

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MUTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA.



TESIS:

“PLAN DOCENTE PARA LA ASIGNATURA DE SERIES TEMPORALES”

PRESENTADO POR:

FLORES REYES, CLAUDIA MARÍA
CONTRERAS ALFARO, VILMA YOLANDA

PARA OPTAR AL GRADO DE:
LICENCIADO EN ESTADÍSTICA

FEBRERO DE 2010

SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTRO AMÉRICA.

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MUTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA.**



TESIS:

“PLAN DOCENTE PARA LA ASIGNATURA DE SERIES TEMPORALES”

PRESENTADO POR:

**FLORES REYES, CLAUDIA MARÍA
CONTRERAS ALFARO, VILMA YOLANDA**

**PARA OPTAR AL GRADO DE:
LICENCIADO EN ESTADÍSTICA**

DOCENTE DIRECTOR:

Msc. KARLA MARÍA MEJÍAORTÍZ

ASESOR METODOLÓGICO:

Lic. OSCAR ANTONIO CAMPOS

FEBRERO DE 2010

SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTRO AMÉRICA.

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS

RECTOR: Msc. Rufino Antonio Quezada Sánchez

VICERRECTOR ACADÉMICO: Msc. Miguel Ángel Pérez Ramos

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO: Msc. Óscar Noé Navarrete

SECRETARIO GENERAL: Lic. Douglas Vladimir Alfaro Chávez

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

DECANA INTERINA: Dra. Ana Judith Guatemala de Castro (V)

SECRETARIO: Ing. Jorge Alberto Rugamas Ramírez

ADMINISTRADOR ACADÉMICO: Lic. Cristobal Hernán Ríos Benítez

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

JEFE DE DEPARTAMENTO: Lic. Abel Martínez López

SECCIÓN DE MATEMÁTICA

COORDINADORA: Licda. María Olga Quintanilla de Lovo

ÍNDICE

Contenidos

Introducción.....	i
Justificación.....	iv
Objetivos.....	v
Desarrollo Del Proyecto.....	vi
CAPITULO I: PLAN DE ESTUDIOS Y METODOLOGÍA DOCENTE.....	1
1.1 Series Temporales En El Plan De Estudios De Licenciatura En Estadística.....	1
1.1.1 Modelos Lineales.....	2
1.1.2 Series Temporales.....	2
1.1.3 Seminario I.....	3
1.2 Metodología Docente.....	4
1.2.1 Material Y Método Didáctico.....	4
1.2.2 Metodología De Evaluación.....	5
1.2.2.1 Evaluación De Examen.....	6
CAPÍTULO II: SERIES TEMPORALES.....	7
2.1 Introducción.....	7
2.2 Objetivos.....	8
2.3 Planificación Temporal.....	9
2.4 Contenido Del Temario Teórico.....	11
2.5 Presentación De La Asignatura.....	14

2.6 UNIDAD I: TRATAMIENTO DETERMINISTA DE LAS SERIES

TEMPORALES.....	21
2.6.0 Introducción.....	21
2.6.1 Concepto De Serie Temporal.....	22
2.6.2 Diferentes Enfoques En El Estudio De Las Series Temporales.....	24
2.6.3 Concepto De Predicción.....	26
2.6.4 Criterios De Evaluación De La Capacidad Predictiva.....	27
2.6.5 Concepto De Autocorrelación.....	30
2.6.6 Representación Gráfica De Una Serie Temporal.....	31
2.6.7 Componentes No Observables De Una Serie Temporal.....	32
2.6.8 Tratamiento Descriptivo De La Tendencia.....	35
2.6.8.1 Tratamiento Por Ajuste De Regresión.....	35
2.6.8.2 Tratamiento Por Contraste De Daniel.....	39
2.6.8.3 Tratamiento Por Contraste De Kruskal Wallis.....	40
2.6.9. Métodos No Paramétricos De Series Temporales.....	50
2.6.9.1 Métodos No Paramétricos Para Serie Tipo 1.....	54
2.6.9.2 Métodos No Paramétricos Para Serie Tipo 2.....	73
2.6.9.3 Métodos No Paramétricos Para Serie Tipo 3.....	84
2.6.9.4 Método No Paramétricos Para Serie Tipo 4.....	99

2.7 UNIDAD II: INTRODUCCIÓN AL ENFOQUE PARAMÉTRICO DEL

ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES.....	124
2.7.1 La Serie Temporal Como Realización De Un Proceso Estocástico.....	124

2.7.2	Procesos Estocásticos Estacionarios.....	127
2.7.3	Función De Autocovarianza Y Autocorrelación.....	129
2.7.4	Función De Autocorrelación Parcial.....	132
2.7.5	Funciones De Autocovarianza Y De Autocorrelación Muestral.....	141
2.7.6	Función De Autocorrelación Parcial Muestral.....	155
2.8.	UNIDAD III. MODELOS ESTOCÁSTICOS DE SERIES TEMPORALES..	163
2.8.1.	Justificación Y Concepto De Los Proceso Estocástico Lineales Discretos...	163
2.8.2.	Modelos De Medias Móviles (MA).....	166
2.8.3.	Modelos Autorregresivos (AR).....	188
2.8.4.	Modelos Mixtos Autorregresivos-Media Móviles (ARMA).....	213
2.8.5.	Modelos Estocásticos Lineales No Estacionario Homogéneo. Modelos ARIMA.....	227
2.9	UNIDAD IV: MODELOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONARIOS.....	234
2.9.1	Introducción.....	234
2.9.2	Modelos Estacionales De Medias Móviles.....	236
2.9.3	Modelos Estacionales Autorregresivos.....	245
2.9.4.	Modelo Estacional Mixtos Y Modelo Estacional No Estacionario.....	257
2.9.5	Modelos Estacionales Multiplicativos.....	263
2.10	UNIDAD V: ESQUEMA GENERAL E IDENTIFICACIÓN.....	291
2.10.1	Esquema General De La Metodología Box Jenkins.....	291
2.10.2	Análisis De Estacionariedad.....	293
2.10.3	Identificación d.....	294

2.10.4 Identificación “ λ ”.....	296
2.10.5 Identificación de “D”.....	298
2.11 UNIDAD VI. ESTIMACIÓN CHEQUEO Y PREDICCIÓN.....	300
2.11.1 Estimación.....	300
2.11.2. Chequeo.....	302
2.11.3 Predicción.....	303
2.11.4 Modelo Óptimo.....	313
CAPÍTULO III: PRÁCTICA DE LABORATORIO DE SERIES	
TEMPORALES.....	317
3.1 Introducción.....	317
3.2 Objetivos.....	318
3.3 Planificación Temporal.....	319
3.4 Contenido del Temario de Laboratorio.....	320
3.5 PRACTICA 1: Representación Gráfica de las Series Temporales.....	321
3.6 PRACTICA 2: Método no Paramétrico para Series Temporales Tipo 1.....	334
3.7 PRACTICA 3: Método no Paramétrico para Series Temporales Tipo 2.....	343
3.8 PRACTICA 4: Método no Paramétrico para Series Temporales Tipo 3.....	348
3.9 PRACTICA 5: Método no Paramétrico para Series Temporales Tipo 4.....	355
3.10 PRACTICA 6: Función de Autocovarianza y Autocorrelación.....	364
3.11 PRACTICA 7: Modelo de Medias Móviles (MA).....	370
3.12 PRACTICA 8: Modelo Autorregresivos (AR).....	379
3.13 PRACTICA 9: Modelo Mixtos Autorregresivos de Medias Móviles (ARMA)....	386

3.14 PRACTICA 10: Modelo Estacionales.....	388
ANEXOS.....	398
Tablas de Datos para la Práctica I.....	399
Tablas de Datos para los ejercicios de la unidad II.....	407
Ejercicios Propuestos Para la Unidad II.....	430
Ejercicios Propuestos Para la Unidad III.....	432
Ejercicios Propuestos Para la Unidad IV.....	434
BIBLIOGRAFÍA.....	435

AGRADECIMIENTOS

A DIOS TODOPODEROSO:

Por ser el motor de mi vida y brindarme la sabiduría y la fortaleza para que fuera posible alcanzar este triunfo.

A MIS PADRES:

Por su cariño, apoyo, dedicación y empeño en ayudarme a ser una mejor persona cada día, y por tanto esfuerzo para que yo lograra culminar mi formación académica.

A MIS ABUELOS:

Por su cariño, consejos, oraciones y confianza de siempre.

A MIS HERMANOS:

Por su cariño, apoyo, paciencia y comprensión a lo largo de este proceso.

A MI NOVIO:

Por ayudarme a cruzar con firmeza el camino de la superación, porque con su apoyo y aliento hoy he logrado uno de mis más grandes anhelos.

A MI COMPAÑERA DE TESIS:

Por todo el tiempo compartido a lo largo de la carrera, por su comprensión y paciencia para superar tantos momentos difíciles.

A TODOS MIS FAMILIARES Y AMIGOS:

Que de una u otra manera estuvieron pendientes a lo largo de este proceso, brindado su apoyo incondicional.

Claudia María Flores Reyes.

AGRADECIMIENTOS

A DIOS TODO PODEROSO:

Por haberme permitido culminar mi estudio exitosamente, dándome Fe, Esperanza y Fortaleza sobre todo su Bendición en este arduo camino de tristeza, desvelo y de constante lucha en este proceso.

A MIS PADRES:

Por brindarme su amor, dedicación, entrega y por toda la ayuda que me han brindado siempre y por acompañarme en este propósito de mi vida.

A MIS HERMANOS:

Por ser fuentes de inspiración, la luz en el camino que me permitió caminar con pasos certero hasta llegar a mi meta y por apoyo que me dieron cuando más lo necesitaba.

A MIS COMPAÑEROS Y AMIGOS:

Por haber compartido conmigo sus experiencias, sus tristezas y alegrías.

Vilma Yolanda Contreras Alfaro.

PLAN DOCENTE DE LA ASIGNATURA:
SERIES TEMPORALES

ASPECTOS INTRODUCCTORIOS

INTRODUCCION.

“La planificación reflexiva y explícita del proceso de enseñanza-aprendizaje en el marco del Plan de Estudios de cada titulación constituye un factor fundamental de calidad de la actividad docente universitaria.

Se trata de una tarea esencialmente colaborativa, que requiere explicitar las intenciones y actividades de la enseñanza, aprendizaje y evaluación en el conjunto de las materias que conforman un título; es decir, un compromiso de reflexión en torno a varias preguntas esenciales: ¿cuáles son las características del universitario y el profesional que pretendemos formar?, ¿qué pretendemos enseñar?, ¿cuándo y cómo lo vamos a enseñar?, ¿cómo podemos evaluar el proceso y los resultados de aprendizaje?

El resultado de esta reflexión debería aparecer recogida en el Plan Docente, pero lo cierto es que tradicionalmente los profesores universitarios, ya sea porque todavía no lo han elaborado o porque lo hicieron al margen de lo que realmente enseñan, se limitan a formular un estricto listado de temas sobre cada asignatura de enseñanza, con la limitación de circunscribirse a los descriptores que figuren en los Planes de Estudios y la escasa Bibliografía para el desarrollo de dichos planes docentes.

Pero un Plan Docente va más allá de un listado de temas a desarrollar pues se refiere a un protocolo cuya aplicación exige un esfuerzo de coordinación y planificación en torno

a un proyecto común: los aprendizajes que pretendemos que los alumnos consigan a lo largo de sus estudios en una determinada titulación.”¹

El presente proyecto está dirigido a impulsar la excelencia de la enseñanza que permita formar mejores profesionales en el área de la estadística utilizando la tecnología de la computación, pues son dos áreas que en las sociedades modernas forman parte de las herramientas imprescindibles en una gran diversidad de actividades ligadas al desarrollo productivo.

En este proyecto se desarrollará un Plan Docente para la asignatura “Series Temporales” que es impartida en la carrera de Licenciatura en Estadística la cual es ofertada por el Departamento de Ciencias Naturales y Matemática, en la Sección de Matemática, de la Universidad de El Salvador. Esta planificación incluye los aspectos didácticos relativos a su desarrollo.

Se presenta la situación actual de esta asignatura, su relación con otras asignaturas, la metodología y material didáctico para impartirla, la metodología de evaluación, así como también la presentación del contenido teórico y práctico, el desarrollo y solución de las prácticas y la bibliografía utilizada.

El desarrollo del proyecto se plantea en tres partes. En la primera se hace un análisis de los aspectos relacionados con las características docentes y el método de desarrollo de

¹ Montanero Manuel, Gómez Valentín, Mateos Vidal L, y Alejo Rafael. 2006. Orientaciones para la elaboración del Plan Docente de una Asignatura.

la asignatura Series Temporales. En la segunda se incluyen los elementos, teóricos como prácticos, que constituyen el material didáctico necesario para dicha asignatura.

Entre los elementos teóricos del Plan Docente de Series Temporales se desarrollará: la teoría del Tratamiento Determinista de la Serie Temporal, Los Modelos Estocásticos de las Series Temporales, Los Diferentes Enfoques Paramétricos de la Series Temporales , Los Modelos Estocásticos Estacionales, El Esquema General e Identificación, Estimación, Chequeo y Predicción de la Serie Temporal.

Y por último en la tercera parte se desarrollan las prácticas de laboratorio, en las cuales el alumno pondrá en práctica lo aprendido en clases.

JUSTIFICACIÓN

La razón principal para elaborar el presente Plan Docente es la limitada bibliografía sobre Series Temporales en la Universidad de El Salvador, lo cual afecta a los docentes que la imparten y estudiantes de la Licenciatura en Estadística que la cursan; debido a la necesidad de una mayor fuente de información a la hora de poder comprender y aplicar los conocimientos adquiridos en clases.

El objetivo de este Plan Docente, es presentar las diferentes técnicas en el estudio de las Series Temporales, con el cual se pretende contribuir al desarrollo de esta rama de la Estadística.

Por tanto la propuesta de este Plan Docente se orienta a:

- ✓ Guiar el aprendizaje del alumno, en la medida en que a través de este Plan Docente, se les ofrezcan los elementos informativos suficientes como para determinar qué es lo que se pretende que aprendan sobre las Series Temporales.
- ✓ Mejorar la calidad de enseñanza de las Series Temporales.
- ✓ Contribuir con los docentes que imparten y estudiantes que cursan dicha asignatura, a que dispongan de un instrumento que contenga información ordenada y que sirva de guía para el desarrollo de las clases.
- ✓ Y promover la utilización de un software adecuado para la resolución de los ejercicios. Se analiza las posibilidades de diferentes programas en el trabajo de las Series Temporales entre los cuales tenemos: el SPSS y Excel.

OBJETIVOS

Los objetivos del presente Plan Docente son:

- ◆ Desarrollar un plan docente que comprenda los conocimientos básicos en el área de las Series Temporales que un estudiante de Licenciatura en Estadística debería tener.

- ◆ Elaborar el contenido teórico y práctico de la asignatura que les servirá tanto al docente encargado de impartir la asignatura como al estudiante que la recibe.

- ◆ Proporcionar una mejor planificación y organización de la asignatura.

- ◆ Introducir al alumno en el aprendizaje y manejo del software estadístico SPSS y Microsoft office Excel como herramientas en la resolución de ejercicios de Series Temporales.

DESARROLLO DEL PROYECTO

Para elaborar este proyecto docente, se han seguido las etapas siguientes:

- ✓ Como primer paso se establecen las asignaturas relacionadas con las Series Temporales.
- ✓ Como segundo paso se establecen: los materiales y los métodos didácticos, así como también la planificación temporal, la metodología de evaluación y contenido del temario.
- ✓ Como tercer paso se detallan cada uno de los temas del contenido teórico de la asignatura Series Temporales.
- ✓ Como último paso se desarrollan las Prácticas de Laboratorio y sus soluciones las cuales aparecerán como un capítulo al final del documento.

Para la realización del documento se ha contado como recurso primario con una computadora, en la cual se han llevado a cabo pruebas de las prácticas, utilizando el software necesario como es el SPSS y Excel que forma parte de Microsoft Office el cual podrá ser instalado en los laboratorios para que los estudiantes desarrollen sus prácticas.

CAPITULO I: PLAN DE ESTUDIOS Y METODOLOGÍA DOCENTE

1.1 SERIES TEMPORALES EN EL PLAN DE ESTUDIOS DE LICENCIATURA EN ESTADÍSTICA.

Antes de desarrollar el contenido teórico de la asignatura “Series Temporales” debemos hacer un análisis de la situación de dicha asignatura en el plan de estudios de la carrera de Licenciatura en Estadística ofertada por el Departamento de Ciencias Naturales y Matemática de la UES –FMO.

Dicho análisis nos permitirá saber los conocimientos previos que debe tener el alumno que lleva esta materia, así como también la relación que tiene con otras asignaturas; esto también nos ayudará a lograr los objetivos propuestos en la elaboración del plan docente ya que debe existir una planificación adecuada en el orden en que se imparte el contenido de una asignatura en cada uno de los ciclos que conforman un año académico.

Para poder aprender los conceptos y la metodología en que se basa Series Temporales es necesario que el estudiante esté familiarizado con algún programa estadístico; como el SPSS ó con hojas de cálculo como Excel pues son estos los que se abordarán en este plan docente.

Por todo lo expuesto anteriormente, se mostrará primero de forma gráfica la relación de “Series Temporales” con el resto de asignaturas y luego se describirá de forma breve cada una de ellas.



1.1.1 MODELOS LINEALES:

Esta asignatura inicia con el estudio de modelo de regresión Lineal Simple, haciendo énfasis en la metodología a seguir en la construcción del modelo estadístico.

Por otra parte, se estudia las técnicas estadísticas para la estimación y aceptación de los parámetros y validación del modelo; mediante el estudio de los residuales y prueba de las asunciones del modelo y uso finalmente del modelo.

Posteriormente, se extiende el proceso a variables independientes que contienen información acerca de la variable que se trata de predecir o entender, es decir, un modelo de regresión lineal múltiple. Así como, uso de variables cualitativas como variables explicativas o regresoras en el modelo, interacciones entre variables cualitativas y cuantitativas, procedimientos para selección de variables, detección y solución a los problemas de multicolinealidad, heterocedasticidad y autocorrelación.

1.1.2 SERIES TEMPORALES:

En esta asignatura se introduce al estudiante el aprendizaje de la teoría y técnicas de predicción. Los procesos estocásticos conciernen a secuencias de sucesos gobernados por leyes probabilísticas. Las aplicaciones de los procesos estocásticos son múltiples,

pudiéndose encontrar en contextos tan variados como la física, la ingeniería, la biología, la psicología, así como en muchas áreas del análisis matemático. Por su parte, una serie temporal es una colección de datos obtenidos al observar un proceso estocástico que evoluciona en el tiempo.

El problema fundamental al que nos enfrentamos en el momento de analizar una serie temporal será el de proponer un modelo para el proceso estocástico subyacente mediante la identificación de las tendencias exhibidas por la serie, el de diagnóstico del modelo adoptado mediante el examen de sus discrepancias (residuos) con los datos propiamente observados, y todo ello comúnmente con miras a predecir, con la máxima fiabilidad posible, la evolución futura del proceso.

1.1.3 SEMINARIO I:

En este curso se desarrolla la teoría fundamental del Espacio de Probabilidades, luego se estudia y aplica las técnicas actuales más utilizadas del Análisis Estadísticos Multivariante, con el fin de explorar el comportamiento de un conjunto de datos reales que han sido recolectados previamente, es decir, el curso será eminentemente práctico de tal forma que los estudiantes relacionen la teoría que han estudiado en los cursos básicos de la Licenciatura Estadística con el que hacer de la estadística.

Esta asignatura es el prerrequisito para poder cursar las 3 últimas materias contempladas en el pènsul de la Licenciatura en Estadística.

1.2 METODOLOGÍA DOCENTE

1.2.1 MATERIAL Y MÉTODO DIDÁCTICO

La metodología a utilizar para impartir esta asignatura consiste en lecciones magistrales con una duración de cinco horas por semana, y las unidades valorativas de esta asignatura son 4. Se desarrollará a lo largo del ciclo todo el contenido teórico de la asignatura que se tenga planificado según la temporización que se detallará más adelante.

Para lograr un adecuado y completo aprendizaje de esta asignatura, el profesor propondrá una serie de prácticas de laboratorio que deben ser resueltas por los estudiantes en tiempo y forma. Dichas prácticas serán realizadas haciendo uso del SPSS/Excel, como herramientas de desarrollo de las prácticas.

El estudiante también podrá complementar las clases y el autoestudio con tutorías en las que podrá hacer consultas al profesor fuera del aula en un horario determinado brindado por el profesor al inicio del curso. También tendrá acceso en forma impresa a todo el material disponible de la asignatura así como a la bibliografía básica y complementaria de la misma, que estarán disponibles en la sección de Matemática para su debido uso.

En cuanto al material didáctico para impartir las clases se hará uso de pizarra acrílica, marcador, computadora, libros de texto, material preparado por docente y proyector.

1.2.2 METODOLOGÍA DE EVALUACIÓN

La asignatura de Series Temporales, está compuesta por las clases teóricas y por la parte práctica, que corresponde al laboratorio. A lo largo del curso se realizan nueve evaluaciones de las cuales tres son parciales, tres prácticas de laboratorio y tres corresponden a tareas.

Las notas obtenidas en las tres evaluaciones parciales(P) corresponden al 50% de la nota final de la asignatura, que sumado al 20% de la nota de los prácticas de laboratorio (PL) y el 30% que corresponde a las tareas (T), se obtiene el 100% de la nota final de todo el curso.

En cuanto a la obtención de cada una de las notas parciales, el desglose es el siguiente:

Realización de tres exámenes Parciales..... 50%

Realización de tres exámenes Pre-Parciales..... 30%

Prácticas de Laboratorio y Tareas ex aula.....20%

El cuadro que se presenta a continuación aclara lo antes expuesto:

EVALUACIÓN	COMPUTO 1				COMPUTO 2				COMPUTO 3				TOTAL
	P1	PL	T1	TC1	P2	PL2	T2	TC2	P3	PL3	T3	TC3	
PORCENTAJES	20%	5%	10%	35%	15%	10%	10%	35%	15%	5%	10 %	30%	100%

1.2.2.1 EVALUACIÓN DE EXÀMEN

La escala de evaluación es de 0 a 10 puntos siendo 6.0 la nota mínima para aprobar. Los exámenes escritos consistirán en preguntas teóricas directas que permitan evaluar el grado de comprensión de los conceptos básicos que tiene el estudiante. También contendrá preguntas de carácter analítico, basadas en algún problema planteado en las cuales el alumno deberá realizar un análisis a partir de los conocimientos teóricos adquiridos. Por último, también es posible que se hagan preguntas prácticas para evaluar el nivel alcanzado en la resolución de las prácticas del laboratorio.

Los estudiantes deberán realizar todas las prácticas establecidas en tiempo y forma para poder tener derecho a los puntos correspondientes las prácticas de laboratorio y tareas que corresponde al 50% de todo el ciclo.

CAPÍTULO II: SERIES TEMPORALES.

2.1 INTRODUCCIÓN

La asignatura de Series Temporales, es de carácter obligatorio, será impartida en el VIII ciclo de la carrera de Licenciatura en Estadística. Cuenta con 3 horas a la semana para la clase teórica y 2 horas semanales para el laboratorio.

Para la mejor asimilación y comprensión de esta asignatura se recomienda que el alumno tenga conocimiento sobre las asignaturas de modelos lineales; así como también en el área de Inferencia Estadística que fueron cursadas en ciclos anteriores.

Con esta asignatura se pretende introducir al alumno en la metodología de las Series Temporales, para lograr esto en la parte teórica se verán los conceptos y los ejemplos para una mayor comprensión y en los laboratorios se realizaran una serie de prácticas para afinar los conocimientos teóricos antes expuestos utilizando herramientas como Excel y el SPSS.

En el primer tema se explican los conceptos básicos sobre los cuales se fundamenta la metodología de las Series Temporales haciendo énfasis en sus características principales que son: Tendencia, Estacionalidad, Variaciones cíclicas y variaciones residuales. Luego en los siguientes capítulos se demuestra como se pone de manifiesto estas características en las Series Temporales mediante ejemplos prácticos.

Los conocimientos adquiridos en esta asignatura son la base fundamental para iniciar el estudio de las asignaturas posteriores.

2.2 OBJETIVOS

- Adquirir los conocimientos necesarios para predecir una Serie Temporal desde la perspectiva de los modelos deterministas.
- Conocer los elementos básicos para el tratamiento estocástico de una Serie Temporal.
- Adquirir los conocimientos necesarios para especificar, contrastar y predecir una Serie Temporal a partir de la Metodología de Box-Jenkins.
- Aplicar los procedimientos teóricos a situaciones prácticas, al mismo tiempo que interpretar de forma crítica los resultados obtenidos.

2.3 PLANIFICACIÓN TEMPORAL

Para realizar una adecuada planificación del contenido de esta asignatura a lo largo del ciclo debemos analizar la duración del periodo lectivo y obtener el número de horas tanto para las clases teóricas como las prácticas de laboratorio.

Tomando en cuenta el calendario académico propuesto por la Universidad de El Salvador y que esta asignatura es impartida durante el segundo ciclo del año lectivo, sumando un total de 16 semanas para dar fiel cumplimiento con el contenido de la asignatura.

Para el desarrollo de la parte teórica se cuenta con dos periodos semanales, uno de una hora y otro de dos horas, por tanto se tiene un total de 48 horas en todo el ciclo. Para el laboratorio se cuenta con una semana menos, la cual es dedicada para las siguientes actividades:

- Presentación de laboratorio.
- Introducción al uso de la herramienta a utilizar (Excel, SPSS)
- Realización de una práctica introductoria.

Esto significa que para la parte práctica se cuenta realmente con 15 laboratorios de dos horas cada uno haciendo un total de 30 horas por ciclo.

El cuadro siguiente muestra la temporización para impartir la parte teórica:

UNIDAD	SEMANA	CONTENIDO	HORAS
-	1	Presentación de la asignatura.	1
I	1-3	Tratamiento Determinista de las Series	8
II	4-6	Introducción al Enfoque Paramétricos del	9
III	7-9	Modelos Estocásticos de Series Temporales.	9
IV	10-12	Modelos Estocásticos Estacionales.	9
V	13-15	Esquema General e Identificación.	9
VI	16	Estimación, Chequeo y Predicción.	3
TOTAL_HORAS			48

En cuanto al laboratorio se tiene la siguiente planificación:

PRACTICA	SEMANA	CONTENIDO	HORAS
1	2	Representación gráfica de las Series Temporales.	1
2	3	Predicción en modelos sin tendencia y sin componente Estacional	2
3	4	Predicción en modelos sin Tendencia y con Componente Estacional.	2
4	5	Predicción en modelos con Tendencia y sin Componente Estacional.	2
5	6	Predicción en modelos con Tendencia y con Componente Estacional.	2
6	7	Funciones de autovarianza y autocorrelación, Función de autocorrelación parcial.	4
7	8,9,10	Modelos de medias móviles (M.A.).	5
8	11,12	Modelos autorregresivos (A.R.)	4
9	13,14	Modelos mixtos autorregresivos medias móviles (ARMA)	4
10	15,16	Modelos Estocásticos Estacionales	4
TOTAL_HORAS			30

2.4 CONTENIDO DEL TEMARIO TEÒRICO

UNIDAD I: TRATAMIENTO DETERMINISTA DE LAS SERIES TEMPORALES.

- 1.0 Introducción.
- 1.1 Concepto de Serie Temporal.
- 1.2 Diferentes enfoques en el estudio de las Series Temporales.
- 1.3 Concepto de Predicción.
- 1.4 Criterios de Evaluación de la Capacidad Predictiva.
- 1.5 Concepto de Autocorrelación.
- 1.6 Representación Gráfica de una Serie Temporal.
- 1.7 Componentes no Observables de una Serie Temporal.
- 1.8 Tratamiento Descriptivo de la Tendencia.
 - 1.8.1 Tratamiento por Contraste de Daniel.
 - 1.8.2 Tratamiento por Contraste de Kruskal Wallis
- 1.9 Métodos no Paramétricos de Series Temporales.
 - 1.9.1 Métodos no Paramétricos para Series tipo 1.
 - 1.9.2 Métodos no Paramétricos para Series tipo 2.
 - 1.9.3 Métodos no Paramétricos para Series tipo 3.
 - 1.9.4 Métodos no Paramétricos para Series tipo 4.

UNIDAD II: INTRODUCCIÓN AL ENFOQUE PARÁMETRICOS DEL ANÁLISIS DE LAS SERIES TEMPORALES.

- 2.1.La Serie Temporal como Realización de un Proceso Estocástico.
- 2.2.Proceso Estocásticos Estacionarios.
- 2.3.Funciones de Autovarianza y Autocorrelación.
- 2.4.Funciones de Autocorrelación Parcial.
- 2.5.Funciones de Autovarianza y Autocorrelación Muestral.
- 2.6.Funciones de Autocorrelación Parcial Muestral.

UNIDAD III: MODELOS ESTOCÁSTICOS DE SERIES TEMPORALES.

- 3.1 Justificación y Concepto de los Procesos Estocásticos Lineales Discretos.
- 3.2 Modelos de Medias Móviles (M.A).
- 3.3 Modelos Autorregresivos (A.R).
- 3.4 Modelos Mixtos Autorregresivos Medias Móviles (ARMA).
- 3.5 Modelos Estocásticos Lineales no Homogéneos. Modelos ARIMA.

UNIDAD VI: MODELOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONALES.

- 4.1 Introducción.
- 4.2 Modelos Estacionales de Medias Móviles.
- 4.3 Modelos Estacionales Autorregresivos.
- 4.4 Modelos Estacionales Mixtos y Modelos Estacionales no Estacionarios.
- 4.5 Modelos Estacionales Multiplicativos.

UNIDAD V: ESQUEMA GENERAL E IDENTIFICACIÓN

5.1 Esquema General de la Metodología Box Jenkins.

5.2 Análisis de Estacionariedad.

5.2.1 Identificación de “d”.

5.2.2 Identificación de “F”.

5.2.3 Identificación de “D”.

UNIDAD VI: ESTIMACIÓN CHEQUEO Y PREDICCIÓN.

6.1 Estimación.

6.2 Chequeo.

6.3 Modelo Óptimo.

2.5 PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

UNIDAD 0

OBJETIVOS

- ✓ Conocer los objetivos generales de la asignatura, el temario y su distribución temporal, así como las relaciones de la misma con la carrera profesional de la titulación.
- ✓ Conocer y comprender el método de enseñanza que se va a seguir durante el curso, los criterios de evaluación y la bibliografía necesaria.

CONTENIDO

- ✓ Documento de presentación de la asignatura al alumno. Ver documento en la página siguiente.

ASIGNATURA: SERIES TEMPORALES

DEPARTAMENTO: CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

CARRERA: LICENCIATURA EN ESTADÍSTICA

CICLO: VIII, CUARTO AÑO DE LA CARRERA

DOCENTE:

TEMARIO DE TEORÍA

UNIDAD I: TRATAMIENTO DETERMINISTA DE LAS SERIES TEMPORALES.

1.0 Introducción.

1.1 Concepto de Serie Temporal.

1.2 Diferentes enfoques en el estudio de las Series Temporales.

1.3 Concepto de Predicción.

1.4 Criterios de Evaluación de la Capacidad Predictiva.

1.5 Concepto de Autocorrelación.

1.6 Representación Gráfica de una Serie Temporal.

1.7 Componentes no Observables de una Serie Temporal.

1.8 Tratamiento Descriptivo de la Tendencia.

1.8.1 Tratamiento por Contraste de Daniel.

1.8.2 Tratamiento por Contraste de Kruskal Wallis

1.9 Métodos no Paramétricos de Series Temporales.

1.9.1 Métodos no Paramétricos para Series tipo 1.

1.9.2 Métodos no Paramétricos para Series tipo 2.

1.9.3 Métodos no Paramétricos para Series tipo 3.

1.9.4 Métodos no Paramétricos para Series tipo 4.

UNIDAD II: INTRODUCCIÓN AL ENFOQUE PARÁMETRICOS DEL ANÁLISIS DE LAS SERIES TEMPORALES.

2.1 La Serie Temporal como Realización de un Proceso Estocástico.

2.2 Proceso Estocásticos Estacionarios.

2.3 Funciones de Autovarianza y Autocorrelación.

2.4 Funciones de Autocorrelación Parcial.

2.5 Funciones de Autovarianza y Autocorrelación Muestral.

2.6 Funciones de Autocorrelación Parcial Muestral.

UNIDAD III: MODELOS ESTOCÁSTICOS DE SERIES TEMPORALES.

3.1. Justificación y Concepto de los Procesos Estocásticos Lineales Discretos.

3.2. Modelos de Medias Móviles (M.A).

3.3. Modelos Autorregresivos (A.R).

3.4. Modelos Mixtos Autorregresivos Medias Móviles (ARMA).

3.5. Modelos Estocásticos Lineales no Homogéneos. Modelos ARIMA.

UNIDAD VI: MODELOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONALES.

4.1. Introducción.

4.2. Modelos Estacionales de Medias Móviles.

4.3. Modelos Estacionales Autorregresivos.

4.4. Modelos Estacionales Mixtos y Modelos Estacionales no Estacionarios.

4.5 Modelos Estacionales Multiplicativos.

UNIDAD V: ESQUEMA GENERAL E IDENTIFICACIÓN

5.1. Esquema General de la Metodología Box Jenkins.

5.2. Análisis de Estacionariedad.

5.2.1 Identificación de “d”.

5.2.2 Identificación de “P”.

5.2.3 Identificación de “D”.

UNIDAD VI: ESTIMACIÓN CHEQUEO Y PREDICCIÓN.

6.1 Estimación.

6.2 Chequeo.

6.3 Modelo Óptimo.

BIBLIOGRAFÍA (TEORÍA)

- ✓ PÉREZ LÓPEZ, CÉSAR. Econometría de las Series Temporales, Madrid, 2006. PEARSON PRENTICE HALL.
- ✓ PÉREZ LÓPEZ, CÉSAR Técnicas Estadísticas con SPSS 12 (Aplicaciones al análisis de datos), Madrid, PEARSON PRENTICE HALL.
- ✓ AZNAR ANTONIO, Y TRIVEZ FRANCISCO JAVIER. Métodos de Predicción en Economía 1 y 2.

TUTORIAS

- ✓ Despacho: Oficina de Docentes del Departamento de Matemática.
- ✓ Horario: Según criterio del Docente.

EVALUACIÓN DE LA ASIGNATURA.

La escala de puntuación es de 0 a 10 siendo 6.0 la nota mínima para aprobar la asignatura. El cálculo de la nota se hará de la siguiente manera:

Realización de tres exámenes Parciales.....	50%
Realización de tres Práctica de Laboratorio.....	30%
Tareas.....	20%
Total.....	100%

UNIDAD I: TRATAMIENTO DETERMINISTA DE LAS SERIES TEMPORALES.

TITULO DEL TEMA:

Tratamiento Determinista de las Series Temporales.

OBJETIVO:

- ✓ Introducir los conceptos en los que se basa la Metodología de Series Temporales.

CONTENIDO:

2.6.0 Introducción.

2.6.1 Concepto de Serie Temporal.

2.6.2 Diferentes enfoques en el estudio de las Series Temporales.

2.6.3 Concepto de Predicción.

2.6.4 Criterios de Evaluación de la Capacidad Predictiva.

2.6.5 Concepto de Autocorrelación.

2.6.6 Representación Gráfica de una Serie Temporal.

2.6.7 Componentes no Observables de una Serie Temporal.

2.6.8 Tratamiento Descriptivo de la Tendencia.

2.6.8.1 Tratamiento por Ajuste de Regresión

2.6.8.2 Tratamiento por Contraste de Daniel.

2.6.8.3 Tratamiento por Contraste de Kruskal Wallis.

2.6.9 Métodos no Paramétricos de Series Temporales.

2.6.9.1 Métodos no Paramétricos para Series tipo 1.

2.6.9.2 Métodos no Paramétricos para Series tipo 2.

2.6.9.3 Métodos no Paramétricos para Series tipo 3.

2.6.9.4 Métodos no Paramétricos para Series tipo 4.

DURACIÓN:

8 horas

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

- ✓ AZNAR ANTONIO, Y TRIVEZ FRANCISCO JAVIER. Métodos de Predicción en Economía 1.
- ✓ PÉREZ LÓPEZ, CÉSAR. Econometría de las Series Temporales, Madrid, 2006. PEARSON PRENTICE HALL.

2.6 UNIDAD I: TRATAMIENTO DETERMINISTA DE LAS SERIES

TEMPORALES.

2.6.0 INTRODUCCIÓN.

Cuando hablamos de una secuencia de valores observados a lo largo del tiempo, y por tanto ordenados cronológicamente, la denominamos, en un sentido amplio, Serie Temporal.

Los valores de una serie temporal van ligados a instantes de tiempo, de manera que el análisis de una serie implica el manejo conjunto de dos variables; la variable en estudio propiamente dicha y la variable tiempo.

Las series pueden tener una periodicidad anual, semestral, trimestral, mensual, según los períodos de tiempo en los que están recogidos los datos que la componen. Las ventas trimestrales de una empresa, la cantidad de accidentes semanales de tráfico o el número de exportaciones efectuadas cada año por un determinado país, son ejemplos de series temporales con diferentes periodicidades.

Lo que se pretende con una serie es describir y predecir el comportamiento de un fenómeno que cambia en el tiempo. Esas variaciones que experimenta una serie temporal pueden ser de dos tipos: evolutivas o estacionarias. Las variaciones serán evolutivas cuando el valor medio de la serie cambia, no permanece fijo a lo largo del tiempo, mientras que las variaciones estacionarias son aquellas en que su valor medio no cambia, aunque sufra oscilaciones en torno a ese valor medio fijo o constante.

2.6.1 CONCEPTO DE SERIE TEMPORAL.

Una Serie de Tiempo o Serie Temporal

- Es una colección de observaciones tomadas a lo largo del tiempo cuyo objetivo principal es describir, explicar, predecir y controlar algún proceso.

- Es el conjunto de valores de una variable correspondientes a períodos temporales sucesivos de igual duración.

- A todo conjunto de valores posibles de observación cronológica.

- Es una secuencia de n observaciones (datos) ordenados cronológicamente sobre una o varias características de una unidad observable en diferentes momentos.

- A un conjunto de mediciones de cierto fenómeno o experimento registradas secuencialmente en el tiempo.

Las observaciones están ordenadas respecto al tiempo y sucesivas observaciones son generalmente dependientes. De hecho esta dependencia entre las observaciones jugará un papel importante en el análisis de la serie.

Son innumerables las aplicaciones que se pueden citar, entre ellas tenemos las siguientes:

Series de Tiempo	Ejemplos
Series Económicas:	<ul style="list-style-type: none"> - Precios de un artículo - Tasas de desempleo - Tasa de inflación - Índice de precios - Exportaciones totales en sucesivos años. - Beneficios de una empresa en sucesivos años.
Series Físicas:	<ul style="list-style-type: none"> - Meteorología - Cantidad de agua caída. - Temperatura máxima diaria. - Velocidad del viento. - Energía solar.
Series Geofísicas:	<ul style="list-style-type: none"> - Series sismológicas
Series Demográficas:	<ul style="list-style-type: none"> - Tasas de crecimiento de la población. - Tasas de natalidad, mortalidad. - Resultados de censos poblacionales.
Series de Marketing:	<ul style="list-style-type: none"> - Series de demanda, gastos, ofertas
Series de Telecomunicación:	<ul style="list-style-type: none"> - Análisis de señales.
Series de Transporte:	<ul style="list-style-type: none"> - Series de tráfico.

Representación matemática de las Series Temporales.

Una Serie Temporal está matemáticamente definida por una función cuya forma general es $y = f(t)$, donde, y es el valor de la variable en estudio, t es la fecha a que ella se refiere, f es la regla que relaciona el valor de la variable en estudio con la fecha a que ella se refiere.

2.6.2 DIFERENTES ENFOQUES EN EL ESTUDIO DE LAS SERIES

TEMPORALES.

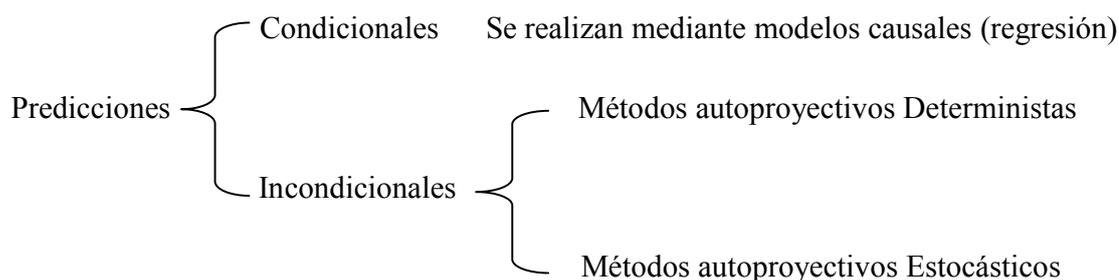
En el contexto temporal, y tratándose de procedimientos cuantitativos, puede hablarse de dos clases de predicciones: Condicionales e incondicionales.

- ✓ ***Predicciones Condicionales:*** Son las que se realizan mediante modelos causales. Se predicen valores futuros de la variable independiente, es decir, que es un modelo de regresión que relaciona dos variables, una dependiente y , y otra independiente x , por tanto se predice y dada x .

- ✓ ***Predicciones Incondicionales:*** Son las que se hacen mediante métodos autoproyectivos; se predicen valores futuros de la variable en función de valores pasados, actuales y futuros de la misma, sin necesidad de ninguna otra información de variables auxiliares o relacionadas.

Pero las predicciones incondicionales pueden tener un enfoque determinista ó estocástico según la naturaleza del modelo utilizado.

El esquema siguiente ilustra la clasificación de las técnicas de predicción:



El enfoque determinista es más adecuado cuando se dispone de un número limitado de observaciones, mientras que el enfoque estocástico es más adecuado cuando las series son de mayor tamaño.

Para cada tipo de predicciones (a corto, mediano y largo plazo), existen determinados métodos más adecuados. Por ejemplo, el análisis de tendencias es un método para realizar predicciones a largo plazo, los modelos econométricos son adecuados para hacer predicciones a corto y medio plazo, y los métodos autoproyectivos son más adecuados para realizar predicciones a corto plazo es conveniente tener presentes también las variaciones estacionales, lo mismo que las predicciones a medio plazo es conveniente tener presente también la componente cíclica.

2.6.3 CONCEPTO DE PREDICCIÓN

Predicción: es la estimación de valores futuros de la variable en función del comportamiento pasado de la serie.

Predicción: es un intento de anticipar el futuro.

Entenderemos por técnica de predicción a todo proceso que integre desde la recogida de la información relevante para predecir una variable hasta la obtención de la predicción tras su procesamiento.

Por tanto, los elementos fundamentales de toda técnica de predicción son:

a) La forma en la que se elabora la base informativa: Contiene los datos considerados como relevantes para el proyecto predictivo. El grupo de variables sobre las que se recoge información serán aquellas consideradas como importantes para identificar las pautas de comportamiento seguidas por la variable objeto de predicción.

b) El procedimiento seguido para procesar la información: se elabora un banco de datos procesando las respuestas obtenidas mediante algún instrumento (Cuestionario, Entrevista, entre otros.)

Evidentemente aunque el valor futuro de una serie temporal no sea predecible con total exactitud, para que tenga interés su estudio, el resultado tampoco puede ser completamente aleatorio, existiendo alguna regularidad en cuanto a su comportamiento en el tiempo, lo que hará posible su modelado y por ende, en su caso, la predicción.

2.6.4 CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE LA CAPACIDAD PREDICTIVA.

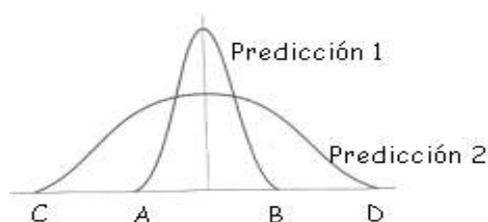
En el momento de seleccionar una técnica de predicción hay que prestar atención a dos tipos de criterios. Los primeros hacen referencia a lo que debe entenderse por una “predicción ideal” y los segundos concretan el tipo de restricciones que afectan el marco en el que se toma la decisión.

Así podemos establecer que la “Predicción ideal” debe ser:

- 1) Informativa y exacta.
- 2) Comprensible, simple y de fácil incorporación en el proceso de toma de decisiones.
- 3) Barata.
- 4) Debe estar disponible con la urgencia y frecuencia requeridas.
- 5) Debe proporcionar el detalle adecuado al nivel en que se toma la decisión.

Decimos que una predicción es informativa cuando la amplitud de esa región de valores plausibles es muy pequeña.

Esto puede verse de forma gráfica en la siguiente figura.



Decimos que la predicción 1 es más informativa que la predicción 2 porque la amplitud de la región de valores plausibles que corresponde a la primera (AB) es menor que la amplitud que corresponde a la segunda (CD).

La exactitud es una medida que trata de medir el grado de discrepancia entre la predicción realizada y el verdadero valor de la variable una vez que se ha observado.

Una predicción es tanto más exacta cuanto menor sea esa discrepancia.

El segundo tipo de criterios hemos dicho que concretaban el marco dentro del cual se tomaba la decisión. Estos se refieren a:

- 1) El tipo de variable que va a ser objeto de predicción y sus componentes.
- 2) El horizonte de predicción.
- 3) Los recursos disponibles.
- 4) La información disponible.

El tipo de variable se refiere a las pautas de comportamiento seguidas por dicha variable.

Así por ejemplo conviene saber si sigue un comportamiento estable o no, si tiene muchos puntos de giro, si tiene o no componente estacional y/o componente tendencial.

El horizonte temporal se refiere a ese período para el que se formula la predicción está o no muy distante del período en el que se realiza la predicción. En la literatura suele hablarse de tres situaciones distintas:

- Largo plazo: > 3 años
- Medio plazo: < 3 años y > 1 año.
- Corto plazo: < 1 año.

Como ya se menciona que conforme aumenta el horizonte temporal, el grado de información y exactitud que puede lograrse se va haciendo cada vez menor. Pero el ritmo de disminución no es el mismo para todas las técnicas, y hay diferencias entre ellas, respecto a la calidad de predicciones, según el horizonte temporal contemplado.

Los recursos disponibles hacen referencia en primer lugar, a la capacidad y preparación de los agentes destinatarios de la predicción; en segundo lugar al nivel de capacidad de cálculo del ordenador disponible y, en tercer lugar, al volumen de recursos económicos que pueden utilizarse para la elaboración de la predicción.

Por último la información disponible puede ser un factor determinante porque no todas las técnicas formulan las mismas demandas en lo que se refiere a la información requerida. Así por ejemplo, los métodos causales y los de series temporales univariantes precisan valores de una o varias variables en sucesivos periodos temporales, cuestión que no es vital para los métodos subjetivos.

La selección de una técnica debería hacerse siguiendo un proceso del siguiente tipo: en primer lugar, teniendo en cuenta el tipo de variable que se va a predecir, el horizonte de predicción, los recursos y la información disponible, se trata de elegir un grupo de técnicas que nos permitan aproximarnos a lo que hemos caracterizado como la “predicción ideal”.

2.6.5 CONCEPTO DE AUTOCORRELACIÓN.

- ✓ **Autocorrelación:** es la correlación entre miembros de serie de observaciones ordenadas en el tiempo.
- ✓ **Función de Autocorrelación:** es la que mide la correlación entre los valores de la serie distanciados un lapso de tiempo k .

Recordemos la fórmula del coeficiente de correlación simple, dados N pares de observaciones y, x :

$$r = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sqrt{(\sum (y_i - \bar{y})^2)(\sum (x_i - \bar{x})^2)}}$$

De igual forma, dada una secuencia temporal de N observaciones $x_1 \dots x_N$, podemos formar $N-1$ parejas de observaciones contiguas $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots (x_{N-1}, x_N)$ y calcular el coeficiente de correlación de estas parejas. A este coeficiente lo denominaremos *coeficiente de autocorrelación* de orden 1 y lo denotamos como r_1 . Análogamente se pueden formar parejas con puntos separados por una distancia 2, es decir $(x_1, x_3), (x_2, x_4)$, y calcular el nuevo coeficiente de autocorrelación de orden 2. De forma general, si preparamos parejas con puntos separados una distancia k , calcularemos el coeficiente de autocorrelación de orden k .

La función de Autocorrelación: es el conjunto de coeficientes de autocorrelación r_k desde 1 hasta un máximo que no puede exceder la mitad de los valores observados, y es

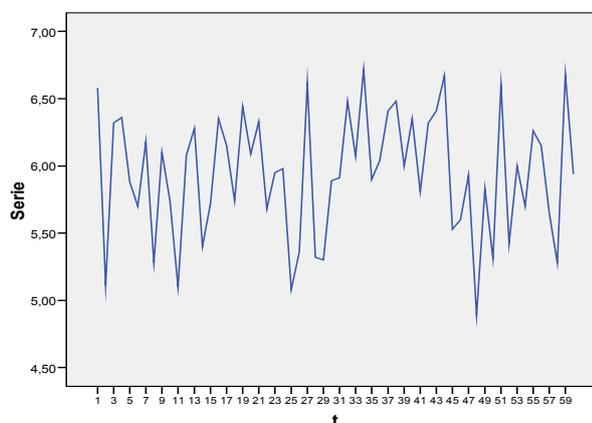
de gran importancia para estudiar la estacionalidad de la serie, ya que si ésta existe, los valores separados entre sí por intervalos iguales al período estacional deben estar correlacionados de alguna forma. Es decir que el coeficiente de autocorrelación para un retardo igual al periodo estacional debe ser significativamente diferente de 0.

Relacionada con la función de autocorrelación nos encontramos con la **función de autocorrelación parcial**. En el coeficiente de autocorrelación parcial de orden k , se calcula la correlación entre parejas de valores separados esa distancia y eliminando el efecto debido a la correlación producida por retardos anteriores a k .

2.6.6 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA SERIE TEMPORAL

La forma más sencilla de comenzar el análisis de una serie temporal es mediante su representación gráfica. El gráfico que se emplea para representar las series temporales es el gráfico de secuencia. Los gráficos de secuencia son diagramas de líneas en los cuales el tiempo se representa en el eje de abscisas (x), y la variable cuya evolución en el tiempo estudiamos en el eje de ordenadas (y).

Representación gráfica de una Serie.



2.6.7 COMPONENTES NO OBSERVABLES DE UNA SERIE TEMPORAL.

Las variables constituyentes de las series temporales pueden ser descompuestas en cuatro elementos (o componentes) básicos: Componente Tendencial, Componente Estacional, Componente Cíclica y Componente Aleatoria. Pero esta descomposición de la serie no deja de ser un procedimiento diseñado para que el estudio de la misma resulte más fácil, pues esas componentes no siempre existen. Así cuando se trabajan con datos anuales la serie no puede presentar estacionalidad. A su vez la componente cíclica es una componente ligada especialmente a las variaciones de tipo económica, pero que en variables de otra naturaleza puede que no esté presente. Matemáticamente su representación es la siguiente:

$$y_t = T_t + C_t + S_t + u_t$$

donde:

T_t : Componente tendencial

C_t : Componente cíclico

S_t : Componente estacional

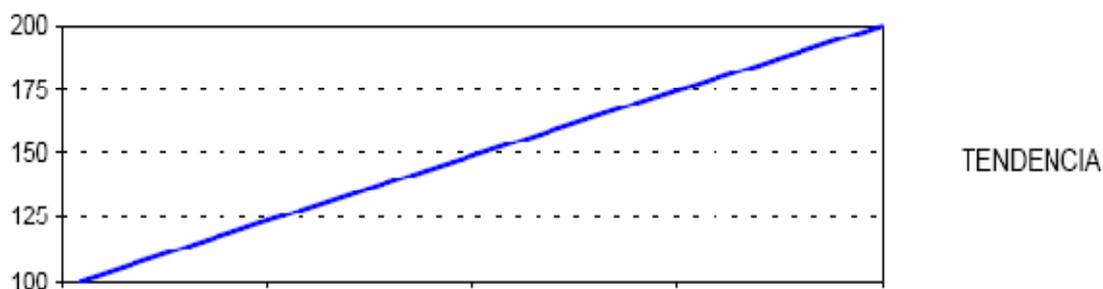
u_t : Componente aleatorio.

Según la forma y la importancia relativa de cada uno de estos cuatro elementos la serie adoptará una forma u otra.

a) El componente Tendencial.

Es aquella parte de la serie que mantiene una pauta de comportamiento estable en largos períodos de tiempo; esta pauta puede ser creciente o decreciente, pero no varía dentro de los períodos mencionados.

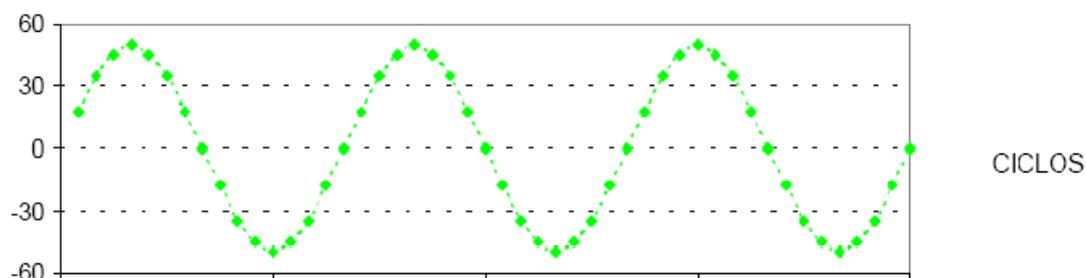
Es la dirección general de la variable en el período de observación, es decir el cambio a largo plazo de la media de la serie. Su principal característica es un movimiento constante y suave a lo largo del tiempo de evaluación. Es una variable influenciada por el período de larga duración que se analiza, no existiendo otros factores que hagan variar dicho factor de comportamiento.



b) El componente Cíclico.

Es aquella parte de la serie que, conforme pasan los períodos mantiene una cierta regularidad en su comportamiento, pero sin que pueda hablarse de una pauta estable y repetitiva.

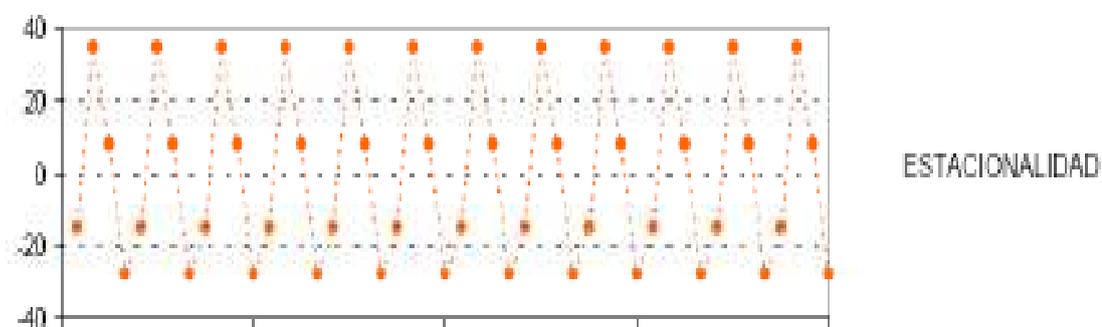
En términos económicos, los ciclos son caracterizados por los movimientos oscilatorios y aproximadamente regulares de los datos, en el largo plazo (períodos mayores que un año), en torno de la tendencia secular. Los ciclos pueden ser debidos a muchos factores, principalmente a los fenómenos naturales, como estaciones del año, períodos de lluvia o de calor intenso. También pueden ser debidos a fenómenos socioeconómicos, como los períodos de recesión o euforia típicos de los ciclos económicos.



c) El componente Estacional.

Aparece en aquellas series observadas en períodos con una duración inferior al año. Los fenómenos estacionales (también llamados de estaciones, por estar muchas veces asociados con las estaciones del año) son asemejados a los fenómenos cíclicos. La diferencia fundamental entre ellos es el tiempo entre dos crestas consecutivas: en el caso de los ciclos, ese tiempo es superior a un año; en el caso de la estacionalidad, es inferior a un año (en este último caso, los fenómenos dichos son de corto plazo).

Como ejemplo de eventos estacionales podemos citar los artículos de estación, como helados en verano, venta de libros y cuadernos al inicio de la época escolar, venta de arreglos florales para noviembre, febrero y mayo, las tarjetas de navidad en diciembre, los ciclos administrativos (pago de impuestos y del salario, balances anuales, etc).

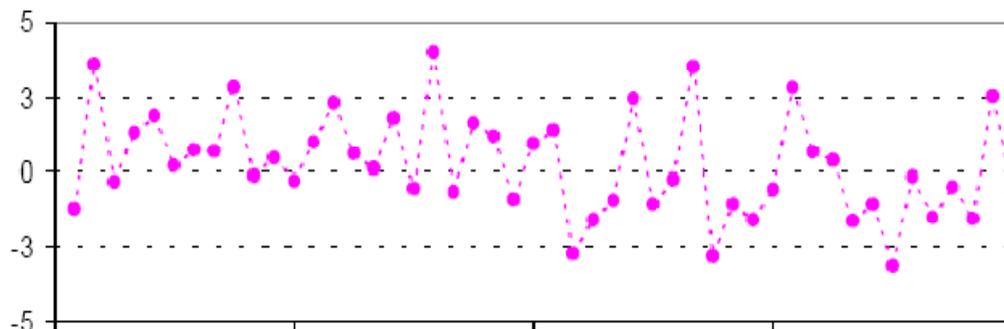


d) El componente Aleatorio.

No tiene ningún comportamiento sistemático que puede tipificarse a lo largo de diferentes períodos.

Muchos fenómenos socioeconómicos varían de forma completamente esporádica e imprevisible. Tales variaciones, llamadas aleatorias, pueden ser debidas a causas naturales (como sequias, inundaciones, heladas, epidemias y terremotos) o a causas sociales como períodos de guerras, huelgas y elecciones y hasta por planes económicos, así como pueden ser debidas a eventos no identificados.

El efecto provocado por esta componente, en general no mensurable, es de corta duración e intensidad variable.



2.6.8 TRATAMIENTO DESCRIPTIVO DE LA TENDENCIA.

2.6.8.1 TRATAMIENTO POR AJUSTE DE REGRESIÓN.

Para hallar la tendencia de una Serie Temporal, realizamos un ajuste por regresión de los valores de la serie a una función del tiempo que sea sencilla, y que recoja de manera satisfactoria la marcha general del fenómeno representado por la Serie Temporal.

Es común considerar entre otras las funciones de ajuste Lineal, Cuadrática, Exponencial, Logarítmica entre otras.

- $Z(t) = a + bt$ (Lineal)
- $Z(t) = a + bt + ct^2$ (Cuadrática)
- $Z(t) = e^{(a+bt)}$ (Exponencial)

No obstante pueden realizarse ajustes a tendencias de todo tipo (logarítmicas, semilogarítmicas, polinómicas potenciales, hiperbólicas).

Tendencia Lineal

Una Función de Tendencia Lineal es una línea recta $Z(t) = a + bt$ que se ajusta correctamente a los datos. Una Función de Tendencia Lineal normalmente muestra que algo aumenta o disminuye a un ritmo constante.

Tendencia Logarítmica

Una Función de Tendencia Logarítmica $Z(t) = \log(a + bt)$ es una línea curva muy útil cuando el índice de cambios de los datos aumenta o disminuye rápidamente y, después, se estabiliza. Esta Función de Tendencia Logarítmica puede utilizar valores positivos o negativos.

Tendencia Polinómica

Una Función de Tendencia Polinómica $Z(t) = a + bt + ct^2 + \dots + ct^n$ es una línea curva que se utiliza cuando los datos fluctúan según la ecuación de un polinomio. Es útil, por ejemplo, para analizar las pérdidas y ganancias de un conjunto de datos grande. El orden del polinomio se puede determinar mediante el número de fluctuaciones en los datos, o

en función del número de máximos y mínimos que aparecen en la curva. Una Función de Tendencia Polinómica de orden 2 suele tener un máximo o un mínimo. Una de orden 3 normalmente tiene uno o dos máximos o mínimos. El de orden 4 tiene más de tres.

Tendencia Potencial

Una Función de Tendencia Potencial es una línea curva $Z(t) = at^b$ que se utiliza con conjuntos de datos que comparan medidas que aumentan a un ritmo concreto; por ejemplo, la aceleración de un automóvil de carreras a intervalos de un segundo. No es posible crear una función de tendencia de potencia si los datos contienen valores cero o negativos.

Tendencia Exponencial

Una Función de Tendencia Exponencial es una línea curva $Z(t) = \text{Exp}(a+bt)$ que es muy útil cuando los valores de los datos aumentan o disminuyen a intervalos cada vez mayores. No es posible crear una función de tendencia exponencial si los datos contienen valores cero o negativos.

Tendencia de Media Móvil

Una Línea de Tendencia de Media Móvil atenúa las fluctuaciones en los datos para mostrar con mayor claridad la trama o la tendencia.

Método de las Medias Móviles

El método de las medias móviles de orden p analiza la tendencia de una serie temporal a partir del resumen de los datos iniciales mediante determinadas medias de los mismos elaboradas de la siguiente forma:

Si p es impar se forman medias relativas a los instantes $(p+1)/2$, $(p+3)/2$, $(p+5)/2$, que serán valores enteros porque p es impar) La serie de medias son la siguiente:

$$t = \frac{p+1}{2} \Leftrightarrow \bar{Y}_{(p+1)/2} = \frac{\sum_{i=1}^p Y_i}{p} = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_p}{p}$$

$$t = \frac{p+3}{2} \Leftrightarrow \bar{Y}_{(p+3)/2} = \frac{\sum_{i=2}^{p+1} Y_i}{p} = \frac{Y_2 + Y_3 + \dots + Y_{p+1}}{p}$$

Si p es par se forman medias relativas a los instantes $(p+1)/2$, $(p+3)/2$, $(p+5)/2, \dots$, (que no serán valores enteros porque es par). A continuación se hallan nuevas medias móviles entre cada dos medias móviles originales consecutivas, que serán ahora relativas a los instantes $(p+2)/2$, $(p+4)/2$, $(p+6)/2, \dots$ (que ya serán valores enteros porque p es par). La serie de medias móviles se observa a continuación:

$$t = \frac{p+2}{2} \Leftrightarrow \bar{Y}_{(p+2)/2} = \frac{\bar{Y}_{(p+1)/2} + Y_{(p+3)/2}}{2}$$

$$t = \frac{p+4}{2} \Leftrightarrow \bar{Y}_{(p+4)/2} = \frac{\bar{Y}_{(p+3)/2} + Y_{(p+5)/2}}{2}$$

Una vez obtenida la serie de medias móviles, la tendencia será la línea que las une.

2.6.8.2 TRATAMIENTO POR CONTRASTE DE DANIEL

El contraste de Daniel ha sido diseñado para determinar si la serie tiene o no tendencia.

En concreto trata de contrastar la hipótesis nula.

H_0 : La serie no tiene tendencia.

Frente a la alternativa

H_1 : La serie tiene tendencia.

Los T valores de la serie y_t , $t = 1, 2, \dots, T$, están ordenados temporalmente ya que corresponden a periodos sucesivos. A cada valor de la serie le corresponde un rango en esta ordenación según el periodo a que corresponda. Pero cabe pensar en una segunda ordenación basada en situar los valores de la serie de menor a mayor, correspondiendo a cada valor de la serie un segundo rango según el lugar que ocupe en esta segunda ordenación. A continuación, formamos una nueva variable como diferencia de ambos rangos: $d_t = \text{rango}(y_t) - t$ $t=1, 2, \dots, T$

El estadístico que sirve de base para el contraste de Daniel es el coeficiente de rangos de Spearman, que no es sino el coeficiente de correlación simple entre las dos series que se refieren a los rangos.

Este estadístico puede escribirse como:

$$\tau_t = 1 - \frac{6 \sum_{t=1}^T d_t^2}{T(T^2 - 1)}$$

Bajo la hipótesis nula, la distribución de $\tau_t \sim N(0, (T-1)^{-1})$

De forma que: $z = \sqrt{T-1} * \tau_s \sim N(0,1)$

A partir de estos elementos el contraste de Daniel adopta la siguiente regla de decisión:

Si $|z| > N_{\varepsilon/2}$ se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia ε ; es decir se concluye que la serie tiene tendencia.

Si $|z| \leq N_{\varepsilon/2}$ se acepta la hipótesis nula al nivel de significancia ε ; es decir se concluye que la serie no tiene tendencia.

2.6.8.3 TRATAMIENTO POR CONTRASTE DE KRUSKAL WALLIS.

El contraste de **Kruskal Wallis**, sirve para detectar la presencia o ausencia del componente estacional. En concreto, pretende contrastar es la hipótesis nula:

H₀: La serie no tiene componente estacional

Frente a la alternativa:

H₁: La serie tiene componente estacional

Este estadístico que sirve de base para este contraste es el siguiente:

$$H = \frac{12}{T(T-1)} \left[\sum_{i=1}^s \frac{R_i^2}{T_i} \right] - 3(T+1)$$

donde:

S: número de períodos estacionales dentro del año;

T_i : Número de observaciones que corresponden a la estación i-ésima. $T = T_1 + T_2 + \dots + T_s$

R_i : Suma e los rangos que resultan de una ordenación de menor a mayor de los valores de la variable correspondientes a la estación i-ésima.

Bajo la hipótesis nula se obtiene que este estadístico, H , sigue una distribución χ^2 con $(s-1)$ grados de libertad. Adoptando un nivel de significación, ε y siendo $\chi^2_{\varepsilon}(s-1)$ el punto crítico correspondiente a dicho nivel de significación, la regla de decisión es la siguiente:

Si $H > \chi^2_{\varepsilon}(s-1)$ se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia ε ; es decir se concluye que la serie tiene componente estacional.

Si $H \leq \chi^2_{\varepsilon}(s-1)$ se acepta la hipótesis nula al nivel de significancia ε ; es decir se concluye que la serie no tiene componente estacional.

Apliquemos los contrastes de Daniel y el de Kruskal Wallis a las siguientes cuatro series para verificar el tipo de componentes que tienen:

Cuadro de la Serie1. Cálculos para los contraste de Daniel y Kruskal Wallis

t	Serie	Rango(yt)	dt	r^2	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄
1	6,58	55	54	2916	55			
2	5,11	4	2	4		4		
3	6,32	45	42	1764			45	
4	6,36	49	45	2025				49
5	5,88	24	19	361	24			
6	5,7	18	12	144		18		
7	6,18	41	34	1156			41	
8	5,28	5	-3	9				5
9	6,1	38	29	841	38			
10	5,74	20	10	100		20		
11	5,1	3	-8	64			3	
12	6,08	36	24	576				36
13	6,28	43	30	900	43			
14	5,4	11	-3	9		11		
15	5,72	19	4	16			19	
16	6,35	47	31	961				47
17	6,15	39	22	484	39			
18	5,74	21	3	9		21		
19	6,44	52	33	1089			52	
20	6,09	37	17	289				37
21	6,33	46	25	625	46			
22	5,68	16	-6	36		16		
23	5,95	30	7	49			30	
24	5,98	31	7	49				31
25	5,08	2	-23	529	2			
26	5,36	10	-16	256		10		
27	6,62	57	30	900			57	
28	5,32	9	-19	361				9
29	5,3	7	-22	484	7			
30	5,89	25	-5	25		25		
31	5,91	27	-4	16			27	
32	6,48	54	22	484				54
33	6,07	35	2	4	35			
34	6,72	60	26	676		60		
35	5,9	26	-9	81			26	
36	6,04	34	-2	4				34
37	6,41	51	14	196	51			
38	6,48	53	15	225		53		
39	6	32	-7	49			32	
40	6,35	48	8	64				48
41	5,81	22	-19	361	22			
42	6,32	44	2	4		44		
43	6,41	50	7	49			50	
44	6,67	58	14	196				58
45	5,53	13	-32	1024	13			
46	5,6	14	-32	1024		14		
47	5,93	28	-19	361			28	
48	4,89	1	-47	2209				1
49	5,83	23	-26	676	23			
50	5,31	8	-42	1764		8		
51	6,6	56	5	25			56	
52	5,42	12	-40	1600				12
53	6	33	-20	400	33			
54	5,7	17	-37	1369		17		
55	6,26	42	-13	169			42	
56	6,15	40	-16	256				40
57	5,65	15	-42	1764	15			
58	5,28	6	-52	2704		6		
59	6,68	59	0	0			59	
60	5,94	29	-31	961				29
			Σ	35746	446	327	567	490
				R ²	198916	106929	321489	240100

Sumatoria de la diferencia de los rangos al cuadrado es igual: $\sum_{t=1}^T d_t^2 = 35,745$

En las cuatro últimas columnas aparecen los rangos correspondientes a cada uno de los cuatros períodos estacionales, los valores correspondientes de R_1 , R_2 , R_3 y R_4 es decir:

$$R_1 = 446, R_2 = 327, R_3 = 567 \text{ y } R_4 = 490.$$

Procederemos a obtener el coeficiente de rangos de Spearman:

$$\tau_s = 1 - \frac{6 \sum_{t=1}^T d_t^2}{T(T^2 - 1)} = 1 - \frac{6 * 35,746}{60((60)^2 - 1)} = 1 - 0.99320 = 0.0068$$

El correspondiente valor de z es: $z = \sqrt{T-1} * \tau_s = \sqrt{60-1} * 0.0068 = 0.0522$

Para un nivel de significancia del 5%, el correspondiente punto crítico es $N_{\varepsilon/2} = 1.96$ y

por ser $|z| < N_{\varepsilon/2}$ se concluye que la serie 1 no tiene **tendencia**.

Para aplicar el contraste de Kruskal Wallis hay que tener en cuenta que $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 15$

$$\sum_{i=1}^4 R_i^2 = 198,916 + 106,929 + 321.489 + 240,100 = 867,434$$

Así se tiene que:

$$H = \frac{12}{T(T-1)} \left[\sum_{i=1}^4 \frac{R_i^2}{T_i} \right] - 3*(T+1) = \frac{12}{60(61)} \sum_{i=1}^4 \frac{867,434}{15} - 3*(61) = 0.0032786 * 57,828.93 - 183 = 6.60$$

Para un nivel de significancia del $\varepsilon = 0.05$, el correspondiente punto crítico es

$\chi_{0.05}^2(3) = 7.81$ y por ser $H < \chi_{0.05}^2$ con tres grado de libertad se concluye que la serie 1

no tiene **componente estacional**.

Cuadro de la Serie 2. Cálculos para los contraste de Daniel y Kruskal Wallis

t	Serie	Rango(yt)	dt	d ² t	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄
1	10,58	60	59	3481	60			
2	2,11	1	-1	1		1		
3	7,32	40	37	1369			40	
4	4,36	28	24	576				28
5	9,88	52	47	2209	52			
6	2,7	8	2	4		8		
7	7,18	38	31	961			38	
8	3,28	15	7	49				15
9	10,1	55	46	2116	55			
10	2,74	10	0	0		10		
11	6,1	31	20	400			31	
12	4,08	23	11	121				23
13	10,28	57	44	1936	57			
14	2,4	5	-9	81		5		
15	6,72	32	17	289			32	
16	4,35	26	10	100				26
17	10,15	56	39	1521	56			
18	2,74	11	-7	49		11		
19	7,44	42	23	529			42	
20	4,09	24	4	16				24
21	10,33	58	37	1369	58			
22	2,68	7	-15	225		7		
23	6,95	36	13	169			36	
24	3,98	21	-3	9				21
25	9,08	46	21	441	46			
26	2,36	4	-22	484		4		
27	7,62	44	17	289			44	
28	3,22	14	-14	196				14
29	9,3	47	18	324	47			
30	2,89	12	-18	324		12		
31	6,91	34	3	9			34	
32	4,48	29	-3	9				29
33	10,07	54	21	441	54			
34	3,72	19	-15	225		19		
35	6,9	33	-2	4			33	
36	4,04	22	-14	196				22
37	10,41	59	22	484	59			
38	3,48	18	-20	400		18		
39	7	37	-2	4			37	
40	4,35	27	-13	169				27
41	9,81	50	9	81	50			
42	3,32	16	-26	676		16		
43	7,41	41	-2	4			41	
44	4,67	30	-14	196				30
45	9,53	48	3	9	48			
46	2,6	6	-40	1600		6		
47	6,93	35	-12	144			35	
48	2,89	13	-35	1225				13
49	9,83	51	2	4	51			
50	2,31	3	-47	2209		3		
51	7,6	43	-8	64			43	
52	3,42	17	-35	1225				17
53	10	53	0	0	53			
54	2,7	9	-45	2025		9		
55	7,26	39	-16	256			39	
56	4,15	25	-31	961				25
57	9,64	49	-8	64	49			
58	2,28	2	-56	3136		2		
59	7,68	45	-14	196			45	
60	3,94	20	-40	1600				20
			suma	37254	795	131	570	334
				R ²	632025	17161	324900	111556

La sumatoria de la diferencia de los rangos al cuadrado es igual: $\sum_{i=1}^T d_i^2 = 37,254$

En las cuatro últimas columnas aparecen los rangos correspondientes a cada uno de los cuatros períodos estacionales, valores correspondientes de R_1, R_2, R_3 y R_4 es decir:

$$R_1 = 795, R_2 = 131, R_3 = 570 \text{ y } R_4 = 334.$$

El coeficiente de rangos de Spearman toma el siguiente valor:

$$\tau_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^T d_i^2}{T(T^2 - 1)} = 1 - \frac{6 * 37,254}{60((60)^2 - 1)} = 1 - 1,0351 = -0.0351$$

El correspondiente valor de z es: $z = \sqrt{T-1} * \tau_s = \sqrt{60-1} * (-0.0351) = -0.269$

También en este caso se da con claridad que $|z| < N_{\epsilon/2}$ por lo que se concluye que la serie 2, no tiene **tendencia**.

Para aplicar el contraste de Kruskal Wallis hay que tener en cuenta que $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 15$

$$\sum_{i=1}^4 R_i^2 = 632,025 + 17,161 + 324,900 + 111,556 = 1,085,642$$

Así se tiene que:

$$H = \frac{12}{T(T-1)} \left[\sum_{i=1}^4 \frac{R_i^2}{T_i} \right] - 3 * (T+1) = \frac{12}{60(61)} \sum_{i=1}^4 \frac{1,085,642}{15} - 3 * (61) = 0.0032786 * 72,376.133 - 183 = 54.30$$

$\chi_{0.05}^2(3) = 7.81$ y por lo tanto $H > \chi_{0.05}^2$ con tres grado de libertad se concluye que la serie 2, tiene **componente estacional**.

Cuadro de la Serie 3. Cálculos para los contraste de Daniel y Kruskal Wallis

t	Serie	Rango(yt)	dt	d ² t	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄
1	3,66	1	0	0	1			
2	3,99	2	0	0		2		
3	5,02	3	0	0			3	
4	6,44	4	0	0				4
5	7,51	5	0	0	5			
6	8,21	6	0	0		6		
7	9,26	7	0	0			7	
8	9,48	8	0	0				8
9	10,21	9	0	0	9			
10	10,78	10	0	0		10		
11	11,57	11	0	0			11	
12	12,55	12	0	0				12
13	13,86	13	0	0	13			
14	14,34	14	0	0		14		
15	14,77	15	0	0			15	
16	15,88	16	0	0				16
17	17,1	17	0	0	17			
18	17,91	18	0	0		18		
19	19,31	19	0	0			19	
20	20,62	20	0	0				20
21	22,13	21	0	0	21			
22	23,04	22	0	0		22		
23	23,93	23	0	0			23	
24	24,87	24	0	0				24
25	25,83	25	0	0	25			
26	26,09	26	0	0		26		
27	27,42	27	0	0			27	
28	27,82	28	1	1				28
29	27,73	29	-1	1	29			
30	28,06	30	0	0		30		
31	28,63	31	0	0			31	
32	29,95	32	0	0				32
33	31,19	33	0	0	33			
34	33,13	34	0	0		34		
35	34,48	35	0	0			35	
36	35,69	36	0	0				36
37	37,26	37	0	0	37			
38	39,08	38	0	0		38		
39	40,49	39	0	0			39	
40	42,09	40	0	0				40
41	43,17	41	0	0	41			
42	44,58	42	0	0		42		
43	46,24	43	0	0			43	
44	48,32	44	0	0				44
45	49,34	45	0	0	45			
46	49,9	46	0	0		46		
47	50,6	47	0	0			47	
48	51,45	48	0	0				48
49	52,18	49	0	0	49			
50	52,28	50	0	0		50		
51	53,5	51	0	0			51	
52	53,96	52	0	0				52
53	54,69	53	0	0	53			
54	55,21	54	0	0		54		
55	56,27	55	0	0			55	
56	57,46	56	0	0				56
57	58,16	57	0	0	57			
58	58,2	58	0	0		58		
59	59,48	59	0	0			59	
60	60,56	60	0	0				60
				Σ 2	435	450	465	480
				R ²	189,225	202,500	216,225	230,400

La sumatoria de la diferencia de los rangos al cuadrado es igual: $\sum_{t=1}^T d_t^2 = 2$

El coeficiente de rangos de Spearman es igual en este caso a:

$$\tau_s = 1 - \frac{6 \sum_{t=1}^T d_t^2}{T(T^2 - 1)} = 1 - \frac{6 * 2}{60((60)^2 - 1)} = 1 - 0.00005557 = 1$$

El valor de la variable z es:

$$z = \sqrt{T-1} * \tau_s = \sqrt{60-1} * 1 = 7.68$$

Para un nivel de significancia del 5%, el correspondiente punto crítico es $N_{\varepsilon/2} = 1.96$ y

por ser $|z| > N_{\varepsilon/2}$ se concluye que la serie 3 tiene **tendencia**.

Para aplicar el contraste de Kruskal Wallis hay que tener en cuenta que,

$$R_1 = 435, R_2 = 450, R_3 = 465 \text{ y } R_4 = 480. \text{ y } T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 15$$

$$\sum_{i=1}^4 R_i^2 = 189,225 + 202,500 + 216,225 + 230,400 = 838,350$$

En consecuencia el estadístico H es igual a:

$$H = \frac{12}{T(T-1)} \left[\sum_{i=1}^4 \frac{R_i^2}{T_i} \right] - 3 * (T+1) = \frac{12}{60(61)} \sum_{i=1}^4 \frac{838,350}{15} - 3 * (61) = 0.0032786 * 55,890 - 183 = 0.24$$

Para un nivel de significancia del $\varepsilon = 0.05$, el correspondiente punto crítico es

$$\chi_{0.05}^2(3) = 7.81 \text{ y por ser } H < \chi_{0.05}^2(3) \text{ con tres grado de libertad se concluye que la}$$

serie 3 no tiene **componente estacional**.

Cuadro de la Serie 4. Calculo para el contraste de Daniel y Kruskal Wallis

t	Serie	Rango(yt)	dt	d ² t	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄
1	13,36	54	53	2809	54			
2	10,73	23	21	441		23		
3	9,29	6	3	9			6	
4	10,82	27	23	529				27
5	13,24	51	46	2116	51			
6	11,2	33	27	729		33		
7	9,59	9	2	4			9	
8	10	14	6	36				14
9	12,87	48	39	1521	48			
10	10,77	24	14	196		24		
11	8,99	4	-7	49			4	
12	10,18	17	5	25				17
13	13,12	50	37	1369	50			
14	10,54	21	7	49		21		
15	8,53	2	-13	169			2	
16	10,11	15	-1	1				15
17	12,9	49	32	1024	49			
18	10,57	22	4	16		22		
19	9,27	5	-14	196			5	
20	10,48	19	-1	1				19
21	13,54	55	34	1156	55			
22	11,05	31	9	81		31		
23	9,32	7	-16	256			7	
24	10,52	20	-4	16				20
25	13,32	53	28	784	53			
26	10,45	18	-8	64		18		
27	9,54	8	-19	361			8	
28	9,84	13	-15	225				13
29	12	41	12	144	41			
30	9,74	11	-19	361		11		
31	8,09	1	-30	900			1	
32	9,68	10	-22	484				10
33	12,31	44	11	121	44			
34	10,82	26	-8	64		26		
35	8,95	3	-32	1024			3	
36	10,15	16	-20	400				16
37	13,36	52	15	225	52			
38	11,58	36	-2	4		36		
39	9,82	12	-27	729			12	
40	11,37	35	-5	25				35
41	13,82	56	15	225	56			
42	12,19	43	1	1		43		
43	10,91	28	-15	225			28	
44	12,8	47	3	9				47
45	14,81	60	15	225	60			
46	12,51	46	0	0		46		
47	10,93	30	-17	289			30	
48	12,31	45	-3	9				45
49	14,67	59	10	100	59			
50	11,91	40	-10	100		40		
51	11,15	32	-19	361			32	
52	11,73	37	-15	225				37
53	14,38	58	5	25	58			
54	11,86	39	-15	225		39		
55	10,8	25	-30	900			25	
56	12,12	42	-14	196				42
57	14,23	57	0	0	57			
58	11,26	34	-24	576		34		
59	10,83	29	-30	900			29	
60	11,84	38	-22	484				38
				Σ 23788	787	447	201	395
				R ²	619369	199809	40401	156025

La sumatoria de la diferencia de los rangos al cuadrado es igual: $\sum_{i=1}^T d_i^2 = 23,788$

Para el contraste de Daniel se obtiene:

$$\tau_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^T d_i^2}{T(T^2 - 1)} = 1 - \frac{6 * 23,788}{60((60)^2 - 1)} = 1 - 0.66096 = 0.339$$

Por lo que el valor z es igual:

$$z = \sqrt{T-1} * \tau_s = \sqrt{60-1} * 0.339 = 2.60$$

Por ser $|z| > N_{\epsilon/2}$ se concluye que la serie 3 tiene **tendencia**.

Para aplicar el contraste de Kruskal Wallis hay que tener en cuenta que,

$$R_1 = 787, R_2 = 447, R_3 = 201 \text{ y } R_4 = 395. \text{ y } T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 15$$

$$\sum_{i=1}^4 R_i^2 = 619,369 + 199,809 + 40,401 + 156,025 = 1,015,604$$

Siendo el valor del estadístico H el siguiente:

$$H = \frac{12}{T(T-1)} \left[\sum_{i=1}^4 \frac{R_i^2}{T_i} \right] - 3 * (T+1) = \frac{12}{60(61)} \sum_{i=1}^4 \frac{1,015,604}{15} - 3 * (61) = 0.0032786 * 67,706.933 - 183 = 38.99$$

y por ser $H > \chi_{0.05}^2(3)$ con tres grado de libertad se concluye que la serie 4 tiene

componente estacional.

2.6.9 MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS DE SERIES TEMPORALES.

Los métodos autoproyectivos deterministas se utilizan para suavizar irregularidades y fluctuaciones de una Serie Temporal a fin de obtener la línea de suavizado como señal clara de variaciones estacionales y óptima para la predicción.

En este apartado desarrollaremos un grupo de técnicas de predicción que cumplan dos características:

- Por ser métodos no Paramétricos de series temporales solo utilizan el pasado de la propia variable para formular las predicciones.
- Por ser métodos no Paramétricos, cuando se formula un predictor no se presta atención a una estructura estocástica sobre la población a partir de la cual se supone que se han extraído las observaciones disponibles.

El criterio para agrupar estas técnicas será, primero, distinguir diferentes grupos para cada uno de los dos tipos de series definidos en esta investigación; en segundo lugar, dentro de cada uno de estos se distinguirá entre las técnicas de estructura fija y las técnicas de estructura variable.

Las primeras definen el predictor de una sola vez utilizando completamente toda la información muestral.

Las técnicas de estructura variable definen el predictor mediante un proceso iterativo en el que sucesivamente se va dando entrada a cada una de las observaciones muestrales. Esta distinción es relevante a los efectos de la interpretación de los resultados obtenidos,

ya que, así como con los métodos de estructura variable es posible definir, dentro de cada período de la muestra, predicciones con un horizonte temporal dado, eso ya no es posible con los métodos de estructura fija, con los que, para los períodos de la muestra, solo se obtienen estimaciones de los valores de la serie. Por lo tanto, para los métodos de estructura variable puede pensarse en utilizar criterios de evaluación para medir la capacidad predictiva dentro del período muestral, mientras que eso no es posible para los métodos de estructura fija para los que solo puede pensarse en medidas de ajuste.

Para introducir los criterios no paramétricos de evaluación deberemos comenzar suponiendo que disponemos de T observaciones de una variable y , representando dichas observaciones como y_1, y_2, \dots, y_T

Se trata ahora, de definir el mejor predictor, utilizando todas estas observaciones. Para ello, observaremos un proceso en el que utilizando toda la información hasta el período T , se generarían predicciones para los H períodos siguientes. Sea $\hat{y}_T(l)$ la predicción definida por el período $T+l$ utilizando toda la información disponible hasta el período T , siendo $l = 1, 2, \dots, H$.

El criterio relevante a partir del cual se derivan las diferentes medidas de evaluación es llamado error de predicción, definido como: $e_l(l) = y_{t+l} - \hat{y}_t(l) \quad l=1,2,\dots,H \quad [1.1]$

Los diferentes criterios en el resultado de la adopción de diferentes funciones de este error de predicción, siendo normalmente las más utilizadas las siguientes:

- Cuadrado del error de predicción $e_t^2(l)$
- Valor absoluto del error de predicción $|e_t(l)|$
- Valor absoluto porcentual (en %) del error de predicción

$$\frac{|e_t(l)|}{y_{t+l}} \cdot 100$$

A partir de estas medidas de ajuste se definen indicadores que sintetizan la ejecutoria de cada técnica de predicción a lo largo de los H períodos. Alternativamente, para los métodos de estructura variable también pueden definirse indicadores similares para los períodos anteriores al período T+1, efectuando el supuesto de que la base informativa disponible en cada caso es hasta el período t+1 con base informativa hasta t.

Para los H períodos extramuestrales podemos definir los siguientes indicadores no paramétricos concernientes a la calidad de las predicciones:

Error cuadrático medio (ECM)

$$ECM(H) = \frac{1}{H} \sum_{l=1}^H e_t^2(l) = \frac{1}{H} \sum_{l=1}^H (y_{t+l} - \hat{y}_t(l))^2 \quad [1.2]$$

Error absoluto medio (EAM)

$$EAM(H) = \frac{1}{H} \sum_{l=1}^H |e_t(l)| = \frac{1}{H} \sum_{l=1}^H |y_{t+l} - \hat{y}_t(l)| \quad [1.3]$$

Error absoluto porcentual medio (EAPM)

$$EAPM(H) = \frac{1}{H} \sum_{l=1}^H \frac{|e_t(l)|}{y_{t+l}} \cdot 100 = \frac{1}{H} \sum_{l=1}^H \frac{|y_{t+l} - \hat{y}_t(l)|}{y_{t+l}} \quad [1.4]$$

Los dos primeros indicadores dependen de la unidad de medida utilizada, lo cual dificulta la aplicación para series diferentes. Por otra parte, el ECM asigna una ponderación mayor a los errores grandes que a los pequeños, lo cual puede estar justificado en algunas situaciones pero no en otras.

Para los métodos de estructura variable y para los períodos muestrales hasta T, estos indicadores pueden redefinirse, suponiendo un horizonte temporal de un período así:

$$ECM = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} e_t^2(1) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (y_{t+1} - \hat{y}_t(1))^2 \quad [1.5]$$

$$EAM = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} |e_t(1)| = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} |y_{t+1} - \hat{y}_t(1)| \quad [1.6]$$

$$EAPM = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{|e_t(1)|}{y_{t+1}} \cdot 100 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{|y_{t+1} - \hat{y}_t(1)|}{y_{t+1}} \quad [1.7]$$

Para los métodos de estructura fija que, como ya hemos dicho, dentro del período muestral no suministran predicciones sino estimaciones, utilizaremos los tres mismos indicadores, *ECM*, *EAM*, *EAPM*, para evitar confusión terminológica, pero sin olvidar que se trata de simples medidas de ajuste y no de indicadores de evaluación de la capacidad predictiva.

2.6.9.1 MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS PARA SERIE TIPO 1.

(Serie sin componente tendencial ni componente Estacional).

Dentro de estos métodos de predicción se encuentran los siguientes:

- 1) Método Ingenuo
- 2) Media Simple
- 3) Medias Móviles
- 4) Alisado Exponencial

El esquema de las series temporales incluidas en este grupo es: $y_t = \beta_0 + u_t$ [1.8]

donde β_0 es una constante y u_t es un ruido blanco distribuido como: $u_t \sim (0, \sigma_u^2)$.

MÉTODO INGENUO

Este método está basado en una regla poco sofisticada que permite una obtención simple de la predicción. Entre las posibilidades que existen, y teniendo en cuenta el tipo de serie, utilizaremos la regla que consiste en predecir el valor de la serie en un período con el valor que la serie ha tomado en el período anterior. Es decir: $\hat{y}_t(1) = y_t$ [1.9]

Cuando llegamos al último período de la muestra puede escribirse: $\hat{y}_T(1) = y_T$

Y análogamente, para los períodos sucesivos se generaliza el método ingenuo definiendo la predicción no a partir de la observación del período anterior, sino a partir del valor que toma la serie en el último período para el que se dispone de observación:

$$\hat{y}_T(l) = y_T \quad l = 2, \dots, H \quad [1.10]$$

Los resultados de la aplicación de este método a los 60 valores generados pueden verse en el cuadro 1.1 y en las figuras [1.1 y 1.2].

Cuadro (1.1): Serie 1. Método Ingenuo

t	Serie	Predicción	Error	EC	EA	EAP	Estadísticos
1	6,58						
2	5,11	6,58	-1,47	2,16	1,47	28,77	ECM= 0,47
3	6,32	5,11	1,21	1,46	1,21	19,15	ECM(8)= 0,45
4	6,36	6,32	0,04	0,00	0,04	0,63	EAM= 0,56
5	5,88	6,36	-0,48	0,23	0,48	8,16	EAM(8)= 0,57
6	5,7	5,88	-0,18	0,03	0,18	3,16	EAPM= 9,66
7	6,18	5,7	0,48	0,23	0,48	7,77	EAPM(8)= 9,28
8	5,28	6,18	-0,9	0,81	0,9	17,05	
9	6,1	5,28	0,82	0,67	0,82	13,44	
10	5,74	6,1	-0,36	0,13	0,36	6,27	
11	5,1	5,74	-0,64	0,41	0,64	12,55	
12	6,08	5,1	0,98	0,96	0,98	16,12	
13	6,28	6,08	0,2	0,04	0,2	3,18	
14	5,4	6,28	-0,88	0,77	0,88	16,30	
15	5,72	5,4	0,32	0,10	0,32	5,59	
16	6,35	5,72	0,63	0,40	0,63	9,92	
17	6,15	6,35	-0,2	0,04	0,2	3,25	
18	5,74	6,15	-0,41	0,17	0,41	7,14	
19	6,44	5,74	0,7	0,49	0,7	10,87	
20	6,09	6,44	-0,35	0,12	0,35	5,75	
21	6,33	6,09	0,24	0,06	0,24	3,79	
22	5,68	6,33	-0,65	0,42	0,65	11,44	
23	5,95	5,68	0,27	0,07	0,27	4,54	
24	5,98	5,95	0,03	0,00	0,03	0,50	
25	5,08	5,98	-0,9	0,81	0,9	17,72	
26	5,36	5,08	0,28	0,08	0,28	5,22	
27	6,62	5,36	1,26	1,59	1,26	19,03	
28	5,32	6,62	-1,3	1,69	1,3	24,44	
29	5,3	5,32	-0,02	0,00	0,02	0,38	
30	5,89	5,3	0,59	0,35	0,59	10,02	
31	5,91	5,89	0,02	0,00	0,02	0,34	
32	6,48	5,91	0,57	0,32	0,57	8,80	
33	6,07	6,48	-0,41	0,17	0,41	6,75	
34	6,72	6,07	0,65	0,42	0,65	9,67	
35	5,9	6,72	-0,82	0,67	0,82	13,90	
36	6,04	5,9	0,14	0,02	0,14	2,32	
37	6,41	6,04	0,37	0,14	0,37	5,77	
38	6,48	6,41	0,07	0,00	0,07	1,08	
39	6	6,48	-0,48	0,23	0,48	8,00	
40	6,35	6	0,35	0,12	0,35	5,51	
41	5,81	6,35	-0,54	0,29	0,54	9,29	
42	6,32	5,81	0,51	0,26	0,51	8,07	
43	6,41	6,32	0,09	0,01	0,09	1,40	
44	6,67	6,41	0,26	0,07	0,26	3,90	
45	5,53	6,67	-1,14	1,30	1,14	20,61	
46	5,6	5,53	0,07	0,00	0,07	1,25	
47	5,93	5,6	0,33	0,11	0,33	5,56	
48	4,89	5,93	-1,04	1,08	1,04	21,27	
49	5,83	4,89	0,94	0,88	0,94	16,12	
50	5,31	5,83	-0,52	0,27	0,52	9,79	
51	6,6	5,31	1,29	1,66	1,29	19,55	
52	5,42	6,6	-1,18	1,39	1,18	21,77	
53	6	5,42	0,58	0,34	0,58	9,67	
54	5,7	5,42	0,28	0,08	0,28	4,91	
55	6,26	5,42	0,84	0,71	0,84	13,42	
56	6,15	5,42	0,73	0,53	0,73	11,87	
57	5,65	5,42	0,23	0,05	0,23	4,07	
58	5,28	5,42	-0,14	0,02	0,14	2,65	
59	6,68	5,42	1,26	1,59	1,26	18,86	
60	5,94	5,42	0,52	0,27	0,52	8,75	

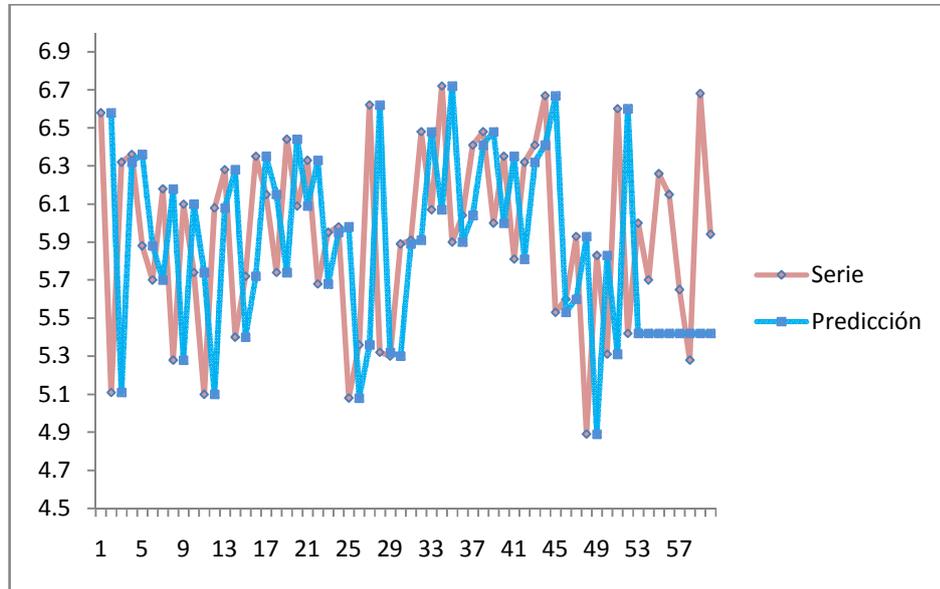


FIG 1.1. Serie 1. Valores reales y predichos mediante el método ingenuo.

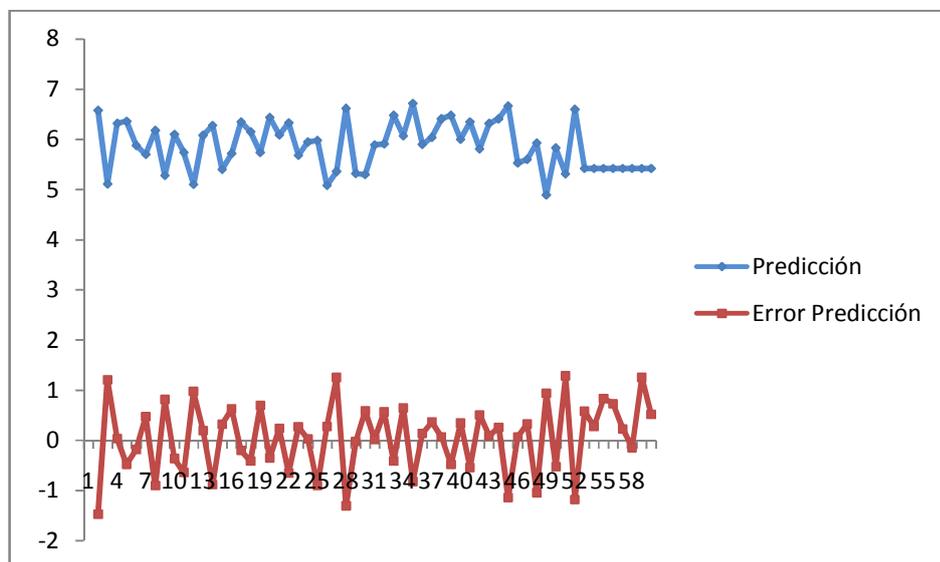


FIG 1.2. Serie 1. Método ingenuo. Predicciones y errores de predicción.

Comentarios al cuadro [1.1]

Hay que destacar, en primer lugar, que en este cuadro, como en los que siguen se considerará que el período muestral abarca desde la primera observación hasta la 52; las ocho observaciones comprendidas entre la 53 y 60 serán consideradas como período extramuestral. La diferencia radica en que para obtener la predicción para los valores del período extramuestral, solo se utiliza la información disponible hasta el período 52. Además a la hora de evaluar las diferentes técnicas prestaremos una atención especial a la ejecutoria de cada una de ellas en estos ocho períodos. Concretamente para estos períodos aplicaremos las expresiones [1.2][1.3] y [1.4], mientras que para los otros períodos muestrales aplicaremos las enunciadas en [1.5] [1.6] y [1.7]

La estructura del cuadro es la siguiente: los valores de la serie aparecen en la segunda columna y la predicción y el error de predicción en la tercera y cuarta, respectivamente. Obsérvese que para el período muestral siempre se considerará la predicción (y consecuentemente el error de predicción) un período hacia adelante. En la quinta columna figura el cuadrado del error de predicción, en la sexta su valor absoluto y en la séptima dicho valor absoluto en porcentajes respecto al valor real de la variable. Por último en la octava columna aparecen los valores de los tres estadísticos utilizados para evaluar el comportamiento de la técnica de predicción, distinguiendo el período muestral y extramuestral; este último se indica con un 8 dentro del paréntesis.

Las predicciones, hemos dicho, aparecen en la tercera columna. Así tenemos:

$$\hat{y}_1(1) = 6.58$$

que es la predicción del valor del periodo 2 utilizando la información del período 1. De la misma forma, para el período 3:

$$\hat{y}_2(1) = 5.11$$

Y así sucesivamente para todos los períodos de la muestra. Análogamente, para los períodos extramuestrales se obtiene:

$$\hat{y}_{52}(1) = 5.42$$

siendo esta predicción la que se mantiene hasta el período 60; esto es:

$$\hat{y}_{52}(l) = 5.42 \quad l = 1, 2, \dots, 8$$

El error de predicción aparece en la cuarta columna. Para el período 2 se obtiene:

$$e_{52}(1) = y_2 - \hat{y}_1(1) = 5.42 - 6.58 = -1.47$$

Así mismo, para el primer período extramuestral se tiene:

$$e_{52}(1) = y_{53} - \hat{y}_{52}(1) = 6 - 5.42 = 0.58$$

y, en general:

$$e_{52}(1) = y_{52+l} - \hat{y}_{52}(l)$$

La interpretación de la columna quinta, sexta y séptima es inmediata. Así, para el período dos el valor del EAP en la séptima columna se obtiene como sigue:

$$\frac{|e_1(1)|}{y_2} \cdot 100 = \frac{1.47}{5.11} \cdot 100 = 28.77$$

y para el período extramuestral:

$$\frac{|e_{52}(1)|}{y_{53}} \cdot 100 = \frac{0.58}{6} \cdot 100 = 9.67$$

En lo que respecta a los estadísticos, su cálculo es inmediato teniendo en cuenta el contenido de la sección anterior. Así tenemos que:

$$ECM = \frac{\sum_{t=1}^{51} e_t^2(1)}{51} = \frac{23.74}{51} = 0.47 \qquad ECM(8) = \frac{\sum_{l=1}^8 e_t^2(l)}{8} = \frac{3.58}{8} = 0.45$$

pudiéndose calcular análogamente los otros estadísticos.

En la figura [1.1] pueden verse representaciones gráficas de los valores de la serie original y los valores predichos; obsérvese que esta última es una copia de la primera pero después de retardarse un período.

En la figura [1.2] aparece la predicción y los errores cometidos; puede apreciarse como estos giran en torno a cero sin ninguna pauta estable que pueda identificarse.

MEDIA SIMPLE

Este es un método de estructura fija que consiste en definir el predictor como la media de los valores de la serie en el período muestral. Podemos escribir esta media como:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{52} y_t}{52}$$

Esta media se interpreta como una aproximación a β_0 , ya que la suma de los valores correspondientes a la variable que es ruido blanco es cero. Así pues, la predicción para cualquier período muestral es: $y_t(1) = \bar{y}$ Y para los períodos extramuestrales:

$$y_T(l) = \bar{y} \quad l = 1, 2, \dots, 8$$

Los resultados de la aplicación de este método a la serie 1 pueden verse en el cuadro [2] que se presenta a continuación:

Cuadro (1.2): Serie 1. Media Simple.

	Serie	Est/Pre	Error predicción	EC	EA	EAP	Estadísticos
1	6.58	5.94	0.64	0.41	0.64	9.73	ECM= 0.22
2	5.11	5.94	-0.83	0.69	0.83	16.24	ECM(8)= 0.16
3	6.32	5.94	0.38	0.14	0.38	6.01	EAM= 0.39
4	6.36	5.94	0.42	0.18	0.42	6.60	EAM(8)= 0.31
5	5.88	5.94	-0.06	0.00	0.06	1.02	EAPM= 6.64
6	5.7	5.94	-0.24	0.06	0.24	4.21	EAPM(8)= 5.31
7	6.18	5.94	0.24	0.06	0.24	3.88	
8	5.28	5.94	-0.66	0.44	0.66	12.50	
9	6.1	5.94	0.16	0.03	0.16	2.62	
10	5.74	5.94	-0.2	0.04	0.2	3.48	
11	5.1	5.94	-0.84	0.71	0.84	16.47	
12	6.08	5.94	0.14	0.02	0.14	2.30	
13	6.28	5.94	0.34	0.12	0.34	5.41	
14	5.4	5.94	-0.54	0.29	0.54	10.00	
15	5.72	5.94	-0.22	0.05	0.22	3.85	
16	6.35	5.94	0.41	0.17	0.41	6.46	
17	6.15	5.94	0.21	0.04	0.21	3.41	
18	5.74	5.94	-0.2	0.04	0.2	3.48	
19	6.44	5.94	0.5	0.25	0.5	7.76	
20	6.09	5.94	0.15	0.02	0.15	2.46	
21	6.33	5.94	0.39	0.15	0.39	6.16	
22	5.68	5.94	-0.26	0.07	0.26	4.58	
23	5.95	5.94	0.01	0.00	0.01	0.17	
24	5.98	5.94	0.04	0.00	0.04	0.67	
25	5.08	5.94	-0.86	0.74	0.86	16.93	
26	5.36	5.94	-0.58	0.34	0.58	10.82	
27	6.62	5.94	0.68	0.46	0.68	10.27	
28	5.32	5.94	-0.62	0.38	0.62	11.65	
29	5.3	5.94	-0.64	0.41	0.64	12.08	
30	5.89	5.94	-0.05	0.00	0.05	0.85	
31	5.91	5.94	-0.03	0.00	0.03	0.51	
32	6.48	5.94	0.54	0.29	0.54	8.33	
33	6.07	5.94	0.13	0.02	0.13	2.14	
34	6.72	5.94	0.78	0.61	0.78	11.61	
35	5.9	5.94	-0.04	0.00	0.04	0.68	
36	6.04	5.94	0.1	0.01	0.1	1.66	
37	6.41	5.94	0.47	0.22	0.47	7.33	
38	6.48	5.94	0.54	0.29	0.54	8.33	
39	6	5.94	0.06	0.00	0.06	1.00	
40	6.35	5.94	0.41	0.17	0.41	6.46	
41	5.81	5.94	-0.13	0.02	0.13	2.24	
42	6.32	5.94	0.38	0.14	0.38	6.01	
43	6.41	5.94	0.47	0.22	0.47	7.33	
44	6.67	5.94	0.73	0.53	0.73	10.94	
45	5.53	5.94	-0.41	0.17	0.41	7.41	
46	5.6	5.94	-0.34	0.12	0.34	6.07	
47	5.93	5.94	-0.01	0.00	0.01	0.17	
48	4.89	5.94	-1.05	1.10	1.05	21.47	
49	5.83	5.94	-0.11	0.01	0.11	1.89	
50	5.31	5.94	-0.63	0.40	0.63	11.86	
51	6.6	5.94	0.66	0.44	0.66	10.00	
52	5.42	5.94	-0.52	0.27	0.52	9.59	
53	6	5.94	0.06	0.00	0.06	1.00	
54	5.7	5.94	-0.24	0.06	0.24	4.21	
55	6.26	5.94	0.32	0.10	0.32	5.11	
56	6.15	5.94	0.21	0.04	0.21	3.41	
57	5.65	5.94	-0.29	0.08	0.29	5.13	
58	5.28	5.94	-0.66	0.44	0.66	12.50	
59	6.68	5.94	0.74	0.55	0.74	11.08	
60	5.94	5.94	0	0.00	0	0.00	

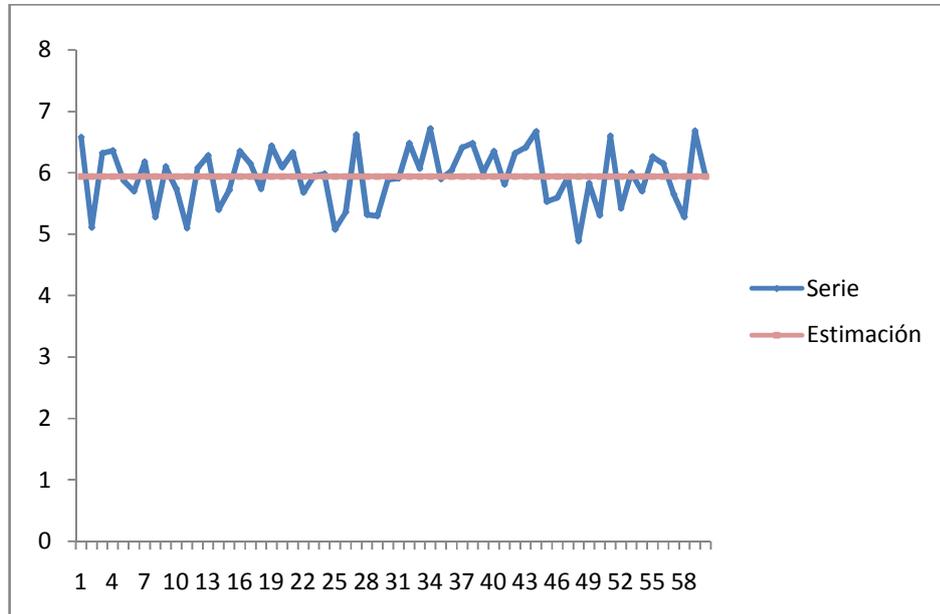


FIG 1. 3. Serie 1. Valores reales y predichos mediante media simple.

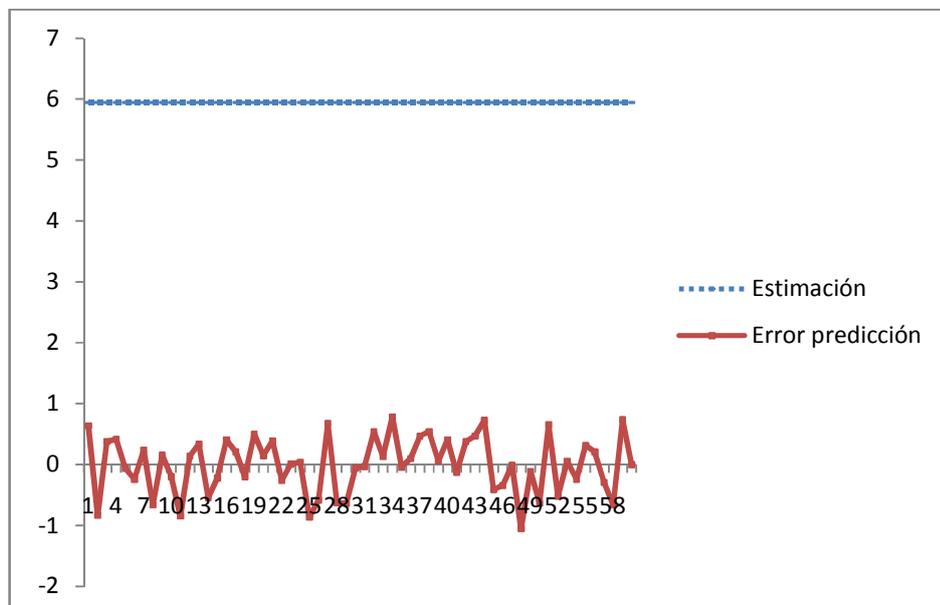


FIG 1. 4. Serie 1. Media Simple. Predicciones y Errores de Predicción.

Comentarios al cuadro [1.2]

Por tratarse de un método de estructura fija, a la tercera columna le corresponde al encabezamiento <<estimación/predicción>> para indicar que los 52 primeros valores de dicha columna son estimaciones, y solamente los 8 últimos son realmente predicciones.

Así, la estimación para el período 1 es:

$$\hat{y}_1 = \bar{y} = 5.94$$

Y para los períodos extramuestrales, las predicciones son:

$$\hat{y}_{52}(l) = \bar{y} = 5.94 \quad l = 1, 2, \dots, 8.$$

El error para el período 1 es:

$$\hat{u}_1 = y_1 - \bar{y}_1 = 6.58 - 5.94 = 0.64$$

Y para los períodos extramuestrales, el error de predicción es:

$$e_{52}(l) = y_{52+l} - \hat{y}_{52}(l), \quad l = 1, 2, \dots, 8.$$

Los estadísticos se calculan de la misma forma ya indicada, pero teniendo en cuenta que para el período muestral el sumatorio comienza en 1 y no en 2.

En la figura [1.3] se representan gráficamente los valores reales de la serie y los predichos, mientras que en la figura [1.4] pueden verse los errores de predicción; se aprecia como giran en torno a cero aunque aparecen series de valores consecutivos con el mismo signo, lo cual puede indicar algún problema con la parte aleatoria.

MEDIAS MÓVILES

Cuando no hay tendencia clara ni estacionalidad en la serie original, se utiliza el suavizado por medias móviles. El método de medias móviles es un procedimiento mecánico para suavizar las irregularidades y las fluctuaciones de una Serie Temporal a fin de obtener la línea de tendencia.

El método de las medias móviles: es un método utilizado para analizar un conjunto de datos en modo de puntos para crear series de promedios. Así las medias móviles son una lista de números en la cual cada uno es el promedio de un subconjunto de los datos originales.

Este método de predicción es de estructura variable que define la predicción como la media simple de unos cuantos periodos muestrales previos al que corresponde la predicción. La diferencia con el método anterior es que no utiliza todas las observaciones muestrales, sino solo un número reducido de ellas, precisamente las que están más próximas. A este número de observaciones que se utiliza para definir la media se le llama *longitud* de la media móvil y lo indicaremos por k .

El predictor que corresponde al método de medias móviles de longitud k puede

escribirse como:
$$MM(k): \hat{y}_t(1) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} y_{t-i} \quad [1.11]$$

Por tratarse de un método de estructura variable la aproximación a β_0 se hace siguiendo un proceso iterativo en el que la predicción para cada período se obtiene a partir de la

calculada para el período anterior, introduciendo la información más próxima y no considerando la información más lejana. Esto se logra escribiendo [1.11] de forma alternativa, mediante la llamada *ecuación de actualización* que toma la forma siguiente:

$$\hat{y}_t(1) = \hat{y}_{t-1}(1) + \frac{1}{k}(y_t - y_{t-k}) \quad [1.12]$$

Conviene destacar las dos características siguientes respecto a este método de predicción:

- a) En primer lugar, para poder definir la predicción con este método es preciso disponer de un número de observaciones previas igual a la longitud elegida; por otra parte, el número de períodos de la longitud es el número de períodos iniciales para los que no puede definirse la predicción.
- b) En segundo lugar, no puede hablarse de un método de medias móviles, sino de tantos métodos cuantos sean las longitudes que puedan fijarse. En general, podemos decir que cuanto menor sea la longitud, más sensible será la predicción a los valores recientes de la serie y, viceversa, cuanto mayor sea la longitud, menos sensible o más alisada será la predicción.

Obsérvese, así mismo que cuando se fija la longitud igual a 1, este método coincide con el método ingenuo desarrollado en tema anterior.

Ilustremos algunos de estos resultados con el contenido del cuadro [1.3]

Cuadro (1.3): Serie 1. Medias Móviles ($k=4$).

t	Serie	Predicción	Error predicción	EC	EA	EAP	Estadísticos
1	6,58						ECM= 0,23
2	5,11						ECM(8)= 0,19
3	6,32						EAM= 0,39
4	6,36						EAM(8)= 0,35
5	5,88	6,09	-0,21	0,05	0,21	3,61	EAPM= 6,62
6	5,7	5,92	-0,22	0,05	0,22	3,82	EAPM(8)= 5,80
7	6,18	6,07	0,12	0,01	0,12	1,86	
8	5,28	6,03	-0,75	0,56	0,75	14,20	
9	6,1	5,76	0,34	0,12	0,34	5,57	
10	5,74	5,82	-0,07	0,01	0,07	1,31	
11	5,1	5,83	-0,73	0,53	0,73	14,22	
12	6,08	5,56	0,53	0,28	0,53	8,63	
13	6,28	5,76	0,53	0,28	0,53	8,36	
14	5,4	5,80	-0,40	0,16	0,40	7,41	
15	5,72	5,72	0,00	0,00	0,00	0,09	
16	6,35	5,87	0,48	0,23	0,48	7,56	
17	6,15	5,94	0,21	0,05	0,21	3,46	
18	5,74	5,91	-0,16	0,03	0,16	2,87	
19	6,44	5,99	0,45	0,20	0,45	6,99	
20	6,09	6,17	-0,08	0,01	0,08	1,31	
21	6,33	6,11	0,23	0,05	0,23	3,55	
22	5,68	6,15	-0,47	0,22	0,47	8,27	
23	5,95	6,14	-0,19	0,03	0,19	3,11	
24	5,98	6,01	-0,03	0,00	0,03	0,54	
25	5,08	5,99	-0,91	0,82	0,91	17,81	
26	5,36	5,67	-0,31	0,10	0,31	5,83	
27	6,62	5,59	1,03	1,06	1,03	15,52	
28	5,32	5,76	-0,44	0,19	0,44	8,27	
29	5,3	5,60	-0,30	0,09	0,30	5,57	
30	5,89	5,65	0,24	0,06	0,24	4,07	
31	5,91	5,78	0,13	0,02	0,13	2,16	
32	6,48	5,61	0,88	0,77	0,88	13,50	
33	6,07	5,90	0,18	0,03	0,18	2,88	
34	6,72	6,09	0,63	0,40	0,63	9,41	
35	5,9	6,30	-0,40	0,16	0,40	6,69	
36	6,04	6,29	-0,25	0,06	0,25	4,18	
37	6,41	6,18	0,23	0,05	0,23	3,55	
38	6,48	6,27	0,21	0,05	0,21	3,28	
39	6	6,21	-0,21	0,04	0,21	3,46	
40	6,35	6,23	0,12	0,01	0,12	1,85	
41	5,81	6,31	-0,50	0,25	0,50	8,61	
42	6,32	6,16	0,16	0,03	0,16	2,53	
43	6,41	6,12	0,29	0,08	0,29	4,52	
44	6,67	6,22	0,45	0,20	0,45	6,71	
45	5,53	6,30	-0,77	0,60	0,77	13,97	
46	5,6	6,23	-0,63	0,40	0,63	11,29	
47	5,93	6,05	-0,12	0,02	0,12	2,07	
48	4,89	5,93	-1,04	1,09	1,04	21,32	
49	5,83	5,49	0,34	0,12	0,34	5,87	
50	5,31	5,56	-0,25	0,06	0,25	4,76	
51	6,6	5,49	1,11	1,23	1,11	16,82	
52	5,42	5,66	-0,24	0,06	0,24	4,38	
53	6	5,79	0,21	0,04	0,21	3,50	
54	5,7	5,79	-0,09	0,01	0,09	1,58	
55	6,26	5,79	0,47	0,22	0,47	7,51	
56	6,15	5,79	0,36	0,13	0,36	5,85	
57	5,65	5,79	-0,14	0,02	0,14	2,48	
58	5,28	5,79	-0,51	0,26	0,51	9,66	
59	6,68	5,79	0,89	0,79	0,89	13,32	
60	5,94	5,79	0,15	0,02	0,15	2,53	

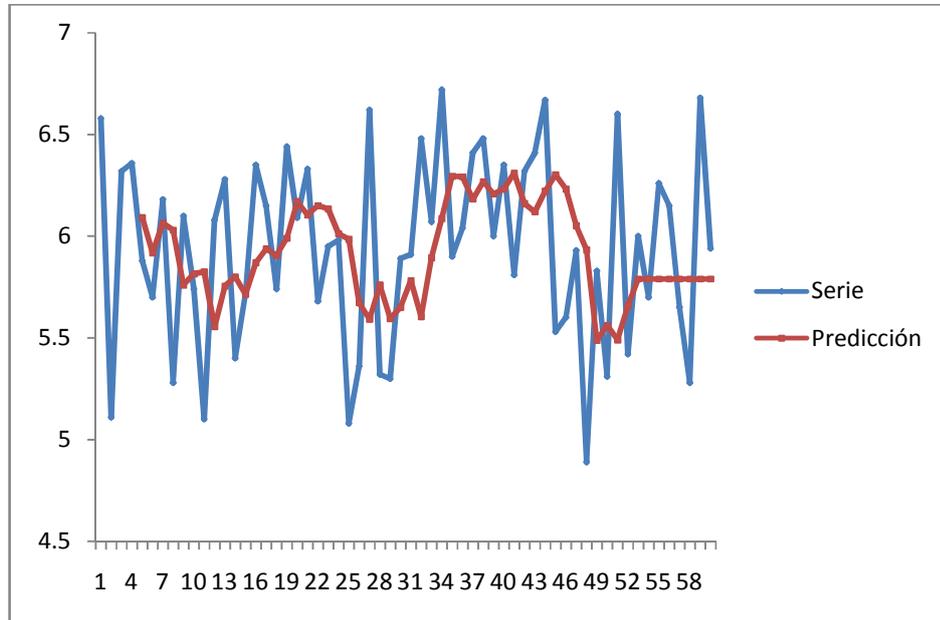


FIG 1.5. Serie 1. Valores reales y predichos mediante Medias Móviles ($k=4$).

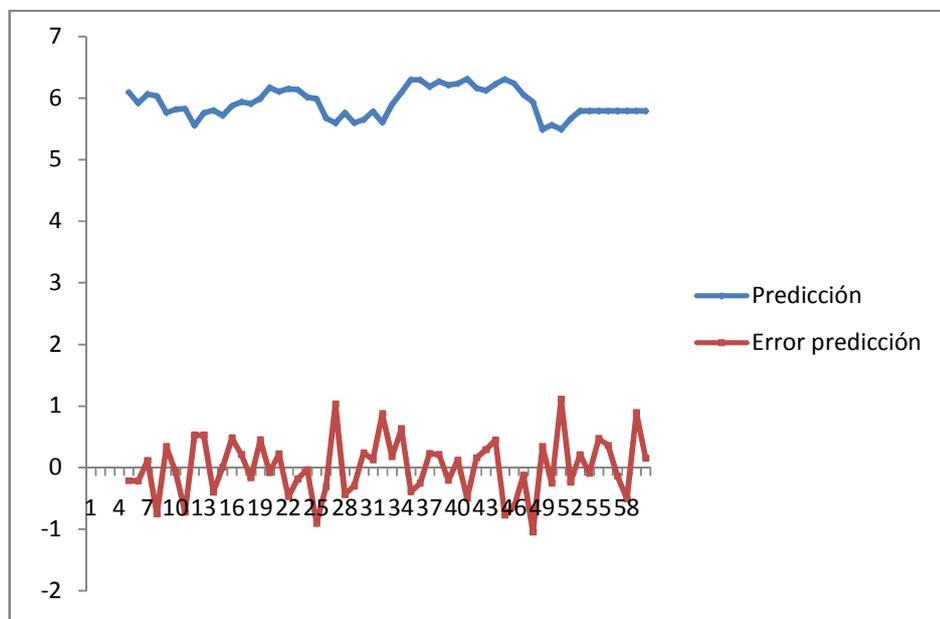


FIG 1.6. Serie 1. MM ($k=4$). Predicciones y errores de predicción.

Comentarios al cuadro [1.3]

Por tratarse de datos trimestrales se toma una longitud de 4, es decir, $k = 4$.

La predicción para el período 5 realizada desde el período 4 viene dada por:

$$\hat{y}_4(1) = \frac{y_4 + y_3 + y_2 + y_1}{4} = \frac{6.58 + 5.11 + 6.32 + 6.36}{4} = 6.09$$

La predicción para el período 53 realizada desde el período 52 es:

$$\hat{y}_{52}(1) = \frac{y_{52} + y_{51} + y_{50} + y_{49}}{4} = \frac{5.83 + 5.31 + 6.6 + 5.42}{4} = 5.79$$

Siendo esta predicción realizada para el resto de los períodos extramuestrales hasta el período 60.

Por otra parte, el error de predicción para el período 5 es:

$$e_4(1) = y_5 - \hat{y}_4(1) = -0.21$$

Y para el período 53:

$$e_{52}(1) = y_{53} - \hat{y}_{52}(1) = -0.21$$

Los estadísticos se calculan de la forma indicada pero teniendo en cuenta que, para el período muestral, el sumatorio comienza en 4, es decir:

$$ECM = \frac{1}{48} \sum_{t=4}^{51} e_t^2(1)$$

y lo mismo para EAM Y EAPM.

En la figura [1.5] aparecen los valores reales y los predichos y en la figura [1.6] los errores de predicción; como puede apreciarse, estos errores giran en torno a cero sin ninguna pauta definida.

ALISADO EXPONENCIAL

El método de alisado exponencial, es un método de estructura variable que define la predicción mediante una suma ponderada de todos los valores previos de la serie al período para el que se formula la predicción. La predicción puede escribirse como:

$$\hat{y}_t(1) = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \dots = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i y_{t-i} \quad [1.13]$$

Donde α es una constante arbitraria cuyo valor está comprendido entre 0 y 1. Eso significa que la ponderación dada a una observación pasada se va haciendo menor cuando más alejada esta observación del período para el que se realiza la predicción.

Al igual que el método de medias móviles, el método de alisado exponencial, cuando define el predictor, pondera no todos los valores muestrales como el método de media simple, sino solo los valores previos al período para el que se hace la predicción. Pero frente al método de medias móviles mantiene dos diferencias importantes; en primer lugar, pondera todos los valores previos y no solo un número reducido de ellos; y, en segundo lugar las ponderaciones asignadas a cada uno de estos valores previos son diferentes.

Como método de estructura variable que es, también es posible obtener la predicción mediante una ecuación de actualización en la que la predicción para un período se expresa como una suma ponderada de la predicción hecha para el período anterior y la observación mas reciente. Esta ecuación de actualización, que nos proporciona una forma alternativa a [1.13], puede escribirse: $\hat{y}_t(1) = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}(1)$ [1.14]

Alternativamente, la predicción puede expresarse en forma de lo que se llama *modelo con mecanismo de corrección de error*, que puede escribirse como:

$$\hat{y}_t(1) = \hat{y}_{t-1}(1) + \alpha e_{t-1}(1) \quad [1.15]$$

donde:

$$e_{t-1}(1) = y_t - \hat{y}_{t-1}(1)$$

A partir de [1.15] se aprecia que la predicción obtenida mediante el método de alisado exponencial para un período es igual a la ponderación realizada para el período anterior mas una parte del error de predicción cometido en ese período anterior. Cuando mayor sea la constante α , mayor será la importancia asignada a ese error de predicción. Por otra parte, cuanto mayor es esa constante, mas ponderación se asigna a los valores próximos al período para el que se realiza la predicción y menor ponderación se la asigna a los valores más alejados. Por último, y como consecuencia de lo anterior, podemos decir que cuanto mayor sea α , menor será el alisamiento y la serie de valores predichos tendrá una mayor variabilidad.

La aplicación del método de alisado exponencial (con $\alpha = 0.2$) a la serie 1 puede verse en el cuadro [1.4] y las figuras [1.7] y [1.8].

Cuadro (1.4): *Serie1. Alisado Exponencial ($\alpha=0.2$).*

7	Serie	Predicción	Error predicción	EC	EA	EAP	Estadísticos
1	6.58						ECM= 0.27
2	5.11	6.58	-1.47	2.16	1.47	28.77	ECM(8)= 0.19
3	6.32	6.29	0.03	0.00	0.03	0.54	EAM= 0.41
4	6.36	6.29	0.07	0.00	0.07	1.06	EAM(8)= 0.35
5	5.88	6.31	-0.43	0.18	0.43	7.25	EAPM= 7.13
6	5.7	6.22	-0.52	0.27	0.52	9.14	EAPM(8)= 5.81
7	6.18	6.12	0.06	0.00	0.06	1.02	
8	5.28	6.13	-0.85	0.72	0.85	16.09	
9	6.1	5.96	0.14	0.02	0.14	2.30	
10	5.74	5.99	-0.25	0.06	0.25	4.31	
11	5.1	5.94	-0.84	0.70	0.84	16.43	
12	6.08	5.77	0.31	0.10	0.31	5.09	
13	6.28	5.83	0.45	0.20	0.45	7.13	
14	5.4	5.92	-0.52	0.27	0.52	9.67	
15	5.72	5.82	-0.10	0.01	0.10	1.71	
16	6.35	5.80	0.55	0.30	0.55	8.69	
17	6.15	5.91	0.24	0.06	0.24	3.93	
18	5.74	5.96	-0.22	0.05	0.22	3.78	
19	6.44	5.91	0.53	0.28	0.53	8.18	
20	6.09	6.02	0.07	0.01	0.07	1.17	
21	6.33	6.03	0.30	0.09	0.30	4.69	
22	5.68	6.09	-0.41	0.17	0.41	7.26	
23	5.95	6.01	-0.06	0.00	0.06	1.01	
24	5.98	6.00	-0.02	0.00	0.02	0.30	
25	5.08	5.99	-0.91	0.84	0.91	18.00	
26	5.36	5.81	-0.45	0.20	0.45	8.42	
27	6.62	5.72	0.90	0.81	0.90	13.58	
28	5.32	5.90	-0.58	0.34	0.58	10.92	
29	5.3	5.78	-0.48	0.23	0.48	9.15	
30	5.89	5.69	0.20	0.04	0.20	3.43	
31	5.91	5.73	0.18	0.03	0.18	3.08	
32	6.48	5.76	0.72	0.51	0.72	11.04	
33	6.07	5.91	0.16	0.03	0.16	2.67	
34	6.72	5.94	0.78	0.61	0.78	11.61	
35	5.9	6.10	-0.20	0.04	0.20	3.32	
36	6.04	6.06	-0.02	0.00	0.02	0.28	
37	6.41	6.05	0.36	0.13	0.36	5.56	
38	6.48	6.12	0.36	0.13	0.36	5.48	
39	6	6.20	-0.20	0.04	0.20	3.26	
40	6.35	6.16	0.19	0.04	0.19	3.04	
41	5.81	6.20	-0.39	0.15	0.39	6.63	
42	6.32	6.12	0.20	0.04	0.20	3.19	
43	6.41	6.16	0.25	0.06	0.25	3.92	
44	6.67	6.21	0.46	0.21	0.46	6.91	
45	5.53	6.30	-0.77	0.59	0.77	13.94	
46	5.6	6.15	-0.55	0.30	0.55	9.77	
47	5.93	6.04	-0.11	0.01	0.11	1.81	
48	4.89	6.02	-1.13	1.27	1.13	23.03	
49	5.83	5.79	0.04	0.00	0.04	0.67	
50	5.31	5.80	-0.49	0.24	0.49	9.20	
51	6.6	5.70	0.90	0.81	0.90	13.62	
52	5.42	5.88	-0.46	0.21	0.46	8.50	
53	6	5.79	0.21	0.04	0.21	3.52	
54	5.7	5.79	-0.09	0.01	0.09	1.55	
55	6.26	5.79	0.47	0.22	0.47	7.53	
56	6.15	5.79	0.36	0.13	0.36	5.88	
57	5.65	5.79	-0.14	0.02	0.14	2.45	
58	5.28	5.79	-0.51	0.26	0.51	9.63	
59	6.68	5.79	0.89	0.79	0.89	13.34	
60	5.94	5.79	0.15	0.02	0.15	2.55	

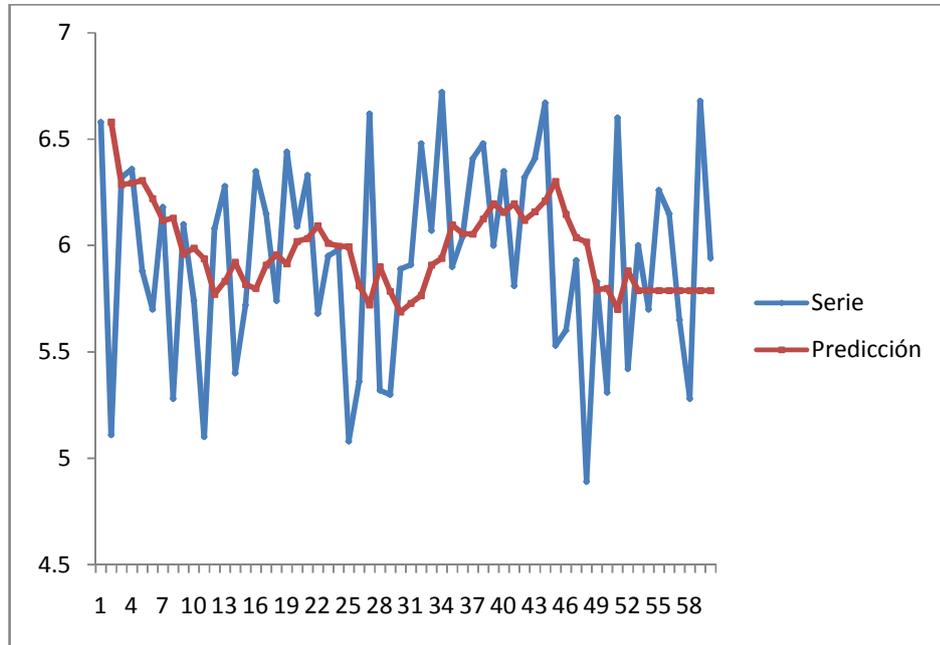


FIG 1. 7. Serie 1. Valores reales y predichos mediante Alisado Exponencial ($\alpha = 0.2$)

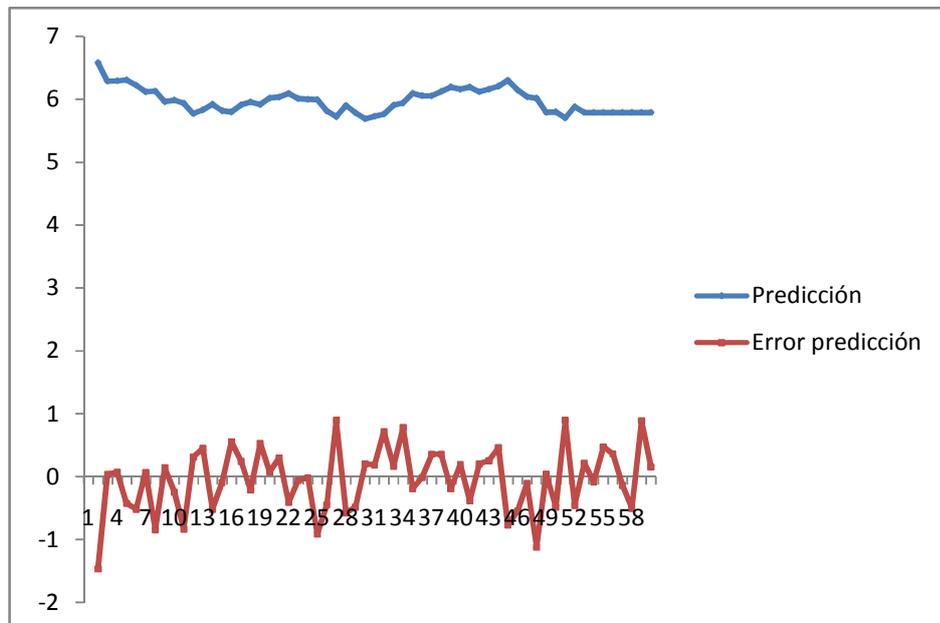


FIG 1. 8. Serie 1. Alisado Exponencial ($\alpha = 0.2$). Predicciones y errores de predicción.

Comentarios al cuadro [1.4]

Las predicciones que aparecen en la tercera columna del cuadro se han obtenido utilizando la expresión escrita en [1.14], con $\alpha = 0.2$ y suponiendo que la predicción para el período 2 es igual a la observación de la variable en el período 1. Para el período

3 se tiene que: $\hat{y}_2(1) = \alpha \hat{y}_2 + (1 - \alpha) \hat{y}_1(1) = 0.2 * 5.11 + 0.8 * 6.58 = 6.29$

Para el primer período extramuestral se obtiene:

$$\hat{y}_{52}(1) = \alpha y_{52} + (1 - \alpha) \hat{y}_{51}(1) = 0.2 * 5.42 + 0.8 * 5.88 = 5.79$$

Esta misma predicción corresponde a todos los períodos extramuestrales del 53 al 60. En la figura [1.7] pueden verse los gráficos de la serie observada y de los valores predichos. En la figura [1.8] puede verse como los errores de predicción giran en torno a cero sin que pueda identificarse ninguna otra pauta estable en su comportamiento.

Los valores de estos tres estadísticos pueden verse en el cuadro [1.5].

Cuadro (1.5): Serie 1. Alisado Exponencial. Análisis Comparado.

Modelo	ECM	ECM(8)	EAM	EAM(8)	EAPM	EAPM(8)
Tendencia Lineal	2.47	0.70	1.25	0.67	7.47	1.15
Doble Media Móvil	0.52	0.57	0.57	0.61	2.29	1.04
Alisado Exponencial de Holt	0.29	0.12	0.45	0.26	2.64	0.45

Terminamos esta sección dedicada a las técnicas desarrolladas para las series tipo 1, con un cuadro resumen en donde se recogen los valores tomados por los tres estadísticos para los diferentes métodos.

2.6.9.2 MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS PARA SERIE TIPO 2.

(Serie sin Componente Tendencial y con Componente Estacional)

Dentro de estos métodos de predicción se encuentran los siguientes

- 1) Método Ingenuo
- 2) Medias Estacionales

Lo que caracteriza a la serie tipo 2 es la presencia de un componente estacional bien definido. La estructura para generar la serie ha sido la siguiente:

$$y_t = \beta_0 + S_t + u_t \quad [1.16]$$

Los dos primeros elementos de la parte de la derecha de esta expresión tienen un patrón de comportamiento estable que pueden aproximarse a partir de los datos y utilizarse para formular la predicción. La forma genérica de esta puede escribirse así:

$$\hat{y}_t(l) = \hat{\beta}_0 + \hat{S}_{t+l} \quad [1.17]$$

donde $\hat{\beta}_0$ indica la estimación de β_0 obtenida con la información disponible para el periodo T, \hat{S}_{t+l} indica la estimación del componente estacional correspondiente a $T+l$ utilizando la información hasta T.

Los métodos propuestos varían según las diferentes formas que tienen de estimar a β_0 y S_{t+l} . Analizaremos dos: Método Ingenuo y Medias Estacionales.

MÉTODO INGENUO

La regla simple en este caso consiste en predecir el valor de la serie en una estación de un año con el valor tomado por la serie en esa misma estación en el año anterior.

Entonces, si con carácter general suponemos s estaciones en cada año, para el período

muestral la predicción sería: $\hat{y}_t(l) = y_{t-s+1}$ [1.18]

y para los períodos extramuestrales:

$$\begin{aligned}\hat{y}_T(1) &= y_{T-s+1} \\ \hat{y}_T(2) &= y_{T-s+2} \\ &\dots\end{aligned}$$

Como hemos indicado para el método ingenuo en la serie 1, este método se puede generalizar para el caso en que el horizonte temporal de la predicción sea superior a s , en cuyo caso la predicción se hace igual al valor que toma que toma la serie en la última estación para la que se tiene información. En nuestro caso concreto de datos trimestrales con $s=4$, se tiene que, para un período muestral, la predicción puede escribirse así:

$$\hat{y}_t(1) = y_{t-3}$$

y para los períodos extramuestrales:

$$\begin{aligned}\hat{y}_T(1) &= y_{T-3} & \hat{y}_T(5) &= y_{T-3} \\ \hat{y}_T(2) &= y_{T-2} & \hat{y}_T(6) &= y_{T-2} \\ \hat{y}_T(3) &= y_{T-1} & \hat{y}_T(7) &= y_{T-1} \\ \hat{y}_T(4) &= y_T & \hat{y}_T(8) &= y_T\end{aligned}$$

La aplicación del método ingenuo a la serie 2 del capítulo 2 puede verse en el cuadro 1.6 y la figura 1.9 y 1.10.

Cuadro (1.6). *Serie 2: Método Ingenuo*

t	Serie	Predicción	Error Pred	EC	EA	EAP	Estadísticos
1	10.58						ECM=0.37
2	2.11						ECM(8)=0.14
3	7.32						EAM=0.49
4	4.36						EAM(8)=0.31
5	9.88	10.58	-0.70	0.49	0.7	7.09	EAPM=10.85
6	2.7	2.11	0.59	0.35	0.59	21.85	EAPM(8)=6.99
7	7.18	7.32	-0.14	0.02	0.14	1.95	
8	3.28	4.36	-1.08	1.17	1.08	32.93	
9	10.1	9.88	0.22	0.05	0.22	2.18	
10	2.74	2.7	0.04	0.00	0.04	1.46	
11	6.1	7.18	-1.08	1.17	1.08	17.70	
12	4.08	3.28	0.80	0.64	0.8	19.61	
13	10.28	10.1	0.18	0.03	0.18	1.75	
14	2.4	2.74	-0.34	0.12	0.34	14.17	
15	6.72	6.1	0.62	0.38	0.62	9.23	
16	4.35	4.08	0.27	0.07	0.27	6.21	
17	10.15	10.28	-0.13	0.02	0.13	1.28	
18	2.74	2.4	0.34	0.12	0.34	12.41	
19	7.44	6.72	0.72	0.52	0.72	9.68	
20	4.09	4.35	-0.26	0.07	0.26	6.36	
21	10.33	10.15	0.18	0.03	0.18	1.74	
22	2.68	2.74	-0.06	0.00	0.06	2.24	
23	6.95	7.44	-0.49	0.24	0.49	7.05	
24	3.98	4.09	-0.11	0.01	0.11	2.76	
25	9.08	10.33	-1.25	1.56	1.25	13.77	
26	2.36	2.68	-0.32	0.10	0.32	13.56	
27	7.62	6.95	0.67	0.45	0.67	8.79	
28	3.22	3.98	-0.76	0.58	0.76	23.60	
29	9.3	9.08	0.22	0.05	0.22	2.37	
30	2.89	2.36	0.53	0.28	0.53	18.34	
31	6.91	7.62	-0.71	0.50	0.71	10.27	
32	4.48	3.22	1.26	1.59	1.26	28.13	
33	10.07	9.3	0.77	0.59	0.77	7.65	
34	3.72	2.89	0.83	0.69	0.83	22.31	
35	6.9	6.91	-0.01	0.00	0.01	0.14	
36	4.04	4.48	-0.44	0.19	0.44	10.89	
37	10.41	10.07	0.34	0.12	0.34	3.27	
38	3.48	3.72	-0.24	0.06	0.24	6.90	
39	7	6.9	0.10	0.01	0.1	1.43	
40	4.35	4.04	0.31	0.10	0.31	7.13	
41	9.81	10.41	-0.60	0.36	0.6	6.12	
42	3.32	3.48	-0.16	0.03	0.16	4.82	
43	7.41	7	0.41	0.17	0.41	5.53	
44	4.67	4.35	0.32	0.10	0.32	6.85	
45	9.53	9.81	-0.28	0.08	0.28	2.94	
46	2.6	3.32	-0.72	0.52	0.72	27.69	
47	6.93	7.41	-0.48	0.23	0.48	6.93	
48	2.89	4.67	-1.78	3.17	1.78	61.59	
49	9.83	9.53	0.30	0.09	0.3	3.05	
50	2.31	2.6	-0.29	0.08	0.29	12.55	
51	7.6	6.93	0.67	0.45	0.67	8.82	
52	3.42	2.89	0.53	0.28	0.53	15.50	
53	10	9.83	0.17	0.03	0.17	1.70	
54	2.7	2.31	0.39	0.15	0.39	14.44	
55	7.26	7.6	-0.34	0.12	0.34	4.68	
56	4.15	3.42	0.73	0.53	0.73	17.59	
57	9.64	9.83	-0.19	0.04	0.19	1.97	
58	2.28	2.31	-0.03	0.00	0.03	1.32	
59	7.68	7.6	0.08	0.01	0.08	1.04	
60	3.94	3.42	0.52	0.27	0.52	13.20	

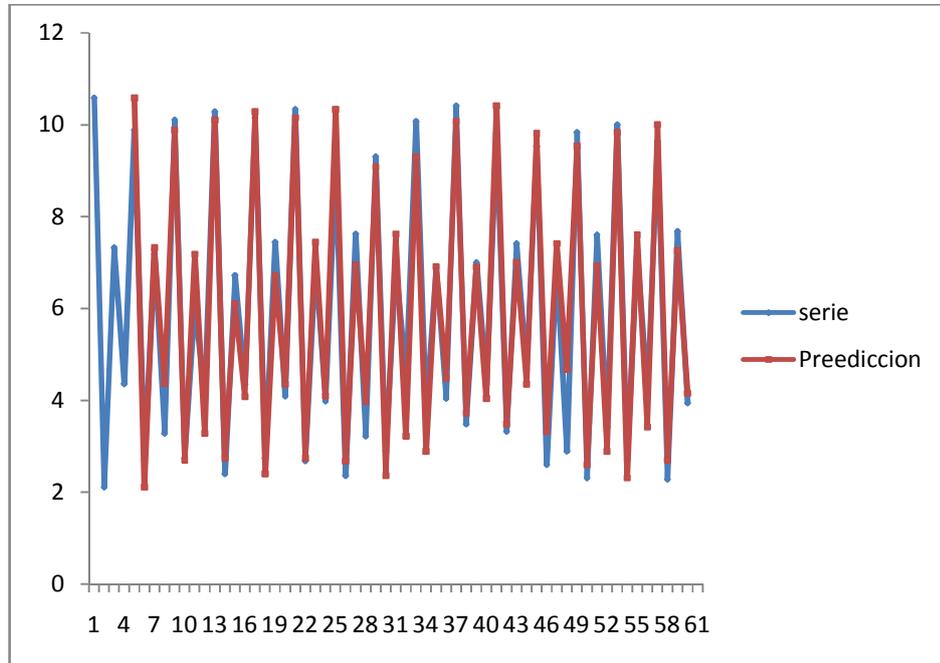


FIG 1. 9. Serie 2.valores reales y predichos mediante el método ingenuo.

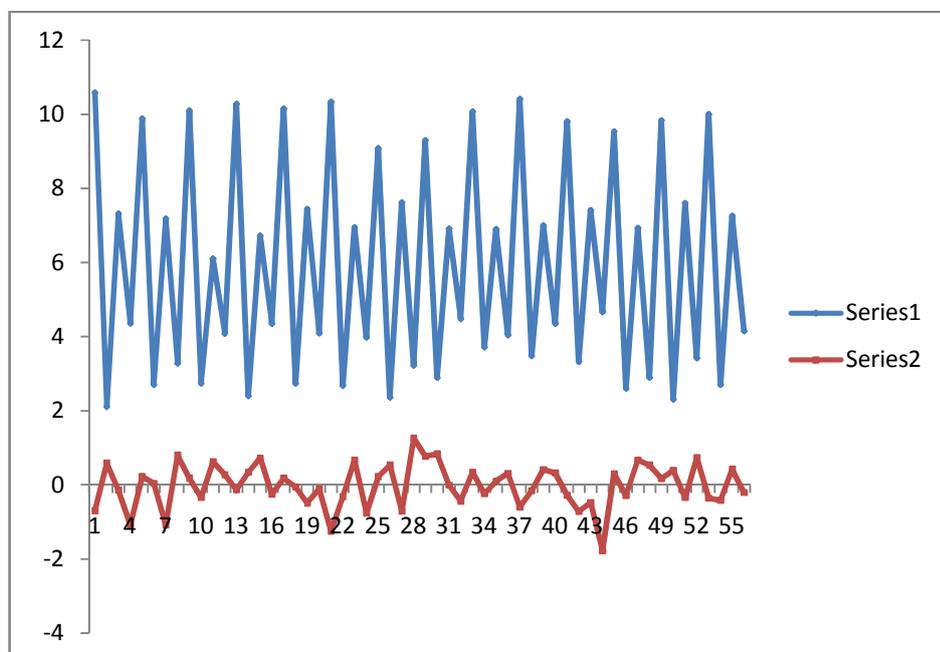


FIG 1. 10. Serie 2.Método Ingenuo. Predicciones y errores de predicción.

Comentario del cuadro [1.6]

Como puede verse en la tercera columna no pueden observarse predicciones para los cuatro primeros períodos: para el período quinto hay que tener en cuenta que se trata del primer trimestre del año anterior es decir:

$$\hat{y}_4(1) = y_t = 10.58$$

Y así sucesivamente se va obteniendo las predicciones para el resto de los períodos muestrales.

Para los extramuestrales se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{52}(1) &= y_{49} = 9.83 \\ \hat{y}_{52}(2) &= y_{50} = 2.31 \\ y_{52}(3) &= y_{51} = 7.6 \\ \hat{y}_{52}(4) &= y_{52} = 3.42\end{aligned}$$

y para los cuatro restantes vuelven a repetirse estos cuatro valores.

Los valores en el resto de la columna se obtienen de la forma directa. Basta tener en cuenta que, para el período muestral, el sumatorio de los tres estadísticos comienza en el período 4. Así el ECM será igual a:

$$ECM = \frac{1}{48} \sum_{t=4}^{52} e^2_t(l) = \frac{1}{48}(17.92) = 0,37$$

Y lo mismo se aplica para EAM y EAPM.

La representación gráfica de la predicción y de los valores de la serie real puede verse en la figura 1.9. La primera es una copia de la segunda incorporando el retardo anual.

Los errores de predicción pueden apreciarse en la figura 1.10 sus valores giran en torno a cero sin seguir ningún patrón que pueda identificarse.

MEDIAS ESTACIONALES

Es un método de estructura fija que define la predicción para cada período a partir de la media muestral de los períodos con idéntico componente estacional.

Si calculamos la media de todos los períodos muestrales se obtienen:

$$\bar{y} = \frac{T\beta_0}{T} + \frac{\sum_{t=1}^T S_t}{T} + \frac{\sum_{t=1}^T u_t}{T} \quad [1.19]$$

Se ve claramente que los dos último término de la parte derecha se aproxima a cero: el primero porque la aportación de los componentes estacionales se compensa dentro de cada año, y el segundo por tratarse de observaciones de un ruido blanco. Por lo tanto, la media muestral puede interpretarse como un estimador de β_0 .

Por otra parte, si calculamos la media de los periodos que corresponden a la misma estación se obtienen:

$$\bar{y} = \frac{T_i\beta_0}{T_i} + \frac{\sum_{t=1}^{T_i} S_t(i)}{T_i} + \frac{\sum_{t=1}^{T_i} u_t(i)}{T_i} \quad i=1,2,\dots,s \quad [1.20]$$

Siendo el $T_i, i=1,2,\dots,s$, el número de observaciones correspondientes a la estación i -ésima, y $u_t(i)$ la perturbación de un período que corresponde a la estación i -ésima.

Por el carácter del ruido blanco u_t el último término de la derecha de [1.20] tendrá a estar próximo a cero. Por lo tanto, la media estacional puede interpretarse como un estimador

de la suma del término constante y del componente estacional. Por otra parte, teniendo en cuenta lo dicho respecto a que la media de todas las observaciones muestrales, \bar{y} , era un estimador del término constante, un estimador del componente estacional se obtienen a partir de:

$$\bar{y}_i - \bar{y} \quad i=1,2,\dots,s \quad [1.21]$$

Pudiéndose escribir la predicción como: $\hat{y}_t(1) = \bar{y} + (\bar{y}_i - \bar{y}) = \bar{y}_i \quad i = 1, 2, \dots, s$

Considerando que el período $T+l$ corresponde a la estación i -ésima.

Se puede pensar en una interpretación alternativa, mediante el siguiente modelo de regresión con variables ficticias:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 D_{1t} + \beta_2 D_{2t} + \dots + \beta_s D_{st} + u_t \quad [1.22]$$

donde D_i es una variables ficticia que toma el valor 1 cuando la observación corresponde a la estación i -ésima y cero en el resto de los casos. Los parámetros del modelo [1.22] no pueden estimarse porque se da multicolinealidad exacta. Por ello, es necesario incorporar algún tipo de información *a priori* que permita dicha estimación. Entre las diferentes pociones disponibles, optaremos por estimar el modelo suponiendo que β_0 es igual a cero.

En este caso, las estimaciones que se obtienen de $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ ya no se pueden interpretar como los componentes estacionales sino como la suma de éstos con el término constante β_0 . Para obtener estas estimaciones reescribimos el modelo [1.22] con $\beta_0 = 0$ de la siguiente forma:

$$y = X\beta + u \quad [1.23]$$

donde y es el vector de T observaciones de la variable dependiente, X es la matriz $T \times s$ de las observaciones de las s variables ficticias, β es el vector de los parámetros, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ y u es el vector T perturbaciones aleatorias.

Por el carácter de variable ficticia que tienen las variables incluidas en X se tiene que:

$$X'X = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_s \end{bmatrix}$$

y también

$$X'y = \begin{bmatrix} T_1 \cdot \bar{y}_1 \\ T_2 \cdot \bar{y}_2 \\ \vdots \\ T_s \cdot \bar{y}_s \end{bmatrix}$$

La estimación MCO de β es igual a: $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_s \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'y = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_s \end{bmatrix}$

Por lo tanto, la predicción se puede formular en términos de las estimaciones de MCO de los elementos de β . Así tendremos: $\hat{y}_T(i) = \hat{\beta}_i$

Considerando que el período para el que se realiza la predicción corresponde a la estación i -ésima.

La aplicación del método de medias estacionales a la serie 2 puede verse en el cuadro 1.7 y las figuras 1.11 y 1.12.

Cuadro (1.7). *Serie 2. Medias Estacionales*

t	Serie	Predicción	Error Pred	EC	EA	EP	Estadísticos
1	10.58	9.93	0.65	0.42	0.65	6.14	ECM=0.21
2	2.11	2.74	-0.63	0.40	0.63	29.86	ECM(8)=0.08
3	7.32	7.13	0.19	0.04	0.19	2.60	EAM=0.37
4	4.36	3.95	0.41	0.17	0.41	9.40	EAM(8)=0.22
5	9.88	9.93	-0.05	0.00	0.05	0.51	EAPM=8.17
6	2.7	2.74	-0.04	0.00	0.04	1.48	EAPM(8)=4.92
7	7.18	7.13	0.05	0.00	0.05	0.70	
8	3.28	3.95	-0.67	0.45	0.67	20.43	
9	10.1	9.93	0.17	0.03	0.17	1.68	
10	2.74	2.74	0	-	0	0.00	
11	6.1	7.13	-1.03	1.06	1.03	16.89	
12	4.08	3.95	0.13	0.02	0.13	3.19	
13	10.28	9.93	0.35	0.12	0.35	3.40	
14	2.4	2.74	-0.34	0.12	0.34	14.17	
15	6.72	7.13	-0.41	0.17	0.41	6.10	
16	4.35	3.95	0.4	0.16	0.4	9.20	
17	10.15	9.93	0.22	0.05	0.22	2.17	
18	2.74	2.74	0	-	0	0.00	
19	7.44	7.13	0.31	0.10	0.31	4.17	
20	4.09	3.95	0.14	0.02	0.14	3.42	
21	10.33	9.93	0.4	0.16	0.4	3.87	
22	2.68	2.74	-0.06	0.00	0.06	2.24	
23	6.95	7.13	-0.18	0.03	0.18	2.59	
24	3.98	3.95	0.03	0.00	0.03	0.75	
25	9.08	9.93	-0.85	0.72	0.85	9.36	
26	2.36	2.74	-0.38	0.14	0.38	16.10	
27	7.62	7.13	0.49	0.24	0.49	6.43	
28	3.22	3.95	-0.73	0.53	0.73	22.67	
29	9.3	9.93	-0.63	0.40	0.63	6.77	
30	2.89	2.74	0.15	0.02	0.15	5.19	
31	6.91	7.13	-0.22	0.05	0.22	3.18	
32	4.48	3.95	0.53	0.28	0.53	11.83	
33	10.07	9.93	0.14	0.02	0.14	1.39	
34	3.72	2.74	0.98	0.96	0.98	26.34	
35	6.9	7.13	-0.23	0.05	0.23	3.33	
36	4.04	3.95	0.09	0.01	0.09	2.23	
37	10.41	9.93	0.48	0.23	0.48	4.61	
38	3.48	2.74	0.74	0.55	0.74	21.26	
39	7	7.13	-0.13	0.02	0.13	1.86	
40	4.35	3.95	0.4	0.16	0.4	9.20	
41	9.81	9.93	-0.12	0.01	0.12	1.22	
42	3.32	2.74	0.58	0.34	0.58	17.47	
43	7.41	7.13	0.28	0.08	0.28	3.78	
44	4.67	3.95	0.72	0.52	0.72	15.42	
45	9.53	9.93	-0.4	0.16	0.4	4.20	
46	2.6	2.74	-0.14	0.02	0.14	5.38	
47	6.93	7.13	-0.2	0.04	0.2	2.89	
48	2.89	3.95	-1.06	1.12	1.06	36.68	
49	9.83	9.93	-0.1	0.01	0.1	1.02	
50	2.31	2.74	-0.43	0.18	0.43	18.61	
51	7.6	7.13	0.47	0.22	0.47	6.18	
52	3.42	3.95	-0.53	0.28	0.53	15.50	
53	10	9.93	0.07	0.00	0.07	0.70	
54	2.7	2.74	-0.04	0.00	0.04	1.48	
55	7.26	7.13	0.13	0.02	0.13	1.79	
56	4.15	3.95	0.2	0.04	0.2	4.82	
57	9.64	9.93	-0.29	0.08	0.29	3.01	
58	2.28	2.74	-0.46	0.21	0.46	20.18	
59	7.68	7.13	0.55	0.30	0.55	7.16	
60	3.94	3.95	-0.01	0.00	0.01	0.25	

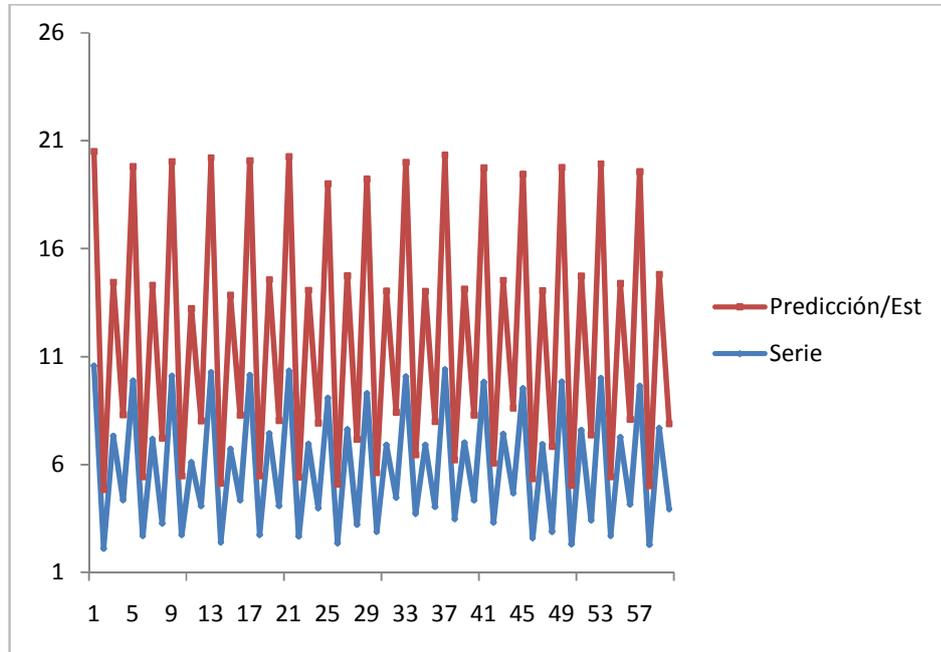


FIG 1. 11. *Serie 2. Medias Estacionales. Serie y predicción.*

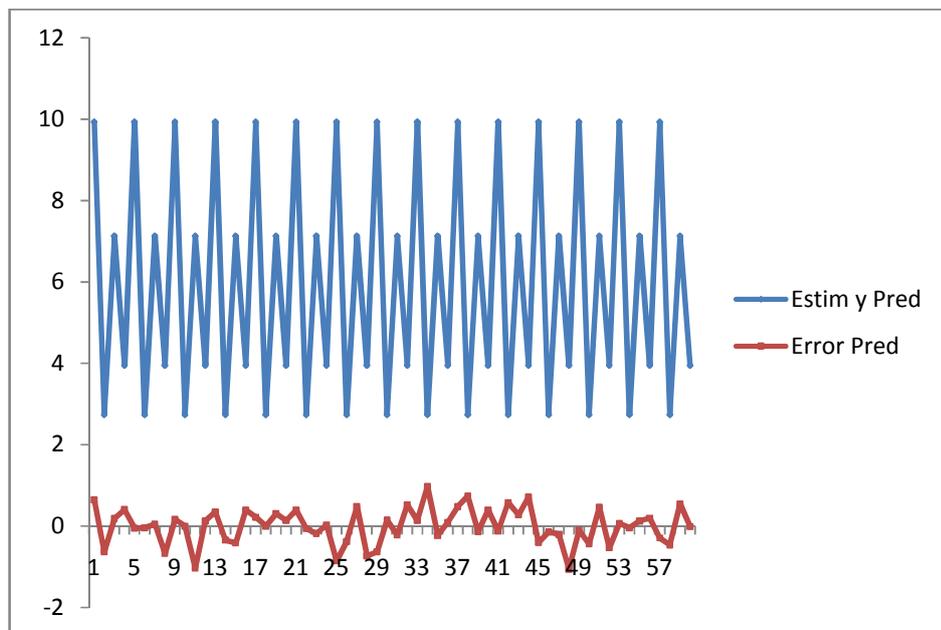


FIG 1.12. *Serie 2. medias Estacionales. Predicciones y errores de predicción*

Comentarios al cuadro [1.7]

En este caso, por ser datos trimestrales, se tienen que. $s = 4$ y $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = \frac{52}{4} = 13$

Las medias estacionales dentro del período muestral son:

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t \in T_1} y_t}{13} = 9.93 \quad \bar{y}_3 = \frac{\sum_{t \in T_3} y_t}{13} = 7.13$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t \in T_2} y_t}{13} = 2.74 \quad \bar{y}_4 = \frac{\sum_{t \in T_4} y_t}{13} = 3.95$$

Estos valores se repiten en la columna tercera, como estimadores en el período muestral y como predicciones en el extramuestral, por tratarse de un método de estructura fija.

Tenremos esta revisión de las técnicas propuestas para el tratamiento de las series tipo 2 con un análisis comparado de las dos técnicas analizadas. Los resultados pueden verse en el cuadro 1.8.

Cuadro (1.8): Serie 2. Análisis Comparado.

Modelo	ECM	ECM(8)	EAM	EAM(8)	EAPM	EAPM(8)
Ingenuo	0.37	0.14	0.49	0.31	10.85	6.99
Media. Estacionales	0.21	0.08	0.37	0.22	8.17	4.92

El contenido del cuadro indica con claridad que el método de medias estacionales es más aceptable que el método ingenuo.

2.6.9.3 MÉTODOS NO PARAMÉTRICO PARA SERIE TIPO 3.

(Serie con Componente Tendencial y sin Componente Estacional)

- 1) Tendencia Lineal
- 2) Doble Media Móvil
- 3) Alisado Exponencial de Holt

La estructura básica de esta serie es:

$$y_t = T_t + u_t \quad [1.24]$$

El patrón de comportamiento identificable está contenido en la tendencia, ya que es el término del error suponemos que es un proceso de ruido blanco.

TENDENCIA LINEAL

Es un método de estructura fija, que formula la predicción aproximando la tendencia mediante una función lineal, tal como sigue:

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t \quad [1.25]$$

Los parámetros se estiman mediante:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum t y_t - \bar{y} \sum t}{\sum t^2 - \bar{t} \sum t} \quad [1.26]$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{t} \quad [1.27]$$

La estimación de la tendencia es:

$$\hat{T}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t \quad [1.28]$$

Utilizando toda la información muestral, y la predicción no es más que la estimación de la tendencia para el período considerado.

Así, para cualquier periodo muestral, la predicción o más exactamente, la estimación es:

$$\hat{y}_t(1) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(t+1) \quad [1.29]$$

Y para los períodos extramuestrales:

$$\hat{y}_T(l) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(T+l)$$

Utilizando para obtener $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ solo la información disponible hasta el período T.

La aplicación del método de tendencia lineal puede verse en el cuadro 1.9 y las figuras 1.13 y 1.14.

Cuadro (1.9): Serie 3. Tendencia Lineal.

t	Serie	Estimación/P	Error de Predicción	EC	EA	FAP	Estadísticos
1	3.66	1.54	2.12	4.49	2.12	57.92	ECM= 2.47
2	3.99	2.56	1.43	2.04	1.43	35.84	ECM(8)= 0.7
3	5.02	3.58	1.44	2.07	1.44	28.69	EAM= 1.25
4	6.44	4.60	1.84	3.39	1.84	28.57	EAM(8)= 0.67
5	7.51	5.62	1.89	3.57	1.89	25.17	EAPM= 7.47
6	8.21	6.64	1.57	2.46	1.57	19.12	EAPM(8)= 1.15
7	9.26	7.66	1.60	2.56	1.6	17.28	
8	9.48	8.68	0.80	0.64	0.8	8.44	
9	10.21	9.70	0.51	0.26	0.51	5.00	
10	11.78	10.72	1.06	1.12	1.06	9.00	
11	11.57	11.74	-0.17	0.03	0.17	1.47	
12	12.55	12.76	-0.21	0.04	0.21	1.67	
13	13.86	13.78	0.08	0.01	0.08	0.58	
14	14.34	14.80	-0.46	0.21	0.46	3.21	
15	14.77	15.82	-1.05	1.10	1.05	7.11	
16	15.88	16.84	-0.96	0.92	0.96	6.05	
17	17.1	17.86	-0.76	0.58	0.76	4.44	
18	17.91	18.88	-0.97	0.94	0.97	5.42	
19	19.31	19.90	-0.59	0.35	0.59	3.06	
20	20.62	20.92	-0.30	0.09	0.3	1.45	
21	22.13	21.94	0.19	0.04	0.19	0.86	
22	23.04	22.96	0.08	0.01	0.08	0.35	
23	23.93	23.98	-0.05	0.00	0.05	0.21	
24	24.87	25.00	-0.13	0.02	0.13	0.52	
25	25.83	26.02	-0.19	0.04	0.19	0.74	
26	26.09	27.04	-0.95	0.90	0.95	3.64	
27	27.42	28.06	-0.64	0.41	0.64	2.33	
28	27.82	29.08	-1.26	1.59	1.26	4.53	
29	27.73	30.10	-2.37	5.62	2.37	8.55	
30	28.06	31.12	-3.06	9.36	3.06	10.91	
31	28.63	32.14	-3.51	12.32	3.51	12.26	
32	29.95	33.16	-3.21	10.30	3.21	10.72	
33	31.19	34.18	-2.99	8.94	2.99	9.59	
34	33.13	35.20	-2.07	4.28	2.07	6.25	
35	34.48	36.22	-1.74	3.03	1.74	5.05	
36	35.69	37.24	-1.55	2.40	1.55	4.34	
37	37.26	38.26	-1.00	1.00	1	2.68	
38	39.08	39.28	-0.20	0.04	0.2	0.51	
39	40.49	40.30	0.19	0.04	0.19	0.47	
40	42.09	41.32	0.77	0.59	0.77	1.83	
41	43.17	42.34	0.83	0.69	0.83	1.92	
42	44.58	43.36	1.22	1.49	1.22	2.74	
43	46.24	44.38	1.86	3.46	1.86	4.02	
44	48.32	45.40	2.92	8.53	2.92	6.04	
45	49.34	46.42	2.92	8.53	2.92	5.92	
46	49.9	47.44	2.46	6.05	2.46	4.93	
47	50.6	48.46	2.14	4.58	2.14	4.23	
48	51.45	49.48	1.97	3.88	1.97	3.83	
49	52.18	50.50	1.68	2.82	1.68	3.22	
50	52.28	51.52	0.76	0.58	0.76	1.45	
51	53.5	52.54	0.96	0.92	0.96	1.79	
52	53.96	53.56	0.40	0.16	0.4	0.74	
53	54.69	54.58	0.11	0.01	0.11	0.20	
54	55.21	55.60	-0.39	0.15	0.39	0.71	
55	56.27	56.62	-0.35	0.12	0.35	0.62	
56	57.46	57.64	-0.18	0.03	0.18	0.31	
57	58.16	58.66	-0.50	0.25	0.5	0.86	
58	58.2	59.68	-1.48	2.19	1.48	2.54	
59	59.48	60.70	-1.22	1.49	1.22	2.05	
60	60.56	61.72	-1.16	1.35	1.16	1.92	

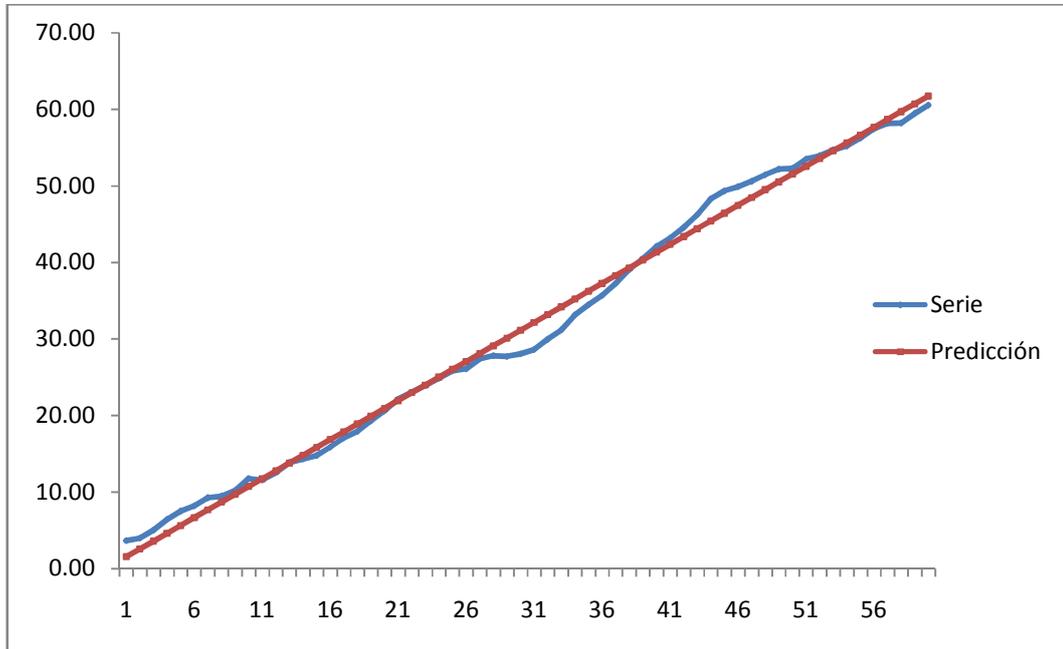


FIG 1. 13. Serie 2. Valores reales y predichos mediante el método de tendencia lineal.

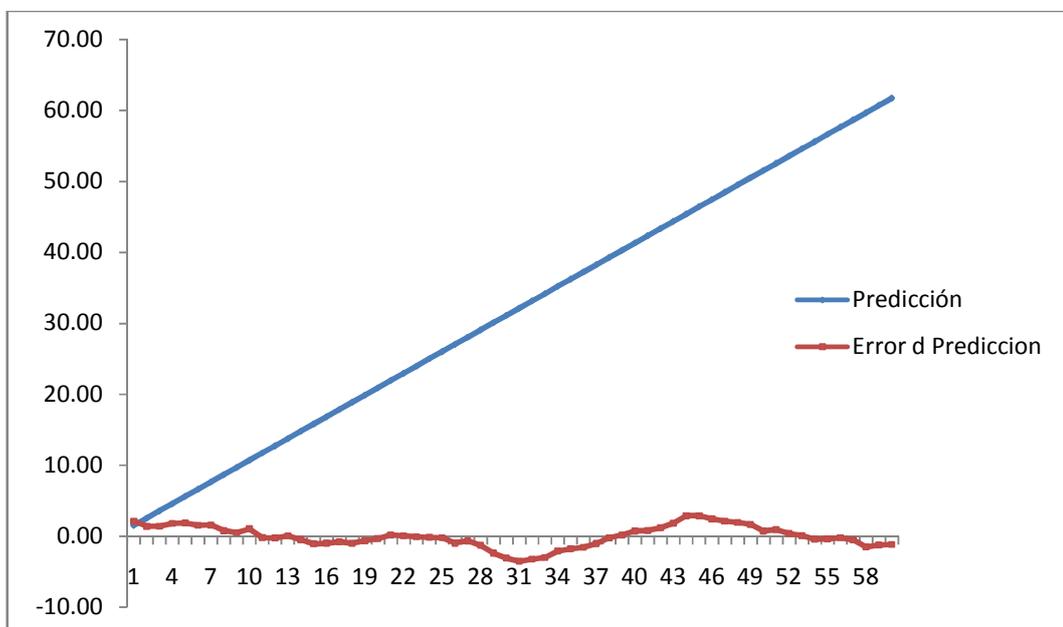


FIG 1.14. Serie 2 Predicción y Error de Predicción

Comentarios al cuadro [1.9]

Para estimar $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ se utiliza la información que va desde el primer periodo hasta el 52. El método estimado es:

$$\hat{y}_t = 0.52 + 1.02t \quad [1.30]$$

Siendo R^2 el coeficiente de determinación, que se define como:

$$R^2 = \frac{\left(\sum_{t=1}^{52} (y_t - \bar{y})(t - \bar{t}) \right)^2}{\sum_{t=1}^{52} (y_t - \bar{y})^2 \sum_{t=1}^{52} (t - \bar{t})^2} \quad R^2 = 0.99$$

El cual se ha mantenido como medida de ajuste por ser un indicador no paramétrico.

Para cualquier período muestral el ajuste se obtiene sustituyendo en [1.22] a t por el valor correspondiente al período.

Para los períodos extramuestrales se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{52}(1) &= 0.52 + 1.02 * 53 = 54.58 \\ \hat{y}_{52}(2) &= 0.52 + 1.02 * 54 = 55.6 \\ &\dots\dots\dots \\ \hat{y}_{52}(8) &= 0.52 + 1.02 * 60 = 61.72 \end{aligned}$$

En las figuras [1.13] y [1.14] aparecen los valores observados y predichos, así como los errores de predicción. Obsérvese que aunque estos giran en torno a cero, en su trayectoria se aprecia un comportamiento sinusoidal, lo que claramente pone de manifiesto que en dichos errores se ha dejado una parte con un comportamiento sistemático que podría utilizarse para mejorar la predicción.

DOBLES MEDIAS MÓVILES

El método de doble medias móviles es un método de estructura variable que obtiene las predicciones suponiendo que la tendencia es localmente lineal; esto significa que la pendiente no es constante en todo el período muestral, sino que va redefiniendo conforme se incorpora nueva información.

La media móvil de longitud k para el período t , que denotaremos mediante MM_t puede expresarse ahora (teniendo en cuenta que en este caso este valor no constituye una predicción, de ahí que en lugar de colocar el valor de la media móvil en el período $t + 1$ lo refiramos al período t) como sigue:

$$MM_t = \frac{y_t + y_{t-1} + \dots + y_{t-k+1}}{k}, \quad t = k, k+1, \dots, T \quad [1.31]$$

La doble media móvil de longitud k , que denominaremos por MM'_t , se define de la siguiente manera:

$$MM'_t = \frac{MM_t + MM_{t-1} + \dots + MM_{t-k+1}}{k}, \quad t = 2k-1, 2k, \dots, T \quad [1.32]$$

Antes de indicar como se formula la predicción en términos de MM_t y MM'_t , veamos con un ejemplo, algunas características del método de medias móviles. Supongamos que una serie tiene la tendencia siguiente. $T_t = 2t$. En el cuadro [1.10] aparecen los valores de la tendencia y los valores obtenidos con los métodos de medias móviles y dobles medias móviles, ambos de longitud 3.

Cuadro (1.10): Dobles Medias Móviles

Periodo	T_t	MM_t	MM'_t
1	2		
2	4		
3	6	4	
4	8	6	
5	10	8	6
6	12	10	8
7	14	12	10

Algunos de los valores de este cuadro son:

$$MM_3 = \frac{6 + 4 + 2}{3} = 4$$

$$MM_4 = \frac{8 + 6 + 4}{3} = 6$$

Y para la doble media móvil:

$$MM'_5 = \frac{MM_5 + MM_4 + MM_3}{3} = 6$$

Lo que importa destacar es que MM_3 no aproxima o estima la tendencia del período 3, sino del período 2, y que MM_4 la tendencia que estima es la del período 3, y así sucesivamente. Podemos decir que el valor de la media móvil estima la tendencia del período que es el centro de la media móvil, siendo este centro igual a $t - (3-1)/2$.

De la misma forma, la doble media móvil MM'_5 no estima la tendencia del período 5, sino la del período 3 y MM'_6 la del período 4, y así sucesivamente. En este caso el centro de la doble media móvil viene dado por el período al que corresponde: $t - (3-1)$.

En general podemos decir que si se hace el supuesto de que la tendencia sigue localmente un esquema del tipo $T_t = \beta_0 + \beta_1 t$, la media móvil, MM_t , de longitud k , aproxima el valor de la tendencia de su período central que viene dado por: $t - (k - 1) / 2$

Para estimar el valor de la tendencia en el período t lo haremos mediante la siguiente expresión:

$$\hat{T}_t = 2MM_t - MM'_t \quad [1.33]$$

Por otra parte, también puede estimarse la pendiente en el periodo t mediante la expresión:

$$\hat{\beta}_1(t) = \frac{2}{k-1} (MM_t - MM'_t) \quad [1.34]$$

Y la predicción se define como sigue:

$$\hat{y}_T(l) = \hat{T}_T + \hat{\beta}_1(T)l \quad [1.35]$$

La aplicación del método de dobles medias móviles puede verse en el cuadro [1.11] y las figuras [1.15] y [1.16]

Cuadro (1.11): Serie 3. Dobles Medias Móviles.

t	Serie	MM(4)	DMM(4)	Tendencia	Pendiente	Predicción	EP	ECM	EAM	EAPM	ECM=0.48
1	3.66										ECM(8)=0.57
2	3.99										EAM=0.53
fqu3	5.02										EAM(8)=0.61
4	6.44	4.78									EAPM=2.15
5	7.51	5.74									EAPM(8)=1.04
6	8.21	6.80									
7	9.26	7.86	6.29	9.42	1.04						
8	9.48	8.62	7.25	9.98	0.91	10.46	-0.98	0.96	0.98	10.34	
9	10.21	9.29	8.14	10.44	0.77	10.89	-0.68	0.46	0.68	6.64	
10	10.78	9.93	8.92	10.94	0.67	11.21	-0.43	0.18	0.43	3.98	
11	11.57	10.51	9.59	11.43	0.62	11.61	-0.04	0.00	0.04	0.39	
12	12.55	11.28	10.25	12.30	0.68	12.05	0.50	0.25	0.50	4.00	
13	13.86	12.19	10.98	13.40	0.81	12.99	0.87	0.76	0.87	6.31	
14	14.34	13.08	11.76	14.40	0.88	14.21	0.13	0.02	0.13	0.90	
15	14.77	13.88	12.61	15.15	0.85	15.27	-0.50	0.25	0.50	3.40	
16	15.88	14.71	13.47	15.96	0.83	16.00	-0.12	0.01	0.12	0.77	
17	17.1	15.52	14.30	16.75	0.82	16.79	0.31	0.10	0.31	1.81	
18	17.91	16.42	15.13	17.70	0.85	17.56	0.35	0.12	0.35	1.94	
19	19.31	17.55	16.05	19.05	1.00	18.55	0.76	0.57	0.76	3.92	
20	20.62	18.74	17.06	20.41	1.12	20.05	0.57	0.32	0.57	2.76	
21	22.13	19.99	18.17	21.81	1.21	21.53	0.60	0.36	0.60	2.69	
22	23.04	21.28	19.39	23.16	1.26	23.02	0.02	0.00	0.02	0.07	
23	23.93	22.43	20.61	24.25	1.21	24.42	-0.49	0.24	0.49	2.05	
24	24.87	23.49	21.80	25.19	1.13	25.47	-0.60	0.36	0.60	2.40	
25	25.83	24.42	22.90	25.93	1.01	26.32	-0.49	0.24	0.49	1.89	
26	26.09	25.18	23.88	26.48	0.87	26.94	-0.85	0.72	0.85	3.26	
27	27.42	26.05	24.79	27.32	0.84	27.35	0.07	0.01	0.07	0.27	
28	27.82	26.79	25.61	27.97	0.79	28.16	-0.34	0.12	0.34	1.24	
29	27.73	27.27	26.32	28.21	0.63	28.76	-1.03	1.05	1.03	3.70	
30	28.06	27.76	26.97	28.55	0.53	28.84	-0.78	0.60	0.78	2.77	
31	28.63	28.06	27.47	28.65	0.39	29.08	-0.45	0.20	0.45	1.56	
32	29.95	28.59	27.92	29.27	0.45	29.05	0.90	0.82	0.90	3.02	
33	31.19	29.46	28.47	30.45	0.66	29.72	1.47	2.17	1.47	4.73	
34	33.13	30.73	29.21	32.24	1.01	31.11	2.02	4.09	2.02	6.10	
35	34.48	32.19	30.24	34.13	1.30	33.25	1.23	1.51	1.23	3.56	
36	35.69	33.62	31.50	35.75	1.42	35.43	0.26	0.07	0.26	0.72	
37	37.26	35.14	32.92	37.36	1.48	37.16	0.10	0.01	0.10	0.26	
38	39.08	36.63	34.39	38.86	1.49	38.84	0.24	0.06	0.24	0.61	
39	40.49	38.13	35.88	40.38	1.50	40.35	0.14	0.02	0.14	0.35	
40	42.09	39.73	37.41	42.05	1.55	41.88	0.21	0.04	0.21	0.50	
41	43.17	41.21	38.92	43.49	1.52	43.60	-0.43	0.19	0.43	1.00	
42	44.58	42.58	40.41	44.75	1.45	45.01	-0.43	0.19	0.43	0.97	
43	46.24	44.02	41.89	46.16	1.42	46.20	0.04	0.00	0.04	0.09	
44	48.32	45.58	43.35	47.81	1.49	47.58	0.74	0.55	0.74	1.53	
45	49.34	47.12	44.83	49.42	1.53	49.30	0.04	0.00	0.04	0.09	
46	49.9	48.45	46.29	50.61	1.44	50.95	-1.05	1.10	1.05	2.10	
47	50.6	49.54	47.67	51.41	1.25	52.05	-1.45	2.09	1.45	2.86	
48	51.45	50.32	48.86	51.79	0.98	52.65	-1.20	1.45	1.20	2.34	
49	52.18	51.03	49.84	52.23	0.80	52.76	-0.58	0.34	0.58	1.12	
50	52.28	51.63	50.63	52.62	0.66	53.03	-0.75	0.56	0.75	1.43	
51	53.5	52.35	51.33	53.37	0.68	53.29	0.21	0.04	0.21	0.39	
52	53.96	52.98	52.00	53.96	0.65	54.05	-0.09	0.01	0.09	0.17	
53	54.69					54.62	0.07	0.01	0.07	0.13	
54	55.21					55.27	-0.06	0.00	0.06	0.11	
55	56.27					55.93	0.34	0.12	0.34	0.61	
56	57.46					56.58	0.88	0.77	0.88	1.53	
57	58.16					57.23	0.93	0.86	0.93	1.60	
58	58.2					57.89	0.31	0.10	0.31	0.53	
59	59.48					58.54	0.94	0.88	0.94	1.58	
60	60.56					59.20	1.36	1.85	1.36	2.25	

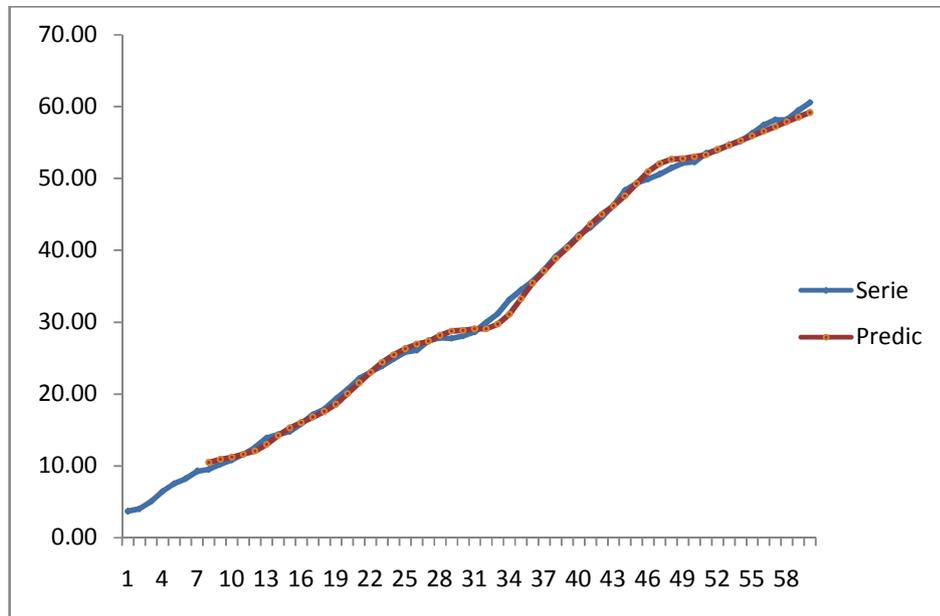


FIG 1.15. *Serie 3 Doble Media Móvil*

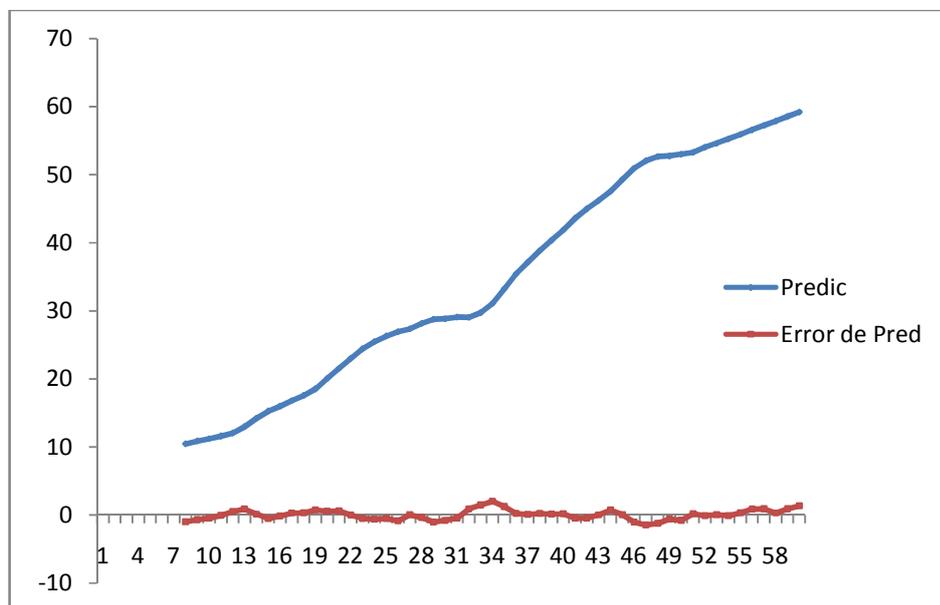


FIG 1.16. *Serie 3 Doble Media Móvil, Predicción y Error de Predicción*

Comentario al cuadro [1.11]

En primer lugar hay que indicar que la estructura del cuadro ha variado para dar cabida a nueva información. En las columnas 3 y 4 aparecen ahora la media móvil y la doble media móvil de longitud 4 indicada esta última por DMM_t . En las dos columnas siguientes aparecen las estimaciones de la tendencia y de la pendiente, respectivamente. Las predicciones aparecen en la columna 7.

Veamos cómo se obtienen las primeras predicciones en el periodo 8.

$$\hat{y}_7(1) = \hat{T}_7 + \hat{\beta}_1(7).1 = 2MM_7 - MM_7 + \frac{2}{4-1}(MM_7 - MM_7') = 9.42 + 1.04 = 10.46$$

Para los períodos extramuestrales se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{52}(1) &= \hat{T}_{52} + \hat{\beta}_1(52).1 = 54.62 \\ \hat{y}_{52}(2) &= \hat{T}_{52} + \hat{\beta}_1(52).2 = 55.27 \\ \hat{y}_{52}(3) &= \hat{T}_{52} + \hat{\beta}_1(52).3 = 55.93 \\ &\dots\dots\dots \\ \hat{y}_{52}(8) &= \hat{T}_{52} + \hat{\beta}_1(52).8 = 59.20\end{aligned}$$

ALISADO EXPONENCIAL LINEAL DE HOLT

Es un método de estructura variable que, como el método de dobles medias móviles, asume que la tendencia es localmente lineal. Por lo tanto, la predicción está basada en una actualización de la estimación de la tendencia y la pendiente para cada período muestral, conforme se incorpora nueva información. Pero a diferencia del método de dobles medias móviles, la actualización se basa en todos los valores previos y no solo en un número reducido de ellos. Para ello se utilizan dos constantes de ponderación que pueden tomar valores entre 0 y 1.

Las dos ecuaciones de actualización toman la forma siguiente:

$$\hat{T}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_{t-1} \quad [1.37]$$

$$\hat{\beta}_t = \gamma [\hat{T}_t - \hat{T}_{t-1}] + (1 - \gamma) \hat{\beta}_1(t-1) \quad [1.38]$$

Donde \hat{T}_t es la tendencia estimada para el periodo t y $\hat{\beta}_1(t)$ es la estimación de la pendiente para este mismo periodo. α y γ son las dos constantes que toman valores entre 0 y 1, α es la constante de alisamiento de la tendencia y γ es la constante de alisamiento de la pendiente.

La predicción toma la forma siguiente:

$$\hat{y}_t(l) = T_T + \hat{\beta}_1(T)l \quad [1.39]$$

También en este caso es posible escribir las dos ecuaciones (1.28) y (1.29) en forma de ecuaciones con mecanismo de corrección de error, tomando la forma siguiente:

$$\hat{T}_t = \hat{y}_{t-1}(1) + \alpha e_{t-1}(1) \quad [1.40]$$

$$\hat{\beta}_1(t) = \hat{\beta}_1(t-1) + \alpha \gamma e_{t-1}(1) \quad [1.41]$$

La aplicación del método de Holt puede verse en el cuadro (1.12) y las figuras (1.17) y (1.18)

Cuadro (1.12): Serie 3. Alisado Exponencial Lineal de Holt.

t	Serie	Tendencia	Pendiente	Predicción	F predic.	ECM	EAM	FAP	Estadísticos
1	3.66	3.66	0						ECM= 0.29
2	3.99	3.96	0.06	3.66	0.33	0.11	0.33	8.27	ECM(8)= 0.12
3	5.02	4.92	0.24	4.02	1.00	1.01	1.00	19.99	EAM= 0.45
4	6.44	6.31	0.47	5.16	1.28	1.64	1.28	19.88	EAM(8)= 0.26
5	7.51	7.44	0.60	6.78	0.73	0.53	0.73	9.69	EAPM= 2.64
6	8.21	8.19	0.63	8.04	0.17	0.03	0.17	2.09	EAPM(8)=0.45
7	9.26	9.22	0.71	8.83	0.43	0.19	0.43	4.70	
8	9.48	9.52	0.63	9.93	-0.45	0.20	0.45	4.72	
9	10.21	10.20	0.64	10.15	0.06	0.00	0.06	0.54	
10	10.78	10.79	0.63	10.84	-0.06	0.00	0.06	0.60	
11	11.57	11.55	0.66	11.41	0.16	0.02	0.16	1.34	
12	12.55	12.52	0.72	12.21	0.34	0.12	0.34	2.70	
13	13.86	13.80	0.83	13.23	0.63	0.39	0.63	4.52	
14	14.34	14.37	0.78	14.63	-0.29	0.08	0.29	2.00	
15	14.77	14.81	0.71	15.15	-0.38	0.14	0.38	2.55	
16	15.88	15.84	0.78	15.52	0.36	0.13	0.36	2.28	
17	17.1	17.05	0.86	16.62	0.48	0.23	0.48	2.81	
18	17.91	17.91	0.86	17.91	0.00	0.00	0.00	0.02	
19	19.31	19.26	0.96	18.77	0.54	0.29	0.54	2.79	
20	20.62	20.58	1.03	20.21	0.41	0.16	0.41	1.97	
21	22.13	22.08	1.12	21.61	0.52	0.27	0.52	2.35	
22	23.04	23.06	1.10	23.20	-0.16	0.03	0.16	0.71	
23	23.93	23.95	1.06	24.15	-0.22	0.05	0.22	0.93	
24	24.87	24.88	1.03	25.01	-0.14	0.02	0.14	0.55	
25	25.83	25.84	1.02	25.91	-0.08	0.01	0.08	0.33	
26	26.09	26.17	0.88	26.85	-0.76	0.58	0.76	2.93	
27	27.42	27.38	0.95	27.04	0.38	0.14	0.38	1.37	
28	27.82	27.87	0.85	28.33	-0.51	0.26	0.51	1.83	
29	27.73	27.83	0.68	28.72	-0.99	0.99	0.99	3.59	
30	28.06	28.10	0.60	28.50	-0.44	0.20	0.44	1.58	
31	28.63	28.64	0.58	28.70	-0.07	0.00	0.07	0.24	
32	29.95	29.88	0.71	29.22	0.73	0.53	0.73	2.44	
33	31.19	31.13	0.82	30.59	0.60	0.36	0.60	1.92	
34	33.13	33.01	1.03	31.95	1.18	1.39	1.18	3.56	
35	34.48	34.44	1.11	34.05	0.43	0.19	0.43	1.26	
36	35.69	35.68	1.14	35.55	0.14	0.02	0.14	0.40	
37	37.26	37.22	1.22	36.81	0.45	0.20	0.45	1.20	
38	39.08	39.02	1.33	38.43	0.65	0.42	0.65	1.66	
39	40.49	40.48	1.36	40.35	0.14	0.02	0.14	0.35	
40	42.09	42.06	1.41	41.84	0.25	0.06	0.25	0.60	
41	43.17	43.20	1.35	43.47	-0.30	0.09	0.30	0.69	
42	44.58	44.58	1.36	44.55	0.03	0.00	0.03	0.06	
43	46.24	46.21	1.41	45.93	0.31	0.09	0.31	0.66	
44	48.32	48.25	1.54	47.62	0.70	0.49	0.70	1.45	
45	49.34	49.38	1.46	49.79	-0.45	0.20	0.45	0.91	
46	49.9	49.99	1.29	50.84	-0.94	0.89	0.94	1.89	
47	50.6	50.67	1.16	51.28	-0.68	0.46	0.68	1.35	
48	51.45	51.49	1.10	51.83	-0.38	0.15	0.38	0.74	
49	52.18	52.22	1.02	52.58	-0.40	0.16	0.40	0.77	
50	52.28	52.38	0.85	53.24	-0.96	0.93	0.96	1.84	
51	53.5	53.47	0.90	53.23	0.27	0.08	0.27	0.51	
52	53.96	54.00	0.825	54.37	-0.41	0.17	0.41	0.76	
53	54.69			54.83	-0.14	0.02	0.14	0.25	
54	55.21			55.65	-0.44	0.19	0.44	0.80	
55	56.27			56.48	-0.21	0.04	0.21	0.37	
56	57.46			57.30	0.16	0.03	0.16	0.28	
57	58.16			58.13	0.03	0.00	0.03	0.06	
58	58.2			58.95	-0.75	0.56	0.75	1.29	
59	59.48			59.78	-0.30	0.09	0.30	0.50	
60	60.56			60.60	-0.04	0.00	0.04	0.07	

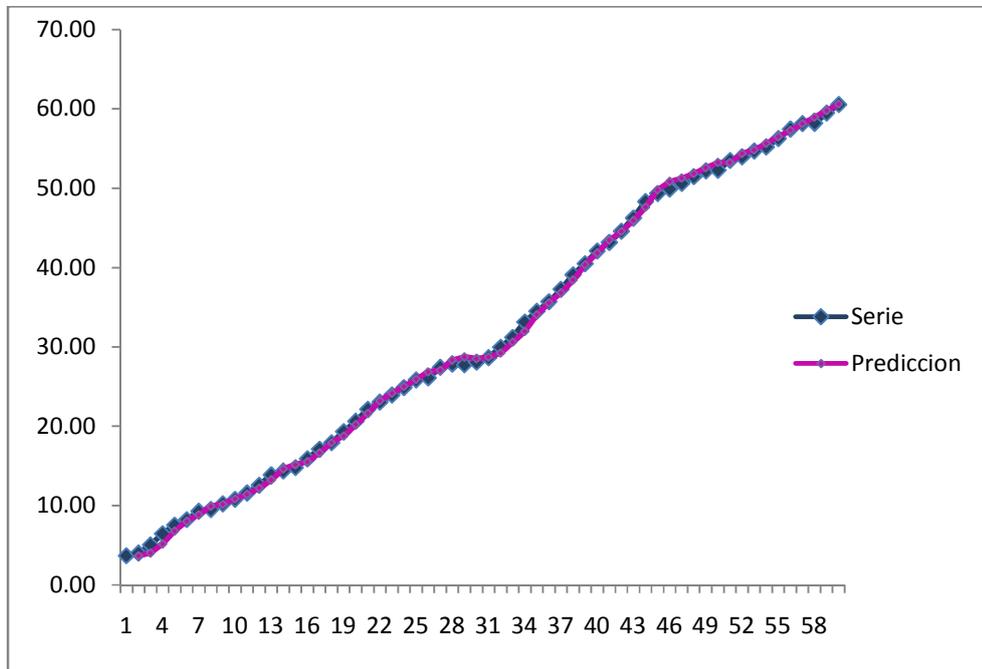


FIG 1.17. *Serie y Predicción, método de Alisado Exponencial Lineal de Holt.*

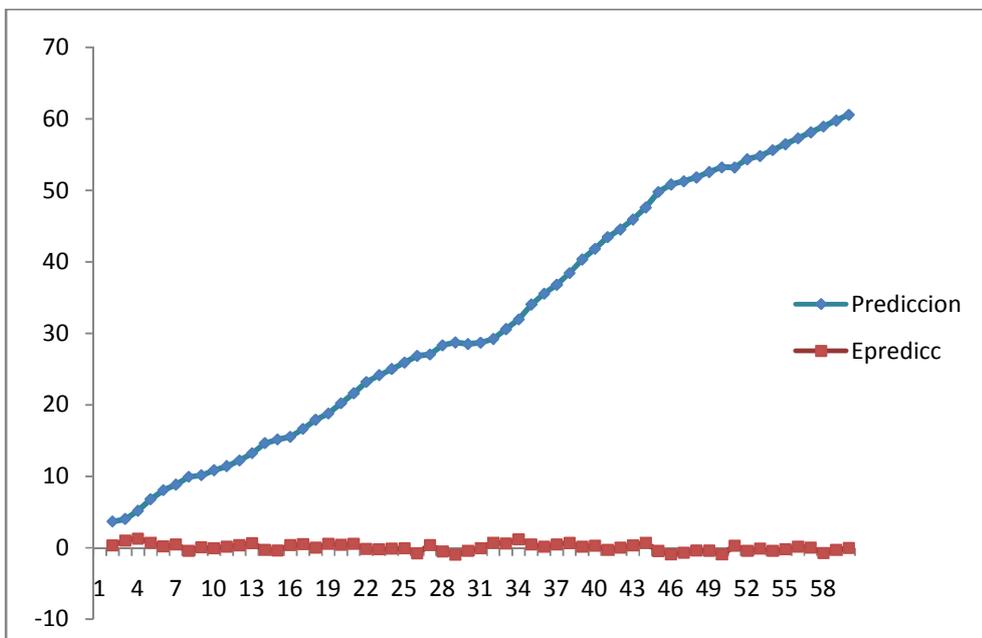


FIG 1.18. *Predicción y Error de Predicción.*

Comentarios al cuadro [1.12]

En este cuadro se recogen los cálculos realizados para $\alpha=0.9$ y $\gamma = 0.2$. En las columnas 3 y 4 se presentan las estimaciones de la tendencia y la pendiente; respectivamente. Para comenzar los cálculos es necesario hacer algún supuesto para los valores iniciales. En este caso adoptamos los siguientes valores iniciales:

$$\hat{T}_1 = y_1 \quad \hat{\beta}_1(1) = 0$$

Utilizando (1.28) el valor de la tendencia estimado para el periodo 52 es el siguiente:

$$\hat{T}_t = \alpha \cdot y_{52} + (1 - \alpha)(\hat{T}_{51} + \hat{\beta}_1(51)) = 0.9 * 53.96 + 0.1 * (53.47 + 0.90) = 54.0$$

Utilizando (1.29) el valor estimado de la pendiente para ese mismo periodo 52 es:

$$\hat{\beta}_1(52) = \gamma [\hat{T}_{52} - \hat{T}_{51}] + (1 - \gamma)\hat{\beta}_1(51) = 0.2 [54 - 53.47] + 0.8 * 0.9 = 0.82$$

Utilizando [1.30] la predicción para los períodos extramuestrales sería:

$$\hat{y}_{52}(1) = \hat{T}_{52} + \hat{\beta}_1(52) \cdot 1 = 54.83$$

$$\hat{y}_{52}(2) = \hat{T}_{52} + \hat{\beta}_1(52) \cdot 2 = 55.65$$

.....

$$\hat{y}_{52}(8) = \hat{T}_{52} + \hat{\beta}_1(52) \cdot 8 = 60.60$$

En el cuadro [1.13] notamos los resultados a los que se ha llegado los tres métodos propuestos para predecir la serie 3.

Cuadro (1.13): Serie 3. Análisis Comparado.

Método	ECM	ECM(8)	EAM	EAM(8)	EAPM	EAPM(8)
Tendencia Lineal	2.47	0.70	1.25	0.67	7.45	1.15
Dobles Medias Móviles (k=4)	0.48	0.57	0.53	0.61	2.15	1.04
Alisado Exponencial Lineal de Holt	0.29	0.12	0.45	0.26	2.64	0.45

A partir esto resultados se muestra que el método Alisado Exponencial Lineal de Holt es el más satisfactorio, especialmente si se presta atención al período extramuestral.

2.6.9.4 MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS PARA SERIE TIPO 4

(Serie con tendencia y con componente estacional)

- 1) Tendencia Lineal con Variable Ficticia
- 2) Método de Descomposición
- 3) Alisado Exponencial de Holt-Winters.

La estructura básica de esta serie, tal como se ha comentado en el capítulo 2, adoptará la forma siguiente:

$$y_t = f(T_t, S_t, u_t) \quad [1.42]$$

donde T_t es la tendencia, S_t el componente estacional y u_t un término aleatorio sin un patrón de comportamiento definido. La función $f()$, en principio, es arbitraria, aunque en la práctica ha adoptado dos formas diferentes, dando lugar a dos modelos distintos:

Modelo aditivo:

$$y_t = T_t + S_t + u_t \quad [1.43]$$

Modelo multiplicativo:

$$y_t = T_t * S_t * u_t \quad [1.44]$$

En el modelo multiplicativo, los componentes estacional y aleatorio son factores correctores que se aplican a la tendencia, de forma que los niveles que alcanzan dependen del nivel alcanzado por dicha tendencia.

Aunque esas dos opciones son las más consideradas en la práctica, nada impide las consideraciones de otras, como por ejemplo:

$$y_t = T_t * S_t + u_t \quad [1.45]$$

En algunos trabajos se incluyen un cuarto término denominado componente cíclico.

Nosotros en este libro lo incluimos dentro de la tendencia debido a que la identificación y predicción de este cuarto componente requerirá prestar atención a otros factores distintos del pasado de la propia variable, lo que desborda el marco del presente capítulo.

TENDENCIA LINEAL CON VARIABLE FICTICIA

Es un método de estructura fija que considera para calcular la predicción un modelo del siguiente tipo:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma_2 (D_{2t} - D_{1t}) + \dots + \gamma_s (D_{st} - D_{1s}) + u_t \quad [1.46]$$

donde la variable D_i , $i = 1, 2, \dots, s$ toma el valor 1 si y_t pertenece a la estación i -ésima y 0 si no pertenece a esa estación. La aportación de cada componente estacional viene dada por el parámetro correspondiente; es decir:

$$S_i = \gamma_i \quad i = 1, 2, \dots, s$$

Para obtener la predicción a partir de los primeros se estima los parámetros de la [1.46] con los estimadores MCO, llegándose a $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_s$. En principio, tal como está escrito el modelo [1.46] estos parámetros no se pueden estimar por la presencia de multicolinealidad exacta. Es preciso incorporar información *a priori* que permita dicha estimación. Nosotros utilizaremos la siguiente restricción:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_s = 0 \quad [1.47]$$

Con esta restricción se quiere indicar que la aportación del componente estacional dentro del año es nula. Introduciendo esta restricción en [1.46], obtendremos el siguiente modelo:

$$\hat{y}_t(1) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (t+1) + \hat{\gamma}_i \quad [1.48]$$

si el período $(t + 1)$ corresponde a la estación i -ésima.

Para los períodos extramuestrales:

$$\hat{y}_T(l) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (T + l) + \hat{\gamma}_i \quad [1.49]$$

Si el período $(T + 1)$ corresponde a la estación i -ésima.

La aplicación de este método a la serie 4 puede verse en el cuadro 1.14 y las figuras 1.19 y 1.20.

Cuadro (1.14). *Serie 4.Tendencia Lineal con Variables Ficticia*

t	Serie	Estim/Pred	Error Pred	EC	EA	EAP	Estadístico
1	13.36	12.53	0.83	0.69	0.83	6.21	ECM=0.47
2	1.73	10.29	-8.56	73.27	8.56	494.80	ECM(8)=0.14
3	9.29	8.78	0.51	0.26	0.51	5.53	EAM=0.52
4	10.82	9.98	0.84	0.71	0.84	7.79	EAM(8)=0.28
5	13.24	12.66	0.58	0.33	0.58	4.36	EAPM=4.79
6	11.2	10.42	0.78	0.61	0.78	6.95	ECPM(8)=2.43
7	9.59	8.91	0.68	0.47	0.68	7.11	
8	10	10.11	-0.11	0.01	0.11	1.09	
9	12.87	12.80	0.07	0.01	0.07	0.58	
10	10.77	10.55	0.22	0.05	0.22	2.01	
11	8.99	9.04	-0.05	0.00	0.05	0.56	
12	10.18	10.24	-0.06	0.00	0.06	0.60	
13	13.12	12.93	0.19	0.04	0.19	1.47	
14	10.54	10.69	-0.15	0.02	0.15	1.39	
15	8.53	9.17	-0.64	0.41	0.64	7.53	
16	10.11	10.37	-0.26	0.07	0.26	2.57	
17	12.9	13.06	-0.16	0.03	0.16	1.24	
18	10.57	10.82	-0.25	0.06	0.25	2.37	
19	9.27	9.30	-0.03	0.00	0.03	0.32	
20	10.48	10.51	-0.03	0.00	0.03	0.29	
21	13.54	13.19	0.35	0.12	0.35	2.58	
22	11.05	10.95	0.10	0.01	0.10	0.90	
23	9.32	9.44	-0.12	0.01	0.12	1.29	
24	10.52	10.64	-0.12	0.01	0.12	1.14	
25	13.32	13.32	0.00	0.00	0.00	0.00	
26	10.45	11.08	-0.63	0.40	0.63	6.03	
27	9.54	9.57	-0.03	0.00	0.03	0.31	
28	9.84	10.77	-0.93	0.86	0.93	9.45	
29	12	1.46	10.54	111.09	10.54	87.83	
30	9.74	11.21	-1.47	2.16	1.47	15.09	
31	8.09	9.70	-1.61	2.59	1.61	19.90	
32	9.68	10.90	-1.22	1.49	1.22	12.60	
33	12.31	13.59	-1.28	1.64	1.28	10.40	
34	10.82	11.35	-0.53	0.28	0.53	4.90	
35	8.95	9.83	-0.88	0.77	0.88	9.83	
36	10.15	11.03	-0.88	0.77	0.88	8.67	
37	13.36	13.72	-0.36	0.13	0.36	2.69	
38	11.58	11.48	0.10	0.01	0.10	0.86	
39	9.82	9.96	-0.14	0.02	0.14	1.43	
40	11.37	11.17	0.20	0.04	0.20	1.76	
41	13.82	13.85	-0.03	0.00	0.03	0.22	
42	12.19	11.61	0.58	0.34	0.58	4.76	
43	10.91	10.10	0.81	0.66	0.81	7.42	
44	12.8	11.30	1.50	2.25	1.50	11.72	
45	14.81	13.98	0.83	0.69	0.83	5.60	
46	12.51	11.74	0.77	0.59	0.77	6.16	
47	10.93	10.23	0.70	0.49	0.70	6.40	
48	12.31	11.43	0.88	0.77	0.88	7.15	
49	14.67	14.12	0.55	0.30	0.55	3.75	
50	11.91	11.87	0.04	0.00	0.04	0.34	
51	11.15	10.36	0.79	0.62	0.79	7.09	
52	11.73	11.56	0.17	0.03	0.17	1.45	
53	14.38	14.25	0.13	0.02	0.13	0.90	
54	11.86	12.01	-0.15	0.02	0.15	1.26	
55	10.8	10.49	0.31	0.10	0.31	2.87	
56	12.12	11.69	0.43	0.18	0.43	3.55	
57	14.23	14.38	-0.15	0.02	0.15	1.05	
58	11.26	12.14	-0.88	0.77	0.88	7.82	
59	10.83	10.62	0.21	0.04	0.21	1.94	
60	11.84	11.82	0.02	0.00	0.02	0.17	

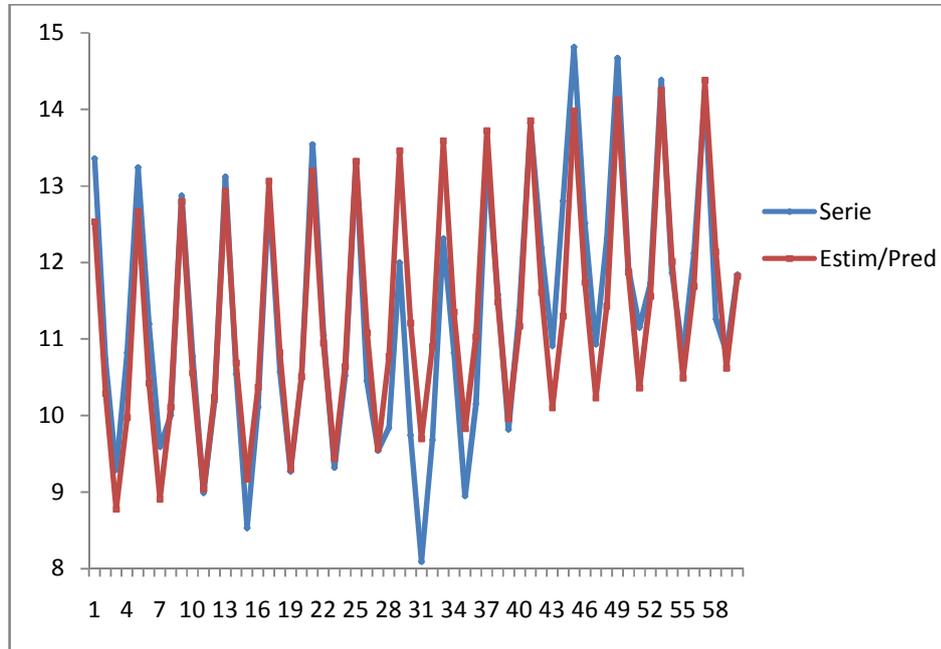


FIG 1. 19. *Serie y Predicción*

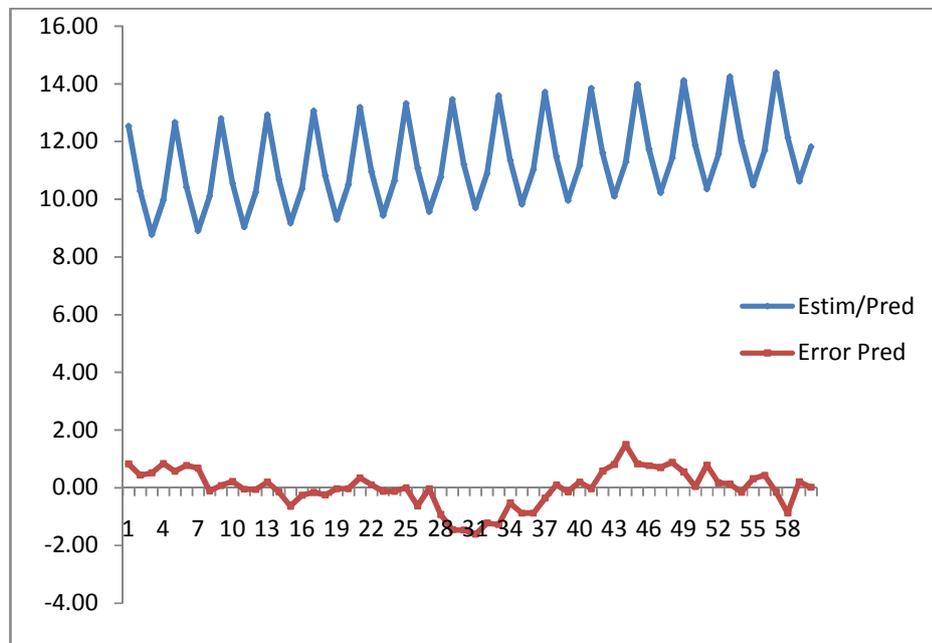


FIG 1.20. *Predicción y Error de Predicción.*

Comentario al cuadro [1.14].

En este caso tenemos que $s=4$, por lo que los modelos escrito en [1.46] y [1.47].

Se escriben ahora como:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \gamma_4 D_{4t} + u_t \quad [1.50]$$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma_2 (D_{2t} - D_{1t}) + \gamma_3 (D_{3t} - D_{1t}) + \gamma_4 (D_{4t} - D_{1t}) + u_t \quad [1.51]$$

La primera tarea es estimar los parámetros de la [1.51] utilizando los 52 datos muestrales. Los resultados aparecen en el cuadro 1.15.

Cuadro 1.15. Estimación

$\hat{y}_t = 10.311 + 0.033t - 0.087(D_{2t} - D_{1t}) - 1.634(D_{3t} - D_{1t}) - 0.0466(D_{4t} - D_{1t})$ $R^2 = 0.817 \quad \text{y} \quad \bar{R}^2 = 0.801$
--

Teniendo en cuenta la restricción [1.47] se obtienen los cuatro componentes estacionales.

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 = \hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_3 = \hat{\gamma}_4 = 2.187 & \quad \hat{S}_2 = \hat{\gamma}_2 = -0.087 \\ \hat{S}_3 = \hat{\gamma}_3 = -1.634 & \quad \hat{S}_4 = \hat{\gamma}_4 = -0.466 \end{aligned}$$

El ajuste para el segundo período (= segundo trimestre) viene dado por:

$$\hat{y}_T(l) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (2) + \hat{S}_2 = 10.311 + 0.033 * (2) - 0.087 = 10.29$$

Para el primer período extramuestral (= primer trimestre) la predicción es:

$$\hat{y}_T(l) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (53) + \hat{S}_1 = 10.311 + 0.033 * (53) + 2.187 = 14.25$$

Y para el último período extramuestral (= cuatro trimestres):

$$\hat{y}_T(l) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (60) + \hat{S}_1 = 10.311 + 0.033 * (60) - 0.466 = 11.82$$

La observación de los resultados de las otras columnas es inmediato.

El análisis gráfico puede hacerse a partir de las figuras 1.19 y 1.20, en las que se comparan las evoluciones reales y predichas y se recoge un gráfico de los errores de predicción. El gráfico de los errores de la predicción, figura 1.20, parece indicar la presencia de una pauta de comportamiento no recogida en los patrones sistemáticos.

MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN

Es un método de estructura fija, que obtiene el la predicción tras especificar un proceso que permite la identificación de los componentes con un patrón de conducta bien definido tendencial y estacional, proyectando luego dicho patrón para dar lugar a la predicción. Es quizá el método de predicción que ha tenido una mayor dimensión práctica.

Es un método en cinco etapa que vemos a ilustrar adoptando un modelo aditivo; posteriormente, comentaremos las variaciones que introduciría la consideraciones de un modelo multiplicativo.

El modelo que se adopta de partida es escrito en [1.44] y las cinco etapas del proceso son las siguientes:

1) Primera Estimación de la Tendencia con el Método de Medias Móviles.

Se calcula una serie igual al valor de la media móvil de longitud k , asignando cada valor de la media móvil al período que es el centro de la misma, que, como ya hemos dicho, es $t - (k - 1) / 2$. Si la longitud de la media móvil es par, este centro es un número entero y el valor de la media móvil no se puede asignar a un período concreto; para solucionar este problema se calcula lo que se llama la media móvil centrada, que es una media

móvil de longitud 2 aplicada a los valores de la media móvil calculados en primer lugar. De esta forma obtendremos una primera estimación de la tendencia que representamos por $T_t^{(1)}$.

2) *Estimación de los Componentes Estacionarios.*

A partir de esa primera estimación de la tendencia, podemos estimar, para cada período, la aportación conjunta del componente estacional aleatorio y el término, mediante la siguiente expresión:

$$\overbrace{S_t + u_t} = y_t - T_t^{(1)} \quad [1.52]$$

A continuación se calcula para cada estación los valores medios correspondiente a los valores obtenidos en [1.52], mediante la expresión:

$$\bar{S}_i^* = \frac{\sum_{t \in T_i} \left(\overbrace{S_t + u_t} \right)}{T_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad [1.53]$$

donde $\sum_{t \in T_i}$ indica que el sumatorio se extiende a todas los período correspondiente a la

estación i-esima: T_i indica el número de período de dicha estación.

Se calcula la media de los valores obtenidos en [1.53]

$$\bar{S} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \bar{S}_i^* \quad [1.54]$$

Si el valor de \bar{S} es cero o próximo a cero, la estimación de los componentes estacionales viene dada por los valores obtenidos en [1.53]. Si el valor obtenido de \bar{S} es diferente de cero, la estimación de los componentes estacionales viene dada por:

$$\bar{S}_i = \bar{S}_i^* - \bar{S} \quad i=1,2,\dots,s \quad [1.55]$$

En algunas versiones, a la hora de calcular las medias en [1.53] se suprimen los valores mayores y menor calculados en [1.52] para evitar la influencia excesiva de valores atípicos.

3) *Obtención de la Serie Desestacionalizada.*

Una vez estimados los componentes estacionales puede definirse una nueva serie en la que no aparezcan, restándolo de la serie original:

$$T_t^{(2)} = y_t - \bar{S}_i \quad i=1,2,\dots,s \quad [1.55]$$

Si el período t corresponde a la estación i -ésima.

La serie cuyo valor se han obtenido a partir de [1.55] se llama “serie desestacionalizada”.

4) *Estimación de la Tendencia Lineal.*

Se especifica el modelo:

$$T_t^{(2)} = \beta_0 + \beta_1 t$$

y se estima β_0 y β_1 aplicando MCO, obteniendo la tendencia estimada siguiente:

$$\bar{T}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t \quad [1.56]$$

5) Cálculo de la Predicción

La predicción toma la forma siguiente:

$$\hat{y}_T(l) = \bar{T}_{T+l} + \bar{S}_i + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot (T+l) + \hat{S}_i \quad i = 1, 2, \dots, s \quad [1.57]$$

Tomando \hat{S}_i el valor de aquel componente de la estación a la que corresponde el período $T+l$.

Si en lugar de haber adoptado el método aditivo hubiéramos tomado el método multiplicativo, hay que tener en cuenta ciertas variaciones en algunas de las etapas. En la expresiones [1.52] tiene que ser igual a s y no a cero: la diferencia en [1.55] se convierte en un cociente y, por último la predicción en lugar de ser el resultado de la suma de la tendencia y el componente estacional es igual al producto de ambos términos.

Hemos comentados que este método es quizás el que ha tenido una mayor aplicación en la práctica. La mayor parte de los procedimientos de desestralización guardan relación con este método. Por ejemplo, el método X-11 guarda una relación estrecha con el procedimiento comentado; pero, como verse en Abrahan y Ledolter (1983), hay otros procedimientos que también mantienen esa relación.

La aplicación del método de descomposición puede verse en el cuadro 1.16 y figura 1.21, 1.22 y 1.23.

Cuadro (1.16). Serie 4: Método de Descomposición

t	Serie	MM	MMC	Deses	Estim/Pred	Error Pred	EC	EA	EAP	ECM=0.47
1	13,36			11,19	12,51	0,85	0,72	0,85	6,36	ECM(8)=0.15
2	10,73			10,8	10,31	0,42	0,18	0,42	3,91	EAM=0.52
3	9,29	11,05	11,04	10,95	8,75	0,54	0,29	0,54	5,81	EAM(8)=0.29
4	10,82	11,02	11,08	11,25	10,01	0,81	0,66	0,81	7,49	EAPM=4.78
5	13,24	11,14	11,18	11,07	12,64	0,6	0,36	0,6	4,53	EAPM(8)=2.74
6	11,2	11,21	11,11	11,27	10,44	0,76	0,58	0,76	6,79	
7	9,59	11,01	10,96	11,25	8,88	0,71	0,50	0,71	7,40	
8	10	10,92	10,86	10,43	10,14	-0,14	0,02	0,14	1,40	
9	12,87	10,81	10,73	10,7	12,78	0,09	0,01	0,09	0,70	
10	10,77	10,66	10,68	10,84	10,57	0,2	0,04	0,2	1,86	
11	8,99	10,70	10,73	10,65	9,01	-0,02	0,00	0,02	0,22	
12	10,18	10,77	10,74	10,61	10,27	-0,09	0,01	0,09	0,88	
13	13,12	10,71	10,65	10,95	12,91	0,21	0,04	0,21	1,60	
14	10,54	10,59	10,58	10,61	10,7	-0,16	0,03	0,16	1,52	
15	8,53	10,58	10,55	10,19	9,15	-0,62	0,38	0,62	7,27	
16	10,11	10,52	10,52	10,54	10,41	-0,3	0,09	0,3	2,97	
17	12,9	10,53	10,62	10,73	13,04	-0,14	0,02	0,14	1,09	
18	10,57	10,71	10,76	10,64	10,83	-0,26	0,07	0,26	2,46	
19	9,27	10,81	10,89	10,93	9,28	-0,01	0,00	0,01	0,11	
20	10,48	10,97	11,03	10,91	10,54	-0,06	0,00	0,06	0,57	
21	13,54	11,09	11,09	11,37	13,17	0,37	0,14	0,37	2,73	
22	11,05	11,10	11,10	11,12	10,97	0,08	0,01	0,08	0,72	
23	9,32	11,11	11,08	10,98	9,41	-0,09	0,01	0,09	0,97	
24	10,52	11,05	10,98	10,95	10,67	-0,15	0,02	0,15	1,43	
25	13,32	10,90	10,93	11,15	13,3	0,02	0,00	0,02	0,15	
26	10,45	10,96	10,87	10,52	11,1	-0,65	0,42	0,65	6,22	
27	9,54	10,79	10,62	11,2	9,54	0	0,00	0	0,00	
28	9,84	10,46	10,37	10,27	10,8	-0,96	0,92	0,96	9,76	
29	12	10,28	10,10	9,83	13,44	-1,44	2,07	1,44	12,00	
30	9,74	9,92	9,90	9,81	11,23	-1,49	2,22	1,49	15,30	
31	8,09	9,88	9,92	9,75	9,67	-1,58	2,50	1,58	19,53	
32	9,68	9,96	10,09	10,11	10,93	-1,25	1,56	1,25	12,91	
33	12,31	10,23	10,33	10,14	13,57	-1,26	1,59	1,26	10,24	
34	10,82	10,44	10,50	10,89	11,36	-0,54	0,29	0,54	4,99	
35	8,95	10,56	10,69	10,61	9,81	-0,86	0,74	0,86	9,61	
36	10,15	10,82	10,92	10,58	11,07	-0,92	0,85	0,92	9,06	
37	13,36	11,01	11,12	11,09	13,7	-0,34	0,12	0,34	2,54	
38	11,58	11,23	11,38	11,65	11,49	0,09	0,01	0,09	0,78	
39	9,82	11,53	11,59	11,48	9,94	-0,12	0,01	0,12	1,22	
40	11,37	11,65	11,72	11,8	11,2	0,17	0,03	0,17	1,50	
41	13,82	11,80	11,94	11,65	13,83	-0,01	0,00	0,01	0,07	
42	12,19	12,07	12,25	12,26	11,63	0,56	0,31	0,56	4,59	
43	10,91	12,43	12,55	12,57	10,07	0,84	0,71	0,84	7,70	
44	12,8	12,68	12,72	13,23	11,33	1,47	2,16	1,47	11,48	
45	14,81	12,76	12,76	12,64	13,96	0,85	0,72	0,85	5,74	
46	12,51	12,76	12,70	12,58	11,76	0,75	0,56	0,75	6,00	
47	10,93	12,64	12,62	12,59	10,2	0,73	0,53	0,73	6,68	
48	12,31	12,61	12,53	12,74	11,46	0,85	0,72	0,85	6,90	
49	14,67	12,46	12,48	12,5	14,1	0,57	0,32	0,57	3,89	
50	11,91	12,51	12,44	11,98	11,89	0,02	0,00	0,02	0,17	
51	11,15	12,37		12,81	10,33	0,82	0,67	0,82	7,35	
52	11,73			12,16	11,59	0,14	0,02	0,14	1,19	
53	14,38			12,21	14,23	0,15	0,02	0,15	1,04	
54	11,86			11,93	12,02	-0,16	0,03	0,16	1,35	
55	10,8			12,46	10,47	0,33	0,11	0,33	3,06	
56	12,12			12,55	11,73	0,39	0,15	0,39	3,22	
57	14,23			12,06	14,36	-0,13	0,02	0,13	0,91	
58	11,26			11,33	12,15	-0,89	0,79	0,89	7,90	
59	10,83			12,49	10,6	0,23	0,05	0,23	2,12	
60	11,84			12,27	11,86	-0,02	0,00	0,02	0,17	

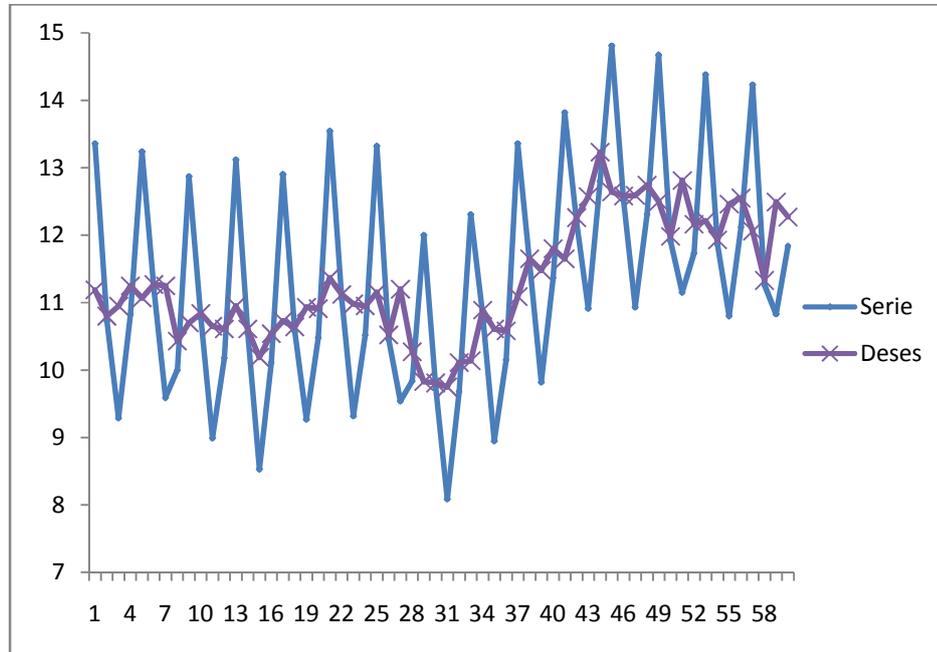


FIG 1.21. Serie 4: Serie desestacionalizada.

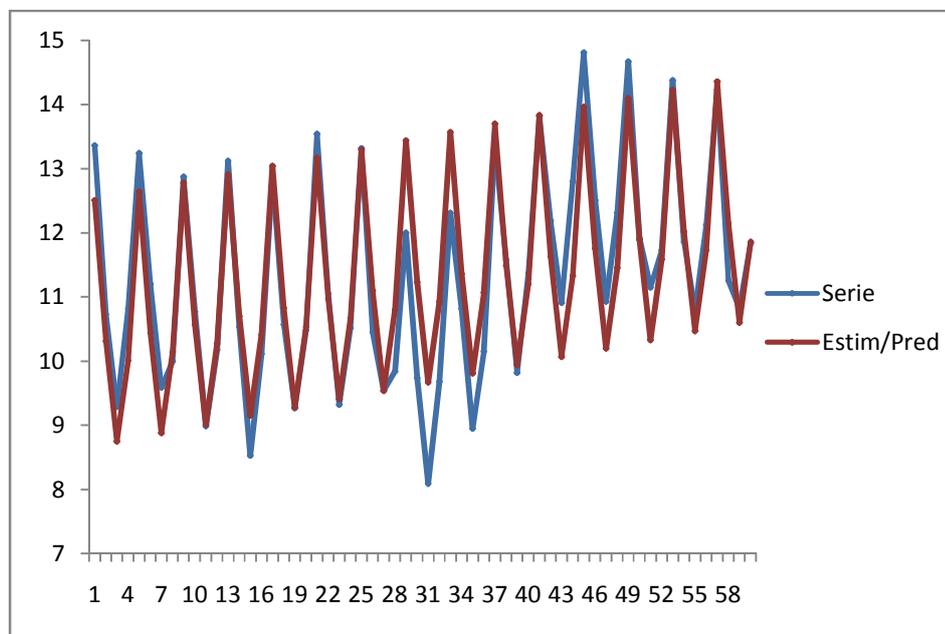


FIG 1.22 Serie 4 Valores reales y predichos mediante el método de descomposición

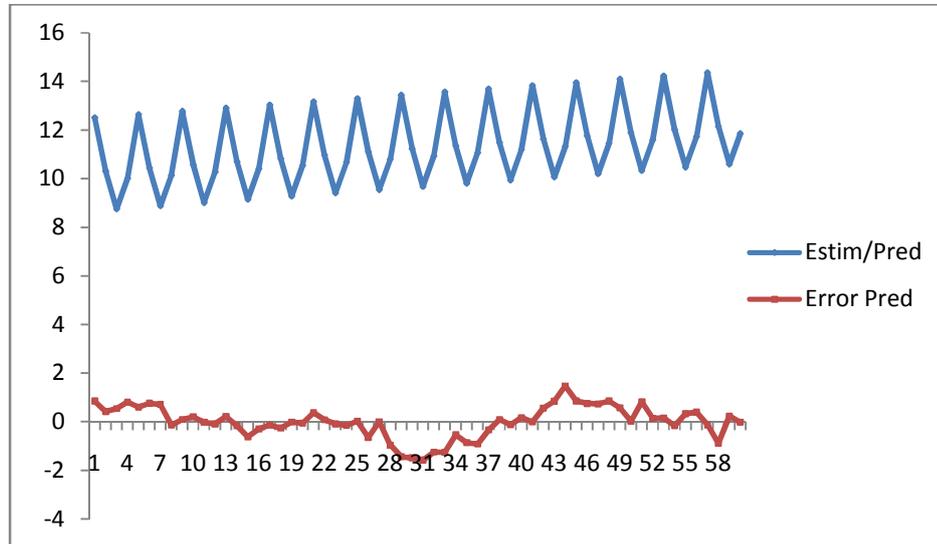


FIG 1.23 .Serie 4.Método descomposición. Error de predicción y predicción
Comentarios al cuadro [1.16].

1) **Primero estimación de la tendencia.** Se ha comenzado calculando una media móvil de longitud cuatro, cuyo valores aparecen en la columna 3. Los dos primeros de esta columna son:

$$MM_4 = \frac{13.36 + 10.73 + 9.29 + 10.82}{4} = 11.05$$

$$MM_5 = \frac{10.73 + 9.29 + 10.82 + 13.24}{4} = 11.02$$

Y sucesivamente. Siendo la longitud par, el centro de esta media móvil no es un número entero, por lo que se ha calculado la media móvil centrada cuyos valores aparecen en la columna 4. Los primeros valores son:

$$T_3^{(1)} = \frac{11.05 + 11.02}{2} = 11.04$$

$$T_4^{(1)} = \frac{11.02 + 11.14}{2} = 11.08$$

Y así sucesivamente hasta el período 50.

2) **Estimación de los componentes estacionales.** La parte estacional de cada período se obtuvo aplicando la fórmula [1.52], restándole a los elementos de la columna 2 los elementos de la columna 4. Los resultados, agrupados por trimestre, pueden verse en el cuadro 15. La media de estas muestras es:

$$\bar{S} = \frac{\bar{S}_1^* + \bar{S}_2^* + \bar{S}_3^* + \bar{S}_4^*}{4} = \frac{2.163 - 0.0765 - 1.665 - 0.438}{4} = -0.0041$$

Por ser muy próximo a cero, en un ejercicio normal ya no se precisaría de ajuste adicional y la estimación de los componentes estacionales serían los valores calculados de

$$\bar{S}_i^*, i = 1, 2, 3 \text{ y } 4.$$

Cuadro (1.17): valores estacionales.

Año	1er trimestre	2do trimestre	3er trimestre	4to trimestre
1.º			-1.74	-0.26
2.º	2.06	0.09	-1.37	-0.86
3.º	2.14	0.09	-1.74	-0.56
4.º	2.47	-0.04	-2.02	-0.41
5.º	2.28	-0.19	-1.61	-0.54
6.º	2.45	-0.05	-1.76	-0.46
7.º	2.39	-0.42	-1.08	-0.53
8.º	2.9	-0.16	-1.83	-0.14
9.º	1.98	0.32	-1.73	-0.74
10.º	2.16	0.22	-1.76	-0.35
11.º	2.88	-0.06	-1.64	-0.08
12.º	2.05	-0.19	-1.69	-0.22
13.º	2.19	-0.53		
Media \bar{S}_i^*	2.163	-0.0765	1.665	-0.438

Como la intención de este ejercicio es ilustrar el método comentado, vamos a realizar el ajuste aplicando la fórmula [1.54]. Los resultados que se obtienen son los siguientes:

$$\begin{aligned}\hat{S}_1 &= \bar{S}_1^* - \bar{S} = 2.163 + 0.0041 = 2.1671 \\ \hat{S}_2 &= \bar{S}_2^* - \bar{S} = -0.0765 + 0.0041 = -0.0724 \\ \hat{S}_3 &= \bar{S}_3^* - \bar{S} = -1.665 + 0.0041 = -1.6609 \\ \hat{S}_4 &= \bar{S}_4^* - \bar{S} = -0.438 + 0.0041 = -0.4339\end{aligned}$$

Y estas serán las estimaciones de los componentes estacionales.

3) **Serie desestacionalizada.** La serie desestacionalizada se obtiene aplicando la expresión [1.47]. Los resultados aparecen en la columna 5. Los dos primeros valores de esta serie son:

$$\begin{aligned}T_1^{(2)} &= y_t - \bar{S}_i = 13.36 - 2.1671 = 11.19 \\ T_2^{(2)} &= y_t - \bar{S}_i = 10.73 + 0.0724 = 10.80\end{aligned}$$

4) **Estimación de la Tendencia.** Tras aplicar el MCO a los datos de la serie desestacionalizada la tendencia estimada que se obtiene es:

$$\begin{aligned}\hat{T}_t &= 10.312 + 0.033t \\ R^2 &= 0.343\end{aligned}$$

5) **Obtención de la predicción.** Las predicciones que se obtienen para algunos períodos extramuestrales, tras la fórmula escrita en [1.57], son:

Para el período 53 (= primer trimestre):

$$\hat{y}_{52}(1) = 10.312 + 0.033 * 53 + 2.1671 = 14.23$$

Para el período 54 (= segundo trimestre):

$$\hat{y}_{52}(2) = 10.312 + 0.033 * 54 - 0.0724 = 12.02$$

Para el período 60 (cuarto trimestre):

$$\hat{y}_{52}(8) = 10.312 + 0.033 * 60 - 0.4339 = 11.86$$

Todas estas predicciones aparecen en la sexta columna del cuadro 1.16. La representación gráfica puede verse en la figura 1.21 y 1.22. En esta última se presentan también los errores de predicción, pudiéndose observar algunas serie de valores seguidas con el mismo signo, lo cual puede indicar alguna pauta que no ha sido recogida por los componentes tendencial y estacional.

ALISADO EXPONENCIAL DE HOLT-WINTERS

Es un método de estructura variable basado en la reestimación a lo largo de todos los períodos muestrales de la tendencia, la pendiente y el componente estacional mediante una ecuación de actualización. La predicción en un período se fórmula en término de los valores estimados de estos tres términos en el período en el que se fórmula la predicción. Se hace el mismo supuesto de linealidad local comentado ya al hablar del alisado exponencial de Holt.

Las tres ecuaciones de actualización toman la forma siguiente:

$$\hat{T}_t = \alpha [y_t - \hat{S}_i(t-1)] + (1-\alpha) [\hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_1(t-1)] \quad [1.58]$$

$$\hat{\beta}_i(t) = \gamma [\hat{T}_t - \hat{T}_{t-1}] + (1-\gamma) \hat{\beta}_i(t-1) \quad [1.59]$$

$$\hat{S}_i(t) = \delta [y_t - \hat{T}_t] + (1-\delta) \hat{S}_i(t-1) \quad i=1,2,\dots,s \quad [1.60]$$

Esta última ecuación se mantiene siempre que t corresponde a la estación i -ésima; en caso contrario, debe reemplazarse por la siguiente:

$$\hat{S}_i(t) = \hat{S}_i(t-1)$$

Donde:

\hat{T}_t = Estimación de la tendencia utilizando la información de y hasta el período t ;

$\hat{\beta}_i(t)$ = Estimación de la pendiente utilizando la información de y hasta el período t ;

$\hat{S}_i(t)$ = Estimación del componente estacional i -ésima utilizando la información de y hasta el período t .

α Es la constante de alisamiento de la tendencia.

γ Es la constante de alisamiento de la pendiente

δ Es la constante de alisamiento del componente estacional.

donde α , γ y δ son constantes que toman valores entre 0 y 1.

Hay que destacar que la relación [1.60] se fórmula genéricamente para los s componentes estacionales, pero solo uno de ellos, el que corresponde a la estación del período t -ésimo, actualiza su valor, el resto de los componentes mantiene el valor estimado en el período anterior.

La predicción para un período de la muestra toma la forma siguiente:

$$\hat{y}_{t-1}(1) = \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_1(t-1) + \hat{S}_i(t-1) \quad [1.61]$$

Donde el componente i -ésimo será el que corresponda al período t -ésimo.

Para los períodos extramuestrales podemos escribir:

$$\hat{y}_T(l) = \hat{T}_T + \hat{\beta}_1(T) * l + \hat{S}_i(T) \quad [1.62]$$

Donde se elegirá el componente estacional i -ésimo que corresponda al período $T + l$.

También en este caso vamos a demostrar que las ecuaciones de actualización [1.58], [1.59] y [1.60] pueden escribirse en forma de relaciones con mecanismos de corrección de error que, en este caso, toma la siguiente forma:

$$\hat{T}_t = \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_1(t-1) + \alpha e_{t-1}(1) \quad [1.63]$$

$$\hat{\beta}_1(t) = \hat{\beta}_1(t-1) + \alpha \gamma e_{t-1}(1) \quad [1.64]$$

$$\hat{S}_i(t) = \hat{S}_i(t-1) + \delta(1-\delta)e_{t-1}(1) \quad [1.65]$$

Prueba:

[1.63]: Teniendo en cuenta que

$$e_{t-1}(1) = y_t - \hat{y}_{t-1}(1), \quad y \quad \hat{y}_{t-1}(l) = \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_1(t-1) + \hat{S}_i(t-1)$$

a partir de [1.63] se puede escribir:

$$\hat{T}_t = \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_1(t-1) + \alpha [y_t - \hat{T}_{t-1} - \hat{\beta}_1(t-1) - \hat{S}_i(t-1)] = \hat{T}_{t-1} - \hat{\beta}_1(t-1) + \alpha e_{t-1}(1)$$

[1.64]: a partir de [1.63] se tiene que:

$$\hat{T}_t - \hat{T}_{t-1} = \hat{\beta}_1(t-1) + \alpha e_{t-1}(1)$$

Por lo que sustituimos [1.59] se obtiene:

$$\hat{\beta}_1(t) = \hat{\beta}_1(t-1) + \alpha e_{t-1}(1)$$

[1.65]: A partir de [1.60] podemos escribir:

$$\hat{S}_i(t) = \hat{S}_i(t-1) + \delta [y_t - \hat{T}_{t-1} - \hat{S}_i(t-1)]$$

Y sustituyendo en \hat{T}_t por su expresión en [1.63] se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{S}_i(t) &= \hat{S}_i(t-1) + \delta [y_t - \hat{T}_{t-1} - \hat{\beta}_1(t) = \hat{\beta}_1(t-1) + \alpha e_{t-1}(1) - \hat{S}_i(t-1)] = \\ &= \hat{S}_i(t-1) + \delta [e_{t-1}(1) - \alpha e_{t-1}(1)] = \hat{S}_i(t-1) + \delta(1 - \alpha)e_{t-1}(1) \end{aligned}$$

La aplicación del método de alisado exponencial de Holt-Winters puede verse en el cuadro 1.18 y figuras 1.24 y 1.25.

Cuadro (1.18) Serie 4. Alisado Exponencial de Holt-Winters ($\alpha = 0.2; \gamma = \delta = 0.9$)

t	Serie	Tendencia	Pendiente	Estación	Predicción	Error Pred	EC	EA	EAP	Estadísticos
1	13.36	10.51	0.18	2.78	12.53	0.83	0.69	0.83	6.21	ECM=0.32
2	10.73	10.72	0.20	0.00	10.61	0.12	0.02	0.12	1.16	ECM(8)=0.16
3	9.29	10.92	0.21	-1.63	9.29	0.00	0.00	0.00	0.02	EAM=0.44
4	10.82	11.16	0.23	-0.35	10.66	0.16	0.03	0.16	1.48	EAM(8)=0.30
5	13.24	11.21	0.07	2.11	14.18	-0.94	0.88	0.94	7.10	EAPM=4.00
6	11.2	11.26	0.05	-0.05	11.27	-0.07	0.00	0.07	0.63	EAPM(8)=2.54
7	9.59	11.29	0.04	-1.69	9.68	-0.09	0.01	0.09	0.94	
8	10	11.13	-0.14	-1.05	10.98	-0.98	0.96	0.98	9.80	
9	12.87	10.95	-0.18	1.94	13.10	-0.23	0.05	0.23	1.79	
10	10.77	10.78	-0.17	-0.01	10.72	0.05	0.00	0.05	0.46	
11	8.99	10.62	-0.16	-1.64	8.91	0.08	0.01	0.08	0.89	
12	10.18	10.62	-0.02	-0.5	9.41	0.77	0.59	0.77	7.56	
13	13.12	10.60	0.09	2.36	12.54	0.58	0.34	0.58	4.42	
14	10.54	10.53	0.04	-0.19	10.79	-0.25	0.06	0.25	2.37	
15	8.53	10.52	-0.07	-2.09	9.15	-0.62	0.38	0.62	7.27	
16	10.11	10.68	-0.07	-0.49	10.10	0.01	0.00	0.01	0.10	
17	12.9	10.85	-0.07	2.37	12.89	0.01	0.00	0.01	0.08	
18	10.57	11.05	-0.01	0.02	10.27	0.30	0.09	0.30	2.84	
19	9.27	11.24	0.14	-1.48	8.42	0.85	0.72	0.85	9.17	
20	10.48	11.31	0.17	-0.38	10.33	0.15	0.02	0.15	1.43	
21	13.54	11.29	0.19	2.48	13.38	0.16	0.03	0.16	1.18	
22	11.05	11.20	0.20	-0.17	11.26	-0.21	0.04	0.21	1.90	
23	9.32	11.01	0.08	-1.94	9.96	-0.64	0.41	0.64	6.87	
24	10.52	10.96	-0.01	-0.73	11.01	-0.49	0.24	0.49	4.66	
25	13.32	10.84	-0.09	2.16	13.77	-0.45	0.20	0.45	3.38	
26	10.45	10.54	-0.18	-0.52	10.94	-0.49	0.24	0.49	4.69	
27	9.54	10.26	-0.06	-1.48	8.90	0.64	0.41	0.64	6.71	
28	9.84	9.90	-0.12	-0.97	10.17	-0.33	0.11	0.33	3.35	
29	12	9.77	-0.28	1.53	12.88	-0.88	0.77	0.88	7.33	
30	9.74	9.85	-0.28	-0.52	9.74	0.00	0.00	0.00	0.00	
31	8.09	10.19	-0.35	-1.78	8.51	-0.42	0.18	0.42	5.19	
32	9.68	10.55	-0.16	-0.18	8.58	1.10	1.21	1.10	11.36	
33	12.31	10.79	0.06	2.37	11.14	1.17	1.37	1.17	9.50	
34	10.82	11.01	0.31	0.51	9.38	1.44	2.07	1.44	13.31	
35	8.95	11.20	0.35	-1.62	8.73	0.22	0.05	0.22	2.46	
36	10.15	11.40	0.25	-0.59	10.73	-0.58	0.34	0.58	5.71	
37	13.36	11.68	0.22	2.26	13.41	-0.05	0.00	0.05	0.37	
38	11.58	11.87	0.19	0.39	11.75	-0.17	0.03	0.17	1.47	
39	9.82	12.01	0.20	-1.59	9.78	0.04	0.00	0.04	0.41	
40	11.37	12.23	0.27	-0.34	11.01	0.36	0.13	0.36	3.17	
41	13.82	12.58	0.20	1.98	14.20	-0.38	0.14	0.38	2.75	
42	12.19	12.89	0.15	0.2	12.46	-0.27	0.07	0.27	2.21	
43	10.91	13.03	0.21	-1.34	10.57	0.34	0.12	0.34	3.12	
44	12.8	13.01	0.34	0.17	12.10	0.70	0.49	0.70	5.47	
45	14.81	13.83	0.32	1.92	14.90	-0.09	0.01	0.09	0.61	
46	12.51	12.68	0.16	-0.45	13.42	-0.91	0.83	0.91	7.27	
47	10.93	12.50	-0.01	-2	11.85	-0.92	0.85	0.92	8.42	
48	12.31	12.49	-0.16	-0.45	13.17	-0.86	0.74	0.86	6.99	
49	14.67	12.40	-0.15	1.98	14.59	0.08	0.01	0.08	0.55	
50	11.91	12.50	-0.18	-0.58	12.08	-0.17	0.03	0.17	1.43	
51	11.15	12.49	-0.03	-1.4	10.32	0.83	0.69	0.83	7.44	
52	11.73	12.40	-0.08	-0.65	12.01	-0.28	0.08	0.28	2.39	
53	14.38				14.31	0.07	0.00	0.07	0.49	
54	11.86				11.67	0.19	0.04	0.19	1.60	
55	10.8				10.76	0.04	0.00	0.04	0.37	
56	12.12				11.44	0.68	0.46	0.68	5.61	
57	14.23				13.99	0.24	0.06	0.24	1.70	
58	11.26				11.35	-0.09	0.01	0.09	0.82	
59	10.83				10.44	0.39	0.15	0.39	3.56	
60	11.84				11.12	0.72	0.52	0.72	6.09	

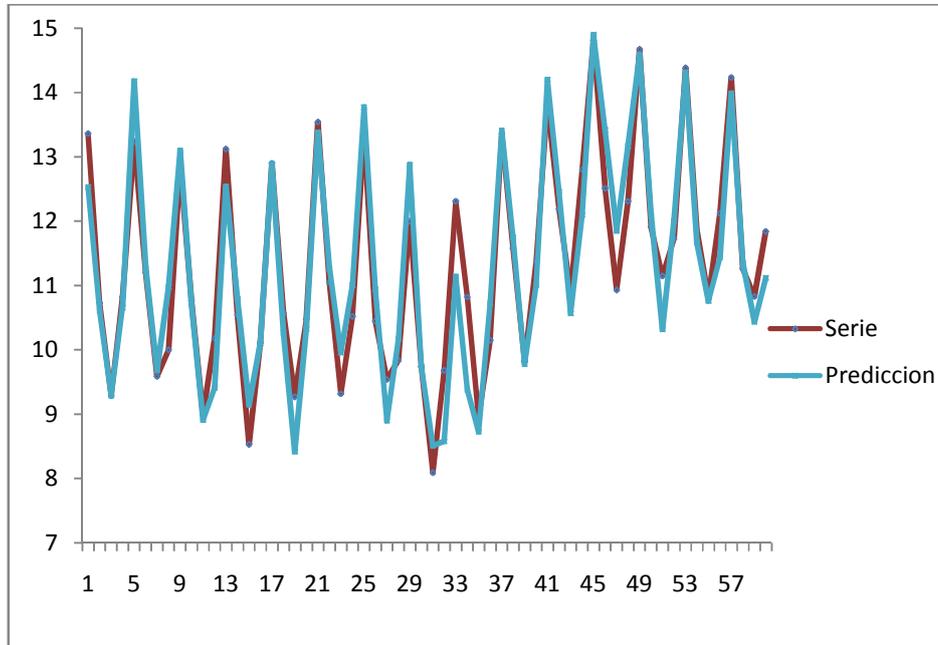


FIG 1.24 Serie 4.Serie y Predicción mediante Método Alisado exponencial de H-W.

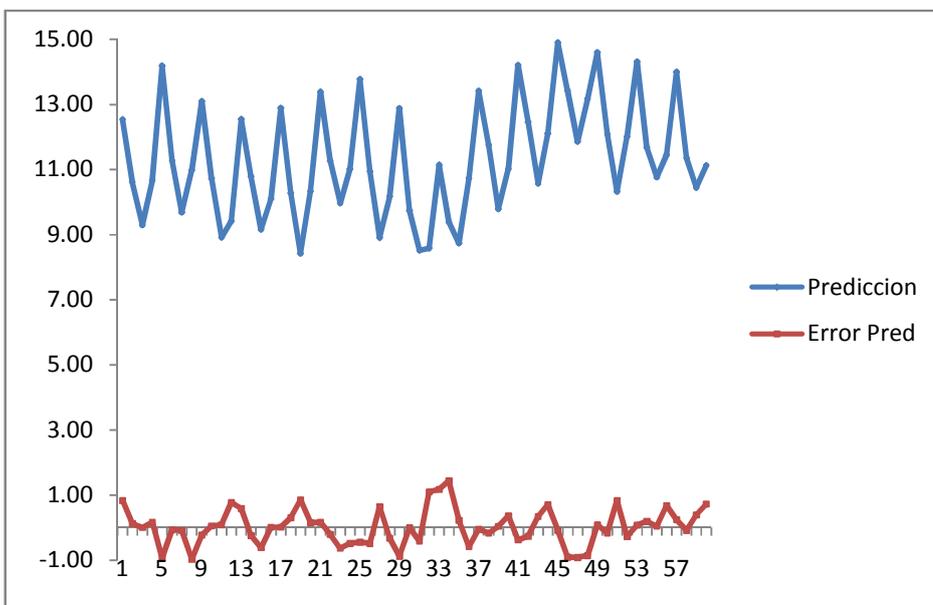


FIG 1.25 Error Predicción y Predicción

Comentario del cuadro [1.18].

Los valores de los parámetros elegidos (posteriormente comentaremos esta elección) han sido $(\alpha = 0.2; \gamma = 0.9; \delta = 0.9)$.

Los valores iniciales se han obtenido a partir de la regresión de la serie respecto a un polinomio lineal del tiempo y variable ficticia que representan el comportamiento estacional y proporciona los siguientes valores iniciales (véase el cuadro 15):

$$\begin{array}{ll} \hat{T}_0 = \hat{\beta}_0 = 10.311 & \hat{\beta}_1(0) = 0.033 \\ \hat{S}_1(0) = \hat{\gamma}_1 = 2.187 & \hat{S}_2(0) = \hat{\gamma}_2 = -0.087 \\ \hat{S}_3(0) = \hat{\gamma}_3 = -1.634 & \hat{S}_4(0) = \hat{\gamma}_4 = -0.466 \end{array}$$

A partir de estos valores iniciales se reestiman los valores de la tendencia, la pendiente y el componente estacional en las columnas tercera, cuarta y quinta respectivamente.

El primer valor para la tendencia es:

$$\hat{T}_1 = 0.2[y_1 - \hat{S}_1(0)] + 0.8[\hat{T}_0 - \hat{\beta}_1(0)] = 0.2[13.36 - 2.187] + 0.8[10.311 + 0.033] = 10.51$$

El segundo valor para la tendencia es la siguiente:

$$\hat{T}_1 = 0.2[y_2 - \hat{S}_2(0)] + 0.8[\hat{T}_1 - \hat{\beta}_2(1)] = 0.2[10.73 + 0.087] + 0.8[10.51 + 0.18] = 10.72$$

Y así sucesivamente.

El primer valor de la pendiente en la cuarta columna viene dado por:

$$\hat{\beta}_1(1) = 0.9[\hat{T}_1 - \hat{T}_0] + 0.1\hat{\beta}_1(0) = 0.9[10.51 - 10.311] + 0.1 * 0.18$$

Asimismo, el segundo valor de la pendiente (véase la cuarta columna) será:

$$\hat{\beta}_1(1) = 0.9[\hat{T}_1 - \hat{T}_0] + 0.1\hat{\beta}_1(0) = 0.9[10.72 - 10.51] + 0.1 * 0.20$$

Los valores de los cuatro componentes estacionales en el primer período (= primer trimestre) son:

$$\hat{S}_1(1) = 0.9[y_1 - \hat{T}_1] + 0.1\hat{S}_2(0) = 0.9[13.36 - 10.51] + 0.1 * 2.187 = 2.78$$

$$\hat{S}_2(1) = \hat{S}_2(0) = -0.087$$

$$\hat{S}_3(1) = \hat{S}_3(0) = -1.634$$

$$\hat{S}_4(1) = \hat{S}_4(0) = -0.466$$

Para el segundo período (= segundo trimestre) las estimaciones son:

$$\hat{S}_1(2) = \hat{S}_2(1) = 2.78$$

$$\hat{S}_2(2) = 0.9[y_2 - \hat{T}_2] + 0.1 * \hat{S}_2(1) = 0.9[10.73 - 10.72] + 0.1 * (-0.08) = 0.00$$

$$\hat{S}_3(2) = \hat{S}_3(1) = -1.634$$

$$\hat{S}_4(2) = \hat{S}_4(1) = -0.466$$

Y así sucesivamente para el resto de los períodos.

La predicción para el primer período extramuestral (= primer trimestre) es la siguiente:

$$\hat{y}_{s_2}(1) = \hat{T}_{s_2} + \hat{\beta}_1(52) + \hat{S}_2(52) = 12.40 - 0.08 + 1.98 = 14.31$$

Para el segundo período extramuestral (= segundo trimestre) la predicción es:

$$\hat{y}_{s_2}(2) = \hat{T}_{s_2} + \hat{\beta}_1(52) * 2 + \hat{S}_2(52) = 12.40 - 0.16 - 0.58 = 11.67$$

Y para el último (=cuatro trimestres):

$$\hat{y}_{s_2}(8) = \hat{T}_{s_2} + \hat{\beta}_1(52) * 8 + \hat{S}_4(52) = 12.40 - 0.64 - 0.65 = 11.12$$

Puede verse cómo las predicciones dependen de los valores asignados a $\alpha; \gamma; \delta$.

Habrán tantos métodos de predicción como posibles combinaciones de valores de estos tres parámetros. Por ello, en el cuadro 1.19 se ha llevado a cabo un análisis comparado,

considerado ocho combinaciones y calculando los valores que toman los tres estadísticos para las mismas.

Un análisis comparado de los métodos utilizados para la serie 4 puede hacerse a partir del contenido del cuadro 1.19.

Cuadro (1.19): Serie 4: Análisis comparado.

Método	ECM	ECM(8)	EAM	EAM(8)	EAPM	EAPM(8)
Tendencia Lineal con variable Ficticia	0.47	0.14	0.52	0.28	4.79	2.43
Descomposición	0.47	0.16	0.52	0.29	4.79	2.49
Holt-Winters	0.32	0.16	0.44	0.30	4.00	2.45

Como puede verse, no hay una diferencia notable entre los tres métodos, llegándose con todos ellos a unos resultados similares.

**UNIDAD II: INTRODUCCION AL ENFOQUE PARAMETRICO DEL
ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES.**

TITULO DEL TEMA:

Introducción al Enfoque Paramétrico del Análisis de Series Temporales.

OBJETIVO:

- ✓ Introducir los conceptos en los que se basa la Metodología de Series Temporales.

CONTENIDO:

2.7.1 La Serie Temporal como Realización de un Proceso Estocástico.

2.7.2 Proceso Estocásticos Estacionarios.

2.7.3 Funciones de Autovarianza y Autocorrelación.

2.7.4 Funciones de Autocorrelación Parcial.

2.7.5 Funciones de Autovarianza y Autocorrelación Muestral.

2.7.6 Funciones de Autocorrelación Parcial Muestral.

DURACIÓN:

9 horas

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

- ✓ AZNAR ANTONIO, Y TRIVEZ FRANCISCO JAVIER. Métodos de Predicción en Economía II.
- ✓ PÉREZ LÓPEZ, CÉSAR. Econometría de las Series Temporales, Madrid, 2006. PEARSON PRENTICE HALL.

2.7 UNIDAD II: INTRODUCCIÓN AL ENFOQUE PÁRAMETRICO DELANÁLISIS DE SERIE TEMPORALES.

2.7.1 LA SERIE TEMPORAL COMO REALIZACIÓN DE UN PROCESO ESTOCÁSTICO.

Esta metodología tiene su origen en un trabajo de Box y Jenkins (1970) y la idea fundamental radica en la estrategia que ellos proponen para construir modelos, los cuales no solo deben ser adecuados para representar el comportamiento de los datos observados, sino que la elección debe ser sugerida para los datos mismos, lo que se contrapone en el enfoque tradicional, que simplemente busca lograr el mejor ajuste de modelos preconcebidos según los datos que se manejen.

La metodología Box-Jenkins, ha sido desarrollada y aplicada a distintos campos, como la psicología, la medicina, la física, la ingeniería y, la economía.

En este capítulo introduciremos los conceptos fundamentales que sirven de soporte para la Metodología de Box- Jenkins de series temporales, que es un tipo de modelo muy diferente al modelo clásico. La diferencia más importantes entre estos métodos son:

- ✓ Hasta hace poco, sólo nos planteábamos ver la influencia de un conjunto de variables exógenas sobre la endógena. Ahora, en cambio, el objetivo es estudiar el comportamiento de una variable contando sólo con la información de su propio pasado y presente. Es decir, no aparecen variables explicativas.

A pesar de que puede parecer una restricción importante considerar sólo la historia pasada y reciente de una variable para estudiar su comportamiento, estos modelos son muy útiles, porque proporcionan predicciones a corto plazo tan buenas como otros modelos alternativos. No obstante, si el objetivo es la predicción de la variable a medio y a largo plazo, es evidente que habría que tener en cuenta relaciones entre la variable objeto de predicción y otras que le afecten tanto contemporánea como dinámicamente.

CONCEPTO DE PROCESO ESTOCÁSTICO

- ✓ Conjunto de variables aleatorias que dependen de un parámetro o argumento. En el análisis de Series Temporales, este parámetro es el tiempo.
- ✓ Familia de variables aleatorias $\{y_t\}$ donde $t = -\alpha \dots \alpha$ señala el tiempo tal que para cada serie finita de elecciones de t , esto es t_1, t_2, \dots, t_n se define una distribución de probabilidad conjunta para las correspondientes variables aleatorias $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n}$.

CONCEPTO DE SERIE TEMPORAL

En el contexto de los procesos estocásticos, una Serie Temporal tendrá un carácter aleatorio, pudiéndose interpretar como una muestra de tamaño 1 tomada en períodos sucesivos de tiempo para cada una de las variables aleatorias sobre las que hay definida una distribución de probabilidad conjunta, que constituye lo que denominamos proceso estocástico. Según esto, podemos enunciar la siguiente definición de Series Temporales:

Definición: Conjunto de valores observados de distintas variables aleatorias correspondientes a períodos de tiempo consecutivos, dichos períodos tienen la misma amplitud, y la Serie tiene un carácter discreto.

DESCRIPCIÓN DE UN PROCESO ESTÓCÁSTICO

Una forma de escribir un proceso estocástico es especificando la distribución de probabilidad conjunta de $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$ para cualquier conjunto (t_1, t_2, \dots, t_n) y cualquier valor de n , pero esto resulta complicado en la práctica. Otra manera más sencilla de describirlo es hacerlo a partir de sus momentos, particularmente los de primer y segundo orden;² concretamente, la media:

$$\mu_t = E(y_t) \quad [2.1]$$

La varianza es:

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(y_t) = E(y_t - \mu_t)^2 \quad [2.2]$$

Y las covarianzas entre variables referidas a distintos periodos de tiempo:

$$\gamma_{t,s} = \text{Cov}(y_t, y_s) = E[(y_t - \mu_t)(y_s - \mu_s)] \quad [2.3]$$

² En el caso en que este proceso sea normal, este queda perfectamente caracterizado a través de los dos primeros momentos por lo cual en dicho caso los métodos coincidirán. Con el supuesto de normalidad, que será el que habitualmente efectuaremos, diremos que el proceso es gaussiano.

2.7.2 PROCESOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONARIOS

Para definir la estacionariedad de un proceso estocástico se utiliza la función de distribución o bien los momentos. En el primer caso, se enunciará la propiedad de estacionariedad en sentido estricto o fuerte, mientras que en el segundo, se enunciará la propiedad de estacionariedad en sentido amplio o débil.

ESTACIONARIEDAD EN SENTIDO ESTRICTO O FUERTE

Diremos que un proceso estocástico es estacionario (en sentido estricto) cuando su función de distribución conjunta es invariante respecto a un desplazamiento en el tiempo. Es decir, considerando que t_1, t_2, \dots, t_n corresponden a períodos sucesivos que denominamos como $t, t + 1, \dots, t + k$, cuando:

$$F(y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+k}) = F(y_{t+m}, y_{t+1+m}, \dots, y_{t+k+m}) \text{ Para cualquier } t, k \text{ y } m. \quad [2.4]$$

ESTACIONARIEDAD EN SENTIDO AMPLIO O DÉBIL

A partir del concepto de estacionariedad en sentido estricto, esto es, cuando se satisface [2.4], se derivan tres propiedades estas son:

- 1) Las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias no dependen del tiempo; es decir, son constantes:

$$E(y_t) = E(y_{t+m}) \quad \forall m \quad [2.5]$$

O bien:

$$\mu_t = \mu \quad \forall t$$

2) Las varianzas tampoco dependen del tiempo y son finitas, es decir:

$$V a r (y_t) = V a r (y_{t+m}) < \infty \quad \forall m \quad [2.6]$$

O bien:

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 \quad \forall t$$

3) Las covarianzas entre dos períodos de tiempo distintos solamente dependen del lapso de tiempo transcurrido entre estos dos períodos. Esto es:

$$C o v (y_t, y_{t'}) = C o v (y_{t+m}, y_{t'+m}) \quad \forall m \quad [2.7]$$

O bien:

$$\gamma_{t,s} = \gamma_{|t,s|} \quad \forall t,s$$

Prueba: A partir de [2.4] se cumple:

$$F (y_t) = F (y_{t+m}) \quad \forall m \quad [2.8]$$

$$F (y_t, y_{t'}) = F (y_{t+m}, y_{t'+m}) \quad \forall m \quad [2.9]$$

[2.8] implica:

$$1) E (y_t) = E (y_{t+m}) \quad (c.q.d)$$

$$2) V a r (y_t) = V a r (y_{t+m}) \quad (c.q.d)$$

Mientras que [2.9] implica:

$$3) C o v (y_t, y_{t'}) = C o v (y_{t+m}, y_{t'+m}) \quad (c.q.d)$$

Cuando se cumplan estas tres propiedades diremos que el proceso estocástico es estacionario en sentido amplio o débil.

Resumiendo, diremos que un proceso estocástico es estacionario en sentido estricto o fuerte cuando su función de distribución conjunta es invariante respecto a un desplazamiento en el tiempo, mientras que diremos que un proceso es estacionario en sentido amplio o débil cuando es estacionario para los dos primeros momentos; esto es estacionario en media satisface 1) y en varianza satisface, además de 1), 2) y 3).

2.7.3 FUNCIONES DE AUTOCOVARIANZA Y AUTOCORRELACIÓN.

✓ FUNCIÓN DE AUTOCOVARIANZA

Como se vió en la sección anterior, un proceso estocástico estacionario se caracteriza por tener esperanza matemática constante, $E(y_t) = \mu$, y la varianza constante y finita, $Var(y_t) = E(y_t - \mu)^2 < \alpha$. Además, las covarianzas entre dos observaciones de la misma serie temporal sólo dependen del lapso temporal transcurrido entre dichos períodos.

En este contexto denominaremos por autocovarianza de orden j (γ_j) la covarianza separada j períodos de la misma serie temporal. Esto es:

$$\gamma_j = Cov(y_{t-\mu})(y_{t-j}) = E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] \quad [2.10]$$

Obsérvese en [2.10] que cuando $j = 0$, tendremos la varianza.

$$\gamma_0 = E(y_t - \mu)^2$$

El conjunto de autocovarianzas obtenidas para distintos valores de j debe cumplir, las siguientes propiedades:

- 1) $|\gamma_j| \leq \gamma_0$
- 2) $\gamma_j = \gamma_{-j}$ (simetría)

Prueba:

$$\gamma_j = E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] = E[(y_t - \mu)(y_{t+j} - \mu)] = \gamma_{-j} \quad (c.q.d)$$

✓ FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

La función de autocorrelación de orden j (ρ_j) es la correlación separada j períodos de la misma serie temporal. Esto es:

$$\rho_j = Corr(y_t, y_{t-j}) = \frac{Cov(y_t, y_{t-j})}{\sqrt{Var(y_t)} \sqrt{Var(y_{t-j})}} = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \quad [2.11]$$

Al conjunto de autocorrelaciones obtenidas para distintos valores de j se le denomina *función de autocorrelación* (FAC).

Teniendo en cuenta la expresión [2.11], así como las propiedades de la función de autocovarianza, podemos enunciar las siguientes propiedades de la función de

autocorrelación:

- a) $\rho_0 = 1$
- b) $|\rho_j| \leq 1$
- c) $\rho_j = \rho_{-j}$ (simetría)

Adicionalmente a estas tres propiedades, supondremos también que se satisface la siguiente:

$$d) \lim_{j \rightarrow \infty} \rho_j = 0$$

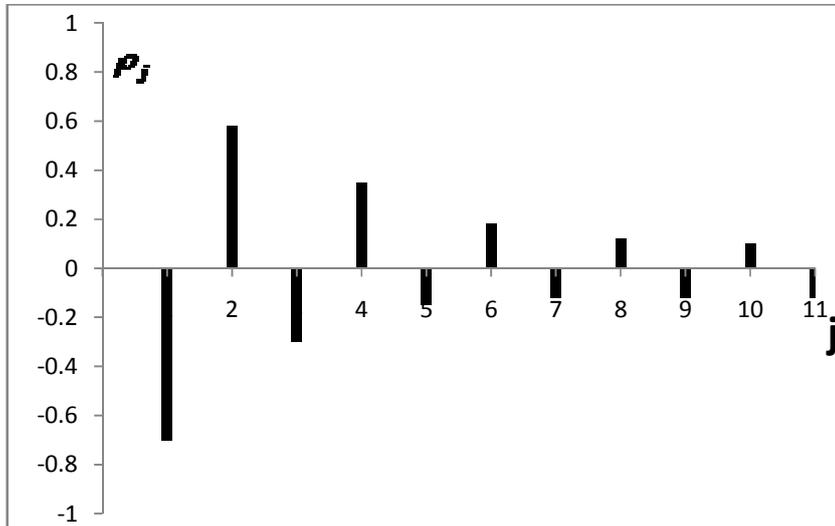


FIG 2.1. Correlograma FAC.

El cumplimiento de esta propiedad *d)* es una condición necesaria para poder establecer que el proceso estocástico en cuestión, además de estacionario es ergódico (Es decir que la covarianza entre pares de variables del proceso tiende a reducirse cuando mayor sea su separación temporal). Pues también de manera intuitiva podemos señalar que la ergodicidad posibilita obtener estimadores consistentes de dichos parámetros por cuanto si *d)* no se satisficiera, esto es el valor de ρ_j tuviera valores elevados para órdenes *j* altos significaría que al aumentar el tamaño de la muestra disponible se añadiría poca información nueva como consecuencia de que en dicho caso debería calcularse un mayor número de autocovarianzas (y autocorrelaciones) para caracterizar adecuadamente el proceso. Esto desde el punto de vista estadístico, nos llevaría a que los estimadores obtenidos no serian consistentes.

La representación gráfica de la función de autocorrelación (FAC) se denomina *correlograma*.

2.7.4 FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN PARCIAL.

El concepto de coeficiente de autocorrelación parcial entre y_t e y_{t-j} es similar al de coeficiente de autocorrelación entre dichos valores de la serie temporal, salvo porque se mide dicha correlación ajustada por el efecto de los retardos intermedios. Es decir, al obtener la correlación entre y_t e y_{t-j} se elimina la influencia que, sobre ambas tienen

$$y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-j+1}.$$

Analíticamente definiremos el coeficiente de autocorrelación parcial de orden j (Π_j) como la correlación condicional siguiente:

$$\Pi_j = \text{Corr}(y_t, y_{t-j} \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-j+1})$$

Considerando, sin pérdida de generalidad, que el proceso estacionario $\{y_t\}$ tiene media nula, el coeficiente de autocorrelación parcial (Π_j) será igual al coeficiente de autocorrelación entre $(y_t - \hat{y}_t)$ e $(y_{t-j} - \hat{y}_{t-j})$, siendo \hat{y}_t e \hat{y}_{t-j} , respectivamente, las mejores predicciones lineales, en el sentido del mínimo error cuadrado medio, de y_t y de y_{t-j} como funciones lineales de $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-j+1}$. Esto es:

$$\Pi_j = \frac{\text{Cov}[(y_t - \hat{y}_t), (y_{t-j} - \hat{y}_{t-j})]}{\sqrt{\text{Var}(y_t - \hat{y}_t)} \sqrt{\text{Var}(y_{t-j} - \hat{y}_{t-j})}} \quad [2.12]$$

Cumpléndose que:

$$\Pi_j = \frac{\rho_j - \alpha_1 \rho_{j-1} - \alpha_2 \rho_{j-2} - \dots - \alpha_{j-1} \rho_1}{1 - \alpha_1 \rho_1 - \alpha_2 \rho_2 - \dots - \alpha_{j-1} \rho_{j-1}} \quad [2.13]$$

Para demostrar [2.13] comenzaremos escribiendo \hat{y}_t , según lo comentado, como:

$$\hat{y}_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_{j-1} y_{t-j+1}$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}$ son coeficientes de la regresión lineal obtenidos al minimizar:

$$E(y_t - \hat{y}_t)^2 = E(y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_{j-1} y_{t-j+1})^2 \quad [2.14]$$

Minimizando [2.14] se cumple:

$$\frac{\partial E(y_t - \hat{y}_t)^2}{\partial \alpha_1} = 0 \Rightarrow -2E \left[y_{t-1} (y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_{j-1} y_{t-j+1}) \right] = 0$$

$$\frac{\partial E(y_t - \hat{y}_t)^2}{\partial \alpha_2} = 0 \Rightarrow -2E \left[y_{t-2} (y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_{j-1} y_{t-j+1}) \right] = 0$$

...

$$\frac{\partial E(y_t - \hat{y}_t)^2}{\partial \alpha_{j-1}} = 0 \Rightarrow -2E \left[y_{t-j+1} (y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_{j-1} y_{t-j+1}) \right] = 0$$

Luego:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_1 \gamma_0 + \alpha_2 \gamma_1 + \dots + \alpha_{j-1} \gamma_{j-2} \\ \gamma_2 &= \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_0 + \dots + \alpha_{j-1} \gamma_{j-3} \\ &\dots \\ \gamma_{j-1} &= \alpha_1 \gamma_{j-2} + \alpha_2 \gamma_{j-3} + \dots + \alpha_{j-1} \gamma_0 \end{aligned} \quad [2.15]$$

El sistema de $k-1$ ecuaciones lineales [2.15] puede expresarse genéricamente como:

$$\gamma_i = \alpha_1 \gamma_{i-1} + \alpha_2 \gamma_{i-2} + \dots + \alpha_{j-1} \gamma_{i-j+1} \quad 1 \leq i \leq j-1 \quad [2.16]$$

Dividiendo a ambos lados de [2.16] por γ_0 , se obtiene:

$$\rho_i = \alpha_1 \rho_{i-1} + \alpha_2 \rho_{i-2} + \dots + \alpha_{j-1} \rho_{i-j+1} \quad 1 \leq i \leq j-1 \quad [2.17]$$

y desde la expresión [2.17] puede escribirse el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{j-2} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{j-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{j-2} & \rho_{j-3} & \rho_{j-4} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{j-1} \end{pmatrix} \quad [2.18]$$

Análogamente, \hat{y}_{t-j} será igual a:

$$\hat{y}_{t-j} = \beta_1 y_{t-j+1} + \beta_2 y_{t-j+2} + \cdots + \beta_{j-1} y_{t-1}$$

Donde los β_i son los coeficientes que minimizan:

$$E(y_{t-j} - \hat{y}_{t-j})^2 = E(y_{t-j} - \beta_1 y_{t-j+1} - \beta_2 y_{t-j+2} - \cdots - \beta_{j-1} y_{t-1})^2$$

operando como antes, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{j-2} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{j-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{j-2} & \rho_{j-3} & \rho_{j-4} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{j-1} \end{pmatrix} \quad [2.19]$$

Y comparando [2.18] y [2.19], se observa que:

$$\alpha_i = \beta_i \quad 1 \leq i \leq j-1 \quad [2.20]$$

De acuerdo con las expresiones que acabamos de calcular, se obtiene:

$$Var(y_t - \hat{y}_t) = Var(y_{t-j} - \hat{y}_{t-j}) = \gamma_0 - \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 - \cdots - \alpha_{j-1} \gamma_{j-1} \quad [2.21]$$

$$Cov[(y_t - \hat{y}_t), (y_{t-j} - \hat{y}_{t-j})] = \gamma_j - \alpha_1 \gamma_{j-1} - \alpha_2 \gamma_{j-2} - \cdots - \alpha_{j-1} \gamma_1 \quad [2.22]$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
Var(y_t - \hat{y}_t) &= E\left[\left(y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_{j-1} y_{t-j+1}\right)^2\right] \\
&= E\left(y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_{j-1} y_{t-j+1}\right) - \\
&\quad \alpha_1 E\left[y_{t-1}\left(y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_{j-1} y_{t-j+1}\right)\right] - \\
&\quad \alpha_2 E\left[y_{t-2}\left(y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_{j-1} y_{t-j+1}\right)\right] - \dots - \\
&\quad \alpha_{j-1} E\left[y_{t-j+1}\left(y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_{j-1} y_{t-j+1}\right)\right] \\
&= (\gamma_0 - \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 - \dots - \alpha_{j-1} \gamma_{j-1}) - \alpha_1 (\gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0 - \alpha_2 \gamma_1 - \dots - \alpha_{j-1} \gamma_{j-2}) - \\
&\quad - \alpha_2 (\gamma_2 - \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_0 - \dots - \alpha_{j-1} \gamma_{j-3}) - \dots - \\
&\quad \alpha_{j-1} (\gamma_{j-1} - \alpha_1 \gamma_{j-2} - \alpha_2 \gamma_{j-3} - \dots - \alpha_{j-1} \gamma_0)
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta [2.16]:

$$Var(y_t - \hat{y}_t) = \gamma_0 - \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 - \dots - \alpha_{j-1} \gamma_{j-1}$$

Por otra parte, obtendremos:

$$\begin{aligned}
Var(y_{t-j} - \hat{y}_{t-j}) &= E\left[\left(y_{t-j} - \beta_1 y_{t-j+1} - \beta_2 y_{t-j+2} - \dots - \beta_{j-1} y_{t-1}\right)^2\right] \\
&= E\left[y_{t-j}\left(y_{t-j} - \beta_1 y_{t-j+1} - \beta_2 y_{t-j+2} - \dots - \beta_{j-1} y_{t-1}\right)\right] - \\
&\quad \beta_1 E\left[y_{t-j+1}\left(y_{t-j} - \beta_1 y_{t-j+1} - \beta_2 y_{t-j+2} - \dots - \beta_{j-1} y_{t-1}\right)\right] - \\
&\quad \beta_2 E\left[y_{t-j+2}\left(y_{t-j} - \beta_1 y_{t-j+1} - \beta_2 y_{t-j+2} - \dots - \beta_{j-1} y_{t-1}\right)\right] - \dots - \\
&\quad \beta_{j-1} E\left[y_{t-1}\left(y_{t-j} - \beta_1 y_{t-j+1} - \beta_2 y_{t-j+2} - \dots - \beta_{j-1} y_{t-1}\right)^2\right] \\
&= (\gamma_0 - \beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2 - \dots - \beta_{j-1} \gamma_{j-1}) - \\
&\quad \beta_1 (\gamma_1 - \beta_1 \gamma_0 - \beta_2 \gamma_1 - \dots - \beta_{j-1} \gamma_{j-2}) - \\
&\quad \beta_2 (\gamma_2 - \beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_0 - \dots - \beta_{j-1} \gamma_{j-3}) - \dots - \\
&\quad \beta_{j-1} (\gamma_{j-1} - \beta_1 \gamma_{j-2} - \beta_2 \gamma_{j-3} - \dots - \beta_{j-1} \gamma_0)
\end{aligned}$$

y por [2.16]:

$$\text{Var}(y_{t-j} - \hat{y}_{t-j}) = \gamma_0 - \beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2 - \cdots - \beta_{j-1}\gamma_{j-1}$$

Teniendo en cuenta ahora [2.20], podemos escribir:

$$\text{Var}(y_t - \hat{y}_t) = \text{Var}(y_{t-j} - \hat{y}_{t-j}) = \gamma_0 - \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 - \cdots - \alpha_{j-1}\gamma_{j-1}$$

[2.22]:

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left[(y_t - \hat{y}_t), (y_{t-j} - \hat{y}_{t-j})\right] &= \\ E\left[(y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \cdots - \alpha_{j-1} y_{t-j+1})(y_{t-j} - \beta_1 y_{t-j+1} - \beta_2 y_{t-j+2} - \cdots - \beta_{j-1} y_{t-1})\right] \\ &= E\left[(y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \cdots - \alpha_{j-1} y_{t-j+1}) - (y_{t-j} - \alpha_1 y_{t-j+1} - \alpha_2 y_{t-j+2} - \cdots - \alpha_{j-1} y_{t-1})\right] \\ &= (\gamma_j - \alpha_1 \gamma_{j-1} - \alpha_2 \gamma_{j-2} - \cdots - \alpha_{j-1} \gamma_1) - \alpha_1 (\gamma_{j-1} - \alpha_1 \gamma_{j-2} - \alpha_2 \gamma_{j-3} - \cdots - \alpha_{j-1} \gamma_0) - \\ &\quad \alpha_2 (\gamma_{j-2} - \alpha_1 \gamma_{j-3} - \alpha_2 \gamma_{j-4} - \cdots - \alpha_{j-1} \gamma_1) - \cdots - \alpha_{j-1} (\gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0 - \alpha_2 \gamma_1 - \cdots - \alpha_{j-1} \gamma_{j-2}) \end{aligned}$$

y considerando [2.16]:

$$\text{Cov}\left[(y_t - \hat{y}_t), (y_{t-j} - \hat{y}_{t-j})\right] = \gamma_j - \alpha_1 \gamma_{j-1} - \alpha_2 \gamma_{j-2} - \cdots - \alpha_{j-1} \gamma_1$$

Reemplazando [2.21] y [2.22] en [2.12] se obtiene directamente [2.13]:

$$\begin{aligned} \Pi_j &= \frac{\text{Cov}\left[(y_t - \hat{y}_t), (y_{t-j} - \hat{y}_{t-j})\right]}{\sqrt{\text{Var}(y_t - \hat{y}_t)} \sqrt{\text{Var}(y_{t-j} - \hat{y}_{t-j})}} = \frac{\gamma_j - \alpha_1 \gamma_{j-1} - \alpha_2 \gamma_{j-2} - \cdots - \alpha_{j-1} \gamma_1}{\gamma_0 - \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 - \cdots - \alpha_{j-1} \gamma_{j-1}} \\ &= \frac{\rho_j - \alpha_1 \rho_{j-1} - \alpha_2 \rho_{j-2} - \cdots - \alpha_{j-1} \rho_1}{1 - \alpha_1 \rho_1 - \alpha_2 \rho_2 - \cdots - \alpha_{j-1} \rho_{j-1}} \end{aligned}$$

Los coeficientes de autocorrelación parcial pueden expresarse en función únicamente de los coeficientes de autocorrelación. Para ello, debemos reemplazar los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}$ en [2.13].

Aplicando la regla de Cramer al sistema de ecuaciones [2.18]:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{i-2} & \rho_1 & \rho_i & \cdots & \rho_{j-2} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{i-3} & \rho_2 & \rho_{i-1} & \cdots & \rho_{j-3} \\ \vdots & \vdots \\ \rho_{j-2} & \rho_{j-3} & \rho_{j-i} & \rho_{j-1} & \rho_{j-i-2} & \cdots & 1 & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{i-2} & \rho_{i-1} & \rho_i & \cdots & \rho_{j-2} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{i-3} & \rho_{i-2} & \rho_{i-1} & \cdots & \rho_{j-3} \\ \vdots & \vdots \\ \rho_{j-2} & \rho_{j-3} & \rho_{j-i} & \rho_{j-i-1} & \rho_{j-i-2} & \cdots & 1 & \end{vmatrix}} \quad [2.23]$$

Sustituyendo los valores de [2.23] en [2.13] y multiplicándolo tanto el numerador como el denominador de [2.13] por:

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{j-2} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{j-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{j-2} & \rho_{j-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Se obtiene la siguiente expresión para los coeficientes de autocorrelación parcial (Π_j):

$$\Pi_j = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{j-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{j-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{j-1} & \rho_{j-2} & \rho_{j-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{j-2} & \rho_{j-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{j-3} & \rho_{j-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{j-1} & \rho_{j-2} & \rho_{j-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \quad [2.24]$$

Para comprender mejor este resultado veamos un caso particular; en concreto, consideremos que $j=3$, en cuyo caso [2.23] será igual a:

$$\Pi_3 = \frac{\rho_3 - \alpha_1 \rho_2 - \alpha_2 \rho_1}{1 - \alpha_1 \rho_1 - \alpha_2 \rho_2} \quad [2.25]$$

Siendo α_1 y α_2 , a partir de [2.23], iguales a:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_2 & 1 \\ 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \\ 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \quad [2.26]$$

Sustituyendo [2.26] en [2.25] y multiplicando el numerador y el denominador por:

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \frac{\rho_3 - \frac{\begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_2 & 1 \\ 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \rho_2 - \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \\ 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \rho_1}{1 - \frac{\begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_2 & 1 \\ 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \rho_1 - \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \\ 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \rho_2} * \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} \rho_3 - \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_2 & 1 \\ 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} \rho_2 - \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \\ 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} \rho_1}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_2 & 1 \\ 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} \rho_1 - \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \\ 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} \rho_2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

El coeficiente de autocorrelación parcial puede derivarse también como sigue:

Consideremos el modelo de regresión con variable dependiente y_t (supondremos que su media es cero) y las variables independientes $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-j}$, es decir:

$$y_t = \phi_{j1}y_{t-1} + \phi_{j2}y_{t-2} + \dots + \phi_{jj}y_{t-j} + u_t \quad [2.27]$$

Donde u_t esta incorrelacionado con y_{t-1} para $i \geq 1$.

Multiplicando en ambos lados de [2.27] por y_{t-i} , y aplicando esperanzas matemáticas se obtiene:

$$\gamma_i = \phi_{j1}\gamma_{i-1} + \phi_{j2}\gamma_{i-2} + \dots + \phi_{jj}\gamma_{i-j} \quad [2.28]$$

Prueba:

$$E(y_t y_{t-i}) = \phi_{j1}E(y_{t-1} y_{t-i}) + \phi_{j2}E(y_{t-2} y_{t-i}) + \dots + \phi_{jj}E(y_{t-j} y_{t-i}) + E(u_t y_{t-i})$$

Luego:

$$\gamma_i = \phi_{j1}\gamma_{i-1} + \phi_{j2}\gamma_{i-2} + \dots + \phi_{jj}\gamma_{i-j}$$

Dividiendo por γ_0 en ambos lados de [2.28]:

$$\rho_i = \phi_{j1}\rho_{i-1} + \phi_{j2}\rho_{i-2} + \dots + \phi_{jj}\rho_{i-j} \quad [2.29]$$

Desde [2.29] y haciendo $i=1, 2, \dots, j$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_{j1} + \phi_{j2}\rho_1 + \dots + \phi_{jj}\rho_{j-1} \\ \rho_2 &= \phi_{j1}\rho_1 + \phi_{j2} + \dots + \phi_{jj}\rho_{j-2} \\ &\dots \\ \rho_j &= \phi_{j1}\rho_{j-1} + \phi_{j2}\rho_{j-2} + \dots + \phi_{jj}\rho_{i-j} \end{aligned} \quad [2.30]$$

Utilizando, a partir de [2.30], la regla de Cramer sucesivamente para $j= 1, 2, \dots$,

obtenemos: $\phi_{11} = \rho_1$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\phi_{jj} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{j-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{j-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{j-1} & \rho_{j-2} & \rho_{j-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{j-2} & \rho_{j-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{j-3} & \rho_{j-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{j-1} & \rho_{j-2} & \rho_{j-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \quad [2.31]$$

Comparando la última ecuación de [2.31] con [2.24], se observa que ϕ_{jj} es igual a Π_j .

Las ecuaciones definidas por [2.31] denotan, por tanto, los coeficientes de autocorrelación parcial.

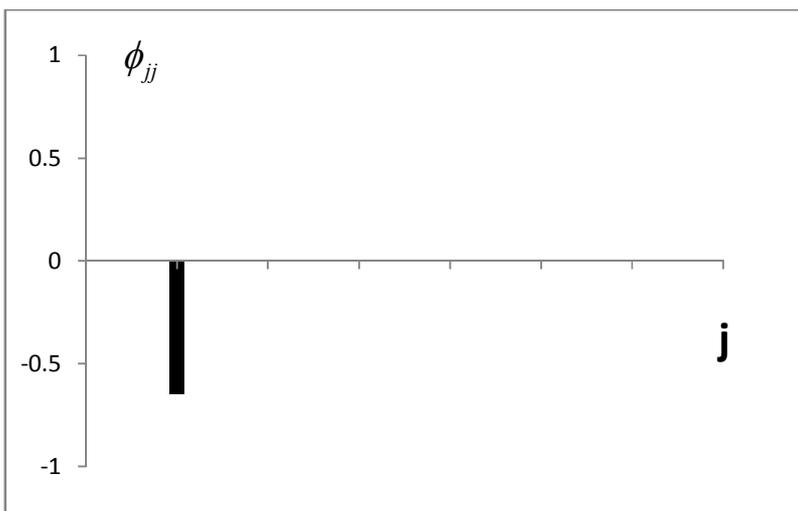


FIG 2.2. Representación grafica de la FAP

El conjunto de esos coeficientes de autocorrelación parcial $(\phi_{11}, \phi_{22}, \dots, \phi_{jj}, \dots)$ constituyen la denominada autocorrelación parcial (FAC), que puede representarse gráficamente tal como se presenta en la figura 2.2, en la cual se han considerado los valores de los coeficientes de autocorrelación de la figura 2.1.

2.7.5 FUNCIONES DE AUTOCOVARIANZA Y DE AUTOCORRELACIÓN MUESTRAL.

Cuando un proceso estocástico es estacionario, los parámetros que caracterizan el mismo, esto es, los correspondientes a la media del proceso (μ) , varianza (γ_0) autocovarianzas (γ_j) , autocorrelaciones (ρ_j) , y autocorrelaciones parciales (ϕ_{jj}) pueden estimarse a partir de una sola realización del proceso.

En esta sección consideraremos dada una serie temporal de T observaciones y_1, y_2, \dots, y_T , y veremos cómo a partir de la misma puede procederse a estimar dichos parámetros.

MEDIA MUESTRAL

El estimador de la media $\mu = E(y_t)$ de un proceso estacionario será la media muestral, que definiremos como:

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T y_i \quad [2.32]$$

Este estimador cumple las propiedades de insesgadez y consistencia.

a) Insesgadez: El estimador \bar{y} definido en [2.32], es un estimador insesgado del parámetro μ dado que se cumple:

$$E(\bar{y}) = \mu \quad [2.33]$$

Prueba:

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T E(y_t) = \frac{1}{T} T \mu = \mu$$

b) Consistencia. El estimador \bar{y} , definido en [2.32], es un estimador consistente de μ , esto es, $\bar{y} \rightarrow \mu$, siempre y cuando se cumpla que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{T-1} \left(1 - \frac{i}{T}\right) \rho_i$$

Es finito. Además, esta condición se cumplirá siempre que el proceso estocástico además de estacionario sea ergódico. Por ello, podemos concluir que en ese caso \bar{y} es consistente.

Para demostrar esta propiedad basta con probar la condición suficiente de consistencia, esto es:

- 1) \bar{y} asintóticamente insesgado, y
- 2) $\lim_{T \rightarrow \infty} Var(\bar{y}) = 0$ [2.34]

Prueba:

- 1) Véase [2.33]

$$\begin{aligned}
2) \text{Var}(\bar{y}) &= E(\bar{y} - \mu)^2 = E\left[\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_T}{T} - \mu\right]^2 = E\left[\frac{(y_1 - \mu) + (y_2 - \mu) + \dots + (y_T - \mu)}{T}\right]^2 = \\
&= \frac{1}{T^2} E\left[(y_1 - \mu)^2 + (y_2 - \mu)^2 + \dots + (y_T - \mu)^2 + 2(y_1 - \mu)(y_2 - \mu) + \dots + 2(y_{T-1} - \mu)(y_T - \mu)\right]^2 = \\
&= \frac{1}{T^2} [T\gamma_0 + 2(T-1)\gamma_1 + 2(T-2)\gamma_2 + \dots + 2\gamma_{T-1}] = \frac{\gamma_0}{T^2} [T + 2(T-1)\rho_1 + 2(T-2)\rho_2 + \dots + 2\rho_{T-1}] = \\
&= \frac{\gamma_0}{T} + \frac{2\gamma_0}{T^2} \sum_{i=1}^{T-1} (T-i)\rho_i = \frac{\gamma_0}{T} + \frac{2\gamma_0}{T} \sum_{i=1}^{T-1} \left(1 - \frac{i}{T}\right) \rho_i
\end{aligned}$$

Luego, si $\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{T-1} \left(1 - \frac{i}{T}\right) \rho_i$ es finito, entonces: $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}(\bar{y}) = 0$

FUNCIÓN DE AUTOCOVARIANZA MUESTRAL.

La estimación de la autocovarianza poblacional de orden $j(\gamma_j)$ se efectuará utilizando el estimador:

$$C_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y}) \quad [2.35]$$

Siendo la C_j la autocovarianza muestral de orden j . Alternativamente a [2.35], puede también definirse el siguiente estimador de γ_j :

$$C_j^1 = \frac{1}{T-j} \sum_{t=j+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y}) \quad [2.36]$$

Al analizar las propiedades de los estimadores [2.35] y [2.36] debemos comenzar señalando que ambos son *sesgados*. Para demostrar este punto debemos tener en cuenta que se cumple las siguientes expresiones:

$$\sum_{t=j+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y}) \cong \sum_{t=j+1}^T (y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) - (T-j)(\bar{y} - \mu)^2 \quad [2.37]$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \sum_{t=j+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y}) &= \sum_{t=j+1}^T [(y_t - \mu)(\bar{y} - \mu)] [(y_{t-j} - \mu)(\bar{y} - \mu)] = \\ &= \sum_{t=j+1}^T (y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) - (\bar{y} - \mu) \sum_{t=j+1}^T (y_t - \mu)(\bar{y} - \mu) \sum_{t=j+1}^T (y_{t-j} - \mu) + (T-j)(\bar{y} - \mu)^2 \end{aligned}$$

Y aproximando $\sum_{t=j+1}^T (y_t - \mu)$ y $\sum_{t=j+1}^T (y_{t-j} - \mu)$ por $(T-j)(\bar{y} - \mu)$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{t=j+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y}) &\cong \sum_{t=j+1}^T (y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) - 2(T-j)(\bar{y} - \mu)^2 + (T-j)(\bar{y} - \mu)^2 = \\ &= \sum_{t=j+1}^T (y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) - (T-j)(\bar{y} - \mu)^2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta [2.37] las esperanzas matemáticas de C_j y C_j^1 serán:

$$E(C_j) \cong \gamma_j - \frac{j}{T} \gamma_j - \left(\frac{T-j}{T} \right) Var(\bar{y}) \quad [2.38]$$

$$E(C_j^1) \cong \gamma_j - Var(\bar{y}) \quad [2.39]$$

Prueba [2.38]:

$$\begin{aligned} E(C_j) &= \frac{1}{T} E \left[\sum_{t=j+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y}) \right] \cong \frac{1}{T} E \left[\sum_{t=j+1}^T (y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) - (T-j)(\bar{y} - \mu)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T E(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) - \left(\frac{T-j}{T} \right) E(\bar{y} - \mu)^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T \gamma_j - \left(\frac{T-j}{T} \right) Var(\bar{y}) = \\ &= \frac{1}{T} (T-j) \gamma_j - \left(\frac{T-j}{T} \right) Var(\bar{y}) = \gamma_j - \frac{j}{T} \gamma_j - \left(\frac{T-j}{T} \right) Var(\bar{y}) \end{aligned}$$

[2.39]:

$$\begin{aligned} E(C_j^1) &= \frac{1}{T-1} E \left[\sum_{t=j+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y}) \right] \cong \frac{1}{T-j} E \left[\sum_{t=j+1}^T (y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) - (T-j)(\bar{y} - \mu)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{T-j} \sum_{t=j+1}^T \gamma_j - \frac{T-j}{T-j} Var(\bar{y}) = \gamma_j - Var(\bar{y}) \end{aligned}$$

Comparando las expresiones [2.38] y [2.39] observamos que si bien ambos estimadores son sesgados, el estimador C_j^1 tendrá un sesgo inferior, sobre todo cuando j sea relativamente grande con respecto a T . puede observarse, no obstante, que a medida que T sea mayor, más se parecerán las estimaciones proporcionadas por ambas expresiones. Concretamente, el sesgo desaparece cuando $T \rightarrow \infty$, siempre y cuando se cumpla que el proceso sea estacionario y ergódico (supuesto que mantendremos siempre). Así pues, dado [2.34], C_j y C_j^1 son asintóticamente insesgados, esto es:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E(C_j) = \lim_{T \rightarrow \infty} E(C_j^1) = \gamma_j$$

Además, bajo la hipótesis de normalidad, esto es, siendo $\{y_t\}$ un proceso gaussiano, supuesto que efectuaremos en lo que sigue, Bartlett (1946) ha demostrado el siguiente resultado aproximado:

$$Var(C_j) \cong \frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\gamma_i^2 + \gamma_{i+j}\gamma_{i-j}) \quad [2.40]$$

$$Var(C_j^1) \cong \frac{1}{T-j} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\gamma_i^2 + \gamma_{i+j}\gamma_{i-j}) \quad [2.41]$$

De la comparación de [2.40] y [2.41] se desprende que la varianza de C_j será inferior a la de C_j^1 . Por esta razón suele considerarse a C_j como el estimador de γ_j , si bien dado que cuando T es pequeño respecto a j el sesgo de este estimador puede ser importante, recomienda calcular solamente alrededor de $T/4$ autocovarianza muestrales.

El conjunto de autocovarianza muestrales obtenidas para distintos valores de j ($C_1, C_2, \dots, C_j, \dots$) configuran la *función de autocovarianza muestral*.

Finalmente, hay que señalar que el estimador de la varianza del proceso (γ_0) será la varianza muestral (C_0) que, como caso particular de [2.35] se definirá como:

$$C_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2 \quad [2.42]$$

FUNCIÓN DE AUTOCORRELACION MUESTRAL

La estimación de la autocorrelación orden $j(\rho_j)$ se efectuará utilizando la expresión de la autocorrelación muestral de orden j , que denotaremos mediante r_j y que definiremos como el cociente entre la autocovarianza muestral de orden $j(C_j)$ y la varianza muestral (C_0) esto es:

$$\gamma_j = \frac{C_j}{C_0} = \frac{\sum_{t=j+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2} \quad [2.43]$$

El conjunto de las autocorrelaciones muestrales obtenidas para distintos valores de j constituyen la *función de autocorrelación muestral* (FACM). La representación gráfica de la FACM se denomina *Correlograma muestral*.

Ejemplo 1. Para ilustrar el cálculo de las funciones de autocovarianza y autocorrelación muestral, consideremos la serie temporal y_t , cuyo valores ($T = 20$) aparecen en la segunda columna del cuadro 2.1.

La media muestral (\bar{y}) será igual a:

$$\bar{y} = \frac{1}{20} \sum_{t=1}^{20} y_t = \frac{1}{20} 160 = 8$$

Restando el valor de la media muestral $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, y_{t-4}, e y_{t-5}$, se obtienen los valores de las columnas tres a ocho del mencionado cuadro 2.1. A partir de esta información los siguientes valores de la varianza muestral y de las cinco primeras autocovarianzas muestrales:

Autocovarianzas Muestrales

$$C_0 = \frac{1}{20} \sum_{t=1}^{20} (y_t - \bar{y})^2 = \frac{1}{20} [(8-8)^2 + (5-8)^2 \dots + (7-8)^2] = \frac{1}{20} (110) = 5.5$$

Para realizar el cálculo de C_1 sacamos los pares ordenados de:

$$(y_t - \bar{y}) = [(8-8), (5-8), \dots, (7-8)]$$

$$(y_{t-1} - \bar{y}) = [(5-8), (9-8), \dots, (0-8)]$$

Y obtenido el total de pares ordenados procedemos a realizar el producto de ambos

pares ordenados en la fórmula siguiente:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{20} \sum_{t=2}^{20} (y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y}) = \frac{1}{20} [(8-8)(5-8) + (5-8)(9-8) + \dots + (7-8)(0-8)] (y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{20} (35) = 1.75 \end{aligned}$$

Se realiza el mismo procedimiento para los cálculos de C_2, \dots, C_5

$$C_2 = \frac{1}{20} \sum_{t=3}^{20} (y_t - \bar{y})(y_{t-2} - \bar{y}) = \frac{1}{20} 13 = 0.65$$

$$C_3 = \frac{1}{20} \sum_{t=4}^{20} (y_t - \bar{y})(y_{t-3} - \bar{y}) = \frac{1}{20} (-34) = -1.7$$

$$C_4 = \frac{1}{20} \sum_{t=5}^{20} (y_t - \bar{y})(y_{t-4} - \bar{y}) = \frac{1}{20} (-30) = -1.5$$

$$C_5 = \frac{1}{20} \sum_{t=6}^{20} (y_t - \bar{y})(y_{t-5} - \bar{y}) = \frac{1}{20} (-18) = -0.9$$

Las Autocorrelaciones Muestrales serán iguales a:

$$r_1 = \frac{C_1}{C_0} = \frac{1.75}{5.5} = 0.32 \qquad r_2 = \frac{C_2}{C_0} = \frac{0.65}{5.5} = 0.12$$

$$r_3 = \frac{C_3}{C_0} = \frac{-1.7}{5.5} = -0.31 \qquad r_4 = \frac{C_4}{C_0} = \frac{-1.5}{5.5} = -0.27$$

$$r_5 = \frac{C_5}{C_0} = \frac{-0.9}{5.5} = -0.16$$

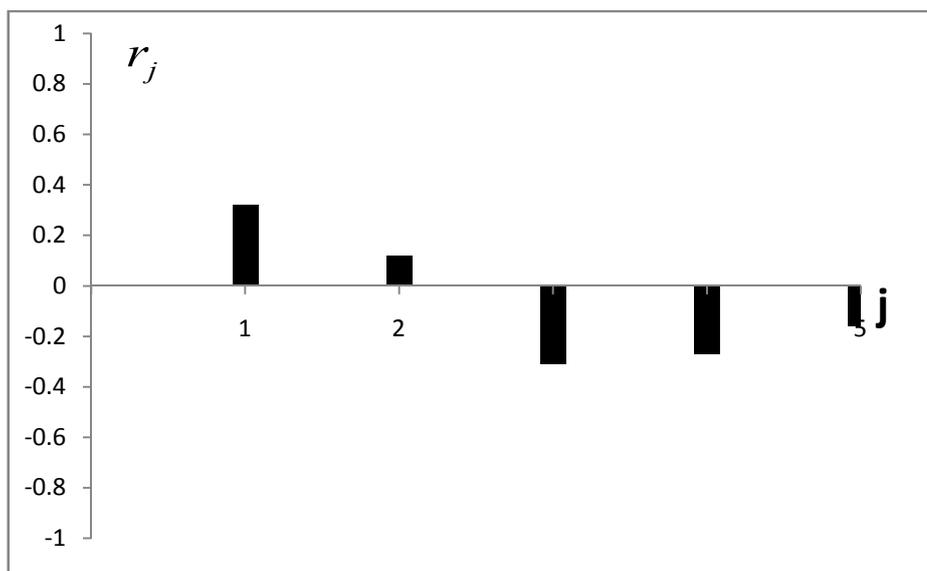


FIG 2.3. Correlograma muestral de la Serie Temporal del ejemplo 1.

Finalmente, el correlograma muestral, representación gráfica de las autocorrelaciones muestrales, se representa en la figura 2.3.

Cuadro 2.2. Series Temporales Generadas

t	Serie 1	Serie 3	Serie 4	t	Serie	Serie3	Serie4
1	6.58	3.66	13.36	31	5.91	28.63	8.09
2	5.11	3.99	10.73	32	6.48	29.95	9.68
3	6.32	5.02	9.29	33	6.07	31.19	12.31
4	6.36	6.44	10.82	34	6.72	33.13	10.82
5	5.88	7.51	13.24	35	5.9	34.48	8.95
6	5.7	8.21	11.2	36	6.04	35.69	10.15
7	6.18	9.26	9.59	37	6.41	37.26	13.26
8	5.28	9.48	10	38	6.48	39.08	11.58
9	6.1	10.21	12.87	39	6	40.49	9.82
10	5.74	10.78	10.77	40	6.35	42.09	11.37
11	5.1	11.57	8.99	41	5.81	43.17	13.82
12	6.08	12.55	1.18	42	6.32	44.58	12.19
13	6.28	13.86	13.12	43	6.41	46.24	10.91
14	5.4	14.34	10.54	44	6.67	48.32	12.8
15	5.72	14.77	8.53	45	5.53	49.34	14.81
16	6.35	15.88	10.11	46	5.6	49.9	12.51
17	6.15	17.1	12.9	47	5.93	50.6	10.93
18	5.74	17.91	10.57	48	4.89	51.45	12.31
19	6.44	19.31	9.27	49	5.83	52.18	14.67
20	6.09	20.63	1.48	50	5.31	52.28	11.91
21	6.33	22.13	13.54	51	6.6	53.5	11.15
22	5.68	23.04	11.05	52	5.42	53.96	11.73
23	5.95	23.93	9.32	53	6	54.69	14.38
24	5.98	24.87	10.52	54	5.7	55.21	11.86
25	5.08	25.83	13.32	55	6.26	56.27	10.8
26	5.36	26.09	10.45	56	6.15	57.46	12.12
27	6.62	27.42	9.54	57	5.65	58.16	14.23
28	5.32	27.83	9.84	58	5.28	58.2	11.26
29	5.3	27.73	12	59	6.68	59.48	10.83
30	5.89	28.06	9.74	60	5.94	60.56	11.84

Ejemplo 2. Tomando como referencia las series de la unidad 1 (véase tabla 11 en anexos), y efectuando cálculo similares a los llevados a cabo en el ejemplo 2.1, se obtienen las autocorrelaciones muestrales que se recogen en el cuadro 2.3, y cuya representación gráfica (correlograma muestral) viene dado en la figura 2.4.

Varianza y Función de Autocovarianza.

$$C_0 = \frac{1}{60} \sum_{t=1}^{60} (y_t - \bar{y})^2 = \frac{1}{60} (126061) = 2101.02$$

$$C_1 = \frac{1}{60} \sum_{t=2}^{60} (y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y}) = \frac{1}{60} (-12920) = -215.33$$

$$C_2 = \frac{1}{60} \sum_{t=3}^{60} (y_t - \bar{y})(y_{t-2} - \bar{y}) = \frac{1}{60} (03571) = 59.17$$

Función de Autocorrelación Muestral.

$$r_1 = \frac{c_1}{c_0} = \frac{-215.33}{2101.02} = -0.10$$

$$r_2 = \frac{c_2}{c_0} = \frac{59.17}{2101.02} = 0.03$$

Cuadro 2.3. Autocorrelación Muestral de la Serie 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r_j	-0.10	0.03	0.15	0.15	-0.15	0.03	-0.12	-0.08	-0.14
j	10	11	12	13	14	15			
r_j	-0.11	-0.07	-0.05	-0.09	-0.15	0.04			

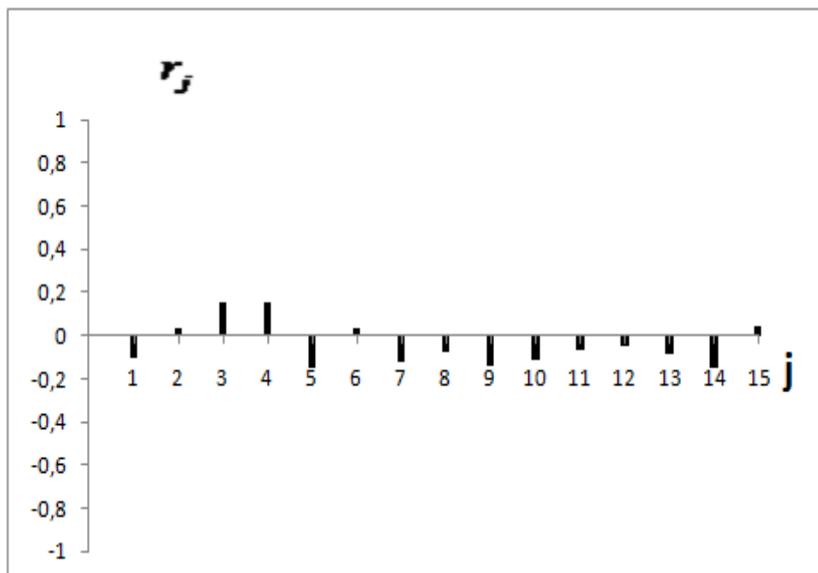


FIG 2.4 Correlograma Muestral de la Serie 1

Ejemplo 3. Las autocorrelaciones muestrales y correlograma muestral de la serie 3 (véase tabla 12 en anexos) se recogen, respectivamente, en el cuadro 2.4 y la figura 2.5. Obsérvese que según señaló en la unidad 1, esta serie, a diferencia de la serie 1, tiene una clara tendencia, o lo que es lo mismo, no es una serie estacionaria (en media), por ello los cálculos efectuados en los ejemplos 1 y 2 no tienen ahora validez en cuanto que no habrá una sola media poblacional (μ) a estimar, ni una sola varianza (γ_0). Sin embargo, pasando por alto este hecho, pueden aplicarse las mismas fórmula [2.32], [2.35], [2.42], y [2.43] a la serie referida, obteniendo los resultados del cuadro 2.4. La característica que presenta la función de autocorrelación muestral (y correlograma muestral) de este tipo de series (no estacionarias) es que decrecen muy lentamente.

Varianza y Función de Autocovarianza.

$$C_0 = \frac{1}{60} \sum_{t=1}^{60} (y_t - \bar{y})^2 = \frac{1}{60} (18600.28) = 310$$

$$c_1 = \frac{1}{60} \sum_{t=2}^{60} (y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y}) = \frac{1}{60} (17756.59) = 295.94$$

$$c_2 = \frac{1}{60} \sum_{t=3}^{60} (y_t - \bar{y})(y_{t-2} - \bar{y}) = \frac{1}{60} (16893.95) = 281.57$$

Función de Autocorrelación Muestral.

$$r_1 = \frac{c_1}{c_0} = \frac{295.94}{310} = 0.95$$

$$r_2 = \frac{c_2}{c_0} = \frac{281.57}{310} = 0.91$$

Cuadro 2.4. Autocorrelación Muestrales de la Serie 3

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r_j	0.95	0.91	0.86	0.82	0.77	0.72	0.68	0.63	0.58
j	10	11	12	13	14	15			
r_j	0.53	0.48	0.43	0.39	0.34	0.29			

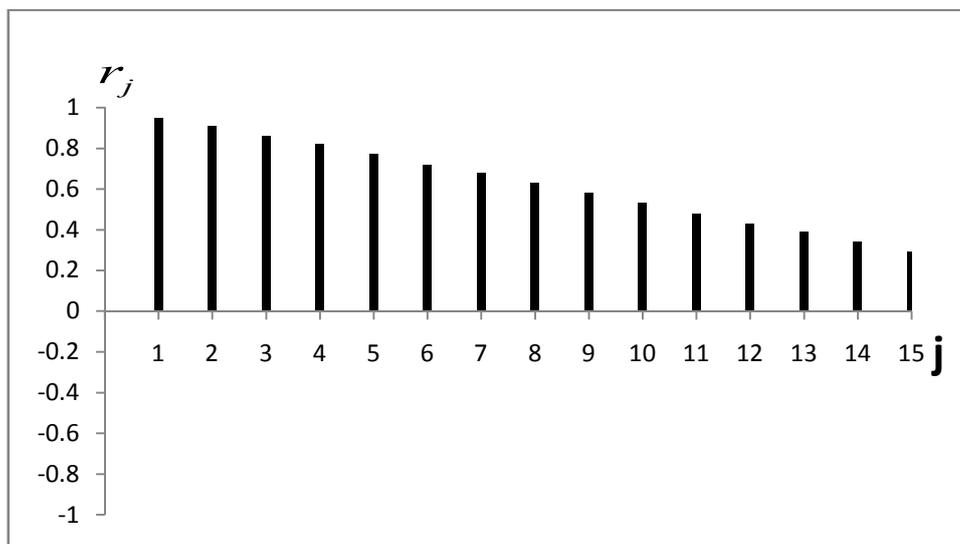


FIG 2.5 Correlograma Muestral de la Serie 3

Ejemplo 4. Considerando ahora la Serie 4 (véase tabla 13 en anexos), caracterizada por tener un fuerte componente estacional, además de presentar signos de no estacionalidad, podemos efectuar los cálculos pertinentes, obteniendo las autocorrelaciones muestrales que se recogen en el cuadro 2.5, así como su representación gráfica (correlograma muestral), recogida en la figura 2.6.

Varianza y Función de Autocovarianza.

$$C_0 = \frac{1}{60} \sum_{t=1}^{60} (y_t - \bar{y})^2 = \frac{1}{60} (1537589) = 25626.48$$

$$C_1 = \frac{1}{60} \sum_{t=2}^{60} (y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y}) = \frac{1}{60} (3303020) = 55050.33$$

$$C_2 = \frac{1}{60} \sum_{t=3}^{60} (y_t - \bar{y})(y_{t-2} - \bar{y}) = \frac{1}{60} (-6302940) = -105049$$

Función de Autocorrelación muestral

$$r_1 = \frac{c_1}{c_0} = \frac{55050.33}{25626.48} = 0.22$$

$$r_2 = \frac{c_2}{c_0} = \frac{-105049}{25626.48} = -0.41$$

Cuadro 2.5. Autocorrelaciones Muestrales de la Serie 4

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r_j	0.22	-0.41	0.19	0.87	0.14	-0.44	0.11	0.73	0.03
j	10	11	12	13	14	15	16		
r_j	-0.51	0.04	0.60	-0.04	-0.52	-0.01	0.49		

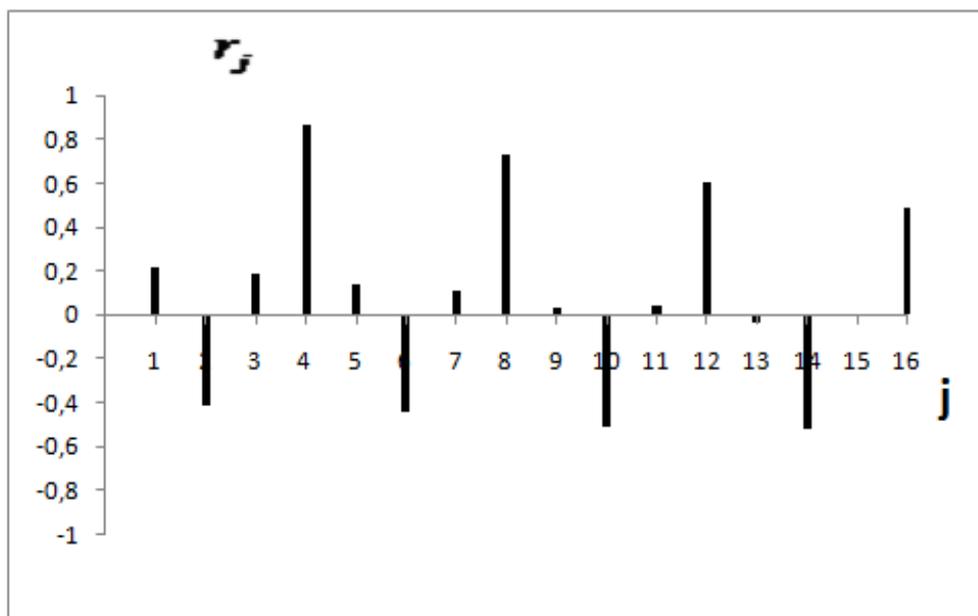


FIG 2.6. Correlograma Muestral de la Serie 4.

La explicación de las elevadas autocorrelaciones que se obtienen en los períodos estacionales (que como consecuencia de ser los datos trimestrales serán los períodos múltiplos de 4) se ofrece en la unidad IV.

2.7.6 FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN PARCIAL MUESTRAL.

Las autocorrelaciones parciales muestrales ($\hat{\phi}_{jj}$) son estimadores de las autocorrelaciones parciales, se calcularán reemplazando las autocorrelaciones (ρ_j) en [2.31] por sus estimaciones r_j .

Dado que cuando j es elevado resulta bastante engorroso calcular los determinantes de la expresión [2.31], resulta útil emplear el método recursivo de cálculo de $\hat{\phi}_{jj}$ desarrollado por Durbin (1960), el cual consiste en comenzar calculando $\hat{\phi}_{jj} = r_1$, y prosiguiendo con la utilización de las siguientes expresiones:

$$\hat{\phi}_{j+1,j+1} = \frac{\gamma_{j+1} - \sum_{i=1}^j \hat{\phi}_{ji} r_{j+1-i}}{1 - \sum_{i=1}^j \hat{\phi}_{ji} r_j} \quad [2.44]$$

$$\hat{\phi}_{j+1,i} = \hat{\phi}_{ji} - \hat{\phi}_{j+1,j+1} \hat{\phi}_{j,j+1-i} \quad i = 1, 2, \dots, j \quad [2.45]$$

Que los resultados son idénticos puede observarse utilizando los datos del ejemplo

2.1. Si reemplazamos los valores de r_j en [2.31], obtendríamos:

$$\hat{\phi}_{11} = r_1 = 0.32$$

$$\hat{\phi}_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.32 \\ 0.32 & 0.12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.32 \\ 0.32 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1(0.12) - 0.32(0.32)}{1(1) - 0.32(0.32)} = \frac{0.0176}{0.8976} = 0.02$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1 \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.32 & 0.32 \\ 0.32 & 1 & 0.12 \\ 0.12 & 0.32 & -0.31 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.32 & 0.12 \\ 0.32 & 1 & 0.32 \\ 0.12 & 0.32 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{1 \begin{vmatrix} 1 & 0.12 \\ 0.32 & -0.31 \end{vmatrix} - 0.32 \begin{vmatrix} 0.32 & 0.12 \\ 0.12 & -0.31 \end{vmatrix} + 0.32 \begin{vmatrix} 0.32 & 1 \\ 0.12 & 0.32 \end{vmatrix}}{1 \begin{vmatrix} 1 & 0.32 \\ 0.32 & 1 \end{vmatrix} - 0.32 \begin{vmatrix} 0.32 & 0.32 \\ 0.12 & 1 \end{vmatrix} + 0.12 \begin{vmatrix} 0.32 & 1 \\ 0.12 & 0.32 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1((-0.31) - (0.32 * 0.12)) - 0.32((0.32 * -0.31) - (0.12 * 0.12)) + 0.32((0.32 * 0.32) - 0.12)}{1(1 - 0.32 * 0.32) - 0.32(0.32 - 0.12 * 0.32) + 0.12((0.32 * 0.32) - 0.12)}$$

$$= \frac{-0.3177}{0.8054} = -0.39$$

Mayor coste en término de cálculo tendrá la obtención de los coeficientes de autocorrelación parcial de órdenes mayores que 3, aunque puede también comprobarse que los valores que se obtendrán serán:

$$\phi_{44} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 & r_1 \\ r_1 & 1 & r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & 1 & r_3 \\ r_3 & r_2 & r_1 & r_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & 1 & r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & 1 & r_1 \\ r_3 & r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.32 & 0.12 & 0.32 \\ 0.32 & 1 & 0.32 & 0.12 \\ 0.12 & 0.32 & 1 & -0.31 \\ -0.31 & 0.12 & 0.32 & -0.27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.32 & 0.12 & -0.31 \\ 0.32 & 1 & 0.32 & 0.12 \\ 0.12 & 0.32 & 1 & 0.32 \\ -0.31 & 0.12 & 0.32 & 1 \end{vmatrix}} = -0.08$$

$$\phi_{55} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 & r_3 & r_1 \\ r_1 & 1 & r_1 & r_2 & r_2 \\ r_2 & r_1 & 1 & r_1 & r_3 \\ r_3 & r_2 & r_1 & 1 & r_4 \\ r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & r_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r_1 & 1 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_2 & r_1 & 1 & r_1 & r_2 \\ r_3 & r_2 & r_1 & 1 & r_1 \\ r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & r_5 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.32 & 0.12 & -0.31 & 0.32 \\ 0.32 & 1 & 0.32 & 0.12 & 0.12 \\ 0.12 & 0.32 & 1 & 0.32 & -0.31 \\ -0.31 & 0.12 & 0.32 & 1 & -0.27 \\ -0.27 & -0.31 & 0.12 & 0.32 & -0.16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.32 & 0.12 & -0.31 & -0.27 \\ 0.32 & 1 & 0.32 & 0.12 & -0.31 \\ 0.12 & 0.32 & 1 & 0.32 & 0.12 \\ -0.31 & 0.12 & 0.32 & 1 & 0.37 \\ -0.27 & -0.31 & 0.12 & 0.32 & 1 \end{vmatrix}} = 0.04$$

Aplicando las expresiones [2.44] y [2.45] propuestas por Durbin (1960), los valores de las cinco primeras autocorrelaciones parciales muestrales se obtendrían como sigue:

$$\hat{\phi}_{11} = r_1 = 0.32$$

$$\hat{\phi}_{22} = \frac{r_2 - \hat{\phi}_{11} r_1}{1 - \hat{\phi}_{11} r_1} = \frac{0.12 - 0.32 * 0.32}{1 - 0.32 * 0.32} = \frac{0.0176}{0.8976} = 0.02$$

$$\hat{\phi}_{21} = \hat{\phi}_{11} - \hat{\phi}_{22} \hat{\phi}_{11} = 0.32 - 0.02 * 0.32 = 0.3136$$

$$\hat{\phi}_{33} = \frac{r_3 - \hat{\phi}_{21} r_2 - \hat{\phi}_{22} r_1}{1 - \hat{\phi}_{21} r_1 - \hat{\phi}_{22} r_2} = \frac{-0.31 - 0.3136 * 0.12 - 0.02 * 0.32}{1 - 0.3136 * 0.32 - 0.02 * 0.12} = -0.39$$

$$\hat{\phi}_{31} = \hat{\phi}_{21} - \hat{\phi}_{33} \hat{\phi}_{22} = 0.3136 - (-0.39) * 0.02 = 0.3214$$

$$\hat{\phi}_{32} = \hat{\phi}_{22} - \hat{\phi}_{33} \hat{\phi}_{21} = 0.02 - (-0.39) * 0.3136 = 0.1423$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{44} &= \frac{r_4 - \hat{\phi}_{31} r_3 - \hat{\phi}_{32} r_2 - \hat{\phi}_{33} r_1}{1 - \hat{\phi}_{31} r_1 - \hat{\phi}_{32} r_2 - \hat{\phi}_{33} r_3} = \\ &= \frac{-0.27 - 0.3214 * (-0.31) - 0.1423 * 0.12 - (-0.39) * 0.32}{1 - 0.3214 * 0.32 - 0.1423 * 0.12 - (-0.39)(-0.31)} = -0.08 \end{aligned}$$

$$\hat{\phi}_{41} = \hat{\phi}_{31} - \hat{\phi}_{44} \hat{\phi}_{33} = 0.3214 - (-0.08)(-0.39) = 0.2902$$

$$\hat{\phi}_{42} = \hat{\phi}_{32} - \hat{\phi}_{44} \hat{\phi}_{32} = 0.1423 - (-0.08) * 0.1423 = 0.1537$$

$$\hat{\phi}_{43} = \hat{\phi}_{33} - \hat{\phi}_{44} \hat{\phi}_{31} = -0.39 - (-0.08) * 0.3214 = -0.3643$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{55} &= \frac{r_5 - \hat{\phi}_{41} r_4 - \hat{\phi}_{42} r_3 - \hat{\phi}_{43} r_2 - \hat{\phi}_{44} r_1}{1 - \hat{\phi}_{41} r_1 - \hat{\phi}_{42} r_2 - \hat{\phi}_{43} r_3 - \hat{\phi}_{44} r_4} = \\ &= \frac{-0.16 - 0.2902 * (-0.27) - 0.1537(-0.31) - (-0.3643) * 0.12 - (-0.08)0.32}{1 - 0.2902 * 0.32 - 0.1537 * 0.12 - (-0.3643)(-0.31) - (-0.08)(-0.27)} = 0.04 \end{aligned}$$

Esto es:

$$\hat{\phi}_{11} = 0.32 \quad \hat{\phi}_{22} = 0.02 \quad \hat{\phi}_{33} = -0.39 \quad \hat{\phi}_{44} = -0.08 \quad \hat{\phi}_{55} = 0.04$$

La representación gráfica de la función de autocorrelación parcial muestral (FAPM)

Puede verse en la figura 2.7.

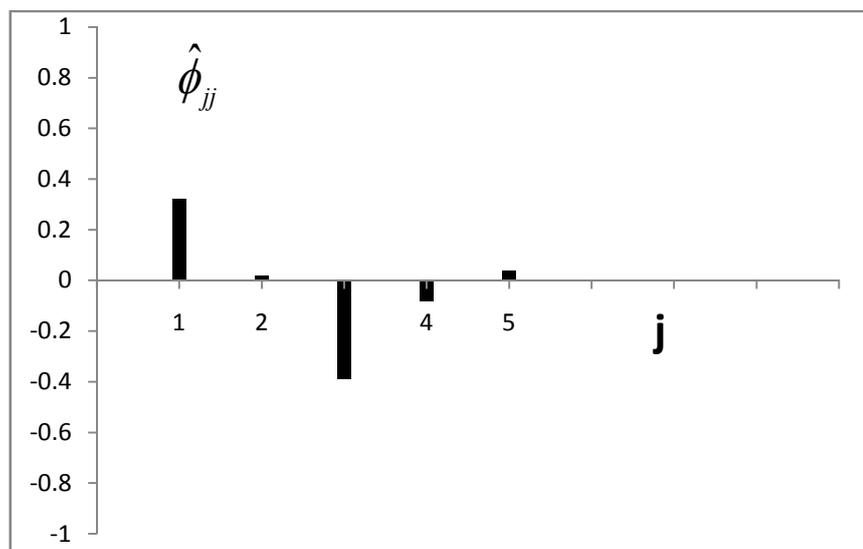


FIG 2.7 Representación gráfica de la FAPM de la serie del ejemplo 2.1.

Las funciones de autocorrelación parcial muestrales, así como su representación gráfica de la serie 1,3 y 4, consideradas en los ejemplos 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 pueden verse, representativamente en los cuadros 2.6, 2.7, 2.8 y en las figuras 2.8, 2.9 y 2.10.

Cuadro 2.6. Autocorrelaciones parciales muestrales de la serie 1

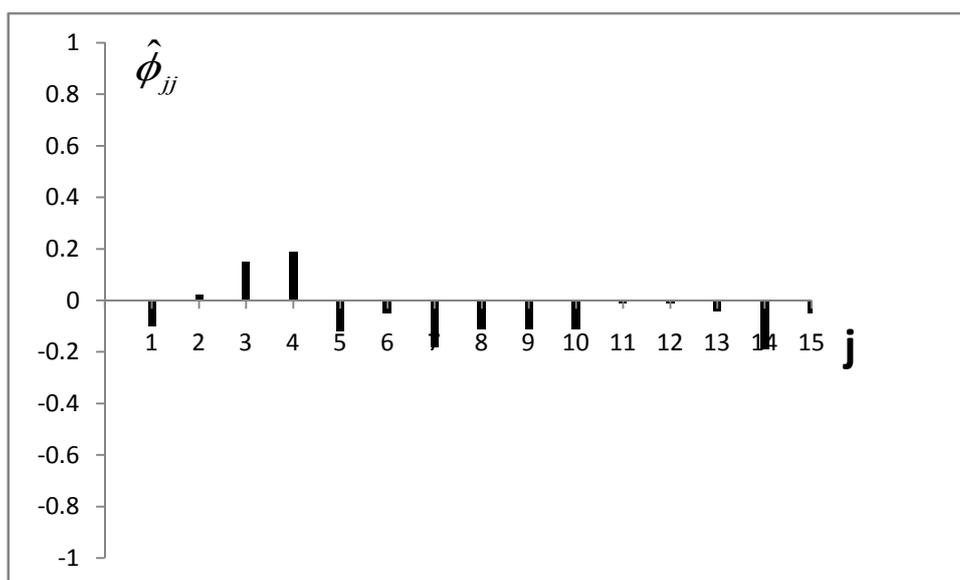
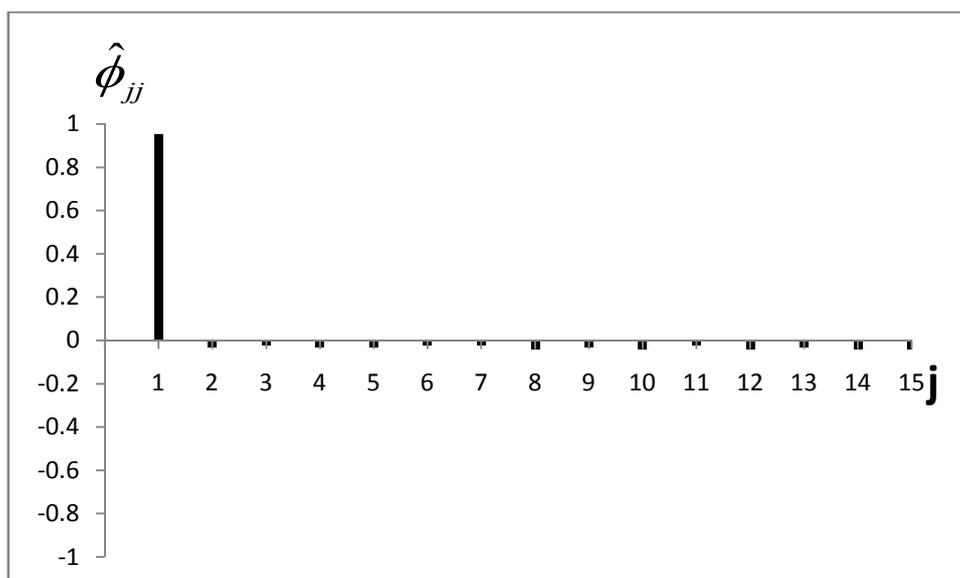
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{\phi}_{jj}$	-0.10	0.02	0.15	0.19	-0.12	-0.05	-0.18	-0.11	-0.11
j	10	11	12	13	14	15			
$\hat{\phi}_{jj}$	-0.11	-0.01	-0.01	-0.04	-0.19	-0.05			

Cuadro 2.7. Autocorrelaciones parciales muestrales de la serie 3

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{\phi}_{jj}$	0.95	-0.03	-0.02	-0.03	-0.03	-0.02	-0.02	-0.04	-0.03
j	10	11	12	13	14	15			
$\hat{\phi}_{jj}$	-0.04	-0.02	-0.04	-0.03	-0.04	-0.04			

Cuadro 2.8. Autocorrelación parciales muestrales de la serie 4

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{\phi}_{jj}$	0.22	-0.48	0.58	0.74	-0.34	-0.04	-0.22	0.01	-0.18
j	10	11	12	13	14	15	16		
$\hat{\phi}_{jj}$	-0.06	0.01	-0.01	0.07	0.07	-0.09	-0.03		

**FIG 2.8.** Representación gráfica de la FAPM de la serie 1**FIG 2.9.** Representación gráfica de la FAPM de la serie 3.

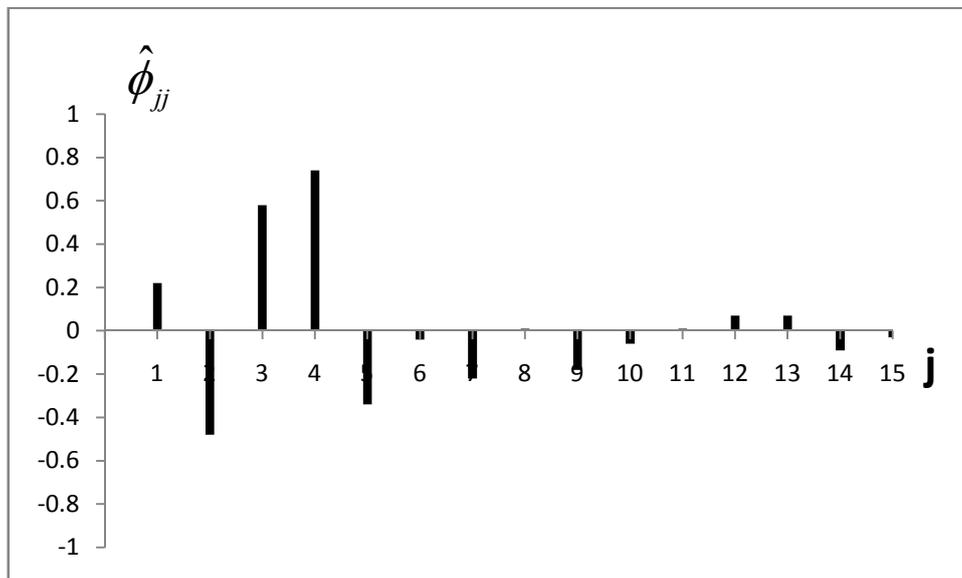


FIG 2.10. Representación gráfica de la FAPM de la serie 4.

UNIDAD III: MODELOS ESTOCÁSTICOS DE SERIES TEMPORALES.

TITULO DEL TEMA:

Modelos Estocásticos de Series Temporales.

OBJETIVO:

- ✓ Aplicar los diferentes Modelos Estocásticos de las Series Temporales.

CONTENIDO:

2.8.1 Justificación y Concepto de los Procesos Estocásticos Lineales

Discretos.

2.8.2 Modelos de Medias Móviles (M.A).

2.8.3 Modelos Autorregresivos (A.R).

2.8.4 Modelos Mixtos Autorregresivos Medias Móviles (ARMA)

DURACIÓN:

9 horas

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

- ✓ AZNAR ANTONIO, Y TRIVEZ FRANCISCO JAVIER. Métodos de Predicción en Economía II.
- ✓ PÉREZ LÓPEZ, CÉSAR. Econometría de las Series Temporales, Madrid, 2006. PEARSON PRENTICE HALL.

2.8 UNIDAD III. MODELOS ESTOCÁSTICOS DE SERIES TEMPORALES.

2.8.1 JUSTIFICACIÓN Y CONCEPTO DE LOS PROCESO ESTOCÁSTICO LINEALES DISCRETOS.

El objetivo del análisis estocástico de serie temporal es inferir las propiedades de la población (proceso estocástico) a partir de una muestra (serie temporal). Por ejemplo, efectuar una predicción es inferir la distribución de probabilidad de una observación futura y_{T+1} dada una serie (muestra) y_1, y_2, \dots, y_T de valores pasados.

Vamos a definir un nuevo caso especial de un proceso estocástico que nos permita luego intentar encontrar algo parecido en la realidad y que sea fácilmente identificable.

Definición 1: Un proceso estocástico es lineal y discreto si cada observación y_t puede expresarse de la forma:

$$y_t = \mu + u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_2 u_{t-2} + \dots \quad [3.1]$$

Donde:

- Es lineal porque puede escribirse como combinación lineal de los errores.
- u_t es ruido blanco (esperanza y covarianza nulas y varianza constante).
- Es discreto porque los lapsos temporales considerados son uniformes (no hay saltos temporales distintos entre las variables consideradas).

Dado un proceso lineal particular, ¿qué condiciones deben verificarse para que el proceso sea estacionario? Como condición necesaria deberá cumplirse, como ya sabemos, que la media, la varianza y la autocovarianza del proceso exista y sea invariantes respecto al tiempo.

La media del proceso vendrá dada por:

$$E(y_t) = \mu + E(u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_2 u_{t-2} + \dots) \quad [3.2]$$

Verificándose que se cumpla que:

$$E(y_t) = \mu \quad [3.3]$$

Siempre que se cumpla que $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i$, siendo $\psi_0 = 1$, converja esto es:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i = K \quad [3.4]$$

donde K es un número finito.

La varianza del proceso será igual a:

$$\gamma_0 = \sigma_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \quad [3.5]$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E[y_t - E(y_t)]^2 = E(u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_2 u_{t-2} + \dots)^2 = \\ &= E(u_t^2 + \psi_1^2 u_{t-1}^2 + \psi_2^2 u_{t-2}^2 + \dots + 2\psi_1 u_{t-1} + 2\psi_2 u_{t-2} + \dots) = \\ &= \sigma_1^2 (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + 0 + 0 + \dots) = \sigma_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \quad \text{con } \psi_0 = 1 \end{aligned}$$

La expresión [3.5] tendrá sentido solo si la media del proceso existe y $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$

converge. Finalmente, la autocovarianza serán iguales a:

$$\gamma_j = \sigma_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+j} \quad [3.6]$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \gamma_j &= E[y_t - E(y_t)] E[y_{t-j} - E(y_{t-j})] = [E(u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_2 u_{t-2} + \dots)(u_{t-j} + \psi_1 u_{t-j-1} + \psi_2 u_{t-j-2} + \dots)] = \\ &= \psi_1 E(u_{t-1}^2) + \psi_1 \psi_{j+1} E(u_{t-j-1}^2) + \psi_2 \psi_{j+2} E(u_{t-j-2}^2) + \dots = \\ &= \sigma_1^2 (\psi_j + \psi_1 \psi_{j+1} + \psi_2 \psi_{j+2} + \dots) = \sigma_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{j+i}, \quad \text{con } \psi_0 = 1 \end{aligned}$$

La expresión [3.6] solo tendrá sentido si existe la suma $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+j}$

A partir de la [3.4], [3.5], [3.6] se observa que para poder afirmar que el proceso estocástico lineal discreto es estacionario, deberá cumplirse:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i &= k \\ 2) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 &< \infty \text{ existe} \\ 3) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+j} &< \infty, \text{ existe} \end{aligned}$$

Dado que en este caso existirá la media, la varianza y las autocovarianza del proceso y además, estas no dependerán del tiempo.

Un ejemplo de proceso estocástico lineal discreto estacionario es el siguiente:

$$y_t = \mu + u_t + \phi u_{t-1} + \phi^2 u_{t-2} + \phi^3 u_{t-3} + \dots \quad \text{donde } |\phi| < 1$$

En efecto, en este caso, dando que $\psi_i = \phi^i$, se cumplirá:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i &= 1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \dots = \frac{1}{1-\phi} = k \\ \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 &= 1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots = \frac{1}{1-\phi^2} < \infty \\ \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+j} &= \psi_0 \psi_j + \psi_1 \psi_{j+1} + \psi_2 \psi_{j+2} + \dots = \phi^j + \phi^{j+2} + \phi^{j+4} + \dots = \frac{\phi^j}{1-\phi^2} < \infty \end{aligned}$$

Sin embargo, si $|\phi| \geq 1$, el proceso no es estacionario. Para verlo, supongamos que

$$\phi = 1 \text{ en cuyo caso: } \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i = 1 + 1 + 1 + \dots$$

No converge, con lo cual queda ya demostrado que no es estacionario.

Una vez definido este proceso particular, vamos a ver resumidamente sus ventajas respecto a no contar con él.

En principio, si quisieramos definir un proceso estocástico en general, tendríamos, al menos, que definir sus momentos de primer y segundo orden, para lo cual sería necesario estimar T varianzas, T esperanzas y $(T^2 - T)/2$ covarianzas, lo que nos es imposible si sólo contamos con T datos.

Si el proceso fuera estacionario, ya sólo tendríamos que estimar una esperanza y una varianza (media y una varianza constante) y $(T - 1)$ covarianzas ($\text{cov}(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots)$) en total $1 + 1 + (T - 1) = T + 1$ parámetros, lo que tampoco es posible.

Por ello, el análisis estocástico de series temporales considera un tipo aún más restringido de procesos: los procesos estocásticos lineal discreto. Así, el modelo MA de orden q esta descrito completamente con $q+2$ parámetros $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \delta$ y $\sigma_u^2)$, el AR de orden p lo está con $p+2$ $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \delta$ y $\sigma_u^2)$, y el ARMA (p, q) con $p + q + 2$ $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \delta$ y $\sigma_u^2)$. Bastará, por ello, que en general: $p+q+2 < T$

Para que podamos caracterizar que proceso ARMA³ genera la serie temporal de interés.

2.8.2 MODELOS DE MEDIAS MÓVILES (MA).

Un modelo de medias móviles de orden q , o abreviadamente MA (q), se define como:

$$y_t = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \dots - \theta_q u_{t-q} \quad [3.7]$$

donde el signo negativo por el que van precedidos los coeficientes $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ se supone por mera conveniencias notacional.

³ Obviamente, el proceso MA AR constituyen casos particular del proceso ARMA, aquel, respectivamente, en que la parte AR es cero, o la MA es cero.

Este modelo puede escribirse más abreviadamente como:

$$y_t = \mu + \theta(L)u_t \quad [3.8]$$

donde $\theta(L)$ es el operador polinomial de retardos, definido como:

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q \quad [3.9]$$

siendo L el operador de retardos, tal que el valor de su expresión indica el orden del retardo de la variables a la que multiplica; esto es, tal que:

$$L^s y_t = y_{t-s} \quad \forall s \geq 0$$

El operador polinomial de retardo puede también escribirse con un subíndice que denota el orden del mismo; así, $\theta(L)$ de la [3.9] podría también escribirse como $\theta_q(L)$.

Un modelo de medias móviles siempre es estacionario dado que, siendo un caso particular del proceso estocástico lineal discreto general [3.1] con las restricciones de que: $\psi_i = 0, \forall i \geq q, \psi_i = -\theta_i, \text{ para } 1 \leq i \leq q, \text{ y } \psi_0 = 1,$

Se cumple:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i = 1 - \theta_1 - \theta_2 - \dots - \theta_q = 1 - \sum_{i=1}^q \theta_i = k$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 = 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2 < \infty$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+j} &= \psi_0 \psi_j + \psi_1 \psi_{j+1} + \psi_2 \psi_{j+2} + \dots + \psi_{q-j} \psi_q \\ &= -\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \theta_2 \theta_{j+2} + \dots + \theta_{q-j} \theta_q < \infty \end{aligned}$$

Por otro lado, diremos que un modelo de medias móviles es invertible cuando pueda escribirse como un proceso autorregresivos de orden infinito. Para ello, deberá cumplirse que raíces de:

$$\theta(L) = 0$$

Caiga fuera del círculo unitario. Si bien esta propiedad la analizaremos con detalles en los apartados siguientes, basta ahora con señalar que diremos que las raíces caen fuera del círculo unitario cuando, si estas son reales, todas ellas son en valor absoluto mayores que la unidad; mientras que si son complejas, esto es, de la forma $a \pm bi$, entonces se cumple que el módulo, definido como $\sqrt{a^2 + b^2}$, es mayor que la unidad.

A continuación analizaremos los modelos de la media móviles más habituales, esto es, los modelos MA(1) y MA(2), obteniendo las condiciones de invertibilidad y calculando la media, varianza, función de autocovarianza, función de autocorrelación y función de autocorrelación parcial de dichos modelos. La sección finaliza con el análisis del modelo general MA(q).

Modelo MA(1).

Un modelo MA (1) viene definido por:

$$y_t = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} \quad [3.10]$$

O bien
$$y_t = \mu + \theta(L)u_t \quad [3.11]$$

donde:
$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L$$

Como hemos señalados anteriormente. El modelo MA (1) será siempre estacionario.

Para ser invertibles, sin embargo, deberá cumplirse que la raíz de la ecuación:

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L = 0$$

Caiga fuera del círculo unitario (esto es, sea en valor absoluto mayor que la unidad), lo cual implica en este caso se cumpla:

$$|\theta_1| < 1 \quad [3.12]$$

Prueba: $\theta(L) = 1 - \theta_1 L = 0 \Rightarrow L = \frac{1}{\theta_1}$

Luego, $|L| = \frac{1}{|\theta_1|} > 1 \Rightarrow |\theta_1| < 1$

Debe observarse que cumpliendo [3.7] el modelo MA (1) puede escribirse como el modelo AR de la orden infinito:

$$y_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \pi_3 y_{t-3} + \dots + \delta + u_t$$

donde: $\delta = \mu \frac{1}{1 - \theta_1}$

y de ahí digamos que es invertible.

Prueba: despejando u_t en [3.10]:

$$y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

$$u_t = y_t - \mu + \theta_1 u_{t-1}$$

luego: $u_{t-1} = y_{t-1} - \mu + \theta_1 u_{t-2}$

y sustituyendo u_{t-1} en [3.10].

$$y_t = \mu + u_t - \theta_1 (y_{t-1} - \mu + \theta_1 u_{t-2}) = \theta_1 y_{t-1} + \mu(1 + \theta_1) + u_t - \theta_1^2 u_{t-2}$$

Reemplazando ahora de manera análoga, y de forma sucesiva $\mu_{t-2}, \mu_{t-3}, \dots$ se obtiene:

$$\begin{aligned} y_t &= -\theta_1 y_{t-1} + \mu(1 + \theta_1) + u_t - \theta_1^2 (y_{t-2} - \mu + \theta_1 u_{t-3}) = \\ &= -\theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 y_{t-2} + \mu(1 + \theta_1 + \theta_1^2) + u_t - \theta_1^3 u_{t-3} = \dots \\ &= -\theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 y_{t-2} - \dots - \theta_1^n y_{t-n-1} + \mu(1 + \theta_1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_1^{n-1}) + u_t - \theta_1^n u_{t-n} \end{aligned}$$

Y haciendo $n \rightarrow \infty$, si se cumple que $|\theta_1| < 1$, puede escribirse:

$$\begin{aligned} y_t &= -\theta_1 y_{t-1} + \theta_1^2 y_{t-2} - \theta_1^3 y_{t-3} - \dots + \mu \frac{1}{1 - \theta_1} + u_t = \\ &= \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \pi_3 y_{t-3} + \dots + \delta + u_t \end{aligned}$$

siendo, $\pi_i = -\theta_1^i \quad \forall i \geq 1$ y $\delta = \mu \frac{1}{1-\theta_1}$

La esperanza matemática y la varianza del modelo MA (1) son iguales a:

$$E(y_t) = \mu \quad [3.13]$$

$$\gamma_0 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2) \quad [3.14]$$

Prueba:

$$[3.13]: E(y_t) = (\mu + u_t - \theta_1 u_{t-1}) = \mu$$

$$[3.14]: \gamma_0 = \text{Var}(y_t) = E[(y_t - \mu)^2] = E[(u_t - \theta_1 u_{t-1})^2] = \\ = E(u_t^2) + \theta_1^2 E(u_{t-1}^2) - 2\theta_1 E(u_t u_{t-1}) = \sigma_u^2 + \theta_1^2 \sigma_u^2 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2)$$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_j = \begin{cases} -\theta_1 \sigma_u^2 & \text{para } j=1 \\ 0 & \text{para } j>1 \end{cases} \quad [3.15]$$

Prueba:

$$\gamma_1 = E[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] = E[(u_t - \theta_1 u_{t-1})(u_{t-1} - \theta_1 u_{t-2})] = -\theta_1 E(u_{t-1}^2) = -\theta_1 \sigma_u^2 \\ \gamma_j = E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] = E[(u_t - \theta_1 u_{t-1})(u_{t-j} - \theta_1 u_{t-j-1})] = 0 \quad \forall j > 1$$

Función de Autocorrelación:

$$\rho_j = \begin{cases} -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} & \text{para } j=1 \\ 0 & \text{para } j > 1 \end{cases} \quad [3.16]$$

Prueba:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1 \sigma_u^2}{\sigma_u^2(1 + \theta_1^2)} = -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} \\ \rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \frac{0}{\sigma_u^2(1 + \theta_1^2)} = 0 \quad \forall j > 1$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{jj} = \frac{-\theta_1^j (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(j+1)}} \quad \text{para } j \geq 1 \quad [3.17]$$

Prueba:

Utilizando [2.31] y [3.16], podemos escribir:

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} = \frac{-\theta_1(1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^4}$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-\rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\theta_1^2 / (1 + \theta_1^2)^2}{1 - \frac{\theta_1^2}{(1 + \theta_1^2)^2}} = -\frac{\theta_1^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4} = \frac{-\theta_1^2(1 - \theta_1^2)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_1^4)(1 - \theta_1^2)} = \frac{-\theta_1^2(1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^6}$$

$$\begin{aligned} \phi_{33} &= \frac{\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ 0 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-\rho_1^3}{1 - 2\rho_1^2} = \frac{-\theta_1^3 / (1 + \theta_1^2)^3}{1 - \frac{2\theta_1^2}{(1 + \theta_1^2)^2}} = \frac{-\theta_1^3 / (1 + \theta_1^2)}{1 + \theta_1^4} = \frac{-\theta_1^3(1 - \theta_1^2)}{(1 + \theta_1^4)(1 + \theta_1^2)(1 - \theta_1^2)} \\ &= \frac{-\theta_1^3(1 - \theta_1^2)}{(1 + \theta_1^4)(1 - \theta_1^4)} = \frac{-\theta_1^3(1 - \theta_1^2)}{(1 - \theta_1^8)} \end{aligned}$$

y generalizando:

$$\phi_{jj} = \frac{-\theta_1^j (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(j+1)}} \quad \text{para } j \geq 1$$

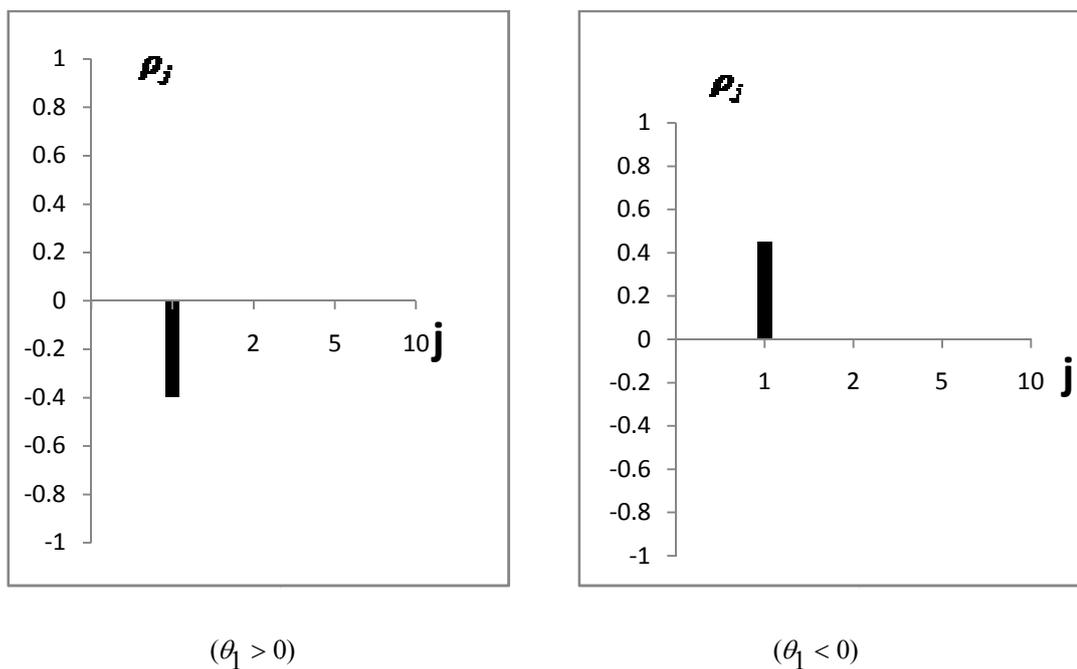


FIG 3.1 Correlograma de modelo MA(1).

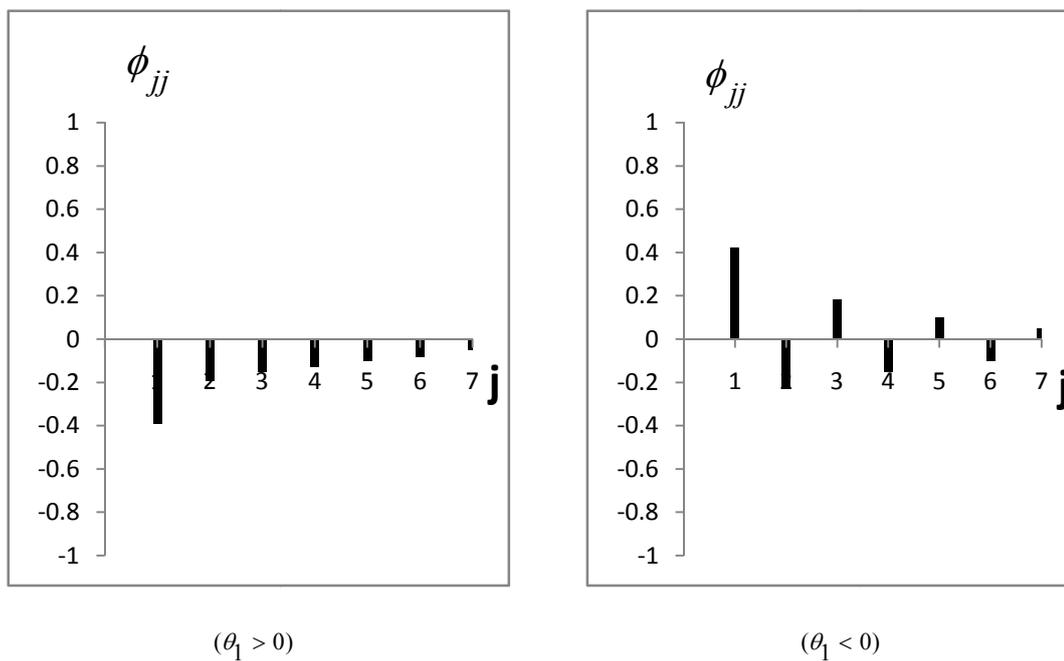


FIG 3.2 Representacion grafica de FAP de modelo MA(1).

Como características más relevantes del modelo MA(1) podemos señalar las siguientes:

- 1) Siempre es estacionario.
- 2) Para ser invertible, es necesario que $|\theta| < 1$.
- 3) La ρ_j sólo tiene un punto significativo. El modelo "olvida" la correlación con períodos distintos al inmediatamente anterior y el correlograma sólo tendrá un punto significativo.
- 4) La función de autocorrelación parcial no se anula, pero tendrá un comportamiento amortiguado hacia cero con todos los valores negativos, caso de que $\theta > 0$, o alternando el signo, comenzando con positivo, si $\theta < 0$ (véase la figura 3.2).

Ejemplo 3.1 Dados los siguientes valores iniciales:

$$\theta_1 = 0.7, \quad \mu = 1, \quad \sigma_u^2 = 2$$

$$y_t = 1 + u_t - 0.7u_{t-1}, \quad \sigma_u^2 = 2$$

Calcular:

- ✓ La media, La varianza, La Función de Autocovarianza, La Función de Autocorrelación y La Función de Autocorrelación Parcial.

Solucion:

Media: $\mu = 1$

Varianza: $\gamma_0 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2) = 2(1 + 0.49) = 2.98$

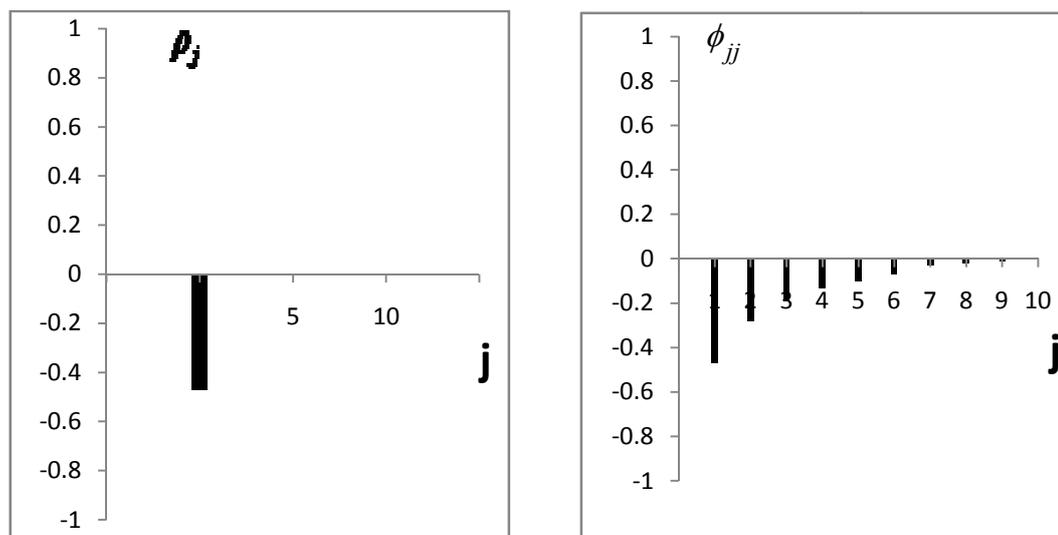


FIG 3.3 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo MA(1) con $\theta_1 = 0.7$

$$\text{Función de Autocovarianza: } \gamma_j = \begin{cases} -\theta_1 \sigma_u^2 = -0.7 * 2 = -1.4 & \text{para } j=1 \\ 0 & \text{para } j>1 \end{cases}$$

$$\text{Función de Autocorrelación: } \rho_j = \begin{cases} -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} = -\frac{0.7}{1.49} = -0.47 & \text{para } j=1 \\ 0 & \text{para } j>1 \end{cases}$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{11} = \rho_1 = -0.47$$

$$\phi_{22} = \frac{-\theta_1^2(1-\theta_1^2)}{1-(0.7)^6} = -0.28$$

$$\phi_{33} = \frac{-\theta_1^3(1-\theta_1^2)}{1-(0.7)^8} = -0.19$$

$$\phi_{44} = \frac{-\theta_1^4(1-\theta_1^2)}{1-(0.7)^{10}} = -0.13$$

...

$$\phi_{10,10} = \frac{-\theta_1^{10}(1-\theta_1^2)}{1-(0.7)^{20}} = -0,01$$

Función de Autocorrelación:

$$\rho_j = \begin{cases} -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} = \frac{0.7}{1.49} = 0.47 & \text{para } j=1 \\ 0 & \text{para } j>1 \end{cases}$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \rho_1 = 0.47 \\ \phi_{22} &= \frac{-\theta_1^2(1-\theta_1^2)}{1-(0.7)^6} = -0.28 \\ \phi_{33} &= \frac{-\theta_1^3(1-\theta_1^2)}{1-(0.7)^8} = 0.19 \\ \phi_{44} &= \frac{-\theta_1^4(1-\theta_1^2)}{1-(0.7)^{10}} = -0.13 \\ &\dots \end{aligned}$$

Modelo MA(2)

Modelo MA(2) viene definido por:

$$y_t = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} \quad [3.18]$$

o bien: $y_t = \mu + \theta_1(L)u_t$

donde: $\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2$

Como cualquier modelo de medias móviles, el modelo MA(2) será siempre estacionario, mientras que para ser invertible deberá cumplirse que las raíces de la ecuación:

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 = 0 \quad [3.19]$$

Una forma alternativa de escribir la ecuación [3.19] es:

$$\theta_2 L^2 + \theta_1 L - 1 = 0 \quad [3.20]$$

Así pues, denominado mediante L_1 y L_2 las dos raíces de [3.20]

$$L_1 = \frac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{2\theta_2}, \quad L_2 = \frac{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{2\theta_2} \quad [3.21]$$

Estas raíces podrán ser reales o complejas, dependiendo de si $\theta_1^2 + 4\theta_2$ es positivo o negativo. Así pues, cuando $\theta_1^2 + 4\theta_2 \geq 0$ (caso de raíces reales) diremos que se cumple la condición de invertibilidad si $|L_i| > 1$, para $i = 1, 2$. Por el contrario en el caso de las raíces complejas esto es, cuando $\theta_1^2 + 4\theta_2 < 0$ (y por lo tanto, $\theta_1^2 < 0$), las raíces serán iguales a una expresión de la forma $a \pm bi$ donde i es el número imaginario. En este caso la condición de invertibilidad se cumplirá cuando el modelo definido como $\sqrt{a^2 + b^2}$ sea mayor que la unidad. En cualquiera de los dos casos considerados, raíces reales o raíces complejas, el que las raíces [3.21], caiga fuera del círculo unitario implica las siguientes restricciones en los valores de los parámetros θ_1 y θ_2 :

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &< 1 \\ \theta_2 - \theta_1 &< 1 \\ |\theta_2| &< 1 \end{aligned} \quad [3.22]$$

Prueba: a partir de [3.20] el cumplimiento $|L_1| > 1$ y $|L_2| > 1$ implica que

$$\left| \frac{1}{L_1} \right| < 1 \quad \text{y} \quad \left| \frac{1}{L_2} \right| < 1$$

y, por lo tanto, debe verificarse que: $\left| \frac{1}{L_1} \cdot \frac{1}{L_2} \right| < 1$

Ahora bien, dado que desde [3.21] podemos escribir:

$$\frac{1}{L_1} = \frac{2\theta_2}{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}, \quad \frac{1}{L_2} = \frac{2\theta_2}{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}} \quad \text{se obtiene :}$$

$$\left| \frac{1}{L_1} \cdot \frac{1}{L_2} \right| < 1 \Rightarrow \left| \frac{4\theta_2^2}{\theta_1^2 - (\theta_1^2 + 4\theta_2)} \right| = |\theta_2| < 1$$

Por otra parte, las raíces deberá cumplirse que $\theta_1^2 + 4\theta_2 \geq 0$, por lo cual, podemos

escribir:
$$-1 < \frac{1}{L_2} = \frac{2\theta_2}{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}} \leq \frac{2\theta_2}{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}} = \frac{1}{L_1} < 1$$

Así pues, por una parte tendremos:

$$\begin{aligned} -1 < \frac{2\theta_2}{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}} &\Rightarrow 1 > \frac{-2\theta_2}{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}} \Rightarrow 1 > \frac{2\theta_2}{\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2} > 2\theta_2 &\Rightarrow \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2} > 2\theta_2 - \theta_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta_1^2 + 4\theta_2 > 4\theta_2^2 + \theta_1^2 - 4\theta_1\theta_2 &\Rightarrow \theta_2 - \theta_1 < 1 \end{aligned}$$

Y, por otra parte:

$$\begin{aligned} \frac{2\theta_2}{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}} < 1 &\Rightarrow 2\theta_2 < -\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2} \Rightarrow 2\theta_2 + \theta_1 < \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta_1^2 + 4\theta_2 > 4\theta_1\theta_2 < \theta_1^2 + 4\theta_2 &\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 < 1 \end{aligned}$$

Así pues, queda demostrado que cuando las raíces son reales $|L_1| > 1$ y $|L_2| > 1$

implican:

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &< 1 \\ \theta_2 - \theta_1 &< 1 \\ |\theta_2| &< 1 \end{aligned}$$

De manera análoga se obtendría considerando las raíces complejas y, por tanto

tomando $\theta_1^2 + 4\theta_2 < 0$.

La esperanza matemática y la varianza del modelo MA(2) son iguales a:

$$E(y_t) = \mu \quad [3.23]$$

$$\gamma_0 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \quad [3.24]$$

Prueba:

$$[3.23]: E(y_t) = E(\mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2}) = \mu$$

[3.24]:

$$\begin{aligned} \gamma_0 = Var(y_t) &= E[(y_t - \mu)^2] = E[(u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2})^2] = \\ &= E(u_t^2) + \theta_1^2 E(u_{t-1}^2) + \theta_2^2 E(u_{t-2}^2) - 2\theta_1 E(u_t u_{t-1}) - 2\theta_2 E(u_t u_{t-2}) + 2\theta_1 \theta_2 E(u_{t-1} u_{t-2}) = \\ &= \sigma_u^2 + \theta_1^2 \sigma_u^2 + \theta_2^2 \sigma_u^2 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \end{aligned}$$

Función de Autocovarianza.

$$\gamma_j = \begin{cases} (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2) \sigma_u^2 & \text{para } j=1 \\ -\theta_2 \sigma_u^2 & \text{para } j=2 \\ 0 & \text{para } j>2 \end{cases} \quad [3.25]$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= E[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] = E[(u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2})(u_{t-1} - \theta_1 u_{t-2} - \theta_2 u_{t-3})] \\ &= -\theta_1 E(u_{t-1}^2) + \theta_1 \theta_2 E(u_{t-2}^2) = -\theta_1 \sigma_u^2 + \theta_1 \theta_2 \sigma_u^2 = (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2) \sigma_u^2 \\ \gamma_2 &= E[(y_t - \mu)(y_{t-2} - \mu)] = E[(u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2})(u_{t-2} - \theta_1 u_{t-3} - \theta_2 u_{t-4})] = \\ &= -\theta_2 E(u_{t-2}^2) - \theta_2 \sigma_u^2 \\ \gamma_3 &= E[(y_t - \mu)(y_{t-3} - \mu)] = E[(u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2})(u_{t-3} - \theta_1 u_{t-4} - \theta_2 u_{t-5})] = \\ &= 0 \quad \forall j > 2 \end{aligned}$$

Función de Autocorrelación

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & \text{para } j=1 \\ \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & \text{para } j=2 \\ 0 & \text{para } j>2 \end{cases} \quad [3.26]$$

Prueba:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_u^2}{\sigma_u^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} = -\frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \\ \rho_2 &= \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{-\theta_2\sigma_u^2}{\sigma_u^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \\ \rho_3 &= \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \frac{0}{\sigma_u^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} = 0 \quad \text{para } j>2\end{aligned}$$

Función de Autocorrelación Parcial:

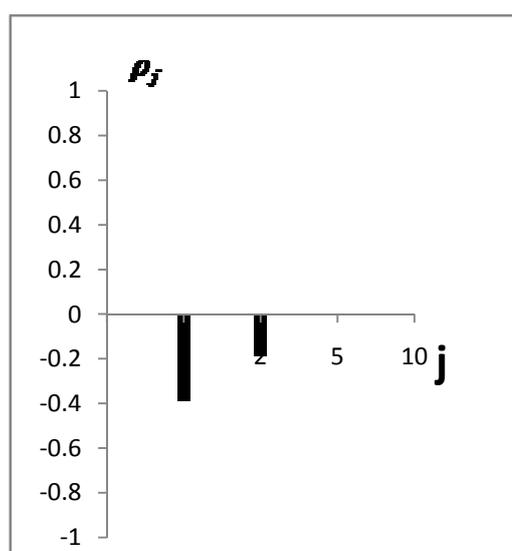
$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \rho_1 \\ \phi_{22} &= \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \\ \phi_{33} &= \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)} \\ &\dots\end{aligned}\tag{3.27}$$

Prueba: Utilizada [2.31] y teniendo en cuenta que $\rho_j = 0 \quad \forall j>2$, podemos escribir

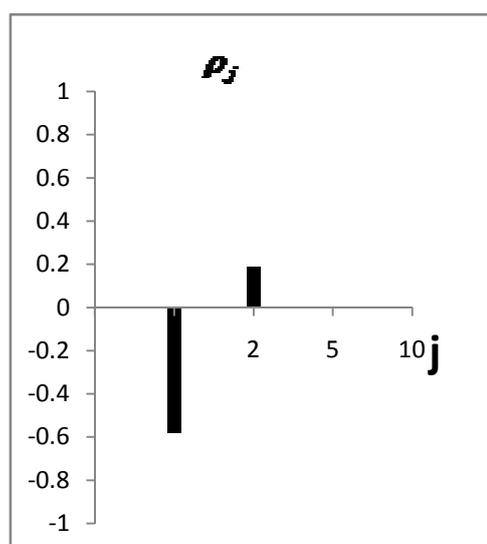
$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \rho_1 \\ \phi_{22} &= \frac{\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \\ \phi_{33} &= \frac{\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\rho_1\rho_2^2 - \rho_1^3 - 2\rho_1\rho_2}{1 - 2\rho_1^2\rho_2 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2} = \frac{\rho_1^3\rho_1\rho_2 - (2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)}\end{aligned}$$

Las características más relevantes del modelo MA(2) son las siguientes:

- 1) El modelo MA(2) siempre es estacionario.
- 2) Es invertibles si cumple [3.22]; esto es $\theta_1 + \theta_2 < 1$; $\theta_2 - \theta_1 < 1$ y $|\theta_2| < 1$.
- 3) La función de autocorrelación se anula para retardos superiores a dos (el orden del modelo).
- 4) El correlograma, representación gráfica de la función de autocorrelación, tendrá tan solo dos picos distintos de cero, los correspondientes a los dos primeros retardos. Respectos al signo de estos picos, podemos a partir de [3.26] que el del primer retardo tendrán signo inverso al del coeficientes θ_1 , mientras que el del segundo retardo tendrán signo inverso al de θ_2 , (véase la figura 3.4).
- 5) La función de autocorrelación parcial no se anula. Su representación gráfica presentará un comportamiento amortiguado hacia cero, caso de que las raíces de $\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 = 0$ sean reales (véase la fig 3.5) o un comportamiento sinusoidal, también tendente a cero, en el caso de raíces complejas (fig 3.6).



$(\theta_1 > 0; \theta_2 > 0)$



$(\theta_1 > 0; \theta_2 > 0)$

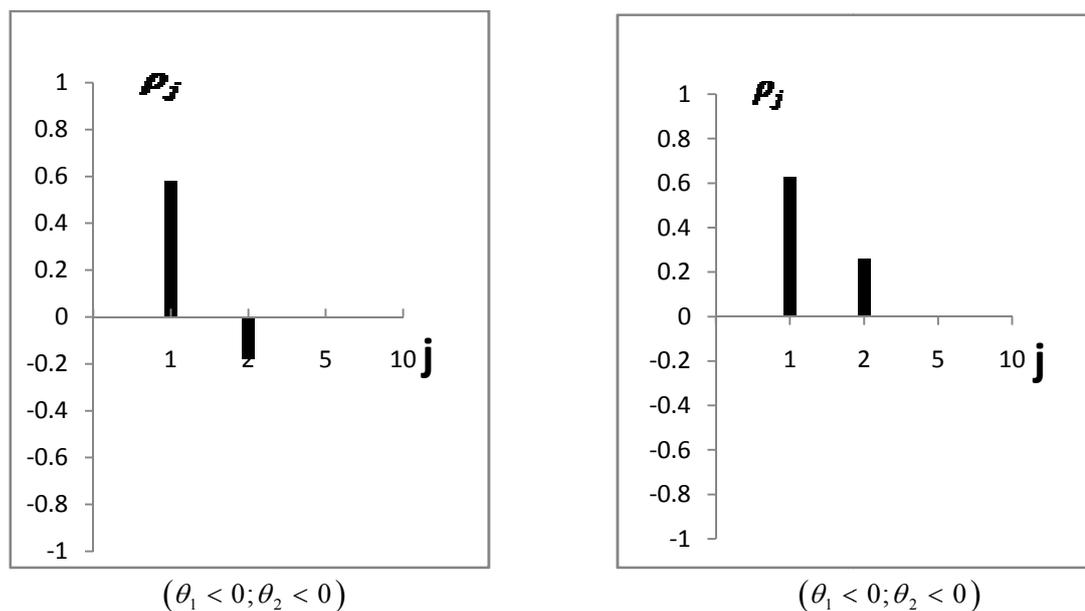


FIG 3.4 Correlograma de modelos MA(2)

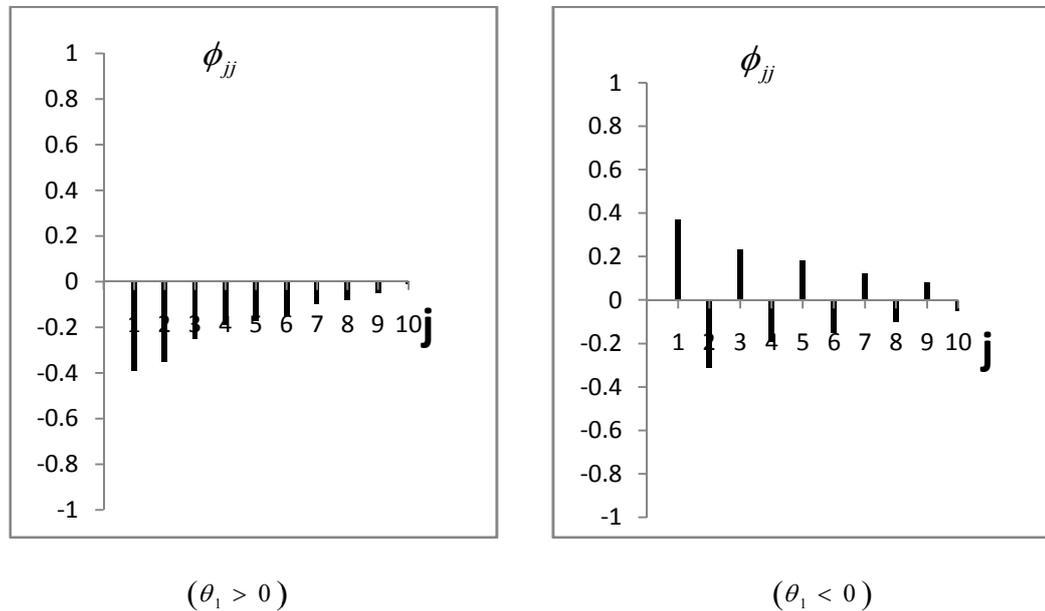


FIG 3.5 Representación gráfica de la FAP de modelos MA(2) con raíces real

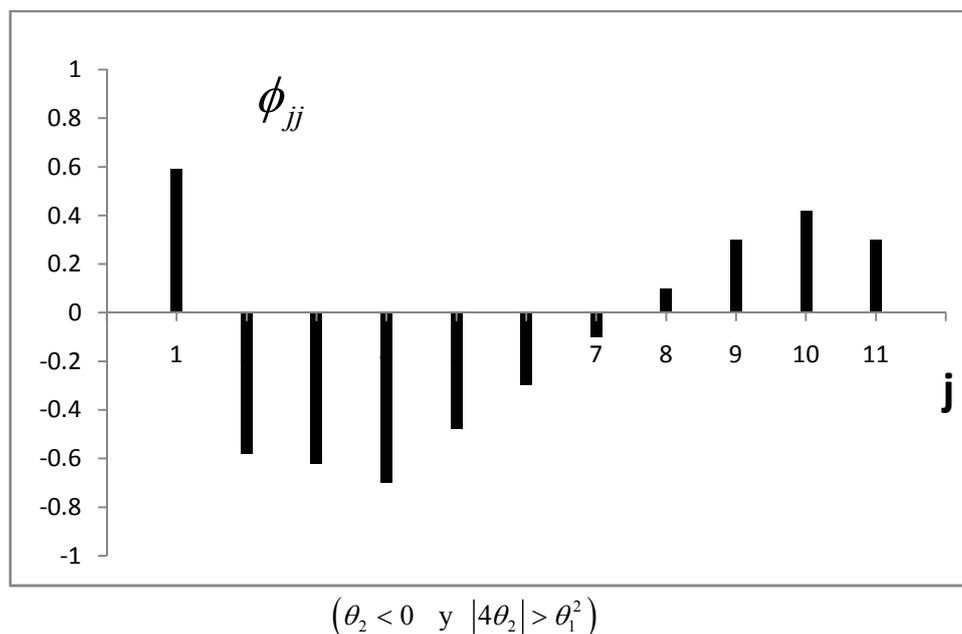


FIG 3.6 Representación gráfica de la FAP de modelos MA(2) con raíces complejas.

Ejemplo 3.2 Dados los siguientes valores:

$$\theta_1 = 0.7, \quad \theta_2 = 0.2, \quad \mu = 1, \quad \sigma_u^2 = 2$$

$$y_t = 1 + \mu_t - 0.7u_{t-1} - 0.2u_{t-2}, \quad \sigma_u^2 = 2$$

Calcular:

- ✓ La media, La varianza, La Función de Autocovarianza, La Función de Autocorrelación y La Función de Autocorrelación Parcial.

Solución:

Media: $\mu = 1$

Varianza: $\gamma_0 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) = 2(1 + 0.49 + 0.04) = 3.06$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_j = \begin{cases} (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_u^2 = (-0.7 + 0.14)(2) = 3.06 & \text{para } j = 1 \\ -\theta_2\sigma_u^2 = (-0.2)(2) = -0.4 & \text{para } j = 2 \\ 0 & \text{para } j > 2 \end{cases}$$

Función de Autocorrelación:

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{(-0.7) + (0.14)}{1 + (0.49) + (0.04)} = \frac{-0.56}{1.53} = -0.37 & \text{para } j = 1 \\ \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{-0.2}{1 + (0.49) + (0.04)} = \frac{-0.2}{1.53} = -0.13 & \text{para } j = 2 \\ 0 & \text{para } j > 2 \end{cases}$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{11} = \rho_1 = -0.37$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{(-0.13) - (0.37)^2}{1 - (0.37)^2} = -0.31$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)} = \frac{(-0.37)^3 - (0.37) * (0.13)(2 + 0.13)}{1 - (-0.13)^2 - 2(0.37)^2(1 + 0.13)} = -0.23$$

...

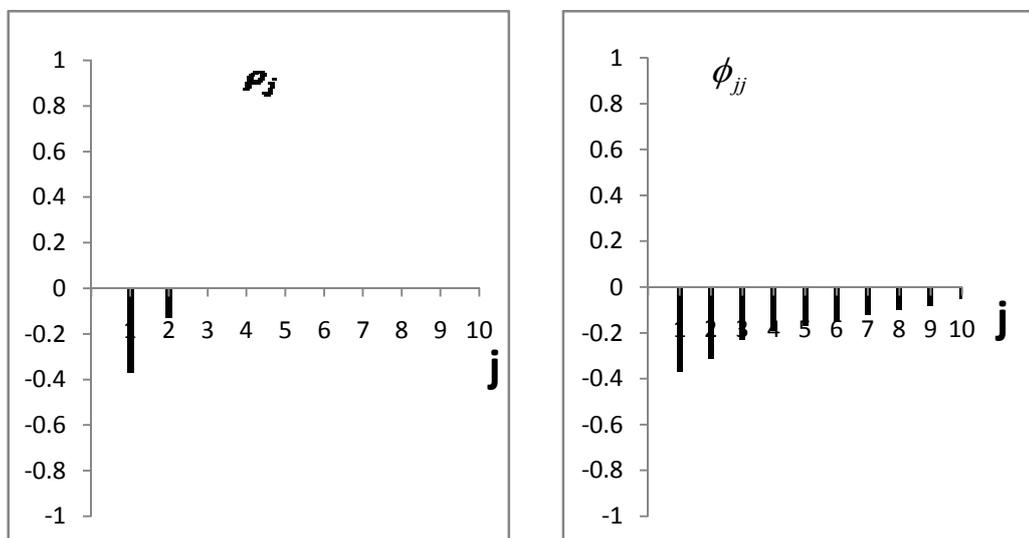


FIG 3.7 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo MA(2) con $\theta_1=0.7$ y $\theta_2=0.2$

Ejemplo 3.3 Dados los siguientes valores:

$$\theta_1 = -0.8, \quad \theta_2 = -0.5, \quad \mu = 1, \quad \sigma_u^2 = 2$$

$$y_t = 1 + u_t + 0.8u_{t-1} - 0.5u_{t-2}, \quad \sigma_u^2 = 2$$

Calcular:

- ✓ La media, La varianza, La Función de Autocovarianza, La Función de Autocorrelación, La Función de Autocorrelación Parcial y verificar la invertibilidad del modelo.

Solucion:

En este caso, las raíces de $\theta(L) = 0$ son complejas como consecuencias de que:

$$\theta_1^2 + 4\theta_2 = 0.64 - 4 * 0.5 = -1.36$$

Sin embargo, el modelo es invertibles, ya que se cumple [3.22] esto es:

$$\theta_1 + \theta_2 = -0.8 - 0.5 = -1.3 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 = -0.5 + 0.8 = 0.3 < 1$$

$$|\theta_2| = 0.5 < 1$$

Media: $\mu = 1$

Varianza: $\gamma_0 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) = 2(1 + 0.64 + 0.25) = 3.78$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_j = \begin{cases} (-\theta + \theta_1\theta_2)\sigma_u^2 = (+0.8 + 0.8 * 0.5)(2) = 2.4 & \text{para } j = 1 \\ -\theta_2\sigma_u^2 = (0.5)(2) = 1 & \text{para } j = 2 \\ 0 & \text{para } j > 2 \end{cases}$$

Función de Autocorrelación:

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\theta + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{(0.8) + (0.8 * 0.5)}{1 + (0.8)^2 + (0.5)^2} = \frac{1.2}{1.89} = 0.63 & \text{para } j = 1 \\ \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{-0.2}{1 + (0.8)^2 + (0.5)^2} = \frac{0.5}{1.89} = 0.26 & \text{para } j = 2 \\ 0 & \text{para } j > 2 \end{cases}$$

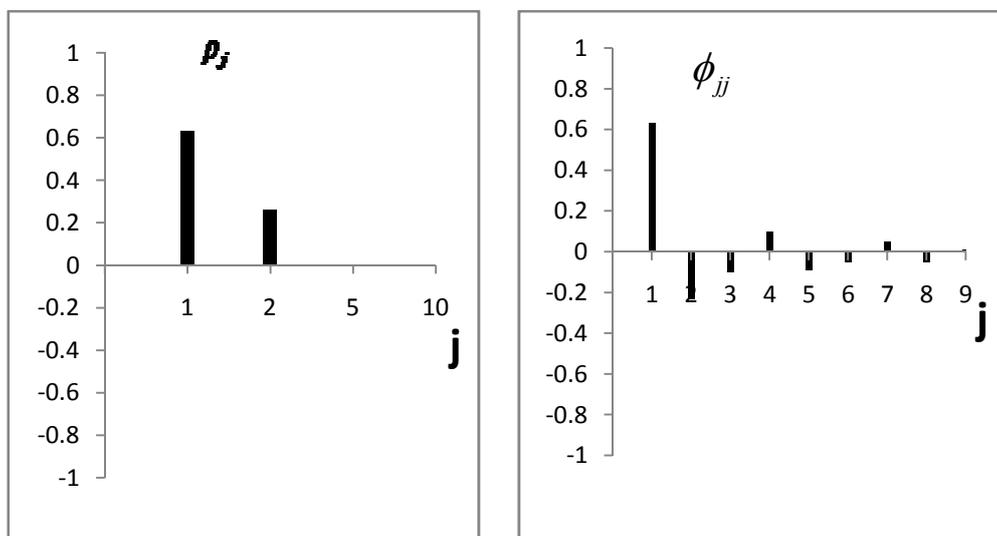


FIG 3.8 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo MA(2) con $\theta_1 = -0.8$ y $\theta_2 = -0.5$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{11} = \rho_1 = -0.63 \quad \phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{(0.26) - (0.63)^2}{1 - (0.63)^2} = -0.23$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)} = \frac{(0.63)^3 - (0.63) * (0.26)(2 - 0.26)}{1 - (0.26)^2 - 2(0.63)^2(1 - 0.63)} = -0.1$$

...

Modelo MA(q)

Un proceso MA(q), viene definido como:

$$y_t = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \dots - \theta_q u_{t-q} \quad [3.28]$$

Podremos nuevamente afirmar que este siempre es estacionario y que para ser invertible debe cumplir que las raíces de:

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q = 0$$

Caigan fuera del círculo unitario. Esto es, denominado mediante L_1, L_2, \dots, L_q las raíces, estas deben ser mayores que la unidad en los valores absoluto, si dichas raíces son reales, o bien el módulo debe ser superior a la unidad si la raíces son complejas.

En los casos particulares de modelos MA(1) y MA(2) hemos obtenidos las restricciones perimétricas implicadas por esta condición de invertibilidad. Una condición necesaria, aunque no suficientes, para que un modelo de medias móviles de cualquier orden (por ejemplo, q) sea invertibles es las siguientes:

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_q < 1 \quad [3.29]$$

La esperanza matemática y la varianza del modelo MA (q) son iguales a:

$$E(y_t) = \mu \quad [3.30]$$

$$\gamma_0 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \quad [3.31]$$

Prueba:

$$[3.30]: E(y_t) = E(\mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \dots - \theta_q u_{t-q}) = \mu$$

[3.31]:

$$\begin{aligned} \gamma_0 = \text{Var}(y_t) &= E[(y_t - \mu)^2] = E[(u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \dots - \theta_q u_{t-q})^2] = \\ &= E(u_t^2) + \theta_1^2 E(u_{t-1}^2) + \theta_2^2 E(u_{t-2}^2) + \dots + \theta_q^2 E(u_{t-q}^2) - 2\theta_1 E(u_t u_{t-1}) - \dots + 2\theta_{q-1} \theta_q E(u_{t-q+1} u_{t-q}) = \\ &= \sigma_u^2 + \theta_1^2 \sigma_u^2 + \theta_2^2 \sigma_u^2 + \dots + \theta_q^2 \sigma_u^2 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \end{aligned}$$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_j = \begin{cases} (-\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \dots + \theta_{q-j} \theta_q) \sigma_u^2 & \text{para } j = 1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{para } j > q \end{cases} \quad [3.32]$$

Prueba: Si $j = 1, 2, \dots, q$:

$$\begin{aligned}\gamma_j &= E[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] = E\left[\frac{(u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_j u_{t-j} - \theta_{j+1} u_{t-j-1} - \dots - \theta_q u_{t-q})}{(u_{t-j} - \theta_1 u_{t-j-1} - \dots - \theta_{q-j} u_{t-q} - \dots - \theta_q u_{t-j-q})}\right] = \\ &= -\theta_j E(u_{t-j}^2) + \theta_1 \theta_{j+1} E(u_{t-j-1}^2) + \dots + \theta_{q-j} \theta_q E(u_{t-q}^2) = \\ &= \sigma_u^2 (-\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \dots + \theta_{q-j} \theta_q)\end{aligned}$$

Si $j > q$:

$$\begin{aligned}\gamma_j &= E[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] = E[(u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q})(u_{t-j} - \theta_1 u_{t-j-1} - \dots - \theta_q u_{t-j-q})] = \\ &= 0 \quad \forall j > q\end{aligned}$$

Función de Autocorrelación:

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \dots + \theta_{q-j} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{para } j = 1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{para } j > q \end{cases} \quad [3.33]$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \rho_1 \\ \phi_{22} &= \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \\ \phi_{33} &= \frac{\rho_1^2 - \rho_1 \rho_2 (2 - \rho_2) + \rho_3 (1 - \rho_1^2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2 (1 - \rho_2)}\end{aligned} \quad [3.34]$$

Prueba. Utilizando [2.31] y teniendo en cuenta que $\rho_j = 0 \quad \forall j > q$, podemos escribir:

$$\phi_{11} = \rho_1 \quad \phi_{22} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\rho_3 + \rho_1 \rho_2^2 + \rho_1^3 - 2\rho_1 \rho_2 - \rho_1^2 \rho_3}{1 - 2\rho_1^2 \rho_2 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1 \rho_2 (2 - \rho_2) + \rho_3 (1 - \rho_1^2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2 (1 - \rho_2)}$$

Finalmente esta sección enumera las principales características de los modelos de medias móviles, y son las siguientes:

- 1) Un modelo de medias móviles siempre es estacionario.
- 2) Un modelo de medias móviles es invertible.
- 3) La autocovarianza, y consecuentemente las autocorrelaciones (y el correlograma), se anula cuando el desfase considerado es superior al orden del modelo.
- 4) Las autocorrelaciones parciales no se anulan presentando un comportamiento amortiguado hacia cero (caso de raíces reales) o sinusoidal también tendente a cero (caso de raíces complejas).

2.8.3 MODELOS AUTORREGRESIVOS (AR).

Un modelo autorregresivo de orden p , o abreviadamente $AR(p)$, se define como:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \delta + u_t \quad [3.35]$$

Este modelo puede escribirse más abreviadamente como:

$$\phi(L) = y_t = \delta + u_t \quad [3.36]$$

donde $\phi(L)$ es el operador polinomial de retardos:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \quad [3.37]$$

A diferencia de los modelos de medias móviles que siempre son estacionarios, los modelos autorregresivos deben cumplir como condiciones de estacionariedad que las raíces del polinomio característico:

$$\phi(L) = 0 \quad [3.38]$$

caigan fuera del círculo unidad. Esto es, las raíces si son reales deben ser en valor absoluto mayor que la unidad, mientras que si son complejas, el módulo debe ser mayor que uno.

Como puede verse, la condición de estacionalidad de un modelo AR es equivalente en sentido formal a la condición invertibilidad de un modelo MA. Ahora bien, mientras que el modelo MA siempre es estacionario, debiéndose verificar si es o no invertibles, el modelo AR siempre está en forma invertida, debiéndose verificar si es o no estacionario. A continuación se examinan las propiedades de un AR(1) y de un AR(2), para generalizarlas posteriormente a un AR(p).

Modelo AR(1)

Un modelo AR(1) viene definido por:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \delta + u_t \quad [3.39]$$

O bien, más abreviadamente:

$$\phi(L) = y_t = \delta + u_t \quad [3.40]$$

Siendo: $\phi(L) = 1 - \phi_1 L \quad [3.41]$

La condición de estacionalidad del modelo AR(1) implica que: $|\phi_1| < 1 \quad [3.42]$

Prueba:

$$\phi(L) = 0 \Rightarrow 1 - \phi_1 L = 0 \Rightarrow L = \frac{1}{\phi_1}$$

Para que esta raíz caiga fuera del círculo unidad, debe cumplirse que $|L| > 1$, lo que

implica: $|L| > 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{\phi_1} \right| > 1 \Rightarrow |\phi_1| < 1$

Supuesto el cumplimiento de [3.42], podrá escribirse la esperanza matemática, igual a una constante μ , definida en este modelo como sigue:

$$E(y_t) = \mu = \frac{\delta}{1-\phi_1} \quad \forall t \quad [3.43]$$

Prueba. Si el proceso AR (1) es estacionario, esto implica que:

$$E(y_t) = E(y_{t-1}) = \dots = \mu$$

Entonces, aplicando la esperanza matemática en [3.39]

$$E(y_t) = \phi_1 E(y_{t-1}) + \delta + E(u_t)$$

esto es:

$$\mu = \phi_1 \mu + \delta \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1-\phi_1}$$

Una forma alternativa de escribir el modelo AR (1) estacionario es en forma de

$$\tilde{y}_t = \phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t \quad [3.44]$$

donde:
$$\tilde{y}_{t-j} = y_{t-j} - \mu = y_{t-j} - \frac{\delta}{1-\phi_1} \quad \text{para } j=0 \text{ y } 1 \quad [3.45]$$

O bien:
$$\phi(L)\tilde{y}_t = u_t \quad [3.46]$$

Está definido $\phi(L)$ como en [3.41].

Prueba: Identidad entre las expresiones [3.39] y [3.44] partamos de [3.44]:

$$\tilde{y}_t = \phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t, \text{ entonces, sustituyendo [3.45] en [3.46].}$$

$$\begin{aligned} y_t - \frac{\delta}{1-\phi_1} &= \phi_1 \left(y_{t-1} - \frac{\delta}{1-\phi_1} \right) + u_t \Rightarrow y_t = \phi_1 y_{t-1} + \frac{\delta}{1-\phi_1} - \frac{\phi_1 \delta}{1-\phi_1} + u_t = \\ & \phi_1 y_{t-1} + \frac{\delta(1-\phi_1)}{1-\phi_1} + u_t = \phi_1 y_{t-1} + \delta + u_t \end{aligned}$$

Luego hemos visto que, partiendo de [3.44] se llega a [3.39].

La expresión [3.44] facilita la obtención de la varianza y la función de autocovarianza. En concreto, la varianza será igual a:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} \quad [3.47]$$

Prueba:

$$\gamma_0 = E(\tilde{y}_t^2) = E[(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_{t-1})^2] = \phi_1^2 E(\tilde{y}_{t-2}^2) + E(u_t^2) + 2\phi_1 E(\tilde{y}_{t-2}^2 u_2)$$

Se cumple que:

$$E(\tilde{y}_{t-1}^2) = \gamma_0$$

$$E(u_t^2) = \sigma_u^2$$

$$E(\tilde{y}_{t-1} u_t) = \begin{cases} \sigma_u^2 & \text{para } j=0 \\ 0 & \text{para } j>0 \end{cases}$$

Entonces:
$$\gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma_u^2 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2}$$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_j = \phi_1^j \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} \quad \text{para } j \geq 1 \quad [3.48]$$

Función de Autocorrelación. Se obtienen directamente efectuando el cociente entre [3.48] [3.47], resultando:

$$\rho_j = \phi_1^j \quad \text{para } j \geq 1 \quad [3.49]$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{jj} = \begin{cases} \rho_1 = \phi_1 & \text{para } j = 1 \\ 0 & \text{para } j > 1 \end{cases} \quad [3.50]$$

Prueba: Utilizamos [2.31] y [3.16], podemos escribir: $\phi_{11} = \rho_1$

Y para $j > 1$, la última columna del determinante del numerador se obtienen multiplicando por ϕ_1 cada elemento de primera columna de dicho determinante, por lo cual este es igual a ceros; en efecto:

$$\phi_{jj} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{j-1} & \rho_{j-2} & \dots & \rho_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{j-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{j-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{j-1} & \rho_{j-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \phi_1 & \dots & \phi_1 \\ \phi_1 & 1 & \dots & \phi_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{j-1} & \phi_1^{j-2} & \dots & \phi_1^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \phi_1 & \dots & \phi_1^{j-1} \\ \phi_1 & 1 & \dots & \phi_1^{j-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{j-1} & \phi_1^{j-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}} = 0 \quad \text{para } j > 1$$

Un concepto importante referido a los modelos autorregresivos es el de las ecuaciones de Yule-Walker. “sistema de ecuaciones cuyo número y parámetros desconocidos son iguales al orden del proceso AR, que se obtención de dichos parámetros desconocidos “. En el caso del modelo AR(1) solamente habrá una ecuación de Yule-Walke, que será: $\rho_j = \phi_1$ [3.51]

Obsérvese que desde [3.51] puede obtenerse una estimación de ϕ_1 reemplazando ρ_j por su estimación, esto es, por la autocorrelación muestral de orden uno (γ_1).

Las ecuaciones de Yule-Walke posibilitan, asimismo, obtener los coeficientes de autocorrelación parcial de un modelo autorregresivos. En el caso del modelo AR(1) hemos obtenidos que la función de autocorrelación parcial solo tienen un valor diferentes de cero cuando $j=1$; este valor, definido en [3.50], puede observarse que coincide precisamente con el que se deriva de la ecuación de Yule-Walke [3.51].

A la vista de los resultados obtenidos podemos señalar como características más relevantes del modelo AR(1) las siguientes:

- 1) Siempre es invertible (por definición su fórmula es “invertida”).
- 2) Para ser estacionario, ha de cumplirse que $|\theta_1| < 1$.
- 3) La función de autocorrelación total no se anula, pero se va amortiguando hacia 0.
- 4) El correlograma, es la representación gráfica de la función de autocorrelación, y tendrá un comportamiento amortiguado hacia cero con todos los valores positivos, caso de que $\phi_1 > 0$, o bien alternando el signo, comenzando con negativo, si $\phi_1 < 0$ (véase la figura 3.9).
- 5) La función de autocorrelación parcial se anula para retardos superiores a uno. Su representación gráfica tendrá, por consiguiente, un solo pico distinto de cero, el correspondiente al primer retardo, coincidiendo el signo del mismo con el del parámetro ϕ_1 (véase la figura 3.10).

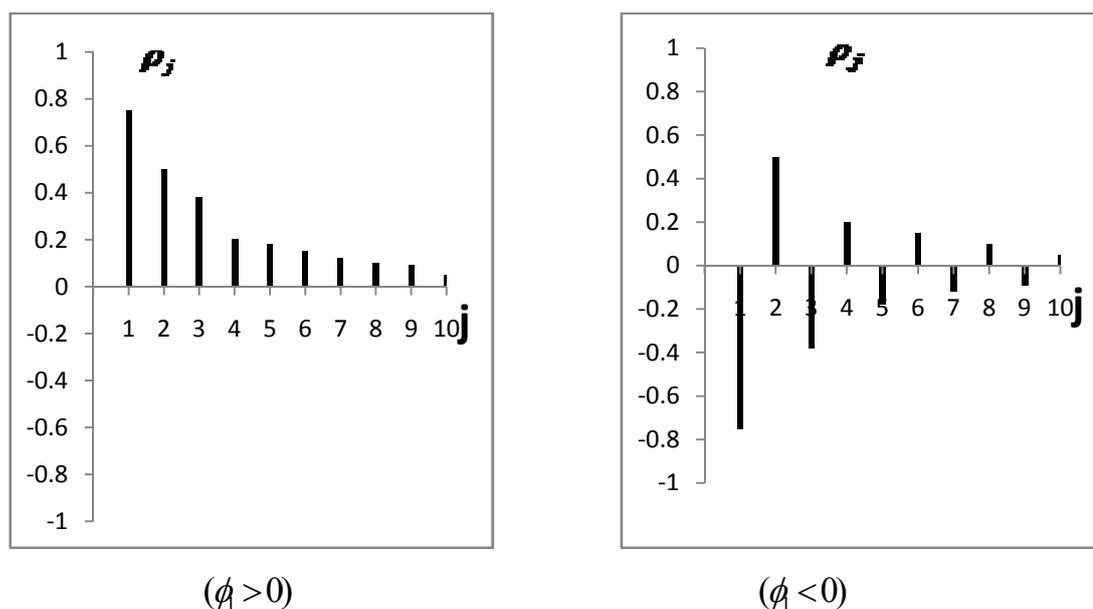


FIG 3.9 Correlograma del modelo AR(1).

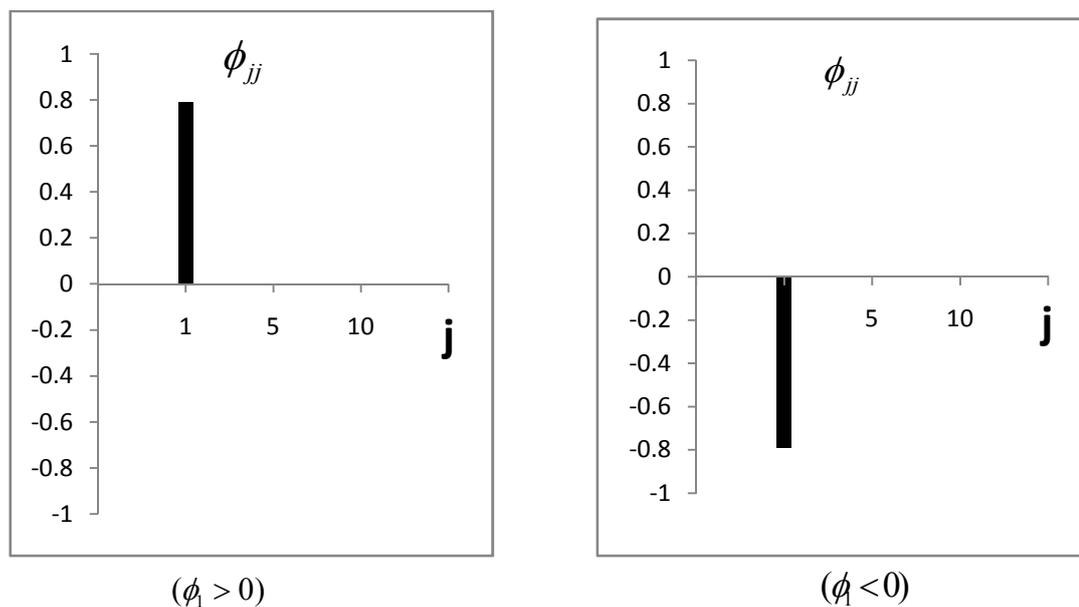


FIG.3.10 Representación gráfica de la FAP de modelos AR(1).

Ejemplo 3.4 Dados los siguientes valores:

$$\phi_1 = 0.6; \quad \delta = 2; \quad \sigma_u^2 = 2$$

$$y_t = 0.6y_{t-1} + 2 + u_t; \quad \sigma_u^2 = 2$$

Calcular:

- ✓ La media, La varianza, La Función de Autocovarianza, La Función de Autocorrelación y La Función de Autocorrelación Parcial.

Solucion:

Media: $\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1} = \frac{2}{1 - 0.6} = 5$

Varianza: $\gamma_0 = \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = \frac{2}{1 - 0.36} = 3.125$

Función de Autocovarianza:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \phi \frac{\sigma_u^2}{1-\phi^2} = 0.6 \frac{2}{1-0.36} = 0.6 * 3.125 = 1.87 & \gamma_2 &= \phi^2 \frac{\sigma_u^2}{1-\phi^2} = 0.6 \frac{2}{1-0.36} = (0.6)^2 * 3.125 = 1.12 \\ \gamma_3 &= \phi^3 \frac{\sigma_u^2}{1-\phi^2} = 0.6 \frac{2}{1-0.36} = (0.6)^3 * 3.125 = 0.67 & \gamma_4 &= \phi^4 \frac{\sigma_u^2}{1-\phi^2} = 0.6 \frac{2}{1-0.36} = (0.6)^4 * 3.125 = 0.40 \\ \gamma_5 &= \phi^5 \frac{\sigma_u^2}{1-\phi^2} = 0.6 \frac{2}{1-0.36} = (0.6)^5 * 3.125 = 0.24 \end{aligned}$$

Función de Autocorrelación:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 = 0.6 & \rho_2 &= \phi_1^2 = (0.6)^2 = 0.36 \\ \rho_3 &= \phi_1^3 = (0.6)^3 = 0.22 & \rho_4 &= \phi_1^4 = (0.6)^4 = 0.13 \\ \rho_5 &= \phi_1^5 = (0.6)^5 = 0.08 \end{aligned}$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{jj} = \begin{cases} \phi_1 = 0.6 & \text{para } j = 1 \\ 0 & \text{para } j \geq 2 \end{cases}$$

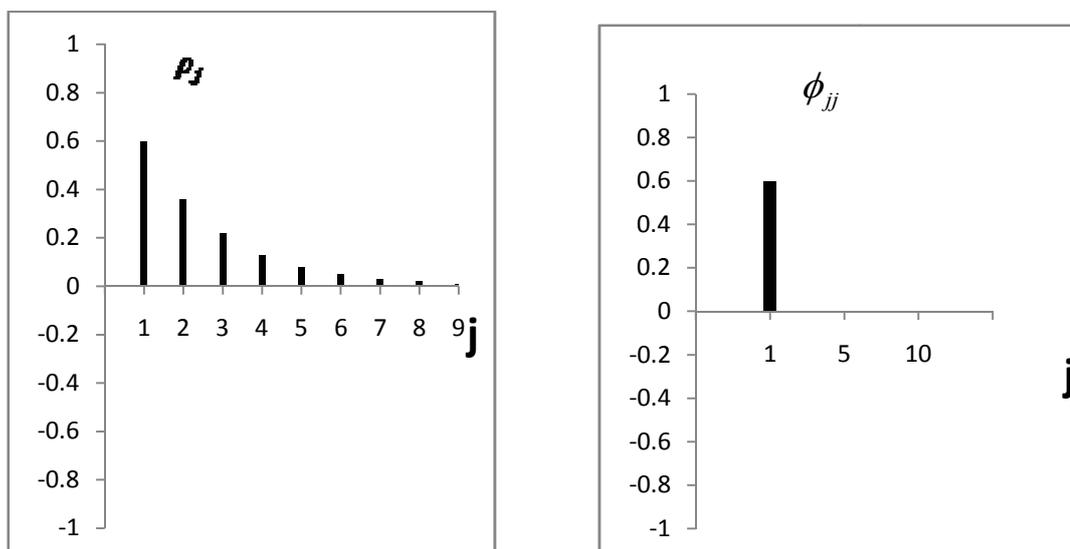


FIG 3.11 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo AR (1) con $\phi = 0.6$

Modelo AR(2).

Un modelo AR(2) viene definido por:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \delta + u_t \quad [3.52]$$

Este modelo también puede escribirse como:

$$\phi(L)y_t = \delta + u_t \quad [3.53]$$

donde:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 \quad [3.54]$$

El modelo AR(2) será estacionario si las raíces de la ecuación:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0 \quad [3.55]$$

Caen fuera del círculo unitario. Recordemos que esto quiere decir que si las raíces son reales debes ser en valor absoluto mayor que uno mientras que si son complejas, el módulo debe ser mayor que la unidad.

Por analogía con la ecuación de invertibilidad del modelo MA(2), resulta inmediato deducir que las restricciones paramétricas implicadas por la estacionariedad de un modelo AR(2) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1 \\ \phi_1 - \phi_2 &< 1 \\ |\phi_2| &< 1 \end{aligned} \quad [3.56]$$

Supuesto que el modelo AR(2) es estacionario, podemos escribir la esperanza matemática como:

$$E(y_t) = \mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2} \quad [3.57]$$

Prueba: Si el modelo es estacionario:

$$E(y_t) = E(y_{t-1}) = E(y_{t-2}) = \dots = \mu$$

Por lo tanto, tomando esperanza en [3.52]:

$$E(y_t) = \phi_1 E(y_{t-1}) + \phi_2 E(y_{t-2}) + \delta + E(u_t) \Rightarrow \mu = \phi_1 \mu + \phi_2 \mu + \delta \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2}$$

Bajo la condición de estacionariedad, el modelo AR (2) puede escribirse en forma de desviaciones respecto a la media:

$$\tilde{y}_t = \phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{y}_{t-2} + u_t \quad [3.58]$$

donde:

$$\tilde{y}_{t-j} = y_{t-j} - \mu = y_{t-j} - \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2} \quad \text{para } j = 0, 1 \text{ y } 2 \quad [3.59]$$

O bien:

$$\phi(L)\tilde{y}_t = u_t$$

Estando definido $\phi(L)$ como en [3.54].

La varianza de un modelo AR(2) es igual a:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_u^2 \quad [3.60]$$

Prueba:

$$\gamma_0 = E(\tilde{y}_t^2) = E[\tilde{y}_t(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{y}_{t-2} + u_t)] = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_u^2$$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} \quad \text{para } j \geq 1 \quad [3.61]$$

Prueba:

$$\gamma_j = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-j}) = E[\tilde{y}_{-j}(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{y}_{t-2} + u_t)] = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2}$$

A partir de [3.60] y de los valores de [3.61] para $j= 1$ y 2 se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \sigma_u^2 \\ \gamma_1 &= \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1 \\ \gamma_2 &= \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0\end{aligned}\quad [3.62]$$

Desde el cual pueden calcularse γ_0, γ_1 y γ_2 dados los valores de los parámetros

ϕ_1, ϕ_2 y σ_u^2 .

Las autocovarianzas para un orden superior al del modelo se obtiene, según [3.61], de forma recursiva; esto es:

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= \phi_1\gamma_2 + \phi_2\gamma_1 \\ \gamma_4 &= \phi_1\gamma_3 + \phi_2\gamma_2 \\ \gamma_5 &= \phi_1\gamma_4 + \phi_2\gamma_3 \\ &\dots\end{aligned}$$

Función de Autocorrelación. Dividiendo [3.61] por γ_0 se obtiene la expresión general de la función de autocorrelación del modelo AR (2), que es igual a:

$$\rho_j = \phi_1\rho_{j-1} + \phi_2\rho_{j-2} \quad \text{para } j \geq 1 \quad [3.63]$$

Las ecuación de Yule-Walker se deduce directamente a partir de [3.63], sustituyendo $j=1$ y 2 y teniendo en cuenta la propiedad de simetría $\rho_j = \rho_{-j}$, así como el hecho de que $\rho_0 = 1$:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2\rho_1 \\ \rho_2 &= \phi_1\rho_1 + \phi_2\end{aligned}\quad [3.64]$$

Desde [3.64] se obtienen las siguientes expresiones correspondientes a las autocorrelaciones de primer y segundo orden, en función únicamente de los parámetros ϕ_1 y ϕ_2 :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \\ \rho_2 &= \frac{\phi_1^2 + \phi_2(1-\phi_2)}{1-\phi_2}\end{aligned}\quad [3.65]$$

Prueba: A partir de la primera ecuación de Yule-Walker:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \Rightarrow \rho_1(1-\phi_2) = \phi_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

Y sustituyendo ahora esta expresión de ρ_1 en la segunda ecuación de Yule-Walker:

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_2(1-\phi_2)}{1-\phi_2}$$

Una vez calculadas las dos primeras autocorrelaciones, las restantes pueden obtenerse de forma recursiva utilizando la expresión [3.63].

Función de Autocorrelación Parcial.

$$\phi_{jj} = \begin{cases} \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} & \text{para } j = 1 \\ \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \phi_2 & \text{para } j = 2 \\ 0 & \text{para } j > 2 \end{cases}\quad [3.66]$$

Prueba: Utilizando [2.31] y [3.68] podemos escribir:

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\begin{aligned}\phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\phi_1^2 + \phi_2(1 - \phi_2)}{1 - \phi_2} \cdot \frac{\phi_1^2}{(1 - \phi_2)^2} = \frac{\phi_1^2(1 - \phi_2) + \phi_2(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2}{(1 - \phi_2)^2} = \\ &= \frac{\phi_2[(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2]}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2} = \phi_2\end{aligned}$$

Para $j > 2$ la última columna de los determinantes del numerador es una combinación lineal de las dos primeras columnas, por lo que dicho determinante es igual a cero.

Así, para $j = 3$:

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & (\phi_1 + \phi_2 \rho_1) \\ \rho_1 & 1 & (\phi_1 \rho_1 + \phi_2) \\ \rho_2 & \rho_1 & (\phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

Y, análogamente: $\phi_{jj} = 0 \quad \forall j \geq 3$

En los modelos autorregresivos, como ya señalamos en el caso del modelo AR(1), la función de autocorrelación parcial puede obtenerse a partir de las ecuaciones de Yule-Walker. Concretamente, dado un modelo AR(2), los dos coeficientes de autocorrelación parcial distintos de cero se obtendrá como sigue: El primer coeficiente (ϕ_{11}) será el valor del coeficiente ϕ_1 que se halla partir de la ecuación de Yule-Walker de un AR(1), mientras que el segundo coeficientes (ϕ_{22}) será el valor del coeficiente ϕ_2 que se obtiene a partir de las ecuaciones de Yule-Walker de un AR(2). Así pues, ϕ_{11} se obtiene directamente a partir de [3.51]:

$$\phi_{11} = \rho_1$$

Mientras que ϕ_{22} se obtiene desde [3.64]. Para ello, comenzaremos escribiendo esta expresión como sigue:

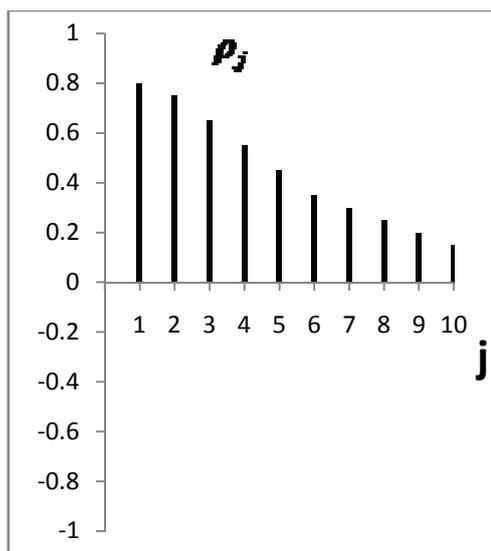
$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad [3.67]$$

Pre multiplicando a ambos lados de [3.67] por $\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$:

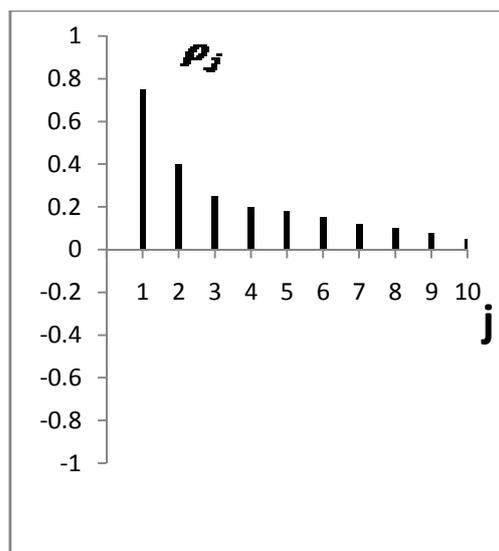
$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -\rho_1 \\ -\rho_1 & 1 \end{pmatrix}}{1 - \rho_1^2} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \quad [3.68]$$

El segundo coeficiente de autocorrelación parcial (ϕ_{22}) será el valor de ϕ_2 que se halla desde [3.68], el cual, teniendo en cuenta [3.65], es igual a:

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\phi_2 [(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2]}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2} = \phi_2$$



$(\phi_1 > 0; \phi_2 > 0)$



$(\phi_1 > 0; \phi_2 < 0)$

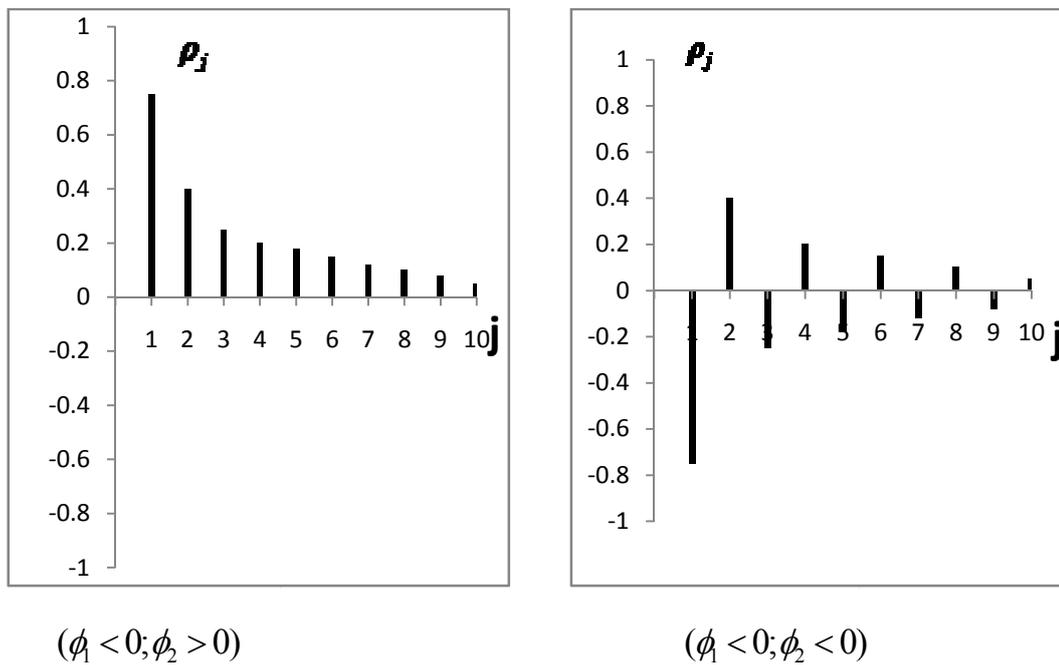
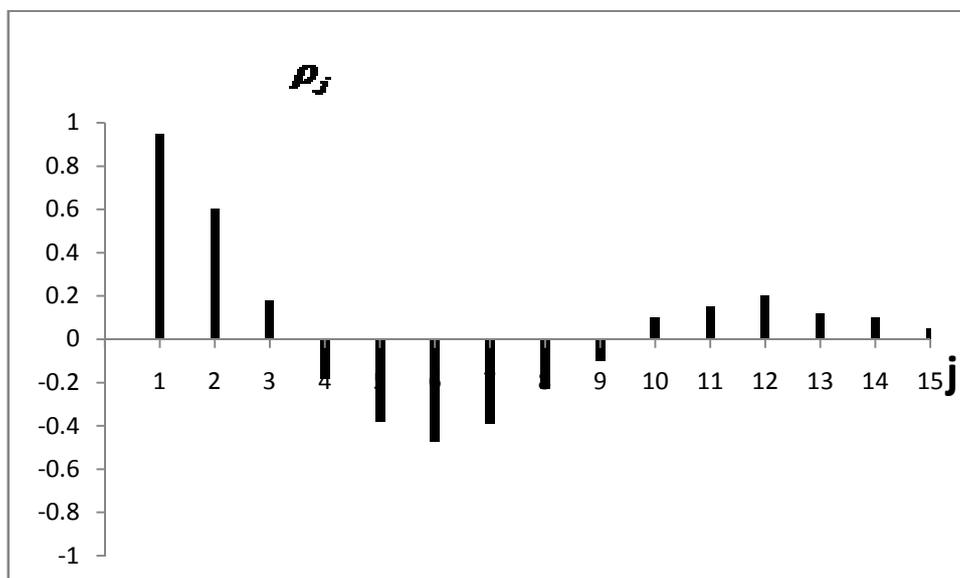


FIG 3.12 Correlograma de modelos AR (2) con raíces reales.



$$(|\phi_2| < 0 \text{ y } |4\phi_2| > \phi_1^2)$$

FIG 3.13 Correlograma del modelo AR(2) con raíces complejas.

Las Características del Modelo AR(2) son:

- 1) El modelo AR(2) es siempre invertible (por definición su forma es “invertible”).
- 2) Es estacionario si se cumple [3.59]; esto es $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$ y $|\phi_2| < 1$.
- 3) La función de autocorrelación no se anula. Diremos, en consecuencia, que su memoria es infinita.
- 4) La forma del correlograma, dependerá de cómo sean las raíces de la ecuación [3.55]. Si estas son reales, tendrán un comportamiento amortiguado hacia cero, siendo todos los valores positivos, o alternando el signo, aunque cumpliéndose siempre [3.65]. Si las raíces son complejas, para lo cual necesariamente debe cumplirse que $\phi_2 < 0$, el correlograma tendrá un comportamiento sinusoidal, pero también tendente a cero (véase figura 3.12).
- 5) La función de autocorrelación parcial se anula para retardos superiores a dos (el orden del modelo). Por consiguiente, su representación gráfica presentará tan solo dos picos distintos de cero, los correspondientes a los dos primeros retardos. Respecto a los signos de estos dos picos, primero y segundo, coincidirán, respectivamente, con los signos de ϕ_1 y ϕ_2 (véase figura 3.13).

Ejemplo 3.5 Dados los siguientes valores:

$$\phi_1 = 0.4; \quad \phi_2 = 0.3; \quad \delta = 2; \quad \sigma_u^2 = 3$$

$$y_t = 0.4y_{t-1} + 0.3 + 2 + u_t; \quad \sigma_u^2 = 3$$

Calcular:

- ✓ La media, La varianza, La Función de Autocovarianza, La Función de Autocorrelación, La Función de Autocorrelación Parcial y Estacionariedad.

Solución:

Estacionariedad: Si, ya que cumple:

$$\phi_1 + \phi_2 = 0.4 + 0.3 = 0.7 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 = 0.3 - 0.4 = -0.1 < 1$$

$$|\phi_2| = 0.3 < 1$$

Media:
$$\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2} = \frac{2}{1 - 0.4 - 0.3} = 6.66$$

Varianza y Función de Autocovarianza:

Ordenando la ecuación con los valores iniciales dados, las ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$$1) \gamma_0 = 0.4\gamma_1 + 0.3\gamma_2 + 3$$

$$2) \gamma_1 = 0.4\gamma_0 + 0.3\gamma_1 = 0$$

$$3) \gamma_2 = 0.4\gamma_1 + 0.3\gamma_0 = 0$$

En las ecuaciones 1) 2) y 3) multiplicamos por 10 para trabajar con número enteros de manera que se nos faciliten los cálculos a realizar.

$$\begin{array}{ll} 1) \gamma_0 = 0.4\gamma_1 + 0.3\gamma_2 + 3 & 2) \gamma_1 = 0.4\gamma_0 + 0.3\gamma_1 = 0 \\ \gamma_0 - 0.4\gamma_1 - 0.3\gamma_2 = 3(10) & -0.4\gamma_0 + 0.7\gamma_1 = 0(10) \\ 10\gamma_0 - 4\gamma_1 - 3\gamma_2 = 30 & -4\gamma_1 + 7\gamma_1 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) \gamma_2 = 0.4\gamma_1 + 0.3\gamma_0 = 0 \\ \gamma_2 - 0.4\gamma_1 - 0.3\gamma_0 = 0(10) \\ -3\gamma_0 - 4\gamma_1 + 10\gamma_2 = 0 \end{array}$$

Teniendo las tres ecuaciones procederemos a encontrar los valores para las variables $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ de la siguiente forma primero vamos a eliminar el valor de la variable γ_2 .

$$\begin{array}{r} 10\gamma_0 - 4\gamma_1 - 3\gamma_2 = 30(10) \\ -3\gamma_0 - 4\gamma_1 + 10\gamma_2 = 0(3) \\ \hline 100\gamma_0 - 40\gamma_1 - 30\gamma_2 = 300 \\ -9\gamma_0 - 12\gamma_1 + 30\gamma_2 = 0 \\ \hline 91\gamma_0 - 52\gamma_1 = 300 \end{array}$$

Luego eliminamos γ_1 de la misma forma que eliminamos γ_2 .

$$\begin{array}{r} 91\gamma_0 - 52\gamma_1 = 300(7) \\ -4\gamma_0 + 7\gamma_1 = 0(52) \\ \hline 637\gamma_0 - 364\gamma_1 = 2100 \\ -208\gamma_0 + 364\gamma_1 = 0 \\ \hline 429\gamma_0 = 2100 \end{array}$$

Hemos encontrado el valor de: $\gamma_0 = \frac{2100}{429} = 4.89$

Sustituimos el valor γ_0 en la ecuación 2 para poder encontrar el valor de γ_1

$$\begin{array}{r} -4\gamma_0 + 7\gamma_1 = 0 \\ -4(4.89) + 7\gamma_1 = 0 \\ 19.56 + 7\gamma_1 = 0 \\ \gamma_1 = \frac{19.56}{7} = 2.80 \end{array}$$

Teniendo los dos valores de γ_0, γ_1 sustituimos en la ecuación 3 para calcular el valor de la variable γ_2

$$\begin{array}{r} -3\gamma_0 - 4\gamma_1 + 10\gamma_2 = 0 \\ -3(4.89) - 4(2.80) + 10\gamma_2 = 0 \\ -14.67 - 11.2 + 10\gamma_2 = 0 \\ 10\gamma_2 = 14.67 + 11.2 \\ \gamma_2 = \frac{25.87}{10} = 2.59 \end{array}$$

Para los restantes retardos correspondientes a períodos estacionales (recuérdese que las autocovarianzas correspondientes a órdenes no estacionales son iguales a cero):

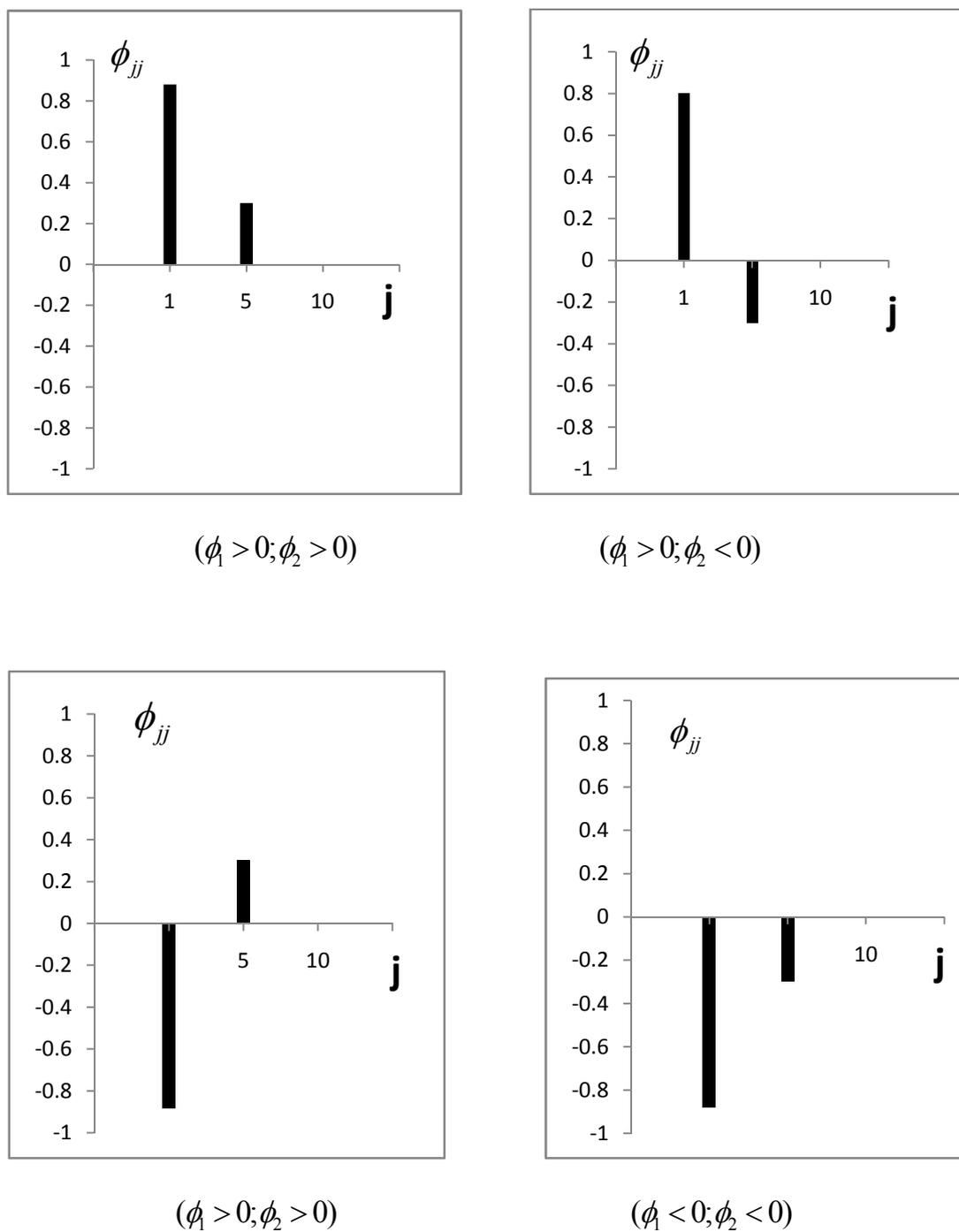


FIG 3.14 Representación gráfica de la FAP de modelos AR(2).

Esto es

$$\gamma_3 = 0.4(2.59) + 0.3(2.80) = 1.87$$

$$\gamma_4 = 0.4(1.87) + 0.3(2.59) = 1.53$$

$$\gamma_5 = 0.4(1.53) + 0.3(1.87) = 1.17$$

...

Función de Autocorrelación:

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} = \frac{0.4}{1 - 0.3} = 0.57$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 = 0.40(0.57) + 0.3 = 0.53$$

$$\rho_3 = \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 = 0.4(0.53) + 0.3(0.57) = 0.38$$

$$\rho_4 = \phi_1 \rho_3 + \phi_2 \rho_2 = 0.4(0.38) + 0.3(0.53) = 0.31$$

$$\rho_5 = \phi_1 \rho_4 + \phi_2 \rho_3 = 0.4(0.31) + 0.3(0.38) = 0.24$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{11} = \rho_1 = 0.57$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{0.53 - (0.57)^2}{1 - (0.57)^2} = 0.30$$

$$\phi_{jj} = 0 \quad \text{para } j > 2$$

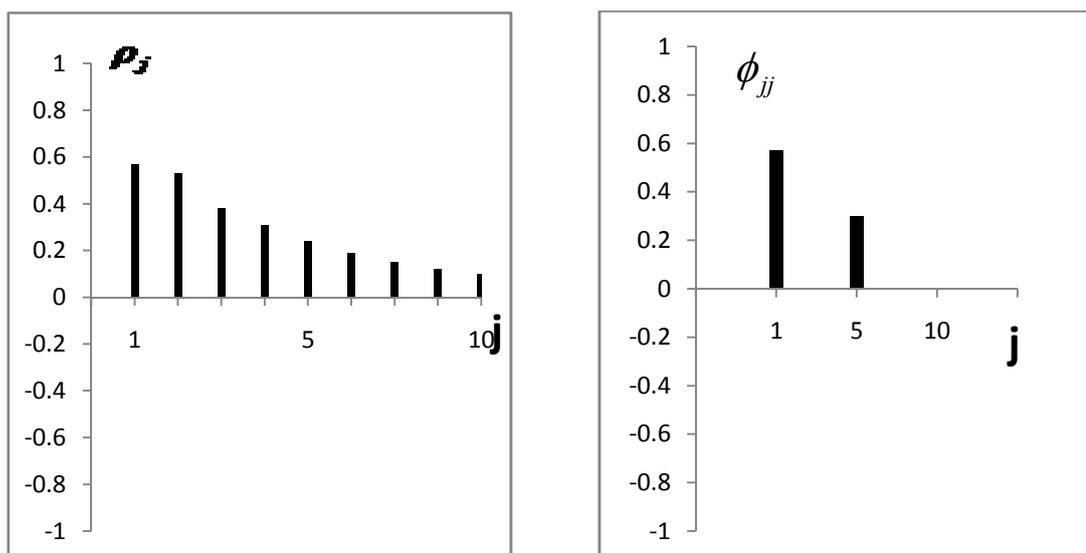


FIG 3.15 Correlograma y Representación gráfica de la FAP del modelo AR(2) con

$$\phi_1 = 0,4 \quad \text{y} \quad \phi_2 = 0,3$$

Modelo AR(p).

Generalizando los resultados obtenidos en los apartados anteriores a un proceso AR(p), pondremos nuevamente afirmar que este siempre será invertible y que para ser estacionario debe cumplir que las raíces de:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p = 0$$

Caigan fuera del círculo unitario. Esto es, denominado mediante L_1, L_2, \dots, L_p las p raíces, estas deben ser mayores que la unidad en valor absoluto, si dichas raíces son reales, o bien el módulo debe ser superior a la unidad si las raíces son complejas.

En los casos particulares de modelo AR(1) y AR(2) hemos obtenido las restricciones paramétricas implicadas por esta condición de estacionariedad, las cuales son análogas a las condiciones de invertibilidad de los correspondientes modelos de medias móviles. Una condición necesaria, aunque no suficientes, para que un modelo autorregresivo de cualquier orden (por ejemplo, p) sea estacionario, es la siguiente:

$$\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p < 1 \quad [3.69]$$

Supuesto el cumplimiento de estacionariedad, la esperanza matemática y la varianza del modelo AR(p) son iguales a:

$$E(y_t) = \mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p} \quad [3.70]$$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_u^2 \quad [3.71]$$

Prueba. [3.70]: Si el proceso es estacionario:

$$E(y_t) = E(y_{t-1}) = \dots = E(y_{t-p}) = \mu$$

Entonces, tomando matemáticamente en [3.8]:

$$E(y_t) = \phi_1 E(y_{t-1}) + \dots + \phi_p E(y_{t-p}) + \delta + E(u_t) \Rightarrow \mu = \phi_1 \mu + \dots + \phi_p \mu + \delta \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}$$

[3.74]: escribimos el modelo [3.8] como:

$$\tilde{y}_t = \phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + u_t$$

donde:
$$\tilde{y}_{t-j} = y_{t-j} - \mu = y_{t-j} - \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p} \quad \text{para } j \geq 0$$

Y teniendo en cuenta que:

$$E(y_{t-j} u_t) = \begin{cases} \sigma_u^2 & \text{para } j = 0 \\ 0 & \text{para } j > 0 \end{cases}$$

Se obtiene:

$$\gamma_0 = E(\tilde{y}_t^2) = E\left[\tilde{y}_t(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + u_t)\right] = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_u^2$$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} + \dots + \phi_p \gamma_{j-p} \quad \text{para } j > 0 \quad [3.72]$$

Prueba: Teniendo en cuenta, nuevamente que $E(\tilde{y}_{t-j} u_t) = 0$ para $j > 0$:

$$\gamma_j = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-j}) = E\left[\tilde{y}_{t-j}(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + u_t)\right] = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} + \dots + \phi_p \gamma_{j-p} \quad \text{para } j > 0$$

Considerando γ_0 y γ_j para $j = 1, 2, \dots, p$ se obtiene el sistema de $p + 1$ ecuaciones:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_u^2 \\ \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_{p-1} \\ \gamma_2 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0 + \dots + \phi_p \gamma_{p-2} \\ &\dots \\ \gamma_p &= \phi_1 \gamma_{p-1} + \phi_2 \gamma_{p-2} + \dots + \phi_p \gamma_0\end{aligned}\quad [3.73]$$

Desde [3.76], si se conocen los valores de los parámetros $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ y σ_u^2 , pueden calcularse la varianza y las autocovarianzas de orden no superior al del proceso. A partir de dicho orden, es decir, para $j > p$, las autocovarianzas se obtendrán de forma recursiva según el esquema enunciado en [3.75]; esto es:

$$\begin{aligned}\gamma_{p+1} &= \phi_1 \gamma_p + \phi_2 \gamma_{p-1} + \dots + \phi_p \gamma_1 \\ \gamma_{p+2} &= \phi_1 \gamma_{p+1} + \phi_2 \gamma_p + \dots + \phi_p \gamma_2 \\ \gamma_{p+3} &= \phi_1 \gamma_{p+2} + \phi_2 \gamma_{p+1} + \dots + \phi_p \gamma_3\end{aligned}$$

Función de Autocorrelación. Dividiendo [3.72] por γ_0 :

$$\rho_0 = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} + \dots + \phi_p \rho_{j-p} \quad \text{para } j > 0 \quad [3.74]$$

Las ecuaciones de Yule-Walker, que se obtienen directamente desde [3.74], serán:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\dots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p\end{aligned}\quad [3.75]$$

Resolviendo en [3.75] para $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$, puede escribirse:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix}\quad [3.76]$$

Función de Autocorrelación Parcial

$$\phi_{jj} \begin{cases} \rho_1 & \text{para } j = 1 \\ \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\phi_2 [(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2]}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2} & \text{para } j = 2 \\ \dots \\ \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & \rho_1 & \rho_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-3} & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} & \text{para } j = p \\ 0 & \text{para } j > p \end{cases} \quad [3.77]$$

Prueba:

Para $j = 1$ y 2 , véase la prueba del apartado 3.2 de este capítulo. Para $j = p$, basta con hacer $j = p$ en [2.31]. Finalmente, si $j > p$, utilizamos [2.31] y [3.74] se obtienen:

$$\phi_{jj} = 0 \quad \text{para } j > p$$

Así, cuando $j = p+1$:

$$\phi_{p+1,p+1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} & (\phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1}) \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} & (\phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_p & \rho_{p-1} & \dots & \rho_1 & (\phi_1 \rho_p + \phi_2 \rho_{p-1} + \dots + \phi_p \rho_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} & \rho_p \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} & \rho_{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_p & \rho_{p-1} & \dots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Una forma alternativa de calcular los coeficientes de autocorrelación parcial de un modelo autorregresivo consiste en aplicar la regla siguiente: el coeficiente de autocorrelación parcial de orden j (ϕ_{jj}) será el coeficiente (ϕ_j) que se obtiene a partir de las ecuaciones de Yule-Walker de un modelo AR (j). Así pues, (ϕ_{11}) será el coeficiente (ϕ_1) que se calcula desde la ecuación de Yule-Walker de un AR(1), (ϕ_{22}) será el coeficiente (ϕ_2) calculado desde de la ecuaciones de Yule-Walker de un AR(2),..., (ϕ_{pp}) será el coeficiente (ϕ_p) obtenido desde las ecuaciones de Yule-Walker de un AR(p).

Finalizaremos esta sección enumerando las principales características de los modelos autorregresivos que son los siguientes:

- 1) Un modelo autorregresivo siempre es invertible.
- 2) Un modelo AR estacionario debe satisfacer la condición de que las raíces de la ecuación $\phi(L) = 0$ caigan fuera del círculo unidad.
- 3) Las autocorrelaciones parciales se anulan para retardos superiores al orden del modelo.
- 4) En el modelo AR, a diferencia de lo que sucede con el MA, las autocovarianzas y consecuentemente las autocorrelaciones no llegan a anularse.
- 5) Las ecuaciones Yule-Walker de un AR(p) están constituida por p ecuaciones lineales que permita obtener los valores de los parámetros ($\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$) dadas las autocorrelaciones ($\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$), o bien una estimación de dichos parámetros ($\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p$) a partir de las autocorrelaciones muestrales (r_1, r_2, \dots, r_p).

- 6) El correlograma típico de los modelos AR presenta siempre una tendencia amortiguada hacia cero, sin llegar a anularse. En el caso de que las raíces del polinomio característicos sean complejas, la forma del correlograma es sinusoidal, pero también amortiguada hacia cero.

2.8.4. MODELOS MIXTOS AUTORREGRESIVOS MEDIAS MÓVILES (ARMA).

Hemos visto como un proceso estacionario e invertible puede representarse en forma de medias móviles o autorregresiva. Sin embargo, un posible problema asociado a cualquiera de estas representaciones es que pueden contener demasiados parámetros, lo cual puede reducir las eficiencias en la estimación. Por ello, en la construcción de un modelo puede ser necesario incluir términos tanto autorregresivos como de medias móviles. A este tipo de modelo los denominaremos como, **Modelos Mixtos Autorregresivos-Medias Móviles** de orden p , q , o más abreviadamente ARMA (p , q):

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \delta + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q} \quad [3.78]$$

Este modelo puede escribirse utilizando los operadores poligonales de retardos como:

$$\phi(L)y_t = \delta + \theta(L)u_t \quad [3.79]$$

donde $\theta(L)$ y $\phi(L)$ se define como en [3.9] y [3.37].

Dado que el modelo ARMA contiene tanto parte AR como de MA, deberá cumplir condiciones tanto de estacionariedad como de invertibilidad. En concreto, diremos que es estacionario cuando lo es su parte AR, esto es, cuando las raíces de la

ecuación $\phi(L) = 0$ caen fuera del círculo unidad, y diremos que es invertible cuando lo es su parte MA; esto es, cuando las raíces de la ecuación $\theta(L) = 0$ caen fuera del círculo unidad. Adicionalmente a las condiciones de estacionariedad e invertibilidad también supondremos que $\phi(L) = 0$ y $\theta(L) = 0$ no tiene raíces comunes.

A continuación se examinarán las propiedades de los modelos mixtos más elementales, el ARMA(1,1), procediendo a continuación a analizar el modelo mixto genérico ARMA(p, q).

Modelo ARMA(1,1)

Un modelo ARMA(1,1) viene definido por:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \delta + u_t - \theta_1 u_{t-1} \quad [3.80]$$

O bien, utilizando los operadores polinomiales de retardos, como:

$$\phi(L)y_t = \delta + \theta(L)u_t \quad [3.81]$$

siendo:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L \quad [3.82]$$

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L \quad [3.83]$$

El modelo ARMA(1,1) será invertible cuando la raíz de la ecuación $1 - \theta_1 L = 0$ sea, en valor absoluto, mayor que uno; esto es, cuando:

$$|L| = \frac{1}{|\theta_1|} > 1$$

donde se concluye que la condición de invertibilidad en este caso implica que:

$$|\theta_1| < 1 \quad [3.84]$$

Por otro lado, el modelo ARMA(1,1) será estacionario cuando la raíz de la ecuación $1 - \phi_1 L = 0$ sea, en valor absoluto, mayor que uno; esto es, cuando

$$|L| = \frac{1}{|\phi_1|} > 1$$

Lo que implica que:

$$|\phi_1| < 1 \quad [3.85]$$

Cumplida la condición de estacionariedad podemos obtener la esperanza matemática, que será igual a:

$$E(y_t) = \mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1} \quad [3.86]$$

Prueba: Por ser estacionario:

$$E(y_t) = \phi_1 E(y_{t-1}) + \delta + E(u_t) - \theta_1 E(u_{t-1}) \Rightarrow \mu = \phi_1 \mu + \delta \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1}$$

Una forma alternativa de escribir el modelo ARMA(1,1) estacionario es en forma de desviaciones con respecto a la media:

$$\tilde{y}_t = \phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1} \quad [3.87]$$

donde: $\tilde{y}_{t-j} = y_{t-j} - \mu = y_{t-j} - \frac{\delta}{1 - \phi_1}$ para $j = 0$ y 1 [3.88]

o bien: $\phi(L)\tilde{y}_t = \theta_1(L)u_t$ [3.89]

Estando definido $\theta(L)$ y $\phi(L)$ como en [3.82] y [3.83].

Considerando la expresión [3.87], se obtiene fácilmente la varianza que es igual a:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_u^2(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1)}{1 - \phi_1^2} \quad [3.90]$$

Prueba:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= E(\tilde{y}_t^2) = E[(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1})^2] = \\ &= \phi_1^2 E(\tilde{y}_{t-1}^2) + E(u_t^2) + \theta_1^2 E(u_{t-1}^2) + 2\phi_1 E(\tilde{y}_{t-1} u_{t-1}) - 2\phi_1 \theta_1 E(\tilde{y}_{t-1}^2 u_{t-1}) - 2\theta_1 E(u_t u_{t-1})\end{aligned}$$

Obsérvese que:

$$\begin{aligned}E(\tilde{y}_{t-1} u_t) &= E[(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_{t-1} - \theta_1 u_{t-2}) u_t] = 0 \\ E(\tilde{y}_{t-1} u_{t-1}) &= E[(\phi_1 \tilde{y}_{t-2} + u_{t-1} - \theta_1 u_{t-2}) u_{t-1}] = \sigma_u^2\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma_u^2 + \theta_1^2 \sigma_u^2 - 2\phi_1 \theta_1 \sigma_u^2 \Rightarrow \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma_u^2 (1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_u^2 (1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1)}{1 - \phi_1^2}\end{aligned}$$

Función de Autocovarianza

$$\gamma_j = \begin{cases} \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_u^2 = \frac{\sigma_u^2 (1 - \phi_1 \theta_1) (\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2} & \text{para } j = 1 \\ \phi_1 \gamma_{j-1} & \text{para } j > 1 \end{cases} \quad [3.91]$$

Prueba:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-1}) = E[\tilde{y}_{t-1} (\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1})] = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_u^2 = \\ &= \phi_1 \frac{\sigma_u^2 (1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1)}{1 - \phi_1^2} - \theta_1 \sigma_u^2 = \frac{\sigma_u^2 \phi_1 (1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1) - (1 - \phi_1^2) \theta_1 \sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = \\ &= \frac{\sigma_u^2 (\phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 - 2\phi_1^2 \theta_1 - \theta_1 + \theta_1 \phi_1^2)}{1 - \phi_1^2} = \frac{\sigma_u^2 (\phi_1 - \theta_1 + \phi_1 \theta_1^2 - \phi_1^2 \theta_1)}{1 - \phi_1^2} = \\ &= \frac{\sigma_u^2 (1 - \phi_1 \theta_1) (\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \\ \gamma_j &= E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-1}) = E[\tilde{y}_{t-1} (\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1})] = \phi_1 \gamma_{j-1} \quad \text{para } j > 1\end{aligned}$$

Función de Autocorrelación. Esta se obtiene directamente efectuando el cociente entre [3.91] y [3.90]:

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1} & \text{para } j = 1 \\ \phi_1\rho_{j-1} & \text{para } j > 1 \end{cases} \quad [3.92]$$

Función de Autocorrelación Parcial

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \rho_1 \\ \phi_{22} &= \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \\ \phi_{33} &= \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2) + \rho_3(1 - \rho_1^2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)} \end{aligned} \quad [3.93]$$

Prueba: Véase la prueba de [3.34].

A la vista de los modelos resultados obtenidos, podemos resaltar las siguientes características del modelo ARMA(1,1):

- 1) El modelo ARMA(1,1) será estacionario e invertible siempre y cuando se cumpla que $|\phi_1| < 1$ y $|\theta_1| < 1$. Adicionalmente, debe satisfacer que las raíces de $1 - \phi_1 L = 0$ y $1 - \theta_1 L = 0$ no se cancelen, esto es, debe cumplirse que $\phi_1 \neq \theta_1$.
- 2) Las funciones de autocorrelación no se anulan, si bien tiende a cero a medida que aumentan los desfases temporales considerados. Consecuentemente, la memoria de este modelo es infinita. La presencia del término de media móviles en el modelo ARMA(1,1) afecta solamente a la determinación de ρ_1 , estando el resto de las autocorrelaciones afectadas únicamente por la parte autorregresiva del modelo. Concretamente, el análisis de la función de autocorrelación muestra que una vez superado el orden de la parte de medias

móviles, las autocorrelaciones del modelo ARMA(1,1) se comporta como las de un modelo AR(1).

- 3) El correlograma, representación grafica de la función de autocorrelación, presentara un pico para el retardo 1, en el que influye tanto la parte autorregresiva como la de medias móviles del modelo y, a continuación, su forma coincide con la de los modelos AR(1), esto es, comportamiento amortiguado hacia cero sin llegar a anularse (véase figura 3.16).
- 4) La función de autocorrelación parcial no se anula, como consecuencia de que el modelo ARMA(1,1) contiene al modelo MA(1) como un caso especial. La forma de la representación grafica de la función de autocorrelación parcial es complicada, si bien la característica que cabe resaltar es su comportamiento amortiguado hacia cero sin llegar a anularse (véase la figura 3.17).

Ejemplo 3.6 Dados los siguientes valores

$$\phi_1 = 0.5; \quad \theta_1 = -0.9; \quad \delta = 0; \quad \sigma_u^2 = 1$$

$$y_t = 0.5y_{t-1} + u_t - 0.9u_{t-1}; \quad \sigma_u^2 = 1$$

Calcular:

- ✓ La media, La varianza, La Función de Autocovarianza, La Función de Autocorrelación, La Función de Autocorrelación Parcial, Estacionariedad y Invertibilidad.

Solución:

Estacionariedad: Si, ya que cumple.

$$|\phi_1| = 0.5 < 1$$

Invertibilidad: Si, ya que cumple:

$$|\theta_1| = 0.9 < 1$$

Esperanza Matemática es: $\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1} = \frac{0}{1 - 0.5} = 0$

Varianza: $\gamma_0 = \frac{\sigma_u^2(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1)}{1 - \phi_1^2} = \frac{1(1 + (-0.9)^2 + 2(0.5 * 0.9))}{1 - (0.5)^2} = 3.61$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma_u^2 = 0.5 * 3.61 + 0.9 * 1 = 2.70$$

$$\gamma_2 = \phi_1\gamma_1 = 0.5 * 2.70 = 1.35$$

$$\gamma_3 = \phi_1\gamma_2 = 0.5 * 1.35 = 0.68$$

$$\gamma_4 = \phi_1\gamma_3 = 0.5 * 0.68 = 0.34$$

$$\gamma_5 = \phi_1\gamma_4 = 0.5 * 0.34 = 0.17$$

...

Función de Autocorrelación:

$$\rho_1 = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1} = \frac{(1 + 0.45)(1.4)}{1 + (-0.9)^2 + 2 * 0.45} = 0.75$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 = 0.5 * 0.75 = 0.37$$

$$\rho_3 = \phi_1\rho_2 = 0.5 * 0.37 = 0.19$$

$$\rho_4 = \phi_1\rho_3 = 0.5 * 0.19 = 0.09$$

$$\rho_5 = \phi_1\rho_4 = 0.5 * 0.09 = 0.05$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{11} = \rho_1 = 0.75$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{0.37 - (0.75)^2}{1 - (0.75)^2} = -0.44$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2) + \rho_3(1 - \rho_1^2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)} = \frac{(0.75)^3 - 0.75 * 0.37(2 - 0.37) + 0.19(1 - (0.75)^2)}{1 - (0.37)^2 - 2 * (0.75)^2(1 - 0.37)} = 0.34$$

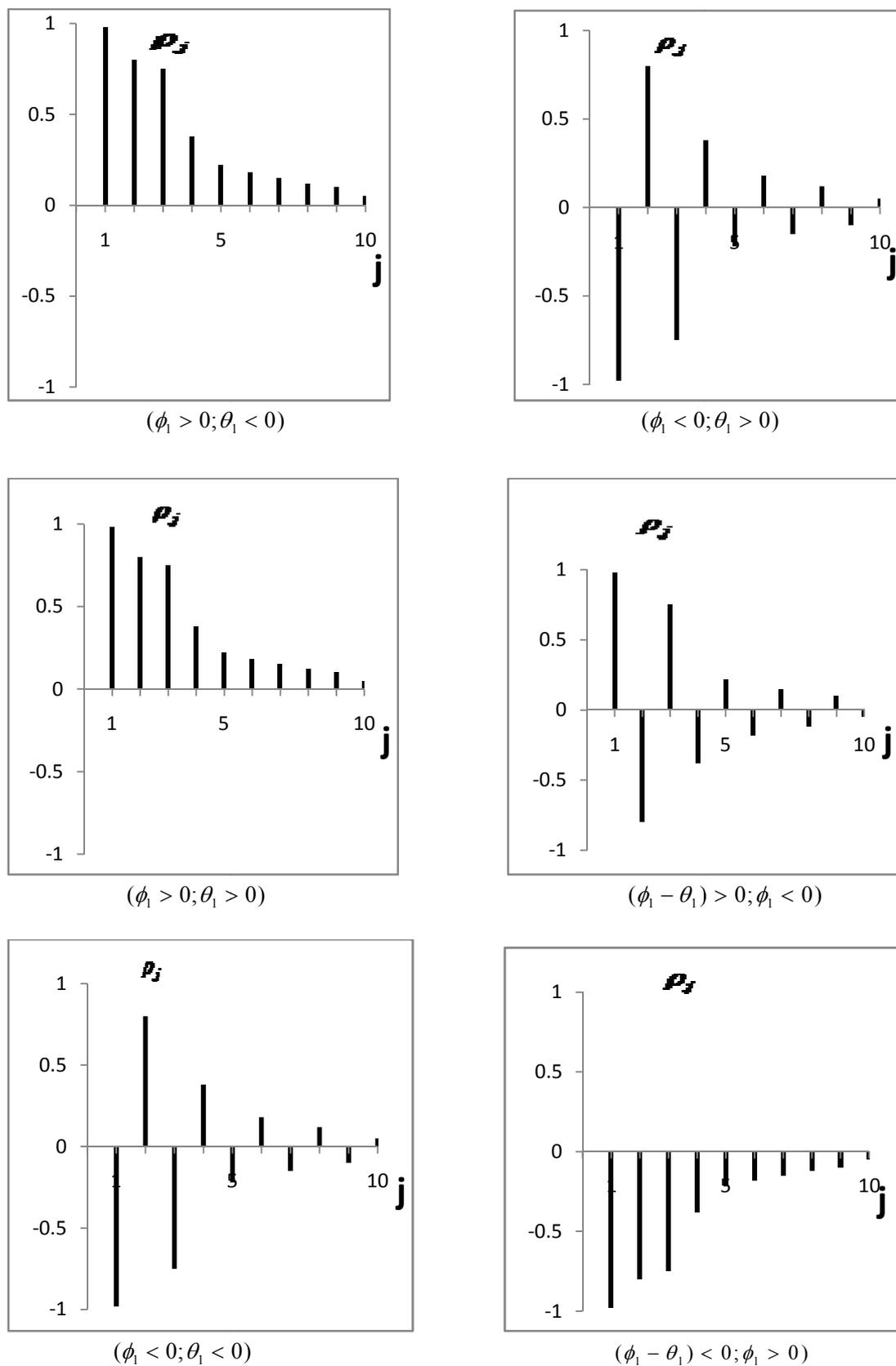


FIG 3.16 Correlograma de modelos ARMA(1,1).

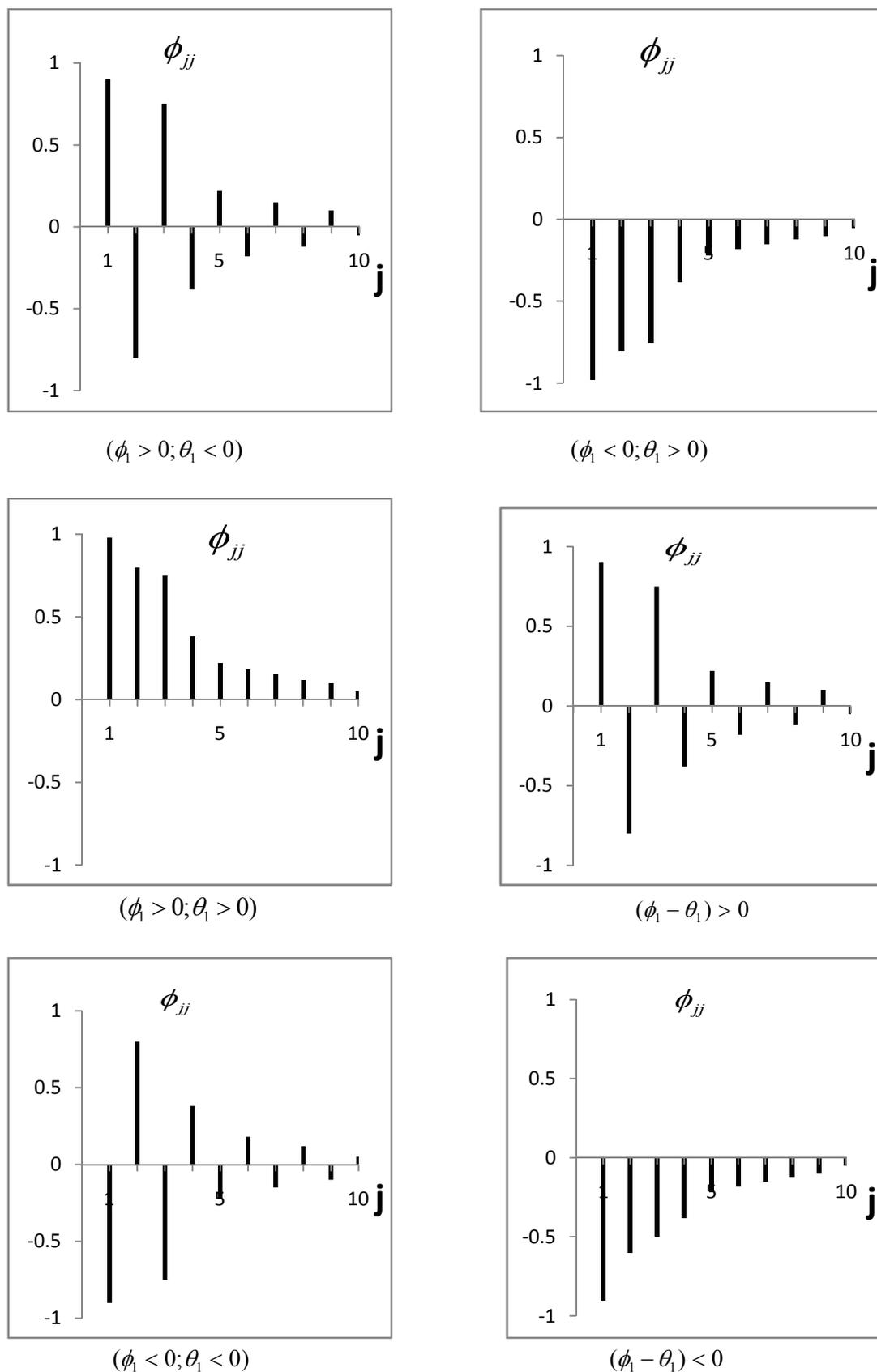


FIG 3.17 Representación gráfica de la FAP de modelos ARMA(1,1).

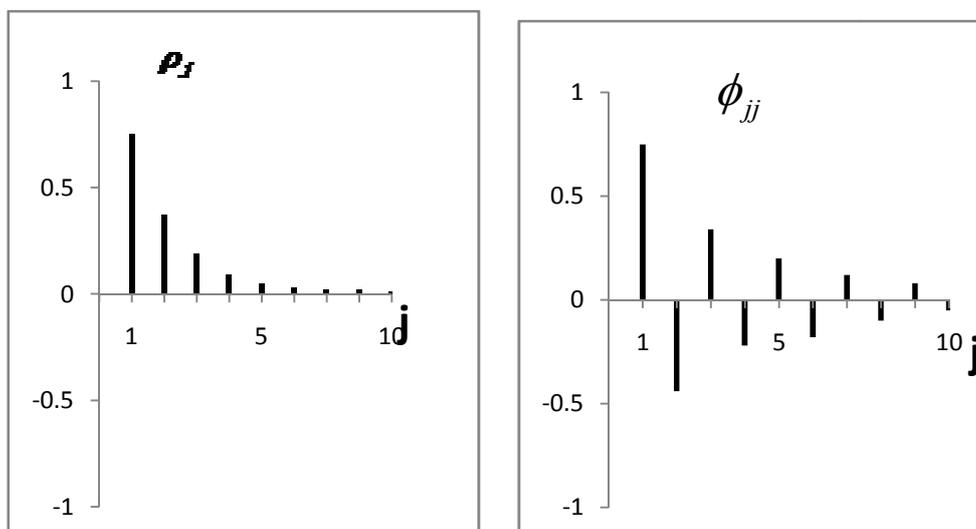


FIG 3.18 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo ARMA (1,1) con $\phi_1 = 0.5$ y $\theta_1 = -0.9$

Modelo ARMA(p, q).

Generalizando el resultado obtenido en el apartado anterior a un proceso ARMA(p, q), diremos que dicho modelo es estacionario e invertible si tanto las raíces de $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p = 0$ como las de $\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q = 0$ caen fuera del círculo unidad. De acuerdo con los resultados [3.29] y [3.69], una condición necesaria, aunque no suficiente para que un modelo mixto autorregresivo de media móvil de cualquier orden (por ejemplo, p, q) sea estacionario e invertible es la siguiente:

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_q &< 1 \\ \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p &< 1 \end{aligned} \quad [3.94]$$

Adicionalmente a la estacionariedad e invertibilidad supondremos que las p raíces de $\phi L = 0$ y las q raíces de $\theta L = 0$ no se cancelan, esto es, no hay raíces comunes.

Bajos estas condiciones, las esperanzas matemáticas y la varianza del modelo ARMA(p, q) son iguales a:

$$E(y_t) = \mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p} \quad [3.95]$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2 - 2\phi_1\theta_1 - 2\phi_2\theta_2 - \dots - 2\phi_h\theta_h)}{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \dots - \phi_p^2} \quad [3.96]$$

Siendo $h = \min(q, p)$.

Prueba:

[3.95]: siendo el proceso estacionario podemos escribir:

$$E(y_t) = E(y_{t-1}) = \dots = E(y_{t-p}) = \mu$$

Entonces, tomando esperanza matemáticas en [3.9]:

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1 E(y_{t-1}) + \dots + \phi_p E(y_{t-p}) + \dots + \delta + E(u_t) - \theta_1 E(u_{t-1}) - \dots - \theta_q E(u_{t-q}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu = \phi_1 \mu + \dots + \phi_p \mu + \delta \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p} \end{aligned}$$

[3.96]: Escribimos del modelo [3.78] en forma de desviación con respecto a la

media, esto es: $\tilde{y}_t = \phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q}$

donde: $\tilde{y}_{t-j} = y_{t-j} - \mu = y_{t-j} - \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}$ para $j \geq 0$

Y teniendo en cuenta que: $E(\tilde{y}_{t-j} u_t) = \begin{cases} \sigma_u^2 & \text{para } j = 0 \\ 0 & \text{para } j = 0 \end{cases}$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E(\tilde{y}_t^2) = E[(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{y}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q})^2] = \\ &= \phi_1^2 \gamma_0 + \phi_2^2 \gamma_0 + \dots + \phi_p^2 \gamma_0 + \sigma_u^2 + \theta_1^2 \sigma_u^2 + \dots + \theta_q^2 \sigma_u^2 - 2\phi_1 \theta_1 \sigma_u^2 - 2\phi_2 \theta_2 \sigma_u^2 - \dots - 2\phi_2 \theta_2 \sigma_u^2 E(\tilde{y}_{t-1} u_{t-1}) - 2\phi_h \theta_h \sigma_u^2 \end{aligned}$$

donde h es el valor menor entre p y q .

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= (1 - \phi_1 - \phi_1^2 - \dots - \phi_p^2) = \sigma_u^2 (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2 - 2\phi_1\theta_1 - \dots - 2\phi_h\theta_h) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi_1^2\gamma_0 + \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2 - 2\phi_1\theta_1 - 2\phi_2\theta_2 - \dots - 2\phi_h\theta_h)}{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \dots - \phi_p^2}\end{aligned}$$

Función de Autocovarianza.

$$\gamma_j = \begin{cases} \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1 + \dots + \phi_p\gamma_{p-1} - \theta_1\sigma_u^2 - \theta_2E(\tilde{y}_{t-1}u_{t-2}) - \dots - \theta_qE(\tilde{y}_{t-1}u_{t-q}) & \text{para } j = 1 \\ \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0 + \dots + \phi_p\gamma_{p-2} + \theta_2\sigma_u^2 - \theta_3E(\tilde{y}_{t-1}u_{t-3}) - \dots - \theta_qE(\tilde{y}_{t-3}u_{t-q}) & \text{para } j = 2 \\ \vdots & \\ \phi_1\gamma_{q-1} + \phi_2\gamma_{q-2} + \dots + \phi_p\gamma_{p-q} + \theta_q\sigma_u^2 & \text{para } j = q \\ \phi_1\gamma_{j-1} + \phi_2\gamma_{j-2} + \dots + \phi_p\gamma_{j-q} & \text{para } j > q \end{cases} \quad [3.97]$$

Prueba: Teniendo en cuenta que:

$$E(\tilde{y}_{t-1}u_{t-j}) = \begin{cases} \sigma_u^2 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i > j \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= E(\tilde{y}_t\tilde{y}_{t-1}) = E\left[(\phi_1\tilde{y}_{t-1} + \phi_2\tilde{y}_{t-2} + \dots + \phi_p\tilde{y}_{t-p} + u_t - \theta_1u_{t-1} - \dots - \theta_qu_{t-q})\right] = \\ &= \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1 + \dots + \phi_p\gamma_{p-1} - \theta_1\sigma_u^2 - \theta_2E(\tilde{y}_{t-1}u_{t-2}) - \dots - \theta_qE(\tilde{y}_{t-1}u_{t-q})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= E(\tilde{y}_t\tilde{y}_{t-2}) = E\left[\tilde{y}_{t-2}(\phi_1\tilde{y}_{t-1} + \phi_2\tilde{y}_{t-2} + \dots + \phi_p\tilde{y}_{t-p} + u_t - \theta_1u_{t-1} - \dots - \theta_qu_{t-q})\right] = \\ &= \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0 + \dots + \phi_p\gamma_{p-2} - \theta_2\sigma_u^2 - \theta_3E(\tilde{y}_{t-1}u_{t-3}) - \dots - \theta_qE(\tilde{y}_{t-2}u_{t-q})\end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}\gamma_q &= E(\tilde{y}_t\tilde{y}_{t-q}) = E\left[\tilde{y}_{t-q}(\phi_1\tilde{y}_{t-1} + \phi_2\tilde{y}_{t-2} + \dots + \phi_p\tilde{y}_{t-p} + u_t - \theta_1u_{t-1} - \dots - \theta_qu_{t-q})\right] = \\ &= \phi_1\gamma_{q-1} + \phi_2\gamma_{q-2} + \dots + \phi_p\gamma_{p-q} - \theta_q\sigma_u^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_j &= E(\tilde{y}_t\tilde{y}_{t-q}) = E\left[\tilde{y}_{t-j}(\phi_1\tilde{y}_{t-1} + \phi_2\tilde{y}_{t-2} + \dots + \phi_p\tilde{y}_{t-p} + u_t - \theta_1u_{t-1} - \dots - \theta_qu_{t-q})\right] = \\ &= \phi_1\gamma_{j-1} + \phi_2\gamma_{j-2} + \dots + \phi_p\gamma_{j-p} \quad \text{para } j > q\end{aligned}$$

Función de Autocorrelación. Dividendo por [3.98] por γ_0 :

$$\gamma_j = \begin{cases} \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} + \frac{1}{\gamma_0} [-\theta_1 \sigma_u^2 - \theta_2 E(\tilde{y}_{t-2} u_{t-2}) - \dots - \theta_q E(\tilde{y}_{t-1} u_{t-q})] & \text{para } j = 1 \\ \phi_2 \rho_1 + \phi_3 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} + \frac{1}{\gamma_0} [-\theta_2 \sigma_u^2 - \theta_3 E(\tilde{y}_{t-1} u_{t-3}) - \dots - \theta_q E(\tilde{y}_{t-3} u_{t-q})] & \text{para } j = 2 \\ \vdots & \\ \phi_{q-1} \rho_{q-1} + \phi_{q-2} \rho_{q-2} + \dots + \phi_p \rho_{p-q} - \frac{1}{\gamma_0} \theta_q \sigma_u^2 & \text{para } j = q \\ \phi_{j-1} \rho_{j-1} + \phi_{j-2} \rho_{j-2} + \dots + \phi_p \rho_{j-q} & \text{para } j > q \end{cases} \quad [3.98]$$

Función de Autocorrelación Parcial. La expresión será como la escrita para el modelo ARMA(1,1) en [3.93], si bien los valores concretos para cada coeficiente de autocorrelación parcial diferirán como consecuencia de que las autocorrelaciones del modelo general ARMA(p, q) son distintas de los modelos particular ARMA(1,1). No obstante, la característica más relevante a tener cuenta es que la función de autocorrelación parcial no se anula, si bien presenta un comportamiento amortiguado hacia cero.

Para finalizar, resumiremos las principales características de los modelos mixtos ARMA(p, q), que son:

- 1) El modelo ARMA(p, q) será estacionario e invertible siempre y cuando las raíces de $\phi_1 L = 0$ y $\theta_1 L = 0$ caigan fuera de círculo unidad. Adicionalmente, supondremos que no hay raíces comunes.
- 2) La función de autocorrelación no se anula, si bien tiende a cero a medida que aumenta los desfases temporales considerados. Consecuentemente, la memoria de este modelo es infinita. La presencia del término de media móviles en el modelo

ARMA(p, q) afecta a la determinación de las q primeras autocorrelaciones $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p)$, estando el resto de las autocorrelaciones afectada únicamente por la parte autorregresiva del modelo. Concretamente, el análisis de la función de autocorrelación muestra que una vez superado el orden de la parte de medias móviles, las autocorrelaciones del modelo ARMA(p, q) se comporta como las de un modelo AR(p).

- 3) El correlograma, representación gráfica de la función de autocorrelación presenta q picos hasta el retardo q, en los que influyen tanto la parte autorregresiva como la de medias móviles del modelo y, a continuación su forma coincide con la de los modelos AR(p), esto es, comportamiento amortiguado hacia cero sin llegar a anularse, si las raíces son reales, o comportamiento sinusoidal, pero también amortiguado hacia cero, si las raíces son complejas.
- 4) La función de autocorrelación parcial no se anula, como consecuencia de que el modelo ARMA(p,q) contiene el modelo MA(q) como un caso especial. La representación grafica de la función de autocorrelación parcial tendrá también un comportamiento amortiguado hacia cero.

2.8.5 MODELOS ESTOCÁSTICOS LINEALES NO ESTACIONARIOS

HOMOGÉNEOS. MODELOS ARIMA.

Muy pocas de las serie temporales económicas son estacionaria. No parece, por ello, muy conveniente suponer que aquella series que no son estacionaria vengan generada por cualquiera de los procesos anteriores, en los cuales se han impuesto las condiciones de estacionariedad. Afortunadamente, sin embargo, muchas de estas series temporales no estacionaria tienen la propiedad de convertirse en estacionariedad al diferenciar una o mas veces las serie original.

Resulta convenientes, por ello considerar junto a los procesos estocásticos analizados, aquellos que aun no cumpliendo originariamente las condiciones de estacionariedad, son susceptibles de transformase en estacionario efectuando algunas diferenciación.

A dichos procesos estocásticos se les denomina como homogéneos.

En concreto, diremos que un proceso estocástico no estacionario es homogéneo cuando a diferenciar en el proceso original, el proceso transformado resultante es estacionario. El número de veces que debe diferenciarse el proceso original para transformarse en estacionario constituye el grado u orden de homogeneidad.

Un ejemplo sencillo de proceso estocástico no estacionario homogéneo de primer grado es el siguiente:

$$y_t = y_{t-1} + u_t \quad [3.99]$$

A este proceso se le denomina en la literatura como “paseo aleatorio” y puede no tener derivadas (termino constantes) como en [3.99], o bien ser u paseo aleatorio con derivada, en cuyo caso escribimos:

$$y_t = y_{t-j} + \delta + u_t \quad [3.100]$$

Pero cualquiera que sea la forma como escribamos el modelo, este no es estacionario. Esto resulta evidente, por cuanto [3.99] puede denominarse como un modelo AR(1) no estacionario, como consecuencias de que $\phi = 1$ no cumple la condición de estacionariedad enunciada en [3.42].

Otra forma de ver que no es estacionario es la siguiente. Supongamos que $E(y_t) = E(y_{t-1}) = \dots = 0$; entonces la varianza será:

$$\begin{aligned} Var(y_t) &= E(y_t^2) = E[(y_{t-1} + u_t)^2] = Var(y_{t-1}) + \sigma_u^2 = \\ &= E[(y_{t-2} + u_t)^2] + \sigma_u^2 = Var(y_{t-2}) + 2\sigma_u^2 \\ &= \dots = Var(y_{t-n}) + n\sigma_u^2 \end{aligned}$$

que, como vemos, es constante, si no que va aumentando conforme mayor es el desfase temporal considerado. De hecho, la varianza se hace infinita y es indefinida.

Ahora bien, si diferenciamos una vez en [3.100] se obtiene el modelo transformado:

$$w_t = u_t \quad [3.101]$$

donde:

$$w_t = \Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1-L)y_t \quad [3.102]$$

Este proceso transformado es un “ruido blanco”, el cual siempre es estacionario. Consecuentemente, como al diferenciar una vez el proceso no estacionario original [3.99] no estacionario homogéneo de primer grado. Hemos visto como tomando

diferencias de primer orden se pasa de y_t al proceso w_t . Consideremos ahora el caso inverso de obtener y_t a partir del proceso w_t . Por sustituciones sucesivas se obtienen:

$$y_t = w_t + w_{t-1} + w_{t-2} + \dots \quad [3.103]$$

Prueba:

$$y_t = w_t + y_{t-1} = w_t + w_{t-1} + y_{t-2} = w_t + w_{t-1} + w_{t-2} + y_{t-3} = \dots = w_t + w_{t-1} + w_{t-2} + w_{t-3} + \dots$$

Dado que, por [3.103] el proceso y_t se obtiene sumando, o lo que es lo mismo, “integrando” el proceso w_t , se dice que el “paseo aleatorio” definido en [3.99] pertenece a la clase de procesos integrados.

A un proceso integrado y_t se le denomina proceso autorregresivos .medias móviles integrado más abreviadamente ARIMA(p, d, q), si tomando diferencias de orden d se obtienen proceso estacionario w_t del tipo ARMA(p, q).

La especificación del modelo ARIMA(p, d, q) genérico es:

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q} \quad [3.104]$$

$$\text{donde: } w_{t-j} = \Delta^d y_t = (1-L)^d y_{t-j} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, p \quad [3.105]$$

Mas brevemente, utilizando los operadores de polinomio de retardo definido en [3.14] y [3.40] podemos escribir:

$$\phi(L)w_t = \theta(L)u_t \quad [3.106]$$

$$\text{donde: } w_t = \Delta^d y_t = (1-L)^d y_t \quad [3.107]$$

o bien, reemplazando [3.107] en [3.106]:

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \theta(L)u_t \quad [3.108]$$

Pueden observarse que en las expresiones [3.104], [3.106] u [3.108] no se ha incluido término constante en el modelo, lo cual significa que la media de la serie diferenciada w_t es igual a cero. Caso de que este supuesto no pueda mantenerse deberían incluirse en las expresiones referidas al parámetro δ .

Una forma alternativa de escribir el modelo ARIMA(p, d, q) de gran interés, por cuanto es la que se utiliza para calcular las predicciones mediante este modelo, es la denominada *forma de ecuaciones en diferencias*, mediante la cual la serie original y_t se expresa en función de valores pasados de la misma, así como de perturbaciones presente y pasada. Esto es:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_{p+d} y_{t-p-d} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q} \quad [3.109]$$

donde los parámetros ϕ 's son funciones de los ϕ 's.

Prueba: La expresiones [3.109]: $\phi(L)(1-L)^d y_t = \theta(L)u_t$, puede escribirse:

$$\phi(L)y_t = \theta(L)u_t$$

donde

$$\phi(L) = \phi(L)(1-L)^d = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)(1-L)^d = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_{p+d} L^{p+d}).$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \phi(L)y_t = \theta(L)u_t &\Rightarrow (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_{p+d} L^{p+d})y_t = (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q)u_t \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_{p+d} y_{t-p-d} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q} \end{aligned}$$

En el caso particular en que $d=1$, [3.109] puede escribirse como:

$$y_t = (1 - \phi_1)y_{t-1} + (1 - \phi_2)y_{t-2} + \dots + (\phi_p - \phi_{p-1})y_{t-p-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q} \quad [3.110]$$

Prueba: Si $d=1$, $\varphi(L)$ igual a:

$$\begin{aligned}\varphi(L) &= \phi(L)(1-L) = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)(1-L) = \\ &= 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p - L + \phi_1 L^2 + \phi_2 L^3 + \dots + \phi_p L^{p+1} = \\ &= 1 - (1 + \phi_1)L - (\phi_2 - \phi_1)L^2 - \dots - (\phi_p - \phi_{p-1})L^p + \phi_p L^{p+1}\end{aligned}$$

Luego:

$$\varphi(L)y_t = \theta(L)\mu_t \Rightarrow y_t = (1 - \phi_1)y_{t-1} + (\phi_2 - \phi_1)y_{t-2} + \dots + (\phi_p - \phi_{p-1})y_{t-p} - \phi_p y_{t-p-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q}$$

El modelo ARMA(p, d, q) puede considerarse como el modelo estocástico general que engloba a los resultantes analizados. Así, si $p=d=0$, estamos ante el modelo ARIMA(0, 0, q) o modelo MA(q) analizado en la sección 2; si $q=d=0$, ante el ARIMA(p, 0, 0) o AR(p) de la sección 3 y por último, si $d=0$ ante el ARIMA(p, 0, q) o ARIMA(p, q) de la sección 4.

Otro caso particulares de interés son:

- a) $q=0 \rightarrow$ ARIMA(p, d, 0) o ARI(p, d).
- b) $p=0 \rightarrow$ ARIMA(0, d, q) o IMA(d, q).
- c) $p=q=0; d=1 \rightarrow$ ARIMA(0, 1, 0) o "paseo aleatorio".
- d) $p=q=d=0$ (y $\delta=0$) \rightarrow ARIMA(0, 0, 0) o "ruido Blanco".

Al analizar la evolución de la mayoría de las series temporales económicas suele observarse que éstas presentan una tendencia creciente o decreciente. La eliminación de esta tendencia (no estacionariedad en media) de la serie suele conseguirse mediante las diferenciaciones implícitas en los modelos ARIMA. Ahora bien, en ocasiones se observa también que existe una tendencias en la varianza, esto es, la dispersión de las observaciones no es constante a lo largo del tiempo, la cual no se

elimina mediante esas diferenciaciones. Cuando se presenta este hecho las transformaciones adecuadas pueden consistir en tomar logaritmos neperianos o de la forma más general utilizando las transformaciones Box-Cox. De esta forma, el modelo ARIMA puede enunciarse como:

$$\phi(L) = \Delta^d y_t^{(\lambda)} = \delta + \theta(L)u_t \quad [3.111]$$

o bien:
$$\phi(L)(1-L)^d (y_t^{(\lambda)} - \mu) = \theta(L)u_t \quad [3.112]$$

donde μ es la media $y_t^{(\lambda)}$ siendo :

$$y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{y_t^\lambda - 1}{\lambda} \sigma_u^2 & \text{para } \lambda \neq 0 \\ \ln y_t & \text{para } \lambda = 0 \end{cases} \quad [3.113]$$

Restringiéndonos a los casos $\lambda = 1$ y $\lambda = 0$, tendremos respectivamente la serie sin transformar (serie original) o la serie transformada aplicado logaritmos neperianos.

UNIDAD IV: MODELOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONARIOS.

TITULO DEL TEMA:

Modelos Estocásticos Estacionarios.

OBJETIVO:

- ✓ Introducir los conceptos en los que se basan los Modelos Estocásticos Estacionarios en la Metodología de Series Temporales.

CONTENIDO:

2.9.1 Introducción.

2.9.2 Modelos Estacionales de Medias Móviles.

2.9.3 Modelos Estacionales Autorregresivos.

2.9.4 Modelos Estacionales Mixtos y Modelos Estacionales no Estacionarios.

2.9.5 Modelos Estacionales Multiplicativos.

DURACIÓN:

9 horas

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

- ✓ AZNAR ANTONIO, Y TRIVEZ FRANCISCO JAVIER. Métodos de Predicción en Economía II.
- ✓ PÉREZ LÓPEZ, CÉSAR. Econometría de las Series Temporales, Madrid, 2006. PEARSON PRENTICE HALL.

2.9 UNIDAD IV. MODELOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONARIOS

2.9.1 INTRODUCCIÓN

Muchas series temporales si se observan varias veces a lo largo del año, trimestral o mensualmente, presentan comportamiento estacional. Este tipo de comportamiento puede ser debido a factores meteorológicos, tales como la temperatura o pluviosidad, que afectan a muchas actividades económicas como el turismo; o ha costumbres sociales como la Navidad, día de los difuntos, día de san valentin, que están muy relacionados con cierto tipo de ventas como juguetes; tarjetas, arreglos florales, etc.

A la hora de elaborar el modelo ARIMA adecuado para una serie temporal se ha de tener en cuenta el comportamiento estacional, si lo hubiere, porque implica que la observación de un mes y observación del mismo mes del año anterior tienen una pauta de comportamiento similar por lo que estarán temporalmente correlacionadas. Por lo tanto, el modelo de series temporales ARIMA apropiado para este tipo de series deberá recoger las dos clases de dependencia intertemporal que presentan, a continuación:

- ✓ La relación lineal existente entre observaciones sucesivas (comportamiento tendencial o regular) y
- ✓ La relación lineal existente entre observaciones del mismo mes en años sucesivos (comportamiento estacional).

Los modelos estocásticos estacionales de series temporales pueden ser de dos tipos: puro ó multiplicativo; y, al mismo tiempo, cada uno de ellos puede ser estacionario o no.

Se entiende por modelo estacional puro aquel que recoge únicamente relaciones lineales entre observaciones del mismo mes para años sucesivos, es decir, entre observaciones separadas s períodos ó múltiplos de s , donde $s = 4$ si la serie es trimestral y $s = 12$ si la serie es mensual. Por lo tanto, el modelo estacional puro se caracteriza por que sólo existen relaciones entre las observaciones que distan entre sí s períodos o múltiplos de s .

Si este modelo estacional es puro y es, además, estacionario, estaremos ante un modelo estacional MA, AR o ARMA. Si, por el contrario, el modelo estacional puro es no estacionario, pero es susceptible de convertirse en estacionario mediante diferenciaciones sucesivas, estaremos ante un modelo ARIMA estacional puro.

Los modelos estacionales puros no van a ser, los que con más frecuencia nos van a servir para caracterizar una serie temporal estacional, y esto porque normalmente no se dan sólo relaciones entre las observaciones que distan de s (o múltiplo de s) períodos, sino que lo habitual es que existan relaciones de tipo múltiple. En este caso, diremos que nos encontramos ante los modelos estacionales multiplicativos, los cuales a su vez podrán ser nuevamente estacionarios como no estacionarios.

Las cinco secciones siguientes de esta unidad se dedican al estudio de los modelos estacionales puros. La segunda sección analiza los modelos estacionarios MA, la tercera sección los modelos estacionarios AR, mientras que en la cuarta sección se estudia tanto los modelos estacionarios mixtos como los ARIMA estacionales. La sección quinta, y última, esta dedicada al análisis de los más complejos modelos estacionales multiplicativos.

2.9.2 MODELOS ESTACIONALES DE MEDIAS MÓVILES

El modelo estacional de medias móviles tiene las siguientes características:

- a) Siendo s el número de observaciones por período estacional, entonces el orden del modelo MA estacional será un múltiplo de s .
- b) Los únicos coeficientes distintos de cero serán aquellos con subíndices que sean múltiplo entero de s .

En conformidad con ellas, podemos escribir.

$$y_t = \mu + u_t + \theta_s u_{t-s} + \theta_{2s} u_{t-2s} - \dots - \theta_{Qs} u_{t-Qs} \quad [4.1]$$

donde Q es el mayor múltiplo de s , esto es, el orden del proceso es Qs .

Para distinguir el modelo MA estacional del MA "ordinario", adoptaremos la notación:

$$\Theta_j = \theta_{js} \quad [4.2]$$

de manera, que [4.1] se escribirá:

$$y_t = \mu + u_t + \Theta_1 u_{t-s} + \Theta_2 u_{t-2s} - \dots - \Theta_Q u_{t-Qs} \quad [4.3]$$

diciendo que es un modelo MA estacional de orden Q , que abreviadamente representaremos mediante MA $(Q)_s$.

Utilizamos la notación de operadores de retardos, [4.3] puede escribirse como:

$$y_t = \mu + \Theta_Q(L^s)u_t \quad [4.4]$$

donde:

$$\Theta_Q(L^s) = 1 - \Theta_Q L^s - \Theta_1 L^s - \Theta_2 L^{2s} - \dots - \Theta_Q L^{Qs} \quad [4.5]$$

El modelo estacional de media móviles será siempre estacionario, y será invertible cuando las raíces de $\Theta_Q(L^s) = 0$ caigan fuera del círculo unitario, esto es, cuando, si

éstas son reales, todas ellas sean en valor absoluto mayores que la unidad, mientras que si son complejas, el modelo será mayor que uno.

A continuación analizaremos los modelos estacionales de medias móviles más habituales, esto son, los modelos $MA(1)_s$ y $MA(2)_s$, obteniendo las condiciones de invertibilidad y calculando la media, varianza, función de autocovarianza, función de autocorrelación y función de autocorrelación parcial de dichos modelos. Las similitudes y diferencias entre estos modelos estacionales y los análogos “ordinarios” (no estacionales) son, asimismo, analizadas.

Modelo $MA(1)_s$.

Un modelo $MA(1)_s$ viene definido por:

$$y_t = \mu + u_t - \Theta_1 u_{t-s} \quad [4.6]$$

O bien
$$y_t = \mu + \Theta_1(L^s)u_t \quad [4.7]$$

donde:
$$\Theta_1(L^s) = 1 - \Theta_1 L^s$$

Como hemos señalado anteriormente, el modelo $MA(1)_s$ será siempre estacionario.

Mientras que para ser invertibles, deberá cumplir que la raíz de la ecuación:

$$\Theta_1(L^s) = 1 - \Theta_1 L^s = 0 \quad [4.8]$$

sea en valor absoluto mayor que la unidad, lo cual implica que:

$$|\Theta_1| < 1 \quad [4.9]$$

La esperanza matemática y la varianza del modelo $MA(1)$, son iguales a:

$$E(y_t) = \mu \quad [4.10]$$

$$\gamma_0 = \sigma_u^2(1 + \Theta_1^2) \quad [4.11]$$

Prueba:

$$[4.10]: E(y_t) = (\mu + u_t - \Theta_1 u_{t-s}) = \mu$$

$$\gamma_0 = E[(y_t - \mu)^2] = E[(u_t - \Theta_1 u_{t-s})^2] =$$

[4.11]:

$$= E(u_t^2) + \Theta_1^2 E(u_{t-s}^2) - 2\Theta_1 E(u_t u_{t-s}^2) = \sigma_u^2 + \Theta_1^2 \sigma_u^2 = \sigma_u^2 (1 + \Theta_1^2)$$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_j = \begin{cases} -\Theta_1 \sigma_u^2 & \text{para } j = s \\ 0 & \text{para } j \neq s \end{cases} \quad [4.12]$$

Prueba:

$$\gamma_j = E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] = E[(u_t - \Theta_1 u_{t-s})(u_{t-j} - \Theta_1 u_{t-s-j})] = 0 \quad \forall j \neq s \text{ y } \neq 0$$

$$\gamma_s = E[(y_t - \mu)(y_{t-s} - \mu)] = E[(u_t - \Theta_1 u_{t-s})(u_{t-s} - \Theta_1 u_{t-2s})] = -\Theta_1 E(u_{t-s}^2) = \Theta_1 \sigma_u^2$$

Función de Autocorrelación. La función de autocorrelación del modelo MA(1)_s se obtendrá dividiendo [4.12] por [4.11]:

$$\rho_j = \begin{cases} -\frac{\Theta_1}{1 + \Theta_1^2} & \text{para } j=s \\ 0 & \text{para } j \neq s \end{cases} \quad [4.13]$$

Función de Autocorrelación Parcial. Teniendo en cuenta [3.22] y [4.13], se obtiene directamente:

$$\phi_{jjs} = \frac{-\Theta_1^j (1 - \Theta_1^2)}{1 - \Theta_1^{2(j+1)}} \quad \text{para } j \geq 1 \quad [4.14]$$

Si comparamos los resultados obtenidos para el modelo MA(1)_s con los del modelo MA(1) “ordinario” (no estacional) obtenido en el apartado 2.1 del capítulo 3, se observa claramente las similitudes y diferencias entre ambos. En cuanto a la similitudes, son obvias: el modelo MA(1)_s, como el MA(1), siempre es estacionario, siendo las condiciones de invertibilidad análogas (compárense [3.17] con [4.9]).

Además, las autocorrelaciones parciales no se anulan y tienden a cero a medida que aumenta el desfase temporal considerado, aunque solamente tiene valores distintos de cero en los períodos estacionales (s o múltiplos de s). La diferencia por lo tanto, entre ambos consiste simplemente en que en los modelos de medias móviles estacionales, el orden del modelo se refiere a los período *estacionales* y no a los periodos simples, como es el caso de los modelos de medias móviles ordinarios.

Ejemplo 4.1 Dados los valores iniciales siguientes:

$$\Theta_1 = 0.7, \quad \mu = 1, \quad \sigma_u^2 = 2 \quad s = 4$$

$$y_t = 1 + u_t - 0.7u_{t-4}, \quad \sigma_u^2 = 2$$

Calcular:

- ✓ La media, La varianza, La Función de Autocovarianza, La Función de Autocorrelación y La Función de Autocorrelación Parcial.

Solución:

Media: $\mu = 1$

Varianza: $\gamma_0 = \sigma_u^2 (1 + \Theta_1^2) = 2(1 + 0.49) = 2.98$

Función de autocovarianza: $\gamma_j = \begin{cases} -\Theta_1 \sigma_u^2 = -0.7 * 2 = -1.4 & \text{para } j = 4 \\ 0 & \text{para } j \neq 4 \end{cases}$

Función de autorrelación: $\rho_j = \begin{cases} -\frac{\Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{-0.7}{1 + 0.49} = \frac{-0.7}{1.49} = -0.47 & \text{para } j = 4 \\ 0 & \text{para } j \neq 4 \end{cases}$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{11} = \phi_{22} = \phi_{33} = 0$$

$$\phi_{44} = \frac{-\Theta_1(1-\Theta_1^2)}{1-\Theta_1^4} = \frac{-0.7(1-(0.7)^2)}{1-(0.7)^4} = -0.47$$

$$\phi_{55} = \phi_{66} = \phi_{77} = 0$$

$$\phi_{88} = \frac{-\Theta_1^2(1-\Theta_1^2)}{1-\Theta_1^6} = \frac{-(0.7)^2(1-(0.7)^2)}{1-(0.7)^6} = -0.28$$

$$\phi_{99} = \phi_{10,10} = \phi_{11,11} = 0$$

$$\phi_{12,12} = \frac{-\Theta_1^3(1-\Theta_1^2)}{1-\Theta_1^8} = \frac{-(0.7)^3(1-(0.7)^2)}{1-(0.7)^8} = -0.19$$

$$\phi_{13,13} = \phi_{14,14} = \phi_{15,15} = 0$$

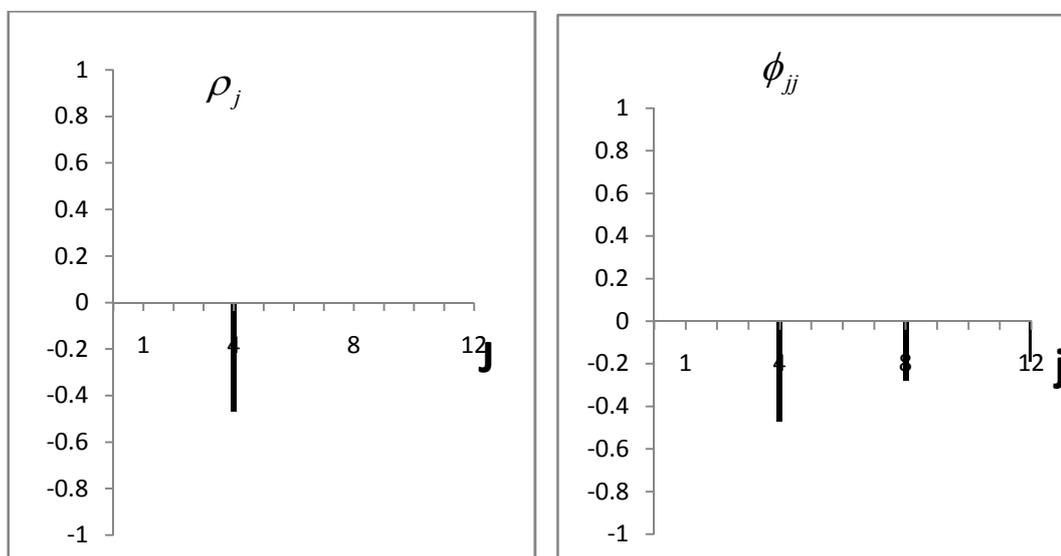


FIG 4.1. Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo MA (1)₄ con

$$\Theta_1 = 0.7.$$

Modelo MA(2)_s

Modelo MA(2)_s viene definido por:

$$y_t = \mu + u_t - \Theta_1 u_{t-s} - \Theta_2 u_{t-2s} \quad [4.15]$$

o bien:

$$y_t = \mu + \Theta_2(L^s)u_t \quad [4.16]$$

donde:

$$\Theta_2(L^s) = 1 - \Theta_1 L^s - \Theta_2 L^{2s}$$

La condición de invertibilidad del el modelo MA (2)_s estacionario es siempre, que s

$$\text{raíces de: } \Theta_2(L^s) = 1 - \Theta_1 L^s - \Theta_2 L^{2s} = 0 \quad [4.17]$$

caiga fuera del círculo unitario lo cual implica.

$$\begin{aligned} \Theta_1 + \Theta_2 &< 1 \\ \Theta_2 - \Theta_1 &< 1 \\ |\Theta_2| &< 1 \end{aligned} \quad [4.18]$$

La esperanza matemática y la varianza del modelo MA (2) son iguales a:

$$E(y_t) = \mu \quad [4.19]$$

$$\gamma_0 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \quad [4.20]$$

Prueba:

$$[4.19]: E(y_t) = E(\mu + u_t - \Theta_1 u_{t-s} - \Theta_2 u_{t-2s}) = \mu$$

[3.28]:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E[(y_t - \mu)^2] = E[(u_t - \Theta_1 u_{t-s} - \Theta_2 u_{t-2s})^2] = \\ &= E(u_t^2) + \Theta_1^2 E(u_{t-s}^2) + \Theta_2^2 E(u_{t-2s}^2) - 2\Theta_1 E(u_t u_{t-s}) - 2\Theta_2 E(u_t u_{t-2s}) + 2\Theta_1 \Theta_2 E(u_{t-s} u_{t-2s}) = \\ &= \sigma_u^2 + \Theta_1^2 \sigma_u^2 + \Theta_2^2 \sigma_u^2 = \sigma_u^2(1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2) \end{aligned}$$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_j = \begin{cases} (-\Theta_1 + \Theta_1\Theta_2)\sigma_u^2 & \text{para } j=s \\ -\Theta_2\sigma_u^2 & \text{para } j=2s \\ 0 & \text{para } j \neq s \text{ y } 2s \end{cases} \quad [4.21]$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \gamma_s &= E[(y_t - \mu)(y_{t-s} - \mu)] = E[(u_t - \Theta_1 u_{t-s} - \Theta_2 u_{t-2s})(u_{t-s} - \Theta_1 u_{t-2s} - \Theta_2 u_{t-3s})] = \\ &= -\Theta_1 E(u_{t-s}^2) + \Theta_1\Theta_2 E(u_{t-2s}^2) = -\Theta_1\sigma_u^2 + \Theta_1\Theta_2\sigma_u^2 = (-\Theta_1 + \Theta_1\Theta_2)\sigma_u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{2s} &= E[(y_t - \mu)(y_{t-2s} - \mu)] = E[(u_t - \Theta_1 u_{t-s} - \Theta_2 u_{t-2s})(u_{t-2s} - \Theta_1 u_{t-3s} - \Theta_2 u_{t-4s})] \\ &= -\Theta_2 E(u_{t-2s}^2) - \Theta_2\sigma_u^2 \end{aligned}$$

$$\gamma_j = E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] = 0 \quad \forall j \neq s \text{ y } 2s$$

Función de Autocorrelación. A partir de [4.21] y [4.20] se obtiene la función de autocorrelación que es igual a:

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\Theta + \Theta_1\Theta_2}{1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2} & \text{para } j=s \\ \frac{-\Theta_2}{1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2} & \text{para } j=2s \\ 0 & \text{para } j \neq s \text{ y } 2s \end{cases} \quad [4.22]$$

Función de Autocorrelación Parcial: Análogamente a como se obtenía [3.32]

podemos escribir para el modelo MA(2)_s.

$$\begin{aligned} \phi_{ss} &= \rho_s \\ \phi_{2s,2s} &= \frac{\rho_{2s} - \rho_s^2}{1 - \rho_s^2} \\ \phi_{3s,3s} &= \frac{\rho_s^3 - \rho_s\rho_{2s}(2 - \rho_{2s})}{1 - \rho_s^2 - 2\rho_s^2(1 - \rho_{2s})} \end{aligned} \quad [4.23]$$

...

Concretamente, el modelo $MA(2)_s$ siempre es estacionario, debiendo cumplir las restricciones paramétricas de la expresión [4.18] para ser invertibles. Por otra parte, las autocovarianza (y, consecuentemente, las autocorrelaciones) se anulan cuando el orden (estacional) de éstas supera el del modelo (que en este caso es de dos períodos estacionales), teniendo los valores de las dos autocorrelaciones distinta de cero (ρ_s y ρ_{2s}) signo inverso con respecto al de cada uno de los dos coeficientes del modelo; esto es, ρ_s tiene signo inverso al de Θ_1 y ρ_{2s} lo tiene inverso con respecto al Θ_2 . Por último, las autocorrelaciones parciales no se anulan, solo tienen valores distintos de cero los correspondientes a los períodos estacionales (s o múltiplo de s). La representación gráfica de la función de autocorrelación parcial tendrá un comportamiento amortiguado hacia cero, caso de que las raíces de [4.17] sean reales, mientras que el comportamiento será sinusoidal, también tendiendo a cero, si las raíces son complejas.

Ejemplo 4.2 Dados los valores iniciales siguientes:

$$\Theta_1 = 0.7, \quad \Theta_2 = 0.2, \quad \mu = 1, \quad \sigma_u^2 = 2 \quad s = 4$$

$$y_t = 1 + u_t - 0.7u_{t-4}, -0.2u_{t-4}, \quad \sigma_u^2 = 2$$

Calcular:

- ✓ La Función de Autocorrelación y La Función de Autocorrelación Parcial.

Solución:

Centrándonos en la función de autocorrelación y de autocorrelación parcial, podemos escribir:

Función de Autocorrelación:

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\Theta_1 + \Theta_1 \Theta_2}{1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2} = \frac{(-0.7) + (0.14)}{1 + (0.49) + (0.04)} = \frac{-0.56}{1.53} = -0.37 & \text{para } j=4 \\ \frac{-\Theta_2}{1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2} = \frac{-0.2}{1 + (0.49) + (0.04)} = \frac{-0.2}{1.53} = -0.13 & \text{para } j=8 \\ 0 & \text{para } j \neq 4 \text{ y } 8 \end{cases}$$

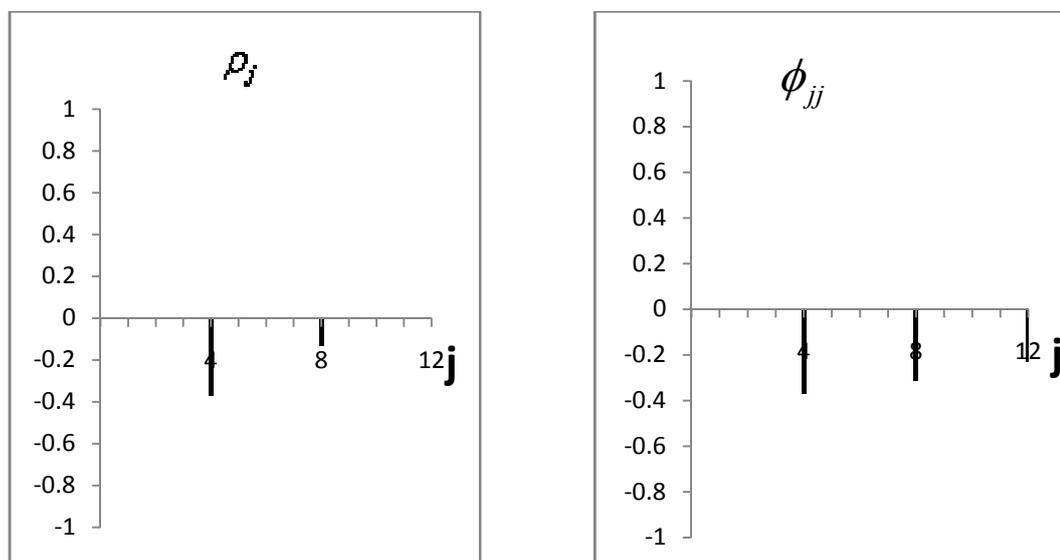


FIG 4.2 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo MA(1)₄ con $\Theta_1 = 0.7$ y $\Theta_2 = 0.2$.

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\begin{aligned} \phi_{11} = \phi_{22} = \phi_{33} &= 0 & \phi_{44} = \rho_4 &= -0.37 \\ \phi_{55} = \phi_{66} = \phi_{77} &= 0 \\ \phi_{88} &= \frac{\rho_8 - \rho_4^2}{1 - \rho_4^2} = \frac{(-0.13) - (-0.37)^2}{1 - (-0.37)^2} = \frac{-0.2669}{0.8631} = -0.31 \\ \phi_{99} = \phi_{10,10} = \phi_{11,11} &= 0 \\ \phi_{12,12} &= \frac{\rho_4^3 - \rho_2 \rho_8 (2 - \rho_8)}{1 - \rho_8^2 - 2\rho_4^2(1 - \rho_8)} = \frac{(-0.37)^3 - (-0.37)(-0.31) * (2 - (-0.31))}{1 - (-0.31)^2 - (2(-0.37)^2) * (1 - (-0.31))} = -0.23 \\ \phi_{13,13} = \phi_{14,14} = \phi_{15,15} &= 0 \\ \dots & \end{aligned}$$

2.9.3 MODELOS ESTACIONALES AUTORREGRESIVOS

El modelo se define como:

$$y_t = \phi_s y_{t-s} + \phi_{2s} y_{t-2s} + \dots + \phi_{ps} y_{t-ps} + \delta + u_t \quad [4.24]$$

donde P representa el mayor múltiplo de s presente en el modelo.

Para distinguir el modelo AR estacional del AR “ordinario”, adoptaremos la notación:

$$\Phi_j = \phi_{js} \quad [4.25]$$

de manera que [4.24] se escribe:

$$y_t = \Phi_s y_{t-s} + \Phi_{2s} y_{t-2s} + \dots + \Phi_{ps} y_{t-ps} + \delta + u_t \quad [4.26]$$

diciendo que es un modelo estacional autorregresivos de orden P , que abreviadamente denotaremos como $AR(P)_s$.

Utilizando la notación de operadores de retardos, [4.26] puede escribirse como:

$$\Phi_p(L^s)y_t = \delta + u_t \quad [4.27]$$

donde :

$$\Phi_p(L^s) = 1 - \Phi_1 L^s - \Phi_2 L^{2s} - \dots - \Phi_p L^{ps} \quad [4.28]$$

Obviamente el modelo estacional autorregresivo será siempre invertible y la condición de estacionariedad será análoga a la que deben cumplir los modelos AR “ordinario”, esto es, que las raíces características de $\Phi_p(L) = 0$ caigan fuera del círculo unidad.

El modelo estacional autorregresivos estacionario puede escribirse, también, en forma de desviaciones con respecto a la media. Esto es una forma alternativa de escribir [4.26] es:

$$\tilde{y}_t = \Phi_s \tilde{y}_{t-s} + \Phi_{2s} \tilde{y}_{t-2s} + \dots + \Phi_{ps} \tilde{y}_{t-ps} + u_t \quad [4.29]$$

donde:

$$\tilde{y}_{t-js} = y_{t-js} - \mu \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, P$$

Siendo:

$$\mu = E(y_t) = E(y_{t-s}) = \dots = E(y_{t-PS})$$

Utilizando la notación de operadores de retardo [4.29] puede escribirse como:

$$\Phi_p(L^s)\tilde{y}_t = u_t \quad [4.30]$$

o bien:

$$\Phi_p(L^s)(y_t - \mu) = u_t \quad [4.31]$$

A continuación analizaremos los modelo estacionales autorregresivos más habituales, esto es, los modelo AR(1)_s y de un AR(2)_s.

Modelo AR(1)_s

Un modelo AR(1)_s viene definido por:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-s} + \delta + u_t \quad [4.32]$$

o bien, expresado en desviaciones:

$$\tilde{y}_t = \Phi_1 \tilde{y}_{t-s} + u_t \quad [4.33]$$

Abreviadamente, podemos representar, respectivamente [4.32] y [4.33] como sigue:

$$\Phi_1(L^s) = y_t = \delta + u_t \quad [4.34]$$

$$\Phi_1(L^s) = \tilde{y}_t = u_t \quad [4.35]$$

donde:

$$\Phi_1(L^s) = 1 - \Phi_1 L^s$$

Cumplíndose la condición de estacionalidad del modelo $AR(1)_s$ que en este caso se concreta en cumplir la condición:

$$|\phi| < 1 \quad [4.36]$$

Podemos obtener la esperanza matemática, que será igual a:

$$E(y_t) = \mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1} \quad \forall t \quad [4.37]$$

Prueba: Si se cumple la condición de estacionariedad tenemos que:

$$E(y_t) = E(y_{t-s}) = \mu$$

Entonces, aplicando la esperanza matemáticas en [4.42]

$$E(y_t) = \Phi_1 E(y_{t-s}) + \delta + E(u_t) \Rightarrow \mu = \Phi_1 \mu + \delta \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1}$$

La varianza será igual a:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_u^2}{1 - \Phi_1^2} \quad [4.38]$$

Prueba:

$$\gamma_0 = E(\tilde{y}_t^2) = E(\Phi_1 \tilde{y}_{t-s} + u_t)^2 = \Phi_1^2 E(\tilde{y}_{t-s}^2) + E(u_t^2) + 2E(\Phi_1 \tilde{y}_{t-s} u_t)$$

Y como $E(\tilde{y}_{t-s} u_t) = 0$, podemos escribir:

$$\gamma_0 = \Phi_1^2 \gamma_0 + \sigma_u^2 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_u^2}{1 - \Phi_1^2}$$

Función de autocovarianza:

$$\gamma_{js} = \Phi_1^j \gamma_0 = \Phi_1^j \frac{\sigma_u^2}{1 - \Phi_1^2} \quad \text{para } j \geq 1 \quad [4.39]$$

Prueba:

$$\gamma_s = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-s}) = E[(\Phi_1 \tilde{y}_{t-s} + u_t) \tilde{y}_{t-s}] = \Phi_1 \gamma_0$$

$$\gamma_{2s} = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-2s}) = E[(\Phi_1 \tilde{y}_{t-s} + u_t) \tilde{y}_{t-2s}] = \Phi_1 \gamma_s = \Phi_1^2 \gamma_0$$

$$\gamma_{3s} = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-3s}) = E[(\Phi_1 \tilde{y}_{t-s} + u_t) \tilde{y}_{t-3s}] = \Phi_1 \gamma_{2s} = \Phi_1^3 \gamma_0$$

...

$$\gamma_{js} = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-js}) = \Phi_1^j \gamma_0$$

La expresión [4.39] debe interpretarse como que la función de autocovarianza para retardos correspondientes a períodos estacionales (s o múltiplos de s), no se anulan nunca, si bien cada vez tiene menor importancia. Sin embargo, las autocovarianza correspondientes a períodos no estacionales son iguales a cero.

Función de Autocorrelación. Efectuando el cociente entre [4.39] y [4.38] se obtiene la función de autocorrelación que es igual a:

$$\rho_j = \Phi_1^j \quad \text{para } j \geq 1 \quad [4.40]$$

Desde la expresión [4.40] puede concluirse que el correlograma del modelo $AR(1)_s$, representación gráfica de su función de autocorrelación, no se anulará nunca, si bien sólo presentará valores no nulos para los retardos correspondientes a los períodos estacionales (s o múltiplos de s). Además, su comportamiento será amortiguado hacia cero, con todos los valores positivos, caso de que $\Phi_1 > 0$, o alternando valores negativos y positivos, caso de que $\Phi_1 < 0$.

Función de Autocorrelación Parcial. De manera análoga a como se obtenía la función de autocorrelación parcial del modelo $AR(1)$ (véase la expresión [3.53]), se obtiene para el modelo $AR(1)_s$, la siguientes FAP:

$$\phi_j = \begin{cases} \rho_1 = \Phi_1 & \text{para } j = s \\ 0 & \text{para } j \neq s \end{cases} \quad [4.41]$$

Así pues, su representación gráfica sólo presentará un pico distinto de cero (el correspondiente al primer período estacional s), siendo su signo y valor el mismo que el del coeficiente Φ_1 .

Ejemplo 4.3 Dados los siguientes valores:

$$\Phi_1 = 0.6; \delta = 2; \sigma_u^2 = 2; s = 4$$

$$y_t = 0.6y_{t-1} + 2 + u_t; \sigma_u^2 = 2$$

Calcular:

- ✓ La media, La varianza, La Función de Autocovarianza, La Función de Autocorrelación y La Función de Autocorrelación Parcial.

Solución:

$$\text{Media: } \mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1} = \frac{2}{1 - 0.6} = 5$$

$$\text{Varianza: } \gamma_0 = \frac{\sigma_u^2}{1 - \Phi_1^2} = \frac{2}{1 - 0.36} = 3,125$$

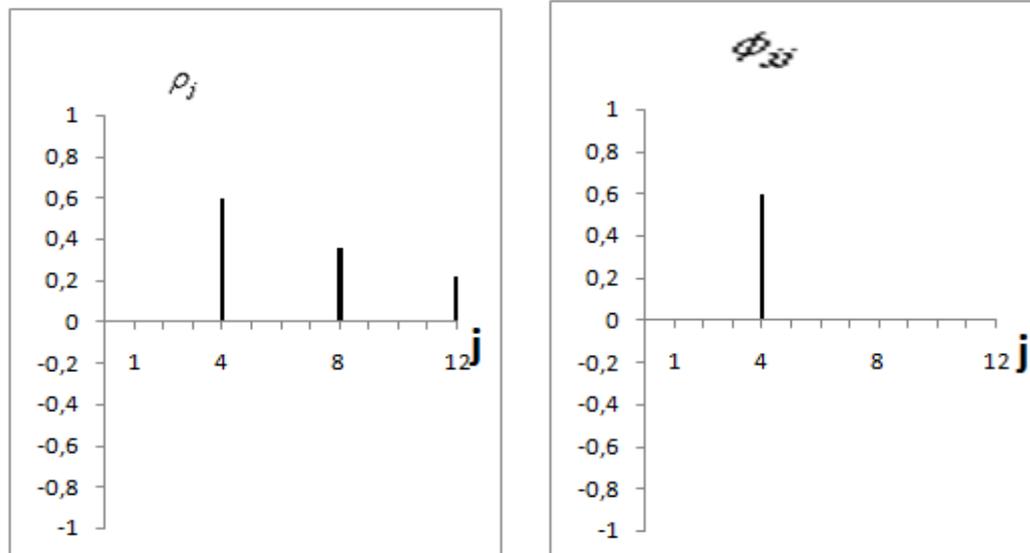


FIG 4.3 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo $AR(1)_4$ con $\Phi_1 = 0.6$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$$

$$\gamma_4 = \Phi_1 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = 0.6 * 3.125 = 1.87 \quad \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = 0$$

$$\gamma_8 = \phi_1^2 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = (0.6)^2 * 3.125 = 1.12 \quad \gamma_9 = \gamma_{10} = \gamma_{11} = 0$$

$$\gamma_{12} = \phi_1^3 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = (0.6)^3 * 3.125 = 0.67 \quad \gamma_{13} = \gamma_{14} = \gamma_{15} = 0$$

Función de Autocorrelación:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$$

$$\rho_4 = \Phi_1 = 0.6$$

$$\rho_5 = \rho_6 = \rho_7 = 0$$

$$\rho_8 = \phi_1^2 = (0.6)^2 = 0.36$$

$$\rho_9 = \rho_{10} = \rho_{11} = 0$$

$$\rho_{12} = \phi_1^3 = (0.6)^3 = 0.22$$

$$\rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{15} = 0$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{jj} = \begin{cases} \Phi_1 = 0.6 & \text{para } j = 4 \\ 0 & \text{para } j \neq 4 \end{cases}$$

Modelo AR(2)_s

El modelo AR(2)_s viene definido por:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-s} + \Phi_2 y_{t-2s} + \delta + u_t \quad [4.42]$$

o bien:

$$\Phi_2(L^s)y_t = \delta + u_t \quad [4.43]$$

El modelo AR(2)_s será estacionario si las raíces de la ecuación:

$$\Phi_2(L^s) = 1 - \Phi_1 L^s - \Phi_2 L^{2s} \quad [4.44]$$

Caen fuera del círculo unitario, lo cual implica:

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 &< 1 \\ \Phi_2 - \Phi_1 &< 1 \\ |\Phi_2| &< 1 \end{aligned} \quad [4.45]$$

Suponiendo que el modelo es estacionario, podemos escribir la esperanza matemática

como:

$$E(y_t) = \mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 - \Phi_2} \quad [4.46]$$

Prueba:

Si el modelo es estacionario: $E(y_t) = E(y_{t-s}) = E(y_{t-2s}) = \mu$ y tomando esperanza matemáticas en [4.42]:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= \delta + E(y_{t-s}) + \Phi_2 E(y_{t-2s}) + E(u_t) \\ \Rightarrow \mu &= \delta + \Phi_1 \mu + \Phi_2 \mu \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 - \Phi_2} \end{aligned}$$

Bajo la condición de estacionariedad, el modelo AR(2)_s puede escribirse en forma de desviaciones respecto a la media:

$$\tilde{y}_t = \Phi_1 \tilde{y}_{t-s} + \Phi_2 \tilde{y}_{t-2s} + u_t \quad [4.47]$$

o bien, la forma abreviada:

$$\Phi_2(L^s)\tilde{y}_t = u_t \quad [4.48]$$

La varianza del modelo AR(2)_s es igual a:

$$\gamma_0 = \Phi_1 \gamma_s + \Phi_2 \gamma_{2s} + \sigma_u^2 \quad [4.49]$$

Prueba:

$$\gamma_0 = E(\tilde{y}_t) = E[\tilde{y}_t(\Phi_1 \tilde{y}_{t-s} + \Phi_2 \tilde{y}_{t-2s} + u_t)] = \Phi_1 \gamma_s + \Phi_2 \gamma_{2s} + \sigma_u^2$$

Función de autocovarianza:

$$\gamma_j = \Phi_1 \gamma_{(j-1)s} + \Phi_2 \gamma_{(j-2)s} \quad \text{para } j \geq 1 \quad [4.50]$$

Prueba:

$$\gamma_j = E(y_t \tilde{y}_{t-js}) = E[\tilde{y}_{t-js}(\Phi_1 \tilde{y}_{t-s} + \Phi_2 \tilde{y}_{t-2s} + \mu_t)] = \Phi_1 \gamma_{(j-1)s} + \Phi_2 \gamma_{(j-2)s}$$

Función de Autocorrelación. Desde la [4.49] y [4.50] obtendremos la función de autocorrelación, que será igual a:

$$\rho_{js} = \Phi_1 \rho_{(j-1)s} + \Phi_2 \rho_{(j-2)s} \quad \text{para } j \geq 1 \quad [4.51]$$

Función de Autocorrelación Parcial: La FAP del modelo AR(2)_s se obtiene de manera análoga a como se hacía para el modelo AR(2) no estacional (véase la expresión [3.69]); en consecuencia, escribiremos:

$$\phi_{jj} = \begin{cases} \rho_1 = \frac{\Phi_1}{1 - \Phi_2} & \text{para } j = s \\ \frac{\rho_2 - \rho_s^2}{1 - \rho_s^2} = \Phi_2 & \text{para } j = 2s \\ 0 & \text{para } j \neq s \text{ y } 2s \end{cases} \quad [4.52]$$

Para finalizar esta sección, podemos concluir a partir de la [4.51] y [4.52]:

- 1) El correlograma de un modelo AR(2)_s estacionario sólo presentará valores no nulos para los períodos estacionales (retardos s o múltiplos de s), dependiendo su

forma de si las raíces de [4.44] son reales o complejas. En el primer caso el correlograma presentará un comportamiento amortiguado hacia cero, mientras que en el segundo, el comportamiento será sinusoidal pero también amortiguado hacia cero.

- 2) La representación gráfica de la función de autocorrelación parcial presentará dos únicos valores distintos de cero, los correspondientes a los dos primeros períodos estacionales (s y $2s$), en correspondencia con el orden del modelo. Los restantes valores de la FAP serán iguales a cero.

Ejemplo 4.4 Dados los valores siguientes:

$$\Phi_1 = 0.4, \quad \Phi_2 = 0.3, \quad \delta = 2, \quad \sigma_u^2 = 3 \quad s = 4$$

$$y_t = 0.4y_{t-4} + 0.3y_{t-8} + 2 + u_t; \quad \sigma_u^2 = 3$$

Calcular:

- ✓ La media, La varianza, La Función de Autocovarianza, La Función de Autocorrelación y La Función de Autocorrelación Parcial, verificar si existe Estacionariedad.

Solución:

Estacionariedad: Si, ya que cumple:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0.4 + 0.3 = 0.7 < 1$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = 0.3 - 0.4 = -0.1 < 1$$

$$|\Phi_2| = 0.3 < 1$$

$$\text{Media} \quad \mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 - \Phi_2} = \frac{2}{1 - 0.4 - 0.3} = 6.66$$

Varianza y Función de Autocovarianza:

Ordenando la ecuación con los valores iniciales dados, las ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$$1) \gamma_0 = 0.4\gamma_1 + 0.3\gamma_2 + 3$$

$$2) \gamma_1 = 0.4\gamma_0 + 0.3\gamma_1 = 0$$

$$3) \gamma_2 = 0.4\gamma_1 + 0.3\gamma_0 = 0$$

En las ecuaciones 1) 2) y 3) multiplicamos por 10 para trabajar con número enteros de manera que se nos faciliten los cálculos a realizar.

$$\begin{array}{lll} 1) \gamma_0 = 0.4\gamma_1 + 0.3\gamma_2 + 3 & 2) \gamma_1 = 0.4\gamma_0 + 0.3\gamma_1 = 0 & 3) \gamma_2 = 0.4\gamma_1 + 0.3\gamma_0 = 0 \\ \gamma_0 - 0.4\gamma_1 - 0.3\gamma_2 = 3(10) & -0.4\gamma_0 + 0.7\gamma_1 = 0(10) & \gamma_2 - 0.4\gamma_1 - 0.3\gamma_0 = 0(10) \\ 10\gamma_0 - 4\gamma_1 - 3\gamma_2 = 30 & -4\gamma_1 + 7\gamma_1 = 0 & -3\gamma_0 - 4\gamma_1 + 10\gamma_2 = 0 \end{array}$$

Teniendo las tres ecuaciones procederemos a encontrar los valores para las variables $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ de la siguiente forma primero vamos a eliminar el valor de la variable γ_2 .

$$\begin{array}{r} 10\gamma_0 - 4\gamma_1 - 3\gamma_2 = 30(10) \\ -3\gamma_0 - 4\gamma_1 + 10\gamma_2 = 0(3) \\ \hline 100\gamma_0 - 40\gamma_1 - 30\gamma_2 = 300 \\ -9\gamma_0 - 12\gamma_1 + 30\gamma_2 = 0 \\ \hline 91\gamma_0 - 52\gamma_1 = 300 \end{array}$$

Luego eliminamos γ_1 de la misma forma que eliminamos γ_2 .

$$\begin{array}{r} 91\gamma_0 - 52\gamma_1 = 300(7) \\ -4\gamma_0 + 7\gamma_1 = 0 (52) \\ \hline 637\gamma_0 - 364\gamma_1 = 2100 \\ -208\gamma_0 + 364\gamma_1 = 0 \\ \hline 429\gamma_0 = 2100 \end{array}$$

Hemos encontrado el valor de: $\gamma_0 = \frac{2100}{429} = 4.89$

Sustituimos el valor γ_0 en la ecuación 2 para poder encontrar el valor de γ_1

$$\begin{aligned} -4\gamma_0 + 7\gamma_1 &= 0 \\ -4(4.89) + 7\gamma_1 &= 0 \\ 19.56 + 7\gamma_1 &= 0 \\ \gamma_1 &= \frac{19.56}{7} = 2.80 \end{aligned}$$

Teniendo los dos valores de γ_0, γ_1 sustituimos en la ecuación 3 para calcular el valor de la variable γ_2

$$\begin{aligned} -3\gamma_0 - 4\gamma_1 + 10\gamma_2 &= 0 \\ -3(4.89) - 4(2.80) + 10\gamma_2 &= 0 \\ -14.67 - 11.2 + 10\gamma_2 &= 0 \\ 10\gamma_2 &= 14.67 + 11.2 \\ \gamma_2 &= \frac{25.87}{10} = 2.59 \end{aligned}$$

Para los restantes retardos correspondientes a períodos estacionales (recuérdese que las autocovarianzas correspondientes a órdenes no estacionales son iguales a cero):

$$\begin{aligned} \gamma_{js} &= \Phi_1 \gamma_{(j-j)s} + \Phi_2 \gamma_{(j-2)s} \\ \gamma_{12} &= 0.4(2.59) + 0.3(2.80) = 1.87 \\ \gamma_{16} &= 0.4(1.87) + 0.3(2.59) = 1.53 \quad \text{para } j > 3 \\ \gamma_{20} &= 0.4(1.53) + 0.3(1.87) = 1.17 \end{aligned}$$

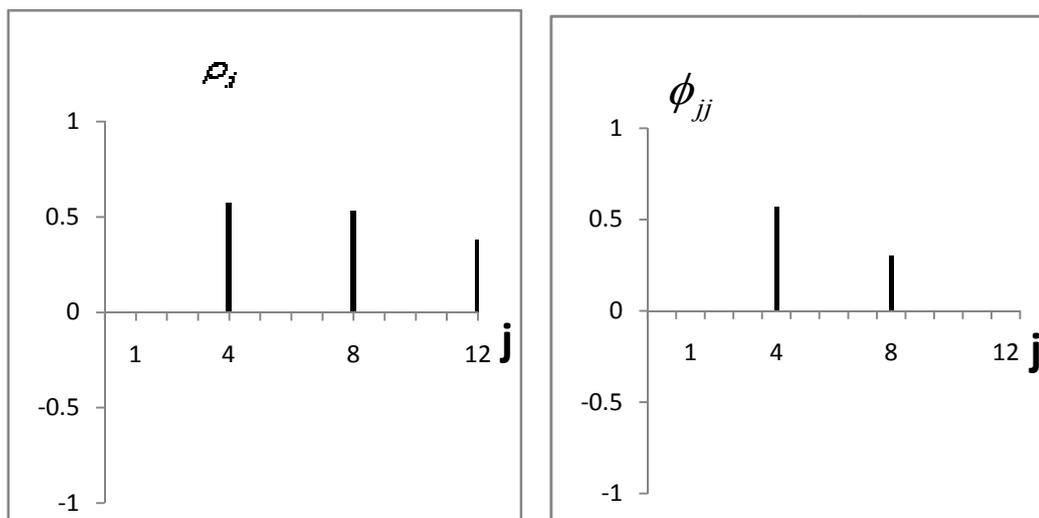


FIG 4.4 Correlograma de la FAP del modelo $AR(2)_4$ con $\Phi_1 = 0.4$ y $\Phi_2 = 0.3$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{jj} = \begin{cases} \rho_4 = 0.57 & \text{para } j = 4 \\ \frac{\rho_8 - \rho_4^2}{1 - \rho_4^2} = 0.30 & \text{para } j = 4 \\ 0 & \text{para } j = 4 \end{cases}$$

Ejemplo 4.5 Dados los valores siguientes:

$$\Phi_1 = 1.5, \quad \Phi_2 = -0.75, \quad \delta = 4.1, \quad \sigma_u^2 = 2$$

$$y_t = 1.5y_{t-4} - 0.75y_{t-4} + 4.1 + u_t; \quad \sigma_u^2 = 2$$

Calcular:

- ✓ La media, La varianza, La Función de Autocovarianza, La Función de Autocorrelación y La Función de Autocorrelación Parcial, verificar si existe Estacionariedad.

Solución

En este caso las raíces $\Phi_2(L^4) = 0$ son complejas, ya que

$\Phi_2 = -0.75 < 0$ y $|4\Phi_2| = 3 > \Phi_1^2 = 2.25$. La función de autocorrelación (FAC) y

función de autocorrelación parcial (FAP), así como sus respectivas representaciones

gráficas, son iguales a:

Función de Autocorrelación:

$$\begin{aligned} \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0 & \quad \rho_4 = \frac{\Phi_1}{1 - \Phi_2} = \frac{1.5}{1 - (-0.75)} = 0.86 \\ \rho_5 = \rho_6 = \rho_7 = 0 & \quad \rho_8 = \Phi_1\rho_4 + \Phi_2 = (1.5*0.86) + (-0.75) = 0.54 \\ \rho_9 = \rho_{10} = \rho_{11} = 0 & \quad \rho_{12} = \Phi_1\rho_8 + \Phi_2\rho_4 = (1.5*0.54) + (-0.75*0.86) = 0.16 \\ \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{15} = 0 & \quad \rho_{16} = \Phi_1\rho_{12} + \Phi_2\rho_8 = (1.5*0.16) + (-0.75*0.54) = -0.16 \end{aligned}$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{jj} = \begin{cases} \rho_4 = 0.86 & \text{para } j = 4 \\ \frac{\rho_8 - \rho_4^2}{1 - \rho_4^2} = \frac{0.54 - (0.86)^2}{(1 - (0.86)^2)} = -0.75 & \text{para } j = 8 \\ 0 & \text{para } j \neq 4 \text{ y } 8 \end{cases}$$

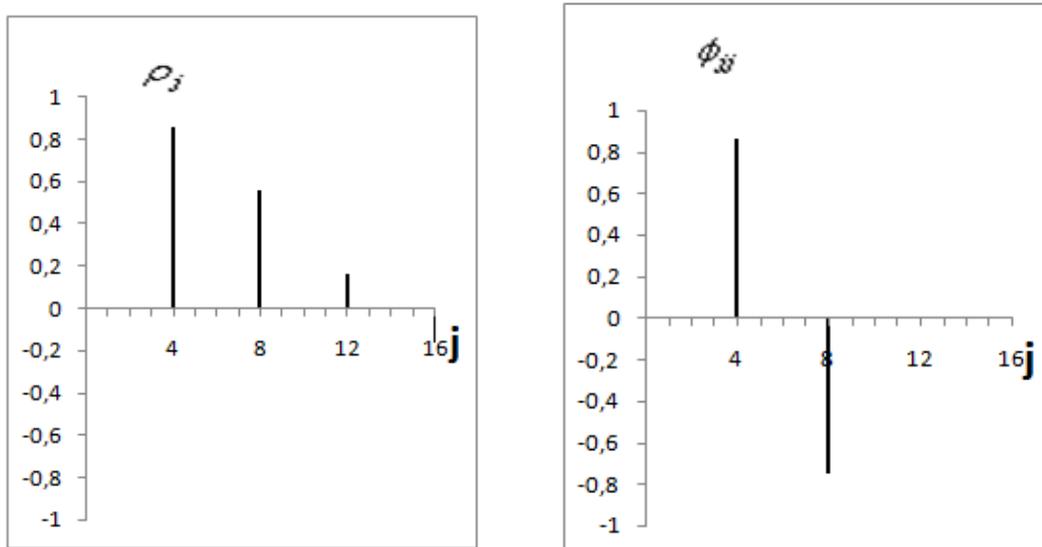


FIG 4.5 Correlograma y representación gráfica de la FAP del Modelo AR(2)₄ con $\Phi_1 = 1.5$ y $\Phi_2 = -0.75$

2.9.4 MODELO ESTACIONAL MIXTO Y MODELO ESTACIONAL

NO ESTACIONARIO.

El modelo mixto estacional ARMA se define como:

$$y_t = \phi_s y_{t-s} + \phi_{2s} y_{t-2s} + \dots + \phi_{Ps} y_{t-Ps} + \delta + u_t - \theta_s u_{t-s} - \dots - \theta_{Qs} u_{t-Qs} \quad [4.53]$$

Para distinguir el modelo ARMA estacional del ARMA “ordinario”, adoptaremos la

notación: $\Theta_j = \theta_{js}; \quad \Phi_j = \phi_{js} \quad [4.54]$

de manera que [4.53] se escribirá:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-s} + \Phi_2 y_{t-2s} + \dots + \Phi_{Ps} y_{t-Ps} + \delta + u_t - \theta_1 u_{t-s} - \dots - \theta_Q u_{t-Qs} \quad [4.55]$$

Utilizando el operador de retardos, el modelo [4.55], que denotaremos como ARMA (P, Q)_s se escribirá como:

$$\Phi_p(L^s)y_t = \delta + \Theta_q(L^s)u_t \quad [4.56]$$

donde $\Theta_q(L^s)$ y $\Phi_p(L^s)$ se define respectivamente en [4.5] y [4,28].

A continuación analizaremos el modelo mixto estacional más sencillo, esto es, el ARMA(1, 1)_s, así como los modelos estacionales no estacionarios homogéneos.

Modelo ARMA(1, 1)_s

El modelo ARMA (1, 1)_s se define como:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-s} + \delta + u_t - \Theta_1 u_{t-s} \quad [4.57]$$

el cual puede escribirse como:

$$\Phi_1(L^s)y_t = \delta + \Theta_1(L^s)u_t \quad [4.58]$$

El modelo [4.57] y [4.58], será invertible cuando se cumpla:

$$|\Theta_1| < 1 \quad [4.59]$$

y será estacionario siempre que: $|\Phi_1| < 1$ [4.60]

Satisfecha la condición de estacionariedad, podemos obtener la esperanza matemática, que es igual a:

$$E(y_t) = \mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1} \quad [4.61]$$

Prueba: Por ser estacionario: $E(y_t) = E(y_{t-s}) = \mu$, entonces tomando esperanza matemáticas en [4.57]:

$$E(y_t) = \Phi_1 E(y_{t-s}) + \delta + E(u_t) - \Theta_1 E(u_{t-s}) \Rightarrow \mu = \Phi_1 \mu + \delta \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1}$$

Una forma alternativa de escribir el modelo ARMA(1,1)_s estacionario es en forma de desviaciones con respecto a la media:

$$\tilde{y}_t = \phi_1 \tilde{y}_{t-s} + u_t - \Theta_1 u_{t-s} \quad [4.62]$$

A partir de [4.62] obtendremos fácilmente tanto la varianza como la función de autocovarianza; en concreto, la varianza es igual a:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_u^2(1 + \Theta_1^2 - 2\Phi_1\Theta_1)}{1 - \Phi_1^2} \quad [4.63]$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E(\tilde{y}_t^2) = E[(\Phi_1 \tilde{y}_{t-s} + u_t - \Theta_1 u_{t-s})^2] = \\ &= \Phi_1^2 E(\tilde{y}_{t-s}^2) + E(u_t^2) + \Theta_1^2 E(u_{t-s}^2) - 2\Phi_1 E(\tilde{y}_{t-s} u_t) - 2\Phi_1 \Theta_1 E(\tilde{y}_{t-s} u_{t-s}) - 2\Theta_1 E(u_t u_{t-s}) = \\ &= \Phi_1^2 \gamma_0 + \sigma_u^2 + \Theta_1^2 \sigma_u^2 - 2\Phi_1 \Theta_1 \sigma_u^2 \Rightarrow \frac{\sigma_u^2(1 + \Theta_1^2 - 2\Phi_1\Theta_1)}{1 - \Phi_1^2} \end{aligned}$$

Función de Autocovarianza: Solamente serán distintas de cero las autocovarianzas correspondientes a retardos referidos a los períodos estacionales (s o múltiplos de s), de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\gamma_0 = \begin{cases} \Phi_1 \gamma_0 - \Theta_1 \sigma_u^2 = \frac{\sigma_u^2(1 + \Phi_1\Theta_1)(\Phi_1 - \Theta_1)}{1 - \Phi_1^2} & \text{para } j = 1 \\ \Phi_1 \gamma_{(j-1)s} & \text{para } j > 1 \end{cases} \quad [4.64]$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E(\tilde{y}_{t-s} \tilde{y}_t^2) = E[\tilde{y}_{t-s} (\Phi_1 \tilde{y}_{t-s} + u_t - \Theta_1 u_{t-s})] = \\ &= \Phi_1 E(\tilde{y}_{t-s}^2) + E(\tilde{y}_{t-s} u_t) - \Theta_1 E(\tilde{y}_{t-s} u_{t-s}) = \Phi_1 \gamma_0 - \Theta_1 \sigma_u^2 = \\ &= \frac{\Phi_1 \sigma_u^2(1 + \Theta_1^2 - 2\Phi_1\Theta_1)}{1 - \Phi_1^2} - \Theta_1 \sigma_u^2 = \frac{\sigma_u^2(\Phi_1 + \Phi_1\Theta_1^2 - 2\Phi_1^2\Theta_1 - \Theta_1 + \Theta_1\Phi_1^2)}{1 - \Phi_1^2} = \\ &= \frac{\sigma_u^2(\Phi_1 - \Theta_1 - \Phi_1\Theta_1^2 - \Phi_1^2\Theta_1)}{1 - \Phi_1^2} = \frac{\sigma_u^2(1 - \Phi_1\Theta_1)(\Phi_1 - \Theta_1)}{1 - \Phi_1^2} \end{aligned}$$

$$\gamma_{js} = E(\tilde{y}_{t-js} \tilde{y}_t^2) = E[\tilde{y}_{t-js} (\Phi_1 \tilde{y}_{t-s} + u_t - \Theta_1 u_{t-s})] = \Phi_1 \gamma_{(j-1)s} \quad \text{para } j = 1, 2, 3, 4, \dots, n$$

Función de autocorrelación: Se obtiene directamente efectuando el cociente entre [4.64] y [4.63]:

$$\rho_{js} = \begin{cases} \frac{(1 - \Phi_1 \Theta_1)(\Phi_1 - \Theta_1)}{1 + \Theta_1^2 - 2\Phi_1 \Theta_1} & \text{para } j = 1 \\ \Phi_1 \rho_{(j-1)s} & \text{para } j > 1 \end{cases} \quad [4.65]$$

Puede observarse que la presencia del término de medias móviles en el modelo ARMA(1,1)_s afecta solamente a la determinación de ρ_s . El resto de las autocorrelaciones (que solamente serán distintas de cero para retardos múltiplos de s) sólo vienen afectadas por la parte autorregresivos del modelo.

Función de Autocorrelación Parcial: La FAP del modelo ARMA(1,1)_s se obtiene de manera análoga a como se hacía para el modelo ARMA(1,1) no estacional (véase la expresión [3.95]); en consecuencia, escribiremos:

$$\phi_{jj} = \begin{cases} \rho_s & \text{para } j = s \\ \frac{\rho_s - \rho_s^2}{1 - \rho_s^2} & \text{para } j = 2s \\ \frac{\rho_s^3 - \rho_s \rho_{2s}(2 - \rho_{2s}) + \rho_{3s}(1 - \rho_s^2)}{1 - \rho_{2s}^2 - 2\rho_s^2(1 - \rho_{2s})} & \text{para } j = 3s \\ \vdots & \end{cases} \quad [4.66]$$

Como se observa en [4.66], la FAP del modelo ARMA(1,1)_s no se anula (mostrando un comportamiento amortiguado hacia cero), como consecuencia de que este modelo contiene al MA(1)_s como un caso particular; aunque debe matizarse que los coeficientes de autocorrelación parcial son distintos de cero tan sólo para los retardos correspondientes a los períodos estacionales (s o múltiplos de s).

Ejemplo 4.6 Dados los siguientes valores iniciales:

$$\Phi_1 = 0.5, \quad \Theta_2 = -0.9, \quad \delta = 0, \quad \sigma_u^2 = 2 \quad s = 4$$

$$y_t = 0.5y_{t-4} + u_t + 0.9u_{t-4}; \quad \sigma_u^2 = 2$$

Calcular:

- ✓ La media, La varianza, La Función de Autocovarianza, La Función de Autocorrelación, La Función de Autocorrelación Parcial, verificar si existe Estacionariedad e invertibilidad.

Solución

Estacionariedad: Sí, ya que cumple: $|\Phi_1| = 0.5 < 1$

Invertibilidad: Sí, ya que cumple: $|\Theta_1| = 0.9 < 1$

Esperanza matemática: $E(y_t) = \mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1} = 0$

Varianza: $\gamma_0 = \frac{\sigma_u^2(1 + \Theta_1^2 - 2\Phi_1\Theta_1)}{1 - \Phi_1^2} = 3.61$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$$

$$\gamma_{12} = \Phi_1\gamma_0 - \Theta_1\sigma_u^2 = ((0.5 * 3.61) - (0.9 * 1)) = 2.70$$

$$\gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = 0$$

$$\gamma_{12} = \Phi_1\gamma_4 = (0.5 * 2.70) = 1.35$$

$$\gamma_9 = \gamma_{10} = \gamma_{11} = 0$$

$$\gamma_{12} = \Phi_1\gamma_8 = (0.5 * 1.35) = 0.68$$

Función de Autocorrelación:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$$

$$\rho_4 = \frac{(1 - \Phi_1\Theta_1)(\Phi_1 - \Theta_1)}{1 - \Theta_1^2 - 2\Phi_1\Theta_1} = \frac{(1 - (0.5 * -0.9)(0.5 + 0.9))}{(1 - (0.5)^2) - 2(0.5 * 0.9)} = 0.75$$

$$\rho_5 = \rho_6 = \rho_7 = 0$$

$$\rho_8 = \Phi_1\rho_4 = 0.5 * 0.75 = 0.37$$

$$\rho_9 = \rho_{10} = \rho_{11} = 0$$

$$\rho_{12} = \Phi_1\rho_8 = 0.5 * 0.37 = 0.19$$

...

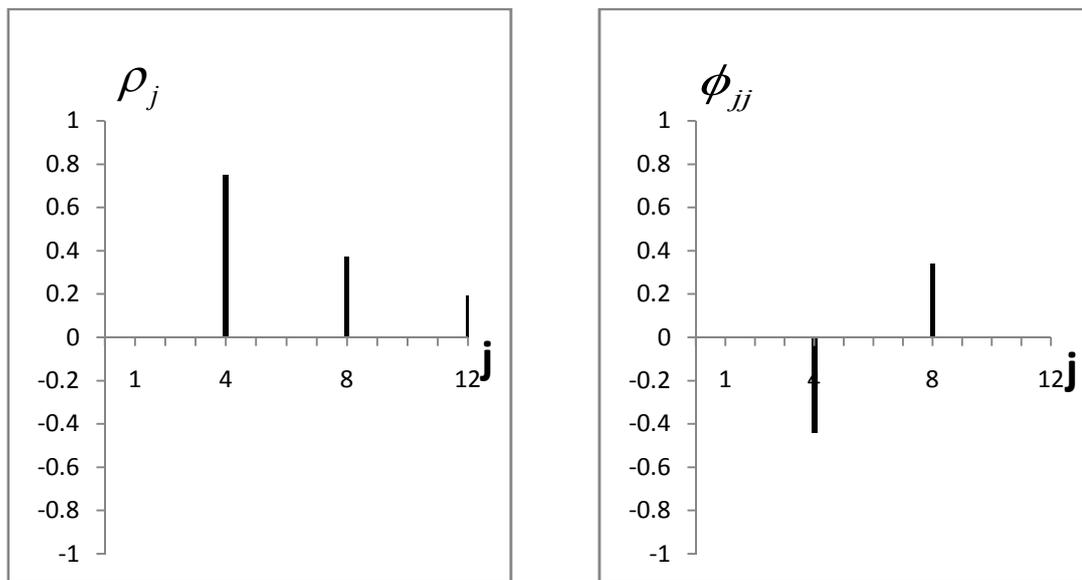


FIG 4.6 Correlograma y representación gráfica de la FAP del Modelo ARMA(2)₄
con $\Phi_1 = 0.5$ y $\Phi_2 = -0.9$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{55} = \phi_{66} = \phi_{77} = 0$$

$$\phi_{88} = \frac{\rho_8 - \rho_4^2}{1 - \rho_4^2} = \frac{0.37 - (0.75)^2}{1 - (0.75)^2} = -0.44$$

$$\phi_{99} = \phi_{10,10} = \phi_{11,11} = 0$$

$$\phi_{12,12} = \frac{\rho_4^3 - \rho_4 \rho_8 (2 - \rho_8) + \rho_{12} (1 - \rho_4^2)}{1 - \rho_8^2 - 2\rho_4^2 (1 - \rho_8)} = \frac{(0.75)^3 - (0.75)(-0.37)(2 - (-0.37)) + 0.19(1 - (0.75)^2)}{1 - (-0.37)^2 - 2(0.75)^2 * 1 - (-0.37)} = 0.34$$

$$\phi_{13,13} = \phi_{14,14} = \phi_{15,15} = 0$$

...

Modelos Estacionales no Estacionarios Homogéneos. Modelos ARMA(P, D, Q)_s.

Hasta ahora hemos considerados modelos estacionales puros estacionarios. Ahora bien, al igual que sucede con los modelos no estacionales, dado que la mayoría de las series económicas son no estacionarias, resulta de utilidad considerar los modelos estacionales no estacionarios, pero homogéneos. Concretamente, el modelo ARIMA(P, D, Q)_s será:

$$w_t = \Phi_1 w_{t-s} + \Phi_2 w_{t-2s} + \dots + \Phi_P w_{t-Ps} + \delta + u_t - \Theta_1 u_{t-s} - \dots - \Theta_Q u_{t-Qs} \quad [4.67]$$

donde:

$$w_t = \Delta_s^D y_t = (1-L^s)^D y_t \quad [4.68]$$

El modelo [4.68] lo podemos representar mediante.

$$\Phi_p(L^s)w_t = \delta + \Theta_Q(L^s)u_t \quad [4.69]$$

O bien teniendo en cuenta [4.68]:

$$\Phi_p(L^s)(1-L^s)^D y_t = \delta + \Theta_Q(L^s)u_t \quad [4.70]$$

O, alternativamente:

$$\Phi_p(L^s)[(1-L^s)^D y_t - \mu_t] = \Theta_Q(L^s)u_t \quad [4.71]$$

Donde $\Theta_Q(L^s)$ y $\Phi_p(L^s)$ se han definido, respectivamente, en [4.5] y [4.28].

Obviamente, todos los modelos estacionales puros son un caso particular del modelo ARIMA(P, D, Q)_s, cuando D = 0; en concreto:

$$\begin{aligned} D=0, P=0 &\Rightarrow \text{MA}(Q)_s \\ D=0, Q=0 &\Rightarrow \text{AR}(P)_s \\ D=0 &\Rightarrow \text{ARMA}(P, Q)_s \end{aligned}$$

2.9.5 MODELOS ESTACIONALES MULTIPLICATIVOS

Como decíamos en la introducción de este capítulo, los modelos estacionales puros analizados en las tres secciones anteriores no van a ser los que con mayor frecuencia nos sirvan para caracterizar una serie temporal estacional, debido a que normalmente no están solamente relacionadas las observaciones que distan s (o múltiplos de s) períodos, si no que lo habitual es que dentro de períodos no estacionales también existan relaciones. Los modelos que conjugan ambos tipos de interdependencias entre las observaciones son los modelos estacionales multiplicativos.

Modelo Estacional Multiplicativo General

Box y Jenkins (1970, 1976) propusieron que las correlaciones entre pares de observaciones dentro de periodos estacionales pueden introducirse suponiendo que el ruido del modelo ARIMA estacional está correlacionado seriamente. Es decir, si escribimos el modelo ARIMA(P, D, Q)_s como:

$$(1 - \Phi_1 L^s - \Phi_2 L^{2s} - \dots - \Phi_p L^{ps})(1 - L^s)^D y_t = (1 - \Theta_1 L^s - \dots - \Theta_q L^{qs}) \varepsilon_t \quad [4.72]$$

entonces, ε_t supondremos que viene generado por un proceso ARIMA(p, d, q), esto

$$\text{es: } (1 - \phi_1 L^s - \phi_2 L^{2s} - \dots - \phi_p L^{ps})(1 - L^s)^d \varepsilon_t = (1 - \theta_1 L^s - \dots - \theta_q L^{qs}) u_t \quad [4.73]$$

Siendo u_t un ruido blanco.

Sustituyendo ahora [4.73] y [4.72] obtendremos el modelo estacional multiplicativo general, que denotaremos abreviadamente como ARIMA(p,d,q) × ARIMA(P,D, Q)_s, y que escribimos como:

$$\begin{aligned} (1 - \Phi_1 L^s - \Phi_2 L^{2s} - \dots - \Phi_p L^{ps})(1 - \phi_1 L^s - \dots - \phi_p L^{ps})(1 - L^s)^D (1 - L^s)^d y_t = \\ = (1 - \Theta_1 L^s - \Theta_2 L^{2s} - \dots - \Theta_q L^{qs}) = (1 - \theta_1 L^s - \dots - \theta_q L^{qs}) u_t \end{aligned} \quad [4.74]$$

O, más abreviadamente:

$$\Phi_p(L^s) \phi_p(L) (1 - L^s)^D (1 - L^s)^d y_t = \Theta_q(L^s) \theta_q(L) u_t$$

Con carácter general, esta expresión puede escribirse como:

$$\Phi_p(L^s) \phi_p(L) [(1 - L^s)^D (1 - L^s)^d y_t - \mu] = \Theta_q(L^s) \theta_q(L) u_t \quad [4.75]$$

Siendo u la media de $w_t = (1 - L^s)^D (1 - L^s)^d y_t$.

Debe tenerse en cuenta que tanto el grado de diferenciación estacional D como el de diferenciación consecutiva d serán, en el contexto económico, generalmente cero o uno.

La estructura de autocorrelación (y autocorrelación parcial) del proceso estacional multiplicativo suele ser generalmente muy compleja. Por ello, resulta útil efectuar algunas observaciones generales, pasando a continuación a analizar por separado los modelos estacionales multiplicativos con parte regular media móvil y con parte regular autorregresiva.

Lo primero que se observa al analizar el modelo estacional multiplicativo estacionario es que éste es esencialmente un modelo ARIMA de órdenes $P_s + p$ y $Q_s + q$, aunque con la característica esencial de que muchos de los coeficientes que aparecerán en el modelo extendido serán iguales a cero, resultando ciertas simplificaciones en la estructura de autocorrelación.

Para ver este punto consideremos, a modo de ejemplo, el modelo $ARIMA(0, 1, 1) \times ARIMA(0, 1, 1)_s$ o, lo que es igual, $IMA(1, 1) \times IMA(1, 1)_s$, denominado en la literatura como el “modelo de las líneas aéreas” como consecuencia del uso que del mismo hicieron en su libro Box y Jenkins (1976), tomando unos datos considerados previamente por Brown (1963). Suponiéndoos $s = 12$, este modelo puede escribirse:

$$(1 - L^{12})(1 - L)y_t = (1 - \Theta_1 L^{12})(1 - \theta_1 L)u_t \quad [4.76]$$

En su forma extendida este modelo es igual a:

$$w_t = (1 - \theta_1 L - \Theta_1 L^{12} + \theta_1 \Theta_1 L^{13})u_t \quad [4.77]$$

Donde:

$$w_t = (1 - L^{12})(1 - L)y_t$$

El modelo [4.77] lo podemos escribir como:

$$w_t = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \Theta_1 u_{t-12} L^{12} + \theta_1 \Theta_1 u_{t-13} \quad [4.78]$$

Por lo tanto, para propósitos analíticos estaremos ante un MA(13) en el que los únicos coeficientes distintos de cero son el primero, el duodécimo y el décimo tercero.

La varianza del modelo es igual a:

$$\gamma_0 = \sigma_u^2(1-\theta_1^2)(1-\Theta_1^2) \quad [4.78]$$

Prueba:

$$\gamma_0 = E(w_t^2) = E[(\mu_t - \theta_1\mu_{t-1} - \Theta_1u_{t-12} + \theta_1\Theta_1u_{t-13})^2] = \sigma_u^2(1-\theta_1^2 + \Theta_1^2 + \theta_1^2\Theta_1^2) = \sigma_u^2(1-\theta_1^2)(1-\Theta_1^2)$$

La Función de Autocovarianza es igual a:

$$\gamma_j = \begin{cases} -\theta_1(1-\Theta_1^2)\sigma_u^2 & \text{para } j = 1 \\ \theta_1\Theta_1\sigma_u^2 & \text{para } j = 11 \text{ y } 13 \\ -\Theta_1(1-\theta_1^2)\sigma_u^2 & \text{para } j = 12 \\ 0 & \text{para } j = 1, 11, 12 \text{ y } 13 \end{cases} \quad [4.80]$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= E(w_t w_{t-1}) = E[(\mu_t - \theta_1\mu_{t-1} - \Theta_1u_{t-12} + \theta_1\Theta_1u_{t-13})(u_{t-1} - \theta_1u_{t-2} - \Theta_1u_{t-13} + \theta_1\Theta_1u_{t-14})] = \\ &= -\theta_1\sigma_u^2 - \theta_1^2\Theta_1\sigma_u^2 = -\Theta_1(1-\theta_1^2)\sigma_u^2 \end{aligned}$$

$$\gamma_{11} = E(w_t w_{t-11}) = E[(u_t - \theta_1u_{t-1} - \Theta_1u_{t-12} + \theta_1\Theta_1u_{t-13})(u_{t-11} - \theta_1u_{t-12} - \Theta_1u_{t-23} + \theta_1\Theta_1u_{t-24})] = \theta_1\Theta_1\sigma_u^2$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= E(w_t w_{t-12}) = E[(u_t - \theta_1u_{t-1} - \Theta_1u_{t-12} + \theta_1\Theta_1u_{t-13})(u_{t-12} - \theta_1u_{t-13} - \Theta_1u_{t-24} + \theta_1\Theta_1u_{t-25})] = \\ &= -\Theta_1\sigma_u^2 - \theta_1^2\Theta_1\sigma_u^2 = -\Theta_1(1-\theta_1^2)\sigma_u^2 \end{aligned}$$

$$\gamma_{13} = E(w_t w_{t-13}) = E[(u_t - \theta_1u_{t-1} - \Theta_1u_{t-12} + \theta_1\Theta_1u_{t-13})(u_{t-13} - \theta_1u_{t-14} - \Theta_1u_{t-25} + \theta_1\Theta_1u_{t-26})] = \theta_1\Theta_1\sigma_u^2$$

$$\begin{aligned} \gamma_j &= E(w_t w_{t-j}) = E[(u_t - \theta_1u_{t-1} - \Theta_1u_{t-12} + \theta_1\Theta_1u_{t-13})(u_{t-j} - \theta_1u_{t-j-1} - \Theta_1u_{t-j-12} + \theta_1\Theta_1u_{t-j-13})] = \\ &= 0 \quad \text{para } j \neq 1, 11, 12 \text{ y } 13 \end{aligned}$$

La función de autocorrelación, que se obtiene efectuando el cociente entre [4.80] y [4.79], es igual a:

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} & \text{para } j = 1 \\ \frac{\theta_1\Theta_1}{(1+\theta_1^2)(1+\Theta_1^2)} & \text{para } j = 11 \text{ y } 13 \\ \frac{-\Theta_1}{1+\Theta_1^2} & \text{para } j = 12 \\ 0 & \text{para } j = 1, 11, 12 \text{ y } 13 \end{cases} \quad [4.81]$$

Dado que el cálculo de la función de autocorrelación de los procesos estacionales multiplicativos estacionarios puede ser muy complejas, resulta gran utilidad la fórmula general desarrollada por Peña (1979, 1984), a partir de la cual pueden aproximarse los coeficientes de autocorrelación de un proceso estacional multiplicativo estacionario $\text{ARMA}(p, q) \times \text{ARMA}(P, Q)_s$ a partir del conocimiento de las autocorrelaciones de la parte ordinaria y estacional para el proceso. La fórmula en cuestión es:

$$\rho_j = \frac{\rho_j^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{si}^{(e)} (\rho_{si+j}^{(0)} + \rho_{si-j}^{(0)})}{1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{si}^{(e)} \rho_{si}^{(0)}} \quad [4.82]$$

Donde:

ρ_j = Coeficiente de autocorrelaciones de orden j del proceso multiplicativo estacional $\text{ARMA}(p, q) \times \text{ARMA}(P, Q)_s$;

$\rho_{si}^{(0)}$ = Coeficiente de autocorrelaciones de orden j de la parte ordinaria (regular) del proceso; esto es, del $\text{ARMA}(p, q)$;

$\rho_{si}^{(e)}$ = Coeficiente de autocorrelaciones de orden j de la parte estacional pura del proceso; esto es, del $\text{ARMA}(P, Q)_s$;

Caso de que la parte regular sea media móvil de orden menor que s , la expresión [4.82] se simplifica, el denominador es 1, como consecuencias de que:

$$\rho_{si}^{(0)} = 0 \quad \text{para } i \geq 1 \quad [4.83]$$

Pudiéndose escribir:

$$\rho_j = \rho_j^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{si}^{(e)} (\rho_{si+j}^{(0)} + \rho_{si-j}^{(0)}) \quad [4.84]$$

Ahora bien, si se cumple [4.83], también deberá cumplirse que:

$$\rho_{si+j}^{(0)} = 0 \quad \text{para } j \geq 1$$

Lo cual permite escribir en lugar de [4.84]:

$$\rho_j = \rho_j^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{si}^{(e)} * \rho_{si-j}^{(0)} \quad [4.85]$$

La fórmula [4.85] si bien sólo es estrictamente correcta cuando la parte regular es de medias móviles y de orden menor que s , puede considerarse como aproximativa con carácter general siempre que pueda aceptarse que $\rho_s^{(0)} \cong 0$, lo cual será correcta, por ejemplo, con $s = 12$, ya que aunque la parte regular sea AR, parece obvio que siendo el proceso estacionario se cumplirá que: $\rho_{12i}^{(0)} \cong 0 \quad \forall i \geq 1$

Por esta razón, utilizaremos la expresión [4.85] para aproximarnos con carácter general a la función de autocorrelación de un proceso estacional multiplicativo, pudiéndose escribir la configuración de dicha función de autocorrelación como sigue:

a) En los retardos bajos (1,2,...s/2) la única estructura aparente es la de la parte regular ; por ello:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \rho_1^{(0)} \\
\rho_2 &= \rho_2^{(0)} \\
\rho_{s/2} &= \rho_{s/2}^{(0)}
\end{aligned}
\tag{4.86}$$

b) En los retardos estacionales $s, 2s, 3s, \dots$, el único efecto apreciable es el debido a

$$\rho_{si}^{(e)} : \quad \rho_{hs} = \rho_{hs}^{(e)} \quad \text{para } h = 1, 2, \dots
\tag{4.87}$$

c) En los retardos próximos a hs obtendremos simétricamente la reproducción del esquema de la parte regular:

$$\rho_{hs+k} \cong \rho_{hs-k} \cong \rho_{hs}^{(e)} \rho_{-k}^{(0)} = \rho_{hs}^{(e)} \rho_k^{(0)}
\tag{4.88}$$

Prueba:

[4.86]: Para valores pequeños de j , se cumplirá $\rho_{si-j} \cong 0$, con lo cual:

$$\rho_j = \rho_j^{(0)}$$

[4.87]: En los retardos múltiplos del período estacional, podemos escribir:

$$\rho_{hs} = \rho_{hs}^{(0)} + \rho_s^{(e)} \rho_{s-hs}^{(0)} + \rho_{2s}^{(e)} \rho_{2s-hs}^{(0)} + \dots + \rho_{hs}^{(e)} + \rho_{(h+1)s}^{(e)} \rho_s^{(0)} + \dots$$

Y como $\rho_s^{(0)} \cong \rho_{2s}^{(0)} \cong \dots \cong 0$, nos queda:

$$\rho_{hs} = \rho_{hs}^{(e)}$$

[4.88]:

$$\begin{aligned}
\rho_{hs+k} &= \rho_{hs+k}^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{si}^{(e)} \rho_{si-hs-k}^{(0)} \\
\rho_{hs-k} &= \rho_{hs-k}^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{si}^{(e)} \rho_{si-hs+k}^{(0)}
\end{aligned}$$

Si $\rho_j^{(0)} = 0 \quad \forall j \geq s$, se cumple:

$$\begin{aligned}
\rho_{hs+k} &= \rho_s^{(e)} \rho_{s-hs-k}^{(0)} + \rho_{2s}^{(e)} \rho_{2s-hs-k}^{(0)} + \dots + \rho_{hs}^{(e)} \rho_{-k}^{(0)} + \dots \Rightarrow \rho_{hs+k}^{(e)} \cong \rho_{hs}^{(e)} \rho_{-k}^{(e)} = \rho_{hs}^{(e)} \rho_k^{(0)} \\
\rho_{hs-k} &= \rho_s^{(e)} \rho_{s-hs+k}^{(0)} + \rho_{2s}^{(e)} \rho_{2s-hs+k}^{(0)} + \dots + \rho_{hs}^{(e)} \rho_k^{(0)} + \dots \Rightarrow \rho_{hs-k}^{(e)} \cong \rho_{hs}^{(e)} \rho_k^{(0)}
\end{aligned}$$

Para valores pequeños k , de manera que $\rho_k^{(0)} \neq 0$, lo que implica que [4.88] se cumplirá para los retardos próximos a los períodos estacionales hs .

Por último, respecto a la FAP de los modelos estacionales multiplicativos la complejidad es aún mayor. Para órdenes bajos de las MA y AR no estacionales del modelo. Dada la complejidad comentada, y si bien los resultados referidos a la FAP obtenidos en el capítulo anterior y en este mismo debe tenerse en cuenta, nos limitaremos en lo que sigue a analizar únicamente la función de autocorrelación de los modelos estacionales multiplicativos estacionarios, comenzando con aquellos que tienen parte regular media móvil y continuando con aquellos cuya parte regular es autorregresiva.

MODELOS ESTACIONALES MULTIPLICATIVOS CON PARTE REGULAR MEDIA MÓVIL

Teniendo en cuenta las expresiones [4.86], [4.87] y [4.88], puede demostrarse que si el modelo estacional multiplicativo tiene parte regular media móvil de orden $2q < s$, la función de autocorrelación será:

$$\begin{aligned} \rho_j &= \rho_j^{(0)} & \text{para } j \leq q \\ \rho_j &= 0 & \text{para } q < j < s - q \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{s+q+i} &= \rho_s^{(e)} \rho_{q-i}^{(0)} \\ \rho_s &= \rho_s^{(e)} \\ \rho_{s+q-i} &= \rho_s^{(e)} \rho_{q-i}^{(0)} \end{aligned} \right\} \text{para } 0 \leq i < q$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{hs} &= \rho_{hs}^{(e)} \\ \rho_{hs-q+i} &= \rho_{hs+q-i} = \rho_{hs}^{(e)} \rho_{q-i}^{(0)} \end{aligned} \right\} \text{para } 0 \leq i < q, h = 2, 3, \dots, n$$

[4.89]

Consideraremos a continuación los cuatro modelos más simples tomando $s=12$ y $\mu=0$. Así pues, estudiaremos los modelos $MA(1) \times AR(1)_{12}$, $MA(2) \times AR(1)_{12}$, $MA(1) \times MA(1)_{12}$ y $MA(2) \times MA(1)_{12}$.

Modelo $MA(1) \times AR(1)_{12}$.

El modelo se definirá como:

$$(1 - \Phi_1 L^{12})y_t = (1 - \theta_1 L)u_t \quad [4.90]$$

Aplicando [4.89] se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_1^{(0)} & \rho_2 &= \rho_3 = \dots = \rho_{10} = 0 \\ \rho_{11} &= \rho_{13} = \rho_{12}^{(e)} \rho_1^{(0)} & \rho_{12} &= \rho_{12}^{(e)} \\ \rho_{14} &= \rho_{15} = \dots = \rho_{22} = 0 & \rho_{23} &= \rho_{25} = \rho_{24}^{(e)} \rho_1^{(0)} \\ \rho_{24} &= \rho_{24}^{(e)} & \rho_{26} &= \rho_{27} = \dots = \rho_{34} = 0 \\ \rho_{35} &= \rho_{37} = \rho_{36}^{(e)} \rho_1^{(0)} & \rho_{36} &= \rho_{36}^{(e)} \\ & \dots & & \end{aligned} \quad [4.91]$$

Y sustituyendo en [4.91] los resultados de [3.21] y [4.40], esto es:

$$\begin{aligned} \rho_1^{(0)} &= \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} \\ \rho_{12j}^{(e)} &= \Phi_1^j \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Tendremos la siguiente función de autocorrelación del modelo $MA(1) \times AR(1)_{12}$:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}; & \rho_2 &= \rho_3 = \dots = \rho_{10} = 0 \\ \rho_{11} &= \rho_{13} = \frac{-\theta_1 \Phi_1}{1 + \theta_1^2}; & \rho_{12} &= \Phi_1; & \rho_{14} &= \rho_{15} = \dots = \rho_{22} = 0 \\ \rho_{23} &= \rho_{25} = \frac{-\theta_1 \Phi_1^2}{1 + \theta_1^2}; & \rho_{24} &= \Phi_1^2; & \rho_{26} &= \rho_{27} = \dots = \rho_{34} = 0 \\ \rho_{35} &= \rho_{37} = \frac{-\theta_1 \Phi_1^3}{1 + \theta_1^2}; & \rho_{36} &= \Phi_1^3; & \rho_{38} &= \rho_{39} = \dots = \rho_{46} = 0 \\ & \dots & & & & \end{aligned} \quad [4.92]$$

Dado que la parte estacional es AR, para los retardos estaciones (s múltiplos de s) las autocorrelaciones no se anulan, si bien irán decreciendo progresivamente. Obsérvese que en los retardos estacionales el comportamiento de la función de autocorrelación es la propia de un proceso AR estacional puro, en este caso de orden 1; por lo tanto, si Φ_1 es positivo, los valores de los coeficientes de autocorrelación para dichos retardos serán todos positivos, disminuyendo en cuantía progresivamente, mientras que si Φ_1 es negativo, los valores de ρ_{hs} irán alternando el signo.

Por otra parte, dado que la parte ordinaria (regular) del modelo es MA(1), esto se concretará en que el único valor del coeficiente de autocorrelación distinto de cero para retardos pequeños será el 1. El signo de este coeficiente será el inverso del signo de θ_1 . Al ser el modelo multiplicativo se dan interdependencias entre la parte regular y estacional del modelo que, en este caso, se concreta al ser MA(1) en que aparecerá un coeficiente de autocorrelación distinto de cero alrededor del retardo estacional. Así, se cumplirá que $\rho_{hs-1} = \rho_{hs+1}$ siendo ambos distinto de cero y $h = 1, 2, 3, \dots$. El signo de estos coeficientes de autocorrelación estacional será el que resulte del producto de los signos de ρ_1 y ρ_{hs} . Todas estas observaciones se ven confirmadas suponiendo, por ejemplo, que $\Phi_1 = 0.6$ y $\theta_1 = 0.4$, en cuyo caso se obtendrán las autocorrelaciones que aparecerán en el cuadro 4.1 y que se han representado en el correlograma de la figura 4.7.

Tendremos la siguiente Función de Autocorrelación del modelo MA (1) \times AR (1)₁₂:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} = \frac{-0.4}{1 + (0.4)^2} = -0.34 & \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_{10} &= 0 \\ \rho_{11} = \rho_{13} &= \frac{-\theta_1 \Phi_1 - 0.4 * 0.6}{1 + \theta_1^2} = -0.21 & \rho_{12} &= \Phi_1 = 0.6 \\ \rho_{14} = \rho_{15} = \dots = \rho_{22} &= 0 \\ \rho_{23} = \rho_{25} &= \frac{-\theta_1 \Phi_1^2}{1 + \theta_1^2} = \frac{-0.4 * (0.6)^2}{1 + (0.4)^2} = -0.12 \\ \rho_{24} = \Phi_1^2 &= 0.36 & \rho_{26} = \rho_{27} = \dots = \rho_{34} &= 0 \\ \rho_{35} = \rho_{37} &= \frac{-\theta_1 \Phi_1^3}{1 + \theta_1^2} = \frac{-0.4 * (0.6)^3}{1 + (0.4)^2} = -0.07 \\ \rho_{36} = \Phi_1^3 &= 0.22 & \rho_{38} = \rho_{39} = \dots = \rho_{46} &= 0 \\ \dots & \end{aligned}$$

Cuadro 4.1 Autocorrelación del Modelo $(1-0.6L^2)y_t = (1-0.4L)u_t$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ρ_j	-0.34	0	0	0	0	0	0	0	0	0
j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ρ_j	-0.21	0.6	-0.21	0	0	0	0	0	0	0
j	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ρ_j	0	0	-0.12	0.36	-0.12	0	0	0	0	0
j	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
ρ_j	0	0	0	0	-0.07	0.22	-0.07	0	0	0

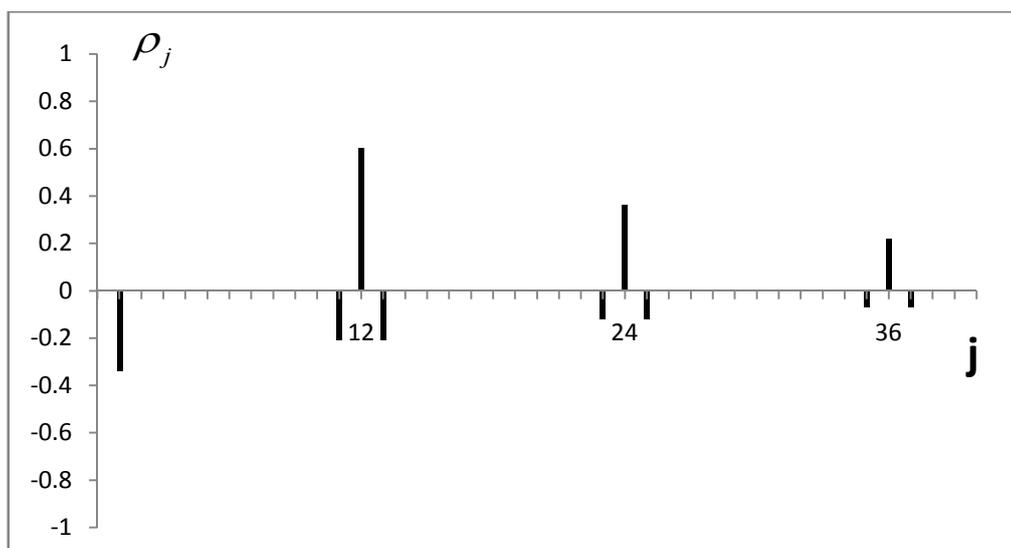


FIG 4.7 Correlograma del modelo $(1-0.6L^2)y_t = (1-0.4L)u_t$

Modelo MA(2) × AR(1)₁₂

El modelo se definirá como:

$$(1 - \Phi_1 L^{12})y_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2)u_t \quad [4.93]$$

Aplicando [4.89], se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_1^{(0)} & \rho_2 &= \rho_2^{(0)} & \rho_3 &= \rho_4 = \dots = \rho_9 = 0 \\ \rho_{10} &= \rho_{14} = \rho_{12}^{(e)} \rho_2^{(0)} & \rho_{11} &= \rho_{13} = \rho_{12}^{(e)} \rho_1^{(0)} & \rho_{12} &= \rho_{12}^{(e)} \\ \rho_{15} &= \rho_{16} = \dots = \rho_{21} = 0 & \rho_{22} &= \rho_{26} = \rho_{24}^{(e)} \rho_2^{(0)} & & \\ \rho_{23} &= \rho_{25} = \rho_{24}^{(e)} \rho_1^{(0)} & \rho_{24} &= \rho_{24}^{(e)} & & \\ \rho_{27} &= \rho_{28} = \dots = \rho_{33} = 0 & \rho_{34} &= \rho_{38} = \rho_{36}^{(e)} \rho_2^{(0)} & & \\ \rho_{35} &= \rho_{37} = \rho_{36}^{(e)} \rho_1^{(0)} & \rho_{36} &= \rho_{36}^{(e)} & & \end{aligned} \quad [4.94]$$

Y sustituyendo en [4.94] los resultados de [3.31] y [4.40], esto es:

$$\rho_1^{(0)} = \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \quad \rho_2^{(0)} = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \quad \rho_{12j}^{(e)} = \Phi_1^j \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Tendremos la siguiente función de autocorrelación del modelo MA (2) × AR (1)₁₂

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \rho_3 = \rho_4 = \dots = \rho_9 = 0 \\ \rho_{10} &= \rho_{14} = \frac{-\Phi_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \rho_{11} = \rho_{13} = \frac{-\Phi_1 (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \rho_{12} = \Phi_1 \\ \rho_{15} &= \rho_{16} = \dots = \rho_{21} = 0; \quad \rho_{22} = \rho_{26} = \frac{-\Phi_1^2 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ \rho_{23} &= \rho_{25} = \frac{\Phi_1^2 (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \rho_{24} = \Phi_1^2; \quad \rho_{27} = \rho_{28} = \dots = \rho_{34} = 0 \\ \rho_{34} &= \rho_{38} = \frac{-\Phi_1^3 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \rho_{36} = \rho_{37} = \frac{-\Phi_1^3 (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \rho_{36} = \Phi_1^3 \\ &\dots \end{aligned} \quad [4.95]$$

En este caso, las consideraciones para la parte estacional serán las mismas que en el caso anterior, ya nuevamente estamos ante un $AR(1)_{12}$.

En cuanto a la parte ordinaria (regular) del modelo, al ser éste $MA(2)$, las autocorrelaciones distintas de cero para retardos pequeños serán 2. En cuanto al signo, el de ρ_1 será el inverso de θ_1 y el de ρ_2 el inverso de θ_2 .

La interdependencia entre la parte regular $MA(2)$, en que aparecerán 2 coeficientes de autocorrelación distintos de cero alrededor del retardo estacional, cumpliéndose que $\rho_{hs-q} = \rho_{hs+q}$ ($q=1,2$).

El signo de estos coeficientes de autocorrelación que acompañan, con forma simétrica, a los correspondientes al retardo estacional, será el que resulte de los productos respectivos de $\rho_1\rho_{hs}$ y $\rho_2\rho_{hs}$; esto es, el signo de $\rho_{hs-1} = \rho_{hs+1}$ será el signo correspondiente al del producto de $\rho_1\rho_{hs}$, mientras que el de $\rho_{hs-2} = \rho_{hs+2}$ será el del producto de $\rho_2\rho_{hs}$.

En el cuadro 4.2 y figura 4.8 puede observarse el cumplimiento de las características reseñadas para diferentes valores de los parámetros del modelo estacional multiplicativo $MA(2) \times AR(1)_{12}$.

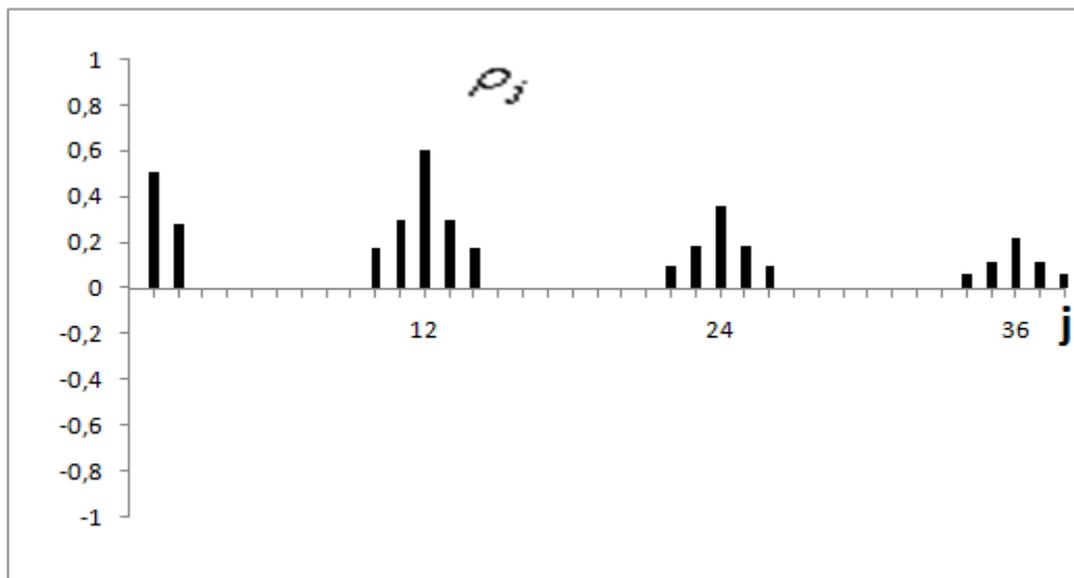


FIG 4.8 Correlograma del modelo $(1-0.6L^{12})y_t = (1+0.5L+0.4L^2)u_t$

Modelo MA(1) \times MA(1)₁₂

El modelo se definirá como:

$$y_t = (1 - \Theta_1 L^{12})(1 - \theta_1 L)u_t \quad [4.96]$$

Aplicando [4.89], se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_1^{(0)} \\ \rho_2 &= \rho_3 = \dots = \rho_{10} = 0 \\ \rho_{11} &= \rho_{13} = \rho_{12}^{(e)} \rho_1^{(0)} \\ \rho_{12} &= \rho_{12}^{(e)} \\ \rho_j &= 0 \quad \text{para } j > 13 \end{aligned} \quad [4.97]$$

Y sustituyendo en [4.97] los resultados [3.21] y [3.13], esto es:

$$\rho_1^{(0)} = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}; \quad \rho_{12}^{(e)} = \frac{-\Theta_2}{1 + \Theta_1^2}$$

Tendremos la siguiente función de autocorrelación del modelo MA (1) \times MA (1)₁₂

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}; & \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_{10} &= 0 & \rho_{11} = \rho_{13} &= \frac{-\theta_1\Theta_1}{(1+\theta_1^2)(1+\Theta_1^2)}; \\ \rho_{12} &= \frac{-\Theta_1}{1+\Theta_1^2} & \rho_j &= 0 & & \text{para } j > 13 \end{aligned} \quad [4.98]$$

Obsérvese que estas misma expresión se obtendrían si desarrolláramos el modelo y calculásemos la función de autocovarianza y la varianza y, posteriormente, la función de autocorrelación (véase las expresiones [4.79], [4.80] y [4.81]).

Como características de la función de autocorrelación y el correlograma para este modelo, reseñaremos las siguientes.

Dado que la parte estacional es MA(1) y de orden 1 esto es, MA(1)₁₂, las autocorrelaciones correspondientes a períodos estacionales sólo serán distintas de cero para el primer retardo estacional (esto es, $\rho_s = \rho_{12}$), anulándose en los posteriores ($\rho_{12j} = 0, \forall j > 1$).

Por otra parte, dado que la parte ordinaria (regular) del modelo MA(1), esto se concreta en que el único valor del coeficiente de autocorrelación distinto de cero para retardos pequeños será el 1, siendo el digno de este coeficiente el inverso del θ_1 .

Las interdependencias entre la parte regular y estacional del modelo sólo afectarán a un período alrededor del retardo estacional distinto de cero, como consecuencia de que la parte regular del modelo MA es de orden 1. Por ello, sólo ρ_{11} y ρ_{13} serán, además de ρ_1 y ρ_{12} , distinto de cero. El signo de estos coeficientes (ρ_{11} y ρ_{13}) es el que resulte del producto de ρ_1 y ρ_{12} .

Todas estas observaciones se ven confirmadas, suponiendo, por ejemplo, que $\Theta_1 = 0.6$ y $\theta_1 = 0.4$ (véase cuadro 4.3 y figura 4.9).

Tendremos la siguiente Función de Autocorrelación del modelo $MA(1) \times MA(1)_{12}$:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} = \frac{-0.4}{1+(0.4)^2} = -0.35 \quad \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_{10} = 0$$

$$\rho_{11} = \rho_{13} = \frac{\theta_1 \Theta_1}{(1+\theta_1^2)(1+\Theta_1^2)} = \frac{0.4 * 0.6}{1+(0.4)^2(1+(0.6)^2)} = 0.15$$

$$\rho_{12} = \frac{-\Theta_1}{1+\Theta_1^2} = \frac{-0.6}{1+(0.6)^2} = -0.44 \quad \rho_j = 0 \quad \text{para } j > 13$$

Cuadro 4.3 Autocorrelación del modelo $y_t = (1 - 0.6L^2)(1 - 0.4L)u_t$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ρ_j	-0.35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.15	-0.44	0.15	0

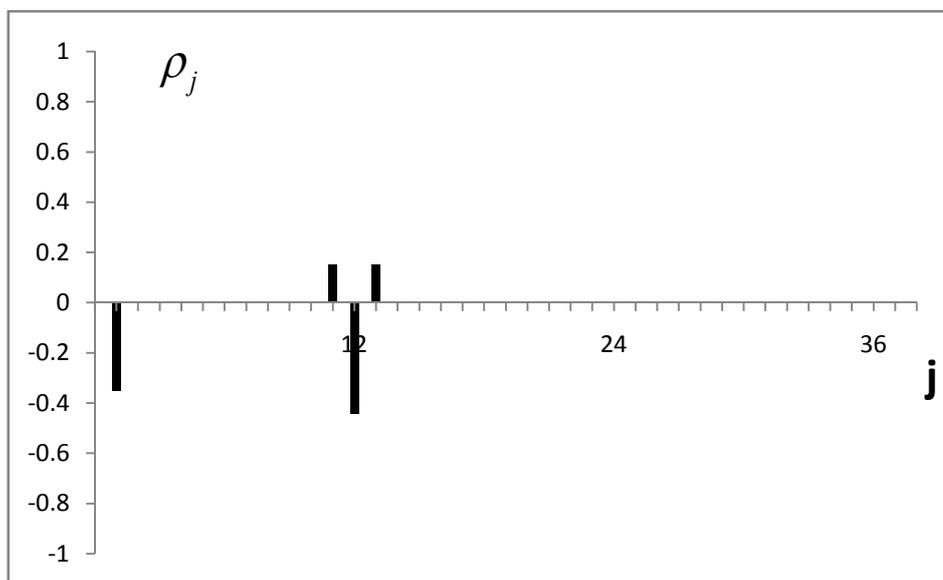


FIG 4.9 Correlograma del modelo $y_t = (1 - 0.6L^2)(1 - 0.4L)u_t$

Modelo MA (2) × MA (1)₁₂

El modelo se definirá como:

$$y_t = (1 - \Theta_1 L^2)(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2)u_t \quad [4.99]$$

Aplicando [4.89], se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_1^{(0)} & \rho_1 &= \rho_2^{(0)} \\ \rho_3 &= \rho_4 = \dots = \rho_9 = 0 & \rho_{10} &= \rho_{14} = \rho_{12}^{(e)} \rho_2^{(0)} \\ \rho_{11} &= \rho_{13} = \rho_{12}^{(e)} \rho_1^{(0)} & \rho_{12} &= \rho_{12}^{(e)} \\ \rho_j &= 0, \text{ para } j > 14 \end{aligned} \quad [4.100]$$

Y sustituyendo en [4.100] los resultados de [3.31] y [4.13] esto es:

$$\rho_1^{(0)} = \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \rho_2^{(0)} = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \rho_{12}^{(e)} = \frac{-\Theta_2}{1 + \Theta_1^2}$$

Tendremos la siguiente Función de Autocorrelación del modelo MA(1) × MA(1)₁₂:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \rho_3 = \rho_4 = \dots = \rho_9 = 0 \\ \rho_{10} &= \rho_{14} = \frac{\Theta_1 \theta_2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)(1 + \Theta_1^2)}; \quad \rho_{12} = \frac{-\Theta_1}{1 + \Theta_1^2}; \\ \rho_{11} &= \rho_{13} = \frac{-\Theta_1(-\theta_1 + \theta_1 \theta_2)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)(1 + \Theta_1^2)}; \quad \rho_j = 0 \quad \text{para } j > 14 \end{aligned}$$

En este caso las condiciones para la parte estacional serán las misma que en el caso anterior, ya que nuevamente estamos ante un MA(1)₁₂.

Por lo que respecta a la parte ordinaria (regular) del modelo, al ser éste MA(2), las autocorrelaciones distintas de cero para retardos pequeño serán 2, siendo el signo de ρ_1 el inverso del de θ_1 y el de ρ_2 el inverso de θ_2 .

Las interdependencias entre la parte regular y estacional del modelo afectarán a dos períodos alrededor del retardo estacional distinto de cero, como consecuencias de

que la parte regular del modelo MA es de orden 2. Por ello, sólo serán distinto de cero, además de ρ_1 , y ρ_2 ρ_{12} , los coeficientes de autocorrelación $\rho_{10}=\rho_{14}$ y $\rho_{11}=\rho_{13}$. El signo de estos coeficientes será el siguiente: $\rho_{10}(=\rho_{14})$ tendrá el signo que resulte del producto de $\rho_2\rho_{12}$, mientras que $\rho_{11}(=\rho_{13})$ tendrá el signo que resulte del producto de $\rho_1\rho_{12}$.

En el cuadro 4.4 y figura 4.10 puede observarse el cumplimiento de las características señaladas para diferentes valores de los parámetros del modelo estacional multiplicativo MA(2) \times MA(1)₁₂.

Tendremos la siguiente Función de Autocorrelación del modelo MA(2) \times MA(1)₁₂:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{0.5 + (-0.5 * -0.4)}{1 + (0.5)^2 + (-0.4)^2} = 0.5$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{0.4}{1 + (-0.5)^2 + (-0.4)^2} = 0.28$$

$$\rho_3 = \rho_4 = \dots = \rho_9 = 0$$

$$\rho_{10} = \rho_{14} = \frac{\Theta_1\theta_2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)(1 + \Theta_1^2)} = \frac{0.6 * -0.4}{(1 + (-0.5)^2 + (-0.4)^2)(1 + (-0.6)^2)} = -0.13$$

$$\rho_{12} = \frac{-\Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{-0.6}{1 + (-0.6)^2} = -0.44$$

$$\rho_{11} = \rho_{13} = \frac{-\Theta_1(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)(1 + \Theta_1^2)} = \frac{-0.6(-0.5 - 0.5 * -0.4)}{(1 + (0.5)^2 + (-0.4)^2)(1 + (-0.6)^2)} = -0.22$$

$$\rho_j = 0 \quad \text{para } j > 14$$

Cuadro 4.4 Autocorrelaciones del modelo $y_t = (1 - 0.6L^{12})(1 + 0.5 + 0.4L^2)u_t$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ρ_j	0.5	0.28	0	0	0	0	0	0	0	-0.13	-0.22	-0.44	-0.22	-0.13

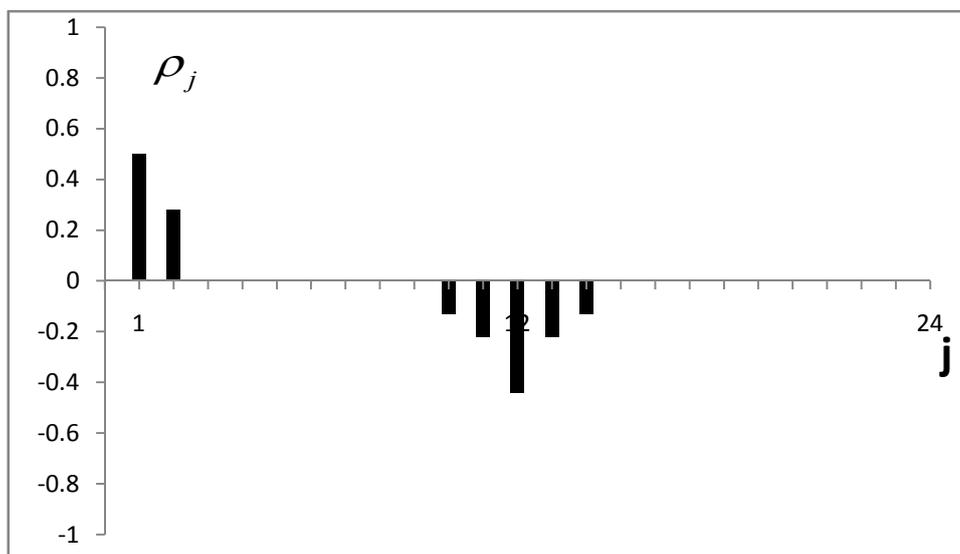


FIG 4.10. Correlograma del modelo $y_t = (1 - 0.6L^{12})(1 + 0.5L - 0.4L^2)u_t$

Como señala Peña (1979), en el caso en que:

$$q < s < 2q$$

La interacción entre la parte regular y estacional puede llegar a distorsionar los primeros retardos. Como ejemplo, suponemos el modelo $MA(2) \times MA(1)_4$, que escribiremos como:

$$y_t = (1 - \Theta_1 L^4)(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2)u_t$$

Obsérvese que en este caso ya no podemos utilizar la expresión [4.89], como consecuencias de que no se cumple que $2q < s$ (ya $q = 2$ y $s = 4$), debiendo utilizar, por tanto la expresión general [4.85]:

$$\rho_j = \rho_j^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{si}^{(e)} * \rho_{si-j}^{(0)}$$

Obteniendo:

$$\rho_1 = \rho_1^{(0)} + \rho_4^{(e)} \rho_3^{(0)} + \rho_8^{(e)} \rho_7^{(0)} + \dots = \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \rho_2^{(0)} + \rho_4^{(e)} \rho_2^{(0)} + \rho_8^{(e)} \rho_6^{(0)} + \dots = \rho_2^{(0)} (1 + \rho_4^{(e)}) = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \left(\frac{1 - \Theta_1 + \Theta_1^2}{1 + \Theta_1^2} \right)$$

$$\rho_3 = \rho_3^{(0)} + \rho_4^{(e)} \rho_1^{(0)} + \rho_8^{(e)} \rho_5^{(0)} + \dots = \rho_4^{(e)} \rho_1^{(0)} = \frac{-\Theta_2}{1 + \Theta_1^2} \left(\frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right)$$

$$\rho_4 = \rho_4^{(0)} + \rho_4^{(e)} * 1 + \rho_8^{(e)} \rho_4^{(0)} + \dots = \rho_4^{(e)} = \frac{-\Theta_2}{1 + \Theta_1^2}$$

$$\rho_5 = \rho_5^{(0)} + \rho_4^{(e)} \rho_{-1}^{(0)} + \rho_8^{(e)} \rho_3^{(0)} + \dots = \rho_4^{(e)} \rho_1^{(0)} = \frac{-\Theta_2}{1 + \Theta_1^2} \left(\frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) = \rho_3$$

$$\rho_6 = \rho_6^{(0)} + \rho_4^{(e)} \rho_{-2}^{(0)} + \rho_8^{(e)} \rho_2^{(0)} + \dots = \rho_4^{(e)} \rho_2^{(0)} = \frac{\Theta_1 \theta_2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)(1 + \Theta_1^2)}$$

$$\rho_j = 0; \text{ para } j > 6$$

El problema en este caso puede darse al identificar el orden 2 del MA ordinario, dado que si el coeficiente de la parte estacional Θ_1 (y, por lo tanto, $\rho_4^{(e)}$) es grande, el valor de ρ_2 puede aparecer como no significativo (además de ser distinto de ρ_6). Así y a modo de ejemplo, supongamos que $\Theta_1 = 0.9$ esto implica que $\rho_4^{(e)} \cong -0.5$ y, por lo tanto:

$$\rho_2 \cong 0.5 \rho_2^{(0)}$$

En este caso, la existencia de un MA de orden 2 tendrá que apreciarse por la interacción manifestada en ρ_6 .

MODELO ESTACIONALES MULTIPLICATIVOS CON PARTES REGULARES AUTORREGRESIVA.

Cuando la parte regular sea autorregresiva, el efecto de la interacción se manifiesta teóricamente en todos los retardos, al ser en todos ellos $\rho_j^{(0)}$ distinto de cero.

Suponiendo como válida la expresión [4.85], la cual solamente es una aproximación cuando la parte regular es AR, veremos los dos casos más simples de modelos

estacionales multiplicativos con parte regular autorregresiva, considerando que $s = 12$, modelo $AR(1) \times AR(1)_{12}$ y el modelo $AR(1) \times MA(1)_{12}$.

Modelo $AR(1) \times AR(1)_{12}$

El modelo se definirá como:

$$(1 - \Phi_1 L^2)(1 - \phi_1 L)y_t = u_t \quad [4.101]$$

En este caso, según [3.52] y [4.40], se cumple:

$$\begin{aligned} \rho_j^{(0)} &= \phi_1^j & \text{para } j \geq 1 \\ \rho_{12j}^{(e)} &= \Phi_1^j & \text{para } j \geq 1 \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta la configuración aproximada de las autocorrelación representada mediante las expresiones [4.86], [4.87] y [4.88], tendremos la siguiente

función de autocorrelación del modelo $AR(1) \times AR(1)_{12}$:

$$\begin{aligned} \rho_1 &\cong \rho_1^{(0)} = \phi_1 & \rho_{19} &\cong \rho_{29} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_5^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^5 \\ \rho_2 &\cong \rho_2^{(0)} = \phi_1^2 & \rho_{20} &\cong \rho_{28} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_4^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^4 \\ \rho_3 &\cong \rho_3^{(0)} = \phi_1^3 & \rho_{21} &\cong \rho_{27} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_3^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^3 \\ \rho_4 &\cong \rho_4^{(0)} = \phi_1^4 & \rho_{22} &\cong \rho_{26} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_2^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^2 \\ \rho_5 &\cong \rho_5^{(0)} = \phi_1^5 & \rho_{23} &\cong \rho_{25} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_1^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1 \\ \rho_6 &\cong \rho_6^{(0)} = \phi_1^6 & \rho_{24} &\cong \rho_{24}^{(e)} = \Phi_1^2 \\ \rho_7 &\cong \rho_{17} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_5^{(0)} = \Phi_1 \phi_1^5 & \rho_{31} &\cong \rho_{41} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_5^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1^5 \\ \rho_8 &\cong \rho_{16} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_4^{(0)} = \Phi_1 \phi_1^4 & \rho_{32} &\cong \rho_{40} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_4^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1^4 \\ \rho_9 &\cong \rho_{15} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_3^{(0)} = \Phi_1 \phi_1^3 & \rho_{33} &\cong \rho_{39} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_3^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1^3 \\ \rho_{10} &\cong \rho_{14} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_2^{(0)} = \Phi_1 \phi_1^2 & \rho_{34} &\cong \rho_{38} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_2^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1^2 \\ \rho_{11} &\cong \rho_{13} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_1^{(0)} = \Phi_1 \phi_1 & \rho_{35} &\cong \rho_{37} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_1^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1 \\ \rho_{12} &\cong \rho_{12}^{(e)} = \Phi_1 & \rho_{36} &\cong \rho_{36}^{(e)} = \Phi_1^3 \\ \rho_{18} &\cong \rho_{30} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_6^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^6 & \dots & \end{aligned} \quad [4.102]$$

Las características más relevantes de la función de autocorrelación de este modelo estacional multiplicativo son como consecuencia de que la parte regular es AR, las autocorrelaciones nunca se anulan, si bien cada vez toman valores más pequeños.

Para retardos pequeños, el comportamiento es el propio del proceso de la parte regular, esto es, AR(1), siendo todos los coeficiente positivos, caso de que $\phi_1 > 0$ y alternando el signo (negativo-positivo) si $\phi_1 < 0$.

En cuanto a los retardos estacionales, dado que la parte estacional es AR, las autocorrelaciones para estos retardos tampoco se anulan, siendo el comportamiento de la función de autocorrelación para ellos la propia de un proceso estacional puro (en este caso, de orden 1).

Las interdependencias entre las partes regulares y estacionales, finalmente, se manifiestan claramente en los retardos próximos a los períodos estacionales.

Estas características pueden observarse a partir del cuadro 4.5, que recoge las autocorrelaciones del modelo $AR(1) \times AR(1)_{12}$, con $\Phi_1 = 0.7$ y $\phi_1 = 0.5$, y la figura 4.11 que presenta el correlograma.

Función de Autocorrelación del modelo $AR(1) \times AR(1)_{12}$:

$$\begin{array}{ll}
 \rho_1 \cong \rho_1^{(0)} = \phi_1 = 0.5 & \rho_7 \cong \rho_{17} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_5^{(0)} = \Phi_1 \phi_1^5 = 0.02 \\
 \rho_2 \cong \rho_2^{(0)} = \phi_1^2 = 0.25 & \rho_8 \cong \rho_{16} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_4^{(0)} = \Phi_1 \phi_1^4 = 0.04 \\
 \rho_3 \cong \rho_3^{(0)} = \phi_1^3 = 0.13 & \rho_9 \cong \rho_{15} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_3^{(0)} = \Phi_1 \phi_1^3 = 0.09 \\
 \rho_4 \cong \rho_4^{(0)} = \phi_1^4 = 0.06 & \rho_{10} \cong \rho_{14} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_2^{(0)} = \Phi_1 \phi_1^2 = 0.18 \\
 \rho_5 \cong \rho_5^{(0)} = \phi_1^5 = 0.03 & \rho_{11} \cong \rho_{13} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_1^{(0)} = \Phi_1 \phi_1 = 0.35
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_6 &\cong \rho_6^{(0)} = \phi_1^6 = 0.02 & \rho_{12} &\cong \rho_{12}^{(e)} = \Phi_1 = 0.7 \\
 \rho_{18} &\cong \rho_{30} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_6^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^6 & \rho_{31} &\cong \rho_{41} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_5^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1^5 = 0.01 \\
 \rho_{19} &\cong \rho_{29} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_5^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^5 = -0.02 & \rho_{32} &\cong \rho_{40} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_4^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1^4 = 0.02 \\
 \rho_{20} &\cong \rho_{28} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_4^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^4 = 0.03 & \rho_{33} &\cong \rho_{39} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_3^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1^3 = -0.04 \\
 \rho_{21} &\cong \rho_{27} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_3^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^3 = -0.06 & \rho_{34} &\cong \rho_{38} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_2^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1^2 = 0.09 \\
 \rho_{22} &\cong \rho_{26} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_2^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^2 = 0.12 & \rho_{35} &\cong \rho_{37} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_1^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1 = -0.17 \\
 \rho_{23} &\cong \rho_{25} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_1^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1 = -0.25 & \rho_{36} &\cong \rho_{36}^{(e)} = \Phi_1^3 = 0.34 \\
 \rho_{24} &\cong \rho_{24}^{(e)} = \Phi_1^2 = 0.49 & & \dots
 \end{aligned}$$

Cuadro 4.5 Autocorrelaciones del modelo $y_t = (1 - 0.7L^2)(1 - 0.5L)y_t = u_t$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ρ_j	0.5	0.25	0.13	0.06	0.03	0.02	0.02	0.04	0.09	0.18	0.35	0.7
j	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
ρ_j	0.35	0.18	0.09	0.04	0.02	0.01	0.02	0.03	0.06	0.12	0.25	0.49
j	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
ρ_j	0.25	0.12	0.06	0.03	0.02	0.01	0.01	0.02	0.04	0.09	0.17	0.34
j	37	38	39	40								
ρ_j	0.17	0.09	0.04	0.02								

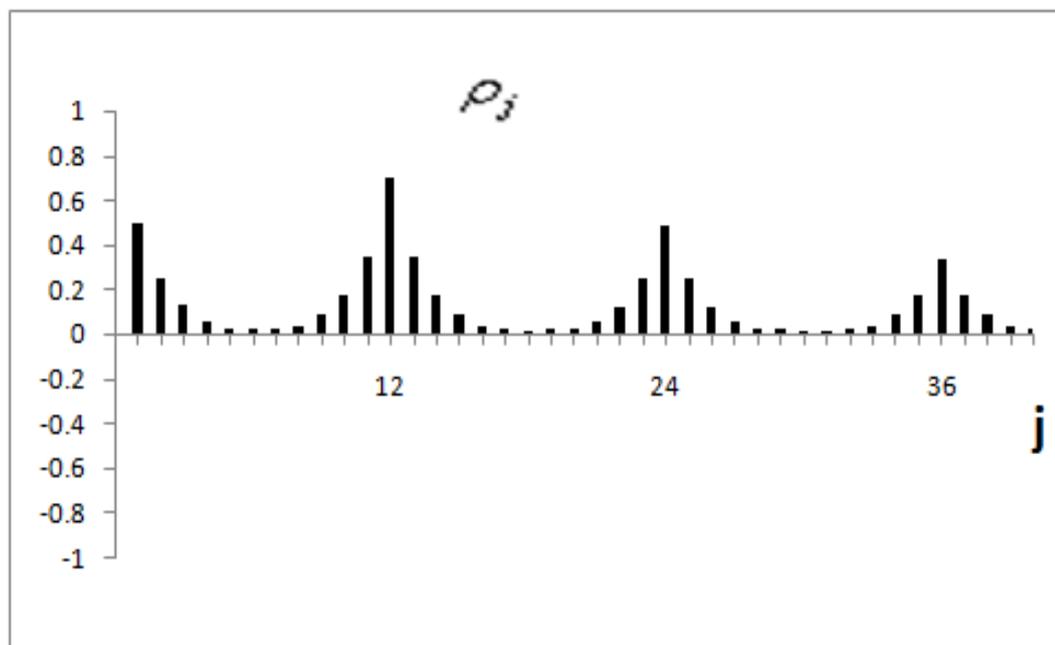


FIG 4.11 Correlograma del modelo $(1 - 0.7L^2)(1 - 0.5L)y_t = u_t$

Modelo AR(1) × MA(1)₁₂

El modelo se definirá como:

$$(1 - \phi_1 L)y_t = (1 - \Theta_1 L^{12})u_t \quad [4.103]$$

En este caso, según [3.52] y [4.13], se cumple:

$$\begin{aligned} \rho_j^{(0)} &= \phi_1^j \quad \text{para } j \geq 1 \\ \rho_{12j}^{(e)} &= \frac{-\Theta_1}{1 + \Theta_1^2} \end{aligned}$$

Y considerando nuevamente la configuración aproximada de las autocorrelación representada mediante las expresiones [4.86], [4.87] y [4.88], tendremos la siguiente

Función de autocorrelación del modelo AR(1) × MA(1)₁₂:

$$\begin{aligned} \rho_9 \cong \rho_{15} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_3^{(0)} &= -\frac{\phi_1^3 \Theta_1}{1 + \Theta_1^2} & \rho_{10} \cong \rho_{14} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_2^{(0)} &= -\frac{\phi_1^2 \Theta_1}{1 + \Theta_1^2} \\ \rho_{11} \cong \rho_{13} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_1^{(0)} &= -\frac{\phi_1^1 \Theta_1}{1 + \Theta_1^2} & \rho_{12} \cong \rho_{12}^{(e)} &= \frac{-\Theta_1}{1 + \Theta_1^2} \end{aligned} \quad [4.105]$$

$\rho_j \cong 0, \quad \forall j > 17, \text{ si bien nunca es estrictamente cero.}$

Para este tipo de proceso estocástico estacionales multiplicativos cabe efectuar similares comentarios a los enunciados para el caso anterior, si bien matizando que como ahora la parte estacional es MA(1), sólo el coeficiente de autocorrelación estacional correspondiente al primer período estacional será claramente distinto de cero.

En el cuadro 4.6 y la figura 4.12 se recogen los valores de las autocorrelaciones, y sus representación gráfica, para el modelo AR(1) × MA(1)₁₂ considerando, respectivamente, que $\Theta_1 = 0.7$, $\phi_1 = 0.5$ además $s = 12$.

Función de Autocorrelación del modelo AR(1) × MA(1)₁₂:

$$\rho_1 \cong \rho_1^{(0)} = \phi_1 = 0,5 \quad \rho_2 \cong \rho_2^{(0)} = \phi_1^2 = 0,25 \quad \rho_3 \cong \rho_3^{(0)} = \phi_1^3 = 0,13$$

$$\rho_4 \cong \rho_4^{(0)} = \phi_1^4 = 0,06 \quad \rho_5 \cong \rho_5^{(0)} = \phi_1^5 = 0,03 \quad \rho_6 \cong \rho_6^{(0)} = \phi_1^6 = 0,02$$

$$\rho_7 \cong \rho_{17} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_5^{(0)} = \frac{\phi_1^5 \Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{(-0,5)^5 * 0,7}{1 + (0,7)^2} = -0,02$$

$$\rho_8 \cong \rho_{16} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_4^{(0)} = \frac{\phi_1^4 \Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{(-0,5)^4 * 0,7}{1 + (0,7)^2} = 0,03$$

$$\rho_9 \cong \rho_{15} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_3^{(0)} = \frac{\phi_1^3 \Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{(-0,5)^3 * 0,7}{1 + (0,7)^2} = -0,06$$

$$\rho_{10} \cong \rho_{14} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_2^{(0)} = \frac{\phi_1^2 \Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{(-0,5)^2 * 0,7}{1 + (0,7)^2} = 0,12$$

$$\rho_{11} \cong \rho_{13} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_1^{(0)} = \frac{\phi_1^1 \Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{(-0,5)^1 * 0,7}{1 + (0,7)^2} = -0,24$$

$$\rho_{12} \cong \rho_{12}^{(e)} = \frac{-\Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{-0,7}{1 + (0,7)^2} = -0,47$$

$\rho_j \cong 0, \quad \forall j > 17, \text{ si bien nunca es estrictamente cero.}$

Cuadro 4.7 Autocorrelaciones del modelo $(1 - 0,5L)y_t = (1 - 0,7L^2)u_t$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ρ_j	0,5	0,28	0,13	0,06	0,03	0,02	-0,02	-0,03	-0,06	-0,12	-0,24	-0,47
j	13	14	15	16	17							
ρ_j	-0,24	-0,12	-0,06	-0,03	-0,02							

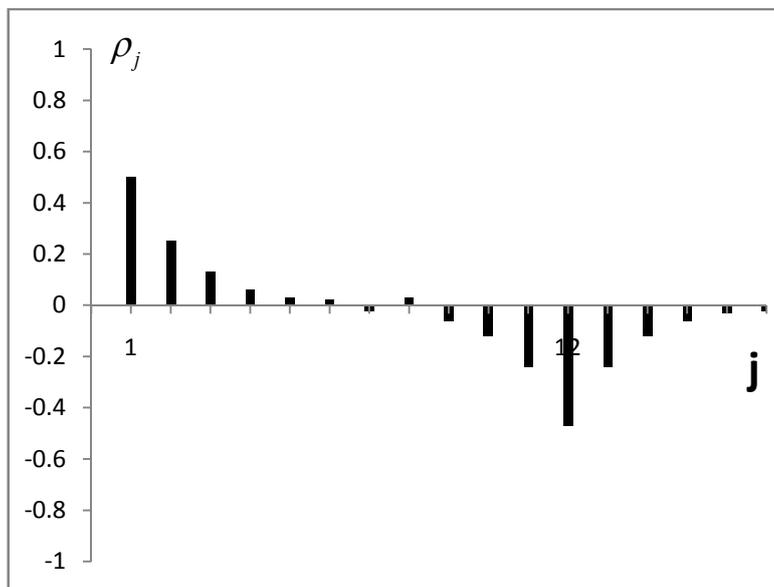


FIG 4.13 Correlograma del modelo $(1-0.5L)y_t = (1-0.7L^2)u_t$

Para finalizar este capítulo, cabe señalar que si bien nos hemos centrados, en los apartados 2.9.5.2 y 2.9.5.3, en el análisis de las características de las funciones de autocorrelación (correlograma) de los modelos estacionales multiplicativos con parte regular media móvil y autorregresiva, la generalización al caso en que la parte regular (y estacional) sea mixta autocorregresiva-media móvil (ARMA) resulta inmediata a partir de los comentarios efectuados.

UNIDAD V: ESQUEMA GENERAL E IDENTIFICACIÓN.

TITULO DEL TEMA:

Esquema General de la Metodología Box Jenkins

OBJETIVO:

- ✓ Introducir a los estudiantes los aspectos relacionados con el Esquema General de la Metodología Box Jenkins.

CONTENIDO:

2.10.1 Esquema General de la Metodologia Box Jenkins.

2.10.2 Análisis de Estacionariedad.

2.10.3 Identificación “d”

2.10.4 Identificación “λ”

2.10.5 Identificación “D”

DURACIÓN:

9 horas

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

- ✓ AZNAR ANTONIO, Y TRIVEZ FRANCISCO JAVIER. Métodos de Predicción en Economía 1.
- ✓ PÉREZ LÓPEZ, CÉSAR. Econometría de las Series Temporales, Madrid, 2006. PEARSON PRENTICE HALL.

2.10 UNIDAD V. ESQUEMA GENERAL E IDENTIFICACIÓN

2.10.1 ESQUEMA GENERAL DE LA METODOLOGIA BOX JENKINS.

Consideramos que una serie de tiempo es una realización de un proceso estocástico específico $ARIMA(p,d,q) \times ARIMA(P,D,Q)$ bajo estacionalidad o un $ARIMA(p,d,q)$ sin estacionalidad.

El enfoque desarrollado hasta el momento, ha consistido en suponer conocido el proceso estocástico, es decir, que se conocen los parámetros $(\phi_1, \theta_1, \Phi_1, \Theta_1, d, D, \lambda)$ y σ^2 esto implica que se conocen las funciones de Autocorrelación y de Autocorrelación Parcial.

La metodología Box-Jenkins, considera el enfoque contrario. En la práctica disponemos de una determinada serie temporal y a partir de ésta averiguar qué modelo $ARIMA(p,d,q) \times ARIMA(P,D,Q)$ representa adecuadamente el comportamiento de la misma, con el fin de utilizarla para predecir sus valores futuros.

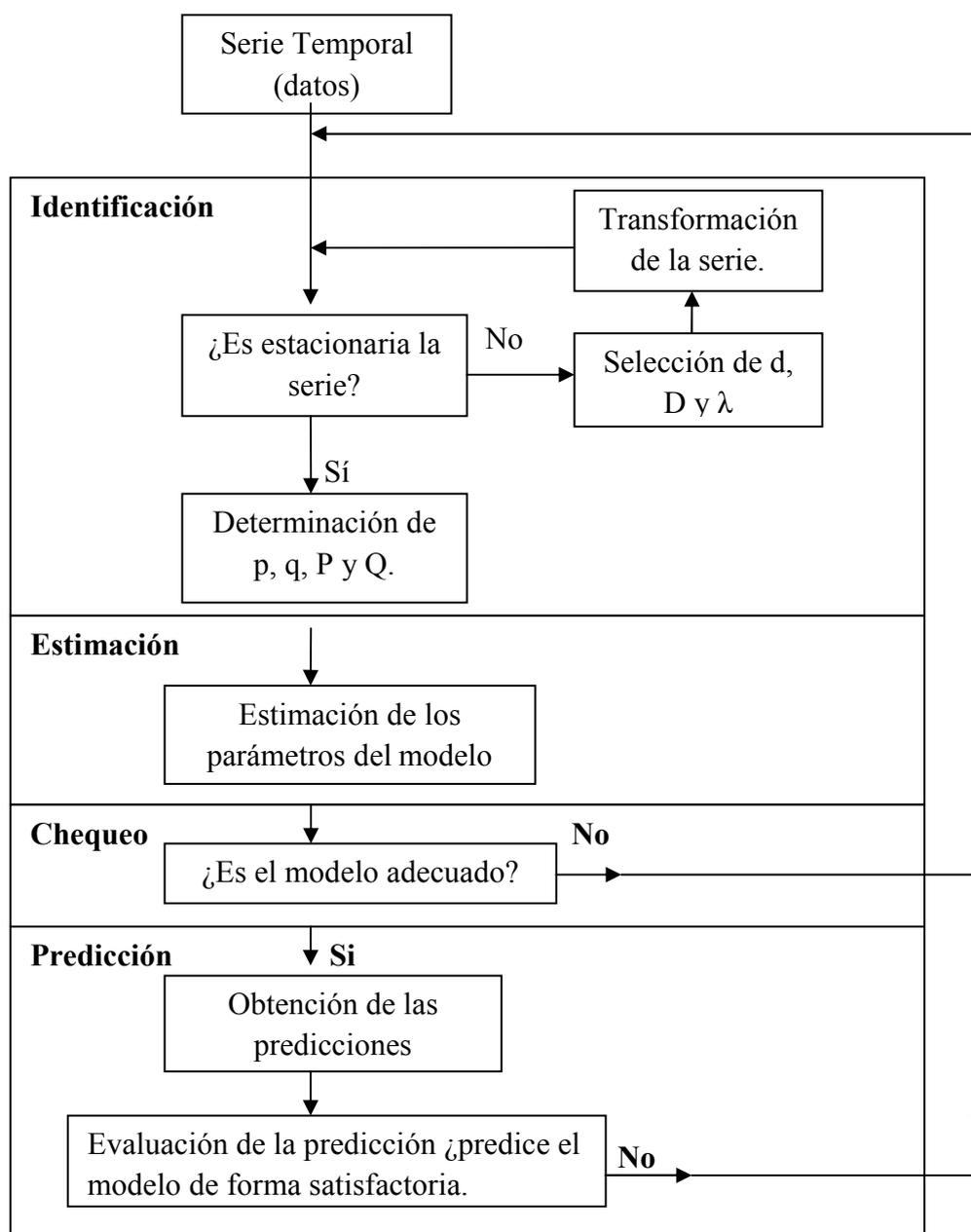
Para esto se consideran las etapas siguientes:

- ✓ Identificación
- ✓ Estimación de parámetros
- ✓ Chequeo de los supuestos del modelo
- ✓ Predicción

Los instrumentos a utilizar para la identificación son FAC y la FAP que pueden ser calculadas a partir de la serie dada y son llamados FACM y FAPM.

Sabemos que la FACM y FAPM están caracterizados para procesos estacionarios bajo el requisito de que la serie sea estacionaria. Luego la primera pregunta a formular cuando se va a analizar una serie es ¿si Es estacionaria o no la serie? Es normal que exista más de un modelo que presumiblemente genere la serie de datos objeto de estudio.

Esquemáticamente podemos notar las etapas mencionadas con anterioridad:



2.10.2. Análisis de Estacionariedad

Al hablar de estacionariedad de una serie temporal nos referimos a dos tipos los cuales son:

- ✓ **Estacionariedad en media:** Una serie será estacionaria en media cuando pueda mantenerse el supuesto de media constante para toda la serie, es decir, cuando ésta fluctúe en torno a una única media.

Si la tendencia presente en el modelo es creciente o decreciente esto implica no estacionariedad en media o que existen varias medias en la serie.

- ✓ **Estacionariedad en varianza:** Una serie es estacionaria en varianza cuando la dispersión de la serie permanezca invariable al transcurso del tiempo, es decir, si la dispersión aumenta o si disminuye, esto representa no estacionariedad en varianza.

Adicionalmente si la serie representa estacionalidad también debe analizarse la estacionariedad en los periodos estacionales y dado que la mayoría de las series no son estacionarias (al menos en media) suelen ser homogéneas.

2.10.2.1. Homogeneidad

Diremos que una serie temporal es homogénea cuando es susceptible a convertirse en estacionaria mediante la aplicación de ciertas transformaciones en la serie original.

- ✓ Diferenciaciones sucesivas en la serie (d)
- ✓ Diferenciaciones estacionales en la serie (D)
- ✓ Aplicación de la transformación Box-Cox (λ)

2.10.3 Identificación de d

Reglas Básicas

- 1.) Si la serie original es estacionaria en media, entonces $d = 0$.
- 2.) Cuando existan segmentos en la serie que difieran en nivel, pero que tengan pendiente constante, basta con diferenciar la serie una única vez, es decir:

$$w_t = (1-L)y_t = y_t - y_{t-1}$$

- 3.) Cuando diferentes segmentos de la serie difieren tanto en nivel como en pendiente debe diferenciarse dos veces la serie, es decir:

$$w_t = (1-L)^2 y_t = (1-L)(y_t - y_{t-1}) = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$$

- 4.) Normalmente no es necesario diferenciar más de dos veces.

Pankratz (1983) dice “Mientras que una diferenciación se requiere con frecuencia, la segunda es necesaria sólo ocasionalmente”.

Instrumentos que permiten identificar d

- ✓ Gráfico de la serie.
- ✓ Correlograma muestral de la serie.

Procedimiento para determinar d .

- 1.) Obtenga, el gráfico y la FACM de la serie e inspecciónelas. Si la serie oscila en torno a un valor promedio continuamente y si la FACM presenta rápida tendencia decreciente, entonces $d = 0$.
- 2.) En el caso de que los requisitos anteriores no se cumpla, haga $d=1$ y repita el paso anterior.

Si el gráfico de la serie y el correlograma presentan las características anteriores, entonces concluimos que la serie transformada es estacionaria.

En caso contrario haga $d = 2$ y así hasta que la serie sea estacionaria.

También se puede utilizar FAPM, en concreto si existe raíz unitaria.

La FAPM suele tener el primer rezago muy cercano a la unidad en presencia de una raíz unitaria en la serie. En estos casos se sugiere:

- ✓ Aplicar contrastes de raíces unitarias: Dickey – Fuller, DFA, etc..
- ✓ Verificar las condiciones de Estacionariedad e Invertibilidad en el proceso de estimación.

¿Qué pasa si el orden de d es superior al necesario? Es decir, si sobrediferenciamos la serie.

Respuesta: El proceso será Estacionario aunque puede dejar de ser invertible, es decir, si al diferenciar una o algunas de las raíces de la parte MA se aproxima a 1, entonces hay sobrediferenciación.

Ejemplo 1: Sea el modelo autoregresivo de orden 1 sin constante conocido como Paseo Aleatorio sin deriva.

$$y_t = y_{t-1} + u_t \quad [5.1]$$

Donde u_t es un ruido blanco.

Diferenciando la serie Y_t se obtiene:

$$w_t = (1-L)y_t = u_t \quad [5.2]$$

Ahora bien, si diferenciamos nuevamente, esto es, fijáramos $d = 2$, tendríamos el proceso:

$$w'_t = (1-L)^2 y_t = (1-L)w_t = (1-L)u_t = u_t - u_{t-1} \quad [5.3]$$

Obsérvese que el proceso [5.3] seguiría siendo estacionario, pero no es invertible.

Además, obsérvese que la varianza del proceso [5.2] es igual a:

$$\text{var}(w_t) = \text{var}(u_t) = \sigma_u^2$$

mientras que la varianza de [5.3] es:

$$\text{var}(w'_t) = \text{var}(u_t - u_{t-1}) = 2\sigma_u^2$$

Así pues, la varianza aumenta como consecuencia de la sobrediferenciación. Esto ha llevado a que algunos autores propongan también como criterio para determinar el valor de d , consiste en diferenciar la serie para distintos ordenes y analizar la varianza de las series diferenciadas, en la serie que se presente un cambio de menor a mayor en la varianza será el menor orden de diferenciación.

2.10.4 Identificación de “ λ ”.

Una serie temporal sin componente estacional puede escribirse de forma genérica como:

$$w_t = (1-L)^d y_t^{(\lambda)}$$

Donde $y_t^{(\lambda)}$ es la transformada Box-Cox, esto es:

$$y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{y_t^{(\lambda)} - 1}{\lambda} & \text{para } \lambda \neq 0 \\ \ln y_t & \text{para } \lambda = 0 \end{cases}$$

para diferentes valores de λ se obtienen diferentes transformaciones en la serie original.

En principio λ puede tomar cualquier valor y algunos autores han propuesto procedimientos para estimar el valor de λ .

Los dos valores de λ más habitualmente considerados son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$. Limitándonos, por tanto, a estos dos únicos valores de λ , asignar $\lambda = 1$ consiste en no modificar la serie temporal original; por el contrario, si se adopta el valor de $\lambda = 0$, la serie temporal se transforma aplicando logaritmos neperianos a la misma. Esta transformación de la serie original en logaritmos neperianos resulta útil cuando la serie no es estacionaria en varianza.

Los dos instrumentos para analizar estacionariedad en varianza son:

- ✓ Gráfico de la serie temporal (Dispersión constante o no en el tiempo)
- ✓ Diagrama rango/media (se divide la serie en varios grupos de observaciones obteniendo para cada grupo la media y la medida de dispersión que usualmente es el rango o recorrido ($V_{\max} - V_{\min}$)).

El diagrama R / \bar{X} consiste en graficar los puntos (R / \bar{X})

- ✓ Si la gráfica presenta pendiente > 0 , Transforme.
- ✓ Si la gráfica No presenta pendiente, No transforme.

A medida que X aumenta, la dispersión aumenta, no estacionariedad en varianza.

En la práctica es necesario identificar primero el valor de λ y luego el valor de d .

2.10.5 Identificación de D

La expresión genérica de una serie temporal con componente estacional, es:

$$w_t = (1 - L^s)^D (1 - L)^d y_t^{(\lambda)}$$

Además de identificar el valor de λ y de d , debemos especificar el valor adecuado de D , esto es, el número de diferenciaciones estacionales que deben efectuarse en la serie temporal para que esta sea totalmente estacionaria.

En la práctica los valores habituales de D son: 0 indicando no diferenciación estacional o 1 indicando diferenciación estacional.

La existencia de un componente estacional en la serie puede deducirse además del contraste de Kruskal –Wallis por:

- a.) El gráfico de la serie (la serie presenta valores superiores o inferiores al valor medio anual, los cuales se repiten frecuentemente para determinar periodos al año).
- b.) Correlograma muestral de dicha serie (FACM presenta valores elevados en los retardos correspondientes a los periodos estacionales).

UNIDAD VI: ESTIMACIÓN CHEQUEO Y PREDICCIÓN

TITULO DEL TEMA:

Estimación.

OBJETIVO:

- ✓ Introducir a los estudiantes los aspectos relacionados con la Estimación, Chequeo y Predicción en la metodología de Box Jenkins.

CONTENIDO:

2.11.1 Estimación.

2.11.2 Chequeo.

2.11.3 Predicción

2.11.4 Modelo Óptimo.

DURACIÓN:

9 horas

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

- ✓ AZNAR ANTONIO, Y TRIVEZ FRANCISCO JAVIER. Métodos de Predicción en Economía 2.
- ✓ PÉREZ LÓPEZ, CÉSAR. Econometría de las Series Temporales, Madrid, 2006. PEARSON PRENTICE HALL.

2.11 UNIDAD VI. ESTIMACIÓN CHEQUEO Y PREDICCIÓN.

2.11.1. Estimación

Planteamiento general

Se analizará a continuación el proceso de estimación de los modelos ARMA(p,q) x ARMA(P,Q), centrandos los desarrollos en el caso específico de un modelo sin componente estacional, es decir, un ARMA(p,q) ó ARIMA (p,d,q):

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) \omega_t = \delta + (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) u_t \quad [6.1]$$

donde se entiende por W_t la serie ya en diferencias y donde, como siempre, u_t se supone un ruido blanco con media cero y varianza constante (σ_u^2).

Definida esta función genérica, el objetivo principal es estimar el vector formado por los parámetros $\beta = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \delta, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ y σ_u^2 correspondientes a la parte autorregresiva ϕ_j y de medias móviles θ_j (incluido, si fuera necesario, el término independiente) así como la varianza residual.

Problemas Iniciales: Los Valores Iniciales y la No Linealidad.

La naturaleza del modelo implica que la variable a explicar se hace depender de valores pasados de la misma y errores cometidos en la estimación de dichos valores pasados. De esta forma el planteamiento de minimización de los errores como procedimiento de estimación lleva necesariamente aparejada la necesidad de conocer valores pasados de la variable endógena y de los errores ya que la expresión del error, por ejemplo para un período "t" sería:

$$\mu_t = \omega_t - \phi_1 \omega_{t-1} - \phi_2 \omega_{t-2} - \dots - \phi_p \omega_{t-p} - \delta - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \dots - \theta_q u_{t-q} \quad [6.2]$$

Al conjunto de valores iniciales requeridos de la variable endógena desde "t-1" a "t-p" y de los errores desde "t-1" a "t-q" los notaremos por los vectores:

$$w^{0'} = (\omega_0, \omega_{t-1}, \dots, \omega_{t-p}) \quad u^{0'} = (u_0, u_{t-1}, \dots, u_{t-q})$$

Procedimiento de estimación que lleva implícita la especificación a priori de unos valores iniciales se denomina "enfoque condicional", mientras que aquel en el que se estiman simultáneamente los valores iniciales y los parámetros se denomina "enfoque exacto ó enfoque no condicional".

Además de este primer problema, se señala el de la no linealidad del modelo cuando este incluye medias móviles, lo que puede comprobarse fácilmente a partir de una transformación de la especificación de un modelo sencillo [por ejemplo MA(1)]:

$$\begin{aligned} Y_t &= u_t - \theta_1 u_{t-1} \rightarrow u_t = Y_t + \theta_1 u_{t-1} \\ &\quad \downarrow \\ \text{para } t=1 &\quad u_1 = Y_1 + \theta_1 u_0 \\ \text{para } t=2 &\quad u_2 = Y_2 + \theta_1 u_1 = Y_2 + \theta_1(Y_1 + \theta_1 u_0) = Y_2 + \theta_1 Y_1 + \theta_1^2 u_0 \end{aligned}$$

Partiendo de esta expresión, se observa como al minimizar: $\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2$ en el proceso de estimación, esta expresión no será lineal. Por ello, una primera conclusión es que sea cual sea el método de estimación utilizado (Mínimos cuadrados o Máxima verosimilitud) deberán aplicarse algoritmos de resolución no lineales.

Supuestos Respecto a la Distribución de u_t

- i.) $u_t \sim N^*(0, \sigma_u^2)$
- ii.) ω_t es un proceso estacionario
- iii.) ω_t es un proceso invertible

Además, el número de observaciones de la serie ω_t es $T=N-d$, y en el caso de un modelo estacional multiplicativo el número de observaciones de ω_t será $T=N-d-sD$, es decir, T es el número de observaciones disponibles para la estimación.

$$w_t = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T)$$

2.11.2 CHEQUEO

Estimados los parámetros de los modelos identificados, la etapa siguiente (chequeo) pretende responder a la pregunta ¿Son dichos modelos adecuados?

De manera que aquellos que superen la etapa de chequeo serán los utilizados para obtener predicciones (fin primordial del análisis).

La estrategia a seguir es:

- Efectuar el chequeo de los modelos estimados, desechando aquellos que no cumplan los requisitos mínimos.
- Simultáneamente en esta etapa, los contrastes pertinentes pueden indicarnos direcciones concretas a seguir respecto a cómo modificar ciertas especificaciones de los modelos desechados.
- Todos los modelos que superen esta etapa serán utilizadas posteriormente para realizar predicciones.

En resumen, se tienen dos fases del análisis de validación del modelo.

- La que se realiza previamente a la utilización del modelo.
- La que analizara la adecuación de los modelos al objeto de análisis.

Requisitos que debe satisfacer un modelo para afirmar que es adecuado

- i.) Estimaciones significativas además que cumpla con las condiciones de *Estacionariedad e invertibilidad*.
- ii.) Residuos estimados se comporten como un ruido blanco
- iii.) Modelo no omita parámetros relevantes (modelo bien especificado)
- iv.) Que el modelo sea estable.

2.11.3 PREDICCIÓN

Una vez Identificados, Estimados y Chequeados los modelos estocásticos se trata de predecir. El objetivo consiste en predecir valores futuros de Y sujetos al menor error posible. Es decir, si se tiene información hasta el periodo T, supondremos que se desea obtener predicciones de Y_{T+l} , valor de Y en el periodo $T+l$.

Al conjunto de información disponible hasta T lo denotaremos por

$$I_T = (Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, \dots)$$

$\hat{Y}_T(l)$ Será el predictor óptimo para el periodo $T+l$ utilizando I_T , luego el predictor óptimo será aquel que minimice el error cuadrático medio de predicción que se define como:

$$E \left[\left(Y_{T+l} - \hat{Y}_T(l) \right)^2 \middle| I_T \right] \quad [6.3]$$

es decir, se busca que (6.3) sea mínimo.

La cantidad $(Y_{T+l} - \hat{Y}_T(l))$ se conoce como error de predicción, $e_t(l) = (Y_{T+l} - \hat{Y}_T(l))$

donde $\hat{Y}_T(l) = E(Y_{T+l} | I_T)$.

Cálculo de la Predicción Puntual

Partiendo de un modelo ARIMA sobre el que se han realizado una serie de diferenciaciones para lograr una serie estacionaria, el planteamiento de la predicción se hace sobre los valores reales de la serie, por entender que es de éstos de los que se quiere obtener valores a futuro.

$$\phi_p(L)\omega_t = \delta + \theta(L)u_t \quad [6.4]$$

con $\omega_t = (1-L)^d Y_t$ es decir,

$$\phi_p(L)(1-L)^d Y_t = \delta + \theta(L)u_t \quad [6.5]$$

Puede ser escrito como:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)(1-L)^d Y_t = \delta + \theta(L)u_t \quad [6.6]$$

Y multiplicando término por término de (6.6) se obtiene

$$(1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_{p+d} L^{p+d})Y_t = \delta + \theta(L)u_t \quad [6.7]$$

$$\varphi_{p+d}(L^{p+d})Y_t = \delta + \theta(L)u_t \quad [6.8]$$

Es decir, Y_t puede ser escrito como:

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_{p+d} Y_{t-p-d} + \delta + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q} \quad [6.9]$$

Este modelo también puede escribirse como uno de medias móviles de orden infinito

$$Y_t = \varphi^{-1}(L)\delta + \varphi^{-1}(L)\theta(L)u_t \quad [6.10]$$

$$= \mu + u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_1 u_{t-2} + \dots \quad [6.11]$$

Luego, para calcular $\hat{Y}_T(l)$ a partir de (6.11) se debe cumplir que:

- Los parámetros son conocidos
- Las perturbaciones se conocen para todos los periodos muestrales, pero para los extramuestrales tiene carácter de ruido blanco, es decir,

$$E(u_{T+j} | I_T) = \begin{cases} u_{T+j} & \text{si } j \leq 0 \\ 0 & \text{si } j > 0 \end{cases} \quad [6.12]$$

Además si

$$E(Y_{T+j} | I_T) = \begin{cases} \hat{Y}_T(j) & \text{si } j > 0 \\ Y_{T+j} & \text{si } j < 0 \end{cases} \quad [6.13]$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= E(Y_{T+l} | I_T) \\ &= E(\varphi_1 Y_{T+l-1} + \varphi_2 Y_{T+l-2} + \dots + \varphi_{l-1} Y_{T+1} + \varphi_l Y_T + \varphi_{l+1} Y_{T-1} + \dots + \varphi_{p+d} Y_{T+l-p-d} + \\ &\quad + \delta + u_{T+l} - \theta_1 u_{T+l-1} - \dots - \theta_{l-1} u_{T+1} - \theta_l u_T - \theta_{l+1} u_{T-1} - \dots - \theta_q u_{T-q}) \\ &= \varphi_1 \hat{Y}_T(l-1) + \varphi_2 \hat{Y}_T(l-2) + \dots + \varphi_{l-1} \hat{Y}_T(1) + \varphi_l Y_T + \varphi_{l+1} Y_{T-1} + \dots + \\ &\quad \varphi_{p+d} Y_{T+l-p-d} + \delta - \theta_1 u_T - \theta_{l-1} u_{T-1} - \dots - \theta_q u_{T+l-q} \end{aligned}$$

Luego para obtener $\hat{Y}_T(l)$ es necesario conocer antes

- $\hat{Y}_T(1), \hat{Y}_T(2), \dots, \hat{Y}_T(l-1)$
- Reemplazar los términos $u_T, u_{T-1}, \dots, u_{T-l-q}$ por algún valor concreto.

donde

$$\begin{aligned} \hat{Y}_T(1) &= E(\hat{Y}_{T+1} | I_T) \\ &= E(\varphi_1 Y_T + \varphi_2 Y_{T-1} + \dots + \varphi_{p+d} Y_{T+1-p-d} + \delta + u_{T+1} - \theta_1 u_{T+2} - \dots - \theta_q u_{T+1-q} | I_T) \\ &= \varphi_1 Y_T + \varphi_2 Y_{T-1} + \dots + \varphi_{p+d} Y_{T+1-p-d} + \delta - \theta_1 u_T - \dots - \theta_q u_{T+1-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_T(2) &= E(\hat{Y}_{T+2} | I_T) \\ &= E(\varphi_1 Y_{T+1} + \varphi_2 Y_T + \dots + \varphi_3 Y_{T-1} + \dots + \varphi_{p+q} Y_{T+2-p-d} + \delta + u_{T+1} - \theta_1 u_{T+2} - \dots - \theta_q u_{T+1-q} | I_T) \\ &= \varphi_1 Y_T(1) + \varphi_2 Y_T + \varphi_3 Y_{T-1} + \dots + \varphi_{p+d} Y_{T+1-p-d} + \delta - \theta_2 u_T - \theta_3 u_{T-1} - \dots - \theta_q u_{T+2-q} \end{aligned}$$

y donde $u_{T+j} = Y_{T+j} - \hat{Y}_{T+j-1}(1)$ para $j \leq 0$ [6.14]

Por lo tanto si

$$\begin{aligned} J = 0 &\rightarrow u_T = Y_T - \hat{Y}_{T-1}(1) \\ J = -1 &\rightarrow u_{T-1} = Y_{T-1} - \hat{Y}_{T-2}(1) \\ &\dots \\ J = l-q &\rightarrow u_{T+l-q} = Y_{T+l-q} - \hat{Y}_{T+l-q}(1) \end{aligned}$$

Una propiedad de las predicciones puntuales es que estas son adaptativas, es decir, la predicción de Y_{T+l} en I_T es igual a la predicción de Y_{T+l} en I_{T-1} más un término de correlación $\psi_l \mu_T$, es decir,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_T(l) &= \hat{Y}_{T-1}(l-1) + \psi_l u_T \\ Y_{T+1} &= Y_{T+l} | I_{T-1} + \psi_l u_T \end{aligned}$$

Algunos ejemplos de los modelos más comunes para obtener predicciones puntuales son:

Ejemplo 1: **Modelo IMA (1,2)**

$$\omega_t = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2}$$

con $\omega_t = (1-L)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ de donde $Y_t = Y_{t-1} + \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2}$

Luego

$$\begin{aligned} \hat{Y}_T(1) &= E(Y_{T+1} | I_T) \\ &= E(Y_T + \mu - \theta_1 u_T - \theta_2 u_{T-1} | I_T) \\ &= Y_T - \theta_1 E(u_T | I_T) - \theta_2 E(u_{T-1} | I_T) + \mu \\ &= Y_T - \theta_1 (Y_T - \hat{Y}_{T-1}(1)) - \theta_2 (Y_{T-2} - \hat{Y}_{T-2}(1)) + \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_T(2) &= E(Y_{T+2} | I_T) \\ &= E(Y_{T+1} + \mu - \theta_1 u_{T+1} - \theta_2 u_T | I_T) \\ &= Y_T(1) - \theta_1 E(u_{T+1} | I_T) - \theta_2 E(u_T | I_T) + \mu \\ &= Y_T(1) - \mu \theta_2 (Y_T - \hat{Y}_{T-1}(1)) + \mu \end{aligned}$$

Ejemplo 2: **Modelo ARI(2,1)**

$$\omega_t = \phi_1 \omega_{t-1} - \phi_2 \omega_{t-2} + \delta + u_t$$

con $\omega_t = (1-L)Y_t$ de donde

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) \omega_t = \delta + u_t$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)(1-L)Y_t = \delta + u_t$$

$$(1 - L - \phi_1 L - \phi_1 L^2 - \phi_2 L^3)Y_t = \delta + u_t$$

$$(1 - (1 - \phi_1)L - (\phi_2 - \phi_1)L^2 - (-\phi_3)L^3)Y_t = \delta + u_t$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \phi_3 L^3)Y_t = \delta + u_t$$

Luego
$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + \delta + u_t$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_T(1) &= E(Y_{T+1} | I_T) \\ &= E(\phi_1 Y_t + \phi_2 Y_{T-1} + \phi_3 Y_{T-2} + \delta + u_{T+1} | I_T) \\ &= \phi_1 Y_t + \phi_2 Y_{T-1} + \phi_3 Y_{T-2} + \delta \\ &= (1 + \phi_1)Y_T + (\phi_2 - \phi_1)Y_{T-1} + (-\phi_2)Y_{T-2} + \delta \\ &= Y_T + (Y_T - Y_{T-1})\phi_1 + (Y_{T-1} - Y_{T-2})\phi_2 + \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_T(2) &= E(Y_{T+2} | I_T) \\ &= E(\phi_1 Y_{t+1} + \phi_2 Y_T + \phi_3 Y_{T-1} + \delta + u_{T+2} | I_T) \\ &= \phi_1 \hat{Y}_T(1) + \phi_2 Y_T + \phi_3 Y_{T-1} + \delta \\ &= (1 + \phi_1)\hat{Y}_T(1) + (\phi_2 - \phi_1)Y_T + (-\phi_2)Y_{T-1} + \delta \\ &= \hat{Y}_T(1) + \phi_1(Y_T(1) - Y_T)\phi_2 + (Y_T - Y_{T-1}) + \delta \end{aligned}$$

Ejemplo 3: **Modelo ARIMA(1,1,1)**

$$\omega_t = \phi_1 \omega_{t-1} + \delta + u_t - \theta_1 u_{t-1}$$

con $\omega_t = (1-L)Y_t$, de donde

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 L)\omega_t &= \delta + u_t - \theta_1 u_{t-1} \\ (1 - \phi_1 L)(1-L)Y_t &= \delta + u_t - \theta_1 u_{t-1} \\ (1 - \phi_1 L - L + \phi_1 L^2)Y_t &= \delta + u_t - \theta_1 u_{t-1} \end{aligned}$$

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \delta + u_t - \theta_1 u_{t-1}$$

con $\varphi_1 = (1 + \phi_1)$ y $\varphi_2 = -\phi_1$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_T(1) &= E(Y_{T+1} | I_T) \\ &= E(\varphi_1 Y_T + \varphi_2 Y_{T-1} + \delta + u_{T+1} - \theta_1 u_T | I_T) \\ &= \varphi_1 Y_T + \varphi_2 Y_{T-1} + \delta - \theta_1 E(u_T | I_T) \\ &= (1 + \phi_1)Y_T + (-\phi_1)Y_{T-1} + \delta - \theta_1(Y_T - \hat{Y}_{T-1}(1)) \\ &= Y_T - (Y_T - Y_{T-1}\phi_1 - \theta_1 Y_T + \theta_1 \hat{Y}_{T-1}(1)) + \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_T(2) &= E(Y_{T+2} | I_T) \\ &= E(\varphi_1 Y_{T+1} + \varphi_2 Y_T + \delta + u_{T+2} - \theta_1 u_{T+1} | I_T) \\ &= \varphi_1 \hat{Y}_T(1) + \varphi_2 Y_T + \delta \end{aligned}$$

Pérfil de Las Predicciones en Los Modelos ARIMA, Modelos Autorregresivos

Partamos de un modelo AR(1)

$$Y_T = \phi_1 Y_{T-1} + \delta + u_T \quad [6.15]$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_T(l) &= E(Y_{T+l} | I_T) \\ &= E(\phi_1 Y_{T+l-1} + \delta + u_{T+l}) \\ &= \phi_1 \hat{Y}_T(l-1) + \delta \end{aligned} \quad [6.16]$$

Dado que $|\phi| < 1$, por la condición de estacionariedad, se tiene que, las predicciones presentan un decaimiento geométrico al paso del tiempo y este tendrá media igual a:

$$\mu = \frac{\delta}{1 - \phi} \quad [6.17]$$

Para demostrar [6.17] se tiene que, por la condición de invertibilidad del modelo AR(1).

$$Y_t = \mu + u_t + \phi_1 u_{t-1} + \phi_1^2 u_{t-2} + \phi_1^3 u_{t-3} + \dots \quad [6.18]$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_T(l) &= E(Y_{T+l} | I_T) \\ &= E(\mu + u_{T+l} + \phi_1 u_{T+l-1} + \dots + \phi_1^l u_T + \phi_1^{l+1} u_{T-1} + \phi_1^{l+2} u_{T-2} | I_T) \\ &= \mu + \phi_1^l (u_T + \phi_1 u_{T-1} + \phi_1^2 u_{T-2} + \phi_1^3 u_{T-3} + \dots) \\ &= \mu + \phi_1^l (Y_T - \mu) \end{aligned} \quad [6.19]$$

A medida que aumenta el valor de l más nos acercamos a la media μ , es decir,

$$\text{si } l \rightarrow \infty \Rightarrow \phi_1^l (Y_T - \mu) \rightarrow 0 \text{ y } \hat{Y}_T(l) \rightarrow \mu$$

Este resultado puede generalizarse para modelos AR de cualquier orden.

Modelos de Medias Móviles

Supongamos un modelo MA(1)

$$Y_t = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} \quad [6.20]$$

$$\text{Luego } \hat{Y}_T(l) = E(Y_{T+l} | I_T) = \begin{cases} \mu - \theta_1 [Y_T - \hat{Y}_{T-1}(l)] & \text{para } l=1 \\ \mu & \text{para } l>1 \end{cases} \quad [6.21]$$

El perfil de la predicción en los modelo MA es conforme a la memoria limitada de estos procesos que coincide con el orden de los mismos. Para el modelo MA(1) la

predicción puntual a partir del periodo 1 es igual a μ . En general la predicción puntual obtenida a partir de un modelo MA(q) es igual a μ para los periodos $l > q$.

Modelos Mixtos

Sea el modelo ARMA(1,1)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \delta + u_t - \theta_1 u_{t-1} \quad [6.22]$$

$$\hat{Y}_T(l) = \begin{cases} \phi_1 Y_T - \theta_1 [Y_T - \hat{Y}_{T-1}(l)] + \delta & \text{para } l=1 \\ \phi_1 \hat{Y}_T(l-1) + \delta & \text{para } l>1 \end{cases} \quad [6.23]$$

Una vez superado el orden de la parte MA la predicción puntual es idéntica a la obtenida mediante el modelo AR(1), luego el perfil del modelo ARMA(1,1) a partir de 6.1 es idéntico al de modelo AR(1).

En general en un modelo ARMA(p,q), la predicción a partir de q periodos futuros coincide con el perfil de la predicción de un proceso AR(p).

Perfil en los Modelos no Estacionarios Homogéneos

En este caso la característica del perfil de predicción es siempre diferente, algunos ejemplos son los siguientes:

Ejemplo 4: **Modelo ARI(1,1)**

$$\omega_t = \phi_1 \omega_{t-1} + \delta + u_t \quad [6.24]$$

con $\omega_t = (1-L)Y_t$ $(1-\phi_1)\omega_t + \delta + u_t$

$$\omega_t = \frac{\delta}{(1-\phi_1)} + \frac{u_t}{(1-\phi_1 L)} = \mu + u_t + \phi_1 u_{t-1} + \phi_1^2 u_{t-2} + \dots \quad [6.25]$$

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t + \phi_1 u_{t-1} + \phi_1^2 u_{t-2} + \dots$$

Luego

$$\begin{aligned}
 \hat{Y}_T(1) &= E(Y_{T+1} | I_T) \\
 &= E(Y_T + \mu + u_{T+1} + \phi_1 u_T + \phi_1^2 u_{T-1} + \dots | I_T) \\
 &= Y_T + \mu + \phi_1 u_T + \phi_1^2 u_{T-1} + \phi_1^3 u_{T-2} + \dots \\
 &= Y_T \mu + \phi_1 (u_T + \phi_1 u_{T-1} + \phi_1^2 u_{T-2} + \dots) \\
 &= Y_T + \mu + \phi_1 (\omega_T - \mu) \\
 \hat{Y}_T(l) &= E(Y_{T+l} | I_T) \\
 &= E(Y_{T+l-1} + \mu + u_{T+l} + \phi_1 u_{T+l-1} + \phi_1^2 u_{T+l-2} + \dots + \phi_1^l u_T + \phi_1^{l+1} u_{T-1} + \phi_1^{l+2} u_{T-2} + \dots | I_T) \\
 &= \hat{Y}_T(l-1) + \mu + \phi_1^l u_T + \phi_1^{l+1} u_{T-1} + \phi_1^{l+2} u_{T-2} + \dots \\
 &= \hat{Y}_T(l-1) \mu + \phi_1^l (u_T + \phi_1 u_{T-1} + \phi_1^2 u_{T-2} + \dots) \\
 &= \hat{Y}_T(l-1) + \mu + \phi_1^l (\omega_T - \mu)
 \end{aligned}$$

Luego, cuando $T \rightarrow \infty$

$$\hat{Y}_T(l) = \hat{Y}_T(l-1) + \mu = \hat{Y}_T(l-2) + 2\mu = \dots = \hat{Y}_T + l\mu \quad [6.26]$$

Afirmándose que el perfil de predicción de este modelo ya no tiende a μ si no que será una línea recta que parte de Y_T y que tiene pendiente igual a la media de la serie ω_t , que es μ .

Ejemplo 5: **Modelo IMA(1,1)**

$$\omega_t = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1}$$

Con $\omega_t = (1-l)Y_t$, luego, $Y_T = Y_{T-1} + \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1}$

$$\begin{aligned}
 \hat{Y}_T(1) &= E(Y_{T+1} | I_T) \\
 &= E(Y_T + \mu + u_{T+1} + \theta_1 u_T | I_T) \\
 &= Y_T + \mu + \theta_1 u_T \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_T(l) &= E(Y_{T+l} | I_T) \\
&= E(Y_{T+l-1} + \mu + u_{T+l} + \theta_1 u_{T+l-1}) \\
&= \hat{Y}_T(l-1) + \mu \\
&= \hat{Y}_T(l-2) + 2\mu = \hat{Y}_T(l-3) + 3\mu = \dots = \hat{Y}_T(1) + (l-1)\mu
\end{aligned}$$

$$\hat{Y}_T(l) = \begin{cases} Y_T + \mu - \theta_1 [Y_T - \hat{Y}_{T-1}(l)] & \text{para } l=1 \\ \hat{Y}_T(1) + (l-1)\mu & \text{para } l > 1 \end{cases}$$

El perfil de la predicción a largo plazo viene dado por una línea recta con origen en $Y_T(1)$ pendiente igual a la media de ω_t es decir μ .

Predicción por Intervalos

El objetivo es obtener predicciones con el menor error de predicción posible

$$e_T(l) = Y_{T+l} - \hat{Y}_T(l) \quad [6.27]$$

Una forma alternativa de escribir (6.66) es:

$$e_T = u_{T+l} + \psi_1 u_{T+l-1} + \psi_2 u_{T+l-2} + \dots + \psi_{l-1} u_{T+1} \quad [6.28]$$

Donde $E(e_T(l)) = E(u_{T+l} + \psi_1 u_{T+l-1} + \psi_2 u_{T+l-2} + \dots + \psi_{l-1} u_{T+1}) = 0$ [6.29]

$$\begin{aligned}
\text{Var}(e_T(l)) &= E(u_{T+l} + \psi_1 u_{T+l-1} + \psi_2 u_{T+l-2} + \dots + \psi_{l-1} u_{T+1})^2 \\
&= \sigma_u^2 (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{l-1}^2)
\end{aligned} \quad [6.30]$$

$$\therefore e_T(l) \sim N \left[0, \sigma_u^2 \left(\sum_{i=0}^{l-1} \psi_i^2 \right) \right] \quad \text{con } \psi_0 = 1 \quad [6.31]$$

Por lo tanto, un intervalo de confianza para $\hat{Y}_T(l)$ será igual a:

$$\hat{Y}_T(l) \pm N_{\epsilon/2} \cdot d.e.(e_T(l)) \quad [6.32]$$

Indicadores no Paramétricos del Grado de Exactitud

Cuando es necesario comparar entre la mejor de varias predicciones respecto a una serie $\{Y_T\}$ se utiliza las medidas no paramétricas, el error cuadrático medio (ECM), el error absoluto medio (EAM) y el error absoluto porcentual medio (EAPM) las cuales no tienen en consideración la estructura estocástica del modelo.

Definidas como:

$$ECM = \frac{1}{H} \sum_{l=1}^H e_T^2 - H(l) = \frac{1}{H} \sum_{l=1}^H \left(Y_{T+l-H} - \hat{Y}_{T-H}(l) \right)^2 \quad [6.33]$$

$$EAM = \frac{1}{H} \sum_{l=1}^H |e_T - H(l)| = \frac{1}{H} \sum_{l=1}^H |Y_{T+l-H} - \hat{Y}_{T-H}(l)| \quad [6.34]$$

$$EAPM = \frac{1}{H} \sum_{l=1}^H \frac{|e_T - H(l)|}{Y_{T+l-H}} * 100 = \frac{1}{H} \sum_{l=1}^H \frac{|Y_{T+l-H} - \hat{Y}_{T-H}(l)|}{Y_{T+l-H}} * 100 \quad [6.35]$$

2.11.4 Modelo Óptimo

Línea Verificacionista

En la metodología Box-Jenkins, el R^2 como medida de bondad de ajuste y el \bar{R}^2 ajustado como medida de comparación de modelos no son aplicables.

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\omega^2} \qquad \bar{R}^2 = 1 - \frac{\sigma_u^2 / T - k}{\sigma_\omega^2 / T - 1}$$

El criterio no paramétrico que habitualmente se maneja para seleccionar entre modelos estocásticos es la varianza estimada del ruido σ_u^2 , según este criterio, de entre todos los modelos que has superado la etapa de chequeo se seleccionara aquel que tenga menor varianza estimada del ruido, donde:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{\mu}_t - \bar{\hat{\mu}})^2}{T} \qquad \sigma_\omega^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{\omega}_t - \bar{\hat{\omega}})^2}{T}$$

Como criterios paramétricos se pueden aplicar directamente los procedimientos de contrastes de hipótesis clásicos, por ejemplo para contraste individuales el estadístico t y para contrastes globales o restringidos, utilizar los estadísticos LM Wald o LR.

LÍNEA PREFERENCIALISTA; CRITERIOS DE CORROBORACIÓN

1) Modelos Informativos

Supongamos que M de los modelos identificados han superado la etapa de chequeo, dichos modelos podrán ser escritos como:

$$\varphi_j(l) = \delta_j + \theta_j(L) + u_t \quad j = 1, 2, \dots, M \quad [6.36]$$

Luego, el predictor óptimo un período adelante esta dado por

$$\hat{Y}_T(1) = E(Y_{T+1} | I_T) \quad [6.37]$$

y la varianza del error de predicción un periodo adelante es:

$$Var[e_T(1)]_j = E\left(Y_{T+1} - \hat{Y}_T(1)_j\right)^2 = \sigma_u^2(j) \quad j = 1, 2, \dots, M \quad [6.38]$$

la ecuación (6.38) es conocida como la función de riesgo.

A partir de la función de riesgo, se obtiene el estadístico que recoge el contenido Informativo de los modelos:

$$Var(\hat{e}_T(1))_j = \sigma_u^2(j) \quad [6.39]$$

luego, el modelo más informativo será aquel con menor $\sigma_u^2(j)$.

Si la predicción se efectúa para T_1 periodos extramuestrales, se define:

$$CI(j) = \frac{1}{T_1} \sum_{i=1}^{T_1} Var(e_T^{\square}(1))_j = \frac{1}{T_1} \sum_{i=1}^{T_1} \sigma_{ui}^2(j) \quad [6.40]$$

Luego, el modelo más informativo será aquel con menor valor de contenido Informativo (CI):

Adicionalmente, puede interesar determinar si un modelo tiene un elevado contenido Informativo, definimos:

$$EPG(j) = \frac{N_{\varepsilon/2} \cdot \sigma_{ui}^2(j)}{Y_{T+1}} * 100 \quad [6.41]$$

Es decir, que el modelo j -ésimo comete un error inferior al EPG % el $(1 - \varepsilon)100\%$ de las veces.

2) Modelo Exáctos

Diremos que el modelo más exacto es aquel que comete el menor error de predicción.

Definimos un indicador de exactitud (IE) como:

$$IE(j) = \frac{1}{T_1} \sum_{i=1}^{T_1} e_T(1)_{ji}^2 \quad [6.42]$$

Alternativamente a la exactitud del modelo se puede medir a partir del indicador

$$EPR(j) = \frac{|Y_{T+1} - \hat{Y}_T(1)_j|}{Y_{T+1}} * 100 = \frac{|e_T(1)_j|}{Y_{T+1}} * 100 \quad [6.43]$$

3) Modelos Corroborados

Diremos que el modelo j -ésimo esta corroborado al nivel $(1 - \varepsilon)\%$ si cumple que

$$EPR(j) < EPG(j) \quad [6.44]$$

Es decir, además de la precisión de la información debe satisfacerse que este corrobore la información proporcionada por el modelo.

Pero un estadístico que sintetiza contenido informativo y corroboración es el estadístico ACOR,

$$ACOR(j) = \frac{1}{T_1} \sum_{i=1}^{T_1} \sigma_{ui}^2(j) \cdot \frac{1}{T_1} \sum_{i=1}^{T_1} e_T(1)_{ji}^2 \quad [6.45]$$

$$= CI(j) \times IE(j) \quad [6.46]$$

Luego diremos que el mejor modelo es aquel con menor valor en el ACOR.

CAPITULO III: LABORATORIOS DE SERIES TEMPORALES

3.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 3 de este documento se presentó la planificación temporal del contenido teórico y práctico de la asignatura Series Temporales. Se planeó que para la realización de las prácticas se cuenta con un total de 15 semanas lo que hace un total de 30 horas (cada período semanal de dos horas).

El enunciado de la práctica será dado por el profesor con uno o dos días de anticipación, para que los estudiantes ya tengan una idea de cómo van a dar solución a la práctica y cualquier duda o consulta que tengan se la preguntaran al profesor en el laboratorio.

El profesor garantizará que en cada una de las máquinas este instalado, el software a utilizar que en este caso es el SPSS o Excel. Otros aspectos a tener en cuenta en la organización del laboratorio son los siguientes:

- ✓ La primera sesión es para hacer una introducción al laboratorio, explicar el manejo básico del software a utilizar.
- ✓ Cada una de las prácticas va enfocada al afianzamiento del aprendizaje de cada uno de los temas de la teoría.
- ✓ Cada práctica debe ser realizada en un tiempo estipulado, el cual debe ser de fiel cumplimiento por parte de los estudiantes.
- ✓ Cada estudiante debe entregar en tiempo y forma una memoria con la solución de las prácticas que indique el profesor.

3.2 OBJETIVOS

Los objetivos del “**Laboratorio de Series Temporales**” son:

- ✓ Afianzar los conocimientos adquiridos en las clases teóricas de la asignatura.
- ✓ Conocer el manejo del software o herramienta de trabajo (SPSS/Excel).
- ✓ Ayudar al alumno en el análisis y resolución de problemas utilizando la metodología de Series Temporales.

3.3 PLANIFICACION TEMPORAL.

Como se ha mencionado en el capítulo 3 inciso 3.1 para el desarrollo del laboratorio se cuenta con 15 laboratorios de dos horas, durante el ciclo para un total de 30 horas.

El número de horas asignadas para cada tema se ha calculado en base a la profundidad con que se requiere abordar cada uno de ellos. Se deberán hacer un total de 10 prácticas usando el software indicado por el profesor.

La planificación es la siguiente:

PRÁCTICA	SEMANA	CONTENIDO	HORAS
1	2	Representación gráfica de las Series Temporales.	1
2	3	Predicción en modelos sin tendencia y sin componente Estacional	2
3	4	Predicción en modelos sin Tendencia y con Componente Estacional.	2
4	5	Predicción en modelos con Tendencia y sin Componente Estacional.	2
5	6	Predicción en modelos con Tendencia y con Componente Estacional.	2
6	7	Funciones de autovarianza y autocorrelación, Función de autocorrelación parcial.	4
7	8,9,10	Modelos de medias móviles (M.A.).	5
8	11,12	Modelos autorregresivos (A.R.)	4
9	13,14	Modelos mixtos autorregresivos-medias móviles (ARMA)	4
10	15,16	Modelos Estocásticos Estacionales	4
TOTAL_HORAS			30

3.4 CONTENIDO DEL TEMARIO DE LABORATORIO.

UNIDAD 1: TRATAMIENTO DETERMINISTA DE SERIES TEMPORALES

- ✓ Representación gráfica de las series temporales.
- ✓ Métodos no Paramétricos para series tipo 1
- ✓ Métodos no Paramétricos para series tipo 2
- ✓ Métodos no Paramétricos para series tipo 3
- ✓ Métodos no Paramétricos para series tipo 4

UNIDAD 2: MÉTODOS PARAMÉTRICOS DE SERIES TEMPORALES

- ✓ Funciones de autovarianza y autocorrelación, Función de autocorrelación parcial.

UNIDAD 3: MODELOS ESTOCÁSTICOS DE SERIES TEMPORALES

- ✓ Modelos de Medias Móviles (MA).
- ✓ Modelos Autorregresivos (AR).
- ✓ Modelos Mixtos Autorregresivos de Medias Móviles (ARMA).

UNIDAD 4: MODELOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONALES

- ✓ Modelos Estacionales.

3.5 PRÁCTICA 1: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE SERIES TEMPORALES

Características de series temporales

En esta práctica realizaremos gráficos de secuencia de series temporales con ayuda del programa estadístico SPSS. Extraeremos de este tipo de gráfico información de las series sobre conceptos como: estacionariedad, tendencia, estacionalidad, existencia de valores anómalos, etc. Además aprenderemos a crear variables de fecha.

Se proporcionan los datos de las siguientes series.

- Producción anual de cebada en Inglaterra y Gales desde 1884 hasta 1939. Fichero CEBADA.
- Lecturas cada dos horas de concentración en un proceso químico. Fichero CONCENTRACION.
- Número mensual de pasajeros en una línea aérea internacional desde enero de 1949 hasta diciembre de 1960 (expresado en miles de pasajeros). Fichero PASAJEROS.
- Población de Estados en intervalos de 10 años, desde 1790 a 1990 (en millones). Fichero USPOP.
- Desempleo mensual de mujeres entre 16 y 19 años en EEUU (en miles). Fichero DESEMPLEO.

- Ventas mensuales de vino tinto en Australia desde enero de 1980 a octubre de 1991 (en kilolitros). Fichero WINE.
- Riesgo a sufrir un accidente mortal por cada millón de km recorridos. Datos semanales desde 1987. Fichero TASA_ACC.
- IBM precios de cierre de las acciones (diario desde 17 mayo 1961 hasta 2 noviembre 1962)

Se pide

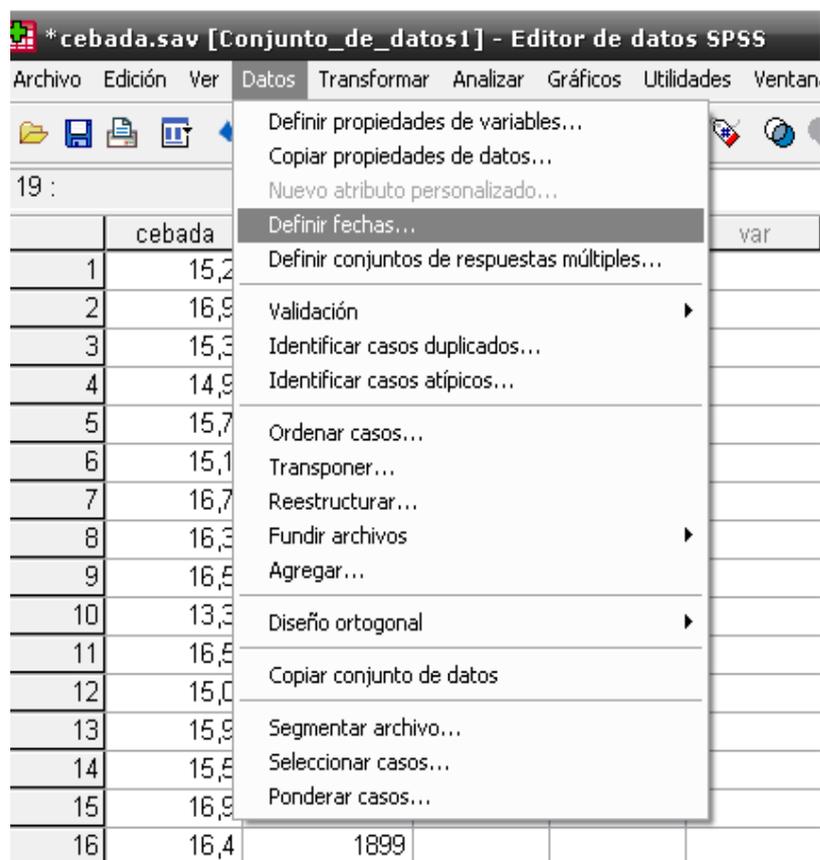
- ✓ Analizar el gráfico de secuencia de la serie.
- ✓ ¿Qué características se observan en dicho gráfico?

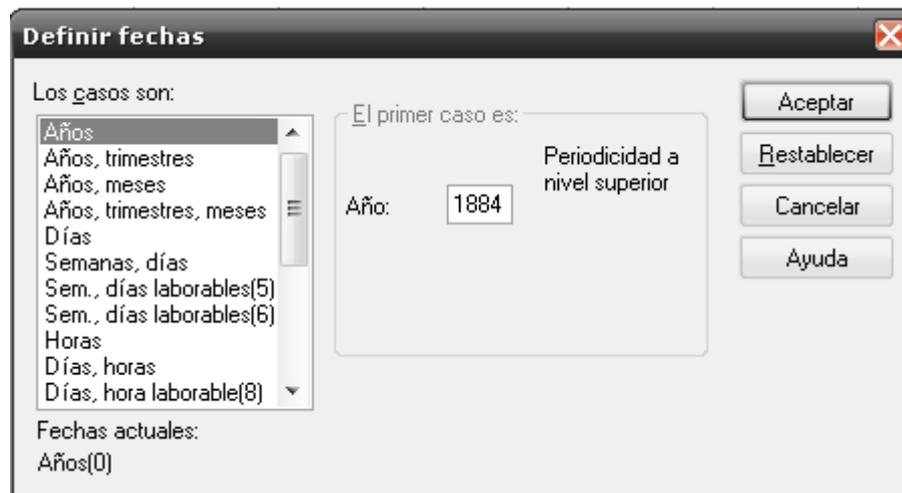
Ejercicio 1. Producción anual de cebada.

Estos datos se pueden introducir en un archivo sin años, sólo como una variable *cebada* con las observaciones ordenadas en el tiempo en una única columna:

cebada
15,2
16,9
15,3
14,9

La opción *Datos* → *Definir fechas* permite definir las variables de tipo fecha, necesarias para establecer la periodicidad de la serie:





Al pulsar el botón Aceptar, se crea una nueva variable: YEAR (año al que pertenece el caso).

*cebada.sav [Conjunto_de_datos1] - Editar

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar

19 :

	cebada	YEAR	var
1	15,2	1884	
2	16,9	1885	
3	15,3	1886	
4	14,9	1887	
5	15,7	1888	
6	15,1	1889	
7	16,7	1890	
8	16,3	1891	
9	16,5	1892	
10	13,3	1893	
11	16,5	1894	
12	15,0	1895	
13	15,9	1896	
14	15,5	1897	
15	16,9	1898	

Representación gráfica

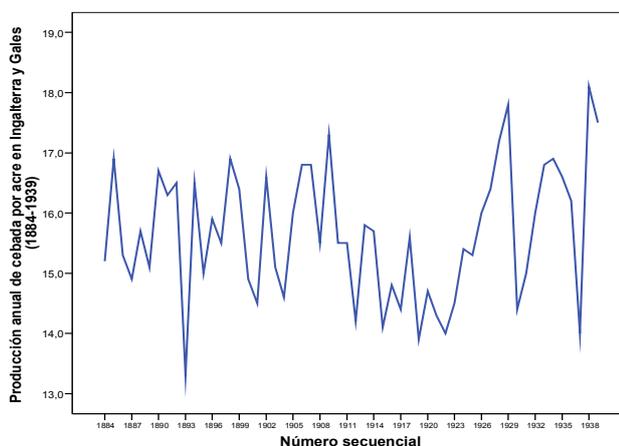
A partir del análisis del gráfico se decide la existencia o no de variaciones estacionales, la elección del modelo de combinación de las componentes, el modelo de ajuste de la tendencia, etc.

- Analizar → Series Temporales → *Gráfico de Secuencia*

The screenshot shows the SPSS data editor window for a file named 'cebada.sav'. The data table has two columns: 'cebada' and 'YEAR'. The 'YEAR' column contains values from 1884 to 1902. The 'Analyze' menu is open, and the path 'Series temporales' > 'Gráficos de secuencia...' is highlighted.

	cebada	YEAR
1	15,2	1884
2	16,9	1885
3	15,3	1886
4	14,9	1887
5	15,7	1888
6	15,1	1889
7	16,7	1890
8	16,3	1891
9	16,5	1892
10	13,3	1893
11	16,5	1894
12	15,0	1895
13	15,9	1896
14	15,5	1897
15	16,9	1898
16	16,4	1899
17	14,9	1900
18	14,5	1901
19	16,6	1902

Con las opciones elegidas, se obtiene el gráfico siguiente:



En el gráfico se puede observar que presenta un comportamiento aleatorio, lo que indica que es una serie no estacionaria.

Ejercicio 2. Concentración en un Proceso Químico.

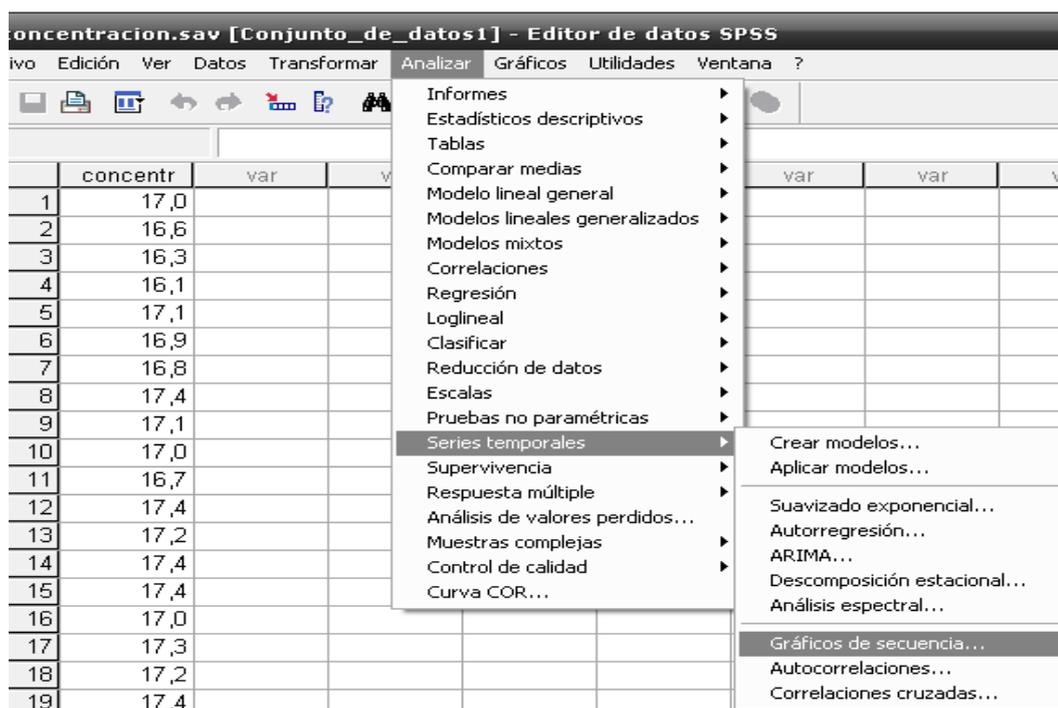
Estos datos se pueden introducir en un archivo sin años, sólo como una variable *concentración* con las observaciones ordenadas en el tiempo en una única columna:

concentr
17,0
16,6
16,3
16,1
17,1
16,9
16,8

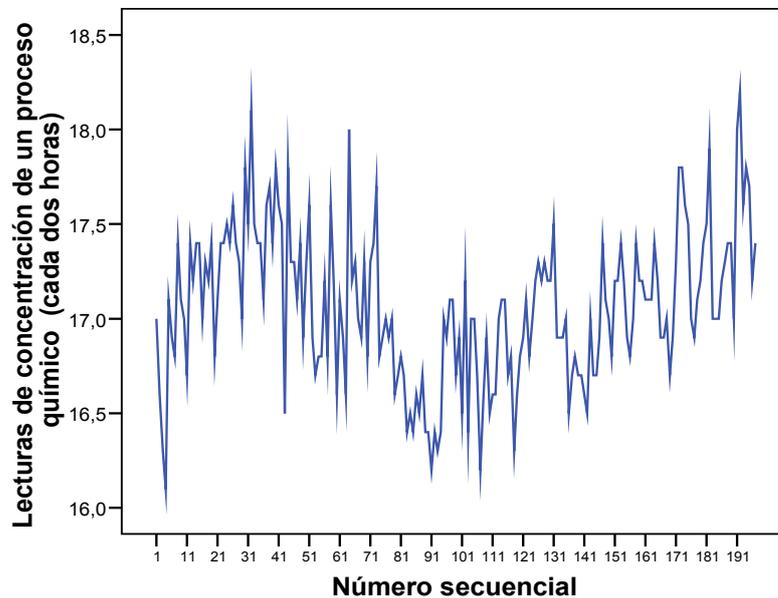
Representación gráfica

A partir del análisis del gráfico se decide la existencia o no de variaciones estacionales, la elección del modelo de combinación de las componentes, el modelo de ajuste de la tendencia, etc.

- Analizar → Series Temporales → *Gráfico de Secuencia*



Con las opciones elegidas, se obtiene el gráfico siguiente:



Se representa la concentración de un proceso químico, en la cual podemos observar que la serie es estacionaria en media ya que sus valores son muy afines a la media global; dicho de otro modo, si dividimos la serie en submuestras del mismo tamaño, las medias locales son muy similares a lo largo del tiempo.

Ejercicio 3. Número mensual de pasajeros en una línea aérea.

Estos datos se pueden introducir en un archivo sin años, sólo con una variable llamada *pasajero* con las observaciones ordenadas en el tiempo en una única columna:

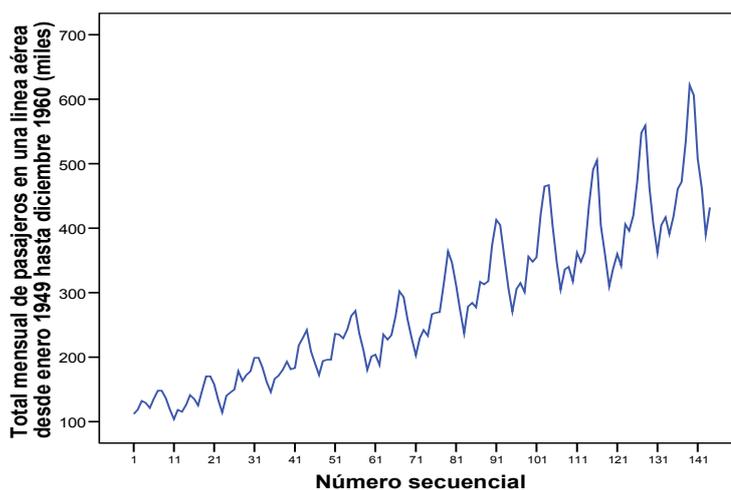
pasajero
112
118
132
129
121

Representación gráfica

A partir del análisis del gráfico se decide la existencia o no de variaciones estacionales, la elección del modelo de combinación de las componentes, el modelo de ajuste de la tendencia, etc.

- Analizar → Series Temporales → *Gráfico de Secuencia*

Con las opciones elegidas, se obtiene el gráfico siguiente:



En el gráfico anterior se observa que la serie presenta una tendencia creciente lo que indica que el número de pasajeros aumenta gradualmente por cada año.

Ejercicio 4. Población de Estados Unidos.

Estos datos se pueden introducir en un archivo sin años, sólo como una variable *uspop* con las observaciones ordenadas en el tiempo en una única columna:

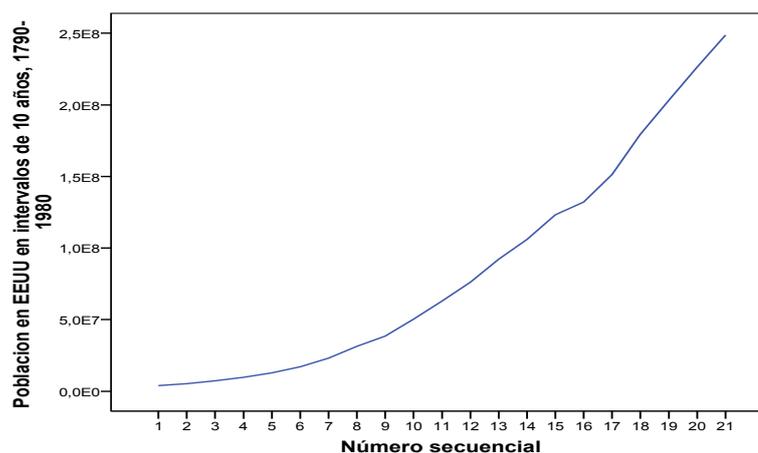
poblac
3929214
5308483
7239881
9638453
12860702
17063353
23191876
31443321

Representación gráfica

A partir del análisis del gráfico se decide la existencia o no de variaciones estacionales, la elección del modelo de combinación de las componentes, el modelo de ajuste de la tendencia, etc.

- Analizar → Series Temporales → *Gráfico de Secuencia*

Con las opciones elegidas, se obtiene el gráfico siguiente:



En el gráfico se observa que la serie posee una clara tendencia que crece potencialmente.

Ejercicio 5. Desempleo mensual de mujeres.

Estos datos se pueden introducir en un archivo sin años, sólo con una variable llamada *desemp* con las observaciones ordenadas en el tiempo en una única columna:

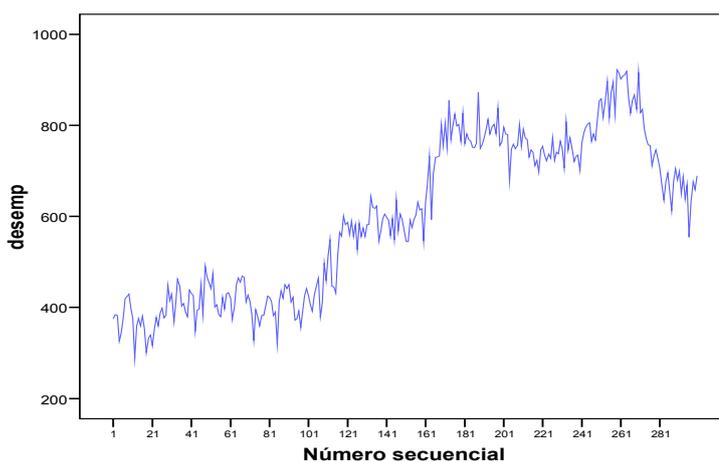
desemp
375
384
383
326
344
375
419

Representación gráfica

A partir del análisis del gráfico se decide la existencia o no de variaciones estacionales, la elección del modelo de combinación de las componentes, el modelo de ajuste de la tendencia, etc.

- Analizar → Series Temporales → *Gráfico de Secuencia*

Con las opciones elegidas, se obtiene el gráfico siguiente:



En este gráfico se presenta una línea de tendencia polinómica, que ilustra el desempleo en mujeres de entre 16 y 19 años, pudiéndose observar que la tasa de empleo va en disminución.

Ejercicio 6. Ventas mensuales de vino tinto.

Estos datos se pueden introducir en un archivo sin años, sólo como una variable *ventas* con las observaciones ordenadas en el tiempo en una única columna:

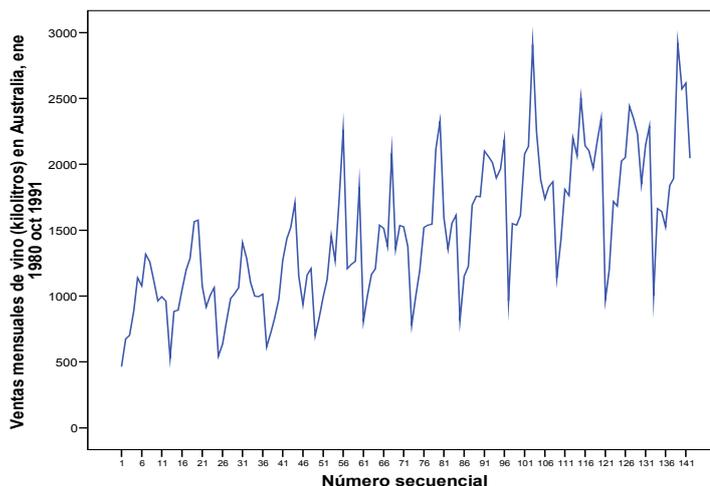
ventas
675
703
887
1139
1077
1318

Representación gráfica

A partir del análisis del gráfico se decide la existencia o no de variaciones estacionales, la elección del modelo de combinación de las componentes, el modelo de ajuste de la tendencia, etc.

- Analizar → Series Temporales → *Gráfico de Secuencia*

Con las opciones elegidas, se obtiene el gráfico siguiente:



Este gráfico presenta tendencia estacional creciente, es decir que las ventas de vino tinto tienen mayores ventas en épocas vacacionales.

Ejercicio 7. Riesgo a sufrir un Accidente Mortal.

Estos datos se pueden introducir en un archivo sin años, sólo como una variable *tasa* con las observaciones ordenadas en el tiempo en una única columna:

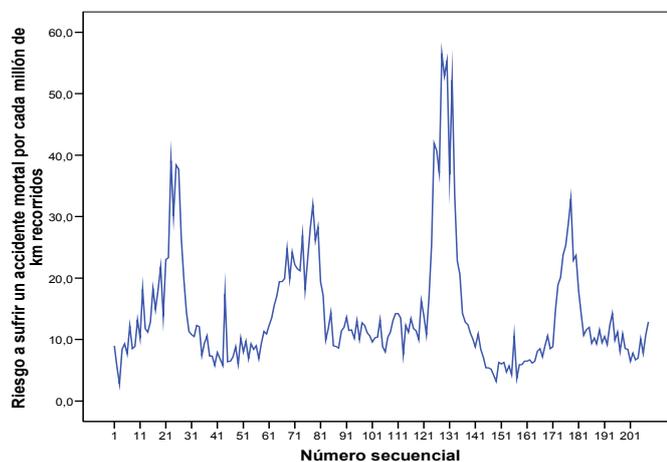
tasa
9,0
5,6
2,8
8,4

Representación gráfica

A partir del análisis del gráfico se decide la existencia o no de variaciones estacionales, la elección del modelo de combinación de las componentes, el modelo de ajuste de la tendencia, etc.

- Analizar → Series Temporales → *Gráfico de Secuencia*

Con las opciones elegidas, se obtiene el gráfico siguiente:



En el gráfico anterior se puede observar que la serie tiene tendencia irregular lo que significa que hay períodos en los que el riesgo de sufrir un accidente mortal incrementa considerablemente y hay períodos en los que el riesgo es menor debido a que se va afectado por un componente estacional.

Ejercicio 8. Precios de cierre de las acciones.

Estos datos se pueden introducir en un archivo sin años, sólo como una variable *prices* con las observaciones ordenadas en el tiempo en una única columna:

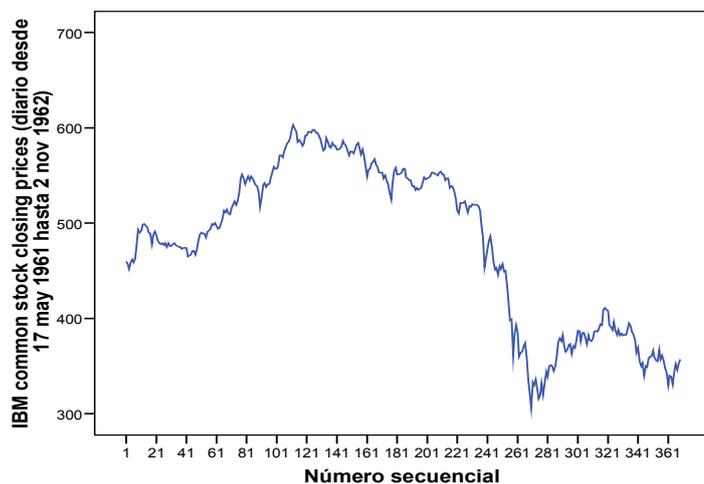
prices
460
457
452
459
462

Representación gráfica

A partir del análisis del gráfico se decide la existencia o no de variaciones estacionales, la elección del modelo de combinación de las componentes, el modelo de ajuste de la tendencia, etc.

- Analizar → Series Temporales → *Gráfico de Secuencia*

Con las opciones elegidas, se obtiene el gráfico siguiente:



En el siguiente gráfico podemos observar que tiene una tendencia polinómica y que no tiene tendencia estacionaria.

3.6 PRÁCTICA 2: MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS PARA SERIES TIPO 1.

En esta práctica se realizará la aplicación de los métodos no paramétricos para serie tipo 1, dichas series son aquellas sin tendencia y sin componente estacional.

A continuación se presenta una serie de datos con 68 observaciones de los gastos diarios de una familia.

t	Serie	t	Serie	t	Serie	t	Serie
1	28,21	21	40,02	41	42,59	61	31,94
2	31,78	22	40,39	42	26,56	62	28,18
3	33,95	23	44,1	43	34,2	63	33,23
4	31,14	24	58,6	44	35,35	64	30,51
5	28,1	25	40,92	45	29,32	65	46,35
6	31,95	26	37,56	46	27,82	66	28,41
7	43,07	27	33,4	47	39,04	67	34,27
8	38,64	28	33,66	48	43,42	68	31,61
9	31,68	29	42,39	49	31,21		
10	35,96	30	47,73	50	28,78		
11	40,74	31	44,17	51	35,14		
12	52,63	32	29,8	52	30,03		
13	38,39	33	33,44	53	44,11		
14	32,36	34	40,37	54	28,07		
15	35,64	35	48,15	55	31,58		
16	37,12	36	38,18	56	33,66		
17	37,87	37	31,91	57	30,62		
18	43,33	38	37,28	58	32,64		
19	56,05	39	32,05	59	40,97		
20	50,31	40	35,12	60	43,69		

Se pide:

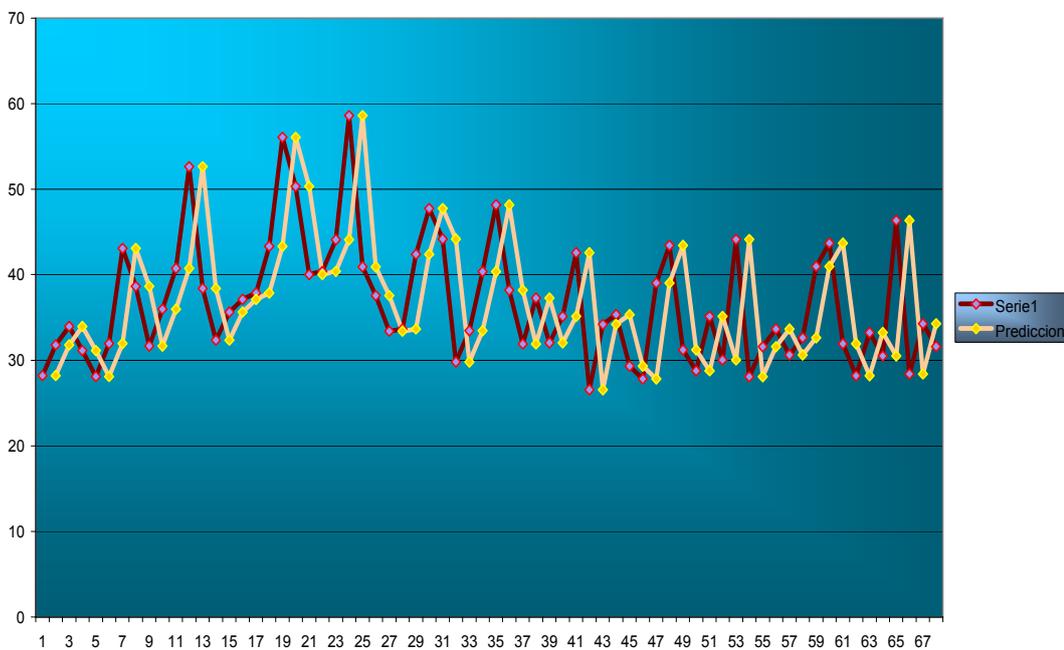
- ✓ Realizar los cálculos aplicando el Método Ingenuo.
- ✓ Realizar los cálculos aplicando el Método Media Simple.
- ✓ Realizar los cálculos aplicando el Método Media Móviles.
- ✓ Realizar los cálculos aplicando el Método Alisado Exponencial.

MÉTODO INGENUO.

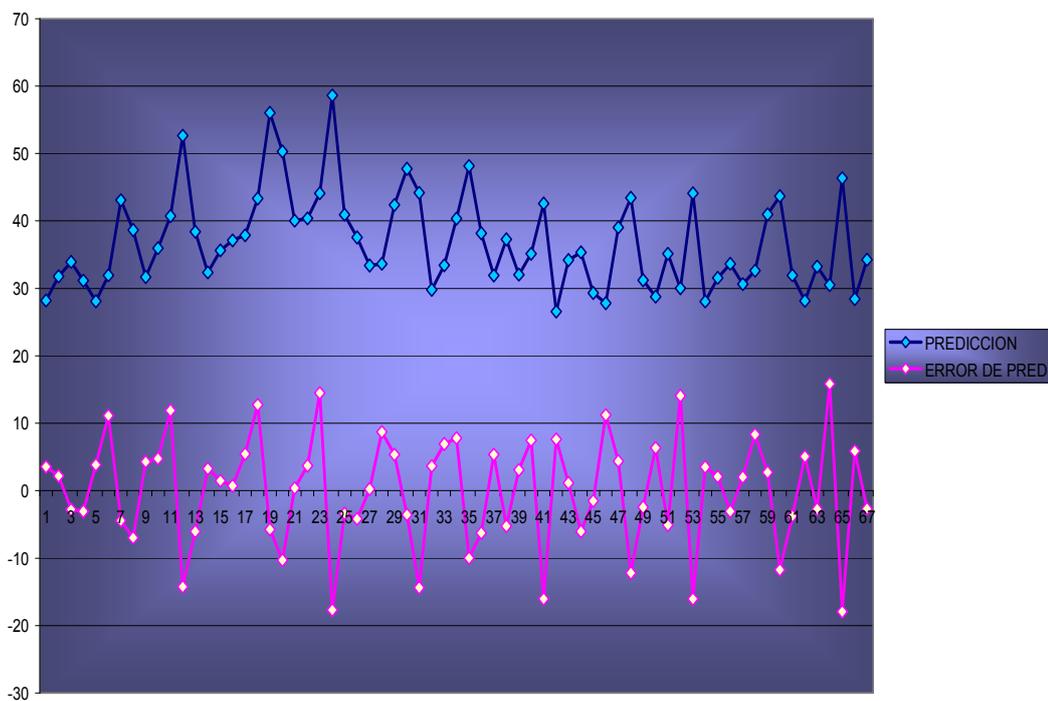
t	Serie	Predicción	Error de Predicción	ECM	EAM	EAP	Estadísticos
1	28.21						ECM= 65.1
2	31.78	28.21	3.57	12.7	3.57	11.23	EAM = 6.59
3	33.95	31.78	2.17	4.7	2.17	6.39	EAP = 18.09
4	31.14	33.95	-2.81	7.9	2.81	9.02	
5	28.1	31.14	-3.04	9.2	3.04	10.82	
6	31.95	28.1	3.85	14.8	3.85	12.05	
7	43.07	31.95	11.12	123.7	11.12	25.82	
8	38.64	43.07	-4.43	19.6	4.43	11.46	
9	31.68	38.64	-6.96	48.4	6.96	21.97	
10	35.96	31.68	4.28	18.3	4.28	11.90	
11	40.74	35.96	4.78	22.8	4.78	11.73	
12	52.63	40.74	11.89	141.4	11.89	22.59	
13	38.39	52.63	-14.24	202.8	14.24	37.09	
14	32.36	38.39	-6.03	36.4	6.03	18.63	
15	35.64	32.36	3.28	10.8	3.28	9.20	
16	37.12	35.64	1.48	2.2	1.48	3.99	
17	37.87	37.12	0.75	0.6	0.75	1.98	
18	43.33	37.87	5.46	29.8	5.46	12.60	
19	56.05	43.33	12.72	161.8	12.72	22.69	
20	50.31	56.05	-5.74	32.9	5.74	11.41	
21	40.02	50.31	-10.29	105.9	10.29	25.71	
22	40.39	40.02	0.37	0.1	0.37	0.92	
23	44.1	40.39	3.71	13.8	3.71	8.41	
24	58.6	44.1	14.5	210.3	14.5	24.74	
25	40.92	58.6	-17.68	312.6	17.68	43.21	
26	37.56	40.92	-3.36	11.3	3.36	8.95	
27	33.4	37.56	-4.16	17.3	4.16	12.46	
28	33.66	33.4	0.26	0.1	0.26	0.77	
29	42.39	33.66	8.73	76.2	8.73	20.59	
30	47.73	42.39	5.34	28.5	5.34	11.19	
31	44.17	47.73	-3.56	12.7	3.56	8.06	
32	29.8	44.17	-14.37	206.5	14.37	48.22	
33	33.44	29.8	3.64	13.2	3.64	10.89	
34	40.37	33.44	6.93	48.0	6.93	17.17	
35	48.15	40.37	7.78	60.5	7.78	16.16	
36	38.18	48.15	-9.97	99.4	9.97	26.11	
37	31.91	38.18	-6.27	39.3	6.27	19.65	
38	37.28	31.91	5.37	28.8	5.37	14.40	
39	32.05	37.28	-5.23	27.4	5.23	16.32	
40	35.12	32.05	3.07	9.4	3.07	8.74	
41	42.59	35.12	7.47	55.8	7.47	17.54	
42	26.56	42.59	-16.03	257.0	16.03	60.35	
43	34.2	26.56	7.64	58.4	7.64	22.34	
44	35.35	34.2	1.15	1.3	1.15	3.25	
45	29.32	35.35	-6.03	36.4	6.03	20.57	
46	27.82	29.32	-1.5	2.3	1.5	5.39	
47	39.04	27.82	11.22	125.9	11.22	28.74	
48	43.42	39.04	4.38	19.2	4.38	10.09	
49	31.21	43.42	-12.21	149.1	12.21	39.12	
50	28.78	31.21	-2.43	5.9	2.43	8.44	
51	35.14	28.78	6.36	40.4	6.36	18.10	
52	30.03	35.14	-5.11	26.1	5.11	17.02	
53	44.11	30.03	14.08	198.2	14.08	31.92	
54	28.07	44.11	-16.04	257.3	16.04	57.14	
55	31.58	28.07	3.51	12.3	3.51	11.11	
56	33.66	31.58	2.08	4.3	2.08	6.18	
57	30.62	33.66	-3.04	9.2	3.04	9.93	
58	32.64	30.62	2.02	4.1	2.02	6.19	
59	40.97	32.64	8.33	69.4	8.33	20.33	
60	43.69	40.97	2.72	7.4	2.72	6.23	
61	31.94	43.69	-11.75	138.1	11.75	36.79	
62	28.18	31.94	-3.76	14.1	3.76	13.34	
63	33.23	28.18	5.05	25.5	5.05	15.20	
64	30.51	33.23	-2.72	7.4	2.72	8.92	
65	46.35	30.51	15.84	250.9	15.84	34.17	
66	28.41	46.35	-17.94	321.8	17.94	63.15	
67	34.27	28.41	5.86	34.3	5.86	17.10	
68	31.61	34.27	-2.66	7.1	2.66	8.42	
TOTALES				4361.4	442.12	1212.33	
MEDIAS				65.1	6.59	18.09	

La representación grafica de la serie es la siguiente:

METODO INGENUO SERIE CON PREDICION



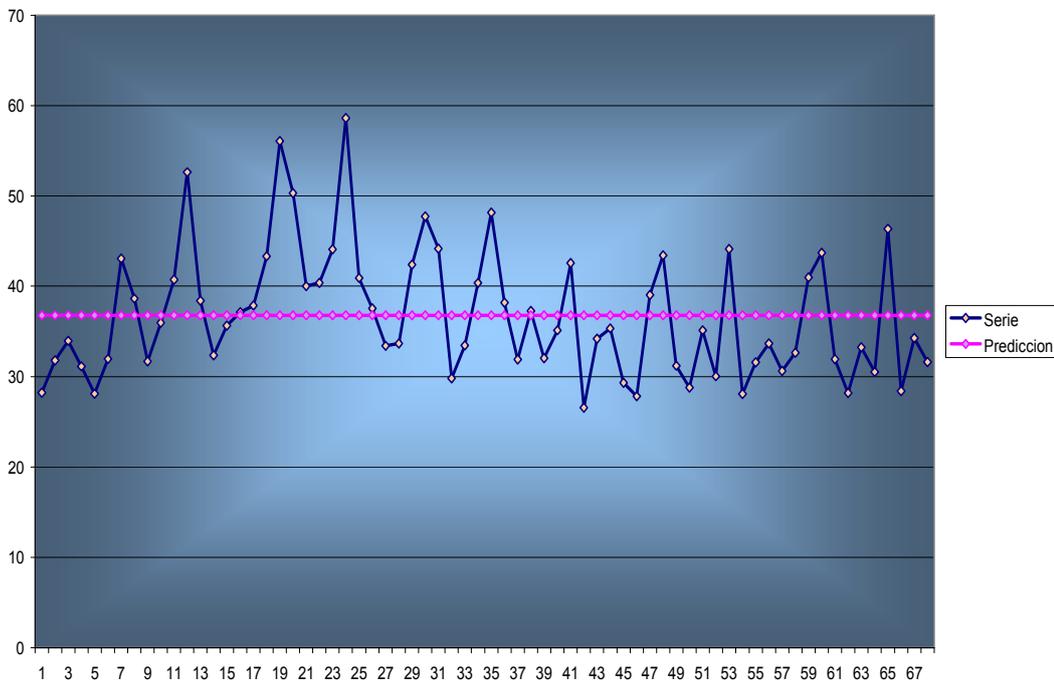
PREDICION CON ERROR DE PREDICION



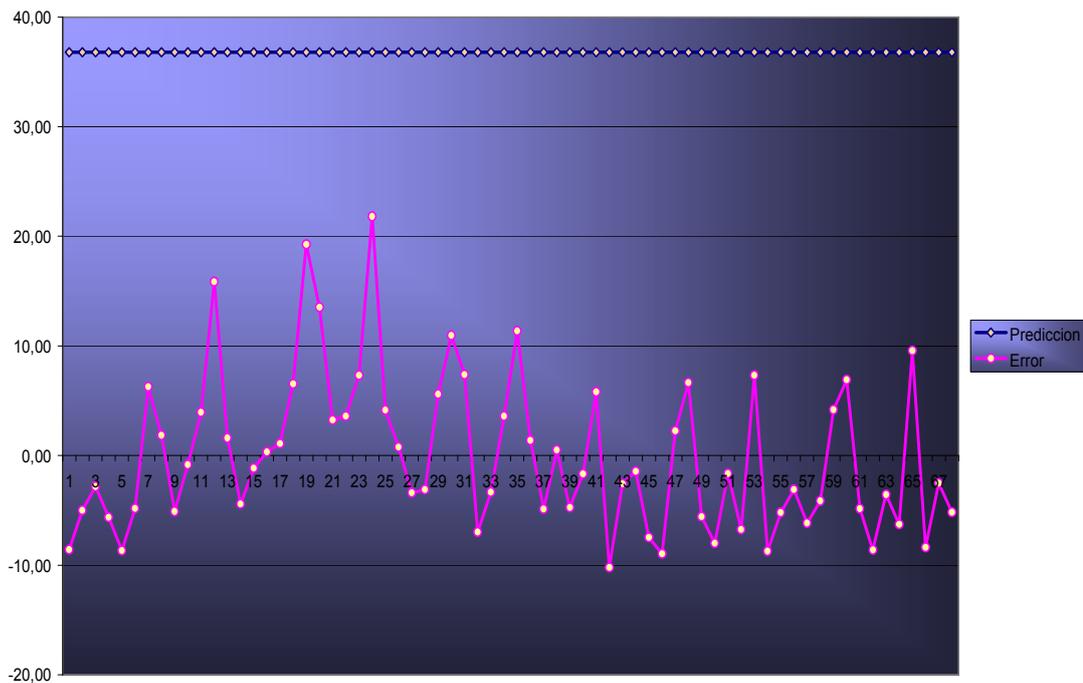
MÉTODO DE MEDIAS SIMPLE

t	Serie	Predicción	Error	ECM	EAM	EAP	Estadísticos
1	28.21	36.79	-8.58	73.55	8.58	0.30	ECM= 49.31
2	31.78	36.79	-5.01	25.06	5.01	0.16	EAM= 5.72
3	33.95	36.79	-2.84	8.04	2.84	0.08	EAP= 0.16
4	31.14	36.79	-5.65	31.88	5.65	0.18	
5	28.1	36.79	-8.69	75.45	8.69	0.31	
6	31.95	36.79	-4.84	23.39	4.84	0.15	
7	43.07	36.79	6.28	39.49	6.28	0.15	
8	38.64	36.79	1.85	3.44	1.85	0.05	
9	31.68	36.79	-5.11	26.07	5.11	0.16	
10	35.96	36.79	-0.83	0.68	0.83	0.02	
11	40.74	36.79	3.95	15.63	3.95	0.10	
12	52.63	36.79	15.84	251.03	15.84	0.30	
13	38.39	36.79	1.60	2.57	1.60	0.04	
14	32.36	36.79	-4.43	19.59	4.43	0.14	
15	35.64	36.79	-1.15	1.31	1.15	0.03	
16	37.12	36.79	0.33	0.11	0.33	0.01	
17	37.87	36.79	1.08	1.17	1.08	0.03	
18	43.33	36.79	6.54	42.82	6.54	0.15	
19	56.05	36.79	19.26	371.09	19.26	0.34	
20	50.31	36.79	13.52	182.89	13.52	0.27	
21	40.02	36.79	3.23	10.46	3.23	0.08	
22	40.39	36.79	3.60	12.99	3.60	0.09	
23	44.1	36.79	7.31	53.49	7.31	0.17	
24	58.6	36.79	21.81	475.84	21.81	0.37	
25	40.92	36.79	4.13	17.09	4.13	0.10	
26	37.56	36.79	0.77	0.60	0.77	0.02	
27	33.4	36.79	-3.39	11.47	3.39	0.10	
28	33.66	36.79	-3.13	9.77	3.13	0.09	
29	42.39	36.79	5.60	31.40	5.60	0.13	
30	47.73	36.79	10.94	119.77	10.94	0.23	
31	44.17	36.79	7.38	54.52	7.38	0.17	
32	29.8	36.79	-6.99	48.81	6.99	0.23	
33	33.44	36.79	-3.35	11.20	3.35	0.10	
34	40.37	36.79	3.58	12.84	3.58	0.09	
35	48.15	36.79	11.36	129.14	11.36	0.24	
36	38.18	36.79	1.39	1.94	1.39	0.04	
37	31.91	36.79	-4.88	23.78	4.88	0.15	
38	37.28	36.79	0.49	0.24	0.49	0.01	
39	32.05	36.79	-4.74	22.43	4.74	0.15	
40	35.12	36.79	-1.67	2.78	1.67	0.05	
41	42.59	36.79	5.80	33.68	5.80	0.14	
42	26.56	36.79	-10.23	104.57	10.23	0.39	
43	34.2	36.79	-2.59	6.69	2.59	0.08	
44	35.35	36.79	-1.44	2.06	1.44	0.04	
45	29.32	36.79	-7.47	55.74	7.47	0.25	
46	27.82	36.79	-8.97	80.39	8.97	0.32	
47	39.04	36.79	2.25	5.08	2.25	0.06	
48	43.42	36.79	6.63	44.01	6.63	0.15	
49	31.21	36.79	-5.58	31.09	5.58	0.18	
50	28.78	36.79	-8.01	64.10	8.01	0.28	
51	35.14	36.79	-1.65	2.71	1.65	0.05	
52	30.03	36.79	-6.76	45.65	6.76	0.22	
53	44.11	36.79	7.32	53.64	7.32	0.17	
54	28.07	36.79	-8.72	75.97	8.72	0.31	
55	31.58	36.79	-5.21	27.10	5.21	0.16	
56	33.66	36.79	-3.13	9.77	3.13	0.09	
57	30.62	36.79	-6.17	38.02	6.17	0.20	
58	32.64	36.79	-4.15	17.19	4.15	0.13	
59	40.97	36.79	4.18	17.50	4.18	0.10	
60	43.69	36.79	6.90	47.66	6.90	0.16	
61	31.94	36.79	-4.85	23.49	4.85	0.15	
62	28.18	36.79	-8.61	74.07	8.61	0.31	
63	33.23	36.79	-3.56	12.65	3.56	0.11	
64	30.51	36.79	-6.28	39.39	6.28	0.21	
65	46.35	36.79	9.56	91.47	9.56	0.21	
66	28.41	36.79	-8.38	70.16	8.38	0.29	
67	34.27	36.79	-2.52	6.33	2.52	0.07	
68	31.61	36.79	-5.18	26.79	5.18	0.16	
Total	2501.46			3352.83	389.19	10.57	
Media	36.79			49.31	5.72	0.16	

METODO DE MEDIA SIMPLE



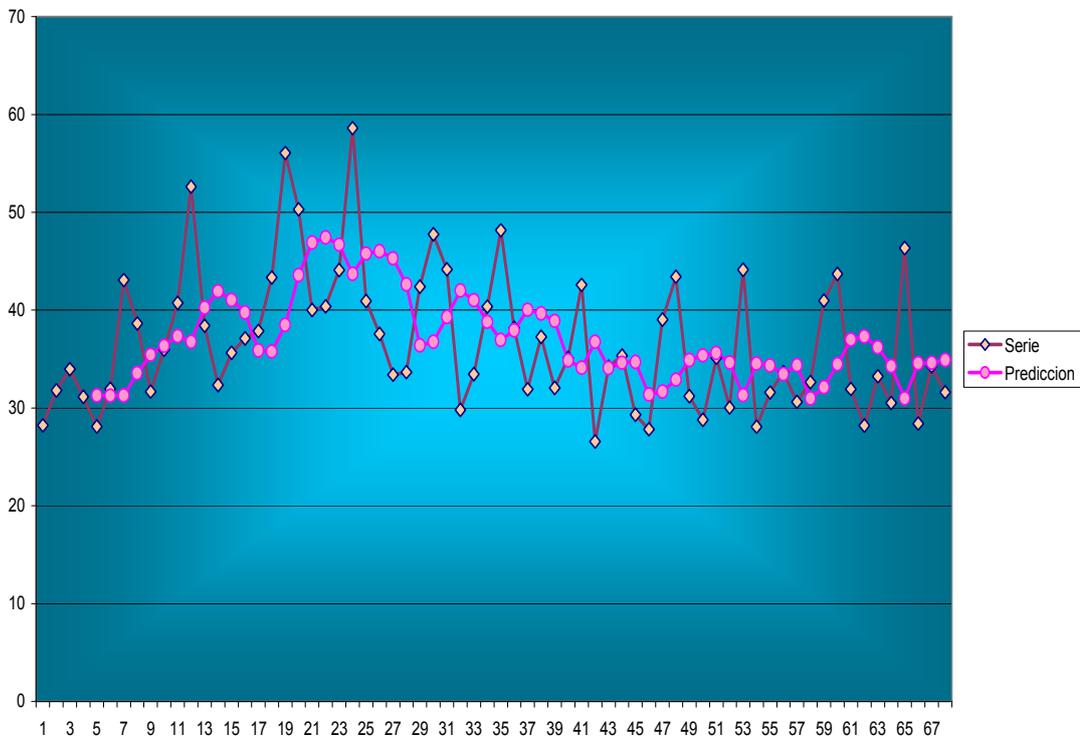
PREDICCION CON ERROR DE PREDICCION



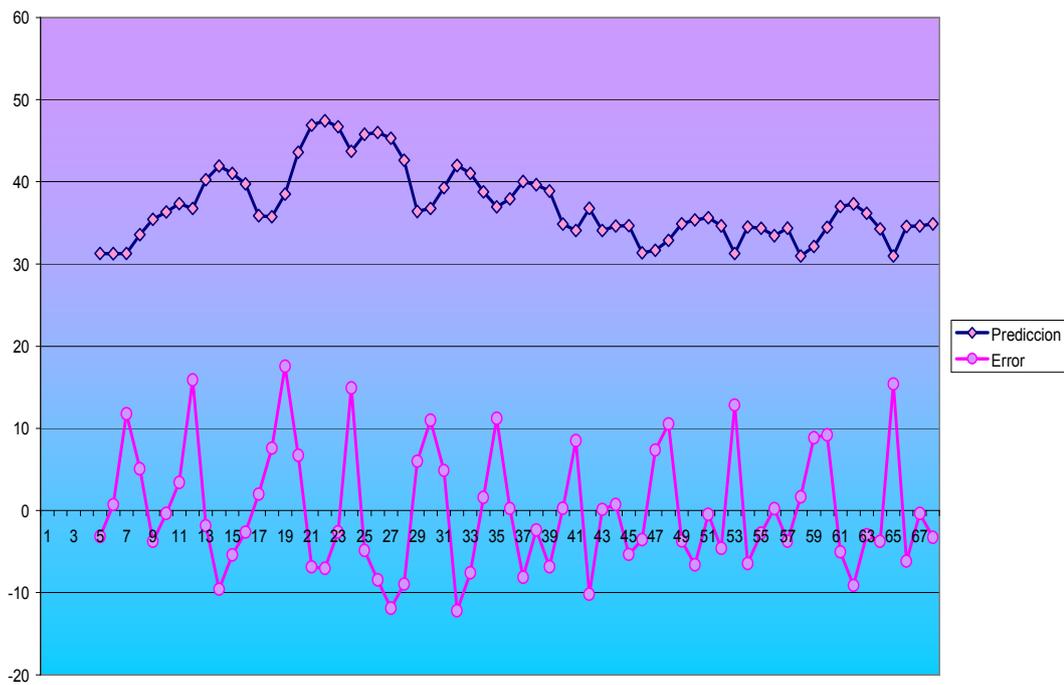
MÉTODO DE MEDIAS MÓVILES

	Serie	Predicción	Error	ECM	EAM	EAP	
1	28,21						
2	31,78						ECM = 55.41
3	33,95						EAM = 6.07
4	31,14						EAP = 0.161
5	28,1	31,27	-3,17	10,05	3,17	0,113	
6	31,95	31,24	0,71	0,50	0,7075	0,022	
7	43,07	31,29	11,79	138,89	11,785	0,274	
8	38,64	33,57	5,08	25,76	5,075	0,131	
9	31,68	35,44	-3,76	14,14	3,76	0,119	
10	35,96	36,34	-0,38	0,14	0,375	0,010	
11	40,74	37,34	3,40	11,58	3,4025	0,084	
12	52,63	36,76	15,88	252,02	15,875	0,302	
13	38,39	40,25	-1,86	3,47	1,8625	0,049	
14	32,36	41,93	-9,57	91,58	9,57	0,296	
15	35,64	41,03	-5,39	29,05	5,39	0,151	
16	37,12	39,76	-2,64	6,94	2,635	0,071	
17	37,87	35,88	1,99	3,97	1,9925	0,053	
18	43,33	35,75	7,58	57,49	7,5825	0,175	
19	56,05	38,49	17,56	308,35	17,56	0,313	
20	50,31	43,59	6,72	45,12	6,7175	0,134	
21	40,02	46,89	-6,87	47,20	6,87	0,172	
22	40,39	47,43	-7,04	49,53	7,0375	0,174	
23	44,1	46,69	-2,59	6,72	2,5925	0,059	
24	58,6	43,71	14,90	221,86	14,895	0,254	
25	40,92	45,78	-4,86	23,60	4,8575	0,119	
26	37,56	46,00	-8,44	71,28	8,4425	0,225	
27	33,4	45,30	-11,90	141,49	11,895	0,356	
28	33,66	42,62	-8,96	80,28	8,96	0,266	
29	42,39	36,39	6,01	36,06	6,005	0,142	
30	47,73	36,75	10,98	120,51	10,9775	0,230	
32	29,8	41,99	-12,19	148,54	12,1875	0,409	
33	33,44	41,02	-7,58	57,49	7,5825	0,227	
34	40,37	38,79	1,59	2,51	1,585	0,039	
35	48,15	36,95	11,21	125,55	11,205	0,233	
36	38,18	37,94	0,24	0,06	0,24	0,006	
37	31,91	40,04	-8,13	66,02	8,125	0,255	
38	37,28	39,65	-2,37	5,63	2,3725	0,064	
39	32,05	38,88	-6,83	46,65	6,83	0,213	
40	35,12	34,86	0,26	0,07	0,265	0,008	
41	42,59	34,09	8,50	72,25	8,5	0,200	
42	26,56	36,76	-10,20	104,04	10,2	0,384	
43	34,2	34,08	0,12	0,01	0,12	0,004	
44	35,35	34,62	0,73	0,54	0,7325	0,021	
45	29,32	34,68	-5,36	28,68	5,355	0,183	
46	27,82	31,36	-3,54	12,51	3,5375	0,127	
47	39,04	31,67	7,37	54,28	7,3675	0,189	
48	43,42	32,88	10,54	111,04	10,5375	0,243	
49	31,21	34,90	-3,69	13,62	3,69	0,118	
50	28,78	35,37	-6,59	43,46	6,5925	0,229	
51	35,14	35,61	-0,47	0,22	0,4725	0,013	
52	30,03	34,64	-4,61	21,23	4,6075	0,153	
53	44,11	31,29	12,82	164,35	12,82	0,291	
54	28,07	34,52	-6,45	41,54	6,445	0,230	
55	31,58	34,34	-2,76	7,60	2,7575	0,087	
56	33,66	33,45	0,21	0,05	0,2125	0,006	
57	30,62	34,36	-3,74	13,95	3,735	0,122	
58	32,64	30,98	1,66	2,75	1,6575	0,051	
59	40,97	32,13	8,85	78,23	8,845	0,216	
60	43,69	34,47	9,22	84,96	9,2175	0,211	
61	31,94	36,98	-5,04	25,40	5,04	0,158	
62	28,18	37,31	-9,13	83,36	9,13	0,324	
63	33,23	36,20	-2,97	8,79	2,965	0,089	
64	30,51	34,26	-3,75	14,06	3,75	0,123	
65	46,35	30,97	15,39	236,70	15,385	0,332	
66	28,41	34,57	-6,16	37,91	6,1575	0,217	
67	34,27	34,63	-0,35	0,13	0,355	0,010	
68	31,61	34,89	-3,28	10,73	3,275	0,104	
suma				3546,24	388,72	10,288	

MEDIAS MOVILES



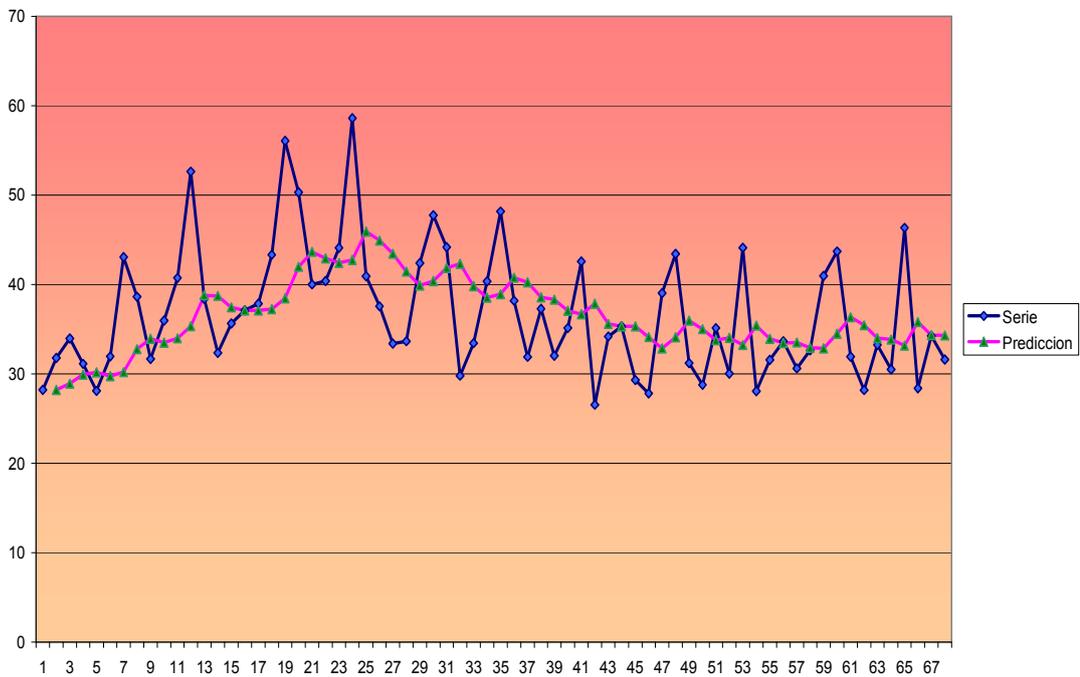
PEDICCION CON ERROR DE PREDICCION



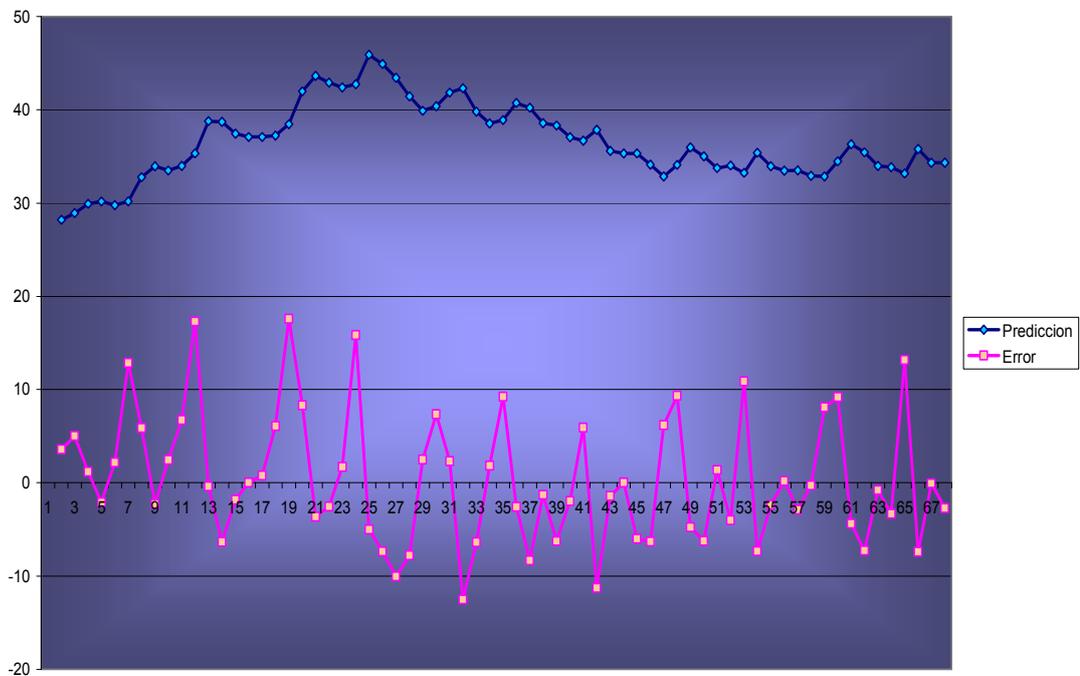
MÉTODO DE ALISADO EXPONENCIAL ($\alpha = 0.2$)

t	Serie	Predicción	Error	ECM	EAM	EAP	Estadísticos
1	28,21						
2	31,78	28,21	3,57	12,74	3,57	11,23	ECM = 47,05
3	33,95	28,92	5,03	25,26	5,03	14,80	EAM = 5,41
4	31,14	29,93	1,21	1,47	1,21	3,89	EAP = 14,44
5	28,1	30,17	-2,07	4,29	2,07	7,37	
6	31,95	29,76	2,19	4,81	2,19	6,86	
7	43,07	30,20	12,87	165,75	12,87	29,89	
8	38,64	32,77	5,87	34,45	5,87	15,19	
9	31,68	33,94	-2,26	5,13	2,26	7,15	
10	35,96	33,49	2,47	6,09	2,47	6,86	
11	40,74	33,99	6,75	45,63	6,75	16,58	
12	52,63	35,34	17,29	299,08	17,29	32,86	
13	38,39	38,79	-0,40	0,16	0,40	1,05	
14	32,36	38,71	-6,35	40,37	6,35	19,64	
15	35,64	37,44	-1,80	3,25	1,80	5,06	
16	37,12	37,08	0,04	0,00	0,04	0,10	
17	37,87	37,09	0,78	0,61	0,78	2,06	
18	43,33	37,25	6,08	37,01	6,08	14,04	
19	56,05	38,46	17,59	309,31	17,59	31,38	
20	50,31	41,98	8,33	69,38	8,33	16,56	
21	40,02	43,65	-3,63	13,15	3,63	9,06	
22	40,39	42,92	-2,53	6,41	2,53	6,27	
23	44,1	42,41	1,69	2,84	1,69	3,82	
24	58,6	42,75	15,85	251,16	15,85	27,04	
25	40,92	45,92	-5,00	25,01	5,00	12,22	
26	37,56	44,92	-7,36	54,19	7,36	19,60	
27	33,4	43,45	-10,05	100,98	10,05	30,09	
28	33,66	41,44	-7,78	60,52	7,78	23,11	
29	42,39	39,88	2,51	6,28	2,51	5,91	
30	47,73	40,38	7,35	53,95	7,35	15,39	
31	44,17	41,85	2,32	5,37	2,32	5,24	
32	29,8	42,32	-12,52	156,67	12,52	42,00	
33	33,44	39,81	-6,37	40,62	6,37	19,06	
34	40,37	38,54	1,83	3,35	1,83	4,54	
35	48,15	38,91	9,24	85,47	9,24	19,20	
36	38,18	40,75	-2,57	6,63	2,57	6,74	
37	31,91	40,24	-8,33	69,38	8,33	26,10	
38	37,28	38,57	-1,29	1,67	1,29	3,47	
39	32,05	38,31	-6,26	39,25	6,26	19,55	
40	35,12	37,06	-1,94	3,77	1,94	5,53	
41	42,59	36,67	5,92	35,01	5,92	13,89	
42	26,56	37,86	-11,30	127,62	11,30	42,53	
43	34,2	35,60	-1,40	1,95	1,40	4,09	
44	35,35	35,32	0,03	0,00	0,03	0,09	
45	29,32	35,32	-6,00	36,05	6,00	20,48	
46	27,82	34,12	-6,30	39,73	6,30	22,66	
47	39,04	32,86	6,18	38,16	6,18	15,82	
48	43,42	34,10	9,32	86,90	9,32	21,47	
49	31,21	35,96	-4,75	22,59	4,75	15,23	
50	28,78	35,01	-6,23	38,84	6,23	21,65	
51	35,14	33,77	1,37	1,89	1,37	3,91	
52	30,03	34,04	-4,01	16,08	4,01	13,36	
53	44,11	33,24	10,87	118,19	10,87	24,65	
54	28,07	35,41	-7,34	53,92	7,34	26,16	
55	31,58	33,94	-2,36	5,59	2,36	7,49	
56	33,66	33,47	0,19	0,04	0,19	0,56	
57	30,62	33,51	-2,89	8,35	2,89	9,44	
58	32,64	32,93	-0,29	0,08	0,29	0,89	
59	40,97	32,87	8,10	65,56	8,10	19,76	
60	43,69	34,49	9,20	84,60	9,20	21,05	
61	31,94	36,33	-4,39	19,29	4,39	13,75	
62	28,18	35,45	-7,27	52,90	7,27	25,81	
63	33,23	34,00	-0,77	0,59	0,77	2,31	
64	30,51	33,85	-3,34	11,12	3,34	10,93	
65	46,35	33,18	13,17	173,50	13,17	28,42	
66	28,41	35,81	-7,40	54,80	7,40	26,06	
67	34,27	34,33	-0,06	0,00	0,06	0,18	
68	31,61	34,32	-2,71	7,34	2,71	8,57	
				3152,16	362,57	967,73	

ALISADO EXPONENCIAL



PREDICION CON ERROR DE PREDICCION



3.7 PRACTICA 3: MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS PARA SERIES TIPO 2.

En esta práctica se realizará la aplicación de los métodos no paramétricos para serie tipo 2, dichas series son aquellas sin tendencia y con componente estacional.

A continuación se presenta una serie de datos con 68 observaciones de los gastos diarios de una familia.

t	Serie	t	Serie	t	Serie	t	Serie
1	28,21	21	40,02	41	42,59	61	31,94
2	31,78	22	40,39	42	26,56	62	28,18
3	33,95	23	44,1	43	34,2	63	33,23
4	31,14	24	58,6	44	35,35	64	30,51
5	28,1	25	40,92	45	29,32	65	46,35
6	31,95	26	37,56	46	27,82	66	28,41
7	43,07	27	33,4	47	39,04	67	34,27
8	38,64	28	33,66	48	43,42	68	31,61
9	31,68	29	42,39	49	31,21		
10	35,96	30	47,73	50	28,78		
11	40,74	31	44,17	51	35,14		
12	52,63	32	29,8	52	30,03		
13	38,39	33	33,44	53	44,11		
14	32,36	34	40,37	54	28,07		
15	35,64	35	48,15	55	31,58		
16	37,12	36	38,18	56	33,66		
17	37,87	37	31,91	57	30,62		
18	43,33	38	37,28	58	32,64		
19	56,05	39	32,05	59	40,97		
20	50,31	40	35,12	60	43,69		

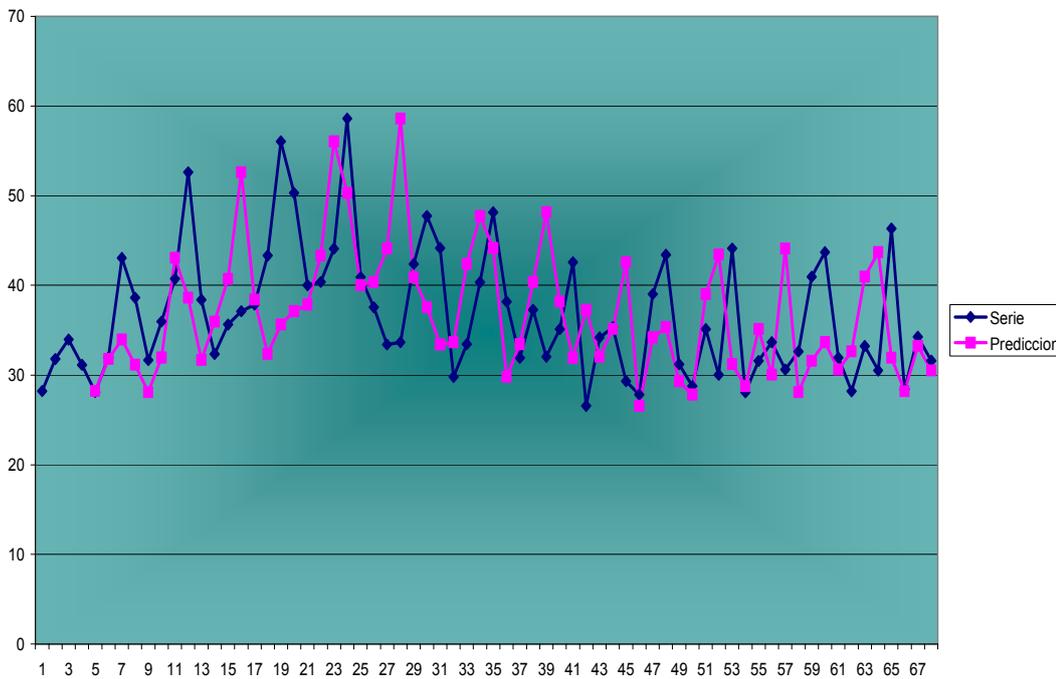
Se pide:

- ✓ Realizar los cálculos aplicando el Método Ingenuo.
- ✓ Realizar los cálculos aplicando el Método Medias Estacionales.

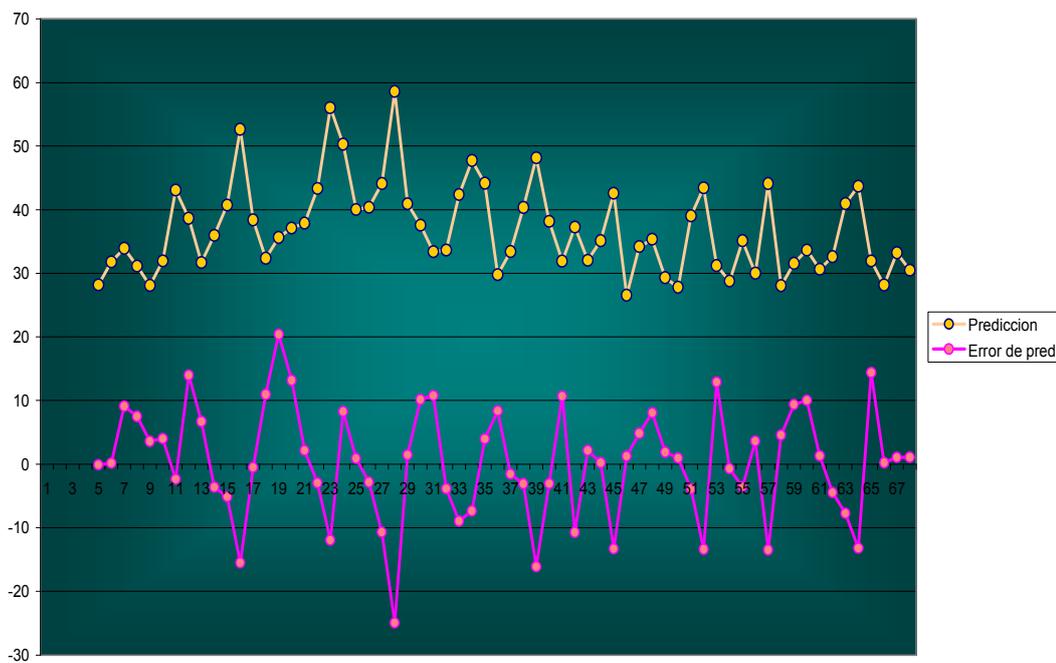
MÉTODO INGENUO.

t	Serie	Predicción	Error de	EC	EA	EAP	
1	28.21						ECM =75.96
2	31.78						EAM =6.77
3	33.95						EAPM = 17.97
4	31.14						
5	28.1	28.21	-0.11	0.012	0.11	0.39	
6	31.95	31.78	0.17	0.029	0.17	0.53	
7	43.07	33.95	9.12	83.174	9.12	21.17	
8	38.64	31.14	7.5	56.250	7.5	19.41	
9	31.68	28.1	3.58	12.816	3.58	11.30	
10	35.96	31.95	4.01	16.080	4.01	11.15	
11	40.74	43.07	-2.33	5.429	2.33	5.72	
12	52.63	38.64	13.99	195.720	13.99	26.58	
13	38.39	31.68	6.71	45.024	6.71	17.48	
14	32.36	35.96	-3.6	12.960	3.6	11.12	
15	35.64	40.74	-5.1	26.010	5.1	14.31	
16	37.12	52.63	-15.51	240.560	15.51	41.78	
17	37.87	38.39	-0.52	0.270	0.52	1.37	
18	43.33	32.36	10.97	120.341	10.97	25.32	
19	56.05	35.64	20.41	416.568	20.41	36.41	
20	50.31	37.12	13.19	173.976	13.19	26.22	
21	40.02	37.87	2.15	4.623	2.15	5.37	
22	40.39	43.33	-2.94	8.644	2.94	7.28	
23	44.1	56.05	-11.95	142.803	11.95	27.10	
24	58.6	50.31	8.29	68.724	8.29	14.15	
25	40.92	40.02	0.9	0.810	0.9	2.20	
26	37.56	40.39	-2.83	8.009	2.83	7.53	
27	33.4	44.1	-10.7	114.490	10.7	32.04	
28	33.66	58.6	-24.94	622.004	24.94	74.09	
29	42.39	40.92	1.47	2.161	1.47	3.47	
30	47.73	37.56	10.17	103.429	10.17	21.31	
31	44.17	33.4	10.77	115.993	10.77	24.38	
32	29.8	33.66	-3.86	14.900	3.86	12.95	
33	33.44	42.39	-8.95	80.103	8.95	26.76	
34	40.37	47.73	-7.36	54.170	7.36	18.23	
35	48.15	44.17	3.98	15.840	3.98	8.27	
36	38.18	29.8	8.38	70.224	8.38	21.95	
37	31.91	33.44	-1.53	2.341	1.53	4.79	
38	37.28	40.37	-3.09	9.548	3.09	8.29	
39	32.05	48.15	-16.1	259.210	16.1	50.23	
40	35.12	38.18	-3.06	9.364	3.06	8.71	
41	42.59	31.91	10.68	114.062	10.68	25.08	
42	26.56	37.28	-10.72	114.918	10.72	40.36	
43	34.2	32.05	2.15	4.623	2.15	6.29	
44	35.35	35.12	0.23	0.053	0.23	0.65	
45	29.32	42.59	-13.27	176.093	13.27	45.26	
46	27.82	26.56	1.26	1.588	1.26	4.53	
47	39.04	34.2	4.84	23.426	4.84	12.40	
48	43.42	35.35	8.07	65.125	8.07	18.59	
49	31.21	29.32	1.89	3.572	1.89	6.06	
50	28.78	27.82	0.96	0.922	0.96	3.34	
51	35.14	39.04	-3.9	15.210	3.9	11.10	
52	30.03	43.42	-13.39	179.292	13.39	44.59	
53	44.11	31.21	12.9	166.410	12.9	29.25	
54	28.07	28.78	-0.71	0.504	0.71	2.53	
55	31.58	35.14	-3.56	12.674	3.56	11.27	
56	33.66	30.03	3.63	13.177	3.63	10.78	
57	30.62	44.11	-13.49	181.980	13.49	44.06	
58	32.64	28.07	4.57	20.885	4.57	14.00	
59	40.97	31.58	9.39	88.172	9.39	22.92	
60	43.69	33.66	10.03	100.601	10.03	22.96	
61	31.94	30.62	1.32	1.742	1.32	4.13	
62	28.18	32.64	-4.46	19.892	4.46	15.83	
63	33.23	40.97	-7.74	59.908	7.74	23.29	
64	30.51	43.69	-13.18	173.712	13.18	43.20	
65	46.35	31.94	14.41	207.648	14.41	31.09	
66	28.41	28.18	0.23	0.053	0.23	0.81	
67	34.27	33.23	1.04	1.082	1.04	3.03	
68	31.61	30.51	1.1	1.210	1.1	3.48	
			SUMAS	4861.14	433.36	1150.25	

METODO INGENUO SERIE CON PREDICION



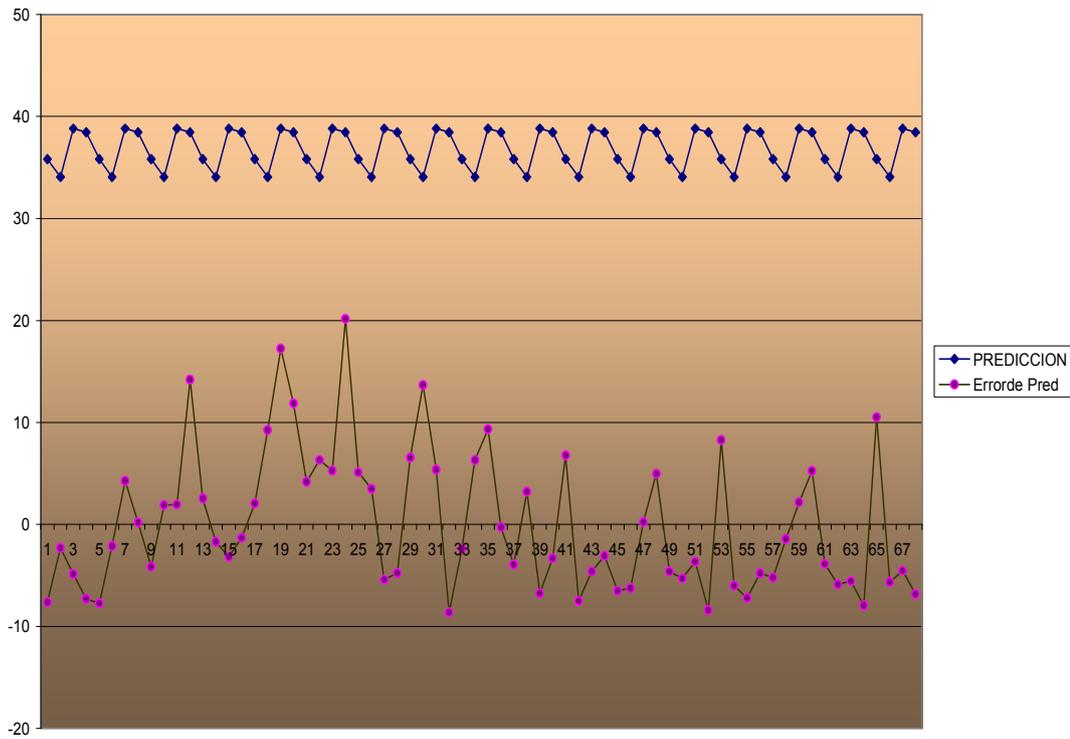
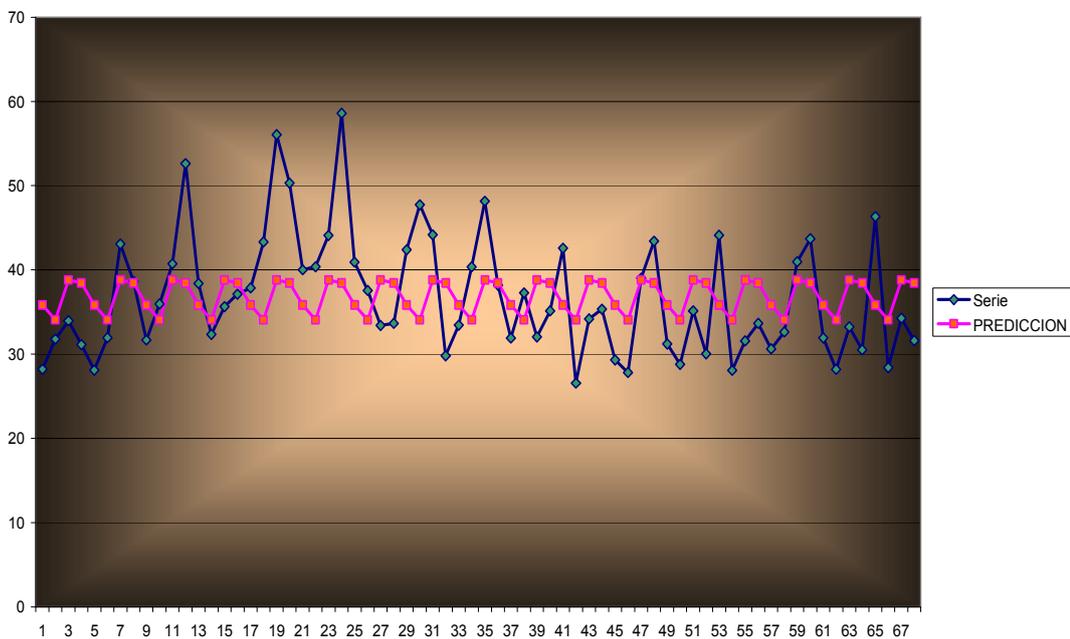
PREDICION CON ERROR DE PREDICION



MÉTODO DE MEDIAS ESTACIONALES.

t	Serie	PREDICCIÓN	Errorde Pred	EC	EA	EAP	
1	28.21	35.8276471	-7.61764706	58.0285467	7.61764706	27.0033572	ECM=45.52
2	31.78	34.0688235	-2.28882353	5.23871315	2.28882353	7.20208788	EAM=5.67
3	33.95	38.8088235	-4.85882353	23.6081661	4.85882353	14.3117041	EAPM=15.30
4	31.14	38.4394118	-7.29941176	53.2814121	7.29941176	23.4406287	
5	28.1	35.8276471	-7.72764706	59.7165291	7.72764706	27.5005233	
6	31.95	34.0688235	-2.11882353	4.48941315	2.11882353	6.63168554	
7	43.07	38.8088235	4.26117647	18.1576249	4.26117647	9.89360685	
8	38.64	38.4394118	0.20058824	0.04023564	0.20058824	0.51912069	
9	31.68	35.8276471	-4.14764706	17.2029761	4.14764706	13.0923203	
10	35.96	34.0688235	1.89117647	3.57654844	1.89117647	5.25911143	
11	40.74	38.8088235	1.93117647	3.72944256	1.93117647	4.74024661	
12	52.63	38.4394118	14.1905882	201.372794	14.1905882	26.9629265	
13	38.39	35.8276471	2.56235294	6.5656526	2.56235294	6.67453228	
14	32.36	34.0688235	-1.70882353	2.92007785	1.70882353	5.28066604	
15	35.64	38.8088235	-3.16882353	10.0414426	3.16882353	8.89119958	
16	37.12	38.4394118	-1.31941176	1.7408474	1.31941176	3.5544498	
17	37.87	35.8276471	2.04235294	4.17120554	2.04235294	5.39306296	
18	43.33	34.0688235	9.26117647	85.7693896	9.26117647	21.3735898	
19	56.05	38.8088235	17.2411765	297.258166	17.2411765	30.7603505	
20	50.31	38.4394118	11.8705882	140.910865	11.8705882	23.5948882	
21	40.02	35.8276471	4.19235294	17.5758232	4.19235294	10.4756445	
22	40.39	34.0688235	6.32117647	39.957272	6.32117647	15.6503503	
23	44.1	38.8088235	5.29117647	27.9965484	5.29117647	11.9981326	
24	58.6	38.4394118	20.1605882	406.449318	20.1605882	34.4037342	
25	40.92	35.8276471	5.09235294	25.9320585	5.09235294	12.4446553	
26	37.56	34.0688235	3.49117647	12.1883131	3.49117647	9.29493203	
27	33.4	38.8088235	-5.40882353	29.255372	5.40882353	16.1940824	
28	33.66	38.4394118	-4.77941176	22.8427768	4.77941176	14.1990843	
29	42.39	35.8276471	6.56235294	43.0644761	6.56235294	15.4808987	
30	47.73	34.0688235	13.6611765	186.627743	13.6611765	28.6217818	
31	44.17	38.8088235	5.36117647	28.7422131	5.36117647	12.1375967	
32	29.8	38.4394118	-8.63941176	74.6394356	8.63941176	28.9913146	
33	33.44	35.8276471	-2.38764706	5.70085848	2.38764706	7.14009288	
34	40.37	34.0688235	6.30117647	39.7048249	6.30117647	15.608562	
35	48.15	38.8088235	9.34117647	87.2575779	9.34117647	19.4001588	
36	38.18	38.4394118	-0.25941176	0.06729446	0.25941176	0.67944412	
37	31.91	35.8276471	-3.91764706	15.3479585	3.91764706	12.2771766	
38	37.28	34.0688235	3.21117647	10.3116543	3.21117647	8.61367079	
39	32.05	38.8088235	-6.75882353	45.6816955	6.75882353	21.0883729	
40	35.12	38.4394118	-3.31941176	11.0184945	3.31941176	9.45162803	
41	42.59	35.8276471	6.76235294	45.7294173	6.76235294	15.8777951	
42	26.56	34.0688235	-7.50882353	56.3824308	7.50882353	28.2711729	
43	34.2	38.8088235	-4.60882353	21.2412543	4.60882353	13.4760922	
44	35.35	38.4394118	-3.08941176	9.54446505	3.08941176	8.7394958	
45	29.32	35.8276471	-6.50764706	42.3494702	6.50764706	22.1952492	
46	27.82	34.0688235	-6.24882353	39.0477955	6.24882353	22.461623	
47	39.04	38.8088235	0.23117647	0.05344256	0.23117647	0.59215284	
48	43.42	38.4394118	4.98058824	24.8062592	4.98058824	11.4707237	
49	31.21	35.8276471	-4.61764706	21.3226644	4.61764706	14.7954087	
50	28.78	34.0688235	-5.28882353	27.9716543	5.28882353	18.3767322	
51	35.14	38.8088235	-3.66882353	13.4602661	3.66882353	10.4405906	
52	30.03	38.4394118	-8.40941176	70.7182062	8.40941176	28.0033692	
53	44.11	35.8276471	8.28235294	68.5973702	8.28235294	18.7765879	
54	28.07	34.0688235	-5.99882353	35.9858837	5.99882353	21.3709424	
55	31.58	38.8088235	-7.22882353	52.2558896	7.22882353	22.8905115	
56	33.66	38.4394118	-4.77941176	22.8427768	4.77941176	14.1990843	
57	30.62	35.8276471	-5.20764706	27.1195879	5.20764706	17.0073385	
58	32.64	34.0688235	-1.42882353	2.04153668	1.42882353	4.37752307	
59	40.97	38.8088235	2.16117647	4.67068374	2.16117647	5.2750219	
60	43.69	38.4394118	5.25058824	27.5686768	5.25058824	12.0178261	
61	31.94	35.8276471	-3.88764706	15.1137997	3.88764706	12.171719	
62	28.18	34.0688235	-5.88882353	34.6782426	5.88882353	20.8971736	
63	33.23	38.8088235	-5.57882353	31.123272	5.57882353	16.788515	
64	30.51	38.4394118	-7.92941176	62.8755709	7.92941176	25.9895502	
65	46.35	35.8276471	10.5223529	110.719911	10.5223529	22.7019481	
66	28.41	34.0688235	-5.65882353	32.0222837	5.65882353	19.9184214	
67	34.27	38.8088235	-4.53882353	20.600919	4.53882353	13.2443056	
68	31.61	38.4394118	-6.82941176	46.6408651	6.82941176	21.6052254	
SUMAS				3095.66635	385.26	1040.16347	

MEDIAS ESTACIONALES SERIE CON PREDICION



3.8 PRÁCTICA 4: MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS PARA SERIES TIPO 3.

En esta práctica se realizará la aplicación de los métodos no paramétricos para serie tipo 3, dichas series son aquellas con tendencia y sin componente estacional.

A continuación se presenta una serie de datos con 68 observaciones de los gastos diarios de una familia.

t	Serie	t	Serie	t	Serie	t	Serie
1	28,21	21	40,02	41	42,59	61	31,94
2	31,78	22	40,39	42	26,56	62	28,18
3	33,95	23	44,1	43	34,2	63	33,23
4	31,14	24	58,6	44	35,35	64	30,51
5	28,1	25	40,92	45	29,32	65	46,35
6	31,95	26	37,56	46	27,82	66	28,41
7	43,07	27	33,4	47	39,04	67	34,27
8	38,64	28	33,66	48	43,42	68	31,61
9	31,68	29	42,39	49	31,21		
10	35,96	30	47,73	50	28,78		
11	40,74	31	44,17	51	35,14		
12	52,63	32	29,8	52	30,03		
13	38,39	33	33,44	53	44,11		
14	32,36	34	40,37	54	28,07		
15	35,64	35	48,15	55	31,58		
16	37,12	36	38,18	56	33,66		
17	37,87	37	31,91	57	30,62		
18	43,33	38	37,28	58	32,64		
19	56,05	39	32,05	59	40,97		
20	50,31	40	35,12	60	43,69		

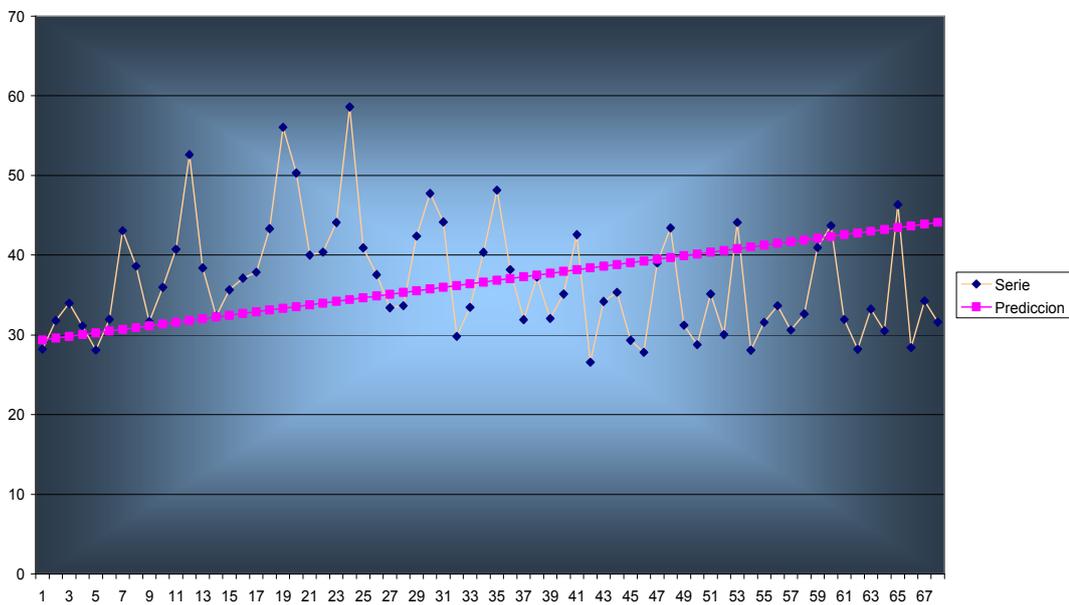
Se pide:

- ✓ Realizar los cálculos aplicando el Método de Tendencia Lineal.
- ✓ Realizar los cálculos aplicando el Método Dobles Medias Móviles.
- ✓ Realizar los cálculos aplicando el Método de Alisado Exponencial de Holt.

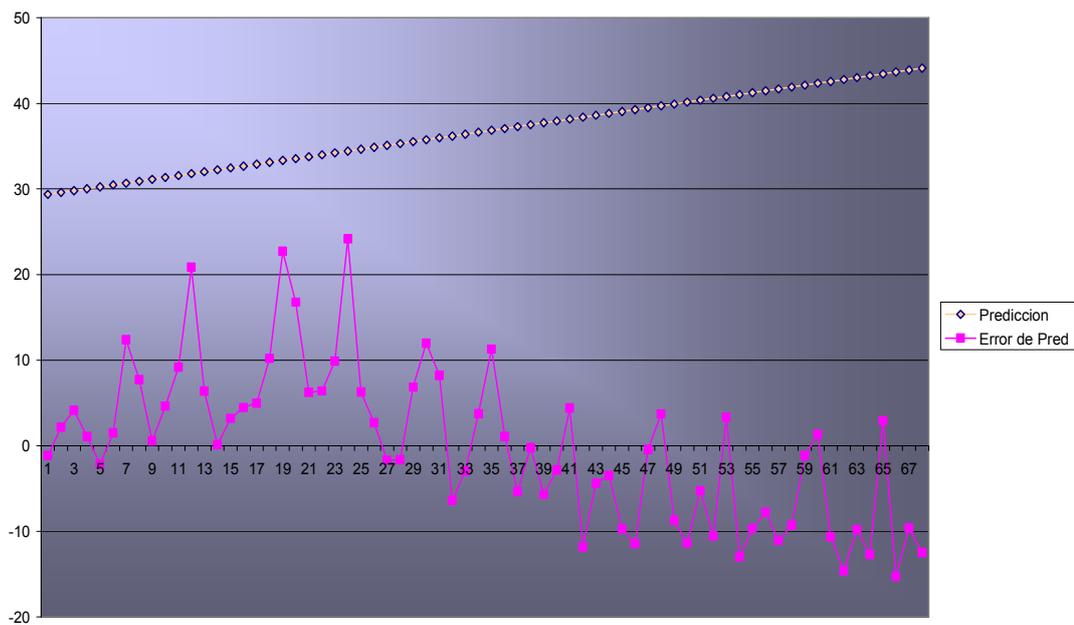
TENDENCIA LINEAL

t	Serie	Predicción	Error de Pred	EC	EA	EAP
1	28.21	29.37	-1.16	1.35	1.16	4.11
2	31.78	29.59	2.19	4.80	2.19	6.89
3	33.95	29.81	4.14	17.14	4.14	12.19
4	31.14	30.03	1.11	1.23	1.11	3.56
5	28.1	30.25	-2.15	4.62	2.15	7.65
6	31.95	30.47	1.48	2.19	1.48	4.63
7	43.07	30.69	12.38	153.26	12.38	28.74
8	38.64	30.91	7.73	59.75	7.73	20.01
9	31.68	31.13	0.55	0.30	0.55	1.74
10	35.96	31.35	4.61	21.25	4.61	12.82
11	40.74	31.57	9.17	84.09	9.17	22.51
12	52.63	31.79	20.84	434.31	20.84	39.60
13	38.39	32.01	6.38	40.70	6.38	16.62
14	32.36	32.23	0.13	0.02	0.13	0.40
15	35.64	32.45	3.19	10.18	3.19	8.95
16	37.12	32.67	4.45	19.80	4.45	11.99
17	37.87	32.89	4.98	24.80	4.98	13.15
18	43.33	33.11	10.22	104.45	10.22	23.59
19	56.05	33.33	22.72	516.20	22.72	40.54
20	50.31	33.55	16.76	280.90	16.76	33.31
21	40.02	33.77	6.25	39.06	6.25	15.62
22	40.39	33.99	6.4	40.96	6.4	15.85
23	44.1	34.21	9.89	97.81	9.89	22.43
24	58.6	34.43	24.17	584.19	24.17	41.25
25	40.92	34.65	6.27	39.31	6.27	15.32
26	37.56	34.87	2.69	7.24	2.69	7.16
27	33.4	35.09	-1.69	2.86	1.69	5.06
28	33.66	35.31	-1.65	2.72	1.65	4.90
29	42.39	35.53	6.86	47.06	6.86	16.18
30	47.73	35.75	11.98	143.52	11.98	25.10
31	44.17	35.97	8.2	67.24	8.2	18.56
32	29.8	36.19	-6.39	40.83	6.39	21.44
33	33.44	36.41	-2.97	8.82	2.97	8.88
34	40.37	36.63	3.74	13.99	3.74	9.26
35	48.15	36.85	11.3	127.69	11.3	23.47
36	38.18	37.07	1.11	1.23	1.11	2.91
37	31.91	37.29	-5.38	28.94	5.38	16.86
38	37.28	37.51	-0.23	0.05	0.23	0.62
39	32.05	37.73	-5.68	32.26	5.68	17.72
40	35.12	37.95	-2.83	8.01	2.83	8.06
41	42.59	38.17	4.42	19.54	4.42	10.38
42	26.56	38.39	-11.83	139.95	11.83	44.54
43	34.2	38.61	-4.41	19.45	4.41	12.89
44	35.35	38.83	-3.48	12.11	3.48	9.84
45	29.32	39.05	-9.73	94.67	9.73	33.19
46	27.82	39.27	-11.45	131.10	11.45	41.16
47	39.04	39.49	-0.45	0.20	0.45	1.15
48	43.42	39.71	3.71	13.76	3.71	8.54
49	31.21	39.93	-8.72	76.04	8.72	27.94
50	28.78	40.15	-11.37	129.28	11.37	39.51
51	35.14	40.37	-5.23	27.35	5.23	14.88
52	30.03	40.59	-10.56	111.51	10.56	35.16
53	44.11	40.81	3.3	10.89	3.3	7.48
54	28.07	41.03	-12.96	167.96	12.96	46.17
55	31.58	41.25	-9.67	93.51	9.67	30.62
56	33.66	41.47	-7.81	61.00	7.81	23.20
57	30.62	41.69	-11.07	122.54	11.07	36.15
58	32.64	41.91	-9.27	85.93	9.27	28.40
59	40.97	42.13	-1.16	1.35	1.16	2.83
60	43.69	42.35	1.34	1.80	1.34	3.07
61	31.94	42.57	-10.63	113.00	10.63	33.28
62	28.18	42.79	-14.61	213.45	14.61	51.85
63	33.23	43.01	-9.78	95.65	9.78	29.43
64	30.51	43.23	-12.72	161.80	12.72	41.69
65	46.35	43.45	2.9	8.41	2.9	6.26
66	28.41	43.67	-15.26	232.87	15.26	53.71
67	34.27	43.89	-9.62	92.54	9.62	28.07
68	31.61	44.11	-12.5	156.25	12.5	39.54
				5509.05	491.98	1350.61
				FCM =	81.02	
				EAM =	7.235	
				EAPM =	19.86	

TENDENCIA LINEAL SERIE CON PREDICCIÓN



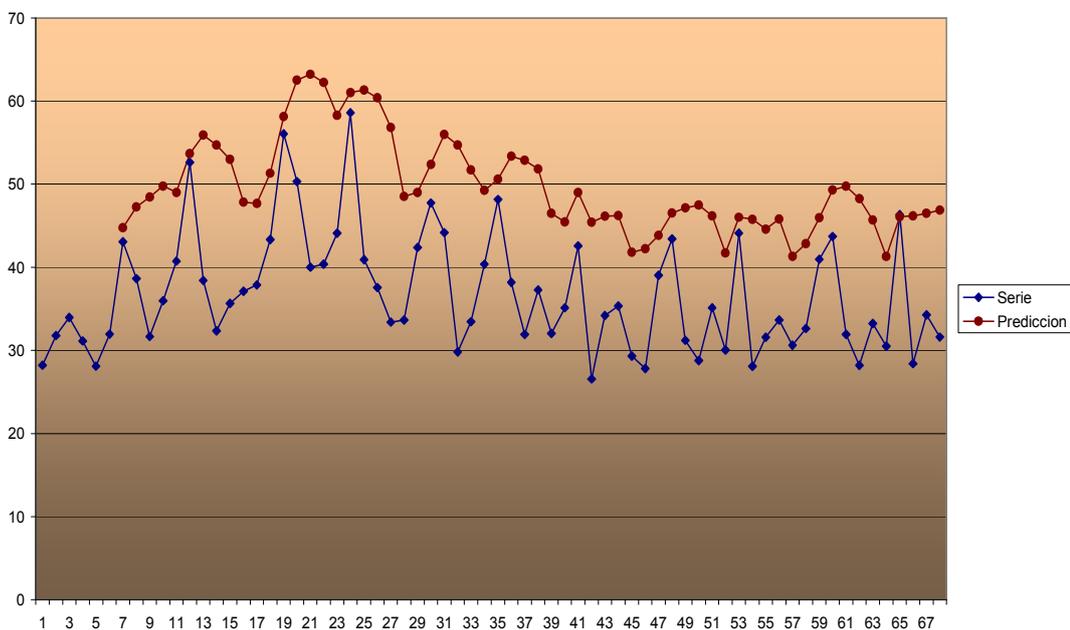
PREDICCIÓN CON ERROR DE PREDICCIÓN



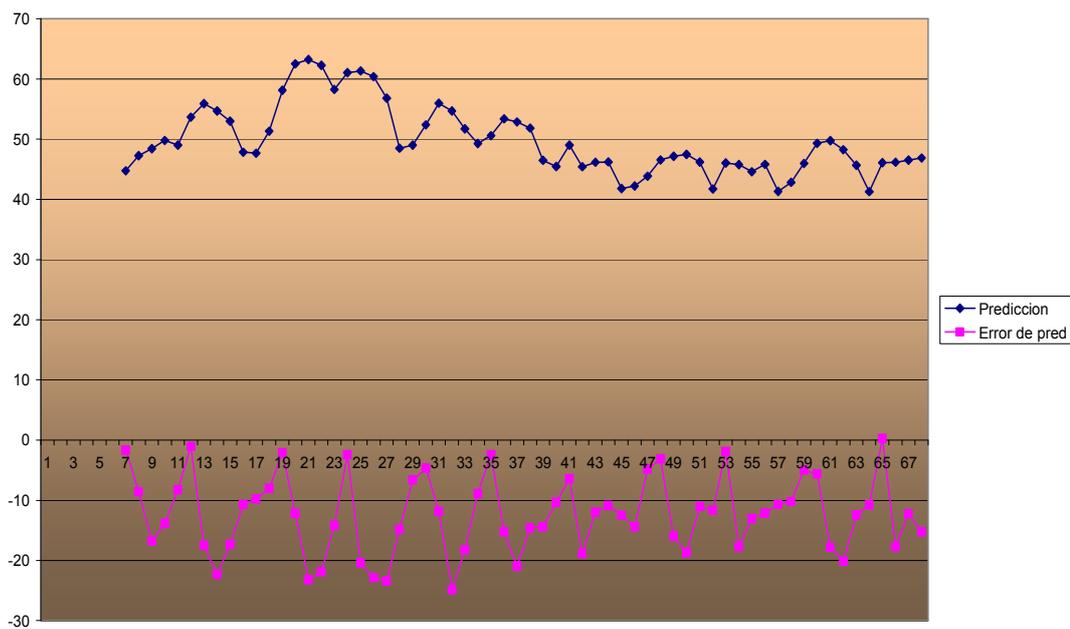
DOBLES MEDIAS MÓVILES

t	Serie	MM(4)	DMM(4)	Tendencia	Pendiente	Predicción	Error de	FC	EA	FAP
1	28.21									
2	31.78									
3	33.95									
4	31.14	31.27								
5	28.1	31.2425								
6	31.95	31.285								
7	43.07	33.565	31.84	35.29	9.46	44.75	-1.68	2.83	1.683	3.91
8	38.64	35.44	32.88	38.00	9.26	47.25	-8.61	74.19	8.613	22.29
9	31.68	36.335	34.16	38.51	9.93	48.45	-16.77	281.12	16.767	52.93
10	35.96	37.3375	35.67	39.01	10.78	49.78	-13.82	191.08	13.823	38.44
11	40.74	36.755	36.47	37.04	11.96	49.01	-8.27	68.34	8.267	20.29
12	52.63	40.2525	37.67	42.84	10.84	53.67	-1.04	1.08	1.040	1.98
13	38.39	41.93	39.07	44.79	11.12	55.91	-17.52	306.83	17.517	45.63
14	32.36	41.03	39.99	42.07	12.64	54.71	-22.35	499.37	22.347	69.06
15	35.64	39.755	40.74	38.77	14.24	53.01	-17.37	301.60	17.367	48.73
16	37.12	35.8775	39.65	32.11	15.73	47.84	-10.72	114.85	10.717	28.87
17	37.87	35.7475	38.10	33.39	14.27	47.66	-9.79	95.91	9.793	25.86
18	43.33	38.49	37.47	39.51	11.81	51.32	-7.99	63.84	7.990	18.44
19	56.05	43.5925	38.43	48.76	9.37	58.12	-2.07	4.30	2.073	3.70
20	50.31	46.89	41.18	52.60	9.92	62.52	-12.21	149.08	12.210	24.27
21	40.02	47.4275	44.10	50.76	12.48	63.24	-23.22	539.01	23.217	58.01
22	40.39	46.6925	46.15	47.23	15.02	62.26	-21.87	478.15	21.867	54.14
23	44.1	43.705	46.18	41.23	17.04	58.27	-14.17	200.88	14.173	32.14
24	58.6	45.7775	45.90	45.65	15.38	61.04	-2.44	5.94	2.437	4.16
25	40.92	46.0025	45.54	46.46	14.88	61.34	-20.42	416.84	20.417	49.89
26	37.56	45.295	45.20	45.40	15.00	60.39	-22.83	521.36	22.833	60.79
27	33.4	42.62	44.92	40.32	16.51	56.83	-23.43	548.81	23.427	70.14
28	33.66	36.385	42.58	30.19	18.32	48.51	-14.85	220.62	14.853	44.13
29	42.39	36.7525	40.26	33.24	15.76	49.00	-6.61	43.74	6.613	15.60
30	47.73	39.295	38.76	39.83	12.57	52.39	-4.66	21.75	4.663	9.77
31	44.17	41.9875	38.61	45.37	10.61	55.98	-11.81	139.55	11.813	26.75
32	29.8	41.0225	39.76	42.28	12.42	54.70	-24.90	619.84	24.897	83.55
33	33.44	38.785	40.27	37.30	14.42	51.71	-18.27	333.91	18.273	54.65
34	40.37	36.945	39.69	34.21	15.06	49.26	-8.89	79.03	8.890	22.02
35	48.15	37.94	38.67	37.21	13.38	50.59	-2.44	5.94	2.437	5.06
36	38.18	40.035	38.43	41.64	11.74	53.38	-15.20	231.04	15.200	39.81
37	31.91	39.6525	38.64	40.66	12.21	52.87	-20.96	439.32	20.960	65.68
38	37.28	38.88	39.13	38.63	13.21	51.84	-14.56	211.99	14.560	39.06
39	32.05	34.855	38.36	31.35	15.12	46.47	-14.42	208.03	14.423	45.00
40	35.12	34.09	36.87	31.31	14.14	45.45	-10.33	106.78	10.333	29.42
41	42.59	36.76	36.15	37.37	11.64	49.01	-6.42	41.26	6.423	15.08
42	26.56	34.08	34.95	33.21	12.23	45.44	-18.88	356.45	18.880	71.08
43	34.2	34.6175	34.89	34.35	11.81	46.16	-11.96	142.96	11.957	34.96
44	35.35	34.675	35.03	34.32	11.92	46.23	-10.88	118.45	10.883	30.79
45	29.32	31.3575	33.68	29.03	12.78	41.81	-12.49	156.00	12.490	42.60
46	27.82	31.6725	33.08	30.26	11.97	42.23	-14.41	207.65	14.410	51.80
47	39.04	32.8825	32.65	33.12	10.73	43.84	-4.80	23.07	4.803	12.30
48	43.42	34.9	32.70	37.10	9.44	46.53	-3.11	9.69	3.113	7.17
49	31.21	35.3725	33.71	37.04	10.13	47.16	-15.95	254.51	15.953	51.12
50	28.78	35.6125	34.69	36.53	10.95	47.48	-18.70	349.81	18.703	64.99
51	35.14	34.6375	35.13	34.14	12.04	46.18	-11.04	121.96	11.043	31.43
52	30.03	31.29	34.23	28.35	13.37	41.72	-11.69	136.66	11.690	38.93
53	44.11	34.515	34.01	35.02	11.00	46.02	-1.91	3.65	1.910	4.33
54	28.07	34.3375	33.70	34.98	10.80	45.78	-17.71	313.76	17.713	63.10
55	31.58	33.4475	33.40	33.50	11.10	44.60	-13.02	169.43	13.017	41.22
56	33.66	34.355	34.16	34.55	11.26	45.81	-12.15	147.54	12.147	36.09
57	30.62	30.9825	33.28	28.68	12.63	41.31	-10.69	114.28	10.690	34.91
58	32.64	32.125	32.73	31.52	11.31	42.83	-10.19	103.90	10.193	31.23
59	40.97	34.4725	32.98	35.96	10.00	45.96	-4.99	24.93	4.993	12.19
60	43.69	36.98	33.64	40.32	8.99	49.31	-5.62	31.55	5.617	12.86
61	31.94	37.31	35.22	39.40	10.35	49.75	-17.81	317.08	17.807	55.75
62	28.18	36.195	36.24	36.15	12.11	48.26	-20.08	403.21	20.080	71.26
63	33.23	34.26	36.19	32.33	13.35	45.68	-12.45	155.00	12.450	37.47
64	30.51	30.965	34.68	27.25	14.04	41.29	-10.78	116.14	10.777	35.32
65	46.35	34.5675	34.00	35.14	10.95	46.09	0.26	0.07	0.260	0.56
66	28.41	34.625	33.60	35.65	10.52	46.17	-17.76	315.30	17.757	62.50
67	34.27	34.885	33.76	36.01	10.50	46.51	-12.24	149.90	12.243	35.73
68	31.61	35.16	34.81	35.51	11.37	46.88	-15.27	233.17	15.270	48.31
							SUMA	12044.36	769.767	2249.21
							ECM =	188.19		
							EAM =	12.03		
							FAPM =	35.14		

DOBLES MEDIAS MOVIL SERIE CON PREDICION



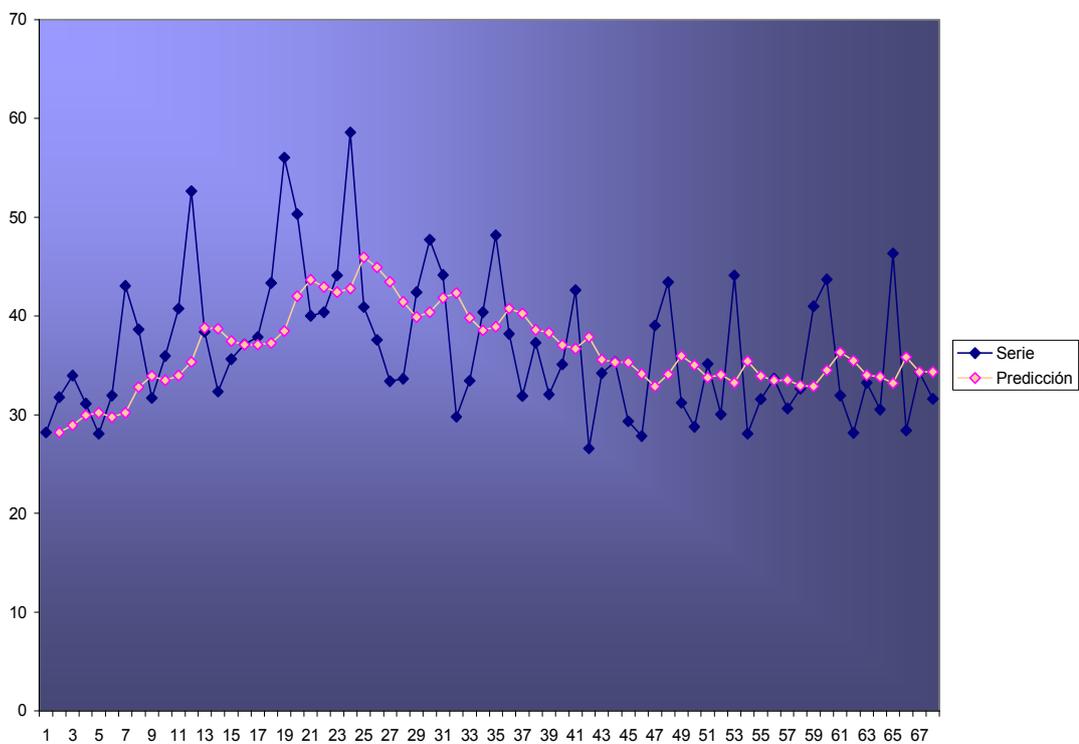
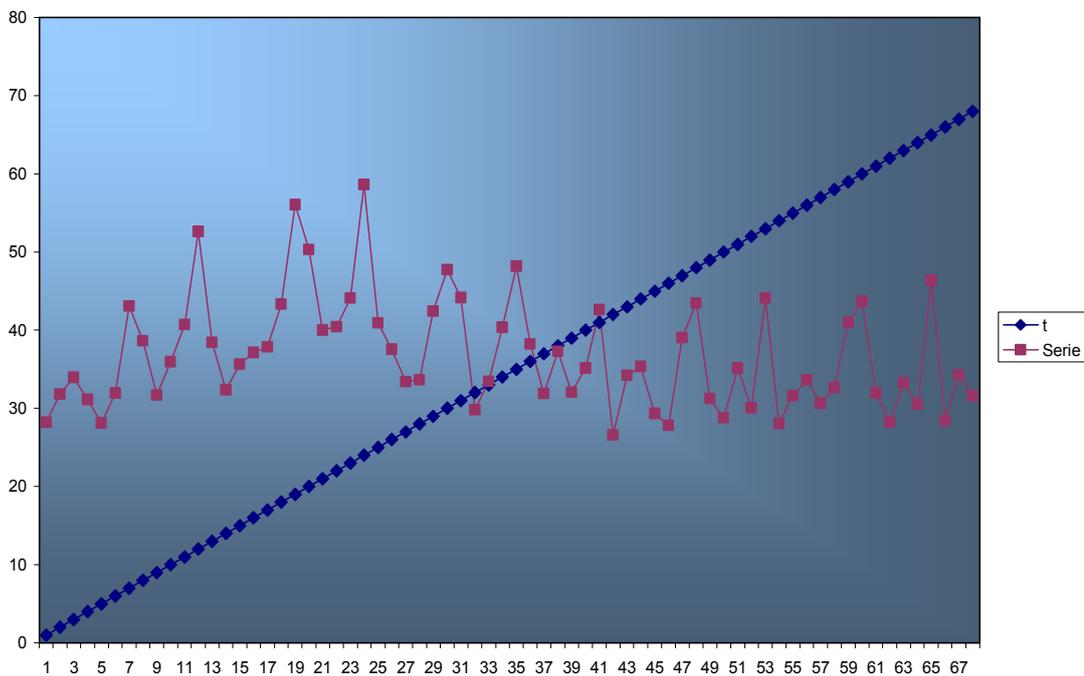
PREDICION CON ERROR



ALISADO EXPONENCIAL

t	Serie	Predicción	Error predicción	EC	EA	EAP	Estadísticos
1	28.21						
2	31.78	28.21	3.6	12.74	3.6	11.23	ECM= 46.36
3	33.95	28.924	5.0	25.26	5.0	14.80	EAM= 5.33
4	31.14	29.93	1.2	1.47	1.2	3.89	EAPM= 14.23
5	28.1	30.17	-2.1	4.29	2.1	7.37	
6	31.95	29.76	2.2	4.81	2.2	6.86	
7	43.07	30.20	12.9	165.75	12.9	29.89	
8	38.64	32.77	5.9	34.45	5.9	15.19	
9	31.68	33.94	-2.3	5.13	2.3	7.15	
10	35.96	33.49	2.5	6.09	2.5	6.86	
11	40.74	33.99	6.8	45.63	6.8	16.58	
12	52.63	35.34	17.3	299.08	17.3	32.86	
13	38.39	38.79	-0.4	0.16	0.4	1.05	
14	32.36	38.71	-6.4	40.37	6.4	19.64	
15	35.64	37.44	-1.8	3.25	1.8	5.06	
16	37.12	37.08	0.0	0.00	0.0	0.10	
17	37.87	37.09	0.8	0.61	0.8	2.06	
18	43.33	37.25	6.1	37.01	6.1	14.04	
19	56.05	38.46	17.6	309.31	17.6	31.38	
20	50.31	41.98	8.3	69.38	8.3	16.56	
21	40.02	43.65	-3.6	13.15	3.6	9.06	
22	40.39	42.92	-2.5	6.41	2.5	6.27	
23	44.1	42.41	1.7	2.84	1.7	3.82	
24	58.6	42.75	15.8	251.16	15.8	27.04	
25	40.92	45.92	-5.0	25.01	5.0	12.22	
26	37.56	44.92	-7.4	54.19	7.4	19.60	
27	33.4	43.45	-10.0	100.98	10.0	30.09	
28	33.66	41.44	-7.8	60.52	7.8	23.11	
29	42.39	39.88	2.5	6.28	2.5	5.91	
30	47.73	40.38	7.3	53.95	7.3	15.39	
31	44.17	41.85	2.3	5.37	2.3	5.24	
32	29.8	42.32	-12.5	156.67	12.5	42.00	
33	33.44	39.81	-6.4	40.62	6.4	19.06	
34	40.37	38.54	1.8	3.35	1.8	4.54	
35	48.15	38.91	9.2	85.47	9.2	19.20	
36	38.18	40.75	-2.6	6.63	2.6	6.74	
37	31.91	40.24	-8.3	69.38	8.3	26.10	
38	37.28	38.57	-1.3	1.67	1.3	3.47	
39	32.05	38.31	-6.3	39.25	6.3	19.55	
40	35.12	37.06	-1.9	3.77	1.9	5.53	
41	42.59	36.67	5.9	35.01	5.9	13.89	
42	26.56	37.86	-11.3	127.62	11.3	42.53	
43	34.2	35.60	-1.4	1.95	1.4	4.09	
44	35.35	35.32	0.0	0.00	0.0	0.09	
45	29.32	35.32	-6.0	36.05	6.0	20.48	
46	27.82	34.12	-6.3	39.73	6.3	22.66	
47	39.04	32.86	6.2	38.16	6.2	15.82	
48	43.42	34.10	9.3	86.90	9.3	21.47	
49	31.21	35.96	-4.8	22.59	4.8	15.23	
50	28.78	35.01	-6.2	38.84	6.2	21.65	
51	35.14	33.77	1.4	1.89	1.4	3.91	
52	30.03	34.04	-4.0	16.08	4.0	13.36	
53	44.11	33.24	10.9	118.19	10.9	24.65	
54	28.07	35.41	-7.3	53.92	7.3	26.16	
55	31.58	33.94	-2.4	5.59	2.4	7.49	
56	33.66	33.47	0.2	0.04	0.2	0.56	
57	30.62	33.51	-2.9	8.35	2.9	9.44	
58	32.64	32.93	-0.3	0.08	0.3	0.89	
59	40.97	32.87	8.1	65.56	8.1	19.76	
60	43.69	34.49	9.2	84.60	9.2	21.05	
61	31.94	36.33	-4.4	19.29	4.4	13.75	
62	28.18	35.45	-7.3	52.90	7.3	25.81	
63	33.23	34.00	-0.8	0.59	0.8	2.31	
64	30.51	33.85	-3.3	11.12	3.3	10.93	
65	46.35	33.18	13.2	173.50	13.2	28.42	
66	28.41	35.81	-7.4	54.80	7.4	26.06	
67	34.27	34.33	-0.1	0.00	0.1	0.18	
68	31.61	34.32	-2.7	7.34	2.7	8.57	

Alisado Exponencial



3.9 PRACTICA 5: MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS PARA SERIES TIPO 4.

En esta práctica se realizará la aplicación de los métodos no paramétricos para serie tipo 3, dichas series son aquellas con tendencia y con componente estacional.

A continuación se presenta una serie de datos con 68 observaciones de los gastos diarios de una familia.

t	Serie	t	Serie	t	Serie	t	Serie
1	28,21	21	40,02	41	42,59	61	31,94
2	31,78	22	40,39	42	26,56	62	28,18
3	33,95	23	44,1	43	34,2	63	33,23
4	31,14	24	58,6	44	35,35	64	30,51
5	28,1	25	40,92	45	29,32	65	46,35
6	31,95	26	37,56	46	27,82	66	28,41
7	43,07	27	33,4	47	39,04	67	34,27
8	38,64	28	33,66	48	43,42	68	31,61
9	31,68	29	42,39	49	31,21		
10	35,96	30	47,73	50	28,78		
11	40,74	31	44,17	51	35,14		
12	52,63	32	29,8	52	30,03		
13	38,39	33	33,44	53	44,11		
14	32,36	34	40,37	54	28,07		
15	35,64	35	48,15	55	31,58		
16	37,12	36	38,18	56	33,66		
17	37,87	37	31,91	57	30,62		
18	43,33	38	37,28	58	32,64		
19	56,05	39	32,05	59	40,97		
20	50,31	40	35,12	60	43,69		

Se pide:

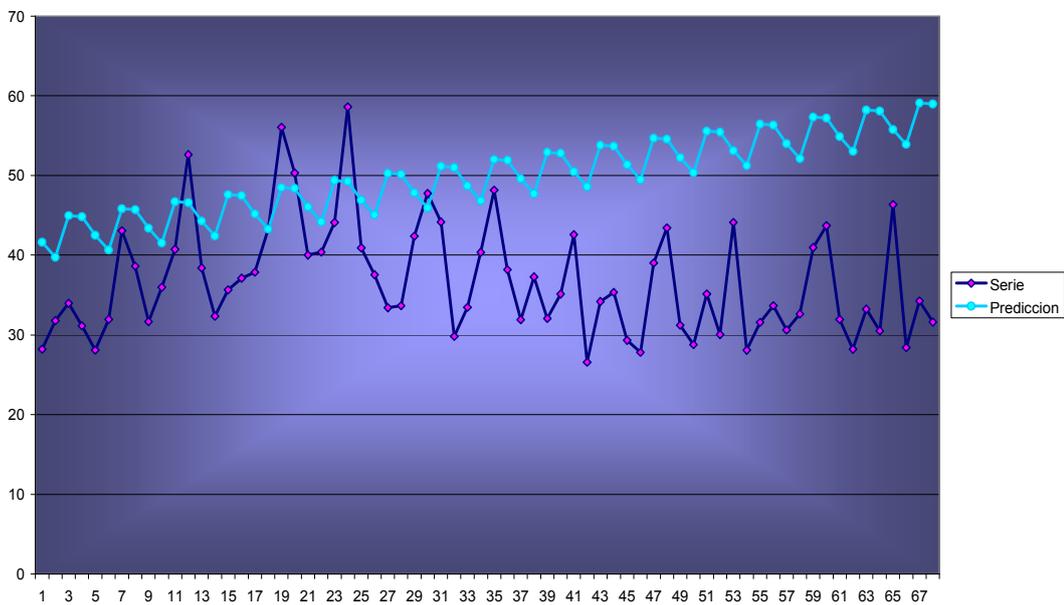
- ✓ Realizar los cálculos aplicando el Método de Descomposición.
- ✓ Realizar los cálculos aplicando el Método de Tendencia Lineal con Variable Ficticia.
- ✓ Realizar los cálculos aplicando el Método de Alisado Exponencial de Holt Winters.

MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN

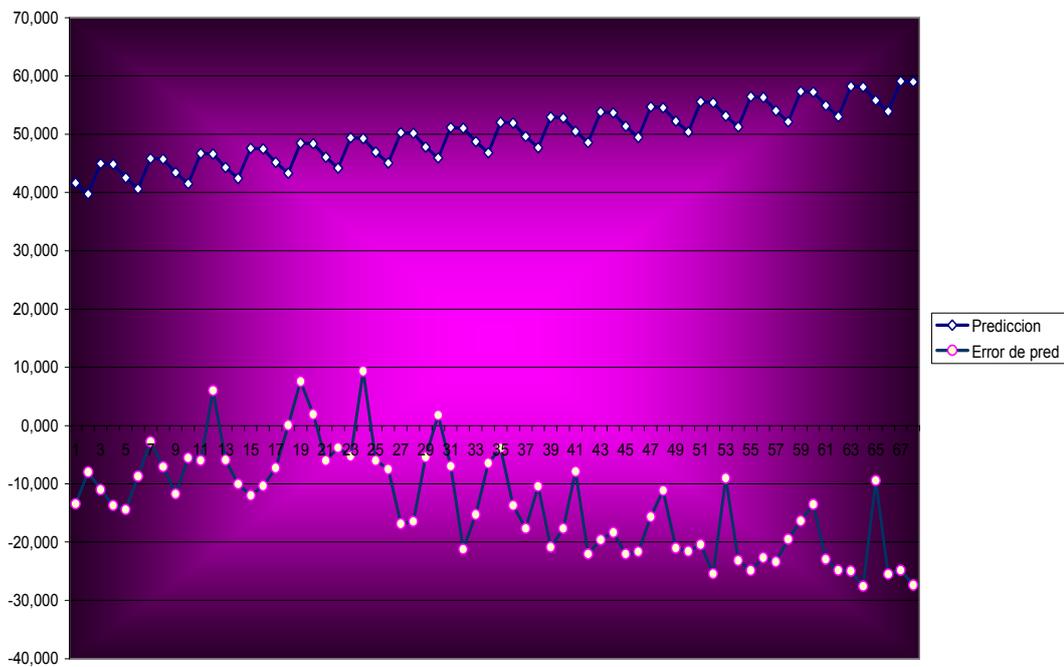
t	Serie	MM	MMC	1 ^a tri	2 ^a tri	3 ^a tri	4 ^a tri	Desest	Predicción	Error de pred	ECM	EAM	EAP
1	28,21							15,950	41,631	-13,421	180,127	13,421	47,576
2	31,78							21,618	39,754	-7,974	63,586	7,974	25,092
3	33,95	31,3	31,256			2,694		18,810	44,953	-11,003	121,076	11,003	32,411
4	31,14	31,2	31,264				-0,124	16,341	44,833	-13,693	187,494	13,693	43,972
5	28,1	31,3	32,425	-4,325				15,840	42,515	-14,415	207,797	14,415	51,299
6	31,95	33,6	34,503		-2,553			21,788	40,638	-8,688	75,483	8,688	27,193
7	43,07	35,4	35,888			7,183		27,930	45,837	-2,767	7,659	2,767	6,426
8	38,64	36,3	36,836				1,804	23,841	45,717	-7,077	50,081	7,077	18,315
9	31,68	37,3	37,046	-5,366				19,420	43,399	-11,719	137,339	11,719	36,992
10	35,96	36,8	38,504		-2,544			25,798	41,522	-5,562	30,937	5,562	15,467
11	40,74	40,3	41,091			-0,351		25,600	46,721	-5,981	35,778	5,981	14,682
12	52,63	41,9	41,480				11,150	37,831	46,601	6,029	36,351	6,029	11,456
13	38,39	41,0	40,393	-2,003				26,130	44,283	-5,893	34,729	5,893	15,351
14	32,36	39,8	37,816		-5,456			22,198	42,406	-10,046	100,924	10,046	31,045
15	35,64	35,9	35,813			-0,172		20,500	47,605	-11,965	143,172	11,965	33,573
16	37,12	35,7	37,119				0,001	22,321	47,485	-10,365	107,430	10,365	27,922
17	37,87	38,5	41,041	-3,171				24,860	45,167	-7,297	53,248	7,297	19,269
18	43,33	43,6	45,241		-1,911			27,708	43,290	0,040	0,002	0,040	0,092
19	56,05	46,9	47,159			8,891		28,190	48,489	7,561	57,162	7,561	13,489
20	50,31	47,4	47,060				3,250	41,251	48,369	1,941	3,768	1,941	3,858
21	40,02	46,7	45,199	-5,179				27,760	46,051	-6,031	36,375	6,031	15,070
22	40,39	43,7	44,741		-4,351			30,228	44,174	-3,784	14,319	3,784	9,369
23	44,1	45,8	45,890			-1,790		28,960	49,373	-5,273	27,809	5,273	11,958
24	58,6	46,0	45,649				12,951	43,801	49,253	9,347	87,370	9,347	15,951
25	40,92	45,3	43,958	-3,038				28,660	46,935	-6,015	36,182	6,015	14,700
26	37,56	42,6	39,503		-1,943			27,398	45,058	-7,498	56,222	7,498	19,963
27	33,4	36,4	36,569			-3,169		18,260	50,257	-16,857	284,174	16,857	50,471
28	33,66	36,8	38,024				-4,364	18,861	50,137	-16,477	271,486	16,477	48,951
29	42,39	39,3	40,641	1,749				30,130	47,819	-5,429	29,476	5,429	12,808
30	47,73	42,0	41,505		6,225			37,568	45,942	1,788	3,197	1,788	3,746
31	44,17	41,0	39,904			4,266		29,030	51,141	-6,971	48,601	6,971	15,783
32	29,8	38,8	37,865				-8,065	15,001	51,021	-21,221	450,324	21,221	71,211
33	33,44	36,9	37,443	-4,003				21,190	48,703	-15,263	232,964	15,263	45,643
34	40,37	37,9	38,988		1,383			30,208	46,826	-6,456	41,681	6,456	15,992
35	48,15	40,0	39,844			8,306		33,010	52,025	-3,875	15,019	3,875	8,049

media $y^* \sum t$	80937,0		$\hat{S}=(s1^* - S(\text{media}))$	12,260
media $t^* \sum y$	92019,15		$\hat{S}=(s2^* - S(\text{media}))$	10,162
			$\hat{S}=(s3^* - S(\text{media}))$	15,140
$\sum t^* t - \text{mediat}^* \sum t = ($	15114,85		$\hat{S}=(s4^* - S(\text{media}))$	14,799
$\sum ty - \text{media } y^* \sum t$	3344,9			
	$\beta_1 = 0,221$	$\beta_1^* \text{ mediat}$	7,63	
			ECM	249,22
	$\beta_0 = 29,15$		EAM	13,86
			EAPM	41,69
Tendencias	$\beta_0 + \beta_1^* t$	36,79		

METODO DE DESCOMPOSICION



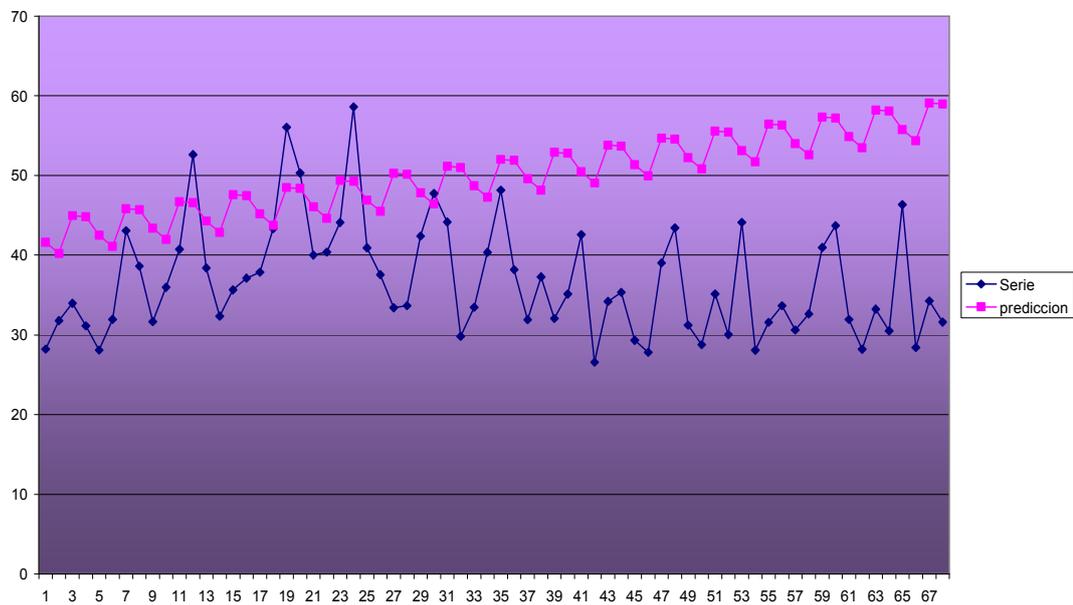
PREDICION CON ERROR DE PREDICION



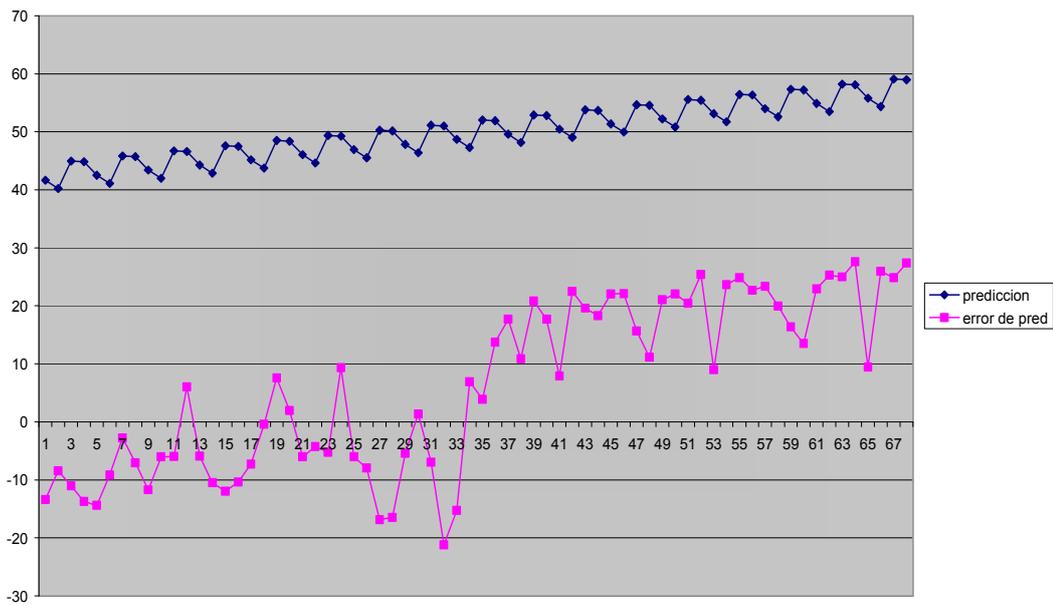
MÉTODO DE TENDENCIA LINEAL CON VARIABLE FICTICIA

t	Serie	predicción	error de pre	FC	FA	FAP
1	28.21	41.631	-13.421	180.12	13.42	47.58
2	31.78	40.212	-8.432	71.10	8.43	26.53
3	33.95	44.953	-11.003	121.07	11.00	32.41
4	31.14	44.833	-13.693	187.50	13.69	43.97
5	28.1	42.515	-14.415	207.79	14.42	51.30
6	31.95	41.096	-9.146	83.65	9.15	28.63
7	43.07	45.837	-2.767	7.66	2.77	6.42
8	38.64	45.717	-7.077	50.08	7.08	18.32
9	31.68	43.399	-11.719	137.33	11.72	36.99
10	35.96	41.98	-6.02	36.24	6.02	16.74
11	40.74	46.721	-5.981	35.77	5.98	14.68
12	52.63	46.601	6.029	36.35	6.03	11.46
13	38.39	44.283	-5.893	34.73	5.89	15.35
14	32.36	42.864	-10.504	110.33	10.50	32.46
15	35.64	47.605	-11.965	143.16	11.97	33.57
16	37.12	47.485	-10.365	107.43	10.37	27.92
17	37.87	45.167	-7.297	53.25	7.30	19.27
18	43.33	43.748	-0.418	0.17	0.42	0.96
19	56.05	48.489	7.561	57.17	7.56	13.49
20	50.31	48.369	1.941	3.77	1.94	3.86
21	40.02	46.051	-6.031	36.37	6.03	15.07
22	40.39	44.632	-4.242	17.99	4.24	10.50
23	44.1	49.373	-5.273	27.80	5.27	11.96
24	58.6	49.253	9.347	87.37	9.35	15.95
25	40.92	46.935	-6.015	36.18	6.01	14.70
26	37.56	45.516	-7.956	63.30	7.96	21.18
27	33.4	50.257	-16.857	284.16	16.86	50.47
28	33.66	50.137	-16.477	271.49	16.48	48.95
29	42.39	47.819	-5.429	29.47	5.43	12.81
30	47.73	46.4	1.33	1.77	1.33	2.79
31	44.17	51.141	-6.971	48.59	6.97	15.78
32	29.8	51.021	-21.221	450.33	21.22	71.21
33	33.44	48.703	-15.263	232.96	15.26	45.64
34	40.37	47.284	6.914	47.80	6.91	17.13
35	48.15	52.025	3.875	15.02	3.88	8.05
36	38.18	51.905	13.725	188.38	13.73	35.95
37	31.91	49.587	17.677	312.48	17.68	55.40
38	37.28	48.168	10.888	118.55	10.89	29.21
39	32.05	52.909	20.859	435.10	20.86	65.08
40	35.12	52.789	17.669	312.19	17.67	50.31
41	42.59	50.471	7.881	62.11	7.88	18.50
42	26.56	49.052	22.492	505.89	22.49	84.68
43	34.2	53.793	19.593	383.89	19.59	57.29
44	35.35	53.673	18.323	335.73	18.32	51.83
45	29.32	51.355	22.035	485.54	22.04	75.15
46	27.82	49.936	22.116	489.12	22.12	79.50
47	39.04	54.677	15.637	244.52	15.64	40.05
48	43.42	54.557	11.137	124.03	11.14	25.65
49	31.21	52.239	21.029	442.22	21.03	67.38
50	28.78	50.82	22.04	485.76	22.04	76.58
51	35.14	55.561	20.421	417.02	20.42	58.11
52	30.03	55.441	25.411	645.72	25.41	84.62
53	44.11	53.123	9.013	81.23	9.01	20.43
54	28.07	51.704	23.634	558.57	23.63	84.20
55	31.58	56.445	24.865	618.27	24.87	78.74
56	33.66	56.325	22.665	513.70	22.67	67.34
57	30.62	54.007	23.387	546.95	23.39	76.38
58	32.64	52.588	19.948	397.92	19.95	61.12
59	40.97	57.329	16.359	267.62	16.36	39.93
60	43.69	57.209	13.519	182.76	13.52	30.94
61	31.94	54.891	22.951	526.75	22.95	71.86
62	28.18	53.472	25.292	639.69	25.29	89.75
63	33.23	58.213	24.983	624.15	24.98	75.18
64	30.51	58.093	27.583	760.82	27.58	90.41
65	46.35	55.775	9.425	88.83	9.43	20.33
66	28.41	54.356	25.946	673.19	25.95	91.33
67	34.27	59.097	24.827	616.38	24.83	72.45
68	31.61	58.977	27.367	748.95	27.37	86.58
				17149.31	949.55	2856.34
				FCM=	252.20	
				EAM=	13.96	
				FAPM=	42.01	

SERIE CON PREDICION

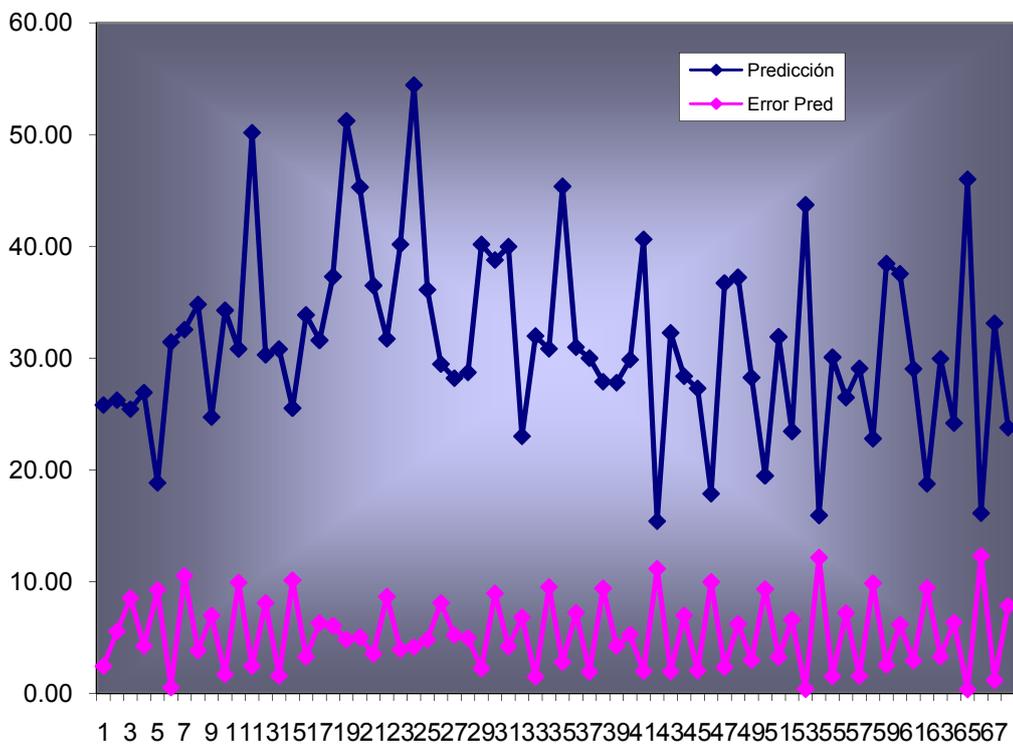
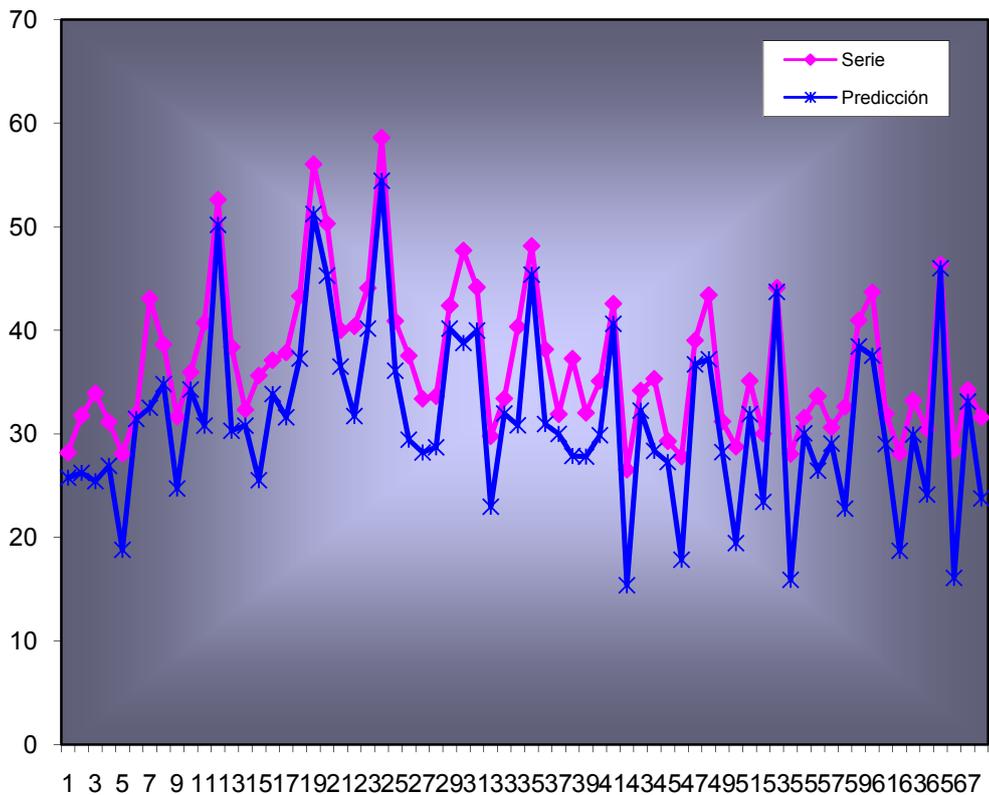


PREDICCION CON ERROR DE PREDICCION



ALISADO EXPONENCIAL DE HOLT WINTERS

t	Serie	Tendencia	pendiente	Estimación	Predicción	Error	EC	EA	EAP	Estadísticos
1	28.21	22.466	-3.1006	6.4296	25.80	2.42	5.83	2.42	8.56	ECM= 39.45
2	31.78	16.649	-5.55	15.13	26.24	5.54	30.74	5.54	17.45	EAM= 5.41
3	33.95	9.406	-7.07	23.11	25.44	8.51	72.46	8.51	25.07	EAPM= 15.56
4	31.14	6.812	-3.04	23.16	26.93	4.21	17.76	4.21	13.54	
5	28.1	-1.287	-7.59	27.71	18.83	9.27	85.97	9.27	33.00	
6	31.95	1.275	1.55	28.62	31.44	0.51	0.26	0.51	1.58	
7	43.07	-6.743	-7.06	46.35	32.54	10.53	110.86	10.53	24.45	
8	38.64	-6.807	-0.76	42.38	34.81	3.83	14.67	3.83	9.91	
9	31.68	-11.099	-3.94	39.76	24.72	6.96	48.39	6.96	21.96	
10	35.96	-8.696	1.77	41.21	34.28	1.68	2.83	1.68	4.67	
11	40.74	-15.364	-5.82	52.01	30.82	9.92	98.41	9.92	24.35	
12	52.63	-11.896	2.54	59.55	50.20	2.43	5.93	2.43	4.63	
13	38.39	-16.470	-3.86	50.63	30.30	8.09	65.42	8.09	21.07	
14	32.36	-13.774	2.04	42.54	30.80	1.56	2.42	1.56	4.81	
15	35.64	-20.663	-6.00	52.19	25.53	10.11	102.27	10.11	28.37	
16	37.12	-19.009	0.89	52.00	33.87	3.25	10.53	3.25	8.74	
17	37.87	-20.944	-1.65	54.19	31.60	6.27	39.37	6.27	16.57	
18	43.33	-21.907	-1.03	60.23	37.29	6.04	36.50	6.04	13.94	
19	56.05	-20.280	1.36	70.18	51.26	4.79	22.97	4.79	8.55	
20	50.31	-19.851	0.52	64.62	45.30	5.01	25.15	5.01	9.97	
21	40.02	-18.455	1.31	53.64	36.50	3.52	12.41	3.52	8.80	
22	40.39	-22.873	-3.85	58.45	31.73	8.66	74.96	8.66	21.44	
23	44.1	-21.192	1.13	60.24	40.18	3.92	15.38	3.92	8.89	
24	58.6	-18.736	2.32	70.86	54.45	4.15	17.23	4.15	7.08	
25	40.92	-18.823	0.15	54.79	36.12	4.80	23.08	4.80	11.74	
26	37.56	-22.810	-3.57	55.85	29.46	8.10	65.53	8.10	21.55	
27	33.4	-23.500	-0.98	52.69	28.21	5.19	26.93	5.19	15.54	
28	33.66	-23.885	-0.44	53.05	28.72	4.94	24.40	4.94	14.67	
29	42.39	-20.435	3.06	57.56	40.18	2.21	4.86	2.21	5.20	
30	47.73	-24.391	-3.25	66.42	38.78	8.95	80.15	8.95	18.76	
31	44.17	-22.865	1.05	61.81	39.99	4.18	17.45	4.18	9.46	
32	29.8	-25.770	-2.51	51.27	22.99	6.81	46.33	6.81	22.84	
33	33.44	-22.080	3.07	50.98	31.97	1.47	2.15	1.47	4.38	
34	40.37	-27.186	-4.29	62.31	30.84	9.53	90.82	9.53	23.61	
35	48.15	-23.478	2.91	65.94	45.37	2.78	7.70	2.78	5.76	
36	38.18	-26.073	-2.04	59.09	30.97	7.21	51.98	7.21	18.88	
37	31.91	-23.001	2.56	50.44	30.00	1.91	3.67	1.91	6.00	
38	37.28	-28.133	-4.36	60.39	27.89	9.39	88.18	9.39	25.19	
39	32.05	-27.396	0.23	54.98	27.81	4.24	17.97	4.24	13.22	
40	35.12	-27.675	-0.23	57.78	29.87	5.25	27.53	5.25	14.94	
41	42.59	-23.599	3.64	60.59	40.63	1.96	3.83	1.96	4.60	
42	26.56	-31.623	-6.86	53.88	15.40	11.16	124.58	11.16	42.02	
43	34.2	-27.763	2.79	57.25	32.27	1.93	3.72	1.93	5.64	
44	35.35	-29.971	-1.71	60.05	28.37	6.98	48.73	6.98	19.75	
45	29.32	-26.906	2.59	51.62	27.30	2.02	4.08	2.02	6.89	
46	27.82	-33.171	-5.38	56.41	17.86	9.96	99.30	9.96	35.82	
47	39.04	-29.215	3.02	62.91	36.72	2.32	5.40	2.32	5.95	
48	43.42	-29.706	-0.14	67.07	37.23	6.19	38.34	6.19	14.26	
49	31.21	-27.571	1.91	53.92	28.26	2.95	8.73	2.95	9.47	
50	28.78	-32.967	-4.67	57.09	19.45	9.33	86.98	9.33	32.40	
51	35.14	-30.403	1.84	60.47	31.91	3.23	10.46	3.23	9.20	
52	30.03	-32.389	-1.60	57.44	23.44	6.59	43.37	6.59	21.93	
53	44.11	-25.967	5.62	64.09	43.74	0.37	0.14	0.37	0.84	
54	28.07	-34.795	-7.38	58.09	15.91	12.16	147.77	12.16	43.31	
55	31.58	-30.403	3.21	57.26	30.08	1.50	2.26	1.50	4.77	
56	33.66	-32.762	-1.80	61.04	26.48	7.18	51.61	7.18	21.34	
57	30.62	-28.804	3.38	54.50	29.08	1.54	2.39	1.54	5.04	
58	32.64	-34.361	-4.66	61.81	22.79	9.85	97.00	9.85	30.17	
59	40.97	-30.355	3.14	65.67	38.46	2.51	6.32	2.51	6.14	
60	43.69	-30.657	0.04	68.17	37.56	6.13	37.62	6.13	14.04	
61	31.94	-28.331	2.10	55.26	29.03	2.91	8.49	2.91	9.12	
62	28.18	-33.847	-4.75	57.34	18.74	9.44	89.18	9.44	33.51	
63	33.23	-31.418	1.71	59.66	29.95	3.28	10.73	3.28	9.86	
64	30.51	-33.001	-1.25	58.42	24.17	6.34	40.26	6.34	20.80	
65	46.35	-26.288	5.92	66.39	46.02	0.33	0.11	0.33	0.71	
66	28.41	-35.221	-7.45	58.78	16.11	12.30	151.23	12.30	43.29	
67	34.27	-30.154	3.82	59.46	33.12	1.15	1.32	1.15	3.35	
68	31.61	-33.454	-2.59	59.82	23.78	7.83	61.38	7.83	24.78	



3.10 PRACTICA 6: FUNCIONES DE AUTOVARIANZA Y AUTOCORRELACIÓN.

En esta práctica se realizará la aplicación de la teoría básica para efectuar los cálculos de Autocovarianza y autocorrelación muestral.

Ejercicio 1. Consideremos la serie temporal y_t , cuyo valores ($T = 32$).

(Ver datos en tabla 9 en anexos).

La media muestral (\bar{y}) será igual a:

$$\bar{y} = \frac{1}{32} \sum_{t=1}^{32} y_t = \frac{1}{32} 221 = 7$$

Restando el valor de la media muestral $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, y_{t-4}, y_{t-5}, \dots, y_{t-8}$. A partir de esta información los siguientes valores de la varianza muestral y de las ochos autocovarianzas muestrales:

Autocovarianzas Muéstrales.

$$C_0 = \frac{1}{32} \sum_{t=1}^{32} (y_t - \bar{y})^2 = \frac{1}{32} 225 = 7$$

$$C_1 = \frac{1}{32} \sum_{t=2}^{32} (y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y}) = \frac{1}{32} 97 = 3.03$$

$$C_2 = \frac{1}{32} 84 = 2.63 \quad C_3 = \frac{1}{32} (-1) = -0.03 \quad C_4 = \frac{1}{32} (-2) = -0.06$$

$$C_5 = \frac{1}{32} (-19) = -0.6 \quad C_6 = \frac{1}{32} (-31) = -1 \quad C_7 = \frac{1}{32} (-45) = -1.41$$

$$C_8 = \frac{1}{32} (-26) = -0.81$$

Las autocorrelaciones muestrales serán iguales a:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{C_1}{C_0} = \frac{3.03}{7} = 0.43 & r_2 &= \frac{C_2}{C_0} = \frac{2.63}{7} = 0.38 \\ r_3 &= \frac{C_3}{C_0} = \frac{-0.03}{7} = -0.004 & r_4 &= \frac{C_4}{C_0} = \frac{-0.06}{7} = -0.009 \\ r_5 &= \frac{C_5}{C_0} = \frac{-0.6}{7} = -0.08 & r_6 &= \frac{C_6}{C_0} = \frac{-1}{7} = -0.14 \\ r_7 &= \frac{C_7}{C_0} = \frac{-1.41}{7} = -0.20 & r_8 &= \frac{C_8}{C_0} = \frac{-0.81}{7} = -0.12 \end{aligned}$$

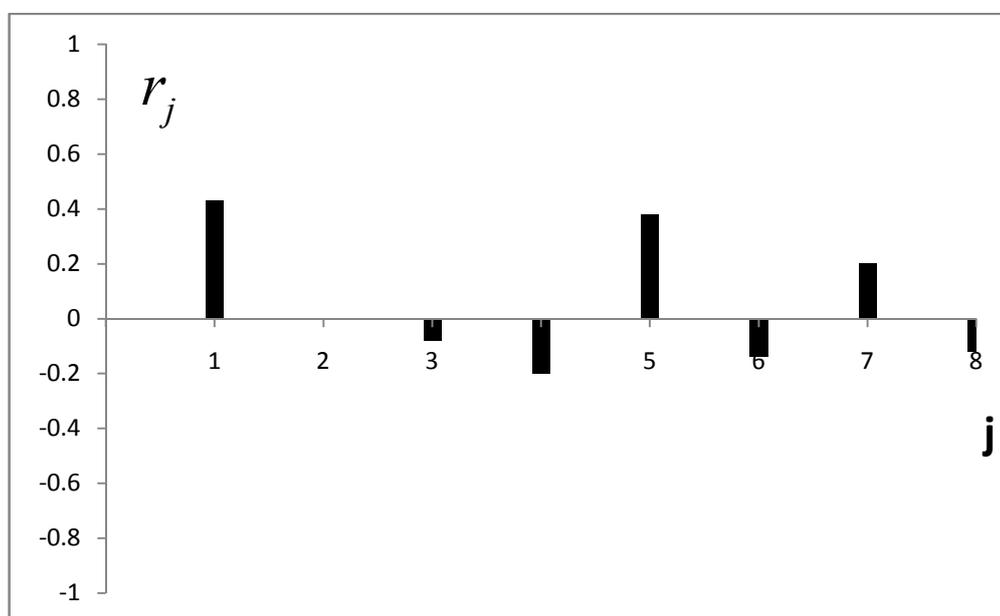


FIG 2.1. Correlograma muestral de la Serie Temporal del ejemplo 1.

Los valores de las cinco primeras autocorrelaciones parciales muestrales se obtendrían como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{11} &= r_1 = 0.43 \\ \hat{\phi}_{22} &= \frac{r_2 - \hat{\phi}_{11}r_1}{1 - \hat{\phi}_{11}r_1} = \frac{0.38 - 0.43 * 0.43}{1 - 0.43 * 0.43} = 0.19 \\ \hat{\phi}_{21} &= \hat{\phi}_{11} - \hat{\phi}_{22}\hat{\phi}_{11} = 0.43 - 0.19 * 0.43 = 0.35 \end{aligned}$$

$$\hat{\phi}_{33} = \frac{r_3 - \hat{\phi}_{21} r_2 - \hat{\phi}_{22} r_1}{1 - \hat{\phi}_{21} r_1 - \hat{\phi}_{22} r_2} = \frac{-0.004 - 0.35 * 0.38 - 0.19 * 0.43}{1 - 0.35 * 0.43 - 0.19 * 0.38} = -0.02$$

$$\hat{\phi}_{31} = \hat{\phi}_{21} - \hat{\phi}_{33} \hat{\phi}_{22} = 0.35 - (-0.02) * 0.38 = 0.36$$

$$\hat{\phi}_{32} = \hat{\phi}_{22} - \hat{\phi}_{33} \hat{\phi}_{21} = 0.19 - (-0.02) * 0.35 = 0.20$$

$$\hat{\phi}_{44} = \frac{r_4 - \hat{\phi}_{31} r_3 - \hat{\phi}_{32} r_2 - \hat{\phi}_{33} r_1}{1 - \hat{\phi}_{31} r_1 - \hat{\phi}_{32} r_2 - \hat{\phi}_{33} r_3} = \frac{-0.004 - 0.36 * (-0.004) - 0.20 * 0.38 - (-0.02) * 0.43}{1 - 0.36 * 0.43 - 0.20 * 0.38 - (-0.02) * (-0.004)} = -0.09$$

$$\hat{\phi}_{41} = \hat{\phi}_{31} - \hat{\phi}_{44} \hat{\phi}_{33} = 0.36 - (-0.09) * (-0.02) = 0.34$$

$$\hat{\phi}_{42} = \hat{\phi}_{32} - \hat{\phi}_{44} \hat{\phi}_{32} = 0.20 - (-0.09) * 0.20 = 0.22$$

$$\hat{\phi}_{43} = \hat{\phi}_{33} - \hat{\phi}_{44} \hat{\phi}_{31} = (-0.02) - (-0.09) * 0.36 = 0.01$$

$$\hat{\phi}_{55} = \frac{r_5 - \hat{\phi}_{41} r_4 - \hat{\phi}_{42} r_3 - \hat{\phi}_{43} r_2 - \hat{\phi}_{44} r_1}{1 - \hat{\phi}_{41} r_1 - \hat{\phi}_{42} r_2 - \hat{\phi}_{43} r_3 - \hat{\phi}_{44} r_4} = \frac{-0.08 - 0.34 * (-0.009) - 0.22 * (-0.004) - 0.01 * 0.38 - (-0.09) * 0.43}{1 - 0.34 * 0.43 - 0.22 * 0.38 - 0.01 * (-0.004) - (-0.09) * (-0.004)} = -0.05$$

Esto es:

$$\hat{\phi}_{11} = 0.43 \quad \hat{\phi}_{22} = 0.19 \quad \hat{\phi}_{33} = -0.02 \quad \hat{\phi}_{44} = -0.09 \quad \hat{\phi}_{55} = -0.05$$

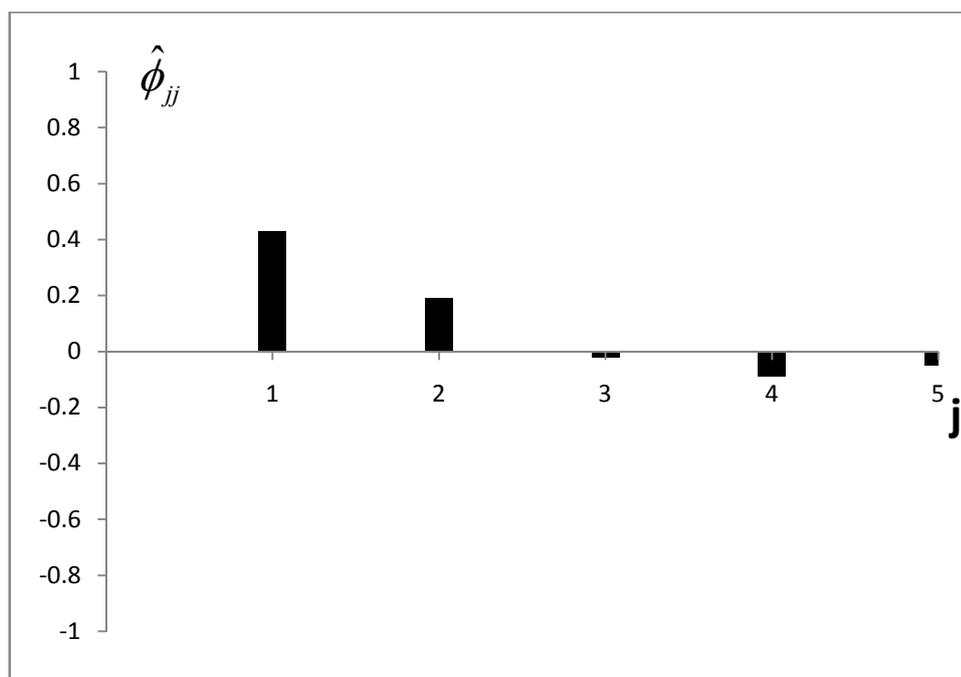


FIG 2.2 Representación gráfica de la FAPM de la Serie del ejemplo 1

Ejercicio 2. Para ilustrar el cálculo de las funciones de autocovarianza y autocorrelación muestral, consideremos la serie temporal y_t , cuyo valores ($T = 60$).
(ver datos en tabla 10 de anexos).

La media muestral (\bar{y}) será igual a:

$$\bar{y} = \frac{1}{60} \sum_{t=1}^{60} y_t = \frac{1}{60} 438.06 = 7.3$$

Restando el valor de la media muestral $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, y_{t-4}, \dots, y_{t-15}$. A partir de esta información los siguientes valores de la varianza muestral y de las quince primeras autocovarianzas muestrales.

Autocovarianzas Muéstrales

$$C_0 = \frac{1}{60} \sum_{t=1}^{60} (y_t - \bar{y})^2 = \frac{1}{60} 54.64 = 0.91$$

$$C_1 = \frac{1}{60} \sum_{t=2}^{60} (y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y}) = \frac{1}{60} (-1.17) = -0.02 \quad C_2 = \frac{1}{60} (-2.57) = -0.04$$

$$C_3 = \frac{1}{60} -3 = -0.05 \quad C_4 = \frac{1}{60} (-1.49) = -0.02 \quad C_5 = -0.02 \quad C_6 = -0.01$$

$$C_7 = 0.02 \quad C_8 = 0.06 \quad C_9 = 0.04 \quad C_{10} = 0.01$$

$$C_{11} = 0.03 \quad C_{12} = -0.01 \quad C_{13} = 0.04 \quad C_{14} = 0.01$$

$$C_{15} = 0.01$$

Autocorrelaciones Muéstrales

$$r_1 = \frac{C_1}{C_0} = \frac{-0.02}{0.91} = -0.02 \quad r_2 = \frac{C_2}{C_0} = \frac{-0.04}{0.91} = -0.04 \quad r_3 = \frac{C_3}{C_0} = -0.05$$

$$r_4 = \frac{C_4}{C_0} = -0.03 \quad r_5 = \frac{C_5}{C_0} = -0.02 \quad r_6 = \frac{C_6}{C_0} = -0.02$$

$$\begin{aligned}
 r_7 &= \frac{C_7}{C_0} = 0.02 & r_8 &= \frac{C_8}{C_0} = 0.06 & r_9 &= \frac{C_9}{C_0} = 0.05 \\
 r_{10} &= \frac{C_{10}}{C_0} = 0.01 & r_{11} &= \frac{C_{11}}{C_0} = 0.03 & r_{12} &= \frac{C_{12}}{C_0} = -0.01 \\
 r_{13} &= \frac{C_{13}}{C_0} = 0.04 & r_{14} &= \frac{C_{14}}{C_0} = 0.01 & r_{15} &= \frac{C_{15}}{C_0} = 0.01
 \end{aligned}$$

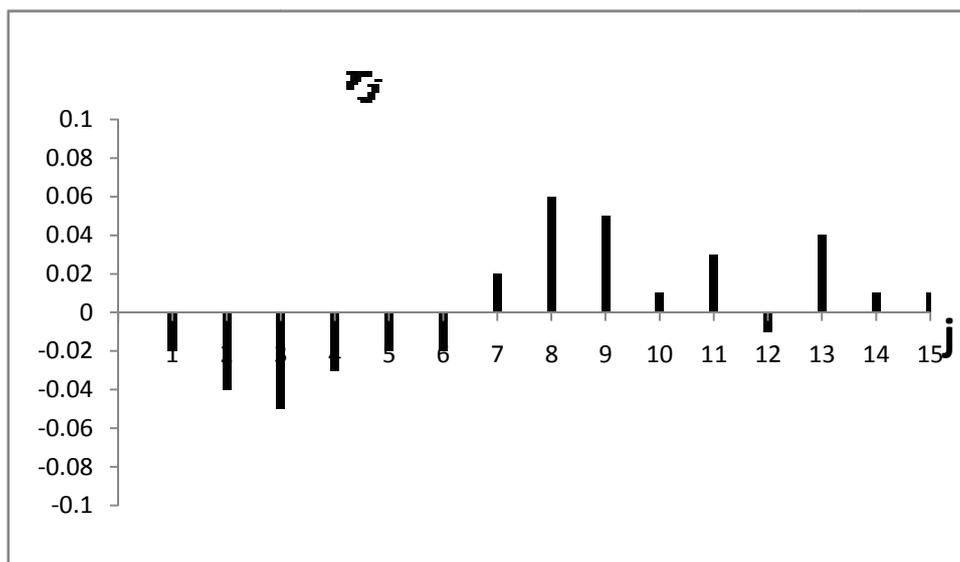


FIG 2.3. Correlograma muestral de la Serie Temporal del ejemplo 2.

Los valores de las cinco primeras autocorrelaciones parciales muestrales se obtendrían como sigue:

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}_{11} &= r_1 = -0.02 & \hat{\phi}_{22} &= \frac{r_2 - \hat{\phi}_{11} r_1}{1 - \hat{\phi}_{11} r_1} = \frac{-0.04 + 0.02 * -0.02}{1 + 0.02 * -0.02} = -0.04 \\
 \hat{\phi}_{21} &= \hat{\phi}_{11} - \hat{\phi}_{22} \hat{\phi}_{11} = -0.02 + 0.04 * -0.02 = -0.02 \\
 \hat{\phi}_{33} &= \frac{r_3 - \hat{\phi}_{21} r_2 - \hat{\phi}_{22} r_1}{1 - \hat{\phi}_{21} r_1 - \hat{\phi}_{22} r_2} = \frac{-0.05 + 0.02 * -0.04 + 0.04 * -0.02}{1 + 0.02 * -0.02 + 0.04 * -0.04} = -0.05 \\
 \hat{\phi}_{31} &= \hat{\phi}_{21} - \hat{\phi}_{33} \hat{\phi}_{22} = -0.02 + 0.05 * -0.04 = -0.02 \\
 \hat{\phi}_{32} &= \hat{\phi}_{22} - \hat{\phi}_{33} \hat{\phi}_{21} = -0.04 + 0.05 * -0.02 = -0.04
 \end{aligned}$$

$$\hat{\phi}_{44} = \frac{r_4 - \hat{\phi}_{31} r_3 - \hat{\phi}_{32} r_2 - \hat{\phi}_{33} r_1}{1 - \hat{\phi}_{31} r_1 - \hat{\phi}_{32} r_2 - \hat{\phi}_{33} r_3} = \frac{-0.03 + 0.02 * -0.05 + 0.04 * -0.04 + 0.05 * -0.02}{1 + 0.02 * -0.02 + 0.04 * -0.04 + 0.05 * -0.05} = -0.003$$

$$\hat{\phi}_{41} = \hat{\phi}_{31} - \hat{\phi}_{44} \hat{\phi}_{33} = -0.02 + 0.003 * -0.05 = -0.02$$

$$\hat{\phi}_{42} = \hat{\phi}_{32} - \hat{\phi}_{44} \hat{\phi}_{32} = -0.04 + 0.003 * -0.04 = -0.04$$

$$\hat{\phi}_{43} = \hat{\phi}_{33} - \hat{\phi}_{44} \hat{\phi}_{31} = -0.05 + 0.003 * -0.02 = -0.05$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{55} &= \frac{r_5 - \hat{\phi}_{41} r_4 - \hat{\phi}_{42} r_3 - \hat{\phi}_{43} r_2 - \hat{\phi}_{44} r_1}{1 - \hat{\phi}_{41} r_1 - \hat{\phi}_{42} r_2 - \hat{\phi}_{43} r_3 - \hat{\phi}_{44} r_4} \\ &= \frac{-0.02 + 0.02 * -0.03 + 0.04 * -0.05 + 0.05 * -0.04 + 0.003 * -0.02}{1 + 0.02 * -0.02 + 0.04 * -0.04 + 0.05 * -0.05 + 0.003 * -0.03} = -0.02 \end{aligned}$$

Esto es:

$$\hat{\phi}_{11} = -0.02 \quad \hat{\phi}_{22} = -0.04 \quad \hat{\phi}_{33} = -0.05 \quad \hat{\phi}_{44} = -0.003 \quad \hat{\phi}_{55} = -0.02$$

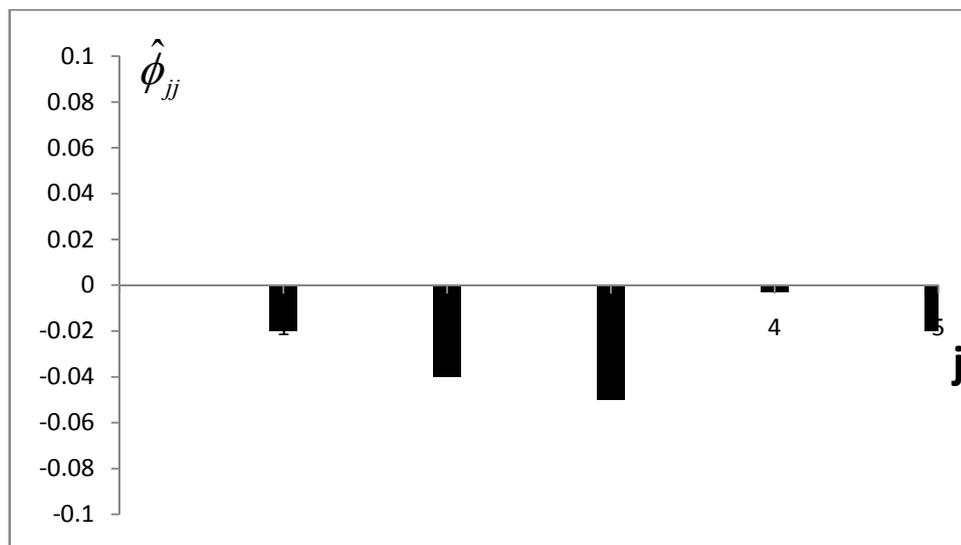


FIG 2.4 Representación gráfica de la FAPM de la Serie del ejemplo 2

3.11 PRÁCTICA 7: MODELO DE MEDIAS MÓVILES (MA)

MODELO MA (1)

Ejercicio 1. Dados los siguientes datos iniciales

$$\theta_1 = 0.5, \quad \mu = 1, \quad \sigma_u^2 = 2$$

$$y_t = 1 + u_t - 0.5u_{t-1}, \quad \sigma_u^2 = 2$$

Se pide:

- ✓ Calcular La Media
- ✓ Calcular Varianza
- ✓ Función de Autocovarianza
- ✓ Función de Autocorrelación
- ✓ Función de Autocorrelación Parcial.

Solución:

Media: $\mu = 1$

Varianza: $\gamma_0 = \sigma_u^2 (1 + \theta_1^2) = 2(1 + 0.25) = 2.5$

Función de Autocovarianza: $\gamma_j = \begin{cases} -\theta_1 \sigma_u^2 = -0.5 * 2 = -1 & \text{para } j=1 \\ 0 & \text{para } j>1 \end{cases}$

Función de Autocorrelación: $\rho_j = \begin{cases} -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} = -\frac{0.5}{1.25} = -0.4 & \text{para } j=1 \\ 0 & \text{para } j>1 \end{cases}$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{11} = \rho_1 = -0.4$$

$$\phi_{22} = \frac{-\theta_1^2(1-\theta_1^2) = -(0.5)^2(0.75)}{1-(0.5)^6} = -0.19$$

$$\phi_{33} = \frac{-\theta_1^3(1-\theta_1^2) = -(0.5)^3(0.75)}{1-(0.5)^8} = -0.09$$

$$\phi_{44} = \frac{-\theta_1^4(1-\theta_1^2) = -(0.5)^4(0.75)}{1-(0.5)^{10}} = -0.05$$

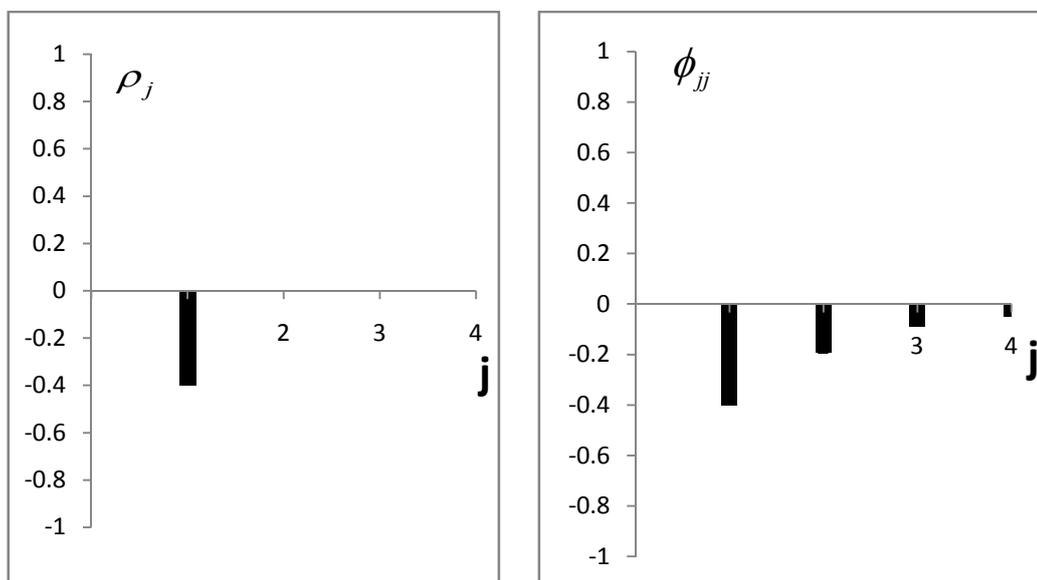


FIG 3.1 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo MA (1) con

$$\theta_1 = 0.5$$

Ejercicio 2. Dados los siguientes datos iniciales

$$\theta_1 = -0.5, \quad \mu = 1, \quad \mu_t \sigma_u^2 = 2$$

$$y_t = 1 + u_t + 0.5u_{t-1}, \quad \sigma_u^2 = 2$$

Se pide:

✓ Realizar los mismos cálculos que en el ejercicio 1 de esta práctica.

Solución:

Media: $\mu = 1$

Varianza: $\gamma_0 = \sigma_u^2 (1 + \theta_1^2) = 2(1 + 0.25) = 2.5$

Función de Autocovarianza: $\gamma_j = \begin{cases} -\theta_1 \sigma_u^2 = -0.5 * 2 = 1 & \text{para } j = 1 \\ 0 & \text{para } j > 1 \end{cases}$

Función de Autocorrelación: $\rho_j = \begin{cases} -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} = \frac{0.5}{1.25} = 0.4 & \text{para } j = 1 \\ 0 & \text{para } j > 1 \end{cases}$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{11} = \rho_1 = 0.4$$

$$\phi_{22} = \frac{-\theta_1^2(1 - \theta_1^2)}{1 - (0.5)^6} = -0.19$$

$$\phi_{33} = \frac{-\theta_1^3(1 - \theta_1^2)}{1 - (0.5)^8} = 0.09$$

$$\phi_{44} = \frac{-\theta_1^4(1 - \theta_1^2)}{1 - (0.5)^{10}} = -0.05$$

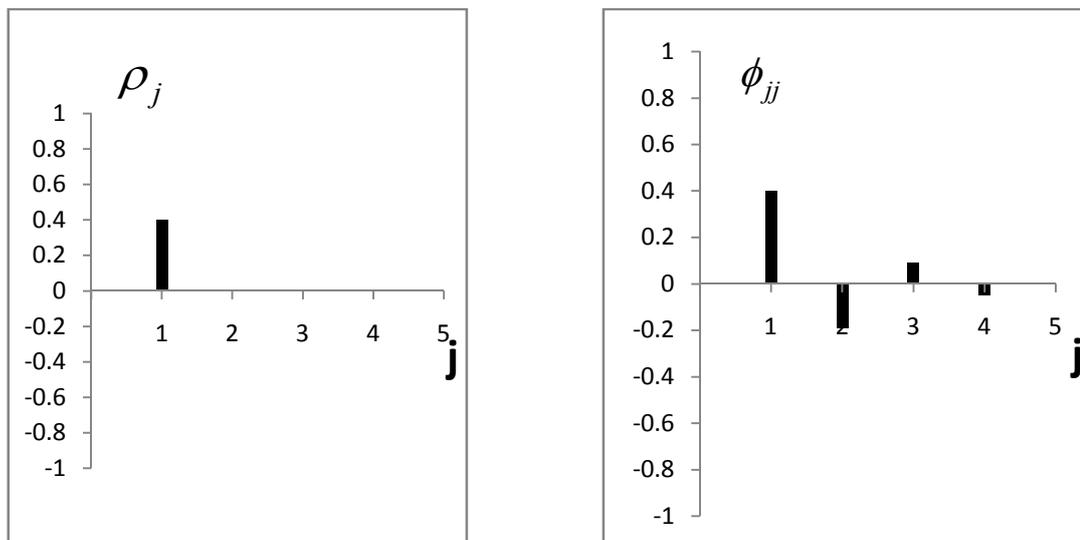


FIG 3.2. Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo MA (1) con $\theta_1 = -0.5$

MODELO MA(2)

Ejercicio 1. Dados los siguientes datos iniciales

$$\theta_1 = 0.5, \quad \theta_2 = 0.2, \quad \mu = 1, \quad \sigma_u^2 = 2$$

$$y_t = 1 + u_t - 0.7u_{t-1} - 0.2u_{t-2}, \quad \sigma_1^2 = 2$$

Se pide:

- ✓ Calcular La Media
- ✓ Calcular Varianza
- ✓ Función de Autocovarianza
- ✓ Función de Autocorrelación
- ✓ Función de Autocorrelación Parcial.

Solución:

Media: $\mu = 1$

Varianza: $\gamma_0 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) = 2(1 + 0.25 + 0.04) = 2.58$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_j = \begin{cases} (-\theta + \theta_1\theta_2)\sigma_u^2 = (-0.5 + 0.10)(2) = -0.8 & \text{para } j = 1 \\ -\theta_1\sigma_u^2 = (-0.2)(2) = -0.4 & \text{para } j = 2 \\ 0 & \text{para } j > 2 \end{cases}$$

Función de Autocorrelación

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\theta + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{(-0.5) + (0.14)}{1 + (0.25) + (0.04)} = \frac{-0.4}{1.29} = -0.31 & \text{para } j = 1 \\ \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{-0.2}{1 + (0.25) + (0.04)} = \frac{-0.2}{1.29} = -0.16 & \text{para } j = 2 \\ 0 & \text{para } j > 2 \end{cases}$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{11} = \rho_1 = -0.31$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{(-0.16) - (0.31)^2}{1 - (0.31)^2} = -0.28$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)} = \frac{(-0.31)^3 - (0.31) * (0.16)(2 + 0.16)}{1 - (-0.16)^2 - 2(0.31)^2(1 + 0.16)} = -0.15$$

...

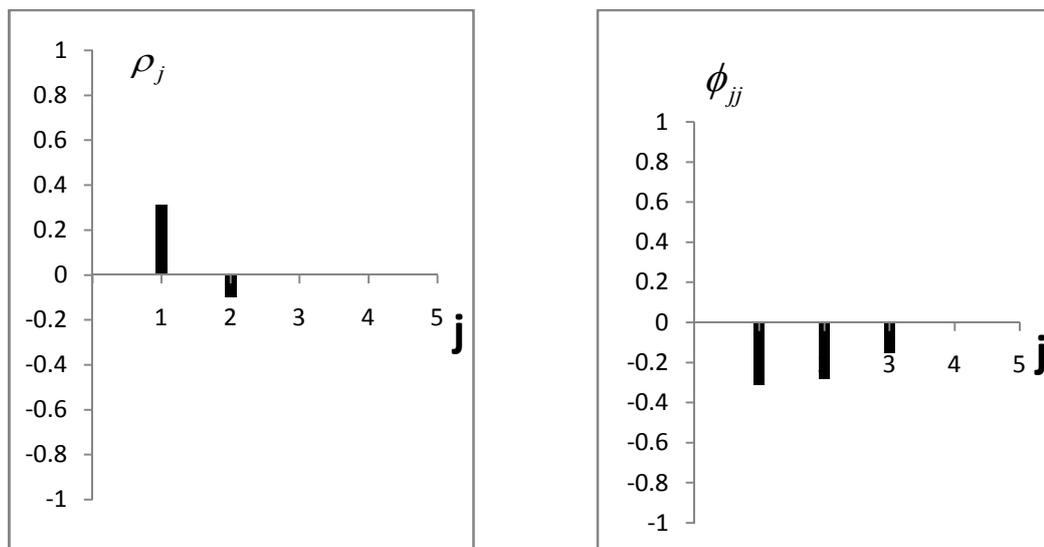


FIG 3.3 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo MA (1) con $\theta_1 = 0.5$ $\theta_2 = 2$

Ejercicio 2. Dados los siguientes datos iniciales

$$\theta_1 = -0.5, \theta_2 = 0.2, \mu = 1, \sigma_u^2 = 2$$

$$y_t = 1 + u_t - 0.7u_{t-1} - 0.2u_{t-2}, \sigma_u^2 = 2$$

Se pide:

- ✓ Realizar los mismos cálculos que en el ejercicio anterior.

Solución:

Media: $\mu = 1$

Varianza: $\gamma_0 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) = 2(1 + 0.25 + 0.04) = 2.58$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_j = \begin{cases} (-\theta + \theta_1\theta_2)\sigma_u^2 = (-0.5 + 0.10)(2) = 0.8 & \text{para } j = 1 \\ -\theta_1\sigma_u^2 = (-0.2)(2) = -0.4 & \text{para } j = 2 \\ 0 & \text{para } j > 2 \end{cases}$$

Función de Autocorrelación:

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\theta + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{(-0.5) + (0.14)}{1 + (0.25) + (0.04)} = \frac{-0.4}{1.29} = 0.31 & \text{para } j = 1 \\ \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{-0.2}{1 + (0.25) + (0.04)} = \frac{-0.2}{1.29} = -0.16 & \text{para } j = 2 \\ 0 & \text{para } j > 2 \end{cases}$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{11} = \rho_1 = 0.31$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{(-0.16) - (0.31)^2}{1 - (0.31)^2} = -0.28$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)} = \frac{(-0.31)^3 - (0.31) * (0.16)(2 + 0.16)}{1 - (-0.16)^2 - 2(0.31)^2(1 + 0.16)} = 0.15$$

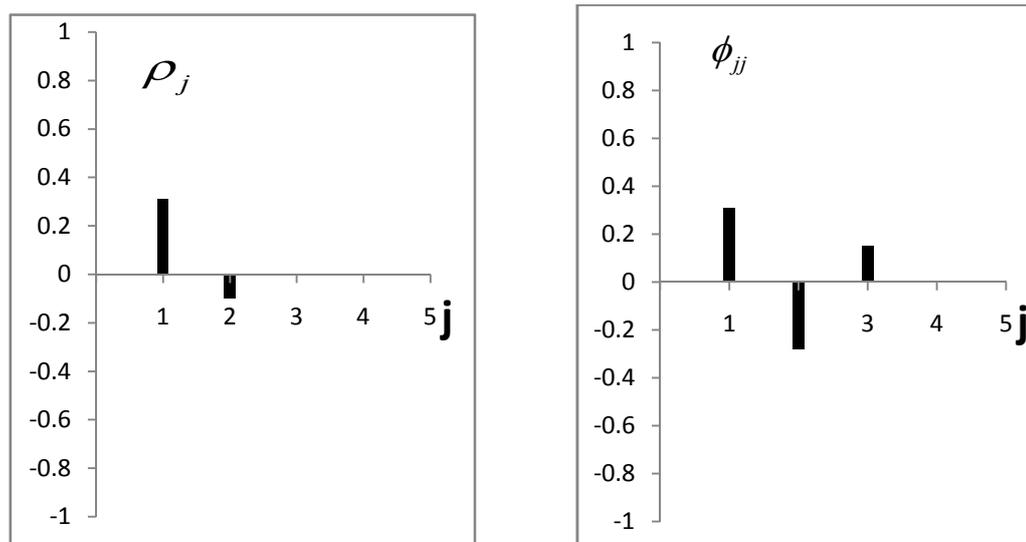


FIG 3.4 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo MA (1) con $\theta_1 = -0.5$ $\theta_2 = 2$

MODELO MA(q)**Ejercicio 1.** Dados los siguientes datos iniciales

$$\theta_1 = -0.7, \quad \theta_2 = -0.5, \quad \mu = 1, \quad \sigma_u^2 = 2$$

$$y_t = 1 + u_t + 0.7u_{t-1} - 0.5u_{t-2}, \quad \sigma_u^2 = 2$$

Se pide:

- ✓ Realizar los mismos cálculos que en el ejercicio 2 del modelo MA(2) de esta práctica

Solución

En este caso, las raíces de $\theta(L) = 0$ son complejas como consecuencias de que:

$$\theta_1^2 + 4\theta_2 = 0.49 - 4 * 0.5 = -1.51$$

Sin embargo, el modelo es invertible, ya que se cumple:

$$\theta_1 + \theta_2 = -0.7 - 0.5 = -1.2 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 = -0.5 + 0.7 = 0.2 < 1$$

$$|\theta_2| = 0.5 < 1$$

Media: $\mu = 1$

Varianza: $\gamma_0 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) = 2(1 + 0.49 + 0.25) = 3.48$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_j = \begin{cases} (-\theta + \theta_1\theta_2)\sigma_u^2 = (0.7 + 0.7 * 0.5)(2) = 1.4 & \text{para } j = 1 \\ -\theta_1\sigma_u^2 = (0.5)(2) = 1 & \text{para } j = 2 \\ 0 & \text{para } j > 2 \end{cases}$$

Función de Autocorrelación:

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\theta + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{(0.7) + (0.7 * 0.5)}{1 + (0.8)^2 + (0.5)^2} = \frac{1.05}{1.89} = 0.6 & \text{para } j = 1 \\ \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{0.5}{1 + (0.8)^2 + (0.5)^2} = \frac{0.5}{1.89} = 0.26 & \text{para } j = 2 \\ 0 & \text{para } j > 2 \end{cases}$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{11} = \rho_1 = 0,6$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{(0.26) - (0.6)^2}{1 - (0.6)^2} = -0.45$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)} = \frac{(0.6)^3 - (0.6) * (0.26)(2 - 0.26)}{1 - (0.26)^2 - 2(0.6)^2(1 - 0.6)} = -0.09$$

...

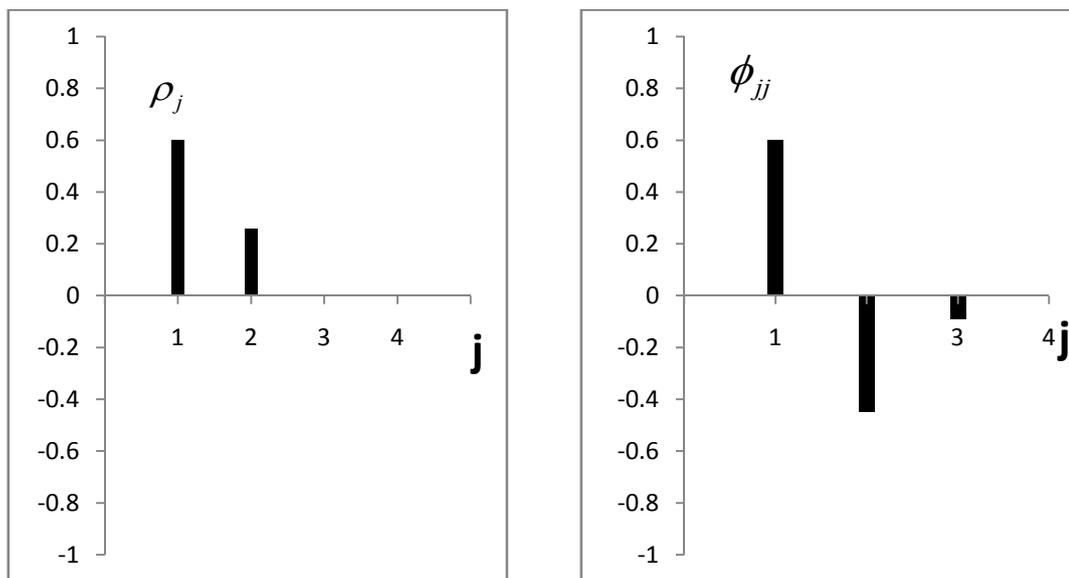


FIG 3.5 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo MA (2) con $\theta_1 = -0.7$ $\theta_2 = -0.5$

3.12 PRÁCTICA 8: MODELO AUTORREGRESIVO (AR)

Modelo AR(1)

Ejercicio 1. Dados los siguientes datos iniciales

$$\phi_1 = 0.4; \quad \delta = 2; \quad \sigma_u^2 = 2$$

$$y_t = 0.4y_{t-1} + 2 + u_t; \quad \sigma_u^2 = 2$$

Se pide:

- ✓ Calcular la media
- ✓ Calcular varianza
- ✓ Función de Autocovarianza
- ✓ Función de Autocorrelación
- ✓ Función de Autocorrelación Parcial.

Solución:

$$\text{Media: } \mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1} = \frac{2}{1 - 0.4} = 3.33$$

$$\text{Varianza: } \gamma_0 = \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = \frac{2}{1 - 0.16} = 2.38$$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_1 = \phi_1 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = 0.4 \frac{2}{1 - 0.16} = 0.4 * 2.38 = 0.95$$

$$\gamma_2 = \phi_1^2 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = 0.4 \frac{2}{1 - 0.16} = (0.4)^2 * 2.38 = 0.38$$

$$\gamma_3 = \phi_1^3 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = 0.4 \frac{2}{1 - 0.16} = (0.4)^3 * 2.38 = 0.15$$

$$\gamma_4 = \phi_1^4 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = 0.4 \frac{2}{1 - 0.16} = (0.4)^4 * 2.38 = 0.06$$

$$\gamma_5 = \phi_1^5 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = 0.4 \frac{2}{1 - 0.16} = (0.4)^5 * 2.38 = 0.02$$

Función de Autocorrelación:

$$\rho_1 = \phi_1 = 0.4$$

$$\rho_2 = \phi_1^2 = (0.4)^2 = 0.16$$

$$\rho_3 = \phi_1^3 = (0.4)^3 = 0.064$$

$$\rho_4 = \phi_1^4 = (0.4)^4 = 0.0256$$

$$\rho_5 = \phi_1^5 = (0.4)^5 = 0.01024$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{jj} = \begin{cases} \phi_1 = 0.4 & \text{para } j = 1 \\ 0 & \text{para } j \geq 2 \end{cases}$$

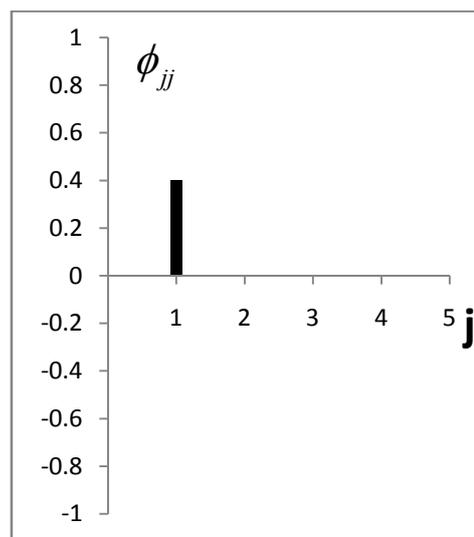
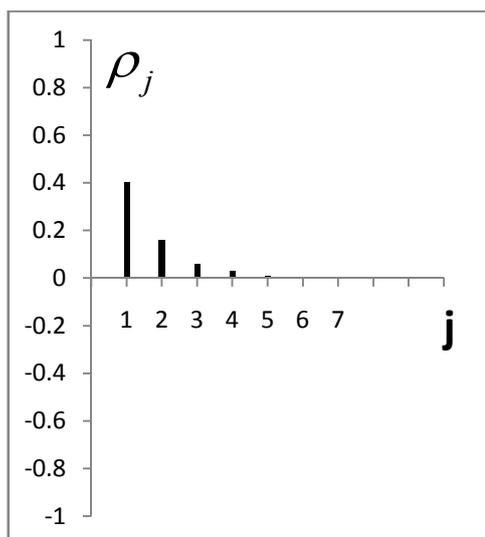


FIG 3.6 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo AR (1) con $\phi_1 = 0.4$

Ejercicio 2.

$$\phi_1 = -0.4; \quad \delta = 2; \quad \sigma_u^2 = 2$$

$$y_t = -0.4y_{t-1} + 2 + u_t; \quad \sigma_u^2 = 2$$

$$\text{Media: } \mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1} = \frac{2}{1 + 0.4} = 1.42$$

$$\text{Varianza: } \gamma_0 = \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = \frac{2}{1 - 0.16} = 2.38$$

Función de Autocovarianza:

$$\gamma_1 = \phi_1 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = -0.4 \frac{2}{1 - 0.16} = -0.4 * 2.38 = -0.95$$

$$\gamma_2 = \phi_1^2 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = -0.4 \frac{2}{1 - 0.16} = (-0.4)^2 * 2.38 = -0.38$$

$$\gamma_3 = \phi_1^3 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = -0.4 \frac{2}{1 - 0.16} = (-0.4)^3 * 2.38 = -0.15$$

$$\gamma_4 = \phi_1^4 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = -0.4 \frac{2}{1 - 0.16} = (-0.4)^4 * 2.38 = -0.06$$

$$\gamma_5 = \phi_1^5 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2} = -0.4 \frac{2}{1 - 0.16} = (-0.4)^5 * 2.38 = -0.02$$

Función de Autocorrelación:

$$\rho_1 = \phi_1 = -0.4$$

$$\rho_2 = \phi_1^2 = (-0.4)^2 = 0.16$$

$$\rho_3 = \phi_1^3 = (-0.4)^3 = -0.06$$

$$\rho_4 = \phi_1^4 = (-0.4)^4 = 0.03$$

$$\rho_5 = \phi_1^5 = (-0.4)^5 = -0.01$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{jj} = \begin{cases} \phi_1 = -0.4 & \text{para } j = 1 \\ 0 & \text{para } j \geq 2 \end{cases}$$

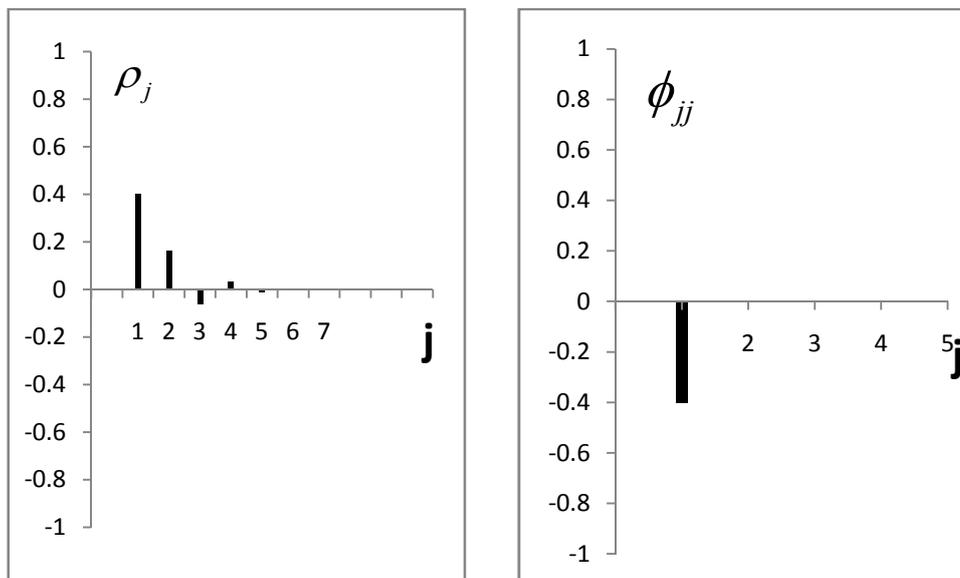


FIG 3.7. Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo AR (1) con

$$\phi_1 = -0.4$$

Modelo AR(2)

Calcular la media, varianza, función de autocovarianza, función de autocorrelación y función de autocorrelación parcial de dichos modelos.

Ejercicio 1

$$\phi_1 = 0.5; \quad \phi_2 = 0.2; \quad \delta = 2; \quad \sigma_u^2 = 2$$

$$y_t = 0.5y_{t-1} + 0.5 + 2 + \mu_t; \quad \sigma_u^2 = 2$$

Estacionariedad: Si, ya que cumple:

$$\phi_1 + \phi_2 = 0.5 + 0.2 = 0.7 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 = 0.2 - 0.5 = -0.3 < 1$$

$$|\phi_2| = 0.2 < 1$$

Media:
$$\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2} = \frac{2}{1 - 0.5 - 0.2} = 6.67$$

Varianza y Función de Autocovarianza:

$$\begin{array}{lll}
 1) \gamma_0 = 0.5\gamma_1 + 0.2\gamma_2 + 2 & 2) \gamma_1 = 0.5\gamma_0 + 0.2\gamma_1 = 0 & 3) \gamma_2 = 0.5\gamma_1 + 0.2\gamma_0 = 0 \\
 \gamma_0 - 0.5\gamma_1 - 0.2\gamma_2 = 2(10) & -0.5\gamma_0 + 0.8\gamma_1 = 0(10) & \gamma_2 - 0.5\gamma_1 - 0.2\gamma_0 = 0(10) \\
 10\gamma_0 - 5\gamma_1 - 2\gamma_2 = 20 & -5\gamma_1 + 8\gamma_1 = 0 & -2\gamma_0 - 5\gamma_1 + 10\gamma_2 = 0
 \end{array}$$

Teniendo las tres ecuaciones procederemos a encontrar los valores para las variables

$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ de las siguiente forma primero vamos a eliminar el valor de la variable γ_2 .

$$\begin{array}{r}
 10\gamma_0 - 5\gamma_1 - 2\gamma_2 = 20(10) \\
 \underline{-2\gamma_0 - 5\gamma_1 + 10\gamma_2 = 0(2)} \\
 100\gamma_0 - 40\gamma_1 - 20\gamma_2 = 200 \\
 \underline{-4\gamma_0 - 10\gamma_1 + 20\gamma_2 = 0} \\
 96\gamma_0 - 50\gamma_1 = 200
 \end{array}$$

Luego eliminamos γ_1 de la misma forma que eliminamos γ_2 .

$$\begin{array}{r}
 91\gamma_0 - 50\gamma_1 = 200(8) \\
 \underline{-4\gamma_0 + 8\gamma_1 = 0(50)} \\
 728\gamma_0 - 400\gamma_1 = 1600 \\
 \underline{-200\gamma_0 + 400\gamma_1 = 0} \\
 528\gamma_0 = 1600
 \end{array}$$

Hemos encontrado el valor de: $\gamma_0 = \frac{1600}{528} = 3.03$

Sustituimos el valor γ_0 en la ecuación 2 para poder encontrar el valor de γ_1

$$\begin{array}{r}
 -5\gamma_0 + 8\gamma_1 = 0 \\
 -5(3.03) + 8\gamma_1 = 0 \\
 15.15 + 8\gamma_1 = 0 \\
 \gamma_1 = \frac{15.15}{8} = 1.89
 \end{array}$$

Teniendo los dos valores de γ_0, γ_1 sustituimos en la ecuación 3 para calcular el valor de la variable γ_2

$$\begin{aligned} -2\gamma_0 - 5\gamma_1 + 10\gamma_2 &= 0 \\ -2(3.03) - 2(1.89) + 10\gamma_2 &= 0 \\ -6.06 - 3.78 + 10\gamma_2 &= 0 \\ 10\gamma_2 &= 6.06 + 3.78 \\ \gamma_2 &= \frac{9.84}{10} = 0.98 \end{aligned}$$

Para los restantes retardos correspondientes a períodos estacionales (recuérdese que las autocovarianzas correspondientes a órdenes no estacionales son iguales a cero):

$$\begin{aligned} \gamma_{js} &= \Phi_1 \gamma_{(j-j)s} + \Phi_2 \gamma_{(j-2)s} \\ \gamma_{12} &= 0.5(0.98) + 0.2(2.89) = 1.07 \\ \gamma_{16} &= 0.5(1.07) + 0.2(0.98) = 0.73 \quad \text{para } j > 3 \\ \gamma_{20} &= 0.5(0.73) + 0.2(1.07) = 0.58 \end{aligned}$$

Función de Autocorrelación:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} = \frac{0.5}{1 - 0.2} = 0.63 \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 = 0.5(0.63) + 0.2 = 0.51 \\ \rho_3 &= \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 = 0.5(0.51) + 0.2(0.63) = 0.38 \\ \rho_4 &= \phi_1 \rho_3 + \phi_2 \rho_2 = 0.5(0.38) + 0.2(0.51) = 0.29 \\ \rho_5 &= \phi_1 \rho_4 + \phi_2 \rho_3 = 0.5(0.29) + 0.2(0.38) = 0.22 \end{aligned}$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{11} = \rho_1 = 0.63 \quad \phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_2^2} = \frac{0.51 - (0.63)^2}{1 - (0.51)^2} = 0.15 \quad \phi_{jj} = 0 \quad \text{para } j > 2$$

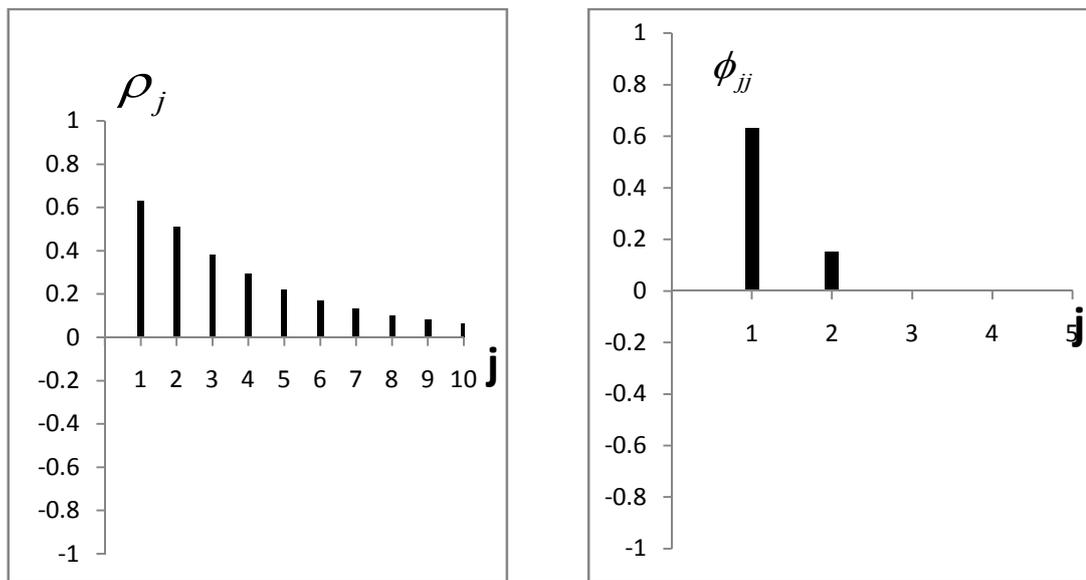


FIG.3.16. Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo AR (2) con $\phi_1 = 0.5, \phi_2 = 0.2$

3.13 PRÁCTICA 9: MODELOS MIXTOS AUTORREGRESIVOS –MEDIAS MÓVILES (ARMA)

Modelo ARMA(1,1)

Calcular la media, varianza, función de autocovarianza, función de autocorrelación y función de autocorrelación parcial de dichos modelos.

Ejemplo 3.1

$$\phi_1 = 0.7; \quad \theta_2 = -0.5; \quad \delta=2; \quad \sigma_u^2 = 3$$

$$y_t = 0.5y_{t-1} - 0.9 + 0 + \mu_t; \quad \sigma_u^2 = 3$$

Estacionariedad: Si, ya que cumple.

$$|\phi_1| = 0.7 < 1$$

Invertibilidad: Si, ya que cumple:

$$|\theta_1| = 0.5 < 1$$

Esperanza matemática es:
$$\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1} = \frac{2}{1 - 0.7} = 1.3$$

Varianza:
$$\gamma_0 = \frac{\sigma_u^2(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1)}{1 - \phi_1^2} = \frac{3(1 + (-0.7)^2 + 2 * (0.7)(-0.5))}{1 - (0.7)^2} = 4.65$$

Función de autocovarianza:

$$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma_u^2 = 0.7 * 4.65 - 0.5 * 3 = 1.8$$

$$\gamma_2 = \phi_1\gamma_1 = 0.7 * 1.8 = 1.26$$

$$\gamma_3 = \phi_1\gamma_2 = 0.7 * 1.26 = 0.89$$

$$\gamma_4 = \phi_1\gamma_3 = 0.7 * 0.89 = 0.62$$

$$\gamma_5 = \phi_1\gamma_4 = 0.7 * 0.62 = 0.43$$

...

Función de Autocorrelación:

$$\rho_1 = \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1} = \frac{(1 - (-0.35)(1.2))}{1 + (-0.5)^2 - 2 * (0.7)(-0.5)} = 0.72$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 = 0.7 * 0.72 = 0.50$$

$$\rho_3 = \phi_1 \rho_2 = 0.7 * 0.50 = 0.35$$

$$\rho_4 = \phi_1 \rho_3 = 0.7 * 0.35 = 0.25$$

$$\rho_5 = \phi_1 \rho_4 = 0.7 * 0.25 = 0.18$$

Función de Autocorrelación Parcial:

$$\phi_{11} = \rho_1 = 0.72$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{0.50 - (0.72)^2}{1 - (0.72)^2} = -0.04$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_3 - \rho_1 \rho_2 (2 - \rho_2) + \rho_3 (1 - \rho_1^2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2 (1 - \rho_2)} = \frac{(0.72)^3 - 0.72 * 0.50 (2 - 0.50) + 0.35 (1 - (0.72)^2)}{1 - (0.50)^2 - 2 * (0.72)^2 (1 - 0.50)} = 0.001$$

....

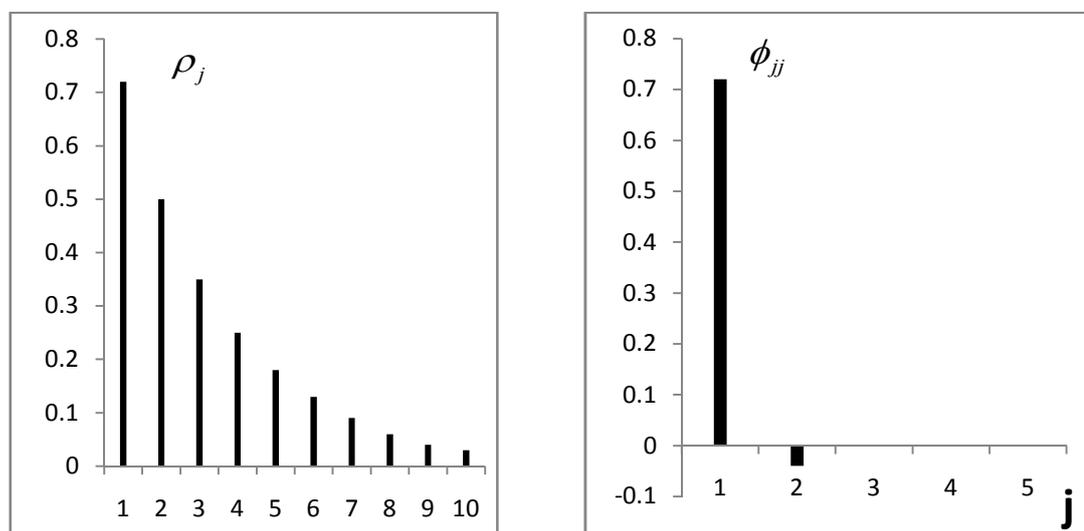


FIG.3.17 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo ARMA (1,1) con $\phi_1 = 0.7, \theta_1 = -0.5$

3.14 PRÁCTICA10: MODELOS ESTACIONALES

Modelo Estacionario Multiplicativo General

Dados los siguientes valores iniciales:

$$\Theta_1 = 0.7; \quad \theta_2 = -0.5; \quad \delta = 2; \quad \sigma_u^2 = 3, \mu = 1$$

$$w_t = \mu_t - \theta_1 \mu_{t-1} - \Theta_1 \mu_{t-2} L^2 + \theta_1 \Theta_1 \mu_{t-3}$$

Calcular:

- ✓ La Media, Varianza, Función de Autocovarianza, Función de Autocorrelación y Función de Autocorrelación Parcial de Dicho Modelo.

La varianza del modelo es:

$$\gamma_0 = \sigma_u^2 (1 - \theta_1^2)(1 - \Theta_1^2) = 3(1 - (-0.5)^2)(1 - 0.7^2) = 2.78$$

La Función de Autocovarianza es igual a:

$$\gamma_j = \begin{cases} -\theta_1(1 - \Theta_1^2)\sigma_u^2 = 0.5(1 - 0.7^2)^2 * 3 = 0.14 & \text{para } j = 1 \\ \theta_1 \Theta_1 \sigma_u^2 = -0.5 * 0.7 * 3 = -1.05 & \text{para } j = 11 \text{ y } 13 \\ -\Theta_1(1 - \theta_1^2)\sigma_u^2 = -0.7(1 - (-0.5)^2) * 3 = -0.18 & \text{para } j = 12 \\ 0 & \text{para } j = 1, 11, 12 \text{ y } 13 \end{cases}$$

Función de Autocorrelación

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1 - \theta_1^2} = \frac{0.5}{1 - 0.25} = 0.67 & \text{para } j = 1 \\ \frac{\theta_1 \Theta_1}{(1 - \theta_1^2)(1 - \Theta_1^2)} = \frac{-0.5 * 0.7}{(1 - 0.25)(1 - 0.49)} = -0.91 & \text{para } j = 11 \text{ y } 13 \\ \frac{-\Theta_1}{1 - \Theta_1^2} = \frac{-0.7}{1 - 0.49} = -1.372 & \text{para } j = 12 \\ 0 & \text{para } j = 1, 11, 12 \text{ y } 13 \end{cases}$$

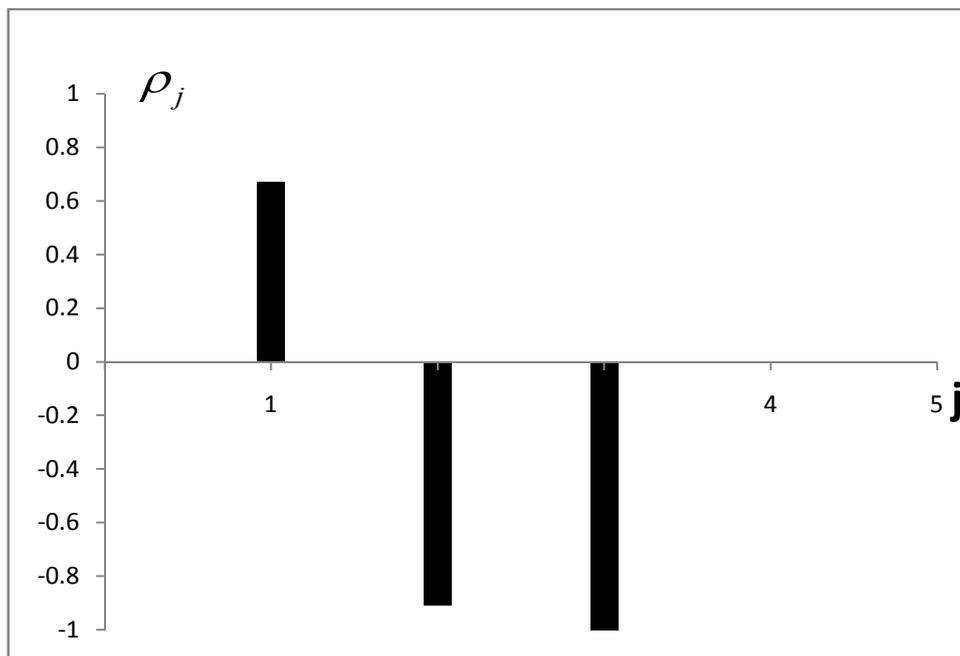


FIG 4.1 Correlograma y representación gráfica de la FAP del modelo ARMA (1,1) con $\Theta_1 = 0.7, \theta_1 = -0.5$

Modelo MA (1) \times AR (1)₁₂

Dados los siguientes valores iniciales:

$$\Phi_1 = 0.7 \quad \theta_1 = 0.5 \quad (1 - 0.7L^2)y_t = (1 - 0.5L)\mu_t$$

Calcular:

- ✓ La Media, Varianza, Función de Autocovarianza, Función de Autocorrelación y Función de Autocorrelación Parcial de dicho Modelo.

Tendremos la siguiente función de autocorrelación del modelo MA (1) \times AR (1)₁₂:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} = \frac{-0.5}{1 + 0.25} = -0.2 & \rho_2 &= \rho_3 = \dots = \rho_{10} = 0 \\ \rho_{11} &= \rho_{13} = \frac{-\theta_1 \Phi_1}{1 + \theta_1^2} = \frac{-0.5 * 0.7}{1 + 0.25} = -0.28 & \rho_{12} &= \Phi_1 = 0.7 \\ \rho_{14} &= \rho_{15} = \dots = \rho_{22} = 0 \end{aligned}$$

$$\rho_{23} = \rho_{25} = \frac{-\theta_1 \Phi_1^2}{1 + \theta_1^2} = \frac{-0.5 * (0.7)^2}{1 + 0.25} = -0.2 \quad \rho_{24} = \Phi_1^2 = 0.49$$

$$\rho_{26} = \rho_{27} = \dots = \rho_{34} = 0$$

$$\rho_{35} = \rho_{37} = \frac{-\theta_1 \Phi_1^3}{1 + \theta_1^2} = \frac{-0.5 * (0.7)^3}{1 + 0.25} = -0.12 \quad \rho_{36} = \Phi_1^3 = 0.34$$

$$\rho_{38} = \rho_{39} = \dots = \rho_{46} = 0$$

...

Cuadro 4.1 Autocorrelación del modelo $(1 - 0.7L^2)y_t = (1 - 0.5L)\mu_t$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ρ_j	-0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ρ_j	-0.28	0.7	-0.28	0	0	0	0	0	0	0
j	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ρ_j	0	0	-0.2	0.36	-0.2	0	0	0	0	0
j	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
ρ_j	0	0	0	0	-0.12	0.34	-0.12	0	0	0

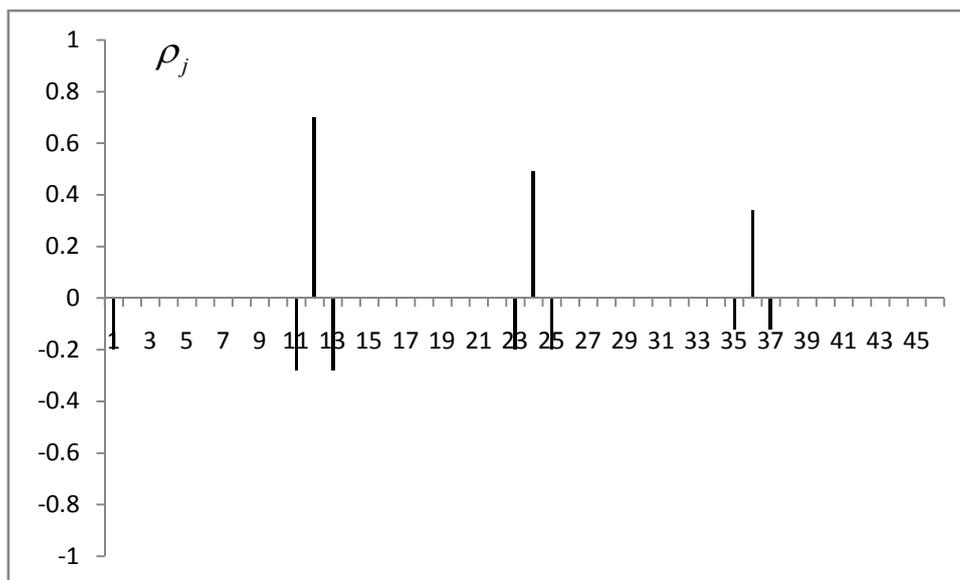


FIG 4.2. Correlograma del modelo $(1 - 0.7L^2)y_t = (1 - 0.5L)\mu_t$

Modelo MA (2) × AR (1)₁₂**Dados los siguientes valores iniciales:**

$$\Theta_1 = 0.7, \theta_1 = 0.5, \theta_2 = -0.4 \quad (1 - 0.7L^{12})y_t = (1 - 0.5L + 0.4L^2)\mu_t$$

Calcular:

- ✓ La Media, Varianza, Función de Autocovarianza, Función de Autocorrelación y Función de Autocorrelación Parcial de Dicho Modelo.

Tendremos la siguiente función de autocorrelación del modelo MA (2) × AR (1)₁₂

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{-0.5 + 0.5 * -0.4}{1 + (0.5)^2 + (-0.4)^2} = -0.5 \quad \rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{0.4}{1 + (0.5)^2 + (-0.4)^2} = 0.28$$

$$\rho_3 = \rho_4 = \dots = \rho_9 = 0,$$

$$\rho_{10} = \rho_{14} = \frac{-\Phi_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{-0.7 * -0.4}{1 + (0.5)^2 + (-0.4)^2} = 0.2$$

$$\rho_{11} = \rho_{13} = \frac{-\Phi_1(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{-0.7(-0.5 + 0.5 * -0.4)}{1 + (0.5)^2 + (-0.4)^2} = 0.35 \quad \rho_{12} = \Phi_1 = 0.7$$

$$\rho_{15} = \rho_{16} = \dots = \rho_{21} = 0,$$

$$\rho_{22} = \rho_{26} = \frac{-\Phi_1^2\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{(-0.7)^2 * -0.4}{1 + (0.5)^2 + (-0.4)^2} = -0.13$$

$$\rho_{23} = \rho_{25} = \frac{\Phi_1^2(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{(-0.7)^2 * -0.4}{1 + (0.5)^2 + (-0.4)^2} = -0.14 \quad \rho_{24} = \Phi_1^2 = 0.49$$

$$\rho_{27} = \rho_{28} = \dots = \rho_{33} = 0,$$

$$\rho_{34} = \rho_{38} = \frac{-\Phi_1^3\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{(-0.7)^3 * -0.4}{1 + (0.5)^2 + (-0.4)^2} = 0.1$$

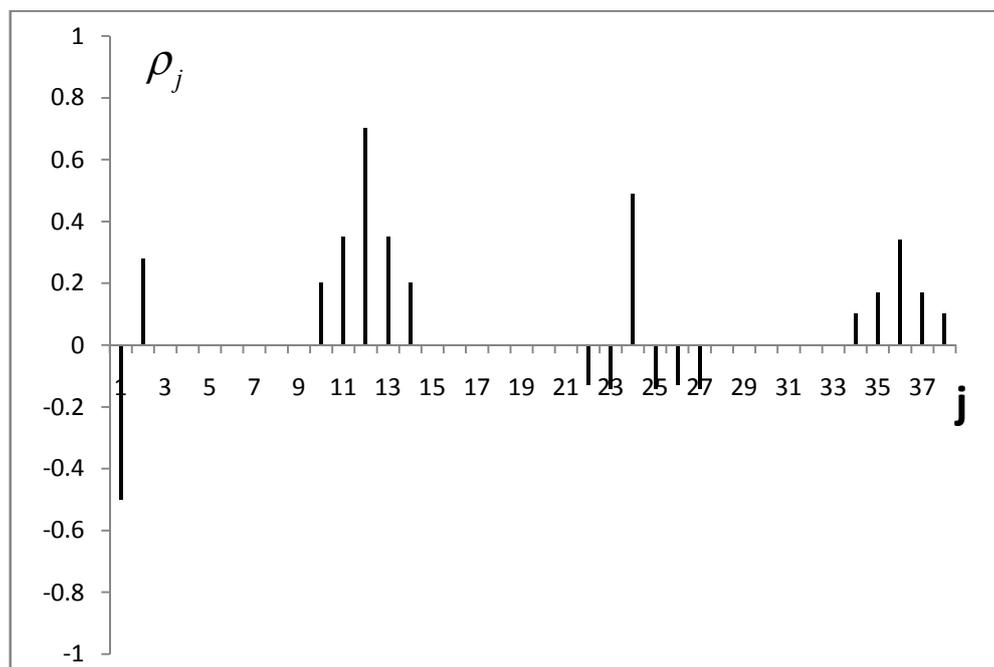
$$\rho_{35} = \rho_{37} = \frac{-\Phi_1^3(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{(-0.7)^3(-0.5 + 0.5 * -0.4)}{1 + (0.5)^2 + (-0.4)^2} = 0.17$$

$$\rho_{36} = \Phi_1^3 = 0.34$$

...

Cuadro 4.2 Autocorrelación del modelo $(1-0.7_1L^2)y_t = (1-0.5L+0.4L^2)\mu_t$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ρ_j	-0.5	0.28	0	0	0	0	0	0	0	0.2
j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ρ_j	0.35	0.7	0.35	0.2	0	0	0	0	0	0
j	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ρ_j	0	-0.13	-0.14	0.49	0.14	-0.13	0	0	0	0
j	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
ρ_j	0	0	0	0.1	0.17	0.34	0.17	0.1	0	0

**FIG 4.3.** Correlograma del modelo $(1-0.7_1L^2)y_t = (1-0.5L+0.4L^2)\mu_t$

Modelo MA (1) \times MA (1)₁₂

Dados los siguientes valores iniciales:

$$\Phi_1 = 0.4 \quad \theta_1 = 0.5$$

$$y_t = (1 - 0.4L^{12})(1 - 0.5L)\mu_t$$

Calcular:

- ✓ La Media, Varianza, Función de Autocovarianza, Función de Autocorrelación y Función de Autocorrelación Parcial de Dicho Modelo.

Tendremos la siguiente función de autocorrelación del modelo MA (1) \times MA (1)₁₂:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} = \frac{-0.5}{1 + (0.5)^2} = -0.2 \quad \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_{10} = 0$$

$$\rho_{11} = \rho_{13} = \frac{\theta_1 \Theta_1}{(1 + \theta_1^2)(1 + \Theta_1^2)} = \frac{0.5 * 0.4}{1 + (0.5)^2 (1 + (0.4)^2)} = 0.16$$

$$\rho_{12} = \frac{-\Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{-0.4}{1 + (0.4)^2} = -0.34 \quad \rho_j = 0 \text{ para } j > 13$$

Cuadro 4.3 Autocorrelaciones del modelo $y_t = (1 - 0.4L^{12})(1 - 0.5L)\mu_t$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ρ_j	-0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.16	-0.34	0	0

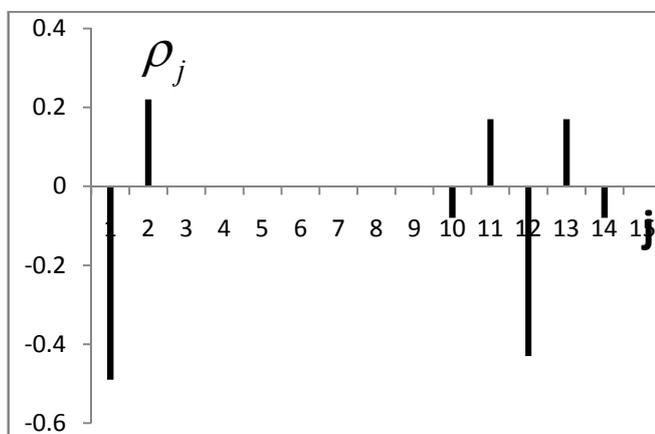


FIG 4.4. Correlograma del modelo $y_t = (1 - 0.4L^{12})(1 - 0.5L)\mu_t$

Modelo MA (2) \times MA (1)₁₂

Dados los siguientes valores iniciales:

$$\Phi_1 = 0.4 \quad \theta_1 = 0.5 \quad \theta_2 = -0.3 \quad y_t = (1 - 0.4L^{12})(1 - 0.5L + 0.3L^2)\mu_t$$

Calcular:

- ✓ La Media, Varianza, Función de Autocovarianza, Función de Autocorrelación y Función de Autocorrelación Parcial de Dicho Modelo.

Tendremos la siguiente función de autocorrelación del modelo MA (1) \times MA (1)₁₂:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{-0.5 + 0.5 \cdot (-0.3)}{1 + (0.5)^2 + (-0.3)^2} = -0.49 \quad \rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{0.3}{1 + (0.5)^2 + (-0.3)^2} = 0.22$$

$$\rho_3 = \rho_4 = \dots = \rho_9 = 0$$

$$\rho_{10} = \rho_{14} = \frac{\Theta_1\theta_2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)(1 + \Theta_1^2)} = \frac{0.4 \cdot (-0.3)}{(1 + (0.5)^2 + (-0.3)^2)(1 + (0.4)^2)} = -0.08$$

$$\rho_{12} = \frac{-\Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{-0.5}{1 + (0.4)^2} = -0.43$$

$$\rho_{11} = \rho_{13} = \frac{-\Theta_1(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)(1 + \Theta_1^2)} = \frac{-0.4(-0.5 + 0.5 \cdot (-0.3))}{(1 + (0.5)^2 + (-0.3)^2)(1 + (0.4)^2)} = 0.17$$

$$\rho_j = 0 \quad \text{para } j > 14$$

Cuadro 4.4 Autocorrelaciones del modelo $y_t = (1 - 0.4L^{12})(1 - 0.5L + 0.3L^2)\mu_t$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ρ_j	-0.49	0.22	0	0	0	0	0	0	0	-0.08	0.17	0.43	0.17	-0.08

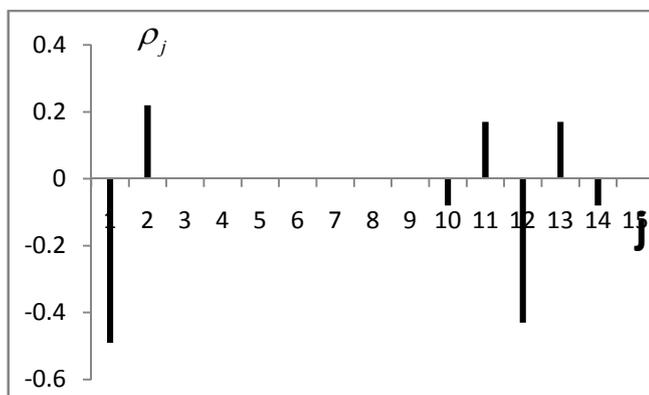


FIG 4.5. Correlograma del modelo $y_t = (1 - 0.4L^{12})(1 - 0.5L + 0.3L^2)\mu_t$

Modelo AR (1) × AR (1)₁₂

Dados los siguientes valores iniciales:

$$\Phi_1 = 0.4 \quad \phi_1 = 0.5 \quad (1 - 0.4L^2)(1 - 0.5L)y_t = \mu_t$$

Calcular:

- ✓ La Media, Varianza, Función de Autocovarianza, Función de Autocorrelación y Función de Autocorrelación Parcial de Dicho Modelo.

Función de autocorrelación del modelo AR (1) × AR (1)₁₂:

$\rho_1 \cong \rho_1^{(0)} = \phi_1 = 0.5$	$\rho_{19} \cong \rho_{29} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_5^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^5 = 0.005$
$\rho_2 \cong \rho_2^{(0)} = \phi_1^2 = 0.25$	$\rho_{20} \cong \rho_{28} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_4^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^4 = 0.01$
$\rho_3 \cong \rho_3^{(0)} = \phi_1^3 = 0.13$	$\rho_{21} \cong \rho_{27} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_3^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^3 = 0.02$
$\rho_4 \cong \rho_4^{(0)} = \phi_1^4 = 0.06$	$\rho_{22} \cong \rho_{26} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_2^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^2 = 0.04$
$\rho_5 \cong \rho_5^{(0)} = \phi_1^5 = 0.03$	$\rho_{23} \cong \rho_{25} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_1^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1 = 0.08$
$\rho_6 \cong \rho_6^{(0)} = \phi_1^6 = 0.02$	$\rho_{24} \cong \rho_{24}^{(e)} = \Phi_1^2 = 0.16$
$\rho_7 \cong \rho_{17} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_5^{(0)} = \Phi_1 \phi_1^5 = 0.4 * (0.5)^5 = 0.02$	$\rho_{31} \cong \rho_{41} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_5^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1^5 = 0.002$
$\rho_8 \cong \rho_{16} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_4^{(0)} = \Phi_1 \phi_1^4 = 0.4 * (0.5)^4 = 0.03$	$\rho_{32} \cong \rho_{40} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_4^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1^4 = 0.004$
$\rho_9 \cong \rho_{15} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_3^{(0)} = \Phi_1 \phi_1^3 = 0.4 * (0.5)^3 = 0.05$	$\rho_{33} \cong \rho_{39} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_3^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1^3 = 0.008$
$\rho_{10} \cong \rho_{14} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_2^{(0)} = \Phi_1 \phi_1^2 = 0.4 * (0.5)^2 = 1$	$\rho_{34} \cong \rho_{38} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_2^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1^2 = 0.02$
$\rho_{11} \cong \rho_{13} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_1^{(0)} = \Phi_1 \phi_1 = 0.4 * 0.5 = 0.2$	$\rho_{35} \cong \rho_{37} \cong \rho_{36}^{(e)} \rho_1^{(0)} = \Phi_1^3 \phi_1 = 0.03$
$\rho_{12} \cong \rho_{12}^{(e)} = \Phi_1 = 0.4$	$\rho_{36} \cong \rho_{36}^{(e)} = \Phi_1^3 = 0.06$
$\rho_{18} \cong \rho_{30} \cong \rho_{24}^{(e)} \rho_6^{(0)} = \Phi_1^2 \phi_1^6 = 0.003$...

Cuadro 4.5 Autocorrelaciones del modelo $y_t = (1 - 0.4L^2)(1 - 0.5L)y_t = \mu_t$

<i>j</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ρ_j	0.5	0.25	0.13	0.06	0.03	0.02	0.02	0.03	0.05	1	0.2	0.4
<i>j</i>	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
ρ_j	0.2	1	0.05	0.03	0.02	0.003	0.005	0.01	0.02	0.04	0.07	0.16
<i>j</i>	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
ρ_j	0.08	0.04	0.02	0.01	0.005	0.003	0.002	0.004	0.008	0.02	0.03	0.06
<i>j</i>	37	38	39	40	41							
ρ_j	0.03	0.02	0.008	0.004	0.02							

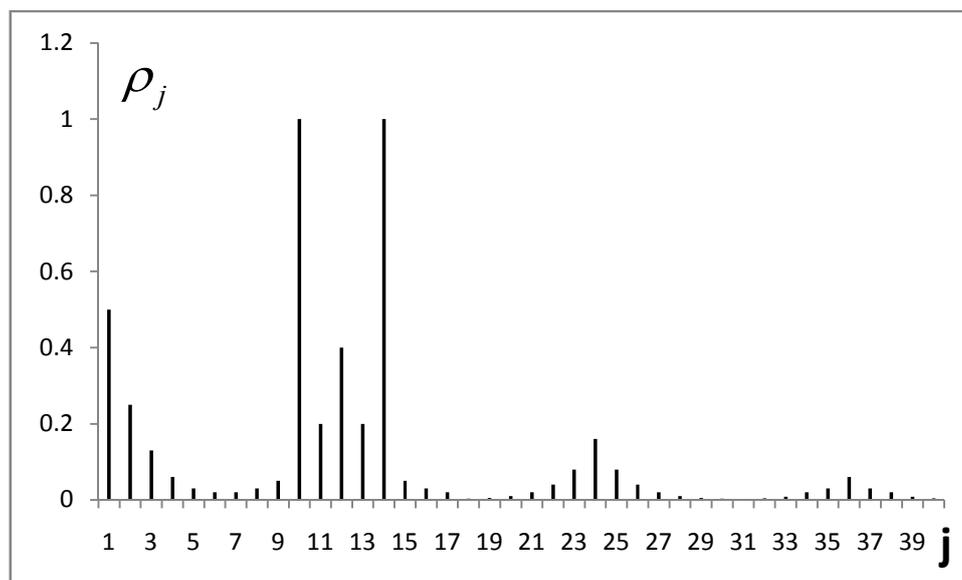


FIG 4.6. Correlograma del modelo $y_t = (1-0.4L^{12})(1-0.5L)y_t = \mu_t$

Modelo AR (1) \times MA (1)₁₂

Dados los siguientes valores iniciales:

$$\phi_1 = 0.5 \quad \Theta_1 = 0.4 \quad (1-0.5L)y_t = (1-0.5L^{12})\mu_t$$

Calcular:

- ✓ La Media, Varianza, Función de Autocovarianza, Función de Autocorrelación y Función de Autocorrelación Parcial de Dicho Modelo.

Función de autocorrelación del modelo AR (1) \times MA (1)₁₂:

$$\rho_1 \cong \rho_1^{(0)} = \phi_1 = 0.5 \quad \rho_2 \cong \rho_2^{(0)} = \phi_1^2 = 0.25$$

$$\rho_3 \cong \rho_3^{(0)} = \phi_1^3 = 0.13$$

$$\rho_4 \cong \rho_4^{(0)} = \phi_1^4 = 0.06 \quad \rho_5 \cong \rho_5^{(0)} = \phi_1^5 = 0.03$$

$$\rho_6 \cong \rho_6^{(0)} = \phi_1^6 = 0.02$$

$$\rho_7 \cong \rho_{17} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_5^{(0)} = -\frac{\phi_1^5 \Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{(0.5)^5 * 0.4}{1 + (0.4)^2} = -0.1$$

$$\rho_8 \cong \rho_{16} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_4^{(0)} = -\frac{\phi_1^4 \Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{(0.5)^4 * 0.4}{1 + (0.4)^2} = -0.02$$

$$\rho_9 \cong \rho_{15} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_3^{(0)} = -\frac{\phi_1^3 \Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{(0.5)^3 * 0.4}{1 + (0.4)^2} = -0.43$$

$$\rho_{10} \cong \rho_{14} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_2^{(0)} = -\frac{\phi_1^2 \Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = \frac{(0.5)^2 * 0.4}{1 + (0.4)^2} = -0.09$$

$$\rho_{11} \cong \rho_{13} \cong \rho_{12}^{(e)} \rho_1^{(0)} = -\frac{\phi_1^1 \Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = -0.17$$

$$\rho_{12} \cong \rho_{12}^{(e)} = \frac{-\Theta_1}{1 + \Theta_1^2} = -0.34$$

$\rho_j \cong 0, \forall j > 17$, si bien nunca es estrictamente cero.

Cuadro 4.6 Autocorrelaciones del modelo $(1 - 0.5L)y_t = (1 - 0.4L^2)\mu_t$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ρ_j	0.5	0.25	0.13	0.06	0.03	0.02	-0.10	-0.02	-0.43	-0.09	-0.17	-0.34	-0.17	-0.09	-0.1

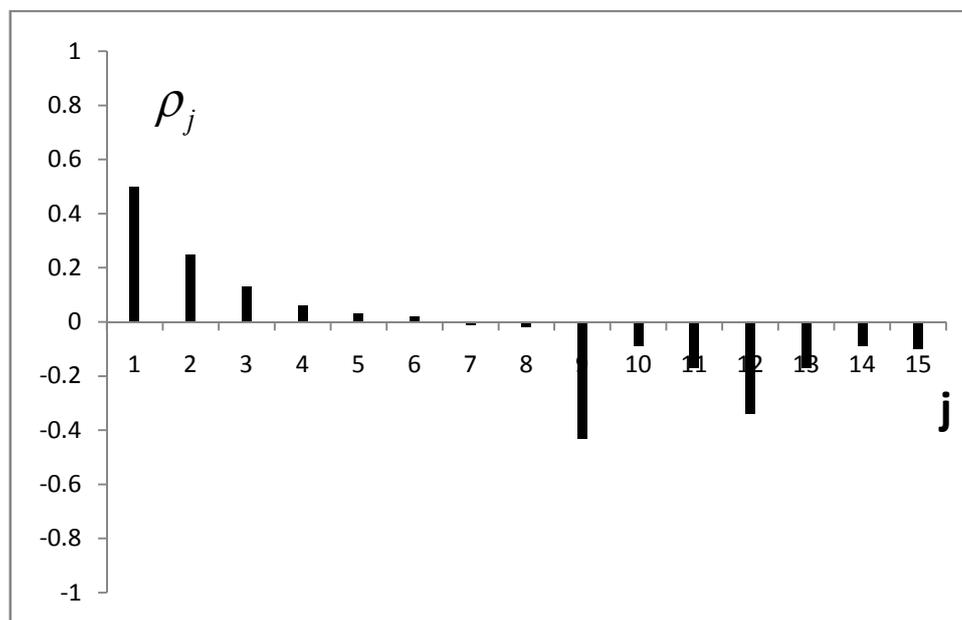


FIG 4.7. Correlograma del modelo $(1 - 0.5L)y_t = (1 - 0.4L^2)\mu_t$

ANEXOS

Tabla 1: Serie de datos para la realización del ejercicio 1 de la práctica 1.

t	Cebada	t	Cebada
1	15,2	29	14,2
2	16,9	30	15,8
3	15,3	31	15,7
4	14,9	32	14,1
5	15,7	33	14,8
6	15,1	34	14,4
7	16,7	35	15,6
8	16,3	36	13,9
9	16,5	37	14,7
10	13,3	38	14,3
11	16,5	39	14
12	15	40	14,5
13	15,9	41	15,4
14	15,5	42	15,3
15	16,9	43	16
16	16,4	44	16,4
17	14,9	45	17,2
18	14,5	46	17,8
19	16,6	47	14,4
20	15,1	48	15
21	14,6	49	16
22	16	50	16,8
23	16,8	51	16,9
24	16,8	52	16,6
25	15,5	53	16,2
26	17,3	54	14
27	15,5	55	18,1
28	15,5	56	17,5

Tabla 2: Serie de datos para la realización del ejercicio 2 de la práctica 1.

t	Concent	t	Concentr	t	Concent	t	Concent	t	Concentr	t	Concent
1	17	34	17,4	67	17	100	16,9	133	16,9	166	16,9
2	16,6	35	17,4	68	16,9	101	16,5	134	16,9	167	16,9
3	16,3	36	17,1	69	17,3	102	17,2	135	17	168	17
4	16,1	37	17,6	70	16,8	103	16,4	136	16,5	169	16,7
5	17,1	38	17,7	71	17,3	104	17	137	16,7	170	16,9
6	16,9	39	17,4	72	17,4	105	17	138	16,8	171	17,3
7	16,8	40	17,8	73	17,7	106	16,7	139	16,7	172	17,8
8	17,4	41	17,6	74	16,8	107	16,2	140	16,7	173	17,8
9	17,1	42	17,5	75	16,9	108	16,6	141	16,6	174	17,6
10	17	43	16,5	76	17	109	16,9	142	16,5	175	17,5
11	16,7	44	17,8	77	16,9	110	16,5	143	17	176	17
12	17,4	45	17,3	78	17	111	16,6	144	16,7	177	16,9
13	17,2	46	17,3	79	16,6	112	16,6	145	16,7	178	17,1
14	17,4	47	17,1	80	16,7	113	17	146	16,9	179	17,2
15	17,4	48	17,4	81	16,8	114	17,1	147	17,4	180	17,4
16	17	49	16,9	82	16,7	115	17,1	148	17,1	181	17,5
17	17,3	50	17,3	83	16,4	116	16,7	149	17	182	17,9
18	17,2	51	17,6	84	16,5	117	16,8	150	16,8	183	17
19	17,4	52	16,9	85	16,4	118	16,3	151	17,2	184	17
20	16,8	53	16,7	86	16,6	119	16,6	152	17,2	185	17
21	17,1	54	16,8	87	16,5	120	16,8	153	17,4	186	17,2
22	17,4	55	16,8	88	16,7	121	16,9	154	17,2	187	17,3
23	17,4	56	17,2	89	16,4	122	17,1	155	16,9	188	17,4
24	17,5	57	16,8	90	16,4	123	16,8	156	16,8	189	17,4
25	17,4	58	17,6	91	16,2	124	17	157	17	190	17
26	17,6	59	17,2	92	16,4	125	17,2	158	17,4	191	18
27	17,4	60	16,6	93	16,3	126	17,3	159	17,2	192	18,2
28	17,3	61	17,1	94	16,4	127	17,2	160	17,2	193	17,6
29	17	62	16,9	95	17	128	17,3	161	17,1	194	17,8
30	17,8	63	16,6	96	16,9	129	17,2	162	17,1	195	17,7
31	17,5	64	18	97	17,1	130	17,2	163	17,1	196	17,2
32	18,1	65	17,2	98	17,1	131	17,5	164	17,4	197	17,4
33	17,5	66	17,3	99	16,7	132	16,9	165	17,2		

Tabla 3: Serie de datos para la realización del ejercicio 3 de la práctica 1.

t	Pasajeros	t	Pasajeros	t	Pasajeros
1	112	49	196	97	315
2	118	50	196	98	301
3	132	51	236	99	356
4	129	52	235	100	348
5	121	53	229	101	355
6	135	54	243	102	422
7	148	55	264	103	465
8	148	56	272	104	467
9	136	57	237	105	404
10	119	58	211	106	347
11	104	59	180	107	305
12	118	60	201	108	336
13	115	61	204	109	340
14	126	62	188	110	318
15	141	63	235	111	362
16	135	64	227	112	348
17	125	65	234	113	363
18	149	66	264	114	435
19	170	67	302	115	491
20	170	68	293	116	505
21	158	69	259	117	404
22	133	70	229	118	359
23	114	71	203	119	310
24	140	72	229	120	337
25	145	73	242	121	360
26	150	74	233	122	342
27	178	75	267	123	406
28	163	76	269	124	396
29	172	77	270	125	420
30	178	78	315	126	472
31	199	79	364	127	548
32	199	80	347	128	559
33	184	81	312	129	463
34	162	82	274	130	407
35	146	83	237	131	362
36	166	84	278	132	405
37	171	85	284	133	417
38	180	86	277	134	391
39	193	87	317	135	419
40	181	88	313	136	461
41	183	89	318	137	472
42	218	90	374	138	535
43	230	91	413	139	622
44	242	92	405	140	606
45	209	93	355	141	508
46	191	94	306	142	461
47	172	95	271	143	390
48	194	96	306	144	432

Tabla 4: Serie de datos para la realización del ejercicio 4 de la práctica 1.

t	uspob
1	3929214
2	5308483
3	7239881
4	9638453
5	12860702
6	17063353
7	23191876
8	31443321
9	38558371
10	50189209
11	62979766
12	76212168
13	92228496
14	106021537
15	123202624
16	132164569
17	151325798
18	179323175
19	203302031
20	226542203
21	248709873

Tabla 5: Serie de datos para la realización del ejercicio 5 de la práctica 1.

t	desemp	t	desemp	t	desemp	t	desemp	t	desemp	t	desemp
1	375	51	442	101	426	151	545	201	796	251	858
2	384	52	475	102	406	152	545	202	781	252	818
3	383	53	401	103	392	153	592	203	780	253	856
4	326	54	406	104	426	154	576	204	679	254	897
5	344	55	385	105	445	155	593	205	748	255	817
6	375	56	380	106	464	156	603	206	759	256	872
7	419	57	422	107	379	157	631	207	749	257	895
8	424	58	397	108	409	158	614	208	756	258	825
9	429	59	430	109	497	159	617	209	802	259	922
10	399	60	433	110	459	160	546	210	754	260	915
11	376	61	421	111	513	161	632	211	792	261	902
12	288	62	374	112	549	162	673	212	772	262	908
13	360	63	401	113	447	163	732	213	769	263	911
14	376	64	451	114	445	164	593	214	731	264	919
15	360	65	465	115	432	165	693	215	746	265	861
16	381	66	456	116	514	166	730	216	741	266	827
17	354	67	469	117	565	167	731	217	712	267	855
18	301	68	466	118	557	168	733	218	723	268	867
19	333	69	412	119	601	169	802	219	698	269	836
20	339	70	427	120	582	170	755	220	746	270	916
21	316	71	414	121	587	171	805	221	754	271	828
22	352	72	384	122	560	172	751	222	735	272	835
23	378	73	328	123	590	173	855	223	722	273	792
24	360	74	395	124	556	174	769	224	737	274	771
25	388	75	381	125	582	175	800	225	728	275	757
26	398	76	360	126	527	176	825	226	773	276	756
27	377	77	383	127	585	177	799	227	723	277	712
28	383	78	383	128	556	178	802	228	741	278	733
29	449	79	403	129	574	179	765	229	738	279	746
30	415	80	425	130	556	180	827	230	765	280	728
31	429	81	422	131	582	181	760	231	748	281	707
32	369	82	414	132	583	182	781	232	707	282	666
33	414	83	382	133	644	183	769	233	808	283	636
34	462	84	390	134	620	184	766	234	746	284	676
35	447	85	320	135	618	185	752	235	773	285	696
36	403	86	412	136	623	186	751	236	751	286	654
37	409	87	437	137	546	187	761	237	721	287	613
38	390	88	421	138	568	188	873	238	731	288	677
39	380	89	450	139	595	189	750	239	735	289	705
40	438	90	442	140	605	190	758	240	701	290	680
41	431	91	450	141	598	191	772	241	762	291	699
42	426	92	412	142	592	192	791	242	783	292	650
43	348	93	422	143	558	193	813	243	796	293	687
44	394	94	372	144	595	194	781	244	803	294	638
45	396	95	375	145	549	195	797	245	806	295	670
46	451	96	392	146	637	196	802	246	765	296	555
47	384	97	356	147	568	197	782	247	781	297	631
48	491	98	392	148	605	198	838	248	768	298	676
49	466	99	426	149	594	199	756	249	812	299	659
50	454	100	442	150	567	200	764	250	854	300	689

Tabla 6: Serie de datos para la realización del ejercicio 6 de la práctica 1.

t	Ventas	t	Ventas	t	Ventas
1	464	49	699	97	966
2	675	50	830	98	1549
3	703	51	996	99	1538
4	887	52	1124	100	1612
5	1139	53	1458	101	2078
6	1077	54	1270	102	2137
7	1318	55	1753	103	2907
8	1260	56	2258	104	2249
9	1120	57	1208	105	1883
10	963	58	1241	106	1739
11	996	59	1265	107	1828
12	960	60	1828	108	1868
13	530	61	809	109	1138
14	883	62	997	110	1430
15	894	63	1164	111	1809
16	1045	64	1205	112	1763
17	1199	65	1538	113	2200
18	1287	66	1513	114	2067
19	1565	67	1378	115	2503
20	1577	68	2083	116	2141
21	1076	69	1357	117	2103
22	918	70	1536	118	1972
23	1008	71	1526	119	2181
24	1063	72	1376	120	2344
25	544	73	779	121	970
26	635	74	1005	122	1199
27	804	75	1193	123	1718
28	980	76	1522	124	1683
29	1018	77	1539	125	2025
30	1064	78	1546	126	2051
31	1404	79	2116	127	2439
32	1286	80	2326	128	2353
33	1104	81	1596	129	2230
34	999	82	1356	130	1852
35	996	83	1553	131	2147
36	1015	84	1613	132	2286
37	615	85	814	133	1007
38	722	86	1150	134	1665
39	832	87	1225	135	1642
40	977	88	1691	136	1525
41	1270	89	1759	137	1838
42	1437	90	1754	138	1892
43	1520	91	2100	139	2920
44	1708	92	2062	140	2572
45	1151	93	2012	141	2617
46	934	94	1897	142	2047
47	1159	95	1964		
48	1209	96	2186		

Tabla 7: Serie de datos para la realización del ejercicio 7 de la práctica 1.

t	tasa	t	tasa	t	tasa	t	Tasa
1	9	53	6,9	105	8,8	157	3,7
2	5,6	54	9,3	106	8	158	5,9
3	2,8	55	8,4	107	10,4	159	5,9
4	8,4	56	9	108	11,2	160	6,5
5	9,3	57	6,9	109	13,1	161	6,5
6	7,7	58	9,4	110	14,2	162	6,7
7	12,2	59	11,3	111	14,2	163	6,2
8	8,5	60	10,9	112	13,5	164	6,5
9	8,9	61	12,3	113	7,6	165	8,1
10	13,2	62	13,5	114	12,3	166	8,5
11	10,3	63	15,6	115	11,2	167	7,2
12	18,2	64	17,1	116	13,4	168	9,1
13	11,8	65	19,4	117	11,8	169	10,6
14	11,2	66	19,4	118	11,4	170	8,5
15	12,8	67	19,9	119	10	171	8,8
16	18,3	68	24,8	120	16,3	172	14,7
17	14,9	69	19,9	121	13,9	173	18,9
18	18,1	70	24,2	122	10,8	174	20,1
19	21,8	71	22,2	123	16,8	175	23,8
20	13,8	72	21,5	124	25,3	176	25,3
21	23	73	21,2	125	41,9	177	28,8
22	23,3	74	26,9	126	40,7	178	32,9
23	39,1	75	18,1	127	37,2	179	22,9
24	30,2	76	23,1	128	56,5	180	23,7
25	38,4	77	28,1	129	52,9	181	18
26	37,7	78	31,9	130	55,3	182	14,2
27	26,6	79	26,1	131	36,9	183	10,7
28	19,9	80	28,3	132	52,2	184	11,6
29	14,5	81	19,4	133	33,4	185	12
30	11,3	82	17,2	134	22,8	186	9,4
31	10,8	83	9,9	135	20,6	187	10,2
32	10,5	84	11,8	136	14,3	188	9,3
33	12,3	85	14,4	137	12,8	189	11,6
34	12,1	86	9	138	12,4	190	9,5
35	7,4	87	8,9	139	11	191	10,5
36	9,4	88	8,6	140	10,1	192	9,2
37	10,6	89	11,4	141	8,8	193	12,3
38	7,3	90	12	142	10,9	194	14,2
39	7,3	91	13,6	143	8,4	195	9,9
40	5,8	92	11,5	144	7,1	196	11,2
41	7,9	93	11,6	145	5,4	197	8,1
42	6,8	94	10,2	146	5,4	198	10,9
43	5,8	95	13,1	147	5,2	199	8,5
44	17,4	96	10	148	4,2	200	8,4
45	6,4	97	12,7	149	3,2	201	6,5
46	6,5	98	12,3	150	6,3	202	7,8
47	7,2	99	11,1	151	6	203	6,7
48	8,8	100	10,6	152	6,3	204	7
49	6	101	9,6	153	4,7	205	10,1
50	10,2	102	10,3	154	5,7	206	7,8
51	8	103	10,4	155	4,3	207	10,8
52	9,7	104	13,2	156	10,6	208	12,9

Tabla 8: Serie de datos para la realización del ejercicio 8 de la práctica 1.

t	prices	t	prices	t	prices	t	prices	t	prices	t	prices
1	460	63	495	125	598	187	548	249	455	311	379
2	457	64	500	126	598	188	547	250	452	312	386
3	452	65	504	127	595	189	545	251	457	313	387
4	459	66	513	128	595	190	545	252	449	314	386
5	462	67	511	129	592	191	539	253	450	315	389
6	459	68	514	130	588	192	539	254	435	316	394
7	463	69	510	131	582	193	535	255	415	317	393
8	479	70	509	132	576	194	537	256	398	318	409
9	493	71	515	133	578	195	535	257	399	319	411
10	490	72	519	134	589	196	536	258	361	320	409
11	492	73	523	135	585	197	537	259	383	321	408
12	498	74	519	136	580	198	543	260	393	322	393
13	499	75	523	137	579	199	548	261	385	323	391
14	497	76	531	138	584	200	546	262	360	324	388
15	496	77	547	139	581	201	547	263	364	325	396
16	490	78	551	140	581	202	548	264	365	326	387
17	489	79	547	141	577	203	549	265	370	327	383
18	478	80	541	142	577	204	553	266	374	328	388
19	487	81	545	143	578	205	553	267	359	329	382
20	491	82	549	144	580	206	552	268	335	330	384
21	487	83	545	145	586	207	551	269	323	331	382
22	482	84	549	146	583	208	550	270	306	332	383
23	479	85	547	147	581	209	553	271	333	333	383
24	478	86	543	148	576	210	554	272	330	334	388
25	479	87	540	149	571	211	551	273	336	335	395
26	477	88	539	150	575	212	551	274	328	336	392
27	479	89	532	151	575	213	545	275	316	337	386
28	475	90	517	152	573	214	547	276	320	338	383
29	479	91	527	153	577	215	547	277	332	339	377
30	476	92	540	154	582	216	537	278	320	340	364
31	476	93	542	155	584	217	539	279	333	341	369
32	478	94	538	156	579	218	538	280	344	342	355
33	479	95	541	157	572	219	533	281	339	343	350
34	477	96	541	158	577	220	525	282	350	344	353
35	476	97	547	159	571	221	513	283	351	345	340
36	475	98	553	160	560	222	510	284	350	346	350
37	475	99	559	161	549	223	521	285	345	347	349
38	473	100	557	162	556	224	521	286	350	348	358
39	474	101	557	163	557	225	521	287	359	349	360
40	474	102	560	164	563	226	523	288	375	350	360
41	474	103	571	165	564	227	516	289	379	351	366
42	465	104	571	166	567	228	511	290	376	352	359
43	466	105	569	167	561	229	518	291	382	353	356
44	467	106	575	168	559	230	517	292	370	354	355
45	471	107	580	169	553	231	520	293	365	355	367
46	471	108	584	170	553	232	519	294	367	356	357
47	467	109	585	171	553	233	519	295	372	357	361
48	473	110	590	172	547	234	519	296	373	358	355
49	481	111	599	173	550	235	518	297	363	359	348
50	488	112	603	174	544	236	513	298	371	360	343
51	490	113	599	175	541	237	499	299	369	361	330
52	489	114	596	176	532	238	485	300	376	362	340
53	489	115	585	177	525	239	454	301	387	363	339
54	485	116	587	178	542	240	462	302	387	364	331
55	491	117	585	179	555	241	473	303	376	365	345
56	492	118	581	180	558	242	482	304	385	366	352
57	494	119	583	181	551	243	486	305	385	367	346
58	499	120	592	182	551	244	475	306	380	368	352
59	498	121	592	183	552	245	459	307	373	369	357
60	500	122	596	184	553	246	451	308	382		
61	497	123	596	185	557	247	453	309	377		
62	494	124	595	186	557	248	446	310	376		

TABLA 9: Serie de datos para la realización del ejercicio 1 de la práctica 2.

t	y_t	y_{t-1}	y_{t-2}	y_{t-3}	y_{t-4}	y_{t-5}	y_{t-6}	y_{t-7}	y_{t-8}	$(y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y})$	$(y_t - \bar{y})(y_{t-2} - \bar{y})$	$(y_t - \bar{y})(y_{t-3} - \bar{y})$	$(y_t - \bar{y})(y_{t-4} - \bar{y})$	$(y_t - \bar{y})(y_{t-5} - \bar{y})$	$(y_t - \bar{y})(y_{t-6} - \bar{y})$	$(y_t - \bar{y})(y_{t-7} - \bar{y})$	$(y_t - \bar{y})(y_{t-8} - \bar{y})$	$(y_t - \bar{y})^2$
1	7	0																0
2	5	-2	0							0								4
3	9	2	-2	0					0	-4								4
4	4	-3	2	-2	0				6	-6	0							9
5	8	1	-3	2	-2	0			2	-3	-2	0						1
6	8	1	-3	2	-2	0			1	1	-3	-2	0					1
7	10	3	1	-3	2	-2	0		3	3	-9	-2	6	0				9
8	11	4	3	1	-3	2	-2	0	12	4	4	-12	8	-8	0			16
9	8	1	4	3	1	-3	2	-2	4	3	1	1	-3	2	-2	0		1
10	5	-2	1	4	3	1	-3	2	-2	-2	-8	-6	-2	-2	6	-4		4
11	3	-4	-2	1	4	3	1	-3	2	8	-4	-16	-12	-4	-4	12	-8	16
12	7	0	-4	-2	1	4	3	1	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	9	2	0	-4	-2	1	4	3	1	0	-8	-4	2	8	6	2	2	4
14	8	1	2	0	-4	-2	1	4	3	2	0	-4	-2	1	4	3	1	1
15	10	3	1	2	0	-4	-2	1	4	3	6	0	-12	-6	3	12	9	9
16	9	2	3	1	2	0	-4	-2	1	6	2	4	0	-8	-4	2	8	4
17	13	6	2	3	1	2	0	-4	-2	12	18	6	12	0	-24	-12	6	36
18	11	4	6	2	3	1	2	0	-4	24	8	12	4	8	0	-16	-8	16
19	8	1	4	6	2	3	1	2	0	4	6	2	3	1	2	0	-4	1
20	7	0	1	4	6	2	3	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	6	-1	0	1	4	6	2	3	1	2	-1	-4	-6	-2	-3	-1	-2	1
22	4	-3	-1	0	1	4	6	2	3	3	0	-3	-12	-18	-6	-9	-3	9
23	5	-2	-3	-1	0	1	4	6	2	6	2	0	-2	-8	-12	-4	-6	4
24	3	-4	-2	-3	-1	0	1	4	6	8	12	4	0	-4	-16	-24	-8	16
25	4	-3	-4	-2	-3	-1	0	1	4	12	6	9	3	0	-3	-12	-18	9
26	3	-4	-3	-4	-2	-3	-1	0	1	12	16	8	12	4	0	-4	-16	16
27	7	0	-4	-3	-4	-2	-3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	5	-2	0	-4	-3	-4	-2	-3	-1	0	8	6	8	4	6	2	0	4
29	10	3	-2	0	-4	-3	-4	-2	-3	-6	0	-12	-9	-12	-6	-9	-3	9
30	3	-4	3	-2	0	-4	-3	-4	-2	-12	8	0	16	12	16	8	12	16
31	5	-2	-4	3	-2	0	-4	-3	-4	8	-6	4	0	8	6	8	4	4
32	6	-1	-2	-4	3	-2	0	-4	-3	2	4	-3	2	0	4	3	4	1
528	221									97	84	-1	-2	-19	-31	-45	-26	225

TABLA 10: Serie de datos para la realización del ejercicio 1de la práctica 2.

t	Serie	y_t	y_{t-1}	y_{t-2}	y_{t-3}	y_{t-4}	y_{t-5}	y_{t-6}	y_{t-7}	y_{t-8}	y_{t-9}	y_{t-10}	y_{t-11}	y_{t-12}	y_{t-13}	y_{t-14}	y_{t-15}	y_{t-16}
1	7,89	0,59																
2	8,08	0,78	0,59															
3	7,1	-0,2	0,78	0,59														
4	6,11	-1,2	-0,2	0,78	0,59													
5	7,28	-0	-1,19	-0,2	0,78	0,59												
6	6,28	-1	-0,02	-1,19	-0,2	0,78	0,59											
7	6,3	-1	-1,02	-0,02	-1,19	-0,2	0,78	0,59										
8	5,31	-2	-1	-1,02	-0,02	-1,19	-0,2	0,78	0,59									
9	7,32	0,02	-1,99	-1	-1,02	-0,02	-1,19	-0,2	0,78	0,59								
10	8,36	1,06	0,02	-1,99	-1	-1,02	-0,02	-1,19	-0,2	0,78	0,59							
11	6,4	-0,9	1,06	0,02	-1,99	-1	-1,02	-0,02	-1,19	-0,2	0,78	0,59						
12	8,42	1,12	-0,9	1,06	0,02	-1,99	-1	-1,02	-0,02	-1,19	-0,2	0,78	0,59					
13	6,53	-0,8	1,12	-0,9	1,06	0,02	-1,99	-1	-1,02	-0,02	-1,19	-0,2	0,78	0,59				
14	8,6	1,3	-0,77	1,12	-0,9	1,06	0,02	-1,99	-1	-1,02	-0,02	-1,19	-0,2	0,78	0,59			
15	7,65	0,35	1,3	-0,77	1,12	-0,9	1,06	0,02	-1,99	-1	-1,02	-0,02	-1,19	-0,2	0,78	0,59		
16	9,68	2,38	0,35	1,3	-0,77	1,12	-0,9	1,06	0,02	-1,99	-1	-1,02	-0,02	-1,19	-0,2	0,78	0,59	
17	6,7	-0,6	2,38	0,35	1,3	-0,77	1,12	-0,9	1,06	0,02	-1,99	-1	-1,02	-0,02	-1,19	-0,2	0,78	0,59
18	7,7	0,4	-0,6	2,38	0,35	1,3	-0,77	1,12	-0,9	1,06	0,02	-1,99	-1	-1,02	-0,02	-1,19	-0,2	0,78
19	6,72	-0,6	0,4	-0,6	2,38	0,35	1,3	-0,77	1,12	-0,9	1,06	0,02	-1,99	-1	-1,02	-0,02	-1,19	-0,2
20	7,74	0,44	-0,58	0,4	-0,6	2,38	0,35	1,3	-0,77	1,12	-0,9	1,06	0,02	-1,99	-1	-1,02	-0,02	-1,19
21	6,74	-0,6	0,44	-0,58	0,4	-0,6	2,38	0,35	1,3	-0,77	1,12	-0,9	1,06	0,02	-1,99	-1	-1,02	-0,02
22	8,81	1,51	-0,56	0,44	-0,58	0,4	-0,6	2,38	0,35	1,3	-0,77	1,12	-0,9	1,06	0,02	-1,99	-1	-1,02
23	6,83	-0,5	1,51	-0,56	0,44	-0,58	0,4	-0,6	2,38	0,35	1,3	-0,77	1,12	-0,9	1,06	0,02	-1,99	-1
24	6,88	-0,4	-0,47	1,51	-0,56	0,44	-0,58	0,4	-0,6	2,38	0,35	1,3	-0,77	1,12	-0,9	1,06	0,02	-1,99
25	7,89	0,59	-0,42	-0,47	1,51	-0,56	0,44	-0,58	0,4	-0,6	2,38	0,35	1,3	-0,77	1,12	-0,9	1,06	0,02
26	8,9	1,6	0,59	-0,42	-0,47	1,51	-0,56	0,44	-0,58	0,4	-0,6	2,38	0,35	1,3	-0,77	1,12	-0,9	1,06
27	8,91	1,61	1,6	0,59	-0,42	-0,47	1,51	-0,56	0,44	-0,58	0,4	-0,6	2,38	0,35	1,3	-0,77	1,12	-0,9
28	6,93	-0,4	1,61	1,6	0,59	-0,42	-0,47	1,51	-0,56	0,44	-0,58	0,4	-0,6	2,38	0,35	1,3	-0,77	1,12
29	6,94	-0,4	-0,37	1,61	1,6	0,59	-0,42	-0,47	1,51	-0,56	0,44	-0,58	0,4	-0,6	2,38	0,35	1,3	-0,77
30	8,95	1,65	-0,36	-0,37	1,61	1,6	0,59	-0,42	-0,47	1,51	-0,56	0,44	-0,58	0,4	-0,6	2,38	0,35	1,3
31	6,98	-0,3	1,65	-0,36	-0,37	1,61	1,6	0,59	-0,42	-0,47	1,51	-0,56	0,44	-0,58	0,4	-0,6	2,38	0,35
32	6,7	-0,6	-0,32	1,65	-0,36	-0,37	1,61	1,6	0,59	-0,42	-0,47	1,51	-0,56	0,44	-0,58	0,4	-0,6	2,38
33	7,7	0,4	-0,6	-0,32	1,65	-0,36	-0,37	1,61	1,6	0,59	-0,42	-0,47	1,51	-0,56	0,44	-0,58	0,4	-0,6
34	7,04	-0,3	0,4	-0,6	-0,32	1,65	-0,36	-0,37	1,61	1,6	0,59	-0,42	-0,47	1,51	-0,56	0,44	-0,58	0,4
35	8,7	1,4	-0,26	0,4	-0,6	-0,32	1,65	-0,36	-0,37	1,61	1,6	0,59	-0,42	-0,47	1,51	-0,56	0,44	-0,58
36	6,08	-1,2	1,4	-0,26	0,4	-0,6	-0,32	1,65	-0,36	-0,37	1,61	1,6	0,59	-0,42	-0,47	1,51	-0,56	0,44

...Continuación de la TABLA 10: Serie de datos para la realización del ejercicio 1 de la práctica 2.

(Yt-1)	(Yt-2)	(Yt-3)	(Yt-4)	(Yt-5)	(Yt-6)	(Yt-7)	(Yt-8)	(Yt-9)	(Yt-10)	(Yt-11)	(Yt-12)	(Yt-13)	(Yt-14)	(Yt-15)	(Yt-2)
															0,35
0,19															0,61
-0,98	-0,79														0,04
-0,99	-1,97	-1,78													1,42
1,17	0,18	-0,8	-0,61												0,00
-1	0,17	-0,82	-1,8	-1,61											1,04
0,02	-0,98	0,19	-0,8	-1,78	-1,59										1,00
-0,99	-0,97	-1,97	-0,8	-1,79	-2,77	-2,58									3,96
2,01	1,02	1,04	0,04	1,21	0,22	-0,76	-0,57								0,00
1,04	3,05	2,06	2,08	1,08	2,25	1,26	0,28	0,47							1,12
-1,96	-0,92	1,09	0,1	0,12	-0,88	0,29	-0,7	-1,68	-1,49						0,81
2,02	0,06	1,1	3,11	2,12	2,14	1,14	2,31	1,32	0,34	0,63					1,25
-1,89	0,13	-1,83	-0,79	1,22	0,23	0,25	-0,75	0,42	-0,57	-1,55	-1,36				0,59
2,07	0,18	2,2	0,24	1,28	3,29	2,3	2,32	1,32	2,49	1,5	0,52	0,71			1,69
-0,95	1,12	-0,77	1,25	-0,71	0,33	2,34	1,35	1,37	0,37	1,54	0,55	-0,43	-0,24		0,12
2,03	1,08	3,15	1,26	3,28	1,32	2,36	4,37	3,38	3,4	2,4	3,57	2,58	1,6	1,79	5,66
-2,98	-0,95	-1,9	0,17	-1,72	0,3	-1,66	-0,62	1,39	0,4	0,42	-0,58	0,59	-0,4	-1,38	0,36
1	-1,98	0,05	-0,9	1,17	-0,72	1,3	-0,66	0,38	2,39	1,4	1,42	0,42	1,59	0,6	0,16
-0,98	0,02	-2,96	-0,93	-1,88	0,19	-1,7	0,32	-1,64	-0,6	1,41	0,42	0,44	-0,56	0,61	0,34
1,02	0,04	1,04	-1,94	0,09	-0,86	1,21	-0,68	1,34	-0,62	0,42	2,43	1,44	1,46	0,46	0,19
-1	0,02	-0,96	0,04	-2,94	-0,91	-1,86	0,21	-1,68	0,34	-1,62	-0,58	1,43	0,44	0,46	0,31
2,07	1,07	2,09	1,11	2,11	-0,87	1,16	0,21	2,28	0,39	2,41	0,45	1,49	3,5	2,51	2,28
-1,98	0,09	-0,91	0,11	-0,87	0,13	-2,85	-0,82	-1,77	0,3	-1,59	0,43	-1,53	-0,49	1,52	0,22
0,05	-1,93	0,14	-0,86	0,16	-0,82	0,18	-2,8	-0,77	-1,72	0,35	-1,54	0,48	-1,48	-0,44	0,18
1,01	1,06	-0,92	1,15	0,15	1,17	0,19	1,19	-1,79	0,24	-0,71	1,36	-0,53	1,49	-0,47	0,35
1,01	2,02	2,07	0,09	2,16	1,16	2,18	1,2	2,2	-0,78	1,25	0,3	2,37	0,48	2,5	2,56
0,01	1,02	2,03	2,08	0,1	2,17	1,17	2,19	1,21	2,21	-0,77	1,26	0,31	2,38	0,49	2,59
-1,98	-1,97	-0,96	0,05	0,1	-1,88	0,19	-0,81	0,21	-0,77	0,23	-2,75	-0,72	-1,67	0,4	0,14
0,01	-1,97	-1,96	-0,95	0,06	0,11	-1,87	0,2	-0,8	0,22	-0,76	0,24	-2,74	-0,71	-1,66	0,13
2,01	2,02	0,04	0,05	1,06	2,07	2,12	0,14	2,21	1,21	2,23	1,25	2,25	-0,73	1,3	2,72
-1,97	0,04	0,05	-1,93	-1,92	-0,91	0,1	0,15	-1,83	0,24	-0,76	0,26	-0,72	0,28	-2,7	0,10
-0,28	-2,25	-0,24	-0,23	-2,21	-2,2	-1,19	-0,18	-0,13	-2,11	-0,04	-1,04	-0,02	-1	0	0,36
1	0,72	-1,25	0,76	0,77	-1,21	-1,2	-0,19	0,82	0,87	-1,11	0,96	-0,04	0,98	0	0,16
-0,66	0,34	0,06	-1,91	0,1	0,11	-1,87	-1,86	-0,85	0,16	0,21	-1,77	0,3	-0,7	0,32	0,07
1,66	1	2	1,72	-0,25	1,76	1,77	-0,21	-0,2	0,81	1,82	1,87	-0,11	1,96	0,96	1,96
-2,62	-0,96	-1,62	-0,62	-0,9	-2,87	-0,86	-0,85	-2,83	-2,82	-1,81	-0,8	-0,75	-2,73	-0,66	1,49

0,01	-2,61	-0,95	-1,61	-0,61	-0,89	-2,86	-0,85	-0,84	-2,82	-2,81	-1,8	-0,79	-0,74	-2,72	1,46
1,01	1,02	-1,6	0,06	-0,6	0,4	0,12	-1,85	0,16	0,17	-1,81	-1,8	-0,79	0,22	0,27	0,04
2,05	3,06	3,07	0,45	2,11	1,45	2,45	2,17	0,2	2,21	2,22	0,24	0,25	1,26	2,27	3,42
-3	-0,95	0,06	0,07	-2,55	-0,89	-1,55	-0,55	-0,83	-2,8	-0,79	-0,78	-2,76	-2,75	-1,74	1,32
1,03	-1,97	0,08	1,09	1,1	-1,52	0,14	-0,52	0,48	0,2	-1,77	0,24	0,25	-1,73	-1,72	0,01
0,08	1,11	-1,89	0,16	1,17	1,18	-1,44	0,22	-0,44	0,56	0,28	-1,69	0,32	0,33	-1,65	0,00
-0,98	-0,9	0,13	-2,87	-0,82	0,19	0,2	-2,42	-0,76	-1,42	-0,42	-0,7	-2,67	-0,66	-0,65	1,04
0,04	-0,94	-0,86	0,17	-2,83	-0,78	0,23	0,24	-2,38	-0,72	-1,38	-0,38	-0,66	-2,63	-0,62	0,96
1	1,04	0,06	0,14	1,17	-1,83	0,22	1,23	1,24	-1,38	0,28	-0,38	0,62	0,34	-1,63	0,00
0,01	1,01	1,05	0,07	0,15	1,18	-1,82	0,23	1,24	1,25	-1,37	0,29	-0,37	0,63	0,35	0,00
-0,38	-0,37	0,63	0,67	-0,31	-0,23	0,8	-2,2	-0,15	0,86	0,87	-1,75	-0,09	-0,75	0,25	0,12
2,4	2,02	2,03	3,03	3,07	2,09	2,17	3,2	0,2	2,25	3,26	3,27	0,65	2,31	1,65	4,20
-2,99	-0,59	-0,97	-0,96	0,04	0,08	-0,9	-0,82	0,21	-2,79	-0,74	0,27	0,28	-2,34	-0,68	0,88
1,05	-1,94	0,46	0,08	0,09	1,09	1,13	0,15	0,23	1,26	-1,74	0,31	1,32	1,33	-1,29	0,01
-1	0,05	-2,94	-0,54	-0,92	-0,91	0,09	0,13	-0,85	-0,77	0,26	-2,74	-0,69	0,32	0,33	0,79
0,03	-0,97	0,08	-2,91	-0,51	-0,89	-0,88	0,12	0,16	-0,82	-0,74	0,29	-2,71	-0,66	0,35	0,74
1,04	1,07	0,07	1,12	-1,87	0,53	0,15	0,16	1,16	1,2	0,22	0,3	1,33	-1,67	0,38	0,03
1	2,04	2,07	1,07	2,12	-0,87	1,53	1,15	1,16	2,16	2,2	1,22	1,3	2,33	-0,67	1,39
-1,92	-0,92	0,12	0,15	-0,85	0,2	-2,79	-0,39	-0,77	-0,76	0,24	0,28	-0,7	-0,62	0,41	0,55
1,04	-0,88	0,12	1,16	1,19	0,19	1,24	-1,75	0,65	0,27	0,28	1,28	1,32	0,34	0,42	0,09
0,02	1,06	-0,86	0,14	1,18	1,21	0,21	1,26	-1,73	0,67	0,29	0,3	1,3	1,34	0,36	0,10
-0,95	-0,93	0,11	-1,81	-0,81	0,23	0,26	-0,74	0,31	-2,68	-0,28	-0,66	-0,65	0,35	0,39	0,40
0,01	-0,94	-0,92	0,12	-1,8	-0,8	0,24	0,27	-0,73	0,32	-2,67	-0,27	-0,65	-0,64	0,36	0,38
0,04	0,05	-0,9	-0,88	0,16	-1,76	-0,76	0,28	0,31	-0,69	0,36	-2,63	-0,23	-0,61	-0,6	0,34
-1,17	-2,57	-3	-1,49	-1,17	-0,89	1,29	3,46	2,58	0,63	1,64	-0,42	2,4	0,75	0,43	54,64

TABLA 11: Serie de datos para la realización del ejercicio 2 de la unidad 2.

t	Serie	y_t	y_{t-1}	y_{t-2}	y_{t-3}	y_{t-4}	y_{t-5}	y_{t-6}	y_{t-7}	y_{t-8}	y_{t-9}	y_{t-10}	y_{t-11}	y_{t-12}	y_{t-13}	y_{t-14}	y_{t-15}
1	6,58	0,64															
2	5,11	-0,83	0,64														
3	6,32	0,38	-0,83	0,64													
4	6,36	0,42	0,38	-0,83	0,64												
5	5,88	-0,06	0,42	0,38	-0,83	0,64											
6	5,7	-0,24	-0,06	0,42	0,38	-0,83	0,64										
7	6,18	0,24	-0,24	-0,06	0,42	0,38	-0,83	0,64									
8	5,28	-0,66	0,24	-0,24	-0,06	0,42	0,38	-0,83	0,64								
9	6,1	0,16	-0,66	0,24	-0,24	-0,06	0,42	0,38	-0,83	0,64							
10	5,74	-0,2	0,16	-0,66	0,24	-0,24	-0,06	0,42	0,38	-0,83	0,64						
11	5,1	-0,84	-0,2	0,16	-0,66	0,24	-0,24	-0,06	0,42	0,38	-0,83	0,64					
12	6,08	0,14	-0,84	-0,2	0,16	-0,66	0,24	-0,24	-0,06	0,42	0,38	-0,83	0,64				
13	6,28	0,34	0,14	-0,84	-0,2	0,16	-0,66	0,24	-0,24	-0,06	0,42	0,38	-0,83	0,64			
14	5,4	-0,54	0,34	0,14	-0,84	-0,2	0,16	-0,66	0,24	-0,24	-0,06	0,42	0,38	-0,83	0,64		
15	5,72	-0,22	-0,54	0,34	0,14	-0,84	-0,2	0,16	-0,66	0,24	-0,24	-0,06	0,42	0,38	-0,83	0,64	
16	6,35	0,41	-0,22	-0,54	0,34	0,14	-0,84	-0,2	0,16	-0,66	0,24	-0,24	-0,06	0,42	0,38	-0,83	0,64
17	6,15	0,21	0,41	-0,22	-0,54	0,34	0,14	-0,84	-0,2	0,16	-0,66	0,24	-0,24	-0,06	0,42	0,38	-0,83
18	5,74	-0,2	0,21	0,41	-0,22	-0,54	0,34	0,14	-0,84	-0,2	0,16	-0,66	0,24	-0,24	-0,06	0,42	0,38
19	6,44	0,5	-0,2	0,21	0,41	-0,22	-0,54	0,34	0,14	-0,84	-0,2	0,16	-0,66	0,24	-0,24	-0,06	0,42
20	6,09	0,15	0,5	-0,2	0,21	0,41	-0,22	-0,54	0,34	0,14	-0,84	-0,2	0,16	-0,66	0,24	-0,24	-0,06
21	6,33	0,39	0,15	0,5	-0,2	0,21	0,41	-0,22	-0,54	0,34	0,14	-0,84	-0,2	0,16	-0,66	0,24	-0,24
22	5,68	-0,26	0,39	0,15	0,5	-0,2	0,21	0,41	-0,22	-0,54	0,34	0,14	-0,84	-0,2	0,16	-0,66	0,24
23	5,95	0,01	-0,26	0,39	0,15	0,5	-0,2	0,21	0,41	-0,22	-0,54	0,34	0,14	-0,84	-0,2	0,16	-0,66
24	5,98	0,04	0,01	-0,26	0,39	0,15	0,5	-0,2	0,21	0,41	-0,22	-0,54	0,34	0,14	-0,84	-0,2	0,16
25	5,08	-0,86	0,04	0,01	-0,26	0,39	0,15	0,5	-0,2	0,21	0,41	-0,22	-0,54	0,34	0,14	-0,84	-0,2
26	5,36	-0,58	-0,86	0,04	0,01	-0,26	0,39	0,15	0,5	-0,2	0,21	0,41	-0,22	-0,54	0,34	0,14	-0,84
27	6,62	0,68	-0,58	-0,86	0,04	0,01	-0,26	0,39	0,15	0,5	-0,2	0,21	0,41	-0,22	-0,54	0,34	0,14
28	5,32	-0,62	0,68	-0,58	-0,86	0,04	0,01	-0,26	0,39	0,15	0,5	-0,2	0,21	0,41	-0,22	-0,54	0,34
29	5,3	-0,64	-0,62	0,68	-0,58	-0,86	0,04	0,01	-0,26	0,39	0,15	0,5	-0,2	0,21	0,41	-0,22	-0,54
30	5,89	-0,05	-0,64	-0,62	0,68	-0,58	-0,86	0,04	0,01	-0,26	0,39	0,15	0,5	-0,2	0,21	0,41	-0,22
31	5,91	-0,03	-0,05	-0,64	-0,62	0,68	-0,58	-0,86	0,04	0,01	-0,26	0,39	0,15	0,5	-0,2	0,21	0,41

... Continuación de la tabla.

$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-1} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-2} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-3} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-4} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-5} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-6} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-7} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-8} - \bar{Y})$
-0,53							
-0,32	0,24						
0,16	-0,35	0,27					
-0,03	-0,02	0,05	-0,04				
0,01	-0,10	-0,09	0,20	-0,15			
-0,06	-0,01	0,10	0,09	-0,20	0,15		
-0,16	0,16	0,04	-0,28	-0,25	0,55	-0,42	
-0,11	0,04	-0,04	-0,01	0,07	0,06	-0,13	0,10
-0,03	0,13	-0,05	0,05	0,01	-0,08	-0,08	0,17
0,17	-0,13	0,55	-0,20	0,20	0,05	-0,35	-0,32
-0,12	-0,03	0,02	-0,09	0,03	-0,03	-0,01	0,06
0,05	-0,29	-0,07	0,05	-0,22	0,08	-0,08	-0,02
-0,18	-0,08	0,45	0,11	-0,09	0,36	-0,13	0,13
0,12	-0,07	-0,03	0,18	0,04	-0,04	0,15	-0,05
-0,09	-0,22	0,14	0,06	-0,34	-0,08	0,07	-0,27
0,09	-0,05	-0,11	0,07	0,03	-0,18	-0,04	0,03
-0,04	-0,08	0,04	0,11	-0,07	-0,03	0,17	0,04
-0,10	0,11	0,21	-0,11	-0,27	0,17	0,07	-0,42
0,07	-0,03	0,03	0,06	-0,03	-0,08	0,05	0,02
0,06	0,20	-0,08	0,08	0,16	-0,09	-0,21	0,13
-0,10	-0,04	-0,13	0,05	-0,05	-0,11	0,06	0,14
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	-0,01	0,02	0,01	0,02	-0,01	0,01	0,02
-0,03	-0,01	0,22	-0,34	-0,13	-0,43	0,17	-0,18
0,50	-0,02	-0,01	0,15	-0,23	-0,09	-0,29	0,12
-0,39	-0,58	0,03	0,01	-0,18	0,27	0,10	0,34
-0,42	0,36	0,53	-0,02	-0,01	0,16	-0,24	-0,09
0,40	-0,44	0,37	0,55	-0,03	-0,01	0,17	-0,25
0,03	0,03	-0,03	0,03	0,04	0,00	0,00	0,01
0,00	0,02	0,02	-0,02	0,02	0,03	0,00	0,00

-0,02	-0,03	-0,35	-0,33	0,37	-0,31	-0,46	0,02
0,07	0,00	-0,01	-0,08	-0,08	0,09	-0,08	-0,11
0,10	0,42	-0,02	-0,04	-0,50	-0,48	0,53	-0,45
-0,03	-0,01	-0,02	0,00	0,00	0,03	0,02	-0,03
0,00	0,08	0,01	0,05	0,00	-0,01	-0,06	-0,06
0,05	-0,02	0,37	0,06	0,25	-0,01	-0,02	-0,30
0,25	0,05	-0,02	0,42	0,07	0,29	-0,02	-0,03
0,03	0,03	0,01	0,00	0,05	0,01	0,03	0,00
0,02	0,22	0,19	0,04	-0,02	0,32	0,05	0,22
-0,05	-0,01	-0,07	-0,06	-0,01	0,01	-0,10	-0,02
-0,05	0,16	0,02	0,21	0,18	0,04	-0,02	0,30
0,18	-0,06	0,19	0,03	0,25	0,22	0,05	-0,02
0,34	0,28	-0,09	0,30	0,04	0,39	0,34	0,07
-0,30	-0,19	-0,16	0,05	-0,17	-0,02	-0,22	-0,19
0,14	-0,25	-0,16	-0,13	0,04	-0,14	-0,02	-0,18
0,00	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,01	0,36	0,43	-0,77	-0,49	-0,40	0,14	-0,43
0,12	0,00	0,04	0,05	-0,08	-0,05	-0,04	0,01
0,07	0,66	0,01	0,21	0,26	-0,46	-0,30	-0,24
-0,42	-0,07	-0,69	-0,01	-0,22	-0,27	0,48	0,31
-0,34	0,33	0,06	0,55	0,01	0,18	0,21	-0,38
-0,03	0,04	-0,04	-0,01	-0,06	0,00	-0,02	-0,02
-0,01	0,12	-0,16	0,15	0,03	0,25	0,00	0,08
-0,08	0,02	-0,17	0,21	-0,20	-0,04	-0,34	0,00
0,07	-0,05	0,01	-0,11	0,14	-0,13	-0,02	-0,22
-0,06	-0,09	0,07	-0,02	0,15	-0,19	0,18	0,03
0,19	-0,14	-0,21	0,16	-0,04	0,34	-0,44	0,42
-0,49	-0,21	0,16	0,24	-0,18	0,04	-0,38	0,49
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
-1,29	0,36	1,85	1,92	-1,85	0,32	-1,48	-1,04

... Continuación

$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-9} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-10} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-11} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-12} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-13} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-14} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-15} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})^2$
							0,41
							0,69
							0,14
							0,18
							0,00
							0,06
							0,06
							0,44
							0,03
							0,04
-0,13							0,71
0,70	-0,54						0,02
0,05	-0,12	0,09					0,12
0,14	0,13	-0,28	0,22				0,29
0,03	-0,23	-0,21	0,45	-0,35			0,05
0,05	0,01	-0,09	-0,08	0,18	-0,14		0,17
0,10	-0,10	-0,02	0,17	0,16	-0,34	0,26	0,04
-0,14	0,05	-0,05	-0,01	0,09	0,08	-0,17	0,04
-0,03	0,13	-0,05	0,05	0,01	-0,08	-0,08	0,25
-0,10	0,08	-0,33	0,12	-0,12	-0,03	0,21	0,02
-0,13	-0,03	0,02	-0,10	0,04	-0,04	-0,01	0,15
0,05	-0,33	-0,08	0,06	-0,26	0,09	-0,09	0,07
-0,09	-0,04	0,22	0,05	-0,04	0,17	-0,06	0,00
-0,01	0,00	0,00	-0,01	0,00	0,00	-0,01	0,00
-0,01	-0,02	0,01	0,01	-0,03	-0,01	0,01	0,00
-0,35	0,19	0,46	-0,29	-0,12	0,72	0,17	0,74
-0,12	-0,24	0,13	0,31	-0,20	-0,08	0,49	0,34
-0,14	0,14	0,28	-0,15	-0,37	0,23	0,10	0,46
-0,31	0,12	-0,13	-0,25	0,14	0,33	-0,21	0,38
-0,10	-0,32	0,13	-0,13	-0,26	0,14	0,35	0,41
-0,02	-0,01	-0,03	0,01	-0,01	-0,02	0,01	0,00
0,01	-0,01	0,00	-0,02	0,01	-0,01	-0,01	0,00
0,01	-0,14	0,21	0,08	0,27	-0,11	0,11	0,29
0,01	0,00	-0,03	0,05	0,02	0,06	-0,03	0,02

-0,67	0,03	0,01	-0,20	0,30	0,12	0,39	0,61
0,02	0,03	0,00	0,00	0,01	-0,02	-0,01	0,00
0,07	-0,06	-0,09	0,00	0,00	-0,03	0,04	0,01
-0,29	0,32	-0,27	-0,40	0,02	0,00	-0,12	0,22
-0,35	-0,33	0,37	-0,31	-0,46	0,02	0,01	0,29
0,00	-0,04	-0,04	0,04	-0,03	-0,05	0,00	0,00
-0,01	-0,02	-0,26	-0,25	0,28	-0,24	-0,35	0,17
-0,07	0,00	0,01	0,08	0,08	-0,09	0,08	0,02
0,05	0,21	-0,01	-0,02	-0,24	-0,24	0,26	0,14
0,37	0,06	0,25	-0,01	-0,02	-0,30	-0,29	0,22
-0,03	0,57	0,09	0,39	-0,02	-0,04	-0,47	0,53
-0,04	0,02	-0,32	-0,05	-0,22	0,01	0,02	0,17
-0,16	-0,03	0,01	-0,27	-0,04	-0,18	0,01	0,12
-0,01	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00	-0,01	0,00
-0,06	-0,57	-0,49	-0,11	0,04	-0,82	-0,14	1,10
-0,05	-0,01	-0,06	-0,05	-0,01	0,00	-0,09	0,01
0,08	-0,26	-0,04	-0,34	-0,30	-0,06	0,03	0,40
0,25	-0,09	0,27	0,04	0,36	0,31	0,07	0,44
-0,24	-0,20	0,07	-0,21	-0,03	-0,28	-0,24	0,27
0,04	0,03	0,02	-0,01	0,02	0,00	0,03	0,00
0,10	-0,18	-0,11	-0,09	0,03	-0,10	-0,01	0,06
-0,11	-0,13	0,23	0,15	0,12	-0,04	0,13	0,10
0,00	-0,07	-0,09	0,15	0,10	0,08	-0,03	0,04
0,30	0,00	0,10	0,12	-0,21	-0,14	-0,11	0,08
0,07	0,69	0,01	0,22	0,27	-0,48	-0,31	0,44
-0,47	-0,08	-0,78	-0,01	-0,25	-0,30	0,54	0,55
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
-1,71	-1,35	-0,86	-0,60	-1,08	-1,86	0,45	12,61

TABLA 12: Serie de datos para la realización del ejercicio 3 de la unidad 2.

t	Serie	$y_t - \bar{y}$	$y_{t-1} - \bar{y}$	$y_{t-2} - \bar{y}$	$y_{t-3} - \bar{y}$	$y_{t-4} - \bar{y}$	$y_{t-5} - \bar{y}$	$y_{t-6} - \bar{y}$	$y_{t-7} - \bar{y}$	$y_{t-8} - \bar{y}$	$y_{t-9} - \bar{y}$	$y_{t-10} - \bar{y}$	$y_{t-11} - \bar{y}$	$y_{t-12} - \bar{y}$
1	3,66	-27,96												
2	3,99	-27,63	-27,96											
3	5,02	-26,60	-27,63	-27,96										
4	6,44	-25,18	-26,60	-27,63	-27,96									
5	7,51	-24,11	-25,18	-26,60	-27,63	-27,96								
6	8,21	-23,41	-24,11	-25,18	-26,60	-27,63	-27,96							
7	9,26	-22,36	-23,41	-24,11	-25,18	-26,60	-27,63	-27,96						
8	9,48	-22,14	-22,36	-23,41	-24,11	-25,18	-26,60	-27,63	-27,96					
9	10,21	-21,41	-22,14	-22,36	-23,41	-24,11	-25,18	-26,60	-27,63	-27,96				
10	10,78	-20,84	-21,41	-22,14	-22,36	-23,41	-24,11	-25,18	-26,60	-27,63	-27,96			
11	11,57	-20,05	-20,84	-21,41	-22,14	-22,36	-23,41	-24,11	-25,18	-26,60	-27,63	-27,96		
12	12,55	-19,07	-20,05	-20,84	-21,41	-22,14	-22,36	-23,41	-24,11	-25,18	-26,60	-27,63	-27,96	
13	13,86	-17,76	-19,07	-20,05	-20,84	-21,41	-22,14	-22,36	-23,41	-24,11	-25,18	-26,60	-27,63	-27,96
14	14,34	-17,28	-17,76	-19,07	-20,05	-20,84	-21,41	-22,14	-22,36	-23,41	-24,11	-25,18	-26,60	-27,63
15	14,77	-16,85	-17,28	-17,76	-19,07	-20,05	-20,84	-21,41	-22,14	-22,36	-23,41	-24,11	-25,18	-26,60
16	15,88	-15,74	-16,85	-17,28	-17,76	-19,07	-20,05	-20,84	-21,41	-22,14	-22,36	-23,41	-24,11	-25,18
17	17,1	-14,52	-15,74	-16,85	-17,28	-17,76	-19,07	-20,05	-20,84	-21,41	-22,14	-22,36	-23,41	-24,11
18	17,91	-13,71	-14,52	-15,74	-16,85	-17,28	-17,76	-19,07	-20,05	-20,84	-21,41	-22,14	-22,36	-23,41
19	19,31	-12,31	-13,71	-14,52	-15,74	-16,85	-17,28	-17,76	-19,07	-20,05	-20,84	-21,41	-22,14	-22,36
20	20,62	-11,00	-12,31	-13,71	-14,52	-15,74	-16,85	-17,28	-17,76	-19,07	-20,05	-20,84	-21,41	-22,14
21	22,13	-9,49	-11,00	-12,31	-13,71	-14,52	-15,74	-16,85	-17,28	-17,76	-19,07	-20,05	-20,84	-21,41
22	23,04	-8,58	-9,49	-11,00	-12,31	-13,71	-14,52	-15,74	-16,85	-17,28	-17,76	-19,07	-20,05	-20,84
23	23,93	-7,69	-8,58	-9,49	-11,00	-12,31	-13,71	-14,52	-15,74	-16,85	-17,28	-17,76	-19,07	-20,05
24	24,87	-6,75	-7,69	-8,58	-9,49	-11,00	-12,31	-13,71	-14,52	-15,74	-16,85	-17,28	-17,76	-19,07
25	25,83	-5,79	-6,75	-7,69	-8,58	-9,49	-11,00	-12,31	-13,71	-14,52	-15,74	-16,85	-17,28	-17,76
26	26,09	-5,53	-5,79	-6,75	-7,69	-8,58	-9,49	-11,00	-12,31	-13,71	-14,52	-15,74	-16,85	-17,28
27	27,42	-4,20	-5,53	-5,79	-6,75	-7,69	-8,58	-9,49	-11,00	-12,31	-13,71	-14,52	-15,74	-16,85
28	27,82	-3,80	-4,20	-5,53	-5,79	-6,75	-7,69	-8,58	-9,49	-11,00	-12,31	-13,71	-14,52	-15,74
29	27,73	-3,89	-3,80	-4,20	-5,53	-5,79	-6,75	-7,69	-8,58	-9,49	-11,00	-12,31	-13,71	-14,52
30	28,06	-3,56	-3,89	-3,80	-4,20	-5,53	-5,79	-6,75	-7,69	-8,58	-9,49	-11,00	-12,31	-13,71
31	28,63	-2,99	-3,56	-3,89	-3,80	-4,20	-5,53	-5,79	-6,75	-7,69	-8,58	-9,49	-11,00	-12,31

... Continuación

$Y_{t-13}-\bar{Y}$	$Y_{t-14}-\bar{Y}$	$Y_{t-15}-\bar{Y}$	$(Y_t-\bar{Y})(Y_{t-1}-\bar{Y})$	$(Y_t-\bar{Y})(Y_{t-2}-\bar{Y})$	$(Y_t-\bar{Y})(Y_{t-3}-\bar{Y})$	$(Y_t-\bar{Y})(Y_{t-4}-\bar{Y})$	$(Y_t-\bar{Y})(Y_{t-5}-\bar{Y})$	$(Y_t-\bar{Y})(Y_{t-6}-\bar{Y})$	$(Y_t-\bar{Y})(Y_{t-7}-\bar{Y})$	$(Y_t-\bar{Y})(Y_{t-8}-\bar{Y})$
			772,53							
			734,96	743,74						
			669,79	695,72	704,03					
			607,09	641,33	666,16	674,12				
			564,42	589,46	622,71	646,82	654,54			
			523,45	539,10	563,02	594,78	617,81	625,19		
			495,05	518,30	533,80	557,49	588,92	611,73	619,03	
			474,02	478,73	501,21	516,20	539,10	569,51	591,56	598,62
			446,18	461,40	465,98	487,86	502,45	524,75	554,34	575,81
			417,84	429,27	443,91	448,32	469,37	483,41	504,86	533,33
			382,35	397,42	408,29	422,21	426,41	446,43	459,78	480,18
			338,68	356,09	370,12	380,24	393,21	397,11	415,76	428,19
-27,96			306,89	329,53	346,46	360,12	369,96	382,58	386,38	404,52
-27,63	-27,96		291,17	299,26	321,33	337,84	351,15	360,76	373,06	376,77
-26,60	-27,63	-27,96	265,22	271,99	279,54	300,16	315,59	328,02	336,99	348,48
-25,18	-26,60	-27,63	228,54	244,66	250,91	257,88	276,90	291,13	302,60	310,87
-24,11	-25,18	-26,60	199,07	215,80	231,01	236,91	243,49	261,45	274,89	285,72
-23,41	-24,11	-25,18	168,77	178,74	193,76	207,42	212,72	218,63	234,75	246,82
-22,36	-23,41	-24,11	135,41	150,81	159,72	173,14	185,35	190,08	195,36	209,77
-22,14	-22,36	-23,41	104,39	116,82	130,11	137,79	149,37	159,91	163,99	168,54
-21,41	-22,14	-22,36	81,42	94,38	105,62	117,63	124,58	135,05	144,57	148,26
-20,84	-21,41	-22,14	65,98	72,98	84,59	94,66	105,43	111,66	121,04	129,58
-20,05	-20,84	-21,41	51,91	57,92	64,06	74,25	83,09	92,54	98,01	106,25
-19,07	-20,05	-20,84	39,08	44,53	49,68	54,95	63,69	71,27	79,38	84,07
-17,76	-19,07	-20,05	32,02	37,33	42,53	47,45	52,48	60,83	68,07	75,82
-17,28	-17,76	-19,07	23,23	24,32	28,35	32,30	36,04	39,86	46,20	51,70
-16,85	-17,28	-17,76	15,96	21,01	22,00	25,65	29,22	32,60	36,06	41,80
-15,74	-16,85	-17,28	14,78	16,34	21,51	22,52	26,26	29,91	33,38	36,92
-14,52	-15,74	-16,85	13,85	13,53	14,95	19,69	20,61	24,03	27,38	30,54
-13,71	-14,52	-15,74	10,64	11,63	11,36	12,56	16,53	17,31	20,18	22,99

-12,31	-13,71	-14,52	4,99	5,95	6,50	6,35	7,01	9,24	9,67	11,27
-11,00	-12,31	-13,71	0,72	1,29	1,53	1,67	1,63	1,81	2,38	2,49
-9,49	-11,00	-12,31	-0,65	-2,52	-4,51	-5,38	-5,87	-5,74	-6,34	-8,35
-8,58	-9,49	-11,00	4,32	-1,23	-4,78	-8,55	-10,18	-11,13	-10,87	-12,01
-7,69	-8,58	-9,49	11,64	6,15	-1,75	-6,80	-12,17	-14,49	-15,83	-15,47
-6,75	-7,69	-8,58	22,95	16,13	8,52	-2,43	-9,42	-16,86	-20,08	-21,94
-5,79	-6,75	-7,69	42,07	30,36	21,34	11,26	-3,21	-12,46	-22,31	-26,56
-5,53	-5,79	-6,75	66,17	50,03	36,10	25,37	13,39	-3,81	-14,81	-26,52
-4,20	-5,53	-5,79	92,87	78,11	59,05	42,61	29,94	15,81	-4,50	-17,48
-3,80	-4,20	-5,53	120,93	102,45	86,16	65,14	47,01	33,03	17,44	-4,97
-3,89	-3,80	-4,20	149,69	135,69	114,96	96,68	73,09	52,75	37,07	19,57
-3,56	-3,89	-3,80	189,48	168,86	153,07	129,68	109,07	82,46	59,50	41,81
-2,99	-3,56	-3,89	244,15	216,43	192,89	174,85	148,13	124,58	94,19	67,97
-1,67	-2,99	-3,56	295,92	259,07	229,65	204,67	185,53	157,18	132,19	99,94
-0,43	-1,67	-2,99	323,92	305,28	267,25	236,91	211,13	191,39	162,14	136,37
1,51	-0,43	-1,67	346,95	336,33	316,97	277,49	245,98	219,22	198,72	168,35
2,86	1,51	-0,43	376,37	362,49	351,39	331,16	289,91	257,00	229,04	207,62
4,07	2,86	1,51	407,70	390,23	375,84	364,32	343,35	300,59	266,46	237,47
5,64	4,07	2,86	424,77	409,69	392,13	377,66	366,10	345,02	302,05	267,75
7,46	5,64	4,07	452,04	449,85	433,88	415,28	399,97	387,71	365,40	319,89
8,87	7,46	5,64	488,80	461,54	459,31	443,00	424,01	408,38	395,86	373,08
10,47	8,87	7,46	515,38	504,77	476,63	474,32	457,48	437,87	421,72	408,80
11,55	10,47	8,87	544,22	527,00	516,15	487,37	485,01	467,79	447,74	431,23
12,96	11,55	10,47	581,49	568,68	550,68	539,34	509,27	506,80	488,81	467,86
14,62	12,96	11,55	636,96	609,57	596,13	577,27	565,38	533,85	531,27	512,41
16,70	14,62	12,96	685,79	654,21	626,08	612,28	592,90	580,70	548,32	545,66
17,72	16,70	14,62	705,43	686,83	655,20	627,02	613,20	593,80	581,57	549,14
18,28	17,72	16,70	740,52	739,40	719,90	686,75	657,22	642,73	622,39	609,58
18,98	18,28	17,72	806,27	769,23	768,07	747,81	713,37	682,69	667,65	646,52
			17756,59	16893,95	16041,02	15174,06	14302,53	13433,64	12574,45	11687,03

...Continuación

$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-9} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-10} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-11} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-12} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-13} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-14} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-15} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})^2$
							781,76
							763,42
							707,56
							634,03
							581,29
							548,03
							499,97
							490,18
							458,39
							434,31
							402,00
							363,66
							315,42
							298,60
							283,92
							247,75
							210,83
							187,96
							151,54
							121,00
							90,06
							73,62
							59,14
							45,56
							33,52
							30,58
							17,64
							14,44
							15,13
							12,67
							8,94
582,69							
553,98	560,60						
507,26	526,90	533,20					
447,20	472,42	490,71	496,57				
416,62	435,11	459,65	477,45	483,15			
394,46	406,25	424,28	448,21	465,57	471,13		
351,95	368,47	379,49	396,33	418,68	434,90	440,09	
321,47	324,67	339,91	350,08	365,61	386,23	401,19	
293,53	303,54	306,56	320,95	330,55	345,22	364,69	
256,54	263,56	272,54	275,25	288,18	296,79	309,97	
220,55	229,24	235,51	243,54	245,96	257,51	265,21	
180,97	190,27	197,77	203,18	210,11	212,20	222,16	
152,38	163,62	172,03	178,81	183,70	189,96	191,85	
132,88	136,57	146,65	154,18	160,26	164,64	170,26	
113,74	116,64	119,88	128,72	135,34	140,67	144,52	
91,13	97,56	100,05	102,83	110,42	116,09	120,66	
80,30	87,04	93,18	95,56	98,21	105,46	110,88	
57,58	60,98	66,11	70,77	72,58	74,59	80,09	
46,78	52,10	55,18	59,81	64,03	65,66	67,49	
42,79	47,89	53,33	56,48	61,23	65,55	67,22	
33,78	39,16	43,82	48,81	51,69	56,03	59,99	
25,65	28,38	32,89	36,81	40,99	43,41	47,06	

12,84	14,33	15,85	18,37	20,56	22,90	24,25	2,79
2,90	3,31	3,69	4,08	4,73	5,29	5,90	0,18
-8,74	-10,19	-11,61	-12,96	-14,33	-16,61	-18,59	2,28
-15,82	-16,56	-19,31	-21,99	-24,54	-27,14	-31,46	8,18
-17,09	-22,51	-23,57	-27,47	-31,30	-34,92	-38,62	16,56
-21,43	-23,69	-31,19	-32,66	-38,07	-43,37	-48,39	31,81
-29,02	-28,35	-31,33	-41,25	-43,19	-50,36	-57,37	55,65
-31,58	-34,50	-33,71	-37,25	-49,05	-51,36	-59,87	78,68
-31,31	-37,27	-40,73	-39,79	-43,97	-57,90	-60,62	109,62
-19,29	-34,53	-41,12	-44,93	-43,89	-48,51	-63,87	133,40
-5,57	-21,64	-38,75	-46,14	-50,41	-49,25	-54,43	167,96
22,08	-6,29	-24,42	-43,71	-52,05	-56,87	-55,56	213,74
47,76	25,22	-7,18	-27,89	-49,93	-59,45	-64,96	278,89
72,12	50,68	26,76	-7,62	-29,59	-52,98	-63,08	314,00
103,10	74,40	52,28	27,60	-7,86	-30,53	-54,66	334,16
141,59	107,05	77,25	54,28	28,66	-8,16	-31,70	360,24
175,89	147,93	111,84	80,71	56,71	29,94	-8,53	393,23
215,26	182,37	153,38	115,96	83,68	58,80	31,05	422,71
238,62	216,31	183,25	154,12	116,52	84,09	59,09	426,84
283,56	252,71	229,08	194,08	163,22	123,40	89,05	478,73
326,61	289,53	258,03	233,90	198,16	166,66	126,00	499,08
385,27	337,28	298,99	266,46	241,54	204,63	172,10	532,22
418,01	393,95	344,89	305,73	272,46	246,99	209,24	556,49
450,60	436,80	411,66	360,38	319,46	284,71	258,09	607,62
490,44	472,36	457,88	431,53	377,78	334,89	298,45	667,71
526,29	503,73	485,15	470,29	443,22	388,01	343,96	704,37
546,48	527,08	504,49	485,88	471,00	443,89	388,60	706,50
575,59	572,80	552,46	528,78	509,28	493,68	465,26	776,18
633,21	597,90	595,01	573,88	549,28	529,02	512,82	837,52
10792,64	9881,17	8981,77	8066,71	7164,33	6255,53	5335,45	18600,28

TABLA 13: Serie de datos para la realización del ejercicio 4 de la unidad 2.

t	Serie	y_t	y_{t-1}	y_{t-2}	y_{t-3}	y_{t-4}	y_{t-5}	y_{t-6}	y_{t-7}	y_{t-8}	y_{t-9}	y_{t-10}	y_{t-11}
1	13,36	2,04											
2	10,73	-0,6	2,04										
3	9,29	-2	-0,59	2,04									
4	10,82	-0,5	-2,03	-0,59	2,04								
5	13,24	1,92	-0,5	-2,03	-0,59	2,04							
6	11,2	-0,1	1,92	-0,5	-2,03	-0,59	2,04						
7	9,59	-1,7	-0,12	1,92	-0,5	-2,03	-0,59	2,04					
8	10	-1,3	-1,73	-0,12	1,92	-0,5	-2,03	-0,59	2,04				
9	12,87	1,55	-1,32	-1,73	-0,12	1,92	-0,5	-2,03	-0,59	2,04			
10	10,77	-0,6	1,55	-1,32	-1,73	-0,12	1,92	-0,5	-2,03	-0,59	2,04		
11	8,99	-2,3	-0,55	1,55	-1,32	-1,73	-0,12	1,92	-0,5	-2,03	-0,59	2,04	
12	10,18	-1,1	-2,33	-0,55	1,55	-1,32	-1,73	-0,12	1,92	-0,5	-2,03	-0,59	2,04
13	13,12	1,8	-1,14	-2,33	-0,55	1,55	-1,32	-1,73	-0,12	1,92	-0,5	-2,03	-0,59
14	10,54	-0,8	1,8	-1,14	-2,33	-0,55	1,55	-1,32	-1,73	-0,12	1,92	-0,5	-2,03
15	8,53	-2,8	-0,78	1,8	-1,14	-2,33	-0,55	1,55	-1,32	-1,73	-0,12	1,92	-0,5
16	10,11	-1,2	-2,79	-0,78	1,8	-1,14	-2,33	-0,55	1,55	-1,32	-1,73	-0,12	1,92
17	12,9	1,58	-1,21	-2,79	-0,78	1,8	-1,14	-2,33	-0,55	1,55	-1,32	-1,73	-0,12
18	10,57	-0,8	1,58	-1,21	-2,79	-0,78	1,8	-1,14	-2,33	-0,55	1,55	-1,32	-1,73
19	9,27	-2,1	-0,75	1,58	-1,21	-2,79	-0,78	1,8	-1,14	-2,33	-0,55	1,55	-1,32
20	10,48	-0,8	-2,05	-0,75	1,58	-1,21	-2,79	-0,78	1,8	-1,14	-2,33	-0,55	1,55
21	13,54	2,22	-0,84	-2,05	-0,75	1,58	-1,21	-2,79	-0,78	1,8	-1,14	-2,33	-0,55
22	11,05	-0,3	2,22	-0,84	-2,05	-0,75	1,58	-1,21	-2,79	-0,78	1,8	-1,14	-2,33
23	9,32	-2	-0,27	2,22	-0,84	-2,05	-0,75	1,58	-1,21	-2,79	-0,78	1,8	-1,14
24	10,52	-0,8	-2	-0,27	2,22	-0,84	-2,05	-0,75	1,58	-1,21	-2,79	-0,78	1,8
25	13,32	2	-0,8	-2	-0,27	2,22	-0,84	-2,05	-0,75	1,58	-1,21	-2,79	-0,78
26	10,45	-0,9	2	-0,8	-2	-0,27	2,22	-0,84	-2,05	-0,75	1,58	-1,21	-2,79
27	9,54	-1,8	-0,87	2	-0,8	-2	-0,27	2,22	-0,84	-2,05	-0,75	1,58	-1,21
28	9,84	-1,5	-1,78	-0,87	2	-0,8	-2	-0,27	2,22	-0,84	-2,05	-0,75	1,58
29	12	0,68	-1,48	-1,78	-0,87	2	-0,8	-2	-0,27	2,22	-0,84	-2,05	-0,75
30	9,74	-1,6	0,68	-1,48	-1,78	-0,87	2	-0,8	-2	-0,27	2,22	-0,84	-2,05
31	8,09	-3,2	-1,58	0,68	-1,48	-1,78	-0,87	2	-0,8	-2	-0,27	2,22	-0,84

... Continuación

$Y_{t-12}\bar{y}$	$Y_{t-13}\bar{y}$	$Y_{t-14}\bar{y}$	$Y_{t-15}\bar{y}$	$Y_{t-16}\bar{y}$	$(Y_t\bar{y})/(Y_{t-1}\bar{y})$	$(Y_t\bar{y})/(Y_{t-2}\bar{y})$	$(Y_t\bar{y})/(Y_{t-3}\bar{y})$	$(Y_t\bar{y})/(Y_{t-4}\bar{y})$	$(Y_t\bar{y})/(Y_{t-5}\bar{y})$	$(Y_t\bar{y})/(Y_{t-6}\bar{y})$	$(Y_t\bar{y})/(Y_{t-7}\bar{y})$
					-1,20						
					1,20	-4,14					
					1,02	0,30	-1,02				
					-0,96	-3,90	-1,13	3,92			
					-0,23	0,06	0,24	0,07	-0,24		
					0,21	-3,32	0,87	3,51	1,02	-3,53	
					2,28	0,16	-2,53	0,66	2,68	0,78	-2,69
					-2,05	-2,68	-0,19	2,98	-0,77	-3,15	-0,91
					-0,85	0,73	0,95	0,07	-1,06	0,28	1,12
					1,28	-3,61	3,08	4,03	0,28	-4,47	1,17
					2,66	0,63	-1,77	1,50	1,97	0,14	-2,19
2,04					-2,05	-4,19	-0,99	2,79	-2,38	-3,11	-0,22
-0,59	2,04				-1,40	0,89	1,82	0,43	-1,21	1,03	1,35
-2,03	-0,59	2,04			2,18	-5,02	3,18	6,50	1,53	-4,32	3,68
-0,5	-2,03	-0,59	2,04		3,38	0,94	-2,18	1,38	2,82	0,67	-1,88
1,92	-0,5	-2,03	-0,59	2,04	-1,91	-4,41	-1,23	2,84	-1,80	-3,68	-0,87
-0,12	1,92	-0,5	-2,03	-0,59	-1,19	0,91	2,09	0,59	-1,35	0,86	1,75
-1,73	-0,12	1,92	-0,5	-2,03	1,54	-3,24	2,48	5,72	1,60	-3,69	2,34
-1,32	-1,73	-0,12	1,92	-0,5	1,72	0,63	-1,33	1,02	2,34	0,66	-1,51
1,55	-1,32	-1,73	-0,12	1,92	-1,86	-4,55	-1,67	3,51	-2,69	-6,19	-1,73
-0,55	1,55	-1,32	-1,73	-0,12	-0,60	0,23	0,55	0,20	-0,43	0,33	0,75
-2,33	-0,55	-1,32	-1,73	-1,73	0,54	-4,44	1,68	4,10	1,50	-3,16	2,42
-1,14	-2,33	-0,55	-1,73	-1,73	1,60	0,22	-1,78	0,67	1,64	0,60	-1,26
1,8	-1,14	-2,33	-0,55	-1,73	-1,60	-4,00	-0,54	4,44	-1,68	-4,10	-1,50
-0,78	1,8	-1,14	-2,33	-0,55	-1,74	0,70	1,74	0,23	-1,93	0,73	1,78
-2,79	-0,78	1,8	-1,14	-2,33	1,55	-3,56	1,42	3,56	0,48	-3,95	1,50
-1,21	-2,79	-0,78	1,8	-1,14	2,63	1,29	-2,96	1,18	2,96	0,40	-3,29
1,58	-1,21	-2,79	-0,78	1,8	-1,01	-1,21	-0,59	1,36	-0,54	-1,36	-0,18
-0,75	1,58	-1,21	-2,79	-0,78	-1,07	2,34	2,81	1,37	-3,16	1,26	3,16
-2,05	-0,75	1,58	-1,21	-2,79	5,10	-2,20	4,78	5,75	2,81	-6,46	2,58
-0,84	-2,05	-0,75	1,58	-1,21	5,30	2,59	-1,12	2,43	2,92	1,43	-3,28

2,22	-0,84	-2,05	-0,75	1,58	-1,62	-3,20	-1,56	0,67	-1,47	-1,76	-0,86
-0,27	2,22	-0,84	-2,05	-0,75	-0,50	0,82	1,62	0,79	-0,34	0,74	0,89
-2	-0,27	2,22	-0,84	-2,05	1,19	-2,35	3,89	7,66	3,74	-1,61	3,51
-0,8	-2	-0,27	2,22	-0,84	2,77	0,59	-1,16	1,92	3,78	1,85	-0,80
2	-0,8	-2	-0,27	2,22	-2,39	-4,83	-1,02	2,02	-3,35	-6,59	-3,22
-0,87	2	-0,8	-2	-0,27	0,53	-0,30	-0,62	-0,13	0,26	-0,43	-0,84
-1,78	-0,87	2	-0,8	-2	-0,39	-3,06	1,76	3,56	0,75	-1,49	2,46
-1,48	-1,78	-0,87	2	-0,8	-0,07	0,01	0,10	-0,06	-0,12	-0,02	0,05
0,68	-1,48	-1,78	-0,87	2	0,12	-3,75	0,65	5,10	-2,93	-5,93	-1,25
-1,58	0,68	-1,48	-1,78	-0,87	2,18	0,04	-1,31	0,23	1,77	-1,02	-2,06
-3,23	-1,58	0,68	-1,48	-1,78	-0,36	-1,03	-0,02	0,62	-0,11	-0,84	0,48
-1,64	-3,23	-1,58	0,68	-1,48	-0,61	1,29	3,70	0,07	-2,22	0,38	3,02
0,99	-1,64	-3,23	-1,58	0,68	5,17	-1,43	3,04	8,73	0,17	-5,24	0,91
-0,5	0,99	-1,64	-3,23	-1,58	4,15	1,76	-0,49	1,04	2,98	0,06	-1,79
-2,37	-0,5	0,99	-1,64	-3,23	-0,46	-1,36	-0,58	0,16	-0,34	-0,98	-0,02
-1,17	-2,37	-0,5	0,99	-1,64	-0,39	1,18	3,46	1,47	-0,41	0,86	2,48
2,04	-1,17	-2,37	-0,5	0,99	3,32	-1,31	3,99	11,69	4,96	-1,37	2,91
0,26	2,04	-1,17	-2,37	-0,5	1,98	0,58	-0,23	0,70	2,06	0,87	-0,24
-1,5	0,26	2,04	-1,17	-2,37	-0,10	-0,57	-0,17	0,07	-0,20	-0,59	-0,25
0,05	-1,5	0,26	2,04	-1,17	-0,07	0,24	1,37	0,41	-0,16	0,49	1,43
2,5	0,05	-1,5	0,26	2,04	1,25	-0,52	1,81	10,25	3,03	-1,19	3,64
0,87	2,5	0,05	-1,5	0,26	1,65	0,22	-0,09	0,32	1,81	0,53	-0,21
-0,41	0,87	2,5	0,05	-1,5	-0,28	-1,59	-0,21	0,09	-0,31	-1,74	-0,51
1,48	-0,41	0,87	2,5	0,05	-0,42	0,43	2,45	0,33	-0,14	0,47	2,68
3,49	1,48	-0,41	0,87	2,5	2,33	-1,51	1,57	8,90	1,19	-0,49	1,72
1,19	3,49	1,48	-0,41	0,87	-0,17	-0,05	0,03	-0,03	-0,18	-0,02	0,01
-0,39	1,19	3,49	1,48	-0,41	0,03	-1,43	-0,39	0,25	-0,26	-1,50	-0,20
0,99	-0,39	1,19	3,49	1,48	-0,25	-0,03	1,51	0,42	-0,27	0,28	1,59
					33,03	-63,03	29,77	134,03	21,03	-68,31	17,60

1,31	3,28	0,44	-3,64	1,38	3,36	1,23	-2,59	1,98	2,7
1,98	-0,79	-1,98	-0,27	2,20	-0,83	-2,03	-0,74	1,56	1,0
0,44	-1,00	0,40	1,00	0,14	-1,11	0,42	1,03	0,38	0,3
4,22	2,06	-4,74	1,90	4,74	0,64	-5,26	1,99	4,86	5,6
1,73	2,08	1,02	-2,34	0,94	2,34	0,32	-2,60	0,98	1,4
1,39	-3,02	-3,63	-1,77	4,08	-1,63	-4,08	-0,55	4,53	4,2
-0,41	0,18	-0,38	-0,46	-0,23	0,52	-0,21	-0,52	-0,07	0,1
4,85	2,37	-1,02	2,22	2,67	1,31	-3,00	1,20	3,00	2,3
-0,08	-0,16	-0,08	0,03	-0,07	-0,09	-0,04	0,10	-0,04	0,0
2,48	-4,10	-8,08	-3,95	1,70	-3,70	-4,45	-2,18	5,00	6,3
-0,44	0,86	-1,43	-2,81	-1,37	0,59	-1,29	-1,55	-0,76	0,8
0,97	0,21	-0,41	0,67	1,32	0,65	-0,28	0,61	0,73	0,2
-1,73	-3,51	-0,74	1,47	-2,43	-4,78	-2,34	1,01	-2,19	2,2
7,12	-4,08	-8,27	-1,75	3,46	-5,72	-11,27	-5,51	2,37	12,2
0,31	2,43	-1,39	-2,82	-0,60	1,18	-1,95	-3,84	-1,88	1,4
0,59	-0,10	-0,80	0,46	0,92	0,20	-0,39	0,64	1,26	0,2
0,05	-1,49	0,26	2,02	-1,16	-2,35	-0,50	0,98	-1,62	1,0
8,38	0,17	-5,03	0,87	6,83	-3,92	-7,94	-1,68	3,32	11,2
0,51	1,48	0,03	-0,89	0,15	1,20	-0,69	-1,40	-0,30	0,3
0,07	-0,15	-0,43	-0,01	0,26	-0,04	-0,35	0,20	0,40	0,0
0,61	-0,17	0,36	1,03	0,02	-0,62	0,11	0,84	-0,48	0,2
10,68	4,53	-1,25	2,66	7,65	0,15	-4,59	0,80	6,24	9,4
0,64	1,88	0,80	-0,22	0,47	1,35	0,03	-0,81	0,14	0,3
0,20	-0,62	-1,81	-0,77	0,21	-0,45	-1,30	-0,03	0,78	0,3
0,79	-0,31	0,95	2,79	1,18	-0,33	0,70	2,00	0,04	0,6
9,75	2,88	-1,13	3,46	10,16	4,31	-1,19	2,53	7,28	8,5
-0,04	-0,20	-0,06	0,02	-0,07	-0,21	-0,09	0,02	-0,05	0,0
0,08	-0,29	-1,64	-0,49	0,19	-0,58	-1,71	-0,73	0,20	0,2
0,21	-0,09	0,31	1,74	0,51	-0,20	0,62	1,81	0,77	0,3
111,86	4,90	-78,06	6,31	92,51	-6,40	-80,12	-1,75	76,375	153,8

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA UNIDAD II

1) Dada la siguiente serie de datos ($T = 32$)

t	Serie	t	Serie
1	10,50	17	19,00
2	12,40	18	15,90
3	9,70	19	16,90
4	11,45	20	17,80
5	13,50	21	16,90
6	12,40	22	10,50
7	10,90	23	15,90
8	14,50	24	15,50
9	15,89	25	14,90
10	11,45	26	10,50
11	9,80	27	9,40
12	5,90	28	6,80
13	6,70	29	6,10
14	10,98	30	14,70
15	7,90	31	6,10
16	16,90	32	12,00

Calcular:

- a) La Media, Varianza Y Autocovarianzas.
- b) La Función de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial y Graficarlas.

2) Dado la siguiente serie ($T = 24$)

t	Serie
1	28,21
2	31,78
3	33,95
4	31,14
5	28,1
6	31,95
7	43,07
8	38,64
9	31,68
10	35,96
11	40,74
12	52,63
13	38,39
14	32,36
15	35,64
16	37,12
17	37,87
18	43,33
19	56,05
20	50,31
21	40,02
22	40,39
23	44,1
24	58,6

Calcular:

- La Media, Varianza y Autocovarianzas.
- La Función de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial y Graficarlas.

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA UNIDAD III.

1) Dado un proceso AR(1):

$$y_t = 2 + 0.9y_{t-1} + e_t$$

- ✓ Expresar el proceso con la notación de operadores autorregresivos.
- ✓ Hallar la Media, Varianza y Autocovarianzas.
- ✓ Analizar las Condiciones de Estacionariedad.
- ✓ Hallar las Función de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial y Graficarlas.

2) Dado un proceso AR(2):

$$y_t = 2 + 0.9y_{t-1} - 0.7y_{t-2} + e_t$$

- ✓ Expresar el proceso con la notación de operadores Autorregresivos.
- ✓ Hallar la Media, Varianza y Autocovarianzas.
- ✓ Analizar las Condiciones de Estacionariedad.
- ✓ Hallar las Función de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial y Graficarlas.

3) Dado un proceso MA(1):

$$y_t = 2 + 0.9y_{t-1} + e_t$$

- a) Hallar la Media, Varianza y Autocovarianzas.
- b) Analizar las condiciones de Invertibilidad.
- c) Hallar las Función de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial y Graficarla.

4) Dado un proceso MA(2):

$$y_t = 2 + 0.7y_{t-1} + 0.4y_{t-2} + e_t$$

- a) Hallar la Media, Varianza y Autocovarianzas.
- b) Analizar las condiciones de Invertibilidad
- c) Hallar las Función de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial y Gráficarlas.

5) Considere el siguiente modelo ARMA(1,1):

$$y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + e_t$$

- a) Hallar la Media, Varianza y Autocovarianzas.
- b) Hallar las Función de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial y Gráficarlas.
- c) Analizar las Condiciones de Estacionariedad.

6) Indique con qué modelo ARIMA(p,d,q) se corresponde cada uno de los siguientes procesos:

1) $y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} + u_t$

2) $y_t = (1 + \phi)y_{t-1} - \phi y_{t-2} + u_t - \theta u_{t-1}$

3) $y_t = u_t + \phi u_{t-1} + \phi^2 u_{t-2} + \phi^3 u_{t-3} + \phi^4 u_{t-4} + \dots$

4) con $|\phi| < 1$ y $|\theta| < 1$ en todos los casos.

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA UNIDAD IV.

1) Dado el proceso:

$$Y_t = 0.4Y_{t-1} + 0.3Y_{t-2} + 2 + u_t \quad \sigma_u^2 = 3$$

Se pide:

- a) Verificar la Estacionaridad del Modelo
- b) Calcular la Esperanza, Varianza y Autocovarianzas
- c) Hallar las Función de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial y Graficarlas.
- d) Representar el Correlograma

2) Sea el proceso $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$. A una serie temporal generada por este proceso se le aplica una diferencia de primer orden. Determine el proceso seguido por la serie $w_t = y_t$. Suponiendo que ambos procesos son estacionarios, demuestre si podría asegurar que uno de ellos tiene siempre una varianza superior.

3) En un modelo AR(2) estacionario para el que $\rho_1 = 0.6$ y $\rho_2 = 0.3$ obtenga los cinco primeros coeficientes de la Función de Autocorrelación Parcial.

BIBLIOGRAFÍA

- ✓ AZNAR ANTONIO, Y TRIVEZ FRANCISCO JAVIER. Métodos de Predicción en Economía 1.
- ✓ AZNAR ANTONIO, Y TRIVEZ FRANCISCO JAVIER. Métodos de Predicción en Economía II.
- ✓ PÉREZ LÓPEZ, CÉSAR. Econometría de las Series Temporales, Madrid, 2006. PEARSON PRENTICE HALL.
- ✓ <http://chasqui.univalle.edu.com>.
- ✓ <http://web.uam.es>
- ✓ <http://europa.eu.int/com>