UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADO:

“ESPACIOS DE SOBOLEV Y FORMULACIÓN VARIACIONAL DE ALGUNOS PROBLEMAS DE VALOR EN LA FRONTERA EN DIMENSIÓN N ”

PRESENTADO POR:

RODOLFO KEVIN PARADA RAMOS

JOSÉ MARIO QUINTANILLA REYES

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

DOCENTE DIRECTOR:

LIC. TOBÍAS HUMBERTO MARTÍNEZ LOVO

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, OCTUBRE DE 2017

SAN MIGUEL   EL SALVADOR   CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

LIC. ROGER ARMANDO ARIAS

RECTOR

DR. MANUEL DE JESÚS JOYA

VICE-RECTOR ACADÉMICO

LIC. NELSON BERNABÉ GRANADOS

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO

LIC. CRISTOBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ

SECRETARIO GENERAL

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN

FISCAL GENERAL

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

ING. JOAQUÍN ORLANDO MACHUCA

DECANO

LIC. CARLOS ALEXANDER DÍAZ

VICEDECANO

LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNÁNDEZ

SECRETARIO

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

LIC.JOSÉ ALCIDES MARTÍNEZ

JEFE DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES

Y MATEMÁTICA

ING. DOLORES BENEDICTO SARAVIA

COORDINADOR DE LA SECCION DE MATEMATICA

MTRO. JORGE PASTOR FUENTES CABRERA

DIRECTOR GENERAL DE PROCESOS DE GRADUACIÓN

DE LA FMO

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

MSC. OSCAR ULISES LIZAMA VIGIL

COORDINADOR DE TRABAJOS DE GRADO

DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES

Y MATEMÁTICA

LIC. TOBÍAS HUMBERTO MARTÍNEZ LOVO

DOCENTE ASESOR

Introducción

Este trabajo está enfocado al estudio de las propiedades de algunos espacios de Banach de funciones débilmente diferenciables en dimensión N, las cuales surgen en conexión con numerosos problemas de la teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) y áreas relacionadas con el análisis matemático, y los cuales son herramientas esenciales en esas disciplinas. Estos espacios son ahora más a menudo asociados con el nombre del matemático soviético Sergéi Lvóvich Sóbolev (1908-1989). Los Espacios de Sobolev, son estructuras matemáticas muy interesantes, pero su significado principal reside en el papel central que ellos y sus numerosas generalizaciones, ahora juegan un papel muy importante en EDP.

Además de explicar la teoría de los Espacios de Sobolev, se presentan algunas aplicaciones específicas, las cuales se encuentran en la mayoría de textos modernos de EDP. Este trabajo también pretende servir como referencia, para estudiantes de Licenciatura en Matemáticas que deseen investigar sobre estos espacios para el estudio de Ecuaciones Diferenciales.

Esta investigación está organizada en tres capítulos. El Capítulo 1, es una combinación de temas que son considerados como preliminares, entre estos hay elementos de Análisis Funcional y Real, en los cuales se procuró incluir la mayor cantidad de resultados posibles para tener una buena base para lo que sigue.

En el Capítulo 2, se presenta definiciones y propiedades de los Espacios de Sobolev en $\mathbb{R}$, y algunos problemas de contorno. Estos espacios suelen utilizarse en la investigación de EDP no lineales, por ejemplo en las ecuaciones de Navier-Stokes de mecánica de fluidos

La parte fundamental del presente trabajo, se muestra en el Capítulo 3, en el cual se presenta la definición y propiedades elementales de los Espacios de Sobolev en dimensión N, y la formulación variacional de algunos problemas de valor en la frontera, y se muestran algunas aplicaciones a problemas que involucran EDP.

Se hace notar que para facilitar la comprensión de este documento es necesario que el lector tenga nociones en las siguientes áreas:

1. Análisis Real
2. Análisis Funcional
3. Álgebra Moderna
4. Topología
5. Ecuaciones Diferenciales
6. Cálculo Vectorial

Objetivos

Objetivo General

Estudiar los Espacios de Sobolev y la Formulación Variacional de algunos Problemas de Valor en la Frontera en Dimensión N.

Objetivos Específicos

1) Definir y explicar los Espacios de Sobolev y sus propiedades en dimensión N.

2) Comprender la Formulación Variacional de algunos Problemas de Valor en la Frontera en dimensión N.

3) Presentar aplicaciones especificas de los Espacios de Sobolev a Problemas Elípticos.

4) Proporcionar a los estudiantes de Licenciatura en Matemática, un material apto para el estudio de los Espacios de Sobolev y Formulación Variacional.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Definición 1.1. ***(Espacio normado, Espacio de Banach)*** *Un espacio normado E es un espacio vectorial con una norma definida sobre él. Un espacio de Banach es un espacio normado completo (completo con la métrica inducida por la norma).*

Definición 1.2. ***(Operador lineal)*** *Un operador lineal T es un operador tal que*

(i) El dominio $\mathscr{D}(T)$ es un espacio vectorial y el rango $\mathscr{R}(T)$ permanece en un espacio vectorial sobre el mismo campo.

(ii) Para todo $x, y \in \mathscr{D}(T)$ y cualquier escalar α,

$$T(x+y) = Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

Definición 1.3. ***(Operador lineal acotado)*** *Sea X y Y espacios normados y $T : \mathscr{D}(T) \to Y$ un operador lineal, donde $\mathscr{D}(T) \subset X$. El operador T se dice acotado si existe un numero real C tal que para todo $x \in \mathscr{D}(T)$,*

$$\|Tx\| \leq C\|x\|.$$

Definición 1.4. ***(Funcional lineal)*** *Un funcional lineal es un operador lineal con dominio en un espacio vectorial X y rango en un campo escalar $\mathbb{K}$ de X; entonces,*

$$f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{K},$$

Donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si X es real y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si X es complejo.

Definición 1.5. ***(Funcional lineal acotado)*** *Un funcional lineal acotado f es un operador lineal acotado, con rango en un campo escalar de un espacio normado X en el cual vive el dominio $\mathscr{D}(f)$. Así existe un numero real C tal que para todo $x \in \mathscr{D}(f)$,*

$$|f(x)| \leq C\|x\|,$$

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$$

Además la norma de f está definida como sigue

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(f) \\ \|x\| = 1}} |f(x)|$$

Definición 1.6. ***(Conjunto parcialmente ordenado, cadena)*** *Un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto M sobre el cual está definido un orden parcial, es decir, una relación binaria denotada por $\leqq$ que satisface las siguientes condiciones*

(PO1) $a \leqq a$ *para cada* $a \in M$. *(Reflexividad)*

(PO2) *Si* $a \leqq b$ *y* $b \leqq a$, *entonces* $a = b$. *(Antisimetría)*

(PO3) *Si* $a \leqq b$ *y* $b \leqq c$, *entonces* $a \leqq c$. *(Transitividad)*

"Parcialidad" enfatiza el hecho de que M podría contener elementos a y b para los cuales ni $a \leqq b$ ni $b \leqq a$. a y b serán llamados incomparables.

Un conjunto totalmente ordenado o cadena es un conjunto parcialmente ordenado tal que cualquier par de elementos de elementos del conjunto es comparable.

Una cota superior de un conjunto W de un conjunto parcialmente ordenado M es un elemento $u \in M$ tal que

$$x \leqq u, \qquad para\ cada\ x \in W.$$

Un elemento maximal de M es un $m \in M$ tal que

$$m \leqq x \quad implica \quad m = x.$$

Lema 1.7. ***(Zorn)*** *Sea $M \neq \emptyset$ un conjunto parcialmente ordenado. Supongamos que cada cadena $C \subset M$ tienen una cota superior. Entonces M tiene al menos un elemento maximal.*

1.1. Teorema de Hahn-Banach

Sea *E* un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Definimos un *funcional* como una función definida sobre *E*, o sobre algún subespacio de *E*, con valores en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. El siguiente resultado se refiere a la extensión de un funcional lineal definido sobre un subespacio lineal de *E* a un funcional lineal definido sobre todo *E*.

Teorema 1.8. ***(Teorema de Hahn-Banach)*** *Sea $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface* [1]

[1] Una función *p* que satisface **(1.1)** y **(1.2)** es a veces llamado *Funcional de Minkowski* o *Funcional Sublineal*.

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E \quad y \quad \forall \lambda > 0. \tag{1.1}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E. \tag{1.2}$$

Sea $G \subset E$ un subespacio vectorial y sea $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G. \tag{1.3}$$

Entonces, existe un funcional lineal f definido sobre todo E tal que extiende g, i.e., $\exists f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $g(x) = f(x)$, $\forall x \in G$, y tal que

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E. \tag{1.4}$$

Demostración. Sea Z el conjunto de todas las extensiones lineales h de g las cuales satisfacen la condición

$$h(x) \leq p(x), \quad \forall x \in \mathscr{D}(h)$$

Claramente, $Z \neq \emptyset$ ya que $g \in Z$. Podemos definir un orden parcial sobre Z como sigue

$$h \leq k \quad \Longleftrightarrow \quad k \; es \; una \; extensin \; lineal \; de \; h.$$

es decir, por definición, $\mathscr{D}(k) \supset \mathscr{D}(h)$ y $k(x) = g(x)$ para cada $x \in \mathscr{D}(h)$.

Para cualquier cadena $C \subset Z$ definimos $\hat{h}$ como sigue

$$\hat{h}(x) = h(x) \qquad si \; x \in \mathscr{D}(h) \qquad (h \in C).$$

$\hat{h}$ es un funcional lineal, con dominio

$$\mathscr{D}(\hat{h}) = \bigcup_{h \in C} \mathscr{D}(h),$$

el cual es un espacio vectorial dado que C es una cadena. La definición de $\hat{h}$ es inequívoca. De hecho, para $x \in \mathscr{D}(h_1) \cap \mathscr{D}(h_2)$ con $h_1, h_2 \in C$ tenemos que $h_1(x) = h_2(x)$ dado que C es una cadena, entonces $h_1 \leq h_2$ o $h_2 \leq h_1$. Claramente, $h \leq \hat{h}$ para todo $h \in C$. Asi $\hat{h}$ es cota superior de C. Como C fue arbitrario por el lema de Zorn (Lema 1.7), Z tiene una elemento maximal f.

Por como definimos Z, esta es una extensión lineal de g la cual satisface

$$f(x) \leq p(x) \qquad x \in \mathscr{D}(f). \tag{1.5}$$

Ahora debemos mostrar que $\mathscr{D}(f)$ es todo E. Suponemos que esto es falso. Entonces podemos escoger un $y_1 \in E - \mathscr{D}(f)$ y consideramos el subespacio Y_1 de E, generado por $\mathscr{D}(f)$ y y_1. Note que $y_1 \neq 0$ ya que $0 \in \mathscr{D}(f)$. Cualquier $x \in Y_1$ puede ser escrito como

$$x = y + \alpha y_1 \qquad y \in \mathscr{D}(f).$$

Esta representación es única. De hecho, $y+\alpha y_1 = \tilde{y}+\beta y_1$, con $\tilde{y} \in D_i(f)$, implica que $y - \tilde{y} = (\beta - \alpha)y_1$, donde $y - \tilde{y} \in \mathscr{D}(f)$ mientras $y_1 \notin \mathscr{D}(f)$, entonces la única solución es que $y - \tilde{y} = 0$ y así $\beta - \alpha = 0$. Esto significa unicidad.

Definamos un funcional h_1 sobre Y_1 como sigue

$$h_1(y + \alpha y_1) = f(y) + \alpha c \tag{1.6}$$

donde c es una constante real. No es difícil observar que h_1 es lineal. Además, para $\alpha = 0$ tenemos que $h_1(y) = f(y)$. Así h_1 es una *extensión propia* de f, es decir, una extensión tal que $\mathscr{D}(f)$ es un subconjunto propio de $\mathscr{D}(h_1)$. Consecuentemente, si podemos mostrar que $h_1 \in Z$ mostrando que

$$h_1(x) \leq p(x), \quad \forall x \in \mathscr{D}(h_1), \tag{1.7}$$

esto contradice la maximalidad de f, entonces $\mathscr{D}(f) \neq E$ es falso y deberá ser que $\mathscr{D}(f) = E$.

En consecuencia, debemos demostrar que h_1 con un c adecuado en (1.6) satisface (1.7).

Consideramos cualquier y y z en $\mathscr{D}(f)$. De (1.5) y (1.2) obtenemos

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) = f(y - z) &\leq p(y - z) \\ &= (p + y_1 - y_1 - z) \\ &\leq p(y + y_1) + p(-y_1 - z) \end{aligned}$$

Tomando el último término y pasándolo a la izquierda y el término $f(y)$ al lado derecho, tenemos

$$- p(-y_1 - z) - f(z) \leq p(y + y_1) - f(y), \tag{1.8}$$

donde y_1 es fijo, Como y no aparece en la izquierda y z tampoco en la derecha, la desigualdad se mantiene si tomamos el supremo de los $z \in \mathscr{D}(f)$ en la izquierda (al que llamamos m_0) y el ínfimo de $y \in \mathscr{D}(f)$ en la derecha, (al que llamamos m_1). Entonces $m_o \leq m_1$, para un c tal que $m_0 \leq c \leq m_1$, así de 1.8 tenemos

$$- p(-y_1 - z) - f(z) \leq c, \quad \forall z \in \mathscr{D}(f) \tag{1.9}$$

$$c \leq p(y + y_1) - f(y), \quad \forall y \in \mathscr{D}(f) \tag{1.10}$$

Primero demostramos (1.7) para α negativo en (1.6) y luego para un α positivo. Para $\alpha < 0$ usamos (1.9) con z reemplazado por $\alpha^{-1}y$, es decir,

$$-p(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y) - f(\frac{1}{\alpha}y) \leq c.$$

Multiplicando por $-\alpha > 0$ resulta

$$\alpha p(-y_1 - \frac{1}{\alpha}) + f(y) \leq -\alpha c$$

De lo anterior y (1.6), usando $y + \alpha y_1 = x$, obtenemos la desigualdad deseada

$$h_1(x) = f(y) + \alpha c \leq -\alpha p(-y_1 - \frac{1}{\alpha}) = p(\alpha y_1 + y) = p(x).$$

Para $\alpha = 0$ tenemos $x \in \mathscr{D}(f)$ y no hay que probar. Para $\alpha > 0$ usamos (1.10) con y reemplazado por $\alpha^{-1}y$ para tener

$$c \leq p(\frac{1}{\alpha}y + y_1) - f(\frac{1}{\alpha}y).$$

Multiplicando por $\alpha > 0$ resulta

$$\alpha c \leq \alpha p(\frac{1}{\alpha}y + y_1) - f(y) = p(x) - f(y)$$

De lo anterior y de (1.6),

$$h_1(x) = f(y) + \alpha c \leq p(x).$$

□

1.2. Topologías Débiles, Espacios Reflexivos, Espacios Separables, Convexidad Uniforme

Definición 1.9. ***(Dual Algebráico)*** *Sea E un espacio vectorial, el dual algebráico E^* de E es el conjunto de todos los funcionales lineales definidos sobre E.*

Definición 1.10. ***(Bidual Algebráico o Segundo espacio Dual Algebráico)*** *El Bidual Algebráico de E denotado por $(E^*)^*$ es el espacio de los funcionales lineales sobre E^*. También puede denotarse por E^{**}.*

Definición 1.11. ***(Dual)*** *Sea E un Espacio normado el dual $E^\star$ de E es el conjunto de todos los funcionales lineales acotados definidos sobre E*[2]*.* ***El Bidual o segundo Dual*** *denotado por $(E^\star)^\star$ es el espacio de los funcionales lineales acotados sobre $E^\star$. También puede denotarse por $E^{\star\star}$.*

[2]La noción de Dual que se maneja en Álgebra Lineal es la que se define como Dual Algebráico, pero ambas nociones no entran en conflicto debido a que en Álgebra Lineal se trabaja con espacios de dimensión finita y en dichos espacios todos los funcionales lineales son acotados.

Ejemplo 1.1. *El espacio Dual de $\mathbb{R}^N$ es $\mathbb{R}^N$.*
La demostración de este hecho se puede revisar en [R3], página 121.

Ejemplo 1.2. *El espacio dual de ℓ^p es ℓ^q.*
La demostración de este hecho se puede revisar en [R3], página 122.

Definición 1.12. *Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos, una* ***Isometría*** *es una función $f : X \to Y$, tal que para $x, y \in X$,*

$$d(x, y) = \rho(f(x), f(y)),$$

una expresión equivalente en espacios normados sería,

$$\|x\|_X = \|f(x)\|_Y.$$

Donde las normas son inducidas por las métricas de sus respectivos espacios.

Definición 1.13. *Llamaremos* ***función canónica*** *de E a la aplicación $C : E \longrightarrow E^{\star\star}$ dada por $C(x) = g_x$ donde*
$g_x(f) = f(x) \ \ (f \in E^\star)$
Es decir, para cada $x \in E$ su imagen es un funcional lineal $g_x \in E^{\star\star}$ tal que

$$g_x(\alpha f + h) = (\alpha f + h)(x) = \alpha f(x) + h(x) = \alpha g_x(f) + g_x(h), \quad \forall f, g \in E^\star \ y \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

$$|g_x(f) - g_x(h)| = |f(x) - h(x)| = |(f - h)(x)| \leq \|x\|\|f - h\|, \quad \forall f, g \in E^\star$$

Por definición, C_E es lineal. Además C_E es una isometría, es decir $E \cong C(E) \subseteq E^{\star\star}$

Definición 1.14. *Un espacio normado E es* ***reflexivo*** *si la isometría C_E es sobreyectiva, con lo que E es isométrico a su bidual.*

Lema 1.15. *Si X e Y son espacios de Banach reflexivos. Se cumple el siguiente hecho*

$$(X \times Y)^\star = X^\star \times Y^\star$$

Demostración. Sean $T_1 \in X^\star$ y $T_2 \in Y^\star$, definimos

$$T(x, y) = T_1(x) + T_2(y)$$

así T es lineal y acotado dado que esta definido en función de T_1 y T_2, por tanto $T \in (X \times Y)^\star$. Por otro lado, si tomamos $T \in (X \times Y)^\star$, definimos $T_1 : X \to \mathbb{R}$ y $T_2 : Y \to \mathbb{R}$ como sigue

$$T_1 x = L(x, 0)$$

y

$$T_2 y = L(0, y)$$

Los cuales por definición son lineales y acotados, además

$$L(x, y) = L(x, 0) + L(0, y) = T_1(x) + T_2(y)$$

□

Observación 1.16. *Por recursividad se verifica que para $N \in \mathbb{N}$.*

$$\left(\prod_{i=1}^{N} X_i\right)^{\star} = \prod_{i=1}^{N} X_i^{\star}.$$

Proposición 1.17. *Sean X e Y espacios de Banach reflexivos, entonces $(X \times Y)$ es reflexivo.*

Demostración. Sea $C : X \times Y \to (X \times Y)^{\star\star}$ la función canónica sobre $X \times Y$, por el lema 1.15, $(X \times Y)^{\star\star} = X^{\star\star} \times Y^{\star\star}$. Así podemos definir C como sigue

$$C = (A, B)$$

donde A, B son las funciones canónicas sobre X e Y respectivamente.
Sea $g \in (X \times Y)^{\star\star}$,

$$\begin{aligned} g \in (X \times Y)^{\star\star} &\Rightarrow g \in X^{\star\star} \times Y^{\star\star} \\ &\Rightarrow g = (h, k), \quad h \in X^{\star\star}, k \in Y^{\star\star} \\ &\Rightarrow \exists (x, y) \in X \times Y : \ A_x = h \ y B_x = k, (X, Y \ son \ reflexivos) \\ &\Rightarrow g = (A_x, B_y) = C_{(x,y)} \end{aligned}$$

Por tanto $X \times Y$ es reflexivo. □

Observación 1.18. *Por recursividad se puede verificar que si $\{X_i\}_{i=1}^{N}$, ($N \in \mathbb{N}$) es una familia de espacios de Banach reflexivos entonces*

$$\prod_{i=1}^{N} X_i$$

es un espacio reflexivo.

Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E^{\star}$. Denotamos por $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ el funcional lineal $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Como φ esta definido en todo $E^{\star}$, obtenemos una colección $(\varphi_f)_{f \in E^{\star}}$ de funciones de E en $\mathbb{R}$. Por ahora obviaremos la topología usual sobre E (la asociada a $\|\cdot\|$ que suele llamarse topología fuerte) y definimos una nueva topología como sigue:

Definición 1.19. *La **Topología débil** $\sigma(E, E^{\star})$ sobre E es la topología más gruesa asociada a la colección $(\varphi_f)_{f \in E^{\star}}$, es decir, es la topología más gruesa tal que cada función de $(\varphi_f)_{f \in E^{\star}}$ es continua. Llamaremos **topología fuerte** a la inducida por la norma.*

Observación 1.20. *Sea E un espacio de Banach y $\varphi \in E^\star$. Una subbase para la Topología Débil $\sigma(E, E^\star)$ es la colección*

$$\mathscr{B} = \left\{\varphi^{-1}(U);\ U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}\right\}.$$

En otras palabras, un subconjunto de E es abierto en la topología débil sí y solo sí puede ser escrito como unión arbitraria de intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\varphi^{-1}(U)$.

Ahora definiremos una topología sobre $E^\star$ llamada **Topología Débil*** denotada por $\sigma(E^\star, E)$ (El $*$ es para recordar que esta topología esta definida sólo en espacios duales). Para cada $x \in E$ considere el funcional lineal $\varphi_x : E^\star \to \mathbb{R}$ definida por $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle$. Como x recorre a E, obtenemos una colección $(\varphi_x)_{x\in E}$ de funciones de $E^\star$ a $\mathbb{R}$.

Definición 1.21. *La Topología débil*, $\sigma(E^\star, E)$, es la topología más gruesa sobre $E^\star$ asociada a la colección $(\varphi_x)_{x\in E}$.*

Definición 1.22. ***(Espacio convexo)*** *Un espacio vectorial E se dice convexo si para cada $x, y \in E$, tenemos que $tx + (1-t)y \in E$ donde $t \in [0, 1]$.*

Teorema 1.23. *Sea C un subespacio convexo de E. Entonces C es cerrado con la topología débil $\sigma(E, E^\star)$ si y solo si es cerrado con la topología fuerte.*

Definición 1.24. *Un espacio de Banach es llamado **Uniformemente Convexo** si*

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ tal\ \ que$$

$$[x, y \in E, \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\ \ y\ \ \|x-y\| > \varepsilon] \Rightarrow \left[\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta\right]$$

La convexidad uniforme es una propiedad *geométrica* de la bola unitaria: si deslizamos una regla de largo $\varepsilon > 0$ en la bola unitaria, entonces su punto medio permanece dentro de la bola de radio $1-\delta$ para algún $\delta > 0$. En particular, la esfera unitaria debe ser “redonda” y no puede incluir cualquier segmento de linea.

Teorema 1.25. ***(Milman-Pettis).*** *Cada espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.*

Notación. *El epigrafo de φ es el conjunto*

$$epi\ \varphi = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}; \varphi(x) \le \lambda\}$$

Definición 1.26. *Una función $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ es llamada **Semicontinua Inferior** (s.c.i.) si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto*

$$[\varphi \le \lambda] = \{x \in E : \varphi(x) \le \lambda\}$$

es cerrado.

Algunas propiedades elementales acerca de funciones s.c.i.

1. Si φ es s.c.i. entonces epi φ es cerrada en $E \times \mathbb{R}$; y viceversa.

2. Si φ es s.c.i. entonces para cada $x \in E$, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entorno V de x tal que

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) - \varepsilon, \quad \forall y \in V$$

   y viceversa. En particular, si φ es s.c.i. entonces para cada sucesión (x_n) en E tal que $x_n \to x$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} inf \varphi(x_n) \geq \varphi(x)$$

   y viceversa si E es un espacio métrico.

3. Si φ_1 y φ_2 son s.c.i., entonces $\varphi_1 + \varphi_2$ es s.c.i.

4. Si $(\varphi_i)_{i\in I}$ es una familia de funciones s.c.i. entonces su *envolvente superior* es también s.c.i., es decir, la función φ definida por

$$\varphi(x) = \sup_{i\in I} \varphi_i(x)$$

   es s.c.i.

5. Si E es *compacto* y φ es s.c.i., entonces $\inf_E \varphi$ es alcanzado.

Definición 1.27. *Una función* $\varphi : E \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ *es llamada* ***convexa*** *si*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \ \forall x, y \ \in \ E, \ \forall t \in (0, 1).$$

Las siguientes son algunas propiedades fundamentales de las funciones convexas:

1. Si φ es una función convexa. entonces epi φ es un conjunto convexo en $E \times \mathbb{R}$; y viceversa.

2. Si φ es una función convexa, entonces para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto $|\varphi \leq \lambda|$ es convexo; pero el converso no siempre es cierto.

3 Si φ_1 y φ_2 son convexas, entonces $\varphi_1 + \varphi_2$ es convexa.

4 Si $(\varphi_i)_{i\in I}$ es una familia de funciones convexas, entonces el envolvente superior, $\sup_i \varphi_i$, es convexo.

De aquí en adelante E es un Espacio vectorial normado (e.v.n.).

Corolario 1.28. *Supongamos que* $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ *es convexa y semicontinua inferior con la topología fuerte. Entonces* φ *es semicontinua inferior en la topología* $\sigma(E, E^\star)$.

Teorema 1.29. ***(Teorema de Kakutani)*** *Sea E un espacio de Banach, entonces E es reflexivo si y sólo si*

$$B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$$

es compacto con la topología débil $\sigma(E, E^\star)$.

Demostración. La demostración de este hecho puede ser consultada en [R1] pag. 67. □

Proposición 1.30. *Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea M* $\subset$ *E un subespacio vectorial cerrado. Entonces M, dotado de la norma inducida por E, es reflexivo.*

Demostración. El espacio M dotado con la norma de E tiene a priori dos topologías débiles distintas:

(a) La topología inducida por $\sigma(E, E^\star)$,

(b) su propia topología débil $\sigma(M, M^\star)$.

De hecho, esta dos topologías son las mismas (Por Hahn-Banach, cada funcional lineal continuo sobre M es la restricción a M de un funcional lineal sobre E). En vista del teorema 1.29, tenemos que verificar que B_M es compacto con la topología $\sigma(M, M^\star)$ o de manera equivalente en la topología $\sigma(E, E^\star)$. Sin embargo, B_E es compacto en la topología $\sigma(E, E^\star)$ y M es cerrado en la topología $\sigma(E, E^\star)$ (por el teorema 1.23). Por lo tanto, B_M es compacto en la topología $\sigma(E, E^\star)$. □

Lema 1.31. *Sean* X *e* Y *espacios de Banach,* T *una isometría de* X *en* Y*, entonces* $T(X)$ *es un subespacio cerrado de* Y

Demostración. Sea $E = T(X)$ y $x \in \bar{E}$,
Entonces existe $(x_n) \in E$ tal que $x_n \to x$. Como $x_n \in E$ existe $u_n \in X$ tal que $Tu_n = x_n$, debemos verificar que $x = \lim Tu_n \in E$.
Sabemos que

$$\forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{N}, \ tal \ que \ \|Tu_n - Tu_m\|_Y < \varepsilon, \quad \forall m, n > N$$

Así,

$$\begin{aligned} \|Tu_n - Tu_m\|_Y &= \|T(u_n - u_m)\|_Y, \\ &= \|u_n - u_m\|_X \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces u_n, es de Cauchy en X, así, sea $u \in X$, tal que $u_n \to u$, sea $y = Tu$.
Como T es continua, $y = \lim Tu_n = x$, por tanto $x \in E$.

□

Teorema 1.32. *Sea E un espacio de Banach. E es reflexivo si, y sólo si su espacio Dual $E^\star$ es reflexivo.*

Demostración. E es reflexivo $\Rightarrow E^\star$ es reflexivo.

Sabemos por hipótesis $E^{\star\star} = E \Rightarrow E^{\star\star\star} = E^\star$. Sea C la función canónica de E en $E^{\star\star}$. Sea $\varphi \in E^{\star\star\star}$ y la función $x \longmapsto \langle \varphi, Cx \rangle$ a la cual denotamos por $f \in E^\star$, así

$$\langle \varphi, Cx \rangle = \langle f, x \rangle$$

Pero también se tiene que

$$\langle Cx, f \rangle = \langle f, x \rangle$$

Así

$$\langle \varphi, Cx \rangle = \langle Cx, f \rangle$$

Como C es sobreyectiva, decimos que

$$\langle \varphi, \xi \rangle = \langle \xi, f \rangle, \quad \forall \xi \in E^{\star\star}$$

En particular tomamos a ξ como la función canónica, de $E^\star$ en $E^{\star\star\star}$, la cual podemos decir que es sobreyectiva. Por tanto $E^\star$ es reflexivo.

$E^\star$ es reflexivo $\Rightarrow E$ es reflexivo.

De la implicación anterior podemos decir que $E^{\star\star}$ es reflexivo. Además como E es cerrado y C es una isometría, $C(E)$ es un subespacio cerrado de $E^{\star\star}$, y por la proposición 1.30 $C(E)$ es reflexivo y al mismo tiempo es isométrico con E, por lo tanto E es reflexivo.

□

Corolario 1.33. *Sea E un espacio de Banach reflexivo. Sea $K \subset E$ un subconjunto acotado, cerrado y convexo de E. Entonces K es compacto con la topología $\sigma(E, E^\star)$.*

Demostración. K es cerrado con la topología $\sigma(E, E^\star)$ (por el teorema 1.23). Por otro lado, ya que K es acotado existe una constante m tal que $K \subset mB_E$[3], y mB_E es compacto en $\sigma(E, E^\star)$. (por el teorema 1.29). □

Corolario 1.34. *Sea E un espacio de Banach Reflexivo y sea $A \subset E$ un subconjunto convexo cerrado no vacío de E. Sea $\varphi : A \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ una función convexa s.c.i. tal que $\varphi \not\equiv +\infty$ y*

[3] $mB_E = \{mx : x \in B_E\}$

$$\lim_{\substack{x \in A \\ \|x\| \to \infty}} \varphi(x) = +\infty \quad (No\, asumir,\ si\ A\ fuese\ acotado) \tag{1.11}$$

Entonces φ alcanza su mínimo sobre A, i.e., existe $x_0 \in A$ tal que

$$\varphi(x_0) = \min_A \varphi.$$

Demostración. Fijando cualquier $a \in A$ tal que $\varphi(a) < +\infty$ y considere el conjunto

$$\tilde{A} = \{x \in A; \varphi(x) \leq \varphi(a)\}$$

Entonces $\tilde{A}$ es cerrado, convexo, y acotado (por (1.11)) y así es *compacto* con la topología débil $\sigma(E, E^\star)$ (por el corolario 1.33). Por otro lado, φ es también semicontinua inferior con la topología $\sigma(E, E^\star)$ (por el corolario 1.28). Se sigue que φ alcanza su mínimo sobre $\tilde{A}$ (ver propiedad 5 de la definición de s.c.i (definición 1.26)), i.e., existe $x_0 \in \tilde{A}$ tal que

$$\varphi(x_0) \leq \varphi(x), \quad \forall x \in \tilde{A}.$$

Si $x \in A \setminus \tilde{A}$, tenemos $\varphi(x_0) \leq \varphi(a) < \varphi(x)$; de modo que

$$\varphi(x_0) \leq \varphi(x), \quad \forall x \in A.$$

□

Definición 1.35. ***(Espacio Separable)*** *Decimos que un espacio métrico E es separable si existe un subconjunto $D \subset E$ que es contable y denso.*[4]

Proposición 1.36. *Sea E un espacio métrico separable y sea $F \subset E$ cualquier subconjunto. Entonces F también es separable.*

Demostración. Dado que E es separable, $\exists U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E$ denso.

Sea $D = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : B(u_n, 1/m) \cap F \neq \emptyset\}$, para cada $(n, m) \in D$, escogemos $a_{m,n} \in B(u_n, 1/m) \cap F$.

Así el conjunto $C = \{a_{m,n} : (n, m) \in D\}$, es un subconjunto contable de F.
Sea $x \in F$,

$$\begin{aligned} x \in F &\Rightarrow x \in E \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset, (ya\ que\ x \in \overline{U}), \\ &\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N},\ tal\ que\ B(x, 1/m) \cap U \neq \emptyset, \forall m \geq M. \end{aligned}$$

Así, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $u_k \in B(x, 1/m) \cap U$. Luego $x \in B(u_k, 1/m)$, así, $a_{k,m} \in B(u_k, 1/m)$, por tanto $\|x - a_{k,m}\| < 1/m, \ \ \forall m \geq N$, luego $\varepsilon > 0,\ B_F(x, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in \overline{C}$. □

[4] Por ejemplo $\mathbb{R}$ con la topología usual y el subconjunto contable y denso $\mathcal{Q}$.

Proposición 1.37. *El producto finito de conjuntos separables es separable.*

Demostración. Sean $X_i, ..., X_N$ conjuntos separables, entonces cada X_i tiene un subconjunto A_i contable y denso. Tomamos

$$A = \prod_{i=1}^{N} A_i.$$

Debido a que cada A_i es contable, entonces A es contable. Además,

$$\overline{\prod_{i=1}^{N} A_i} = \prod_{i=1}^{N} \overline{A_i} = \prod_{i=1}^{N} X_i$$

así, A es un subconjunto contable y denso de $X = \prod_{i=1}^{N} X_i$, entonces X es separable. $\square$

1.3. Espacios L^p

Definición 1.38. *Un* ***Espacio Medible*** *es un par $(\Omega, \mathcal{M})$, compuesto de un conjunto Ω y una $\sigma - algebra$ $\mathcal{M}$ de subconjuntos de Ω. Un subconjunto E de Ω es* ***medible*** *(o medible respecto a $\mathcal{M}$) si $E \in \mathcal{M}$*

Definición 1.39. *Una* ***medida*** *μ sobre un espacio medible $(\Omega, \mathcal{M})$ es una función no-negativa de conjuntos en los reales extendidos $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y además es* ***contablemente aditiva****, en el sentido que para cualquier colección contable de conjuntos medibles disjuntos $E_{k=1}^{\infty}$,*

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Definición 1.40. *Por un* ***Espacio de Medida*** *$(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, entenderemos que es una espacio medible $(\Omega, \mathcal{M})$ junto a una medida μ definida sobre $\mathcal{M}$.*

Definición 1.41. *Se define el espacio $L^1(\Omega)$ como sigue:*

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \; es \; medible \; y \; \int_{\Omega} |f| < \infty \right\}.$$

Es decir, una función f, está en $L^1(\Omega)$ si es integrable sobre Ω.

Definición 1.42. *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 < p < \infty$; así*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \; f \;\; es \;\; medible \;\; y \;\; |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

con

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p \right]^{1/p}$$

definido como la norma sobre **L**$^p(\Omega)$.

Definición 1.43. *Definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} f \text{ es medible y existe una constante } C \\ \text{tal que } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. sobre } \Omega \end{array} \right\}$$

Con

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \text{ínf}\{C; |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. sobre } \Omega\}.$$

La siguiente observación implica que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma:

Observación 1.44. *Si $f \in L^\infty$ entonces*

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ c.t.p. sobre } \Omega.$$

Definición 1.45. *El conjugado de un número $p \in (1, \infty)$ es el número $q = \frac{p}{p-1}$, que es el único número $q \in (1, \infty)$ para el cual*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

El conjugado de 1 será definido como ∞ y viceversa.

Teorema 1.46. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Si $f \in L^1(\Omega)$, entonces $|f| \in L^1(\Omega)$, y*

$$\left| \int_\Omega f \right| \leq \int_\Omega |f|$$

Demostración. La demostración de este resultado está desarrollada en [R7], página 343. □

Teorema 1.47. ***(de Convergencia Dominada, Lebesgue)*** *Sea (fn) una sucesión de funciones en L^1 que satisfacen*

(a) Para todo n, $f_n \geq 0$ c.t.p. sobre Ω,

(b) Existe una función $g \in L^1$ tal que para toda n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p. sobre Ω,

entonces, existe una función $f \in L^1$ tal que $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Teorema 1.48. ***(Densidad).*** *El espacio $C_c(\mathbb{R}^N)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^N)$, i.e.,*

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^N),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N) \text{ tal que } \|f - f_1\|_1 \leq \varepsilon$$

Teorema 1.49. ***(Tonelli)*** *Sea $F(x, y) : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ una función medible que satisface* *(a)* $\int_{\Omega_2} |F(x,y)d\mu_2| < \infty$ *para c.t.p.* $x \in \Omega_1$*,*

(b) $\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} |F(x,y)|d\mu_2 < \infty$.

Entonces, $F(x,y) \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$

Demostración. La demostración de éste hecho puede ser consultada en [R4], pág. 420. □

Teorema 1.50. ***(Fubini)****. Supongamos que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$*. Entonces* $x \in \Omega_1$ *,* $F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$ *c.t.p. y* $\int_{\Omega_2} F(x,y)\, d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1)$*. Similarmente, para* $y \in \Omega_2$ *,* $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$*c.t.p. y* $\int_{\Omega_1} F(x,y)\, d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_2)$*. Además, se tiene*

$$\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} F(x,y)d\mu_2 = \int_{\Omega_2} d\mu_2 \int_{\Omega_1} F(x,y)d\mu_1 = \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)d\mu_1 d\mu_2.$$

Demostración. Éste hecho puede ser consultado en [R4], pág. 416. □

Teorema 1.51. *(****Desigualdad de Hölder****) Sea* E *un conjunto medible,* $1 \le p \le \infty$ *y q el conjugado de p. Si f pertenece a* $L^p(E)$ *y g pertenece a* $L^q(E)$*, entonces su producto* $f \cdot g$ *es integrable sobre* E *y*

$$\int_E |fg| \le \|f\|_p \|g\|_q \tag{1.12}$$

Demostración. Si $p = 1$, $|fg| = |f||g| \le C|f| \in L^1$, además,

$$\int |fg| = \int |f||g| \le \int \|g\|_\infty |f| = \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

de igual forma para cuando $p = \infty$. De modo que probaremos para $1 < p < \infty$. Usaremos, la **Desigualdad de Young**:

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad \forall a \ge 0, \forall b \ge 0. \tag{1.13}$$

La desigualdad (1.13) es consecuencia de la concavidad hacia abajo de la función $\log$ sobre $(0,\infty)$

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \ge \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log ab$$

Así,

$$|fg| \le \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q$$

Se sigue que $fg \in L^1$ y de igual manera

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q. \tag{1.14}$$

Si reemplazamos f por λf ($\lambda > 0$) en (1.14), obtenemos

$$\int |fg| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{\lambda q}\|g\|_q^q \tag{1.15}$$

Si tomamos de manera conveniente $\lambda = \|f\|_p^{-1}\|g\|_q^{q/p}$,

$$\begin{aligned}\int |fg| &\leq \frac{(\|f\|_p^{-1}\|g\|_q^{q/p})^{p-1}}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{\|f\|_p^{-1}\|g\|_q^{q/p} q}\|g\|_q^q \\ &= \frac{1}{p}\|f\|_p\|g\|_q + \frac{1}{q}\|f\|_p\|g\|_q \\ &= \|f\|_p\|g\|_q.\end{aligned}$$

Así obtenemos la desigualdad (1.12). □

Observación 1.52. *Es de gran utilidad tener en mente la extensión de la Desigualdad de Hölder:*
Suponemos que $f_1, f_2, ..., f_k$ son funciones tales que:

$$f_i \in L^{p_i}, \quad 1 \leq i \leq k \quad con \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p^1} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^k} \leq 1.$$

El producto $f = f_1 f_2 \cdots f_k$ pertenece a L^p y

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_k\|_{p_k}.$$

En particular, si $f \in L^p \cap L^q$ con $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces $f \in L^r$ para todo r, $p \leq r \leq q$, y la siguiente "Desigualdad de Interpolación" sostiene:

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}, \quad donde \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1;$$

Teorema 1.53. *Sea (f_n) una sucesión en L^p y sea $f \in L^p$ tal que $\|f - f_n\|_p \to 0$. Entonces, existe una subsucesión (f_{n_k}) y una función $h \in L^p$ tal que*

(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$, *c.t.p. sobre* Ω,

(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k$ *c.t.p. sobre* Ω.

Teorema 1.54. *Los espacios L^p con $1 < p < \infty$ son reflexivos.*

Demostración. La prueba esta consta de tres pasos:

Paso 1: (Verificar la primera desigualdad de Clarkson). Sea $2 \leq p < \infty$. Queremos verificar que

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p), \quad \forall f, g \in L^p. \tag{1.16}$$

Demostración de (1.16). Como $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ bastará mostrar que

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2}(|f|^p + |g|^p), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Primero notamos que

$$\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2}, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0$$

(por homogeneidad, asumimos $\beta = 1$ y observamos que la función

$$(x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$$

incrementa sobre $[0, \infty]$). Escogiendo $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$ y $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|$, obtenemos

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \left(\left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 \right)^{p/2} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right)^{p/2} \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p)$$

(La última desigualdad se sigue de la convexidad de la función $x \mapsto |x|^{\frac{p}{2}}$ ya que $p \geq 2$).

Paso 2: L^p es uniformemente convexo, y así es reflexivo para $2 \leq p < \infty$. De hecho, sea $\varepsilon > 0$ y sean $f, g \in L^p$ con $\|f\|_p \leq 1$, $\|g\|_p \leq 1$ y $\|f-g\|_p > \varepsilon$. Deducimos de (1.16) que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p &\leq - \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p + \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \\
&= - \left| \frac{1}{2} \right|^p \|f-g\|_p^p + \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \\
&< - \left| \frac{1}{2} \right|^p \varepsilon^p + \frac{1}{2}(1+1); \;\; -\|f-g\|_p^p < -\varepsilon^p, \; \|f\| \leq 1, \; \|g\| \leq 1 \\
&= 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p
\end{aligned}$$

tomamos $\delta = 1 - [1 - (\frac{\varepsilon}{2})^p]^{\frac{1}{p}} > 0$; $\varepsilon < \|f-g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \leq 2$

así $\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p < 1 - \delta$.
Entonces, L^p es uniformemente convexo y de esa forma reflexivo por el teorema 1.25.

Paso 3: L^p es reflexivo para $1 < p \leq 2$.

Demostración. Sea $1 < p < \infty$. Considere el operador $T : L^p \longrightarrow (L^q)^\star$ definido de la siguiente forma: Sea $u \in L^p$ fijo; la aplicación $f \mapsto \int uf$, con $f \in L^q$; es un funcional lineal continuo sobre L^q y esto define un elemento Tu en $(L^q)^\star$ tal que

$$\langle Tu, f \rangle = \int uf, \ \ \forall f \in L^q.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} |\langle Tu, f \rangle| &= \left| \int uf \right| \\ &\leq \int |uf| \\ &\leq \|u\|_p \|f\|_q; \ \ (Por \ la \ desigualdad \ de \ Hölder) \end{aligned}$$

Aplicando el supremo a los $f \in L^q, \|f\| \leq 1$

$$\sup_{\substack{f \in L^q \\ \|f\| \leq 1}} |\langle Tu, f \rangle| \leq \|u\|_p; \ (\|f\|_q \leq 1).$$

Por lo tanto,

$$\|Tu\|_{(L^q)^\star} \leq \|u\|_p$$

Por otro lado, sea

$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2} u(x) \ \ (f_0(x) = 0 \ si \ u(x) = 0).$$

Dado que u es medible f_0, también lo es, además

$$\begin{aligned} |f_0|^q &= \left| |u|^{p-2} u \right|^{\frac{p}{p-1}}; \ (q \, es \, el \, conjugado \, de \, p), \\ &= |u|^p \end{aligned}$$

Como $|u|^p \in L^1(\Omega)$ entonces también $|f_0|^q$, por tanto $f_0 \in L^q$.
Además,

$$\begin{aligned} \|f_0\|_q &= \left| \int |f_0(x)|^q \right|^{1/q} \\ &= \left| \int \left| |u(x)|^{p-2} u(x) \right|^{\frac{p}{p-1}} \right|^{\frac{p}{p-1}} \\ &= \|u\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

y

$$\langle Tu, f_0\rangle = \int uf_0 = \int |u|^p = \|u\|_p^p$$

Así

$$\frac{\langle Tu, f_0\rangle}{\|f_0\|_q} = \frac{\|u\|_p^p}{\|u\|_p^{p-1}} = \|u\|_p$$

Aplicando $\sup_{f_0\in L^q, \|f_0\|\leq 1}$

$$\|Tu\|_{(L^q)^\star} \geq \frac{\langle Tu, f_0\rangle}{\|f_0\|_q} = \|u\|_p. \tag{1.17}$$

Luego

$$\|Tu\|_{(L^q)^\star} = \|u\|_p.$$

Entonces, hemos probado que T es una isometría de L^p en $(L^q)^\star$, lo que implica por el lema 1.31 que $T(L^p)$ es un subespacio cerrado de $(L^q)^\star$.

Supongamos que $1 < p \leq 2$. Como L^p es reflexivo (por el Paso 2), se sigue que $(L^q)^\star$ es también reflexivo (Corolario 1.32). Concluimos, por la proposición 1.30, que $T(L^p)$ es reflexivo, y como consecuencia, L^p es también reflexivo. □

□

Definición 1.55. *Un **producto interno** sobre X es una aplicación que va de $X \times X$ en un campo escalar $\mathbb{K}$ de X; es decir, para cada par $x, y \in X$ existe un escalar asociado el cual se denota por*

$$(x, y)$$

y es llamado el producto interno de x e y, tal que para todo $x, y, z \in X$ y cualquier escalar α se tiene que

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \tag{1.18}$$

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y), \tag{1.19}$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)}, \tag{1.20}$$

$$(x, x) \geq 0 \tag{1.21}$$

$$(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0. \tag{1.22}$$

Un producto interno sobre X define una norma sobre X dada por

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

En 1.20la barra denota conjugado complejo. En consecuencia, si X es un espacio vectorial real, simplemente tendremos

$$(x, y) = (y, x).$$

Definición 1.56. ***(Espacio pre-Hilbert, Espacio de Hilbert).*** *Un espacio de producto interno (o espacio pre-Hilbert) es un espacio vectorial X con un producto interno definido sobre X. Un espacio de Hilbert es un espacio de producto interno completo (completo con la norma definida por el producto interno).*
De aquí en adelante H denotará un espacio de Hilbert.

Definición 1.57. *Sea E un espacio de producto interno*[5] *y $M \subset E$ no vacío, definimos el complemento ortogonal de M como sigue:*

$$M^{\perp} = \{x \in E : x \perp M\}$$

Así, $x \in M^{\perp}$ si y solo si $(x, v) = 0$ para todo $v \in M$.

Definición 1.58. *Sea X un espacio vectorial. Para cualquier subconjunto no vacío $M \subset X$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de M es llamado* ***span*** *de M, el cual se denota*

$$span\ M.$$

Obviamente este es un subespacio de Y de X y decimos que Y es ***generado*** *por M*[6]*.*

Lema 1.59. ***(Conjunto denso)*** *Para cualquier subconjunto $M \neq \emptyset$ de un espacio de Hilbert H, el $span$ de M es denso en H si y solo si $M^{\perp} = \{0\}$.*

Demostración. La demostración de este hecho puede consultarse en [R3], pág. 149. □

Teorema 1.60. ***(De representación de Riesz)*** *Sea $\varphi \in (L^p)^{\star}, 1 < p < \infty$, entonces existe una única función $u \in L^q$ (q exponente conjugado de p) tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} fu, \quad \forall f \in L^p$$

Además,

$$\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)^{\star}}.$$

Demostración. Consideramos el operador $T : L^q \longrightarrow (L^p)^{\star}$ definido por $\langle Tu, f \rangle = \int uf,\ \forall u \in L^q,\ \forall f \in L^p$. El argumento usado en la prueba del teorema 1.54 (Paso 3) muestra que

$$\|Tu\|_{(L^p)^{\star}} = \|u\|_q, \ \ \forall u \in L^q.$$

[5]Un espacio de producto interno es un espacio vectorial dotado de un producto interno. Estos espacios se trabajarán a profundidad en la siguiente sección.

[6]Si M es un espacio vectorial $M = span\ M$.

Queremos probar que T es biyectivo, la inyectividad está dada por que T es isometría. Sea $E = T(L^q)$. Por el lema 1.31, E es un subespacio cerrado de $(L^p)^\star$, es suficiente probar que E es denso en $(L^p)^\star$.

Sea $h \in (L^p)^{\star\star}$ que satisface $\langle h, Tu\rangle = 0,\ \forall u \in L^q$. Como L^p es reflexivo, $h \in L^p$, y además

$$\begin{aligned}\langle h, Tu\rangle &= \overline{\langle Tu, h\rangle}\\ &= \overline{\int uh}\\ &= \int uh; \quad \left(\int uh\ es\ real\right)\\ &= \langle Tu, h\rangle\end{aligned}$$

Así $\int uh = 0, \forall u \in L^q$.

Ahora probaremos que $E^\perp = \{x \in L^p : \langle x, v\rangle = 0,\ \forall v \in E\} = \{0\}$.

Tomamos $u = |h|^{p-2}h$.

$$\int |u|^q = \int ||h|^{p-2}h|^{\frac{p}{p-1}} = \int |h|^p < \infty$$

De esa forma $u \in L^q$.

$$\begin{aligned}\int (|h|^{p-2}h)h = 0 &\Rightarrow \int |h|^p = 0\\ &\Rightarrow \|h\|_p^p = 0\\ &\Rightarrow h = 0\end{aligned}$$

Así $E^\perp = \{0\}$.

E es cerrado y por el lema 1.59 es denso en $(L^p)^\star$, entonces $E = (L^p)^\star$ y T es sobre.

$\square$

Observación 1.61. *El teorema 1.60 es muy importante. Dice que cada funcional lineal continuo sobre L^p con $1 < p < \infty$ puede ser representado "concretamente" como una integral. La función $\varphi \mapsto u$, que es una isometría lineal sobreyectiva , nos permite identificar el espacio "abstracto"$(L^p)^\star$ con L^q.*

De aquí en adelante, sistemáticamente haremos la identificación

$$(L^p)^\star = L^q.$$

Notación. *La operación **Truncamiento** $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es definida por*

$$T_n r = \begin{cases} r & si\ |r| \leq n, \\ \frac{nr}{|r|} & si\ |r| > n. \end{cases}$$

*Sea $E \subset \Omega$, definimos la **función característica** χ_E como sigue*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in E, \\ 0 & si\ x \in \Omega \setminus E. \end{cases}$$

Teorema 1.62. *El espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para cualquier p, $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Queremos probar que dado $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $\varepsilon > 0$ existe una función $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y un conjunto compacto K en $\mathbb{R}^N$ tal que $g = 0$ fuera de K y que

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Sea χ_n la función característica de $B(0,n)$ y sea $f_n = \chi_n T_n f$. Verificaremos que $(f_n) \in L^1$ y que existe una función $g \in L^1$ tal que para todo n, $|f_n(x)| < g(x)$.

Si $n \to \infty$, entonces $B(0,n) \to \mathbb{R}^N$ y $f_n \to f$.

Además si $n = m$

$$f_m(x) = \chi_m T_m f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,m), \\ f(x) & si\ |f(x)| \leq m, \\ \frac{mf(x)}{|f(x)|} & si\ |f(x)| > m. \end{cases}$$

Así f_n es acotada y $f_n \in L^1$.

Como $f_n \to f$, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$, lo suficientemente grande tal que $|f_n| \leq f_N$, así tomamos $g = f_N$. Por lo tanto podemos aplicar el teorema de convergencia dominada (1.47) y $\|f_n - f\| \leq \varepsilon/2$. Y como $g \in L^1$, podemos aplicar el teorema 1.48

Es decir, que dado $\delta > 0$, existe una función $g_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\|g - g_1\| \leq \delta.$$

Podemos asumir que $\|g_1\|_\infty \leq \|g\|_\infty$; de otro modo, reemplazaríamos g_1 por Tng_1 con $n = \|g\|_\infty$. Así,

$$\begin{aligned}
\|g - g_1\|_p &= \left[\int |g-g_1|^p\right]^{1/p}, \\
&= \left[\int |g-g_1||g-g_1|^{p-1}\right]^{1/p}, \\
&\leq \|g-g_1\|_1^{1/p}\|g-g_1\|_\infty^{1-1/p}; (Desigualdad\ de\ H\ddot{o}lder) \\
&\leq \delta^{1/p}\|g-g_1\|_\infty^{1-1/p}, \\
&\leq \delta^{1/p}(2\|g\|_\infty)^{1-1/p}.
\end{aligned}$$

Si tomamos $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño tal que

$$\delta^{1/p}(2\|g\|_\infty)^{1-1/p} < \varepsilon/2$$

.

Además por la convergencia, $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$; recordado que $g = f_N$.

$$\begin{aligned}
\|f - g_1\| &= \|f - g_1 + g - g\|, \\
&\leq \|f-g\|_p + \|g-g_1\|_p, \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2, \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

con $g_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$.

En conclusión, $f \in \overline{C_c(\mathbb{R}^N)} \Rightarrow L^p(\mathbb{R}^N) \subset C_c(\mathbb{R}^N) \Rightarrow C_c(\mathbb{R}^N)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^N)$. □

Teorema 1.63. *Si asumimos que Ω es un espacio de medida separable. Entonces $L^p(\Omega)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.*

Teorema 1.64. ***(Teorema de Young)*** *Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$, la función $y \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable sobre $\mathbb{R}^N$ y definimos la **convolución** de f y g, que denotamos por $f * g$ de la siguiente forma*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Además $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$

Demostración. Sea $F(x,y) = f(x-y)g(y)$. Consideraremos 3 casos:

(i) $p = \infty$,

Entonces $f \in L^1$ y $g \in L^\infty$, así

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)| &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|dx,\\ &= |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|dx,\\ &\leq |g(y)|C,\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|dx = C \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|dy \leq K < \infty.$$

Entonces por el teorema de Tonelli (1.49), $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.
Además,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|dy,\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Así, $(f * g) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, por otro lado

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|dy,\\ &\leq \|f\|_1\|g\|_\infty. \quad (Desigualdad\ de\ Hölder)\end{aligned}$$

Como $\|f\|_1\|g\|_\infty$ es cota de $|(f * g)|$, entonces $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$.

(ii) $p = 1$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|dx &= |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|dx,\\ &= |g(y)|\|f\|_1 < \infty,\ c.t.p.\ y \in \mathbb{R}^N\end{aligned}$$

y además

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|dx = \|g\|_1\|f\|_1.$$

Así, por el teorema de Tonelli (1.49) $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, y por el teorema de Fubini (1.50) $F \in L^1_y(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|dy < \infty,\ c.t.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Y también

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|dx = \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|dy = \|g\|_1\|f\|_1$$

Así, queda demostrado el teorema de Young para $p = 1$.

(iii) si $1 < p < \infty$
Verificaremos que la función $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ es integrable en $\mathbb{R}^N$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, fijo.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dx = \|f\|_1 |g(y)|^p \leq \infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dx \\ = \|g\|_p^p \|f\|_1 < \infty \\ \Rightarrow |f(x-y)||g(y)|^p \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N),\ (Tonelli) \\ \Rightarrow |f(x-y)||g(y)|^p \in L^1_y(\mathbb{R}^N),\ (Fubini).\end{aligned}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| |f(x-y)|^{1/p} |g(y)| \right|^p dy = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dy < \infty$$

así $|f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^N)$.

Como $|f(x-y)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$ entonces $|f(x-y)|^{1/q} \in L^q_y(\mathbb{R}^N)$. Así

$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{1/p}|f(x-y)|^{1/q}|g(y)| \in L^1_y(\mathbb{R}^N),\ (Desigualdad\ de\ Hölder)$$

Integramos

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^{1/p}|f(x-y)|^{1/q}|g(y)|dy, \\ &\leq \|f\|_1^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dy \right)^{1/p},\ (Desigualdad\ de\ Hölder).\end{aligned}$$

Es decir,

$$|(f*g)(x)| \leq \|f\|_1^{1/q} \left((|f| * |g|^p)(x) \right)^{1/p} \Rightarrow |(f*g)(x)|^p \leq \|f\|_1^{p/q} (|f|*|g|^p)(x) < \infty.$$

Así, $(f*g) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y además

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |(f*g)(x)|^p dy &\leq \|f\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^N} (|f| * |g|^p)(x) dx \\ &= \|f\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dy \right] dx \\ &= \|f\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dx dy,\ (Fubini) \\ &= \|f\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|^p dy \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| dx \\ &= \|f\|_1^{p/q} \|f\|_1 \|g\|_p^p\end{aligned}$$

Entonces

$$\|f * g\|_p^p \leq \|f\|_1^{p/q} \|f\|_1 \|g\|_p^p \Rightarrow \|f * g\|_p \leq \|f\|_1^{1/q} \|f\|_1^{1/p} \|g\|_p$$

Por tanto, $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

$\square$

Proposición 1.65. *El producto de convolución es conmutativo.*

Demostración. Utilizando el cambio de variable $z = x - y$ obtenemos

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(z)g(x-z)dz = (g * f)(x)$$

$\square$

Notación. *Dada una función f sobre $\mathbb{R}^N$ definimos $\check{f}(x) = f(-x)$.*

Proposición 1.66. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f * g)h = \int_{\mathbb{R}^N} g(\check{f} * h)$$

Demostración. Sea $F(x, y) = f(x - y)g(y)h(x)$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)h(x)|dy &= |h(x)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|dy \\ &= |h(x)|(|f| * |g|)(x) \\ &< \infty.\end{aligned}$$

El último resultado se sigue de la demostración del teorema de Young (1.64). Además,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|dx \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|(|f| * |g|)(x)dx \\ &< \infty.\end{aligned}$$

El último resultado se sigue de la demostración del teorema de Young (1.64).

Así $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, podemos aplicar Young y Fubini.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (f * g)(x)h(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)h(x)dy, (Def.\ Convolución)\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)dy,\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)dx,\ (Fubini),\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} g(y)f(x-y)h(x)dx,\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} g(y)\check{f}(y-x)h(x)dx,\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(y)dy \int_{\mathbb{R}^N} \check{f}(y-x)h(x)dx,\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(y)(\check{f} * h)(y)dy.
\end{aligned}$$

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f * g)h = \int_{\mathbb{R}^N} g(\check{f} * h)$$

. □

Proposición 1.67. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$supp\ (f * g) \subset \overline{supp\ f + supp\ g.}$$

Demostración. Fijamos $x \in \mathbb{R}^N$ tal que la función $y \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable. Se tiene que

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

Además, $x - y \in supp\, f$ sí y solo sí $f \neq 0$, por tanto,

$$(f * g)(x) = \int_{(x - supp\, f) \cap supp\, g} f(x-y)g(y)dy$$

. Consideramos el caso $x \notin supp\, f + supp\, g$.

$$\begin{aligned}
x \notin supp\, f + supp\, g &\Rightarrow x = h + k; (h \notin supp\, f, k \notin supp\, g),\\
&\Rightarrow x - h \notin supp\, g,\\
&\Rightarrow (x - supp\, f) \cap supp\, g = \emptyset.
\end{aligned}$$

Así $(f * g)(x) = 0$ siempre que $x \notin supp\, f + supp\, g$. Se puede deducir lo siguiente

$$\begin{aligned}
(f * g)(x) = 0\ sobre\ (supp\, f + supp\, g)^c &\Rightarrow (f * g)(x) = 0\ sobre\ int[(supp\, f + supp\, g)^c]\\
&\Rightarrow (f * g)(x) \neq 0\ sobre\ [int[(supp\, f + supp\, g)^c]]^c\\
&\Rightarrow supp\,(f * g) \subset \overline{supp\, f + supp\, g}
\end{aligned}$$

□

Definición 1.68. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y sea $1 \leq p \leq \infty$. Decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ esta en L^p_{loc} si $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ para cada conjunto compacto K contenido en Ω.*

Lema 1.69. *Si $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, entonces $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.*

Demostración. Es trivial cuando $p = 1$. Sea $f \in L^p$, $1 < p \leq \infty$, sea q el exponente conjugado de p y $K \subset \Omega$ un compacto cualquiera. Usando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\int_\Omega |f\chi_K| \leq \|f\|_p \|\chi_K\|_q = \|f\|_p |K|^{1/q} < \infty.$$

Por lo tanto $f \in L^1_{loc}$. □

Proposición 1.70. *Sea E un espacio métrico compacto. Entonces toda función continua $\phi : E \to X$ es uniformemente continua.*

Definición 1.71. *Si f es una función de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$, decimos que f es **diferenciable en el punto x** si f está definida en una vecindad $B(x, r)$ de x y si existe un vector **a** (independiente de h) tal que para cualquier punto $x + h$ en $B(x, r)$*

$$f(x+h) = f(x) + \boldsymbol{a} \cdot h + \varepsilon(x,h) \cdot h \quad donde \lim_{h\to 0} \varepsilon(x,h) = 0. \tag{1.23}$$

*El término **a** $\cdot h$ se llama **diferencial** de f en x y h y se denota por $df(x, h)$. El vector **a** se llama **derivada** de f en x y se denota por $Df(x)$.*

Proposición 1.72. *Sean $f \in C^k_c(\mathbb{R}^N)(k \geq 1)$ y sea $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, con k en los naturales. Entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ y*

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g, \quad \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k.$$

En particular, si $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, entonces $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$

Demostración. Por inducción basta con considerar el caso $k = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}^N$ queremos demostrar que $f * g$ es diferenciable en x y que

$$\nabla(f * g)(x) = ((\nabla f) * g)(x)$$

Sea $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < 1$. Se tiene que para todo $y \in \mathbb{R}^N$.

$$\begin{aligned}
|f(x+h-y) - f(x-y) - h \cdot \nabla f(x-y)| &= \left| \int_0^1 [h \cdot \nabla f(x+sh-y)ds - \int_0^1 h \cdot \nabla f(x-y)ds \right| \\
&= \left| \int_0^1 [h \cdot \nabla f(x+sh-y) - h \cdot \nabla f(x-y)]ds \right| \\
&\leq \int_0^1 |h[\nabla f(x+sh-y) - \nabla f(x-y)]| \, ds \\
&= |h| \int_0^1 |[\nabla f(x+sh-y) - \nabla f(x-y)]| \, ds \\
&= |h| \varepsilon(x-y, h).
\end{aligned}$$

Donde

$$\varepsilon(x-y,h)=\int_0^1 |[\nabla f(x+sh-y)-\nabla f(x-y)]|\,ds.$$

Con $\varepsilon(x-y,h)\to 0$ cuando $h\to 0$.

Como f tiene soporte compacto, por la proposición 1.70 f es uniformemente continua. Además

$$|f(x+h-y)-f(x-y)-h\cdot\nabla f(x-y)|\le |h|\varepsilon(|h|)$$

Sea K un conjunto compacto fijo de R^N, lo suficientemente grande para que

$$x+B(0,1)-suppf\subset K,$$

Así se tiene

$$f(x+h-y)-f(x-y)-h\cdot\nabla f(x-y)=0,\quad \forall y\notin K,\forall h\in B(0,1).$$

Por tanto,

$$|f(x+h-y)-f(x-y)-h\cdot\nabla f(x-y)|\le |h|\varepsilon(|h|)\chi_K(y),\quad y\in\mathbb{R}^N,\ \forall h\in B(0,1).$$

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)-h(\nabla f*g)(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x+h-y)g(y)dy-\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy\right.\\
&\left.-h\int_{\mathbb{R}^N}\nabla f(x-y)g(y)dy\right|,\\
&=\left|\int_K [f(x+h-y)g(y)-f(x-y)g(y)\right.\\
&\left.-h\nabla f(x-y)g(y)]dy\right|,\\
&=\left|\int_K [g(y)(f(x+h-y)-f(x-y)\right.\\
&\left.-h\nabla f(x-y))]dy\right|,\\
&\le \int_K |h|\varepsilon(|h|)|g(y)|dy,\\
&\le |h|\varepsilon(|h|)\int_K |g(y)|dy.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)-h(\nabla f*g)(x)|\le |h|\varepsilon(|h|)\int_K |g(y)|dy$$

Con $h\in B(0,1)$. Si $h\to 0$ entonces $|h|\varepsilon(|h|)\to 0$.Por tanto $(f*g)$ es diferenciable.

$\square$

Definición 1.73. *Una **sucesión regularizante**, $(\rho_n)_{n\geq 1}$ es cualquier sucesión de funciones sobre $\mathbb{R}^N$, tal que*

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ supp\ \rho_n \subset \overline{B(0,1/n)},\ \int \rho_n = 1,\ \rho_n \geq 0,\ sobre\ \mathbb{R}^N.$$

Proposición 1.74. *Suponemos que $f \in C(\mathbb{R}^N)$. Entonces $(\rho_n * f) \longrightarrow f$, cuando $n \to \infty$, uniformemente sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$.*

Demostración. Sea $K \subset \mathbb{R}^N$, un conjunto compacto fijo. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que depende de K y ε), tal que:

$$|x-(x-y)| < \delta \Longrightarrow |f(x-y) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in K,\ \forall y \in B(0,\delta)$$

Así tenemos para $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}
(\rho_n * f)(x) - f(x) &= (f * \rho_n)(x) - f(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [f(x-y)\rho(y)]dy - f(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\rho(y)dy - \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\rho_n(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [f(x-y) - f(x)]\rho(y)dy \\
&= \int_{B(0,1/n)} [f(x-y) - f(x)]\rho(y)dy
\end{aligned}$$

Para $n > 1/\delta$y $x \in K$, obtenemos

$$\begin{aligned}
|(\rho_n * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(0,1/n)} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)dy \right| \\
&\leq \int_{B(0,1/n)} |f(x-y) - f(x)||\rho_n(y)|dy \\
&< \int_{B(0,1/n)} \varepsilon|\rho_n(y)|dy \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así $(\rho_n * f) \longrightarrow f$, cuando $n \to \infty$ en $\mathbb{R}^N$.

□

Teorema 1.75. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces $(\rho_n * f) \to f$, cuando $n \to \infty$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y una función fija $f_1 \in C_c(\mathbb{R})$, tal que $\|f - f_1\| < \varepsilon$ (por el teorema 1.62). Por el teorema 1.74 $(\rho_n * f_1) \to f_1$ uniformemente sobre cada conjunto compacto de $\mathbb{R}^N$. Por otro lado usando la proposición 1.67

$$supp\ (\rho_n * f_1) \subset \overline{B(0,1/n)} + supp\ f_1 \subset \overline{B(0,1)} + supp\ f_1$$

El cual es un compacto fijo.
Se sigue que $\|(\rho_n * f_1) - f_1\|_p \to 0$, cuando $n \to \infty$.
Así

$$\begin{aligned}\|(\rho_n * f) - f\|_p &= \|(\rho_n * (f - f_1)) + [(\rho_n * f_1) - f_1] + [f_1 - f]\|_p \\ &\leq \|(\rho_n * (f - f_1))\|_p + \|f_1 - f\|_p + \|(\rho_n * f_1) - f_1\|_p \\ &\leq \|\rho_n\|_p\|f_1 - f\|_p + \|f_1 - f\|_p + \|(\rho_n * f_1) - f_1\|_p \\ &= 2\|f_1 - f\|_p + \|(\rho_n * f_1) - f_1\|_p.\end{aligned}$$

La última desigualdad resulta del teorema de Young 1.64.
Si $n \to \infty$ entonces $2\|f_1 - f\|_p + \|(\rho_n * f_1) - f_1\|_p < 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$.
Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \|(\rho_n * f) - f\|_p = 0$$

□

Corolario 1.76. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Entonces $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para cualquier p, $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Sea $f \in L^p(\Omega)$, y definimos

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \in \Omega \\ 0, & si\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Por como esta definida $\bar{f}$ es evidente que $\bar{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$.
Sea (K_n) una sucesión de conjuntos compactos en $\mathbb{R}^N$, tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega \quad y \quad dist(K_n, \Omega^c) \geq 2/n.$$

Por ejemplo podriamos escoger

$$K_n = \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq n,\ y\ dist(x, \Omega^c) \geq 2/n\right\}.$$

Definimos la función $g_n = \chi_{K_n}\bar{f}$ y $f_n = (\rho_n * g_n)$, así

$$g_n(x) = \begin{cases} \bar{f}, & si\ x \in K_n \\ 0, & si\ x \in \mathbb{R}^N \setminus K_n. \end{cases}$$

Entonces,

$$f_n(x) = \begin{cases} (\rho_n * \bar{f}), & si\ x \in K_n \\ 0, & si\ x \in \mathbb{R}^N \setminus K_n. \end{cases}$$

con,

$$supp\ f_n \subset \overline{B(0, 1/n)} + K_n \subset K_n.$$

Por la definición de f_n, se sigue que $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} &= \|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&= \|(\rho_n * g_n) - \bar{f} - (\rho_n * \bar{f}) + (\rho_n * \bar{f})\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \|(\rho_n * g_n) - (\rho_n * \bar{f})\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(\rho_n * \bar{f}) - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&= \|(\rho_n * (g_n - \bar{f})\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(\rho_n * \bar{f}) - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \|\rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|g_n - f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(\rho_n * \bar{f}) - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&= \|g_n - f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(\rho_n * \bar{f}) - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

Sabemos que si $n \to \infty,\ K_n \to \Omega$, así $g_n \to \bar{f}$, y por tanto podemos tomar $M \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande, tal que $|g_n(x)| < g_M(x)$, aplicando el teorema de convergencia dominada 1.47

$$\|g_n - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$$

y como $\bar{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$, por el teorema 1.75,

$$\|(\rho_n * \bar{f})\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$$

Así,

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0,$$

Por tanto

$$f \in \overline{C_c^\infty}(\Omega)$$

□

Corolario 1.77. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega uf = 0, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega).$$

Entonces $u = 0$ c.t.p. sobre Ω.

Demostración. Sea $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ una función tal que $supp\ g$ es un conjunto compacto contenido en Ω.
Definimos $g_n = (\rho_n * g)$, así $g_n \in C_c^\infty(\Omega)$. Por tanto usando la hipótesis se tiene que

$$\int ug_n = 0, \quad \forall n \tag{1.24}$$

Como $g_n \to g$ en $L^1(\mathbb{R})$ (Teorema 1.75) , existe una subsucesión (g_{n_k}) tal que $g_{n_k} \to g$ c.t.p. sobre $\mathbb{R}^N$ (teorema 1.53).
Además

$$\|g_{n_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|\rho_{n_k} * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, (Teorema\ de\ Young)$$

Si aplicamos limite a (1.24) (Por convergencia dominada 1.47) se tiene que

$$\int ug = 0, \tag{1.25}$$

Sea K un conjunto compacto contenido en Ω. Escogemos una función g de tal manera que,

$$g = \begin{cases} sign\ u, & sobre\ K, \\ 0, & sobre\ \mathbb{R} \setminus K. \end{cases}$$

Entonces

$$\int_K ug = \int |u| = 0 \Rightarrow |u| = 0,$$

c.t.p. sobre K.
Como esto se mantiene para cada compacto $K \in \Omega$, concluimos que $u = 0$, c.t.p. sobre Ω. □

Teorema 1.78. ***(Arzelá-Ascoli).*** *Sea K un espacio métrico completo y sea $\mathcal{H}$ un subconjunto acotado de $C(K)$. Supongamos que $\mathcal{H}$ es uniformemente equicontinua, es decir,*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ tal\ que\ d(x_1, x_2)\ < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)|\ < \varepsilon, \quad \forall\ f \in \mathcal{H}. \tag{1.26}$$

Entonces la clausura de $\mathcal{H}$ en $C(K)$ es compacta.[7]

Notación. ***(Cambio de una función)***. *Definimos $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $h \in \mathbb{R}^N$.*

Teorema 1.79. ***(Kolmogorov-M. Riesz-Fréchet).*** *Sea $\mathcal{F}$ un conjunto acotado en $L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$. Supongamos que* [8]

$$\lim_{|h| \longrightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0\ uniformemente\ en f \in \mathcal{F}, \tag{1.27}$$

i.e., $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tal que* $\|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon$, $\forall f \in \mathcal{F}$, $\forall h \in \mathbb{R}^N$ *con* $|h| < \delta$.
Entonces la clausura de $\mathcal{F}_{|\Omega}$ [9] *en $L^p(\Omega)$ es compacto para cualquier conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con medida finita.*

Demostración. La demostración de este hecho puede consultarse en [R1], página 111. □

[7] La demostración de este resultado está en [4] pág. 208

[8] La hipótesis (**1.27**) debería compararse con (**1.26**). Es una hipótesis de integral equicontinua.

[9] $\mathcal{F}_{|\Omega}$ denota la restricción sobre Ω de las funciones en $\mathcal{F}$

1.4. Espacios de Hilbert

Definición 1.80. ***(Forma bilineal).*** *Sean X e Y espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{R}$. Entonces una forma bilineal h sobre $X \times Y$ es una función*

$$h : X \times Y \to \mathbb{R}$$

tal que para todo $x, x_1, x_2 \in X$ e $y, y_1, y_2 \in Y$ y los escalares α, β se tiene que:

(a) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$

(b) $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$

(c) $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$

(d) $h(x, \beta y) = \beta h(x, y).$

Observación 1.81. *El producto interno sobre $\mathbb{R}$ es un ejemplo de forma bilineal.*

Ejemplo 1.3. *$L^2(\Omega)$ dotado con el producto escalar*

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)d\mu,$$

es un espacio de Hilbert. En particular, ℓ^2 es un espacio de Hilbert. El espacio de Sobolev H^1 que se estudiará en los capítulos 2 y 3, es otro ejemplo de Espacios de Hilbert. Este es "modelado" sobre $L^2(\Omega)$.

Proposición 1.82. *H es uniformemente convexo y por tanto es reflexivo.*

Demostración. Comenzamos enunciando la **ley del paralelogramo**:

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2), \quad \forall a, b \in H. \tag{1.28}$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ y $u, v \in H$ que satisfacen $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$, y $|u - v| > \varepsilon$. En vista de la ley del paralelograma tenemos

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^2 < 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \; y \; asi \; \left|\frac{u+v}{2}\right|^2 < 1 - \delta \; con \; \delta = 1 - (1 - \frac{\varepsilon^2}{4})^{1/2} > 0.$$

Por el teorema de Milman-Pettis (1.25) se concluye que H es reflexivo. □

Teorema 1.83. ***(Proyección sobre un conjunto cerrado convexo).*** *Sea $K \subset H$ un conjunto cerrado convexo. Entonces para cada $f \in H$ existe un elemento único $u \in K$ tal que*

$$|f - u| = \min_{v \in K} |f - v| = dist(f, K). \tag{1.29}$$

*Además, u es **caracterizado** por la propiedad*

$$u \in K \; y \; (f-u, v-u) \leq 0, \quad \forall v \in K. \tag{1.30}$$

Notación. *El elemento anterior u es llamado la proyección de f sobre K y se denota por*

$$u = P_K f.$$

Demostración. a) Existencia.
La función $\varphi(v) = |f-v|$ es convexa, continua y $\lim\limits_{|v|\to\infty} \varphi(v) = +\infty$.
Sean $x, y \in H$ y $t \in [0,1]$.
Como H es convexo, $tx + (1-t)y \in H$.

$$\begin{aligned}
\varphi(tx+(1-t)y) &= |f-(tx+(1-t)y)| \\
&= |f-tx-(1-t)y| \\
&= |f-tx-tf+tf-(1-t)y| \\
&= |tf-tx+(1-t)f-(1-t)y| \\
&\leq |tf-tx| + |(1-t)f-(1-t)y| \\
&= t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).
\end{aligned}$$

Del corolario 1.34 se sigue que φ alcanza su mínimo sobre K ya que H es reflexivo.
b) Equivalencia de (1.29) y (1.30).
Supongamos que $u \in K$ satisface (1.29) y sea $w \in K$. Tomamos

$$v = (1-t)u + tw, \quad \forall t \in [0,1]$$

así,

$$\begin{aligned}
|f-u| &\leq |f-[(1-t)u+tw]| \quad u \; satisface \; (1.29) \\
&= |f-u+tu-tw| \\
&= |(f-u)-t(w-u)|
\end{aligned}$$

Además

$$|f-u|^2 \leq |f-u|^2 - 2t(f-u, w-u) + t^2|w-u|^2.$$

Lo que implica que $2(f-u, w-u) \leq t|w-u|^2, \quad \forall t \in (0,1]$.
Cuando $t \to 0$ obtenemos (1.30).
En el otro sentido, supongamos que u satisface (1.30). Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
|u-f|^2 - |v-f|^2 = 2(f-u, v-u) - |u-v|^2 &\leq 0, \quad \forall v \in K \\
\implies |u-f|^2 &\leq |v-f|^2 \\
\implies |f-u| &\leq |f-v|, \quad \forall v \in K.
\end{aligned}$$

Lo que implica (1.29).
c) Unicidad.
Supongamos que u_1 y u_2 satisfacen (1.30). Tenemos

$$(f - u_1, v - u_1) \leq 0, \quad \forall v \in K \tag{1.31}$$

$$(f - u_2, v - u_2) \leq 0, \quad \forall v \in K \tag{1.32}$$

Tomando $v = u_2$ en (1.31) y $v = u_1$ en (1.32) y sumando las desigualdades tenemos

$$\begin{aligned}
&(f - u_1, u_2 - u_1) + (f - u_2, u_1 - u_2) \leq 0 \\
&(u_1 - f, u_1 - u_2) \leq 0 \\
&(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0 \\
&|u_1 - u_2|^2 \leq 0 \Longrightarrow |u_1 - u_2| \leq 0 \Longrightarrow u_1 = u_2.
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 1.84. *Supongamos que $M \subset H$ es un subespacio lineal cerrado. Sea $f \in H$. Entonces $u = P_M f$ es caracterizado por*

$$u \in M \text{ y } (f - u, v) = 0, \quad \forall v \in M. \tag{1.33}$$

*Además, P_M es un operador lineal, llamado la **proyección ortogonal**.*

Demostración. Por (1.30) tenemos

$$(f - u, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in M$$

y así

$$(f - u, tv - u) \leq 0, \quad \forall v \in M, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se sigue que (1.33) se mantiene.

En el otro sentido, si u satisface (1.33) tenemos

$$(f - u, v - u) = 0, \quad \forall v \in M.$$

$\square$

Teorema 1.85. ***(Teorema de representación de Riesz-Fréchet)*** *Dado cualquier $\varphi \in H^\star$, existe un único $f \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u), \quad \forall u \in H.$$

Además,

$$|f| = \|\varphi\|_{H^\star}.$$

Demostración. Presentaremos dos pruebas para éste teorema:
1. Consideramos la aplicación $T : H \to H^\star$ definida como sigue: dado cualquier $f \in H$, la aplicación $u \mapsto (f, u)$ es un funcional lineal continuo sobre H. Que define un elemento de $H^\star$, denotado por Tf, entonces

$$\langle Tf, u\rangle = (f, u), \quad \forall u \in H.$$

Es claro que $\|Tf\|_{H^\star} = |f|$. Así T es una isometría lineal de H sobre $T(H)$, un subespacio cerrado de $H^\star$. Para concluir, es suficiente probar que $T(H)$ es denso en $H^\star$. Supongamos que h es un funcional lineal continuo sobre $H^\star$ que se anula sobre $T(H)$. Como H es reflexivo, h pertenece a H y satisface $\langle Tf, h\rangle = 0, \quad \forall f \ \in \ H$. Se sigue que $(f, h) = 0, \quad \forall f \in H$ y así h=0.

2. La segunda prueba tienen un argumento más directo que evita cualquier uso de la reflexividad. Sea $M = \varphi^{-1}(\{0\})$, entonces M es un subespacio cerrado de H. Podemos asumir que $M \neq H$ (de otra forma $\varphi \equiv 0$ y la conclusión del teorema 1.85 es obvia tomando $f = 0$). Queremos que exista algún elemento $g \in H$ tal que

$$|g| = 1 \ y \ (g, v) = 0 \quad \forall v \ \in \ M \ (y \ entonces \ g \notin M).$$

De hecho, sea $g_0 \in H$ con $g_0 \notin M$. Sea $g_1 = P_M g_0$. Entonces

$$g = (g_0 - g_1)/|g_0 - g_1|$$

Satisface las propiedades requeridas.

Dado cualquier $u \in H$, sea

$$v = u - \lambda g \ \ con \ \lambda = \frac{\langle \varphi, u\rangle}{\langle \varphi, g\rangle}.$$

Note que v está bien definida, como $\langle \varphi, g\rangle \neq 0$, y, además, $v \in M$, como $\langle \varphi, v\rangle = 0$.
Se sigue que $(g, v) = 0$, i.e.,

$$\langle \varphi, u\rangle = \langle \varphi, g\rangle (g, u), \quad \forall u \in H,$$

lo que concluye la prueba con $f = \langle \varphi, g\rangle g$. □

Definición 1.86. *Una forma bilineal* $a : H \times H \to \mathbb{R}$, $()$ *se dice:*

(i) ***Continua*** *si existe una constante C tal que*

$$|a(u, v)| \leq C|u||v|, \quad \forall u, v \in H;$$

(ii) ***Coercitiva*** *si existe una constante* $\alpha > 0$ *tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha |v|^2, \quad \forall v \in H.$$

Definición 1.87. ***(Operador Hilbert-adjunto T^*).*** *Sea $T : H_1 \longrightarrow H_2$ un operador lineal acotado, donde H_1 y H_2 son espacios de Hilbert. Entonces el operador Hilbert-adjunto T^* de T es el operador*

$$T^* : H_2 \longrightarrow H_1$$

tal que para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$,

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle. \tag{1.34}$$

Teorema 1.88. ***(Stampacchia)*** *Suponemos que $a(u, v)$ es una forma bilineal continua y coercitiva sobre un espacio de Hilbert H. Sea $K \subset H$ un conjunto cerrado, convexo y no vacío. Entonces, dado cualquier $\varphi \in H^\star$, existe un único elemento $u \in K$ tal que*

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u\rangle\,, \quad \forall v \in K. \tag{1.35}$$

Además, si a es simétrica, entonces u se caracteriza por la propiedad

$$u \in K \;\; y \;\; \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u\rangle = \min_{v\in K}\left\{\frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v\rangle\right\}. \tag{1.36}$$

La prueba del Teorema 1.88 recae en el siguiente resultado clásico

Teorema 1.89. ***(Teorema del punto fijo de Banach-principio de la función contráctil)*** *Sea X un espacio métrico no vacío y sea $S : X \to X$ una contracción estricta, es decir,*

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq k\, d(v_1, v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in X \; con \; k < 1.$$

Entonces S tiene un único punto fijo, u = Su.

Demostración. (del Teorema 1.88) Del teorema de representación de Riesz-Fréchet (Teorema 1.85) sabemos que existe una única $f \in H$ tal que

$$\langle \varphi, v\rangle = (f, v), \quad \forall v \in H.$$

De otra manera, si fijamos $u \in H$, la aplicación $v \mapsto a(u, v)$ es un funcional lineal continuo sobre H. Usando una vez más el teorema de representación de Riesz-Fréchet encontramos un único elemento en H, denotado por Au, tal que $a(u, v) = (Au, v), \quad \forall v \in H$. Claramente A es un operador lineal de H en H que satisface

$$|Au| \leq C|u|, \quad \forall u \in H, \tag{1.37}$$

$$(Au, u) \geq \alpha|u|^2, \quad \forall u \in H. \tag{1.38}$$

El problema (1.35) significa encontrar algún $u \in K$ tal que

$$(Au, v-u) \geq (f, v-u), \quad \forall v \in K. \tag{1.39}$$

Sea $\rho > 0$ una constante (que será determinada luego). Note que (1.39) es equivalente a

$$(\rho f - \rho Au + u - u, v-u) \leq 0, \quad \forall v \in K, \tag{1.40}$$

i.e.,

$$u = P_K(\rho f - \rho Au + u).$$

Para cada $v \in K$, sea $Sv = P_K(\rho f - \rho Av + v)$. Queremos que si $\rho > 0$ es propiamente elegido entonces S es una contracción estricta. De hecho, como P_K no incrementa su distancia tenemos

$$|Sv_1 - Sv_2| \leq |(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)|$$

y así

$$\begin{aligned} |Sv_1 - Sv_2|^2 &= |v_1 - v_2|^2 - 2\rho(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2) + \rho^2|Av_1 - Av_2|^2 \\ &\leq |v_1 - v_2|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2). \end{aligned}$$

Tomando $\rho > 0$ de forma tal que $k^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1$ (i.e., $0 < \rho < 2\alpha/C^2$) encontramos que S tienen un punto fijo único.

Ahora supongamos que la forma $a(u, v)$ es también simétrica. Entonces $a(u, v)$ define un nuevo producto interno sobre H; la norma correspondiente $a(u, u)^{1/2}$ es equivalente a la norma original $|u|$. Se sigue que H es también un espacio de Hilbert para este nuevo producto interno. Usando el teorema de Riesz-Fréchet podemos representar el funcional φ mediante el nuevo producto interno, i.e., existe un único elemento $g \in H$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = a(g, v), \quad \forall v \in H.$$

El problema (1.35) significa encontrar algún $u \in K$ tal que

$$a(g-u, v-u) \leq 0, \quad \forall v \in K. \tag{1.41}$$

La solución de (1.41) es conocida: u es simplemente *la proyección sobre K de g para el nuevo producto interno a*. También sabemos (por el Teorema 1.83) que u es el único elemento de K que alcanza

$$\min_{v \in K} a(g-v, g-v)^{1/2}.$$

Esto equivale a minimizar sobre K la función

$$v \mapsto a(g-v, g-v) = a(v,v) - 2a(g,v) + a(g,g) = a(v,v) - 2\langle \varphi, v\rangle + a(g,g),$$

o equivalentemente la función

$$v \mapsto \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v\rangle$$

□

Definición 1.90. *Una transformación T en un espacio normado E es* ***acotada por abajo*** *si existe una constante $\beta > 0$ tal que $\beta\|x\| \leq \|Tx\|, \quad \forall x \in E.$*

Lema 1.91. *Sean E, F espacios normados. Entonces una transformación lineal T de $\mathscr{D}(T) \subseteq E$ a F admite una inversa continua T^{-1} si y sólo si es acotada por abajo.*

Demostración. Supongamos que T es acotada por abajo, entonces

$$\beta\|x\| \leq \|Tx\|, \quad \forall x \in E \tag{1.42}$$

A partir de esto vemos que

$$x \in N(T) \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \|Tx\| = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Por lo que $N(T) = \{0\}$ y T es inyectiva. Por lo tanto, $T^{-1} : R(T) \to E$ existe. Además, (1.42) es equivalente a

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{\beta}\|y\|, \ \forall y \in F$$

es decir, T^{-1} es acotada, y por lo tanto continua. □

Lema 1.92. *Sea E un espacio de Banach y $T : E \to E$ un operador lineal y continuo. Si T es acotado por abajo, entonces el rango de T es cerrado en E.*

Demostración. Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión en $R(T)$ y que $z_n \to z \ \in E$. Al ser T acotado por abajo, el lema 1.91 implica que debe ser inyectivo. Así, sabemos que

$$\exists!\{v_n\} \subset E \ tal \ que \ z_n = Tv_n \ para \ cada \ n \in \mathbb{N}$$

entonces vemos que

$$\|z_n - z_m\| = \|Tv_n - Tv_m\| = \|T(v_n - v_m)\| \geq \beta\|v_n - v_m\|$$

Pero $\{z_n\}$ en particular es de Cauchy, por lo que

$$\lim_{n,m\to\infty} \|z_n - z_m\| = 0$$

luego, por la desigualdad anterior, $\{v_n\}$ también es de Cauchy. Más aún, como E es de Banach, $\{v_n\}$ es convergente a un elemento v en E. Para terminar usamos la continuidad de T para ver que

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} Tv_n = T(\lim_{n\to\infty} v_n) = Tv$$

Es decir $z = Tv \in R(T)$. Así $R(T)$ es cerrado. □

Definición 1.93. ***(Suma directa.)*** *Sean X un espacio vectorial e Y, Z subespacios de X. Se dice que X es la suma directa de Y y Z si para cualquier $x \in X$, existe un único par $(y, z) \in Y \times Z$ tal que $x = y + z$. Y se denota de la forma*

$$X = Y \oplus Z.$$

Observación 1.94. *Si H es un espacio de Hilbert y M es un subespacio cerrado de H entonces*

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Teorema 1.95. ***(Lax-Milgram)*** *Suponemos que $a(u, v)$ es una forma bilineal coercitiva y continua sobre H. Entonces, dado cualquier $\varphi \in H^{\star}$, existe un único elemento $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v\rangle\,, \quad \forall v \in H. \tag{1.43}$$

Además, si a es simétrica, entonces u se caracteriza por la propiedad

$$u \in H \quad y \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u\rangle = \min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v\rangle\right\}. \tag{1.44}$$

Demostración.

1. Fijando el elemento $y \in H$, la aplicación $a_y = a(v, y) : H \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal sobre H para v. Como a es continua para cada uno de sus argumentos, entonces a_y también lo es, y por tanto por el Teorema de Representación de Riesz-Fréchet (1.85) existe un único $z \in H$ que satisface

$$a(v, y) = a_y(v) = \langle v, z\rangle \tag{1.45}$$

Como se puede repetir este proceso para cada $y \in H$, podemos definir el operador T de H en H dado por $Ty = z$ tal que $\langle v, z\rangle = a(v, y)$ para todo $v \in H$.

2. Es claro que T es un operador lineal, pues a y el producto interno lo son. Además, es acotado como

$$\|Ty\|^2 = \langle Ty, Ty\rangle = a(Ty, y) \le \gamma\|Ty\|\|y\|,\ \forall y \in H.$$

Utilizando el hecho de que a es coercitiva y la definición de T, existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\delta \|y\|^2 \leq a(y, y) = \langle y, Ty \rangle \leq \|y\| \|Ty\|$$

por lo que

$$\delta \|y\| \leq \|Ty\| \tag{1.46}$$

es decir, T es acotado por abajo. Esto implica que T^{-1} existe y es continuo, por el lema 1.91, y además $R(T)$ es cerrado por el lema 1.92.

Demostraremos ahora que $R(T) = H$. Supongamos lo contrario, esto es, $R(T) \subsetneq H$. Entonces en virtud de la observación 1.94 (que podemos utilizar dado que $R(T)$ es cerrado) existe $w \in H$ con $w \neq 0$ tal que $w \in R(T)^{\perp}$. Pero esto implica que

$$\delta \|w\|^2 \leq a(w, w) = \langle w, Tw \rangle = 0$$

luego $w = 0$, que implica una contradicción. Vemos entonces que $R(T)$=H. Combinando esto con el hecho que T es invertible, podemos concluir que la ecuación $Ty = z$ tiene una solución única para cada $z \in H$.

3. Por otra parte, utilizamos el teorema 1.85 para ver que

$$\varphi(v) = \langle v, z_\varphi \rangle, \ \forall v \in H$$

para un único $z_\varphi \in H$. Por lo visto en el punto anterior, podemos encontrar un único $u \in H$ que satisface $Tu = z_\varphi$. Entonces retomando (1.45) vemos que

$$a(v, u) = \langle v, Tu \rangle = \langle v, z_\varphi \rangle = \langle \varphi, v \rangle \, , \ \forall v \in H$$

Para concluir la demostración nos auxiliamos en el Teorema de Stampacchia (1.88) con $K = H$ y tenemos

$$u \in H \ \ y \ \ \frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Con lo que ambas partes del teorema quedan demostradas.

$\square$

1.5. Operadores compactos. Descomposición Espectral de Operadores compactos Auto-Adjuntos

Definición 1.96. *Un operador acotado $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se dice compacto si $T(B_E)$ tiene clausura compacta en F (En la topología fuerte).*

El conjunto de todos los operadores compactos de *E* en *F* se denota por $\mathcal{K}(E, F)$. Por simplicidad escribimos $\mathcal{K}(E, E) = \mathcal{K}(E)$

Teorema 1.97. ***(Alternativa de Fredholm).*** *Sea* $T \in \mathcal{K}(E)$. *Entonces*

(a) *N(I-T) es finito-dimensional,*

(b) *R(I-T) es cerrado, mas precisamente* $R(I-T) = N(I-T^*)$,

(c) $N(I-T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I-T) = E$,

(d) $\dim N(I-T) = \dim N(I-T^*)$. [10]

La prueba de este teorema puede ser consultada en [1] pág. 160.

[10] $N(T),\ R(T),\ \dim(N(T))$ denotan el Núcleo, Rango y Dimensión del espacio nulo de T respectivamente.

Capítulo 2

Espacios de Sobolev

2.1. Motivación

Dado $f \in C([a,b])$, consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & en\ [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Una solución clásica (o solución fuerte) de (2.1) es una función u, de clase C^2 en $[a,b]$, que lo verifica. Note que (2.1) puede resolverse explícitamente con un cálculo muy sencillo, ignoraremos este hecho para ilustrar el método de este ejemplo elemental.
Multiplicamos (2.1) por $\varphi \in C^1([a,b])$,

$$-u''\varphi + u\varphi = f\varphi.$$

Integrando por partes,

$$-u'\varphi|_a^b + \int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi, \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]).$$

Luego,

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi, \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \tag{2.2}$$

Note que (2.2) tiene sentido siempre que $u \in C^1([a,b])$ (donde (2.1) requiere dos derivadas de u); de hecho es suficiente saber que $u, u' \in L^1(a,b)$, donde u' tiene sentido. Digamos provisionalmente que una función $u \in C^1$ que satisface (2.2) es una **solución débil** de (2.1).

El siguiente esquema describe los pasos principales del *Enfoque Variacional* en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales:

PASO A: Se precisa la noción de *solución débil*. Esto involucra espacios de Sobolev, como nuestra herramienta básica.

PASO B: La *existencia y unicidad de una solución débil* están establecidas por un método variacional a través del teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.95).

PASO C: La solución débil se muestra que es de clase C^2 (por ejemplo): esto es un resultado de *regularidad*.

PASO D: Una solución *clásica* se obtiene mostrando que cualquier solución débil que está en C^2 es solución clásica.

Para llevar a cabo el Paso D es muy sencillo. De hecho, suponemos que $u \in C^2([a,b]), u(a) = u(b) = 0$, y que u satisface (2.2). Integrando por partes el primer término de (2.2) se obtiene

$$u'\varphi|_a^b - \int_a^b u''\varphi + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi, \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]).$$

Agrupando todo al lado izquierdo

$$\int_a^b (-u'' + u - f)\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]),\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

y por tanto

$$\int_a^b (-u'' + u - f)\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1((a,b))$$

Se sigue por el corolario 1.77 que $-u'' + u = f$ c.t.p. sobre (a,b) y así en todo $[a,b]$, dado que $u \in C^2([a,b])$.

2.2. Definición de los espacios $W^{1,p}(I)$

Empecemos observando lo siguiente

Proposición 2.1. *Sean $I \subset \mathbb{R}$, $f \in C^1$ y $\varphi \in C_c^\infty$, se cumple que*

$$\int_I f\varphi' = -\int_I f'\varphi.$$

Demostración. Sea $\psi \in C_c^1$. Entonces existe $M > 0$ tal que

$$supp\ \psi \subset Q = \{x \in \mathbb{R} : |x| < M\}$$

del Teorema Fundamental del Cálculo se sigue que

$$\int_{-M}^{M} \psi'(x)dx = \psi(M) - \psi(-M)$$

por lo tanto

$$\int_I \psi'(x)dx = \int_Q \psi'(x)dx = \int_{-M}^{M} \psi'(x)dx = 0$$

dado que $f\varphi \in C_c^1(I)$

$$0 = \int_I (f\varphi)' = \int_I f\varphi' + \int_I f'\varphi$$

luego

$$\int_I f\varphi' = -\int_I f'\varphi.$$

□

El resultado anterior sugiera la definición de derivada débil.

Definición 2.2. *Sea I un abierto en $\mathbb{R}$ y $u, g \in L^1_{loc}(I)$. Se dice que g es la derivada débil de u si*

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Se dice que una función es débilmente diferenciable si tiene derivada débil.

Por tanto es necesario denotar espacios de funciones en L^p, que son débilmente diferenciables, es así como introducimos los Espacios de Sobolev como sigue.

Definición 2.3. *Sea I $\subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$, definimos el* ***espacio de Sobolev*** *$W^{1,p}$(I) por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \;\; tal\ que \; \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}$$

En particular, denotaremos H^1(I) $= W^{1,2}$(I).

Dado $u \in W^{1,p}$(I) a la función g en las condiciones de la definición, la denotaremos como u'. A las funciones φ les llamaremos ***funciones test****.*

$W^{1,p}$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \qquad (*)$$

o a veces, si $1 < p < \infty$, con la norma equivalente $(\|u\|^p_{L^p} + \|u'\|^p_{L^p})^{\frac{1}{p}}$. El espacio H^1 está dotado del producto escalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2} = \int_I (uv + u'v')$$

con la norma inducida

$$\|u\|_{H^1} = ((u, u)_{L^2} + (u', u')_{L^2})^{\frac{1}{2}} = (\|u\|^2_{L^2} + \|u'\|^2_{L^2})^{\frac{1}{2}}$$

que es equivalente a la norma (*) con $p = 2$.

Observación 2.4. *Para cada $u \in W^{1,p}(I)$ g es única, por ende la notación u' tiene sentido. Si suponemos que existe h en las condiciones de g, entonces*

$$\int_I g\varphi = \int_I h\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

luego

$$\int_I (g-h)\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Como $L^p(I)$ es espacio vectorial, entonces $g-h$ pertenece a $L^p(I)$, por el lema 1.69 $g-h$ pertenece a $L^1_{loc}(I)$, y aplicando el corolario 1.77, tenemos que $g-h=0$ c.t.p es decir, $g=h$ c.t.p de I.

Observación 2.5. *Si $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$, $u' \in L^p(I)$ (aquí u' es la derivada débil) y φ es una función test con $supp\ \varphi \subseteq [a,b] \subseteq I$ entonces por la integración por partes*

$$\int_I u\varphi' = \int_a^b u\varphi' = u\varphi|_a^b - \int_a^b u'\varphi = -\int_a^b u'\varphi = -\int_I u'\varphi.$$

Donde al ser φ una función test obliga a $u\varphi|_a^b$ a ser igual a 0 por definición de derivada débil.
Como φ era arbitraria, $u \in W^{1,p}(I)$ y la derivada débil coincide con la derivada habitual. En particular si I es acotado, entonces $C^1(\overline{I}) \subseteq W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Ejemplo 2.1. *Consideremos la función $u(x) = |x|$ definida en $I = (-1,1)$. Dada $\varphi \in C_c^1(I)$ se tiene que*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 u\varphi' &= -\int_{-1}^0 x\varphi' + \int_0^1 x\varphi' \\
&= -\left[x\varphi|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \varphi\right] + \left[x\varphi|_0^1 - \int_0^1 \varphi\right] \\
&= -\left[0\varphi(0) + \varphi(-1) - \int_{-1}^0 \varphi\right] + \left[\varphi(1) - 0\varphi(0) - \int_0^1 \varphi\right] \\
&= \int_{-1}^0 \varphi - \int_0^1 \varphi
\end{aligned}$$

como $supp\ \varphi \subseteq (-1,1)$, entonces $\{-1,1\} \not\subset supp\ \varphi$, así $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$, y tenemos

$$\int_I u\varphi' = \int_{-1}^0 (1)\varphi + \int_0^1 (-1)\varphi$$

con

$$g(x) = \begin{cases} 1, & si\ -1 \leq x \leq 0 \\ -1, & si\ \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Por la definición de g se tiene que $g \in L^p(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Así $u \in W^{1,p}(I)$ para todo p y su derivada débil es $u' = g$, a pesar de que $u \notin C^1(I)$.

Observación 2.6. *De la definición se sigue que $W^{1,p}$ es un subespacio vectorial de L^p, así, si $u, v \in W^{1,p}$ y c es un número real, entonces $u + cv \in W^{1,p}$. Más aún, la propiedad de linealidad de la integral nos da el siguiente lema*

Proposición 2.7. *El operador derivada débil es lineal.*

Demostración. Es evidente considerando la linealidad de la integral. □

2.3. Propiedades Fundamentales del Espacio $W^{1,p}(I)$

Proposición 2.8. *$W^{1,p}$ es un espacio de Banach para $1 \leq p < \infty$. Es reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$. H^1 es un espacio de Hilbert separable.*

Demostración.

1) Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}$, por como fue definida la norma en el espacio de Sobolev, (u_n) y (u'_n) resultan sucesiones de Cauchy en L^p (para (u'_n) ver proposición 2.7), como L^p es completo, $u_n \to u \in L^p$ y $u'_n \to g \in L^p$. Entonces

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I u'_n \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

y en el límite

$$\int_I u \varphi' = -\int_I g \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Por lo tanto, $u \in W^{1,p}, u' = g$ y $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} = \|u_n - u\|_{L^p} + \|u'_n - u'\|_{L^p} \to 0$, resultando $W^{1,p}$ completo.

2) Veamos que es reflexivo:
Si $1 < p < \infty$ por el teorema 1.54, L^p es reflexivo y en consecuencia el espacio producto $E = L^p \times L^p$ es reflexivo. El operador $T : W^{1,p} \to E$ dado por $Tu = (u, u')$ es una isometría de $W^{1,p}$ en E (tomando la norma $\|(u, v)\| = \|u\|_p + \|v\|_p$ sobre E), por tanto $T(W^{1,p})$ es un subespacio cerrado de E (Lema 1.31). Resulta entonces por la proposición 1.30 que $T(W^{1,p})$ es reflexivo, y por consiguiente también lo es $W^{1,p}$.

3) Es separable para $1 \leq p < \infty$:
Por el Teorema 1.63, el espacio producto $E = L^p \times L^p$ resulta separable, y como cualquier subconjunto de un separable (Proposición 1.36), es separable, $T(W^{1,p})$ también es separable. Por ende $W^{1,p}$.

□

Observación 2.9. *Destaquemos que si (u_n) es una sucesión en $W^{1,p}$ que converge a u en L^p y (u_n') también es convergente en L^p, entonces $u \in W^{1,p}$ y (u_n) converge a u con la norma de $W^{1,p}$.*

Lema 2.10. *Sea $f \in L^1_{loc}(I)$ tal que*

$$\int_I f\varphi' = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \tag{2.3}$$

Entonces existe una constante C tal que $f = C$ c.t.p.

Demostración. Tomemos $\psi \in C_c(I)$ tal que $\int_I \psi = 1$. Para cualquier función w en $C_c(I)$ existe $\varphi \in C_c^1(I)$ tal que

$$\varphi' = w - \left(\int_I w \right) \psi$$

Es decir, si tomamos $\varphi' = w - \left(\int_I w\right)\psi$ se verifica que está en $C_c(I)$, entonces podemos decir que $\varphi \in C_c^1$. Aplicándole la hipótesis a φ' tenemos que

$$\int_I f \left[w - \left(\int_I w \right) \psi \right] = 0, \quad \forall w \in C_c(I)$$

Por la linealidad de la integración,

$$\int_I fw - \left(\int_I f\psi \right) \int_I w = 0, \quad \forall w \in C_c(I)$$

Agrupando,

$$\int_I \left[f - \left(\int_I f\psi \right) \right] w = 0, \quad \forall w \in C_c(I)$$

y por 1.77, $f - (\int_I f\psi) = 0$ c.t.p., siendo el segundo miembro claramente una constante. □

Lema 2.11. *Sea $g \in L^1_{loc}(I)$ y sea $y_0 \in I$ fijo, consideremos la función integral*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt, \quad x \in I, \tag{2.4}$$

Entonces v es continua y

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I). \tag{2.5}$$

Demostración. Dada cualquier $\varphi \in C_c^1(I)$, observe que aunque $I = (a,b)$ no fuese acotado, i.e. $a = -\infty$ y $b = \infty$, las formas integrales de (2.5) son finitas debido a que φ y φ' tienen soporte compacto. Entonces

$$\begin{aligned}\int_I v(x)\varphi'(x)dx &= \int_I \left[\int_{y_0}^x g(t)dt\right] \varphi'(x)dx \\ &= \int_I dx \int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)dt \\ &= -\int_a^{y_0} dx \int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)dt + \int_{y_0}^b dx \int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)dt\end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Fubini y el segundo teorema fundamental del cálculo, se tiene

$$\begin{aligned}\int_I v(x)\varphi'(x)dx &= -\int_a^{y_0} g(t)dt \int_a^t \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b g(t)dt \int_t^b \varphi'(x)dx \\ &= -\int_a^{y_0} g(t)dt\,[\varphi(t)-\varphi(a)] + \int_{y_0}^b g(t)dt\,[\varphi(b)-\varphi(t)] \\ &= -\int_I g(t)\varphi(t)dt\end{aligned}$$

Donde $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ya que φ tiene soporte compacto. $\square$

Teorema 2.12. *Sea $u \in W^{1,p}(I), 1 \leq p < \infty$, entonces existe $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tal que $u = \tilde{u}$, c.t.p. en I y*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \quad \forall x, y \in \bar{I}. \tag{2.6}$$

Demostración. Se fija $y_0 \in I$ y se pone $\bar{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t)dt$. Entonces por el lema 2.11. tenemos

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Por lo tanto $\int (u-\bar{u})\varphi' = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$. Entonces por 2.10, $u - \bar{u} = C$ c.t.p. Así la función $\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) + C$ tiene las propiedades deseadas. $\square$

Observación 2.13. *De acuerdo a lo presentado en el teorema 2.12. Primero notamos que si una función $u \in W^{1,p}$ entonces todas las funciones v tal que $v = u$, c.t.p. sobre I también pertenecen a $W^{1,p}$ (este hecho se sigue directamente de la definición de $W^{1,p}$). Además el teorema 2.12 expresa que cada función $u \in W^{1,p}$, admite un único* ***representante continuo*** *sobre $\bar{I}$, es decir, existe una función continua sobre $\bar{I}$ que perteneces a la clase de equivalencia de u ($v \sim u$ si $v = u$, c.t.p.).*

Observación 2.14. *El lema 2.11 muestra que la primitiva v de una función $g \in L^p$ pertenece a $W^{1,p}$ y también sabemos que $v \in L^p$, siempre que I sea acotado.*

Proposición 2.15. *Sea $u \in L^p, 1 < p \leq \infty$, y sea q el exponente conjugado de p. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) $u \in W^{1,p}$,

(ii) Existe una constante C tal que

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C \left\| \varphi \right\|_{L^q(I)}, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Demostración.

$(i) \Rightarrow (ii)$.

$$\begin{aligned} \left| \int_I u\varphi' \right| &= \left| - \int_I u'\varphi \right| \\ &\leq \int_I |u'\varphi| \\ &\leq \|u'\|_p \|\varphi\|_q. \end{aligned}$$

El último resultado es consecuencia de la desigualdad de Hölder y tomando $C = \|u'\|_p$ se obtiene la desigualdad deseada.

$(ii) \Rightarrow (i)$. El funcional lineal $\psi : C_c^1(I) \to \mathbb{R}$, definido por $\varphi \mapsto \int_I u\varphi'$, el cual toma elementos en un subespacio denso de L^q (por el corolario 1.76 ya que $q < \infty$) y es continuo con la norma de L^q. Por el Teorema de Hahn-Banach (1.8) se puede extender a un funcional continuo F en L^q y según el teorema de representación de Riesz (1.60) existe $g \in L^p$ tal que

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_I g\varphi, \quad \forall \varphi \in L^q$$

En particular

$$\int_I u\varphi' = \int_I g\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Y asi $u \in W^{1,p}$.

□

Corolario 2.16. *Una función u de $L^\infty(I)$ pertenece a $W^{1,\infty}$ si y sólo si existe una constante C tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C\,|x - y|, \quad c.t.p.\ x, y \in I.$$

Demostración. Por el teorema 2.12 deducimos que

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &= \left|\int_y^x u'(t)dt\right| \\
&\leq \int_y^x |u'(t)|dt \\
&= \|u'(t)\|_{L^1(I)}|_y^x \\
&\leq \|u'\|_{L^1(I)}|t|_y^x \\
&= C|x-y|.
\end{aligned}$$

Tomando $C=\|u'\|_{L^1(I)}$ se verifica la primera implicación.

De manera recíproca, sea $\varphi \in C_c^1(I)$, elegimos $\omega \subset\subset I$, tal que $Supp\ \varphi \subset \omega$ y $h \in \mathbb{R}$, con $|h| < dist(\omega, \mathbb{R}\setminus I)$. Así se verifica lo siguiente

$$\begin{aligned}
\left|\int_I [u(x+h)-u(x)]\varphi(x)dx\right| &= \left|\int_I [u(x+h)\varphi(x)-u(x)\varphi(x)]dx\right| \\
&= \left|\int_I u(x+h)\varphi(x)dx - \int_I u(x)\varphi(x)dx\right| \\
&= \left|\int_\omega u(x+h)\varphi(x)dx - \int_\omega u(x)\varphi(x)dx\right| \\
&= \left|\int_\omega u(x)\varphi(x-h)dx - \int_\omega u(x)\varphi(x)dx\right| \\
&= \left|\int_I [\varphi(x-h)-\varphi(x)]u(x)dx\right|
\end{aligned}$$

Ahora usando la hipótesis

$$\begin{aligned}
\left|\int_I [u(x+h)-u(x)]\,\varphi(x)dx\right| &\leq \int_I |[u(x+h)-u(x)]\,\varphi(x)|\,dx \\
&\leq \int_I |[C|h|]\varphi(x)|\,dx \\
&\leq C|h|\|\varphi\|_{L^1},\ \ \textit{Desigualdad de Hölder}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left|\int_I [\varphi(x-h)-\varphi(x)]u(x)dx\right| \leq C|h|\|\varphi\|_{L^1}$$

Dividiendo por $|h|$ y haciendo $h \to 0$ obtenemos la derivada de φ, de modo que

$$\left|\int_I u\varphi'\right| \leq C\|\varphi\|_{L^1}.$$

Y por la proposición 2.15 $u \in W^{1,\infty}(I)$. □

Lema 2.17. *Sea* $u \in W^{1,p}(I)$ *y* $\eta \in C^1(\mathbb{R})$*, con* $I = (0,1)$*. Entonces*

$$\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(0,\infty) \; y \; (\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\tilde{u}'.$$

Demostración. Sea $\varphi \in C_c^1(0,\infty)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \eta\tilde{u}\varphi' &= \int_0^1 \eta u\varphi' \\
&= \int_0^1 u[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi] \\
&= -\int_0^1 u'\eta\varphi - \int_0^1 u\eta'\varphi, \; ya \; que \; \eta\varphi \in C_c^1(0,1) \\
&= -\int_0^\infty (\tilde{u}'\eta + \tilde{u}\eta')\varphi \\
&= -\int_0^\infty (\eta\tilde{u})'\varphi.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(0,\infty)$$

y

$$(\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u}(x) + \eta\tilde{u}'$$

□

Algunas operaciones fundamentales, como la convolución, tienen sentido sólo para las funciones definidas en todo $\mathbb{R}$. Veamos como se puede extender una función $u \in W^{1,p}(I)$ a una función $\bar{u}(x) \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.[1]

Teorema 2.18. *(Operador extensión) Sea* $1 \le p \le \infty$*. Existe un operador extensión* $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ *lineal y continuo tal que*

1. $Pu|_I = u, \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$
2. $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\|u\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$
3. $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$

[1] Si se extiende a u por 0 fuera de I, es decir, llevamos la función $u : I \to \mathbb{R}$ a la función $\bar{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$\bar{u} = \begin{cases} u(x), & si \; x \in I \\ 0, & si \; x \notin I. \end{cases}$$

la función obtenida no pertenece en general a $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Demostración. Si $I = (0, \infty)$ la reflexión respecto al eje Y resuelve la ecuación

$$(Pu)(x) = u^\star(x) = \begin{cases} u(x), & si\, x \geq 0 \\ u(-x), & si\, x < 0 \end{cases}$$

Primeramente se tiene que $\|u^\star\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}$. Pongamos

$$v(x) = \begin{cases} u'(x), & si\, x \geq 0 \\ -u'(-x), & si\, x < 0 \end{cases}$$

Donde $\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u'\|_{L^p(I)}$, dado que $u \in W^{1,p}(I)$ se comprueba que $v \in L^p(\mathbb{R})$ y que

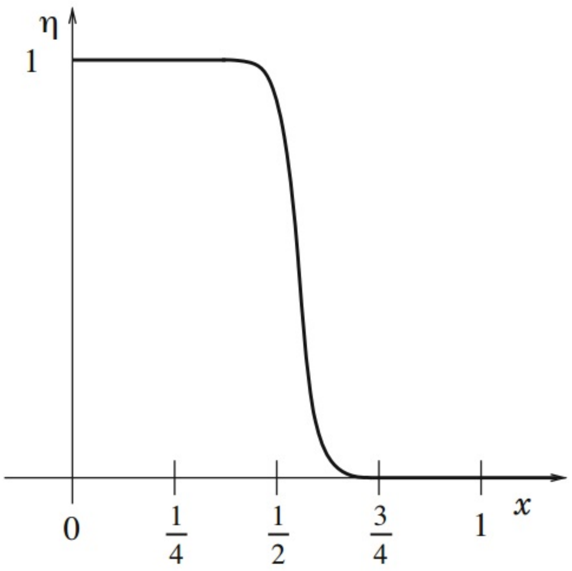
$$u^\star(x) - u^\star(0) = \int_0^x v(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por la observación 2.14 $u^\star(x) \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ y

$$\begin{aligned} \|u^\star(x)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} &= \|u^\star\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq 2\|u\|_{L^p(I)} + 2\|u'\|_{L^p(I)} \\ &= 2\|u\|_{W^{1,p}(I)}. \end{aligned}$$

Ahora consideramos el caso donde I es acotado. Sin pérdida de generalidad podemos tomar $I = (0, 1)$, por ende lo probaremos para este último. Fijemos $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, con $0 \leq \eta \leq 1$, tal que

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & si\ x < 1/4 \\ 0, & si\ x > 3/4 \end{cases}$$



Dada una función u sobre $(0,1)$, sea

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & si\ 0 < x < 1 \\ 0, & si\ x > 1 \end{cases}$$

Sea $u \in W^{1,p}(I)$, podemos escribirla como sigue

$$u = \eta u + (1-\eta)u$$

ηu se prolonga primero a $(0,\infty)$ por $\eta\tilde{u}$ y después se prolonga a $\mathbb{R}$ por reflexión. Se obtiene así una función $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ que prolonga a ηu y tal que

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}, \quad \|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

(Donde C depende de $\|\eta'\|_{L^\infty}$).
Por otro lado se prolonga $(1-\eta)u$ primero a $(-\infty,1]$ asignando el valor de 0 sobre $(-\infty,1]$ y después se prolonga a $\mathbb{R}$ por una reflexión (respecto del 1). Se obtiene así una función $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ que prolonga a $(1-\eta)u$ y tal que

$$\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}, \quad \|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

Entonces $Pu = v_1 + v_2$ satisface las condiciones del teorema. □

Definición 2.19. *Sea $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ una función fija tal que $0 \leq \zeta \leq 1$ y*

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & si\ |x| \leq 1 \\ 0, & si\ |x| \geq 2. \end{cases}$$

*Una sucesión $\zeta_n(x) = \zeta(x/n)$, $n = 1, 2, ...$, es llamada **Sucesión de Truncamientos**.*

De aquí en adelante denotaremos sistemáticamente por (ζ_n) una sucesión de truncamientos.

Teorema 2.20. *(Densidad) Sea $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces existe una sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$ en $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que la sucesión $(u_n|_I)_{n\geq 1}$ converge a u en $W^{1,p}(I)$.*

Demostración. Supongamos $I = \mathbb{R}$, caso contrario se comienza extendiendo u a una función de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ por el teorema 2.18. Usaremos las *técnicas básicas de convolución* (Las cuales forman funciones de la clase C^∞) y *truncamiento* (De lo que obtendremos su soporte compacto).

(a) convolución

Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.21. *Sea $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ y $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ y $(\rho * v)' = \rho * v'$.*

Demostración. Primero suponemos que ρ tiene soporte compacto. Sabemos por el teorema 1.64 que $\rho * v \in L^p(\mathbb{R})$. Sea $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$; de las proposiciones 1.66 y 1.72 tenemos que

$$\int (\rho * v)\varphi' = \int v(\check{\rho} * \varphi') = \int v(\check{\rho} * \varphi)' = -\int v'(\check{\rho} * \varphi) = -\int (\rho * v')\varphi$$

Se sigue que

$$\rho * v \in W^{1,p} \ y \ (\rho * v)' = \rho * v'.$$

Si ρ no tiene soporte compacto, introducimos una sucesión (ρ_n) en $C_c(\mathbb{R})$, tal que $\rho_n \to \rho$ en $L^1(\mathbb{R})$ (por el teorema 1.48). De lo anterior obtenemos

$$\rho_n * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \ y \ (\rho_n * v)' = \rho_n * v'.$$

Además por el teorema 1.75 $\rho_n * v \to \rho * v$ en $L^p(\mathbb{R})$ y $\rho_n * v' \to \rho * v'$ en $L^p(\mathbb{R})$. Y concluimos con la ayuda de la observación 2.9 que

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \ y \ (\rho * v)' = \rho * v'.$$

□

(b) Truncamiento
Utilizaremos una sucesión de truncamiento ζ_n y gracias al teorema de la convergencia dominada (Teo. 1.47), comprobamos que si una función $f \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$ entonces $\zeta_n f \to f$ en L^p.

(c) Conclusión
Se toma una sucesión regularizante (ρ_n). La sucesión (u_n), con $u_n = \zeta_n(\rho_n * u)$ converge a u en $W^{1,p}$. Primero verificaremos que $\|u_n - u\|_p \to 0$. Se tiene que

$$u_n - u = \zeta_n[(\rho_n * u) - v] + [\zeta_n u - u]$$

Entonces

$$\|u_n - u\|_p \leq \|(\rho_n * u) - u\|_p + \|\zeta_n u - u\|_p \to 0$$

Por el lema (2.21) se tiene

$$u_n' = \zeta_n'(\rho_n * u) + \zeta_n(\rho_n * u')$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}\|u_n' - u\|_p &\leq \|\zeta_n'(\rho_n * u)\|_p + \|\zeta_n(\rho_n * u') - u'\|_p \\ &\leq \frac{C}{n}\|u\|_p + \|(\rho_n * u') - u'\|_p + \|\zeta_n u' - u'\|_p \to 0,\end{aligned}$$

donde $C = \|\zeta'\|_\infty$.

□

Observación 2.22. *En general, no existe una sucesión* (u_n) *in* $C_c^\infty(I)$ *tal que* $u_n \to n$ *en* $W^{1,p}(I)$*.Esto contrasta con los espacios* L^p*: recordando que para cada función* $u \in L^p(I)$ *existe una sucesión* (u_n) *en* $C_c^\infty(I)$ *tal que* $u_n \to$ *in* $L^p(I)$ *(Corolario 1.76).*

Teorema 2.23. *Existe una constante C, dependiendo solo de* $|I|$*, tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)},\ \forall u \in W^{1,p}(I),\ 1 \leq p \leq \infty$$

Con lo que $W^{1,p} \subset L^\infty(I)$ *para todo* $1 \leq p \leq \infty$*.*

Demostración. De nuevo lo demostraremos para $I = \mathbb{R}$, ya que el caso general se reduce a este gracias al teorema de Prolongación.
Sea $v \in C_c^1(\mathbb{R})$, si $1 \leq p \leq \infty$ tomamos $G(s) = |s|^{p-1}s$. La composición $w = G(v)$ pertenece a $C_c^1(\mathbb{R})$ y

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v'$$

Entonces, para x real se tiene

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt$$

y por la desigualdad de $H\ddot{o}lder$

$$|v(x)|^p \leq p\|v\|_{L^p}^{p-1}\|v'\|_{L^p}$$

$$\Longrightarrow |v(x)| \leq p^{\frac{1}{p}}\|v\|_{L^p}^{1-\frac{1}{p}}\|v'\|_{L^p}^{\frac{1}{p}} \Longrightarrow |v(x)| \leq e^{\frac{1}{e}}\|v\|_{L^p}^{\frac{1}{q}}\|v'\|_{L^p}^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x$$

(ya que $p^{1/p} \leq e^{1/e}, \forall p \geq 1$)
Recordemos la desigualdad de Young, que afirma que $\forall a, b \geq 0; ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. Aplicándola y sacando factor común el mínimo entre $1/p$ y $1/q$ obtenemos el resultado deseado para funciones en $C_c^1(\mathbb{R})$

$$|v(x)| \leq e^{1/e}(\frac{1}{q}\|v\|_{L^p} + \frac{1}{p}\|v'\|_{L^p}), \quad \forall x \Longrightarrow \|v\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{W^{1,p}}, \quad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R}) \quad (2.7)$$

Ahora, por el teorema anterior (2.20), dada $u \in W^{1,p}$ sabemos que existe una sucesión $(u_n) \in C_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_n \longrightarrow u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Por (2.6) (u_n) es de Cauchy en L^∞. Entonces $u_n \longrightarrow u$ en L^∞ y $\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}$. □

Observación 2.24. *Sea* I *un intervalo no acotado. Si* $u \in W^{1,p}(I)$*, entonces* $u \in L^r(I)$*,para todo* $r \in [p, \infty]$*, dado que*

$$\int_I |u|^r \leq \|u\|_\infty^{r-p}\|u\|_p^p.$$

Pero en general $u \notin L^r(I)$ *para* $r \in [1, p)$*.*

Corolario 2.25. *Si I no es acotado y $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \to \infty}} u(x) = 0. \tag{2.8}$$

Demostración. Por el teorema 2.20 existe $(u_n) \in C_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \longrightarrow u$ en $W^{1,p}(I)$ y por el teorema 2.23 $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \longrightarrow 0$, y de aquí deducimos (2.8). En efecto, dado $\varepsilon > 0$, se elige n suficientemente grande para que $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} < \varepsilon$, y para $|x|$ suficientemente grande se tiene $u_n(x) = 0$ ($u_n \in C_c^1(I)$) y por tanto $|u(x)| < \varepsilon$. $\square$

Corolario 2.26. ***(Derivación del producto)*** *Sean $u, v \in W^{1,p}(I)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $uv \in W^{1,p}(I)$ y*

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{2.9}$$

Además, se verifica la fórmula de integración por partes

$$\int u'v = uv|_y^x - \int_y^x uv', \quad \forall x, y \in \bar{I} \tag{2.10}$$

Demostración. Dado que $u \in L^\infty(I)$ por el teorema 2.23, $uv \in L^p(I)$. Para mostrar que $(uv)' \in L^p$ comenzaremos por el caso en que $1 \leq p < \infty$. Por el teorema 2.20 podemos tomar dos sucesiones (u_n) y (v_n) en $C_c^1(\mathbb{R})$ tales que $u_n|_I \longrightarrow u$ y $v_n|_I \longrightarrow v$ en $W^{1,p}(I)$. Entonces $u_n|_I \longrightarrow u$ y $v_n|_I \longrightarrow v$ en $L^\infty(I)$ (de nuevo por el teorema 2.23). Se sigue que $u_n v_n|_I \longrightarrow uv$ en $L^\infty(I)$ y por lo tanto en $L^p(I)$. Entonces

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n'$$

dado que $u_n, v_n \in C_c^1(\mathbb{R})$, siguiendo el análisis anterior podemos decir que $u_n' \to u'$ y $v_n' \to v'$ en $L^\infty(I)$, así

$$u_n' v_n + u_n v_n' \longrightarrow u'v + uv' \text{ en } L^p(I)$$

Utilizando la observación 2.9 podemos concluir que $uv \in W^{1,p}(I)$ y $(uv)' = u'v + uv'$, además si integramos (2.9) se obtiene la fórmula de partes (2.10).
Ahora verificamos en el caso $p = \infty$; sean $u, v \in W^{1,\infty}(I)$ entonces $uv \in L^\infty(I)$ y $u'v + uv' \in L^\infty(I)$.

Para probar que en efecto

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi, \ \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

Tomamos $\varphi \in C_c^1(I)$ cualquiera y se fija un intervalo abierto y acotado $J \subset I$ que contenga al soporte de φ.
Entonces $u, v \in W^{1,p}(J)$ para todo $p < \infty$ y por demostrado en el caso anterior

$$\int_J uv\varphi' = -\int_J (u'v + uv')\varphi, \ \forall \varphi \in C_c^1(J),$$

o sea

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi, \ \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

□

Otro resultado importante que se puede demostrar usando el teorema anterior es el de derivación de una composición de funciones.

Corolario 2.27. *Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ y sea $u \in W^{1,p}$. Entonces*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \ y \ (G \circ u)' = (G' \circ u)u'$$

Demostración. Sea $M = \|u\|_\infty$. Como $G(0) = 0$, entonces existe una constante C tal que $|G(s)| \leq C|s|$ para todo $s \in [-M, M]$. Así $|G \circ u| \leq C|u|$; se sigue que $G \circ u \in L^p(I)$. Similarmente, $(G' \circ u)u' \in L^p(I)$. Falta verificar que

$$\int_I (G \circ u)\varphi' = -\int_I (G' \circ u)u'\varphi \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I). \tag{2.11}$$

Supongamos que $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión $(u_n) \subset C_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \to u \in W^{1,p}(I)$ y también en $L^\infty(I)$. Así $(G \circ u_n)|_I \to G \circ u$ en $L^\infty(I)$ y $(G' \circ u_n)u_n'|_I \to (G' \circ u)u'$ en $L^p(I)$. Por las propiedades de las funciones de clase C^1 tenemos

$$\int_I (G \circ u_n)\varphi' = -\int_I (G' \circ u_n)u_n'\varphi \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

de lo que deducimos (2.11). Para el caso $p = \infty$ procedemos de la misma forma que en la prueba del corolario 2.26. □

Lema 2.28. *Sean $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces*

$$\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \ y \ D_i(\overline{\alpha u}) = \overline{\alpha D_i u + u\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}}, \qquad \forall i = 1, \ldots, N.$$

2.4. El Espacio de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Definición 2.29. *Dado un entero $m \geq 2$ y un número real $1 \leq p \leq \infty$, por inducción definimos el espacio*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I); u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

También definimos

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

Es fácil verificar que $u \in W^{m,p}(I)$ si y sólo si existen m funciones $g_1, g_2, \ldots, g_m \in L^p(I)$ tal que

$$\int_I uD^j\varphi = (-1)\int_I g_j\varphi \ \ \forall\varphi \in C_c^\infty(I), \ \ \forall j = 1, 2, \ldots, m,$$

Donde $D^j\varphi$ denota la j-ésima derivada de φ. Cuando $u \in W^{m,p}(I)$ podemos considerar las derivadas sucesivas de $u, u' = g_1, (u')' = g_2, \ldots$, hasta orden m. Estas son denotadas por $Du, D^2u, \ldots, D^m u$. El espacio $W^{m,p}(I)$ esta dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_p + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_p,$$

Y el espacio $H^m(I)$ está dotado del producto escalar

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m}(D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} = \int_I uv + \sum_{\alpha=1}^{m}\int_I D^\alpha u D^\alpha v.$$

Podemos demostrar que la norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ es equivalente a la norma

$$|||u||| = \|u\|_p + \|D^m u\|_p.$$

De manera mas precisa, probamos que para cada entero $j, 1 \leq j \leq m-1$, y para $\varepsilon > 0$ existe una constante C (que depende de ε y $|I| \leq \infty$) tal que.

$$\|D^j u\|_p \leq \varepsilon\|D^m u\|_p + C\|u\|_p \quad u \in W^{m,p}(I).$$

Es posible extender a el espacio $W^{m,p}$ todas la propiedades demostradas para $W^{1,p}$; por ejemplo, si I es acotado, $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\bar{I})$ con inyecciones continuas.

2.5. El espacio $W_0^{1,p}(I)$

Definición 2.30. *Dado $1 \leq p < \infty$, se designa por $W_0^{1,p}(I)$ a la clausura de $C_c^1(I)$ en $W^{1,p}(I)$[2]. Usaremos*

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}.$$

$W_0^{1,p}$ con la norma inducida por $W^{1,p}$, es un espacio de Banach separable y reflexivo cuando $p \neq 1$. H_0^1 es un espacio de Hilbert separable.

Observación 2.31. *Hemos visto que cuando $I = \mathbb{R}$, C_c^1 es denso en $W^{1,p}$ (Teorema 2.20), es decir, $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.*

Observación 2.32. *Usando una sucesión regularizante (ρ_n) se puede ver que:*

[2] No se define $W_0^{1,p}$ para $p = \infty$

(i) $C_c^\infty(I)$ ***es denso en*** $W_0^{1,p}(I)$.

(ii) ***Si*** $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$, ***entonces*** $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Teorema 2.33. *Sea* $u \in W^{1,p}(I)$*, entonces* $u \in W_0^{1,p}(I)$ *si y sólo si* $u = 0$ *sobre* ∂I.

Demostración. Si $u \in W_0^{1,p}(I)$, existe una sucesión u_n en $C_c^1(I)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(I)$, dicha sucesión converge uniformemente a u sobre $\bar{I}$ y por ende $u = 0$ en los extremos de I.

Recíprocamente sea $u \in W^{1,p}(I)$, con $u = 0$ en ∂I. Se fija $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$G(t) = \begin{cases} 0, & si\ |t| \leq 1 \\ t, & si\ |t| \geq 2 \end{cases}$$

y

$$|G(t)| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se pone $u_n = (1/n)G(nu)$, así $u_n \in W^{1,p}$ (Corolario 2.27) Además

$$Supp\, u_n \subset A = \left\{ x \in I;\ |u(x)| \geq \frac{2}{n} \right\}$$

Entonces $Supp\ u_n$ está incluido en un compacto de I, para verificar este hecho vemos que

$$A = \left\{ x \in I;\ |u(x)| \geq \frac{2}{n} \right\}$$

tomamos a $f : I \to \mathbb{R}$ de la forma $f = |u|$ y de ésta forma

$$A = f^{-1}\left(\left[\frac{2}{n}, +\infty \right) \right).$$

Como f está en función del módulo y la función continua u, entonces f es continua, y $\left[\frac{2}{n}, +\infty\right)$ es cerrado al ser complemento del abierto $\left(-\infty, \frac{2}{n}\right)$, entonces por la continuidad de f, A es cerrado.
Para verificar que A es acotado, razonamos por contradicción y suponemos que no lo es, de ésta forma, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario,

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0\ tal\ que\ |u(x) - 0| < \varepsilon,\ \forall |x| \geq M.$$

Como A no es acotado, $\forall k \in \mathbb{R}^+, \exists x \in A$ tal que $|x| \geq k$.
Sea $\varepsilon = 2/n$, como, $u(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, $\exists N \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|u(x) - 0| < \frac{2}{n}, \quad \forall |x| \geq N$$

pero

$$|u(x)| \geq \frac{2}{n}, \quad ya\ que\ x \in A$$

de ésta forma obtenemos una contradicción y A es acotado, por lo tanto, A es compacto.

Por la Observación 2.32 $u_n \in W_0^{1,p}$. Usando el teorema de convergencia dominada (1.47) se ve que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(I)$. Entonces $u \in W_0^{1,p}(I)$. $\square$

Proposición 2.34. *(Desigualdad de Poincaré) Si I es acotado, existe una constante C, dependiendo de $|I|$ tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}, \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Demostración. Dada $u \in W_0^{1,p}(I)$ (con $I = (a,b)$). Como $u(a) = 0$, tenemos

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t)dt \right| \leq \|u'\|_{L^1}$$

tomando el supremo en los extremos de la expresión tenemos $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'\|_{L^1(I)}$. Ahora,

$$\|u'\|_1 = \int_I |u'| = \int_I |u' \cdot 1| \leq \|u'\|_p \|1\|_q = \|u'\|_p \qquad (H\ddot{o}lder)$$

$\Rightarrow \|u'\|_1 \leq \|u'\|_p$.
Como $u \in L^p$, $u \in L^\infty$ (Teorema 2.23), entonces

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \|u\|_\infty \\ \int_I |u(x)|^p &\leq \int_I \|u\|_\infty^p \\ \|u\|_p &\leq \|u\|_\infty \cdot \left(\int_I 1\right)^{1/p} = \|u\|_\infty \cdot |I|^{1/p} \end{aligned}$$

Luego, $\|u\|_p \leq \|u\|_\infty |I|^{1/p}$.
Pero, $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1 \leq \|u'\|_p$. Así,

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \|u'\|_p &\leq \|u\|_\infty |I|^{1/p} + \|u'\|_p \\ &\leq \|u'\|_p |I|^{1/p} + \|u'\|_p \\ &= C\|u'\|_p \qquad ; C = |I|^{1/p} + 1 \end{aligned}$$

$\therefore \|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u'\|_p$. $\square$

Observación 2.35. *La desigualdad nos dice que en $W_0^{1,p}(I)$ la cantidad $\|u'\|_{L^p(I)}$ es una norma equivalente a la norma que induce $W^{1,p}(I)$ en este espacio.*
Si I es acotado, la expresión $\langle u', v' \rangle_{L^2(I)} = \int u'v'$ define sobre $H_0^1(I)$ un producto escalar, y la norma asociada ($\|u'\|_{L^2(I)}$) es equivalente a la norma que antes definimos en H_0^1, es decir, la inducida por H^1.

Observación 2.36. *Se definen también los espacios* $W_0^{m,p}(I)$ *como la clausura de* $C_c^m(I)$ *en* $W^{m,p}(I)$ *para* $m = 2\,, 3\,, ...$ *y* $1 \leq p < \infty$*. Se verifica que*

$$W_0^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m,p}(I); u = Du =, \ldots, = D^{m-1}u = 0, \ sobre\ \partial I\right\}.$$

Es esencial distinguir entre

$$W_0^{2,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I); u = Du = 0, \ sobre\ \partial I.\}$$

y

$$W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I); u = 0, \ sobre\ \partial I\}.$$

2.6. Algunos Ejemplos de Problemas de Contorno

Ejemplo 2.2. ***(Condición Homogénea de Dirichlet).***
Considere el problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & en\ I = (0,1); \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

Donde f *es una función dada en* $L^2(I)$*. La condición de frontera* $u(0) = u(1) = 0$ *es llamada la Condición de frontera de Dirichlet (Homogénea).*

Definición 2.37. *Una solución clásica de (2.12) es una función* $u \in C^2(\bar{I})$ *que satisface (2.12 en el sentido usual). Una solución débil de (2.12) es una función* $u \in H_0^1(I)$ *que satisface*

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{2.13}$$

Vamos a aplicar el proceso que se describe en la sección 2.1.

Paso A. Cada solución clásica es una solución débil. Esto es obvio por integración por partes (así como se justifica en el corolario 2.26).

Paso B. Existencia y unicidad de una solución débil. Este es el contenido del siguiente resultado.

Proposición 2.38. *Dado cualquier* $f \in L^2(I)$ *existe una única solución* $u \in H_0^1$ *a (2.13). Además, u es obtenida por*

$$\min_{v \in H_0^1} \left\{\frac{1}{2}\int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv\right\}.$$

este es el principio de Dirichlet.

Demostración. Aplicamos el teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.95) en el espacio de Hilbert $H = H_0^1(I)$ con la forma bilineal de

$$a(u, v) = \int_I u'v' + \int_I uv = (u, v)_{H^1}$$

y con el funcional lineal $\varphi : v \to \int_I fv$. □

Observación 2.39. *Dado $F \in H^{-1}(I)$ sabemos por el teorema de la representación de Riesz-Fréchet 1.85 que existe un único $u \in H_0^1(I)$ tal que*

$$(u, v)_{H^1} = \langle F, v\rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad \forall v \in H_0^1.$$

La función $F \mapsto u$ es el isomorfismo de Riesz Fréchet de H^{-1} sobre H_0^1. La función u coincide con la solución débil de (2.12) en el sentido de (2.13).

2.6.1. Pasos C y D. Regularidad de soluciones débiles. Recuperación de Soluciones clásicas.

Primero, note que si $f \in L^2$ y $u \in H_0^1$ es la solución débil de (2.12), entonces $u \in H^2$. De hecho tenemos

$$\int_I u'v' = \int_I (f - u)v, \quad \forall v \in C_c^1(I),$$

y así $u' \in H^1$ (Por definición de H^1 y como $f - u \in L^2$), es decir, $u \in H^2$. Además, si asumimos que $f \in C(\bar{I})$, entonces la solución u pertenece a $C^2(\bar{I})$. De hecho, $(u')' \in C(\bar{I})$ y así $u' \in C^1(\bar{I})$. El proceso para llevar una solución débil $u \in C^2(\bar{I})$ a una solución clásica fue detallado en la sección 2.1.

Observación 2.40. *Si $f \in H^k(I)$, con $k \geq 1$, se verifica por inducción que la solución u de (2.13) pertenece a $H^{k+2}(I)$.*

El método descrito arriba es extremadamente flexible y puede ser adaptado a una gran cantidad de problemas. Indicamos algunos ejemplos que se encuentran frecuentemente. *En cada problema es esencial especificar el espacio de funciones y buscar la formulación débil apropiada.*

Ejemplo 2.3. ***(Condición de Dirichlet no-homogénea)***. *Considere el problema*

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & \text{sobre } I = (0, 1), \\ u(0) = \alpha,\ u(1) = \beta, \end{cases} \tag{2.14}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y f una función dada.

Proposición 2.41. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f \in L^2(I)$ existe una única función $u \in H^2(I)$ que satisface (2.14). Además, u es obtenida por*

$$\min_{\substack{v\,\in\,H^1(I)\\ v(0)\,=\,\alpha,\,v(1)\,=\,\beta}} \left\{\frac{1}{2}\int_I (v'^2+v^2)-\int_I fv\right\}.$$

Si además, $f\in C(\bar{I})$ entonces $u\in C^2(\bar{I})$.

Demostración. Damos dos posibles enfoques:

Método 1. Fijamos cualquier función suave[3] u_0 tal que $u_0(0)=\alpha$ y $u_0(1)=\beta$. Introducimos como una nueva incógnita $\tilde{u}=u-u_0$. Entonces $\tilde{u}$ satisface

$$\begin{cases} -\tilde{u}''+\tilde{u}=f+u_0''-u_0, & sobre\ I,\\ \tilde{u}(0)=\tilde{u}(1)=0. \end{cases}$$

Hemos reducido al problema a la forma de (2.12).

Método 2. Considere el espacio $H_0^1(I)$ el conjunto cerrado y convexo

$$K=\left\{v\in H_0^1(I);\ v(0)=\alpha\ y\ v(1)=\beta\right\}.$$

Si u es una solución clásica de (2.14) tenemos que

$$\int_I u'(v-u)'+\int_I u(v-u)=\int_I f(v-u)\quad \forall v\in K.$$

Entonces en particular

$$\int_I u'(v-u)'+\int_I u(v-u)\geq\int_I f(v-u)\quad \forall v\in K. \tag{2.15}$$

Así por el teorema de Stampacchia (Teorema 1.88): existe una única función $u\in K$ que satisface (2.15) y además, u es obtenido por

$$\min_{v\in K}\left\{\frac{1}{2}\int_I (v'^2+v^2)-\int_I fv\right\}.$$

Para obtener una solución clásica de (2.14), hacemos $v=u\pm w$ en (2.15) con $w\in H_0^1$ y obtenemos

$$\int_I u'w'+\int_I uw=\int_I fw\quad \forall w\in H_0^1.$$

Como anteriormente esto implica que $u\in H^2(I)$. Si $f\in C^2(\bar{I})$ se argumenta como en el caso homogéneo para mostrar que $u\in C^2(\bar{I})$.

[3]Escogemos por ejemplo u_0 para este caso

□

Ejemplo 2.4. ***(Problema de Sturm-Liouville).*** *Considere el problema*

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f, & on\ I = (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2.16}$$

donde $p \in C^1(\bar{I}), q \in C(\bar{I})$*, y* $f \in L^2(I)$ *son tales que*

$$p(x) \geq \alpha > 0, \quad \forall x \in I$$

.

Si u es una solución clásica de (2.16) tenemos que

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv, \qquad \forall v \in H_0^1(I).$$

Usamos $H_0^1(I)$ *como nuestro espacio de funciones y*

$$a(u,v) = \int_I pu'v' + \int_I quv$$

como la forma simétrica continua bilineal sobre H_0^1*. Si* $q \geq 0$ *esta forma es coercitiva por la desigualdad de Poincaré (Proposición 2.34). Entonces, por el teorema de Lax-Milgram, existe una única* $u \in H_0^1$ *tal que*

$$a(u,v) = \int_I fv, \qquad \forall v \in H_0^1(I). \tag{2.17}$$

Además, u es obtenida por

$$\min_{v \in H_0^1(I)} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (pv'^2 + qv^2) - \int_I fv \right\}.$$

Es claro que de (2.17) que $pu' \in H^1$*; así (por el corolario 2.26)* $u' = (\frac{1}{p})(pu') \in H^1$*, por tanto* $u \in H^2$*. Finalmente, si* $f \in C(\bar{I})$*, entonces* $pu' \in C^1(\bar{I})$*, y también* $u' \in C^1(\bar{I})$*. es decir,* $u \in C^2(\bar{I})$*. Usando el paso D concluimos que u es una solución clásica de (2.16).*

Ahora consideremos el problema mas general

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu' = f, & on\ I = (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Las suposiciones sobre *p, q,* y *f* son las mismas que anteriormente, y $r \in C(\bar{I})$. Si u en una solución clásica de (2.18) tenemos

$$\int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1$$

Usamos $H_0^1(I)$ como nuestro espacio de funciones y

$$a(u,v) = \int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv$$

como una forma continua bilineal. Esta forma no es simétrica. En algunos casos es coercitiva; por ejemplo,

1. Si $q \geq 1$ y $r^2 < 4\alpha$;
2. O si $q \geq 1$ y $r \in C^1(\bar{I})$ con $r' \leq 2$; aquí utilizamos el hecho de que

$$\int rv'v = -\frac{1}{2}\int r'v^2, \quad \forall v \in H_0^1$$

Se puede aplicar el teorema de Lax-Milgram, pero no existe problema sencillo de minimización asociado. Esta es una herramienta que nos permite obtener una forma simétrica bilineal. Se introduce un R primitivo de r/p y se establece $\zeta = e^{-R}$. La ecuación (2.18) puede escribirse, después de multiplicar por ζ, como

$$-\zeta pu'' - \zeta p'u' + \zeta ru' + \zeta qu = \zeta f,$$

o (como $\zeta' p + \zeta r = 0$)

$$-(\zeta' p + \zeta r)u' - \zeta pu'' - \zeta p'u' + \zeta ru' + \zeta qu = \zeta f,$$

$$-\zeta' pu' - \zeta p'u' - \zeta pu'' + \zeta qu = \zeta f,$$

$$-(\zeta pu')' + \zeta qu = \zeta f.$$

Definimos sobre H_0^1 la forma bilineal continua simétrica

$$a(u,v) = \int_I \zeta pu'v' + \int_I \zeta quv.$$

Cuando $q \geq 0$, esta forma es coercitiva, y entonces existe una única $u \in H_0^1$ tal que

$$a(u,v) = \int_I \zeta fv, \quad \forall v \in H_0^1.$$

Además, u es obtenido por

$$\min_{v \in H_0^1(I)} \left\{ \frac{1}{2}\int_I (\zeta pv'^2 + \zeta qv^2) - \int_I \zeta fv \right\}.$$

Es fácil verificar que $u \in H^2$, y si $f \in C(\bar{I})$ entonces $u \in C^2(\bar{I})$ es una solución clásica de (2.18).

Ejemplo 2.5. *(Condición homogénea de Neumann). Considere el problema*

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & sobre\ I = (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Proposición 2.42. *Dado $f \in L^2(I)$, existe una única función $U \in H^2(I)$ que satisface (2.19).* [4] *Ademas, u es obtenida por*

$$\min_{v \in H^1(I)} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\}.$$

Demostración. Si u es una solución clásica de(2.19) tenemos que

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in H^1(I) \tag{2.20}$$

Usamos $H^1(\bar{I})$ como nuestro espacio de funciones; no existe un punto que funcione en H_0^1 como anteriormente, como $u(0)$ y $u(0)$ son a priori desconocidos. Aplicamos el teorema de Lax-Milgram con la forma bilineal $a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv$ y el funcional lineal $\varphi : v \longmapsto \int_I fv$. De esta forma obtenemos una única función $u \in H^1(I)$ satisface (2.20). De (2.20) se sigue, como se hizo anteriormente, que $u \in H^2(I)$. Usando (2.20) una vez más obtenemos

$$\int_I (-u'' + u - f)v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0, \quad \forall v \in H^1(I). \tag{2.21}$$

En (2.21) comenzamos escogiendo $v \in H_0^1$ y obtenemos $-u'' + u = f$ casi en todos los puntos. Volviendo a (2.21), nos queda

$$u'(1)v(1) - u'(0)v'(0) = 0, \quad v \in H^1(I).$$

Como $v(0)$ y $v(1)$ son arbitrarios, deducimos que $u'(0) = u'(1) = 0$. □

Ejemplo 2.6. *(Condición de Neumann no homogénea).*

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & sobre\ I = (0,1), \\ u'(0) = \alpha,\ u'(1) = \beta, \end{cases} \tag{2.22}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y f una función dada.

Proposición 2.43. *Sea cualquier $f \in L^2(I)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existe una única función $u \in H^2(I)$ satisface (2.22). Además, u es obtenida por*

$$\min_{v \in H^1(I)} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv - \alpha v(0) - \beta v(1) \right\}.$$

Si además, $f \in C(\bar{I})$, entonces $u \in C^2(\bar{I})$.

[4] Note que $u \in H^2(I) \Rightarrow u \in C^1(\bar{I})$ y entonces la condición $u'(0) = u'(1) = 0$ cobra sentido. Esto no tendría sentido si solo supiéramos que $u \in H^1$.

Demostración. Si u es una solución clásica de (2.22) tenemos que

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1), \quad \forall v \in H^1(I).$$

Usamos $H^1(I)$ como nuestro espacio de funciones y aplicamos el teorema de Lax-Milgram, con la forma bilineal $a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv$ y el funcional lineal

$$\varphi : v \longmapsto \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1).$$

Este funcional lineal es continuo. Entonces podemos proceder como en el ejemplo 2.6 para probar que $u \in H^2(I)$ y que $u'(0) = \alpha,\ u'(1) = \beta$. □

2.7. El Principio del Máximo

Teorema 2.44. *Sea $f \in L^2(I)$ con $I = (0,1)$ y sea $u \in H^2(I)$ una solución del problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & \textit{sobre } I \\ u(0) = \alpha,\ u(1) = \beta \end{cases} \tag{2.23}$$

Entonces, para cada $x \in I$ [5]

$$\min\{\alpha, \beta, \inf_I f\} \le u(x) \le \max\{\alpha, \beta, \sup_I f\}. \tag{2.24}$$

Demostración. (Usando el método de truncamiento de Stampacchia). Tenemos

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I) \tag{2.25}$$

Fijando cualquier función $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

(i) G es estrictamente creciente sobre $(0, \infty)$.
(ii) $G(t) = 0$ para $t \in (-\infty, 0]$

Sea $K = \max\{\alpha, \beta, \sup_I f\}$ y supongamos que $K < \infty$. Debemos mostrar que $u \le K$ sobre *I*. La función $v = G(u-K)$ pertenece a $H^1(I)$ y también a $H_0^1(I)$. como

$$u(0) - K = \alpha - K \le 0 \text{ y } u(1) - K = \beta - K \le 0.$$

[5] $\sup f$ e $\inf f$ se refieren respectivamente al $\sup$ esencial (posiblemente $+\infty$) y al esencial ∞ de f (posiblemente $-\infty$). Recordamos que $ess \sup f = \inf[C; f(x) \le C c.t.p.]$ y $ess \inf f = -ess \sup(-f)$

Sustituyendo *v* en (2.25), obtenemos

$$\int_I u'^2 G'(u-K) + \int_I uG(u-K) = \int_I fG(u-K),$$

es decir,

$$\int_I u'^2 G'(u-K) + \int_I (u-K)G(u-K) = \int_I (f-K)G(u-K)$$

Pero $(f-K) \leq 0$ y $G(u-K) \geq 0$, de lo que se sigue que $(f-K)G(u-K) \leq 0$ y entonces

$$\int_I (u-K)G(u-K) \leq 0.$$

Como $tG(t) \geq 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$, la desigualdad anterior implica $(u-K)G(u-K) = 0$ c.t.p.
Se sigue que $u \leq K$ c.t.p., y consecuentemente sobre todo *I*, ya que *u* es continua.
La cota inferior para *u* es obtenida aplicando esta cota superior a *-u*. ☐

Observación 2.45. *Cuando $f \in C(\overline{I})$, entonces $u \in C^2(\overline{I})$ y uno puede establecer (2.24) por un método diferente: la aproximación clásica al principio del máximo. Sea $x_0 \in \overline{I}$ el punto donde u alcanza su máximo sobre $\overline{I}$. Si $x_0 = 1$ la conclusión es obvia. De otra manera, $0 < x_0 < 1$ y entonces $u'(x_0) = 0, u''(x_0) \leq 0$. De la ecuación **(33)** se sigue que*

$$u(x_0) = f(x_0) + u''(x_0) \leq f(x_0) \leq K$$

y entonces $u \leq K$ sobre I.

Estas son algunas consecuencias inmediatas del Teorema 2.44.

Corolario 2.46. *Sea u una solución de (2.22).*

(i) Si $u \geq 0$ sobre ∂I y si $f \geq 0$ sobre I, entonces $u \geq 0$ sobre I.
(ii) Si $u = 0$ sobre ∂I y si $f \in L^\infty$, entonces $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|f\|_{L^\infty(I)}$.
(iii) Si $f = 0$ sobre I, entonces $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial I)}$.

Tenemos un resultado similar para el caso de la condición de Neumann.

Proposición 2.47. *Sea $f \in L^2(I)$ con $I = (0,1)$ y sea $u \in H^2(I)$ la solución de el problema*

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & sobre\ I, \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Entonces tenemos, para cada $x \in \overline{I}$,

$$\inf_I f \leq u(x) \leq \sup_I. \tag{2.26}$$

Demostración. Tenemos

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in H^1(I). \tag{2.27}$$

Agregando $v = G(u - K)$ en (2.27) con $K = sup_I f$ y la misma función *G* como anteriormente.
Entonces procedemos justo como en la prueba del 2.44 □

Observación 2.48. *Si $f \in G(\overline{I})$, entonces $u \in C^2(\overline{I})$ y podemos establecer (2.26) de la misma manera que en la observación anterior. Note que si u alcanza su máximo sobre ∂I, digamos en 0, entonces $u''(0) \leq 0$ (extendiendo u por reflexión a la izquierda de 0 y usando el hecho de que $u'(0) = 0$).*

Capítulo 3

Formulación Variacional de Algunos Problemas de Valor en la Frontera en Dimensión N

3.1. Definición y Propiedades Elementales de los Espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Proposición 3.1. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\Omega)$ y $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, se cumple que*

$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi.$$

Demostración. Sea $\psi \in C_c^1(\Omega)$. Dado que el soporte de ψ es compacto, existe $M > 0$ tal que

$$supp\ \psi \subset Q = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : |x_i| < M\}$$

del Teorema Fundamental del Cálculo se sigue que

$$\int_{-M}^{M} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_1} dx_1 = \psi(M, x_2, \dots, x_N) - \psi(-M, x_2, \dots, x_N) = 0.$$

por lo tanto

$$\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \int_Q \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \int_{-M}^{M}\int_{-M}^{M} \cdots \left(\int_{-M}^{M} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 \dots dx_N = 0$$

análogamente se verifica que

$$\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0, \qquad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Dado que $f\varphi \in C_c^1(\Omega)$ [1]

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial(f\varphi)}{x_i} = \int_\Omega \left(f\frac{\partial \varphi}{x_i} + \frac{\partial f}{x_i}\varphi \right) = \int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{x_i} + \int_\Omega \frac{\partial f}{x_i}\varphi,$$

luego

$$\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi.$$

□

El resultado anterior sugiera la definición de derivada débil.

Definición 3.2. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^N$ y $u, v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se dice que v_i es la derivada débil de u respecto a la i-ésima componente x_i si*

$$\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v_i\varphi, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Se dice que una función es débilmente diferenciable si tiene derivada débil para la i-ésima componente, $\forall i = 1, 2, \ldots, N$.

Notación. *La derivada débil respecto a la i-ésima componente v_i de u se denota como*

$$D_i u = v_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

y se define

$$\nabla u = (D_1 u, \ldots, D_N u).$$

Definición 3.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está definido por*[2]

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \ tal\ que \\ \displaystyle\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, ..., N \end{array} \right\}.$$

Definimos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está dotado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_p$$

[1] $supp\ f\varphi = (supp\ f) \cap (supp\ \varphi) \subset supp\ \varphi$, dado que el soporte de $f\varphi$ subconjunto cerrado de $supp\ \varphi$ que es compacto, $supp\ f\varphi$ es compacto.

[2] También podemos escribir $W^{1,p}$ en lugar de $W^{1,p}(\Omega)$.

o con la norma equivalente $\left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_p^p\right)^{1/p}$ *(si* $1 \leq p \leq \infty$*). El espacio* $H^1(\Omega)$ *está dotado con el producto escalar*

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N (D_i u, D_i v)_{L^2} = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^N D_i u D_i v\right).$$

La norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_2^2\right)^{1/2}$$

es equivalente a la norma $W^{1,2}$*.*

Proposición 3.4. *El operador derivada débil respecto a la i-ésima componente es lineal.*

Demostración. Este resultado se verifica tomando en cuenta la linealidad de la integral. □

Observación 3.5. *Para cada* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *g es única. Si suponemos que existe h en las condiciones de g, entonces*

$$\int_\Omega g\varphi = \int_\Omega h\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega)$$

luego

$$\int_\Omega (g-h)\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Como $L^p(\Omega)$ *es espacio vectorial, entonces* $g-h$ *pertenece a* $L^p(\Omega)$*, por el lema 1.69* $g-h$ *pertenece a* $L^1_{loc}(\Omega)$*, y aplicando el corolario 1.77, tenemos que* $g-h=0$ *c.t.p es decir,* $g=h$ *c.t.p de* Ω*.*

Proposición 3.6. $W^{1,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach para cada* $1 \leq p \leq \infty$*.* $W^{1,p}(\Omega)$ *es reflexivo para* $1 < p < \infty$*, y es separable para* $1 \leq p < \infty$*.* $H^1(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert separable.*

Demostración.

1) Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$, por como fue definida la norma en el espacio de Sobolev, (u_n) es de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Verificaremos que $(D_i u_n)$ es de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Como (u_n) es de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$ se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N} : \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}} < \varepsilon, \quad \forall m,n > M.$$

Dado que $\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}} = \|u_n - u_m\|_p + \sum_{i=1}^N \|D_i(u_n - u_m)\|_p$, tenemos

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_p + \sum_{i=1}^N \|D_i(u_n - u_m)\|_p < \varepsilon &\Rightarrow \sum_{i=1}^N \|D_i(u_n - u_m)\|_p < \varepsilon \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^N \|D_i u_n - D_i u_m\|_p < \varepsilon \quad ; \textit{linealidad de la derivada d} \\ &\Rightarrow \|D_i u_n - D_i u_m\|_p < \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(D_i u_n)$ es de Cauchy en L^p, como L^p es completo, $u_n \to u \in L^p$ y $D_i u_n \to v_i \in L^p$. Entonces

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega D_i u_n \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

y en el límite

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v_i \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

Por lo tanto, $u \in W^{1,p}, D_i u = v_i$ y $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} = \|u_n - u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \|D_i u_n - D_i u\|_{L^p} \to 0$, resultando $W^{1,p}$ completo.

2) Veamos que es reflexivo:
Si $1 < p < \infty$ por el teorema 1.54, L^p es reflexivo y por la observación 1.17 el espacio producto $E = L^p \times (L^p)^N$ es reflexivo. El operador $T : W^{1,p} \to E$ dado por $Tu = (u, \nabla u)$ es una isometría de $W^{1,p}$ en E (tomando la norma $\|(u,v)\| = \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \|v_i\|_p$ sobre E, donde $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$), por tanto $T(W^{1,p})$ es un subespacio cerrado de E (Lema 1.31). Resulta entonces por la proposición 1.30 que $T(W^{1,p})$ es reflexivo, y por consiguiente también lo es $W^{1,p}$.

3) Es separable para $1 \leq p < \infty$:
Como L^p es separable, por la proposición 1.37, el espacio producto $E = L^p \times (L^p)^N$ es separable, y como cualquier subconjunto de un separable es separable (Proposición 1.36), $T(W^{1,p})$ también es separable. Por ende $W^{1,p}$.

$\square$

Observación 3.7. *Note que si $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ y si $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ para todo $i = 1, 2, ..., N$, entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Además, las derivadas parciales usuales coinciden con las derivadas parciales en el sentido de $W^{1,p}$, así la notación es consistente. En particular, si Ω es acotado, entonces $C^1(\bar{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Recíprocamente, se puede mostrar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para algún $1 \leq p \leq \infty$ y si $D_i u \in C(\Omega)$ para todo $i = 1, 2, ..., N$, entonces $u \in C^1(\Omega)$; de manera más precisa, existe una función $\tilde{u} \in C^1(\Omega)$ tal que $u = \tilde{u}$ c.t.p.*

Observación 3.8. *Es útil tener en mente los siguientes hechos:*

(i) Como consecuencia del Teorema 3.6, si (u_n) es una sucesión en $W^{1,p}$ tal que $u_n \to u$ en L^p y (∇u_n) converge en $(L^p)^N$, se puede verificar que $u \in W^{1,p}$ y $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$.

(ii) Dada una función f definida sobre Ω denotamos por $\bar{f}$ su extensión fuera de Ω, es decir,

$$\bar{f}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x), & si\ x \in \Omega, \\ 0, & si\ x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{array} \right\}$$

Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y sea $\alpha \in C_c^1(\Omega)$. Entonces[3]

$$\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\ y\ D_i(\overline{\alpha u}) = \overline{\alpha D_i u + D_i \alpha u}.$$

Para verificar este hecho tomamos una función $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$; así tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\alpha u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_\Omega \alpha u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= \int_\Omega u \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha\varphi) - \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\varphi \right]; \quad \frac{\partial(\alpha\varphi)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\varphi \\ &= -\int_\Omega \left((D_i u)\alpha\varphi + u \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\varphi \right) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} \left(\overline{\alpha(D_i u) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u} \right) \varphi. \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} \left(\overline{\alpha(D_i u) + (D_i\alpha) u} \right) \varphi. \end{aligned}$$

La misma conclusión se mantiene si en lugar de asumir que $\alpha \in C_c^1(\Omega)$, tomamos $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\nabla\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$ y $supp\ \alpha \subset \mathbb{R}^N \backslash (\partial\Omega)$.

Lema 3.9. *Sea $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y sea $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \le p \le \infty$. Entonces*

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \ \ y \ \ D_i(\rho * v) = \rho * D_i v, \quad \forall i = 1, 2, ..., N.$$

Demostración. Suponemos que ρ tiene soporte compacto. Po el teorema de Young (teorema 1.64) $\rho * v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Sea $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, de las proposiciones 1.66 y 1.72 se tiene que

[3] Observación: en general, $\bar{u} \notin W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

$$
\begin{aligned}
\int (\rho * v)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} &= \int v\left(\check{\rho} * \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \\
&= \int v\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} * \check{\rho}\right) \\
&= \int v\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi * \check{\rho}) \\
&= -\int D_i v(\varphi * \check{\rho}) \\
&= -\int D_i v(\check{\rho} * \varphi) \\
&= -\int (\check{\rho} * D_i v)\,\varphi
\end{aligned}
$$

se sigue que

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

y

$$D_i\,(\rho * v) = (\rho * D_i v)\,.$$

Por otro lado si ρ no tiene soporte compacto, tomamos una sucesión $(\rho_n) \in C_c(\mathbb{R}^N)$, (esto es posible gracias al teorema 1.48). De la primera parte de la demostración obtenemos que

$$\rho_n * v \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

y

$$D_i\,(\rho_n * v) = (\rho_n * D_i v)$$

además por el teorema 1.75 $\rho_n * v \to \rho * v$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$ y $\rho_n * v' \to \rho * v'$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Por lo tanto al aplicar la observación 3.8 (i) $\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, y si hacemos $n \to \infty$ en

$$\int (\rho_n * v)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int (\rho_n * D_i v)\,\varphi$$

obtenemos

$$\int (\rho * v)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int (\rho * D_i v)\,\varphi$$

de modo que

$$D_i\,(\rho * v) = (\rho * D_i v)$$

□

Lema 3.10. *Sea (v_n) una sucesión de funciones en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_n|_\Omega \to v$ en $L^p(\Omega)$ y $\frac{\partial v_n}{\partial x_i}|_\omega \to w_i$ en $L^p(\omega)$, $i = 1, \ldots, N$, con ω, Ω abiertos en $\mathbb{R}^N$, tal que $\omega \subset \Omega$. Entonces existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (que no depende de ω ni de Ω) tal que $u_n|_\Omega \to v$ en $L^p(\Omega)$ y $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}|_\omega \to w_i$ en $L^p(\omega)$, $i = 1, \ldots, N$.*

Demostración. Fijamos una función $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y
$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & si \ \ |x| \leq 1, \\ 0 & si \ \ |x| \geq 2. \end{cases}$$
y definimos $\zeta_n(x) := \zeta(x/n)$. Observamos que, por el Teorema de Convergencia Dominada (Teorema 1.47), se tiene que $\zeta_n u \to u$ en $L^p(\Omega)$ para toda $u \in L^p(\Omega)$. Definimos $u_n := \zeta_n v_n$. Entonces $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, y satisface
$$\begin{aligned} \|u_n - v\|_p &= \|\zeta_n v_n - \zeta_n v + \zeta_n v - v\|_p \\ &\leq \|\zeta_n v_n - \zeta_n v\|_p + \|\zeta_n v - v\|_p \\ &\leq \|v_n - v\|_p + \|\zeta_n v - v\|_p \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Como v_n converge en $L^p(\Omega)$, esta acotada en $L^p(\Omega)$. Usando este hecho se obtiene que, para alguna constante C,
$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - w_i \right\|_{L^p(\omega)} &= \left\| \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i} v_n + \zeta_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \zeta_n w_i + \zeta_n w_i - w_i \right\|_{L^p(\omega)} \\ &\leq \left\| \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i} v_n \right\|_{L^p(\omega)} + \left\| \zeta_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \zeta_n w_i \right\|_{L^p(\omega)} + \|\zeta_n w_i - w_i\|_{L^p(\omega)} \\ &= \left(\int_\omega \left| \frac{1}{n} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} v_n \right|^p \right)^{1/p} + \left\| \zeta_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \zeta_n w_i \right\|_{L^p(\omega)} + \|\zeta_n w_i - w_i\|_{L^p(\omega)} \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\int_\omega \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right\|_\infty^p |v_n|^p \right)^{1/p} + \left\| \zeta_n \left(\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - w_i \right) \right\|_{L^p(\omega)} + \|\zeta_n w_i - w_i\|_{L^p(\omega)} \\ &\leq \frac{1}{n} \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right\|_\infty \|v_n\|_{L^p(\omega)} + \left\| \frac{\partial v_n}{\partial x_i} - w_i \right\|_{L^p(\omega)} + \|\zeta_n w_i - w_i\|_{L^p(\omega)}, \quad (\zeta_n \leq 1) \\ &\leq \frac{C}{n} + \left\| \frac{\partial v_n}{\partial x_i} - w_i \right\|_{L^p(\omega)} + \|\zeta_n w_i - w_i\|_{L^p(\omega)} \to 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.11. ***(Friedrichs)****. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $u \in W^{1,p}$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que*
$$u_n|_\Omega \longrightarrow u \text{ en } L^p(\Omega) \tag{3.1}$$
y
$$\nabla u_n|_\omega \longrightarrow \nabla u|_\omega \text{ en } L^p(\omega)^N \text{ para todo } \omega \subset\subset \Omega. \tag{3.2}$$

En el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ y $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$, existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que
$$u_n \to u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N)$$
y
$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N)^N.$$

Demostración. Sea
$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & si\ x \in \Omega, \\ 0, & si\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$
y sea $v_n = \rho_n * \bar{u}$ (donde ρ_n es una sucesión regularizante). Sabemos (ver la sección 1.3) que $v_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $v_n \to \bar{u}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$ (Teorema 1.75). Queremos verificar que $\nabla v_n|_\omega \to \nabla u|_\omega$ en $L^p(\omega)^N$ para todo $\omega \subset\subset \Omega$. Para ello tomamos cualquier conjunto $\omega \subset\subset \Omega$, fijamos una función $\alpha \in C_c^1(\Omega)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, tal que $\alpha = 1$ sobre una vecindad de ω. Si n es lo suficientemente grande tenemos

$$\rho_n * (\overline{\alpha u}) = \rho_n * \bar{u}, \quad sobre\ \omega, \tag{3.3}$$

como

$$\begin{aligned} \rho_n * \overline{\alpha u} - \rho_n * \overline{u} &= \int_\Omega \rho_n(x-y)\overline{\alpha u}(y)dy - \int_\Omega \rho_n(x-y)\overline{u}(y)dy \\ &= \int_\Omega \rho_n(x-y)[(\overline{\alpha}-1)\overline{u}](y)dy \\ &= -\int_\Omega \rho_n(x-y)[(1-\overline{\alpha})\overline{u}](y)dy \\ &= -(\rho_n * (1-\bar{\alpha})\bar{u}) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} supp(\rho_n * \overline{\alpha u} - \rho_n * \bar{u}) &= supp(-\rho_n * (1-\bar{\alpha})\bar{u}) \\ &= supp(\rho_n * (1-\bar{\alpha})\bar{u}) \\ &\subset \overline{supp\ \rho_n + supp(1-\bar{\alpha})\bar{u}} \subset \overline{B\left(0, \frac{1}{n}\right) + supp(1-\bar{\alpha})} \\ &\subset (\omega)^c \end{aligned}$$

para n lo suficientemente grande. Del lema 3.9 y la observación 3.8(ii) tenemos

$$\begin{aligned} D_i(\rho_n * \overline{\alpha u}) &= \rho_n * D_i\overline{\alpha u} \\ &= \rho_n * \left(\overline{\alpha D_i u + (D_i\alpha)u}\right) \end{aligned}$$

se sigue que
$$D_i(\rho_n * \overline{\alpha u}) \to \overline{\alpha D_i u + (D_i\alpha)u} \quad en\ L^p(\mathbb{R}^N)$$
y en particular, como $v_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y la derivada débil y la usual coinciden,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \to D_i\overline{\alpha u} = D_i u \quad en\ L^p(\omega).$$

Por (3.3) tenemos
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \bar{u}) \to D_i u \quad en\ L^p(\omega).$$

Por el Lema 3.10 existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}|_\omega \to D_i u|_\omega$ en $L^p(\omega)$, por tanto $\nabla u_n|_\omega \to \nabla u|_\omega$, en $L^p(\omega)$ con $i = 1, \ldots, N$.

En el caso en que $\Omega = \mathbb{R}^N$, la sucesión $u_n = \zeta_n(\rho_n * u)$, tiene las propiedades deseadas.

□

Corolario 3.12. *Sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, y sucesiones $(u_n), (v_n) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tales que*

$$u_n \to u, \quad v_n \to v \quad en\ L^p(\Omega)\ y\ c.t.p.\ sobre\ \Omega,$$

$$\nabla u_n \to \nabla u, \quad \nabla v_n \to \nabla v \quad en\ L^p(\omega)^N\ para\ todo\ \omega \subset\subset \Omega.$$

Entonces

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad y \quad \|v_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Proposición 3.13. *Sea $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p \leq \infty$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

(ii) existe una constante C tal que

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, ..., N,$$

(iii) existe una constante C tal que para todo $\omega \subset\subset \Omega$, y todo $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < dist(\omega, \partial\Omega)$ tenemos

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$

(Note que $\tau_h u(x) = u(x+h)$ tiene sentido para $x \in \omega$ y $|h| < dist(\omega, \partial\Omega)$.) Además, podemos tomar $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ en (ii) y (iii).

Si $\Omega = \mathbb{R}^N$ tenemos

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq |h| \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Demostración.

$(i) \Rightarrow (ii)$.

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| &= \left| - \int_\Omega D_i u \varphi \right| \\ &\leq \int_\Omega |D_i u \varphi| \\ &\leq \|D_i u\|_p \|\varphi\|_q. \end{aligned}$$

El último resultado es consecuencia de la desigualdad de Hölder y tomando $C = \|D_i u\|_p$ se obtiene la desigualdad deseada.

$(ii) \Rightarrow (i)$. El funcional lineal $\psi : C_c^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por $\varphi \mapsto \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, el cual toma elementos en un subespacio denso de L^q (por el Corolario 1.76 ya que $q < \infty$) y es continuo con la norma de L^q. Por el Teorema de Hahn-Banach (1.8) se puede extender a un funcional continuo F en L^q y según el Teorema de representación de Riesz (1.60) existe $g \in L^p$ tal que

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_\Omega g\varphi, \quad \forall \varphi \in L^q$$

En particular

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega g\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega), \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

Y asi $u \in W^{1,p}$.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Primero suponemos que $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sea $h \in \mathbb{R}^N$ y sea

$$v(t) = u(x + th), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces $v'(t) = h \cdot \nabla u(x + th)$ y así

$$u(x + h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)dt = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x + th)dt.$$

Se sigue que para $1 \leq p < \infty$,

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p dt$$

y

$$\begin{aligned}\int_\omega |\tau_h u(x) - u(x)|^p dx &\leq |h|^p \int_\omega dx \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p dt \\ &= |h|^p \int_0^1 dt \int_\omega |\nabla u(x + th)|^p dx \\ &= |h|^p \int_0^1 dt \int_{\omega + th} |\nabla u(y)|^p dy.\end{aligned}$$

Si $|h| < dist(\omega, \partial\Omega)$, entonces existe un conjunto abierto $\omega' \subset\subset \Omega$ tal que $\omega + th \subset \omega'$ para todo $t \in [0, 1]$ y así

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)}^p \leq |h|^p \int_{\omega'} |\nabla u|^p. \tag{3.4}$$

Esto concluye la prueba de (iii) para $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $1 \leq p < \infty$. Ahora suponemos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Por el Teorema 3.11 existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\nabla u_n \to \nabla u$ en $L^p(\omega)^N$, $\forall \omega \subset\subset \Omega$. Aplicando (3.4) a (u_n) y aplicando el límite, obtenemos (iii) para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Cuando $p = \infty$, aplicando lo anterior (para $p < \infty$) y haciendo $p \to \infty$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ y considerando un conjunto abierto ω tal que $supp\ \varphi \subset \omega \subset\subset \Omega$. Sea $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < dist(\omega, \partial\Omega)$. Por (iii) tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (\tau_h u - u)\varphi\right| &\leq \int_\Omega |(\tau_h u - u)\varphi| \\ &\leq \|\tau_h u - u\|_p \|\varphi\|_q \\ &\leq C|h| \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}.\end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx\right| &= \left|\int_\Omega [u(x+h)\varphi(x) - u(x)\varphi(x)]dx\right| \\ &= \left|\int_\Omega u(x+h)\varphi(x)dx - \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx\right| \\ &= \left|\int_\omega u(x+h)\varphi(x)dx - \int_\omega u(x)\varphi(x)dx\right| \\ &= \left|\int_\omega u(x)\varphi(x-h)dx - \int_\omega u(x)\varphi(x)dx\right| \\ &= \left|\int_\Omega [\varphi(x-h) - \varphi(x)]u(x)dx\right|\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\int_\Omega \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{|h|} u(x)dx \leq C\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}.$$

Tomando $h = te_i$[4], $t \in \mathbb{R}$, y aplicando límite cuando $t \to 0$, obtenemos (ii).

$\square$

Proposición 3.14. ***(derivación del producto).*** *Sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y*

$$D_i(uv) = (D_i u)v + u(D_i v), \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Demostración. Consideramos el caso en que $1 \leq p < \infty$. Por el teorema 3.11 existen sucesiones (u_n), (v_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u, \quad v_n \to v \quad en\ L^p(\Omega)\ y\ c.t.p.\ sobre\ \Omega,$$

$$\nabla u_n \to \nabla u, \quad \nabla v_n \to \nabla v \quad en\ L^p(\omega)^N\ para\ todo\ \omega \subset\subset \Omega.$$

[4] (e_i) es la base de Schauder para $\mathbb{R}^N$.

Por otro lado

$$\int_\Omega u_n v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(u_n u_n)\varphi$$
$$= -\int_\Omega \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right)\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Aplicando límite, tenemos

$$\int_\Omega uv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega ((D_i u)v + u(D_i v))\,\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

□

Proposición 3.15. ***(Diferenciación de la composición).*** *Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ y $|G'(s)| \leq M$, $\forall s \in \mathbb{R}$ para alguna constante M. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad y \quad D_i(G \circ u) = (G' \circ u) D_i u, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Demostración. Por el Teorema de Valor Medio, para $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$|G(s_1) - G(s_2)| = |G'(\xi)||s_1 - s_2| \leq M|s_1 - s_2|. \tag{3.5}$$

En particular, como $G(0) = 0$, obtenemos

$$|G(u(x))| \leq M|u(x)|, \quad \forall x \in \Omega,$$

y por consiguiente $G \circ u \in L^p(\Omega)$. Además

$$|G'(u(x))D_i u(x)| \leq M|D_i u(x)|,$$

Por lo que también $(G' \circ u)D_i u \in L^p(\Omega)$. Probaremos ahora que $G \circ u$ es débilmente diferenciable en Ω y que $D_i(G \circ u) = (G' \circ u)D_i u$.
Sean $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ y $\omega \subset\subset \Omega$ tal que $supp\ \varphi \subset \omega$. Por el Teorema 3.11 existe una sucesión en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n|_\Omega \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}|_\omega \to D_i u|\omega$ en $L^p(\omega)$. Por la Proposición 3.1, estas funciones cumplen que

$$\int_\Omega (G \circ u_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega (G' \circ u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi. \tag{3.6}$$

Además, de (3.5) y de la Desigualdad de Hölder se sigue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|(G \circ u_n - G \circ u) \frac{\partial \varphi}{\varphi x_i}\right| &\leq M \int_\Omega |u_n - u| \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \\ &\leq M \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^q(\Omega)} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde q es el conjugado de p. Por otra parte, por el Teorema 1.53, una subsucesión (u_{n_k}) de (u_n) converge puntualmente a u en casi todos los puntos de Ω y, como G' es continua, $(G' \circ u_{n_k})$ converge puntualmente a $G' \circ u$ en casi todos los puntos de Ω. Además,

$$|G'(u_n(x)) - G'(u(x))| \leq 2M, \quad \forall x \in \Omega.$$

Como ω tiene medida finita, $2M \in L^q(\omega)$. Usando el Teorema de Convergencia Dominada (Teorema 1.47) obtenemos que $G' \circ u_n - G' \circ u \in L^q(\omega)$ y que

$$\int_\omega |G' \circ u_n - G' \circ u|^q \to 0.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left| \left[(G' \circ u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - (G' \circ u) D_i u \right] \varphi \right| \\
&= \int_\omega \left| (G' \circ u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - (G' \circ u_n) D_i u + (G' \circ u_n) D_i u - (G' \circ u) D_i u \right| |\varphi| \\
&\leq \int_\omega |(G' \circ u_n)| \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - D_i u \right| |\varphi| + \int_\omega |G' \circ u_n - G' \circ u| |D_i u| |\varphi| \\
&\leq M \int_\omega \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - D_i u \right| |\varphi| + \int_\omega |G' \circ u_n - G' \circ u| |D_i u| |\varphi| \\
&\leq M \|\varphi\|_{L^q(\omega)} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - D_i u \right\|_{L^p(\omega)} + \|G' \circ u_n - G' \circ u\|_{L^q(\omega)} \|\varphi D_i u\|_{L^p(\omega)} \\
&\to 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

De (3.6), (3.7) y (3.8) se sigue que

$$\int_\Omega (G \circ u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega [(G' \circ u) D_i u] \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

Es decir, $G \circ u$ es débilmente diferenciable en Ω y $D_i(G \circ u) = (G' \circ u) D_i u$.

□

Proposición 3.16. ***(Fórmula de cambio de variables).*** *Sean Ω y Ω' conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^N$ y sea $H : \Omega' \to \Omega$ una función biyectiva, $x = H(y)$, tal que $H \in C^c(\Omega')$, $H^{-1} \in C^1(\Omega)$. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$ y*

$$\frac{\partial}{\partial y_j} u(H(y)) = \sum_i (D_i u)(H(y)) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y), \quad \forall j = 1, 2, ..., N.$$

Demostración. Cuando $1 \leq p < \infty$, tomamos una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\nabla u_n \to \nabla u$ en $L^p(\omega)^N$, $\forall \omega \subset\subset \Omega$. Así $u_n \circ H \to u \circ H$ en $L^p(\Omega')$ y

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \circ H \right) \frac{\partial H_i}{\partial y_j} \longrightarrow (D_i u \circ H) \frac{\partial H_i}{\partial y_j} \; en \; L^p(\omega'), \; \forall \omega' \subset\subset \Omega'.$$

Dado $\psi \in C_c^1(\Omega')$, tenemos

$$\int_{\Omega'} (u_n \circ H) \frac{\partial \psi}{\partial y_i} = - \int_{\Omega'} \sum_i \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \circ H \right) \frac{\partial H_i}{\partial y_j} \psi dy.$$

Aplicando límite obtenemos el resultado deseado. Cuando $p = \infty$, procedemos de la misma forma que al final de la prueba de la Proposición 3.15. □

3.1.1. Espacios $W^{m,p}(\Omega)$

Sea $m \geq 2$ un entero y sea p un real extendido con $1 \leq p \leq \infty$. Definimos por inducción

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); D_i u \in W^{m-1,p}(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, ..., N \right\}.$$

Usando la notación estándar de multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ con $\alpha_i \geq 0$ entero, tal que

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \;\; y \;\; D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}},$$

los espacios $W^{m,p}(\Omega)$ pueden definirse de manera alternativa como

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall \alpha \; con \; |\alpha| \leq m, \; \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \; tal \; que \\ \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\},$$

Definimos $D^\alpha u = g_\alpha$. El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ dotado con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_p$$

es un espacio de Banach.

El espacio $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ dotado con el producto escalar

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} (D_i u, D_i v)_{L^2}$$

es un espacio de Hilbert.

3.2. Extensión de Operadores

A menudo es conveniente establecer propiedades de las funciones en $W^{1,p}(\Omega)$ comenzando con el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$. Es útil poder de extender una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a una función $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
Esto no es siempre posible (en un dominio general Ω). Sin embargo, si Ω es "suave" (como se definirá en 3.17), dicha extensión puede ser construída. Comencemos definiendo un conjunto abierto suave.

Notación. *Dado $x \in \mathbb{R}^N$, escribimos*

$$x = (x', x_N) \; con \; x' \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad x' = (x_1, x_2, ..., x_{N-1}),$$

y establecemos

$$|x'| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}_+^N = \{x = (x', x_N); x_N > 0\}, \\ &Q = \{x = (x', x_N); \; |x'| < 1 \; y \; |x_N| < 1\}, \\ &Q_+ = Q \cap \mathbb{R}_+^N, \\ &Q_0 = \{x = (x', 0); \; |x'| < 1\}. \end{aligned}$$

Definición 3.17. *Decimos que un conjunto abierto Ω es "Suave" si para cada $x \in \partial\Omega = \Gamma$ existe una vecindad U de x en $\mathbb{R}^N$ y una función biyectiva $H : Q \to U$ tal que*

$$H \in C^1(\overline{Q}), \quad H^{-1} \in C^1(\overline{U}), \quad H(Q_+) = U \cap Q, \quad y \quad H(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

La función H es llamada una traza local.

Lema 3.18. ***(Partición de la unidad).*** *Sea Γ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$ y sea U_1, U_2,..., U_N una cubierta abierta de Γ, i.e., $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$. Entonces existen funciones θ_1, θ_2,..., $\theta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que*

(i)

$$0 \leq \theta_1 \leq 1, \quad \forall i = 0, 1, 2, .., k \quad \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 1 \; sobre \; \mathbb{R}^N,$$

(ii)

$$\begin{cases} supp \; \theta_i \; es \; compacto \; y \; supp \; \theta_i \subset U_i, \quad \forall i = 1, 2, ..., \\ supp \; \theta_0 \subset \mathbb{R}^N \backslash \Gamma. \end{cases}$$

Si Ω es un subconjunto abierto y acotado, y $\Gamma = \partial\Omega$, entonces $\theta_0|_\Omega \in C_c^\infty(\Omega)$.

Demostración. Sean (A_j) abiertos en $\mathbb{R}^N$, tal que $A_j \subset\subset U_j$ y $\bar{\Omega} \subset A_j \cup \cdots \cup A_n$. Definamos una función $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $f_k = 1$ en $\bar{\Omega} \backslash \bigcup_{j \neq k} A_j$, $f_k = 0$ en $\bar{\Omega} \backslash A_k$ y $0 \leq f \leq 1$ (Proposición 3.20). Para cada i definamos la función

$$\theta_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_l f_l(x)}.$$

□

Lema 3.19. *Dado* $u \in W^{1,p}(Q_+)$ *con* $1 \leq p \leq \infty$*, definimos una función* $u^\star$ *sobre* Q *como la extensión por reflexión, es decir,*

$$u^\star(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N), & si\ x_N > 0, \\ u(x', -x_N), & si\ x_N < 0. \end{cases}$$

Entonces $u^\star \in W^{1,p}(Q)$ *y*

$$\|u^\star\|_{L^p(Q)} \leq 2\|u\|_{L^p(Q_+)}, \quad \|u^\star\|_{W^{1,p}(Q)} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}.$$

Demostración. Debemos probar que

$$D_i u^\star = (D_i u)^\star \ para\ 1 \leq i \leq N-1 \tag{3.9}$$

y

$$D_N u^\star = (D_N u)^\square, \tag{3.10}$$

donde $(D_i u)^\star$ denota la extensión por reflexión de $D_i u$, $f^\square$ está definido sobre Q_+ por,

$$f^\square(x', x_N) = \begin{cases} f(x', x_N) & si\ x_N > 0, \\ -f(x', -x_N) < 0. \end{cases}$$

Usamos una sucesión (η_k) de funciones en $C^\infty(\mathbb{R})$ definida por

$$\eta_k(t) = \eta(kt), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, ...,$$

donde η es cualquier función fija, $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, tal que

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & si\ t < 1/2, \\ 1, & si\ t > 1. \end{cases}$$

Demostración. (de (3.9)). Sea $\varphi \in C_c^1(Q)$. Para $1 \leq i \leq N-1$ tenemos

$$\int_Q u^\star \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \tag{3.11}$$

donde $\psi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N)$. La función ψ no pertenece en general $C_c^1(Q_+)$, y no puede ser usada como función test. Por otro lado, $\eta_k(x_N)\psi(x', x_N) \in C_c^1(Q_+)$[5] y así

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k \psi) = -\int_{Q_+} D_i u(\eta_k \psi).$$

[5] $supp\ (\eta_k \psi) = supp\ \eta_k \cap supp\ \psi$ es compacto dado que es un subconjunto cerrado de $supp\ \psi$ que por definición de ψ es compacto.

Como $\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k \psi) = \eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$, tenemos

$$\int_{Q_+} u\eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} D_i u(\eta_k \varphi). \tag{3.12}$$

Aplicando límite en (3.12) cuando $k \to \infty$ (por convergencia dominada), obtenemos

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} \psi D_i u. \tag{3.13}$$

Combinando (3.11) y (3.13), llegamos a

$$\int_Q u^\star \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} \psi D_i u = -\int_Q (D_i u)^\star \psi,$$

De lo cual se obtiene (3.9). □

Demostración. (de (3.10)). Para cada $\varphi \in C_c^1(Q)$ tenemos

$$\int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} = \int_{Q_+} u \frac{\partial \chi}{\partial x_N}, \tag{3.14}$$

donde $\chi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) - \varphi(x', -x_N)$, Note que $\chi(x', 0) = 0$ y entonces existe una constante M tal que $|\chi(x', x_N)| \leq M|x_N|$ sobre Q (Esto se puede verificar aplicando el Teorema del Valor Medio como en la Proposición 3.15). Como $\eta_k \chi \in C_c^1(Q_+)$, tenemos

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k \chi) = -\int_{Q_+} (D_N u)\eta_k \chi. \tag{3.15}$$

Pero

$$\frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k \chi) = \eta_k \frac{\partial \chi}{\partial x_N} + k\eta'(kx_N)\chi. \tag{3.16}$$

Queremos que

$$\int_{Q_+} uk\eta'(kx_N)\chi \to 0 \; cuando \; k \to \infty. \tag{3.17}$$

Se toma en cuenta el hecho de que si se integra sobre Q_+ con respecto a la componente x_N, la antiderivada se evaluará de acuerdo al recorrido de dicha componente, por tanto resultará equivalente integrar sobre $0 < x_N < 1/k$, dado que $0 < kx_N < 1$ (por definición de Q_+), por tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{Q_+} uk\eta'(kx_N)\chi \right| &\leq kMC \int_{0<x_N<1/k} |u| x_N dx_N, \\
&< kMC \int_{0<x_N<1/k} |u| \frac{1}{k} dx_N \\
&= MC \int_{0<x_N<1/k} |u| dx_N
\end{aligned}$$

con $C = \sup_{t\in[0,1]} |\eta'(t)|$, de donde obtenemos (3.17).
Deducimos de (3.15), (3.16) y (3.17) que

$$\begin{aligned}\int_{Q_+} u\frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k\chi) &= \int_{Q_+} u(\eta_k\frac{\partial\chi}{\partial x_N}) + \int_{Q_+} u(k\eta'(kx_N)\chi), \quad \eta_k \to 1 \ cuando\ k\to\infty \\ &= \int_{Q_+} u\frac{\partial\chi}{\partial x_N}.\end{aligned}$$

y usando el hecho de que $\eta_k \to 1$ cuando $k\to\infty$, tenemos

$$-\int_{Q_+}(D_N u)\eta_k\chi = -\int_{Q_+}(D_N u)\chi.$$

Aplicando limite cuando $k\to\infty$ en (3.15)

$$\int_{Q_+} u\frac{\partial\chi}{\partial x_N} = -\int_{Q_+}(D_N u)\chi$$

Finalmente

$$\int_{Q_+}(D_N u)\chi = \int_Q (D_N u)^{\square}\varphi. \tag{3.18}$$

Combinando (3.14) y (3.18), obtenemos (3.10). □

□

La conclusión del Lema 3.19 se mantiene válida si Q_+ es reemplazado por $\mathbb{R}^N_+$ (la prueba no se altera). Esto establece el Teorema 3.21 para $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.

Lema 3.20. *Sean $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^N$ cerrados no vacíos, con $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Además supongamos que K_1 es compacto. Entonces existe una función $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $0 \le u_0(x) \le 1$ para todo $x\in\mathbb{R}^N$ y*

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & si\ x\in K_1, \\ 0, & si\ x\in K_2.\end{cases}$$

Demostración. Como los cerrados son disjuntos y uno de ellos es compacto, su distancia $d(K_1,K_2)$ es positiva. Definimos $\varepsilon = d(K_1,K_2)/5 > 0$, $K_1' = K + B_\varepsilon(0)$ y

$$v(x) = \begin{cases} 0, & si\ d(x,K_1') \ge \varepsilon, \\ 1 - d(x,K_1') & si\ d(x,K_1') \le \varepsilon.\end{cases}$$

Esta es una función continua que cumple lo que deseamos, pero no es suave. Sea m tal que $1/m \le \varepsilon$. Definamos $v_1 = v * \rho_m$. Por la proposición 1.67,

$$supp(v_1) \subset supp(v) + B_\varepsilon(0) = K_1' + 2B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N \setminus K_2.$$

Pero por otra parte, si $x \in K_1$, se tiene que

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_m(x-y)v(y)y \\ &= \int_{K_1'} \rho_m(x-y)v(y)dy \\ &= \int_{K_1'} \rho_m(x-y)v(y)dy \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto v_1 tiene las propiedades deseadas. □

Teorema 3.21. *Supongamos que Ω es Suave con Γ acotado (si no $\Omega = \mathbb{R}^N_+$). Entonces existe una extensión de operador lineal*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

tal que para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

(i) $Pu|_\Omega = u$,

(ii) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}$,

(iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

Donde C depende únicamente de Ω.

Demostración. Analizamos $\Gamma = \partial\Omega$ utilizando trazas locales y usamos una partición de la unidad[6](Lema 3.18) De forma más precisa, como Γ es compacto y suave, existe una familia de conjuntos abiertos $(U_i)_{1\leq i\leq k}$ en $\mathbb{R}^N$ tal que $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$ y funciones biyectivas $H_i : Q \to U_i$ tal que

$$H_i \in C^1(\bar{Q}), \;\; H_i^{-1} \in C^1(\bar{U}_i), \;\; H_i(Q_+) = U_i \cap \Omega, \;\; y \;\; H_i(Q_0) = U_i \cap \Gamma.$$

Considere las funciones $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_k$ usadas en el Lema 3.18. Dado $u \in W^{1,p}(\Omega)$, hacemos

$$u = \sum_{i=0}^k \theta_i u = \sum_{i=0}^k u_i, \quad donde \;\; u_i = \theta_i u.$$

Ahora extendemos cada una de las funciones u_i a $\mathbb{R}^N$, distinguiendo u_0 y $(u_i)_{1\leq i\leq k}$.

[6]De aquí en adelante usaremos ésta técnica para llevar un resultado probado en $\mathbb{R}^N$ (o Q_+) a la misma conclusión sobre un conjunto suave Ω.

(a) Extensión de u_0. Definimos la extensión de u_0 a $\mathbb{R}^N$ por

$$\bar{u}_0 = \begin{cases} u_0(x) & si\ x \in \Omega \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Recordamos que $\theta_0 \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\nabla\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, como $\nabla\theta_0 = -\sum_{i=1}^k \nabla\theta_i$ tiene soporte compacto, y $supp\ \theta_0 \subset \mathbb{R}^N \backslash \Gamma$. Se sigue que (por la Observación 3.8(ii)) que

$$\bar{u}_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\bar{u}_0 = \theta_0 \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} + \frac{\partial \theta_0}{\partial x_i}\bar{u}.$$

Así

$$\|u_0\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

(b) Extensión de u_i, $1 \leq i \leq k$.
Considere la restricción de u en $U_i \cap \Omega$ y "transfiera" ésta función a Q_+ con la ayuda de H_i. Más precisamente, sea $v_i(y) = u(H_i(y))$ para $y \in Q_+$. Sabemos (3.16) que $v_i \in W^{1,p}(Q_+)$. Entonces definimos la extensión a Q por reflexión de v_i (Lema 3.19); llamémosla $v_i^\star$. Sabemos que $v_i^\star \in W^{1,p}(Q)$. "retransferimos" $v_i^\star$ a U_i usando H_i^{-1} y llamándolo w_i:

$$w_i(x) = v_i^\star[H_i^{-1}(x)]\ para\ x \in U_i.$$

Entonces $w_i \in W^{1,p}(U_i)$, $w_i = u$ sobre $U_i \cap \Omega$, y

$$\|w_i\|_{W^{1,p}(U_i)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U_i \cap \Omega)}.$$

Finalmente, establecemos para $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\hat{u}_i(x) = \begin{cases} \theta_i(x)w_i(x) & si\ x \in U_i, \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}^N \backslash U_i, \end{cases}$$

así $\hat{u}_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (ver Observación 3.8(ii)), $\hat{u}_i = u_i$ sobre Ω, y

$$\|\hat{u}_i\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U_i \cap \Omega)}.$$

(c) Conclusión. El operador $Pu = \bar{u}_0 + \sum_{i=1}^N \hat{u}_i$ posee todas las propiedades deseadas.

□

Corolario 3.22. ***(Densidad).*** *Supongamos que Ω es suave, y sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n|_\Omega \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. En otras palabras, las restricciones a Ω de funciones en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$forma un subespacio denso de $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. Supongamos que Γ es acotado. Entonces existe un operador extensión P (Teorema 3.21). La sucesión[7] $\zeta_n(\rho_n * Pu)$ converge a Pu en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ lo que resuelve el problema. Cuando Γ no es acotado comenzamos considerando la sucesión $\zeta_n u$. Dado $\varepsilon > 0$, fijamos n_0 tal que $\|\zeta_{n_0} u - u\|_W^{1,p} \leq \varepsilon$. Podemos construir la extensión $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ de $\zeta_{n_0} u$ (ya que esto sólo involucra la intersección de Γ con una bola grande). Finalmente tomamos cualquier $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|w - v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$. $\square$

3.3. Desigualdades de Sobolev

En el capítulo 2 vimos que si Ω es de dimensión 1, entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ con inyecciones continuas, para todo $1 \leq p \leq \infty$. En dimensión $N \geq 2$ esta inclusión es válida sólo para $p > N$; cuando $p \leq N$ se pueden construir funciones en $W^{1,p}$ que no pertenezcan a L^∞. Sin embargo, un resultado importante, esencialmente debido a Sobolev, afirma que si $1 \leq p < N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^\star}(\Omega)$ con inyecciones continuas, para algún $p^\star \in (p, +\infty)$. Este resultado es también llamado *Teorema de embebimiento de Sobolev*. Comenzamos considerando el siguiente caso:

A. El caso $\Omega = \mathbb{R}^\mathbf{N}$.

Lema 3.23. *Sea $N \geq 2$ y sea $f_1, f_2, ..., f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1}))$. Para $x \in \mathbb{R}^N$ y $1 \leq i \leq N$ sea*

$$\tilde{x}_i = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N) \in \mathbb{R}^{N-1},$$

i.e., x_i es omitido de la lista. Entonces la función

$$f(x) = f_1(\tilde{x}_1) f_2(\tilde{x}_2) ... f_N(\tilde{x}_N), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

pertenece a $L^1(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Demostración. El caso $N = 2$ es trivial. Consideraremos el caso $N = 3$. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_\mathbb{R} |f(x)| dx_3 &= |f_3(x_1, x_2)| \int_\mathbb{R} |f_1(x_2, x_3)||f_2(x_1, x_3)| dx_3 \\ &\leq |f_3(x_1, x_2)| \left(\int_\mathbb{R} |f_1(x_2, x_3)|^2 dx_3 \right)^{1/2} \left(\int_\mathbb{R} |f_2(x_1, x_3)|^2 dx_3 \right)^{1/2}\end{aligned}$$

(por Cauchy-Schwarz). Aplicando Cauchy-Schwarz una vez más tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)| dx \leq \|f_3\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

[7] Como es usual, (ρ_n) es una sucesión regularizante y (ζ_n) es una sucesión de funciones cortadas como en la prueba del Teorema 3.11.

El caso general es obtenido por inducción—asumiendo el resultado para N y luego se deduce para $N+1$. Fijamos $x_{N+1} \in \mathbb{R}$; a raíz de la desigualdad de H$\ddot{o}$lder,

$$\int_{\mathbb{R}}^{N} |f(x)| dx_1 dx_2 ... dx_N \leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \left[\int |f_1 f_2 ... f_N|^{N'} dx_1 dx_2 ... dx_N \right]^{1/N'}$$

(con $N' = N/(N-1)$). Aplicando la hipótesis de inducción a las funciones $|f_1|^{N'}, ..., |f_N|^{N'}$, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}}^{N} |f_1|^{N'} ... |f_N|^{N'} dx_1 ... dx_N \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}^{N'}$$

de lo que se sigue

$$\int_{\mathbb{R}}^{N} |f(x)| dx_1 ... dx_N \leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Ahora cambiamos x_{N+1}. Cada una de las funciones $x_{N+1} \mapsto \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}$ pertenecen a $L^N(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq i \leq N$. Como consecuencia, su producto $\prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ (ver Observación 3.7 siguiendo la desigualdad de Hölder) y

$$\int_{\mathbb{R}}^{N+1} |f(x)| dx_1 ... dx_N dx_{N+1} \leq \prod_{i=1}^{N+1} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}.$$

□

Teorema 3.24. ***(Sobolev, Gagliardo, Nirenberg).*** *Sea $1 \leq p < N$. Entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^\star}(\mathbb{R}^N), \ donde\ p^\star\ esta\ dado\ por\ \frac{1}{p^\star} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

y existe una constante $C = C(p, N)$[8] tal que

$$\|u\|_{p^\star} \leq C \|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{3.19}$$

Demostración. Comenzamos con el caso $p = 1$ y $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Tenemos

$$\begin{aligned} |u(x_1, x_2, ..., x_N)| &= \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) \right| dt \end{aligned}$$

[8]Podemos tomar $C(p, N) = (N-1)p/(N-p)$, pero ésta constante no es óptima

y similarmente, para cada $1 \leq i \leq N$,

$$|u(x_1, x_2, ..., x_N)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x_1, x_2, ..., x_{i_1}, t, x_{i+1}, ..., x_N)|\, dt \equiv^{def} f_i(\tilde{x}_i).$$

Así

$$|u(x)|^N \leq \prod_{i=1}^{N} f_i(\tilde{x}_i).$$

Deducimos del Lema 3.23 que

$$\int_{\mathbb{R}}^{N} |u(x)|^{N/(N-1)} dx \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{1/(N-1)} = \prod_{i=1}^{N} \|D_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{1/(N-1)}$$

Como consecuencia, tenemos

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}}(\mathbb{R}^N) \leq \prod_{i=1}^{N} \|D_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N} \tag{3.20}$$

Esto completa la prueba de (3.19) cuando $p = 1$ y $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Ahora regresamos al caso $1 < p < N$, se mantiene que $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Sea $m \geq 1$; aplicamos (3.20) a $|u|^{m-1}u$ para el caso de u. Obtenemos

$$\|u\|_{mN/(N-1)}^{m} \leq m \prod_{i=1}^{N} \left\| |u|^{m-1} D_i u \right\|_1^{1/N} \leq m \|u\|_{p'(m-1)}^{m-1} \prod_{i=1}^{N} \|D_i u\|_p^{1/N}. \tag{3.21}$$

Así, escogemos m tal que $mN/(N-1) = p'(m-1)$, del cual obtenemos $m = (N-1)p^\star/N(m \geq 1\, como\, 1 < p < N)$. Obtenemos

$$\|u\|_{p^\star} \leq C\|\nabla u\|_p, \ \forall u \in C^1(\mathbb{R}^N).$$

Para completar la prueba, sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, y sea (u_n) un sucesión en $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Tomando una subsucesión si es necesario, se podría suponer que $u_n \to u$ en c.t.p. Así se obtiene que

$$\|u_n\|_{p^\star} \leq C\|\nabla u_n\| p.$$

Aplicando el lema de Fatou [9] se sigue que

$$u \in L^{p\star}\ y\ \|u\|_{p^\star} \leq C\|\nabla u\| p.$$

$\square$

Corolario 3.25. *Sea* $1 \leq p < N$*. Entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^r(\mathbb{R}^N), \ \forall r \in [p, p^\star].$$

Con inyecciones continuas.

[9] También se puede concluir usando el hecho que (u_n) es una sucesión de Cauchy en $L^{p^\star}$.

Demostración. Dado $r \in [p, p^\star]$, escribimos

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^\star}, \quad para\, algun \quad \alpha \in [0,1].$$

Sabemos por la observación 1.52 que

$$\|u\|_r \le \|u\|_p^\alpha \|u\|_{p^\star}^{1-\alpha} \le \|u\|_p + \|u\|_{p^\star}, \quad (Por\ la\ desigualdad\ de\ Young).$$

Usando el teorema 3.24 concluimos que

$$\|u\|_r \le C\|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

□

Corolario 3.26. ***(El caso limitante** $p = N$**)** Tenemos*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^r(\mathbb{R}^N), \quad \forall r \in [N, +\infty)\,.$$

Demostración. Suponemos que $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$; aplicamos (3.21) con $p = N$, y obtenemos

$$\|u\|_{mN/(N-1)}^m \le m\|u\|_{(m-1)N/(N-1)}^{m-1} \|\nabla u\|_N, \quad \forall m \ge 1,$$

y gracias a la desigualdad de Young obtenemos

$$\|u\|_{mN/(N-1)}^m \ge C(\|u\|_{(m-1)N/(N-1)} + \|\nabla u\|_N), \quad \forall m \ge 1. \tag{3.22}$$

En 3.22, primero escogemos $m = N$; y se convierte en

$$\|u\|_{N^2/(N-1)} \le \|u\|_W^{1,N},$$

y por la desigualdad de interpolación (Observación 1.52) tenemos que

$$\|u\|_r \le C\|u\|_{W^{1,N}} \tag{3.23}$$

para todo r tal que $N \le r \le N^2/(N-1)$. Repitiendo este argumento para $m = N+1$, $m = N+2$, $etc.$, llegamos a que

$$\|u\|_r \le C\|u\|_{W^{1,N}}, \quad \forall u \in C^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.24}$$

para todo $r \in [N, +\infty)$, con una constante C que depende de r y N.[10] La desigualdad (3.24) se extiende por densidad a $W^{1,N}$. □

[10] Esta constante crece rápidamente cuando $r \to +\infty$.

Teorema 3.27. ***(Morrey)***. *Sea $p > N$. Entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{3.25}$$

Con inyecciones continuas. Además, para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, se tiene

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_p \; c.t.p. \; x, y \in \mathbb{R}^N, \tag{3.26}$$

donde $\alpha = 1 - (N/p)$ y C es una constante (que depende únicamente de p y N).

Demostración. Comenzamos estableciendo (3.26) para $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Sea Q un cubo abierto, que contiene al 0, cuyos lados (de longitud r) son paralelos a los ejes de coordenadas. Para $x \in Q$ tenemos

$$|u(x) - u(0)| = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx) dt$$

y así

$$|u(x) - u(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^N |x_i| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt \leq r \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt. \tag{3.27}$$

Definimos

$$\bar{u} = \frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx.$$

Integrando (3.27), sobre Q, obtenemos

$$\begin{aligned} |\bar{u} - u(0)| &\leq \frac{r}{|Q|} \int_Q dx \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt, \\ &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 dt \int_Q \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dx, \\ &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 dt \int_{tQ} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right| \frac{dy}{t^N}, \quad (Cambio\ de\ variable\ y = xt). \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\int_{tQ} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right| dy \leq \left(\int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \right)^{1/p} |tQ|^{1/q}.$$

(Como $tQ \subset Q$ para $t \in (0,1)$). De lo anterior deducimos que

$$|\bar{u} - u(0)| \leq \frac{1}{r^{N-1}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} r^{N/q} \int_0^1 \frac{t^{N/q}}{t^N} dt = \frac{r^{1-(N/p)}}{1-(N/p)} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}.$$

Por traslación, esta desigualdad sigue siendo verdadera par todos los cubos Q cuyos lados (de longitud r) son paralelos a los ejes coordenados. Así obtenemos

$$|\bar{u} - u(x)| \leq \frac{r^{1-(N/p)}}{1-(N/p)} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}, \quad \forall x \in Q. \tag{3.28}$$

Sumando y aplicando la desigualdad triangular se obtiene

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{2r^{1-(N/p)}}{1-(N/p)} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}, \quad \forall x, y \in Q. \tag{3.29}$$

Dados dos puntos cualquiera $x, y \in \mathbb{R}^N$, existe un cubo Q de lado $r = 2|x-y|$ que contiene a x y a y. Esto implica (3.26) cuando $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Para una función en general $u \in W^{1,p}(R^N)$ usamos una sucesión (u_n) de $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $u_n \to u$ c.t.p.
Ahora probaremos (3.25). Sea $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$, y sea Q un cubo de lado $r = 1$, que contiene a x. De (3.28) y de la desigualdad de Hölder se obtiene

$$|u(x)| \leq |\bar{u}| + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(Q)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

Donde C depende únicamente de p y N. Así

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N).$$

$\square$

Observación 3.28. *Deducimos de (3.25) que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $N < p < \infty$, entonces*

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

De hecho, existe una sucesión $(u_n) \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Por (3.25), u es también el límite uniforme sobre $\mathbb{R}^N$ de u_n.

Observación 3.29. *El caso $p = 1$ y $m = N$ es especial. Tenemos $W^{N,1} \subset L^\infty$. (Pero esto no es cierto, en general, $W^{m,p} \subset L^\infty$ para $p > 1$ y $m = N/p$.) De hecho, para $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, se tiene que*

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_N} \frac{\partial^N u}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_N}(t_1, t_2, \ldots, t_N) dt_1 dt_2 \cdots dt_N.$$

Y así

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{N,1}}, \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{3.30}$$

El caso de una función general $u \in W^{N,1}$ se sigue por densidad.

Ahora pasemos a los siguiente

B. El caso $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ Suponemos que Ω es un conjunto abierto y suave con Γ acotado o de lo contrario $\Omega = \mathbb{R}_+^N$.

Corolario 3.30. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Se tiene que*

$$\begin{array}{llr} W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^\star}(\Omega), & donde \quad \dfrac{1}{p^\star} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}, & si\ p < N, \\ W^{1,p}(\Omega) \subset L^{r}(\Omega), & \forall r \in [p, +\infty) & si\ p = N, \\ W^{1,p}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega) & & si\ p > N, \end{array}$$

y todas estas inyecciones son continuas. Además, si $p > N$ se tiene que, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}}|x-y|^\alpha \quad c.t.p.\ x, y \in \Omega,$$

con $\alpha = 1 - (N/p)$ y C dependen únicamente de Ω, p y N. En particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Demostración. Considere el operador extensión

$$p : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Vea el Teorema 3.21 y aplicar el Teorema 3.24, Corolario 3.26, y el Teorema 3.27. □

Definición 3.31. *Sea Y un espacio de Banach. Decimos que $X \subset Y$ es una inyección compacta si X es compacto en Y.*

Teorema 3.32. ***(Rellich-Kondrachov)**. Suponemos que Ω es **acotado** y suave. Entonces se tienen las siguientes inyecciones compactas:*

$$\begin{array}{llr} W^{1,p}(\Omega) \subset L^{r}(\Omega), & \forall r \in [1, p^\star), \quad donde \quad \dfrac{1}{p^\star} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}, & si\ p < N, \\ W^{1,p}(\Omega) \subset L^{r}(\Omega), & \forall r \in [p, +\infty), & si\ p = N, \\ W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), & & si\ p > N. \end{array}$$

*En particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ con inyecciones **compactas** para todo p (y todo N).*

Demostración. El caso $p > N$ se sigue del Corolario 3.30 y el Teorema 1.78 (de Arzelà-Ascoli). El caso $p = N$ se reduce al caso $p < N$ (Si $p = N$, $p^\star \to \infty$). Por lo tanto, nos quedamos con el caso $p < N$.
Sea $\mathcal{H}$ la bola unitaria en $W^{1,p}(\Omega)$. Sea P el operador extensión del Teorema 3.21. Sea $\mathcal{F} = P(\mathcal{H})$, entonces $\mathcal{H} = \mathcal{F}_{|\Omega}$. Con el objetivo de mostrar que $\mathcal{H}$ tiene clausura compacta en L^r para $r \in [1, p^\star)$ usamos el Teorema 1.78. Como Ω es acotado, siempre podemos asumir que $r \geq p$. Claramente, $\mathcal{F}$ es acotado en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y así también lo es en $L^r(\mathbb{R}^N)$ por el Corolario 3.25. Tenemos que verificar que

$$\lim_{|h|\to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} = 0 \quad uniformemente\ para\ f \in \mathcal{F}.$$

Por la proposición 3.13 se tiene que

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq |h|\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Como $p \leq r < p^\star$, podemos escribir

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^\star} \quad para\ algn \quad \alpha \in [0,1)$$

.

Aplicando la desigualdad de interpolación (Observación 1.61) obtenemos

$$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} &\leq \|\tau_h f - f\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|\tau_h f - f\|^{1-\alpha}_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq |h|^\alpha \|\nabla f\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)}(2\|f\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^N)})^{1-\alpha} \\ &\leq C|h|^\alpha,\end{aligned}$$

Donde C es independiente de $\mathcal{F}$ (Como $\mathcal{F}$ es acotado en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$). De allí se sigue la conclusión deseada. □

Observación 3.33. *El Teorema 3.32 es "casi óptimo" en el siguiente sentido:*

(i) Si Ω no es acotado, la inyección $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ es, en general, no compacto.

(ii) La inyección $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^\star}$ nunca es compacto incluso si Ω es acotado y suave.

3.4. El Espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definición 3.34. *Sea $1 \leq p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ denota la clausura de $C_c^1(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Definimos*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Observación 3.35. *Se verifica (Usando sucesiones regularizantes) que $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $W_0^{1,p}(\Omega)$. En otras palabras, $C_c^\infty(\Omega)$ podría haber sido utilizado en lugar de $C_c^1(\Omega)$ en la definición de $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Las funciones en $W_0^{1,p}(\Omega)$ serán intuitivamente aquellas en $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulan sobre $\Gamma = \partial\Omega$. Es complicado hacer esto preciso, dado que una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$, esta definida solo en c.t.p. (y la medida de Γ es cero!) y u no necesita tener un representante continuo. [11] La siguiente caracterización sugiere que realmente tenemos funciones que son "cero sobre Γ ". Comenzamos con un hecho simple:

Lema 3.36. *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ y suponemos que $supp\ u$ es un subconjunto compacto de Ω. Entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

[11] Sin embargo, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ podemos darle significado a $u_{|\Gamma}$ (Cuando Ω es regular) y se puede mostrar, por ejemplo que $u_{|\Gamma} \in L^p(\Gamma)$.

Demostración. Fijamos un conjunto abierto ω tal que $supp\ u \subset \omega \subset\subset \Omega$ y escogemos $\alpha \in C_c^1(\omega)$ tal que $\alpha = 1$ sobre $supp\ u$, así $\alpha u = u$. Por otro lado por el Teorema 3.11, existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\nabla u \to \nabla$ en $L^p(\omega)^N$. Se sigue que $\alpha u_n \to \alpha u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Así αu pertenece a $W_0^{1,p}(\Omega)$, y así también u. $\square$

Teorema 3.37. *Suponemos que Ω es suave. Sea* [12]

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \quad con\ \ 1 \leq p \leq \infty.$$

Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) $u = 0$ *sobre* Γ.

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Suponemos que el $supp\ u$ es acotado. Fijamos una función $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$|G(t)| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad y \ \ G(t) = \begin{cases} 0 & si\ \ |t| \leq 1, \\ t & si\ \ |t| \geq 2. \end{cases}$$

Sea $G_n(t) := (1/n)G(nt)$. Entonces

$$G_n(t) = \begin{cases} 0, & si\ \ |t| \leq 1/n, \\ t, & si\ \ |t| \geq 2/n. \end{cases}$$

y

$$G_n'(t) = G'(nt) = \begin{cases} 0, & si\ \ |t| \leq 1/n, \\ 1, & si\ \ |t| \geq 2/n. \end{cases}$$

Definimos $u_n := G_n \circ u$. Es importante observar que como G' es continua sobre $\mathbb{R}$ alcanza su máximo y su mínimo sobre $[1, 2]$, sea P dicho máximo, se tiene que $G'(s) \leq M, \forall s \in \mathbb{R}$, donde $M = \max\{1, P\}$.
Por la proposición 3.15, se tiene que $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ y $D_i u_n = (G' \circ u) D_i u$. Observamos que para $t \neq 0$, se tiene que $G_n(t) \to t$ y $G_n'(t) \to 1$. En consecuencia, $u_n(x) \to u(x)$ y $D_i u_n(x) \to D_i u(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$. Además, como $|G(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$|u_n(x)| = \frac{1}{n}|G(nu(x))| \leq |u(x)|, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|D_i u_n| = |(G_n' \circ u) D_i u| = |G'(nu(t))||D_i u| \leq M|D_i u(x)|, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada (Teorema 1.47), se tiene que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $D_i u_n \to D_i u$ en $L^p(\Omega)$. En consecuencia, $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

[12] Recordamos que si $p > N$, entonces $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u \in C(\overline{\Omega})$ (Vea el Corolario 3.30).

Por otra parte, como $u \in C(\overline{\Omega})$ y $u = 0$ en $\partial\Omega$, se tiene que $U_n := u^{-1}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ es un abierto relativo de $\overline{\Omega}$ que contiene a $\partial\Omega$, y $u_n(x) = 0$ para todo $x \in U_n$. Por tanto

$$supp(u_n) \subset supp(u) \cap (\Omega \setminus U_n).$$

Como $supp\ u$ es acotado $supp\ u_n$ es compacto y está contenido en Ω. Por el lema 3.36 se tiene entonces que $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y, por consiguiente, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Si $supp\ u$ no es acotado, fijamos una función $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & si\ |x| \leq 1, \\ 0, & si\ |x| \geq 2. \end{cases}$$

y definimos $\zeta_n(x) := \zeta(x/n)$ y $u_n := \zeta_n \circ u$. De nuevo, por el Teorema de Convergencia Dominada, $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $D_i u_n = \frac{1}{n}\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}(\frac{x}{n}) + \zeta_n D_i u \to D_i u$ en $L^p(\Omega)$. En consecuencia $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Como $u_n \in C(\bar{\Omega})$, $u_n = 0$ sobre $\partial\Omega$ y $supp\ u_n$ es acotado, se tiene que $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y, como $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, concluímos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*. Analizaremos localmente la frontera de Ω. Para esto tomemos una cubierta de $\bar{\Omega}$ de la siguiente manera. Para cada $x \in \partial\Omega$ tomemos una vecindad U_x, que se comporta como en la Definición 3.17 y tomemos una subcubierta finita $U_1, \ldots, U_m$. Por último escojamos un abierto U_0, tal que $U_0 \subset\subset \Omega$ y $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^m U_i$. Para cada U_i tomemos θ_i como el Lema 3.18, entonces la función $u\theta_i \in W_0^{1,p}(U_i) \cap C(\overline{U_i})$ y además

$$u = \sum_{i=1}^{n} u\theta_i.$$

Por último, como las vecindades U_i de puntos en la frontera son difeomorfas (con una aplicación H_i) a un cilindro Q (además de que $H_i(Q_+) = U_i \cap \Omega$ y $H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$), será suficiente probar que si $u \in W_0^{1,p}(Q_+) \cap C(\overline{Q_+})$, entonces $u = 0$ en $H_i(Q_0)$.

Sea (u_n) una sucesión en $C_c^\infty(Q_+)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(Q_+)$. Se tiene que para $(x', x_N) \in Q_+$,

$$|u_n(x', x_N)| = \left| \int_0^{x_N} \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t)dt \right| \leq \int_0^{x_N} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dt,$$

para $0 < \varepsilon < 1$, por el Teorema del valor medio de la integral existe $\xi \in [0, \varepsilon]$ tal que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon |u_n(x', x_N)|dx_N = |u_n(x', \xi)| \leq \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dt$$

por consiguiente

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{|x'|<1}\int_0^{\varepsilon}|u_n(x',x_N)|dx_N dx' \leq \int_{|x'|<1}\int_0^{\varepsilon}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x',t)\right| dt dx'.$$

Como $0<\varepsilon$, $\{x : |x'|<1, 0<x_N<\varepsilon\}\subset Q_+$ y $u_n \to u$ en $W^{1,p}(Q_+)$, tomando el límite cuando $n\to\infty$ se obtiene

$$\int_{|x'|<1}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}|u(x',x_N)|dx_N dx' \leq \int_{|x'|<1}\int_0^{\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',t)\right| dt dx'.$$

Cuando $\varepsilon\to 0$, se tiene que $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}|u(x',x_N)|dx_N \to |u(x',0)|$ en consecuencia

$$\int_{|x'|<1}|u(x',0)|dx' = 0$$

Esto quiere decir que $u=0$ sobre $H_i(Q_0)$.

□

A continuación tenemos otra caracterización de $W_0^{1,p}$.

Proposición 3.38. *Suponemos que Ω es suave. Sea $u\in L^p(\Omega)$ con $1<p<\infty$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$,

(ii) Existe una constante C tal que

$$\left|\int_{\Omega}u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \leq C\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall\varphi\in C_c^1(\mathbb{R}^N), \quad \forall i=1,2,\ldots,N,$$

(iii) La función

$$\bar{u}=\begin{cases} u(x), & si\ x\in\Omega,\\ 0, & si\ x\in\mathbb{R}^N\backslash\Omega,\end{cases}$$

pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, y en este caso

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}=\overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}.$$

Demostración. (i) ⇒ (ii). Sea u_n una sucesión en $C_c^1(\Omega)$ tal que $u_n\to u$ en $W^{1,p}$. Para $\varphi\in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tenemos que

$$\left|\int_{\Omega}u_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| = \left|\int_{\Omega}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi\right| \leq \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\|_p \|\varphi\|_q$$

Aplicando límite, obtenemos (ii).

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Sea $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$; se tiene que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| = \left|\int_{\Omega} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \leq C\|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

Así $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ por la Proposición 3.13.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*. Se puede siempre asumir que Ω es acotado (si no, considere la sucesión $(\zeta_n u)$). Usando gráficos locales y partición de la unidad esto se reduce al siguiente problema. Sea $u \in L^p(Q_+)$ tal que la función

$$\bar{u} = \begin{cases} u(x), & si\ x \in Q, x_N > 0, \\ 0, & si\ x \in Q, x_N < 0, \end{cases}$$

Pertenece a $W^{1,p}(Q)$; probaremos que

$$\alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+), \quad \forall \alpha C_c^1(\Omega).$$

Sea (ρ_n) una sucesión regularizante tal que

$$supp\ \rho_n \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N; \frac{1}{2n} < x_N < \frac{1}{n}\right\};$$

se puede escoger, por ejemplo

$$\rho_n(x) = n^N \rho(nx) \ \ y \ \ supp\ \rho \subset \{x \in \mathbb{R}^N; (1/2) < x_N < 1\}.$$

Por tanto $\rho_n * (\alpha\bar{u}) \to \alpha\bar{u}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (note que $\alpha\bar{u}$ extendida por 0 fuera de Q, pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$). Por otro lado, por la Proposición 1.67.

$$supp(\rho_n * \alpha\bar{u}) \subset supp\ \rho_n + supp(\alpha\bar{u}) \subset Q_+$$

para n lo suficientemente grande. Se sigue que

$$\rho_n + (\alpha\bar{u}) \in C_c^1(Q_+)$$

y así $\alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+)$.

$\square$

Observación 3.39. *La prueba del Corolario 3.30 usa el operador extensión, y debido a este hecho se puede asumir que Ω es suave. Si $W^{1,p}(\Omega)$ es reemplazado por $W_0^{1,p}(\Omega)$ se puede usar la extensión canónica con 0 fuera de Ω, lo cual es válido para dominios arbitrarios Ω (en la prueba de la Proposición 3.38, la implicación (i)$\Rightarrow$(iii) no necesita la hipótesis de suavidad sobre Ω). En particular se sigue que la conclusión del Corolario 3.30 es cierta para $W_0^{1,p}(\Omega)$ con cualquier conjunto abierto Ω. De igual manera, la conclusión del Teorema 3.32 es cierta para $W_0^{1,p}(\Omega)$ con cualquier conjunto abierto acotado Ω. También puede deducirse del Teorema 3.24 que si Ω es un conjunto abierto arbitrario y $1 \leq p < N$, entonces*

$$\|u\|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq C(p,N)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.31}$$

Corolario 3.40. ***(Desigualdad de Poincaré)*** *Suponemos que $1 \leq p < \infty$ y Ω es un conjunto abierto* ***acotado****. Entonces existe una constante C (que depende de Ω y p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particular, la expresión $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ es una norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$, y esta es equivalente a la norma $\|u\|_{W^{1,p}}$; sobre $H_0^1(\Omega)$ la expresión

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} D_i u D_i v,$$

es un producto escalar que induce la norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ que es equivalente a la norma $\|u\|_{H^1}$.

Observación 3.41. *La desigualdad de Poincaré, se mantiene cierta si Ω tiene medida finita y también si Ω tiene una proyección acotada sobre algún eje.*

Observación 3.42. *Para cada entero $m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$, definimos inicialmente $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_c^m(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$. Una función u pertenece a $W_0^{m,p}(\Omega)$ si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ y si $D^\alpha u = 0$ sobre Γ para todo multi-indice α tal que $|\alpha| \leq m - 1$. Es importante notar la diferencia entre $W_0^{m,p}(\Omega)$ y $W^{m,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ para $m \geq 2$.*

3.5. Formulación Variacional de algunos Problemas de Valor en la Frontera

En esta sección vamos a utilizar el procedimiento previo para el estudio de algunas ecuaciones diferenciales parciales elípticas (EDP'S) de segundo orden.

Ejemplo 3.1. ***(Problema de Dirichlet homogéneo para el Laplaciano).*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto acotado. Buscamos una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que satisface*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & en \ \Omega, \\ \qquad u = 0, & sobre \ \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.32}$$

Donde

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = Laplaciano \ de \ u,$$

y f es una función definida sobre Ω. La condición de frontera $u = 0$ sobre Γ es llamada ***Condición de Dirichlet (Homogénea)****.*

Definición 3.43. *Una solución **clásica** de (3.32) es una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (3.32) (en el sentido usual). Una solución **débil** de (3.32) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.33}$$

Donde

$$\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^N D_i u D_i v.$$

Utilizaremos el proceso descrito en el Capitulo 2.

Paso A: Toda solución clásica es una solución débil.
De hecho, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y $u = 0$ sobre Γ, entonces $u \in H_0^1(\Omega)$ por el Teorema 3.37. Por otro lado, si $v \in C_c^1(\Omega)$ obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv,$$

y por densidad esto se mantiene verdadero para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Paso B: Existencia y unicidad de una solución débil.
Este paso es el contenido del siguiente resultado.

Teorema 3.44. ***(Dirichlet, Riemann, Poincaré, Hilbert).*** *Dado cualquier $f \in L^2(\Omega)$, existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ de (3.32). Además, u es obtenida por*

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla v|^2 + |v|^2) - \int_\Omega fv \right\}.$$

Este es el principio de Dirichlet.

Demostración. Aplicando Lax-Milgram en el espacio de Hilbert $H = H_0^1(\Omega)$ con la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)$$

y el funcional lineal

$$\varphi : v \mapsto \int_\Omega fv,$$

tenemos,

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv) = \int_\Omega fv$$
$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

además, u se caracteriza por

$$\min_{v\in H_0^1(\Omega)}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega(\nabla v\nabla v+vv)-\int_\Omega fv\right\}=\min_{v\in H_0^1(\Omega)}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla v|^2+|v|^2\right)-\int_\Omega fv\right\}$$

□

Paso C: Regularidad de la solución débil.
No nos ocuparemos de la regularidad de las soluciones débiles en $\mathbb{R}^N$, dado que requiere un estudio más extenso que incluso puede dejarse para una investigación posterior.

Paso D: Obtención de una solución clásica.
Asumimos que la solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ de (3.32) pertenece a $C^2(\overline{\Omega})$, y suponemos que Ω es suave. Entonces $u = 0$ sobre Γ (por el Teorema 3.37). Por otro lado, haciendo integración por partes sobre el primer elemento de

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v+\int_\Omega uv=\int_\Omega fv,\quad \forall v\in C_c^1(\Omega)$$

se tiene

$$\begin{aligned}\nabla uv|_\Omega-\int_\Omega \Delta uv+\int_\Omega uv&=\int_\Omega fv\\ -\int_\Omega \Delta uv+\int_\Omega uv&=\int_\Omega fv\end{aligned}$$

despejando el lado derecho y agrupando las expresiones resultantes en el lado izquierdo, tenemos

$$\int_\Omega(-\Delta u+u-f)v=0\quad \forall v\in C_c^1(\Omega).$$

Y así $-\Delta u+u=f$ c.t.p. sobre Ω (por el Corolario 1.77). Ya que, $-\Delta u+u=f$ c.t.p. Ω, como $u\in C^2(\Omega)$; entonces u es una solución clásica.

A continuación describiremos otros ejemplos. En cada uno de ellos es esencial especificar con precisión el espacio de funciones y la formulación débil apropiada.

Ejemplo 3.2. ***(Condición de Dirichlet no-homogénea).*** *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado. Buscamos una función $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ que satisface*

$$\begin{cases}-\nabla u+u=f & \textit{sobre}\ \Omega,\\ \quad\quad\ \ u=g & \textit{sobre}\ \Gamma,\end{cases}\tag{3.34}$$

donde f esta definida sobre Ω y g sobre Γ.Suponemos que existe una función $\tilde{g} \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que[13] *$\tilde{g} = g$ sobre Γ y consideramos el conjunto*

$$K = \{v \in H^1(\Omega); v - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Se sigue que K es independiente de la elección de $\tilde{g}$ y depende solo de g, para verificar este hecho tomamos una función $\tilde{k}$ en las condiciones de $\tilde{g}$ y definimos $K_1 = \{v \in H^1(\Omega); v - \tilde{k} \in H_0^1(\Omega)\}$. Probaremos que $K = K_1$

$$\begin{aligned} v \in K \Leftrightarrow v - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega) &\Leftrightarrow v - \tilde{g} = 0 \; sobre \; \Gamma \quad (Teorema \; 3.37) \\ &\Leftrightarrow v = \tilde{g} \; sobre \; \Gamma \\ &\Leftrightarrow v = g \; sobre \; \Gamma \\ &\Leftrightarrow v = \tilde{k} \; sobre \; \Gamma \\ &\Leftrightarrow v - \tilde{k} = 0 \; sobre \; \Gamma \\ &\Leftrightarrow v - \tilde{k} \in H_0^1(\Omega) \\ &\Leftrightarrow v \in K_1. \end{aligned}$$

Así, $K = K_1$.

Definición 3.45. *Una solución clásica de (3.34) es una función $u \in C^2(\Omega)$ que satisface (3.34). Una solución débil de (3.34) es una función $u \in K$ que satisface*

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.35}$$

Como anteriormente, cualquier solución clásica es una solución débil.

Proposición 3.46. *Dado cualquier $f \in L^2(\Omega)$, existe una única solución débil $u \in K$ de (3.34). Ademas, u es obtenida por*

$$\min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_\Omega fv \right\}.$$

Demostración. Queremos demostrar que $u \in K$ es una solución débil de (3.34) si y sólo si

$$\int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla v - \nabla u) + \int_\Omega u(v-u) \geq \int_\Omega f(v-u) \quad \forall v \in K. \tag{3.36}$$

De hecho, si u es una solución débil de (3.34) es claro que (3.36) se mantiene incluso con la igualdad. De manera recíproca, si $u \in K$ satisface (3.36) escogemos $v = u \pm w$ en (3.36) con $w \in H_0^1(\Omega)$, y así se sigue (3.35). Ahora podemos aplicar el Teorema de Stampacchia (Teorema 1.88) con la forma bilineal $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv$ y el funcional lineal $\varphi(v) = \int_\Omega fv$ para concluir la prueba.
El estudio de la regularidad y obtención de soluciones clásicas se sigue la misma idea del ejemplo 3.1. $\square$

[13] Esta suposición se cumple, *por ejemplo* , si Ω es suave y $g \in C^1(\Gamma)$. Si Ω es lo suficientemente regular no es necesario suponer que $\tilde{g} \in C(\overline{\Omega})$. Aplicando la teoría de trazas, es suficiente verificar que $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$, es decir, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Ejemplo 3.3. ***(Ecuación Elíptica General de Segundo Orden)***. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto acotado. Dadas las funciones $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq N$, que satisfacen la condición de elipticidad*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \;\; con\; \alpha > 0. \tag{3.37}$$

Sea una función $a_0 \in C(\overline{\Omega})$. Buscamos una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que debe satisfacer lo siguiente

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}D_i u) + a_0 u = f, \; sobre\; \Omega, \\ \hfill u = 0, \; sobre\; \Gamma. \end{cases} \tag{3.38}$$

Una solución clásica de (3.38) es una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (3.38) en el sentido usual. Una solución débil de (3.38) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}D_i u D_j v + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.39}$$

Como anteriormente, cualquier solución clásica es solución débil. Si $a_0(x) \geq 0$ sobre Ω entonces para todo $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$: solo aplicamos Lax-Milgram en el espacio $H = H_0^1$ con la forma bilineal continua

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}D_i u D_j v + \int_\Omega a_0 uv.$$

La coercitividad de $a(\cdot,\cdot)$ se da por la hipótesis de elipticidad, la suposición $a_0 \geq 0$, y la desigualdad de Poincaré. Si la matriz $(a_{i,j})$ es también simétrica, entonces la forma $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica y u es obtenida por

$$\min_{v \in H_0^1} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - \int_\Omega fv \right\}.$$

Ahora consideramos un problema mas general: encontrar una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}D_i u) + \sum_i a_i D_i u + a_0 u = f, \; en\; \Omega, \\ \hfill u = 0, \; sobre\; \Gamma, \end{cases} \tag{3.40}$$

Donde las funciones $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ satisfacen la condición de elipticidad y las funciones $(a_i)_{0\leq i\leq N}$ están definidas en $L^\infty(\Omega)$. Una solución débil de (3.40) es una función $u \in H_0^1$ tal que

$$\int_{\Omega}\sum_{i,j} a_{ij}D_iuD_jv + \int_{\Omega}\sum_{i} a_i(D_iu)v + \int_{\Omega} a_0uv = \int_{\Omega} fv, \quad \forall v \in H_0^1. \tag{3.41}$$

La forma bilineal continua asociada es

$$a(u,v) = \int_{\Omega}\sum_{i,j} a_{ij}D_iuD_jv + \int_{\Omega}\sum_{i} a_i(D_iu)v + \int_{\Omega} a_0uv. \tag{3.42}$$

En general esta forma no es simétrica[14] en ciertos casos es coercitiva; se podría aplicar Lax-Milgram para obtener la existencia y unicidad de una solución débil. En el caso general (incluso sin la coercitividad) podemos tener lo siguiente.

Teorema 3.47. *Si $f = 0$, entonces el conjunto de soluciones $u \in H_0^1$ de (3.41) es un espacio vectorial de dimensión finita, digamos de dimensión d. Además, existe un subespacio $F \subset L^2(\Omega)$ de dimensión d tal que tal que[15] (3.41) tiene solución, si y sólo si,*

$$\left[\int_{\Omega} fv = 0, \quad \forall v \in F\right].$$

Demostración. Fijamos $\lambda > 0$, lo suficientemente grande para que la forma bilineal

$$a(u,v) + \lambda \int_{\Omega} uv$$

Es coercitiva sobre H_0^1. Para cada $f \in L^2$ existe una única $u \in H_0^1$ que satisface

$$a(u,\varphi) + \lambda \int_{\Omega} u\varphi = \int_{\Omega} f\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1.$$

Definimos $u = Tf$, así $T : L^2 \to L^2$ es un operador lineal compacto (como Ω es acotado, la inyección $H_0^1 \subset L^2$ es compacto; ver el Teorema 3.32 y la Observación 3.39). La ecuación (3.41) es equivalente a

$$u = T(f + \lambda u). \tag{3.43}$$

Definimos $v = f + \lambda v$ como una nueva incógnita, y (3.43) quedaría

$$v - \lambda tv = f. \tag{3.44}$$

La conclusión se sigue de la alternativa de Fredholm. □

Observación 3.48. *Suponemos que la ecuación homogénea asociada a (3.41), es decir, con $f = 0$, tiene a $u = 0$ como única solución. Entonces para cada $f \in L^2$ existe una única solución $u \in H_0^1$ de (3.41)*[16]

[14]En dimensión N no existe un dispositivo conocido, así como lo hay en dimensión uno, para reducirlo al caso simétrico.

[15]En otras palabras, (3.41) tiene solución, si y solo si, f satisface las condiciones de ortogonalidad d.

[16]Note lo cercana que es la relación entre existencia y unicidad de soluciones de problemas elípticos. Esta considerable relación es un consecuencia de la alternativa de Fredholm (Teorema 1.97)

Notación

Notaciones Generales

$A^c, \mathbb{R}^N \setminus A$	Complemento del conjunto A
Ω	Subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$
$A \subset\subset B$	A está fuertemente incluido en B, es decir, $\bar{A} \subset B$ y $\bar{A}$ es compacto
$E^\star$	Espacio dual
$\vert \cdot \vert$	Norma Hilbert
$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy$	Producto de convolución
$\langle \, , \, \rangle$	Producto interno en la dualidad de $(E^\star, E)$, ie, $\langle f, x \rangle := f(x)$
$M^\perp$	Complemento ortogonal de M
$D(A)$	Dominio del operador A
$\Vert x \Vert$	Norma de x
$B_E = \{x \in E : \Vert x \Vert \leq 1\}$	Bola unitaria cerrada
$D_i u$	Derivada débil de u respecto a la i-ésima componente
$\nabla u = (D_1 u, D_2 u, \ldots, D_N u)$	Gradiente débil de la función u
$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\vert\alpha\vert} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}$	Operador diferencial
$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplaciano de u
$\mathbf{1}_K$	función característica del conjunto K (toma el valor 1 en K y 0 en el resto de su dominio)
$\vert A \vert$	Medida del conjunto A
$\check{f}(x) = f(-x)$	
$Supp\ f$	Soporte de la función f, ie, $Supp\ f = \overline{\{x \in \mathscr{D}_f : f(x) \neq 0\}}$
$(\tau_h(f)) = f(x+h)$	Desplazamiento de la función *f*.
$\mathcal{L}(E, F)$	Espacio de operadores lineales acotados de E en F.
$\mathcal{K}(E, F)$	Conjunto de operadores compactos de *E* en *F*
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	Subconjunto abierto en $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega = \mathit{\Gamma}$	Frontera de Ω

Espacios de Funciones

$C_c(\Omega)$	Espacio de funciones continuas con soporte compacto en Ω
$C^k(\Omega)$	Espacio de funciones que tienen hasta k -ésima derivada continua sobre $\Omega, k \geq 0$
$C_c^\infty(\Omega) = \cap_{k\geq 0} C_c^k(\Omega)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables
$L^p_{loc}(\Omega)$	Espacio de funciones f tales que $f\mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.
$L^1_y(\Omega_2) := L^1(\{x\} \times \Omega_2)$	
$C^k(\bar{\Omega})$	Funciones en $C^k(\Omega)$ tal que para cada multi índice α con $\lvert\alpha\rvert \leq k$, la función $x \longmapsto D^\alpha u(x)$ admite una extensión continua a $\bar{\Omega}$
$W_0^{1,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega), W^{1,p}(\Omega), H^1(\Omega), H_0^1(\Omega), H^m(\Omega)$	Espacios de Sobolev

Bibliografía

[1] Brezis Haim, Functional Analysis, Sobolev Spaces y Partial Differential Equations. - New York : Springer, 2010.

[2] Erwin Kreyszig, Introductory Functional Analisys with Applications. - New York: John Wiley, 1978.

[3] H. L. Royden P. M. Fitz Patrick Real Analysis . - China : Pearson Education Asia Ltd, 2010. - Fourth Edition.

[4] Clapp, M. (2005). Análisis Matemático I. México.

[5] Haaser, N. B., La Salle, J. P. & Sullivan, J. A. (1998). Análisis Matemático, Curso Intermedio. México: TRILLAS.

[6] Rudin, W. (1980). Principios de Análisis Matemático (Tercera ed.). México: McGraw Hill.