



Universidad de El Salvador

Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Escuela de Matemática

DE LA GEOMETRÍA SINTÉTICA A LA
GEOMETRÍA HIPERBÓLICA.

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Matemática

PRESENTAN:

Br. Saúl Fernando López Argueta LA09001.

Br. Wilner Edenilson Vásquez Hernández VH10007.

ASESOR EXTERNO:

Dr. Manuel Cruz López.

ASESORES INTERNOS:

Lic. Ernesto Américo Hidalgo Castellanos.

MSc. Yoceman Adony Sifontes Rivas.

Ciudad Universitaria, 7 de septiembre de 2017

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

MSc. ROGER ARMANDO ARIAS.

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO INTERINO:

ING. NELSON BERNABÉ GRANADOS

SECRETARIO GENERAL:

MSc. CRISTOBAL HERNAN RÍOS BENITEZ

FISCAL GENERAL:

LICDA. BEATRIZ MÉLENDEZ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

LIC. MAURICIO HERNÁN LOVO CÓRDOVA.

VICE-DECANO:

LIC. CARLOS ANTONIO QUINTANILLA APARICIO.

SECRETARIA:

LICDA. DAMARIS MELANY HERRERA TURCIOS.

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR DE ESCUELA:

DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES.

ASESOR EXTERNO:

DR. MANUEL CRUZ LÓPEZ.

ASESORES INTERNOS:

LIC. ERNESTO AMÉRICO HIDALGO CASTELLANOS.

MSc. YOCEMAN ADONY SIFONTES RIVAS.

Dedicatoria.

*Este trabajo es dedicado a nuestros padres Blanca, Francisco, María y Tomás por su
paciencia, apoyo y por siempre creer en nosotros.*

Agradecimientos.

Primero a Dios, por bendecirnos y por darnos sabiduría y las fuerzas necesarias para completar nuestros estudios superiores.

A nuestros padres, por ser nuestro apoyo incondicional y sin medida para lograr nuestros objetivos y en especial este que estamos a punto de cumplir.

A nuestros amigos Glenda, Julissa, Marlene, Esmeralda, Marvin, Brayan.

A Karla María Posada por brindarnos su amistad y su ayuda incondicional.

A nuestro asesor externo: Dr. Manuel Cruz López por la orientación y ayuda que nos brindó para la realización de esta tesis, por su apoyo y consejos que nos permitieron aprender mucho más y aportar construcciones originales al proyecto.

A nuestros asesores internos: Lic. Ernesto Américo Hidalgo y MSc. Yoceman Sifontes Rivas por la disponibilidad, dedicación, esfuerzo y apoyo en cada parte de este trabajo.

A nuestro jurado: MSc. Gabriel Alexander Chicas Reyes y Lic. Jorge Balmore Flores Tejada, por la revisión y aportación de ideas para la realización de un buen trabajo.

Índice general

	Página
Introducción.	XIII
1. Circunferencias coaxiales e inversión.	1
1.1. Circunferencias coaxiales.	1
1.2. Reflexiones.	5
1.3. Inversión geométrica.	7
1.3.1. Definición, construcción y propiedades de la inversión.	7
1.3.2. Inversiones de circunferencias coaxiales.	14
1.3.3. Inversiones y Cónicas.	15
1.3.4. Inversión que pone concéntricas dos circunferencias.	19
1.4. Aplicaciones de la inversión.	20
1.4.1. El problema de Apolonio.	20
1.4.2. El porisma de Steiner.	23
2. Modelos hiperbólicos.	27
2.1. Historia de la geometría hiperbólica.	27
2.2. Modelo del semiplano superior.	31
2.2.1. Las líneas hiperbólicas en \mathbb{H}	31
2.2.2. Mediatriz de un segmento hiperbólico en \mathbb{H}	34
2.2.3. Perpendicular a una línea hiperbólica por un punto dado en \mathbb{H}	35
2.2.4. Centro hiperbólico de una circunferencia en \mathbb{H}	36
2.2.5. Triángulos hiperbólicos en \mathbb{H}	37
2.3. El modelo del disco de Poincaré.	40
2.3.1. Las líneas hiperbólicas en \mathbb{D}	41

2.3.2.	Mediatriz de un segmento hiperbólico en \mathbb{D}	44
2.3.3.	Perpendicular a una línea hiperbólica por un punto dado en \mathbb{D}	44
2.3.4.	Centro hiperbólico de una circunferencia en \mathbb{D}	45
2.3.5.	Triángulos hiperbólicos en \mathbb{D}	46
2.4.	El modelo de Beltrami-Klein.	46
2.4.1.	Líneas hiperbólicas en $\mathbb{B}_{\mathbb{K}}$	47
2.4.2.	Perpendicular a una línea hiperbólica por un punto dado en $\mathbb{B}_{\mathbb{K}}$	48
2.4.3.	Punto medio de un segmento hiperbólico en $\mathbb{B}_{\mathbb{K}}$	50
2.5.	La métrica hiperbólica en \mathbb{D}	51
2.5.1.	Distancia entre dos puntos sobre una línea hiperbólica que pasa por el centro de \mathbb{S}_{∞}	51
2.5.2.	Distancia entre dos puntos cualesquiera en \mathbb{D}	59
2.5.3.	Distancia hiperbólica en \mathbb{D}	62
2.6.	Equivalencia entre los modelos.	65
2.6.1.	Equivalencia entre los modelos de Poincaré.	65
2.6.2.	Equivalencia entre el modelo del disco de Poincaré y el modelo de Beltrami-Klein.	66
2.7.	Trigonometría hiperbólica.	70
2.7.1.	Las funciones hiperbólicas.	70
2.7.2.	El ángulo del paralelismo.	70
2.7.3.	Triángulo rectángulo con ángulos α , $\pi/2$ y β	72
2.7.4.	El teorema de Pitágoras.	73
3.	Teselaciones hiperbólicas.	75
3.1.	Triángulos hiperbólicos.	77
3.1.1.	Construcciones en el modelo del disco de Poincaré.	77
3.1.2.	Construcciones en el modelo del semiplano superior de Poincaré.	82
3.2.	Teselaciones hiperbólicas.	87
3.2.1.	Teselaciones.	87
3.2.2.	Teselaciones triangulares del plano hiperbólico.	91
3.2.3.	Teselaciones con polígonos regulares.	98
	Epílogo.	101

A. Fórmulas de adición.	103
B. Coseno y seno en un triángulo hiperbólico.	105
C. Teoremas del seno y coseno.	109

Introducción.

En el presente trabajo daremos una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional desde el punto de vista geométrico. Se estudiarán tres modelos de la geometría hiperbólica, los cuales son: el modelo del semiplano superior de Poincaré, el modelo del disco de Poincaré y el modelo de Beltrami-Klein. Para hacer la descripción de estos modelos, necesitamos primero estudiar las herramientas euclidianas que nos servirán para la construcción de los objetos geométricos en cada uno de los modelos.

La inversión geométrica y las familias de circunferencias coaxiales serán las herramientas que nos van a servir para hacer las construcciones antes mencionadas. Por lo tanto, en el capítulo 1 definimos la inversión geométrica y sus propiedades, así como también la familia de circunferencias coaxiales y sus propiedades con respecto a la inversión.

Habiendo descrito las herramientas principales para hacer una descripción de cada modelo a estudiar de la geometría hiperbólica, describimos en el capítulo 2 los tres modelos antes mencionados, deducimos la métrica hiperbólica en el modelo del disco de Poincaré y estudiamos un poco de trigonometría en el modelo del semiplano superior de Poincaré. En el capítulo 3 hablamos de teselación hiperbólica, la cual es una descomposición del plano hiperbólico con piezas del mismo tamaño que no se tienen que sobreponer ni dejar huecos. Para ello hacemos la construcción de un triángulo hiperbólico con ángulos dados en los modelos de Poincaré y damos las condiciones que tienen que cumplir estos ángulos para poder hacer una teselación del plano hiperbólico. También abordamos las teselaciones con polígonos regulares, los cuales son teselaciones con polígonos hiperbólicos donde todos sus lados son iguales y ángulos internos también son iguales. Se da la condición que tiene que cumplir un polígono regular para poder teselar el plano y nos damos cuenta que en esta geometría existen infinitas teselaciones con polígonos regulares. Recordemos que el plano euclidiano sólo se puede teselar con tres polígonos regulares: triángulos, cuadrados y hexágonos.

Capítulo 1

Circunferencias coaxiales, inversión y sus propiedades.

En este capítulo damos la definición y construcción de las familias de circunferencias coaxiales, las cuales juegan un papel muy importante a la hora de definir los objetos geométricos en cada uno de los modelos que describiremos para la geometría hiperbólica en el capítulo 2. También recordaremos propiedades de reflexiones y en especial la inversión, que es una reflexión con respecto a una circunferencia. Estudiaremos las propiedades de la inversión y por último haremos uso de la inversión para resolver el problema de Apolonio y los porismas de Steiner. En las secciones 1.1 y 1.2 se seguirá de cerca [CG1] y las demostraciones de las propiedades, proposiciones y teoremas de la sección 1.3 se pueden consultar en [Rev].

1.1. Circunferencias coaxiales.

En esta sección estudiaremos una familia muy importante de circunferencias. La propiedad que define a la familia es que existe un punto en el plano tal que la potencia de ese punto con respecto a todas las circunferencias de la familia es la misma, es decir, que el valor de la potencia es constante.

Recordemos que si P es un punto en el plano y si se fija una circunferencia con centro O , entonces para cualquier línea que pase por P y corte a la circunferencia en dos puntos A y B , se cumplirá que $PA \cdot PB$ es constante, independientemente de la posición de la línea. El valor de dicha constante se denomina la potencia del punto P .

Definición 1.1. El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de todos los puntos $P \in \mathbb{E}^2$ cuyas potencias con respecto a las dos circunferencias son iguales.

El siguiente teorema nos da la forma de obtener el eje radical de dos circunferencias dependiendo de la posición de estas. El único caso en donde no existe el eje radical de dos circunferencias es cuando una está contenida en la otra.

Teorema 1.1. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias. Entonces se cumple una de las siguientes propiedades:

1. Si C_1 y C_2 se intersecan, entonces su eje radical es la línea que pasa por los puntos de intersección.
2. Si las dos circunferencias C_1 y C_2 son tangentes, entonces su eje radical es la línea tangente común.
3. Sean C_1 y C_2 circunferencias ajenas y k, l, m, n son los ejes radicales de C_1 y C_3 , C_1 y C_4 , C_2 y C_3 , C_2 y C_4 respectivamente para cualesquiera dos circunferencias C_3 y C_4 en \mathbb{E}^2 que cortan a C_1 y C_2 . Sea P el punto de intersección de n y l y sea Q el punto de intersección de m y k . Entonces el eje radical de C_1 y C_2 es la línea que pasa por P y Q .

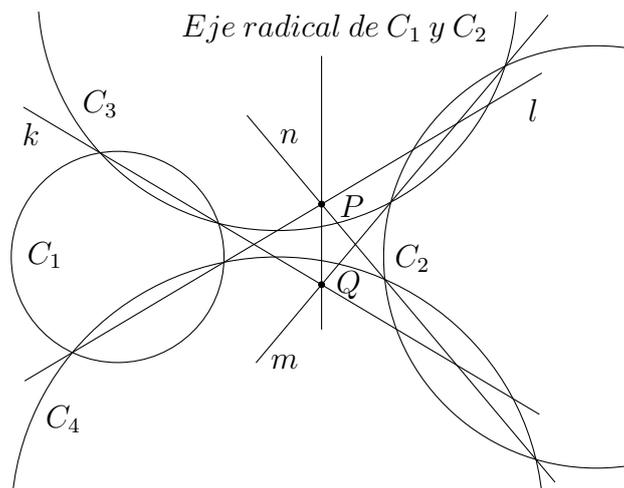


Figura 1.1: Eje radical de dos circunferencias ajenas.

Corolario 1.1. Sean C_1 , C_2 y C_3 tres circunferencias en \mathbb{E}^2 cuyos centros no son colineales. Entonces, los tres ejes radicales son concurrentes en un punto llamado el centro radical de las circunferencias.

Observación 1.1. 1. *El eje radical de dos circunferencias es ortogonal a la línea de los centros.*

2. *El eje radical de dos circunferencias, no contenidas una en la otra, es la línea que pasa por los puntos medios de los segmentos determinados por los puntos de contacto de las tangentes comunes a las circunferencias.*

Un conjunto de circunferencias se denomina una familia cuando cumplen una o varias propiedades, a continuación definimos una de ellas.

Definición 1.2. *Sea \mathcal{F} una familia de circunferencias en el plano. Decimos que \mathcal{F} es una familia coaxial si existe una línea que es el eje radical de cualesquiera dos miembros de \mathcal{F} .*

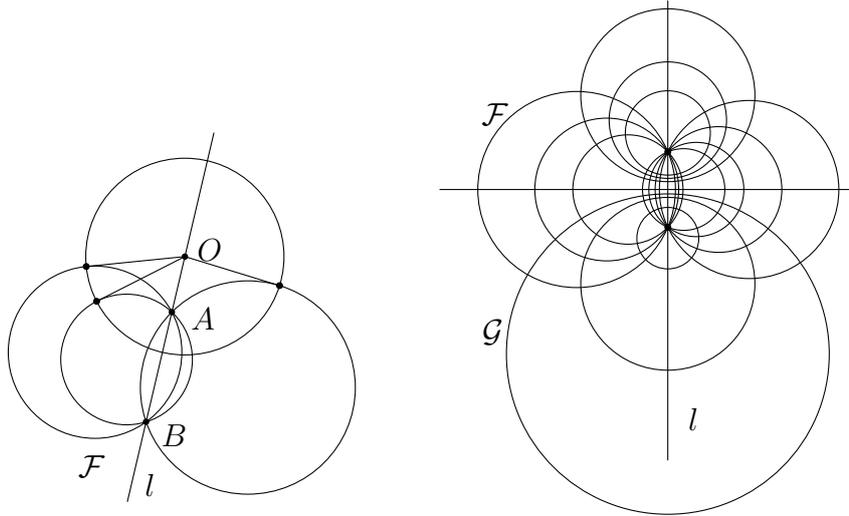
Del Teorema 1.1 y la definición anterior podemos decir que los centros de las circunferencias coaxiales son colineales y que el eje radical es ortogonal a la línea de los centros de las circunferencias coaxiales.

Definición 1.3. *A una familia \mathcal{F} de circunferencias que pasan por dos puntos fijos se le llama familia secante.*

Proposición 1.1. *El eje radical de una familia secante \mathcal{F} es la línea que pasa por los puntos de intersección. Más aún, la familia \mathcal{F} es coaxial.*

Ahora describiremos otro tipo de familia que llamaremos familia ajena, ya que sus miembros no se intersecan entre ellos.

Sea \mathcal{F} una familia coaxial secante con eje radical l , donde A y B son sus puntos de intersección. Tomemos un punto $O \in l$ distinto de A y B ; a partir de O trazamos líneas tangentes a las circunferencias de la familia \mathcal{F} . Entonces los segmentos determinados desde O a cada punto de tangencia son iguales. Estos segmentos determinan el radio de una circunferencia con centro en O . Observemos que esta circunferencia es ortogonal a todas las circunferencias de \mathcal{F} , ver figura 1.2(a).



(a) Circunferencia ortogonal a la familia \mathcal{F} .

(b) Familias coaxiales \mathcal{F} y \mathcal{G} .

Figura 1.2: Construcción de la familia ajena \mathcal{G} .

Con la construcción anterior se puede definir una familia de circunferencias \mathcal{G} como la familia de circunferencias que tienen un centro en cualquier punto sobre l , excepto en el segmento AB , y que son ortogonales a todas las circunferencias de la familia \mathcal{F} , ver figura 1.2(b).

Observación 1.2. a) Si N es el punto medio del segmento AB , el radio de cualquier circunferencia de la familia \mathcal{G} (con centro O) es menor que la magnitud del segmento ON . A la familia \mathcal{G} se le llama familia ajena.

b) El eje radical de la familia \mathcal{G} es la línea de los centros de la familia \mathcal{F} .

Por la observación anterior y la forma en la que se ha construido la familia \mathcal{G} , no es difícil demostrar que para cualesquiera dos circunferencias de la familia, el eje radical es la línea de los centros de la familia \mathcal{F} .

Proposición 1.2. La familia de circunferencias \mathcal{G} es una familia coaxial.

Observemos que los puntos en los que una circunferencia ortogonal corta a la línea de los centros de dos circunferencias ajenas son dos puntos fijos e independientes de la circunferencia ortogonal de que se trate. A estos puntos fijos se les llama puntos límites.

Observación 1.3. a) A los ejes radicales de ambas familias los podemos ver como circunferencias de radio infinito por lo que también forman parte de sus respectivas familias.

- b) La familia ortogonal a la familia de circunferencias ajenas \mathcal{G} es precisamente la familia de circunferencias secantes \mathcal{F} .
- c) Si tomamos cualquier punto $P \in \mathbb{E}^2$, entonces por P siempre pasa una circunferencia de la familia \mathcal{G} y una de la familia \mathcal{F} .

En el Teorema 1.1 definimos el eje radical para dos circunferencias tangentes. Así, si tenemos una familia de circunferencias tangentes en un punto, a esa familia la llamaremos familia de circunferencias tangentes. Más aún, el eje radical de cualesquiera dos de ellas es la línea tangente común, esto implica que dicha familia es una familia de circunferencias coaxiales.

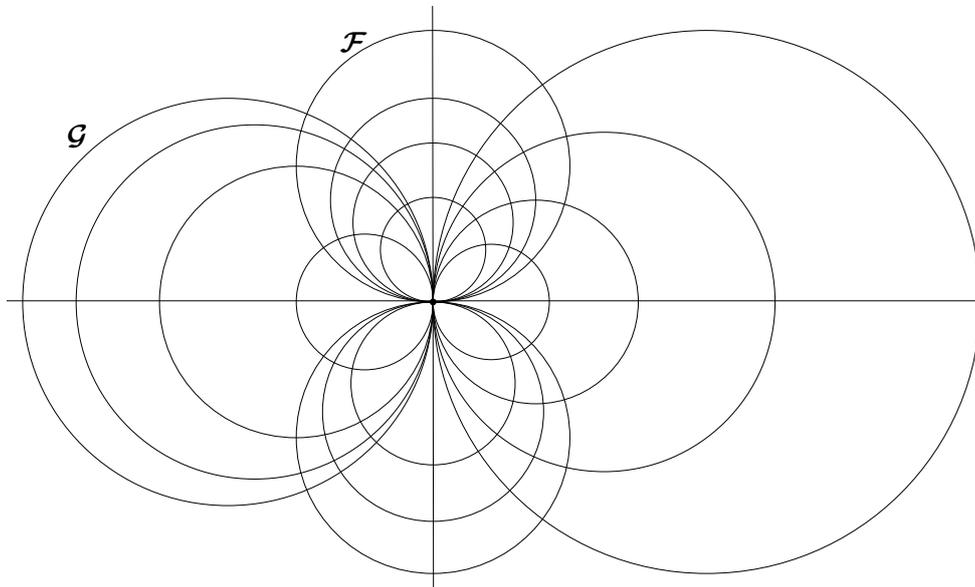


Figura 1.3: Familias coaxiales tangentes \mathcal{F} y \mathcal{G} .

Definición 1.4. A una familia coaxial \mathcal{F} de circunferencias que pasan por un punto fijo se le llama familia coaxial tangente.

Observación 1.4. La familia ortogonal \mathcal{G} de \mathcal{F} son todas las circunferencias ortogonales a cualquier miembro de \mathcal{F} que pasa por el punto de tangencia.

1.2. Reflexiones.

Sea \mathcal{L} una línea en el plano euclidiano \mathbb{E}^2 y \mathcal{C} una circunferencia con centro en un punto $O \in \mathbb{E}^2$ y radio $r > 0$.

Definición 1.5. Una reflexión con respecto de \mathcal{L} es una transformación $R_{\mathcal{L}} : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ que a cada punto $P \in \mathbb{E}^2$ le asigna un punto $P' \in \mathbb{E}^2$ tal que el segmento PP' es ortogonal a la línea \mathcal{L} y es bisecado por esta.

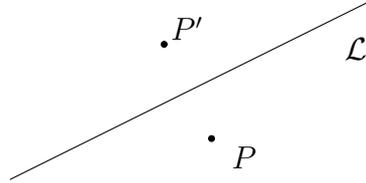


Figura 1.4: Reflexión con respecto de \mathcal{L} .

Si \mathcal{L}' es otra línea en \mathbb{E}^2 , entonces la composición $R_{\mathcal{L}'} \circ R_{\mathcal{L}} : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ también es una transformación del espacio euclidiano \mathbb{E}^2 que está bien definida y está dada por

$$(R_{\mathcal{L}'} \circ R_{\mathcal{L}})(P) := R_{\mathcal{L}'}(R_{\mathcal{L}}(P)).$$

Las líneas \mathcal{L} y \mathcal{L}' pueden ser paralelas o bien pueden intersectarse; dependiendo de esto, la composición definirá dos tipos distintos de transformaciones elementales del espacio \mathbb{E}^2 .

Las siguientes propiedades de las reflexiones se tienen de manera inmediata:

- a) La línea \mathcal{L} queda fija bajo la reflexión $R_{\mathcal{L}}$; es decir, si $P \in \mathcal{L}$ entonces $R_{\mathcal{L}}(P) = P$.
- b) Si denotamos por $id : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ a la transformación identidad, esto es, id es la transformación que deja a todos los puntos de \mathbb{E}^2 fijos. Definimos $R_{\mathcal{L}}^2 := R_{\mathcal{L}} \circ R_{\mathcal{L}}$. Es decir, $R_{\mathcal{L}}^2 = id$. A la transformación $R_{\mathcal{L}}^2$ se le llama involución.
- c) De la propiedad anterior se sigue que $R_{\mathcal{L}}$ es invertible y que su inversa es $R_{\mathcal{L}}^{-1} = R_{\mathcal{L}}$.

Definición 1.6. a) La reflexión de una línea con respecto de \mathcal{L} es una línea.

b) La reflexión de una circunferencia con respecto de \mathcal{L} es una circunferencia.

Teorema 1.2. a) Si dos líneas l y m se intersectan en un punto P , entonces sus reflexiones con respecto de \mathcal{L} también se intersectan en el punto P' (inverso de P) y forman el mismo ángulo que el comprendido entre l y m .

b) Si dos circunferencias a y b se intersectan, entonces sus reflexiones con respecto de \mathcal{L} también se intersectan y con el mismo ángulo que el comprendido entre a y b .

Observación 1.5. a) *El resultado anterior muestra que la reflexión con respecto de \mathcal{L} conserva ángulos.*

b) *El ángulo en el vértice P' va en dirección contraria al ángulo en el vértice P ; es decir, si el ángulo β se orienta de l a m entonces el ángulo β' se orienta de m a l .*

Existe otro tipo de reflexiones muy importante del plano euclidiano \mathbb{E}^2 , dichas reflexiones son con respecto a una circunferencia \mathcal{C} .

Definición 1.7. *A una reflexión $R_{\mathcal{C}} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ con respecto de una circunferencia \mathcal{C} se le llama inversión con respecto de \mathcal{C} .*

Observación 1.6. *En el resto de este capítulo llamaremos inversión a la reflexión con respecto de \mathcal{C} .*

1.3. Inversión geométrica.

1.3.1. Definición, construcción y propiedades de la inversión.

Definición 1.8. *Dado $\mathcal{C} \in \mathbb{E}^2$, una circunferencia de centro O y radio r . Para cada punto $A \in \mathbb{E}^2$ distinto de O , el punto inverso de A respecto de \mathcal{C} es el punto $A' \in \mathbb{E}^2$ que está sobre el rayo OA y que satisface la relación*

$$OA \cdot OA' = r^2.$$

A la circunferencia \mathcal{C} se le llama circunferencia de inversión y a su centro O centro de inversión.

Cuando el contexto asocia a esta notación OA un valor numérico nos referimos a la distancia entre los punto O y A .

Construcción 1.1. *Construcción geométrica de la inversión.*

Sea $A \in \mathbb{E}^2$ un punto interior a \mathcal{C} , como en la figura 1.5. Sea T uno de los puntos de la intersección de \mathcal{C} con la perpendicular a la recta OA desde A ¹. Denotemos por A' al punto de intersección de la recta OA con la tangente a \mathcal{C} desde T . Por el teorema

¹Notar que OT es radio de \mathcal{C} .

del cateto, los triángulos $\triangle OAT$ y $\triangle OTA'$ son semejantes, por ser rectángulos con un ángulo en común. Por tanto

$$\frac{OA}{r} = \frac{r}{OA'},$$

es decir, $OA \cdot OA' = r^2$, esto implica que A' es el inverso de A con respecto a \mathcal{C} .

La figura 1.5 muestra la manera de construir el punto inverso A' del punto A cuando éste es interior a la circunferencia. Usando la misma figura, si el punto A' está fuera de la circunferencia, trazamos una tangente a la circunferencia desde A' y, siendo T el punto de tangencia, por T trazamos una perpendicular a la recta OA' que cortará a ésta en el punto A , inverso del punto A' .

Si el punto A es exterior a la circunferencia de inversión de radio r , es decir, $OA > r$, entonces el inverso de A es interior a la circunferencia de inversión de radio r , es decir, $OA' < r$. Por último, los puntos de la circunferencia de inversión se invierten en sí mismo, es decir, son puntos fijos de la transformación.

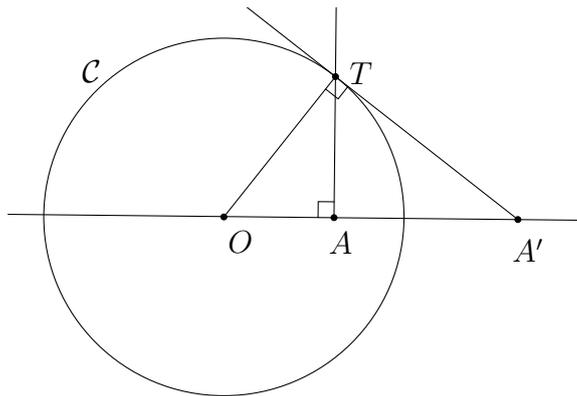


Figura 1.5: Construcción de la inversión.

Obsevemos que cuando el punto A se acerca al centro de inversión O , su inverso A' se aleja infinitamente de O , es por eso que hay exactamente un punto del plano, el centro de inversión O , que se queda sin imagen por la transformación. Por convención se usa que el inverso del centro O de la circunferencia \mathcal{C} es el punto al infinito que se denota por ∞ . Es útil tener esta idea en mente para entender mejor las propiedades que veremos a continuación.

Es claro que si A' es el inverso de A , entonces A es el inverso de A' .

De manera que tenemos:

Propiedad 1.1. *Las inversiones son involutivas. Es decir, si φ es una inversión,*

entonces

$$\varphi^2 = id.$$

Por ángulo entre dos circunferencias entenderemos el ángulo que forman las tangentes a cada una de ellas en uno de los puntos de intersección, o equivalentemente el ángulo entre los radios en ese punto.

Las circunferencias ortogonales están íntimamente relacionadas con la inversión.

Dos circunferencias secantes son ortogonales cuando se cortan formando un ángulo recto, es decir, cuando sus tangentes (o radios) en uno de los puntos de intersección son perpendiculares.

Proposición 1.3. Sean A y A' puntos inversos respecto a \mathcal{C} , y sea c cualquier circunferencia que pasa por A y A' . Entonces \mathcal{C} y c son ortogonales.

De la proposición anterior se puede concluir que

“Una inversión deja fija una circunferencia ortogonal a la circunferencia de inversión”

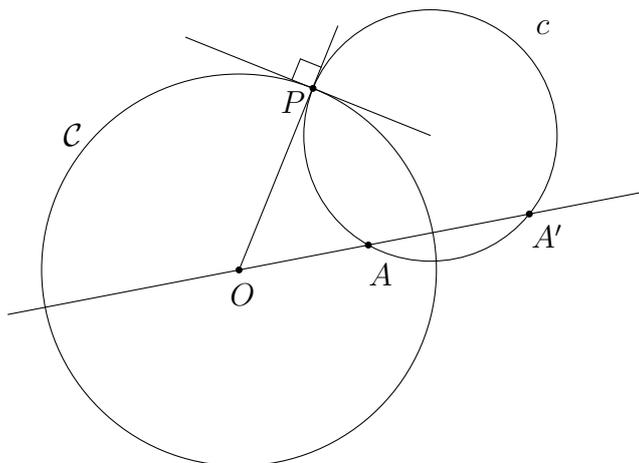


Figura 1.6: Circunferencias ortogonales.

Una de las propiedades más útiles de la inversión es que conservan los ángulos.

Proposición 1.4. Sean A' y B' puntos inversos respectivamente de A y B por una inversión respecto a una circunferencia \mathcal{C} de centro O . Entonces

$$\angle OAB = \angle OB'A' \text{ y } \angle OBA = \angle OA'B'.$$

En particular los puntos A, B, A' y B' son concíclicos, es decir están sobre una circunferencia.

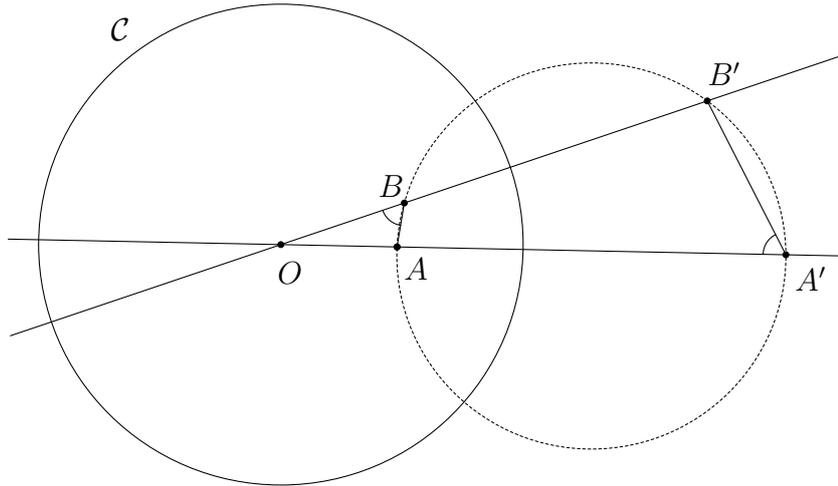


Figura 1.7: Puntos concíclicos.

Notemos que por la proposición anterior, los triángulos $\triangle OAB$ y $OA'B'$ son semejantes.

Observación 1.7. *Por la Proposición 1.3, la circunferencia de inversión y la circunferencia determinada por A, A', B, B' son ortogonales.*

Observación 1.8. *Si sabemos que por una inversión de centro O , un punto A se transforma en un punto A' , con O, A, A' conocidos, entonces podemos construir fácilmente el transformado de cualquier otro punto B , como intersección de la recta OB con la circunferencia determinada por A, A', B .*

Las demostraciones de los siguientes resultados son sencillas y se pueden consultar en [Rev].

La siguiente propiedad nos da una conexión entre la distancia de dos puntos y la distancia de sus inversos.

Propiedad 1.2. *Sean A y B puntos distintos y sean A' y B' los inversos respecto de una circunferencia de centro O y radio r . Entonces*

$$A'B' = \frac{AB \cdot r^2}{OA \cdot OB}.$$

Hasta el momento lo único que hemos hecho es invertir puntos con respecto a una circunferencia centrada en cualquier punto en \mathbb{E}^2 . Pero, ¿qué sucede si en lugar de invertir puntos, deseamos invertir curvas? Podemos invertir punto por punto cualquier curva K respecto a \mathcal{C} , y denotaremos por K' a la curva inversa.

El siguiente teorema nos dice en qué se transforman las curvas más simples: rectas y circunferencias.

Teorema 1.3. *Las inversiones transforman circunferencias y/o rectas en circunferencias y/o rectas, según pasen o no por el centro de inversión.*

- a) *La imagen de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por este centro.*

- b) *La imagen de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que no pasa por él.*

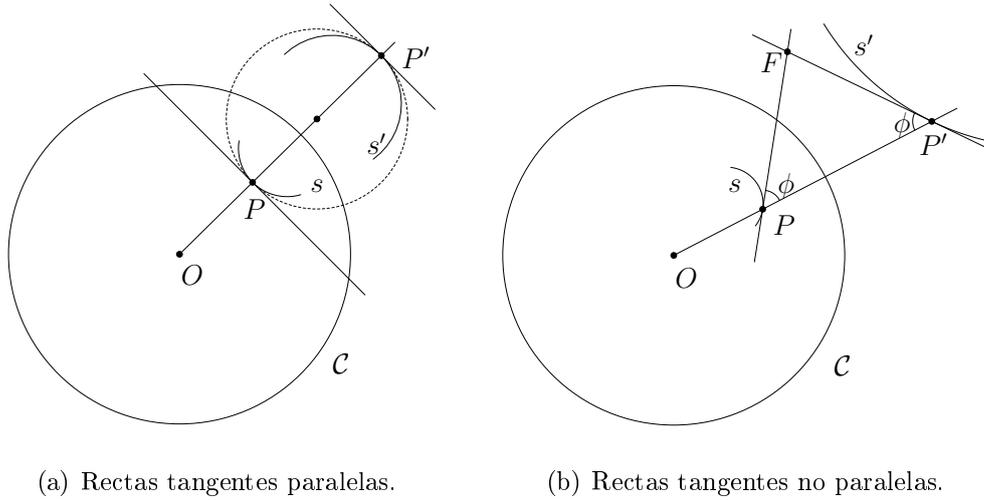
- c) *La imagen de una circunferencia que pasa por el centro de inversión, es una recta que no pasa por el centro.*

- d) *La imagen de una recta que pasa por el centro de inversión es ella misma.*

La siguiente proposición es muy importante debido a que nos servirá para demostrar que las inversiones conservan ángulos.

Proposición 1.5. *Sean dos circunferencias, s y s' , una inversa de la otra con respecto de una circunferencia de inversión \mathcal{C} , y sea P un punto de s que tiene como inverso un punto P' de s' . Se verifica que las rectas tangentes a s y s' en el punto P y P' respectivamente, son perpendiculares a la recta PP' , o bien forman con ella un triángulo isósceles de base PP' .*

Una idea para la demostración de esta propiedad es considerar un punto Q distinto de P en s y su inverso Q' en s' , después se hace tender Q a P y lo mismo sucederá con sus inversos. Se hace uso de la Proposición 1.4 para obtener lo que se desea.



(a) Rectas tangentes paralelas.

(b) Rectas tangentes no paralelas.

Figura 1.8:

Teorema 1.4. *La inversión es una transformación conforme, es decir, conserva la magnitud de los ángulos, aunque invierte su sentido.*

La siguiente definición es la de la razón cruzada, la cual a primera vista no parece de mayor importancia en este trabajo, pero debido a que se conserva bajo inversiones, nos será de mucha utilidad en el capítulo 2 cuando se defina la métrica hiperbólica.

Definición 1.9. *Dados cuatro puntos arbitrarios $A, B, C, D \in \mathbb{E}^2$, definimos la razón cruzada por la fórmula:*

$$\delta = [A, B; C, D] = \frac{AC/BC}{AD/BD}.$$

Como hay veinticuatro permutaciones de las letras A, B, C y D debería de haber veinticuatro valores de la razón cruzada, pero estas veinticuatro permutaciones no nos dan siempre valores distintos de la razón cruzada; de hecho, solamente hay seis valores de la razón cruzada dados por

$$\delta, \quad \frac{1}{\delta}, \quad 1 - \delta, \quad \frac{1}{1 - \delta}, \quad \frac{\delta - 1}{\delta} \quad \text{y} \quad \frac{\delta}{\delta - 1}.$$

Inmediatamente de la definición de la razón cruzada vemos que:

$$\delta = [A, B; C, D] = [B, A; D, C] = [C, D; A, B] = [D, C; B, A]$$

$$\frac{1}{\delta} = [A, B; D, C] = [B, A; C, D] = [C, D; B, A] = [D, C; A, B]$$

Los demás valores se pueden calcular a partir de la definición.

Teorema 1.5. *Las inversiones conservan la razón cruzada.*

Demostración. Consideremos la inversión de centro O y radio r , y denotemos por A' , B' , C' , D' los transformados de los puntos A , B , C , D respectivamente.

Por la Proposición 1.4, los triángulos $\triangle OCA$ y $\triangle OC'A'$ son semejantes. Entonces

$$\frac{OA}{OC'} = \frac{OC}{OA'} = \frac{AC}{A'C'} \implies \frac{AC}{OA} = \frac{A'C'}{OC'}. \quad (1.1)$$

De la misma forma, los triángulos $\triangle ODA$ y $\triangle OD'A'$ son semejantes y

$$\frac{OA}{OD'} = \frac{OD}{OA'} = \frac{AD}{A'D'} \implies \frac{OA}{AD} = \frac{OD'}{A'D'}. \quad (1.2)$$

Así, de (1.1) y (1.2), tenemos

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AC}{OA} \cdot \frac{OA}{AD} = \frac{A'C'}{OC'} \cdot \frac{OD'}{A'D'}$$

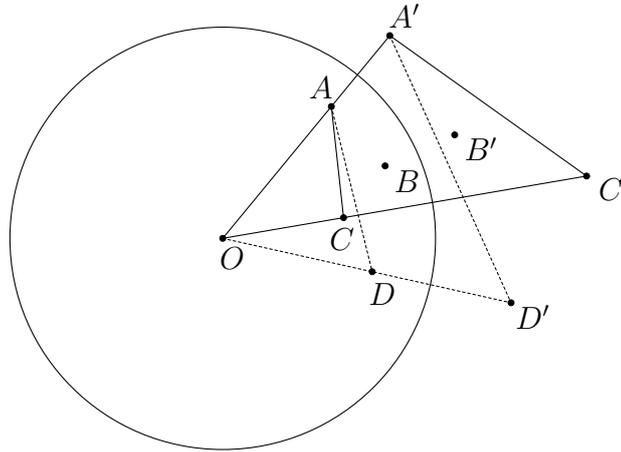


Figura 1.9: Los triángulos $\triangle OCA$ y $\triangle OC'A'$ son semejantes.

Análogamente

$$\frac{BC}{BD} = \frac{B'C'}{OC'} \cdot \frac{OD'}{B'D'}$$

por tanto

$$\begin{aligned} [A, B; C, D] &= \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} \\ &= \frac{A'C'}{OC'} \cdot \frac{OD'}{A'D'} \cdot \frac{OC'}{B'C'} \cdot \frac{B'D'}{OD'} \\ &= \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'D' \cdot B'C'} \\ &= [A', B'; C', D']. \end{aligned}$$

□

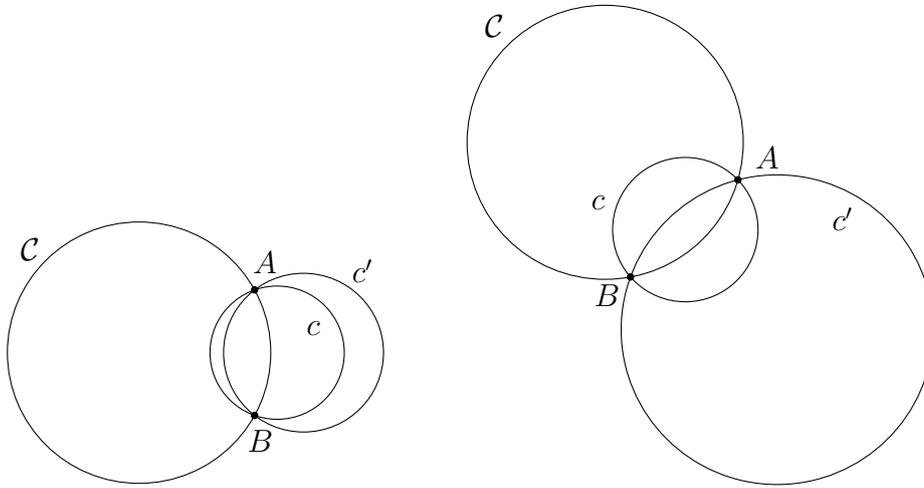
1.3.2. Inversiones de circunferencias coaxiales.

Veremos ahora cómo se comporta la inversión con respecto de circunferencias que pertenecen a las diferentes familias coaxiales.

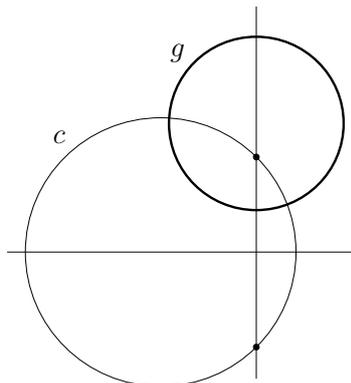
Supongamos que \mathcal{F} es la familia de circunferencias coaxiales que se intersecan en dos puntos y tomemos dos circunferencias c y c' de dicha familia. Sea \mathcal{G} la familia ortogonal a la familia \mathcal{F} tal y como la describimos anteriormente.

Analicemos todos los casos posibles:

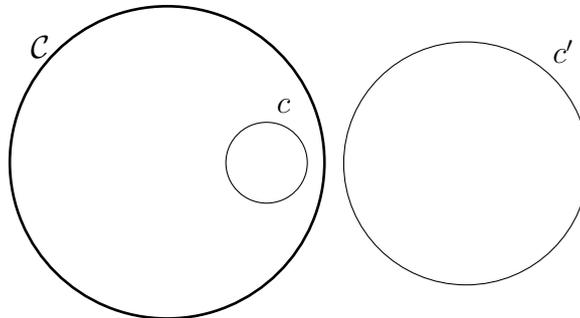
- a) Si se invierte a c con respecto a \mathcal{C} obtenemos otro elemento c' de la familia \mathcal{F} , puesto que los puntos de intersección A y B quedan fijos bajo inversión.



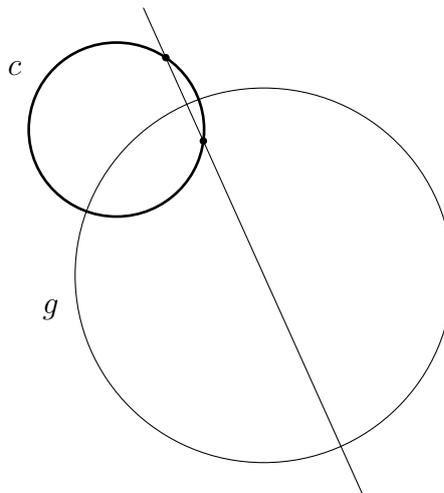
- b) Existe al menos una circunferencia \mathcal{C} de la familia coaxial \mathcal{F} con respecto a la cual c y c' son inversos una de la otra. En particular, las circunferencias que biseccion al ángulo que forman c y c' cumplen esta propiedad.
- c) Si se invierte a un miembro c de la familia \mathcal{F} con respecto a un miembro g de la familia ortogonal \mathcal{G} , entonces el elemento de \mathcal{F} es invariante bajo inversión.



- d) Si se invierte a un miembro g de la familia \mathcal{G} con otro miembro \mathcal{C} de la misma familia, entonces se invierte en c' que es otro miembro de \mathcal{G} .



- e) Si se invierte a un miembro g de la familia \mathcal{G} con respecto a un miembro c de \mathcal{F} , entonces se refleja en sí misma.



1.3.3. Inversiones y Cónicas.

Recordemos que la polar de un punto A respecto a la circunferencia \mathcal{C} de inversión es la perpendicular a la recta OA por el punto A' inverso de A , ver figura 1.10. La polar de todo punto X de la polar de A , pasa por A . En consecuencia el ángulo $\angle OX'A'$ es recto, para todo X . Se dice que A es el polo de la correspondiente recta polar.

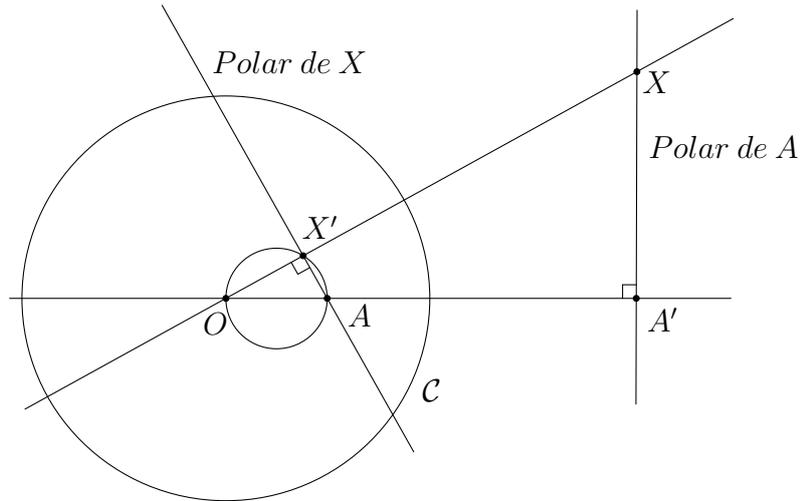


Figura 1.10: Polaridad.

Estamos acostumbrados a que las aplicaciones lleven puntos a puntos y rectas a rectas pero tenemos aquí una aplicación que lleva puntos a rectas y rectas a puntos, en el sentido de que hace corresponder a cada punto su polar y a cada polar su polo.

Las cónicas se representan de diversas formas: secciones de un cono; lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias a un punto fijo (foco) y a una recta fija (directriz) es constante; lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma (diferencia) de distancias a dos puntos dados (focos) es constante, etc. También se puede definir una cónica como la polar recíproca de una circunferencia.

Teorema 1.6. *Una cónica es el lugar geométrico de los polos de las tangentes a una circunferencia.*

Demostración. Fijamos una circunferencia de inversión \mathcal{C} de centro O y radio arbitrario $k > 0$, y consideremos una segunda circunferencia c de centro A y radio arbitrario.

Por cada punto M de la segunda circunferencia trazamos la tangente y consideramos su polo. Por construcción, el polo de la tangente es el punto P' situado sobre la perpendicular por O a la tangente y tal que $OP \cdot OP' = k^2$, donde P es el punto de intersección de la tangente con su perpendicular por O . Sea N el punto de intersección de la tangente con la recta OA y N' su inverso. Ver figura 1.11.

Queremos demostrar que cuando M se mueve en la circunferencia el punto P' describe una cónica. La polar d de A' será la directriz, y el centro O un foco.

En efecto, por la Proposición 1.4, las rectas $P'N'$ y OA son perpendiculares. Por tanto

$P'Q = N'O + OA'$ donde Q es el pie de P' sobre d . Como $OA \cdot OA' = k^2$ y $ON \cdot ON' = k^2$ tenemos

$$\frac{P'O}{P'Q} = \frac{\frac{k^2}{OP}}{\frac{k^2}{ON} + \frac{k^2}{OA}} = \frac{ON \cdot OA}{OP(ON + OA)}.$$

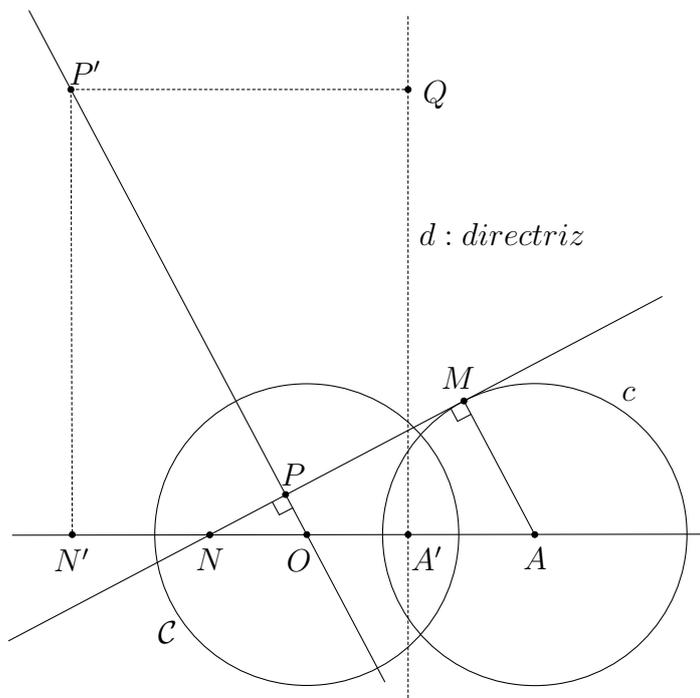


Figura 1.11: Polar recíproca.

Además, los triángulos $\triangle NOP$ y $\triangle NAM$ son semejantes y por el teorema de Tales,

$$\frac{NA}{NO} = \frac{NM}{NP} = \frac{AM}{OP},$$

de manera que

$$\frac{P'O}{P'Q} = \frac{OA}{OP(NA/ON)} = \frac{OA}{OP(AM/OP)} = \frac{OA}{AM} = e$$

que es constante. Esta constante

$$e = \frac{\text{distancia entre los centros de } \mathcal{C} \text{ y } c.}{\text{radio de } c.}$$

se llama excentricidad. Por tanto, si O es interior a c tenemos que $e < 1$ y se trata de una elipse, que es el caso de la figura 1.13, si es exterior tenemos $e > 1$ y se trata de una hipérbola (figura 1.14) y si pertenece a ella tenemos $e = 1$ y se trata de una parábola (figura 1.12).

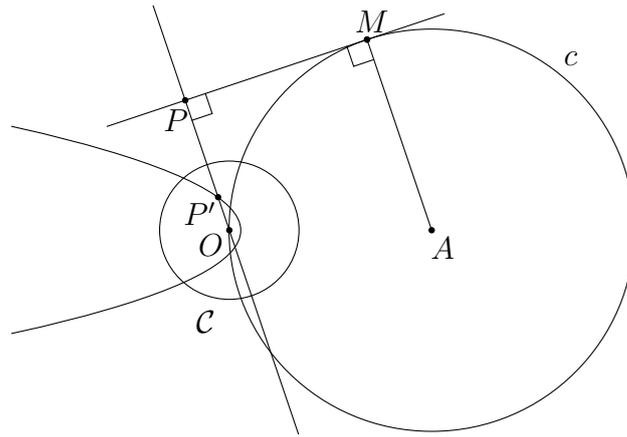


Figura 1.12: Parábola.

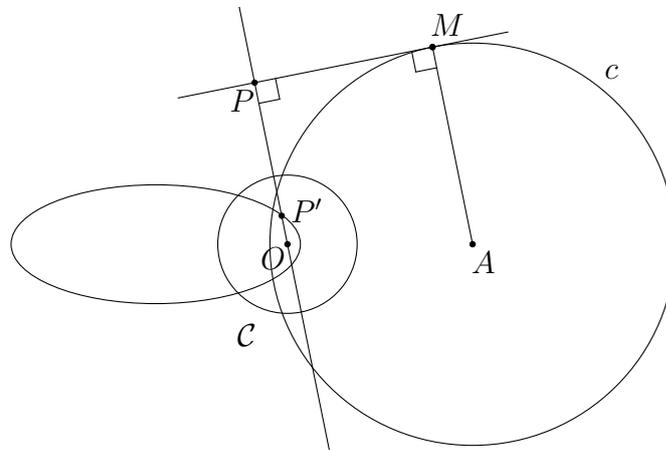


Figura 1.13: Elipse.

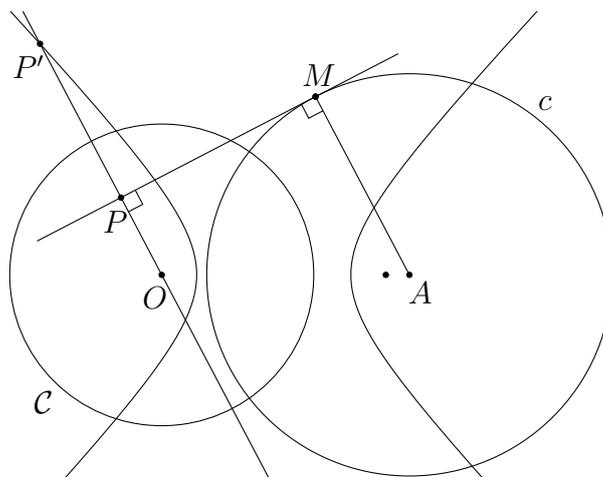


Figura 1.14: Hipérbola.

1.3.4. Inversión que pone concéntricas dos circunferencias.

Sean c_2 y c_1 dos circunferencias no concéntricas, de manera que la primera está contenida en la región acotada determinada por la segunda. Si hacemos una inversión con centro un punto cualquiera $P \in c_1$, entonces c_2 y c_1 se transforman en una circunferencia c'_2 y una recta c'_1 respectivamente, como se muestra en la siguiente figura.

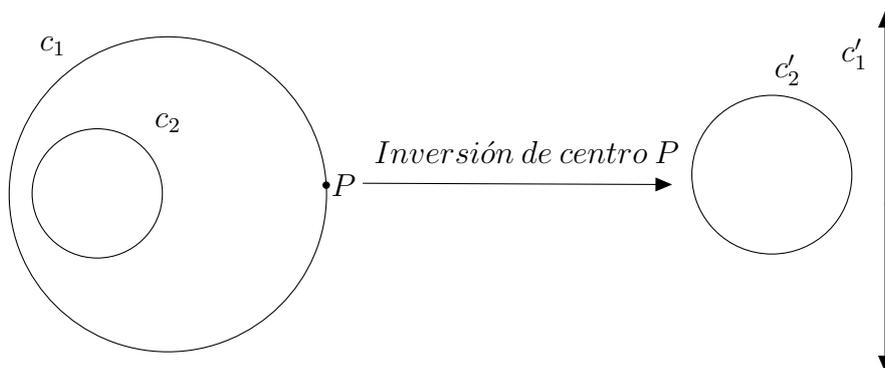


Figura 1.15: Primer paso.

Dibujamos a continuación dos circunferencias ortogonales a la vez a c'_1 y c'_2 . Para ello tomamos $T, T' \in c'_2$ con la condición que no pertenezcan al diámetro de c'_2 perpendicular a c'_1 . Sean U y U' respectivamente los puntos de intersección con c'_1 de las tangentes a c'_2 por T y T' , como se muestra en la siguiente figura.

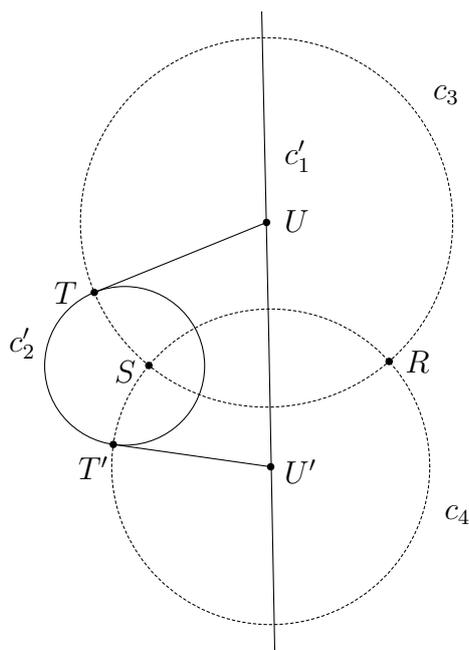


Figura 1.16: Segundo paso.

Entonces las circunferencias c_3 (de centro U y radio UT) y c_4 (de centro U' y radio $U'T'$) son ortogonales a c'_1 y c'_2 y se cortan en dos puntos R y S .

Ahora ya podemos decir que cualquier inversión de centro R transforma c'_1 y c'_2 en dos circunferencias concéntricas c''_1 y c''_2 . En efecto, c_3 y c_4 pasan a ser rectas c'_3 y c'_4 que se cortan en el punto S' , imagen de S . La recta c'_1 se transforma en una circunferencia que pasa por R ortogonal a c'_3 y c'_4 . Por tanto, el punto S' , que es la intersección de c'_3 y c'_4 , es su centro.

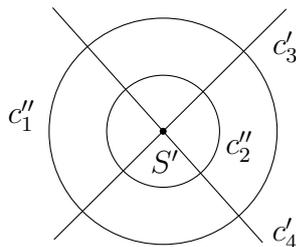


Figura 1.17: Tercer paso.

Análogamente c'_2 se transforma en una circunferencia ortogonal a c'_3 y c'_4 . Por tanto, el punto de intersección de c'_3 y c'_4 es su centro.

Así pues, las transformadas c''_1 y c''_2 de c'_1 y c'_2 respectivamente, son circunferencias concéntricas tal como queríamos.

1.4. Aplicaciones de la inversión.

Como muestra de la utilidad de la inversión en la resolución de algunos problemas clásicos de la geometría plana. En esta sección estudiaremos el problema de Apolonio y algunas propiedades de las cadenas de Steiner, las cuales podemos consultar en [Uga].

1.4.1. El problema de Apolonio.

El problema de Apolonio fue considerado durante siglos como muy difícil, hasta que Jacob Steiner (1796-1863) encontró una solución muy simple basada en la inversión. Sean c_1, c_2 y c_3 tres circunferencias colocadas tal como indica la figura 1.18, y queremos encontrar una circunferencia c tangente a las c_i a la vez, $i = 1, 2, 3$.

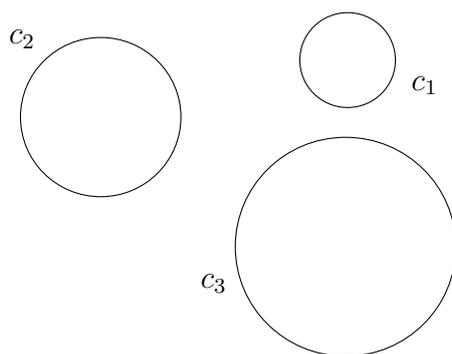


Figura 1.18: Tres circunferencias ajenas.

Este problema se reduce fácilmente al problema degenerado de Apolonio que consiste en encontrar una circunferencia \hat{c} que pase por un punto dado y sea tangente a dos circunferencias dadas.

En efecto, llamando O_i al centro de c_i y r_i a su radio y supongamos que $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Si la circunferencia $c(O, r)$ de la figura 1.19(a) es tangente a las tres circunferencias dadas c_1, c_2 y c_3 , entonces la circunferencia $\hat{c}(O, r + r_1)$ pasa por el punto O_1 y es tangente a $\hat{c}_2(O_2, r_2 - r_1)$ y $\hat{c}_3(O_3, r_3 - r_1)$, ver figura 1.19(b).

Por lo tanto, para resolver el problema de Apolonio sólo queda demostrar que dado un punto O_1 y dos circunferencias \hat{c}_2 y \hat{c}_3 , como se muestra en la figura 1.19(b), existe una circunferencia \hat{c} tangente a \hat{c}_2 y \hat{c}_3 pasando por O_1 .

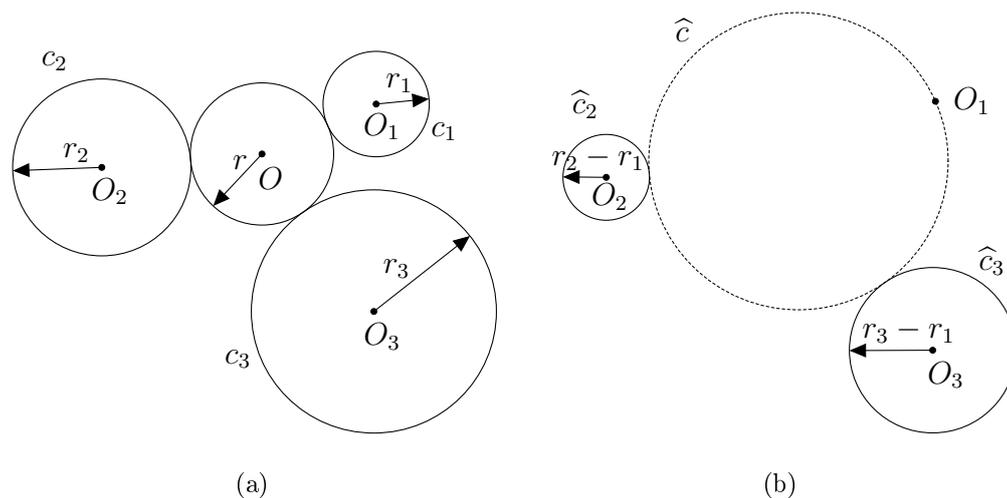


Figura 1.19: Problema de Apolonio.

Supongamos que la circunferencia \hat{c} existe, entonces podemos invertir a \hat{c}_2 y \hat{c}_3 con respecto a una circunferencia \mathcal{C} de centro O_1 (no importa el radio de inversión) y haciendo uso de los Teoremas 1.3 y 1.4 obtenemos la siguiente figura.

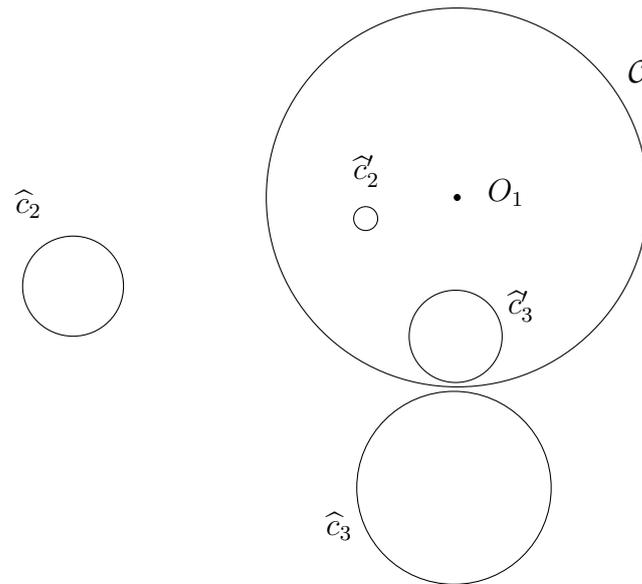


Figura 1.20: El problema degenerado de Apolonio.

Con lo que el problema se traduce en encontrar la recta \tilde{c} correspondiente que es tangente a las circunferencias \tilde{c}_2 y \tilde{c}_3 . Luego, una de las cuatro tangentes comunes a \tilde{c}_2 y \tilde{c}_3 , ver figura 1.21, nos proporcionará la circunferencia \hat{c} buscada. Así este problema de Apolonio queda resuelto.

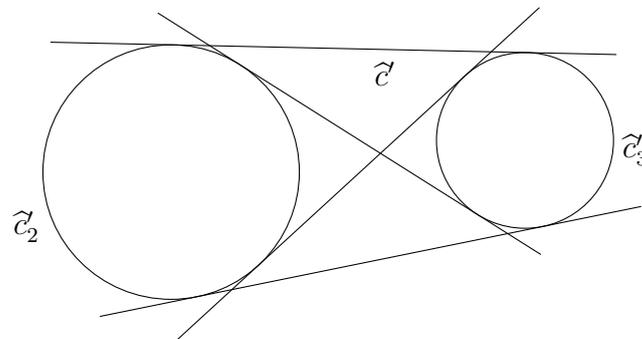


Figura 1.21: Tangentes a dos circunferencias.

Pero, ¿cuántas soluciones distintas podemos encontrar? Podemos ver que existen 8 soluciones en la figura 1.19(a); la circunferencia c buscada puede no rodear a las tres circunferencias dadas, puede rodear a las tres, puede rodear a dos de ellas y no a la tercera (3 soluciones) o puede rodear a una y no las otras dos (3 soluciones). El problema que hemos resuelto corresponde al primer caso, pero se puede proceder de manera similar para obtener las restantes soluciones.

Una situación con sólo cuatro soluciones surge cuando se toman tres circunferencias concurrentes en un punto y otra situación en la que no hay solución es el caso en que una de las tres circunferencias esté dentro de otra.

1.4.2. El porisma de Steiner.

Un porisma es una proposición matemática o corolario. En particular, el término porisma se ha utilizado para referirse a un resultado directo de una prueba, así como un corolario se refiere a un resultado directo de un teorema. En el uso moderno, un porisma es una relación que se sostiene para una gama infinita de valores pero solamente si una cierta condición se asume, por ejemplo el porisma de Steiner.

El porisma de Steiner se enuncia así: dadas dos circunferencias C_1 y C_2 que no se cortan, consideremos circunferencias S_1, S_2, \dots , de manera que cada S_i sea tangente a C_1, C_2 y S_{i-1} , para $i \geq 2$. Si existe un número natural N tal que S_N es tangente a C_1, C_2, S_{N-1} y S_1 entonces se dice que $\{S_i\}_{i=1}^N$ es una cadena de Steiner para C_1 y C_2 . Note que la existencia de tales cadenas depende de cómo estén colocadas C_1 y C_2 en el plano. La siguiente figura muestra dos ejemplos de cadenas de Steiner.

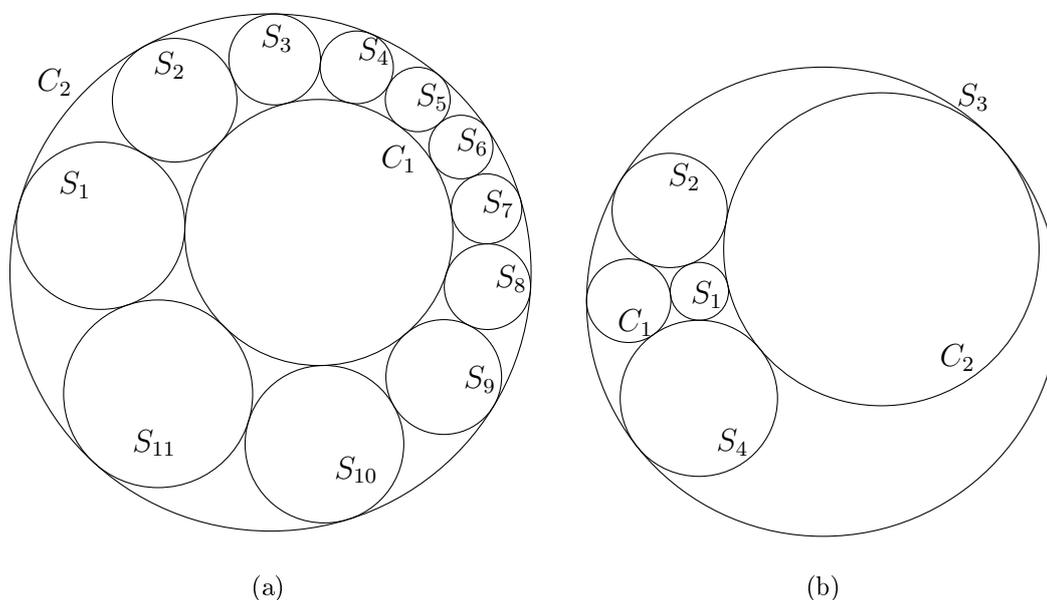


Figura 1.22: Ejemplos de cadenas de Steiner.

Jacob Steiner estudió estas configuraciones haciendo uso de la inversión, y dió respuesta a preguntas como las siguientes:

Pregunta 1.1. *Supongamos que C_1 y C_2 admiten una cadena de Steiner $\{S_i\}_{i=1}^N$. ¿Es*

única dicha cadena? En el caso de no ser única, ¿cuántas cadenas de Steiner existen?, ¿cuántas circunferencias tienen dichas cadenas?

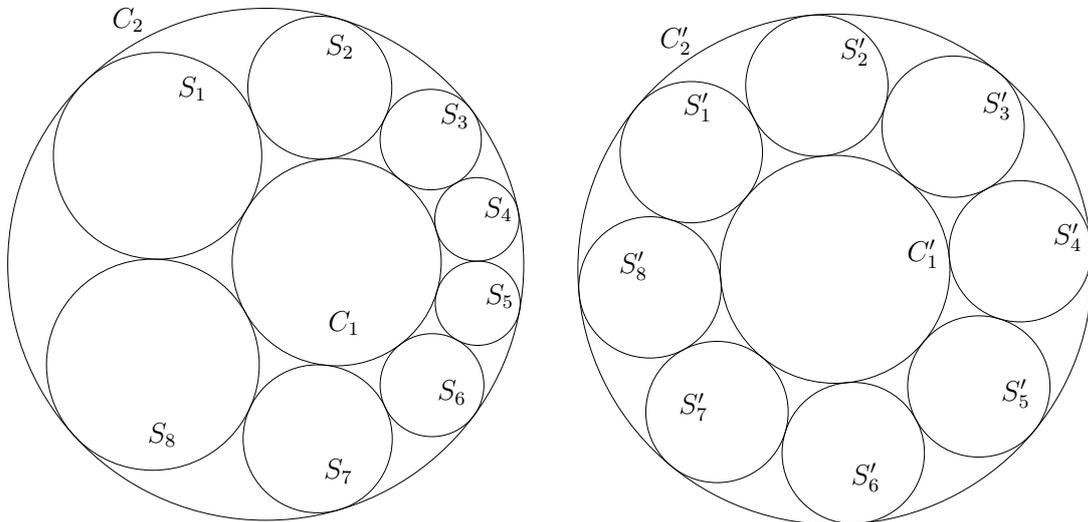
Pregunta 1.2. Sea $\{S_i\}_{i=1}^N$ una cadena de Steiner para C_1 y C_2 . ¿Sobre qué curva están los puntos de contacto de las circunferencias S_i ?, ¿y sus centros?

Para responder a la primera pregunta vamos a recordar que dadas dos circunferencias C_1 y C_2 cualesquiera siempre podemos invertir las en dos circunferencias concéntricas, así la pregunta 1 tiene una respuesta inmediata. En efecto, al invertir C_1 y C_2 en dos circunferencias concéntricas C'_1 y C'_2 , la cadena $\{S_i\}_{i=1}^N$ se invierte en una cadena de Steiner $\{S'_i\}_{i=1}^N$ para C'_1 y C'_2 , donde obviamente todas las S'_i tienen el mismo radio, ver figura 1.23(b).

Podemos ahora rotar con respecto del centro de C'_1 un cierto ángulo α la cadena $\{S'_i\}_{i=1}^N$ para obtener una nueva cadena de Steiner

$$\{S'_{\alpha,i}\}_{i=1}^N \quad (0 < \alpha < 2\pi)$$

para C'_1 y C'_2 , la cual corresponderá a una nueva cadena de Steiner $\{S'_{\alpha,i}\}_{i=1}^N$ para las circunferencias iniciales C_1 y C_2 . Es claro que esto puede hacerse para infinitos valores de α , con lo que hemos demostrado la siguiente proposición.



(a) Cadena de Steiner para $n = 8$.

(b) C'_1 y C'_2 concéntricas.

Figura 1.23: La existencia de una cadena de Steiner implica la existencia de infinitas de ellas con el mismo número de circunferencias.

Proposición 1.6. Si dos circunferencias C_1 y C_2 que no se cortan admiten una cadena de Steiner, entonces admiten un número infinito de ellas, y todas las cadenas poseen el

mismo número de circunferencias. Más aún, cualquier circunferencia tangente a C_1 y C_2 (que rodea a las dos a la vez o que no rodee a ninguna) es miembro de una cadena de Steiner.

En cuanto a la pregunta 2, es claro que en el ejemplo anterior, los puntos de contacto de las S_i están sobre una circunferencia o sobre una recta, es decir, sobre la curva inversa de la circunferencia que contiene a los puntos de contacto de las S'_i en la cadena de Steiner para las circunferencias concéntricas C'_1 y C'_2 .

Los centros de las S_i están sin embargo sobre curvas más interesantes, a saber, sobre cónicas.

Proposición 1.7. *Sean C_1 y C_2 dos circunferencias que no se cortan y admiten cadenas de Steiner. Si una de las circunferencias está en el interior de la otra, entonces los centros de las circunferencias de las cadenas de Steiner están sobre una elipse. En otro caso, los centros están sobre una hipérbola.*

La prueba de esta proposición está desarrollada en [Uga].

En el transcurso de este capítulo hemos descrito las propiedades de la inversión, la cual es una de las herramientas más importante con la que cuenta la geometría. En el análisis complejo, la inversión está relacionado con las transformaciones de Möbius, es por eso que la inversión aparece de manera natural en la geometría hiperbólica.

Las construcciones y propiedades descritas en este capítulo se usarán de manera sistemática para la construcción de los objetos geométricos en cada uno de los modelos de la geometría hiperbólica. Así como también para la métrica hiperbólica y las transformaciones que nos permitirán establecer una relación entre los modelos hiperbólicos a estudiar. Es decir, la inversión geométrica no sólo es importante para la resolución de problemas clásicos de la geometría, sino que es la base para poder representar algunos modelos de la geometría hiperbólica en el plano euclidiano.

Capítulo 2

Modelos hiperbólicos.

En este capítulo damos una breve reseña histórica de la geometría hiperbólica y hacemos una descripción de tres modelos que existen para describir la geometría hiperbólica bidimensional a partir del modelo que conocemos de geometría euclidiana, haciendo uso de conceptos, ideas y construcciones de la geometría euclidiana bidimensional. Hacemos la descripción del modelo del semiplano superior de Poincaré, el modelo del disco de Poincaré y el modelo de Beltrami-Klein. También construimos la métrica hiperbólica en el modelo del disco de Poincaré y se demuestra que dicha métrica se puede usar en cualquier modelo.

Veremos la equivalencia entre los modelos de Poincaré y la equivalencia entre el modelo de Beltrami-Klein con el modelo del disco.

2.1. Historia de la geometría hiperbólica.

Los esfuerzos a lo largo de muchos siglos en la búsqueda para demostrar el quinto postulado de Euclides habían acumulado frutos y un entendimiento profundo de la geometría euclidiana por muchas mentes. Como ocurre frecuentemente en matemática, cuando sucede un descubrimiento, no es concebido por un solo hombre. El descubrimiento realizado durante la segunda y tercera década del siglo XIX por Gauss, Bolyai y Lobachevski de los hechos fundamentales de la geometría hiperbólica no euclidiana y en los años 60-70 la búsqueda de sus interpretaciones, provocaron en el sistema de ciencias geométricas transformaciones de carácter revolucionario. Sin embargo, el primer intento de creación de una nueva geometría (inconscientemente) lo dió en el

siglo XVIII el jesuita Girolamo Saccheri, profesor de matemáticas en la Universidad de Pavia, en Italia, quien se propuso negar el postulado euclidiano de las paralelas, y a continuación dedujo todas las consecuencias lógicas de esta negación, en la búsqueda de una contradicción que demostrase mediante el absurdo el famoso postulado. En otras palabras, el procedimiento de Saccheri es el siguiente: tomemos cinco axiomas, de los cuales cuatro coinciden con los de Euclides y el quinto es la negación del quinto postulado de Euclides.

Los postulados de Euclides nos dicen:

1. Para todo punto P y para todo punto Q distinto de P , existe una única línea l que pasa por P y Q .
2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado indefinidamente.
3. Para todo punto O y para todo punto A distinto de O , existe una circunferencia de centro O y radio OA .
4. Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.
5. Si una secante corta a dos rectas formando ángulos interiores cuya suma es menor de dos rectos, las dos rectas suficientemente prolongadas se cortan en este mismo lado.

Los primeros cuatro postulados de Euclides siempre fueron aceptados, pero observemos que el quinto postulado difiere de los otros postulados por su especial complejidad. Esta característica llamó la atención de los matemáticos desde el principio, pues lo colocaban más cerca de las proposiciones que de los postulados. John Playfair dió el enunciado alternativo más común y conocido: por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a la recta dada. Es frecuente referirse al quinto postulado como Postulado de las paralelas.

Muchos matemáticos intentaron deducir este quinto postulado partiendo de los otros cuatro sin éxito alguno, todas las demostraciones eran falsas o erróneas hasta el siglo XIX.

En los años que antecedieron la consolidación del descubrimiento o nacimiento de una nueva geometría, la figura dominante en el mundo matemático era Carl Friedrich Gauss (1777-1855), quien dió grandes aportes y contribuciones a la matemática en general

y en especial al nuevo descubrimiento. Gauss estudió durante 40 años la teoría de las paralelas y formuló una nueva geometría que llamó no euclidiana. Algunas cartas a otros interesados en aquellos problemas, críticas sobre paralelas y notas inéditas descubiertas entre sus trabajos, son toda la evidencia disponible de que él fue el primero en entender claramente la posibilidad de una geometría lógicamente precisa y diferente de la euclidiana, ya que se dió cuenta de la naturaleza intrínseca de las dificultades de demostrar el quinto postulado. Gauss no publicó sus investigaciones por temor a las críticas. Y la gloria de la fundación de la geometría hiperbólica corresponde al húngaro János Bolyai (1802-1860) y al ruso Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856).

János Bolyai, hijo del también matemático y amigo de Gauss, Farkas Bolyai, estudió durante 10 años las consecuencias que se derivan de negar el quinto postulado, suponiendo que por un punto exterior a una recta no existe ninguna paralela o que existe más de una. Centrándose en esta segunda hipótesis, Bolyai observó que la existencia de dos de estas rectas implicaba la existencia de una infinidad de ellas. Estos resultados constituían el origen de una nueva geometría. En 1831 János agregó un apéndice de 26 páginas al tratado de su padre con estos resultados, pero tiempo después sabría que tres años antes el ruso Lobachevski había publicado una obra en la cual se trataba la geometría no euclidiana.

Farkas Bolyai el padre de János, le envió una copia del texto a su amigo Gauss. La respuesta fue inesperada.

“Si digo que soy incapaz de elogiar este estudio, quizás le extrañe. Pero no puede ser de otra manera, porque ello equivaldría a elogiar mis propios trabajos. En efecto, el enfoque preconizado por su hijo y los resultados que ha obtenido coinciden casi enteramente con las ideas que han ocupado mi espíritu desde hace 30 ó 35 años. No tengo la intención de publicar estas meditaciones durante mi vida, pero había decidido escribirlas para que pudieran conservarse. Es, en consecuencia una sorpresa agradable para mí el poder ahorrarme ese trabajo, y me llena de alegría el pensamiento de que es precisamente el hijo de mi amigo de siempre, el que me ha suplantado de forma tan notable.”

Nicolai Lobachevski nació el 1 de diciembre de 1792 en Nizhñi Novgorod, en una modesta familia. Cuando Lobachevski cumplió los 10 años, su madre lo llevó junto a sus

dos hermanos a la ciudad de Kazan para que estudiaran educación media. Desde un comienzo se distinguió por sus capacidades y aplicación, en 1807 ingreso a la Universidad de Kazan, donde se graduó en 1811. Inmediatamente se convirtió en instructor de esta, siendo promovido a profesor rápidamente. Una copia de sus notas de clase de 1815, revelan que ya por aquella época estaba tratando de probar el quinto postulado de Euclides. En 1823, Lobachevski terminó un texto de geometría, el cual no fue publicado, en este se presentaban sus estudios sobre el quinto postulado, uno de los resultados más interesantes era el hecho de que el quinto postulado no se podía demostrar matemáticamente.

Durante 1826, en una conferencia sobre matemáticas y física ofrecida en la universidad de Kazan, Lobachevski sugiere la existencia de una nueva geometría, basada en el hecho de que por un punto fuera de una recta pasan más de una recta paralela. En 1829 publicó unas memorias, sobre las bases de la geometría, en donde expuso totalmente su teoría referente a las paralelas. Esta publicación fue la primera sobre la geometría no euclidiana, lamentablemente su publicación y expansión para el resto del mundo fue muy lenta o casi nula, debido a que el texto de Lobachevski se encontraba escrito en ruso.

Lobachevski estaba convencido de que la única persona en el mundo que podría emitir un concepto final sobre su trabajo en geometría era Gauss, con este fin decidió enviarle una versión de su libro *Investigaciones geométricas acerca de las líneas paralelas*, hay que hacer énfasis que dicho texto es una versión completa de la teoría de Lobachevski. Lamentablemente como sucedió en el caso de János Bolyai, Gauss no realizó ningún comentario público que tuviera que ver con el trabajo de Lobachevski en la geometría. En la biblioteca de Gauss se encontraron dos ejemplares del texto, se presume que uno lo adquirió directamente Gauss y el otro lo recibió del mismo Lobachevski.

Los trabajos de Bolyai y Lobachevski no recibieron el reconocimiento cuando fueron publicados, a pesar de que representaban el resultado de siglos de investigación en el mundo matemático.

A pesar de las dificultades e impedimentos, a partir de la publicación de la correspondencia de Gauss, nueve años después de la muerte de Lobachevski, e impulsados por eventos como: La primera traducción a Francés de *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der parallellinien* publicada en 1866, la del apéndice al año siguiente y la famosa

conferencia de Riemann de 1854 que fue dada a conocer en 1868 “Sobre las hipótesis en que se apoyan los fundamentos de la geometría”, se dió inicio a una época de evolución no solo en las matemáticas sino en la ciencia.

2.2. El modelo del semiplano superior de Poincaré.

Sea $H \subset \mathbb{E}^2$ una línea horizontal, entonces H determina dos semiplanos en \mathbb{E}^2 : un semiplano superior y un semiplano inferior. Denotaremos por \mathbb{H} al semiplano superior y lo usaremos como nuestro modelo para la geometría hiperbólica bidimensional, el llamado semiplano superior de Poincaré. Si añadimos a la línea H el “punto al infinito” obtenemos la llamada frontera ideal \mathbb{H}_∞ del semiplano superior; esto es, $\mathbb{H}_\infty = H \cup \{\infty\}$. Los puntos hiperbólicos en este modelo son los puntos de \mathbb{H} sin incluir la frontera.

2.2.1. Las líneas hiperbólicas en \mathbb{H} .

Uno de los objetos geométricos de gran importancia en la geometría hiperbólica es la línea hiperbólica. Por el momento no tenemos la definición de la métrica que nos permita verificar cuando la distancia entre dos puntos es la más corta; por ahora sólo daremos la definición, y más adelante veremos la justificación de por qué efectivamente esta noción juega un papel análogo a las líneas rectas de la geometría euclidiana y por lo tanto son las líneas hiperbólicas.

Definición 2.1. *Una línea hiperbólica es el arco de una circunferencia con centro en un punto $O \in \mathbb{H}_\infty$ contenida en \mathbb{H} que es ortogonal a \mathbb{H}_∞ ¹.*

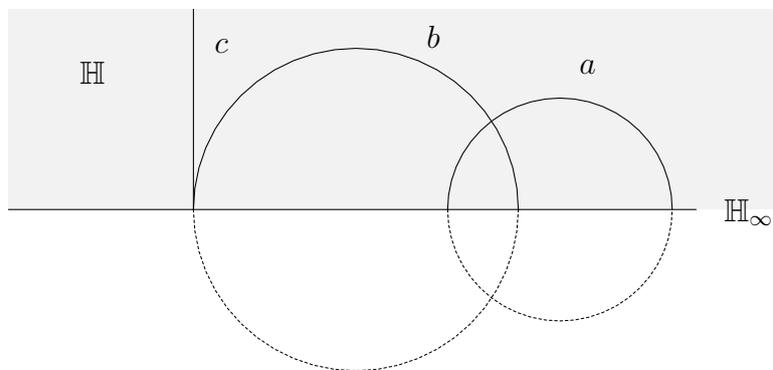


Figura 2.1: Líneas hiperbólicas.

¹Todo rayo perpendicular a \mathbb{H}_∞ contenido en \mathbb{H} es también una línea hiperbólica.

La definición de las líneas nos permite dar también la caracterización de las líneas paralelas. En la geometría hiperbólica se distinguen dos tipos de líneas paralelas: aquellas que se intersecan en el punto al infinito (las líneas b y c), o como aquellas que no se intersecan (las líneas a y c).

Definición 2.2. *La reflexión euclidiana con respecto de esas circunferencias deja invariante al semiplano superior, lo que nos permite considerar a la restricción de esta transformación a \mathbb{H} como una reflexión en el plano hiperbólico.*

En el resto de este capítulo cuando hagamos uso de una reflexión, nos estaremos refiriendo a reflexiones con respecto de líneas como las que acabamos de definir.

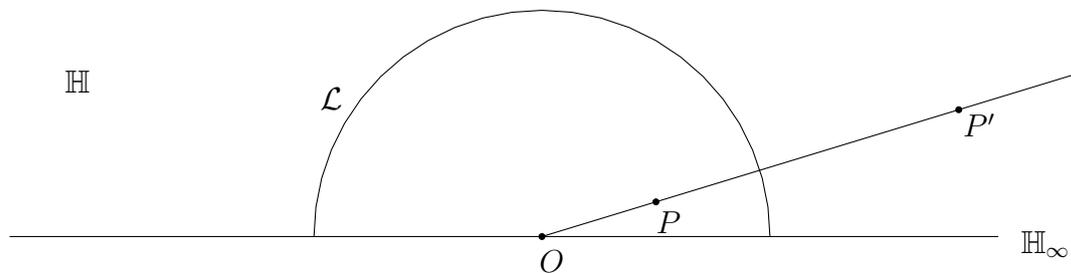


Figura 2.2: Reflexión en \mathbb{H} con respecto a \mathcal{L} .

Para construir la geometría hiperbólica únicamente contamos con instrumentos euclidianos, por lo que resulta interesante saber cómo construir con ellos el análogo de algunos de los objetos geométricos euclidianos básicos, pero ahora en la geometría hiperbólica bidimensional.

Para poder realizar algunas construcciones es importante saber si por cada punto del plano hiperbólico es posible trazar una línea, así como si se puede trazar una línea por cualesquiera dos puntos dados. Para ello, tomamos un punto $P \in \mathbb{H}$ y un punto $O \in \mathbb{H}_\infty$ y construimos una circunferencia con centro O y radio OP , la intersección de esta circunferencia con \mathbb{H} es un arco de circunferencia, el cual determina una línea hiperbólica que pasa por P .

Definición 2.3. *Dado un punto cualquiera en \mathbb{H} o en \mathbb{H}_∞ , a la familia de líneas hiperbólicas que pasan por ese punto se le llama haz de líneas con vértice en el punto dado.*

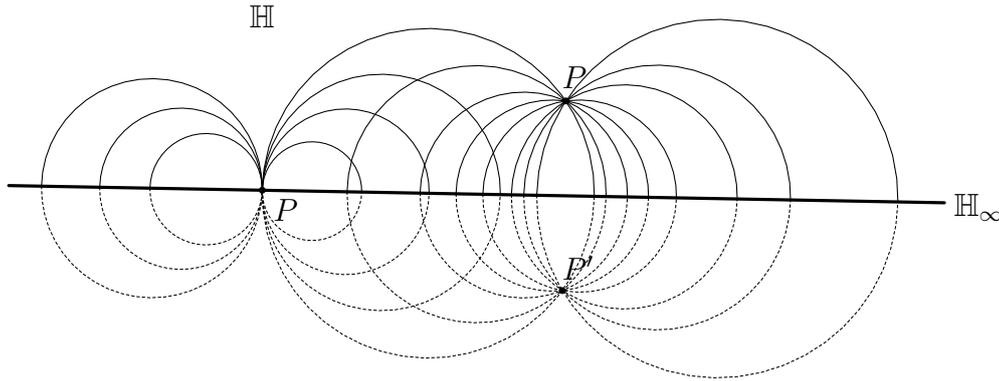


Figura 2.3: Haces de líneas.

Es importante notar que por la forma en que se construyen las líneas hiperbólicas, todo haz de líneas con vértice en un punto cualquiera son los arcos de circunferencias en \mathbb{H} determinados por una familia coaxial secante si $P \in \mathbb{H}$ o una familia coaxial tangente si $P \in \mathbb{H}_\infty$.

Recordemos brevemente que las geometrías no euclidianas surgieron a partir de la negación del quinto postulado de Euclides. Una proposición equivalente al quinto postulado conocida como el axioma de Playfair es la siguiente:

Proposición 2.1 (Axioma de Playfair). *Por un punto exterior a una recta es posible trazar una y sólo una recta paralela a la recta dada.*

Esta proposición tiene dos posibles negaciones:

Negaciones del axioma de Playfair. Por un punto exterior a una recta:

- a) No se puede trazar ninguna recta paralela a la recta dada; o bien
- b) Se puede trazar más de una recta paralela a la recta dada.

Haciendo uso de los primeros cuatro postulados de Euclides y la negación *b)* obtenemos la geometría hiperbólica.

La negación *b)* se puede ilustrar en este modelo. Dado un punto P y una línea l en \mathbb{H} , construimos las líneas m y n , como se ilustran en la figura 2.4. Estas líneas son paralelas a l que pasan por P . Además, todas las líneas que están entre m y n que no corten a l son paralelas a l . Notemos que la existencia de m y n implica la existencia de infinitas líneas paralelas a l .

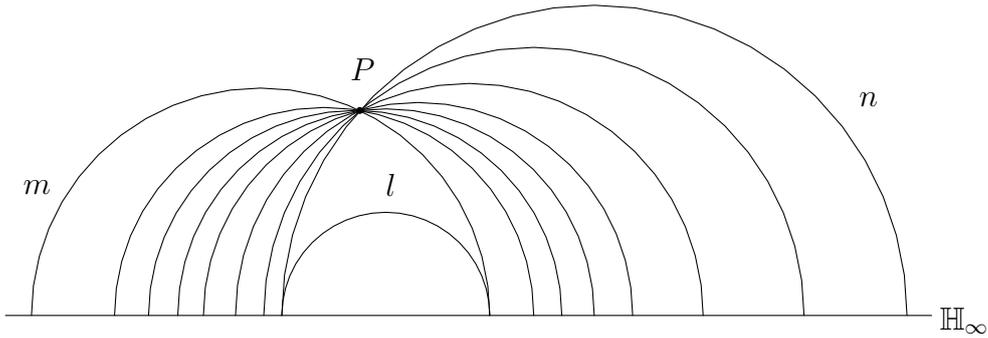


Figura 2.4: Existen infinitas líneas paralelas a la línea l que pasan por P .

Ahora construiremos la línea hiperbólica que pasa por dos puntos dados. Sean P y Q dos puntos en \mathbb{H} , y sea P' el reflejado de P con respecto de \mathbb{H}_∞ , se tiene que \mathbb{H}_∞ es la mediatriz del segmento PP' , luego construimos la mediatriz del segmento PQ la cual interseca a \mathbb{H}_∞ en O . Entonces, la circunferencia con centro O que pasa por P también pasa por Q y la intersección de esta circunferencia con \mathbb{H} es la línea hiperbólica que pasa por P y Q .

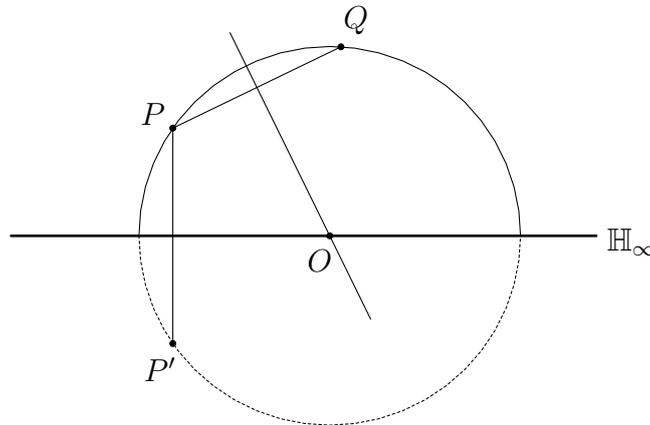


Figura 2.5: Línea que pasa por P y Q .

2.2.2. Mediatriz de un segmento hiperbólico en \mathbb{H} .

Sean P y Q dos puntos dados en \mathbb{H} . Trazamos la línea hiperbólica l que pasa por P y Q , la cual es un arco de circunferencia ortogonal a \mathbb{H}_∞ . Luego, el segmento hiperbólico PQ es la parte de l comprendida entre P y Q . Trazamos la recta que pasa por P y Q , la cual interseca a \mathbb{H}_∞ en O . Desde O trazamos la tangente a l y llamemos R el punto de tangencia. La línea hiperbólica m (arco de circunferencia con centro en O y radio OR) es la mediatriz hiperbólica del segmento hiperbólico PQ , debido a que

m es perpendicular al segmento hiperbólico PQ y, además, P y Q son reflejados con respecto a m y R es el punto medio del segmento hiperbólico PQ ².

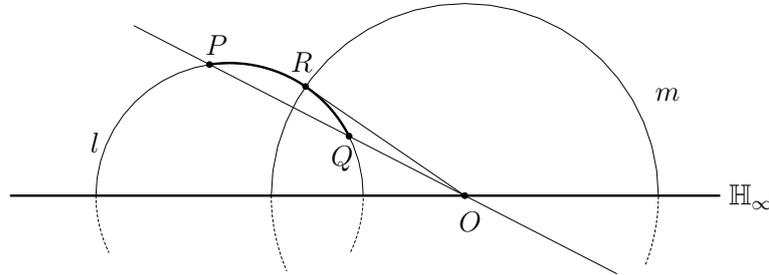


Figura 2.6: m es la mediatriz hiperbólica del segmento hiperbólico PQ .

2.2.3. Perpendicular a una línea hiperbólica por un punto dado en \mathbb{H} .

Sea l una línea hiperbólica y P un punto en \mathbb{H} que no está en l . Queremos trazar la perpendicular a l que pasa por P . Como la línea l es un arco de circunferencia ortogonal a \mathbb{H}_∞ , podemos encontrar el reflejo P' de P con respecto de la línea l . Trazamos la línea hiperbólica que une a P y P' , para ello trazamos la mediatriz del segmento PP' la cual interseca a \mathbb{H}_∞ en O . Tomamos la circunferencia con centro en O que pasa por P y la intersección de esta circunferencia con \mathbb{H} es la línea hiperbólica que buscamos.

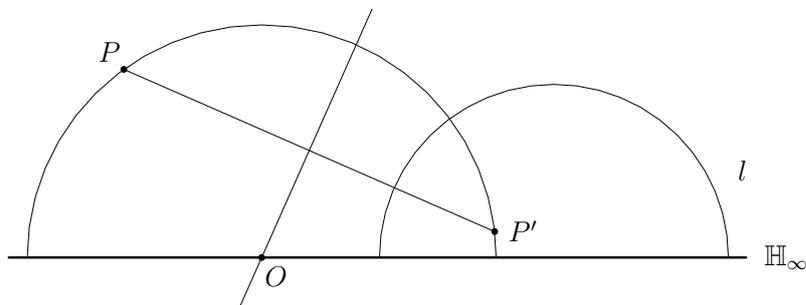


Figura 2.7: Perpendicular a l desde P .

²Cuando definamos la métrica se demostrará por qué R es el punto medio del segmento hiperbólico PQ . Por el momento sólo lo tomamos como cierto.

2.2.4. Centro hiperbólico de una circunferencia en \mathbb{H} .

Cuando una circunferencia c este contenida en \mathbb{H} , la llamaremos circunferencia hiperbólica.

Dada una circunferencia c en \mathbb{H} nos interesa saber donde se encuentra su centro hiperbólico, o si este coincide con su centro euclidiano.

Para encontrar el centro hiperbólico de c comenzamos construyendo dos líneas hiperbólicas ortogonales a c . Si P y Q son cualesquiera dos puntos sobre c . Por P y Q trazamos tangentes a c , las cuales cortan a la frontera ideal en O_1 y O_2 respectivamente. Luego, trazamos las circunferencias con centro en O_1 y O_2 y radios O_1P y O_2Q respectivamente, ver figura 2.8(a). Ambas circunferencias así construidas contienen dos segmentos hiperbólicos ortogonales a c que se intersecan en un punto O . Al construir una tercera circunferencia ortogonal a c , podemos ver que esta circunferencia también pasa por O^3 .

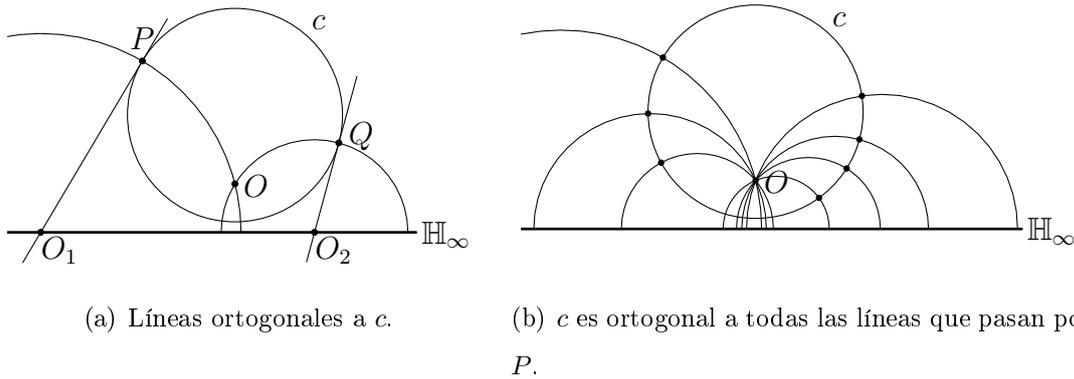


Figura 2.8: Construcción de una circunferencia con centro hiperbólico en P .

Al hacer este proceso varias veces podemos ver que dichas circunferencias que contienen a las líneas hiperbólicas ortogonales a c forman parte de una familia de circunferencias coaxiales secantes \mathcal{F} (cuyos puntos fijos son O y otro punto fuera de \mathbb{H}) y la frontera ideal es la línea de los centros de la familia \mathcal{F} . Como todas las circunferencias de \mathcal{F} son ortogonales a c , c forma parte de la familia de circunferencias ajenas ortogonales a \mathcal{F} . Observemos que c es invariante bajo la reflexión con respecto de cada uno de los elementos de \mathcal{F} .

Si trazamos la línea que pasa por P y Q , esta corta a \mathbb{H}_∞ en O^* . Los puntos P y Q son reflejados con respecto de la línea hiperbólica \mathcal{L} (que está contenida en la circun-

³Notar que el centro de c está en el eje radical de las primeras dos circunferencias ortogonales a c .

ferencia con centro O^* que pasa por O). Si la línea que pasa por P y Q es paralela a \mathbb{H}_∞ , entonces los puntos son reflejados respecto a la línea hiperbólica vertical que pasa por O .

Como el punto O queda fijo bajo la reflexión con respecto de \mathcal{L} , se sigue que el segmento hiperbólico PO es igual al segmento hiperbólico OQ . Lo anterior se cumple para cualquier segmento hiperbólico en el interior de c que pasa por O . Se concluye que O es el centro hiperbólico de c .

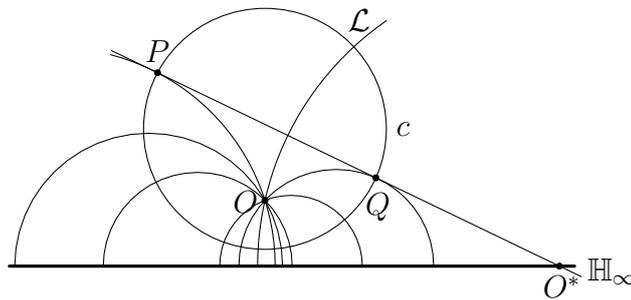


Figura 2.9: Circunferencia hiperbólica c con centro hiperbólico en O .

Observación 2.1. *El centro hiperbólico de c no coincide con su centro euclidiano; sin embargo, se comporta de la misma forma, pues los segmentos de circunferencias que pasan por O y que quedan en el interior de c cumplen exactamente con lo que cumplen los diámetros en una circunferencia: son ortogonales a la circunferencia, pasan por el centro y todos miden lo mismo.*

2.2.5. Triángulos hiperbólicos en \mathbb{H} .

Al igual que en la geometría euclidiana, dados tres puntos en \mathbb{H} , llamaremos triángulo hiperbólico a la unión de los tres segmentos hiperbólicos de la línea hiperbólica que unen dichos puntos. Extenderemos esta definición permitiendo que los vértices del triángulo pertenezcan a \mathbb{H}_∞ .

Por el ángulo entre dos líneas hiperbólicas entenderemos el ángulo que forman las tangentes a cada una de ellas en el punto de intersección. Así, si un triángulo tiene un vértice en \mathbb{H}_∞ , entonces el ángulo en ese vértice es cero.

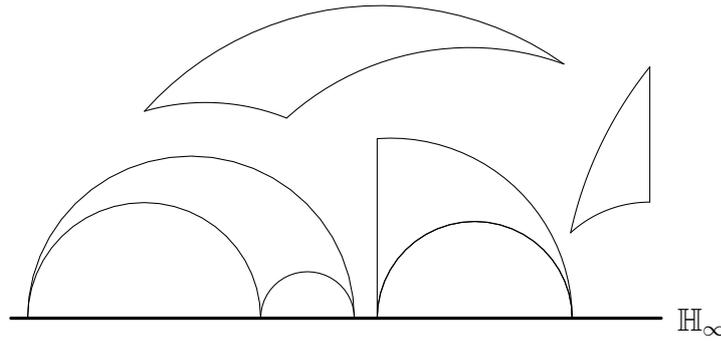


Figura 2.10: Triángulos hiperbólicos en \mathbb{H} .

Observación 2.2. Si los tres vértices de un triángulo están en \mathbb{H}_∞ la suma de los ángulos interiores es igual a 0.

Si consideramos una línea hiperbólica l y un punto P exterior a ella y trazamos dos líneas hiperbólicas, una paralela y la otra perpendicular a l por P , ver figura 2.11; resulta un triángulo con ángulos 0 , $\pi/2$ y α . Al ángulo α se le llama ángulo del paralelismo.

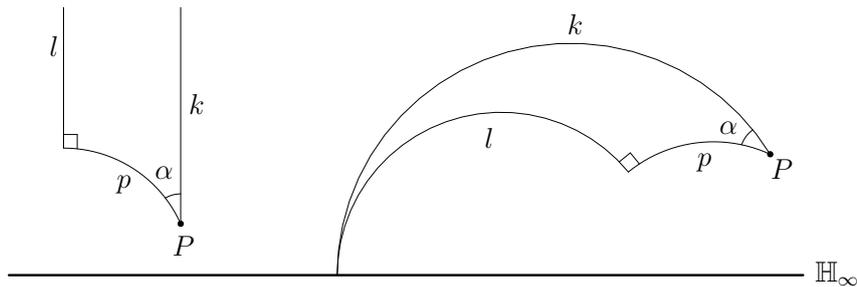


Figura 2.11: Ángulos del paralelismo en \mathbb{H} .

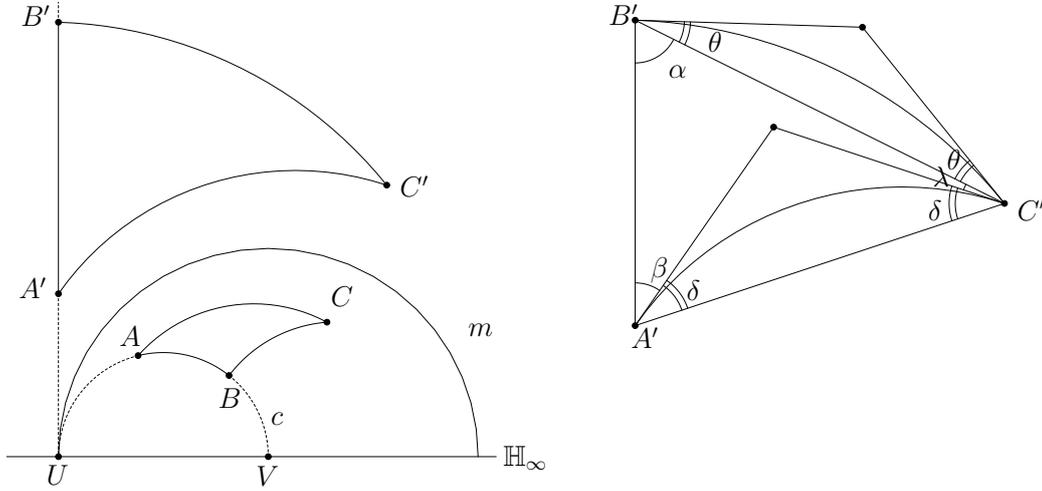
En la geometría euclidiana el ángulo α mide $\pi/2$, pero este no es el caso en la geometría hiperbólica.

Teorema 2.1. La suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico es menor que π .

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo hiperbólico cualquiera en \mathbb{H} . Necesitamos colocar este triángulo en una posición más sencilla desde el punto de vista euclidiano, esto es, por medio de reflexiones podemos llevar cualquier triángulo, a un triángulo congruente con el triángulo dado pero colocado en una posición más sencilla.

Sea c la línea hiperbólica que contiene al segmento hiperbólico AB y sean U y V los puntos de intersección de c con \mathbb{H}_∞ , ver figura 2.12(a). Al reflejar el triángulo $\triangle ABC$

con respecto a la línea hiperbólica m contenida en la circunferencia con centro en V y radio VU , obtenemos el $\triangle A'B'C'$ en donde el segmento hiperbólico $A'B'$ está en la línea hiperbólica vertical por U a \mathbb{H}_∞ .



(a) El triángulo $\triangle A'B'C'$ en una posición especial. (b) Ángulos en los triángulos hiperbólico y euclidiano $\triangle A'B'C'$.

Figura 2.12: Triángulo hiperbólico.

En el triángulo hiperbólico $\triangle A'B'C'$ tenemos que probar que

$$\alpha + \beta + \lambda + 2\theta < \pi. \tag{2.1}$$

Para ello, construimos las circunferencias que continen a los lados hiperbólicos $A'C'$ y $B'C'$ del $\triangle A'B'C'$. Estas circunferencias cortan a la línea $A'B'$ en los puntos I y H , ver figura 2.13. Por propiedad de ángulos inscritos y semi-inscritos en una circunferencia, tenemos que

$$\angle A'IC' = \delta \quad \text{y} \quad \angle B'HC' = \theta.$$

Como B', A', I y H están alineados $\angle A'IC' = \angle B'HC' + \angle IC'H$, es decir, $\delta = \theta + \angle IC'H$. Esto implica que $\theta < \delta$. Entonces, $\alpha + \beta + \lambda + 2\theta < \alpha + \beta + \lambda + 2\delta$. Pero, en el triángulo $\triangle A'B'C'$ euclidiano, tenemos que

$$\alpha + \beta + \lambda + 2\delta = \pi.$$

Así,

$$\alpha + \beta + \lambda + 2\theta < \pi.$$

□

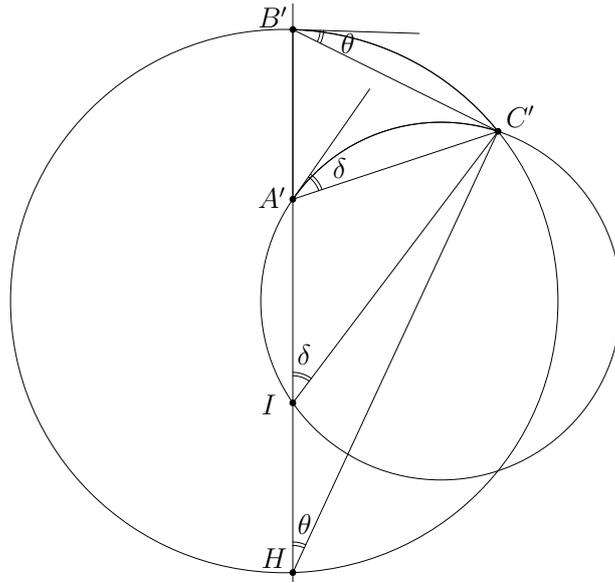


Figura 2.13: En el $\triangle HIC'$, δ es un ángulo exterior en el lado opuesto al ángulo θ , esto implica que $\theta < \delta$.

2.3. El modelo del disco de Poincaré.

En esta sección seguimos de cerca [CG2] en cuanto a la descripción del modelo y a las construcciones de los objetos geométricos en el mismo.

Tomemos una circunferencia S_∞ en el plano euclidiano \mathbb{E}^2 con centro en un punto fijo O en el plano y radio 1. De acuerdo con el teorema de la curva de Jordan, esta circunferencia divide al plano en dos regiones: la región interior y la región exterior.

Denotemos por $\mathbb{D} \subset \mathbb{E}^2$ al interior de S_∞ , el cual es el disco unitario con centro en $O \in \mathbb{E}^2$; con lo cual, S_∞ es la frontera del disco \mathbb{D} . Usaremos a \mathbb{D} como uno de nuestros modelos para la geometría hiperbólica bidimensional, el llamado disco de Poincaré.

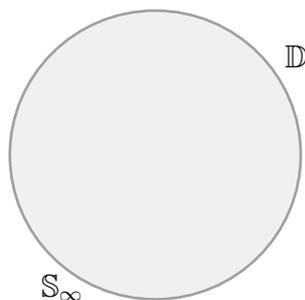


Figura 2.14: El disco de Poincaré.

A la frontera \mathbb{S}_∞ la llamaremos frontera ideal de \mathbb{D} . Los puntos de la geometría hiperbólica en este modelo son los puntos del disco \mathbb{D} .

2.3.1. Las líneas hiperbólicas en \mathbb{D} .

Para poder realizar algunas construcciones en este modelo es importante saber si por cada punto de \mathbb{D} es posible trazar una línea, así como si se puede trazar una línea por cualesquiera dos puntos dados. Para ello damos primero la definición de una línea hiperbólica y cuando definamos la métrica hiperbólica veremos que estos objetos que describiremos como líneas cumplen con ser geodésicas⁴ en la geometría hiperbólica.

Definición 2.4. Una línea hiperbólica es el arco de una circunferencia ortogonal a \mathbb{S}_∞ contenida en \mathbb{D} ⁵.

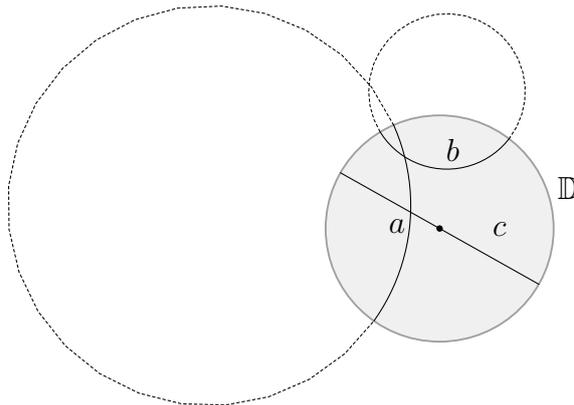


Figura 2.15: Líneas hiperbólicas.

En primer lugar analizamos el caso de trazar una línea hiperbólica por un punto dado. Para ello, tomamos un punto $P \in \mathbb{D}$ y consideremos la reflexión de P con respecto a la circunferencia \mathbb{S}_∞ como P' y trazamos la mediatriz del segmento PP' .

Si fijamos un punto O' sobre esta mediatriz y trazamos la circunferencia a con centro en O' que pase por P y P' , esta circunferencia es ortogonal a \mathbb{S}_∞ por la Proposición 1.3 de la sección 1.3.

La intersección de la circunferencia c con \mathbb{D} es un arco de circunferencia, el cual determina una línea hiperbólica que pasa por P , ver figura 2.16. De acuerdo con lo anterior,

⁴Una geodésica es la curva que minimiza la distancia entre dos puntos.

⁵Todo diámetro de \mathbb{D} es también una línea hiperbólica.

para cada punto O' sobre la mediatriz existe una circunferencia (con centro en O' que pasa por P) que contiene a una línea hiperbólica que pasa por P , con lo cual concluimos que es posible trazar una cantidad infinita de líneas hiperbólicas por cada punto del disco \mathbb{D} .

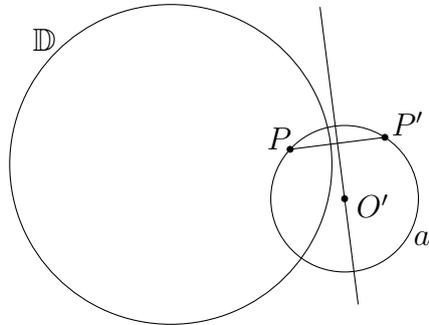
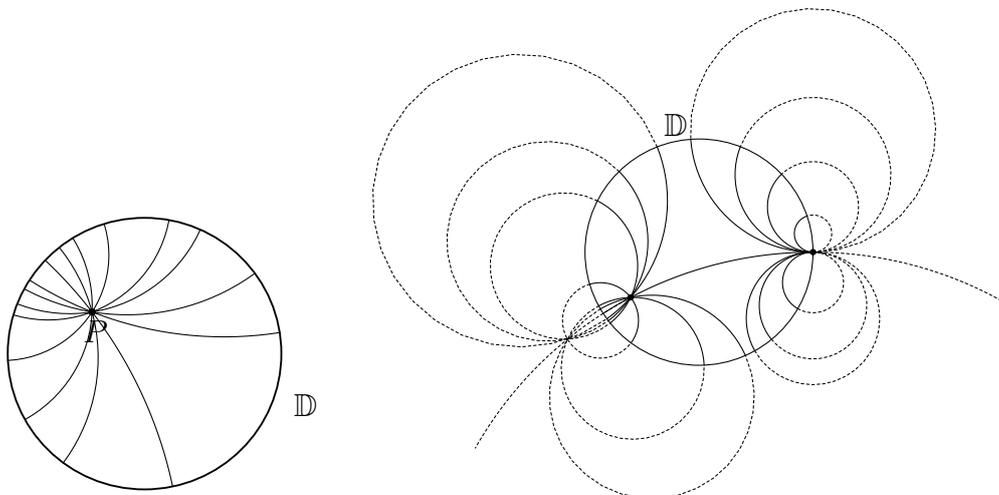


Figura 2.16: Línea hiperbólica que pasa por P .

Definición 2.5. Dado un punto cualquiera en \mathbb{D} o en la frontera ideal de \mathbb{D} , a la familia de líneas que pasa por ese punto se le llama haz de líneas con vértice en el punto dado.



(a) Haz de líneas con vértice P .

(b) Familias coaxiales.

Figura 2.17: Haces de líneas hiperbólicas que pasan por un punto dado.

Notar que por la forma en que construimos las líneas, todo haz de líneas con vértice en un punto cualquiera son arcos de circunferencias en \mathbb{D} determinados por una familia coaxial secante o tangente; dependiendo si el vértice del haz está en \mathbb{D} o en \mathbb{S}_∞ .

Dado una línea l y un punto $P \notin l$ en \mathbb{D} , podemos observar que la existencia de las líneas paralelas m y n a l , ver figura 2.18, garantizan la existencia de infinitas líneas paralelas a l que pasan por P .

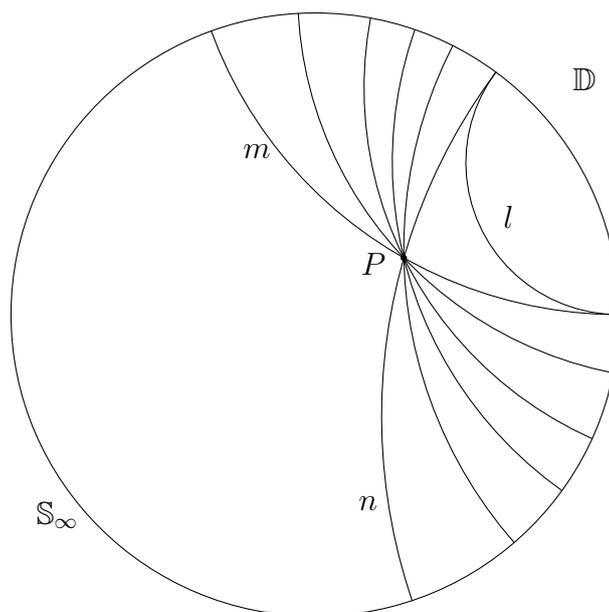
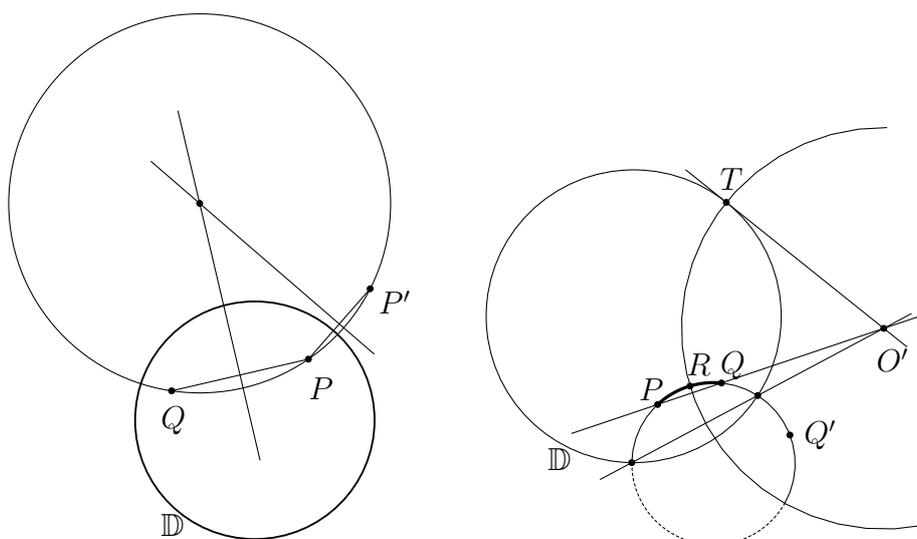


Figura 2.18: Existen infinitas líneas paralelas a la línea l que pasan por P .

Ahora construiremos la línea que pasa por dos puntos dados. Sean P y Q dos puntos en el disco \mathbb{D} y denotemos por P' el reflejado de P con respecto de S_∞ . Tracemos las mediatrices de los segmentos PP' y PQ . El punto de intersección de ambas mediatrices es el centro de la circunferencia ortogonal a \mathbb{D} que pasa por P y Q . La intersección de esta circunferencia con \mathbb{D} es la línea hiperbólica que pasa por P y Q , ver figura 2.19(a).



(a) Línea que pasa por P y Q .

(b) Mediatriz del segmento PQ .

Figura 2.19: Líneas hiperbólicas.

2.3.2. Mediatriz de un segmento hiperbólico en \mathbb{D} .

Sean P y Q dos puntos dados en \mathbb{D} . Trazamos la línea hiperbólica l que pasa por P y Q , la cual es un arco de circunferencia ortogonal a \mathbb{S}_∞ . Este arco interseca a \mathbb{S}_∞ en dos puntos, por lo que podemos trazar el eje radical de ambas circunferencias. Sea O' la intersección del eje radical con la línea que pasa por P y Q . Sea T el punto de tangencia de la recta tangente a \mathbb{S}_∞ que pasa por O' , ver figura 2.19(b).

El segmento hiperbólico PQ es la parte de l comprendida entre P y Q . Si trazamos la circunferencia con centro O' y radio el segmento $O'T$, vemos que esta circunferencia es ortogonal a \mathbb{S}_∞ y el arco que determina con \mathbb{D} es la mediatriz hiperbólica del segmento hiperbólico PQ . Notar que P y Q son puntos reflejados con respecto de esta circunferencia y que R es punto medio del segmento hiperbólico PQ .

2.3.3. Perpendicular a una línea hiperbólica por un punto dado en \mathbb{D} .

Sea l una línea hiperbólica y P un punto en \mathbb{D} que no está en l . Queremos trazar la perpendicular a l que pase por P . Sea P' y P'' los reflejados de P con respecto a l y a \mathbb{S}_∞ respectivamente. Trazamos la circunferencia que pasa por P , P' y P'' y la intersección de esta circunferencia con \mathbb{D} es la línea hiperbólica perpendicular a l que pasa por P .

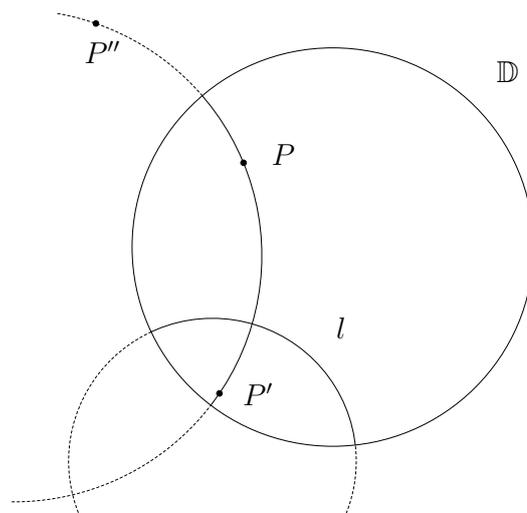


Figura 2.20: Perpendicular a l por P .

Nuevamente se hace uso de la Proposición 1.3 para la justificación de la construcción

anterior.

2.3.4. Centro hiperbólico de una circunferencia en \mathbb{D} .

La siguiente construcción geométrica nos permite determinar el centro hiperbólico de una circunferencia dada.

Sea c una circunferencia totalmente contenida en \mathbb{D} . Las circunferencias c y \mathbb{S}_∞ forman parte de una familia coaxial \mathcal{G} de circunferencias que no se intersecan, por lo que podemos trazar su eje radical.

Denotemos por z a la línea de los centros de c y \mathbb{S}_∞ y sea O' el punto de intersección de z y el eje radical. Desde el O' trazamos una tangente a \mathbb{S}_∞ y llamamos T al punto de tangencia, como se muestra en la figura 2.21.

Trazamos la circunferencia con centro en O' y radio el segmento $O'T$ que forma parte de la familia coaxial \mathcal{F} que es ortogonal a \mathcal{G} , y el punto Q donde corte a z será el centro hiperbólico de la circunferencia dada, ya que los miembros de \mathcal{F} se cortan en los puntos Q y otro punto exterior a \mathbb{S}_∞ que son los únicos puntos límites de la familia \mathcal{G} .

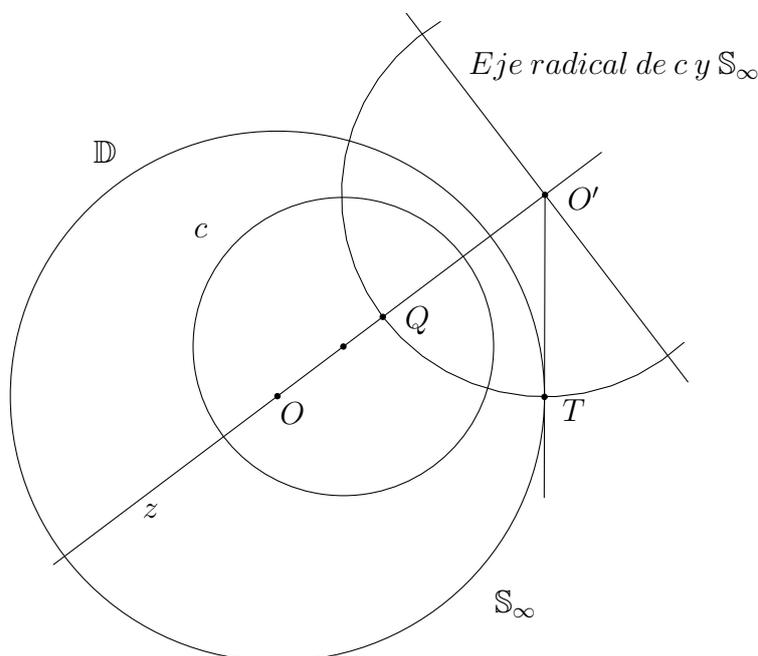


Figura 2.21: Q es el centro hiperbólico de la circunferencia c .

Todos los miembros de la familia \mathcal{F} determinan líneas en \mathbb{D} que pasan por Q y que intersecan de manera ortogonal a c , lo que implica que son diámetros. Como Q es el único punto en el interior de c que satisface esta propiedad, se concluye que Q es el

centro hiperbólico de c .

2.3.5. Triángulos hiperbólicos en \mathbb{D} .

Dados tres puntos en \mathbb{D} , llamaremos **triángulo hiperbólico** a la unión de los tres segmentos hiperbólicos de las líneas hiperbólicas que unen dichos puntos. Al igual que en la sección anterior, extenderemos esta definición permitiendo que los vértices del triángulo pertenezcan a \mathbb{S}_∞ .

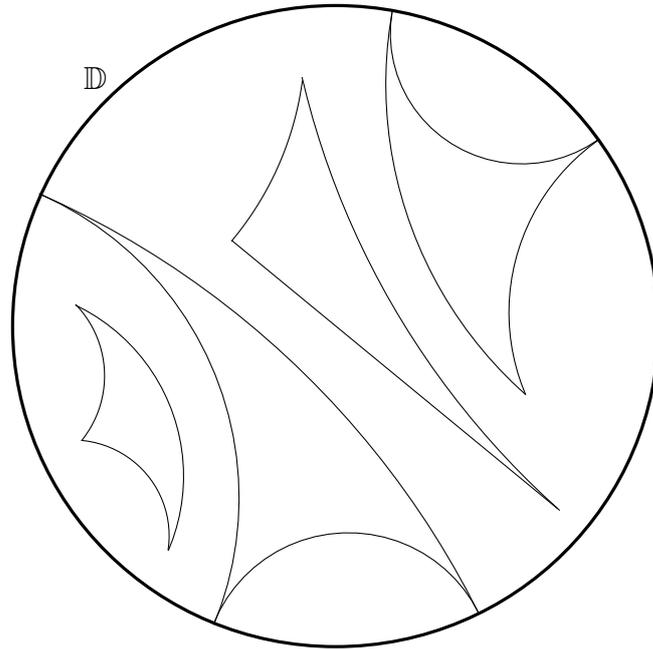


Figura 2.22: Triángulos hiperbólicos en \mathbb{D} .

En el caso en que los tres vértices pertenecen a \mathbb{S}_∞ , a dicho triángulo se le llama **triángulo ideal** y cada ángulo mide cero.

2.4. El modelo de Beltrami-Klein.

El modelo Beltrami-Klein, representa el plano hiperbólico como un disco abierto, al cual denotaremos como \mathbb{B}_K . Los puntos de \mathbb{B}_K son los puntos hiperbólicos para este modelo y a los puntos en la frontera de \mathbb{B}_K se llaman **puntos ideales** y no forman parte del modelo. A la frontera de \mathbb{B}_K se le llama **circunferencia al infinito** y la denotamos por \mathbb{S}_∞ .

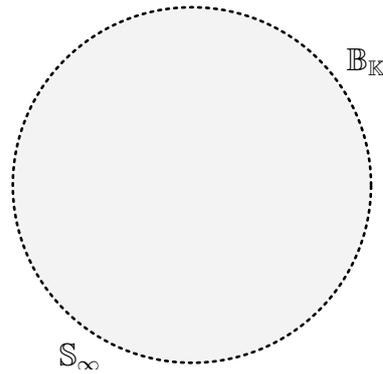


Figura 2.23: Modelo de Beltrami-Klein para la geometría hiperbólica.

Una vez que se introduce la distancia hiperbólica, los puntos en la frontera resultan estar infinitamente lejos.

2.4.1. Líneas hiperbólicas en \mathbb{B}_K .

Las líneas hiperbólicas en este modelo son cuerdas euclidianas (segmentos abiertos) cuyos extremos están en S_∞ . Visto de esta manera, por cada par de puntos en \mathbb{B}_K pasa una única línea hiperbólica.

Los modelos de Poincaré y Beltrami-Klein difieren, porque las líneas se representan de manera diferente y, lo que es más importante, las isometrías hiperbólicas son dadas por diferentes tipos de asignaciones. En el modelo de Poincaré, las reflexiones hiperbólicas se realizan como inversiones por círculos. En el modelo de Beltrami-Klein, las reflexiones hiperbólicas se realizan de manera muy diferente. De hecho, las reflexiones hiperbólicas son asignaciones proyectivas, que dejan a S_∞ invariante.

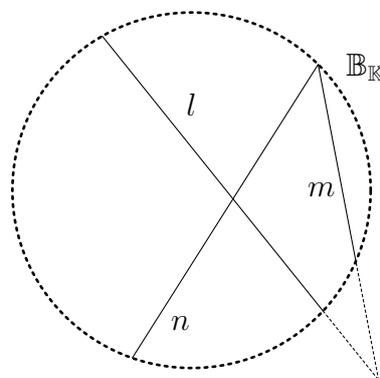


Figura 2.24: Rectas en el modelo de Beltrami-Klein.

Al igual que en los modelos descritos anteriormente, en este modelo tenemos dos tipos de rectas paralelas. En la figura 2.24, las líneas hiperbólicas l y n no son paralelas debido a que se intersecan. Las líneas hiperbólicas n y m son llamadas *asintóticamente paralelas* o simplemente *paralelas*, debido a que se intersecan en \mathbb{S}_∞ , la cual por construcción no está incluida en el modelo. Las líneas hiperbólicas l y m reciben el nombre de *divergentemente paralelas* o *ultraparalelas*, debido a que su intersección está por fuera del disco $\mathbb{B}_\mathbb{K}$ y de su frontera.

Tenemos entonces, tres tipos de haces de líneas en el plano hiperbólico: los concurrentes, los paralelos y los ultraparalelos que consisten en tomar las líneas hiperbólicas de haces proyectivos concurrentes; lo que los distingue es en dónde queda el punto de concurrencia.

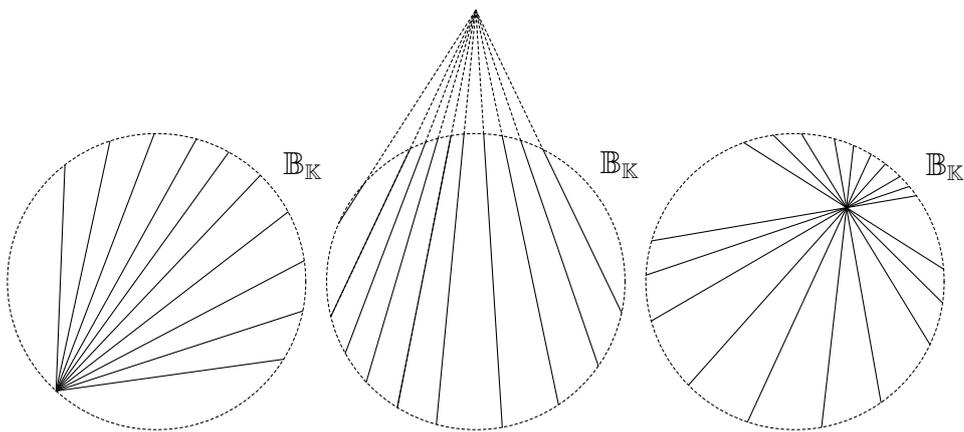


Figura 2.25: Haces de rectas en el modelo de Beltrami-Klein.

2.4.2. Perpendicular a una línea hiperbólica por un punto dado en $\mathbb{B}_\mathbb{K}$.

La siguiente definición es de mucha importancia, debido a que es muy útil para construir objetos geométricos en este modelo.

Definición 2.6. *El polo de una línea l es el punto de intersección de las tangentes a \mathbb{S}_∞ en sus extremos ideales.*

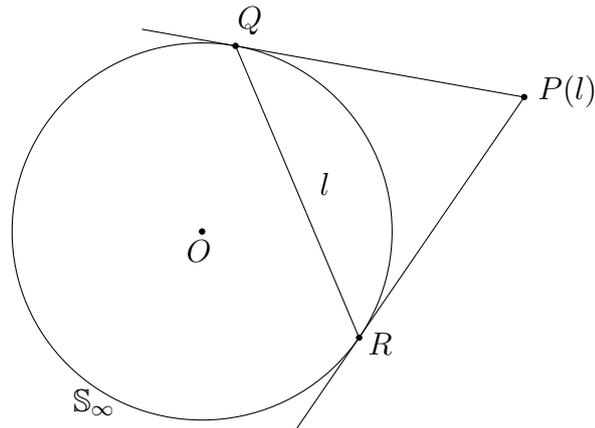


Figura 2.26: Construcción del polo $P(l)$ de una línea l en \mathbb{B}_K .

Para identificar cuando dos líneas hiperbólicas son perpendiculares en este modelo, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *En el modelo de Beltrami-Klein, dos líneas hiperbólicas l y p se intersecan perpendicularmente, si y sólo si $P(l)$ está en la extensión ultra ideal de la línea p .*

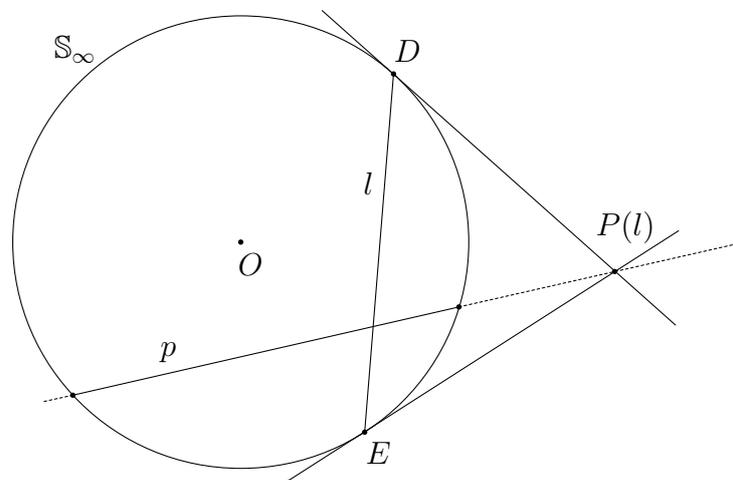


Figura 2.27: Dos líneas perpendiculares l y p .

Recordemos que ser perpendicular es una relación simétrica, tenemos la siguiente observación.

Observación 2.3. *La polar $P(l)$ de la línea l se encuentra en la extensión ultra ideal de la línea p si y sólo si la polar $P(p)$ de la línea p se encuentra en la extensión ultra ideal de la línea l .*

A partir de la construcción anterior podemos trazar la línea hiperbólica perpendicular por un punto dado Q a la línea l , debido a que al construir $P(l)$ solo trazamos la línea euclidiana que pasa por $P(l)$ y Q ; el segmento de línea contenido en $\mathbb{B}_{\mathbb{K}}$ será la línea hiperbólica perpendicular a l que pasa por Q .

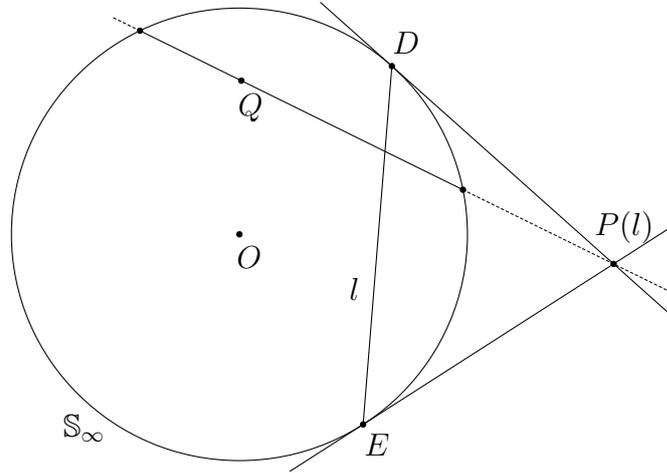


Figura 2.28: Perpendicular a l por Q .

2.4.3. Punto medio de un segmento hiperbólico en $\mathbb{B}_{\mathbb{K}}$.

Para encontrar el punto medio del segmento hiperbólico AB , trazamos la línea hiperbólica l que contiene a AB y encontramos su polo $P(l)$. Luego, trazamos las líneas perpendiculares a l por A y B , estas perpendiculares intersecan a \mathbb{S}_{∞} en los puntos S, S', T y T' , como se ilustra en la siguiente figura.

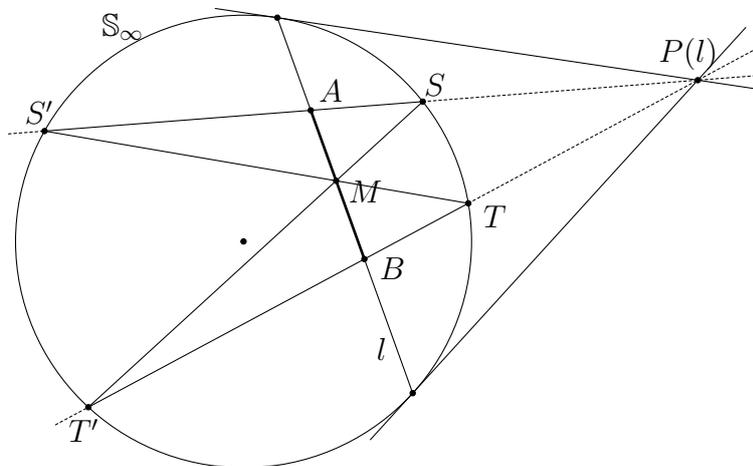


Figura 2.29: M es el punto medio del segmento hiperbólico AB .

Por último, trazamos la línea hiperbólica con extremos ideales S y T' , de la misma manera, trazamos la línea hiperbólica con extremos ideales T y S' . El punto de intersección de estas líneas con l es el punto medio del segmento hiperbólico AB ⁶.

2.5. La métrica hiperbólica en \mathbb{D} .

En esta sección vamos a definir la métrica hiperbólica para dos puntos cualesquiera en \mathbb{D} analizando primero la distancia entre dos puntos sobre una línea hiperbólica que pasa por el centro de \mathbb{S}_∞ haciendo uso de la reflexión. También daremos una definición de distancia que no requiere de reflexión; usaremos la razón doble cruzada la cual se describió en la subsección 1.3.1.

Para definir esta distancia trabajaremos en el modelo del disco de Poincaré \mathbb{D} , y posteriormente demostraremos que la distancia entre los modelos es la misma si transformamos uno en el otro; dichas transformaciones se verán en la siguiente sección.

El proceso que se utiliza para la deducción de la métrica hiperbólica en este modelo, así como también los resultados importantes que se van obteniendo en el desarrollo de esta sección, son el resultado de ideas originales inspiradas en la deducción de la métrica hiperbólica que hace M. Cruz López y M. García Campos en [CG2] en el modelo del semiplano superior de Poincaré.

Una hipótesis importante que vamos a considerar es que la métrica hiperbólica que queremos definir se conserva bajo reflexiones.

2.5.1. Distancia entre dos puntos sobre una línea hiperbólica que pasa por el centro de \mathbb{S}_∞ .

Definiremos primero la distancia entre dos puntos sobre la línea hiperbólica \mathcal{L} que pasa por el centro de \mathbb{S}_∞ , posteriormente extenderemos esta definición para cualesquiera dos puntos en el disco de Poincaré.

Sea $P \in \mathbb{D}$ y c una circunferencia con centro hiperbólico en P . Por la subsección 1.3.4, tenemos que a c y \mathbb{S}_∞ las podemos poner concéntricas⁷, ver figura 2.30(b).

⁶Notar que las tres líneas son concurrentes.

⁷Observar que para toda circunferencia concéntrica con \mathbb{S}_∞ , su centro hiperbólico coincide con su centro euclidiano.

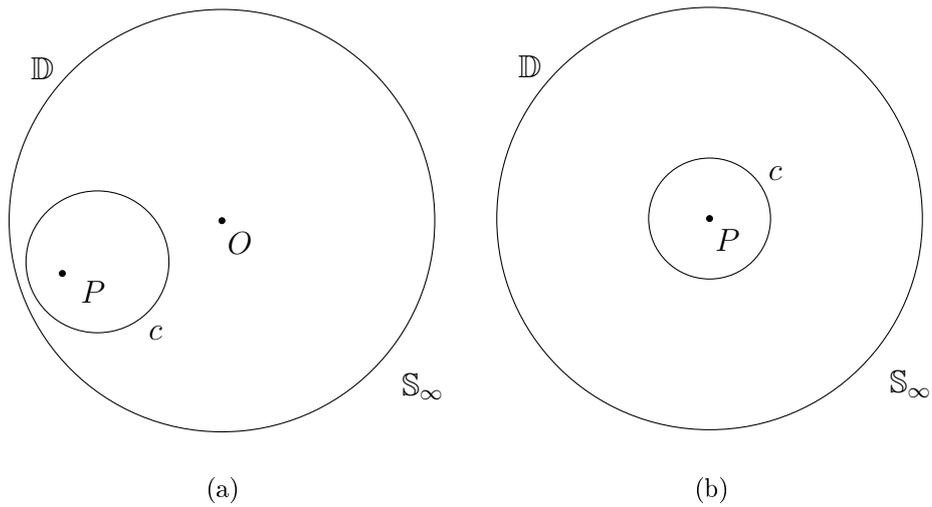


Figura 2.30: Métrica en el modelo del disco de Poincaré \mathbb{D} .

Sin pérdida de generalidad tomemos la línea \mathcal{L} como la línea hiperbólica vertical que pasa por P y denotemos por N y S a los puntos de la intersección de \mathcal{L} con \mathbb{S}_∞ y sean A y B los puntos de intersección de c con \mathcal{L} , como se ilustra en la siguiente figura.

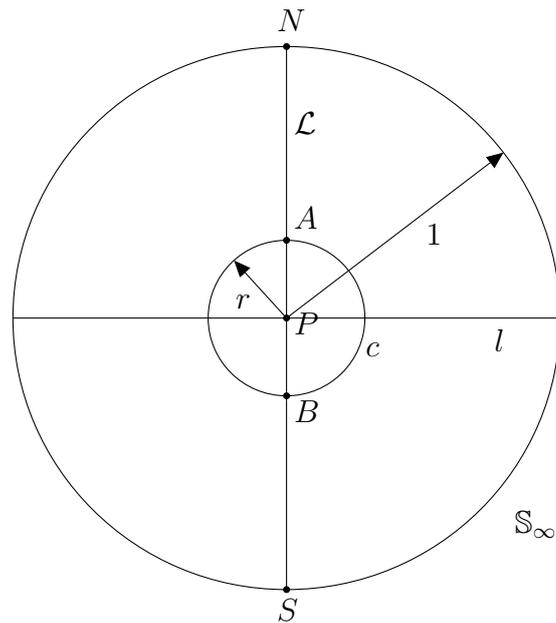


Figura 2.31: Distancia entre dos puntos en \mathcal{L} .

Como P es el centro hiperbólico de c , se sigue que P es el punto medio del segmento hiperbólico AB . Además, A y B son reflejados con respecto a la línea hiperbólica horizontal l que pasa por P .

Si reflejamos a la circunferencia c con respecto de la línea hiperbólica n que es tangente a c en B , ver figura 2.32. Obtenemos que c se refleja en otra circunferencia c'' . Además,

los reflejados de P y A respecto de n son P'' y A' respectivamente. Como la métrica que vamos a definir se conserva bajo reflexión, se cumple que $PB = BP''$, con lo que P'' es el centro de c'' . Si A se refleja con respecto a n en A' y como $PB = PA$, entonces

$$A'P'' = P''B = BP = PA$$

ya que la métrica se conserva bajo reflexión.

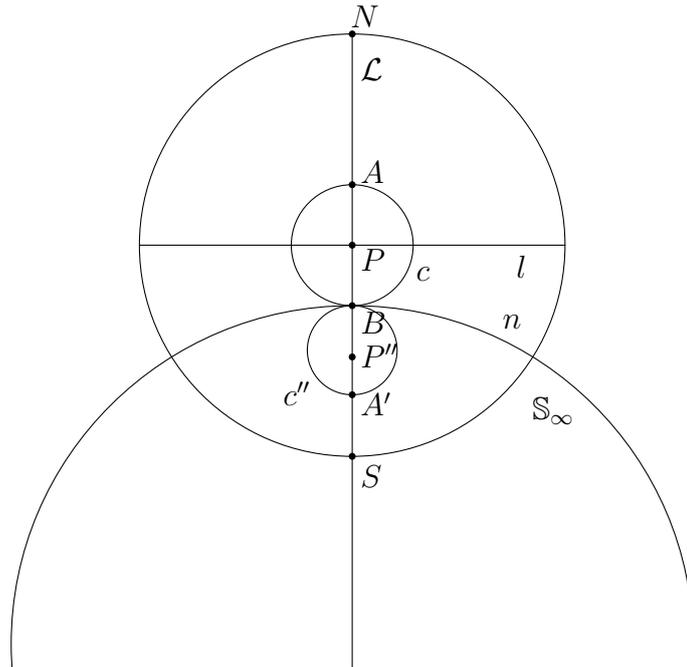


Figura 2.32: Reflexión de c con respecto de n .

Ahora, si reflejamos a la circunferencia c con respecto a la línea hiperbólica m que es tangente a c en A , ver figura 2.33. Obtenemos que la circunferencia c se refleja en otra circunferencia c' y el reflejado de P es el punto P' . Como la métrica que vamos a definir se conserva bajo reflexión, se cumple que $P'A = PA$, con lo que P' es el centro hiperbólico de c' .

Si el punto B se refleja con respecto a m en B' y como $PA = PB$, entonces se cumple que:

$$P'B' = P'A = PA = PB$$

ya la métrica se conserva bajo reflexión.

Supongamos, sin pérdida de generalidad que el radio de \mathbb{S}_∞ es igual a 1 y que el radio de c es r .

Sea H la circunferencia que contiene a m y sea Q el inverso de A con respecto a \mathbb{S}_∞ , entonces $PQ \cdot PA = 1$, esto es, $PQ = \frac{1}{r}$. Si W es el centro de H , entonces

$$WA = \frac{PQ - PA}{2} = \frac{\frac{1}{r} - r}{2} = \frac{1 - r^2}{2r}.$$

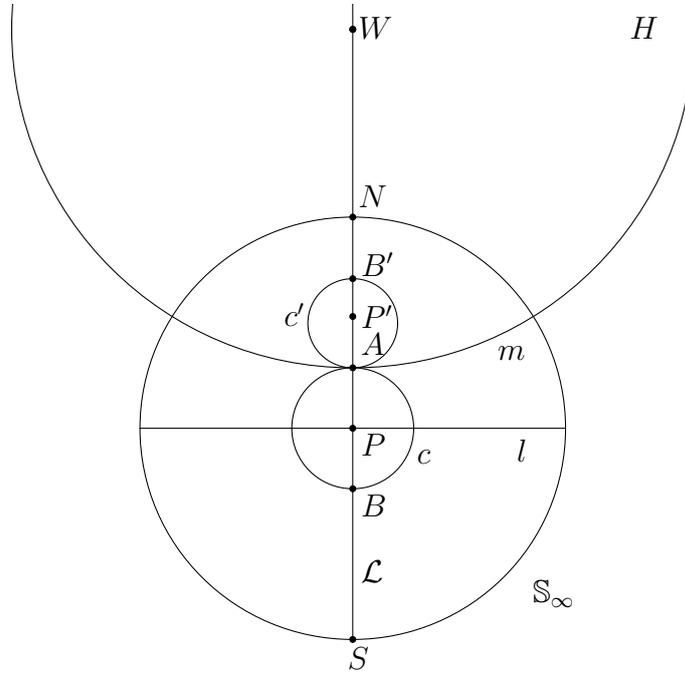


Figura 2.33: Reflexión de c con respecto de m .

Como P' es el reflejado de P con respecto a H . Esto implica que $WP \cdot WP' = (WA)^2$, pero $WP = WA + PA = \frac{1-r^2}{2r} + r = \frac{1+r^2}{2r}$.

$$\Rightarrow WP' = \frac{\left(\frac{1-r^2}{2r}\right)^2}{\frac{1+r^2}{2r}} = \frac{(1-r^2)^2}{2r(1+r^2)}.$$

Luego,

$$AP' = WA - WP' = \frac{1-r^2}{2r} - \frac{(1-r^2)^2}{2r(1+r^2)} = \frac{r(1-r^2)}{1+r^2}.$$

Así

$$PP' = PA + AP' = r + \frac{r(1-r^2)}{1+r^2} = \frac{2r}{1+r^2}.$$

Por lo tanto, la distancia euclidiana de N a P' es

$$NP' = NP - PP' = 1 - \frac{2r}{1+r^2} = \frac{(1-r)^2}{1+r^2}. \quad (2.2)$$

Como el radio de c es r , se tiene que

$$NA = 1 - r.$$

Análogamente, la distancia euclidiana de S a P' es

$$SP' = SP + PP' = 1 + \frac{2r}{1+r^2} = \frac{(1+r)^2}{1+r^2}. \quad (2.3)$$

De la misma manera, $SA = 1 + r$.

Ahora, como B' es el reflejo de B con respecto a H . Esto implica que $WB \cdot WB' = (WA)^2$, pero $WB = WA + AB = \frac{1-r^2}{2r} + 2r = \frac{1+3r^2}{2r}$.

$$\Rightarrow WB' = \frac{\left(\frac{1-r^2}{2r}\right)^2}{\frac{1+3r^2}{2r}} = \frac{(1-r^2)^2}{2r(1+3r^2)}.$$

Luego,

$$AB' = WA - WB' = \frac{1-r^2}{2r} - \frac{(1-r^2)^2}{2r(1+3r^2)} = \frac{2r(1-r^2)}{1+3r^2}.$$

De aquí que

$$NB' = NP - PA - AB' = 1 - r - \frac{2r(1-r^2)}{1+3r^2} = \frac{(1-r)^3}{1+3r^2}. \quad (2.4)$$

De manera análoga

$$SB' = SA + AB' = (1+r) + \frac{2r(1-r^2)}{1+3r^2} = \frac{(1+r)^3}{1+3r^2}. \quad (2.5)$$

De esta forma hemos obtenidos las distancias euclidianas de los punto A , P' y B' a los puntos N y S . De la misma forma podemos obtener las distancias euclidianas de B , P'' y A' a N y S .

Ahora, damos la relación de los puntos en la línea hiperbólica \mathcal{L} con respecto a N y S de tal manera que se tiene la siguiente correspondencia entre los puntos:

<i>Para el punto N</i>	<i>Para el punto S</i>
$B' \longleftrightarrow \frac{(1-r)^3}{1+3r^2}$	$B' \longleftrightarrow \frac{(1+r)^3}{1+3r^2}$
$P' \longleftrightarrow \frac{(1-r)^2}{1+r^2}$	$P' \longleftrightarrow \frac{(1+r)^2}{1+r^2}$
$A \longleftrightarrow 1-r$	$A \longleftrightarrow 1+r$
$P \longleftrightarrow 1$	$P \longleftrightarrow 1$
$B \longleftrightarrow 1+r$	$B \longleftrightarrow 1-r$
$P'' \longleftrightarrow \frac{(1+r)^2}{1+r^2}$	$P'' \longleftrightarrow \frac{(1-r)^2}{1+r^2}$
$A' \longleftrightarrow \frac{(1+r)^3}{1+3r^2}$	$A' \longleftrightarrow \frac{(1-r)^3}{1+3r^2}$

De la forma como están los datos anteriores no se puede visualizar un patrón a seguir en las distancias de cada puntos a N y S respectivamente, pero si hacemos $k = \frac{2(1-r)}{1+r}$ se tiene

<i>Para el punto N</i>	<i>Para el punto S</i>
$B' \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k^3}{2^3 + k^3} \right)$	$B' \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k^{-3}}{2^{-3} + k^{-3}} \right)$
$P' \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k^2}{2^2 + k^2} \right)$	$P' \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k^{-2}}{2^{-2} + k^{-2}} \right)$
$A \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k}{2 + k} \right)$	$A \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k^{-1}}{2^{-1} + k^{-1}} \right)$
$P \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k^0}{2^0 + k^0} \right)$	$P \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k^0}{2^0 + k^0} \right)$
$B \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k^{-1}}{2^{-1} + k^{-1}} \right)$	$B \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k}{2 + k} \right)$
$P'' \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k^{-2}}{2^{-2} + k^{-2}} \right)$	$P'' \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k^2}{2^2 + k^2} \right)$
$A' \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k^{-3}}{2^{-3} + k^{-3}} \right)$	$A' \longleftrightarrow 2 \left(\frac{k^3}{2^3 + k^3} \right)$

Queremos definir una distancia en \mathbb{D} ; es decir, una función

$$d : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, \infty)$$

que satisfaga las siguientes condiciones:

- a) $d(P, Q) \geq 0$ y $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$.
- b) $d(P, Q) = d(Q, P)$.
- c) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$, y $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$ para puntos colineales.

Queremos saber cómo definir la distancia entre dos puntos cualesquiera en el modelo del disco de Poincaré y hasta el momento lo que sabemos es la relación que estos puntos tienen sobre una línea hiperbólica \mathcal{L} que pasa por el centro de \mathbb{S}_∞ con respecto a los puntos de intersección de \mathcal{L} y \mathbb{S}_∞ . Al repetir el proceso de reflejar circunferencias hacia arriba y hacia abajo tantas veces como queramos, queremos que la distancia entre dos puntos consecutivos sea la misma y también que se cumplan las tres propiedades que acabamos de mencionar y que definen a una distancia.

Notar que la distancia euclidiana de un punto cualquiera de \mathcal{L} a S o a N no funciona ya que:

$$1 - (1 - r) \neq (1 - r) - \frac{(1 - r)^2}{1 + r^2}.$$

Consideremos entonces los cocientes de las distancias euclidianas de los puntos a N y a S . Definimos las posibles distancias como

$$d_N(P, Q) = \frac{NQ}{NP} = \frac{2 \left(\frac{k^q}{2^q + k^q} \right)}{2 \left(\frac{k^p}{2^p + k^p} \right)} \text{ y } d_S(P, Q) = \frac{SP}{SQ} = \frac{2 \left(\frac{k^{-p}}{2^{-p} + k^{-p}} \right)}{2 \left(\frac{k^{-q}}{2^{-q} + k^{-q}} \right)}.$$

Pero con estas funciones, la distancia entre dos puntos consecutivos no es la misma.

Ahora, si consideramos el producto de d_N y d_S como posible distancia, tenemos

$$d(P, Q) = d_N(P, Q) \cdot d_S(P, Q) = \left(\frac{NQ}{NP} \right) \cdot \left(\frac{SP}{SQ} \right),$$

así

$$d(P, Q) = \frac{\left(\frac{k^q}{2^q + k^q} \right)}{\left(\frac{k^p}{2^p + k^p} \right)} \cdot \frac{\left(\frac{k^{-p}}{2^{-p} + k^{-p}} \right)}{\left(\frac{k^{-q}}{2^{-q} + k^{-q}} \right)} = \left(\frac{2}{k} \right)^{p-q}.$$

Con esta definición, d siempre es positiva, verifiquemos ahora que para dos puntos consecutivos la distancia es la misma.

Sean X y Y dos puntos consecutivos en \mathcal{L} , entonces

$$d(X, Y) = \left(\frac{2}{k} \right)^{(x+1)-x} = \frac{2}{k}.$$

Lo que implica que para dos puntos consecutivos la distancia es la misma.

Ahora, verificaremos si d satisface las tres propiedades que mencionamos anteriormente.

No se cumple que es igual a cero si y sólo si los dos puntos son los mismos, puesto que:

$$d(P, P) = \left(\frac{2}{k} \right)^{p-p} = 1.$$

La segunda propiedad tampoco la cumple ya que

$$d(P, Q) = \left(\frac{2}{k} \right)^{p-q} \neq \left(\frac{2}{k} \right)^{q-p} = d(Q, P).$$

Finalmente observemos que también no se cumple que la distancia sea aditiva para puntos colineales; es decir, no se cumple que $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$. Si $p > q > r$, entonces

$$d(P, Q) = \left(\frac{2}{k} \right)^{p-q}, \quad d(Q, R) = \left(\frac{2}{k} \right)^{q-r} \text{ y } d(P, R) = \left(\frac{2}{k} \right)^{p-r}$$

pero

$$\left(\frac{2}{k}\right)^{p-q} + \left(\frac{2}{k}\right)^{q-r} \neq \left(\frac{2}{k}\right)^{p-r},$$

lo que implica que la distancia así definida no es aditiva para puntos colineales. Sin embargo observemos que el producto satisface la igualdad

$$\left(\frac{2}{k}\right)^{p-q} \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^{q-r} = \left(\frac{2}{k}\right)^{p-r}.$$

Esto es, en la expresión anterior, los exponentes si son aditivos. Esto sugiere que, si queremos que la distancia sea aditiva, podemos tomar el logaritmo natural. También tenemos que tomar el valor absoluto para que se cumpla que $d(P, Q) = d(Q, P)$.

Por lo tanto podemos definir a d como

$$d(P, Q) = \left| \log \left(\left(\frac{2}{k} \right)^{p-q} \right) \right|.$$

Se tiene que d así definida cumple con las tres propiedades de la distancia, pero no podemos comprobar la desigualdad triangular para puntos que no son colineales, pues nuestra definición es para puntos sobre una línea hiperbólica que pasa por el centro de \mathbb{S}_∞ .

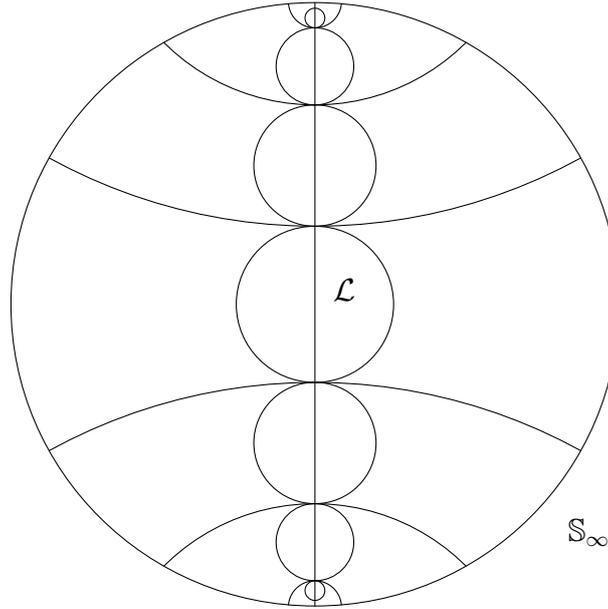
Definición 2.7. *La distancia hiperbólica entre dos puntos sobre una línea que pasa por el centro de \mathbb{S}_∞ está dada por*

$$d(P, Q) = \left| \log \left(\left(\frac{2}{k} \right)^{p-q} \right) \right|.$$

Es importante notar que la distancia de cualquier punto a la circunferencia \mathbb{S}_∞ es infinita, debido a que, al hacer tender P a N , $p \rightarrow \infty$. Así, en la definición de distancia tenemos:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \log \left(\left(\frac{2}{k} \right)^{p-q} \right) \right| = \infty.$$

Geoméricamente construiremos la métrica hiperbólica reflejando una circunferencia con respecto de líneas hiperbólicas paralelas y bajo la hipótesis de que la reflexión conserva distancias. Si repetimos este proceso para acercarnos a la frontera ideal, cada vez nos acercamos más lentamente a \mathbb{S}_∞ , y podemos repetir el proceso de reflexión una infinidad de veces sin llegar a \mathbb{S}_∞ .

Figura 2.34: La métrica hiperbólica en \mathcal{L} .

2.5.2. Distancia entre dos puntos cualesquiera en \mathbb{D} .

Habiendo definido la distancia entre dos puntos sobre la línea hiperbólica \mathcal{L} que pasa por el centro de \mathbb{S}_∞ , estamos en condiciones de generalizar esta definición para cualesquiera dos puntos en \mathbb{D} .

Sean P y Q cualesquiera dos puntos en \mathbb{D} y tracemos la línea hiperbólica \mathcal{L} que pasa por P y Q . Sean S y T los puntos de intersección de \mathcal{L} con \mathbb{S}_∞ . Además, sea Z el otro punto de intersección de \mathcal{L} con la tangente a \mathbb{S}_∞ por S . Tracemos la línea hiperbólica m (con centro en Z) y que interseca a \mathbb{S}_∞ en S , ver figura 2.35. Denotemos por \mathcal{L}' a la imagen de \mathcal{L} bajo la reflexión con respecto a m . La línea \mathcal{L}' es ortogonal a \mathbb{S}_∞ , pasa por S y las imágenes de P y Q son dos puntos P' y Q' sobre esta línea⁸.

La distancia entre los puntos P y Q debe ser la misma que la distancia entre sus imágenes P' y Q' . Usando la definición anterior obtenemos:

$$d(P, Q) = d(P', Q') = \left| \log \left(\left(\frac{2}{k} \right)^{p'-q'} \right) \right|.$$

⁸Notemos que \mathcal{L}' pasa por el centro de \mathbb{S}_∞ .

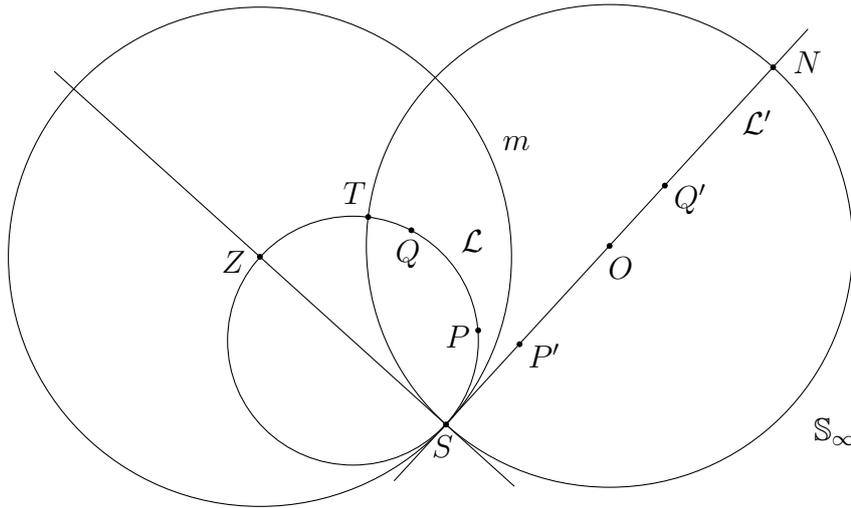


Figura 2.35: Distancia entre dos puntos en \mathbb{D} .

Comprobemos que esta definición determina efectivamente una distancia; esto es, la función d satisface las propiedades:

- a) $d(P, Q) \geq 0$ y $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$,
- b) $d(P, Q) = d(Q, P)$,
- c) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$.

Por definición la primera parte de la propiedad a) se cumple. Por otra parte, si $P = Q$, entonces $P' = Q'$, y por lo tanto $d(P, Q) = d(P', Q') = 0$. Si $d(P, Q) = 0$, entonces, $d(P', Q') = 0$, lo que implica que

$$\log \left(\left(\frac{2}{k} \right)^{p'-q'} \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{k} \right)^{p'-q'} = 1 \Rightarrow p' - q' = 0 \Rightarrow p' = q'.$$

Esto implica que $P = Q$.

La propiedad b) también es cierta ya que:

$$\begin{aligned} d(P, Q) = d(P', Q') &= \left| \log \left(\left(\frac{2}{k} \right)^{p'-q'} \right) \right| \\ &= \left| -\log \left(\left(\frac{2}{k} \right)^{p'-q'} \right) \right| \\ &= \left| \log \left(\left(\frac{2}{k} \right)^{-(p'-q')} \right) \right| \\ &= \left| \log \left(\left(\frac{2}{k} \right)^{q'-p'} \right) \right| = d(Q', P') = d(Q, P). \end{aligned}$$

Para demostrar la desigualdad triangular, tomemos otro punto R en \mathbb{D} y lo reflejamos con respecto a la línea hiperbólica m ; la imagen de R es un punto R' que no está sobre la línea hiperbólica \mathcal{L}' .

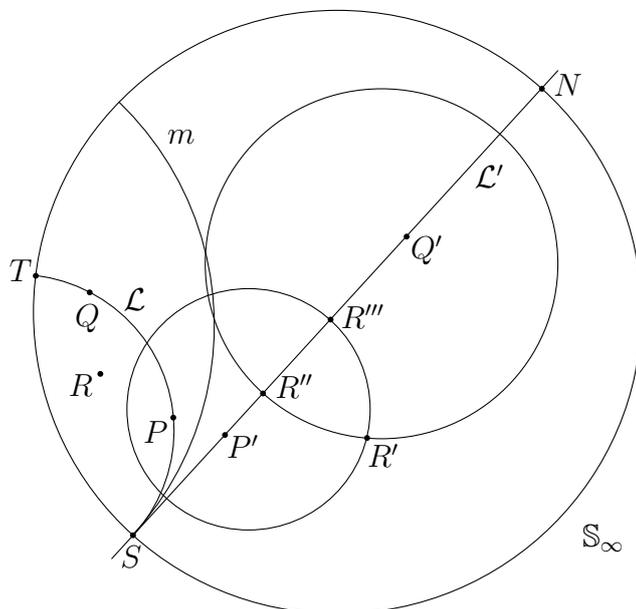


Figura 2.36: Desigualdad triangular en \mathbb{D} .

Para calcular la distancia de Q' a R' trazamos la circunferencia con centro hiperbólico en Q' que pasa por R' y llamamos R'' al punto donde la circunferencia interseca a la línea \mathcal{L}' que se encuentra entre P' y Q' , ver figura 2.36. Como R' y R'' están sobre la circunferencia con centro hiperbólico en Q' , se sigue que sus distancias al centro son iguales ($R'Q'$ y $R''Q'$ son radios hiperbólicos).

Análogamente, para calcular la distancia de P' a R' , trazamos la circunferencia con centro hiperbólico en P' que pase por R' y llamamos R''' al punto de intersección de esta circunferencia con la línea \mathcal{L}' que se encuentra entre P' y Q' , ver figura 2.36.

Los puntos así construidos, satisfacen:

$$d(P, R) + d(R, Q) = d(P', R') + d(R', Q') = d(P', R''') + d(R'', Q').$$

Pero,

$$\begin{aligned} d(P', R''') + d(R'', Q') &= [d(P', R'') + d(R'', R''')] + [d(R''', R'') + d(R''', Q')] \\ &= [d(P', R'') + d(R'', R''') + d(R''', Q')] + d(R''', R'') \\ &= d(P', Q') + d(R''', R''). \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple:

$$d(P, R) + d(R, Q) = d(P', Q') + d(R'', R''') \geq d(P', Q') = d(P, Q).$$

Para saber cuándo se cumple la igualdad en la desigualdad triangular, tomemos al punto R sobre la línea hiperbólica \mathcal{L} . La imagen de R bajo la reflexión con respecto de m es un punto R' que está sobre el segmento hiperbólico $P'Q'$, y por lo tanto se cumple que:

$$d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q);$$

es decir, se cumple la igualdad en la desigualdad del triangular. Por lo tanto, la línea hiperbólica que pasa por P y Q es la trayectoria que realiza el camino más corto entre estos dos puntos.

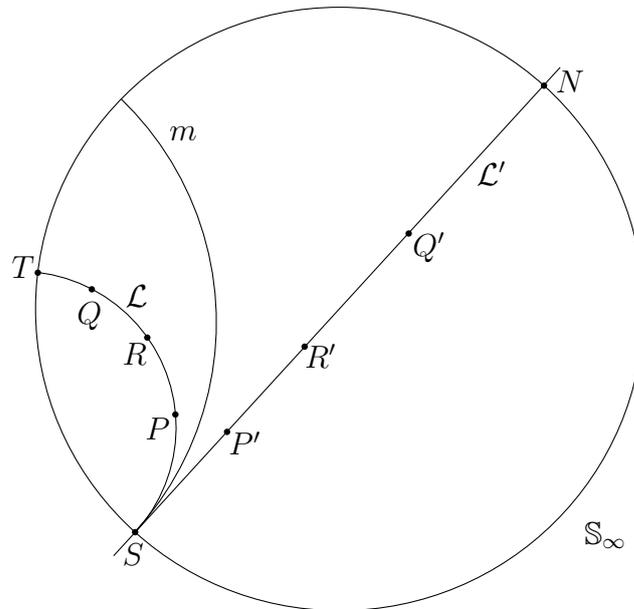


Figura 2.37: Igualdad en la desigualdad triangular en \mathbb{D} .

Observación 2.4. *Dados dos puntos cualesquiera en el plano hiperbólico, la distancia más corta entre éstos es el segmento de línea que los une. Debido a esta propiedad, las líneas hiperbólicas se denominan geodésicas.*

2.5.3. Distancia hiperbólica en \mathbb{D} .

Hasta este momento hemos definido la distancia para cualesquiera dos puntos en \mathbb{D} pero, a pesar de que esta distancia está bien definida, el procedimiento para medir es

complicado, pues, si queremos saber cuál es la distancia entre dos puntos cualesquiera en \mathbb{D} , es necesario primero reflejarlos en dos puntos sobre una línea hiperbólica que pase por el centro de \mathbb{S}_∞ y luego calcular la distancia hiperbólica. Damos ahora una definición de distancia que no requiere de la reflexión.

Sean P y Q dos puntos en \mathbb{D} , sea \mathcal{L} la línea que pasa por ellos y sean S y T los puntos de intersección de \mathcal{L} con \mathbb{S}_∞ . En la sección anterior reflejamos a \mathcal{L} con respecto de una línea hiperbólica m que pasa por S y vimos que la imagen de la línea \mathcal{L} es la línea hiperbólica \mathcal{L}' , la imagen de P y Q son los puntos P' y Q' , la imagen de S es S y la imagen de T es N .

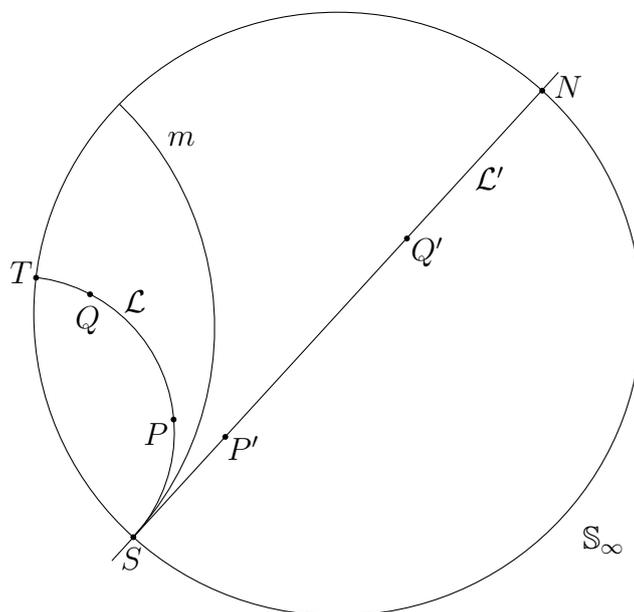


Figura 2.38: Distancia entre dos puntos cualesquiera en \mathbb{D} .

En la subsección 1.3.1 se describió la razón cruzada y se demostró que se conserva bajo reflexiones, se sigue que para los puntos S, T, P, Q y sus respectivos reflejados:

$$[S, T; P, Q] = [S, N; P', Q'] = \frac{SP'/NP'}{SQ'/NQ'} = \left(\frac{NQ'}{NP'}\right) \cdot \left(\frac{SP'}{SQ'}\right).$$

Definimos la distancia de P' a Q' como $\left| \log \left(\left(\frac{2}{k}\right)^{p'-q'} \right) \right|$, pero acabamos de demostrar que $\left(\frac{2}{k}\right)^{p'-q'} = \left(\frac{NQ'}{NP'}\right) \cdot \left(\frac{SP'}{SQ'}\right) = [S, T; P, Q]$, por lo que podemos definir la distancia hiperbólica como:

$$d(P, Q) = |\log([S, T; P, Q])|,$$

donde $[S, T; P, Q]$ es la razón cruzada; notemos que P y Q son puntos en \mathbb{D} , S y N son puntos en la frontera ideal \mathbb{S}_∞ .

Por tanto, haciendo uso de la razón cruzada hemos definido la distancia hiperbólica entre dos puntos cualesquiera en \mathbb{D} .

Ahora, probaremos un resultado muy importante.

Proposición 2.3. *Sean m y n dos líneas ortogonales que se intersecan en un punto P . Si Q está en m y es un punto distinto de P , entonces P es el punto medio del segmento QQ' .*

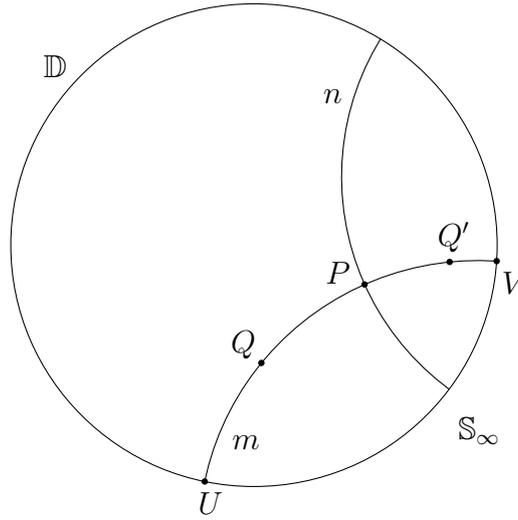


Figura 2.39: Punto medio del segmento QQ' .

Demostración. Sean U y V los puntos de intersección de m con S_∞ y denotemos por Q' a la reflexión de Q con respecto de n . Como la razón cruzada se conserva bajo reflexiones, se sigue que:

$$[U, V; Q, P] = [U, V; P, Q'].$$

Luego,

$$\begin{aligned} [U, V; Q, Q'] &= \frac{UQ/VQ}{UQ'/VQ'} \\ &= \frac{UQ/VQ}{UP/VP} \cdot \frac{UP/VP}{UQ'/VQ'} \\ &= [U, V; Q, P] \cdot [U, V; P, Q'] \\ &= [U, V; Q, P]^2. \end{aligned}$$

Así

$$d(Q, Q') = |\log([U, V; Q, Q'])| = |\log([U, V; Q, P]^2)| = 2|\log([U, V; Q, P])| = 2d(Q, P)$$

Por lo tanto

$$d(Q, P) = \frac{1}{2}d(Q, Q').$$

□

2.6. Equivalencia entre los modelos.

Una de las ventajas de definir la equivalencia entre los tres modelos de la geometría hiperbólica antes estudiados es que la distancia hiperbólica, que se ha definido en la sección anterior para el modelo del disco de Poincaré, nos sirve para los otros dos modelos. La distancia hiperbólica se ha definido haciendo uso de la razón doble generalizada, la cual se conserva bajo inversiones y precisamente la equivalencia entre los modelos se hará haciendo uso de la inversión geométrica.

2.6.1. Equivalencia entre los modelos de Poincaré.

Veremos ahora que podemos identificar de una manera muy sencilla al modelo del disco de Poincaré \mathbb{D} con el modelo del semiplano superior de Poincaré \mathbb{H} .

Sea c una circunferencia tangente a \mathbb{H}_∞ con centro en O^* (“abajo” de \mathbb{H}_∞) y radio 2. Definamos la transformación $\varphi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ como la reflexión con respecto a la circunferencia c . Al momento de invertir con respecto a c tenemos que \mathbb{H}_∞ se refleja en c_1 y la parte superior de \mathbb{H}_∞ se refleja en la parte interior de c_1 .

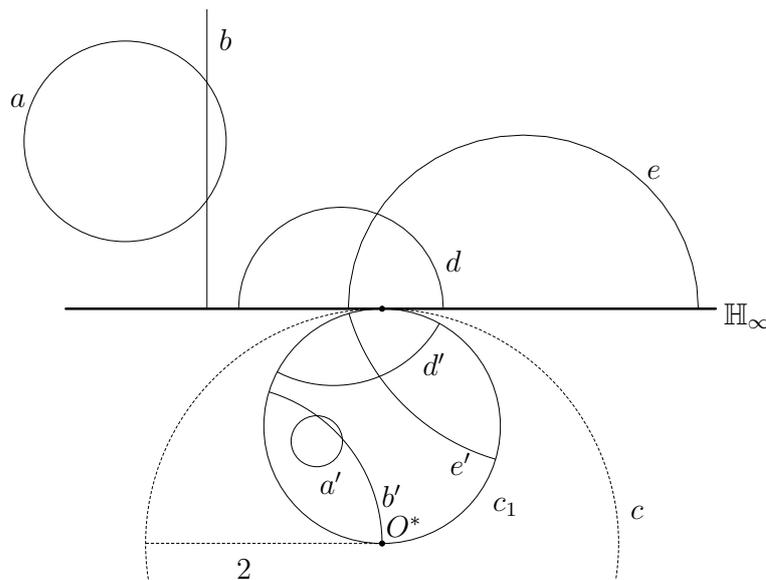


Figura 2.40: El modelo del disco y el modelo del semiplano de Poincaré son equivalentes.

Ahora, si tomamos a c_1 como el modelo del disco de Poincaré, se tiene que la imagen de \mathbb{H} bajo φ es \mathbb{D} .

Notemos que, las líneas hiperbólicas b , d y e del modelo del semiplano de Poincaré se reflejan en las líneas hiperbólicas b' , d' y e' del modelo del disco de Poincaré. Además, notar que la circunferencia a del modelo del semiplano se refleja en una circunferencia a' en el modelo del disco.

Como las líneas hiperbólicas en el modelo del semiplano superior de Poincaré son rayos ortogonales a \mathbb{H}_∞ contenidos en \mathbb{H} o el arco de una circunferencia con centro en un punto O en \mathbb{H}_∞ contenida en \mathbb{H} , es decir, las líneas hiperbólicas b , d y e son ortogonales a \mathbb{H}_∞ y como sabemos que las reflexiones conservan los ángulos, entonces las líneas hiperbólicas b' , d' y e' son ortogonales a c_1 . Así, esta reflexión transforma el modelo del semiplano superior de Poincaré en el modelo del disco de Poincaré. Ahora, como las inversiones son involutivas, entonces, esta misma reflexión transforma el modelo del disco de Poincaré c_1 en el modelo del semiplano \mathbb{H} , por lo que ambos modelos son equivalentes.

Otra transformación que nos permite pasar del modelo del disco de Poincaré al modelo del semiplano superior de Poincaré, es la transformación de Cayley⁹.

2.6.2. Equivalencia entre el modelo del disco de Poincaré y el modelo de Beltrami-Klein.

La relación de las líneas hiperbólicas y sus cuerdas en el modelo del disco de Poincaré es útil para la traducción de este modelo al de Beltrami-Klein.

Proposición 2.4 (Líneas hiperbólicas y sus cuerdas). *Dadas dos o más líneas hiperbólicas l , l_1 , l_2 , ... en \mathbb{D} . Todas a través de un punto P .*

1. *Las cuerdas entre los extremos ideales de las líneas $l, l_1, l_2 \dots$ se cruzan en un punto común K , también.*
2. *Sea K' el inverso de K con respecto a \mathbb{S}_∞ . Entonces, K' es el punto medio del segmento PP' entre P y su inverso P' .*

⁹La transformación de Cayley la podemos encontrar en [CG2].

3. La ubicación del punto K en el rayo \overrightarrow{OP} está dada por

$$|OK| = \frac{2(OP)}{1 + (OP)^2}. \quad (2.6)$$

Para la demostración, debemos recordar la definición de potencia $p(O, c)$ de un punto O con respecto a una circunferencia c : Para cualquier circunferencia c y punto O ,

$$p(O, c) = OA \cdot OB$$

donde A y B son los puntos de intersección de la línea l que pasa por O con la circunferencia c . Si una segunda línea k , que pasa por O , interseca a c en los puntos P y Q , se tiene que

$$OA \cdot OB = OP \cdot OQ.$$

Eso implica que la potencia p no depende de la elección de la línea l , y por lo tanto está bien definida. La potencia es negativa para puntos dentro de la circunferencia y positiva para puntos fuera de la circunferencia.

Prueba de (1). Escojamos una línea hiperbólica l que pase por P . Sea E y F los puntos extremos ideales de l , y definamos el punto K como la intersección de la cuerda EF con la cuerda PP' , donde P' es el inverso de P .

En realidad, EF es la cuerda común de \mathbb{S}_∞ y l , y por lo tanto

$$p(K, \mathbb{S}_\infty) = KE \cdot KF = p(K, l).$$

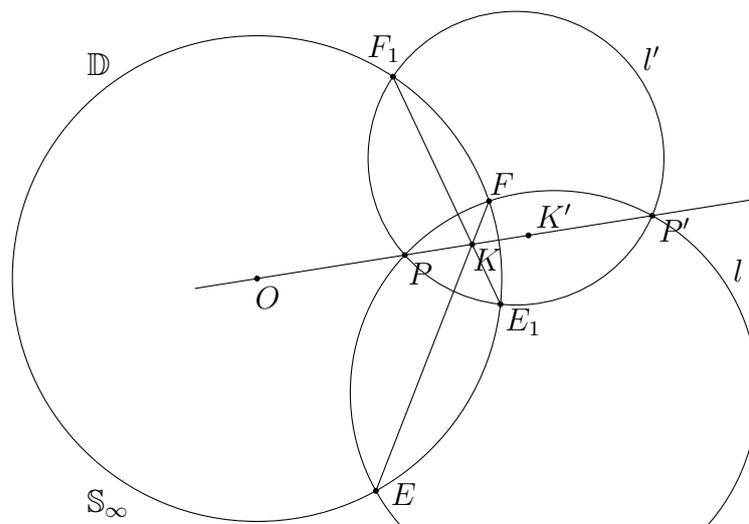


Figura 2.41: Las cuerdas de un haz de líneas hiperbólicas a través de un punto común P se intersecan en un punto común K .

Ahora calculemos la potencia de K relativa a l . Ya que PP' es una cuerda común de todas las líneas hiperbólicas que pasan por P .

$$p(K, l) = KE \cdot KF = KP \cdot KP'.$$

Claramente las dos últimas fórmulas implican

$$p(K, \mathbb{S}_\infty) = KP \cdot KP'$$

lo que confirma que $p(K, \mathbb{S}_\infty)$ es independiente de la elección de la línea l .

Prueba de (2). Dibujamos la circunferencia t con diámetro PP' . Sea K' su centro, y RS es una cuerda común entre t y \mathbb{S}_∞ , ver figura 2.42.

Como t pasa por los puntos P y P' ; por la Proposición 1.3, \mathbb{S}_∞ y t son ortogonales. Entonces $\angle ORK' = 90^\circ$ y RK es la altura del triángulo rectángulo $\triangle ORK'$. Ahora $OK \cdot OK' = (OR)^2 = 1$.

Por lo tanto, el centro K' de la circunferencia t es el punto inverso de K respecto a \mathbb{S}_∞ . Por construcción K' es el punto medio del diámetro PP' .

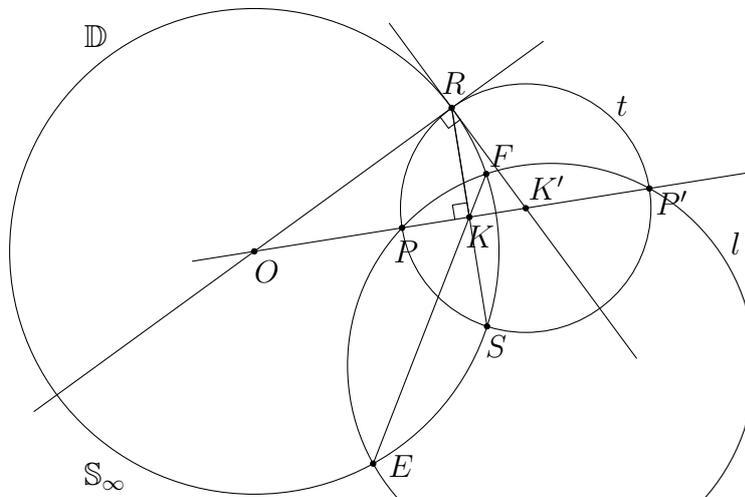


Figura 2.42: K' es el punto medio del segmento PP' .

Prueba de (3). Debido a que K' es el punto medio del segmento PP' , se tiene

$$OK = \frac{1}{OK'} = \frac{1}{OP + PK'}.$$

Pero como sabemos que $1 = OP \cdot OP' = OP(OP + PP') = OP(OP + 2PK')$ esto implica que

$$PK' = \frac{1 - (OP)^2}{2(OP)}.$$

Así

$$OK = \frac{1}{OP + \frac{1-(OP)^2}{2(OP)}} = \frac{2(OP)}{1 + (OP)^2}$$

que confirma la ecuación 2.6.

Proposición 2.5 (El mapeo del disco de Poincaré al modelo de Beltrami-Klein). *El punto P en el modelo del disco de Poincaré se mapea en un punto K en el modelo de Beltrami-Klein requiriendo que los rayos $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK}$ sean idénticos y*

$$OK = \frac{2(OP)}{1 + (OP)^2} \quad (2.7)$$

El mapeo 2.7 mantiene fijos los extremos ideales, y mapea un arco circular l ortogonal a \mathbb{S}_∞ en la cuerda correspondiente con los mismos extremos ideales. De hecho, el mapeo 2.7 es una traducción del modelo del disco de Poincaré al modelo de Beltrami-Klein, ya que los puntos y las líneas del modelo de Poincaré se correlacionan con puntos y líneas del modelo de Klein, preservando la incidencia.

Como se muestra en la última proposición, el punto K es la intersección del rayo OP con la cuerda entre los extremos ideales de cualquier arco l ortogonal a \mathbb{S}_∞ a través del punto P . Esta cuerda k es una línea hiperbólica en el modelo de Beltrami-Klein. Es evidente que todos los puntos de arco l se asignan a puntos de k por la misma construcción, y por lo tanto son todos dados por el mapeo 2.6.

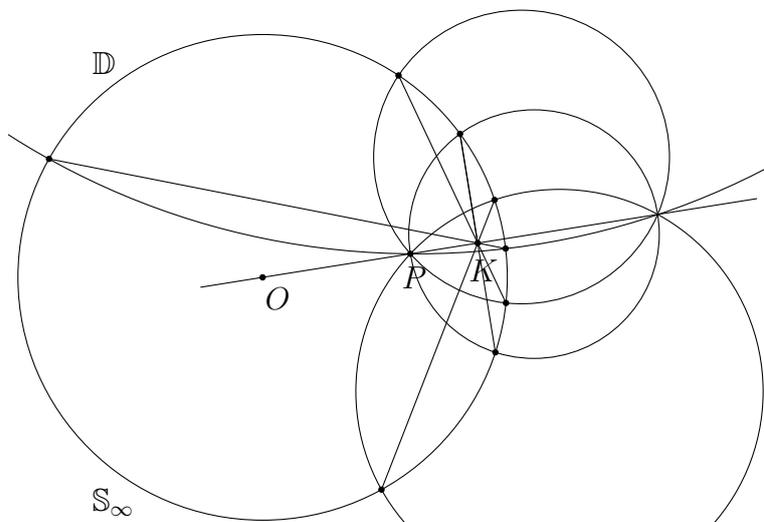


Figura 2.43: Equivalencia entre \mathbb{D} y \mathbb{B}_K .

2.7. Trigonometría hiperbólica.

En la geometría euclidiana hay relaciones bien conocidas entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras da una relación entre los tres lados. Aquí estudiaremos los resultados correspondientes en la geometría hiperbólica.

2.7.1. Las funciones hiperbólicas.

Una forma de relacionar los ángulos con los lados de un triángulo euclidiano es por medio de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente. Ahora vamos a introducir unas nuevas funciones que nos van a permitir relacionar los ángulos con los lados de un triángulo hiperbólico, a las que denominaremos funciones hiperbólicas.

Vamos a definir las funciones hiperbólicas:

Definición 2.8.

$$\begin{aligned}\sinh(t) &= \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \\ \cosh(t) &= \frac{e^t + e^{-t}}{2}; \\ \tanh(t) &= \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}.\end{aligned}$$

Directamente de la definición de $\sinh(t)$ y $\cosh(t)$ obtenemos la relación

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \tag{2.8}$$

Las otras funciones trigonométricas las podemos deducir de la definición, y las relaciones para la adición se pueden consultar en el apéndice A.

2.7.2. El ángulo del paralelismo.

Consideremos el caso especial de un triángulo rectángulo con un vértice ideal.

En este caso, los ángulos internos de este triángulo son α , 0 y $\pi/2$ y el único lado con longitud finita es el que está entre los vértices con ángulos internos α y $\pi/2$. El ángulo del paralelismo es un término clásico de este ángulo expresado en términos del lado de longitud finita.

Proposición 2.6. *Sea \triangle un triángulo hiperbólico con ángulos α , 0 y $\pi/2$. Si a denota la longitud del único lado finito. Entonces*

$$i) \sin(\alpha) = \frac{1}{\cosh(a)};$$

$$ii) \cos(\alpha) = \frac{1}{\coth(a)};$$

$$iii) \tan(\alpha) = \frac{1}{\sinh(a)}.$$

Demostración. Las tres fórmulas para α se pueden demostrar fácilmente. Nosotros sólo demostraremos el literal *ii*), debido a que lo usaremos más adelante.

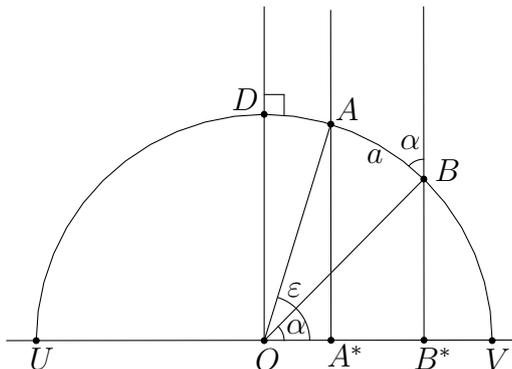


Figura 2.44: Distancia del segmento AB .

De la definición de distancia hiperbólica, tenemos que:

$$a = d(A, B) = |\ln\{ABUV\}| = \left| \ln \left(\frac{UA/AV}{UB/BV} \right) \right| = \left| \ln \left(\frac{BV \cdot UA}{UB \cdot AV} \right) \right|$$

como, en la figura 2.44 tenemos que

$$BV = r\sqrt{2(1 - \cos(\alpha))}, \quad UA = r\sqrt{2(1 + \cos(\epsilon))}, \quad AV = r\sqrt{2(1 - \cos(\epsilon))}$$

$$y \quad UB = r\sqrt{2(1 + \cos(\alpha))}$$

donde $\alpha = \angle BOV$ y $\epsilon = \angle AOV$. Esto implica que

$$a = \left| \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1 - \cos(\alpha))(1 + \cos(\epsilon))}{(1 + \cos(\alpha))(1 - \cos(\epsilon))} \right) \right| = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1 + \cos(\alpha))(1 - \cos(\epsilon))}{(1 - \cos(\alpha))(1 + \cos(\epsilon))} \right)$$

por lo que

$$e^{2a} = \frac{(1 + \cos(\alpha))(1 - \cos(\epsilon))}{(1 - \cos(\alpha))(1 + \cos(\epsilon))}$$

y por la fórmula de $\tanh(t)$ tenemos que

$$\tanh(AB) = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1} = \frac{\cos(\alpha) - \cos(\epsilon)}{1 - \cos(\alpha) \cos(\epsilon)} \quad (2.9)$$

en particular, si $\epsilon = \pi/2$, entonces $A = D$ y tendríamos que α es el ángulo del paralelismo y

$$\tanh(a) = \cos(\alpha)$$

□

2.7.3. Triángulo rectángulo con ángulos α , $\pi/2$ y β .

Ahora, como se quiere encontrar la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo, necesitamos colocar el triángulo en una posición más sencilla desde el punto de vista euclidiano, esto es, dado cualquier triángulo (en particular rectángulo) lo podemos llevar, por medio de reflexiones, a un triángulo congruente dado pero colocado en una posición más sencilla.

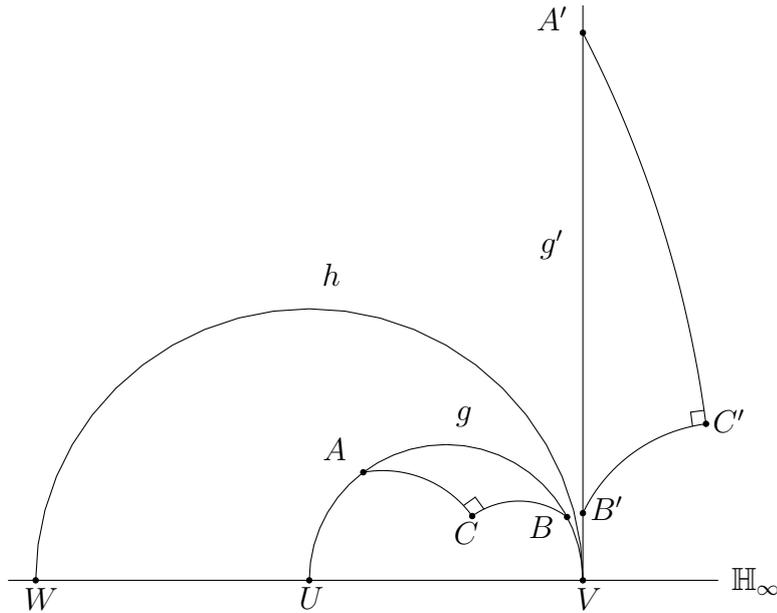


Figura 2.45: El triángulo $\triangle A'B'C'$ está colocado en una posición especial.

Dado un triángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en C , ver figura 2.45. Sean U y V los puntos límites del segmento AB y sea h la línea hiperbólica con puntos límites W y V donde $WU = UV$ (en sentido euclidiano). Ahora, si invertimos con respecto a la circunferencia h , la circunferencia g , se invierte en el rayo euclidiano g' y así, la hipotenusa del triángulo $\triangle ABC$ está en un rayo euclidiano y como vimos que la inversión preserva ángulos y distancias hiperbólicas entonces los triángulos $\triangle A'B'C'$ y $\triangle ABC$ son congruentes.

Con el triángulo en una posición sencilla, podemos hacer los cálculos respectivos para poder encontrar una relación entre los lados y los ángulos de un triángulo hiperbólico cualquiera.

La primera ecuación importante que nos da esa relación es

$$\cosh(AB) = \cot(\alpha) \cdot \cot(\beta). \quad (2.10)$$

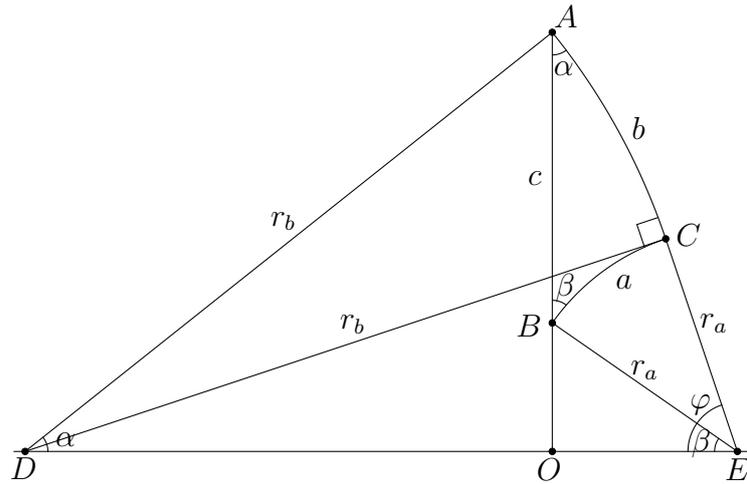


Figura 2.46: El triángulo $\triangle ABC$ en posición especial.

Por otro lado, aplicando la definición calculamos la $\tanh(AB)$ y aplicando la ecuación $x^2 + y^2 = 2xw$, que surge a partir de aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo $\triangle DCE$, calculamos la $\tanh(BC)$; de estos resultados se deduce la siguiente ecuación

$$\tanh(BC) = \tanh(AB) \cdot \cos(\beta) \Rightarrow \cos(\beta) = \frac{\tanh(BC)}{\tanh(AB)} \quad (2.11)$$

ahora, si se intercambia BC por AC y β por α tenemos

$$\tanh(AC) = \tanh(AB) \cdot \cos(\alpha). \quad (2.12)$$

Luego, haciendo uso de las ecuaciones (2.10) y (2.11) y realizando los cálculos respectivos obtenemos

$$\sin(\alpha) = \frac{\sinh(BC)}{\sinh(AB)}, \quad (2.13)$$

si se intercambia α por β y BC por AC obtenemos

$$\sin(\beta) = \frac{\sinh(AC)}{\sinh(AB)}. \quad (2.14)$$

El proceso para obtener las ecuaciones (2.10)-(2.14) se puede ver en el apéndice B de forma detallada.

2.7.4. El teorema de Pitágoras.

En la geometría euclidiana, el teorema de Pitágoras da una relación entre las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo. Aquí probaremos el resultado análogo en la geometría hiperbólica.

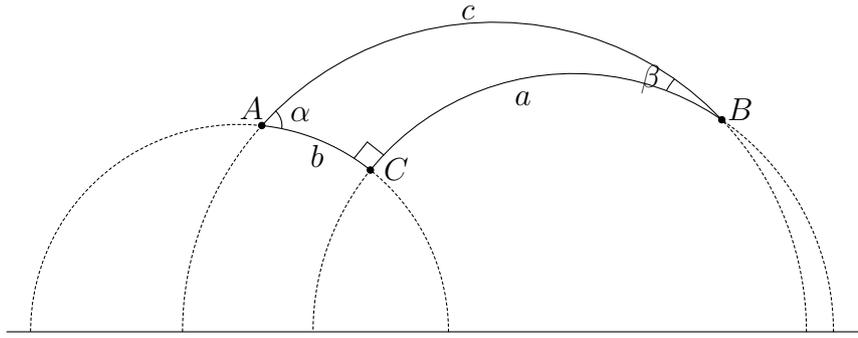


Figura 2.47: El $\triangle ABC$ es rectángulo.

Teorema 2.2. Si \triangle es un triángulo rectángulo hiperbólico con ángulos internos α , β y $\pi/2$ y lados opuestos con longitudes a , b y c respectivamente. Entonces

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cdot \cosh(b).$$

Demostración. De las ecuaciones (2.12) y (2.13) tenemos que

$$\tanh^2(b) = \tanh^2(c)(1 - \sin^2(\alpha)) = \tanh^2(c) \left(\frac{\sinh^2(c) - \sinh^2(a)}{\sinh^2(c)} \right)$$

y utilizando la ecuación (2.8) tenemos

$$\tanh^2(b) = \frac{\sinh^2(c)}{\cosh^2(c)} \left(\frac{\cosh^2(c) - \cosh^2(a)}{\sinh^2(c)} \right)$$

es decir

$$\cosh^2(c)(1 - \tanh^2(b)) = \cosh^2(a)$$

y como

$$1 - \tanh^2(b) = \frac{\cosh^2(b) - \sinh^2(b)}{\cosh^2(b)} = \frac{1}{\cosh^2(b)}$$

entonces tenemos que

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cdot \cosh(b). \quad (2.15)$$

□

Existen dos teoremas que juegan un papel muy importante en el estudio de puntos y rectas notables de un triángulo hiperbólico: hablamos específicamente del teorema del coseno y del teorema del seno. Los enunciados de los teoremas y sus demostraciones están detalladas en el apéndice C.

Capítulo 3

Teselaciones hiperbólicas.

En este capítulo describimos el proceso para construir un triángulo hiperbólico en los modelos \mathbb{H} y \mathbb{D} con ángulos α , β y γ dados, donde la única condición para los ángulos es que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Una teselación es una descomposición que se crea cuando un patrón o una figura básica se repite una y otra vez cubriendo al plano sin dejar espacio o superposición.

Un polígono regular tiene 3 o más lados y ángulos, todos iguales. Una teselación regular es un mosaico formado por polígonos regulares congruentes ¹.

El plano euclidiano solamente puede ser teselado con tres polígonos regulares: triángulos, cuadrados y hexágonos. No podemos mostrar el plano entero, pero imaginemos que se trata de piezas tomadas de planos que han sido teselados, ver figura 3.1.

Las teselaciones hiperbólicas son una descomposición uniforme del plano hiperbólico por piezas del mismo tipo sin que éstas se sobrepongan ni que dejen espacios entre ellas. Así, una teselación triangular hiperbólica es una descomposición del plano hiperbólico por triángulos. Para la terna $\{p, q, r\}$, que satisface la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ se obtiene que el plano hiperbólico se puede teselar con un triángulo con ángulos $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ y $\frac{\pi}{r}$.

Lo interesante de una teselación en la geometría hiperbólica surge a partir de que el plano hiperbólico puede ser teselado de infinitas formas con polígonos regulares.

¹Recordemos que regular significa que los lados y ángulos del polígono son todos equivalentes (es decir, el polígono es equiangular y equilátero). Congruente significa que los polígonos son del mismo tamaño y forma.

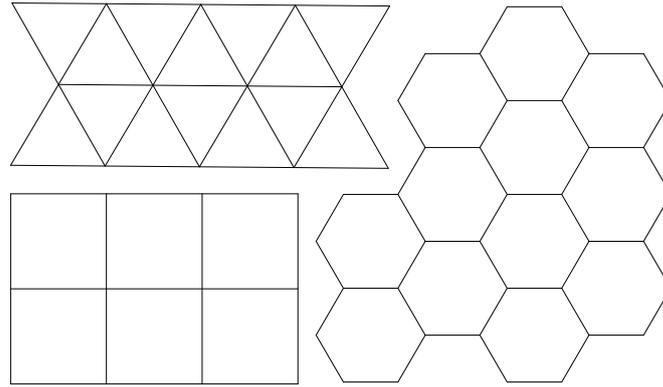
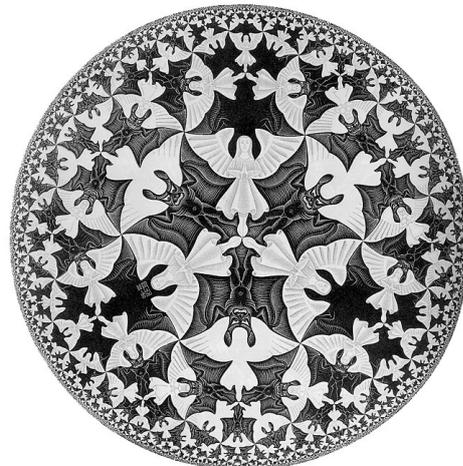


Figura 3.1: El plano euclidiano sólo puede ser teselado con tres polígonos regulares: con triángulos, cuadrados y hexágonos.

Es difícil hablar de teselaciones hiperbólicas sin mencionar a M.C. Escher, quien fue sin duda alguna el artista favorito de los matemáticos debido a que usaba con frecuencia en sus trabajos las teselaciones hiperbólicas. Las siguientes imágenes son parte de las obras que realizó Escher en donde utilizó teselaciones hiperbólicas.



(a) Círculo límite I



(b) Círculo límite IV

Figura 3.2: Obras de M. C. Escher.

Chaim Goodman Strauss, en su artículo *Compass and Straightedge in the Poincaré Disk* publicado en el 2001, da un método para construir una teselación triangular en el modelo del disco de Poincaré, un método que nos lleva a comprender un poco más cómo Escher construyó los Círculos límites I, II, III y IV.

Nosotros hacemos una descripción análoga a la que da C. Goodman pero en el modelo del semiplano superior de Poincaré.

3.1. Construcción de triángulos hiperbólicos con ángulos dados.

En la geometría hiperbólica tres ángulos determinan un triángulo hiperbólico. De hecho, para cualesquiera ángulos dados α , β , γ con suma $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, existe un triángulo único, salvo congruencia.

3.1.1. Construcciones en el modelo del disco de Poincaré.

Las construcciones que presentamos a continuación se pueden consultar en [Rot], en la subsección 41.4.

Para lograr la construcción de un triángulo de ángulos cualesquiera α , β y γ en el disco de Poincaré, es conveniente elegir primero los vértices y determinar el disco \mathbb{D} en un segundo paso. Tal procedimiento no introduce una restricción real, ya que, en un paso extra, se puede usar una inversión para mapear toda la figura tal que el disco construido se pueda incluir en cualquier disco dado. Además, sin pérdida de generalidad, elegiremos uno de los vértices en el centro del disco \mathbb{D} .

Como primer paso tomemos a $\delta = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ como el ángulo de defecto.

Sea O^* un punto cualquiera en \mathbb{E}^2 . Comenzamos trazando la circunferencia c de radio cualquiera y centro en O^* , ahora tomamos dos puntos A y B sobre c tal que $\angle AO^*B = \delta$ como se muestra en la figura 3.3(a).

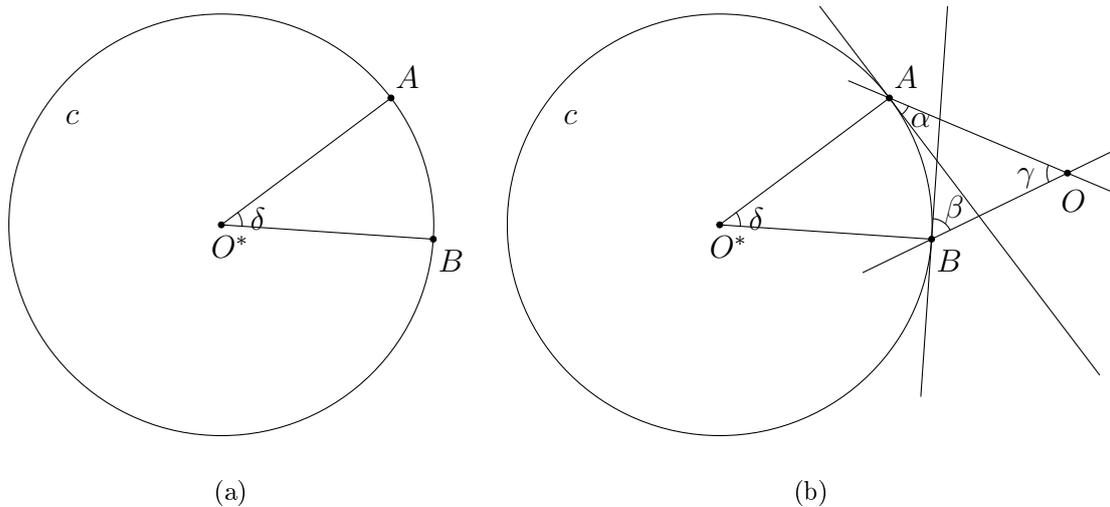


Figura 3.3: Construcción de un triángulo hiperbólico en \mathbb{D} .

El siguiente paso es trazar las tangentes a c por A y B , seguido de desplegar los ángulos

α en el vértice A y β en el vértice B . La intersección de los rayos tangentes como los lados de los ángulos que no son las tangentes a c se intersecan fuera de c , en el punto O formando un ángulo γ , como se muestra en la figura 3.3(b).

Ahora vamos a construir la frontera ideal \mathbb{S}_∞ de \mathbb{D} . Para su construcción, primero trazamos la tangente a c desde el punto O . Si tomamos como T al punto de tangencia, entonces la circunferencia que buscamos es la que tiene su centro en O y radio OT . Notar que c es ortogonal a \mathbb{S}_∞ y que \mathbb{S}_∞ es la frontera ideal de \mathbb{D} , ver figura 3.4.

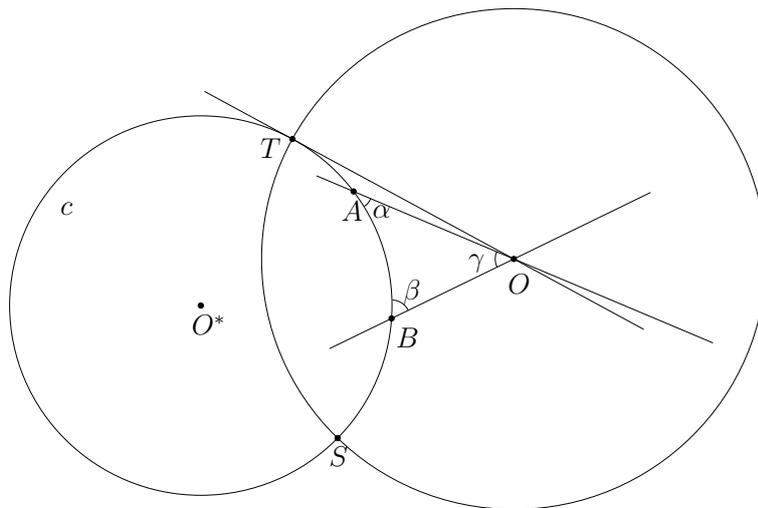


Figura 3.4: Construcción de un triángulo hiperbólico con ángulos α , β y γ .

El arco de c contenido en \mathbb{D} será una línea hiperbólica en \mathbb{D} y como los diámetros de \mathbb{S}_∞ son también líneas hiperbólicas se tiene que los segmentos AO y BO son segmentos hiperbólicos.

Construcción de un triángulo con un vértice ideal.

La construcción anterior es para un triángulo hiperbólico con sus tres vértices en \mathbb{D} , pero existen otros tipos de triángulos a los cuales se les llaman triángulos ideales en donde uno, dos o incluso los tres de sus vértices tienen ángulo igual a cero, a estos vértices se les llaman vértices ideales. En el modelo del disco, estos extremos ideales se encuentran en \mathbb{S}_∞ .

La siguiente construcción es la de un triángulo $\triangle ABC$ con un vértice ideal.

Sin pérdida de generalidad tomemos el vértice A en el centro del disco \mathbb{D} y a C como nuestro vértice ideal. Esto implica que el ángulo en C es igual a cero. Trazamos el lado

AC y el rayo L (donde estará el vértice B), tales que formen un ángulo α entre ellas, como se muestra a continuación.

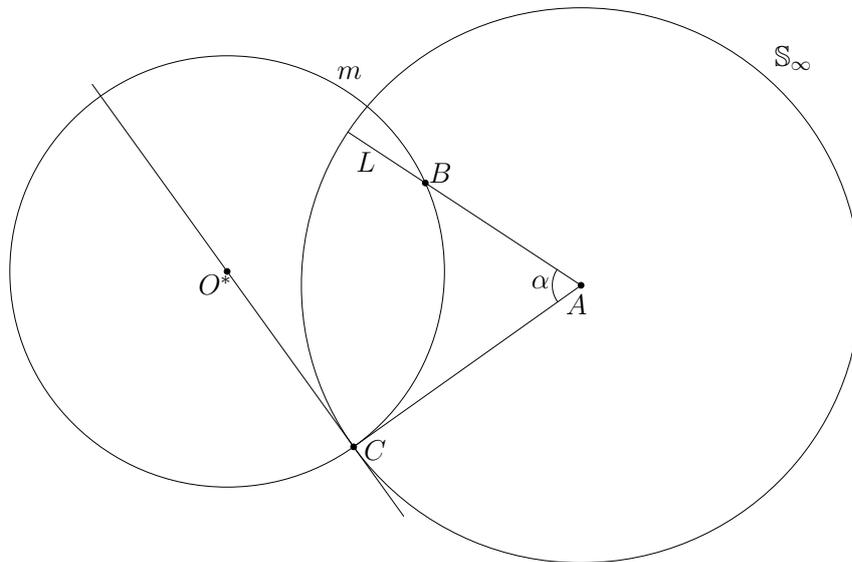


Figura 3.5: Construcción de un triángulo hiperbólico con un vértice ideal.

Ahora construiremos la circunferencia m ortogonal a \mathbb{S}_∞ que determine al segmento hiperbólico BC , para lo cual necesitamos encontrar el centro de m , que denotaremos por O^* . Puesto que el punto C está en m , el punto O^* debe estar en la tangente a \mathbb{S}_∞ por C .

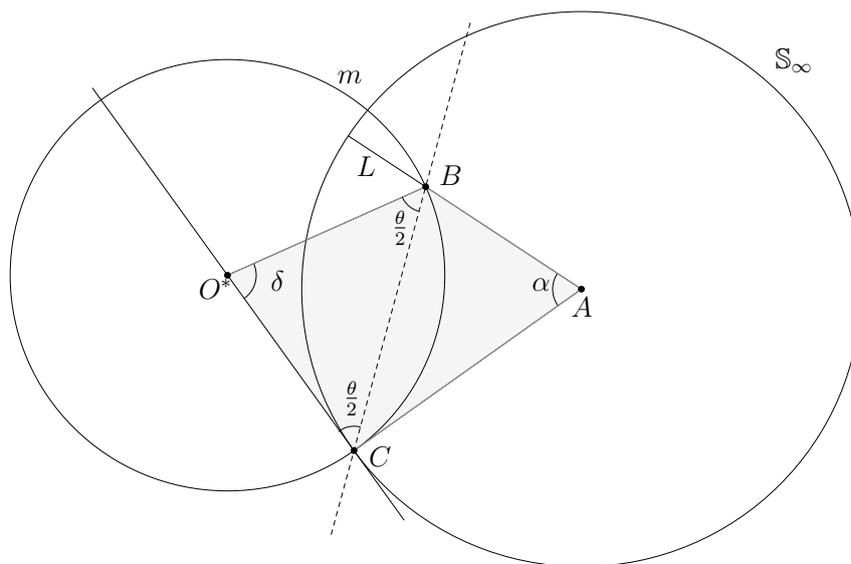


Figura 3.6: Construcción de un triángulo hiperbólico con un vértice ideal.

Ahora debemos encontrar la ubicación de B y O^* . Si llamamos β al ángulo en el vértice

B y tomamos a $\delta = \pi - \alpha - \beta$ como el ángulo de defecto, tendremos que los ángulos del cuadrilátero euclidiano ABO^*C deben ser: α en el vértice A , $\frac{\pi}{2}$ en el vértice C , $\frac{\pi}{2} + \beta$ en el vértice B ² y δ en el vértice O^* .

Notemos que como C y B están sobre m el triángulo BCO^* es isósceles, esto implica que $\angle O^*CB = \angle O^*BC = \frac{\theta}{2}$ como se muestra en la figura 3.6.

Por propiedad de ángulos inscritos y semi-inscritos, en la figura anterior se tiene que $\angle BO^*C = 2\angle BCA$. Ahora, si trazamos una línea euclidiana L' por C tal que forme un ángulo $\frac{\delta}{2}$ con la línea CA , entonces el punto B será la intersección de L' con L .

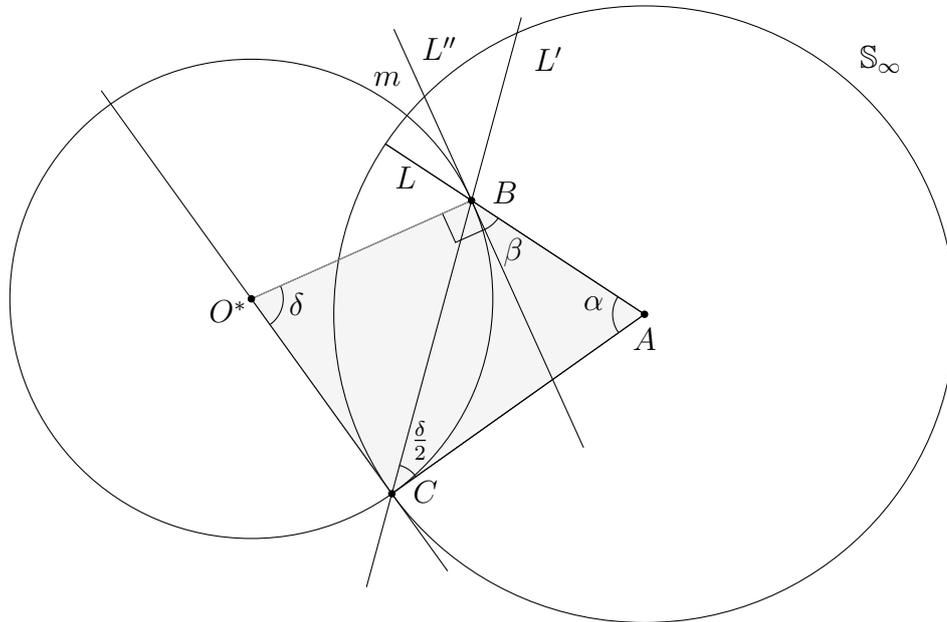


Figura 3.7: Construcción de un triángulo hiperbólico con un vértice ideal.

Con la ubicación de B en L es fácil ubicar a O^* . Para ello trazamos la línea L'' que pasa por B y que forma un ángulo β con L . El punto O^* será la intersección de la perpendicular a L'' por B con la tangente por C a \mathbb{S}_∞ como se muestra en la figura 3.7.

En resumen, hemos construido un triángulo con un vértice en la frontera ideal y un vértice en el centro del modelo.

²Esto es porque la circunferencia m debe formar un ángulo β con L .

Construcción de un triángulo dado un lado, un ángulo adyacente y el ángulo opuesto al lado dado.

También podemos determinar un triángulo hiperbólico, dando un lado, un ángulo adyacente y el ángulo opuesto a ese lado. De hecho, para cualesquiera ángulos dados α y γ con suma $\alpha + \gamma < \pi$ y un segmento de longitud c , existe tal triángulo, único salvo congruencia.

Elegimos el vértice B , donde no se especifica ningún ángulo, en el centro del disco de Poincaré. Sea A cualquier punto tal que el segmento AB tenga longitud c como se requiere, seguido construimos la línea hiperbólica b que pasa por el punto A tal que forme el ángulo α con el segmento AB . Para este fin, necesitamos encontrar el centro de la circunferencia n que contiene a b , que denotaremos por O^* . Primero trazamos la línea euclidiana L que forme un ángulo α con el segmento AB . Entonces, el centro O^* será la intersección de la línea perpendicular a L por A y la mediatriz del segmento AA' , donde A' es el inverso de A respecto a \mathbb{S}_∞ . Por lo tanto la circunferencia que buscamos es la de centro en O^* y radio O^*A , como se muestra en la siguiente figura.

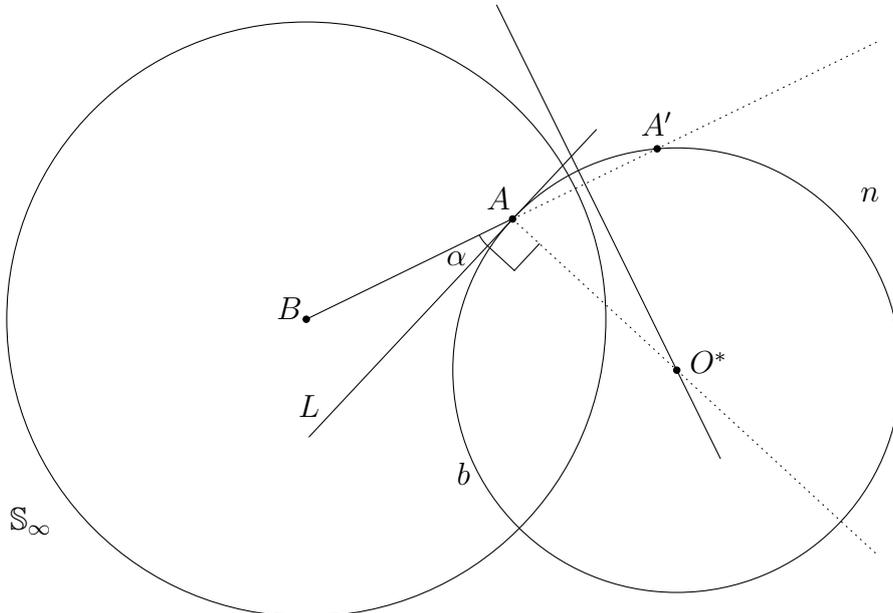


Figura 3.8: Construcción de un triángulo dado un lado, un ángulo adyacente y el ángulo opuesto al lado dado.

La parte más difícil es obtener el vértice C que se encuentra en la línea b . Sea C^* el punto ideal del segmento AC , ver figura 3.9.

Luego trazamos la tangente a b por C^* y la línea a^* tal que formen un ángulo γ en el vértice C^* . Ahora construimos la circunferencia con centro en O^* que pase por B y sea O el punto de intersección de esa circunferencia con el rayo a^* .

Por último hacemos una reflexión euclidiana con respecto a la bisectriz del ángulo $\angle BO^*O$. Esta reflexión mapea el ángulo γ al vértice C , con un lado un rayo tangente a b , y el segmento $a = CB$ como el otro lado.

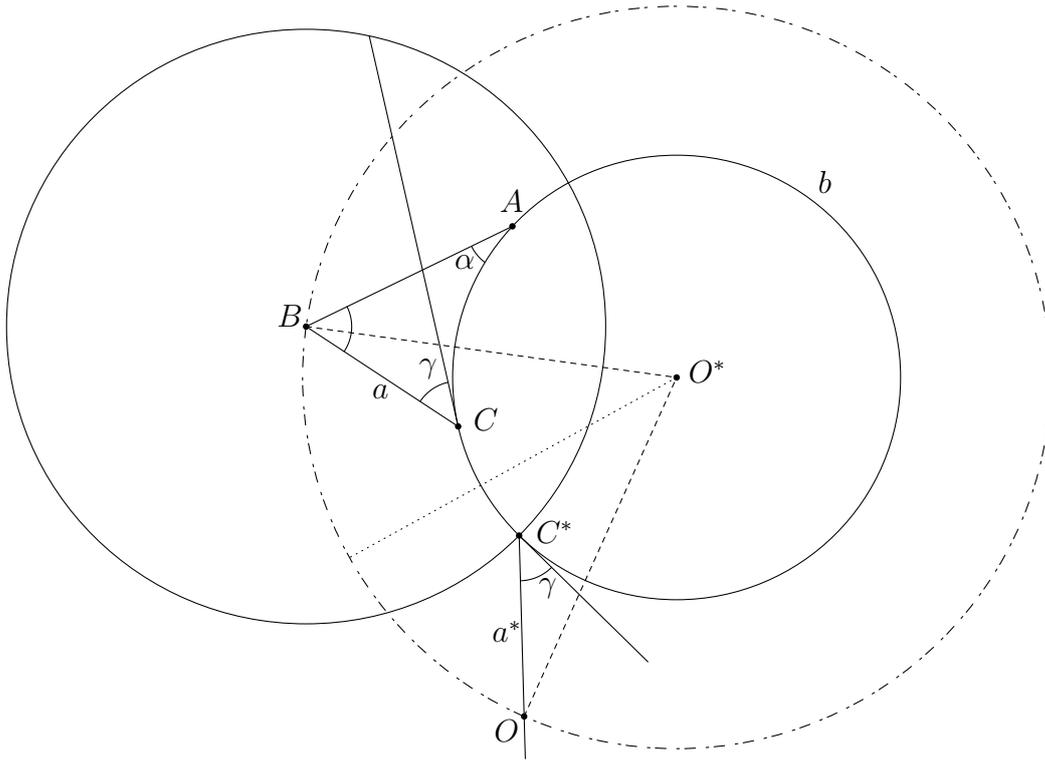


Figura 3.9: Construcción de un triángulo dado un lado, un ángulo adyacente y el ángulo opuesto al lado dado.

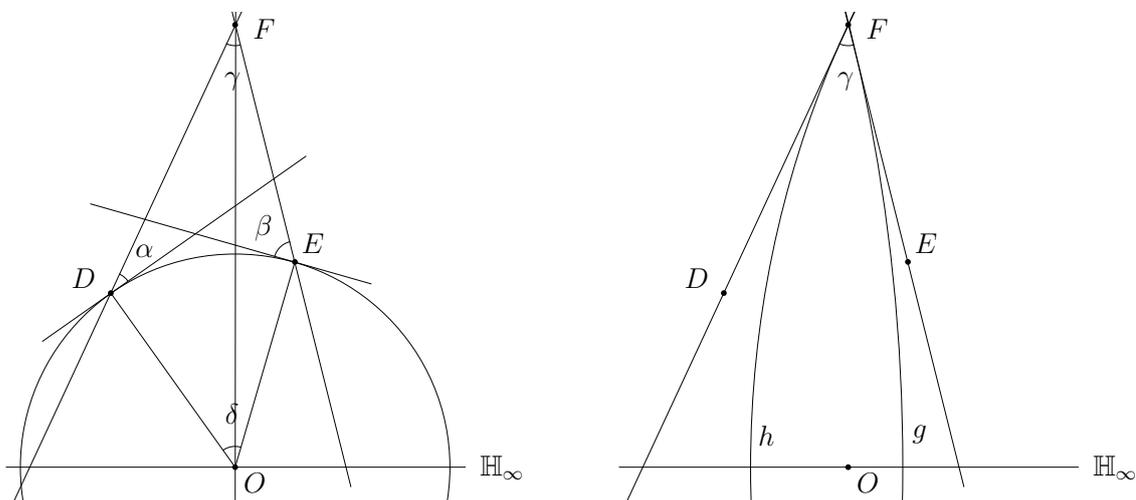
3.1.2. Construcciones en el modelo del semiplano superior de Poincaré.

La construcción que damos a continuación es el resultado de una serie de ideas inspiradas en el hecho de no encontrar una construcción de un triángulo hiperbólico con ángulos dados en el modelo del semiplano superior de Poincaré. Lo interesante de esta construcción es que dado el modelo construimos el triángulo; caso contrario a lo que hace Chaim Goodman en [Good], quien inicia la construcción de un triángulo hiperbólico fijando un ángulo central y después construye el modelo del disco de Poincaré que

resulta conveniente para esta construcción. Aunque ya vimos una equivalencia entre estos modelos en la subsección 2.6.2, las construcciones de triángulos hiperbólicos en cada uno de ellos es muy diferente, esto lo descubriremos a continuación.

Para construir un triángulo con ángulos dados $(\alpha, \beta$ y $\gamma)$ en \mathbb{H} procederemos primero a construir una circunferencia c con centro en \mathbb{H}_∞ y radio cualquiera y sobre ella colocamos los puntos D y E en c de tal forma que el ángulo $\angle DOE = \delta$, donde $\delta = \pi - \alpha - \beta - \gamma$, ver figura 3.10(a).

Luego construimos las tangentes a c en D y E . A continuación, desplegamos los ángulos α en el vértice D y β en el vértice E , la intersección de los rayos tangentes como los lados de los ángulos que no son las tangentes a c se intersecan fuera de c en el punto F formando un ángulo γ , como se muestra en la figura 3.10(a).



(a) Construcción de un triángulo hiperbólico en \mathbb{H} . (b) h y g contienen dos segmentos hiperbólicos del triángulo que estamos construyendo y además forman un ángulo γ en el vértice F .

Figura 3.10:

Si OF no es perpendicular a \mathbb{H}_∞ entonces podemos aplicar una rotación adecuada a toda la figura con respecto a O para poner a OF perpendicular con \mathbb{H}_∞ , esto es, porque necesitamos que OF sea una línea hiperbólica.

Sean O_1 y O_2 las intersecciones con \mathbb{H}_∞ de las perpendiculares por F a FE y FD respectivamente. Además, sean g y h las circunferencias con centro en O_1 y O_2 que pasen por F respectivamente. Estas circunferencias contienen las líneas hiperbólicas que forman un ángulo γ en F (ver figura 3.10(b)).

Sea A el punto de intersección de FD con \mathbb{H}_∞ . Ahora tomamos un punto $C \in \mathbb{H}$ tal

que $\angle OAC = \alpha$ y denotemos por G al punto de intersección de la línea AC con h , como se muestra en la figura 3.11(a).

Al trazar la circunferencia m (con centro en O y radio OG), ésta contiene a la línea hiperbólica que forma un ángulo α con h en G , ver figura 3.11(b), debido a que por construcción A y O son inversos respecto a h . Además, notemos que G , bajo esta inversión, es un punto invariante debido a que pertenece a h .

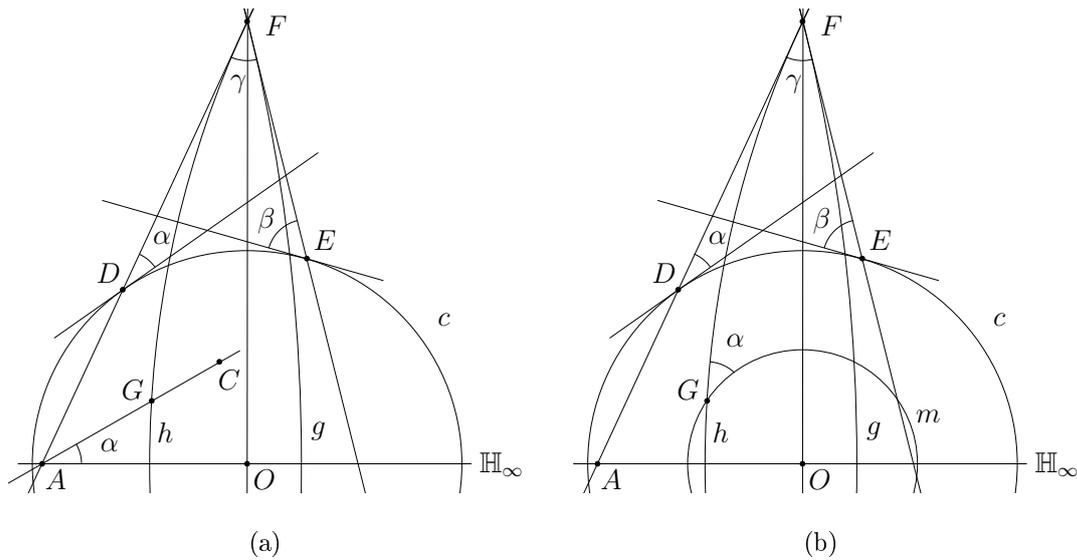


Figura 3.11: Construcción de un triángulo hiperbólico en \mathbb{H} .

Así, por la Proposición 1.4 de la subsección 1.3.1, $\angle OAG = \angle OGO_2$. Como el ángulo que forman los radios de dos circunferencias en un punto de intersección es igual al ángulo que forman las tangentes a ambas circunferencias en ese punto, se sigue que el ángulo que forman m y h en G es igual a α .

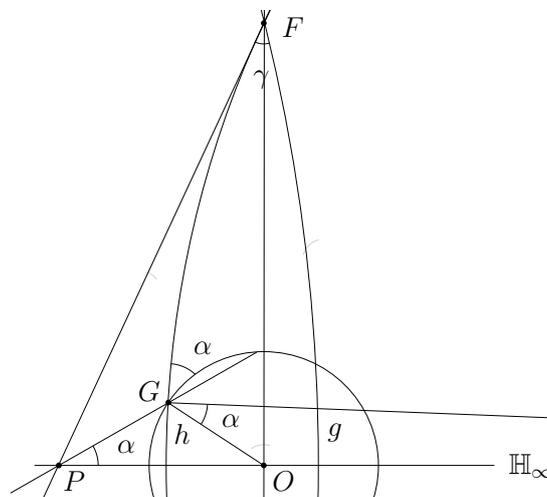


Figura 3.12: Ilustración de la Proposición 1.4 de la subsección 1.3.1.

Sea I el punto de intersección de m y g en \mathbb{H} y denotemos por θ al ángulo que forman ambas circunferencias en ese punto, ver figura 3.13(a). Ahora sólo nos falta demostrar que $\theta = \beta$. Para ello haremos uso del teorema del seno para la geometría euclidiana y del teorema del coseno para ángulos de la geometría hiperbólica.

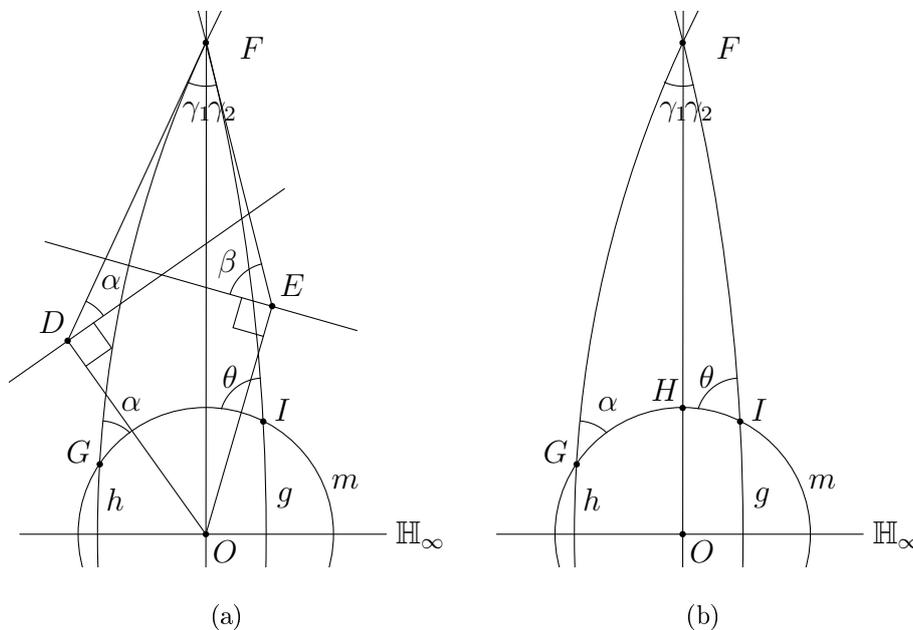


Figura 3.13: Construcción de un triángulo hiperbólico en \mathbb{H} .

Comenzamos centrando nuestra atención en los triángulos euclidianos $\triangle DFO$ y $\triangle OFE$ en la figura 3.13(a). Al aplicarle el teorema del seno a ambos, tenemos:

$$\frac{FO}{\text{sen}(90^\circ + \alpha)} = \frac{DO}{\text{sen}(\gamma_1)} \text{ y } \frac{FO}{\text{sen}(90^\circ + \beta)} = \frac{OE}{\text{sen}(\gamma_2)},$$

donde $\gamma_1 = \angle DFO$ y $\gamma_2 = \angle OFE$. Al acomodar los términos en las igualdades anteriores obtenemos,

$$\frac{FO}{DO} = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\gamma_1)} \text{ y } \frac{FO}{OE} = \frac{\cos(\beta)}{\text{sen}(\gamma_2)},$$

pero, $DO = OE$ debido a que son radios de la circunferencia c , obtenemos una primera relación

$$\frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\gamma_1)} = \frac{\cos(\beta)}{\text{sen}(\gamma_2)}. \quad (3.1)$$

Ahora nos centramos en el triángulo rectángulo hiperbólico $\triangle GHF$, donde H es el punto de intersección de FO y m (ver figura 3.13(b)) y le aplicamos el teorema del coseno para ángulos (ver Apéndice C). Esto es

$$\cos(\alpha) = -\cos(90^\circ) \cos(\gamma_1) + \text{sen}(90^\circ) \text{sen}(\gamma_1) \cosh(FH).$$

Al simplificar obtenemos

$$\cos(\alpha) = \text{sen}(\gamma_1) \cosh(FH).$$

Por lo tanto

$$\cosh(FH) = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\gamma_1)}. \quad (3.2)$$

Aplicamos este mismo proceso al triángulo rectángulo hiperbólico $\triangle HFI$ y obtenemos la siguiente relación

$$\cosh(FH) = \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\gamma_2)}. \quad (3.3)$$

Igualando (3.2) y (3.3)

$$\frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\gamma_1)} = \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\gamma_2)}. \quad (3.4)$$

Ahora, de (3.1) y (3.4) tenemos que

$$\cos(\theta) = \cos(\beta)$$

y como $\theta, \beta \in [0, \frac{\pi}{2})$ entonces

$$\theta = \beta.$$

Por lo tanto, hemos construido el triángulo hiperbólico $\triangle GFI$ con ángulos dados α , β , γ .

A continuación damos la construcción de un triángulo con un vértice ideal.

Construcción de un triángulo con un vértice ideal.

Dado un punto A en \mathbb{H} , construimos la perpendicular m a \mathbb{H}_∞ por A y sea T el punto de intersección de m con \mathbb{H}_∞ .

Luego construimos la línea hiperbólica n con centro en O que pase por A y que forme un ángulo α con m , ver figura 3.14. Sea C el puntos de intersección de n con \mathbb{H}_∞ tal que esté en diferente lado de T con respecto de O . Situamos un punto B en n tal que el ángulo $\angle COB = \beta$. Ahora por B trazamos una perpendicular a \mathbb{H}_∞ . Entonces, esta perpendicular forma con n un ángulo igual a β .

Así queda construido el triángulo hiperbólico $\triangle ABD$, donde D es el punto al infinito.

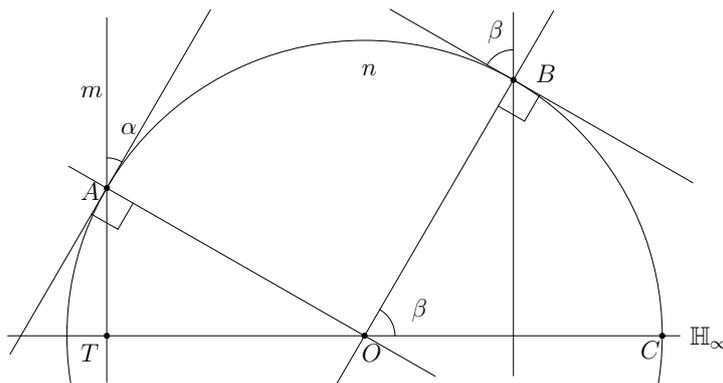


Figura 3.14: Triángulo en \mathbb{H} con ángulos 0 , α y β .

3.2. Teselaciones hiperbólicas.

En esta sección damos algunas nociones generales de las teselaciones hiperbólicas, construimos teselaciones triangulares en los modelos de Poincaré y teselaciones con polígonos regulares.

3.2.1. Teselaciones.

En este apartado hablaremos de la acción del grupo generado por composiciones finitas de reflexiones con respecto de líneas hiperbólicas³, este análisis se llevará a cabo en el modelo del disco de Poincaré.

Definición 3.1. *Una transformación de Möbius hiperbólica general en \mathbb{D} es una composición finita de reflexiones con respecto a líneas. Al conjunto que consta de todas las transformaciones de Möbius hiperbólicas generales lo denotaremos por $Mob(\mathbb{D})$.*

Las transformaciones de Möbius hiperbólicas generales satisfacen las siguientes propiedades: Asociatividad, Elemento Neutro, Elemento Inverso. Esto implica que $Mob(\mathbb{D})$ es un grupo bajo la operación de composición y se le llama el **grupo completo de Möbius hiperbólico**. Existen tres tipos de transformaciones elementales: parabólica, elíptica e hiperbólica.

A continuación describimos una de las transformaciones de Möbius elementales: la

³Las propiedades geométricas de las reflexiones son las mismas propiedades que se describen en la sección 1.2 debido a que las reflexiones en la geometría hiperbólica son las inversiones en la geometría euclidiana.

transformación elíptica y hacemos la descripción de la teselación que genera el grupo generado por esta transformación. Las otras dos transformaciones (parabólica e hiperbólica) se pueden consultar en el capítulo 2 de [CG2].

Transformaciones elípticas

Una transformación elíptica es una transformación $R : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ la cual está definida como la composición de las reflexiones R_l y R_m . Esto es,

$$R := R_m \circ R_l$$

donde l y m son líneas en \mathbb{D} que se intersecan en un punto $O \in \mathbb{D}$.

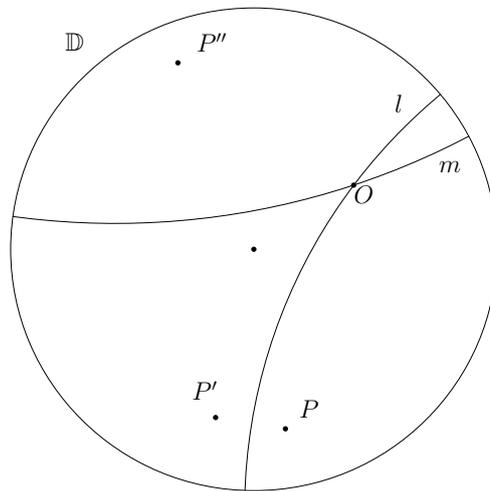


Figura 3.15: Transformación elíptica.

Bajo esta transformación, a un punto $P \in \mathbb{D}$ se le asocia un punto $P'' = R(P) \in \mathbb{D}$; primero se hace un desplazamiento en la dirección ortogonal a partir de P a un punto P' que está a la misma distancia que P a l , y después a un punto P'' que está a la misma distancia que P' a m . Es importante notar que ésta transformación es una rotación con centro en O por un ángulo igual al doble de magnitud que el ángulo determinado por l y m .

Sea $R_\theta : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una reflexión con respecto de θ en el punto O donde θ es el ángulo entre l y m . Así, la imagen de l bajo R_θ es l' . A la región determinada por las líneas l y l' lo llamaremos un dominio (región) fundamental para la “acción” de la transformación R_θ en el disco de Poincaré \mathbb{D} .

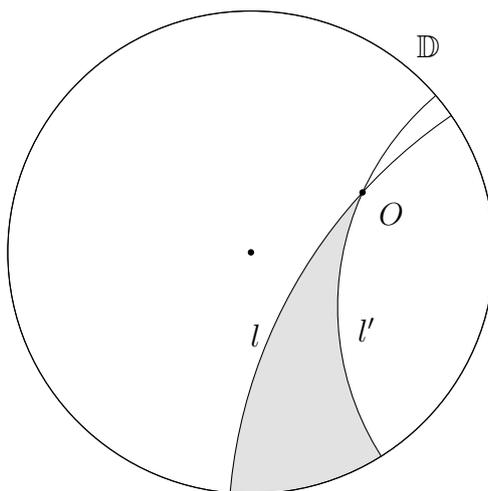


Figura 3.16: Región fundamental de una transformación elíptica.

Ahora, sea $\mathcal{F} := \{R_\theta^n(l) : n \in \mathbb{Z}\}$ la familia de líneas que pasan por O determinada por las imágenes de l bajo iteraciones de R_θ . La familia \mathcal{F} es invariante bajo la acción de R_θ . Además, la familia de circunferencias hiperbólicas con centro en O quedan invariantes bajo esta acción.

A continuación veremos cómo esta acción determina una descomposición del espacio hiperbólico llamada una **teselación**. Para ello trabajaremos con un subgrupo de $\text{Mob}(\mathbb{D})$, este subgrupo está formado por todas las composiciones pares de transformaciones de Möbius hiperbólicas generales y lo llamaremos el **grupo de Möbius hiperbólico** y lo denotaremos por $\text{Mob}_+(\mathbb{D})$.

Sea Γ un subgrupo discreto de $\text{Mob}_+(\mathbb{D})$, es decir, a Γ lo podemos pensar como \mathbb{Z} y definiremos la órbita de un punto $P \in \mathbb{D}$ bajo la acción de Γ como

$$\mathcal{O}_\Gamma(P) = \Gamma \cdot P := \{\gamma(P) : \gamma \in \Gamma\}.$$

De acuerdo con lo anterior, la órbita de P es un subconjunto (discreto) del plano formado por las imágenes de P bajo los distintos elementos de Γ . La relación de estar en la misma órbita nos permite definir una relación de equivalencia \sim en \mathbb{D} dada por: $P \sim Q$ si y sólo si existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $Q = \gamma(P)$ ⁴.

Dado un elemento $\gamma \in \text{Mob}_+(\mathbb{D})$, sea Γ el subgrupo generado por γ , llamado **grupo elemental**. Esto es

$$\Gamma := \langle \gamma^n : n \in \mathbb{Z} \rangle.$$

⁴La demostración de que \sim es una relación de equivalencia la podemos consultar en [CG2].

La Γ -órbita, o simplemente, la órbita de un punto $P \in \mathbb{D}$ bajo la acción de Γ es el conjunto $O_\Gamma(P) = \{\gamma^n(P) : n \in \mathbb{Z}\}$.

Ahora, supongamos que $\theta = 2\pi/k$, para algún $k > 1$. Denotemos por $R_\theta : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ a la transformación $P \mapsto R_\theta(P)$ y definamos $\Gamma_{R_\theta} := \langle R_\theta^n : n \in \mathbb{Z} \rangle$. Para la acción de Γ_{R_θ} una región fundamental D está definida por el sector determinado por los rayos que parten del punto O que es la intersección de las líneas l y l' y que forman un ángulo θ entre ellas. Si $P \in \mathbb{D}$, entonces:

- a) La órbita de P no tiene puntos de acumulación en \mathbb{D} ; es decir, la órbita de P es discreta.
- b) La órbita de P interseca a D exactamente en un punto, para todo punto P que no esté en la Γ -órbita de l .
- c) Si $n \neq m$, entonces $R_\theta^n(D) \cap R_\theta^m(D) = \emptyset$.
- d) Si $\mathcal{D} := D \cup \{l, l'\}$, entonces,

$$\mathbb{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} R_\theta^n(\mathcal{D}).$$

A la descomposición del plano hiperbólico descrita en d) se le llama una teselación, ver figura 3.2.1. Es decir, se tiene una descomposición de \mathbb{D} en bandas que se yuxtaponen lateralmente a lo largo de las líneas que son los trasladados de las fronteras de la región fundamental bajo la acción de Γ_{R_θ} .

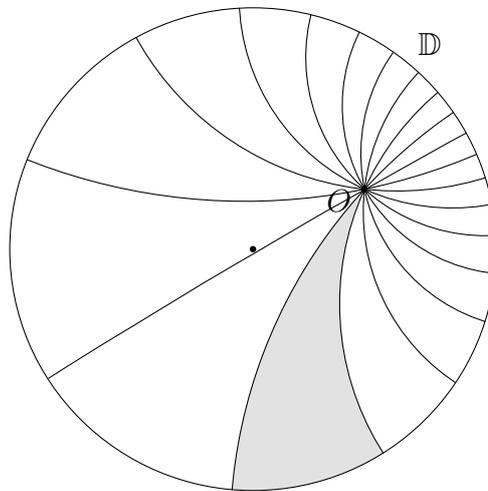


Figura 3.17: Teselación generada por un grupo elíptico.

3.2.2. Teselaciones triangulares del plano hiperbólico.

Si tenemos una tripleta de números enteros $\{p, q, r\}$ con $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} < 1$, se puede demostrar por una variedad de métodos que hay una teselación del plano hiperbólico por triángulos con ángulos internos $\pi/p, \pi/q, \pi/r$, generada por la acción de un subgrupo de $\text{Mob}(\mathbb{D})$ formado por las reflexiones con respecto a los lados del triángulo base.

Teselaciones en el modelo del semiplano de Poincaré.

Damos ahora una construcción explícita de estas teselaciones, primero para la tripleta $\{5, 8, 2\}$ y luego por todos las tripletas de la forma $\{p, q, 2\}$.

Para la tripleta $\{5, 8, 2\}$, el primer paso consiste en construir un triángulo con los ángulos $\pi/5, \pi/8$ y $\pi/2$, para luego reflejar ese triángulo con respecto a sus lados de modo que vayamos cubriendo el plano hiperbólico.

Partimos dibujando \mathbb{H}_∞ y con ayuda de la sección 3.1.2 construimos el triángulo con los ángulos antes mencionados.

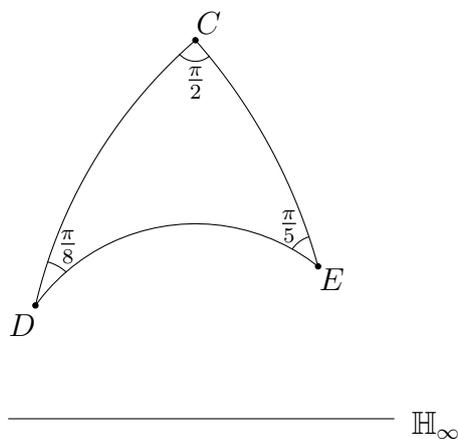


Figura 3.18: Triángulo en \mathbb{H} con ángulos $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}$ y $\frac{\pi}{5}$.

Para construir la teselación de \mathbb{H} generada por las reflexiones con respecto a los lados del triángulo, se requiere reflejar este triángulo con respecto a sus lados para ir obteniendo una descomposición del plano hiperbólico con triángulos con ángulos internos $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}$ y $\frac{\pi}{5}$.

Al reflejar a E con respecto a la línea hiperbólica que contiene al segmento DC obtenemos E' y bajo esta misma reflexión, los puntos C y D quedan invariantes debido

a que pertenecen a la línea de reflexión. Notemos que, como las reflexiones conservan distancias, los segmentos formados por dos puntos y sus inversos son iguales, es decir, $CE = E'C$ y $DE = E'D$. Así, al construir el triángulo hiperbólico $\triangle E'DC$, obtenemos un triángulo congruente al $\triangle CDE$ bajo la reflexión con respecto al lado DC , como se muestra en la siguiente figura.

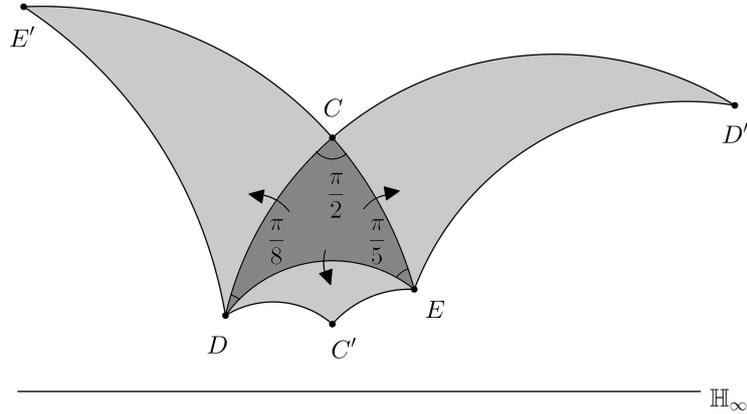


Figura 3.19: Al triángulo $\triangle CDE$ se le conoce como **triángulo fundamental**.

Un proceso análogo se utiliza para construir los triángulos $\triangle DC'E$ y $\triangle CED'$ los cuales son congruentes con $\triangle CDE$ bajo la reflexión con respecto a los lados DE y CE respectivamente.

Las reflexiones las obtenemos por medio de las inversiones y como estas conservan ángulos, se va obteniendo una teselación con triángulos congruentes a nuestro triángulo fundamental.

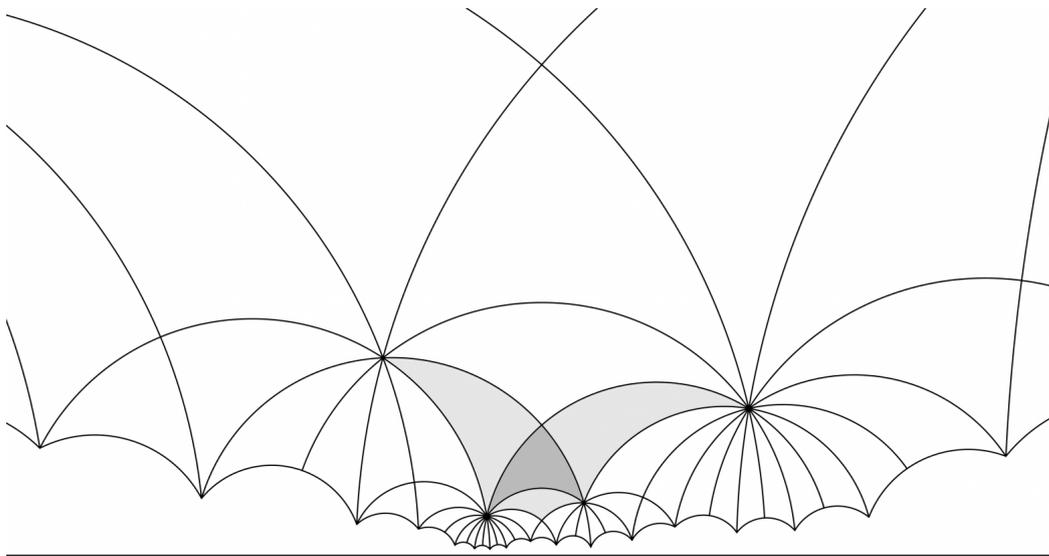


Figura 3.20: Teselación en \mathbb{H} con un triángulo con ángulos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{8}$ y $\frac{\pi}{5}$.

Al hacer este proceso tantas veces como deseemos, podemos teselar el plano hiperbólico con triángulos con ángulos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{8}$ y $\frac{\pi}{5}$. Además, notar que a medida que nos vamos acercando a la frontera cada vez lo hacemos más lentamente y con triángulos más pequeños (desde el punto de vista euclidiano), esto implica que nunca llegaremos a tocar la frontera ideal. Sin embargo, todos los triángulos son congruentes.

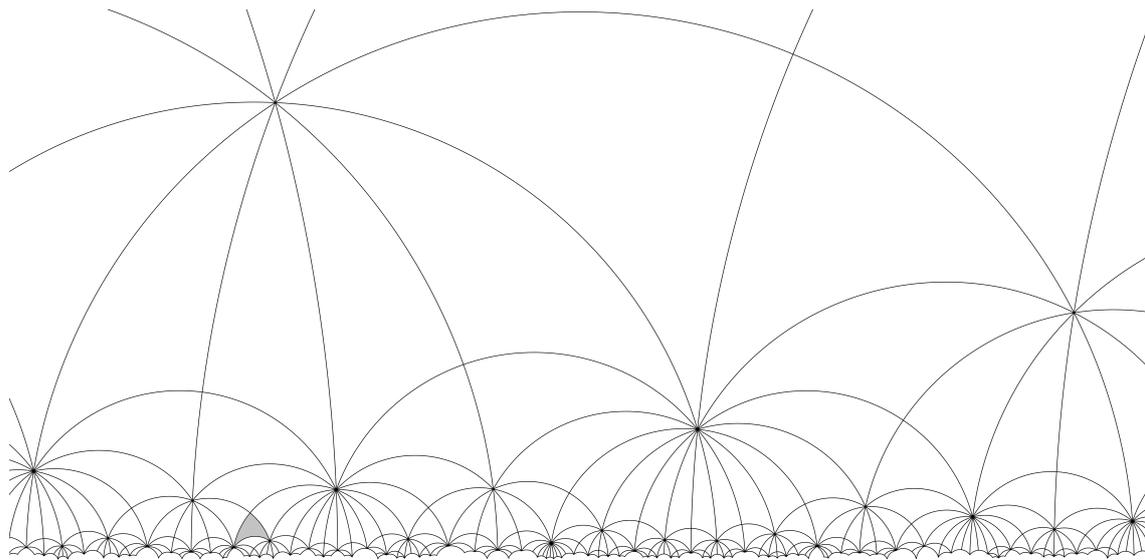


Figura 3.21: Teselación en \mathbb{H} con un triángulo con ángulos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{8}$ y $\frac{\pi}{5}$.

Para las tripletas de la forma $\{p, 2, 4\}$, existe una teselación hiperbólica con un triángulo con ángulos $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{4}$ si $p > 4$, debido a que se tiene que cumplir la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1$. De manera similar para las tripletas de la forma $\{p, q, 2\}$, si se satisface la siguiente relación $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, entonces existe una teselación triangular del plano hiperbólico con un triángulo con ángulos $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ y $\frac{\pi}{2}$.

Los ejemplos mostrados a continuación son teselaciones hiperbólicas en el modelo del semiplano de Poincaré de la forma $\{p, q, 2\}$.

En la figura 3.22 se ilustra el triángulo fundamental de una teselación triangular con ángulos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{7}$. El siguiente paso es reflejar el triángulo con respecto de sus lados y hacer este proceso hasta que hayamos generado la mayor cantidad de triángulos congruentes a nuestro triángulo fundamental. Hemos llevado a cabo este proceso un poco más lejos en la figura 3.23.

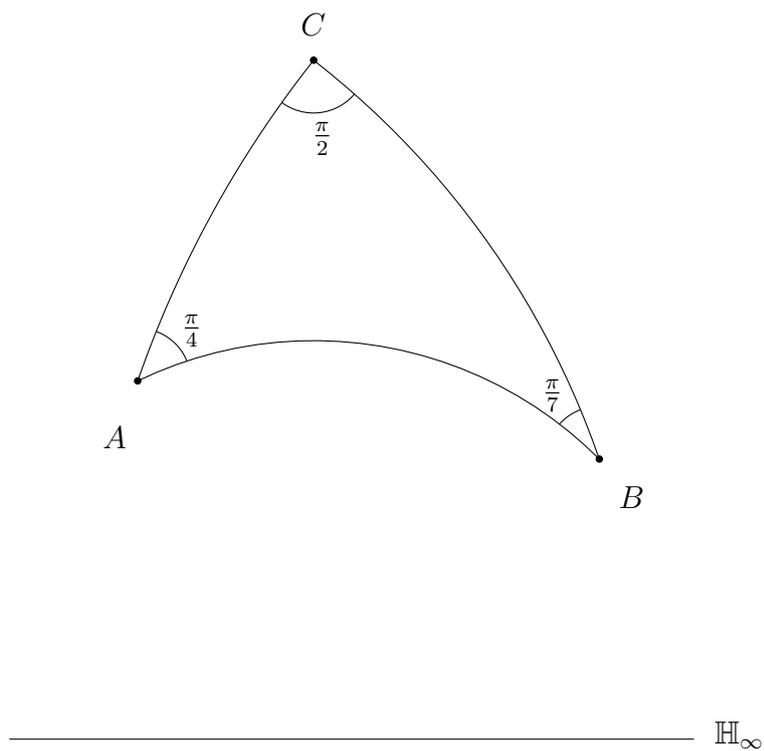


Figura 3.22: Triángulo fundamental para una teselación triangular con ángulos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{7}$.

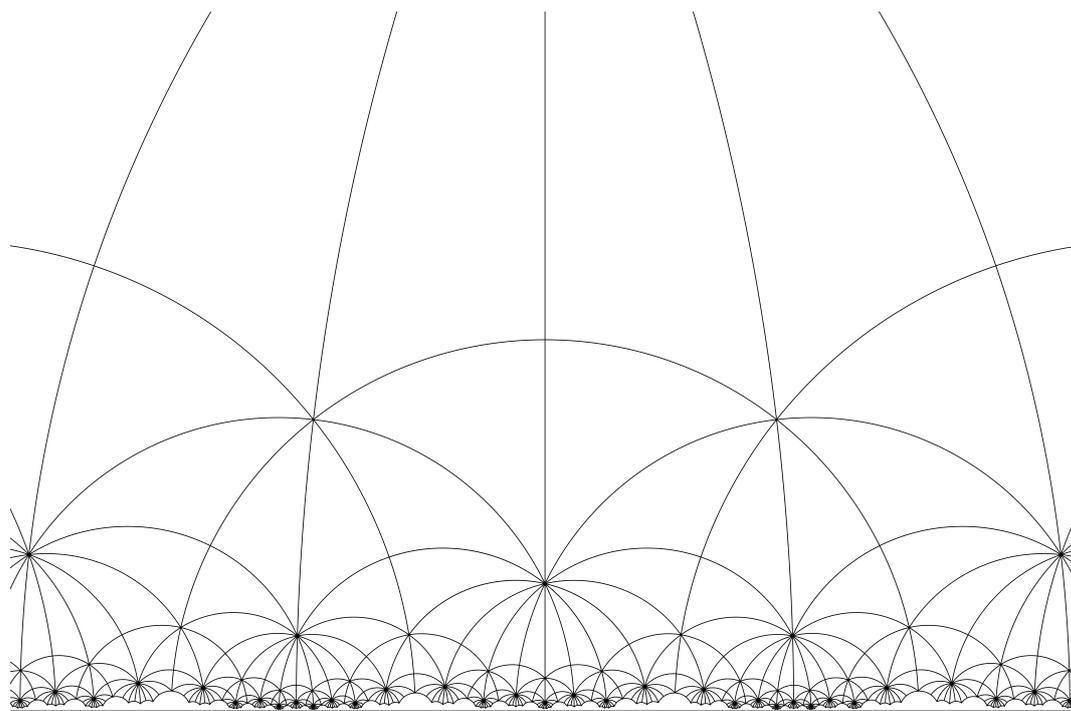


Figura 3.23: Teselación triangular con ángulos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{7}$.

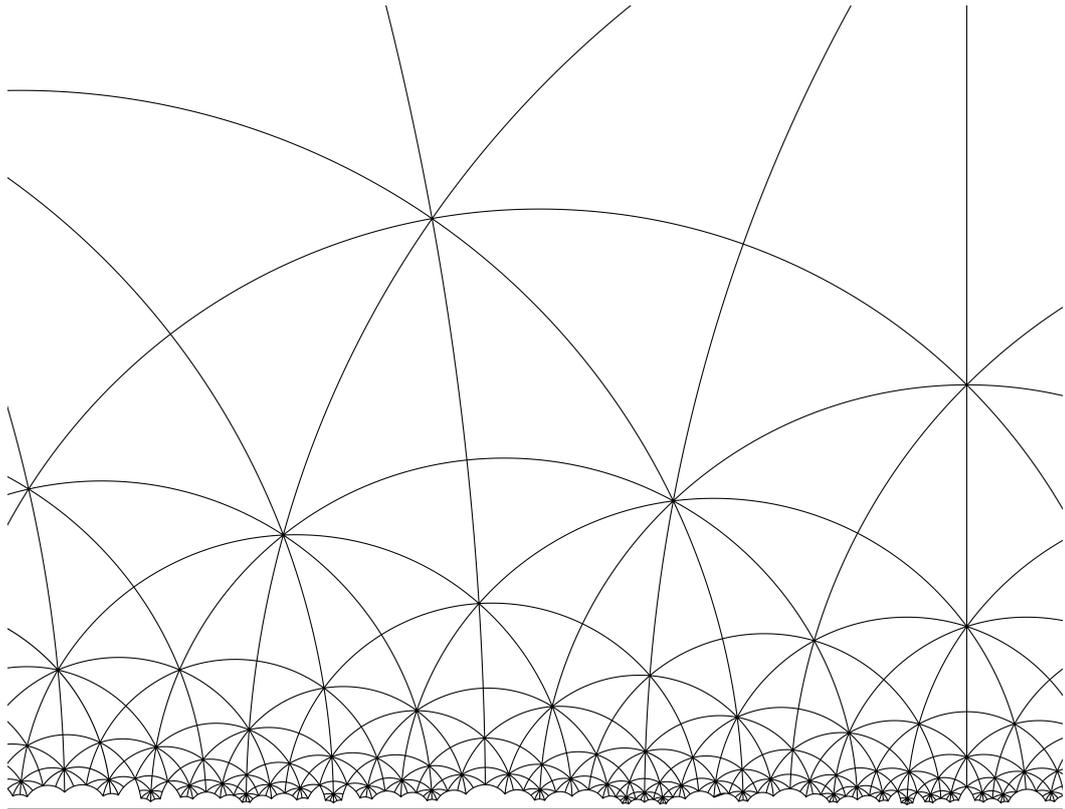


Figura 3.24: Teselación triangular con ángulos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{5}$.

La siguiente teselación es generada por un triángulo con un vértice ideal.

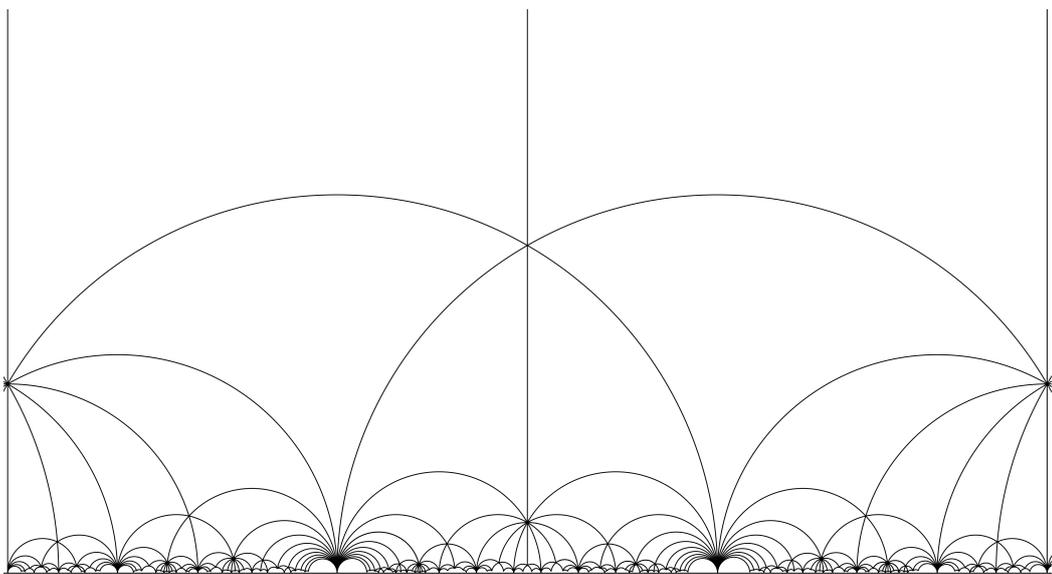


Figura 3.25: Teselación triangular con ángulos 0 , $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$.

Teselaciones en el modelo del disco de Poincaré.

En [Good] encontramos los pasos detallados para construir una teselación triangular $\{p, 4, 2\}$. La siguiente teselación corresponde a un triángulo con ángulos $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$. Notar que para este tipo de teselaciones la única condición para p es que tiene que ser mayor que 4.

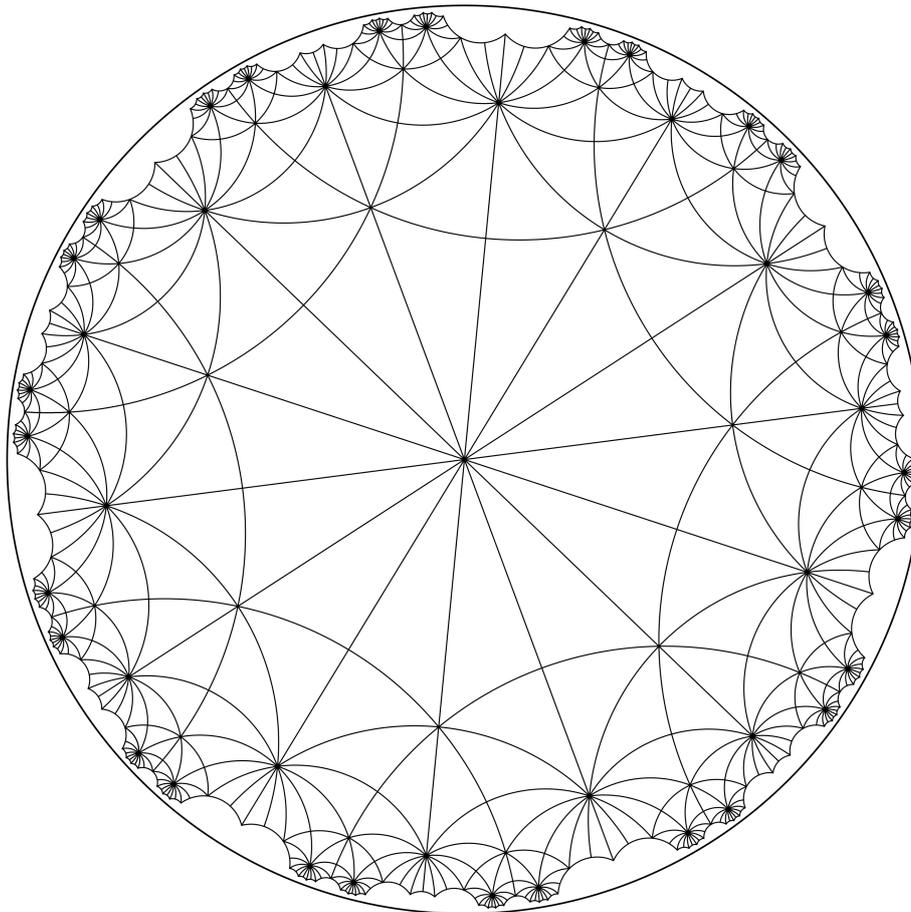


Figura 3.26: Teselación triangular con ángulos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{7}$.

La siguiente teselación triangular corresponde a un triángulo con ángulos $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{3}$ en \mathbb{D} creada con un metodo que también da Chaim Goodman para construir una teselación $\{p, q, 2\}$. En donde la única condición que se tiene que cumplir es que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ para poder teselar el plano hiperbólico.

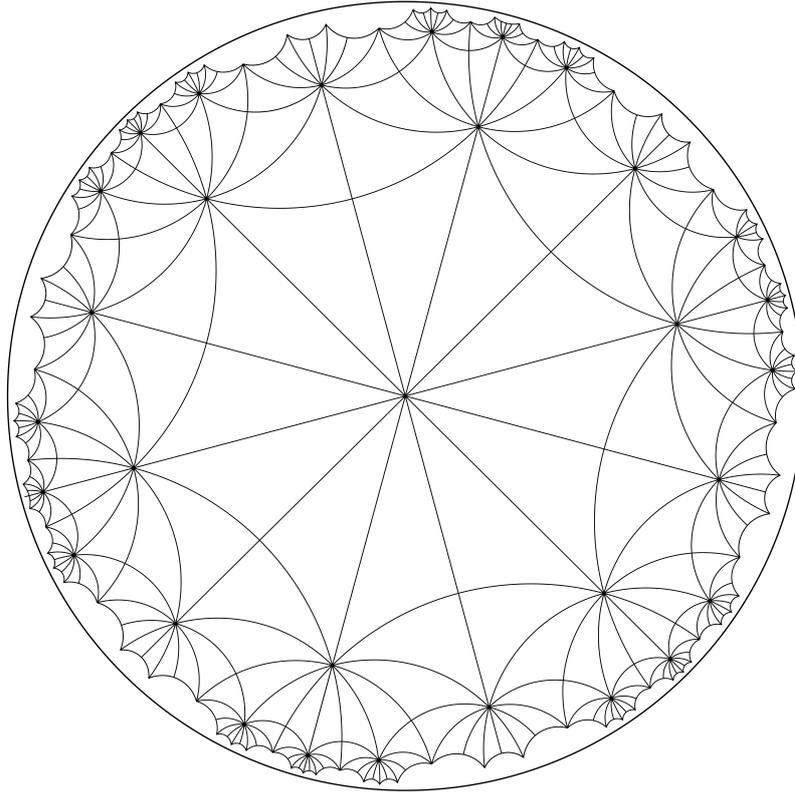


Figura 3.27: Teselación triangular con ángulos $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{3}$.

Esta teselación corresponde a un triángulo con ángulos $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{5}$ y $\frac{\pi}{2}$.

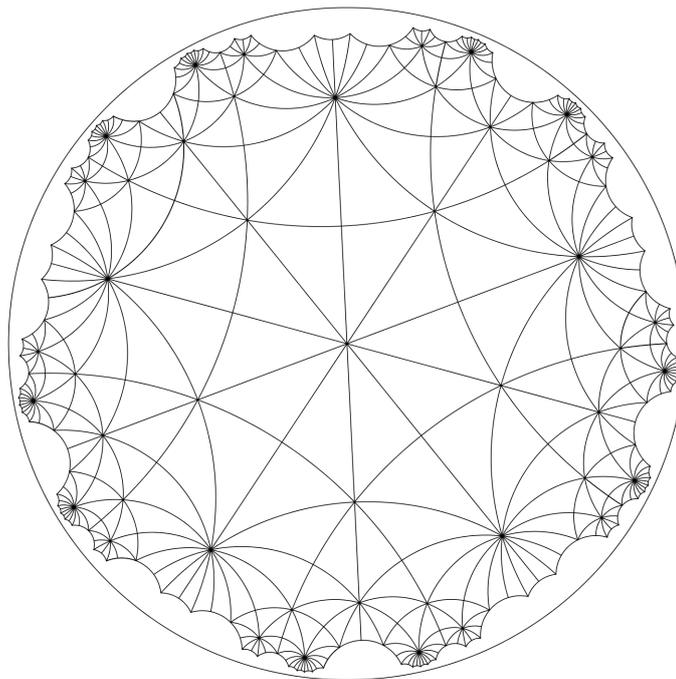


Figura 3.28: Teselación triangular con ángulos $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{5}$ y $\frac{\pi}{2}$.

La siguiente teselación es construida con un triángulo ideal, es decir, con todos sus vértices en la frontera ideal.

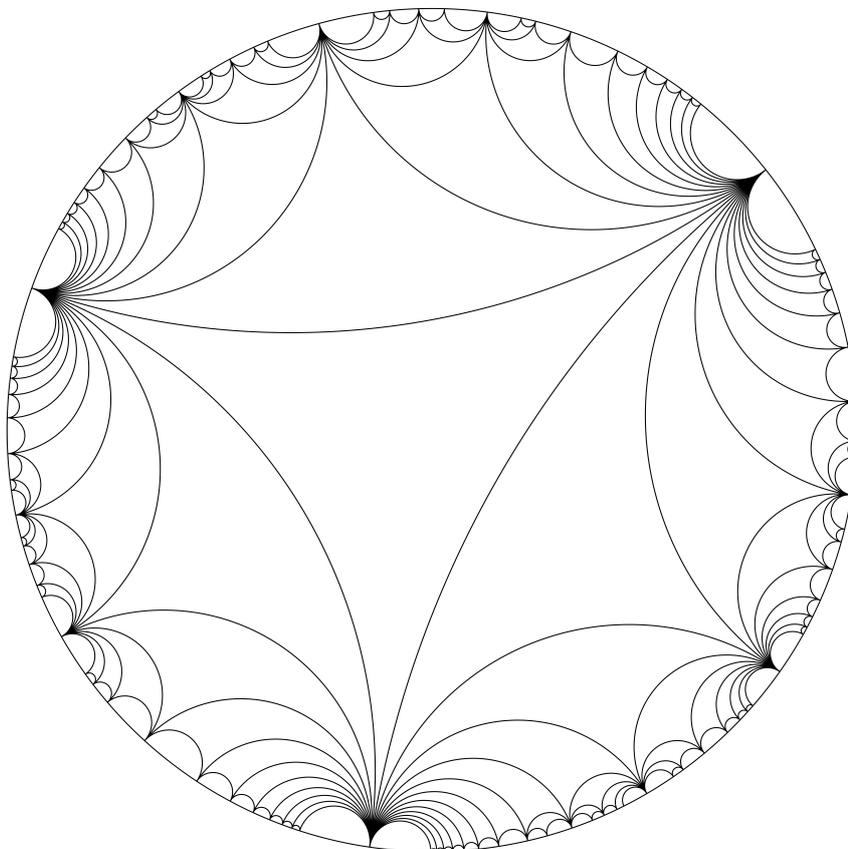


Figura 3.29: Teselación triangular ideal.

3.2.3. Teselaciones con polígonos regulares.

Una teselación regular, es una descomposición del plano por polígonos regulares de modo que el mismo número de polígonos se encuentran en cada vértice. Sin duda, las teselaciones regulares del plano euclidiano son bien conocidas. Ellas son: $\{3, 6\}$, lo cual significa que triángulos equiláteros se encuentran seis en cada vértice; $\{4, 4\}$, esto es, una teselación con cuadrados en donde cuatro se reúnen en cada vértice; y $\{6, 3\}$ representa una teselación por hexágonos de los cuales tres se reúnen en cada vértice. La notación $\{n, k\}$ se llama símbolo de *Schläfli*.

Para la geometría hiperbólica hay infinitas teselaciones regulares. Se puede determinar si $\{n, k\}$ es una teselación del plano euclidiano, del plano hiperbólico o del plano elíptico si se observa la suma $\frac{1}{n} + \frac{1}{k}$. Si la suma es igual a $\frac{1}{2}$, como sucede para las tres teselaciones mencionadas anteriormente, entonces $\{n, k\}$ es un teselado euclidiano. Si

la suma es menor que $\frac{1}{2}$, entonces la teselación es hiperbólica; Pero si es mayor que $\frac{1}{2}$, entonces la teselación es elíptica.

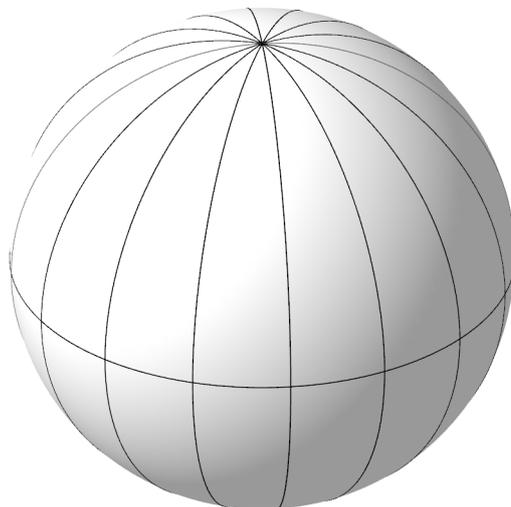


Figura 3.30: Ejemplo de una teselación elíptica.

La siguiente pregunta puede surgir de manera natural: ¿Por qué para una teselación $\{n, k\}$, hay k polígonos regulares en cada vértice? Esto sucede debido a que el ángulo en cada vértice es $\frac{2\pi}{k}$. Puesto que un polígono regular tiene n ángulos iguales, cada uno siendo $\frac{2\pi}{k}$, por lo tanto la suma de los ángulos es $n \left(\frac{2\pi}{k}\right)$. Ahora, en el plano euclidiano, un triángulo tiene una suma angular de exactamente π ; en el plano hiperbólico es menor; y en el plano elíptico es mayor. Al romper un polígono en triángulos se puede determinar que la suma angular de un polígono regular es exactamente $(n - 2)\pi$ en el plano euclidiano; menor en hiperbólico; mayor en elíptica. Por lo tanto, si $n \left(\frac{2\pi}{k}\right)$ es igual a $(n - 2)\pi$, entonces $\{n, k\}$ sólo puede ser euclidiano; si es menor, hiperbólica; y si es mayor, elíptica. Haciendo un pequeño cálculo algebraico, vemos que lo anterior se convierte en $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$ para la geometría hiperbólica. Entonces, si $\{n, k\}$ cumple la condición anterior, podemos teselar el plano hiperbólico con polígonos regulares con n lados y k polígonos reuniéndose en cada vértice.

La siguiente teselación es con pentágonos en donde cuatro de ellos se reúnen en cada vértice, es decir, una teselación $\{5, 4\}$.

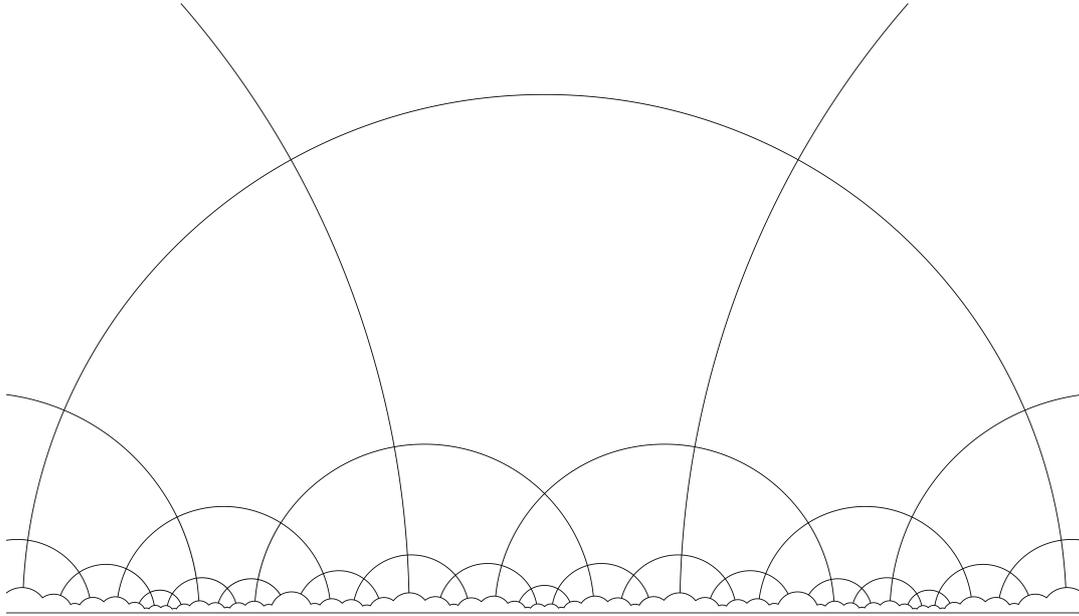


Figura 3.31: Teselación en \mathbb{H} con un polígono regular de 5 lados.

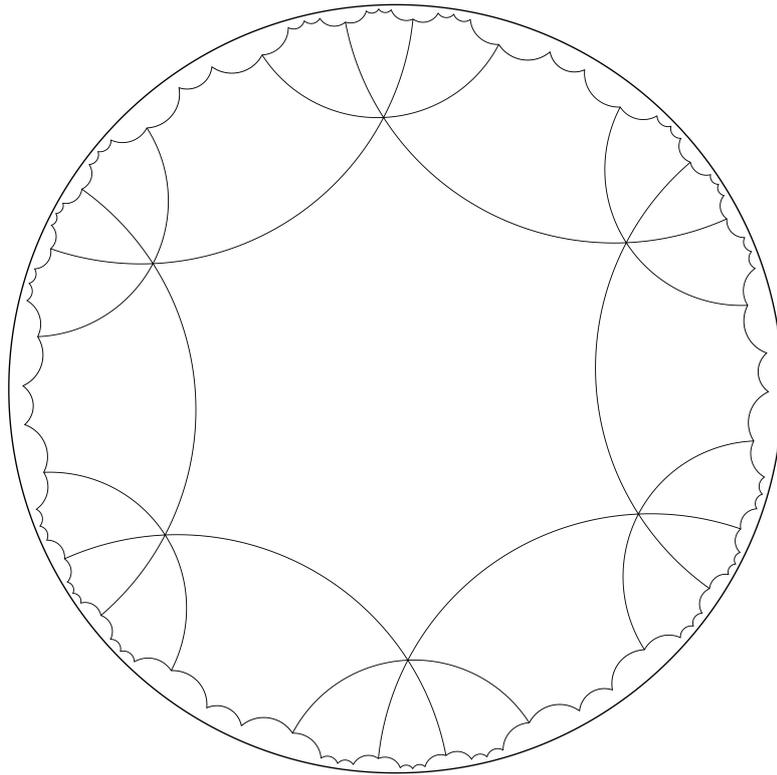


Figura 3.32: Teselación en \mathbb{D} con un polígono regular de 6 lados.

Epílogo.

En esta tesis se han realizado construcciones geométricas en el disco y el semiplano superior de Poincaré, por ejemplo, la construcción completa de la métrica hiperbólica en el disco de Poincaré con la ayuda de la inversión geométrica, además de dar la construcción de un triángulo con ángulos cualesquiera en el modelo del semiplano superior de Poincaré con la motivación de presentar un método para teselar este modelo. Con las teselaciones hiperbólicas en el capítulo 3, el trabajo se da por terminado, pero éste sólo es el comienzo de un largo camino por andar. Se pueden seguir describiendo objetos geométricos en los modelos, así como también construcciones de rectas notables en triángulos hiperbólicos. A medida que se va avanzando en la lectura del documento van surgiendo preguntas de manera natural que pueden servir para nuevos proyectos de investigación, es por ello que mencionaremos algunas de ellas.

- En la construcción de un triángulo hiperbólico en \mathbb{D} que nosotros presentamos, elegimos en un primer paso los vértices del triángulo hiperbólico, y a partir de estos construimos el disco, pero ¿cómo construimos un triángulo hiperbólico con ángulos cualesquiera en el modelo del disco de Poincaré?
- En la construcción que damos de un triángulo cualquiera en el modelo del semiplano de Poincaré, es necesario aplicar una rotación euclidiana con respecto a un punto en la frontera ideal, para poder construirlo. La pregunta que surge de manera inmediata es: ¿Cómo hacemos una construcción de un triángulo hiperbólico en el modelo del semiplano de Poincaré sin tener la necesidad de hacer esta rotación?
- ¿Es posible extender estas construcciones geométricas a espacios hiperbólicos de dimensión mayor?

Apéndice A

Fórmulas de adición en la trigonometría hiperbólica.

De la definición de $\sinh(t)$ y $\cosh(t)$ vistas en la subsección 2.7.1 obtenemos las funciones hiperbólicas restantes:

$$\begin{aligned}\coth(t) &= \frac{1}{\tanh(t)} = \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} \\ \operatorname{csch}(t) &= \frac{1}{\sinh(t)} = \frac{2}{e^t - e^{-t}} \\ \operatorname{sech}(t) &= \frac{1}{\cosh(t)} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}\end{aligned}$$

Definición A.1. *De la misma forma podemos obtener las fórmulas de adición*

$$\sinh(t \pm z) = \sinh(t) \cdot \cosh(z) \pm \cosh(t) \cdot \sinh(z)$$

$$\operatorname{csch}(t \pm z) = \cosh(t) \cdot \cosh(z) \pm \sinh(t) \cdot \sinh(z).$$

Las fórmulas anteriores no son difíciles de demostrar. Por ejemplo, para demostrar que $\sinh(t + z) = \sinh(t) \cdot \cosh(z) + \cosh(t) \cdot \sinh(z)$ se hace

$$\sinh(t + z) = \frac{e^{t+z} - e^{-(t+z)}}{2} = \frac{e^t \cdot e^z - e^{-t} \cdot e^{-z}}{2}$$

y como $e^t = \cosh(t) + \sinh(t)$, $e^{-t} = \cosh(t) - \sinh(t)$, $e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$ y $e^{-z} = \cosh(z) - \sinh(z)$, sustituyendo estas equivalencias en $\sinh(t + z)$:

$$\sinh(t+z) = \frac{(\cosh(t) + \sinh(t))(\cosh(z) + \sinh(z)) - (\cosh(t) - \sinh(t))(\cosh(z) - \sinh(z))}{2}.$$

Efectuando los productos indicados y reduciendo términos semejantes

$$\operatorname{senh}(t+z) = \frac{2 \operatorname{senh}(t) \cdot \operatorname{cosh}(z) + 2 \operatorname{senh}(t) \cdot \operatorname{cosh}(z)}{2}$$

por lo tanto

$$\operatorname{senh}(t+z) = \operatorname{senh}(t) \cdot \operatorname{cosh}(z) + \operatorname{senh}(t) \cdot \operatorname{cosh}(z)$$

que es lo que se quería demostrar. Se sigue un proceso análogo para demostrar las fórmulas restantes.

Apéndice B

Coseno y seno para los lados en un triángulo hiperbólico.

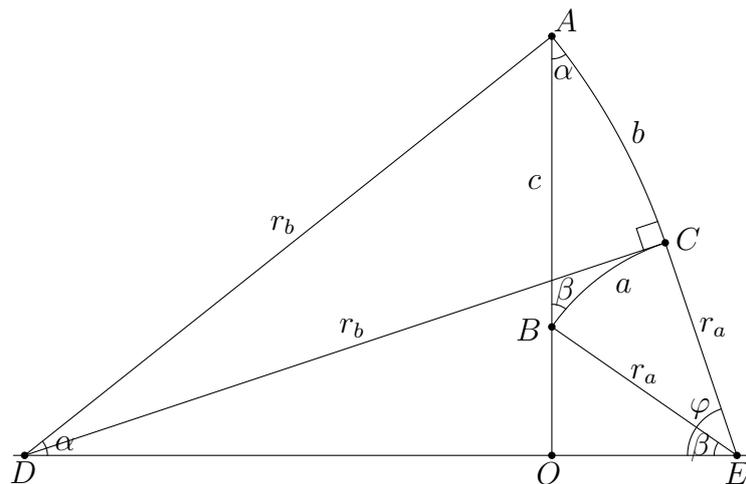


Figura B.1: El triángulo $\triangle ABC$ en posición especial.

Podemos ver que en la figura anterior, los ángulo α y $\angle ADO$ son iguales ya que, como los ángulos $\angle ADO$ y $\angle DAO$ suman $\frac{\pi}{2}$ (en sentido euclidiano) y como el ángulo α está dado por el ángulo que forma la tangente a la circunferencia que contiene al lado AB con el rayo OA entonces los ángulos α y $\angle ADO$ son iguales. Ahora los ángulos β y $\angle BEO$ también son iguales ya que los ángulos β y $\angle OBE$ suman $\frac{\pi}{2}$ pero además los ángulos $\angle OBE$ y $\angle BEO$ también suman $\frac{\pi}{2}$ por lo que los ángulos β y $\angle BDO$ son iguales.

Sean r_a y r_b los radios (euclidianos) de las circunferencias que contienen a los lados

hiperbólicos $a = BC$, $b = AC$ y sean D y E sus centros respectivamente. Además, sean las distancias euclidianas $AO = x$, $DO = z$, $BO = y$ y $OE = w$.

Con las igualdades de ángulos y las distancias dadas, tenemos

$$\cot(\alpha) = \frac{z}{x}, \quad \cot(\beta) = \frac{w}{y}. \quad (\text{B.1})$$

Como $r_b^2 = z^2 + x^2$ y $r_a^2 = w^2 + y^2$, y aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo $\triangle DCE$ tenemos que

$$(z + w)^2 = r_b^2 + r_a^2 = z^2 + x^2 + w^2 + y^2$$

que equivale a

$$x^2 + y^2 = 2zw \quad (\text{B.2})$$

y por la definición que tenemos para distancia de AB , que es la hipotenusa del triángulo $\triangle ABC$, tenemos que

$$AB = \ln\left(\frac{x}{y}\right) \implies e^{AB} = \frac{x}{y}$$

por lo tanto

$$\cosh(AB) = \frac{e^{AB} + e^{-AB}}{2} = \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2yx} = \frac{2zw}{2yx} = \left(\frac{z}{x}\right) \left(\frac{w}{y}\right)$$

entonces, por (B.1) y (B.2), tenemos que

$$\cosh(AB) = \cot(\alpha) \cdot \cot(\beta). \quad (\text{B.3})$$

Esta es una relación entre los lados y los ángulos de un triángulo. Para obtener otra relación escribimos $\tanh(AB)$ y usamos (B.2)

$$\tanh(AB) = \frac{e^{2AB} - 1}{e^{2AB} + 1} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{zw - y^2}{zw} \quad (\text{B.4})$$

y por la ecuación (2.9)

$$\tanh(BC) = \frac{\cos(\pi - \varphi) - \cos(\pi - \beta)}{1 - \cos(\pi - \varphi) \cdot \cos(\pi - \beta)} = \frac{\cos(\beta) - \cos(\varphi)}{1 - \cos(\beta) \cdot \cos(\varphi)}$$

pero

$$\cos(\beta) = \frac{w}{\sqrt{y^2 + w^2}} \text{ y } \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{y^2 + w^2}}{z + w}$$

así

$$\tanh(BC) = \frac{zw - y^2}{z\sqrt{y^2 + w^2}} = \left(\frac{zw - y^2}{zw}\right) \left(\frac{w}{\sqrt{y^2 + w^2}}\right)$$

y por (B.4) tenemos que

$$\tanh(BC) = \tanh(AB) \cdot \cos(\beta) \quad (\text{B.5})$$

ahora, si intercambiamos BC por AC y β por α tenemos

$$\tanh(AC) = \tanh(AB) \cdot \cos(\alpha). \quad (\text{B.6})$$

Usando las fórmulas (B.3) y (B.5) tenemos que

$$\cosh^2(AB) = \frac{\cot^2(\alpha)}{\tan^2(\beta)} = \frac{\cot^2(\alpha) \cdot \tanh^2(BC)}{\tanh^2(AB) - \tanh^2(BC)}$$

y por lo tanto

$$\sinh^2(AB) - \tanh^2(BC) - \tanh^2(BC) \cdot \sinh^2(AB) = \cot(\alpha)^2 \cdot \tanh^2(BC)$$

esto implica que

$$\begin{aligned} \cot^2(\alpha) &= \frac{\sinh^2(AB)[1 - \tanh^2(BC)] - \tanh^2(BC)}{\tanh^2(BC)} \\ &= \frac{\sinh^2(AB)[1 - \tanh^2(BC)]}{\tanh^2(BC)} - 1 \\ \cot^2(\alpha) + 1 &= \frac{\sinh^2(AB) \left[\frac{\cosh^2(BC) - \sinh^2(BC)}{\cosh^2(BC)} \right]}{\tanh^2(BC)} \\ \frac{1}{\cot^2(\alpha) + 1} &= \frac{\sinh^2(BC)}{\sinh^2(AB)} \end{aligned}$$

como sabemos que $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{\cot^2(\alpha) + 1}$ tenemos que

$$\sin^2(\alpha) = \frac{\sinh^2(BC)}{\sinh^2(AB)}$$

es decir

$$\sin(\alpha) = \frac{\sinh(BC)}{\sinh(AB)}. \quad (\text{B.7})$$

Además, si intercambiamos α por β y BC por AC obtenemos

$$\sin(\beta) = \frac{\sinh(AC)}{\sinh(AB)}. \quad (\text{B.8})$$

Apéndice C

Teoremas del seno y coseno en trigonometría hiperbólica.

Recordemos que en la trigonometría euclidiana también existe un teorema que es la generalización del teorema de Pitágoras que relaciona un lado de un triángulo cualquiera con los otros dos y con el coseno del ángulo formado por estos dos lados. Hablamos específicamente del teorema del coseno.

El teorema del coseno toma la siguiente forma en la geometría euclidiana. En un triángulo (no necesariamente rectángulo) con ángulos internos α , β y γ y lados de longitudes a , b y c , con lado a opuesto al ángulo α , etc. Se cumple que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma).$$

En la geometría hiperbólica contamos con dos teoremas del coseno: uno para lados y otro para ángulos:

Teorema C.1. *Dado un triángulo hiperbólico con ángulos internos α , β y γ y lados de longitudes a , b y c , con lado a opuesto al ángulo α , etc. Se cumple que*

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \sinh(b) \cdot \sinh(c) \cdot \cos(\alpha),$$

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cosh(a).$$

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo hiperbólico. Trazamos la línea hiperbólica perpendicular a AC y que pase por el vértice B , ver figura C.1. Usando la ecuación (2.15) en el triángulo rectángulo $\triangle CBH$ tenemos

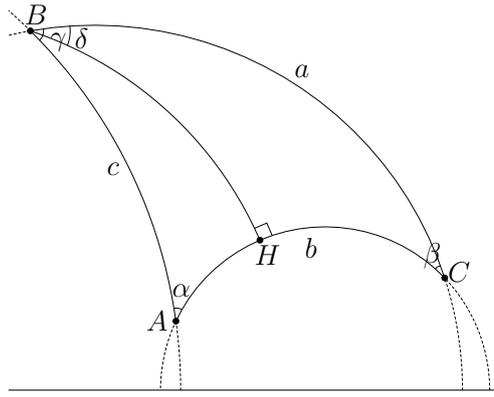


Figura C.1: El $\triangle ABC$ es un triángulo hiperbólico arbitrario.

$$\begin{aligned}
 \cosh(a) &= \cosh(BH) \cdot \cosh(HC) = \cosh(BH) \cdot \cosh(b - AH) \\
 &= \cosh(BH) [\cosh(b) \cdot \cosh(AH) - \sinh(b) \cdot \sinh(AH)] \\
 &= \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \sinh(b) \cdot \cosh(AH) \cdot \cosh(BH) \cdot \tanh(AH) \\
 &= \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \sinh(b) \cdot \cosh(c) \cdot \tanh(AH) \\
 &= \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \sinh(b) \cdot \cosh(c) \cdot \tanh(c) \cdot \cos(\alpha)
 \end{aligned}$$

esto implica que

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \sinh(b) \cdot \sinh(c) \cdot \cos(\alpha).$$

Para la segunda ecuación. Sea $\delta = \angle HBC$,

$$\begin{aligned}
 \cosh(\alpha) &= \coth(c) \cdot \tanh(c) \cdot \cos(\alpha) = \coth(c) \cdot \tanh(AH) \\
 &= \frac{\cosh(c)}{\cosh(AH)} \cdot \frac{\sinh(AH)}{\sinh(c)} \\
 &= \cosh(BH) \cdot \sinh(\beta - \delta) \\
 &= \cosh(BH) [\sin(\beta) \cdot \cos(\delta) - \cos(\beta) \cdot \sin(\delta)] \\
 &= \cosh(BH) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\beta) - \cosh(BH) \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\beta) \\
 &= \frac{\cosh(a)}{\cosh(HC)} \cdot \frac{\tanh(BH)}{\tanh(a)} \cdot \sin(\beta) - \frac{\cosh(a)}{\cosh(HC)} \cdot \frac{\sinh(HC)}{\cosh(HC)} \cdot \frac{\sinh(HC)}{\sinh(a)} \cdot \cos(\beta) \\
 &= \frac{\cosh(a) \cdot \sinh(BH)}{\cosh(HC) \cdot \cosh(BH) \cdot \tanh(a)} \cdot \sin(\beta) - \frac{\tanh(HC)}{\tanh(a)} \cdot \cos(\beta) \\
 &= \frac{\cosh(a) \cdot \sinh(BH)}{\cosh(a) \cdot \tanh(a)} \cdot \sin(\beta) - \cos(\gamma) \cdot \cos(\beta) \\
 &= \cosh(a) \cdot \frac{\sinh(BH)}{\sinh(a)} \cdot \sin(\beta) - \cos(\gamma) \cdot \cos(\beta)
 \end{aligned}$$

esto implica que

$$\cos(\alpha) = \cos(a) \cdot \operatorname{sen}(\gamma) \cdot \operatorname{sen}(\beta) - \cos(\gamma) \cdot \cos(\beta).$$

□

Esta última ecuación no tiene análogo en la geometría euclidiana. Observemos que esta ecuación implica lo siguiente: si conocemos los ángulos internos α , β y γ de un triángulo hiperbólico, entonces podemos calcular la longitud de sus lados. En la geometría euclidiana, los ángulos de un triángulo no determinan las longitudes de los lados.

Recordemos también que en la trigonometría euclidiana existe un teorema que nos da una relación de proporcionalidad entre las longitudes de los lados de un triángulo y los senos de sus respectivos ángulos opuestos. Hablamos específicamente del **teorema del seno**.

El teorema del seno toma la siguiente forma en la geometría euclidiana. En un triángulo (no necesariamente rectángulo) con ángulos internos α , β y γ y lados de longitudes a , b y c , con lado a opuesto al ángulo α , etc. Se cumple que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{c}.$$

La versión hiperbólica de esto es la siguiente

Teorema C.2. *Si Δ es un triángulo hiperbólico con ángulos internos α , β y γ y lados de longitudes a , b y c , con lado a opuesto al ángulo α , etc. Se cumple que*

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{senh}(a)} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{senh}(b)} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{senh}(c)}.$$

Demostración. Sea ΔABC un triángulo hiperbólico. Trazamos la línea hiperbólica perpendicular a AC y que pase por el vértice B .

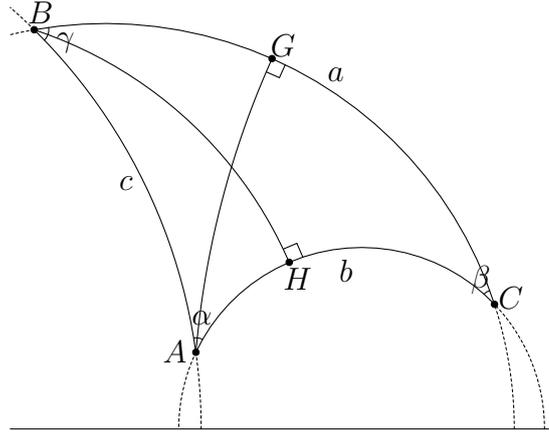


Figura C.2: El $\triangle ABC$ es un triángulo hiperbólico arbitrario.

Luego, los triángulos hiperbólicos $\triangle ABH$ y $\triangle BCH$ son rectángulos y por (B.7) y (B.8) tenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\operatorname{senh}(BH)}{\operatorname{senh}(c)} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\gamma) = \frac{\operatorname{senh}(BH)}{\operatorname{senh}(a)}$$

esto implica que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{senh}(a)} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{senh}(c)}. \quad (\text{C.1})$$

Por otro lado, al trazar una línea hiperbólica perpendicular a BC y que pase por el vértice A , formamos dos triángulos rectángulos $\triangle ABG$ y $\triangle AGC$ y por (B.7) y (B.8) tenemos

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\operatorname{senh}(AG)}{\operatorname{senh}(c)} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\gamma) = \frac{\operatorname{senh}(AG)}{\operatorname{senh}(b)}$$

esto implica que

$$\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{senh}(b)} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{senh}(c)}. \quad (\text{C.2})$$

De (C.1) y (C.2) tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{senh}(a)} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{senh}(b)} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{senh}(c)}.$$

□

Bibliografía

- [CG1] Cruz López, M. y García Campos, M. *Geometría euclidiana bidimensional y su grupo de transformaciones*. Publicado en Papirhos, Editorial IMUNAM, 2017.
- [CG2] Cruz López, M. y García Campos, M. *Geometría hiperbólica bidimensional y su grupo de transformaciones*. En proceso.
- [Good] Goodman-Strauss, Chaim. *Compass and Straightedge in the Poincaré Disk*. The American Mathematical Monthly. 108 (2001), 38-49.
- [Fer] Fernández Román, L. *Jugando con el triángulo hiperbólico*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2001.
- [Rev] Reventós Tarrida, Agustí. *Geometría Inversiva*, Universidad Autónoma de Barcelona.
- [Rot] Rothe, Franz. *Several topics from geometry*, 2010.
- [Uga] Ugarte Vilumbrales, Luis *Geometría Inversiva*.