UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TRABAJO DE GRADUACION

OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT

Septiembre de 1981

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR INTERINO : Dr. MIGUEL ANGEL PARADA

SECRETARIO GENERAL : Lic. RICARDO ERNESTO CALDERON

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO : Ing. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

SECRETARIO : Arq. JOSE ALBERTO CALEDONIO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DEPARTAMENTO : Ing. CARLOS MAURICIO CANJURA

TRABAJO DE GRADUACION

ASESOR

Lic. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT

Trabajo de Graduación previo

a la opción del Título de

LICENCIADO EN MATEMATICA

Presentado por :

AGUSTIN VEGA

ALFREDO AGUILAR GONZALEZ

Septiembre de 1981

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

Dedico este trabajo

A la memoria de mi madre :

SANTOS VEGA

A mis hijos :

VICTOR HUGO VEGA GONZALEZ

ANA JULIA VEGA GONZALEZ

I N D I C E

INTRODUCCION

El presente trabajo se desarrolla en dos capítulos, en el primero y más extenso se tratan las propiedades elementales de los espacios pre-Hilbert y se introducen los espacios de Hilbert, luego de las formas lineales continuas en los espacios de Hilbert, tratamos brevemente los conceptos que están relacionados y que son indispensables para el desarrollo del segundo capítulo. Previamente se bosquejan otros temas, tales como Espacios Vectoriales, Espacios Métricos, Espacios Normados y Subespacios Lineales Cerrados; de estos temas se desarrollan los conceptos básicos para hacer la introducción en los espacios de Hilbert.

El segundo capítulo trata sobre operadores en espacios de Hilbert, el cual es el tema principal de este trabajo. Los operadores tratados son :

[illegible] - Isométrico - Unitario

Autoadjunto - Proyección y Normal

De estos se demuestran algunos teoremas elementales.

Consideramos que en este trabajo hay objetivos generales y específicos, entre los primeros tenemos :

Contribuir en la divulgación de tópicos matemáticos muy importantes.

Aportar material bibliográfico de apoyo a cursos introduc torios de los espacios de Hilbert.

Entre los objetivos específicos están :

Conocer las propiedades básicas de los espacios de Hilbert.

Estudiar la continuidad de funciones lineales en los espacios de Hilbert.

Estudiar las formas bilineales y sesquilineales acotadas en espacios de Hilbert.

Estudiar las propiedades elementales de operadores en espacios de Hilbert.

El estudio de tópicos en espacios de Hilbert es de gran importancia ya que a través de éste puede intentarse posteriormente un estudio de las aplicaciones de esta teoría, así como a la vez se impulsa el desarrollo de la Matemática en el país en la rama del Análisis.

Agradecemos al Lic. José Javier Rivera Lazo, tan valiosa orientación en el desarrollo de este trabajo, así mismo a la Sra. Vilma Lucía de Saravia por su colaboración en la parte mecanográfica del mismo.

C A P I T U L O I

PRELIMINARES

1. ESPACIOS VECTORIALES

Def. 1.1-1

Un espacio vectorial V (sobre un campo K) es un conjunto de objetos llamados vectores en el que se consideran dos operaciones. La primera de ellas se llama adición de vectores; existe también una operación entre elementos de K y elementos de V, llamada multiplicación escalar.

Asumimos como válidos los siguientes axiomas :

Sean $x_1, x_2, x_3 \in V$ y $\lambda, \beta \in K$.

A_1) $x_1 + x_2 \in V$, definido univocamente.

A_2) $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$.

A_3) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.

A_4) Existe un vector $\Theta \in V$ tq $x_1 + \Theta = \Theta + x_1 = x_1$.

A_5) Para cada $x \in V$ existe un único vector $(-x)$ tq

$$x_1 + (-x_1) = (-x_1) + x_1 = \Theta .$$

A_6) $\lambda x_2 \in V$.

A_7) $\lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$.

A_8) $(\lambda + \beta)x_1 = \lambda x_1 + \beta x_1$.

A_9) $\lambda(\beta x_1) = (\lambda\beta)x_1$.

A_{10}) $1x_1 = x_1$.

Verificaremos que para todo $x \in V$, $0x = \Theta$.

En efecto,

$$0x + x = 0x + 1x$$

$$0x + x = (0 + 1)x$$

$$0x + x = x$$, sumando $-x$ a cada miembro tenemos

$$0x + x + (-x) = x + (-x)$$

$$0x = \Theta .$$

Def. 1.1-2

Sea V un espacio vectorial y $V_o \subset V$. Diremos que V_o es un subespacio lineal de V si :

i) $\Theta \in V_o$.

ii) $(x_1 + x_2) \in V_o$ para todo x_1, $x_2 \in V_o$.

iii) $\lambda x \in V_o$ para todo $x \in V_o$ y $\lambda \in K$.

TEO. 1.1-1

Sea V un espacio vectorial y V_o, V_1 subespacios de V. Entonces $(V_o + V_1)$ es un subespacio de V.

Verificaremos que :

i) $(V_o + V_1) \neq \phi$.

ii) $(V_o + V_1)$ es cerrado para la adición de vectores.

iii) $(V_o + V_1)$ es cerrado para la multiplicación por un escalar.

Pa.

i) $(V_o + V_1) \neq \phi$ ya que $\Theta \in V_o$ y $\Theta \in V_1$, así, $\Theta + \Theta \in (V_o + V_1)$; por lo tanto $\Theta \in (V_o + V_1)$ y $(V_o + V_1) \neq \phi$.

ii) Sean Z_1, $Z_2 \in (V_o + V_1)$ con $Z_1 = x_o + x_1$ y $Z_2 = x_o' + x_1'$ donde x_o, $x_o' \in V_o$ y x_1, $x_1' \in V_1$.

Verificaremos que $Z_1 + Z_2 \in (V_o + V_1)$.

$$Z_1 + Z_2 = (x_o + x_1) + (x_o' + x_1')$$

$$= x_o + x_1 + x_o' + x_1'$$

$$= x_o + x_o' + x_1 + x_1'$$

Como $(x_o + x_o') \in V_o$ y $(x_1 + x_1') \in V_1$

así

$$\left[(x_o + x_o') + (x_1 + x_1')\right] \in (V_o + V_1) \ ;$$

por lo tanto

$$(Z_1 + Z_2) \in (V_o + V_1).$$

iii) Sea λ un escalar cualquiera y $x_o \in V_o$, $x_1 \in V_1$.

Verificaremos que $\lambda(x_o + x_1) \in (V_o + V_1)$

$$\lambda(x_o + x_1) = \lambda x_o + \lambda x_1.$$

Como $\lambda x_o \in V_o$ y $\lambda x_1 \in V_1$ por ser V_o y V_1 subespacios,

luego

$$(\lambda x_o + \lambda x_1) \in (V_o + V_1) \ ;$$

por lo tanto

$$\lambda(x_o + x_1) \in (V_o + V_1) .$$

Def. 1.1-3

Sea W un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sean w_1, w_2, w_3, ..., $w_n \in W$.

Diremos que los vectores w_i con $i = 1, 2, ..., n$ son linealmente dependientes sobre K si existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ tales que :

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_n w_n = \theta \quad \text{con } \lambda_i \neq 0$$

para algún $i = 1, 2, ..., n$.

Def. 1.1-4

Sea W un espacio vectorial sobre un cuerpo K, diremos que los vectores $w_1, w_2, ..., w_n \in W$ son linealmente independientes si no son linealmente dependientes. Es decir, si no existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tales que :

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_n w_n = 0 \quad y \ \lambda_i \neq 0$$

para algún $i = 1, 2, ..., n$.

Def. 1.1-5

Diremos que V es el espacio generado por $e_1, e_2, ..., e_n$, si todo elemento de $x \in V$ es de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i ; \; i = 1, 2, ..., n$$

con $\lambda_i \in K$.

Def. 1.1-6

Sea W un espacio vectorial, diremos que W es n- dimensional o de dimensión n si existen vectores e_i con $i = 1, 2, ...$ ..., n linealmente independientes que generan a W.

<u>NOTACION</u> : $\dim W = n$ y

$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de W.

Def. 1.1-7

Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo K, y - - $T : V \dashrightarrow W$ una aplicación.

Diremos que T es lineal si se cumple :

i) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, para todo $v_1, v_2 \in V$.

ii) $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ para todo $v \in V$ y para todo $\lambda \in K$.

TEO. 1.1-2

Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \dashrightarrow W$ es cual - quier función lineal, las siguientes condiciones se cumplen :

i) $T(\Theta) = \Theta$.

ii) $T(-v) = - T(v)$.

iii) $T(v_1 - V_2) = T(v_1) - T(v_2)$.

iv) $T(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (T(v_k))$.

Pa.

i) Como $\Theta = 0v$, entonces

$T(\Theta) = T(0v)$

$T(\Theta) = 0T(v)$

$T(\Theta) = \Theta$.

ii) $T(-v) = T(-1(v))$

$T(-v) = - 1T(v)$. 1)

Verificaremos que $- 1T(v) = - T(v)$, para ello mostraremos que $T(v) + (-1)\,T(v) = \Theta$; en efecto

$$
\begin{aligned}
T(v) + (-1)\,T(v) &= 1T(v) + (-1)\,T(v) \\
&= (1 + (-1))\,T(v) \\
&= 0T(v) \\
&= \Theta \;;
\end{aligned}
$$

sustituyendo $-\,1T(v)$ por $-\,T(v)$ en 1) se tiene

$$T(-v) = -\,T(v).$$

iii)
$$
\begin{aligned}
T(v_1 - v_2) &= T(v_1 + (-v_2)) \\
&= T(v_1) + T(-v_2) \\
&= T(v_1) - T(v_2) \quad \text{por ii).}
\end{aligned}
$$

iv) Se probará por inducción .

Para $n = 1$ se tiene

$$T(\lambda_1\, v_1) = \lambda_1 T(v_1).$$

Por hipótesis inductiva asumiremos que es cierto para - $n - 1$, es decir,

$$T\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k\, v_k\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (T(v_k))$$

y mostraremos que es cierto para n.

Por hipótesis inductiva tenemos

$$T\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k\, v_k\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (T(v_k)) \,.$$

Pero

$$
\begin{aligned}
T\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, v_k\Big) &= T\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k\, v_k + \lambda_n\, v_n\Big) \\
&= T\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k\, v_k\Big) + T(\lambda_n\, v_n)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \, (T(v_k)) + \lambda_n \, T(v_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, (T(v_k)).$$

Def. 1.1-8

Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \dashrightarrow W$ una aplicación lineal.

Llamaremos espacio nulo de T ó Ker T, al conjunto

$$N = \{v \in V : T(v) = \Theta\}.$$

TEO 1.1-3

Si $T : V \dashrightarrow W$ es una aplicación lineal, entonces :

i) Si Vo es subespacio de V, entonces $T(V_o)$ es un subespacio lineal de W.

ii) El rango T(V) es subespacio lineal de W.

iii) Si Wo es subespacio de W, entonces $T^{-1}(Wo)$ es un subespacio de V.

En particular, el espacio nulo $N = T^{-1}(\{\Theta\})$ de T es un subespacio lineal de V.

iv) $T(v_1) = T(v_2)$ ssi $v_1 - v_2 \in N$.

v) T es inyectiva ssi $N = \{\Theta\}$.

Pa.

i) Ya que $\Theta \in Vo$ y $\Theta = T(\Theta) \in T(Vo)$ así, $T(Vo) \neq \phi$.

Supongamos que $w_1, w_2 \in T(Vo)$, y λ un escalar tq,

$$T(v_1) = w_1 \text{ y } T(v_2) = w_2 \text{ con } v_1, v_2 \in Vo.$$

Como Vo es subespacio, $(v_1 + v_2) \in Vo$ y $\lambda v_1 \in Vo$; luego,

$$T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

$$T(v_1 + v_2) = (w_1 + w_2) \in T(Vo) \quad y$$

$$T(\lambda v_1) = \lambda T(v_1) = \lambda w_1 \in T(Vo) \ ,$$

luego T(Vo) es un subespacio lineal de W.

iii) Como $T(\Theta) = \Theta \in Wo$ por ser Wo subespacio y T una aplicación lineal, $T^{-1}(Wo) \neq \phi$ ya que $\Theta \in T^{-1}(W_o)$.

Supongamos $v_1, v_2 \in T^{-1}(Wo)$ y λ un escalar; ya que

$$T(v_1) \in Wo \quad y \quad T(v_2) \in Wo$$

$$T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) \in Wo$$

y $\lambda(T(v_1)) \in Wo$, luego $T(\lambda v_1) \in Wo$; por tanto

$$(v_1 + v_2) \in T^{-1}(Wo) \text{ y } \lambda v_1 \in T^{-1}(Wo),$$

así $T^{-1}(Wo)$ es subespacio lineal de V.

iv) "==> " $T(v_1) = T(v_2)$ por hipótesis,

$$T(v_1) - T(v_2) = \Theta$$

$T(v_1 - v_2) = \Theta$; por tanto $v_1 - v_2 \in N$.

"<== " Supongamos que $v_1 - v_2 \in N$, luego

$$T(v_1 - v_2) = \Theta$$

$$T(v_1) - T(v_2) = \Theta$$

$$T(v_1) = T(v_2).$$

v) "==> " Sea T inyectiva. Si $v \in N$ entonces $T(v) = \Theta$

$T(v) = T(\Theta)$; por tanto $v = \Theta$.

"<== " Supongamos que $N = \{\Theta\}$,

si $T(v_1) = T(v_2)$, entonces $T(v_1) - T(v_2) = \Theta$

$$T(v_1 - v_2) = \Theta ,$$

luego $v_1 - v_2 = \Theta$; por tanto $v_1 = v_2$.

Def. 1.1-9

Sea V un espacio vectorial cualquiera.

Si X y Y son dos vectores cualesquiera, el segmento que une X y Y es el conjunto de todos los vectores Z de la forma

$$Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y, \quad \text{donde } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Un subconjunto S de V, con $S \neq \phi$, es llamado convexo si S contiene al segmento que une dos cualesquiera de sus vectores; es decir : si $X \in S$ y $Y \in S$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces

$$\alpha X + (1 - \alpha)Y \in S.$$

<u>Ejemplo</u> :

Todo subespacio lineal de V es convexo.

Def. 1.1-10

Si V y W son espacios vectoriales, L(V, W) denota el conjunto de todas las funciones lineales. Es decir, $T \in L(V, W)$ significa que $T: V \to W$ es una función lineal; si

$S, T \in L(V, W)$, $S = T$ significa que

$S(x) = T(x)$ para todo $x \in V$.

TEO. 1.1-4

Si V y W son espacios vectoriales, el conjunto L(V, W) de todas las funciones lineales $T: V \to W$ es un espacio vectorial, con respecto a las definiciones siguientes :

1) $0x = \Theta$.

2) $(-T)(x) = -(T(x))$.

3) $(S + T)(x) = S(x) + T(x)$.

4) $(\lambda T)(x) = \lambda(T(x))$.

Pa.

Sean 0, R, S, $T \in L(V, W)$.

P_1) $(S + T)(x) = S(x) + T(x)$

$= T(x) + S(x)$

$= (T + S)(x)$; por tanto $S + T = T + S$.

P_2) $(R + (S + T))(x) = R(x) + (S + T)(x)$

$= R(x) + S(x) + T(x)$

$= (R + S)(x) + T(x)$

$= ((R + S) + T)(x)$; por tanto

$(R + (S + T)) = ((R + S) + T)$.

P_3) $(S + 0)(x) = S(x) + 0(x)$

$= 0(x) + S(x)$

$= \Theta + S(x)$

$= S(x)$; por tanto

$(S + 0) = (0 + S) = S$.

P_4) $(S + (-S))(x) = S(x) + (-S)(x)$

$= S(x) - (S(x))$

$= S(x) - S(x)$

$$= (S - S)(x)$$
$$= O(x)$$
$$= \Theta .$$

$M_1)$ $\lambda(S + T)(x) = \lambda(S(x) + T(x))$
$$= \lambda S(x) + \lambda T(x) .$$

$M_2)$ $((\lambda + \alpha)T)(x) = (\lambda + \alpha)T(x)$
$$= \lambda T(x) + \alpha T(x) .$$

$M_3)$ $((\lambda\alpha)T)(x) = (\lambda\alpha)T(x)$
$$= \lambda(\alpha T(x));$$ luego
$$(\lambda\alpha)T = \lambda(\alpha T) .$$

$M_4)$ $(1S)(x) = 1(S(x))$
$$= S(x);$$ así $(1S) = S$.

Def. 1.1-11

Sean V y W espacios vectoriales sobre el campo C, $T: V \dashrightarrow W$ una función. Diremos que T es lineal conjugada si se cumple que :

i) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$; (T es aditiva).

ii) $T(\lambda v) = \lambda^* T(v)$; (T es homogénea conjugada).
(λ^* denota el conjugado de λ).

TEO. 1.1-5

Si U, V y W son espacios vectoriales y $T: U \dashrightarrow V$,

$S : V \dashrightarrow W$ son funciones lineales, la composición $ST: U \dashrightarrow W$ es también una función lineal.

Pa.

Si $x, y \in U$ y λ es cualquier escalar,

i) $$\begin{aligned}(ST)(x + y) &= S(T(x + y)) \\ &= S(T(x) + T(y)) \\ &= S(T(x)) + S(T(y)) \\ &= (ST)(x) + (ST)(y).\end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned}(ST)(\lambda x) &= S(T(\lambda x)) \\ &= S(\lambda T(x)) \\ &= \lambda S(T(x)) \\ &= \lambda(S(T(x))) \\ &= \lambda(ST)(x).\end{aligned}$$

Def. 1.1-12

Un espacio vectorial V es llamado isomórfico con un espacio vectorial W en caso que exista una función lineal biyectiva $T : V \dashrightarrow W$.

La función T es llamada un isomorfismo de espacios vectoriales de V sobre W.

NOTACION : $V \simeq W$ (V es isomorfo con W).

Def. 1.1-13

Si $T: X \dashrightarrow Y$ es una función biyectiva, la inversa de T es denotada T^{-1}, así :

i) $T^{-1} : Y \dashrightarrow X$.

ii) $T^{-1}(T(x)) = x$, para todo $x \in X$.

iii) $T(T^{-1}(y)) = y$, para todo $y \in Y$.

TEO. 1.1-6

Si $T : V \dashrightarrow W$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, entonces $T^{-1} : W \dashrightarrow V$ es también un isomorfismo de espacios vectoriales.

Pa.

Como T^{-1} es biyectiva, hagamos $T^{-1} = S$.

Mostraremos que S es aditiva y homogénea. Sean y_1, $y_2 \in W$ y λ un escalar.

Se tiene que :

$$T(S(y_1 + y_2)) = (ST)(y_1 + y_2)$$

$$T(S(y_1 + y_2)) = y_1 + y_2 \quad \text{por iii) Def. 1.1-12}$$

$$\text{y} \quad y_1 + y_2 = (TS)(y_1) + (TS)(y_2)$$

$$y_1 + y_2 = T(S(Y_1)) + T(S(y_2)) = T(S(y_1) + S(y_2))$$

como T es inyectiva

$$S(y_1 + y_2) = S(y_1) + S(y_2). \quad \text{(Aditiva)}$$

$$\begin{aligned} T[S(\lambda y)] &= (TS)(\lambda y) \\ &= \lambda y \\ &= \lambda[(TS)(y)] \\ &= \lambda[T(S(y))] \\ &= T[\lambda S(y)] \quad ; \quad \text{por lo tanto} \end{aligned}$$

$$S(\lambda y) = \lambda(S(y))$$

2. ESPACIOS METRICOS

Def. 1.2-1

Un espacio métrico es un conjunto H compuesto de objetos llamados puntos del espacio. Asumimos que H es no vacío, es - decir, tiene al menos un punto. Para cada par de puntos x , y del espacio, hay determinado un número real no negativo d(x,y) llamado la distancia de x a y, sujeta a los siguientes axio - mas:

A_1) $d(x, y) > 0$, cuando $x \neq y$;

$d(x, y) = 0$ ssi $x = y$.

A_2) $d(x, y) = d(y, x)$.

A_3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Es decir, la distancia es : Estrictamente positiva, simétrica y satisface la desigualdad triangular.

EJEMPLO :

$\mathbb{R}$ es un espacio métrico.

Def. 1.2-2

Sea E un espacio métrico y (x_n) $n \in \mathbb{N}$ una sucesión en - E, $x \in E$, diremos que x es límite de (x_n) $n \in N$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tq $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ sq $n \geq N$. "Esta definición es equivalente a $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$".

Def. 1.2-3

En un espacio métrico E, una sucesión (x_n) $n \in \mathbb{N}$ en E, diremos que es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tq $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sq $m, n \geq N$.

Def. 1.2-4

Un espacio métrico E se dice que es completo, si toda sucesión de Cauchy en E es convergente "hacia un punto de E".

Ejemplo :

R es un espacio métrico completo.

Def. 1.2-5

Sea M un espacio métrico, $S \subset M$. Si S es un espacio métrico completo, S es llamado un subconjunto completo de M.

TEO. 1.2-1

En cualquier espacio métrico E se tiene que :

i) $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

ii) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

iii) Si (x_n) $n \in \mathbf{N}$ son sucesiones de Cauchy, entonces $(d(x_n, y_n))$ $n \in \mathbf{N}$ es una sucesión convergente de números reales.

Pa.

i) Usando la desigualdad triangular.

Sean $x, y, z \in E$.

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$ (a).

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$$

$$d(y, z) - d(x, z) \leq d(x, y)$$

$$-\left[d(y, z) - d(x, z)\right] \geq -d(x, y)$$

$$-d(x, y) \leq d(x, z) - d(y, z) \qquad \text{(b)};$$

por (a) y (b) se tiene que :

$-d(x, y) \leq d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$; por tanto

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

ii) Mostraremos que

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \varepsilon \quad \text{sq} \quad n \geq N.$$

Sean X_n, Y_n, x, y $\in$ E.

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \qquad \text{(a)}.$$

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$$

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

$$-\left[d(x, y) - d(x_n, y_n)\right] \geq -\left[d(x_n, x) + d(y_n, y)\right]$$

$$-\left[d(x_n, x) + d(y_n, y)\right] \leq d(x_n, y_n) - d(x, y) \qquad \text{(b)};$$

de (a) y (b) se tiene que :

$-\left[d(x_n,x) + d(y_n,y)\right] \leq d(x_n,y_n) - d(x,y) \leq d(x_n,x)+d(y_n,y)$;

por tanto

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \qquad \text{(c)}.$$

Por hipótesis $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, luego para cada $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tq.

$$d(x_n, x) < \varepsilon/2 \quad \text{sq} \quad n \geq N_1; \text{ además}$$

$\lim_{n\to\infty} y_n = y$, luego para cada $\varepsilon > 0$, existe

$$N_2 \in \mathbf{N} \quad \text{tq} \quad d(y_n, y) \leq \varepsilon/2 \quad \text{sq} \quad n \geq N_2,$$

luego en (c) se tiene :

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \quad \text{sq} \quad n > N$$

con $N = \text{Max}\,\{N_1, N_2\}$, así

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \varepsilon \quad \text{sq} \quad n > N \quad ; \text{ por tanto}$$

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

iii) Probaremos que $d(x_n, y_n)$ es de Cauchy en $\mathbf{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$, por ser $(x_n)\ n \in \mathbf{N}$ una sucesión de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \quad \text{sq} \quad n, m \geq N_1.$$

Similarmente para y_n, existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tq

$$d(y_n, y_m) < \varepsilon/2 \quad \text{sq} \quad n, m \geq N_2$$

$$d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m)$$

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m) \qquad (a).$$

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$

$$-\left[d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)\right] \geq -\left[d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)\right]$$

$$-\left[d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)\right] \leq d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \qquad \text{(b)};$$

por (a) y (b) se tiene que

$$-\left[d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)\right] \leq d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)$$

$$\leq \ d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n),$$

luego.

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$$

$$\leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m);$$

por hipótesis,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \quad \text{sq} \quad n, m \geq N_1 \quad \text{y}$$

$$d(y_n, y_m) < \varepsilon/2 \quad \text{sq} \quad n, m \geq N_2 \text{, así}$$

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \text{sq } n, m \geq N,$$

haciendo $N = \max\{N_1, N_2\}$; por tanto $d(x_n, y_n)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y como $\mathbb{R}$ es completo, tenemos que, $((d(x_n, y_n))n \in \mathbb{N}$ es convergente.

Def. 1.2-6

Sea S un subconjunto de un espacio métrico M. Un punto $x \in M$ se dice que es adherente a S, ssi existe una sucesión $(x_n)\ n \in N$ de puntos de S tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Def. 1.2-7

Sea E un espacio métrico, $S \subset E$.

Se dice que S es un subconjunto cerrado de E si contiene todos sus puntos adherentes.

Esto es, si (x_n) $n \in N$ es una sucesión de puntos de S, $x \in E$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $x \in S$.

Def. 1.2-8

Sea E un espacio métrico y $S \subset E$. Se llama adherencia o cerradura de S, al conjunto $S \cup S'$, donde

$$S' = \{x \in E: x \notin S \text{ y } B(x,r) \cap S \neq \phi \text{ para todo } r > 0\}.$$

La adherencia de S se denota por $\overline{S}$.

Si $\overline{S} = E$, S es llamado un conjunto denso en E.

TEO. 1.2-2

$$\overline{S} = \{x \in E : x \text{ es adherente a } S\}.$$

Pa.

$x \in \overline{S} \Longrightarrow x \in S$ ó $x \in S'$; si $x \in S$, existe $(x_n) n\in N$ en S en donde $x_n = x$ para todo $n \in N$, así $\lim_{n\to\infty} x_n = x$; por tanto x es punto adherente a S.

(1)

$x \in S' \Longrightarrow$ para todo $r > 0$, $B(x, r) \cap S \neq \phi$;sea $r = 1$, $B(x, 1) \cap S \neq \phi$, sea $x_1 \in B(x, 1) \cap S$;

sea $x_2 \in B(x, 1/2) \cap S$, para cada n tomemos

$$x_n \in B(x, 1/n) \cap S \text{ y } d(x, x_n) < 1/n.$$

Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tq $d(x, x_n) < \varepsilon$ sq $n > N$.

Para N tq $1/N < \varepsilon$, se tiene $d(x,x_n) < 1/n < 1/N < \varepsilon$ para todo $n > N$, luego $\lim x_n = x$, x es punto adherente a S. (2)

De (1) y (2) se tiene $\overline{S} \subset \{x \in E : x \text{ es adherente a } S\}$.

Sea $x \in E$, x adherente a S, entonces $x \in S$ ó $x \notin S$,

$x \in S \Longrightarrow x \in S \cup S'$.

Sea $x \notin S$, por ser x adherente a S, existe $(x_n)n \in \mathbf{N}$ en S tq $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Sea $r > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tq $d(x, x_n) < r$ sq $n > N$. Tomando $y = x_{N+1}$ se tiene que $y \in B(x, r) \cap S$; por tanto, todo punto adherente de S pertenece a $\overline{S}$, luego

$$\{x \in E : x \text{ es adherente a } S\} \subset \overline{S} \quad ;$$

por tanto

$$\overline{S} = \{x \in E : x \text{ es adherente a } S\}.$$

RESULTADOS

1) S es un subconjunto cerrado de un espacio métrico E ssi $\overline{S} \subset S$.

"$\Longrightarrow$" Es inmediato que $\overline{S} \subset S$.

"$\Longleftarrow$" Sea x un punto adherente de S, entonces $x \in \overline{S} \subset S$; por tanto S es cerrado.

2) $S \subset \overline{S}$ para todo subconjunto S.

Si $x \in S$, entonces existe $S_n = x$ para todo n tq $\lim_{n\to\infty} {}_n = x$; por tanto $x \in \overline{S}$.

3) $S = \overline{S}$ ssi S es cerrado, es inmediato de 1) y 2).

4) Si $S \subset J$, entonces $\overline{S} \subset \overline{J}$.

Pa.

Sea $x \in \overline{S}$. Existe $(x_n)n \in \mathbf{N}$ sucesión de puntos de S tq $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, como $S \subset J$, luego $(x_n)n \in N$ es también una sucesión de puntos de J tq $\lim_{n\to\infty} x_n = x$; por tanto $x \in \overline{J}$.

Def. 1.2-9

Sea E un espacio métrico con distancia d y $x_0 \in E$, $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$. La bola abierta (bola cerrada) de centro x_0 y radio r es el conjunto $B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\}$ (respectivamente $B'(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\}$).

TEO 1.2-3

Sea $S \subset M$ con M espacio métrico. Entonces :

i) $\overline{S}$ es subconjunto cerrado de M.

ii) $S \subset \overline{S}$.

iii) Si J es un subconjunto cerrado de M tq $S \subset J$, entonces $\overline{S} \subset J$.

Pa.

i) Sea (x_n) $n \in \mathbf{N}$ una sucesión de puntos de $\overline{S}$ tq -- $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, con $y \in M$; bastará mostrar que $y \in \overline{S}$.
Por suposición $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ y (x_n) $n \in \mathbf{N}$ sucesión de - puntos de $\overline{S}$, luego existe para cada $n \in \mathbf{N}$ $B(x_n, 1/n)$ tq $B(x_n, 1/n) \cap S \neq \phi$.

Sea $S_n \in B(x_n, 1/n) \cap S \neq \phi$, luego $d(S_n, x_n) \leq 1/n$ para cada n.

Como $d(S_n, y) \leq d(S_n, x_n) + d(x_n, y)$

$d(S_n, y) \leq 1/n + d(x_n, y)$,

aplicando limite a la desigualdad anterior tenemos :

$$\lim_{n\to\infty} d(S_n, y) \leq \lim_{n\to\infty} 1/n + \lim_{n\to\infty} d(x_n, y)$$

$$\lim_{n\to\infty} d(S_n, y) \leq 0 + 0 \quad ; \quad \text{por tanto}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = y \quad y \quad y \in \overline{S}.$$

ii) $S \subset \overline{S}$, esto es cierto para todo $S \subset M$ por "RESULTADO 2".

iii) Si $S \subset J$ y J subconjunto cerrado, entonces por "RESULTADO 4" $\overline{S} \subset \overline{J}$; y por ser J cerrado, tenemos que $J = \overline{J}$; por tanto $\overline{S} \subset J$.

Def. 1.2-11

Si X y Y son espacios métricos, una función $T:X \dashrightarrow Y$ - es llamada isométrica si :

$$d(T(x_1), T(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

Def. 1.2-12

Sean X y Y espacios métricos $T: X \dashrightarrow Y$. Sea $x \in X$; la función T es llamada continua en x en caso que :

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ entonces $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$

con (x_n) $n \in N$ sucesión de elementos de X. T es llamada continua si lo es en todos los puntos de X.

Def. 1.2-13

En un espacio métrico E, con distancia d, $A \subset E$, diremos que A es abierto si para cada $x \in A$, existe $r > 0$ tq $B(x, r) \subset A$.

Def. 1.2-14

Un espacio métrico E se llama compacto si satisface la -

siguiente condición : para cada recubrimiento (U_i) $i \in L$ de E mediante conjuntos abiertos, existe una familia finita $(U_i)_{i \in H}$ ($H \subset L$ y finito) que es un recubrimiento de E.

3. ESPACIOS NORMADOS

Def. 1.3-1

Un espacio normado es un espacio vectorial E tq para cada vector $x \in E$, hay definido un número real no negativo llamado la norma de x, denotada $||x||$, sujeta a los siguientes axiomas :

A_1) $||x|| > 0$ sq $x \neq \theta$; $||\theta|| = 0$.

A_2) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

A_3) $||\lambda x|| = |\lambda| \; ||x||$.

Es decir $|| \; ||: E \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto ||x||$

es estrictamente positiva, subaditiva y absolutamente homogénea.

OBSERVACION :

De A_3) se tiene que:

1) $||-x|| = ||-1(x)|| = |1| \; ||x|| = ||x||$.

2) $||ix|| = |i| \; ||x|| = 1||x|| = ||x||$; por tanto de 1) y 2) se tiene $||-x|| = ||ix|| = ||x||$.

Def. 1.3-2

En un espacio normado E, una sucesión de Cauchy es una sucesión (x_n) $n \in \mathbb{N}$ tq para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tq

$$||x_n - x_m|| < \varepsilon \quad \text{sq} \quad n, m \geq N.$$

TEO 1.3-1

Todo espacio normado E, es un espacio métrico con $d(x, y) = ||x - y||$ y las siguientes relaciones se cumplen:

i) $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$;

$d(x, y) = 0$ si $x = y$.

ii) $d(x, y) = d(y, x)$.

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Pa.

i) $d(x, y) = ||x-y|| > 0$ si $x \neq y$.

Si $d(x, y) = ||x-y||$ entonces $x - y = 0$; por tanto $x = y$.

ii) $d(x, y) = ||x - y||$

$d(x, y) = ||-(y - x)||$

$d(x, y) = ||y - x||$

$d(x, y) = d(y, x)$.

iii) $d(x, z) = ||x - z||$

$d(x, z) = ||x - y + y - z||$

$d(x, z) = ||(x - y) + (y - z)||$

$d(x, z) \leq ||x - y|| + ||y - z||$

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

TEO. 1.3-2

En cualquier espacio normado E, se tiene que toda sucesión de Cauchy es acotada.

Pa.

Sea (x_n) $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de Cauchy.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tq

$$||x_n - x_m|| < \varepsilon \quad \text{sq} \quad n, m \geq N;$$

haciendo $\varepsilon = 1$, tenemos que $||x_n - x_m|| \leq 1$ sq $n, m \geq N$; la desigualdad anterior se cumple a partir de N, y

$$||x_n|| = ||x_n - x_N + x_N|| ,$$

además

$$||x_n - x_N + x_N|| \leq ||x_n - x_N|| + ||x_N||$$

$$||x_n - x_N + x_N|| \leq 1 + ||x_N||$$

luego

$$||x_n|| \leq 1 + ||x_N|| \quad \text{sq} \quad n \geq N;$$

haciendo $K = \max \{1 + ||x_N||, ||x_1||, ||x_2|| , \ldots ||x_{N-1}||\}$ se tiene que $||x_n|| \leq K$ para todo n; por tanto (x_n) $n \in \mathbb{N}$ es acotada.

TEO. 1.3-3

En cualquier espacio normado H, (x_n) $n \in N$ y $(y_n) n \in \mathbb{N}$ en H y λ un escalar, tenemos :

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = (x + y)$.

ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda n = \lambda$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \lambda n\, y_n = \lambda y.$$

iii) Si $(x_n)n \in \mathbf{N}$ y $(y_n)n \in \mathbf{N}$ son sucesiones vectoriales de Cauchy y λn una sucesión escalar de Cauchy, entonces

$$(x_n + y_n)n \in \mathbf{N} \quad y \quad (\lambda_n\, x_n) \in \mathbf{N}$$

son sucesiones de Cauchy.

iv) $\big|\,||x|| - ||y||\,\big| \leq ||x - y||$.

v) a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x||$.

b) Si $(x_n)n \in \mathbf{N}$ es de Cauchy, entonces $(||x_n||)n \in \mathbf{N}$ es de Cauchy.

Pa.

i) Sean $(x_n)n \in \mathbf{N}$, $(y_n)n \in \mathbf{N}$ en H y x, y $\in$ H; verificaremos que $\lim\limits_{n\to\infty} ||(x_n + y_n) - (x + y)|| = 0$.

$$||(x_n + y_n) - (x + y)|| = ||(x_n - x) + (y_n - y)||$$

$$||(x_n + y_n) - (x + y)|| \leq ||x_n - x|| + ||y_n - y||,$$

aplicando límite a la desigualdad anterior

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}||(x_n+y_n) - (x+y)|| \leq \lim_{n\to\infty}||x_n-x|| + \lim_{n\to\infty}||y_n-y||$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}||(x_n+y_n) - (x+y)|| \leq 0 + 0 \qquad \text{(por hipótesis)},$$

luego $\lim\limits_{n\to\infty} ||(x_n + y_n) - (x + y)|| = 0$; por tanto

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y.$$

ii) Mostraremos que $\lim\limits_{n\to\infty} ||\lambda_n\, x_n - \lambda x|| = 0$.

$$||\lambda_n x_n - \lambda x|| = ||\lambda_n x_n - \lambda_x + \lambda_n x - \lambda_n x + \lambda x_n - \lambda x_n + \lambda x - \lambda x||$$

$$||\lambda_n x_n - \lambda x|| = ||(\lambda_n x_n - \lambda_n x - \lambda x_n + \lambda x) + (\lambda x_n - \lambda x) + (\lambda_n x - \lambda x)||$$

$$||\lambda_n x_n - \lambda x|| = ||\left[\lambda_n(x_n - x) - \lambda(x_n - x)\right] + \lambda(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x||$$

$$||\lambda_n x_n - \lambda x|| = ||(\lambda_n - \lambda)(x_n - x) + \lambda(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x||$$

$$||\lambda_n x_n - \lambda x|| \leq ||(\lambda_n - \lambda)(x_n - x)|| + ||\lambda(x_n - x)|| + ||(\lambda_n - \lambda)x||$$

$$||\lambda_n x_n - \lambda x|| \leq |\lambda_n - \lambda|\,||x_n - x|| + |\lambda|\,||x_n - x|| + |\lambda_n - \lambda|\,||x||,$$

aplicando límite a la desigualdad anterior

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} ||\lambda_n x_n - \lambda x|| \leq \lim_{n\to\infty} |\lambda n - \lambda|\,||x_n - x|| + \lim_{n\to\infty} |\lambda|\,||x_n - x|| + \lim_{n\to\infty} |\lambda_n - \lambda|\,||x||$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} ||\lambda_n x_n - \lambda_x|| \leq 0.0 + |\lambda|.\ 0 + 0\ .||x|| = 0,$$

así $\lim_{n\to\infty} ||\lambda_n x_n - \lambda x|| = 0$; por tanto

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n x_n) = \lambda x .$$

iii) Mostraremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tq

$||(x_n + y_n) - (x_m + y_m)|| < \varepsilon$ sq $m, n > N$.

Por ser $(x_n)n \in \mathbb{N}$ sucesión de Cauchy existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tq

$||x_n - x_m|| < \varepsilon/2$ sq $m, n \geq N_1$.

Similarmente para $(y_n)\ n \in \mathbb{N}$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tq

$||y_n - y_m|| < \varepsilon/2$ sq $m, n \geq N_2$, luego

$||(x_n + y_n) - (x_m + y_m)|| = ||(x_n - x_m) + (y_n - y_m)||$

$$||(x_n + y_n)-(x_m + y_m)|| \leq ||x_n - x_m|| + ||y_n - y_m||$$

$$||(x_n + y_n) - (x_m + y_m)||< \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

$$||(x_n + y_n) - (x_m + y_m)|| < \varepsilon \quad \text{sq } m, n \geq N = \max\{N_1, N_2\};$$

mostraremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tq

$$||\lambda_n x_n - \lambda_m x_m||<\varepsilon \text{ sq } m, n > N.$$

Por ser $(x_n)n \in \mathbb{N}$ y $(\lambda_n)n \in \mathbb{N}$ sucesiones de Cauchy, son acotadas por K_1 y K_2, además existen N_1, N_2, N_3, $N_4 \in \mathbb{N}$, tq :

$$||x_n - x_m|| < \sqrt{\varepsilon/3} \quad \text{sq } m, n \geq N_1 .$$

$$||x_n - x_m|| < \varepsilon/3K_1 \quad \text{sq } m, n \geq N_2 .$$

$$|\lambda_n - \lambda_m| < \sqrt{\varepsilon/3} \quad \text{sq } m, n \geq N_3 .$$

$$|\lambda_n - \lambda_m| < \varepsilon/3K_2 \quad \text{sq } m, n \geq N_4 ;$$

y $||x_n|| < K_2$, $|\lambda_n| < K_1$ para todo n.

$$||\lambda_n x_n-\lambda_m x_m|| =||\lambda_n x_n -\lambda_m x_m +\lambda_n x_m -\lambda_n x_m + \lambda_m x_n - \lambda_m x_n + \lambda_m x_m - \lambda_m x_m||$$

$$=||(\lambda_n x_n-\lambda_n x_m -\lambda_m x_n +\lambda_m x_m) + (\lambda_m x_n - \lambda_m x_m) + (\lambda_n x_m -\lambda_m x_m)||$$

$$=||(\lambda_n(x_n-x_m) - \lambda_m(x_n-x_m)) + \lambda_m(x_n-x_m) + (\lambda_n-\lambda_m)x_m||$$

$$=||(\lambda_n - \lambda_m)(x_n-x_m) + \lambda_m(x_n-x_m) + (\lambda_n-\lambda_m)x_m||$$

$$||\lambda_n x_n-\lambda_m x_m||\leq||(\lambda_n-\lambda_m)(x_n-x_m)||+||\lambda m(x_n-x_m)|| + ||(\lambda_n-\lambda m)x_m||$$

$$\leq |\lambda_n - \lambda_m| \; ||x_n-x_m|| + |\lambda_m| \; ||x_n-x_m|| + |\lambda_n-\lambda_m| \; ||x_m||$$

$$< |\lambda_n - \lambda_m| \; ||x_n-x_m|| + K_1 \; ||x_n-x_m|| + |\lambda_n-\lambda_m| K_2$$

$$< \sqrt{\varepsilon/3}\;\sqrt{\varepsilon/3} + K_1 \;\varepsilon/3K_1 + \varepsilon/3K_2 K_2 \quad \text{sq} \quad m, n \geq N \;;$$

por tanto

$||\lambda_n x_n-\lambda_m x_m|| < \varepsilon$ sq $m, n \geq N = \max \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$.

iv) $||x|| = ||x - y + y||$

$||x|| \leq ||x - y|| + ||y||$

$||x|| - ||y|| \leq ||x - y|| \qquad (1).$

$||y|| = ||y - x + x||$

$||y|| \leq ||y - x|| + ||x||$

$||y|| - ||x|| \leq ||y - x||$

$-(||y|| - ||x||) \geq -||y - x||$

$-||y - x|| \leq ||x|| - ||y|| \qquad (2);$

de (1) y (2) se tiene

$-||x - y|| \leq ||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$; por tanto

$$\big|\,||x|| - ||y||\,\big| \leq ||x - y||.$$

v) a) Mostraremos que $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x||$.

Por hipótesis $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n-x|| = 0$, aplicando iv) se - tiene que $\big|\,||x_n|| - ||x||\,\big| \leq ||x_n - x||$,

aplicando límite

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\,||x_n||-||x||\,\Big| \leq \lim_{n\to\infty}||x_n-x|| = 0 \quad ; \quad \text{por tanto}$$

$$\lim_{n\to\infty}||x_n|| = ||x||.$$

b) Mostraremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tq

$\Big|\,||x_n|| - ||x_m||\,\Big| < \varepsilon$ sq $m, n \geq N$.

Como $(x_n)n \in \mathbf{N}$ es de Cauchy, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tq $||x_n - x_m|| < \varepsilon$ sq $m, n \geq N$, aplicando iv) se tiene

$\Big|\,||x_n|| - ||x_m||\,\Big| \leq ||x_n - x_m|| < \varepsilon$ sq $m, n \geq N$ (por hipótesis); por tanto

$\Big|\,||x_n|| - ||x_m||\,\Big| < \varepsilon$ sq $m, n \geq N$,

de donde $(||x_n||)n \in \mathbf{N}$ es de Cauchy.

Def. 1.3-3

Sean E, F espacios normados $T: E \dashrightarrow F$ una función. Sea $x \in E$. T es llamada continua en x en caso que si

$$\lim_{n\to\infty}||x_n-x|| = 0 \quad \text{entonces} \quad \lim_{n\to\infty}||T(x) - T(x_n)|| = 0.$$

T es continua si lo es en todo E.

<u>NOTA</u>. Por (TEO. 1.3-1) todo espacio normado **E, es un espacio** métrico, por lo que la "Def.1.2-12" puede ser usada en lugar de la "Def. 1.3-3".

Def. 1.3-4

Si E y F son espacios normados, y $T : E \dashrightarrow E$ es una -

función lineal continua, el número real no negativo

$$\text{Sup } \{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\}$$

es llamado la norma de T, y se denota $||T||$.

TEO. 1.3-4

Si E y F son espacios normados y $T : E \longrightarrow F$ es una función lineal continua, entonces el espacio nulo N de T es un subespacio lineal cerrado de E.

$$N = \{x \in E : T(x) = \Theta\}.$$

Pa.

Por (TEO.1.1-3), se tiene que N es un subespacio lineal de E.

Luego bastará mostrar que N es cerrado. Sea $(x_n)n \in N$ una sucesión en N tq $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ con $x \in E$, como T es continua y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$, pero $T(x_n) = \Theta$ ya que $x_n \in N$; luego $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = \Theta$; esto implica que $T(x) = \Theta$; por tanto $x \in N$, así tenemos que N es cerrado y por tanto N es un subespacio lineal cerrado de E.

TEO. 1.3-5

Sean E y F espacios normados, $T : E \longrightarrow F$ una función lineal. Las siguientes condiciones en T son equivalentes:

i) T es función continua.

ii) T es continua en algún punto $x_0 \in E$.

iii) T es continua en $\Theta \in E$.

iv) $\{||T(x)|| \,:\, ||x|| \leq 1\}$ es un conjunto acotado de números reales.

v) Existe una constante $K \geq 0$ tq $||T(x)|| \leq K\,||x||$ para todo $x \in E$.

Pa.

i) ---> ii) Trivial.

ii) ---> iii) Sea $(x_n)n \in \mathbf{N}$ una sucesión en E y $x_o \in E$ con x_o fijo y T continua en x_o, supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Theta$, por (TEO.1.3-3-i) se tiene que :

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + x_o) = x_o$; como por hipótesis T es continua en x_o, luego si $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + x_o) = x_o$, entonces - - $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n + x_o) = T(x_o)$.

$$\lim_{n\to\infty} (T(x_n) + T(x_o)) = T(x_o)$$

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) + \lim_{n\to\infty} T(x_o) = T(x_o)$$

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) + T(x_o) = T(x_o)$$

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_o) - T(x_o)$$

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = \Theta \quad ;$$

por tanto T es continua en $\Theta \in E$.

iii) ---> iv) Asumamos que $\{||T(x)|| \,:\, ||x|| \leq 1\}$ no es acotado, y para cada $n \in \mathbf{N}$ sea $x_n \in E$ un vector tq -

$||x_n|| \leq 1$ con $n = 1, 2, 3, \ldots.$ de tal manera que $||T(x_n)|| \geq n$; definamos $y_n = 1/n\, x_n$, así

$$||y_n|| = ||1/n^{x_n}||$$

$$||y_n|| = 1/n||x_n||$$

$$||y_n|| \leq 1/n \circ 1 \quad ; \quad \text{luego}$$

$||T(y_n)|| \in \{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\}$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} 1/n^{x_n}$

$\lim_{n\to\infty} y_n = \Theta$; por hipótesis T es continua en Θ , luego

$$\lim_{n\to\infty} T(y_n) = T(\Theta) .$$

$$||T(y_n)||= ||T(1/n^{x}n)||$$

$$||T(y_n)||= ||1/n\ T(x_n)||$$

$$||T(Y_n)||= 1/n\ ||T(x_n)||$$

$$||T(y_n)|| \geq 1/n \circ n$$

$$||T(y_n)|| \geq 1$$

para todo n, esto contradice el hecho que

$$\lim_{n\to\infty} T(y_n) = \Theta \ ; \qquad \text{por tanto}$$

$\{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\}$ es acotado.

iv) ---> v) Si $y \in E$, $y \neq \Theta$ y $z = \dfrac{y}{||y||}$

$$||z|| = \left|\left|\frac{y}{||y||}\right|\right| = 1, \text{ luego } ||z|| \leq 1 \text{ y}$$

$||T(z)|| \in \{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\}$, así $||T(z)|| \leq K$

$$\left|\left|T\left(\frac{y}{||y||}\right)\right|\right| \leq K$$

$$\left|\frac{1}{||y||}\right| \; ||T(y)|| \leq K$$

$$\frac{1}{||y||} \; ||T(y)|| \leq K$$

$$||T(y)|| \leq K \; ||y|| .$$

v) ---> i) Sea (x_n) $n \in N$ sucesión en E, $x \in E$ tq

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

$||T(x_n) - T(x)|| = ||T(x_n - x)||$ por T lineal ; por hipó tesis existe $K \geq 0$ tq

$||T(x_n-x)|| \leq K \; ||x_n-x||$; es decir

$||T(x_n) - T(x)|| \leq K \; ||x_n-x||$, aplicando límite

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} ||T(x_n)-T(x)|| \leq \lim_{n\to\infty} K \; ||x_n-x||$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} ||T(x_n)-T(x)|| \leq K \lim_{n\to\infty} ||x_n-x||$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} ||T(x_n) - T(x)|| \leq K \cdot 0$$

$$\lim_{n\to\infty} ||T(x_n) - T(x)|| = 0 \quad , \text{ luego}$$

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x) \quad ; \text{ por tanto } T \text{ es continua.}$$

TEO. 1.3-6

Sean E y F espacios normados, $T : E \dashrightarrow F$ una función lineal y continua, entonces:

i) $||T|| = \text{Sup}\ \{||T(x)|| : ||x|| < 1\}$

ii) Si $E \neq \{\theta\}$, entonces

$$||T|| = \text{Sup}\ \{||T(x)|| : ||x|| = 1\}$$

iii) $||T(x)|| \leq ||T||\ ||x||$ para todo $x \in E$.

iv) Si $K \geq 0$ y $||T(x)|| \leq K\ ||x||$ para todo $x \in E$,

Entonces $||T|| \leq K$.

Pa.

i) Sea $K = \text{Sup}\ \{||T(x)|| : ||x|| < 1\}$, como

$$\{||T(x)|| : ||x|| < 1\} \subset \{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\}$$

$\text{Sup}\{||T(x)|| : ||x|| < 1\} \leq \text{Sup}\{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\}$;

así $K \leq ||T||$.

Supongamos $||x|| \leq 1$ y sea $\varepsilon > 0$; definamos

$$y = (||x|| + \varepsilon)^{-1}\ x$$

$$||y|| = \left|\left|\frac{x}{(||x|| + \varepsilon)}\right|\right|$$

$$||y|| = \frac{||x||}{(||x|| + \varepsilon)}$$, luego $||y|| < 1$;

así :

$||T(y)|| \in \{||T(x)|| : ||x|| < 1\}$, como

$\{||T(x)|| : ||x|| < 1\}$ es acotado, existe

$K = \text{Sup}\ \{||T(x)|| : ||x|| < 1\}$, luego $||T(y)|| \leq K$;

$$||T(x)|| = \left|\left|T\left(\frac{y}{(||x||+\varepsilon)^{-1}}\right)\right|\right|$$

$$||T(x)|| = ||(||x|| + \varepsilon)T(y)||$$

$$||T(x)|| = |(||x|| + \varepsilon)|\ ||T(y)||$$

$$||T(x)|| = (||x|| + \varepsilon)\ ||T(y)||$$

$||T(x)|| \leq (||x|| + \varepsilon)K$, como es válido para todo ε,

$$||T(x)|| \leq ||x||\ K$$

$||T(x)|| \leq K$ para todo x, $||x|| \leq 1$

tomando el $\text{Sup}\ \{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\}$, se tiene $||T|| \leq K$, así $||T|| = K$; por tanto

$$||T|| = \text{Sup}\ \{||T(x)|| : ||x|| < 1\}.$$

ii) Por hipótesis $E \neq \{\Theta\}$, luego existen vectores $x \in E$, tq $||x|| = 1$.

Sea $K = \text{Sup}\{||T(x)|| : ||x|| = 1\}$, así $K \leq ||T||$

Supongamos que $||x|| \leq 1$; si $x = \Theta$ entonces $T(x) = \Theta$ "T es lineal"; por tanto $||T(x)|| = ||\Theta||$

$$||T(x)|| = 0 \leq K$$

$$||T(x)|| \leq K.$$

Si $x \neq \Theta$, haciendo $y = ||x||^{-1}x$ tenemos $||y|| = 1$, así

$||T(y)|| \in \{||T(x)|| : ||x|| = 1\}$, luego

$||T(y)|| \leq K = \text{Sup}\{||T(x)|| : ||x|| = 1\}$ como

$$||T(x)|| = ||T(||x||\, y)||$$

$$||T(x)|| = \Big|\Big|\, ||x||\, T(y) \Big|\Big|$$

$$||T(x)|| = ||x||\ \ ||T(y)||$$

$||T(x)|| \leq ||x||\, K$, así

$||T(x)|| \leq K$ cuando $||x|| < 1$.

Así $||T(x)|| \leq K$, luego $||T|| = K$; por tanto

$$||T|| = \text{Sup}\ \{||T(x)|| : ||x|| = 1\}.$$

iii) Si $x = \Theta$, $||T(x)|| \leq ||T|| \; ||x||$

$$0 \leq ||T|| \cdot 0$$

$$0 \leq 0 .$$

Si $x \neq \Theta$ y sea $y = ||x||^{-1}x$, entonces

$||y|| = 1$ y $||T(y)|| \in \{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\}$;

luego

$$||T(x)|| = ||T(||x|| \, y)||$$

$$||T(x)|| = ||x|| \; ||T(y)||$$

$$||T(x)|| \leq ||T|| \; ||x||$$

iv) Sea $k \geq 0$ y $||T(x)|| \leq K \, ||x||$ para todo $x \in E$ con $||x|| \leq 1$, tomamos $||x|| = 1$ y se tiene

$$||T(x)|| \leq K \; ; \text{ por tanto } \; ||T|| \leq K .$$

TEO. 1.3-7

Si E y F son espacios normados, y T: E ---> F una función lineal, T es isométrica ssi $||T(x)|| = ||x||$ para todo $x \in E$.

Pa.

"===> " T es isométrica, entonces

$$||T(x) - T(y)|| = ||T(x - y)||$$

$$||T(x) - T(y)|| = ||x - y|| \quad ; \text{ haciendo } y = \Theta$$

$$||T(x) - T(\Theta)|| = ||T(x - \Theta)||$$

$$||T(x) - T(\Theta)|| = ||T(x)||$$

$$||T(x) - T(\Theta)|| = ||x||.$$

" <===" $||T(x) - T(y)|| = ||T(x - y)||$

$$||T(x) - T(y)|| = ||x - y||$$

$d(T(x), T(y)) = d(x, y)$; por tanto T es isométrica.

Def. 1.3-5

Un espacio de Banach es un espacio normado B el cual es completo.

EL ESPACIO NORMADO Lc(E, F)

Def. 1.3-6

Si E y F son espacios normados, Lc(E, F) denota el conjunto de todas las funciones lineales continuas $T : E \text{ ---> } F$.

$$Lc(E, F) = \{T:E \text{ ---> } F : T \text{ es función lineal continua}\}.$$

TEO. 1.3-8

Si E y F son espacios normados, Lc(E, F) es un subespacio lineal de L(E, F), y es un espacio normado con

$$||T|| = \text{Sup } \{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\}.$$

Pa.

i) Mostraremos que $Lc(E, f)$ es un subespacio lineal de - - $L(E, F)$.

1) $Lc(E, F) \neq \phi$ ya que $O(x + y) = \Theta = O(x) + O(y)$; por tanto O es lineal, así $O \in L(E, F)$.

$$||O(x+y)|| = ||O(x)+O(y)|| \text{ con } ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1$$

$$\leq ||O(x)|| + ||O(y)|| \text{ con } ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1$$

$$\leq ||O|| \; ||x|| + ||O|| \; ||y|| \text{ con } ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1$$

$$\leq ||O||(||x|| + ||y||) \text{ con } ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1$$

así O es continua y $O \in Lc(E, F)$.

2) Sean $T, S \in Lc(E, F)$, $x \in E$

$(S + T)(x) = S(x) + T(x)$ es evidente la linealidad; por tanto $(S + T) \in L(E, F)$.

$$||(S + T)(x)|| = ||S(x) + T(x)||$$

$$\leq ||S(x)|| + ||T(x)||$$

$$\leq (||S|| + ||T||) \; ||x|| \text{ con } ||x|| \leq 1$$

3) Sea $T \in Lc(E, F)$ y λ cualquier escalar, $x \in E$

$(\lambda T)(x) = \lambda(T(x))$, λT es lineal, así $\lambda T \in L(E, F)$.

$$||(\lambda T)(x)|| = ||\lambda(T(x))||$$

$$||(\lambda T)(x)|| = |\lambda|\,||T(x)||$$

$$\leq |\lambda|\ ||T||\ ||x||;\ \text{así}\ \ \lambda T \in Lc(E, F).$$

ii) $Lc(E, F)$ es un espacio normado con

$||T|| = \text{Sup}\ \{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\}$

1) $||T|| = \text{Sup}\ ||T(x)||$, $||x|| \leq 1$, es claro que - - - $\text{Sup}\ ||T(x)|| > 0$; por tanto $||T|| > 0$.
Si $||T|| = \text{Sup}\ ||T(x)|| = 0$, $||x|| \leq 1$ entonces $||T(x)|| = 0$, $||x|| \leq 1$, luego $T(x) = 0$, $||x|| \leq 1$, así $T = 0$; por tanto $||T|| = 0$ si $T = 0$.

2) $||\lambda T|| = \text{Sup}\ ||(\lambda T)(x)||$, $||x|| \leq 1$

$||\lambda T|| = \text{Sup}\ ||\ \lambda(T(x))||$, $||x|| \leq 1$

$||\lambda T|| = \text{Sup}\ |\lambda|\ ||T(x)||$, $||x|| \leq 1$

$||\lambda T|| = |\lambda|\text{Sup}\ ||T(x)||$, $||x|| \leq 1$

$||\lambda T|| = |\lambda|\ ||T||$.

3) $||S + T|| = \text{Sup}\ ||(S + T)(x)||$, $||x|| \leq 1$

$||S + T|| = \text{Sup}\ ||S(x) + T(x)||$, $||x|| \leq 1$

$||S + T|| \leq \text{Sup}(||S(x)|| + ||T(x)||)$, $||x|| \leq 1$

$$||S + T|| \leq \operatorname{Sup} ||S(x)|| + \operatorname{Sup} ||T(x)|| \ , \ ||x|| \leq 1$$

$$||S + T|| \leq ||S|| + ||T|| \ , \ ||x|| \leq 1 .$$

TEO. 1.3-9

Sea E un espacio vectorial normado tq $Br = \{x \in E : ||x|| \leq r\}$ es compacto para todo $r > 0$. Entonces E es un espacio de Banach o completo.

Pa.

Sea $(x_n)n \in N$ una sucesión de Cauchy en E, $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ es acotada "por ser de Cauchy"; luego existe $r > 0$ tq $||x_n|| \leq r$, para todo $n \in N$, es decir $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \subset Br$

Para cada n, sea $An = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$; $\overline{A}_n$ es cerrada para cada n. Supongamos $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{A}_n = \phi$, entonces

$$\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{A}_n\right)^c = E, \ \text{ó sea} \ \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{A}^c = E, \ \text{luego}$$

$$Br \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{A}_n^c .$$

Como $\overline{A}_n$ es cerrado para cada n, entonces $\overline{A}_n^c$ es abierto por ser complemento de cerrado; y Br compacto, entonces existe $m \in N$ tq

$$Br \subset \bigcup_{i=1}^{m} \overline{A}_i \ , \ \text{así} \ Br \subset A_m^c \ ; \ \text{luego}$$

$Br \cap \overline{A}_m = \phi$, contradicción pues $A_m \subset Br$; por tanto existe $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{A}_n$.

Probaremos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tq si m, n $\geq N$ entonces

$||x_m - x_n|| < \varepsilon/2$, $x \in \overline{A}_{N+1}$; sea $j > N$ tq $x_j \in B(x, \varepsilon/2)$,

sea $n > N$;

$$||x - x_n|| = ||x - x_j + x_j - x_n||$$

$$\leq ||x - x_j|| + ||x_j - x_n|| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

TEO. 1.3-10

C es un espacio de Banach o completo.

Pa.

Si $r > 0$, $Br = \{x \in \mathbf{C} : ||x|| \leq r\}$ es compacto; luego por (TEO. 1.3-9) se tiene que **C** es completo.

TEO. 1.3-11

Sea E un espacio normado y B un espacio de Banach. Entonces Lc(E, B) es un espacio de Banach.

Pa.

Sea (T_n) $n \in N$ una sucesión de Cauchy, asi $T_n(x)$ es una sucesión de Cauchy en B y como B es completo existe $T(x) \in B$ tq $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$ por definición.

i) Mostraremos que T es lineal. Sea $x, y \in E$;

$$T(x + y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x + y)$$

$$T(x + y) = \lim_{n\to\infty} (T_n(x) + T_n(y))$$

$$T(x + y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y)$$

$$T(x + y) = T(x) + T(y).$$

ii) $$T(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x)$$

$$T(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda\, T_n(x)$$

$$T(\lambda x) = \lambda \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

$$T(\lambda x) = \lambda T(x).$$

iii) Mostraremos la continuidad de T.

Como (T_n) $n \in \mathbb{N}$ es de Cauchy (aplicando TEO. 1.3-2) existe $K \geq 0$, tq $||T_n|| \leq K$ para todo n; sea $x \in E$, ya que $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$ se tiene por (TEO. 1.3-3-v-a) que

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n(x)|| = ||T(x)|| \qquad (1) ;$$

como además

$$||T_n(x)|| \leq ||T_n|| \; ||x||$$

$$||T_n(x)|| \leq K \, ||x||$$; aplicando limite se tiene

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n(x)|| \leq \lim_{n\to\infty} K \, ||x||$$

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n(x)|| \leq K \lim_{n\to\infty} ||x||$$

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n(x)|| \leq K \, ||x|| \; ;$$

luego por la igualdad de (1) tenemos :

$$||T(x)|| \leq K\,||x|| \quad ;$$

por tanto T es continua y $||T|| \leq K$

iv) Mostraremos que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$

Sea $\varepsilon > 0$. Sea $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $||T_n - T_m|| < \varepsilon$, $\forall\, m, n > N_1$

por ser $(T_n)\ n \in \mathbb{N}$ sucesión de Cauchy.

Sea $z \in E$ tq $||z|| \leq 1$, si $n, m \geq N_1$

$$||T_n(z) - T_m(z)|| < \varepsilon \quad \text{, ya que}$$

$$||T_n(z) - T_m(z)|| \leq \sup_{||x|| \leq 1} ||T_n(x) - T_m(x)|| = ||T_n - T_m||.$$

Sea $m > N_1$ y sea x tq $||x|| \leq 1$.

como $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} (T_n(x) - T_m(x)) = T(x) - T_m(x) \text{ ,}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n(x) - T_m(x)|| = ||T(x) - T_m(x)||$$

Como $||T_n(x) - T_m(x)|| < \varepsilon$, $\forall n > N_1$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n(x) - T_m(x)|| < \varepsilon$$

ó sea $||T(x) - T_m(x)|| < \varepsilon$, $\forall x$, $||x|| \leq 1$;

de donde $\sup ||T(x) - T_m(x)|| < \varepsilon$, $||x|| \leq 1$

luego existe $N \in \mathbb{N}$ tq

$$||T - T_m|| \leq \varepsilon \qquad \text{sq} \quad m \geq N.$$

TEO. 1.3-12

Sean E, F, G espacios normados y T, S funciones lineales continuas $T : E \longrightarrow F$ y $S : F \longrightarrow G$. Entonces $ST: E \longrightarrow G$ es una función lineal continua y $||ST|| \leq ||S||\ ||T||$.

Pa.

Por (TEO. 1-4) ST es lineal y sea $x \in E$.

$$||(ST)(x)|| = ||S(T(x))||$$

$$||(ST)(x)|| \leq ||S||\ ||T(x)||$$

$$||(ST)(x)|| \leq ||S||\ ||T||\ ||x|| \quad ; \text{ por tanto}$$

ST es continua, además

$$||ST|| \leq ||S||\ ||T|| \quad \text{por (TEO. 3-6-i)}$$

EL ESPACIO DUAL E'

Def. 1.3-7

Una forma lineal sobre un espacio vectorial V es una función lineal

$$f : V \longrightarrow \mathbb{C} \ ; \text{ tq } \ f \in L(V, \mathbb{C}).$$

Def. 1.3-8

Si E es un espacio normado, el espacio normado dual de E es el conjunto $Lc(E, \mathbb{C})$ de todas las formas lineales continuas $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$.

NOTACION :

$$E' = Lc(E, \mathbb{C})$$

TEO. 1.3-13

Si E es cualquier espacio normado, E' es un espacio de Banach relativo a la definición:

1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

2) $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$.

3) $||f|| = \text{Sup} \ \{|f(x)| : ||x|| \leq 1\}$.

Pa.

Ya que $\mathbb{C}$ es un espacio de Banach, aplicando (TEO. 1.3-11) se tiene que $Lc(E, \mathbb{C})$ es de Banach.

4. PROPIEDADES ELEMENTALES DE LOS ESPACIOS DE HILBERT

NOTACION

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, llamaremos a λ^* el conjugado de λ.

Si $\lambda = \alpha + i\,\beta$ entonces $\lambda^* = \alpha - i\,\beta$.

Propiedades :

i) $(\lambda^*)^* = \lambda$.

ii) $(\lambda + \mu)^* = \lambda^* + \mu^*$.

iii) $(\lambda\mu)^* = \lambda^*\mu^*$.

iv) $|\lambda| = \sqrt{\lambda^*\,\lambda}$.

v) $\lambda^* = \lambda$ ssi λ es real .

Def. 1.4-1

Un espacio pre-Hilbert es un espacio vectorial complejo P tq para cada par de vectores $x, y \in P$ existe un número complejo, llamado el producto escalar de x,y denotado (x/y).

Asumimos que este producto escalar cumple las siguientes leyes :

L_1 : $(x/y) = (y/x)^*$.

L_2 : $(x + y/z) = (x/z) + (y/z)$.

L_3 : $(\lambda x/y) = \lambda(x/y)$.

L_4 : $(x/x) > 0$ sq $x \neq \theta$.

TEO. 1.4-1

En todo espacio pre-Hilbert se cumplen las siguientes condiciones :

i) $(x/y + z) = (x/y) + (x/z)$.

ii) $(x/\lambda y) = \lambda^*(x/y)$.

iii) $(\theta/y) = (x/\theta) = 0$.

iv) $(x - y/z) = (x/z) - (y/z)$.

$(x/y - z) = (x/y) - (x/z)$.

v) Si $(x/z) = (y/z)$ para toda z, entonces $x = y$.

Pa.

i) $$\begin{aligned}(x/y + z) &= (y + z/x)^* \\ &= \left[(y/x) + (z/x)\right]^* \\ &= (y/x)^* + (z/x)^* \\ &= (x/y) + (x/z).\end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned}(x/\lambda y) &= (\lambda y/x)^* \\ &= \left[\lambda(y/x)\right]^* \\ &= \lambda^*(y/x)^* \\ &= \lambda^*(x/y) .\end{aligned}$$

iii) $(\theta/y) = (\theta + \theta/y)$

$$(\theta/y) = (\theta/y) + (\theta/y)$$

$$(\theta/y) - (\theta/y) = (\theta/y)$$

$$0 = (\theta/y) \qquad (1).$$

$$(x/\theta) = (x/\theta + \theta)$$

$$(x/\theta) = (x/\theta) + (x/\theta)$$

$$(x/\theta) - (x/\theta) = (x/\theta)$$

$$0 = (x/\theta) \qquad (2);$$

de (1) y (2) se tiene $(\theta/y) = (x/\theta) = 0$.

iv) $(x - y/z) = (x + (-y)/z)$

$$= (x/z) + (-y/z)$$

$$= (x/z) + (-1y/z)$$

$$= (x/z) - 1(y/z)$$

$$= (x/z) - (y/z).$$

$$(x/y - z) = (y - z/x)^*$$

$$= [(y/x) - (z/x)]^*$$

$$= [(y/x) + (-1(z/x))]^*$$

$$= (y/x)^* + (-1(z/x))^*$$

$$= (y/x)^* + (-1)^* \ (z/x)^*$$

$$= (x/y) - (x/z) .$$

v) Si $(x/z) = (y/z)$ para todo $z \in P$,

$$(x/z) - (y/z) = 0$$

$$(x - y/z) = 0$$

como es para todo $z \in P$, hagamos $z = x - y$, así

$$(x - y/x - y) = 0 \quad ,$$

luego $x - y = \theta$; por tanto $x = y$.

TEO. 1.4-2

En cualquier espacio pre-Hilbert P, se cumplen las siguientes igualdades :

i) $\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda k \ xk/y \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda k(xk/y)$

ii) $\left(x/ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda k^*(x/y_k)$

iii) $\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k / \sum_{i=1}^{m} \gamma_i y_i \right) = \sum_{\substack{k \leq n \\ i \leq m}} \lambda_k \gamma_i^* (x_k/y_i)$

NOTA : Se verificarán por inducción.

PA.

i) $\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k / y \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k/y)$.

Para k = 1 $\quad (\lambda_1 x_1/y) = \lambda_1(x_1/y)$.

Supongamos cierto para n - 1.

$$\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k/y\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k(x_k/y),$$

verificaremos que es cierto para n.

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k/y\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k/y\Big) + (\lambda_n x_n/y)$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k/y\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k(x_k/y) + \lambda_n(x_n/y) \quad \text{"hip. induc."}$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k/y\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x_k/y).$$

ii) $\Big(x/\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^*(x/y_k)$

para k = 1

$$(x/\lambda_1 y_1) = (\lambda_1 y_1/x)^*$$

$$= \lambda_1^*(y_1/x)^*$$

$$= \lambda_1^*(x/y_1).$$

Supongamos cierto para k = n - 1

$$\Big(x/\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k y_k\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^*(x/y_k)$$

verificaremos que es cierto para k = n.

$$(x/\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_k) = (x/\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k y_k + \lambda_n y_n)$$

$$= (x/\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k y_k) + (x/\lambda_n y_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k * (x/y_k) + \lambda_n * (x/y_n) \quad \text{"hip.induc."}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\lambda_k * (x/y_k)$$

iii) $$(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k/\sum_{i=1}^{m}\gamma_i y_i) = \sum_{\substack{k\le n\\ i\le m}}\lambda_k\gamma_i * (x_k/y_i)$$

para k = 1 y m fijo

$$(\lambda_1 x_1/\sum_{i=1}^{m}\gamma_i y_i) = (\sum_{i=1}^{m}\gamma_i y_i/\lambda_1 x_1)*$$

$$(\lambda_1 x_1/\sum_{i=1}^{m}\gamma_i y_i) = \sum_{i=1}^{m}\gamma_i * (y_i/\lambda_1 x_1)*$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\gamma_i * (\lambda_1 x_1/y_i)$$

$$= \sum_{i\le m}\lambda_1\gamma_i * (x_1/y_i) .$$

Supongamos cierto para n - 1 y m fijo.

$$(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k y_k/\sum_{i=1}^{m}\gamma_i y_i) = \sum_{\substack{k\le n-1\\ i\le m}}\lambda_k\gamma_i * (x_k/y_i)$$

verificaremos que es cierto para n, y m fijo

$$(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k/\sum_{i=1}^{m}\gamma_i y_i) = ((\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k x_k + \lambda_n x_n)/\sum_{i=1}^{m}\gamma_i y_i)$$

$$= (\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k / \sum_{i=1}^{m} \gamma_i y_i) + (\lambda_n x_n / \sum_{i=1}^{m} \gamma_i y_i)$$

$$= \sum_{\substack{k\leq n-1 \\ i\leq m}} \lambda_k \gamma_i{*}(x_k/y_i) + (\sum_{i=1}^{m} \gamma_i y_i/\lambda_n x_n)^*$$

$$= \sum_{\substack{k\leq n-1 \\ i\leq m}} \lambda_k \gamma_i{*}(x_k/y_i) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i{*}(y_i/\lambda_n x_n)^*$$

$$= \sum_{\substack{k\leq n-1 \\ i\leq m}} \lambda_k \gamma_i{*}(x_k/y_i) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i{*}(\lambda_n x_n/y_i)$$

$$= \sum_{\substack{k\leq n-1 \\ i\leq m}} \lambda_k \gamma_i{*}(x_k/y_i) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_n \gamma_i{*}(xn/y_i)$$

$$= \sum_{\substack{k\leq n \\ i\leq m}} \lambda_k \gamma_i{*}(x_k/y_i)$$

Def. 1.4-2

En un espacio pre-Hilbert P,la norma de un vector **x**, denotada por $||x||$, es el número real no negativo definido por la expresión:

$$||x|| = \sqrt{(x/x)}.$$

TEO. 1.4-3

Sea P un espacio pre-Hilbert, x $\in$ P, $\lambda \in$ **C**, las siguientes condiciones se cumplen:

i) $||\lambda x|| = |\lambda| \; ||x||.$

ii) $||x|| > 0$ sq $x \neq \theta;$

$||x|| = 0$ ssi $x = \theta.$

Pa.

i) $||\lambda x||^2 = (\lambda x/\lambda x)$

$||\lambda x||^2 = \lambda(x/\lambda x)$

$||\lambda x||^2 = \lambda(\lambda^* x/x)$

$||\lambda x||^2 = \lambda\lambda^*(x/x)$

$||\lambda x||^2 = |\lambda|^2 \; ||x||^2$

$||\lambda x|| \;\; = |\lambda| \;\; ||x||.$

ii) Por L_4 se tiene que $||x|| > 0$ si $x \neq \theta$, $(x/\Theta) = 0$ para todo $x \in P$, se tiene además que :

1) $||-x|| = ||-1(x)||$

$||-x|| = |-1| \; ||x||$

$||-x|| = ||x||$ (a).

2) $||ix|| = |i| \;\; ||x||$

$||ix|| = 1||x||$

$||ix|| = \; ||x||$ (b);

de las conclusiones (a) y (b) tenemos :

$||-x|| = ||ix|| = ||x||$,

el vector $||x||^{-1}x$ tiene norma 1 si $x \neq \Theta$.

Sea $y = ||x||^{-1}x$

$$||y|| = \left|\left|\,||x||^{-1}\,x\,\right|\right|$$

$$||y|| = \left|\left|\frac{x}{||x||}\right|\right|$$

$$||y|| = \frac{||x||}{||x||} \quad ; \quad \text{por tanto } ||y|| = 1.$$

TEO. 1.4-4

Ley del paralelogramo en un espacio pre-Hilbert P.

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

Pa.

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = (x+y/x+y) + (x-y/x-y)$$

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = (x/x+y)+(y/x+y)+(x/x-y)+(-y/x-y)$$

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = (x/x)+(x/y)+(y/x)+(y/y)+(x/x)+(x/-y) + (-y/x)+(-y/-y)$$

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = (x/x)+(x/y)+(y/x)+(y/y)+(x/x)+(-1)*(x/y)-(y/x)-(-1)*(y/y)$$

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(x/x)+(x/y)+(y/x)+2(y/y)-(x/y)-(y/x)$$

anulando

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\,||x||^2 + 2\,||y||^2.$$

TEO. 1.4-5

Identidad de polarización en un espacio pre-Hilbert P.

$$(x/y) = \frac{1}{4}\left[||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2\right].$$

Pa.

$$||x+y||^2 = (x+y/x+y)$$

$$= (x/x+y) + (y/x+y)$$

$$= (x/x) + (x/y) + (y/x) + (y/y)$$

$$= ||x||^2 + ||y||^2 + (x/y) + (y/x) \qquad (a).$$

$$||x-y||^2 = (x-y/x-y)$$

$$= (x/x-y) - (y/x-y)$$

$$= (x/x) - (x/y) - \left[(y/x) - (y/y)\right]$$

$$= ||x||^2 - (x/y) - (y/x) + ||y||^2$$

$$= ||x||^2 + ||y||^2 - (x/y) - (y/x) \qquad (b).$$

$$||x+iy||^2 = (x + iy/x + iy)$$

$$= (x/x + iy) + (iy/x + iy)$$

$$= (x/x) + (x/iy) + (iy/x) + (iy/iy)$$

$$= (x/x) + ii^*(y/y) + i^*(x/y) + i(y/x)$$

$$= ||x||^2 + |i|^2\ ||y||^2 - i(x/y) + i(y/x).$$

$$i||x+iy||^2 = i\left[\ ||x||^2 + |i|^2 ||y||^2 - i(x/y) + i(y/x)\ \right]$$

$$= i||x||^2 + i||y||^2 - ii(x/y) + ii(y/x)$$

$$= i||x||^2 + i||y||^2 + (x/y) - (y/x) \qquad (c) .$$

$$||x-iy||^2 = (x - iy/x - iy)$$

$$= (x/x - iy) - (iy/x - iy)$$

$$= (x/x) - (x/iy) - [(iy/x) - (iy/iy)]$$

$$= ||x||^2 - i^*(x/y) - i(y/x) + ii^*(y/y)$$

$$= ||x||^2 - i^*(x/y) - i(y/x) + ||y||^2.$$

$$-i||x-iy||^2 = -i||x||^2 - i(-i)^*(x/y) - i(-i)(y/x) - i||y||^2$$

$$= -i||x||^2 + (x/y) - (y/x) - i\ ||y||^2$$

$$= -i||x||^2 - i||y||^2 + (x/y) - (y/x) \qquad (d) .$$

Sumando los resultados en (a), (b), (c), (d) y multiplicando dicha suma por 1/4 , se tiene :

$$\frac{1}{4}\left[||x||^2 + ||y||^2 + (x/y) + (y/x) - ||x||^2 - ||y||^2 + (x/y) + (y/x) + \right.$$

$$\left. i||x||^2 + i||y||^2 + (x/y) - (y/x) - i||x||^2 - i||y||^2 + (x/y) - (y/x)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ 4(x/y)\right]$$

$= (x/y)$; por lo tanto

$$(x/y) = \frac{1}{4}\left[||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2\right].$$

TEO. 1.4-6

Desigualdad de Cauchy Schwarz.

En un espacio pre-Hilbert P,

$$||(x/y)|| \leq ||x||\ ||y||.$$

Pa.

Sean $x, y \in P$.

i) Cuando $x = \Theta$ y $y = \Theta$,

$$||(x/y)|| \leq ||x||\ ||y|| \text{ se cumple .}$$

ii) Supongamos que $x \neq \Theta$ y $y \neq \Theta$, dividiendo en la desigualdad por $||y||$ se tiene :

$$\frac{|(x/y)|}{||y||} \leq ||x|| \quad ;$$

como

$$\frac{|(x/y)|}{||y||} = ||y||^{-1}\ |(x/y)|$$

$$= \left|||y||^{-1}\right|\ |(x/y)|$$

$$= |(||y||^{-1*}x/y)|$$

$$= |(x/\ ||y||^{-1}y)|\ ;$$

haciendo $z = ||y||^{-1}y$, tenemos que $||z|| = 1$ y

$$|(x/||y||^{-1}y)| = |(x/z)|.$$

Bastará verificar que $|(x/z)| \leq ||x||$.

Para todo $\lambda \in \mathbf{C}$ tenemos que :

$$||x - \lambda z||^2 = (x - \lambda z/x - \lambda z)$$

$$= (x/x - \lambda z) - (\lambda z/x - \lambda z)$$

$$= (x/x) - (x/\lambda z) - [(\lambda z/x) - (\lambda z/\lambda z)]$$

$$= (x/x) - \lambda^*(x/z) - \lambda(z/x) + \lambda^*\lambda\ (z/z)$$

$$= ||x||^2 - \lambda^*(x/z) - \lambda(z/x) + \lambda^*\lambda||z||^2$$

$$= ||x||^2 - \lambda^*(x/z) - \lambda(z/x) + \lambda^*\lambda \cdot (||z|| = 1)$$

$$= ||x||^2 - (x/z)(x/z)^* + (x/z)(x/z)^* - \lambda^*(x/z) - \lambda(x/z)^* + \lambda\lambda^*$$

$$= ||x||^2 - |(x/z)|^2 + (x/z)^* [(x/z) - \lambda] - \lambda^*[(x/z) - \lambda]$$

$$= ||x||^2 - |(x/z)|^2 + [(x/z) - \lambda]\quad [(x/z)^* - \lambda^*]$$

$$= ||x||^2 - |(x/z)|^2 + [(x/z) - \lambda]\quad [(x/z) - \lambda]^*$$

$$||x - \lambda z||^2 = ||x||^2 - |(x/z)|^2 + |(x/z) - \lambda|^2 \qquad (a);$$

haciendo $\lambda = (x/z)$ y sustituyendo en la igualdad anterior

$$||x - \lambda z||^2 = ||x||^2 - |(x/z)|^2 + |\lambda-\lambda|^2$$

$$0 \leq ||x - \lambda z||^2 = ||x||^2 - |(x/z)|^2$$

$$0 \leq ||x||^2 - |(x/z)|^2$$

$$|(x/z)|^2 \leq ||x||^2$$

$|(x/z)| \leq ||x||$, lo que se quería verificar.

TEO. 1.4-7

Desigualdad triangular. En un espacio pre-Hilbert P,

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Pa.

Sean x, y $\in$ P y $\lambda \in \mathbf{C}$; denotaremos con $R_e\lambda$, la parte real de λ .

Damos por conocido que la parte real de un número complejo es menor o igual que el valor absoluto de dicho número complejo.

$$||x + y||^2 = (x+y/x + y)$$

$$||x + y||^2 = (x/x + y) + (y/x + y)$$

$$||x + y||^2 = (x/x) + (x/y) + (y/x) + (y/y)$$

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + (x/y) + (x/y)^*$$

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\mathrm{Re}(x/y),$$

como

$$||x||^2+||y||^2+2\mathrm{Re}(x/y) \leq ||x||^2+||y||^2+2|(x/y)|$$

entonces

$$||x+y||^2 \leq ||x||^2+||y||^2+2|(x/y)|$$

además

$$||x||^2+||y||^2+2|(x/y)| \leq ||x||^2+||y||^2+2||x||\ ||y|| \ ,$$

luego

$$||x+y||^2 \leq (||x||+||y||)^2 \quad ;$$

por tanto

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| .$$

LA METRICA INDUCIDA EN UN ESPACIO PRE-HILBERT

La norma definida en un espacio pre-Hilbert induce en éste una métrica.

Def. 1.4-3

En un espacio pre-Hilbert P, definimos la distancia de x a y por

$$\begin{aligned} ||\ \ || : P\mathrm{x}P &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,\ y) &\longmapsto ||x-y|| . \end{aligned}$$

Las propiedades de distancia para la función así definida se verifican en forma inmediata teniendo en cuenta las propiedades de la norma.

Ciertas propiedades de la norma tienen formulaciones naturales en términos de distancia.

i) $||x - y|| \geq 0$; $||x - y|| = 0$ ssi $x = y$.

ii) $||x - y|| = ||y - x||$.

iii) $||x - z|| \leq ||x - y|| + ||y - z||$.

OBSERVACION 1.4-1

Todo espacio pre-Hilbert P, es un espacio métrico con $d(x, y) = ||x - y||$, y las siguientes relaciones se cumplen:

i) $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$;

$d(x, y) = 0$ si $x = y$.

ii) $d(x, y) = d(y, x)$.

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Def. 1.4-4

Un espacio pre-Hilbert P es completo si toda sucesión $(x_n)n \in \mathbb{N}$ de Cauchy en P, converge a $x \in P$.

OBSERVACION 1.4-2

En cualquier espacio pre-Hilbert P, se tiene que toda sucesión de Cauchy es acotada.

" Prueba Similar en Espacios Normados",

TEO. 1.4-8

Sea P un espacio pre-Hilbert cualquiera y sean $(x_n)n \in N$, $(y_n)n \in N$ sucesiones de puntos de P, entonces se cumple que.

i) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (x_n/y_n) = (x/y).$$

ii) Si $(x_n)n \in N$ y $(y_n)n \in N$ son sucesiones vectoriales de Cauchy, entonces $(x_n/y_n)n \in N$ es una sucesión de Cauchy de escalares.

Pa.

i) $(x_n/y_n) - (x/y) = (x_n-x/y_n-y) + (x/y_n-y) + (x_n-y/y)$.

$$|(x_n/y_n)-(x/y)| = |(x_n-x/y_n-y)+(x/y_n-y)+(x_n-y/y)|$$

aplicando desigualdad triangular se tiene,

$$|(x_n/y_n)-(x/y)| \leq ||x_n-x||\ ||y_n-y|| + ||x||\,||y_n-y||$$
$$+ ||x_n-x||\ ||y|| \qquad\qquad (a).$$

Además por hipótesis tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n-x|| = 0 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} ||y_n-y|| = 0,$$

luego aplicando límite en (a)

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |(x_n/y_n)-(x/y)| \leq \lim_{n\to\infty} ||x_n-x||\,||y_n-y|| +$$

$$\lim_{n\to\infty} ||x||\ ||y_n - y|| + \lim_{n\to\infty} ||x_n - x||\ ||y||$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |(x_n/y_n) - (x/y)| \leq 0\cdot 0 + ||x||\cdot 0 + 0\cdot ||y|| = 0,$$

asi $\lim_{n\to\infty} |(x_n/y_n) - (x/y)| = 0$; por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} (x_n/y_n) = (x/y) .$$

ii) Mostraremos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tq

$$||(x_n/y_n) - (x_m/y_m)|| < \varepsilon \qquad \text{sq} \quad m, n \geq N$$

Por ser $(x_n)n \in \mathbb{N}$ y $(y_n)n \in \mathbb{N}$ sucesiones de Cauchy, se tiene que $(x_n)n \in \mathbb{N}$ y $(y_n)n \in \mathbb{N}$ son acotadas por - - (TEO. 1.3-2), luego existen k_1, $k_2 > 0$ tq $||x_n|| < k_1$ y $||y_n|| < k_2$ para todo n; además existen N_1, N_2, N_3, $N_4 \in \mathbb{N}$ tales que :

$$||x_n - x_m|| < \sqrt{\varepsilon/3} \qquad \text{sq} \quad m, n \geq N_1 .$$

$$||y_n - y_m|| < \sqrt{\varepsilon/3} \qquad \text{sq} \quad m, n \geq N_2 .$$

$$||x_n - x_m|| < \varepsilon/3k_2 \qquad \text{sq} \quad m, n \geq N_3 .$$

$$||y_n - y_m|| < \varepsilon/3k_1 \qquad \text{sq} \quad m, n \geq N_4 .$$

Para todo m, n se tiene :

$$|(x_n/y_n)-(x_m/y_m)| = |(x_n - x_m/y_n - y_m) + (x_m/y_n - y_m) +$$

$$(x_n - x_m/y_m)| ;$$

aplicando desigualdad triangular se tiene :

$$|(x_n/y_n)-(x_m/y_m)| \leq |(x_n-x_m/y_n-y_m)| + |(x_m/y_n-y_m)|$$

$$+ |(x_n-x_m/y_m)|.$$

Por la desigualdad de Cauchy Schwarz se mayora el miembro de - la derecha

$$|(x_n/y_n)-(x_m/y_m)| \leq ||x_n-x_m|| \; ||y_n-y_m|| + ||x_m|| \; ||y_n-y_m||$$

$$+ ||x_n-x_m|| \; ||y_m||,$$

como $||x_m|| < k_1$ y $||y_m|| < k_2$ se tiene

$$|(x_n/y_n)-(x_m/y_m)| < ||x_n-x_m|| \; ||y_n-y_m|| + k_1||y_n-y_m||$$

$$+ k_2||x_n-x_m||$$

$$|(x_n/y_n)-(x_m/y_m)| < \sqrt{\varepsilon/3} \;\; \sqrt{\varepsilon/3} + k_1 \; \varepsilon/3k_1 + k2 \; \varepsilon/3k_2 \quad \text{sq}$$

m, n $\geq$ N, haciendo

$$N = \max \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$$

$|(x_n/y_n)-(x_m/y_m)| < \varepsilon$ sq $m, n \geq N$, $N = \max\{ N_1, N_2, N_3, N_4\}$

$|(x_n/y_n)-(x_m/y_m)| < \varepsilon$ sq $m, n \geq N$; por lo tanto $((x_n/y_n))n \in N$

es de Cauchy.

COROLARIO 1.4-1

En un espacio pre-Hilbert P, se cumple :

i) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x||$.

ii) Si $(x_n)n \in \mathbf{N}$ es sucesión de Cauchy, entonces $||X_n||$ converge.

Pa.

i) Sean x_n, $x \in P$ con x fijo

$$\lim_{n\to\infty} (x_n/x_n) = (x/x)$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n/x_n)^{1/2} = (x/x)^{1/2}$$

$$\lim_{n\to\infty} (||x_n||^2)^{1/2} = (||x||^2)^{1/2}$$

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x||.$$

ii) Como $(x_n)n \in \mathbf{N}$ es de Cauchy, por (TEO.1.4-8-ii) $(x_n/x_n)n \in \mathbf{N}$ es de Cauchy en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}$ es completo, - luego $||x_n||^2$ converge; por tanto $(||x_n||)n \in \mathbf{N}$ converge.

VECTORES ORTOGONALES Y VECTORES ORTONORMALES

Def. 1.4-5

Si x y y son vectores en un espacio pre-Hilbert P, se dice que x es ortogonal a y si se tiene que $(x/y) = 0$ y se denota - $x \perp y$.

La relación de ortogonalidad es simétrica, es decir, si $x \perp y$, entonces $y \perp x$.

Verificación :

Sea $x \perp y$ entonces $(x/y) = 0$ por definición; como $0 = 0^*$ y $(x/y) = (y/x)^*$, luego $(y/x) = 0$; por lo tanto $y \perp x$.

Si $x \perp x$ entonces $(x/x) = 0$; es evidente que $x = \Theta$.

NOTA :

Todo vector $x \in P$ es ortogonal a $\Theta \in P$.

TEO. 1.4-9

Sea P espacio pre-Hilbert y $x, y_1, y_2, \ldots, y_n \in P$; si x es ortogonal a cada $y_1, y_2, \ldots, y_n$, entonces x es ortogonal a toda combinación lineal de los y_k con $k = 1, 2, \ldots, n$.

Pa.

Sea $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n$$

$$(x/y) = (x/\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n)$$

$$(x/y) = (x/\lambda_1 y_1) + (x/\lambda_2 y_2) + \ldots + (x/\lambda_n y_n)$$

$$(x/y) = \lambda_1^*(x/y_1) + \lambda_2^*(x/y_2) + \ldots + \lambda_n^*(x/y_n)$$

$$(x/y) = \lambda_1^* \circ 0 + \lambda_2^* \circ 0 + \ldots + \lambda_n^* \circ 0$$

(por hipótesis x es ortogonal a cada y_k con $k = 1, 2, \ldots, n$); por lo tanto

$$(x/y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k K'_k = 0 \quad \text{con } K' = 0\,,$$

luego x es ortogonal a una combinación lineal de los y_k con $k = 1, 2, \ldots, n$.

Def. 1.4-6

Un conjunto S de vectores, se dice que es ortogonal si $x \perp y$ para todo $x \neq y$, $x, y \in S$. Una sucesión $(x_n)n \in \mathbb{N}$ de vectores es llamada una sucesión ortogonal si $x_j \perp y_k$ para toda $j \neq k$.

TEO. 1.4-10

Sea P espacio pre-Hilbert, $x, y \in P$. Si $x \perp y$, entonces

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

En general, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son ortogonales, entonces

$$||\sum_{k=1}^{n} x_k||^2 = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2 \text{ (Rel. Pitagórica).}$$

Pa.

Para $k = 2$

Si $x \perp y$ entonces
$$\begin{aligned} ||x + y||^2 &= (x+y/x+y) \\ &= (x/x+y)+(y/x+y) \\ &= (x/x)+(x/y)+(y/x)+(y/y) \\ &= ||x||^2 + 0 + 0 + ||y||^2 \\ &= ||x||^2 + ||y||^2. \end{aligned}$$

Asumamos por inducción que es cierto para n - 1

$$\left\|\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \|x_k\|^2$$

se probará que es cierto para n

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right\|^2 + \|x_n\|^2$$

por (TEO. 4-9) $x_k \perp x_j$, $k \neq j$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \|x_k\|^2 + \|x_n\|^2 \text{ por (hip.ind.)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 .$$

Def. 1.4-6

Un conjunto S de vectores en un espacio pre-Hilbert P, es llamado ortonormal, si S es ortogonal y $\|x\| = 1$ para todo - $x \in S$.

Una sucesión $(x_n)n \in \mathbb{N}$ de vectores "finita o infinita" - es llamada ortonormal si $x_j \perp x_k$ sq $j \neq k$ y $\|x_k\| = 1$ para toda k.

TEO. 1.4-11

Sea P un espacio pre-Hilbert. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in P$ son vectores ortonormales, entonces para todo vector $x \in P$ se tiene :

i) $$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} (x/x_k)x_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x/x_k)|^2 .$$

ii) $\sum_{k=1}^{n} |(x/x_k)|^2 \leq ||x||^2$

(IGUALDAD Y DESIGUALDAD DE BESSEL)

Pa.

i) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_k$, números complejos arbitrarios; por (TEO. 4-10) se tiene :

$$||\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k||^2 = \sum_{k=1}^{n} ||\lambda_k x_k||^2$$

$$||\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k||^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \; ||x_k||$$

$$||\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k||^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \quad \text{por ser } ||x_k|| = 1 \text{ para todo } k .$$

$$||x-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k||^2 = (x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k/x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k)$$

$$= (x/x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) - [(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k/x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k)]$$

$$= (x/x) - (x/\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) - [(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k/x) - (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k/\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k)]$$

$$= (x/x) - (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k/x)^* - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x/x_k)^* + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^* \lambda_k \; ||x_k||^2$$

por (TEO. 1.4-2-iii)

$$= (x/x) - (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^*(x/x_k)) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x/x_k)^* + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^* \lambda_k \quad \text{por ser } ||x_k||^2 = 1$$

haciendo $\lambda^* = (x/x_k)^*$ y sustituyendo en la igualdad anterior tenemos :

$$(x/x) - \sum_{k=1}^{n} (x/x_k)^*(x/x_k) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\lambda_k^* + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\lambda_k^* \quad ;$$

por tanto

$$||x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x/x_k)|^2$$

ii) Como $0 \leq ||x - \sum_{k=1}^{n} (x/x_k)||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x/x_k)|^2$,

$$0 \leq ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x/x_k)|^2;$$

por tanto

$$\sum_{k=1}^{n} |(x/x_k)|^2 \leq ||x||^2$$

TEO. 1.4-12

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vectores ortonormales en un espacio pre-Hilbert P.

Si $y = \sum_{k=1}^{n} (x/x_k)x_k$ y $z = x - y$, entonces

i) $(z/x_k) = 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots., n$

ii) $(z/y) = 0$

Pa.

i) $(z/x_j) = (x - y/x_j)$

$$(z/x_j) = (x/x_j) - (y/x_j)$$

$$(z/x_j) = (x/x_j) - (\sum_{k=1}^{n} (x/x_k)x_k/x_j)$$

$(z/x_j) = (x/x_j) - (x/x_j) = 0$; luego,

$(z/xj) = 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

ii) Probado en (TEO. 4-9).

Este teorema nos proporciona una descomposición $x = z + y$ donde y es una combinación lineal de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $z \perp x_k$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

TEO. 1.4-13

Procedimiento de Ortonormalización de Gram-Sehmidt.

Si $y_1, y_2, \ldots$ es una sucesión de vectores linealmente independientes en un espacio pre-Hilbert P, existe una sucesión ortonormal $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tal que

$$[x_1, x_2, \ldots x_n] = [y_1, y_2, \ldots y_n]$$

para todo n.

Es decir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ generan el mismo subespacio lineal que $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Pa.

Los vectores x_n seran definidos inductivamente.

Sea $x_1 = ||y_1||^{-1}y_1$

Asumamos inductivamente que los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ son realmente definidos de tal forma que

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}] = [y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]$$

y $||x_i|| = 1$ para todo $i \leq n - 1$ y $x_i \perp x_j$, $i \neq j$

haciendo $z_n = y_n - \sum_{k=1}^{n-1} (y_n/x_k)x_k$ y definimos

$$x_n = ||z_n||^{-1} z_n \quad ;$$

de z_n se tiene que

$$y_n = z_n + \sum_{k=1}^{n-1} (y_n/x_k)x_k \quad ,$$

de manera que

$$x_n = ||z_n||^{-1}(y_n - \sum_{k=1}^{n-1} (y_n/x_k)x_k)$$

$$x_n = ||z_n||^{-1}\, y_n - ||z_n||^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} (y_n/x_k)x_k$$

así
$$||z_n||^{-1}\, y_n = x_n + ||z_n||^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} (y_n/x_k)x_k$$

$$y_n = ||z_n||x_n + \sum_{k=1}^{n-1} (y_n/x_k)x_k$$

verificaremos que $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ para ello mostraremos que si $y \in [y_1, y_2, \ldots, y_n]$, entonces y se puede expresar como una combinación lineal de los x_k con - - $k = 1, 2, \ldots, n$.

Se tiene por hipótesis inductiva que

$$[x_1, x_2, \ldots., x_{n-1}] = [y_1, y_2, \ldots., y_{n-1}] .$$

Sea $y \in [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ y α_k escalares con $k = 1, 2, \ldots., n$.

$$y = \alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2 + \ldots. + \alpha_{n-1}\, y_{n-1} + \alpha_n\, y_n$$

$$y = (\alpha_1\, y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\, y_{n-1}) + \alpha_n\, y_n$$

$$y = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_k + \alpha_n(||z_n||x_n + \sum_{k=1}^{n-1} (y_n/x_k)x_k)$$

$$y = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_k + \alpha_n \; ||z_n||x_n + \alpha_n \sum_{k=1}^{n-1} (y_n/x_k)x_k$$

hemos logrado expresar y como una combinación lineal de los - x_k con k = 1, 2, ..., n; verificaremos ahora que $z_n \perp x_k$ para k = 1, 2, ..., n - 1.

$$(z_n/x_i) = (y_n - \sum_{k=1}^{n-1} (y_n/x_k)x_k/x_i) \quad \text{con i fijo e } i \leq n-1$$

$$(z_n/x_i) = (y_n/x_i) - (\sum_{k=1}^{n-1} (y_n/x_k)x_k/x_i)$$

$$(z_n/x_i) = (y_n/x_i) - [(y_n/x_1)(x_1/x_i) + (y_n/x_2)(x_2/x_i)\ldots$$

$$\ldots + (y_n/x_{n-1})(x_{n-1}/x_i)]$$

$$(z_n/x_i) = (y_n/x_i) - [0 + 0 + \ldots + 0 + (y_n/x_i) \cdot 1 + 0$$

$$+ \ldots. + 0]$$

$$(z_n/x_i) = (y_n/x_i) - (y_n/x_i)$$

$(z_n/x_i) = 0$; por lo tanto $z_n \perp x_k$ para k = 1, 2,.. ..., n - 1.

COROLARIO 1.4-2

Si P es un espacio pre-Hilbert de dimensión finita n, entonces P tiene una base $(x_1, x_2, \ldots., x_n)$ de fáctores ortonormales.

Pa.

Sea $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ una base de P, aplicando el proceso de ortonormalización de Gram Schmidt se tiene que existe una base $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ de vectores ortonormales en P.

Def. 1.4-7

Si P es un espacio pre-Hilbert y $S \subset P$.

S es total si dado $x \in S$ y $z \in P$ entonces $(x/z) = 0$ solo si $z = 0$.

TEO. 1.4-14

Sea P un espacio pre-Hilbert de dimensión finita y $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ una base ortonormal en E, entonces la sucesión (x_n) $n \in \mathbf{N}$ con

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} x_{ni}\, e_i \quad \text{es de Cauchy}$$

ssi para cada $i = 1, 2, \ldots, k$

$$(x_{ni})\ n \in \mathbf{N} \text{ es de Cauchy.}$$

Pa.

" ===> " Sea $\varepsilon > 0$, dado que $(x_n) n \in \mathbf{N}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$||x_m - x_n|| < \varepsilon \qquad \text{sq} \quad m, n \geq N \quad ;$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ tenemos que :

$$||x_{m_i} - x_{n_i}|| \leq ||x_m - x_n|| < \varepsilon \qquad \text{ya que}$$

$$x_m - x_n = \sum_{i=1}^{k} x_{m_i}\, e_i - \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\, e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (x_{m_i} - x_{n_i}) e_i \ ; \quad \text{luego } (x_{n_i})\ n \in \mathbf{N}$$

es una sucesión de Cauchy para $i = 1, 2, \ldots\ldots, k$.

" <=== " Sea $\varepsilon > 0$; dado que $(x_{n_i})\ n \in \mathbf{N}$ es una sucesión de Cauchy para cada $i = 1, 2, \ldots., k$, entonces existe $N_i \in \mathbf{N}$ tq para $m, n \geq N_i$ implica que

$$||x_{n_i} - x_{m_i}|| < \frac{\varepsilon}{k} \quad , \text{asi}$$

$$||x_n - x_m|| = ||\sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\, e_i - \sum_{i=1}^{k} x_{m_i}\, e_i||$$

$$||x_n - x_m|| = ||\sum_{i=1}^{k} (x_{n_i} - x_{m_i}) e_i||$$

$$||x_n - x_m|| = ||\sum_{i=1}^{k} (x_{n_i} - x_{m_i})||$$

$$||x_n - x_m|| \leq \sum_{i=1}^{k} ||x_{n_i} - x_{m_i}||$$

$$||x_n - x_m|| < \varepsilon \qquad \text{sq} \quad m, n \geq N,$$

tomando $N = \max \{N_i;\ i = 1, 2, \ldots., k\}$; por tanto $(x_n) n \in \mathbf{N}$ es una sucesión de Cauchy.

TEO. 1.4-15

La sucesión $(x_n)\ n \in \mathbf{N}$ de elementos de P converge a - -

$x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$ ssi para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ la sucesión $(x_{ni})_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_i.

Pa.

" ===> " Sea $\varepsilon > 0$; entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N$ implica $||x - x_n|| < \varepsilon$; luego para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene que

$$||x_i - x_{ni}|| \leq ||x - x_n||$$

$$||x_i - x_{ni}|| < \varepsilon \quad \text{sq} \quad n \geq N .$$

" <=== " Sea $\varepsilon > 0$; existe N_i con $i = 1, 2, \ldots, k$ tq $n \geq N$ implica que

$$||x_i - x_{ni}|| < \frac{\varepsilon}{k} \quad , \text{ así}$$

$$||x - x_n|| = ||\sum_{i=1}^{k} x_i e_i - \sum_{i=1}^{k} x_{ni} e_i||$$

$$||x - x_n|| = ||\sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{ni}) e_i||$$

$$||x - x_n|| = ||\sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{ni})||$$

$$||x - x_n|| \leq \sum_{i=1}^{k} ||(x_i - x_{ni})||$$

$$||x - x_n|| < \varepsilon \quad \text{sq} \quad n \geq N \text{ , tomando}$$

$$N = \max \{N_i ; i = 1, 2, \ldots, k\} .$$

Def. 1.4-8

Un espacio pre-Hilbert H que es completo, es llamado un espacio de Hilbert.

TEO. 1.4-16

Todo espacio pre-Hilbert P de dimensión finita es completo.

Pa.

Sea $(x_n)n \in \mathbf{N}$ una sucesión de Cauchy en P, con

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\, e_i \ , \ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ k \quad ;$$

se tiene por (TEO. 1.4-14) que $(x_{n_i})n \in \mathbf{N}$ es de Cauchy, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, además por (TEO. 1.3-10), tenemos que C es completo; luego la sucesión $(x_{n_i})\ n \in \mathbf{N}$ convergen a x_i para $i = 1, 2, \ldots, k$, y por (TEO. 1.4-15) la sucesión $(x_n)n \in \mathbf{N}$ converge a

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i\, e_i \quad ; \quad \text{por tanto P es completo.}$$

SUBESPACIOS LINEALES CERRADOS

Def. 1.4-9

Sea S un subconjunto de un espacio pre-Hilbert P. Un vector $x \in P$ se dice que es ortogonal a S si $x \perp y$, para todo $y \in S$.

<u>NOTACION</u> : $x \perp S$, x ortogonal a S.

Def. 1.4-10

El conjunto de todos los vectores $x \in P$ tales que $x \perp S$ se llama el aniquilador de S y se denota por $S^{\perp}$.

$$S^{\perp} = \{x \in P : (x/y) = 0 \text{ , para todo } y \in S\}.$$

Ejemplos :

1) $P^{\perp} = \{\Theta\}$.

2) $\{\Theta\}^{\perp} = P$.

TEO. 1.4-17

Si P es un espacio pre-Hilbert y $S \subset P$, entonces :

i) $S^{\perp}$ es un subespacio lineal de P.

ii) Además si $(x_n)n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de $S^{\perp}$, $x \in P$ tq $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $x \in S^{\perp}$.

Pa.

i) Es evidente que $\Theta \in S$ y por (TEO. 1.4-9) $S^{\perp}$ es un subespacio lineal de P.

ii) Supongamos que $(x_n)n \in \mathbb{N}$ es una sucesión tq $x_n \perp S$ para todo n, y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Para todo $y \in S$, se tiene $\lim_{n\to\infty} (x_n/y) = (x/y)$ por(TEO.1.4-8-i), como $(x_n/y) = 0$ para todo n, luego $(x/y) = 0$; por lo tanto $x \in S^{\perp}$.

NOTA : 1.4-1 - En particular, si S es subconjunto de un espacio pre-Hilbert P, un vector $x \in P$ es adherente a S ssi existe una sucesión $(x_n)n \in \mathbb{N}$ de puntos de S tq $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

NOTA : 1.4-2 - Si S es un subconjunto de un espacio pre-Hilbert P, denotamos el aniquilador de $S^{\perp}$ por $S^{\perp\perp}$, es decir, $(S^{\perp})^{\perp} = S^{\perp\perp}$.

TEO. 1.4-18

Si $S \subset P$, $J \subset P$ y P es un espacio pre-Hilbert, entonces :

i) $S \subset S^{\perp\perp}$.

ii) Si $S \subset J$, entonces $J^{\perp} \subset S^{\perp}$.

iii) $(S^{\perp\perp})^{\perp} = S^{\perp}$.

Pa.

i) Sea $x \in S$. Para todo $y \in S^{\perp}$ se tiene que $y \perp x$, asi $x \perp S^{\perp}$, es decir $x \in (S^{\perp})^{\perp}$, así tenemos que $x \in S$ implica que $x \in S^{\perp\perp}$; por tanto $S \subset S^{\perp\perp}$.

ii) Supongamos que $S \subset J$. Si $x \perp J$ entonces $x \perp S$, se tiene así que $x \in J^{\perp}$ implica que $x \in S^{\perp}$; por tanto $S \subset J$ implica que $J^{\perp} \subset S^{\perp}$.

iii) Por i) $S \subset S^{\perp\perp}$, entonces aplicando parte ii) $(S^{\perp\perp})^{\perp} \subset S^{\perp}$ (a).

Por i) tenemos $S^{\perp} \subset (S^{\perp})^{\perp\perp}$ (b), luego por las inclusiones (a) y (b) se tiene

$$(S^{\perp\perp})^{\perp} = S^{\perp}.$$

Def. 1.4-11

Si S y J son subconjuntos de un espacio pre-Hilbert P. Se dice que S es ortogonal a J en caso que $x \perp y$ para todo $x \in S$ y para todo $y \in J$.

<u>NOTACION</u> : $S \perp J$.

<u>Ejemplos</u> :

1) $S \perp S^{\perp}$.

2) $\{\Theta\} \perp S$ para todo $S \subset P$.

3) Convendremos que $\phi \perp S$.

TEO. 1.4-19

Si M y N son subespacios lineales de un espacio pre-Hilbert P, tq $M \perp N$, entonces todo $x \in M + N$ tiene una única representación $x = y + z$ con $y \in M$ y $z \in N$.

Pa.

Supongamos que $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$ con $y_1, y_2 \in M$ y $z_1, z_2 \in N$, mostraremos que $y_1 = y_2$ y $z_1 = z_2$.

Sea $w = y_1 - y_2 = z_2 - z_1$. En estas condiciones $(y_1 - y_2) \in M$ y $(z_2 - z_1) \in N$ por ser M y N subespacios lineales; además

$(y_1 - y_2/z_2 - z_1) = 0$ por ser $M \perp N$; luego $y_1 - y_2 = \Theta$ y $z_1 - z_2 = \Theta$; por tanto $y_1 = y_2$ y $z_1 = z_2$.

<u>NOTACION</u> : El subespacio lineal $M + N$ con M y N ortogonales - lo denotaremos $M \oplus N$.

TEO. 1.4-20

Si S y J son subconjuntos de un espacio pre-Hilbert P, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) $S \perp J$.

ii) $S \subset J^{\perp}$.

iii) $J \subset S^{\perp}$.

Pa.

i) ==> ii) Por hipótesis tenemos $S \perp J$ entonces $x \perp y$ para todo $y \in J$ y $x \in S$, lo cual implica que $x \in J^{\perp}$ para todo $x \in S$; por tanto $S \subset J^{\perp}$.

ii) ==> iii) Por hipótesis $S \subset J^{\perp}$, esto implica que - - $(J^{\perp})^{\perp} \subset S^{\perp}$ por (TEO. 1.4-18-ii), pero $J \subset (J^{\perp})^{\perp}$ por - (TEO. 1.4-18-i), se tiene asi $J \subset (J^{\perp})^{\perp} \subset S^{\perp}$; por lo - tanto $J \subset S^{\perp}$.

iii) ==> i) Se tiene como hipótesis que $J \subset S^{\perp}$, esto implica que $(S^{\perp})^{\perp} \subset J^{\perp}$; por tanto $S \subset J^{\perp}$; sea $x \in S$, entonces $x \in J^{\perp}$, luego $x \perp z$ para todo $z \in J$; por tanto $S \perp J$.

TEO. 1.4-21

Si M y N son subespacios lineales de un espacio pre-Hilbert P, tq $M \oplus N = P$, entonces

i) $M^{\perp} = N$.

ii) $N^{\perp} = M$.

iii) $M^{\perp\perp} = M$.

iv) $N^{\perp\perp} = N$.

Pa.

i) Si $x \in N$ entonces $x \perp y$ para todo $y \in M$ por definición de $M \oplus N$, luego $x \in M^{\perp}$; por lo tanto $N \subset M^{\perp}$ (a).

Si $x \in M^{\perp}$ entonces $x \perp y$ para todo $y \in M$, como $x \in P$ entonces $x = b_1 + b_2$, con $b_1 \in M$ y $b_2 \in N$, $(x/b_1) = 0$ ya que $x \in M^{\perp}$ y $b_1 \in M$; así $(b_1 + b_2/b_1) = (b_1/b_1) + (b_1/b_2)$.

$$(b_1 + b_2/b_1) = (b_1/b_1) + 0$$

asi $(b_1/b_1) = 0$; luego $b_1 = \Theta$, esto es que

$$x = \Theta + b_2 \in N;$$

por lo tanto $M^{\perp} \subset N$ (b); de las inclusiones (a) y (b) tenemos $N = M^{\perp}$ (c).

ii) Por proceso similar al efectuado para demostrar i) se tiene $N^{\perp} = M$ (d).

iii) Si $N = M^{\perp}$ entonces $N^{\perp} = M^{\perp\perp}$ (e).

Si $N^{\perp} = M^{\perp\perp}$ entonces $N^{\perp\perp} = M^{\perp}$ (h),

por (d) $N^{\perp} = M$ y sustituyendo en (e) se tiene $M = M^{\perp\perp}$.

iv) También $N = M^{\perp}$ por (c) y sustituyendo en (h) se tiene

$$N^{\perp\perp} = N.$$

OBSERVACION 1.4-2

En cualquier espacio pre-Hilbert P, se cumple :

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y.$$

ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda n\ x_n) = \lambda x.$$

(Probado en espacios normados).

TEO. 1.4-22

Si N es un subespacio lineal de un espacio pre-Hilbert P. Entonces $\overline{N}$ es un subespacio lineal cerrado de P.

Pa.

Supongamos que $x, y \in \overline{N}$ y λ un escalar y sean $(x_n)n \in N$, $(y_n)n \in N$ sucesiones de vectores en N, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$; como N es subespacio $(x_n + y_n) \in N$ y $\lambda x_n \in N$ por aplicación del (TEO. 1.3-3-ii) tenemos respectivamente -

que $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$ y $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda x_n) = \lambda x$ entonces $(x + y)$ y λx son adherentes a N, es decir $(x + y)$, $\lambda x \in \overline{N}$; por lo - tanto $\overline{N}$ es un subespacio lineal de P. Y por (TEO. 1.2-3-i) $\overline{N}$ es cerrado.

COROLARIO 1.4-3

Si N es un subespacio lineal de un espacio pre-Hilbert P, entonces $\overline{N} \subset N^{\perp\perp}$.

Pa.

$N^{\perp\perp}$ es un subespacio lineal cerrado tq $N \subset N^{\perp\perp}$ por (TEO. 1.4-17); así $\overline{N} \subset N^{\perp\perp}$ por (TEO. 1.2-3).

TEO. 1.4-23

En un espacio métrico completo "en particular, en un espacio de Hilbert P". Un subconjunto S es cerrado ssi es completo.

Pa.

" ===> " Supongamos que $S \subset M$ es cerrado y sea $(S_n)n \in \mathbf{N}$ una sucesión de Cauchy en S, $(S_n)n \in \mathbf{N}$ es también una sucesión de Cauchy en M y como M es un espacio métrico completo enton - ces $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n) = s$ con $s \in M$, luego s es adherente a S y como S es cerrado $s \in S$ entonces S es completo.

" <=== " Sea $s \in M$, s de adherencia de S.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$, $(S_n)n \in \mathbf{N}$ en S, $(S_n)n \in \mathbf{N}$

es de Cauchy por ser convergente.

Como S es completo $\lim_{n\to\infty} S_n = s \in S$; así S es cerrado.

TEO. 1.4-24

Si M y L son subespacios lineales completos de un espacio pre-Hilbert P, y $M \perp L$, entonces $M \oplus L$ es también un subespacio lineal completo de P.

Pa.

Sean $x_1, x_2 \in (M + L)$ con $x_1 = y_1 + z_1$; $y_1 \in M$, $z_1 \in L$, $x_2 = y_2 + z_2$; $y_2 \in M$, $z_2 \in L$; λ cualquier escalar.

i) $(x_1 + x_2) = ((y_1 + z_1) + (y_2 + z_2))$

$(x_1 + x_2) = (y_1 + z_1 + y_2 + z_2)$

$(x_1 + x_2) = ((y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)) \in M + L$, ya que

$(y_1 + y_2) \in M$ y $(z_1 + z_2) \in L$

$\lambda x_1 = \lambda(y_1 + z_1)$

$\lambda x_1 = \lambda y_1 + \lambda z_1 \in M + L$

ya que $\lambda y_1 \in M$ y $\lambda z_1 \in L$.

ii) Mostraremos que (M + L) es completo.

Sea $(x_n)n \in \mathbb{N}$ una sucesión de Cauchy en M + L;

$x_n = y_n + z_n$ con y_n en M y Z_n en L.

Bastará mostrar que $(y_n)n \in \mathbf{N}$ y $(z_n)n \in \mathbf{N}$ son sucesiones de Cauchy en M y L respectivamente.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tq $||x_m - x_n|| < \varepsilon$ sq $m,n \geq N$.

Por (TEO. 4-10) tenemos :

$$||y_m - y_n||^2 + ||z_m - z_n||^2 = ||(y_m - y_n) + (z_m - z_n)||^2$$

$$||y_m - y_n||^2 + ||z_m - z_n||^2 = ||(y_m + z_m) - (y_n + z_n)||^2$$

$$||y_m - y_n||^2 + ||z_m - z_n||^2 = ||x_m - x_n||^2 < \varepsilon^2$$

sq $m, n \geq N$.

Como

$$||y_m - y_n||^2 \leq ||y_m - y_n||^2 + ||z_m - z_n||^2 < \varepsilon^2$$

sq $m, n \geq N$,

luego $||y_m - y_n|| < \varepsilon$ sq $m, n \geq N$.

Similarmente $||z_m - z_n|| < \varepsilon$ sq $m, n \geq N$; por tanto $(y_n)n \in \mathbf{N}$ y $(z_n)n \in \mathbf{N}$ son sucesiones de Cauchy en M y L respectivamente.

Como M y L son completos existe $y \in M$ y $z \in L$ tq

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z$$

aplicando (TEO. 1.3-3-i) se tiene

$$\lim_{n\to\infty} (y_n + z_n) = y + z$$

por tanto M + L es completo.

COROLARIO 1.4-4

Sea N un subespacio lineal de dimensión finita de un espacio pre-Hilbert P. Entonces :

i) N es completo.

ii) $P = N \oplus N^{\perp}$.

iii) $N = N^{\perp\perp}$.

Pa.

i) N es completo por (TEO. 1.4-16).

ii) Sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ una base ortonormal de N y $x \in P$ un vector cualquiera, definimos,

$$y = \sum_{k=1}^{n} (x/y_k)y_k \quad y \quad z = x - y$$

$z \perp y_k$ para todo k por (TEO. 1.4-12-i), es decir $z \perp N$, luego $x = y + z$, con $y \in N$ y $z \in N^{\perp}$; por lo tanto $P = N \oplus N^{\perp}$.

iii) Por (TEO. 1.4-21-iv) $N = N^{\perp\perp}$.

TEO. 1.4-25

"VECTOR MINIMIZADOR". Sea P un espacio pre-Hilbert y $S \subset P$ convexo y completo, $x \in P$ un vector cualquiera. Entonces existe uno y solamente un vector $y_o \in S$ tq $||x - y_o|| \leq ||x-y||$ para todo $y \in S$.

Pa.

Sea $\delta = \inf\{||x-y|| : y \in S\}$, podemos escoger y_n en S tq $\delta - 1/n < ||x-y_n||$. Para cada $n \in N$ existe $y_n \in S$ tq $\delta - 1/n < ||x-y_n||$.

$$\delta - 1/n < ||x-y_n|| \implies \delta - ||x-y_n|| < 1/n .$$

Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tq $1/N < \varepsilon$, tomando $n > N$ se tiene $1/n < 1/N < \varepsilon$.

Ahora mostraremos :

i) Que $(y_n)n \in \mathbf{N}$ es una sucesión de Cauchy y por tanto convergente a $y_0 \in S$ tq $||x - y_0|| = \delta$.

ii) Si $||x - y_0|| = \delta$, entonces y_0 es único.

i) Aplicando la ley del paralelogramo :

$$||(y_m-x)+(x-y_n)||^2 + ||(y_m-x)-(x-y_n)||^2 = 2||y_m-x||^2 + 2||x-y_n||^2 ,$$

es decir

$$||y_m-y_n||^2 = 2||y_m-x||^2 + 2||x-y_n||^2 - ||(y_m+y_n)-2x||^2 \quad \text{(a)}$$

Como

$$||y_m+y_n-2x||^2 = 4||1/2(y_m+y_n-x)||^2$$

sustituyendo en (a) tenemos :

$$||y_m-y_n||^2 = 2||y_m-x||^2 + 2||x-y_n||^2 - 4||1/2(y_m+y_n)-x||^2 ,$$

Como S es convexo, el vector $1/2(y_m + y_n) \in S$, así $\delta \leq ||1/2(y_m + y_n) - x||$ por definición de δ .

Luego

$$||y_m-y_n||^2 \leq 2||y_m-x||^2 + 2||x-y_n||^2 - 4\delta^2.$$

Sea $\varepsilon > 0$ tq $||x - y_n||^2 \leq \varepsilon^2/4 + \delta^2$ sq $n \geq N$; (por ser $\delta = \lim_{n\to\infty} ||x - y_n||$), así :

$$||y_m-y_n||^2 \leq 2||y_m-x||^2+ 2||x-y_n||^2- 4\delta^2 < 2(\varepsilon^2/4 + \delta^2)$$

$$+ 2(\varepsilon^2/4 + \delta^2)-4\delta^2 \quad \text{sq} \quad m, n \geq N,$$

luego

$$||y_m-y_n||^2 < \varepsilon^2/2 + 2\delta^2 +\varepsilon^2/2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 \quad \text{sq } m,n \geq N$$

$$||y_m - y_n||^2 < \varepsilon^2 + 4\delta^2 - 4\delta^2 \quad \text{sq} \quad m, n \geq N$$

$$||y_m - y_n|| < \varepsilon \quad \text{sq} \quad m, n \geq N;$$

por lo tanto $(y_n)n \in N$ es de CAuchy en S. Pero S es completo, luego existe $y_o \in S$ tq

$$\lim_{n\to\infty} ||x - y_n|| = ||y_o - x|| = \delta$$

ii) Unicidad

Supongamos que $z_o \in S$, también cumple que

$$||z_o - x|| = \delta \; ; \; 1/2(y_o + z_o) \in S$$

por ser S convexo, como

$$||y_o-z_o||^2 = 2||y_o-x||^2 + 2||x-z_o||^2-||(y_o+z_o)-2x||^2 \quad (b)$$

por proceso similar al hecho en (a) y además $||y_o-x|| = \delta$, entonces $2||y_o-x||^2 = 2\delta^2$, similarmente $2||x-z_o||^2 = 2\delta^2$, además

$$||(y_o-z_o) - 2x||^2 = 4||1/2(y_o+z_o) - x||^2$$

como $\delta \leq ||1/2(y_o+z_o) - x||$ ya que $\delta = \inf\{||x-y|| : y \in S\}$

entonces $4||1/2(y_o+z_o) - x||^2 \geq 4\delta^2$; haciendo sustituciones en (b)

$$||y_o - z_o||^2 \leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2$$

$$||y_o - z_o|| \leq 0$$

esto es $||y_o - z_o|| = 0$, entonces $y_o - z_o = \Theta$; por tanto $y_o = z_o$.

COROLARIO 1.4-5

Sea P un espacio pre-Hilbert y $S \subset P$ convexo y completo, entonces existe $y_o \in S$ con norma mínima.

Pa.

Haciendo $x = \Theta$ en $||x-y_o|| \leq ||x-y||$ para todo $y \in S$, tenemos

$$||\Theta - y_o|| \leq ||\Theta-y||$$

$$||- y_o|| \leq ||-y||$$

$$||y_o|| \leq ||y|| \qquad \text{para todo } y \in S .$$

TEO. 1.4-26

Si N es un subespacio lineal completo de un espacio pre-Hilbert P, entonces :

i) $P = N \oplus N^{\perp}$.

ii) $N^{\perp\perp} = N$.

Pa.

Para probar que $P = N \oplus N^{\perp}$, bastará mostrar que para todo $x \in P$, $x = y + z$ con $y \in N$, $z \in N^{\perp}$ esto es $z \perp N$. Sea $x \in P$ y y_1, $y_2 \in N$, α un escalar tq $0 \leq \alpha \leq 1$; por ser N subespacio lineal de P, $\alpha\, y_1 \in N$ además $(1 - \alpha)$ es un escalar tq $0 \leq 1 - \alpha \leq 1$, así $(1 - \alpha)y_2 \in N$, luego $\alpha\, y_1 + (1 - \alpha)y_2 \in N$; por lo tanto N es convexo. Así se tiene que N es completo y convexo y por (TEO. 1.4-25), existe $y_3 \in N$ tq

$$||x - y_3|| \leq ||x - y|| \quad \text{para todo } y \in N.$$

Ahora definimos $z = x - y_3$, mostraremos que $z \perp N$, sea $y \in N$ tq $y = ||y_4||^{-1}y_4$ con $y_4 \neq \Theta$, así $||y|| = 1$, luego para todo $\lambda \in \mathbf{C}$ se tiene que

$$||z - \lambda y||^2 = ||z||^2 - |(z/y)|^2 + ||(z/y) - \lambda||^2$$

por (TEO. 1.4-6-(a)). Haciendo $\lambda = \lambda_o = (z/y)$ se tiene

$$||z - \lambda_o||^2 = ||z||^2 - |(z/y)|^2 \leq ||z||^2 \quad (1)$$

además $\quad z - \lambda_o y = (x - y_3) - \lambda_o y$

$$z - \lambda_o y = x - (y_3 + \lambda_o y)$$

como $y_3 \in N$ y $\lambda_o y \in N$, entonces $(y_3 + \lambda_o y) \in N$, luego $-(y_3 + \lambda_o y) \in N$, como

$$||x - y_3|| \leq ||x - (y_3 + \lambda_o y)|| \quad \text{ya que}$$

$$||x - y_3|| \leq ||x - y|| \quad \text{para todo } y \in N,$$

luego $\quad ||z|| \leq ||x - (y_3 + \lambda_o y)||$

$$||z|| \leq ||(x - y\ ) - \lambda_o y||$$

$$||z||^2 \leq ||(x - y_3) - \lambda_o y||^2 \qquad (2);$$

combinando (1) y (2) se tiene :

$$||z||^2 \leq ||z - \lambda_o y||^2 = ||z||^2 - |(z/y)|^2 \leq ||z||^2$$

$$||z||^2 \leq ||z||^2 - |(z/y)|^2 \leq ||z||^2$$

ha de ser $\quad |(z/y)|^2 = 0 \quad$ entonces $(z/y) = 0$, luego $z \perp y$ para todo $y \in N$; y por tanto $z \perp N$.

ii) $N^{\perp\perp} \subset N$.

Supongamos que $x \in N^{\perp\perp}$, bastará mostrar que $x \in N$. Como - $x \in P$, $x = y + z$ con $y \in N$ y $z \in N^{\perp}$, por suposición $x \in N^{\perp\perp}$ y además $y \in N^{\perp\perp}$ pues $N \subset N^{\perp\perp}$, así $z = (x - y) \in N^{\perp\perp}$, luego $z \perp N^{\perp}$, como $z \in N^{\perp}$ entonces $z \perp z$ se tiene así $z = \theta$, luego $x - y = \theta$ de donde $x = y$, así $x \in N$; por tanto $N^{\perp\perp} \subset N$.

COROLARIO 1.4-6

Sea H un espacio de Hilbert y N un subespacio lineal cerrado de H, entonces :

i) $H = N \oplus N^{\perp}$.

ii) $N^{\perp\perp} = N$.

Pa.

Como N es un subespacio lineal cerrado, entonces N contiene todos sus puntos de adherencia, luego existe $(x_n)n \in N$ una sucesión de vectores en H, tq $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ con $x \in N$; por lo tanto N es completo, y por aplicación del (TEO. 1.4-26), se tiene $H = N \oplus N^{\perp}$ y $N^{\perp\perp} = N$.

Def. 1.4-12

Sea H espacio de Hilbert y N subespacio lineal cerrado de H, $N^{\perp}$ es llamado el complemento ortogonal de N.

COROLARIO 1.4-7

Sea H espacio de Hilbert, $S \subset H$, subconjunto cualquiera, entonces $S^{\perp\perp}$ es el subespacio lineal cerrado más pequeño de H que contiene a S. Es decir :

i) $S^{\perp\perp}$ es un subespacio lineal cerrado de H.

ii) $S \subset S^{\perp\perp}$.

iii) Si M es un subespacio lineal cerrado de H tq $S \subset M$, entonces $S^{\perp\perp} \subset M$.

Pa.

i) Por (TEO. 1.4-17) $S^{\perp\perp}$ es un subespacio lineal cerrado de H.

ii) $S \subset S^{\perp\perp}$, cierto por (TEO. 1.4-18-i),

iii) Supongamos $S \subset M$, con M subespacio lineal cerrado de H, por (TEO. 1.4-18-ii) se tiene que si $S \subset M$ entonces $M^{\perp} \subset S^{\perp}$, luego $S^{\perp\perp} \subset M^{\perp\perp}$ y por (TEO. 1.4-21-iii) $M^{\perp\perp} = M$; por tanto $S^{\perp\perp} \subset M$.

COROLARIO 1.4-8

Si N es cualquier subespacio lineal de un espacio de Hilbert H, entonces $\overline{N} = N^{\perp\perp}$.

Pa.

Por (TEO. 1.4-22), $\overline{N}$ es el subespacio lineal más pequeño que contiene a N y por (COROLARIO 1.4-7), $N^{\perp\perp}$ es el subespacio lineal más pequeño que contiene a N; ha de ser $\overline{N} = N^{\perp\perp}$.

Def. 1.4-13

Sea H un espacio de Hilbert y N subespacio lineal cerrado de H. Dado un vector $x \in H$, supongamos $x = y + z$ es la única -

descomposición con $y \in N$ y $z \in N^{\perp}$; el vector y es llamado la proyección ortogonal de x en N.

TEO. 1.4-27

Sea H un espacio de Hilbert y N un subespacio lineal cerrado de H. Para cada $x \in H$, denotamos la proyección ortogonal de x en N por $P(x)$. Entonces la función $P : H \longrightarrow H$ tiene las siguientes propiedades:

i) $(P(x_1)/x_2) = (x_1/P(x_2))$ para todo $x_1, x_2 \in H$.

ii) $P(y) = y$ para todo $y \in N$

iii) $P(z) = \Theta$ para todo $z \in N^{\perp}$.

iv) $P(x_1 + x_2) = P(x_1) + P(x_2)$.

v) $P(\lambda x) = \lambda P(x)$.

vi) $P(P(x)) = P(x)$.

vii) $(P(x)/x) = ||P(x)||^2 \leq ||x||^2$.

viii) N es el rango de P.

ix) $N = \{x \in H : P(x) = x\}$.

x) $N^{\perp} = \{x \in H : P(x) = \Theta\}$.

Pa.

i) Sean $x_1, x_2 \in H$, $y_1, y_2 \in N$, $z_1, z_2 \in N^{\perp}$, y $x_1 = y_1+z_1$,

$x_2 = y_2 + z_2$ la descomposición ortogonal de x_1 y x_2 relativo a N.

Entonces :

$$P(x_1) = y_1 \text{ y } P(x_2) = y_2 \quad \text{por (Def. 1.4-13)}$$

$$(P(x_1)/x_2) = (y_1/y_2 + z_2)$$

$$(P(x_1)/x_2) = (y_1/y_2) + (y_1/z_2)$$

$$(P(x_1)/x_2) = 0 + (y_1/y_2) \; ; \quad y_1 \perp z_2$$

$$(P(x_1)/x_2) = (y_1/y_2) \qquad (1).$$

$$(x_1/P(x_2)) = (y_1 + z_1/y_2) \quad \text{por (Def. 1.4-13)}$$

$$(x_1/P(x_2)) = (y_1/y_2) + (z_1/y_2)$$

$$(x_1/P(x_2)) = (y_1/y_2) \quad (2) \quad \text{ya que } (z_1/y_2) = 0 \;;$$

de (1) y (2) se tiene que :

$$(P(x_1)/x_2) = (x_1/P(x_2))$$

ii) Si $y \in N$, la única descomposición ortogonal de **y** es - - $y = y + \Theta$; por tanto $P(y) = y$.

iii) Si $z \in N^{\perp}$, su descomposición ortogonal es $z = \Theta + z$ con $\Theta \in N$; por tanto $P(z) = \Theta$.

iv) Con la notación de la parte i)

$$x_1 + x_2 = (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2)$$

$$x_1 + x_2 = (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$$, como

$y_1 + y_2 \in N$ y $z_1 + z_2 \in N^{\perp}$, se tiene

$$P(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$$

$$P(x_1 + x_2) = P(x_1) + P(x_2).$$

v) Si $x = y + z$ es la descomposición ortogonal de x con $y \in N$ y $z \in N^{\perp}$, entonces

$$\lambda x = \lambda(y + z)$$

$$\lambda x = \lambda y + \lambda z$$, así

$$P(\lambda x) = \lambda P(y) + \lambda P(z)$$

$$P(\lambda x) = \lambda(P(y) + P(z))$$

$$P(\lambda x) = \lambda P(x) .$$

vi) Para cualquier $x \in H$, $P(x) \in N$ por (Def' 1.4-13); por - tanto $P(P(x)) = P(x)$ por ii).

vii) Si $x = y + z$, $y \in N$, $z \in N^{\perp}$.

$$||x||^2 = ||y + z||^2$$

$$||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$$ por ser $y \perp z$

$$||x||^2 \geq ||y||^2 \quad (1).$$

Además, $(P(x)/x) = (y/y + z)$

$$(P(x)/x) = (y/y) + (y/z)$$

$$(P(x)/x) = ||y||^2 \quad \text{por ser } y \perp z; \quad \text{por tanto}$$

$$(P(x)/x) = ||P(x)||^2 \qquad (2);$$

de (1) y (2) concluimos que

$$(P(x)/x) = ||P(x)||^2 \leq ||x||^2.$$

viii) Si $x \in P(H)$ entonces $x \in N$ por def. de P.

Si $x \in N$ entonces $x = P(x) \in P(H)$ por ii); por tanto N es el rango de P.

ix) Cierto por definición de P.

x) Cierto por definición de P.

TEO. 1.4-28

Si P es un espacio pre-Hilbert y u un vector fijo de P, entonces la función $T : P \dashrightarrow \mathbf{C}$ tq $T(x) = (x/u)$ es lineal y continua.

Pa.

Linealidad.

Sean $x_1, x_2 \in P$,

i) $T(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2/u)$

$T(x_1 + x_2) = (x_1/u) + (x_2/u)$

$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$.

ii) $T(\lambda x) = (\lambda x/u)$

$T(\lambda x) = \lambda(x/u)$

$T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Continuidad de T.

$$||T(x)|| = ||(x/u)||$$

$$||T(x)|| \leq ||x||\ ||u|| \quad \text{por (TEO. 1.4-6)},$$

luego T es continua por (TEO. 1.3-5-v $\rightarrow$ i); además $||T|| \leq ||u||$. En realidad, $||T|| = ||u||$, esto es evidente si $u = \Theta$. En caso que $u \neq \Theta$ se tiene

$$||u||^2 = |(u/u)|$$

$$||u||^2 = ||T(u)||$$

$$||u||^2 \leq ||T||\ ||u|| \quad \text{, con lo cual}$$

$||u|| \leq ||T||$; por tanto $||T|| = ||u||$.

TEO. 1.4-29

Si P y Q son espacios pre-Hilbert y $T : P \longrightarrow Q$ una función lineal continua, entonces

$$||T|| = \text{Sup } \{|(T(x)/y)| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\}.$$

Pa.

Denotemos por $k = \text{Sup } \{|(T(x)/y)| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\}$, si $x \in P$ y $y \in Q$, $||x|| \leq 1$, $||y|| \leq 1$, entonces

$$|(T(x)/y)| \leq ||T(x)|| \; ||y||$$

$$\leq ||T|| \; ||x|| \; ||y|| \text{ , entonces } k \text{ es un}$$

número real tq $k \leq ||T||$ si $||x|| \leq 1$, $||y|| \leq 1$

$$|(y/T(x))| = |(T(x)/y)| \leq k$$

"k es el sup" , luego fijando x con $||x|| \leq 1$, y definiendo

$$T' : Q \longrightarrow \mathbf{C} \text{ tq } T'(y) = (T(x)/y)$$

así, se tiene que $||T'|| = ||T(x)||$. "$T(x)$ es fijo"; por - otra parte,

$$||T'|| = \text{Sup } \{|T'(y)| : ||y|| \leq 1\} \leq k \text{ ; por tanto}$$

$||T'|| \leq k$; luego tenemos $||T(x)|| \leq k$ para todo x, $||x|| = 1$, se tiene $||T|| \leq k$.

TEO. 1.4-30

Si E es un espacio normado, y Q es un espacio pre-Hilbert, una función lineal $T : E \longrightarrow Q$ es continua ssi

$$A = \{|(T(x)/y)| : ||x|| \leq 1 , ||y|| \leq 1 \} \text{ es acotado.}$$

Pa.

" ===> " Si T es continua, entonces A es acotado como consecuencia inmediata del (TEO. 1.3-5).

" <=== " Si A es acotado, existe $M \geq 0$ tq

$$|T(x)/y)| \leq M \quad \text{sq} \quad ||x|| \leq 1 \; , \; ||y|| \leq 1$$

$$||T|| \leq M \quad \text{ya que} \quad ||T|| \doteq \text{Sup } A$$

$$\text{Sup } \{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\} \leq M \quad \text{ya que}$$

$$||T|| = \text{Sup } \{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\} ;$$ luego T es continua por (TEO. 1.3-5).

TEO. 1.4-31

Cada y en un espacio pre-Hilbert P determina una forma lineal continua

$$y' : P \longrightarrow \mathbf{C}$$

$$x \longrightarrow y'(x) = (x/y) \quad y \quad ||y'|| = ||y||.$$

i) Linealidad

Sean $x, x_1, x_2 \in P$ y $\lambda \in \mathbf{C}$.

$$y'(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2/y)$$

$$= (x_1/y) + (x_2/y)$$

$$= y'(x_1) + y'(x_2).$$

$$y'(\lambda x) = (\lambda x/y)$$

$$= \lambda(x/y)$$

$$= \lambda y'(x).$$

ii) $|y'(x)| = |(x/y)|$

$$|y'(x)| \leq ||x|| \; ||y||$$

con lo cual y' es continua. Además $||y'|| \leq ||y||$ (a) por (TEO. 1.4-28). Si $y = \Theta$ se tiene que $||y'||=||y||$. Si $y \neq \Theta$, entonces

$$|y'(y)| \leq ||y'|| \; ||y||$$

$$|(y/y)| = |y'(y)| \leq ||y'|| \; ||y||$$

$$||y||^2 \leq ||y'|| \; ||y||$$

$$||y|| \leq ||y'|| \qquad \text{(b);}$$

de (a) y (b) tenemos que $||y'|| = ||y||$.

RESULTADO 4-1

Dado cualquier $\Theta \neq z \in P$, existe $f \in P'$ tq $||f|| = 1$

y $f(z) = ||z||$; para $f = ||z||^{-1} z'$ tenemos que

$$f(z) = ||z||^{-1} z' (z)$$

$$f(z) = ||z||^{-1} (z/z)$$

$$f(z) = ||z||^{-1} ||z|| \, ||z||$$

$$f(z) = ||z||.$$

TEO. 1.4-32

Sea P un espacio pre-Hilbert. Para cada $y \in P$, definimos

$$y' : P \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto y'(x) = (x/y).$$

Entonces, la función

$$\psi : P \longrightarrow P' \quad \text{es :}$$

$$x \longmapsto x'$$

i) Lineal conjugada $(y + z)' = y' + z'$

$$(\lambda y') = \lambda^* y'.$$

ii) Isométrica : $||y'|| = ||y||$.

Si ésta función es sobreyectiva, P es necesariamente un espacio de Hilbert.

Pa.

Para todo $x \in P$.

1) $(y + z)'(x) = (x/y + z)$

$$= (x/y) + (x/z)$$

$$= y'(x) + z'(x)$$

$$= (y' + z')(x).$$

2) $(\lambda y)'(x) = (x/\lambda y)$

$$= \lambda^*(x/y)$$

$$= \lambda^* \, y'(x)$$

$$= (\lambda^* \, y')(x) \; .$$

ii) Isometría de ψ

$$\psi(x)(y) = (x/y)$$

$$|\psi(y)(x)| = |(x/y)|$$

$$|\psi(y)(x)| \leq ||x|| \; ||y||$$

$$|\psi(y)(x)| \leq ||y||$$

$$||\psi(y)|| \leq ||y|| \text{ por (Def. 1.3-4)} \qquad \text{(a)}.$$

Si $y = \Theta$ se tiene que $||\psi(y)|| = ||y||$.

Si $y \neq \Theta$, entonces

$$|(y/y)| = |\psi(y)(y)| \leq ||\psi(y)|| \; ||y||$$

$$||y||^2 \leq ||\psi(y)|| \; ||y||$$

$$||y|| \leq ||\psi(y)|| \qquad \text{(b)} ;$$

de (a) y (b) se tiene que

$||\psi(y)|| = ||y||$; por tanto ψ es isométrica.

Supongamos que ψ es suryectiva, mostraremos que P es un - espacio de Hilbert.

Sea $(y_n)n \in \mathbb{N}$ una sucesión de puntos de P tq $(y_n)n \in \mathbb{N}$ es de Cauchy, así se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tq

$$||y_n - y_m|| < \varepsilon \qquad \text{sq} \quad m, n \geq N .$$

Como $||y'_n - y_m|| = ||y_n - y_m|| < \varepsilon$ sq $m, n \geq N$; por tanto $(y'n)n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de Cauchy en P'. Por (TEO. 1.3-12) existe $f \in P'$ tq $\lim_{n\to\infty} y'n = f$.

Asumamos que $f = y'$ por ser ψ suryectiva y para un adecuado $y \in P$.

Como $||y_n - y|| = ||y'_n - y'||$

$||y_n - y|| = ||y'_n - f||$, aplicando limite se - tiene :

$$\lim_{n\to\infty} ||y_n - y|| = \lim_{n\to\infty} ||y'_n - f|| = 0 ,$$

luego $\lim_{n\to\infty} ||y_n - y|| = 0$; por lo tanto $(y_n)n \in \mathbb{N}$ converge en P.

5. FORMAS LINEALES CONTINUAS EN ESPACIOS DE HILBERT

TEO. 1.5-1 (TEOREMA RIESZ- FRECHET)

Si f es una forma lineal continua en un espacio de Hilbert H, existe uno y solamente un vector $y \in H$ tq $f(x) = (x/y)$ para todo $x \in H$.

Pa.

Dado $f \in H'$, el problema es encontrar $y \in H$ tq $y' = f$. Sea N el espacio nulo de f, N es un subespacio lineal cerrado de H por (TEO. 1.3-4).

Para $N = H$, tomamos $f = 0$ y $y = \Theta$.

Asumiendo que $f \neq 0$, $N \neq H$; por (COROLARIO 4-6) tenemos $N^{\perp\perp} = N$, así $N^{\perp} \neq \{\Theta\}$. Ya que N y $N^{\perp}$ tienen solamente el vector Θ en común, tiene que ser $f(z) \neq 0$, haciendo

$$z_1 = [f(z)]^{-1} z \quad \text{y aplicando f tenemos}$$

$$f(z_1) = f([f(z)]^{-1} z)$$

$$f(z_1) = [f(z)]^{-1} f(z)$$

$$f(z_1) = 1.$$

Dado cualquier $x \in H$, tenemos $x - f(x)z_1 \in N$, en efecto

$$f(x - f(x)z_1) = f(x) - f(x)\, f(z_1)$$

$$f(x - f(x)z_1) = f(x) - f(x)$$

$$f(x - f(x)z_1) = 0 \quad , \quad \text{así } z_1 \perp N \quad , \quad \text{luego}$$

$$(x - f(x)z_1/z_1) = 0$$

$$(x/z_1)-f(x)(z_1/z_1)=0 \ ; \text{ así } f(x) = (z_1/z_1)^{-1}(x/z_1)$$

$$f(x) = (x/y) \quad \text{con}$$

$y = (z_1/z_1)^{-1}z_1$ independiente de x, así $f = y'$.

Si $f = w'$, $(x/y) = (x/w)$ para todo x , $y = w$ por (TEO. 1.4-1-v).

FUNCIONES BILINEALES

Def. 1.5-1

Si U, V, W son espacios vectoriales, una función $\psi : U \times V \longrightarrow W$ es llamada bilineal si cumple las siguientes condiciones :

i) $\psi(x_1 + x_2, y) = \psi(x_1, y) + \psi(x_2, y)$

ii) $\psi(\lambda x, y) = \lambda\psi(x, y)$.

iii) $\psi(x, y_1 + y_2) = \psi(x, y_1) + \psi(x, y_2)$.

iv) $\psi(x, \lambda y) = \lambda\psi(x, y)$.

Si además $W = \mathbf{C}$, ψ es llamada una forma bilineal en UxV. Asi, ψ es una función bilineal de U x V sobre W ssi :

1) Para cada $y \in V$ fijo, $x \longrightarrow \psi(x, y)$ es una función li -

neal de U en W.

2) Para cada $x \in U$ fijo, $y \dashrightarrow \psi(x, y)$ es una función li - neal de V en W.

Brevemente, ψ es lineal en cada coordenada. Claramente $\psi(x, \Theta) = \psi(\Theta, x) = \Theta$.

Def. 1.5-2

Si E, F, G son espacios normados, una función bilineal $\psi : E \times F \dashrightarrow G$ diremos que es acotada si existe una cons - tante M tq $||\psi(x, y)|| \leq M ||x|| \, ||y||$ para toda $x \in E$, $y \in F$. Si además $G = \mathbf{C}$, ψ es llamada una forma bilineal acotada sobre E x F.

Def. 1.5-3

Sean E, F, G espacios normados y $\psi : E \times F \dashrightarrow G$ una - función bilineal. El número $||\psi||$ es llamado la norma de ψ.

Así

$$||\psi|| = \text{Sup } \{||\psi(x, y)||: ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\}$$

claramente $||\psi|| = 0$ ssi $\psi(x, y) = \Theta$ para todo $x \in E$, $y \in F$; de otra manera, $||\psi|| > 0$.

Def. 1.5-4

Si U, V, W son espacios vectoriales, una función $\psi : U \times V \dashrightarrow W$ es llamada sesquilineal si cumple las siguientes condi ciones :

i) $\psi(x_1 + x_2, y) = \psi(x_1, y) + \psi(x_2, y)$.

ii) $\psi(\lambda x, y) = \lambda\psi(x, y)$.

iii) $\psi(x, y_1 + y_2) = \psi(x, y_1) + \psi(x, y_2)$.

iv) $\psi(x, \lambda y) = \lambda^*\psi(x, y)$.

Si además $W = \mathbf{C}$, ψ es llamada una forma sesquilineal sobre U x V.

Así ψ es una función sesquilineal de U x V en W ssi :

i) Para cada $y \in V$ fijo, $x \dashrightarrow \psi(x, y)$ es una función lineal de U en W.

ii) Para cada $x \in U$ fijo, $y \dashrightarrow \psi(x, y)$ es una función semilineal de V en W.

ψ es lineal en la primera coordenada, semilineal en la segunda coordenada.

Claramente $\psi(\Theta, y) = \psi(x, \Theta) = \Theta$.

TEO. 1.5-2

Si $\psi : U \times V \dashrightarrow \mathbf{C}$ es una forma sesquilineal, entonces la función

$$\Omega : V \times U \dashrightarrow \mathbf{C}$$
$$(y,x) \longmapsto [\psi(x, y)]^*$$

es sesquilineal.

Pa.

$\Omega : V \times U \dashrightarrow \mathbf{C}$

$$(y, x) \dashrightarrow \Omega(y, x) = [\psi(x, y)]^*.$$

Sea y, y_1, $y_2 \in V$, x, x_1, $x_2 \in U$ y λ un escalar.

i) $\Omega(y_1 + y_2, x) = [\psi(x, y_1 + y_2)]^*$

$= [\psi(x, y_1) + \psi(x, y_2)]^*$

$= \psi(x, y_1)^* + \psi(x, y_2)^*$

$= \Omega(y_1, x) + \Omega(y_2, x).$

ii) $\Omega(\lambda y, x) = [\psi(x, \lambda y)]^*$

$= [\lambda^*\psi(x, y)]^*$

$= \lambda^{**}\, \Omega(y, x)$

$= \lambda\Omega(y, x).$

iii) $\Omega(y, x_1 + x_2) = [\psi(x_1 + x_2, y)]^*$

$= [\psi(x_1, y) + \psi(x_2, y)]^*$

$= \psi(x_1, y)^* + \psi(x_2, y)^*$

$= \Omega(y, x_1) + \Omega(y, x_2).$

iv) $\Omega(y, \lambda x) = [\psi(\lambda x, y)]^*$

$= [\lambda\psi(x, y)]^*$

$= \lambda^*\psi(x, y)^*$

$= \lambda^*\Omega(y, x)$.

TEO. 1.5-3

Sean U, V, W espacios vectoriales y $\psi : U \times V \longrightarrow W$. Entonces, ψ es una función sesquilineal de $U \times V$ en W ssi ψ es una función bilineal de $U \times V^*$ en W.

Pa.

" ===> " Si $\psi : U \times V \longrightarrow W$ es una función sesquilineal, entonces ψ es una función bilineal de $U \times V^*$ en W.

i) Como ψ es sesquilineal de $U \times V$ en W se tiene que para cada $y \in V$ fijo $x \longrightarrow \psi(x, y)$ es una función lineal de U en W.

ii) Para cada $x \in U$ fijo $y \longrightarrow \psi(x, y)$ es una función lineal de V en W.

Como ψ es sesquilineal de $U \times V$ en W se cumplen las siguientes condiciones :

1) $\psi(x_1 + x_2, y) = \psi(x_1, y) + \psi(x_2, y)$

2) $\psi(\lambda x, y) = \lambda\psi(x, y)$ es lineal de U en W con $y \in V$ fijo

3) $\psi(x, y_1 + y_2) = \psi(x, y_1) + \psi(x, y_2)$ es una función semilineal de V en W para cada $x \in U$ fijo.

4) $\psi(x, \lambda y) = \lambda^* \psi(x, y)$

con la relación $\psi(x, \lambda y) = \lambda^* \psi(x, y) = \lambda\psi(x, y)$ se cumplen las condiciones de bilinealidad, luego $\psi : UxV^* \longrightarrow W$

es bilineal;por ser $V = V^*$ la suma y el producto escalar están definidos similarmente.

" <=== " Se tiene $\psi: U \times V^* \longrightarrow W$ es bilineal, luego se cumplen las relaciones siguientes :

i) $\psi(x_1 + x_2, y) = \psi(x_1, y) + \psi(x_2, y)$.

ii) $\psi(\lambda x, y) = \lambda\psi(x, y)$

ψ es lineal de U en W para cada $y \in V$ fijo.

iii) $\psi(x, y_1 + y_2) = \psi(x, y_1) + \psi(x, y_2)$.

iv) $\psi(x, \lambda y) = \lambda^*\psi(x, y)$.

Así ψ es lineal en la primera coordenada y semilineal en la segunda coordenada, luego ψ es sesquilineal.

TEO. 1.5-4

Si V y W son espacios vectoriales, y $\psi : V \times V \longrightarrow W$ es sesquilineal, entonces :

$$\psi(x, y) = 1/4 \left[\psi(x+y, x+y) - \psi(x-y, x-y)\right.$$
$$\left. + i\psi(x+iy, x+iy) - i\psi(x-iy, x-iy)\right]$$

para todo $x, y \in V$.

Pa.

$$\psi(x+y, x+y) = \psi(x, x+y) + \psi(y, x+y)$$

$$= \psi(x, x) + \psi(x,y) + \psi(y,x) + \psi(y,y). \qquad (1)$$

$$\psi(x-y, x-y) = \psi(x, x-y) - \psi(y, x-y)$$

$$= \psi(x,x) - \psi(x,y) - \psi(y,x) + \psi(y,y)$$

$$-\psi(x-y, x-y) = -\psi(x,x) + \psi(x,y) + \psi(y,x) - \psi(y,y). \qquad (2)$$

$$\psi(x+iy, x+iy) = \psi(x, x+iy) + \psi(iy, x+iy)$$

$$= \psi(x,x) + \psi(x,iy) + \psi(iy, x) + \psi(iy, iy)$$

$$i\psi(x+iy, x+iy) = i\psi(x,x) + ii^*\psi(x,y) + ii\psi(y,x) + iii^*\psi(y,y)$$

$$= i\psi(x,x) + \psi(x,y) - \psi(y, x) + i\psi(y,y) \qquad (3)$$

$$\psi(x-iy, x-iy) = \psi(x, x-iy) - \psi(iy, x-iy)$$

$$= \psi(x,x) - \psi(x, iy) - \psi(iy, x) + \psi(iy, iy)$$

$$-i\psi(x-iy,x-iy) = -i\psi(x,x) + i\psi(x,iy) + i\psi(iy,x) - i\psi(iy,iy)$$

$$= -i\psi(x,x) + ii^*\psi(y,x) + ii\psi(y,x) - iii^*\psi(y,y)$$

$$=-i\psi(x,x) + \psi(x,y) - \psi(y,x) - i\psi(y,y). \qquad (4)$$

Sumando los resultados 1, 2, 3, 4 y multiplicando por 1/4

$$\frac{1}{4}\Big[\psi(x,x)+\psi(x,y)+\psi(y,x)+\psi(y,y)-\psi(x,x)+\psi(x,y)+\psi(y,x)-\psi(y,y)$$

$$+ i\psi(x,x)+\psi(x,y)-\psi(y,x)+i\psi(y,y)-i\psi(x,x)+\psi(x,y)-\psi(y,x)-i\psi(y,y)\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\, 4\psi(x,y) \,\Big] = \psi(x, y).$$

TEO. 1.5-5

Sean V, W espacios vectoriales y $\psi : V \times V \dashrightarrow W$, $\Omega : V \times V \dashrightarrow W$ funciones sesquilineales, tales que

$$\psi(x, x) = \Omega(x, x) \quad \text{para todo } x \in V,$$

entonces $\psi = \Omega$, esto es, $\psi(x, y) = \Omega(x, y)$ para todo $x, y \in V$.

Pa.

Por (TEO. 1.5-4) se tiene :

$$\psi(x, y) = \frac{1}{4}\Big[\psi(x+y, x+y) - \psi(x-y, x-y) + i\psi(x+iy, x+iy) - \psi(x-iy, x-iy)\Big]$$

y por hipótesis $\psi(x, x) = \Omega(x, x)$ para todo $x \in V$, luego

$$\psi(x,y) = \frac{1}{4}\Big[\Omega(x+y,x+y)-\Omega(x-y,x-y)+i\Omega(x+iy,x+iy)-\Omega(x-iy,x-iy)\Big]$$

$\psi(x, y) = \Omega(x, y)$ para todo $x, y \in V$; por tanto $\psi = \Omega$.

Def. 1.5-5

Sea V un espacio vectorial, $\psi : V \times V \dashrightarrow \mathbf{C}$ una forma sesquilineal. ψ es llamada Hermitiana en caso que $\psi(y,x)=[\psi(x,y)]^*$.

TEO. 1.5-6

Una forma sesquilineal $\psi: V \times V \dashrightarrow \mathbf{C}$ es Hermitiana ssi $\psi(x, x)$ es real, para todo $x \in V$.

Pa.

" ===> " Por hipótesis ψ es Hermitiana, luego

$\psi(x, x) = [\psi(x, x)]^*$ para todo $x \in V$; luego $\psi(x,x)$ es real.

" <=== " $\psi(x, x)$ es real para todo $x \in V$. Si se define - $\Omega(x, y) = [\psi(y, x)]^*$ como en (TEO. 1.5-2), resulta que Ω es una forma sesquilineal en V x V. Además, Ω es Hermitiana según la (Def. 1.5-5).

En estas condiciones

$$\Omega(x, x) = [\psi(x, x)]^* = \psi(x, x) \quad \text{para todo } x \in V,$$

luego por (TEO. 1.5-5) $\Omega = \psi$; por tanto ψ es Hermitiana.

Def. 1.5-6

Sea V un espacio vectorial, $\psi : V \times V \longrightarrow \mathbf{C}$ una forma sesquilineal. ψ es llamada Hermitiana en caso que

$$\psi(y, x) = [\psi(x, y)]^*.$$

TEO. 1.5-7

Una forma sesquilineal $\psi : V \times V \longrightarrow \mathbf{C}$ es Hermitiana ssi $\psi(x, x)$ es real, para todo $x \in V$.

" ===> " Por hipótesis ψ es Hermitiana, luego

$$\psi(x,x) = [\psi(x,x)]^* = [(x/x)]^* = [||x||^2]^*;$$

por tanto $\psi(x, x)$ es real para todo $x \in V$.

" <=== " Por hipótesis $\psi(x, x)$ es real para todo $x \in V$.

Definamos $[\psi(y, x)]^* = \Omega(x, y)$, luego Ω es una forma sesquilineal por (TEO. 5-2). Como asumimos que $\Omega(x,x) = \psi(x,x)$ para todo $x \in V$, así por (TEO. 1.5-5) $\Omega(x,y) = \psi(x,y)$; por tanto ψ es Hermitiana.

Def. 1.5.7

Sea V un espacio vectorial, $\psi: V \times V \longrightarrow \mathbf{C}$ una forma sesquilineal. Diremos que ψ es positiva en caso que $\psi(x,x) \geq 0$ para todo $x \in V$.

Def. 1.5-8

Si E, F, G son espacios normados, una función sesquilineal $\psi : E \times F \longrightarrow G$ se dice que es acotada en caso que exista una constante M tq $||\psi(x, y)|| \leq M||x|| \, ||y||$ para todo $x \in E$, $y \in F$.

Si además $G = \mathbf{C}$, ψ es llamada una forma sesquilineal acotada.

En otras palabras, ψ es una función sesquilineal acotada de E x F en G, ssi es una función bilineal acotada de $E \times F^*$ entre G.

Def. 1.5-9

Sea $\psi : E \times F \longrightarrow G$ una función sesquilineal, llamaremos norma de ψ al número definido de la siguiente manera :

$$||\psi|| = \text{Sup } \{||\psi(x,y)|| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\}.$$

TEO. 1.5-8

Si E es un espacio normado, P un espacio pre-Hilbert, y $T : E \dashrightarrow P$ es una función lineal continua, entonces

$$\psi : (E, P) \longrightarrow \mathbf{C}$$
$$(x, y) \longmapsto \psi(x, y) = (T(x)/y)$$

es una forma sesquilineal acotada con $||\psi|| = ||T||$.

Pa.

i) $||\psi(x, y)|| = |(T(x)/y)|$

$$\leq ||T(x)||\ ||y||$$

$$\leq ||T||\ ||x||\ ||y||,$$

luego $\psi(x, y)$ es acotada ya que existe $||T|| \geq 0$ tq

$$||\psi(x, y)|| \leq ||T||\ ||x||\ ||y||$$

para todo $x \in E$, $y \in P$.

$$||\psi|| = \text{Sup}\{||\psi(x,y)|| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\}$$

$$||\psi|| = \text{Sup}\ \{|(T(x)/y)| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\}$$

$$||\psi|| = ||T|| \quad \text{por (TEO. 1.4-29)}.$$

ii) ψ es una forma sesquilineal.

Sean $x, x_1, x_2 \in E$ y $y, y_1, y_2 \in P$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

1) $\psi(x_1 + x_2, y) = (T(x_1 + x_2)/y)$

$$= (T(x_1) + T(x_2)/y)$$

$$= (T(x_1)/y) + (T(x_2)/y)$$

$$= \psi(x_1, y) + \psi(x_2,y).$$

2) $$\psi(\lambda x, y) = (T(\lambda x)/y)$$

$$= (\lambda T(x)/y)$$

$$= \lambda(T(x)/y)$$

$$= \lambda\psi(x, y).$$

3) $$\psi(x, y_1 + y_2) = (T(x)/y_1 + y_2)$$

$$= (T(x)/y_1) + (T(x)/y_2)$$

$$= \psi(x, y_1) + \psi(x, y_2).$$

4) $$\psi(x,\lambda y) = (T(x)/\lambda y)$$

$$= (\lambda^* T(x)/y)$$

$$= \lambda^*(T(x)/y)$$

$$= \lambda^* \psi(x, y).$$

TEO. 1.5-9

Si P es un espacio pre-Hilbert la norma de una forma sesquilineal Hermitiana acotada $\psi : P \times P \dashrightarrow \mathbf{C}$ está dada por

$$||\psi|| = \text{Sup}\{|\ \psi(x,\ x)| : ||x|| \leq 1\ \}.$$

Pa.

Podemos asumir que $\psi(x, x)$ es real para todo x por - - (TEO. 1.5-7).

Si $||x|| \leq 1$, $|\psi(x,x)| \leq M||x||\ ||x||$ para todo $x \in P$; por tanto para $||x|| \leq 1$, $||\psi(x,x)|| \leq M$, luego el

$$\text{Sup}\ \{|\psi(x,\ x)| : ||x|| \leq 1\}$$

es un número real finito k, $|\psi(x,x)| \leq M$, para todo x, - - $||x|| \leq 1$ luego, existe el

$$\text{Sup}\ \{|\psi(x,\ x)| :||\ x|| \leq 1\}.$$

Sea $\qquad k = \text{Sup}\ \{|\psi(x,\ x)| : ||x|| \leq 1\}$

probaremos que $k \leq ||\psi||$

$$||\psi(x,\ x)|| \leq ||\psi|| \qquad \text{para todo } ||x|| \leq 1$$

$$\text{Sup}\ ||\psi(x,\ x)|| \leq ||\psi|| \qquad \text{, luego } k \leq ||\psi||. \quad (1)$$

$||\psi(x,\ y)|| \leq k$ para todo x, y, $||x|| \leq 1$, $||y|| \leq 1$, enton - ces el $\qquad \text{Sup}\ ||\psi(x,\ y)|| \leq k$

$$\begin{array}{l} ||x|| \leq 1 \\ ||y|| \leq 1 \end{array} \quad \text{, luego } ||\psi|| \leq k \quad . \quad (2)$$

De (1) y (2) $\quad ||\psi|| = k = \text{Sup}\ \{|\psi(x,x)| : ||x|| \leq 1\}$

fijando x, $y \in P$, con $||x|| \leq 1$, $||y|| \leq 1$, será suficiente mos trar que $|\psi(x,\ y)| \leq k$.

CASO 1

Supongamos que $\psi(x, y)$ es un número real. Por (TEO. 1.5-4) se tiene que:

$$\psi(x,y)= \frac{1}{4}\left[\psi(x+y,x+y)-\psi(x-y,x-y)+i\psi(x+iy,x+iy)-i\psi(x-iy,x-iy)\right]$$

ya que $\psi(z, z)$ es real para todo $z \in P$, y por hipótesis $\psi(x,y)$ es real, luego tiene que ser

$$\psi(x,y) = \frac{1}{4}\left[\psi(x+y, x+y) - \psi(x-y, x-y)\right]$$

$$|\psi(x,y)| = \left|\frac{1}{4}\left[\psi(x+y, x+y) - \Psi(x-y, x-y)\right]\right|$$

$$|\psi(x,y)| \leq \frac{1}{4}\left[|\psi(x+y, x+y)| + |\psi(x-y, x-y)|\right]$$

$$|\psi(x,y)| \leq \frac{1}{4}\left[|\psi|\,||x+y||^2 + |\psi|\,||x-y||^2\right]$$

$$|\psi(x,y)| \leq \frac{|\psi|}{4}\left[||x+y||^2 + ||x-y||^2\right]$$

aplicando ley del paralelogramo se tiene

$$|\psi(x,y)| \leq \frac{|\psi|}{4}\left[2\,||x||^2 + 2\,||y||^2\right]$$ tenemos así

$$|\psi(x,y)| \leq |\psi|$$, haciendo $|\psi| = k$ se tiene

$$|\psi(x,y)| \leq k .$$

CASO 2

Si λ es tal que $|\lambda| = 1$, entonces podemos decir que :

$$|\psi(x,y)| = |\lambda\psi(x, y)| = |\psi(\lambda x, y)|$$; por tanto

$|\psi(x, y)|$ es un número real; además $|\psi(\lambda x, y)| = |\psi(x,y)| \leq M$ por Caso 1.

TEO. 1.5-10

Si H y K son espacios de Hilbert y $T : H \dashrightarrow K$ es una función lineal continua, entonces $\psi_T(x, y) = (T(x)/y)$ es una forma sesquilineal acotada. ψ_T en H x K es tal que

$$||\psi_T|| = ||T||.$$

Pa.

Inmediata de (TEO. 1.5-8).

TEO. 1.5-11

Si H y K son espacios de Hilbert y $\psi : H \times K \dashrightarrow C$ es una forma sesquilineal acotada, entonces existe una y solo una función lineal continua

$T : H \dashrightarrow K$ tq $\psi(x, y) = (T(x)/y)$ para todo $x \in H$ y $y \in K$.

Pa.

Dado $x \in H$, el problema es definir $T(x) \in K$, la función

$$fx : K \dashrightarrow \mathbf{C} \quad \text{tq} \quad fx(y) = [\psi(x, y)]^*$$

es una forma lineal sobre K.

i) $fx(y_1, y_2) = [\psi(x, y_1 + y_2)]^*$

$$= [\psi(x, y_1) + \psi(x, y_2)]^*$$

$$= \left[\psi(x,\ y_1)\right]^* + \left[\psi(x,\ y_2)\right]^*$$

$$= fx(y_1) + fx(y_2)$$

ii) $fx(\lambda y) = \left[\psi(x,\ \lambda y)\right]^*$

$$= \left[\lambda^* \ \psi(x,\ y)\right]^*$$

$$= \lambda\left[\psi(x,\ y)\right]^*$$

$= \lambda fx(y)$; con lo cual fx es lineal.

iii) fx es continua. En efecto,

$$|fx(y)| = |\left[\psi(x,\ y)\right]^*|$$

$$= |\psi(x,\ y)|$$

$\leq ||\psi||\ ||x||\ ||y||$; de donde se sigue

que

$$||fx(y)|| = |fx(y)|$$

$$\leq ||\psi||\ ||x||\ ||y||$$

con esto podemos decir que fx es continua, ya que si tomamos $M = ||\psi||\ ||x||$ se tiene que

$$||fx(y)|| \leq M||y|| \qquad \text{con } M \geq 0,$$

luego por (TEO. 1.3-5-v) se confirma la continuidad de fx.

Así como fx es una forma lineal continua en K, existe se gún (TEO. 1.5-1) "Riesz Frechet" un vector único $z \in K$ tq $f_x(y) = (y/z)$ para todo $y \in K$.

Haciendo $z = T(x)$ se tiene que

$$(y/T(x)) = fx(y) = [\psi(x, y)]^*,$$

así $\psi(x, y) = (T(x)/y)$ luego por (TEO. 1.4-27) la

$$||T(x)|| = ||fx||$$

y por consiguiente

$$||T(x)|| \leq ||\psi|| \; ||x||$$

teniendo en cuenta que $T(x)$ es un vector fijo en K, mostrare - mos que T es lineal y continua.

Linealidad

i) Sean x_1, $x_2 \in H$ para un vector $y \in K$ cualquiera

$$\begin{aligned}(T(x_1 + x_2)/y) &= (\psi(x_1 + x_2, y)) \\ &= \psi(x_1, y) + \psi(x_2, y) \\ &= (T(x_1)/y) + (T(x_2)/y) \\ &= (T(x_1) + T(x_2)/y)\end{aligned}$$

por $\quad T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$.

ii) Sean $x \in H$, $y \in K$, λ un escalar

$$(T(\lambda x)/y) = (\psi(\lambda x)/y)$$

$= \lambda(\psi(x)/y)$

$= \lambda T(x)$; por tanto $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Continuidad de T.

Sabemos $||T(x)|| \leq ||\psi|| \; ||x||$, entonces si consideramos $||\psi|| = M$ con $M \geq 0$ se tiene $||T(x)|| \leq M||x||$, lo - cual confirma la continuidad de T según (TEO. 1.3-5), además por (TEO. 1.5-10),

$$||\psi|| = ||T||.$$

Unicidad de T.

Suponiendo por el contrario que existe una función T' : H ---> K tq $(T'(x)/y) = \psi(x, y)$ para todo $x \in H$, $y \in K$.

Entonces $(T(x)/y) - (T'(x)/y) = (T(x) - T'(x)/y) = 0$ para todo $x \in H$; por tanto $T = T'$.

LA ADJUNTA DE UNA FUNCION LINEAL CONTINUA

TEO. 1.5-12

Sean H, K espacios de Hilbert. Si T: H ---> K es una función lineal continua, existe una y solo una función lineal continua, T^* : K ---> H tq $(T(x)/y) = (x/T^*(y))$ para todo $x \in H$, $y \in K$ además $||T^*|| = ||T||$.

Pa.

Definamos ψ: K x H ---> C

$$(y, x) \longmapsto (y/T(x))$$

tal función así definida es una forma sesquilineal acotada en K x H.

<u>Sesquilinealidad</u>

Sean y, y_1, $y_2 \in K$, x_1, $x_2 \in H$, λ un escalar.

i) $$\psi(y_1 + y_2, x) = (y_1 + y_2/T(x))$$
$$= (y_1/T(x)) + (y_2/T(x))$$
$$= \psi(y_1, x) + \psi(y_2, x).$$

ii) $$\psi(\lambda y, x) = (\lambda y/T(x))$$
$$= \lambda(y/T(x))$$
$$= \lambda\psi(y, x).$$

iii) $$\psi(y, x_1 + x_2) = (y/T(x_1 + x_2))$$
$$= (y/T(x_1) + T(x_2))$$
$$= (y/T(x_1)) + (y/T(x_2))$$
$$= \psi(y, x_1) + \psi(y, x_2).$$

$$\psi(y, \lambda x) = (y/T(\lambda x))$$
$$= \lambda^*(y/T(x))$$
$$= \lambda^* \psi(y, x).$$

Acotamiento de ψ

Tenemos que : $|\psi(y, x)| = |(y/T(x))|$

$$= |(y/T(x))^*|$$

$$= |(T(x)/y)| \quad . \qquad (1)$$

Como

$$||\psi(y, x)|| = |\psi(y, x)|$$

$$||\psi(y, x)|| \leq ||T|| \; ||x|| \; ||y||$$

y de aquí resulta que ψ es acotado de acuerdo a la (Def. 1.5-8) con $M = ||T||$. Además, tomando el Sup en ambos miembros de la igualdad (1) con $||x|| \leq 1$, $||y|| \leq 1$, tenemos que

$$||\psi|| = ||T||$$

y de acuerdo a (TEO. 1.5-11) existe una función lineal y continua, única.

$T^* : K \dashrightarrow H$, con $||T^*|| = ||\psi||$ tq

$\psi(y, x) = (T^*(y)/x)$ para todo $y \in K$ y $x \in H$.

Así,

$$(y/T(x)) = (T^*(x)/y) \qquad (2)$$

$$(T(x)/y) = (x/T(y)) \quad (3) \quad \text{"propiedad de conjugados"}$$

Luego basándose en lo anterior, si $S : K \dashrightarrow H$ es una función tq $(T(x)/y) = (x/S(y))$ para todo $x \in H$, $y \in K$ entonces,

$$(x/S(y)) - (T(x)/y) = (x/S(y)) - (x/T^*(y))$$

$$= (x/S(y) - T^*(x)) = 0$$

para todo x, y; de lo cual se concluye que $S(y) - T^*(y) = 0$ para todo $y \in K$; por tanto $S = T^*$, pues $z = \Theta$ es el único vector tq $z \perp x$, para todo $x \in H$.

<u>NOTACION</u> : T^* es llamada la aplicación ADJUNTA DE T.

TEO. 1.5-13

Sean H y K espacios de Hilbert. Si $S : H \dashrightarrow K$ y $T : H \dashrightarrow K$ son funciones lineales continuas, λ un escalar, entonces :

i) $(S + T)^* = S^* + T^*$

ii) $(\lambda T)^* = \lambda^* T^*$

iii) $(T^*)^* = T$

iv) $||T^* T|| = ||TT^*|| = ||T||^2$

v) $T^* T = 0$ ssi $T = 0$

Pa.

$$((S + T)^*(y)/x) = (y/(S + T)(x))$$

$$= (y/S(x) + T(x))$$

$$= (y/S(x)) + (y/T(x))$$

$$= (S^*(y)/x) + (T^*(y)/x)$$

$$= (S^*(y) + T^*(y)/x)$$

$$= ((S^* + T^*)(y)/x) \quad , \quad \text{luego}$$

$$(S + T)^* (y) = S^*(y) + T^*(y) \quad ; \quad \text{por tanto}$$

$$(S + T)^* = S^* + T^* .$$

ii) $$((\lambda T)^*(y)/x) = (y/(\lambda T)(x))$$

$$= (y/\lambda\ T(x))$$

$$= \lambda^*(y/T(x))$$

$$= \lambda^*(T^*(y)/x)$$

$$= (\lambda^*(T^*(y))/x)$$

$$= ((\lambda^* T^*)(y)/x) \quad ; \quad \text{luego}$$

$$(\lambda T)^* = \lambda^* T^* .$$

iii) $$((T^*)^*(x)/y) = (x/T^*(y))$$

$$= (T(x)/y) \quad ; \quad \text{luego}$$

$$T^{**} = T .$$

iv) Las funciones $T^*T : H \dashrightarrow H$ y $TT^* : K \dashrightarrow K$ están bien definidas.

Si $x \in H$ y $||x|| \leq 1$ se tiene que

$$||T(x)||^2 = (T(x)/T(x))$$

$$= (T^*(T(x))/x) \leq ||T^*(T(x))|| \, ||x||$$

por (TEO. 1.4-6);

$$\leq ||T^* T(x)||$$

$$\leq ||T^* T||$$

tomando $||x|| = 1$ se obtiene que $||T||^2 \leq ||T^* T||$ (a).

Por (TEO. 1.3-12) se tiene que

$$||T^*T|| \leq ||T^*|| \, ||T|| = ||T|| \, ||T||; \text{ por tanto}$$

$$||T^*T|| \leq ||T||^2 \qquad \text{(b).}$$

Se deduce de (a) y (b) que $||T^*T|| = ||T||^2$ (c).

Si reemplazamos T por T* en (c), se tiene

$$||(T^*)^*T^*|| = ||T^*||^2 \text{ ; de donde se sigue que}$$

$$||TT^*|| = ||T^*||^2 \quad \text{(d);}$$

de los resultados (c) y (d) se tiene

$$||T^*T|| = ||TT^*|| = ||T||^2.$$

v) $T^*T = 0$ ssi $T = 0$

" ===> " $0 = ||T^*T|| = ||T||^2$ se deduce que $||T|| = 0$; por tanto $T = 0$.

" <=== " Si $T = 0$, entonces $T(H) = \{\Theta\}$. Luego,

$$T^*(T(H)) = T^*(\{\Theta\}) = \Theta \quad ; \text{ por tanto}$$

$$T^*T = 0$$

TEO. 1.5-14

Sean H, K y L espacios de Hilbert.

Si $T: H \longrightarrow K$ y $S : K \longrightarrow L$ son funciones lineales continuas, entonces $(ST)^* = T^* S^*$.

Pa.

Sea $z \in L$ y $x \in H$.

$$((ST)^*(z)/x) = (z/(ST)(x))$$

$$((ST)^*(z)/x) = (z/S(T(x)))$$

$$= (S^*(z)/T(x))$$

$$= (T^*(S^*(z))/x); \quad \text{por tanto}$$

$$(ST)^* = T^* S^*.$$

TEO. 1.5-15

Sean H, K espacios de Hilbert y $T : H \longrightarrow K$ una función lineal continua. Si $X \subset H$, $Y \subset K$ y $T(X) \subset Y$, entonces

$$T^*(Y^{\perp}) \subset X^{\perp}.$$

Pa.

Dado $z \in K$ tq $z \perp Y$, el problema se reduce a demostrar que

$T^*(z) \perp X$.

Si $x \in X$, entonces $T(x) \in Y$. Así $(z/T(x)) = 0$ ya que $z \perp Y$. Pero $(z/T(x)) = (T^*(z)/x)$, luego $(T^*(z)/x) = 0$, por lo cual,

$$T^*(z) \in X^{\perp} \;; \quad \text{por tanto} \quad T^*(Y^{\perp}) \subset X^{\perp}$$

TEO. 1.5-16

Sean H, K espacios de Hilbert y $T : H \longrightarrow K$ una función lineal continua. Si M es un subespacio lineal cerrado de H y N un subespacio lineal cerrado de K, entonces $T(M) \subset N$ ssi $T^*(N^{\perp}) \subset M^{\perp}$.

" $\Longrightarrow$ " En este sentido el resultado es inmediato a partir del (TEO. 1.5-15).

" $\Longleftarrow$ " Como T^* es una función lineal continua, $N^{\perp} \subset K$, $M^{\perp} \subset H$, se tiene por (TEO. 1.5-15) que si $T^*(N^{\perp}) \subset M^{\perp}$, entonces $T^{**}(M^{\perp\perp}) \subset N^{\perp\perp}$. Luego por (COROLARIO 1.4-6) y (TEO. 1.5-13) se tiene que $T(M) \subset N$.

TEO. 1.5-17

Sea H, K espacios de Hilbert. Si $T : H \longrightarrow K$ es una función lineal continua entonces :

i) $\operatorname{Ker} T = \{x : T(x) = \theta\} = [T^*(K)]^{\perp}$.

ii) $[\operatorname{Ker} T]^{\perp} = \{x : T(x) = \theta\}^{\perp} = \overline{T^*(K)}$

iii) $\operatorname{Ker} T^* = \{y : T^*(y) = \theta\} = [T(H)]^{\perp}$.

iv) $[\mathrm{Ker}\ T^*]^{\perp} = \{y: T^*(y) = \Theta\}^{\perp} = \overline{T(H)}$

Pa.

Ker T es subespacio lineal cerrado de H, Ker T* es subespacio lineal cerrado de K.

"En esta prueba denotaremos Ker T = M y Ker T* = N".

i) Como $T(M) \subset \{\Theta\}$, entonces $T^*(\{\Theta\}^{\perp}) \subset M^{\perp}$ como una consecuencia inmediata del (TEO. 1.5-15). Así,

$$T^*(K) \subset M^{\perp}. \qquad (1)$$

Si tomamos $X = H$, $Y = T(H)$, la relación $T(H) \subset T(H)$ puede escribirse, $T(X) \subset Y$ y $T^*(Y^{\perp}) \subset X^{\perp}$. Como $X^{\perp} = H^{\perp} = \{\Theta\}$, tenemos que $T^*(Y^{\perp}) = \{\Theta\}$, esto nos dice que $Y^{\perp} \subset N$, y así $[T(H)]^{\perp} \subset N$ (2).

Aplicando (1) y (2) a T* en lugar de T se obtiene

$$T(H) \subset N^{\perp} \qquad (3)$$
$$[T^*(K)]^{\perp} \subset M. \qquad (4)$$

De la relación (1) y aplicando el (TEO. 4-18-ii) se tiene que

$$M \subset M^{\perp\perp} \subset [T^*(K)]^{\perp}.$$

Combinando éste último resultado con (4) se obtiene

$$M = [T^*(K)]^{\perp}$$

lo cual se quería demostrar.

ii) Del resultado i) se tiene que, $M^{\perp} = [T^*(K)]^{\perp\perp}$ y apoyándonos en el (COROLARIO 4-3) resulta que

$$M^{\perp} = \overline{[T^*(K)]}$$

ya que T*(K) es un subespacio lineal de H.

iii) Reemplazando T por T* en i) se tiene

$$N = [T^{**}(H)]^{\perp} = [T(H)]^{\perp}.$$

iv) Reemplazando T por T* en ii), se tiene

$$N^{\perp} = \overline{[T(H)]}\ .$$

CAPITULO II

1. OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT

En el contexto de este capítulo H denotará un espacio de Hilbert diferente de $\{\Theta\}$.

Def. 2.1-1

Se llama operador a toda función lineal continua de H en H.

Ejemplos :

i) $I : H \dashrightarrow H$ tq $I(x) = x$, para todo $x \in H$; es el operador identidad.

ii) $O : H \dashrightarrow H$ tq $O(x) = \Theta$, para todo $x \in H$; es el operador cero.

iii) Si $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda I : H \dashrightarrow H$ tq $\lambda I(x) = \lambda x$, para todo $x \in H$; es el operador escalar.

iv) Si T es un operador en H, entonces T^* también lo es.

TEO. 2.1-1

Si X es un subconjunto total de H y S, T son operadores en H, tales que $S(x) = T(x)$ para todo $x \in X$, entonces $S = T$.

Pa.

Sea N el espacio nulo (Ker) de $S - T$.

Como $S(x) = T(x)$ para todo $x \in X$, entonces $S(x) - T(x) = \Theta$

para todo $x \in X$, luego $(S - T)(x) = \Theta$ para todo $x \in X$, así, $X \subset N$.

Dado que $X \subset N$, entonces $N^{\perp} \subset X^{\perp}$ por (TEO. 1.4-18-ii), pero $X^{\perp} = \{\Theta\}$ ya que X es total. Luego $N^{\perp} = \{\Theta\}$. Pero, por (COROLARIO 1.4-6-ii) se tiene

$$N = N^{\perp\perp} = \{\Theta\}^{\perp} = H$$

de este último hecho se concluye que $(S - T) = 0$, es decir, $S = T$.

TEO. 2.1-2

Si X es un subconjunto total de H y S, T operadores en H, tales que $(S(x)/y) = (T(x)/y)$ para todo x, $y \in X$, entonces $S = T$.

Pa.

Sea $y \in X$

$(S(x)/y) = (T(x)/y)$, para todo $x \in X$, así

$(S(x)/y) - (T(x)/y) = 0$

$(S(x) - T(x)/y) = 0$; entonces $(S(x)-T(x)) \in X^{\perp}$

$X^{\perp} = \{\Theta\}$, así, $S(x) - T(x) = \Theta$ para todo $x \in X$. Es decir, $S(x) = T(x)$ para todo $x \in X$ y del (TEO. 1.4-1-v) se concluye que $S = T$.

TEO. 2.1-3

Si X es un conjunto, P un espacio pre-Hilbert y S, T funciones de X sobre P tales que $(S(x)/z) = (T(x)/z)$ para todo $x \in X$ y $z \in P$, entonces $S = T$.

Pa.

Es inmediata por (TEO. 1.4-1-v).

TEO. 2.1-4

Si S y T son operadores en H tq $(S(x)/x) = (T(x)/x)$ para todo $x \in H$, entonces $S = T$.

Pa.

Si se consideran las formas sesquilineales en H x H definidas por las expresiones $\psi(x, y) = (S(x)/y)$ y $\Omega(x, y)=(T(x)/y)$ por hipótesis se tiene que $\psi(x, x) = \Omega(x, x)$, para todo $x \in H$; así $\psi = \Omega$ por (TEO. 1.5-5), luego, $(S(x)/y) = (T(x)/y)$ para todo $x, y \in H$; de lo cual resulta,

Por (TEO. 1.4-1-v), que $S(x) = T(x)$, para todo $x \in H$; por lo tanto $S = T$.

TEO. 2.1-5

Si T es un operador en H, tq $T(x) \perp x$, para todo vector $x \in H$, entonces $T = 0$.

Pa.

Por hipótesis, $(T(x)/x) = 0$ para todo $x \in H$; por otra parte $(0(x)/x) = 0$ para todo $x \in H$. Así, $(T(x)/x) = (0(x)/x)$ para todo $x \in H$; luego por (TEO. 1.4-1-v), $T = 0$.

TEO 2.1-6

Sean S y T operadores en H. Si $S^* S + T^* T = 0$, entonces

$S = T = 0$.

Pa.

Sea $x \in H$.

$(S^* S + T^* T)(x) = \Theta$ ya que $S^* S + T^* T = 0$, luego

$((S^* S + T^* T)(x)/x) = 0$ para todo $x \in H$. Pero,

$(S^* S + T^* T)(x) = (S^* S)(x) + (T^* T)(x)$, así

$$0 = (S^* S(x) + T^* T(x)/x) = (S^* S(x)/x) + (T^* T(x)/x)$$

$$0 = (S^* S(x) + T^* T(x)/x) = (S(x)/S(x)) + (T(x)/T(x))$$

$$0 = (S^* S(x) + T^* T(x)/x) = ||S(x)||^2 + ||T(x)||^2$$

se deduce que

$$||S(x)||^2 = 0 \quad y \quad ||T(x)||^2 = 0$$

luego, $||S(x)|| = 0$ y $||T(x)|| = 0$ para todo $x \in H$, así

$S(x) = \Theta$ y $T(x) = \Theta$ para todo $x \in H$; por tanto,

$$S = 0 \quad y \; T = 0.$$

2. OPERADORES ISOMETRICOS

Ya se ha establecido anteriormente que un operador T es - isométrico si $||T(x) - T(y)|| = ||x - y||$ para todo $x, y \in H$; esto es equivalente a exigir de T la condición $||T(x)|| = ||x||$ para todo x. Además, en un espacio de Hilbert se cumple.

TEO. 2.2-1

Si T es un operador en H, las siguientes condiciones son equivalentes :

i) T es isométrico

ii) $T^* T = I$

iii) $(T(x)/T(y)) = (x/y)$ para todo x, y $\in$ H.

Pa.

i) ==> ii) Como T es isométrico, entonces $||T(x)|| = ||x||$ para todo x $\in$ H. Entonces,

$$\begin{aligned}(T^*(T(x))/x) &= (T(x)/T(x)) \\ &= ||T(x)||^2 \\ &= ||x||^2 \\ &= (x/x) \\ &= (I(x)/x),\end{aligned}$$

luego de acuerdo a (TEO. 2.1-4) $T^*T = I$.

ii) ==> iii)

$$(T(x)/T(y)) = (T^*(T(x))/y)$$

$$(T(x)/T(y)) = (I(x)/y)$$

$$(T(x)/T(y)) = (x/y) \quad \text{para todo } x, y \in H.$$

iii) ==> i)

$$||T(x)||^2 = (T(x)/T(x))$$

$$= (x/x)$$

$$= ||x||^2.$$

Resultado inmediato. Si T es isométrico, es inmediato a - partir de la relación

$$||T(x) - T(y)|| = ||x - y||$$

que T es inyectivo, ya que si $T(x) = T(y)$, entonces $T(x) - T(y) = \Theta$, luego

$$||T(x) - T(y)|| = ||x - y|| = 0 ;$$

por tanto $x - y = \Theta$, es decir, $x = y$.

TEO. 2.2-2

Si S y T son operadores isométricos en H, entonces ST es un operador isométrico en H.

Pa.

$$||ST(x) - ST(y)|| = ||S(T(x)) - S(T(y))||$$

$$= ||T(x) - T(y)|| \quad \text{por ser S isométrico}$$

$$= ||x - y||$$

por ser T isométrico; por tanto ST es isométrico.

TEO. 2.2-3

Si T es un operador isométrico en H, entonces T(H) es un subespacio lineal cerrado de H.

Pa.

T(H) es un subespacio lineal de H por (TEO. 1.1-3-i).

Sea $y \in \overline{T(H)}$. Tomemos una sucesión $(y_n)n \in \mathbf{N}$ de elementos de T(H) tq $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Podemos suponer que $y_n = (T(x_n))$ con $(x_n)n \in \mathbf{N}$ elementos de H.

Por hipótesis $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, además hemos supuesto $y_n = T(x_n)$, luego, si $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tq $d(T(x_n), y) \leq \varepsilon/2$ sq $n > N$; tomando $m, n > N$ se tiene

$$d(T(x_n), T(x_m)) \leq d(T(x_n), y) + d(y, T(x_m))$$

$$d(T(x_n), T(x_m)) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \quad \text{sq} \quad m, n > N$$

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \qquad \text{sq} \quad m, n > N$$

por ser T isométrico; por tanto $(x_n)n \in N$ es de Cauchy.

Dado que H es completo existe $x \in H$ tq $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y como T es continua se tiene que $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$, es decir

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Luego, $y \in T(H)$; por tanto T(H) es cerrado.

TEO. 2.2-4

Sea T un operador isométrico en H. Si M y N son subespacios lineales cerrados de H y T(M) = N, entonces $T(M^{\perp}) \subset N^{\perp}$.

Pa.

Sea $y \in T(M^{\perp})$.

Si $y \in T(M^{\perp})$ entonces existe $x \in M^{\perp}$ tq $y = T(x)$; si $z \in N$, entonces $z = T(u)$ con $u \in M$. Así

$$(y/z) = (T(x)/T(u))$$
$$= (x/u)$$
$$= 0 .$$

Este resultado conduce a concluir que $y \in N^{\perp}$; por tanto $T(M^{\perp}) \subset N^{\perp}$.

TEO. 2.2-5

Si $S : H \longrightarrow H$ una función tq $(S(x)/S(y)) = (x/y)$ para todo $x, y \in H$.

Si además, $S(H)$ es un subespacio de H, entonces S es un operador isométrico.

Pa.

Primero demostraremos que S es un operador.

<u>Linealidad</u> :

Sea $z = S(y)$ en $S(H)$, x_1, $x_2 \in H$ y λ un escalar.

i) $(S(x_1 + x_2)/z) = (S(x_1 + x_2)/S(y))$

$$= (x_1 + x_2/y)$$
$$= (x_1/y) + (x_2/y)$$

$$= (S(x_1)/S(y)) + (S(x_2)/S(y))$$

$$= (S(x_1) + S(x_2)/S(y))$$

$$= (S(x_1) + S(x_2)/z)$$

como S(H) es un subespacio lineal, se concluye que

$$S(x_1 + x_2) = S(x_1) + S(x_2).$$

ii) $$(S(\lambda x)/z) = (S(\lambda x)/S(y))$$

$$= (\lambda x/y)$$

$$= \lambda(x/y)$$

$$= \lambda(S(x)/S(y))$$

$$= (\lambda S(x)/S(y))$$

$$= (\lambda S(x)/z)$$

como S(H) es subespacio lineal, se concluye que

$$S(\lambda x) = \lambda S(x);$$

por tanto S es lineal.

Continuidad

Como $(S(x)/S(y)) = (x/y)$ para todo $x, y \in H$, entonces

$$||S(x)||^2 = (S(x)/S(y))$$

$$= (x/x)$$

$$= ||x||^2 \quad , \text{ luego}$$

$$||S(x)|| = ||x|| \quad , \text{así,existe } M = 1$$

tq $||S(x)|| = M||x||$ y por (TEO. 1.3-5-iv), S es continua; además con i) e ii) se demuestra que S es un operador.

Como por hipótesis $(S(x)/S(y)) = (x/y)$ para todo x, y $\in$ H, se tiene de acuerdo al (TEO. 2.2-1) que S es isométrico.

TEO. 2.2-6

Sea $T : H \longrightarrow H$ una función tq $(T(x)/(T(y)) = (y/x)$ para todo x, y $\in$ H. Si además T(H) es un subespacio lineal de H, entonces, TT es un operador isométrico.

Pa.

Como T(H) es un subespacio de H, entonces por (TEO. 1.1-3) T(T(H)) es un subespacio de H. Además

$$(T(T(x))/T(T(y))) = (T(y)/T(x))$$

$$= (x/y) \quad \text{para todo } x, y \in H$$

y por (TEO. 2.2-5), TT es un operador isométrico.

Def. 2.2-1

Sean S y T operadores en H. S y T se llaman métricamente equivalentes si

$$||S(x)|| = ||T(x)|| \qquad \text{para todo } x \in H.$$

TEO. 2.2-7

Sean S y T operadores en H. Entonces, S y T son métricamente eqüivalentes ssi $S^* S = T^* T$.

Pa.

" ===> " Como S y T son métricamente equivalentes, se tiene que

$$||S(x)||^2 = ||T(x)||^2, \text{ así}$$

$$\begin{aligned}(S^* S(x)/x) &= (S^*(S(x))/x)\\ &= (S(x)/S(x))\\ &= ||S(x)||^2\\ &= ||T(x)||^2\\ &= (T(x)/T(x))\\ &= (T^*(T(x))/x)\\ &= (T^*T(x)/x) \quad \text{para todo } x \in H \;;\end{aligned}$$

por tanto $S^* S = T^* T$ por (TEO. 2.1-4).

" <===" Sea $x \in H$.

$$\begin{aligned}||S(x)||^2 &= (S(x)/S(x))\\ &= (S^*(S(x))/x)\\ &= (S^* S(x)/x)\end{aligned}$$

$$= (T^* T(x)/x)$$

$$= (T(x)/T(x))$$

$$= ||T(x)||^2 \quad \text{para todo } x \in H,$$

es decir $||S(x)|| = ||T(x)||$ para todo $x \in H$; por tanto, S y T son métricamente equivalentes.

3 - OPERADORES UNITARIOS

Def. 2.3-1

Sea T un operador en H. T se llama unitario si $T^* T = TT^* = I$.

TEO. 2.3.1

Si T es un operador en H, las siguientes condiciones son equivalentes :

i) T es unitario.

ii) T* es unitario.

iii) T y T* son isométrico.

iv) T es isométrico y T* inyectivo

v) T es isométrico y suryectivo.

vi) T es biyectivo y $T^{-1} = T^*$

i) ==> ii) $T^{**}T^* = TT^* = I$, por ser T unitario.

$T^*T^{**} = T^*T = I$, por ser T unitario, es decir,

$T^{**}T^* = T^*T^{**} = I$, lo cual nos demuestra que T^* es unitario.

ii) ==> iii) Es inmediato a partir de la (Def. 2.3-1) y - por (TEO. 2.2-1).

iii) ==> iv) Es inmediato, ya que todo operador isométrico es inyectivo.

iv) ==> v) Por (TEO. 1.2-3), T(H) es un subespacio lineal cerrado de H. Como T^* es inyectivo, el espacio nulo de T^* es el unitario $\{\Theta\}$, es decir,

$$\{y : T^*(y) = \Theta\} = \{\Theta\}$$

luego, por (TEO. 1.5-17) se tiene que

$$\{\Theta\}^{\perp} = \overline{T(H)} = T(H)$$

por ser T(H) cerrado. Pero $\{\Theta\}^{\perp} = H$, así $T(H) = H$; - por lo tanto T es suryectivo.

v) ==> vi) Es inmediato que T es biyectivo. Sea $S = T^{-1}$. Así, $ST = TS = I$. Luego,

$$T^* = T^*I = T^*(TS) = (T^*T)S = IS = S.$$

vi) ==> i) Como $T^* = T^{-1}$, entonces $T^*T = TT^* = I$; luego T es unitario.

TEO. 2.3-2

Sean S y T operadores en H. Si S y T son unitarios, entonces ST es unitario.

Pa.

i) $$(ST)(ST)^* = (ST)(T^*S^*)$$

$$= S(TT^*)S^*$$

$$= S\ I\ S^*$$

$$= S(IS^*)$$

$$= S\ S^*$$

$$= I.$$

ii) $$(ST)^*(ST) = (T^*\ S^*)(ST)$$

$$= T^*(S^*\ S)T$$

$$= T^*\ I\ T$$

$$= T^*(IT)$$

$$= T^*\ T$$

$$= I$$

A partir de los resultados i) e ii) se tiene :

$$(ST)^*(ST) = (ST)(ST)^* = I;$$

por tanto, ST es unitario.

TEO. 2.3-3

Un operador T es unitario ssi T* es isométrico y T es inyectivo.

Pa.

" ==> " Por (TEO. 2.3-1), T unitario implica que T y T* son isométricos.

Luego, si T es isométrico también es inyectivo.

" <=== " T* isométrico y T inyectivo implica que T* es unitario, lo cual a su vez implica T** = T es unitario.

TEO. 2.3-4

Si T es un operador unitario, M y N subespacios lineales cerrados y T(M) = N, entonces $T(M^{\perp}) = N^{\perp}$.

Pa.

i) $T(M^{\perp}) \subset N^{\perp}$ es inmediato por (TEO. 2.2-4).

ii) Se probará que $N^{\perp} \subset T(M^{\perp})$.

Como T(M) = N, entonces T*(T(M)) = T*(N) y dado que T es unitario T*(T(M)) = M = T*(N), de M = T*(N) y dado que T* es isométrico, se sigue que $T^*(N^{\perp}) \subset M^{\perp}$. Luego, $T(T^*(N^{\perp})) = T(M^{\perp})$ y así, $N^{\perp} \subset T(M^{\perp})$; de i) e ii) se concluye que $T(M^{\perp}) = N^{\perp}$.

TEO. 2.3-5

Si T : H ---> H es una función suryectiva tq

$(T(x)/T(y)) = (x/y)$ para todo $x, y \in H$, entonces T es un operador unitario.

Pa.

Linealidad de T

i) $(T(x_1 + x_2)/T(y)) = (x_1 + x_2/y)$

$$= (x_1/y) + (x_2/y)$$

$$= (T(x_1)/T(y)) + (T(x_2)/T(y))$$

$$= (T(x_1) + T(x_2)/T(y))$$

y dado que T es suryectiva, del (TEO. 4-1-i) concluimos que $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$.

ii) $(T(\lambda x)/T(y)) = (\lambda x/y)$

$$= \lambda(x/y)$$

$$= \lambda(T(x)/T(y))$$

$$= (\lambda T(x)/T(y)) \quad ; \quad \text{por tanto}$$

$$T(\lambda x) = \lambda T(x).$$

Como T es lineal, entonces T(H) es un subespacio lineal de H. Luego, por (TEO. 2.2-5) de operadores isométricos, se sigue que T es un operador isométrico. Luego, por (TEO. 2.3-1) T es unitario.

Def. 2.3-2

Sean S y T operadores en H. El operador S se llama unitariamente equivalente al operador T, si existe un operador unitario

U tq $T = U^* S U$.

NOTACION : S unitariamente equivalente a T se denota por

$S \cong T$.

TEO. 2.3-6

La relación $\cong$ definida en el conjunto de operadores en H, es de equivalencia.

Pa.

i) $T \cong T$ para todo T. En efecto I es unitario, además $I^* = I$ así se tiene que $T = ITI = I^* TI$.

ii) $S \cong T$ entonces existe un operador unitario U tq $T = U^* SU$. Así,

$$\begin{aligned} TU^* &= (U^* SU)U^* \\ &= U^*S(UU^*) \\ &= U^* SI \\ &= U^* S. \end{aligned}$$

Luego $$\begin{aligned} U T U^* &= UU^* S \\ &= I S \\ &= S. \end{aligned}$$

Así $$\begin{aligned} S &= U T U^* \\ &= U^{**}TU^* \end{aligned}$$

con U^* unitario; por tanto $T \cong S$.

iii) Si $R \cong S$ y $S \cong T$, entonces $S = U_1^* R U_1$ y $T = U_2^* SU_2$ - con U_1 y U_2 operadores unitarios. Luego,

$$T = U_2^*(U_1^* \; R \; U_1)$$

$$= (U_2^* \; U_1^*) \; R(U_1 \; U_2)$$

$$= (U_1 \; U_2)^* \; R(U_1 \; U_2)$$

con U_1, U_2 operador unitario, por tanto $R \cong T$.

TEO. 2.3-7

Sean S y T operadores en H. Si $S \cong T$, entonces $S^* \cong T^*$.

Pa.

Si $S \cong T$ entonces existe un operador unitario U tq $T = U^* \; S \; U$.

Luego,
$$\begin{aligned} T^* &= (U^* \; S \; U)^* \\ &= (U^*(SU))^* \\ &= ((SU)^* \; U^{**}) \\ &= U^* \; S^* \; U \quad ; \quad \text{por tanto} \end{aligned}$$

$S^* \cong T^*$.

4. OPERADORES AUTOADJUNTOS

Def. 2.4-1

Sea T un operador en H. T se llama autoadjunto o Hermitiana si $T^* = T$.

TEO. 2.4-1

Si T es un operador en H, las siguientes condiciones son equivalentes :

i) T es autoadjunto.

ii) $(T(x)/y) = (x/T(y))$ para todo $x, y \in H$.

iii) $(T(x)/x) = (x/T(x))$ para todo $x \in H$.

iv) $(T(x)/x)$ es real, para todo $x \in H$.

Pa.

i) ==> ii) Sean $x, y \in H$

$$(T(x)/y) = (x/T^*(y))$$
$$= (x/T(y)) \quad \text{para todo } x, y \in H.$$

ii) ==> iii) Si $y = x$ se tiene $(T(x)/x) = (x/T(x))$.

iii) ==> iv) Sea $x \in H$, $(T(x)/x)^* = (x/T(x))$

$$= (T(x)/x) \quad ;$$

por tanto $(T(x)/x)$ es real.

iv) ==> i) $(T(x)/x) = (T(x)/x)^*$

$$= (x/T(x))$$
$$= (T^*(x)/x).$$

Luego $T(x) = T^*(x)$ para todo $x \in H$; por tanto $T = T^*$.

TEO. 2.4-2

Si S y T son operadores autoadjuntos en H, $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces :

i) $S + T$ es autoadjunto.

ii) λT es autoadjunto

Pa.

i) Como S y T son autoadjuntos, se tiene $S^* = S$ y $T^* = T$,

así : $$(S + T)^* = S^* + T^* = S + T \ ;$$

por tanto $S + T$ es autoadjunto.

ii) Como λ es real $\lambda^* = \lambda$, así

$$(\lambda T)^* = \lambda^* T^* = \lambda T;$$

por tanto λT es autoadjunto.

TEO. 2.4-3

Si T es un operador en H, entonces :

i) $T^* T$ es autoadjunto.

ii) $T + T^*$ es autoadjunto.

Pa.

i) $(T^*T)^* = T^* T^{**}$

$= T^* T$; por tanto $T^* T$ es autoadjunto.

ii) $(T + T^*)^* = T^* + T^{**}$

$= T^* + T$

$= T + T^*$; por tanto $T + T^*$ es autoadjunto.

TEO. 2.4-4

Si S y T son operadores autoadjuntos en H, entonces ST es autoadjunto ssi

$$ST = TS.$$

Pa.

(==>) Si ST es autoadjunto, entonces

$$(ST) = (ST)^*$$

$$(ST) = T^* S^*$$

$$(ST) = TS.$$

(<==) Si ST = TS, entonces

$$(ST)^* = T^* S^*$$

$$(ST)^* = TS$$

$$(ST)^* = ST \quad ; \text{ por tanto ST es autoadjunto.}$$

TEO. 2.4-5

Si T es un operador cualquiera en H, existen dos operadores autoadjuntos únicos A y B en H tales que T = A + iB "Forma Cartesiana de un operador".

Pa.

Definiendo $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ y $B = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ tenemos :

$$A + iB = \frac{1}{2}(T + T^*) + i(1/2i(T - T^*))$$

$$= \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T^* + \frac{1}{2}T - \frac{1}{2}T^*$$

$$= \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T = T.$$

Por (TEO. 2.4-2-ii) es evidente que A es autoadjunto.

$$B = \frac{1}{2i}(T - T^*) = \frac{1}{2i}T - \frac{1}{2i}T^* \quad , \text{ así}$$

$$B^* = \left(\frac{1}{2i}T - \frac{1}{2i}T^*\right)^* = \left(\frac{1}{2i}T\right)^* - \left(\frac{1}{2i}T^*\right)^*$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^* T^* - \left(\frac{1}{2i}\right)^* T$$

$$= \frac{1}{-2i} T^* + \frac{1}{2i} T$$

$$= \frac{1}{2i} T - \frac{1}{2i} T^*$$

Luego $B^* = B$; por tanto B es autoadjunto.

UNICIDAD DE A Y B

Supongamos que existe otro par de operadores autoadjuntos C y D tales que $T = C + iD$, entonces

$$T^* = C^* + i^* D^*$$

$$= C - iD$$

Luego, $T + T^* = 2C$ y $C = \frac{T+T^*}{2} = A$, $T - T^* = 2\ iD$

$$\frac{T - T^*}{2i} = D \text{ ; por tanto } D = B.$$

TEO. 2.4-6

Si T es un operador autoadjunto en H, entonces

$$||T|| = \text{Sup } \{|(T(x)/x)| \ : \ ||x|| \leq 1\}.$$

Pa.

Por (TEO. 1.5-10) $\psi(x, y) = (T(x)/y)$ define una forma - sesquilineal acotada. Además, $||\psi|| = ||T||$, por otra parte

$\psi(y, x) = (T(y)/x)$

$= (y/T^*(x))$

$= (y/T(x))$

$= [(T(x)/y)]^*$

$= [\psi(x, y)]^*.$

Luego, por (Def. 1.5-6), ψ es Hermitiana; y por (TEO. 1.5-9) - se tiene

$$||\psi|| = \text{Sup } \{|\psi(x,x)| : ||x|| \leq 1\} \quad ; \quad \text{por tanto}$$

$$||T|| = \text{Sup } \{|\psi(x,x)| : ||x|| \leq 1\}$$

$$= \text{Sup } \{|(T(x)/x)| : ||x|| \leq 1\}$$

TEO. 2.4-7

Si T es un operador autoadjunto en H y S, J subconjuntos de H tales que T(S) C J, entonces $T(J^{\perp}) \subset S^{\perp}$.

Pa.

Sea $y \in T(J^{\perp})$, entonces existe $x \in J^{\perp}$ tq $y = T(x)$, $x \perp z$ para todo $z \in J$, luego $x \perp T(u)$ para todo $u \in S$, así

$$0 = (x/T(u))$$
$$= (T(x)/u)$$
$$= (y/u)$$

para todo $u \in S$, así $y \in S^{\perp}$; por tanto $T(J^{\perp}) \subset S^{\perp}$.

TEO. 2.4-8

Si T es un operador autoadjunto en H, $T(x) = \Theta$ ssi $TT(x) = \Theta$.

Pa.

(==>) Si T es autoadjunto y $T(x) = \Theta$, entonces

$$TT(x) = T(T(x))$$
$$= T(\Theta)$$
$$= \Theta .$$

(<==) Sea $(TT)(x) = \Theta$. Dado que T es autoadjunto se tiene que :

$$(TT(x)/x) = (T(T(x))/x)$$

$$(TT(x)/x) = (T(x)/T(x)) ,$$

$$(\Theta/x) = (T(x)/T(x)) \quad \text{por hipótesis}$$

$$0 = (T(x)/T(x)) \; ; \text{ por tanto } T(x) = \Theta .$$

TEO. 2.4-9

Si T es un operador autoadjunto en H y S un operador cualquiera en H, entonces el operador $S^* T S$ es autoadjunto.

Pa.

Se demostrará que $(S^* T S)^* = S^* T S$.

En efecto $$(S^* T S)^* = ((S^* T)S)^*$$

$$= S^*(S^* T)^*$$

$$= S^* T^* S^{**}$$

$$= S^* T^* S$$

$$= S^* T S .$$

TEO. 2.4-10

Si T es un operador autoadjunto en H y S unitariamente equivalente a T, entonces S es autoadjunto.

Pa.

Como $S \cong T$, entonces existe un operador unitario U tal que

$$S = U^* T U \qquad (1)$$

$$S^* = (U^*(TU))^*$$

$$S^* = (TU)^* U^{**}$$

$$S^* = U^* T^* U$$

$$S^* = U^* T U \qquad (2)$$

por ser T autoadjunto, de (1) y (2) se concluye que $S = S^*$.

Def. 2.4-2

Un operador T en H, se llama positivo si $(T(x)/x) \geq 0$ para todo $x \in H$.

<u>NOTACION</u> : T positivo se denota $T \geq 0$.

TEO. 2.4-11

Si T es un operador positivo en H, entonces T es autoadjunto.

Pa.

Si $T \geq 0$, entonces $(T(x)/x) \geq 0$ para todo $x \in H$, luego $(T(x)/x)$ es real para todo $x \in H$, y por (TEO. 2.4-1) se concluye que T es autoadjunto.

TEO. 2.4-12

Si S y T son operadores positivos en H y $\lambda \geq 0$, entonces:

i) $S + T \geq 0$

ii) $\lambda S \geq 0$.

Pa.

i) Dado que $S \geq 0$ y $T \geq 0$, se tiene que $(S(x)/x) \geq 0$ para todo $x \in H$, y $(T(x)/x) \geq 0$ para todo $x \in H$, así

$$(S(x)/x) + (T(x)/x) \geq 0 \quad \text{para toda } x \in H,$$

pero

$(S(x)/x) + (T(x)/x) = (S(x) + T(x)/x)$

$(S(x)/x) + (T(x)/x) = ((S+T)(x)/x)$, luego

$((S+T)(x)/x) \geq 0$ para todo $x \in H$; por tanto

$S + T \geq 0$.

ii) Dado que $S \geq 0$, se tiene que

$(S(x)/x) \geq 0$ para todo $x \in H$.

Luego, si $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda(S(x)/x) \geq 0$ para todo $x \in H$,

$\lambda(S(x)/x) = (\lambda(S(x))/x)$

$\lambda(S(x)/x) = (\lambda S(x)/x)$,

luego $(\lambda S(x)/x) \geq 0$ para todo $x \in H$; por tanto $\lambda S \geq 0$.

TEO. 2.4-13

Si T es un operador positivo en H y S un operador cualquiera en H, entonces :

i) $S^* TS \geq 0$.

ii) $S^* S \geq 0$.

Pa.

i) En efecto $(S^* TS(x)/x) = (S^*(TS(x))/x)$

$= (TS(x)/S(x))$

$= (T(S(x))/S(x))$,

pero dado que T es positivo, se tiene que :

$$(T(S(x))/S(x))) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H$$

Así $(S^* TS(x)/x) \geq 0$ para todo $x \in H$; por tanto

$$S^* TS \geq 0 .$$

ii) $I \geq 0$ ya que $(x/x) \geq 0$ para todo $x \in H$ y $(x/x) = (I(x)/x)$, aplicando i) con $T = I$, se tiene

$$S^*S = S^* IS \geq 0 .$$

TEO. 2.4-14

Si S y T son operadores positivos en H tales que $S+T = 0$, entonces $S = T = 0$.

Pa.

Como $S = T$ son positivos, entonces $(S(x)/x) \geq 0$ para todo $x \in H$; y $(T(x)/x) \geq 0$ para todo $x \in H$, además $(S+T)(x) = \theta$ para todo $x \in H$; sea $x \neq \theta$, $((S+T)(x)/x) = 0$ ya que $(S+T)(x) = \theta$ para todo $x \in H$ pues $S + T = 0$, pero

$$((S + T)(x)/x) = (S(x) + T(x)/x)$$

$$((S + T)(x)/x) = (S(x)/x) + (T(x)/x) \quad , \quad \text{luego}$$

$$(S(x)/x) + (T(x)/x) = 0$$

y dado que S y T son positivos, tiene que ser $(S(x)/x) = 0$ y $(T(x)/x) = 0$; por otra parte $(0(x)/x) = 0$ para todo $x \in H$, - así $(S(x)/x) = (0(x)/x)$ para todo $x \in H$.

De donde $S(x) = 0(x)$ para todo $x \in H$; por tanto $S = 0$. En forma similar se muestra que $T = 0$; así se concluye que $S = T = 0$.

Def. 2.4-3

Si S y T son operadores autoadjuntos en H, se dice que $S \leq T$ si $T - S \geq 0$.

TEO. 2.4-15

Si S y T son operadores en H, se cumple :

i) Si $S \leq T$ y $T \leq S$, entonces $S = T$.

ii) Si $R \leq S$ y $S \leq T$, entonces $R \leq T$.

Pa.

i) Si $S \leq T$ y $T \leq S$ entonces $T - S \geq 0$ y $S - T \geq 0$; además $(T-S) + (S-T) = T-S+S-T = 0$, entonces por (TEO.2.4-14), se tiene $T-S = S-T = 0$; por tanto $S = T$.

ii) Si $R \leq S$ y $S \leq T$, entonces $S-R \geq 0$ y $T-S \geq 0$, es decir, $((S-R)(x)/x) \geq 0$ y $((T-S)(x)/x) \geq 0$ para todo $x \in H$.

Así

$$((S-R)(x)/x) + ((T-S)(x)/x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H.$$

Pero,

$$((S-R)(x)/x)+((T-S)(x)/x) = (S(x)-R(x)/x) + (T(x)-S(x)/x)$$

$$= (S(x)/x)-(R(x)/x)+(T(x)/x)-(S(x)/x))$$

$$= (T(x)/x) - (R(x)/x)$$

$$= (T(x) - R(x)/x)$$

$$= ((T-R)(x)/x) \quad , \quad \text{luego}$$

$$((T-R)(x)/x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H \quad ,$$

y por tanto, $T - R \geq 0$, es decir, $R \leq T$.

TEO. 2.4-16

Si S y T son operadores autoadjuntos en H, entonces $S \leq T$ ssi $(S(x)/x) \leq (T(x)/x)$ para todo $x \in H$.

Pa.

$$
\begin{aligned}
S \leq T \iff & T - S \geq 0 \\
\iff & ((T-S)(x)/x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H \\
\iff & (T(x)-S(x)/x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H \\
\iff & (T(x)/x)-(S(x)/x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H \\
\iff & (T(x)/x) \geq (S(x)/x) \quad \text{para todo } x \in H.
\end{aligned}
$$

TEO. 2.4-17.

Si T es un operador autoadjunto en H, entonces

$$- ||T|| \, I \leq T \leq ||T|| \, I \; .$$

Pa.

i) Se probará que $T \leq ||T||I$, es decir que $||T||I-T \geq 0$.

En efecto, sea $x \in H$.

$$
\begin{aligned}
((||T||I-T)(x)/x) &= (||T||I(x) - T(x)/x) \\
&= (||T||I(x)/x) - (T(x)/x)
\end{aligned}
$$

$$= ||T|| \ (I(x)/x) - (T(x)/x)$$

$$\geq ||T|| \ (x/x) - |(T(x)/x)|$$

como $|(T(x)/x)| \leq ||T(x)|| \ ||x||$

y dado que T es continua se tiene :

$$||T(x)|| \leq ||T|| \ ||x|| \ , \qquad \text{luego}$$

$$||T||(x/x)-|(T(x)/x)| \geq ||T||(x/x)- ||T(x)|| \, ||x||$$

$$\geq ||T||(x/x)-||T|| \, ||x|| \, ||x||$$

$$\geq ||T|| \, ||x||^2-||T|| \ ||x||^2$$

$$\geq 0 \ , \ \text{así}$$

$$((||T||I-T)(x)/x) \geq 0 \ \text{ para todo } x \in H \ ;$$

por tanto $||T|| \ I-T \geq 0$ ó lo que es lo mismo $T \leq ||T|| \ I$.

ii) Ahora se probará que $-||T||I \leq T$, o sea que,

$$T - (-||T||I) \geq 0$$

pero, $T-(-||T||I) = T +||T||I$. Sea $x \in H$

$$((T + ||T||I)(x)/x) = (T(x) + ||T||I(x)/x)$$

$$= (T(x)/x) + (||T||I(x)/x)$$

$$= (T(x)/x) + ||T||(I(x)/x)$$

$$= (T(x)/x) + ||T||(x/x) \geq 0$$

Así, de i) e ii) se tiene que :

$$- ||T||I \leq T \leq ||T||I .$$

TEO. 2.4-18

Si S y T son operadores en H, se cumple que :

i) Si $S \leq T$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda S \leq \lambda T$.

ii) Si $S \leq T$, entonces $-S \geq -T$.

Pa.

i) Si $S \leq T$, entonces por (Def. 2.4-3), $T - S \geq 0$. Luego - por (TEO. 2.4.12-ii), si $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda(T-S) \geq 0$; por tanto $\lambda T - \lambda S \geq 0$, es decir, $\lambda T \geq \lambda S$.

ii) Si $S \leq T$, entonces $T-S \geq 0$. Pero, $T-S = -S-(-T)$, así $-S-(-T) \geq 0$; por tanto $-S \geq -T$.

TEO. 2.4-19

Si S y T son operadores en H tales que $S \leq T$ y R un operador cualquiera en H, entonces $R^* SR \leq R^* TR$.

Pa.

Se probará que $R^* TR - R^* SR \geq 0$.

Sea $x \in H$.

$$
\begin{aligned}
((R^*TR-R^*SR)(x)/x) &= (R^*TR(x)-R^*SR(x)/x) \\
&= (R^*(TR(x)) - R^*(SR(x))/x) \\
&= (R^*(TR(x) - SR(x))/x) \\
&= (R^*(T(R(x)) - S(R(x)))/x) \\
&= (T(R(x)) - S(R(x))/R(x)) \\
&= ((T-S)(R(x))/R(x)) \geq 0
\end{aligned}
$$

ya que $T-S \geq 0$, pues $S \leq T$; por tanto $R^*SR \leq R^*TR$.

5. OPERADORES PROYECCIONES

Def. 2.5-1

Sea T un operador en H. T es llamado una proyección si $T^* = T = TT$.

Es decir, un operador proyección es un operador autoadjunto que además es idempotente.

TEO. 2.5-1

Si N es un subespacio lineal cerrado de H, entonces la proyección de H en N definida como

$$\begin{aligned} P_N : H &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto P_N(x) = y, \end{aligned}$$

donde $x = y + z$, con $y \in N$ y $z \in N^{\perp}$, es un operador proyección.

Pa.

Por (Teo. 1.4-27), T es lineal y continua pues

$$||T(x)|| \leq ||x|| ,$$

luego T es un operador. También $P_N(P_N(x)) = P_N(x)$, es decir P_N es idempotente. Por último se tiene que,

$$(P_N(x)/y) = (x/P_N(y)) \quad \text{para } x, y \in H,$$

lo cual por (TEO. 2.4-1) demuestra que P_N es autoadjunto, es - decir $P_N = P^*_N$; luego, P_N es un operador tq $P_N = P^*_N = P_N P_N$; por tanto P_N es un operador proyección.

Mediante este último hecho todo operador proyección podemos obtenerlo a partir de un adecuado subespacio lineal cerrado N, esto se precisa mediante el siguiente TEOREMA.

TEO. 2.5-2

Si T es un operador proyección en H, entonces :

i) Existe un único subespacio lineal cerrado N tq $T = P_N$.

ii) N es el rango de T.

iii) $N^{\perp}$ es el espacio nulo de T.

Pa.

i) Sea $N = \{y \in H: T(y) = y\}$. Si $y \in N$, entonces

$$\begin{aligned}(T-I)(y) &= T(y) - I(y)\\ &= y - y\\ &= \Theta \quad ,\end{aligned}$$

lo que demuestra que N es el espacio nulo del operador - T - I, por lo cual N es un subespacio lineal cerrado de H. Tenemos que $T = P_N$, ya que si $x \in H$ podemos escribir $x = y + z$ con $y \in N$ y $z \in N^{\perp}$ y por (TEO. 2.5.1),

$$P_N(x) = y = y + \Theta = T(y) + T(z) = T(y + z) = T(x).$$

UNICIDAD

Si $P_N = P_M$, entonces $N = P_N(H) = P_M(H) = M$; por tanto $N = M$.

ii) Si $y \in N$, entonces $y = T(y) \in T(H)$, luego $N \subset T(H)$. Si $y \in T(H)$ podemos escribir $y = T(x)$ para algún $x \in H$, entonces $T(y) = T(T(x)) = T(x) = y$, demuestra que $y \in N$; por tanto $N = T(H)$.

iii) Por (TEO. 1.5-17), $\operatorname{Ker} T = [T^*(H)]^{\perp}$

$$= [T(H)]^{\perp}$$

$$= N^{\perp}.$$

TEO. 2.5-3

Sea $y \in H$ un vector fijo tq $||y|| = 1$, y $N = \{ \lambda y : \lambda$ es un escalar$\}$ es el espacio lineal unidimensional generado por y, entonces la función $T : H \dashrightarrow H$ tq $T(x) = (x/y)y$, es igual a la proyección de H en N.

Pa.

Si $x \in H$ se puede escribir $x = \lambda y + z$ con $z \in N^{\perp}$ y λ un escalar adecuado, entonces se tiene que :

$$\begin{aligned} T(x) &= (\lambda y + z/y)y \\ &= [(\lambda y/y) + (z/y)]y \\ &= [\lambda(y/y) + (z/y)]y \\ &= [\lambda + 0]y \\ &= \lambda y \\ &= P_N(x) \quad , \quad \text{así} \end{aligned}$$

$T(x) = P_N(x)$ para todo $x \in H$; por tanto $T = P_N$.

TEO. 2.5-4

Sean M, N subespacios lineales cerrados de H, P la proyección con Rango M y Q la proyección con Rango N. Entonces $M \perp N$ ssi $PQ = 0$.

Pa.

" ==> " Si $M \perp N$, entonces, si $x \in H$, se tiene que $Q(x) \in N$, por tanto $Q(x) \in M^{\perp}$, luego $P(Q(x)) = PQ(x) = \Theta$, ya que $Q(x) \in \operatorname{Ker} P$; por tanto $PQ = 0$.

"<== " Supongamos que $PQ = 0$, entonces si $x \in M$ e $y \in N$ se tiene que :

$$
\begin{aligned}
(x/y) &= (P(x)/Q(y)) \\
&= (x/P^*Q(y)) \\
&= (x/PQ(y)) \\
&= (x/\Theta) = \Theta
\end{aligned}
$$
; por tanto $M \perp N$.

TEO. 2.5-5

Si T es un operador en H, T es una proyección ssi $T = T^*T$.

Pa.

" ==> " Si T es una proyección, entonces $T^* = T = TT$. Sustituyendo T por T^* en el miembro derecho de $T = TT$ se tiene que $T = T^*T$.

" <== " Se tiene que $T = T^*T$, luego

$$T^* = (T^*T)^* = (T^*T^{**}) = (T^*T) = T \qquad (1)$$

luego sustituyendo T^* por T en el miembro derecho de la igualdad $T = T^*T$ se tiene $T = TT$ (2).

Luego de (1) y (2) se tiene $T^* = T = TT$; por tanto, T es un operador proyección.

TEO. 2.5-6

Si P es un operador proyección en H, y Q es un operador unitariamente equivalente a P, entonces Q es un operador proyección.

Pa.

Si Q es unitariamente equivalente a P, entonces existe un operador unitario U, tq, Q = U* PU. En este sentido

$$
\begin{aligned}
Q^* &= (U^*PU)^* \\
&= (U^*(PU))^* \\
&= ((PU)^*U^{**}) \\
&= (U^* P^* U) \\
&= U^* PU \\
Q^* &= Q \qquad (1).
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
QQ &= U^* PUU^* PU \\
&= U^* PPU \\
&= U^* PU \\
QQ &= Q \qquad (2);
\end{aligned}
$$

de (1) y (2) se tiene $Q^* = Q = QQ$; por tanto Q es un operador proyección.

TEO. 2.5-7

Si P es un operador proyección, entonces :

i) $P \geq 0$.

ii) $P \neq 0$ entonces $||P|| = 1$.

Pa.

i) Si P es un operador proyección, entonces $P^* = P = PP$, luego

$$
\begin{aligned}
(P(x)/x) &= (PP(x)/x) \\
(P(x)/x) &= (P(x)/P^*(x))
\end{aligned}
$$

$$(P(x)/x) = (P(x)/P(x)) \geq 0 \quad ; \quad \text{por tanto } P \geq 0.$$

ii) Sea $x \in H$, $||P(x)||^2 = (P(x)/P(x))$

$$= (P^2(x)/x)$$

$$= (P(x)/x)$$

$$\leq ||P(x)||\ ||x|| \quad , \text{ luego}$$

$$||P(x)|| \leq ||x||$$

$$||P(x)|| \leq 1 \quad \text{si} \quad ||x|| = 1$$

tomando

$$||P|| = \text{Sup}\ \{||P(x)|| : ||x|| \leq 1\} \leq 1$$

se tiene $||P|| \leq 1$. (1)

Sea $P(y) \neq \Theta$

$$z = \frac{P(y)}{||P(y)||} \ , \ ||z|| = 1$$

$$P(z) = P\left(\frac{P(y)}{||P(y)||}\right) = \frac{P(y)}{||P(y)||}$$

por lo que $||P(z)|| = 1$, además

$$||P(z)|| \leq ||P||\ ||z|| \leq ||P|| \quad ,$$

así $1 = ||P(z)|| \leq ||P||$, luego, $1 \leq P$. (2)

Por consiguiente, de (1) y (2) tenemos :

$$||P|| = 1 .$$

TEO. 2.5-8

Si P y Q son dos operadores proyecciones en H, y $PQ = QP$, entonces :

i) PQ es un operador proyección.

ii) Si $M = \text{Ran } P$ y $N = \text{Ran } Q$, entonces

$$\text{Ran } PQ = M \cap N .$$

Pa.

i) $PQPQ = PPQQ$

$= PQ \qquad (1)$

PQ es idempotente.

Mostraremos ahora que $PQ = (PQ)^*$. Por hipótesis, P y Q - son operadores proyección, luego $P^* = P$ y $Q^* = Q$, así - $P^* Q^* = PQ$.

$$(QP)^* = PQ$$

$$(PQ)^* = PQ \qquad (2). \text{ Por hip. } PQ = QP.$$

De (1) y (2) $(PQ)^* = PQ = (PQ)(PQ)$; por tanto PQ es un - operador proyección.

ii) Sean $M = \text{Ran } P$ y $N = \text{Ran } Q$

Sea $y \in \text{Ran } (PQ) = \text{Ran}(QP)$.

Entonces, $y = (PQ)(x_1)$ y $y = (QP)(x_2)$, con $x_1 = x_2 \in H$, $y = P(z_1)$ y $y = Q(z_2)$ con $z_1, z_2 \in H$. Luego, $y \in \text{Ran } P$ y $y \in \text{Ran } Q$, así, $y \in \text{Ran } P \cap \text{Ran } Q = M \cap N$; por tanto - el $\text{Ran}(PQ) \subset (M \cap N)$ (1); por otra parte, si $y \in M \cap N = (\text{Ran } P) \cap (\text{Ran } Q)$, entonces $y \in \text{Ran } P$ y $y \in \text{Ran } Q$, luego, $y = P(x_1)$ y $y = Q(x_2)$ con $x_1, x_2 \in H$; luego

$P(x_1) = Q(x_2)$, y $\quad P(P(x_1)) = P(Q(x_2))$

$$P(x_1) = P(Q(x_2))$$

$$P(x_1) = PQ(x_2) \quad , \quad \text{así}$$

$$y = P(x_1) = PQ(x_2) \in \text{Ran}(PQ) \quad ; \quad \text{por tanto}$$

$$M \cap N = (\text{Ran } P \cap \text{Ran } Q) \subset \text{Ran } (PQ) \qquad (2).$$

De (1) y (2) se tiene que el Ran $(PQ) = M \cap N$.

TEO. 2.5-9

Si P es un operador proyección en H, con Rango N entonces $(I - P)$ es un operador proyección en H, con rango $N^{\perp}$.

Pa.

$$(I-P)^* = I^* - P^*$$

$$= I - P \quad (1) \quad . \quad \text{Por otra parte,}$$

$$(I-P)(I-P) = II - IP - PI + PP$$

$$= I - P - P + PP$$

$$= I - 2P + P$$

$$= I - P \quad (2).$$

De (1) y (2) se tiene $(I - P)^* = (I - P)$

$$= (I - P)(I - P) \quad ;$$

por tanto, $(I - P)$ es un operador proyección. Se probará entonces que el Ran$(I - P) = N^{\perp}$, teniendo en cuenta que si $N = \text{Ran } P$, entonces $N^{\perp} = \text{Ker } P$; bastará mostrar que Ran$(I-P) = \text{Ker } P$.

Sea $y \in \text{Ran}(I - P)$, entonces

$$y = (I - P)(x) \quad \text{con } x \in H$$

$$= I(x) - P(x)$$

$$= x - P(x) \quad ,$$

aplicando P a y, se tiene :

$$\begin{aligned} P(y) &= P(x - P(x)) \\ &= P(x) - P(P(x)) \\ &= P(x) - P(x) \\ &= \Theta \quad , \end{aligned}$$

luego $y \in \operatorname{Ker} P$; así, $\operatorname{Ran}(I-P) \subset \operatorname{Ker} P = N^{\perp}$ (1).

Por otra parte, si $y \in \operatorname{Ker} P$, se tiene

$$\begin{aligned} y &= y - \Theta \\ &= y - P(y) \\ &= I(y) - P(y) \\ y &= (I - P)(y), \quad \text{así} \\ y &= (I - P)(y) \in \operatorname{Ran}(I - P) \end{aligned}$$

y $N^{\perp} = \operatorname{Ker} P \subset \operatorname{Ran}(I - P)$ (2).

De (1) y (2) se concluye que el $\operatorname{Ran}(I - P) = N^{\perp}$.

TEO. 2.5-10.

Sean P y Q operadores proyección en H, con rangos M y N - respectivamente.

Si $M \perp N$, entonces $(P + Q)$ es un operador proyección en H con $\operatorname{Rango}(M \oplus N)$.

Pa.

i) $$\begin{aligned} (P + Q)^* &= P^* + Q^* \\ &= P + Q \qquad (1). \end{aligned}$$

Por otra parte, si x, y son dos vectores cualesquiera de H, se tiene :

$$((P+Q)(P+Q)(x)/y) = ((PP+PQ+QP+QQ)(x)/y)$$
$$= ((P + PQ + QP + Q)(x)/y)$$
$$= ((P(x)+(PQ)(x)+(QP)(x)+Q(x))/y)$$
$$= (P(x)+P(Q(x))+Q(P(x))+Q(x)/y).$$

Dado que, $\operatorname{Ran} Q = N$ y $\operatorname{Ran} P = M$, entonces

$$P(Q(x)) = \Theta \qquad y \qquad Q(P(x)) = \Theta \quad , \text{ así}$$

$$((P+Q)(P+Q)(x)/y) = (P(x) + Q(x)/y)$$
$$= ((P + Q)(x)/y), \quad \text{para todo } y \in H$$

luego,

$$(P + Q)(P + Q) = (P + Q) \qquad (2).$$

De (1) y (2) se tiene que :

$$(P + Q)^* = (P + Q)(P + Q) \;;$$

por tanto $(P + Q)$ es un operador proyección.

ii) $\operatorname{Ran}(P + Q) = M \oplus N$.

Sea $z \in \operatorname{Ran}(P + Q)$, entonces

$z \in (P + Q)(H) = \{(P + Q)(x) : x \in H\}$, es decir,

$$z = (P + Q)(x)$$
$$= P(x) + Q(x).$$

Como $P(x) \in M$ y $Q(x) \in N$ se concluye que $z \in (M + N)$;

por tanto, $(P + Q)(H) \subset (M + N)$ (1).

Sea $z \in M + N$, entonces $z = x + y$, con $x \in M$, $y \in N$, es - decir $z = P(z_1) + Q(z_2)$, $z_1, z_2 \in H$.

$$= P^2(z_1) + Q^2(z_2), \quad z_1, z_2 \in H$$
$$= P(P(z_1)) + Q(Q(z_2)), \quad z_1, z_2 \in H$$

$$= P(P(z_1)+Q(z_2)) + Q(Q(z_2)+P(z_1)),\ z_1, z_2 \in H$$

$$= P(z_3)+Q(z_3),\ Q(z_2) \in \text{Ker } P = M,\ M \perp N$$

y $P(z_1) \in \text{Ker } N$, $N \perp M$.

$$z = (P+Q)(z_3) \in \text{Ran}(P + Q),$$

luego $z \in \text{Ran}(P + Q)$; por tanto $M + N \subset \text{Ran}(P + Q)$ (2).

De (1) y (2) concluimos que

$$(P + Q)(H) = M + N.$$

TEO. 2.5-11

Si P y Q son dos operadores proyección en H, con rango M y N respectivamente, entonces :

1) Las siguientes condiciones son equivalentes :

i) $P - Q$ es un operador proyección.

ii) $P \geq Q$.

iii) $||P(x)|| \geq ||Q(x)||$ para todo $x \in H$.

iv) $N \subset M$.

2) $\text{Ran}(P - Q) = M \cap N^{\perp}$.

Pa.

i) ==> ii) Si $(P - Q)$ es proyección, entonces

$$(P - Q)^* = (P - Q)$$

$$= (P-Q)(P-Q)$$

de aquí se tiene que si x es cualquier vector de H, - entonces

$$((P-Q)(x)/x) = ((P-Q)(P-Q)(x)/x)$$

$$= ((P - Q)((P - Q)(x))/x)$$

$$= ((P - Q)(x)/(P - Q)^*(x))$$

$$= ((P - Q)(x)/(P - Q)(x)) \geq 0$$

por definición de producto interno, así,

$$((P - Q)(x)/x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H \;;$$

por tanto $(P - Q) \geq 0$, es decir $P \geq Q$.

ii) ==> iii) Si $P \geq Q$ entonces $(P - Q) \geq 0$. Así,

$$((P - Q)(x)/x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H, \quad \text{luego}$$

$$(P(x) - Q(x)/x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H,$$

por lo cual $\quad (P(x)/x) - (Q(x)/x) \geq 0$ para todo $x \in H$;

por tanto $\quad (P(x)/x) \geq (Q(x)/x)$ para todo $x \in H$.

Por otra parte, $(P(x)/x) = (P\ P(x)/x)$

$$= (P(P(x))/x)$$

$$= (P(x)/P^*(x))$$

$$= (P(x)/P(x)) \; ; \quad y$$

$$(Q(x)/x) = (Q\ Q(x)/x)$$

$$= (Q(Q(x))/x)$$

$$= (Q(x)/Q^*(x))$$

$$= (Q(x)/Q(x)), \text{ así}$$

$$(P(x)/P(x)) = (P(x)/x)$$

$$\geq (Q(x)/x),$$

Pero $(Q(x)/x) = (Q(x)/Q(x))$; por tanto

$$(P(x)/P(x)) \geq (Q(x)/Q(x)) \quad \text{para todo } x \in H,$$

luego, $||P(x)||^2 \geq ||Q(x)||^2$; por consiguiente,

$$||P(x)|| \geq ||Q(x)|| \qquad \text{para todo } x \in H.$$

iii) ==> iv) Primero veamos que Ker P $\subset$ Ker Q. En efecto, si $x \in$ Ker P entonces $P(x) = \theta$, por lo que

$$||P(x)|| = 0 \geq ||Q(x)|| \quad ,$$

de donde $||Q(x)|| = 0$, luego $Q(x) = \theta$, con lo cual $x \in$ Ker Q; así, si $y \in N$, entonces $y = Q(x)$ para algún $x \in H$.

Tal vector $Q(x)$ puede escribirse así :

$Q(x)=P(z)+u$ con $P(z) \in$ Ran P y $u \in$ Ker P.

Así, $u = Q(x) - P(z)$. Por otra parte, $u \perp P(z)$.

Además,
$$\begin{aligned}(u/Q(x)) &= (Q^*(u)/x)\\ &= (Q(u)/x)\\ &= (\theta/x),\ u \in \text{Ker } Q\\ &= 0 \quad ,\end{aligned}$$

con lo cual, $u \perp Q(x)$. Luego

$$\begin{aligned}(u/u) &= (Q(x) - P(z)/u)\\ &= (Q(x)/u) - (P(z)/u)\\ &= 0 - 0\\ &= 0 .\end{aligned}$$

Así $u = Q(x) - P(z) = \theta$; por tanto $y = Q(x) = P(z)$; por lo cual $y \in$ Ran P y así

$$\text{Ran } Q \subset \text{Ran } P$$

iv) ==> i) Probaremos que si Ran Q $\subset$ Ran P, entonces P - Q es un operador proyección.

Pa.

$(P - Q)^2 = P^2 - PQ - QP + Q^2$

$(P - Q)^2 = P - PQ - QP + Q$.

El problema consiste en mostrar que $PQ = QP = Q$.

$(P-Q)^2(x) = P(x) - PQ(x) - QP(x) + Q(x)$ (1).

Por hipótesis,

$$Q(x) = P(y)$$

$$\Longrightarrow P(Q(x)) = P(P(y))$$

$$\Longrightarrow P\,Q(x) = P(y)$$

$$\Longrightarrow P\,Q(x) = Q(x) \qquad (2).$$

Además, $(x - P(x)) \in \operatorname{Ker} P = M^{\perp} = (\operatorname{Ran} P)^{\perp}$.

En efecto, $P(x - P(x)) = P(x) - PP(x)$

$= P(x) - P(x)$

$= \Theta$; por tanto

$(x - P(x)) \in (\operatorname{Ran} P)^{\perp} = M^{\perp} = \{x \in H : P(x) = \Theta\}$.

Mostraremos que $(x - P(x)) \in \operatorname{Ker} Q$.

Por hipótesis,

$N \subset M \Longrightarrow M^{\perp} \subset N^{\perp}$ por (TEO. 1.4-18-ii) ; por tanto, $(x - P(x)) \in N^{\perp} = \operatorname{Ker} Q = (\operatorname{Ran} Q)^{\perp}$.

$$Q(x - P(x)) = \Theta$$

$$Q(x) - QP(x) = \Theta$$

$$Q(x) = QP(x) \qquad (3);$$

de (2) y (3) se tiene $PQ = Q = QP$; por tanto (1) puede escribirse :

$$(P - Q)^2(x) = P(x) - Q(x)$$

$$(P - Q)^2 = P - Q \qquad (4).$$

Ahora mostraremos que $(P - Q)^* = P - Q$.

$$\begin{aligned}(P - Q)^* &= (P + (-Q))^* \\ &= P^* + ((-1)Q)^* \\ &= P^* + (-1)^*Q^* \\ &= P^* + (-1)Q^* \\ &= P^* - Q^* \\ &= P - Q \qquad (5).\end{aligned}$$

De (4) y (5) se concluye que $P - Q$ es un operador proyección.

TEO. 2.5-12

Si T es un operador isométrico en H, entonces TT^* es un operador proyección.

Pa.

$$\begin{aligned}(TT^*)^* &= T^{**}T^* \\ &= TT^* \qquad (1).\end{aligned}$$

Por otra parte,
$$\begin{aligned}(TT^*)(TT^*) &= T(T^*(TT^*)) \\ &= T((T^*T)T^*) \\ &= T(IT^*) \\ &= T(T^*) \\ &= TT^* \qquad (2).\end{aligned}$$

De (1) y (2) se tiene
$$\begin{aligned}(TT^*)^* &= TT^* \\ &= (TT^*)(TT^*) \ ;\end{aligned}$$

por tanto, TT^* es un operador proyección.

6. OPERADORES NORMALES

Def. 2.6-1

Un operador T en H es llamado normal si T*T = TT*.

RESULTADOS INMEDIATOS

1) Todo operador unitario es normal. En efecto, si T es unitario, entonces T*T = TT* = I, por lo cual T es normal.

2) Todo operador autoadjunto es normal. En efecto, si T es autoadjunto entonces T = T*, así, T*T = TT*.

3) Un operador isométrico es normal ssi es unitario.

Pa.

" ==> " Sea T un operador isométrico. Si T es normal entonces T*T = TT* y dado que T es isométrico, entonces T*T = I, así, I = T*T = TT*; por lo tanto T es unitario.

" <== " Si T es unitario, por 1) T es normal.

TEO. 2.6-1

Si T es un operador en H, las siguientes condiciones son equivalentes :

i) T es normal.

ii) T* es normal.

iii) $||T^*(x)|| = ||T(x)||$, para todo $x \in H$.

Pa.

i) ==> ii) Dado que T es normal, entonces

$$T^*T = TT^*; \ (T^*T)^* = T^*T^{**} \quad y$$

$$(TT^*) = T^{**}T^* \quad , \quad \text{pero} \quad (T^*T)^* = (TT^*)^*,$$

entonces $T^*T^{**} = T^{**}T^*$; por tanto T^* es normal.

ii) ==> iii) Sea T^* normal,

$$||T^*(x)||^2 = (T^*(x)/T^*(x)) = (x/TT^*(x))$$
$$= (x/T^*T(x))$$
$$= (T(x)/T(x))$$
$$= ||T(x)||^2 \quad , \quad \text{luego}$$
$$||T^*(x)|| = ||T(x)||.$$

iii) ==> i) $||T^*(x)|| = ||T(x)||$; por tanto

$$||T^*(x)||^2 = ||T(x)||^2 \quad \text{para todo } x \in H.$$

por lo cual,

$$(T^*(x)/T^*(x)) = (T(x)/T(x)) \text{ para todo } x \in H$$

$$(T(T^*(x))/x) = (T^*(T(x))/x) \quad \text{para todo } x \in H,$$

$$(TT^*(x)/x) = (T^*T(x)/x) \quad \text{para todo } x \in H,$$

luego

$$TT^*(x) = T^*T(x) \quad \text{para todo } x \in H;$$

por tanto,

$$TT^* = T^*T \quad \text{con lo cual T es normal.}$$

TEO. 2.6-2

Sea T un operador en H y $T = A + iB$ su forma cartesiana. Entonces T es normal ssi $AB = BA$..

Pa.

" ==> " Por TEO. 2.4-5, $A = \frac{1}{2}(T+T^*)$ y $B = \frac{1}{2i}(T-T^*)$

$$AB = \frac{1}{2}(T + T^*)\frac{1}{2i}(T - T^*)$$

$$AB = \frac{1}{4i}(TT - TT^* + T^*T - T^*T^*)$$

$$AB = \frac{1}{4i}(TT - T^*T^*) \quad \text{por ser T normal} \quad (1).$$

Por otra parte,

$$BA = \frac{1}{2i}(T - T^*)\frac{1}{2}(T + T^*)$$

$$BA = \frac{1}{4i}(TT + TT^* - T^*T - T^*T^*)$$

$$BA = \frac{1}{4i}(TT - T^*T^*) \quad \text{por ser T normal} \quad (2).$$

De (1) y (2) se tiene que $AB = BA$.

" <== " Supongamos que $AB = BA$

$$\begin{aligned} T^*T &= (A - iB)(A + iB) \\ &= AA + iAB - iBA - i^2BB \\ &= AA + iAB - iAB - i^2BB \\ &= AA + BB \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TT^* &= (A + iB)(A - iB) \\ &= AA - iAB + iBA - i^2BB \\ &= AA + BB \qquad (2). \end{aligned}$$

De (1) y (2) se tiene ,

$TT^* = T^*T$; por tanto, T es normal .

TEO. 2.6-3

Si T es un operador normal en H, y S es unitariamente e - quivalente a T, entonces S es normal.

Pa.

Dado $S \cong T$, entonces existe un operador unitario U tq $T = U^* SU$, ó de otra manera, $S = U T U^*$.

Además, como T es normal, $T^*T = TT^*$. Probaremos que S es normal, es decir, $S^*S = SS^*$.

Pa.

$$\begin{aligned} SS^* &= (U T U^*)(U T U^*)^* \\ &= U T U^* U T^* U^* \\ &= U T T^* U^* \\ &= UT^* TU^* \\ &= UT^* U^* U T U^* \\ &= (U T U^*)^*(U T U^*) \\ &= S^* S. \end{aligned}$$

TEO. 2.6-4

Sea T un operador en H. Entonces, T es normal ssi T y T^* son métricamente equivalentes.

Pa.

" ==> " Si T es normal, entonces, por (TEO. 2.6-1)

$$||T^*(x)|| = ||T(x)|| \quad \text{para todo } x \in H.$$

Luego T y T^* son métricamente equivalentes.

" <== " Si T y T^* son métricamente equivalentes, entonces

$$||T^*(x)|| = ||T(x)|| \quad \text{para todo } x \in H \; ;$$

por (TEO. 2.6-1), T es normal.

TEO. 2.6-5

Si T es un operador normal en H, entonces :

i) $\text{Ker } T = \text{Ker } T^*$.

ii) $\overline{T(H)} = \overline{T^*(H)}$.

iii) $(\text{Ker } T)^{\perp} = \overline{T(H)}$.

Pa.

i) Sea $x \in \text{Ker } T$, entonces $T(x) = \theta$, así, $T^*(T(x)) = \theta$,

luego $(T^*(T(x))/y) = 0$ para todo $y \in H$, pero

$$\begin{aligned}(T^*(T(x))/y) &= (T^*T(x)/y)\\ &= (TT^*(x)/y)\\ &= (T^*(x)/T^*(y))\end{aligned}$$; por tanto

$$(T^*(x)/T^*(y)) = 0 \quad \text{para todo } y \in H \; ,$$

en particular, $(T^*(x)/T^*(x)) = 0$, luego $T^*(x) = \theta$, por definición de producto interno.

De $T^*(x) = \theta$ se concluye que $x \in \text{Ker } T^*$; por tanto, $\text{Ker } T \subset \text{Ker } T^*$ (1).

Para probar que $\text{Ker } T^* \subset \text{Ker } T$ basta que en (1) se haga $T = T^*$, con lo cual se tiene, $\text{Ker } T^* \subset \text{Ker } T^{**} = \text{Ker } T$ (2).

De (1) y (2) se tiene que $\text{Ker } T = \text{Ker } T^*$.

ii) Por el resultado i) se sabe que, $\text{Ker } T = \text{Ker } T^*$, luego $(\text{Ker } T)^{\perp} = (\text{Ker } T^*)^{\perp}$; por consiguiente, aplicando el - -

(TEO. 1.5-17) se tiene $\overline{T^*(H)} = \overline{T(H)}$.

iii) Dado que el Ker T = Ker T*, entonces :

$$(\text{Ker } T)^{\perp} = (\text{Ker } T^*)^{\perp}$$
$$= \overline{T(H)} \quad \text{por (TEO. 1.5-17).}$$

TEO. 2.6-6

Si T es un operador normal en H, entonces existe un operador unitario U tq $T^* = UT$.

Pa.

Se tiene que $H = \text{Ker } T \oplus T(H)$, definiendo

$$U : H \longrightarrow H$$
$$x+T(y) \longmapsto x + T^*(y) \; ,$$

se puede entonces ver que U está bien definida. En efecto,

$$x_1 + T(y_1) = x_2 + T(y_2), \text{ con } x_1 = x_2 \quad \text{y}$$
$$T(y_1) = T(y_2), \text{ así, } U(x_1 + T(y_1)) = (x_1 + T^*(y_1))$$
$$= (x_2 + T^*(y_1)),$$

bastará probar que $T^*(y_1) = T^*(y_2)$.

En efecto,

$$(T(y_1) = T(y_2)) \Longrightarrow (T(y_1) - T(y_2)) = \Theta$$
$$\Longrightarrow (T(y_1 - y_2)) = \Theta$$
$$\Longrightarrow (y_1 - y_2) \in \text{Ker } T = \text{Ker } T^*$$
$$\Longrightarrow T^*(y_1 - y_2) = \Theta$$
$$\Longrightarrow T^*(y_1) - T^*(y_2) = \Theta$$
$$\Longrightarrow T^*(y_1) = T^*(y_2) \quad , \quad \text{así} \; ,$$

$$U(x_1 + T(y_1)) = x_1 + T^*(y_1)$$
$$= x_2 + T^*(y_2)$$
$$= U(x_2 + T(y_2)) \quad ; \quad \text{por tanto } U$$

esta bien definida.

En estas condiciones definamos :

$$U^{-1} : H \dashrightarrow H$$
$$x + T^*(z) \longmapsto x + T(z).$$

U^{-1} está bien definida. En efecto, sea $x_1 + T^*(z_1) = x_2 + T^*(z_2)$ siendo $x_1 = x_2$ y $T^*(z_1) = T^*(z_2)$ ya que todo $x \in H$ tiene representación única en la forma $x' + T^*(z')$ con $x' \in \text{Ker } T$ y $T^*(z') \in T^*(H)$, así,

$$U^{-1}(x_1 + T^*(z_1)) = x_1 + T(z_1)$$
$$= x_2 + T(z_2) \qquad (1).$$

Ahora bastará probar que $T(z_1) = T(z_2)$ para obtener el resultado que se desea.

En efecto, se tiene que :

$$(T^*(z_1) = T^*(z_2)) \Longrightarrow (T^*(z_1) - T^*(z_2) = \Theta)$$
$$\Longrightarrow (T^*(z_1 - z_2) = \Theta)$$
$$\Longrightarrow (z_1 - z_2) \in \text{Ker } T^*$$
$$\Longrightarrow (z_1 - z_2) \in \text{Ker } T \text{ , ya que el}$$

$\text{Ker } T^* = \text{Ker } T.$

Como $(z_1 - z_2 \in \text{Ker } T) \Longrightarrow (T(z_1 - z_2) = \Theta)$
$$\Longrightarrow (T(z_1) - T(z_2) = \Theta)$$
$$\Longrightarrow (T(z_1) = T(z_2)) \quad ,$$

sustituyendo ahora, $T(z_1)$ por $T(z_2)$ en (1) se tiene

$$\begin{aligned} U^{-1}(x_1 + T^*(z_1)) &= x_1 + T(z_1) \\ &= x_2 + T(z_1) \\ &= x_2 + T(z_2) \\ &= U^{-1}(x_2 + T^*(z_2)) \ ; \end{aligned}$$

por tanto U^{-1} está bien definido.

Es inmediato que U^{-1} es la función inversa de U. En efecto,

$$\begin{aligned} UU^{-1}(x + T^*(z)) &= U(U^{-1}(x + T^*(z))) \\ &= U(x + T(z)) \\ &= (x + T^*(z)) \quad ; \end{aligned}$$

esto demuestra que $UU^{-1} = I_B$. Por otra parte

$$\begin{aligned} U^{-1}U(x + T(z)) &= U^{-1}(U(x + T(z))) \\ &= U^{-1}(x + T^*(z)) \\ &= (x + T(z)). \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que $U^{-1}U = I_A$, luego, se concluye que U es una función biyectiva y U^{-1} es la inversa de U.

Ahora se probará que U es un operador unitario. Es decir:

i) U es lineal (Trivial).

ii) U es continua.

Esto se demuestra encontrando $K > 0$ tq

$$||U(t)|| \leq K\ ||t|| \quad \text{para todo } t \in H.$$

Más precisamente se mostrará que

$$||U(x + T(y))|| = ||x + T^*(y)|| = ||x + T(y)|| \quad \text{ó sea}$$

$$||U(x + T(y))|| = ||x + T(y)|| \quad \text{con } K = 1 .$$

En efecto,

$$\begin{aligned} ||x + T^*(y)||^2 &= (x + T^*(y)/x + T^*(y)) \\ &= (x/x)+(x/T^*(y))+(T^*(y)/x) \\ &\quad + (T^*(y)/T^*(y)) \\ &= (x/x)+ 0 + 0 + (T^*(y)/T^*(y)) \\ &= (x/x)+(y/T^*T(y)), \quad T \text{ es normal} \\ &= (x/x) + (T(y)/T(y)) \qquad (1) . \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} ||x + T(y)||^2 &= (x + T(y)/x + T(y)) \\ &= (x/x)+(x/T(y))+(T(y)/x)+(T(y)/T(y)) \\ &= (x/x) + 0 + 0 + (T(y)/T(y)) \\ &= (x/x) + (T(y)/T(y)) \qquad (2); \end{aligned}$$

de (1) y (2) se concluye que

$$||x + T^*(y)|| = ||x + T(y)|| \quad \text{o sea}$$

$$||U(x + T(y))|| = ||x + T(y)|| \;;$$

por tanto U es continua. Por i) e ii) se concluye que U es un operador.

Ahora se probará que U es Unitario. Para probar que U es unitario, dado que U es biyectivo, de acuerdo al (TEO. 2.3-1) bastará mostrar que $U^{-1} = U^*$.

Dado la unicidad del adjunto de U* la igualdad anterior - queda comprobada al mostrar la condición que cumple U*, es decir, se mostrará que $(U(x)/z) = (x/U^{-1}(z))$.

Sean x, z $\in$ H de tal manera que $x = x_1 + T(y_1)$ y - - $z = (x_2) + T^*(y_2)$, así

$$(U(x)/z) = (U(x_1 + T(y_1))/x_2 + T^*(y_2))$$
$$= (x_1 + T^*(y_1)/x_2 + T^*(y_2))$$
$$= (x_1/x_2) + (x_1/T^*(y_2)) + (T^*(y_1)/x_2)$$
$$+ (T^*(y_1)/T^*(y_2))$$
$$= (x_1/x_2) + 0 + 0 + (T^*(y_1)/T^*(y_2)), \text{ luego}$$
$$(U(x)/z) = (x_1/x_2) + (T^*(y_1)/T^*(y_2)) \qquad (1).$$

Por otra parte,

$$(x/U^{-1}(z)) = (x_1 + T(y_1)/U^{-1}(x_2 + T^*(y_2)))$$
$$= (x_1 + T(y_1)/x_2 + T(y_2))$$
$$= (x_1/x_2)+(x_1/T(y_2))+(T(y_1)/x_2)+(T(y_1)/T(y_2))$$
$$= (x_1/x_2) + 0 + 0 + (T(y_1)/T(y_2))$$
$$= (x_1/x_2) + (T(y_1)/T(y_2))$$
$$= (x_1/x_2) + (y_1/T^*T(y_2))$$
$$= (x_1/x_2) + (y_1/TT^*(y_2))$$
$$= (x_1/x_2) + (T^*(y_1)/T^*(y_2)) \qquad (2).$$

De (1) y (2) se concluye que

$$(U(x)/z) = (x/U^{-1}(z)) \quad ; \quad \text{por tanto,}$$
$$U^{-1} = U^*$$

con lo cual queda demostrado que U es unitario, finalmente se probará que $T^* = UT$. En efecto, si $x \in H$

$$(UT)(x) = U(T(x))$$

$$= U(\Theta + T(x))$$

$$= \Theta + T^*(x)$$

$$= T^*(x) \quad , \quad \text{luego}$$

$$(UT)(x) = T^*(x) \quad \text{para todo } x \in H \quad ; \quad \text{por tanto}$$

$$(UT) = T^*.$$

Def. 2.6-2

Un operador T se llama inversible si existe un operador S tq.

$$ST = TS = I ,$$

Es claro que T es biyectivo y $T^{-1} = S$.

TEO. 2.6-7

Si T es un operador inversible, entonces T* es un operador inversible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Pa.

Dado que T es inversible T^{-1} existe, y $TT^{-1} = T^{-1}\,T = I$, la existencia de T^{-1} da existencia a $(T^{-1})^*$.

Para demostrar que T* es inversible, basta probar que existe un operador S tq.

$$T^*\,S = ST^* = I .$$

Mostraremos que $S = (T^{-1})^*$.

En efecto, $\quad T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}\,T)^*$

$$= (I)^*$$

$$= I \qquad (1)$$

$$(T^{-1})^*T^* = (TT^{-1})^*$$

$$= (I)^*$$

$$= I \quad . \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que T^* es inversible, y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

TEO. 2.6-8

Si T es un operador inversible, entonces T^*T es inversible.

Pa.

Si T es inversible, entonces T^* es inversible, es decir, T y T^* son biyectivas, luego T^*T es biyectivo, y por consiguiente inversible.

TEO. 2.6-9

Si T es un operador normal, entonces T es inversible ssi T^*T es inversible.

Pa.

" ==> " Si T es inversible, entonces por (TEO. 2.6-8) T^*T es inversible.

" <== " Si T^*T es inversible, entonces existe S tq

$$S(T^*T) = (T^*T)S = I \quad , \quad \text{pero}$$

$$S(T^*T) = (ST^*)T = I \quad , \quad \text{por ser T normal}$$

$$= T(T^*S)$$

$$= I \quad , \quad \text{así}$$

$$(ST^*)T = I \quad \text{y} \quad T(T^*S) = I \quad , \quad \text{luego}$$

$ST^* = T^*S = T^{-1}$; por tanto T es inversible.

Def. 2.6-3

Un operador se dice que es similar al operador T, si existe un operador inversible A, tq. $T = A^{-1} SA$.

NOTACION : S similar a T, se denota así : $S \sim T$.

TEO. 2.6-10

La relación de similaridad, " $\sim$ ", es de equivalencia en el conjunto de operadores en H.

Pa.

i) " $\sim$ " es reflexiva.

En efecto, $T = I^{-1} T I$ con I inversible.

ii) " $\sim$ " es simétrica.

Si $S \sim T$, entonces existe un operador inversible A tq.

$T = A^{-1} SA$, luego

$$\begin{aligned} AT &= A(A^{-1} SA) \\ &= (AA^{-1})SA \\ &= I\,S\,A \\ &= S\,A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad (AT)A^{-1} &= (SA)A^{-1} \\ &= S(AA^{-1}) \\ &= S\,I \\ &= S \quad , \quad \text{así} \end{aligned}$$

$$S = A\,T\,A^{-1}$$

con A^{-1} inversible donde $(A^{-1})^{-1} = A$; por tanto, $T \sim S$.

iii) " $\sim$ " es transitiva.

Si $R \sim S$ y $S \sim T$, entonces existen A y B operadores inversibles, tq. $S = A^{-1}R\,A$ y $T = B^{-1}\,S\,B$, luego

$$T = B^{-1}(A^{-1}R\,A)B$$
$$= (B^{-1}\,A^{-1})\,R\,(AB)$$
$$= (AB)^{-1}\,R\,(AB),$$

con AB inversible, pues A y B lo son, luego haciendo $AB = C$ se tiene que $T = C^{-1}\,R\,C$; por tanto, $R \sim T$.

TEO. 2.6-11

Si S y T son operadores en H tales que $S \sim T$, entonces - $S^* \sim T^*$.

Pa.

Si $S \sim T$, entonces existe un operador inversible A, tq $T = A^{-1}\,S\,A$, así

$$T^* = (A^{-1}\,S\,A)^*$$
$$= ((A^{-1}S)A)^*$$
$$= A^*(A^{-1}\,S)^*$$
$$= A^*(S^*(A^{-1})^*)$$
$$= A^*\,S^*\,(A^*)^{-1}$$
$$= ((A^*)^{-1})^{-1}\,S^*\,(A^*)^{-1} \quad , \quad \text{así}$$
$$T^* = ((A^*)^{-1})^{-1}\,S^*\,(A^*)^{-1}$$

con $(A^*)^{-1}$ inversible; por tanto,

$$S^* \sim T^*.$$

TEO. 2.6-12

Si S y T son operadores en H, tales que $S \cong T$, entonces $S \sim T$.

Pa.

Si $S \cong T$, entonces existe un operador unitario U, tq. $T = U^* S U$.

Dado que U es unitario, U es biyectivo y por consiguiente inversible con $U^{-1} = U^*$, luego $T = U^{-1} S U$ y por consiguiente

$$S \sim T.$$

B I B L I O G R A F I A

- INTRODUCTION TO HILBERT SPACE

  Berberian, Sterling K.

- NORMED ALGEBRAS

  Naimark, M.A.

- BANACH ALGEBRAS TECHNIQUES IN OPERATOR THEORY

  Douglas, Ronald

- ANALYSE II

  Schwart, Laurent

- INTRODUCCION A LOS ESPACIOS DE HILBERT

  Nieto S., José I.

- INTRODUCCION AL ANALISIS MODERNO

  Diudonné, J.