

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA.**



TEMA:

“GRUPOS FUNDAMENTALES DE SUPERFICIES”

INTEGRANTES:

BOLAINEZ HERNÁNDEZ, KATY ESMERALDA

CUBÍAS AVILÉS, LISSETH STEFANY

FUENTES DÍAZ, JIUVER JHOVANY

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA.

DOCENTE DIRECTOR:

LIC. PEDRO FLORES SÁNCHEZ.

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, DICIEMBRE DE 2017

SAN MIGUEL EL SALVADOR CENTROAMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

MTRO. ROGER ARMANDO ARIAS

RECTOR

DR. MANUEL DE JESÚS JOYA

VICERRECTOR ACADÉMICO

ING. NELSON BERNABÉ GRANADOS

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO

LIC. CRISTOBAL HERNÁN RÍOS

SECRETARIO GENERAL

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA

FISCAL

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

ING. JOAQUÍN ORLANDO MACHUCA GÓMEZ

DECANO

LIC. CARLOS ALEXANDER DÍAZ

VICE-DECANO

LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNÁNDEZ

SECRETARIO GENERAL

LIC. JOSÉ ALCIDES MARTÍNEZ HERNÁNDEZ
JEFE DE DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA.

ING. DOLORES BENEDICTO SARAVIA MARTÍNEZ
COORDINADOR DE LA SECCIÓN DE MATEMÁTICA.

MTRO. JORGE PASTOR FUENTES GABRERA
COORDINADOR GENERAL DE PROCESOS DE GRADUACIÓN

MTRO. OSCAR ULISES LIZAMA VIGIL
**COORDINADOR DE TRABAJOS DE GRADO DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
NATURALES Y MATEMÁTICA.**

LIC. PEDRO FLORES SÁNCHEZ
DOCENTE ASESOR

MTRO. GABRIEL ALEXANDER CHICAS REYES
ASESOR ESPECIALISTA

Agradecimientos

Este triunfo es el producto de un esfuerzo intelectual, material y espiritual, por tanto expreso mis más profundos y sinceros agradecimientos a:

*Nuestro **Señor Jesucristo** por darme entendimiento, sabiduría y sobre todo por brindarme fortaleza en cada momento de mi vida para poder vencer las dificultades o retos que se han presentados en el transcurso de mi carrera y el resto de mi vida.*

***A mi madre Catalina de Bolainez** quien con su humildad y fortaleza espiritual me ha servido de motivación y me ha dado su apoyo incondicional, **a mi padre Victor Bolainez** quien con mucho entusiasmo y apoyo en situaciones más difíciles ha sido un pilar de fortaleza a mi vida.*

***Al Programa de Desarrollo de Liderazgo (LDP)** quien me formo como Líder durante el transcurso de mi carrera, brindando su apoyo espiritualmente y materialmente, **a Monica Funes (LDP Specialist)** quien me ha brindado su apoyo incondicional y consejos durante toda mi carrera.*

***A Nancy Dick (Patrocinadora)** quien me brindo su apoyo incondicional y económicamente durante toda mi carrera y hizo posible cumplir mi sueño.*

Katy Esmeralda Bolainez.

Agradezco primeramente a Dios por darme la sabiduría, inteligencia, la salud y las fuerzas cada día para culminar mis objetivos, además de su infinito bondad y amor, por ablandar los corazones de quienes me ayudaron intelectualmente, moralmente y económicamente.

A mi madre, que siempre me ha dado su apoyo moral, sus consejos y cuidados durante toda mi vida.

A mi esposo, quien me dio ánimos cuando me faltaron, su consuelo, sus risas y nunca se negó en ayudarme.

A mis familiares, hermanos, hermana y abuela por estar ahí cuando los necesite y a mis hermanos/as espirituales por sus oraciones.

A la Universidad de El Salvador por los conocimientos académicos y por su Unidad de Estudios Socioeconomicos y al Consejo de Becas Estudiantiles, por su apoyo económico que me brindaron desde que inicie mis estudios superiores hasta esta etapa.

A mis profesoras y profesores desde parvularia hasta nivel superior por sus conocimientos compartidos, especialmente a aquellos que estuvieron ahí cuando los busque. A quienes nos ayudaron con sus aportes y contribuciones académicas durante la elaboración de este Trabajo de Grado.

Lisseth Stefany Cubías.

*Le agradezco a **DIOS** por haberme dado la salud, la sabiduría y la inteligencia para poder culminar este Trabajo de Grado, así también por haberme acompañado y guiado a lo largo de toda mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.*

*Le doy gracias a mis padres **Arnoldo Fuentes** y **Florinda Díaz** por su ayuda incondicional, por apoyarme económicamente en todo momento, por los consejos y valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida.*

***A mis hermanos** por apoyarme en aquellos momentos de necesidad y por la motivación que me brindaban siempre.*

***A la Universidad de El Salvador FMO** por acogerme en sus aulas y brindarme la oportunidad de estudiar en ella.*

***A los maestros** de la sección de Matemática de la Universidad de El Salvador FMO, quienes a través de sus conocimientos contribuyeron con mi formación académica.*

***A mis amigos y compañeros matemáticos** de la Facultad Multidisciplinaria Oriental, con quienes he podido compartir matemáticas y con quienes he experimentado cosas no matemáticas. Gracias por su gran ayuda y apoyo.*

***A mis amigos no matemáticos** por recordarme y mostrarme que hay un mundo afuera de las matemáticas.*

*A mis dos compañeras de Tesis **Katy Esmeralda Bolainez** y **Lisseth Stefany Cubías** por realizar este Trabajo de Grado conmigo y por haber compartido muchas de sus experiencias.*

Jiuver Jhovany Fuentes.

Agradecimientos especiales

*Damos gracias a **Dios** por concluir este trabajo, y deseamos expresar agradecimiento a aquellas personas que brindaron su apoyo con sus aportes y contribuciones académicas durante la elaboración de este Trabajo de Grado.*

*A nuestro Docente Asesor el **Lic Pedro Flores**, por habernos apoyado todo el tiempo que duro nuestro trabajo de graduación, por su tiempo y dedicación, por guiarnos hasta alcanzar este logro.*

*Agradecemos a nuestro Asesor Especialista el **MSc. Gabriel Chicas**, por sus observaciones y consejos claros y prácticos, quien nos dio una visión más clara de nuestro objetivos, por el tiempo que dedico a solventar nuestras dudas durante el desarrollo de nuestra investigación.*

*Agradecemos al **Lic. Willian Noe Merlos Juarez**, al **Lic. Tobías Humberto** y al **Lic. José Fredy Vásquez**, por sus observaciones, tiempo , colaboración y aportes de sus conocimientos.*

*A los jóvenes **Lic. Angel Gonzalez** y **Lic. Rudy Perez**, por brindar su apoyo y ayuda durante el trabajo de Graduación.*

DEDICATORIA

En memoria al MSc. Marcelino Mejia Gonzalez, por su aporte fundamental en el conocimiento de las matemáticas en el Departamento de Ciencias Naturales y Matemática, que descance en paz.

Índice general

INDICE DE FIGURAS	VI
RESUMEN	VIII
INTRODUCCIÓN	x
1. PRELIMINARES	1
1.1. TOPOLOGÍA GENERAL	1
1.1.1. Espacios Topológicos	1
1.1.2. Base, Subbase y Bases locales para una Topología	2
1.1.3. Axiomas de Separación: T_1 y T_2	3
1.1.4. Funciones Continuas	4
1.1.5. Topología de subespacio	5
1.1.6. Topología producto sobre $X \times Y$	5
1.1.7. Espacio Conexo.	5
1.1.8. Espacio Compacto.	6
1.1.9. Topología Cociente.	7
1.1.10. Espacio localmente Euclideo.	9
1.2. VARIEDADES CON BORDES Y SIN BORDES.	11
1.3. UN POCO DE TEORÍA DE GRUPOS.	13
1.3.1. Definición de grupo, homomorfismo e isomorfismo.	13
1.3.2. Sumas Directas de Grupos Abelianos.	17
1.3.3. Productos libres de grupos.	21
1.3.4. Grupos libres	29

2. SUPERFICIES TOPOLÓGICAS.	35
2.1. ESQUEMAS DE UNA REGIÓN POLIGONAL.	35
2.2. SUPERFICIES TOPOLÓGICAS.	40
2.2.1. Definición y construcción de superficie topológica.	40
2.2.2. Suma Conexa de Superficies.	47
2.2.3. Espacios Triangulables.	49
2.2.4. Prueba del Teorema de triangulación para una Superficie Compacta.	51
2.2.4.1. Grafo Planar y El Teorema de la Curva de Jordan.	51
2.2.4.2. Teorema de Jordan-Schönflies.	64
2.2.4.3. Triangulando una Superficie.	68
2.2.5. Teorema de Clasificación de Superficies	71
2.2.5.1. Representación canónica de la suma conexa de n -toros.	71
2.2.5.2. Representación canónica de la suma conexa de m -planos proyectivos.	75
2.2.6. Algunas propiedades invariantes	89
3. CÁLCULO DE LOS GRUPOS FUNDAMENTALES DE SUPERFICIES.	94
3.1. Homotopía de caminos	94
3.2. Grupo Fundamental	119
3.2.1. Retracción y Retracto de deformación fuerte.	134
3.3. Espacios recubridores.	141
3.3.1. Espacios recubridores	141
3.3.2. Levantamientos de Caminos.	150
3.4. Grupos Fundamentales de algunas superficies.	157
3.5. El Teorema de Seifert-Van Kampen	163
3.6. Cálculos.	179
3.6.1. Grupos Fundamentales de Superficies compactas.	179
A. SUPERFICIES TOPOLÓGICAS CON BORDE.	191

ABREVIATURAS

I

REFERENCIAS

III

INDICE DE FIGURAS

2.1. L está orientado de a a b	36
2.2. f es una aplicación lineal positiva de L a L'	37
2.3. Dos polígonos con igual número de vértices y cada par de aristas identificadas por medio de una aplicación lineal.	37
2.4. Orientaciones y etiquetados de las aristas de un cuadrado unitario.	38
2.5. Entorno Euclideo de un punto de una arista	41
2.6. Entorno Euclideo de un punto vértice.	43
2.7. a) Disco con las aristas identificadas y b) el espacio cociente resultante: esfera	44
2.8. a) El plano proyectivo como el espacio cociente del disco D^2 . b) El plano proyectivo como el espacio cociente del cuadrado unitario.	45
2.9. Ilustración de las identificaciones en la región poligonal I^2 para formar el toro.	45
2.10. Ilustración de las identificaciones en la región poligonal I^2 para formar la banda.	46
2.11. Ilustración de las identificaciones en la región poligonal I^2 para formar la botella de Klein.	47
2.12. Suma conexa de superficies.	48
2.13. a) La intersección de T_1 y T_2 no es una arista, b) La intersección de T_3 y T_4 es otro triángulo y c) La intersección de T_5 y T_6 son dos vértices.	49
2.14. a) Triangulación del toro y b) plano proyectivo real.	50
2.15. Triangulación de la esfera.	50

2.16. Ejemplo de un grafo.	52
2.17. Los grafos completos K_1, K_2, K_3 y K_4	53
2.18. Grafos isomorfos	53
2.19. Grafo conexo	54
2.20. Grafo inconexo.	55
2.21. Representación poligonal de dos toros, \mathbb{T}^2_1 y \mathbb{T}^2_2	71
2.22. Los toros \mathbb{T}^2_1 y \mathbb{T}^2_2 con los interiores de los discos removidos y con las fronteras de los discos.	72
2.23. Representación poligonal de $\mathbb{T}^2_1 \# \mathbb{T}^2_2$ de dos Toros.	72
2.24. Representación canónica de $\mathbb{T}^2_1 \# \mathbb{T}^2_2$	73
2.25. Representación poligonal de $\mathbb{T}^2_1 \# \mathbb{T}^2_2 \# \mathbb{T}^2_3$	74
2.26. Representación poligonal de $\mathbb{RP}_1 \# \mathbb{RP}_2$	76
2.27. toro con un agujero y botella de Klein con un agujero	78
2.28. (a) Suma conexa de una banda de Möbius y un toro. (b) Suma conexa de una banda de Möbius y una botella de Klein.	79
2.29. Resultado de cortar los espacios sobre el segmento AB	80
2.30. Banda de Möbius a la que se le ha cocido un disco.	80
2.31. La figura muestra facilmente una visualización del ejemplo.	83
2.32. Trabajar con este diagrama	84
2.33. Eliminación de un par de aristas adyacentes de primer tipo.	85
2.34. Transformación de un poligono a otro con todos sus vértices equivalentes.	86
2.35. transformación de dos aristas de segundo tipo a adyacentes.	87
2.36. En caso que exista una arista de primer tipo.	88
2.37. Diagrama de ilustración. Quinto paso.	88
2.38.	91
3.1. Homotopía entre f y f'	95
3.2. Descripción de una homotopia de caminos.	96
3.3. Homotopía por rectas	102
3.4. La operación producto sobre caminos.	103

3.5. $\bar{f} * (g * f)$ es un lazo basado en y .	120
3.6. Proyección estereográfica	160
3.7. Se define un lazo $L(f) = \alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y)$	166
3.8. Homotopía de caminos en R_i .	170
3.9. Representación del toro.	179
3.10. La unión de los círculos a y b es un retracto de deformación de U	180
3.11. Una circunferencia es un retracto por deformación de $U \cap V$.	181
3.12. Determinación del grupo fundamental de un toro.	182
3.13. Representación del plano proyectivo real.	183
3.14. Determinación del grupo fundamental de un plano proyectivo real.	184
3.15. Determinación del grupo fundamental de un superficie orientable de género n .	185
3.16. Determinación del grupo fundamental de un superficie no orientable de género m	186
A.1. Una esfera con cuatro agujeros.	194
A.2. Superficie orientable de género dos con cuatro agujeros.	195
A.3. Subdivisión baricéntrica de un triángulo.	196
A.4. Triángulos cerca de la componente frontera B_i .	197
A.5. Tipos posibles de superficies con borde con $k = 4$.	198
A.6. Determinación del grupo fundamental de la banda de Möbius.	201

RESUMEN

Este trabajo de grado está enfocado en el área de Topología Algebraica, sobre el cálculo de los *GRUPOS FUNDAMENTALES DE SUPERFICIES*. Antes de tratar los Grupos fundamentales de superficies, se dan unas nociones generales sobre Topología General, se introduce lo que es una variedad con borde y sin borde, así también se estudia un poco la Teoría de Grupos.

El segundo capítulo es dedicado al estudio de Superficies Topológicas, en el que introducimos la noción de Esquemas de una Región Poligonal y Superficies Topológicas donde se aborda el Teorema de Clasificación de Superficies.

En el tercer se ha calculado los grupos fundamentales de superficies; primeramente se estudia algunas propiedades elementales de los grupos fundamentales, seguidamente se enfatiza en los espacios recubridores y por medio de ellos se calcula los grupos fundamentales de algunas superficies; por último se describe el Teorema de Seifert Van-Kampen y se calcula los grupos fundamentales de superficies de forma general utilizando dicho teorema.

INTRODUCCIÓN

La Topología es una rama de la matemática dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalterados por transformaciones continuas. Uno de los principales problemas de la Topología es saber cuándo dos espacios topológicos son o no homeomorfos (de forma semejantes), lo cual en general es muy difícil. No hay un método para resolver este problema en general, pero existen técnicas que se aplican en casos particulares.

Al demostrar que dos espacios son homeomorfos consiste; en construir una aplicación continua de uno en el otro que tenga inversa continua y construir aplicaciones continuas no es un problema de gran dificultad. Ahora bien, para demostrar que dos espacios no son homeomorfos se debe probar que no existe ninguna aplicación continua con inversa continua. y este es un problema más complicado que el anterior.

Se puede en cambio, encontrar propiedades topológicas, es decir, propiedades de un espacio topológico que se conserven bajo homeomorfismos, entre las que se tienen: conexidad, compacidad y los axiomas de numerabilidad y separación, etc.; se puede usar esto para saber que la bola cerrada no es homeomorfa a la bola abierta y que ésta no es homeomorfa a la unión disjunta de dos bolas abiertas.¹

La intención de este trabajo de graduación es introducir al lector a la “Topología Algebraica”, haciendo énfasis al concepto de Grupo Fundamental y Grupos Fundamentales de Superficies. Puesto que en los cursos que hemos realizado de Topología no se han

¹véase el libro de Topología 2^a Edición, James R. Munkres

abordado a profundidad tales conceptos, se partirá de cero para que el lector pueda comprender totalmente lo que es el grupo fundamental de un espacio topológico, introduciendo los conceptos previos necesarios para su comprensión, como: continuidad, compacidad, conexidad, espacio producto, espacio cociente, los axiomas de separación. Así mismo, con el concepto de grupo, subgrupo, subgrupo normal, para poder abordar y comprender los Grupos Fundamentales de Superficies.

Para facilitar la comprensión del texto, se dará a conocer brevemente, sin entrar en detalles, lo que contiene cada capítulo para así tener una idea más esquematizada de lo que se intenta explicar en cada uno de ellos.

El Trabajo de Graduación está separado en tres capítulos:

En el **Capítulo I**, las herramientas que utilizamos para llevar a cabo el cálculo de los grupos fundamentales de Superficies son técnicas básicas de la Topología Algebraica. Para ello en este capítulo se introduce conceptos de la Topología General y un poco de Teoría de Grupos, lo cual a estas alturas se considera conocido.

En el **Capítulo II**, se aborda el desarrollo del Teorema de Clasificación de Superficies, por lo tanto se introduce los conceptos necesarios para entender de mejor manera este Teorema: - Esquema de una región poligonal.

- Superficies Topológicas.

En el **Capítulo III**, Primeramente, se desarrolla la Teoría principal de Topología Algebraica después, se propone abordar en primera fase el cálculo de los grupos fundamentales de Superficies utilizando los espacios recubridores y en una segunda fase, calcular, a través del Teorema de Seifert- Van Kampen, la estructura de los grupos fundamentales de Superficies.

Anexamos un apéndice sobre los grupos fundamentales de superficies con borde para que algunos interesados en el tema continúen con nuevas investigaciones sobre este.

Objetivos de Investigación.

Objetivo General:

Desarrollar la teoría y técnicas básicas para el cálculo de los Grupos Fundamentales de Superficies.

Objetivos Específicos:

- Fundamentar los conceptos y propiedades de la teoría básica de los Grupos Fundamentales.
- Detallar los preliminares básicos para el estudio de los Grupos Fundamentales de Superficies.
- Calcular los Grupos Fundamentales de Superficies utilizando espacios recubridores y el Teorema de Seifer- Van Kampem.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo se pretende recordar algunos conceptos básicos de Topología general y teoría de grupos. Se verán algunas definiciones, propiedades básicas y teoremas de fundamental importancia en el contexto en que se realiza el Trabajo de Grado y que serán utilizados en el desarrollo del mismo.

1.1. TOPOLOGÍA GENERAL

1.1.1. Espacios Topológicos

Definición 1.1.1. Una **topología** sobre un conjunto X es una colección de subconjuntos \mathcal{T} de X que satisface :

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

b) $U_\alpha \in \mathcal{T} \implies \bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}$

c) $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{T} \implies \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$

Se llama **espacio topológico** a un par ordenado (X, \mathcal{T}) , donde \mathcal{T} es una topología en el conjunto X . Se dirá que un subconjunto U de X es un conjunto abierto si U pertenece a la colección \mathcal{T} .

Ejemplo 1.1.1. Sea X un conjunto cualquiera y $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$, donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto potencia de X , esta es una topología sobre X y se le conoce con el nombre de **topología discreta**.

Ejemplo 1.1.2. Sea X un conjunto cualquiera y $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$, esta es una topología sobre X , y se conoce con el nombre de **topología trivial** o **topología indiscreta**

Definición 1.1.2. Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}' dos topologías sobre un mismo espacio X . Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, se dice que \mathcal{T}' es más **fina** que \mathcal{T} o que \mathcal{T} es más **gruesa** que \mathcal{T}' . Si la inclusión es estricta, se dirá que es **estrictamente más fina** o **estrictamente más gruesa** respectivamente. Dos topologías \mathcal{T} y \mathcal{T}' se dirán comparables si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ o $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

Ejemplo 1.1.3. La topología discreta es la topología más fina que puede definirse en un conjunto y la topología trivial es la topología más gruesa que puede definirse en un conjunto dado.

1.1.2. Base, Subbase y Bases locales para una Topología

Definición 1.1.3. Sea X un conjunto, una **base** para una topología sobre X es una colección \mathcal{B} de subconjuntos de X llamados básicos, tales que:

1. Para cada $x \in X$, existe al menos un elemento básico B que contiene a x .

$$\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B.$$

2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2 , entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, es decir,

$$\forall x \in B_1 \cap B_2, \text{ con } B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \exists B_3 \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$$

Ejemplo 1.1.4. Los conjuntos unipuntuales son una base para la topología discreta.

Ejemplo 1.1.5. Sea \mathcal{B} la colección de los intervalos abiertos de la recta real, \mathcal{B} así definida es la base para la denominada **topología usual** en \mathbb{R} .

Definición 1.1.4. Una **subbase** \mathcal{S} para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X . La topología generada por la subbase \mathcal{S} se define como la colección \mathcal{T} de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} .

Definición 1.1.5. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y sea $a \in X$. Una **base local en a** es una colección $\mathcal{B}_a \subset \mathcal{T}$ tal que:

1. Si $B \in \mathcal{B}_a$, entonces $a \in B$
2. Si $U \in \mathcal{T}$ y $a \in U$, entonces existe $B \in \mathcal{B}_a$ tal que $B \subset U$.

Definición 1.1.6. Un conjunto X , se dice que es **contable** si es finito, o si es numerable¹.

Axiomas de Numerabilidad.

Definición 1.1.7. Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , se dice que es **1-contable o 1AN** o que satisface el **primer axioma de numerabilidad** si existe una base local contable en cada punto de X .

Definición 1.1.8. Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) se dice que es **2-contable o 2AN** o que satisface el **segundo axioma de numerabilidad** si existe una base contable para \mathcal{T} .

1.1.3. Axiomas de Separación: T_1 y T_2 .

Definición 1.1.9. Se dice que un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es un **espacio T_1** si para cada par de puntos $x, y \in X$, existen entornos U, V de x e y respectivamente tales que $x \notin V$ e $y \notin U$ ².

Definición 1.1.10. Un espacio topológico X se denomina **espacio de Hausdorff** o **espacio T_2** si para cada par de puntos distintos x, y de X , existen entornos disjuntos U y V de x y y respectivamente³.

¹Un conjunto es numerable si existe una aplicación biyectiva entre el conjunto X y \mathbb{Z}^+ .

²se le atribuye a Fréchet

³fue introducido por Hausdorff en 1914.

1.1.4. Funciones Continuas

Definición 1.1.11. Sean (X, \mathcal{T}_x) e (Y, \mathcal{T}_y) dos espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice que es continua si, para cada abierto $V \in \mathcal{T}_y$, se tiene que $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_x$.

Definición 1.1.12. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación se dice que es una **aplicación abierta** si para cada conjunto abierto U de X , el conjunto $f(U)$ es abierto en Y . Se dice que es una **aplicación cerrada** si para cada conjunto cerrado A de X , el conjunto $f(A)$ es cerrado en Y .

Teorema 1.1.1. (Lema del pegamiento) Sea $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados en X . Sean $f : A \rightarrow Y$ y $g : B \rightarrow Y$ continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, entonces la función $h : X \rightarrow Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases} \text{ es continua.}$$

Definición 1.1.13. Sean X y Y dos espacios topológicos, sea $f : X \rightarrow Y$ una biyección. Si la función f y la función

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

son ambas continuas, entonces se dice que f es un **homeomorfismo**⁴.

Otro modo de definir un homeomorfismo, es decir que es una correspondencia biyectiva $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(U)$ es abierto si y sólo si, U es abierto. Se denota por \approx .

Definición 1.1.14. Una **propiedad topológica** es una propiedad que si la posee un espacio topológico X , entonces la posee cualquier imagen homeomorfa de X .

⁴ homeomorfismo (homeo= semejante, morfo = forma), como una biyección entre dos espacios topológicos que conserva la estructura topológica.

1.1.5. Topología de subespacio

Definición 1.1.15. Sea X un espacio topológico con una topología \mathcal{T} . Si A es un subconjunto de X , la colección

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$$

es una topología sobre A , denominada **topología de subespacio** o **topología relativa**. Con esta topología, A se denomina **subespacio** de X ; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con A .

Ejemplo 1.1.6. Si \mathcal{T} es la topología discreta sobre un conjunto X y $A \subset X$, entonces \mathcal{T}_A es la topología discreta sobre A .

Ejemplo 1.1.7. Si \mathcal{T} es la topología trivial sobre un conjunto X y $A \subset X$, entonces \mathcal{T}_A es la topología trivial.

Teorema 1.1.2. *Un subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.*

1.1.6. Topología producto sobre $X \times Y$.

Definición 1.1.16. Sean (X, \mathcal{T}_X) y (Y, \mathcal{T}_Y) espacios topológicos. La *topología producto* sobre $X \times Y$ es aquella que tiene como base la colección $\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$.

1.1.7. Espacio Conexo.

Definición 1.1.17. Un espacio topológico es **conexo** si no puede ser expresado como la unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos.

Ejemplo 1.1.8. Sea \mathcal{T} la topología usual en \mathbb{R} , entonces $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es conexo.

Teorema 1.1.3. *La imagen continua de un espacio conexo es conexa.*

1.1.8. Espacio Compacto.

Definición 1.1.18. Una colección \mathcal{A} de subconjuntos del espacio X se dice que cubre X , o que es un **cubrimiento** de X , si la unión de los elementos de \mathcal{A} coincide con X .

$$X \subset \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$$

Se dice que \mathcal{A} es un **cubierta abierta** de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X .

Además, dada cualquier cubierta \mathcal{A} , una **subcubierta** de \mathcal{A} es un subconjunto de \mathcal{A} que es también una cubierta.

Lema 1.1.1. Si X es un espacio 2-contable, cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta contable.

Definición 1.1.19. Un espacio X se dice que es **compacto** si de cada cubierta abierta de \mathcal{A} podemos extraer una subcolección finita que también cubre a X .

Ejemplo 1.1.9. La recta real \mathbb{R} no es compacta, pues la cubierta de \mathbb{R} por intervalos abiertos

$$\mathcal{A} = \{(n, n + 2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

no contiene ninguna subcubierta finita que cubra a \mathbb{R} .

Teorema 1.1.4. Cualquier subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.

Demostración. Sea $A \subset X$ donde X es compacto y A es cerrado. Sea U una cubierta abierta de A .

$U' = U \cup \{X \setminus A\}$, es una cubierta de X , luego $\exists U_1, U_2, \dots, U_n \in U'$ tal que

$$A \subset X \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$$

Si $U_k = X \setminus A$, entonces $U_1, \dots, U_{k-1}, U_{k+1}, \dots, U_n$ cubre a A y están en U . □

Teorema 1.1.5. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio de Hausdorff, sea A un subconjunto compacto de X y sea $p \in X \setminus A$. Entonces existen conjunto abiertos U y V tales que $A \subset U$ y $p \in V$.

Corolario 1.1.1. *Cualquier subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.*

Demostración. Sea $A \subset X$ compacto y X un espacio de Hausdorff.

Sea $p \in X \setminus A$, por el Teorema 1.1.5, existen abiertos U, V disjuntos tales que $A \subset U$ y $p \in V$, $V \subset X \setminus A$, por tanto $X \setminus A$ es abierto. Así A es cerrado. \square

Corolario 1.1.2. *Sea (X, \mathcal{T}) un espacio Hausdorff compacto. Un subconjunto A de X es compacto si y solo si es cerrado.*

Teorema 1.1.6. *La imagen continua de un espacio compacto es compacta.*

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ donde X es compacto y sea $\mathcal{U} = \{U_n\}, n \in J$ es una cubierta abierta para $f(X)$. Como U_n son abiertos en $f(X)$ y como f es continua, entonces $f^{-1}(U_n)$ es abierto en X .

Sea $\mathcal{A} = \{f^{-1}(U_n) : n \in J\}$ es una cubierta abierta para X . Como X es compacto, entonces \mathcal{A} admite una subcubierta finita.

$$\mathcal{V} = \{f^{-1}(U_{n_k}) : k = 1, \dots, m\}$$

y de manera que $f(f^{-1}(U_{n_k})) = U_{n_k}$, entonces $\mathcal{B} = \{f(f^{-1}(U_{n_k})) : k = 1, \dots, m\}$ es una subcubierta finita para $f(X)$. \square

Teorema 1.1.7. *Todo intervalo cerrado y acotado en \mathbb{R} es compacto.*

Teorema 1.1.8. *Sean X un espacio compacto y Y un espacio T_2 y sea f una función biyectiva continua de X a Y , entonces f es un homeomorfismo.*

Lema 1.1.2. *(Lema del número de Lebesgue) Sea \mathcal{A} un cubrimiento abierto del espacio métrico (X, d) . Si X es compacto, existe $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto X con diámetro menor que δ , existe un elemento de \mathcal{A} conteniéndolo.*

1.1.9. Topología Cociente.

Definición 1.1.20. Sean X e Y espacios topológicos y sea $p : X \rightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p se dice que es una **aplicación cociente** siempre que un subconjunto U de Y es abierto en Y si y solo si, $p^{-1}(U)$ es abierto en X .

La aplicación cociente es también llamada **una identificación**. Esta condición es más fuerte que la de continuidad; en ocasiones se le llama “continuidad fuerte”.

Dos clases especiales de aplicaciones cociente son las *aplicaciones abiertas* y las *aplicaciones cerradas*. Sin embargo, si una aplicación es cociente no implica que sea una aplicación abierta o cerrada.

Definición 1.1.21. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, sea Y un conjunto y sea $p : X \rightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva, entonces $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{P}(Y) : p^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$ es una topología sobre Y y es llamada la **topología cociente sobre Y inducida por p** . El espacio (Y, \mathcal{U}) es llamado un **espacio cociente**.

Específicamente, si \sim es una relación de equivalencia sobre un espacio topológico X . Para cada $q \in X$, sea $[q]$ denota la clase de equivalencia de q , y sea X/\sim denota el conjunto de clases de equivalencia: Esta es una partición de X , la cual es una descomposición de X entre una colección de conjuntos disjuntos cuya unión es X . Sea $p : X \rightarrow X/\sim$ una proyección natural llevando cada elemento de X a su clase de equivalencia. Entonces X/\sim junto con la topología cociente determinada por p es llamado el *espacio cociente o espacio de identificación* de X por la relación de equivalencia.

Definición 1.1.22. Si $p : X \rightarrow Y$ es una aplicación cociente, un subconjunto A de X se dice que es **saturado** (con respecto a p) si $A = p^{-1}(B)$ para algún subconjunto $B \subset Y$ (si es igual a la imagen inversa completa de un subconjunto de Y).

Si Y es un espacio cociente determinado por una relación de equivalencia, los conjuntos saturados son aquellos que son uniones de clases de equivalencia. Mas generalmente, para cualquier espacio cociente $p : X \rightarrow Y$, un subconjunto $p^{-1}(y) \subset X$ para $y \in Y$ es llamado una *fibra* de p ; un conjunto saturado es uno que es una unión de fibras. Aunque las aplicación cocientes no siempre llevan conjuntos abiertos a conjuntos abiertos, existe una forma alternativa de caracterización de aplicaciones cocientes en terminos de conjuntos abiertos saturados.

Lema 1.1.3. *Una aplicación continua sobreyectiva $p : X \rightarrow Y$ es una aplicación cociente si y solo si toma conjuntos abiertos saturados a conjuntos abiertos.*

Este Lema se satisface también a conjuntos cerrados y saturados a la vez, a conjuntos cerrados.

Lema 1.1.4. *Suponga que $p : X \rightarrow Y$ es una aplicación cociente. La restricción de p a cualquier conjunto saturado abierto o cerrado es una aplicación cociente.*

Ejemplo 1.1.10. Sea X_1, \dots, X_k espacios topológicos, y sea $q_i \in X_i$. La cuña de X_1, \dots, X_k (también llamado su punto unión), se escribe $X_1 \vee \dots \vee X_k$, es el espacio cociente obtenido de $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_k$ por identificar $q_1 \sim \dots \sim q_k$. En otras palabras, se pegan los espacios juntos identificando todos sus puntos distinguidos juntos. Así la cuña $\mathbb{R} \vee \mathbb{R}$ es homeomorfa a la unión del eje X y el eje Y en el plano.

1.1.10. Espacio localmente Euclideo.

Definición 1.1.23. Sea X un espacio topológico. Un espacio topológico X se dice que es **localmente Euclideo de dimensión n** si para todo punto $q \in X$ tiene un entorno que es homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Tal entorno es llamado un **entorno Euclideo** de q .

Para algunos efectos, es útil ser más específicos acerca del tipo de subconjuntos abiertos para caracterizar los espacios localmente Euclideos. El siguiente lema establece que se podría reemplazar “subconjuntos abiertos” por bolas abiertas o por el mismo \mathbb{R}^n .

Los detalles de la prueba de los siguientes Lemas se encuentran en [3] Jhon Lee, “Introduction to topological manifolds”.

Lema 1.1.5. *Un espacio topológico X es localmente Euclideo de dimensión n si y solo si sostiene cualquiera de las siguiente propiedades:*

- a) *Cada punto de X tiene un entorno homeomorfo a una bola abierta en \mathbb{R}^n .*
- b) *Cada punto de X tiene un entorno homeomorfo a \mathbb{R}^n .*

El siguiente lema establece un resultado muy interesante cuando un espacio es localmente Euclideo bajo una aplicación cociente de un espacio 2-contable.

Lema 1.1.6. *Sean X un espacio 2-contable y $\pi : X \rightarrow S$ una aplicación cociente. Si S es localmente Euclideo entonces es 2-contable.*

1.2. VARIETADES CON BORDES Y SIN BORDES.

En esta sección se define una variedad topológica, la cual forma parte de una clase muy importante de espacios topológicos (aquellos que localmente son como los espacios euclídeos) necesarios en Topología Algebraica. Así también de manera similar se define una variedad topológica con borde.

Se establece como tercera condición de variedad que: “cada punto tiene un entorno que es homeomorfo a un disco abierto”, esto significa que el espacio es localmente a \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.2.1. 1. El espacio euclídeo \mathbb{R}^n es una variedad topológica de dimensión n .

2. Todo abierto no vacío de \mathbb{R}^n es una variedad topológica de dimensión n .

3. La esfera $S^n = \{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una variedad de dimensión n .

Todo abierto no vacío de una variedad topológica es una variedad topológica de la misma dimensión.

El concepto de variedad con borde es una ligera generalización del concepto de variedad y se define como sigue:

Definición 1.2.1. Una **variedad topológica n -dimensional con borde** o **n -variedad con borde** es un espacio Hausdorff 2-contable X tal que si $x \in X$ entonces:

1. x tiene un entorno que es homeomorfo a un disco abierto B^n , o
2. x tiene un entorno que es homeomorfo al espacio

$$B_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 \text{ y } x_n \geq 0\}$$

Si $x \in X$ y x tiene un entorno que es homeomorfo a B^n , entonces x es llamado un **punto interior** de X y el conjunto de todos los puntos interiores de X es llamado el **interior** de X .

Si $x \in X$ y x tiene un entorno que es homeomorfo a B_+^n , entonces x es llamado un **punto**

frontera de X y el conjunto de todos los puntos fronteras de X es llamado la **frontera** de X .

Si X es una n -variedad con frontera, se denota la frontera de X como $\partial(X)$.

Ejemplo 1.2.2. Variedades n -dimensionales con borde.

1. El disco cerrado o bola $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ es una variedad n -dimensional con borde. La esfera S^{n-1} es el borde, y el disco abierto B^n es el interior.
2. El medio-espacio $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$, es una variedad n -dimensional con borde.

1.3. UN POCO DE TEORÍA DE GRUPOS.

En esta sección se mencionan algunas definiciones y teoremas básicos sobre la teoría de grupos de manera superficial, todo esto es solo para que el lector se familiarice con dichos conceptos (para mayores detalles ver Abstract Algebra, Herstein [6]), lo cual sera de vital importancia en el análisis y comprensión de la Sección 3.5: Teorema de Seifert-Van Kampen.

1.3.1. Definición de grupo, homomorfismo e isomorfismo.

Definición 1.3.1. Se dice que un conjunto no vacío G es un **grupo** si en él hay definida una operación $*$ tal que :

1. $a, b \in G$ implica que $a * b \in G$.
(Esto se describe diciendo que G es **cerrado** respecto a $*$)
2. Dados $a, b, c \in G$, se tiene que $a * (b * c) = (a * b) * c$.
(Esto se describe diciendo que es válida la *ley asociativa* en G .)
3. Existe un elemento especial $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in G$ (e se llama *elemento identidad o unidad de G* .)
4. Para todo $a \in G$ existe un elemento $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$. (Este elemento b se escribe como a^{-1} y se llama *inverso de a en G* .)

Un grupo G junto con la operación $*$, se representa como $(G, *)$. A la operación $*$ en G se le suele llamar *producto*, pero recuérdese que no tiene nada que ver con el producto tal como se conoce en los enteros, racionales, reales o complejos.

Ejemplo 1.3.1. Sea $G = \mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y la operación $*$ la adición ordinaria, $+$, en \mathbb{Z} , entonces $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo.

Si el grupo está formado solamente por el elemento neutro entonces se le llamara **grupo trivial**, es decir, si G es un grupo talque $G = \{e\}$, entonces G es un grupo trivial.

Además, si en el conjunto $(G, *)$, no se cumplen algunos de los axiomas de grupo, entonces $(G, *)$ recibe el nombre de **magma** o **grupoide**.

Definición 1.3.2. Se dice que un grupo G es un grupo *finito* si consta de un número finito de elementos. El número de elementos de G se llama *orden* de G y se denota por $|G|$.

Definición 1.3.3. Se dice que un grupo G es **abeliano** si $a * b = b * a$ para todo $a, b \in G$.

Definición 1.3.4. Un subconjunto no vacío H de un grupo G se llama *subgrupo* de G , si H mismo forma un grupo relativo al producto de G .

Dicho de otra manera, un $A \subseteq G$ es un subgrupo de G si y solo si es cerrado con respecto a la operación de G y que dado $a \in A$ existe el elemento $a^{-1} \in A$.

Definición 1.3.5. Se dice que un grupo G es **cíclico** si existe un $a \in G$ tal que cada $x \in G$ es una potencia de a , es decir, $x = a^j$ para algún j . En otras palabras G es cíclico si $G = \langle a \rangle$ para algún $a \in G$, en cuyo caso se dice que a es un generador para G .

Ejemplo 1.3.2. Un grupo cíclico infinito es $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$.

Definición 1.3.6. Sean G, G' dos grupos; entonces una aplicación $\varphi : G \rightarrow G'$ es un **homomorfismo** si $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para todo $a, b \in G$.

En esta definición el producto ubicado en lado izquierdo en $\varphi(ab)$ es el de G , mientras que el producto de $\varphi(a)\varphi(b)$ es el de G' . Una descripción breve de un homomorfismo es que *preserva* la operación de G . No se requiere que φ sea subyectivo; si lo es, se dirá.

Definición 1.3.7. El homomorfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ se llama **monomorfismo** si φ es inyectiva. Un homomorfismo que es sobreyectivo se denomina **epimorfismo**. Los homomorfismo que son monomorfismos y epimorfismos a la vez se denominan **isomorfismos**.

Además se dirá que dos grupos G, G' son isomorfos si existe un isomorfismo de G sobre G' y se denotará $G \cong G'$. Existe una relación homomorfa entre las unidades de los grupos G, G' , que se plantea en el siguiente lema:

Lema 1.3.1. Si φ es un homomorfismo de G en G' , entonces :

1. $\varphi(e) = e'$, el elemento unidad de G' .
2. $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$, para todo $a \in G$

La imagen de φ , que es $\varphi(G)$, se define como $\varphi(G) = \{\varphi(a) : a \in G\}$.

Lema 1.3.2. Si φ es un homomorfismo de G en G' , entonces la imagen de φ es un subgrupo de G' .

Si la imagen de un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ es $\{e'\}$, entonces el homomorfismo se llamará **homomorfismo trivial**. Pero si la inclusión y siempre que $G \subset G'$, $\varphi(x) = x$, $\forall x \in G$, entonces el homomorfismo φ se llamará **homomorfismo identidad** y se denotará por i . Se escogió ciertos homomorfismos que fueron llamados monomorfismos. Su propiedad es que son inyectivos. Hace falta saber qué tan distante se encuentra un homomorfismo dado de ser monomorfismo. Esto conlleva la siguiente:

Definición 1.3.8. Si φ es un homomorfismo de G en G' , entonces el kernel o núcleo de φ , $Ker(\varphi)$, se define por $Ker(\varphi) = \{a \in G : \varphi(a) = e'\}$

El siguiente teorema se demuestra usando el Lema 1.3.1.

Teorema 1.3.1. Si φ es un homomorfismo de G en G' , entonces:

- (a) $Ker(\varphi)$ es un subgrupo de G .
- (b) Dado $a \in G$, $a'(Ker(\varphi))a \subset Ker(\varphi)$.

Corolario 1.3.1. Si φ es un homomorfismo de G sobre G' , entonces φ es un monomorfismo si y sólo si $Ker(\varphi) = \{e\}$.

Definición 1.3.9. Si x y y son elementos de un grupo G , se dice que y es el **conjugado** de x si $y = cxc^{-1}$ para algún $c \in G$.

Definición 1.3.10. Un subgrupo N de G se dice que es un **subgrupo normal** de G si $a^{-1}Na \subset N$ para cada $a \in G$.

Dicho de otra manera, un **subgrupo normal de** G es aquél que contiene a todos los conjugados de sus elementos. Si A es un subconjunto de G , se puede considerar la intersección N de todos los subgrupos normales de G que contienen a A . N es también un subgrupo normal de G , y se denomina **menor subgrupo normal de** G que contiene a A .

Definición 1.3.11. Sea N un subgrupo normal de G y

$$\frac{G}{N} = \{[a] : a \in G\} = \{Na : a \in G\}$$

se denomina grupo cociente se lee “ G sobre N o G módulo N ” con la operación $[a][b] = [ab]$.

1.3.2. Sumas Directas de Grupos Abelianos.

En esta subsección se dará una breve introducción de suma directa (externa e interna). El principal propósito es definir grupos abelianos libres, es decir, grupos abelianos bajo la operación suma, de modo que 0 representa el elemento neutro del grupo, $-x$ denota el inverso de x y nx representa la suma de n copias de x .

Definición 1.3.12. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una colección de grupos abelianos. Sea G el subgrupo del producto cartesiano consistente en los elementos $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ tales que $x_\alpha = 0_\alpha$, es el elemento neutro de G_α , para todos los índices α excepto para una cantidad finita, junto con la operación suma componente por componente. Se dice que G es la **suma directa externa** de los grupos G_α y se escribe⁵

$$G = \bigoplus G_\alpha = \left\{ (x_\alpha) \in \prod G_\alpha : x_\alpha = 0 \text{ excepto un número finito de } \alpha \right\}.$$

Se puede probar fácilmente que G así definido es un grupo abeliano. Para mayores detalles revise Topología, James R. Munkres [1].

Observación 1.3.1. • $\bigoplus_{\alpha \in J} G_\alpha$ es un subconjunto de $\prod_{\alpha \in K} G_\alpha$.

• $\bigoplus_{i \in J} G_\alpha \cong \prod_{i \in K} G_\alpha$, si el conjunto de índices es finito.

Ejemplo 1.3.3. $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ es la suma directa externa de copias infinitas de \mathbb{Z} . Es un ejemplo claro que la suma directa es distinta del producto directo

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z} \subset \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$$

Dado que el elemento que consta de tomar sólo el elemento identidad en las infinitas copias de \mathbb{Z} , $(1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \notin \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$.

Un ejemplo en el caso que el conjunto de índice es finito, como $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = (1, 0)\mathbb{R} + (0, 1)\mathbb{R}$;

Si $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (1, 0)x + (0, 1)y \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Satisface la siguiente propiedad universal:

⁵ $\bigoplus G_\alpha$ denota el producto cartesiano de G_α

Lema 1.3.3. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de grupos abelianos, G un grupo abeliano y sea $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ una familia de homomorfismos. Si cada i_α es un monomorfismo y G es la suma directa externa de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$, entonces G satisface la siguiente condición de extensión:

(*) Dado cualquier grupo abeliano H y cualquier familia de homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, existe un homomorfismo $h : G \rightarrow H$ tal que $h \circ i_\alpha = h_\alpha$ para todo α .

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & G = \bigoplus_\alpha G_\alpha \\ & \searrow h_\alpha & \downarrow h \\ & & H \end{array}$$

Además, h es única. Recíprocamente, suponga que los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$ generan G y se satisface la condición de extensión (*). Entonces cada i_α es un monomorfismo y G es la suma directa de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$.

Una consecuencia inmediata es el teorema de unicidad para las sumas directas externa:

Teorema 1.3.2. (Unicidad de sumas directas externa). Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de grupos abelianos. Suponga que G y G' son grupos abelianos y sean $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ e $i'_\alpha : G_\alpha \rightarrow G'$ familias de monomorfismos tales que G es la suma directa de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$ y G' es la suma directa de los grupos $i'_\alpha(G_\alpha)$. Entonces existe un único isomorfismo $\phi : G \rightarrow G'$ tal que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ para todo α .

Demostración. Como G es la suma directa externa de los grupos G_α e $\{i'_\alpha\}$ es una familia de homomorfismos, entonces por el lema 1.3.3 existe un único homomorfismo $\phi : G \rightarrow G'$ tal que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ para todo α . De manera análoga, como G' es la suma directa externa de los grupos G_α e $\{i_\alpha\}$ es una familia de homomorfismos, entonces existe un único homomorfismo $\psi : G' \rightarrow G$ tal que $\psi \circ i'_\alpha = i_\alpha$ para cada α . Entonces $\psi \circ \phi : G \rightarrow G$ satisface que $\psi \circ \phi \circ i_\alpha = i_\alpha$ para cada α ; como el elemento neutro de G tiene la misma propiedad, por el lema 1.3.3 está es única y nos permite asegurar que $\psi \circ \phi$ debe coincidir con el elemento neutro de G . De manera similar, $\phi \circ \psi$ debe coincidir con el elemento neutro de G' . □

Si G es la suma directa externa de los grupos G_α , relativa a los monomorfismos i_α , en muchas ocasiones se usará la notación $G = \bigoplus G_\alpha$ para indicarla, incluso aunque los grupos G_α no sean subgrupos de G . Esto es, se identifica a cada grupo G_α con su imagen bajo i_α , y se tratará a G como una suma directa ordinaria en lugar de considerarlo como una suma directa externa.

Sea G es un grupo abeliano y sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de subgrupos de G . Se dirá que los grupos G_α **generan** G si cada elemento $x \in G$ puede escribirse como una suma finita de elementos de los grupos G_α .

Se define ahora la suma directa interna.

Definición 1.3.13. Supongase que los grupos G_α generan G y que para cada $x \in G$ sólo existe una J -upla, $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$, con $x_\alpha = 0$ siempre, excepto para una cantidad finita de índices α , tal que $x = \sum x_\alpha$ es única. Se dice que G es la **suma directa interna** de los grupos G_α y se escribe

$$G = \sum_{\alpha} G_\alpha$$

o bien, en el caso finito, $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$.

Ejemplo 1.3.4. $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ es la suma directa interna de los subgrupos $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ y $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, es decir, $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$

El siguiente lema proporciona la *propiedad universal* para la suma directa interna.

Lema 1.3.4. *Sea G un grupo abeliano y $\{G_\alpha\}$ una familia de subgrupos de G . Si G es la suma directa de los grupos G_α entonces G satisface la siguiente condición:*

(*) *Dado cualquier grupo abeliano H y cualquier familia de homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, existe un homomorfismo $h : G \rightarrow H$ cuya restricción a G_α coincide con h_α para cada α .*

Además, h es única. Recíprocamente, si los grupos G_α generan G y la condición de extensión () se satisface, entonces G es la suma directa de los grupos G_α .*

De este lema se deducen distintos resultados acerca de sumas directas, los cuales se mencionan a continuación:

Corolario 1.3.2. Sea $G = G_1 \oplus G_2$. Suponga que G_1 y G_2 es la suma directa de los subgrupos H_α , $\alpha \in J$ y H_β , $\beta \in K$ respectivamente, donde los conjuntos de índices J y K son disjuntos. Entonces G es la suma directa de los subgrupos H_γ para $\gamma \in J \cup K$.

Demostración. Sean $h_\alpha : H_\alpha \rightarrow H$ y $h_\beta : H_\beta \rightarrow H$ familias de homomorfismos.

Si $h_\alpha : H_\alpha \rightarrow H$ y $h_\beta : H_\beta \rightarrow H$ son familias de homomorfismos, entonces por el Lema 1.3.4, se extienden a homomorfismos $h_1 : G_1 \rightarrow H$ y $h_2 : G_2 \rightarrow H$ respectivamente. Así, h_1 y h_2 se extienden a un homomorfismo $h : G \rightarrow H$. \square

Este corolario implica, por ejemplo que $(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3 = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3)$.

Corolario 1.3.3. Si $G = G_1 \oplus G_2$, entonces G/G_2 es isomorfo a G_1 .

Observación 1.3.2. La suma directa interna (cuando está definida) y externa son isomorfas.

Ahora se centra el estudio en grupos abelianos libres.

Grupos abelianos libres.

Definición 1.3.14. Sea G un grupo abeliano y sea $\{a_\alpha\}$ una familia indexada de elementos de G ; sea G_α el subgrupo abeliano cíclico infinito de G generado por a_α . Si G_α generan G se dirá que los *elementos* a_α generan G . Si G es la suma directa de los grupos G_α , entonces se dice que G es un **grupo abeliano libre** con **base** $\{a_\alpha\}$.

Dicho de otra manera o como una definición simplificada: Un **grupo abeliano libre** con **base** $\{a_\alpha\}$ es todo aquel que es la suma directa de copias de \mathbb{Z} .

Ejemplo 1.3.5. \mathbb{Z}^2 es un grupo abeliano libre.

Las propiedades universales en la suma directa implica la siguiente propiedad universal para grupos abelianos libres.

Lema 1.3.5. Sean G un grupo abeliano y $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de elementos de G que generan G . Entonces G es un grupo abeliano libre con base $\{a_\alpha\}$ si, y sólo si, para cada grupo abeliano H y cualquier familia $\{y_\alpha\}$ de elementos de H existe un homomorfismo h de G en H tal que $h(a_\alpha) = y_\alpha$ para todo α . En este caso, h es única.

1.3.3. Productos libres de grupos.

En esta subsección se considerarán grupos G que no tienen que ser necesariamente abelianos. En este caso, se escribirá G de forma multiplicativa. Se denotará el elemento neutro de G por 1 , y el inverso del elemento x será representado por x^{-1} . El símbolo x^n denotará el producto de n copias de x , x^{-n} el producto de n copias de x^{-1} y x^0 el elemento neutro.

Se estudiará un concepto que desempeña un papel, en el caso de grupos arbitrarios, similar al que juega la suma directa para los grupos abelianos. Se denomina **producto libre de grupos**.

Sea G un grupo. Si $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una familia de subgrupos de G , se dirá que estos grupos **generan** G si todo elemento de G puede escribirse como un producto finito de elementos de los grupos G_α . Esto significa que existe una sucesión finita (x_1, x_2, \dots, x_n) de elementos de los grupos G_α tal que $x = x_1 \cdots x_n$. Dicha sucesión se denomina *palabra*; se dice que *representa* al elemento x de G . El número n es la *longitud* de la palabra x . Se llamará *sílaba* a cada palabra con $n = 2$.

Ejemplo 1.3.6. Algunos ejemplos de palabras pueden ser (x, x, x, x) , (e_2, e_{10}) y (x, x^{-1}) . Si $x, y \in G_\alpha$ con $x \neq y$, entonces, (x, y) e (y, x) no son sílabas iguales.

Considere una colección no vacía de grupos $\{(G_\alpha, *_\alpha) : \alpha \in J\}$. Se define una *palabra reducida* (en estos grupos) de *longitud* $n > 0$ a una sucesión finita (x_1, x_2, \dots, x_n) , donde cada x_i tiene las siguientes dos propiedades:

- i) ningún x_i es el neutro del grupo a cual pertenece; y
- ii) dos terminos consecutivos no pertenecen al mismo grupo.

Se denotará por 1 la palabra de longitud 0 (usualmente llamada la palabra vacía).

Sea G la colección de tales palabras. Ahora se procederá a construir una operación \cdot binaria sobre este conjunto.

$$1 \cdot 1 := 1$$

$$1 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) := (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot 1 := (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Ahora suponga que se tiene dos palabras de longitudes positivas, digase (x_1, x_2, \dots, x_n) y (y_1, y_2, \dots, y_m) . Se quiere definir

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_m).$$

Caso 1: Si x_n y y_1 no pertenecen al mismo grupo, entonces se define

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_m) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

Caso 2: Si x_n y y_1 pertenecen al mismo grupo G_α , pero $x_n *_\alpha y_1 \neq I_{G_\alpha}$, entonces se define

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_m) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n *_\alpha y_1, y_2, \dots, y_m)$$

Caso 3: Si x_n y y_1 pertenecen al mismo grupo G_α , pero $x_n *_\alpha y_1 = I_{G_\alpha}$, entonces se exige, siguiendo la definición anterior,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_m) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot (y_2, y_3, \dots, y_m)$$

Ejemplo 1.3.7. Suponga que se tienen dos grupos G_1 y G_2 . Sean $x_1, y_1 \in G_1 - \{e_1\}$ y $x_2, y_2 \in G_2 - \{e_2\}$. Entonces la palabra (x_1, e_1, x_2, y_2) no es reducida, mientras que (x_1, y_2) y (x_2, y_1) sí. La palabra $(x_1, (x_2 \cdot y_2))$ será reducida si y sólo si $x_2 \cdot y_2 \neq e_2$.

La operación binaria que se ha definido recibe también el nombre de *yuxtaposición*. Observe que la operación binaria es asociativa, 1 es neutro y cada palabra reducida (x_1, x_2, \dots, x_n) tiene como inversa (respecto a esta operación) a la palabra reducida $(x_n^{-1}, \dots, x_2^{-1}, x_1^{-1})$.

Observación 1.3.3. Desde ahora en adelante se identificará cada palabra reducida (x_1, x_2, \dots, x_n) de longitud $n > 0$, con $x_1 x_2 \cdots x_n$ (es decir, no se hará uso del símbolo " , " ni de los paréntesis). Así (x_1, x_2, \dots, x_n) y $x_1 x_2 \cdots x_n$ se refieren a la misma palabra reducida.

Ejemplo 1.3.8. Suponga que se tienen dos grupos G_1 y G_2 . Sean $x_1, y_1 \in G_1 - \{e_1\}$ y $x_2, y_2 \in G_2 - \{e_2\}$ tal que $w_1 = (x_1x_2x_1^{-1})$ y $w_2 = x_1x_2^{-1}$, entonces $w_1 \cdot w_2 = x_1$ mientras que $w_2 \cdot w_1 = x_1x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-1}$. Así $w_1 \cdot w_2 \neq w_2 \cdot w_1$.

Definición 1.3.15. El grupo obtenido de esta manera es llamado el **producto libre** de los grupos $\{(G_\alpha, *_\alpha) : \alpha \in J\}$.

Observación 1.3.4. Cuando se tiene un número finito de grupos G_1, G_2, \dots, G_n , entonces su producto libre se denota por $G_1 * G_2 * \dots * G_n$.

El producto libre arbitrario es denotado por $*_{\alpha \in J} G_\alpha$.

Ejemplo 1.3.9. Considere $G_1 = \{I_1, x\}$ (es decir, un grupo de orden 2, luego $x^2 = I_1$) y $G_2 = \{I_2, y, y^2\}$ (es decir, un grupo de orden 3, luego $y^3 = I_2$). Entonces una lista de algunas de las palabras reducidas de $G_1 * G_2$ son las siguientes:

Longitud 0 : 1

Longitud 1 : $x, y, y^2 = y^{-1}$

Longitud 2 : xy, xy^2, yx, y^2x

Teorema 1.3.3. (Propiedad universal del producto libre externo.) Dada una familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de grupos, existe un grupo G y una familia de monomorfismos $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ tal que G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$.

Los detalles de la demostración se encuentran en el libro de Topología segunda edición. James R. Munkres.

Definición 1.3.16. Sea G un grupo, sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subgrupos de G que generan G . Suponga que $G_\alpha \cap G_\beta$ está formado sólo por el elemento neutro cuando $\alpha \neq \beta$. Se dirá que G es el **producto libre interno** de los grupos G_α si para cada $x \in G$ existe una única palabra reducida en los grupos G_α que representa a x . En este caso se escribirá

$$G = *_{\alpha \in J} G_\alpha$$

o, en el caso finito, $G = G_1 * G_2 * \dots * G_n$.

El producto libre verifica una **propiedad universal** dada en el siguiente lema, através del cual puede observarse la analogía con la suma directa de grupos abelianos.

Lema 1.3.6. *Sea G un grupo y $\{G_\alpha\}$ una familia de subgrupos de G . Si G es el producto libre de los grupos G_α , entonces G satisface la siguiente condición:*

(*) *Dado cualquier grupo H y cualquier familia de homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, existe un homomorfismo $h : G \rightarrow H$ cuya restricción a G_α coincide con h_α para cada α .*

Además, h es único.

Demostración. Primero se probará la unicidad de h . Dado $x \in G$, con $x \neq 1$, sea (x_1, x_2, \dots, x_n) la palabra reducida que lo representa. Si h existe, entonces satisface la ecuación

$$h(x) = h(x_1) \cdots h(x_n) = h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$$

donde α_i , es el índice tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$.

Suponga que existe un h' diferente a h que satisface las mismas condiciones, es decir que, dado $x \in G$, con $x \neq 1$ y sea (x_1, x_2, \dots, x_n) la palabra reducida que lo representa, h' satisface la ecuación

$$h'(x) = h'(x_1) \cdots h'(x_n) = h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n).$$

Como

$$h(x) = h(x_1) \cdots h(x_n) = h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$$

y

$$h'(x) = h'(x_1) \cdots h'(x_n) = h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$$

por lo tanto $h(x) = h'(x)$ y así h es única.

Se probará ahora la existencia de h .

Sea h definida por la ecuación $h(x) = h(x_1) \cdots h(x_n) = h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$ si $x \neq 1$ y se asigna $h(1) = 1$. Como la representación de x por una palabra reducida es única, como se probó en la parte anterior, h está bien definida. Se debe probar que h es un homomorfismo. Primero se probará un resultado preliminar. Dada una palabra

$w = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de longitud positiva en los elementos de los grupos G_{α} , se define $\phi(w)$ como el elemento de H dado por la ecuación

$$\phi(w) = h_{\alpha_1}(x_1)h_{\alpha_2}(x_2) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$$

donde α_i es el índice tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$. Pero α_i es único excepto si $x_i = 1$; por tanto, ϕ está bien definida. Si w es la palabra vacía, se hace $\phi(w)$ igual al elemento neutro de H . Se probará que si w' es una palabra obtenida de w aplicando una de las operaciones de reducción, entonces $\phi(w') = \phi(w)$.

Suponga primero que w' se obtiene eliminando el factor $x_i = 1$ de la palabra w y que cumple las mismas condiciones. Entonces $\phi(w) = h_{\alpha_1}(x_1)h_{\alpha_2}(x_2) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$ y $\phi(w') = h_{\alpha_1}(x_1)h_{\alpha_2}(x_2) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$ de manera que $\phi(w') = \phi(w)$. En segundo lugar, suponga que $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, y que

$$w' = (x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Entonces $\phi(w') = h_{\alpha_1}(x_1)h_{\alpha_2}(x_2) \cdots h_{\alpha_i}(x_i)h_{\alpha_{i+1}}(x_{i+1}) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$.

Como $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, entonces

$$h_{\alpha_i}(x_i)h_{\alpha_{i+1}}(x_{i+1}) = h_{\alpha_i}(x_i)h_{\alpha_i}(x_{i+1}) = h_{\alpha_i}(x_i x_{i+1})$$

Donde $\alpha = \alpha_i = \alpha_{i+1}$. De manera que

$$\begin{aligned} \phi(w') &= h_{\alpha_1}(x_1)h_{\alpha_2}(x_2) \cdots h_{\alpha_i}(x_i)h_{\alpha_{i+1}}(x_{i+1}) \cdots h_{\alpha_n}(x_n) \\ &= h_{\alpha_1}(x_1)h_{\alpha_2}(x_2) \cdots h_{\alpha_i}(x_i x_{i+1}) \cdots h_{\alpha_n}(x_n) \\ &= h_{\alpha}(x_1) \cdots h_{\alpha}(x_i x_{i+1}) \cdots h_{\alpha}(x_n) \\ &= h_{\alpha}(x_1 \cdots x_i x_{i+1} \cdots x_n) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi(w') = h(w')$.

Con un procedimiento similar se obtiene $\phi(w) = h(w)$ y se concluye que $\phi(w') = \phi(w)$.

Suponga ahora que h es un homomorfismo y que $w = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $w' = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ son palabras que representan a x e y , respectivamente.

Sea (w, w') la palabra $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ que representa a xy .

Entonces

$$\phi(w, w') = h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)h_{\alpha_1}(y_1) \cdots h_{\alpha_m}(y_m) = h(xy).$$

Además

$$\phi(w)\phi(w') = h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)h_{\alpha_1}(y_1) \cdots h_{\alpha_m}(x_m) = h(x)h(y).$$

De ahí que $\phi(w, w') = \phi(w)\phi(w')$ y por lo tanto $h(xy) = h(x)h(y)$. \square

Lema 1.3.7. Sean $\{G_\alpha\}$ una familia de grupos, G un grupo e $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ una familia de homomorfismos. Si cada i_α es un monomorfismo y G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$, entonces G satisface la siguiente condición:

(*) Dado cualquier grupo H y cualquier familia de homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, existe un homomorfismo $h : G \rightarrow H$ tal que $h \circ i_\alpha = h_\alpha$ para todo α .

Además, h es único.

Teorema 1.3.4. (Unicidad de productos libres). Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de grupos. Suponga que G y G' son grupos e $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ e $i'_\alpha : G_\alpha \rightarrow G'$ son familias de monomorfismos tales que las familias $\{i_\alpha(G_\alpha)\}$ e $\{i'_\alpha(G_\alpha)\}$ generan G y G' , respectivamente. Si tanto G como G' satisfacen la propiedad de extensión enunciada en el Lema 1.3.7, entonces existe un único isomorfismo $\phi : G \rightarrow G'$ tal que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ para todo α .

La demostración es muy similar a la correspondiente demostración para sumas directas.

Lema 1.3.8. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de grupos, G un grupo e $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ una familia de homomorfismos. Si se satisface la condición de extensión del Lema 1.3.7, entonces cada i_α es un monomorfismo y G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$.

Demostración. Se probará en primer lugar que cada i_α es un monomorfismo. Dado un índice β escribase $H = G_\beta$. Sea $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ la identidad si $\alpha = \beta$, y el homomorfismo trivial en caso contrario. Sea $h : G \rightarrow H$ el homomorfismo dado por la condición de extensión. Entonces $h \circ i_\beta = h_\beta$, de modo que i_β es inyectivo; es decir, es un homomorfismo.

Por el Teorema 1.3.3, existe un grupo G' y una familia $i'_\alpha : G_\alpha \rightarrow G'$ de monomorfismos tal que G' es el producto libre de los grupos $i'_\alpha(G_\alpha)$. Ambos grupos G y G' tienen

la propiedad universal del Lema 1.3.7. El Teorema 1.3.4 implica entonces que existe un isomorfismo $\phi : G \longrightarrow G'$ tal que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$. Se sigue entonces que G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$. \square

Corolario 1.3.4. *Sea $G = G_1 * G_2$, donde G_1 es el producto libre de los subgrupos $\{H_\alpha\}_{\alpha \in J}$ y G_2 es el producto libre de los subgrupos $\{H_\beta\}_{\beta \in K}$. Si los conjuntos de índices J y K son disjuntos, entonces G es el producto libre de los subgrupos $\{H_\gamma\}_{\gamma \in J \cup K}$.*

La demostración es similar al Corolario 1.3.2.

Este resultado implica en particular que

$$G_1 * G_2 * G_3 = G_1 * (G_2 * G_3) = (G_1 * G_2) * G_3.$$

Teorema 1.3.5. *Sea $G = G_1 * G_2$ y N_i un subgrupo normal de G_i , para $i = 1, 2$. Si N es el menor subgrupo normal de G que contiene a N_1 y N_2 entonces*

$$G/N \cong (G_1/N_1) * (G_2/N_2)$$

.

Demostración. La composición de los homomorfismos inclusión y proyección

$$G_1 \longrightarrow G_1 * G_2 \longrightarrow (G_1 * G_2)/N$$

aplica N_1 en el elemento neutro, de modo que induce un homomorfismo

$$i_1 : G_1/N_1 \longrightarrow (G_1 * G_2)/N.$$

De manera análoga la composición de los homomorfismos inclusión y proyección induce un homomorfismo

$$i_2 : G_2/N_2 \longrightarrow (G_1 * G_2)/N.$$

Se probará que la condición de extensión del Lema 1.3.8 se satisface con respecto a i_1 e i_2 ; se deduce entonces que i_1 e i_2 son monomorfismos y que $(G_1 * G_2)/N$ es el producto libre extenso de G_1/N_1 y G_2/N_2 relativo a estos monomorfismos. Por tanto, sean $h_1 : G_1/N_1 \longrightarrow H$ y $h_2 : G_2/N_2 \longrightarrow H$ homomorfismos arbitrarios. La condición

de extensión para $G_1 * G_2$ implica que existe un homomorfismo de $G_1 * G_2$ en H que coincide con la composición

$$G_i : G_i/N_i \longrightarrow H$$

de la aplicación proyección y h_i sobre G_i , para $i = 1, 2$. Este homomorfismo aplica los elementos de N_1 y N_2 en el elemento neutro, de modo que su núcleo contiene a N . Por tanto induce un homomorfismo $h : (G_1 * G_2)/N \longrightarrow H$ que satisface las condiciones $h_1 = h \circ i_1$ y $h_2 = h \circ i_2$. \square

Corolario 1.3.5. *Si N es el menor subgrupo normal de $G_1 * G_2$ que contiene a G_1 , entonces $(G_1 * G_2)/N \cong G_2$.*

La noción de “menor subgrupo normal” es un concepto que aparecerá frecuentemente. Es claro que, si N es el menor subgrupo normal de G que contiene al subconjunto A de G , entonces N contiene a A y todos los conjugados de los elementos de A . En el siguiente lema se establece que estos elementos *generan* de hecho el subgrupo N .

Lema 1.3.9. *Sea $A \subset G$. Si N es el menor subgrupo normal de G que contiene a A , entonces N está generado por todos los conjugados de los elementos de A .*

Los detalles de la demostración se encuentran en el libro de Topología segunda edición. James R. Munkres.

1.3.4. Grupos libres

En esta subsección se utilizará el producto libre de grupos para establecer una nueva clase de grupos que se denominan “grupos libres”, que consiste en todos los productos posibles de un conjunto de “generadores”. Se comienza con algunas definiciones.

Sea G un grupo y $\{a_\alpha\}$ una familia de elementos de G , con $\alpha \in J$. Se dice que los elementos $\{a_\alpha\}$ **generan** G si todo elemento de G puede escribirse como un producto de potencias de los elementos a_α . Si la familia $\{a_\alpha\}$ es finita, se dirá que G está **finitamente generado**.

Definición 1.3.17. Sea $\{a_\alpha\}$ una familia de elementos de un grupo G . Suponga que cada a_α genera un subgrupo cíclico infinito G_α de G . Si G es el producto libre de los grupos $\{G_\alpha\}$ entonces se dice que G es un **grupo libre**, y la familia $\{a_\alpha\}$ se dice que es un **sistema de generadores libres** para G .

En este caso, para cada elemento x de G , existe una única palabra reducida en los elementos de los grupos G_α que representa x . Esto significa que si $x \neq 1$ entonces x puede escribirse de la forma única como

$$x = (a_{\alpha_1})^{n_1} (a_{\alpha_2})^{n_2} \dots (a_{\alpha_k})^{n_k}$$

donde $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ y $n_i \neq 0$ para todo i (n_i puede ser negativo).

Ejemplo 1.3.10. Un grupo cíclico es un grupo libre generado por un solo elemento.

Los grupos libres están caracterizados por la siguiente propiedad universal (para los detalles de la prueba revise Topología, James Munkres [1]):

Lema 1.3.10. Sea G un grupo y $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de elementos de G . Si G es un grupo libre con sistema de generadores libres $\{a_\alpha\}$, entonces G satisface la siguiente condición:

- i) Dado cualquier grupo H y cualquier familia $\{y_\alpha\}$ de elementos de H , existe un homomorfismo $h : G \rightarrow H$ tal que $h(a_\alpha) = y_\alpha$ para todo α .

además, h es único. Recíprocamente, si la condición de extensión i) se satisface, entonces G es un grupo libre con sistema de generadores libres $\{a_\alpha\}$.

Del Corolario 1.3.4 de la Subsección anterior se desprende el teorema siguiente:

Teorema 1.3.6. Sea $G = G_1 * G_2$, donde G_1 y G_2 son grupos libres con $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ y $\{a_\alpha\}_{\alpha \in K}$ como sistemas de generadores libres, respectivamente. Si J y K son disjuntos entonces G es un grupo libre con sistemas de generadores libres $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J \cup K}$.

Definición 1.3.18. Sea $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia arbitraria indexada. Sea $G_\alpha = \{a_\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$.⁶ Se convierte G_α en grupo con la operación

$$a_\alpha^n \cdot a_\alpha^m = a_\alpha^{n+m}$$

Entonces a_α^0 es el elemento neutro de G_α y a_α^{-n} es el inverso de a_α^n . Se denota a_α^1 simplemente por a_α . El producto libre externo de los grupos $\{G_\alpha\}$ se denomina **grupo libre generado por los elementos a_α** .

Definición 1.3.19. Sea $A = \{a\}$ un conjunto con un único elemento. Se considera el conjunto $\langle a \rangle$ formado por todas las potencias de a con exponente cero, esto es:

$$\langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Se operan dos elementos de $\langle a \rangle$ sumando exponentes. El neutro se obtiene para $k = 0$ y el inverso de a^k es a^{-k} . El grupo resultante se llama **grupo libre de rango uno** generado por a . Así que $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$ mediante el isomorfismo $a^k \mapsto k$.

Definición 1.3.20. Sea $\{G_i\}_{i=1}^n$ una familia finita disjunta, donde $G_i = \langle a_i \rangle$ para cada $i = 1, \dots, n$. El producto libre $*_{i=1}^n G_i$ se denota $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ y se llama **grupo libre de rango n** generado por $\{a_1, \dots, a_n\}$. A veces se escribe $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \cong \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.3.11. ¿Cómo son los elementos de un grupo libre $G = \langle a, b \rangle$? Deben ser palabras reducidas cuyas letras están en el grupo libre generado por $\langle a \rangle$ o $\langle b \rangle$, es decir, cada letra es una potencia de a o b con exponente no nulo. Algunos ejemplos son $a^5 b^{-7} a^{-3}$, ab , ba o $b^3 a^{-2} b$.

Ejemplo 1.3.12. ¿Cómo son los elementos de $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$? Deben ser palabras reducidas cuyas letras están en algún $\langle a_i \rangle$. Por tanto :

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \{a_{i_1}^{k_{i_1}} a_{i_2}^{k_{i_2}} \dots a_{i_m}^{k_{i_m}} : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i_l \in \{1, \dots, n\}, k_{i_l} \in \mathbb{Z} - \{0\}, \forall l = 1, \dots, m\}$$

⁶el conjunto de todos los símbolos de la forma a_α^n con $n \in \mathbb{Z}$.

donde además cada par de índices consecutivos son distintos.

Observación 1.3.5. No es verdad que $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \cong \mathbb{Z}^n$ si $n \geq 2$. De hecho, el primer grupo no es abeliano mientras que \mathbb{Z}^n sí lo es. Si G es un grupo libre por los elementos a_α , se hará un abuso de la notación al identificar los elementos del grupo G_α con sus imágenes bajo el monomorfismo $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ que aparece en la construcción del producto libre externo. Entonces cada a_α se trata como un elemento de G y la familia $\{a_\alpha\}$ forma un sistema de generadores libres de G .

Seguidamente se verá la conexión que existe entre los grupos libres y los grupos libres abelianos; pero antes se debe recordar la noción algebraica de subgrupo conmutador.

Definición 1.3.21. Sea G un grupo. Si $x, y \in G$, se denotará por $[x, y]$ el elemento

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

de G que se denomina **conmutador** de x e y . El subgrupo de G generado por el conjunto de todos los conmutadores en G , es decir generado por todos los elementos de la forma $xyx^{-1}y^{-1}$ para $x, y \in G$, denomina **subgrupo conmutador** de G y se representa por $[G, G]$.

Ejemplo 1.3.13. $[x, y] = 1$ si y solo si x, y conmutan.

Ejemplo 1.3.14. G es abeliano si y solo si $[G, G] = 1$.

Definición 1.3.22. Sea G un grupo, el grupo cociente $G/[G, G]$ recibe el nombre de **abelianización de G** y se denotado por G^{ab} .

Ahora se dará el siguiente Teorema:

Teorema 1.3.7. Dado G , el subgrupo $[G, G]$ es un subgrupo normal de G y el grupo cociente $G/[G, G]$ es abeliano.

Demostración. Paso 1: Primero se probará que cualquier conjugado de un conmutador está en $[G, G]$.

Sea $g \in G$ y $[x, y]$ un elemento de $[G, G]$, entonces

$$g[x, y]g^{-1} = g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1}; \quad \text{por def. 1,3,21}$$

$$= (gxyx^{-1})(y^{-1}g^{-1}); \quad \text{por propiedad Asociativa}$$

Como $y^{-1}y = 1$, entonces $y^{-1}yg = g$; agregando g^{-1} en ambos lados de la igualdad se obtiene : $g^{-1}y^{-1}yg = g^{-1}g = 1$, por lo tanto $g^{-1}y^{-1} = (yg)^{-1}$.

$$(gxyx^{-1}) = (gxyx^{-1})(1)(y^{-1}g^{-1})$$

pero $g^{-1}y^{-1}yg = 1$, entonces

$$\begin{aligned} (gxyx^{-1})(1)(y^{-1}g^{-1}) &= (gxyx^{-1})(g^{-1}y^{-1}yg)(y^{-1}g^{-1}) \\ &= (gxyx^{-1}g^{-1}y^{-1})(ygy^{-1}g^{-1}) \\ &= ((gx)y(x^{-1}g^{-1})y^{-1})(ygy^{-1}g^{-1}) \\ &= ((gx)y(gx)^{-1}y^{-1})(ygy^{-1}g^{-1}) \\ &= [gx, y] \cdot [y, g] \end{aligned}$$

Así cualquier conjugado de un conmutador está en $[G, G]$.

Paso 2: Se probará que $[G, G]$ es un subgrupo normal de G .

Sea z un elemento arbitrario de $[G, G]$, se probará que cualquier conjugado gzg^{-1} de z está también en $[G, G]$. El elemento z es un producto de conmutadores y de sus inversos.

Como

$$\begin{aligned} [x, y]^{-1} &= (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} \\ &= (x^{-1}y^{-1})^{-1}(xy)^{-1} \\ &= (yx)(y^{-1}x^{-1}) \\ &= (yxy^{-1}x^{-1}) \\ &= [y, x] \end{aligned}$$

z es en realidad el producto de conmutadores. Sea $z = z_1 \dots z_n$, donde cada z_i es un conmutador. Entonces

$$gzg^{-1} = (gz_1g^{-1})(gz_2g^{-1}) \dots (gz_ng^{-1})$$

es un producto de elementos de $[G, G]$ por el paso 1 y, por tanto, pertenece a $[G, G]$.

Paso 3: Se probará que $G/[G, G]$ es un grupo abeliano. Si $G' = [G, G]$ se probará que

$$(aG')(bG') = (bG')(aG')$$

Sea $[a, b]$ un elemento de $[G, G]$.

Como $[a, b] \in [G, G]$, entonces $[a^{-1}, b^{-1}] \in [G, G]$.

Además, $[a^{-1}, b^{-1}] = a^{-1}b^{-1}ab$ de manera que $a^{-1}b^{-1}ab$ esta en G' . Así $(a^{-1}b^{-1}ab)G' = G'$.

$$\begin{aligned} (a^{-1}b^{-1}ab)G' = G' &\implies abG' = baG' \\ \implies (aG')(bG') &= (bG')(aG') \end{aligned}$$

que es un elemento de G' . Así $G/[G, G]$ es abeliano. \square

Teorema 1.3.8. *Sea G un grupo. Si $h : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de G en un grupo abeliano H , entonces el núcleo de h contiene a $[G, G]$, de modo que h induce un homomorfismo único $k : G/[G, G] \rightarrow H$.*

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G^{ab} \\ \downarrow h & \searrow k & \\ H & & \end{array}$$

Demostración. Se probará que el núcleo de h contiene a $[G, G]$.

Por hipótesis H es abeliano y el núcleo de h aplica cada conmutador en el elemento neutro de H .

Sea $[a, b]$ un elemento de $[G, G]$.

$$\begin{aligned} h([a, b]) &= h(aba^{-1}b^{-1}) \\ &= h(a)h(b)h(a^{-1})h(b^{-1}) \\ &= h(a)h(a^{-1})h(b)h(b^{-1}) \\ &= h(aa^{-1})h(bb^{-1}) \end{aligned}$$

$$= h(1)h(1)$$

$$= h(1)$$

Con $h(1)$ como la identidad en H , la cual se denotará 1_H , es decir $h(1) = 1_H$.

Así $[a, b]$ pertenece al núcleo de h . Por tanto, el núcleo de h contiene a $[G, G]$, de modo que h induce un único homomorfismo k .

□

Teorema 1.3.9. *Si G es un grupo libre con generadores libres a_α , entonces $G/[G, G]$ es un grupo abeliano libre con base $[a_\alpha]$, donde $[a_\alpha]$ denota la clase de a_α en $G/[G, G]$.*

Demostración. Sea G un grupo libre con generadores libres a_α .

Sea $\{y_\alpha\}$ una familia cualquiera de elementos que generan un grupo abeliano H .

Como H es abeliano, entonces por el Lema 1.3.5 existe un homomorfismo $h : G \rightarrow H$ tal que $h(a_\alpha) = y_\alpha$ para cada α . Además,

como $h : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de G en un grupo abeliano H , entonces por el Teorema 1.3.8 el núcleo de h contiene a $[G, G]$, de modo que h induce un homomorfismo $k : G/[G, G] \rightarrow H$ que aplica $[a_\alpha]$ en y_α .

Así $G/[G, G]$ es un grupo abeliano libre con base $[a_\alpha]$, donde $[a_\alpha]$ denota la clase de a_α en $G/[G, G]$.

□

Capítulo 2

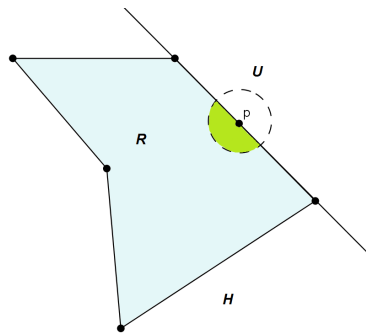
SUPERFICIES TOPOLÓGICAS.

2.1. ESQUEMAS DE UNA REGIÓN POLIGONAL.

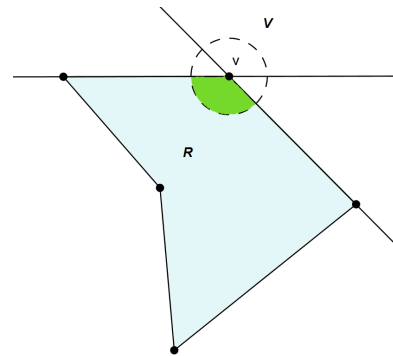
En esta sección se desarrolla un método llamado "*esquema*" necesario a lo largo de este trabajo de grado para llegar a que toda superficie puede ser expresada como un espacio cociente de alguna región poligonal de \mathbb{R}^2 , que servirá de base para entender de mejor manera el famoso Teorema de Clasificación de Superficies. Para este propósito, se dan las siguientes definiciones:

Definición 2.1.1. Una **región poligonal** R en \mathbb{R}^2 es un conjunto compacto, cuya frontera topológica es unión de una familia finita de aristas(segmentos cerrados), con puntos finales denominados vértices, tales que:

- a) $\forall p$ (que no sea vértice) en una arista, existe un entorno $U \in \mathbb{R}^2$, tal que $R \cap U = U \cap H$, donde $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c \geq 0\}$ es algún semi-plano cerrado;
- b) cada vértice v posee un entorno $V \in \mathbb{R}^2$, tal que $R \cap V = V \cap \hat{H}$, donde \hat{H} son dos semiplanos cerrados cuyas fronteras se cortan en v .



(a) Ilustración del literal a), un punto p en una arista.



(b) Ilustración del literal b), un vértice v .

Definición 2.1.2. Sea $L \in \mathbb{R}^2$ un segmento, una **orientación** de L es una ordenación de sus extremos, al primer punto a se llama **punto inicial** y el segundo b se llama **punto final** del segmento orientado. Se dirá que L está orientado de a a b , puede indicarse dibujando una flecha sobre el segmento apuntando de a a b .

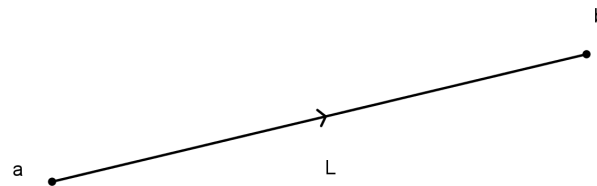


Figura 2.1: L está orientado de a a b .

Definición 2.1.3. Sea L y L' dos segmentos, donde L está orientado de a a b y L' de c a d y sea f una aplicación, se llama la **aplicación lineal positiva** de L a L' si es el homeomorfismo que lleva el punto $x = (1 - s)a + sb$ de L al punto $f(x) = (1 - s)c + sd$ de L' , con $s \in [0, 1]$.

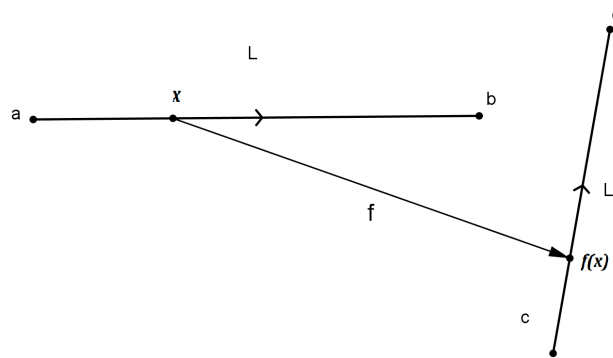


Figura 2.2: f es una aplicación lineal positiva de L a L' .

Si P y Q son dos polígonos con igual número de vértices, $v_{p_0}, v_{p_1}, \dots, v_{p_n}$ y $v_{q_0}, v_{q_1}, \dots, v_{q_n}$, respectivamente, con $v_{p_0} = v_{p_n}$ y $v_{q_0} = v_{q_n}$, entonces existe un homeomorfismo¹ $f : \partial(P) \rightarrow \partial(Q)$ que aplica el segmento $L = v_{p_{i-1}}v_{p_i}$ en el segmento $L' = v_{q_{i-1}}v_{q_i}$ por medio de una aplicación lineal positiva.² Si $p \in \text{Int}(P)$ y $q \in \text{Int}(Q)$ son puntos fijos, entonces f se puede extender a un homeomorfismo entre P y Q haciendo que el segmento de p a $x \in \partial(P)$, se aplique linealmente en el segmento de q a $f(x) \in \partial(Q)$ (Figura 2.3).

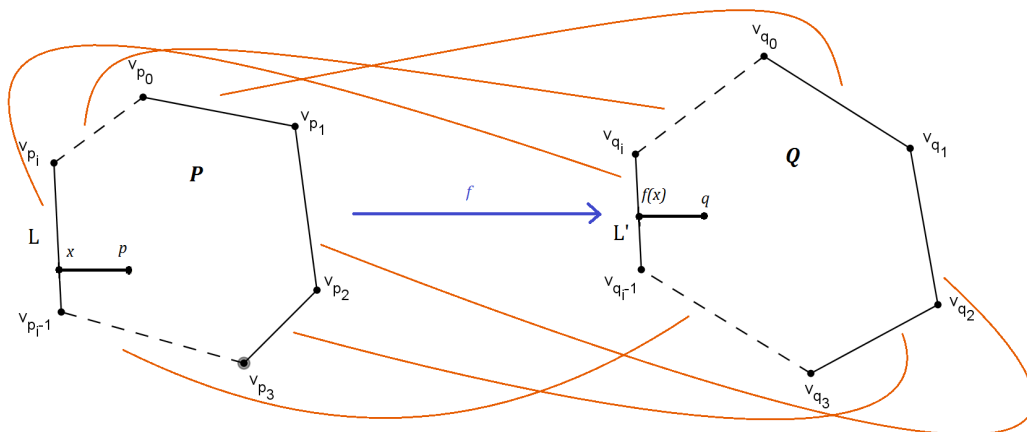


Figura 2.3: Dos polígonos con igual número de vértices y cada par de aristas identificadas por medio de una aplicación lineal.

¹El símbolo ∂ denota la frontera

² $\text{Int}(P)$ es el conjunto de los puntos interiores del polígono P .

Definición 2.1.4. Sea P un polígono, D el conjunto de las aristas de P y O el conjunto de etiquetas. Un **etiquetado** de las aristas de P es una aplicación $E : D \rightarrow O$

En otras palabras, lo que hace E es etiquetar cada una de las aristas del polígono, puede ser que dos o más aristas tengan la misma etiqueta.

Ejemplo 2.1.1. Las orientaciones y etiquetados de las aristas de un cuadrado unitario $I^2 = [0, 1]^2$ se muestran en la siguiente figura:

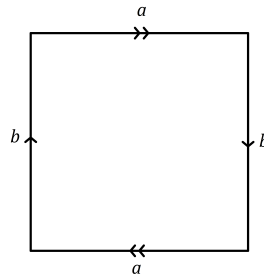


Figura 2.4: Orientaciones y etiquetados de las aristas de un cuadrado unitario.

Ahora, se define una relación de equivalencia entre los puntos de P :

Definición 2.1.5. Sea P un polígono. Dada una orientación de cada arista de P y un etiquetado E , se define una **relación de equivalencia entre los puntos** de P :

- i) $\forall x \in \text{Int}(P)$, se tiene que x es equivalente a sí mismo, es decir $x \sim x$.
- ii) Dadas dos aristas de P que tengan la misma etiqueta y f la aplicación lineal positiva entre ellas, se toma cada punto de x de la primera arista equivalente al punto $f(x)$ de la segunda arista.

Por medio de la Definición 2.1.5, se tiene una relación de equivalencia en P . El espacio cociente X se dirá que se ha obtenido *pegando las aristas* de P que dependerá de las orientaciones dadas y el etiquetado.

Ahora se introdujera un método bastante conveniente, en el cual las orientaciones y los pares de aristas son identificadas en un polígono.

Definición 2.1.6. Sea P un polígono con vértices sucesivos $v_{p_0}, v_{p_1}, \dots, v_{p_n}$, donde $v_{p_0} = v_{p_n}$. Dadas las orientaciones y un etiquetado de P . Sean a_1, \dots, a_m las distintas etiquetas asignadas a las aristas de P . $\forall k$, sea a_{i_k} la etiqueta asignada a la arista $v_{p_{k-1}}v_{p_k}$, y sea $e_k = +1$ ó -1 , según la orientación asignada vaya de $v_{p_{k-1}}$ a v_{p_k} o al contrario. Así

$$w = (a_{i_1})^{e_1}(a_{i_2})^{e_2} \dots (a_{i_n})^{e_n}$$

se llamará **esquema de longitud n** de las aristas de P .

Cabe aclarar que esto ocurre en torno a la frontera del polígono, recordando las etiquetas asignadas a las diferentes aristas en sucesión. Si la orientación o flecha de un arista apunta en la *misma dirección* (mientras se mueve a lo largo de la frontera), entonces se escribe la etiqueta para la arista sin exponente (o el exponente $+1$). Por otro lado, si la flecha apunta en *dirección opuesta*, entonces se escribe la etiqueta para la arista con el exponente -1 . Por ejemplo, en la Figura 2.4 las identificaciones son precisamente identificados por el esquema:

$$a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}$$

Este recorrido comienza en el vértice de la parte inferior de la figura en sentido contrario a las manecillas del reloj. Podríamos comenzar de cualquier vértice, y proceder o en sentido a las manecillas del reloj o en sentido contrario, al moverse entorno a la frontera. Si el recorrido comenzará en el vértice de la parte inferior de la figura en sentido a las manecillas del reloj, el esquema es el siguiente:

$$abab$$

En el desarrollo de este trabajo, cualquier esquema que se presente, el recorrido irá en sentido contrario a las manecillas del reloj, a menos que se especifique lo contrario pero se iniciará en cualquier vértice.

2.2. SUPERFICIES TOPOLÓGICAS.

En esta sección se dará la definición n -variedad y 2-variedad. Después se define: la Suma Conexa de Superficies y los Espacios Triangulables, conceptos útiles para la demostración del Teorema de Clasificación de Superficies, que después será sustentado con las propiedades invariantes: Característica de Euler y Orientabilidad.

2.2.1. Definición y construcción de superficie topológica.

En esta parte se construyen las principales superficies topológicas que son fundamentales pues en estas se centra el desarrollo de este Trabajo de Grado.

Definición 2.2.1. Una 1-variedad es llamada una **curva** y una 2-variedad es llamada una **superficie** y se denotará por S .

Una 2-variedad o también llamada superficie topológica, puede ser compacta o no compacta, conexa ó disconexa en cualquiera de los casos, una superficie topológica es localmente compacta.

Usando lo discutido en la sección 2.1 se establece la siguiente proposición:

Proposición 2.2.1. *Sea R una región poligonal en \mathbb{R}^2 , con un número par de aristas y sea \sim una relación de equivalencia como en la Definición 2.1.5. El espacio cociente resultante es una superficie compacta.*

Demostración. Sea S el espacio cociente y sea $\pi : R \rightarrow S$ la aplicación cociente.

Los elementos de S se dividen en tres conjuntos disjuntos:

- *Conjunto de puntos cara:* son aquellos cuyas imágenes inversas en R están en el interior de R ;
- *Conjunto de puntos vértices:* son aquellos cuya imagen inversa son vértices;
- *Conjunto de puntos de aristas:* son aquellos cuyas imágenes inversas están en una arista pero no son vértices.

Se desea probar que S es compacta y es una superficie. La demostración se sigue de la siguiente manera:

- a) *Compacidad.* Es claro que S es compacto, ya que la imagen continua de un espacio compacto es compacta, y como R es compacto por Definición 2.1.1 y π es sobreyectiva y continua por .
- b) *Superficie.* Deberá cumplir que es un espacio: Localmente Euclideo, Hausdorff y 2-contable. Así
- i) Para probar que S es localmente Euclideo, se analizará separadamente los tres tipos de conjuntos antes mencionados.
- a) *Conjunto de puntos cara.* Como π es inyectiva en $Int(R)$, $Int(R)$ es un subconjunto abierto saturado de R por Definición 1.1.22, así la aplicación restricción π a $Int(R)$ es una aplicación cociente inyectiva por el Lema 1.1.4 y por lo tanto es homeomorfismo. Así $\pi(Int(R))$ es un entorno Euclideo de cada punto cara.
- b) *Conjunto de puntos de aristas.* Un punto \tilde{m} de una arista tiene exactamente dos imágenes inversas m_1 y m_2 , cada una sobre diferentes aristas. Usando la condición a) en la Definición 2.1.1, existen entornos disjuntos U_1 y U_2 de m_1 y m_2 respectivamente, tal que $R \cap \bar{U}_i$ es un semi-disco cerrado(Figura 2.5). Sea

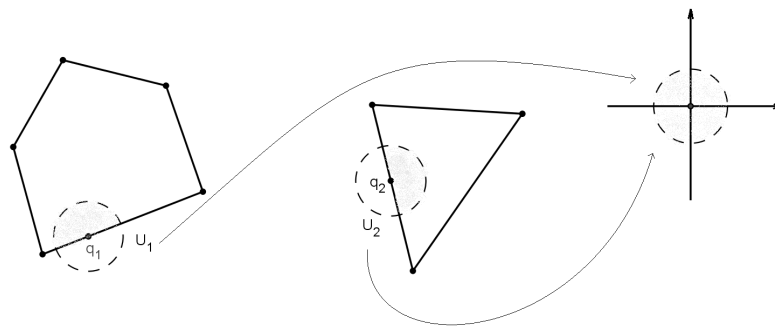


Figura 2.5: Entorno Euclideo de un punto de una arista

$$V_i = R \cap U_i.$$

Es fácil construir homeomorfismos α_1 llevando V_1 a un semi-disco en la mitad superior del plano y α_2 llevando V_2 a un semi-disco en la mitad inferior del

plano, de manera que m_1 y m_2 ambos van al origen y se respetan las identificaciones de las aristas. Se define

$$\alpha : V_1 \cup V_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

por $\alpha = \alpha_1$ en V_1 y $\alpha = \alpha_2$ en V_2 . Reduciendo V_1 y V_2 si necesario, se puede garantizar que $V_1 \cup V_2$ es un conjunto abierto saturado en R (esto significa que para cada punto en $V_1 \cup \partial P$, el punto frontera correspondiente está en V_2 , y por el contrario). Entonces la restricción de π a $V_1 \cup V_2$ es una aplicación cociente, así α desciende a una aplicación $\tilde{\alpha} : \tilde{V} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donde $\tilde{V} = \pi(V_1 \cup V_2)$. La imagen contiene un entorno del origen por construcción, y el dominio \tilde{V} es la imagen bajo π de un conjunto saturado abierto y por tanto abierta. Esto demuestra que \tilde{m} tiene un entorno localmente Euclideo.

- c) *Conjunto de puntos vértices.* De forma similar un punto vértice \tilde{v} tiene como imagen un conjunto finito de vértices $\{v_1, \dots, v_k\} \subset R$. Para cada i , se elige un homeomorfismo de un entorno de v_i en R a un subconjunto abierto en un “cuña” cerrada de ángulo $2\pi/k$ en el plano, que es un conjunto descrito en coordenadas polares por $\{(r, \theta) : \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi/k\}$. (Si se coloca v_i , en el origen, dicho homeomorfismo se da en coordenadas mediante transformación de abanico de la forma $(r, \theta) \longmapsto (r, \theta_0 + c\theta)$ para las constantes adecuadas θ_0, c .)

Debido a que cada arista está emparejada con exactamente otra, las k cuñas se pueden aplicar sobre un conjunto que contiene un entorno del origen al rotar y unir las piezas. Sin embargo, esto puede no respetar las identificaciones. Para corregir, se puede someter cada cuña a una transformación preliminar que reescale sus aristas de forma independiente. Primero, mediante una rotación seguido de una transformación de abanico, lleve la cuña al primer cuadrante de modo que una arista se sitúa a lo largo del eje x positivo y otro a lo largo el eje y positivo. A continuación, cambie la escala de los dos ejes mediante transformación lineal $(x, y) \longrightarrow (ax, ay)$.

Finalmente, use otra transformación de abanico para insertar la cuña en su

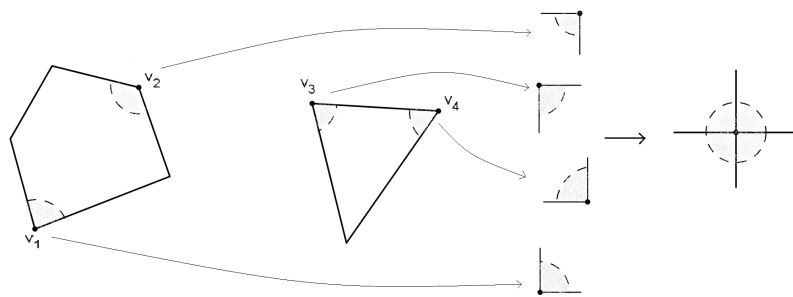


Figura 2.6: Entorno Euclideo de un punto vértice.

lugar. (El caso $k = 1$ merece un comentario especial. Este caso puede ocurrir si las dos aristas adyacentes al vértice único v_1 se identifican entre si; entonces puede verificar las aplicaciones construida a entornos v_i sobre un entorno del origen, con ambas aristas van a un mismo rayo). En cada caso, se finaliza con una aplicación definida sobre un conjunto abierto saturado en R , el cual descende a un homeomorfismo de un entorno de \bar{v} a un entorno del origen.

- ii) Probar que es un *espacio Hausdorff* es lo mismo que demostrar que las fibras de π pueden separadas por conjuntos abiertos saturados. Es fácil comprobar, caso por caso, que las imágenes inversas lo suficientemente pequeñas son bolas Euclidianas.
- iii) *2-contable*. El espacio cociente es 2-contable, ya que S es un espacio localmente Euclideo, por el Lema 1.1.6.

□

En base a esta proposición, se presenta el siguiente resultado.

Resultado 2.2.1 (Construcción de Algunas Superficies). La esfera S^2 , el toro \mathbb{T}^2 , la botella de Klein \mathbb{K}^2 , el plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 y la banda de Möbius \mathbb{M} son superficies.

Demostración. Construcciones:

La **esfera** $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ se puede construir tomando un disco $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ por el colapso de la frontera, $\partial(D^2) = \{(x, y) \in$

$\mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$, y encogiendo su borde completo hasta tener un único punto; es decir, $S^2 \approx \frac{D^2}{\sim}$, identificando $(x, y) \simeq (x, -y)$ para todo $(x, y) \in \partial(D^2)$. Se expresa brevemente por medio del siguiente esquema aa^{-1} , por lo tanto se tiene que la esfera S^2 es una superficie compacta.

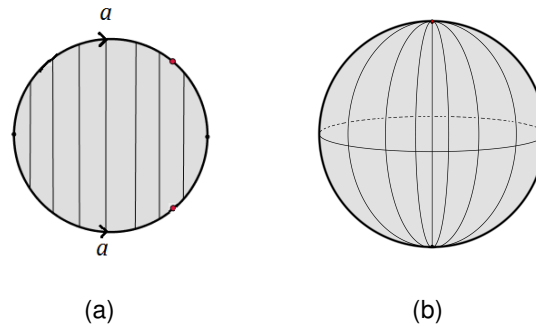


Figura 2.7: a) Disco con las aristas identificadas y b) el espacio cociente resultante: esfera

El **plano proyectivo real** \mathbb{RP}^2 , puede ser construido de dos formas:

1. Puede ser construido de un disco pegando los puntos antipodales³ x y $-x$; es decir, $\mathbb{RP}^2 \approx \frac{D^2}{\sim}$, donde se identifican $x \sim -x, \forall x \in \partial(D^2)$ como se muestra en la Figura 2.8 a). Se identifican los puntos de las aristas siguiendo el esquema en sentido a las manecillas del reloj: aa .
2. El plano proyectivo puede también ser construido del espacio cociente de un cuadrado unitario, $\mathbb{RP}^2 \approx \frac{I^2}{\sim}$ mediante la relación.
 - i) $(0, y) \simeq (1, 1 - y), \forall y \in I,$
 - ii) $(x, 0) \simeq (1 - x, 1), \forall x \in I$

Observando la Figura 2.8 b), se obtiene el esquema $abab$. El plano proyectivo es una superficie compacta.

³Antipoda: que está diametricamente opuesto con respecto a los que se toman como punto de referencia, por ejemplo $-x$ es la antipoda de x en una circunferencia.

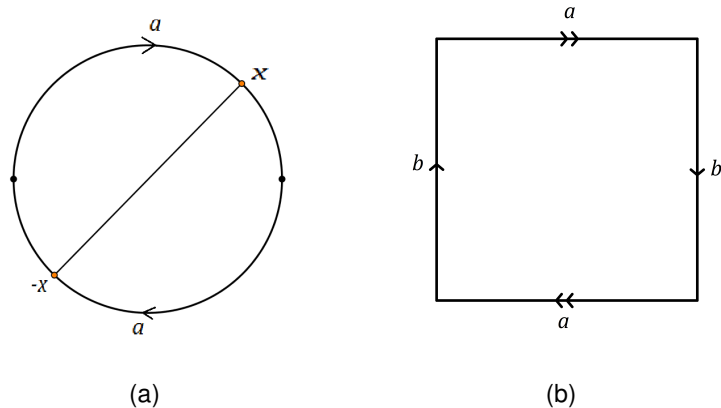


Figura 2.8: a) El plano proyectivo como el espacio cociente del disco D^2 . b) El plano proyectivo como el espacio cociente del cuadrado unitario.

El **Toro** \mathbb{T}^2 puede ser construido como el espacio cociente del cuadrado unitario I^2 , identificando pares de puntos, es decir, $\mathbb{T}^2 \approx \frac{I^2}{\sim}$, donde

- i) $(x, 0) \simeq (x, 1), \forall x \in I$,
- ii) $(0, y) \simeq (1, y), \forall y \in I$.

Se identifican los puntos de las aristas por medio del esquema $aba^{-1}b^{-1}$. Por lo tanto, el toro es una superficie compacta (ver Figura 2.9).

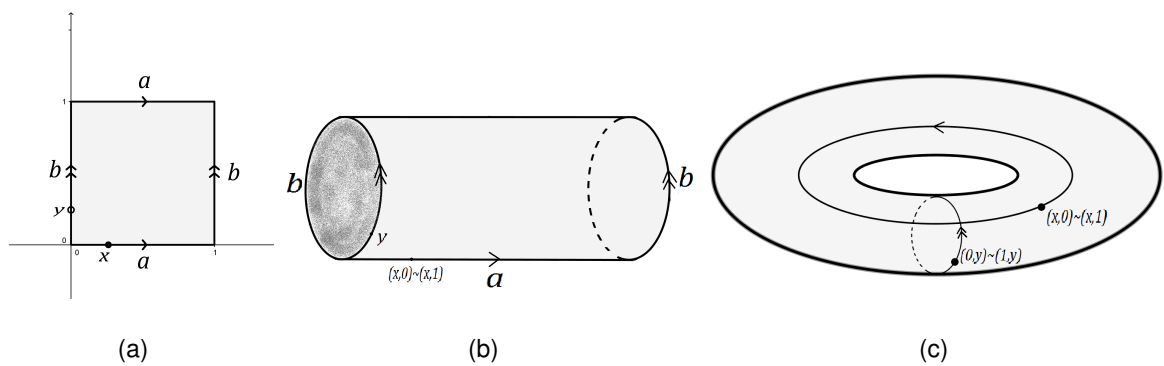


Figura 2.9: Ilustración de las identificaciones en la región poligonal I^2 para formar el toro.

La **Banda de Möbius** ⁴ \mathbb{M} tiene la propiedad notable que posee un sola cara y un solo borde, por esto, ha sido utilizada como un ejemplo de propiedad invariante *orientabilidad*. Puede ser construida girando un rectángulo y pegando las aristas debidamente identificadas, por medio de la relación(Figura 2.10).

$$(0, y) \sim (1, 1 - y), \forall y \in I$$

La banda de Möbius es el espacio cociente de un cuadrado unitario con un número impar de aristas identificadas, es por esto que no se puede obtener un esquema, esto implica que, la banda de Möbius es una superficie no compacta.

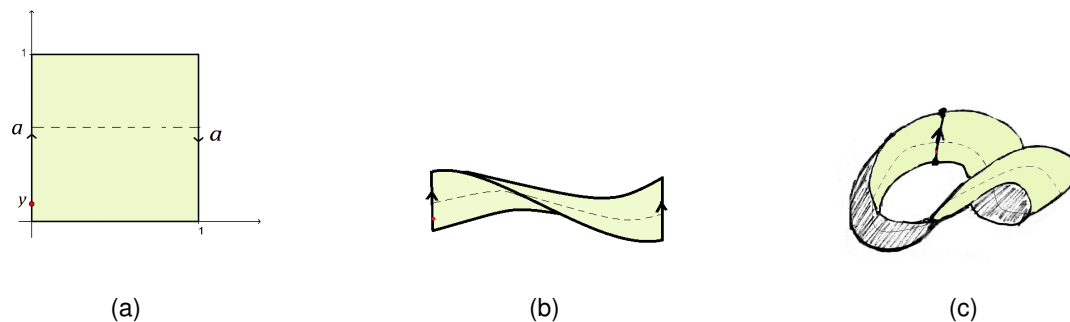


Figura 2.10: Ilustración de las identificaciones en la región poligonal I^2 para formar la banda.

De igual forma la ⁵ **botella de Klein** \mathbb{K}^2 , puede ser construida como el espacio cociente del cuadrado unitario, identificando pares de puntos, así $\mathbb{K}^2 \approx \frac{I^2}{\sim}$ con la relación:

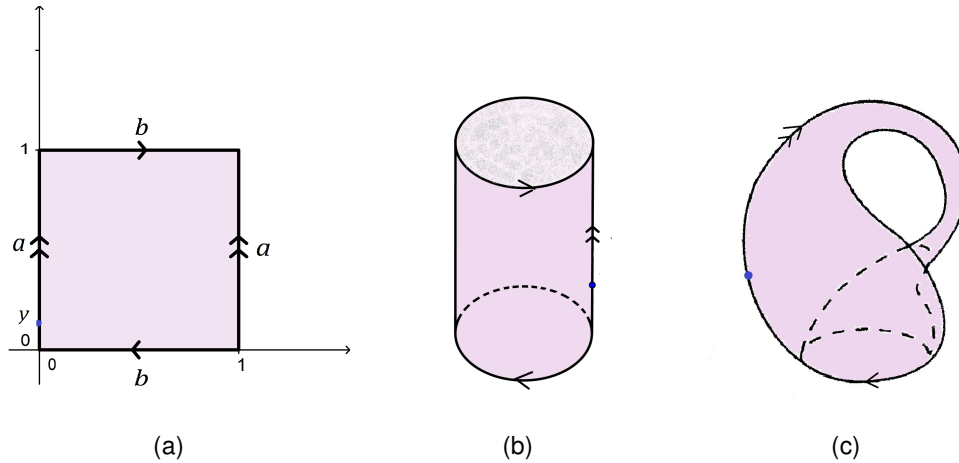
- i) $(0, y) \simeq (1, y), \forall y \in I.$
- ii) $(x, 0) \simeq (1 - x, 1), \forall x \in I$

En la figura 2.11 a) se dá la representación poligonal de la botella, b) se hace la identificación i) donde el par de aristas etiquetadas por a son pegadas para obtener un cilindro por medio de una aplicación lineal. En c) antes de pegar el otro par de aristas etiquetadas por b el cilindro es girado y después se realiza la identificación ii). Se identifican las aristas por medio del esquema $a^{-1}ba^{-1}b^{-1}$, de ahí, la botella de Klein es una superficie compacta. (ver Figura 2.11) □

⁴Nombrada en honor al Matemático Alemán A.F. Möbius (1790-1868)

⁵Nombrada en Honor de Felix Klein(1849-1925)

Figura 2.11: Ilustración de las identificaciones en la región poligonal I^2 para formar la botella de Klein.



2.2.2. Suma Conexa de Superficies.

Intuitivamente la suma conexa de dos superficies se forma cortando un pequeño agujero circular en cada superficie y pegando las superficies justo a lo largo de las fronteras de estos agujeros.

La siguiente definición es un modo de construcción de superficies más usual.

Definición 2.2.2. Sean S_1 y S_2 superficies, sea D_i^2 un disco cerrado (donde D_i^2 es homeomorfo a $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$) en S_i . Sea $Y_i = S_i - \text{int}(D_i^2)$, para cada $i = 1, 2$ y sea

$$f : \partial(D_1^2) \longrightarrow \partial(D_2^2)$$

un homeomorfismo. La **suma conexa** $S_1 \# S_2$, es el espacio cociente obtenido de $Y_1 \cup Y_2$ identificando los puntos x y $f(x)$, para cada $x \in \partial(D_1^2)$

Es decir que:

$$S_1 \# S_2 \approx \frac{Y_1 \cup Y_2}{\sim}$$

donde se identifican $x \sim f(x)$ para $\forall x \in \partial(D_1^2)$.

Ahora se considera algunas propiedades de esta operación de la formación de sumas conexas de superficies compactas:

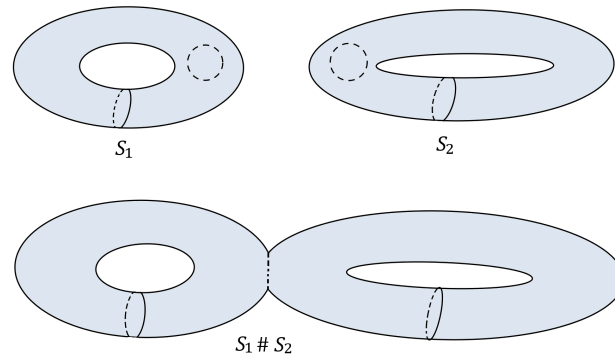


Figura 2.12: Suma conexa de superficies.

- a) Conmutativa, $S_1 \# S_2 \approx S_2 \# S_1$.
- b) Asociativa, $(S_1 \# S_2) \# S_3 \approx S_1 \# (S_2 \# S_3)$.
- c) Elemento Neutro S^2 , $S \# S^2 \approx S$.
- d) El tipo de topología de $S_1 \# S_2$ no depende de la elección de los discos cerrados (D_1 y D_2) ni de la elección del homeomorfismo f .

Los literales **a)**, **b)** y **c)** se demuestran por medio de la definición de suma conexa. Gracias a la propiedad **d)**, se tiene toda la libertad para elegir como hacer los agujeros, y cómo pegar las superficies agujereadas, el resultado nos dará siempre la misma superficie.

Los detalles de la se encuentran en “Introduction to topological manifolds”, Jhon Lee [3].

Teorema 2.2.1. *La suma conexa de dos superficies es una superficie.*

2.2.3. Espacios Triangulables.

Definición 2.2.3. Una **triangulación** de una superficie compacta S consiste de una colección finita $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ de subconjuntos cerrados de S que cubre S y una colección

$$\{\phi_i : T_i' \longrightarrow T_i : i = 1, 2, \dots, n\}$$

de homeomorfismos, donde cada T_i' es un triángulo en el plano. Cada T_i es también llamado un **triángulo**. Los miembros de T_i que son imágenes de los vértices de T_i' son llamados **vértices**, y los subconjuntos de T_i que son imágenes de las aristas de T_i' son llamadas **aristas**. Además, para cada par T_i y T_j de triángulos distintos, $T_i \cap T_j = \emptyset$, o $T_i \cap T_j$ es un vértice, o $T_i \cap T_j$ es una arista.

Toda triangulación de una superficie conexa compacta satisface las dos condiciones siguientes:

1. Cada arista le pertenece exactamente a dos triángulos.
2. Sea v un vértice de una triangulación. Entonces se puede ordenar el conjunto de todos los triángulos que tienen el vértice v cíclicamente $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n = T_0$ de manera que, para $0 \leq i \leq n - 1$, T_i y T_{i+1} tengan una arista común.

Tal vez, las condiciones en la Definición 2.2.3 son aclaradas por la Figura 2.13, la cual muestra tres tipos de intersecciones de triángulos no apropiadas.

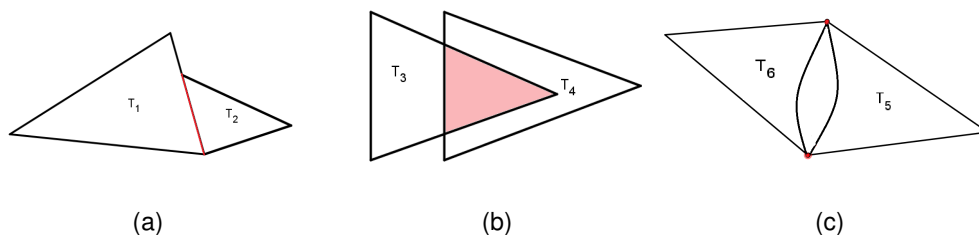


Figura 2.13: a) La intersección de T_1 y T_2 no es una arista, b) La intersección de T_3 y T_4 es otro triángulo y c) La intersección de T_5 y T_6 son dos vértices.

Ejemplo 2.2.1. EL \mathbb{T}^2 , \mathbb{RP}^2 y el \mathbb{S}^2 son espacios triangulables.

Demostración. En la Figura 2.14, se muestran las triangulaciones del toro y el plano proyectivo real.

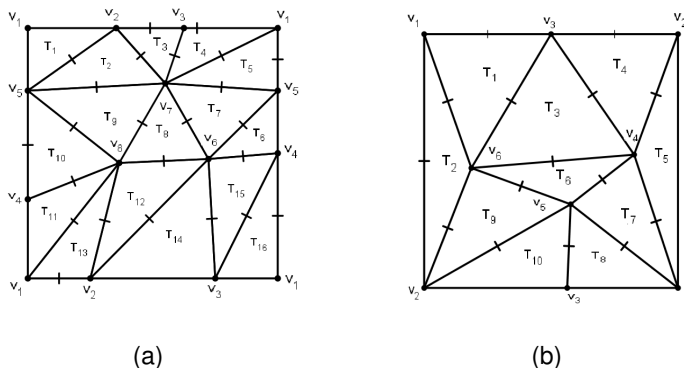


Figura 2.14: a)Triangulación del toro y b) plano proyectivo real.

La siguiente Figura 2.15 es una triangulación de la esfera: los discos son los dos hemisferios; se triángula como esta indicado.

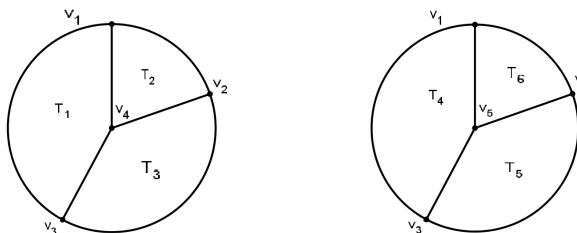


Figura 2.15: Triangulación de la esfera.

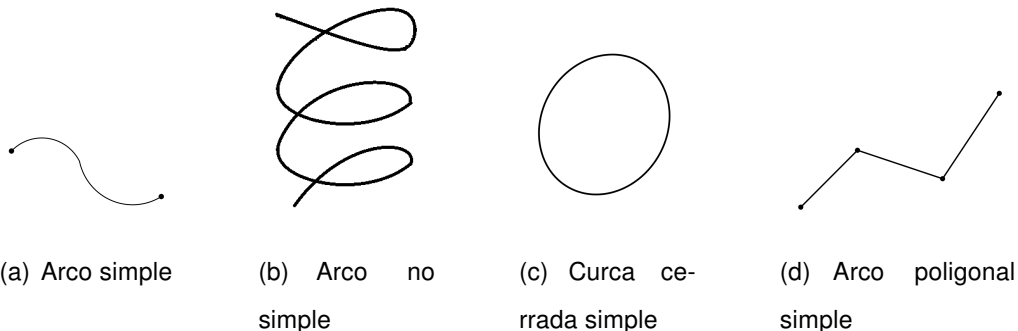
□

2.2.4. Prueba del Teorema de triangulación para una Superficie Compacta.

La primera prueba rigurosa de una superficie compacta podría ser triangulada fue dada por Tibor Radó en 1925, la prueba requiere el uso del Teorema de la Curva de Jordan, la cual se merece que se desarrolle en una subsección aparte. Este teorema establece que toda superficie compacta es triangulable, es decir, que se puede dividir en triángulos que encajan satisfactoriamente, es vital para demostrar el Teorema de Clasificación de Superficies compactas. Para ello, se necesitaran los resultados de arco simple, curva cerrada simple, arco poligonal simple en un espacio topológico, Teoría de Grafos y una extensión del Teorema de la Curva de Jordan(Teorema de Jordan-Schönflies) y así finalizando con el objetivo de Triangular una Superficie. (El contenido de la sección se tomo del artículo “The Jordan-Schonflies Theorem and the Classification of Surfaces”, por Carsten Thomassen [7]).

2.2.4.1. Grafo Planar y El Teorema de la Curva de Jordan.

Definición 2.2.4. Un **arco simple** en un espacio topológico X es la imagen de una aplicación continua inyectiva, $f : [0, 1] \rightarrow X$. Se dice que $f(0)$ y $f(1)$ son los *extremos* del arco y que el arco *une* a $f(0)$ y $f(1)$. Una **curva cerrada simple** es definida análogamente excepto que ahora $f(0) = f(1)$ (es homeomorfa a S^1). Se dice que X es **conexo** (más precisamente, *arco conexo*) si cualquiera dos elementos de X se unen por un arco simple.



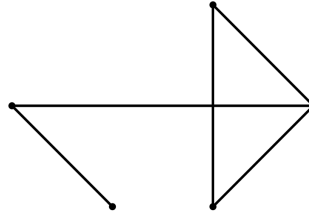


Figura 2.16: Ejemplo de un grafo.

Definición 2.2.5. Un **arco poligonal simple** en el plano es un arco simple o curva cerrada que es la unión de un número finito de segmentos de línea recta.

Se muestran algunos resultados interesantes:

Lema 2.2.1. Si Ω es un conjunto abierto conexo en el plano, entonces cualquiera dos puntos en Ω son unidos por un arco poligonal simple en Ω .

Una **región** de un conjunto abierto en el plano es un subconjunto conexo maximal.

Definición 2.2.6. Un **grafo** G es la unión de dos conjuntos finitos disjuntos $V = V(G)$ y $E = E(G)$ (llamados los *vértices* y las *aristas*, respectivamente) tal que, con cada arista, existe asociados dos vértices distintos x e y , llamados los *extremos* de la arista. Si dos vértices x e y están unidos por una misma arista, se dirá que los vértices x e y son **adyacentes**, y se representara la arista correspondiente por xy o yx . También se puede decir que los vértices x e y son dos vértices vecinos, que son los extremos de un mismo lado, o que son **incidentes** al lado yx . Por otra parte, se dirá que dos lados son **adyacentes** si tienen al menos un vértice en común. Si más de una arista unen x e y se habla de una arista **multiple**.

Para poder representar algebraicamente un grafo es necesario que esté etiquetado, es decir, que los vértices se distingan unos de otros mediante etiquetas, las cuales pueden ser números o letras.

Definición 2.2.7. Para cada $n \geq 1$, se llama K_n al **grafo completo** de n vértices, conectados dos a dos de todas las maneras posibles.

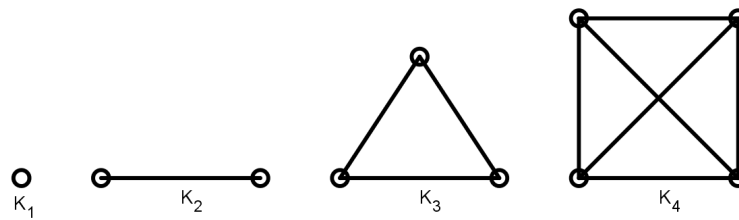


Figura 2.17: Los grafos completos K_1 , K_2 , K_3 y K_4

Dos grafos tendrán la misma “forma matemática” cuando la única diferencia entre ambos, en cuanto a su estructura, sea que se haya usado cualquier tipo de representación distinta para sus vértices, mientras que las conexiones entre ellos sean las mismas. En este caso se dirá que son isomorfos.

Definición 2.2.8. Se dirá que los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** o que hay un **isomorfismo** entre ambos si existe un biyección $b : V_1 \rightarrow V_2$ tal que para todo $x, y \in V_1$, xy es una arista de G_1 si y solo si $b(x)b(y)$ es una arista de G_2 .

Puede ocurrir que dos grafos con distinta representación gráfica tengan la misma “forma matemática”. Por ejemplo, los dos grafos de la figura siguiente:

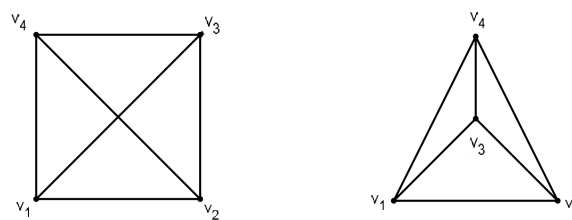


Figura 2.18: Grafos isomorfos

son isomorfos mediante las aplicaciones que hacen corresponder a cada vértice de uno de los grafos, el vértice con el mismo nombre en otro grafo.

Dentro de un mismo grafo hay distintas sucesiones posibles de vértices; las definiciones siguientes se refieren a sucesiones con interés matemático por sus propiedades.

Definición 2.2.9. Un **camino cerrado o ciclo**, es un camino v_0, \dots, v_n tal que $v_0 = v_n$.

Ejemplo 2.2.2 (Camino y Ciclo). Primeramente se realiza la representación algebraica del grafo G_1 que viene dada por:

$$G_1 = (V, E) = (V(G_1), E(G_1))$$

$$V = V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$E = E(G_1) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6)\}$$

Así se calcula lo siguiente:

1. Un camino en G_1 es $v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$
2. Un ciclo en G_1 es $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_6 \rightarrow v_1$

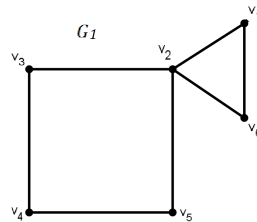


Figura 2.19: Grafo conexo

Si G es un grafo y $A \subseteq V(G) \cup E(G)$, entonces $G - A$ es el grafo obtenido de G por la eliminación de todos los vértices de A y todas aquellas aristas que están en A o son incidentes con un vértice en A .

Existen grafos donde para cada par de vértices x e y hay al menos un posible camino conectándolos y existen grafos donde no hay camino alguno conectando una determinada pareja de vértices. Si un grafo representa una red de comunicaciones es indudablemente importante conocer si existe algún camino entre una determinada pareja de vértices. Esto llevó a los matemáticos a introducir el concepto de *grafo conexo*.

Definición 2.2.10. Se dice que G es **conexo** si todo par de vértices en G están unidos por un camino, y G es **2-conexo** si es conexo y, para todo vértice v , $G - \{v\}$ (que también se denota por $G - v$) es conexo.

Ejemplo 2.2.3. Se observa que el grafo G_1 es un grafo conexo, mientras que el grafo G_2 es un grafo no conexo.

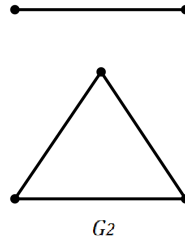
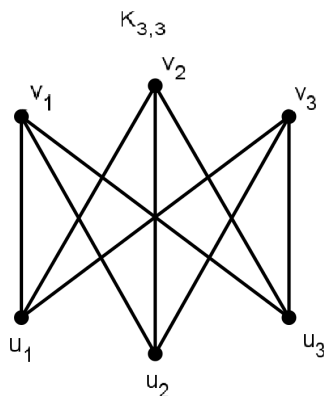


Figura 2.20: Grafo inconexo.

El grafo G puede ser **embebido** en un espacio topológico X si los vértices de G pueden ser representados por elementos distintos en X y cada arista de G puede ser representada por un arco simple que une dos extremos de tal manera que dos aristas tienen a lo sumo un extremo en común. Si X es el Plano Euclideo \mathbb{R}^2 , entonces un grafo representado en X es un **grafo plano** (que puede ser dibujado sin que sus aristas se intersecten), y un *grafo abstracto* que puede ser representado en X es un **grafo planar**.

Lema 2.2.2. *Si G es un grafo planar, entonces G se puede dibujar (embebido) en el plano tal que todas las aristas son arcos poligonales simples.*

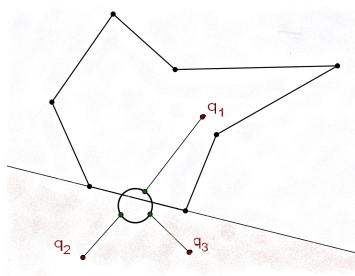
Una **subdivisión** de un grafo G , es un grafo obtenido de G “insertado vértices en aristas (por ejemplo, cambiando $\cdot\text{---}\cdot$ por $\cdot\text{---}\cdot\text{---}\cdot$)”. Más precisamente, algunas (o todas las) aristas de G son remplazadas por caminos con los mismos extremos. El teorema de Kuratowski establece que: *Un grafo es no planar si y sólo si contiene una subdivisión de uno de los grafos de Kuratowski $K_{3,3}$ o K_5 . K_5 es el grafo con cinco vértices tal que todo par de vértices están unidos por exactamente una arista. $K_{3,3}$ es el grafo con seis vértices $v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3$ y las nueve aristas $v_i u_j, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$. Solo se usará el simple hecho que $K_{3,3}$ es no planar.*



Para esto se necesita el siguiente caso especial del Teorema de la Curva de Jordan.

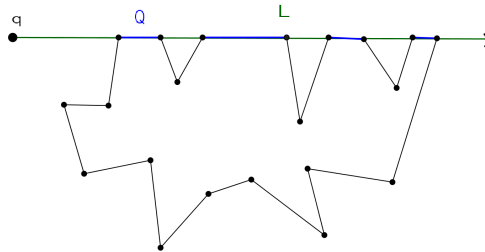
Lema 2.2.3. Si C es una curva poligonal cerrada simple en el plano, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tiene precisamente dos regiones, cada una de las cuales tiene C como frontera.

Demostración. Primero se prueba que $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tiene a lo sumo dos regiones. Así que supongase que q_1, q_2, q_3 pertenecen a regiones distintas de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Seleccione un disco D tal que $D \cap C$ sea un segmento de línea recta. Para cada $i = 1, 2, 3$ se puede caminar a lo largo de un arco poligonal simple (cerca de C pero no interceptando C) de q_i a D . Entonces, algunos dos de q_1, q_2, q_3 , son conectados por un arco simple poligonal, (Observe la siguiente figura) una contradicción.



A continuación se prueba que $\mathbb{R}^2 \setminus C$ no es conexo. Para cada punto q en $\mathbb{R}^2 \setminus C$ se considera un rayo L comenzando en q . La intersección $L \cap C$ es un número finito de intervalos algunos de los cuales pueden ser puntos. Considere tal intervalo Q . Si C centra y deja Q en el mismo lado de L se dirá que C toca L en Q . De lo contrario, C cruza L en Q . Es fácil ver que el número de veces que C cruza L (reducido módulo 2) no

cambia cuando la dirección de L está cambiada. Así que ese número sólo depende en q (y C) y se llama la *paridad* de q . Ahora, la paridad es la misma para todos los puntos en un arco poligonal simple en $\mathbb{R}^2 \setminus C$ y por lo tanto es igual para todos los puntos en una región de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Considerado un rayo que cruza C una vez que se obtiene puntos de diferente paridad y por lo tanto en diferentes regiones, como se muestra en la siguiente figura.

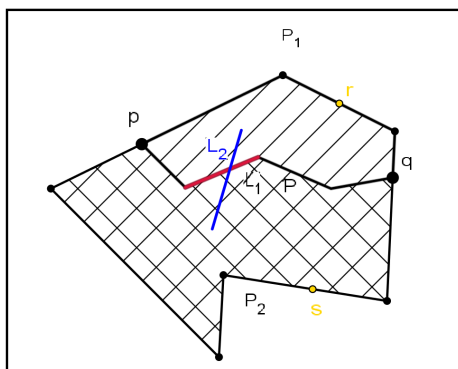


□

La región no acotada de una curva cerrada C es llamada el *exterior* de C y es denotado por $ext(C)$. La unión de todas las demás regiones es el *interior* y es denotado por $int(C)$. Adicionalmente, se tiene: $\overline{int}(C) = C \cup int(C)$ y $\overline{ext}(C) = C \cup ext(C)$. Ahora se extenderá el Lema 2.2.3

Lema 2.2.4. *Sea C una curva poligonal cerrada simple y P un arco poligonal simple en $\overline{int}(C)$ tal que P une p y q en C y no tiene otro punto en común con C . Sea P_1 y P_2 los dos arcos en C de p a q . Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P)$ tiene precisamente tres regiones cuyas fronteras son $C, P_1 \cup P, P_2 \cup P$, respectivamente.*

Demostración. Claramente, $ext(C)$ es una región de $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P)$. Como en el Lema 2.2.3 se concluyó que la adición de P a C parte a $int(C)$ en a lo sumo dos regiones. Así, sólo se necesita demostrar que P parte a $int(C)$ en (al menos) dos regiones. Sea L_1, L_2 segmentos de línea cruzados tal que L_1 es un segmento de P , y L_2 tiene precisamente el punto en $L_1 \cap L_2$ en común con $C \cup P$. Por el Lema 2.2.3, los extremos de L_2 están en el $int(C)$ y en regiones distintas de $\mathbb{R}^2 \setminus (P \cup P_1)$, por lo tanto también en regiones distintas de $\mathbb{R}^2 \setminus (P \cup C)$, véase en la siguiente figura.



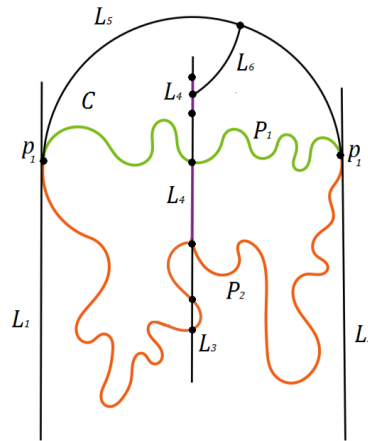
□

Observación 2.2.1. El Lema 2.2.4 implica que, si r y s son puntos en $P_1 \setminus \{p, q\}$ y $P_2 \setminus \{p, q\}$, respectivamente, entonces no es imposible unir r y s por un arco poligonal simple en $\overline{\text{int}}(C)$ sin ser intersectado P .

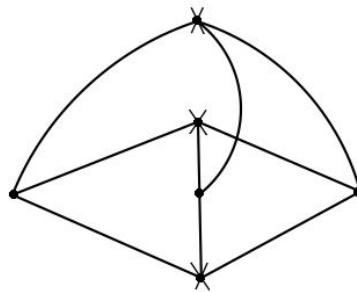
Estas observaciones también se mantienen cuando ext y int son intercambiados. Todo hasta ahora es estándar y trivial. Ahora se está listo para el Teorema de la Curva de Jordán. Se observa una vez más que la prueba usa solamente la no planalidad de $K_{3,3}$.

Proposición 2.2.2. Si C es una curva cerrada simple en el plano, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus C$ es inconexo.

Demostración. Sea L_1 (respectivamente, L_2) una línea recta vertical intersecando C tal que C esté enteramente en el plano medio cerrado derecho (respectivamente, izquierdo) de L_1 (respectivamente, L_2). Sea p_i , el punto superior de $L_i \cap C$ para $i = 1, 2$, y sea P_1 y P_2 las dos curvas en C de p_1 a p_2 . Sea L_3 una línea recta vertical entre L_1 y L_2 . Como $P_1 \cap L_3$ y $P_2 \cap L_3$ son compactos y disjuntos, L_3 contiene un intervalo L_4 que une P_1 con P_2 y que tiene solamente sus extremos en común con C . Sea L_5 un arco poligonal de p_1 a p_2 en $\text{ext}(C)$ que consiste en segmentos de L_1 , L_2 y un segmento de línea recta horizontal por encima de C . Si L_4 está en $\overline{\text{ext}}(C)$, entonces existe un arco poligonal simple L_6 en $\overline{\text{ext}}(C)$ de L_4 a L_5 . Pero entonces $C \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6$ es un grafo plano isomorfo a $K_{3,3}$, contradiciendo el hecho que no es planar. Por lo tanto, el punto medio de L_4 no está en $\overline{\text{ext}}(C)$, así que $\text{int}(C)$ es no vacío.



Así la figura en el $Ext(C)$ es isomorfa a $K_{3,3}$



□

Se usará la no planalidad de $K_{3,3}$ para demostrar que $int(C)$ tiene solamente una región. Para esto se necesitará algunos hechos de la teoría de grafos. Primero un resultado sobre grafos abstractos.

Lema 2.2.5. Si G es un grafo 2-conexo y H es un subgrafo 2-conexo de G , entonces G se puede obtener a partir de H por adiciones sucesivas de caminos tal que cada uno de estos caminos junten dos vértices distintos en el grafo actual y tiene todos sus otros vértices fuera del grafo actual.

Lema 2.2.6. Si Γ es un grafo plano 2-conexo con al menos tres vértices de cuyas aristas son arcos conexos simples, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ tiene⁶ $|E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 2$ regiones cada una de las cuales tiene un ciclo de Γ como frontera.

⁶Si S es un conjunto, entonces $|S|$ denota su cardinalidad.

Demostración. Sea C un ciclo en Γ . Por el Lema 2.2.3, el Lema 2.2.6 se mantiene si $\Gamma = C$. De lo contrario, Γ puede ser sobtenido de C añadiendo sucesivamente caminos como en el Lema 2.2.5. Cada uno de estos caminos se agrega en una región. Esa región está limitada por un ciclo y ahora se aplica el Lema 2.2.4 para completar la prueba. (Lemma 2.2.4 dice que el número de regiones se incrementa en 1 cuando una región se subdivide). \square

Para un grafo plano Γ , las regiones de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ también se denominan *caras* de Γ . La cara no acotada es la *cara exterior* y, si Γ es 2-conexo, entonces la frontera de la cara exterior es el ciclo exterior.

La unión de dos grafos abstractos se define de manera obvia. Para grafos planos se utilizara un tipo diferente de unión.

Lema 2.2.7. *Si Γ_1 y Γ_2 son dos grafos planos tal que cada arista es un arco poligonal simple, entonces la unión de Γ_1 y Γ_2 es un grafo Γ_3 .*

Observación 2.2.2. Se tienen dos Grafos, se toman como vértices cada linea quebrada y también se toman como vértices todos los cruces de las lineas quebradas de un grafo con el otro, todo esto se define como unión de dos grafos. Por lo hay ocasiones en que las aristas se cortan pero no necesariamente es que hay un vértice que determine ese corte, es decir, ese punto de corte pueda que simplemente sea un accidente a la hora de dibujar.

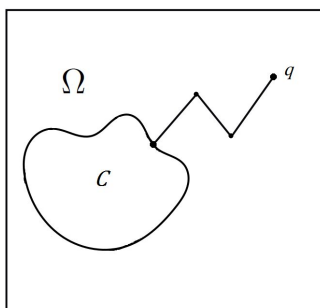
Si ambos Γ_1 y Γ_2 en el Lema 2.2.7 son 2-conexos y tienen al menos dos puntos en común, entonces también Γ_3 es 2-conexo.

Lema 2.2.8. *Sea $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ grafos planos 2-conexos que cuyas aristas son arcos poligonales simples tal que Γ_i tiene al menos dos puntos en común con cada Γ_{i-1} y Γ_{i+1} y ningún punto en común con cualquier otro Γ_j ($i = 1, 2, \dots, k - 1$). Asumase también que $\Gamma_1 \cap \Gamma_k = \emptyset$. Entonces cualquier punto que está en la cara exterior de cada $\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \dots \Gamma_{k-1} \cup \Gamma_k$ está también en la cara exterior de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_k$.*

Proposición 2.2.3. *Si P es un arco simple en el plano, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus P$ es conexo.*

Demostración. Sea p, q dos puntos en $\mathbb{R}^2 \setminus P$ y sea d un número positivo tal que cada p, q tenga una distancia $> 3d$ de P . Se unirá p, q por un arco poligonal simple en $\mathbb{R}^2 \setminus P$. Dado que P es la imagen de una aplicación continua (y por lo tanto uniformemente continua) se puede hacer una partición de P en segmentos P_1, P_2, \dots, P_k tal que P_i une a p_i y p_{i+1} para $i = 1, 2, \dots, k$ y tal que cada punto en P_i tenga una distancia menor que d de p_i ($i = 1, 2, \dots, k - 1$). Sea d' la distancia mínima entre P_i y P_j , $1 \leq i \leq j - 2 \leq k - 2$. Observe que $d' \leq d$. Para cada $i = 1, 2, \dots, k$, se parte P_i en segmentos $P_{i,1}, P_{i,2}, \dots, P_{i,k_i}$ tales que $P_{i,j}$ se une a $p_{i,j}$ con $p_{i,j+1}$ para $j = 1, 2, \dots, k_i - 1$ y tal que cada punto de $P_{i,j}$ tiene una distancia menor que $d'/4$ a $p_{i,j}$, y sea Γ_i el grafo que es la unión de las fronteras de los cuadrados que consisten en segmentos de línea horizontal y vertical de longitud $d'/2$ y tiene un punto $p_{i,j}$ como punto medio. Entonces los grafos $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ satisfacen la hipótesis del Lema 2.2.8. Por lo tanto, ambos p como q están en la cara exterior de $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$ (porque están fuera del disco de radio $3d$ y con centro p_i mientras $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1}$ está dentro de ese disco) y P no interseca esa cara. Por lo tanto, p y q pueden unirse por un arco poligonal simple disjuntos de P . \square

Definición 2.2.11. Si C es un conjunto cerrado del plano y Ω es una región de $\mathbb{R}^2 \setminus C$, entonces un punto $p \in C$ es **accesible** de Ω si para algún (y por lo tanto cada) punto $q \in \Omega$, existe un arco poligonal simple de q a p que tiene solamente p en común con C (observe la siguiente figura).



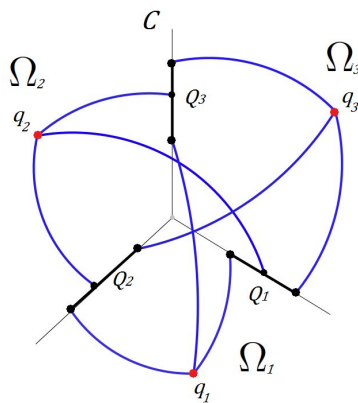
Observación 2.2.3. Si C es una curva cerrada simple, entonces p no necesita ser accesible desde Ω . Sin embargo, si P es cualquier arco de C que contiene a p , entonces la Proposición 2.2.3 implica que $\mathbb{R}^2 \setminus (C \setminus P)$ es conexo y por tanto contiene un arco poligonal simple P' de q a una región de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ distinta de Ω . Entonces P' interseca C

en un punto en P . Como P puede ser elegido arbitrariamente pequeño se concluye que los puntos en C accesibles desde Ω son densos en C .

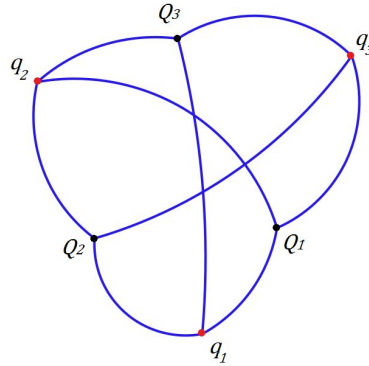
También se obtiene:

Teorema 2.2.2 (Teorema de la Curva de Jordan.). *Si C es una curva cerrada simple en el plano, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tiene precisamente dos regiones, cada una de las cuales tiene C como frontera.*

Demostración. Suponga que q_1, q_2, q_3 son puntos en regiones distintas $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Sea Q_1, Q_2, Q_3 segmentos disjuntos dos a dos de C . Por la Observación 2.2.3, Ω_i tiene un arco poligonal simple $P_{i,j}$ de q_i a Q_j , para $i, j = 1, 2, 3$. Se puede asumir que $P_{i,j} \cap P_{i,j'} = \{q_i\}$ para $j \neq j'$. (Si se camina a lo largo de $P_{i,2}$ desde Q_2 hacia q_i y se alcanza $P_{i,1}$ en $q'_i \neq q_i$, entonces se puede modificar $P_{i,2}$ tal que su último segmento esté cerca del segmento de $P_{i,1}$ de q'_i a q_i y tal que el nuevo $P_{i,2}$ sólo tiene q_i en común con $P_{i,1}$. $P_{i,3}$ puede ser modificado de manera similar, si es necesario) Claramente, $P_{i,j} \cap P_{i',j'} = \emptyset$ cuando $i \neq i'$. Ahora se puede extender (sumando un segmento en cada Q_1, Q_2, Q_3) la unión de los arcos $P_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) a un grafo plano isomorfo a $K_{3,3}$. Esto contradice el hecho que es no planar. Así, $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tiene precisamente dos regiones $ext(C)$ y $int(C)$. Como arriba, la Proposición 2.2.3 implica que cada punto de C es un punto límite de $ext(C)$ y $int(C)$. Observe la siguiente figura::



Así la figura siguiente es isomorfa $K_{3,3}$



□

El Teorema de la Curva de Jordan es un caso especial del Teorema de Jordan-Schönflies que se prueba en la siguiente subsección. Por esto se generaliza algunos de los resultados previos. Primero, el Lema 2.2.4 se generaliza como sigue:

Lema 2.2.9. *Sea C una curva cerrada simple y P un arco poligonal simple en $\text{int}(C)$ tal que P une p y q en C y ningún otro punto tiene en común con C . Sea P_1 y P_2 los dos arcos en C de p a q . Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P)$ tiene precisamente tres regiones cuyas fronteras son C , $P_1 \cup P$ y $P_2 \cup P$, respectivamente.*

Demostración. Como en la demostración del Lema 2.2.4, la única parte no trivial es probar que $\overline{\text{int}(C)}$ está dividido en (al menos) dos regiones. Si los extremos de L_2 (definidos como en la demostración del Lema 2.2.4) están en la misma región de $\mathbb{R}^2 \setminus (P \cup C)$, entonces esa región contiene un arco poligonal P_3 tal que $P_3 \cup L_2$ es una curva poligonal cerrada simple. Por la prueba del Lema 2.2.3, los extremos de L_1 están en regiones distintas de $\mathbb{R}^2 \setminus (P_3 \cup L_2)$. Pero también están en la misma región de $\mathbb{R}^2 \setminus (P_3 \cup L_2)$ ya que están unidos por un arco simple (en $P \cup C$) que no se interseca $P_3 \cup L_2$. Esta contradicción demuestra el Lema 2.2.9. □

También se generaliza el Lema 2.2.6.

Lema 2.2.10. *Si Γ es un grafo plano 2-conexo conteniendo un ciclo C (que es una curva cerrada simple) tal que toda arista en $\Gamma \setminus C$ son arcos poligonales simples en $\overline{\text{int}(C)}$, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ tiene $|E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 2$ regiones cada una de las cuales tiene un ciclo de Γ como frontera.*

Finalmente, se debe usar el hecho que el Lema 2.2.7 sigue siendo válido si Γ_1 y Γ_2 son grafos planos cuya intersección contiene un ciclo tal que toda arista en Γ_1 o Γ_2 (no en C) son arcos poligonales simples en $\overline{\text{int}}(C)$.

2.2.4.2. Teorema de Jordan-Schönflies.

Definición 2.2.12. Si C y C' son curvas cerradas simples y Γ y Γ' son grafos 2-conexos que consiste en C (respectivamente, C') y arcos poligonales simples en $\overline{\text{int}}(C)$ (respectivamente, $\overline{\text{int}}(C')$), entonces Γ y Γ' se dice que son planos-isomorfos si existe un isomorfismo de Γ a Γ' tal que un ciclo en Γ es un límite de cara de Γ si la imagen del ciclo es una cara de la frontera de Γ' y tal que el ciclo externo de Γ se relaciona con el ciclo externo de Γ' .

Teorema 2.2.3. Si f es un homeomorfismo de una curva cerrada simple C sobre una curva cerrada simple C' , entonces f puede extenderse a un homeomorfismo de todo el plano.

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que C' es un polígono convexo. Primero se extiende f a un homeomorfismo de $\overline{\text{int}}(C)$ a $\overline{\text{int}}(C')$. Sea B un conjunto denso contable en $\text{int}(C)$ (por ejemplo los puntos con coordenadas racionales). Dado que los puntos en C accesibles de $\text{int}(C)$ son densos en C , existe un conjunto denso contable A en C que consiste de puntos accesibles de $\text{int}(C)$. Sea p_1, p_2, \dots una sucesión de puntos en $A \cup B$ tal que cada punto de $A \cup B$ ocurre infinitamente a menudo en esa sucesión. Sea Γ_0 que denota cualquier grafo 2-conexo que consiste en C y algunos arcos poligonales simples en $\overline{\text{int}}(C)$. Sea Γ'_0 un grafo que consiste en C' y arcos poligonales simples en $\overline{\text{int}}(C')$ tales que Γ'_0 y Γ_0 son planos-isomorfos (con isomorfismo g_0) tales que g_0 y f coinciden en $C \cap V(\Gamma_0)$. Ahora se extiende f a $C \cup V(\Gamma_0)$ tal que g_0 y f coinciden en $V(\Gamma_0)$. Se definirá una sucesión de grafos 2-conexos $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ y $\Gamma'_0, \Gamma'_1, \dots$ tal que, para cada $n \geq 1$, Γ_n es una extensión de una subdivisión de Γ_{n-1} , Γ'_n es una extensión de una subdivisión de Γ'_{n-1} , existe un isomorfismo plano g_n de Γ_n sobre Γ'_n coincidiendo con g_{n-1} en $V(\Gamma_{n-1})$, y Γ_n (respectivamente Γ'_n) consiste de C (respectivamente C') y arcos poligonales simples en $\overline{\text{int}}(C)$ (respectivamente $\overline{\text{int}}(C')$). Asumiendo también que $\Gamma'_n \setminus C'$ es conexo para cada n . Entonces se extiende f a $C \cup V(\Gamma_n)$ tal que

f y g_n coincide en $V(\Gamma_n)$.

Supongase que ya sea ha definido $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}, \Gamma'_0, \Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{n-1}$ y g_0, g_1, \dots, g_{n-1} . Se definirá Γ_n, Γ'_n y g_n como sigue. Considere el punto p_n . Si $p_n \in A$, entonces sea P un arco poligonal simple de p_n a un punto q_n de $\Gamma_{n-1} \setminus C$ tal que $\Gamma_{n-1} \cap P = \{p_n, q_n\}$. Sea Γ_n denota el grafo $\Gamma_{n-1} \cup P$. P es dibujo en una cara de Γ_{n-1} acotada por un ciclo S , dígase. Se añade a Γ'_{n-1} a un arco poligonal simple P' en la cara delimitada por $g_{n-1}(S)$ tal que P' une a $f(p_n)$ con $g_{n-1}(q_n)$ (si q_n es un vértice de Γ_{n-1}) o un punto en $g_{n-1}(a)$ (si a es una arista de Γ_{n-1} que contiene el punto q_n). Entonces se pone $\Gamma'_n = \Gamma'_{n-1} \cup P'$ y se define el isomorfismo plano g_n de Γ_n a Γ'_n de manera obvia. Se extiende f tales que $f(q_n) = g_n(q_n)$.

Si $p_n \in B$ se considera el cuadrado más grande que tiene lados verticales y horizontales, que tiene p_n como punto medio y que está en $\overline{int}(C)$. En este cuadrado (cuyos lados no se van a agregar a Γ_{n-1} como pueden contener infinitamente muchos puntos de C) se dibuja un nuevo cuadrado con lados verticales y horizontales cada uno de los cuales tiene distancia $< 1/n$ de los lados del primer cuadrado. Dentro del nuevo cuadrado se dibujan líneas verticales y horizontales tales que p_n está en una línea vertical y una línea horizontal y tal que todas las regiones en el cuadrado tienen diámetro $< 1/n$. Sea H_n la unión de Γ_{n-1} y los nuevos segmentos de línea recta horizontal y vertical posiblemente junto con un arco poligonal adicional en $int(C)$ para hacer que H_n 2-conexo y $H_n \setminus C$ conexo. Mediante el Lema 2.2.5, H_n se puede obtener de Γ_{n-1} añadiendo sucesivamente caminos en caras. Se añaden los caminos correspondientes a Γ'_{n-1} y se obtiene un grafo H'_n que es un plano isomorfo a H_n . Entonces se añaden líneas verticales y horizontales en $\overline{int}(C')$ a H'_n de manera que el grafo resultante no tenga una región (delimitada) de diámetro $\geq 1/2n$. Si es necesario, se desplazan algunas de las líneas un poco tal que intersecan C' sólo en $f(A)$ y tal que todas las regiones acotadas tienen diámetro $< 1/n$ y tal que cada una de las nuevas líneas tiene solamente intersección finita con H'_n . Esto extiende H'_n en un grafo que se denota por Γ'_n . Se suma a H_n arcos poligonales tales que se obtiene un grafo Γ_n en plano-isomorfo a Γ'_n . Entonces se extiende f tal que se define en $C \cup V(\Gamma_n)$ y coincide con el plano-isomorfismo g_n en $V(\Gamma_n)$. Cuando se extendiendo H'_n en Γ'_n y H_n en Γ_n , se están añadiendo muchos aristas y quizás es difícil

visualizar lo que está pasando. Sin embargo, el Lema 2.2.5 establece que se puede ver la extensión de H'_n en Γ'_n como el resultado de una sucesión de extensiones simples, cada una de las cuales consiste en la adición de un camino (que en este caso es un segmento de línea recta en una cara). A continuación, se realiza sucesivamente las adiciones correspondientes en H_n . Tenga en cuenta que se tiene mucha libertad para eso ya que dado el actual f sólo se define en el conjunto de vértices actual. Las imágenes de los puntos en las aristas actuales no se han especificado todavía. De esta manera, se extiende f a una aplicación inyectiva definida en $F = C \cup V(\Gamma_0) \cup V(\Gamma_1) \cup \dots$ y con la imagen $C' \cup V(\Gamma'_0) \cup V(\Gamma'_1) \cup \dots$. Estos conjuntos son densos en $\overline{int}(C)$ y $\overline{int}(C')$, respectivamente. Si p es un punto en $int(C)$ sobre el cual f no está definido todavía, entonces se considera una sucesión q_1, q_2, \dots que converge a p y que consiste en puntos en $V(\Gamma_0) \cup V(\Gamma_1) \cup \dots$. Se va a demostrar que $f(q_1), f(q_2), \dots$ converge y sea $f(p)$ el límite. Sea d la distancia de p a C y sea p_n un punto de B de distancia $< d/3$ de p . Entonces p está dentro del cuadrado más grande en $\overline{int}(C)$ teniendo p_n como punto medio (y también dentro de lo que se llama el nuevo cuadrado si n es suficientemente grande). Por la construcción de Γ_n y Γ'_n se deduce que Γ_n tiene un ciclo S tal que $p \in int(S)$ y tal que tanto S como $g_n(S)$ están en discos de radio $< 1/n$. Como f aplica $F \cap int(S)$ en $int(g_n(S))$ y $F \cap \overline{ext}(S)$ en $\overline{ext}(g_n(S))$, se sigue en particular, que la sucesión $f(q_m), f(q_{m+1}), \dots$ está en $int(g_n(S))$ para algún m . Como n puede ser elegido arbitrariamente largo $f(q_1), f(q_2), \dots$, es una sucesión de Cauchy y, por lo tanto, convergente. Se deduce que f está bien definida. Además usando la notación de arriba, f aplica $int(S)$ en $int(g_n(S))$. Por tanto f es continua en $int(C)$. Puesto que $V(\Gamma'_0) \cup V(\Gamma'_1)$ es denso en $int(C')$ el mismo argumento muestra que f aplica $int(C)$ a $int(C')$ que f es inyectiva y que f^{-1} es continua en $int(C')$. Sólo queda demostrar que f es continua sobre C . (Entonces también f^{-1} es continua como $\overline{int}(C)$ es compacto). Para probar esto es suficiente considerar una sucesión q_1, q_2, \dots de puntos en $int(C)$ que converge a q en C y entonces demuestre que $f(q_1), f(q_2), \dots$ converge a $f(q)$. Suponga, pues, que esto no es el caso. Como $\overline{int}(C')$ es compacto se puede asumir (considerando una subsección apropiada, si es necesario) que $\varinjlim f(q_n) = q' \neq f(q)$. Como f^{-1} es continua en $int(C')$, q' está en C' . Como A es denso en C , $f(A)$ es denso en C' y, por tanto, cada

uno de los dos arcos en C' de q' a $f(q)$ contiene un punto $f(q_1)$ y $f(q_2)$, respectivamente, en $f(A)$. Para algún n , Γ_n tiene un camino P de q_1 a q_2 teniendo sólo q_1 y q_2 , en común con C . Por el Lema 2.2.9, P separa $\text{int}(C)$ en dos regiones. Estas dos regiones están aplicadas en las dos regiones distintas de $\text{int}(C') \setminus g_n(P)$. Una de ellas contiene casi toda la $f(q_n)$ mientras que la otra tiene $f(q)$ en su frontera, pero no la frontera común a ambas regiones. Por lo que no se puede tener $\varinjlim f(q_n) = q'$. Esta contradicción muestra que f tiene la extensión apropiada a $\text{int}(C)$.

Por argumentos similares, f puede extenderse a $\text{ext}(C)$. Considere un sistema de coordenadas en el plano. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\text{int}(C)$ contiene el origen y que tanto C como C' están en el interior del cuadrángulo T con esquinas $(\pm 1, \pm 1)$. Sean L_1, L_2, L_3 los segmentos de líneas (en líneas a través del origen) de $(1, 1), (-1, -1)$ y $(1, -1)$, respectivamente, a C . Sea p_i el extremo de L_i en C para $i = 1, 2, 3$. Sean L'_1 y L'_2 arcos poligonales de $f(p_1)$ a $(1, 1)$ y de $f(p_2)$ a $(-1, -1)$, respectivamente, de modo que $L'_1 \cap L'_2 = \emptyset$ y L'_i tiene solamente sus extremos en común con C' y T para $i = 1, 2$. Es fácil ver que se puede encontrar un arco poligonal L'_3 de $f(p_3)$ o a $(1, -1)$ o a $(-1, 1)$ tal que L'_3 es disjunto de $L'_1 \cap L'_2$ y tiene sólo sus extremos en común con C' y T . Después de una reflexión de C' en la línea a través de $(1, 1)$ y $(-1, -1)$, si es necesario, se puede asumir que L'_3 va a $(1, -1)$. Ahora se puede usar el método de la primera parte de la prueba para extender f a un homeomorfismo de $\overline{\text{int}}(T)$ tal que f es la identidad en T . Entonces f se extiende a un homeomorfismo de todo el plano tal que f es la identidad en $\text{ext}(T)$. \square

Si F es un conjunto cerrado en el plano, entonces se dice que el punto p en F es *curva-accesible* si, para cada punto q no en F , existe un arco simple de q a p teniendo sólo p en común con F . El Teorema de Jordan-Schönflies implica que todo punto en una curva cerrada simple es curva-accesible. Se tiene la extensión de la parte del Teorema 2.2.2.

Teorema 2.2.4. *Si F es un conjunto cerrado en el plano con al menos tres puntos curva-accesibles, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus F$ tiene a lo sumo dos regiones.*

En el teorema 2.2.4, “tres” no puede ser remplazado por “dos”. Ver esto, sea F una colección arcos simples disjuntos enteramente entre dos puntos fijos.

Teorema 2.2.5. *Si Γ y Γ' son grafos planos 2-conexos tal que g es un homeomorfismo y plano-isomorfo de Γ sobre Γ' . Entonces g puede extenderse a un homeomorfismo de todo el plano.*

Demostración. La prueba es por inducción en el número de aristas de Γ .

Si Γ es un ciclo entonces este teorema se reduce al Teorema 2.2.3. Además se sigue del Lema 2.2.5 que Γ tiene un camino P y un subgrafo 2-conexo Γ_1 conteniendo el ciclo exterior de Γ tal que Γ es obtenido de Γ_1 mediante la adición P en $\overline{\text{int}}(C)$ donde C limita una cara de Γ_1 .

Ahora se aplica la hipótesis inductiva primero a Γ_1 y entonces a los dos ciclos de $C \cup P$ que contiene P . □

2.2.4.3. Triangulando una Superficie.

Considere una colección finita de polígonos convexos disjuntos dos a dos (junto con sus interiores) en el plano tal que todos los lados son de longitud 1. Forme un espacio topológico S como sigue: *Cada lado en un polígono se identifica con precisamente un lado en otro(o en el mismo) polígono.* Esto también define un grafo G cuyos vértices son las esquinas y las aristas los lados. Claramente S es compacta. Ahora S es una superficie, si S es conexa (es decir, G es conexa) y S es localmente homeomorfa un disco a cada vértice v de G . Si este es el caso entonces se dice que G es una **2-celda embebida**(inscrustación de 2 célula) en S . Si todos los polígonos son triángulos, entonces se dice que G es una *triangulación* de S y que S es una *superficie triangulada*. En caso de una triangulación se debe asumir que existen al menos cuatro triángulos y que no existen aristas múltiples.

Teorema 2.2.6. *Toda superficie S es homeomorfa a una superficie triangulable.*

Demostración. Como el interior de un polígono convexo puede ser triangulable es suficiente para demostrar que S es homeomorfa a una superficie con una 2-celda embebida. Sea S una superficie, se sabe que para cada punto $p \in S$, existe un disco $D(p)$ del plano que es homeomorfo a un entorno abierto U de p en S . (En lugar de especificar un homeomorfismo se usa la misma notación para un punto en $D(p)$ y el punto correspondiente en S). En $D(p)$ se dibujan dos cuadrángulos $Q_1(p)$ y $Q_2(p)$ tal que

$$p \in \text{int}(Q_1(p)) \subset \text{int}(Q_2(p)).$$

Como S es compacta, tiene un número finito de puntos p_1, p_2, \dots, p_n para los que se puede repetir la construcción anterior tal que

$$S = \bigcup_{i=1}^n \text{int}(Q_1(p_i)).$$

No hay inconveniente alguno suponer que los subconjuntos $D(p_1), \dots, D(p_n)$ son fijos y disjuntos dos a dos en el plano (teniendo en cuenta, a pesar, que ellos también corresponden a subconjuntos de S). Sin embargo se modifica se modifica el homeomorfismo entre $D(p_i)$ y el correspondiente conjunto en S y considerar nuevos cuadrángulos $Q_1(p_i)$. En concreto se demostrará que los $Q_1(p_1), \dots, Q_1(p_n)$ pueden ser elegidos de tal manera que se forma una 2-celda embebida S . Suponga, por inducción en k , que han sido elegidos de tal forma que cualquier par de

$$Q_1(p_1), Q_1(p_2), \dots, Q_1(p_{k-1})$$

tienen sólo un número finito de puntos en común en S . Ahora se centra en $Q_2(p_k)$. Se define un *segmento malo* como un segmento P de algún $Q_1(p_j)$ ($1 \leq j \leq k-1$) que une a dos puntos de $Q_2(p_k)$ y que tiene todos los demás puntos en $\text{int}(Q_2(p_k))$.

Sea $Q_3(p_k)$ un cuadrado entre $Q_1(p_k)$ y $Q_2(p_k)$. Se dice que un segmento malo dentro de $Q_2(p_k)$ es un *segmento muy malo* si interseca a P pero no interseca a ningún otro segmento malo. Puede haber una cantidad infinita de segmentos malos pero sólo una cantidad finita de segmentos muy malos. El segmento muy malo junto con $Q_2(p_k)$ forma un grafo Γ 2-conexo. Al redibujar Γ dentro de $Q_2(p_k)$ tal que se obtiene un grafo Γ' que

es plano-isomorfo a Γ y talque todas las arista de Γ' son arcos poligonales simples. Esto se puede hacer usando el Lema 2.2.5.

Ahora se aplica el Teorema 2.2.5 para extender el isomorfismo plano de Γ a Γ' a un homeomorfismo de $\overline{\text{int}Q_2(p_k)}$ manteniendo fijo a $Q_2(p_k)$. Esto transforma $Q_1(p_k)$ y $Q_3(p_k)$ en curvas cerradas simples Q'_1 y Q'_3 tal que $p_k \in \text{int}Q'_1 \subseteq \text{int}Q'_3$. Considere una curva poligonal cerrada simple Q''_3 en $Q_2(p_k)$ tal que $Q'_1 \subseteq \text{int}Q''_3$ y tal que Q''_3 no interseca segmentos malos excepto en un segmento muy malo (que son ahora arcos poligonales simples). (La existencia de Q''_3 se puede establecer de la siguiente manera: para todo punto p en Q'_3 , sea $R(p)$ un cuadrado con p como punto medio tal que $R(p)$ no interseque ni a Q'_1 ni ningún segmento malo que no sea segmento muy malo. Se considera un cubrimiento finito (minimal) de Q'_3 por tales cuadrados. La unión de estos cuadrados es un grafo plano 2-conexo cuyo ciclo externo puede jugar el rol de Q''_3). Al redibujar $\Gamma' \cup Q''_3$ (que es un grafo 2-conexo) y utilizando el Teorema 2.2.5 una vez más se puede asumir que Q''_3 es de hecho un cuadrángulo que tiene Q'_1 en su interior. Si Q''_3 es la nueva elección de $Q_1(p_k)$, entonces cualquiera dos de $Q_1(p_1), \dots, Q_1(p_k)$ tiene sólo intersección finita. La hipótesis inductiva es probada para todo k .

Por lo tanto, se puede asumir que existe sólo un número finito de segmentos muy malos dentro de cada $Q_2(p_k)$ y que estos segmentos son arcos poligonales simples formando un grafo plano 2-conexo. La unión

$$\bigcup_{i=1}^n Q_1(p_i)$$

puede ser pensada como un grafo Γ dibujado en S . Cada región de $S \setminus \Gamma$ está acotada por un ciclo C en Γ . (Se puede pensar en C como una curva poligonal cerrada simple dentro de algún $Q_2(p_i)$). Ahora dibuje un polígono convexo C' de lado de longitud 1 tal que las esquinas de C' correspondan a los vértice de C . La unión de los polígonos C' forma una superficie S' con una 2 celda embebida Γ' que es isomorfa a Γ . Un isomorfismo de Γ a Γ' puede extenderse a un homeomorfismo f del conjunto de puntos de Γ en S sobre el conjunto de puntos de Γ' en S' . En particular, la restricción de f al anterior ciclo C es un homeomorfismo en C' . Por el Teorema 2.2.3, f puede extenderse a un homeomorfismo de $\overline{\text{int}(C)}$ a $\overline{\text{int}(C')}$. Esto define un homeomorfismo de S sobre S' .

□

2.2.5. Teorema de Clasificación de Superficies

En esta subsección se demostrará el Teorema de Clasificación de Superficies. Pero, como una preparación para la prueba, se describirá lo que podría ser llamada la "Representación canónica" de la suma conexa de n -toros y la suma conexa de m -planos proyectivos reales. Los conceptos desarrollados en esta subsección serán útiles en el Capítulo III.

2.2.5.1. Representación canónica de la suma conexa de n -toros.

Como se recordará del Resultado 2.2.1, cada toro \mathbb{T}^2_1 y \mathbb{T}^2_2 es el espacio cociente del cuadrado unitario, identificando las aristas opuestas, como se indica en las siguientes Figuras 2.21.

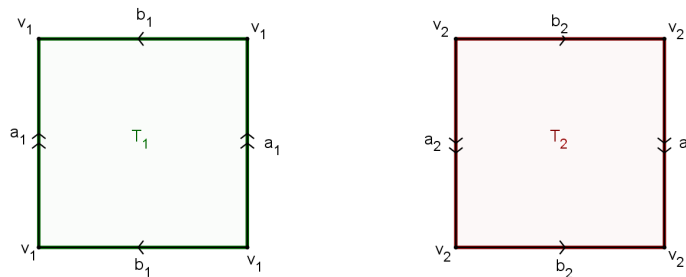
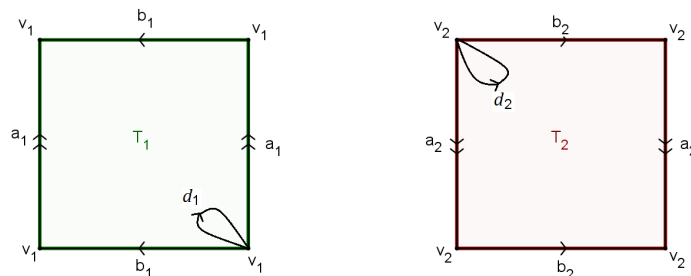


Figura 2.21: Representación poligonal de dos toros, \mathbb{T}^2_1 y \mathbb{T}^2_2 .



Observe que los cuatro vértices de cada cuadrado unitario están identificados (es decir, que los cuatro vértices por medio de una relación de equivalencia es un mismo punto) y convertido en un solo punto en el toro. Para formar la suma conexa, recortamos un agujero circular en cada toro y se designa por d_1 y d_2 los bordes de los agujeros como se indican en las figuras. Luego se representan los dos toros \mathbb{T}^2_1 y \mathbb{T}^2_2 con discos

abiertos removidos puede verse como se muestra en la Figura 2.22 (esto sucede al estirarse el vértice).

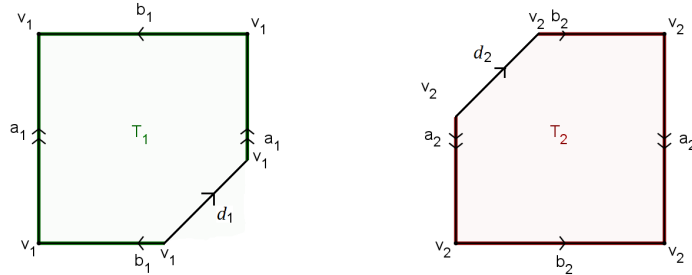


Figura 2.22: Los toros \mathbb{T}^2_1 y \mathbb{T}^2_2 con los interiores de los discos removidos y con las fronteras de los discos.

Al complementar la suma conexas de los dos toros, pegamos a lo largo de los dos círculos d_1 y d_2 , como en la Figura 2.23.

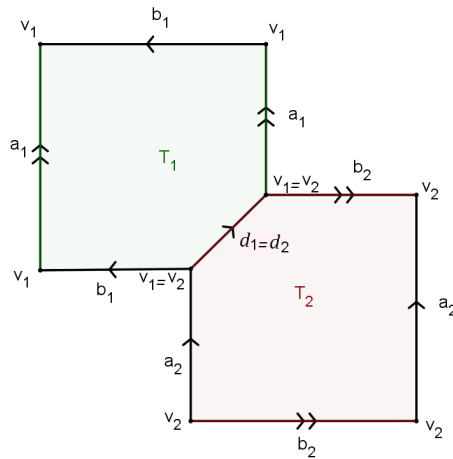


Figura 2.23: Representación poligonal de $\mathbb{T}^2_1 \# \mathbb{T}^2_2$ de dos Toros.

Así la suma conexa de dos toros se puede representar como el octágono demostrado en la Figura 2.24. Notese que los ocho vértices(v_3) del octágono están identificados en un solo punto de $\mathbb{T}^2_1 \# \mathbb{T}^2_2$, este octágono con las aristas identificadas en pares es nuestra deseada "representación canónica" para la suma conexa de dos toros. El esquema es $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$ (comenzo del vértice superior).

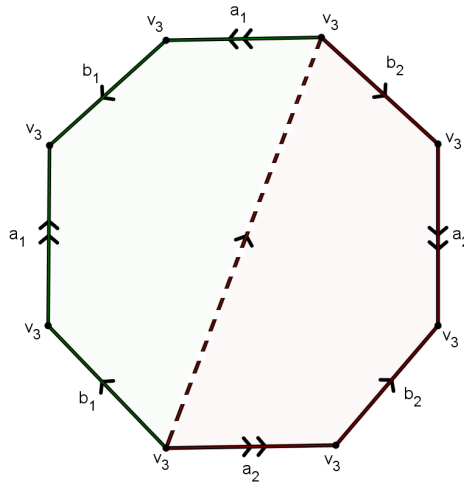


Figura 2.24: Representación canónica de $\mathbb{T}^2_1 \# \mathbb{T}^2_2$.

Si se hace este mismo procedimiento para la suma conexa de tres toros(tomando la suma conexa de dos toros antes dada), entonces será obtenida identificando los lados de un 12-gono en pares, con esquema $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}a_3b_3a_3^{-1}b_3^{-1}$ (Figura 2.25).

Generalizando se presenta la siguiente definición:

Definición 2.2.13. Sea N el espacio cociente obtenido de un polígono P de $4n$ -aristas por medio del esquema

$$(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1})\dots(a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}).$$

Este espacio se llama **suma conexa de n toros** o simplemente **n -toro**, se denotará por $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$.

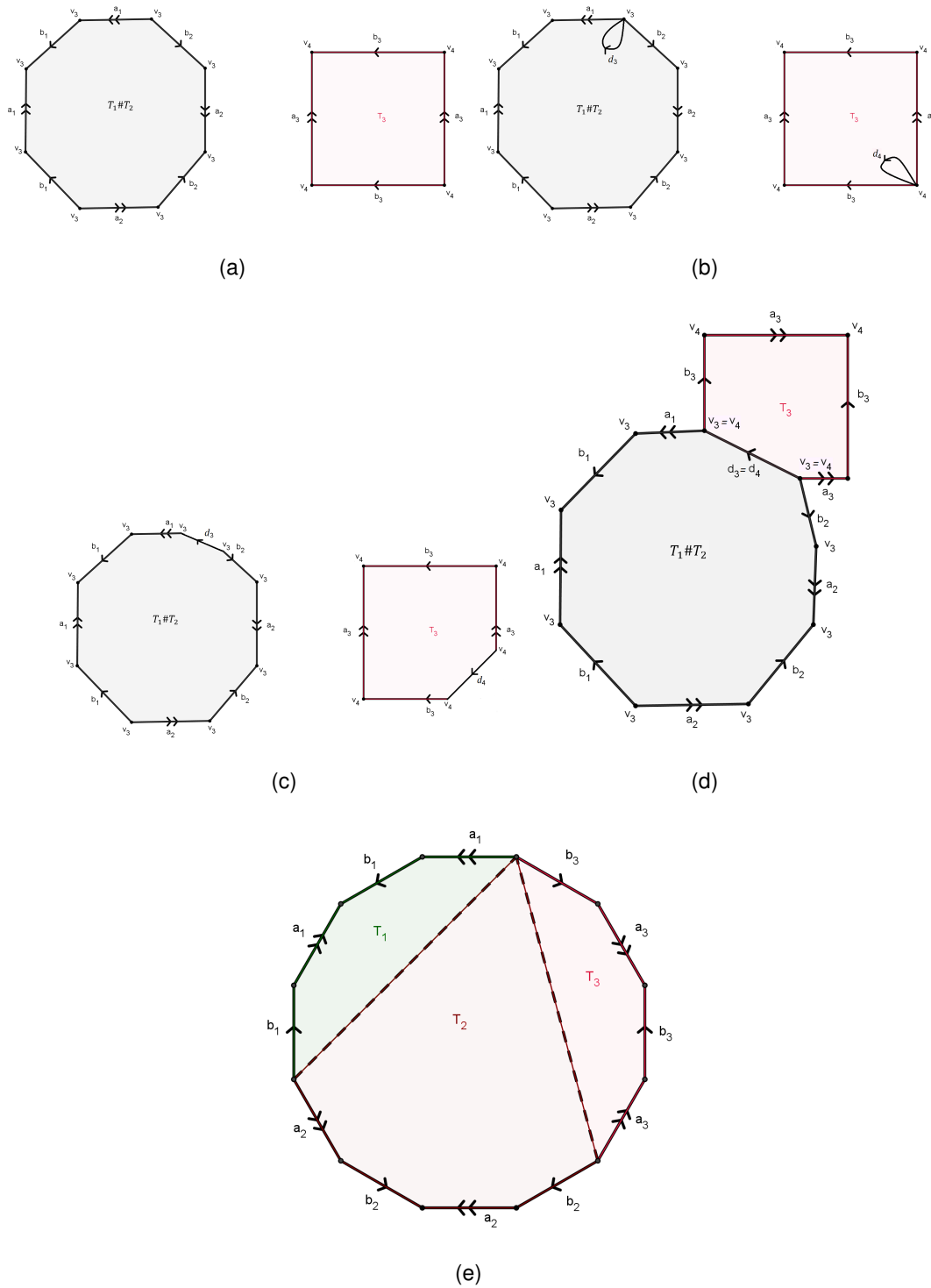
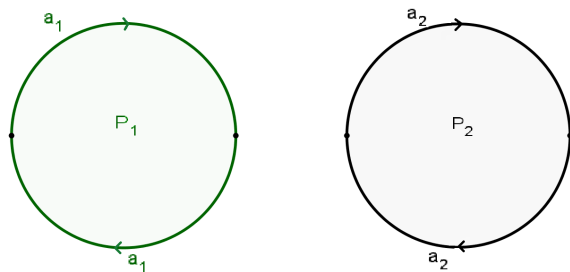


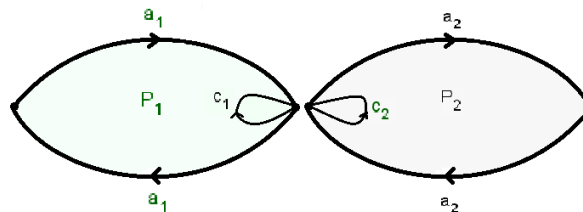
Figura 2.25: Representación poligonal de $\mathbb{T}^2_1 \# \mathbb{T}^2_2 \# \mathbb{T}^2_3$.

2.2.5.2. Representación canónica de la suma conexa de m -planos proyectivos.

Se considera un procedimiento análogo para la suma conexa de dos planos proyectivos reales. Se vió en el Resultado 2.2.1 literal 1), el plano proyectivo como el espacio cociente de un disco circular (Figura 2.8); puntos antipodales sobre la frontera son identificados. Tomando dos planos proyectivos reales, en cada uno se eligen un par de puntos antipodales en la frontera como vértices, la circunferencia del disco es dividida en dos segmentos. Así, se puede considerar el plano proyectivo real como obtenido de un 2-agono por la identificación de las dos aristas. La Figura 2.26, demuestra como obtener una representación canónica de la suma conexa de dos planos proyectivos como un cuadrado con las aristas identificadas en pares. El método es básicamente el mismo como el que se utiliza para obtener la suma conexa de dos toros como un espacio cociente de un octágono. El esquema es $a_1a_1a_2a_2$ (en sentido a las manecillas del reloj).



(a)



(b)

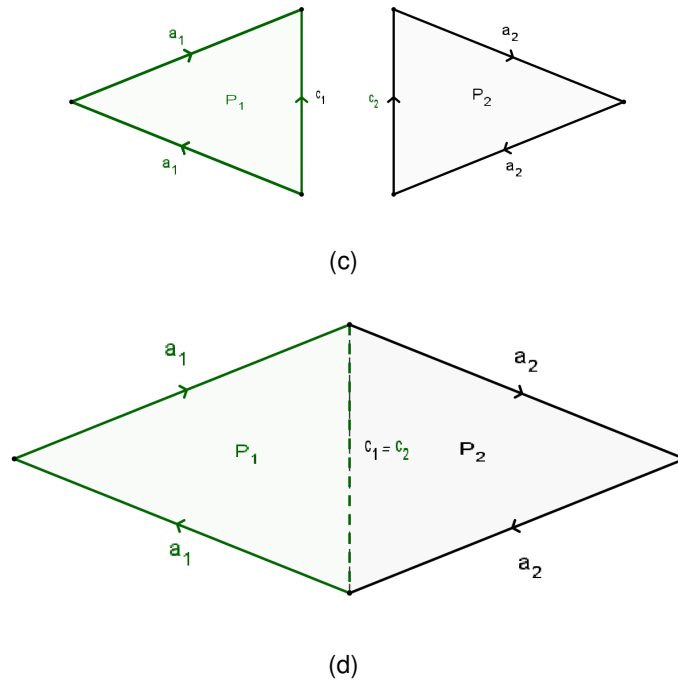


Figura 2.26: Representación poligonal de $\mathbb{RP}_1 \# \mathbb{RP}_2$.

Definición 2.2.14. Sea $m \geq 1$ y M el espacio cociente obtenido de un polígono P de $2m$ -aristas por medio del esquema

$$(a_1 a_1)(a_2 a_2) \dots (a_m a_m).$$

Este espacio se llama **suma conexa de m planos proyectivos reales** o simplemente **m -planos proyectivos reales**, se denotará por $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$.

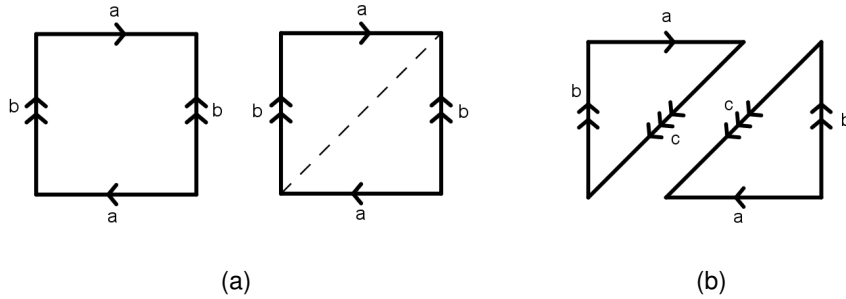
Lema 2.2.11. *La botella de Klein es la suma conexa de dos planos proyectivos reales.*

$$\mathbb{K}^2 \approx \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$$

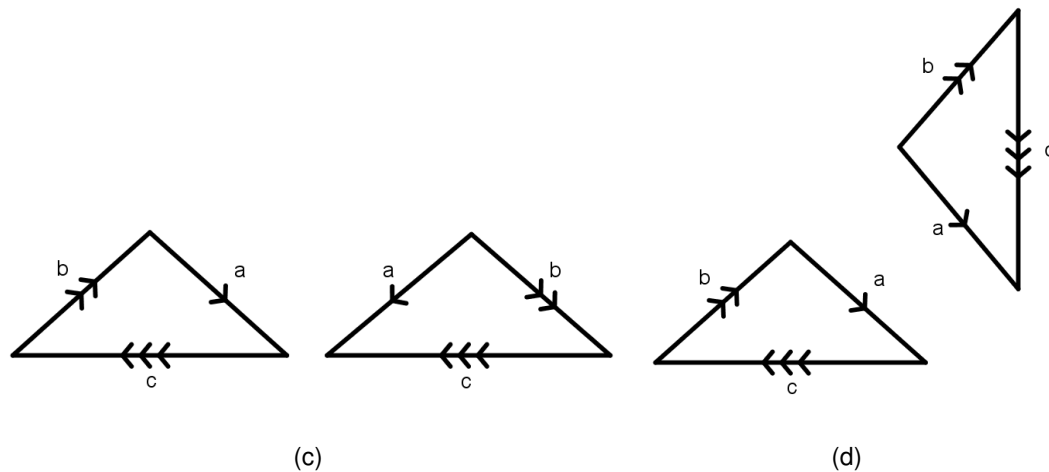
Demostración. Se presenta una demostración geométrica.

Se comienza con la botella de Klein, que tiene como esquema $a^{-1} b a^{-1} b^{-1}$ y se representa por un cuadrado, al cuadrado se le traza una diagonal, como se muestra en Figura (a).

Después se corta el cuadrado justo sobre su diagonal, etiquetada por c , teniendo como resultado dos triángulos iguales con sus aristas etiquetadas y orientadas (Figura



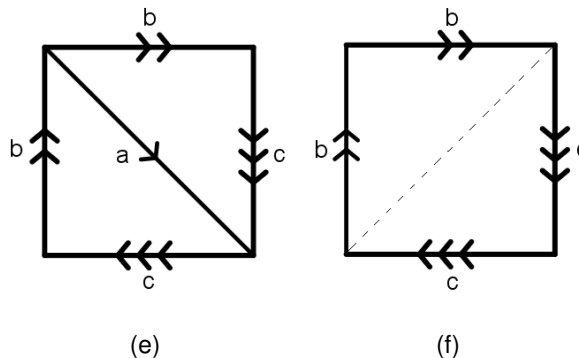
(b)), los cuales se giran de manera que, las aristas etiquetadas por a queden juntas para poderse pegar (como se ve en (c) y (d)) por medio de una aplicación lineal,



ya pegadas se obtiene un polígono que es homeomorfo a un cuadrado con pares de aristas orientadas y etiquetadas por b y c (ver Figura (e)) teniendo como esquema $bbcc$ que es lo mismo como obtener dos planos proyectivos reales cada uno homeomorfo a un polígono con aristas identificadas con esquema bb y cc respectivamente, así esta última figura es la representación de la suma conexa dos planos proyectivos reales. \square

Lema 2.2.12. *La suma conexa de un toro y un plano proyectivo real es homeomorfa a la suma conexa de tres planos proyectivos reales.*

$$T^2 \# \mathbb{R}P^2 \approx \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$$



Demostración. Se desea probar que:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^2 \# \mathbb{R}P^2 &\approx \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \\ &\approx (\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2) \# \mathbb{R}P^2 \\ &\approx \mathbb{K}^2 \# \mathbb{R}P^2. \end{aligned}$$

En el Lema 2.2.11 se demostró que la suma conexas de dos planos proyectivos reales es homeomorfa a una botella de Klein. Por lo tanto, se debe probar que la suma conexas de un toro y un plano proyectivo real es homeomorfa a la suma conexas de un plano proyectivo y una botella de Klein

$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{R}P^2 \approx \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{K}^2$$

Para hacer esto, será conveniente dar una construcción alternativa para una suma conexas de cualquier superficie S con un toro o una botella de Klein, es decir, para $S \# \mathbb{T}^2$ ó $S \# \mathbb{R}P^2$. Como ya se vió en el Resultado 2.2.1, el toro y la botella de Klein se pueden representar como rectángulos con sus aristas identificadas.

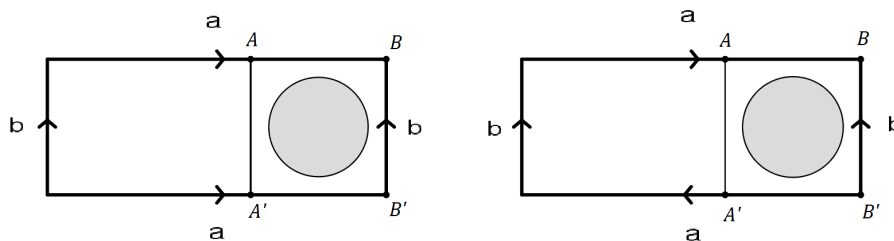


Figura 2.27: toro con un agujero y botella de Klein con un agujero

Para formar la suma conexa, primero se corta el disco que está sombreado en los diagramas de la Figura 2.27, cortar un agujero similar en S . Sin embargo, en vez de hacer el pegado del toro o la botella de Klein en un paso, se puede hacer en dos etapas:

- *Primera etapa*; Pegar sobre la parte del toro o la botella de Klein que es la imagen del rectángulo $ABB'A'$ bajo la identificación, y después pegar sobre el resto del toro o botella de Klein. En esta etapa se forma la suma conexa de S con un tubo abierto o cilindro. Tal tubo abierto o cilindro es homeomorfa a una esfera con los agujeros cortados en ella, y como la suma conexa de S con una esfera es S (por propiedad de suma conexa), por lo tanto, el espacio resultante de la primera etapa es homeomorfa a la superficie original S con dos agujeros cortados en ella.
- *Segunda etapa*; conecte las fronteras(o bordes) de estos dos agujeros con un tubo que es lo restante del toro o la botella de Klein. La diferencia entre los dos casos depende de si se conectan las fronteras así ellos tendrían orientaciones iguales u opuestas. Esto es ilustrado en la Figura 2.28, donde S es una banda de Möbius. Ahora se afirma que los dos espacios mostrados en las Figuras 2.28(a) y 2.28(b)

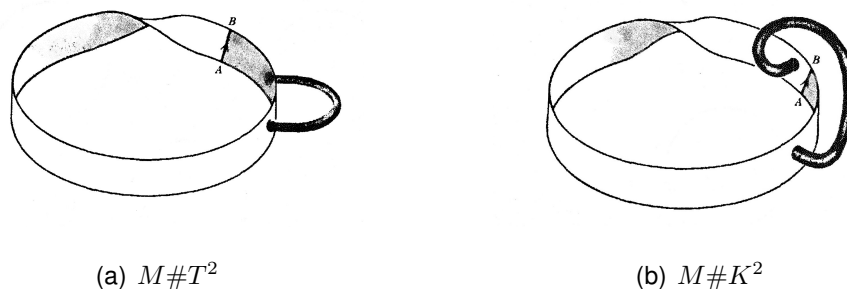


Figura 2.28: (a) Suma conexa de una banda de Möbius y un toro. (b) Suma conexa de una banda de Möbius y una botella de Klein.

(es decir, la suma conexa de una banda de Möbius con un toro y una botella de Klein respectivamente) son homeomorfas. Para ver esto, imagínese que se corta cada uno de estos espacios topológicos a lo largo de los segmentos AB . En cada caso, el resultado es la suma conexa de un rectángulo con un toro, con los extremos del rectángulo de ser identificados con un giro, como se muestra en la Figura 2.29. Por lo tanto, los dos espacios son homeomorfos.

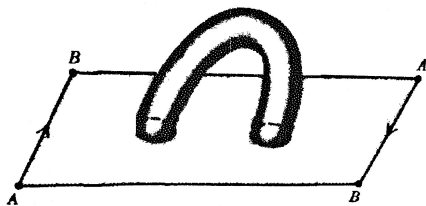


Figura 2.29: Resultado de cortar los espacios sobre el segmento AB .

El plano proyectivo se puede obtener por pegar la frontera de un disco a la frontera de una banda de Möbius (así el plano proyectivo real puede pensarse como una banda de Möbius a la que se ha cocido un disco, como se muestra en la Figura 2.30).

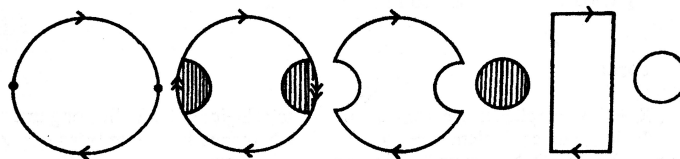


Figura 2.30: Banda de Möbius a la que se le ha cocido un disco.

Como $M\#T^2 \approx M\#K^2$ (mostrado en la Figura 2.28 y 2.29), y son los espacios obtenidos por pegar un disco sobre cada frontera. Así, la suma conexa de un plano proyectivo real con un toro es homeomorfa a la suma conexa de una botella de Klein con un plano proyectivo real, $RP^2\#T^2 \approx RP^2\#K^2$, como se quería probar \square

Teorema 2.2.7 (Teorema de Clasificación de las superficies). *Si S es una superficie compacta, entonces es homeomorfa a uno de los siguientes:*

a) La esfera: aa^{-1} .

b) La suma conexa de n toros:

$$(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1})\dots(a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}).$$

c) La suma conexa de m planos proyectivos:

$$(a_1a_1)(a_2a_2)\dots(a_ma_m).$$

Demostración. Se desea probar que S es homeomorfa a una de las superficies listadas, para eso se consideran los siguientes pasos:

PRIMER PASO: Como S es una superficie compacta y por el Teorema 2.2.6, S es triangulable. Se denotará por n el número de triángulos. Se enumeran los triángulos T_1, T_2, \dots, T_n , así que el triángulo T_i tiene una arista e_i en común con al menos uno de los triángulos T_1, \dots, T_{i-1} , $2 \leq i \leq n$.

Ahora, se etiqueta cualquiera de los triángulos T_1 ;

T_2 cualquier triángulo que tenga una arista en común con T_1 ,

T_3 cualquier triángulo que tenga una arista en común con T_1 o T_2 , etc. Si en alguna etapa no se podría continuar este proceso, entonces se tendrán dos conjuntos de triángulos $\{T_1, \dots, T_k\}$ y $\{T_{k+1}, \dots, T_n\}$ tal que ningún triángulo en el primer conjunto tendría una arista o vértices en común con cualquier triángulo en el segundo conjunto. Pero esto daría una partición de S en dos conjuntos cerrados no vacíos disjuntos, contradiciendo la hipótesis de que S esta conectada es decir, conexa.

Ahora se utiliza este ordenamiento de los triángulos T_1, \dots, T_n , junto con la elección de aristas e_2, e_3, \dots, e_n , para construir un "modelo" de la superficie S en el plano Euclidiano; Este modelo será un polígono cuyos lados serán identificados en pares. Recuérdese que para cada triángulo T_i existe un triángulo Euclidiano ordinario $T'_i \in \mathbb{R}^2$ y un homeomorfismo φ_i de T'_i sobre T_i (por Definición 2.2.3). Se puede suponer que los triángulos T'_1, T'_2, \dots, T'_n son disjuntos dos a dos; si no lo son, se puede trasladar algunos de ellos a otras del plano \mathbb{R}^2 . Sea

$$T' = \cup_{i=1}^n (T'_i)$$

entonces T' es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 .

Se define la aplicación:

$$\varphi : T' \longrightarrow S$$

por $(\varphi|_{T'_i}) = \varphi_i$, la aplicación φ es continua y sobreyectiva. Como T' es compacto y S es un espacio Hausdorff, φ es una aplicación cerrada, y por tanto S tiene la topología cociente inducida por φ . Esto es una declaración matemática rigurosa de

la idea intuitiva de que S es obtenida pegando los triángulos T_1, T_2, \dots , justo a lo largo de las aristas apropiadas.

El polígono deseado será construido como un espacio cociente de T' . Consideré cualquiera de las aristas $e_i, 2 \leq i \leq n$. Por hipótesis, e_i es una arista del triángulo T_i y de otro triángulo T_j , para los que $1 \leq j < i$. Por lo tanto, $\varphi^{-1}(e_i)$ consiste de una arista del triángulo T'_i y una arista del triángulo T'_j . Identificando estas dos aristas de los triángulos T'_i y T'_j por la identificación de los puntos que aplica por φ sobre el mismo punto de e_i (intuitivamente hablando se pegan los triángulos T'_i y T'_j). Se hacen estas identificaciones para cada una de las aristas e_2, e_3, \dots, e_n . Sea D el espacio cociente resultante de T' . Es claro que la aplicación $\varphi : T' \rightarrow S$ induce una aplicación $\psi : D \rightarrow S$, y además S tiene la topología cociente inducida por ψ (como D es compacta y S es Hausdorff, ψ es una aplicación cerrada). Ahora se afirma que topológicamente D es un disco cerrado. La demostración depende de dos hechos:

- a) Sean E_1 y E_2 espacios disjuntos, los cuales topológicamente son discos cerrados (es decir, son homeomorfos a E^2). Sean A_1 y A_2 subconjuntos de la frontera de E_1 y E_2 , respectivamente, los cuales son homeomorfos al intervalo cerrado I , y sea $h : A_1 \rightarrow A_2$ un homeomorfismo determinado. Se formará un espacio cociente de $E_1 \cup E_2$, por identificar puntos que corresponden bajo h . Entonces, topológicamente el espacio cociente es también un disco cerrado. Intuitivamente, significa que pegando dos discos justo a lo largo a un segmento común de sus bordes, el resultado es una vez más un disco.
- b) Formando el espacio cociente D de T' , se puede o tomar todas las identificaciones a la vez, o hacer las identificaciones correspondientes a e_2 , a continuación las correspondientes a e_3 , y así sucesivamente.

Usando estos dos hechos se probará que D es un disco, como sigue. T'_1 y T'_2 son topológicamente equivalente a discos. Por lo tanto, el espacio cociente de $T'_1 \cup T'_2$ obtenido por identificar puntos de $\varphi^{-1}(e_2)$ es una vez más un disco (por literal

a)). Luego se forma un espacio cociente de este disco $T'_1 \cup T'_2$ y T'_3 por hacer las identificaciones correspondientes a la arista e_3 y así sucesivamente.

Es claro que S es obtenida a partir de D por identificar ciertos pares de aristas en la frontera de D .

Ejemplo 2.2.4. La superficie de un cubo es triangulada al dividir cada cara en dos triángulos por una diagonal. El disco resultante D podría parecer el diagrama, dependiendo, por supuesto, sobre cómo los triángulos están enumerados, y cómo las aristas e_2, e_3, \dots, e_{12} fueron elegidas. Las aristas a D que han de ser identificadas y etiquetadas en la forma habitual. En este etapa, se pueden olvidar las aristas e_2, e_3, \dots, e_{12} . Así, en lugar del polígono en Figura 2.31, se podría trabajar igual de bien con el diagrama en la Figura 2.32.

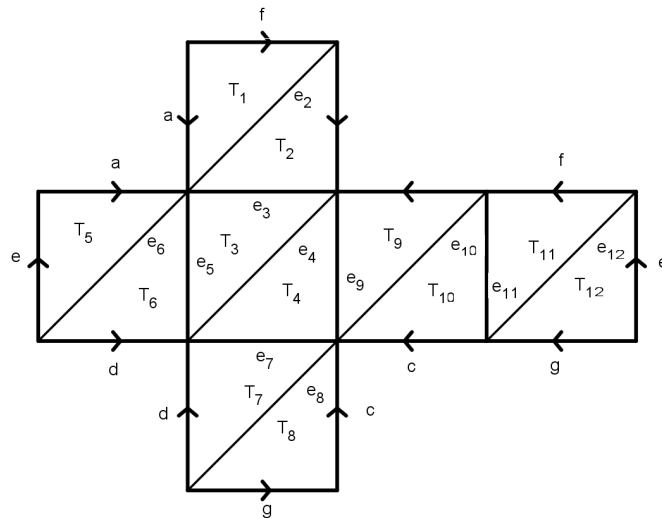


Figura 2.31: La figura muestra fácilmente una visualización del ejemplo.

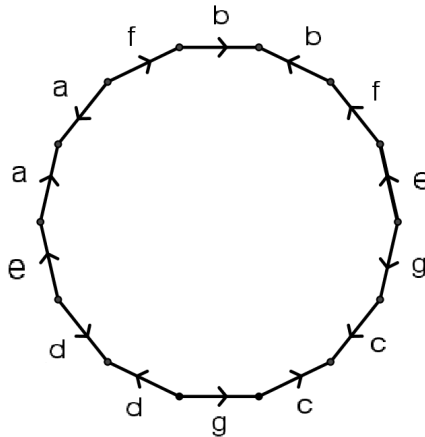


Figura 2.32: Trabajar con este diagrama

SEGUNDO PASO: Eliminación de aristas adyacentes de primer tipo. Se ha obtenido un polígono D cuyas aristas son identificadas en pares para obtener la superficie dada S . Estas identificaciones puede ser indicadas por el próximo esquema. Si la letra designada a cierto par de aristas ocurre con ambos exponentes, $+1$ y -1 , en el esquema, entonces se podría llamar al par de aristas un par de *primer tipo*; al contrario (en sentido a las manecillas del reloj), el par es de *segundo tipo*. (Por ejemplo en la Figura 2.32, tiene por esquema

$$aa^{-1}fbb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e,$$

los siete pares son de primer tipo). Se desea probar que un par de aristas adyacentes de primer tipo pueden ser eliminadas, solo si existe en el polígono al menos cuatro arista en total. Es fácil verlo de la secuencia de la Figura 2.33. Se continua este proceso hasta que todos los pares de este tipo son eliminados, o hasta obtener un polígono con solamente dos lados. En este último caso, la superficie sería homeomorfa a este polígono, cuyo esquema será aa o aa^{-1} , es decir, que puede ser un plano proyectivo real o una esfera, y se completa la prueba. De lo contrario, se procede como sigue.

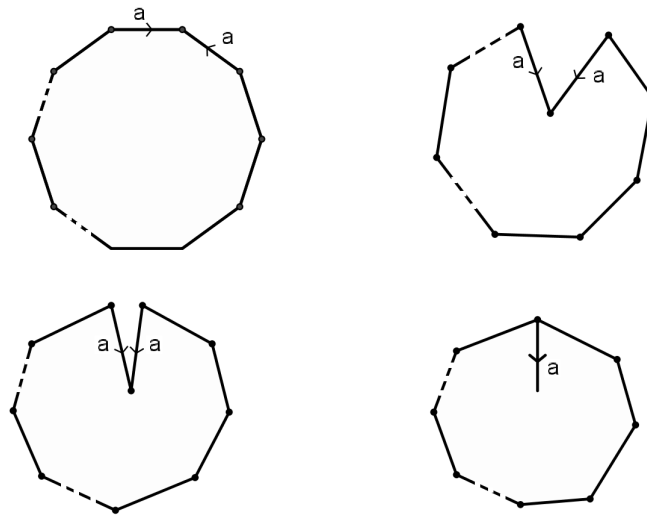


Figura 2.33: Eliminación de un par de aristas adyacentes de primer tipo.

TERCER PASO: Transformación a un polígono tal que todos los vértices estén

identificados a un solo vértice. A pesar de que las aristas del polígono dado, sean identificadas en pares, los vértices no, estos pueden ser identificados en conjuntos de uno, dos, tres, cuatro,... . A dos vértices del polígono se llaman *equivalentes* si y solo si, están identificados. En la Figura 2.32 existen ocho clases de equivalencias de vértices distintas. Algunas clases de equivalencias contienen solo un vértice, mientras que otras clases contiene dos o tres vértices.

Supóngase que se ha llegado a cabo el segundo paso las veces posibles. Se desea probar que se puede transformar el polígono en otro polígono con todos sus vértices perteneciendo a una clase de equivalencia.

Supóngase que existen al menos dos clases de equivalencias de vértices diferentes. Entonces, el polígono tiene un par de vértices adyacentes que son no equivalentes. Etiquetados por V_1 y V_2 . La Figura 2.34 muestra cómo proceder.

Como V_1 y V_2 son no equivalentes, y se ha realizado el segundo paso, se deduce que las aristas a y b no deben ser identificadas. Al hacer un corte a lo largo de la línea etiquetada por c , desde el vértice V_2 al otro vértice de la arista a (es decir, al vértice de la arista a , que es distinto de V_1).

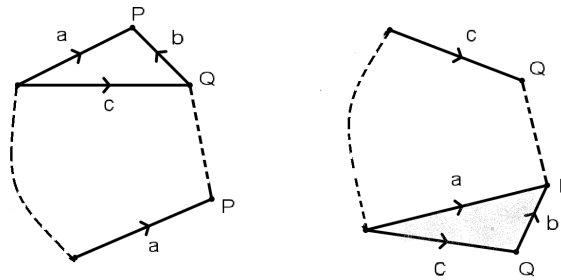


Figura 2.34: Transformación de un polígono a otro con todos sus vértices equivalentes.

Luego, se pegan las dos aristas etiquetadas por a . Un nuevo polígono con un vértice menos en la clase de equivalencia de V_1 y un vértice más en la clase de equivalencia de V_2 . Si es posible, se realiza el segundo paso de nuevo. A continuación, se lleva a cabo el tercer paso para reducir aún más el número de vértices en la clase de equivalencia de V_1 y luego, se vuelve hacer el segundo paso de nuevo. Se continúa alternativamente haciendo el tercer y segundo paso hasta que la clase de equivalencia de V_1 se elimine por completo. Si más de una clase de equivalencia de vértices permanece, se puede repetir este procedimiento para reducir el número a una clase de equivalencia.

Si se continúa de esta manera, finalmente se obtiene un polígono tal que todos los vértices deben ser identificados a solo un vértice.

CUARTO PASO: Cómo hacer cualquier par de aristas de segundo tipo adyacentes.

Se desea demostrar que la superficie dada puede ser transformada de modo que cualquier par de aristas del segundo tipo sean adyacentes entre sí. Supóngase que se tiene un par de aristas de la segunda clase que no son adyacentes, como en el primera diagrama de la siguiente figura.

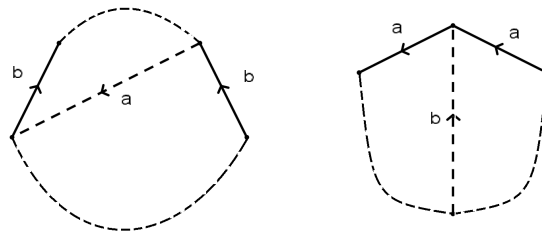


Figura 2.35: transformación de dos aristas de segundo tipo a adyacentes.

Corte a lo largo de la línea punteada etiquetada por a y pegar justo a lo largo de b . Como se muestra en el segundo diagrama de la Figura 2.35, las dos aristas son ahora adyacentes. Se continúa este proceso hasta que todos los pares de aristas del segundo tipo sean adyacentes. Si no hay pares del primer tipo, entonces se habrá terminado la prueba, porque el esquema del polígono debe entonces ser de la forma $a_1a_1a_2a_2a_na_n$, y por tanto S es homeomorfa a la suma conexa de n planos proyectivos.

Supóngase, por el contrario, que en esta etapa existe al menos un par de aristas del primer tipo, cada una de las cuales están etiquetadas por c . Entonces, se afirma que existe al menos otro par de aristas del primer tipo de tal manera que estos dos pares se separan entre sí, es decir, las aristas de los dos pares se producen alternativamente a medida que se avanza alrededor de la frontera del polígono. (Por lo tanto, el esquema debe ser de la forma $c\dots d\dots c^{-1}\dots d^{-1}\dots$, donde los puntos denotan la posible ocurrencia de otras letras).

Para demostrar esta afirmación, supóngase que las aristas etiquetadas por c no están separadas por ningún otro par del primer tipo. Entonces el polígono dado tiene el aspecto indicado en la Figura 2.36.

Donde A y B designan una secuencia de aristas. El punto importante es que cualquier arista en A debe ser identificada con otra arista en A , y similarmente para B . Ninguna arista en A debe ser identificada con una arista en B . Pero esto contradice el hecho de que los vértices iniciales y finales de las aristas etiquetadas por c debe identificarse, en vista del tercer paso.

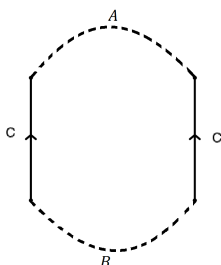


Figura 2.36: En caso que exista una arista de primer tipo.

QUINTO PASO: Pares de primer tipo. Supóngase, que se tienen dos pares de primer tipo que se separan como se describe. Véase la Figura 2.37.

Se probará que se puede transformar el polígono de manera que los cuatro lados en cuestión sean consecutivos alrededor del perímetro del polígono.

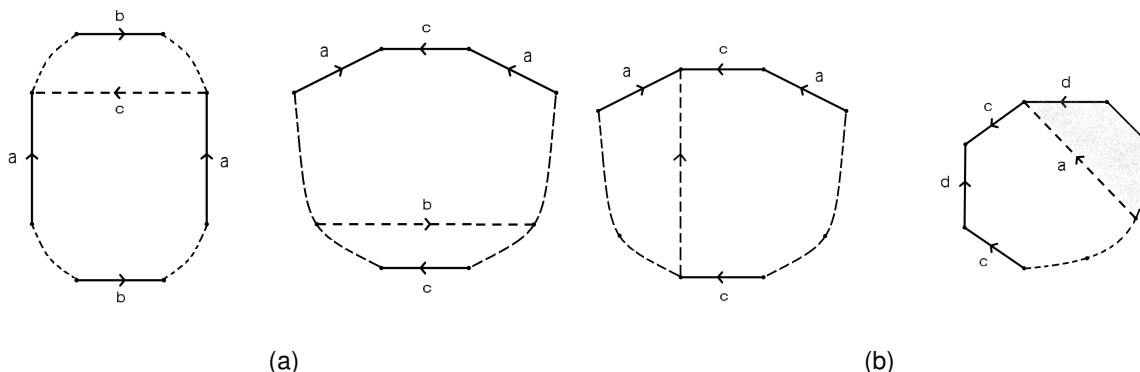


Figura 2.37: Diagrama de ilustración. Quinto paso.

Primero, se corta a lo largo de c y se pega justo a lo largo de b para obtener la Figura 2.37 a). Luego, cortar a lo largo de d y pegar justo a lo largo de a para obtener la Figura 2.37 b) como se desea.

Continuar este proceso hasta que todos los pares de primer tipo estén en grupos adyacentes de cuatro aristas, como $cdc^{-1}d^{-1}$ en la Figura 2.37 b). Si no existen pares segundo tipo, esto se conduce al resultado deseado porque, en este caso, el esquema debe ser de la forma

$$(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1})\dots(a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}).$$

y la superficie es homeomorfa a la suma conexa de n de toros.

Falta considerar el caso en el cual existan pares de ambos tipos, es decir, de primer y segundo tipo. La clave para esta situación es el Lema 2.2.12. Cabe aclarar que este lema se encarga de los casos restantes. Supóngase que después de que el quinto paso se ha completado, el polígono tiene m pares ($m > 0$) de segundo tipo tal que las dos aristas de cada par son adyacentes, n cuádruples ($n > 0$) de lados, cada cuádruplo consistiendo de dos pares de primer tipo separados entre sí. Entonces, la superficie es la suma conexa de m planos proyectivos reales y n toros, la cual por el lema es homeomorfa a la suma conexa $m + 2n$ planos proyectivos reales. Esto completa la prueba. \square

2.2.6. Algunas propiedades invariantes

Se puede llegar a preguntarse ¿Cómo diferenciar dos superficies y determinar si estas son homeomorfas o no? o ¿Cómo se puede determinar si los tipos de superficies que se dieron en el Teorema 2.2.7 son topológicamente distintas? puede ser que existan dos enteros positivos m y n con $m \neq n$, tal que la suma conexa de m -toros sea homeomorfa a la suma conexa de n -toros. Para responder estas preguntas se introduce un número invariante llamado la *característica de Euler* y una propiedad invariante llamada *orientabilidad*.

Definición 2.2.15. Sea S una superficie compacta con triangulación $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$. Si

$t =$ es el número de triángulos.

$e =$ es el número de aristas distintas de S .

$v =$ es el número de vértices distintos de S .

entonces

$$\chi(S) = t - e + v$$

es llamado la **Característica de Euler**⁷ de S .

Lema 2.2.13. La característica de Euler del T^2 , el \mathbb{RP}^2 y la S^2 0, 1 y 2 respectivamente.

⁷Este número entero fue descubierto por el matemático y físico suizo Leonhard Paul Euler(1707-1783). Denotada por la letra griega Ji (χ).

Demostración. En la Figura 2.14 a), se dió una triangulación del toro, de la cual se obtuvo 8 vértices distintos, 24 aristas distintas y 16 triángulos. Por lo que,

$$\chi(\mathbb{T}^2) = t - e + v = 16 - 24 + 8 = 0.$$

En la misma Figura 2.14 b), se mostró una triangulación del plano proyectivo, de la cual se obtuvo 6 vértices distintos, 15 aristas distintas y 10 triángulos.

$$\chi(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = t - e + v = 10 - 15 + 6 = 1.$$

Y de la Figura 2.15, se dió una triangulación de la esfera, la característica de Euler de la esfera es:

$$\chi(S^2) = 6 - 9 + 5 = 2.$$

□

Considerando este y otros ejemplos se sugiere que la característica de Euler de una superficie compacta S depende solamente de S y no de la triangulación elegida.

Ahora se obtienen los siguientes teoremas:

Teorema 2.2.8. Si S_1 y S_2 son superficies compactas, entonces $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$

Demostración. Supongase que S_1 y S_2 son triangulables, por el Teorema 2.2.6.

Si se toman las triangulaciones T_{S_1} y T_{S_2} de S_1 y S_2 , respectivamente. Se elige un triángulo T_1 en T_{S_1} y un triángulo T_2 en T_{S_2} . Ambos son homeomorfos a un disco cerrado, así que se pueden usar como los discos que se quitan en cada superficie S_1 y S_2 para formar la suma conexa. El resto de triángulos en T_{S_1} y T_{S_2} , dá una triangulación de $S_1 \# S_2$. (Por ejemplo, si las fronteras de los triángulos que se han eliminado son como se muestra en la Figura 2.38, entonces v_{1_i} está identificado con v_{2_i} y e_{1_i} está identificado con e_{2_i}) para $i = 1, 2, 3$.

Calculando t , e y v para esta triangulación de $S_1 \# S_2$:

$$t(S_1 \# S_2) = t(S_1) - 1 + t(S_2) - 1 = t(S_1) + t(S_2) - 2,$$

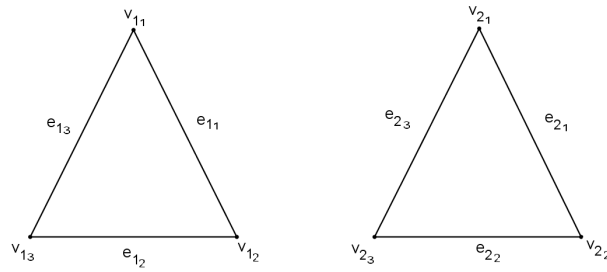


Figura 2.38:

ya que en cada triangulación se quitó un triángulo;

$$e(S_1 \# S_2) = e(S_1) + e(S_2) - 3,$$

como las tres aristas de T_1 se identifican con las tres aristas de T_2 ;

$$v(S_1 \# S_2) = v(S_1) + v(S_2) - 3,$$

los tres vértices de T_1 se identifican con los tres vértices de T_2 .

Al calcular:

$$\begin{aligned} \chi(S_1 \# S_2) &= t(S_1 \# S_2) - e(S_1 \# S_2) + v(S_1 \# S_2) \\ &= (t(S_1) + t(S_2) - 2) - (e(S_1) + e(S_2) - 3) + (v(S_1) + v(S_2) - 3) \\ &= t(S_1) + t(S_2) - 2 - e(S_1) - e(S_2) + 3 + v(S_1) + v(S_2) - 3 \\ &= (t(S_1) - e(S_1) + v(S_1)) + (t(S_2) - e(S_2) + v(S_2)) - 2 \\ &= \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2 \end{aligned}$$

□

Usando este Teorema y una inducción, a partir de los resultados dados para la esfera, el toro y el plano proyectivo real, se obtienen los siguientes valores para la característica de Euler de las diversas posibles superficies compacta:

SUPERFICIE COMPACTA	CARACTERÍSTICA DE EULER
Esfera	2
Suma conexa de n -toros	$2 - 2n$
Suma conexa de n -planos proyectivos	$2 - n$
Suma conexa de un plano proyectivo y n -toros	$1 - 2n$

Teorema 2.2.9. Si S_1 y S_2 son homeomorfas, entonces $\chi(S_1) = \chi(S_2)$

Demostración. Si T_{S_1} es una triangulación de S_1 y $f : S_1 \rightarrow S_2$ es un homeomorfismo, entonces

$$T_{S_2} = \{f(T) \mid T \in T_{S_1}\}$$

es una triangulación de S_2 . Como tiene el mismo número de vértices, aristas y triángulos que T_{S_1} , entonces $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ \square

Definición 2.2.16. Una superficie conexa S es **orientable** si todo camino cerrado conserva la orientación; Una superficie conexa S es **no orientable** si existe al menos un camino que invierte la orientación.

Otra forma en que se define si una superficie es orientable es usando la banda de Möbius. Así, una superficie S es *orientable* si no contiene ningún subespacio homeomorfo a la banda de Möbius y si dirá *no orientable* si contiene un subespacio homeomorfo a la banda de Möbius.

Ejemplo 2.2.5. El \mathbb{T}^2 y la \mathbb{S}^2 son superficies orientables, mientras que el \mathbb{RP}^2 y la \mathbb{K}^2 son superficies no orientables.

Una superficie que es la suma conexa de n -toros o n -planos proyectivos se dice que es de género n , mientras que una esfera es de género 0. La siguiente relación entre el género g y la Característica de Euler χ de una superficie compacta sostiene que:

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi) & \text{en el caso orientable} \\ 2 - \chi & \text{en el caso no orientable} \end{cases}$$

Definición 2.2.17. La superficie

$$S^2 \# \underbrace{T^2 \# T^2 \dots \# T^2}_n, \quad (n \geq 0)$$

que simplemente es $S^2 \# nT^2$, se llama **superficie orientable estándar** de **género n** .

Definición 2.2.18. La superficie

$$S^2 \# \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \dots \# \mathbb{RP}^2}_m, \quad (m \geq 1)$$

que simplemente es $S^2 \# m\mathbb{RP}^2$, se llama **superficie no orientable estándar** de **género m** .

Proposición 2.2.4. *Cualquier superficie compacta orientable es homeomorfa a una esfera o a una suma conexa de toros. Cualquier superficie compacta no orientable es homeomorfa a una suma conexa de planos proyectivos reales o a la suma conexa de una Botella de Klein y una superficie compacta orientable.*

En base a estas dos propiedades invariantes y como consecuencia del Teorema [2.2.7](#), se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.2.10. *Sea S_1 y S_2 dos superficies compactas, entonces $S_1 \cong S_2$ si y sólo si tienen la misma característica de Euler y ambos son orientables o no orientables.*

Capítulo 3

CÁLCULO DE LOS GRUPOS

FUNDAMENTALES DE SUPERFICIES.

3.1. Homotopía de caminos

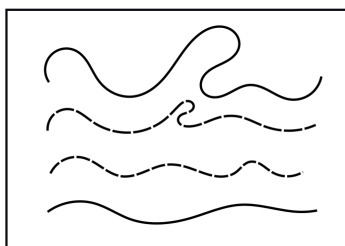
Se inicia esta subsección considerando caminos sobre un espacio X y una relación de equivalencia entre ellos la cual se conoce como homotopía de caminos. Después, se define cierta operación sobre la colección de las clases de equivalencia que la convierte en lo que en álgebra se conoce como un grupoide.

Definición 3.1.1. Si f y f' son aplicaciones continuas del espacio X en el espacio Y , se dice que f es **homotópica** a f' si existe una aplicación continua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$F(x, 0) = f(x) \quad y \quad F(x, 1) = f'(x)$$

para cada $x \in X$. La aplicación F se conoce como **homotopía** entre f y f' . Si f es homotópica a f' , se escribe $f \simeq f'$.

Una homotopía se puede imaginar como una familia uniparamétrica continua de aplicaciones de X en Y . Si se piensa en el parámetro t como representante del tiempo, entonces la homotopía F describe una deformación continua de la aplicación f en la aplicación f' , cuando t se mueve de 0 a 1.

Figura 3.1: Homotopía entre f y f'

Definición 3.1.2. Si $f \simeq f'$ y f' es una aplicación constante, se dice que f es **homotópicamente nula**.

Definición 3.1.3. Un **camino** en un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es una aplicación continua $f : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$; es decir, x_0 es el **punto inicial** y x_1 es el **punto final** del camino. El camino $\bar{f}(x) = f(1 - x)$ para cada $x \in [0, 1]$ es llamado el **camino inverso** de f .

Definición 3.1.4. Un espacio X se dice que es **conexo por caminos** si para todo par de puntos de X , existe un camino que los une.

NOTA: En este capítulo se usará por conveniencia, el intervalo $I = [0, 1]$ como el dominio de todos los caminos.

Si f y f' son dos caminos en X , existe una relación más fuerte entre ellos que la homotopía simplemente. Lo cual se describe en la siguiente definición.

Definición 3.1.5. Dos caminos $f, f' : I \rightarrow X$, se dice que son **homotópicos por caminos** si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1 , y si existe una aplicación continua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$F(s, 0) = f(s) \quad y \quad F(s, 1) = f'(s)$$

$$F(0, t) = x_0 \quad y \quad F(1, t) = x_1$$

para cada $s, t \in I$. La aplicación F recibe el nombre de **homotopía de caminos** entre f y f' . Si f es homotópico por caminos a f' , se escribe $f \simeq_p f'$.

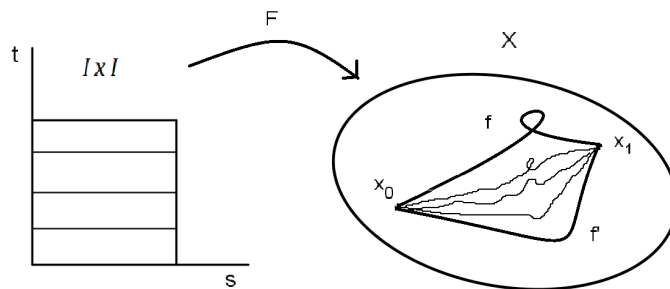


Figura 3.2: Descripción de una homotopía de caminos.

La primera condición establece simplemente que F es una homotopía entre f y f' , es decir, que F representa una forma continua de deformar el camino f en el camino f' ; mientras que la segunda condición que, para cada t , la aplicación f_t , definida por la ecuación $f_t(s) = F(s, t)$, es un camino desde x_0 hasta x_1 , dicho de otro modo, los puntos extremos del camino permanecen fijos durante la deformación.

Lema 3.1.1. *Las relaciones \simeq y \simeq_p son relaciones de equivalencia.*

Demostración. Se comprobarán las tres propiedades de una relación de equivalencia.

1. **Reflexividad.** Se probará que $f \simeq f$.

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y sea la aplicación $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, t) = f(x)$, con $0 \leq t \leq 1$. F es continua ya que f es continua.

Como $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = f(x)$, entonces por Definición 3.1.1, $f \simeq f$

Ahora se probará que $f \simeq_p f$

Sea $f : I \rightarrow X$ un camino, por lo tanto f es continua. Sea la aplicación $F : I \times I \rightarrow X$ tal que $F(s, t) = f(s)$ para cada $s, t \in I$. Como f es continua, entonces F es continua. Luego

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s), & F(s, 1) &= f(s) & y \\ F(0, t) &= f(0) = x_0, & F(1, t) &= f(1) = x_1 \end{aligned}$$

entonces por Definición 3.1.5, $f \simeq_p f$.

2. **Simetría.** Se probara que si $f \simeq f'$, entonces $f' \simeq f$.

Sean $f, f' : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas. Supongase que $f \simeq f'$. Como $f \simeq f'$, entonces existe una aplicación continua $F : X \times I \rightarrow Y$, tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = f'(x)$; es decir F es una homotopía entre f y f' .

Defínase una aplicación $H : X \times I \rightarrow Y$, tal que $H(x, t) = F(x, 1 - t)$, para $0 \leq t \leq 1$, la cual es continua ya que F es continua.

Y además

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= F(x, 1 - 0) \\ &= F(x, 1) \\ &= f'(x) \quad \Rightarrow \quad H(x, 0) = f'(x), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} H(x, 1) &= F(x, 1 - 1) \\ &= F(x, 0) \\ &= f(x) \quad \Rightarrow \quad H(x, 1) = f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto H es una homotopía entre f' y f , así $f' \simeq f$

Ahora se probara que si $f \simeq_p f'$, entonces $f' \simeq_p f$.

Sean los caminos $f, f' : I \rightarrow X$. Supongase que $f \simeq_p f'$. Como $f \simeq_p f'$, entonces existe una aplicación continua $F : I \times I \rightarrow X$, tal que

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s), & F(s, 1) &= f'(s) \\ F(0, t) &= x_0, & F(1, t) &= x_1 \end{aligned}$$

para cada $s, t \in I$. Defínase una aplicación

$H : I \times I \rightarrow X$, tal que $H(s, t) = F(s, 1 - t)$ para cada $s, t \in I$, la cual es continua ya que F es continua. Además

$$H(s, 0) = F(s, 1 - 0) = F(s, 1) = f'(s) \text{ y } H(s, 1) = F(s, 1 - 1) = F(s, 0) = f(s),$$

así se tiene que, $H(s, 0) = f'(s)$ y $H(s, 1) = f(s)$

$$H(0, t) = F(0, 1 - t) = x_0 \quad \text{y} \quad H(1, t) = F(1, 1 - t) = x_1.$$

Por lo tanto, H es una homotopía de caminos entre f' y f . por lo que $f' \simeq_p f$

3. **Transitividad.** Se probará que si $f \simeq f'$ y $f' \simeq f''$, entonces $f \simeq f''$

Sean las aplicaciones continuas $f, f', f'' : X \rightarrow Y$.

Suponga que $f \simeq f'$ y $f' \simeq f''$.

Como $f \simeq f'$, entonces existe una aplicación continua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$F(x, 0) = f(x) \text{ y } F(x, 1) = f'(x).$$

Además, como $f' \simeq f''$, entonces existe una aplicación continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$H(x, 0) = f'(x) \quad \text{y} \quad H(x, 1) = f''(x)$$

Ahora, definase una aplicación $G : X \times I \rightarrow Y$, tal que

$$G(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H(x, 2t - 1) & , \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Se probará que $G(x, t)$ está bien definida.

Para $t = \frac{1}{2}$ se tiene:

$$G\left(x, \frac{1}{2}\right) = F\left(x, 2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = F(x, 1) = f'(x),$$

$$G\left(x, \frac{1}{2}\right) = H\left(x, 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right) = H(x, 0) = f'(x),$$

así $F(x, 2t) = H(x, 2t - 1)$ cuando $t = \frac{1}{2}$. Por lo tanto $G(x, t)$ está bien definida.

Además como G es continua en los subconjuntos cerrados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$

de $X \times I$, entonces por el Lema del Pegamiento, G es continua en $X \times I$.

$$G(x, 0) = F(x, 2(0)) = F(x, 0) = f(x) \implies G(x, 0) = f(x) \quad \text{y}$$

$$G(x, 1) = H(x, 2(1) - 1) = H(x, 1) = f''(x) \implies G(x, 1) = f''(x).$$

Por lo tanto, G es una homotopía entre f y f'' , así $f \simeq f''$.

Ahora se probará la transitividad para \simeq_p , es decir; si $f \simeq_p f'$ y $f' \simeq_p f''$, entonces $f \simeq_p f''$.

Sean los caminos $f, f', f'' : I \rightarrow X$.

Supongase que $f \simeq_p f'$ y $f' \simeq_p f''$. Como $f \simeq_p f'$, entonces existe una aplicación continua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} F(s, 0) = f(s) & \quad \mathbf{y} & \quad F(s, 1) = f'(s), \\ F(0, t) = x_0 & \quad \mathbf{y} & \quad F(1, t) = x_1, \end{aligned}$$

para cada $s, t \in I$. Como $f' \simeq_p f''$, entonces existe una aplicación continua $H : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) = f'(s) & \quad \mathbf{y} & \quad H(s, 1) = f''(s) \\ H(0, t) = x_0 & \quad \mathbf{y} & \quad H(1, t) = x_1, \end{aligned}$$

para cada $s, t \in I$. Ahora, definase la aplicación $G : I \times I \rightarrow X$ por la ecuación

$$G(s, t) = \begin{cases} F(s, 2t) & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H(s, 2t - 1) & , \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Se probará que $G(s, t)$ está bien definida.

Vease para $t = \frac{1}{2}$,

$$G\left(s, \frac{1}{2}\right) = F\left(s, 2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = F(s, 1) = f'(s);$$

$$G\left(s, \left(\frac{1}{2}\right)\right) = H\left(s, 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right) = H(s, 0) = f'(s),$$

de manera que cuando $t = \frac{1}{2}$ se tiene $F(s, 2t) = H(s, 2t - 1)$, por lo tanto $G(s, t)$ está bien definida.

Luego, como F y H son continuas, entonces por el lema del pegamiento, G es continua.

Además,

$$\begin{aligned}
G(s, 0) &= F(s, 2(0)) = F(s, 0) = f(s); \\
G(s, 1) &= H(s, 2(1) - 1) = H(s, 1) = f''(s) \\
G(0, t) &= F(0, 2t) = x_0 \quad \text{y} \quad G(1, t) = H(1, 2t - 1) = x_1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, G es una homotopía entre f y f' , así $f \simeq_p f''$.

Luego por a), b) y c), las relaciones \simeq y \simeq_p son relaciones de equivalencia.

□

Si f es un camino, se denota su clase de equivalencia de homotopía de caminos por $[f]$.

Corolario 3.1.1. Sean f y g dos caminos en X . $f \simeq_p g$ si y sólo si $[f] = [g]$.

Demostración. " \Rightarrow " Suponga que $f \simeq_p g$.

Sea $h \in [g]$.

$$\begin{aligned}
h \in [g] &\Rightarrow h \simeq_p g \wedge g \simeq_p f \\
&\Rightarrow f \simeq_p h \\
&\Rightarrow h \in [f].
\end{aligned}$$

Luego $[g] \subset [f]$.

Sea $h \in [f]$.

$$\begin{aligned}
h \in [f] &\Rightarrow f \simeq_p h \\
&\Rightarrow h \simeq_p f \wedge f \simeq_p g \\
&\Rightarrow h \simeq_p g \\
&\Rightarrow h \in [g],
\end{aligned}$$

así $[f] \subset [g]$. Por lo tanto $[f] = [g]$.

” \Leftarrow ” Suponga que $[f] = [g]$.

Sea $h \in [f]$,

$$h \in [f] \Rightarrow h \simeq_p f.$$

Como $[f] = [g]$, entonces $h \in [g]$.

$$h \in [g] \Rightarrow h \simeq_p g$$

$$\Rightarrow g \simeq_p h$$

$$g \simeq_p h \wedge h \simeq_p f \Rightarrow g \simeq_p f$$

$$\Rightarrow f \simeq_p g$$

Luego, si $[f] = [g]$ entonces $f \simeq_p g$

□

Definición 3.1.6. Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicaciones continuas; la aplicación $F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ es una homotopía entre ellas, y es llamada **homotopía por rectas** porque lleva el punto $f(x)$ al punto $g(x)$ a lo largo del segmento de recta que las une.

Si f y g son caminos de x_0 a x_1 , entonces F será una *homotopía de caminos*.

En general, sea $A \subset \mathbb{R}^n$, convexo (lo cual significa que para dos puntos cualesquiera a, b de A , el segmento de recta que los une está contenido en A). Entonces dos caminos cualesquiera f, g en A de x_0 a x_1 son homotópicos por caminos en A , ya que la homotopía por rectas F entre ellos mantiene su imagen en A .

Ejemplo 3.1.1. Sea X el **plano agujereado** $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, el cual se escribirá como $\mathbb{R}^2 - 0$. Los siguientes caminos en X ,

$$f(s) = (\cos \pi s, \text{sen } \pi s),$$

$$g(s) = (\cos \pi s, 2 \text{sen } \pi s)$$

son homotópicos por caminos; la homotopía por rectas entre ellos es una homotopía de caminos aceptable. Pero la homotopía por rectas entre f y el camino

$$h(s) = (\cos \pi s, -\text{sen } \pi s)$$

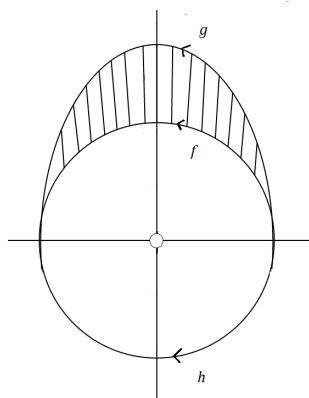


Figura 3.3: Homotopía por rectas

no es válida, porque su imagen no está contenida en el espacio $X = \mathbb{R}^2 - 0$.

Ciertamente, no existe una homotopía de caminos en X entre f y h . Intuitivamente está claro que no es posible deformar f pasando por el agujero en 0 sin introducir una discontinuidad.

El Ejemplo 3.1.1 ilustra el hecho de que es necesario conocer el espacio rango antes de poder decidir si dos caminos son homotópicos por caminos o no. Los caminos f y h podrían ser homotópicos por caminos si estuvieran en \mathbb{R}^2 .

Ahora se introduce un poco de álgebra a esta situación geométrica. Se define cierta operación sobre las clases de homotopía de caminos como sigue:

Definición 3.1.7. Si f es un camino en X de x_0 a x_1 , y g es un camino en X de x_1 a x_2 , se define el **producto** $f * g$ de f y g como el camino h dado por las ecuaciones

$$(f * g)(s) = h(s) = \begin{cases} f(2s) & , s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1) & , s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

La aplicación h está bien definida y es continua, por el lema del pegamiento; es un camino en X de x_0 a x_2 . Se puede imaginar a h como el camino con primera mitad es el

camino f y segunda mitad es el camino g .

Se probará que h está bien definida y es continua.

Para el valor común $s = \frac{1}{2}$ se tiene que:

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(1) = x_1 \quad y \quad h\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right) = g(0) = x_1,$$

por ser f y g caminos en X , así que $f(1) = x_1 = g(0)$, por lo tanto la aplicación h está bien definida. Además como f y g son continuas por ser caminos, y cumplen con

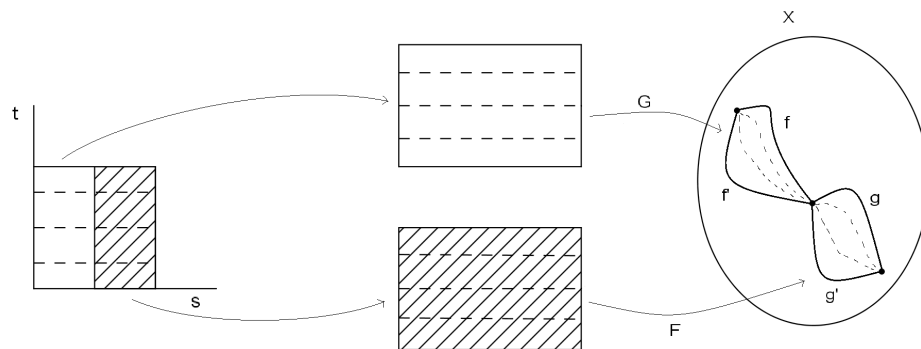


Figura 3.4: La operación producto sobre caminos.

$f(1) = g(0)$, entonces por el Lema del Pegamiento (Teorema 1.1.1), h es continua y por tanto es un camino en X con punto inicial x_0 y final x_2 ; es decir, un camino de x_0 a x_2 .

Lema 3.1.2. *La operación producto sobre caminos induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por la ecuación*

$$[f] * [g] = [f * g]$$

Demostración. Supongase que $f \simeq_p f'$ y $g \simeq_p g'$, Sea F una homotopía de caminos entre f y f' y sea G una homotopía de caminos entre g y g' . Definase

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & , \quad s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s - 1, t) & , \quad s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Para $s = \frac{1}{2}$,

$$H\left(\frac{1}{2}, t\right) = F\left(2\left(\frac{1}{2}\right), t\right) = F(1, t) = x_1$$

$$H\left(\frac{1}{2}, t\right) = G\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - 1, t\right) = G(0, t) = x_1$$

Por lo tanto $H(s, t)$ esta bien definida para toda t ; además como F es continua en $I \times [0, \frac{1}{2}]$ y G es continua en $I \times [\frac{1}{2}, 1]$, entonces H es continua en los subconjuntos cerrados $I \times [0, \frac{1}{2}]$ y $I \times [\frac{1}{2}, 1]$ de $I \times I$, así por el Lema del Pegamiento (Teorema 1.1.1), H es continua en todo $I \times I$.

Ahora, se verá que H es una homotopía de caminos entre $f * g$ y $f' * g'$:

Para ello, se tiene que si $s \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$H(s, 0) = F(2s, 0) = f(2s) = (f * g)(s)$$

$$H(s, 1) = F(2s, 1) = f'(2s) = (f' * g')(s)$$

y si $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ se tiene:

$$H(s, 0) = G(2s - 1, 0) = g(2s - 1) = (f * g)(s)$$

$$H(s, 1) = G(2s - 1, 1) = g'(2s - 1) = (f' * g')(s).$$

también se tiene que,:

$$H(0, t) = F(0, t) = x_0$$

$$H(1, t) = G(1, t) = x_2$$

Así H es una homotopía de caminos entre $f * g$ y $f' * g'$, $f * g \simeq_p f' * g'$

Por lo tanto $[f * g] = [f] * [g]$.

□

La operación $*$ sobre clases de homotopía de caminos satisface propiedades muy parecidas a los axiomas de grupo. Estas propiedades se conocen como **propiedades de grupoides** de $*$. Una diferencia respecto de las propiedades de grupo es que $[f] * [g]$ no está definida para cualquier par de clases, sino únicamente para aquellos pares $[f]$, $[g]$ para los que $f(1) = g(0)$.

Teorema 3.1.1. *La operación $*$ tiene las siguientes propiedades:*

(i) (Asociatividad). Si $([f] * [g]) * [h]$ está definida, también lo está $[f] * ([g] * [h])$, y son iguales.

(ii) (Neutro a izquierda y derecha). Dado $x \in X$, se denota por e_x el camino constante $e_x : I \rightarrow X$ se lleva todo I al punto x . Si f es un camino en X desde x_0 hasta x_1 , entonces

$$[e_{x_0}] * [f] = [f] \quad \text{y} \quad [f] * [e_{x_1}] = [f].$$

(iii) (Inverso). Dado el camino f en X desde x_0 hasta x_1 , sea \bar{f} el camino **inverso** de f . Entonces

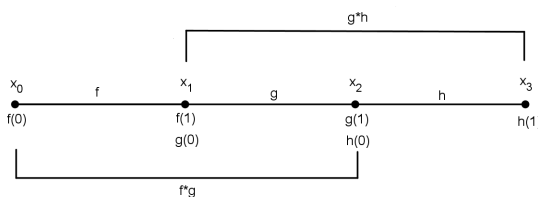
$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad \text{y} \quad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

Demostración. (i) Se probará que:

(a) Si $([f] * [g]) * [h]$ está definida, entonces $[f] * ([g] * [h])$ está definida.

(b) $([f] * [g]) * [h]$ y $[f] * ([g] * [h])$ son iguales.

(a) Suponga que $([f] * [g]) * [h]$ está definida. Como $([f] * [g]) * [h]$ está definida, entonces por definición de producto de caminos (Definición 3.1.7) $f(1) = g(0)$ y $(f * g)(1) = g(1) = h(0)$.



Como $g(1) = h(0)$, entonces $[g * h]$ está definida, así $(g * h)(0) = x_1 = g(0) = f(1)$ y $(g * h)(1) = x_3$. Por tanto, ya que $g(1) = h(0)$ y $(g * h)(0) = f(1)$, entonces $[f] * ([g] * [h])$ está definida.

(b) Se probará que $([f] * [g]) * [h] = [f] * ([g] * [h])$.

Nótese que:

$([f] * [g]) * [h] = [f] * ([g] * [h]) \Leftrightarrow [f * g] * [h] = [f] * [g * h]$; por el lema 3,1,2

$$\Leftrightarrow [(f * g) * h] = [f * (g * h)]; \text{ por el lema 3,1,2}$$

$$\Leftrightarrow (f * g) * h \simeq_p f * (g * h); \text{ por el corolario 3,1,1.}$$

así que, sólo se probará que $(f * g) * h \simeq_p f * (g * h)$, donde dichos productos de caminos vienen dados por:

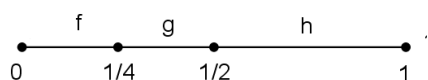
$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(t) &= \begin{cases} (f * g)(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ h(2t - 1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(2(2t)) & , t \in [0, \frac{1}{4}] \\ g(2(2t) - 1) & , t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ h(2t - 1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(4t) & , t \in [0, \frac{1}{4}] \\ g(4t - 1) & , t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ h(2t - 1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

y

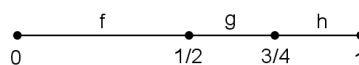
$$\begin{aligned} (f * (g * h))(t) &= \begin{cases} f(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (g * h)(2t - 1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2(2t - 1)) & , t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ h(2(2t - 1) - 1) & , t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} f(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(4t - 2) & , t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ h(4t - 3) & , t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Se representan estos caminos por los diagramas (a) y (b).

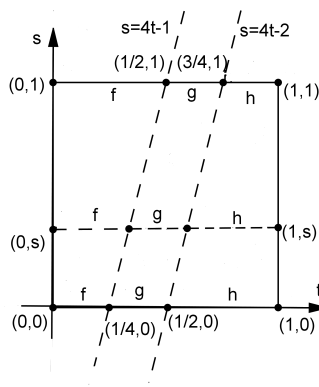


(a)



(b)

La idea es llevar el camino de (a) a (b) para ello se ubica en el siguiente diagrama.



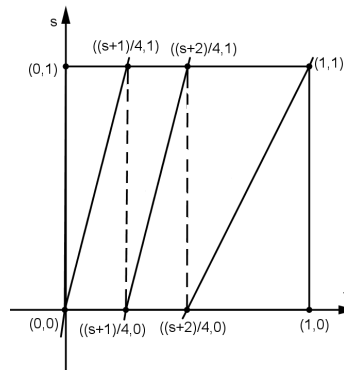
La ecuación de la recta que pasa por $(\frac{1}{4}, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$ es

$$\begin{aligned} s - s_1 &= m(t - t_1) \Rightarrow s - 0 = \frac{1}{\frac{1}{4}}(t - \frac{1}{4}) \\ &\Rightarrow s = 4t - 1 \\ &\Rightarrow t = \frac{s + 1}{4} \end{aligned}$$

La ecuación de la recta que pasa por $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(\frac{3}{4}, 1)$ es:

$$\begin{aligned} s &= 4t - 2 \Rightarrow s + 2 = 4t \\ &\Rightarrow t = \frac{s + 2}{4} \end{aligned}$$

Así se tiene el siguiente diagrama:



Sea $L_1(t)$ la recta que pasa por: $(0, 0)$ y $(\frac{s+1}{4}, 1)$ entonces la pendiente es:

$$m = \frac{1-0}{\frac{s+1}{4}-0} = \frac{1}{\frac{s+1}{4}} = \frac{4}{s+1}$$

y la ecuación de la recta es:

$$S - 0 = \frac{4}{s+1}(t - 0) \Rightarrow S = \frac{4t}{s+1}, 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}$$

Sea $L_2(t)$ la recta que pasa por: $(\frac{s+1}{4}, 0)$ y $(\frac{s+2}{4}, 1)$ entonces

$$m = \frac{1-0}{\frac{s+2}{4} - \frac{s+1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

y la ecuación de la recta es:

$$S - 0 = 4(t - \frac{s+1}{4}) \Rightarrow S = 4t - (s + 1), \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}$$

Sea $L_3(t)$ la recta que pasa por: $(\frac{s+2}{4}, 0)$ y $(1, 1)$ entonces

$$m = \frac{1}{1 - \frac{s+2}{4}} = \frac{1}{\frac{4-s-2}{4}} = \frac{4}{2-s}$$

y la ecuación de la recta es:

$$S - 0 = \frac{4}{2-s}(t - \frac{s+2}{4}) \Rightarrow S = \frac{4t}{2-s} - \frac{s+2}{2-s} = \frac{4t-s-2}{2-s}, \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1$$

Por lo tanto, definase

$$F(t, s) = \begin{cases} f\left(\frac{4t}{1+s}\right) & , t \in \left[0, \frac{s+1}{4}\right] \\ g(4t - s - 1) & , t \in \left[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}\right] \\ h\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & , t \in \left[\frac{s+2}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Así como f , g y h son continuas, entonces por el Lema del Pegamiento F es continua y además

$$F(t, 0) = \begin{cases} f(4t) & , t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ g(4t - 1) & , t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ h(2t - 1) & , t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = ((f * g) * h)(t)$$

y

$$F(t, 1) = \begin{cases} f(2t) & , t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(4t - 3) & , t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ h(2t - 1) & , t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases} = (f * (g * h))(t)$$

también,

$$F(0, s) = f\left(\frac{4(0)}{1+s}\right) = f(0) = x_0 \quad \text{y} \\ F(1, s) = h\left(\frac{4(1)-s-2}{2-s}\right) = h\left(\frac{2-s}{2-s}\right) = h(1) = x_3$$

Así la aplicación F es una homotopía de caminos entre $(f * g) * h$ y $f * (g * h)$, por lo que $(f * g) * h \simeq_p f * (g * h)$ y por lo tanto, $([f] * [g]) * [h] = [f] * ([g] * [h])$.

(ii) Primero se probará que $[e_{x_0}] * [f] = [f]$.

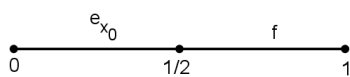
Para ello basta comprobar que $e_{x_0} * f \simeq_p f$.

Como $e_{x_0} : I \rightarrow X$ es el camino constante que lleva todo I al punto x_0 y $f :$

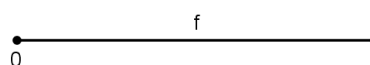
$[0, 1] \rightarrow X$ es un camino desde x_0 hasta x_1 , entonces

$$(e_{x_0} * f)(t) = \begin{cases} (e_{x_0})(2t) = x_0 & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2t - 1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Se representan los caminos en el siguiente diagrama:

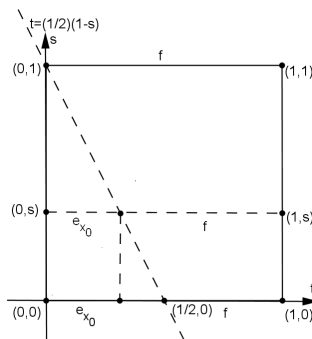


(c)



(d)

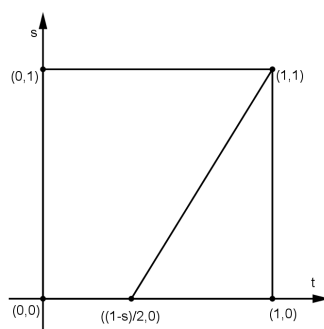
La idea es llevar el camino de (c) a (d). Para ello se ubica en el siguiente diagrama.



Luego, la ecuación de la recta que pasa por $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, 1)$ es:

$$\begin{aligned} s - s_1 &= m(t - t_1) \Rightarrow s - 1 = \frac{1 - 0}{0 - \frac{1}{2}}(t - 0) \\ &\Rightarrow s - 1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}}t \\ &\Rightarrow s = -2t + 1 \\ &\Rightarrow t = \frac{1 - s}{2} \end{aligned}$$

Se tiene:



Sea $L_1(t)$ la recta que pasa por $(\frac{1-s}{2}, 0)$ y $(1, 1)$.

$$m = \frac{1 - 0}{1 - \frac{1-s}{2}} = \frac{1}{\frac{1+s}{2}} = \frac{2}{1+s},$$

entonces la ecuación de la recta es:

$$\begin{aligned} S - 0 &= \frac{2}{1+s} \left(t - \frac{1-s}{2} \right) \Rightarrow S = \frac{2t}{1+s} - \frac{1-s}{1+s} \\ &\Rightarrow S = \frac{2t - 1 + s}{1+s} \end{aligned}$$

Por lo tanto, defínase

$$F(t, s) = \begin{cases} x_0 & , t \in [0, \frac{1-s}{2}] \\ f\left(\frac{2t-1+s}{1+s}\right) & , t \in [\frac{1-s}{2}, 1] \end{cases}$$

La cual es continua, ya que f es continua. Y se tiene:

$$F(t, 0) = \begin{cases} x_0 & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2t-1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (e_{x_0} * f)(t)$$

$$F(t, 1) = \begin{cases} x_0 & , t \in [0, 0] \\ f\left(\frac{2t}{2}\right) = f(t) & , t \in [0, 1] \end{cases} = f(t)$$

además:

$$F(0, s) = x_0,$$

$$F(1, s) = f\left(\frac{2 - 1 + s}{1 + s}\right) = f\left(\frac{1 + s}{1 + s}\right) = f(1) = x_1.$$

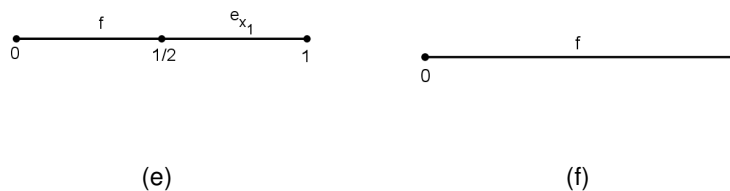
Así la aplicación F es una homotopía de caminos entre $e_{x_0} * f$ y f , por lo tanto:
 $e_{x_0} * f \simeq_p f$.

Ahora se probará que $[f] * [e_{x_1}] = [f]$

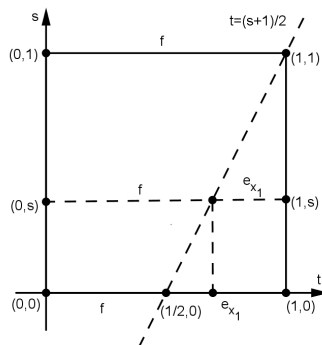
Basta comprobar que $f * e_{x_1} \simeq_p f$. Como $e_{x_1} : I \rightarrow X$ es el camino constante que lleva todo I al punto x_1 y $f : [0, 1] \rightarrow X$ es un camino desde x_0 hasta x_1 , entonces

$$(f * e_{x_1})(t) = \begin{cases} (f(2t)) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (e_{x_1})(2t - 1) = x_1 & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Se representan los caminos f y $e_{x_1} * f$ por los diagramas:



La idea es llevar el camino de (e) a (f), esto se representa en el siguiente diagrama:
 Luego, encontrando la ecuación de la recta que pasa por $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(1, 1)$



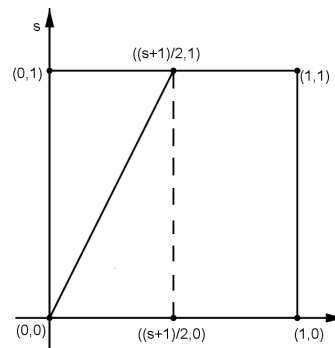
La pendiente es:

$$m = \frac{1 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

y la ecuación es:

$$\begin{aligned} s - s_1 &= m(t - t_1) \Rightarrow s - 0 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ &\Rightarrow s = 2t - 1 \\ &\Rightarrow s + 1 = 2t \\ &\Rightarrow t = \frac{s + 1}{2} \end{aligned}$$

Se tiene el diagrama:



Sea $L_1(t)$ la recta que pasa por $(0, 0)$ y $(\frac{s+1}{2}, 1)$.

$$m = \frac{1 - 0}{\frac{s+1}{2} - 0} = \frac{1}{\frac{s+1}{2}} = \frac{2}{s+1},$$

la ecuación de la recta es:

$$(S - 0) = \frac{2}{s+1}(t - 0) \Rightarrow S = \frac{2t}{s+1}$$

Por lo tanto, defínase

$$F(t, s) = \begin{cases} f\left(\frac{2t}{s+1}\right) & , t \in [0, \frac{s+1}{2}] \\ x_1 & , t \in [\frac{s+1}{2}, 1] \end{cases}$$

La cual es continua, ya que f es continua. Y se tiene:

$$F(t, 0) = \begin{cases} f\left(\frac{2t}{0+1}\right) = f(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ x_1 & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (f * e_{x_1})(t)$$

$$F(t, 1) = \begin{cases} f\left(\frac{2t}{1+t}\right) = f\left(\frac{2t}{2}\right) = f(t) & , t \in [0, 1] \\ x_1 & , t \in [1, 1] \end{cases} = f(t)$$

Ademas:

$$F(0, s) = f\left(\frac{2(0)}{s+1}\right) = f\left(\frac{0}{s+1}\right) = f(0) = x_0$$

$$F(1, s) = x_1$$

Así la aplicación F es una homotopía de caminos entre $f * e_{x_1}$ y f , por lo tanto $f * e_{x_1} \simeq_p f$.

(iii) Primero se probará que $[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}]$. Basta con probar que $f * \bar{f} \simeq_p e_{x_0}$. Como $f : I \rightarrow X$ es un camino de x_0 a x_1 y \bar{f} es el camino inverso de f , entonces

$$\bar{f}(2t - 1) = f(1 - (2t - 1)) = f(2 - 2t),$$

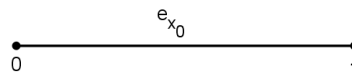
así se tiene:

$$(f * \bar{f})(t) = \begin{cases} f(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \bar{f}(2t - 1) = f(2 - 2t) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Se representan los caminos e_{x_0} y $f * \bar{f}$ por los diagramas:

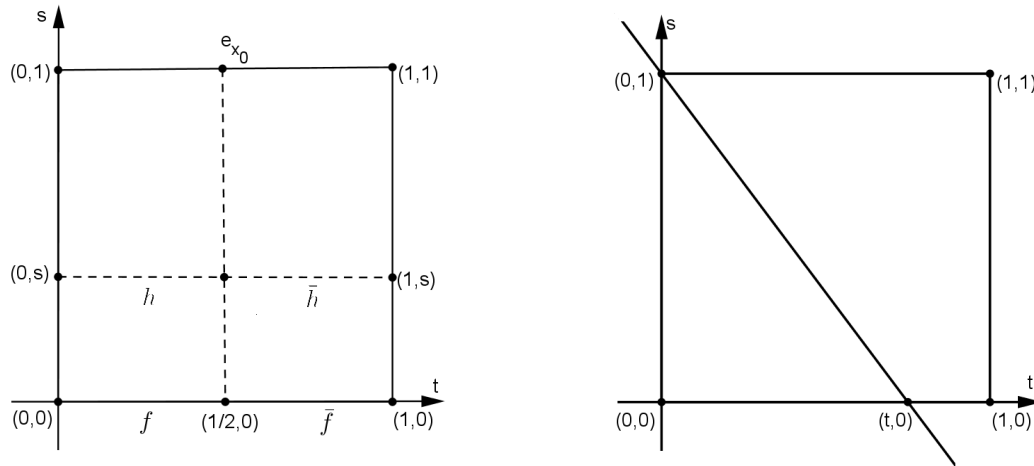


(g)



(h)

La idea es llevar el camino de (g) a (h). Para ello se ubica en el primer diagrama de la siguiente figura .



Encontrando la ecuación de la recta que pasa por $(t, 0)$ y $(0, 1)$.

$$m = \frac{1 - 0}{0 - t} = \frac{1}{-t} = -\frac{1}{t},$$

la ecuación de la recta es:

$$\begin{aligned} S - 0 &= -\frac{1}{t}(T - t) \Rightarrow St = -T + t \\ &\Rightarrow T = t - tS \\ &\Rightarrow T = t(1 - S), \end{aligned}$$

luego, $T = t(1 - s)$. Así defina la aplicación $F : I \times I \rightarrow X$ dada por la ecuación

$$F(t, s) = \begin{cases} f(2t(1 - s)) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f((2 - 2t)(1 - s)) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

F es continua, ya que f es continua.

Además,

$$F(t, 0) = \begin{cases} f(2t(1 - 0)) = f(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f((2 - 2t)(1 - 0)) = f(2 - 2t) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (f * \bar{f})(t),$$

$$F(t, 1) = \begin{cases} f(2t(1 - 1)) = f(0) = x_0 & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f((2 - 2t)(1 - 1)) = f(0) = x_0 & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = e_{x_0}.$$

Y

$$F(0, s) = f(2(0)(1 - s)) = f(0) = x_0,$$

$$F(1, s) = f((2 - 2(1))(1 - s)) = f(0) = x_0$$

Así la aplicación F es una homotopía de caminos entre $f * \bar{f}$ y e_{x_0} , por lo que $f * \bar{f} \simeq_p e_{x_0}$.

Ahora se probará que $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$.

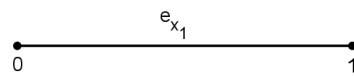
Para ello basta comprobar que $\bar{f} * f \simeq_p e_{x_1}$. Como $f : I \rightarrow X$ es un camino de x_0 a x_1 y \bar{f} es el camino inverso de f , entonces

$$(\bar{f} * f)(t) = \begin{cases} \bar{f}(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2t - 1) = f(1 - (2 - 2t)) = \bar{f}(2 - 2t) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Se representan los caminos $\bar{f} * f$ y e_{x_1} por los diagramas:



(k)



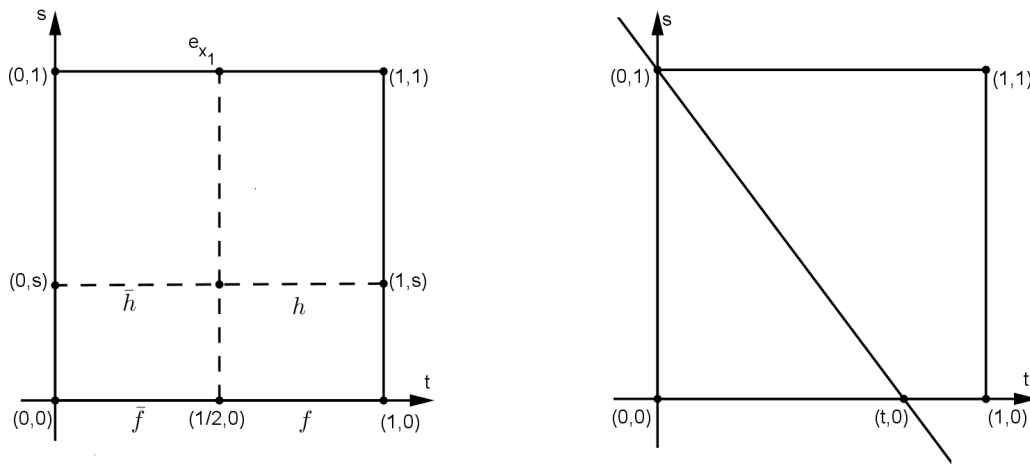
(l)

La idea es llevar el camino de (k) a (l). Para ello se ubica en el siguiente diagrama.

Encontrando la ecuación de la recta que pasa por: $(t, 0)$ y $(0, 1)$.

La pendiente es:

$$m = \frac{1 - 0}{0 - t} = \frac{1}{-t} = -\frac{1}{t},$$



así la ecuación de la recta es:

$$\begin{aligned}
 S - 0 &= -\frac{1}{t}(T - t) \Rightarrow St = -T + t \\
 &\Rightarrow T = t - tS \\
 &\Rightarrow T = t(1 - S),
 \end{aligned}$$

luego, $T = t(1 - s)$. Así defina la aplicación $F : I \times I \rightarrow X$ dada por la ecuación

$$F(t, s) = \begin{cases} \bar{f}(2t(1 - s)) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \bar{f}((2 - 2t)(1 - s)) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

F es continua, ya que \bar{f} es continua. Además,

$$F(t, 0) = \begin{cases} \bar{f}(2t(1 - 0)) = \bar{f}(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \bar{f}((2 - 2t)(1 - 0)) = \bar{f}(2 - 2t) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (\bar{f} * f)(t),$$

$$F(t, 1) = \begin{cases} \bar{f}(2t(1 - 1)) = \bar{f}(0) = x_1 & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \bar{f}((2 - 2t)(1 - 1)) = \bar{f}(0) = x_1 & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = e_{x_1}.$$

Y

$$F(0, s) = \bar{f}(2(0)(1 - s)) = \bar{f}(0) = x_1,$$

$$F(1, s) = \bar{f}((2 - 2(1))(1 - s)) = \bar{f}(0) = x_1$$

Así la aplicación F es una homotopía de caminos entre $\bar{f} * f$ y e_{x_1} , por lo que $\bar{f} * f \simeq_p e_{x_1}$ y por tanto $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$.

□

Se puede decir que, mientras el resultado concierna a clases de homotopía de caminos, no importa cómo se parte el intervalo cuando se forma el producto de caminos. Este resultado se establece formalmente a continuación:

Teorema 3.1.2. *Sea f un camino en X y sean a_0, \dots, a_n números tales que $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$. Sea $f_i : I \rightarrow X$ el camino igual a la aplicación lineal positiva de I en $[a_{i-1}, a_i]$ compuesta con f . Entonces*

$$[f] = [f_1] * \dots * [f_n].$$

Demostración. Hagase una partición del intervalo $I = [0, 1]$ como sigue:

$$I = [0, 1] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n]$$

Donde $a_0 = 0$ y $a_n = 1$, para cada intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ se puede tomar una aplicación lineal positiva del camino $f_i : I \rightarrow X$ de la siguiente manera

$$f_1 : [a_0, a_1] \rightarrow X, f_2 : [a_1, a_2] \rightarrow X, \dots, f_n : [a_{n-1}, a_n] \rightarrow X$$

Como el camino f tiene el mismo punto inicial y final que el camino $f_1 * f_2 * \dots * f_n$, entonces

$$f = f_1 * f_2 * \dots * f_n \implies [f] = [f_1 * f_2 * \dots * f_n]$$

Luego, como

$$[f_1 * f_2 * \dots * f_n] = [f_1] * [f_2] * \dots * [f_n]$$

entonces

$$[f] = [f_1] * [f_2] * \dots * [f_n].$$

□

3.2. Grupo Fundamental

En la sección anterior se observó que el producto de dos caminos de un espacio topológico no siempre está bien definido y por tanto, el producto de sus clases con la operación $*$ tampoco lo está y cuando lo está, satisface prácticamente los axiomas de grupo, pero no tiene una estructura de grupo.

Ha manera de solventar esta situación, suponga que se escoge un punto x_0 de X que sirva como *punto base* y se restringe a aquellos caminos que comienzan y terminan en x_0 . Por lo que, el conjunto de sus clases de homotopía de caminos sí es un grupo con la operación $*$. Este será denominado **grupo fundamental** de X .

En esta sección se estudia el grupo fundamental y algunas de sus propiedades más relevantes, las cuales serán de mucha utilidad para la demostración del Teorema de Seifert-Van Kampen, que se analizará en la sección 3,5.

Definición 3.2.1. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Un camino f en X tal que $f(0) = f(1) = x_0$ se llama **lazo** o **camino cerrado** basado en x_0 .

Definición 3.2.2. El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociadas a los lazos basados en x_0 , con la operación $*$, se denomina **grupo fundamental** de X relativo al **punto base** x_0 y se denota por $\pi_1(X, x_0)$, es decir:

$$\pi_1(X, x_0) = \{[f] : f \text{ es un lazo en } X \text{ basado en } x_0\}$$

.

Por el Teorema 3.1.1, se tiene que la operación $*$, restringida a este conjunto, satisface los axiomas de grupo. Dados dos lazos f y g basados en x , el producto $f * g$ siempre está definido y es a su vez un lazo basado en x .

Ejemplo 3.2.1. Sea \mathbb{R}^n el espacio euclídeo n -dimensional. Entonces $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ es el grupo trivial (consistente sólo en el elemento neutro) para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ya que f es un

lazo basado en x_0 , la homotopía por rectas es una homotopía de caminos entre f y el camino constantemente igual a x_0 . Más en general, si X es un subconjunto convexo de \mathbb{R}^n , entonces $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial para todo $x_0 \in X$.

Si se eligen dos puntos distintos $x, y \in X$, de antemano no existe alguna razón por la que $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ deban estar relacionados. Sin embargo, si existe un camino de x a y , entonces están relacionados.

Definición 3.2.3. Sea f un camino en X de x a y . Se define la aplicación

$$U_f : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, y)$$

por la ecuación

$$U_f([g]) = [\bar{f} * g * f].$$

Notese que la aplicación U_f está bien definida ya que la operación $*$ está bien definida. Además, si g es un lazo basado en x , entonces $\bar{f} * (g * f)$ es un lazo basado en y , por lo que U_f lleva elementos de $\pi_1(X, x)$ a elementos de $\pi_1(X, y)$, tal y como se buscaba (ver Figura 3.5).

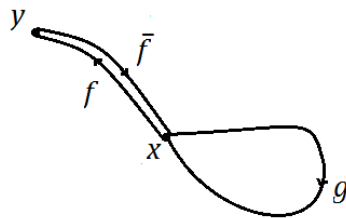


Figura 3.5: $\bar{f} * (g * f)$ es un lazo basado en y .

El siguiente resultado analiza que ocurre en ciertos casos cuando se cambia de punto de base.

Teorema 3.2.1. Sea X un espacio topológico y $x, y \in X$. Si existe un camino en X de x a y , entonces los grupos $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$.

Demostración. Se desea probar que la aplicación U_f definida en 3.2.3 es un isomorfismo:

a) Primero se probará que U_f es un homomorfismo de grupos, es decir que $\forall [g], [h] \in \pi_1(X, x)$, $U_f([g] * [h]) = U_f([g]) * U_f([h])$.

Sea f un camino de x a y . Si g es un lazo con base en x , entonces $(\bar{f} * g) * f$ es un lazo con base y .

En efecto, aplicando las propiedades sobre el producto de caminos desarrolladas en la sección anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 U_f([g] * [h]) &= U_f([g * h]), \text{ por lema 3,1,2} \\
 &= [\bar{f} * g * h * f], \text{ por definición 3,2,3} \\
 &= [\bar{f} * g * e_x * h * f], \text{ por teorema 3,1,1(ii)} \\
 &= [\bar{f} * g * f * \bar{f} * h * f], \text{ por el teorema 3,1,1(iii)} \\
 &= [(\bar{f} * g * f) * (\bar{f} * h * f)], \text{ por teorema 3,1,1(i)} \\
 &= [\bar{f} * g * f] * [\bar{f} * h * f], \text{ por lema 3,1,2} \\
 &= U_f([g]) * U_f([h]), \text{ por definición 3,2,3}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, U_f es un homomorfismo de grupos.

b) Ahora se probará que U_f es biyectiva.

Usando el camino \bar{f} de y a x , se define $U_{\bar{f}} : \pi_1(X, y) \longrightarrow \pi_1(X, x)$, dado por

$$U_{\bar{f}}([h]) = [f * h * \bar{f}], \forall [h] \in \pi_1(X, y)$$

Para probar que U_f es biyectiva, se debe satisfacer que:

i) $(U_{\bar{f}} \circ U_f)([g]) = [g]$.

ii) $(U_f \circ U_{\bar{f}})([h]) = [h]$.

i) Sea $[g] \in \pi_1(X, x)$

$$\begin{aligned}
 (U_{\bar{f}} \circ U_f)([g]) &= U_{\bar{f}}(U_f([g])), \text{ por def. de composición} \\
 &= U_{\bar{f}}([\bar{f} * g * f]), \text{ por def. 3,2,3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [f * (\bar{f} * g * f) * \bar{f}] \text{ por def. 3,2,3} \\
&= [(f * \bar{f}) * g * (f * \bar{f})], \text{ por teo. 3,1,1(i)} \\
&= ([f * \bar{f}] * [g] * ([f * \bar{f}])), \text{ por lema 3,1,2} \\
&= ([f] * [\bar{f}]) * [g] * ([f] * [\bar{f}]), \text{ por lema 3,1,2} \\
&= [e_x] * [g] * [e_x], \text{ por teo. 3,1,1(iii)} \\
&= [e_x] * ([g] * [e_x]), \text{ por teo. 3,1,1(i)} \\
&= [e_x] * [g], \text{ por teo. 3,1,1(ii).} \\
&= [g]
\end{aligned}$$

Así U_f es inyectiva.

ii) Sea $[h] \in \pi_1(X, y)$.

$$\begin{aligned}
(U_f \circ U_{\bar{f}})([h]) &= U_f(U_{\bar{f}}([h])), \text{ por def. de composición.} \\
&= U_f([\bar{f} * h * \bar{f}]), \text{ por def. 3,2,3} \\
&= U_f([f * h * \bar{f}]), \text{ def. 3,2,3} \\
&= [\bar{f} * (f * h * \bar{f}) * f], \text{ por def. 3,2,3} \\
&= [(\bar{f} * f) * h * (\bar{f} * f)], \text{ por teo. 3,1,1(i)} \\
&= ([\bar{f} * f]) * [h] * ([\bar{f} * f]), \text{ por lema 3,1,2} \\
&= ([\bar{f}] * [f]) * [h] * ([\bar{f}] * [f]), \text{ por lema 3,1,2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(U_f \circ U_{\bar{f}})([h]) &= [e_y] * [h] * [e_y], \text{ por teo. 3,1,1(iii)} \\
&= ([e_y] * [h]) * [e_y], \text{ por teo. 3,1,1(i)} \\
&= [h] * [e_y], \text{ por teo. 3,1,1(ii)} \\
&= [h]
\end{aligned}$$

Así U_f es sobreyectiva, por *bi*) y *bii*) U_f es biyectiva.

Luego por *a*) y *b*) U_f es un isomorfismo.

□

De esto se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 3.2.1. *Si X es un espacio conexo por caminos, y para todo par de puntos $x, y \in X$, entonces $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio conexo por caminos. Sea $x, y \in X$. Como X es conexo por caminos, entonces existe un camino de x a y . Así por el Teorema 3.2.1, $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$

□

Observación 3.2.1. El resultado anterior no se satisface si se omite la condición de que X es conexo por caminos; incluso si X es conexo, el resultado no es válido en general.

Definición 3.2.4. Se dice que un espacio topológico X es **simplemente conexo** si X es **conexo por caminos** y $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial para algún $x_0 \in X$, y por tanto, para todo $x_0 \in X$.

Lema 3.2.1. *En un espacio simplemente conexo X , dos caminos cualesquiera con el mismo punto inicial y final, son homotópicos por caminos.*

Demostración. Sean f, g dos caminos en X de x a y . Como $f(1) = \bar{g}(0)$, entonces el producto $f * \bar{g}$ está definido y es un lazo en X con base en x .

Por hipótesis X es simplemente conexo, entonces $[f * \bar{g}] \in \pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$.

Por tanto $[f * \bar{g}]$ es homotópico al lazo constante en x , es decir

$$[f * \bar{g}] = [e_x]$$

$$[f * \bar{g}] * [g] = [e_x] * [g]; \text{ multiplicando por } [g] \text{ ambos miembros}$$

$$[f * \bar{g} * g] = [e_x * g]; \text{ por el lema 3,1,2}$$

$$[f * (\bar{g} * g)] = [g]; \text{ por el teo. 3,1,1(i) y (ii)}$$

$$[f * e_y] = [g]; \text{ por el teo. 3,1,1(iii)}$$

$$[f] = [g] \quad ; \text{ por el teo. 3,1,1(ii)}.$$

Así

$$f \simeq_p g$$

□

A continuación, se presentan algunas de las propiedades esenciales de las aplicaciones continuas en relación al grupo fundamental:

Lema 3.2.2. Sea $\varphi : X \rightarrow Y$ una función continua,

- i) Si f y g son caminos en X , entonces $\varphi \circ f$ y $\varphi \circ g$ son caminos en Y .
- ii) Si $f \simeq_p g$, entonces $\varphi \circ f \simeq_p \varphi \circ g$
- iii) Si f y g caminos con $f(1) = g(0)$, entonces $\varphi \circ (f * g) = (\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)$.
- iv) Si f es un lazo en X con base en $x \in X$, entonces $\varphi \circ f$ es un lazo en Y con base en $\varphi(x)$.

Demostración. i) Se probará que:

- a) si f es un camino, $\varphi \circ f$ es un camino en Y
- b) si g es un camino, $\varphi \circ g$ es un camino en Y

a) Suponga que f es un camino en X .

Como f es un camino, entonces $f : [0, 1] \rightarrow X$ es una función continua.

Así,

$$\varphi \circ f : [0, 1] \rightarrow Y$$

Como φ y f son funciones continuas, entonces $\varphi \circ f$ es continua.

$\therefore \varphi \circ f$ es un camino en Y .

El literal b) es de forma análoga.

ii) Suponga que $f \simeq_p g$.

Como $f \simeq_p g$, entonces f, g tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1 . Se cumple que :

$$f(0) = g(0) \implies \varphi(f(0)) = \varphi(g(0)) \implies (\varphi \circ f)(0) = (\varphi \circ g)(0)$$

$$f(1) = g(1) \implies \varphi(f(1)) = \varphi(g(1)) \implies (\varphi \circ f)(1) = (\varphi \circ g)(1)$$

y existe una aplicación continua. $F : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ tal que

$$F(s, 0) = f(s) \quad , \quad F(s, 1) = g(s)$$

$$F(0, t) = x_0 \quad , \quad F(1, t) = x_1$$

Se define $K = \varphi \circ F : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow Y$

Como φ y f son continuas, entonces K es continua.

Además

$$K(s, 0) = (\varphi \circ F)(s, 0) = \varphi(F(s, 0)) = \varphi(f(s)) = (\varphi \circ f)(s)$$

$$K(s, 1) = (\varphi \circ F)(s, 1) = \varphi(F(s, 1)) = \varphi(g(s)) = (\varphi \circ g)(s)$$

$$K(0, t) = \varphi(F(0, t)) = \varphi(x_0) = y_0$$

$$K(1, t) = \varphi(F(1, t)) = \varphi(x_1) = y_1$$

Por lo tanto K es un homotopía de caminos entre $\varphi \circ f$ y $\varphi \circ g$. Así

$$\varphi \circ f \simeq_p \varphi \circ g$$

iii) Suponga que f, g caminos en X con $f(1) = g(0)$.

Como $f(1) = g(0)$, entonces $f * g$ está definido.

Se tiene

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

$$\varphi((f * g)(t)) = \begin{cases} \varphi(f(2t)), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \varphi(g(2t - 1)), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

$$\varphi((f * g)(t)) = \begin{cases} (\varphi \circ f)(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (\varphi \circ g)(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Por otro lado se tiene :

$$\varphi \circ f : [0, 1] \longrightarrow Y \text{ y } \varphi \circ g : [0, 1] \longrightarrow Y$$

como $\varphi \circ f$ es un camino en Y (por i), análogamente $\varphi \circ g$ es un camino en Y .

Además

$$\begin{aligned} (\varphi \circ f)(1) &= \varphi(f(1)); && \text{por def. de composición.} \\ &= \varphi(g(0)); && \text{por hip. } f(1) = g(0) \\ &= (\varphi \circ g)(0); && \text{por def. de composición.} \end{aligned}$$

Así el producto $(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)$ está bien definido.

Se tiene

$$((\varphi \circ f) * (\varphi \circ g))(t) = \begin{cases} (\varphi \circ f)(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (\varphi \circ g)(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Por las aplicaciones definidas en (3.1) y (3.2), se concluye que:

$$\varphi \circ (f * g) = (\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)$$

iv) Suponga que f es un lazo en X con base en x .

Como f es un lazo, entonces $f : [0, 1] \longrightarrow X$ es una función continua tal que $f(0) = f(1) = x$ y φ es continua entonces la composición

$$\varphi \circ f : [0, 1] \longrightarrow Y,$$

es continua.

Además cumple

$$\begin{aligned} (\varphi \circ f)(0) &= \varphi(f(0)) && \text{y} && (\varphi \circ f)(1) &= \varphi(f(1)) \\ &= \varphi(x) && && &= \varphi(x) \end{aligned}$$

es decir, $\varphi \circ f$ es un lazo en Y basado en el punto $\varphi(x)$.

Así, si $[f] \in \pi_1(X, x)$, $[\varphi \circ f]$ es un elemento bien definido de $\pi_1(Y, \varphi(x))$.

□

El objetivo ahora es probar que el grupo fundamental es un invariante topológico. Para ello, se introduce el siguiente concepto:

Definición 3.2.5. Sea $\varphi : (X, x) \longrightarrow (Y, \varphi(x))$ una aplicación continua (es decir, φ es una aplicación que lleva el punto $x \in X$ al punto $\varphi(x) \in Y$). Se define

$$\varphi_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$$

por la ecuación $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$. La aplicación φ_* se denomina **homomorfismo inducido por φ** , relativo al punto base x .

Lema 3.2.3. φ_* es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Se probará que:

i) φ_* *Bien definida.*

ii) φ_* *Homomorfismo.*

Sean $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$.

i) φ_* *Bien definida.* Suponga que $[f] = [g]$.

$$\begin{aligned} [f] = [g] &\implies f \simeq_p g \quad ; \text{ por el colorario 3,1,1} \\ &\implies \varphi \circ f \simeq_p \varphi \circ g \quad ; \text{ por lema 3,2,2II} \\ &\implies [\varphi \circ f] = [\varphi \circ g] \quad ; \text{ por colorario 3,1,1} \\ &\implies \varphi_*([f]) = \varphi_*([g]) \quad ; \text{ por def. 3,2,5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, φ_* está bien definida.

ii) *Homomorfismo.* Se desea probar que $\forall [f], [g] \in \pi_1(X, x)$,

$$\varphi_*([f] * [g]) = \varphi_*([f]) * \varphi_*([g]).$$

Por ello, se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi_*([f] * [g]) &= \varphi_*([f * g]) \quad ; \text{ por lema 3,1,2} \\ &= [\varphi \circ (f * g)] \quad ; \text{ por def. 3,2,5} \\ &= [(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)] \quad ; \text{ por lema 3,2,2III} \\ &= [(\varphi \circ f)] * [(\varphi \circ g)] \quad ; \text{ por lema 3,1,2} \\ &= \varphi_*([f]) * \varphi_*([g]) \quad ; \text{ por def. 3,2,5.} \end{aligned}$$

Por lo tanto φ_* es homomorfismo. Por los literales i) y ii) φ_* es un homomorfismo de grupos.

□

El Teorema que se verá a continuación, muestra las dos propiedades generales básicas de los homomorfismo inducidos, llamadas “propiedades functoriales”, que se deducen de forma inmediata de la Definición 3.2.5.

Teorema 3.2.2. Sean X, Y, Z espacios topológicos.

i) Si $\varphi : X \rightarrow Y, \psi : Y \rightarrow Z$ son aplicaciones continuas, entonces $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$

ii) Si $i : X \rightarrow X$ es la identidad, i_* es el homomorfismo identidad de $\pi_1(X, x)$.

Demostración. i) Suponga que φ y ψ son aplicaciones continuas.

Por Definición 3.2.5, se tiene que

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)_*([f]) &= [(\psi \circ \varphi) \circ f]; \\ &= [\psi \circ (\varphi \circ f)]; \quad \text{por propiedad asociativa para la composición} \\ &= [\psi(\varphi \circ f)]; \quad \text{por def. de composición.} \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} (\psi_* \circ \varphi_*)([f]) &= \psi_*(\varphi_*([f])); \quad \text{por def. de composición.} \\ &= \psi_*([\varphi \circ f]); \\ &= [\psi(\varphi \circ f)]. \end{aligned}$$

$$\therefore (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$$

ii) Suponga que i es la identidad en X .

Por Definición 3.2.5 se tiene

$$i_*([f]) = [i \circ f]$$

$$= [f]$$

□

Corolario 3.2.2. Si $\varphi : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ es un isomorfismo.

Demostración. Sea $\delta : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ la aplicación inversa de φ .

Como δ es la aplicación inversa de φ , entonces por el Teorema 3.2.2, se cumple que

$$\delta_* \circ \varphi_* = (\delta \circ \varphi)_* = i_*,$$

donde i es la aplicación identidad en (X, x) .

Además,

$$\varphi_* \circ \delta_* = (\varphi \circ \delta)_* = j_*,$$

donde j es la aplicación identidad en (Y, y) .

Como i_* y j_* son los homomorfismos identidad de los grupos $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(Y, y)$ respectivamente, δ_* es la inversa de φ_* , por lo tanto φ_* es un isomorfismo. □

Notese que del resultado anterior se deduce que el grupo fundamental es un invariante topológico, por tanto puede ser utilizado como una *herramienta para la clasificación topológica de espacios*. Además, las propiedades mencionadas en el Teorema 3.2.2, expresan que el grupo fundamental es una vía para pasar de la Topología al Álgebra:

- i) Para cada espacio topológico (X, x_0) , se obtiene un grupo (su grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$).
- ii) Para cada aplicación continua φ entre espacios topológicos basados se obtiene un homomorfismo entre los grupos fundamentales asociados (el homomorfismo inducido φ_*)
- iii) La composición de funciones continuas, induce la composición de homomorfismo inducidos.
- iv) La identidad induce el homomorfismo identidad.

v) Todo homomorfismo induce un isomorfismo.

Así, se reemplaza la Topología por Álgebra y se utilizan los conocimientos de Álgebra para aprender algo sobre Topología. A las propiedades i) – iv) se les conoce como propiedades funtoriales.

La aplicación $i_* : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ definida por

$$i_*([\alpha]_U) = [i \circ \alpha] = [\alpha],$$

donde $[\alpha]_U$ denota la clase de equivalencia de α en $U \subset X$, no coincide con la clase de equivalencia de α en X . Ya que $[\alpha]_U = \{\beta \in \pi_1(U, x_0) : \beta \simeq \alpha\}$ y $[\alpha] = \{\beta \in \pi_1(X, x_0) : \beta \simeq \alpha\}$, es decir, que existen lazos en X relacionados con α que no están en U .

Análogamente, la aplicación $j_* : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ definida por

$$j_*([\alpha]_V) = [j \circ \alpha] = [\alpha],$$

donde $[\alpha]_V$ denota la clase de equivalencia de α en $V \subset X$, no coincide con la clase de equivalencia de α en X . Ya que, $[\alpha]_V = \{\beta \in \pi_1(V, x_0) : \beta \simeq \alpha\}$, es decir, que existen lazos en X relacionados con α que no están en V .

Teorema 3.2.3. *Suponga que $X = U \cup V$ donde U y V son dos conjuntos abiertos de X , supongase que $U \cap V$ es conexo por caminos y $x_0 \in U \cap V$. Sean i y j las aplicaciones inclusión de U y V , respectivamente, en X . Entonces las imágenes de los homomorfismos inducidos*

$$i_* : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \text{ y } j_* : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

generan $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Se probará en primer lugar que existe una subdivisión $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ del intervalo $[0, 1]$ tal que $\alpha(a_i) \in U \cap V$ y $\alpha([a_{i-1}, a_i])$ está contenido en U o V para cada i , donde α es un lazo en X basado en x_0 .

Para ello, se comienza eligiendo una subdivisión b_0, \dots, b_n del intervalo $[0, 1]$ tal que, para cada i , el conjunto $\alpha([b_{i-1}, b_i])$ esté contenido en U o V por el Lema del número de Lebesgue 1.1.2. Si $\alpha(b_i) \in U \cap V$ para cada i , entonces el teorema estaría demostrado. Si no, suponga que $\alpha(b_i) \notin U \cap V$, para algún índice i , entonces cada uno de los conjuntos $\alpha([b_{i-1}, b_i])$ y $\alpha([b_i, b_{i+1}])$ está contenido en U o en V . Si $\alpha(b_i) \in U$, entonces $\alpha([b_{i-1}, b_i])$ y $\alpha([b_i, b_{i+1}])$ estarían en U , y si $\alpha(b_i) \in V$ los conjuntos $\alpha([b_{i-1}, b_i])$ y $\alpha([b_i, b_{i+1}])$ estarían en V . En cualquier caso se puede quitar el b_i , ya que si está en U la imagen de i_* estaría a $\pi_1(X, x_0)$ y si b_i está en V la imagen de j_* estaría a $\pi_1(X, x_0)$. Quitando b_i de b_0, \dots, b_m y obtiene una nueva subdivisión c_0, \dots, c_{m-1} que satisface la condición de que $\alpha([c_{i-1}, c_i])$ esté contenida en U o en V , para cada i .

Al repetir un número finito de veces este proceso conseguira la subdivisión deseada.

Se procede a probar el teorema. Sea f y una subdivisión a_0, \dots, a_n la subdivisión construida anteriormente y se define α_i como el camino en X igual a la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[a_{i-1}, a_i]$ compuesta con α . Entonces α_i es un camino que está contenido en U o en V , por lo que utilizando el Teorema 3.1.2 se tiene que $[\alpha] = [\alpha_1] * [\alpha_2] * \dots * [\alpha_n]$.

Como $U \cap V$ es conexo por caminos, se puede elegir un camino β_i en $U \cap V$ de x_0 a $\alpha(a_i)$ y dado que $\alpha(a_0) = \alpha(a_n) = x_0$, se puede escoger que β_0 y β_n sean ambos caminos constante en x_0 . se tiene ahora

$$g_i = (\beta_{i-1} * \alpha_i) * \bar{\beta}_i$$

para cada i . Se tiene que g_i es un lazo en X basado en x_0 cuya imagen está contenida en U o en V y se cumple que

$$[\alpha_1] * [\alpha_2] * \dots * [\alpha_n] = [(\beta_0 * \alpha_1) * \bar{\beta}_1] * [(\beta_1 * \alpha_2) * \bar{\beta}_2] * \dots * [(\beta_{n-1} * \alpha_n) * \bar{\beta}_n]$$

En el Teorema 3.1.1 se probó que la operación $*$ es asociativa.

$$\begin{aligned} &= [\beta_0 * (\alpha_1 * \bar{\beta}_1)] * [\beta_1 * (\alpha_2 * \bar{\beta}_2)] * \dots * [\beta_{n-1} * (\alpha_n * \bar{\beta}_n)] \\ &= [(\beta_0 * \alpha_1) * (\bar{\beta}_1 * \beta_1) * (\alpha_2) * (\bar{\beta}_2 * \beta_2) * \dots * (\bar{\beta}_{n-1} * \beta_{n-1}) * (\alpha_n * \bar{\beta}_n)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(\beta_0 * \alpha_1)] * (e) * (\alpha_2) * (e) * \dots * (e) * (\alpha_n * \bar{\beta}_n) \\
&= [(\beta_0 * \alpha_1)] * (\alpha_2) * \dots * (\alpha_n * \bar{\beta}_n) \\
&= [\beta_0 * \alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_n] * \bar{\beta}_n \\
&= \beta_0 * [\alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_n] * \bar{\beta}_n
\end{aligned}$$

Como $\alpha(a_0) = \alpha(a_n) = x_0$, además, β_0 y β_n son ambos el camino constante en x_0 , entonces $\beta_0 * \bar{\beta}_n = e$

$$\begin{aligned}
&= [\alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_n] \\
&= [\alpha_1] * [\alpha_2] * \dots * [\alpha_n]
\end{aligned}$$

□

Este teorema establece que, dado un lazo α en X basado en x_0 , este es homotópico por caminos a un producto de la forma $(\beta_1 * (\beta_2 * (\dots * \beta_n)))$, donde cada β_i es un lazo en X basado en x_0 enteramente contenido en U o en V . Además es un caso especial de un famoso teorema de topología conocido por *Teorema de Seifert-Van Kampen*, el cual expresa el grupo fundamental del espacio $X = U \cup V$ de manera más general, cuando $U \cap V$ es conexo, en términos de los grupos fundamentales de U y V .

El siguiente Corolario será necesario para calcular el grupo fundamental de S^2 en la sección 3.4. El cual se deduce inmediatamente.

Corolario 3.2.3. *Supongase que $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos de X y que $U \cap V$ es conexo por caminos y no vacío. Si U y V son simplemente conexos entonces X es simplemente conexo.*

Demostración. Por hipótesis se tiene que $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos de X y que $U \cap V$ es conexo por caminos y no vacío, por lo tanto existirá al menos un elemento $x_0 \in U \cap V$.

Entonces por el Teorema 3.2.3, las imágenes de los homomorfismos inducidos generan a $\pi_1(X, x_0)$.

Ahora, si U y V son simplemente conexos, esto implica que $\pi_1(U, x_0) = \pi_1(V, x_0)$ son iguales al grupo fundamental trivial, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo fundamental trivial.

Así, X es simplemente conexo. □

Teorema 3.2.4. $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$

Demostración. Sean $p : X \times Y \longrightarrow X$ y $q : X \times Y \longrightarrow Y$ las aplicaciones proyección en X e Y respectivamente, es decir, $p(x, y) = x$ y $q(x, y) = y$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Como p y q son continuas, considérense los homomorfismos inducidos

$$\begin{aligned} p_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ q_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0). \end{aligned}$$

definidos por la ecuación $p_*([f]) = [p \circ f]$ y $q_*([f]) = [q \circ f]$ para todo lazo f en $X \times Y$ basado en (x_0, y_0) .

Dado que p_* y q_* son homomorfismos, entonces se define un homomorfismo

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

dado por la ecuación

$$\Phi([f]) = (p_*([f]), q_*([f])) = ([p \circ f], [q \circ f])$$

Se probará que Φ es un isomorfismo.

Primero se probará que la aplicación Φ es sobreyectiva.

Sea $g : [0, 1] \longrightarrow X$ un lazo basado en x_0 y sea $h : [0, 1] \longrightarrow Y$ un lazo basado en y_0 .

Se debe probar que el elemento $([g], [h])$ está en la imagen de Φ .

Defínase $f : [0, 1] \longrightarrow X \times Y$ dado por la ecuación $f(s) = (g(s), h(s))$.

Como $f(0) = (g(0), h(0)) = (x_0, y_0)$ y $f(1) = (g(1), h(1)) = (x_0, y_0)$, entonces f es un lazo en $X \times Y$ basado en (x_0, y_0) y se tiene que

$$\Phi([f]) = ([p \circ f], [q \circ f]) = ([g], [h]),$$

por lo que Φ es sobreyectiva.

Ahora se probará que Φ es inyectiva. Para ello se verá que el núcleo de Φ es cero.

Suponga que $f : [0, 1] \longrightarrow X \times Y$ es un lazo en $X \times Y$ basado en (x_0, y_0) y tal que $\Phi([f]) = ([p \circ f], [q \circ f])$ es el elemento neutro de $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Esto quiere decir que $p \circ f \simeq_p e_{x_0}$ y $q \circ f \simeq_p e_{y_0}$; sean

$$F : I \times I \longrightarrow X \text{ y } G : I \times I \longrightarrow Y$$

las respectivas homotopías de caminos. Entonces la aplicación

$$H : I \times I \longrightarrow X \times Y$$

definida por

$$H(s, t) = (F(s, t), G(s, t))$$

es una homotopía de caminos entre f y el lazo constante basado en (x_0, y_0) , $e_{(x_0, y_0)}$, ya que $H(s, 0) = (F(s, 0), G(s, 0)) = ((p \circ f)(s), (q \circ f)(s)) = f(s)$.

y $H(s, 1) = (F(s, 1), G(s, 1)) = (e_{x_0}(s), e_{y_0}(s)) = (x_0, y_0) = e_{(x_0, y_0)}(s)$.

Por lo tanto Φ es biyectiva. Luego, como Φ es un homomorfismo y es biyectiva, entonces $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. \square

3.2.1. Retracción y Retracto de deformación fuerte.

En esta subsección se introduce la definición sobre *Retracción*, *Retracto de deformación fuerte*. Pero antes de desarrollar el tema principal se dará un pequeño enfoque sobre la homotopía relativa la cual nos ayuda a comprender el concepto de *Retracción* y *Retracto de deformación fuerte*.

Dados los espacios topológicos X y Y la relación de homotopía \simeq es una relación de equivalencia en el conjunto $C(X, Y)$ de las aplicaciones continuas que fue desarrollado en la Sección 3.1.

Así introduciendo un concepto más general de homotopía, se tiene el de *homotopía relativa* a un subconjunto A , en el que se requiere que la homotopía no mueva ningún punto de A .

Definición 3.2.6. Sean X, Y espacios topológicos, $A \subset X$ y $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Se dice que f es **homotópica** a g **relativamente a** A si existe una homotopía $F : X \times I \longrightarrow Y$ entre f y g tal que para todo $a \in A$, $F(a, t)$ no depende de t ; en otras palabras, $F(a, t) = f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$ y $t \in I$.

Observe, entonces, que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$. La homotopía F se llama entonces *homotopía relativa* a A y se denotará la relación de homotopía relativa a A por $f \simeq g(\text{rel}A)$ o por $F : f \simeq_{\text{rel}A} g$ si se quiere especificar la homotopía relativa a A entre

f y g .

Cuando se tiene una homotopía relativa $F : f \simeq g(\text{rel}A)$, puede interpretarse que F deforma de modo continuo f en g dejando *fijos* los puntos de A ; es decir, para los puntos $a \in A$, $F(a, t) = f(a) = g(a)$ no depende de t .

Es claro que si $A = \emptyset$, la homotopía relativa a A coincide con la relación de homotopía vista en la Sección 3.1.

Lema 3.2.4. *La relación $\simeq_{\text{rel}A}$ definida en el conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y es una relación de equivalencia.*

Utilizando el concepto de aplicaciones homotópicas se puede establecer una relación de equivalencia entre espacios topológicos en el siguiente sentido.

Definición 3.2.7. Se dice que una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es una **equivalencia homotópica** si existe una aplicación continua $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq id_X$ y $f \circ g \simeq id_Y$. Tal que g se dice que es una **inversa homotópica de f** .

Definición 3.2.8. Se dice que dos espacios X e Y son **homotópicamente equivalentes** o que tienen el mismo tipo de homotopía si existe alguna equivalencia de homotopía $f : X \rightarrow Y$. En tal caso se denota $X \simeq Y$.

La noción del tipo de homotopía generaliza a la del tipo topológico (correspondiente a la relación de homeomorfismo). Pues, una consecuencia inmediata de las definiciones anteriores es que dos espacios homeomorfos son del mismo tipo de homotopía. Pero el recíproco no es cierto.

Los espacios que son homotópicamente equivalente a un punto reciben un nombre especial:

Definición 3.2.9. Se dice que un espacio topológico X es **contraíble** si X es homotópicamente equivalente a un punto.

Intuitivamente, un espacio es contraíble cuando puede deformarse en sí mismo a un punto.

La siguiente definición recoge nociones sobre subespacios con un comportamiento homotópico especial respecto al espacio total.

Definición 3.2.10. Sea X un espacio topológico, $A \subset X$. Se dice que A es un **retracto** de X (o que X **se retrae a** A) si existe una aplicación continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r \circ i = id_A$ (es decir $r(a) = a$, para todo $a \in A$), donde $i : A \rightarrow X$ es la inclusión. A la aplicación r se le llama **retracción**.

Lema 3.2.5. Si A es un retracto de X , entonces el homomorfismo de grupos fundamentales inducido por la inclusión $j : A \rightarrow X$ es inyectivo.

Demostración. Por hipótesis A es un retracto de X , entonces existe una aplicación continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r \circ j = id_A : A \rightarrow A$, donde $j : A \rightarrow X$ es la inclusión.

Como r y j son aplicaciones continuas por Definición 3.2.5, r_* y j_* son homomorfismos inducidos. Así por el Teorema 3.2.2 i) se tiene

$$(r \circ j)_* = r_* \circ j_*$$

Como id_A es la identidad de A , entonces por el Teorema 3.2.2 ii) $(id_A)_*$ es el homomorfismo identidad de $\pi(A, a)$, por lo tanto j_* debe ser inyectiva. \square

Así se introduce lo que es el concepto de retracto por deformación y retracto por deformación fuerte. Comenzando primeramente con el siguiente lema.

Lema 3.2.6. Sean $h, k : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ dos aplicaciones continuas. Si h y k son homotópicas y si la imagen del punto base x_0 de X permanece fija en y_0 durante la homotopía, entonces los homomorfismos h_* y k_* coinciden.

Demostración. Supongase que h y k son homotópicas y la imagen del punto base x_0 permanece fija en y_0 durante la homotopía. Como h y k son homotópicas, entonces existe una aplicación continua

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

tal que

$$H(x_0, t) = y_0, \forall t, \quad y \quad H(x, 0) = h(x) \quad H(x, 1) = k(x).$$

así H es una homotopía entre h y k . Si f es un lazo en X basado en x_0 , considere

$$f \times id : I \times I \longrightarrow X \times I$$

entonces la composición

$$K = H \circ (f \times id) : I \times I \longrightarrow Y$$

es una homotopía entre los lazos $h \circ f$ y $k \circ f$ basados en y_0 , donde K es una aplicación continua en Y y

$$\begin{aligned} K(x, 0) &= (H \circ f \times id)(x, 0) = H((f \times id)(x, 0)) \\ &= H(f(x), id(0)) = H(f(x), 0) \\ &= h(f(x)) = (h \circ f)(x). \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} K(x, 1) &= (H \circ f \times id)(x, 1) = H((f \times id)(x, 1)) \\ &= H(f(x), id(1)) = H(f(x), 1) \\ &= k(f(x)) = (k \circ f)(x). \end{aligned}$$

Y también, es una homotopía de caminos porque f es un lazo en x_0 y H aplica $x_0 \times I$ en y_0 :

$$\begin{aligned} K(0, t) &= (H \circ f \times id)(0, t) = H((f \times id)(0, t)) \\ &= H(f(0), id(t)) = H(x_0, t) \\ &= y_0, \forall t \in I. \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} K(1, t) &= (H \circ f \times id)(1, t) = H((f \times id)(1, t)) \\ &= H(f(1), id(t)) = H(x_0, t) \\ &= y_0, \forall t \in I. \end{aligned}$$

por hipótesis se tiene que $h, k : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ son aplicaciones continuas y f es un lazo en X basado en x_0 , entonces por el Lema 3.2.2 iv) $h \circ f$ y $k \circ f$ son lazos en Y con

base en el punto y_0 .

Así $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, $[h \circ f]$ y $[k \circ f]$ son elementos bien definidos en $\pi_1(Y, y_0)$. Por

Definición 3.2.5, se tiene

$$h_*([f]) = [h \circ f] \quad , \quad k_*([f]) = [k \circ f]$$

y

$$\begin{aligned} h \circ f \simeq_p k \circ f &\implies [h \circ f] = [k \circ f] \quad , \text{ por Lema 3,2,2} \\ &\implies h_*([f]) = k_*([f]) \quad ; \text{ por definici3n 3,2,5} \end{aligned}$$

para todo lazo en $\pi_1(X, x_0)$. As3 los homomorfismos inducidos coinciden. \square

Utilizando este Lema, generalizando un resultado concerniente al espacio $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, probado anteriormente, demostrando que el homomorfismo inducido por la inclusi3n $j : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no solo es inyectivo sino tambi3n sobreyectivo. Generalizando se probar3 el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.2. La aplicaci3n de inclusi3n $j : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ induce un isomorfismo de grupos fundamentales.

Demostraci3n. Sea $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y $b_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Sea $r : X \longrightarrow S^n$ la aplicaci3n $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Por hip3tesis se tiene que $j : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ la aplicaci3n inclusi3n. Entonces

$$id_{S^n} = r \circ j : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow S^n$$

id_{S^n} es la aplicaci3n identidad de S^n . Como r y j son aplicaciones continuas por el Teorema 3.2.2 i) – ii) se tiene

$$(r \circ j)_* = r_* \circ j_* = (id_{S^n})_* = id_{\pi(S^n)}$$

Se considera ahora la composici3n $j \circ r$, la cual aplica X en s3 misma;

$$X \longrightarrow S^n \longrightarrow X$$

donde la aplicación, $j \circ r$ no es la identidad de X , pero $j \circ r \simeq id_X$. En efecto, existe una homotopía por rectas $H : X \times I \longrightarrow X$, dada por

$$H(x,t) = (1-t)x + \frac{tx}{\|x\|},$$

Se observa que $H(x,t)$ nunca es igual a 0 porque $(1-t)x + \frac{tx}{\|x\|}$ es un número entre 1 y $\frac{1}{\|x\|}$. El punto b_0 pertenece fijo durante la homotopía ya que $\|b_0\| = 1$. Por tanto X y S^n son equivalentes por el Lema 3.2.6. \square

Definición 3.2.11. Sea $A \subset X$. Se dice que A es un **retracto por deformación de** X (o que X **se retrae por deformación a** A) si existe una retracción $r : X \longrightarrow A$ tal que $i \circ r \simeq id_X$, donde $i : A \longrightarrow X$ es la inclusión.

Esto es, A es un retracto por deformación de X si existe una homotopía $F : X \times I \longrightarrow X$ tal que $F(x,0) = x$ para todo $x \in X$ y $F(x,1) \in A$ para todo $x \in X$. Observe que si A es un retracto por deformación de X , entonces A y X son homotópicamente equivalentes. De acuerdo a la definición anterior se llega a otra definición.

Definición 3.2.12. Se dice que un subconjunto A de X es un **retracto por deformación fuerte de** X (o que X **se retrae por deformación fuerte a** A) si existe una retracción $r : X \longrightarrow A$ tal que $i \circ r \simeq id_X(\text{rel}A)$.

En otras palabras, A es un retracto por deformación fuerte de X , si existe una homotopía $F : X \times I \longrightarrow X$ tal que $F(x,0) = x$ para todo $x \in X$, $F(a,t) = a$ para todo $a \in A$, $t \in I$ y $F(x,1) \in A$ para todo $x \in X$. Considerando las dos últimas definiciones se tiene que un retracto por deformación fuerte es también un retracto por deformación. De manera intuitiva, se puede considerar que A es un retracto por deformación fuerte de X , si X puede deformarse, en sí mismo, a A dejando fijo a A .

La demostración del Ejemplo 3.2.2 se generaliza inmediatamente para demostrar el siguiente.

Teorema 3.2.5. Sea A un retracto por deformación de X y $x_0 \in A$. Entonces la aplicación de inclusión

$$j : (A, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

induce un isomorfismo de grupos fundamentales.

Demostración. Por Definición 3.2.10 se tiene que $r \circ j = id_A$; y por lo tanto $r_* \circ j_* = (id_A)_*$. Esto nos dice que j_* es monomorfismo, por otro lado por Definición 3.2.11 se tiene $j \circ r \simeq id_X$, entonces j es una equivalencia homotópica entre A y X . Por el Teorema 3.2.2, $j_* \circ r_* = (id_X)_*$, con lo cual j_* es epimorfismo. Así j induce un isomorfismo de grupos fundamentales. \square

3.3. Espacios recubridores.

En esta sección se introduce una de las herramientas más usuales que servirá para el cálculo de los grupos fundamentales como lo es *espacio recubridor*. El estudio de los espacios recubridores de un espacio X está estrechamente relacionado con el estudio del grupo fundamental de X , estableciéndose relaciones cruciales entre los dos conceptos.

De modo que se analiza previamente la noción de aplicación recubridora y sus propiedades de elevación de caminos y homotopías.

3.3.1. Espacios recubridores

Primeramente se dará un par de definiciones más débiles que la noción de aplicación recubridora:

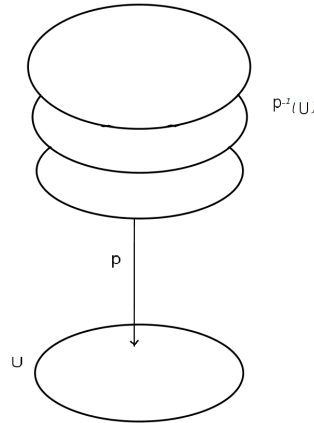
Definición 3.3.1. Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es **localmente inyectiva** si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U tal que $f|_U : U \rightarrow Y$ es inyectiva.

Definición 3.3.2. Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es un **homeomorfismo local** si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U tal que $f(U)$ es abierto en Y y $f|_U : U \rightarrow f(U)$ es un homeomorfismo.

A continuación se define una condición más fuerte que homeomorfismo local :

Definición 3.3.3. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva entre espacios topológicos. Un conjunto abierto U de B se dice que esta **regularmente cubierto** por p si la imagen inversa $p^{-1}(U)$ puede escribirse como la unión disjunta de conjuntos abiertos V_α de E tal que $p|_{V_\alpha}$, es un homeomorfismo. La colección $\{V_\alpha\}$ será denominada una partición de $p^{-1}(U)$ en **rebanadas**.

Si U es un conjunto abierto que está regularmente cubierto por p , frecuentemente dibujamos el conjunto $p^{-1}(U)$ como una “pila de tortillas”, cada una con la misma forma y tamaño que U , flotando en el aire sobre U ; la aplicación p las comprime a todas sobre U .



Resultado 3.3.1. Si U está regularmente cubierto por p y $W \subset U$ es abierto, entonces W está regularmente cubierto por p .

Demostración. Sea $p : E \rightarrow B$ continua y sobreyectiva.

Sea $U \subset B$ que está regularmente cubierto por p .

Como U está regularmente cubierto por p , entonces $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ donde V_{α} son abiertos disjuntos tal que $p|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Como $W \subset U$, entonces $p^{-1}(W) \subset p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$

$$\begin{aligned} \implies p^{-1}(W) &= p^{-1}(W) \cap \left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \right) \\ &= \bigcup_{\alpha} (p^{-1}(W) \cap V_{\alpha}) \end{aligned}$$

Así se tiene que $p|_{p^{-1}(W) \cap V_{\alpha}} : p^{-1}(W) \cap V_{\alpha} \rightarrow W$ es una aplicación continua e inyectiva. Se debe probar que $p|_{p^{-1}(W) \cap V_{\alpha}}$ es sobreyectiva.

Sea $w \in W$

$$\begin{aligned} w \in W &\implies w \in U \\ &\implies p^{-1}|_{V_{\alpha}}(w) \in p^{-1}|_{V_{\alpha}}(U) \\ &\implies p^{-1}|_{V_{\alpha}}(w) \in V_{\alpha} \end{aligned}$$

Además $p^{-1}(w) \in p^{-1}(W)$, de manera que $p^{-1}(w) \in (p^{-1}(W) \cap V_{\alpha})$

$$p^{-1}|_{p^{-1}(W) \cap V_{\alpha}}(w) \in p^{-1}(W) \cap V_{\alpha}$$

Así $p^{-1}|_{p^{-1}(W) \cap V_\alpha}$ es sobreyectiva de modo que $p^{-1}|_{p^{-1}(W) \cap V_\alpha}$ es un homeomorfismo. Por lo tanto W está regularmente cubierto por p . \square

Definición 3.3.4. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva entre espacios topológicos. Si todo punto $b \in B$ tiene un entorno U que está regularmente cubierto por p , entonces p se dice que es una **aplicación cubriente** y E es un **espacio recubridor o cubriente** de B .

En otras palabras,

Definición 3.3.5. $p : E \rightarrow B$ es una aplicación cubriente si:

- i) p es continua y sobreyectiva.
- ii) para todo $x \in B$ existe un entorno abierto U de x tal que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha$$

para una cierta colección $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ de subconjuntos de E tales que $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ para $\alpha \neq \beta$ y $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ es un homeomorfismo para cada $\alpha \in J$.

Notese que una aplicación recubridora es siempre un homeomorfismo local y un homeomorfismo local es localmente inyectivo; sin embargo los recíprocos no son ciertos.

Resultado 3.3.2. Si $p : E \rightarrow B$ es una aplicación recubridora, entonces para cada $b \in B$, el subespacio $p^{-1}(\{b\})$ de E tiene la topología discreta.

Demostración. Sean p es una aplicación recubridora, \mathcal{T} la topología de subespacio para $p^{-1}(\{b\})$ y \mathcal{T}_{dis} la topología discreta.

Ya se sabe que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{dis}$ (por el Ejemplo 1.1.3). Solo se debe probar que $\mathcal{T}_{dis} \subset \mathcal{T}$, es decir que $p^{-1}(\{b\})$ son abiertos en la topología discreta, así:

$$p^{-1}(\{b\}) = \{x \in E : p(x) = b\}$$

Luego $\mathcal{T} = \{V_\alpha \cap p^{-1}(\{b\}) : U \in E \text{ abierto}\}$. Sea U abierto en B , tal que $b \in B$.

Como p es un aplicación recubridora, entonces U esta regularmente cubierto por p , entonces $p^{-1}(U) = \bigcup_{disj} V_\alpha$, V_α abierto en E y $\forall \alpha, p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Sea $x \in p^{-1}(\{b\})$

$$\begin{aligned} x \in p^{-1}(\{b\}) &\implies x \in \bigcup_{disj} V_\alpha \\ &\implies x \in V_\alpha \text{ para algún único } \alpha \\ &\implies x \in (p^{-1}(\{b\}) \cap V_\alpha) \end{aligned}$$

Así $\{x\} \subset (p^{-1}(\{b\}) \cap V_\alpha)$.

Suponga que existe $y \neq x$, $y \in (p^{-1}(\{b\}) \cap V_\alpha)$

$$y \in V_\alpha \quad y \quad p|_{V_\alpha}(y) = b$$

Así $p|_{V_\alpha}(y) = p|_{V_\alpha}(x)$, $x \neq y$ de manera que $p|_{V_\alpha}$ no es inyectiva ($\longrightarrow \longleftarrow$).

Además

$$\begin{aligned} y \in p^{-1}(\{b\}) &\implies p|_{V_\alpha}(y) = b \\ &\implies \{x\} = p^{-1}(\{b\}) \cap V_\alpha. \end{aligned}$$

Así $\{x\}$ es abierto en la Topología de subespacio de $p^{-1}(\{b\})$. Por lo tanto $p^{-1}(\{b\})$ tiene la topología discreta. \square

Lema 3.3.1. Si $p : E \rightarrow B$ es una aplicación recubridora entonces p es una aplicación abierta.

Demostración. Supongase que $p : E \rightarrow B$ es una aplicación recubridora. Sea A un subconjunto abierto de E y sea $x \in p(A)$.

Como p es una aplicación recubridora, existe un entorno U de x abierto de B que esta regularmente cubierto por p . Así

$$p^{-1}(U_x) = \bigcup V_\alpha$$

.

Como $x \in p(A)$ entonces existe $a \in A$ tal que $p(a) = x$, ($a \in p^{-1}(x)$) por ser p

sobreyectiva y existe un único V_α tal que $a \in V_\alpha$. Ahora $a \in V_\alpha \cap A$ que es un abierto en E y $V_\alpha \cap A \subset V_\alpha$. Sea el homeomorfismo $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U_x$, $p|_{V_\alpha}(V_\alpha \cap A) \subset U_x$ es un abierto en U_x que a su vez es abierto en B . Puesto que $x = p(a) \in p(V_\alpha \cap A) \subset p(A)$, resulta que $p(A)$ es abierto, por lo que p es una aplicación abierta. \square

Teorema 3.3.1. *La aplicación $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por*

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$$

es una aplicación recubridora.

La aplicación p se puede representar como una aplicación que enrolla la recta real \mathbb{R} alrededor del círculo S^1 y, en el proceso, aplica cada intervalo $[n, n + 1]$ sobre S^1 .

Demostración. La aplicación recubridora p reside en las propiedades elementales de las funciones seno y coseno.

Se debe probar que los entornos:

1. $U_1 = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \cap S^1$.
2. $U_2 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap S^1$.
3. $U_3 = (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}) \cap S^1$.
4. $U_4 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-) \cap S^1$.

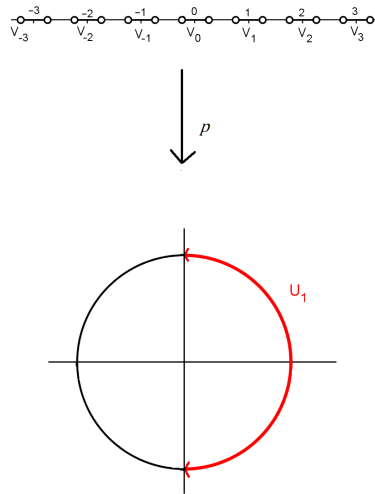
están regularmente cubiertos por p y que p es continua y sobreyectiva.

1. Sea $U_1 = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \cap S^1$.

Por hipótesis $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$, así

$$\begin{aligned} p^{-1}(U_1) &= \{x \in \mathbb{R} : p(x) \in U_1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in U_1\} \end{aligned}$$

consiste en aquellos puntos x para los que $\cos 2\pi x > 0$.



Como se sabe que el coseno es positivo en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces

$$-\frac{\pi}{2} < 2\pi x < \frac{\pi}{2}$$

$$2n\pi - \frac{\pi}{2} < 2\pi x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{4n\pi - \pi}{2} < 2\pi x < \frac{4n\pi + \pi}{2}$$

$$\frac{4n\pi - \pi}{2} < \frac{2\pi x}{2\pi} < \frac{4n\pi + \pi}{2}$$

$$\frac{4n\pi - \pi}{4\pi} < x < \frac{4n\pi + \pi}{4\pi}$$

$$n - \frac{1}{4} < x < n + \frac{1}{4}$$

$$\implies x \in \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right)$$

es decir,

$$p^{-1}(U_1) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right)$$

donde $V_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4} \right)$ son abiertos disjuntos. Tomando la clausura de V_n , se restringe p al intervalo cerrado \bar{V}_n , se tiene :

$$p|_{\bar{V}_n} : \left[n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4} \right] \longrightarrow \bar{U}_1$$

Así, la aplicación $p|_{\bar{V}_n}$ es inyectiva, debido a que $\text{sen } 2\pi x$ es estrictamente monótona en tales intervalos.

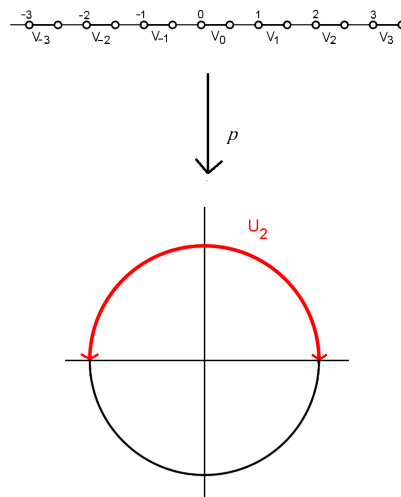
Además

Sea $(x, y) \in \bar{U}_1$, luego $\exists z \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]$ tal que $p(z) = (x, y)$

$$p(z + n) = (x, y)$$

Así, $p|_{\bar{V}_n}$ es biyectiva. Como p es continua, entonces $p|_{\bar{V}_n}$ es continua. Así $p|_{\bar{V}_n} : \bar{V}_n \longrightarrow \bar{U}_1$ es continua y biyectiva, además \bar{V}_n es cerrado y acotado, entonces \bar{V}_n es compacto, y como $\bar{U}_1 \subset \mathbb{R}^2$ y \mathbb{R}^2 es Hausdorff (por Teorema 1.1.2), entonces \bar{U}_1 es Hausdorff; se tiene que $p|_{\bar{V}_n} : \bar{V}_n \longrightarrow \bar{U}_1$ es un homeomorfismo, por el Teorema 1.1.8. Esto implica que $p|_{V_n} : V_n \longrightarrow U_1$ es un homeomorfismo, ya que conserva la continuidad y biyectividad al restringir el dominio y rango de la función restricción.

2. Sea $U_2 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap S^1$.



Por hipótesis $p(x) = (\cos 2\pi x, \text{sen } 2\pi x)$, así

$$p^{-1}(U_2) = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \in U_2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in U_2\}$$

consiste en aquellos puntos x para los que $\operatorname{sen} 2\pi x > 0$. Como se sabe el sen es positivo en el intervalo $(0, \pi)$, entonces

$$0 < 2\pi x < \pi$$

$$2n\pi - 0 < 2\pi x < \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2n\pi - 0}{2\pi} < \frac{2\pi x}{2} < \frac{\pi + 2n\pi}{2\pi}$$

$$n < x < \frac{1}{2} + n$$

$$\implies x \in \left(n, n + \frac{1}{2}\right)$$

es decir,

$$p^{-1}(U_2) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(n, n + \frac{1}{2}\right)$$

donde $V_n = \left(n, n + \frac{1}{2}\right)$ son abiertos disjuntos. Tomando la clausura de V_n se tiene :

$$p|_{\bar{V}_n} : \left[n, n + \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \bar{U}_2$$

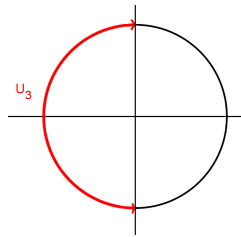
Así $p|_{\bar{V}_n}$ es inyectiva, debido a que $\operatorname{sen} 2\pi x$ es estrictamente monótona en tales intervalos.

Además

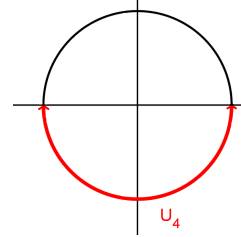
Sea $(x, y) \in \bar{U}_2$, luego $\exists z \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $p(z) = (x, y)$

$$p(z + n) = (x, y)$$

Así, $p|_{\bar{V}_n}$ es biyectiva. Como p es continua, entonces $p|_{\bar{V}_n}$ es continua. Así $p|_{\bar{V}_n} : \bar{V}_n \longrightarrow \bar{U}_2$ es continua y biyectiva, además \bar{V}_n es cerrado y acotado, entonces \bar{V}_n es compacto, y como $\bar{U}_2 \subset \mathbb{R}^2$ y \mathbb{R}^2 es Hausdorff (por Teorema 1.1.2), entonces \bar{U}_2 es Hausdorff; se tiene que $p|_{\bar{V}_n} : \bar{V}_n \longrightarrow \bar{U}_2$ es un homeomorfismo, por el Teorema 1.1.8. Esto último implica que $p|_{V_n} : V_n \longrightarrow U_2$ es un homeomorfismo, ya que conserva la continuidad y biyectividad al restringir el dominio y rango de la función restricción.



(a) $U_3 = (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}) \cap S^1$



(b) $U_4 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-) \cap S^1$

Los entornos siguientes se desarrollan análogamente.

Así la unión de estos cuatro subconjuntos recubren a S^1 , y cada uno de ellos está regularmente cubierto por p . Por lo tanto $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ es una aplicación recubridora.

□

Teorema 3.3.2. Si $p : E \rightarrow B$ y $p' : E' \rightarrow B'$ son aplicaciones recubridoras, entonces

$$p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$$

es una aplicación recubridora.

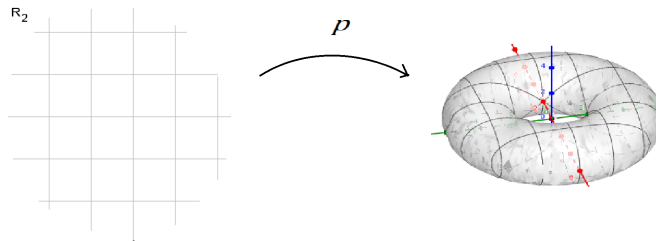
Demostración. Dados $b \in B$ y $b' \in B'$, sean U y U' entornos de b y b' , respectivamente, que están regularmente cubiertos por p y p' . Sea $\{V_\alpha\}$ y $\{V'_\beta\}$ particiones en rebanadas de $p^{-1}(U)$ y $(p')^{-1}(U')$, respectivamente. Entonces la imagen inversa mediante $p \times p'$ del conjunto abierto $U \times U'$ es la Unión de todos los conjuntos $V_\alpha \times V'_\beta$. Estos conjuntos son abiertos disjuntos de $E \times E'$, cada uno de ellos se aplica homeomórficamente sobre $U \times U'$ por $p \times p'$.

□

Ejemplo 3.3.1. El espacio $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ (es decir, el **toro**). La aplicación producto

$$p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1$$

donde p es la aplicación del Teorema 3.3.1, es un cubrimiento del toro por el plano \mathbb{R}^2 , de manera que cada uno de los cuadros unidad $[n, n + 1] \times [m, m + 1]$ se enrolla completamente alrededor del toro, por medio de $p \times p$.



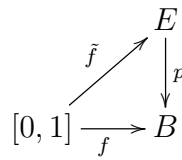
3.3.2. Levantamientos de Caminos.

A continuación, se presentan los principales teoremas de levantamientos de caminos y homotopía para cubrientes. En las demostraciones se utilizan algunos resultados de Topología General y lo visto de aplicaciones recubridoras.

Definición 3.3.6. Sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación recubridora y $f : X \longrightarrow B$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Un **levantamiento o elevación** de f (respecto a p) es una aplicación continua $\tilde{f} : X \longrightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc}
 & E & \\
 \tilde{f} \nearrow & & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

La existencia de levantamientos cuando p es una aplicación recubridora es una herramienta importante en el estudio de los espacios recubridores y el grupo fundamental. Primero se probará que para un espacio recubridor, los caminos pueden ser levantados y así mismos las homotopías de caminos.



Ejemplo 3.3.2. Considere el cubrimiento $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ del Teorema 3.3.1. Si $f : [0, 1] \rightarrow S^1$, es un camino, entonces el camino $f(s) = (\cos \pi s, \text{sen } \pi s)$ se levanta al camino $\tilde{f}(s) = \frac{s}{2}$.

Solución: Sea

$$\begin{aligned}
 p : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\
 x &\rightarrow p(x) = (\cos 2\pi x, \text{sen } 2\pi x)
 \end{aligned}$$

una aplicación recubridora por el Teorema 3.3.1.

Sea

$$\begin{aligned}
 f : [0, 1] &\rightarrow S^1 \\
 s &\rightarrow f(s) = (\cos \pi s, \text{sen } \pi s)
 \end{aligned}$$

un camino. Como $f(s) = (\cos \pi s, \text{sen } \pi s)$ es un camino, entonces $f(s)$ es continua. Así por Definición 3.3.6, se tiene $p \circ \tilde{f} = f$. Además

$$\begin{aligned}
 p(\tilde{f}(s)) &= f(s) \\
 (\cos 2\pi \tilde{f}(s), \text{sen } 2\pi \tilde{f}(s)) &= (\cos \pi s, \text{sen } \pi s)
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \cos 2\pi \tilde{f}(s) = \cos \pi s & \qquad y \qquad \qquad \text{sen } 2\pi \tilde{f}(s) = \text{sen } \pi s \\
 2\pi \tilde{f}(s) = \pi s + 2n\pi & \qquad \qquad \qquad 2\pi \tilde{f}(s) = \pi s + 2n\pi \\
 \tilde{f}(s) = \frac{s}{2} + n & \qquad \qquad \qquad \tilde{f}(s) = \frac{s}{2} + n
 \end{aligned}$$

Así, el camino $f(s) = (\cos \pi s, \text{sen } \pi s)$ se levanta al camino $\tilde{f}(s) = \frac{s}{2}$.

Todo diagrama del tipo anterior tiene elevación única.

Lema 3.3.2. *Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Cualquier camino $f : [0, 1] \rightarrow B$ comenzando en b_0 tiene un único levantamiento a un camino \tilde{f} en E que comienza en e_0 .*

Demostración. Como p es una aplicación recubridora, se sabe que para cada punto $x \in B$, existe un abierto U_x que está regularmente cubierto por p , $(p^{-1}(U_x) = \bigcup V_{x_\alpha})$.

La familia $A = \{U_x | x \in B\}$ es un cubrimiento abierto de B , donde cada U_x es regularmente cubierto por p , como f es continua, entonces $A' = \{f^{-1}(U_x) | x \in B\}$ es una cubierta abierta del intervalo $[0, 1]$ y como $[0, 1]$ compacto, por el Lema del número de Lebesgue 1.1.2 se puede encontrar una partición de $[0, 1]$, $0 = s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n = 1$, tal que para cada i existe U_{x_i} tal que $f([s_i, s_{i+1}]) \subset U_{x_i}$.

Se definirá el levantamiento paso a paso.

Primero definase $\tilde{f}(0) = e_0$, entonces se define \tilde{f} en $[0, s_1]$ de la única manera posible para que se verifique $p(\tilde{f}(s)) = f(s)$, es decir, se define $\tilde{f}(s) = p^{-1}|_{V_{x_0}}(f(s))$, que está bien definida pues $f([0, s_1]) \subset V_{x_0}$ y $p|_{V_{x_0}}$ es biyectiva. Ahora se supone que $\tilde{f}(s)$ está definida para $0 \leq s \leq s_i$. Recuerde que el conjunto $f([s_i, s_{i+1}]) \subset U_{x_i}$. Sea $\{V_{x_{i\alpha}}\}$ la partición de $p^{-1}(U_{x_i})$ en rebanadas. Cada $V_{x_{i\alpha}}$ es homeomorfo a U_x , por p . Entonces $\tilde{f}(s)$ está en alguno de lo $V_{x_{i\alpha}}$, se denota V_0 . Definase

$$\tilde{f}(s) = (p|_{V_0})^{-1}(f(s)); \quad \forall s \in [s_i, s_{i+1}]$$

Como $p|_{V_0} : V_0 \rightarrow U_x$ es un homeomorfismo, ya que p es aplicación recubridora entonces f es continua en $[s_i, s_{i+1}]$. De esta manera se define $\tilde{f}(s)$ en todo $[0, 1]$. Por el Lema de pegamiento, se asegura la continuidad de \tilde{f} . Por la definición de \tilde{f} es inmediato que $p \circ \tilde{f} = f$.

La unicidad se probará paso a paso.

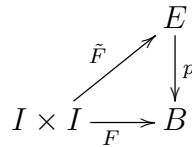
Suponga que existe otro levantamiento \tilde{f} de f comenzando en e_0 , entonces $\tilde{f}(0) = e_0 = \tilde{f}(0)$.

Se supone que $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a), \forall a \in [0, s_i]$. Sea V_0 como se definió anteriormente, en-

tonces para $s \in [s_i, s_{i+1}]$, $\tilde{f}(s) = (p|_{V_0})^{-1}(f(s))$. Como \tilde{f} es un levantamiento de f , $\tilde{f}([s_i, s_{i+1}]) \subset p^{-1}(U_x) = \bigcup V_{x_\alpha}$. Las rebanadas V_{x_α} son abiertas y disjuntas. Como el conjunto $\tilde{f}([s_i, s_{i+1}])$ es conexo, $\tilde{f}([s_i, s_{i+1}]) \subset V_{x_\alpha}$. Como $\tilde{f}(s_i) = \tilde{f}(s_i) \subset V_0$, entonces $\tilde{f}([s_i, s_{i+1}]) \subset V_0$. Entonces con $s \in [s_i, s_{i+1}]$, $\tilde{f}(s) = y$ con $y \in V_0 \subset p^{-1}(f(s))$. Pero sólo hay un punto y , $y = (p|_{V_0})^{-1}(f(s))$. Por lo tanto, $\tilde{f}(s) = \tilde{f}(s) \forall s \in [s_i, s_{i+1}]$.

□

Además de la propiedad de elevación de caminos las aplicaciones recubridoras tienen las propiedades de elevación de homotopías. como se muestra en la siguiente figura.



Observe que las aplicaciones recubridoras tienen esta propiedad de levantamiento.

Lema 3.3.3 (Teorema de levantamiento de homotopías). *Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Sea $F : I \times I \rightarrow B$ una función continua con $F(0, 0) = b_0$. Existe un único levantamiento de F a una aplicación continua*

$$\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$$

tal que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Si F es una homotopía de caminos, entonces \tilde{F} también es una homotopía de caminos.

Demostración. Dada F , Se define $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Ahora utilizando el Lema 3.3.2 para extender \tilde{F} al borde izquierdo $\{0\} \times I$ y al borde inferior $I \times \{0\}$ de $I \times I$. Se extenderá \tilde{F} para todo $I \times I$ como se sigue : Utilizando la misma notación del primer párrafo del Lema 3.3.2, se observa que $\{F^{-1}(U_b) | b \in B\}$ es un cubrimiento abierto de $I \times I$, que es compacto, por lo tanto, aplicando nuevamente el Lema de Lebesgue 1.1.2, se puede construir dos particiones de I .

Sea

$$s_0 < s_1 \dots < s_m$$

$$t_0 < t_1 \dots < t_n$$

de tal manera que si se denota por $I_i = [s_{i-1}, s_i]$ y por $J_i = [t_{j-1}, t_j]$

$$F([s_{i-1}, s_i] \times [t_{i-1}, t_i]) = F(I_i \times J_j)$$

siendo U_b un abierto de B que esté regularmente cubierto por p .

Como antes, puede definirse \tilde{F} paso a paso, empezando por el rectángulo $I_1 \times J_1$ y siguiendo por los otros rectángulos $I_i \times J_1$ de la fila inferior, después con $I_i \times J_2$ de la fila siguiente, y así sucesivamente.

En general, dado i_0 y j_0 se asume que \tilde{F} está definido en el conjunto A determinado por la unión de $\{0\} \times I$, $I \times \{0\}$ y todos los rectángulos previos a $I_{i_0} \times J_{j_0}$ (aquellos rectángulos $I_i \times J_j$ con $j < j_0$ y aquellos $j = j_0$ e $i < i_0$). Suponga que también \tilde{F} es un levantamiento continuo de $F|_A$.

Se define ahora \tilde{F} sobre $I_{i_0} \times J_{j_0}$. Se sabe que existe un conjunto abierto $U \subset B$ que está regularmente cubierto por p y que contiene al conjunto $F(I_{i_0} \times J_{j_0})$. Sea $\{V_\alpha\}$ la partición de $p^{-1}(U)$ en rebanadas en las que cada conjunto V_α se aplica homeomórficamente sobre U mediante p . Se tiene definida a \tilde{F} en el conjunto $C = A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0})$. El conjunto C es la unión del borde izquierdo y del borde inferior del rectángulo $I_{i_0} \times J_{j_0}$, por tanto C es conexo. Así, $\tilde{F}(C)$ es conexo y por lo tanto debe estar contenido dentro de uno de los conjuntos V_α , se denotara por V_0 a tal conjunto.

Sea $p_0 = p|_{V_0} : V_0 \longrightarrow U$. Como \tilde{F} es un levantamiento de $F|_A$, se sabe que

$$p_0(\tilde{F}(x)) = p(\tilde{F}(x)) = F(x) \quad \forall x \in C$$

por lo tanto, $\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x)) \quad \forall x \in C$. Luego, se puede extender a F definiendo

$$\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x)) \quad \forall x \in I_{i_0} \times J_{j_0}$$

que será continua por el lema del pegamiento. Continuando de esta manera se puede seguir definiendo \tilde{F} en todo I^2 .

Ahora supóngase que F es una homotopía de caminos. F lleva $\{0\} \times I$ al punto $b_0 \in B$. Como \tilde{F} es un levantamiento de F , $\tilde{F}(\{0\} \times I) \subset p^{-1}(b_0)$, pero este conjunto tiene la topología discreta como subespacio de E . Dado que \tilde{F} es continua y $\{0\} \times I$ es

conexo, $\tilde{F}(\{0\} \times I)$ es conexo, debe ser por tanto un conjunto unipuntual, análogamente $\tilde{F}(\{1\} \times I)$ es unipuntual. Por tanto \tilde{F} es una homotopía de caminos. \square

Como corolario se obtiene el llamado teorema de monodromía.

Corolario 3.3.1 (Teorema de monodromía). *Sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Sean f y g dos caminos en B de b_0 a b_1 , y sean \tilde{f} y \tilde{g} sus respectivos levantamientos a caminos en E comenzando en e_0 .*

Si f y g son homotópicos por caminos, entonces \tilde{f} y \tilde{g} son homotópicos por caminos y terminan en el mismo punto de E .

Demostración. Sea $F : I \times I \longrightarrow B$ la homotopía de caminos entre f y g , entonces $F(0, 0) = b_0$.

Sea $\tilde{F} : I \times I \longrightarrow E$ el levantamiento de F a E tal que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Por el Teorema 3.3.3, \tilde{F} es una homotopía de caminos, por lo que $\tilde{F}(\{0\} \times I) = \{e_0\}$ y $\tilde{F}(\{1\} \times I) = \{e_1\}$. La restricción $\tilde{F}|_{I \times \{0\}}$ de \tilde{F} al lado inferior de $I \times I$ es un camino en E que comienza en e_0 y es un levantamiento de $F|_{I \times \{0\}}$. Por la unicidad de los levantamientos de caminos, se tiene que $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$. Análogamente, $\tilde{F}|_{I \times \{1\}}$ es un camino en E que es un levantamiento de $F|_{I \times \{1\}}$, que comienza en e_0 porque $\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$. Por unicidad de la elevación de caminos tenemos que $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{g}(s)$. Por lo tanto, como \tilde{f} y \tilde{g} acaban en e_1 , y \tilde{F} es la homotopía de caminos entre ellos. \square

Es decir, caminos homotópicos se elevan a caminos homotópicos.

Definición 3.3.7. Sea $p : E \longrightarrow B$ es una aplicación recubridora y $b_0 \in B$. Se elige e_0 de forma que $p(e_0) = b_0$. Dado un elemento $[f]$ de $\pi_1(B, b_0)$, sea \tilde{f} el levantamiento de f a un camino en E que comience en e_0 . Se denota por $\phi([f])$ el punto final $\tilde{f}(1)$ de \tilde{f} . Entonces ϕ es una aplicación bien definida

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0).$$

Esta es la acción de monodromía derivada de la aplicación recubridora p . Desde luego, depende de la elección del punto e_0 .

Teorema 3.3.3. Sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$.

a) Si E es conexo por caminos, entonces la acción de monodromía

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0) \quad \text{es sobreyectiva.}$$

b) Si E es simplemente conexo, entonces es biyectiva.

Demostración. Se probará:

a) Suponga que E es conexo por caminos, dado cualquier $e_1 \in p^{-1}(b_0)$. Como $e_0 \in E$ y E es conexo por caminos, entonces existe un camino \tilde{f} tal que $\tilde{f}(0) = e_0$ y $\tilde{f}(1) = e_1$.

Así

$$f := p \circ \tilde{f} : [0, 1] \longrightarrow B$$

Donde:

$$\begin{aligned} (p \circ \tilde{f})(0) &= p(\tilde{f}(0)) & y & & (p \circ \tilde{f})(1) &= p(\tilde{f}(1)) \\ &= p(e_0) & & & &= p(e_1) \\ &= b_0 & & & &= b_0 \end{aligned}$$

es un lazo en B con base en b_0 . Así $[f] \in \pi_1(B, b_0)$ y por Definición 3.3.7, $\phi([f]) = \tilde{f}(1) = e_1$. Por tanto ϕ es sobreyectiva.

b) Suponga que E es simplemente conexo. Como E es simplemente conexo, entonces E es conexo por caminos, así por el literal a), ϕ es sobreyectiva. Sólo se probará que ϕ es inyectiva.

Sean $[f], [g] \in \pi_1(B, b_0)$ tales que $\phi([f]) = \phi([g])$. Sean \tilde{f} y \tilde{g} los levantamientos de f y g , respectivamente, a caminos en E que comienza en e_0 , entonces $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. como E simplemente conexo (por el Lema 3.2.1), existe una homotopía de caminos \tilde{F} en E entre \tilde{f} y \tilde{g} . La aplicación $F = p \circ \tilde{F}$ es una homotopía de caminos entre f y g . Así, $f \simeq_p g$ entonces $[f] = [g]$. Por lo tanto ϕ es inyectiva.

□

3.4. Grupos Fundamentales de algunas superficies.

En esta Subsección se calcula los grupos fundamentales de algunas superficies utilizando espacios recubridores. Y se prueba de otra manera que las superficies: toro y plano proyectivo real no son homeomorfas, comparando sus grupos fundamentales. Por lo visto en la Sección 2,2 se sabe que una *superficie* es un espacio de Hausdorff con una base contable, tal que cada punto tiene un entorno que es homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 .

A continuación, se establecerá un resultado que será necesario para calcular el grupo fundamental del toro, el cual es: el grupo fundamental del círculo.

Teorema 3.4.1. *El grupo fundamental del círculo S^1 es isomorfo al grupo aditivo de los enteros \mathbb{Z} .*

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ x &\longmapsto (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \end{aligned}$$

por el Teorema 3.3.1 se sabe que p es una aplicación recubridora. Sea $e_0 = 0$ y sea $b_0 = p(e_0) = (1, 0)$.

Como

$$\begin{aligned} \cos 2\pi x = 1 &\Rightarrow 2\pi x = 0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x = 0 + \frac{2\pi n}{2\pi} \\ &\Rightarrow x = n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\pi x = 0 &\Rightarrow 2\pi x = 0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x = 0 + \frac{2\pi n}{2\pi} \\ &\Rightarrow x = n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

entonces $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$. Dado que \mathbb{R} es simplemente conexo, la acción de monodromía $\phi : \pi_1(S^1, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$ es biyectiva.

Ahora sólo falta probar que ϕ es un homomorfismo.

Sean $[f], [g] \in \pi_1(S^1, b_0)$ y sean \tilde{f} y \tilde{g} sus respectivos levantamientos a caminos en \mathbb{R} comenzando en 0.

Sean $n = \tilde{f}(1)$ y $m = \tilde{g}(1)$, entonces $\phi([f]) = \tilde{f}(1) = n$ y $\phi([g]) = \tilde{g}(1) = m$. Sea $\tilde{\tilde{g}}$ el camino $\tilde{\tilde{g}}(s) = n + \tilde{g}(s)$ en \mathbb{R} . Donde $\tilde{\tilde{g}}(0) = n + \tilde{g}(0) = n$ y $\tilde{\tilde{g}}(1) = n + \tilde{g}(1) = n + m$. Luego, como $p(n + x) = p(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, (es periódica, de período 1) se tiene que $(p \circ \tilde{\tilde{g}})(s) = p(\tilde{\tilde{g}}(s)) = p(n + \tilde{g}(s)) = p(\tilde{g}(s)) = g(s)$. Así $\tilde{\tilde{g}}$ es un levantamiento que comienza en n y termina en $n + m$; ya que $\tilde{f}(1) = n = \tilde{\tilde{g}}(0)$, entonces el producto $\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}$ está definido, y además por el Lema 3.2.2 iii)

$$p(\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}) = (p \circ \tilde{f}) * (p \circ \tilde{\tilde{g}}) = f * g$$

es decir, $\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}$ es el levantamiento de $f * g$ que comienza en 0, y termina en $n + m$, así

$$\phi([f] * [g]) = \phi([f * g]) = (\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}})(1) = (\tilde{\tilde{g}})(1) = n + m = \phi([f]) + \phi([g])$$

y por lo tanto ϕ es un homomorfismo. Luego ϕ es un isomorfismo, y así el grupo fundamental de S^1 es isomorfo al grupo aditivo \mathbb{Z} □

Utilizando el Teorema 3.4.1 se deduce inmediatamente el grupo fundamental del toro.

Corolario 3.4.1. *El grupo fundamental del n -toro $\mathbb{T}^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ es isomorfo al grupo \mathbb{Z}^n . En particular $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*

Demostración. $\pi_1(\mathbb{T}^n) = \pi_1(S^1 \times \cdots \times S^1)$, luego

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{T}^2) &= \pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1); \text{ por el teorema 3,2,4} \\ &\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; \text{ por el teorema 3,4,1} \end{aligned}$$

Por tanto, $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. □

También de los Teoremas 3.4.1 y 3.2.4 se obtiene un resultado muy interesante, como lo es el grupo fundamental del cilindro y se describe en el siguiente corolario:

Corolario 3.4.2. *El grupo fundamental del cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ es isomorfo al grupo \mathbb{Z} .*

Demostración.

$$\begin{aligned}\pi_1(S^1 \times \mathbb{R}) &\cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(\mathbb{R}); \text{ por el teorema 3,2,4} \\ &\cong \pi_1(S^1) \times \{e\}; \text{ por el ejemplo 3,2,1} \\ &\cong \mathbb{Z} \times \{e\}; \text{ por el teorema 3,4,1} \\ &\cong \mathbb{Z},\end{aligned}$$

así el grupo fundamental del cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ es isomorfo al grupo \mathbb{Z} .

□

Otro grupo fundamental que es importante conocer es el de la esfera S^2 . De hecho puede demostrarse lo siguiente:

Teorema 3.4.2. *Si $n \geq 2$, la n -esfera S^n es simplemente conexa.*

caption. Sean $p = (0, 0, \dots, 1)$ y $q = (0, 0, \dots, -1)$ en \mathbb{R}^{n+1} el polo norte y el polo sur de S^n , respectivamente.

Paso 1: Se prueba que, para $n \geq 1$, la esfera agujereada $S^n - p$ es homeomorfa a \mathbb{R}^n .

Se define $f : (S^n - p) \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n).$$

La aplicación f se denominada *proyección estereográfica*. (Si se escoge la recta en \mathbb{R}^{n+1} que pasa por el polo norte p y el punto $x \in S^n - p$, entonces esta recta interseca al n -plano $\mathbb{R}^n \times 0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en el punto $(f(x), 0)$.)

Se comprueba que f es un homeomorfismo viendo que la aplicación $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow (S^n - p)$ dada por

$$g(y) = g(y_1, \dots, y_n) = (t(y)y_1, \dots, t(y)y_n, 1 - t(y)),$$

donde $t(y) = \frac{2}{1 + \|y\|^2}$, es la inversa por la derecha y por la izquierda de f .

Además, la aplicación de reflexión $(x_1, \dots, x_{n+1}) \longrightarrow (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$ define un homeomorfismo entre $S^n - p$ y $S^n - q$, de manera que el espacio $S^n - q$ también es homeomorfo a \mathbb{R}^n .

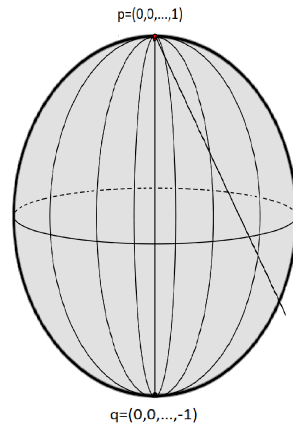


Figura 3.6: Proyección estereográfica

Paso 2: Ahora se probará el teorema.

Sean U y V los conjuntos abiertos $U = S^n - p$ y $V = S^n - q$ de S^n . Se comprueba primero que, para $n \geq 1$, la esfera S^n es conexa por caminos. Esto se deduce del hecho de que U y V son conexos por caminos (al ser homeomorfos a \mathbb{R} , por el Paso 1) y tienen en común el punto $(1, 0, \dots, 0) \in S^n$.

Se probará que, para $n \geq 2$, la esfera S^n es simplemente conexa. Los espacios U y V son simplemente conexos, al ser homeomorfos a \mathbb{R}^n ; además $U \cap V = S^n - \{p, q\}$, que es homeomorfo bajo la proyección estereográfica a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Así, el espacio $U \cap V$ es conexo por caminos, ya que todo punto de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ puede unirse con un punto de S^{n-1} por un segmento de recta y S^{n-1} es conexo por caminos si $n \geq 2$, entonces por el Corolario 3.2.3, S^n es simplemente conexo para $n \geq 2$.

□

Esto demuestra que el grupo fundamental de S^2 es el grupo trivial para todo punto en S^2 .

Antes de calcular el grupo fundamental del plano proyectivo real, se tiene el siguiente teorema, el cual será de gran utilidad para el cálculo de dicho grupo:

Teorema 3.4.3. *La aplicación cociente $p : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ es una aplicación recubridora.*

Demostración. Se probará en primer lugar que p es una aplicación abierta, es decir, para todo U abierto de S^2 se tiene que $p(U)$ es abierto en \mathbb{RP}^2 , lo que quiere decir por

definición que $p^{-1}(p(U))$ es abierto en S^2 .

Sea $\alpha : S^2 \rightarrow S^2$ la aplicación antípoda dada por $\alpha(x) = -x$ y sea U un abierto en S^2 . Como la aplicación α es un homeomorfismo, se tiene que $\alpha(U)$ es abierto en S^2 . Dado que

$$p^{-1}(p(U)) = U \cup \alpha(U),$$

este conjunto es abierto en S^2 , por lo que p es una aplicación abierta.

Ahora se probará que p es una aplicación recubridora. Dado un punto y de $\mathbb{R}P^2$, elíjase $x \in p^{-1}(y)$. Entonces escójase un ϵ -entorno U de x en S^2 para algún $\epsilon < 1$, utilizando la distancia euclídea d de \mathbb{R}^3 . Se tiene que U no contiene ningún par $\{z, \alpha(z)\}$ de puntos antípodas de S^2 dado que $d(z, \alpha(z)) = 2$.

En consecuencia, la aplicación

$$p : U \rightarrow p(U)$$

es biyectiva. Como es continua y abierta, es un homeomorfismo. Análogamente

$$p : \alpha(U) \rightarrow p(\alpha(U)) = p(U)$$

es un homeomorfismo. Por tanto, el conjunto $p^{-1}(p(U))$ es la unión de los dos conjuntos abiertos y disjuntos U y $\alpha(U)$, cada uno de los cuales se aplica homeomorfamente mediante p sobre $p(U)$. Entonces $p(U)$ es un entorno de $p(x) = y$ que está regularmente cubierto por p . Así $p : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ es una aplicación recubridora. \square

En el siguiente corolario se da a conocer el grupo fundamental del plano proyectivo real:

Corolario 3.4.3. $\pi_1(\mathbb{R}P^2, y)$ es un grupo de orden 2.

Demostración. La proyección $p : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ es una aplicación recubridora. Como S^2 es simplemente conexa, entonces por el Teorema 3.3.3, existe una correspondencia biyectiva entre $\pi_1(\mathbb{R}P^2, y)$ y el conjunto $p^{-1}(y)$. Dado que el conjunto $p^{-1}(y)$ tiene dos elementos, entonces $\pi_1(\mathbb{R}P^2, y)$ es un grupo de orden 2, Y cualquier grupo de orden 2 es, desde luego isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (es decir, los enteros mód 2). Así $\pi_1(\mathbb{R}P^2, y)$ es un grupo de orden 2. \square

Del grupo fundamental del toro (Corolario 3.4.1) y el grupo fundamental del plano proyectivo real (Corolario 3.4.3), se obtiene el siguiente corolario, el cual establece que el toro y el plano proyectivo real son topológicamente distintos.

Corolario 3.4.4. *El toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ y el plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 no son homeomorfos.*

Demostración. Por los Corolarios 3.4.1 y 3.4.3 se sabe que el grupo fundamental del toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que el grupo fundamental del plano proyectivo es un grupo de orden 2, así sus grupos fundamentales no son isomorfos y por tanto el toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ y el plano proyectivo \mathbb{RP}^2 no son homeomorfos. \square

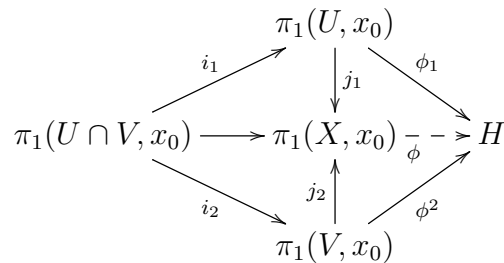
3.5. El Teorema de Seifert-Van Kampen

En esta sección se aborda el problema de determinar el grupo fundamental de un espacio X que puede escribirse como la unión de dos subconjuntos abiertos U y V , donde la intersección es conexa por caminos. Al inicio de este Capítulo, se probó que si $x_0 \in U \cap V$, las imágenes de los grupos $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$ en $\pi_1(X, x_0)$, bajo los homomorfismos inducidos por la inclusión, generan el grupo $\pi_1(X, x_0)$. El teorema que se discutirá y se analizará en este apartado es que $\pi_1(X, x_0)$ está, de hecho, completamente determinado por estos dos subgrupos, el grupo $\pi_1(U \cap V, x_0)$ y los homomorfismos entre estos subgrupos inducidos por la inclusión. Éste es un resultado bastante básico para el cálculo de grupos fundamentales. Permitirá calcular los grupos fundamentales de numerosos espacios, incluyendo las superficies compactas.

Teorema 3.5.1. *Sea X un espacio topológico tal que $X = U \cup V$, donde U, V y $U \cap V$ son subconjuntos abiertos, conexos por caminos y $U \cap V \neq \emptyset$ en X . Sea $x_0 \in U \cap V$. Sea H un grupo arbitrario y sean*

$$\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow H \quad \text{y} \quad \phi_2 : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow H$$

homomorfismos. Sean i_1, i_2, j_1, j_2 los homomorfismos indicados en el siguiente diagrama, cada uno de ellos inducido por la inclusión.



Si $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, entonces existe un único homomorfismo $\phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H$ tal que $\phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\phi \circ j_2 = \phi_2$.

Demostración. Primeramente se probara la unicidad.

El Teorema 3.2.3 afirma que $\pi_1(X, x_0)$ está generado por las imágenes de j_1 y j_2 .

Como las imágenes de j_1 y j_2 generan $\pi_1(X, x_0)$, es decir, si $g_1 \in \pi_1(U, x_0)$ entonces $j_1(g_1) \in \pi_1(X, x_0)$ y $g_2 \in \pi_1(V, x_0)$ entonces $j_2(g_2) \in \pi_1(X, x_0)$.

Además, como $g_1 \in \pi_1(U, x_0)$ entonces $\phi_1(g_1) \in H$. Por lo tanto, al aplicar ϕ sobre el generador $j_1(g_1)$, es decir $\phi(j_1(g_1)) \in H$, debe ser igual a $\phi_1(g_1)$. De igual forma, como $g_2 \in \pi_1(V, x_0)$, entonces $\phi_2(g_2) \in H$, así que al aplicarle ϕ a este elemento, es decir, $\phi(j_2(g_2)) \in H$, debe coincidir con $\phi_2(g_2)$, por lo tanto ϕ está determinado completamente por ϕ_1 y ϕ_2 .

Se introduce la siguiente notación: Dado un camino f en X , se escribe $[f]$ para denotar su clase de homotopía de caminos en X . Si f está en U , entonces $[f]_U$ denotará su clase de homotopía de caminos en U . De manera que las representaciones $[f]_V$ y $[f]_{U \cap V}$ serán las clases de homotopía de caminos de V y $U \cap V$ respectivamente.

Paso 1. Se define una aplicación ρ que asigna a cada lazo f basado en x_0 , contenido en U o en V , un elemento de H . Se define

$$\begin{aligned}\rho(f) &= \phi_1([f]_U) && \text{si } f \text{ está en } U \\ \rho(f) &= \phi_2([f]_V) && \text{si } f \text{ está en } V\end{aligned}$$

Si $f \in U \cap V$, entonces $\phi_1([f]_U) = \phi_1(i_1([f]_{U \cap V}))$ y $\phi_2([f]_V) = \phi_2(i_2([f]_{U \cap V}))$, por lo tanto ρ está bien definida y estos dos elementos de H , por hipótesis son iguales. La siguiente aplicación ρ satisface las siguientes condiciones:

- i) Si $[f]_U = [g]_U$, o si $[f]_V = [g]_V$, entonces $\rho(f) = \rho(g)$.
- ii) Si f y g están en U o si ambas están en V , entonces $\rho(f * g) = \rho(f) \cdot \rho(g)$.

Ahora se demuestran estas afirmaciones:

- i) Supongase que $[f]_U = [g]_U$.

Como $[f]_U = [g]_U$ al aplicar ϕ_1 en ambos lados de la igualdad se obtiene:

$$\phi_1([f]_U) = \phi_1([g]_U)$$

$$\rho(f) = \rho(g)$$

De manera similar para $[f]_V = [g]_V$.

ii) Supongase que f y g están en U .

$$\rho(f * g) = \phi_1([f * g]_U)$$

Como $[f * g] = [f] * [g]$, entonces $\phi_1([f * g]_U) = \phi_1([f]_U * [g]_U)$. Por hipótesis ϕ_1 es un homomorfismo de manera que $\phi_1([f]_U * [g]_U) = \phi_1([f]_U) * \phi_1([g]_U)$ por lo tanto:

$$\rho(f * g) = \phi_1([f]_U) * \phi_1([g]_U)$$

$$\rho(f * g) = \rho(f) \cdot \rho(g)$$

Similarmente para f y g están en V .

$$\rho(f * g) = \phi_1([f * g]_V)$$

Como $[f * g] = [f] * [g]$, entonces $\phi_1([f * g]_V) = \phi_1([f]_V * [g]_V)$. Por hipótesis ϕ_2 es un homomorfismo de manera que $\phi_1([f]_V * [g]_V) = \phi_1([f]_V) * \phi_1([g]_V)$ por lo tanto:

$$\rho(f * g) = \phi_1([f]_V) * \phi_1([g]_V)$$

$$\rho(f * g) = \rho(f) \cdot \rho(g)$$

Paso 2. Ahora se extiende ρ a un aplicación σ que signa a cada camino f definido en U o en V , un elemento de H , tal que la aplicación σ satisface las siguientes condiciones:

- a) Si $[f]_U = [g]_U$ o si $[f]_V = [g]_V$, entonces $\sigma(f) = \sigma(g)$.
- b) Si f y g están en U o si ambas están en V , entonces $\rho(f * g) = \sigma(f) \cdot \sigma(g)$, siempre que $f * g$ esté bien definido.

Se comienza eligiendo, para x en X , un camino α_x desde x_0 hasta x como sigue:

Si $x = x_0$, sea α_x el camino constante en x_0 .

Si $x \in U \cap V$, sea α_x el camino en $U \cap V$.

Y si x está en U o en V pero no en $U \cap V$, sea α_x el camino en U o en V respectivamente.

Entonces para cualquier camino f en U o en V de x a y , se define un lazo $L(f)$ en U o en V , respectivamente, basado en x_0 por la ecuación

$$L(f) = \alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y)$$

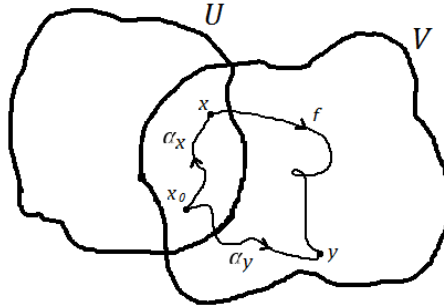


Figura 3.7: Se define un lazo $L(f) = \alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y)$

Se define $\sigma(f) = \rho(L(f))$. Ahora, se probará que σ es una extensión de ρ .

Si f es un lazo en x_0 que está en U o en V , entonces

$$L(f) = e_{x_0} * (f * e_{x_0}).$$

ya que α_{x_0} es el camino constante en x_0 , entonces $L(f)$ es homotópica por caminos a f en U o en V .

De manera que, si f está en U , $[L(f)]_U = [f]_U$, $\rho(L(f)) = \rho(f)$ por condición i) y como $\sigma(f) = \rho(L(f))$, entonces $\sigma(f) = \rho(f)$.

Si f está en V , $[L(f)]_V = [f]_V$, $\rho(L(f)) = \rho(f)$ por condición i) y como $\sigma(f) = \rho(L(f))$, entonces $\sigma(f) = \rho(f)$.

Ahora se probará las condiciones i) y ii)

a) Sean f y g caminos homotópicos en U o en V .

como f y g caminos homotópicos en U o en V , entonces los lazos $L(f)$ y $L(g)$ son también homotópicos por caminos en U o en V , de manera que la condición i) para ρ se aplica.

b) Sean f y g caminos homotópicos en U o en V , tales que $f(1) = g(0)$.

Se tiene

$$L(f) * L(g) = (\alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y)) * (\alpha_y * (g * \bar{\alpha}_z))$$

para puntos x, y, z . por el Teorema 3.1.1 la operación $*$ es asociativa.

$$\begin{aligned}
 L(f) * L(g) &= (\alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y) * \alpha_y * (g * \bar{\alpha}_z)) \\
 &= ((\alpha_x * f) * (\bar{\alpha}_y * \alpha_y) * (g * \bar{\alpha}_z)) \\
 &= ((\alpha_x * f) * e_{x_0} * (g * \bar{\alpha}_z)) \\
 &= ((\alpha_x * f) * (g * \bar{\alpha}_z)) \\
 &= (\alpha_x * f * g * \bar{\alpha}_z) \\
 &= \alpha_x * (f * g) * \bar{\alpha}_z \\
 &= L(f * g)
 \end{aligned}$$

por lo tanto el lazo $L(f) * L(g)$ es homotópico por caminos en U o en V a $L(f * g)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \rho(L(f * g)) &= \rho(L(f) * L(g)) \\
 \rho(f * g) &= \rho(L(f) * L(g))
 \end{aligned}$$

y como $\rho(f * g) = \rho(L(f) * L(g))$, se probó en el **Paso 1**, entonces

$$\rho(L(f * g)) = \rho(L(f)) * \rho(L(g))$$

por las condiciones i) – ii) para ρ . Pero $\sigma(f) = \rho(L(f))$, de manera que

$$\rho(L(f * g)) = \sigma(f * g) \text{ y } \rho(L(f)) \cdot \rho(L(g)) = \sigma(f) \cdot \sigma(g)$$

por tanto $\sigma(f * g) = \sigma(f) \cdot \sigma(g)$.

Paso 3. Ahora se extiende la aplicación σ a una aplicación τ que lleva un camino arbitrario f a un elemento de H . Esta aplicación satisface las condiciones siguientes:

- a) Si $[f]_U = [g]_U$, o si $[f]_V = [g]_V$, entonces $\tau(f) = \tau(g)$.
- b) $\tau(f * g) = \tau(f) \cdot \tau(g)$, si $f * g$ está bien definido.

Dado f , se selecciona una partición $s_0 < \dots < s_n$ de $[0, 1]$ tal que f aplica cada uno de los sub-intervalos $[s_{i-1}, s_i]$ en U o V , es decir, $f : [s_{i-1}, s_i] \longrightarrow U$ ó $f : [s_{i-1}, s_i] \longrightarrow V$. Se denotara por f_i la aplicación lineal positiva del intervalo $[0, 1]$ en el intervalo $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con f , es decir que, si $p : [0, 1] \longrightarrow [s_{i-1}, s_i]$ es la aplicación lineal positiva, entonces $f_i = f \circ p$. De manera que f_i es un camino en U o en V , y por el Teorema 3.1.2

$$[f] = [f_1] * \dots * [f_n]$$

Si τ debe ser una extensión de σ que satisfaga las condiciones *a*) y *b*) de manera que debe verificar que:

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \dots \sigma(f_n)$$

Se probara esta afirmación, se sabe que $[f] = [f_1] * \dots * [f_n]$ y $[f] * \dots * [f_n] = [f_1 * \dots * f_n]$, entonces $[f] = [f_1 * \dots * f_n]$ y por *a*) se tiene que $\tau(f) = \tau(f_1 * \dots * f_n)$, por la condición *b*), se tiene $\tau(f) = \tau(f_1 * \dots * f_n) = \tau(f_1) \cdot \dots \cdot \tau(f_n)$.

Y como τ es una extensión de σ , entonces $\tau(f_i) = \sigma(f_i)$ por lo tanto se tiene:

$$\tau(f_1) \dots \tau(f_n) = \sigma(f_1) \dots \sigma(f_n) \quad (3.3)$$

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \dots \sigma(f_n) \quad (3.4)$$

De manera que se utiliza esta ecuación como definición de τ .

Se probará que esta definición no depende de la elección del subintervalo. Para ello es conveniente con probar que el valor de $\tau(f)$ no cambia si se añade un único punto p a la partición. Sea i el índice tal que $s_{i-1} < p < s_i$.

Se definen f'_i, f''_i caminos en el espacio topológico X iguales a las aplicaciones lineales positivas de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, p]$ y $[p, s_i]$, respectivamente, compuestas con f , es decir, si p' y p'' so aplicaciones lineales positivas tales que $p' : [0, 1] \longrightarrow [s_{i-1}, p]$ y $p'' : [0, 1] \longrightarrow [p, s_i]$, entonces $f'_i = f \circ p'$ y $f''_i = f \circ p''$, recuerde que f aplica a cada uno de los subintervalos $[s_{i-1}, s_i]$ en U o en V , es decir, $f : [s_{i-1}, s_i] \longrightarrow U$ o V . Por lo tanto f'_i, f''_i son caminos que están contenidos en U o en V . Como

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdot \dots \cdot \sigma(f_{i-1}) \cdot \sigma(f_i) \cdot \sigma(f_{i+1}) \cdot \dots \cdot \sigma(f_n)$$

Al calcular $\tau(f)$ se utiliza la nueva partición, el único cambio en la formula (3,4) es que

el factor $\sigma(f_i)$ desaparece y es reemplazado por el producto $\sigma(f'_i) \cdot \sigma(f''_i)$, así se obtiene:

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_{i-1}) \cdot \sigma(f'_i) \cdot \sigma(f''_i) \cdot \sigma(f_{i+1}) \cdots \sigma(f_n)$$

Pero f_i es homotópica por caminos a $f'_i * f''_i$ en U o en V , por lo tanto $\sigma(f_i) = \sigma(f'_i) \cdot \sigma(f''_i)$ y por las condiciones *a*) y *b*), de manera que τ está bien definida.

Si f está en U o en V , se puede utilizar la partición $s_0 < \cdots < s_n$ de $[0, 1]$ para definir $\tau(f)$, entonces $\tau(f) = \sigma(f)$ por definición y por lo tanto τ es una extensión de σ .

Paso 4. Se probará la condición *a*) para la aplicación τ . En primer lugar, se verificará esta condición en un caso especial. Sean f, g caminos en X desde x y hasta y , y sea F una homotopía de caminos entre ellos.

Suponga la hipótesis adicional que existe una partición $s_0 < \cdots < s_n$ de $[0, 1]$ tal que F aplica cada rectángulo $R_i = [s_{i-1}, s_i] \times I$ dentro de U o de V , es decir, $p : [s_{i-1}, s_i] \times I \rightarrow U$ ó $p : [s_{i-1}, s_i] \times I \rightarrow V$.

Se prueba en este caso que $\tau(f) = \tau(g)$.

Dado i , se considera la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con f o con g y se denomina a estos dos caminos f_i y g_i , es decir $f_i = f \circ p$ y $g_i = g \circ p$. La restricción de F a cada rectángulo R_i nos proporciona una homotopía entre f_i y g_i que toma valores en U o en V , pero por tener diferentes punto inicial x y final y , no es un homotopía de caminos.

Considere los caminos trazados por los extremos durante la homotopía. Se define β_i como el camino $\beta_i(t) = p(s_{i,t})$, de manera que β_i es un camino en X desde $f(s_i)$ hasta $g(s_i)$. Como $\beta_0(t) = p(s_0, t)$ es un camino en X desde $f(s_0)$ hasta $g(s_0)$ significa que β_0 lleva todo I al punto x , por lo tanto β_0 es un caminos constante, de la misma forma $\beta_n(t) = p(s_n, t)$ es un camino en X desde $f(s_n)$ hasta $g(s_n)$ significa que $\beta_n(t)$ lleva todo I al punto y , así que β_n es un camino constante.

Ahora se probará que para cada i ,

$$f_i * \beta_i \simeq_p \beta_{i-1} * g_i$$

con la homotopía de caminos en U o en V . En el rectángulo R_i , se considero el camino

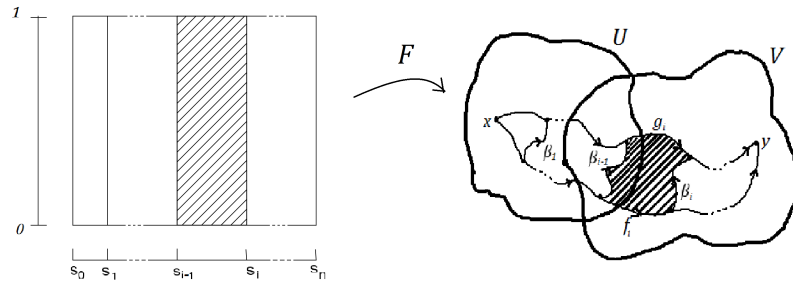


Figura 3.8: Homotopía de caminos en R_i .

que recorre los lados inferior y derecho de R_i desde $s_{i-1} \times 0$ hasta $s_i \times 0$ y hasta $s_{i-1} \times 1$; si se compone este camino con la aplicación F se obtiene $f_i * \beta_i$. De la misma manera, si se considera el camino que recorre los lados izquierdo y superior de R_i al componerlo con F se obtiene el camino $\beta_{i-1} * g_i$. Como el rectángulo $R_i = [s_{i-1}, s_i] \times I$, además $s_0 < \dots < s_n$ está en $[0, 1]$ y $[0, 1]$ es ordenado, entonces por definición de convexo R_i es convexo. Como R_i es convexo, existe un homotopía de caminos en R_i entre estos dos caminos, si se compone con F se obtiene una homotopía de caminos ente $f_i * \beta_i$ y $\beta_{i-1} * g_i$ que tiene lugar en U o en V , como se quería probar.

Como $f_i * \beta_i \simeq_p \beta_{i-1} * g_i$, entonces

$$[f_i * \beta_i] = [\beta_{i-1} * g_i]$$

Al aplicar la condición a) para σ se tiene que:

$$\sigma(f_i * \beta_i) = \sigma(\beta_{i-1} * g_i)$$

por la condición b) para σ se tiene

$$\sigma(f_i) \cdot \sigma(\beta_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i)$$

Operando $\sigma(\beta_i)^{-1}$ por la derecha

$$\sigma(f_i) \cdot \sigma(\beta_i) \cdot \sigma(\beta_i)^{-1} = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i) \cdot \sigma(\beta_i)^{-1} \tag{3.5}$$

$$\sigma(f_i) \cdot e = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i) \cdot \sigma(\beta_i)^{-1} \tag{3.6}$$

$$\sigma(f_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i) \cdot \sigma(\beta_i)^{-1} \tag{3.7}$$

Como β_0 y β_n son caminos constantes en x y y respectivamente, entonces

$$\beta_0 * \beta_0 = \beta_0 \text{ y } \beta_n * \beta_n = \beta_n$$

Al aplicar la condición *a*) para σ se tiene

$$\sigma(\beta_0 * \beta_0) = \sigma(\beta_0) \text{ y } \sigma(\beta_n * \beta_n) = \sigma(\beta_n)$$

Por condición *b*)

$$\sigma(\beta_0) \cdot \sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_0) \text{ y } \sigma(\beta_n) \cdot \sigma(\beta_n) = \sigma(\beta_n)$$

Donde solo será posible si $\sigma(\beta_0) = 1$ y $\sigma(\beta_n) = 1$.

Ahora se calcula τ de la siguiente manera:

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_n)$$

Sustituyendo la ecuación (3.7) en esta ecuación: $\sigma(f) = \sigma(\beta_0) \cdot \sigma(g_1) \cdot \sigma(\beta_1)^{-1} \cdot \sigma(\beta_1) \cdot \sigma(g_2) \cdot \sigma(\beta_2)^{-1} \cdots \sigma(\beta_{n-1}) \cdot \sigma(g_n) \cdot \sigma(\beta_n)^{-1}$

Por condición *b*) , $\sigma(\beta_i)^{-1} \cdot \sigma(\beta_i) = \sigma(\beta_i^{-1} * \beta_i)$ entonces

$$\tau(f) = \sigma(\beta_0) \cdot \sigma(g_1) \cdot \sigma(\beta_1^{-1} * \beta_1) \cdot \sigma(g_2) \cdot \sigma(\beta_2)^{-1} \cdots \sigma(\beta_{n-1}) \cdot \sigma(g_n) \cdot \sigma(\beta_n)^{-1}$$

Como $\beta_1^{-1} * \beta_1 = \beta_e$ donde β_e es la identidad, por lo tanto

$$\tau(f) = \sigma(\beta_0) \cdot \sigma(g_1) \cdot \sigma(\beta_e) \cdot \sigma(g_2) \cdot \sigma(\beta_e) \cdots \sigma(\beta_e) \cdot \sigma(g_n) \cdot \sigma(\beta_n)^{-1}$$

$$\tau(f) = \sigma(\beta_0) \cdot \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \cdots \sigma(g_n) \cdot \sigma(\beta_n)^{-1}$$

Como $\sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_n) = 1$, del hecho que $\sigma(\beta_n) = 1$ se tiene que $\sigma(\beta_n)^{-1} = 1$ por tanto

$$\sigma(\beta_0) \cdot \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \cdots \sigma(g_n) \cdot \sigma(\beta_n)^{-1} = \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \cdots \sigma(g_n)$$

$$\tau(f) = \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \cdots \sigma(g_n)$$

y como $\sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \cdots \sigma(g_n) = \tau(g)$ entonces

$$\tau(f) = \tau(g)$$

Con lo que se ha probado la condición *a*) en un caso especial. Ahora se probará la condición *a*) en el caso general.

Dados f, g y una homotopía de caminos F entre ellos, se considera una subdivisión s_0, \dots, s_n y t_0, \dots, t_m de $[0, 1]$ tales que F aplica a cada rectángulo $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ en U o en V . Sea f_j el camino $f_j(s) = F(s, t_j)$ por lo que

$$f_0(s) = F(s, t_0) = F(s, 0) = f(s) \text{ y } f_m(s) = F(s, t_m) = F(s, 1) = g(s)$$

entonces $f_0 = f$ Y $f_m = g$.

El par de caminos f_{j-1} y f_j satisfacen las condiciones del caso especial, es decir : Si $[f_{j-1}] = [f_j]$ entonces $\tau(f_{j-1}) = \tau(f_j)$ para todo j .

Por el caso especial, se tiene

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_n) \text{ y } \tau(f) = \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \cdots \sigma(g_n)$$

De manera que $\sigma(f_1) = \sigma(g_1)$, $\sigma(f_2) = \sigma(g_2)$ y así hasta $\sigma(f_n) = \sigma(g_n)$.

Pero $\sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_n) = \tau(g)$ como se probó también en el caso especial.

Por lo tanto

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_n) = \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \cdots \sigma(g_n) = \tau(g)$$

Como $f = f_0$ entonces :

$$\tau(f) = \tau(f_0)$$

Retomando la afirmación, si $[f_{j-1}] = [f_j]$ entonces $\tau(f_{j-1}) = \tau(f_j)$ para todo j , haciendo $j = 1$ se tiene $\tau(f_0) = \tau(f_1)$, por lo que

$$\tau(f) = \tau(f_0) = \tau(f_1)$$

Análogamente para $j = 1$, $\tau(f_1) = \tau(f_2)$

$$\tau(f) = \tau(f_0) = \tau(f_1) = \tau(f_2)$$

Y repitiendo este proceso hasta $j = m$ se obtiene:

$$\tau(f) = \tau(f_0) = \tau(f_1) = \tau(f_2) = \dots = \tau(f_m)$$

Pero como $f_m = g$, entonces

$$\tau(f) = \tau(f_0) = \tau(f_1) = \tau(f_2) = \dots = \tau(f_m) = \tau(g)$$

De manera que $\tau(f) = \tau(g)$, como se deseaba.

Paso 5. Ahora se probará la condición *b*) para la aplicación τ .

Dado un camino $f * g$ en X , se escoge una subdivisión $s_0 < \dots < s_n$ de $[0, 1]$ que contenga al punto $\frac{1}{2}$ como un punto de la subdivisión tal que $f * g$ aplica cada subintervalo en U o en V . Sea k el índice tal que $s_k = \frac{1}{2}$.

Para $i = 1, \dots, k$, la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con $f * g$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[2s_{i-1}, 2s_i]$ compuesta con f ; se denota esta aplicación por f_i . De la misma forma, para cada $i = k+1, \dots, n$, la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$, compuesta también con $f * g$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[2s_{i-1} - 1, 2s_i - 1]$ compuesta con g ; se denota esta aplicación por g_{i-k} . Utilizando la subdivisión s_0, \dots, s_n para el dominio del camino $f * g$ se obtiene:

$$\begin{aligned} f * g &= f_0 * f_1 * \dots * f_k * g_0 * g_1 * \dots * g_{n-k} \\ \tau(f * g) &= \tau(f_0 * f_1 * \dots * f_k * g_0 * g_1 * \dots * g_{n-k}) \\ &= \tau(f_0) \cdot \tau(f_1) \cdot \dots \cdot \tau(f_k) \cdot \tau(g_0) \cdot \tau(g_1) \cdot \dots \cdot \tau(g_{n-k}) \\ &= (\tau(f_0) \cdot \tau(f_1) \cdot \dots \cdot \tau(f_k)) \cdot (\tau(g_0) \cdot \tau(g_1) \cdot \dots \cdot \tau(g_{n-k})) \\ &= \tau(f) \cdot \tau(g) \\ \tau(f * g) &= \sigma(f_1) \cdot \dots \cdot \sigma(f_k) \cdot \sigma(g_1) \cdot \dots \cdot \sigma(g_{n-k}) \end{aligned}$$

Usando la subdivisión $2s_0, \dots, 2s_k$ para el camino f se tiene

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdot \dots \cdot \sigma(f_k)$$

Y utilizando la subdivisión $2s_k - 1, \dots, 2s_n - 1$ para el camino g se obtiene

$$\tau(g) = \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \cdot \dots \cdot \sigma(g_{n-k})$$

Como $\tau(f * g) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \dots \sigma(f_k) \cdot \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \dots \sigma(g_{n-k})$, entonces

$$\tau(f * g) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \dots \sigma(f_k) \cdot \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \dots \sigma(g_{n-k})$$

Asociando se tiene

$$\tau(f * g) = (\sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \dots \sigma(f_k)) \cdot (\sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \dots \sigma(g_{n-k}))$$

pero $\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \dots \sigma(f_k)$ y $\tau(g) = \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \dots \sigma(g_{n-k})$ por tanto

$$\tau(f) \cdot \tau(g) = (\sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \dots \sigma(f_k)) \cdot (\sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \dots \sigma(g_{n-k}))$$

De lo que se concluye que $\tau(f * g) = \tau(f) \cdot \tau(g)$, lo que prueba la condición *b*).

Paso 6. El teorema se obtiene ahora aplicando los pasos desarrollados anteriormente.

Para cada lazo f en X basado en x_0 , se define

$$\Phi([f]) = \tau(f)$$

por las siguientes condiciones *a*) y *b*) se prueba que Φ es un homomorfismo bien definido.

Se prueba que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$.

Si f es un lazo en U , entonces

$$\begin{aligned} (\Phi \circ j_1)([f]_U) &= \Phi(j_1[f]_U) \\ &= \Phi([f]) \\ &= \tau(f) \end{aligned}$$

Como $\tau(f) = \rho(f)$

$$\Phi([f]) = \rho(f)$$

Además, $\rho(f) = \phi_1([f]_U)$ por lo tanto

$$\Phi(j_1[f]_U) = \phi_1([f]_U)$$

De la misma manera, $\Phi \circ j_2 = \phi_2$.

Si f es un lazo en V , entonces

$$\begin{aligned} \Phi \circ j_2([f]_V) &= \Phi(j_2[f]_V) \\ &= \Phi([f]) \\ &= \tau(f) = \rho(f) = \phi_2([f]_V). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Phi(j_2[f]_V) = \phi_2([f]_V)$

□

Teorema 3.5.2. Versión clásica del teorema de Seifert-van Kampen Supongamos las hipótesis del teorema precedente. Sea

$$j : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

el homomorfismo del producto libre que extiende los homomorfismos j_1 y j_2 inducidos por la inclusión. Entonces j es sobreyectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal N del producto libre que contiene todos los elementos representados por palabras de la forma

$$i_1(g)^{-1} i_2(g)$$

para $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$.

En otras palabras, el núcleo de j está generado por todos los elementos del producto libre de la forma $i_1(g)^{-1} i_2(g)$ y sus conjugados.

Demostración. Como $\pi_1(X, x_0)$ está generado por las imágenes de j_1 y j_2 entonces j es sobreyectiva.

Se probará que $N \subset \text{Ker}(j)$. Como $\text{Ker}(j)$ es normal, entonces es suficiente probar que $i_1(g)^{-1} i_2(g)$ pertenece al $\text{Ker}(j)$ para todo $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$. Si $i : U \cap V \longrightarrow X$ es la aplicación inclusión, entonces

$$(j \circ i_1)(g) = (j_1 \circ i_1)(g) = i_*(g) = (j_2 \circ i_2)(g) = (j \circ i_2)(g).$$

Entonces $i_1(g)^{-1} i_2(g)$ pertenece al núcleo de j .

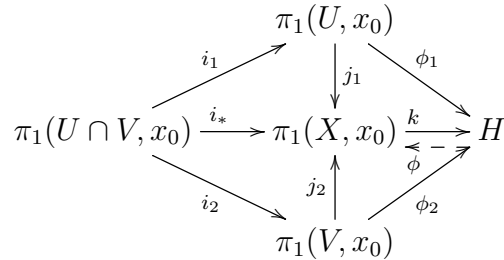
Se deduce entonces que j induce un epimorfismo

$$k : \pi_1(U, x_0) * \frac{\pi_1(V, x_0)}{N} \longrightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Se probará que $N = \text{Ker}(j)$ demostrando que k es inyectivo. Para ello será suficiente con probar que k posee una inversa por la izquierda.

Sea H el grupo $\pi_1(U, x_0) * \frac{\pi_1(V, x_0)}{N}$. Se define $\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow H$ igual a la inclusión de $\pi_1(U, x_0)$ es el producto libre compuesta con la proyección del producto libre en su cociente con N . Sea $\phi_2 : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow H$ la aplicación definida de modo análogo. Se

considera el diagrama.



Es fácil ver que $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$. Si $g \in \pi(U \cap V, x_0)$, entonces $\phi(i_1(g))$ es la clase $i_1(g)N$ en H , y $\phi(i_2(g))$ es la clase $i_2(g)N$. Como $i_1(g)^{-1}i_2(g) \in N$, las clases son iguales.

Se deduce del Teorema 3.5.1 que existe un homomorfismo $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H$ tal que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$. Se probará que Φ es un inverso por la izquierda de k . Será suficiente demostrar que $\Phi \circ k$ actúa como el elemento neutro sobre cualquier generador de H , esto es, sobre cualquier clase de la forma gN , donde $g \in \pi(U, x_0)$ y $\pi(V, x_0)$. Pero si $g \in \pi(U, x_0)$, se tiene

$$k(gN) = j(g) = j_1(g)$$

de modo que

$$\Phi(k(gN)) = \Phi(j_1(g)) = \phi_1(g) = gN$$

como se deseaba. Un razonamiento similar se aplica si $g \in \pi(V, x_0)$. □

Algunas aplicaciones del Teorema de Seifert-Van Kampen son las siguientes:

Corolario 3.5.1. *Suponga las hipótesis del Teorema de Seifert-Van Kampen. Si V es simplemente conexo, existe un isomorfismo*

$$k : \pi_1(U, x_0) / N \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

donde N es el menor subgrupo normal de $\pi_1(U, x_0)$ que contiene la imagen $i_1(\pi_1(U \cap V, x_0))$ del homomorfismo

$$i_1 : \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0).$$

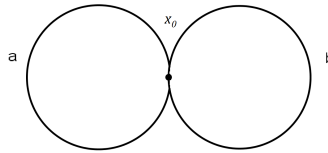
Es decir que, el núcleo de k es igual a $\overline{\langle i_1(\pi_1(U \cap V, x_0)) \rangle}$. Con este corolario se determina por completo la estructura de $\pi_1(X, x_0)$ ya que

$$\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(U, x_0)}{\overline{\langle i_1(\pi_1(U \cap V, x_0)) \rangle}}.$$

Teorema 3.5.3. *Supongamos la hipótesis del Teorema de Seifert-Van Kampen. Si $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces $\pi_1(X)$ es el producto libre de $\pi_1(U)$ y $\pi_1(V)$ respecto a los homomorfismos $j_1 : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$, $j_2 : \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X)$.*

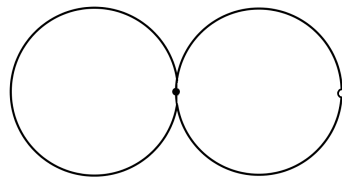
Se calculara ahora el grupo fundamental de la figura del ocho, usando el Teorema 3.5.3.

Proposición 3.5.1. *Sea X un espacio topológico tal que $X = A \cup B$, $A \cap B = x_0$, A y B son homeomorfos a S^1 entonces $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo libre de dos generadores.*

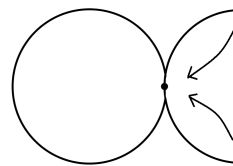


Demostración. Si A y B fuesen abiertos se podría utilizar directamente el Teorema 3.5.3 pero no lo son. Sin embargo se hará una modificación ligera para obtener conjuntos abiertos. Sea $a \in A - x_0$ y $b \in B - x_0$ entonces, se define

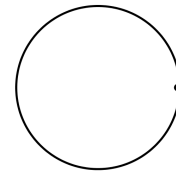
$$U = X - \{a\} \quad \text{y} \quad V = X - \{b\}$$



(a) El espacio U



(b) Espacio homeomorfo a U



(c) La retracción de U al círculo.

Entonces ambos U, V son abiertos y son homeomorfos a una circunferencias con dos antenas y además

$$A \cap B = X - \{a, b\}$$

es contraíble. Por otra parte A, B son retratos de deformación de U y V respectivamente, por lo que

$$\pi_1(A, x_0) = \pi_1(U, x_0)$$

$$\pi_1(B, x_0) = \pi_1(V, x_0)$$

Ahora se puede utilizar el Teorema 3.5.1 sobre conjuntos abiertos U, B para obtener que $\pi_1(X, x_0)$ es el producto libre de $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$, así que

$$\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

□

Sea E^2 el disco unitario cerrado en \mathbb{R}^2 , sean a, b puntos distintos en el interior de E^2 , sea $Y = E^2 - \{a, b\}$, entonces se puede encontrar $X \subset Y$ tal que X sea la unión de dos círculos y cada círculo rodea a cada punto a, b y X es un retrato de deformación de Y así que $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$ es el grupo de dos generadores. Se puede aplicar el mismo razonamiento si se considera el disco abierto menos dos puntos, o todo el plano menos dos puntos, etc. o en lugar de quitar un punto, podemos quitar un disco pequeño y el resultado es el mismo.

3.6. Cálculos.

Los cálculos de esta sección nos permiten determinar los grupos fundamentales de todas las superficies. Se obtendrá los grupos fundamentales de superficies compactas. Con respecto a los grupos fundamentales de superficies no compactas, se dará una pequeña observación al final de este texto.

3.6.1. Grupos Fundamentales de Superficies compactas.

Mediante unos ejemplos se mostrará como se puede aplicar el Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 3.5.1) para determinar la estructura del grupo fundamental de una superficies compacta. Con está forma se podrá obtener el grupo fundamental de cualquier superficie compacta.

Proposición 3.6.1. (*Grupo fundamental del toro \mathbb{T}^2*). Se sabe del Corolario 3.4.1 que $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1)$, además es el producto de dos grupos cíclicos infinitos, es decir, un grupo abeliano libre de dos generadores. Sin embargo, a partir del Corolario 3.5.1, se obtendrá el mismo resultado.

Demostración. Se representó al toro \mathbb{T}^2 como el espacio obtenido al identificar los lados opuestos de un cuadrado tal como se mostró en el Resultado 2.2.1. Las aristas a y b se convierten bajo la identificación en circunferencias que se cortan en el punto x_0 , como se ve en la Figura 3.9.

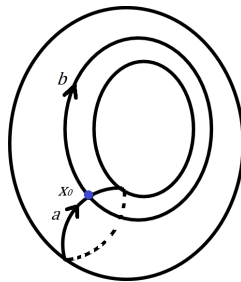


Figura 3.9: Representación del toro.

Sea y el centro del cuadrado, $U = \mathbb{T}^2 \setminus \{y\}$ y V la imagen del interior del cuadrado por la identificación; como \mathbb{T}^2 es Hausdorff, U es un subconjunto abierto, V también es abierto, pues V es el complemento de la unión de las circunferencias a y b bajo la identificación que es compacta y por lo tanto cerrada. También U, V y $U \cap V$ son arcoconexos, pues son imágenes de aplicaciones sobreyectivas de un espacio topológico conexo por caminos; también V es simplemente conexo, pues es homeomorfo a un disco abierto. Así, se puede aplicar el Corolario 3.5.1.

Sea $x_1 \in U \cap V$. Si se aplica el Corolario 3.5.1 se demuestra que

$$k : \frac{\pi_1(U, x_1)}{N} \longrightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2, x_1)$$

es un isomorfismo, y su núcleo es el menor subgrupo normal de $\pi_1(U, x_1)$ que contiene la imagen $\varphi(\pi_1(U \cap V, x_1))$ del homomorfismo

$$\varphi : \pi_1(U \cap V, x_1) \longrightarrow \pi_1(U, x_1).$$

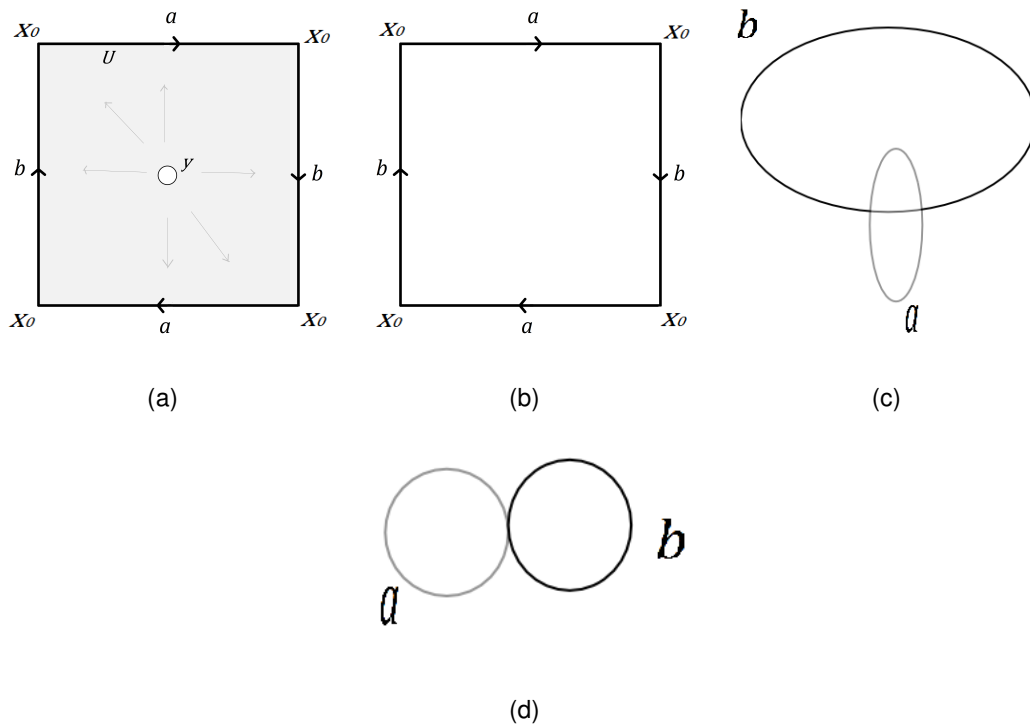


Figura 3.10: La unión de los círculos a y b es un retracto de deformación de U

Puesto que el borde de un cuadrado es un retracto por deformación del cuadrado menos un punto (como se muestra en la Figura 3.10 (a) y (b)), resulta que la unión de

los círculos a y b es un retracto por deformación de U . Por lo tanto, $\pi_1(U, x_0)$ es un grupo libre de dos generadores. Para ser más precisos $\pi_1(U, x_0)$ es un grupo libre de dos generadores $\langle \alpha \rangle$ y $\langle \beta \rangle$, donde α, β están representados por los círculos (son clases de lazos determinados por) a y b respectivamente (vease Figura 3.10 (c) y (d)).

Si $d : I \rightarrow U$ es un camino de x_0 a x_1 en U y sea $\delta = [d]$ entonces $\pi_1(U, x_1)$ es un grupo libre de dos generadores

$$\alpha' = \delta^{-1} * \alpha * \delta = \delta^{-1} \alpha \delta$$

$$\beta' = \delta^{-1} * \beta * \delta = \delta^{-1} \beta \delta$$

ya que por el Teorema 3.2.1, la aplicación $U_d : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_1)$ es un isomorfismo tal que $U_d[\rho] = [d^{-1} * \rho * d] = [d^{-1}] * [\rho] * [d]$.

Por otro lado, una circunferencia es un retracto por deformación de $U \cap V$ (Figura 3.11).

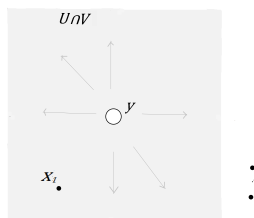


Figura 3.11: Una circunferencia es un retracto por deformación de $U \cap V$.

Por lo tanto, $\pi_1(U \cap V, x_1) \cong \mathbb{Z}$, el grupo cíclico infinito generado por la clase de equivalencia γ de un lazo c que da una vuelta alrededor del punto y . A partir de la Figura 3.12, resulta que:

$$\varphi(\gamma) = \varphi([c]) \text{ para } [c] \in \pi_1(U \cap V, x_1)$$

$$\varphi(\gamma) = [c] \in \pi_1(U, x_1)$$

$$\varphi(\gamma) = [d^{-1} a b a^{-1} b^{-1} d]$$

$$\varphi(\gamma) = [d^{-1} a (d d^{-1}) b (d d^{-1}) a^{-1} (d d^{-1}) b^{-1} d]$$

$$\varphi(\gamma) = [d^{-1} a d] [d^{-1} b d] [d^{-1} a^{-1} d] [d^{-1} b^{-1} d]$$

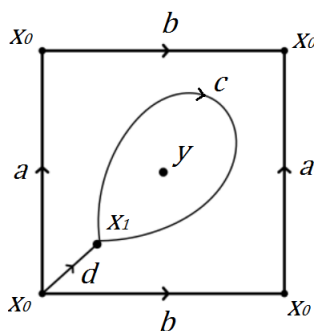


Figura 3.12: Determinación del grupo fundamental de un toro.

$$\varphi(\gamma) = \alpha' \beta' \alpha'^{-1} \beta'^{-1}$$

Como γ genera a $\pi_1(U \cap V, x_1)$, Si $[\rho] \in \pi_1(U \cap V, x_1)$ entonces $[\rho] = \gamma^n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$, así

$$\varphi([\rho]) = \varphi(\gamma^n) = \varphi(\gamma)^n = (\alpha' \beta' \alpha'^{-1} \beta'^{-1})^n$$

En general; $\varphi(\pi_1(U \cap V, x_1)) = \langle \alpha' \beta' \alpha'^{-1} \beta'^{-1} \rangle$.

Por lo tanto, $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_1)$ es isomorfo al grupo libre de generadores α' y β' módulo el subgrupo normal generado por el elemento $\alpha' \beta' \alpha'^{-1} \beta'^{-1}$. Cambiando al punto base x_0 (Corolario 3.2.1) se tiene que $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0)$ es isomorfo al grupo libre de generadores α y β módulo el subgrupo normal generado por $\alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1}$.

Esto significa que exactamente se tiene una representación para el grupo:

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \cong \frac{\pi_1(U, x_0)}{\text{Ker}(k)} \cong \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1} \rangle} \cong \langle \alpha, \beta : \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1} = 1 \rangle.$$

Por una parte, los generadores α y β de $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0)$ conmutan, por lo que $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0)$ es un grupo conmutativo, así es isomorfo a un grupo abeliano libre de generadores α y β , que ya se conoce. Por tanto: $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

□

Proposición 3.6.2. *El grupo fundamental del plano proyectivo real, $\mathbb{R}P^2$: Por el Corolario 3.4.3 se sabe que el grupo fundamental del plano proyectivo real es el grupo cíclico de orden 2. Este grupo fundamental también se puede determinar usando el Teorema 3.5.1.*

Demostración. Ya se sabe que se representa a $\mathbb{R}P^2$ como el espacio de identificación obtenido de un 2-ágono al identificar las aristas opuestas, como en la Figura 3.13.

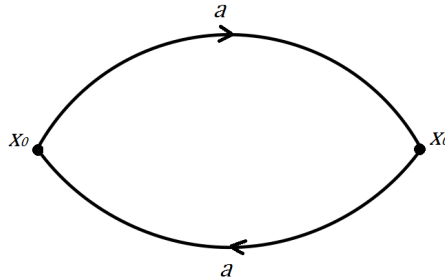


Figura 3.13: Representación del plano proyectivo real.

Bajo la identificación, la arista a representa una circunferencia. Sea y el centro del polígono, y sean

$$U = \mathbb{R}P^2 \setminus \{y\} \quad , \quad V = \text{la imagen del interior del polígono bajo la identificación}$$

Entonces se cumplen las condiciones necesarias para el Teorema de Seifert-Van Kampen. La circunferencia a es un retracto por deformación de U , así $\pi_1(U, x_0)$ es un grupo cíclico infinito generado por $\langle \alpha \rangle$, donde α es un camino cerrado de U que corresponde a a . Si δ denota el camino de x_0 a x_1 que corresponde a d , entonces $\pi_1(U, x_1)$ es un grupo cíclico infinito generado por el elemento

$$\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta.$$

El subespacio V es contráctil al punto x_0 y, por tanto, $\pi_1(V, x_0) = \{e\}$. La curva c es un retracto por deformación fuerte de $U \cap V$, por tanto $\pi_1(U \cap V, x_0)$ es el grupo cíclico infinito generado por $\langle \gamma \rangle$, donde γ denota un camino cerrado de $U \cap V$, que corresponde a c , es decir, recorre a c en la dirección indicada (ver Figura 3.14).

Por el Teorema de Seifert- Van Kampen resulta que $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_1)$ es el grupo generado por α' . En U se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma) &= \delta^{-1}\alpha\delta \\ &= \delta^{-1}\alpha(\delta\delta^{-1})\alpha\delta \\ &= (\delta^{-1} * \alpha * \delta)(\delta^{-1} * \alpha * \delta) \end{aligned}$$

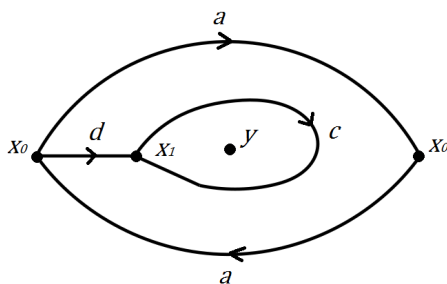


Figura 3.14: Determinación del grupo fundamental de un plano proyectivo real.

$$= \alpha' \alpha',$$

por lo que $\varphi[\gamma] = \langle \alpha^2 \rangle$. De donde resulta que $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_1)$ es el cociente de un grupo cíclico infinito generado por α' módulo el subgrupo generado por α'^2 ; equivalente, $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0)$ es el cociente de un grupo cíclico infinito generado por α módulo el subgrupo generado por α^2 , es decir,

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) \cong \frac{\pi_1(U, x_0)}{\ker(k)} \cong \frac{\langle \alpha \rangle}{\langle \alpha^2 \rangle} \cong \langle \alpha : \alpha^2 = 1 \rangle \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}.$$

□

Proposición 3.6.3. Grupo fundamental de suma conexa de n toros, $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$. El método es completamente análogo a los casos anteriores, pero el resultado final es nuevo y más complicado.

Demostración. Se puede representar la suma conexa S de n toros como un $4n$ -ágono (Por Definición 2.2.13) con las aristas identificadas en pares, como se muestra en la Figura 3.15.

Bajo la identificación, las aristas $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ forman círculos en S , y cualquiera dos de estos círculos se intersecan sólo en el punto base x_0 .

Como antes, sea $U = S \setminus \{y\}$, el complemento del centro y , y sea V la imagen del interior del polígono bajo la identificación; V es un disco abierto en S .

La unión de los $2n$ círculos $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ es un retracto por deformación de U , por lo tanto, de manera análoga al caso del toro, el $\pi_1(U, x_0)$ es un grupo libre de $2n$ generadores $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n$ donde α_i es representado por el círculo a_i , y β_i es

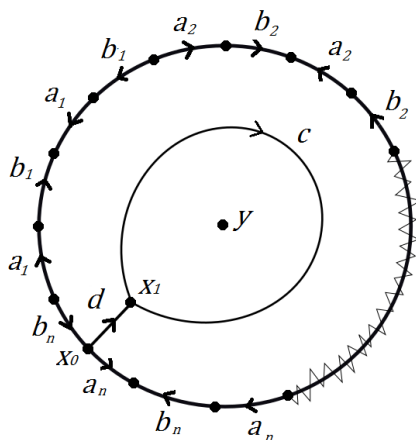


Figura 3.15: Determinación del grupo fundamental de un superficie orientable de género n .

representado por el círculo b_i . Como antes, sea d el camino de x_0 a x_1 y $\delta = [d]$ entonces $\pi_1(U, x_0)$ es isomorfo bajo U_{d*} a $\pi_1(U, x_1)$ entonces es un grupo libre de generadores

$$\alpha'_i = \delta^{-1} \alpha_i \delta,$$

$$\beta'_i = \delta^{-1} \beta_i \delta.$$

Y así, $\pi_1(U \cap V, x_1)$ es un grupo cíclico infinito con generador γ representado por el círculo c , y

$$\varphi(\gamma) = \varphi([c]) \text{ para } [c] \in \pi_1(U \cap V, x_1)$$

$$\varphi(\gamma) = [c] \in \pi_1(U, x_1)$$

$$\varphi(\gamma) = \langle d^{-1}(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}) d \rangle$$

$$\varphi(\gamma) = \langle d^{-1}(a_1 (d d^{-1}) b_1 (d d^{-1}) a_1^{-1} (d d^{-1}) b_1^{-1} (d d^{-1}) \cdots a_n (d d^{-1}) b_n (d d^{-1}) a_n^{-1} (d d^{-1}) b_n^{-1}) d \rangle$$

$$\varphi(\gamma) = [d^{-1} a_1 d] [d^{-1} b_1 d] [d^{-1} a_1^{-1} d] [d^{-1} b_1^{-1} d] \cdots [d^{-1} a_n d] [d^{-1} b_n d] [d^{-1} a_n^{-1} d] [d^{-1} b_n^{-1} d]$$

$$\varphi(\gamma) = \prod_{i=1}^n [\alpha'_i, \beta'_i],$$

donde $[\alpha'_i, \beta'_i]$ denota el conmutador $\alpha'_i \beta'_i \alpha_i'^{-1} \beta_i'^{-1}$,

Como resultado, $\pi_1(S, x_0)$ es el cociente del grupo libre de generadores $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$ módulo el subgrupo normal generado por el elemento $\prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$ es decir, tiene la siguien-

te representación

$$\pi_1(S, x_0) \cong \frac{\langle \alpha_i, \beta_i \rangle}{\langle \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i] \rangle} \cong \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n : \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i] = 1 \rangle.$$

En el caso $n > 1$, no existe ninguna descripción intrínseca sencilla de este grupo. Sin embargo, se ve fácilmente que, si se abelianiza $\pi_1(S, x_0)$, se obtiene un grupo abeliano libre de $2n$ generadores como consecuencia de que la única relación existente está contenida en el subgrupo conmutador del grupo libre de generadores $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$. Resulta de esto que si $m \neq n$, la suma conexa de n toros y la suma conexa de m toros tienen grupos fundamentales no isomorfos. Este resultado es más fuerte que el probado en el Capítulo 2, donde se demostró que estos espacios no eran homeomorfos (bajo el supuesto que la característica de Euler era una invariante topológica). \square

Proposición 3.6.4. Grupo fundamental de la suma conexa de n planos proyectivos, $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$:

Demostración. La suma conexa $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$ de m planos proyectivos reales puede obtenerse al identificar a pares los lados de un polígono de $2n$ aristas, tal como se dijo en la Definición 2.2.14 (ver Figura 3.16).

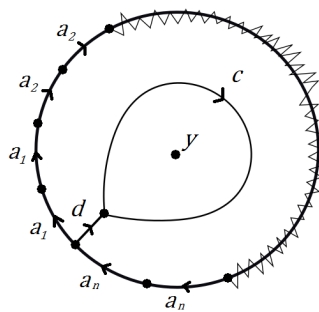


Figura 3.16: Determinación del grupo fundamental de un superficie no orientable de género m

Siguiendo exactamente igual que en el caso anterior, se obtiene que el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2, x_0)$ admite una presentación formada por el conjunto de generadores

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

donde α_i está representado por el círculo a_i , y una relación

$$\alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_n^2 = 1$$

De nuevo, para $n > 1$, este grupo no admite una descripción intrínseca sencilla. □

Debido a estos resultados se obtiene lo siguiente:

Corolario 3.6.1. Grupo fundamental de una Superficie compacta. *El grupo fundamental de una superficie compacta conexa X es isomorfo a:*

- a) $\pi_1(X) \cong \langle \emptyset | \emptyset \rangle$ (el grupo trivial), si $X = S^2$
- b) $\pi_1(X) \cong \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n : \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \cdots \alpha_n \beta_n \alpha_n^{-1} \beta_n^{-1} = 1 \rangle$, si $X = \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$
- c) $\pi_1(X) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n : \alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2 = 1 \rangle$, si $X = \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$.

Demostración. Para el literal a), esto se deriva del Teorema 3.4.2. Para los casos restantes se utilizan las proposiciones 3.6.3, 3.6.4 y las presentaciones poligonales del Teorema 2.2.7, se observa que para cada superficie distinta de la esfera, la presentación estándar identifica todos los vértices a un punto. □

Nota: Ahora se está finalmente en posición para llenar el bloque en nuestra clasificación de superficies compactas demostrando que las diversas superficies en la lista dada anteriormente son realmente topológicamente distintas. Se realiza demostrando que sus propios grupos fundamentales no son isomorfos. Incluso esto no es completamente sencillo, porque implica resolver el problema de isomorfismo para ciertos grupos finitamente presentados. Pero en este caso se puede reducir el problema a un problema mucho más simple que involucre los grupos abelianos.

Es relativamente fácil calcular las abelianizaciones de los grupos fundamentales de superficies compactas.

Proposición 3.6.5. *Los grupos fundamentales de superficies compactas tienen las siguientes abelianizaciones:*

$$\{\pi_1(X)\}^{ab} = \{e\}, \text{ si } X = S^2$$

$$\{\pi_1(X)\}^{ab} \cong \mathbb{Z}^{2n}, \text{ si } X = \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$$

$$\{\pi_1(X)\}^{ab} \cong \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \text{ si } X = \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$$

Demostración. El caso de la esfera es inmediato del Teorema 3.4.2.

Sea $G \cong \pi_1(X)$.

Si $X \approx \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$, entonces

$$\begin{aligned} G &\cong \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n : \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_n \beta_n \alpha_n^{-1} \beta_n^{-1} = 1 \rangle \\ &\cong \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n : [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_n, \beta_n] = 1 \rangle \\ &\cong \mathbb{Z}^{2n}. \end{aligned}$$

Como G es abeliano, en $G^{ab} = G/[G, G]$, los conmutadores son triviales entonces no hay relaciones entre las imágenes de $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$.

$$\therefore G^{ab} \cong \langle \bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n \rangle \cong \mathbb{Z}^{2n}.$$

Sea $G \cong \pi_1(X)$

Si $X \approx \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$.

$$G \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n : \alpha_1^2 \dots \alpha_n^2 = 1 \rangle$$

G no es abeliano, pero en $G^{ab} = G/[G, G]$ las imágenes de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ conmutan entre sí. Los elementos de G son palabras en $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tal que $\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n}$, es decir,

$$G = \{ \text{palabras en } \alpha_1, \dots, \alpha_n : \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n} \}$$

donde no conmutan las palabras y se quedan en el orden que se han escrito.

Mientras que los elementos del abelianizado son monomios, es decir,

$$G = \{ \text{monomios } \bar{\alpha}_1^{m_1}, \bar{\alpha}_2^{m_2} \dots, \bar{\alpha}_n^{m_n} : \bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_2^2 \dots \bar{\alpha}_n^2 = \bar{1} \}$$

Pero como $\alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_n^2 = \bar{1}$, se puede reordenar como $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)^2 = \bar{1}$ sustituyendo $\bar{\beta} = \bar{\alpha}_1 \cdots \bar{\alpha}_n$ entonces $\bar{\beta}^2 = \bar{1}$. Ahora si se toma un monomio en G^{ab} , de la forma $\bar{\alpha}_1^{m_1} \bar{\alpha}_{n-1}^{m_{n-1}} \cdots \bar{\alpha}_n^{m_n}$ sustituyendo $\bar{\alpha}_n = \bar{\beta} \bar{\alpha}_1^{-1} \bar{\alpha}_2^{-1} \cdots \bar{\alpha}_{n-1}^{-1}$

Al reordenar se obtiene un monomio en $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}$ y $\bar{\beta}$, estos generan a todos los elementos del abelianizado. Finalmente, la única relación entre $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}$ y $\bar{\beta}$ es $\bar{\beta}^2 = 1$, por lo tanto los generadores $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}$ quedan libres sin ninguna relación, así $\langle \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ y $\langle \bar{\beta} : \bar{\beta}^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Una representación del grupo abelianizado es:

$$\therefore G^{ab} \cong \langle \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1} \bar{\beta} : \bar{\beta}^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

□

Ahora se puede recalcar nuevamente la invariante combinatoria que se discutió al final del Capítulo 2.

Corolario 3.6.2. *La orientabilidad de una superficie compacta es un invariante topológico.*

Demostración. Combinando los resultados de la Proposición 2.2.4 y la Definición 2.2.18, se puede concluir que ninguna superficie que tiene una presentación orientada es homeomorfa a una que no. □

Corolario 3.6.3. *La característica de Euler de una superficie compacta es un invariante topológico.*

Demostración. Supongamos que W_1 y W_2 son presentaciones de superficies poligonales tales que $|W_1| = |W_2|$. Cada una de estas presentaciones se puede transformar en una de las estándar por transformaciones elementales, y puesto que las superficies representadas por diversas presentaciones estándar no son homeomórfas, ambas presentaciones deben reducir al mismo estándar. Puesto que la característica de Euler de una presentación es sin cambios por transformaciones elementales, las dos presentaciones deben haber tenido la misma característica de Euler para comenzar. □

Corolario 3.6.4. *El abelianizado del grupo fundamental de una superficie orientable de género n es \mathbb{Z}^{2n} .*

El abelianizado del grupo fundamental de una superficie no orientable de género m es $\mathbb{Z}^{m-1} \times \mathbb{Z}_2$.

El siguiente Corolario puede considerarse como el resultado que relaciona superficies y grupos fundamentales.

Corolario 3.6.5. *Sean S_1 y S_2 dos superficies. S_1 y S_2 son homeomorfas si y solo si sus grupos fundamentales abelianizados son isomorfos.*

Demostración. Resulta inmediato del Teorema de Clasificación de superficies compactas 2.2.7 y superficies con borde y del Corolario 3.6.4. □

En general se obtiene el siguiente resultado llamado la Conjetura de Poncaré uno de los siete problemas del Milenio.

Corolario 3.6.6. *Una superficie es simplemente conexa si y solo si es homeomorfa a la esfera S^2 .*

El Corolario 3.6.4 se podría usar como método para decidir si un espacio es una superficie topológica o no.

Corolario 3.6.7. *Sea X un espacio y $x_0 \in X$. Si $\{\pi_1(X, x_0)\}^{ab}$ no es isomorfo ni a \mathbb{Z}^{2n} ni a $\mathbb{Z}^{m-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, entonces X no es una superficie.*

En cuanto al grupo fundamental de una superficie no compacta, William Massey en su libro "A Basic Course in Algebraic Topology" [5, pág. 114], establece que:

Observación 3.6.1. El grupo fundamental de una superficie no compacta (2-contable) es un grupo libre con un conjunto finito o numerable de generadores. Toda superficie no compacta simplemente conexa es homeomorfa al plano \mathbb{R}^2 .

Apéndice A

SUPERFICIES TOPOLÓGICAS CON BORDE.

En esta sección se estudian: las superficies topológicas con borde, la orientabilidad de superficies topológicas con borde, clasificación de superficies conexas, compactas con borde y la característica de Euler, dichos resultados son muy similares a los de superficies topológicas.

El concepto de superficie topológica con borde es una ligera generalización del concepto de superficie topológica, y se establece como sigue:

Definición A.0.1. Una **superficie topológica con borde** es un espacio Hausdorff, 2-contable S tal que si $x \in S$ entonces:

1. x tiene un entorno que es homeomorfo a un disco abierto B^2 , o
2. x tiene un entorno que es homeomorfo al espacio

$$B_+^2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \text{ y } x_2 \geq 0\}$$

Si $x \in S$ y x tiene un entorno que es homeomorfo a B^2 , entonces x es llamado un **punto interior** de S y el conjunto de todos los puntos interiores de S es llamado el **interior** de S .

Si $x \in S$ y x tiene un entorno que es homeomorfo a B_+^2 , entonces x es llamado un **punto**

frontera de S y el conjunto de todos los puntos fronteras de S es llamado la **frontera** de S .

Si S es una superficie con borde, se denota el borde de S como ∂S .

Ejemplo A.0.1. El cuadrado $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ y el cilindro $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, son superficies con borde.

La frontera del cuadrado es $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \wedge y = \pm 1\}$ y el interior del cuadrado es $\text{int}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1 \wedge -1 < y < 1\}$.

La frontera del cilindro es $\partial C = S^1 \times \{0, 1\}$, y el interior del cilindro es $\text{int}(C) = S^1 \times (0, 1)$.

Ejemplo A.0.2. La banda de Möbius M , tal como se define normalmente, es una superficie topológica con borde.

Otros ejemplos de superficies topológicas con borde pueden obtenerse recortando una colección de pequeños discos abiertos de una superficie topológica.

El conjunto de puntos frontera de una superficie topológica con borde es una 1-variedad, es decir, una curva. El interior es una superficie topológica no compacta.

El lector observará que los términos “interior” y “frontera” se han empleado en los párrafos precedentes en un sentido distinto del que usualmente tienen en la topología conjuntista. Sin embargo, el empleo de estos términos raramente lleva a confusión.

Definición A.0.2. Una **componente del borde** de una superficie S es una sucesión anidada $P_1 \supset P_2 \supset \dots$ de regiones conexas no acotadas en S tal que:

- (a) La frontera de P_n en S es compacta $\forall n$;
- (b) Para cualquier subconjunto acotado $A \subset S$, $P_n \cap A = \emptyset$ para n suficientemente grande.

p^* denota las clases de equivalencias de las componentes del borde conteniendo $p = P_1 \supset P_2 \supset \dots$.

A una variedad 2-dimensional con borde (no vacío) conexa se le llamará una superficie con borde. La palabra “superficie” sola continuará significando una superficie sin borde.

Clasificación de superficies con borde conexas y compactas.

Se ha enfatizado mucho al hecho de que, si en una superficie compacta se selecciona un número finito de discos cerrados disjuntos y se quita sus interiores, se obtiene una superficie con borde. El número de componentes del borde es igual al número de discos escogidos. Recíprocamente, suponga que S es una superficie con borde compacta, cuyo borde tenga k componentes, $k \geq 1$. Cada componente del borde es una 1-variedad conexa compacta, es decir, una circunferencia. Si se toma k discos cerrados y se pega el borde del i -ésimo disco a la i -ésima componente del borde de S , se obtiene claramente una superficie compacta S^* . El tipo topológico de la superficie resultante S^* depende obviamente sólo del tipo topológico de S . Lo que no es tan obvio es que se verifique una especie de recíproco: El tipo topológico de la superficie con borde S , depende sólo del número de componentes de su borde y del tipo topológico de la superficie S^* obtenida al pegar un disco sobre cada componente del borde.

Se puede enunciar esto mismo de otra manera: si se parte de una superficie compacta y se construye una superficie con borde quitando los interiores de k discos cerrados, que sean dos a dos disjuntos, entonces la situación de los discos que hemos quitado es indiferente. La superficie con borde resultante será topológicamente la misma, independientemente de la posición de los discos elegidos. Se establece formalmente este resultado de la siguiente manera:

Teorema A.0.1. *Sean S_1 y S_2 superficies con borde compactas; suponga que sus bordes tienen el mismo número de componentes. Entonces S_1 y S_2 son homeomorfas si y sólo si las superficies S_1^* y S_2^* (obtenidas pegando un disco a cada componente del borde) son homeomorfas.*

Demostración. Se indicará una línea de razonamiento en la demostración de la parte “si” de este teorema. Depende fuertemente del teorema de clasificación de superficies

compactas. Como en la demostración del Teorema de Clasificación de Superficies compactas 2.2.7, se procede demostrando que S_1 y S_2 son homeomorfas a un polígono con ciertos pares de aristas identificados, su llamada forma normal. En primer lugar, se explicarán las formas normales en detalle.

(a) *Forma normal para una esfera con k agujeros.* Una esfera está representada por Un polígono de dos lados cuyas aristas están identificadas de acuerdo con el símbolo aa^{-1} . Hágase k agujeros en tal polígono como se muestra en la Figura A.1 a) para el caso en que $k = 4$. Entonces, a partir de un vértice del borde, háganse cortes c_1, c_2, \dots, c_k hasta las correspondientes componentes B_1, B_2, \dots, B_k del bordes.

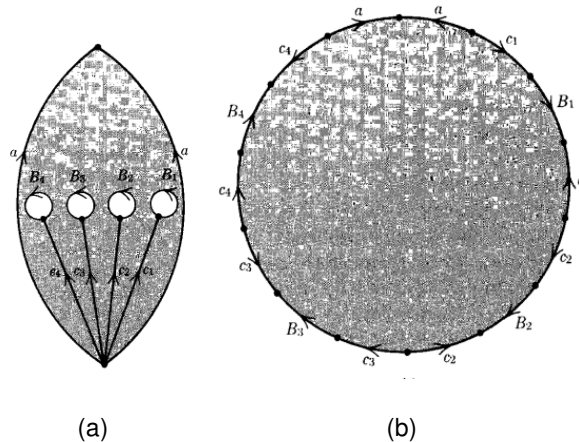


Figura A.1: Una esfera con cuatro agujeros.

Abra cada corte hasta obtener el polígono que se muestra en la Figura A.1 (b). En general, se obtiene un polígono cuyas aristas están identificadas según el símbolo

$$aa^{-1}c_1B_1c_1^{-1}c_2B_2c_2^{-1} \dots c_kB_kc_k^{-1}.$$

(b) *Forma normal de la suma conexa de n toros con k agujeros.* Los diagramas de la Figura A.2 (a) y (b) muestran la manera de proceder en el caso $n = 2$ y $k = 4$. Es totalmente análogo al caso de una esfera con agujeros. El resultado es un polígono de $4n + 3k$ lados identificados según el símbolo:

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}c_1B_1c_1^{-1} \dots c_kB_kc_k^{-1}.$$

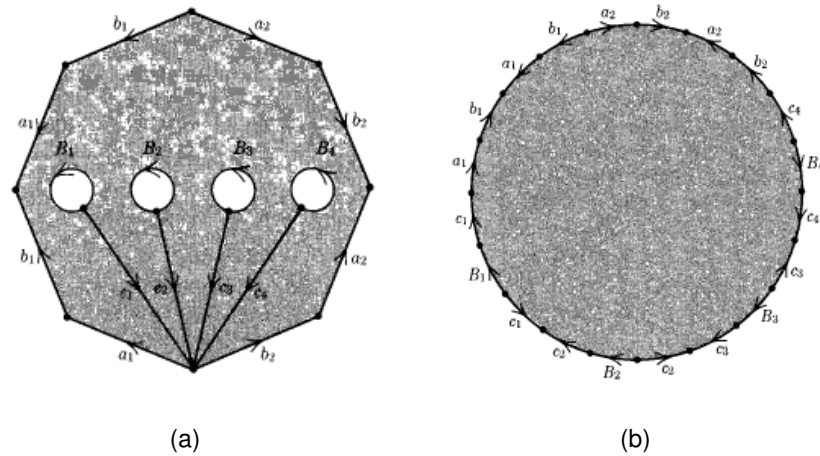


Figura A.2: Superficie orientable de género dos con cuatro agujeros.

(c) *Forma normal de la suma conexa de n planos proyectivos reales con k agujeros. Se deja al lector que vea que en este caso se obtiene un polígono con $2n + 3k$ lados identificados según el símbolo*

$$a_1 a_1 \dots a_n a_n c_1 B_1 c_1^{-1} \dots c_k B_k c_k^{-1}.$$

Observe que en las construcciones anteriores, se ha tenido cuidado en hacer los cortes en línea recta, mientras que está claro que se podría haber hecho los cortes c_1, \dots, c_k arbitrariamente, siempre que fueran disjuntos salvo en un extremo.

Se considera ahora triangulaciones de superficies con borde compactas. La definición es exactamente la misma que la dada en la sección para el caso de superficies compactas. Existe, sin embargo, una diferencia entre los dos casos que hay que hacer notar: En el caso de una triangulación de una superficie, toda arista lo es de exactamente dos triángulos. Sin embargo, si una superficie con borde es triangulable, algunas aristas lo serán de un solo triángulo. Estas aristas estarán contenidas en el borde. Hay un teorema, que se supondrá cierto sin demostrarlo, que dice que toda superficie con borde compacta es triangulable (para la demostración, véase Ahlfors y Sario [1], capítulo I, Sección 8).

Sea S una superficie con borde compacta, con una triangulación dada. Se puede suponer que la triangulación satisface las siguientes condiciones: *Si una arista tiene los dos vértices en el borde, entonces toda la arista está contenida en el borde*

y ningún triángulo tiene más de una arista contenida en el borde. En efecto, si no

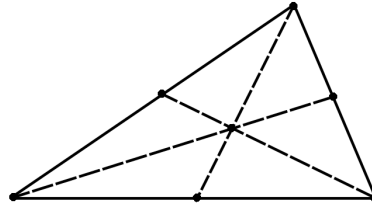


Figura A.3: Subdivisión baricéntrica de un triángulo.

fuera cierta esta condición, se podría conseguir subdividiendo cada arista en dos aristas y cada triángulo en seis triángulos, como se muestra en la Figura A.3. A este proceso se llama *subdivisión baricéntrica*. Volviendo a subdividir baricentricamente si es necesario, se puede suponer que la triangulación verifica incluso la siguiente condición: Sean T_i y T_j triángulos, que tengan cada uno una arista contenida en el borde. Entonces, T_i y T_j son disjuntos, o bien tienen un vértice en común, que es un vértice del borde.

Sea B_1, \dots, B_K las componentes de la frontera. Si T es un triángulo que tiene parte común con una de las componentes B_i , entonces T tiene exactamente dos aristas que tienen un vértice en B_i , pero están contenidas en B_i . Similarmente, si e es una arista que tiene un vértice en B_i , sin estar contenida en B_i , entonces e es arista de dos triángulos, que cortan ambos a B_i . Se sigue, pues, que las aristas y triángulos que tienen parte común con B_i pero no están contenidos en B_i pueden ordenarse en uno o más ciclos de aristas y triángulos alternativamente,

$$T_1, e_1, T_2, e_2, \dots, T_n, e_n, T_{n+1} = T_1$$

tal que cada e_j es arista de T_j y T_{j+1} y cada T_j tiene a e_{j-1} y e_j como aristas. Un sencillo razonamiento muestra que, para cada cada componente del borde B_i sólo puede haber uno de tales ciclos. De las condiciones impuestas a la triangulación de S , resulta claro que la unión de los triángulos T_1, T_2, \dots, T_n que tienen parte común con B_i es homeomorfa a una región poligonal en el plano con un agujero; la Figura A.4 ilustra cómo tal región podría verse cuando $n = 17$. Se tendrá una región poligonal P_i de éstas para cada componente B_i del borde, $1 \leq i \leq k$.

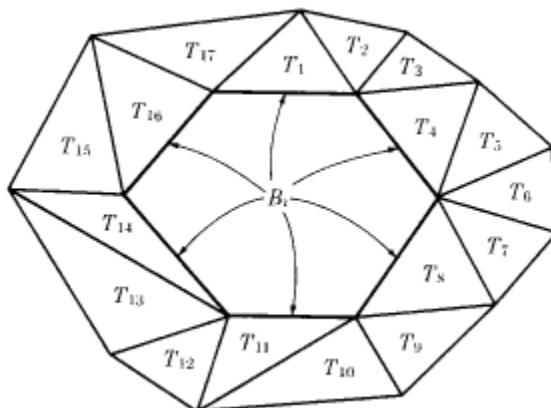


Figura A.4: Triángulos cerca de la componente frontera B_i .

Sea T_1, \dots, T_l los triángulos restantes de la triangulación de S dada, no contenida en ninguno de los polígonos P_i , $1 \leq i \leq k$. Con estos k polígonos y l triángulos, se realiza el proceso descrito en el primer paso de la demostración del Teorema de Clasificación de Superficies. Un solo polígono en el plano, que tiene k agujeros en su interior, y tal que los bordes exteriores de este polígono se identifiquen por pares (véase, por ejemplo, la Figura A.2 (a)).

Ahora se puede aplicar los seis pasos restantes de la prueba del teorema de clasificación de superficies a este polígono con agujeros. Existe una condición, sin embargo. Cada uno de los pasos requiere ciertos procesos de cortar y pegar juntos de nuevo. Se supone que estos cortes se hacen para evitar todos los agujeros. Está claro que esto siempre se puede hacer. También está claro que el número de agujeros permanece sin cambios durante todos estos pasos.

Como resultado se obtiene uno de los tres tipos de polígonos mostrados en la Figura A.5. Por conveniencia, se ha tomado $k = 4$ en cada dibujo. El diagrama (a) corresponde a una esfera con agujeros en ella, el (b) corresponde a una suma conexa de planos proyectivos reales con agujeros, y (c) corresponde a una suma conexa de toros con agujeros. En cada caso, todos los vértices alrededor del borde del polígono deben identificarse a un solo vértice.

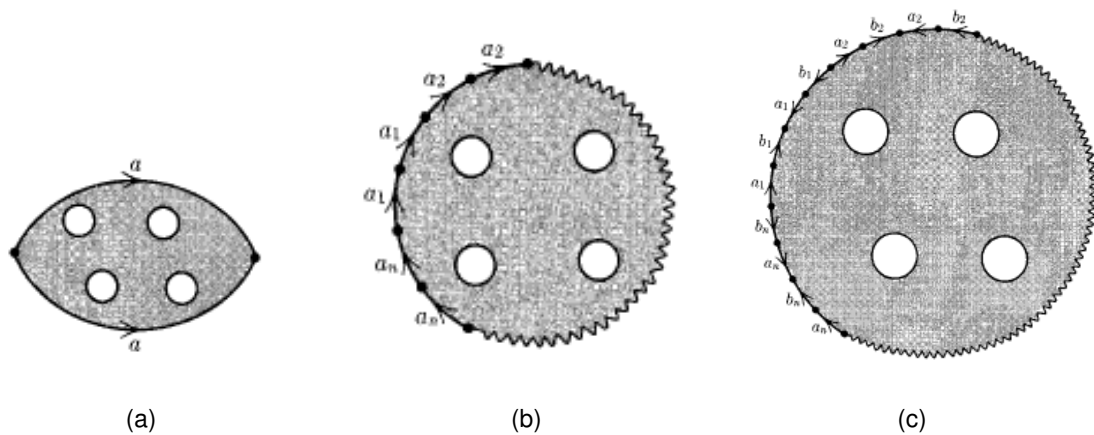


Figura A.5: Tipos posibles de superficies con borde con $k = 4$.

Para completar la prueba, se debe ahora hacer cortes c_1, c_2, \dots, c_k desde el vértice inicial en la frontera del polígono hasta la frontera de cada uno de los agujeros, y abrir cada uno de los cortes para obtener un polígono en la forma normal deseada. Por supuesto, se debe estar seguro de que cualquier dos cortes son parejas disjuntas excepto para el vértice inicial. Si k es muy grande (por ejemplo, $k = 10^{10}$) y los agujeros están arreglados de alguna manera peculiar, puede no ser inmediatamente obvio cómo proceder. Se puede superar esta dificultad mediante un procedimiento inductivo, como sigue: Hacer un corte desde el vértice inicial hasta el agujero más cercano. Abrir el corte así hecho para obtener un nuevo polígono con tres lados más y un agujero menos. De nuevo, haga un corte desde el vértice inicial hasta el agujero más cercano en este nuevo polígono, y abra el corte para obtener un polígono con tres lados más y un agujero menos. Repita el proceso k veces hasta que se haya hecho el número necesario de cortes. Está claro que se obtiene un polígono en una de las tres posibles formas normales, y así la demostración del teorema es completa.

□

De esto se deduce el siguiente resultado para la clasificación de superficies con borde:

Proposición A.0.1. *Sea S una superficie compacta y conexa con k componentes de borde. Entonces S es homeomorfa a:*

a) bien a $S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k D_i^2$,

b) bien a $T^2 \# \cdots \# T^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k D_i^2$,

c) bien a $\mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k D_i^2$.

donde D_i son discos abiertos disjuntos.

Demostración. Sólo hay que darse cuenta de que si S tiene borde, cada componente de borde es una variedad 1–dimensional compacta sin borde, es decir, homeomorfa a S^1 . Pegando discos D^2 a esos bordes da una variedad compacta, conexa, sin borde, y por lo tanto debe estar en la lista del Teorema 2.2.7. Volviendo a quitar los discos, se obtiene el resultado. \square

La característica de Euler y Orientabilidad de una superficie con borde.

La característica de Euler de una superficie triangulable con borde se define exactamente igual que en el caso de una superficie sin borde. Se puede dar el mismo tipo de argumento que en la subsección 2.2.6 para demostrar que la característica de Euler es independiente de la triangulación. Los conceptos de orientabilidad y no orientabilidad se aplican a las superficies con borde exactamente como en el caso de las superficies. Por ejemplo, una banda de Möbius es una superficie con borde no orientable, mientras que el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ es una superficie con borde orientable.

La orientabilidad de una superficie con borde depende esencialmente de la orientabilidad de su interior considerado como una superficie no compacta. Hagase notar que cada componente del borde de una superficie es una curva que puede ser orientable o no. De hecho, puede darse los dos casos. Sin embargo, puede demostrarse que toda componente del borde de una superficie orientable debe ser orientable. Por otra parte, una superficie no orientable puede tener componentes del borde orientables y componentes no orientables.

Mediante la característica de Euler, se puede dar ahora un conjunto completo de invariantes para la clasificación de las superficies con borde compactas:

Teorema A.0.2. *Dos superficies con borde compactas son homeomorfas si y sólo si tienen el mismo número de componentes del borde, son ambas orientables o no orientables, y tienen la misma característica de Euler.*

Demostración. Sea S una superficie conexa, compacta, con o sin borde. Suponga que S tiene definida una triangulación y que se forma una nueva superficie con borde S' quitando el interior de un triángulo, que se halle enteramente contenido en el interior de S . Entonces el borde de S' tiene una componente más que el borde de S , y

$$\chi(S') = \chi(S) - 1$$

es decir, la característica de Euler se reduce en una.

Resulta, pues, que si se parte de una superficie triangulable S^* (sin borde), y se quita los interiores de k triángulos dos a dos disjuntos, se obtiene una superficie con borde, y

$$\chi(S) = \chi(S^*) - k.$$

Según el teorema de clasificación de superficies compactas, Se obtiene de esta manera todas las superficie con borde S con k componentes borde . Se ve, pues, que la característica de Euler de S está completamente determinada por la de S^* y viceversa. Además es inmediato que S y S^* son ambas orientables o ambas no orientables. El teorema se deduce, entonces, del Teorema de Clasificación de Superficies compactas 2.2.7 y el Teorema A.0.1. □

Definición A.0.3. El género de una superficie compacta con borde S se define como el género de la superficie compacta S^* , obtenida adhiriendo un disco a cada componente del borde de S .

Ejemplos de Grupos Fundamentales de Superficies con borde.

En el ejemplo A.0.1 se dio que la banda de Möbius es una superficie no compacta con borde, el grupo fundamental de esta superficie es:

Proposición A.0.2. *El grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{M})$: Es el grupo libre con un generador, es decir, $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$, ya que*

$$\gamma = [\delta * \alpha * \bar{\delta}]$$

donde δ es el camino correspondiente a d y α es el camino correspondiente a a , como se ve en la Figura A.6.

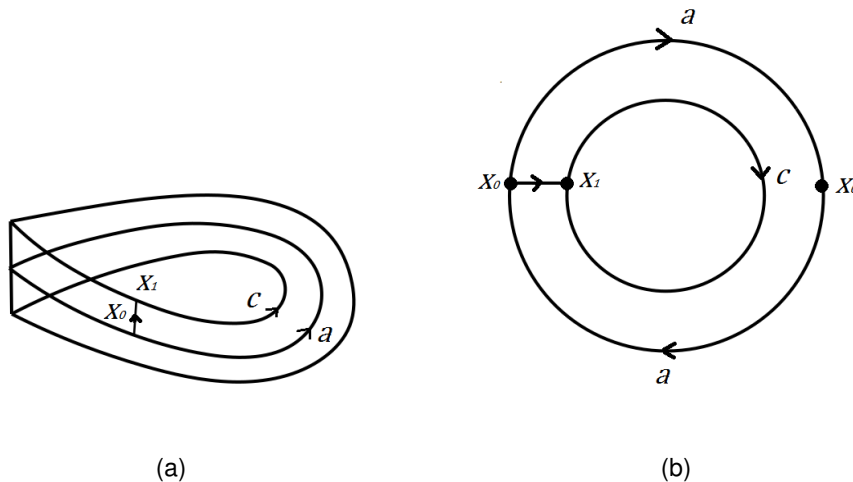


Figura A.6: Determinación del grupo fundamental de la banda de Möbius.

Otro ejemplo de superficie con borde es el cilindro, anteriormente se demostró que el grupo fundamental del cilindro, $\pi_1(S^1 \times \mathbb{R})$ es isomorfo a \mathbb{Z} .

ABREVIATURAS

\simeq_{relA}	Homotopía relativa a A entre f y g , page 136
$G \cong G'$	los grupos G y G' son isomorfos, page 14
$[q]$	Denota la clase de equivalencia de q , page 8
$\#$	Denota la suma conexa de superficies, page 47
\approx	Denota homeomorfismo, page 4
\bar{f}	Denota el camino inverso de f , page 96
\oplus	Denota la suma directa, page 17
\mathbb{K}^2	Representa a la superficie topológica, botella de Klein, page 46
\mathbb{T}^2	Representa a la superficie topológica, toro, page 44
$\pi_1(X, x_0)$	Grupo fundamental del espacio topológico X basado en x_0 , page 120
\mathbb{RP}^2	Representa a la superficie topológica, plano proyectivo real, page 44
\sim	En este texto denotara una relación de equivalencia, page 8
\simeq	Homotopía entre dos aplicaciones continuas de un espacio topológico, page 95
\simeq_p	Homotopía de caminos., page 97
φ_*	homomorfismo inducido por φ , page 128

$f * g$	Producto de los caminos f y g , page 104
I, I^2	intervalo $[0, 1]$, cuadrado unitario $[0, 1]^2$., page 38
S	Denota una superficie topológica., page 40
S^2	Representa a la superficie topológica, 2-esfera., page 44
T	Denota una triangulación, page 49
$*$	Operación de producto libre, page 23
$\chi(S)$	Denota la característica de Euler de S , page 90
$\frac{D^2}{\sim}$	Espacio cociente de un disco., page 44
$\langle a \rangle$	Conjunto generado por el elemento a , page 14
M	Representa a la superficie topológica, banda de Möbius, page 46
∂	Denota al conjunto frontera, page 37
D^2	Define un disco en \mathbb{R} ., page 44
$Int(P)$	Es el conjunto de los puntos interiores del polígono P , page 37
U_f	Aplicación que relaciona grupos fundamentales, page 121
X / \sim	el <i>espacio cociente</i> o <i>espacio de identificación</i> de X por la relación de equivalencia, page 8
$\frac{I^2}{\sim}$	Espacio cociente de un cuadrado unitario, page 44

REFERENCIAS

- [1] Topología segunda edición. James R. Munkres. Editorial: Pearson Educación, S. A. Madrid, 2002.[Libro]
- [2] Foundations of Topology. c. Wayne Patty.Editorial: PWS Publishing Company, Boston, 1993.[Libro]
- [3] Introduction to topological manifolds(Graduate texts in Mathematics). J.M. Lee. Oxford University Press, 2003 [Libro]
- [4] Topología Algebraica.Czes Kosniowski.Traducción en Español por: Manuel Castellet Solanas Editorial: REVERTE,S.A, 1986 [Libro]
- [5] A Basic Course in Algebraic Topology(Graduate texts in Mathematics) por: William S. Massey Editorial: Board, 1991 [Libro]
- [6] Abstract Algebra. I.N. Herstein. Macmillan Publishing Company, Estados Unidos, 1986 [Libro]
- [7] The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces.Carsten Thomassen. Mathematical Institute The Technical University of Denmark. [artículo]