UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE GRADO:

PRINCIPIOS DE HOMOLOGÍA Y FUNTOR

PRESENTADO POR:

ROSA CÁNDIDA RODRÍGUEZ LARÍN

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICA

DOCENTE DIRECTOR:

LIC. JOSÉ FREDY VÁSQUEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, OCTUBRE DE 2017

SAN MIGUEL EL SALVADOR CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

MTRO. ROGER ARMANDO ARIAS

RECTOR

DR. MANUEL DE JESÚS JOYA

VICE-RECTOR ACADÉMICO

ING. NELSON BERNABÉ GRANADOS

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO

MTRO. CISTOBAL RÍOS

SECRETARIO GENERAL

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN

FISCAL

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR ORIENTAL

AUTORIDADES

ING. JOAQUÍN ORLANDO MACHUCA GÓMEZ

DECANO

LIC. CARLOS ALEXANDER DÍAZ

VICE-DECANO

LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNÁNDEZ

SECRETARIO GENERAL

Índice general

Introducción

La matemática es la base fundamental por la cual el hombre ha comprendido el mundo y su entorno, al tratar de analizar cada acontecimiento y encontrarle un sentido lógico. Desde la antigüedad el hombre ha necesitado formas de cómo medir una distancia, la cantidad de comida que necesitarían, como muchas otras actividades básicas y para eso crearon tipos de medidas que los ayudarían en ese proceso. Pero la necesidad de poder comunicarse con las demás personas, los llevo a crear un sistema de medidas que todos pudieran utilizar.

Pero cuando más evolucionaba el hombre y sus conocimientos, se dieron cuenta de que se podían generalizar los conceptos aritméticos y los axiomas que lo regían, a algo mucho más grande que llamaron álgebra. Pero, no es hasta a finales del siglo XIX que algunos matemáticos reescribieron los principales temas y fueron reestructurando los axiomas que regían el álgebra y encontraron estructuras y generalizaciones más fuertes de las que se habían encontrado siglos antes, eso dio paso a muchas investigaciones en la rama de la matemática teniendo como base el álgebra elemental. Fue así que se desarrollaron el álgebra moderna, la teoría de categorías, la topología, entre otras, que fueron pilares fundamentales para la investigación del álgebra homológica que es lo que se estudiara en el presente trabajo.

El estudio bibliográfico se iniciara con la teoría de módulos que se ha desarrollado con anterioridad en el álgebra abstracta, también se estudiaran las homologías, así como las categorías y los funtores, ya que son algunas de las bases fundamentales para el desarrollo de el Álgebra Homológica, así mismo, se estará trabajando con ejercicios resueltos y algunos propuestos, para procurar de que haya un mejor entendimiento de los temas a tratar.

Antecedentes

Los inicios de el álgebra homológica se dan a finales del siglo XIX, cuando matemáticos empezaron a estudiar más profundamente el álgebra elemental, de lo cual llegaron a constatar muchos hechos importante para la teoría matemática como lo es el aceptar el grupo como un elemento algebraico, del cual se basa el álgebra moderna y sus bases para la teoría de anillos y la teoría de módulos. También se debe el descubrimiento y la generalización de la teoría de categorías. No es hasta principios del siglo XX, en que se pudieron formalizar la realización de las diversas ramas de la matemática, utilizando la teoría de categorías y funtores. El cual se acepto rápidamente por los matemáticos como el lenguaje más adecuado, para la expresión de muchas ideas. El álgebra homológica empezó a ser estudiada a partir de los años 40, teniendo como orígenes la topología combinatoria y el álgebra moderna, principalmente por Henri Poincaré y David Hilbert. No es hasta, el estudio de los grupos fundamentales de espacios topológicos, que se considera como una asignatura independiente de la topología algebraica. Fue desarrollada y estudiada en los 40 por los matemáticos, Maclane, Eilenberg, Hopf, Baer, Fadeev, Eckmann y otros. Con lo cual en 1956 se da la publicación del libro de Cartan y Eilenberg, que fue el libro base de muchos matemáticos para seguir estudiando el álgebra homológica. El desarrollo del álgebra homológica está estrechamente entrelazado con la aparición de la teoría de categorías. Y su ámbito de influencia se ha ampliado gradualmente y en la actualidad incluye álgebra conmutativa, geometría algebraica , la teoría algebraica de números , teoría de la representación, la física matemática, álgebras de operadores, análisis complejo, y la teoría de ecuaciones diferenciales parciales .

Justificación

A través de la experiencia obtenida como estudiante de la carrera de Licenciatura en Matemática, ha sido posible observar que para algunos estudiantes hay dificultad en la comprensión de las diferentes estructuras algebraicas, requiriendo así, una mayor aplicación que en otros cursos.

Por tanto, el presente perfil de tesis se basará en investigar sobre los principios que rigen el estudio de Álgebra Homológica, y tratará de hacer énfasis en el desarrollo de estructuras algebraicas conocidas pero desde una perspectiva diferente, e incitará a ampliar el pensamiento abstracto de los conocimientos matemáticos.

Entre los temas que formarán parte de la investigación están: la teoría de módulos, homomorfismos, categorías y funtores.

Intentando presentar el trabajo de una manera accesible para su comprensión, desarrollando teoría y ejemplos detalladamente, así como ejercicios propuestos con algunas sugerencias para su solución.

Objetivos de la Investigación

Objetivo General

- Establecer las Homologías y Funtores como bases para el Álgebra Homológica

Objetivos Específicos

- Mostrar la relación entre los homomorfismos y módulos, y su relación en el desarrollo del Álgebra Homológica.
- Desarrollar ejemplos que sirvan como herramienta en la comprensión de la teoría.
- Dar a conocer los principios básicos de la teoría de categorías.
- Mostrar los funtores y como se relacionan con la teoría de módulos.

Capítulo 1

Módulos y Homologías

1.1. Módulos

Sea R un anillo con identidad 1$\neq$ 0 y sea A un grupo abeliano. Denotemos por End(A) a el anillo de endomorfismos de A, es decir el conjunto de todos los morfismos de A en A, dotado de la estructura de anillo definida por las leyes de composición (a $\in$ A)

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$$
$$(f \cdot g)(a) = f(g(a))$$

Denotaremos el elemento neutro o identidad del End(A) por I=id_A

Definición 1.1.1
Sean A y B anillos. Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación de A en B. Diremos que f es un morfismo de las estructuras de anillo, o simplemente un morfismo, si cualesquiera que sean $x, y \in A$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

y, además, si A y B poseen elementos identidad $f(1_A) = 1_B$.

Observación 1_A se refiere a la identidad en el anillo A y 1_B representa la identidad en el Anillo B, en lo que se sigue del material las identidades se representaran solamente por 1.

Ahora que se ha definido el morfismo de anillos, se definira lo que es una representación, como sigue.

Definición 1.1.2
Se llama **representación** de R a todo morfismo de anillos

$$\rho : R \longrightarrow End(A)$$

Entonces, para cada r $\in$ R, $\rho(r)$ es un morfismo de A y se satisfacen las propiedades

$$\rho(r_1 + r_2) = \rho(r_1) + \rho(r_2)$$
$$\rho(r_1 \cdot r_2) = \rho(r_1) \cdot \rho(r_2)$$
$$\rho(1) = I$$

Se puede decir que R opera sobre A por la manera en como se ha definido anteriormente, por lo que los elementos de R son operadores de A, así escribiremos de ahora en adelante:

$$\begin{aligned} \rho(r)(a) &= r \cdot a \\ \rho : R &\longrightarrow End(A) \\ r \mapsto \quad & \rho(r) : A \longrightarrow A \\ & \qquad\qquad a \mapsto (\rho(r))(a) \end{aligned}$$

El hecho de que $\rho(r)$ sea un morfismo se traduce en la propiedad

$$r \cdot (a_1 + a_2) = r \cdot a_1 + r \cdot a_2$$

Prueba: Sea $r \in R$ y $a_1, a_2 \in A$

$$\begin{aligned} r \cdot (a_1 + a_2) &= \rho(r)(a_1 + a_2) \\ &= \rho(r)(a_1) + \rho(r)(a_2) \\ &= r \cdot a_1 + r \cdot a_2 \end{aligned}$$

Así se pueden reescribir las propiedades de la definición 1.1.2, de la siguiente manera,donde $r, r_1, r_2 \in R$ y $a, a_1, a_2 \in A$:

- $(r_1 + r_2) \cdot a = r_1 \cdot a + r_2 \cdot a$

  Prueba: Sea $r_1, r_2 \in R$ y $a \in A$

$$\begin{aligned}
(r_1 + r_2)(a) &= \rho(r_1 + r_2)(a) \\
&= (\rho(r_1) + \rho(r_2))(a) \\
&= \rho(r_1)(a) + \rho(r_2)(a) \\
&= r_1 \cdot a + r_2 \cdot a
\end{aligned}$$

- $(r_1 \cdot r_2) \cdot a = r_1 \cdot (r_2 \cdot a)$

  Prueba: Sea $r_1, r_2 \in R$ y $a \in A$

$$\begin{aligned}
(r_1 \cdot r_2) \cdot a &= \rho(r_1 \cdot r_2)(a) \\
&= (\rho(r_1) \cdot \rho(r_2))(a) \\
&= \rho(r_1) \cdot (\rho(r_2) \cdot a) \\
&= r_1 \cdot (r_2 \cdot a)
\end{aligned}$$

- $1 \cdot a = a$

  Prueba: Sea $1 \in R$ y $a \in A$

$$\begin{aligned}
1 \cdot a &= \rho(1)(a) \\
&= 1 \cdot a \\
&= a
\end{aligned}$$

Con estas herramientas podemos definir lo que es un R-módulo izquierdo de la manera que sigue.

Definición 1.1.3
Se llama estructura de *módulo a la izquierda sobre el anillo R*, o también estructura de *R-módulo a la izquierda sobre A*, a la estructura determinada sobre A por la aplicación $R \times A \longrightarrow A$, tal que si

$$(r, a) \mapsto r \cdot a$$

se satisfacen las propiedades:

m1) $r \cdot (a_1 + a_2) = r \cdot a_1 + r \cdot a_2$

m2) $(r_1 + r_2) \cdot a = r_1 \cdot a + r_2 \cdot a$

m3) $(r_1 \cdot r_2) \cdot a = r_1 \cdot (r_2 \cdot a)$

m4) $1 \cdot a = a$

cualesquiera que sean $a, a_1, a_2 \in A$ y $r, r_1, r_2 \in R$.

Notas:

- Una aplicación del tipo mencionado en la definición se suele llamar ley de composición externa
- m1) y m2) expresan que la aplicación $(r, a) \longrightarrow r \cdot a$ es bilineal
- m3) expresa un tipo de asociatividad de la ley de composición
- m4) se expresa diciendo que A es un R-módulo a la izquierda unitario

Una representación de R sobre A determina una estructura de R-módulo a la izquierda, como se acaba de ver.

¿Puede una estructura de R-módulo a la izquierda, definir una representación de R sobre A?

Supongamos definida sobre A una estructura de R-módulo a la izquierda por una aplicación $(r, a) \longrightarrow r \cdot a$.

De m1) podemos ver que los elementos de R “operan” linealmente sobre A.

Por lo tanto sugiere lo siguiente.

Sea

$$\rho : R \longrightarrow End(A)$$

definida por

$$\rho(r)(a) = r \cdot a$$

si $r \in R$ y $a \in A$. Entonces, m2), m3) y m4) no dicen otra cosa que ρ es un morfismo de anillo R en el anillo End(A).

Así se ha probado que existe una correspondencia biyectiva entre representaciones del anillo R en End(A) y estructuras de R-módulos a la izquierda definidas sobre A.

Ejemplo 1.1.1

Todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo a la izquierda, en forma natural

Solución: Para probar que todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo debemos encontrar la representación de $\mathbb{Z}$,

$$\rho : \mathbb{Z} \longrightarrow End(A).$$
$$m \mapsto \rho : A \longrightarrow A$$
$$a \mapsto \rho(m)(a) = m \cdot a$$

Se sabe que la representación de $\mathbb{Z}$ es:

$$\rho(m)(a) = m \cdot a$$
$$\rho(m)(a) = ma$$

donde:

$a + a + ... + a$	(m sumandos), si $m > 0$
$0,$	si $m = 0$
$(-a) + (-a) + ... + (-a)$	(-m sumandos), si $m < 0$

Tomando $m > 0$, probaremos las propiedades para que sea un R-módulo a la izquierda.

- m1) Sea $a_1, a_2 \in A$ y $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} m \cdot (a_1 + a_2) &= (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2) + ... + (a_1 + a_2) \ ; \ m \ veces \\ &= a_1 + (a_2 + a_1) + ... + (a_2 + a_1) + a_2 \ ; \ asociando \\ &= a_1 + (a_1 + a_2) + ... + (a_1 + a_2) + a_2 \ ; \ conmutando \end{aligned}$$

realizando los dos pasos anteriores (m-2)-veces se obtiene

$$\begin{aligned} m \cdot (a_1 + a_2) &= a_1 + a_1 + ... + a_1 + a_2 + a_2 + ... + a_2 \\ &= (a_1 + a_1 + ... + a_1) + (a_2 + a_2 + ... + a_2) \ ; \ asociando \\ &= m \cdot a_1 + m \cdot a_2 \end{aligned}$$

- m2) Sea $a \in A$ y $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (m+n) \cdot a &= a + a + ... + a \ ; \ m + n \ veces \\ &= (a + a + ... + a) + a + a + ... + a \ ; \ asociando \ m \ veces \ a \\ &= (a + a + ... + a) + (a + a + ... + a) \ ; \ asociando \ n \ veces \ a \\ &= m \cdot a + n \cdot a \end{aligned}$$

- m3) Sea $a \in A$ y $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (m \cdot n) \cdot a &= (n + n + ... + n) \cdot a \ ; \ m \ veces \ n \\ &= n \cdot a + (n + ... + n) \cdot a \ ; \ por \ m2) \end{aligned}$$

realizando el paso anterior (m-1)-veces mas, se tiene

$$\begin{aligned} (m \cdot n) \cdot a &= n \cdot a + n \cdot a + ... + n \cdot a \ ; \ m \ veces \\ &= m \cdot (n \cdot a) \end{aligned}$$

- m4) Sea $a \in A$ y $1 \in \mathbb{Z}$ donde 1 es la identidad en $\mathbb{Z}$

$1 \cdot a = a \ ; \ 1 \ vez$

Las pruebas para $m < 0$ y $m = 0$ son análogas.

Ejemplo 1.1.2

Si A={0}, entonces A admite una única estructura de R-módulo, cualquiera que sea el anillo R.

Se deben probar las 4 propiedades para que sea un R-módulo, pero se puede observar que, como el único elemento de A es 0, cualquier producto que se realice por cualquier elemento de R, siempre sera 0.

Denotaremos dicha estructura de R-módulo simplemente por 0, ya que es el único elemento que posee.

Ejemplo 1.1.3

Sea R un anillo. El producto

$$R \times R \longrightarrow R$$

$$(r, x) \mapsto r \cdot x$$

determina sobre R una estructura de R-módulo a la izquierda. Ya que por definición de anillo se cumple que:

- Para a,b,c $\in$ R, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Para a,b,c $\in$ R, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- Para a,b,c $\in$ R, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Para 1,a $\in$ R, $1 \cdot a = a$

Y esas son las condiciones para que sea un R-módulo a la izquierda.

Como se ha visto, se han definido los R-módulos a la izquierda, para los cuales se utilizo el producto por la izquierda. Pero que pasa, si en vez de realizar el producto por la izquierda, lo realizamos por la derecha.

¿Poseerá las propiedades de una representación?

¿Definirá una estructura de R-módulo?

Para responder estas inquietudes, desarrollaremos lo siguiente.

Denotemos por $\varrho : R \longrightarrow End(A)$ tal que

$$(r, a) \mapsto \varrho(r)(a) = a \cdot r$$

Donde los elementos de A operan sobre la derecha a los elementos de R.

Ejemplo 1.1.4

Reescriba las condiciones m1), m2), m3), m4) utilizando el producto por la derecha.

Sean $a, a_1, a_2 \in A$ y r, r_1, r_2, se tiene que:

- ¿$(a_1 + a_2) \cdot r = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r$?

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2) \cdot r &= \varrho(r)(a_1 + a_2)\\ &= \varrho(r)(a_1) + \varrho(r)(a_2)\\ &= a_1 \cdot r + a_2 \cdot r\end{aligned}$$

- ¿$a \cdot (r_1 + r_2) = a \cdot r_1 + a \cdot r_2$?

$$\begin{aligned}a \cdot (r_1 + r_2) &= \varrho(r_1 + r_2)(a)\\ &= (\varrho(r_1) + \varrho(r_2))(a)\\ &= \varrho(r_1)(a) + \varrho(r_2)(a)\\ &= a \cdot r_1 + a \cdot r_2\end{aligned}$$

- ¿ $a \cdot (r_1 \cdot r_2) = (a \cdot r_1) \cdot r_2$?

$$\begin{aligned}a \cdot (r_1 \cdot r_2) &= \varrho(r_1 \cdot r_2)(a)\\ &= (\varrho(r_1) \cdot \varrho(r_2))(a)\\ &= \varrho(r_1)(\varrho(r_2)(a))\\ &= \varrho(r_1)(a \cdot r_2)\\ &= (a \cdot r_2) \cdot r_1\end{aligned}$$

- ¿$a \cdot 1 = a$?

$$\begin{aligned} a \cdot 1 &= \varrho(1)(a) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a \end{aligned}$$

Hemos visto que el producto por la derecha posee las mismas propiedades de una **representación**.

Por lo que de forma análoga se definirán los R-módulos a la derecha, como sigue:

Definición 1.1.4
Se llama estructura de *módulo a la derecha sobre el anillo R*, o también estructura de *R-módulo a la derecha sobre A* a la estructura determinada sobre A por toda aplicación $R \times A \longrightarrow A$, tal que si

$$(r, a) \mapsto a \cdot r$$

se satisfacen las propiedades

m1') $(a_1 + a_2) \cdot r = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r$

m2') $a \cdot (r_1 + r_2) = a \cdot r_1 + a \cdot r_2$

m3') $a \cdot (r_1 \cdot r_2) = (a \cdot r_2) \cdot r_1$

m4') $a \cdot 1 = a$

cualesquieran que sean $a, a_1, a_2 \in A$ y $r, r_1, r_2 \in R$.

Si R es un anillo conmutativo, entonces las propiedades son equivalentes y no es necesario hacer distinciones a la izquierda o a la derecha.

Lema 1.1.5
Para cualquier elemento u de un R-módulo A, se cumple

a) $0 \cdot u = 0$, b) $(-1) \cdot u = -u$

Demostración:

Sea $u \in A$

a)

$$u = 1 \cdot u$$
$$u = (1 + 0) \cdot u$$
$$u = 1 \cdot u + 0 \cdot u$$
$$u = u + 0 \cdot u$$
$$-u + u = -u + u + 0 \cdot u$$
$$0 = 0 + 0 \cdot u$$
$$0 = 0 \cdot u$$

b)

$$0 = 0 \cdot u$$
$$0 = (1 + (-1)) \cdot u$$
$$0 = 1 \cdot u + (-1) \cdot u$$
$$0 = u + (-1) \cdot u$$
$$-u + 0 = -u + u + (-1) \cdot u$$
$$-u = 0 + (-1) \cdot u$$
$$-u = (-1) \cdot u$$

■

Definición 1.1.6
Sea A un anillo y $\sim$ una relación de equivalencia definida sobre A. El morfismo $\varsigma : A \longrightarrow A/\sim$ se le denomina **morfismo canónico**. Si I es el ideal bilateral asociado a $\sim$, se puede escribir también:

$$A/\sim \cong A/I$$

Teniendo como base lo que es un morfismo canónico, veremos cuando un diagrama de anillos es conmutativo, con el siguiente lema.

Lema 1.1.7
Sea R y S anillos, sea I un ideal de R. Sea el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & S \\ R/I \arrow[ur, "\varpi"'] & \end{tikzcd}$$

donde $R \longrightarrow R/I$ denota el morfismo canónico $r \longrightarrow \bar{r}$. La condición necesaria y suficiente para que exista un morfismo ϖ, tal que el diagrama sea conmutativo, es que

$$I \subset Ker(\rho)$$

Con esas propiedades, el morfismo ϖ es único.

Demostración:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & S \\ R/I \arrow[ur, "\varpi"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $I \subset Ker(\rho)$, $r \in R$ y $\overline{r} \in R/I$ su clase de equivalencia en el anillo cociente R/I
Definamos como ϖ la aplicación

$$\varpi : R/I \longrightarrow S$$
$$r + I \mapsto \varpi(r + I) = \rho(r)$$

Sean $\overline{r} = \bar{t}$ donde $\overline{r} = r + I, \bar{t} = t + I$, además $r, t \in R$

Así $\varpi(r + I) = \rho(r)$ y $\varpi(t + I) = \rho(t)$

$$\begin{aligned} r + I = t + I &\Rightarrow r - t \in I \\ &\Rightarrow \theta(r - t) = I \\ &\Rightarrow \varpi((r - t) + I) = \varpi(I) \\ &\Rightarrow \rho(r - t) = \rho(0) \ ; \ por\ ser\ morfismo \\ &\Rightarrow \rho(r) - \rho(t) = 0 \\ &\Rightarrow \rho(r) = \rho(t) \end{aligned}$$

Hemos visto que ϖ es una función. Ahora probaremos la unicidad de ϖ.

Supongamos que existe $h : R/I \longrightarrow S$ tal que $h \circ \theta = \rho$.

Así $h \circ \theta = \rho$ y $\varpi \circ \theta = \rho$, sea $r \in R$

$$\begin{aligned} h(r + I) &= \rho(r) \ ; \ \forall r + I \in R/I \\ &= \varpi(r + I) \ ; \ \forall r + I \in R/I \end{aligned}$$

Así $h = \varpi$

Por último veremos si ϖ es un morfismo

Sea $r + I, t + I \in R/I$

$$\begin{aligned} \varpi((r + I) + (t + I)) &= \varpi((r + t) + I) \\ &= \rho(r + t) \\ &= \rho(r) + \rho(t) \ ; \ por\ ser \rho\ morfismo \\ &= \varpi(r + I) + \varpi(t + I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varpi((r+I)\cdot(t+I)) &= \varpi(rt+It+rI+I)\\
&= \rho(rt+It+rI)\\
&= \rho(rt)+\rho(It)+\rho(rI)\\
&= \rho(r)\rho(t)+\rho(I)\rho(t)+\rho(r)\rho(I)\\
&= \rho(r)\rho(t)+0\rho(t)+\rho(r)0\\
&= \rho(r)\rho(t)\\
&= \varpi(r+I)\varpi(t+I)
\end{aligned}$$

Así $\varpi : R/I \longrightarrow S$ es una aplicación que hace conmutativo el diagrama.

Recíprocamente, sea $\varpi : R/I \longrightarrow S$ es un morfismo que hace conmutativo el diagrama y sea $y \in I$

$$\begin{aligned}
y \in I &\Rightarrow \theta(y) = y+I = I\\
&\Rightarrow \theta(y) = 0_{R/I}\ ;\ cero\ en\ R/I\\
&\Rightarrow \varpi(\theta(y)) = \varpi(0_{R/I})\\
&\Rightarrow (\varpi\circ\theta)(y) = 0\ ;\ \varpi\ es\ morfismo\\
&\Rightarrow \rho(y) = 0\\
&\Rightarrow y \in Ker(\rho)
\end{aligned}$$

Asi $I \subset Ker(\rho)$

■

El siguiente resultado permite definir, en ciertas condiciones, sobre un R-módulo A una estructura de R/I -módulo, donde I denota un ideal(bilateral)de R.

Proposición 1.1.8
Sea A un R-módulo y sea I un ideal de R. Si $I \cdot A = \{y \cdot a / y \in I \ y \ a \in A\} = 0$, entonces existe sobre A una única estructura de R/I -módulo con la propiedad

$$(*) \qquad r \cdot a = \bar{r} \cdot a$$

si $a \in A$, $r \in R$ y $\bar{r}$ es la imagen de r por el morfismo canónico $R \longrightarrow R/I$.

Demostración:

Sea $\varpi : R/I \longrightarrow End(A)$,donde:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & End(A) \\ R/I \arrow[ur, "\varpi"'] & \end{tikzcd}$$

La condición necesaria y suficiente para que ϖ sea un morfismo es que $I \subset Ker(\rho)$ por Lema 1.1.7

Así, sea $r \in I$, por hipótesis $r \cdot a = 0$, ya que $I \cdot A = 0$, así

$$\begin{aligned} (\rho(r))(a) = r \cdot a &\Rightarrow \rho(r)(a) = 0 \ ; \ \forall a \in A \\ &\Rightarrow \rho(r) = 0 \\ &\Rightarrow r \in Ker(\rho) \end{aligned}$$

Por lo que, $I \subset Ker(\rho)$

■

Definición 1.1.9
Sea A un R-módulo. Diremos que un subconjunto A' de A es un submódulo de A si

s1) A' es un subgrupo del grupo abeliano aditivo A

s2) A' es **estable** por R, es decir

$$r \in R, a' \in A' \Rightarrow r \cdot a' \in A'$$

Ejemplo 1.1.5
Si A es un módulo, entonces $\{0\}$ y A son submódulos, la prueba es trivial, por la naturaleza de los subgrupos.

Ejemplo 1.1.6
Sea A un $\mathbb{Z}$-módulo, todo subgrupo A' de un grupo abeliano aditivo A es un submódulo sobre $\mathbb{Z}$

Proposición 1.1.10
Un subconjunto no vacío A' de un R-módulo A es un submódulo si, y sólo si, son válidas las propiedades siguientes

i) $x, y \in A' \Rightarrow x - y \in A'$

ii) $r \in R, x \in A' \Rightarrow r \cdot x \in A'$

Demostración:

Probando la inclusión hacia la derecha.

i) A' es un submódulo de $A \;\Rightarrow\; x, y \in A' \Rightarrow x - y \in A'$

A' es un submódulo de A, así A' es subgrupo aditivo de A

Por lo que, para $x, y \in A'$, se tiene que:

$$x, y \in A' \Rightarrow x + y \in A'$$
$$y \in A' \Rightarrow -y \in A'$$

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 \cdot y \\
0 &= (1 + (-1)) \cdot y \\
0 &= y + (-1)y \\
-y + 0 &= -y + y + (-1) + y \\
-y &= (-1)y \\
x - y &= x + (-1)y
\end{aligned}
$$

Pero $x + (-1)y \in A'$, así $x - y \in A'$.

ii) A' es un submódulo de $A \Rightarrow r \in R, x \in A' \Rightarrow x \cdot y \in A'$

Es evidente, ya que al ser A' estable, cumple las condiciones de la parte $ii)$

La implicación hacia la izquierda es análoga, tomando como base el mismo razonamiento.

■

Lema 1.1.11
Si A' es un submódulo de un R-módulo A, entonces, para todo $\alpha \in R$ y $r \in A$, tenemos

$$\{\alpha(r + a)/a \in A'\} \subset \alpha u + A'$$

Demostración:

A' es submódulo de A, sea $\alpha \in R, a \in A'$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\alpha \in R, a \in A' &\Rightarrow \alpha a \in A' \\
&\Rightarrow \alpha r + \alpha a \in \alpha r + A' \\
&\Rightarrow \alpha(r + a) \in \alpha r + A'
\end{aligned}
$$

Así, $\forall \alpha \in R, r \in A$ se tiene que $\{\alpha(r + a)/a \in A'\} \subset \alpha r + A'$

■

1.2. Morfismos

Sea R un anillo con identidad $1 \neq 0$. Sean A y B, R-módulos a la izquierda. Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación de A en B.

Definición 1.2.1
Se dice que f es un mórfismo de módulos, o simplemente un morfismo, si para todo $x, y, a \in A, r \in R$, se cumplen las siguientes propiedades

n1) f es un morfismo de grupos: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

n2) f preserva operadores: $f(r \cdot a) = r \cdot f(a)$

Proposición 1.2.2
Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de módulos. Entonces

i) $Ker(f) = \{x/f(x) = 0\}$ es un submódulo de A

ii) $Im(f) = \{y/y \in B,\ existe\ x \in A,\ tal\ que\ y = f(x)\}$ es submódulo de B

iii) f es un morfismo inyectivo si, y sólo si, $Ker(f) = 0$

Demostración:

i) Para que $Ker(f)$ sea submódulo de A, se debe probar que:

1. $Ker(f)$ es un subgrupo abeliano aditivo, así probaremos si $Ker(f)$ es cerrado y posee inverso.

   Cerradura: Sea $x, y \in Ker(f)$

$$\begin{aligned} x, y \in Ker(f) &\Rightarrow f(x) = 0, f(y) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) + f(y) = 0 + 0 \\ &\Rightarrow f(x) + f(y) = 0 \\ &\Rightarrow f(x+y) = 0\ ;\ ya\ que f \in Hom_R(A, B) \\ &\Rightarrow x + y \in Ker(f) \end{aligned}$$

Inverso: Sea $y \in Ker(f)$

$$\begin{aligned} y \in Ker(f) &\Rightarrow f(y) = 0 \\ &\Rightarrow f(y) - f(y) = -f(y) \\ &\Rightarrow 0 - 0 = -f(y) \\ &\Rightarrow 0 = f(-y) \; ; \; ya \; que \; f \in Hom_R(A, B) \\ &\Rightarrow -y \in Ker(f) \end{aligned}$$

Abeliano: Sea $x, y \in Ker(f)$

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ &= f(y) + f(x) \; ; \; ya \; que \; f \in Hom_R(A, B) \\ &= f(y + x) \end{aligned}$$

Así $Ker(f)$ es un subgrupo abeliano aditivo.

2. Ahora veremos si $Ker(f)$ es estable.Sea $r \in A, a \in Ker(f)$

$$\begin{aligned} a \in Ker(f) &\Rightarrow f(a) = 0 \\ &\Rightarrow r \cdot f(a) = r \cdot 0 \\ &\Rightarrow f(ra) = 0 \; ; \; ya \; que \; f \in Hom_R(A, B) \\ &\Rightarrow r \cdot a \in Ker(f) \end{aligned}$$

Asi $Ker(f)$ es submódulo de A.

ii) Para que $Im(f)$ sea submódulo de B, debemos probar que:

1. $Im(f)$ es un subgrupo abeliano aditivo.

   Cerradura: Sea $y_1, y_2 \in Im(f)$

$$\begin{aligned} y_1, y_2 \in Im(f) &\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in A \; tal \; que \; y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \\ &\Rightarrow y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) \\ &\Rightarrow y_1 + y_2 = f(x_1 + x_2) \; ; \; ya \; que \; f \in Hom_R(A, B) \\ &\Rightarrow \exists x_1 + x_2 \in A \; ; \; ya \; que \; A \; es \; un \; R - mdulo \\ &\Rightarrow y_1 + y_2 \in Im(f) \end{aligned}$$

Inverso: Sea $y \in Im(f)$

$$
\begin{aligned}
y_1 \in Im(f) &\Rightarrow \exists\, x_1 \in A\ tal\ que\ y_1 = f(x_1) \\
&\Rightarrow 0 = 0 \cdot y \\
&\Rightarrow 0 = (1 + (-1))y_1 \\
&\Rightarrow 0 = y_1 + (-1)y_1 \\
&\Rightarrow -y_1 = -y_1 + y_1 + (-1)y_1 \\
&\Rightarrow -y_1 = (-1)y_1 \\
&\Rightarrow -y_1 = f((-1)x_1)\ ;\ ya\ que\ f \in Hom_R(A, B) \\
&\Rightarrow -y_1 = f(-x_1) \\
&\Rightarrow \exists\ -x_1 \in A\ ;\ ya\ que\ A\ es\ un\ R - mdulo \\
&\Rightarrow -y_1 \in Im(f)
\end{aligned}
$$

Abeliano: Sea $y_1, y_2 \in Im(f)\ tal\ que\ \exists\, x_1, x_2 \in A, y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$

$$
\begin{aligned}
y_1 + y_2 &= f(x_1) + f(x_2) \\
&= f(x_1 + x_2)\ ;\ ya\ que\ f \in Hom_R(A, B) \\
&= f(x_2 + x_1) \\
&= f(x_2) + f(x_1) \\
&= y_2 + y_1
\end{aligned}
$$

Así $Im(f)$ es un subgrupo abeliano aditivo.

2. Ahora veremos si $Im(f)$ es estable. Sea $r \in B, a \in Im(f)$

$$
\begin{aligned}
a \in Im(f) &\Rightarrow \exists\, x \in A\ tal\ que\ f(x) = a \\
&\Rightarrow f(x) = a \\
&\Rightarrow rf(x) = ra \\
&\Rightarrow f(rx) = ra \\
&\Rightarrow \exists\, rx \in A \\
&\Rightarrow r \cdot a \in Im(f)
\end{aligned}
$$

Por lo que, $Im(f)$ es un submódulo de B.

iii) f es un morfismo inyectivo, así para cualesquiera $x, y \in A, x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$

$$\begin{aligned} x, y \in A &\Rightarrow x = y \\ &\Rightarrow x - y = 0 \\ &\Rightarrow f(x - y) = 0 \\ &\Rightarrow f(0) = 0 \end{aligned}$$

Así el único elemento que hace cero al aplicarle f es cero.

Por tanto $Ker(f) = 0$.

■

Teniendo la definición de morfismo de módulos estos se pueden catalogar de la siguiente manera:

a) monomorfismo, si f es inyectiva

b) epimorfismo, si f es sobreyectiva

c) endomorfismo, si A=B

d) isomorfismo, si f es monomorfismo y epimorfismo. Se escribe entonces $A \simeq B$

e) automorfismo, si f es un isomorfismo y A=B

Sean A y B, R-módulos. Sea

$$Hom_R(A, B)$$

la totalidad de morfismos de R-módulos de A en B.

Proposición 1.2.3

1. La ley de composición

$$\begin{aligned} Hom_R(A,B) \times Hom_R(A,B) &\longrightarrow Hom_R(A,B) \\ (f,g) &\longrightarrow f+g \end{aligned}$$

   tal que

   (f+g)(a)=f(a)+g(a)

   define sobre $Hom_R(A,B)$ una estructura de grupo abeliano.

2. Si R es conmutativo, la aplicación

$$(r,f) \longrightarrow r \cdot f$$

   tal que

$$(r \cdot f)(a) = r \cdot f(a)$$

   define sobre el grupo abeliano $Hom_R(A,B)$ una estructura de R-módulo.

Demostración:

1. Cerradura:

   Sea $x, y \in A$ y $f, g \in Hom_R(A,B)$

$$\begin{aligned} (f+g)(x+y) &= f(x+y) + g(x+y) \\ &= f(x) + f(y) + g(x) + g(y) \\ &= f(x) + g(x) + f(y) + g(y) \ ; \ ya \ que \ f,g \in Hom_R(A,B) \\ &= (f+g)(x) + (f+g)(y) \end{aligned}$$

   Asociatividad:

Sea $a \in A$ y $f, g, h \in Hom_R(A, B)$

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(a) &= f(a) + (g + h)(a)\\ &= f(a) + (g(a) + h(a))\\ &= f(a) + g(a) + h(a)\\ &= (f(a) + g(a)) + h(a)\\ &= ((f + g)(a)) + h(a)\\ &= ((f + g) + h)(a)\end{aligned}$$

Elemento neutro:

Supongamos que $\exists\ I \in Hom_R(A, B)\ tal\ que\ f + g + I = I + f + g = f + g$, sea $a \in A$ y $f, g \in Hom_R(A, B)$

$$\begin{aligned}((f + g) + I)(a) &= (f + g)(a)\\ (f + g)(a) + I(a) &= f(a) + g(a)\\ f(a) + g(a) + I(a) &= f(a) + g(a)\\ -f(a) + f(a) + g(a) + I(a) &= -f(a) + f(a) + g(a)\\ -g(a) + g(a) + I(a) &= -g(a) + g(a)\\ I(a) &= 0\ ;\ \forall a \in A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(I + (f + g))(a) &= (f + g)(a)\\ I(a) + (f + g)(a) &= f(a) + g(a)\\ I(a) + f(a) + g(a) &= f(a) + g(a)\\ I(a) + f(a) + g(a) - g(a) &= f(a) + g(a) - g(a)\\ I(a) + f(a) - f(a) &= f(a) - f(a)\\ I(a) &= 0\ ;\ \forall a \in A\end{aligned}$$

Elemento Inverso:

Supongamos que $\forall f + g \in Hom_R(A, B), \exists (f + g)^{-1} \in Hom_R(A, B)$ tal que

$(f+g)+(f+g)^{-1} = (f+g)^{-1}+(f+g) = I(a)$, sea $a \in A$ y $f,g \in Hom_R(A,B)$

$$\begin{aligned}((f+g)+(f+g)^{-1})(a) &= I(a)\\ (f+g)(a)+(f+g)^{-1}(a) &= 0\\ f(a)+g(a)+(f+g)^{-1}(a) &= 0\\ -f(a)+f(a)+g(a)+(f+g)^{-1}(a) &= -f(a)+0\\ -g(a)+g(a)+(f+g)^{-1}(a) &= -g(a)-f(a)\\ (f+g)^{-1}(a) &= -g(a)-f(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((f+g)^{-1}+(f+g))(a) &= I(a)\\ (f+g)^{-1}(a)+(f+g)(a) &= 0\\ (f+g)^{-1}(a)+f(a)+g(a) &= 0\\ (f+g)^{-1}(a)+f(a)+g(a)-g(a) &= 0-g(a)\\ (f+g)^{-1}(a)+f(a)-f(a) &= -g(a)-f(a)\\ (f+g)^{-1}(a) &= -g(a)-f(a)\end{aligned}$$

Abeliano:

Sea $a \in A$ y $f,g \in Hom_R(A,B)$

$$\begin{aligned}(f+g)(a) &= f(a)+g(a)\\ &= g(a)+f(a)\ ;\ ya\ que\ f,g \in Hom_R(A,B)\\ &= (g+f)(a)\end{aligned}$$

Así la estructura

$$\begin{aligned}Hom_R(A,B)\times Hom_R(A,B) &\longrightarrow Hom_R(A,B)\\ (f,g) &\longrightarrow f+g\end{aligned}$$

define una estructura de grupo abeliano.

2. Para que sea un morfismo debe cumplir las propiedades de la definición 1.2.1

   1. Sea $r \in R, f \in Hom_R(A, B), x, y \in A$

$$\begin{aligned}(r \cdot f)(x+y) &= rf(x+y) \\ &= r(f(x)+f(y)) \; ; \; ya\ que\ f \in Hom_R(A,B) \\ &= rf(x)+rf(y) \\ &= (rf)(x)+(rf)(y)\end{aligned}$$

   2. Sea $r, s \in R, f \in Hom_R(A, B), a \in A$

$$\begin{aligned}(rf)(sa) &= r(f(sa)) \\ &= r(sf(a)) \; ; \; ya\ que\ f \in Hom_R(A,B) \\ &= (rs)f(a) \\ &= (sr)f(a) \; ; \; ya\ que\ r,s \in R \\ &= s(rf(a)) \\ &= s((rf)(a))\end{aligned}$$

   Así $(r \cdot f)(a) = r \cdot f(a)$ define una estructura de R-módulo.

■

Proposición 1.2.4
Sean $f : B \longrightarrow C, g : A \longrightarrow B$ morfismo de R-módulos. Entonces la composición $(f \cdot g)(x) = f(g(x))$

$$f \cdot g : A \longrightarrow C$$

es un R-morfismo

Demostración:

Debemos probar las condiciones de la definición 1.2.1, por lo que:

- Sea $f, g \in Hom_R(A, B), x, y \in A$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x+y) &= f(g(x+y)) \\ &= f(g(x)+g(y)) \ ; \ ya \ que \ g \in Hom_R(A,B) \\ &= f(g(x)) + f(g(y)) \\ &= (f \cdot g)(x) + (f \cdot g)(y)\end{aligned}$$

- Sea $r \in R, f+g \in Hom_R(A, B), x \in A$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(r \cdot x) = f(g(r \cdot x)) & \\ &= f(rg(x)) \ ; \ ya \ que \ g \in Hom_R(A,B) \\ &= r(f(g(x))) \\ &= r((f \cdot g)(x))\end{aligned}$$

■

Proposición 1.2.5
Si $h = g \circ f$ denota el producto de dos homomorfismos $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ de R-módulos, entonces las dos proposiciones siguientes son ciertas:

- Si h es monomorfismo, lo es también f
- Si h es epimorfismo, lo es también g

Demostración:

- ¿f es monomorfismo?

  Para que f sea monomorfismo, debemos probar que $Ker(f) = 0$, teniendo como base que h es monomorfismo, tomemos $x \in Ker(f)$

$$\begin{aligned}x \in Ker(f) &\Rightarrow f(x) = 0 \\ &\Rightarrow g(f(x)) = 0 \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x) = 0 \\ &\Rightarrow h(x) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \ ; \text{ ya que } h \text{ es monomorfismo}\end{aligned}$$

Como se tomo un x arbitrario, se tiene que $Ker(f) = 0$

- ¿g es epimorfismo?

  Para que g sea monomorfismo debe cumplir que $Im(g) = Z$.

  Tenemos que $Im(h) = Z$ ya que h es epimorfismo, así debemos probar que $Im(h) = Im(g)$.

  Solamente debemos ver si ¿$Im(h) \subset Im(g)$?

  Sea $z \in Im(h)$

$$\begin{aligned} z \in Im(h) &\Rightarrow h(x) = z \text{ ; para algún } x \in X \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x)) = z \\ &\Rightarrow g(f(x)) = z \\ &\Rightarrow z \in Im(g) \end{aligned}$$

  Así $Im(h) \subset Im(g)$ Por tanto g es epimorfismo

■

Sea $f : A \longrightarrow C$ un morfismo de R-módulos. Sean B y D R-módulos.

Quedan definidos entonces morfismos naturales de grupos abelianos

$$f^* : Hom_R(B, A) \longrightarrow Hom_R(B, C)$$
$$f_* : Hom_R(C, D) \longrightarrow Hom_R(A, D)$$

por

$$f^*(h) = f \cdot h$$
$$f_*(g) = g \cdot f$$

respectivamente. Las definiciones corresponden a los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & C \\ B \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "f^*(h)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_*(g)"'] & C \arrow[dl, "g"'] \\ D & \end{tikzcd}$$

y valen las propiedades siguientes

i) Si $id_A : A \longrightarrow A$ es el morfismo identidad, $(id_A)^* = id_{Hom_R(B,A)}$.

Sea $id_{Hom_R(B,A)} : Hom_R(B,A) \longrightarrow Hom_R(B,A)$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "id_{Hom_R(B,A)}"] \arrow[d, "id_{Hom_R(B,A)}"'] & A \\ A \arrow[ur, "id_A"'] & \end{tikzcd}$$

Donde:

$$id_{Hom_R(B,A)} = id_A \cdot id_{Hom_R(B,A)}$$
$$id_{Hom_R(B,A)} = (id_A)^*$$

ii) Si $u : A \longrightarrow C$ y $v : C \longrightarrow H$ son R-morfismos y B es un R-módulo, entonces $v \cdot u : A \longrightarrow H$ induce

$$(v \cdot u)^* = v^* \cdot u^*$$

o sea

$$\begin{tikzcd} Hom_R(B,A) \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "(v \cdot u)^*"'] & Hom_R(B,C) \arrow[dl, "v^*"] \\ Hom_R(B,H) & \end{tikzcd}$$

Sea $h : B \longrightarrow A$, se tiene que:

$$u^*(h) = u \cdot h$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "u \cdot h"'] & A \arrow[dl, "u"] \\ C & \end{tikzcd}$$

Ahora tenemos que:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u^*(h)"] \arrow[d, "v \cdot u^*(h)"'] & C \arrow[dl, "v"] \\ H & \end{tikzcd}$$

donde $v^*(u^*(h)) = v \cdot u^*(h)$, así en el siguiente diagrama resulta que:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "v \cdot u \cdot h"'] & A \arrow[dl, "v \cdot u"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Así:

$$\begin{aligned}(v \cdot u)^*(h) &= v \cdot u \cdot h \\ &= v \cdot u^*(h) \\ &= v^*(u^*(h)) \\ &= (v^* \cdot u^*)(h)\end{aligned}$$

Por tanto: $(v \cdot u)^* = v^* \cdot u^*$

iii) Si $u : A \longrightarrow C$ y $v : C \longrightarrow H$ y D es un R-módulo, entonces $v \cdot u : A \longrightarrow H$ induce

$$(v \cdot u)_* = u_* \cdot v_*$$

o sea

$$\begin{tikzcd} Hom_R(H,D) \arrow[r, "v_*"] \arrow[d, "(v\cdot u)_*"'] & Hom_R(C,D) \arrow[dl, "u_*"] \\ Hom_R(A,D) & \end{tikzcd}$$

Sea $g : H \longrightarrow D$ tal que:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "g"] & D \\ C \arrow[u, "v"] \arrow[ur, "g\cdot v"'] & \end{tikzcd}$$

y se cumple que: $v_*(g) = g \cdot v$

Ahora, tenemos que:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "v_*(g)"] & D \\ A \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "v_*(g)\cdot u"'] & \end{tikzcd}$$

Así obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "g"] & D \\ A \arrow[u, "v\cdot u"] \arrow[ur, "g\cdot v\cdot u"'] & \end{tikzcd}$$

de lo cual

$$
\begin{aligned}
(v \cdot u)_*(g) &= g \cdot v \cdot u \\
&= v_*(g) \cdot u \\
&= u_*(v_*(g)) \\
&= (u_* \cdot v_*)(g)
\end{aligned}
$$

Por tanto $(v \cdot u)_* = u_* \cdot v_*$

ii') Si $A = H$ en ii) y $v \cdot u = id_A$, entonces $v^* \cdot u^* = id_{Hom_R(B,A)}$

Sea $h : B \longrightarrow A$, se tiene el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "u \cdot h"'] & A \arrow[dl, "u"] \\
C &
\end{tikzcd}
$$

donde se cumple por la conmutatividad del diagrama que: $u^*(h) = u \cdot h$. Ahora tomando el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "u^*(h)"] \arrow[d, "v \cdot u^*(h)"'] & C \arrow[dl, "v"] \\
A &
\end{tikzcd}
$$

tenemos que: $v^*(u^*(h)) = v \cdot u^*(h)$. De los dos diagramas anteriores se puede concluir que:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] & C \arrow[dl, "v"] \\
A \arrow[u, "id_A"] &
\end{tikzcd}
$$

v y u son funciones inversas ya que $id_A = v \cdot u$ por la conmutatividad del diagrama. Así del siguiente diagrama podemos concluir que:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "id_A \cdot h"'] & A \arrow[dl, "id_A"] \\
A &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{aligned}(id_A)^*(h) &= id_A \cdot h \\ &= v \cdot u \cdot h \\ &= v \cdot u^*(h) \\ &= v^*(u^*(h)) \\ &= (v^* \cdot u^*)(h)\end{aligned}$$

Así: $(id_A)^* = v^* \cdot u^*$ y por i) se concluye que $id_{Hom_R(B,A)} = v^* \cdot u^*$.

iii') Si $A = H$ en iii) y $v \cdot u = id_A$, entonces $u_* \cdot v_* = id_{Hom_R(A,D)}$

Sea $g : A \longrightarrow D$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] & D \\ C \arrow[u, "v"] \arrow[ur, "g \cdot v"'] & \end{tikzcd}$$

así $v_*(g) = g \cdot v$, del siguiente diagrama se tiene que:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "v_*(g)"] & D \\ A \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "v_*(g) \cdot u"'] & \end{tikzcd}$$

$u_*(v_*(g)) = v_*(g) \cdot u$, además de $ii')$ tenemos que $id_A = v \cdot u$,así se construye el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] & D \\ A \arrow[u, "id_A"] \arrow[ur, "g \cdot v \cdot u"'] & \end{tikzcd}$$

de donde:

$$\begin{aligned}(id_A)_*(g) &= g \cdot v \cdot u \\ &= v_*(g) \cdot u \\ &= u_*(v_*(g)) \\ &= (u_* \cdot v_*)(g)\end{aligned}$$

Así: $(id_A)_* = u_* \cdot v_*$ se concluye que $id_{Hom_R(A,D)} = u_* \cdot v_*$.

Definición 1.2.6
Sean X e Y R-módulos arbitrarios. Se llama *homomorfismo trivial* de X en Y, el homomorfismo $h : X \longrightarrow Y$ definido por $h(x) = 0$ para todo $x \in X$.

Usaremos el símbolo 0 para denotar el homomorfismo trivial. Es decir, $h = 0$ significara que h es el homomorfismo trivial.

Proposición 1.2.7
Siendo $h : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo arbitrario de un R-módulo X en un R-módulo Y, las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $h = 0$

ii) $Im(h) = 0$

iii) $Ker(h) = X$

Demostración:

- $i) \Rightarrow ii)$

  Por definición $Im(h) = \{y \in Y \mid h(x) = y \; para \; algn \; x \in X\}$, tomando $y \in Im(h)$

$$\begin{aligned} y \in Im(h) &\Rightarrow h(x) = y \text{ ; para algún } x \in X \\ &\Rightarrow h(x) = 0 \text{ ;} \forall x \in X \text{ ya que h es homomorfismo trivial} \\ &\Rightarrow Im(h) = 0 \end{aligned}$$

- $ii) \Rightarrow iii)$

  Por hipótesis $Im(h) = 0$

$$\begin{aligned} Im(h) = 0 &\Rightarrow h(x) = 0 \;\; ; \; \forall x \in X \\ &\Rightarrow x \in Ker(h) \;\; ; \; \forall x \in X \\ &\Rightarrow Ker(h) = X \end{aligned}$$

- $iii) \Rightarrow i)$

  Por hipótesis $Ker(h) = X$

$$x \in Ker(h) \Rightarrow h(x) = 0 \;\; ; \; \forall x \in X$$
$$\Rightarrow h = 0$$

■

Proposición 1.2.8
El producto $h = g \circ f$ de dos homomorfismos $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ de R-módulos es el homomorfismo trivial si y sólo si

$$Im(f) \subset Ker(g)$$

Demostración:

- "h es homomorfismo trivial $\Rightarrow Im(f) \subset Ker(g)$ "

  Sea $y \in Im(f)$

$$\begin{aligned} y \in Im(f) &\Rightarrow f(x) = y \text{ ; para algún } x \in X \\ &\Rightarrow g(f(x)) = g(y) \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(y) \\ &\Rightarrow h(x) = g(y) \\ &\Rightarrow 0 = g(y) \\ &\Rightarrow y \in Ker(g) \end{aligned}$$

  Como se tomo un y arbitrario se concluye que $Im(f) \subset Ker(g)$

- "$Im(f) \subset Ker(g) \Rightarrow h$ es homomorfismo trivial"

  Sea $x \in X$ tenemos que $f(x) \in Im(f) \subset Ker(g)$

$$\begin{aligned} f(x) \in Ker(g) &\Rightarrow g(f(x)) = 0 \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x) = 0 \\ &\Rightarrow h(x) = 0 \end{aligned}$$

  Como tomamos un x arbitrario, se deduce que $h = 0$.

■

1.3. Módulo Cociente

Sea A un R-módulo a la izquierda y sea A' un submódulo de A, definimos el conjunto cociente, como:

$$A/A' = \{a + A' \mid a \in A\}$$

Sobre A/A' se define $+$ y $\cdot$ como:
$\forall a, b \in A, r \in R$

- $+ :\ (a + A') + (b + A') = (a + b) + A'$
- $\cdot\ :\ r \cdot (a + A') = r \cdot a + A'$

Además si:

$$a + A' = b + A' \Leftrightarrow a - b \in A'$$

$$x + A' = A' \Leftrightarrow x \in A'$$

Y cumple que es un grupo abeliano bajo $+$, ya que:

i) Cerrado:
Sea $a + A', b + A' \in A/A'$, donde $a, b \in A$

$$\begin{aligned}(a + A') + (b + A') &= (a + b) + A' \text{ ; por definición}\\ &= c + A' \text{ ; } a + b = c \in A\end{aligned}$$

por tanto es cerrado.

ii) Asociatividad:
Sea $a + A', b + A', c + A' \in A/A'$

$$\begin{aligned}[(a + A') + (b + A')] + (c + A') &= [(a + b) + A'] + (c + A')\\ &= (a + b + c) + A'\\ &= (a + A') + [(b + c) + A']\\ &= (a + A') + [(b + A') + (c + A')]\end{aligned}$$

Por tanto es asociativo.

iii) Identidad:

Sea $a + A' \in A/A'$,supongamos que existe $e + A' \in A/A'$ tal que $e \in A'$, se tiene que:

$$\begin{aligned}(a + A') + (e + A') &= (a + A') + A' \\ &= a + A'\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}(e + A') + (a + A') &= A' + (a + A') \\ &= a + A'\end{aligned}$$

Así posee identidad

iv) Inverso:

Sea $a + A' \in A/A'$, supongamos que existe $b + A' \in A/A'$

$$\begin{aligned}(a + A') + (b + A') &= (a + b) + A' \\ &= A' \text{ ; siempre que } a + b \in A/A'\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}(b + A') + (a + A') &= (b + a) + A' \\ &= A' \text{ ; siempre que } b + a \in A/A'\end{aligned}$$

Por tanto existe el inverso.

v) Abeliano:

Sea $a + A', b + A' \in A/A'$

$$\begin{aligned}(a + A') + (b + A') &= (a + b) + A' \\ &= (b + a) + A' \text{ ; } ya\ que\ a, b \in A' \\ &= (b + A') + (a + A')\end{aligned}$$

por tanto es abeliano.

Así el conjunto cociente es un grupo abeliano, al que llamamos grupo cociente. Si definimos una función

$$\begin{aligned}\theta : R \times A/A' &\longrightarrow A/A' \\ (r, a + A') &\mapsto r(a + A') = ra + A'\end{aligned}$$

¿θ define un R-módulo?

Debemos verificar si cumple los 4 propiedades de R-módulo.

i) Sea $r \in R, a + A', b + A' \in A/A'$

$$\begin{aligned}r \cdot [(a + A') + (b + A')] &= r \cdot [(a + b) + A'] \\ &= r(a + b) + A' \\ &= (ra + rb) + A' \\ &= (ra + A') + (rb + A') \\ &= r \cdot (a + A') + r \cdot (b + A')\end{aligned}$$

ii) Sea $r_1, r_2 \in R, a + A' \in A/A'$

$$\begin{aligned}(r_1 + r_2) \cdot (a + A') &= (r_1 + r_2)(a) + A' \\ &= (r_1 \cdot a + r_2 \cdot a) + A' \\ &= (r_1 \cdot a + A') + (r_2 \cdot a + A')\end{aligned}$$

iii) Sea $r_1, r_2 \in R, a + A' \in A/A'$

$$\begin{aligned}(r_1 \cdot r_2) \cdot (a + A') &= (r_1 \cdot r_2) \cdot (a) + A' \\ &= (r_1) \cdot (r_2 \cdot a) + A' \\ &= r_1 \cdot (r_2 \cdot a) + A'\end{aligned}$$

iv) Sea $1 \in R, a + A' \in A/A'$

$$\begin{aligned}1 \cdot (a + A') &= (1 \cdot a) + A' \\ &= a + A'\end{aligned}$$

Por lo que A/A' es un R-módulo, lo cual da paso a la siguiente definición.

Definición 1.3.1
Se define como R-módulo cociente a A/A'.

Proposición 1.3.2
Sea $\sigma : A \longrightarrow A/A'$ la aplicación canónica entonces σ es un morfismo.

Demostración:

Sea

$$\sigma : A \longrightarrow A/A'$$
$$a \mapsto \sigma(a) = a + A'$$

debemos verificar lo siguiente:

- ¿σ está bien definida?

  Sea $x, y \in A$ tal que $x = y$, tenemos:

$$\begin{aligned} x &= y \\ x - y &= 0 \\ \sigma(x-y) &= \sigma(0) \\ (x-y) + A' &= A' \end{aligned}$$

  Por tanto $x - y \in A'$, así:

$$\begin{aligned} x + A' &= y + A' \\ \sigma(x) &= \sigma(y) \end{aligned}$$

  Por tanto σ está bien definida.

- ¿$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$?

  Sea $a, b \in A$

$$\begin{aligned} \sigma(a+b) &= (a+b) + A' \\ &= (a + A') + (b + A') \\ &= \sigma(a) + \sigma(b) \end{aligned}$$

- ¿$\sigma(r \cdot a) = r \cdot \sigma(a)$?

  Sea $r \in R$, $a \in A$

$$\begin{aligned} \sigma(ra) &= ra + A' \\ &= r(a + A') \\ &= r\sigma(a) \end{aligned}$$

Por tanto σ es un morfismo.

■

Proposición 1.3.3
Sean $A,\ B$ R-módulos a la izquierda y sean $f : A \longrightarrow B,\ p : A \longrightarrow A/Ker(f)$ morfismos. Si existe un morfismo $h : A/Ker(f) \longrightarrow B$, tal que

$$f = h \cdot p \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \\ A/Ker(f) \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

entonces

$$Ker(p) \subset Ker(f)$$

Demostración:

Sea $f : A \longrightarrow B$, $p : A \longrightarrow A/Ker(f)$ morfismos.

Definiendo a h de la siguiente manera

$$\begin{aligned} h : A/Ker(f) &\longrightarrow B \\ a + Ker(f) &\mapsto h(a + Ker(f)) = f(a) \end{aligned}$$

Tomemos $x \in Ker(p)$

$$\begin{aligned} x \in Ker(p) &\Rightarrow p(x) = 0 \\ &\Rightarrow x + Ker(f) = 0 \\ &\Rightarrow h(x + Ker(f)) = h(0) \\ &\Rightarrow h(x + Ker(f)) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in Ker(f) \end{aligned}$$

■

Corolario 1.3.4
Sean A y C, R-módulos y sea A′ un submódulo de A. Sea $f : A \longrightarrow C$ un morfismo. Si $\theta : A \longrightarrow A/A'$ denota el morfismo canónico, entonces

a) existe un único morfismo $h : A/A' \longrightarrow C$, tal que $h \cdot \theta = f$ si, y sólo si, $A' \subset Ker(f)$.

b) Si f es un epimorfismo, entonces h es un epimorfimo

c) h es un isomorfismo si, y sólo si, f es un epimorfimo y además $A' = Ker(f)$

Demostración:

Sean A y C R-módulos y A' submódulo de A.

$f : A \longrightarrow C$ un morfismo y $\theta : A \longrightarrow A/A'$ denota el morfismo canónico.

a) "Existe un único morfismo $h : A/A' \longrightarrow C$ tal que $h \cdot \theta = f \Leftrightarrow A' \subset Ker(f)$ "

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta"'] & C \\ A/A' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- "$\Leftarrow$"

  Si $A' \subset Ker(f)$, entonces por Lema 1.1.7, existe $h : A/A' \longrightarrow C$ tal que $f = h \circ \theta$ y h es morfismo.

- "$\Rightarrow$"

  Si existe un único morfismo $h : A/A' \longrightarrow C$ tal que $f = h \circ \theta$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & \nearrow_{h} & \\ A/A' & & \end{array}$$

  el diagrama conmuta.

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{x/f(x) = 0\} \\ &= \{x/(h \cdot \theta)(x) = 0\} \\ &= \{x/h(\theta(x)) = 0\}, \end{aligned}$$

  como θ es el morfismo canónico, entonces $Ker(\theta) = A'$, así

$$\begin{aligned} Ker(\theta) &\subset Ker(f) \\ A' &\subset Ker(f) \end{aligned}$$

b) "Si f es un epimorfismo entonces h es un epimorfismo".

   f es un epimorfismo, entonces $Im(f) = C$, así debemos probar que $Im(h) = C$, o equivalentemente $Im(h) = Im(f)$.

- ¿$Im(h) \subset Im(f)$?

  Sea $x \in Im(h)$

$$\begin{aligned} x \in Im(h) &\Rightarrow \exists\, a + A' \in A/A' \mid h(a + A') = x \\ &\Rightarrow h(\theta(a)) = x \,; \theta(a) = a + A' \\ &\Rightarrow (h \circ \theta)(a) = x \\ &\Rightarrow f(a) = x \\ &\Rightarrow x \in Im(f) \end{aligned}$$

  Así $Im(h) \subset Im(f)$.

- ¿$Im(f) \subset Im(h)$?

  Sea $x \in Im(f)$

$$\begin{aligned} x \in Im(f) &\Rightarrow \exists\, y \in A \mid f(y) = x \\ &\Rightarrow (h \circ \theta)(y) = x \\ &\Rightarrow h(\theta(y)) = x \\ &\Rightarrow h(y + A') = x \\ &\Rightarrow x \in Im(h) \end{aligned}$$

  Así $Im(f) \subset Im(h)$

Por tanto h es epimorfismo.

c) "h es un isomorfismo si, y sólo si f es un epimorfismo y además $A' = Ker(f)$".

- "$\Rightarrow$"

  Por hipótesis h es isomorfismo de ello se tiene que $Im(h) = C$, de a) se tiene que $A' \subset Ker(f)$, falta probar que $Ker(f) \subset A'$, así sea $x \in Ker(f)$

$$\begin{aligned} x \in Ker(f) &\Rightarrow f(x) = 0 \\ &\Rightarrow (h \circ \theta)(x) = 0 \\ &\Rightarrow h(\theta(x)) = 0 \\ &\Rightarrow \theta(x) = 0\ ;\ h \text{ es monomorfismo} \\ &\Rightarrow x \in Ker(\theta) = A' \\ &\Rightarrow x \in A' \end{aligned}$$

  con lo que $Ker(f) \subset A'$, por tanto $Ker(f) = A'$.

  Ahora tenemos que probar que f es epimorfismo, para ello debemos probar que $Im(f) = C$ o equivalentemente que $Im(f) = Im(h)$

- ¿$Im(f) \subset Im(h)$?

  Sea $x \in Im(f)$

$$\begin{aligned} x \in Im(f) &\Rightarrow \exists\, y \in A \mid f(y) = x \\ &\Rightarrow (h \circ \theta)(x) = x \\ &\Rightarrow h(\theta(y)) = x \\ &\Rightarrow x \in Im(h) \end{aligned}$$

- ¿$Im(h) \subset Im(f)$?

  Sea $x \in Im(h)$

$$\begin{aligned} x \in Im(h) &\Rightarrow \exists\, a + A' \in A/A' \mid h(a + A') = x \\ &\Rightarrow h(\theta(a)) = x \\ &\Rightarrow (h \circ \theta)(a) = x \\ &\Rightarrow f(a) = x \\ &\Rightarrow x \in Im(f) \end{aligned}$$

Por tanto $Im(f) = C$ y f es epimorfismo.

- "$\Leftarrow$"

  Por b) h es epimorfismo, falta probar que h es monomorfismo, para ello sea $x + A', y + A' \in A/A'$, donde $h(x + A') = h(y + A')$

$$\begin{aligned} h(x + A') &= h(y + A') \\ h(\theta(x)) &= h(\theta(y)) \\ (h \circ \theta)(x) &= (h \circ \theta)(y) \\ f(x) &= f(y) \\ f(x) - f(y) &= 0 \\ f(x - y) &= 0 \end{aligned}$$

Así $x - y \in Ker(f)$ y se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x - y \in Ker(f) &\Rightarrow x - y \in A' \\ &\Rightarrow x + A' = y + A' \end{aligned}$$

y por tanto h es monomorfismo.

■

Corolario 1.3.5
Sea $f : A \longrightarrow C$ un morfismo de módulos y sea A′ un submódulo de A. Entonces f induce un morfismo

$$\bar{f} : A/A' \longrightarrow C/f(A')$$

cuyo núcleo $Ker(\bar{f}) \cong \dfrac{Ker(f) + A'}{A'}$. En particular, si $A' \supset Ker(f)$, $\bar{f}$ es un monomorfismo.

Demostración:

Primero probaremos que $\bar{f}$ es un morfismo, así primero se probará que $\bar{f}$ esta bien definida y que $\bar{f}$ es homomorfismo .

Sea la aplicación

$$\begin{aligned} \bar{f} : A/A' &\longrightarrow C/f(A') \\ x + A' &\longrightarrow \bar{f}(x + A) = f(x) + f(A') \end{aligned}$$

1) ¿ $\bar{f}$ está bien definida ?

Sea $x + A', y + A' \in A/A'$, donde $x + A' = y + A'$

$$\begin{aligned} x + A' = y + A' &\Rightarrow x - y \in A' \\ &\Rightarrow f(x - y) \in f(A') \\ &\Rightarrow f(x) - f(y) \in f(A') \\ &\Rightarrow f(x) + f(A') = f(y) + f(A') \\ &\Rightarrow \bar{f}(x + A') = \bar{f}(y + A') \end{aligned}$$

2) ¿ $\bar{f}$ es homomorfismo ?

Sea $x + A', y + A' \in A/A'$, y $r \in R$

- ¿$\bar{f}((x + A') + (y + A')) = \bar{f}(x + A') + \bar{f}(y + A')$?

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x + A' + y + A') &= \bar{f}(x + y + A') \\
&= f(x + y) + f(A') \\
&= f(x) + f(y) + f(A') + f(A') \\
&= f(x) + f(A') + f(y) + f(A') \\
&= \bar{f}(x + A') + \bar{f}(y + A')
\end{aligned}$$

- ¿$\bar{f}(r \cdot (x + A')) = r \cdot \bar{f}(x + A')$?

$$\begin{aligned}
\bar{f}(r(x + A')) &= \bar{f}(rx + rA') \\
&= f(rx) + f(rA') \\
&= rf(x) + rf(A') \\
&= r(f(x) + f(A')) \\
&= r\bar{f}(x + A')
\end{aligned}$$

Así f induce un morfismo $\bar{f} : A/A' \longrightarrow C/f(A')$.

Ahora probaremos que $Ker(\bar{f}) \cong \frac{Ker(f)+A'}{A'}$

$Ker(\bar{f})$ está definido de la siguiente manera:

$Ker(\bar{f}) = \{\bar{x} \in A/A' \mid \bar{f}(\bar{x}) = f(A')\}$

¿$\bar{x} \in Ker(\bar{f}) \Rightarrow \bar{x} \in \frac{Ker(f)+A'}{A'}$?

$$\begin{aligned}
\bar{x} \in Ker(\bar{f}) &\Rightarrow \bar{f}(\bar{x}) = f(x) + f(A') \\
&\Rightarrow \bar{f}(\bar{x}) = f(A') \\
&\Rightarrow f(x) \in f(A') \\
&\Rightarrow f(x) = f(a')\ ;\ a' \in A' \\
&\Rightarrow f(x) - f(a') = 0 \\
&\Rightarrow f(x - a') = 0 \\
&\Rightarrow x - a' \in Ker(f) \\
&\Rightarrow x - a' = h\ ;\ h \in Ker(f) \\
&\Rightarrow x = h + a'\ ;\ x \in Ker(f) + A' \\
&\Rightarrow \bar{x} = (h + a') + A' \in (Ker(f) + A')/A'.
\end{aligned}$$

¿$y \in (Ker(f) + A')/A' \Rightarrow y \in Ker(\bar{f})$?

$$\begin{aligned}
y \in (Ker(f) + A')/A' &\Rightarrow y = x + a' + A'\ ;\ x \in Ker(f), a' \in A' \\
&\Rightarrow y = x + A' \\
&\Rightarrow \bar{f}(y) = \bar{f}(x + A') \\
&\Rightarrow \bar{f}(y) = f(x) + f(A') \\
&\Rightarrow \bar{f}(y) = f(A') \\
&\Rightarrow y \in Ker(\bar{f})
\end{aligned}$$

$\therefore (Ker(f) + A')/A' \cong Ker(\bar{f})$

■

Corolario 1.3.6
Sea A un módulo y sean A′ y A″ submódulos. Entonces el morfismo identidad id_A induce un morfismo

$$i' : A/A' \longrightarrow A/A''$$

si, y sólo si, $A' \subset A''$.

Demostración:

Sea el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k''"] \arrow[d, "k'"'] & A/A'' \\ A/A' \arrow[ur, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

- "$\Rightarrow$"¿i' es morfismo, entonces $A' \subset A''$?

  Por propocisión 1.3.3

  Como i' es morfismo, entonces $Ker(k') \subset Ker(k'')$.

  $$Ker(k') = \{a' \in A \mid k'(a') = A'\}$$

  $$Ker(k') = A'$$

  y

  $$Ker(k'') = \{a \in A \mid k''(a) = A''\}$$

  $$Ker(k'') = A''$$

  Como $Ker(k') \subset Ker(k'')$, entonces, $A' \subset A''$.

- $" \Leftarrow "$ ¿$A' \subset A''$ entonces i' es morfismo?

  $A' = Ker(k')$ y $A'' = Ker(k'')$; además $A' \subset A''$, entonces $Ker(k') \subset ker(k'')$; por proposición 1.3.3 existe i' tal que es morfismo.

■

Proposición 1.3.7
Sea $f : A \longrightarrow C$ un epimorfismo de módulos. Sea para cada submódulo A′ de A, $f(A')$ el submódulo de C, o sea la imagen de A′ por f. Entonces

$$f : A \longrightarrow C$$

define una biyección del conjunto de submódulos de A que contienen a $Ker(f)$ sobre el conjunto de submódulos de C.

Demostración:

Sea $f^* : \{A' \mid A' \supset Ker(f) \text{ submódulo de} A\} \longrightarrow \{C' \mid C' \text{ submódulo de } C\}$, la función que lleva de conjuntos de submódulos de A a un conjunto de submódulos de C.

$$\begin{aligned} f^* : \{A' \mid A' \supset Ker(f) \ \text{ submódulo de } A\} &\longrightarrow \{C' \mid C' \ \text{ submódulo de } C\} \\ A' &\mapsto f^*(A') = f(A') \end{aligned}$$

¿f^* está bien definida?

Tomemos $A_1, A_2 \in \{A' \mid A' \supset Ker(f) \ \text{ submódulo de } A\}$ tal que $A_1 = A_2$

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\Rightarrow f^*(A_1) = f(A_1) \\ &\Rightarrow f^*(A_1) = \{f(x) \in C \mid x \in A_1\} \\ &\Rightarrow f^*(A_1) = \{f(x) \in C \mid x \in A_2\} \\ &\Rightarrow f^*(A_1) = f(A_2) \\ &\Rightarrow f^*(A_1) = f^*(A_2) \end{aligned}$$

Por tanto f^* está bien definida.

Ahora definamos

$$\begin{aligned} f^{**} : \{C' \mid C' \ \text{ submódulo de } C\} &\longrightarrow \{A' \mid A' \supset Ker(f) \ \text{ submódulo de } A\} \\ C' &\mapsto f^{**}(C') = f^{-1}(C') \end{aligned}$$

¿f^{**} está bien definida?

Sea $C_1, C_2 \in \{C' \mid C' \text{ submódulo de } C\}$ tal que $C_1 = C_2$

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 \Rightarrow f^{**}(C_1) &= f^{-1}(C_1) \\ \Rightarrow f^{**}(C_1) &= \{x \in A \mid f(x) \in C_1\} \\ \Rightarrow f^{**}(C_1) &= \{x \in A \mid f(x) \in C_2\} \\ \Rightarrow f^{**}(C_1) &= f^{-1}(C_2) \\ \Rightarrow f^{**}(C_1) &= f^{**}(C_2) \end{aligned}$$

Por tanto f^{**} está bien definida.

Veremos si $Ker(f) \subset f^{-1}(C')$, así sea $x \in A'$ y además $x \in Ker(f)$

$$\begin{aligned} x \in Ker(f) &\Rightarrow f(x) = 0 \\ &\Rightarrow 0 \in C' \text{ ;con } C' \text{ submodulo de } C \\ &\Rightarrow f(x) \in C' \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(C') \end{aligned}$$

Así $Ker(f) \subset f^{-1}(C')$.

Ahora para que haya una biyección entre el conjunto de los submódulos que contienen a $Ker(f)$ sobre el conjunto de los submódulos de C, debemos probar que:

1. $f^* \circ f^{**} = Id_C$

2. $f^{**} \circ f^* = Id_A$

De la siguiente manera:

Sea C' un submódulo cualquiera de C

1. ¿$(f^* \circ f^{**})(C') = C'$?

$$\begin{aligned} (f^* \circ f^{**})(C') &= f^*(f^{**}(C')) \\ &= f^*(f^{-1}(C')) \\ &= f(f^{-1}(C')) \end{aligned}$$

- ¿$f(f^{-1}(C')) \subset C'$?
  Sea $x \in f(f^{-1}(C'))$

  $$\begin{aligned} x \in f(f^{-1}(C')) &\Rightarrow f(x) \in f^{-1}(C') \\ &\Rightarrow x \in C' \end{aligned}$$

  Así $f(f^{-1}(C')) \subset C'$.
- ¿$f(f^{-1}(C')) \supset C'$?
  Sea $c' \in C'$

  $$\begin{aligned} c' \in C' &\Rightarrow \exists x \in A \mid f(x) = c' \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(C') \\ &\Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(C')) \\ &\Rightarrow c' \in f(f^{-1}(C')) \end{aligned}$$

  Así $f(f^{-1}(C')) \supset C'$

Por tanto $f(f^{-1}(C')) = C'$ así $(f^* \circ f^{**})(C') = C' \Rightarrow (f^* \circ f^{**})(C') = Id_C(C')$ pero como se tomo un C' arbitrario entonces $f^* \circ f^{**} = Id_C$.

2. ¿$(f^{**} \circ f^*)(A') = A'$?

$$\begin{aligned} (f^{**} \circ f^*)(A') &= f^{**}(f^*(A')) \\ &= f^{**}(f(A')) \\ &= f^{-1}(f(A')) \end{aligned}$$

- ¿$f^{-1}(f(A')) \supset A'$?
  Sea $x \in A'$

  $$\begin{aligned} x \in A' &\Rightarrow f(x) \in f(A') \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(f(A')) \end{aligned}$$

  Así $f^{-1}(f(A')) \supset A'$

- ¿$f^{-1}(f(A')) \subset A'$?

  Sea $x \in f^{-1}(f(A'))$

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(f(A')) &\Rightarrow x \in \{x \in A \mid f(x) \in f(A')\} \\
&\Rightarrow f(x) \in f(A') \\
&\Rightarrow f(x) = f(a')\ ;\ a' \in A' \\
&\Rightarrow f(x) - f(a') = 0 \\
&\Rightarrow f(x - a) = 0 \\
&\Rightarrow x - a \in Ker(f) \subset A' \\
&\Rightarrow x - a' = a''\ ;\ a'' \in A' \\
&\Rightarrow x = a'' + a' \in A' \\
&\Rightarrow x \in A'
\end{aligned}
$$

  Así $f^{-1}(f(A')) \subset A'$

Por tanto $f^{-1}(f(A')) = A'$ así $(f^{**} \circ f^{*})(A') = A' \Rightarrow (f^{**} \circ f^{*})(A') = Id_A(A')$ pero como se tomo un A' arbitrario entonces $f^{**} \circ f^{*} = Id_A$.

■

1.4. Suma Directa y Producto Directo

R denota un anillo con identidad $1 \neq 0$.

A denota un R-módulo a la izquierda, como siempre unitario, es decir $1 \cdot x = x$ para todo x en A.

Sea I el conjunto de índices.

Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ denota una familia de submódulos de A, con $\sum_{\alpha \in I} A_\alpha$ entenderemos la totalidad de sumas en A

$$\textstyle\sum_{\alpha \in I} a_\alpha \text{ con } a_\alpha \in A_\alpha \qquad \text{(s)}$$

tales que $a_\alpha = 0$ para casi todo índice $a \in I$.

Esto significa que existe a lo sumo un número finito de índices α tales que $a_\alpha \neq 0$. Por lo tanto, a pesar del abuso de notación al escribir una suma de un numero arbitrario de sumandos, (s) define unívocamente un elemento de A. Por supuesto, si I es finito, no es necesario restricción alguna. Si $I = [1, n]$ con $n \in \mathbb{Z}$, escribimos también

$$A_1 + ... + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

y sus elementos en la forma

$$a_1 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \ , \ a_i \in A_i \quad .$$

Si

$$x = \textstyle\sum_\alpha x_\alpha \in \sum_\alpha A_\alpha$$

Proposición 1.4.1
$\sum_\alpha A_\alpha$ es submódulo de A.

Demostración:

Haciendo uso de Proposición 1.1.10, tenemos

i) ¿$x, y \in \sum_\alpha A_\alpha \Rightarrow \ x - y \in \sum_\alpha A_\alpha$?
Sea $x = \sum_\alpha x_\alpha$ e $y = \sum_\alpha y_\alpha$, y sean $S(x) = \{\alpha \mid x_\alpha \neq 0\}$ y $S(y) = \{\alpha \mid y_\alpha \neq 0\}$ los alfa en los cuales la suma es distinta de cero.
La familia de elementos

$$x_\alpha - y_\alpha$$

está formada por 0 para casí todo índice $\alpha \in I$. Así, $x_\alpha - y_\alpha = 0$ si $\alpha \notin S(x) \cup S(y)$.
Donde $S(x) \cup S(y)$ es un conjunto finito, ya que $S(x)$ y $S(y)$ son finitos.
Por tanto:

$$x - y = \sum_\alpha (x_\alpha - y_\alpha) \ \in \sum_\alpha A_\alpha$$

ii) ¿$r \in R, x \in \sum_\alpha A_\alpha \ \Rightarrow \ r \cdot x \in \sum_\alpha$?
Sea $x = \sum_\alpha x_\alpha$ y $S(x) = \{\alpha \backslash x_\alpha \neq 0\}$ el conjunto de índices tal que la suma es distinta de cero.
La familia de elementos

$$r \cdot x_\alpha$$

está formada por cero para casí todo índice $\alpha \in I$.

$$r \cdot x_\alpha \neq 0 \text{ si } \alpha \in S(x)$$

Donde $S(x)$ es finito. Por lo que

$$r \cdot x = \sum_\alpha r \cdot x_\alpha \ \in \sum_\alpha A_\alpha$$

■

Definición 1.4.2
$\sum_\alpha A_\alpha$ se denomina el módulo suma de la familia $\{A_\alpha\}_\alpha$

Definición 1.4.3
Sea $L = \sum_\alpha A_\alpha$ la suma de una familia de submódulos de A. Diremos que L es la suma directa de $\{A_\alpha\}$ si se cumple la condición

$$0 = \sum_\alpha a_\alpha,\ a_\alpha \in A_\alpha \text{ si, y sólo si, } a_\alpha = 0 \text{ para todo índice } \alpha.$$

Proposición 1.4.4
Las siguientes propiedades son equivalentes. Sea $L = \sum_\alpha A_\alpha$:

i) L es suma directa de $\{A_\alpha\}_\alpha$.

ii) $0 = \sum_\alpha a_\alpha,\ a_\alpha \in A_\alpha$ implica $a_\alpha = 0$ para todo α.

iii) $\sum_\alpha x_\alpha = \sum_\alpha y_\alpha$ implica $x_\alpha = y_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.

Demostración

- ¿$i) \Rightarrow ii)$?

  Se sigue por definición 1.4.3

- ¿$ii) \Rightarrow iii)$?

  Sean $\sum_\alpha x_\alpha,\ con\ x_\alpha \in A_\alpha$ y $\sum_\alpha y_\alpha,\ con\ y_\alpha \in A_\alpha$, tal que $\sum_\alpha x_\alpha = \sum_\alpha y_\alpha$.
  Tenemos que:

$$\sum_\alpha x_\alpha = \sum_\alpha y_\alpha$$
$$\sum_\alpha x_\alpha - \sum_\alpha y_\alpha = 0$$
$$\sum_\alpha (x_\alpha - y_\alpha) = 0$$

  Por $ii)$ se tiene que:

$$x_\alpha - y_\alpha = 0\ ,\ \forall \alpha \in I$$
$$x_\alpha = y_\alpha\ ,\ \forall \alpha \in I$$

- ¿$iii) \Rightarrow i)$?

  Tomemos $\sum_\alpha x_\alpha = \sum_\alpha 0$ por propiedad iii), así

$$\sum_\alpha x_\alpha = \sum_\alpha 0$$
$$\sum_\alpha x_\alpha - \sum_\alpha 0 = 0$$
$$\sum_\alpha (x_\alpha - 0) = 0\ ;\ x_\alpha - 0 = 0$$
$$\sum_\alpha x_\alpha = 0\ ;\ x_\alpha = 0$$

  Así $L = \sum_\alpha x_\alpha$ es suma directa por definición 1.4.3

■

Notación 1.4.5
Si L es suma directa de $\{A_\alpha\}$ escribimos

$$L = \sum_\alpha \oplus A_\alpha$$

Si el conjunto de índices de I es finito, $I = [1, n]$ escribimos también

$$L = \sum_{i=1}^{n} \oplus A_i = A_1 \oplus ... \oplus A_n$$

Proposición 1.4.6
Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de submódulos de A. Entonces $\sum_\alpha A_\alpha$ es directa si, y sólo si,

Para todo $\beta \in I$, $(\sum_{\alpha \neq \beta} A_\alpha) \cap A_\beta = 0$

Demostración:

- "$\Rightarrow$"

  Por hipótesis $\sum_\alpha A_\alpha$ es suma directa. Sea $\beta \in I$

$$
\begin{aligned}
x \in (\sum_{\alpha\neq\beta} A_\alpha) \cap A_\beta &\Rightarrow x \in \sum_\alpha A_\alpha \ \wedge x \in A_\beta \\
&\Rightarrow x = \sum_{\alpha\neq\beta} a_\alpha \ \wedge -x \in A_\beta \\
&\Rightarrow x = \sum_{\alpha\neq\beta} a_\alpha \wedge -x = a_\beta \text{ ; para algún } a_\beta \in A_\beta \\
&\Rightarrow x + (-x) = \sum_{\alpha\neq\beta} a_\alpha + a_\beta \\
&\Rightarrow 0 = \sum_\alpha a_\alpha
\end{aligned}
$$

  Así $a_\alpha = 0$ para cualquier $\alpha \in I$, por lo cual $x = 0$, como se tomo un x arbitrario

  Por tanto $(\sum_{\alpha\neq\beta} A_\alpha) \cap A_\beta = 0$

- "$\Leftarrow$"

  Sea $\sum_\alpha a_\alpha = 0$, $a_\alpha \in A_\alpha$

  Si $\beta \in I$ entonces $a_\beta \in A_\beta$, y se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\neq\beta} a_\alpha + a_\beta = 0 \\
&\qquad -a_\beta = \sum_{\alpha\neq\beta} a_\alpha \ \in A_\beta \cap (\sum_{\alpha\neq\beta} A_\alpha) \\
&\quad \Rightarrow -a_\beta \in 0 = A_\beta \cap (\sum_{\alpha\neq\beta} A_\alpha) \\
&\quad \Rightarrow -a_\beta = 0
\end{aligned}
$$

  Por tanto $\forall \alpha \in I$ se cumple que $a_\alpha = 0$ y por proposición 1.4.4 $\sum_\alpha A_\alpha$ es suma directa.

■

Corolario 1.4.7
Sean A_1 y A_2 submódulos de A. Entonces

$$A = A_1 \oplus A_2$$

si, y sólo si

$$A = A_1 + A_2 \ y \ A_1 \cap A_2 = 0$$

Demostración:

- "$\Rightarrow$"

  Sean A_1 y A_2 submódulos de A.

  $A = A_1 \oplus A_2$ por lo que A es suma directa donde

  $$\sum_{\alpha=1}^{2} \oplus A_\alpha$$

  y podemos escribir a A como $A = A_1 + A_2$ por definición.

  Por proposición 1.4.6, como A es suma directa entonces $A_1 \cap A_2 = 0$.

- "$\Leftarrow$"

  Por proposición 1.4.6 como $A_1 \cap A_2 = 0$ entonces A es suma directa, por lo que se puede escribir como:

  $$A = \sum_{\alpha=1}^{2} \oplus A_\alpha$$

  $$A = A_1 \oplus A_2$$

■

Definición 1.4.8
Sea A un R-módulo y sea A′ un submódulo. Se dice que A′ es sumando directo de A si existe un submódulo A″ de A tal que

$$A = A' \oplus A''$$

Teorema 1.4.9
Si el producto $h = g \circ f$ de dos homomorfismos $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ de R-módulos $X,\ Y,\ Z$ es un isomorfismo, entonces se cumple:

i) f es monomorfismo

ii) g es epimorfismo

iii) El módulo Y es descomponible en la suma directa de $Im(f)$ y $Ker(g)$; en símbolos
$$Y = Im(f) \oplus Ker(g)$$

Demostración:

i) ¿f es monomorfismo?

Para que f sea monomorfismo, debemos probar que $Ker(f) = 0$, teniendo como base que h es isomorfismo, tomemos $x \in Ker(f)$

$$\begin{aligned} x \in Ker(f) &\Rightarrow f(x) = 0 \\ &\Rightarrow g(f(x)) = g(0) \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x) = 0 \\ &\Rightarrow h(x) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ ; ya que } h \text{ es monomorfismo} \end{aligned}$$

Como se tomo un x arbitrario, se tiene que $Ker(f) = 0$

ii) ¿g es epimorfismo?

Para que g sea epimorfismo debe cumplir que $Im(g) = Z$.

Tenemos que $Im(h) = Z$ ya que h es isomorfismo, así debemos probar que $Im(h) = Im(g)$.

Solamente debemos ver si ¿$Im(h) \subset Im(g)$?

Sea $z \in Im(h)$

$$\begin{aligned} z \in Im(h) &\Rightarrow h(x) = z \text{ ; para algún } x \in X \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x) = z \\ &\Rightarrow g(f(x)) = z \\ &\Rightarrow z \in Im(g) \end{aligned}$$

Así $Im(h) \subset Im(g)$ Por tanto g es epimorfismo

iii) Definamos $A = Im(f)$ y $B = Ker(g)$ y sea y un elemento arbitrario de Y tal que $z = g(y) \ \in Z$.

Como $h : Y \longrightarrow Z$ es in isomorfismo, entonces $\exists \ x \in X$ tal que $h(x) = z$, y sea $a = f(x) \in A$

$$\begin{aligned} z &= z \\ g(y) &= h(x) \\ g(y) &= (g \circ f)(x) \\ g(y) &= g(f(x)) \\ g(y) &= g(a) \\ g(y) - g(a) &= 0 \\ g(y - a) &= 0 \end{aligned}$$

Tomando $b = y - a$ se tiene que $b \in Ker(g)$.

Así $y = a + b \in A + B$, como y es arbitrario, se deduce que $A + B = Y$.

Falta probar que $A \cap B = 0$

Tomemos $y \in A \cap B$

$$\begin{aligned} y \in A \cap B &\Rightarrow y \in A \ \wedge \ y \in B \\ &\Rightarrow \exists \ x \in X \ tq \ f(x) = y \ \wedge g(y) = 0 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} x \in X \Rightarrow h(x) &= (g \circ f)(x) \\ \Rightarrow h(x) &= g(f(x)) \\ \Rightarrow h(x) &= g(y) \\ \Rightarrow h(x) &= 0 \\ \Rightarrow x &= 0 \text{ ; } h \text{ es monomorfismo} \\ \Rightarrow y &= f(0) \\ \Rightarrow y &= 0 \end{aligned}$$

Como se tomo un y arbitrario, se deduce que $A \cap B = 0$.

Por tanto $Y = A \oplus B$ es suma directa.

■

Producto Directo

Sea I un conjunto de índices y $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de R-módulos (a la izquierda).

Sea

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$$

la unión de la familia $\{M_\alpha\}_\alpha$, o sea un conjunto definido por la propiedad

$$x \in U \Leftrightarrow \textit{ existe } \alpha \in I \textit{ tal que } x \in M_\alpha$$

Definición 1.4.10

Se llama *función selectora* de la familia $\{M_\alpha\}_\alpha$, o simplemente función selectora, a toda aplicación

$$f : I \longrightarrow U$$

tal que para todo

$$a \in I,\ f_\alpha = f(\alpha) \in M_\alpha$$

Si f es una función selectora, se escribe también

$$f = \{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$$

Sea

$$\prod_\alpha M_\alpha$$

la totalidad de funciones selectoras de la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Nótese que, $\prod_\alpha M_\alpha \neq \phi$ ya que:

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow U \\ i &\mapsto f(i) = 0\ para\ todo\ i \in I \end{aligned}$$

es una función selectora.

Ahora si tomamos $f, g \in \prod_\alpha M_\alpha$ podemos probar que $f = g$ si, y sólo si $f_\alpha = g_\alpha$ cualquiera que sea $\alpha \in I$, de la siguiente manera.

- "$\Rightarrow$"

  Sea f tal que $\forall \alpha \in I,\ f_\alpha = f(\alpha) \in M_\alpha$ y g tal que $\forall \alpha \in I,\ g_\alpha = g(\alpha) \in M_\alpha$. Como:

$$\begin{aligned} f = g &\Rightarrow f(\alpha) = g(\alpha)\ ;\ \forall \alpha \in I \\ &\Rightarrow f_\alpha = g_\alpha\ ;\ \forall \alpha \in I \end{aligned}$$

- "$\Leftarrow$"

  Sea $\alpha \in I$ tal que $f_\alpha = g_\alpha$, si $\forall \alpha \in I$, se cumple que $f_\alpha = g_\alpha$, tenemos que:

$$f_\alpha = g_\alpha$$
$$f(\alpha) = g(\alpha)$$
$$f = g$$

Si definimos

- $f + g = \{f_\alpha + g_\alpha\}_{\alpha\in I} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in I} + \{g_\alpha\}_{\alpha\in I}$
- $0 = \{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *con* $f_\alpha = 0 \ \forall\alpha \in I$
- $-f = \{-f_\alpha\}_{\alpha\in I}$

Entonces $\prod_\alpha M_\alpha$ se convierte en grupo abeliano de forma natural.
Sea $k \in R$, definimos $k \cdot f$, si $f \in \prod_\alpha M_\alpha$ por:

- $k \cdot f = \{k \cdot f_\alpha\}_{\alpha\in I} = k\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$

Vamos a verificar que $\prod_\alpha M_\alpha$ está dotado de una estructura de R-módulo.

m1) Sea $r \in R$ y $f, g \in \prod_\alpha M_\alpha$

$$\begin{aligned}
r(f+g) &= \{r(f_\alpha + g_\alpha)\}_\alpha \\
&= \{r(f(\alpha) + g(\alpha))\}_\alpha \\
&= \{rf(\alpha) + rg(\alpha)\}_\alpha \\
&= \{rf_\alpha + rg_\alpha\}_\alpha \\
&= \{rf_\alpha\}_\alpha + \{rg_\alpha\}_\alpha \\
&= rf + rg
\end{aligned}$$

m2) Sea $r \in R$ y $f \in \prod_\alpha M_\alpha$

$$\begin{aligned}
(r+s)f &= \{(r+s)f_\alpha\}_\alpha \\
&= \{(r+s)f(\alpha)\}_\alpha \\
&= \{rf(\alpha) + sf(\alpha)\}_\alpha \\
&= \{rf_\alpha + sf_\alpha\}_\alpha \\
&= \{rf_\alpha\}_\alpha + \{sf_\alpha\}_\alpha \\
&= rf + sf
\end{aligned}$$

m3) Sea $r \in R$ y $f \in \prod_\alpha M_\alpha$

$$\begin{aligned}(rs)\cdot f &= \{(rs)f_\alpha\}_\alpha \\ &= \{r(sf_\alpha)\}_\alpha \\ &= r\cdot(sf)\end{aligned}$$

m4) Sea $f \in \prod_\alpha M_\alpha$

$$\begin{aligned}1\cdot f &= \{1f_\alpha\}_\alpha \\ &= \{f_\alpha\}_\alpha \\ &= f\end{aligned}$$

Esto nos da paso a la siguiente definición.

Definición 1.4.11
Se llama *producto directo* de la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ al conjunto $\prod M_\alpha$ dotado de la estructura de R-módulo

Definición 1.4.12
Sea para cada $\beta \in I$

$$\begin{aligned}p_\beta : \prod_\alpha M_\alpha &\longrightarrow M_\beta \\ f &\mapsto p_\beta(f) = f_\beta\end{aligned}$$

Llamaremos a p_β la proyección sobre M_β o también la β-proyección de $\prod_\alpha M_\alpha$.

Definición 1.4.13
Sea para cada $\beta \in I$

$$\begin{aligned}i_\beta : M_\beta &\longrightarrow \prod_\alpha M_\alpha \\ x &\mapsto i_\beta(x) : I \longrightarrow \cup M_\alpha \\ &\qquad\qquad \alpha \mapsto (i_\beta(x))(\alpha)\end{aligned}$$

la aplicación definida por

$$(i_\beta(x))(\alpha) = \begin{cases} 0 & ; \text{si} \quad \alpha \neq \beta \\ x & ; \text{si} \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

Llamaremos al morfismo i_β la β *inclusión canónica*

1.5. Sucesiones Exactas

Una *sucesión exacta* (de R-módulos) es una sucesión finita o infinita

$$\cdots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \cdots$$

de homomorfismos de R-módulos tal que la imagen del homomorfismo entrante coincide con el núcleo del homomorfismo saliente de todo módulo distinto de los extremos (si existen) de la sucesión. Por ejemplo, en el módulo Y, deberá ser

$$Im(f) = Ker(g).$$

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

se llamará *sucesión exacta corta.*

Como ejemplo de sucesión exacta corta, consideremos un submódulo arbitrario E de un R-módulo X y el módulo cociente $Q = X/E$. El homomorfismo inclusión

$$i : E \to X$$
$$x \mapsto i(x) = x$$

es un monomorfismo, ya que, sea $i(x), i(y) \in X$ tal que $i(x) = i(y)$

$$i(x) = i(y)$$
$$i(x) - i(y) = 0$$
$$i(x - y) = 0$$
$$x - y = 0$$
$$x = y$$

Así i es inyectiva la cual cumple que $Im(i) = E$, la proyección natural

$$p : X \to Q$$
$$x \mapsto p(x) = x + E$$

es un epimorfismo,ya que, sea $y \in Q$

$$\begin{aligned} y \in Q &\Rightarrow y = y_1 + E \; ; \; y_1 \in X \\ &\Rightarrow y = p(y_1) \\ &\Rightarrow \exists \, y_1 \in X \; tal \; que \; p(y_1) \in Q \end{aligned}$$

así p es sobreyectiva y por tanto cumple que $Ker(p) = E$, y lo siguiente se cumple:

$$Im(i) = E = Ker(p),$$

obteniéndose una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 0.$$

Recíprocamente, consideremos una sucesión exacta corta arbitraria

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0.$$

De la exactitud, se deduce que f es un monomorfismo, g es un epimorfismo, y

$$Im(f) = Ker(g).$$

Sea E este submódulo común $Im(f) = Ker(g)$ de X. Entonces f define un isomorfismo

$$\begin{aligned} j : A &\to E \\ x &\mapsto j(x) = f(x) \end{aligned}$$

ya que cumple lo siguiente:

- ¿j está bien definida?

  Sea $x, y \in A$ tal que $x = y$

$$\begin{aligned} x = Y &\Rightarrow x - y = 0 \\ &\Rightarrow f(x - y) = f(0) \\ &\Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) = f(y) \\ &\Rightarrow j(x) = j(y) \end{aligned}$$

  Por lo que j está bien definida.

- ¿$j(x+ry) = j(x) + rj(y)$?

  Sea $x, y \in A$ y $r \in R$

$$\begin{aligned} j(x+ry) &= f(x+ry) \\ &= f(x) + rf(y) \text{ ; por ser } f \text{ morfismo} \\ &= j(x) + rj(y) \end{aligned}$$

  Por lo que j es un morfismo.

- ¿j es monomorfismo?

  Debemos probar que $Ker(j) = 0$, para ello basta probar que $Ker(j) \subset 0$, sea $x \in Ker(j)$

$$\begin{aligned} x \in Ker(j) &\Rightarrow j(x) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ ; ya que } f \text{ es monomorfismo} \end{aligned}$$

  por tanto j es monomorfismo.

- ¿j es epimorfismo?

  Se debe probar que $Im(j) = E$

  "$Im(j) \subset E$"

  Sea $x \in Im(j)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} x \in Im(j) &\Rightarrow \exists\, y \in A \; tal \; que \; j(y) = x \\ &\Rightarrow f(y) = x \\ &\Rightarrow x \in Im(f) = E \\ &\Rightarrow x \in E \end{aligned}$$

  "$E \subset Im(j)$"

  Sea $x \in E$, se tiene que:

$$\begin{aligned} x \in E &\Rightarrow \exists\, y \in A \; tal \; que \; f(y) = x \\ &\Rightarrow j(y) = x \\ &\Rightarrow x \in Im(j) \end{aligned}$$

Así j es epimorfismo.

Y g induce un isomorfismo

$$k : Q \to B$$
$$x + E \mapsto k(x + E) = g(x)$$

del módulo cociente $Q = X/E$, ya que cumple lo siguiente:

- ¿k está bien definida?

  Sea $x + E, y + E \in Q$ tal que $x + E = y + E$

  $$\begin{aligned} x + E = y + E &\Rightarrow x - y \in E \\ &\Rightarrow x - y \in Ker(g) \text{ ; como } Ker(g) = E \\ &\Rightarrow g(x - y) = 0 \\ &\Rightarrow g(x) - g(y) = 0 \\ &\Rightarrow g(x) = g(y) \\ &\Rightarrow k(x + E) = k(y + E) \end{aligned}$$

  Así k está bien definida.

- ¿$k((x + E) + r(y + E)) = k(x + E) + rk(y + E)$?

  Sea $x + E, y + E \in Q$ y $r \in R$

  $$\begin{aligned} k((x + E) + r(y + E)) &= k(x + ry + E) \\ &= g(x + ry) \\ &= g(x) + rg(y) \text{ ; ya que } g \text{ es morfismo} \\ &= k(x + E) + rk(y + E) \end{aligned}$$

  Por tanto k es morfismo.

- ¿k es monomorfismo?

  Probaremos que k es inyectiva, sea $k(x + E), k(y + E) \in B$ tal que

$k(x+E) = k(y+E)$

$$\begin{aligned}
k(x+E) = k(y+E) &\Rightarrow g(x) = g(y)\\
&\Rightarrow g(x) - g(y) = 0\\
&\Rightarrow g(x-y) = 0\\
&\Rightarrow x - y \in Ker(g)\\
&\Rightarrow x - y \in E \text{ ; ya que } Ker(g) = E\\
&\Rightarrow x + E = y + E
\end{aligned}$$

Por tanto k es monomorfismo.

- ¿k es epimorfismo?

  Debemos probar que $Im(k) = B$, como sigue

  "$Im(k) \subset B$"

$$\begin{aligned}
x \in Im(k) &\Rightarrow \exists\, y + E \in Q \; tal\ que\ k(y+E) = x\\
&\Rightarrow g(y) = x\\
&\Rightarrow x \in Im(g) = B \text{ ; ya que } g \text{ es epimorfismo}
\end{aligned}$$

  "$B \subset Im(k)$"

$$\begin{aligned}
x \in B &\Rightarrow \exists\, y \in X \; tal\ que\ g(y) = x\\
&\Rightarrow k(y+E) = x\\
&\Rightarrow x \in Im(k)
\end{aligned}$$

  Así k es epimorfismo.

Si identificamos los módulos A y B con los módulos E y Q por medio de los isomorfismos j y k^{-1}, la sucesión exacta corta dada se convierte en

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 0.$$

Como ejemplo de sucesión exacta más larga, consideremos un homomorfismo arbitrario

$$h : X \to Y$$

de un R-módulo X en un R-módulo Y. Consideremos el núcleo y el conúcleo de h:

$$Ker(h) \subset X, \qquad Coker(h) = Y/Im(h)$$

Sea $i : Ker(h) \to X$ el homomorfismo inclusión y

$$p : Y \to Coker(h)$$

la proyección natural. Entonces obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Ker(h) \xrightarrow{i} X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{p} Coker(h) \longrightarrow 0,$$

llamada *sucesión exacta del homomorfismo h.*

La prueba es trivial.

Teorema 1.5.1

En una sucesión exacta arbitraria

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

de homomorfismos de R-módulos, las siguientes tres propocisiones son equivalentes:

a) f es epimorfismo.

b) g es el homomorfismo trivial.

c) h es monomorfismo.

Demostración:

- "$a \Rightarrow b$"

  Por hipótesis f es epimorfismo entonces $Im(f) = B$.

  Dado que la sucesión es exacta se cumple que:

$$Im(f) = Ker(g)$$
$$B = Ker(g)$$

Como $Ker(g) = B$, entonces g es el homomorfismo trivial.

- "$b \Rightarrow c$"

  Por hipótesis g es el homomorfismo trivial, por lo cual cumple que: $Im(g) = 0$.

  Dado que la sucesión es exacta,entonces:

  $$Im(g) = Ker(h)$$
  $$0 = Ker(h)$$

  Por ser $Ker(h) = 0$, h es monomorfismo.

- "$c \Rightarrow a$"

  Por hipótesis h es monomorfismo entonces $ker(h) = 0$.

  Dado que el diagrama es exacto, cumple que:

  $$Ker(h) = Im(g)$$
  $$0 = Im(g)$$

  Por lo que g es el homomorfismo trivial y cumple que $Ker(g) = B$. Así

  $$Im(f) = Ker(g)$$
  $$Im(f) = B$$

  Luego f es epimorfismo.

$\blacksquare$

Corolario 1.5.2
En una sucesión exacta arbitraria de homomorfismos de R-módulos,

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \xrightarrow{k} E$$

$C = 0$ si y sólo si f es un epimorfismo y k es un monomorfismo.

Demostración:

- "$\Rightarrow$"

  La sucesión es exacta entonces:

  $$Im(g) = Ker(h)$$

  Pero $Ker(h) = 0$, así h es el homomorfismo trivial. Por lo que $Im(g) = 0$.

  Como $Ker(g) = \{x \in B \setminus g(x) = 0\}$, entonces $Ker(g) = B$, y g es homomorfismo trivial.

  Además,se tiene que:

  $$Im(f) = Ker(g)$$
  $$Im(f) = B$$

  Así f es epimorfismo.

  $$Im(h) = Ker(k)$$
  $$0 = Ker(k)$$

  Por lo que k es monomorfismo.

- "$\Leftarrow$"

  f es epimorfismo entonces por Teorema 1.5.1 g es el homomorfismo trivial, así $Im(g) = 0$.

  k es monomorfismo entonces por Teorema 1.5.1 h es homomorfismo trivial, así $Ker(h) = C$.

  Dado que la sucesión es exacta, entonces:

  $$Im(g) = Ker(h)$$
  $$0 = C$$

■

Corolario 1.5.3
Si una sucesión $0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$ de R-módulos es exacta, entonces $C = 0$.

Demostración:

Sea $g : 0 \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow 0$

$$0 \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} 0$$

Como la sucesión es exacta entonces $Im(g) = Ker(h)$

Pero como se ha definido g y h son homomorfismos triviales,donde cumple que:

$Im(g) = 0$ y $Ker(h) = C$

Así:

$$Im(g) = Ker(h)$$
$$0 = C$$

■

Corolario 1.5.4
En una sucesión exacta arbitraria

$$A \xrightarrow{d} B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D \xrightarrow{h} E \xrightarrow{k} F$$

de homomorfismos de R-módulos, las siguientes proposiciones son equivaletes:

a) g es isomorfismo.

b) f y h son homomorfismos triviales.

c) d es epimorfismo y k es monomorfismo.

Demostración:

- "$a \Rightarrow b$"

  Por hipótesis g es isomorfismo, por lo cual cumple que: $Im(g) = D$ y $Ker(g) = 0$.

Dado que la sucesión es exacta:

$$Im(f) = Ker(g)$$
$$Im(f) = 0$$

Por lo que f es homomorfismo trivial.

Además:

$$Im(g) = Ker(h)$$
$$D = Ker(h)$$

Así h es homomorfismo trivial.

- "$b \Rightarrow c$"

  Por Teorema 1.5.1, si f es homomorfismo trivial entonces d es epimorfismo, así mismo si h es homomorfismo trivial entonces k es monomorfismo.

- "$c \Rightarrow a$"

  Por hipótesis tenemos que:

  d es epimorfismo entonces $Im(d) = B$

  k es monomorfismo así $ker(k) = 0$

  Dado que la sucesión es exacta, cumple que:

  $$Im(d) = Ker(f)$$
  $$B = Ker(f)$$

  Así f es homomorfismo trivial, por tanto $Im(f) = 0$.

  De ello se obtiene que:

  $$Im(f) = Ker(g)$$
  $$0 = Ker(g)$$

  Por lo que g es monomorfismo. Falta probar g que es epimorfismo.

  Tenemos que:

  $$Im(h) = Ker(k)$$
  $$Im(h) = 0$$

h es homomorfismo trivial, con lo cual cumple $Ker(h) = D$

Donde:

$$Im(g) = Ker(h)$$
$$Im(g) = D$$

Así g es epimorfismo, y por ser a la misma vez monomorfismo.

$\therefore g$ es isomorfismo.

$\blacksquare$

Corolario 1.5.5
Si la sucesión

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0$$

de homomorfismos de R-módulos es exacta, entonces g es isomorfismo.

Demostración:

Sea $f : 0 \longrightarrow C$ y $h : D \longrightarrow 0$

$$0 \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D \xrightarrow{h} 0$$

Dado que la sucesión es exacta, cumple que: $Im(f) = Ker(g)$ y $Im(g) = Ker(h)$.

De la manera que se han definido f y h estos son homomorfismos triviales, por lo cual: $Im(f) = 0$ y $Ker(h) = D$.

Así obtenemos

$$Im(f) = Ker(g)$$
$$0 = Ker(g)$$

y además

$$Im(g) = Ker(h)$$
$$Im(g) = D$$

Por lo cual g es isomorfismo.

$\blacksquare$

Definición 1.5.6
Se dice que una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \cdots$$

se *escinde en el módulo* Y, si y sólo si el submódulo

$$A = Im(f) = Ker(g)$$

de Y es un sumando directo de Y.

Es decir, si y sólo si Y se descompone en suma directa de A y otro submódulo. Si la sucesión exacta se escinde en cada uno de sus módulos no extremos, decimos que la sucesión se *escinde*. Puesto que una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

obviamente se escinde en A y C, la sucesión se escinde si y sólo si lo es en B.

Teorema 1.5.7
Si una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \cdots$$

de homomorfismos de R-módulos se escinde en el módulo Y, entonces Y es isomorfismo a la suma directa

$$Im(f) \oplus Im(g).$$

Demostración:
Como Y se descompone entonces $Y = A \oplus B$, donde $A = Im(f) = Ker(g)$ y B es otro submódulo de Y.
Debemos probar que:

$$Y = A \oplus B \cong Im(f) \oplus Im(g)$$
$$Y = Im(f) \oplus B \cong Im(f) \oplus Im(g)$$

Para ello basta probar que $B \cong Im(g)$.

Tenemos que $g : Y \longrightarrow Z$ y como B es submódulo de Y podemos restringir la función g, así

$$g\mid_B : B \longrightarrow Im(g)$$

donde diremos que $h = g\mid_B$.

Ahora ¿h es homomorfismo?

Sea $x, y \in B$ y $r \in R$

$$\begin{aligned} h(x+y) &= g\mid_B (x+y) \\ &= g(x+y) \\ &= g(x)+g(y) \\ &= g\mid_B (x) + g\mid_B (y) \\ &= h(x)+h(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(r \cdot x) &= g\mid_B (r \cdot x) \\ &= g(r \cdot x) \\ &= r(g(x)) \\ &= r(g\mid_B (x)) \\ &= r \cdot h(x) \end{aligned}$$

Podemos ver que h es homomorfismo.

Ahora probaremos que h es un monomorfismo, para ello debemos ver si $Ker(h) = 0$

Sea $y \in Ker(h) = Ker(g\mid_B) \subset B$ entonces $y \in B$.

$$\begin{aligned} y \in Ker(h) &\Rightarrow g\mid_B(y) = 0 \\ &\Rightarrow g(y) = 0 \\ &\Rightarrow y \in Ker(g) \\ &\Rightarrow y \in A \\ &\Rightarrow y \in A \wedge y \in B \\ &\Rightarrow y \in A \cap B = 0 \\ &\Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $\forall y \in Ker(h)$, $y = 0$, así $Ker(h) = 0$.

Nos falta probar que $Im(h) = Im(g)$.

Sea $z \in Im(g)$

$$\begin{aligned} z \in Im(g) &\Rightarrow \exists\, y \in Y \ tal\ que\ g(y) = z \\ &\Rightarrow y \in A \oplus B \\ &\Rightarrow y = a + b \\ &\Rightarrow g(y) = g(a+b) \\ &\Rightarrow z = g(a) + g(b) \\ &\Rightarrow z = g(b); a \in Ker(g) \\ &\Rightarrow z = h(b); \text{ya que } b \in B \\ &\Rightarrow z \in Im(h) \end{aligned}$$

Así $Im(g) \subset Im(h)$.

Como h es la restricción de g entonces $Im(h) \subset Im(g)$

Por lo tanto $Im(h) = Im(g)$.

■

Corolario 1.5.8
Si una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

de homomorfismo de R-módulos se escinde, entonces B es isomorfo a la suma directa $A \oplus C$.

Demostración:

Por hipótesis B se escinde entonces $B \cong Im(f) \oplus Im(g)$.

Pero f es monomorfismo por lo que $Im(f) \cong A$, así $B \cong A \oplus Im(g)$.

Ahora falta probar que $Im(g) \cong C$.

Ya que g es epimorfismo entonces $Im(g) = C$.

Por lo tanto $B \cong A \oplus C$

■

Corolario 1.5.9
Una sucesión exacta arbitraria

$$\cdots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \cdots$$

de homomorfismos de R-módulos se escinde en el módulo Y si existe un homomorfismo $h : Y \to X$ tal que el producto $h \cdot f$ es un automorfismo del módulo X. En este caso, tenemos

$$Y \cong Im(f) \oplus Im(g) \cong X \oplus Im(g).$$

Demostración:

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "h"] & Z \\
X & &
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis $h \circ f$ es isomorfismo por Teorema 1.4.9

Y se puede escribir como:

$$Y = Im(f) \oplus Ker(h)$$

Y por ser $h \circ f$ isomorfismo entonces f es monomorfismo por lo que $Im(f) \cong X$.

Ahora falta probar que $Ker(h) \cong Im(g)$

Pero por Teorema 1.5.7 se cumple que $Ker(h) \cong Im(g)$

$\therefore\ Y \cong Im(f) \oplus Im(g) \cong X \oplus Im(g)$

■

Corolario 1.5.10
Una sucesión exacta arbitraria

$$\cdots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \cdots$$

de homomorfismos de R-módulos se esscinde en el módulo Y si existe un homomorfismo $k : Z \to Y$ tal que el producto $g \cdot k$ es un automorfismo del módulo Z. En este caso, tenemos

$$Y \cong Im(f) \oplus Im(g) \cong Im(f) \oplus Z.$$

Demostración:

Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, "g\circ k"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Por hipótesis $g \circ k$ es isomorfismo por lo que $Y = Im(k) \oplus Ker(g)$

Dado que la sucesión es exacta entonces $Im(f) = Ker(g)$, así $Y = Im(k) \oplus Im(f)$.

Por lo que falta probar que $Im(k) \cong Im(g)$.

Pero como $g \circ k$ es isomorfismo entonces k es monomorfismo entonces $Im(k) \cong Z$, pero $Z \cong Im(g)$,por tanto $Im(k) \cong Im(g)$.

$$\therefore Y \cong Im(f) \oplus Im(g) \cong Im(f) \oplus Z$$

■

Sea $f : X \to Y$ un homomorfismo arbitrario de R-módulo X en un R-módulo Y. Un *inverso por la izquierda* de f, es un homomorfismo $h : Y \to X$ tal que el producto $h \circ f$ es el automorfismo identidad del módulo X. Análogamente, un *inverso por la derecha* de f es un homomorfismo $k : Y \to X$ tal que el producto $f \circ k$ es el automorfismo identidad del módulo Y. Entonces tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.5.11
Para cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

de homomorfimos de R-módulos, las propocisiones siguientes son equivalentes:

a) La sucesión exacta corta se escinde.

b) El homomorfismo f tiene un inverso por la izquierda.

c) El homomorfismo g tiene un inverso por la derecha.

Demostración:

- "$b) \Rightarrow a)$"

  El homomorfismo f tiene un inverso por la izquierda entonces existe $h : B \longrightarrow A$ tal que $h \circ f$ es el automorfismo identidad. Así por Corolario 1.5.9 la sucesión se escinde.

- "$c) \Rightarrow a)$"

  El homomorfismo g tiene un inverso por la derecha,entonces existe $k : C \longrightarrow B$ tal que $g \circ k$ es el automorfismo identidad. Así por Corolario 1.5.10 la sucesión se escinde

- "$a) \Rightarrow b)$"

  La suceción exacta se escinde entonces $B = D \oplus E$ donde $D = Im(f) = Ker(g)$ y E submódulo de B.

f es monomorfismo e induce a

$$i : A \longrightarrow Im(f) = D$$
$$x \mapsto i(x) = f(x)$$

donde i es monomorfismo ya que, sea $x \in Ker(i)$

$$\begin{aligned} x \in Ker(i) &\Rightarrow i(x) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Así como se tomo un x arbitrario, se deduce que $Ker(i) = 0$, por lo que i es monomorfismo.

Además i es epimorfismo, ya que

$$\begin{aligned} x \in Im(i) &\Rightarrow i(a) = x \text{ ; para algún } a \in A \\ &\Rightarrow f(a) = x \\ &\Rightarrow x \in Im(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in Im(f) &\Rightarrow f(a) = x \text{ ; para algún } a \in A \\ &\Rightarrow i(a) = x \\ x &\in Im(i) \end{aligned}$$

por lo que $Im(i) = D$ e i es epimorfismo.

Por tanto i es isomorfismo.

Tomemos

$$h : B = Im(f) + E \longrightarrow A$$
$$f(x) + e \mapsto H(f(x) + e) = i^{-1}(f(x)) = x$$

Vamos a probar que h es homomorfismo. Sea $f(x_1)+e_1, f(x_2)+e_2 \in B$, $r \in R$

$$\begin{aligned}
h(f(x_1)+e_1+r(f(x_2)+e)) &= h(f(x_1)+e_1+rf(x_2)+re_2)) \\
&= h(f(x_1)+f(rx_2)+e_1+re_2)) \\
&= h(f(x_1+rx_2)+e_1+re_2)) \\
&= i^{-1}(f(x_1+rx_2)) \\
&= x_1+rx_2 \\
&= i^{-1}(f(x_1))+ri^{-1}(f(x_2)) \\
&= h(f(x_1)+e_1)+r(h(f(x_2)+e_2))
\end{aligned}$$

Así h es homomorfismo y además es el inverso por la izquierda de f.

■

Establecemos ahora el siguiente teorema.

Teorema 1.5.12 (El lema cuatro)

Si, en el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[d, "\delta"'] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D'
\end{tikzcd}$$

las dos filas son exactas, los tres cuadrados son conmutativos, α es un epimorfismo, y δ es un monomorfismo, entonces tenemos

$$Im(\beta) = g'^{-1}[Im(\gamma)],$$

$$Ker(\gamma) = g[Ker(\beta)].$$

Por tanto, si γ es un epimorfismo también lo es β, y si β es un monomorfismo también lo es γ.

Aquí, la conmutatividad de los tres cuadrados expresa las tres siguientes igualdades:

$$\beta \circ f = f' \circ \alpha,$$

$$\gamma \circ g = g' \circ \beta,$$

$$\delta \circ h = h' \circ \gamma.$$

Demostración:

a) Sea:

$$Im(\beta) = \{b' \in B' \ | \ b' = \beta(b) \ \text{para algún} \ b \in B\}$$

$$g'^{-1}[Im(\gamma)] = \{b' \in B' \ | \ g'(b') \in Im(\gamma)\}$$

- "$\subset$"

  Sea $y \in Im(\beta)$

$$\begin{aligned} y \in Im(\beta) &\Rightarrow y = \beta(b) \text{ para algún } b \in B \\ &\Rightarrow g'(y) = g'(\beta(b)) \\ &\Rightarrow g'(y) = (g' \circ \beta)(b) \\ &\Rightarrow g'(y) = (\gamma \circ g)(b) \\ &\Rightarrow g'(y) = \gamma(g(b)) \\ &\Rightarrow g'(y) = \gamma(c) \quad ;c = g(b) \\ &\Rightarrow g'(y) \in Im(\gamma) \\ &\Rightarrow y \in g'^{-1}[Im(\gamma)] \end{aligned}$$

  Como se tomo un y arbitrario se concluye que $Im(\beta) \subset g'^{-1}[Im(\gamma)]$

- "$\supset$"

$$\begin{aligned} b' \in g'^{-1}[Im(\gamma)] &\Rightarrow g'(b') \in Im(\gamma) \\ &\Rightarrow g'(b') = \gamma(c) \text{ para algún } c \in C \end{aligned}$$

  Como la sucesión inferior es exacta entonces $h'(g'(b')) = 0$.

  Así $h'(g'(b')) = h'(\gamma(c)) = \delta(h(c)) = 0$

  Pero como δ es monomorfismo, $h(c) = 0$.

$$
\begin{aligned}
h(c) = 0 &\Rightarrow c \in Ker(h) \\
&\Rightarrow c \in Im(g) \\
&\Rightarrow c = g(b) \text{ para algún } b \in B \\
&\Rightarrow \gamma(c) = \gamma(g(b)) \\
&\Rightarrow \gamma(c) = g'(\beta(b)) \\
&\Rightarrow g'(b') = g'(\beta(b)) \\
&\Rightarrow g'(b') - g'(\beta(b)) = 0 \\
&\Rightarrow g'(b' - \beta(b)) = 0 \\
&\Rightarrow b' - \beta(b) \in Ker(g') \\
&\Rightarrow b' - \beta(b) \in Im(f')
\end{aligned}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
b' - \beta(b) &= f'(a') \\
b' - \beta(b) &= f'(\alpha(a))\ ; \alpha(a) = a' \\
b' - \beta(b) &= \beta(f(a)) \\
b' &= \beta(f(a)) + \beta(b) \\
b' &= \beta(b + f(a))
\end{aligned}
$$

Por tanto $b' \in Im(\beta)$, así $Im(\beta) \supset g'^{-1}[Im(\gamma)]$

b) Sea

$$Ker(\gamma) = \{c \mid \gamma(c) = 0 \text{ para algún } c \in C\}$$

$$g[Ker(\beta)] = \{c \in C \mid g(x) = c\ ;\ x \in Ker(\beta)\}$$

- "$\subset$"

  Sea $c \in Ker(\gamma)$, se tiene que $\gamma(c) = 0$ para algún $c \in C$.

$$\begin{aligned}
c \in Ker(\gamma) &\Rightarrow \gamma(c) = 0\\
&\Rightarrow h'(\gamma(c)) = h'(0)\\
&\Rightarrow (h' \circ \gamma)(c) = 0\\
&\Rightarrow (\delta \circ h)(c) = 0\\
&\Rightarrow \delta(h(c)) = 0\\
&\Rightarrow h(c) = 0 \,; \text{ya que } \delta \text{ es monomorfismo}\\
&\Rightarrow c \in Ker(h)\\
&\Rightarrow c \in Im(g)
\end{aligned}$$

Ya que $c \in Im(g)$ entonces $\exists\, b \in B$ tal que $g(b) = c$. Además $b \in B$, entonces $b' = \beta(b) \ \in B'$

$$\begin{aligned}
b' &= \beta(b)\\
g'(b') &= g'(\beta(b))\\
g'(b') &= \gamma(g(b))\\
g'(b') &= \gamma(c)\\
g'(b') &= 0
\end{aligned}$$

Por lo que $b' \in Ker(g') = Im(f')$.

Dado que la fila inferior es exacta entonces $\exists\, a' \in A'$ tal que $f'(a') = b'$, y α es epimorfismo así $\exists\, a \in A$ tal que $\alpha(a) = a'$.

Tomando el R-módulo B tenemos que $b - f(a) \in B$.

$$\begin{aligned}
\beta(b - f(a)) &= \beta(b) - \beta(f(a))\\
&= b' - f'(\alpha(a))\\
&= b' - f'(a')\\
&= b' - b'\\
&= 0
\end{aligned}$$

Así $b - f(a) \in Ker(\beta)$ Además

$$\begin{aligned} g(b - f(a)) &= g(b) - g(f(a)) \\ &= g(b) - 0 \\ &= c \end{aligned}$$

Por tanto $c \in g[Ker(\beta)]$, así $Ker(\gamma) \subset g[Ker(\beta)]$

- "$\supset$"

  Sea $c \in g[Ker(\beta)]$, entonces $\exists\, b \in Ker(\beta)$ tal que $g(b) = c$.

$$\begin{aligned} \gamma(c) &= \gamma(g(b)) \\ &= g'(\beta(b)) \\ &= g'(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Por tanto $c \in Ker(\gamma)$, así $Ker(\gamma) \subset g[Ker(\beta)]$

Sea γ un epimorfismo debemos probar que β también es un epimorfismo.

- ¿$Im(\beta) = B'$?

$$\begin{aligned} Im(\beta) &= {g'}^{-1}[Im(\gamma)] \\ &= {g'}^{-1}(C') \\ &= B' \end{aligned}$$

Además, sea β un monomorfismo debemos probar que γ también lo es.

- ¿$Ker(\gamma) = 0$?

$$\begin{aligned} Ker(\gamma) &= g[Ker(\beta)] \\ &= g(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Como consecuencia del teorema anterior, se tienen los dos siguientes corolarios.

Corolario 1.5.13 (El lema cinco)
Si, en el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\epsilon"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \arrow[r, "k'"] & E' \end{tikzcd}$$

las dos filas son exactas, los cuatro cuadrados son conmutativos, y los homomorfismos α, β, δ y ϵ son isomorfismos, entonces el homomorfismo central debe ser también un isomorfismo.

Demostración:

Para que γ sea isomorfismo, debe cumplir que $Im(\gamma) = C'$ y $Ker(\gamma) = 0$.

Tomando

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\epsilon"'] \\ B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D' \arrow[r, "k'"'] & E' \end{tikzcd}$$

Por teorema 1.5.12 $Im(\gamma) = h'^{-1}(Im(\delta))$, pero $Im(\delta) = D'$ por ser δ isomorfismo.

$$Im(\gamma) = h'^{-1}(D')$$
$$Im(\gamma) = C'$$

Ahora tomemos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[d, "\delta"'] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D' \end{tikzcd}$$

Por teorema 1.5.12 $Ker(\gamma) = g[Ker(\beta)]$, pero por ser β isomorfismo $Ker(\beta) = 0$, entonces

$$Ker(\gamma) = g(0)$$
$$Ker(\gamma) = 0$$

$$\therefore \gamma \text{ es isomorfismo}$$

■

Corolario 1.5.14 (El lema cinco corto)
Si, en el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

las dos filas son exactas y los dos cuadrados son conmutativos, entonces:

a) Si α y γ son monomorfismos, también lo es β.

b) Si α y γ son epimorfismos, también lo es β.

Por lo tanto el homomorfismo central β es un isomorfismo si α y γ son tambipén isomorfismos.

Demostración:

a) Por hipótesis α y γ son monomorfismos, para que β sea monomorfismo debe cumplir que $Ker(\beta) = 0$. Tomando

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"'] \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \end{tikzcd}$$

Por teorema 1.5.12 $Ker(\beta) = g[Ker(\alpha)]$ ya que α es monomorfismo cumple que $Ker(\alpha) = 0$

$$Ker(\beta) = f(0)$$

$$Ker(\beta) = 0$$

b) Por hipótesis α y γ son epimorfismos, para que β sea epimorfismo debe cumplir que $Im(\beta) = B'$. Tomando

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por teorema 1.5.12 $Im(\beta) = g'^{-1}[Im(\gamma)]$ como γ es epimorfismo cumple que $Im(\gamma) = C'$

$$Im(\beta) = g'^{-1}(C')$$
$$Im(\beta) = B'$$

■

1.6. Sucesiones Semiexactas

Una sucesión finita o infinita

$$\cdots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \cdots$$

de homomorfismos de R-módulos se llama *semiexacta* si y sólo si la imagen del homomorfismo entrante está contenida en el núcleo del homomorfismo saliente en todo módulo distinto de los valores extremos (si existen) de la sucesión. La sucesión es semiexacta si y sólo si el producto $g \circ f$ de dos homomorfismos cualesquiera consecutivos de la sucesión f y g es el homomorfismo trivial.

Toda sucesión exacta de homomorfismos de R-módulos es semiexacta, pero no toda sucesión semiexacta es exacta.

Por ejemplo, sea A un submódulo propio de un R-módulo X, es decir, $A \neq X$ y $A \subset X$, y sea $i : A \to X$ el homomorfismo inclusión. Entonces, la sucesión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} X \longrightarrow 0$$

es semiexacta, pero no exacta, ya que:

Sea

$$0 \xrightarrow{m} A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{n} 0$$

donde $m,\ n$ son homomorfismos triviales, por definición $Ker(n) = X$.

Para que la sucesión sea exacta debe cumplir que

$$Im(i) = Ker(n)$$

$$Im(i) = X$$

Pero $Im(i) \neq X$, ya que A es submódulo propio de X, por tanto la sucesión no es exacta.

El módulo cociente $Q = X/A$ viene a ser como la medida de la desviación de la exactitud.

Esto sugiere la siguiente definición general.

Definición 1.6.1
En una sucesión semiexacta arbitrariamente dada

$$C : \cdots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \cdots$$

de homomorfismos de R-módulos, el módulo cociente

$$Ker(g)/Im(f)$$

se llama *módulo derivado* de la sucesión C en el módulo Y.

La proposición siguiente es inmediata.

Proposición 1.6.2
Una sucesión semiexacta de homomorfimos de R-módulos es exacta si y sólo si todos sus módulos derivados son triviales.

Demostración

- "$\Rightarrow$"

  Por hipótesis la suceción es exacta entonces $Im(f) = Ker(g)$.
  El módulo derivado se define como: $\dfrac{Ker(g)}{Im(f)}$.
  Así:

$$\begin{aligned}\frac{Ker(g)}{Im(f)} &= \frac{Im(f)}{Im(f)} \\ &= \{x + Im(f) \mid x \in Im(f)\} \\ &= \{Im(f)\}\end{aligned}$$

  Por lo tanto es el módulo derivado trivial.

- "$\Leftarrow$"

  Por hipótesis la suceción es semiexacta por lo que $Im(f) \subset Ker(g)$ y además sus modúlos derivados son triviales.

Basta probar que $Ker(g) \subset Im(f)$, así sea $x \in Ker(g)$

$$\begin{aligned} x \in Ker(g) &\Rightarrow x + Im(f) \in \frac{Ker(g)}{Im(f)} \\ &\Rightarrow x + Im(f) \in \{Im(f)\} \text{ ; por ser módulo derivado trivial} \\ &\Rightarrow x \in Im(f) \end{aligned}$$

Por lo tanto $Im(f) = Ker(g)$ y la sucesión es exacta.

■

Como subíndices para los módulos de una sucesión semiexacta C se utilizan enteros decrecientes o enteros crecientes.

En el primer caso, la sucesión semiexacta C recibe el nombre de *sucesión descendente (o complejo de cadenas)* y los homomorfismos de C se denotarán con el símbolo ∂_i. Así, una sucesión descendente C es de la siguiente forma:

$$C : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

con $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$. En este caso, los elementos de C se llaman *cadenas n-dimensionales* de C y los homomorfismos ∂_n son los *operadores bordes*. El núcleo de ∂_n en C_n denotado por $Z_n(C)$, se denomina *módulo de los ciclos n-dimensionales* de C. La imagen de ∂_n en C_n denotada por $B_n(C)$ es llamada *módulo de los bordes n-dimensionales* de C. Finalmente, el módulo derivado de C en el módulo C_n, designados por

$$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$$

recibe el nombre de *módulo de homología n-dimensional* de C.

Cuando como subíndices se utilizan enteros crecientes, la sucesión semiexacta C se llamada *sucesión ascendente (o complejo de cocadenas)* y los homomorfismos de C se representan todos con el símbolo δ^i. Así, una sucesión ascendente C es de la forma siguiente:

$$C : \cdots \xrightarrow{\delta^{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots$$

donde $\delta^i \circ \delta^{i-1} = 0$. En este caso, los términos *cocadena, cociclo y coborde* son utilizados en lugar de cadena, ciclo y borde para las sucesiones descendentes. Además, se usan superíndices en lugar de subíndices. Finalmente, el módulo derivado

$$H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$$

recibe el nombre de *módulo* de *cohomología n-dimensional* de C.
Debido a la analogía entre sucesiones ascendestes y descendentes, consideremos únicamente sucesiones descendentes en el resto de esta sección.
Sean dos sucesiones descendentes cualesquiera

$$C : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

$$D : \cdots \xrightarrow{\partial'_{n+2}} D_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial'_n} D_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \cdots$$

de R-módulos. Un *homomorfismo (o transformación de cadenas)* $f : C \to D$ es una familia de homomorfismos

$$f = \{f_n : C_n \to D_n \mid n \in Z\}$$

de R-módulos, con conjuntos de índices Z, tal que se tiene

$$\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$$

en el rectángulo siguiente:

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "\partial'_n"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

para todo entero $n \in Z$.
Consideremos ahora un homomorfismo arbitrariamente dado $f : C \to D$ de la sucesión descendente C en la sucesión descendente D. El homomorfismo $f_n : C_n \to D_n$ aplica $Z_n(C)$ en $Z_n(D)$. Tomemos

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & D_n \arrow[d, "\partial'_n"] \\ C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] & D_{n-1} \end{tikzcd} \qquad \partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$$

Para que f_n aplique $Z_n(C)$ en $Z_n(D)$, debe existir una aplicación k, tal que:

$$\begin{aligned} k : Z_n(C) &\longrightarrow Z_n(D) \\ x &\mapsto k(x) \in Ker(\partial'_n) \end{aligned}$$

Veremos que forma tienen los elementos de $Z_n(C)$ al aplicarles k.

Sea $x \in Ker(\partial_n)$

$$\begin{aligned} x \in Ker(\partial_n) &\Rightarrow \partial_n(x) = 0 \\ &\Rightarrow f_{n-1}(\partial_n(x)) = f_{n-1}(0) \\ &\Rightarrow (f_{n-1} \circ \partial_n)(x) = 0 \\ &\Rightarrow (\partial'_n \circ f_n)(x) = 0 \\ &\Rightarrow \partial'_n(f_n(x)) = 0 \\ &\Rightarrow \text{Definiendo } k(x) \text{ como } f_n(x) \\ &\Rightarrow k(Z_n(C)) \subset Z_n(D) \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} k : Z_n(C) &\longrightarrow Z_n(D) \\ x &\mapsto k(x) = f_n(x) \end{aligned}$$

Donde k está bien definida y es un homomorfismo por cumplir que $k(Z_n(C)) \subset Z_n(D)$.

Y además $f_n : C_n \longrightarrow D_n$ aplica $B_n(C)$ en $B_n(D)$.

Para que f_n aplique $B_n(C)$ en $B_n(D)$ debe existir j tal que:

$$\begin{aligned} j : B_n(C) &\longrightarrow B_n(D) \\ y &\mapsto j(y) \in Im(\partial'_{n+1}) \end{aligned}$$

Veremos la forma que deben de tener los elementos de $B_n(C)$ al aplicarles j.

Sea $x \in B_n(C)$

$$\begin{aligned} x \in B_n(C) &\Rightarrow \exists\, c_{n+1} \in C_{n+1} \mid \partial_{n+1}(c_{n+1}) = x \\ &\Rightarrow f_n(\partial_{n+1}(c_{n+1})) = f_n(x) \\ &\Rightarrow (f_n \circ \partial_{n+1})(c_{n+1}) = f_n(x) \\ &\Rightarrow (\partial'_{n+1} \circ f_{n+1})(c_{n+1}) = f_n(x) \\ &\Rightarrow \partial'_{n+1}(f_{n+1}(c_{n+1})) = f_n(x) \\ &\Rightarrow f_n(x) \in Im(\partial'_{n+1}) \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} j : B_n(C) &\longrightarrow B_n(D) \\ x &\mapsto j(x) = f_n(x) \end{aligned}$$

Por tanto j está bien definida y es homomorfismo ya que $f_n(Im(\partial_{n+1})) \subset Im(\partial'_{n+1})$.

Por lo que f_n induce un homomorfismo

$$H_n(f) : H_n(C) \to H_n(D)$$

entre los módulos de homología *n-dimensionales* $H_n(C)$ y $H_n(D)$.

$H_n(f)$ está definido de la siguiente manera:

$$H_n(f) : H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$$

$$x + Im(\partial_{n+1}) \mapsto H_n(f)(x + Im(\partial_{n+1})) = f_n(x) + Im(\partial'_{n+1})\ ; x \in Z_n(C)\ y\ f_n(x) \in Z_n(D)$$

Para probar que $H_n(f)$ es un homomorfismo debe cumplir lo siguiente:

- ¿$H_n(f)$ está bien definida?

  Sea $x + Im(\partial_{n+1}), y + Im(\partial_{n+1}) \in H_n(C)$ tal que $x + Im(\partial_{n+1}) = y + Im(\partial_{n+1})$ con $x, y \in Z_n(C)$

$$\begin{aligned} x + Im(\partial_{n+1}) = y + Im(\partial_{n+1}) &\Rightarrow x - y \in Im(\partial_{n+1}) \\ &\Rightarrow f_n(x - y) \in f_n(Im(\partial_{n+1})) \subset Im(\partial'_{n+1}) \\ &\Rightarrow f_n(x) - f_n(y) \in Im(\partial'_{n+1}) \\ &\Rightarrow f_n(x) + Im(\partial'_{n+1}) = f_n(y) + Im(\partial'_{n+1}) \\ &\Rightarrow H_n(f)(x + Im(\partial_{n+1})) = H_n(f)(y + Im(\partial_{n+1})) \end{aligned}$$

Por tanto $H_n(f)$ está bien definida.

- ¿$H_n(f)(x + Im(\partial_{n+1}) + r(y + Im(\partial_{n+1}))) = H_n(f)(x + Im(\partial_{n+1})) + rH_n(f)(y + Im(\partial_{n+1}))$?

  Sea $x + Im(\partial_{n+1}), y + Im(\partial_{n+1}) \in H_n(C)$ y $r \in R$.

$$\begin{aligned} H_n(f)(x + Im(\partial_{n+1}) + r(y + Im(\partial_{n+1}))) &= H_n(f)(x + Im(\partial_{n+1}) + ry + Im(\partial_{n+1})) \\ &= H_n(f)(x + ry + Im(\partial_{n+1})) \\ &= f_n(x + ry) + Im(\partial'_{n+1}) \\ &= f_n(x) + f_n(ry) + Im(\partial'_{n+1}) \\ &= f_n(x) + rf_n(y) + Im(\partial'_{n+1}) \\ &= f_n(x) + Im(\partial'_{n+1}) + rf_n(y) + Im(\partial'_{n+1}) \\ &= (f_n(x) + Im(\partial'_{n+1})) + r(f_n(y) + Im(\partial'_{n+1})) \\ &= H_n(f)(x + Im(\partial_{n+1})) + rH_n(f)(y + Im(\partial_{n+1})) \end{aligned}$$

  Por tanto $H_n(f)$ es un homomorfismo.

Este homomorfismo $H_n(f)$ recibe el nombre de *homomorfismo inducido n-dimensional* de f_n.

Denominaremos *homomorfismo identidad* $i : C \to C$ de una sucesión descendente C, a la familia

$$i : \{i_n : C_n \to C_n | n \in Z\}$$

de los homomorfismos identidad i_n de los módulos C_n. Es inmediata la siguiente proposición.

Proposición 1.6.3
Si $i : C \to C$ es el homomorfismo identidad de una sucesión descendente C, entonces $H_n(i)$ es el homomorfismo identidad del módulo $H_n(C)$ para todo $n \in Z$.

Demostración: Tomando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} C: \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle i_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle i_n} & & \downarrow{\scriptstyle i_{n-1}} & & \\ C: \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Debemos probar que $H_n(i)$ es el morfismo identidad de $H_n(c)$. Primero veamos como esta definido $H_n(i)$

$$\begin{aligned} H_n(i) : H_n(C) &\longrightarrow H_n(C) \\ x + Im(\partial_{n+1}) &\mapsto H_n(i)(x + Im(\partial_{n+1})) = i(x) + Im(\partial_{n+1}) \end{aligned}$$

Sea $x + Im(\partial_{n+1}) \in H_n(C)$

$$\begin{aligned} H_n(i)(x + Im(\partial_{n+1})) &= i(x) + Im(\partial_{n+1}) \\ &= x + Im(\partial_{n+1}) \text{ ; por hip. } i \text{ es el morfismo identidad} \\ &= Id_{H_n(C)}(x + Im(\partial_{n+1})) \end{aligned}$$

■

Sean $f : C \to D$ y $g : D \to E$ homomorfismos de sucesiones descendentes. Entonces la familia

$$h : \{g_n \circ f_n : C_n \to E_n | n \in Z\}$$

es obviamente un homomorfismo de la sucesión descendente C en la sucesión descendente E. Este homomorfismo $h : C \to E$ se llama *producto (o composición)* de los homomorfismos f y g, y se denota por

$$g \circ f : C \to E.$$

La siguiente proposición es obvia.

Proposición 1.6.4
Si $f : C \to D$ y $g : D \to E$ son homomorfismos de sucesiones descendentes, entonces

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$$

para todo $n \in Z$.

Demostración:

Tomando el siguiente diagrama como referencia

$$\begin{array}{ccccccccc}
C: \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow f & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\
D: \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow g & & \downarrow g_{n+1} & & \downarrow g_n & & \downarrow g_{n-1} & & \\
E: \cdots & \longrightarrow & E_{n+1} & \xrightarrow{\partial''_{n+1}} & E_n & \xrightarrow{\partial''_n} & E_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Tenemos que

$$H_n(g \circ f) : H_n(C) \longrightarrow H_n(E)$$
$$x + Im(\partial_{n+1}) \mapsto H_n(g \circ f)(x + Im(\partial_{n+1})) = (g_n \circ f_n)(x) + Im(\partial''_{n+1})$$

Debemos probar que $H_n(g \circ f)(x + Im(\partial_{n+1})) = [H_n(f) \circ H_n(g)](x + Im(\partial_{n+1}))$.
Sea $x + Im(\partial_{n+1}) \in H_n(C)$

$$\begin{aligned}
[H_n(g) \circ H_n(f)](x + Im(\partial_{n+1})) &= H_n(g)[H_n(f)(x + Im(\partial_{n+1}))] \\
&= H_n(g)[f_n(x) + Im(\partial'_{n+1})] \\
&= g_n(f_n(x)) + Im(\partial''_{n+1}) \\
&= (g_n \circ f_n)(x) + Im(\partial''_{n+1}) \\
&= H_n(g \circ f)(x + Im(\partial_{n+1}))
\end{aligned}$$

$\therefore \forall\ x + Im(\partial_{n+1})$ se cumple que $H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f)$.

■

Se llama *sucesión descendente trivial*, una sucesión descendente 0 tal que, para todo $n \in Z$, 0_n consta de un solo elemento. Como toda sucesión descendente trivial es exacta, tenemos

$$H_n(0) = 0$$

para todo $n \in Z$.

Recibe el nombre de *homomorfismo trivial* de una sucesión descendente C en una sucesión descendente D, el homomorfismo $h : C \to D$ tal que h_n es el homomorfismo trivial del módulo C_n en el módulo D_n para todo $n \in Z$. Expresemos con $h = 0$ que h es el homomorfismo trivial.

Proposición 1.6.5
Si $h : C \to D$ es el homomorfismo trivial de una sucesión descendente C en una sucesión descendente D, entonces

$$H_n(h) : H_n(C) \to H_n(D)$$

es el homomorfismo trivial para todo $n \in Z$.

Demostración:
Sea $x + Im(\partial_{n+1}) \in H_n(C)$

$$\begin{aligned} x + Im(\partial_{n+1}) \in H_n(C) &\Rightarrow H_n(h)(x + Im(\partial_{n+1})) = h_n(x) + Im(\partial'_{n+1}) \\ &\Rightarrow H_n(h)(x + Im(\partial_{n+1})) = 0 + Im(\partial'_{n+1}) \\ &\Rightarrow H_n(h)(x + Im(\partial_{n+1})) = Im(\partial'_{n+1}) \\ &\Rightarrow H_n(h)(x + Im(\partial_{n+1})) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ $H_n(h)$ es el homomorfismo trivial.

■

Dos homomorfismos $f, g : C \to D$ de una sucesión descendente C en una sucesión descendente D se llaman *homotópicos* si y sólo si existe una familia de homomorfismos

$$h = \{h_n : C_n \to D_{n+1} | n \in Z\}$$

tal que, para todo $n \in Z$, se cumple

$$\partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n$$

en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] \arrow[dr, shift left, "f_n"] \arrow[dr, shift right, "g_n"'] & D_{n+1} \arrow[d, "\partial'_{n+1}"] \\ C_{n-1} \arrow[r, "h_{n-1}"'] & D_n \end{tikzcd}$$

En este caso, la familia h se llama *homotopia (o homotopía de cadenas)* entre los homofismos f y g; en simbolos,

$$h : f \simeq g : C \to D.$$

Proposición 1.6.6
Si dos homomorfismos f, $g : C \to D$ de sucesiones descendientes son homotópicos, entones

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(C) \to H_n(D)$$

para todo $n \in Z$.

Demostración:

Tomando el siguiente diagrama como referencia

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[d, "\partial_{n+1}"'] & D_{n+1} \arrow[d, "\partial'_{n+1}"] \\ C_n \arrow[ur, "h_n"] \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] \arrow[d, "\partial_n"'] & D_n \arrow[d, "\partial'_n"] \\ C_{n-1} \arrow[ur, "h_{n-1}"'] & D_{n-1} \end{tikzcd} \qquad \partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n$$

Tomemos $z + Im(\partial_{n+1}) \in H_n(C)$, donde $z \in Ker(\partial_n)$, como f, g son homotopicos cumplen que:

$$\begin{aligned} f_n(z) - g_n(z) &= (\partial'_{n+1} \circ h_n)(z) + (h_{n-1} \circ \partial_n)(z) \\ &= \partial'_{n+1}(h_n(z)) + h_{n-1}(\partial_n(z)) \\ &= \partial'_{n+1}(h_n(z)) + h_{n-1}(0) \ ; \ z \in Z_n(C) \\ &= \partial'_{n+1}(h_n(z)) + 0 \\ &= \partial'_{n+1}(h_n(z)) \end{aligned}$$

Entonces $\partial'_{n+1}(h_n(z)) \in B_n(D) = Im(\partial'_{n+1})$.
Así $f_n(z) - g_n(z) \in Im(\partial'_{n+1})$

$$f_n(z) + Im(\partial'_{n+1}) = g_n(z) + Im(\partial'_{n+1})$$
$$H_n(f)(z + Im(\partial_{n+1})) = H_n(g)(z + Im(\partial_{n+1}))$$

Como se tomo un $z + Im(\partial_{n+1})$ arbitrario se concluye que :

$$H_n(f) = H_n(g)$$

■

Consideremos ahora una sucesión exacta corta S de sucesiones descendentes:

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

Con ello, se quiere expresar que $f : C \to D$ y $g : D \to E$ son homomorfismos de sucesiones descendentes tales que

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de R-módulos pra todo entero $n \in Z$.

Lema 1.6.7
Para todo entero $n \in Z$, la sucesión

$$H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E)$$

de R-módulos es exacta.

Demostración:

Tomando el siguiente diagrama como referencia

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "\partial''_{n+1}"'] & D_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"'] & E_{n+1} \arrow[d, "\partial'_{n+1}"'] \\
C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial''_n"'] & D_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & E_n \arrow[d, "\partial'_n"'] \\
C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "\partial''_{n-1}"'] & D_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d, "\partial_{n-1}"'] & E_{n-1} \arrow[d, "\partial'_{n-1}"'] \\
C_{n-2} \arrow[r, "f_{n-2}"] & D_{n-2} \arrow[r, "g_{n-2}"] & E_{n-2}
\end{tikzcd}$$

Debemos probar que $Im(H_n(f)) = Ker(H_n(g))$. Tenemos que

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow 0$$

es exacta entonces $g_n \circ f_n = 0$

- ¿$Im(H_n(f)) \subset Ker(H_n(g))$?

  Por hipótesis se tiene que:

  $$H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f) \text{ Por proposición 1.6.4}$$

  Entonces

  $$\begin{aligned} H_n(g) \circ H_n(f) &= H_n(g \circ f) \\ &= H_n(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Como $H_n(g) \circ H_n(f)$ es el homomorfismo trivial entonces la sucesión es semiexacta por lo cual

  $$Im(H_n(f)) \subset Ker(H_n(g))$$

- ¿$Ker(H_n(g)) \subset Im(H_n(f))$?

  Sea $z + Im(\partial_{n+1}) \in Ker(H_n(g))$, tenemos que

  $$\begin{aligned} H_n(g) : H_n(D) &\longrightarrow H_n(E) \\ z + Im(\partial_{n+1}) &\mapsto [H_n(g)](z + Im(\partial_{n+1})) = 0 \end{aligned}$$

  Pero

  $$\begin{aligned} [H_n(g)](z + Im(\partial_{n+1})) &= 0 \\ g_n(z) + Im(\partial'_{n+1}) &= 0 \end{aligned}$$

  Así $g_n(z) \in Im(\partial'_{n+1}) = B_n(E)$

  Por tanto existe $y \in E_{n+1}$ tal que $\partial'_{n+1}(y) = g_n(z)$.

  Como g_{n+1} es un epimorfismo, existe $x \in D_{n+1}$ tal que $g_{n+1}(x) = y$, así

  $$\begin{aligned} \partial'_{n+1}(y) &= \partial'_{n+1}(g_{n+1}(x)) \\ &= (\partial'_{n+1} \circ g_{n+1})(x) \\ &= (g_n \circ \partial_{n+1})(x) \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} g_n(z) &= g_n(\partial_{n+1}(x)) \\ g_n(z) - g_n(\partial_{n+1}(x)) &= 0 \\ g_n(z - \partial_{n+1}(x)) &= 0 \end{aligned}$$

Esto implica que $z - \partial_{n+1}(x) \in Ker(g_n) = Im(f_n)$.

Luego existe $w \in C_n$ tal que $f_n(w) = z - \partial_{n+1}(x)$

$$\begin{aligned} (f_{n-1} \circ \partial''_n)(w) &= (\partial_n \circ f_n)(w) \\ f_{n-1}(\partial''_n(w)) &= \partial_n(f_n(w)) \\ &= \partial_n(z - \partial_{n+1}(x)) \\ &= \partial_n(z) - \partial_n(\partial_{n+1}(x)) \\ &= 0 - 0 \ ; \ z \in Ker(\partial n) \ y \ \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pero f_{n-1} es monomorfismo por lo que $\partial''_n(w) = 0$ entonces $w \in Ker(\partial''_n) = Z_n(C)$
Acabamos de obtener un elemento w que esta en $Z_n(C)$ por lo que podemos tomar $w + Im(\partial''_{n+1}) \in H_n(C)$
Se tiene que

$$\begin{aligned} H_n(f) : H_n(C) &\longrightarrow H_n(D) \\ w + Im(\partial''_{n+1}) &\mapsto [H_n(f)](w + Im(\partial''_{n+1})) \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} [H_n(f)](w + Im(\partial''_{n+1})) &= f_n(w) + Im(\partial_{n+1}) \\ &= z - \partial_{n+1}(x) + Im(\partial_{n+1}) \\ &= z + Im(\partial_{n+1}) \end{aligned}$$

Por tanto $z + Im(\partial_{n+1}) \in Im(H_n(f))$, así $Ker(H_n(g)) \subset Im(H_n(f))$

■

A fin de enlazar las sucesiones exactas del lema anterior en una sola sucesión, construimos para cada entero n un homomorfismo

$$\partial_n^* : H_n(E) \to H_{n-1}(C).$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots H_{n+1}(C) \arrow[r] & H_{n+1}(D) \arrow[r] & H_{n+1}(E) \arrow[dll, "\partial_{n+1}^*"'] \\
H_n(C) \arrow[r] & H_n(D) \arrow[r] & H_n(E) \arrow[dll, "\partial_n^*"'] \\
H_{n-1}(C) \arrow[r] & H_{n-1}(D) \arrow[r] & H_{n-1}(E) \arrow[dll, "\partial_{n-1}^*"'] \\
H_{n-2}(C) \arrow[r] & H_{n-2}(D) \arrow[r] & H_{n-2}(E) \cdots
\end{tikzcd}$$

llamado *homomorfismo de conexión* de la sucesión exacta corta (S).

Definamos, para ello, una función

$$\phi : Z_n(E) \to H_{n-1}(C)$$

como sigue.

Sea z un elemento arbitrario de $Z_n(E) = Ker(\partial'_n)$. Como $g_n : D_n \to E_n$ es un epimorfismo, existe un elemento $u \in D_n$ tal que $g_n(u) = z$. Consideremos el elemento $\partial_n(u) \in D_{n-1}$.

Puesto que

$$\begin{aligned} g_{n-1}[\partial_n(u)] &= \partial'_n[g_n(u)] \\ &= \partial'_n(z) \\ &= 0 \ ; \ z \in Ker(\partial'_n) \end{aligned}$$

se tiene pues que $\partial_n(u) \in Ker(g_{n-1}) = Im(f_{n-1})$.

Como f_{n-1} es monomorfismo, existe un único $v \in C_{n-1}$ tal que $f_{n-1}(v) = \partial_n(u)$.

Entonces

$$\begin{aligned} f_{n-2}[\partial''_{n-1}(v)] &= \partial_{n-1}[f_{n-1}(v)] \\ &= \partial_{n-1}[\partial_n(u)] \\ &= (\partial_{n-1} \circ \partial_n)(u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como f_{n-2} es monomorfismo, esto implica $\partial''_{n-1}(v) = 0$.

Luego $v \in Z_{n-1}(C) = Ker(\partial''_{n-1})$.

Por tanto garantizamos la existencia de $v + Im(\partial''_n) \in H_{n-1}(C)$. Y así la función ϕ estará definida.

Definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \phi : Z_n(E) &\to H_{n-1}(C) \\ z &\mapsto \phi(z) = v + Im(\partial''_n) \end{aligned}$$

tal que $u \in D_n$ y $v \in C_{n-1}$ son elementos arbitrarios que satisfacen $g_n(u) = z$ y $f_{n-1}(v) = \partial_n(u)$.

Donde $v \in Ker(\partial''_{n-1})$, ya que

$$\begin{aligned} v \in C_{n-1} &\Rightarrow f_{n-1}(v) = \partial_n(u) \\ &\Rightarrow \partial_{n-1}(f_{n-1(v)}) = \partial_{n-1}(\partial_n(u)) \\ &\Rightarrow (\partial_{n-1} \circ f_{n-1})(v) = 0 \\ &\Rightarrow (f_{n-2} \circ \partial''_{n-1})(v) = 0 \\ &\Rightarrow f_{n-2}(\partial''_{n-1}(v)) = 0 \\ &\Rightarrow \partial''_{n-1}(v) = 0 \\ &\Rightarrow v \in Ker(\partial''_{n-1}) \end{aligned}$$

Lema 1.6.8
El núcleo del homomorfismo ϕ contiene el submódulo $B_n(E)$ de $Z_n(E)$.

Demostración:

Sea $z \in B_n(E) = Im(\partial'_{n+1})$

$$\begin{aligned} z \in Im(\partial'_{n+1}) &\Rightarrow \exists\ e \in E_{n+1}\ tal\ que\ \partial'_{n+1}(e) = z \\ &\Rightarrow \partial'_{n+1}(g_{n+1}(d)) = z\ ;\ g_{n+1}(d) = e\ con\ d \in D_{n+1} \\ &\Rightarrow g_n(\partial_{n+1}(d)) = z \end{aligned}$$

Como $z \in Ker(\partial'_n)$ tenemos que $\phi(z) = v + Im(\partial''_n)$ tal que $f_{n-1}(v) = \partial_n$ y $g_n(u) = z$

$$\begin{aligned}
z = z &\Rightarrow g_n(u) = g_n(\partial_{n+1}(d)) \\
&\Rightarrow g_n(u) - g_n(\partial_{n+1}(d)) = 0 \\
&\Rightarrow g_n(u - \partial_{n+1}(d)) = 0 \\
&\Rightarrow u - \partial_{n+1}(d) \in Ker(g_n) = Im(f_n) \\
&\Rightarrow \exists\, c \in C_n\ tal\ que\ f_n(c) = u - \partial_{n+1}(d) \\
&\Rightarrow \partial_n(f_n(c)) = \partial_n(u - \partial_{n+1}(d)) \\
&\Rightarrow \partial_n(f_n(c)) = \partial_n(u) - \partial_n(\partial_{n+1}(d)) \\
&\Rightarrow f_{n-1}(\partial''_n(c)) = f_{n-1}(v) - 0 \\
&\Rightarrow f_{n-1}(\partial''_n(c)) - f_{n-1}(v) = 0 \\
&\Rightarrow f_{n-1}(\partial''_n(c) - v) = 0 \\
&\Rightarrow \partial''_n(c) - v = 0\ ;\ f_{n-1} \text{ es monomorfismo} \\
&\Rightarrow \partial''_n(c) = v
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= v + Im(\partial''_n) \\
&= \partial''_n(c) + Im(\partial''_n) \\
&= Im(\partial''_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por tanto $z \in Ker(\phi)$

∎

Teorema 1.6.9
El homomorfismo ϕ induce un homomorfismo

$$\partial_n^* : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$$
$$z + Im(\partial'_{n+1}) \mapsto \partial_n^*(z + Im(\partial'_{n+1})) = \phi(z)$$

para todo entero n, con

$$\phi : Z_n(E) \to H_{n-1}(C)$$
$$z \mapsto \phi(z) = v + Im(\partial''_n)$$

tal que $u \in D_n$ y $v \in C_{n-1}$ son elementos arbitrarios que satisfacen $g_n(u) = z$ y $f_{n-1}(v) = \partial_n(u)$.

Demostración:

Probaremos que

$$\partial_n^* : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$$
$$z + Im(\partial'_{n+1}) \mapsto \partial_n^*(z + Im(\partial'_{n+1})) = \phi(z) = v + Im(\partial''_n)$$

donde $f_{n-1}(v) = \partial_n(u)$, $g_n(u) = z$ y $v \in C_{n-1},\ u \in D_n$ es un homomorfismo.

- ¿está bien definida?
  Sea $z_1 + Im(\partial'_{n+1}) = z_2 + Im(\partial'_{n+1})$, donde $z_1 + Im(\partial'_{n+1}), z_2 + Im(\partial'_{n+1}) \in H_n(E)$ y $\partial_n^*(z_1 + Im(\partial'_{n+1})) = v_1 + Im(\partial''_n)$ con $f_{n-1}(v_1) = \partial_n(u_1)$, $g_n(u_1) = z_1$ y $\partial_n^*(z_2 + Im(\partial'_{n+1})) = v_2 + Im(\partial''_n)$ con $f_{n-1}(v_2) = \partial_n(u_2)$, $g_n(u_2) = z_2$

$$
\begin{aligned}
z_1 + Im(\partial'_{n+1}) = z_2 + Im(\partial'_{n+1}) &\Rightarrow z_1 - z_2 \in Im(\partial'_{n+1}) \\
&\Rightarrow \partial'_{n+1}(e) = z_1 - z_2 \text{ ; para algún } e \in E_{n+1} \\
&\Rightarrow \partial'_{n+1}(e) = g_n(u_1) - g_n(u_2) \\
&\Rightarrow \partial'_{n+1}(g_{n+1}(d)) = g_n(u_1) - g_n(u_2) \text{ ; para algún } d \in D_{n+1} \\
&\Rightarrow (\partial'_{n+1} \circ g_{n+1})(d) - g_n(u_1) + g_n(u_2) = 0 \\
&\Rightarrow (g_n \circ \partial_{n+1})(d) - g_n(u_1) + g_n(u_2) = 0 \\
&\Rightarrow g_n(\partial_{n+1}(d)) - g_n(u_1) + g_n(u_2) = 0 \\
&\Rightarrow g_n(\partial_{n+1}(d) - u_1 + u_2) = 0 \\
&\Rightarrow \partial_{n+1}(d) - u_1 + u_2 \in Ker(g_n) = Im(f_n) \\
&\Rightarrow f_n(c) = \partial_{n+1}(d) - u_1 + u_2 \text{ ; para algún } c \in C_n \\
&\Rightarrow \partial_n(f_n(c)) = \partial_n(\partial_{n+1}(d)) - \partial_n(u_1) + \partial_n(u_2) \\
&\Rightarrow (\partial_n \circ f_n)(c) = 0 - f_{n-1}(v_1) + f_{n-1}(v_2) \\
&\Rightarrow (f_{n-1} \circ \partial''_n)(c) + f_{n-1}(v_1) - f_{n-1}(v_2) = 0 \\
&\Rightarrow f_{n-1}(\partial''_n(c)) + f_{n-1}(v_1) - f_{n-1}(v_2) = 0 \\
&\Rightarrow f_{n-1}(\partial''_n(c) + v_1 - v_2) = 0 \\
&\Rightarrow \partial''_n(c) + v_1 - v_2 = 0 \text{ ; } f \text{ es monomorfismo} \\
&\Rightarrow \partial''_n(c) = -v_1 + v_2 \\
&\Rightarrow -v_1 + v_2 \in Im(\partial''_n) \\
&\Rightarrow v_1 + Im(\partial''_n) = v_2 + Im(\partial''_n) \\
&\Rightarrow \partial^*_n(z_1 + Im(\partial'_{n+1})) = \partial^*_n(z_2 + Im(\partial'_{n+1}))
\end{aligned}
$$

- ¿es homomorfismo?

  - ¿$\partial^*_n((z_1 + Im(\partial'_{n+1})) + (z_2 + Im(\partial'_{n+1}))) = \partial^*_n(z_1 + Im(\partial'_{n+1})) + \partial^*_n(z_2 + Im(\partial'_{n+1}))$?

    Sea $z_1 + Im(\partial'_{n+1}), z_2 + Im(\partial'_{n+1}) \in H_n(E)$.

    Se tiene que $\partial^*_n(z_1 + Im(\partial'_{n+1})) = v_1 + Im(\partial''_n)$ con $f_{n-1}(v_1) = \partial_n(u_1)$,

$g_n(u_1) = z_1$ y $\partial_n^*(z_2 + Im(\partial'_{n+1})) = v_2 + Im(\partial''_n)$ con $f_{n-1}(v_2) = \partial_n(u_2)$, $g_n(u_2) = z_2$

Se puede observar que:

$$\begin{aligned}\partial_n^*((z_1 + Im(\partial'_{n+1})) + (z_2 + Im(\partial'_{n+1}))) &= \partial_n^*(z_1 + z_2 + Im(\partial'_{n+1}))\\ &= v + Im(\partial''_n)\end{aligned}$$

con $f_{n-1}(v) = \partial_n(u)$, $g_n(u) = z_1 + z_2$. Se tiene que

$$\begin{aligned}g_n(u) = z_1 + z_2 &\Rightarrow g_n(u) = g_n(u_1) + g_n(u_2)\\ &\Rightarrow g_n(u) - g_n(u_1) - g_n(u_2) = 0\\ &\Rightarrow g_n(u - u_1 - u_2) = 0\\ &\Rightarrow u - u_1 - u_2 \in Ker(g_n) = Im(f_n)\\ &\Rightarrow f_n(c) = u - u_1 - u_2\text{ ; para algún } c \in C_n\\ &\Rightarrow \partial_n(f_n(c)) = \partial_n(u - u_1 - u_2)\\ &\Rightarrow (\partial_n \circ f_n)(c) = \partial_n(u) - \partial_n(u_1) - \partial_n(u_2)\\ &\Rightarrow (f_{n-1} \circ \partial''_n)(c) = f_{n-1}(v) - f_{n-1}(v_1) - f_{n-1}(v_2)\\ &\Rightarrow f_{n-1}(\partial''_n(c)) - f_{n-1}(v) + f_{n-1}(v_1) + f_{n-1}(v_2) = 0\\ &\Rightarrow f_{n-1}(\partial''_n(c) - v + v_1 + v_2) = 0\\ &\Rightarrow \partial''_n(c) - v + v_1 + v_2 = 0\\ &\Rightarrow \partial''_n(c) = v - (v_1 + v_2)\\ &\Rightarrow v - (v_1 + v_2) \in Im(\partial''_n)\\ &\Rightarrow v + Im(\partial''_n) = v_1 + v_2 + Im(\partial''_n)\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\partial_n^*((z_1 + Im(\partial'_{n+1})) + (z_2 + Im(\partial'_{n+1}))) &= v + Im(\partial''_n)\\ &= v_1 + v_2 + Im(\partial''_n)\\ &= v_1 + Im(\partial''_n) + v_2 + Im(\partial''_n)\\ &= \partial_n^*(z_1 + Im(\partial'_{n+1})) + \partial_n^*(z_2 + Im(\partial'_{n+1}))\end{aligned}$$

- ¿$\partial_n^*(k(z_1 + Im(\partial'_{n+1}))) = k(\partial_n^*(z_1 + Im(\partial'_{n+1})))$?

$$\begin{aligned}\partial_n^*(k(z_1 + Im(\partial'_{n+1}))) &= \partial_n^*(kz_1 + Im(\partial'_{n+1})) \\ &= \phi(kz_1) \\ &= k\phi(z_1) \\ &= k\partial_n^*(z_1 + Im(\partial'_{n+1}))\end{aligned}$$

Asi ∂_n^* es un homomorfismo.

■

Así obtenemos una sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\partial_n^*} H_{n-1}(C) \longrightarrow \cdots$$

Esta sucesión recibe el nombre de *sucesión de homología* de la sucesión exacta corta (S)

Teorema 1.6.10
La sucesión de homología de toda sucesión exacta corta de sucesiones descendentes es exacta.

Demostración:

$$\cdots \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\partial_n^*} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(D) \longrightarrow \cdots$$

Por lema 1.6.7 si logramos establecer que:

1. $Im(H_n(g)) = Ker(\partial_n^*)$
2. $Im(\partial_n^*) = Ker(H_{n-1}(f))$

Entonces la sucesión sera exacta $\forall n \in Z$

1. ¿$Im(H_n(g)) = Ker(\partial_n^*)$?

   Tomando la sucesión

$$H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\partial_n^*} H_{n-1}(C)$$

- ¿$Im(H_n(g)) \subset Ker(\partial_n^*)$?

  Sea $y + Im(\partial'_{n+1}) \in Im(H_n(g))$, $y \in Ker(\partial'_n)$

$$
\begin{aligned}
y + Im(\partial'_{n+1}) \in Im(H_n(g)) &\Rightarrow \exists\, z + Im(\partial_{n+1}) \mid H_n(g)(z + Im(\partial_{n+1})) = y + Im(\partial'_{n+1}),\\
&\quad y \in Ker(\partial_n)\\
&\Rightarrow g_n(z) + Im(\partial_{n+1})' = y + Im(\partial'_{n+1})\\
&\Rightarrow \partial_n^*(y + Im(\partial'_{n+1})) = \partial_n^*(g_n(z) + Im(\partial_{n+1})')\\
&\Rightarrow v + Im(\partial''_n) = v' + Im(\partial''_n)\ con\\
&f_{n-1}(v) = \partial_n(u), g_n(u) = y, f_{n-1}(v') = \partial_n(u'), g_n(u') = g_n(z)\\
&\Rightarrow g_n(u') - g_n(z) = 0\\
&\Rightarrow g_n(u' - z) = 0\\
&\Rightarrow u' - z \in Ker(g_n) = Im(f_n)\\
&\Rightarrow \exists\, x \in C_n\ tal\ que\ f_n(x) = u' - z\\
&\Rightarrow \partial_n(u' - z) = \partial_n(f_n(x))\\
&\Rightarrow \partial_n(u') - \partial_n(z) = (\partial_n \circ f_n)(x)\\
&\Rightarrow \partial_n(u') - 0 = (f_{n-1} \circ \partial''_n)(x)\\
&\Rightarrow f_{n-1}(v') = f_{n-1}(\partial''_n(x))\\
&\Rightarrow f_{n-1}(v') - f_{n-1}(\partial''_n(x)) = 0\\
&\Rightarrow f_{n-1}(v' - \partial''_n(x)) = 0\\
&\Rightarrow v' - \partial''_n(x) = 0 \qquad\qquad =
\end{aligned}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
\partial_n^*(y + Im(\partial'_{n+1})) &= v' + Im(\partial''_n)\\
&= \partial''_n(x) + Im(\partial''_n)\\
&= Im(\partial''_n)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ y + Im(\partial'_{n+1}) \in Ker(\partial_n^*)$

$$Im(H_n(g)) \subset Ker(\partial_n^*)$$

- ¿$Ker(\partial_n^*) \subset Im(H_n(g))$?

  Sea $z + Im(\partial'_{n+1})$, $z \in Ker(\partial'_n)$, se tiene que

  $\partial_n^*(z + Im(\partial'_{n+1})) = v + Im(\partial''_n) = Im(\partial''_n)$ con $f_{n-1}(v) = \partial_n(u)$ y $g_n(u) = z$ donde $u \in D_n, v \in C_{n-1}$

$$
\begin{aligned}
\partial_n^*(z + Im(\partial'_{n+1})) = Im(\partial''_n) &\Rightarrow v \in Im(\partial''_n)\\
&\Rightarrow v = \partial''_n(c)\ ;\ c \in C_n\\
&\Rightarrow f_{n-1}(v) = f_{n-1}(\partial''_n(c))\\
&\Rightarrow f_{n-1}(v) = (f_{n-1} \circ \partial''_n)(c)\\
&\Rightarrow \partial_n(u) = (\partial_n \circ f_n)(c)\\
&\Rightarrow \partial_n(u) - (\partial_n \circ f_n)(c) = 0\\
&\Rightarrow \partial_n(u - f_n(c)) = 0\\
&\Rightarrow u - f_n(c) \in Ker(\partial_n)
\end{aligned}
$$

  Tomando $u - f_n(c) + Im(\partial_{n+1}) \in H_n(D)$, se tiene

$$
\begin{aligned}
H_n(g)[u - f_n(c) + Im(\partial_{n+1})] &= g_n(u - f_n(c)) + Im(\partial'_{n+1})\\
&= g_n(u) - g_n(f_n(c)) + Im(\partial'_{n+1})\\
&= z + Im(\partial'_{n+1})
\end{aligned}
$$

  Por tanto $z \in Im(H_n(g))$, así

$$Ker(\partial_n^*) \subset Im(H_n(g))$$

2. ¿$Im(\partial_n^*) = Ker(H_{n-1}(f))$?

   Tomando la sucesión

$$H_n(E) \xrightarrow{\partial_n^*} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(D)$$

- ¿$Im(\partial_n^*) \subset Ker(H_{n-1}(f))$?

  Sea $\alpha \in Im(\partial_n^*)$, entonces existe $z + Im(\partial'_{n+1}) \in H_n(E)$ tal que

$$
\begin{aligned}
\partial_n^*(z + Im(\partial'_{n+1})) &= \alpha\\
\phi(z) &= \alpha\\
v + Im(\partial''_n) &= \alpha
\end{aligned}
$$

pero de acuerdo a la definición $\exists\, u \in D_n$ y $v \in C_{n-1}$ que satisfacen $g_n(u) = z$ y $f_{n-1}(v) = \partial_n(u)$

$$\begin{aligned}
[H_{n-1}(f)](\alpha) &= [H_{n-1}(f)](v + Im(\partial''_n)) \\
&= f_{n-1}(v) + Im(\partial_n) \\
&= \partial_n(u) + Im(\partial_n) \\
&= Im(\partial_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Así $\alpha \in Ker[H_{n-1}(f)]$

$$Im(\partial^*_n) \subset Ker(H_{n-1}(f))$$

- ¿$Ker(H_{n-1}(f)) \subset Im(\partial^*_n)$?

  Sea $\alpha \in Ker(H_{n-1}(f))$, α es de la forma $\alpha = v + Im(\partial''_n)$, con $v \in Ker(\partial''_n)$.

$$\begin{aligned}
[H_{n-1}(f)](\alpha) &= 0 \\
[H_{n-1}(f)](v + Im(\partial''_n)) &= 0 \\
f_{n-1}(v) + Im(\partial_n) &= 0
\end{aligned}$$

así $f_{n-1}(v) \in Im(\partial_n)$, entonces $\exists\, u \in D_n$ tal que $\partial_n(u) = f_{n-1}(v)$

Sea $g_n(u) = z$ con $u \in D_n$

$$\begin{aligned}
\partial'_n(z) &= \partial'_n(g_n(u)) \\
&= (\partial'_n \circ g_n)(u) \\
&= (g_{n-1} \circ \partial_n)(u) \\
&= g_{n-1}(\partial_n(u)) \\
&= g_{n-1}(f_{n-1}(u)) \\
&= (g_{n-1} \circ f_{n-1})(u) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Así $z \in Ker(\partial'_n)$. Tomando $z + Im(\partial'_{n+1}) \in H_n(E)$

$$\begin{aligned}\partial_n^*(z + Im(\partial'_{n+1})) &= \phi(z)\\ &= v + Im(\partial''_n)\\ &= \alpha\end{aligned}$$

Así $\alpha \in Im(\partial_n^*)$.

$$Ker(H_{n-1}(f)) \subset Im(\partial_n^*)$$

■

Capítulo 2

Categorías y Funtores

2.1. La noción de grupoide

Un par ordenado $(C, \cdot)$, donde C denota un conjunto y $\cdot$ una operación definida en este conjunto, será llamado un sistema multiplicativo. La operación $\cdot$ será definida simplemente para algunos pares ordenados $(x, y) \in C \times C$. Por R denotaremos el dominio de la operación $\cdot$. C_0 denota un conjunto definido por la igualdad

$$C_0 = \{e \mid e \in C \wedge (e, e) \in R \wedge e \cdot e = e\}$$

Definición 2.1.1

Un sistema multiplicativo $(C, \cdot)$ será llamado *grupoide* si satisface los siguientes axiomas:

i) $\forall x, y, z\ [((x, y) \in R\ \wedge\ (y, z) \in R) \Rightarrow (x, y \cdot z) \in R]$

ii) $\forall x, y, z\ [((x, y) \in R\ \wedge\ (y, z) \in R) \Rightarrow (x \cdot y, z) \in R]$

iii) $\forall x, y, z\ [((y, z) \in R\ \wedge\ (x, y \cdot z) \in R) \Rightarrow (x, y) \in R]$

iv) $\forall x, y, z\ [((x, y) \in R\ \wedge\ (x \cdot y, z) \in R) \Rightarrow (y, z) \in R]$

v) $\forall x, y, z\ [((x, y) \in R\ \wedge\ (y, z) \in R\ \wedge\ (x \cdot y, z) \in R \wedge (x, y \cdot z) \in R) \Rightarrow (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)]$

vi) $\forall x, y, z\ [((x,y) \in R\ \wedge\ (x,z) \in R\ \wedge\ x \cdot y = x \cdot z) \Rightarrow y = z]$

vii) $\forall x, y, z\ [((y,x) \in R\ \wedge\ (z,x) \in R\ \wedge\ y \cdot x = z \cdot x) \Rightarrow y = z]$

viii) $\forall x \in C\ \exists y \in C\ [(x,y) \in R\ \wedge\ x \cdot y \in C_0]$

A partir de la definición se puede probar lo siguiente

Proposición 2.1.2

$$\forall e \in C_0\ \forall x\ ((x,e) \in R) \Rightarrow x \cdot e = x$$

Demostración:

Sea $e \in C_0$. Sea $x \in C$ y $(x,e) \in R$, como $e \in C_0$ por definición de C_0 se sigue que $(e,e) \in R$.

Por $i)$ de la definición 2.1.1 se tiene: $(x,e) \in R \wedge (e,e) \in R \Rightarrow (x, e \cdot e) \in R$

de $ii)$ se obtiene que: $(x,e) \in R \wedge (e,e) \in R \Rightarrow (x \cdot e, e) \in R$.

Ahora de $v)$ se sigue que:

$$\begin{aligned}(x,e) \in R \wedge (e,e) \in R \wedge (x \cdot e, e) \in R \wedge (x, e \cdot e) \in R &\Rightarrow (x \cdot e) \cdot e = x \cdot (e \cdot e) \\ &\Rightarrow (x \cdot e) \cdot e = x \cdot e\end{aligned}$$

Así por $vii)$ se concluye que: $x \cdot e = x$

■

Proposición 2.1.3

$$\forall\ e \in C_0((e,x) \in R) \Rightarrow e \cdot x = x$$

Demostración:

Sea $e \in C_0$ y $(e,x) \in R$ y además $(e,e) \in R$ por definición de C_0.

De $i)$ se tiene que: $(e,e) \in R \wedge (e,x) \in R \Rightarrow (e, e \cdot x) \in R$

de $ii)$ se obtiene que: $(e,e) \in R \wedge (e,x) \in R \Rightarrow (e \cdot e, x) \in R$

Ahora de $v)$ se sigue que:

$$
\begin{aligned}
(x,e) \in R \wedge (e,e) \in R \wedge (x \cdot e, e) \in R \wedge (x, e \cdot e) \in R &\Rightarrow (e \cdot e) \cdot x = e \cdot (e \cdot x) \\
&\Rightarrow e \cdot x = e \cdot (e \cdot x)
\end{aligned}
$$

Así por $vi)$ se concluye que $x = e \cdot x$.

■

Con el resultado anterior se puede probar la siguiente proposición.

Proposición 2.1.4
$\forall x \in C \; \forall e_1, e_2 \in C_0 \; [((x, e_1) \in R \wedge (x, e_2) \in R) \Rightarrow e_1 = e_2]$

Demostración: De el resultado anterior se tiene que: $x \cdot e_1 = x$ y $x = e_2 \cdot x$

$$\begin{aligned} x \cdot e_1 &= x \\ &= x \cdot e_2 \end{aligned}$$

así de $vi)$ de la definición 2.1.1 se concluye que: $e_1 = e_2$

■

Similarmente se prueba que: $\forall x \in C \; \forall e_1, e_2 \in C_0 \; [((e_1, x) \in R \wedge (e_2, x) \in R) \Rightarrow e_1 = e_2]$.

Proposición 2.1.5

$$\forall x, y \; [((x, y) \in R) \wedge (x \cdot y \in C_0)] \Rightarrow [((y, x) \in R) \wedge (y \cdot x \in C_0)]$$

Demostración:

Sea $x, y \in C$ tal que $(x, y) \in R$ y $x \cdot y \in C_0$. Por la definición de C_0 se sabe que $(x \cdot y, x \cdot y) \in R$.

Ahora haremos uso de los items de la definición 2.1.1

Por iv) $(x, y) \in R \;\wedge\; (x \cdot y, x \cdot y) \in R \Rightarrow (y, x \cdot y) \in R$

Por iii) $(x, y) \in R \;\wedge\; (y, x \cdot y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

Por i) $(x, y) \in R \;\wedge\; (y, x) \in R \Rightarrow (x, y \cdot x) \in R$

Por ii) $(y, x) \in R \;\wedge\; (x, y \cdot x) \in R \Rightarrow (y \cdot x, y \cdot x) \in R$

Por i) $(y, x) \in R \;\wedge\; (x, y \cdot x) \in R \Rightarrow (y, x \cdot (y \cdot x)) \in R$

Además se tiene que:

Por i) $((x,y) \in R) \;\wedge\; ((y,x) \in R) \Rightarrow (x, y \cdot x) \in R$

Por ii) $((x,y) \in R) \;\wedge\; ((y,x) \in R) \Rightarrow (x \cdot y, x) \in R$

Y por v) se obtiene que

$$(x,y) \in R \;\wedge\; (y,x) \in R \;\wedge\; (x \cdot y, x) \in R \;\wedge\; (x, y \cdot x) \in R \Rightarrow (x \cdot y) \cdot x = x \cdot (y \cdot x)$$

Así por las condiciones anteriores y por v) de la definición 2.1.1, se tiene que

$$\begin{aligned} (y,x) \in R \;\wedge\; (x, y \cdot x) \in R \;\wedge\; (y \cdot x, y \cdot x) \in R \;\wedge (y, x \cdot (y \cdot x)) \in R & \\ \Rightarrow (y \cdot x) \cdot (y \cdot x) &= y \cdot (x \cdot (y \cdot x)) \\ &= y \cdot ((x \cdot y) \cdot x) \\ &= y \cdot x \end{aligned}$$

Por tanto $y \cdot x \in C_0$

■

Proposición 2.1.6
$\forall x \in C \; \exists e_1, e_2 \in C_0 \;\; [((x, e_1) \in R) \wedge ((e_2, x) \in R)]$

Demostración:

Sea $x \in C$ un elemento arbitrario, por viii) de definición 2.1.1 se tiene que:

$$\exists \, y \in C_0 \text{tal que} [(x,y) \in R \wedge x \cdot y \in C_0]$$

y además por la proposición anterior se tiene que:

$$((x,y) \in R) \wedge (x \cdot y \in C_0) \Rightarrow ((y,x) \in R) \wedge (y \cdot x \in C_0)$$

Para finalizar la prueba, es suficiente observar que:

$$(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow (x, y \cdot x) \in R \;\; \text{por i)}$$

$$(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow (x \cdot y, x) \in R \;\; \text{por ii)}$$

así

$$(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \wedge (x \cdot y, x) \in R \wedge (x, y \cdot x) \in R \Rightarrow (x \cdot y) \cdot x = x \cdot (y \cdot x)$$
$$x = x$$

■

Ahora podemos probar la siguiente igualdad

Proposición 2.1.7
$C_0 = \{e \mid e \in C$ *tal que* $\forall x \in C[((x, e) \in R \Rightarrow x{\cdot}e = x)$ *y* $((e, x) \in R \Rightarrow e{\cdot}x = x)] \}$

Demostración:

Sea $C^* = \{e \in C \mid (e, e) \in R \wedge e \cdot e = e\}$

- "$\subset$ "

  Sea $a \in C^*$

$$\begin{aligned} a \in C^* &\Rightarrow a \in C \\ &\Rightarrow \forall\, x \in C,\ (x, a) \in R \\ &\Rightarrow (a, a) \in R \text{ ; ya que } a \in C \\ &\Rightarrow a \cdot a = a \\ &\Rightarrow a \in C_0 \end{aligned}$$

- "$\supset$ "

  La prueba es inmediata y se sigue de la proposición 2.1.2

■

Proposición 2.1.8

1. $\forall x, y, z \, [((x,y) \in R) \wedge ((x,z) \in R) \wedge (x \cdot y \in C_0) \wedge (x \cdot z \in C_0)] \Rightarrow [y = z]$

2. $\forall x, y, x \, [((y,x) \in R) \wedge ((z,x) \in R) \wedge (y \cdot x \in C_0) \wedge (z \cdot x \in C_0)] \Rightarrow [y = z]$

Demostración:

- "$\forall x, y, z \, [((x,y) \in R \wedge (x,z) \in R \wedge x \cdot y \in C_0 \wedge x \cdot z \in C_0) \Rightarrow y = z]$"

  Consideremos x, y, z elementos arbitrarios que satisfacen que:

  $(x,y) \in R$, $(x,z) \in R$, $x \cdot y \in C_0$, $x \cdot z \in C_0$

  Por proposición 2.1.5, deducimos que: $(y,x) \in R$, $y \cdot x \in C_0$, $(z,x) \in R$, $z \cdot x \in C_0$.

  Además por la definición 2.1.1 se sigue que:

$$(z,x) \in R \wedge (x,y) \in R \Rightarrow (z, x \cdot y) \in R \;\text{ por i)}$$

$$(x,z) \in R \wedge (z, x \cdot y) \in R \Rightarrow (x \cdot z, x \cdot y) \in R \;\text{ por ii)}$$

$$(x,y) \in R \wedge (x \cdot z, x \cdot y) \in R \Rightarrow (x \cdot z, x) \in R \;\text{ por iii)}$$

$$(x \cdot z, x) \in R \wedge (x,z) \in R \Rightarrow (x \cdot z, x \cdot z) \in R \;\text{ por i)}$$

  Ahora por proposición 2.1.4 como $(x \cdot z, x \cdot y) \in R$ y $(x \cdot z, x \cdot z) \in R$, además $x \cdot y, x \cdot z \in C_0$, así

$$x \cdot y = x \cdot z$$

  Luego por vi) de la definición 2.1.1 se cumple que $y = z$

- "$\forall x, y, x \, [((y,x) \in R \wedge (z,x) \in R \wedge y \cdot x \in C_0 \wedge z \cdot x \in C_0) \Rightarrow y = z]$"

  La prueba es similar al ítem anterior

∎

En vista de lo anterior vamos a definir unos conceptos equivalentes para poder manejar mejor la estructura.

Definición 2.1.9 Semigrupoide
Un *semigrupoide* es una clase M tal que, para algunos pares $\alpha, \beta \in M$ está definido un producto

$$\alpha\beta \ \in M$$

que satistace las dos condiciones de asociatividad siguientes:

i) Para elementos cualesquiera $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ de M, el triple producto $\alpha(\beta\gamma)$ está definido si y sólo si $(\alpha\beta)\gamma$ está definido. En el caso de que cualquiera de los dos esté definido, se cumple la ley asociativa

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

Este producto triple será denotado por $\alpha\beta\gamma$

ii) El triple producto $\alpha\beta\gamma$ está definido siempre que estén definidos los productos $\alpha\beta$ y $\beta\gamma$.

Un elemento ξ de un semigrupoide se dice que es una *identidad* de M si y sólo si $\xi\alpha = \alpha$ y $\beta\xi = \beta$ siempre que $\xi\alpha$ y $\beta\xi$ estén definidos.

Definición 2.1.10 Grupoide
Un semigrupoide se llama *grupoide* si y sólo si, para todo elemento $\alpha \in M$, existen unidades ξ y η en M tales que $\xi\alpha$ y $\alpha\eta$ estén definidos.

Notación: Llamaremos a ε identidad por la izquierda si $\varepsilon\alpha = \alpha$ donde la identidad por la izquierda se denotará por $\lambda(\alpha)$.
Así mismo η se llamará identidad por la derecha si $\beta\eta = \beta$ donde la identidad por la izquierda se denotará como $\rho(\beta)$.

Definición 2.1.11
Dado un elemento α de un grupoide M, diremos que $\beta \in M$ es un inverso de α si y sólo si $\alpha\beta = \lambda(\alpha)$ y $\beta\alpha = \rho(\alpha)$. Si α posee inverso, diremos que α es inversible.

El único inverso del elemento inversible α de M se denotará por α^{-1}.
Por definición, se obtiene evidentemente que:

$$\lambda(\alpha^{-1}) = \rho(\alpha) \qquad \rho(\alpha^{-1}) = \lambda(\alpha)$$

Obviamente todo elemento de un grupoide es inversible.

En su libro devoto a la fundación de la topología algebraica *S. Eilenberg* y *N. Steenrod* formularón la noción de una categoría abstracta como se sigue:

Definición 2.1.12 Categoría abstracta

Un conjunto C de elementos $\{\gamma\}$ es llamado un sistema multiplicativo si, para algúnos $\gamma_1, \gamma_2 \in C$, el producto $\gamma_1\gamma_2$ está definido. Un elemento $\epsilon \in C$ es llamado una *identidad* (o una *unidad*) si $\epsilon\gamma_1 = \gamma_1$ y $\gamma_2\epsilon = \gamma_2$ siempre que $\epsilon\gamma_1$ y $\gamma_2\epsilon$ estén definidos. El sistema multiplicativo es llamado una *categoría abstracta* si las siguientes propiedades son satisfechas:

1. *El triple producto $\gamma_3(\gamma_2\gamma_1)$ está definido si, y solo si, $(\gamma_3\gamma_2)\gamma_1$ está definido.* Cuando cualquiera esta definido la ley asociativa

$$\gamma_3(\gamma_2\gamma_1) = (\gamma_3\gamma_2)\gamma_1$$

se mantiene. Este triple producto puede ser escrito como $\gamma_3\gamma_2\gamma_1$.

2. *El triple producto $\gamma_3\gamma_2\gamma_1$ está definido si el par de productos $\gamma_3\gamma_2$ y $\gamma_2\gamma_1$ está definido*

3. *Para cada $\gamma \in C$ existen identidades $\epsilon_1, \epsilon_2 \in C$ tal que $\gamma\epsilon_1$ y $\epsilon_2\gamma$ están definidos*

De está definición se sigue que la conjunción de los axiomas considerados es un equivalente a la conjunción de los axiomas i)-v) de la definición 2.1.1 y de las proposiciones 2.1.4 y su analogó, y 2.1.5. Entonces cada grupoide es una categoría abstracta.

Definición 2.1.13

Sea C_* un subconjunto de un sistema multiplicativo C, se dice que C_* es un subsistema multiplicativo de C, si C_* es sistema multiplicativo con el producto en C.

Ejemplo 2.1.1

Sea ε una identidad en un sistema multiplicativo C.

Probar que $C_\varepsilon = \{\alpha \in C \mid \varepsilon\alpha = \alpha = \alpha\varepsilon\}$ es un subsistema multiplicativo.

Solución:

Para que C_ε sea un subsistema multiplicativo, basta probar que cumple las 3 propiedades de un sistema multiplicativo.

1. Sea $\alpha, \alpha'\alpha'' \in C_\varepsilon$ así se tiene lo siguiente:

   - "$\Rightarrow$"$\alpha(\alpha'\alpha'') \in C_\varepsilon$ están definidos entonces $\exists\ \varepsilon \in C$ tal que:

$$\varepsilon(\alpha(\alpha'\alpha'')) = (\alpha(\alpha'\alpha''))\varepsilon = \alpha(\alpha'\alpha'')$$

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha'\alpha'') &= \varepsilon(\alpha(\alpha'\alpha''))\\ &= (\varepsilon\alpha)(\alpha'\alpha'')\\ &= (\alpha\varepsilon)(\alpha'\alpha'')\\ &= \alpha(\varepsilon\alpha')\alpha''\\ &= \alpha(\alpha'\varepsilon)\alpha''\\ &= (\alpha\alpha')(\varepsilon\alpha'')\\ &= (\alpha\alpha')\alpha''\end{aligned}$$

   - "$\Leftarrow$"$(\alpha\alpha')\alpha'' \in C_\varepsilon$ están definidos entonces $\exists\ \varepsilon \in C$ tal que:

$$\varepsilon((\alpha\alpha')\alpha'') = ((\alpha\alpha')\alpha'')\varepsilon = (\alpha\alpha')\alpha''$$

$$\begin{aligned}(\alpha\alpha')\alpha'' &= ((\alpha\alpha')\alpha'')\varepsilon\\ &= (\alpha\alpha')(\alpha''\varepsilon)\\ &= (\alpha\alpha')(\varepsilon\alpha'')\\ &= \alpha(\alpha'\varepsilon)\alpha''\\ &= \alpha(\varepsilon\alpha')\alpha''\\ &= (\alpha\varepsilon)(\alpha'\alpha'')\\ &= \alpha(\alpha'\alpha'')\end{aligned}$$

2. Sea $\alpha,\ \alpha',\ \alpha'' \in C_\varepsilon$, por definición de C_ε, $\alpha,\ \alpha',\ \alpha'' \in C$ así $\alpha\alpha'$ y $\alpha'\alpha''$ están definidos por lo que $\alpha\alpha'\alpha''$ está definido.

3. Sea $\alpha \in C_\varepsilon$, como C es un sistema multiplicativo $\exists\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \in C$ tal que $\alpha\varepsilon_1$ está definido y $\varepsilon_2\alpha$ está definido. Debemos probar que $\alpha\varepsilon_1 \in C_\varepsilon$ y $\varepsilon_2\alpha \in C_\varepsilon$, donde se tiene que $\rho(\alpha) = \alpha\varepsilon_1$ y $\lambda(\alpha) = \varepsilon_2\alpha$.

   Supongamos que C es un grupoide, así como $\alpha \in C$ entonces α es inversible, entonces existe $\alpha^{-1} \in C$ tal que $\alpha\alpha^{-1} = \lambda(\alpha)$ y $\alpha^{-1}\alpha = \rho(\alpha)$ así $\alpha^{-1}\alpha$ está definido.

   Por lo cual cumple que $\rho(\alpha) = \lambda(\alpha^{-1})$ y $\rho(\alpha^{-1}) = \lambda(\alpha)$.

   Sea $\alpha \in C_\varepsilon \Rightarrow \exists\, \varepsilon \in C \text{ tal que } \alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$.

   Por tanto como ε es una identidad de C se cumple que $\lambda(\alpha) = \varepsilon = \rho(\alpha)$.

   Por lo que

$$\alpha\rho(\alpha) = \alpha = \alpha\varepsilon$$
$$\lambda(\alpha)\alpha = \alpha = \varepsilon\alpha$$

   $\Rightarrow \rho(\alpha^{-1}) = \varepsilon \quad \wedge \quad \lambda(\alpha^{-1}) = \varepsilon$

   así

$$\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\rho(\alpha^{-1}) = \alpha^{-1}\varepsilon$$
$$\alpha^{-1} = \lambda(\alpha^{-1})\alpha^{-1} = \varepsilon\alpha^{-1}$$

   Por lo tanto $\alpha^{-1} \in C_\varepsilon$ y así $\rho(\alpha^{-1}), \lambda(\alpha^{-1}) \in C_\varepsilon$

■

Ejemplo 2.1.2

Sea X un conjunto, $C = X \times X$ y sea $\alpha, \beta \in C$ tal que $\alpha = (x_1, x_2)$ y $\beta = (y_1, y_2)$ con $\alpha \cdot \beta = (x_1, y_2)$ si y sólo si $x_2 = y_1$. Probar que C es una categoría abstracta.

Solución

Para probar que C es una categoría abstracta debemos probar las tres propiedades de la definición 2.1.12

1. Sea $\alpha, \beta, \theta \in C$ tal que $\alpha = (x_1, x_2),\ \beta = (y_1, y_2)\ y\ \theta = (z_1, z_2)$

- "$\Rightarrow$"

  $\alpha \cdot (\beta \cdot \theta)$ está definido

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot \theta) \in C &\Rightarrow (x_1, x2) \cdot ((y_1, y_2) \cdot (z_1, z_2)) \\ &\Rightarrow (x_1, x_2) \cdot (y_1, z_2) \ ; \ y_2 = z_1 \\ &\Rightarrow (x_1, z_2) \ ; \ x_2 = y_1 \\ &\Rightarrow (x_1, y_2) \cdot (z_1, z_2) \ ; \ y_2 = z_1 \\ &\Rightarrow ((x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)) \cdot (z_1, z_2) \ ; \ x_2 = y_1 \\ &\Rightarrow (\alpha \cdot \beta) \cdot \theta \in C \end{aligned}$$

- "$\Leftarrow$"

  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \theta$ está definido

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta) \cdot \theta \in C &\Rightarrow ((x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)) \cdot (z_1, z_2) \\ &\Rightarrow (x_1, y_2) \cdot (z_1, z_2) \ ; \ x_2 = y_1 \\ &\Rightarrow (x_1, z_2) \ ; \ y_2 = z_1 \\ &\Rightarrow (x_1, x_2) \cdot (y_1, z_2) \ ; \ x_2 = y_1 \\ &\Rightarrow (x_1, x_2) \cdot ((y_1, y_2) \cdot (z_1, z_2)) \ ; \ y_2 = z_1 \\ &\Rightarrow \alpha \cdot (\beta \cdot \theta) \in C \end{aligned}$$

2. Sean $\alpha, \beta, \theta \in C$ por definición $\alpha \cdot \beta$ está definido y además como $\alpha \cdot (\beta \cdot \theta)$ está definido, entonces $\beta \cdot \theta$ está definido.

3. Sea $\alpha \in C$ debemos probar que $\exists \, \varepsilon, \eta$ identidades tal que $\varepsilon \cdot \alpha = \alpha$ y $\alpha \cdot \eta = \alpha$

   Sea $\alpha = (x_1, x_2)$ y $\eta \in M$ tal que $\alpha \cdot \eta$ está definida y además sea $\eta = (z_1, z_2)$ donde debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \eta &= \alpha \\ (x_1, x_2) \cdot (z_1, z_2) &= (x_1, x_2) \\ (x_1, z_2) &= (x_1, x_2) \ ; \ x_2 = z_1 \end{aligned}$$

   Además por igualdad de pares ordenados se cumple que:

   $x_1 = x_1$ y $z_2 = x_2$

Por lo que:

$$\eta = (z_1, z_2)$$
$$\eta = (x_2, x_2)$$

Por tanto η es un inverso por la derecha.

Ahora tomemos $\varepsilon = (y_1, y_2)$ tal que $\varepsilon \cdot \alpha$ está definido y además debe cumplir que:

$$\varepsilon \cdot \alpha = \alpha$$
$$(y_1, y_2) \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$
$$(y_1, x_2) = (x_1, x_2) \;\; ; \; y_2 = x_1$$

Además por igualdad de pares ordenados se cumple que:

$y_1 = x_1$ y $x_2 = x_2$

Así:

$$\varepsilon = (y_1, y_2)$$
$$\varepsilon = (x_1, x_1)$$

Por tanto ε es un inverso por la izquierda.

■

Ejemplo 2.1.3

Sea α un elemento inversible del sistema multiplicativo C. Probar que $C_{\lambda(\alpha)} \cong C_{\rho(\alpha)}$

Solución

Sea

$$\varphi : C_{\lambda(\alpha)} \longrightarrow C_{\rho(\alpha)}$$
$$\beta \mapsto \varphi(\beta) = \alpha^{-1}\beta\alpha$$

Vamos a probar que φ es un isomorfismo.

Como

$$\beta \in C_{\lambda(\alpha)} \Rightarrow \beta = \lambda(\alpha)\beta = \beta\lambda(\alpha)$$
$$\Rightarrow \beta = (\alpha\alpha^{-1})\beta = \beta(\alpha\alpha^{-1})$$

Así se concluye que $\alpha^{-1}\beta$, $\beta\alpha$ están definido, por lo cual $\alpha^{-1}\beta\alpha$ está definido.

Ahora probaremos que $\alpha^{-1}\beta\alpha \in C_{\rho(\alpha)}$ si $\beta \in C_{\lambda(\alpha)}$

Sea $\beta \in C_{\lambda(\alpha)}$

$$\begin{aligned}
\rho(\alpha)(\alpha^{-1}\beta\alpha) &= (\alpha^{-1}\alpha)(\alpha^{-1}\beta\alpha)\\
&= \alpha^{-1}(\alpha\alpha^{-1}\beta)\alpha\\
&= \alpha^{-1}(\lambda(\alpha)\beta)\alpha\\
&= \alpha^{-1}\beta\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha^{-1}\beta\alpha)\rho(\alpha) &= (\alpha^{-1}\beta\alpha)(\alpha^{-1}\alpha)\\
&= \alpha^{-1}(\beta\alpha\alpha^{-1})\alpha\\
&= \alpha^{-1}(\beta\lambda(\alpha))\alpha\\
&= \alpha^{-1}\beta\alpha
\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha^{-1}\beta\alpha \in C_{\rho(\alpha)}$$

- ¿φ está bien definida?

  Sean $\beta, \beta' \in C_{\lambda(\alpha)}$ tal que $\beta = \beta'$

  $$\begin{aligned}
  \beta = \beta' &\Rightarrow \alpha^{-1}\beta\alpha = \alpha^{-1}\beta\alpha\\
  &\Rightarrow \varphi(\beta) = \varphi(\beta')
  \end{aligned}$$

  Por tanto φ es función.

- ¿φ es homomorfismo?

  Sean $\beta, \beta' \in C_{\lambda(\alpha)}$

  $$\begin{aligned}
  \varphi(\beta\beta') &= \alpha^{-1}\beta\beta'\alpha\\
  &= (\alpha^{-1}\beta)(\beta'\alpha)\\
  &= (\alpha^{-1}\beta)((\lambda(\alpha)\beta')\alpha)\\
  &= (\alpha^{-1}\beta)(\alpha\alpha^{-1}\beta'\alpha)\\
  &= (\alpha^{-1}\beta\alpha)(\alpha^{-1}\beta'\alpha)\\
  &= \varphi(\beta)\varphi(\beta')
  \end{aligned}$$

Por tanto φ es homomorfismo.

- ¿φ es inyectiva?

  Sean $\beta, \beta' \in C_{\lambda(\alpha)}$ tales que $\varphi(\beta) = \varphi(\beta')$

$$\varphi(\beta) = \varphi(\beta') \Rightarrow \alpha^{-1}\beta\alpha = \alpha^{-1}\beta'\alpha$$

  Pero: $\beta = \lambda(\alpha)\beta = (\lambda(\alpha)\beta)\lambda(\alpha)$

  y $\beta' = \lambda(\alpha)\beta' = (\lambda(\alpha)\beta')\lambda(\alpha)$ Así

$$\begin{aligned}
\beta &= \lambda(\alpha)\beta \\
&= (\lambda(\alpha)\beta)\lambda(\alpha) \\
&= (\alpha\alpha^{-1}\beta)\alpha\alpha^{-1} \\
&= \alpha(\alpha^{-1}\beta\alpha)\alpha^{-1} \\
&= \alpha(\alpha^{-1}\beta'\alpha)\alpha^{-1} \\
&= (\alpha\alpha^{-1}\beta')\alpha\alpha^{-1} \\
&= (\lambda(\alpha)\beta')\lambda(\alpha) \\
&= \beta'
\end{aligned}$$

  Por tanto φ es inyectiva.

- ¿φ es sobreyectiva?

  Sea $w \in C_{\rho(\alpha)}$

$$\begin{aligned}
w \in C_{\rho(\alpha)} &\Rightarrow \rho(\alpha)w = w\rho(\alpha) = w \\
&\Rightarrow w = \alpha^{-1}\alpha w = w\alpha^{-1}\alpha \\
&\Rightarrow w = (\alpha^{-1}\alpha w)\alpha^{-1}\alpha \\
&\Rightarrow w = \alpha^{-1}(\alpha w\alpha^{-1})\alpha
\end{aligned}$$

  Tomando $\beta = \alpha w\alpha^{-1}$

$$\begin{aligned}
\lambda(\alpha)\beta &= \alpha\alpha^{-1}(\alpha w\alpha^{-1}) \\
&= \alpha(\alpha^{-1}\alpha w)\alpha^{-1} \\
&= \alpha w\alpha^{-1}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\beta\lambda(\alpha) &= (\alpha w \alpha^{-1})\alpha\alpha^{-1}\\ &= \alpha(w\alpha^{-1}\alpha)\alpha^{-1}\\ &= \alpha w \alpha^{-1}\end{aligned}$$

$\therefore\ \alpha w \alpha^{-1} = \beta \in C_{\lambda(\alpha)}$

Así $\varphi(\alpha w \alpha^{-1}) = w$ y φ es sobreyectiva.

Por tanto φ es isomorfismo y se cumple que $C_{\lambda(\alpha)} \cong C_{\rho(\alpha)}$

■

2.2. Categorías

Definición 2.2.1 Definición de categoría
Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de tres elementos: una clase de objetos que se denotara como $Ob(\mathcal{C})$, un conjunto de morfismos $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ para cada par $A,B \in Ob(\mathcal{C})$ y una ley de composición que llamaremos producto

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \times Mor_{\mathcal{C}}(B,C) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(A,C)$$

denotada por

$$(f,g) \mapsto g \circ f$$

para cada par ordenado $A,B \in Ob(\mathcal{C})$, se escribira

$$f : A \longrightarrow B$$

para denotar $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$. Donde estos ingredientes están sujetos a los siguientes axiomas:

i) $Mor_{\mathcal{C}}(A,B) = Mor_{\mathcal{C}}(D,E)$, si y sólo si, $A = D$, $B = E$

ii) Si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

iii) Para cada objeto A, existe un morfismo identidad $1_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A,A)$ tal que $f \circ 1_A = f$ y además existe $1_B \in Mor_{\mathcal{C}}(B,B)$ tal que $1_B \circ f = f$ para todo $f : A \longrightarrow B$.

Escribiremos $Mor(A,B)$ en lugar de $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ si sobreentiende que se trabaja sobre la categoría $\mathcal{C}$.
De la definición anterior podemos concluir que el conjunto de morfismos tiene estructura de categoría abstracta, así son los morfismos los que juegan un papel importante en una categoría, mientras que los objetos desempeñan un papel secundario. De todas formas, en la mayoría de las aplicaciones de este concepto, los objetos tienen interés primordial. En $Mor(A,B)$ diremos que A es el dominio y B es el codominio de f. El producto de dos morfismos f y g escrita $g \circ f$, estará definida si y sólo si, el codominio de f es igual

al dominio de g.

El morfismo identidad es único, ya que:

Si existe $i \in Mor(A, A)$, tal que i es identidad.

Por definición de i_A se cumple que $i_A \circ i = i$.

Además i también es identidad por lo que cumple que $i_A \circ i = i_A$. Así

$$i_A \circ i = i_A \circ i$$

$$i_A = i$$

Por tanto la identidad es única.

Para representar la composición de morfismos en una categoría se utilizan diagramas.

Así pues las composiciones pueden representarse por el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & D \\ B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & D \\ B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "h\circ g"'] & C \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Además un diagrama se dice conmutativo si para cualesquiera dos objetos A, D en él, todos sus caminos son iguales.

Algunos ejemplos de categoría son los siguientes:

Ejemplo 2.2.1 Categoría 0

La categoría 0 es aquella que no consta de ningún objeto y de ningún morfismo.

Ejemplo 2.2.2 Categoría 1

La categoría 1 es aquella que consta de un objeto y un morfismo, el cual es el morfismo identidad.

$$X \xrightarrow{1_X} X$$

Ejemplo 2.2.3 Categoría 2

La categoría 2 es aquella que consta de dos objetos A, B y sus morfismos identidades y además de un único morfismo f tal que $f : A \longrightarrow B$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.2.4

El ejemplo más sencillo de categoría es la de los conjuntos, la cual se denota por $Conj$.

I La clase de objetos son los conjuntos

II Para cada par de objetos $A, B \in Obj(Conj)$, el conjunto $Mor(A, B)$ es el conjunto de funciones entre A y B

III $\forall\ A, B, C \in Obj(Conj)$, $\forall\ f \in Mor(A, B)$ y $\forall\ g \in Mor(B, C)$, el producto es la composición usual entre funciones

Para probar que es una categoría simplemente tomaremos el conjunto de funciones al que denotaremos M y probaremos que estos forman un sistema multiplicativo. Así:

1. Sean $f \in Mor(A, B)$,$g \in Mor(B, C)$,$h \in Mor(C, D)$

   - "$\Rightarrow$"$f \circ (g \circ h)$ está definido $\Rightarrow$ $(f \circ g) \circ h$ está definido.

$$\begin{aligned} f \circ (g \circ h) \text{ está definido} &\Rightarrow (f \circ (g \circ h))(x) \ \ ; x \in A \\ &\Rightarrow (f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) \\ &\Rightarrow (f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x))) \\ &\Rightarrow (f \circ (g \circ h))(x) = (f \circ g)(h(x)) \\ &\Rightarrow (f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x) \\ &\Rightarrow (f \circ g) \circ h \text{ está definido} \end{aligned}$$

- "$\Leftarrow$"$(f \circ g) \circ h$ está definido $\Rightarrow f \circ (g \circ h)$ está definido.

$$\begin{aligned}
(f \circ g) \circ h \text{ está definido} &\Rightarrow ((f \circ g) \circ h)(x)\ ; x \in A \\
&\Rightarrow ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) \\
&\Rightarrow ((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) \\
&\Rightarrow ((f \circ g) \circ h)(x) = f((g \circ h)(x)) \\
&\Rightarrow ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x) \\
&\Rightarrow f \circ (g \circ h) \text{ está definido}
\end{aligned}$$

2. $f \circ g$ está definido y $g \circ h$ está definido y por propiedad de composición de funciones el dominio de una función saliente tiene que ser igual al codominio de la función entrante por lo cual si hacemos la composición $f \circ g \circ h$ está definida.

3. Como
$$M = \bigcup_{A,B \in Ob(Conj)} M(A,B)$$
es el conjunto de todas las funciones entonces este conjunto poseé las funciones identidades tal que al operarlas con un elemento $\alpha \in M$, el resultado sera α

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
X \arrow[u, "i_X"] \arrow[ur, "i_X \circ f"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f \circ i_Y"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.2.5

La categoría M_R de R-módulos a la izquierda consiste de:

I La clase de objetos son los R-módulos izquierdos.

II Para cada par de objetos $A, B \in Obj(M_R)$, el conjunto $Mor(A,B)$ es el conjunto de homomorfismos entre A y B

III $\forall\ A, B, C \in Obj(M_R)$, $\forall\ f \in Mor(A,B)$ y $\forall\ g \in Mor(B,C)$, el producto es la composición entre homomorfismos.

Para probar que es una categoría simplemente tomaremos el conjunto de homomorfismos al que denotaremos M y probaremos que estos forman un sistema multiplicativo.
Así:

1. Sean $f \in Mor(A,B)$,$g \in Mor(B,C)$,$h \in Mor(C,D)$

   - "$\Rightarrow$"$f \circ (g \circ h)$ está definido $\Rightarrow (f \circ g) \circ h$ está definido.

$$\begin{aligned}
f \circ (g \circ h) \text{ está definido} &\Rightarrow (f \circ (g \circ h))(x) \ \ ; x \in A \\
&\Rightarrow (f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) \\
&\Rightarrow (f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x))) \\
&\Rightarrow (f \circ (g \circ h))(x) = (f \circ g)(h(x)) \\
&\Rightarrow (f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x) \\
&\Rightarrow (f \circ g) \circ h \text{ está definido}
\end{aligned}$$

   - "$\Leftarrow$"$(f \circ g) \circ h$ está definido $\Rightarrow f \circ (g \circ h)$ está definido.

$$\begin{aligned}
(f \circ g) \circ h \text{ está definido} &\Rightarrow ((f \circ g) \circ h)(x) \, ; x \in A \\
&\Rightarrow ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) \\
&\Rightarrow ((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) \\
&\Rightarrow ((f \circ g) \circ h)(x) = f((g \circ h)(x)) \\
&\Rightarrow ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x) \\
&\Rightarrow f \circ (g \circ h) \text{ está definido}
\end{aligned}$$

2. $f \circ g$ está definido y $g \circ h$ está definido y además los homomorfismos cumplen la propiedad de ser funciones por lo que cumplen la misma propiedad para composición de funciones, por lo cual la composición $f \circ g \circ h$ está definida.

3. Como

$$M = \bigcup_{A,B \in Ob(M_R)} M(A,B)$$

es el conjunto de homomorfismos entonces este conjunto poseé los homomorfismos identidades tal que al operarlas con un elemento α, el resultado sera α

Ejemplo 2.2.6

La categoría Gru de grupos, en la cual su clase de objetos son los grupos y sus morfismos son los homomorfismos de grupos, su producto se define igual a la composición de funciones en la categoría $Conj$.

Ejemplo 2.2.7

La categoría Ab de grupos abelianos, en la cual su clase de objetos son los grupos abelianos y sus morfismos son los homomorfismos de grupos, su producto está definido igual que el el producto en la categoría de grupos.

Ejemplo 2.2.8

La clase de objetos cuyos componentes son los anillos, sus morfismos son los homomorfismos de anillos y el producto de morfismos definido como la composición de funciones forma una categoría denotada como Ani.
En efecto, para algunos $\alpha, \beta \in Mor(A,B)$ donde $A, B \in Ob(Ani)$.
$\alpha\beta$ está definido y si $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ están definidos entonces $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ está definido.

Similarmente se define la siguiente categoría

Ejemplo 2.2.9

La categoría Ani_1 de Anillos con unidad, en la cual su clase de objetos son los anillos con unidad y sus morfismos son los homomorfismos de anillos, para lo cual el conjunto de homomorfismos de anillos define un sistema multiplicativo, ya que los homomorfismos poseen la propiedad de ser funciones.

Ejemplo 2.2.10

La categoría L de sucesiones descendentes sobre R consiste de todas las sucesiones descedentes de R-módulos como objetos y de sus homomorfismos como morfismos. Los productos de morfismos están definidos por composición como en la categoría de conjuntos y por ende el conjunto de homomorfismos de las sucesiones descendentes forman un sistema multiplicativo.

Definición 2.2.2 Categoría pequeña

Una categoría $\mathcal{C}$ se dice **pequeña** si $Ob(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Ejemplo 2.2.11

Un ejemplo de una categoría pequeña es la categoría 0, ya que como no consta de ningún objeto entonces $Ob(0) = \phi$ y ϕ es un conjunto.

Ejemplo 2.2.12

Un ejemplo de una categoría que no es pequeña es la categoría $Conj$ ya que $Ob(Conj)$ es la clase de todos los conjuntos y esta clase no es un conjunto.

Definición 2.2.3 Subcategoría

Dadas dos categorías $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$, se dice que $\mathcal{C}'$ es una **subcategoría** de $\mathcal{C}$ si se cumplen las siguientes cuatro condiciones:

(i) Todo objeto de $\mathcal{C}'$ es también objeto de $\mathcal{C}$. En términos de contenencia de clases esto quiere decir que $Ob(\mathcal{C}) \subseteq Ob(\mathcal{C})$.

(ii) Dados $X, Y \in Ob(\mathcal{C}')$, todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}'$ también lo es en $\mathcal{C}$, esto es, $Mor_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

(iii) La composición de morfismos en $\mathcal{C}'$ es la inducida por la composición de morfismos en $\mathcal{C}$.

(iv) Para cada objeto X de $\mathcal{C}'$, el morfismo identidad es el mismo morfismo identidad de la categoría $\mathcal{C}$.

Diremos también que una categoría $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ es *plena* si $Mor_{\mathcal{C}'}(A, B) = Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo par $A, B \in Ob(\mathcal{C})$.

Un ejemplo de una subcategoría es el siguiente.

Ejemplo 2.2.13

La categoría Gru de grupos es una subcategoría de la categoría $Conj$ de Conjuntos, ya que:

i) $\forall\ X \in Ob(Gru)$ es un conjunto, así

$$Ob(Gru) \subset Ob(Conj)$$

ii) $\forall\ \alpha \in Mor(Gru)$ donde $\alpha : X \longrightarrow Y$, con $X, Y \in Ob(Gru)$, α es una función por definición de homomorfismo de grupos, así $\alpha \in Mor(Conj)$

Ejemplo 2.2.14

La categoría M_R de módulos a la izquierda es una subcategoría de la categoría $Conj$ de conjuntos, ya que:

i) $\forall\ X \in Ob(M_R)$ es un conjunto así

$$Ob(M_R) \subset Ob(Conj)$$

ii) Todo homomorfismos de módulos β es una función por deficición de homomorfismo de módulo así $\beta \in Mor(Conj)$.

Ahora veremos otro ejemplo de una subcategoría en la cual es plena.

Ejemplo 2.2.15

La categoría Ab de grupos abelianos es una subcategoría plena de la categoría Gru de grupos, ya que el conjunto de morfismos de A en B, de Ab denotado como $Mor_{Ab}(A, B)$, y $Mor_{Gru}(A, B)$ donde es el conjunto de morfismos de A en B de la categoría Gru, cumplen que $Mor_{Ab}(A, B) = Mor_{Gru}(A, B)$.

Porque si $f : Z \longrightarrow B$ con $A, B \in Ob(Gru)$ se le pide que $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$.

Y si $f : A \longrightarrow B$ con $A, B \in Ob(Ab)$ se le pide que $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$.

Por lo que ambos conjuntos de morfismos coinciden.

Lo cual no es el caso del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.16

La categoría Ani_1 no es una subcategoría plena de la categoría Ani ya que el conjunto de morfismos de Ani_1 solamente posee los homomorfismos con unidad y el conjunto de morfismo de Ani son los homomorfismos de anillos en los cuales algunos de los homomorfismos no preservan la unidad.

Es decir si $f \in Mor(Ani_1)$, $f(1) = 1$.

Y en Ani $\exists$ $f \in Mor(Ani)$ tales que $f(1) \neq 1$ porque hay Anillos que no tienen unidad, por ejemplo el morfismo $f : X \longrightarrow Y$ con X un anillo con unidad y Y un anillo que no posea unidad.

Definición 2.2.4 Categoría R-lineal

Una categoría $\mathcal{C}$ se dice R-lineal si y sólo si se satisface:

- Para dos objetos $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, $Mor(X, Y)$ es un R-módulo.
- Para tres objetos cualesquiera $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$, el producto define una función bilineal de $Mor(X, Y) \times Mor(Y, Z)$ en $Mor(X, Z)$.

2.3. Tipos de Morfismos

Como se ha observado en las estructuras definidas anteriormente las reglas de correspondencia entre los conjuntos están categorizadas según sus propiedades, así mismo vamos a definir algunos morfismos de Categorías que cumplen condiciones particulares, los cuales están descritos de la siguiente manera.

Definición 2.3.1
Sea C una categoría y $X, Y \in Ob(C)$.
Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es un **epimorfismo**, si para todo objeto Z y todo par de morfismos $h, g : Y \longrightarrow Z$ se cumple la implicación

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

En otras palabras, f es un epimorfismo si es cancelable a la derecha.
El morfismo f se dice que es un **monomorfismo** si es **cancelable** a la izquierda, es decir si $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ con $h, g : Z \longrightarrow X$.
Finalmente, se dice que f es **bimorfismo**, si es simultáneamente epimorfismo y monomorfismo.

A partir de las definiciones anteriores se obtienen de manera inmediata las siguientes conclusiones:

(i) La composición de monomorfismos es un monomorfismo. Si $g \circ f$ es un monomorfismo, entonces f es un monomorfismo.
Sea $f, g \in C$ tal que f y g son monomorfismos.
Por tanto $\forall\ m, n$ tal que: $f \circ n = f \circ m \Rightarrow n = m$. Además $\forall\ r, s$ tal que: $g \circ r = g \circ s \Rightarrow r = s$.
Sea $h = g \circ f$ tal que $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ y $h : X \longrightarrow Z$ donde

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \qquad h = g \circ f$$

Debemos probar que h es monomorfismo, es decir $\forall\, m, n : A \longrightarrow X$,

$$(g \circ f) \circ m = (g \circ f) \circ n \Rightarrow m = n$$

.

$$\begin{aligned}(g\circ f)\circ m=(g\circ f)\circ n &\Rightarrow g\circ(f\circ m)=g\circ(f\circ n)\\ &\Rightarrow f\circ m=f\circ n\\ &\Rightarrow m=n\end{aligned}$$

Por tanto h es monomorfismo.

(ii) La composición de epimorfismos es un epimorfismo. Si $g\circ f$ es un epimorfismo entonces g es un epimorfismo.
Sea $f,g\in C$ tal que $f,\ g$ son epimorfismos. Por tanto $\exists\, m,n$ tal que
$n\circ f=m\circ f\Rightarrow n=m$ y además $\exists\, r,s$ tal que $r\circ g=s\circ g\Rightarrow r=s$.
Sea $h=g\circ f$ tal que $f:X\longrightarrow Y$, $g:Y\longrightarrow Z$ y $h:X\longrightarrow Z$. Debemos probar que h es epimorfismo.

$$\begin{aligned}f=f &\Rightarrow (r\circ g)\circ f=(s\circ g)\circ f\\ &\Rightarrow r\circ(g\circ f)=s\circ(g\circ f)\\ &\Rightarrow r\circ h=s\circ h\\ &\Rightarrow r=s\end{aligned}$$

Por tanto h es epimorfismo.

(iii) El morfismo idéntidad es un bimorfismo.

Ejemplo 2.3.1
En la categoría M_A los epimorfismos coinciden con los homomorfismos sobreyectivos.
Ya que, sea $f:M\longrightarrow N$ un homomorfismo sobreyectivo de A-módulos y sean $g,h:N\longrightarrow P$ homomorfismos tales que $g\circ f=h\circ f$. Dado $n\in N$ existe $m\in M$ tal que $f(m)=n$.

Por tanto

$$\begin{aligned} g(n) &= g(f(m)) \\ &= (g \circ f)(m) \\ &= (h \circ f)(m) \\ &= h(f(m)) \\ &= h(n) \end{aligned}$$

Como se tomo un n arbitrario se concluye que $g = h$.

Por otra parte sea $f : M \longrightarrow N$ un epimorfismo en M_A y $P = \frac{N}{Im(f)}$ el módulo cociente de N por la imagen del homomorfismo f. Consideremos los A-morfismos $g, h : N \longrightarrow P$ definidos por $g(n) = n + Im(f)$ y $h(n) = 0 + Im(f)$ para todo $n \in N$.

Por definición $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.

$$\begin{aligned} g \circ f = h \circ f &\Rightarrow g = h \\ &\Rightarrow g(n) = f(n)\,; n \in N \\ &\Rightarrow n + Im(f) = 0 + Im(f) \\ &\Rightarrow n + Im(f) = Im(f) \\ &\Rightarrow n \in Im(f)\,; \forall n \in N \end{aligned}$$

Así f es sobreyectiva.

Ejemplo 2.3.2

En la categoría M_A los homomorfismos inyectivos son los monomorfismos.

Ya que, sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo inyectivo y $g, h : P \longrightarrow M$ homomorfismos tales que $f \circ g = f \circ h$.

Para cada $x \in P$ se cumple que:

$$\begin{aligned} f(g(x)) = f(h(x)) &\Rightarrow f(g(x)) - f(h(x)) = 0 \\ &\Rightarrow f(g(x) - h(x)) = 0 \\ &\Rightarrow g(x) - h(x) = 0 \\ &\Rightarrow g(x) = h(x) \end{aligned}$$

Así f es monomorfismo.

Por otra parte se tiene que f es monomorfismo donde $f : M \longrightarrow N$ y $f \in Mod_A$ y sean $m_1, m_2 \in M$ tales que $f(m_1) = f(m_2)$.

Sea $P =< m_1 - m_2 >$ y consideremos los A-homomorfismos $i, h : P \longrightarrow M$ donde i es el homomorfismo inclución y h es el homomorfismo nulo.

Se tiene que $i(m_1 - m_2) = m_1 - m_2$ y $h(m_1 - m_2) = 0$.

$$\begin{aligned} f(m_1) &= f(m_2) \\ f(m_1) - f(m_2) &= 0 \\ f(m_1 - m_2) &= f(0) \\ f(i(m_1 - m_2)) &= f(h(m_1 - m_2)) \\ (f \circ i)(m_1 - m_2) &= (f \circ h)(m_1 - m_2) \end{aligned}$$

Además por ser f monomorfismo $i = h$, así:

$$\begin{aligned} i(m_1 - m_2) &= h(m_1 - m_2) \\ i(m_1 - m_2) &= 0 \\ m_1 - m_2 &= 0 \\ m_1 &= m_2 \end{aligned}$$

Por tanto f es un homomorfismo inyectivo.

Como consecuencia de los dos ejemplos anteriores se tiene que en la categoría M_A los bimorfismos son los homomorfismos biyectivos.

Ejemplo 2.3.3

Este ejemplo muestra que en la categoría Ani_1 no todo epimorfismo es un homomorfismo sobreyectivo.

La inclusión $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es un homomorfismo no sobreyectivo, sin embargo es un epimorfismo de Ani_1.

Sea C un anillo y $g, h : \mathbb{Q} \longrightarrow C$ homomorfismos tales que $g \circ i = h \circ i$.

Para todo racional $\frac{p}{q}$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
g(\frac{p}{q}) &= g(p \cdot \frac{1}{q}) \\
&= g(p) \cdot g(\frac{1}{q}) \\
&= g(p) \cdot g(q^{-1}) \\
&= g(p) \cdot g(q)^{-1} \\
&= g(i(p)) \cdot g(i(q))^{-1} \\
&= (g \circ i)(p) \cdot (g \circ i)(q)^{-1} \\
&= (h \circ i)(p) \cdot (h \circ i)(q)^{-1} \\
&= h(p) \cdot h(i(q))^{-1} \\
&= h(p) \cdot h(q)^{-1} \\
&= h(p) \cdot h(q^{-1}) \\
&= h(p) \cdot h(\frac{1}{q}) \\
&= h(p \cdot \frac{1}{q}) \\
&= h(\frac{p}{q})
\end{aligned}$$

es decir $g = h$ por tanto i es epimorfismo.

En la categoría Ani_1 la prueba de que todo homomorfismo inyectivo es monomorfismo es análoga a la dada en el Ejemplo 2.3.2 para módulos. De lo visto anteriormente se sigue que en la categoría Ani_1 los bimorfismo no coinciden con los homomorfismos biyectivos, de tal manera que todo homomorfismo biyectivo es bimorfismo pero no lo contrario.

Definición 2.3.2
El morfismo $f : X \longrightarrow Y$ se dice una **retracción**, si existe un morfismo $h : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ h = i_y$. En otras palabras, f es un retracción si posee un inverso a la derecha. Se dice que $f : X \longrightarrow Y$ es una **corretracción**, si tiene inverso a la izquierda. Um **isomorfismo** es un morfismo que es retracción y corretracción al mismo tiempo.

Nótese que para un isomorfismo el inverso por la derecha coincide con el inverso por la izquierda y es el único que cumple esta doble condición. Dicho morfismo será llamado el **inverso** de f, y será notado por f^{-1}. Para indicar que dos objetos X, Y son isomorfos, esto es, que existe un isomorfismo entre ellos, escribimos $X \cong Y$.
A partir de las definiciones anteriores es evidente que una retracción es un epimorfismo y que toda corretracción es un monomorfismo. De esto se desprende que todo isomorfismo es un bimorfismo. Una categoría se dice **balanceada** si todo bimorfismo es un isomorfismo.

Ejemplo 2.3.4
Consideremos los $\mathbb{Z}$-módulos $2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ con el homomorfismo inclusión

$$i : 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$2k \mapsto i(2k) = 2k \quad ; \forall k \in \mathbb{Z}$$

Como i es inyectivo se tiene que i es un monomorfismo por ejemplo 2.3.2.
Pero i no tiene inverso a izquierda, ya que:
Sea $g : \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}$ un homomorfismo tal que $g \circ i = i_{\mathbb{Z}}$.
Si $g(1) = 2m$ con $m \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$\begin{aligned} g(2) &= g(1+1) \\ g(i(2)) &= g(1) + g(1) \\ (g \circ i)(2) &= 2m + 2m \\ i_{\mathbb{Z}}(2) &= 2(2m) \\ 2 &= 4m \quad (\rightarrow\leftarrow) \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción ya que $m \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 2.3.5

El homomorfismo canónico $j : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ es claramente sobreyectivo, y por ende, un epimorfismo. j no es un retracción ya que el único $\mathbb{Z}$-homomorfismo de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}$ es el nulo, ya que:

$$\begin{aligned} f(0) &= f(1+1) \\ 0 &= f(2(1)) \\ 0 &= 2f(1) \end{aligned}$$

la única manera de que se cumpla la igualdad es que $f(1) = 0$.

De la definición 2.3.2 y de los dos ejemplos anteriores se obtiene que:

- En M_A toda retracción en un homomorfismo sobreyectivo, pero no lo contrario.
- En M_A toda corretracción es un homomorfismo inyectivo,pero el recíproco no se cumple.

Ejemplo 2.3.6

En teoría general de anillos y módulos se demuestra que los isomorfismos coinciden con los homomorfismos biyectivos. De aquí, y de lo anotado al final del ejemplo 2.3.2, se obtiene que M_A es una categoría balanceada. Y Ani_1 no es balanceada: como se observo en los ejemplos anteriores la inclusión $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es un bimorfismo, pero claramente no es biyectivo.

Definición 2.3.3 Tipos de Objetos

Sea $\mathcal{C}$ una categoría.Un objeto $I \in Ob(\mathcal{C})$ se dice **inicial** si para cada objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$ el conjunto $Mor(I, X)$ es unitario.

Un objeto $T \in Ob(\mathcal{C})$ se dice **terminal** si para cualquier objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$ el conjunto $Mor(X, T)$ es unitario.

Un objeto que es simúltaneamente inicial y terminal se denomina **objeto cero**, y se acostumbra a denotar por 0.

Resulta a partir de las definiciones anteriores que dos objetos iniciales de una categoría son necesariamente isomorfos.

Súpongase $\mathcal{C}$ una categoría e I_1, I_2 objetos iniciales entonces $Mor(I_1, X_1) = \{x\}$ y $Mor(I_2, X_2) = \{y\}$ para cada $X_1, X_2 \in Ob(\mathcal{C})$, debemos probar que $I_1 \cong I_2$.
Tomemos en particular $X_1 = I_2$, como I_1 es inicial existe un único $f \in Mor(I_1, I_2)$ tal que $f : I_1 \longrightarrow I_2$.
Ahora tomemos $X_2 = I_1$, como I_2 es inicial existe un único $g \in Mor(I_2, I_1)$ tal que $g : I_2 \longrightarrow I_1$.
Podemos componer f y g de la siguiente manera:

$$I_1 \xrightarrow{f} I_2 \xrightarrow{g} I_1 \qquad g \circ f : I_1 \longrightarrow I_1$$

$$I_2 \xrightarrow{g} I_1 \xrightarrow{f} I_2 \qquad f \circ g : I_2 \longrightarrow I_2$$

Pero como I_1 es inicial, existe un único morfismo definido de $I_1 \longrightarrow I_1$, pero se tienen dos los cuales son $g \circ f$ y 1_{I_1}. Por tanto $g \circ f = 1_{I_1}$ así f tiene inverso por la izquierda.
Además por ser I_2 inicial existe un único morfismo definido de $I_2 \longrightarrow I_2$, pero tenemos los morfismos $f \circ g$ e 1_{I_2} que cumplen estar definidos de $I_2 \longrightarrow I_2$ por tanto $f \circ g = 1_{I_2}$ así f tiene inverso por la derechas.
Por tanto f es isomorfismo.
Así $I_1 \cong I_2$.
Tal situación se tiene también para dos objetos terminales

Ejemplo 2.3.7

Todo monoide X constituye una categoría con X como único objeto y con los elementos de X como morfismos. Los productos están definidos por la multiplicación sobre X.
Veremos si está categoría posee objetos imiciales, finales y objetos cero.
Como el único objeto de la categoría es X entonces veremos si $Mor(X, X)$ es unitario, para ver si X es inicial y además objeto final.
Se tiene

$$\alpha : X \longrightarrow X$$

$$\beta \mapsto \alpha \cdot \beta$$

con $\alpha \in X$

y además se tiene

$$1_X : X \longrightarrow X$$

$$x \mapsto x$$

por lo cual se tienen dos morfismos que van de X a X, por tanto X no es objeto inicial y tampoco es objeto final.

Así la categoría no posee objeto cero.

Ejemplo 2.3.8

La categoría $Conj$ de Conjuntos donde sus morfismos son las funciones.

Veremos si posee objetos cero.

El único objeto inicial es ϕ ya que si tenemos algún objeto distinto de vacío este posee al menos dos funciones la cual es la función identidad y la fúncion constante. Por lo cúal $Mor(\phi, X) = \{\phi\}$.

Además los objetos finales de la categoría de conjuntos son todos los elementos unitarios, ya que el único morfismo es la función constante, por definición de función.

Sin embargo $\phi = \{(x, \phi(x)) \mid x \in X \ , \ \phi(x) \in \phi\}$ no es un objeto final, ya que por definición de función, ϕ debe cumplir que para todo elemento de X debe estar relacionado con uno de ϕ, pero vacío no posee elementos por lo cual no existe una función que cumpla esa condición.

Así $Mor(X, \phi) = \{\}$.

Por tanto la categoría conjuntos no posee objetos cero.

Ejemplo 2.3.9

En la categoría Gru el $\{0\}$ es un objeto cero.

La categoría Gru es la categoría de grupos en la cúal sus objetos son los grupos y sus morfismos los homomorfismos de grupos, para ver que $\{0\}$ sea un objeto cero, debe ser un objeto inicial y un objeto final.

- ¿Objeto inicial? Los únicos morfismos que hay de $\{0\} \longrightarrow X$ son el homomorfismo identidad y el homomorfismo cero, y cumplen la cualidad de ser el mismo homomorfismo.

  Así $\{0\}$ es un objeto inicial.

- ¿Objeto final? El único homomorfismo que existe de X en $\{0\}$ es el homomorfismo nulo.

  Así $\{0\}$ es un objeto final.

$\therefore$ $\{0\}$ es un objeto nulo.

Definición 2.3.4
El morfismo $f : X \longrightarrow Y$ se llama **morfismo cero a izquierda** si $f \circ g = f \circ h$, para cualquier objeto Z y cualesquiera morfismos $g, h : Z \longrightarrow X$. Se dice que f es un **morfismo cero a la derecha** si $g \circ f = h \circ f$, para cualquier objeto Z y cualesquiera morfismos $g, h : Y \longrightarrow Z$. Un morfismo que sea cero simultáneamente a izquierda y a derecha se llama **morfismo cero**.

Si I es un objeto inicial entonces cualquier morfismo $I \longrightarrow X$ es un morfismo cero a derecha.
Sean $h, g : X \longrightarrow Z$, se tiene el siguiente diagrama:

$$I \xrightarrow{f} X \underset{g}{\overset{h}{\longrightarrow}} Z$$

Así la composición estara definida como

$$I \underset{g\circ f}{\overset{h\circ f}{\longrightarrow}} Z$$

Pero $h \circ f = g \circ f$ ya que $Mor(I, Z)$ es unitario por ser I inicial.
Análogamente, si T es objeto terminal, entonces todo morfismo con codominio T es morfismo cero a izquierda.

Ejemplo 2.3.10

En la categoría Mod_A de los A-módulos izquierdos, el homomorfismo nulo $0 : M \longrightarrow N$ es un morfismo cero.

Es un morfismo cero a izquierda ya que si tomamos un $Z \in Ob(Mod_A)$ arbitrario, y sean $f, g : Z \longrightarrow M$ homomorfismos.

Se sabe que el homomorfismo nulo está definido de la siguiente manera $0 : M \longrightarrow N$, debemos probar que $0 \circ f = 0 \circ g$. Sea $x \in Z$

$$\begin{aligned} x \in Z &\Rightarrow f(x) \in M \\ &\Rightarrow 0(f(x)) \in N \\ &\Rightarrow 0(f(x)) = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x \in Z &\Rightarrow g(x) \in M \\ &\Rightarrow 0(g(x)) \in N \\ &\Rightarrow 0(g(x)) = 0 \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} 0(g(x)) &= 0(f(x)) \\ (0 \circ g)(x) &= (0 \circ f)(x) \end{aligned}$$

como se tomo un x arbitrario se cumple que $0 \circ g = 0 \circ f$.

Por tanto el homomorfismo nulo es un morfismo cero a izquierda.

Además es un morfismo cero a derecha ya que.

Sean $f, g : N \longrightarrow Z$, y $x \in M$ se tiene que:

$$\begin{aligned} x \in M &\Rightarrow 0(x) \in N \\ &\Rightarrow 0(x) = 0 \end{aligned}$$

ahora

$$\begin{aligned}(f \circ 0)(x) &= f(0(x)) \\ &= f(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(g \circ 0)(x) &= g(0(x)) \\ &= g(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

así $(g \circ 0)(x) = (f \circ 0)(x)$ como se tomo un x arbitrario se cumple que $g \circ 0 = f \circ 0$ por tanto es un morfismo a derecha.

Así el homomorfismo nulo es un morfismo cero.

Proposición 2.3.5
En una categoría con objeto 0, para cada par de objetos X, Y existe un único morfismo cero en $Mor(X, Y)$, notado 0_{XY}.

Demostración:

- *Existencia*

  Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo cero a izquierda y $g : Y \longrightarrow Z$ un morfismo cero a derecha, vamos a probar que $g \circ f$ es un morfismo cero.

  Sean $h, k : Z \longrightarrow W$ morfismos, entonces

$$\begin{aligned}h \circ (g \circ f) &= (h \circ g) \circ f \\ &= (k \circ g) \circ f \quad ; \textit{Por ser } g \textit{ morfismo cero a derecha} \\ &= k \circ (g \circ f)\end{aligned}$$

  con lo cual $g \circ f$ es un morfismo cero a derecha.

Ahora tomemos $r, s : W \longrightarrow X$ morfismos, entonces

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ r &= g \circ (f \circ r)\\ &= g \circ (f \circ s) \ \text{; *Por ser f morfismo cero a izquierda*}\\ &= (g \circ f) \circ s\end{aligned}$$

con lo cual $g \circ f$ es un morfismo cero a izquierda.

Así $g \circ f$ es un morfismo cero.

Como el objeto 0 es inicial entonces $m : 0 \longrightarrow Y$ es un morfismo cero a derecha y además por ser 0 objeto final entonces $n : X \longrightarrow 0$ es un morfismo cero a izquierda.

Por tanto $m \circ n$ es un morfismo cero por lo probado anteriormente, y lo denotaremos como $0_{XY} = m \circ n$.

- *Unicidad*

  Sea el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "n"] \arrow[dr, "0_{XY}"'] & 0 \arrow[d, "m"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

  Puesto que n y m son únicos por ser 0 un objeto nulo. Basta probar que cualquier morfismo cero $h : X \longrightarrow Y$ se puede escribir como $h = m \circ n$.

  Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d, "m"] & \\ X \arrow[ur, "n"] \arrow[r, "h"'] & Y \arrow[r, "i_Y", "0_{XY}"'] & Y \end{tikzcd}$$

  Como 0_{YY} es morfismo cero se tiene que $0_{YY} \circ h = 0_{YY} \circ (m \circ n)$, también como f es morfismo cero entonces $0_{YY} \circ h = i_Y \circ h$.

  Así

$$\begin{aligned}0_{YY} \circ (m \circ n) &= 0_{YY} \circ h\\ &= i_Y \circ h\\ &= h\end{aligned}$$

Pero como y es morfismo cero a derecha cumple que $0_{YY} \circ m = i_Y \circ m$, por lo que

$$0_{YY} \circ (m \circ n) = h$$
$$(0_{YY} \circ m) \circ n = h$$
$$(i_Y \circ m) \circ n = h \;\; ; \; i_Y \circ m = m$$
$$m \circ n = h$$

Así $h = m \circ n = 0_{XY}$

■

Definición 2.3.6
Una categoría se dice que posee **cero morfismos**, si para cualesquiera par de objetos $X,\ Y$ existe un morfismo $0_{XY} : X \longrightarrow Y$ tal que

(i) $f \circ 0_{XY} = 0_{XZ}$, para cada objeto Z y cada $f \in M(Y, Z)$

(ii) $0_{XY} \circ g = 0_{ZY}$, para cada objeto Z y cada $g \in M(Z, X)$.

Nótese que en una categoría C con cero morfismos la colección de cero morfismos $\{0_{X,Y}\}_{XY \in Ob(C)}$ es única:

$$0'_{XY} \circ 0_{XX} = 0_{XY} \;,\;\; 0'_{XY} \circ 0_{XY} = 0'_{XY}$$

2.4. Funtores

Al igual que en anillos y módulos, las categorías adquieren importancia cuando se les compara o se relacionan. Este papel de comparación e interrelación lo desempeñan los funtores, los cuales seran el siguiente objeto de estudio.

Definición 2.4.1 Funtor covariante
Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ categorías y consideremos una función $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ que asigna a cada objeto X de $\mathcal{B}$ un objeto $F(X)$ de $\mathcal{C}$

Notación:

$$F : Ob(\mathcal{B}) \longrightarrow Ob(\mathcal{C})$$
$$B \mapsto F(B)$$

y a cada morfismo α de $\mathcal{B}$ un morfismo $F(\alpha)$ de $\mathcal{C}$. *Notación:*

$$F : Mor(B, C) \longrightarrow Mor(F(B), F(C))$$
$$\alpha \mapsto F(\alpha)$$

$\forall\ B, C \in Ob(B)$

Se dira que F es un **funtor covariante** de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ si y sólo si satisface las tres condiciones siguientes:

a) Si $\alpha : X \longrightarrow Y$ entonces $F(\alpha) : F(X) \longrightarrow F(Y)$

b) $F(i_X) = i_{F(X)}$

c) Si $\beta \circ \alpha$ está definido, entonces $F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)$ con $\alpha, \beta \in Mor(\mathcal{C})$

Definición 2.4.2 Funtor Contravariante
Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ categorías y consideremos un función $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ que asigna a cada objeto X de $\mathcal{B}$ un objeto $F(X)$ de $\mathcal{C}$

Notación:

$$F : Ob(\mathcal{B}) \longrightarrow Ob(\mathcal{C})$$
$$B \mapsto F(B)$$

y a cada morfismo α de $\mathcal{B}$ un morfismo $F(\alpha)$ de $\mathcal{C}$.

Notación:

$$F : Mor(B, C) \longrightarrow Mor(F(C), F(B))$$
$$\alpha \mapsto F(\alpha)$$

Se dira que F es un **funtor contravariante** de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

a) Si $\alpha : X \longrightarrow Y$, entonces $F(\alpha) : F(Y) \longrightarrow F(X)$

b) $F(i_X) = i_{F(X)}$

c) Si $\beta \circ \alpha$ está definido, entonces $f(\beta \circ \alpha) = F(\alpha) \circ F(\beta)$ con $\alpha, \beta \in Mor(\mathcal{C})$

Proposición 2.4.3
La función compuesta $g \circ f$ es un funtor covariante si f y g tienen la misma variancia; $g \circ f$ es un funtor contravariante si f y g son de variancia opuesta.

Demostración:

Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías y $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$, $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funtores tal que $G \circ F$ está definido, de los cuales se pueden tener cuatro casos.
La parte $a)$ y $b)$ de definición de Funtor con inmediatas, así solo se plantea la parte $c)$.

- F y G sean covariantes

  Sean $\alpha \in Mor(B, C), \beta \in Mor(C, D)$ tal que $\beta \circ \alpha$ está definido, así $\beta \circ \alpha \in$

$Mor(B,D)$ con $B \in Ob(\mathcal{B})$, $C \in Ob(\mathcal{C})$ y $D \in Ob(\mathcal{D})$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(G \circ F)(\beta \circ \alpha) &= G(F(\beta \circ \alpha)) \\ &= G(F(\beta) \circ F(\alpha)) \\ &= G(F(\beta)) \circ G(F(\alpha)) \\ &= (G \circ F)(\beta) \circ (G \circ F)(\alpha)\end{aligned}$$

Por tanto $G \circ F$ es un funtor covariante.

- F y G sean contravariantes

  Sean $\alpha \in Mor(B,C), \beta \in Mor(C,D)$ tal que $\beta \circ \alpha \in Mor(B,D)$ con $B \in Ob(\mathcal{B})$, $C \in Ob(\mathcal{C})$ y $D \in Ob(\mathcal{D})$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}(G \circ F)(\beta \circ \alpha) &= G(F(\beta \circ \alpha)) \\ &= G(F(\alpha) \circ F(\beta)) \\ &= G(F(\beta)) \circ G(F(\alpha)) \\ &= (G \circ F)(\beta) \circ (G \circ F)(\alpha)\end{aligned}$$

  Por tanto $G \circ F$ es un funtor covariante.

- F sea covariante y G contravariante

  Sean $\alpha \in Mor(B,C), \beta \in Mor(C,D)$ tal que $\beta \circ \alpha \in Mor(B,D)$ con $B \in Ob(\mathcal{B})$, $C \in Ob(\mathcal{C})$ y $D \in Ob(\mathcal{D})$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(G \circ F)(\beta \circ \alpha) &= G(F(\beta \circ \alpha)) \\ &= G(F(\beta) \circ F(\alpha)) \\ &= G(F(\alpha)) \circ G(F(\beta)) \\ &= (G \circ F)(\alpha) \circ (G \circ F)(\beta)\end{aligned}$$

  Por tanto $G \circ F$ es un funtor contravariante.

- F sea contravariante y G covariante

  Sean $\alpha \in Mor(B,C), \beta \in Mor(C,D)$ tal que $\beta \circ \alpha \in Mor(B,D)$ con $B \in Ob(\mathcal{B})$,

$C \in Ob(\mathcal{C})$ y $D \in Ob(\mathcal{D})$.

$$\begin{aligned}(G \circ F)(\beta \circ \alpha) &= G(F(\beta \circ \alpha)) \\ &= G(F(\alpha) \circ F(\beta)) \\ &= G(F(\alpha)) \circ G(F(\beta)) \\ &= (G \circ F)(\alpha) \circ (G \circ F)(\beta)\end{aligned}$$

Por tanto $G \circ F$ es un funtor contravariante.

■

Ejemplo 2.4.1 Funtor identidad

Sea $i_{\mathcal{B}}$ una función de una categoría $\mathcal{B}$ en si misma, tal que $i_{\mathcal{B}}(f) = f$, para cualesquiera $B \in Ob(\mathcal{B})$ y $f \in Mor(B)$.

Vamos a probar que $i_{\mathcal{B}}$ es un funtor covariante para ello debe cumplir las 3 condiciones de la definición de funtor covariante.

$i_{\mathcal{B}}$ está definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} i_{\mathcal{B}} : Ob(\mathcal{B}) &\longrightarrow Ob(\mathcal{B}) \\ B &\mapsto i_{\mathcal{B}}(B) = B \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} i_{\mathcal{B}} : Mor(B, B) &\longrightarrow Mor(B, B) \\ f &\mapsto i_{\mathcal{B}}(f) = f \end{aligned}$$

a) Por definición $f : B \longrightarrow B$ y $i_{\mathcal{B}}(f) : i_{\mathcal{B}}(B) \longrightarrow i_{\mathcal{B}}(B)$

b) Sea $i_B \in Mor(B, B)$

$$\begin{aligned} i_{\mathcal{B}} : i_{\mathcal{B}}(B) &\longrightarrow i_{\mathcal{B}}(B) \\ i_(B) &\mapsto i_{\mathcal{B}}(i_B) = i_B \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} i_{\mathcal{B}}(i_B) &= i_B \\ &= i_{i_{\mathcal{B}}(B)} \ ; i_{\mathcal{B}}(B) = B \end{aligned}$$

así cumple la segunda condición.

c) Sea $f \in Mor(X,Y)$, $g \in Mor(Y,Z)$, tal que $g \circ f \in Mor(X,Z)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ i_{\mathcal{B}}(X) \arrow[r, "i_{\mathcal{B}}(f)"'] & i_{\mathcal{B}}(Y) \arrow[r, "i_{\mathcal{B}}(g)"'] & i_{\mathcal{B}}(Z) \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} i_{\mathcal{B}}(g \circ f) &= g \circ f \ \text{ ; *Por definición de* } i_{\mathcal{B}} \\ &= i_{\mathcal{B}}(g) \circ i_{\mathcal{B}}(f) \end{aligned}$$

Así cumple con la tercera condición de la definición de funtor covariante.

Ejemplo 2.4.2

Consideremos la categoría M_R de R-módulos juntamente con un R-módulo M dado. Definamos una función

$$H : M_R \longrightarrow M_R$$

como sigue. Para cada R-módulo X de M_R, sea $H(X)$ el módulo $Hom(X, M)$ de los homomorfismos de X en M.

$$\begin{aligned} H : Ob(M_R) &\longrightarrow Ob(M_R) \\ X &\mapsto H(X) = Hom(X, M) \end{aligned}$$

Por otra parte, para cada homomorfismo $\alpha : X \longrightarrow Y$ de M_R, se define

$$\begin{aligned} H : Mor(X,Y) &\longrightarrow Mor(H(Y),H(X)) \\ \alpha &\mapsto H(\alpha) = Hom(\alpha, i) \end{aligned}$$

con $Hom(\alpha, i)$ definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Hom(\alpha, i) : Hom(Y,M) &\longrightarrow Hom(X,M) \\ f &\mapsto Hom(\alpha, i)(f) = i \circ f \circ \alpha \end{aligned}$$

donde $i : M \longrightarrow M$ representa el endomorfismo identidad de M.

Claramente H es una función, si $X = Y$

$$\begin{aligned} H(X) &= Hom(X,M) \\ &= Hom(Y,M) \\ &= H(Y) \end{aligned}$$

y si $\alpha = \beta$

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= Hom(\alpha, i) \\ &= Hom(\beta, i) \\ &= H(\beta) \end{aligned}$$

Vamos a comprobar que H es un funtor contravariante, para ello debe satisfacer las tres condiciones de la definición 2.4.2

a) ¿Si $\alpha : X \longrightarrow Y$ entonces $H(\alpha) : H(Y) \longrightarrow H(X)$?

Sea $\alpha : X \longrightarrow Y$ con $X, Y \in Ob(M_R)$.

Si $X \in Ob(M_R)$ entonces $H(X) = Hom(X,M)$ y si $Y \in Ob(M_R)$ entonces $H(Y) = Hom(Y,M)$

Se tiene por definición que $H(\alpha) = Hom(\alpha, i)$, donde

$$Hom(\alpha, i) : Hom(Y,M) \longrightarrow Hom(X,M)$$

Sustituyendo, se tiene lo siguiente:

$$H(\alpha) : H(Y) \longrightarrow H(X)$$

Por tanto cumple la primera condición.

b) ¿$H(i_X) = i_{H(X)}$?

Se tiene que $i_X : X \longrightarrow X$ y además

$$\begin{aligned} i_{H(X)} : H(X) = Hom(X, M) &\longrightarrow H(X) = Hom(X, M) \\ f &\mapsto i_{H(X)}(f) = f \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} H(i_x)(f) &= Hom(i_X, i)(f) \\ &= i \circ f \circ i_X \\ &= i \circ f \\ &= f \\ &= i_{H(X)}(f) \end{aligned}$$

Por tanto cumple la segunda condición.

c) ¿$H(\beta \circ \alpha) = H(\alpha) \circ H(\beta)$?

Sea $\alpha : X \longrightarrow Y$ y $\beta : Y \longrightarrow Z$ donde $\beta \circ \alpha$ está definido, así $\beta \circ \alpha : X \longrightarrow Z$, entonces por definición

$$\begin{aligned} H : Mor(X, Z) &\longrightarrow Mor(H(Z), H(X)) \\ \beta \circ \alpha &\mapsto H(\beta \circ \alpha) = Hom(\beta \circ \alpha, i) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} Hom(\beta \circ \alpha, i) : Hom(Z, M) &\longrightarrow Hom(X, M) \\ f &\mapsto Hom(\beta \circ \alpha, i)(f) = i \circ f \circ \beta \circ \alpha \end{aligned}$$

por definición.

Tomando el siguiente diagrama como referencia

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ H(X) & H(Y) \arrow[l, "H(\alpha)"'] & H(Z) \arrow[l, "H(\beta)"'] \end{tikzcd}$$

Tomemos un $f \in Hom(Z, M)$ arbitrario, se tiene que

$$\begin{aligned}(Hom(\alpha, i) \circ Hom(\beta, i))(f) &= Hom(\alpha, i)(Hom(\beta, i)(f)) \\ &= Hom(\alpha, i)(i \circ f \circ \beta) \\ &= i \circ (i \circ f \circ \beta) \circ \alpha \\ &= (i \circ i) \circ f \circ (\beta \circ \alpha) \\ &= i \circ f \circ (\beta \circ \alpha) \\ &= Hom(\beta \circ \alpha, i)\end{aligned}$$

Por lo cual cumple la tercera condición.

Por lo tanto F es un funtor contravariante.

Ejemplo 2.4.3

Sea M_R la categoría de R-módulos y se M un R-módulo dado fijo.

Definamos una aplicación

$$K : M_R \longrightarrow M_R$$

de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}K : M_R &\longrightarrow M_R \\ X &\mapsto K(X) = Hom(M, X)\end{aligned}$$

además para cada homomorfismo $\alpha : X \longrightarrow Y$ de M_R sea $K(\alpha)$ un homomorfismo

$$K : Mor(X,Y) \longrightarrow Mor(K(X),K(Y))$$
$$\alpha \mapsto K(\alpha) = Hom(i,\alpha)$$

donde

$$Hom(i,\alpha) : Hom(M,X) \longrightarrow Hom(M,Y)$$
$$f \mapsto Hom(i,\alpha)(f) = \alpha \circ f \circ i$$

donde $i : M \longrightarrow M$ representa el endomorfismo identidad de M.

Vamos a comprobar que K es un funtor covariante. Para ello debe cumplir las tres condiciones de la defención de funtor covariante.

i) ¿Si $\alpha : X \longrightarrow Y$ entonces $K(\alpha) : K(X) \longrightarrow K(Y)$?

Sean $X,\ Y \in Ob(M_R)$, tenemos que $K(X) = Hom(M,X)$, $K(Y) = Hom(M,Y)$ y $K(\alpha) = Hom(i,\alpha)$ por definición.

Además

$$Hom(i,\alpha) = Hom(M,X) \longrightarrow Hom(M,Y)$$

Así sustituyendo se tiene que:

$$K(\alpha) : K(X) \longrightarrow K(Y)$$

Así cumple la primera propiedad.

ii) ¿$K(i_X) = i_{K(X)}$?

Tenemos que $i_X : X \longrightarrow X$ y además

$$i_{K(X)} : K(X) \longrightarrow K(X)$$
$$f \mapsto i_{K(X)}(f) = f$$

Así

$$\begin{aligned} K(i_X)(f) &= Hom(i, i_X)(f) \\ &= i_X \circ f \circ i \\ &= i_X \circ f \\ &= f \\ &= i_{K(X)}(f) \end{aligned}$$

iii) ¿$K(\beta \circ \alpha) = K(\beta) \circ K(\alpha)$?

Sea $\alpha : X \longrightarrow Y$, $\beta : Y \longrightarrow Z$ donde $\beta \circ \alpha$ está definido así $\beta \circ \alpha : X \longrightarrow Z$ entonces

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ K(X) \arrow[r, "K(\alpha)"'] & K(Y) \arrow[r, "K(\beta)"'] & K(Z) \end{tikzcd}$$

Sea $f \in K(X)$

$$\begin{aligned} (K(\beta) \circ K(\alpha))(f) &= K(\beta)(K(\alpha)(f)) \\ &= K(\beta)(\alpha \circ f \circ i) \\ &= \beta \circ (\alpha \circ f \circ i) \circ i \\ &= (\beta \circ \alpha) \circ f \circ (i \circ i) \\ &= (\beta \circ \alpha) \circ f \circ i \\ &= Hom(i, \beta \circ \alpha)(f) \\ &= K(\beta \circ \alpha)(f) \end{aligned}$$

Como se tomo un f arbitrario, se concluye que:

$$K(\beta) \circ K(\alpha) = K(\beta \circ \alpha)$$

Por tanto K es un funtor covariante.

Sea ahora $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ categorías R-lineales arbitrariamente dadas. Un funtor covariante $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}$ se dice R-lineal si y sólo si, para cualesquiera dos objetos X e Y de $\mathcal{B}$, define F un homomorfismo

$$F_{(X,Y)} : Mor(X,Y) \longrightarrow Mor(F(X), F(Y))$$

de R-módulos. Análogamente, un funtor contravariante $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}$ se dice R-lineal si y sólo si, para cualesquiera dos objetos X e Y de $\mathcal{B}$, G define un homomorfismo

$$G_{(X,Y)} : Mor(X,Y) \longrightarrow Mor(F(Y), F(X))$$

de R-módulos.

Así el ejemplo anterior representa un ejemplo de un funtor R-lineal.

Definición 2.4.4 Funtor Fiel

Un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ se dice que es fiel si y sólo si, para cualesquiera dos objetos X e Y de $\mathcal{C}$, la restricción

$$F(X,Y) = F \mid Mor(X,Y)$$

es una función inyectiva.

Ejemplo 2.4.4

Siendo $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor fiel arbitrario y α un morfismo cualquiera de $\mathcal{C}$, probar que

- Si $F(\alpha)$ es monomorfismo, también lo es α

Solución

Supongamos que $\alpha : X \longrightarrow Y$ con $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ y F es un funtor covariante.

Sean $g, h : W \longrightarrow X$ así tales que $\alpha \circ g = \alpha \circ h$.

Se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g", "h"'] \arrow[d] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ F(W) \arrow[r, "F(g)", "F(h)"'] & F(X) \arrow[r, "F(\alpha)"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Como $F(\alpha)$ es monomorfismo se cumple que:

$$F(\alpha) \circ F(g) = F(\alpha) \circ F(h) \Rightarrow F(g) = F(h)$$

Ahora

$$\begin{aligned} \alpha \circ g = \alpha \circ h &\Rightarrow F(\alpha \circ g) = F(\alpha \circ h) \\ &\Rightarrow F(\alpha) \circ F(g) = F(\alpha) \circ F(h) \\ &\Rightarrow F(g) = F(h) \\ &\Rightarrow g = h \end{aligned}$$

Así α es un monomorfismo.

2.5. Transformaciones de Funtores

Definición 2.5.1 Tranformación Funtorial
Sean F y G dos funtores covariantes cualesquiera de una categoría $\mathcal{C}$ en una categoría $\mathcal{D}$. Una *transformación natural* o *morfismos funtorial* del funtor F en el funtor G, es una función Φ que asigna a cada objeto X de la categoría $\mathcal{C}$ un morfismo $\Phi(X)$ de la categoría $\mathcal{D}$ cumpliéndose las dos condiciones siguientes:

i) Para todo objeto X de $\mathcal{C}$, se tiene

$$\Phi(X) : F(X) \longrightarrow G(X)$$

ii) Para todo morfismo $\alpha : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, tenemos

$$F(\alpha)\Phi(Y) = \Phi(X)G(\alpha)$$

Notación:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d, "\Phi(X)"'] & F(Y) \arrow[d, "\Phi(Y)"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\alpha)"'] & G(Y) \end{tikzcd} \qquad \Phi(Y) \circ F(\alpha) = G(\alpha) \circ \Phi(X)$$

En el caso de que F y G sean funtores contravariantes, la condición $ii)$ de la definición debe ser reemplazada por la siguiente condición:

ii') Para todo morfismo $\alpha : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, tenemos

$$F(\alpha)\Phi(X) = \Phi(Y)G(\alpha)$$

Notación:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, "\Phi(X)"'] & F(Y) \arrow[l, "F(\alpha)"'] \arrow[d, "\Phi(Y)"] \\ G(X) & G(Y) \arrow[l, "G(\alpha)"] \end{tikzcd} \qquad \Phi(X) \circ F(\alpha) = G(\alpha) \circ \Phi(Y)$$

Sean $F,\ G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funtores arbitrariamente dados de la misma variancia.

Usaremos el símbolo

$$\Phi : F \longrightarrow G$$

para denotar un morfismo funtorial Φ del funtor F en el funtor G. Si el morfismo $\Phi(X)$ de $\mathcal{D}$ es una equivalencia para todo objeto $X \in \mathcal{C}$, entonces Φ recibe el nombre de *equivalencia natural* o *isomorfismo* de los funtores F y G, en símbolos

$$\Phi : F \approx G$$

Sea ahora $\Phi : F \approx G$ una equivalencia natural de los funtores $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$.
Si F y G con funtores covariantes, se sigue de la condición $ii)$ de la definición 2.5.1 lo siguiente:

$$\begin{aligned}
F(\alpha)\Phi(Y) &= \Phi(X)G(\alpha) \\
\Phi(Y) \circ F(\alpha) &= G(\alpha) \circ \Phi(X) \\
\Phi(Y) \circ F(\alpha) \circ (\Phi(X))^{-1} &= G(\alpha) \circ \Phi(X) \circ (\Phi(X))^{-1} && ;\textit{Por ser } \Phi \textit{ inversible} \\
\Phi(Y) \circ F(\alpha) \circ (\Phi(X))^{-1} &= G(\alpha) \circ \varepsilon_X && ;\textit{donde } \varepsilon_X = \Phi(X) \circ (\Phi(X))^{-1} \\
\Phi(Y) \circ F(\alpha) \circ (\Phi(X))^{-1} &= G(\alpha) \\
G(\alpha) &= (\Phi(X))^{-1}F(\alpha)\Phi(Y)
\end{aligned}$$

para todo morfismo $\alpha : X \longrightarrow Y$ de la categoría $\mathcal{C}$. En caso de ser F y G funtores contravariantes, entonces se deduce de $ii')$ lo siguiente:

$$\begin{aligned}
F(\alpha)\Phi(X) &= \Phi(Y)G(\alpha) \\
\Phi(X) \circ F(\alpha) &= G(\alpha) \circ \Phi(Y) \\
\Phi(X) \circ F(\alpha) \circ (\Phi(Y))^{-1} &= G(\alpha) \circ \Phi(Y) \circ (\Phi(Y))^{-1} && ;\textit{Por ser } \Phi \textit{ inversible} \\
\Phi(X) \circ F(\alpha) \circ (\Phi(Y))^{-1} &= G(\alpha) \circ \varepsilon_Y && ;\textit{donde } \varepsilon_Y = \Phi(Y) \circ (\Phi(Y))^{-1} \\
\Phi(X) \circ F(\alpha) \circ (\Phi(Y))^{-1} &= G(\alpha) \\
G(\alpha) &= (\Phi(Y))^{-1}F(\alpha)\Phi(X)
\end{aligned}$$

para todo morfismo $\alpha : X \longrightarrow Y$ de la categoría $\mathcal{C}$.
Sean $\Phi : F \longrightarrow G$ y $\Psi : G \longrightarrow H$ morfismos funtoriales dadas de los funtores

$F, G, H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. Definamos una función $\Phi\Psi$ tomando

$$(\Phi\Psi)(X) = \Phi(X)\Psi(X)$$

para todo objeto $X \in \mathcal{C}$. Se puede comprobar que la función $\Phi\Psi$ es morfismo funtorial, para ello debe cumplir las dos condiciones de la definición 2.5.1

i) ¿$(\Psi \circ \Phi)(X) : F(X) \longrightarrow H(X)$?

Sea el diagrama

$$F(X) \xrightarrow{\Phi(X)} G(X) \xrightarrow{\Psi(X)} H(X)$$

Se tiene que $\Psi(X) \circ \Phi(X) : F(X) \longrightarrow H(X)$

Pero por definición se tiene que $\Psi(X) \circ \Phi(X) = (\Psi \circ \Phi)(X)$

Así

$$(\Psi \circ \Phi)(X) : F(X) \longrightarrow H(X)$$

ii) ¿$(\Psi \circ \Phi)(Y) \circ F(\alpha) = H(\alpha) \circ (\Psi \circ \Phi)(X)$?

Sea $\alpha : X \longrightarrow Y$ donde $\alpha \in Mor(\mathcal{C})$ y $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$

Tomemos el diagrama siguiente como referencia

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d, "\Phi(X)"'] & F(Y) \arrow[d, "\Phi(Y)"] \\
G(X) \arrow[r, "G(\alpha)"] \arrow[d, "\Psi(X)"'] & G(Y) \arrow[d, "\Psi(Y)"] \\
H(X) \arrow[r, "H(\alpha)"] & H(Y)
\end{tikzcd}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
H(\alpha) \circ (\Psi \circ \Phi)(X) &= H(\alpha) \circ \Psi(X) \circ \Phi(X) \\
&= (H(\alpha) \circ \Psi(X)) \circ \Phi(X) \\
&= \Psi(Y) \circ G(\alpha) \circ \Phi(X) \\
&= \Psi(Y) \circ (G(\alpha) \circ \Phi(X)) \\
&= \Psi(Y) \circ (\Phi(Y) \circ F(\alpha)) \\
&= (\Psi(Y) \circ \Phi(Y)) \circ F(\alpha) \\
&= (\Psi \circ \Phi)(Y) \circ F(\alpha)
\end{aligned}$$

Así $\Phi\Psi$ es un morfismo funtorial.

Por último, dos funtores $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ se dicen *equivalentes naturalmente* o *isomorfos*, en símbolos

$$F \approx G$$

si y sólo si existe una equivalencia natural

$$\Phi : F \approx G$$

2.6. Funtores de Módulos*

(*Es un preambulo para estructuras más generalizadas que hacen uso de Funtores)

En la presente sección veremos funtores de una categoría con una estructura más familiarizada, la cual es la categoría M_R de R-módulos.

En esta sección se hara principal mención a los funtores covariantes ya que los teoremas y sus pruebas son análogas en el caso de que el funtor sea contravariante.

Como M_R es una categoría R-lineal la noción $F : M_R \longrightarrow M_R$ es más ventajosa.

Como el elemento cero del R-módulo

$$Mor(X, Y) = Hom(X, Y)$$

es el homomorfismo trivial $0 : X \longrightarrow Y$ para dos R-módulos cualesquiera X, Y.

Lema 2.6.1
Cualquier funtor lineal $F : M_R \longrightarrow M_R$ sobre R aplica todo homomorfismo trivial en un homomorfismo trivial.

Demostración.

Sea $0 : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo trivial y F un funtor R-lineal, por definición se tiene que F define un homomomorfismo

$$F_{(X,Y)} : Hom(X, Y) \longrightarrow Hom(F(X), F(Y))$$
$$0 \mapsto F_{(X,Y)}(0) = 0$$

Así

$$\begin{aligned} 0 &= F_{(X,Y)}(0) \\ &= F_{Hom(X,Y)}(0) \\ &= F(0) \end{aligned}$$

Por tanto F aplica de un homomorfismo trivial a un homomorfismo trivial.

■

Establezcamos ahora el siguiente teorema

Teorema 2.6.2

Sea $F : M_R \longrightarrow M_R$ un funtor R-lineal covariante. Si

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta que se escinde de R-módulos, entonces igual sucede con la sucesión

$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y) \xrightarrow{F(\beta)} F(Z) \longrightarrow 0$$

Demostración.

Sea el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & F(X) \arrow[r, "F(\alpha)"'] & F(Y) \arrow[r, "F(\beta)"'] & F(Z) & \end{tikzcd}$$

Debido a la exactitud de la sucesión

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$$

α es un monomorfismo, β es un epimorfismo y se cumple que

$$Im(\alpha) = H = Ker(\beta)$$

Como la sucesión se escinde, Y se puede escribir como un sumando directo de H y otro submódulo K de Y, así

$$Y = H \oplus K$$

Esto implica la existencia de dos homomorfismos $\gamma : Y \longrightarrow X$ y $\delta : Z \longrightarrow Y$ de M_R

$$Z \xrightarrow{\delta} Y \xrightarrow{\gamma} X$$

tales que:

- $\alpha\beta = \beta \circ \alpha = 0$ ya que la sucesión es exacta.
- $\alpha\gamma = \gamma \circ \alpha = i_X$
- $\delta\beta = \beta \circ \delta = i_Z$
- $\delta\gamma = \gamma \circ \delta = 0$

  Supongamos que

  $$Z \xrightarrow{\delta} Y \xrightarrow{\gamma} Z \qquad \gamma \circ \delta =?$$

  Por hipotesis se tiene que:

  $$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\gamma} X \qquad \gamma \circ \alpha$$

  Así Y se escinde en $Y = Im(\alpha) \oplus Ker(\gamma)$.

  Además

  $$Z \xrightarrow{\delta} Y \xrightarrow{\beta} Z \qquad \beta \circ \delta = i_Z$$

  Así Y se escinde en $Y = Im(\delta) \oplus Ker(\beta)$.

  Por lo que

  $$Im(\alpha) \oplus Ker(\gamma) = Im(\delta) \oplus Ker(\beta)$$
  $$Im(\alpha) \oplus Ker(\gamma) = Im(\delta) \oplus Im(\alpha)$$
  $$Im(\alpha) \oplus Ker(\gamma) = Im(\alpha) \oplus Im(\delta)$$

  De la igualdad anterior se deduce que $Ker(\gamma) = Im(\delta)$.

  Por tanto $\gamma \circ \delta = 0$.

donde i_X e i_Z son los endomorfismos identidad de X y Z, respectivamente.

Como F es un funtor R-lineal covariante, se deduce que:

- $F(\beta) \circ F(\alpha) = F(\alpha)F(\beta) = F(\alpha\beta) = F(0) = 0$

- $F(\gamma) \circ F(\delta) = F(\delta)F(\gamma) = F(\delta\gamma) = F(0) = 0$
- $F(\gamma) \circ F(\alpha) = F(\alpha)F(\gamma) = F(\alpha\gamma) = F(i_X) = i_{F(X}$
- $F(\beta) \circ F(\delta) = F(\delta)F(\beta) = F(\delta\beta) = F(i_Z) = i_{F(Z)}$

donde $i_{F(X)}$ e $i_{F(Z)}$ son endomorfismos identidad de $F(X)$ y $F(Z)$, respectivamente. Por lo que $F(\alpha)$ es monomorfismo y $F(\beta)$ es epimorfismo, y

$$Im[F(\alpha)] = Ker[F(\beta)] \qquad Im[F(\delta)] = Ker[f(\gamma)]$$

además como $i_{F(X)}$ es isomorfismo cumple que $F(Y)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F(Y) &= Im[F(\alpha)] \oplus Ker[F(\beta)] \\ &= Im[F(\alpha)] \oplus Im[f(\delta)] \end{aligned}$$

Esto implica que la sucesión

$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y) \xrightarrow{F(\beta)} F(Z) \longrightarrow 0$$

es exacta y se escinde.

■

Definición 2.6.3 Funtor Exacto
Un funtor covariante $F : M_R \longrightarrow M_R$ se llama *exacto* si y sólo si, para toda sucesión exacta

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$$

de R-módulos, la sucesión

$$F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y) \xrightarrow{F(\beta)} F(Z)$$

es también exacta.

Análogamente, un funtor contravariante $F : M_R \longrightarrow M_R$ se llama *exacto* si y sólo si, para toda sucesión exacta corta

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$$

de R-módulos, la sucesión

$$F(Z) \xrightarrow{F(\beta)} F(Y) \xrightarrow{F(\alpha)} F(X)$$

es también exacta.

Lema 2.6.4
Cualquier funtor exacto $F : M_R \longrightarrow M_R$ aplica todo módulo nulo en un módulo nulo; en símbolos, $F(0) = 0$

Demostración:

Sea 0 un módulo nulo de M_R. Consideremos una sucesión exacta

$$0 \xrightarrow{i} 0 \xrightarrow{i} 0$$

donde i representa el endomorfismo identidad.

Como F es un funtor exacto la sucesión

$$F(0) \xrightarrow{F(i)} F(0) \xrightarrow{F(i)} F(0)$$

es tambié exacta.

Como F es funtor cumple que $F(i) = i_{F(0)}$, entonces $F(i)$ es el endomorfismo identidad de $F(0)$.

Así

$$\begin{aligned} F(0) &= Im[F(i)] \quad ; \textit{ Por ser } F(i) \textit{ epimorfismo} \\ &= Ker[F(i)] \quad ; \textit{ La sucesión anterior es exacta} \\ &= 0 \quad ; \textit{Por ser } F(i) \textit{ monomorfismo} \end{aligned}$$

Por tanto $F(0) = 0$

■

Ejemplo 2.6.1

Antes de ilustrar la exactitud del funtor se hara mención del anillo cociente $\mathbb{Q}$ conocido como el anillo de fracciones.

Para ello sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ el conjunto de los números enteros distintos de el elemento cero.

Sea $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, se define sobre A la relación $(x, y) \sim (a, b) \Leftrightarrow \exists\ u \in S \mid u(bx - ya) = 0$. Esta relación es evidentemente de equivalencia.

Así $\mathbb{Q}$ se definira como $\mathbb{Q} = \frac{A}{\sim}$.

Notación: La clase de un elemento $[(a, b)]$ en A se denota $\frac{a}{b}$.

Así $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid\ a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$

Sea A un anillo y $S \subset A$ tal que $1 \in S$ con S es cerrado bajo la multiplicación.

Además se define una relación $\sim$ en $A \times S$ de la siguiente manera:

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow u(at - bs) = 0 \quad ; \text{ para algún } u \in S$$

claramente $\sim$ es una relación de equivalencia, definiendo $B = A \times S$, se tiene que el cociente $\frac{B}{\sim} = \frac{A \times S}{\sim}$ es el conjunto de clases en B.

Notación: El conjunto de clases en B será denotado por $S^{-1}A = \{\frac{a}{s} \mid\ a \in A\ \wedge s \in S\}$.

$S^{-1}A$ es un anillo con las operaciones $+ : \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta+sb}{st}$ y $\cdot\ : \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Se sabe que $S \subset A$ es cerrado y además $1 \in S$, sea ahora M un A-módulo, como en el anillo A se definira sobre $M \times S$ la relación $\sim$ de la siguiente manera: $(m, s) \sim (a, t) \Leftrightarrow \exists\, u \in S\ \mid u(tm - sa) = 0\}$.

donde $\sim$ evidentemente es una relación de equivalencia.

Además $S^{-1}M = \frac{M \times S}{\sim}$ es el conjunto de clases en $M \times S$ y se puede reescribir también como

$S^{-1}M = \{\frac{m}{s} \mid m \in M\ \wedge s \in S\}$.

Así $S^{-1}M$ define un A-módulo con la operacion $+ : \frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{tm+sn}{st}$ y con la representación φ donde

$$\varphi : A \times S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}M$$
$$(a, \frac{m}{s}) \mapsto \frac{am}{s}$$

así mismo $S^{-1}M$ define un $S^{-1}A$-módulo.

Sea

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

una sucesión exacta de R-módulos.

Definamos una función tal que

$$F_S : Ob(M_R) \longrightarrow Ob(M_R)$$
$$A \mapsto F_S(A) = S^{-1}A$$

y además

$$F_S : Mor(A, B) \longrightarrow Mor(F_S(A), F_S(B))$$
$$f \mapsto F_S(f)$$

donde

$$F_S(f) : S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}B$$
$$\frac{a}{s} \mapsto F_S(f)(\frac{a}{s}) = \frac{f(a)}{s}$$

Vamos a probar que F_S es un funtor covariante

a) ¿Si $f : A \longrightarrow B$ entonces $F_S(f) : F_S(A) \longrightarrow F_S(B)$?

Por definición $F_S(A) = S^{-1}A$ y $F_S(B) = S^{-1}B$

tenemos que $F_S(f) : S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}B$ sustituyendo se tiene lo siguiente

$$F_S(f) : F_S(A) \longrightarrow F_S(B)$$

b) ¿$F_S(1_A) = 1_{F_S(A)}$?

Sea $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$

$$\begin{aligned} F_S(1_A)(\frac{a}{s}) &= \frac{1_A(a)}{s} \\ &= \frac{a}{s} \\ &= 1_{F_S(A)}(\frac{a}{s}) \end{aligned}$$

Como se tomo un $\frac{a}{s}$ arbitrario se concluye que $F_S(1_A) = 1_{F_S(A)}$

c) ¿$F_S(g \circ f) = F_S(g) \circ F_S(f)$?

Sea $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$

$$\begin{aligned} (F_S(g \circ f))(\frac{a}{s}) &= \frac{(g \circ f)(a)}{s} \\ &= \frac{g(f(a))}{s} \\ &= F_S(g)(\frac{f(a)}{s}) \\ &= F_S(g)(F_S(f)(\frac{a}{s})) \\ &= (F_S(g) \circ F_S(f))(\frac{a}{s}) \end{aligned}$$

Como se tomo un $\frac{a}{s}$ arbitrario se concluye que $F_S(g \circ f) = F_S(g) \circ F_S(f)$

Así F_S es un funtor covariante.

Por lo que se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ F_S(A) \arrow[r, "F_S(f)"] & F_S(B) \arrow[r, "F_S(g)"] & F_S(C) \end{tikzcd}$$

Vamos a probar que la sucesión

$$F_S(A) \xrightarrow{F_S(f)} F_S(B) \xrightarrow{F_S(g)} F_S(C)$$

es exacta.

Para ello debe cumplir que $Im(F_S(f)) = Ker(F_S(g))$

- ¿$Im(F_S(f)) \subset Ker(F_S(g))$?

  Para ello debemos ver que $F_S(g) \circ F_S(f) = 0$

  Tenemos que

$$\begin{aligned} F_S(g) \circ F_S(f) &= F_S(g \circ f) \\ &= F_S(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Por tanto $Im(F_S(f)) \subset Ker(F_S(g))$

- ¿$Ker(F_S(g)) \subset Im(F_S(f))$?

  Sea $x \in Ker(F_S(g)) \subset S^{-1}B$, así $x = \frac{b}{s}$. Por lo que

$$\begin{aligned} F_S(g)(x) &= 0 \\ F_S(g)(\frac{b}{s}) &= \frac{0}{s'} \quad ; \; con\ s' \in S \\ \frac{g(b)}{s} &= \frac{0}{s'} \\ g(b) \cdot s' &= 0 \cdot s \end{aligned}$$

  Así

$$\begin{aligned} (g(b), s) \sim (0, s') &\Rightarrow \exists\, t \in S \mid t(s' \cdot g(b) - 0 \cdot s) = 0 \\ &\Rightarrow t(s' \cdot g(b)) = 0 \\ &\Rightarrow g(t \cdot s' \cdot b) = 0 \\ &\Rightarrow g(t' \cdot b) = 0 \quad ; \; t' = t \cdot s' \\ &\Rightarrow t' \cdot b \in Ker(g) = Im(f) \\ &\Rightarrow t'b = f(a) \quad ; \; a \in A \end{aligned}$$

Además se tiene que $f(a), t' \cdot b \in A$ y $t' \cdot s \in S$, así

$$
\begin{aligned}
(t' \cdot b, t' \cdot s) \sim (f(a), t' \cdot s) &\Rightarrow t' \cdot b \cdot t' \cdot s - t' \cdot s \cdot f(a) = 0 \\
&\Rightarrow t' \cdot b \cdot t' \cdot s = t' \cdot s \cdot f(a) \\
&\Rightarrow \frac{t' \cdot b}{t' \cdot s} = \frac{f(a)}{t' \cdot s} \\
&\Rightarrow \frac{b}{s} = \frac{f(a)}{t' \cdot s} \\
&\Rightarrow x = F_S(f)(\frac{a}{t' \cdot s}) \\
&\Rightarrow x \in Im(F_S(f))
\end{aligned}
$$

Por tanto $Ker(F_S(g)) \subset Im(F_S(f))$

Como la sucesión

$$F_S(A) \xrightarrow{F_S(f)} F_S(B) \xrightarrow{F_S(g)} F_S(C)$$

es exacta entonces F_S es un funtor exacto.

Por último se enunciaran los funtores semiexactos, en la cual está mención puede servir para futuros proyectos de investigación en el areá de Álgebra Homológica.
Los funtores exactos no son frecuentes. La mayoría de los funtores conservan la exactitud sólo parcialmente. Para definir las diversas nociones de exactitud parcial de un funtor $F : M_R \longrightarrow M_R$ consideremos una sucesión exacta corta arbitrariamente dada

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$$

de R-módulos.
Un funtor $F : M_R \longrightarrow M_R$ se dice *semiexacto* si y sólo si la sucesión

$$F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y) \xrightarrow{F(\beta)} F(Z)$$

es siempre exacta si F es covariante, y la sucesión

$$F(Z) \xrightarrow{F(\beta)} F(Y) \xrightarrow{F(\alpha)} F(X)$$

es siempre exacta si F es contravariante.
Un funtor $F : M_R \longrightarrow M_R$ se dice *exacto por la izquierda* si y sólo si, la sucesión

$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y) \xrightarrow{F(\beta)} F(Z)$$

es siempre exacta si F es covariante, y la sucesión

$$0 \longrightarrow F(Z) \xrightarrow{F(\beta)} F(Y) \xrightarrow{F(\alpha)} F(X)$$

es siempre exacta en el caso de ser F contravariante.
Un funtor $F : M_R \longrightarrow M_R$ se dice *exacto por la derecha* si y sólo si, la sucesión

$$F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y) \xrightarrow{F(\beta)} F(Z) \longrightarrow 0$$

es exacta en el caso de ser F covariante, y la sucesión

$$F(Z) \xrightarrow{F(\beta)} F(Y) \xrightarrow{F(\alpha)} F(X) \longrightarrow 0$$

es exacta en el caso de ser F contravariante.

Ejemplo 2.6.2
Sea M un R-módulo arbitrario y

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una suceción exacta de R-módulos, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom(C,M) \xrightarrow{Hom(g,i)} Hom(B,M) \xrightarrow{Hom(f,i)} Hom(A,M)$$

donde $i : M \longrightarrow M$ es el endomorfismo identidad del módulo M, es también exacta.

Solución

Sea F_M una función definida de la siguiente manera:

$$F_M : Ob(M_R) \longrightarrow Ob(M_R)$$
$$A \mapsto F_M(A) = Hom(A,M)$$

y además

$$F_M : Mor(A,B) \longrightarrow Mor(F(B),F(A))$$
$$f \mapsto F_M(f) = Hom(f,i)$$

donde

$$Hom(f,i) : Hom(B,M) \longrightarrow Hom(A,M)$$
$$\alpha \mapsto Hom(f,i)(\alpha) = i \circ \alpha \circ f$$

Primeramente vamos a probar que F_M es un funtor contravariante.

a) ¿Si $f : A \longrightarrow B$ entonces $F_M(f) : F_M(B) \longrightarrow F_M(A)$?

Se tiene por definición que

$$F_M(f) : Mor(A,B) \longrightarrow Mor(F(B),F(A))$$
$$f \mapsto F_M(f) = Hom(f,i)$$

y además $F_M(f) = Hom(f,i) : Hom(B,M) \longrightarrow Hom(A,M)$ pero $Hom(B,M) = F_M(B)$ y $Hom(A,M) = F_M(A)$, así

$$F_M(f) : F_M(B) \longrightarrow F_M(A)$$

b) ¿$F_M(i_A) = i_{F_M(A)}$?

Se tiene que $i_A : A \longrightarrow A$ y además

$$\begin{aligned} i_{F_M(A)} : Hom(A, M) &\longrightarrow Hom(A, M) \\ \alpha &\mapsto i_{F_M(A)}(\alpha) \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} F_M(i_A)(\alpha) &= Hom(i_A, i)(\alpha) \\ &= i \circ \alpha \circ i_A \\ &= \alpha \circ i_A \\ &= \alpha \\ &= i_{F_M(A)}(\alpha) \end{aligned}$$

como se tomo un α arbitrario se concluye que

$$F_M(i_A) = i_{F_M(A)}$$

c) ¿Si $g \circ f$ está definido entonces $F_M(g \circ f) = F_M(f) \circ F_M(g)$?

Sea $\alpha \in Hom(B, M)$

$$\begin{aligned} (F_M(f) \circ F_M(g))(\alpha) &= F_M(f)(F_M(g)(\alpha)) \\ &= F_M(f)(Hom(g, i)(\alpha) \\ &= Hom(f, i)(i \circ \alpha \circ g) \\ &= i \circ (i \circ \alpha \circ g) \circ f \\ &= (i \circ i) \circ \alpha \circ (g \circ f) \\ &= i \circ \alpha \circ (g \circ f) \\ &= Hom(g \circ f, i)(\alpha) \end{aligned}$$

Por tanto F_M es un funtor contravariante.

Ahora para que la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom(C,M) \xrightarrow{Hom(g,i)} Hom(B,M) \xrightarrow{Hom(f,i)} Hom(A,M)$$

sea exacta debe cumplir que: $Im(Hom(g,i)) = Ker(Hom(f,i))$.

- ¿$Im(Hom(g,i)) \subset Ker(Hom(f,i))$?

  Debemos probar que $F_M(f) \circ F_M(g) = 0$

  $$\begin{aligned} F_M(f) \circ F_M(g) &= Hom(f,i) \circ Hom(g,i) \\ &= Hom(g \circ f, i) \\ &= Hom(0,i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Por tanto $Im(Hom(g,i)) \subset Ker(Hom(f,i))$

- ¿$Ker(Hom(f,i)) \subset Im(Hom(g,i))$?

  Sea $\alpha \in Ker(Hom(f,i))$

  $$\begin{aligned} \alpha \in Ker(Hom(f,i)) &\Rightarrow Hom(f,i)(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow i \circ \alpha \circ f = 0 \\ &\Rightarrow i(\alpha \circ f) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha \circ f \in Ker(i) \\ &\Rightarrow \alpha(f) \in Ker(i) \\ &\Rightarrow \alpha(Im(f)) \subset Ker(i) \end{aligned}$$

  Sea $K = Im(f) = Ker(g)$

  $$\begin{aligned} \alpha(K) &= \alpha(Im(f)) \\ &= Ker(i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así $\alpha : B \longrightarrow M$ induce un homomorfismo $\psi : Q \longrightarrow M$ del móduolo cociente $Q = B/K$.

Sea h la aplicación definida como

$$\begin{aligned} h : Q = B/K &\longrightarrow C \\ b + K &\mapsto h(b+K) = g(b) \end{aligned}$$

- ¿h está bien definida?

  Sea $b+K, a+K \in\ B/K$ tal que $b+K = a+K$

$$\begin{aligned} b + K = a + K &\Rightarrow b - a \in K \\ &\Rightarrow b - a \in Ker(g) \\ &\Rightarrow g(b-a) = 0 \\ &\Rightarrow g(b) - g(a) = 0 \\ &\Rightarrow g(b) = g(a) \\ &\Rightarrow h(b+K) = h(a+K) \end{aligned}$$

  Por tanto h está bien definida.

- ¿h es morfismo?

  Sea $b+K, a+K \in\ B/K$ y $r \in R$

$$\begin{aligned} h(a + K + r(b+K)) &= h(a + K + rb + rk) \\ &= h(a + rb + K) \\ &= g(a + rb) \\ &= g(a) + g(rb) \\ &= g(a) + rg(b) \\ &= h(a+K) + rh(b+K) \end{aligned}$$

- ¿h es monomorfismo?

  Para que h sea monomorfismo debe cumplir que $Ker(h) = 0$.

Sea $b+K \in Ker(h)$

$$\begin{aligned} b+K \in Ker(h) &\Rightarrow h(b+K) = 0 \\ &\Rightarrow g(b) = 0 \\ &\Rightarrow b \in Ker(g) \\ &\Rightarrow b \in K \end{aligned}$$

Por tanto $Ker(h) = 0$

- ¿h es epimorfismo?

  Debemos probar que $Im(h) = C$

  - ¿$Im(h) \subset C$?

    Sea $a \in Im(h)$

$$\begin{aligned} a \in Im(h) &\Rightarrow \exists\, b+K \in Q \mid h(b+K) = a \\ &\Rightarrow h(b+K) = a \\ &\Rightarrow g(b) = a \\ &\Rightarrow a \in Im(g) \\ &\Rightarrow a \in C \ \ ; g \text{ es epimorfismo} \end{aligned}$$

  - ¿$C \subset Im(h)$?

$$\begin{aligned} c \in C &\Rightarrow g(a) = c \ \ ; g \text{ es epimorfismo} \\ &\Rightarrow h(a+K) = c \\ &\Rightarrow c \in Im(h) \end{aligned}$$

Sea $p : B \longrightarrow Q$ la proyección natural.

Obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & C & \\ B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Q \arrow[ul, "h"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

donde los triángulos son conmutativos.

Como h es isomorfismo es inversible, así existe $h^{-1} : C \longrightarrow M$.

Por lo que se puede definir un homomorfismo

$$\theta : \psi \circ h^{-1} : C \longrightarrow M$$

entonces $\theta \in Hom(C, M)$, se sigue que:

$$\begin{aligned} Hom(g,i)(\theta) &= i \circ \theta \circ g \\ &= i \circ (\psi \circ h^{-1}) \circ g \\ &= (i \circ \psi) \circ (h^{-1} \circ g) \\ &= \psi \circ p \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Así $\alpha \in Im(Hom(g,i))$

Por tanto $Ker(Hom(f,i)) \subset Im(Hom(g,i))$.

Así se acaba de probar que F_M es un funtor exacto a izquierda.

Bibliografía

- **Homological Algebra**

  Henri Cartan y Samuel Eilenberg

- **Introducción al Álgebra Homológica**

  Sze-Tsen Hu

- **A course in Homological Algebra**

  P. J. Hilton y U. Stammbach.

- **Estructuras Albegraicas II**

  Enzo R. Gentile