UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Modelos Actuariales de Contingencia de Vida

Presentado por

Rafael Aníbal Calderón Melara

Trabajo presentado para optar
al grado de Licenciado en Matemática

En
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Matemática

6 de abril de 2018

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Autoridades Universitarias

- Rector: Msc. Roger Armando Arias
- Vicerrector Académico: Dr. Manuel de Jesús Joya
- Vicerrector Administrativo: Ing. Nelson Bernabé Granados
- Secretario General: Lic. Cristobal Hernán Ríos
- Fiscal General: Lic. Rafael Humberto Peña Marín

Autoridades de Facultad

- Decano: Lic.Mauricio Hernán Lovo Córdova
- Secretaria: Lic. Damarys Melany Herrera Turcios

Autoridades de Escuela

- Director: Dr. Nerys Funes
- Secretaria: Alba Idalia Córdoba Cuellar

Docente Asesor: Msc. Carlos Gámez

“La inteligencia consiste no sólo en el conocimiento, sino también en la destreza de aplicar los conocimientos en la práctica.”

Aristóteles 384 AC-322 AC. Filósofo griego.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Resumen

Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Escuela de Matemática

Carrera: Licenciatura en Matemática

Autor: Rafael Aníbal Calderón Melara

Los estudios o trabajos en Actuaría generalmente involucran modelos de contingencia de vida, ya que la Actuaría trabaja con la gestión de riesgos en la industria de seguros; existen dos formas de hacer los modelos o dos líneas de trabajo para poder abordar los diferentes problemas que se tratan. El primero consiste en los modelos deterministas que trabajan bajo ciertos factores fijos o establecidos (tasas de interés, tasas de mortalidad, etc.) y el segundo es el trabajo con los modelos estocásticos (dejando ciertos factores "aleatorios") siendo ambos de gran utilidad para el trabajo práctico. La Actuaría como tal es una de las ciencias que se fundamenta en matemática y estadística, es por esto que es tan importante entender sus fundamentos matemáticos; antes de abordar procesos estocásticos primero se debe tener un conocimiento bastante grande de modelos actuariales determinísticos, además, de ciertos conceptos de matemática fundamental, estadística y matemática financiera.

En este trabajo de graduación se presentan, tanto los fundamentos teóricos sobre actuaría determinística, como los fundamentos de actuaría con procesos estocásticos, además, se presentan las primeras aplicaciones para la teoría actuarial, por ejemplo, los principios y la elaboración de las tablas de vida, que son una de las herramientas más importantes en el trabajo práctico de la actuaría y finalmente la creación de un modelo aplicado.

Agradecimientos

Agradezco a Dios y la vida por permitirme llegar hasta este momento y por permitirme tener a las dos personas que lo han hecho posible, sin ellas, seguramente no podria realizar nada en esta vida, ¡Mis amados Padres! ¡Infinitas Gracias!

Un agradecimiento a mi familia, mis hermanos que me han acompañado en cada paso, también, a mis amigos casi hermanos con los que tuve el placer de compartir no solo en mis estudios sino en mi vida, con especial mencion para mi hermano y amigo Jorge que lastimosamente no pudo realizar este trabajo conmigo y culminar esta travecia. Gracias por estar en cada batalla contra cada obstáculo en esta carrera tan exigente pero a la vez tan hermosa.

Gracias por supuesto a mi querido asesor de trabajo de grado, quien ha sido clave en la realizacion del mismo, Gracias Maestro Carlos Gámez.

Y finalmente un agradecimiento muy aparte y especial para esa persona única y confidente que me acompañó, motivó y sobre todo escuchó en casi todo este tiempo (25/11) y sé que sin ella no hubiese podido superar incontables obsatáculos que durante estos años se presentaron. ¡Gracias!

¡Gracias a todos!

Índice general

Resumen III

Agradecimientos IV

I Fundamentos Teóricos de Actuaría Determinística 1

1. Antecedentes y Justificación 2
- 1.1. Justificación . . . 2
- 1.2. Antecedentes en la UES . . . 2
- 1.3. Perfil propuesto de trabajo . . . 3
  - 1.3.1. Objetivos . . . 3
  - 1.3.2. Metodología . . . 4
  - 1.3.3. Contenidos propuestos . . . 4

2. Introducción 5
- 2.1. ¿Qué es la Actuaría? . . . 5
  - 2.1.1. El Seguro . . . 5
- 2.2. Origen de la Actuaría . . . 6
  - 2.2.1. Los Primeros Institutos Actuarios en Europa . . . 7
  - 2.2.2. La Actuaría en los Estados Unidos . . . 7
- 2.3. Origen de las Tablas de Vida . . . 8
- 2.4. Matemáticos y/o Actuarios más destacados . . . 9

3. Actuaría Determinística 10
- 3.1. Análisis de Transiciones de Estado . . . 10
  - 3.1.1. Modelo de Dos Estados . . . 12
- 3.2. Tablas de Vida y Flujos de Efectivo . . . 16
- 3.3. Tablas de Vida . . . 17
  - 3.3.1. Cálculo de Probabilidades Usando las Tablas de Vida . . . 20
- 3.4. Valoración de Flujos de Efectivo Inciertos . . . 21
  - 3.4.1. Valor Actual Esperado . . . 22
  - 3.4.2. Relación entre las Tablas de Vida y el Flujo de Efectivo Esperado 23

II Modelo Estocástico de Contingencia de Vida 27

4. Distribuciones de supervivencia y tiempos de falla 28
4.1. Introducción a las Distribuciones de Supervivencia . . . 28
4.2. Caso Discreto . . . 29
4.3. Caso Continuo . . . 31
4.3.1. Funciones Básicas . . . 31
4.3.2. Propiedades de μ . . . 32
4.3.3. Modos . . . 33
4.3.4. Distribuciones Desplazadas . . . 33
4.4. Aproximación Estándar . . . 34
4.5. La Tabla de Vida Estocástica . . . 36
4.6. Esperanza de Vida en el Modelo Estocástico . . . 39
4.7. Tasas de Interés Estocásticas . . . 40
4.8. Ejercicios Prácticos . . . 40

5. El Enfoque Estocástico de los Seguros y las Anualidades 44
5.1. Introducción . . . 44
5.2. El Enfoque Estocástico de los Beneficios del Seguro . . . 45
5.2.1. El Caso Discreto . . . 45
5.2.2. El Caso Continuo . . . 46
5.2.3. Aproximación . . . 47
5.2.4. Seguros de Dotación . . . 47
5.3. El Enfoque Estocástico de las Prestaciones de Anualidad . . . 50
5.3.1. Anualidades Discretas . . . 50
5.3.2. Anualidades Continuas . . . 53
5.4. Contratos Diferidos . . . 55
5.5. El Enfoque Estocástico de las Reservas . . . 56
5.6. El Enfoque Estocástico de las Primas . . . 58
5.6.1. El Principio de Equivalencia . . . 58
5.6.2. Primas de Percentil . . . 59
5.6.3. Primas Agregadas . . . 61
5.6.3.1. Principios Generales de la Prima . . . 65
5.7. La Varianza de ${}_rL$ . . . 65
5.7.1. Notación y Terminología Estándar . . . 69
5.8. Ejercicios . . . 69

6. Simplificaciones Bajo Contratos de Beneficios de Nivel 72
6.1. Introducción . . . 72
6.2. Cálculos de Varianza en el Caso Continuo . . . 73
6.2.1. Seguros . . . 73
6.2.2. Anualidades . . . 73
6.2.3. Pérdidas Esperadas . . . 73
6.2.4. Utilización de Primas de Principio de Equivalencia . . . 74
6.3. Cálculos de Desviación en el Caso Discreto . . . 75
6.4. Distribuciones Exactas . . . 76
6.4.1. La Distribución de $\bar{Z}$ . . . 77

6.4.2. La Distribución de $\bar{Y}$ . . . 77
6.4.3. La Distribución de L . . . 78
6.4.4. El Caso donde T se Distribuye Exponencialmente . . . 78
6.5. Algunos Ejemplos de beneficios de no nivel . . . 79
6.5.1. Seguro a largo plazo . . . 79
6.5.2. Seguro Diferido . . . 80
6.5.3. Una póliza de primas anuales . . . 81
6.6. Ejercicios . . . 82

7. El Tiempo Mínimo de Fallo **85**
7.1. Introducción . . . 85
7.2. Distribuciones conjuntas . . . 85
7.3. La distribución de T . . . 87
7.3.1. El Caso General . . . 87
7.3.2. El Caso Independiente . . . 87
7.4. La distribución conjunta de (T, J) . . . 88
7.4.1. La función de distribución para (T, J) . . . 88
7.4.2. Funciones de densidad y supervivencia para (T, J) . . . 91
7.4.3. La distribución de J . . . 92
7.4.4. Función de Riesgo para (T, J) . . . 93
7.4.5. El caso independiente . . . 94
7.4.5.1. No identificable . . . 95
7.4.5.2. Condiciones para la independencia de T y J. . . . 97
7.5. Otros problemas . . . 98
7.6. El modelo de choque común . . . 98
7.7. Cópula . . . 102
7.8. Ejercicios . . . 107

8. Aplicación en Riesgo **109**
8.1. Introducción . . . 109
8.2. Modelo de Weibull . . . 109
8.3. Modelo de riesgo de GEORGE et al (2001) . . . 111
8.3.1. Probabilidad de incumplimiento en x . . . 111
8.3.2. Probabilidad de prepago en x . . . 112
8.3.3. Probabilidad de Maduración en x . . . 112
8.3.4. Observaciones . . . 112
8.4. Simulación progresiva del modelo de Riesgo . . . 113
8.4.1. Distribuciones de supervivencia . . . 114

9. Conclusiones y Recomendaciones **119**
9.1. Conclusiones . . . 119
9.2. Recomendaciones . . . 120

Bibliografía **121**

Dedicado a la memoria de mi querido amigo y gran compañero Jorge Osorio. . . Siempre estarás presente hermano.

Parte I

Fundamentos Teóricos de Actuaría Determinística

Capítulo 1

Antecedentes y Justificación

1.1. Justificación

El estudio de la Actuaría tiene su importancia en el gran número de problemas que pueden afrontarse y resolverse en la vida cotidiana, como diferentes aspectos financieros y de riesgo que abarca la industria de los seguros. En nuestro país no se cuenta con los profesionales en esta área, en otras palabras es una de las aplicaciones matemáticas que es poco estudiada, la Actuaría es la área que engloba uno de los problemas sociales más grandes actualmente, que es el problema de pensiones por el que atraviesa el país. Por tanto, la importancia de estudiar actuaría y sus fundamentos matemáticos va más allá del ámbito académico y se transforma en una proyección de desarrollo científico y social del país.

1.2. Antecedentes en la UES

En la Escuela de Matemática, como primer punto de referencia, existen algunos trabajos en actuaría, pero en su mayoría no tratan propiamente de modelos de contingencia sino en otros aspectos teóricos; por ejemplo, el que realizó el Msc. Otoniel Campos en su tesis de maestría que se titula "ESTUDIO DE MODELOS DE RIESGO ACTUARIAL Y DE LA PROBABILIDAD DE RUINA" en el año 2009, otro caso es la tesis de Licenciatura en Estadística titulada "ESTADÍSTICA APLICADA AL ANÁLISIS ACTUARIAL" en el año 2011, ambos trabajos tocan aspectos teóricos muy importantes pero que no son

propiamente la línea que se espera seguir para este trabajo.
Así mismo, se tiene el trabajo titulado "IMPACTO DE LA PRIVATIZACIÓN DEL SISTEMA DE PENSIONES EN LA SITUACIÓN DE POBREZA DE LAS PERSONAS PENSIONADAS EN EL SALVADOR" que se presentó en la Escuela de Economía de la Universidad de El Salvador, como tesis de la Licenciatura en Economía, en el año 2006, en la misma escuela en el año 2013 se presentó el trabajo de grado de la Licenciatura en Economía titulado "CRISIS ECONÓMICA Y RENDIMIENTO DEL FONDO DE AHORRO DE PENSIONES DE EL SALVADOR: 2007-2012"; Ambos trabajos tocan aspectos financieros mas que matemáticos; y el trabajo mas reciente se presento en la escuela de Matemática en el año 2017, como trabajo de graduación de la licenciatura en Matemática titulado "MODELOS ESTOCÁSTICOS DINÁMICOS EN MATEMÁTICA ACTUARIAL" , Asesorado por el Msc. Porfirio Rodríguez.

1.3. Perfil propuesto de trabajo

1.3.1. Objetivos

Generales

- Presentar los fundamentos matemáticos de un modelo estocástico de contingencia de vida, incluyendo aspectos probabilísticos y propiamente de matemática actuarial.

Específicos

- Estudiar las funciones básicas de un modelo de contingencia de vida, mostradas en una distribución de supervivencia con un enfoque de riesgo.
- Generalizar la teoría de contingencia de vida a un modelo multivariable.
- Presentar aplicaciones de los modelos de contingencia de vida.
- Presentar tres distribuciones conjuntas que representan el conjunto de modelos para este trabajo.

1.3.2. Metodología

La elaboración del trabajo de grado se hará de la siguiente forma:

1. Tipo la investigación
   - La investigación será de forma bibliográfica, haciendo énfasis en los aspectos aplicados de la teoría.
2. Forma de trabajo
   - Se harán reuniones periódicas con el asesor y personas expertas en el tema para hacer revisiones y avances en los temas pensados a cubrir.
3. Exposiciones
   Se harán dos exposiciones o defensas del trabajo.
   - La primera exposición será para la presentación del perfil y el plan de trabajo.
   - En la segunda exposición se hará la defensa del trabajo con los contenidos terminados (Defensa final).

1.3.3. Contenidos propuestos

Para poder alcanzar los objetivos se planea desarrollar los siguientes contenidos de la Ciencia Actuarial:

- Distribuciones de supervivencia y Tiempos de falla (El objetivo en esta parte es introducir un modelo estocástico para la mortalidad).
- El enfoque estocástico de seguros y anualidades.
- Simplificaciones bajo contratos de beneficios de nivel (El cálculo de las desviaciones y otras características de distribución se simplifica considerablemente cuando tenemos beneficios de nivel e interés constante).
- El tiempo mínimo de fallo (Se consideraran una cantidad de tiempos de fallo, y se estudia las distribuciones conjuntas).
- Modelo aplicado basado en Copulas Financieras y Modelo progresivo de un problema de dos tiempos de fallo.

Capítulo 2

Introducción

2.1. ¿Qué es la Actuaría?

Uno de los temas más importantes que trata la actuaría es el "Riesgo", que se define como la probabilidad que suceda algún evento objetivo. En ese sentido lo que trata la actuaría son los eventos donde existe el riesgo de una pérdida financiera, por ejemplo, si una persona muere priva de ingresos a su familia, por otro lado una persona podría enfermar y necesitar grandes gastos médicos para poder tratar su enfermedad, o una casa que sea destruida imprevistamente por un incendio, también un automóvil que es fuertemente dañado en un accidente o una mezcla de los casos anteriores. Sin importar las precauciones que se tomen, una persona o sus bienes están sujetos a un "Riesgo", sólo se pueden tomar medidas que mitiguen las pérdidas financieras en caso que ocurriese un evento desafortunado como es la compra de un seguro.

2.1.1. El Seguro

La idea del seguro se remonta muchos años atrás y se piensa que su origen se dio en alguna comunidad que ayudaba a los vecinos cuando estos sufrían algún infortunio, como la pérdida de algún familiar, sufrir una enfermedad o el daño de sus bienes. La idea de ayudar estaba motivada por sentimientos altruistas pero también por intereses personales, pues existía la posibilidad de que a cada vecino le ocurriera algo parecido y en tal caso necesitaría ayuda de forma similar. Esto dio origen a las compañías de seguro o al menos esa es la teoría que se tiene.

- **¿De que tratan los seguros?** Una empresa conocida como el asegurador se compromete a pagar el dinero, al que nos referiremos como beneficios, en momentos determinados, ante la ocurrencia de eventos específicos que causan la pérdida financiera. A cambio, la persona que compra el seguro, conocido como el asegurado, se compromete a realizar los pagos de las cantidades prescritas para la empresa. Estos pagos son normalmente conocidos como primas. El contrato entre el asegurador y el asegurado se refiere a menudo como la póliza de seguro.

- **Idea del "Riesgo" en los seguros**. El riesgo se transfiere de las personas que se enfrentan a una pérdida, a la aseguradora misma. La aseguradora a su vez reduce su riesgo al asegurar un número suficientemente grande de individuos, por lo que las pérdidas se pueden predecir con exactitud. Se considera el siguiente ejemplo, que es ciertamente muy simple, pero esta diseñado para ilustrar la idea básica de lo que es el riesgo y la transferencia del mismo.

Ejemplo 2.1.1. *Suponiendo que un cierto tipo de evento es poco probable que ocurra, pero si es así, provoca una pérdida financiera de \$100,000. El asegurador estima que aproximadamente 1 de cada 100 personas que se enfrentan a la posibilidad de tal pérdida realmente la va a experimentar. Si asegura a 1,000 personas, entonces se puede esperar 10 pérdidas. Sobre la base de éste modelo, el asegurador cargaría cada persona una prima de \$1000. (Estamos ignorando ciertos factores, tales como los gastos y ganancias.) Podría recoger un total de \$1,000,000 y tiene la suficiente capacidad para cubrir la pérdida de \$100,000 para cada de los 10 individuos que experimentan dicho evento. Cada individuo ha eliminado su riesgo, y en la medida que la estimación de las 10 pérdidas es correcta, la aseguradora también ha eliminado su propio riesgo.*

2.2. Origen de la Actuaría

La palabra actuario se deriva de la palabra en latín "Actuarius" que en el imperio romano designaba a un secretario del senado que levantaba las actas, pero no fue hasta el año 1774 que la compañía inglesa de seguros "The Equitable" usó por primera vez la palabra actuario cuando contrató al celebre matemático Mr. W. Morgan para la evaluación de riesgos.

La palabra Actuario fue introducida en la ley inglesa de 1819, cuando prohibía a las sociedades mutuas el uso de tablas y estadísticas que no fueran aprobadas por dos o más personas designadas con el nombre de actuarios. Los demás países europeos fueron adoptando la palabra actuario en el mismo sentido que los ingleses con excepción de los franceses y alemanes que llamaban matemáticos a estos profesionales.
Por otro lado en España el actuario era un especialista matemático que tenía por misión fijar las bases de los seguros, aplicando sus conocimientos matemáticos; vale mencionar que en España fueron los matemáticos los primeros profesionales en interesarse en la técnica de los seguros como en casi todas los países.

2.2.1. Los Primeros Institutos Actuarios en Europa

El Instituto de Actuarios Ingleses se fundó en el año 1848, el Instituto de Actuarios Franceses en el año de 1890, la Asociación de Actuarios Belgas se fundó en 1895.
En Suiza los estudios actuariales se impartían principalmente en la Universidad de Lausanne. En Alemania, fue muy famosa la Escuela de Ciencias Actuariales en la Universidad de Gotinga, fundada en 1899.

2.2.2. La Actuaría en los Estados Unidos

La herencia de la profesión en América del Norte, luego de aproximadamente 80 años de duración, se había construido sobre cimientos europeos que se remontan a la creación de la teoría de la probabilidad en la segunda mitad del siglo XVII, con la tabla de mortalidad de 1693, de Edmond Halley, al trabajo pionero de James Dodson en el sistemas de primas niveladas que condujo a la formación de La Sociedad de Garantías Equitativas para la Vida y Sobrevivencia en Londres en 1762, y para los libros de texto de Richard Price sobre Contingencias de la Vida publicado por primera vez en 1771.
Jacob Shoemaker de Filadelfia, un organizador clave en 1809 de la Compañía de Pensilvania de Seguros y Concesiones de Anualidades, de la cual decidió ser actuario y no presidente, fue la primera empresa de Norte América en practicar acturía.

Otras compañías pronto siguieron los pasos de la Compañía de Pensilvania, entre las más notables están, el Hospital de Massachusetts Vida en Boston de 1823, la Compañía de Vida y Confianza de Nueva York y en menor medida, por ejemplo, Empresas de Seguros de Vida Mutua en los años de 1840.

Y así fue el crecimiento del interés de las compañías de seguros en los profesionales actuariales y en la modelación de los seguros y otros a través de técnicas matemáticas y estadísticas de los problemas relacionados con los seguros y otros. En la siguiente tabla se presenta el desarrollo de lo que más tarde se convertiría en la Sociedad de Actuarios de Estados Unidos (en períodos de 20 años) (Interés que se presenta es una tasa compuesta)

	Miembros	Socios	Total	Tasa de crecimiento
Socios fundadores (1889)	38	-	38	-
Final del año (1909)	176	107	283	10.6 %
Final del año (1929)	362	256	618	4.0 %
Fusión (junio 3, 1949)	642	427	1,069	2.8 %
1 de Diciembre de 1969	1,888	1,656	3,544	6.2 %
1 de Septiembre de 1989	6,241	5,443	11,784	6.1 %
3 de Noviembre de 1995	7,748	9,194	16,942	6.2 %

Tabla 2.1: Tabla de crecimiento de la Sociedad de Actuarios por períodos de 20 años

2.3. Origen de las Tablas de Vida

Las pólizas de seguro, han existido por más de 2.000 años. Por ejemplo, en la época romana existían asociaciones que cobraban una suma pequeña y regular de sus miembros (es decir, una prima) y a la muerte de un miembro, pagaban un beneficio a la familia para cubrir los costos de entierro. Esta estructura no es muy diferente a lo que es una aseguradora sin fines de lucro hoy en día.

Los tipos más formales de seguros empezaron a aparecer en la época medieval y en particular se centraron en la protección de las mercancías en el mar, ya que el comercio entre las regiones era una parte importante de la economía, siendo el transporte por barco el método más eficiente de transporte. Sin embargo, el conocimiento de los mares era limitado y el viaje en barco era muy peligroso, por lo tanto había una probabilidad razonable de que la carga enviada por mar nunca llegará a su destino previsto (parecía que la gente no estaba tan preocupada por la pérdida de la tripulación!). El seguro marítimo se hizo popular muy rápidamente, pero la aplicación de estas técnicas a la protección de los intereses financieros de las vidas (es decir, seguro de vida) tomaría algún tiempo. Una de las principales razones de ello fue la falta de datos sobre la mortalidad y su frecuencia en las poblaciones medievales. ¿Cómo se puede vender una póliza de seguro de vida a alguien si no tengo ni idea de cuánto tiempo es probable que vivan? Un primer intento de resolver este problema vino a través de la obra de John Graunt, un mercader de comercio, que publicó el libro clásico, "Observaciones Naturales y Políticas hechas sobre las Letras de la Mortalidad" en 1662. Este libro fue el primer trabajo para demostrar la consistencia en la mortalidad y además fue la base para la primera tabla de vida.

2.4. Matemáticos y/o Actuarios más destacados

- John Graunt (24 abril 1620 a 18 abril 1674): Graunt, junto con William Petty, desarrolló principios estadísticos y métodos de censo humano que más tarde proporcionarían un marco para la demografía moderna. Se le atribuye la creación de la primera tabla de vida, dando probabilidades de supervivencia para cada edad.

- James Dodson (1705–1757): era un matemático británico, actuario e innovador en la industria del seguro, Dodson fue alumno de Abraham de Moivre, como matemático Dodson es conocido principalmente por su trabajo en "The Anti-logarithmic Canon y The Mathematical Miscellany". Construyó una de las primeras tablas de mortalidad basado en las estadísticas elaboradas por Edmund Halley en 1693.

- Johan De Witt (1625-1672): Además de ser un hombre de Estado, Johan De Witt también fue un matemático consumado. En 1659 escribió "Elementa curvarum linearum" como un apéndice de "La Geometría" de Frans van Schooten. En este sentido, De Witt deriva de las propiedades básicas de las formas cuadráticas, un paso importante en el campo de álgebra lineal, sus aportes a la actuaría fueron en la creación de una anualidad de vida que consistía en una renta vitalicia como una media ponderada de las rentas determinadas donde los pesos eran las probabilidades de mortalidad (que suma a uno), produciendo de esta manera el valor esperado del valor actual de una renta vitalicia.

Capítulo 3

Actuaría Determinística

En el desarrollo del presente capítulo se utilizarán conceptos básicos de Matemática Financiera, como el interés, valores actuales, flujos de efectivo y conceptos básicos de probabilidad. Es por ello que se supone un conocimiento básico en dichos temas.

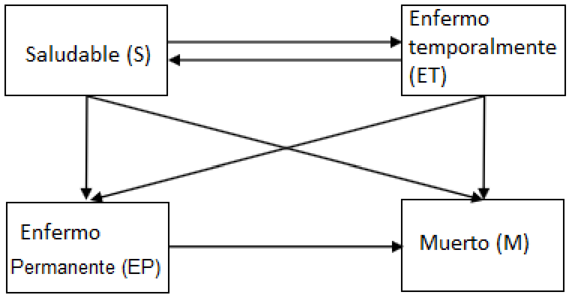
3.1. Análisis de Transiciones de Estado

Los cálculos de flujo de efectivo y modelos en la introducción de Actuaría determinística generalmente asumen que los flujos tienen garantía de ocurrir. Como ejemplo de lo anterior, la anualidad de seguros que hasta este punto supone que no había nada que detuviera la póliza y esta quedaba totalmente en sus términos del tiempo. Sin embargo, hay muchos factores que podrían causar que los flujos de efectivo reales difieran de los proyectados en el modelo de flujo de efectivo. Esto es fundamentalmente lo que le interesa a los actuarios, en otras palabras, lo que interesa estudiar es la incertidumbre en estos flujos de efectivo, la forma de medir esta incertidumbre y cómo manejar esta incertidumbre.

¿Cuáles son estos factores que podrían causar que los flujos de efectivo proyectados difieran con los flujos de efectivo reales?

Existen muchos otros factores que podrían hacer diferir los flujos de efectivo proyectados de los flujos de efectivo reales, es por ello que es importante para los actuarios poder modelar la ocurrencia de estos eventos que afectan los flujos de efectivo y es en esto consiste el "Análisis de Transiciones de Estado".

Se considerarán solo eventos que no son de índole financiero, como lo son las enfermedades o la muerte, más adelante se consideran otros evento. La modelización de estos eventos inciertos es fundamental en el trabajo actuarial en el ámbito de los seguros, las pensiones, inversión o cualquier otro tipo de trabajo. El trabajo fundamental con "Transiciones de Estado" se ejemplifica con el siguiente diagrama:



En el diagrama anterior cada recuadro representa un posible estado para un individuo y las posibles transiciones de estos estados, por ejemplo, una persona puede pasar de ser "Saludable" a "Enferma Temporalmente" que significa que una persona ha enfermado pero que se recupera, es decir, necesitará gastos médicos solamente por un período de tiempo, pero también una persona puede pasar de "Saludable" a "Enferma Permanentemente" o de "Enferma Temporalmente" a "Enferma Permanentemente", y esto supondría gastos médicos de por vida para tratar su enfermedad y finalmente una persona podría pasar de cualquiera de los estados anteriores a la muerte, que es un estado permanente y tendría consecuencias financieras como los gastos funerarios, además del pago de la retribución establecida según la póliza que se haya acordado. Este análisis interesa a los actuarios, pues como se puede observar el estado de los flujos de efectivo depende del estado de los individuos (asegurados), es evidente que los flujos de efectivo positivos (primas) y negativos (pagos), dependen de las transiciones de estado de los individuos, es por ello que se necesita saber las probabilidades de movimiento de estado del individuo que adquiere un seguro, para poder garantizar que las reservas reales son suficientes para poder cubrir las futuras reclamaciones.
Para comenzar se observa el modelo básico que considera solo dos estados, como se observa en la figura 3.1.

Un ejemplo de una póliza para la que este modelo podría ser útil es una que requiere que los asegurados paguen primas regulares cuando están vivos y luego ofrece el pago

FIGURA 3.1: Análisis de transiciones de estado

de un reclamo de una sola vez cuando el asegurado muere. Esto es obviamente un póliza muy simple, pero proporcionará un buen marco desde el que se puede entender el trabajo actuarial. En la práctica, los actuarios típicamente necesitarán considerar modelos de estado mucho más complicados, cuando se trabaja con seguros y otros productos financieros.

3.1.1. Modelo de Dos Estados

Ya se presentó a este modelo como el más simple y además se presentó un ejemplo de una póliza para la que podría ser útil este modelo, que es donde se ofrece un solo pago cuando la persona muere.

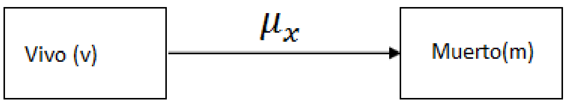


FIGURA 3.2: Fuerza de mortalidad

En este tipo de pólizas la aseguradora debe pagar al asegurado una sola reclamación una vez que este muera, es decir, le interesa que los asegurados estén vivos y la probabilidad que estos mueran. Para modelar esto se introduce un término que ayudará a modelar este caso, el cual es μ_x que denota "La intensidad de transición de mortalidad por año". Este término también es conocido como "Fuerza de mortalidad", y x es el factor o los factores que lo afectan, en el primer caso sólo se considera la edad o el tiempo como factor, aunque obviamente podrían haber otros factores como el tipo de trabajo, el género, nivel socio-económico, etc. En esta parte se omitirán todos esos factores por simplicidad.

En el modelo de dos estados se denotará como A al evento donde el individuo sobreviva desde la edad 0 a la edad $x+t$; y B como el evento donde el individuo sobreviva desde la edad 0 a la edad x, por tanto $A|B$ es el evento que sobreviva desde la edad x a la edad $x+t$, el evento $A \cap B$ (el evento que A y B ocurran) es solo A, pues sobrevivir de la edad 0 a la edad $x+t$ implica sobrevivir de la edad 0 a la edad x.
${}_tp_x$, denota la probabilidad de vida desde el tiempo x hasta el tiempo x+t. De igual forma se denota ${}_tq_x$, la probabilidad de muerte.

Usando la notación previa sobre probabilidad condicional se tiene que:

$$ {}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} \tag{3.1.1} $$

Este resultado será útil en los siguientes cálculos.
Ahora para el cálculo de ${}_tq_x$ se tiene que:

$$ \begin{aligned} {}_tq_x &= 1 -_t p_x \\ &= 1 - \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} \\ &= \frac{{}_xp_0 -_{x+t} p_0}{{}_xp_0} \\ \frac{{}_tq_x}{t} &= \frac{{}_xp_0 -_{x+t} p_0}{{}_xp_0 \times t} \end{aligned} $$

Haciendo $t \to 0$, se tiene que la parte izquierda de la ecuación se transforma en una tasa de mortalidad instantánea, es decir, en la intensidad de mortalidad μ_x y así la parte derecha de la ecuación se reescribe como un derivada:

$$ \lim_{t \to 0} \frac{{}_tq_x}{t} = \mu_x = -\frac{1}{{}_xp_0} \lim_{t \to 0} \left(\frac{{}_{x+t}p_0 - {}_xp_0}{t} \right) \tag{3.1.2} $$

Entonces

$$ \begin{aligned} \mu_x &= \frac{-\frac{d}{dx}({}_xp_0)}{{}_xp_0} \\ &= -\frac{d}{dx} \ln({}_xp_0) \qquad ;\text{esto pues } \ \frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{f(x)} \end{aligned} $$

De aquí se establece que:

$$ \mu_{x+s} = -\frac{d}{ds} \ln({}_{x+s}p_0) \tag{3.1.3} $$

Luego integrando a ambos lados de la ecuación (3.1.3) se tiene que:

$$-\int_0^t \mu_{x+s}ds = \Big[\ln({}_{x+s}p_0)\Big]_0^t = \ln({}_{x+t}p_0) - \ln({}_xp_0) = \ln\left(\frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0}\right) = \ln({}_tp_x)$$

Por lo tanto

$$ {}_tp_x = \exp\left[-\int_0^t \mu_{x+s}ds\right] \tag{3.1.4}$$

y dado que ${}_tq_x = 1 -_t p_x$, entonces

$$ {}_tq_x = 1 - \exp\left[-\int_0^t \mu_{x+s}ds\right] \tag{3.1.5}$$

Se va a elevar un poco la dificultad y se presenta el siguiente resultado importante como ejercicio práctico.

Ejercicio práctico 3.1.1. *Un individuo actualmente de 30 años de edad, tiene una intensidad de transición de mortalidad* $\mu_x = 5\times 10^{-4} + 4\times 10^{-5}e^{0.085x}$*, donde* x *es la edad, calcular la probabilidad que muera entre los años 75 y 80.*

Sol.

Se puede analizar el caso como que primero el individuo debe sobrevivir hasta los 75 años (evento B) y luego este muere entre los 75 y 80 años, se puede pensar en una reordenación de la fórmula de probabilidad condicional.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A|B)\times P(B)$$

Entonces lo que se busca, se denotará por ${}_{45|5}q_{30} =_5 q_{75} \times_{45} p_{30}$, que representa la probabilidad de muerte entre los 75 y 80 años, entonces

$$
\begin{aligned}
{}_5q_{75} &= 1 - \exp\left[-\int_0^5 \mu_{75+s} ds\right] \\
&= 1 - \exp\left[-\int_0^5 5\times 10^{-4} + 2\times 10^{-5} e^{0.085(75+s)} ds\right] \\
&= 1 - \exp\left[-\left[5\times 10^{-4}s + \frac{2\times 10^{-5}e^{0.085(75+s)}}{0.085}\right]_0^5\right] \\
&= 1 - \exp\left[-\left[0.0025 + 2.3529412\times 10^{-4}(e^{6.8} - e^{6.375})\right]\right] \\
&= 1 - \exp[-0.075643967] \\
&= 0.0728538
\end{aligned}
$$

Luego análogamente se calcula

$$
\begin{aligned}
{}_{45}p_{30} &= \exp\left[-\int_0^{45} \mu_{30+s} ds\right] \\
&= 1 - \exp\left[-\int_0^{45} 5\times 10^{-4} + 2\times 10^{-5} e^{0.085(30+s)} ds\right] \\
&= 1 - \exp\left[-\left[5\times 10^{-4}s + \frac{2\times 10^{-5}e^{0.085(30+s)}}{0.085}\right]_0^{45}\right] \\
&= 1 - \exp\left[-\left[0.0025 + 2.3529412\times 10^{-4}(e^{6.375} - e^{2.55})\right]\right] \\
&= 1 - \exp[-0.1576008] \\
&= 0.854191
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el valor buscado es:

$$
{}_{45|5}q_{30} = 0.0728538 \times 0.854191 = 0.0622
$$

Con esto se termina el análisis del modelo de dos estados, claramente hay muchos modelos más complicados o más complejos que se estudian en la práctica del trabajo de las ciencias Actuariales y para ellos se utilizan otras herramientas fundamentales que se revisaran mas adelante.

3.2. Tablas de Vida y Flujos de Efectivo

Una tabla de vida es una representación de la mortalidad de una población, como se vio en los fundamentos teóricos de la actuaría existe formas de calcular las probabilidades de que una persona muera o viva y a estos se les llama modelos de intensidad de transiciones de estado, ahora se busca conocer probabilidades similares para una población y es por ello que se introduce la idea de tablas de vida.
La columna clave en las tablas de vida se denota por l_x, un ejemplo de la estructura se muestra a continuación.

$Edad(x)$	l_x
30	100,000
31	99,924
32	99,844
33	99,763
...	...
79	80,611
80	79,196

Los valores de l_x denotan la cantidad de individuos que tienen una edad x, la idea es tener un estimado de cuántos individuos se esperaría que estuvieran vivos a una edad avanzada a partir de los datos de la población más joven, por ejemplo en la tabla anterior se esperaría que 79,196 individuos estuvieran vivos a los 80 años, si 100,000 de ellos están vivos a los 30 años. Si usamos la notación que se ha utilizado antes para denotar la probabilidad de sobrevivir desde una edad x hasta una edad $x + t$ se tendría que

$$ {}_{50}p_{30} = 79,196/100,000 = 0.79196 $$

En conclusión, las tablas de vida no son más que una representación de la mortalidad de una población mediante el seguimiento de la población de individuos de una edad a través de años futuros.

3.3. Tablas de Vida

Como se ha descrito hasta el momento, la tabla de vida es una representación de la mortalidad de una población, entonces hay que describir la relación entre las tablas de vida y la fuerza de mortalidad. Para ello se hará la descripción de un ejemplo simple, donde se considera una fuerza de mortalidad μ constante en todas las edades de 2 % por año y una población a los 30 años de 100,000 individuos, es decir, $l_{30} = 100,000$.

Como la fuerza de mortalidad es constante, entonces la probabilidad de mortalidad q_x también es constante, lo que implica que q_x se puede calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} q_x &= 1 - \exp\left| \int_0^1 \mu ds \right| = 1 - \exp\left| \int_0^1 0.02 ds \right| \\ &= 1 - \exp|-0.02| \\ &= 0.019801 \end{aligned}$$

También se sabe que la probabilidad de supervivencia es p_x, entonces

$$p_x = 1 - q_x = 1 - 0.019801 = 0.980199$$

Si se tiene una población de 100.000 de 30 años, entonces la población de individuos a los 31 años es simplemente igual a este 100.000 multiplicado por la probabilidad de supervivencia; es decir:

$$\begin{aligned} l_{31} &= l_{30} \times p_{30} = l_{30} \times (1 - q_{30}) \\ &= 100,000 \times 0.980199 = 100,000 \times (1 - 0.019801) \\ &= 98,020 \end{aligned}$$

De forma más general se puede expresar como:

$$l_{x+1} = l_x \times p_x = l_x \times (1 - q_x) \tag{3.3.1}$$

Ya que este es un proceso iterativo, si se tiene los valores de p_x o q_x para todas las edades x requeridas y se fija el valor l a cierta edad inicial, entonces se puede calcular l

en todas las edades posteriores. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} l_{32} &= l_{31} \times p_{31} = l_{31} \times (1 - q_{31}) \\ &= 98,020 \times 0.980199 = 98,020 \times (1 - 0.019801) \\ &= 96,079 \end{aligned}$$

Por lo tanto la tabla de vida resultante será:

$Edad(x)$	L_x	q_x
30	100,000	0.019801
31	98,019.9	0.019801
32	96,079.00796	0.019801
33	94,176.54752	0.019801
...	...	...
79	20,598.05216	0.019801
80	20,190.19013	0.019801

Además cabe señalar que l se puede calcular de la siguiente manera:

$$l_{x+n} = l_{x+n-1} \times p_{x+n-1} = l_{x+n-2} \times p_{x+n-1} = \ldots = l_x \times p_x \times p_{x+1} \times \ldots \times p_{x+n-2} \times p_{x+n-1}$$

Por lo tanto se tiene que

$$l_{x+n} = l_x \times_n p_x = l_x \times (1 -_n q_x) \tag{3.3.2}$$

Se han dado distintas formas de calcular l, hay que mencionar que esta teoría sobre tablas de vida es fundamental en el trabajo práctico sobre actuaría y gestión de riesgos para seguros. El trabajo con las tablas de vida normalmente se hace con el apoyo de hojas de cálculo pues la mayoría de fórmulas son fáciles de utilizar en cualquier software.

Introduciendo una Nueva Notación

Se va a introducir una nueva notación que sera muy útil en el cálculo de probabilidades utilizando las tablas de vida más adelante. Para ello se toma la tabla anterior

$Edad(x)$	L_x	q_x	d_x
30	100,000	0.019801	1,980
31	98,019.9	0.019801	1,941
32	96,079.00796	0.019801	1902
33	94,176.54752	0.019801	1865
...	...	...	...
79	20,598.05216	0.019801	743
80	20,190.19013	0.019801	

Se puede intuir que el termino d_x representa el número de personas muertas de edad x y se calcula como:

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_x - l_x \times p_x = l_x(1 - p_x)$$

por lo tanto se tiene que

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_x(1 - p_x) = l_x q_x \tag{3.3.3}$$

Cabe aclarar que las tablas de vida que se han presentado hasta el momento son tablas bastante simples, pues su función es introductoria, sin embrago, las tablas de vida que los actuarios utilizan en la práctica incluyen otros factores como:

- Se separan las tablas de vida para los hombres y mujeres, pues los hombres normalmente tienen una mayor taza de mortalidad que las mujeres.
- Se consideran las tasas de mortalidad que cambian con el tiempo, por ejemplo, la tasa de mortalidad para una persona de 60 años en la actualidad es mucho menor de lo que fue para una persona de 60 años en 1960.

Otro factor de gran interés para los actuarios, es conocer si las tasas de mortalidad de las personas que compran seguros se correspondan con las tasas de mortalidad de la población general.

Edad(x)	l_x	Edad(x)	l_x	Edad(x)	l_x	Edad(x)	l_x
0	100,000	28	98,268	56	91,835	84	31,204
1	99,402	29	98,181	57	91,214	85	27,594
2	99,358	30	98,091	58	90,523	86	24,080
3	99,333	31	97,997	59	89,754	87	20,722
4	99,316	32	97,900	60	88,904	88	17,575
5	99,301	33	97,798	61	87,969	89	14,683
6	99,276	34	97,693	62	86,946	90	12,078
7	99,276	35	97,582	63	85,834	91	9,777
8	99,264	36	97,466	64	84,631	92	7,773
9	99,253	37	97,344	65	83,328	93	6,055
10	99,242	38	97,215	66	81,915	94	4,607
11	99,230	39	97,080	67	80,379	95	3,412
12	99,217	40	96,936	68	78,708	96	2,451
13	99,203	41	96,783	69	76,889	97	1,705
14	99,186	42	96,619	70	74,905	98	1,149
15	99,165	43	96,441	71	72,743	99	750
16	99,136	44	96,247	72	70,319	100	474
17	99,101	45	96,034	73	67,850	101	289
18	99,049	46	95,538	75	62,224	103	93
19	98,983	47	95,538	76	59,162	104	49
20	98,908	48	95,249	77	55,957	105	25
21	98,830	49	94,933	77	55,957	105	25
22	98,753	50	94,587	78	52,630	106	12
23	98,675	51	94,212	79	49,207	107	5
24	98,597	52	93,808	80	45,701	108	2
25	98,517	53	93,374	81	42,127	109	1
26	98,436	54	92,906	82	38,503		
27	98,353	55	92,395	83	34,852		

TABLA 3.1: Tabla de vida(condensada) de la población inglesa 2000-2002

3.3.1. Cálculo de Probabilidades Usando las Tablas de Vida

En algunos casos, la tabla de vida puede haber sido calculada sin necesidad de analizar las intensidades de transición de la mortalidad. En este caso se puede calcular las probabilidades deseadas sin necesidad de realizar ningún cálculo matemático complejo en fórmulas de intensidad de transición, para ello se considera la tabla 3.1.

En la tabla 3.1 solo se ha dado l_x, pero como ya se vio también se pueden calcular los otros elementos a partir de l_x como:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

Estas fórmulas se deducen del cálculo simple de probabilidades que es:

$$\frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

Tomando la tabla de vida se puede calcular todo tipo de probabilidades como en el siguiente ejemplo.

Ahora se presenta el siguiente ejemplo que es un poco más complicado.

Ejemplo 3.3.1. *Calcule la probabilidad de que un individuo de 55 años de edad muera entre las edades de 85 y 90 años.*

Sol.

Lo que se quiere es una probabilidad de mortalidad diferida, y se expresará como ${}_{n|t}q_x$, donde n , es el período de diferimiento durante el cual el individuo debe sobrevivir, antes de morir durante los años t. En este caso se está calculando, ${}_{80|5}q_{55}$. Una vez más, se va a calcular esto como el número de personas que cumplen los criterios de evento dividido por el número total de personas vivas en la edad de inicio, en cuyo caso el denominador es el número de personas vivas a la edad de 55. El numerador es el número de personas que fallece entre los 85 y 90 años de edad:

$${}_{80|5}q_{55} = \frac{d_{85} + d_{86} + d_{87} + d_{88} + d_{89} + d_{90}}{l_{55}} = \frac{l_{90} - l_{85}}{l_{55}}$$

Con esto termina la introducción a las tablas de vida, a continuación se sigue con implicaciones un poco mas prácticas.

3.4. Valoración de Flujos de Efectivo Inciertos

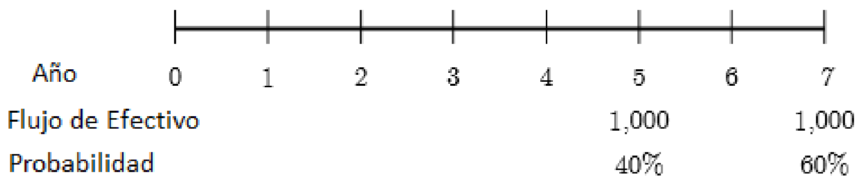
En la teoría de la valoración de los flujos de efectivo, se tiene en cuenta el valor temporal del dinero. Luego en la sección 3.1 se introdujo el concepto de transiciones de estado, donde un individuo puede moverse entre diferentes estados como “Saludable”, “Enfermo Temporalmente”, “Enfermo Permanentemente” y “Muerto”, que pueden afectar los

flujos de efectivo subyacentes de un sistema financiero. En la sección anterior se examinó un ejemplo específico de un modelo de transiciones de estado que es la tabla de vida, que proporciona información sobre las probabilidades de mortalidad en ciertas edades. En esta sección, se quiere responder a la pregunta: ¿Cómo se trabaja con un sistema financiero donde los flujos de efectivo ocurren en un rango de veces y son inciertos?
En esta última parte de este trabajo, se tomará gran parte del material que se ha aprendido hasta el final de esta sección y se aplicará. Es evidente que una compañía de seguros, es un ejemplo de un sistema financiero que funciona con flujos de efectivo inciertos en un rango de incidencias. Incluso el producto de seguro de vida más simple normalmente tendrá primas y/o reclamaciones pagadas en diferentes momentos que dependen del estado de salud del asegurado. Por lo tanto, esta es una sección fundamental. Es aquí donde comienza a ser evidente cómo un actuario piensa sobre el mundo.

3.4.1. Valor Actual Esperado

Ya se introdujo el concepto de valor actual para un flujo de efectivo, ahora la idea es considerar la probabilidad de que se hagan los pagos para un flujo de efectivo y esto es el flujo de efectivo esperado.
Para aclarar esta idea se tiene el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4.1. *Imagine que un individuo sabía que tenía que hacer un pago de $ 1,000 en el futuro, pero no estaba seguro exactamente del tiempo en que tendría que hacerse el pago. Hay una probabilidad del 40 % de que el pago necesitará ser hecho exactamente a los 5 años y una probabilidad del 60 % de que el pago necesitará ser hecho en 7 años. Observar esta información en una línea de tiempo:*



El cálculo del valor presente de una serie de flujos de efectivo incierto es el mismo que calcular el valor presente de una serie de flujos de efectivo con el componente adicional de *multiplicar cada flujo de efectivo por su probabilidad de ocurrir. En el ejemplo anterior, y suponiendo una tasa de interés del 4 % anual, el valor presente se calcula como:*

$$
\begin{aligned}
\text{VPE} &= 1,000 \times 0.4 \times v^5 + 1,000 \times 0.6 \times v^7 \\
&= 1,000(4 \times 1.04^{-5} + 0.6 \times 1.04^{-7}) \\
&= \$784.72
\end{aligned}
$$

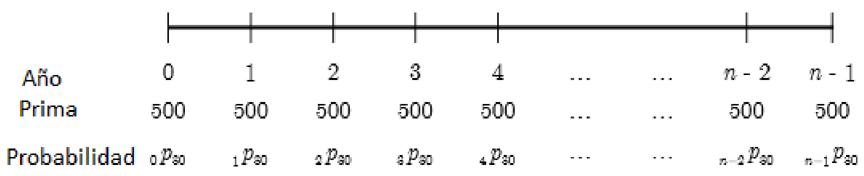
VPE representa el valor presente esperado y de una forma más general se tiene que para una series de flujos de efectivo se puede calcular el valor presente esperado de la siguiente forma:

$$\text{VPE} = \sum_t (\text{flujo de efectivo}) \times (\text{probabilidad de flujo de efectivo}) \times v^t$$

Donde $v = (1+i)^{-1}$. Observar el siguiente ejercicio práctico en el cual se aplica el concepto de valor actual esperado.

3.4.2. Relación entre las Tablas de Vida y el Flujo de Efectivo Esperado

La idea de VPE es muy interesante, sobre todo cuando se trabaja en conjunto con las tablas de vida, por ejemplo, si se supone que una aseguradora estaba vendiendo un producto que requería que el asegurado pagara una prima de \$500 al principio de cada año en que esté vivo. Colocando estos flujos de efectivo de primas en un cronograma para un asegurado que tomó la póliza a los 30 años, con la probabilidad ${}_tp_{30}$ de que el asegurado paga una prima, que es la misma probabilidad que el asegurado este vivo en el año $30+t$, observar esta información en una linea de tiempo.



En este caso $n-1$ refleja el último año posible en el que se puede pagar una prima (es decir, n primas pagadas en total), que podría ser un número fijo dependiendo del tipo de seguro o podría basarse en la máxima edad posible que se asume que podría vivir una persona.

Utilizando las fórmulas VPE anteriores, el VPE de las primas se calcula de la siguiente manera:

$$\text{VPE} = \sum_{t=0}^{n-1} 500 \times p_{t,x} \times v^t \tag{3.4.1}$$

Notar que no se ha puesto ninguna restricción al la fórmula pues, la fórmula de VPE dependerá solo de la estructura que tenga el seguro, es decir, puede que las primas se paguen cada 5 años, que se pague una sola prima, o de alguna otra forma.
Como ya se mencionó antes, en términos prácticos todo el trabajo con las diferentes fórmulas y tablas se hace con herramientas de hojas de cálculo.

Reclamaciones

Las mismas técnicas descritas anteriormente se pueden usar para calcular el VPE de las reclamaciones. Imagine ahora que el producto anterior paga una reclamación de \$50,000 a los dependientes del asegurado al final del año de fallecimiento del asegurado. Hay que tener en cuenta que la suposición de que las reclamaciones se pagan al final del año de la muerte permite asumir que los pagos de reclamación se hacen sólo en años enteros. ¡No es realista pero hace los cálculos más fáciles! Si se colocan estos flujos de efectivo de reclamaciones en una línea de tiempo para un asegurado que tomó la póliza a los 30 años, con la probabilidad de que el asegurador pague una reclamación $q_{t-1|1,x}$:

Año	0	1	2	3	4	...	...	n - 1	n
Reclamaciones		50,000	50,000	50,000	50,000	...	...	50,000	50,000
Probacilidad		${}_1q_{30}$	${}_{1\|1}q_{30}$	${}_{2\|1}q_{30}$	${}_{3\|1}q_{30}$	...	...	${}_{n-2\|1}q_{30}$	${}_{n-1\|1}q_{30}$

Entonces se tiene que

$$\text{VPE} = \sum_{t=1}^{n} 50,000 \times_{t-1|1} q_x \times v^t \tag{3.4.2}$$

De nuevo, este es el VPE para esta estructura de producto específica solamente y puede diferir si el seguro cambia de estructura.

Vinculación de VPE y la Ecuación de Valor

Anteriormente se introdujo el concepto de ecuación de valor y se nota su utilidad en el cálculo de valores de ingresos desconocidos cuando se conocían los valores de los saldos o viceversa. El mismo concepto es fácilmente aplicable también al VPE, según la siguiente fórmula:

$$\mathrm{VPE}_i = \mathrm{VPE}_s \tag{3.4.3}$$

Para un asegurador, esto es particularmente útil cuando se piensa en las primas que el asegurador podría desear cobrar en un producto de seguro. En este caso los ingresos son las primas recibidas por el asegurador, mientras que los egresos son las reclamaciones pagadas por el asegurador. La tasa de interés para propósitos de valor presente es la tasa de interés que la aseguradora espera recibir en sus reservas reales.

Una prima fijada de esta manera se denomina prima de riesgo, un concepto que se discutió antes y es esencialmente la prima requerida por el asegurador, de modo que se espera que el ingreso de primas recibido sea suficiente para pagar la reclamación. Por supuesto, independientemente de que los ingresos por primas sean efectivamente suficientes dependerá de si las expectativas del asegurador (por ejemplo, tasas de mortalidad e intereses recibidos) coinciden con las suposiciones hechas en el cálculo de la prima de riesgo.

Por último, cabe señalar que, en la práctica, el cálculo de las primas es mucho más complicado de lo que se ha descrito anteriormente. Por ejemplo, los siguientes son factores adicionales que se han ignorado, y tendrían que ser considerados por un actuario y el asegurador en el establecimiento de primas:

- La probabilidad de que el tomador de la póliza pueda “caducar”, es decir, el asegurado elige dejar de pagar las primas e interrumpir la póliza.
- El costo de funcionamiento de la compañía de seguros, pago de salarios, propiedad, etc.
- Las primas que cobran los competidores.

Incertidumbre y Valor Acumulado

Las mismas técnicas descritas anteriormente podrían utilizarse para calcular un “Valor Acumulado Esperado”, por ejemplo una reserva real, aunque en la práctica un valor acumulado esperado no es particularmente útil ya que puede determinarse simplemente tomando el PVE y acumulándolo para la número de períodos de tiempo. Lo que es más útil es mirar la incertidumbre en un valor acumulado debido a los factores que afectan al valor acumulado que son de naturaleza variable. En los ejemplos de seguros considerados en este trabajo, los principales factores que pueden ser de naturaleza variable son las tasas de interés y las tasas de mortalidad. Sin embargo, antes de considerarlos se debe dar una breve introducción al concepto de variables aleatorias. Para esto es importante comenzar con el uso de variables aleatorias y otros conceptos estadísticos más importantes, si las entradas fueran fijadas en los modelos, estos modelos se conocen como modelos deterministas.

Pero se sabe que, a menos que la aseguradora invirtiera las reservas reales de una manera que generara una tasa de interés garantizada, la tasa de interés no es fija, pero variará con el tiempo. Esto es especialmente el caso, si el asegurador invierte las reservas reales en activos tales como acciones o bienes que proporcionan tasas volátiles de rendimiento. Por lo tanto, lo que realmente se desearía, es hacer que la tasa de interés sea al azar (también conocido como estocástico) en lugar de fijo. Esto se logra haciendo que la tasa de interés sea una variable aleatoria en lugar de una entrada fija. Mientras que el material posible que podría cubrirse en variables aleatorias es muy grande, en esta sección sólo se verán los elementos que serán relevantes para este trabajo.
En el contexto del trabajo que se está haciendo, una variable aleatoria es una entrada que puede tomar una variedad de valores posibles en lugar de un único valor fijo. Al conjunto de probabilidades junto con su valor posible se dice que es la distribución de esa variable aleatoria.

Parte II

Modelo Estocástico de Contingencia de Vida

Capítulo 4

Distribuciones de supervivencia y tiempos de falla

4.1. Introducción a las Distribuciones de Supervivencia

El objetivo en este capítulo es introducir un modelo estocástico para la mortalidad que reemplaza el modelo determinístico utilizado en el capítulo 3. Esto no sólo proporcionará una descripción más realista de la mortalidad humana, sino que también tendrá aplicaciones más generales. Para el cumplimiento de estos objetivos se tomara una notación y un trabajo matemático mucho más formal y riguroso.

La información básica que un posible emisor de un contrato de seguro o anualidad quiere saber es cuánto tiempo vivirá la persona o las personas en cuestión. El asegurador obviamente no puede esperar contestar a esta pregunta exactamente, puesto que la vida futura en la realidad esta dada al azar. Por ejemplo, algunas personas de 50 años vivirán otros 40 años o más, mientras que otros morirán muy pronto. En el modelo determinístico, se ha descubierto que, al suponer que no se podría identificar cuánto tiempo un individuo en particular viviría, se podría identificar cuántos individuos de una edad dada vivirían a alguna otra edad. Claramente, el número de tales individuos también es aleatorio. En el modelo estocástico se enfrentara directamente esta aleatoriedad.

En este capítulo y los posteriores se hará uso de conceptos avanzados de estadística, por lo que se supondrá un conocimiento previo de estos temas.

No se necesita limitarse a mirar el momento de la muerte de un individuo. Suponiendo que se está interesado en algún evento que ocurrirá una vez y sólo una vez en algún tiempo futuro al azar. Se denota a este evento como "fracaso". La variable aleatoria T, es el tiempo de ocurrencia de tal evento, se conoce como tiempo de fallo o tiempo de fracaso, y su distribución se refiere a menudo como una distribución de supervivencia. En cualquier momento antes del "fracaso", se dirá que se está en un estado de "supervivencia".

4.2. Caso Discreto

Se considera el caso en el que el fracaso puede ocurrir sólo en tiempos enteros $1, 2, 3, ...$, por lo que T es una variable aleatoria discreta con enteros positivos como valores. En lugar de la función de distribución acumulativa F, a menudo es más conveniente utilizar la supervivencia s definida por

$$s(k) = 1 - F(k) = P(T > k)$$

Esto da la probabilidad de que el fracaso no haya ocurrido todavía por el tiempo k, o en otras palabras, que todavía se esta en un estado de supervivencia en el tiempo k. Si f es la función de probabilidad de T, está claro de (A.5) que:

$$f(k) = s(k-1) - s(k), \qquad s(k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} f(i) = 1 - \sum_{i=1}^{k} f(i) \tag{4.2.1}$$

Esta ecuación es otro importante método para calcular la distribución de T.

Definición 4.2.1. *La función de riesgo de T en el tiempo k, denotada por $\lambda(k)$ es la probabilidad de falla en el tiempo k dada la supervivencia hasta el tiempo $k-1$. Es decir,*

$$\lambda(k) = \frac{f(k)}{s(k-1)}$$

Esto, por supuesto, se define sólo para aquellos números enteros k tales que $s(k-1) > 0$. Una vez que $s(k-1)$ es igual a 0, no hay posibilidad de supervivencia hasta ese punto. (La función de peligro también se conoce como tasa de riesgo o función de intensidad o función de falla.)

Se debe garantizar que se entiende muy claramente la diferencia entre $f(k)$ y $\lambda(k)$. Ambas cantidades dan la probabilidad de fallo en el instante k, pero desde distintas perspectivas. Si, en el momento 0, se pide la evaluación de la probabilidad de que el fracaso se producirá en el instante k, la respuesta es simplemente $f(k)$. A medida que pasa el tiempo, la evaluación de esta posibilidad debe cambiar. Por ejemplo, si el fallo toma un tiempo antes de k, entonces se sabe que la probabilidad de fallo en el instante k es cero. Se asume que en el instante $k-1$ aun no se ha producido un fallo y por tanto se hará la misma pregunta.

La respuesta ahora es $\lambda(k)$. La diferencia entre las dos funciones es clarificada escribiendo la definición de λ de la siguiente forma

$$f(k) = s(k-1)\lambda(k) \tag{4.2.2}$$

Expresando el hecho de que se ve el fracaso en el tiempo k como resultado de dos eventos. En primer lugar, debe haber supervivencia hasta el tiempo $k-1$ y luego, dada esta supervivencia, el fracaso debe ocurrir en el momento k.

Al obtener una distribución de supervivencia adecuada, a menudo es más fácil modelar la tasa de riesgo en lugar de s o f. Dado λ, se puede determinar fácilmente las otras funciones como sigue. igualando las dos expresiones diferentes para $f(k)$ dadas en (4.2.1) y (4.2.2),

$$s(k) = s(k-1)[1-\lambda(k)] \tag{4.2.3}$$

Comenzando con $s(0) = P(T > 0) = 1$, se sabe que $s(1) = 1 - \lambda(1), s(2) = s(1)[1 - \lambda(2)] = [1-\lambda(1)][1-\lambda(2)]$, y así si se precede de forma inductiva.

$$s(k) = [1-\lambda(1)][1-\lambda(2)]\dots[1-\lambda(k)] \tag{4.2.4}$$

Ejemplo 4.2.1. *Una bolsa contiene 3 bolas verdes y 1 bola roja. Se dibuja una pelota al azar. Si es verde, se sustituye y se repite el sorteo. El fallo ocurre cuando se dibuja una bola roja. Si esto está en el k-ésimo dibujo decimos que el fracaso ocurre en el tiempo k. Hallar $s(k)$, $f(k)$ y $\lambda(k)$.*

De las condiciones del problema se puede deducir inmediatamente que

$$\lambda(k) = \frac{1}{4}, \qquad k = 1, 2, 3\dots$$

De la ecuación (4.2.4) se tiene que

$$s(k) = \left(\frac{3}{4}\right)^k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

y de la ecuación (4.2.2)

$$f(k) = \frac{3^{k-1}}{4^k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Una vez revisado el caso discreto se pasa a considerar el caso continuo, cabe aclarar que la deducción de los resultados anteriores se pudieran hacer de forma directa a través de la suma de una serie geométrica como se ha hecho antes en otros capítulos

4.3. Caso Continuo

En la mayoría de las aplicaciones, el tiempo de fallo no se limita a los números enteros, puede ser arbitrario. Se modela esto suponiendo que T es una variable aleatoria continua con valores en $[0, \infty]$

4.3.1. Funciones Básicas

Se define la función de supervivencia s como en el caso discreto,

$$s(t) = 1 - F(t) = P(T > t)$$

La probabilidad de supervivencia hasta el tiempo t, se relaciona con la función de densidad de probabilidad (f.d.p) dada por

$$f(t) = -s'(t), \qquad s(t) = \int_t^\infty f(r)dr = 1 - \int_0^t f(r)dr \tag{4.3.1}$$

Ahora se pasa a la siguiente definición

Definición 4.3.1. *La función de riesgo de un tiempo de fallo continuo T en el instante t, denotado por $\mu(t)$, es la función de densidad continua para el fallo en el tiempo t,* *dada la supervivencia hasta ese punto. Eso esta dado por*

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{s(t)}, \qquad \textit{para todo } t \textit{ tal que } s(t) > 0$$

Para Δt pequeño, $\mu(t)\Delta t$ se aproxima a la probabilidad de que T tome un valor en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ dado el tiempo de supervivencia t. Análogamente a (4.2.2), se tiene la expresión

$$f(t) = s(t)\mu(t) \tag{4.3.2}$$

Para de terminar las otras cantidades de μ notamos de (4.3.1) y (4.3.2)

$$\mu(t) = \frac{-s'(t)}{s(t)} = -\frac{d}{dt}[\log s(t)]$$

Siguiendo la prueba de la Proposición 8.1, se deduce que

$$s(t) = e^{-\int_0^t \mu(r)dr} \tag{4.3.3}$$

La fórmula (4.3.3) parece bastante diferente de su contraparte discreta (4.2.4), pero si lo observas de la manera correcta, es realmente una versión continua natural. Recordar que $e^{-\sum a_i} = \prod e^{-a_i}$. Así, si se piensa en una integral como un tipo de suma generalizada, entonces e a la integral es un tipo de producto generalizado de términos de la forma $e^{-\mu}$, que para valores "pequeños"de μ son cercanos a $1 - \mu$.

4.3.2. Propiedades de μ

Se sabe que la función de densidad f debe ser no negativa y satisface $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt = 1$, y La función de distribución F debe ser no decreciente y satisfacer $F(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$. Esto último implica que la función de supervivencia s es no creciente y satisface $s(0) = 1$, $\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$.

Por tanto la pregunta debe de ser ¿Cuáles son las propiedades correspondientes para la función de riesgo?

La función de riesgo μ debe ser no negativa en su dominio y además satisfacer

$$\int_0^\infty \mu(t)dt = \infty$$

Para ver esto, se supone que la integral anterior tenía un valor finito a. De (4.3.3) se puede deducir que $\lim_{t\to\infty} s(t) = e^{-a}$ que no es igual a 0, contradiciendo el hecho de que el fallo debe ocurrir en algún momento. En otras palabras, si la integral es finita, la función de peligro no es lo suficientemente grande para garantizar el fracaso y habría alguna posibilidad de sobrevivir para siempre. Por supuesto, es posible que se desee modelar situaciones en las que existe la posibilidad de que el fracaso nunca ocurra, y en este caso querríamos que la integral anterior fuera finita.

4.3.3. Modos

La forma general de la función de densidad de T puede inferirse a menudo observando μ. En particular, se puede estar interesados en puntos modos, que son puntos donde la función de densidad asume un máximo local. Se asume que f es diferenciable, y notar de (4.3.1) y (4.3.2) que

$$f' = (s\mu)' = s'\mu + s\mu' = -f\mu + s'\mu = -s\mu\mu + s\mu' = s(\mu' - \mu^2) \tag{4.3.4}$$

Se observa que f es creciente o decreciente de acuerdo si μ' es mayor o menor que μ^2. Los puntos en los que los modos pueden ocurrir están restringidos a los valores de t para los cuales $\mu'(t) = \mu(t)^2$, o posiblemente a los extremos del dominio. Mas se verán algunos ejemplos concretos.

4.3.4. Distribuciones Desplazadas

Si se supone que se da un tiempo de fracaso T. (Por conveniencia se trata el caso continuo, pero las conclusiones para el caso discreto son similares). Como se ha observado anteriormente, habiendo alcanzado un punto u en el que el fracaso todavía no ha ocurrido, se debe alterar la evaluación de la probabilidad de fracaso en diferentes momentos. Para formalizar esto, se define una nueva variable aleatoria.

La variable aleatoria $T \circ u$ es igual al tiempo hasta que ocurre el fallo, medido a partir del tiempo u, dada la supervivencia hasta el tiempo u. Por lo tanto, toma un valor de $T - u$ cuando T toma un valor mayor que u, con probabilidades condicionadas bajo el hecho que T es mayor que u. La función de supervivencia, la función de densidad y la función de tasa de riesgo, respectivamente, para $T \circ u$ se expresan en términos de las funciones correspondientes para T como sigue. (Ya que se está tratando con más de una distribución aquí, se va a insertar los subíndices apropiados en s, f y μ.)

$$s_{T\circ u}(t) = \frac{s_T(u+t)}{s_T(t)} \tag{4.3.5}$$

$$f_{T\circ u}(t) = \frac{-d}{dt} s_{T\circ u}(t) = \frac{f_T(u+t)}{s_T(u)} \tag{4.3.6}$$

$$\mu_{T\circ u} = \frac{f_{T\circ u}(t)}{s_{T\circ U}(t)} = \mu_T(u+t) \tag{4.3.7}$$

La fórmula (4.3.6) proporciona una buena manera de visualizar este concepto. Para obtener la gráfica de la función de densidad de la variable aleatoria desplazada, se toma la gráfica de la función de densidad original, se ignora todo a la izquierda de u, y se escala todos los valores hacia arriba para obtener el área total igual a 1. Para algunas distribuciones, las variables aleatorias desplazadas son de la misma familia que el original. Esto hace que estas distribuciones sean convenientes para propósitos de modelado.

4.4. Aproximación Estándar

Asociado a cada tiempo de fallo continuo T es un tiempo de fallo discreto $\tilde{T}$. La falla de acuerdo con $\tilde{T}$ ocurrirá en el tiempo entero k, si ha ocurrido una falla en T en el intervalo de tiempo $(k-1, k]$. Para ser precisos,

$$\tilde{T} = [T] + 1, \qquad \text{donde } [\cdot] \text{ denota la función parte entera más grande}$$

Sean f y s la función de densidad y la función de supervivencia, respectivamente, de T. Sean $\tilde{f}$ y $\tilde{s}$ las funciones correspondientes de $\tilde{T}$. Entonces, para todos los enteros positivos k,

$$\tilde{f}(k) = \int_0^1 f(k-1+t)dt = s(k-1) - s(k) \tag{4.4.1}$$

$$\tilde{s}(k) = s(k) \tag{4.4.2}$$

Se supone que se quiere deducir información sobre T observando cuándo ocurre un fallo. Podría ser difícil o imposible observar continuamente y sólo se puede ver la situación en ciertos momentos discretos, como 1, 2, 3, etc. Si se observa en el tiempo k, y se ve que el fracaso ha ocurrido, sólo se sabe que ese fallo ocurrió entre el tiempo $k-1$ y k. En otras palabras, se está observando los valores de $\tilde{T}$.
Por lo tanto, se quiere inferir la distribución de T de la de $\tilde{T}$. Claramente, no se puede hacer esto exactamente y se debe hacer algún tipo de aproximación. Un método simple, consiste en utilizar la ecuación (4.4.1), es simplemente suponiendo que para todos los enteros no negativos k, y cualquier t en el intervalo $(0,1)$,

$$f(k+t) = \tilde{f}(k+1) \tag{4.4.3}$$

A esto ultimo se hará referencia como la Aproximación Estándar, de hecho, ya se ha utilizado esta aproximación en el modelo determinista, en la forma de la suposición UDD de la variable aleatoria $T(x)$, como se indica en la formulación equivalente en términos de la función de supervivencia, llamada

$$s(k+t) = (1-t)s(k) + ts(k+1) \tag{4.4.4}$$

para un entero k y $0 < t < 1$. Para ver esta equivalencia, tomar nota de que, dada (4.4.4), se obtiene (4.4.3) mediante la diferenciación con respecto a t. Por el contrario, dada (4.4.3), se tiene

$$\begin{aligned} s(k+t) &= s(k) - \int_0^t f(k+r)dr \\ &= s(k) - \int_0^t \tilde{f}(k+1)dr = s(k) - t\tilde{f}(k+1) \\ &= s(k) - t[s(k) - s(k+1)] \end{aligned}$$

Para el propósito de calcular momentos, es útil introducir la variable aleatoria

$$R = \tilde{T} - T$$

Que es la duración desde el momento del fallo hasta el final del año de fallo. Dado un valor r en el intervalo $(0,1)$, considere la probabilidad de que $R \leq r$ dado que $T = k$. Esta es la probabilidad de que T tome un valor entre $k-r$ y k, dado que $T = k$. Usando la aproximación estándar, esta probabilidad está dada por

$$\frac{1}{f(\tilde{k})}\int_{k-r}^{k} f(t)dt = \frac{1}{\tilde{f}(k)}\int_{k-r}^{k} \tilde{f}(k)dt = r \tag{4.4.5}$$

Esto demuestra que en R es independiente de T y tiene una distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Usando resultados estándar sobre la distribución uniforme, podemos calcular que bajo la aproximación estándar

$$E(T) = E(\tilde{T}) - E(R) = E(\tilde{T}) - \frac{1}{2} \tag{4.4.6}$$

$$Var(T) = Var(\tilde{T}) + Var(R) = Var(\tilde{T}) + \frac{1}{12} \tag{4.4.7}$$

Donde E denota la expectativa y Var denota la varianza.

4.5. La Tabla de Vida Estocástica

El objetivo de esta sección es establecer un vínculo entre el modelo estocástico y el modelo determinista para la mortalidad. Se usará este enlace para mostrar que las preguntas que se respondieron en el modelo determinístico pueden ser contestadas en el modelo estocástico de la misma manera. Además, se podrá responder más preguntas.
La herramienta para hacerlo será volver al concepto fundamental de una tabla de vida, pero visto de una manera diferente.

Como se hizo antes, tomando un número arbitrario de ℓ_0 vidas recién nacidas. Se dice que $\mathscr{L}_x$ sea el número de estos todavía vivos a la edad x, y $\mathcal{D}_x$ sea el número de estos que morirán entre la edad de x y $x+1$. Estas cantidades son parecidas a las vista en la parte determinista ℓ_x y $\mathcal{D}_x$, pero ahora ya no son números sino variables aleatorias. Obteniendo la tabla de vida de tal forma

$$\ell_x = E(\mathscr{L}_x), \qquad d_x = E(\mathscr{D}_x).$$

Está claro que $\mathscr{L}_{x+1} = \mathscr{L}_x - \mathscr{D}_x$, se tiene la misma fórmula del caso determinista (3.3.3) que se tenía antes. En otras palabras, en nuestro modelo estocástico todavía se puede introducir una tabla de vida, pero ahora se ve a los números como valores esperados y no como una cuenta exacta de los números que vivirán o morirán.

Se considera ahora la variable aleatoria $T(x)$, como el tiempo hasta la muerte de (x). Se va a escribir $s_x(t)$, $f_x(t)$, $\mu_x(t)$ para la función de supervivencia, función de densidad y función de riesgo respectivamente de $T(x)$.

Para la edad 0, existe una notación estándar un poco diferente, que puede causar alguna confusión sino se tiene cuidado. La variable aleatoria $T(0)$ es tradicionalmente denotada por X, y la variable denotada es x en lugar de t, puesto que $T(0)$ es realmente la edad de muerte. Es común suprimir el 0 y simplemente escribir $s(x)$, $f(x)$ y $\mu(x)$ para $s_0(x)$, $f_0(x)$ y $\mu_0(x)$, respectivamente.

Una observación clave es que

$$\ell_x = \ell_0 s(x) \tag{4.5.1}$$

El argumento es el mismo que mostrar que si lanzas N monedas, cada una con una probabilidad p de caer cara, puedes esperar conseguir cara con probabilidad Np. En este caso, si se toma ℓ_0 personas, cada una con una probabilidad $s(x)$ de sobrevivir a la edad (x), entonces se puede esperar obtener $\ell_0 * s(x)$ supervivientes. Ahora se está listo para el propósito principal de esta sección, que es establecer una correspondencia entre las funciones de supervivencia, riesgo y densidad de $T(x)$ y las funciones de la tabla de vida para la tabla de vida estocástica. En primer lugar, se asume la mortalidad agregada, como en la parte determinística, donde se usó una tabla de vida única para la mortalidad futura de todas las edades x, empezando apenas a la edad x. Esto corresponde estocásticamente a la declaración

$$T(x) \text{ tiene la distribución de } T(0) \circ x,$$

Que simplemente dice que la vida futura de (x) es la vida futura después del tiempo x de una persona que tenía 0 años, dado que han vivido hasta la edad x. Por lo tanto, no hay efectos de selección.

Se supone también que se calcula las cantidades ${}_tp_x$, ${}_tq_x$, $\mu(x)$ a partir de la tabla de vida, exactamente como se hizo en el modelo determinístico. Entonces se tiene de (4.3.6) se tiene que

$$s_x(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} =_t p_x \tag{4.5.2}$$

Esto es ciertamente razonable. Aunque mirado desde diferentes puntos de vista, ambos son probabilidades de que una persona de edad x sobrevivirá t años. De inmediato se deduce que

$$F_x(t) = 1 -_t p_x =_t q_x, \tag{4.5.3}$$

Y que la función de tasa de riesgo de $T(x)$ está dada por

$$\mu_x(t) = \frac{-d}{dt}\log({}_tp_x) = \mu(x+t) \tag{4.5.4}$$

Donde la última cantidad es la fuerza de mortalidad vista en la parte determinística que se puede ver en el Capítulo 8 del libro de Promislov. (Obsérvese que en el caso de las tasas de riesgo, la notación en el modelo determinístico fue elegida desde el principio para corresponder a la del ajuste estocástico). Finalmente,

$$f_x(t) =_t p_x\mu_x(t) \tag{4.5.5}$$

La expresión familiar que se usa para las primas de seguros en el Capítulo 8 (Promislov). Si se asume la mortalidad estrictamente seleccionada del Capítulo 9 (Promislov), entonces no se puede suponer que $T(x)$ se distribuye como $X \circ x$. Las correspondencias anteriores se modificarían de la siguiente manera:

$$s_x(t) =_t p_{[x]}$$

y

$$f_x(t) =_t p_{[x]}\mu_x(t)$$

También es instructivo calcular la distribución de los tiempos de fallo de vida múltiple en términos de las cantidades introducidas en el modelo discreto. Por ejemplo, se considera $T(xy)$, el tiempo de fracaso del estado de vida conjunta. Para esta variable aleatoria, la función de supervivencia es sólo ${}_tp_{xy}$, la función de riesgo es $\mu_{xy}(t)$, y la función de densidad es ${}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)$.

4.6. Esperanza de Vida en el Modelo Estocástico

Sea $\tilde{T}(x)$ la variable aleatoria discreta asociada con $T(x)$ como se define en la Sección 4.5. Tendrá funciones de supervivencia, probabilidad y riesgo dadas por

$$\tilde{s}_x(k) =_k p_x, \tag{4.6.1}$$

$$\tilde{f}_x(k) =_{k-1} p_x -_k p_x =_{k-1} p_x * q_{x+k-1}, \tag{4.6.2}$$

$$\lambda_x(k) = q_{x+k-1} \tag{4.6.3}$$

La terminología actuarial tradicional define una variable aleatoria discreta $K(x)$ conocida como la vida futura acortada, que mide el número total de años futuros que vivirá (x). Está claro que

$$K(x) = \tilde{T}(x) - 1$$

De (4.6.2), (3.8), (A.12), y el hecho de que $s_x(0) = 1$, se puede escribir

$$e_x = \sum_{\omega-x-1}^{k=1} s_x(k) = E[\tilde{T}(x)] - s_x(0) = E[K(x)]$$

Por lo tanto, la expectativa de vida es de hecho una expectativa en el sentido de la teoría de la probabilidad. La definición formal de la esperanza de vida completa en el modelo estocástico es

$$e_x^\circ = E[T(x)]$$

De (A.15) se ve que esto concuerda con la definición del Capítulo 8. Por otra parte, utilizando la aproximación estándar y (4.4.6), se verifica el hecho de que

$$E[T(x)] = e_x + \frac{1}{2}$$

Ya se puede ver una ventaja del modelo estocástico. Además de calcular la expectativa de vida futura, se puede calcular la varianza de la vida futura.

4.7. Tasas de Interés Estocásticas

El interés estocástico es un tema amplio al que sólo se aludirá brevemente. Además de la tabla de vida, el otro ingrediente principal del kit de herramientas de actuarios, la función de descuento, debe tratarse estocásticamente. En su mayor parte, el método para hacerlo en la fijación de precios y la valoración de los contratos de seguros y anualidades se ha realizado mediante una técnica de simulación. Se seleccionan varios escenarios de posibles tipos de interés futuros, junto con alguna ponderación en cuanto a la probabilidad de su ocurrencia. Las primas o reservas se calculan usando cada escenario, exactamente como se ha descrito, y se analiza la totalidad de los resultados. De esta manera, se puede llegar a estimar el valor esperado de las cantidades, o en algunos casos, particularmente para fines de reserva, una idea de los peores escenarios.

4.8. Ejercicios Prácticos

Ejercicio práctico 4.8.1. *Un tiempo de fallo T tiene la función de riesgo* $\mu(t) = (1+t)^{-2}$, *Cuál es la probabilidad que ese fracaso nunca ocurra?*

Sol.

Se necesita calcular la función $s(t)$ es la función de supervivencia hasta el tiempo t, entonces dado que

$$\mu(t) = \frac{-s'(t)}{s(t)}$$

Integrando a ambos lados se tiene

$$\int \mu(t)dt = \int \frac{-s'(t)}{s(t)}dt$$

sustituyendo la expresión de μ se tiene

$$\int (1+t)^{-2}dt = -\int \frac{ds}{s}$$

$$-(1+t)^{-1} + c = -\ln(s)$$

$$s(t) = e^{(1+t)^{-1}-c}$$

Usando la condición inicial que es $s(0) = 1$ se tiene

$$s(0) = 1 = e^{(1)^{-1}-c} = e^{1-c}$$

Entonces se tiene que

$$e^1 = e^c \;\Rightarrow c = 1$$

Por tanto se tiene que

$$s(t) = s(t) = e^{(1+t)^{-1}-1}$$

Finalmente para responder a la pregunta debemos hacer el siguiente limite

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = e^{\frac{1}{1+\infty}}e^{-1} = e^0 e^{-1} = e^{-1}$$

Ejercicio práctico 4.8.2. *Se consideran dos maquinas de copias, la maquina 1 saca 20,000 copias por mes, cuando esta nueva y durante T meses, donde T es una variable aleatoria*

Esta tiene una función de riesgo $\quad \mu_T(t) = \dfrac{1}{40-t}, \qquad 0 \leq t < 40$

La maquina 2 saca 15,000 copias por mes cuando esta nueva, esto para S meses, donde S es una variable aleatoria.

La función de riesgo asociada a S es $\quad \mu_S(t) = \dfrac{2}{96-t}, \qquad 0 \leq t < 96$

Un comprador esta intentando decidir entre comprar una Maquina 1 nueva o una Maquina 2 usada, ¿Cuál de estas opciones es la mejor?

Sol.

Se va a calcular el valor esperado para ambos casos. Para la Maquina 1:

la función de supervivencia en términos de la función de riesgo esta dada por: $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(r)dr}$ Resolviendo esa integral se tiene que la función de supervivencia para la maquina 1

$$s(t) = \frac{40-t}{40}$$

Ahora se calcula el valor esperado

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^{40} \frac{40-t}{40} dt \\ &= \frac{1}{40} \int_0^{40} 40 - t dt \\ &= \frac{1}{40} \left[40t - \frac{t^2}{2} \right]_0^{40} = 20 \end{aligned}$$

Por tanto la cantidad de4 copias para la maquina 1 es 400 000

Para la maquina 2, se procede de igual forma. Dada la función de riesgo $\mu_S \frac{2}{96-t}$. Se tiene que la función de supervivencia es:

$$s(t) = \frac{(96-t)^2}{96^2}$$

Entonces el valor esperado es:

$$\begin{aligned} E(S) &= \int_{24}^{96} \frac{(96-t)^2}{96^2} dt \\ &= \frac{1}{96^2} \left[(96^2)t - \frac{192t^2}{2} + \frac{t^2}{2} \right]_{24}^{96} = 13.5 \end{aligned}$$

El número de copias es $(13.5)(15000) = 202000$

Por lo tanto al comprador le conviene mas comprar una maquina 1 nueva.

Ejercicio práctico 4.8.3. *Considere la distribución con función de densidad* $f(t) = \beta^2 t e^{-\beta t}$, *esta es una función gamma de parámetro 2.*

(a) Demostrar que $s(t) = (1 + \beta t)e^{-\beta t}$

(b) Encuentre la función de riesgo $\mu(t)$

Solución

(a) Para calcular lo que se pide hay que usar la relación $s(t) = 1 - \int_0^t f(r)dr$

Así

$$s(t) = 1 - \int_0^t \beta^2 r e^{-\beta r} dr$$

resolviendo esa integral por partes tomando $u = r$ y $dv = e^{-\beta r}$ se llega a

$$s(t) = \big[1 + \beta r e^{-\beta r} + e^{-\beta r}\big]_0^t = 1 + \beta t e^{-\beta t} + e^{-\beta t} - 1 = \big(\beta t + 1\big)e^{-\beta t}$$

Lqqd

(b) Para encontrar la función de riesgo basta recordar que $\mu(t) = \dfrac{f(t)}{s(t)}$, entonces

$$\mu(t) = \frac{\beta^2 t e^{-\beta t}}{(\beta t + 1)e^{-\beta t}} = \frac{\beta^2 t}{\beta t + 1}$$

Capítulo 5

El Enfoque Estocástico de los Seguros y las Anualidades

5.1. Introducción

En este capítulo se tratará un tiempo de fracaso perfectamente general T y se desarrollará el enfoque estocástico para el cálculo de primas y reservas para contratos de seguros y anualidades basados en T. Todos ellos serán calculados como valores esperados de variables aleatorias apropiadas. En el caso particular donde $T = T(x)$, se mostrará, usando la correspondencia establecida en este capítulo, que estos coinciden con los resultados que se obtuvieron en el modelo determinístico. La ventaja del enfoque estocástico es que se puede aumentar estos valores esperados con otras cantidades, tales como varianzas.

A lo largo del capítulo, f, s y μ denotarán las funciones de densidad, supervivencia y riesgo respectivamente de T. Se establece que $\tilde{T}$ sea el tiempo de fallo discreto asociado, $\lfloor T \rfloor + 1$. Se establece que f y λ denoten la función de probabilidad y riesgo respectivamente de $\tilde{T}$. Se denota la función de supervivencia de T con el mismo símbolo s. Esto no causará confusión ya que el valor en cualquier entero es el mismo en ambos casos.

En algunos casos, los valores de T están limitados, pero esto no es necesario. El límite superior de integrales o sumas será escrito como ∞ para cubrir todas las posibilidades.

El enfoque difiere algo del caso determinista y es importante entender la distinción. Se supone, como se hizo antes, que se tiene una función determinista fija de descuento de inversión v. Se consideran contratos que pagan ciertos beneficios siempre que no se haya producido un fallo y/o beneficios en el momento del fracaso. Se quiere determinar los valores actuales de estos beneficios, y serán calculados con respecto a la función de descuento ν. En este modelo, no se tiene la función de descuento de interés y supervivencia que se tenía antes. Sin embargo, los valores actuales que se obtienen no serán números definidos sino más bien variables aleatorias, ya que dependerán del valor desconocido que T asume.

Las primas y reservas se calcularán como expectativas de estas variables aleatorias, y es en el cálculo de estas expectativas que se tienen en cuenta las probabilidades de vida y muerte. Estas expectativas se conocen comúnmente como valores actuales actuariales, abreviados como APV por sus siglas en inglés.

5.2. El Enfoque Estocástico de los Beneficios del Seguro

Aquí se tratarán contratos que proporcionan beneficios al fracasar, y se considerarán tanto los casos discretos como los continuos.

5.2.1. El Caso Discreto

Considerando un contrato con el vector de beneficios de fallo $\mathbf{b}$ que paga b_{k-1} en el momento k para el fracaso entre el tiempo $k-1$ y el tiempo k. Sea Z el valor presente de los beneficios con respecto a v. Entonces Z es una función de la variable aleatoria $\tilde{T}$, ya que cuando cuando $\tilde{T}=k$, el valor de Z es $b_{k-1}v(k)$. Por lo tanto se escribe

$$Z = b_{\tilde{T}-1}v(\tilde{T}).$$

Dejando $A_{\tilde{T}}$ denotando $E(Z)$, se tiene

$$A_{\tilde{T}}(\mathbf{b};v) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k-1}v(k)\tilde{f}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k v(k+1)\tilde{f}(k+1) \tag{5.2.1}$$

Como antes, a menudo se suprimirá el v y se escribirá esto como $A_{\tilde{T}}(\mathbf{b})$. Obsérvese que cuando $T = T(x)$, la fórmula 5.7.8 muestra que se obtiene $A_x(\mathbf{b})$ como se calcula en la fórmula **(5.1)**, del capítulo 5: seguros de vida, pagina 62 del libro de Promislow [3] .

Para muchas aplicaciones se requiere más información sobre Z que solamente su valor esperado; Al menos, se quiere calcular $Var(Z)$. Esto se hace fácilmente, puesto que $Z^2 = b^2_{\tilde{T}-1}v(\tilde{T})^2$. En otras palabras, para calcular el segundo momento, simplemente se elevan al cuadrado los beneficios, y la función de descuento. Esto lleva a

$$Var(Z) = A_{\tilde{T}}(\mathbf{b}^2; v^2) - A_{\tilde{T}}(\mathbf{b}; v)^2 \tag{5.2.2}$$

5.2.2. El Caso Continuo

Considerando un contrato que pague $b(t)$ en el momento del fallo, si el fallo ocurre en el instante t. $\bar{Z}$ denota el valor actual de los beneficios y se denota el valor esperado de $\bar{Z}$ por $\bar{A}_T(b; v)$, a menudo abreviado en $\bar{A}_T(b)$. Cuando $T = t$, $b(t)$ se paga en el tiempo t, por lo que

$$\bar{Z} = b(T)v(T)$$

y

$$\bar{A}_T(b; v) = \int_0^\infty b(t)v(t)f(t)dt. \tag{5.2.3}$$

Cuando $T = T(x)$, se puede ver de 5.7.6 que esta es la misma cantidad que se obtuvo en la fórmula **(8.18)** del capitulo 8: Pagos Continuos, del libro de Promislow [3].
La varianza se calcula como se hizo anteriormente en el caso discreto:

$$Var(\bar{Z}) = \bar{A}_T(b^2; v^2) - \bar{A}_T(b; v)^2. \tag{5.2.4}$$

Ejemplo 5.2.1. *Suponer que $\mu(t)$ es una constante 0.04 y la fuerza de interés es una constante 0.07. Un contrato de seguro paga un beneficio de $e^{0.03t}$ en el tiempo t, si el fallo ocurre en ese momento. Encontrar la esperanza y la varianza de $\bar{Z}$, el valor presente de los beneficios.*

Solución. Este es un tiempo de fallo exponencial, así $f(t) = 0.04e^{-0.04t}$. Se tiene $b(t) = e^{0.03t}$ y $v(t) = e^{-0.07t}$. Sustituyendo en 5.2.3,

$$E(Z) = \int_0^\infty 0.04e^{0.03t}e^{-0.07t}e^{-0.04t}dt = \frac{0.04}{0.04 + 0.07 - 0.03} = \frac{1}{2}$$

Ahora, $b(t)^2 = e^{0.06t}$ y $v(t)^2 = e^{-0.14}$, así calculando como arriba,

$$E(Z^2) = \frac{0.04}{0.04 + 0.14 - 0.06} = \frac{1}{3}, \qquad Var(Z) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

5.2.3. Aproximación

Se supone ahora que sólo se conoce la distribución de $\tilde{T}$, y se desea aproximar a $\bar{A}_T(b)$. Si los intereses y beneficios son constantes a lo largo de cada año, se puede usar la aproximación estándar para obtener el mismo ajuste i/δ que el obtenido antes para $T(x)$. Se dará una derivación estocástica alternativa de este resultado. Primero se va a suponer el interés constante, de modo que $v(t) = v^t$ para alguna constante v. Sea b_k el valor constante de $b(t)$ sobre el intervalo de tiempo k a $k+1$, y deja $\mathbf{b} = (b_0, b_1, ...)$. Recordando la variable aleatoria $R = \tilde{T} - T$ introducida en la sección 5.7. Entonces

$$E(\bar{Z}) = E\big[b(T)v^T\big] = E\big[b(T)v^{\tilde{T}-R}\big] = E\big[b(T)v^{\tilde{T}}\big]E[v^{-R}]$$

donde se invoca la independencia para la última igualdad.
Cuando $\tilde{T} = j$, $b(T) = b_{j-1}$, así que $E\big[b(T)v^{\tilde{T}}\big]$ es justo $A_{\tilde{T}}(\mathbf{b})$. Además, $v^{-R} = (1+i)^R$, y ya que R es uniforme en $[0,1]$.

$$E\big[v^{-R}\big] = \int_0^1 (1+i)^u du = \frac{i}{\delta}$$

llevando a $\bar{A}_T(b) = (i/\delta)A_{\tilde{T}}(\mathbf{b})$.

La fórmula general, donde el interés puede variar de un año a otro está dado por

$$\bar{A}_T(b) = A_{\tilde{A}}\Big(\frac{\mathbf{i}}{\delta} * \mathbf{b}\Big) \tag{5.2.5}$$

donde i/δ es ahora un vector.

5.2.4. Seguros de Dotación

En este determinado modelo, los seguros de dotación se consideraban una especie de híbrido, que consta de componentes de seguros y anualidades. En este modelo estocástico, se puede ver estrictamente como seguros. Definiendo el tiempo de fallo

$$T = \text{mín}\{T(x), n\}$$

de modo que el fallo ocurre en la muerte de (x), o en el tiempo n si es anterior. Seguros basados en T son precisamente los seguros de dotación de n-años. Cuando los beneficios se pagan en el momento de la muerte, T es un ejemplo de una variable aleatoria que tiene tanto una parte continua como una parte discreta **(véase la sección A.5 del libro de Promislow 3)**.

Es continua en el intervalo $[0, n)$, sobre el cual tiene una función de densidad f_x que satisface

$$P(a \leq T \leq b) = \int_a^b f_x(t)dt$$

siempre que $b < n$

Esta densidad sólo mejorará la restricción de la función de densidad para $T(x)$ en el intervalo $[0, n)$, y se integrará a $F_x(n)$ en este intervalo. La probabilidad restante se concentra en el punto n, ya que T tomará este valor siempre que $T(x)$ tome un valor mayor o igual a n, un evento con probabilidad $s_x(n)$. Las expectativas de una función general g de T deben calcularse como una suma de dos términos,

$$E[g(T)] = \int_0^n g(t)f_x(t)dt + g(n)s_x(n)$$

En particular, considerando un seguro de dotación de años con función de beneficio de muerte b definido en $[0, n]$. Es decir, $b(t)$ se paga en el momento de la muerte si esto ocurre antes de que n y $b(n)$ se pague en el momento n si el asegurado está entonces vivo (de modo que el fallo ocurre en el momento n). Entonces

$$\bar{A}_T(b) = E[v(T)b(T)] = \int_0^n b(t)v(t)f_x(t)ft + b(n)v(n)s_x(n)$$

lo que se ve fácilmente de acuerdo con el valor actual obtenido en el modelo determinístico.

De 5.2.4 se puede calcular la varianza de beneficios como

$$\int_0^n [b(v)v(t)]^2 f_x(t)dt + [b(n)v(n)]^2 s_x(n) - \left[\bar{A}_T(b)\right]^2$$

Se debe tener cuidado al aplicar la aproximación 5.2.5 . Esto sólo es válido para la parte continua de la variable aleatoria T. En el siguiente ejemplo del seguro de dotación, la ecuación 5.2.5 sería modificada para

$$\bar{A}_T(b) = A_T\Big(\frac{i}{\delta} * b\Big) + b(n)v(n)s(n)$$

El último término no se multiplica por el ajuste de intereses, ya que tanto en los casos de muerte al final de año como en los casos de momento de muerte, la cantidad final de $b(n)$ se paga a los supervivientes en el momento exacto n.

Ejemplo 5.2.2. *Un seguro de dos años de duración en* (x) *tiene beneficios de* 100 *si la muerte ocurre en el primer año u* 80 *si la muerte ocurre en el segundo año, y una dotación pura de* 80 *si el asegurado está vivo en el momento dos. Se tiene que* $q_x = 0.2$, $q_{x+1} = 0.3$, *y la tasa de interés es una constante de* 100 %. *Encontrar la esperanza y la varianza de beneficios cuando:*

(a) Los beneficios son pagaderos al final del año de la muerte.

(b) Los beneficios son pagaderos al momento de la muerte.

Solución

(a) Sea Z el valor actual de los beneficios al final del año de muerte. Como se observó en el **ejemplo 6.2**, ni siquiera se necesita el valor de q_{x+1}. De hecho se puede notar que Z toma el valor 50 con probabilidad 0.2 y 20 con probabilidad 0.8. Por lo tanto, tiene una media de 26 y una varianza de $30^2(0.2)(0.8) = 144$.

(b) Sea Z el valor presente de los beneficios en el momento de la muerte. Ahora se necesita el valor de q_{x+1} ya que hace una diferencia si la persona muere en el segundo año, en cuyo caso 80 se pagan en el momento de la muerte, o si sobreviven, en cuyo caso 80 se paga al final del año. Empezando de nuevo con el cálculo de $E(Z)$ y $E(Z^2)$, pero ahora dividido en el seguro y los montos de dotación pura.

$$E(\bar{Z}) = 14.8 + 80(1/4)(0.56) = 14.8 + 11.2$$

$$E(\bar{Z}^2) = 596 + 6400(1/16)(0.56) = 596 + 224$$

ahora para $i = 1$, $\delta = \log(2)$ así

$$E\bar{Z} = \Big(\frac{1}{\log(2)}\Big)14.8 + 11.2 = 32.55$$

el cuadrado de v significa que δ se duplica y el i cambia a

$$(1+i)^2 - 1 = 2i + i^2$$

que es igual a 3 cuando el valor original es 1. Así, para el cálculo del segundo momento se toma $i = 3$, $\delta = \log(4)$, para obtener

$$E(\bar{Z}^2) = \Big(\frac{3}{\log(4)}\Big)596 + 224 = 1513.77$$

$$Var(\bar{Z}) = 1513.77 - 32.55^2 = 454.27$$

La varianza es mucho mayor en b), debido a la variación en el valor actual de los beneficios, dependiendo de cuando la persona muere durante el año, lo que es significativo en vista de la alta tasa de interés.

5.3. El Enfoque Estocástico de las Prestaciones de Anualidad

5.3.1. Anualidades Discretas

Considerando un contrato con el beneficio de la anualidad $\mathbf{c}$ que paga c_k en el momento k siempre que el fracaso no se ha producido todavía. Sea Y el valor presente de los beneficios con respecto a la función de descuento de inversión v, y $\ddot{a}_{\tilde{T}}(\mathbf{c}; v)$ (Usualmente acortado como $\ddot{a}_{\tilde{T}}(\mathbf{c})$) denota $E(Y)$. (El subíndice $\tilde{T}$ refleja el hecho de que en vista de los pagos anuales, esta cantidad dependerá sólo del valor de $\tilde{T}$, en lugar del valor exacto de T).

Hay dos métodos para calcular las expectativas y las variaciones de las anualidades en el ajuste estocástico. Esto tiene la ventaja de simplificar los cálculos de la varianza. Recuérdese que en el modelo determinístico a menudo se consideran los seguros como anualidades. Ahora es útil ver las anualidades como seguros en cierto sentido. Para ser exactos, se expresará Y como una función de $\tilde{T}$. Sea g la función definida en los enteros positivos por

$$g(k) = c_0 + c_1 v(1) + c_2 v(2) + ... + c_{k-1} v(k-1)$$

También se puede escribir $g(k) = \ddot{a}_{\tilde{T}}(\mathbf{c}; v)$ usando la notación vista en la **seccion 2.10.1** del libro de Promislow 3.

Suponer que $\tilde{T}$ toma los valores de k. Entonces los pagos se habrán hecho en todos los tiempos enteros de 0 a $k-1$, por lo que Y tomará el valor $g(k)$. Por lo tanto, se puede escribir

$$Y = g(\tilde{T})$$

y se sigue que

$$\ddot{a}_{\tilde{T}}(\mathbf{c}) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)\tilde{f}(k) \tag{5.3.1}$$

y

$$Var(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)^2 \tilde{f}(k) - \ddot{a}_{\tilde{T}}(\mathbf{c})^2 \tag{5.3.2}$$

La expresión (4.3.2) se conoce como *fórmula de pago agregado*, ya que se ha considerado la función $g(k)$ que es el valor presente agregado recibido por fallo en el instante k.

Ejemplo 5.3.1. *Para una anualidad vitalicia de 4 años en* (60). *La secuencia de los beneficios de anualidad es* 1, 2, 3, 4 *a partir de los* 60 *años. Se le da* $q_{60} = 0.1$, $q_{61} = 0.2$, $q_{62} = 0.3$ *e* $i = 100\,\%$. *Hallar* $E(Y)$ *y* $Var(Y)$.

Solución. Calcular recursivamente $g(1) = 1$, $g(2) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, $g(3) = 2 + 3\left(\frac{1}{4}\right) = 2.75$, $g(k) = 2.75 + 4\left(\frac{1}{8}\right) = 3.25$ para todo $k > 3$.. La distribución de $\tilde{T}$ está dada por $\tilde{f}_{60}(1) = 0.1$, $\tilde{f}_{60}(2) = 0.180$, $\tilde{f}_{60}(3) = 0.216$, $s_{60}(3) = 0.504$. Ahora se puede calcular $E(Y)$ y $Var(Y)$

$$E(Y) = 0.100 + 2(0.180) + 2.75(0.216) + 3.25(0.504) = 2.692.$$

$$Var(Y) = 0.100 + 2^2(0.108) + (2.75)^2(0.216) + (3.25)^2(0.504) - 2.692^2 = 0.530.$$

Observación Se debe tener en cuenta que cuando el pago final de una anualidad es en el momento k_0, entonces Y toma el valor de $g(k_0 + 1)$ con probabilidad $s(k_0)$ ya que

$g(k) = g(k_0 + 1)$ para todo $k > k_0$.

Observación Hay un punto importante que a menudo se pasa por alto. La ecuación 5.3.1 aplicada a las anualidades de vida dice que se puede ver el valor presente de un conjunto de flujos de efectivo con respecto a la función de intereses y supervivencia como el valor esperado del valor actual de los pagos recibidos con respecto a una función de interés solamente.

Algunas personas han asumido erróneamente que, de manera similar, el valor acumulado de una anualidad vitalicia es el mismo que el valor esperado de los pagos recibidos, acumulados con intereses. Esto no es cierto y de hecho la igualdad no se mantiene para los valores en cualquier momento que no sea 0. Tenemos

$$Val_k(\mathbf{c}, y_x) = y_x(k)^{-1}\ddot{a}_x(\mathbf{c}),$$

Mientras que el valor esperado en el tiempo k con respecto a v, de los pagos recibidos de $\mathbf{c}$ es $v(k)^{-1}\ddot{a}_x(\mathbf{c})$, que será menor que la primera cantidad para todo $k > 0$.

El segundo método para calcular los valores actuales de la anualidad está estrechamente relacionado con lo que se hizo en el modelo determinístico. Definiendo variables aleatorias

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{si } \tilde{T} > k \\ 0, & \text{si } \tilde{T} \leq k \end{cases}$$

El contrato paga un valor presente de $c_k v(k)$ para cada entero k tal que $\tilde{T} > k$, o equivalentemente, tal que $I_k = 1$. Por lo tanto, podemos escribir

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v(k) I_k \tag{5.3.3}$$

Esto es análogo a ver la anualidad como consistente en varias dotaciones puras. Dado que $E(I_k) = s(k)$, tomando las expectativas, da

$$\ddot{a}_{\tilde{T}}(\mathbf{c}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v(k) s(k) \tag{5.3.4}$$

La expresión de la ecuación 5.3.4 se conoce como la *fórmula de pago actual*, ya que observa cada pago recibido, los descuentos con intereses y lo multiplica por la probabilidad de recibirlo. En el caso donde $T = T(x)$, es precisamente la fórmula obtenida en **(4.1)**.

La igualdad de las expresiones en (4.3.2) y (5.3.4) se puede ver en **(A.16)** del libro de Promislow 3.La condición **(A.14)** casi siempre se mantendrá. Es automático cuando los beneficios son positivos ya que g va a aumentar, o cuando hay un número finito de pagos de beneficios, aunque sea negativo, ya que g estará limitado).

Tener en cuenta que los I_k no son independientes. Para calcular las desviaciones del enfoque de pago actual se usarán los siguientes hechos.

$$Var(I_k) = s(k)(1 - s(k)) \tag{5.3.5}$$

Para $j < k$. se tiene que $I_j I_k = I_k$, así que

$$Cov(I_j, I_k) = E(I_j I_k) - E(I_j)E(I_k) = s(k)(1 - s(j)) \tag{5.3.6}$$

Para simplificar la notación

$$r_k = c_k v(k)s(k), \qquad u_k = c_k v(k)(1 - s(k))$$

Entonces de **(A.24)** y las ecuaciones 5.3.5, y 5.3.6

$$Var(Y) = \sum_k r_k U_k + 2\sum_{j<k} r_k u_j \tag{5.3.7}$$

Este será normalmente un cálculo mucho más complicado que el que se da por el enfoque de pago agregado.

5.3.2. Anualidades Continuas

Considere un contrato que haga pagos continuamente a la tasa anual de $c(t)$ en el tiempo t, siempre que T no se haya producido aún. Se denotará el valor presente actuarial por $\bar{a}_T(c;v)$ (De forma más corta $\bar{a}_T(c)$).

Definiendo la función $\bar{g}$ por

$$\bar{g}(t) = \int_0^t c(r)v(r)dr$$

si T falla en el tiempo s, el valor presente de los beneficios recibidos será precisamente $g(s)$, de modo que

$$\bar{Y} = \bar{g}(T)$$

Se sigue que

$$\bar{a}_T(\mathbf{c}) = E(\bar{Y}) = \int_0^\infty \bar{g}(t) f(t) dt \tag{5.3.8}$$

y

$$Var(\bar{Y}) = \int_0^\infty \bar{g}(t)^2 f(t) dt - [\bar{a}_T(c)]^2. \tag{5.3.9}$$

Se puede escribir la fórmula de pago actual como sigue

$$\bar{a}_T(\mathbf{c}) = \int_0^\infty c(t) v(t) s(t) dt \tag{5.3.10}$$

No existe una fórmula de varianza conveniente análoga a la ecuación 5.3.7 para anualidades continuas, puesto que tenemos la representación como una suma de variables aleatorias de indicador que estaba presente en el caso discreto.

Ejemplo 5.3.2. *Una anualidad proporciona beneficios continuos a razón de* 1 *por período, siempre que no se haya producido un fallo. El tiempo de fallo T tiene una distribución exponencial con peligro constante μ. La fuerza de interés es una constante δ. Si Y es el valor presente de los beneficios, encuentrar $Var(Y)$.*

Primera solución. Ya que

$$\bar{g}(t) = \int_0^t e^{-\delta r} dr = \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} E(\bar{Y}^2) &= \int_0^\infty \left[\frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}\right]^2 \mu e^{-\mu r} dr \\ &= \frac{\mu}{\delta^2} \int_0^\infty \left[1 - 2e^{-\delta r} + e^{-2\delta r}\right] e^{-\mu r} dr \\ &= \frac{\mu}{\delta^2} \left[\frac{1}{\mu} - \frac{2}{\mu + \delta} + \frac{1}{\mu + 2\delta}\right] \\ &= \frac{2}{(\mu + \delta)(\mu + 2\delta)} \end{aligned}$$

De la ecuación 5.3.8 o simplemente refiriéndose a la **sección 8.10 del libro de Promislow 3**, se puede ver que $E(\bar{Y}) = 1/(\mu + \delta)$ así que

$$Var(\bar{Y}) = \frac{2}{(\mu + \delta)(\mu + 2\delta)} - \frac{1}{(\mu + \delta)^2} = \frac{\mu}{(\mu + \delta)^2 (\mu + 2\delta)}$$

Obsérvese que, como verificación, para $\delta = 0$, esto reduce a μ^{-2}, la varianza de la distribución exponencial dada (véase la **sección A.11.6 del libro de Promislow 3**, que debe ser verdadera ya que $\bar{Y} = T$ a interés cero.

Una simplificación. Se puede simplificar y también solo obtener una fórmula más general por el siguiente truco:

$$\bar{Y}^2 = \frac{1 - 2e^{-\delta T} + e^{-2\delta T}}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}\left[\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}\right) - \left(\frac{1 - e^{-2\delta T}}{2\delta}\right)\right]$$

Al tomar la esperanza y recordando que $E[e^{-\delta T}] = \mu/(\mu + \delta)$, se obtiene la misma respuesta que resultó anteriormente.

5.4. Contratos Diferidos

Considerando ahora cualquier contrato basado en el tiempo de falla T, en el que no se harán pagos en los primeros años, independientemente de que se produzca o no un fracaso. Un ejemplo típico es una anualidad diferida, pero esto puede ser un contrato perfectamente general, continuo o discreto, incluyendo beneficios de muerte, beneficios de anualidad o ambos. Sea Y el valor presente de los beneficios, y sea Y' el valor de los beneficios a la hora de inicio m. Como se mencionó anteriormente, no existe ninguna necesidad real de ningún tratamiento matemático especial, ya que simplemente se han tomado entradas cero o valores cero en el vector o función de beneficio. A veces es conveniente, sin embargo, expresar $Var(Y)$ en términos de $Var(Y')$. El propósito de esta sección es derivar tal fórmula. La idea es notar que Y toma el valor 0 con probabilidad $1 - s(m)$ y $v(m)Y'$ con probabilidad $s(m)$. De la teoría básica de probabilidades se deduce que

$$E(Y) = s(m)E(v(m)Y') = v(m)s(m)E(Y'),$$

una fórmula que ya está familiarizada con el modelo determinista. De la misma manera se sigue que

$$E(Y^2) = v(m)^2 s(m)E(Y')^2 = v(m)^2 s(m)[Var(Y') + E(Y')^2]$$

Sustituyendo por $E(Y)$ en términos de $E(Y')$ en la expresión $Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$ resulta

$$Var(Y) = v(m)^2 s(m) Var(Y') + v(m)^2 s(m)(1 - s(m)) E(Y')^2 \tag{5.4.1}$$

Esto da una descomposición familiar de la varianza de Y. El primer término mide la incertidumbre que surge de los beneficios reales una vez que comienzan en el momento m, y el segundo término mide la incertidumbre que surge del hecho de que el fallo puede ocurrir o no antes del tiempo m.

5.5. El Enfoque Estocástico de las Reservas

Se ha ilustrado el enfoque estocástico de las reservas con el modelo discreto. Los resultados se adaptan fácilmente al caso continuo. Se tienen vectores $\mathbf{b}$ y π, donde b_k se paga en el tiempo $k+1$ si el fallo ocurre entre el tiempo k y $k+1$, y π_k se paga en el instante k si no se ha producido todavía un fallo. Se está adoptando el punto de vista de tratar las prestaciones de anualidad como primas negativas, de modo que π_k representa una entrada neta en el momento k, que consiste en la prima recibida, menos los gastos pagados en el momento k si se están considerando, Y también cualquier pago de anualidad menos hecho en el tiempo k. Por lo tanto, no se necesitará referirse a un vector de beneficios de anualidad separado. Fijando una duración entera r y suponiendo que el fallo no ha ocurrido hasta ese momento.

Definición 5.5.1. *La pérdida potencial o pérdida futura en el momento r, denotada por ${}_rL$, es el valor en el tiempo r de los flujos de efectivo netos futuros que se pagarán.*

Estos flujos de efectivo netos son los beneficios futuros que se pagarán menos las entradas netas futuras que se recibirán. La definición aquí es diferente a la utilizada en el modelo determinístico. Los beneficios son los beneficios reales pagados en el contrato, y no la parte individual de los beneficios de muerte total. Anteriormente se ha señalado que, el descuento es sólo con respecto a la función de descuento de inversión. El valor dependerá, por supuesto, de cuándo se produce el fallo, por lo que ${}_rL$ será una variable aleatoria. Esta es una función de la variable aleatoria desplazada $\tilde{T} \circ r$, ya que se ha asumido la supervivencia hasta el tiempo r. A continuación se va a determinar esta función. Suponiendo que el fallo ocurre en el tiempo $r+t$ donde $k \leq t < k+1$, para algún entero

k. Entonces $\tilde{T} \circ r$ asumirá un valor de $k+1$. El contrato pagará un beneficio de fracaso de b_k en el momento $k+1$. Al compensar esto, las entradas netas se habrían recolectado del tiempo r al tiempo $r+k$, de modo que en este caso el valor de ${}_rL$ será

$$b_{r+k}v(r, r+k+1) - [\pi_r + \pi_{r+1}v(r, r+1) + ... + \pi_{r+k}v(r, r+k)].$$

En términos de variables aleatorias, se puede escribir como

$${}_rL = b_{r+\tilde{T}\circ r-1}\nu(r, r+\tilde{T}\circ r) - [\pi_r + \pi_{r+1}\nu(r, r+1) + ...\pi_{r+\tilde{T}\circ r-1}\nu(r, r+\tilde{T}\circ r-1)]$$

Observación. Se ha utilizado la terminología estándar aquí, pero se debe ser consciente de que la palabra "pérdida" en la definición anterior tiene una connotación completamente diferente a la discutida en las secciones anteriores. "Pérdida" no indica un número definido, que mide la pérdida provocada por la desviación del patrón esperado de mortalidad o interés, sino que es una variable aleatoria, que da la diferencia entre lo que se recoge y lo que se paga bajo el contrato en los diferentes tiempos aleatorios de fracaso. También debe señalarse que ${}_rL$ es de las pocas variables aleatorias que pueden tomar valores negativos, que ocurren cuando hay una "ganancia".

Definición 5.5.2. *En este modelo estocástico, se define la reserva en el tiempo r, denotada antes por ${}_rV$, y dada por la expresión*

$${}_rV = E({}_rL).$$

Así, ${}_rV$ es el valor esperado de la pérdida potencial (o pérdida futura), que es el valor presente esperado de los beneficios futuros menos el valor presente esperado de las entradas futuras. Está claro que en el caso de $T = T(x)$ se obtiene el mismo valor que en el modelo determinístico.

Ejemplo 5.5.1. *Sea $T = T(60)$. Dados $q_{60} = 0.1$, $q_{61} = 0.2$, $q_{62} = 0.3$, $i = 100\,\%$. Suponer que se tiene una póliza de seguro a tres años en (60) con $b_0 = 200$, $b_1 = 200$, $b_2 = 100$, $\pi_0 = 20$, $\pi_1 = 20$, $\pi_2 = 10$.*

(a) Encontrar la distribución de ${}_0L$.

(b) Encontrar la distribución de ${}_1L$.

(c) Con la respuesta encontrada en b), calcular ${}_1V$.

Solución

(a) La distribución de ${}_0L$ es como sigue:

k	Valor de ${}_0L$ cuando $\tilde{T} = k$	$P(\tilde{T} = k)$
1	$200\Big(1/2\Big) - 20 = 80$	0.100
2	$200\Big(1/4\Big) - \Big(20 + 20\big(1/2\big)\Big) = 20$	0.180
3	$100\Big(1/8\Big) - \Big(20 + 20\big(1/2\big) + 10\big(1/4\big)\Big) = -20$	0.216
≥ 4	$0 - \Big(20 + 20\big(1/2\big) + 10\big(2/4\big)\Big) = -32.5$	0.504

(b) La distribución de ${}_1L$ es como sigue:

k	Valor de ${}_1L$ cuando $\tilde{T} \circ 1 = k$	$P(\tilde{T} \circ 1 = k)$
1	$200\Big(1/2\Big) - 20 = 80$	0.20
2	$100\Big(1/4\Big) - \Big(20 + 10\big(1/2\big)\Big) = 0$	0.24
≥ 3	$0 - \Big(20 + 10\big(1/2\big)\Big) = -25$	0.56

(c) ${}_1V = 80(0.20) + \Big(-25(0.56)\Big) = 2.$

5.6. El Enfoque Estocástico de las Primas

Para esta sección solamente, es conveniente adoptar una convención diferente. Suponiendo ahora que los gastos y los pagos de anualidad se incluyen como beneficios, de modo que las entradas π_k son sólo las primas recaudadas.

5.6.1. El Principio de Equivalencia

La variable aleatoria ${}_0L$ se denomina usualmente como L. Es el valor presente de todos los beneficios futuros menos el valor actual de todas las primas futuras. Hay que recordar que en el modelo determinístico se calculó las primas netas estableciendo el valor presente de los beneficios igual al valor actual de las primas. La versión estocástica de este concepto es establecer primas para que

$$E(L) = 0$$

Esto es conocido como *el principio de equivalencia*

5.6.2. Primas de Percentil

El punto de vista estocástico permite incorporar otras características de la variable aleatoria L más que su esperanza, al calcular las primas. Por ejemplo, sería altamente deseable para un asegurador para evitar una pérdida positiva. Por supuesto, es imposible asegurar que esto siempre se mantendrá. Si el asegurado muere poco después de comprar una póliza de seguro de vida, L será casi seguro que será positivo. Suponiendo, sin embargo, que se establece un límite α, y luego se fijan primas tan pequeñas como sea posible, de modo que la probabilidad sea al menos α de que la pérdida sea no positiva. Típicamente α será un número cercano a 1 tal como $0,95$ o $0,99$. Éstos se refieren a veces como *primas del percentil*.

Esto suena razonable, pero hay problemas importantes a tal acercamiento. En primer lugar, el método no toma en cuenta la *cola derecha* importante de la distribución, consistente en aquellos valores de L que son mayores que el percentil especificado. Si hay reclamaciones muy grandes presentes, el método puede no proporcionar primas suficientes para cubrir el riesgo. Esto se pone de manifiesto en el hecho de que el método puede producir primas que son realmente inferiores a la prima del principio de equivalencia. Para un ejemplo extremo de esto, suponiendo que se tiene una política de un año y la probabilidad de que (x) muera dentro de n años es menor que $1-\alpha$. Se puede alcanzar el objetivo declarado al cobrar primas de 0, lo que es absurdo.

Por otro lado, para valores altos de α, el método puede producir primas que parecen excesivamente altas en comparación con la prima del principio de equivalencia. Véase el 5.6.2 a continuación.

Otro ejemplo del comportamiento patológico producido por las primas percentiles se ilustra mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.6.1. *En un contrato de prima única, el valor presente de los beneficios toma el valor* 0 *con probabilidad* 0.94*,* 1 *con probabilidad* 0.01 *y* 3 *con probabilidad* 0.05*.*

a) Encontrar el la prima del percentil para $\alpha = 0.95$*.*

b) Suponer que el asegurador planea vender 2 *contratos. Encontrar la menor prima posible para cada uno, de tal manera que existe una probabilidad de al menos* $0,95$ *que el total de las primas cubrirá el total de beneficios en ambos contratos.*

Solución

a) Esto es obviamente 1, lo que da exactamente una probabilidad de 0.95 de cubrir los beneficios.

b) Utilizando la independencia, el cálculo directo muestra que la probabilidad de que el valor presente total de los beneficios sea menor o igual a z es 0.9025 para $z = 2$ o 0.9965 para $z = 3$. La prima total más pequeña necesaria es entonces 3, lo que da como resultado un cargo de 1.5 por póliza.

La conclusión de este ejemplo es exactamente contraria a lo que se esperaría, e indica una falla importante en el enfoque de prima del percentil. A medida que aumenta el número de pólizas, el riesgo debería disminuir debido a la diversificación. Sucesiones desfavorables en un contrato se pueden compensar por favorables en otro. Por lo tanto, la prima por póliza debería disminuir en lugar de aumentar.

A pesar de la desventaja inherente en las primas del percentil, puede haber momentos en que se quiere calcular éstos, posiblemente para la comparación con las primas producidas por otros métodos. Aquí hay un procedimiento para el caso en que los beneficios se pagan al final del año de fracaso. Se quiere encontrar la prima de nivel π más pequeña posible pagadera por h años, de manera que la probabilidad de que un L no positivo sea mayor o igual que un determinado número α. Considerando solamente el caso donde L disminuye a medida que aumenta el valor de T. Esto es bastante típico. A medida que aumenta el tiempo de fracaso, el factor de descuento reduce el valor actual del beneficio pagado. Además, cuanto más tarde se produzca el fracaso, más primas se recaudarán. Ambos factores tienden a disminuir L. (Por supuesto, la condición requerida puede no mantenerse en el caso en que los beneficios están aumentando rápidamente). El procedimiento es el siguiente:

1. Sea k_0 el mayor entero positivo k tal que $s(k) \geq (\alpha)$.

2. Resolver para π de modo que L es 0 cuando $\tilde{T} = k_0 + 1$. Esto es,

$$b_{k_0} v(k_0 + 1) = \pi \ddot{a}(1_r; \nu)$$

donde r es el mínimo de k_0+1 y h. Como L es decreciente con $k, L \leq 0$ implica que $\tilde{T} \geq k_0$. Por lo tanto,

$$\alpha \leq s(k_0) \leq P(L \leq 0).$$

Por otra parte, si se toma cualquier prima menor π', entonces para $\tilde{T} = k_0+1$, L será positivo, de modo que

$$P(L \leq 0) \leq s_{k_0+1} < \alpha$$

por la elección de k_0 que se hizo.

Ejemplo 5.6.2. *Véase de nuevo el 5.5.1. Encontrar el nivel de la prima del percentil* π *pagadero por* 3 *años si* $\alpha = 0.8$.

Solución. Tomando $k_0 = 1$ ya que $P(T > 1) = 0.90 > 0.8$, mientras que $P(T > 2) = 0.72 < 0.8$. Cuando $T = 2$, $L = 200\Big(\dfrac{1}{4}\Big) - \pi\Big(1 + \dfrac{1}{2}\Big)$, de modo que $\pi = 33,33$. Esto es mucho más alto que la prima de nivel de principio de equivalencia.

5.6.3. Primas Agregadas

Un análisis de los ejemplos anteriores indica que el método de prima percentil puede dar resultados no razonables con distribuciones altamente asimétricas, donde hay una gran probabilidad de un valor en una de las colas. Sin embargo, este enfoque es razonable para calcular las primas totales de un gran grupo de políticas, donde la distribución de los beneficios totales probablemente se concentre más en la media. Suponiendo que el asegurador emite varios contratos del mismo tipo y desea estar bastante seguro de que, en conjunto, el total de las primas recaudadas cubrirá el total de los beneficios. Hay dos preguntas importantes que podrían considerarse. Primero, las primas pueden ser fijadas y queremos determinar el número de contratos a vender para lograr la confianza deseada. En segundo lugar, el número de contratos puede ser fijo y el problema es determinar la prima a cobrar. En general, los cálculos exactos son prohibitivos, pero se puede obtener respuestas aproximadas suponiendo que la totalidad de todas las pérdidas tiene una distribución normal (véase la **Sección A.11.5** del libro de Promislow 3).

Es conveniente introducir la siguiente cantidad, que se analizará en general.

Definición 5.6.1. *Para una variable aleatoria X con una media positiva, el coeficiente de variación de X es la cantidad*

$$CV(X) = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$$

Resulta claro de **(A.8)** y **(A.10)** del libro de Promislow 3 que para cualquier constante c,

$$CV(cX) = CV(X)$$

Mostrando que, a diferencia de la varianza o desviación estándar, ésta es una medida de variación que es independiente de las unidades particulares. Así, por ejemplo, si se mide la pérdida en dólares estadounidenses y luego se cambia las unidades a libras esterlinas, la varianza será muy diferente, pero el coeficiente de variación seguirá siendo el mismo. Hay algunos otros hechos sobre esta cantidad que se quiere derivar. Suponiendo que $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$ donde éstas son variables aleatorias independientes cada una distribuida como X. Entonces

$$Var(S) = NVar(X), \qquad E(X) = NE(X),$$

Mostrando que

$$CV(S) = \frac{CV(X)}{\sqrt{N}} \tag{5.6.1}$$

Ilustrando el efecto de diversificación esperado que ocurre cuando se toma una suma independiente de variables aleatorias. Esperando reducir la variación, ya que algunos valores altos son compensados por valores bajos.

Ahora se supone que X es una variable aleatoria normal con media positiva, y se necesita la probabilidad de que X tome un valor mayor o igual a 0. Esto es claramente independiente de cualquier unidad, por lo que podría ser expresado en términos del coeficiente de variación. De hecho, suponiendo que X tiene la media μ y la desviación estándar σ, de modo que $X = \mu + \sigma Z$ donde Z es la normal estándar. Entonces, $P(X \geq 0) = P(Z \geq -\mu/\sigma)$ que por simetría es igual a $P(Z \leq \mu/\sigma)$. Se puede escribir

$$P(X \geq 0) = \Phi[CV(X)^{-1}] \tag{5.6.2}$$

Donde Φ es la función de distribución acumulativa de la normal estándar.

Considerando ahora la primera pregunta dada anteriormente. Suponiendo que se tiene un contrato con una pérdida prospectiva en el tiempo 0 de L, donde $E(L) < 0$ y se quiere determinar el menor valor de N, de modo que si N contratos independientes se venden, la probabilidad que las primas cubrirán los beneficios es al menos α.

Sea S la pérdida agregada en todos los contratos y aplique los resultados anteriores a $-S$, la ganancia agregada. Se quiere una probabilidad de α de que $-S$ sea positiva. Suponiendo que $-S$ es normal. Utilizar la expresión 5.6.2 con $X = -S$, y tomar Φ^{-1} de cada lado, resultando en

$$\Phi^{-1}(\alpha) = CV(-S)^{-1}$$

Entonces aplicar 5.6.1 con $X = -L$ para obtener $\Phi^{-1}(\alpha) = \sqrt{N}/CV(-L)$ así que

$$\sqrt{N} = \Phi^{-1}(\alpha)CV(-L) \tag{5.6.3}$$

Se puede ver entonces que la cantidad necesaria de contratos aumenta a medida que aumenta el nivel de confianza, y también a medida que sube la incertidumbre en L, que es exactamente lo que se espera que suceda.

Para la segunda pregunta anterior donde N es fijo, se considera un contrato de prima única con el valor presente de los beneficios Z. Sea la prima requerida de la forma $(1 + \theta)E(\bar{Z})$. La cantidad θ se conoce como *carga de seguridad relativa* - también se usan las palabras *carga de riesgo y carga de contingencia.* (Así que si $\theta = 0.20$ por ejemplo, significa que la prima se calcula sumando el 20 % a la prima del principio de equivalencia). Ahora en este caso

$$-L = (1 + \theta)E(\bar{Z}) - \bar{Z},$$

así que $Var(-L) = Var(\bar{Z})$, y $E(-L) = \theta E(\bar{Z})$. Por tanto

$$CV(-L) = \frac{CV(\bar{Z})}{\theta} \tag{5.6.4}$$

Sustituyendo de 5.6.3, se puede escribir

$$\theta = \frac{\Phi(\alpha)CV(\bar{Z})}{\sqrt{N}} \tag{5.6.5}$$

Esto es ciertamente razonable, ya que muestra que la carga aumenta con el nivel de tolerancia y la incertidumbre en los beneficios, pero disminuye a medida que se venden más contratos.

Ejemplo 5.6.3. *Suponiendo que la fuerza de interés es una constante* 0.06 *y que* $\mu(t) = 0.04$ *para todo* t*. Una aseguradora vende* 100 *contratos, cada uno de los cuales paga* 1000 *en caso de fracaso. Suponiendo una aproximación normal, cuánto debe cobrar como una prima única en cada contrato, de modo que hay un* 95 % *de probabilidad de que las primas sean suficientes para cubrir las reclamaciones agregadas para este grupo de* 100 *contratos.*

Solución. Si $\bar{Z}$ es el beneficio por un contrato pagando una unidad en caso de fracaso. Entonces

$$E(\bar{Z}) = \frac{\mu}{\mu + \delta} = 0.4, \qquad E(\bar{Z}^2) = \frac{\mu}{\mu + 2\delta} = 0.25$$

La fórmula para el segundo momento refleja el hecho de que cuadrar la función de descuento es equivalente a duplicar la fuerza de interés. Se deduce que $Var(\bar{Z}) = 0.09$ y $CV(\bar{Z}) = 0.75$. De la ecuación 5.6.5, con $\alpha = 0.95$, $\theta = 1.645(0.75)/10 = 0.123375$. Para cada contrato de 100 unidades la prima del principio de equivalencia es 400 y por lo tanto la prima cobrada debe ser $400(1.123375) = 449.35$.

Ejemplo 5.6.4. *Suponiendo que el contrato del 5.6.3 se vende con primas pagadas continuamente por vida a una tasa de nivel, donde la carga de seguridad* $\theta = 0.10$*. Suponiendo una aproximación normal, ¿cuántos contratos deben ser vendidos, por lo que hay una probabilidad del* 95 % *de que las primas totales cubrirán los beneficios totales?*

Solución. Puesto que las fórmulas son independientes de unidades se puede ignorar el 1000 y considerar un contrato de 1 unidad. El principal problema es determinar $CV(-L)$. Esto no siempre es tan fácil cuando ya no se tiene una prima única, pero se puede hacer por los beneficios de nivel y las primas. Esto se lleva a cabo en el **capítulo 6 del libro de Primislow 3**, en las fórmulas 6.2.5 y 6.2.6 que se verán próximamente, con t = 0. La prima del principio de equivalencia es 0.04, por lo que la prima $\pi = 0.044$ y $\pi/\delta = 11/15$. De la fórmula 6.2.6 $\sqrt{Var(L)} = (26/15)0,3 = 0.52$. A partir de la fórmula 6.2.5 $E(L) = (26/15)(0.04) - 11/15 = -0.04$. Así que

$$CV(-L) = \frac{0.52}{0.04} = 13$$

De la ecuación 5.6.3, $\sqrt{N} = 1.645(13)$, así $N = 457.32$. Esto significa que 458 contratos deben ser vendidos.

5.6.3.1. Principios Generales de la Prima

Hay muchas otras posibilidades para calcular las primas para permitir la naturaleza aleatoria de la pérdida. Estos son conocidos en general como *principios de prima*. Formalmente, un principio de prima es una función H, que asigna a cada variable aleatoria X que representa una pérdida, un número $H(X)$, que es la prima a cobrar por aceptar el riesgo X. Esta definición es aplicable a los contratos comprados por un primas únicas, en lugar de primas periódicas.

La prima del principio de equivalencia viene dada por $H(X) = E(X)$. El principio de desviación estándar viene dado por $H(X) = E(X) + \beta\sqrt{Var(X)}$, para algunos β positivos. Dividiendo esto por $E(X)$, se puede ver a partir de la expresión 5.6.5 que el principio de desviación estándar puede ser interpretado (asumiendo una aproximación normal) como fijación de primas para que exista una cierta probabilidad, que dependerá de N, que las primas cubrirán pérdidas. Otro ejemplo es el principio de varianza dado por $E(X) + \beta\sqrt{Var(X)}$, para algún β positivo. Hay un tratamiento extenso en la literatura actuarial que compara las propiedades de estos y otros principios de primas.

5.7. La Varianza de ${}_rL$

Se ha visto que en este modelo estocástico, la reserva representa el valor esperado de la cantidad que se necesita para cumplir con obligaciones futuras. Es útil tener más información sobre la distribución de esta variable aleatoria. En esta sección se presenta una fórmula para calcular la varianza de ${}_rL$ bajo la configuración de la **Sección 4.2**. Por supuesto, si se ha calculado la distribución exacta de ${}_rL$, como se hizo en el **Ejemplo** 5.5.1, se podría calcular la varianza directamente. El presente método permitirá calcular la varianza sin conocer la distribución exacta, siempre y cuando se conozca todas las reservas después del tiempo r. además, da una descomposición de esta varianza en el que se atribuye a cada uno de los años futuros. En la literatura actuarial, este resultado se conoce como *Teorema de Hattendorf*.

Se comienza tomando $r = 0$, por lo que se calcula la varianza de $L = {}_0L$. Para simplificar la tarea se mirará el flujo de efectivo neto año por año. Sea C_k el valor en el tiempo k del importe neto pagado en el año de k a $k+1$. Es decir, C_k es igual al valor en el momento k de la prestación de fallo pagada al final del año, menos la entrada en el tiempo k. Así que C_k es una variable aleatoria tomando tres valores posibles dependiendo de si el fallo ha ocurrido antes del tiempo k, durante el año $(k, k+1)$ o en el tiempo $k+1$ o posterior. Si el fallo ocurre antes del tiempo k, nada se paga y no se recibe nada. Si el fallo ocurre durante el año $(k, k+1)$, entonces b_k se paga en el instante $k+1$ y se recibe π_k en el instante k. Si el fallo ocurre después del tiempo $k+1$, no se paga nada y se recibe una prima de π_k en el instante k. La siguiente tabla resume los posibles valores de C_k y las respectivas probabilidades:

Tiempo de fracaso	Valor de C_k	Probabilidad
Antes del tiempo k	0	$1 - s(k)$
Entre el tiempo k y $k+1$	$\nu(k, k+1)b_k + \pi_k$	$\tilde{f}(k+1) = s(k)\lambda(k+1)$
En el tiempo $k+1$ o más tarde	$-\pi_k$	$s(k+1) = s(k)(1 - \lambda(k+1))$

La variable aleatoria L está relacionado a los valores de C_k por

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \nu(k) C_k \tag{5.7.1}$$

Una propiedad fundamental es que

$$C_j C_k = -\pi_j C_k, \qquad j < k \tag{5.7.2}$$

Para verificar la expresión 5.7.2, se debe observar que es obvio si $C_k = 0$, ya que entonces ambos lados son 0. Si C_k no es igual a 0, significa que la falla no ocurrió antes del tiempo k y por lo tanto debe haber ocurrido en el tiempo $j+1$ o posterior. Se ve en la tabla anterior que C_j es igual a $-\pi_j$.

Primero se derivará una fórmula de varianza para el caso de un contrato con reservas cero. Esto significa que la prima pagada en cualquier momento k es suficiente para cubrir la prestación por fallecimiento pagada al final de ese año, de modo que

$$\pi_k = \nu(k, k+1) b_k \lambda(k+1), \qquad \textit{para todo } k \tag{5.7.3}$$

La importancia de este caso es que, como se muestra a continuación, las variables aleatorias C_h para diferentes valores de h no están correlacionadas (aunque no son independientes). Por otra parte, se tiene una expresión bastante fácil para la varianza de cada C_h, de modo que la ecuación 5.7.1 da una fórmula para $Var(L)$.

Sustituyendo de 5.7.3, se ve que el segundo y tercer valores de C_k enumerados anteriormente son respectivamente $\nu(k,k+1)b_k[1-\lambda(k+1)]$ y $-\nu(k,k+1)b_k\lambda(k+1)$. De ello se desprende inmediatamente que, en virtud del supuesto 5.7.3

$$E[C_k] = 0, \qquad \textit{para todo } k \tag{5.7.4}$$

así que de la ecuación 5.7.2, si $j < k$,

$$Cov(C_j, C_k) = -\pi_j E(C_k) = 0 \tag{5.7.5}$$

Además, después de alguna manipulación algebraica,

$$Var[C_k] = E[C_k^2] = \nu(k,k+1)^2 b_k^2 s(k)\lambda(k+1)(1-\lambda(k+1)). \tag{5.7.6}$$

Invocando el hecho de que la varianza de una suma de variables aleatorias no correlacionadas es la suma de las varianzas, y observando que $s(k)(1-\lambda(k+1)) = s(k+1)$, se deduce de 5.2.2 que

$$Var(L) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu(k+1)^2 b_k^2 s(k+1)\lambda(k+1)$$

A continuación se considera el caso de una duración general r, manteniendo el supuesto de reservas cero. En este caso, ${}_rL$ sólo será ${}_0L$ para la política sobre $(x+r)$ con los beneficios y primas a partir de la edad r, y con probabilidades condicionadas a la supervivencia de (x) a la edad $x+r$. Los s y λ en la fórmula anterior serán aquellos asociados con la distribución de $\tilde{T} \circ r$. El resultado, usando la expresión 5.3.5 y la contraparte discreta de 5.3.3, es

$$Var({}_rL) = \frac{1}{s(r)} \sum_{k=0}^{\infty} \nu(r, r+k+1)^2 b_{r+k}^2 s(r+k+1)\lambda(r+k+1).$$

Finalmente, se considera el caso general en el que se elimina la restricción dada por 5.7.3.

Se divide la póliza en dos partes, la parte de riesgo y la porción de ahorro, exactamente de la misma manera que se hizo anteriormente. Esto conduce a una división correspondiente de la pérdida prospectiva en la porción de esta pérdida atribuible a la porción de riesgo y la atribuible a la porción de ahorro. Pero la pérdida prospectiva para la porción de ahorro debe ser una constante, ya que es completamente independiente de la experiencia de mortalidad. (De hecho, esta constante es sólo el valor actual, con respecto a los intereses, de la dotación pura pagada al final, menos las porciones de ahorro de las primas. Desde que el fondo se reduce a cero, este valor presente debe ser con el que se comenzó, que es ${}_rV$). Significa que la varianza de la pérdida prospectiva es la misma que la varianza de la pérdida prospectiva en la porción de riesgo. Por lo tanto, el único cambio con respecto a la fórmula anterior es sustituir los beneficios de muerte originales por los beneficios atribuibles a la porción de riesgo, es decir, el monto neto en riesgo. Nuestra fórmula final es

$$Var({}_rL) = \frac{1}{s(r)} \sum_{k=0}^{\infty} \nu(r, r+k+1)^2 \eta_{r+k}^2 s(r+k+1)\lambda(r+k+1) \tag{5.7.7}$$

Esto conduce a una fórmula de recursión hacia atrás. Separando el primer término,

$$Var({}_rL) = \nu(r, r+1)^2 \frac{s(r+1)}{s(r)} [\eta_r^2 \lambda(r+1) + Var({}_{r+1}L)] \tag{5.7.8}$$

Esto es útil si T está acotado, como es cierto con $T(x)$. Se puede iniciar la recursión con un valor de 0 para la varianza de la pérdida en la duración final.

Ejemplo 5.7.1. *Véase de nuevo el* **Ejemplo** *5.5.1. Utilizar 4.6.1 para encontrar la varianza de* ${}_1L$*.*

Solución. Primero hay que calcular el producto de los tres factores de mortalidad en **(4.23) de 3**. En el caso donde $T = T(x)$, este producto para el índice k es ${}_{k+1}p_{x+r}q_{x+r+k}$. Para $k = 0$ se obtiene $(0.8)(0.2)$, y para $k = 1$ se obtiene $(0.8)(0.7)(0.3)$. También se calcula que ${}_2V = 5$, de modo que $\eta_1 = 195$. Entonces

$$Var({}_1L) = \frac{1}{4}(195^2)(0.16) + \frac{1}{16}(100^2)(0.168) = 1626.$$

Se puede verificar esta respuesta directamente de la solución del **Ejemplo** 5.5.1, donde se tiene la distribución completa de ${}_1L$.

5.7.1. Notación y Terminología Estándar

El único elemento principal que todavía no se ha discutido es el uso de un subíndice superior izquierdo 2 para indicar una cantidad que se calcula con una fuerza de interés que es el doble de la del estándar o, de manera equivalente, en una función de descuento que es el cuadrado del estándar. Esto fue desarrollado para fórmulas de varianza. Sin embargo, su uso se restringe a los casos en que los beneficios de falla son 0 o 1. En ese caso, el cuadrado de los beneficios no se modifica y los segundos momentos se calculan simplemente elevando al cuadrado la función de descuento. Por ejemplo, la varianza para los beneficios pagados en un seguro a término de un año, a término de un año de fallecimiento, de un año, se escribiría como

$$ {}^2A^1_{x:\overline{n}|} - \left(A^1_{x:\overline{n}|}\right)^2 $$

5.8. Ejercicios

Ejercicio práctico 5.8.1. *Un tiempo de fallo T, esta uniformemente distribuido en el intervalo [0,1]. Un contrato de seguro paga $e^{0.06t}$ en el momento del fallo si este ocurre en el momento t. La fuerza de interés es constante de 0.04. Encuentre la expectativa y la varianza del valor presente de los beneficios.*

Solución Se tiene que $b(t) = e^{0.06t}$ Como T esta uniformemente distribuida esto significa que la funcion de densidad de T en [0,10] es

$$ f_T = \frac{1}{10}, \qquad 0 < t < 10 $$

y

$$ v(t) = e^{-0.04t} $$

Asi se tiene que

$$ E(Z) = \int_0^{10} \frac{1}{10} e^{0.06t} e^{-0.04t} dt = \frac{1}{10} \int_0^{10} e^{(0.06-0.04)t} = 1.1070 $$

ahora para calcular la $Var(Z)$ hay que recordar que $Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$, entonces calculamos

$$E(Z^2) = \frac{1}{10}\int_0^{10} e^{(0.12-0.08)t}dt = 1.2295$$

Por lo que se tiene

$$Var(Z) = 12296 - (1.1070)^2 = 0.00408$$

Ejercicio práctico 5.8.2. *Un tiempo de fallo tiene una tasa de riesgo constante μ y la fuerza de interés es δ. Un contrato paga $e^{\gamma t}$ en el momento de fallo, si este se da en el instante t, donde $\gamma < \mu + \delta$. Hallar la expectativa y la varianza del valor actual de los beneficios en función de μ, δ y γ.*

Solución

A partir de la tasa de riesgo se tiene que la función de supervivencia es

$$s(t) = e^{-\mu t}$$

a partir de la relación 4.3.1 se tiene que

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}$$

Luego la funcion de beneficio esta dada por $b(t) = e^{\gamma t}$ y la funcion de descuento esta dada por $\nu(t) = e^{-\delta t}$. Entonces se tiene que que el valor actual de los beneficios es

$$\begin{aligned}\bar{A}_T(b;\nu) &= \int_0^{\infty} b(t)\nu(t)f(t)dt \\ &= \mu\int_0^{\infty} e^{-\mu t}e^{-\delta t}e^{\gamma t}dt \\ &= \mu\int_0^{\infty} e^{(\gamma-\mu-\delta)t}dt \\ &= \frac{\mu}{\gamma-\delta-\mu}\left[e^{(\gamma-\delta-\mu)t}\right]_0^{\infty}\end{aligned}$$

luego como $\gamma < \mu + \delta \Rightarrow \gamma - \delta - \mu < 0$, por tanto

$$\bar{A}_T(b;\nu) = \frac{\mu}{\gamma-\delta-\mu}$$

De forma análoga se calcula $\bar{A}_T(b^2;\nu^2) = \int_0^\infty b^2(t)\nu^2(t)f(t)dt$ y así se llega a que

$$\bar{A}_T(b^2;\nu^2) = \frac{\mu}{2\gamma - 2\delta - \mu}$$

Finalmente asi se llega a que

$$Var(Z) = \frac{\mu}{2\gamma - 2\delta - \mu} - \frac{\mu^2}{(\gamma - \delta - \mu)^2}$$

Capítulo 6

Simplificaciones Bajo Contratos de Beneficios de Nivel

6.1. Introducción

El cálculo de las desviaciones y otras características de las distribuciones se simplifican considerablemente cuando se tienen beneficios de nivel e interés constante. De hecho, se puede escribir fórmulas para distribuciones exactas de las principales variables aleatorias de interés. A lo largo de este capítulo, se considera la siguiente configuración. Se Tiene un tiempo de falla general T. Se Considera seguros en los que se paga una cantidad de nivel en caso de fracaso, ya sea al final del año de fracaso o en el momento de tal, y se consideran las anualidades pagadas antes del fracaso de T con un pago de nivel o pagos continuos a un nivel de tasa. Además, se asume una fuerza constante de interés δ.
Tomando T ahora haciéndola $T(x)$, esto se aplicará a los beneficios de nivel, seguros de toda la vida y de nivel de beneficios de anualidades de toda la vida. Tomando $T = min\{T(x), n\}$, esto se aplicará a las pólizas de cobertura de n-años con beneficios de nivel y para anualidades temporales de n-años con beneficios de nivel.

La suposición no se aplica al seguro a plazo, incluso cuando hay un beneficio de nivel durante el plazo, ya que el beneficio se reduce a cero después de la expiración del contrato.

6.2. Cálculos de Varianza en el Caso Continuo

Es conveniente iniciar con un tiempo de fallo continuo T.

6.2.1. Seguros

Se considera una poliza que paga 1 en el momento de fracaso. La función de descuento esta dada por

$$\nu(t) = \nu^t = e^{-\delta t}$$

Sea $\bar{Z}$ el valor actual o valor real de los beneficios. En este caso existe una pequeña simplificación y se sabe de capítulos anteriores y de la teoría de estadística que

$$\bar{A}_T = E(\bar{Z}) = E(\nu^T), \qquad Var(\bar{Z}) = E(\nu^{2T}) - (\bar{A}_T)^2 \tag{6.2.1}$$

6.2.2. Anualidades

Se considera una anualidad con pagos continuos a una tasa de 1 por año, hecho antes de la ocurrencia del fallo. Si $\bar{Y}$ es el valor actual o real de los beneficios, entonces

$$\bar{Y} = \bar{a}(1_T) = \frac{1-\nu^T}{\delta} = \frac{1-\bar{Z}}{\delta} \tag{6.2.2}$$

$$\bar{a}_T = E(\bar{Y}) = \frac{1-E(\bar{Z})}{\delta}, \qquad Var(\bar{Y}) = \frac{Var(\bar{Z})}{\delta^2} \tag{6.2.3}$$

Para el caso donde $T = min\{T(x), n\}$, la primera parte de (6.2.3), era la "identidad de dotación" continua dada al final de la Sección 8.8 del libro de 3.

6.2.3. Pérdidas Esperadas

Se considera un contrato que paga una unidad en el momento del fracaso y tiene primas de nivel continuas a una tasa anual de π pagadera antes del fracaso. (Como cuestión práctica, esto significa que se esta tratando con un modelo de prima neta que ignora los gastos, que es poco probable que sean de nivel). La pérdida potencial en el momento t es

$$_tL = \bar{Z} \circ t - \pi(\bar{Y} \circ t) \tag{6.2.4}$$

donde $\bar{Z} \circ t = \nu^{T \circ t}$ y $\bar{Y} \circ t = (1 - \bar{Z} \circ t)/\delta$, esto lleva a

$$_tL = (1 + \frac{\pi}{\delta})\nu^{T \circ t} - \frac{\pi}{\delta} \tag{6.2.5}$$

Esto simplifica enormemente el cálculo de la varianza de la pérdida esperada o pérdida potencial. Comparar lo siguiente con (4.6.1).

$$Var(_tL) = (1 + \frac{\pi}{\delta})^2 Var(\nu^{T \circ t}) \tag{6.2.6}$$

6.2.4. Utilización de Primas de Principio de Equivalencia

Se supone que π es una prima de principio de equivalencia. Entonces $\pi E(\bar{Y}) = E(\bar{Z})$, de manera que a partir de (6.2.3),

$$\bar{\pi} = \frac{1}{\bar{a}_T} - \delta \tag{6.2.7}$$

Tomando $t = 0$ en (6.2.6),

$$Var(L) = \frac{Var(\nu^T)}{(\delta \bar{a}_T)^2} = \frac{Var(\bar{Z})}{(1 - \bar{A}_T)^2} \tag{6.2.8}$$

Demostrando que

$$Var(\bar{Z}) < Var(L).$$

Esto demuestra que hay mas riesgo involucrado en la venta de un seguro en el que las primas se pagan durante toda la vida del contrato, en comparación del caso de prima única. Para el caso en que el fracaso ocurre temprano, el asegurador no sólo pierde intereses sino que también habrá recolectado cantidades relativamente pequeñas en primas.

Para una fórmula final, se expresa $\bar{Z} \circ t$ en términos de $\bar{Y} \circ t$ en la ecuación (6.2.4). Entonces

$$_tL = (1 - (\pi + \delta)(\bar{Y} \circ t))$$

Si π es una prima del principio de equivalencia, se puede sustituir de (6.2.7) y tomar la esperanza para dar una fórmula simple para la reserva en el tiempo t.

$$_t\bar{V} = 1 - \frac{\bar{a}_{T \circ t}}{a_T} \tag{6.2.9}$$

(Para $T(x)$, se obtendrá una versión discreta de esto mas adelante)

6.3. Cálculos de Desviación en el Caso Discreto

Ahora se considera el caso en que las prestaciones por falla se pagan al final del año de fracaso y los beneficios de anualidad y las primas se pagan anualmente. Todas las fórmulas de la sección 6.2 tienen contrapartidas discretas, que en su mayor parte se obtienen sustituyendo T por $\tilde{T}$, $\bar{A}$ por A, a por $\ddot{a}$ y δ por d. Se dejarán las derivaciones formales, pero se listarán las fórmulas con los números de ecuación correspondientes como en la Sección 6.2, para denotar el caso discreto.

$$A_{\tilde{T}} = E(Z) = E(\nu^{\tilde{T}}), \qquad Var(Z) = E(\nu^{2\tilde{T}}) - (A_{\tilde{T}})^2 \tag{6.3.1}$$

Si Y denota el valor presente de una anualidad que paga 1 unidad anualmente, siempre que no se haya producido un fallo,

$$Y = \ddot{a}(1_T) = \frac{1-\nu^{\tilde{T}}}{d} = \frac{1-Z}{d} \tag{6.3.2}$$

$$E(Y) = \frac{1-E(Z)}{d}, \qquad Var(Y) = \frac{Var(Z)}{d^2} \tag{6.3.3}$$

Ahora considerando un contrato que paga una unidad al final del año de fracaso y tiene primas anuales de π pagaderas antes del fracaso. Entonces, para cualquier número entero positivo k,

$$_kL = \left(1+\frac{\pi}{d}\right)\nu^{\tilde{T}\circ k} - \frac{\pi}{d} \tag{6.3.4}$$

$$Var(_kL) = \left(1+\frac{\pi}{d}\right)^2 Var(\nu^{\tilde{T}\circ k}) \tag{6.3.5}$$

Suponendo que π es una prima de principio de equivalencia, entonces

$$\bar{\pi} = \frac{1}{\ddot{a}_T} - d \tag{6.3.6}$$

$$Var(L) = \frac{Var(\nu^{\tilde{T}})}{(d\ddot{a}_T)^2} = \frac{Var(Z)}{(1-A_{\tilde{T}})^2} \tag{6.3.7}$$

$$_kV = 1 - \frac{\ddot{a}_{\tilde{T}\circ k}}{\ddot{a}_{\tilde{T}}} \tag{6.3.8}$$

Se podría considerar los gastos al utilizar las fórmulas de pérdida potencial o perdida futura simplificada anteriormente si la diferencia es sólo en el primer año, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.3.1. *Una póliza de seguro proporciona 1000 al final del año de la muerte con primas de nivel pagaderas por vida. Hay gastos en el primer año del 60 % de la prima más 50, y en los años siguientes del 15 % de la prima más 20. Además, hay un gasto de liquidación por muerte de 50. Se le da que* $E(Z) = 0.4$ *y* $Var(Z) = 0.10$ *donde* Z *es el valor presente de 1 unidad de beneficio por muerte. La tasa de descuento es* 0.06 *constante. Encuentre* $Var(L)$ *donde* L *se calcula usando primas aumentadas de gastos, e incluyendo todos los gastos.*

Solución Primero se calcula la prima aumentada por gastos G como

$$G\ddot{a}_x = 0.45G + 0.15G\ddot{a}_x + 30 + 20\ddot{a}_x + 1050A_x$$

Por tanto

$$G = \frac{1050A_x + 30 + 20\ddot{a}_x}{0.85\ddot{a}_x - 0.45}$$

Se sabe que $\ddot{a}_x = (1 - A_x)/d = (1 - 0.4)/6 = 10$, y sustituyendo en la fórmula anterior $G = 80.75$. Esto significa que la afluencia total después del primer año es $0.85(80.75) - 20 = 48.64$.

Ahora se considera una política donde la entrada total fue de 48.64 en cada año. El valor de L a partir de ese contrato diferiría sólo por un monto constante, es decir, el monto adicional en el primer año se ha debido a mayores gastos.

Por lo tanto, la varianza de L sería la misma y se puede usar la fórmula (6.3.6), con $\pi = 48.64$ y el 1 reemplazado por el beneficio por muerte de 1050. De (6.3.6),

$$Var(L) = \left(1050 + \frac{48.64}{0.06}\right)20.10 = 346208$$

6.4. Distribuciones Exactas

En esta sección, se calcula las distribuciones exactas para $\bar{Z}$, $\bar{Y}$ y L. En cada caso, se derivan funciones de distribución. Estos serán dados para los valores entre el límite inferior más grande y el límite superior mínimo de los valores. (Se sabe que F toma el valor 0 para los argumentos menos que el límite inferior más grande y 1 para los argumentos mayores que el menor límite superior). Es conveniente aquí introducir alguna nueva notación. Para una variable aleatoria X,

$$\hat{F}_X(x) = P(X < x), \qquad \hat{s}_X(x) = P(X \geq x)$$

Por supuesto, cuando X es continua, $\hat{F} = F$ y $\hat{s} = s$ Las funciones de distribución que se quieren son todas fácilmente expresadas en términos de la distribución de T. Sea N el menor límite superior de los valores de T. En el caso de que $N = \infty$ (como por ejemplo cuando T es exponencial), el término ν^N en las fórmulas siguientes será igual a 0.

6.4.1. La Distribución de $\bar{Z}$

La distribución de $\bar{Z}$ esta dada por

$$F_{\bar{Z}}(z) = P(e^{-\delta T} \leq z) = P(T \geq -\frac{\log z}{\delta}) = \hat{s}_T(-\frac{\log z}{\delta}), \qquad \nu^N < z < 1 \qquad (6.4.1)$$

6.4.2. La Distribución de $\bar{Y}$

Observar que al argumentar como 6.4.1 da como resultado

$$F_{\hat{Z}}(z) = s_T\left(-\frac{\log(z)}{\delta}\right)$$

Usando 6.2.2

$$F_{\bar{Y}}(y) = P(\bar{Z} \geq 1 - \delta y) = 1 - \hat{F}_{\bar{Z}}(1 - \delta y).$$

Sustituyendo desde arriba

$$F_{\bar{Y}}(y) = 1 - s_T\left(-\frac{\log(1-\delta y)}{\delta}\right) = F_T\left(-\frac{\log(1-\delta y)}{\delta}\right), \qquad 0 < y < \frac{1-\nu^N}{\delta} \quad (6.4.2)$$

6.4.3. La Distribución de L

El valor mínimo de L viene dado por

$$-\frac{\pi}{\delta}+(1+\frac{\pi}{\delta}),$$

Ocurriendo para el fallo en el tiempo N y su valor máximo será 1, ocurriendo para el fallo en el tiempo 0. Usando (6.2.5),

$$\begin{aligned}F_L(u) =&P\left[\left(1+\frac{\pi}{\delta}\right)e^{-\delta T}\right]\leq u+\frac{\pi}{\delta}\\ =&P\left[e^{-\delta T}\leq\left(\frac{\delta u+\pi}{\delta+\pi}\right)\right] \qquad (6.4.3)\\ =&\hat{s}_T\left[-\frac{1}{\delta}\log\left(\frac{\delta u+\pi}{\delta+\pi}\right)\right], \qquad \frac{-\pi}{\delta}+\left(1+\frac{\pi}{\delta}\right)\nu^N\geq u\geq 1\end{aligned} \tag{6.4.3}$$

Para el caso más general, $F_{{}_tL}(u)$ está dado por la misma fórmula, pero con $\hat{s}_{T\circ t}$ reemplazando $\hat{s}_T$ y ν^{N-t} reemplazando ν^N.

6.4.4. El Caso donde T se Distribuye Exponencialmente

En el caso particular donde T es exponencial con la función de riesgo constante μ, se sabe que $\hat{s}_T(z)=s_T(z)=e^{-\mu z}$ y $N=\infty$. Las fórmulas anteriores simplifican

$$F_{\bar{Z}}(z)=z^{\mu/\delta}, \qquad 0<z<1, \tag{6.4.4}$$

$$F_{\bar{Y}}(y)=1-\left(1-\delta y\right)^{\mu/\delta}, \qquad 0<y<\frac{1}{\delta}, \tag{6.4.5}$$

$$F_L(u)=\left(\frac{\delta u+\pi}{\delta+\pi}\right)^{\mu/\delta}, \qquad -\frac{\pi}{\delta}<u\leq 1 \tag{6.4.6}$$

Es interesante observar que si $\mu=\delta$ en el caso exponencial, el exponente en las fórmulas anteriores es igual a 1, de modo que $\bar{Z}$, $\bar{Y}$ y L son todas variables aleatorias uniformes.

Ejemplo 6.4.1. *Una empresa decide añadir un 20 % a sus primas de principio de equivalencia como protección contra la experiencia desfavorable. En cada uno de los siguientes casos, determine la probabilidad de que las primas cubrirán las reclamaciones. Suponer que T es exponencial con $\mu=0.04$ y que $\delta=0.06$.*

(a) Una anualidad de prima única que proporciona pagos continuos a la tasa anual de 1 antes del fracaso.

(b) Un contrato que paga 1 unidad en caso de falla, con primas de nivel pagaderas continuamente antes del fallo.

Solución

(a) La prima del principio de equivalencia es $1/(\mu+\delta) = 10$. La prima real cobrada será 12. De la ecuación (6.4.5),

$$P(Y \leq 12) = 1 - 0.28^{2/3} = 0.57$$

(b) El principio de equivalencia tasa de prima anual es sólo $\mu = 0.04$, por lo que la tasa real de la prima cobrada es 0,048. La probabilidad de que las primas cubran las

$$P(L \leq 0) = \left(\frac{0.048}{0.108}\right)^{2/3} = 0.58$$

6.5. Algunos Ejemplos de beneficios de no nivel

También es posible obtener distribuciones exactas en algunos casos simples que involucran beneficios de no nivel tales como seguro a término o diferido.

6.5.1. Seguro a largo plazo

Considerando un contrato que paga 1 en caso de fracaso, siempre que se produzca un fallo dentro de n años. Para manejar tiempos de falla que no son continuos, se adopta la convención de que un beneficio se paga por fracaso en el momento exacto n. Se va a calcular la distribución de $\bar{Z}$, que es el valor actual de los beneficios. El valor positivo mínimo de $\bar{Z}$ es $e^{-\delta n}$ que ocurre para la muerte en el tiempo n. Puesto que nada se paga por la muerte estrictamente después del tiempo n, lo cual ocurre con probabilidad $s_T(n)$, se puede obtener fácilmente el término distribución de toda la distribución de vida.

Recoger la masa de probabilidad a la izquierda de $z = e^{-\delta n}$ y colocarla como masa puntual en el punto 0, como se ilustra en la figura 6.1. A partir de esto, utilizando la fórmula (6.4.1), podemos leer esta distribución de $\bar{Z}$.

$$F_{\bar{Z}}(z) = \begin{cases} s_T(n), & 0 \leq z < e^{-\delta n} \\ \hat{s}_T\left(\dfrac{-\log z}{\delta}\right), & e^{-\delta n} \leq z \leq 1 \end{cases} \tag{6.5.1}$$

Ejemplo 6.5.1. *Retomando la parte (b) del Ejemplo 6.4.1, pero ahora asumiendo un seguro a término de n años para $n = 15$ y 10. Las primas de nivel son pagaderas continuamente durante n años.*

Solución

La tasa de prima del principio de equivalencia sigue siendo $\mu = 0.04$, por lo que la tasa de prima real cobrada sigue siendo 0.048 y $\pi/\delta = 0.8$. Para el contrato en el Ejemplo 6.4.1, el valor de L cuando $T = n$ es $1.8e^{-0.06n} - 0.8$.

Para $n = 15$, esto es negativo. Esto significa que L se convierte en negativo en algún momento antes de la expiración del contrato a término, por lo que la probabilidad de que las primas cubren reclamaciones es de 0.58, exactamente igual que en el caso de beneficio constante. Cuando $n = 10$, el valor de L para el contrato en el Ejemplo 6.3.1 es positivo.

Por lo tanto, para que L en este ejemplo sea negativo, es necesario que $T \geq 10$, de modo que no se paguen beneficios. La probabilidad de esto es $e^{-0.6} = 0.67$.

6.5.2. Seguro Diferido

Un ejemplo similar es proporcionado por el seguro diferido. Considerar un contrato que paga en caso de fracaso, siempre que se produzca un fallo después del tiempo n. Ahora se va a adoptar la convención de que nada se paga por el fracaso en el momento exacto n. En vista de esta convención, no tiene que haber un valor máximo de $\bar{Z}$, pero $e^{-\delta n}$ es ciertamente un límite superior, ya que cualquier beneficio será pagado en un momento posterior a n. Consultando nuevamente la Figura 6.1. Puesto que no se paga nada por la muerte en el tempo n o antes de este, que ocurre con la probabilidad $F_T(n)$, la masa de probabilidad a la derecha de $e^{-\delta n}$ se recoge y se establece como una masa puntual en 0.

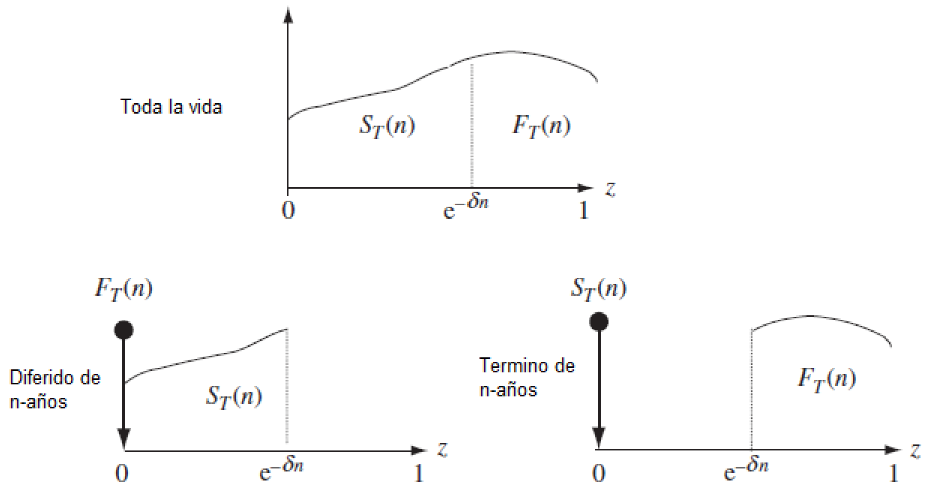


FIGURA 6.1: Gráfico de $f_{\bar{Z}}(z)$ para diversos tipos de seguros

Utilizando (6.4.1), se puede escribir

$$F_{\bar{Z}}(z) = \begin{cases} F_T(n), & z = 0, \\ F_T(n) + \hat{s}_T\left(\dfrac{-\log z}{\delta}\right), & 0 < z < e^{-\delta n}, \\ 1 & e^{-\delta n} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

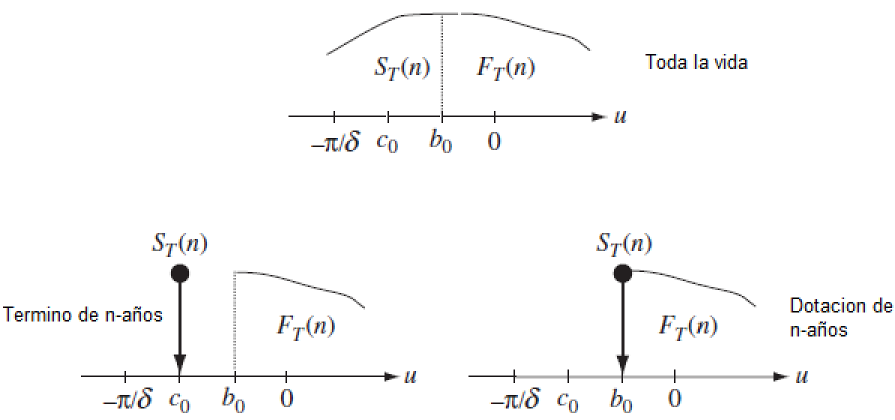
6.5.3. Una póliza de primas anuales

A continuación se investiga un caso más complicado en el que se calcula la distribución exacta de L en una póliza de primas anuales. Considerando un tiempo de fallo T que no tiene límites (es decir, $N = \infty$). Se tomarán seguros que tienen primas pagaderas continuamente a un nivel anual π por la duración del contrato. Se va a comparar la distribución de L para un contrato que paga 1 unidad en caso de fracaso o en el momento n lo que pase primero, y un contrato que paga 1 unidad en el fracaso, siempre que esto ocurre dentro de n años. Estos corresponden respectivamente a la dotación ya los seguros a plazo. Para simplificar la notación,

$$b_0 = -\frac{\pi}{\delta} + \left(1 + \frac{\pi}{\delta}\right)\nu^n, \qquad c_0 = -\frac{\pi}{\delta} + \frac{\pi}{\delta}\nu^n$$

En ambos casos, el valor de L es dado por (6.4.6) (con $t = 0$), siempre que T tome un valor menor que n, que corresponde a L que toma un valor mayor que b_0. Así pues, para cualquier intervalo (a, b) con $a > b_0$, se tiene que $P(a < L \leq b)$ es el mismo en ambos casos y este valor se puede calcular directamente a partir de (6.4.3). Considere la

FIGURA 6.2: Gráfico de $f_L(u)$ para diversos tipos de seguros



probabilidad restante de $s_T(n)$. Para el contrato de dotación, todo ello se concentrará en el punto único b_0. Para el término contrato, todo estará concentrado en el punto único c_0, que está en el intervalo $(-\pi/\delta, b_0)$. A medida que n aumenta a ∞ tanto b_0 como c_0 se acercan $-\pi/\delta$ y la distribución se aproxima al caso de vida completa tal como se da en (6.4.3).

Las diferentes funciones de densidad se comparan en la figura 6.2. La masa de probabilidad a la izquierda del punto b_0 en el gráfico de toda vida o vida completa se recoge y se establece como una masa puntual en b_0 para la póliza de dotación, o en c_0 para la póliza de plazo.

6.6. Ejercicios

Ejercicio práctico 6.6.1. *Para cierto tiempo de fallo T, un contrato de seguro paga 1 en el momento del fracaso y tiene primas de nivel pagadero continuamente antes de fallar con una tasa anual de 0.06. Se tiene que:*

$$Var(\bar{Z}) = 0.064, \qquad Var(\bar{Y}) = 10$$

donde $\bar{Z}$ es el valor actual de las prestaciones de fallo, y $\bar{Y}$ es el valor actual de un contrato de anualidad con pagos continuos a la tasa anual de 1, pagado antes del fallo. Encuentre $Var(L)$.

Solución

En primer lugar se deduce que dada que el contrato recibe primas pagaderas a una tasa del 0.06, entonces se tiene $\mu = 0.06$, luego se pasa al cálculo de la fuerza de interés y esta se obtiene de la relación

$$Var(\bar{Y}) = \frac{Var(\bar{Z})}{\delta^2}$$

Sustituyendo se obtiene que

$$10 = \frac{0.064}{\delta^2} \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{0.064}{10}} = 0.08$$

Luego se obtiene el valor actual de los beneficios

$$\bar{A}_T = E(\nu^T) = \frac{\mu}{\mu + \delta} = \frac{0.06}{0.06 + 0.08} = \frac{3}{7}$$

y así se procede al calculo de $Var(L)$, entonces

$$Var(L) = \frac{0.064}{\left(1 - \frac{3}{7}\right)^2} = 0.196$$

Ejercicio práctico 6.6.2. *Un contrato de seguro , basado en el tiempo de fallo T, paga 1 unidad en el momento del fallo, siempre que este ocurra dentro de los 5 años siguientes. Nada se paga después de ese tiempo. La fuerza de interés es una constante de 0.1, si T tiene la función de riesgo*

$$\mu_T = \frac{2}{10 - t}$$

Encuentre la probabilidad que el valor presente de los beneficios sea estrictamente positivo, pero menor o igual que $e^{-0.3}$.

Solución

Para poder responder la interrogante se debe utilizar la distribución de probabilidad para el valor actual de los beneficios. Pero dado que la este sería un ejemplo de un contrato de seguro de n-años, se debe tomar esto como un caso discreto y para ello se utilizará la distribución 6.5.1

$$F_{\bar{Z}}\big(e^{-0.3})\big) = \tilde{s}\Big(- \frac{log(e^{-0.3})}{\delta}\Big) = \tilde{s}(3)$$

de modo que

$$\tilde{s}(3) = \prod_{n=1}^{3}\left(1 - \frac{2}{10-n}\right) = 0.41 = P(\bar{Z} < e^{-0.3})$$

faltaría hacer sumar la probabilidad que $\bar{Z} = e^{-0.3}$, entonces

$$P(\bar{Z} = e^{-0.3}) = \prod_{n=1}^{3}\left(1 - \frac{2}{10-n}\right) - \prod_{n=1}^{2}\left(1 - \frac{2}{10-n}\right) = -0.16$$

Por lo tanto la probabilidad que $\bar{Z}$ sea menor o igual a $e^{-0.3}$ es

$$0.41 + (-0.16) = 0.24$$

Capítulo 7

El Tiempo Mínimo de Fallo

7.1. Introducción

Se supone que $T_1, T_2, \ldots, T_m$ son tiempos de fallo definidos en el mismo espacio muestral. En este capítulo, se investiga la variable aleatoria

$$T = \min\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$$

En otras palabras, T es el tiempo de la primera falla que se produce entre los m diferentes tiempos de fallo posibles. En particular, tratará los casos importantes en los que los tiempos de fallo no necesitan ser independientes.

En el caso de la vida conjunta, donde se tiene un grupo de m vidas numeradas $1, 2, \ldots, m$, se puede tomar T_i como la vida futura de la i-ésima vida, de modo que T es el tiempo de fallo de los m-estados de vida conjunta. En el contexto de decrementos múltiples, podemos tomar T_i como el tiempo de fallo de la causa i en el ajuste de decremento único asociado, por lo que es el tiempo de fallo de la i-ésima causa, suponiendo que no estén funcionando otras causas de fallo. Entonces, la variable aleatoria T es el tiempo de fracaso en el modelo de múltiples decrementos.

7.2. Distribuciones conjuntas

Se desea expandir algo en la breve descripción para el caso $m = 2$. Suponiendo que cada T_i es continuo. Hay varias maneras de describir la distribución conjunta.

Se puede hacer mediante la función de densidad conjunta $f_{T_1T_2,\ldots,T_m}(t_1,t_2,\ldots,t_m)$, o alternativamente por la función de distribución conjunta

$$F_{T_1,T_2,\ldots,T_m}(t_1,t_2,\ldots t_m) = P[T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \ldots, T_m \leq t_m],$$

O por la función de supervivencia conjunta

$$s_{T_1,T_2,\ldots,T_m}(t_1,t_2,\ldots,t_m) = P[T_1 > t1, T_2 > t_2, \ldots, T_m > t_m].$$

Para simplificar la notación, a menudo se omitirán los subíndices y simplemente se escribirá f, F ó s cuando no surja ninguna confusión.

Hay que notar que $s(t_1,t_2,\ldots,t_m) \neq 1-F(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ cuando $m>1$. Como en el caso unidimensional, se integra para obtener las funciones de distribución o supervivencia a partir de la función de densidad y se deriva para ir en la otra dirección. Sin embargo, se debe utilizar múltiples integrales y derivados parciales. Por ejemplo, con $m=3$,

$$F(t_1,t_2,t_3) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_0^{t_3} f(u,v,w)dwdvdu$$

Y de forma similar

$$s(t_1,t_2,t_3) = \int_{t_1}^{\infty}\int_{t_2}^{\infty}\int_{t_3}^{\infty} f(u,v,w)dwdvdu$$

Ahora diferenciando la última expresión con respecto a t_1. El teorema fundamental del cálculo dice que se sustituye la variable u en el integrando por t_1 y se fija un signo menos ya que t_1 es un límite inferior. El integrando consiste en las segundas dos integrales. El resultado es

$$\frac{\partial}{\partial t_1}s(t_1,t_2,t_3) = -\int_{t_2}^{\infty}\int_{t_3}^{\infty} f(t_1,v,w)dwdv \tag{7.2.1}$$

Después de repetir el proceso dos veces,

$$f(t_1,t_2,t_3) = (-1)^3\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_2}\frac{\partial}{\partial t_3}s(t_1,t_2,t_3)$$

De forma similar se puede obtener

$$f(t_1,t_2,t_3) = \frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_2}\frac{\partial}{\partial t_3}F(t_1,t_2,t_3)$$

Las expresiones análogas son válidas para m en general, que aparece como el exponente de -1 en la primera fórmula. Obsérvese que las distribuciones individuales se obtienen fácilmente de las funciones de distribución o supervivencia conjuntas por

$$s_{T_i}(t) = s_{T_1,T_2,\ldots,T_m}(0, 0, \ldots, t, \ldots, 0),$$

$$F_{T_i}(t) = F_{T_1,T_2,\ldots,T_m}(\infty, \infty, \ldots, t, \ldots, \infty)$$

Donde el t está en la i-ésima posición, y ∞ indica que se toman límites.

7.3. La distribución de T

7.3.1. El Caso General

Es relativamente simple deducir la distribución de T de la distribución conjunta. Claramente, el mínimo tomará un valor mayor que t si y sólo si cada T_i toma un valor mayor que t. Por lo tanto,

$$s_T(t) = s(t, t, \ldots, t). \tag{7.3.1}$$

(Se debe tener en cuenta que $F_T(t) \neq F(t, t, \ldots, t)$)

7.3.2. El Caso Independiente

La función de densidad, función de supervivencia y función de tasa de riesgo de T_i se denotarán respectivamente por f_i, s_i, μ_i. Las cosas se vuelven mucho más fáciles de manejar cuando las variables aleatorias T_i son independientes. Se puede entonces, escribir fácilmente las funciones relevantes para T en términos de las funciones correspondientes para T_i. Por ejemplo, de (7.3.1) se obtiene

$$s_T(t) = s_1(t)s_2(t)\ldots s_m(t). \tag{7.3.2}$$

Tomando lo visto y diferenciando, se puede encontrar una relación similar que implica la función de riesgo.

$$\mu_T(t) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i(t). \tag{7.3.3}$$

Ejemplo 7.3.1. *Suponiendo que* T_1 *y* T_2 *son independientes y ambos tienen la función de peligro*

$$\mu(t) = \frac{2}{1-t}, \qquad 0 \leq t < 1$$

Calcular la probabilidad de que el valor mínimo de estas dos variables aleatorias sea menor o igual a 1/2.

Solución Obsérvese que $s_T(t) = (1-t)^4$, para $0 \leq t < 1$, notar primero que, para $i = 1, 2$, $s_i(t) = (1-t)^2$ o que $\mu_T(t) = 4/(1-t)$. La probabilidad deseada es $F_T(1/2) = 1 - s_T(1/2) = 15/16$.

7.4. La distribución conjunta de (T, J)

7.4.1. La función de distribución para (T, J)

Se supone que existe probabilidad cero de la ocurrencia simultánea de dos o más tiempos de fallo $T_1, T_2, \ldots, T_m$. Se puede entonces definir la variable aleatoria J como el índice de la variable aleatoria que da el mínimo. Por un ejemplo con $m = 3$, suponiendo que $T_1 = 7$, $T_2 = 5$ y $T_3 = 10$. Entonces T tomaría el valor 5 y J tomaría el valor 2, ya que el mínimo ocurre para T_2.

En muchas aplicaciones, se está interesado en la distribución conjunta de T y J. Esto se puede describir de varias maneras. Un método es por la función de distribución conjunta,

$$F_{T,J}(t, j) = P(T \leq t \ y \ J = j).$$

Esta distribución conjunta tiene la característica algo inusual de que la variable aleatoria T es normalmente continua, mientras que J es discreta. Por lo tanto, a diferencia de la notación habitual para las funciones de distribución, la segunda variable en F_T, $J(t, j)$ no es acumulativa, sino que se refiere a un índice específico.

Considerando ahora el problema de deducir la distribución conjunta (T, J) de la distribución conjunta de $T_1, T_2, \ldots, T_m$.

Si se tiene da la función de densidad conjunta, entonces $F_{T,J}(t, j)$ se calcula integrando sobre una región adecuada - véase (A.17 del libro de Promislow [3]). Tomando $m = 2$.

Entonces $F_{T,J}(t,1)$ es la probabilidad de que T_1 tome un valor menor o igual que t, y que T_2 tome cualquier valor mayor que el tomado por T_1. Esto es dado por la integral doble

$$F_{T,J}(t,1) = \int_0^t \int_u^\infty f_{T_1,T_2}(u,v)dvdu \tag{7.4.1}$$

Y de forma similar

$$F_{T,J}(t,2) = \int_0^t \int_v^\infty f_{T_1,T_2}(u,v)dudv \tag{7.4.2}$$

Ejemplo 7.4.1. *La distribución conjunta de T_1 y T_2 está dada por*

$$f_{T_1,T_2}(s,t) = \begin{cases} 6(s-t)^2, & 0 \leq s \leq 1,\ 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \textit{En otro caso} \end{cases}$$

Encuentre $F_{T,J}(t,j)$ para $j = 1,2$.

Solución

$$F_{T,J}(t,1) = \int_0^t \int_u^\infty 6(s-t)^2 dvdu = 2\int_0^t (1-u)^3 du = \frac{1-(1-t)^4}{2},\ \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

De forma análoga se tiene

$$F_{T,J}(t,1) = \frac{1-(1-t)^4}{2},\ 0 \leq t \leq 1$$

Puesto que T_i está limitado por 1 para $i = 1,2$, necesariamente

$$F_{T,J}(t,i) = F_{T,J}(1,i) = 1/2,\ i = 1,2,\ t > 1$$

La suma de $F_{T,J}(t,1)$ y $F_{T,J}(t,2)$ debe de ser igual a $F_T(t) = 1 - s_T(t)$. Se puede verificar esto dibujando gráficamente en el plano las funciones, mostrando que la unión de las regiones de integración en (7.4.1) y (7.4.2), y la región correspondiente a $s_T(t)$, es la totalidad del cuadrante positivo.

En el caso general, se necesitará integrales m-dimensionales para calcular $F(t,j)$ a partir de la función de densidad. Sin embargo, si ya se tiene la función de supervivencia conjunta, el cálculo puede ser simplificado. Para ilustrar, considerar el caso con $m = 3$. Entonces, razonando como arriba,

$$F_{T,J}(t,1) = \int_0^t \int_u^\infty \int_u^\infty f(u,v,w)dwdvdu$$

De (7.2.1) las integrales dos internas se pueden escribir compactamente como una derivada parcial. se tiene

$$F_{T,J}(t,1) = \int_0^t \sigma(u)du$$

Donde

$$\sigma(u) = -\frac{\partial}{\partial t_1} s(t_1, t_2, t_3), \text{ Evaluado en } t_1 = t_2 = t_3 = u$$

En el caso general,

$$F_{T,J}(t,j) = \int_0^t \sigma_j(u)du \tag{7.4.3}$$

Donde

$$\sigma_j(u) = -\frac{\partial}{\partial t_j} s(t_1, t_2, \ldots, t_m), \text{ Evaluado en } t_1 = t_2 = t_3 = \ldots = t_m = u$$

Ejemplo 7.4.2. *Suponiendo que $m = 2$ y la función de supervivencia conjunta es dada por*

$$s_{T_1,T_2}(u,v) = \frac{1}{2}[(1-u)^4 + (1-v)^4 - (u-v)^4], \ 0 \le u \le 1, \ 0 \le v \le 1.$$

Encontrar $F_{T,J}(t,1)$.

Solución

Se podría tomar dos derivadas para calcular $f(u,v) = 6(u-v)^2$, y aplicar (7.4.1). (De hecho, ésta es la misma distribución que en el Ejemplo 7.3.1). Obsérvese, sin embargo, que (7.4.1) simplemente "deshacería" el cálculo de la segunda derivada integrando. Para esta forma de la distribución, es más fácil de aplicar (7.4.3). En la región dada

$$-\frac{\partial}{\partial u} s(u,v) = 2[(1-u)^3 + (u-v)^3], \qquad \sigma_1(u) = 2(1-u)^3,$$

Así

$$F_{T,J}(t,1) = \int_0^t 2(1-u)^3 du = \frac{1-(1-t)^4}{2}, \ 0 \le t \le 1,$$

Verificando el ejemplo anterior

7.4.2. Funciones de densidad y supervivencia para (T, J)

También se puede definir la distribución de (T, J) por la función de densidad conjunta $f_{T,J}(t, j)$. Esta es la función que satisface

$$F_{T,J}(t,j) = \int_0^t f_{T,J}(s,j)ds, \qquad f_{T,J}(t,j) = \frac{d}{dt}F_{T,J}(t,j). \tag{7.4.4}$$

La función f se interpreta de la manera normal. Es decir, para un 'pequeño' Δt, f_T, $J(t,j)\Delta t$ es aproximadamente la probabilidad de que la primera falla sea de la causa j y que ocurra en el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$. La afirmación exacta, que sigue a la primera expresión de (7.4.4), es que la probabilidad de que el primer fallo sea de la causa j y tenga lugar entre el tiempo a y el tiempo b viene dada por

$$F_{T,J}(b,j) - F_{T,J}(a,j) = \int_a^b f_{T,J}(t,j)dt$$

Se define la función de supervivencia conjunta para (T, J) pensando en la supervivencia de la misma forma en que se hace al final de la **sección 11.2.2.** del libro de Promislow [3]. Así

$$s_{T,J}(t,j) = P(T > t \ y \ J = j) = \int_t^\infty f_{T,J}(s,j)ds.$$

Esta es la probabilidad de que el fallo ocurra después del tiempo t debido a la causa j. La figura (7.1) muestra un gráfico típico de $f(t, j)$ para $m = 2$. Obsérvese que la masa se concentra en hojas paralelas. Si se corta la hoja j en el plano $T = t$, el área de la porción izquierda será $F(t, j)$ y el área de la porción derecha será $s(t, j)$.

Todas las funciones pertenecientes a la variable aleatoria T solo se obtienen sumando sobre todo j, como se observó anteriormente para F en el caso $m = 2$. Es decir,

$$F_T(t) = \sum_{j=1}^m F_{T,J}(t,j), \tag{7.4.5}$$

$$f_T(t) = \sum_{j=1}^m f_{T,J}(t,j) \tag{7.4.6}$$

$$s_T(t) = \sum_{j=1}^m s_{T,J}(t,j) \tag{7.4.7}$$

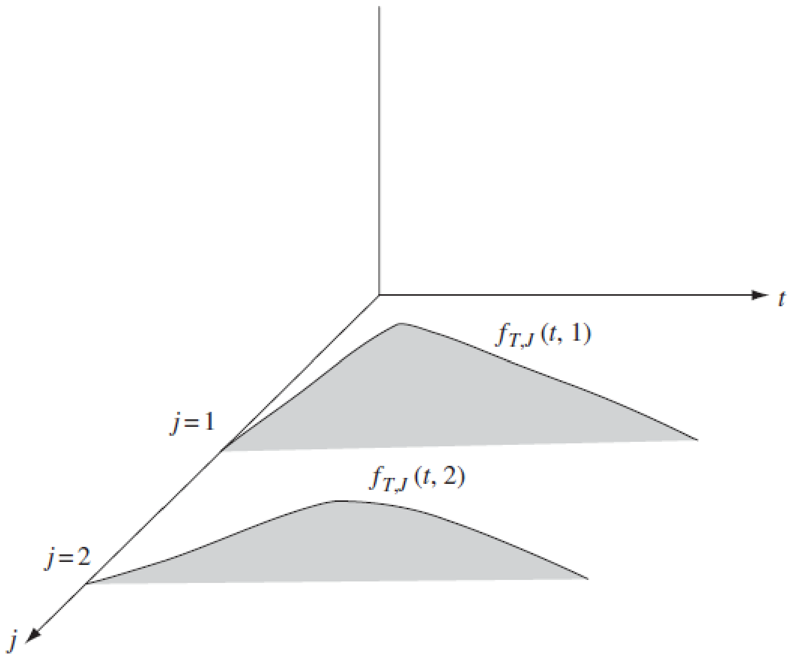


FIGURA 7.1: Gráfico de $f_{T,J}(t,j)$

7.4.3. La distribución de J

Para obtener la distribución de J a partir de la distribución conjunta, se calcula el otro marginal, que puede expresarse de varias maneras. Si $f_J(j)$ denota la probabilidad de que $J = j$, entonces

$$f_J(j) = \int_0^\infty f_{T,J}(t,j)dt = s_{T,J}(0,j) = \lim_{t\to\infty} F_{T,J}(t,j) \tag{7.4.8}$$

En la figura 7.1, $f_J(j)$ es el área de la j-ésima hoja. Tenga en cuenta que $F_{T,J}(t,j) + s_{T,J}(t,j)$ no es igual a 1, sino a $f_J(j)$.

Ejemplo 7.4.3. *Tomar $m = 2$. Si T_1 es uniforme en $[0,1]$, T_2 es uniforme en $[0,2]$, y T_1 y T_2 Son independientes, encuentre la distribución de J.*

Solución La función de densidad conjunta toma un valor constante de 1/2 sobre el rectángulo $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 2$, y es 0 en otra parte. El valor máximo de T es el mínimo de los máximos respectivos del T_i, que en este caso es 1. Por lo tanto,

$$f_J(1) = F_{T,J}(1,1) = \int_0^1 \int_u^2 (1/2)dvdu = \frac{3}{4},$$

$$f_J(2) = F_{T,J}(1,2) = \int_0^1 \int_v^1 (1/2)dvdu = \frac{1}{4}$$

7.4.4. Función de Riesgo para (T, J)

Definición 7.4.1. *La función de riesgo para* (T, J)

$$\mu_{T,J}(t,j) = \frac{f_{T,J}(t,j)}{s_T(t)}$$

Esta es una densidad condicional. Para Δt *pequeño,* $\mu_{T,J}(t,j)\Delta t$ *es aproximadamente la probabilidad de que el fallo ocurra primero de la causa* j *en el intervalo de tiempo de* t *a* $t+\Delta t$*, dado que el fallo de cualquier causa aún no ha tenido lugar antes del tiempo* t *.*

En el modelo de decremento múltiple presentado en el libro de Promislow (3) en el Capítulo 11 para una edad de vida x, μ_T, $J(t,j)$ corresponde a $\mu_x^{(j)}(t)$.

Dadas las tasas de riesgo, se puede obtener la distribución conjunta de (T, J) por el mismo método empleado en el Capítulo 11. A partir de (7.4.6) y la definición de $\mu(t,j)$.

$$\mu_T(t) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{T,J}(t,j) \tag{7.4.9}$$

Y así de (5.3.2)

$$s_T(t) = e^{-\int_0^t \mu_T(r)dr}$$

Se sabe que f_T, $J(s,j) = s_T(s)\mu_T$, $J(s,j)$ y, a partir de la primera expresión en (7.4.1)

$$F_{T,J}(t,j) = \int_0^t s_T(s)\mu_{T,J}(s,j)ds. \tag{7.4.10}$$

La última fórmula se explica fácilmente intuitivamente. Para que el evento en cuestión ocurra, debe haber algún punto s, antes de t, para el cual la falla de cualquier causa todavía no ha ocurrido, y entonces el fracaso ocurrirá por la j-causa en el tiempo s Aunque (7.4.10) tiene esta apelación intuitiva, No es necesariamente útil para calcular F_T, $J(t,j)$, ya que es posible que no se conozcan las tasas de riesgo conjunto hasta que ya se ha calculado F_T, $J(t,j)$ y f_T, $J(t,j)$. Sin embargo, es una fórmula importante en el caso independiente al que ahora nos dirigimos.

7.4.5. El caso independiente

Como en la Sección 7.2, se puede simplificar los cálculos cuando los T_i son independientes, y deducir la distribución de (T, J) directamente de las distribuciones individuales de cada T_i. Puesto que $s'_j(t) = -s_j(t)\mu_j(t)$, (7.3.2) muestra que

$$\sigma_j(t) = \prod_{i \neq j} s_i(t) s'_j(t) = s_T(t)\mu_j(t)$$

y de (7.4.3),

$$F_{T,J}(t,j) = \int_0^t s_T(u)\mu_j(u)du, \qquad \textit{para } T_i \textit{ independiente} \tag{7.4.11}$$

Obsérvese, como comparación con (7.4.10), que (7.4.11) se puede utilizar directamente para calcular F_T, $J(t,j)$ en el caso independiente, cuando se sabe en μ_i de las distribuciones individuales. Por otra parte, la diferenciación y la división por $s_T(t)$ verifica que en el caso independiente

$$\mu_{T,J}(t,j) = \mu_j(t) \tag{7.4.12}$$

Para $j = 1, 2, \ldots m$ y todo t para el cual $s_T(t) \geq 0$, esto proporciona la prueba prometida para el resultado indicado en la fórmula (11.23) del capitulo 11, del libro de Promilow [3].

El resultado es fácil de explicar intuitivamente. Observando el modelo de máquina de la Sección 11.6 [3], por ejemplo, ambas cantidades en (7.4.12) dan una densidad condicional para el fallo de la parte j en el instante t. En el caso de $\mu_{T,J}(t,j)$, la condición es que todas las partes han sobrevivido hasta el tiempo t y en general esto puede dar información con respecto al tiempo de fallo de la parte j. Suponiendo, por ejemplo, que las partes están conectadas de modo que la parte 2 no puede fallar hasta que la parte 1 lo haga, y luego falla cinco segundos después. En el caso independiente, sin embargo, se obtiene exactamente la misma información que si sólo se contaba que la parte j ha sobrevivido hasta el tiempo t, que es precisamente la condición aplicable a $\mu_j(t)$.

Ejemplo 7.4.4. *Suponiendo que T_i es independiente y exponencial con peligro constante μ_i.* **(a)** *Hallar $F_{T,J}(t,j)$.* **(b)** *Hallar $f_J(j)$.* **(c)** *Demostrar que T y J son independientes.*

Solución

(a) Sea $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m$. La fórmula (7.3.3) muestra que T es exponencial con riesgo constante μ, y, de (7.4.11),

$$F_{T,J}(t,j) = \int_0^t e^{-s\mu}\mu_j ds = \frac{\mu_j}{\mu}(1 - e^{-\mu t}).$$

(b) $f_J(j) = \lim_{t\to\infty} F_{T,J}(t,j) = \frac{\mu_j}{\mu}$.

(c) Sólo notar que

$$F_{T,J}(t,j) = F_T(t) f_J(j).$$

La solución a (b) da un resultado importante que tiene muchas aplicaciones. Para los tiempos de fallo exponencial independientes, como las probabilidades de la primera falla son proporcionales a las tasas de peligro. Esto tiene sentido, ya que cuanto mayor es la tasa de riesgo, menor es la media, que es el recíproco de la tasa de riesgo, y por lo tanto más probabilidad de ocurrir primero.

Ejemplo 7.4.5. *Se toma $m = 2$. Se supone que T_1 y T_2 son independientes, T_1 es uniforme en $[0,a]$, y T_2 es uniforme en $[0,b]$, donde $0 < a \leq b$. Encontrar F_T, $J(t,1)$ y $F_{T,J}(t,2)$.*

Solución Ya que $s_T(t)\mu_1(t) = s_2(t)s_1(t)\mu_1(t) = s_2(t)f_1(t)$ entonces se puede escribir

$$F_{T,J}(t,1) = \int_0^t (1 - \frac{s}{b})\frac{1}{a}ds = \frac{t}{a} - \frac{t^2}{2ab} = F_1(t) - \frac{1}{2}F_1(t)F_2(t), \qquad 0 < t < a.$$

De forma similar

$$F_{T,J}(t,2) = \frac{t}{b} - \frac{t^2}{2ab} = F_2(t) - \frac{1}{2}F_1(t)F_2(t), \qquad 0 < t < a$$

7.4.5.1. No identificable

Para introducir la idea de esta sección se hará con un ejemplo. Primero, obsérvese que las distribuciones conjuntas dadas en los **Ejemplos** 7.3.1 y 7.4.1 se ven fácilmente como diferentes. Una forma es observar que T_1 y T_2 no son independientes en este último.

Ejemplo 7.4.6. *Calcular $F_{T,J}(t,j)$ para la distribución dada en el* **Ejemplo** *7.3.1*

Solución. Se puede hacer esto por la ecuación 7.4.11, pero es más fácil notar que, por simetría, $F_{T,J}(t,1) = F_{T,J}(t,2)$ y los dos deben sumar a $F_T(t) = 1 - s_T(t)$. Se puede concluir directamente del **Ejemplo** 7.3.1 que

$$F_{T,j}(t,1) = F_{T,J}(t,2) = \frac{1-(1-t)^4}{2}, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

y necesariamente

$$F_{T,J}(t,1) = F_{T,J}(t,2) = \frac{1}{2}, \qquad 1 \leq t.$$

Comparar el resultado anterior con el 7.4.1. La conclusión algo sorprendente es que dos distribuciones completamente diferentes para (T_1, T_2) han conducido exactamente a la misma distribución para (T, J). Esto se conoce como el problema de no identificabilidad y tiene implicaciones estadísticas. Suponiendo que se quiere hacer inferencias sobre la distribución conjunta del T_i observando los tiempos de falla. En muchos casos, todo lo que se puede observar es la distribución conjunta (T, J). Un ejemplo es cuando las variables aleatorias representan el tiempo de muerte por diversas causas. Una vez que se produce la muerte, se sabe el tiempo y la causa, pero no es posible una observación adicional del sujeto. El ejemplo anterior muestra que es imposible determinar de manera única la distribución conjunta de las variables aleatorias que dan lugar a un dado (T, J). Se necesita información adicional para obtener una solución única. Una instancia cuando esto ocurre está en el caso independiente.

Teorema 7.4.1. *Dada una distribución conjunta de (T, J) existe una distribución conjunta única de $(T_1, T_2, ..., T_m)$ tal que los (T_i) son mutuamente independientes e inducen la distribución dada de (T, J).*

Demostración. La unicidad sigue inmediatamente, ya que, dada la independencia, se conoce la distribución conjunta si se conoce la distribución de cada T_i, y (7.4.12) implica que cada T_i es necesariamente una variable aleatoria con la función de riesgo $\mu_{T,J}(t,i)$, que es la distribución de cada T_i, determinado de manera única desde (T, J). Para la existencia, dada cualquier función de distribución conjunta F para (T, J), se deja que T_i sea una variable aleatoria con la función de riesgo $\mu_{T,J}(t,i)$. Esta colección de T_i independiente genera a su vez una función de distribución conjunta $F_{T,J}$. De la ecuación (7.4.11), se tiene que

$$\tilde{F}_{T,J}(t,j) = \int_0^t s_T(s)\mu_{T,J}(s,j)ds,$$

que es igual a $F_{T,J}(t,j)$ como se muestra por la ecuación (7.4.10). $\square$

Para ilustrar el uso de este teorema, suponer que

$$F_{T,J}(t,i) = \frac{1-(1-t)^4}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad F_{T,J}(t,1) = 1, t > 1$$

Para $i = 1,2$ y se pide identificar la distribución conjunta de (T_1, T_2). No puede hacerse sin más información, ya que podría ser la distribución conjunta del **ejemplo** 6.3.1 o la del **ejemplo** 6.4.1, o incluso varias otras posibilidades. Sin embargo, si se tiene la información adicional de que T_1 y T_2 son independientes, entonces se sabe que debe ser la distribución del ejemplo 1 visto en este capítulo.

7.4.5.2. Condiciones para la independencia de T y J.

Otra cuestión de interés es determinar cuándo T y J son independientes. En el ejemplo 7.4.4, se vió que esto ocurrió con funciones de peligro constante. Aquí se presentará un criterio más general. Definiendo las relaciones

$$K(t,j) = \frac{\mu(t,j)}{\mu_T(t)}$$

para todo j, y todo t, tal que $s_T(t) > 0$

Teorema 7.4.2. $K(t,j) = P(J=j|T=t)$. *Por lo tanto,* T *y* J *son independientes si y sólo si* $K(t,j)$ *es independiente de* t.

Demostración. Se tiene que

$$f_{T,J}(t,j) = s_T(t)\mu(t,j) = K(t,j)s_T(t)\mu_T(t) = K(t,j)f_T(t).$$

Así

$$P(J=j|T=t) = \frac{f_{T,J}(t,j)}{f_T(t)} = K(t,j).$$

Lo cual termina la prueba. $\square$

La condición de este teorema a veces se expresa diciendo que los peligros para las causas individuales son proporciones fijas del peligro total.

7.5. Otros problemas

Hay otras preguntas sobre la distribución conjunta de $(T_1, T_2, ..., T_m)$ que pueden ser respondidas por técnicas similares a las de la **Sección** 7.3. Es decir, se encuentra una cierta probabilidad integrando tiempos de fallo sobre una región adecuada de espacio m-dimensional. Como ejemplo, se ilustra el método para un problema análogo al **Ejemplo 10.7** de la **Sección 10.9** del libro de Promislow 3. Tomando $m = 2$, y considerando la probabilidad de que ambas causas de fracaso ocurrirán dentro de una duración especificada entre sí. Es decir, para algún n fijo, se quiere la probabilidad de que $(|T_1 - T_2| \leq n)$. Normalmente será más fácil calcular esto como

$$1 - P(|T_1 - T_2| > n) = 1 - [P(T_2 > T_1 + n) + P(T_1 > T_1 + n)].$$

Cada término se encuentra integrando la función de densidad conjunta sobre una región adecuada en el plano. Por ejemplo,

$$P(T_2 > T_1 + n) = \int_0^\infty \int_{u+n}^\infty f_{T_1,T_2}(u, \nu) d\nu du.$$

Ejemplo 7.5.1. *Encontrar $P(|T_1 - T_2| \leq n)$, cuando T_1, T_2 son independientes y ambos son exponenciales con funciones de riesgo μ_1 y μ_2, respectivamente.*

Solución. La integral de arriba se reduce a

$$\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} e^{-n\mu_2},$$

Así, la respuesta final es

$$1 - \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} e^{-n\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} e^{-n\mu_1}$$

7.6. El modelo de choque común

En muchas aplicaciones, se tiene un grupo de objetos cuyas vidas futuras son generalmente independientes, excepto que están todas sujetas a un peligro común, que resultará en el fracaso de todos, en caso de que ocurra. En el caso de vidas humanas, esto podría ser un desastre natural como un huracán. En el caso de piezas de la máquina, podría ser algo así como un problema eléctrico que afecta a todos los componentes a la vez. La presencia del choque común introduce la dependencia en lo que de otro modo serían vidas futuras independientes. Para modelar la situación general, se tiene $m+1$, variables aleatorias continuas independientes, $(T_1^*, T_2^*, ..., T_m^*, Z)$, y para cada i se tiene

$$T_i = \text{mín}\{T_i^*, Z\}$$

La interpretación es que T_i^* es el tiempo hasta el fallo del i-ésimo objeto por razones distintas del choque común y Z es el tiempo hasta que ocurre el choque común. Se deduce entonces que T_i será simplemente el tiempo hasta el fracaso del i-ésimo objeto, puesto que tal falla ocurrirá en cualquier momento T_i^* o tiempo Z, cualquiera que sea anterior. En el resto de esta sección, se limitará al caso donde $m = 2$. Las cantidades que se refieren a T_i^* tendrán un superíndice $*$. Está interesados en las preguntas sobre la distribución conjunta (T_1, T_2), que implica variables aleatorias dependientes. Sin embargo, en muchos casos, podría responderse a estas preguntas considerando la colección independiente (T_1^*, T_2^*, Z). Se ilustrarán varios ejemplos. Un hecho clave a destacar es que

$$T = \text{mín}\{T_1, T_2\} = \text{mín}\{T_1^*, T_2^*, Z\},$$

ya que ambos dan el tiempo de la primera falla.

Ejemplo 7.6.1. *Encontrar una fórmula para la probabilidad de que ambos objetos sobrevivan al tiempo t.*

Solución. Esto es simplemente $s_1^*(t)s_2^*(t)s_Z(t)$

Ejemplo 7.6.2. *¿Cuál es la probabilidad de que se produzca un fallo como resultado del choque común?*

Solución. Esto es sólo $P(J = 3)$ en la distribución conjunta de (T, J), donde J toma los valores $1, 2, 3$ y T es el mínimo de T_1^*, T_2^* y Z.

Ejemplo 7.6.3. *¿Cuál es la probabilidad de que el segundo fallo ocurra antes del tiempo t?*

Solución. Dividiendo esto en dos casos mutuamente exclusivos. Siempre ocurrirá si $Z \leq t$. Si $Z > t$, se necesita T_1^* y T_2^* menor o igual que t. La probabilidad es

$$F_Z(t) + s_Z(t)F_1^*(t)F_2^*(t) = 1 - s_Z(t)\big[s_1^*(t) + s_2^*(t) - s_1^*(t)s_2^*(t)\big].$$

Otros problemas no son tan sencillos y requieren una atención especial. La distribución conjunta de (T_1, T_2) es muy diferente de la distribución continua bidimensional típica. Todavía es continua, pero tiene una masa de probabilidad positiva, todas ellas concentradas en una sola línea, es decir, la diagonal, ya que la aparición del choque común causará la falla de ambas causas, dando lugar a un punto de fallo de la forma (t, t). Al determinar la probabilidad de que (T_1, T_2) se encuentre en alguna región A, en general se tiene que partir A en tres partes, la parte que está por encima de la diagonal, la parte que está por debajo de la diagonal y la parte que está en la diagonal. Por conveniencia se toma el valor de T_1 en el eje horizontal. Para la parte del plano por encima de la diagonal, $(u, \nu) : u < \nu$, se utiliza la función de densidad conjunta

$$f_1^*(u)f_2(\nu),$$

Ya que la única manera en que T_1 puede tomar un valor $u < \nu$ es si T_1^* toma el valor u. En otras palabras, el fracaso de la causa 1 en el momento u no se produjo a partir del choque común, ya que si lo hizo, entonces el fallo de la causa 2 también habría ocurrido en el momento u y no podría haber ocurrido en la fecha posterior ν. Del mismo modo, para la parte del cuadrante positivo debajo de la diagonal, $(u, \nu) : \nu < u$, se utiliza la función de densidad conjunta

$$f_1(u)f_2^*(\nu).$$

Puesto que $T_i = \text{mín}\{T_i^*, Z\}$, las densidades f_i, $i = 1, 2$, se calculan fácilmente como

$$f_i(t) = -(s_i^* s_Z)'(t) = f_i^*(t)s_Z(t) + s_i^*(t)f_Z(t). \tag{7.6.1}$$

La falla en la diagonal surge sí y sólo sí la ocurrencia del choque común es antes de las otras dos causas. Utilizando la función de densidad unidimensional,

$$f_{T,J}(t, 3) = s_1^*(t)s_2^*(t)f_Z(t),$$

y proyectar la diagonal sobre la línea. Es decir, para encontrar la probabilidad de que el fallo ocurrió en un punto (t, t), donde $a \leq t \leq b$, se integra esta densidad de a a b.

Ejemplo 7.6.4. *Suponiendo que T_1^*, T_2^* y Z son exponenciales con funciones de riesgo μ_1, μ_2 y ρ, respectivamente. Considerando el evento de que T_1 y T_2 son ambos menores o iguales que n. Esto se puede subdividir en tres casos según (a) $T_1 < T_2$, (b) $T_2 > T_1$, (c) $T_1 = T_2$. Encontrar la probabilidad de cada caso.*

Solución.

(a) Notar primero que, de la ecuación 7.6.1, se puede calcular

$$f_2(t) = (\mu_2 + \rho)e^{-(\mu_2+\rho)t}$$

así que, utilizando la densidad conjunta por encima de la diagonal, la probabilidad requerida es

$$\mu_1(\mu_2 + \rho) \int_0^n \int_u^n e^{-\mu_1 \mu} e^{-(\mu_2+\rho)\nu} d\nu du,$$

que es igual a

$$e^{-n(\mu_2+\rho)} + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \rho} + \frac{\mu_2 + \rho}{\mu_1 + \mu_2 + \rho} e^{-n(\mu_1+\mu_2+\rho)}$$

(b) Similarmente, la probabilidad requerida en este caso es

$$e^{-n(\mu_1+\rho)} + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \rho} + \frac{\mu_1 + \rho}{\mu_1 + \mu_2 + \rho} e^{-n(\mu_1+\mu_2+\rho)}$$

(c) La probabilidad requerida es

$$\int_0^n \rho e^{-\rho t} e^{-\mu_1 t} e^{-\mu_2 t} dt = \frac{\rho\left(1 - e^{-n(\mu_1+\mu_2+\rho)}\right)}{\mu_1 + \mu_2 + \rho}$$

La suma de estos tres casos es

$$1 - e^{-n(\mu_1+\rho)} - e^{-n(\mu_2+\rho)} + e^{-n(\mu_1+\mu_2+\rho)}$$

Como se puede verificar por la fórmula general dada en el el Ejemplo 6.4.3

7.7. Cópula

Esta sección, al igual que la anterior, se refiere a situaciones en las que existe una falta de independencia. Se presentará un método general que se utiliza a menudo para hacer frente a esto. La atención se limita al caso $m = 2$. Se puede pensar que una distribución conjunta (T_1, T_2) tiene dos ingredientes. Una es la distribución de las variables aleatorias de dos componentes y la otra es la forma en que éstas están unidas entre sí. Este último puede describirse mediante un dispositivo conocido como **cópula**, que puede ser aplicado a un par arbitrario de distribuciones individuales. La **cópula** proporciona un medio para tratar estos dos ingredientes por separado. Para elaborar, se parte de la observación de que siempre que T_1 y T_2 son independientes, inmediatamente se recupera la distribución conjunta de las distribuciones individuales por la regla

$$F_{T_1,T_2}(t_1, t_2) = F_{T_1}(t_1)F_{T_2}(t_2). \tag{7.7.1}$$

Se puede entonces preguntar si se puedes reemplazar la multiplicación en el lado derecho de la ecuación 7.7.1 por otras transformaciones y todavía obtener una distribución conjunta, es decir, si denota el intervalo unitario $[0, 1]$, si se puede encontrar una función C de $I \times I$ a sí misma, de modo que se obtenga una distribución conjunta legítima por la regla

$$F_{T_1,T_2}(t_1, t_2) = C\big(F_{T_1}(t_1), F_{T_2}(t_2)\big). \tag{7.7.2}$$

Se necesitan algunas restricciones sobre la función C. Tomando cualquier punto s en I. Si $T_1 > s$, de modo que $F_{T_1}(s) = 0$, entonces, para todo t, $F_{T_1,T_2}(s, t) = 0$. Lo mismo ocurre para T_2, llevando a la condición de que para todo u, ν en I,

$$C(0, \nu) = C(u, 0) = 0 \tag{7.7.3}$$

Si $T_1 \leq s$, de modo que $F_{T_1}(s) = 1$, entonces para todo t, $F_{T_1,T2}(s, t) = F_{T2}(t)$, llevando a la condición de que para todo u, ν en I,

$$C(1, \nu) = \nu, \qquad C(u, 1) = u \tag{7.7.4}$$

Otro requisito se deriva del hecho de que las probabilidades no pueden ser negativas. Para cualquier sub-rectángulo $R \subset I \times I$, la probabilidad de que (T_1, T_2) esté en R es sólo la suma de los valores de $F_{T_1,T2}$ en las esquinas noreste y suroeste, menos la suma de los valores en las otras dos esquinas. Como esto es no negativo, se deduce que

$$C(u_2, \nu_2) + C(u_1, \nu_1) - C(u_1, \nu_2) - C(u_2, \nu_1) \geq 0 \tag{7.7.5}$$

siempre que $u_1 \leq u_2$ y $\nu_1 \leq \nu_2$.

Estas son las únicas condiciones que se necesitan y ahora se podrá establecer la definición formal.

Definición 7.7.1. *Una* **cópula** *es una función C de $I \times I$ a I que satisface*

- *para todo u, ν en I,*
$$C(0, \nu) = C(u, 0) = 0$$
- *para todo u, ν en I,*
$$C(1, \nu) = \nu, \qquad C(u, 1) = u$$
- *finalmente*
$$C(u_2, \nu_2) + C(u_1, \nu_1) - C(u_1, \nu_2) - C(u_2, \nu_1) \geq 0$$
siempre que $u_1 \leq u_2$ y $\nu_1 \leq \nu_2$.

Se puede demostrar que si C es una **cópula**, entonces la ecuación 7.7.2 da una distribución de probabilidad conjunta válida para cualquier T_1 y T_2. Por el contrario (y más difícil de demostrar), para cualquier distribución conjunta (T_1, T_2) hay una **cópula** C tal que F_{T_1,T_2} está dada por la ecuación 7.7.2. Si T_1 y T_2 son distribuciones uniformes en I, entonces $F_{T_i}(u) = u$ para $i = 1, 2$, y todo $u \in I$, del cual sigue que

$$F_{T_1,T_2}(u, \nu) = C(u, \nu).$$

Esto demuestra que como definición alternativa, se puede simplemente definir una **cópula** como una función de distribución de una distribución conjunta que implica dos variables aleatorias que son uniformes en I.

Existe un resultado formal que justifica lo que se menciona en el párrafo anterior y es el siguiente.

Teorema 7.7.1. (Teorema de Sklar) *Sea H una distribución conjunta con marginales u y v. Entonces existe una copula C tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$H(x, y) = C(u(x), v(y))$$

Si u y v son continuas, entonces C es única. De lo contrario, C esta unívocamente determinada en $Ranu \times Ranv$. Recíprocamente, si u y v son funciones de distribución, y C es una cópula, entonces $H(x, y) := C(u(x), v(y))$ es una función de distribución conjunta con marginales u y v.

Para realizar la demostración de este resultado primero se deben enunciar los siguientes lemas.

Lema 7.7.1. *Sea H una función de distribución conjunta, con marginales u y v. Entonces existe una única subcópula C' tal que*

Se tiene que $DomC' = Ranu \times Ranv$

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene $H(x, y) = C'(u(x), v(y))$

Lema 7.7.2. *Sea C' una subcópula, entonces existe una copula C tal que $C(u, v) = C'(u, v)\ \forall\ u, v \ \in DomC'$. En otras palabras, toda subcópula se puede extender (no necesariamente de manera única) a una cópula.*

Demostración. Se presenta la prueba del teorema de Sklar
"$\Rightarrow$"
Dada H una función de distribución conjunta con marginales u y v.

Por el lema 7.7.1, se tiene una subcópula C' definida en $Ranu \times Ranv$, entonces si u y v son continuas, entonces $Ranu \times Ranv = I^2$, de lo contrario, por el lema 7.7.2, C' se puede extender a una cópula C.
"$\Leftarrow$" Se tiene una cópula C y dos distribuciones u y v, si $H(x, y) = C(u(x), v(y))$, hay que comprobar que H cumple las condiciones de función de distribución:

- H es basada porque C lo es.
- H es 2-creciente, pues C lo es y u, v son no decrecientes.

- Finalmente $H(\infty, \infty) = C(1, 1) = 1$

Lo que termina la prueba. $\square$

Los siguientes son tres ejemplos simples de **cópulas**:

1. $C(u, \nu) = u\nu$. Esto es sólo la **cópula** para una distribución independiente, como se mencionó;
2. $C(u, \nu) = \text{mín}(u, \nu)$
3. $C(u, \nu) = \text{máx}(u + \nu - 1, 0)$

Las **cópulas** 2 y 3 son extremas en el sentido de que para cualquier **cópula** C y para todo u, $v \in I$,

$$\text{máx}(u + \nu - 1, 0) \leq C(u, \nu) \leq \text{mín}(u, \nu).$$

También son extremas en el siguiente sentido. Considerando todas las posibles distribuciones conjuntas para un T_1 y un T_2 dados. En muchos casos, se está interesado en la suma $T_1 + T_2$. Por ejemplo, una aseguradora vende dos contratos de seguros y T_i denota la reclamación sobre la i-ésima póliza, o una persona compra dos acciones y T_i es el valor de la i-ésima acción en alguna fecha futura. Es posible que desee comparar todas las posibles distribuciones conjuntas en cuanto a su grado de riesgo. No se entrará en los detalles de la comparación de distribuciones conjuntas en cuanto a riesgo aquí. Sin embargo, parece claro que surgen posibilidades de riesgo cuando cuando los valores grandes de una variable aleatoria tienden a ir con valores grandes de la otra, hay una tendencia a que ambos valores sean grandes o ambos sean pequeños. Las posibilidades menos arriesgadas se presentan cuando los valores grandes de uno tienden a ir con valores pequeños de otro, por lo que existe la posibilidad de que los resultados negativos en un caso se equilibren con buenos resultados en el otro. Se puede demostrar que, bajo algunos criterios de riesgo natural comparando, la **cópula** 2 dará la distribución conjunta más riesgosa y la **cópula** 3 la distribución conjunta menos riesgosa. En muchos casos, el modelador está más interesado en elegir una **cópula** de una familia paramétrica y seleccionar el parámetro para adaptarse a ciertas condiciones. Una opción popular para esto es la familia de **cópulas** de Frank dada por

$$C_\Theta(u,\nu) = \frac{1}{\Theta}\log\left(1 + \frac{(e^{\Theta u}-1)(e^{\Theta \nu}-1)}{e^{\Theta}-1}\right)$$

Donde Θ puede ser cualquier número real no nulo. Se puede demostrar, usando la regla de L'Hopital, que para todo $u, v \in I$,

$$\lim_{\Theta\to 0} C_\Theta(u,\nu) = u\nu,$$

de modo que cuanto menor sea el parámetro en valor absoluto, mayor será el grado de independencia entre las dos variables aleatorias, con independencia total para $\Theta = 0$. Una característica interesante que algunas **cópulas**, pero no todas, tienen es que

$$C(u,\nu) = u + \nu - 1 + C(1-u, 1-\nu) \tag{7.7.6}$$

Es fácil verificar esta propiedad para las **cópulas** 1-3 de arriba. Es cierto, pero más difícil de verificar, que esto es válido para la familia de Frank. El significado de la ecuación 7.7.6 es que

$$s_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = 1 - F_{T_1}(t_1) - F_{T_2}(t_2) + F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = C\big(s_{T_1}(t_1), s_{T_2}(t_2)\big).$$

En otras palabras, la misma regla de transformación se puede aplicar a las funciones de distribución o de supervivencia.

Ejemplo 7.7.1. *Suponiendo que la ley de Demoivre se cumple con* $\omega = 100$. *Considerando dos vidas* (60) *y* (70). *Encontrar la probabilidad de que ambos estén vivos al final de* 10 *años, asumiendo cada una de las tres* **cópulas** *básicas dadas arriba, para la distribución conjunta de* $T(60)$ *y* $T(70)$.

Solución. Las probabilidades de supervivencia individual son 3/4 y 2/3, por lo que la supervivencia del estado de vida conjunta es en los respectivos casos:

1. 1/2
2. $\min\{3/4, 2/3\} = 2/3$. Esta **cópula** aplicada a un estado de vida conjunta sólo significa que la vida más joven morirá exactamente al mismo tiempo que los mayores;

3. $(3/4 + 2/3 - 1) = 5/12$

Para una aplicación particular de **cópulas**, remítase al problema de no identificable de la 7.4.5.1. En lugar de asumir la independencia, se podría postular una cierta **cópula** C y luego pedir una distribución conjunta con la **cópula** elegida que da lugar a la distribución dada (T, J). En muchos casos esto será único.

7.8. Ejercicios

Ejercicio práctico 7.8.1. *Una distribución conjunta esta dada por*

$$f_{T_1,T_2}(s,t) = \begin{cases} 3s, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ 3t, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ 0 & \textit{En otro caso} \end{cases}$$

Encuentre $F_{T,J}(t,1)$ *y* $F_{T,J}(t,2)$

Solución

Se utilizará las ecuaciones 7.2.1 y 7.3.1. Primero se calcular $F_{T,J}(t,1) = \int_0^t \int_u^\infty f_{T_1,T_2}(u,v)dvdu$, entonces

$$F_{T,J}(t,1) = \int_0^t \int_u^1 3udvdu = \int_0^t [3uv]_u^1$$

$$\Rightarrow \int_0^t 3u - 3u^2 = [\frac{3}{2}u^2 - u^3]_0^t = \frac{3}{2}t^2 - t^3, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

el cálculo de $F_{T,J}(t,2)$ es totalmente análogo pero utilizando la ecuación 7.3.1

$$F_{T,J}(t,1) = \int_0^t \int_v^1 3vdudv$$

siguiendo el mismo proceso se llega a

$$F_{T,J}(t,1) = \frac{3}{2}t^2 - t^3, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Ejercicio práctico 7.8.2. *Los tiempos de fallo* T_1 *y* T_2 *son independientes y tienen funciones de riesgo respectivamente*

$$\mu_1(t) = \frac{3}{2-t}, \qquad 0 \leq t \leq 2 \qquad y \qquad \mu_2(t) = log(2)$$

Encuentre la probabilidad que el valor mínimo de estas dos variables sea menor o igual a 1.

Solución Primero se obtienen las respectivas funciones de supervivencia

$$s_1(t) = e^{-\int_0^t \frac{3}{2-r} dr} = (2-t)^3 2^{-3}$$

$$s_2(t) = e^{-\int_0^t log(2) dr} = 2^{-t}$$

luego dada la independencia se tiene que la función de supervivencia conjunta es

$$s_T(t) = 2^{-(3+t)}(2-t)^3$$

finalmente la probabilidad buscada es

$$F_T(1) = 1 - s_T(1) = 1 - (2^{-4}) = \frac{15}{16}$$

Capítulo 8

Aplicación en Riesgo

8.1. Introducción

Hasta este punto se ha trabajado y desarrollado un modelo de contingencia de vida totalmente estocástico, definiendo todas la herramientas matemáticas necesarias para su aplicación, una muestra de ello es que a cada paso se han ido presentando ejemplos y ejercicios de aplicación de la teoría.
En este capítulo se presentan aplicaciones prácticas de modelos que tienen como base matemática la teoría del modelo desarrollado hasta el momento y se hará hincapié en las similitudes y deferencias que estos podrían tener con lo trabajado hasta el momento.

8.2. Modelo de Weibull

La distribución Weibull es un modelo muy flexible para datos de tiempos de vida. Su tasa de riesgo puede ser monótona decreciente, creciente o constante. Es el único modelo paramétrico de regresión que tiene una representación de riesgos proporcionales y una representación tiempo de falla acelerado, cabe decir que este modelo posee aplicaciones por defecto en los diferentes software de simulación.

Tomando la transformación logaritmo del tiempo, la función de supervivencia univariada para $Y = log(X)$, pues es mucho más fácil utilizar la herramienta de máxima verosimilitud para la función logaritmo. Está dada por:

$$S_Y(y) = e^{-\gamma e^{\alpha y}} \tag{8.2.1}$$

Si se redefinen los parámetros como $\gamma = e^{-\mu/\sigma}$ y $\sigma = \dfrac{1}{\alpha}$, entonces Y tiene la forma de un modelo loglineal con

$$Y = log(X) = \mu + \sigma W \tag{8.2.2}$$

donde W es la distribución de valor extremo con función de densidad de probabilidad

$$f_W(w) = e^{w-e^w} \tag{8.2.3}$$

y con función de supervivencia

$$S_W(w) = e^{-e^w} \tag{8.2.4}$$

Con base en lo anterior, la función de densidad de probabilidad subyacente y la función de supervivencia para son respectivamente

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma} e^{\left[\frac{(y-\mu)}{\sigma} - e^{[(y-\mu)/\sigma]}\right]} \tag{8.2.5}$$

$$S_Y(y) = e^{-e^{[(y-\mu)/\sigma]}} \tag{8.2.6}$$

La función de verosimilitud para datos censurados por la derecha está dada por:

$$L = \prod_{j=1}^{n} \Big[f_Y(y_j)\Big]^{\delta_j} \Big[S_Y(y_j)\Big]^{1-\delta_j} = \prod_{j=1}^{n} \Big[f_W\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big]^{\delta_j} \Big[S_Y\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big]^{1-\delta_j} \tag{8.2.7}$$

Una vez se estiman por máxima verosimilitud los parámetros μ y σ, los estimadores de la función de supervivencia y de la tasa de riesgo acumulada están disponibles para la distribución de X o de Y. Los estimadores de μ y de σ y su matriz de varianzas y covarianzas se encuentran numéricamente. Con base en la propiedad de invarianza del estimador máximo verosímil, se tiene que los estimadores de γ y α son:

$$\hat{\gamma} = e^{-\hat{\mu}/\hat{\sigma}} \qquad \text{y} \qquad \hat{\alpha} = \sigma^{-1}$$

Las varianzas y covarianzas para estos estimadores son:

$$Var(\hat{\gamma}) = exp\bigg(-\frac{2\hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2}\bigg)\left[\frac{Var(\hat{\mu})}{\hat{\sigma}^2} + \hat{\mu}^2\bigg(\frac{Var(\hat{\sigma})}{\hat{\sigma}^4}\bigg) - 2\hat{\mu}\bigg(\frac{Cov(\hat{\mu},\hat{\sigma})}{\hat{\sigma}^3}\bigg)\right] \tag{8.2.8}$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \frac{Var(\hat{\sigma})}{\hat{\sigma}^4} \tag{8.2.9}$$

$$Cov(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = exp\Big(-\frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\Big)\Big[\frac{Cov(\hat{\mu}, \hat{\sigma})}{\hat{\sigma}^3} - \hat{\mu}\frac{Var(\hat{\sigma})}{\hat{\sigma}^4}\Big] \tag{8.2.10}$$

Al incorporar covariables en el modelo Weibull, se usa el modelo lineal para el logaritmo del tiempo,

$$Y = \mu + \gamma^t Z + \sigma W \tag{8.2.11}$$

donde W tiene la distribución de valor extremo estándar. Este modelo lleva a un modelo de riesgos proporcionales para X con un riesgo basal Weibull, esto es

$$\lambda((x|z)) = (\alpha\gamma x^{\alpha-1})exp(\beta^t z) \tag{8.2.12}$$

con $\alpha = \sigma^{-1}$, $\gamma = exp(-\mu\sigma^{-1})$, y $\beta_j = \sigma^{-1}\gamma_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$. A la expresión $exp(\beta^t z)$ se le conoce como riesgo relativo y mide cuán grande es el riesgo de un individuo con una covariable z_1 frente a otro con una covariable z_2.
El logaritmo de verosimilitud es:

$$\sum \delta_i\Big[-log(\sigma) + \frac{y_i - \mu - \gamma^t z_i}{\sigma} - exp(\frac{y_i - \mu - \gamma^t z_i}{\sigma})\Big] - \sum(1-\delta_i)log\Big[\frac{y_i - \mu - \gamma^t z_i}{\sigma}\Big] \tag{8.2.13}$$

8.3. Modelo de riesgo de GEORGE et al (2001)

George et al (2001) considera que el tiempo de vida de un crédito está ligado al tiempo hasta el incumplimiento o default X_D, al tiempo hasta el prepago X_P y al tiempo hasta la maduración del crédito X_M. Se asume que el tiempo es medido en meses. El tiempo de vida del crédito corresponde entonces a $X = min\{X_D, X_P, 1\}$.
La función de verosimilitud para estimar los parámetros del modelo se establece con base en las siguientes probabilidades:

8.3.1. Probabilidad de incumplimiento en x

$$P_D = Pr(X_D > x - dx,\ X_P > x - dx)Pr(X_D = x, X_P > X||X > x - dx)$$

$$P_D = C_S[S_D(x - dx), S_P(x)] - C_S[S_D(x), S_P(x)] \tag{8.3.1}$$

donde $dx = 1$ si los créditos son mensuales

8.3.2. Probabilidad de prepago en x

$P_P = Pr(X_D > x - dx,\ X_P > x - dx)Pr(X_D > x, X_P = X||X > x - dx)$

$$P_P = C_S[S_D(x), S_P(x - dx)] - C_S[S_D(x), S_P(x)] \tag{8.3.2}$$

8.3.3. Probabilidad de Maduración en x

$P_M = Pr(X_M > x - dx,\ X_P > x - dx)Pr(X_D > x||X > x - dx)$

$$P_M = C_S[S_D(x), S_P(x)] \tag{8.3.3}$$

La función de verosimilitud es propia de los riesgos en competencia y si se supone que siempre se observa el evento de terminación del crédito, entonces se tiene que dicha función de verosimilitud está dada por:

$$L = \prod_{i=1}^{n} P_{D_i}^{\delta_{D_i}} P_{P_i}^{\delta_{P_i}} P_{M_i}^{1-\delta_{D_i}-\delta_{P_i}} \tag{8.3.4}$$

δ_{D_i} es el indicador del evento de incumplimiento, δ_{P_i} es el indicador del evento de prepago, por lo tanto $1 - \delta_{D_i} - \delta_{P_i}$ es el indicador de maduración.

8.3.4. Observaciones

Una de las primeras observaciones para este modelo es que omite por completo el tipo de distribución marginales que poseen las variables de tiempo que se están considerando. Ahora se plantea un análisis más detallado de estos modelos.

- Este Modelo trata por separado dos tiempos de fallo (Default y Prepago), ambos asociados con una variable discreta δ, tal cual se observo en la teoría planteada en la sección del modelo de choque común, es decir este tipo de modelos es una aplicación de la teoría de tiempos mínimos de fallo y del modelo de choque común.

- El modelo de GEORGE plantea el uso de cópula financieras, esto para obtener una distribución conjunta a partir de las distribuciones marginales, el modelo no define una cópula en especifico es decir que se podría definir la cópula que se haga más conveniente en una aplicación empírica de este modelo.
- Para hacer una aplicación con mejores resultados se podría intentar ampliar dicho modelo, agregando variables u otro insumos teóricos, una de los pasos para su implementación sin duda seria, definir una distribución adecuada para las marginales la cual incluso podría ser la distribución o el modelo de Weibull que se sabe es útil para este tipo de estudios y permite, por verosimilitud, definir una distribución marginal bastante buena, lo que significaría que se haría doble verosimilitud pues se aplicaría también para obtener el parámetro de la cópula a la hora de obtener la distribución conjunta

Dadas las observaciones anteriores se presentan los posibles pasos que se seguirían para una implementación práctica del modelo de GEOERGE et al (2001).

1. Recabar una muestra de datos (tiempos) de créditos, se recomienda una muestra de más de 300 datos mínimo.
2. Definir que modelo o distribución se utilizará para las marginales, se recomienda un modelo que utilice algún tipo de función de verosimilitud apropiada y fácil de manejar.
3. Definir la cópula que se utilizará para la aplicación del modelo de GEORGE
4. Finalmente buscar el Software apropiado para el procesamiento de datos.

8.4. Simulación progresiva del modelo de Riesgo

A continuación se presenta una simulación progresiva de un modelo de supervivencia para un caso de seguros. Primero es válido aclarar el término progresivo para el lector, lo que se realizará es una simulación donde se supondrá cuales son las distribuciones de probabilidad para las diferentes variables aleatorias que se van a utilizar, además, se conocerán los parámetros que hagan falta, todo con el objetivo de ejemplificar cómo se comporta el modelo y dejando muy en claro los procesos que se podrían seguir para una futura aplicación empírica.

8.4.1. Distribuciones de supervivencia

Se va a considerar el caso de un contrato de seguro, en el que la cobertura es por muerte repentina y se aplica para dos personas, con la cláusula especial que si mueren al mismo tiempo la empresa paga 50 % más, entonces se tienen dos tiempos de muerte:

- X_1: tiempo de muerte de la primera persona con riesgo constante de 0.04
- X_2: tiempo de muerte de la segunda persona con riesgo constante de 0.06

Por tanto para cada tiempo se tiene las siguientes distribuciones de supervivencia

- $S_{x_1}(t) = e^{-0.04t}$
- $S_{X_2}(s) = e^{-0.06s}$

Se busca la supervivencia conjunta, para ello se utiliza una cópula. Se observarán los resultados de tres diferentes cópulas con el mismo parámetro $\theta = 0.75$ y se tomará la que se ajuste mejor a la supervivencia conjunta.

(a) Utilizando la Cópula de Frank

$$S_{X_1,X_2} = C_F(S_{X_1}, S_{X_2}) = \frac{1}{0.75}\log(1 + \frac{(e^{0.75*e^{-0.04t}} - 1)(e^{0.75*e^{-0.06s}} - 1)}{e^{0.75} - 1})$$

(b) Utilizando la Cópula Cúbica

$$\begin{aligned} S_{X_1,X_2} &= C_C(S_{X_1}, S_{X_2}) \\ &= e^{-0.04t-0.06s}(1 + 0.75(e^{-0.04t} - 1)(e^{-0.06s} - 1)(2e^{-0.04t} - 1)(2e^{-0.06s} - 1)) \end{aligned}$$

(c) Utilizando la Cópula de Clayton

$$S_{X_1,X_2} = C_{Cl}(S_{X_1}, S_{X_2}) = (e^{0.75(0.04)t} + e^{0.75(0.06)s} - 1)^{-4/3}$$

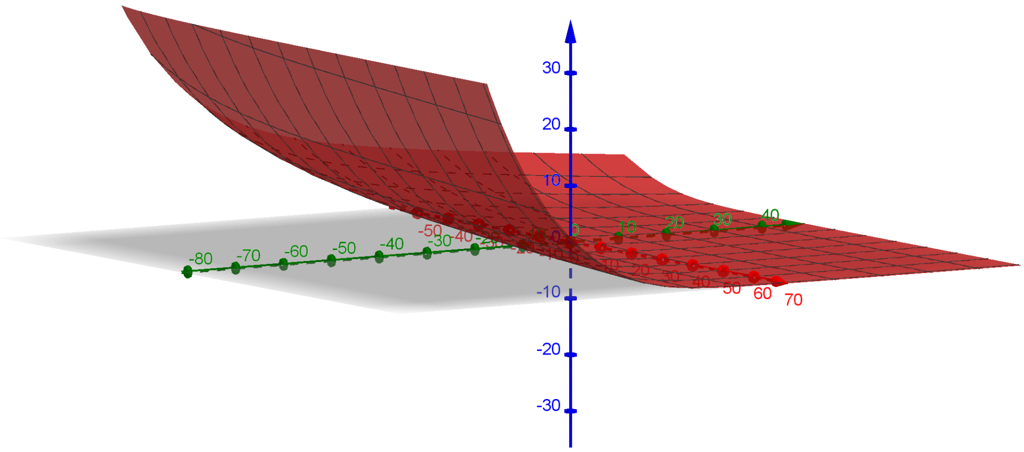


FIGURA 8.1: Gráfico de la supervivencia conjunta usando la Cópula de Frank

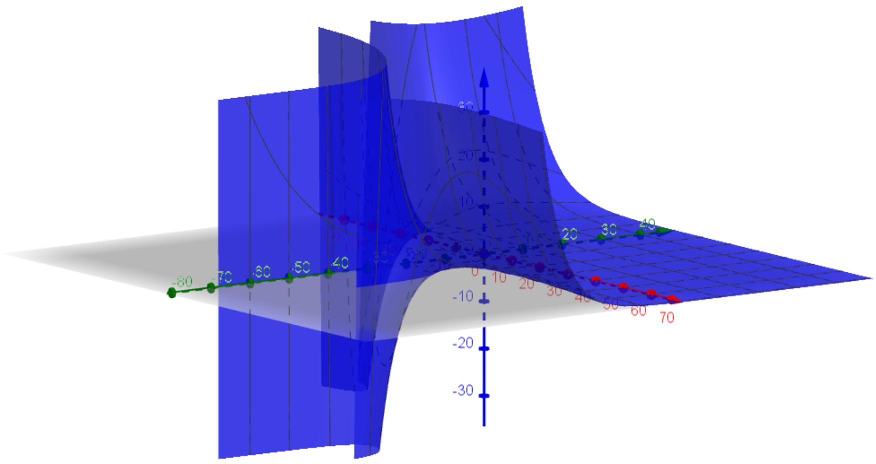


FIGURA 8.2: Gráfico de la supervivencia conjunta usando la Cópula Cúbica

En las figuras 8.1, 8.2 y 8.3 se presentan gráficamente las distribuciones conjuntas utilizando las copulas de Frank, Cubica y Clayton respectivamente. También se observa el comportamiento de cada distribución conjunta mas a detalle enfocando los gráficos al $[0, 1]$, en las figuras 8.4, 8.5 y 8.6. Finalmente se observa el gráfico de las tres distribuciones en el mismo plano en la figura 8.7 .

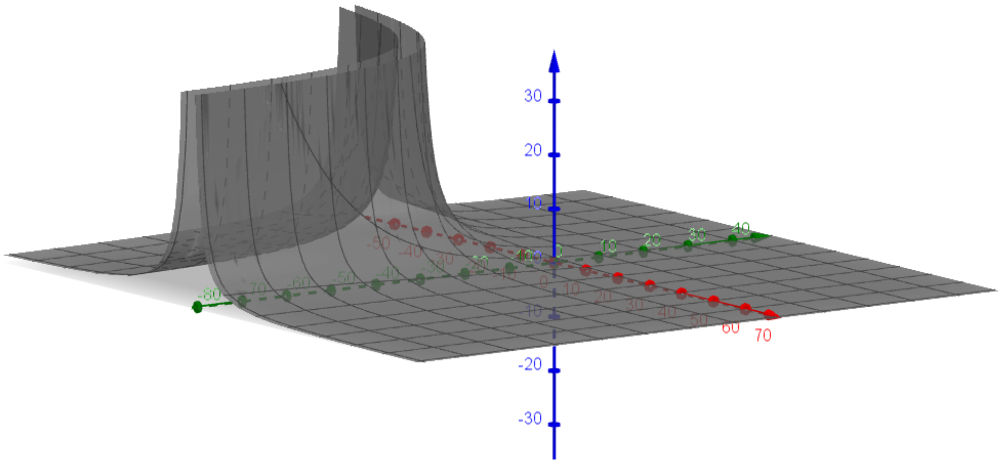
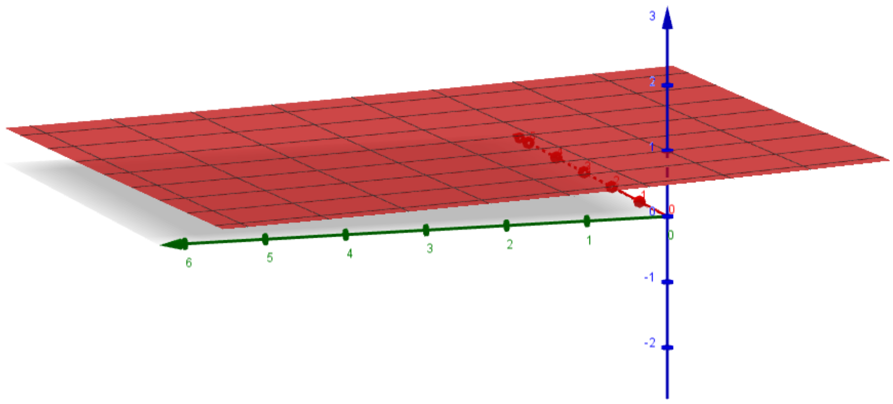


FIGURA 8.3: Gráfico de la supervivencia conjunta usando la Cópula Cúbica

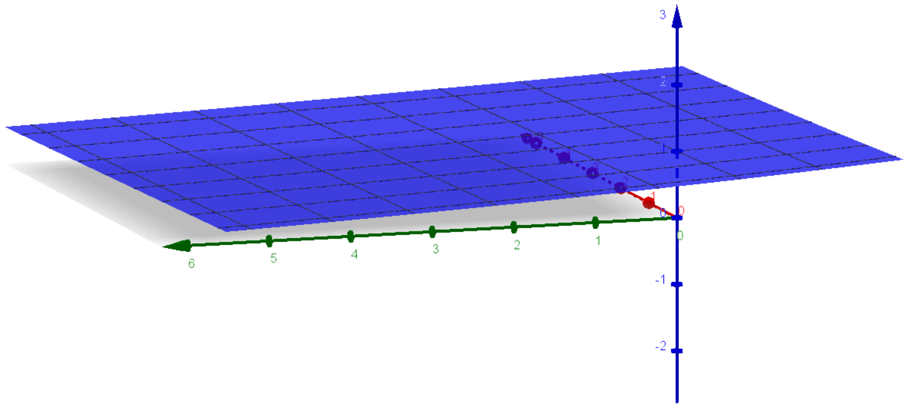


(a)

FIGURA 8.4: Gráfico de la supervivencia conjunta usando la Cópula de Frank enfocada en $[0, 1]$

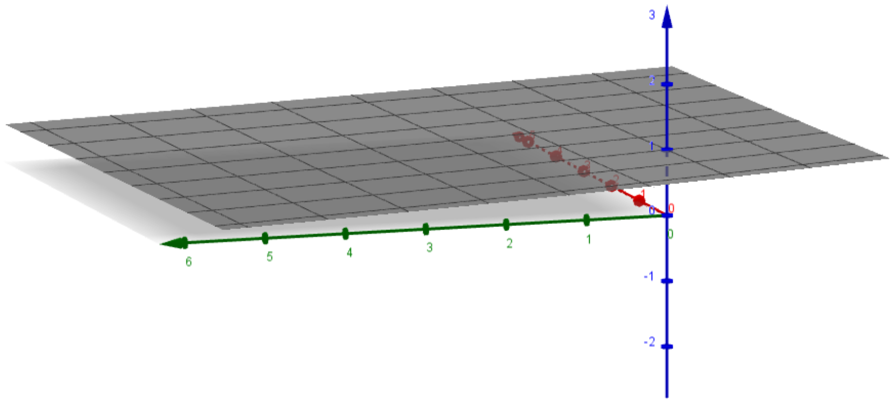
Analizando gráficamente se puede observar que en efecto las copulas están funcionando pues satisfacen que en cero tienen probabilidad 1 y con el pasar del tiempo estas decrecen hasta tender a cero, que son las condiciones básicas de una distribución de supervivencia.

Parecería que las tres distribuciones dan el mismo resultado, los cual haría difícil escoger una de ellas pero como se observa en la figura 8.8 son iguales en $[0, 1]$, mas no lo son en todo punto.



(b)

Figura 8.5: Gráfico de la supervivencia conjunta usando la Cópula Cúbica enfocada en $[0, 1]$



(c)

Figura 8.6: Gráfico de la supervivencia conjunta usando la Cópula Cúbica enfocada en $[0, 1]$

Después de observar todos los gráficos y la tabla de valores 8.8, se concluye que cualquiera de las tres distribuciones on utilizables pero se tomaría las mas simple algebraicamente y la que decrezca un poco menos rápido, por ello se tomaría la copula de Clayton.

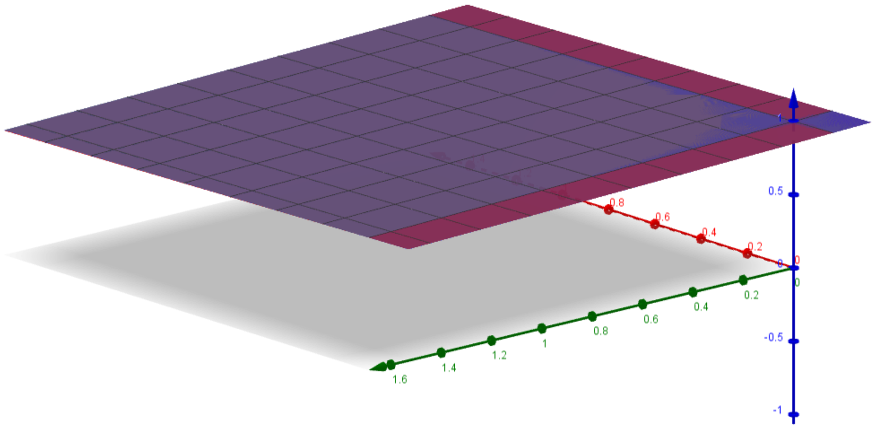


FIGURA 8.7: Gráfico de las tres distribuciones en el mismo espacio enfocada en $[0, 1]$

frank	cubica	clayton	(t,s)
0.95	0.95	0.95	(0.5, 5)
0.93	0.93	0.93	(0.75, 0.75)
1	1	1	(0, 0)
0.25	0.27	0.33	(10, 15)

FIGURA 8.8: Cuadro de valores comparativo para las tres distribuciones

Capítulo 9

Conclusiones y Recomendaciones

9.1. Conclusiones

La distribución de supervivencia que se plantea en este trabajo, en conjunto con los demás apartados que se presentan, y la expansión a modelos con beneficios de nivel y el trabajo con funciones de riesgo exponenciales, son el fundamento de toda la teoría existente en la gestión de riesgos en las ciencias actuariales.

Este trabajo tiene toda la orientación práctica y profesional, para ello una de las partes más importante es la teoría de tiempos mínimos de fallo, que como se pudo observar con los modelos prácticos que se presentan, son la base de las distintas aplicaciones que se realizan hoy en día en actuaria y finanzas.

Todo lo planteado en modelos de Contingencia de vida, es aplicable para gestión de riesgos financieros en general, en este caso se vió para riesgo crediticio, pero es fácil hacer la generalización de esta teoría a otro tipos de riesgos.

Con lo expuesto en este trabajo se tiene todas las bases teóricas para la aplicación empírica de un modelo de contingencia de vida, con datos de nuestro entorno, el uso del modelo de choque común y las cópulas financieras, abre un abanico de innumerables aplicaciones prácticas en el ámbito financiero de nuestro país, pues al final de todo la intención de estudiar estas teorías no es otra que intentar su aplicación, cosa que por lo visto en este texto es más que posible.

9.2. Recomendaciones

Como ya se dijo, este trabajo es una base para cualquier tipo de aplicación empírica y esto implica que es la base para cualquier cantidad de trabajos futuros (aplicados y teóricos) en el área.

Se presento una simulación progresiva del modelo de contingencia de vida, esta simulación se puede ampliar aun mas y aplicar muchos mas conceptos.

Para futuros trabajos se recomienda decantarse por la parte final de este texto y orientarse a las aplicaciones empíricas, para ello aun hace falta profundizar en el tipo de aplicación que se quiera realizar, pues acá se dejan abiertas muchas ramas de aplicación que se pueden explotar de muy buena forma, muchas de las cuales sin tener costos de investigación tan elevados.

Si se quisiera seguir en la implementación de los últimos modelos planteados (GEORGE) se necesitan los datos adecuados que en este trabajo se planteó e intentó obtener, pero la obtención sería una de las partes más importantes en trabajos futuros, ya que estos datos deben de ser de la misma índole y la variable a utilizar debe ser el tiempo, formando una muestra o base de datos lo suficientemente grande (entre 500 y 700 tiempos) para que los resultados sean confiable.

Bibliografía

[1] Morris H. Degroot, Mark J. Schervis *Probability and Statistic*, Cuarta Edición, Pearson Education, Inc. , Versión 2012.

[2] Butt, Adam, *ANUx – Introduction to Actuarial Science*, «https://www.edx.org »(Cursos en linea).

[3] S. David Promislow, *Fundamentals of Actuarial Mathematics* , Third Edition , WILEY-INTERSCBENCE PUBLICATION., 2015.

[4] Pedro Aguilar Beltrán, Juliana Gudiño Antillón, *Fundamentos Actuariales de Primas y Reservas de Finanzas*, Fundación MAPFRE, 2007.

[5] Pacheco, Oscar J. Huertas, Jaime A. Palencia, Armando S., *Uso de las cópulas de supervivencia en la estimación de un modelo de riesgo financiero*, UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA, 2012.