

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA



TRABAJO DE GRADO:
“EL GRUPO FUNDAMENTAL DEL NUDO”

PRESENTADO POR:
NOEL HUMBERTO CAMPOS CORDOVA
KAREN IVETH ROBLES CHAVARRÍA
JOSÉ DAVID ZALDIVAR OLIVARES

PARA OPTAR AL GRADO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

DOCENTE DIRECTOR:
MSC. MARCELINO MEJÍA GONZÁLEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, FEBRERO DE 2016

SAN MIGUEL

EL SALVADOR

CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

LIC. JOSÉ LUIS ARGUETA ANTILLÓN

RECTOR INTERINO

DRA. ANA LETICIA ZAVALA DE AMAYA

SECRETARIA GENERAL INTERINA

LICDA. NORA BEATRIZ MELENDEZ

FISCAL GENERAL INTERINO

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

ING. JOAQUÍN ORLANDO MACHUCA GÓMEZ

DECANO

LIC. CARLOS ALEXANDER DIAZ

VICE-DECANO

LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNANDEZ

SECRETARIO

AGRADECIMIENTOS

Por Noel Humberto Campos Cordova:

Primeramente dar gracias a **Dios** por darme la vida, sabiduría, paciencia, fuerzas para enfrentar la vida y terminar con una más de mis metas. A **mis padres y familiares** por apoyarme en todo momento, por creer en mí, por la confianza y los ánimos que se necesitan para cumplir nuestros objetivos y vencer los obstáculos a pesar de las adversidades.

También a nuestro docente asesor de tesis **MSc. Marcelino Mejía González** quien fue de mucha ayuda con su sabiduría, apoyándonos en todo momento de diversas formas, orientándonos de manera incondicional no solo en la tesis sino también para la vida futura como profesionales.

A todos los **docentes del de la sección de Matemáticas de la Facultad Multidisciplinaria Oriental**, quien no solo compartieron sus conocimientos, también una amistad duradera y una mano amiga durante toda la formación educativa en esta disciplina que tanto amamos, al jurado calificador por sus aportes y aceptar ser parte de este logro colectivo.

A nuestros **compañeros/as** por su apoyo, la paciencia, la amistad y contribuir en nuestra formación con el intercambio de ideas y transmitiendo sus conocimientos de la mejor manera, en especial a mis compañeros de trabajo de grado que sin ellos esto no hubiese sido posible.

Por ultimo a todas las **personas de la comunidad universitaria, administrativo y estudiantes** que de alguna u otra manera pusieron su granito de arroz para ser parte de este logro que ahora es fruto de todo este esfuerzo.

Que Dios todo poderoso los bendiga, ilumine por el camino del bien, los proteja del mal, les de sabiduría y los tenga en su gloria.

Gracias.

Por Karen Iveth Robles Chavarría:

Primeramente dar gracias a **Dios** por haberme protegido en todo este camino arduo, por brindarme las fuerzas, sabiduría, entendimiento y las ganas de querer superarme para culminar mis metas propuestas hasta hoy.

A mi **familia** y a mis padres **María del Carmen Chavarría de Robles y Daniel de Jesús Robles Chávez**, por todos sus años de dedicación y trabajo para poder formarme en cada etapa de mi educación, por su comprensión, amor, sus consejos, por la confianza que ellos me han brindaron, además por haber creído en mi hasta el final.

También agradecer al Docente Asesor **MSc. Marcelino Mejía González** por su paciencia, sus conocimientos y sus consejos, en el transcurso del trabajo de graduación y en la formación de la carrera.

Agradecer a mis **compañeros de trabajo de graduación** por haber compartido todo este tiempo, dando siempre lo mejor de sí mismos, para poder terminar con éxito este logro que ambicionábamos mutuamente y en especial a mi novio **José David Zaldivar Olivares** por haber estado siempre brindándome su confianza, su amor y cariño incondicional, además por qué siempre me impulso a seguir a delante.

A todos los Docentes que contribuyeron en mi educación y formación profesional, por toda su dedicación, conocimientos y esfuerzos en la enseñanza muchas gracias.

Por José David Zaldivar Olivares:

A **Dios** todo poderoso por darme la sabiduría, el deseo de superarme académicamente y siempre guiarme por el camino del bien.

A mi **familia** en especial a mis padres **José Antonio Zaldivar y Guadalupe del Transito Olivares de Zaldivar** por darme el valioso regalo de la educación y estar siempre apoyándome en todo momento de mi carrera dándome consejos y estar siempre pendientes de mí en cada momento , ya que sin el valioso apoyo de ellos no lo hubiese logrado.

A mi novia y linda compañera de trabajo de grado **Karen Iveth Robles Chavarría** por su cariño, consejos y su apoyo incondicional. Siendo la persona ideal que siempre estuvo a mi lado en cada momento.

Al **Consejo de Becas Estudiantiles** que con los beneficios otorgados fue muy importante y determinante en muchas etapas de la carrera.

También agradecer a nuestro docente asesor **MSc. Marcelino Mejía González** quien fue parte fundamental en nuestro trabajo de grado, por su paciencia a la hora de las revisiones y correcciones, por su sabiduría que nos guio en cada momento y por sus consejos, enseñanzas y experiencias que nos hizo mejores día con día en el transcurso de la carrera.

A todos los **docentes** que me impartieron las diferentes materias a lo largo de la carrera, por su esfuerzo y dedicación puesta en cada hora clase en especial a los de la sección de matemática que prácticamente fueron nuestra familia el transcurso de nuestra formación académica superior.

Además agradecer de manera especial a nuestros **compañeros** de la carrera de manera especial a los del trabajo de grado porque fueron parte esencial en toda nuestra formación ya que compartimos muchas experiencias y momentos especiales, desearles lo mejor y muchos éxitos.

Por últimos agradecer a la toda comunidad universitaria “Hacia la libertad por la cultura”.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	i
ANTECEDENTES.....	1
JUSTIFICACIÓN.....	3
OBJETIVOS.....	4
CAPITULO I.....	5
1.1 Haciendo nudos.....	5
1.2 Movimientos de Reidemeister.....	9
1.3 Enlaces.....	14
1.4 Proyecciones de Nudos.....	27
1.5 Equivalencias de Nudos.....	35
1.6 Grafos y Nudos.....	37
CAPITULO II.....	43
2.1 Nudos Poligonales.....	43
2.2 Nudos Alternantes y Casi Alternantes.....	50
2.2 A) Nudos Alternantes.....	50
2.2 B) Nudos Casi Alternantes.....	53
2.3 Trenzas.....	56
2.4 Nudos Primos.....	67
2.5 Nudos Toros.....	74
2.5 A) Nudos Toros.....	74
2.5 B) La Clasificación de los nudos Toros.....	84
CAPITULO III.....	90
3.1 El Grupo de la Trenza.....	90
3.2 Caminos y Bucles.....	99
3.2.1 Clases de Caminos y Bucles.....	102
3.3 El Grupo Fundamental del Nudo.....	110
3.4 Presentación Wirtinger.....	125
3.5 Homomorfismos Inducidos de Grupos Fundamentales.....	136

Anexo. Tabla de Nudos.....	143
Bibliografía.....	149

INTRODUCCIÓN

La Teoría de Nudos es un subcampo de un área de las matemáticas conocida como Topología. La Topología es el estudio de las propiedades de los objetos geométricos que son preservadas bajo deformaciones. Del mismo modo que se piensa en los nudos como hechos de goma deformable.

En el primer capítulo se explican las reglas para hacer los nudos, se expone la definición formal de nudo con un rigor matemático, así como también se describen los movimientos Reidemeister los cuales son los movimientos permitidos, que es posible hacer en los nudos y que no alteran su naturaleza, luego se introducen los denominados enlaces que son una parte importante en la Teoría de Nudos ya que son una versión extendida de nudos, donde cada componente del enlace es en efecto un nudo. En las inmediaciones del capítulo se tratan las proyecciones de nudos y se explican cómo se componen tales proyecciones en el plano para ser estudiadas, para finalizar se da una pequeña reseña de lo que es la equivalencia de nudos, por último se trata la relación entre grafos y nudos, todas sus propiedades y se explica el proceso de pasar de un grafo a un nudo y viceversa.

En el segundo capítulo se dan a conocer los diferentes tipos de nudos, abordando como primer tipo los nudos poligonales, en caso de que se pueda representar como una unión finita de segmentos se tiene el tipo de nudo dócil. Continuando con la clasificación se tiene el nudo alternante el cual posee una proyección donde los cruces se alternan entre una y otra hebra como viajando alrededor del nudo en una dirección fija. Además se tiene el nudo casi alternante pero antes de exponer este, se estudia lo que es un poco de la notación de Conway, para luego abordar el nudo casi alternante que es un tema reciente en la Teoría de Nudos, luego se echa un vistazo a lo que son las trenzas. Seguidamente se mencionan los nudos primos en los cuales se tuvo que abordar el subtema de composición de nudos, la suma conexa, para luego comprender los nudos primos que son los que no son posibles descomponerlos y para finalizar se dan a conocer los nudos toros un tipo muy interesante de nudo, los cuales viven en la dona como lo diría un Topólogo.

El tercer capítulo inicia con el estudio del Grupo de Trenza, tal como se estudió en el capítulo anterior, pero esta vez investigando las propiedades y bajo qué operación hace que sea un grupo, posteriormente se analiza el orden del grupo y se culmina con la importancia de los generadores.

las propiedades de caminos en un espacio topológico cualquiera, dichos caminos no son más que curvas paramétricas, por ejemplo una partícula moviéndose en el espacio durante un cierto intervalo de tiempo describe un camino. Será conveniente asumir que existe un tiempo inicial $t = 0$, un tiempo final de detención y que el periodo de tiempo de dos caminos puede diferir. Un camino a en un espacio topológico X es entonces un mapeo continuo, el número $\|a\|$ es el tiempo de parada y se asume que $\|a\| \geq 0$. Los puntos $a(0)$ y $a(\|a\|)$ en X son el punto inicial y el punto terminal respectivamente, del camino a .

Concentrándose en el tema principal de este trabajo de graduación. Una de las entidades más importantes de la topología algebraica es el grupo fundamental de un espacio topológico, en este caso los nudos como espacios topológicos.

Se discutirán los espacios básicos y mapeos continuos de la Teoría de Nudos: en el espacio \mathbb{R}^3 y los homeomorfismos de \mathbb{R}^3 sobre sí mismo que llevan un nudo en otro del mismo tipo. Otro espacio de gran importancia es el espacio complementario de un nudo K con respecto a \mathbb{R}^3 , es decir, el espacio $\mathbb{R}^3 - K$ de un nudo K , que consiste en todos aquellos puntos de \mathbb{R}^3 que no pertenecen a K . Toda la Teoría de Nudos siguiente es un estudio de las propiedades de los grupos fundamentales de los espacios complementarios de nudos, se hace el desarrollo del grupo fundamental para un espacio topológico arbitrario X .

Hay un método mostrado por Winterger para encontrar el grupo fundamental de un nudo, es un método comprensible y que facilita la obtención de las relaciones entre los elementos del grupo, conociendo sus generadores así como también la presentación del mismo nudo.

Por último se definen propiedades de homomorfismos entre espacios topológicos y de isomorfismos entre grupos fundamentales de nudos. Es muy importante conocer el grupo fundamental de un nudo en un espacio X , para poder determinar el grupo fundamental del nudo de imágenes mediante un homeomorfismo entre X y un subespacio Y de X .

ANTECEDENTES

El descubrimiento de nudos probablemente fue anterior al del fuego o al de la rueda, cuerdas, cables etc. Incluso ciertos gorilas salvajes son capaces de hacer nudos completos, por lo que el principio de hacer nudos muy probablemente precedió la evolución de la humanidad. El testimonio indirecto para un uso de cuerdas y los nudos que son objetos perforados, cuentas o colgantes que datan desde hace unos 300,000 años; también sirvieron como símbolos en algunas civilizaciones como las de Dinamarca y México.

El uso de los nudos desde la antigüedad ha sido muy importante como lo muestra la Crónica de Perú escrita por Pedro Cieza de León (Sevilla 1553), que describe con asombro como los Incas utilizaban *quipus*, que eran largas cuerdas con nudos que usaban para llevar sus cuentas y calcular en sus transacciones comerciales.

Pero no fue sino hasta a finales del siglo XVIII que hace su aparición la Teoría de nudos con los estudios de A.T. Vandermonde, Crowell y Fox, Gauss y F. Klein.

El primer documento matemático que menciona los nudos fué escrito por el francés Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796), llamado “Remarques sur les problemes de situation”, señalando explícitamente las características topológicas de los nudos.

Por su parte Gauss (1777-1855) es el primer científico que utilizó un concepto directamente relacionado con lo que hoy se entiende por enlace matemático, al considerar espiras enlazadas y utilizar su número de enlace en la fórmula que describe el campo magnético inducido.

En la parte final del siglo XIX se inició un estudio sistemático de la Teoría de Nudos cuando los matemáticos y físicos se dedicaron a tabular nudos. Lord Kelvin (1867) propuso la idea de que los átomos eran nudos, formados por pequeños vórtices o corrientes cerradas de éter. Él creía que si clasificaba todos los nudos posibles podría explicar cómo los átomos absorben y emiten luz. Ahora se sabe que esta idea es incorrecta. El físico Peter Tait pasó muchos años realizando una lista de nudos con la creencia de que estaba creando una tabla de elementos. Cuando el éter no fue detectado en el experimento de Michelson y Morley, la teoría de los átomos modelados mediante nudos fue desechada y la Teoría de Nudos perdió parte de su interés para los físicos.

Los trabajos sobre nudos tuvieron su auge en las décadas de 1950, 1960 y 1970. En la década de 1980 se encontró que el ADN está, algunas veces, anudado, por lo que la teoría se pudo relacionar con la biología molecular. Esta investigación considera importante explicar matemáticamente qué es un nudo.

Pero los desarrollos más importantes de esta teoría se han producido en la segunda parte del siglo XX, gracias a las contribuciones de J.H. Conway, V.F.R. Jones, L.H. Kauffman y muchos otros. Hoy en día, la Teoría de Nudos tiene aplicaciones en teoría de cuerdas, en la gravedad cuántica, en el estudio de replicación y recombinación del ADN.

Los grupos de nudos se convirtieron muy pronto en una herramienta importante en la Teoría de Nudos. El método de presentación de los grupos de generadores y relaciones que definen ha sido desarrollado por W. Dyck [1882], siguiendo una sugerencia de A. Cayley [1878].

Este grupo proporciona un método para clasificar los nudos de acuerdo a las propiedades de grupo. Wilhelm Wirtinger (1865-1945) colaboró con Kurt Reidemeister en la teoría de nudos, mostrando en 1905 cómo calcular el grupo del nudo.

JUSTIFICACIÓN

La palabra nudo designa a un objeto cotidiano que el hombre ha utilizado desde los tiempos más antiguos, su utilidad práctica no necesita explicación; es bien conocido por marineros ya que estos incluso han ideado distintas clases de nudos a los que han denominado con nombre propio.

Si bien es cierto, muchos estudiantes nunca pensarían en algo tan abstracto cuando escuchan hablar de nudos reales, ya que el concepto de nudo es algo cotidiano, sin embargo hablando en un contexto matemático es un poco complicado.

Pero detrás de este objeto cotidiano, nadie se podría imaginar que existe una extensa teoría matemática, la cual es del área de la Topología, es por ello que el presente trabajo de graduación, trata de hacer un estudio de la Teoría de Nudos, que es una rama muy joven de la Topología, en la cual se pretende estudiar la clasificación de nudos, invariantes y llegar al grupo fundamental del nudo ya que es muy útil para determinar si dos nudos son equivalentes o no, además se estudiarán los movimientos Reidemeister, que son parte muy importante para poder clasificar los nudos y así contribuir con el quehacer matemático en algo que es un tema novedoso que servirá para posteriores investigaciones en la Teoría de Nudos.

Este tema además es de mucho interés para los matemáticos de hoy en día, ya que alrededor del mundo es objeto de investigación, muestra de ello es que la IMU (Unión Internacional de Matemática), tomó como logo un nudo en tres dimensiones y en sus eventos se le ha dado mucha importancia a la investigación de la Teoría de Nudos, destacando el ICM-2006 (Congreso Internacional de Matemática) que se llevó a cabo en Madrid España, donde se abordaron temas en esta área.

Es por ello que el propósito de la investigación es motivar a los estudiantes de matemática, para que se interesen por el estudio de la topología, mediante un estudio de la Teoría de Nudos. Además en este tema muchas de las definiciones y resultados son intuitivos, en ocasiones hasta entretenidas.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Dar a conocer la teoría básica de la Teoría de Nudos y proporcionar las herramientas necesarias para abordar el grupo fundamental del nudo.

Objetivos Específicos

- Mostrar los preliminares fundamentales para la introducción a la Teoría de Nudos
- Dar a conocer la clasificación de los diferentes tipos de nudos
- Presentar algunos invariantes en la Teoría de Nudos
- Describir la importancia de los movimientos Reidemeister
- Explicar la estructura de El Grupo Fundamental del Nudo.

CAPITULO I

1.1 Haciendo Nudos.

En múltiples ocasiones en la vida cotidiana se tiene la oportunidad de hacer algún nudo, por lo menos el más sencillo de ellos. En la figura 1.0 se muestran ejemplos de los nudos más conocidos.

Experimentando un poco con un par de cordones uno se puede convencer fácilmente de que los nudos de la figura 1.0 son diferentes, ya que no se puede pasar de uno al otro sin pasar alguno de los extremos por alguna de las asas, es decir, desanudando primero y luego volviendo a anudar. Pero el hecho de que sin éxito intentar un gran número de veces el transformar un nudo en el otro no es una prueba matemática de que no puede hacerse. Para poder dar una demostración matemática, se necesita hacer un modelo matemático de la situación física. Se deben definir objetos matemáticos que aproximen lo más cerca posible a los objetos físicos bajo consideración. El modelo puede ser bueno o malo dependiendo de si la correspondencia entre objetos matemáticos y la realidad es buena o mala.

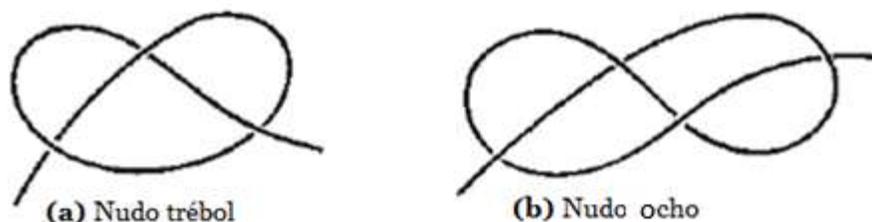


Figura 1.0: Ejemplos de nudos

Como todo nudo puede ser transformado en otro cualquiera desanudando y volviendo a anudar, se debe prohibir esta operación, ya sea en la definición de cuando dos nudos son iguales o desde la definición misma de nudo. Se optará por el segundo enfoque. Para ello, existen dos formas de hacerlo, la primera es prolongar los extremos hasta el infinito y la otra es juntarlos como se verá a continuación.

Tome un trozo de cuerda. Haga un nudo en la misma. Ahora pegue los dos extremos de la cuerda juntos para formar un bucle anudado. El resultado es una cuerda que no tiene sueltos

al final y que está verdaderamente anudada. A menos que se utilicen tijeras, no hay manera de que se pueda desenredar esta cuerda. (Ver figura 1.1)

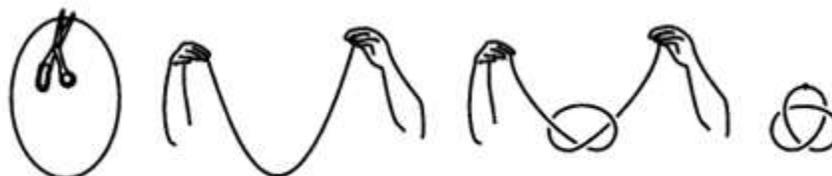


Figura 1.1: Formación de un nudo con un trozo de cuerda

De este modo, los nudos quedarían como en la figura 1.2

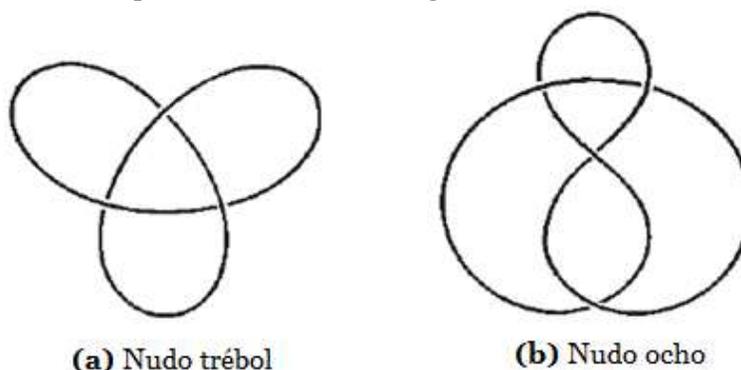


Figura 1.2: Nudos cerrados

Definición 1.0: Un **nudo** es sólo un bucle anudado de una cuerda, excepto que se piensa en la cuerda como que no tiene espesor, su sección transversal es sólo un punto. El nudo es entonces una curva cerrada en el espacio que no se interseca a sí misma en cualquier lugar.

No se va a distinguir entre la curva original cerrada anudada y las deformaciones de la misma a través del espacio que no permiten que la curva pase a través de sí misma. Todas estas curvas deformadas se considerarán que son el mismo nudo. Se piensa en el nudo como si estuviera hecho de caucho fácilmente deformable.

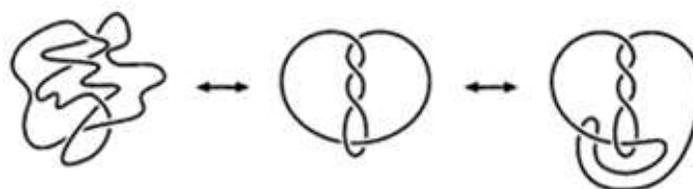


Figura 1.3: La deformación de un nudo no lo cambia

Para formular el modelo matemático se debe dar una definición matemática de lo que es un nudo y definir matemáticamente cuando dos nudos son iguales. En tal definición se

considerará a un nudo como un subconjunto del espacio tridimensional. La definición formal es la siguiente:

Definición 1.1 El subconjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ es un nudo si existe un homeomorfismo del círculo unitario S^1 en \mathbb{R}^3 cuya imagen es K . Donde S^1 es el conjunto de puntos (x, y) en el plano \mathbb{R}^2 que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

De ahora en adelante, se pensará en esta definición para referirnos a un nudo. El nudo más sencillo es la circunferencia estándar S^1 vista en \mathbb{R}^3 , es decir, el conjunto de puntos $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ en $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Este nudo es llamado nudo trivial y corresponde a no anudar la cuerda y simplemente juntar sus extremos.

El nudo más simple de todos es sólo el círculo sin nudo, se le llamará el **unknot** o el **nudo trivial**. El próximo nudo simple se denomina **nudo trébol**. (Ver figura 1.4 (b)). Pero, ¿cómo saber que estos son en realidad nudos diferentes?, ¿Cómo se sabe si se está intentando desenredar el nudo trébol en el nudo trivial sin usar tijeras y pegamento, si se tuviera el tiempo suficiente?



Figura 1.4: (a) Nudo trivial (b) El nudo trébol

Hay muchas imágenes diferentes del mismo nudo. En la figura 1.5, se pueden ver tres imágenes diferentes de un nuevo nudo, llamado **nudo ocho**. Se le llamará a una imagen de un nudo tal como una proyección del nudo.

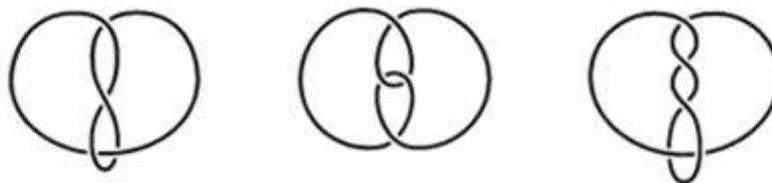


Figura 1.5: Tres proyecciones del nudo en forma de ocho

Los lugares en los que el nudo se cruza en la imagen se denominan **cruces de la proyección**. Se afirma que el nudo ocho es un nudo de cuatro cruces porque hay una

proyección del mismo con cuatro cruces y no existen proyecciones con menos de cuatro cruces.

Si un nudo es no trivial, entonces debe tener más de un cruce en una proyección. Porque si sólo tiene un cruce, entonces, los cuatro extremos (1, 2, 3 y 4) del único cruce deben estar conectados en pares en una de las cuatro formas que se muestran en la figura 1.6. Cualquier otra proyección con un cruce puede ser deformada para parecerse a uno de ellos sin deshacer el cruce. Pero cada uno de estos es claramente un nudo trivial, ya que entonces se puede desenredar el único cruce.

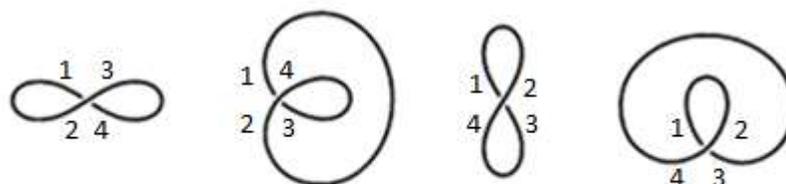


Figura 1.6: Proyecciones de un cruce

Gran parte de la Teoría de Nudos se ocupa de la narración de cuales nudos son los mismos y cuales son diferentes. Una versión simplificada de esta pregunta es la siguiente: "Si se tiene una proyección de un nudo, ¿se podrá decir si es un nudo trivial?". Ciertamente, si se juega con un modelo de cuerda del nudo por un tiempo y se logra desenredar por completo, es el nudo trivial. Pero ¿y si se juega con él durante dos semanas y todavía no se ha logrado desenredar? Todavía podría ser el nudo trivial y por lo que se sabe, cinco minutos más de trabajo podrían ser suficientes para desenredarlo. Así que no se puede dejar de intentarlo.

Ejemplo 1.0 En la siguiente imagen se tiene la figura del nudo trébol en una forma no estándar



Figura 1.7 Imagen no estandar del nudo trébol

Pero, de hecho, hay una manera de decidir si una proyección dada de un nudo es el nudo trivial. En 1961, Wolfgang Haken un matemático alemán se le ocurrió un procedimiento infalible para decidir si un nudo dado es o no el nudo trivial.

Según su teoría, se debería ser capaz de dar una proyección de un nudo a una computadora, el equipo correría el algoritmo y nos diría sí o no el nudo que se dio fué el nudo trivial. Desafortunadamente, a pesar de que Haken llegó con su algoritmo hace más de 30 años, es tan complicado que nadie nunca ha escrito un programa de computadora para ponerlo en práctica.

1.2 Movimientos Reidemeister

Supóngase que se tienen dos proyecciones del mismo nudo. Si se hiciera un nudo con una cuerda modelando una de las dos proyecciones, entonces se debería ser capaz de reorganizar la cuerda para parecerse a la segunda proyección. Los teóricos en nudos lo llaman el reordenamiento de la cuerda, es decir, el movimiento de la cuerda a través del espacio de tres dimensiones, sin dejar que pase a través de sí misma, una **isotopía ambiente**. La palabra "**isotopía**" se refiere a la deformación de la cuerda. La palabra "**ambiente**" se refiere al hecho de que la cuerda se está deformando a través del espacio tridimensional donde se encuentra. Tenga en cuenta que en una isotopía ambiente, no es posible reducir una parte del nudo hasta un punto, como en la figura 1.8, con el fin de deshacerse del nudo. Es más fácil pensar en un nudo hecho con una cuerda. Así como no es posible deshacerse de un nudo en una cuerda tirando de ella más y más fuerte, por lo que una isotopía ambiente no nos permitirá llegar a deshacerse de un nudo de esta manera.



Figura 1.8 No se permite disminuir parte del nudo a un punto

Definición 1.2 Una deformación de una proyección del nudo se llama una **isotopía planar** si deforma el plano de proyección, como si estuviera hecha de goma con la proyección dibujado sobre ella (figura 1.9). La palabra "**planar**" se utiliza porque sólo están

deformando el nudo dentro del plano de proyección. Tener en mente que este es caucho altamente deformable.

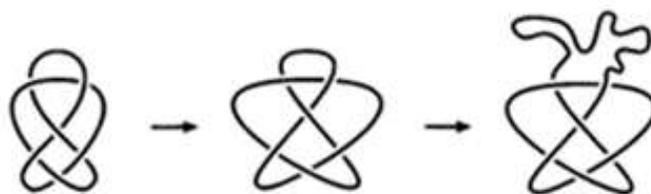


Figura 1.9 Isotopías planares

Cuando se estudia la Teoría de Nudos surge la pregunta ¿cómo se transforma el diagrama de un nudo si se transforma mediante una isotopía en otro nudo equivalente?, ¿Existen algunas reglas que permitan pasar directamente del primer diagrama del nudo al segundo sin tener que fijarse en la transformación del nudo original?. Esta pregunta fue estudiada por K. Reidemeister un matemático alemán en los años 20's y describió dichas reglas que ahora se conocen como movimientos Reidemeister. Con la ayuda de dichos movimientos, se definieron algunos invariantes para nudos; es decir, la naturaleza del nudo no cambia al aplicarle tales movimientos. Los movimientos Reidemeister son tres y se conocen como movimiento de tipo I (agregar o remover un rizo), tipo II (agregar o remover dos cruces por arriba (por abajo) consecutivos) y tipo III (movimiento triangular). Reidemeister demostró que estos tres movimientos junto con equivalencias topológicas planas de los diagramas son suficientes para generar la isotopía espacial. En otras palabras, Reidemeister demostró que dos nudos en el espacio pueden ser deformados el uno en el otro (isotopía espacial) si y sólo si sus diagramas pueden ser transformados uno en el otro mediante isotopías planas y los tres movimientos (y sus inversos).

Los movimientos Reidemeister permiten realizar de forma local sobre el diagrama del nudo pasar de una posición a otra saltándose la posición intermedia problemática. Posiciones no permitidas en una proyección, es el punto de paso de cada uno de los movimientos Reidemeister (ver figura 1.10).

Estos movimientos en las proyecciones equivaldrían a los movimientos que se pueden hacer con una cuerda con los extremos pegados. Dos representaciones planas se corresponden con el mismo nudo si se puede pasar de una a otra mediante los movimientos Reidemeister.



Figura 1.10 Posiciones no permitidas en una proyección

Además el recíproco también es cierto: si dos nudos son equivalentes existe una combinación finita de movimientos Reidemeister que permiten pasar de uno a otro (resultado demostrado por el propio Reidemeister y por Alexander y Briggs).

En realidad tener distintas proyecciones para un mismo nudo es equivalente a poder enredar el nudo (sin cortes ni auto intersecciones) en el espacio tridimensional. Y obtener un objeto que, aunque a simple vista no se parezca al original, se puede manipular para llegar a él.

Definición 1.3 Un **movimiento Reidemeister** es una de las tres formas de cambiar una proyección del nudo que va a cambiar la relación entre los cruces. **El primer movimiento Reidemeister** nos permite colocar o sacar una torcedura en el nudo, como en la figura 1.11. Se supone que la proyección se mantiene sin cambios a excepción del cambio representado en tal figura. **El segundo movimiento Reidemeister** nos permite agregar a cualquiera de dos cruces o quitar dos cruces como en la figura 1.12. **El tercer movimiento Reidemeister** nos permite deslizar una hebra del nudo de un lado de un cruce al otro lado del cruce, como en la figura 1.13.

Observe que aunque cada uno de estos movimientos cambia la proyección del nudo, no cambia el nudo representado por la proyección. Cada uno de tales movimientos es una isotopía ambiente.

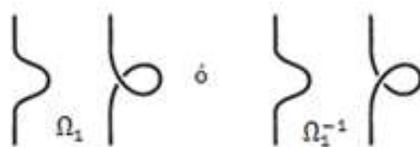


Figura 1.11 Movimiento Reidemeister Tipo I

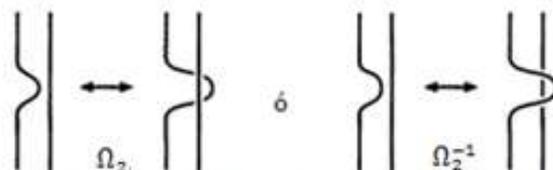


Figura 1.12 Movimiento Reidemeister Tipo II

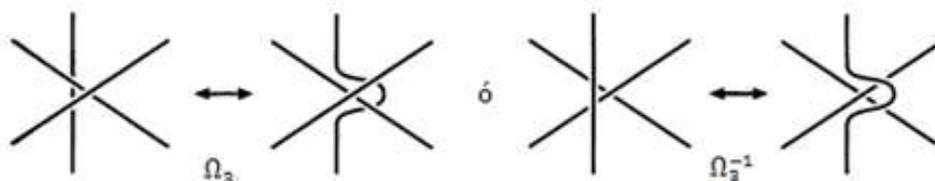


Figura 1.13 Movimiento Reidemeister Tipo III

Ejemplo 1.1 La figura 1.14 muestra dos proyecciones diferentes que representan el mismo nudo.



Figura 1.14 Dos proyecciones del mismo nudo

En 1926, el matemático alemán Kurt Reidemeister (1893-1971) demostró que si se tienen dos proyecciones distintas del mismo nudo, se puede obtener de una proyección a la otra por una serie de movimientos Reidemeister e isotopías planares. Como las dos proyecciones en el ejemplo 1.1 corresponden al mismo nudo. Por lo tanto, de acuerdo con Reidemeister, hay una serie de movimientos Reidemeister que nos lleva desde la primera proyección a la segunda.

La figura 1.15 muestra esta serie de movimientos que demuestra esta equivalencia.

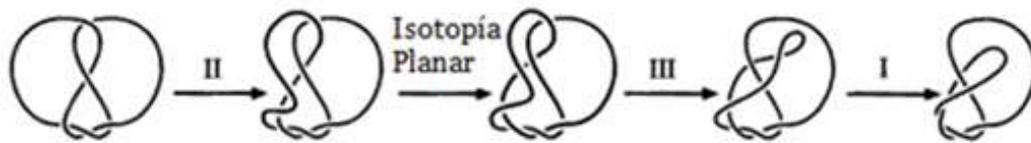


Figura 1.15 Movimientos Reidemeister del ejemplo 1.1

Ejemplo 1.2 El nudo ocho es equivalente a su imagen en el espejo es decir, el nudo obtenido cambiando cada cruce en el nudo ocho por el cruce opuesto. En la figura 1.16, se observan los movimientos Reidemeister que muestran la equivalencia.

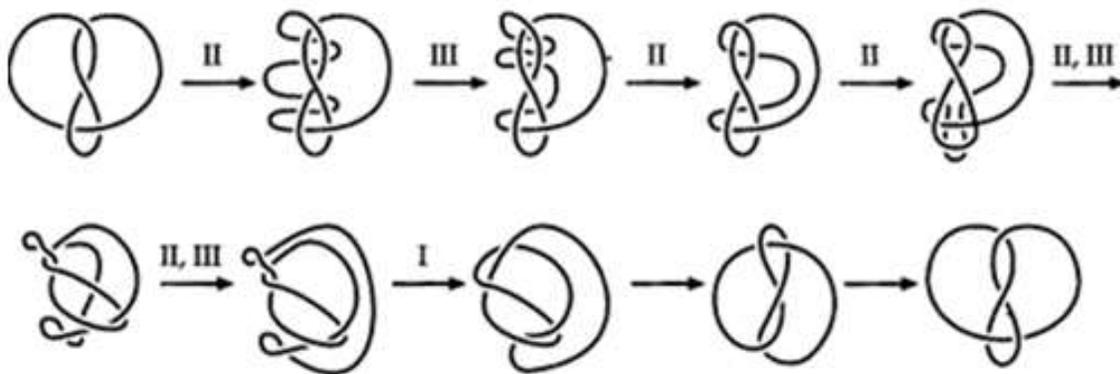


Figura 1.16 El nudo ocho es equivalente a su reflejo

Ejemplo 1.3 En la figura 1.17 se puede ver paso a paso cómo se deshace un nudo utilizando los tres movimientos Reidemeister para llegar al nudo trivial.

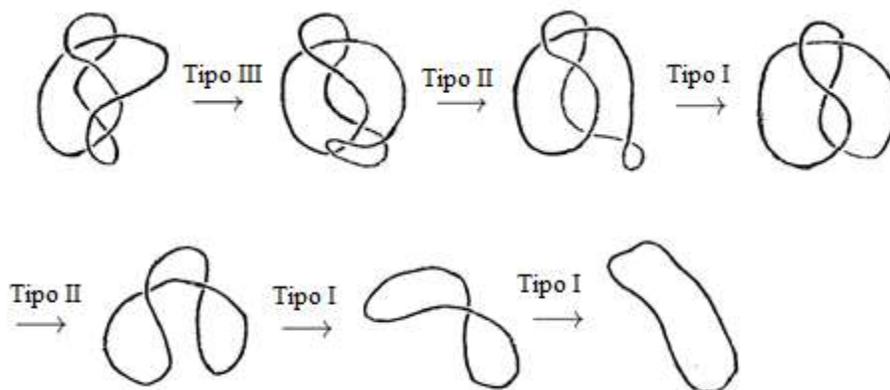


Figura 1.17 Aplicación de movimientos Reidemeister para obtener el nudo trivial

A continuación se presenta una definición de equivalencia de nudos mediante movimientos Reidemeister, aunque se trataran equivalencias más generales en la sección 1.4

Definición 1.4 Dos **diagramas de nudo** se llaman **equivalentes**, si están conectados por una secuencia finita de movimientos Reidemeister Ω_i , $i = 1, 2, 3$ o sus inversos Ω_i^{-1} .

1.3 Enlaces

Hasta el momento, se ha restringido la atención a los nudos; es decir, de un sólo bucle anudado. Pero no hay ninguna razón para decir que sólo puede haber un bucle que anudar.

Antes de dar la definición de enlace, se definirán algunos movimientos elementales en los nudos.

Los nudos pueden ser considerados como poligonales en su forma, a continuación, ya que es posible pensar en ellos como compuestos por una inmensa (pero finito) número de aristas, un nudo se representa a menudo con arcos lisos en lugar de poligonales. Como normalmente se ilustran los nudos, se seguirán ilustrando con arcos lisos por un criterio estético. Sin embargo, matemáticamente, se pueden considerar como una colección de líneas poligonales.

Continuando hacia una precisa interpretación matemática de un nudo, que fácilmente se pueden realizar modificaciones en la forma de un nudo. Por ejemplo, es posible reemplazar un borde, AB , en el espacio de un nudo K por dos nuevos bordes de AC, CB . También se puede realizar la sustitución inversa. Estos reemplazos son llamados **movimientos elementales de nudos**. Ahora se va a definir con precisión los movimientos posibles o reemplazos.

Definición 1.5 En un nudo dado K se pueden realizar las cuatro operaciones siguientes.

- (1). Se puede dividir un borde, AB , en el espacio de K en dos bordes, AC, CB , mediante la colocación de un punto C en el borde AB , figura 1.18.
- (1)' [La inversa de (1)] Si AC y CB son dos bordes adyacentes de K tal que si C es borrado de AB se convierte en una línea recta, entonces se puede eliminar el punto C , figura 1.18.

(2) Supóngase que C es un punto en el espacio que no está en K . Si el triángulo ABC , formado por A, B y C , no intersecta a K , con la excepción del borde AB , entonces se podrá eliminar AB y añadir los dos bordes de AC y CB , figura 1.19.

(2)' [La inversa de (2)] Si existe en el espacio un triángulo ABC que contiene dos bordes adyacentes de AC y CB de K y este triángulo no intersecta K , excepto en los bordes AC y CB , por lo que es posible la anulación de los dos bordes AC, CB y agregar el borde AB , figura 1.19.

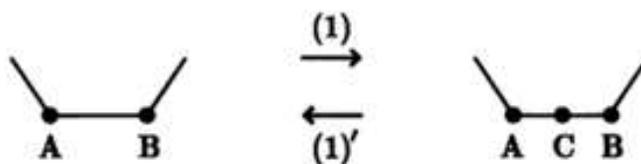


Figura 1.18 Operación 1

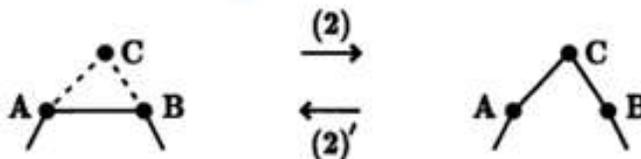


Figura 1.19 Operación 2.

Estas cuatro operaciones (1), (1)', (2) y (2)' se denominan movimientos elementales de nudos. [Sin embargo, ya que (1) y (1)' no son "movimientos" en la comprensión habitual de esta palabra, a menudo sólo (2) y (2)' se refiere a movimientos elementales de nudos.

Ahora sí, se dará una definición a lo que enlace se refiere.

Definición 1.6 Un **enlace** es un conjunto de bucles con nudos, todos enredados (o conectados), a cada bucle se le llama un componente del enlace.

Dos enlaces son considerados el mismo si se puede deformar el enlace en otro enlace sin tener que cualquiera de los bucles se intersecte entre sí o en cualquiera de los otros bucles en el proceso. Aquí hay dos proyecciones de uno de los más sencillos enlaces, conocidos como el **enlace Whitehead** (figura 1.20).



Figura 1.20 Dos proyecciones del enlace Whitehead

Ya que se compone de dos bucles anudados entre sí, se dice que es un **enlace de dos componentes**. He aquí otro enlace conocido con tres componentes, llamados los **anillos de Borromeo** (figura 1.21). Este enlace se nombra después de los Borromeos, una familia italiana del Renacimiento que utiliza este patrón de anillos entrelazados en su cresta de la familia.

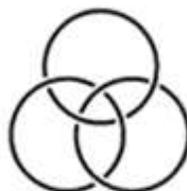


Figura 1.21 Los anillos de Borromeo

Un nudo se considerará un enlace de un componente.

Definición 1.7 Dos enlaces $L = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ y $L' = \{K'_1, K'_2, \dots, K'_n\}$ son equivalentes (o igual) si las dos condiciones siguientes se cumplen:

- (1) $m = n$, es decir, L y L' tienen el mismo número de componentes.
- (2) Si se puede cambiar L en L' realizando movimientos primarios de nudos un número finito de veces. Para ser exactos, utilizando los movimientos elementales o movimientos Reidemeister de nudos que pueden cambiar de K_1 a K'_1 , K_2 a K'_2, \dots , K_m a K'_n ($m = n$). (Cabe destacar que el triángulo de un movimiento elemental de nudo dado no se cruza con cualquiera de los otros componentes.)

Luego sustituir (2) por el siguiente (2)':

(2)' Existe un automorfismo, φ , que preserva la orientación de \mathbb{R}^3 y mapea $\varphi(K_1) = K'_1$, $\varphi(K_2) = K'_2, \dots, \varphi(K_m) = K'_n$.

En sentido estricto, la equivalencia de enlaces también debe estar relacionada en cómo se ordenan los componentes. En general, sin embargo, una estricta y tal condición no es necesaria, pues se puede reordenar adecuadamente los componentes. Usualmente, por lo que, (2)' se sustituye por el texto siguiente (2A):

(2A) Existe un automorfismo de \mathbb{R}^3 que preserva el orden y mapea la colección $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m$ a la colección $K'_1 \cup K'_2 \cup \dots \cup K'_n$.

En lo que sigue se hará uso de (2A) en lugar de (2)'. Si se orienta cada componente del enlace, entonces las definiciones de equivalencia son sólo una extensión del caso de nudos.

Ejemplo 1.3. Puesto que los dos enlaces L y L' en la figura 1.22 son exactamente los mismos, se espera que sean equivalentes. Sin embargo, si se cambia el orden de los componentes de L , entonces la condición (2) de la Definición 1.7 no es satisfecha y los enlaces no son equivalentes. Pero la condición (2A) está satisfecha; por lo tanto, se consideran como equivalentes.

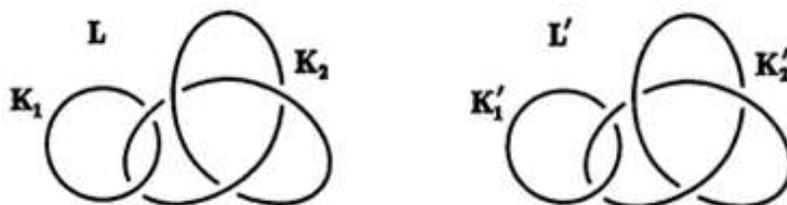


Figura 1.22 Enlaces equivalentes

Bastante de todo lo que se ha dicho de nudos es válido para enlaces. Por ejemplo, si dos proyecciones representan el mismo enlace, debe haber una secuencia de movimientos Reidemeister para llegar de una proyección a la otra.

Definición 1.8 Un enlace se llama **Separable** si los componentes del enlace pueden ser deformados de manera que se encuentren en diferentes lados de un plano en el espacio tridimensional.

A veces no es muy complicado ver cuando un enlace es separable, como en el primer eslabón en la figura 1.23. Sin embargo, a menudo pasa el caso de que un enlace es separable, pero no se puede fácilmente decirlo al ver la proyección, como en el segundo enlace en la figura.

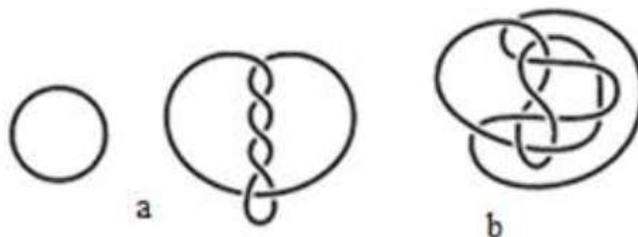


Figura 1.23 Dos enlaces separables

Ejemplo 1.4 Demostrar que el enlace b de la figura 1.23 es separable

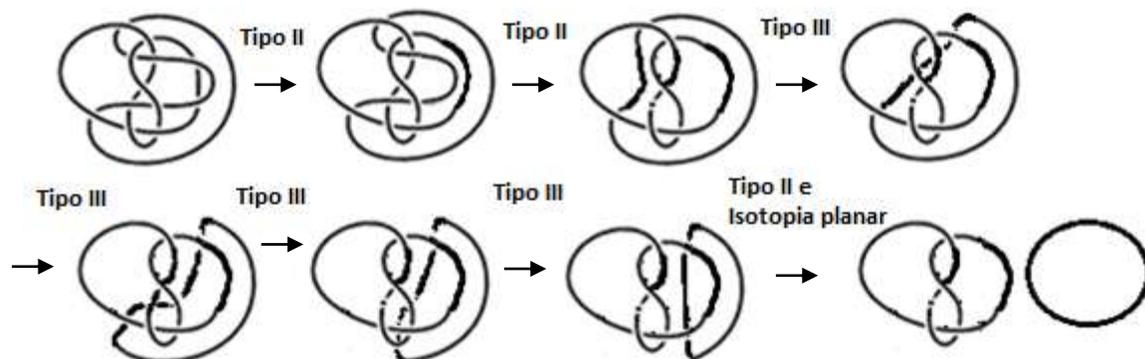


Figura 1.24 Movimientos Reidemeister para el ejemplo 1.4

La mayoría de los enlaces en el que se está interesado son no separables. Una forma rápida para contar ciertos enlaces separables; es sólo contar el número de componentes en el enlace. Si los números son diferentes, los dos enlaces tienen que ser diferentes. Así que, obviamente, el nudo trébol, el enlace Whitehead, y los Anillos de Borromeo todos tienen que ser enlaces distintos.

Si se tienen dos proyecciones de enlaces, cada uno con el mismo número de componentes, al igual que para los nudos, nos gustaría decir que representan el mismo enlace. En la figura 1.25, se muestran dos enlaces simples de dos componentes. Se llama al primero de ellos el **no enlace** (o enlace trivial) **de dos componentes** y la segunda el **enlace Hopf**. Una diferencia entre estos dos enlaces es que el **enlace trivial** es separable, ya que sus dos componentes pueden estar separados por un plano. Pero en el enlace Hopf, los dos componentes hacen el enlace uno al otro a la vez.

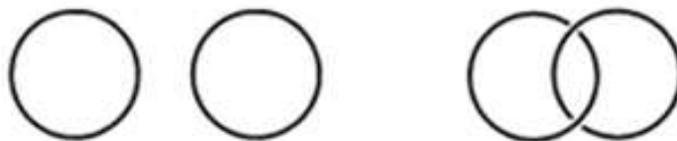


Figura 1.25 El enlace trivial de dos componentes y el enlace Hopf

Como era de esperar, se puede extender el concepto de nudo trivial para el caso de los enlaces, es decir, el enlace trivial de n -componente. En la ampliación de los enlaces, el enlace correspondiente consta de n nudos triviales disjuntos figura 1.26.

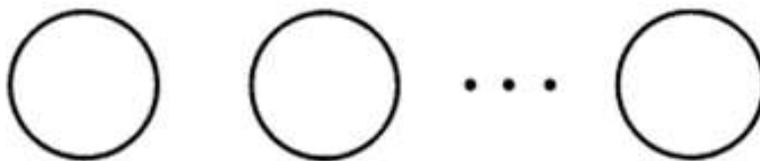


Figura 1.26 El enlace trivial de n componentes

Sería agradable tener un método para medir numéricamente cómo dos componentes son enlazados. Se definirá lo que se conoce como el **número de enlace**. Sean K_1 y K_2 dos componentes en un enlace luego se elige una orientación en cada uno de ellos. Entonces en cada cruce entre los dos componentes, una de las imágenes en la figura 1.27 los contiene.

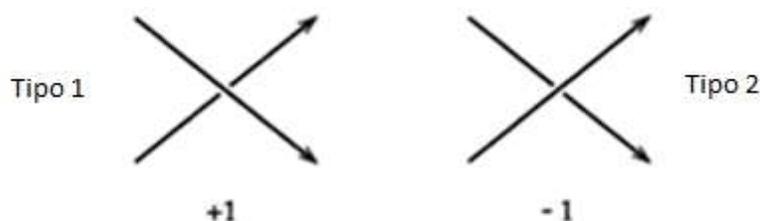


Figura 1.27 Calculando el número de enlace

Se contará con un $+1$ por cada cruce del primer tipo, y un -1 por cada cruce del segundo tipo. A veces es difícil de determinar a partir de la imagen si un cruce es del primer tipo o el segundo tipo. Téngase en cuenta que si un cruce es del primer tipo, entonces, al girar la hebra que va por abajo en sentido de las agujas del reloj coincide con la flecha de la hebra que va por arriba. Del mismo modo, si un cruce es del segundo tipo, entonces, al girar la hebra que va por abajo en sentido anti-horario coincide con la flecha de la hebra que va por arriba.

A continuación se definirá el número de enlace, un invariante importante para los enlaces orientados.

En primer lugar, se asignará ya sea 1 o -1 para cada punto de cruce en un diagrama regular de un nudo o enlace orientado.

Definición 1.9 En un lugar de paso c , de un diagrama orientado, como se muestra en la figura 1.28, se tienen dos configuraciones posibles. En el caso (a) se asigna $sign(c) = 1$ para el punto de cruce, mientras que en el caso (b) se asigna $sign(c) = -1$. El punto de cruce en (a) se dice que es positivo, mientras que en (b) se dice que es negativo.



Figura 1.28 Signos en los cruces

Si se supone ahora que D es un diagrama orientado de un enlace de 2 componentes $L = \{K_1, K_2\}$. Además, se supone que los puntos de cruce de D en el que las proyecciones de K_1 y K_2 se cruzan son c_1, c_2, \dots, c_m . (Ignorar los puntos de cruce de las proyecciones de K_1 y K_2 , que son auto-intersecciones del componente del nudo).

Entonces

$$\frac{1}{2} \{sign(c_1) + sign(c_2) + \dots + sign(c_m)\}$$

es llamado el **número de enlace** de K_1 y K_2 , que se denotará por $lk(K_1, K_2)$.

La definición nos indica, que se tomará la suma de los $+1$ y -1 sobre todos los cruces entre K_1 , K_2 y dividir esta suma por 2. Este será el número de enlace. Aclarando que no se cuentan los cruces entre una componente y sí misma. Para el enlace trivial (no enlace), el número de enlace de dos componentes es 0 . Para el enlace Hopf, el número de enlace será 1 o -1 , dependiendo de las orientaciones sobre los dos componentes. Los dos componentes en el enlace orientado representados en figura 1.29 tienen número de enlace 2. Observe que si se invierte la orientación en uno de los dos componentes, pero no el otro, el número de enlace de estos dos componentes se multiplica por -1 . Si sólo se mira el valor absoluto del número de enlace, sin embargo, es independiente de las orientaciones sobre los dos componentes.

Ejemplo 1.5 Verificar que el número de enlace es 2.

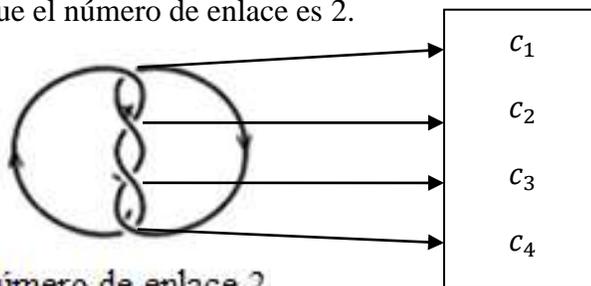


Figura 1.29 Número de enlace 2

En primer lugar notar que es un enlace de dos componentes, sean K_1 y K_2 así el número de enlace es:

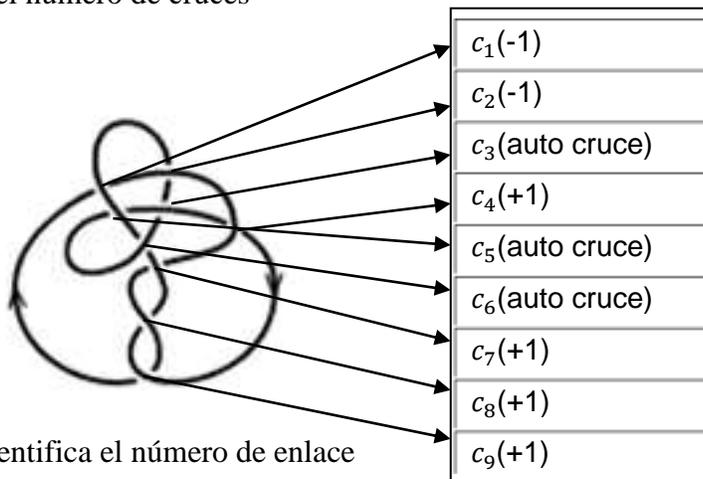
$$\begin{aligned} \text{lk}(K_1, K_2) &= \frac{1}{2} \{ \text{sign}(c_1) + \text{sign}(c_2) + \text{sign}(c_3) + \text{sign}(c_4) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ 1 + 1 + 1 + 1 \} \\ &= \frac{1}{2} \{ 4 \} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6 Calcule el número de enlace, en el enlace representado en la figura 1.30. Luego invertir la dirección en uno de los componentes y recalcular lo mismo.



Figura 1.30 Cálculo del número de enlace

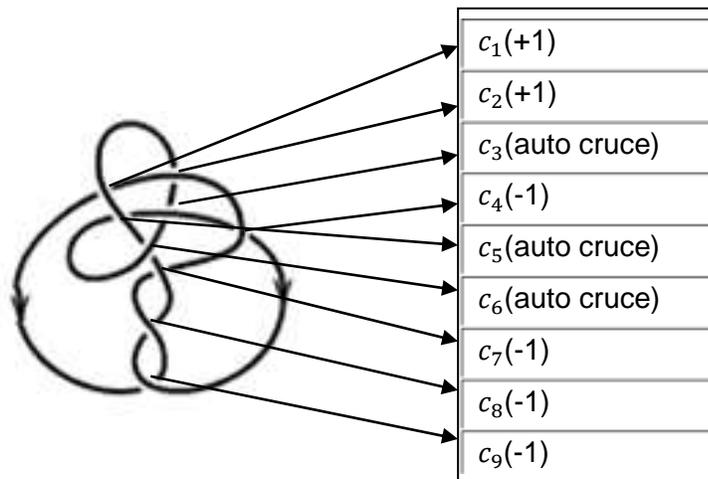
En primer lugar notar que es un enlace de dos componentes, sean K_1 y K_2 , luego se identifica el número de cruces



luego se identifica el número de enlace

$$\begin{aligned} \text{lk}(K_1, K_2) &= \frac{1}{2} \{ \text{sign}(c_1) + \text{sign}(c_2) + \text{sign}(c_4) + \text{sign}(c_7) + \text{sign}(c_8) + \text{sign}(c_9) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ -1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \} \\ &= \frac{1}{2} \{ 2 \} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora se invertirá la orientación de uno de los enlaces



luego se identifica el número de enlace

$$\begin{aligned}
 \text{lk}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2) &= \frac{1}{2} \{ \text{sign}(c_1) + \text{sign}(c_2) + \text{sign}(c_4) + \text{sign}(c_7) + \text{sign}(c_8) + \text{sign}(c_9) \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ +1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ -2 \} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.7 Calcular el número de enlace a los enlaces L y L' en la figura 1.31 (a) y (b), respectivamente.

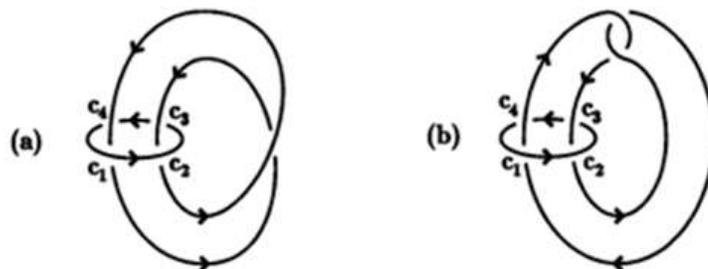
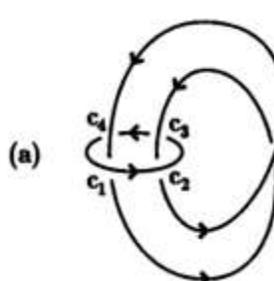


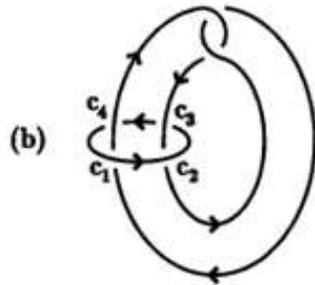
Figura 1.31 Cálculo del número de enlace

- (a) Sólo se necesita calcular los signos en los 4 puntos de cruce c_1, c_2, c_3 y c_4 . Ya que el quinto es un auto cruce. Dado que el signo en cada punto de cruce es -1 , Se obtiene que



$$\begin{aligned}
 \text{lk}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2) &= \frac{1}{2} \{ \text{sign}(c_1) + \text{sign}(c_2) + \text{sign}(c_3) + \text{sign}(c_4) \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ -1 - 1 - 1 - 1 \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ -4 \} \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

- (b) Del mismo modo, se tiene que $sign(c_1) = sign(c_4) = 1$, mientras que $sign(c_2) = sign(c_3) = -1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 lk(K'_1, K'_2) &= \frac{1}{2} \{sign(c_1) + sign(c_2) + sign(c_3) + sign(c_4)\} \\
 &= \frac{1}{2} \{1 - 1 - 1 + 1\} \\
 &= \frac{1}{2} \{0\} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$


Los movimientos Reidemeister también se aplican a los enlaces, a continuación se muestra la equivalencia mediante tales movimientos.

Ejemplo 1.8. Demostrar que los dos enlaces en la figura 1.32 son equivalentes. Este enlace se denomina enlace Whitehead.

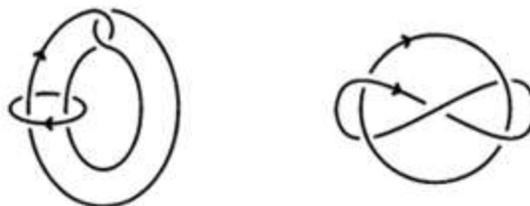


Figura 1.32 Enlace Whitehead

Aplicando movimientos Reidemeister se tiene

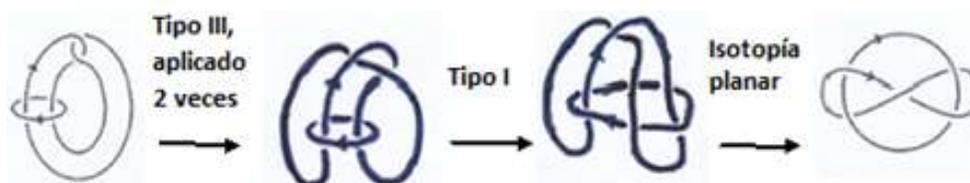


Figura 1.33 Movimientos Reidemeister ejemplo 1.8

Ejemplo 1.9 Demostrar que los dos eslabones de la figura 1.34 son equivalentes. Este enlace se llama: los anillos de Borromeo.

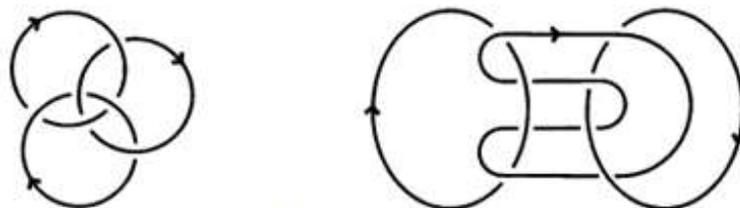


Figura 1.34 Anillos de Borromeo

Aplicando movimientos Reidemeister se tiene

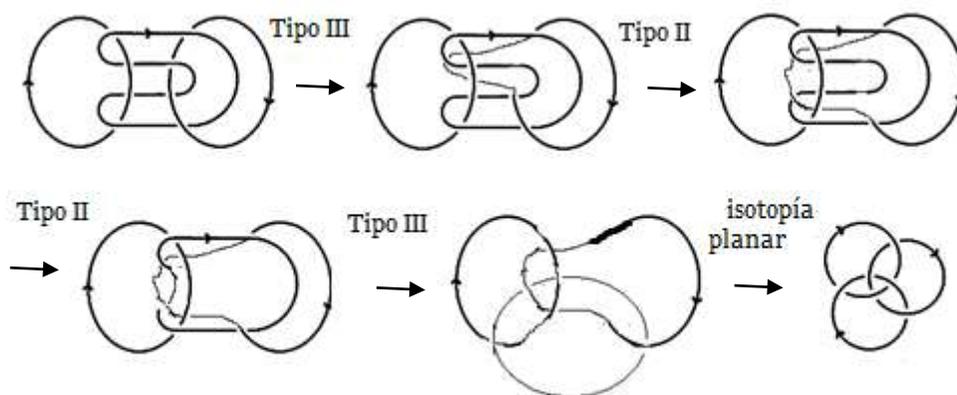


Figura 1.35 Movimientos Reidemeister del ejemplo 1.9

Tener en cuenta que si se utiliza una proyección especial de la relación con el fin de calcular el número de enlace. De hecho, es posible demostrar que el cálculo de números de enlaces será siempre el mismo, no importa lo que la proyección de la relación utilizada para calcularla. Esto se mostrará probando que los movimientos Reidemeister no cambien el número de enlace. Dado que se puede obtener de cualquier proyección de un enlace otra a través de una secuencia de movimientos Reidemeister como en los ejemplos anteriores, ninguno de tales movimientos cambiará el número de enlace, debe ser que dos diferentes proyecciones del mismo enlace dan el mismo número de enlace.

I. Se verá al inicio el efecto del primer paso en el movimiento Reidemeister en el número de enlace. Se puede crear o eliminar un auto-cruce en uno de los dos componentes, pero no afectarán a los cruces que involucran ambos de los componentes, de modo que deja el número de enlace sin cambios.

II. Ahora, observe que hace un movimiento Reidemeister de tipo II. En la figura 1.36 se ha elegido una cierta orientación de las hebras del enlace. Se está asumiendo que las dos hebras corresponden a dos componentes diferentes, porque de lo contrario el movimiento no tiene ningún efecto sobre el número de enlace. Uno de los nuevos cruces contribuye $+1$ a la suma, y el otro cruce aporta un -1 , por lo que la contribución neta al número de enlace es 0. Incluso si se cambia la orientación en una de las cuerdas, todavía tendrá un $+1$ y un -1 contribución, así movimientos del Tipo II dejan el número de enlace sin cambios.

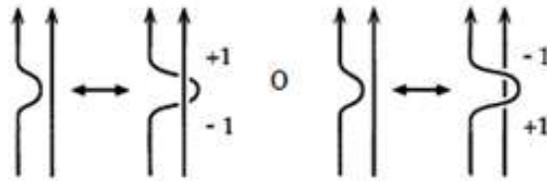


Figura 1.36 Movimientos Reidemeister Tipo II no afectan al número de enlace

III. Por último, ¿qué hay de los movimientos del tipo III? Una vez orientados se eligen para cada una de las tres hebras una dirección y $+1$ y -1 se asignan a cada uno de los cruces, es claro que el deslizamiento sobre la hebra en el movimiento Tipo III no cambia el número de $+1$ o -1 , por lo que el número de enlace se conserva (figura 1.37)

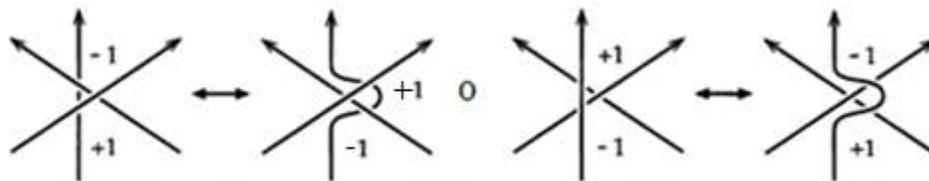


Figura 1.37 Movimientos Reidemeister Tipo III no afectan el número de enlace

Se dice pues que el número de enlace es un **invariante** de la relación orientada, es decir, una vez que las orientaciones se eligen en los dos componentes del enlace, el número de enlace no se modifica por isotopías ambiente. Permanece invariable cuando se altera la proyección del enlace. Otro invariante de los enlaces que ya se ha mencionado es simplemente el número de componentes en el enlace. Se mantiene sin cambios por isotopías ambientales del enlace.

Es posible utilizar el número de enlaces para distinguir enlaces. Dado que se quiere distinguir los enlaces que aún no tienen orientaciones sobre ellos, se utilizará

el valor absoluto del número de enlace. Cualquiera de los dos enlaces con dos componentes que tienen distintos valores absolutos de sus números tiene que enlazar enlaces diferentes. Por ejemplo, el enlace trivial de dos componentes tiene número de enlace 0. Pero el valor absoluto del número de enlace Hopf es 1, por lo que el enlace de Hopf no puede ser el enlace trivial.

Ejemplo 1.10 Calcular los valores absolutos de los números de enlace de los dos enlaces mostrados en la figura 1.38 con el fin de demostrar que deben ser enlaces distintos.

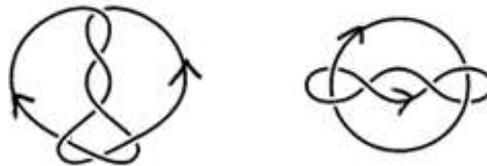
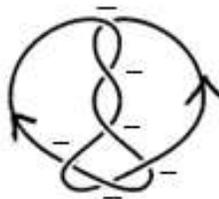


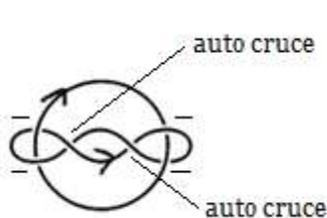
Figura 1.38 Cálculo del número de enlace

Sean K_1 y K_2 los componentes del primer enlace, se identifican los signos de cada cruce apreciados en la figura y luego se calcula el número de enlace correspondiente.



$$\begin{aligned} \text{lk}(K_1, K_2) &= \left| \frac{1}{2} \{-1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1\} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \{-6\} \right| \\ &= |-3| = 3 \end{aligned}$$

Luego sean K_3 y K_4 los componentes del segundo enlace, se identifican los signos de cada cruce apreciados en la figura, y luego se calcula el número de enlace correspondiente



$$\begin{aligned} \text{lk}(K_3, K_4) &= \left| \frac{1}{2} \{-1 - 1 - 1 - 1\} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \{-4\} \right| \\ &= |-2| = 2 \end{aligned}$$

Dado que $3 \neq 2$ implica que los enlaces son diferentes.

¿Qué se puede decir de todos los enlaces a pedazos?. Desafortunadamente, la vida y los enlaces no son tan simples. El número de enlace para el enlace Whitehead en la figura 1.32. Tiene número de enlace 0, al igual que el enlace trivial de dos componentes. Así que

ni siquiera es posible mostrar que el enlace Whitehead es diferente al enlace trivial de dos componentes con esta herramienta. Se necesitan algunas otras maneras de distinguir diversos nudos y enlaces.

La figura 1.39 muestra el enlace denominado Anillos de Borromeo. Téngase en cuenta que si se quita uno cualquiera de los tres componentes de este enlace, los dos componentes restantes se convertirían en dos círculos o enlaces triviales. El hecho de que estos tres anillos están encerrados juntos se basa en la presencia de los tres componentes.

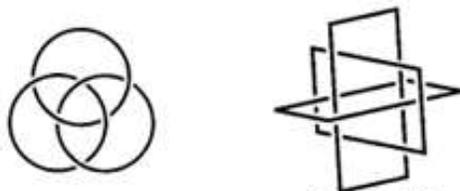


Figura 1.39 Dos representaciones de los anillos de Borromeo

Definición 1.10: Un enlace se llama **Brunnian** si el enlace en sí es no trivial, pero la eliminación de cualquiera de los componentes nos deja con un conjunto de círculos triviales disociados. Estos enlaces llevan el nombre de Hermann Brunn, quien dibujaba estos enlaces en el año de 1892.

Ejemplo 1.11 Enlaces Brunnian de cuatro y tres componentes.

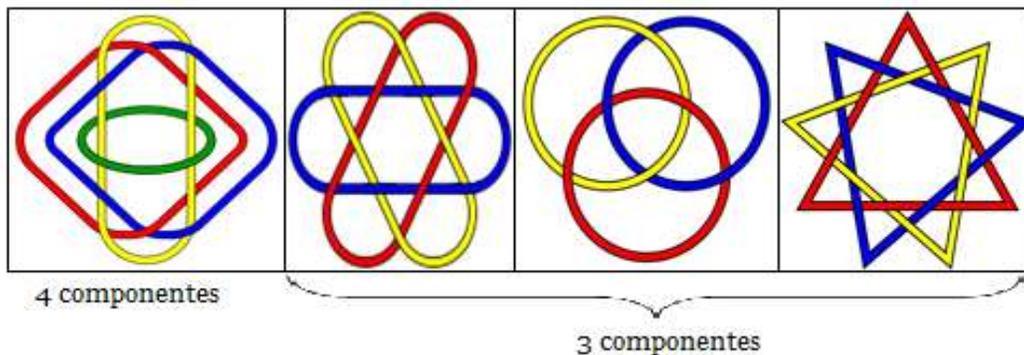


Figura 1.40 Enlaces Brunnian

1.4 Proyecciones de Nudos

Muchas veces es útil proyectar los nudos en el plano y después estudiarlos mediante sus diagramas.

La mejor forma de representar los nudos es mediante una proyección en un plano, dibujando los cruces de forma que se vea qué hebra del nudo pasa por debajo y cuál pasa por encima. Siempre se puede proyectar de forma que los únicos puntos múltiples sean puntos dobles y haya un número finito de ellos. Es similar si se tuviera un nudo hecho con cuerda y se dejara caer sobre una superficie plana con las correspondientes restricciones. Estas representaciones se conocen como **proyecciones regulares** o **diagramas planos del nudo**. Por supuesto la cuerda puede caer de varias formas distintas, así que es necesario saber cuándo dos proyecciones representan el mismo nudo. En principio se adopta la norma principal de la topología: la cuerda es elástica, se puede estirar y deformar todo lo que se quiera. Así se cubren algunos de los casos sencillos, por ejemplo da lo mismo una cuerda desanudada con forma de círculo que con forma de cuadrado, porque topológicamente son lo mismo. Sin embargo los movimientos que se hacen con la cuerda en el espacio suponen nuevas intersecciones en su proyección son algo más complicado de trasladar a dos dimensiones, ya que para realizarlos se debe pasar por una de las posiciones prohibidas de las proyecciones regulares.

Se denota por p la función que proyecta el punto $P(x, y, z)$ en \mathbb{R}^3 en el punto $\hat{P}(x, y, 0)$ en el plano xy , la figura 1.41

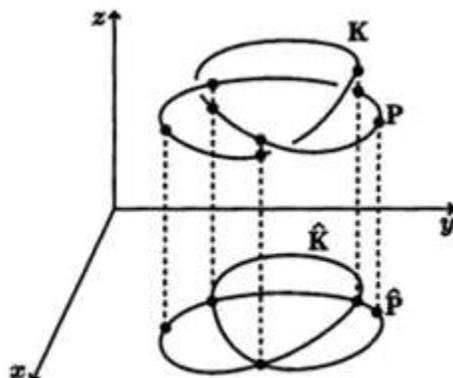


Figura 1.41 Proyección de un nudo en el plano xy

Si K es un nudo, se dirá que $p(K) = \hat{K}$ es la proyección de K . Además, si K tiene una orientación asignada, entonces de una manera natural \hat{K} hereda su orientación de la orientación de K . Sin embargo, \hat{K} no es una curva cerrada simple tendida en el plano, ya que \hat{K} posee varios puntos de intersección. Pero mediante la realización de varios

movimientos elementales de nudos en K (intuitivamente esto es similar a los cambios de K en el espacio) se imponen las siguientes condiciones:

- 1) \hat{K} tiene a lo sumo un número finito de puntos de intersección.
- 2) Si Q es un punto de intersección de \hat{K} , entonces la imagen de la inversa, $p^{-1}(Q) \cap K$, de Q en K tiene exactamente dos puntos. Es decir, Q es un doble punto de \hat{K} , figura 1.42 (a); no puede ser un punto múltiple de la clase mostrada en figura 1.42(b)
- 3) Un vértice de K (el nudo considerado ahora como un polígono) nunca se proyecta sobre un punto doble de \hat{K} . En los dos ejemplos de la figura 1.42(c) y (d), una línea poligonal proyectada desde K entra en contacto con un punto(s) vértice de \hat{K} , por lo tanto de estos casos no son permisibles.

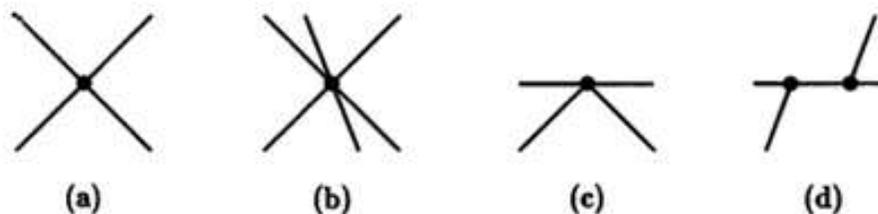


Figura 1.42 Condiciones para la proyección de un nudo

Una proyección \hat{K} que satisface las condiciones anteriores se dice que es una **proyección regular**.

Se trabajará con proyecciones regulares, y para simplificar las cosas, se referirá a ellos simplemente como proyecciones, se hará una distinción sólo si hay cierta confusión; en segundo lugar y en esta coyuntura de bastante importancia, es la ambigüedad de los puntos dobles. En un punto doble de una proyección, no está claro si el nudo pasa por encima o debajo de sí mismo. Para eliminar esta confusión, se cambia ligeramente la proyección cerca de los puntos dobles, dibujando la proyección de modo que parezca haber sido cortada. Con suerte, esto le dará un efecto **trompe l'oeil** (para engañar al ojo) de un nudo continuo pasando por encima y debajo de sí mismo. Tal proyección alterada se llama un **diagrama regular**. Figura 1.43(a), (b), mientras que (c) no lo es.

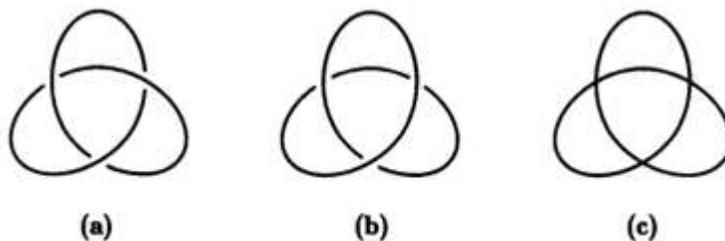


Figura 1.43 Ejemplo de diagramas regulares y no regulares

Un diagrama regular da una idea de cómo el nudo se encuentra en 3-dimensiones, es decir, que nos permite representar el nudo en forma de diagrama espacial en el plano. Además, se puede utilizar el esquema regular para recuperar la información perdida en la proyección. Por ejemplo, la figura 1.43(c) es la proyección de los dos nudos (no equivalentes) en figura 1.43 (a) y (b).

Por lo tanto, se tiene que ser un poco más preciso en cuanto a la naturaleza exacta de un diagrama regular y sus puntos de cruce (doble), ya que a partir de la descripción anterior un diagrama regular no tiene puntos dobles. Los puntos de cruce de un diagrama regular son exactamente los puntos dobles de su proyección, $p(K)$, con un segmento sobre cruce y bajo cruce asignado a ellos. De ahora en adelante, se pensará en nudos en términos de esta interpretación esquemática, ya que, como se verá en breve, este enfoque da una de las maneras más fáciles de obtener una visión (y por tanto los resultados) en la naturaleza de un nudo.

Para un nudo particular (o enlace), K , sólo hay un diagrama regular en \mathbb{R}^3 , sin embargo, es posible obtener más representaciones para tal nudo o enlace tal como se explica a continuación.

Dado un nudo K y un nudo K' obtenido de K aplicando los movimientos elementales de nudos son considerados como el mismo nudo. Así, se puede pensar en el esquema regular de K' como un diagrama regular para K . Por lo tanto, se deduce que a partir de K es posible obtener muchas representaciones en diagramas regulares. Es posible que un diagrama regular pueda tener puntos de cruce del tipo mostrado en la figura 1.44 (a) y / o (b).



Figura 1.44 Puntos de cruce

Más en general, se suponen dos diagramas regulares de dos nudos (o enlaces) están conectados por una sola banda trenzado; véase, por ejemplo, figura 1.45(a) o (b). Se puede, de hecho, suprimir este punto de cruce "central" mediante la aplicación de una vuelta, ya sea a la izquierda o la derecha, al nudo, figura 1.45 (c). Un diagrama regular que no posee ningún punto de cruce de este tipo se llama un **diagrama regular reducido**.

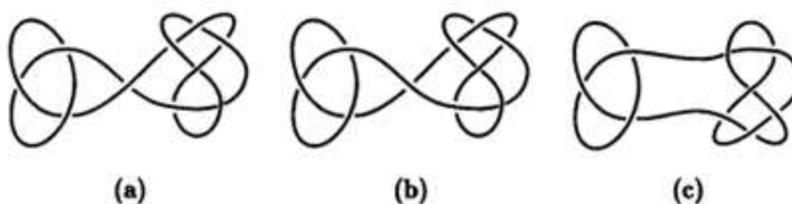


Figura 1.45 Diferentes diagramas de nudos

Se toma un punto P arbitrario en un diagrama regular D de un nudo K , luego se mueve alrededor de D en una dirección fija. Si P , en los puntos de cruce de D se muestra que se mueve de manera alternante entre un segmento que pasa por arriba y un segmento que pasa por abajo hasta llegar nuevamente a P , entonces se dice que el diagrama regular es un diagrama (regular) alternante. Un nudo que posee (al menos uno) diagrama alternante se llama un nudo alternante (ver capítulo 2). Estos tipos de nudos tienen gran importancia en la Teoría de Nudos, ya que muchas de sus características son conocidas. Muchos nudos "simples" son nudos alternantes. Por lo tanto, es decir, en los años nacientes de la Teoría de Nudos, todos los nudos se creían que eran nudos alternantes. El nudo simple no alternante, de hecho, es un nudo con 8 puntos de cruce se muestra en figura 1.46. Sin embargo, que no es en absoluto trivial demostrar que nunca se puede encontrar un esquema alternante para este nudo.



Figura 1.46 Nudo no alternante de 8 cruces

Se supone que una proyección regular \widehat{K} de un nudo K tiene n puntos de cruces, $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Cada punto de cruce P_i de \widehat{K} es la imagen proyectiva de exactamente dos puntos P'_i y P''_i de K (ver figura 1.47).

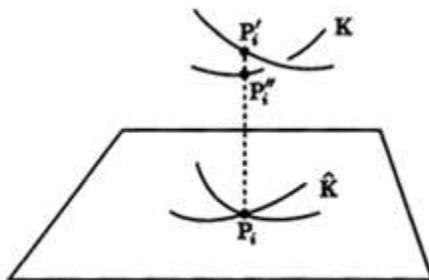


Figura 1.47 Proyección de puntos de cruce

Ahora, a partir de un punto arbitrario P de K , moverse K en una dirección fija (si K ya tiene una orientación asignada, a continuación, siga K a lo largo de esta orientación). La primera vez que se llega a un punto P'_i y P''_i , asignar el número 1 a este punto. Pasando de los puntos P'_i y P''_i , cuando se llega al siguiente punto P'_j y P''_j , asignar el número 2 a este punto (es muy posible que se pueda asignar el número 1 a P'_i y el número 2 a P''_i). De esta manera, se asignara a los $2n$ puntos de cruce de K , $\{P'_1, P''_1, P'_2, P''_2, \dots, P'_n, P''_n\}$ números de 1 a $2n$, ver figura 1.48

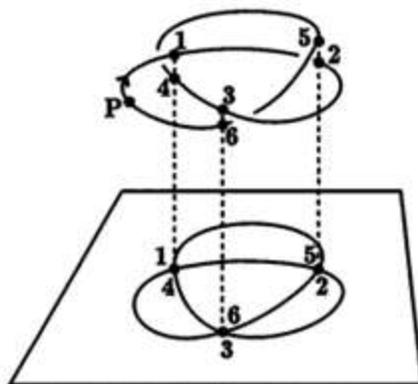


Figura 1.48 Asignación de números a los puntos de cruce

Debido a esto, es posible asignar dos números a un punto P_k de \widehat{K} , es decir, la proyección de los puntos P'_k y P''_k . A partir de estos conjuntos de pares, (i, j_i) para cada punto P_k de \widehat{K} , se obtiene una colección de $2n$ pares de números,

$$(1, j_1), (2, j_2), \dots, (2n, j_{2n})$$

Se van a reescribir estos $2n$ pares de números en la forma de una permutación, es decir,

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2n \\ \pm j_1 & \pm j_2 & \pm j_3 & \dots & \pm j_{2n} \end{pmatrix}.$$

El signo + o - en frente de j_i obedece a la siguiente condición:

Un "+" se asigna si el punto de K que tiene el número entero i asignado a él es superior al punto que tiene el número entero j_i asignado. Si está por debajo, entonces se asigna un "-".

Ejemplo 1.12 La forma de permutación correspondiente al nudo en figura 1.48 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -5 & 6 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.13 Las formas de permutaciones que se obtienen a partir de los diagramas regulares en la figura 1.49 (a) y (b) son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & -7 & 6 & -1 & 8 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & -6 & -1 & 8 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

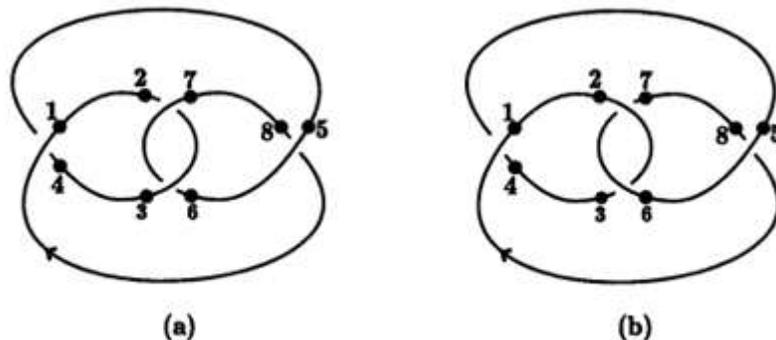


Figura 1.49 Permutación de diagramas regulares

Si se mira de cerca las formas de las permutaciones, a continuación, las siguientes observaciones son casi inmediatas. En primer lugar, en el par $(k, \pm j_k)$ un entero es siempre par y el otro impar. Además, si el par $(k, \pm j_k)$ es parte de la forma de permutación. Entonces el par inverso, $(j_k, \mp k)$, es también parte de la permutación. Por lo tanto, si se conocen las parejas que tienen un k impar, automáticamente las parejas tienen una k par, que también son conocidas. Por lo tanto, es suficiente considerar sólo las formas de

permutaciones pares que originalmente formaban exactamente la mitad de la forma de la permutación impar- numerada. Esto permite ahora escribir la siguiente serie, una fila de n números pares

$$(\pm j_1, \pm j_3, \pm j_5, \dots, \pm j_{2n-1})$$

Esta serie es el código asignado a (un diagrama regular de) K .

Ejemplo 1.14 El código del nudo figura 1.49 (a) es $(4,6,8,2)$, mientras que para el nudo de la figura 1.49 (b) que es $(4, -6,8, -2)$.

En el caso de enlaces, se elige uno de sus componentes y se asignan números a este componente de la manera descrita anteriormente. (Como en el caso del nudo, si la componente está orientada, luego seguir su orientación; de lo contrario, la elección de la dirección en la que se recorre la componente se deja a discreción.) A continuación, elija otra componente y repita el proceso anterior y continuará hasta que todas las componentes se han atravesado y el número asignado. De hecho, si los puntos de partida de cada componente se eligen adecuadamente, se puede asignar a cada punto de cruce un número par y un número impar. (¿Por qué es posible elegir un punto de partida tal?) Ya que, se escribe para cada componente de una fila de números pares de una manera similar como en el caso del nudo. Así, cada componente tendrá un código asignado al mismo,

$$(\pm j_1, \pm j_3, \pm j_5, \dots, \pm j_{2k-1} | \pm l_1, \pm l_3, \pm l_5, \dots, \pm l_{2m-1} | \dots)$$

es el código de un enlace (diagrama). El signo delante de la j_i, l_i, \dots es determinado exactamente de la misma manera que en el caso de nudos. El símbolo $|$ entre la fila de j_i y l_i significa que en este momento la fila de números pares para la primera componente llega a su fin.

Ejemplo 1.15 El código para el (esquema regular de) los anillos de Borromeo en la figura 1.50 es $(-6, -8 | -12, -10 | -2, -4)$.

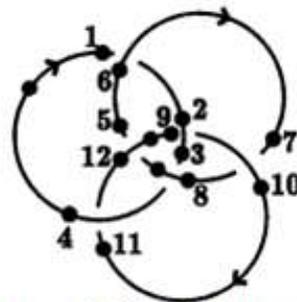


Figura 1.50 Anillos de Borromeo con su código

Ahora se tiene un método de asignar un código a un nudo dado K .

Sin embargo, inmediatamente se encuentran con un par de problemas. En primer lugar, el código depende del punto de partida, y, en segundo lugar, un nudo, K , tiene una abundancia de diagramas regulares. Por lo tanto cada K tiene una abundancia de códigos. Desafortunadamente, no existe ningún método conocido para decidir si o no dos códigos corresponden a nudos equivalentes. Sin embargo, se determinara si es o no una fila finita de enteros pares es un código para algún nudo.

1.5 Equivalencia de Nudos

Un problema típico en cualquier rama matemática es la clasificación de los objetos estudiados. Ésta fue la cuestión a la que quiso dar respuesta Pete G. Tait (físico-matemático escocés) con sus primeras tablas de nudos y en general muchos de los resultados de Teoría de Nudos están enfocados a este problema.

Un nudo no se cambia perceptivamente si se aplica sólo un movimiento elemental de nudo. Sin embargo, si se repite el proceso en diferentes lugares, varias veces, entonces el nudo resultante parece ser un nudo completamente diferente. Por ejemplo, al echar un vistazo a los dos nudos K_1 y K_2 en la figura 1.51, denominados el par Perko descubiertos por un matemático a tiempo parcial y abogado de Nueva York Kenneth A. Perko.



Figura 1.51 El par Perko

En apariencia el par de nudos de Perko se ve completamente diferente. De hecho, durante la mayor parte de los 100 años, nadie pensaba de otra manera. Sin embargo, es posible cambiar el K_1 nudo en el nudo K_2 realizando movimientos elementales de nudos un número significativo de veces. Esto sólo fue mostrado en 1970 por el abogado estadounidense K.A Perko.

Los nudos que se pueden cambiar de uno a otro mediante la aplicación de movimiento de nudos primarios se dice que son equivalentes o iguales por lo tanto, los dos nudos en la figura 1.51 son equivalentes.

Aunque los nudos sean objetos topológicos, no se podrá hacer una clasificación por homeomorfismo ya que todos los nudos son homeomorfos entre sí. Existen dos definiciones diferentes de equivalencia de nudos:

Definición 1.11. Dos nudos K_1 y K_2 son equivalentes si existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 que transforme un nudo en el otro.

Nudos equivalentes se dice que son del mismo tipo y cada clase de equivalencia de nudos es un tipo de nudo. Esos nudos equivalentes al círculo desanudado $x^2 + y^2 = 1, z = 0$, son llamados triviales y constituyen el tipo trivial. Del mismo modo, el tipo del nudo trébol, o del nudo ocho es definida como la clase de equivalencia de algunos nudos representativos particularmente. La declaración informal que el nudo trébol y el nudo ocho son diferentes rigurosamente expresó diciendo que pertenecen a distintos tipos de nudos.

La alternativa es una definición de equivalencia más estricta, que concuerda con la idea física de una cuerda anudada con los extremos pegados que se pueden manipular sin que se atraviese a si misma ni se haga cortes. La idea intuitiva es una deformación continua en el tiempo que pase de un nudo a otro y que en cada instante de tiempo el objeto de paso sea un nudo. Este tipo de aplicación se llama isotopía. Según el nudo va pasando por las posiciones intermedias a lo largo del tiempo su proyección va cambiando acorde a los movimientos Reidemeister.

Definición 1.12 Una isotopía ambiente entre dos aplicaciones continuas f y g es otra aplicación continua $F: X \times [0,1] \rightarrow Y$ que cumple $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}^3$ y tal que si $t_0 \in [0,1]$ entonces $F(x, t_0)$ es un homeomorfismo.

Definición 1.13 (Definición alternativa de equivalencia de nudos) Se dice que dos nudos K_1 y K_2 son equivalentes si existe una isotopía ambiente entre la identidad y un homeomorfismo h que transforme K_1 en K_2 , es decir, una isotopía $F: \mathbb{R}^3 \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de forma que $F(x, 0) = x$ y $F(x, 1) = h(x) \forall x \in \mathbb{R}^3$ y $h(K_1) = K_2$.

Como se ha mencionado antes de que se use la terminología ligeramente en relación con esta definición. Un nudo K puede ser un representante de una clase de nudos equivalentes o

la clase de sí misma. Si los nudos K y K' son equivalentes, se dirá que son los mismos, $K = K'$ y se utiliza el signo de igualdad K puede significar una curva cerrada simple finita poligonal o una clase de tales curvas.

El tema principal de la teoría clásica de nudos es la clasificación de los nudos con respecto a su equivalencia.

Definición 1.14 Si S^1 está orientado (*nudo orientado*) la noción de equivalencia tiene que ser ajustada: *Dos nudos orientados son equivalentes*, si hay una isotopía ambiente conectándolos que respeta la orientación de los nudos.

De vez en cuando se va a elegir una orientación fija en S^3 . Isotopías Ambiente respetan la orientación de S^3 .

1.6 Grafos y Nudos

En esta sección, se introduce una notación para las proyecciones de nudos que han sido útiles en el pasado para la tabulación de nudos. Proporciona un puente entre la Teoría de Nudos y la Teoría de Grafos, con el potencial para el desarrollo en ambas direcciones.

Definición 1.15 Un grafo consiste en un conjunto de puntos llamados vértices y un conjunto de aristas que los conectan.

Aquí se está interesado en grafos planares, es decir, los grafos que se encuentran en el plano, como en los dos primeros ejemplos en la figura 1.52

Definición 1.16 Un grafo plano (o planar) es un grafo que puede ser dibujado en el plano sin que ninguna arista se cruce.

A partir de una proyección de un nudo o enlace, se crea un grafo plano correspondiente de la siguiente manera. Primero se somborean todas las regiones que estén rodeadas de menos cruces y no se permitirá sombrear una región adyacente a ella (figura 1.53).



Figura 1.52 Algunos grafos planares y no planares



Figura 1.53 Proyecciones de enlaces sombreados

Proceso para pasar de un nudo a un grafo

Ponga un vértice en el centro de cada región sombreada y luego conectar con una arista dos vértices que se encuentran en regiones que comparten un cruce (figura 1.54). Este es el grafo que corresponde a nuestra proyección.

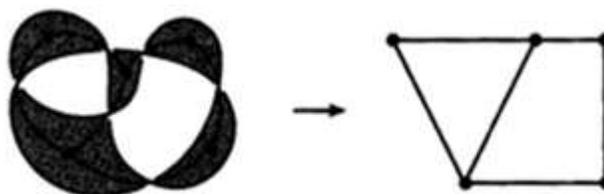
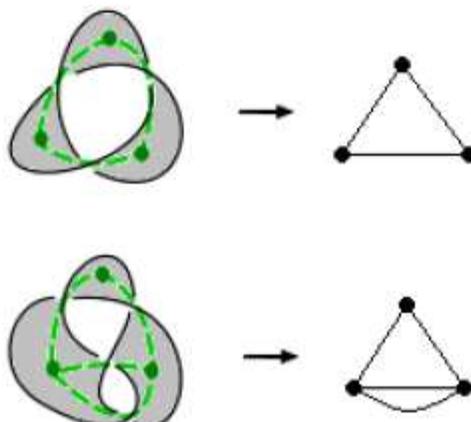


Figura 1.54 Un grafo de una proyección de un nudo

Ejemplo 1.16 Algunas proyecciones de nudos a grafos



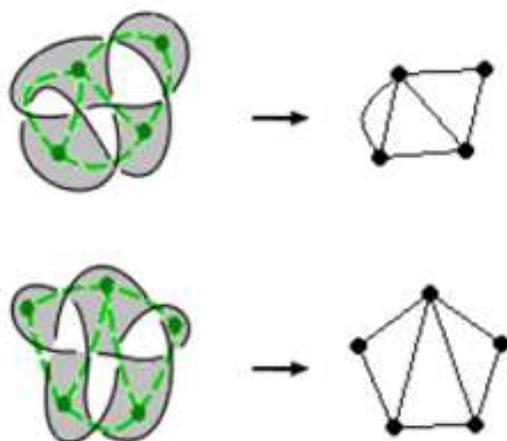


Figura 1.55 Nudos a grafos

No depende en modo alguno de si un cruce es un sobre cruce o un bajo cruce. Así se definen los cruces ya sean positivos o negativo dependiendo de la **forma en que se cruzan como en la figura 1.56**. Ahora etiquetar cada arista en el grafo plano con un $+$ o un $-$, en función de si el borde pasa a través de un cruce de $+$ o un $-$ cruce. Se le llama al resultado un grafo plano firmado (figura 1.57). (Téngase en cuenta que esta convención de signos depende de la forma en que se etiqueten los cruces con \pm). Una manera de convertir cualquier proyección de enlace en un grafo plano firmado.

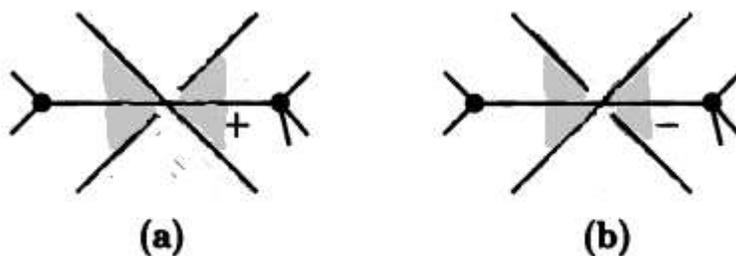


Figura 1.56 Signos en los cruces



Figura 1.57 Un grafo firmado de una proyección del nudo.

Ejemplo 1.17 En la figura 1.58 se han dibujado los grafos de planos firmados que corresponden a los respectivos diagramas regulares en la figura.

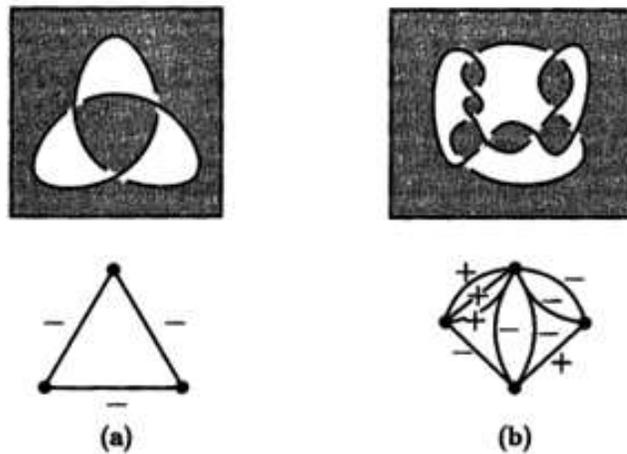


Figura 1.58 De nudos a grafos planos y firmados

¿Y si se quiere ir en la otra dirección? ¿Se puede convertir cualquier grafo plano firmado en una proyección del nudo? Ciertamente. Comenzando con el grafo plano firmado, poner una x a través de cada borde, como en la figura 1.59b. Conecte los bordes dentro de cada región del grafo como en la figura 1.59c. Las sombras de estas áreas que contienen un vértice. Luego, en cada una de las x , poner en un cruce correspondiente así el borde es un $+$ o un $-$ borde. El resultado es un enlace (figura 1.60).

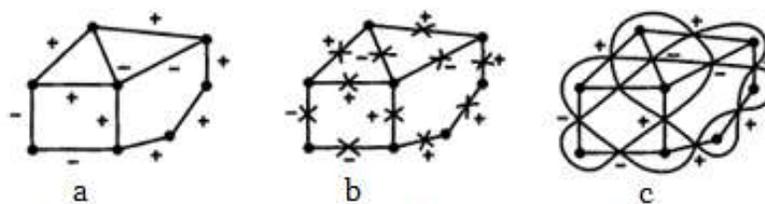


Figura 1.59 Convertir un grafo plano en un enlace



Figura 1.60 Un enlace generado a partir de un grafo plano

Ejemplo 1.18 Pasar de un grafo con signos (firmado) a un enlace

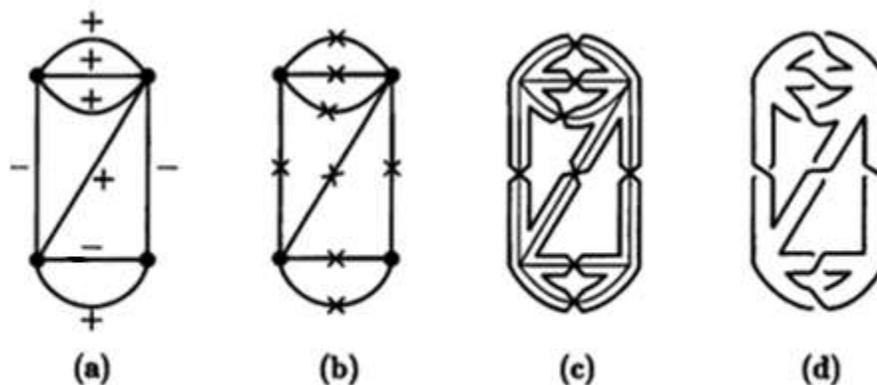


Figura 1.61 Pasos de un grafo a un enlace

Por lo tanto, para cada grafo plano firmado existe un correspondiente (diagrama regular de un) nudo.

Ahora se tiene una manera de ir de proyecciones de nudos a grafos planos firmados y de regreso. En particular, se pueden convertir preguntas sobre nudos en preguntas sobre grafos. Por ejemplo, uno de los problemas abiertos en la Teoría de Nudos es encontrar un algoritmo práctico para determinar si una proyección es una proyección del nudo trivial (ver sección 1.1). Esto es equivalente a preguntar si existe o no una secuencia de movimientos Reidemeister que nos lleva de la proyección dada a la proyección del nudo trivial.

Pero se pueden convertir las proyecciones de nudos y enlaces en grafos planos firmados. Se pueden convertir los movimientos Reidemeister en operaciones en grafos planos firmados.

La cuestión de si las proyecciones de nudos son equivalentes bajo movimientos Reidemeister se convierte en uno de si grafos planos firmados son equivalentes en el marco de las operaciones de los movimientos Reidemeister.

En la figura 1.62 se han colocado en yuxtaposición las gráficas planas conectadas con hasta 4 aristas y sus correspondientes nudos (y enlaces). El número de puentes del grafo es igual al número de puntos de cruce del diagrama regular del nudo. Dado que, en aras de la claridad, no se han asignado signos a los bordes, estas cifras no son esquemas regulares de los nudos (o enlaces), sino más bien sus proyecciones.

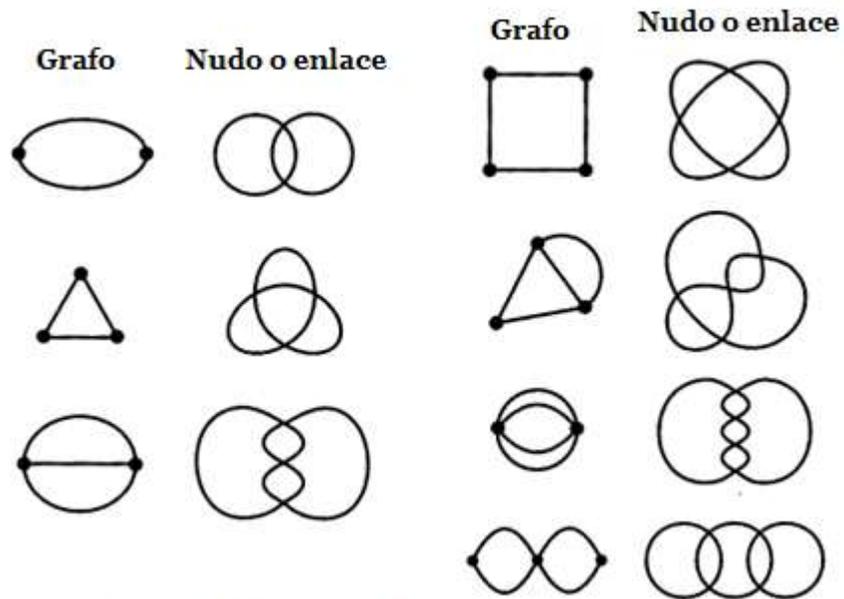


Figura 1.62 de grafos a nudos o enlaces

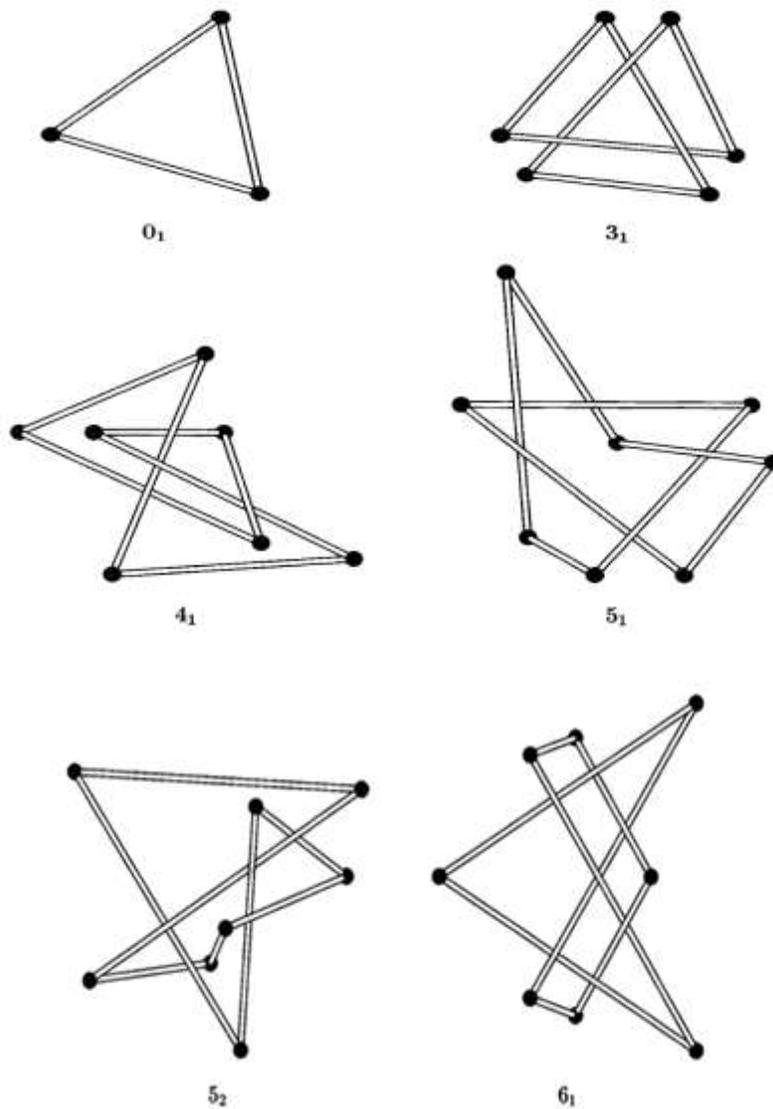
CAPITULO II

2.1 Nudos Poligonales

Hasta ahora sólo se han observado nudos en términos generales. Pero ¿Cómo se puede especificar un nudo en particular? un método consiste en pensar que es construido de líneas rectas y dar las coordenadas de las esquinas.

Definición 2.1.1. Un nudo poligonal es aquel formado por una unión finita de segmentos de recta llamados aristas cuyos puntos extremos son los vértices del nudo.

Ejemplo 2.1.1 Representación de diez nudos que pueden realizarse con a lo sumo ocho aristas.



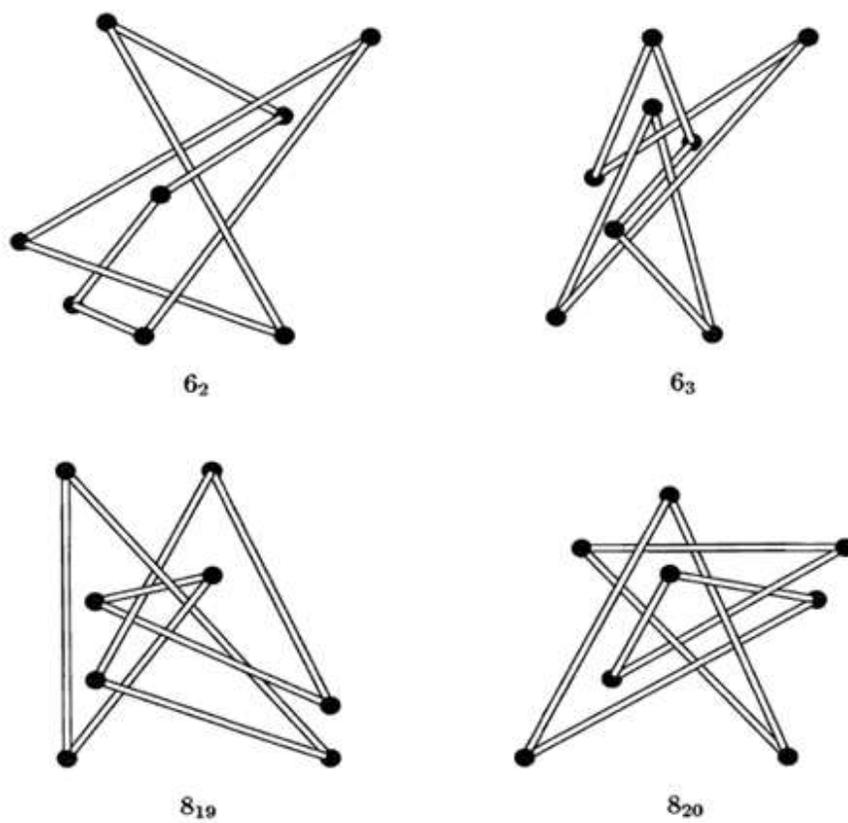


Figura 2.1.1 Algunos nudos que pueden realizarse con a lo sumo ocho aristas

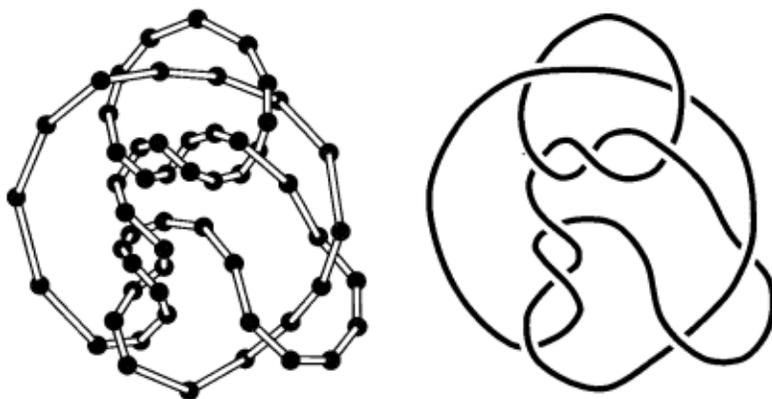


Figura 2.1.2 Un nudo poligonal y una representación suave del nudo de 10 cruces

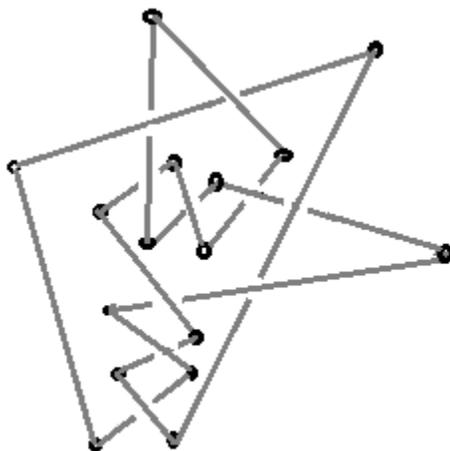


Figura 2.1.3 Nudo poligonal de 10 cruces

Hay dos preguntas básicas que se pueden hacer sobre nudos poligonales:

1. ¿Cuántas aristas se necesitan para hacer un nudo dado K ?
2. ¿Se pueden realizar nudos usando n aristas?

Lo primero que se debe decir es que la pregunta 1 presupone que un nudo dado puede ser representado como un polígono. Muchas de las figuras de nudos parecen que se han dibujado con líneas suaves, pero se pueden interpretar como polígonos que tienen una gran cantidad de aristas muy cortas. (En realidad, así es como la computadora los dibuja.) Una vez encontrada una representación poligonal de un nudo se puede manipular y tratar de reducir el número de aristas. El polígono en la figura 2.1.2 tiene más de 50 aristas y esto es claramente más de lo necesario. Si se alteran repetidamente los vértices (asegurándose que se preserva el tipo de nudo), un poco de la arista puede encogerse hasta que sea tan corta que pueda doblarse y se retira sin afectar el tipo de nudo como se observa en la figura 2.1.3. Programas de computadora que permiten que los nudos evolucionen de esta manera se han utilizado para encontrar candidatos para los polígonos mínimos.

La respuesta a la pregunta 2 se muestra en la figura 2.1.1 para $n = 3, 6, 7, 8$. Debe haber al menos tres aristas para formar un triángulo (el nudo trivial) y no es difícil demostrar que un polígono anudado debe tener al menos seis aristas. Enumerando estos polígonos pronto se convierte en impracticable porque el número de casos explota a medida que n aumenta.

Ejemplo 2.1.2 Representación del nudo trivial en un nudo trivial poligonal.

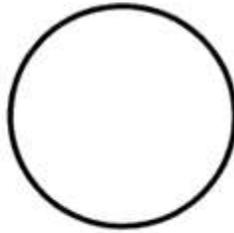


Figura 2.1.4 Nudo trivial (O_1)

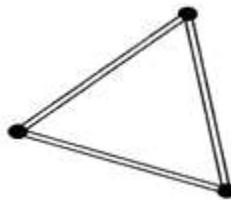


Figura 2.1.5 Nudo trivial poligonal

Definición 2.1.2 Se llamará a un nudo dócil si se puede representar mediante un diagrama con un número finito de cruces.

Si se da el caso contrario, es decir, la única representación que admite que el nudo tenga infinitos cruces, entonces se trata de un nudo salvaje.

Un nudo dócil es equivalente a un nudo poligonal.

Ejemplo 2.1.3 Algunos diagramas de nudos dóciles

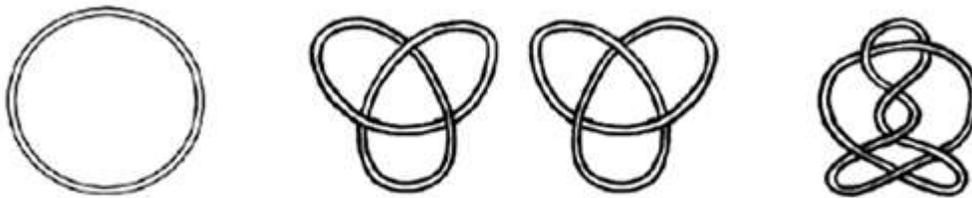


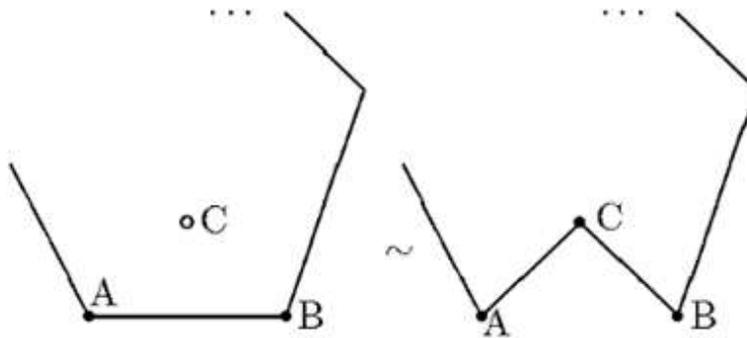
Figura 2.1.6 Nudos dóciles

Ejemplo 2.1.4 Representación del nudo salvaje**Figura 2.1.7** Nudo salvaje

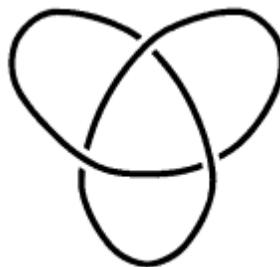
Definición 2.1.3 Un embebimiento de la unión disjunta de n líneas cerradas quebradas en \mathbb{R}^3 es llamado un enlace poligonal de n – componentes.

Según esta definición un **nudo poligonal** es un enlace poligonal de una componente.

Definición 2.1.4 Dos enlaces poligonales son isotópicos si uno de ellos se puede formar por transferencia a la otra por medio de una secuencia iterativa de las isotopías elementales y transformación inversa. Aquí la isotopía elemental es un reemplazo de un borde AB con dos bordes AC y BC , siempre que el triángulo ABC no tiene puntos de intersección con otros bordes de los enlaces, véase la figura 2.1.8.

**Figura 2.1.8** Isotopia elemental

Ejemplo 2.1.5 Dibuje un nudo trébol poligonal con seis aristas.

**Figura 2.1.9** Nudo trébol (3₁)

Para dibujar el nudo trébol poligonal se tiene:

Se trazan tres aristas sobre los arcos del nudo trébol, luego se colocan las otras aristas uniéndolo cada vértice, respetando los sobre cruces y bajo cruces hasta formar el nudo trébol poligonal.

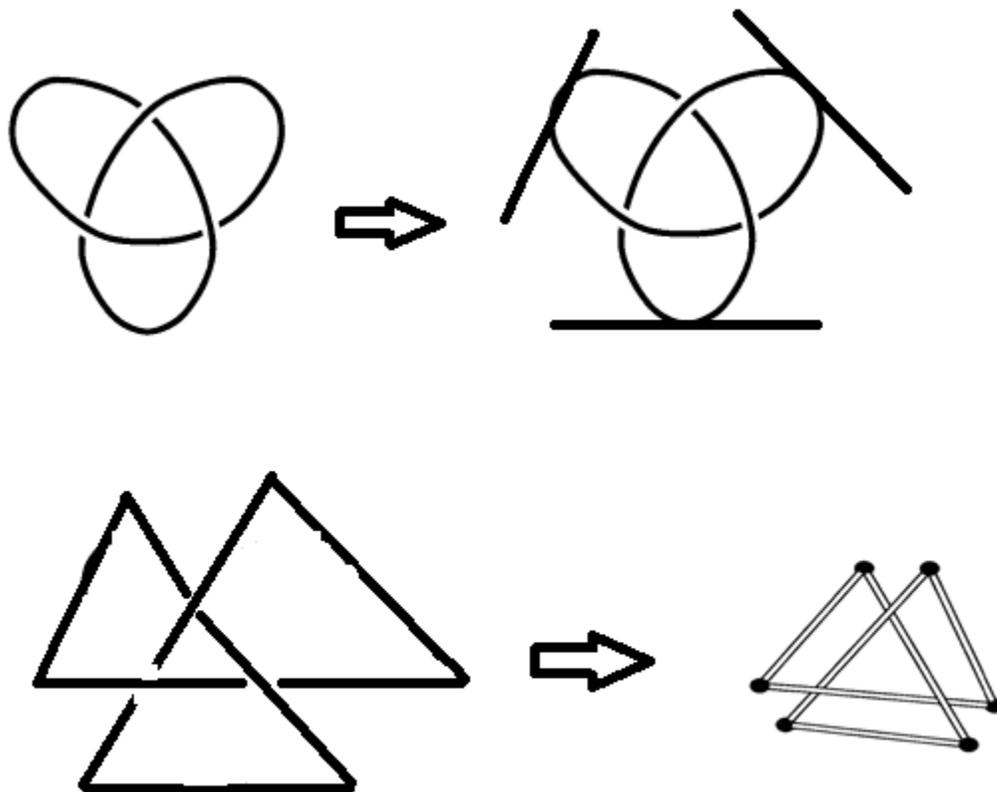


Figura 2.1.10 Nudo trébol poligonal

Definición 2.1.5 Un nudo poligonal K está en la posición regular si:

- i) los únicos puntos múltiples de K son los puntos dobles y sólo hay un número finito de estos;
- ii) ningún punto doble es la imagen de cualquier vértice de K .

La segunda condición asegura que todo punto doble representa un cruce real, como en la figura 2.1.11a. Se prohíbe la especie de punto doble que se muestra en la figura 2.1.11b,

Cada punto doble de la imagen proyectada de un nudo poligonal de posición regular es la imagen de dos puntos del nudo.



Figura 2.1.11

Ejemplo 2.1.6 Dibuje un nudo ocho poligonal.

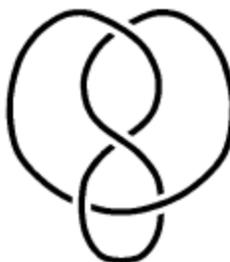


Figura 2.1.12 Nudo ocho (4:)

Para representar el nudo ocho se hará lo siguiente: Cada arco se representa con una arista, luego se colocan las otras aristas respetando los bajo cruces y sobre cruces de modo que se unan en cada vértice, hasta formar el nudo ocho poligonal.

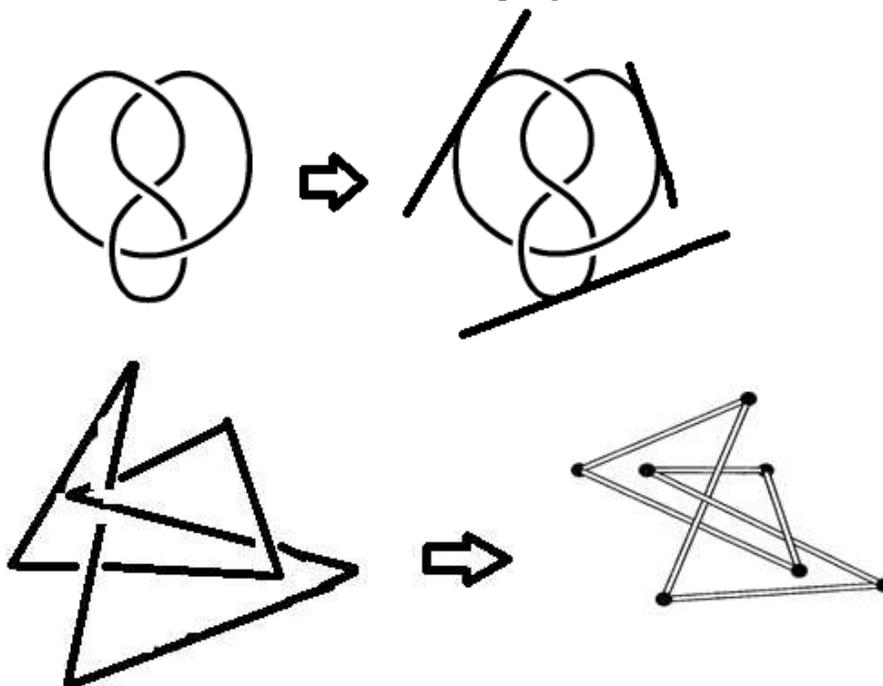


Figura 2.1.13 Nudo ocho poligonal

2.2 Nudos Alternantes y Casi Alternantes

2.2 A) Nudos Alternantes

Definición 2.2.1 Un diagrama es alternante cuando partiendo de un punto y avanzando en una dirección determinada los cruces se van alternando entre sobre cruces y bajo cruces hasta llegar de nuevo al punto inicial.

Como ya se ha dicho los nudos pueden tener varios diagramas planos que los representen, así que se dirá que un nudo es alternante si se puede representar con un diagrama alternante.

El interés que tienen estos nudos es que son un caso más fácil de manejar que cualquier nudo, gracias a las tres conocidas conjeturas de Tait (1831-1901 físico y matemático británico), que son las siguientes:

1. Si se tiene un nudo alternante y un diagrama alternante del mismo, el número de cruces del diagrama es el número mínimo de cruces con el que se representará el nudo. De esta forma en este tipo de nudos es muy sencillo hallar el número de cruces. Además cualquier representación plana con ese número de cruces mínimo será alternante.
2. Se asigna una orientación en el nudo. Un cruce se dice que es positivo si al girar la hebra que va por abajo en sentido horario coincide con la flecha de la hebra que va por arriba y será negativo si al girar la hebra que va por abajo en sentido anti-horario coincide con la flecha de la hebra que va por arriba. Ahora se suman los cruces positivos con los negativos y se obtiene un número que es invariante por los movimientos Reidemeister de tipo II y III, no siendo así para los del tipo I (autocruces).
3. Si se tienen dos diagramas alternantes de un mismo nudo, se puede pasar de uno a otro por medio de una cantidad finita de unos movimientos que consisten en hacer un giro de 180° como en la figura 2.2.1, de forma que traslada el cruce a lo largo del nudo.



Figura 2.2.1

Este tipo de movimiento no aumenta el número de cruces del nudo, al contrario que algunos de los movimientos Reidemeister. Por tanto la conjetura implica que todos los diagramas alternantes de un mismo nudo tienen el mismo número de cruces.

El nudo trébol en la figura 2.2.2 y el nudo ocho en la figura 2.2.3 son alternantes, ya que las dos proyecciones del mismo a la izquierda y en medio se alternan.



Figura 2.2.2 Nudo trébol

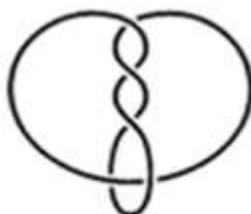


Figura 2.2.3 Nudo ocho

Definición 2.2.2. (Nudo Alternante). Una proyección del nudo se llama alternante, si hay sobre cruces y bajo cruces alternados mientras se viaja a lo largo del nudo. Un nudo se llama alternante, si posee una proyección alternante; de lo contrario es no alternante.

Ejemplo 2.2.1 Elige cruces a cada vértice de la figura 2.2.4 para tener como resultado un nudo alternante.

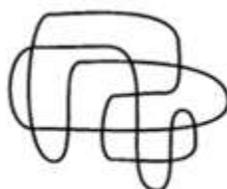


Figura 2.2.4 Una proyección con exceso o falta de cruces

Para elegir cruces a cada vértice de la figura anterior, primeramente se tiene que seleccionar un cruce de inicio para tomarlo como referencia, en esta ocasión se seleccionó el cruce A, de ahí los cruces se alternan entre sobre cruces y bajo cruces hasta llegar al punto inicial. Luego se observa que la figura 2.2.4 se ha convertido en un nudo alternante (figura 2.2.5).

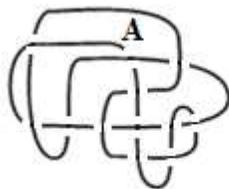


Figura 2.2.5 Nudo alternante de la figura 2.2.4

Ejemplo 2.2.2 A continuación se muestra un nudo no alternante.

Para mostrar que es un nudo no alternante se elige un punto inicial como referencia, en esta ocasión se seleccionó el cruce B, de ahí se observa que los cruces no se van alternando con sobre cruces y bajo cruces hasta llegar al punto inicial. Por lo tanto se concluye que este nudo no es una representación de un nudo alternante, entonces se dirá que es un nudo no alternante.



Figura 2.2.6 Nudo no alternante

Ejemplo 2.2.3 El nudo trivial es también un nudo alternante.

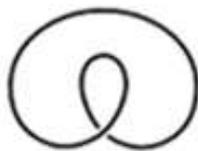


Figura 2.2.7 Nudo trivial

2.2 B) Nudos Casi Alternantes

Para el tipo de nudos casi alternantes es necesario estudiar la Notación de Conway que se abordará a continuación.

Se introduce una notación para nudos debido a John H. Conway (1937 Liverpool, Reino Unido, Prolífico matemático activo en la teoría de nudos).

Definición 2.2.3 Un **enredo** es la proyección de dos cuerdas enredadas, normalmente representadas en el interior de una bola, de forma que los extremos de las cuerdas apunten en las direcciones NO (Noroeste), NE (Noreste), SO (Suroeste) y SE (Sureste) (figura 2.2.8).

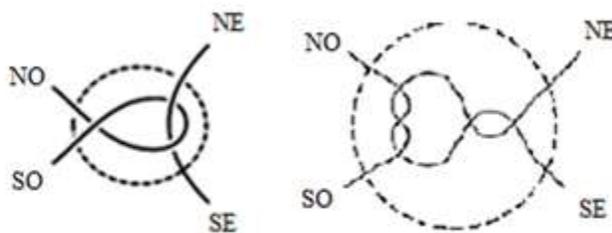


Figura 2.2.8 Enredos

Se pueden utilizar enredos como los bloques de construcción de las proyecciones de nudos (figura 2.2.9). Por lo tanto, la comprensión de los enredos será muy útil en el entendimiento de nudos. Dos enredos son equivalentes si se puede pasar de uno a otro por una secuencia de movimientos Reidemeister mientras que los cuatro criterios de valoración de las cuerdas en los enredos permanecen fijos y además las cuerdas del enredo nunca están fuera del círculo que define el enredo.

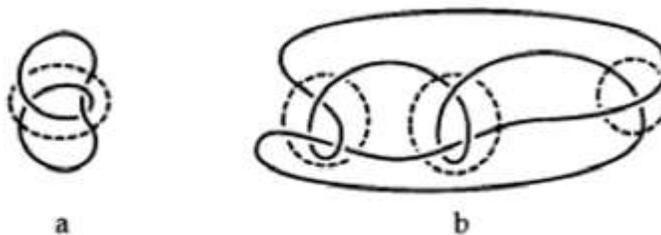


Figura 2.2.9 Proyecciones de nudos formados por enredos

Ejemplo 2.2.4 Se muestran a continuación enredos equivalentes.



Figura 2.2.10 Enredos

Los dos enredos en la figura 2.2.11, figura 2.2.12 y figura 2.2.13 son equivalentes por la secuencia de movimientos Reidemeister como se muestran a continuación.

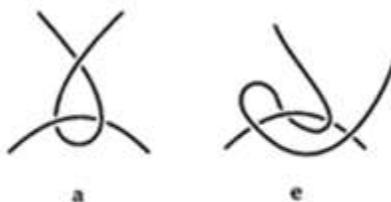


Figura 2.2.11 El enredo a) es equivalente al enredo e)



Figura 2.2.12 El enredo b) es equivalente al enredo c)

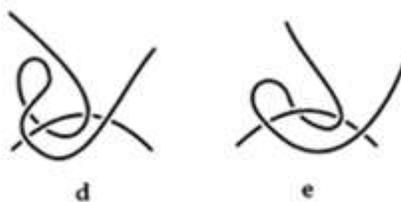


Figura 2.2.13 El enredo d) es equivalente al enredo e)

Se llamará a una proyección de un enlace una **proyección casi alternante** si un cambio de cruce en la proyección haría una proyección alternante. Se denomina un **enlace casi alternante** si tiene una **proyección casi alternante**.

Definición 2.2.4 Una proyección de un nudo se llama casi alternante si cruzando la torcedura puede hacerse alternante. Un nudo o enlace no alternante se llama casi alternante si tiene una proyección casi alternante.

Ejemplo 2.2.5 Mostrar que el nudo 8_{19} en la figura 2.2.14 tiene la imagen de proyección casi alternante.



Figura 2.2.14 Nudo 8_{19}

Aplicando los movimientos Reidemeister se tiene:

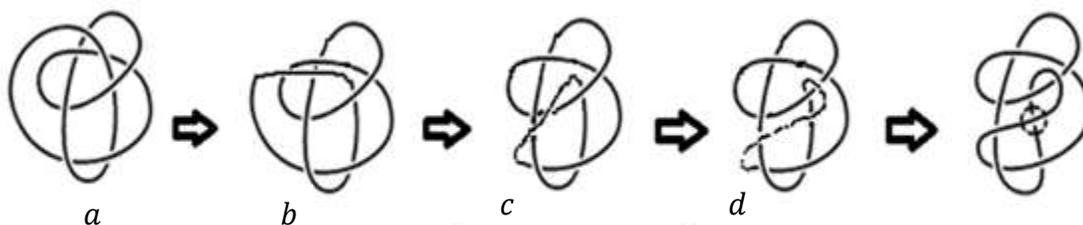


Figura 2.2.15 El nudo 8_{19} es casi alternante

$a \rightarrow b$: Movimiento Reidemeister tipo III

$b \rightarrow c$: Movimiento Reidemeister tipo III

$c \rightarrow d$: Movimiento Reidemeister tipo I

Para mostrar que tiene una proyección casi alternante se hace uso de los movimientos Reidemeister Tipo III y Tipo I como se observa en la figura 2.2.15.

De hecho, el nudo trivial tiene una proyección casi alternante (figura 2.4.16). Aún más sorprendente es el hecho de que cada nudo alternante tiene una proyección casi alternante.



Figura 2.2.16 Una proyección casi alternante del nudo trivial

Simplemente se puede realizar un movimiento Reidemeister Tipo II a una proyección alternante para obtener una proyección casi alternante (figura 2.4.17).

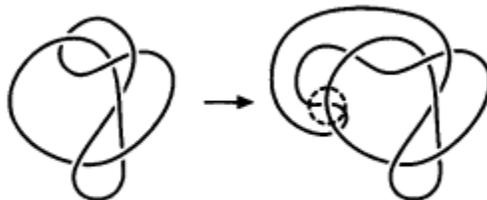


Figura 2.2.17 Nudos alternantes tienen proyecciones casi alternantes

2.3 Trenzas

A principios de la década de 1930, Emil Artin un matemático austriaco (1898-1962) introdujo un concepto de una trenza (matemática). Esta notable visión propia no era suficiente para sostener la investigación en esta área, por lo que poco a poco comenzó a marchitarse. Sin embargo, en la década de 1950 este concepto de trenzas se encontró que tienen aplicaciones en otros campos y esto dio un nuevo impulso al estudio de las trenzas, reavivando la investigación en esta área.

La estructura de una trenza en \mathbb{R}^3 es la siguiente. Sea \mathcal{C} un cubo, luego en la parte superior y en la base se marcan n puntos, A_1, A_2, \dots, A_n y A'_1, A'_2, \dots, A'_n , respectivamente. Estos puntos pueden ser arbitrariamente colocados, sin embargo, se expresaran en términos de coordenadas específicas.

En primer lugar, las coordenadas para \mathcal{C} en \mathbb{R}^3 son

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Se eligen A_1, A_2, \dots, A_n y A'_1, A'_2, \dots, A'_n como sigue

$$A_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 1\right), \dots, A_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 1\right)$$

$$A'_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 0\right), \dots, A'_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 0\right)$$

Por construcción cada A'_i está directamente debajo del A_i como lo muestra la figura 2.3.1

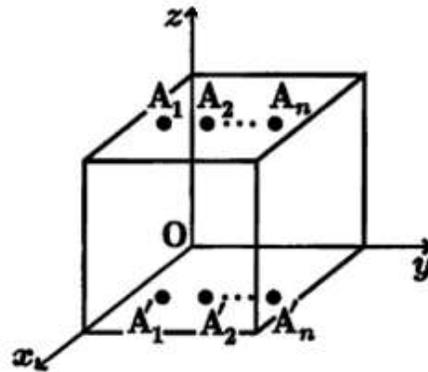


Figura 2.3.1 Construcción de una trenza.

Ahora, unir los puntos A_1, A_2, \dots, A_n con los puntos los A'_1, A'_2, \dots, A'_n mediante n curvas (para ser más precisos deben ser arcos poligonales) en C . Como es usual, se unen de tal manera que estas curvas (incluyendo los puntos finales) no se crucen mutuamente. No es necesario unir A_i a A'_i , pero no es permitido unir A_i a más de un A'_j . Se le llamará a estos arcos poligonales: cuerdas.

Definición 2.3.1: Supóngase ahora, que se divide el cubo en dos partes por un plano arbitrario E que es paralelo a la base del cubo C . Entonces, si E intersecta cada cuerda (arco poligonal) a uno y sólo un punto, se dice que estas n cuerdas en C son una **n -trenza**.

Ejemplo 2.3.1. Figura 2.3.2 (a) y (b) son ejemplos de 1-trenzas. Figura 2.3.2 (c), sin embargo, no es una 1- trenza, figura 2.3.2 (d) y (e) son ejemplos típicos de 2-trenzas.

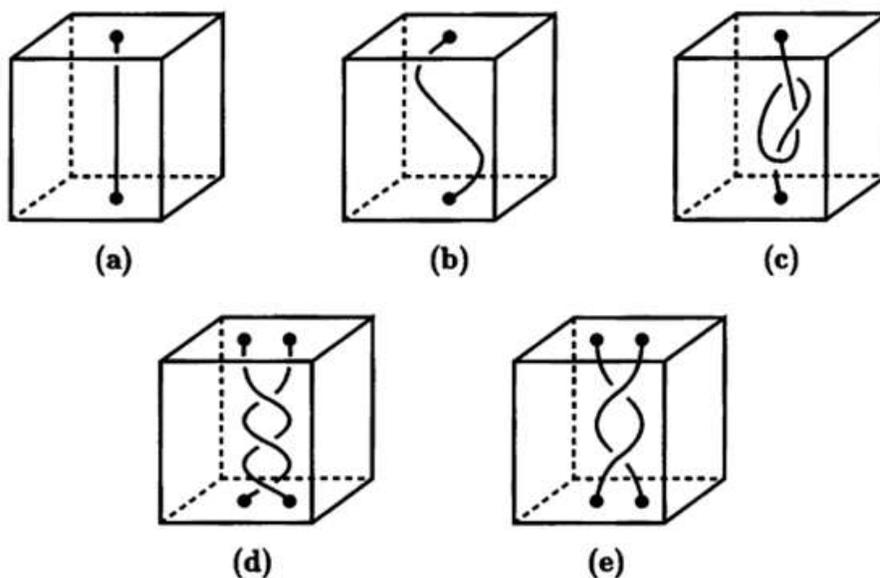


Figura 2.3.2 Ejemplos de trenzas y no trenzas

Definición 2.3.2 Dadas dos n -trenzas en un cubo, si es posible, mediante la realización de movimientos elementales de nudos en estas cuerdas, transformar una a la otra, entonces se dice que estas dos n -trenzas son equivalentes (o iguales).

Ejemplo 2.3.2. Demostrar que las 2-trenzas mostradas en la figura 2.3.3 (a) y (b) son equivalentes

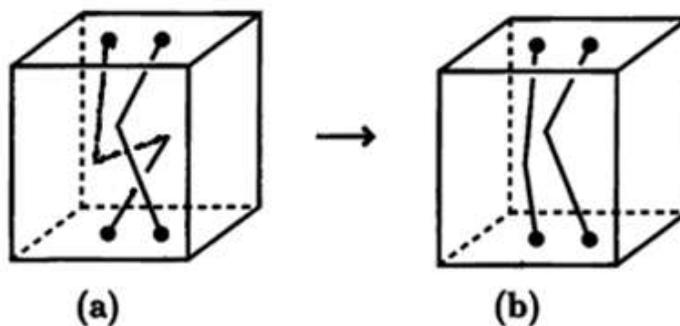


Figura 2.3.3 Trenzas equivalentes

Se mostrará la equivalencia haciendo uso de los movimientos elementales de nudos

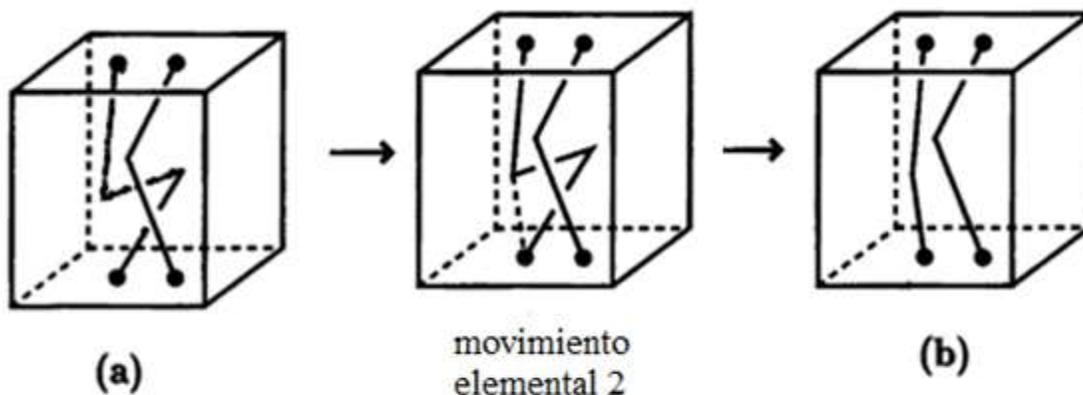


Figura 2.3.4 Aplicación de los movimientos elementales

Intuitivamente, dos trenzas (en un cubo), cuyos puntos finales se mantienen fijos, puede decirse que son equivalentes, si se deforma continuamente una a la otra sin que ninguna de las cuerdas se interseque entre sí.

De una manera similar como en el caso de nudos, se puede obtener el diagrama regular de una trenza mediante la proyección de la trenza en el plano. La figura 2.3.5 muestra el esquema regular de una trenza en el plano.

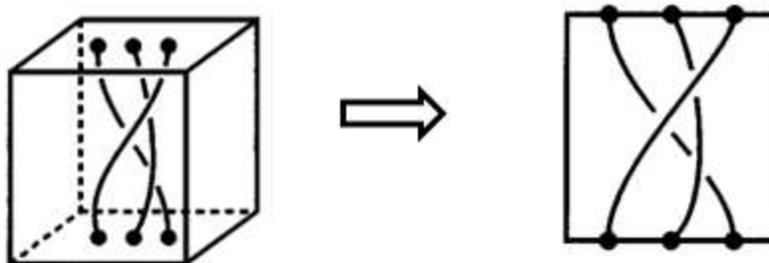


Figura 2.3.5 Proyección de una trenza en el plano

Definición 2.3.3 Una **trenza en el plano** es un conjunto de n cuerdas, todas las cuales unidas a una barrera horizontal en la parte superior y en la parte inferior (figura 2.3.6). Cada cuerda intersecta cualquier plano horizontal entre las dos barras exactamente una vez.



Figura 2.3.6 Trenza en el plano

Conectando A_1 a A'_1 , A_2 a A'_2 , ..., A_n a A'_n por n segmentos de línea, figura 2.3.7, se puede formar un tipo especial de trenza. Con la nomenclatura anterior, se le llamará a esta la **n -trenza trivial**.

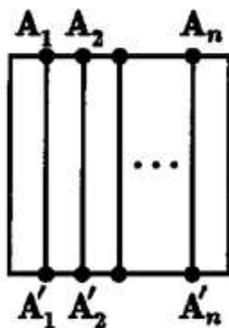


Figura 2.3.7 n -trenza trivial

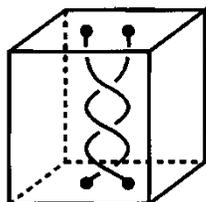
Suponga que una n -trenza α tiene sus cuerdas conectadas como lo siguiente A_1 a A'_{i_1} , A_2 a A'_{i_2} , ..., A_n a A'_{i_n} . Entonces se le puede asignar a α una permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

A esto le llama permutación, la **permutación trenza**. La trenza trivial corresponde a la permutación de identidad,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

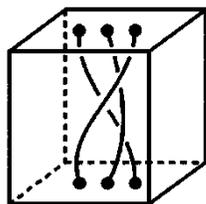
Ejemplo 2.3.3. La permutación trenza para la figura 2.3.2 (d) es



(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2),$$

mientras que la permutación trenza para la figura 2.3.5 es



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 3).$$

Dado que si dos trenzas son equivalentes, se deduce que sus permutaciones trenza son iguales; por lo que la permutación trenza es un invariante.

2.3.1 Relación entre Trenzas y Nudos

¿Qué trenzas tienen que ver con nudos y enlaces? Siempre es posible tirar la barra inferior alrededor y pegarla en la barra superior, de modo que las cuerdas resultantes formen un nudo o enlace, es decir, los puntos A_1, A_2, \dots, A_n en la parte superior de un diagrama rectangular de una trenza α se conectan a los puntos A'_1, A'_2, \dots, A'_n , respectivamente, en la parte inferior del mismo diagrama llamado el **cierre de la trenza** (figura 2.3.8). Por lo tanto cada trenza corresponde a un nudo o enlace en particular.

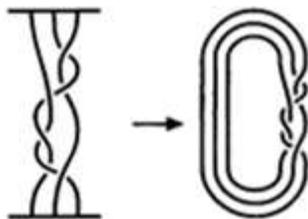


Figura 2.3.8 El cierre de una trenza

¿Los nudos y enlaces se pueden representar como trenzas cerradas? Si, ya que cada nudo o enlace es una trenza cerrada. Esto se demostró primero por J. W. Alexander en 1923.

Se utilizará la idea de los puentes para visualizar esta situación.

2.3.1.1 Número del Puente

En la figura 2.3.9, se visualizan los puentes en el nudo trébol

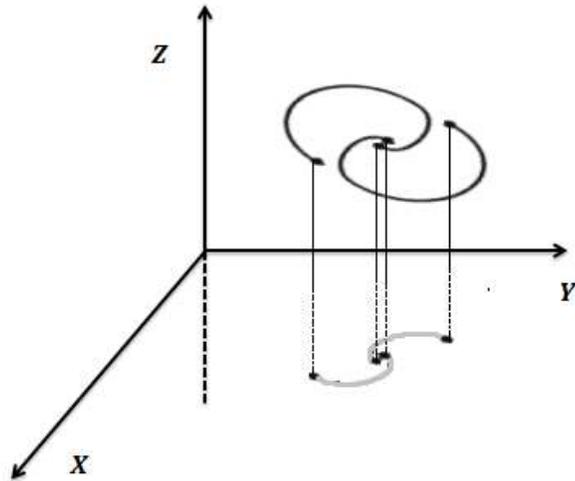


Figura 2.3.9 Visualización en \mathbb{R}^3 de los puentes en el nudo trébol

\mathbb{R}^3

y a continuación se muestra un par de proyecciones del nudo trébol y del nudo ocho en el plano, respectivamente.

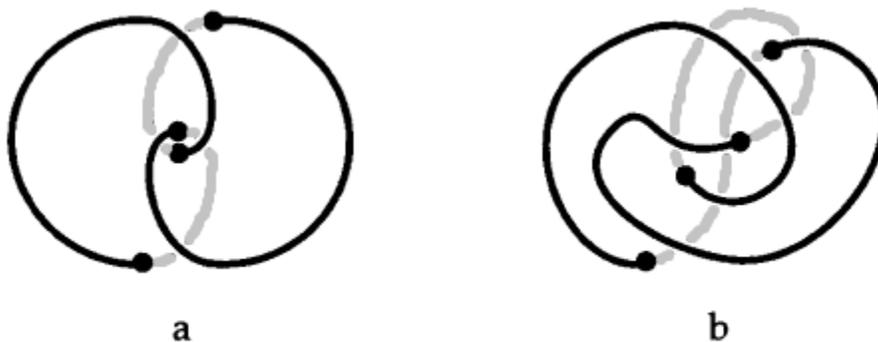


Figura 2.3.10 (a) Nudo trébol y (b) Nudo ocho

Pensar en las partes oscuras de los nudos como acostado por encima del plano xy y el resto de los nudos como acostado debajo del plano como en la figura 2.3.9. Cada nudo se cruza con el plano en cuatro puntos. En la figura 2.3.10 en las dos imágenes a y b, hay dos

arcos desatados en cada nudo, que se extiende por encima del plano. Este es el menor número de este tipo de arcos en cualquier proyección de estos nudos. Por lo tanto, se dice que estos nudos ambos tienen número de puente 2.

En general, dada una proyección de un nudo a un plano, se tiene:

Definición. 2.3.4 Un **paso elevado** (figura 2.3.11a) es un sub-arco del nudo que pasa sobre al menos un cruce pero nunca pasa por debajo de un cruce.

Definición. 2.3.5 Un **paso elevado máximo** es un paso elevado que casi siempre tiene un límite (figura 2.3.11b). Ambos de sus puntos finales ocurren justo antes de ir debajo de un cruce.

Definición 2.3.6 El número de puente de la proyección es entonces el número de pasos elevados máximos en la proyección (aquellos pasos elevados máximos que forman los puentes sobre el resto del nudo). Observe que cada cruce en la proyección debe tener algún paso elevado máximo que cruza encima de este.

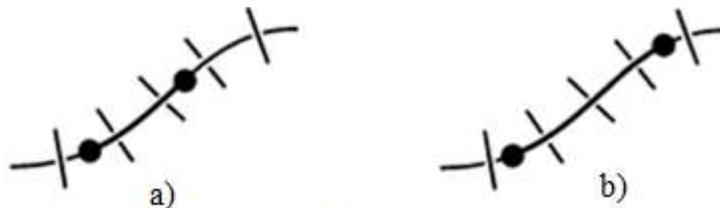


Figura 2.3.11 (a) Un paso elevado (b) Un paso elevado máximo

Definición. 2.3.7 El **número de puente de K** , denotado $b(K)$, es el número de puente mínimo de todas las proyecciones del nudo K .

Sea L un nudo o enlace en una proyección en particular, luego se orienta cada uno de los componentes de L . Para cualquier hebra, se obtendrán puentes donde el primer punto se elige después de un bajo cruce, el segundo es donde finaliza el primer puente y así sucesivamente hasta llegar nuevamente al primer punto. A medida se recorre el nudo o enlace en la dirección de la orientación de la hebra, etiquetar estos puntos elegidos con P_1 hasta P_n (figura 2.3.12). Se piensa en estos puntos etiquetados como la intersección del plano de proyección con el nudo o un enlace, las hebras encima y debajo del plano de proyección como los puentes.

La cuerda del nudo de conexión P_1 a P_2 se encuentra por encima del plano de proyección; la hebra conexión de P_2 a P_3 se encuentra por debajo del plano de proyección.

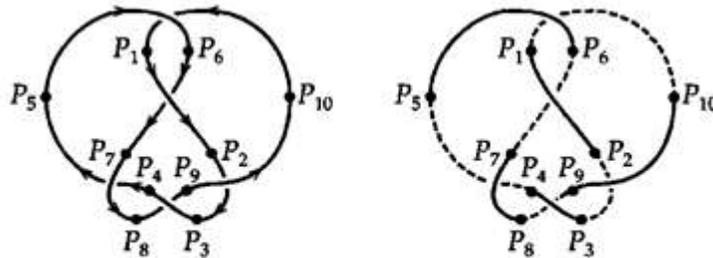


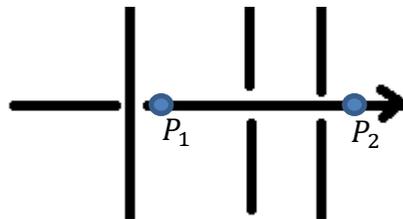
Figura 2.3.12 Puntos etiquetados P_1, \dots, P_n .

Proposición 2.3.1 Dado cualquier nudo o enlace orientado, si se elige el primer punto después de un bajo cruce entonces la hebra conexión P_{2i-1} a P_{2i} siempre está por encima del plano de proyección y la hebra conexión P_{2i} a P_{2i+1} siempre está por debajo del plano de proyección.

Prueba:

Sea L un nudo o enlace, luego encontrar una proyección regular, esto se obtiene aplicando movimientos elementales de nudo o en su defecto los movimientos Reidemeister

Por hipótesis se tiene que L posee una orientación, además, para cualquier hebra, el primer punto de un puente se elige después de un bajo cruce,



Luego el segundo será donde finaliza el primer puente y así sucesivamente se van colocando los n puntos hasta llegar nuevamente al primer punto.

A medida se recorre el nudo o enlace en la dirección de la orientación de la hebra, estos n puntos se etiquetarán como P_1, \dots, P_n . Teniendo los puntos etiquetados se puede establecer la siguiente notación para puentes: $\overline{P_i P_{i+1}}$ es un puente que está por encima del plano y $\underline{P_j P_{j+1}}$ un puente que está por debajo del plano.

Dado que el primer punto ocurre después de un bajo cruce, P_1 y P_2 representa un arco que está por encima del plano y entre ellos solo pueden haber sobre cruces por lo que se representan como $\overline{P_1P_2}$, dado lo anterior P_2 ocurre antes de un bajo cruce por lo que P_2 representa el inicio de un puente que está bajo el plano así $\underline{P_2P_3}$ y entre estos puntos solo pueden haber bajo cruces, si se sigue con este procedimiento, se obtendrá el puente que está por debajo del plano $\underline{P_{n-1}P_1}$ y dado que no puede haber dos puentes sobre y bajo el plano adyacentes se tiene que los puentes sobre el plano serán de esta manera $\overline{P_{2i-1}P_{2i}}$ y los puentes bajo el plano serán $\underline{P_{2i}P_{2i+1}}$. \square

Al aplicar isotopías (reorganizar sin cortar y pegar) a la proyección de manera que las n hebras por debajo del plano de proyección estén alineadas como en la figura 2.3.13. Se organizan los hilos para que los puntos de número par son todas próximo uno al otro.

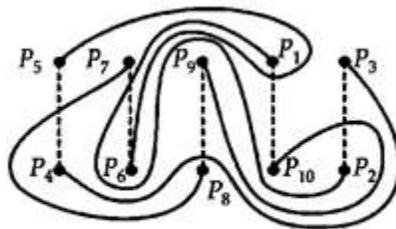


Figura 2.3.13 Reorganización de la proyección para alinear los puentes inferiores

No se tiene ningún problema al realizar este reordenamiento, bajo el plano de proyección, ya que sólo se están deslizando, no intersectando arcos. En la parte superior del plano, los puentes están más desordenados, pero nunca se cruzan entre sí, por lo que todavía tienen perfectamente puentes buenos.

Sea A una línea recta en el plano de proyección que es una mediatriz de todos los puentes inferiores. Cada uno de los puentes superiores cruza un número impar de veces, ya que un puente superior comienza en un punto P_{2i-1} que se encuentra al norte del segmento A y termina en el punto de P_{2i} que esta al sur del segmento A . Todos los puentes superiores deben cruzar una sola vez el segmento A , si sucede lo contrario se deberá acomodar tales puentes para que crucen el segmento una sola vez.

Si uno de los puentes superiores cruza A más de una vez, sólo tiene que tomar el segundo punto en la parte superior del puente donde cruza A después de dejar P_{2i-1}

y empuje la parte superior del puente por debajo del plano de proyección (figura 2.3.14). El nuevo puente superior ahora se divide en dos nuevos puentes superiores y un nuevo puente inferior. El primer puente nuevo superior cruza A una vez, mientras que el segundo puente nuevo superior cruza A dos veces menos que el puente superior inicial lo hizo. Se puede repetir este proceso con los nuevos puentes superiores y finalmente, con los otros puentes superiores restantes hasta que cada puente superior cruce la línea A exactamente una vez.

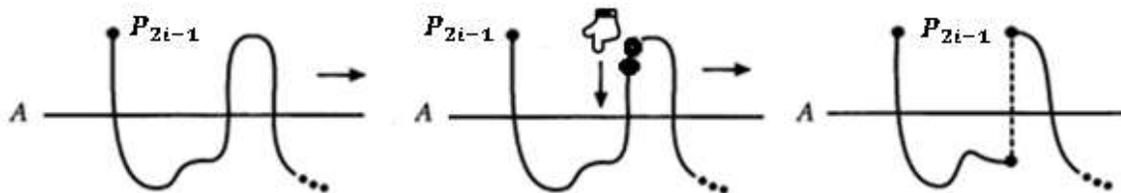


Figura 2.3.14 Haciendo puentes superiores que cruzan A una vez.

No se tiene, una representación de trenza para cualquier nudo o enlace. Pero ahora, si cada enlace se puede representar como una trenza cerrada.

Definición 2.3.8 El **índice de la trenza** de un enlace es el menor número de cuerdas en una trenza que corresponde a una representación de trenza cerrada del enlace.

Ejemplo 2.3.4 El índice de la trenza del nudo trivial es 1 y el índice de la trenza del nudo trébol es 2.

El índice de trenza es un invariante de nudos y enlaces, pero en general es difícil de calcular. Poner un nudo o enlace en forma de trenza y después contar las cuerdas da un límite superior en el índice de trenza, pero ¿cómo se sabe que no es una forma de la trenza del nudo o enlace con menos cuerdas?

Por ejemplo, si se observa a las trenzas de tres cuerdas. Si la primera cuerda cruza sobre la segunda, se le llama un cruce σ_1 . Pero si la primera cuerda cruza bajo la segunda, se le llama un cruce σ_1^{-1} . Si la segunda cuerda cruza sobre la tercera, se le llama un cruce σ_2 y si cruza por debajo de la tercera cuerda, esto es un cruce σ_2^{-1} (figura 2.3.15). Por lo tanto la trenza mostrada en la figura 2.3.16 se describe completamente enumerando los cruces ordenados de arriba hacia abajo como $\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1$. A esto se le

llama el **término** para la trenza. De manera más general, si se tiene una trenza con n cuerdas, se denota el cruce i -ésimo de la cuerda i sobre la cuerda $i + 1$ por σ_i y el cruce i -ésimo de la cuerda i bajo la cuerda $i + 1$ por σ_i^{-1} .

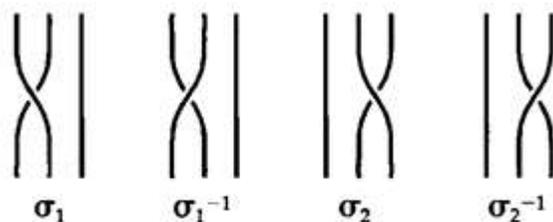


Figura 2.3.15 Cruces

Ejemplo 2.3.5 Encontrar el término de la siguiente trenza

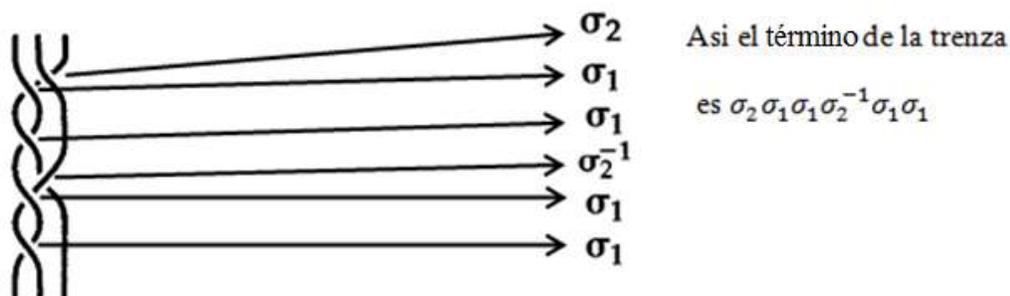


Figura 2.3.16 Encontrando el término de la trenza

Esta es una forma práctica para denotar nudos y enlaces. Si lo que se quiere es describir a un nudo particular. Sólo se dirá "Este nudo tiene la representación de trenza cerrada correspondiente al término $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_4 \sigma_1^{-1}$ ".

Además de simplificar las conversaciones sobre nudos y enlaces, hay algunas otras ventajas de esta notación. Por ejemplo, si $\sigma_i^{-1} \sigma_i$ forma parte del término que describe a una determinada trenza. Entonces geoméricamente, este par de cruces se parece a los que se muestran en la figura 2.3.17.

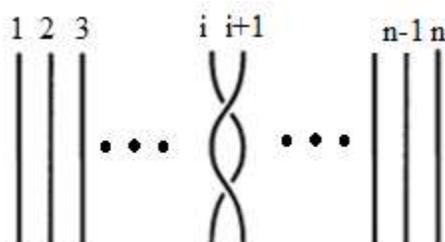


Figura 2.3.17 Los cruces correspondientes a $\sigma_i^{-1} \sigma_i$.

2.4 Nudos Primos

Para estudiar lo que son los nudos primos es necesario abordar la composición de nudos.

Definición 2.4.1 Dadas dos proyecciones de nudos, se puede definir un nuevo nudo obtenido por la eliminación de un pequeño arco de cada proyección del nudo y luego conectar los cuatro puntos finales con dos nuevos arcos como en la figura 2.4.1. Se llamará **composición** de dos nudos al nudo resultante.

Si se denotan los dos nudos por los símbolos **J** y **K**, entonces, su composición se denota por **J#K**. Se supone que las dos proyecciones no se superponen y se eligen los dos arcos fuera de cada proyección para evitar cualquier cruce.

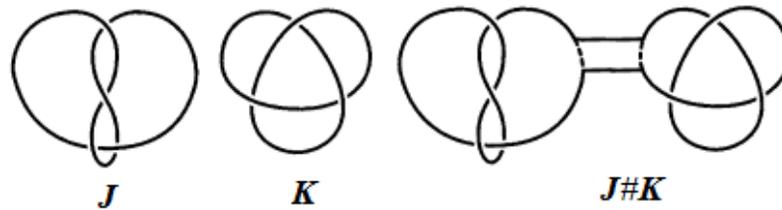


Figura 2.4.1 La composición **J#K** de dos nudos **J** y **K**

Se eligen los dos nuevos arcos de tal manera que no crucen las proyecciones de los nudos originales o entre sí (figura 2.4.2).

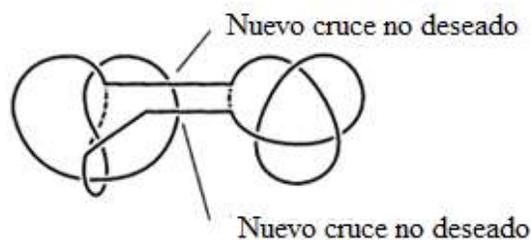


Figura 2.4.2 No es la composición de **J** y **K**

Definición 2.4.2 Se llamará a un nudo, **nudo compuesto** si puede expresarse como la composición de dos nudos, ninguno de los cuales es el nudo trivial. Esto es en analogía con los números enteros positivos, en los que se llama un entero compuesto si es el producto de números enteros positivos, ninguno de los cuales es igual a 1. Los nudos que hacen el nudo compuesto se denominan **nudos de factores**.

Téngase en cuenta que si se toma la composición de un nudo K con el nudo trivial, el resultado es de nuevo K , al igual que cuando se multiplica un número entero por 1, se obtiene el mismo número entero de nuevo (figura 2.4.3). Si un nudo no es la composición de cualesquiera dos nudos no triviales se llamará un **nudo primo**. Tanto el nudo trébol y el nudo ocho son nudos primos, aunque esto no es evidente.

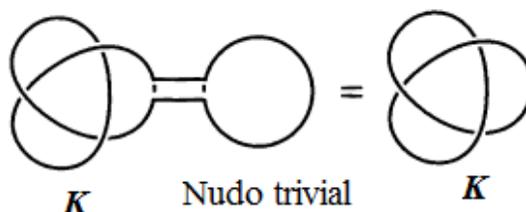


Figura 2.4.3 $K\#(\text{Nudo trivial})$ es solo K

Para el nudo $J\#K$ en la figura 2.4.1, es claramente compuesto. Se ha construido para que lo sea. Pero, ¿y el nudo en la figura 2.4.4 (b)? ¿Es compuesto?. De hecho, lo es. Si usted lo hace de cuerda y juega con el nudo, puede finalmente obtener una proyección que muestra que es compuesto.



Figura 2.4.4 Un nudo potencialmente compuesto

Una pregunta interesante. ¿Es el nudo trivial compuesto? A partir de la imagen de la figura 2.4.4(a), no parece compuesto. Pero tal vez hay una manera de enredar el nudo trivial para obtener una proyección que lo haga un nudo compuesto. Es decir, tal vez hay una imagen del nudo trivial que tiene un nudo no trivial a la izquierda, un nudo no trivial a la derecha, y dos hebras del nudo uniéndose a ellos (figura 2.4.5). Tal vez la parte de la proyección correspondiente al nudo de la derecha podría desenredar de alguna manera una parte de la proyección correspondiente al nudo de la izquierda, resultando el nudo trivial.



Figura 2.4.5 Podría ser este nudo al desenredarlo el nudo trivial

Es un poco desconcertante darse cuenta de que el nudo trivial fuera un nudo compuesto, entonces cada nudo sería un nudo compuesto. Puesto que cada nudo es la composición de sí mismo con el nudo trivial, cada nudo sería la composición de sí mismo con los nudos de los factores no triviales que componen el nudo trivial. De hecho, el nudo trivial no es un nudo compuesto.

Así que no hay manera de tomar la composición de dos nudos no triviales y desanudarlos. Se puede pensar en este resultado como análogo al hecho de que el número entero 1 no es el producto de dos enteros positivos, cada uno mayor que 1.

Ejemplo 2.4.1 Al observar el nudo de la figura 2.4.6 (a) no parece ser un nudo primo, sin embargo se pueden aplicar movimientos elementales de nudos de manera que se tenga sólo una deformación diferente del nudo figura 2.4.6 (b).

Por último en la figura 2.4.6 (c) se ven los dos nudos separados totalmente de tal manera que los puentes que se utilizaron no intersectan al otro mucho menos al mismo nudo. Por lo tanto el nudo de la figura 2.4.6 (a) es un nudo compuesto.

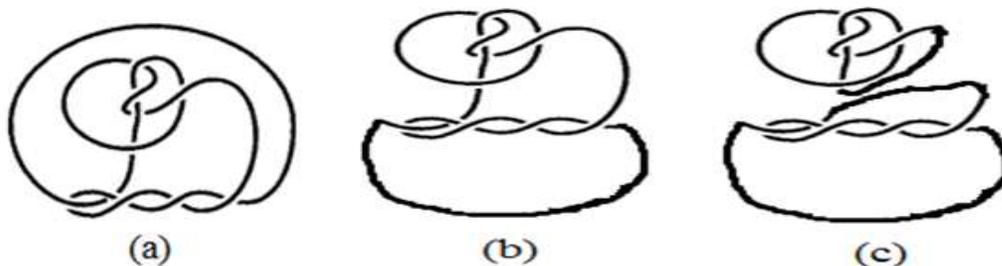


Figura 2.4.6

Ejemplo 2.4.2 Dada la proyección regular del nudo figura 2.4.7(a), aplicar isotopía hasta obtener la proyección conveniente para descomponer el nudo figura 2.4.7 (b), ahora hacer los cortes y pegar los extremos correspondientes de los arcos figura 2.4.7(c), por último aplicar isotopía y hasta que los nuevos nudos tengan una proyección regular figura 2.4.7 (d).

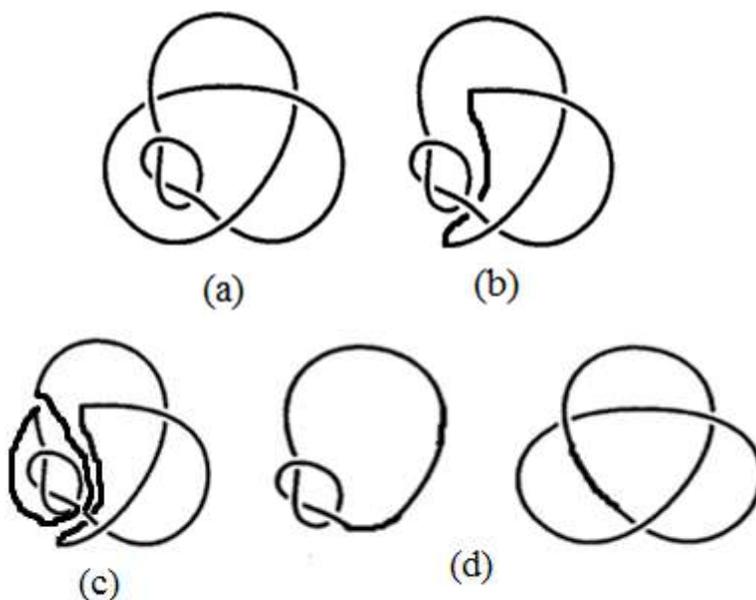


Figura 2.4.7

Una manera en que la composición de los nudos se diferencia de multiplicar números enteros es que hay más de una manera de tomar la composición de dos nudos. Se tiene la opción de dónde eliminar el arco desde el exterior de cada proyección. ¿Esta elección afectará el resultado? Sorprendentemente, la respuesta es sí. A menudo es posible construir dos nudos compuestos diferentes desde el mismo par de nudos \mathbf{J} y \mathbf{K} .

Primero se tiene que poner una orientación sobre los nudos.

Definición 2.4.3 Una **orientación** es definida por la elección de una dirección donde se viaja alrededor del nudo. Esta dirección es denotada mediante la colocación de flechas dirigidas de manera coherente a lo largo de la proyección del nudo en la dirección de su elección.

Así pues un nudo **orientado** es aquel que satisface la definición anterior. Al formar la composición de dos nudos orientados \mathbf{J} y \mathbf{K} , hay dos posibilidades. O bien la orientación de \mathbf{J} coincida con la orientación de \mathbf{K} en $\mathbf{J}\#\mathbf{K}$, lo que resulta una orientación para $\mathbf{J}\#\mathbf{K}$, o la orientación de \mathbf{J} y \mathbf{K} no coinciden en $\mathbf{J}\#\mathbf{K}$. Todas las composiciones posibles entre dos nudos donde las orientaciones no coinciden da como resultado el mismo nudo compuesto; sin embargo, es posible que el nudo compuesto generado sea distinto al que se forma cuando las orientaciones coinciden (figura 2.4.8).

Para convencerse de que las dos primeras composiciones en la figura 2.4.8 realmente no dan el mismo nudo, se puede reducir el tamaño de J abajo en la primera

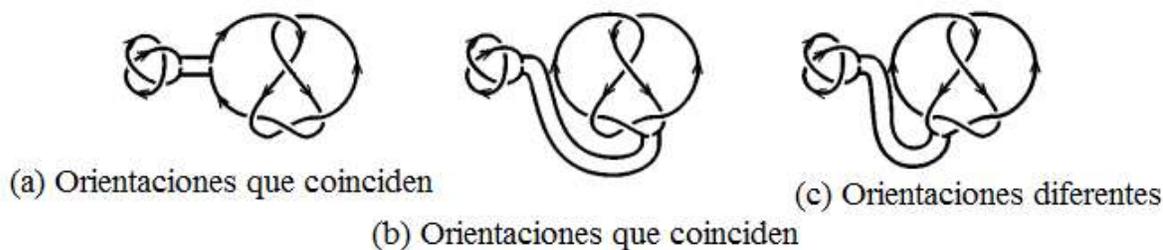


Figura 2.4.8

imagen (figura 2.4.9) y luego deslizarlo alrededor de K hasta obtener la segunda imagen (figura 2.4.9). Aunque este no será el caso, en general, en este ejemplo particular, la tercera composición en la figura 2.4.8 también da el mismo nudo como las dos composiciones anteriores.

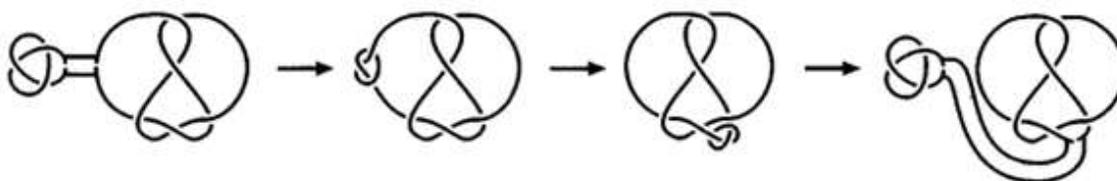


Figura 2.4.9 Dos composiciones de nudos que son las mismas

En la teoría matemática de nudos, se llaman nudos primos a los nudos que no es posible descomponerlos utilizando la operación de suma de nudos.

¿Cuándo es un nudo primo?

En la forma descrita se dice lo siguiente (figura 2.4.10): Haga un esquema regular de $K_1 \# K_2$, la suma conexa de K_1 y K_2 se puede construir mediante la colocación de los diagramas regulares de K_1 y K_2 lado a lado y luego conectándolos por medio de dos segmentos paralelos. Por lo tanto, si un nudo K se puede descomponer en K_1 y K_2 , es decir, K tiene un diagrama regular del tipo mostrado en la figura 2.4.10. Sin embargo, aunque la teoría indica que en la práctica, no se puede deducir a partir del diagrama normal si un nudo es primo o no.

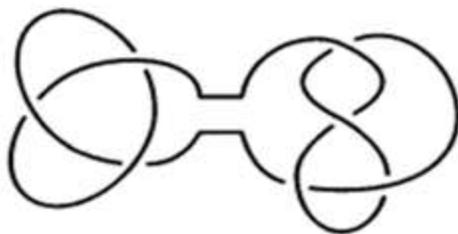


Figura 2.4.10

Ejemplo 2.4.3 El diagrama regular del nudo, K que se muestra en la figura 2.4.11 no es de la forma de la figura 2.4.10, pero K no es un nudo primo.

Recientemente, este problema se ha resuelto por completo en el caso de nudos alternos

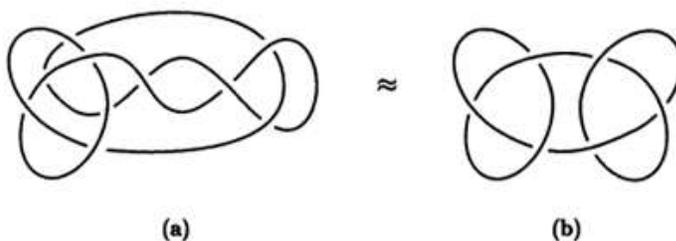


Figura 2.4.11

Definición 2.4.4 Un nudo K se dice que es primo si no es compuesto es decir para L, M tal que $K = L \# M$, uno de los nudos L, M es trivial.

Un resultado de **Horst Schubert** (pie de página “**resultado probado por Schubert en su tesis doctoral Dic eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten (1949)**”) afirma que todo nudo no trivial posee una descomposición única en nudos primos. Sin embargo no es todo tan sencillo, ya que la definición de nudo primo automáticamente plantea la cuestión de cómo determinar si un nudo es primo o no, igual cuando se pregunta para un natural. Para un número pequeño de cruces existen tablas de nudos, pero a partir de cierto número la cantidad de nudos con ese determinado número de cruces tiene un tamaño considerable. En la siguiente tabla, aparece el número de nudos primos con n cruces, hasta 16 cruces, se puede verificar la complejidad del problema cuando tienen muchos cruces.

Numero de cruces n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nudos primos con n cruces	0	0	1	1	2	3	7	21	49

Numero de cruces n	10	11	12	13	14	15	16
Nudos primos con n cruces	165	552	2176	9988	46972	253293	1388705

Otro problema planteado es si el nudo trivial es compuesto. Se debe de tener cuidado ya que de ser compuesto es necesario cambiar las definiciones previas de lo contrario todo nudo seria compuesto, por ser la composición del mismo con el nudo trivial y en ese caso el nudo primo deja de tener sentido. ¿y cómo puede ser compuesto el nudo trivial? Al ver la proyección del nudo trivial como una cuerda sin cruces parece imposible que pueda serlo, pero se debe tener en cuenta que cada nudo tiene formas distintas de representarse, equivalentes entre ellas, aunque en el momento de realizar composiciones se pueden tener resultados diferentes. ¿Es posible que la composición de dos nudos no triviales, resulte ser el nudo trivial? La respuesta es que no, claro que no es un problema sencillo al igual que decir si una proyección resulta ser equivalente del nudo trivial.

En la figura 2.4.12 se presenta una tabla de nudos primos con menos de 8 cruces, aunque se conocen más. Los números que aparecen a la derecha de cada nudo son para diferenciar del resto de nudos. El número indica el número mínimo de cruces del diagrama plano del nudo y el subíndice es una forma de enumerar los nudos con el mismo número de cruces.

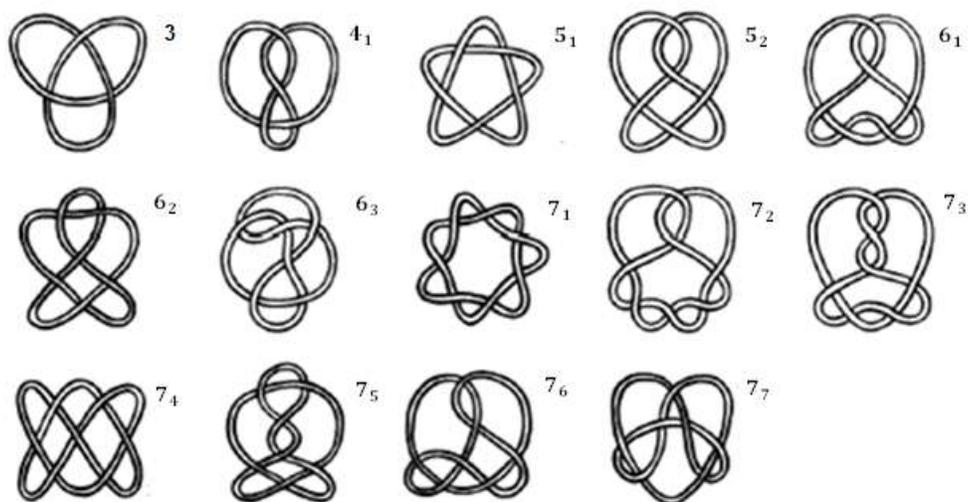


Figura 2.4.12

2.5 Nudos toros

2.5(A) Nudos toros

Los nudos que se encuentran en un toro sin nudo, sin cruzarse sobre o bajo ellos mismos, se llaman nudos toros. La figura 2.5.1 es una imagen del nudo trébol en un toro.

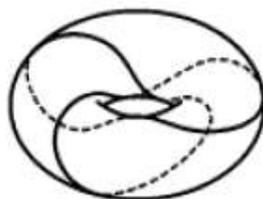


Figura 2.5.1 El nudo trébol en el toro

Definición 2.5.1 Se llamará a una curva que se ejecuta una vez en el corto camino alrededor del toro una **curva meridiana**.

Definición 2.5.2 Una curva que se ejecuta una vez en el largo camino alrededor del toro se llama una **curva de longitud** (figura 2.5.2).

El nudo trébol en la figura 2.5.3 envuelve tres veces meridionalmente alrededor del toroide y dos veces en sentido longitudinal. Se puede ver que estas cifras son correctas, ya que envuelven el toro añadiendo el meridiano y curvas de longitud en el que la estructura de trébol se sitúa y luego contando el número de veces que el trébol atraviesa cada uno. El

trébol cruza la longitud tres veces. Con el fin de hacerlo, debe envolverse alrededor del toroide en la dirección meridional tres veces. El trébol cruza el meridiano dos veces, por lo que debe envolverse alrededor del toro en la dirección longitudinal dos veces. Se llama al nudo trébol un nudo $(3,2)$ -toro (figura 2.5.3). La figura 2.5.4 es un nudo $(4,3)$ -toro. Cada nudo toro es un nudo (p,q) -toro para algún par de enteros. De hecho, los dos números enteros siempre serán primos relativos (es decir, su máximo común divisor es 1).

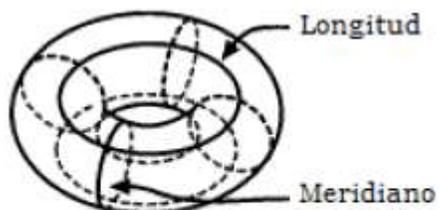


Figura 2.5.2 Un meridiano y longitud en un toro

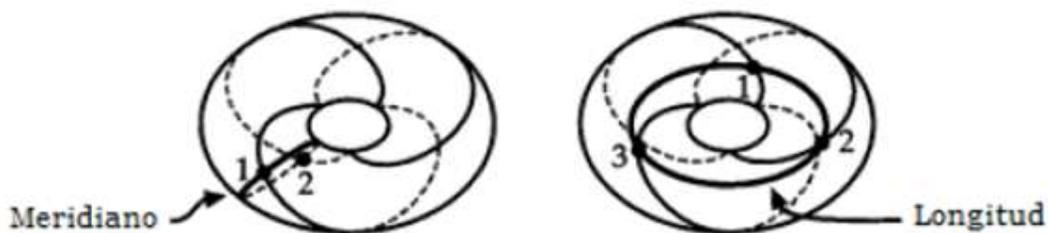


Figura 2.5.3 El trébol es un nudo $(3,2)$ -toro

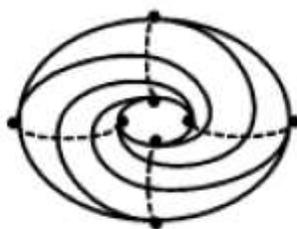


Figura 2.5.4 Un nudo $(4,3)$ -toro

Este siguiente nudo (figura 2.5.5) se encuentra en un toro, pero no se ve como el nudo (p,q) -toro que se ha trazado. Sin embargo, se puede deformar hasta que se vea más como el nudo toro que es.

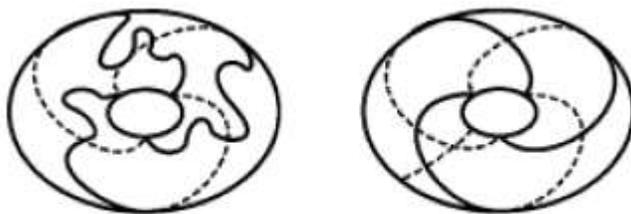


Figura 2.5.5 Dos imágenes del mismo nudo toro

Definición 2.5.3 Un nudo (o enlace) es un nudo toro si es equivalente a un nudo (o enlace) que se puede extraer sin ningún tipo de puntos de intersección en el toro trivial.

El toro trivial es un Toro sólido T obtenido mediante la rotación alrededor del eje del círculo $m: (x - 2)^2 + y^2 = 1$, en el plano xy , que tiene como centro el punto $(2,0)$, radio de unidad 1, la figura 2.5.6

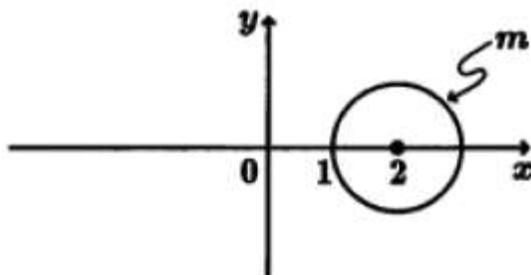


Figura 2.5.6

Una forma alternativa de construir el toro trivial es: tómesese un cilindro en \mathbb{R}^3 con el círculo unidad $x^2 + y^2 + 0 = 1$, C_1 en el plano xy como su base y el círculo unidad $x^2 + y^2 + 1 = 1$, C_2 como su base superior, figura 2.5.7 (a). Ahora se tiene que pegar entre sí C_1 y C_2 en \mathbb{R}^3 de manera que C , el eje central del cilindro, se convierte en el nudo trivial, figura 2.5.7 (b). [Nota: si se pegan C_1 y C_2 en la manera que se muestra en la figura 2.5.7 (c), entonces, C no es equivalente al nudo trivial y por lo tanto el toro no es el toro trivial.]

Un nudo (o enlace) que se encuentra en el toro trivial se dice que es un nudo toro, y se puede expresar en términos de una forma estándar determinada.

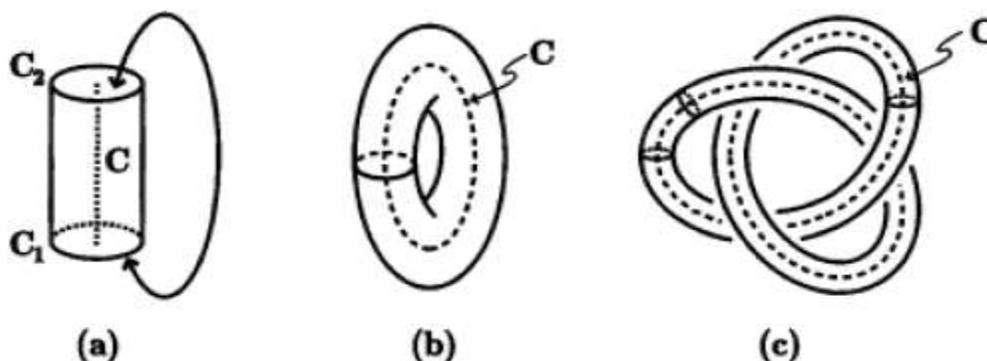


Figura 2.5.7

Úsele más concretamente el cilindro por encima de la altura con unidad 1 y como su base un círculo unitario en el plano xy . Usted puede asignar a la base de C_1 y C_2 a la parte superior de los r puntos A_0, A_1, \dots, A_{r-1} y B_0, B_1, \dots, B_{r-1} , respectivamente. Las coordenadas son las siguientes, véase también la figura 2.5.8 (a):

$$A_0 = (1,0,0), A_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{r}, 0 \right), \dots, A_{r-1} = \left(\cos \frac{2(r-1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r-1)\pi}{r}, 0 \right)$$

$$B_0 = (1,0,1), B_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{r}, 1 \right), \dots, B_{r-1} = \left(\cos \frac{2(r-1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r-1)\pi}{r}, 1 \right)$$

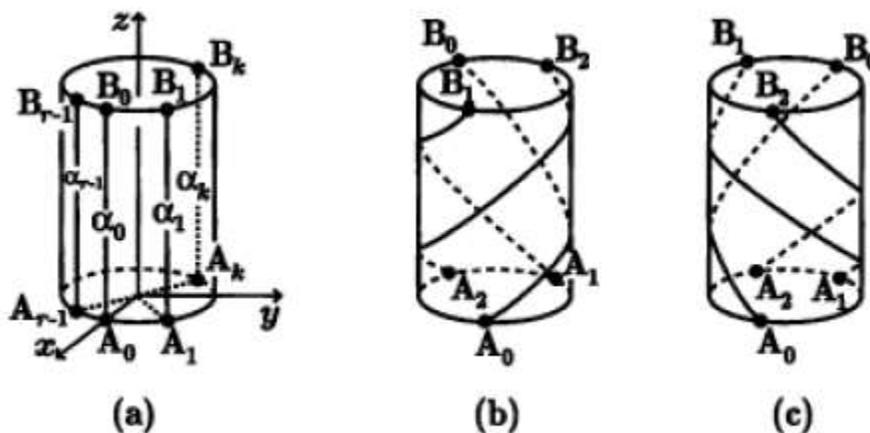


Figura 2.5.8

Una vez asignado los puntos, se trazan los segmentos α_k del punto A_k hasta el punto B_k en el cilindro ($k = 0, 1, \dots, r - 1$). Ahora, manténgase la base C_1 , fija y dar a todo el

cilindro una torsión mediante la rotación de la parte superior alrededor del eje z en un ángulo de $\frac{2\pi q}{r}$ (En este caso, q es o bien un número entero positivo o negativo).

Ejemplo 2.5.1

Sea $q = 2$ y $r = 3$.

$$A_0 = (1,0,0)$$

$$A_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}, 0 \right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

$$A_2 = \left(\cos \frac{2(3-1)\pi}{3}, \sin \frac{2(3-1)\pi}{3}, 0 \right) = \left(\cos \frac{4\pi}{3}, \sin \frac{4\pi}{3}, 0 \right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

$$B_0 = (1,0,1)$$

$$B_1 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$$

$$B_2 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$$

Ahora cuanto va a rotar cada punto.

$$\frac{2\pi q}{r} = \frac{2(2)\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

En la figura 2.5.8 (b) el caso $q = 2$ y $r = 3$ se muestra, mientras que en figura 2.5.8 (c) muestra el caso $q = -2$ y $r = 3$.

Por último, se va a identificar el punto $(x, y, 0)$ de C_1 hasta el punto $(x, y, 1)$ de C_2 (como antes, el centro C se convierte en el nudo trivial). Esto crea un solo toro trivial T , con los r segmentos $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$ que han sido transformados en un nudo (o enlace) en su superficie. Este nudo (o enlace) se llama nudo (q, r) -toro (o enlace) y se denota por $K_{q,r}$, la figura 2.5.9

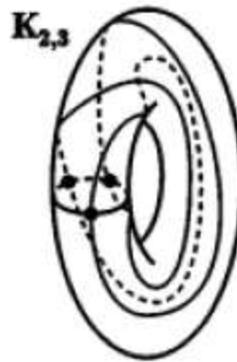


Figura 2.5.9

Considérese el círculo m que se utilizó originalmente para formar el T toro trivial. Además, supóngase K es el límite de un disco que se encuentra en T , la figura 2.5.10



Figura 2.5.10

Estos nudos triviales m y K , o enlaces triviales consisten en algunos de estos nudos triviales en T , no es un nudo toro como se describe anteriormente. De hecho, se va a considerar este tipo de nudos (o enlaces) para corresponder al caso $r = 0$, tal que se dice que m es un nudo $(1,0)$ -toro, $K_{1,0}$. El nudo, K , se llamará un nudo $(0,0)$ -toro, $K_{0,0}$.

Ejemplo 2.5.2 $K(3,2)$ y $K(-3,2)$, en la figura 2.5.11, son equivalentes al trébol.

En este caso $q = 3$ y $r = 2$.

$$A_0 = (1,0,0)$$

$$A_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{2}, \sin \frac{2\pi}{2}, 0 \right) = (-1,0,0)$$

$$B_0 = (1,0,1)$$

$$B_1 = (-1,0,1)$$

La rotación para los puntos es:

$$\frac{2q\pi}{r} = \frac{2(3)\pi}{2} = 3\pi \equiv 540^\circ$$

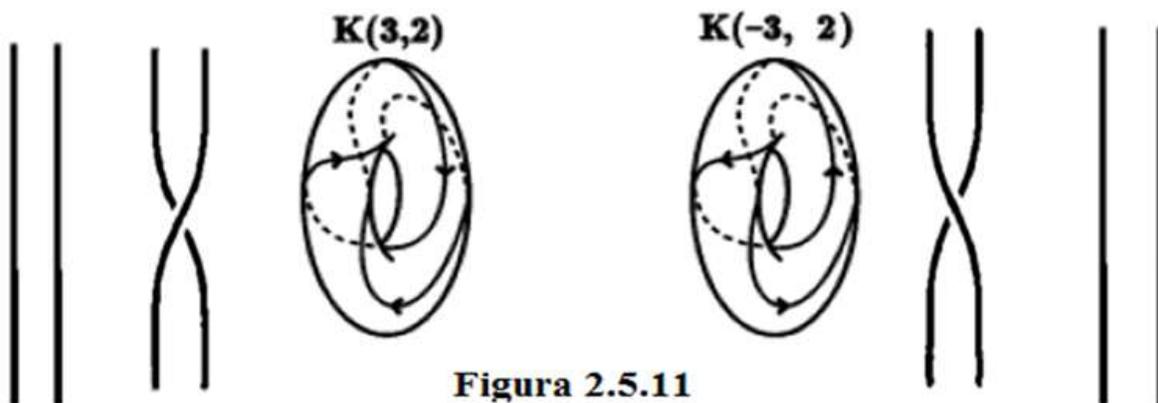


Figura 2.5.11

A partir de un nudo toro $K_{q,r}$ se puede obtener la orientación del nudo toro $K(q,r)$ o $K(-q,-r)$. Sin embargo, también es posible obtener desde el enlace de toro $K_{q,r}$ un enlace toro orientado que no es ni $K(q,r)$ ni tampoco $K(-q,-r)$.

Ejemplo 2.5.3 Supóngase que $q = 4$ y $r = 2$, y α_0 tiene una orientación hacia arriba, mientras que la asignación de α_1 una orientación hacia abajo, figura 2.5.12 (a).

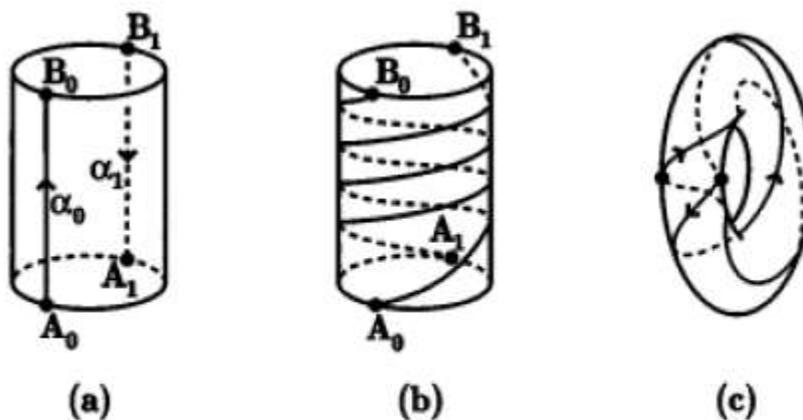


Figura 2.5.12

Entonces, mediante la identificación de los extremos como se ha descrito anteriormente, se obtendrá un enlace toro orientado, figura 2.5.12 (b) y (c). Sin embargo, este enlace toro no es ni $K(4,2)$ ni $K(-4,-2)$. Además, no existen q y r para que se convertirá en un enlace

toro orientado del tipo $K(q, r)$. Por lo tanto para evitar tal confusión que ocurre, se van a considerar, desde aquí en adelante solamente nudos toros o enlaces orientados $K(q, r)$, con la orientación asignada como se ha descrito anteriormente.

¿Cómo hacer para dibujar un nudo (p, q) -toro de manera diferente a la que se acaba de mostrar?

Ejemplo 2.5.4 Supóngase que se quiere hacer el nudo $(5, 3)$ -toro. Este nudo envuelve alrededor del toro cinco veces meridionalmente y cruza tres veces su longitud. Se marcan cinco puntos en el ecuador exterior del toro y cinco puntos en el ecuador en el interior (figura 2.5.13), es decir el cinturón que posee el toro. También se quiere que el nudo se envuelva tres veces longitudinalmente alrededor del toroide. Coincidiendo cada punto que se marca en el exterior del ecuador del toro al punto correspondiente en el ecuador dentro, la utilización de un segmento que los une directamente en la parte inferior del toro (figura 2.5.14). Ahora, se da a cada punto del ecuador exterior una $3/5$ de una vuelta en sentido horario de su posición original con respecto al punto del ecuador interior (lo que significa desplazarlo por delante tres puntos) y se utiliza segmentos para unir los puntos en la parte superior del toro (figura 2.5.15). El resultado es un nudo que viaja tres veces

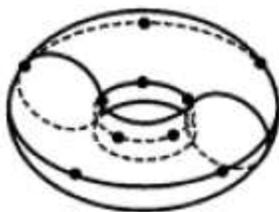


Figura 2.5.13 Marcar puntos de los ecuadores

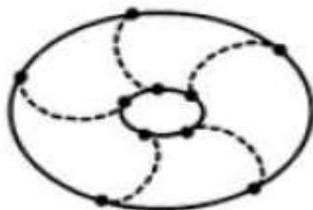


Figura 2.5.14 Coloque puntos en el círculo interior del toro.

longitudinalmente alrededor del toro y cinco veces meridionalmente.

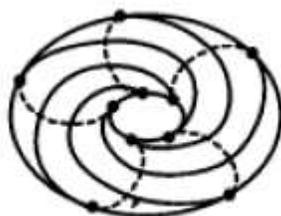


Figura 2.5.15 La construcción de un nudo $(5,3)$ -toro

Del mismo modo, si se quiere dibujar el nudo (p, q) -nudo, que se acaban de colocar p puntos alrededor de los ecuadores dentro y fuera del toro, agregue en el interior y fuera puntos directamente a través de la parte inferior del toro y luego fije cada punto fuera hasta el punto en el interior que son q puntos en sentido horario por delante, utilizando una cadena que pasa sobre la parte superior del toro.

Teorema 2.5.1 Todo nudo (p, q) -toro es también un nudo (q, p) -toro.

Prueba

Sea un nudo $K(p, q)$ en un toro T , Tómese un disco del toro de manera que se situé en donde no toque el nudo. Ver la figura 2.5.16.a, extender este disco lo más que sea posible en el toro figura 2.5.16.b. Se puede deformar el toro T con un componente límite en dos bandas que están unidas una con la otra. Como se produce la deformación, llevar a lo largo del toro la acumulación de puntos del nudo $K(p, q)$ por medio de isotopías y movimientos Reidemeister de manera de adelgazar las bandas figura 2.5.16.c. La banda más corta corresponde a un meridiano del toro, mientras que la banda más larga corresponde a una longitud del toro.

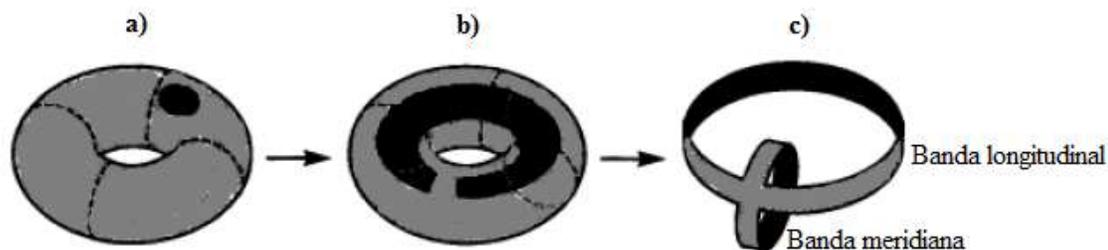


Figura 2.5.16 Imágenes de un toro con una frontera

Tome la banda más larga y agacé un giro ver figura 2.5.17.a. Luego tómesese la banda más corta y gire (ver figura 2.5.17.b.) por lo anterior se pueden deformar nuestras dos bandas pegadas haciéndolas más anchas para formar el toro como componentes de límites, pero ahora con las funciones de las dos bandas invertidas. La banda que originalmente correspondió a una longitud en el toro T anterior ahora corresponde a un meridiano en el nuevo toro T' , y la banda que originalmente correspondía a un meridiano en el anterior del toro T ahora corresponde a una longitud en el nuevo toro T' . Así el meridiano y la longitud se han intercambiado, el nudo es ahora el nudo $K(q, p)$ en el nuevo toro T' .

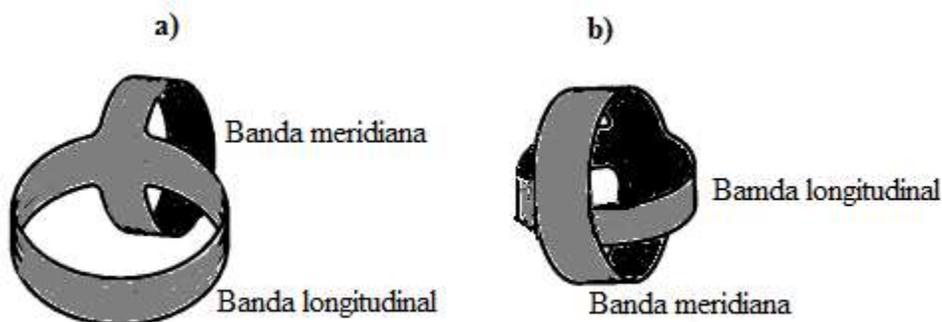


Figura 2.5.17 Giro de las bandas

Ejemplo 2.5.5 Si se tiene un nudo $(3,2)$ -toro, quiere decir que tiene dos longitudes y tres meridianos en el toro. Si se aplica el teorema anterior vea la figura 2.5.18, mirando la secuencia de pasos se puede observar cómo se acumulan todos los puntos del nudo en el toro de manera de adelgazar las bandas.

Luego hacen los respectivos movimientos de bandas para intercambiar los meridianos por longitudes y formar un nuevo toro.

Al final formado el toro el resultado es el nudo $(2,3)$ -toro.

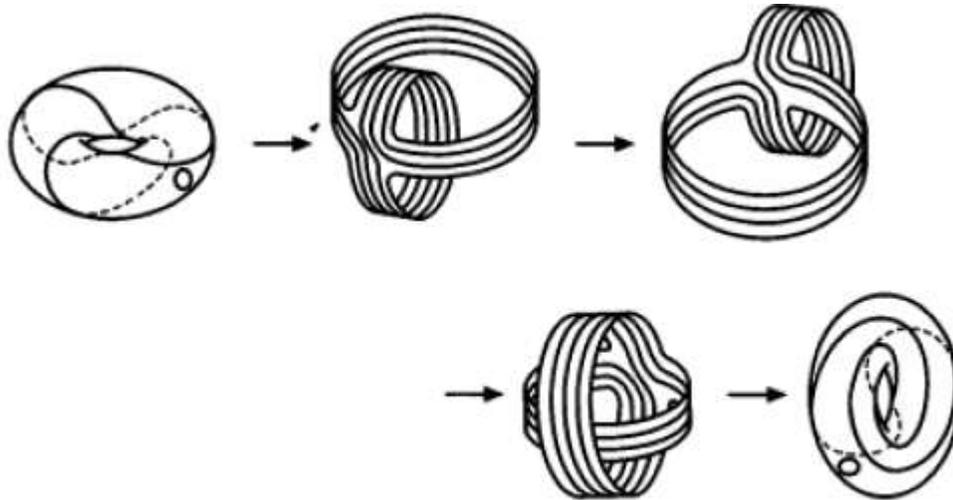


Figura 2.5.18

2.5(B) La clasificación de los nudos Toros

En este y en los siguientes apartados considérese principalmente nudos toros en lugar de enlaces toro. La mayoría de los resultados, sin embargo, se puede demostrar que cumplen también para los enlaces toro.

Si se dibujan los diagramas que corresponden a los nudos toros en la siguiente proposición.

Proposición 2.5.1 Supóngase $\text{mcd}(q, r) = 1$ y $r \neq 0$.

- (1) Si $q = 0, \pm 1$ o $r = \pm 1$, entonces $\mathbf{K}(q, r)$ es el nudo trivial.
- (2) Si q, r son enteros que no son iguales a $0, \pm 1$ entonces
 - (i) $\mathbf{K}(-q, r)$ es la imagen de espejo de $\mathbf{K}(q, r)$.
 - (ii) $\mathbf{K}(-q, -r)$ es el nudo toro con orientación inversa para $\mathbf{K}(q, r)$.

Prueba

- (1) Por hipótesis $q = 0$ y $r = \pm 1$, esto es un $(0, \pm 1)$ -toro lo cual quiere decir que solo tiene una longitud y cero meridiano. El único punto es $A_0 = (1, 0, 0)$ y $B_0 = (1, 0, 1)$ con un giro de $\frac{2\pi q}{r} = \frac{2\pi(0)}{\pm 1} = 0$ por lo tanto no es más que el nudo trivial figura 2.5.19.

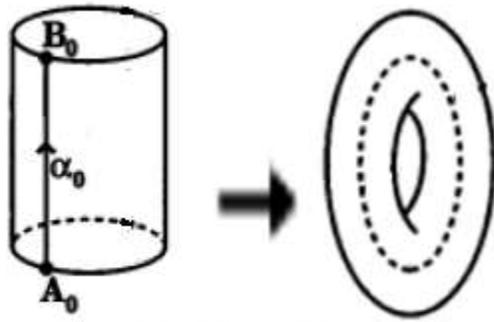


Figura 2.5.19

(2)

(i) Por hipótesis se tiene que q, r son enteros que no son iguales a $0, \pm 1$. Ahora sea $K(-q, r)$ un nudo toro, con sus puntos

$$A_0 = (1, 0, 0), A_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{r}, 0 \right), \dots, A_{r-1} = \left(\cos \frac{2(r-1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r-1)\pi}{r}, 0 \right)$$

$$B_0 = (1, 0, 1), B_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{r}, 1 \right), \dots, B_{r-1} = \left(\cos \frac{2(r-1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r-1)\pi}{r}, 1 \right)$$

Con una rotación de:

$$\frac{2\pi(-q)}{r} = -\frac{2\pi q}{r}$$

Es decir que la rotación es en sentido de las agujas del reloj y como para para el nudo $K(-q, r)$ son los mismos puntos pero con rotación en contra de las agujas del reloj por lo tanto $K(-q, r)$ es la imagen de espejo del nudo $K(q, r)$ ver figura 2.5.20.

(ii)



En contra de las
agujas del reloj



A favor de las
agujas del reloj

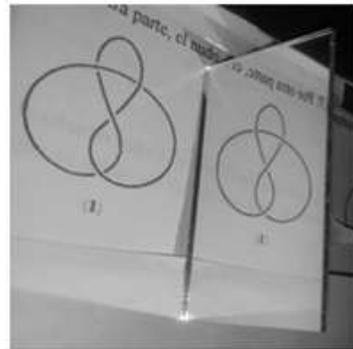


Figura 2.5.20

(iii) Sea $K(q, r)$ un nudo toro, con sus puntos

$$A_0 = (1,0,0), A_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{r}, 0 \right), \dots, A_{r-1} = \left(\cos \frac{2(r-1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r-1)\pi}{r}, 0 \right)$$

$$B_0 = (1,0,1), B_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{r}, 1 \right), \dots, B_{r-1} = \left(\cos \frac{2(r-1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r-1)\pi}{r}, 1 \right)$$

Los puntos para el nudo toro $\mathbf{K}(-q, -r)$ son

$$A'_0 = (1,0,0)$$

$$A'_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{-r}, \sin \frac{2\pi}{-r}, 0 \right), \dots, A'_{r-1} = \left(\cos \frac{2(-r-1)\pi}{-r}, \sin \frac{2(-r-1)\pi}{-r}, 0 \right)$$

$$A''_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{-r}, 0 \right), \dots, A''_{r-1} = \left(\cos \frac{2(r+1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r+1)\pi}{r}, 0 \right)$$

$$B'_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{-r}, 1 \right), \dots, B'_{r-1} = \left(\cos \frac{2(r+1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r+1)\pi}{r}, 1 \right)$$

Se sabe que las funciones seno y coseno son periódicas (ver figura 2.5.21), los puntos serán los mismos excepto el orden a la hora de colocarlos, es decir el punto $A_i = A'_j$ con $j \neq i$, pero se está hablando de los mismos puntos solo que hay que colocarlos en otro orden.

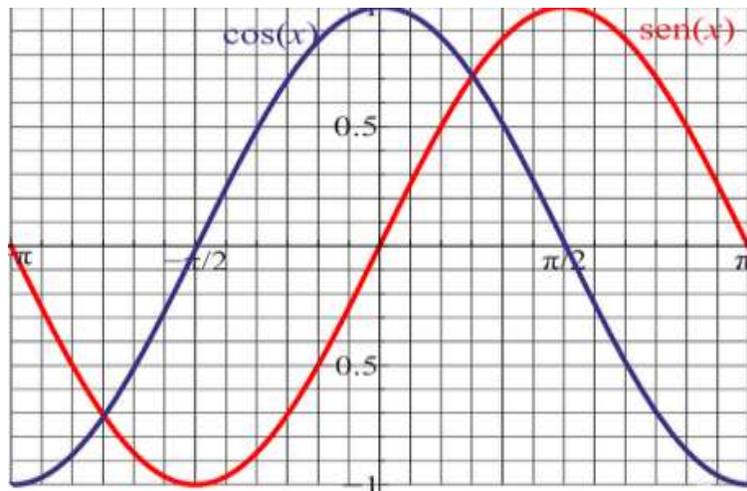


Figura 2.5.21

■

Un paso natural, desde el punto de vista de la topología, es para "rellenar" el interior del toroide trivial, el sólido resultante es el toro sólido trivial V . En sentido estricto, el toro sólido trivial se obtiene haciendo girar una vez alrededor del eje y el disco $D^2: \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$; el límite de este disco es el círculo m en la figura 2.5.6. Por lo tanto, V es homeomorfo a $D^2 \times S^1$.

Proposición 2.5.2. Supóngase que V es un toroide sólido trivial en S^3 . Si V^0 es el conjunto de todos los puntos internos de V , entonces $S^3 - V^0$ también es un toro sólido trivial en S^3 .

Prueba

Considere la posibilidad de que S^3 se construye a partir de dos 3-bolas que han sido pegadas a lo largo de sus respectivos límites que son 2-esferas.

Se puede modificar estas dos 3-bolas para que sean dos sólidos cilindros, W_1 y W_2 ahora pegar estos cilindros juntos a lo largo de su superficie. En primer lugar, se pega la parte superior, base y superficie lateral de W_1 a la parte superior, base y superficie lateral de W_2 , ver figura 2.5.22 (a).

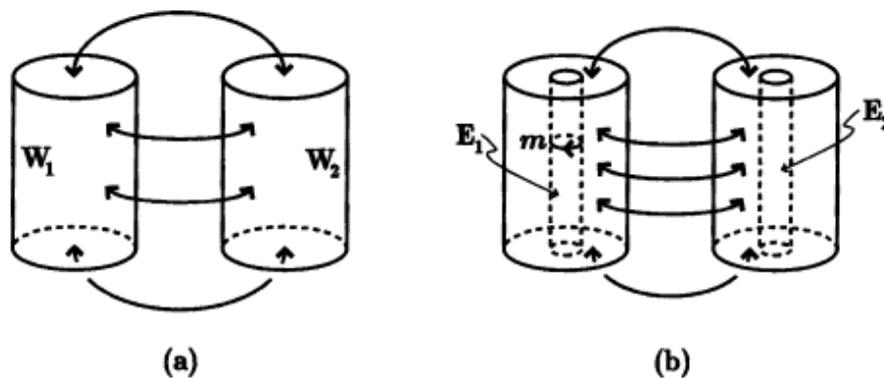


Figura 2.5.22

A continuación, considere relativamente pequeños, en términos de diámetro, los cilindros E_1 y E_2 de W_1 y W_2 , respectivamente, la figura 2.5.22 (b). Estos dos cilindros pueden ser considerados como los centros "engordados" de W_1 y W_2 . Si ahora pega W_1 y W_2 a lo largo de sus fronteras de la manera anterior, entonces E_1 y E_2 forman un toroide sólido trivial, V , en S^3 ($= W_1 \cup W_2$). Por lo tanto, para demostrar la proposición 2.5.2, es suficiente mostrar

que el sólido obtenido mediante la extracción de los puntos internos de este V de S^3 es también un toroide sólido.

Como en la figura 2.5.23(a), en cada uno W_1 y W_2 crear un rectángulo. Estos dos rectángulos forman un disco D en S^3 cuando se pegan las superficies de W_1 y W_2 . Para ser precisos, se pegan juntos los bordes ab y $a'b'$, bc y $b'c'$ y cd y $c'd'$ la figura 2.5.23 (b). Si ahora se hacen girar el disco una vez alrededor E_1 y E_2 , que también han sido pegadas entre sí en la forma prescrita, entonces lo que se tiene es $S^3 - V^0$, y por la construcción de este también es un toroide sólido.

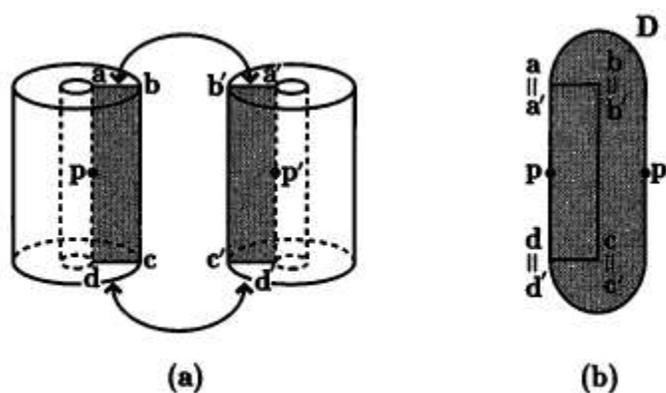
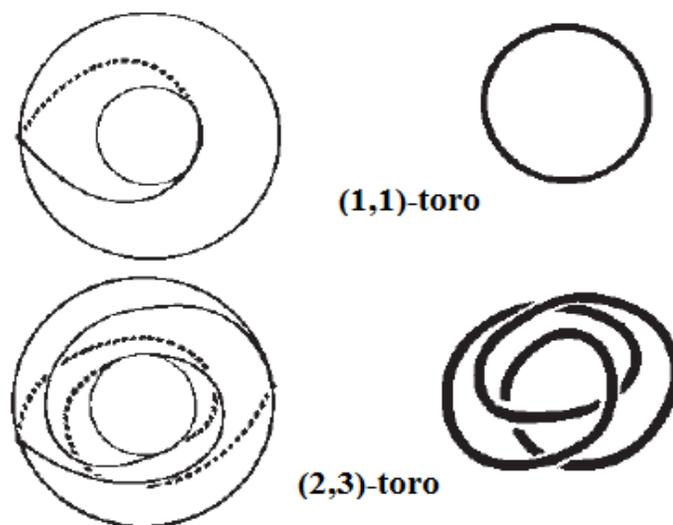


Figura 2.5.23

Para finalizar vea algunos nudos toros dentro y fuera del toro, ver figura 2.5.24.



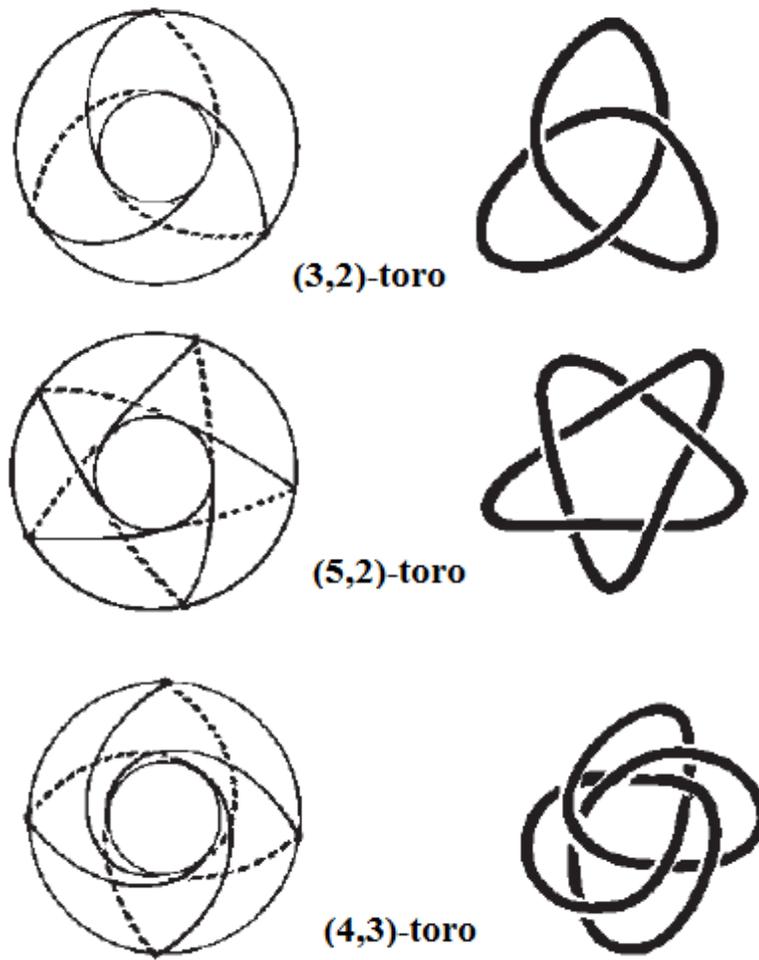


Figura 2.5.24

CAPITULO III

Antes de dar a conocer el grupo fundamental del nudo, se hará un estudio del grupo de la trenza analizando cada componente que hace posible que tenga esta estructura algebraica.

3.1 El Grupo de la Trenza

Supóngase que B_n es el conjunto de todas las n – trenzas (para ser más precisos, todas las clases de equivalencia de estas trenzas). Para dos elementos en B_n , es decir, para dos n – trenzas α y β , es posible definir un producto. En primer lugar, pegar la base inferior del rectángulo C_1 que contiene α a la base superior del rectángulo C_2 que contiene β . Al pegar juntos los dos rectángulos se produce un nuevo rectángulo C_3 en el que existe una trenza que ha sido creada a partir de la yuxtaposición vertical de α y β , figura 3.1.1 (Es de notar que se puede crear un rectángulo como el de α y β por la reducción a la mitad del nuevo rectángulo C_3).

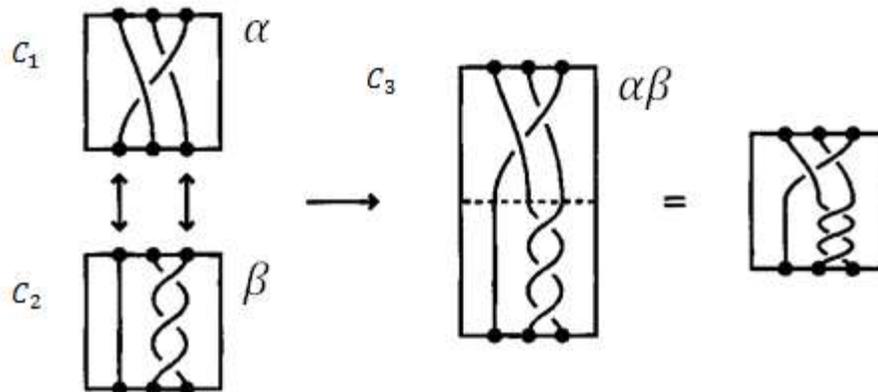


Figura 3.1.1 Creación de una trenza

La trenza contenida en C_3 se llama el producto de α y β denota por $\alpha\beta$.

Del mismo modo, se puede definir el producto, $\beta\alpha$, de β y α . Pero, en general, no es verdad que $\alpha\beta = \beta\alpha$, es decir, el producto de trenzas no es conmutativo.

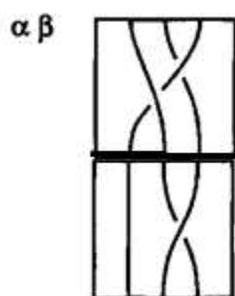
Ejemplo 3.1.1 Mostrar que los dos productos $\alpha\beta$ y $\beta\alpha$, de α, β en la figura 3.1.2 (a) y (b), no son equivalentes.



Figura 3.1.2

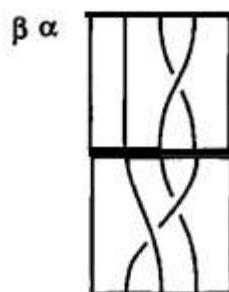
Solución:

El producto $\alpha\beta$ es:



Su forma de permutación es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3)$

El producto $\beta\alpha$ es:



Su forma de permutación es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)$

Dado que sus formas de permutaciones son diferentes se tiene que las trenzas no son equivalentes.

Por otra parte, aunque el producto no es conmutativo, se tiene que cumple con la asociatividad, es decir,

Sean α , β y γ trenzas en B_n .



Por lo que $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

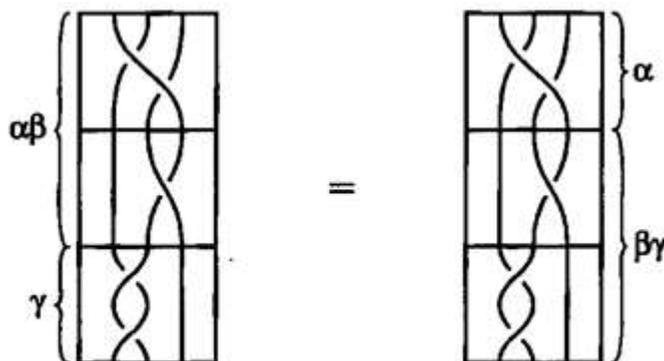


Figura 3.1.3 Asociatividad en trenzas

Hasta ahora se ha descrito un conjunto B_n , un producto en el conjunto y se ha verificado que sus elementos cumplen la ley asociativa. Por lo tanto, la pregunta natural se considera que es, ¿Es posible hacer de B_n un grupo bajo la acción del producto?.

Para demostrar esto, se debe encontrar un elemento unidad y un elemento inverso. La unidad e es simplemente la trenza trivial, figura 2.3.7. Se sigue fácilmente a partir de la figura 3.1.4 que, con independencia de la trenza, α , $\alpha e = \alpha$ y también se cumple que $e\alpha = \alpha$.

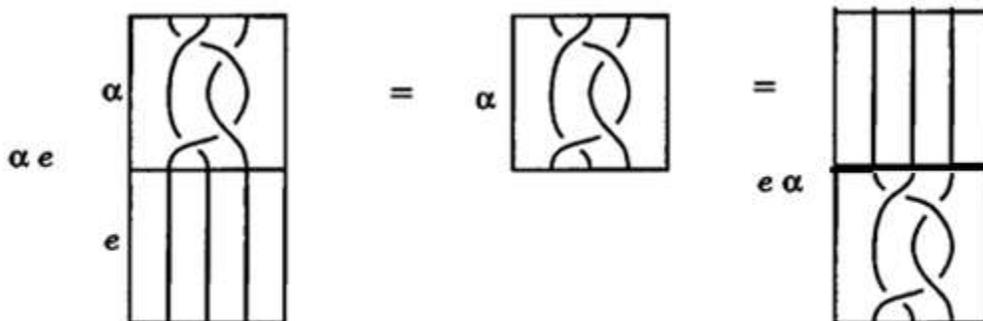
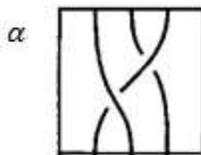


Figura 3.1.4 Elemento unidad en B_n

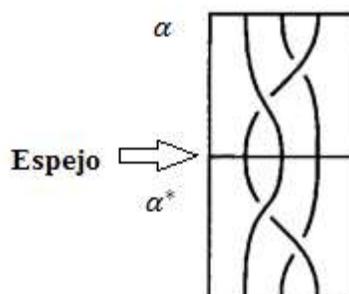
Con el fin de encontrar una inversa para una α arbitraria, considere el reflejo α^* de la imagen, de α . Si se tiene en cuenta la base del rectángulo como un espejo, a continuación, la imagen especular es la imagen reflejada en ese espejo.

Ejemplo 3.1.2. Demostrar que $\alpha^*\alpha$ y $\alpha\alpha^*$ son equivalentes a la trenza trivial e ; véase también la figura 3.1.5

Sea α la siguiente trenza



Si se colocara un espejo en la base inferior del rectángulo, se obtendría lo siguiente



Al aplicar movimientos Reidemeister se obtiene la trenza trivial.

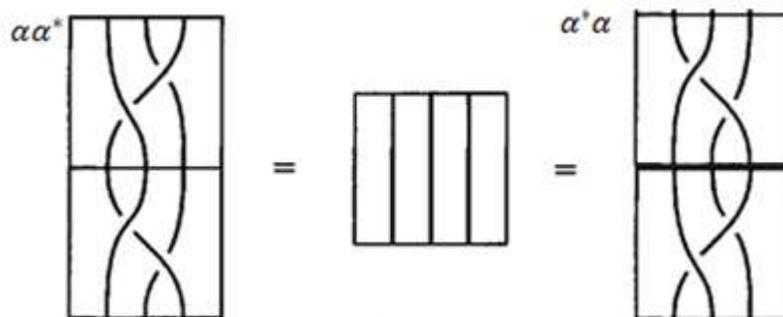


Figura 3.1.5 Inversa de una trenza

Dado lo anterior, se puede escribir que $\alpha\alpha^* = e$ y $\alpha^*\alpha = e$. Por lo tanto, ahora se tienen todos los elementos esenciales para que B_n sea un grupo. Este grupo se llama el grupo de la n – trenza. El elemento inverso, α^* , de α se designará por α^{-1} .

Se va a profundizar un poco más en la estructura de estos grupos. En primer lugar, se tiene que el grupo de la

1-trenza, B_1 , contiene sólo un elemento, es decir, la trenza trivial, $B_1 = \{e\}$. Los elementos de B_2 son parecidos a los dos tipos de trenzas dibujados en la figura 3.1.6.

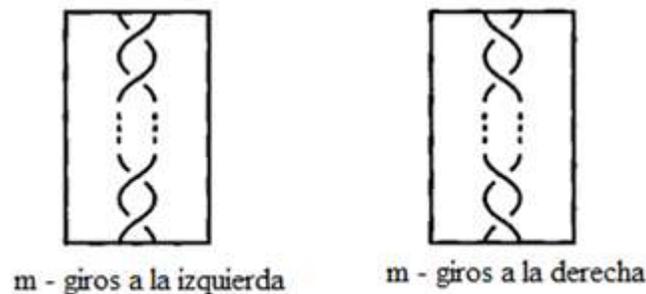


Figura 3.1.6

Por otra parte, B_2 tiene un infinito número de elementos no equivalentes (ver proposición 3.1.1) página 98; es decir, es un grupo de orden infinito. Para $n \geq 2$, todos los B_n son un grupo de orden infinito; Sin embargo, existe una manera muy fácil de escribir realmente un elemento en general de uno de estos grupos.

Recordando cómo se hacía con las n - trenzas en el capítulo 2, es decir, crear ciertas n - trenzas específicas por conexión A_i a A'_{i+1} y A_{i+1} a A'_i , luego conectar el resto A_j y A'_j ($j \neq i, i + 1$) por segmentos de línea, ver figura 3.1.7 (a).

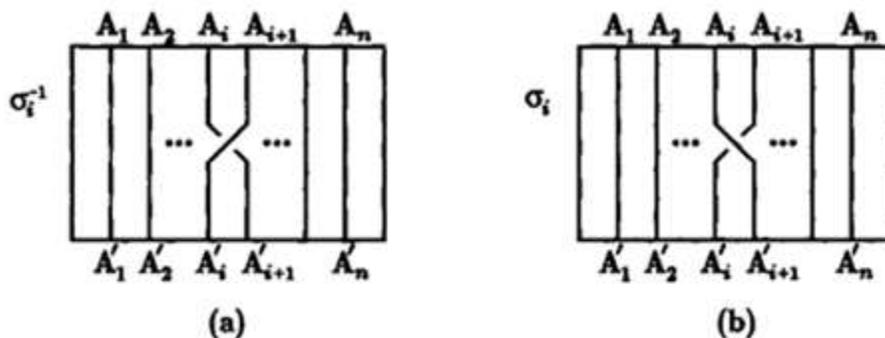


Figura 3.1.7

Se denotaran estos tipos de n - trenzas por σ_i . De esta manera se puede crear $n - 1$ trenzas especiales $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$. En la figura 3.1.7 (b) también se han elaborado el elemento inverso de σ_i , las n - trenzas σ_i^{-1} . Se utilizará el término de la trenza para expresar cualquier elemento en el grupo de la trenza. Por ejemplo, en la figura 3.1.8 se ha dibujado la trenza cuyo término es $a = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_1$.

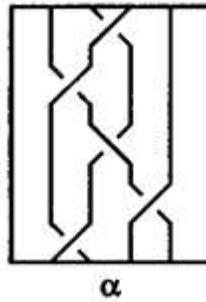


Figura 3.1.8

Por ello, dada cualquier trenza, se puede expresar como el producto finito de σ_i y σ_i^{-1} . Por esta razón, las trenzas $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ se dice que generan el grupo de la trenza B_n y así se le llamará a $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ los generadores de B_n . Por ejemplo, ya que cualquier 2-trenza puede ser escrita como σ_1^m o σ_1^{-m} donde por supuesto $m \geq 0$ y

$$\sigma_1^m = \underbrace{\sigma_1 \cdots \sigma_1}_{m \text{ veces}} \quad \text{y} \quad \sigma_1^{-m} = \underbrace{\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}}_{m \text{ veces}}$$

B_2 es generado por un solo elemento, σ_1 .

Por lo anterior, se tiene una manera de describir algebraicamente una trenza como un producto de σ_i y σ_i^{-1} . Sin embargo, estas representaciones algebraicas no son únicas. Por ejemplo, las dos trenzas $\sigma_1\sigma_3$ y $\sigma_3\sigma_1$, en figura 3.1.9, son 4-trenzas equivalentes.

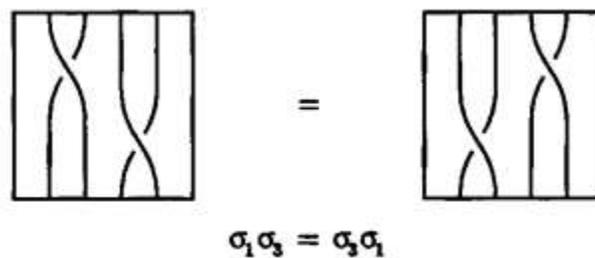


Figura 3.1.9 Trenzas equivalentes

Por lo tanto, en el grupo 4-trenza, B_4 se cumple la ecuación $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$. Además, se tiene que $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ y $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$ son equivalentes 3-trenzas (Figura 3.1.10), la siguiente relación:

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$$

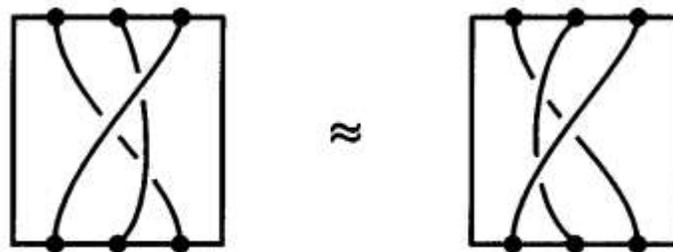


Figura 3.1.10 Trenzas Equivalentes

Esta igualdad se mantiene incluso si esta trenza se considera como una n – trenza en general para ($n \geq 3$), es decir, el diagrama regular tiene unas pocas líneas no adicionales de intersección agregadas, ver figura 3.1.11 (a) y (b).

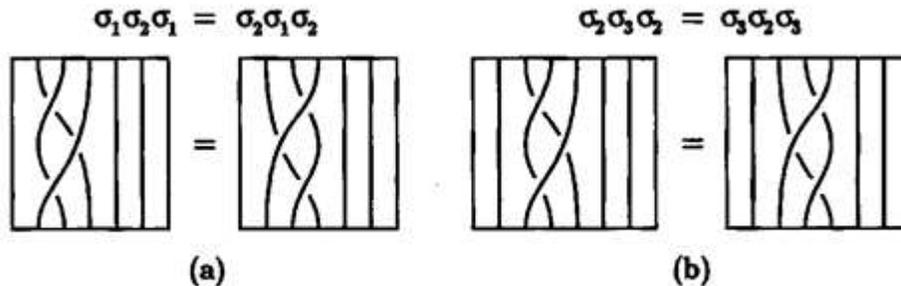


Figura 3.1.11

Estas igualdades son llamadas relaciones (trenza) del grupo de la trenza. De hecho, si dos n – trenzas son equivalentes, entonces se puede cambiar de una a otra mediante el uso de estas igualdades varias veces; se da un ejemplo más adelante en el ejemplo 3.1.3

Un resultado fundamental en el grupo trenza B_n es que sólo tiene los siguientes dos tipos de relaciones llamadas las relaciones fundamentales

- (1) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ ($|i - j| \geq 2$);
- (2) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n - 2$);

(Por supuesto, existen relaciones triviales, es decir, $\sigma_i \sigma_i^{-1} = e$ y $\sigma_i \sigma_j = \sigma_i \sigma_j$)

Recolectando diversas relaciones, se puede escribir B_n en términos de sus generadores $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ y las relaciones fundamentales,

$$B_n = \left(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & (|i-j| \geq 2) \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (i = 1, \dots, n-2). \end{array} \right. \right)$$

donde se dice que el lado derecho es una presentación de B_n .

Por ejemplo,

$$B_1 = (\sigma_1 | \text{————}),$$

$$B_2 = (\sigma_1, \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2),$$

$$B_3 = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3),$$

Puesto que, a excepción de la relación trivial $\sigma_1 \sigma_1^{-1} = e$, B_1 no tiene ninguna relación, denotan la falta de relaciones por ———.

Proposición 3.1.1 Dos 2-trenzas son equivalentes si y sólo si se han torcido en la misma dirección el mismo número de veces.

Prueba

Es equivalente a probar que:

Si σ_1 es un generador de B_2 . Probar que $\sigma_1^m = \sigma_1^n \Leftrightarrow m = n$

Primer caso $\sigma_1^m = \sigma_1^n \Rightarrow m = n$

Supongamos que $\sigma_1^m = \sigma_1^n$

Dado que σ_1 es un generador de B_2 se tiene que existe σ_1^{-1} por lo que:

$$\sigma_1^{-m} \sigma_1^m = \sigma_1^{-m} \sigma_1^n$$

$$e = \sigma_1^{-m} \sigma_1^n$$

Implica que $m = n$ dado que la identidad es única, por lo que $e = \sigma_1^{-m} \sigma_1^m$

Segundo caso $m = n \Rightarrow \sigma_1^m = \sigma_1^n$

Supongamos que $m = n$

Dado que σ_1 es un generador de B_2 se tiene:

$$\underbrace{\sigma_1 \cdots \sigma_1}_{m \text{ veces}} = \underbrace{\sigma_1 \cdots \sigma_1}_{m \text{ veces}}$$

$$\underbrace{\sigma_1 \cdots \sigma_1}_{m \text{ veces}} = \underbrace{\sigma_1 \cdots \sigma_1}_{n \text{ veces}} ; \text{ dado que } n = m$$

$$\sigma_1^m = \sigma_1^n$$

Esto completa la prueba. ■

Ejemplo 3.1.3 Se sigue de la figura 3.1.12 que los dos elementos, α y β de B_3 dado por

$$\alpha = \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^2 \sigma_2 \quad \text{y} \quad \beta = \sigma_2^{-1} \sigma_1^4 \sigma_2$$

Son iguales

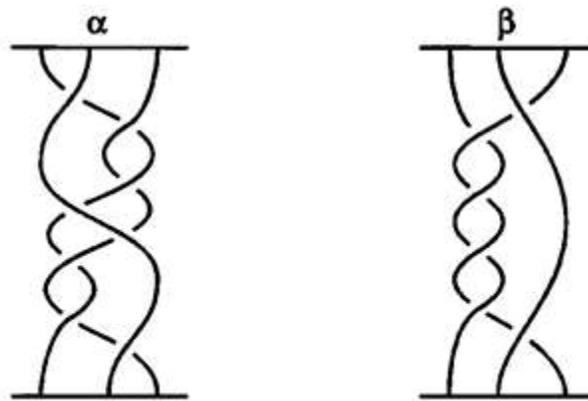


Figura 3.1.12

Se va a mostrar esto, sin embargo, mediante la transformación de α en β mediante la aplicación de diversas relaciones de trenza. Se tiene la intención de utilizar las relaciones

$$(1) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2$$

$$(2) \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} = \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1$$

ya que esto hará los cálculos mucho más transparente. Por lo tanto, es posible cambiar la parte $\sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}$ en α a $\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= \sigma_1 \sigma_2 (\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1) \sigma_1^2 \sigma_2 \\ &= (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1}) \sigma_2^{-1} (\sigma_1 \sigma_1^2) \sigma_2 \\ &= \boxed{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1}} \sigma_2^{-1} \sigma_1^3 \sigma_2 \end{aligned}$$

(1) establece que $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2$. Usando esta igualdad se puede cambiar la parte interior $\boxed{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1}}$ a $\sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2$ por tanto, se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha &= \boxed{\sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2} \sigma_2^{-1} \sigma_1^3 \sigma_2 \\ &= \sigma_2^{-1} \sigma_1 (\sigma_2 \sigma_2^{-1}) \sigma_1^3 \sigma_2 \\ &= \sigma_2^{-1} \sigma_1 (e) \sigma_1^3 \sigma_2 \\ &= \sigma_2^{-1} (\sigma_1 \sigma_1^3) \sigma_2 \\ &= \sigma_2^{-1} \sigma_1^4 \sigma_2 \\ &= \beta \end{aligned}$$

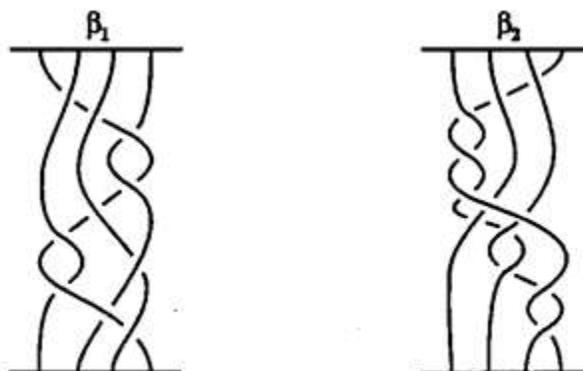


Figura 3.1.13

3.2 Caminos y Bucles.

Una partícula moviéndose en el espacio durante un cierto intervalo de tiempo describe un camino. Será conveniente asumir que existe un tiempo inicial $t = 0$, un tiempo final de detención y que el periodo de tiempo de dos caminos puede diferir. Para cualquiera de los dos números reales x y y con $x \leq y$, se define $[x, y]$ que es el conjunto de todos los números reales t satisfaciendo $x \leq t \leq y$. Un camino a en un espacio topológico X es entonces un mapeo continuo

$$a : [0, \|a\|] \rightarrow X.$$

El número $\|a\|$ es el tiempo de parada y se asume que $\|a\| \geq 0$. Los puntos $a(0)$ y $a(\|a\|)$ en X son el punto inicial y el punto terminal respectivamente, del camino a .

Es importante distinguir un camino a del conjunto de sus imágenes $a(t)$ en X ya que diferentes caminos pueden tener el mismo conjunto imagen, es decir muchas veces no se puede distinguir un camino solo con el hecho de conocer las imágenes en el espacio topológico X .

Ejemplo 3.2.1. Sea X el círculo unitario en el plano, dado en coordenadas polares como el conjunto de todos los pares (r, θ) de modo que, los dos caminos

$$a(t) = (1, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$b(t) = (1, 2t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

Son distintos a pesar de que tienen el mismo tiempo de parada, el mismo punto inicial y punto terminal y el mismo conjunto de imágenes.

Definición 3.2.1. Dos caminos a y b son iguales si y sólo si tienen el mismo dominio de definición, es decir, $\|a\| = \|b\|$ y si para todo t en ese dominio, $a(t) = b(t)$.

Considere cualesquiera dos caminos a y b en X tal que el punto de parada de a coincide con el punto inicial de b , es decir, $a(\|a\|) = b(0)$. El producto $a \cdot b$ de los caminos a y b se define por:

$$(a \cdot b)(t) = \begin{cases} a(t), & 0 \leq t \leq \|a\|, \\ b(t - \|a\|), & \|a\| \leq t \leq \|a\| + \|b\|. \end{cases}$$

Ahora $(a \cdot b)(t)$ define una función continua y $a \cdot b$ es por lo tanto un camino en X . Su tiempo de parada es

$$\|a \cdot b\| = \|a\| + \|b\|.$$

El producto de dos caminos no está definido a menos que el punto terminal de un camino sea el mismo que el punto inicial del otro camino.

Definición 3.2.2. Sean a, b y c caminos con dominios $0 \leq t \leq \|a\|$, $0 \leq t \leq \|b\|$ y $0 \leq t \leq \|c\|$ respectivamente.

(i) $a \cdot b$ está definido si $a(\|a\|) = b(0)$ y $b \cdot c$ está definido si $b(\|b\|) = c(0)$.

(ii) $a \cdot (b \cdot c)$ está definido si $a(\|a\|) = (b \cdot c)(0) = b(0)$.

(iii) $(a \cdot b) \cdot c$ está definido si $c(0) = (a \cdot b)(\|a \cdot b\|) = b(\|a \cdot b\|) = b(\|b\|)$.

Donde 0 es el punto inicial y $\|a\|$, $\|b\|$, $\|c\|$, son los puntos terminales de los caminos a, b, c respectivamente.

Estos caminos están bien definidos y son equivalentes, siempre que una de ellas posea la ley asociativa se cumple lo siguiente:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

Un camino a es llamado un camino identidad o, simplemente, una identidad, si tiene tiempo de parada $\|a\| = 0$. Esto refleja el hecho de que el conjunto de todos los caminos identidades en un espacio topológico puede ser considerado como el conjunto de todas las identidades multiplicativas para el producto.

Definición 3.2.3 El camino e es una identidad si $e \cdot a = a$ y $b \cdot e = b$, cuando $e \cdot a$ y $b \cdot e$ están definidos.

Definición 3.2.4 Un camino cuya imagen es un único punto se le llama un camino constante.

Nota: Cada camino identidad es constante; pero lo contrario es falso.

Ejemplo 3.2.2 Sea X el círculo unitario en el plano, dado en coordenadas polares como el conjunto de todos los pares (r, θ) .

El camino $a(t) = (1, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, tiene como camino identidad el camino $c(t) = (1, 0)$, $-2\pi \leq t \leq 0$, el cual es un camino constante.

Ahora considere un camino constante $c(t) = (1, \pi)$, $-2\pi \leq t \leq -\pi$, el cual no es un camino identidad del camino a , ya que $a(2\pi) \neq c(-\pi)$. Por lo tanto $a \cdot c \neq a$ y $c \cdot a \neq a$.

Para cualquier camino a , se denota por a^{-1} el camino inverso de a en la dirección opuesta. Así,

$$a^{-1}(t) = a(\|a\| - t), \quad 0 \leq t \leq \|a\|.$$

La razón para adoptar este nombre y notación para a^{-1} se designa de manera conveniente y entendible. En la actualidad, llamar a a^{-1} una inversa es un nombre inapropiado en algunas ocasiones. Es fácil ver que $a \cdot a^{-1}$ es un camino identidad e si y sólo si $a = e$.

La estructura algebraica del conjunto de todos los caminos de un espacio topológico con respecto al producto está ciertamente muy lejos de ser la de un grupo. Una forma de mejorar la situación algebraicamente es seleccionar un punto arbitrario p en X y restringirse a caminos que comiencen y terminen en p .

Definición 3.2.5 Un camino cuyos puntos iniciales y finales coinciden es llamado un bucle, su punto inicial-final es su punto base.

El producto de cualquiera dos bucles con punto base en p está definido y es de nuevo un bucle con base en p . Estas observaciones se resumen en la afirmación de que el conjunto de todos los bucles basados en p en X es un semi-grupo con identidad.

El semi-grupo de bucles proporciona una idea de los bucles que tiene un nudo o los que enlazan un nudo; pero no es un grupo. Volviendo al conjunto de todos los caminos, se define una noción de caminos equivalentes. A continuación, considere un nuevo conjunto,

cuyos elementos son las clases de equivalencia de caminos. El grupo fundamental se obtiene como una combinación de esta construcción con la idea de un bucle.

3.2.1 Clases de Caminos y Bucles.

Una colección de caminos h_s en X , $0 \leq s \leq 1$ es una familia de caminos continua si

(i) El tiempo de parada $\|h_s\|$ depende continuamente en s .

(ii) La función h definida por $h(s, t) = h_s(t)$ mapea la región cerrada

$0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \|h_s\|$ continuamente en X .

Hay que recordar que una función de dos variables que es continua en cada punto de su dominio de definición con respecto a cada variable no es necesariamente continua en ambas variables simultáneamente.

Ejemplo 3.2.1.1 La función f definida en el cuadrado unitario $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$

$$f(s, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } s = t = 0 \\ (s + t)/\sqrt{s^2 + t^2}, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es una función que es continua para todo valor de s y t en todo su dominio de definición pero no es continua cuando ambas variables son cero simultáneamente.

La colección de caminos $\{f_s\}$ definido por $f_s(t) = f(s, t)$ no es, por lo tanto, una familia continua.

Una familia de caminos $\{h_s\}$ de punto final fijo es una familia continua tal que $h_s(0)$ y $h_s(\|h_s\|)$ son independientes de s , es decir, existen puntos p y q en X tal que $h_s(0) = p$ (punto inicial de cada camino) y $h_s(\|h_s\|) = q$ (punto final de cada camino) para todo s en el intervalo $0 \leq s \leq 1$. La diferencia entre una familia continua y una familia de punto final fijo es ilustrada a continuación en la figura 3.2.1.1. y figura 3.2.1.2

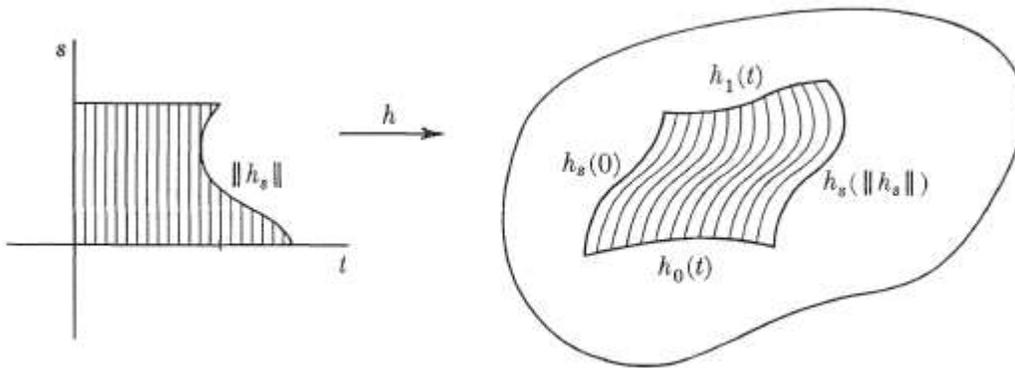


Figura 3.2.1.1 Familia de caminos sin punto final fijo

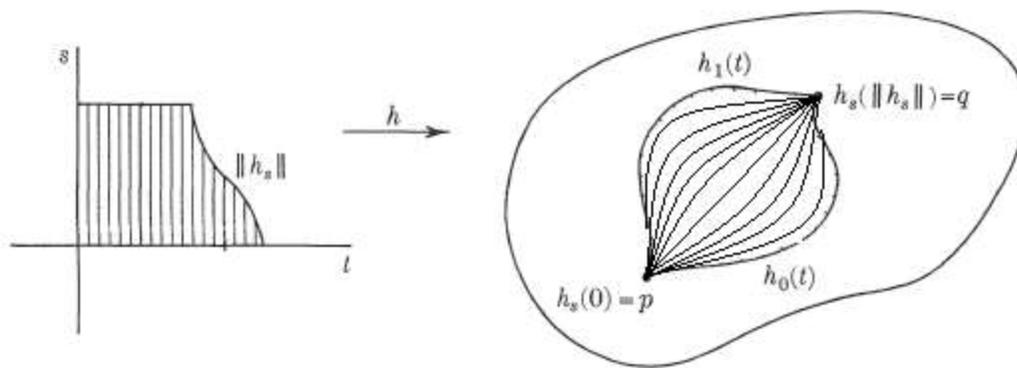


Figura 3.2.1.2 Familia de caminos con punto final fijo

Sean a y b dos caminos en el espacio topológico X . Entonces, a es equivalente a b , escrito $a \approx b$, si existe una familia de punto final fijo $\{h_s\}$, $0 \leq s \leq 1$, de caminos en X tal que $a = h_0$ y $b = h_1$.

La relación \approx es una relación de equivalencia.

Reflexiva

Para cualquier camino a , se tiene que $a \approx a$, ya que se puede definir $h_s(t) = a(t)$, con $0 \leq s \leq 1$. Así $h_0 = a = h_1$.

Simétrica

$a \approx b$ implica $b \approx a$, por que se puede definir una familia de punto final fijo $k_s(t) = h_{1-s}(t)$. Así $k_0 = a = h_1$ y $k_1 = b = h_0$.

Transitiva

$a \approx b$ y $b \approx c$ implica $a \approx c$. Para verificar esta afirmación, sean $\{h_s\}$ y $\{k_s\}$ familias de puntos finales fijos que dan las equivalencias $a \approx b$ y $b \approx c$ respectivamente. Entonces, la colección de caminos $\{j_s\}$ definido por

$$j_s(t) = \begin{cases} h_{2s}(t), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ k_{2s-1}(t), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

Como $h_0 = a$, $h_1 = b$ y $k_0 = b$, $k_1 = c$ entonces $h_0 = a = j_0$ y $k_1 = c = j_1$. Lo cual muestra que $j_s(t)$ es una familia de punto final fijo demostrando que $a \approx c$.

Así, la relación \approx es una relación de equivalencia y el conjunto de todos los caminos en el espacio X por lo tanto se dividen en clases de equivalencia. Se denotan por $[a]$ la clase de equivalencia que contienen los caminos equivalentes de a . Eso es, $[a]$ es el conjunto de todos los caminos b en X tal que $a \approx b$. De ahí, se tiene

$$[a] = [b] \text{ Si y sólo si } a \approx b.$$

Definición 3.2.1.1 La colección de todas las clases de equivalencia de caminos en el espacio topológico X se denota por $\Gamma(X)$. Se llama el grupoide fundamental de X .

Geoméricamente, los caminos a y b son equivalentes si y sólo si uno puede ser deformado continuamente en X hasta obtener el otro sin mover los puntos finales.

Ejemplo 3.2.1.2 Sea X la región sombreada mostrada en la figura 3.2.1.3 y considere los cinco bucles siguientes, e (identidad), a_1, a_2, a_3, a_4 en X con punto fijo p . Se tienen las siguientes equivalencias

$$a_1 \approx a_2 \approx e,$$

$$a_3 \approx a_4.$$

Sin embargo, no es cierto que

$$a_1 \approx a_3$$

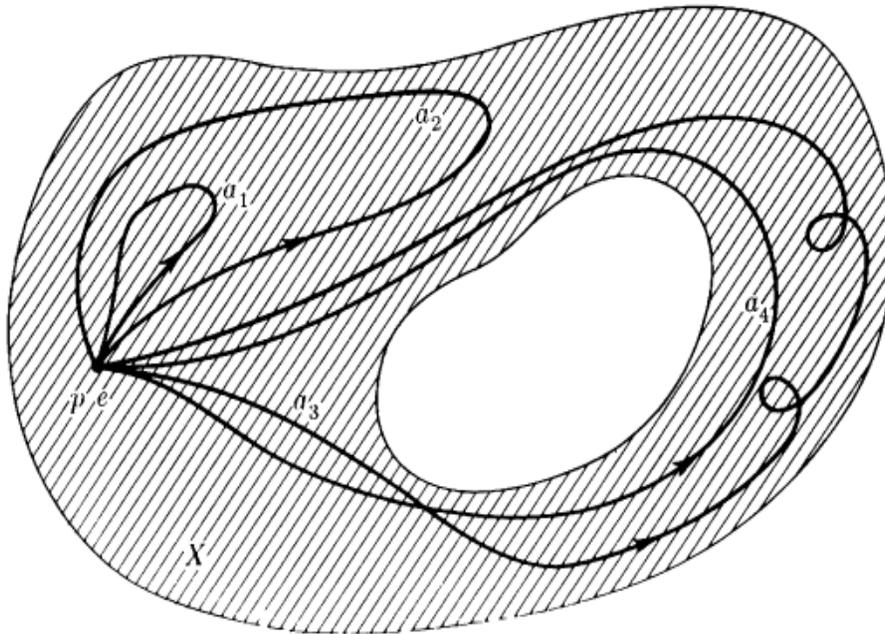


Figura 3.2.1.3

La figura 3.2.1.3 muestra que ciertas propiedades fundamentales de X reflejan la equivalencia de algunos bucles de X . Por ejemplo, los puntos que se encuentran dentro del agujero de X hubieran sido incluidos como parte de X entonces todos los bucles basados en p habrían sido equivalente al bucle identidad e . Las flechas en los bucles de la figura 3.2.1.3 están definidas ya que como el intervalo de la variable t lo recorren todos los a_i . Las imágenes recorren alrededor del circuito una vez en la dirección de las flechas. Es esencial que la idea de a_i como una función se mantenga. A partir de las imágenes de un camino no se puede definir el camino completamente; por ejemplo, $a_3 \neq a_3 \cdot a_3$ ya que $a_3 \cdot a_3$ es el camino que recorre a_3 en dos ocasiones, por lo tanto no son iguales. Además ni siquiera son equivalentes $a_3 \approx a_3 \cdot a_3$ ya que no pertenecen a la misma clase.

Ejemplo 3.2.1.3 Sea X el espacio topológico definido como el plano agujerado $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Los siguientes caminos son equivalentes, figura 3.2.1.4

$$f(x) = (\cos(\pi x), \text{sen}(\pi x))$$

$$g(x) = (\cos(\pi x), 2 \text{sen}(\pi x))$$

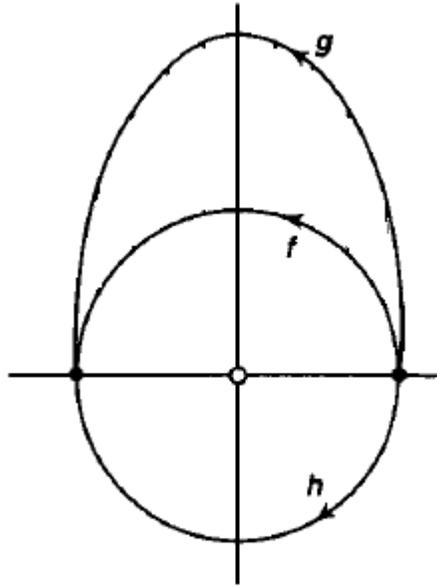


Figura 3.2.1.4

Mientras que los caminos f y h no son equivalentes.

$$f(x) = (\cos(\pi x), \text{sen}(\pi x))$$

$$h(x) = (\cos(\pi x), -\text{sen}(\pi x))$$

Se va a demostrar que la multiplicación de caminos induce una multiplicación en el grupode fundamental $\Gamma(\mathbf{X})$. Como resultado de ello se pondrá toda la atención a caminos y productos de caminos, considerando las clases de equivalencia de caminos y la multiplicación entre estas clases inducidas. Al hacerlo, se obtendrá la estructura algebraica necesaria para definir el grupo fundamental de un nudo \mathbf{K} en un espacio topológico \mathbf{X} .

Proposición 3.2.1.1 Para cualquier camino a, a', b, b' en \mathbf{X} , si $a \cdot b$ está definido y $a \approx a', b \approx b'$ entonces $a' \cdot b'$ está definido y $a \cdot b \approx a' \cdot b'$.

Prueba.

Si $\{h_s\}$ y $\{k_s\}$ son las familias de puntos finales fijos que dan las equivalencias $a \approx a'$ y $b \approx b'$ respectivamente, entonces la colección de caminos $\{h_s \cdot k_s\}$ es una familia de puntos finales fijos que da $a \cdot b \approx a' \cdot b'$.

Observe, en primer lugar, que los productos $h_s \cdot k_s$, son definidos para cada s en $0 \leq s \leq 1$ porque

$$h_s(\|h_s\|) = h_0(\|h_0\|) = a(\|a\|) = b(0) = k_0(0) = k_s(0).$$

En particular, $a' \cdot b' = h_1 \cdot k_1$ es definida y también la función $h \cdot k$ definida como

$$(h \cdot k)(s, t) = (h_s \cdot k_s)(t), \quad 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq \|h_s\| + \|k_s\|,$$

Es simultáneamente continua en s y t . Ya que $\|h_s \cdot k_s\| = \|h_s\| + \|k_s\|$ es una función continua de s , el camino $h_s \cdot k_s$ forma una familia continua. Se tiene

$$(h_s \cdot k_s)(0) = h_s(0) = a(0),$$

Y

$$(h_s \cdot k_s)(\|h_s \cdot k_s\|) = k_s(\|k_s\|) = b(\|b\|),$$

De manera que $\{h_s \cdot k_s\}$, $0 \leq s \leq 1$, es una familia de punto final fijo. Ya que $h_0 \cdot k_0 = a \cdot b$ y $h_1 \cdot k_1 = a' \cdot b'$, la prueba está completa. ■

Considere cualquiera dos caminos a y b en \mathbf{X} tal que $a \cdot b$ esta definido. El producto de las clases de equivalencia $[a]$ y $[b]$ está definido de la siguiente manera

$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

Multiplicación en $\Gamma(\mathbf{X})$ está bien definida, como un resultado de la proposición anterior.

Todos los caminos que pertenecen a una única clase de equivalencia tienen el mismo punto inicial y el mismo punto terminal, se puede definir un punto inicial y punto terminal del cual resulte un camino arbitrario representado por α en $\Gamma(\mathbf{X})$. El producto $\alpha \cdot \beta$ de dos elementos α y β en $\Gamma(\mathbf{X})$ es entonces definido si el punto terminal de α coincide con el punto inicial de β . Un elemento ε en $\Gamma(\mathbf{X})$ es una identidad si contiene un camino identidad. Así como antes, se tiene que un elemento ε es una identidad si y sólo si $\varepsilon \cdot \alpha = \alpha$ y $\beta \cdot \varepsilon = \beta$ siempre que $\varepsilon \cdot \alpha$ y $\beta \cdot \varepsilon$ estén definidos. Esta afirmación es similar a lo de caminos. Porque, sea ε una identidad y supóngase que $\varepsilon \cdot \alpha$ está definida. Sea e un camino identidad en ε y a un camino representativo en α . Entonces $e \cdot a = a$ y así $\varepsilon \cdot \alpha = \alpha$. Similarmente, $\beta \cdot \varepsilon = \beta$.

Ahora bien, supóngase que ε no es una identidad. ¿Será posible encontrar un α tal que $\varepsilon \cdot \alpha = \varepsilon$? .Seleccionar la clase α que contiene el camino identidad correspondiente al punto terminal de todos los caminos en ε . Entonces $\varepsilon \cdot \alpha$ esta definido ya que α es una identidad y

$\varepsilon \cdot \alpha = \varepsilon$. Se concluye que $\Gamma(X)$ tiene estructura algebraica así como también el conjunto de caminos en X .

Teorema 3.2.1.1 Para cualquier camino a en X , existen caminos identidad e_1 y e_2 tal que:

- i) $a \cdot a^{-1} \approx e_1$
- ii) $a^{-1} \cdot a \approx e_2$

Prueba

Los caminos e_1 y e_2 son las identidades correspondiente a los puntos inicial y terminal, respectivamente de a . Considerar la colección de caminos $\{h_s\}$, $0 \leq s \leq 1$, definido por

$$h_s(t) = \begin{cases} a(t), & 0 \leq t \leq s\|a\| \\ a(2s\|a\| - t), & s\|a\| \leq t \leq 2s\|a\|. \end{cases}$$

El dominio del mapeo h definido por $h(s, t) = h_s(t)$ es el área sombreada mostrada en la Figura 3.2.1.5. En la línea $t = 0$, es decir, en el eje s , h es constantemente igual a $a(0)$. Lo mismo es cierto a lo largo de la línea $t = 2s\|a\|$. De ahí que los caminos h_s forman una familia de punto final fijo.

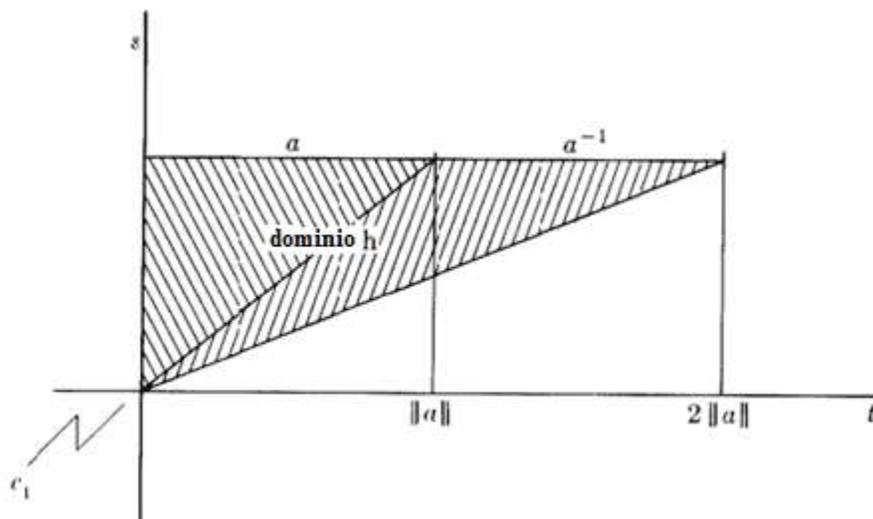


Figura 3.2.1.5

Para valores de t a lo largo de la línea horizontal $s = 1$, la función h se comporta como $a \cdot a^{-1}$.

$$h_0 = e_1$$

$$h_1(t) = \begin{cases} a(t), & 0 \leq t \leq \|a\| \\ a(2\|a\| - t), & \|a\| \leq t \leq 2\|a\| \end{cases}$$

$$h_1(t) = \begin{cases} a(t), & 0 \leq t \leq \|a\| \\ a^{-1}(t - \|a\|), & \|a\| \leq t \leq 2\|a\| \end{cases}$$

$$h_1(t) = (a \cdot a^{-1})(t),$$

Y por lo que $a \cdot a^{-1} \approx e_1$ con lo cual se completa (i).

Ahora para (ii) considérese el resultado anterior $a \cdot a^{-1} \approx e_2$, ahora definir el camino $(a \cdot a^{-1})^{-1} = a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = a^{-1} \cdot a$ y el hecho de que $e_2^{-1} = e_2$, esto por ser una identidad.

Por lo anterior $a^{-1} \cdot a \approx e_2$.

Con lo cual la prueba del teorema está completa. ■

Corolario 3.2.1.1 Para cualquier camino a y b , si $a \approx b$, entonces $a^{-1} \approx b^{-1}$.

Prueba. Se sabe por hipótesis que $a \approx b$ y también que $b^{-1} \approx b^{-1}$.

Ahora por la proposición 3.2.1.1

$$a \cdot b^{-1} \approx b \cdot b^{-1}$$

$$a^{-1} \cdot a \cdot b^{-1} \approx a^{-1} \cdot b \cdot b^{-1}$$

$$e \cdot b^{-1} \approx a^{-1} \cdot e$$

$$b^{-1} \approx a^{-1} \quad \blacksquare$$

Se define el inverso de un elemento α arbitrario en $\Gamma(\mathbf{X})$ por $\alpha^{-1} = [a^{-1}]$, para cualquier a en α .

El elemento α^{-1} depende sólo de α y no del camino particular representativo a . Eso es α^{-1} está bien definida.

Definición 3.2.1.2 Para cualquier α en $\Gamma(\mathbf{X})$, existen identidades ε_1 y ε_2 tal que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \varepsilon_1$ y $\alpha^{-1} \cdot \alpha = \varepsilon_2$.

Esta definición es una propiedad que posee el grupoide fundamental $\Gamma(\mathbf{X})$ más allá del conjunto de todos los caminos en \mathbf{X} . Ahora se obtiene el grupo fundamental de \mathbf{X} con

respecto al punto base p definiendo exactamente por todas las clases en $\Gamma(\mathbf{X})$ del conjunto de todos los caminos (bucles) basados en p será denotado por $\pi(\mathbf{X}, p)$.

Se concluye con la siguiente proposición de utilidad sobre caminos constantes y caminos identidad con respecto a equivalencia.

Proposición 3.2.1.2 Todo camino constante es equivalente a un camino identidad.

Prueba. Sea k un camino constante arbitrario en \mathbf{X} definido por

$$k(t) = p, \quad 0 \leq t \leq \|k\|, \text{ para algún } p \in \mathbf{X}.$$

La colección de caminos h_s definido por $h_s(t) = p, \quad 0 \leq t \leq s\|k\|$ es una familia de punto final fijo.

$h_1 = k$ con $0 \leq t \leq \|k\|$ y $h_0(t) = p$ con $0 \leq t \leq 0$, donde h_0 es el camino identidad correspondiente a p .

■

3.3 El Grupo Fundamental del Nudo

El problema principal que se plantea en la **Teoría de Nudos** es el de encontrar las clases de equivalencia de estos diagramas, es decir, encontrar los grupos de diagramas que son isotópicos entre sí. Este es un trabajo extremadamente complicado de resolver si solo se conoce los movimientos Reidemeister. Es aquí donde entran en juego los invariantes de nudos:

Definición 3.3.1 Un invariante es una función que parte del conjunto de todos los diagramas de nudos y que asigna a todos los diagramas de una misma clase de equivalencia la misma imagen.

Definición 3.3.2 Sea \mathbf{X} un espacio topológico y p un punto de \mathbf{X} . El conjunto de todas las clases de caminos asociadas a los bucles con punto inicial-terminal p , con la operación antes definida para caminos es el grupo fundamental de \mathbf{X} relativo al punto base p y se denota $\pi(\mathbf{X}, p)$.

El grupo fundamental de X se define como $\pi(X, p)$ y depende de la elección del punto base p . Sin embargo, ahora se demostrara que los grupos fundamentales para X definidos por diferentes puntos bases $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ son todos isomorfos.

Proposición 3.3.1 Sea α cualquier elemento de $\Gamma(X)$ teniendo como punto inicial p y punto terminal p' . Entonces la siguiente aplicación

$$\beta \rightarrow \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha \text{ para cualquier } \beta \text{ en } \pi(X, p)$$

Es un isomorfismo de $\pi(X, p)$ sobre $\pi(X, p')$.

Prueba. El producto $\alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha$ está bien definido ya que el camino α^{-1} comienza en p' y termina su recorrido en el punto p , donde empieza y termina el camino β , continuando con el camino α quien empieza en p y termina en p' .

Con esto se concluye que el camino $\alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha$ comienza y termina en p' . Por tanto $\alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha \in \pi(X, p')$.

Sean $\beta_1, \beta_2 \in \pi(X, p)$

$$\beta_1 \cdot \beta_2 \rightarrow \alpha^{-1} \cdot (\beta_1 \cdot \beta_2) \cdot \alpha = (\alpha^{-1} \cdot \beta_1 \cdot \alpha) \cdot (\alpha^{-1} \cdot \beta_2 \cdot \alpha)$$

Así que el mapeo es un homomorfismo.

A continuación, supóngase

$$\alpha^{-1} \cdot \beta_1 \cdot \alpha = \alpha^{-1} \cdot \beta_2 \cdot \alpha$$

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta_1 \cdot \alpha = \alpha \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta_2 \cdot \alpha$$

$$\varepsilon \cdot \beta_1 \cdot \alpha \cdot \alpha^{-1} = \varepsilon \cdot \beta_2 \cdot \alpha \cdot \alpha^{-1}$$

$$\varepsilon \cdot \beta_1 \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \beta_2 \cdot \varepsilon$$

$$\beta_1 = \beta_2$$

Y se puede concluir que el mapeo es inyectivo.

Finalmente sea γ en $\pi(X, p')$ entonces $\gamma = \alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1} \cdot \alpha$, para algún α .

$$\gamma = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1}) \cdot \alpha$$

Por lo tanto toda imagen γ tiene una preimagen de la forma $\alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1}$ en $\pi(X, p)$.

$$\alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1} \rightarrow \gamma.$$

Así, el mapeo es sobre y la prueba está completa. ■

Al hablar del grupo fundamental de X en algunos textos se denota $\pi(X)$. Ocasionalmente esta omisión puede causar confusión (si se está interesado en propiedades de $\pi(X, p)$ más allá de las que posee como un grupo). En cualquier caso, $\pi(X)$ siempre significa $\pi(X, p)$ para alguna selección del punto base p en X .

Definición 3.3.3 Sea X un espacio topológico. Una separación de X es un par U, V de abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X . El espacio X se dice que es conexo si no existe una separación de X .

Teorema 3.3.1 La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es un espacio conexo.

Prueba.

Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua y supóngase que X es conexo. Se quiere demostrar que el espacio imagen $f(X) = W$ es conexo.

Como la aplicación obtenida de f al restringir su rango al espacio W es también continua, es suficiente considerar el caso de una aplicación continua y sobreyectiva.

$$g: X \rightarrow W$$

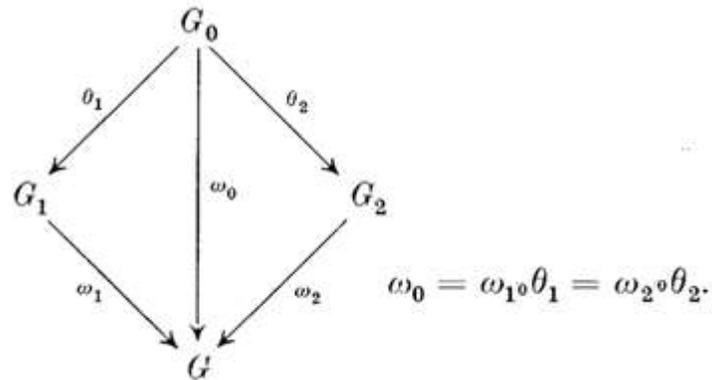
Supóngase que $W = A \cup B$ es una separación de W en dos conjuntos disjuntos no vacíos y abiertos en W . Entonces $g^{-1}(A)$ y $g^{-1}(B)$ son conjuntos disjuntos cuya unión es X .

Además son abiertos y no vacíos en X , pues g es continua por que g es sobreyectiva. De esta forma, constituyen una separación de X , contradiciendo la hipótesis que X era conexo. ■

Definición 3.3.4 Un espacio X se dice que es conexo por caminos si cada par de puntos de X se puede unir mediante un camino en X .

Sea X un espacio topológico que es la unión $X = X_1 \cup X_2$ de subconjuntos abiertos X_1 y X_2 tal que X_1, X_2 y $X_0 = X_1 \cap X_2$ son todos conjuntos conexos por caminos y no vacío. Dado que la intersección X_0 es no vacía, se deduce que el espacio X es un conjunto conexo por caminos. Se selecciona un punto base $p \in X_0$ y los conjuntos $G_i = \pi(X_i, p)$,

$i = 0, 1, 2$ junto con los homomorfismos inducidos por los mapeos inclusión forman el diagrama siguiente.



Ejemplo 3.3.1 Se va a calcular el grupo del nudo trivial. En la figura 3.3.1 se puede notar que existen dos tipos de caminos en $\mathbb{R}^3 \setminus K$, los que le dan la vuelta a K como α , γ y los que no como β . Además se tiene que $[\alpha] = [\alpha']$ y $[\beta] = [\beta']$. Las clases contienen a bucles que son isotópicos es decir, una clase contienen los que le dan el mismo número de vueltas a K . Por lo tanto se tienen las siguientes clases. La clase de bucles constantes $[e]$, la clase que le da una vuelta $[\alpha]$, la clase que le da dos vueltas $[\gamma]$ el cual también se define como $[\alpha][\alpha] = [\gamma]$. En general se tienen la clase de bucles que le da n vueltas dado por $[\alpha][\alpha][\alpha] \cdots [\alpha] = [\alpha^n]$. De esto se concluye que el grupo fundamental del nudo trivial es un grupo cíclico infinito.

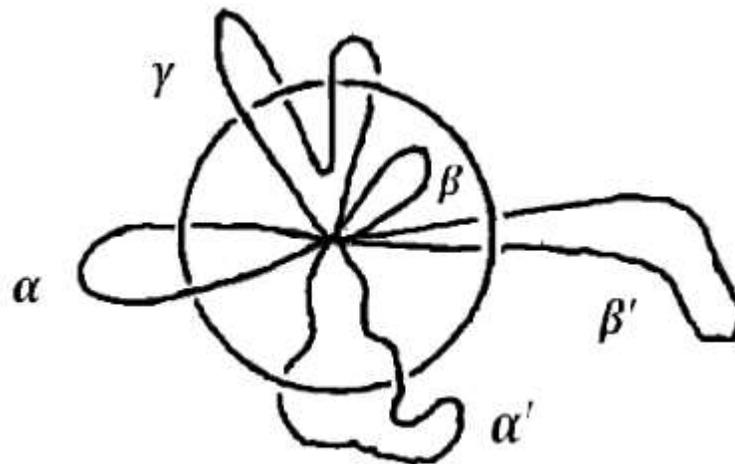


Figura 3.3.1 Grupo del nudo trivial

Definición 3.3.5 Una retracción de un espacio topológico X sobre un subespacio Y es un mapeo continuo $\rho: X \rightarrow Y$ tal que, para cualquier p en Y , $\rho(p) = p$. Un espacio Y es llamado un retractor de X si existe una retracción $\rho: X \rightarrow Y$.

Ejemplo 3.3.2 Considere el cuadrado Q en el espacio euclidiano en dos dimensiones \mathbb{R}^2 definida por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Una retracción de Q sobre el borde E definido por $0 \leq x \leq 1$, $y = 0$ está dado por

$$\rho(x, y) = (x, 0), \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

Al restringir el dominio de esta función al conjunto formado por todos (x, y) en Q tal que $xy(x-1)(y-1) = 0$ (al menos uno de los factores debe ser igual cero), se obtiene una retracción de los bordes del cuadrado sobre el borde E . Además, el origen $(0,0)$ es un retractor del cuadrado, de su frontera Q y también del borde E . La retracción con el dominio se elige adecuadamente, en este caso la función está dada por

$$\rho(x, y) = (0,0).$$

Más generalmente, para cualquier punto p de un espacio topológico arbitrario X , el mapeo constante $\rho: X \rightarrow p$ es una retracción. Un punto es por lo tanto un retractor de cualquier espacio que lo contiene.

Se deduce de lo anterior que cualquier punto interior p de un disco circular cerrado D es un retractor del disco. Se sabe que D es un retractor del espacio complementario $D - \{p\}$. Si p es el centro de D y si se gira D alrededor de su diámetro para formar una bola B , entonces p es un retractor de B y la esfera frontera es un retracto de $B - \{p\}$. Si el disco D se hace girar alrededor de una línea imaginaria en su exterior, D describe un toro sólido V y p describe un círculo C . Se puede concluir que C es un retractor de V . Similarmente el toro que constituye el límite de V es un retractor de $V - C$.

Es igualmente importante, por supuesto, dar ejemplos de subespacios que no son retractores de sus espacios que los contienen

Ejemplo 3.3.3

- (1) Los límites de un cuadrado no es un retractor de un cuadrado.
- (2) Del mismo modo, D no es un retractor del disco D .

- (3) No hay retracción del espacio \mathbb{R}^3 sobre los toros sólidos V ni sobre su núcleo C .
 (4) La línea ecuatorial no es un retractor de la superficie de la tierra.

Bueno, ¿cómo saberlo? ¿Cómo puede uno probar la no existencia de una retracción? Una respuesta se da en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.2 Si $\rho : X \rightarrow Y$ es una retracción y X es un espacio conexo por caminos, entonces para cualquier punto base $p \in X$, el homomorfismo inducido

$\rho_* : \pi(X, p) \rightarrow \pi(Y, \rho(p))$ es sobre.

Prueba.

Por la proposición 3.3.1 y las propiedades algebraicas de cualquier homomorfismo inducidos por un mapeo continuo de un espacio conexo por caminos son independientes de la elección del punto base. Considere los homomorfismos inducidos

$$\pi(Y, p) \xrightarrow{i'} \pi(X, p) \xrightarrow{\rho'} \pi(Y, p).$$

Donde $i : Y \rightarrow X$ definida $i(y) = y$ para toda $y \in Y$, es una retracción esto por la inclusión $Y \subset X$.

Ya que por hipótesis ρ es un retractor, la composición $\rho \circ i$ es la identidad entre espacios topológicos ya que

$$(\rho \circ i)(y) = \rho(i(y)) = \rho(y) = y, \forall y \in Y$$

Por lo tanto $\rho' \circ i'$ es la identidad entre grupos, de lo cual se tiene que ρ es sobre. ■

La imagen continua de un espacio conexo por caminos, es conexo por caminos. Así, un subespacio Y de un espacio X es conexo, en el entendido que X es conexo por caminos.

Definición 3.3.6 El grupo fundamental trivial de un espacio topológico, posee solamente una clase de equivalencia de caminos.

El cuadrado, el disco y el espacio \mathbb{R}^3 son conjuntos convexos y por lo tanto poseen grupos fundamentales triviales. Más adelante se demostrara que el grupo fundamental de la esfera es trivial. Sin embargo, todos los bucles en la esfera que tienen un punto base se pueden contraer a ese punto.

Ahora se continúa con la noción de una deformación. Un espacio topológico X es deformable en un subespacio Y si X se puede reducir de forma continua en Y . Si el resultado de la contracción es un conjunto no sólo contenido en Y sino igual a Y , entonces nos dicen que X es deformable en Y .

Definición 3.3.7 Una deformación de un espacio topológico X es una familia de mapeos $h_s : X \rightarrow X, 0 \leq s \leq 1$, de tal manera que h_0 es la identidad, es decir, $h_0(x) = x$ para todo x en X y la función h definida por $h(s, x) = h_s(x)$ es simultáneamente continua en las dos variables s y x .

Definición 3.3.8 Una deformación de un espacio X en (o sobre) un subespacio Y es una deformación $\{h_s\}$ de X tal que la imagen $h_1(X)$ está contenido en (o igual a) Y . Se dice que X es deformable en o sobre un subespacio Y si existe tal deformación.

Ejemplo 3.3.4

- (i) Un cuadrado puede ser deformado sobre un borde; una deformación en \mathbb{R}^2 esta dada por

$$h_s(x, y) = (x, (1 - s)y), \quad 0 \leq x, y, s \leq 1.$$

- (ii) La siguiente familia de funciones es una deformación del cuadrado sobre la esquina $(0,0)$.

$$h_s(x, y) = ((1 - s)x, (1 - s)y), \quad 0 \leq x, y, s \leq 1.$$

- (iii) El disco D se define con respecto a las coordenadas polares por la desigualdad $0 \leq r \leq 1$ se deforma sobre su centro por las funciones

$$h_s(r, \theta) = (r(1 - s), \theta), \quad \begin{cases} 0 \leq r, s \leq 1, \\ 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

- (iv) El espacio complementario que consiste en todos los puntos de D excepto el centro puede deformarse en el límite D del disco. La deformación está dada por

$$h_s(r, \theta) = (r(1 - s) + s, \theta), \quad \begin{cases} 0 < r \leq 1, \\ 0 \leq s \leq 1, \\ 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Con $0 < r \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ las desigualdades $r \leq r(1 - s) + s \leq 1$ están satisfechas. Note también que (iv) no puede extenderse a una deformación de D sobre \dot{D} ver figura 3.3.3.

Ejemplo 3.3.5 Un toro sólido V puede deformarse sobre un círculo C . En la figura 3.3.2 (a) se muestra un toro sólido, en la figura 3.3.2 (b) la dirección de las flechas muestra la forma de como deformar el toro (suponiendo que este hecho de plastilina) por medio de un aplastamiento hasta obtener la figura 3.3.2 (c) de lo cual se tiene un disco con un hoyo en su centro, es claro que esto es posible aplicando homeomorfismos.

Ahora considérese el cilindro sólido de la figura 3.3.2 (d) al cual se le ha quitado un cilindro sólido más pequeño contenido en su centro, en la figura 3.3.2 (e) las flechas muestran la dirección de cómo se podría aplicar fuerza para moldear (suponiendo que este hecho de plastilina) la parte gruesa del cilindro de manera que se forme un cilindro hueco figura 3.3.2 (f). Por último se pegan los bordes, superior con el inferior del cilindro hueco formando así el toro trivial.

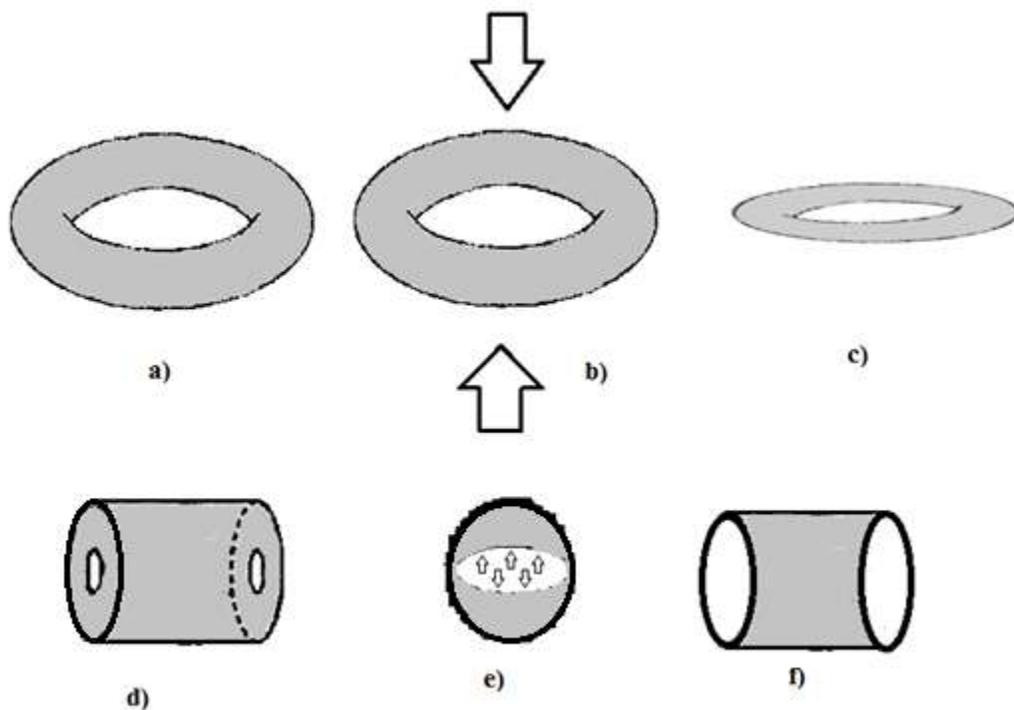


Figura 3.3.2

Ejemplo 3.3.6 Una deformación de un disco en su límite puede ser construido como sigue: Sea el disco D que se define con respecto a coordenadas polares para ser el conjunto de todos los puntos (r, θ) que satisface $0 \leq r \leq \sin \theta$. (Véase la figura 3.3.3.) El límite \dot{D} es el conjunto de puntos definidos por $r = \sin \theta$.

La deformación ocurre en dos pasos: En el intervalo $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$, todo el disco se contrae al origen p . Entonces, en $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$, los puntos se mueven a lo largo de la frontera \dot{D} en la dirección con sentido contrario con el aumento de r y s . Específicamente para cualquier par ordenado (r, θ) tales que $0 \leq r \leq \sin \theta$, se tiene la familia:

$$h_s(r, \theta) = \begin{cases} (r(1 - 2s), \theta), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ (\sin \pi r (2s - 1), \pi r (2s - 1)), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

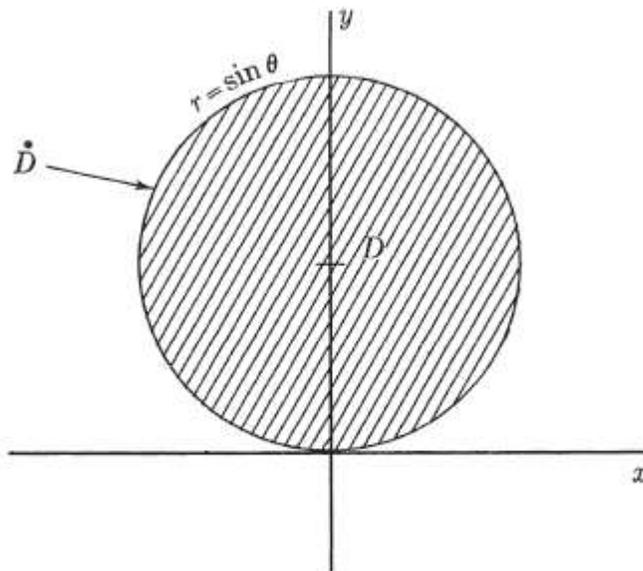


Figura 3.3.3

Esta familia de funciones satisface el requisito de continuidad simultánea prescrito por la definición de una deformación. Este ejemplo es particularmente interesante porque se sabe que el límite \dot{D} no es un retractor del disco D .

Se acaba de ver un ejemplo de un espacio topológico X que puede ser deformada sobre un subespacio que no es un retractor de X . Es natural preguntarse si, por el contrario, no

existe retractor que no se pueden obtener por deformación. La respuesta es sí, una buena herramienta para la búsqueda de ejemplos se da a partir del siguiente lema y teorema.

Lema 3.3.1 Si $\{h_s\}$, $0 \leq s \leq 1$, es una deformación de X , entonces para cualquier punto base p en X , el homomorfismo $(h_1)_* : \pi(X, p) \rightarrow \pi(X, h_1(p))$ es un isomorfismo sobre.

Prueba

Se define un camino a con el punto inicial p y el punto final $q = h_1(p)$

$$a(t) = h_t(p), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Sea α la clase de equivalencia de caminos en X que contiene el camino a . Se va a demostrar que para cualquier β en $\pi(X, p)$,

$$(h_1)_*(\beta) = \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha,$$

y el resultado entonces sigue de la proposición 3.3.1. Considere un elemento arbitrario β en $\pi(X, p)$ y el representante de bucles b en β . El Conjunto

$$k_s(t) = h_s(b(t)), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \|b\|.$$

La colección $\{k_s\}$ es una familia continua de bucles; su dominio está representado en la figura 3.3.4.

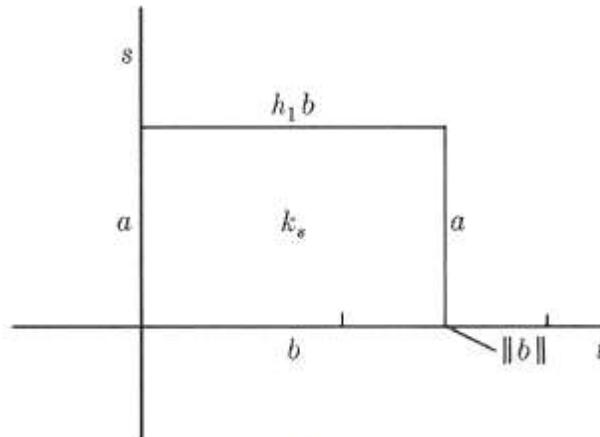


Figura 3.3.4

Otra familia continua de caminos se define como sigue y representado en la figura 3.3.5.

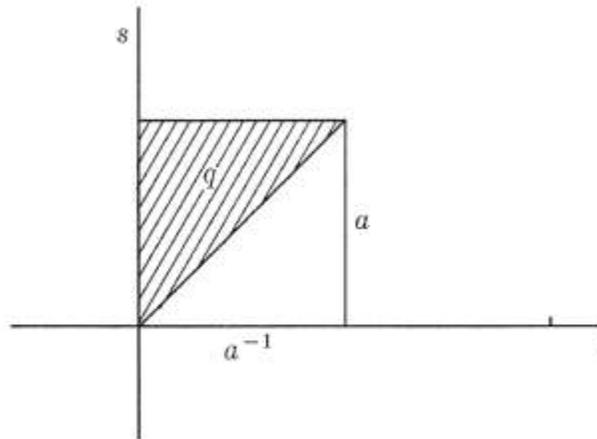


Figura 3.3.5

$$j_s(t) = \begin{cases} a(1 - (t - s)), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ q, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Una familia continua definitiva de caminos está representado en la figura 3.3.6 y definido por

$$l_s(t) = \begin{cases} a(s + t), & s + t \leq 1, & 0 \leq s, t \leq 1, \\ q, & s + t \geq 1, & 0 \leq s, t \leq 1. \end{cases}$$

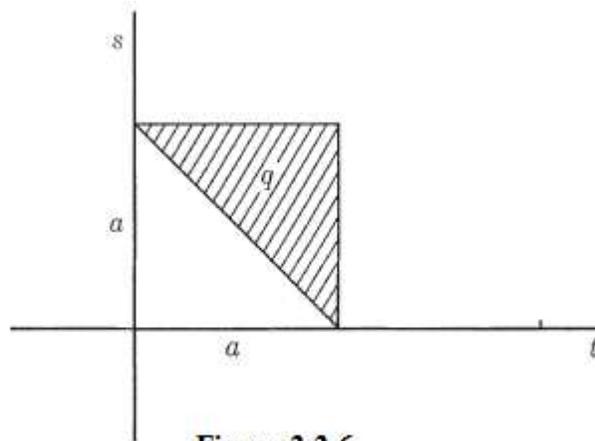


Figura 3.3.6

La familia de productos $\{j_s \cdot k_s \cdot l_s\}$ está claramente definida y es una familia continua de caminos. Se representa en la figura 3.3.7.

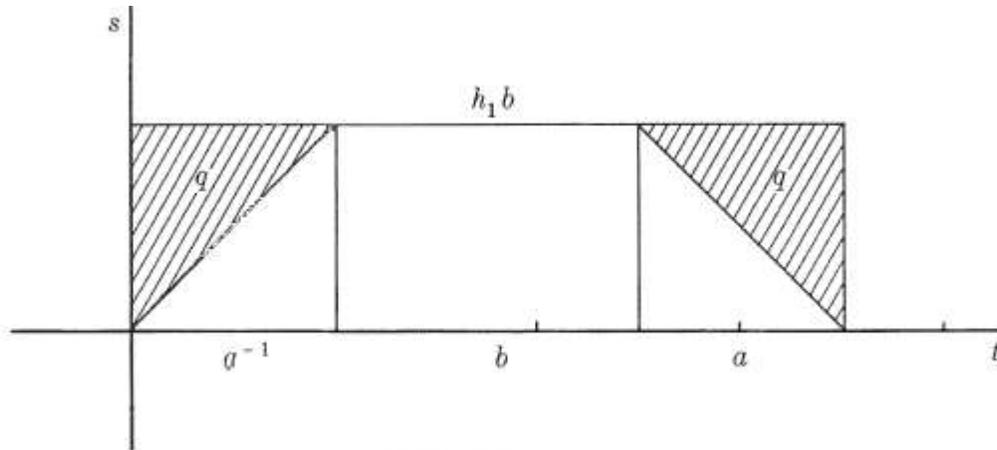


Figura 3.3.7

Ya que $\{j_s, k_s, l_s\}$ es una familia de punto final fijo, se tienen las equivalencias

$$a^{-1}.b.a \approx c.h_1b.c,$$

donde c es el camino constante en q . La clase de equivalencia que contiene cualquier trayectoria constante es una identidad teorema 3.2.1.2. De ahí que,

$$\alpha^{-1}.\beta.\alpha = [a^{-1}.b.a] = [h_1b]$$

$$\alpha^{-1}.\beta.\alpha = (h_1)_*\beta,$$

Y la prueba está completa. ■

Definición 3.3.9 Una función continua arbitraria $f : X \rightarrow Y$ de un espacio topológico X en un subespacio Y de X , se dice que es realizable por una deformación de X si existe una deformación $\{h_s\}$, $0 \leq s \leq 1$, de X tal que $h_1 = i \circ f$, donde $i : Y \rightarrow X$ es el mapeo de inclusión.

Teorema 3.3.3 Si una función continua $f : X \rightarrow Y$ es realizable por una deformación de X , entonces para cualquier punto base p en X , el homomorfismo inducido

$$f_* : \pi(X, p) \rightarrow \pi(Y, f(p)) \text{ es un isomorfismo.}$$

Prueba

Sea $i : Y \rightarrow X$ el mapeo inclusión y $\{h_s\}$ una deformación de X tal que $h_1 = i \circ f$.

Por el lema 3.3.1 la función $(h_1)_* : \pi(X, p) \rightarrow \pi(Y, h_1(p))$ es un isomorfismo.

Definiendo las aplicaciones $i_* : \pi(Y, p) \rightarrow \pi(X, p)$ y $f_* : \pi(X, p) \rightarrow \pi(Y, p)$, tales que $i_*(y) = y$ y $f_*(x) = x$.

Considerando la aplicación $(h_1)_* = i_* \circ f_*$.

Ahora usando el hecho de que si la composición de funciones es biyectiva y que f es realizable por una deformación, f_* debe ser biyectiva.

f_* también es un isomorfismo ■

Un espacio X es deformable en un subespacio Y si y sólo si existe un mapeo $f : X \rightarrow Y$ que es realizable por una deformación de X . En consecuencia y en virtud del teorema 3.3.3, es fácil encontrar ejemplos de retractores que no se puede obtener por deformación.

Ejemplo 3.3.7 Un borde E de un cuadrado Q es un retractor de la frontera \dot{Q} del cuadrado. Supóngase que la frontera \dot{Q} está hecha de plastilina, se quiere deformar hasta hacerla un borde como en la figura 3.3.8, esto no puede ser posible ya que por más que junten los bordes siempre habrá un espacio entre ellos que no puede ser rellenado. También no es posible deformar la frontera hasta obtener un punto ya que por más que junten los puntos de los bordes habrá un hueco que no puede ser rellenado. El grupo fundamental $\pi(\dot{Q})$ es cíclico infinito ya que solo es una deformación del nudo trivial y $\pi(E)$ tiene grupo fundamental trivial ya que solo hay bucles que enlazan el borde una vez, así que no hay mapeo de $\pi(\dot{Q})$ en $\pi(E)$ que sea un isomorfismo.

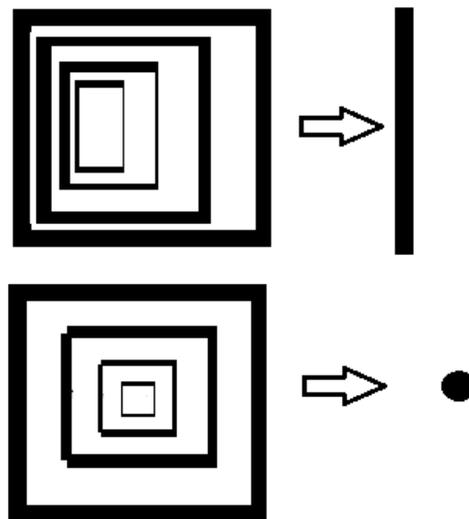


Figura 3.3.8

Es falso que un espacio arbitrario X es deformable sobre cualquier punto en X . Ahora se está listo para combinar las nociones de retracción y deformación en una sola definición.

Definición 3.3.10 Un subespacio Y de un espacio topológico X es una deformación retráctil de X si existe una retracción $\rho: X \rightarrow Y$ que es realizable por una deformación de X .

Ejemplo 3.3.8

- (a) Ya que h_1 define una retracción en cada una de las fórmulas (i), (ii), (iii), (iv) del ejemplo 3.3.4 cada una exhibe un retractor de deformación.
- (b) Tanto un borde de un cuadrado y un punto de esquina son retractores de deformación del cuadrado.
- (c) Un punto interior p de un disco D es un retractor de deformación de D y el límite de D es un retractor de deformación de $D - p$.

En el siguiente teorema se obtiene una propiedad importante de retractores de deformación.

Teorema 3.3.4 Si X es un espacio conexo por caminos y la retracción $\rho: X \rightarrow Y$ es realizable por una deformación. Si $i: Y \rightarrow X$ es el mapeo inclusión, entonces para cualquier par de puntos p en X y q en Y , ambos homomorfismos inducidos

$$\rho_*: \pi(X, p) \rightarrow \pi(Y, \rho(p)),$$

$$i_*: \pi(Y, q) \rightarrow \pi(X, q),$$

Son homomorfismos sobre.

Prueba

El primer resultado es directamente del teorema 3.3.3. ya que basta que se tome a ρ_* como una composición isomorfica.

Para probar la segunda, considerar los mapeos

$$\pi(X, q) \xrightarrow{\rho_*} \pi(Y, q) \xrightarrow{i_*} \pi(X, q).$$

Por hipótesis se sabe que existe una deformación $\{h_s\}$ de X tal que $h_1 = i \circ \rho$. Por el lema 3.3.1, $(h_1)_* = i_* \circ \rho_*$ es un isomorfismo.

Ahora como por hipótesis se tiene que ρ_* es un isomorfismo y usando el hecho de que $i_* \circ \rho_*$ es un isomorfismo se deduce que i_* es sobreyectivo.

Entonces solo falta probar que i_* es inyectivo. Lo cual sigue a continuación.

Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi(\mathbf{X}, q)$, entonces existen $\beta_1, \beta_2 \in \pi(\mathbf{Y}, q)$ tal que $\gamma_1 = i_*(\beta_1)$ y $\gamma_2 = i_*(\beta_2)$.

Como ρ_* es biyectiva existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi(\mathbf{X}, q)$ tal que $\rho_*(\alpha_1) = \beta_1$ y $\rho_*(\alpha_2) = \beta_2$.

$$i_*(\rho_*(\alpha_1)) = i_*(\rho_*(\alpha_2))$$

$$(i_* \circ \rho_*)(\alpha_1) = (i_* \circ \rho_*)(\alpha_2)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$$\rho_*(\alpha_1) = \rho_*(\alpha_2)$$

$$\beta_1 = \beta_2$$

Con lo que se obtiene que i_* es inyectiva.

Por lo tanto i_* es un isomorfismo y la prueba esta completada. ■

Conjetura. Si dos nudos dóciles en \mathbb{R}^3 tienen complementos homeomórficos, entonces los nudos son equivalentes.

El siguiente ejemplo muestra que la correspondiente conjetura para enlaces es falsa.

Ejemplo 3.3.9 Dos enlaces con complementos homeomórficos que no son equivalentes.



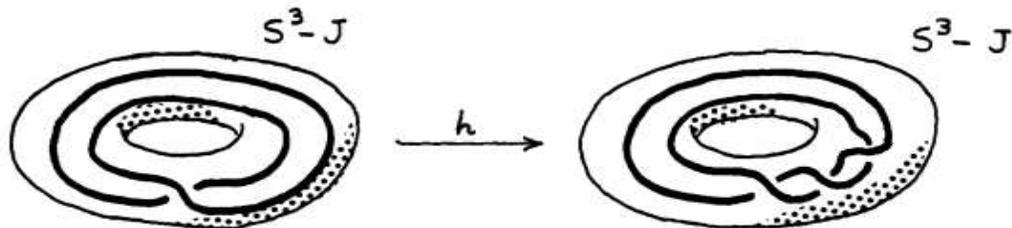
Observe que K' es un trébol



Mientras que K es trivial



Por ahora estos enlaces no son equivalentes. Entonces $J \cup K$ y $J \cup K'$ deben ser enlaces inequivalentes. Sin embargo, sus complementos (decir que en S^3) son homeomórficos para $S^3 - J$ es homeomorfo con $S^1 \times \text{int } D^2$. Aplicando el homeomorfismo de torsión $h(z, w) = (z, zw)$, donde S^1 y D^2 se identifican adecuadamente con subconjuntos de los números complejos, lleva a K sobre K' por un homeomorfismo de $S^3 - J$.



Ello se deduce que $S^3 - (J \cup K)$ y $S^3 - (J \cup K')$ son homeomorfos.

3.4 Presentación Wirtinger

Muchas veces es más fácil definir a un grupo mediante algunos de sus elementos llamados generadores y una relación entre ellos.

Ejemplo 3.4.1 Sea G el grupo formado por el conjunto $\{1, m, n\}$ y la multiplicación dada por la siguiente tabla:

*	1	m	n
1	1	m	n
m	m	n	1
n	n	1	m

La tabla anterior tiene 9 entradas, pero usando el hecho (el elemento que se encuentra en la intersección de la tercera fila y la tercera columna) que $n = m^2$, se puede determinar que los elementos del grupo son $1, m$ y m^2 ; además el hecho de que $m^3 = 1$. Así, el grupo en cuestión es descrito más eficientemente si se nota que el elemento m genera el grupo y que la ecuación $m^3 = 1$. Lo anterior, se denomina una **presentación** del grupo G , dada por el generador m , la relación $m^3 = 1$ y esto se denota por

$$\langle m | m^3 = 1 \rangle$$

En general, una presentación consta de un conjunto de generadores $\hat{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$ y un conjunto de relaciones $\hat{r} = \{r_1, r_2, \dots\}$ denotados por

$$\langle \hat{x} | \hat{r} \rangle$$

A las combinaciones posibles de los elementos de \hat{r} , se les llama consecuencias de \hat{r} .

Ejemplo 3.4.2 si se tienen las relaciones $\hat{r} = \{m^3 = 1, n = m^2\}$ entonces $nm = 1$ es una consecuencia de \hat{r} , ya que

$$n = m^2$$

$$nm = m^2m$$

$$nm = m^3$$

$$nm = 1$$

Otros ejemplos de presentaciones de grupos son las siguientes:

$$\langle x, y | xyx = yxy \rangle$$

$$\langle x, y | xy^2 = y^3x, yx^2 = x^3y \rangle$$

Un grupo puede tener muchas presentaciones diferentes, una cuestión importante al respecto es saber cuándo dos presentaciones diferentes corresponden al mismo grupo.

Definición 3.4.1 Dos presentaciones son equivalentes si corresponden a grupos isomorfos.

Una respuesta a este problema es dada por el teorema de Tietze. Para enunciarlo, se necesita primero definir las operaciones de Tietze:

Definición 3.4.2 Las operaciones de Tietze son las siguientes:

Operación tipo I Sea $\langle \hat{x} | \hat{r} \rangle$ una presentación y s cualquier consecuencia de \hat{r} . Considérese la presentación $\langle \hat{x} | \hat{s} \rangle$ con $\hat{s} = \hat{r} \cup \{s\}$. Entonces $\langle \hat{x} | \hat{r} \rangle$ y $\langle \hat{x} | \hat{s} \rangle$ son equivalentes.

Operación tipo I' Sea $\langle \hat{x} | \hat{r} \rangle$ una presentación. Si r es una relación de \hat{r} que es consecuencia de las demás relaciones de \hat{r} , entonces la presentación $\langle \hat{x} | \hat{r}' \rangle$ dada por $\hat{r}' = \hat{r} \setminus \{r\}$ (las representaciones que están en \hat{r} menos r) es equivalente a $\langle \hat{x} | \hat{r} \rangle$.

Operación tipo II sea $\langle \hat{x} | \hat{r} \rangle$ una presentación, y un generador que no pertenezca a \hat{x} y λ cualquier producto de los elementos de \hat{x} . Considerando la presentación $\langle \hat{y} | \hat{s} \rangle$ con $\hat{y} = \hat{x} \cup \{y\}$ y $\hat{s} = \hat{r} \cup \{y = \lambda\}$, entonces $\langle \hat{x} | \hat{r} \rangle$ y $\langle \hat{y} | \hat{s} \rangle$ son equivalentes.

Operaciones tipo II' Considere la presentación $\langle \hat{y} | \hat{s} \rangle$. Sea $\hat{x} = \hat{y} \setminus \{y\}$ tal que y es un generador que pertenece a \hat{y} y sea $\hat{r} = \hat{s} \setminus \{y = \lambda\}$ de manera que λ es cualquier producto de los elementos de \hat{x} . Entonces $\langle \hat{x} | \hat{r} \rangle$ y $\langle \hat{y} | \hat{s} \rangle$ son equivalentes.

Ejemplo 3.4.3 Mostrar que las presentaciones $\langle x, y | xyx = yxy \rangle$ y $\langle m, n | m^3 = n^2 \rangle$ son equivalentes.

$$\begin{aligned}
& \langle x, y | xyx = yxy \rangle \\
& \Downarrow II \quad m, \quad m = xy \\
& \langle x, y, m | xyx = yxy, m = xy \rangle \\
& \Downarrow II \quad n, \quad n = xyx \\
& \langle x, y, m, n | xyx = yxy, m = xy, n = xyx \rangle \\
& \Downarrow I \quad m^3 = n^2, \quad (xy)(xy)(xy) = (xyx)(xyx) \\
& \langle x, y, m, n | xyx = yxy, m = xy, n = xyx, m^3 = n^2 \rangle \\
& \Downarrow I \quad n = xyx, m = xy, \quad xyx = mx = n \Rightarrow x = m^{-1}n \\
& \langle x, y, m, n | xyx = yxy, m = xy, n = xyx, m^3 = n^2, x = m^{-1}n \rangle \\
& \Downarrow I \quad mm = (xy)(xy) = (xyx)y = ny = m^2, \quad ny = m^2 \Rightarrow y = n^{-1}m^2 \\
& \langle x, y, m, n | xyx = yxy, m = xy, n = xyx, m^3 = n^2, x = m^{-1}n, y = n^{-1}m^2 \rangle \\
& \Downarrow I' \quad xyx = m^{-1}nn^{-1}m^2m^{-1}n = m^{-1}m^2m^{-1}n = n \\
& \langle x, y, m, n | xyx = yxy, m = xy, m^3 = n^2, x = m^{-1}n, y = n^{-1}m^2 \rangle \\
& \Downarrow I' \quad xy = m^{-1}nn^{-1}m^2 = m^{-1}m^2 = m \\
& \langle x, y, m, n | xyx = yxy, m^3 = n^2, x = m^{-1}n, y = n^{-1}m^2 \rangle \\
& \Downarrow I' \quad m^3 = n^2 \Rightarrow yxy = n^{-1}m^2m^{-1}nn^{-1}m^2 = n^{-1}mm^2 = n^{-1}m^3 = xyx \\
& \langle x, y, m, n | m^3 = n^2, x = m^{-1}n, y = n^{-1}m^2 \rangle \\
& \Downarrow II' \\
& \langle y, m, n | m^3 = n^2, y = n^{-1}m^2 \rangle \\
& \Downarrow II' \\
& \langle m, n | m^3 = n^2 \rangle
\end{aligned}$$

El invariante más importante y eficaz de un nudo \mathbf{K} (o enlace) es el de su *grupo*: el grupo fundamental de su complemento $G = \pi(S^3 - \mathbf{K})$. Frecuentemente $S^3 - \mathbf{K}$ se sustituye por $\mathbb{R}^3 - \mathbf{K}$ o por $\overline{S^3 - V(\mathbf{K})}$ o $\overline{\mathbb{R}^3 - V(\mathbf{K})}$, donde $V(\mathbf{K})$ es un cilindro que contiene al nudo. Los grupos fundamentales de estos diversos espacios son obviamente isomorfos, los isomorfismos son inducidos por la inclusión. Existe un procedimiento simple, debido a Wirtinger para obtener una presentación del grupo de un nudo.

Aplicar isotopías al nudo \mathbf{K} en \mathbb{R}^3 tal que su proyección sobre el plano \mathbb{R}^2 sea regular. La proyección cilíndrica Z tiene auto-intersecciones en n rayos proyectados a_i correspondiente a los n puntos dobles de la proyección regular. Los a_i descomponen Z en n -celdas Z_i (ver Figura 3.4.1), donde Z_i es limitado por a_{i-1} , a_i y el arco sobre cruce σ_i de \mathbf{K} . Elegir la orientación de Z_i para inducir en σ_i la dirección de \mathbf{K} .

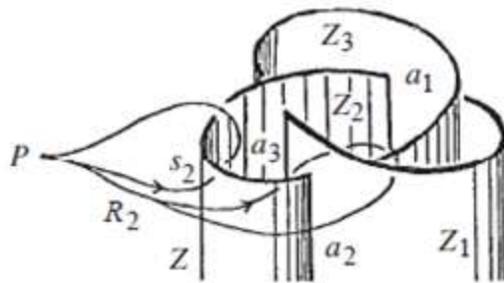


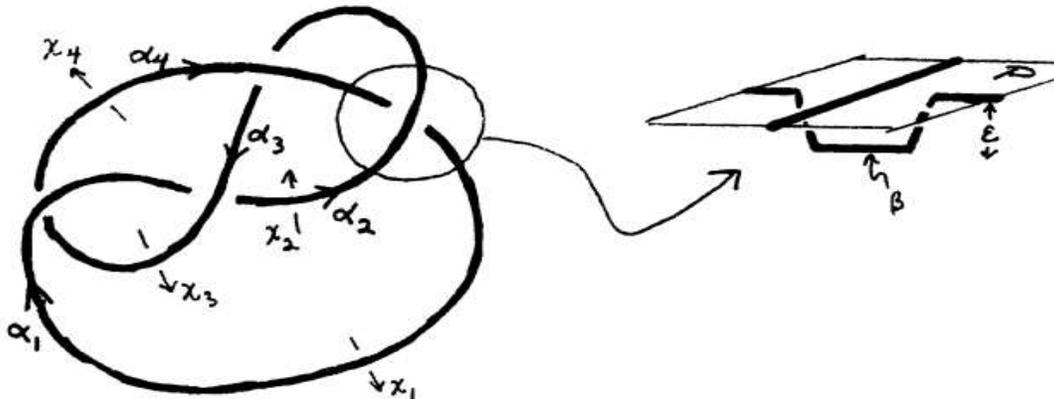
Figura 3.4.1

Definición 3.4.3. (Presentación Wirtinger) Sea σ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, el sobre cruce de arcos de una proyección regular de un nudo (o enlace) \mathbf{K} . Entonces el grupo del nudo admite la siguiente llamada presentación Wirtinger:

$$G = \pi(\overline{S^3 - V(\mathbf{k})}) = \langle s_1, \dots, s_n | r_1, \dots, r_n \rangle.$$

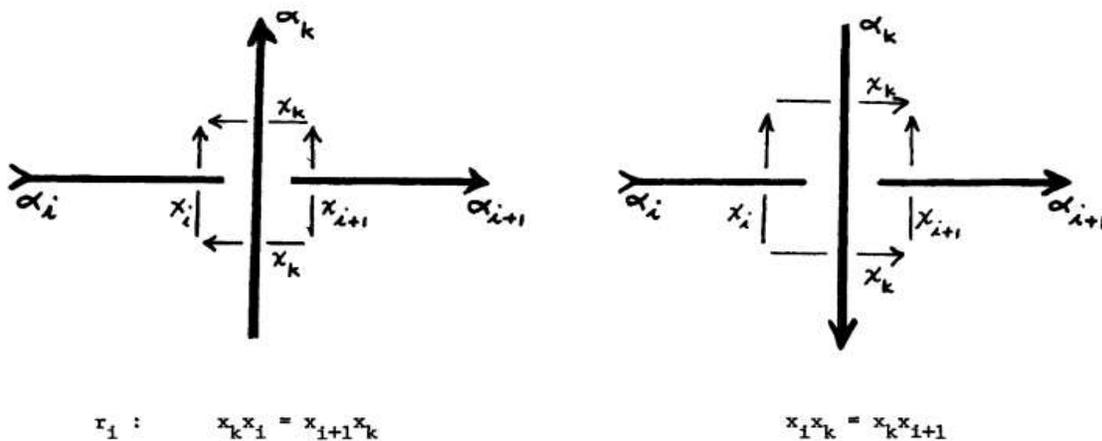
Además, cualquiera de los r_i pueden omitirse y lo anterior sigue siendo verdad.

La presentación Wirtinger, describe un procedimiento para la escritura de una presentación del grupo de un nudo \mathbf{K} en \mathbb{R}^3 , dada una proyección del nudo en un plano P (tómese el plano $x - y$), con un número finito de arcos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Cada α_i está conectado a α_{i+1} ($i < n$), y el α_n conectado con α_1 por arcos bajo el cruce exactamente como aparece a continuación. La unión de estos es el nudo \mathbf{K} .



El Algoritmo consiste en asignar una orientación al nudo de manera que los α_i están orientados y se asigna el orden de sus subíndices como se quiera. Dibujar una flecha corta marcada x_i pasando por debajo de cada α_i en dirección de derecha a izquierda según la orientación de cada α_i . Esto se supone que representa un bucle en $R^3 - K$.

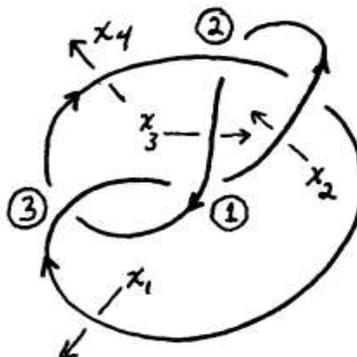
Ahora en cada cruce, hay una cierta relación entre las x_i las que definen la presentación de ese bajo cruce. Las dos posibilidades son:



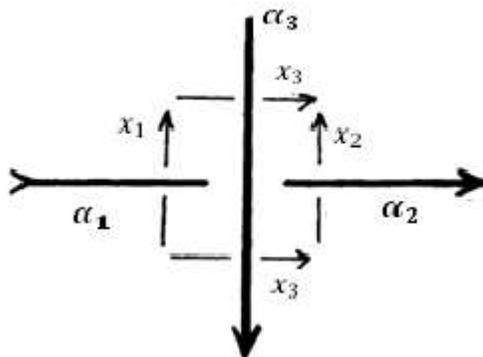
Los α_k son los arcos que pasan sobre la hebra de α_i a α_{i+1} .

Sea r_i el que denota cualquiera de las dos ecuaciones posibles descritas anteriormente. En todo el recorrido hay exactamente n relaciones r_1, \dots, r_n que puede encontrarse.

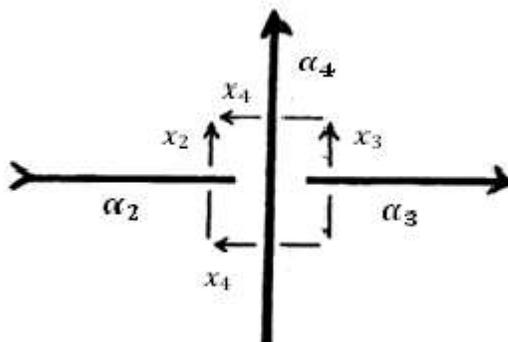
Ejemplo 3.4.4. Para la figura del nudo ocho, se tiene una presentación con generadores x_1, x_2, x_3, x_4 y relaciones siguientes



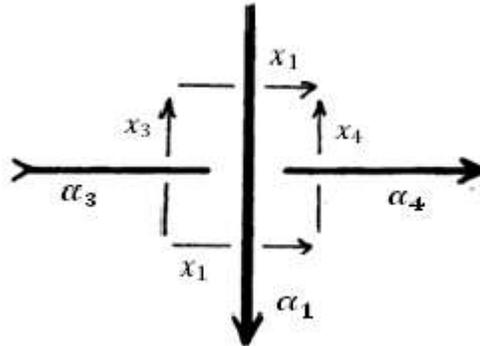
$$(1) x_1 x_3 = x_3 x_2$$



$$(2) x_4 x_2 = x_3 x_4$$



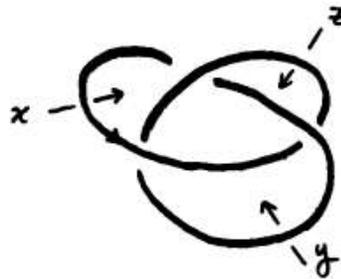
(3) $x_3x_1 = x_1x_4$



Se puede simplificar, usando (1) y (3) para eliminar $x_2 = x_3^{-1}x_1x_3$ y $x_4 = x_1^{-1}x_3x_1$ y sustituir en (2) para obtener la presentación equivalente

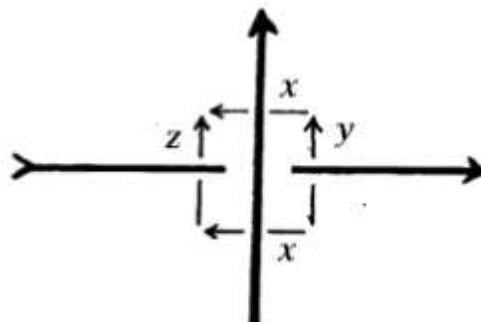
$$\pi(\mathbb{R}^3 - \text{figura de nudo ocho}) \approx (x_1, x_3; x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1x_3 = x_3x_1^{-1}x_3x_1).$$

Ejemplo 3.4.5 Calcular el grupo del trébol utilizando el método de Wirtinger.

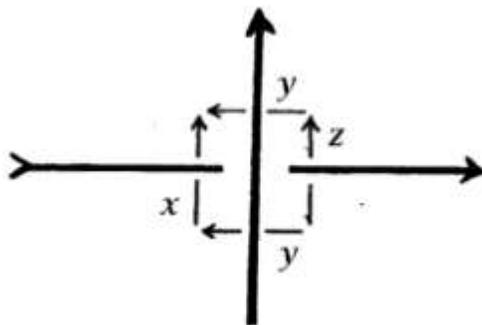


Se tienen generadores x, y, z y relaciones

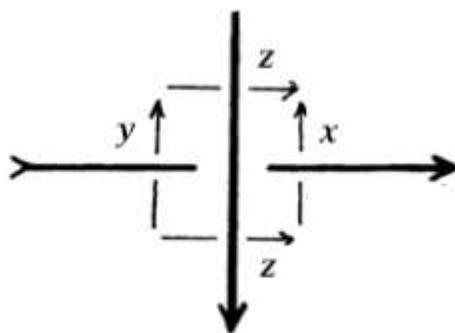
(1) $xz = yx$



(2) $yx = zy$



(3) $yz = zx$



El segundo se puede utilizar para eliminar $z = x^{-1}yx$, que convierte la primera relación a $yx = x^{-1}yxy$. Así se tiene la presentación para el grupo trébol

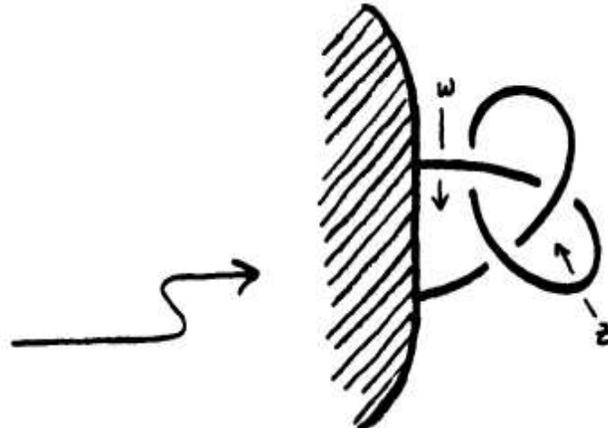
$$G = (x, y; xyx = yxy).$$

Ejemplo 3.4.6 El nudo cuadrado



considerar el complemento de:

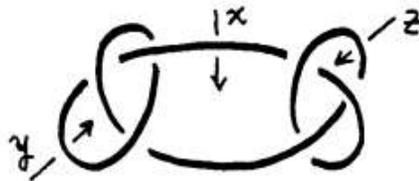
Está claro que esto tiene el tipo de homotopía del complemento de la estructura de trébol.
Asimismo para el complemento de:



La unión de estos complementos nos da el complemento del nudo cuadrado

$$\begin{aligned} \text{Grupo del nudo cuadrado} &= (x, y, w, z; xyx = yxy, wzw = zwz, x = w) \\ &= (x, y, z; xyx = yxy, xzx = zxz). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4.7 El nudo abuelita

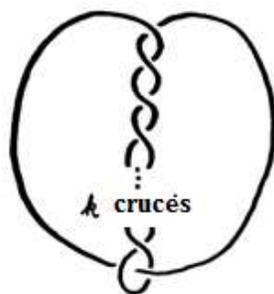


Grupo del nudo de la abuelita = $(x, y, z; xyx = yxy, xzx = zxz)$ es isomorfo con el grupo del nudo cuadrado.

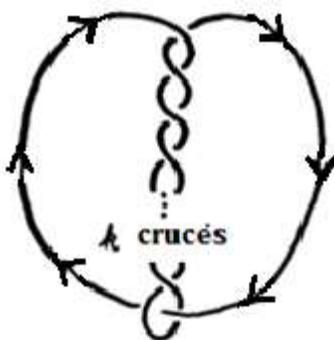
Sucede que, de hecho, los nudos cuadrados y abuelita no son equivalentes a pesar de los métodos que se ha discutido hasta ahora y no se distingue.

Nota: Los complementos de los nudos cuadrados y abuelita en realidad no son homeomorfos.

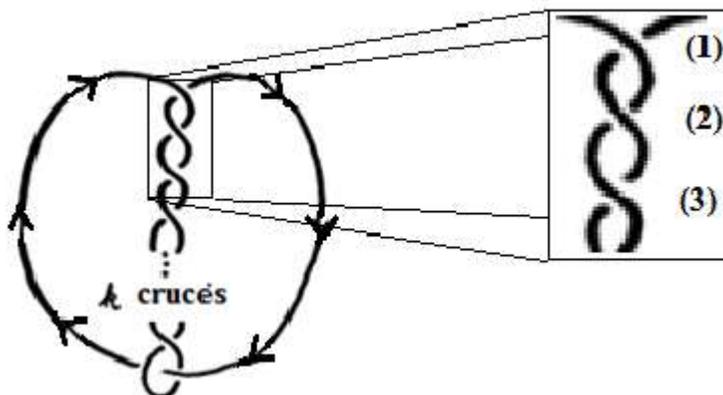
Ejemplo 3.4.8 Calcule una presentación para el grupo del nudo mostrado a continuación. Demostrar que tiene una presentación con dos generadores.



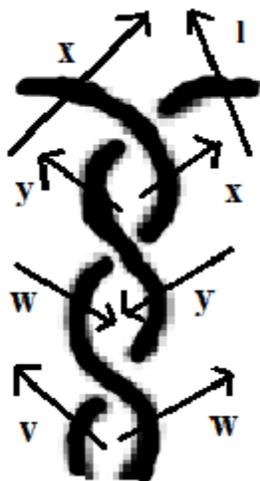
Primeramente se le asigna una orientación al nudo original.



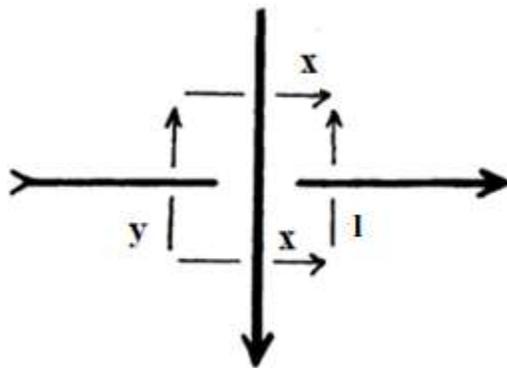
Enumérese y considérese los primeros tres cruces.



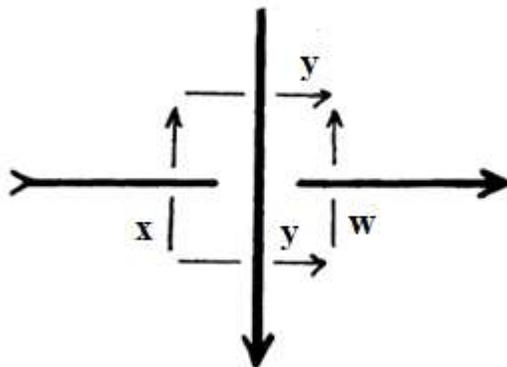
A continuación se asignan el sentido de los posibles caminos que enlazan al nudo.



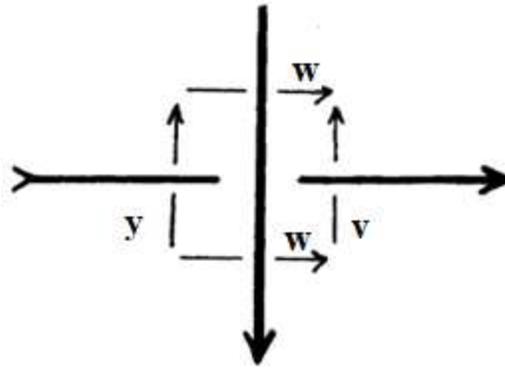
Dibujar cada uno de los diagramas correspondientes a los puntos y encontrar la relación.



Para este primer punto la relación es $yx = xl$.



Para el segundo punto la relación es $xy = yw$.



Para el tercer punto la relación es $yw = vw$.

A partir de estas relaciones se puede concluir que:

$$yw = vw \rightarrow v = w^{-1}yw$$

$$xy = yw \rightarrow w = y^{-1}xy$$

Si v depende de w y w depende de x, y entonces para todos los otros puntos las relaciones serán generados por x, l . Entonces el grupo fundamental de este nudo tiene dos generadores. Y su presentación es

$$G = (x, l; y = xlx^{-1})$$

3.5 Homomorfismos Inducidos de Grupos Fundamentales

Supóngase que se tiene un mapeo continuo $f : X \rightarrow Y$ de un espacio topológico X en otro Y . Cualquier camino a en X determina un camino fa en Y dada por la composición

$$[0, \|a\|] \xrightarrow{a} X \xrightarrow{f} Y,$$

Es decir, $fa(t) = f(a(t))$. El tiempo de parada de fa es la misma que la de a , es decir, $\|fa\| = \|a\|$. Por otra parte, la afirmación $a \rightarrow f \circ a$ es preservando producto:

Teorema 3.5.1

(a) Si el producto $a \cdot b$ está definido, también $(f \circ a) \cdot (f \circ b)$ y

$$f \circ (a \cdot b) = (f \circ a) \cdot (f \circ b).$$

Prueba (a)

Ya que $a \cdot b$ está definida, $a(\|a\|) = b(0)$. En consecuencia,

$$(f \circ a)(\|fa\|) = f(a(\|a\|))$$

$$fa(\|fa\|) = f(b(0)) = (f \circ b)(0)$$

Y el producto $(f \circ a) \cdot (f \circ b)$ por lo tanto está definido. Por otra parte,

$$(f \circ (a \cdot b))(t) = f((a \cdot b)(t))$$

$$(f \circ (a \cdot b))(t) = \begin{cases} f(a(t)), & 0 \leq t \leq \|a\| \\ f(b(t - \|a\|)), & \|a\| \leq t \leq \|a\| + \|b\| \end{cases}$$

$$(f \circ (a \cdot b))(t) = \begin{cases} fa(t), & 0 \leq t \leq \|fa\| \\ fb(t - \|fa\|), & \|fa\| \leq t \leq \|fa\| + \|fb\| \end{cases}$$

$$(f \circ (a \cdot b))(t) = ((f \circ a) \cdot (f \circ b))(t).$$

(b) Si e es un camino identidad, también lo es $f \circ e$.

(c) $f \circ a^{-1} = (f \circ a)^{-1}$.

Prueba (c)

$$(f \circ a^{-1})(t) = f(a^{-1}(t)); \text{ por hipótesis}$$

$$(f \circ a^{-1})(t) = f(a(\|a\| - t)); \text{ definiendo el camino } a^{-1}(t)$$

$$(f \circ a^{-1})(t) = (f \circ a)(\|fa\| - t); \text{ aplicando la composición de funciones.}$$

$$(f \circ a^{-1})(t) = (f \circ a)^{-1}(t); \text{ definiendo la composición.}$$

■

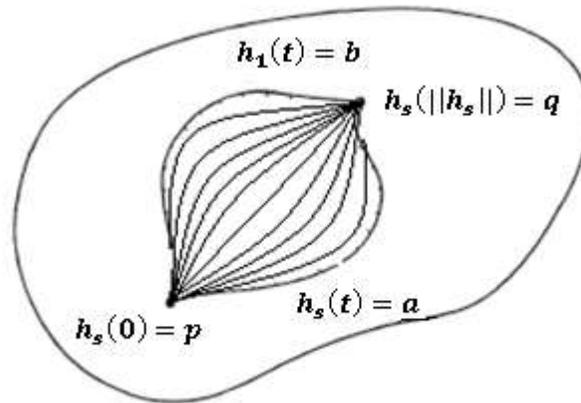
Para cualquier familia continua de caminos $\{h_s\}$, $0 \leq s \leq 1$, en X , la colección de caminos $\{fh_s\}$ es también una familia continua. Además, $\{fh_s\}$ es una familia de punto final fijo debido a que $\{h_s\}$ también lo es. En consecuencia,

Teorema 3.5.2 Si $a \approx b$, entonces $f \circ a \approx f \circ b$.

Prueba

Por hipótesis se tiene que $a \approx b$, es decir que los caminos son equivalentes.

Por definición se sabe que dos caminos son equivalentes si existe una familia de caminos de punto inicial-final fijo $\{h_s\}, 0 \leq s \leq 1$ en X , tal que $a = h_0$ y $b = h_1$.



Si $f: X \rightarrow Y$ es un mapeo continuo, para los caminos a, b en X , $f \circ a$ y $f \circ b$ definen un camino en Y .

Considerando la familia $\{h_s\}$, considérese las posibles composiciones de funciones entre f y alguna h_s .

$$f \circ h_0 = f(h_0) = f(a) = f \circ a$$

$$\vdots$$

$$f \circ h_{\frac{1}{2}} = f\left(h_{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\vdots$$

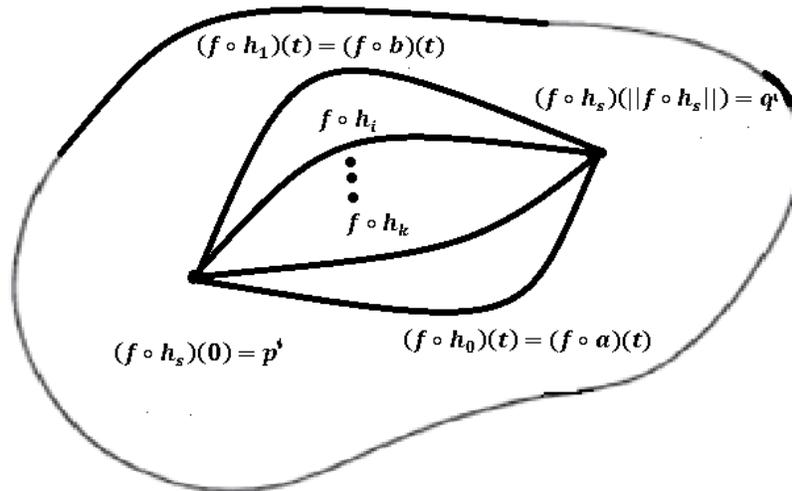
$$f \circ h_i = f(h_i)$$

$$\vdots$$

$$f \circ h_{\frac{2}{3}} = f\left(h_{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\vdots$$

$$f \circ h_1 = f(h_1) = f(b) = f \circ b$$



de lo anterior se tiene una familia de caminos en Y de punto inicial-final fijo definida como $\{h_s^* = f \circ h_s\}, 0 \leq s \leq 1$.

Por lo tanto $f \circ a \approx f \circ b$. ■

Así, f determina un mapeo f_* del grupoide fundamental $\Gamma(X)$ en el grupoide fundamental $\Gamma(Y)$ dado por la formula

$$f_*([a]) = [f \circ a].$$

Las propiedades básicas de la función f_* son resumidas en

Teorema 3.5.3

- (i) Si el producto $\alpha \cdot \beta$ es definido. Entonces también lo es $f_*(\alpha) \cdot f_*(\beta)$ y $f_*(\alpha \cdot \beta) = f_*(\alpha) \cdot f_*(\beta)$.
- (ii) Si ε es una identidad, entonces también lo es $f_*\varepsilon$.
- (iii) Si $f: X \rightarrow X$ es la función identidad, es decir, $f(x) = x$, entonces f_* es también la función identidad, es decir, $f_*\alpha = \alpha$.
- (iv) Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ son mapeos continuos y $g \circ f: X \rightarrow Z$ es la composición, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Prueba

Sea $f_*: \Gamma(X) \rightarrow \Gamma(Y)$, definida como $f_*([a]) = [f \circ a]$ y $f: X \rightarrow Y$.

- i)** Por hipótesis se tiene que α, β está bien definido. Esto es si se cumple que para las clases $\alpha = [a]$ y $\beta = [b]$, $a(|a|) = b(0)$. Ahora

$$a(|a|) = b(0)$$

$$f(a(|a|)) = f(b(0))$$

$$(f \circ a)(|a|) = (f \circ b)(0)$$

$$[f \circ a] = [f \circ b]$$

$$f_*([f \circ a]) = f_*([f \circ b])$$

De lo cual se concluye que $f_*(\alpha) \cdot f_*(\beta)$ está bien definida.

Continuando se quiere demostrar que $f_*(\alpha \cdot \beta) = f_*(\alpha) \cdot f_*(\beta)$.

$$f_*(\alpha \cdot \beta) = f_*([a] \cdot [b]); \text{ sustituyendo}$$

$$f_*(\alpha \cdot \beta) = f_*([a \cdot b]); \text{ por definición.}$$

$$f_*(\alpha \cdot \beta) = [f \circ (a \cdot b)]; \text{ aplicando la función } f_*$$

$$f_*(\alpha \cdot \beta) = [(f \circ a) \cdot (f \circ b)]; \text{ por el teorema 3.5.1 literal (a).}$$

$$f_*(\alpha \cdot \beta) = [(f \circ a) \cdot (f \circ b)]; \text{ por definición.}$$

$$f_*(\alpha \cdot \beta) = f_*(\alpha) \cdot f_*(\beta)$$

- ii)** Por hipótesis se tiene que la clase $\varepsilon \in \Gamma(\mathbf{X})$ es una identidad.

Sea ε la clase que posee un camino identidad y sea α una clase de equivalencia en $\Gamma(\mathbf{X})$.

Como ε es identidad se cumple que $\varepsilon \cdot \alpha = \alpha$.

$$f_*(\varepsilon) \cdot f_*(\alpha) = f_*(\varepsilon \cdot \alpha); \text{ por resultado del inciso i).}$$

$$f_*(\varepsilon) \cdot f_*(\alpha) = f_*(\alpha); \text{ ya que } \varepsilon \cdot \alpha = \alpha.$$

Por lo tanto $f_*(\varepsilon)$ es una identidad.

- iii)** por hipótesis se tiene que $f(x) = x$. Se quiere demostrar que $f_*(\alpha) = \alpha$.

Sea $\alpha = [a] \in \Gamma(\mathbf{X})$.

$$f_*(\alpha) = f_*([a]); \text{ sustituyendo}$$

$$f_*(\alpha) = [f \circ a]; \text{ aplicando } f_*$$

$$f_*(\alpha) = [f(a)]; \text{ ya que } f(x) = x$$

$$f_*(\alpha) = [a]; \text{ aplicando la función}$$

$$f_*(\alpha) = \alpha; \text{ sustituyendo}$$

iv) Sea $\alpha = [a] \in \Gamma(\mathbf{X})$. Se quiere demostrar que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

$$(g_* \circ f_*)(\alpha) = (g_* \circ f_*)([a]); \text{ sustituyendo}$$

$$(g_* \circ f_*)(\alpha) = g_*(f_*([a])); \text{ composición de funciones}$$

$$(g_* \circ f_*)(\alpha) = g_*([f \circ a]); \text{ aplicando } f_*$$

$$(g_* \circ f_*)(\alpha) = [g \circ (f \circ a)]; \text{ aplicando } g_*$$

$$(g_* \circ f_*)(\alpha) = [(g \circ f) \circ a]; \text{ asociando}$$

$$(g_* \circ f_*)(\alpha) = (g \circ f)_*([a]); \text{ por definición}$$

$$(g \circ f)_*(\alpha) = (g_* \circ f_*)(\alpha); \text{ sustituyendo}$$

■

Para cualquier elección p de punto base en X , $f_*(\pi(\mathbf{X}, p)) \subset \pi(\mathbf{Y}, fp)$. Así, la función definida por la restricción f_* a $\pi(\mathbf{X}, p)$ (que también deberá denotar por f_*) determina un homomorfismo

$$f_* : \pi(\mathbf{X}, p) \rightarrow \pi(\mathbf{Y}, fp),$$

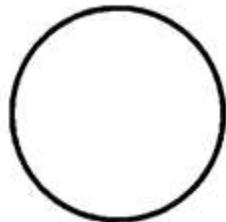
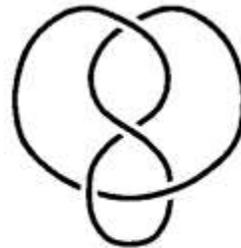
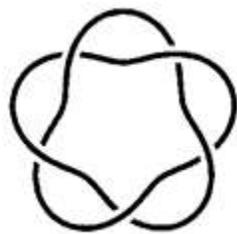
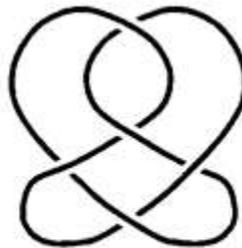
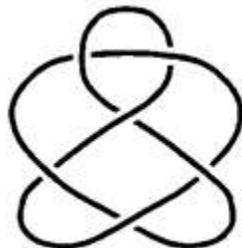
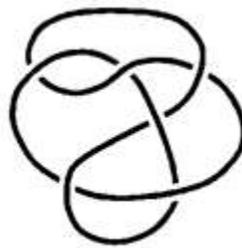
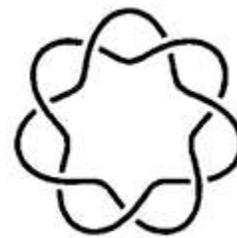
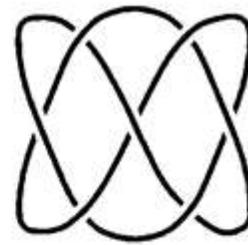
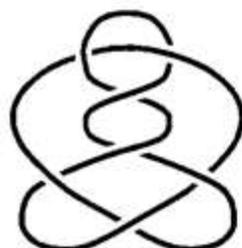
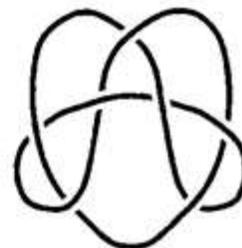
que es llamado el homomorfismo inducido por f . Téngase en cuenta que si \mathbf{X} es un espacio conexo por caminos, las propiedades algebraicas del homomorfismo f_* son independientes de la elección del punto base. Más explícitamente, para cualquiera dos puntos $p, q \in \mathbf{X}$, elija $\alpha \in \Gamma(\mathbf{X})$ con punto inicial p y punto terminal q . Entonces los homomorfismos

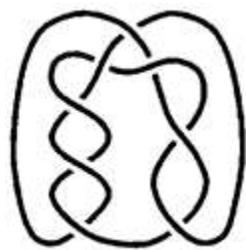
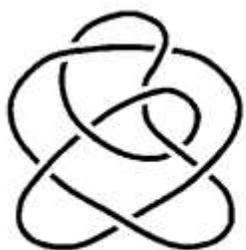
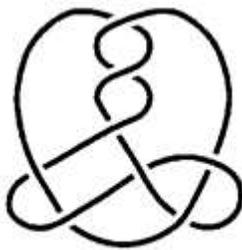
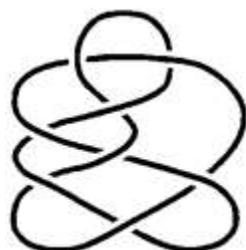
$$\begin{array}{ccc} \pi(\mathbf{X}, p) & \xrightarrow{f_*} & \pi(\mathbf{Y}, fp) \\ \beta \longrightarrow \alpha^{-1}\beta\alpha \downarrow & & \downarrow \gamma \longrightarrow (f_*\alpha)^{-1}\gamma(f_*\alpha) \\ \pi(\mathbf{X}, q) & \xrightarrow{f_*} & \pi(\mathbf{Y}, fq) \end{array}$$

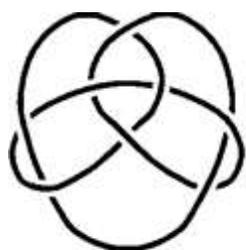
forman un diagrama consistente y los mapeos verticales son isomorfismos sobre. Así, por ejemplo, si cualquiera de los dos homomorfismos f_* es uno a uno o sobre, también lo es el otro.

La noción de un homeomorfismo inducido por un mapeo continuo es fundamental para topología algebraica. El homomorfismo del grupo fundamental inducido por un mapeo continuo proporciona el puente de la topología algebraica a la Teoría de Nudos.

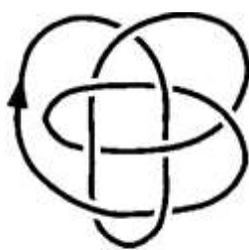
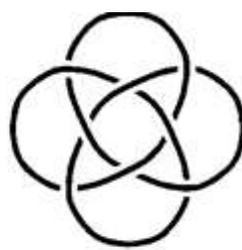
Anexo. Tabla de Nudos

 0_1  3_1  4_1  5_1  5_2  6_1  6_2  6_3  7_1  7_2  7_3  7_4  7_5  7_6  7_7

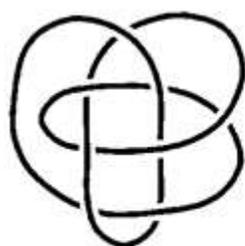
 8_1  8_2  8_3  8_4  8_5  8_6  8_7  8_8  8_9  8_{10}  8_{11}  8_{12}  8_{13}  8_{14}  8_{15}



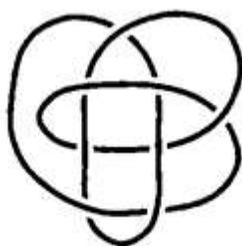
816

 $8_{17} = -8_{17}^*$ 

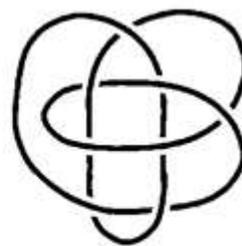
818



819



820



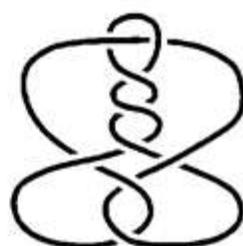
821



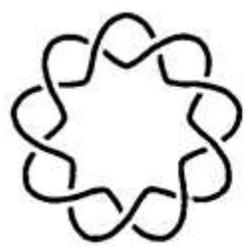
913



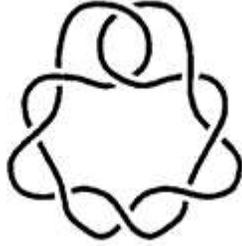
914



915



91



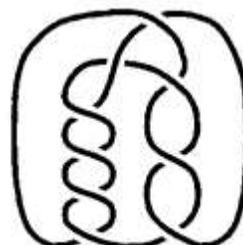
92



93



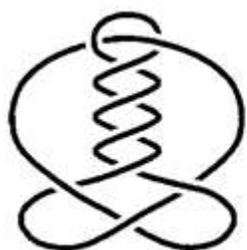
94



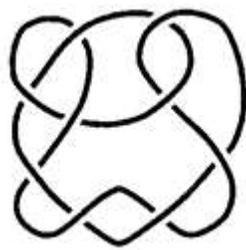
95



96



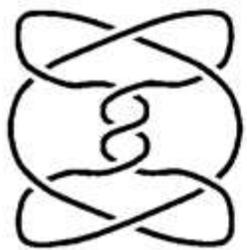
97



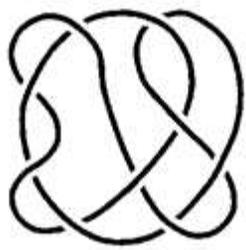
98



99



910



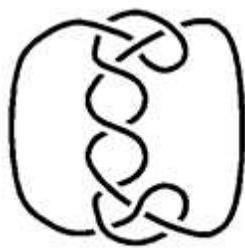
911



912



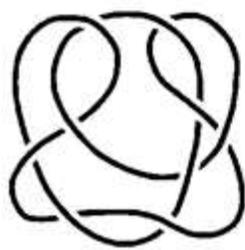
916



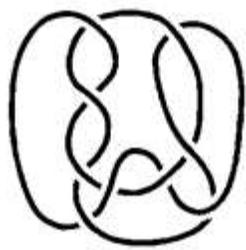
917



918



919



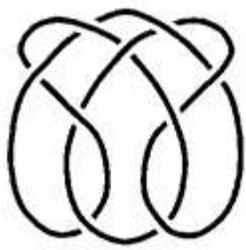
920



921



922



923



924



925



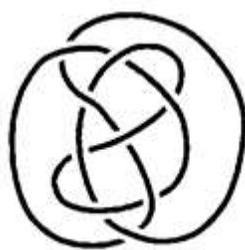
926



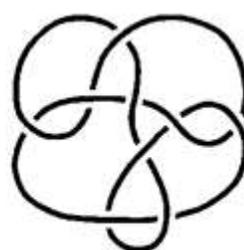
927



928



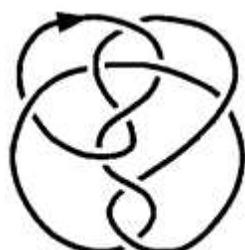
929



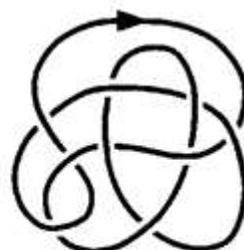
930



931



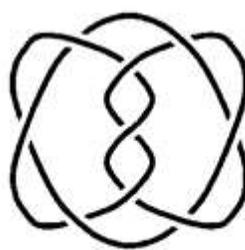
932



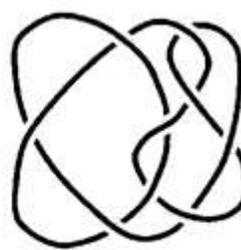
933



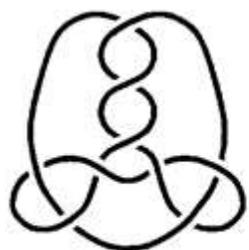
934



935



936



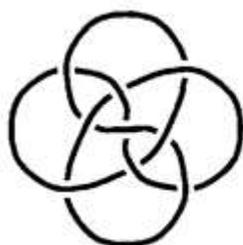
937



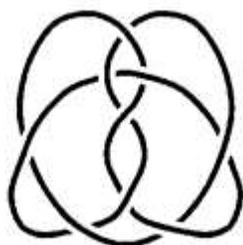
938



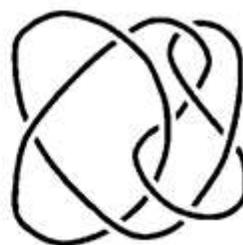
939



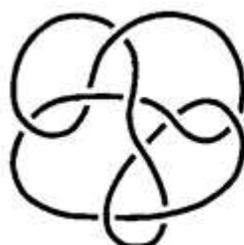
940



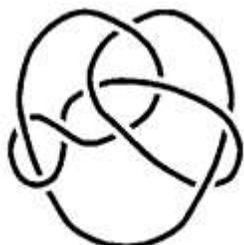
941



942



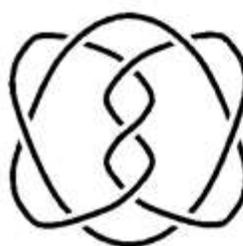
943



944



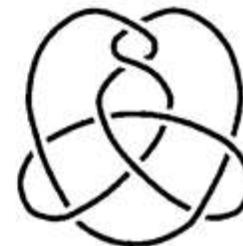
945



946



947



948



949

Bibliografía

Libros:

- **The Knot Book** (An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots)
Colin C. Adams
- **Knots** (Second Revised and Extend Edition)
Gerhard Burde - Heiner Zieschang
- **Knot Theory and its Applications**
Kunio Murasugi Translated by Bohdan Kurpita
- **Introduction to knot theory**
R. H. Crowell, R. H. Fox - Springer (1984)
- **Knot Theory**
Vassily Manturov - CRC Press LLC (2004)
- **Knots and Links**
Peter R. Cromwell (Cambridge University Press 2004)

Otros:

- Introducción a la Teoría de Nudos (Notas de la V Jornada de Física y Matemática - UACJ)
José Luis Cisneros Molina
- Introducción a la Teoría de Nudos(Trabajo Dirigido en Matemática Fundamental-UC-España)
Luping Wang Xiao

Páginas web:

<http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/przytycki1.pdf>

<http://www.acmor.org.mx/sites/default/files/106nudos.pdf>

