntos de los cuales $\lambda_1$ son de un tipo, $\lambda_2$ son de otro tipo y $\lambda_k$ son de $k-$ésimo tipo.

Así como $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ con $n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k$, entonces el número de permutaciones diferentes [1] de los $n$ puntos es: $n!/\lambda_1!\lambda_2!...\lambda_k!$.

Por lo tanto, dado que $M^\lambda = \mathbb{C}\{\boldsymbol{\{t_1\},...,\{t_k\}}\}$, entonces $dim\, M^\lambda = n!/\lambda!$.

De esta manera queda probada la proposición. ■

¿Cuál es la conexión entre nuestros módulos de permutación y los obtenidos induciendo a partir de un subgrupo de Young? Podemos pensar en

$$S_\lambda = S_{\{1,2,...,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,...,\lambda_1+\lambda_2\}} \times ... \times S_{\{n-\lambda_l+1,n-\lambda_l+2,...,n\}}$$

modelado por el tabloide:

$$\{t^\lambda\} = \begin{array}{llll} \hline 1 & 2 & \cdots & \lambda_1 \\ \hline \lambda_1+1 & \lambda_1+2 & \cdots & \lambda_1+\lambda_2 \\ \hline & \vdots & & \\ \hline n-\lambda_l+1 & \cdots & n & \\ \hline \end{array}$$

El hecho de que $S_\lambda$ contiene todas las permutaciones de un intervalo dado de números enteros es claro por el hecho de que el orden de estos números enteros es independiente en $t^\lambda$ (ya que todos ellos se encuentran en la misma fila). Por lo tanto las clases $\pi S_\lambda$ corresponden de alguna manera al tabloide $\{\pi t^\lambda\}$. Para ser más precisos, veamos el Teorema 3.1.1.

**Teorema 3.1.1.** *Considere $\lambda \vdash n$ con el subgrupo de Young $S_\lambda$ y el tabloide $\{t^\lambda\}$, como antes. Entonces $V^\lambda = \mathbb{C}S_n\boldsymbol{S_\lambda}$ y $M^\lambda = \mathbb{C}S_n\boldsymbol{\{t^\lambda\}}$ son isomorfos como $S_n$-módulos.*

**Prueba:**

Sea $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k$ una transversal para $S_\lambda$. Definimos la aplicación

$\theta : V^\lambda \longrightarrow M^\lambda$

$\boldsymbol{\pi_i S_\lambda} \longmapsto \theta(\boldsymbol{\pi_i S_\lambda}) = \{\pi_i t^\lambda\};\ i = 1, 2, ..., k.$

Para probar que $V^\lambda \cong M^\lambda$, verificaremos que $\theta$ es un $S_n-$homomorfismo biyectivo.

**¿$\theta$ es inyectiva?**

Sea $\boldsymbol{\pi_i S_\lambda}$ , $\boldsymbol{\sigma_i S_\lambda} \in V^\lambda$ tal que $\theta(\boldsymbol{\pi_i S_\lambda}) = \theta(\boldsymbol{\sigma_i S_\lambda})$.

$$\begin{aligned} \theta(\boldsymbol{\pi_i S_\lambda}) = \theta(\boldsymbol{\sigma_i S_\lambda}) &\Longrightarrow \{\pi_i t^\lambda\} = \{\sigma_i t^\lambda\};\ \text{definición de } \theta \\ &\Longrightarrow \pi_i\{t^\lambda\} = \sigma_i\{t^\lambda\};\ \text{acción en sobre tabloides} \\ &\Longrightarrow \boldsymbol{\pi_i S_\lambda} = \boldsymbol{\sigma_i S_\lambda};\ \text{definición de } V^\lambda \end{aligned}$$

Así concluimos que $\theta$ es inyectiva.

¿$\theta$ es sobreyectiva?. Sea $y \in M^\lambda$.

$$\begin{aligned} y \in M^\lambda &\Longrightarrow y = \pi_i\{t^\lambda\};\ \text{definición de } M^\lambda \\ &\Longrightarrow y = \{\pi_i t^\lambda\};\ \text{acción en sobre tabloides} \\ &\Longrightarrow y = \theta(\boldsymbol{\pi_i S_\lambda});\ \text{definición de } V^\lambda \end{aligned}$$

Por lo tanto se concluye que $\theta$ es sobreyectiva.

**¿ $\theta$ es un $S_n$-homomorfismo?**

Sean $\sigma \in S_n$ y $\boldsymbol{\pi_i S_\lambda} \in V^\lambda$.

$$\begin{aligned} \theta(\sigma \boldsymbol{\pi_i S_\lambda}) &= \{\sigma\pi_i t^\lambda\};\ \text{definición de } \theta \\ &= \sigma\{\pi_i t^\lambda\};\ \text{acción en sobre tabloides} \\ &= \sigma\theta(\boldsymbol{\pi_i S_\lambda});\ \text{definición de } \theta \end{aligned}$$

Por lo tanto $\theta$ es un $S_n-$homomorfismo biyectivo y así $V^\lambda \cong M^\lambda$.

## 3.2. Orden Dominante.

Encontraremos un orden para las particiones $\lambda$. De hecho, consideramos dos ordenaciones importantes en las particiones de $n$, una de las cuales sólo es un orden parcial.

**Definición 3.2.1.** *Si $A$ es un conjunto, entonces un orden parcial sobre $A$ es una relación $\leq$ tal que*

1. $a \leq a$
2. $a \leq b$ *y* $b \leq a$ *implica* $a = b$, *y*
3. $a \leq b$ *y* $b \leq c$ *implica* $a \leq c$

*para todo $a, b, c \in A$.*

En este caso decimos que $(A, \leq)$ es un **conjunto parcialmente ordenado**. También escribimos $b \geq a$ para $a \leq b$ tanto como $a < b$ (o $b > a$) para $a \leq b$ y $a \neq b$. Si además, para cada par de elementos $a, b \in A$ tenemos ya sea $a \leq b$ o $b \leq a$, entonces $\leq$ es un **orden total** y $(A, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

Las tres leyes de un orden parcial se llaman reflexiva, antisimétrica, y transitiva, respectivamente. Los pares de elementos $a, b \in A$ tal que no se cumple ninguno de los siguientes casos: $a \leq b$, $b \leq a$; son llamados **incomparables**.

En particular el orden parcial en el cual estamos interesados es el siguiente:

**Definición 3.2.2.** *Supóngase que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l)$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$ son particiones de $n$. Entonces $\lambda$ domina a $\mu$, escrito como $\lambda \trianglerighteq \mu$, si*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$$

*para todo $i \geq 1$. Si $i > l$ (respectivamente, $i > m$), entonces hacemos a $\lambda_i$ (respectivamente $\mu_i$) como cero.*

Intuitivamente, $\lambda$ es mayor que $\mu$ en el orden dominante si el diagrama de Ferrers de $\lambda$ tiene pocas filas con muchos puntos en cada una, y para $\mu$ tiene varias filas y pocos puntos en ellas. Por ejemplo, cuando $n = 6$, entonces $(3, 3) \trianglerighteq (2, 2, 1, 1)$ ya que $3 \geq 2$, $3 + 3 \geq 2 + 2$, etc. Sin embargo, $(3, 3)$ y $(4, 1, 1)$ son incomparables ya que $3 \leq 4$, pero $3 + 3 \geq 4 + 1$. Cualquier conjunto parcialmente ordenado puede ser visualizado usando un diagrama de Hasse, el cual se describe a continuación.

**Definición 3.2.3.** *Si $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $b, c \in A$, entonces decimos que $b$ es cubierto por $c$ (o $c$ cubre a $b$), escrito $b \prec c$ (o $c \succ b$), si $b < c$ y no existe $d \in A$ tal que $b < d < c$. El Diagrama de Hasse de $A$ consiste de vértices que representan los elementos de $A$ con una flecha desde el vértice $b$ hasta el vértice $c$ si $b$ está cubierto por $c$.*

A continuación construimos el diagrama de Hasse de $n = 6$. Primero encontramos todas las particiones de $n = 6$:

$(1,1,1,1,1,1) = (1^6),\ (2,1,1,1,1) = (2,1^4),\ (2,2,1,1) = (2^2,1^2),$

$(2,2,2) = (2^3)$

$(3,1,1,1) = (3,1^3),\ (3,2,1),\ (3,3) = (3^2),\ \ (4,1,1) = (4,1^2),\ (4,2),$

$(5,1),\ \ (6)$

Para construir el diagrama, ordenamos las particiones por dominación usando la definición 3.2.2. Así se tiene

$(1,1,1,1,1,1) \trianglelefteq (2,1,1,1,1)$ ya que,

$1 \leq 2$

$1+1 \leq 2+1$

$1+1+1 \leq 2+1+1$

$1+1+1+1 \leq 2+1+1+1$

$1+1+1+1+1 \leq 2+1+1+1+1$

$1+1+1+1+1+1 \leq 2+1+1+1+1+0$

Pero hay ciertas particiones que no son comparables, por ejemplo:

$(3,3)$ y $(4,1,1)$, ya que

$3 \leq 4$

$3+3 \geq 4+1$

De estos resultados concluimos que las particiones $(3,3)$ y $(4,1,1)$ no son comparables y por ello no podemos trazar flechas entre ambas, sin embargo si lo son con $(3,2,1)$; de esto dirigimos una flecha de la partición $(3,2,1)$ a las particiones $(3,3)$ y $(4,1,1)$.

Así realizando estos mismos cálculos para las otras particiones, construimos el diagrama de Hasse de la siguiente manera:

$$
\begin{tikzcd}
 & (6) & \\
 & (5,1) \arrow[u] & \\
 & (4,2) \arrow[u] & \\
(3^2) \arrow[ur] & & (4,1^2) \arrow[ul] \\
 & (3,2,1) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
(3,1^3) \arrow[ur] & & (2^3) \arrow[ul] \\
 & (2^2,1^2) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & (2,1^4) \arrow[u] & \\
 & (1^6) \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

El lema fundamental relativo al orden de dominanción es el siguiente:

**Lema 3.2.1.** ***(Lema de Dominación para Particiones)***

*Sea $t^{\lambda}$ y $s^{\mu}$ tablas de forma $\lambda$ y $\mu$ repectivamente. Si, para cada índice $i$, los elementos de la fila $i$ de $s^{\mu}$ están todos en diferentes columnas en $t^{\lambda}$, entonces $\lambda \trianglerighteq \mu$.*

**Prueba:**

Por hipótesis podemos ordenar las entradas en cada columna de $t^{\lambda}$ de manera que los elementos de la fila $1, 2, ..., i$ de $s^{\mu}$ estén todos en las primeras $i$ filas de $t^{\lambda}$. Como los elementos del primer renglón de $S^{\mu}$ están en diferentes columnas en $t^{\lambda}$, se tiene que $\lambda_1 \geq \mu_1$. Luego el número de columnas que ya hemos ocupado en $\lambda_1$ son $\mu_1$ y dado que los elementos de $\mu_2$ están en diferentes columnas de $t^{\lambda}$, debemos tener que $\lambda_2 + (\lambda_1 - \mu_1) \geq \mu_2$ por lo que $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$.
Continuando con este proceso, se concluye que:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_i &= \text{número de elementos en las primeras } i \text{ filas de } t^{\lambda} \\
&\geq \text{número de elementos de } s^{\mu} \text{ en las primeras } i \text{ filas de } t^{\lambda} \\
&= \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i.
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos $\lambda \trianglerighteq \mu$. ■

## 3.3. Módulos de Specht.

Ahora constuiremos todos los módulos irreducibles de $S_n$, los llamados **módulos de Specht**, $S^\lambda$.

Toda tabla de Young determina naturalmente ciertas copias isomorfas de los subgrupos de Young en $S_n$.

**Definición 3.3.1.** *Supóngase que la tabla t posee filas $R_1, R_2, ..., R_l$ y columnas $C_1, C_2, ..., C_k$. Entonces*

$$R_t = S_{R_1} \times S_{R_2} \times \cdots \times S_{R_l}$$

*y*

$$C_t = S_{C_1} \times S_{C_2} \times \cdots \times S_{C_k}$$

*son los **grupo estabilizador de filas** y **grupo estabilizador de columnas** de $t$, respectivamente.*

Si tomamos

$$t = \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & \end{array} \tag{1}$$

entonces

$$R_t = S_{\{1,2,4\}} \times S_{\{3,5\}}$$

y

$$C_t = S_{\{3,4\}} \times S_{\{1,5\}} \times S_{\{2\}}$$

Observe que nuestras clases de equivalencia se pueden expresar como $\{t\} = R_t t$. Además, estos grupos están asociados con ciertos elementos de $\mathbb{C}[S_n]$. En general, dado un subconjunto $H \subseteq S_n$, podemos formar los siguientes elementos del álgebra de grupo $\mathbb{C}[S_n]$

$$H^+ = \sum_{\pi \in H} \pi$$

y

$$H^- = \sum_{\pi \in H} sgn(\pi)\pi.$$

(Aquí, el álgebra de grupo estará actuando sobre los módulos de permutación $M^\lambda$. Así, los elementos de $\mathbb{C}[S_n]$ no están jugando el papel de los vectores y no son conjuntos en negrita.) Para una tabla $t$, el elemento $R_t^+$ ya está implícito en el correspondiente tabloide por la observación al final del párrafo anterior. Sin embargo, también tendremos que hacer uso de

$$\kappa_t \stackrel{def}{=} C_t^- = \sum_{\pi \in C_t} sgn(\pi)\pi.$$

Si $t$ tiene columnas $C_1, C_2, ..., C_k$, entonces $\kappa_t$ se factoriza como

$$\kappa_t = \kappa_{C_1}\kappa_{C_2} \cdots \kappa_{C_k}.$$

Finalmente, podemos pasar de $t$ a un elemento del módulo $M^\lambda$ mediante la siguiente definición.

**Definición 3.3.2.** *Si $t$ es una tabla, entonces el* ***politabloide*** *asociado es*

$$e_t = \kappa_t \{\boldsymbol{t}\}.$$

Para ilustrar estos conceptos usamos la tabla en (1), y calculamos $e_t$.

Por definición tenemos que $\kappa_t = \kappa_{C_1}\kappa_{C_2}\kappa_{C_3}$ ya que $t = \begin{matrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & \end{matrix}$, de donde $C_1 = \{3,4\},\ C_2 = \{1,5\},$ y $C_3 = \{2\}$. Así tenemos,

$$\begin{aligned}
\kappa_{C_1} = C_1^- &= \sum_{\pi \in C_1} sgn(\pi)\pi \\
&= sgn[(3,4)](3,4) + sgn[(3)(4)](3)(4) \\
&= sgn[(3,4)](3,4) + sgn[(3)]sgn[(4)](3)(4) \\
&= -(3,4) + (3)(4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{C_2} = C_2^- &= \sum_{\pi \in C_2} sgn(\pi)\pi \\
&= sgn[(1,5)](1,5) + sgn[(1)(5)](1)(5) \\
&= sgn[(1,5)](1,5) + sgn[(1)]sgn[(5)](1)(5) \\
&= -(1,5) + (1)(5)
\end{aligned}$$

$$\kappa_{C_3} = C_3^- = \sum_{\pi \in C_3} sgn(\pi)\pi = sgn[(2)](2) = (2)$$

De donde

$$\begin{aligned}
\kappa_t = \kappa_{C_1}\kappa_{C_2}\kappa_{C_3} &= [(3)(4)-(3,4)][(1)(5)-(1,5)][(2)] \\
&= [(3)(4)(1)(5)-(3)(4)(1,5)-(3,4)(1)(5)+(3,4)(1,5)][(2)] \\
&= e-(1,5)-(3,4)+(1,5)(3,4)
\end{aligned}$$

Ahora

$$e_t = \kappa_t\{\boldsymbol{t}\} = [e-(3,4)-(1,5)+(1,5)(3,4)] \begin{array}{l}\hline \mathbf{4}\ \ \mathbf{1}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{3}\ \ \mathbf{5} \\ \hline \end{array}$$

y así

$$e_t = \begin{array}{l}\hline \mathbf{4}\ \ \mathbf{1}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{3}\ \ \mathbf{5} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{l}\hline \mathbf{3}\ \ \mathbf{1}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{4}\ \ \mathbf{5} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{l}\hline \mathbf{4}\ \ \mathbf{5}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{3}\ \ \mathbf{1} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{l}\hline \mathbf{3}\ \ \mathbf{5}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{4}\ \ \mathbf{1} \\ \hline \end{array}$$

De manera similar encontramos que para la tabla $t' = \begin{array}{lll} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & \end{array}$ su respectivo politabloide es

$$e_{t'} = \begin{array}{l}\hline \mathbf{3}\ \ \mathbf{4}\ \ \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{1}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{l}\hline \mathbf{2}\ \ \mathbf{4}\ \ \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{1}\ \ \mathbf{3} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{l}\hline \mathbf{1}\ \ \mathbf{3}\ \ \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{5}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{l}\hline \mathbf{1}\ \ \mathbf{2}\ \ \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{3}\ \ \mathbf{5} \\ \hline \end{array}$$

De esto notar que $e_t$ depende de $t$ y no sólo de $\{t\}$.

El siguiente lema describe lo que ocurre con los diversos objetos definidos previamente al pasar de $t$ a $\pi t$.

**Lema 3.3.1.** *Sea $t$ una tabla y $\pi$ una permutación. Entonces*

1. $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$,

2. $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$,

3. $\kappa_{\pi t} = \pi \kappa_t \pi^{-1}$,

4. $e_{\pi t} = \pi e_t$.

**Prueba:**

1. Sea $\sigma \in R_{\pi t}$, entonces tenemos,

$$\begin{aligned} \sigma \in R_{\pi t} &\iff \sigma\{\pi t\} = \{\pi t\};\ \text{por definición en } R_{\pi t} \\ &\iff \sigma\pi\{t\} = \pi\{t\};\ \text{acción en tabloides} \\ &\iff \pi^{-1}\sigma\pi\{t\} = \pi^{-1}\pi\{t\};\ \text{inverso en } S_n \\ &\iff \pi^{-1}\sigma\pi\{t\} = \{t\};\ \text{identidad en } S_n \\ &\iff \pi^{-1}\sigma\pi\{t\} \in R_t;\ \text{por definición en } R_t \\ &\iff \sigma \in \pi^{-1}R_t\pi;\ \text{por definición en } \pi^{-1}R_t\pi \end{aligned}$$

Así concluimos que $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$.

2. Si tenemos $\lambda \vdash n$, sabemos que una tabla de Young de forma $\lambda$ es un arreglo $t$ obtenido mediante el reemplazo de puntos del diagrama de Ferres de $\lambda$ con los números $\{1, 2, ..., n\}$. Además como el diagrama de Ferres es un

arreglo de $n$ puntos con $l$ filas justificadas a la izquierda, donde el renglón $i$ contiene $\lambda_i$ puntos para $1 \leq i \leq l$. Entonces por esta condición el numero de elementos de la columna 1 será mayor o igual al de la columna 2; en general $|C_1| \leq |C_2| \leq ... \leq |C_l|$.

Por lo tanto la transpuesta de una tabla es una tabla.

Así por (1) y tomando la transpuesta del grupo estabilizados de columnas tenemos que $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$.

3. $\kappa_{\pi t} = \pi \kappa_t \pi^{-1}$.

   Sabemos que $\kappa_{\pi t} = \sum_{\tau \in C_{\pi t}} sgn(\tau)\tau$. De donde

$$\begin{aligned} \tau \in C_{\pi t} &\implies \tau \in \pi C_t \pi; \text{ por (2)} \\ &\implies \tau = \pi\tau'\pi; \ \tau' \in C_t \end{aligned}$$

   Así tenemos:

$$\begin{aligned} \kappa_{\pi t} &= \sum_{\tau' \in C_t} (sgn\,(\pi\tau'\pi^{-1}))\pi\tau'\pi^{-1}; \text{ por definición de } \kappa_t \\ &= \sum_{\tau' \in C_t} (sgn\,\pi\ sgn\,\tau'\ sgn\,\pi^{-1})\pi\tau'\pi^{-1}; \text{ propiedad (3) del capítulo 2} \\ &= sgn\,\pi\ sgn\,\pi^{-1} \sum_{\tau' \in C_t} (sgn\,\tau')\pi\tau'\pi; \text{propiedad de sumatoria} \\ &= (1)\pi \left( \sum_{\tau' \in C_t} (sgn\,\tau')\tau' \right) \pi^{-1}; \ sgn\,\pi = sgn\,\pi^{-1} \text{ y } \pi \text{ no depende de } C_t \\ &= \pi\kappa_t\pi^{-1}; \text{ definición de } \kappa_t \end{aligned}$$

Así concluimos que $\kappa_{\pi t} = \pi \kappa_t \pi^{-1}$.

4. $e_{\pi t} = \pi e_t$.

   Por definición de politabloide tenemos

$$
\begin{aligned}
e_{\pi t} &= \kappa_{\pi t}\{\boldsymbol{\pi t}\};\ \text{por definición de politabloide}\\
&= \pi \kappa_t \pi^{-1}\{\boldsymbol{\pi t}\};\ \text{por (3)}\\
&= \pi \kappa_t \pi^{-1}\pi\{\boldsymbol{t}\};\ \text{acción de politabloides}\\
&= \pi \kappa_t\{\boldsymbol{t}\};\ \text{identidad en } S_n\\
&= \pi e_t;\ \text{definición de politabloide}
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto $e_{\pi t} = \pi e_t$. ■

Podemos pensar en este lema, por ejemplo, en la parte 1, de la siguiente manera. Si $t$ tiene entradas de $t_{i,j}$, entonces $\pi t$ tiene entradas $\pi t_{i,j}$. Por lo tanto un elemento de la fila-estabilizadora de $\pi t$ puede ser construido aplicando primero $\pi^{-1}$ para obtener la tabla $t$, luego permutando los elementos dentro de cada fila de $t$, y, finalmente, volver a aplicar $\pi$ para volver a la entada correcta. Por otra parte, acabamos de probar que si $\sigma \in R_{\pi t}$, entonces $\pi^{-1}\sigma\pi \in R_t$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \pi t \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi^{-1}"'] & \pi t_1 \\ t \arrow[r, "\pi^{-1}\sigma\pi"'] & t_1 \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

Finalmente estamos en posición de definir los módulos de Specht.

**Definición 3.3.3.** *Para cualquier partición $\lambda$, el correspondiente módulo de Specht, $S^\lambda$, es el submódulo de $M^\lambda$ generado por todos los politabloides $e_t$, donde $t$ es de forma $\lambda$.*

Por la parte 4 del Lema 3.3.1, tenemos lo siguiente.

**Proposición 3.3.1.** *Los $S^\lambda$ son módulos cíclicos, generados por cualquier politabloide dado.*

**Demostración:** Por definición de grupo cíclico ( definición 3.1.8), probaremos que $S^\lambda = \mathbb{C}S_n\boldsymbol{e}_t$; $\boldsymbol{e}_t \in S^\lambda$.

Sea $e_t \in S^\lambda$.

$e_t \in S^\lambda \Rightarrow \pi e_t = e_{\pi t}$; lema 3.3.1 parte 4.

Pero dado que $\pi e_t \in \mathbb{C}S_n e_t$, cualquier elemento de $S^\lambda$ puede ser escrito como producto de una permutación de $S_n$ actuando sobre un politabloide dado. Y así tenemos que $S^\lambda$ es cíclico generado por el politabloide $e_t$.■

Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 3.3.1.** *Supónga que* $\lambda = (n)$*. Calcular* $S^{\lambda}$*.*

Del ejemplo 3.1.2 el tabloide que se forma con la partición $\lambda = (n)$ es $\overline{\underline{\mathbf{1\,2\,\cdots n}}}$ . Luego:

$$
\begin{aligned}
e_{1\,2\cdots n} &= \kappa_t \,\overline{\underline{\mathbf{1\,2\,\cdots n}}} \text{ ; por definición de politabloide}\\
&= k_{C_1}k_{C_2}...k_{C_n}\,\overline{\underline{\mathbf{12\cdots n}}} \text{ ; factorización de } \kappa_t\\
&= sgn((1))(1)\cdot sgn((2))(2)\cdot ...\cdot sgn((n))(n)\,\overline{\underline{\mathbf{12\cdots n}}} \text{ ; por definición de } \kappa_t\\
&= (1)\cdot(2)\cdot ...\cdot(n)\,\overline{\underline{\mathbf{12\cdots n}}} \text{ ; definición de } sgn\\
&= \overline{\underline{\mathbf{12\cdots n}}} \text{ ; acción en tabloides}
\end{aligned}
$$

es el único politabloide y por lo tanto $S^{(n)} = \mathbb{C}\,\overline{\underline{\mathbf{12\cdots n}}}$ .
Ahora verificaremos como actúa una permutación en $S^{(n)}$. Sea $g \in S_n$ y $c_1\,\overline{\underline{\mathbf{12\cdots n}}} + ... + c_n\,\overline{\underline{\mathbf{12\cdots n}}} \in S^{(n)}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\pi\cdot\{c_1\,\overline{\underline{\mathbf{12\cdots n}}} + ... + c_n\,\overline{\underline{\mathbf{12\cdots n}}}\} &= c_1\,\overline{\underline{\boldsymbol{\pi(1)\cdots\pi(n)}}} + ... + c_n\,\overline{\underline{\boldsymbol{\pi(1)\cdots\pi(n)}}}\\
&= c_1\,\overline{\underline{\mathbf{12\cdots n}}} + ... + c_n\,\overline{\underline{\mathbf{12\cdots n}}}
\end{aligned}
$$

por lo tanto $S^{(n)}$ conlleva la representación trivial. Esto es, por supuesto, la única posibilidad, ya que $S^{(n)}$ es un submódulo de $M^{(n)}$ en el que $S_n$ actúa trivialmente (Ejemplo 3.1.2). Notar que $S^{(n)} \cong M^{\lambda}$ y $Dim\ S^{(n)} = 1$.

**Ejemplo 3.3.2.** *Sea* $\lambda = (1^n) = \underbrace{(1, 1, ..., 1)}_{n-veces}$ *y fijemos*

$$t = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \tag{2}$$

*Calcular* $S^\lambda$.

Al permutar los elementos en la columna otenemos $n!$ tabloides. Además $C_t = S_{\{1,2,\ldots,n\}} = S_n$, por lo que tenemos

$$\kappa_t = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\sigma,$$

y $e_t$ es la suma de todas las $n!$ permutaciones consideradas como tabloides, es decir:

$$e_t = \kappa\{\boldsymbol{t}\} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\sigma\{\boldsymbol{t}\}$$

Ahora para cualquier permutación $\pi$, el Lema 3.3.1-parte 4, produce

$$e_{\pi t} = \pi e_t = \pi \sum_{\sigma \in S_n} (sgn\, \sigma)\, \sigma\, \{\boldsymbol{t}\} = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn\, \sigma)\, \pi\sigma\, \{\boldsymbol{t}\}.$$

Haciendo $\tau = \pi\sigma$ entonces $\sigma = \pi^{-1}\tau$, sustituyendo se tiene:

$$\begin{aligned}
e_{\pi t} &= \sum_{\tau \in S_n} (sgn\, \pi^{-1}\tau)\tau\{\boldsymbol{t}\} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} (sgn\, \pi^{-1})(sgn\, \tau)\tau\{\boldsymbol{t}\};\ \text{ecuación 3 cap. 2} \\
&= (sgn\, \pi^{-1}) \sum_{\tau \in S_n} (sgn\, \tau)\tau\{\boldsymbol{t}\};\ \text{propiedad de sumatorias} \\
&= (sgn\, \pi)e_t;\ \text{ pues } sgn(\pi) = sgn(\pi^{-1}) \text{ y por la definición de politabloides}
\end{aligned}$$

Por lo que todo politabloide es un múltiplo escalar de $e_t$, donde $t$ está dado por la ecuación (2). Así que

$$S^{(1^n)} = \mathbb{C}\{e_t\} \text{ donde } Dim\ S^{(1^n)} = 1$$

con la acción $\pi e_t = (sgn\, \pi)e_t$, que es la representación de signo.

**Ejemplo 3.3.3.** *Si* $\lambda = (n-1, 1)$, *calcular* $S^{\lambda}$.

Denotemos a los tabloides como:

$$\{t\} = \begin{array}{c} \hline \boldsymbol{k_1} \quad \boldsymbol{k_2} \quad \ldots \quad \boldsymbol{k_{i-1}} \quad \boldsymbol{k_{i+1}} \quad \ldots \quad \boldsymbol{k_n} \\ \hline \boldsymbol{k_i} \\ \hline \end{array} \stackrel{def}{=} \boldsymbol{k}_i.$$

Calculemos primero el politabloide $e_t$:

$$\begin{aligned}
e_t &= \kappa_t \boldsymbol{k_i}; \text{ por definición de politabloide} \\
&= \kappa_{C_1}\kappa_{C_2}...\kappa_{C_n-1}\boldsymbol{k_i}; \text{ factorización de } \kappa_t \\
&= \sum_{\pi \in S_{\{k_1,k_i\}}} sgn(\pi)\pi \cdot (k_2) \cdot ... \cdot (k_{i-1}) \cdot (k_{i+1}) \cdot ... \cdot (k_n)\boldsymbol{k_i}; \text{ por definición de } \kappa_{C_i} \\
&= (e - (k_1, k_i))\boldsymbol{k_i}; \text{ multiplicación de permutasiones} \\
&= \boldsymbol{k_i} - \boldsymbol{k_1}; \text{ multiplicación de permutasiones}
\end{aligned}$$

Este tabloide posee $e_t = \boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_1$, y el largo de tales vectores se puede ver como

$$S^{(n-1,1)} = \{c_1\mathbf{1} + c_2\mathbf{2} + \cdots + c_n\boldsymbol{n} : c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0\}.$$

Así que la $dim\, S^{(n-1,1)} = n - 1$, y podemos elegir una base para este módulo, i.e.,

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{2-1,3-1,...,}\boldsymbol{n}\mathbf{-1}\}$$

Calculando la acción de $\pi \in S_n$ sobre $\mathcal{B}$, vemos que el correspondiente carácter es uno menos que el número de puntos fijos de $\pi$. Por lo que $S^{(n-1,1)}$ es el módulo que se encuentra al final del ejemplo 1.9.5

## 3.4. El Teorema de Submódulo.

Es el momento de demostrar que los $S^\lambda$ constituyen una lista completa de $S_n-$módulos irreducibles no equivalentes. Todos los resultados y las pruebas de esta sección, son válidas sobre un campo arbitrario. El único cambio necesario es sustituir una forma bilineal para el producto interno de la ecuación (3). El hecho de que esto reemplace linealidad por linealidad conjugada en la segunda variable no es un problema, ya que nunca necesitaremos llevar un escalar no real de un lado a otro.

Recordemos que $H^- = \sum_{\pi\in H}(sgn\,\pi)\pi$ para cualquier subconjunto $H \subseteq S_n$. Si $H = \{\pi\}$, entonces escribimos $\pi^-$ para $H^-$. También necesitaremos el producto interno único en $M^\lambda$ para el cual

$$\langle \{\boldsymbol{t}\}, \{\boldsymbol{s}\} \rangle = \delta_{\{t\},\{s\}} \tag{3}$$

**Lema 3.4.1.** *(**Lema del Signo**) Sea $H \leq S_n$ un subgrupo.*

1. *Si $\pi \in H$, entonces*
$$\pi H^- = H^- \pi = (sgn\,\pi) H^-.$$

2. *Para cualquier par $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M^\lambda$,*
$$\langle H^- \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, H^- \boldsymbol{v} \rangle.$$

3. *Si la transposición $(b,c) \in H$, entonces podemos factorar*

$$H^{-} = k(e - (b,c)),$$

*donde $k \in \mathbb{C}[S_n]$.*

4. *Si $t$ es una tabla con $b, c$ en la misma fila de $t$ y $(b,c) \in H$, entonces*

$$H^{-}\{\boldsymbol{t}\} = \mathbf{0}.$$

**Demostración:**

1) Sabemos que $H^{-} = \sum_{\sigma \in H} (sgn\,\sigma)\sigma$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \pi H^{-} &= \pi \sum_{\sigma \in H} (sgn\,\sigma)\sigma;\ \text{por definición de } H^{-} \\ &= \sum_{\sigma \in H} (sgn\,\sigma)\pi\sigma;\ \text{por propiedad de sumatoria} \end{aligned}$$

Luego hacemos la sustitución $\tau = \sigma\pi$, de donde $\sigma = \pi^{-1}\tau$, por lo tanto nuestra ecuación se nos convierte en:

$$\begin{aligned} \pi H^{-} &= \sum_{\tau \in H} (sgn\,\pi^{-1}\tau)\tau;\ \tau = \sigma\pi \\ &= \sum_{\tau \in H} (sgn\,\pi^{-1})(sgn\,\tau)\tau;\ \text{ecuación 3 cap. 2} \\ &= (sgn\,\pi^{-1}) \sum_{\tau \in H} (sgn\,\tau)\tau;\ \text{por propiedad de sumatoria} \\ &= (sgn\,\pi)H^{-};\ sgn(\pi^{-1}) = (sgn\,\pi) \text{ y por propiedad de sumatoria} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\pi H^- = (sgn\,\pi)H^-$. De manera similar obtenemos $H^-\pi = (sgn\,\pi)H^-$, de donde se concluye que $\pi H^- = H^-\pi = (sgn\,\pi)H^-$.

2) Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \in M^\lambda$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle H^-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle &= \langle \sum_{\pi\in H}(sgn\,\pi)\pi\,\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}\rangle;\ \text{por definición de } H^- \\
&= \sum_{\pi\in H}\langle (sgn\,\pi)\pi\,\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}\rangle;\ \text{(2) pág. 28} \\
&= \sum_{\pi\in H}\langle [(sgn\,\pi^{-1})\pi^{-1}](sgn\,\pi)\pi\,\boldsymbol{u}\,,\,[(sgn\,\pi^{-1})\pi^{-1}]\boldsymbol{v}\rangle;\ \langle\,,\,\rangle \text{ es invariante} \\
&= \sum_{\pi\in H}\langle (sgn\,\pi^{-1})(sgn\,\pi)\pi^{-1}\pi\,\boldsymbol{u}\,,\,(sgn\,\pi^{-1})\pi^{-1}\boldsymbol{v}\rangle;\ \text{ley conmtativa} \\
&= \sum_{\pi\in H}\langle (sgn\,\pi)(sgn\,\pi)\pi^{-1}\pi\,\boldsymbol{u}\,,\,(sgn\,\pi)\pi^{-1}\boldsymbol{v}\rangle;\ sgn\,\pi^{-1} = sgn\,\pi \\
&= \sum_{\pi\in H}\langle \boldsymbol{u}\,,\,(sgn\,\pi)\pi^{-1}\boldsymbol{v}\rangle;\ (sgn\,\pi)(sgn\,\pi) = 1 \text{ y } \pi^{-1}\pi = e \\
&= \langle \boldsymbol{u}\,,\,\sum_{\pi\in H}(sgn\,\pi)\pi^{-1}\boldsymbol{v}\rangle;\ \text{(2) pág. 28} \\
&= \langle \boldsymbol{u}\,,\,\sum_{\pi^{-1}\in H}(sgn\,\pi^{-1})\pi^{-1}\boldsymbol{v}\rangle;\ \text{reemplazando } \pi \text{ por } \pi^{-1} \\
&= \langle \boldsymbol{u}, H^-\boldsymbol{v}\rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que $\langle H^-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, H^-\boldsymbol{v}\rangle$.

3) Sea $H \leq S_n$ tal que $(b,c) \in H$. Dado que $H \leq S_n$ tenemos $e \in H$. Consideremos el subgrupo $K$ de $H$, $K = \{e,(b,c)\}$.

Podemos encontrar un conjunto de representantes $\{k_i\} \subseteq H$, de las clases $k_iK$ tal que $H = \biguplus k_iK$. Como $K = \{e,(b,c)\}$ entonces

$H = \biguplus k_iK = \{k_1, k_1(b,c)\} \bigcup ... \bigcup \{k_m, k_m(b,c)\}$

Luego formamos el álgebra de grupo sumas con $H$, así:

$$
\begin{aligned}
H^- &= \sum_{\pi \in H} sgn(\pi)\pi; \text{ definición de álgebra de grupo sumas} \\
&= sgn(k_1)k_1 + sgn(k_1(b,c))(k_1(b,c)) + ... + sgn(k_m)k_m \\
&\quad +sgn(k_m(b,c))(k_m(b,c)); \text{ por definición de } H \\
&= sgn(k_1)k_1 + sgn(k_1)sgn(b,c)(k_1(b,c)) + ... + sgn(k_m)k_m \\
&\quad +sgn(k_m)sgn(b,c)(k_m(b,c)); \; sng \text{ es homomorfismo} \\
&= sgn(k_1)k_1 - sgn(k_1)k_1(b,c) + ... + sgn(k_m)k_m \\
&\quad -sgn(k_m)k_m(b,c); \; sng(b,c) = -1 \\
&= \sum_{i=1} sgn(k_i)k_i(e-(b,c)); \text{factor común} \\
&= k(e-(b,c)); k = \sum k_i^-, \text{ con } k \in \mathbb{C}[S_n].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $H^- = k(e-(b,c))$.

4) Dado que $b, c$ están en el mismo renglón de $t$, tenemos que $(b,c)\{t\} = \{t\}$. Además $(b,c) \in H$, por 3) se tiene que $H^- = k(e-(b,c))$. Luego:

$$
\begin{aligned}
H^-\{t\} &= k(e-(b,c))\{t\}; \text{ por 3)} \\
&= k(\{t\} - \{t\}); \text{ distribución del tabloide} \\
&= k(0); \text{ resta en } \mathbb{C}[S_n] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $H^{-}\{t\} = 0$. ■

El lema del signo tiene un par de corolarios útiles.

**Corolario 3.4.1.** *Sea $t = t^{\lambda}$ una $\lambda - tabla$ y $s = s^{\mu}$ una $\mu - tabla$, donde $\lambda, \mu \vdash n$. Si $\kappa_t\{\boldsymbol{s}\} \neq \mathbf{0}$, entonces $\lambda \trianglerighteq \mu$. Y si $\lambda = \mu$, entonces $\kappa_t\{\boldsymbol{s}\} = \pm e_t$.*

**Demostración:** Sean $b, c$ elementos de un mismo renglón de $s^{\mu}$. Entonces no pueden estar en la misma columna de $t^{\lambda}$, pues si así lo es, $\kappa_t = k(e - (b, c))$ donde $k \in \mathbb{C}S_n$ y $\kappa_t\{s\} = 0$ por los incisos (3) y (4) del lema anterior. Luego por el lema 3.2.1 se tiene $\lambda \trianglerighteq \mu$.

Si $\mu = \lambda$, entonces tenemos $\{s\} = \pi\{t\}$; para algún $\pi \in C_t$, por el mismo argumento que establecimos con el lema de dominación, es decir que podemos permutar en las filas para los tabloides y luego hacer actuar una permutación de $C_t$ para estabilizar columnas y obtener otro tabloide de la misma forma. Usando la parte 1) tenemos:

$$
\begin{aligned}
\kappa_t\{s\} &= \kappa_t\,\pi\,\{t\};\ \{s\} = \pi\{t\} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n}(sgn\,\sigma)\sigma\pi\{t\};\ \text{por definición de } \kappa_t \\
&= \sum sgn\,(\tau\pi^{-1})\tau\{t\};\ \tau = \sigma\pi \\
&= \sum(sgn\,\tau)(sgn\,\pi^{-1})\tau\{t\};\ \text{ecuación 3 cap. 2} \\
&= sgn\,\pi^{-1}(\sum sgn\,\tau\ \tau)\{t\};\ \text{propiedad de sumatoria} \\
&= sgn\ \pi\,\kappa_t\{t\};\ \text{definición de } \kappa \text{ y } sgn\ \pi^{-1} = sng\ \pi \\
&= \pm e_t
\end{aligned}
$$

Así tenemos $\kappa_t\{s\} = \pm e_t$. ■

**Corolario 3.4.2.** *Si $\boldsymbol{u} \in M^{\mu}$ y $sh\,t = \mu$, entonces $\kappa_t\boldsymbol{u}$ es un múltiplo de $e_t$.*

**Demostración:** Sea $\boldsymbol{u} \in M^{\mu}$, entonces $\boldsymbol{u} = \sum c_i\{s_i\}$ donde los $s_i$ son $\mu-$tablas.

$$
\begin{aligned}
\kappa_t\boldsymbol{u} &= \kappa_t\sum c_i\{s_i\};\ \boldsymbol{u} = \sum c_i\{s_i\} \\
&= \sum \kappa_t\,c_i\,\{s_i\};\ \text{propiedad de sumatoria} \\
&= \sum c_i\kappa_t\{s_i\};\ \text{ley conmutativa} \\
&= \sum \pm c_i\,e_t.\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Estamos ahora en posición de demostrar el teorema del submódulo.

**Teorema 3.4.1.** *(**Teorema del Submódulo**) Sea U un submódulo de $M^\mu$. Entonces*

$$U \supseteq S^\mu \ \ o \ \ U \subseteq S^{\mu\perp}.$$

*En particular cuando el campo es $\mathbb{C}$, los $S^\mu$ son irreducibles.*

**Demostración:** Sea $u \in U$ y $t$ una $\mu - tabla$. Por el corolario anterior tenemos, para $e_t \in S^\mu$:

$$\kappa_t\, \boldsymbol{u} = c\ e_t.$$

Se tienen dos casos para $c$.

Caso 1: $c \neq 0$.

$$\begin{aligned} c \neq 0 \ &\Rightarrow \ c\, e_t = \kappa_t\, \boldsymbol{u} \in U; \text{ corolario 3.4.2} \\ &\Rightarrow \ c^{-1} c e_t = c^{-1} \kappa_t\, \boldsymbol{u} \in U; \text{ existencia del inverso en } \mathbb{C} \\ &\Rightarrow \ e_t = c^{-1} \kappa_t\, \boldsymbol{u} \in U; \text{ existencia de la identidad en } \mathbb{C} \\ &\Rightarrow \ e_t \in U; \text{ por definición de igualdad} \\ &\Rightarrow \ S^\mu \subseteq U \end{aligned}$$

Caso 2: $c = 0$.

$$c = 0 \Rightarrow \kappa_t \boldsymbol{u} = c\, e_t = 0\, e_t = 0 \tag{4}$$

Luego, tomando producto interior de $\boldsymbol{u}$ y $e_t$:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}, e_t \rangle &= \langle \boldsymbol{u}, \kappa_t\{t\} \rangle \text{ ; por definición de politabloide} \\
&= \langle \kappa_t \boldsymbol{u}, \{t\} \rangle \text{ ;por lema 3.4.1 parte 2} \\
&= \langle \mathbf{0}, \{t\} \rangle \text{ ; por ecuación 4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Puesto que $e_t$ abarca a $S^\mu$, tenemos que $u \in S^{\mu\perp}$, por lo tanto $U \subseteq S^{\mu\perp}$.

Ahora probamos que los $S^\lambda$ son irreducibles cuando se trabaja sobre los complejos.

Sea $V \subseteq S^\mu \subseteq M^\mu$, por el teorema tenemos que $V \subseteq S^\mu$ o $V \subseteq S^{\mu\perp}$.

Si $V \subseteq S^\mu$, entonces $V = S^\mu$.

Por otro lado si $V \subseteq S^{\mu\perp}$, podemos escribir $M^\mu = S^\mu \oplus S^{\mu\perp}$ ya que hemos definido un producto interior sobre el campo de los complejos y puesto que $S^\mu \bigcap S^{\mu\perp} = 0$, por lo tanto se tiene que $V = 0$.

Así que los $S^\mu$ no tienen submódulos no triviales. Y se concluye que los $S^\lambda$ son irreducibles.■

Ahora trabajaremos sobre el campo de los complejos.

**Proposición 3.4.1.** *Supóngase que el campo de escalares es $\mathbb{C}$ y $\theta \in Hom(S^\lambda, M^\mu)$ no es cero. Por lo que $\lambda \geq \mu$, y si $\lambda = \mu$, entonces $\theta$ es la multiplicación por un escalar.*

**Demostración:** Sea $0 \neq \theta \in \ Hom(S^\lambda, M^\mu)$.

Si $\theta \neq 0$, entonces existe un elemento básico de $S^\lambda$, $e_t$, tal que $\theta(e_t) \neq \mathbf{0}$.

Y que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interior sobre escalares complejos y como todos los $S^\lambda$ son irreducibles sobre el campo $\mathbb{C}$ (según el teorema anterior), podemos formar el módulo $M^\lambda$ como la suma directa de $S^\lambda$ y $S^{\lambda\perp}$ $M^\lambda = S^\lambda \oplus S^{\lambda\perp}$. Así podemos extender $\theta$ a un elemento de $Hom(M^\lambda, M^\mu)$ haciendo $\theta(S^{\lambda\perp}) = \mathbf{0}$, y así:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} \neq \theta(e_t) &= \theta(\kappa_t\{t\});\ \text{definición de politabloide}\\
&= \kappa_t\theta(\{t\});\ \theta \text{ es un } G\text{-homomorfismo}\\
&= \kappa_t\left(\sum_i c_i\{s_i\}\right);\ \text{por definición de } M^\mu \text{ y los } \{s\}_i \text{ son tabloides de forma } \mu.
\end{aligned}
$$

Luego por el corolario 3.4.1 tenemos $\lambda \trianglerighteq \mu$.

Ahora probaremos que si $\lambda = \mu$, entonces $\theta$ es una miltiplicación por escalar. Sea $e_t \in S^\lambda$.

$$
\begin{aligned}
\theta(e_t) &= \theta(\kappa_t\{t\});\ \text{definición de tabloide}\\
&= \kappa_t\theta(\{t\});\ \theta \text{ es } G\text{-homomorfismo}\\
&= \kappa\boldsymbol{u};\quad \theta(\{t\}) = \boldsymbol{u} \in M\mu\\
&= ce_t;\ \text{por el corolario 3.4.2 y } c \in \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

Luego si $\pi \in S_n$, se tiene:

$$\begin{aligned}\theta(e_{\pi t}) &= \theta(\pi e_t);\ \text{por la proposición 4 del lema 3.3.1}\\ &= \pi\theta(e_t);\ \theta \text{ es un } S_n\text{-homomorfismo}\\ &= \pi(ce_t);\ \text{por lo anterior}\\ &= c\pi e_t;\ \text{ley conmutativa}\\ &= ce_{\pi t};\ \text{por la proposición 4 del lema 3.3.1}\end{aligned}$$

Por lo tanto $\theta$ es multiplicación por un escalar.■

Finalmente podemos verificar todas nuestras afirmaciones acerca de los módulos Specht.

**Teorema 3.4.2.** *Los $S^\lambda$ para $\lambda \vdash n$ foman una lista completa de $S_n-$módulos irreducibles sobre el campo complejo.*

**Demostración:**

Los $S^\lambda$ son irreducibles por el teorema del submódulo y el hecho de que $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} = \mathbf{0}$ para el campo $\mathbb{C}$.

Puesto que tenemos el número correcto de módulos para un conjunto completo, basta demostrar que son parejas no equivalentes.

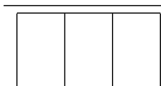
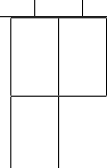
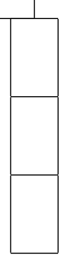
Sean $\lambda$ y $\mu$ particiones de $n$ tales que $S^\lambda \approxeq M^\mu$.

Si $S^\lambda \approxeq M^\mu$ entonces existe $\theta \in Hom\,(S^\lambda,\, M^\mu)$ ya que $S^\mu \subseteq M^\mu$. Así $\lambda \trianglerighteq \mu$ por la proposición 2.4.5., de la misma manera existe $\theta' \in Hom\,(S^\mu,\, M^\lambda)$ ya que $S^\lambda \subseteq M^\lambda$

y por la proposición 2.4.5 se tiene que $\mu \trianglerighteq \lambda$, por lo que de ambos resultados obtenidos se tiene que $\lambda = \mu$. Así concluimos que los $S^{\lambda}$ no son equivalentes por pares.

Por lo tanto, los $S^{\lambda}$ para $\lambda \vdash n$ foman una lista completa de $S_n-$módulos irreducibles sobre el campo complejo. ■

Como para $\lambda \vdash n$, la lista completa de representaciones irreducibles esta dado de acuerdo a su numero de particiones. Así para $n = 3$ sus particiones son $\lambda_1 = (1,1,1)$, $\lambda_2 = (1,2)$ y $\lambda_3 = (3)$ y cada una de las representaciones irreducibles dadas en la tabla de la página 134 corresponde a estas particiones. Por lo tanto, la tabla de caracteres correspondiente a $S_3$ es la siguiente:

| | $e$ | $\{(1,2), (1,3), (2,3)\}$ | $\{(1,2,3), (1,3,2)\}$ |
|---|---|---|---|
|  | 1 | 1 | 1 |
|  | 2 | 0 | $-1$ |
|  | 1 | $-1$ | 1 |

# Bibliografía

[1] Pág. 11. Murray R. Spiegel, John Schiller y R, Alu Srinivasan. *Probabilidad y Estadística*. McGraw-Hill Interamericana Editores S.A de C.V., 2003.

**Libros:**

[2] Fulton, W. "Young Tableaux - with Applications to Representation Theory and Geometry", London Mathematical Society Student Texts 35, Cambridge, 1996.

[3] Sagan, B.E., "The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions", GTM 201, Springer, New York, 2011.

[4] James Kerber. "Representation Theory of Symmetric Groups" G. D. James, "The Representation Theory of the Symmetric Groups", Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1978.

[5] I. N. Herstein "Álgebra Moderna, primera edición" Editorial Trillas S. A., 1970.

[6] John B. Fraleigh “Algebra Abstracta” ADDIOSON WESLEY IBEROAMERICANA, S. A.

[7] I. N. Herstein “Algebra Abstracta, primera edición” Grupo Editorial Iberoamerica S. A. de C. V., 1988.

**Notas:**

[8] Notes of Representation Theory of Symmetric Groups, Charlotte Chan, Hilary Term 2011.