

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Escuela de Física



Trabajo de Graduación

EL LÍMITE CLÁSICO DEL OSCILADOR DE DIRAC CON CORRECCIONES GUP

TESIS PRESENTADA POR
KEVIN GIOVANNI HERNÁNDEZ BELTRÁN

PARA OPTAR AL GRADO DE
LICENCIADO EN FÍSICA

ASESORES
DR. JORGE ALEJANDRO BERNAL ARROYO
LIC. FRANKLIN MOISÉS MEJÍA HURTADO

Ciudad Universitaria, 26 de octubre de 2018

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Escuela de Física



Trabajo de Graduación

EL LÍMITE CLÁSICO DEL OSCILADOR
DE DIRAC CON CORRECCIONES GUP

Vo. Bo. Franklin Mejía

APROBACIÓN DEL ASESOR INTERNO

LIC. FRANKLIN MOÍSES MEJÍA HURTADO

Vo. Bo. Jorge Bernal

APROBACIÓN DEL ASESOR EXTERNO

DR. JORGE ALEJANDRO BERNAL ARROYO

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS

RECTOR

MAESTRO ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

SECRETARÍA GENERAL

LIC. CRISTOBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ

FISCAL GENERAL

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN

DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

LIC. MAURICIO HERNÁN LOVO CÓRDOBA

DIRECTOR DE LA ESCUELA DE FÍSICA

M. SC. CÉSAR ARMANDO ALVARADO BATRES

Ciudad Universitaria, 26 de octubre de 2018

Dedicatoria

Para aquellos que se fueron y que han de llegar.

Agradecimientos

Se agradece a las siguientes personas:

- A mi madre, Sandra Beltrán por apoyarme en mis sueños y tenerme paciencia a lo largo de la vida.
- A mi abuela paterna, María Alvarenga por tener confianza en mis capacidades.
- A mis hermanos, Hugo Hernández y Alisson Magaña por el cariño.
- A mi amigo, Raúl Durán por su apoyo desde antes de empezar la carrera.
- A mi amigo, asesor y mentor, Jorge Bernal por apoyarme y motivarme a seguir en la física.
- A Franklin Mejía, por tomarme en cuenta e incentivar me dentro de la mecánica cuántica.
- A mi amigo, Sergio Aguilar, por empujarme a la física desconocida y estudiar más allá de lo establecido.
- A mi mentor, Rafael Escoto por su capacidad de motivarme a hacer física.
- Al Maestro Francisco Melgar por despertar la crítica en sus clases y fortalecer lo que llamamos Universidad.
- A mis compañeros de la carrera Ismael Arce, Andrés Alexis, William Larín, Diego Martínez y otros compañeros de la promoción, por los momentos buenos y malos durante toda la carrera.
- A los docentes de la Escuela de Física por la motivación.
- A Gabriela García por hacer de mí, una mejor persona.

Lista de publicaciones

Esta tesis fue parcialmente presentada en las siguientes publicaciones:

- **Aplicación del principio de correspondencia de Bohr a la ecuación de Dirac.** K. G. Hernández . Cátedra P. Dirac. Instituto Prometeo (Tabasco, 2018).
- **Application of an extension of the Bohr Correspondence Principle to the Klein-Gordon and Dirac equations.** J. A. Bernal Arroyo, K. G. Hernández Beltrán , A. C. Granda Arango. **Accepts abstract** in 7th International Conference on New Frontiers in Physics (ICNFP2018), Crete, Greece, 2018.
- **Aplicación de un nuevo Principio de Correspondencia a las soluciones de las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac.** K. G. Hernández, S. A. Gutiérrez, J. A. Bernal Arroyo. Div. Grav. y Fis. Mat. LXI Congreso Nacional de Física. Sociedad Mexicana de Física. (2018)

Índice general

Dedicatoria	4
Agradecimientos	5
Lista de publicaciones	6
Resumen	v
Introducción	vi
1. Marco Teórico	1
1.1. Aspectos generales de la mecánica cuántica	1
1.1.1. Formulación de Schrödinger	2
1.1.2. Aplicación: comparación entre el oscilador armónico de la mecánica clásica y de la mecánica cuántica	5
1.2. El principio de correspondencia de Bohr	8
1.2.1. Antecedentes	8
1.2.2. Aplicación: partícula en un pozo infinito simétrico	13
1.3. Introducción a la mecánica cuántica relativista	16
1.3.1. Ecuación de Klein-Gordon	16
1.3.2. Ecuación de Dirac	17
1.4. El oscilador de Dirac	20
1.4.1. Hamiltoniano del oscilador de Dirac.	20
1.4.2. Soluciones del oscilador de Dirac en el caso unidimensional	21
1.5. GUP	23
1.5.1. Antecedentes	23
1.5.2. El modelo de KMM	25
1.5.3. Otros modelos	27
1.6. Pozo cuántico con correcciones GUP	28
1.7. El oscilador de Dirac con correcciones GUP	29
1.7.1. Antecedentes	29

1.7.2. Propuesta de Nouicer	29
2. Metodología	33
2.1. Propuesta metodológica para la partícula en un pozo unidimensional con correcciones GUP	33
2.1.1. Propuesta teórica	33
2.1.2. Análisis de residuos cuánticos	34
2.2. Propuesta metodológica para el oscilador de Dirac con correcciones GUP	35
2.2.1. Propuesta teórica	35
2.2.2. Análisis de residuos cuánticos	36
3. Resultados y discusión	37
3.1. Pozo cuántico con correcciones GUP	37
3.1.1. Aplicación de la propuesta metodológica	37
3.1.2. Principales resultados	40
3.2. El oscilador de Dirac con correcciones GUP	41
3.2.1. Aplicación de la propuesta metodológica	41
3.2.2. Principales resultados	47
4. Conclusiones y recomendaciones	50
Referencias bibliográficas	53
A. El oscilador de Dirac en el espacio de momentos	58
B. Cálculo del límite $\beta \rightarrow 0$ de las soluciones de Nouicer: el oscilador de Dirac con correcciones GUP	62
C. Aplicación del nuevo principio de correspondencia sobre las soluciones del oscilador de Dirac en el espacio de momentos	69
D. Energía del oscilador relativista	75

Índice de figuras

1.1. Comparación entre la densidad de probabilidad clásica (CPD, ec. (1.27), X_0 representa la amplitud de oscilación) y la densidad de probabilidad cuántica (QPD, ec. (1.37), $m, \hbar, \omega = 1$, n es el número cuántico principal). En CPD no hay presencia de nodos oscilatorios a comparación de QPD, sin embargo, a medida aumenta n los nodos parecen coincidir con CPD. En la figura se puede observar que en el caso de CPD es más probable encontrar la partícula fuera de $x = 0$, mientras que para el estado base de QPD es lo contrario, para otros estados cuánticos este comportamiento desaparece.	9
1.2. Esquema metodológico presentado en ref. [10] para la aplicación del principio de correspondencia de Bohr a la densidad de probabilidad cuántica; la densidad de probabilidad clásica se puede obtener de la transformada inversa del comportamiento asintótico de la transformada directa de la densidad de probabilidad cuántica.	12
1.3. Comparación entre ambas densidades de probabilidad. La densidad de probabilidad cuántica (QPD, Quantum Probabilist Distribution) está definida por la ec. (1.48) y la densidad de probabilidad clásica (CPD, Classical Probabilist Distribution) por la ec. (1.49). Para una longitud de $a = 1$ se tienen los resultados para $n = 1, 7$ dentro del intervalo $0 < x < 1$. En la figura se puede observar que la presencia de los nodos aumenta a medida el número cuántico principal crece y es muy diferente al caso de CPD donde es una función constante. . .	13
1.4. Comparación entre el principio de incertidumbre de Heisenberg (HUP, ec. (1.106)) y el principio de incertidumbre generalizado (GUP, ec. (1.107)). La figura ha sido para diferentes valores de β con $\hbar = 1$ en el intervalo de $1 < \Delta p < 10$, puede notarse que el GUP a medida β tiende a cero se acerca a HUP. El valor mínimo que Δx puede tomar está relacionado con $\sqrt{\beta}$ según la ec. (1.109).	26

3.1.	Se presenta la gráfica de la ec. (3.13) para diferentes valores de β . Puede notarse que a medida $\beta \rightarrow 0$ la relación de los residuos tiende a 1. Existen valores de β al cual los efectos cuánticos-GUP superan a los efectos cuánticos, esto ocurre cuando el momento lineal es muy grande, por lo que se está introduciendo a nociones relativistas. . . .	40
3.2.	Comportamiento de las densidades en términos de residuos cuánticos para diferentes valores de κ con relación al momento inicial p_0 de la partícula en un oscilador armónico simple. Se gráfica para $\kappa \geq p_0$. Aunque este caso es meramente hipotético ya que para que ocurra este sistema β debe ser mucho mayor que el momento clásico. . . .	48
3.3.	Comportamiento de las densidades en términos de residuos cuánticos para diferentes valores de κ con relación al momento inicial p_0 de la partícula en un oscilador armónico simple. Se gráfica para $\kappa < p_0$. Puede notarse que este comportamiento se debe a que en la densidad de probabilidad clásica-GUP presenta una reducción de la amplitud de oscilación.	49
3.4.	Breve comparación entre la densidad de probabilidad clásica y la densidad de probabilidad con correcciones GUP, puede notarse que los efectos GUP simplemente modifican la amplitud del momento inicial, por tanto, el rango de momento es diferente al momento clásico. . . .	49

Resumen

En este trabajo se presentan dos propuestas metodológicas para recuperar el límite clásico de la mecánica cuántica en el contexto de un Principio de Incertidumbre Generalizado (GUP) a través de la aplicación de una extensión del principio de correspondencia de Bohr a las soluciones de la ecuación de Schrödinger y a la ecuación de Dirac, ambas con correcciones GUP.

En general, se presentan diversos temas en el marco teórico como el enfoque histórico del principio de correspondencia de Bohr, los postulados de la mecánica cuántica, el advenimiento de las ecuaciones de onda relativistas dadas por Dirac y Klein-Gordon, y al final se desarrolla un aspecto general de la hipótesis de un principio de incertidumbre generalizado (GUP) y se presentan los aspectos físicos del pozo infinito y del oscilador de Dirac ante una corrección GUP.

Mediante el nuevo principio de correspondencia se encontró el límite clásico de la partícula en una caja unidimensional con correcciones GUP, sin embargo, es preciso aplicar o complementar el nuevo principio de correspondencia junto con el límite del Principio de Incertidumbre de Heisenberg (HUP). El límite HUP únicamente es verificar que el parámetro de deformación GUP tienda a cero. La razón entre los residuos es ligeramente mayor a 1, siendo comparados con estudios previos.

Además, se encontró el límite clásico del oscilador de Dirac con correcciones GUP, a través del nuevo principio de correspondencia, del límite no relativista y del límite HUP. La razón entre la densidad de probabilidad clásica-GUP y la densidad de probabilidad clásica es ligeramente mayor que 1.

Por primera vez, se tienen resultados del límite clásico de la mecánica cuántica y de la mecánica cuántica-relativista deformadas por la presencia de un principio de incertidumbre generalizado, además de introducir el parámetro de deformación en la densidad de probabilidad clásica, sin embargo, los residuos cuánticos-GUP son mucho más pequeños que sus contrapartes cuánticas.

Introducción

La conexión entre la mecánica relativista y la mecánica clásica se obtiene a través de un límite conocido como el límite no relativista, el cual puede ser revisado en cualquier texto introductorio a la relatividad especial, sin embargo, las cosas cambian cuando se quiere recuperar propiedades dinámicas de la mecánica clásica desde la formulación de la mecánica cuántica. La mecánica cuántica, matemáticamente, es diferente a su contraparte clásica y físicamente tiene resultados correctos como la cuantización de la energía [1].

Los postulados de la mecánica cuántica implican desarrollos en el espacio de Hilbert y los valores medibles son valores esperados de algún operador sobre la función de onda (indeterminista) mientras que la mecánica clásica es puramente determinista, esta discrepancia junto con el principio de incertidumbre de Heisenberg presenta una dificultad en cuanto a demostrar si realmente existe una correspondencia entre ambas mecánicas.

La ley de Planck es una relación matemática que explica todo el espectro de la radiancia espectral del cuerpo negro, además, tiene un comportamiento cuántico debido al cuanto de acción h , por el otro lado, la ley de Rayleigh-Jean obtenida desde la teoría electromagnética explica cierta parte del espectro y predice una catástrofe ultravioleta la cual no tiene evidencias físicas, sin embargo, es posible recuperar la ley de Rayleigh-Jean a través de la ley de Planck mediante el proceso metodológico conocido como el límite de Planck [2, 3] que ha tenido diversas aplicaciones y resultados [4], sin embargo, es un método altamente restrictivo debido a que sólo es aplicable en algunos resultados donde la constante de Planck puede ser eliminada.

El teorema de Ehrenfest ha sido descrito como un método que permite recuperar las ecuaciones de movimiento de la mecánica clásica a través de los valores esperados de momento y su relación con el operador posición [1, 5, 6] no obstante, ciertos artículos expresan que el teorema es también un método restrictivo [2, 3, 7, 8].

La función de Wigner determina el comportamiento de la mecánica estadística clásica a través de su formulación en el espacio fase utilizando las soluciones de la ecuación de Schrödinger para diversos problemas [2, 9], sin embargo, la función de Wigner es una distribución cuasiprobabilística, debido a que esta distribución no es estrictamente positiva y no se puede especificar que sea un método general, ya que

depende fuertemente de la paridad de las funciones de onda [10].

El potencial de Bohm deducido a través del método WKB en el régimen semiclásico [1, 2] permite recuperar la ecuación de Hamilton-Jacobi cuando el potencial cuántico de Bohm es cero, presenta buenos resultados [11, 12], sin embargo, su propuesta viene motivada a través de la solución a la ecuación de Schrödinger en forma $\psi = Re^{-iS/\hbar}$ siendo ψ solución de la ecuación de Schrödinger, R una función real y S la acción clásica, entonces, si se introduce esa solución en la ecuación de Schrödinger, se tiene la ecuación de Hamilton-Jacobi en la parte real y la ecuación de continuidad en la parte imaginaria. En la parte real aparece un término extra conocido como el potencial de Bohm. En el caso que el potencial de Bohm es cero se recupera exactamente la ecuación de Hamilton-Jacobi, esto implica un desconocimiento sobre que parámetro físico del potencial debe valer cero; en ref. [2] se demuestra que aún haciendo el límite de Planck en ese potencial es imposible que el potencial de Bohm sea cero en el estado base del oscilador armónico cuántico.

En la mecánica estadística es posible encontrar diversos artículos que aproximan resultados de la función de partición para ensambles cuánticos y ensambles clásicos a través de diferentes metodologías, tal aproximación es bastante restrictiva debido a que solo es aplicable en problemas particulares [13, 14].

Algunos autores presentan resultados comparando la distribución cuántica con la distribución clásica de diversos problemas en el espacio de configuraciones y de fase [15, 16], tal comparación es adecuada como aproximación a la densidad de probabilidad clásica.

El principio de correspondencia de Bohr formulado como un enunciado en 1923, establece que la mecánica cuántica converge a la mecánica clásica cuando el número cuántico principal de un sistema periódico es grande [2, 3, 10], ha tenido diversas aplicaciones en los espectros energéticos [17–19]. Otros autores han aplicado el *principio de correspondencia de Bohr* en la electrodinámica cuántica, aunque técnicamente no es el principio de correspondencia de Bohr, sino más bien establece que la electrodinámica clásica es recuperable en el límite de muchos fotones o que el valor esperado de muchos fotones sea muy grande [20], mientras que Dente propone que el resultado de la electrodinámica clásica es recuperable siempre que el fotón inicie desde el estado vacío hasta el estado coherente [21]. Un autor sugiere que no es necesario que el número cuántico principal sea muy grande, sin embargo esto es aplicado en el átomo de Bohr, por lo que es muy restrictivo [22]. Otro autor sugiere que para potenciales del tipo $\frac{C_n}{r^n}$, $n > 2$ donde C_n es positivo, establece que no se puede recuperar el espectro clásico [23], no obstante, esto se discute específicamente porque se ha trabajado en el régimen semiclásico [24].

En 2013, Bernal y otros propusieron un simple procedimiento matemático para recuperar la densidad de probabilidad clásica a través de la densidad de probabilidad cuántica mediante el principio de correspondencia de Bohr [10], lo anterior sugiere

que la variable dinámica importante es la densidad de probabilidad de ambas teorías. Se ha recuperado la densidad de probabilidad de los siguientes problemas cuánticos: la partícula en una caja y el oscilador armónico cuántico [10], el problema de Kepler [25] y la matriz densidad [26].

El principio de correspondencia propuesto por Bernal y otros no ha sido aplicado a problemas cuánticos con principios de incertidumbre generalizados como longitud mínima, momentos mínimo o ambos. La bibliografía de los límites clásicos de la mecánica cuántica deformada por GUP presenta poca información, por lo que es necesario extender el principio de correspondencia a este campo.

El oscilador de Dirac es un problema mecánico cuántico relativista, específicamente para partículas de espín 1/2, propuesto por Moshinsky en 3D [27] y extendido matemáticamente por Martínez y otros [28]. Se ha trabajado en una dimensión y se ha verificado la completitud de sus eigenfunciones [29], tiene soluciones en 2D [30], presenta una supersimetría oculta debido al momento anómalo [31], tiene referencias de verificación experimental [32, 33] y el límite no relativista es presentado por Moshinsky a niveles bajos de energía del sistema [27].

Recientemente se ha introducido una deformación al principio de incertidumbre de Heisenberg debido a una hipótesis de una longitud mínima, derivado de teorías recientes como cuerdas [34], gravitación cuántica [35, 36], agujeros negros [37], etc. Esta corrección modifica la relación de conmutación de Heisenberg y por tanto, el principio de incertidumbre de Heisenberg. En la literatura se suele denominar GUP (Generalized Uncertainty Principle). La corrección GUP se manifiesta como una fricción cuántica en diversos problemas [38], se ha extendido el potencial newtoniano en presencia de un GUP [39], se ha modificado el espacio de Hilbert y la ecuación de Schrödinger en el espacio de fase [40], en fin, se ha modificado la mecánica cuántica bajo GUP [41–44].

La presencia de GUP aplicado a la mecánica cuántica relativista presenta diversas referencias, se han estudiado las partículas en una caja para el caso de Dirac y Klein-Gordon [45], en el ámbito de la teoría cuántica de campos se ha trabajado el campo de Klein-Gordon desde diferentes formalismos [46, 47]. Blado y otros [44], han agregado una corrección GUP al pozo infinito unidimensional, modificando las soluciones y por tanto, el espectro de energía. Esto implica que es necesario extender el principio de correspondencia a la mecánica cuántica deformada, específicamente al pozo unidimensional en conjunto con el límite HUP, se espera recuperar la densidad de probabilidad clásica de este sistema y que coincida con resultados previos [2, 10].

El oscilador de Dirac en presencia de modificaciones GUP ha sido estudiado por diversos autores. Arifuzzaman y otros a través de la formulación de Moshinsky [27] reducen el problema a 1D y modifican la relación de conmutación de Heisenberg a GUP obteniendo el espectro de energía corregido [48], Nouicer resuelve el oscilador de Dirac (1D) en presencia de GUP en el espacio de fase y demuestra que al aplicar

el límite $\beta \rightarrow 0$, siendo β el parámetro de deformación, recupera parcialmente las soluciones del oscilador de Dirac sin GUP [49], Ara y otros resuelven el oscilador de Dirac en el contexto de GUP de una ecuación de Dirac con un potencial lineal [50], Quesne y Tkachuk obtienen las soluciones del oscilador de Dirac con correcciones GUP en el espacio de posición, obteniendo resultados en la representación de momento [51].

De lo anterior, la propuesta de este trabajo consiste en aplicar el principio de correspondencia de Bohr, el límite no relativista y el límite de HUP (Heisenberg Uncertainty Principle), a la densidad de probabilidad cuántica relativista definida por las soluciones del oscilador de Dirac con correcciones GUP. Se espera obtener resultados congruentes con los resultados de la aplicación del principio de correspondencia de Bohr al oscilador armónico cuántico [10]. En general, el objetivo de este trabajo consiste en recuperar el límite clásico de la mecánica cuántica y mecánica cuántica-relativista deformadas por el principio de incertidumbre generalizado, esto demostraría que el principio de correspondencia es extendible a este campo, específicamente con el pozo infinito cuántico deformado y el oscilador de Dirac con correcciones GUP.

Este trabajo está dividido por capítulos. El capítulo I contiene el marco teórico o fundamento teórico, el cual está dividido en secciones según su nivel de complejidad. En el capítulo II se presenta la propuesta metodológica para los problemas selectos. En el capítulo III se presentan los resultados y el análisis de resultados a fin de tener una idea clara de los resultados de la propuesta. En el capítulo IV se presentan las conclusiones y recomendaciones, además, se presentan apéndices para el desarrollo matemático de los resultados.

Capítulo 1

Marco Teórico

1.1. Aspectos generales de la mecánica cuántica

La física clásica presentó una serie de problemas que no podía explicar con las nociones de la mecánica clásica, teoría electromagnética, termodinámica, etc. Los problemas como la discretización del espectro energético, el problema de la radiación en los átomos, y el comportamiento onda-partícula, han sido resueltos con el advenimiento de la mecánica cuántica y mecánica relativista.

La mecánica cuántica inicia con la *teoría cuántica antigua* propuesta por N. Bohr en 1913, en ella permitió explicar el espectro de la radiación electromagnética emitida por ciertos átomos. Esta teoría fue abandonada por la posterior teoría moderna, sin embargo, lo interesante de esta teoría son los postulados de Bohr. Un postulado de Bohr importante define que el momento angular orbital tiene los valores $L = n\hbar$ para $n = 1, 2, 3$ y \hbar es la constante de Planck, esta discretización implica la cuantización de diferentes variables dinámicas (energía, radio atómico, etc). Otro resultado interesante es la existencia de la estructura fina, espín, efecto Hall, efecto Stark, efecto Zeeman y otros. En 1923, Bohr agrega un postulado adicional, *el principio de correspondencia de Bohr*, el cual establece que la teoría clásica es recuperable cuando el número cuántico principal de un sistema cuántico es grande [3].

En 1925, E. Schrödinger propone la mecánica ondulatoria motivado por los resultados de Broglie mientras que W. Heisenberg propone la mecánica matricial, la diferencia entre ambas teorías reside en la noción de aplicación, en la mecánica ondulatoria existen ondas pilotos (función de onda) y en la mecánica matricial únicamente son variables dinámicas como x, p_x , etc. Ambas teorías son equivalentes, esto fue demostrado en 1928 por E. Schrödinger.

En 1927 aparece el principio de incertidumbre de Heisenberg, este principio establece que la incertidumbre entre dos variables dinámicas no se puede medir con arbitraria precisión. Esto es congruente con las soluciones de la mecánica cuántica

ondulatoria.

1.1.1. Formulación de Schrödinger

La formulación de Schrödinger inicia con la ecuación diferencial de segundo orden en coordenadas espaciales y de primer orden en coordenada temporal:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r, t) + V(r, t) \Psi(r, t). \quad (1.1)$$

Donde \hbar es la constante de Planck reducida, m es la masa de la partícula puntual, $V(r, t)$ es el potencial aplicado en la partícula de masa m , puede depender del tiempo o no, $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria, $\Psi(r, t)$ es la solución de la ecuación de Schrödinger (función de onda), tiene ciertas características que debe cumplir para tener significado físico [1]. Cabe destacar que esta ecuación tiene un análogo a la segunda ley de Newton, no en términos físicos o matemáticos, sino como propuesta, de esta manera si se quiere la ecuación de movimiento de una partícula $r(t)$ en un potencial $V(r)$, se puede obtener desde la segunda ley de Newton. En la mecánica cuántica si se quiere obtener la función de onda de una partícula $\Psi(r, t)$ asociado al potencial $V(r)$ se recurre a la ecuación de Schrödinger. Se puede trabajar en una coordenada espacial para mayor simplicidad. $\Psi(x, t)$ es compleja e inmensurable, es necesario entonces definir conceptualmente el postulado de Born [1] como: *si en el instante t se lleva a cabo una medida para ubicar la partícula descrita por la función $\Psi(x, t)$, entonces la probabilidad $P(x, t)dx$ de que el valor de x se encuentre entre x y $x + dx$ es:*

$$P(x, t)dx = \frac{\Psi^*(x, t)\Psi(x, t)dx}{\int_x \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)dx} = \frac{|\Psi(x, t)|^2 dx}{\int_x |\Psi(x, t)|^2 dx}. \quad (1.2)$$

De esta manera, la integral debe ser finita:

$$\int_x \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)dx = N_\Psi, \quad (1.3)$$

por lo que $\Psi(x, t)$ debe cumplir con la condición que sea de cuadrado integrable, en otras palabras, para $x \rightarrow \pm\infty$ la función $\Psi(x, t)$ debe tender a cero. El postulado de Born también establece que $P(x, t)$ debe valer 1 en todo el espacio, ya que eso define la probabilidad de encontrar una partícula en todo el espacio. Si el potencial es independiente del tiempo la ec. (1.1) en una dimensión admite soluciones separables [1]:

$$\Psi(x, t) = \psi(x)f(t), \quad (1.4)$$

luego, introduciendo en ec. (1.1) se puede obtener la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (1.5)$$

siendo $f(t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ la solución para la parte temporal. La independencia temporal del potencial aplicado a la partícula tiene como consecuencia la eliminación de las componentes temporales en la densidad de probabilidad, esto es:

$$\Psi^*(x, t)\Psi(x, t) = \psi^*(x)f^*(t)\psi(x)f(t) = \psi^*(x)\psi(x). \quad (1.6)$$

Ya que $f^*(t)f(t) = e^{i\frac{Et}{\hbar}}e^{-i\frac{Et}{\hbar}} = 1$. Sin embargo, las soluciones pertenecen al espacio complejo e infinito. El espacio de Hilbert en conjunto con la notación de Dirac (bra-ket), son suficientes para describir el formalismo de la mecánica cuántica ondulatoria. Otra forma de escribir la ec. (1.5) es a través del operador de Hamilton [1]:

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad (1.7)$$

el cual debe ser aplicado a un estado cuántico definido por la ec. (1.5). Algunos aspectos importantes del espacio de Hilbert y su relación con la mecánica cuántica son definidos de esta manera:

- Un estado cuántico es definido como el ket $|\psi_n\rangle$, la conjugada de ese estado cuántico es el bra $\langle\psi_n|$.
- Un postulado de la mecánica cuántica establece que para un sistema con un hamiltoniano determinado \hat{H} , le corresponde cierto eigenvalor (energía del sistema) E_n , para el estado $|\psi_n\rangle$. Por consiguiente, la ecuación de Schrödinger es:

$$\hat{H} |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle, \quad (1.8)$$

siempre que \hat{H} sea independiente del tiempo.

- El producto interno definido en el espacio de Hilbert consiste en:

$$\langle\psi_n|\psi_n\rangle = \int_x \psi_n^*(x)\psi_n(x)dx \geq 0. \quad (1.9)$$

- Un operador adjunto o conjugado hermítico cumple la siguiente propiedad:

$$\langle\hat{T}u|v\rangle = \langle u|\hat{T}^\dagger v\rangle, \quad (1.10)$$

siendo $\hat{T}^* = \hat{T}^\dagger$.

- Un operador autoadjunto o hermitico cumple la siguiente condición:

$$\langle \hat{T}u|v \rangle = \langle u|\hat{T}v \rangle, \quad (1.11)$$

esto quiere decir que $\hat{T} = \hat{T}^\dagger$.

- El valor esperado de un operador \hat{A} en el rango espacial de interés de un estado cuántico definido es:

$$\langle \psi_m|\hat{A}\psi_n \rangle = \int_x \psi_n^*(x)\hat{A}\psi_n(x)dx = \langle \hat{A} \rangle, \quad (1.12)$$

actuando sobre ψ_n , siempre que ψ_n, ψ_m pertenezcan al espacio de Hilbert y son eigenfunciones de \hat{A} .

- La incertidumbre entre el operador \hat{A} y \hat{T} , es definida mediante:

$$\sigma_A\sigma_T \geq \frac{1}{2}|\bar{C}|, \quad (1.13)$$

esto implica que \bar{C} es el valor esperado del operador C sobre las eigenfunciones. Además $\hat{C} = [\hat{A}, \hat{T}] = \hat{A}\hat{T} - \hat{T}\hat{A}$, es el conmutador de los operadores \hat{A}, \hat{T} .

- Los operadores de momento \hat{p} y de energía son:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}, \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x) = i\hbar \frac{d}{dt}. \quad (1.14)$$

Las relaciones anteriores, son definidas en diferentes textos introductorios a la mecánica cuántica y presentan los postulados de la mecánica cuántica [1]. Existe otra formulación de la ecuación de Schrödinger, las ecs. (1.1) y (1.5) son formulaciones en el espacio de configuraciones o de coordenadas. La formulación en el espacio fase o de momentos es definida a través de la transformada de Fourier:

$$\Psi(p) = \mathcal{F}\{\psi(x)\}. \quad (1.15)$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo se tiene:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \mathcal{F}\left\{\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)\right\} + \mathcal{F}\{V(x)\psi(x)\} = E\mathcal{F}\{\psi(x)\}, \quad (1.16)$$

donde:

$$g(p) = \mathcal{F}\{g(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\frac{px}{\hbar}} dx. \quad (1.17)$$

Normalmente se define que el intervalo de integración es infinito porque la función $g(x)$ está definida en todo el intervalo infinito. De esta manera se tiene la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en el espacio de momentos [1]:

$$\frac{p^2}{2m}\psi(p) + V\left(i\hbar\frac{d}{dp}\right)\psi(p) = E\psi(p), \quad (1.18)$$

en este espacio de momentos se ha cambiado la definición de los operadores de posición y momento a $\hat{p} = \hat{p}$ y $\hat{x} = i\hbar\frac{d}{dp}$. De esta manera, se pueden tener soluciones en el espacio de momentos o en el espacio de posición.

1.1.2. Aplicación: comparación entre el oscilador armónico de la mecánica clásica y de la mecánica cuántica

En la mecánica clásica una fuerza restauradora y opuesta al movimiento genera un movimiento armónico simple con una energía mecánica constante, la cual es la suma de la energía cinética y potencial. En la mecánica cuántica, el problema análogo es el oscilador armónico cuántico, el cual tiene un espectro discreto que depende del estado cuántico de la partícula. En primera instancia se resuelve el problema del oscilador armónico clásico a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange: sea una partícula de masa m sujeta a un resorte sin masa con un potencial $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia del sistema, y k es la constante del resorte. La Lagrangiana para este sistema masa-resorte es:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (1.19)$$

La Lagrangiana anterior es necesaria para encontrar la ecuación de movimiento en una dimensión, por tanto, al usar las ecuaciones de Euler-lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{x}}L\right) - \frac{\partial}{\partial x}L = 0, \quad (1.20)$$

se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \omega^2x = 0. \quad (1.21)$$

La solución particular a este sistema requiere definir dos constantes iniciales. Con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$ se puede obtener la solución particular siguiente:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t). \quad (1.22)$$

La solución presentada en la ec. (1.22) representa un movimiento armónico simple con amplitud x_0 y un período $T = \frac{2\pi}{\omega}$. La energía de este sistema puede ser encontrada a partir de:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2, \quad (1.23)$$

con la ec. (1.22), se puede encontrar:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2. \quad (1.24)$$

La energía es una constante de movimiento y no depende de la posición de la partícula. En la mecánica cuántica ondulatoria no es posible encontrar una ecuación de movimiento debido al principio de incertidumbre de Heisenberg, sin embargo, en la mecánica clásica se puede definir una densidad de probabilidad clásica. La partícula pasa por el mismo punto dos veces en todo el período, por tanto la fracción de tiempo $2dt$ que la partícula hace en un período completo T puede definirse como [2]:

$$\frac{2dt}{T} = \frac{2dx}{vT} = \frac{\omega dx}{\pi v}, \quad (1.25)$$

siendo v la velocidad de la partícula. Luego la velocidad de la partícula puede ser expresada en función de x a través de la ecuación (1.23):

$$\begin{aligned} \frac{2dt}{T} &= \frac{\omega dx}{\pi v}, \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{x_0^2 - x^2}} dx. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Lo anterior permite definir la densidad de probabilidad clásica como:

$$\rho^{CM}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}, \quad (1.27)$$

la cual únicamente depende de la amplitud de oscilación y $x < x_0$. En el supuesto que inicia con una velocidad inicial v_0 y posición $x_0 = 0$ la densidad de probabilidad

clásica es:

$$\rho^{CM}(p) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{p_0^2 - p^2}}, \quad (1.28)$$

siendo $p_0 = mv_0$ el momento inicial, por lo que esta definición únicamente depende de la velocidad inicial del sistema. El oscilador armónico cuántico es un sistema que tiene solución analítica, por lo que usando la ec. (1.5) con $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ se tiene:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x). \quad (1.29)$$

En los textos introductorios a la mecánica cuántica, se presentan dos formas de resolverlo, por el método algebraico o por el método de series de Frobenius. Aquí se presentará la ecuación diferencial adecuada por cambio de variables y se obtendrá una ecuación diferencial conocida [1]. Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x, \quad \frac{d}{dx} \psi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{d}{dy} \psi, \quad \frac{d^2}{dx^2} \psi = \frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2}{dy^2} \psi, \quad (1.30)$$

e introduciendo en la ec. (1.29) se tiene:

$$\frac{d^2}{dy^2} \psi(y) + (\gamma - y^2) \psi(y) = 0, \quad (1.31)$$

siendo $\gamma = \frac{2E}{\hbar\omega}$. Lo siguiente es que la solución que se busca debe anularse en los extremos infinitos, esto significa que cuando $y^2 \gg 1$, γ se mantiene fija:

$$\frac{d^2}{dy^2} \psi(y) - y^2 \psi(y) = 0. \quad (1.32)$$

La solución a esta ecuación es proporcional a $y \sim e^{\pm \frac{y^2}{2}}$, se toma la solución con exponente negativo por ser decreciente en los extremos. La solución completa tiene que tener la forma $y = AH(y)e^{-\frac{y^2}{2}}$, introduciendo esa solución completa en la ec. (1.31) se tiene una nueva ecuación diferencial para $H(y)$:

$$\frac{d^2}{dy^2} H(y) - 2y \frac{d}{dy} H(y) + (\gamma - 1)H(y) = 0, \quad (1.33)$$

esta ecuación es la ecuación diferencial de Hermite. Para que nuestra solución tenga sentido físico la solución debe ser un polinomio finito, por tanto, al resolverse por el

método de Frobenius se debe acotar cuando:

$$2n + 1 = \gamma, \quad (1.34)$$

siendo $n = 0, 1, 2, \dots$, de esta manera, se tiene el espectro discreto del oscilador armónico cuántico:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.35)$$

y las soluciones normalizadas son:

$$\psi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y). \quad (1.36)$$

La densidad de probabilidad cuántica (estados coherentes) para el oscilador armónico cuántico es calculado como el producto $\psi_n^* \psi_n$ de la ec. (1.36) para el estado $n = n'$ es:

$$\rho_n(y) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-y^2} H_n^2(y). \quad (1.37)$$

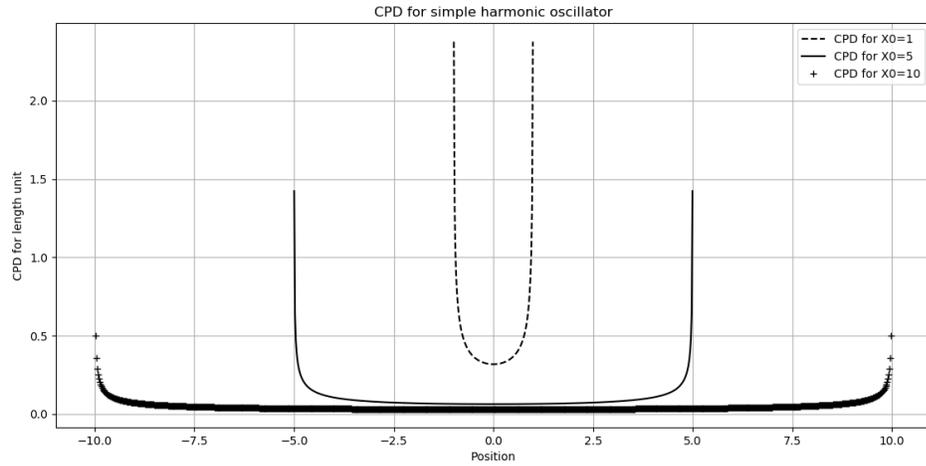
La diferencia entre las ecs. (1.37) y (1.27), es bastante notable, en los extremos la ec. (1.37) se anula y en la ec. (1.27) se vuelve infinita. El comportamiento oscilatorio es característica de la función de onda como solución al oscilador armónico cuántico, este comportamiento no aparece en la densidad de probabilidad clásica. En refs. [2, 10] se demuestra que mediante la metodología de Bernal [10] puede encontrarse una correspondencia entre ambas teorías como se verá en el apartado 1.2.

En la figura 1.1 se presenta una breve comparación entre la densidad de probabilidad cuántica y la densidad de probabilidad clásica para el sistema del oscilador armónico en ambas teorías.

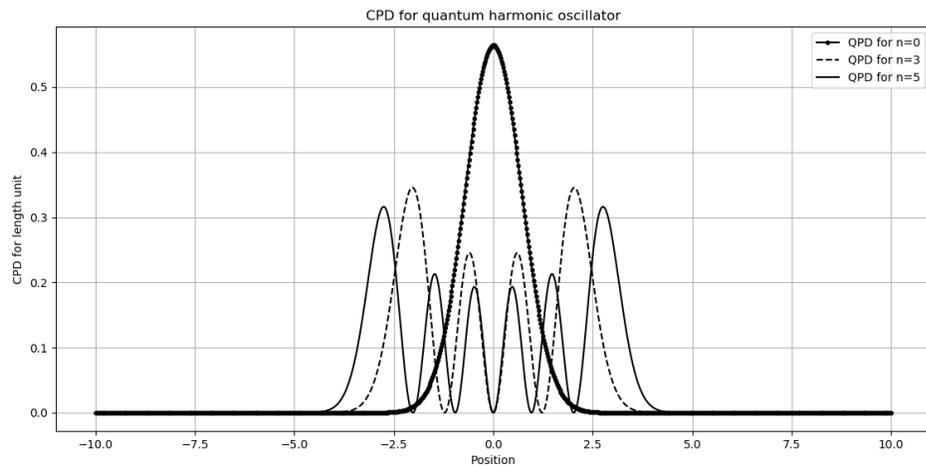
1.2. El principio de correspondencia de Bohr

1.2.1. Antecedentes

La creación de una teoría cuántica inicia con los postulados de Bohr para los átomos, obteniendo espectros discretos para los sistemas periódicos cuánticos [1], sin embargo, la formulación matemática de la mecánica cuántica inicia con la formulación de Heisenberg, la cual se conoce como mecánica matricial y posteriormente la formulación de Schrödinger, conocida como mecánica ondulatoria [1], actualmente



(a) Densidad de probabilidad clásica



(b) Densidad de probabilidad cuántica

Figura 1.1: Comparación entre la densidad de probabilidad clásica (CPD, ec. (1.27), X_0 representa la amplitud de oscilación) y la densidad de probabilidad cuántica (QPD, ec. (1.37), $m, \hbar, \omega = 1$, n es el número cuántico principal). En CPD no hay presencia de nodos oscilatorios a comparación de QPD, sin embargo, a medida aumenta n los nodos parecen coincidir con CPD. En la figura se puede observar que en el caso de CPD es más probable encontrar la partícula fuera de $x = 0$, mientras que para el estado base de QPD es lo contrario, para otros estados cuánticos este comportamiento desaparece.

hay otras formulaciones como la de Feynman [52], etc. Cohen hace un estudio filosófico en su artículo titulado como *Can Quantum Mechanics Be Formulated as a Classical Probability Theory?*, en el cual destaca que la mecánica cuántica no puede tener un análogo clásico debido al principio de incertidumbre de Heisenberg [53], sin embargo, en [10, 25, 26] encuentran que el límite clásico de la mecánica cuántica es la densidad de probabilidad clásica con independencia del principio de incertidumbre de Heisenberg.

El principio de correspondencia fue enunciado por Niels Bohr en el marco de la mecánica cuántica antigua y de la mecánica matricial de Heisenberg en 1923 [54]. Bohr establece que la física clásica emerge naturalmente de la mecánica cuántica cuando el número principal cuántico es muy grande, tal enunciado no presenta alguna formulación matemática [2]. El principio de correspondencia es una de las herramientas disponibles para la selección de teorías cuánticas que corresponden a la realidad [3, 10]. Werner Heisenberg propuso un procedimiento matemático del principio, junto con Bohr y Kramers [2, 3]. La formulación del principio de correspondencia es: supóngase que existe una cantidad $\hat{f}(t)$ tal que su aproximación para valores grandes de n tiene el siguiente comportamiento:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{n+m} | \hat{f} | \psi_n \rangle &= \langle n+m | \hat{f} | n \rangle e^{\frac{i}{\hbar}[E_{n+m}-E_n]t}, \\ &\approx f_m(n) e^{im\omega(n)t}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

siendo $\langle \psi_{n+m} |$ la conjugada del estado cuántico $n+m$ del sistema y $|\psi_n\rangle$ el estado n del sistema cuántico, en la ec. (1.38) $f_m(n)$ es el m -ésimo coeficiente de Fourier para el desarrollo de la función clásica f y $\omega(n)$ es la frecuencia clásica. Puede observarse que a través de la mecánica cuántica de Heisenberg se puede recuperar el espectro clásico de los sistemas cuánticos periódicos. Esta formulación es conocida como *El principio de correspondencia de Bohr-Heisenberg* [2]. Varios autores han tenido evidencias experimentales y numéricas bajo esta formulación [17–19]. Liboff llama a esta formulación *Bohr frequency correspondence principle* debido a que Bohr estableció una correspondencia clásica sobre el espectro (frecuencias) del átomo de hidrógeno, el cual es un sistema cuántico periódico [3].

Ciertos autores han establecido que la densidad de probabilidad cuántica es el primer paso para obtener una propiedad clásica [3, 15, 16], por lo que una formulación adecuada en el espacio de configuraciones fue propuesta por Liboff [3], estableciendo que el promedio local en el límite de un número cuántico grande (n) de la densidad de probabilidad cuántica es la densidad de probabilidad clásica:

$$\rho_{CM}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_x^{x+\epsilon} \rho_{QM}(y) dy, \quad (1.39)$$

donde $\rho_{CM}(x)$ es la densidad de probabilidad clásica y $\rho_{QM}(y)$ la densidad de pro-

babilidad cuántica. Nótese que la integración se hace en todo el espacio definido por $\rho_{QM}(y)$, entonces $\rho_{QM}(y)$ se puede expresar como la transformada de Fourier de $\rho_{QM}(p)$:

$$\rho_{QM}(y) = \int \rho_{QM}^{(n)}(p) e^{-i\frac{py}{\hbar}} dp. \quad (1.40)$$

Cuando $\epsilon \rightarrow 0$ el comportamiento del número cuántico principal n se puede obtener usando el principio de incertidumbre de Heisenberg:

$$\Delta x = \epsilon, \quad \epsilon \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.41)$$

En el caso del oscilador armónico cuántico en el estado n , la incerteza de p se define a través de la esperanza matemática siguiente:

$$\Delta p = \sqrt{\langle n|p^2|n\rangle - \langle n|p|n\rangle^2} = \sqrt{m\hbar\omega}\sqrt{n}, \quad (1.42)$$

donde se encuentra el valor esperado de $\langle n|p^2|n\rangle$ sobre el estado coherente n del oscilador armónico cuántico, similar para p . Se muestra que para ϵ se tiene:

$$\epsilon \geq \sqrt{\frac{\hbar}{4m\omega n}}, \quad (1.43)$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$ entonces $n \rightarrow \infty$, reescribiendo la ec. (1.39):

$$\rho_{CM}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_x^{x+\epsilon} \int \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{QM}^{(n)}(p) \right] e^{-i\frac{py}{\hbar}} dp dy, \quad (1.44)$$

por tanto, es necesario resolver la parte exponencial en función de x :

$$\begin{aligned} \rho_{CM}(x) &= \int \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{QM}^{(n)}(p) \right] dp \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_x^{x+\epsilon} e^{-i\frac{py}{\hbar}} dy \right], \\ &= \int \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{QM}^{(n)}(p) \right] e^{-i\frac{px}{\hbar}} dp. \end{aligned} \quad (1.45)$$

La ecuación anterior es una propuesta de una formulación de un principio de correspondencia en el espacio de configuración [3]. El principal problema es el significado físico de $n \rightarrow \infty$, en este caso la energía es infinita para muchos sistemas cuánticos periódicos, para resolverlo es necesario acotar la energía cuántica a la energía

clásica, esta hipótesis fue propuesta en ref. [10]. En general, la correspondencia entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica, es a través de la densidad de probabilidad de ambas mecánicas. Matemáticamente, la densidad de probabilidad cuántica y clásica pueden escribirse como la transformada de Fourier de ambas densidades:

$$\rho^{QM}(x, n) = \int f^{QM}(p, n) e^{i\frac{px}{\hbar}} dp, \quad \rho^{Cl}(x) = \int f^{Cl}(p) e^{i\frac{px}{\hbar}} dp. \quad (1.46)$$

Localmente (espacio de configuración definido para la densidad de probabilidad cuántica y clásica) y para $n \gg 1$ ambos coeficientes de Fourier deben ser iguales:

$$f^{QM}(p, n) \sim f^{Cl}(p). \quad (1.47)$$

Esquemáticamente esta metodología se puede revisar en la figura 1.2.

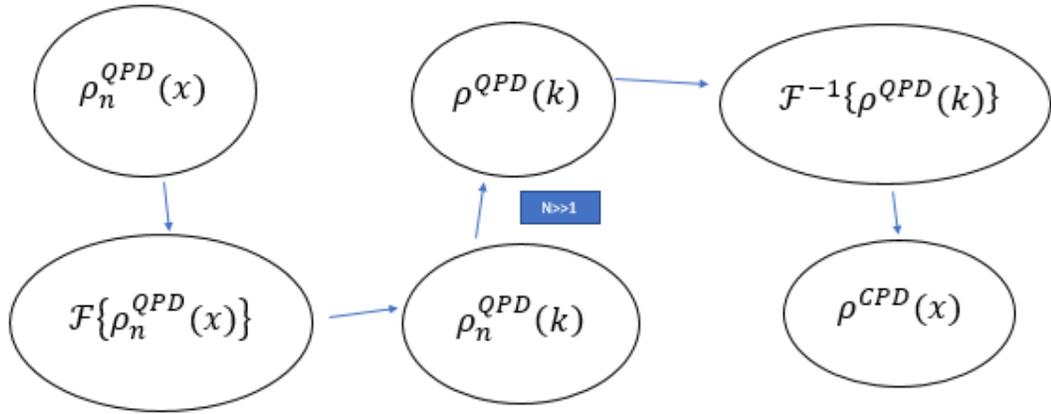


Figura 1.2: Esquema metodológico presentado en ref. [10] para la aplicación del principio de correspondencia de Bohr a la densidad de probabilidad cuántica; la densidad de probabilidad clásica se puede obtener de la transformada inversa del comportamiento asintótico de la transformada directa de la densidad de probabilidad cuántica.

1.2.2. Aplicación: partícula en un pozo infinito simétrico

La aplicación del principio de correspondencia de Bohr en el espacio de configuración según Liboff [3] y Bernal [10] debe cumplirse con los sistemas cuánticos más simples como la partícula en una caja, el oscilador armónico, el átomo de hidrógeno, etc. Se aplica esta formulación sobre la partícula en una caja, el cual ha sido resuelto en [10], por lo que aquí se ampliará ese resultado.

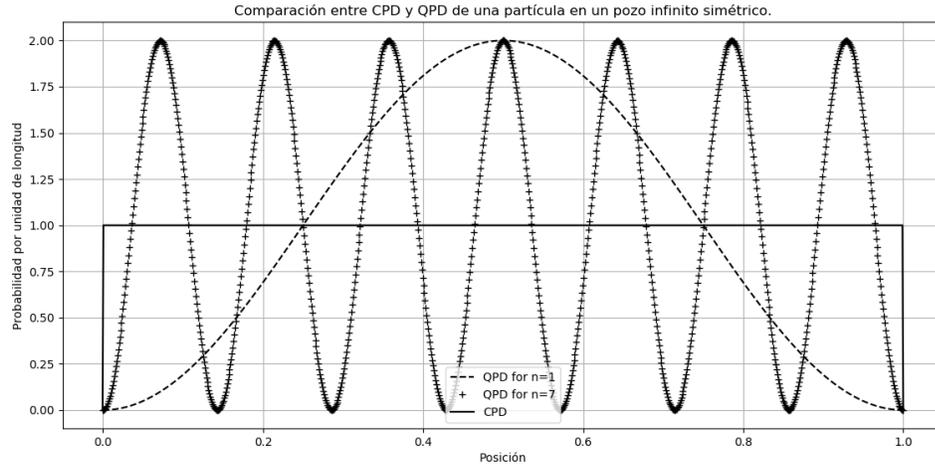


Figura 1.3: Comparación entre ambas densidades de probabilidad. La densidad de probabilidad cuántica (QPD, Quantum Probabilist Distribution) está definida por la ec. (1.48) y la densidad de probabilidad clásica (CPD, Classical Probabilist Distribution) por la ec. (1.49). Para una longitud de $a = 1$ se tienen los resultados para $n = 1, 7$ dentro del intervalo $0 < x < 1$. En la figura se puede observar que la presencia de los nodos aumenta a medida el número cuántico principal crece y es muy diferente al caso de CPD donde es una función constante.

La partícula en un pozo infinito confinado en el intervalo $0 < x < a$, siendo el potencial $V(x) = 0$ en ese intervalo e infinito fuera del mismo, tiene mediante la ecuación de Schrödinger las soluciones normalizadas [1]:

$$\begin{aligned}
 \psi_n &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), n = 1, 2, 3, \dots \\
 E_n &= \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}, n = 1, 2, 3, \dots \\
 \rho_n^{QM} &= \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right), n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

En la mecánica clásica, la densidad de probabilidad por unidad de longitud en un pozo cuadrado de longitud a [2, 10] es :

$$\rho(x) = \frac{1}{a} [\theta(x) - \theta(x - a)], \quad (1.49)$$

donde $\theta(y)$ es la función Heaviside definida como:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad \theta(x - a) = \begin{cases} 1 & x > a \\ 0 & x < a \end{cases}. \quad (1.50)$$

Puede notarse que las densidades de probabilidad de ambas teorías son matemáticamente diferentes. La presencia de nodos en la densidad de probabilidad cuántica no desaparece a medida aumenta n (fig. 1.3). La metodología para recuperar la densidad de probabilidad clásica desde la densidad de probabilidad cuántica es:

- Aplicar la transformada de Fourier al espacio de k a la densidad de probabilidad cuántica:

$$\begin{aligned} \rho_n^{\bar{Q}PD}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{ikx} dx, \\ &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_0^a \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\right] e^{ikx} dx, \end{aligned}$$

mediante la integración por partes se obtiene:

$$\rho_n^{\bar{Q}PD}(k) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{ika} - 1}{ik}\right) \left(1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{4n^2\pi^2}{k^2a^2}\right)}\right). \quad (1.51)$$

- A través de la ec. (1.51) se expande asintóticamente $n \gg 1$ y se cambia la variable discreta $n \rightarrow N$:

$$\rho_N^{\bar{Q}PD}(k) \approx \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{ika} - 1}{ik}\right) \left(1 + \frac{k^2a^2}{4N^2\pi^2}\right). \quad (1.52)$$

- Para eliminar la dependencia de la variable discreta se requiere igualar la energía clásica y cuántica del mismo sistema:

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2N^2}{2ma^2} \Rightarrow N^2 = \frac{p^2a^2}{\pi^2\hbar^2}, \quad (1.53)$$

luego la transformada de la densidad de probabilidad cuántica expandida asintóticamente es:

$$\rho^{Q\bar{P}D}(k) \approx \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{ika} - 1}{ik} \right) \left(1 + \frac{\hbar^2 k^2 a^2}{4p^2 a^2} \right). \quad (1.54)$$

- Además, es necesario pasar la ecuación (1.54) al espacio de x :

$$\begin{aligned} \rho^{QPD}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \bar{\rho}(k) e^{-ikx} dk, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{ika} - 1}{ik} \right) \left(1 + \frac{\hbar^2 k^2 a^2}{4p^2 a^2} \right) e^{-ikx} dk, \end{aligned}$$

separando términos:

$$\begin{aligned} \rho(x)^{QPD} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \bar{\rho}(k) e^{-ikx} dk, \\ &= \frac{1}{a2\pi i} \left[\int \left(\frac{e^{ika} - 1}{ik} \right) e^{-ikx} dk \right] + \frac{\alpha^2 a}{2\pi i} \left[\int k(e^{ika} - 1) e^{-ikx} dk \right], \end{aligned} \quad (1.55)$$

con $\alpha = \frac{\hbar}{2pa}$ siendo la relación entre la acción cuántica y la acción clásica. La integral se resuelve usando propiedades de la delta de Dirac:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk, \quad \delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}, \quad (1.56)$$

y la derivada de la delta de Dirac:

$$\delta'(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k e^{ikx} dk, \quad (1.57)$$

luego la transformada inversa de fourier al espacio de x :

$$\rho^{QPD}(x) = \frac{1}{a} [\theta(x) - \theta(x - a)] + \alpha^2 a [\delta'(x - a) - \delta'(x)]. \quad (1.58)$$

En general:

$$\rho^{QPD}(x) = \rho^{CPD}(x) + \alpha^2 a [\delta'(x - a) - \delta'(x)] \sim \rho^{CPD}(x) \quad (1.59)$$

La ec. (1.59) contiene la densidad de probabilidad clásica definida en la ec. (1.49) mas una función que depende de \hbar^2 y funciones de la derivada de la delta de Dirac. Nótese que cuando se aplica el límite $\hbar \rightarrow 0$ la densidad de probabilidad clásica se recupera exactamente.

Los resultados de la aplicación del principio de correspondencia de Bohr reflejan que el método para recuperar el límite clásico de la mecánica cuántica es a través de la densidad de probabilidad cuántica.

Otros sistemas cuánticos para los que se ha obtenido el límite clásico son la partícula en una caja y el oscilador armónico cuántico [10], El problema de Kepler [25] y la matriz densidad [26].

1.3. Introducción a la mecánica cuántica relativista

1.3.1. Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de Schrödinger presentada en la ec. (1.1) presenta los siguientes problemas:

- No es invariante ante transformaciones Lorentzianas.
- No puede aplicarse a producción de partículas.
- No describe partículas a altas energías.
- No incorpora el espín (Pauli lo introduce ligeramente).

Según lo anterior, es necesario una ecuación que pueda explicar partículas relativistas a nivel cuántico. Klein y Gordon proponen que a partir de la energía relativista:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4, \quad (1.60)$$

es posible encontrar una ecuación de onda relativista (caso unidimensional), haciendo el cambio de variables dinámicas a operadores: $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ y $p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, a la ec. (1.60) e introduciendo una función $\phi(x, t)$ que sería la función de onda relativista según ref. [52]:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x, t) = -c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, t) + m^2 c^4 \phi(x, t). \quad (1.61)$$

En el caso que $m = 0$, se obtiene una ecuación de onda similar a la ecuación de onda electromagnética, con velocidad $v = c$, siendo c la velocidad de la luz en el

vacío. La ec. (1.61) resuelve el problema de la invariancia Lorentziana, sin embargo, es necesario especificar las condiciones de contorno o de valor inicial para $\phi(x, 0)$, $\partial_t \phi(x, 0)$. La solución de onda plana para la ec. (1.61) es:

$$\phi(x, t) = N e^{-i \frac{Et}{\hbar} + i \frac{px}{\hbar}}, \quad (1.62)$$

al igual que el caso de la solución de onda plana para el problema de una partícula libre descrita por la ecuación de Schrödinger ¹ con la diferencia que en esta ecuación se cumple la relación de dispersión:

$$E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}, \quad (1.63)$$

puede notarse que E puede ser negativa o positiva. La densidad de probabilidad para la partícula libre puede ser revisada en cualquier texto introductorio a la teoría cuántica de campos [52]:

$$\rho_{KG} = 2|N|^2 E, \quad (1.64)$$

esto implica que Klein-Gordon resuelve parcialmente el problema de una ecuación de onda relativista, sin embargo, aparece el problema de la signatura de la energía la cual también la densidad de probabilidad tiene ese problema. El problema de la densidad de probabilidad negativa es resuelto en el contexto de la teoría cuántica de campos, siendo $\phi(x, t)$ un campo y no una función de onda relativista. En general, los textos introductorios a la teoría cuántica de campos utilizan la notación covariante para la mayoría de las ecuaciones de campo [52], de esta manera $\hbar = 1, c = 1$, y se define el operador tetradimensional:

$$\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (1.65)$$

luego la ec. (1.61) tiene esta forma:

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x, t) = 0. \quad (1.66)$$

La cual pone de manifiesto la invarianza Lorentz.

1.3.2. Ecuación de Dirac

La ecuación de Klein-Gordon presenta los siguientes problemas:

- Densidad de probabilidad negativa.

¹Onda viajera hacia la derecha.

- Energía negativa.

Dirac parte de la ecuación de Klein-Gordon, afirmando que el problema de la densidad negativa es debido al cuadrado en la derivada temporal [52]. Mediante la ec. (1.66) se puede separar en dos términos:

$$(\partial^2 + m^2) = (\sqrt{\partial} - im)(\sqrt{\partial} + im), \quad (1.67)$$

aunque $\sqrt{\partial}$ no tiene sentido matemático, es necesario definir ciertos objetos matriciales:

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1, \quad (1.68)$$

donde $i = 1, 2, 3$, que además cumplan con la relación de anticonmutación ($\mu \neq \nu$):

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (1.69)$$

siendo $g^{\mu\nu}$ la métrica del espacio de Minkowski con signatura $+ - - -$. Además, diversos autores prefieren trabajar con el símbolo $\not{\partial} = \gamma^\mu a_\mu$ [52], de esta manera:

$$\not{\partial}^2 = (\gamma^\mu \partial_\mu)^2 = \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2. \quad (1.70)$$

Se puede demostrar que $\not{\partial}^2 = \partial^2$, lo interesante de este objeto implica que:

$$(\partial^2 + m^2) = (\not{\partial}^2 + m^2) = (\not{\partial} - im)(\not{\partial} + im), \quad (1.71)$$

y por lo tanto, se define la ecuación de Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\phi(x, t) = 0. \quad (1.72)$$

Sin embargo, la solución de onda planteada para la ecuación de Klein-Gordon aún sigue siendo solución de la ecuación de Dirac, cumpliendo con la misma relación de dispersión. La naturaleza de γ^μ es resuelta cuando se introducen las matrices de Pauli: $\sigma^\mu = (I, \sigma_i)$, $\bar{\sigma}^\mu = (I, -\sigma_i)$, siendo I la matriz identidad y σ_i las matrices de Pauli para x, y y z , ambas matrices son 2×2 [27, 52]. De esta manera:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.73)$$

La matriz γ puede ser separada nuevamente desde la ec. (1.72):

$$(\gamma_0 \hat{p}^0 - \gamma \cdot \hat{p} - m)\psi(x) = 0, \quad (1.74)$$

con $\hat{p}^0 = i\partial_0$ y $\hat{p} = -i\nabla$, se puede escribir en la forma de un Hamiltoniano:

$$\gamma_0 i\partial_0 \psi(x) = -i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \psi(x) + m\psi(x),$$

Además, también se puede escribir de forma matricial:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \hat{p}^0 \\ \hat{p}^0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right] \psi(x) = 0, \quad (1.75)$$

las matrices de Pauli ($\boldsymbol{\sigma}$) son de orden 2×2 , esto sugiere que $\psi(x)$ es un espinor de 4 componentes:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}. \quad (1.76)$$

Por facilidad en ref. [52] suele usar la definición de biespinor o espinor de dos componentes:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (1.77)$$

por tanto, con esa solución se puede desacoplar la ec. (1.75) en dos ecuaciones diferenciales:

$$(\hat{p}_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})\psi_R = m\psi_L, \quad (1.78)$$

$$(\hat{p}_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})\psi_L = m\psi_R. \quad (1.79)$$

El estudio del significado físico de ψ_R o ψ_L puede ser fácilmente verificado en el caso que se traten partículas sin masa.

$$(\hat{p}_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})\psi_R = 0, \quad (1.80)$$

$$(\hat{p}_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})\psi_L = 0, \quad (1.81)$$

por lo que queda:

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{|\mathbf{p}|} \psi_R = \psi_R, \quad (1.82)$$

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{|\mathbf{p}|} \psi_L = -\psi_L, \quad (1.83)$$

siendo $|p|$ la energía definida como positiva. El producto $\sigma \cdot \hat{p}$ puede interpretarse como un producto escalar (analogía) definido como positivo si ambos vectores son paralelos o negativo si son antiparalelos, en este caso, nos devuelve si el espín de ψ_R es paralelo o no al momento de ψ_R . En el caso de $|\hat{p}_0| = -|p|$ se puede observar lo siguiente:

$$(-|\hat{p}_0| - \sigma \cdot \hat{p})\psi_R = 0, \quad (1.84)$$

$$(-|\hat{p}_0| + \sigma \cdot \hat{p})\psi_L = 0, \quad (1.85)$$

y

$$\frac{\sigma \cdot \hat{p}}{|p|}\psi_R = -\psi_R, \quad (1.86)$$

$$\frac{\sigma \cdot \hat{p}}{|p|}\psi_L = \psi_L, \quad (1.87)$$

ocurre lo contrario que en el caso de $|p| > 0$, las funciones ψ_R y ψ_L intercambian de signo y por tanto el comportamiento del espín y momento es diferente. Comparando ψ_R de ambas energías, puede explicarse que la partícula va en la dirección del momento y espín, mientras que la otra solución va en la dirección opuesta. A las soluciones con energía negativa ² se les llamó soluciones de antipartículas [52].

A modo de resumen, la densidad de probabilidad es definida como positiva:

$$\rho_D(x) = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi, \quad (1.88)$$

con $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, además es una suma sobre los cuatro componentes del espinor de Dirac por lo que $\rho_D(x) \geq 0$ siempre es definida como positiva.

1.4. El oscilador de Dirac

1.4.1. Hamiltoniano del oscilador de Dirac.

La ecuación de Dirac para una partícula libre es:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p}\psi + mc^2\beta\psi, \quad (1.89)$$

²Para Feynman son antipartículas con energía positiva moviéndose hacia atrás en el tiempo, ya que la solución de antipartícula puede ser obtenida por inversión temporal o transformación CPD.

con las siguientes representaciones:

$$\vec{p} = -i\hbar\nabla, \quad \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.90)$$

donde σ son las matrices de Pauli, I la matriz identidad, ambas siendo matrices 2×2 , ∇ es el operador diferencial de coordenadas. Moshinsky desarrolló un modelo del oscilador cuántico relativista que es congruente con los postulados de la mecánica cuántica y los principios de la relatividad especial [27], partieron de lo siguiente:

- El Hamiltoniano debe ser lineal en \vec{p} y \vec{r} , para poner de manifiesto la invariancia Lorentz.
- En el límite no relativista debe coincidir con el Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico.

Bajo estas suposiciones, propone un Hamiltoniano de este tipo:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = c\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - im\omega\vec{r}\beta)\psi + mc^2\beta\psi, \quad (1.91)$$

donde ω denota la frecuencia del oscilador, m es la masa de la partícula, además, puede notarse que el Hamiltoniano es independiente del tiempo, por lo que las soluciones se pueden expresar como:

$$\Psi(r, t) = \psi(r)e^{-iEt/\hbar}, \quad (1.92)$$

siendo $\psi(r)$ un espinor de Dirac de cuatro componentes, las soluciones y el espectro discreto de este sistema se encuentran en la literatura [27, 28, 31].

1.4.2. Soluciones del oscilador de Dirac en el caso unidimensional

La ec. (1.91) está definida en el espacio tridimensional, un ajuste adecuado al espacio unidimensional es definido como [27]:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = c\alpha \cdot (\vec{p} - im\omega\vec{x}\beta)\psi + mc^2\beta\psi, \quad (1.93)$$

siendo $\vec{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ y se presentan modificaciones en las matrices α y β . El cálculo de las soluciones en una dimensión depende en general de la coordenada que se tome como el marco de trabajo [29, 49]. En ref. [29] aparecen las soluciones al oscilador de Dirac a través de la ec. (1.94):

$$c\vec{\alpha} \cdot \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - i\beta m\omega x \right) \Psi(x) + \beta mc^2 \Psi(x) = E\Psi(x). \quad (1.94)$$

La solución propuesta por Radoslaw está definida para el intervalo $-\infty < x < \infty$ y es decreciente en el infinito $\Psi(x) = 0$, $x \rightarrow \pm\infty$. Siendo $\omega > 0$, la frecuencia de oscilación, y E es la energía del sistema [29]. La solución es un espinor de dos componentes:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}, \quad (1.95)$$

por lo que las ecuaciones diferenciales para cada componente son:

$$c\hbar \frac{d}{dx} f(x) + mc\omega x f(x) = (mc^2 + E) g(x), \quad (1.96)$$

$$c\hbar \frac{d}{dx} g(x) - mc\omega x g(x) = (mc^2 - E) f(x), \quad (1.97)$$

nótese que se tiene dos componentes y no cuatro, esto es debido a que Radoslaw trabaja sobre la formulación de dos componentes [29], sin embargo, si se desea trabajar en los cuatro componentes usuales basta con suponer que $\Psi(x)$ tiene cuatro componentes. Arifuzzaman y otros presentan un método sencillo para desacoplarlo, multiplicando por un operador lineal con el signo inverso de $c\hbar \frac{d}{dx} \pm mc\omega x$, es decir, para $f(x)$ se debe multiplicar por el operador de signo negativo y usar la ecuación diferencial de $g(x)$ para el eigenvalor dado [48], se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \left[c\hbar \frac{d}{dx} + mc\omega x \right] f(x) &= (mc^2 + E) g(x), \\ \left[c\hbar \frac{d}{dx} - mc\omega x \right] \left[c\hbar \frac{d}{dx} + mc\omega x \right] f(x) &= (mc^2 + E) \left[c\hbar \frac{d}{dx} - mc\omega x \right] g(x), \\ \{p^2 + m\omega^2 x^2 + im\omega [x, p]\} f(x) &= \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 \right) f(x), \end{aligned}$$

siendo $[x, p] = i\hbar$ la conmutación de Heisenberg, en general para $f(x)$ y $g(x)$:

$$\{p^2 + m\omega^2 x^2 - m\hbar\omega\} f(x) = \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 \right) f(x), \quad (1.98)$$

$$\{p^2 + m\omega^2 x^2 + m\hbar\omega\} g(x) = \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 \right) g(x). \quad (1.99)$$

Las soluciones presentadas por Radoslaw [29] las obtiene de la ecuación diferencial de segundo orden presentada en la ec. (1.98), obteniendo la solución de $f(x)$ y luego introduce esa solución en la ec. (1.96) obteniendo $g(x)$ siendo soluciones ortogonales, además, son normalizadas de esta manera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)^* f(x) + g(x)^* g(x)] dx = 1, \quad (1.100)$$

por lo que las soluciones normalizadas son:

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{\lambda(E_n + mc^2)}{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}E_n}} H_n(\lambda x) e^{-\frac{\lambda^2 x^2}{2}}, \quad (1.101)$$

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{\lambda(E_n - mc^2)}{2^{n+1}(n-1)!\sqrt{\pi}E_n}} H_{n-1}(\lambda x) e^{-\frac{\lambda^2 x^2}{2}}, \quad (1.102)$$

siendo $\lambda = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$, $H_k(\epsilon)$ los polinomios de Hermite, y el espectro de energía para este sistema es:

$$E_n = mc^2 \sqrt{1 + 2n \frac{\hbar\omega}{mc^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.103)$$

Un resultado de este sistema en el caso $n = 0$, es:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\lambda(mc^2)}{2\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\lambda^2 x^2}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.104)$$

con energía $E = mc^2$, la cual es la energía en reposo de la partícula, es decir, solo la componente grande existe en el estado base.

1.5. GUP

1.5.1. Antecedentes

El problema de GUP (Generalized Uncertainty Principle) es una generalización del principio de incertidumbre de Heisenberg debido a diversas teorías modernas como agujeros negros[37], teoría de cuerdas [34] y gravedad cuántica [55]. Tales teorías intentan unificar la gravedad con el modelo estándar, teniendo dos modificaciones generales: la introducción de una dimensión espacial y la existencia de una longitud

mínima (máxima resolución o la longitud más pequeña medible) [56]. La dimensión espacial extra ha tenido un poco más de investigación en los colisionadores de física de altas energías [56] mientras que los efectos GUP tienen poca investigación.

La longitud de Planck es definida mediante tres constantes físicas universales: La constante de gravedad (G), la velocidad de la luz (c) y la constante de Planck (\hbar), estas constantes son universales y aparecen naturalmente dentro de sus marcos de trabajo (la ley de gravitación de Newton, la relatividad especial y de la mecánica cuántica, respectivamente). La longitud de Planck tiene el valor aproximado:

$$\ell_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-35} m. \quad (1.105)$$

Para diferentes autores, la longitud de Planck es definida físicamente como la longitud más pequeña medible [35, 56]. En la mecánica cuántica aparece el principio de incertidumbre de Heisenberg definido como:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar. \quad (1.106)$$

La relación anterior, define que la incerteza de dos observables (posición y momento) no se puede medir simultáneamente con arbitraria precisión. Sin embargo, la incerteza de X tiende a cero cuando la incerteza en P tiende a infinito (véase figura 1.4), el modelo de GUP puede introducirse a esta notación fijando que la incerteza en x nunca valdrá cero en diferentes incertezas del momento sino que siempre será mayor que la longitud de Planck. En ref. [40] se presenta una modificación al espacio de Hilbert definido en la mecánica cuántica sin presencia de longitudes mínimas, esta modificación es resumida en la sección 1.5.2 definiendo los nuevos observables y la nueva condición de normalización. En ref. [57] se presentan correcciones GUP a las órbitas planetarias presentando mejor precisión al perihelio de Mercurio, sin embargo, la introducción de longitudes mínimas a la mecánica clásica lo hace a través de los paréntesis de Poisson por su analogía al conmutador de posición y momento. La modificación GUP es:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar (1 + \beta (\Delta p)^2), \quad (1.107)$$

siendo β el parámetro de deformación, el cual tiene magnitudes de $[\frac{kgm}{s}]^{-2}$. La presencia de Δp en el lado derecho de la ec. (1.107), se introduce de manera que se tenga un término lineal en ΔP :

$$\Delta x \geq \hbar \left(\frac{1}{\Delta p} + \beta \Delta p \right), \quad (1.108)$$

de esta manera, Δx no valdrá cero en el intervalo de $0 < \Delta p < \infty$ como en el caso del principio de incertidumbre de Heisenberg, sin embargo, es posible encontrar un valor interesante diferenciando respecto a Δp donde se obtiene el valor mínimo en la incerteza de X [40]:

$$\Delta x \sim \hbar\sqrt{\beta}, \quad (1.109)$$

este resultado implica que el valor más pequeño en la incerteza de X está relacionado con el parámetro de deformación β el cual tiene una relación directa con la longitud de Planck ℓ_p . Los efectos de la ec. (1.107) implican un cambio en el conmutador de posición y momento:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \beta\hat{p}^2). \quad (1.110)$$

Implicando la posibilidad de modificar la estructura matemática de la mecánica cuántica. En otras referencias se mencionan experimentos teóricos y experimentales de los efectos GUP en diferentes ramas de la física, teniendo énfasis en la precisión experimental que presentan las correcciones GUP [36–38, 40, 45–47, 56]. El factor β tiene varios significados físicos dependiendo del autor y del problema a resolver, sin embargo, se puede mencionar dos implicaciones físicas:

- Benczik y otros establecen que en el contexto de la teoría de cuerdas, la existencia de la longitud mínima está ligada al hecho de que las cuerdas no pueden probar distancias más cortas que la longitud de Planck [57].
- Bambi establece que un fotón energético puede generar un agujero negro pequeño con radio del orden de la longitud de Planck, y por tanto, es imposible localizar una cantidad de energía con una mejor resolución espacial que la del radio del agujero negro [58].

1.5.2. El modelo de KMM

La presencia de una longitud mínima o efectos GUP modifica la estructura matemática de la mecánica cuántica. Diferentes artículos trabajan en el espacio de momento por su flexibilidad y formalismo, siendo $\psi(p) = \langle p|\psi(x)\rangle$, la función de onda en el espacio de momento. Kempf, Mangano y Mann (KMM) proponen una representación del espacio de Hilbert en presencia de GUP [40], de tal manera que las ecs. (1.107) y (1.110) son necesarias para complementar la estructura y modificación del espacio de Hilbert.

En la representación del espacio de momentos se tiene una propuesta llamado el modelo KMM, el cual presenta una representación del operador momento y posición

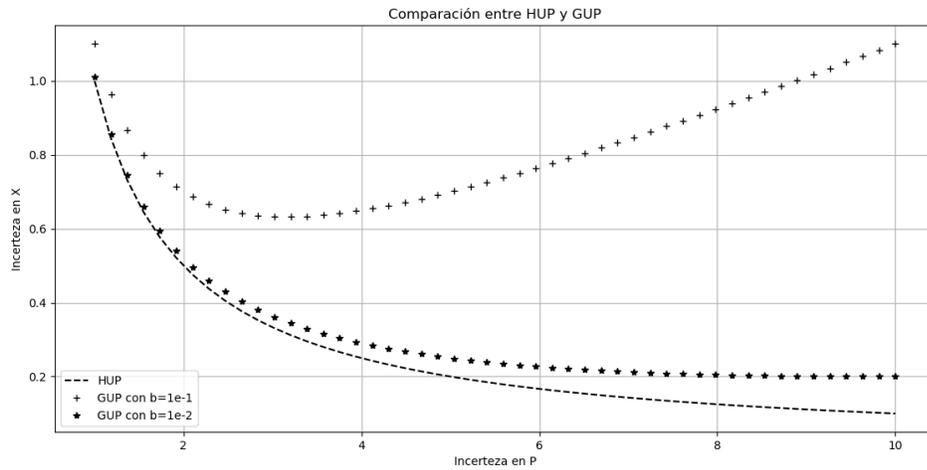


Figura 1.4: Comparación entre el principio de incertidumbre de Heisenberg (HUP, ec. (1.106)) y el principio de incertidumbre generalizado (GUP, ec. (1.107)). La figura ha sido para diferentes valores de β con $\hbar = 1$ en el intervalo de $1 < \Delta p < 10$, puede notarse que el GUP a medida β tiende a cero se acerca a HUP. El valor mínimo que Δx puede tomar está relacionado con $\sqrt{\beta}$ según la ec. (1.109).

en una dimensión (generalizable) [40]:

$$\begin{aligned}\hat{p}\psi(p) &= p\psi(p), \\ \hat{x}\psi(p) &= i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \psi(p).\end{aligned}\tag{1.111}$$

Esta representación cumple con las ecs. (1.107) y (1.110), además x y p son simétricas en el dominio S_∞ :

$$(\langle \psi | \hat{p} | \phi \rangle) = \langle \psi | (\hat{p} | \phi \rangle),\tag{1.112}$$

similar para \hat{x} (integración por partes). Luego el producto escalar viene definido según el modelo KMM como:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \phi(p),\tag{1.113}$$

la presencia de $1 + \beta p^2$ en el denominador tiene la finalidad de verificar la simetría de p y a la vez elimina el factor de x en la representación de momento [40]. La ec. (1.113), también define la normalización de soluciones en el espacio de momentos. El operador identidad tiene esta definición en el modelo KMM:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle \langle p|.\tag{1.114}$$

Este resultado implica que el producto escalar de eigenestados de momento es:

$$\langle p | p' \rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - p'),\tag{1.115}$$

siendo $\delta(z)$ la delta de Dirac. Varios autores, tienen diferentes propuestas para obtener una solución en el espacio de momentos para problemas cuánticos en presencia de GUP [40, 59, 60].

1.5.3. Otros modelos

El modelo de KMM presenta un espacio de Hilbert modificado para una longitud mínima que no presenta correcciones debido a un momento mínimo. Un modelo simple parte de la ecuación de Schrödinger definida en el espacio de posiciones para problemas independientes de tiempo definida en la ec. (1.5) y luego aplicando una transformada de Fourier al espacio de momentos [1] obteniendo una ecuación integral.

$$\frac{p^2}{2m} \phi(p) + \int_{-\infty}^{\infty} U(p - p') \phi(p') dp' = E \phi(p),\tag{1.116}$$

siendo:

$$U(p - p') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(p - p')x\right) dx. \quad (1.117)$$

$U(p - p')$ representa la transformada de Fourier del potencial $V(x)$ en el espacio de momentos. Samar presentó un cambio de variable que involucre el factor β de esta manera [59]:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan\left(\sqrt{\beta}p\right), \quad X = x. \quad (1.118)$$

La ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos dentro de los efectos GUP es:

$$\frac{1}{2m\beta} \tan^2(\sqrt{\beta}p)\phi(p) + \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} U(p - p')\phi(p')dp' = E\phi(p). \quad (1.119)$$

En cuanto a $U(p - p')$ no sufre un cambio matemático [59]. Se ha resuelto los siguientes problemas cuánticos en esta representación: el potencial delta de Dirac, doble potencial delta de Dirac y el potencial de Coulomb [59]. Otros autores trabajan en el espacio de configuraciones, desde un principio de incertidumbre generalizado cómo:

$$\Delta x \Delta p \geq i\hbar (1 + \alpha(\Delta x)^2 + \beta(\Delta p)^2 + \gamma). \quad (1.120)$$

Para el pozo infinito fue estudiado en los casos donde $\alpha, \gamma \neq 0$ y $\beta = 0$, en el concepto de un momento mínimo [61].

1.6. Pozo cuántico con correcciones GUP

En 2014, Blado y otros modifican los pozos finitos o infinitos definidos en la mecánica cuántica agregando modificaciones debido a GUP [44]. En el caso del pozo infinito se tiene la siguiente ecuación diferencial unidimensional según Blado:

$$\epsilon\Psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\beta\hbar^4}{m} \frac{d^4}{dx^4} + V(x)\right)\Psi(x), \quad (1.121)$$

donde el término extra $\frac{\beta\hbar^4}{m} \frac{d^4\Psi(x)}{dx^4}$ es la corrección agregada para efectos GUP en la ecuación de Schrödinger. Además, Blado encuentra la solución a este sistema para un pozo infinito que viene dado por un potencial tipo $V = 0$ para $0 < x < a$ y $V = \infty$ fuera de ese rango, además de aplicar las condiciones de contorno $\Psi(0) = \Psi(a) = 0$; se tiene:

$$\Psi(x) = C \sin(k''x), \quad k'' = k - \hbar^2 k^3 \beta = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.122)$$

Blado también encuentra el espectro de energía:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} + \beta \frac{n^4 \pi^4 \hbar^4}{ma^4}, \quad (1.123)$$

y en el límite $\beta \rightarrow 0$, se recuperan los resultados del pozo infinito cuántico sin GUP. Además, los autores no presentan el valor de la constante de normalización C , sin embargo, el cálculo de ella es similar que el caso sin GUP³.

Si se fija $E_n \rightarrow E'_n$ y se expresa en términos de la energía cuántica de una partícula en un pozo unidimensional $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$, la ec. (1.123) se reduce a:

$$E'_n = (1 + 4m\beta E_n)E_n, \quad (1.124)$$

esto implica que la fracción de error es proporcional a βE_n .

1.7. El oscilador de Dirac con correcciones GUP

1.7.1. Antecedentes

El oscilador de Dirac ha sido resuelto desde 1989 con la introducción de Moshinsky [27], sin embargo, las nuevas teorías deben de alguna manera mejorar a las viejas teorías, en este caso, se ha introducido una corrección debido a efectos de longitudes mínimas o efectos de un principio de incertidumbre generalizado (GUP), por lo que diferentes autores han trabajado con ciertos enfoques de como resolver un oscilador de Dirac con correcciones GUP. Arifuzzaman y otros lo resuelven en el contexto de las soluciones de Moshinsky y acoplan GUP al conmutador de $[x, p]$ [48]. Nouicer propone un cambio de variable en el oscilador de Dirac unidimensional mediante el modelo de KMM [49]. Quesne y Tkachuk resuelven el oscilador de Dirac por el método de factorización mostrando que las soluciones son compañeros supersimétricos (SUSY) [51]. Momotaj y otros proponen una forma de resolver el oscilador de Dirac mediante un potencial lineal debido a un GUP [50].

1.7.2. Propuesta de Nouicer

Nouicer en 2006 propone una forma de resolver el oscilador de Dirac en presencia de longitud mínima (GUP) [49]. La ecuación diferencial para el oscilador de Dirac

³De $\int_0^a \Psi^* \Psi dx = 1$, se tiene que $C^2 = 2/a$.

unidimensional es la ec. (1.93) la cual devuelve el sistema de ecuaciones diferenciales presentadas en las ecs. (1.97), Nouicer propone introducir el siguiente cambio de variable:

$$\hat{p} = p, \quad \hat{x} = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p}, \quad (1.125)$$

similar a la propuesta del modelo KMM [40], de esta manera el sistema de ecuaciones pasa a ser:

$$-ipg + i\hbar m\omega(1 + \beta p^2) \frac{\partial g}{\partial p} = \frac{E - mc^2}{c} f, \quad (1.126)$$

$$ipf + i\hbar m\omega(1 + \beta p^2) \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{E + mc^2}{c} g. \quad (1.127)$$

La forma de desacoplar f de g es similar al caso sin presencia de GUP. La ecuación diferencial para f según ref. [49] es:

$$\begin{aligned} \left[-m^2\omega^2\hbar^2(1 + \beta p^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2m^2\omega^2\hbar^2\beta p(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} + p^2(1 - m\omega\hbar\beta) \right] f(p) \\ = \left(\frac{E^2 - m^2c^4}{c} + m\omega\hbar \right) f(p), \end{aligned} \quad (1.128)$$

la cual es un poco complicada de resolver, sin embargo, Nouicer lo simplifica haciendo el siguiente cambio de variable:

$$q = \frac{1}{m\omega\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(p\sqrt{\beta}), \quad (1.129)$$

para el cual:

$$-\infty < p < \infty, \quad -\frac{\pi}{2m\omega\hbar\sqrt{\beta}} < q < \frac{\pi}{2m\omega\hbar\sqrt{\beta}}, \quad (1.130)$$

luego el problema queda reducido a:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{(1 - m\omega\hbar\beta)}{\beta} \tan^2(qm\omega\hbar\sqrt{\beta}) + \epsilon \right] f(q) = 0, \quad (1.131)$$

con $\epsilon = \frac{E^2 - m^2 c^4}{c} + m\omega\hbar$. La presencia de la $\tan(z)$ sugiere un nuevo cambio de variable que involucre senos y cosenos, siguiendo el desarrollo de Nouicer se llega a:

$$f(q) = v^\lambda h(u), \quad (1.132)$$

siendo:

$$u = \sin(m\omega\hbar\sqrt{\beta}q), \quad v = \cos(m\omega\hbar\sqrt{\beta}q), \quad (1.133)$$

luego la ec. (1.131) con el cambio anterior es:

$$\begin{aligned} & (1 - u^2)h''(u) - (2\lambda + 1)uh'(u) + \\ & \left[\left(\lambda(\lambda - 1) - \frac{1 - m\omega\hbar\beta}{(m\omega\hbar\beta)^2} \right) \frac{u^2}{v^2} - \left(\lambda - \frac{\epsilon}{m^2\omega^2\hbar^2\beta} \right) \right] h(u) = 0. \end{aligned} \quad (1.134)$$

La ecuación anterior es parecida a la ecuación diferencial de Gegenbauer, una clase específica de la ecuación diferencial de Jacobi [62]. Para que su solución tenga sentido y sea un polinomio deben definirse dos valores. El primer valor relacionado a λ :

$$\lambda(\lambda - 1) - \frac{1 - m\omega\hbar\beta}{(m\omega\hbar\beta)^2} = 0, \quad (1.135)$$

teniendo dos valores posibles:

$$\lambda_1 = \frac{1}{m\omega\hbar\beta}, \quad \lambda_2 = 1 - \frac{1}{m\omega\hbar\beta}. \quad (1.136)$$

El valor de λ que se acepta es λ_1 , debido a que λ_2 tiende a ser negativo y no converge a los polinomios de Hermite según Nouicer. Luego el segundo valor es para definir el orden del polinomio:

$$-\lambda + \frac{\epsilon}{m^2\omega^2\hbar^2\beta} = n(n + 2\lambda), \quad (1.137)$$

luego, la ecuación diferencial (1.134) en conjunto con las dos condiciones presentadas en las ecs. (1.136) y (1.137) es:

$$(1 - u^2)h''(u) - (2\lambda + 1)uh'(u) + n(n + 2\lambda)h(u) = 0. \quad (1.138)$$

Las soluciones son los polinomios de Gegenbauer [49, 62]. Para $f(u)$ y $g(u)$:

$$f_n(u) = Nv^\lambda C_n^\lambda(u), \quad (1.139)$$

$$g_n(u) = \frac{2Nc}{\sqrt{\beta}(E_n + mc^2)} (1 - u^2)^{\frac{\lambda+1}{2}} C_{n-1}^{\lambda+1}(u), \quad (1.140)$$

siendo N la constante de normalización, la cual se encuentra mediante la ecuación (1.113) y según ref. [49]:

$$N = \frac{2^\lambda \beta^{1/4}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\Gamma(2\lambda + n)}{n!(n + \lambda)[\Gamma(\lambda)]^2} + \frac{c^2}{\beta(E_n + mc^2)^2} \frac{\Gamma(2\lambda + n + 1)}{(n - 1)!(n + \lambda)[\Gamma(\lambda + 1)]^2} \right]^{-1/2}, \quad (1.141)$$

donde $\Gamma(z)$ es la función gamma. Las soluciones en términos de p son:

$$f_n(p) = N(1 + \beta p^2)^{-\lambda/2} C_n^\lambda \left(\frac{p\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 + \beta p^2}} \right), \quad (1.142)$$

$$g_n(p) = \frac{2Nc}{\sqrt{\beta}(E_n + mc^2)} (1 + \beta p^2)^{-\lambda-1} C_{n-1}^{\lambda+1} \left(\frac{p\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 + \beta p^2}} \right). \quad (1.143)$$

El espectro de energía es definido por la condición de la ec. (1.137):

$$\epsilon_n = m^2 \omega^2 \hbar^2 \beta (n^2 + (2n + 1)\lambda), \quad (1.144)$$

por lo que:

$$E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2n \frac{\omega \hbar}{mc^2} + \beta \frac{\omega^2 \hbar^2 n^2}{c^2}}. \quad (1.145)$$

El cual coincide con el espectro sin correcciones GUP presentado en la ec. (1.103) en el límite de $\beta \rightarrow 0$. Nouicer demuestra parcialmente que en el límite de $\beta \rightarrow 0$ las soluciones presentadas en la ec. (1.143) se aproximan a las soluciones en el espacio de momentos del oscilador de Dirac sin presencia de GUP [49].

Capítulo 2

Metodología

En el presente capítulo se desarrolla la propuesta metodológica para encontrar el límite clásico del pozo infinito y del oscilador de Dirac, ambos problemas deformados por la presencia del principio de incertidumbre generalizado, cabe resaltar que el tipo de estudio es teórico y no requiere de comprobación experimental, sin embargo, se comprobará mediante estudios previos [10]. El pozo infinito es un problema de la mecánica cuántica deformada por lo que además del principio de correspondencia es necesario agregar el límite HUP o $\beta \rightarrow 0$ para obtener el límite clásico. El oscilador de Dirac con correcciones GUP es un problema de la mecánica cuántica-relativista deformada para partículas de espín 1/2 en este caso únicamente se estudiara el caso de partícula y no de antipartícula, por lo que la propuesta implica un límite no relativista y un límite HUP, además, del principio de correspondencia.

2.1. Propuesta metodológica para la partícula en un pozo unidimensional con correcciones GUP

2.1.1. Propuesta teórica

Las soluciones de Baldo se muestran en la ec. (1.122), se representan por $\psi_n(x)$ y posee un espectro discreto E_n . La propuesta metodológica consiste en aplicar el principio de correspondencia a las soluciones de la ecuación de Schrödinger, para esto se aplicó el siguiente programa:

- **Definir la densidad de probabilidad cuántica.** En este paso, se definió la densidad de probabilidad cuántica en el espacio de momentos de la siguiente manera:

$$\rho_n(x) = \psi_n^*(x)\psi_n(x), \quad (2.1)$$

donde $\psi_n^*(x)$ representa la conjugada imaginaria de $\psi_n(x)$, esta propiedad permite verificar que $\rho_n(x) \geq 0$.

- **Aplicar la transformada de Fourier a la densidad de probabilidad cuántica.** La transformada de Fourier se aplicó a la ec. (2.1) al espacio k :

$$\rho_n(k) = \mathcal{F}\{\rho_n(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.2)$$

El resultado de la aplicación de la transformada de Fourier es, en general, una función y no un producto de funciones [2, 10, 25].

- **Aplicar el límite asintótico $N \gg 1$ y establecer la cota energética.** Lo anterior consiste en una reorientación del principio de correspondencia de Bohr a las funciones de onda, por lo que tal aplicación hará que $\rho_n(k) \sim \rho_N(k)$, ya que las funciones de onda en general son discretas según el espectro energético; sin embargo, se debe prescindir de N mediante una igualdad de la energía clásica de una partícula en una caja unidimensional E^{CL} con la energía cuántica [2]. Al igualar ambas energías se despeja N en términos de la energía cuántica y clásica obteniendo $\rho_N(k) \sim \rho(k)$.

- **Aplicar la transformada inversa de Fourier.** Para este paso se aplicó la transformada inversa de Fourier a $\rho(k)$ al espacio de posición, esto para verificar si es posible que se haya recuperado la densidad de probabilidad clásica y una serie de residuos cuánticos, por tanto:

$$\rho(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\rho(k)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(k) e^{ikx} dk. \quad (2.3)$$

En la ecuación anterior se tiene como resultado $\rho(x) = \rho^{CL}(x) + \mathcal{O}(\beta, \hbar, x)$, donde el primer término de la derecha coincide con la densidad de probabilidad clásica y el segundo término es el residuo cuántico.

2.1.2. Análisis de residuos cuánticos

El residuo cuántico-GUP fue comparado al resultado obtenido por Granda [2], de esta manera, se comparó mediante una razón los efectos GUP con los efectos residuales cuántico con la ecuación (2.4):

$$R = \frac{C_{GUP}}{C_{QM}} = \frac{\mathcal{O}(\beta, \hbar, x)}{\mathcal{O}(\hbar, x)}, \quad (2.4)$$

para valores de $R \gg 1$ se dice que los efectos GUP son superiores a los efectos cuánticos, mientras que para $R \sim 1$ se dice que hay poca diferencia entre los efectos GUP y cuánticos. Para diferentes valores de β , este comportamiento se puede observar en la fig. 3.1.

2.2. Propuesta metodológica para el oscilador de Dirac con correcciones GUP

2.2.1. Propuesta teórica

En este problema se utilizan las soluciones de Nouicer mostradas en la ec. (1.143), por tanto, para este problema se definieron ciertos pasos metodológicos:

- **Aplicar el límite HUP a las soluciones del oscilador de Dirac en el espacio de momentos con correcciones GUP.** En este paso fue necesario aplicar el límite $\beta \rightarrow 0$ a las ecs. (1.143), esto para reducir la complejidad de aplicar una transformada a los polinomios de Gegenbauer.
- **Definir la densidad de probabilidad cuántica-relativista.** En este proceso la densidad de probabilidad para una partícula en el dominio de la ecuación de Dirac es:

$$\rho_n^{RQM} = f_n^2(p) + g_n^2(p), \quad (2.5)$$

siendo f la componente grande y g la componente pequeña, ambas soluciones son obtenidas al aplicar el límite HUP a las soluciones de Nouicer.

- **Aplicar la transformada de Fourier a la densidad de probabilidad cuántica-relativista.** En este paso se calculó la transformada de Fourier de la ec. (2.5) al espacio k .

$$\rho_n(k) = \mathcal{F}\{\rho_n(p)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(p) e^{-ikp} dp. \quad (2.6)$$

- **Calcular el límite asintótico y establecer la cota energética.** Se encontró que $\rho_n(k)$ puede expandirse asintóticamente para $n \gg 1$ en el dominio de $E_n = E_{RM}$, siendo RM la energía del oscilador relativista, de esta manera, se tiene que $\rho_n(k) = \rho(k)$.
- **Aplicar la transformada inversa a la densidad de probabilidad cuántica-relativista expandida asintóticamente.** En este paso es necesario recuperar

información de la densidad de probabilidad expandida asintóticamente en el espacio de k ; por tanto, es necesario aplicar una transformada de Fourier al espacio de momentos, para eso:

$$\rho(p) = \mathcal{F}^{-1}\{\rho(k)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(k) e^{ikp} dk. \quad (2.7)$$

El cálculo anterior devuelve lo que en principio sería una densidad de probabilidad clásica-relativista, sin embargo, no es ese el interés de este trabajo, por lo que se obtiene el siguiente resultado:

$$\rho(p) \sim \rho_{big}(p) + \rho_{small}(p), \quad (2.8)$$

donde el primer término de la derecha es la densidad definida por la componente grande y el segundo término es la densidad definida por la componente pequeña, además de una serie de términos residuales denotado por \mathcal{Q} .

- **Aplicar el límite HUP.** En este paso, se aplicó el límite $\beta \rightarrow 0$ a la ec. (2.8), para obtener una densidad clásica con efectos relativistas.
- **Aplicar el límite no relativista.** En este paso, se aplicó el límite no relativista para obtener la densidad de probabilidad clásica y comparar con estudios previos. El límite no relativista consistió en aplicar $c \rightarrow \infty$ o bien, una aproximación lineal del parámetro γ .

2.2.2. Análisis de residuos cuánticos

Los resultados pueden ser analizados desde diferentes perspectivas, sin embargo, se consideró únicamente el primer término de la densidad obtenida por los pasos metodológicos, de esta manera:

$$R = \frac{\rho_1(\kappa, p)}{\rho_{CL}(p_0, P)}, \quad (2.9)$$

donde ρ_1 es la densidad de probabilidad clásica-relativistas con efectos GUP y ρ_{CL} es la densidad de probabilidad clásica, ambas definidas en el espacio de momentos. Esto es presentado en las figs. 3.2 y 3.3. Además, se presentó una superposición de densidades a fin de observar el efecto de una corrección GUP a la densidad de probabilidad clásica en la fig. 3.4.

Capítulo 3

Resultados y discusión

En este capítulo se presentan los resultados y discusiones de la aplicación del nuevo principio de correspondencia a dos problemas específicos:

- Mecánica cuántica con correcciones GUP: el pozo infinito.
- Mecánica cuántica-relativista con correcciones GUP: el oscilador de Dirac.

La propuesta para obtener el límite clásico a través de la densidad de probabilidad cuántica es determinante para establecer un punto de partida. La recuperación de la densidad de probabilidad clásica es basado en el principio de correspondencia aplicado a las soluciones de la ecuación de Schrödinger y (en conjunto con el límite no relativista) a las soluciones de la ecuación de Dirac o Klein-Gordon. Por tanto, incorporar el límite HUP al nuevo principio de correspondencia en conjunto con el límite no relativista es la propuesta establecida en la sección metodológica para problemas con presencia de GUP.

3.1. Pozo cuántico con correcciones GUP

3.1.1. Aplicación de la propuesta metodológica

La densidad de probabilidad cuántica para el pozo infinito unidimensional con correcciones GUP es

$$\rho^{QM}(x) = \frac{2}{a} \sin^2(k''x) \quad (3.1)$$

siendo a la longitud del pozo donde se encuentra confinada la partícula. La aplicación de la propuesta metodológica tiene como resultado lo siguiente: al aplicar la

transformada de Fourier a la densidad de probabilidad cuántica al espacio de y se tiene:

$$\rho^{QM}(y) = \mathcal{F}(\rho^{QM}(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{2}{a} \sin^2(k''x) \exp(-ixy) dx, \quad (3.2)$$

esta integral es inmediata [2, 10]:

$$\rho^{QM}(y) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ia y} - 1}{iy} \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{4k''^2}{y^2}} \right], \quad (3.3)$$

sabiendo que $k'' = \frac{n\pi}{a}$, es posible modificar la ec. (3.3), sin embargo, en ref. [10] no fue necesario tener correcciones cuánticas pero en ref. [2] se consideró adecuado tener correcciones cuánticas para comparar al caso clásico. Luego, es necesario aplicar un límite asintótico al número cuántico principal $n \gg 1$ a la densidad de probabilidad definida en el espacio y , lo anterior implica que $\frac{4n^2\pi^2}{a^2y^2} \gg 1$, por lo que:

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{4k''^2}{y^2}} \sim 1 + \frac{a^2y^2}{4N^2\pi^2}, \quad (3.4)$$

entonces

$$\rho^{QM}(y) \sim \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ia y} - 1}{iy} \left[1 + \frac{a^2y^2}{4N^2\pi^2} \right], \quad (3.5)$$

con $N \gg 1$. En este punto, es necesario despejar N ya que la partícula clásica confinada no posee una energía discreta. Por tanto, se debe aplicar $E_n = E^{CL}$, para establecer una cota energética de la partícula cuántica al dominio de energías clásicas. La partícula en una caja en el dominio de la mecánica clásica tiene una energía $E^{CL} = \frac{p^2}{2m}$, por tanto,

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{N^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} + \beta \frac{N^4\pi^4\hbar^4}{ma^4}, \quad (3.6)$$

los valores que N puede tener cumplen con la propiedad $N \geq 0$ y en el límite $\beta \rightarrow 0$ debe cumplir que $N = \frac{pa}{\pi\hbar}$ según la ec. (1.53). La raíz general es:

$$N = \pm \sqrt{\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}, \quad A = \beta \frac{\pi^4\hbar^4}{ma^4}, B = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, C = -\frac{p^2}{2m}, \quad (3.7)$$

la raíz adecuada en forma explícita es

$$N = \frac{pa}{\pi\hbar} \left[\frac{\sqrt{1+8\beta p^2}-1}{4\beta p^2} \right]^{1/2}, \quad (3.8)$$

este valor cumple con $N \sim \frac{pa}{\pi\hbar}$ en el límite $\beta \rightarrow 0$. Al sustituir la ec. (3.8) en la ec. (3.3) se tiene:

$$\rho^{QM}(y) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ia y} - 1}{iy} \left[1 + \frac{\beta\hbar^2 y^2}{\sqrt{1+8\beta p^2}-1} \right]. \quad (3.9)$$

La ec. (3.9) presenta correcciones cuánticas (\hbar) y correcciones GUP (β), sin embargo, las correcciones GUP son mucho más pequeñas que las correcciones cuánticas¹. El siguiente paso implica recuperar información en el espacio de x , donde está definida la densidad de probabilidad cuántica, para eso se define $\alpha = \frac{\beta\hbar^2}{\sqrt{1+8\beta p^2}-1}$ y se aplicó una transformada inversa de Fourier al espacio x para obtener información en el espacio de configuraciones:

$$\begin{aligned} \rho^{QM}(x) &= \mathcal{F}^{-1}\{\rho^{QM}(y)\} \\ &= \frac{1}{2\pi ai} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{ia y} - 1}{y} [1 + \alpha y^2] \right] e^{ix y} dy, \end{aligned} \quad (3.10)$$

haciendo uso de las siguientes integrales y de la ref. [2]:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix y} dy, \quad \delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}, \quad \delta'(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{ix y} dy, \quad (3.11)$$

se obtiene:

$$\rho^{QM}(x) = \frac{1}{a} [H(x) - H(x-a)] + \frac{\alpha}{a} [\delta'(x-a) - \delta'(x)]. \quad (3.12)$$

En la ec. (3.12), el primer término del lado derecho corresponde a la densidad de probabilidad clásica de una partícula confinada en una longitud a , independiente de \hbar . En el segundo término del lado derecho se puede observar la presencia de correcciones cuánticas y GUP, esto implica una fuerte supresión a nivel clásico, ya que no solo es proporcional a la constante de Planck sino también al parámetro de deformación. La razón de las correcciones se puede calcular, al usar la ec. (2.4) se

¹Veáse la figura 3.1

llega a:

$$R = \frac{C_{QM-GUP}}{C_{QM}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8\beta p^2} + 1 \right), \quad (3.13)$$

para valores $\beta p^2 \gg 1$ se tiene que $R \sim \sqrt{\beta} p$. La ec. (3.13) depende fuertemente del valor de β , sin embargo, para valores $\beta p^2 \ll 1$ la razón se puede aproximar mediante $R = 1 + 2\beta p^2$, en pocas palabras, en el límite $\beta \rightarrow 0$ la ecuación tiende a 1 independientemente del momento lineal. Esto implica que los residuos cuánticos con corrección GUP son ligeramente mayor que los residuos cuánticos. Además, en el límite $\beta \rightarrow 0$ la ec. (3.12) coincide con la ec. (1.58) y por tanto, con la ec. (1.59) presentadas en ref. [2, 10].

3.1.2. Principales resultados

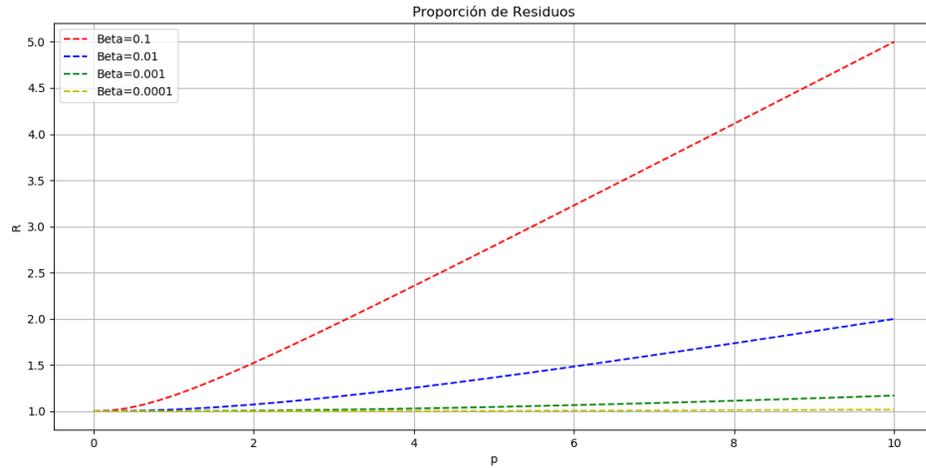


Figura 3.1: Se presenta la gráfica de la ec. (3.13) para diferentes valores de β . Puede notarse que a medida $\beta \rightarrow 0$ la relación de los residuos tiende a 1. Existen valores de β al cual los efectos cuánticos-GUP superan a los efectos cuánticos, esto ocurre cuando el momento lineal es muy grande, por lo que se está introduciendo a nociones relativistas.

La propuesta metodológica implica la recuperación de la densidad de probabilidad clásica desde la densidad de probabilidad cuántica a través de la propuesta del principio de correspondencia, de esta manera, según la ec. (3.12) la densidad de probabilidad clásica es recuperable como una cota superior de la densidad de probabilidad cuántica, es decir, en el régimen energético $E_n = E^{QM}$ es posible encontrar la densidad de probabilidad clásica con correcciones cuánticas-GUP, sin embargo, en

el límite $\beta \rightarrow 0$, se recuperan las correcciones cuánticas presentadas en ref. [2, 10]. Además, el resultado de la ec. (3.12) coincide con resultados previos [2, 10] y esto implica la posibilidad de extender el nuevo principio de correspondencia a los problemas de la mecánica cuántica deformada.

3.2. El oscilador de Dirac con correcciones GUP

3.2.1. Aplicación de la propuesta metodológica

Las soluciones de Nouicer presentadas en la ec. (1.143) son las soluciones del oscilador de Dirac con correcciones GUP, sin embargo, resolver este problema es un poco extenso, esto debido a la poca literatura para facilitar cálculos. El desarrollo matemático de esta aplicación se encuentra en el Apéndice B. La propuesta metodológica implica aplicar el límite de HUP a las soluciones de Nouicer para recuperar el límite cuántico-relativista de las soluciones del oscilador de Dirac, por tanto, al aplicar el límite $\beta \rightarrow 0$ en la componente grande se tiene que $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_n(p) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[N(1 + \beta p^2)^{-\lambda/2} C_n^\lambda \left(\frac{p\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 + \beta p^2}} \right) \right], \quad (3.14)$$

mediante las siguientes identidades:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, \quad \Gamma(2\lambda) = \frac{2^{2\lambda-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda + 1/2), \quad (3.15)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\lambda + a)}{\Gamma(\lambda)} e^{-a \ln \lambda} = 1, \quad \lim_{\lambda' \rightarrow \infty} (\lambda')^{-n/2} C_n^{\lambda'} \left(u \sqrt{\frac{2}{\lambda'}} \right) = \frac{2^{-n/2}}{n!} H_n(u), \quad (3.16)$$

se llega a:

$$f_n(p) = \sqrt{\frac{E_n + mc^2}{\sqrt{m\omega\hbar\pi n! 2^{n+1} E_n}}} H_n \left(\frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{2m\hbar\omega} \right). \quad (3.17)$$

La cual coincide con el resultado del apéndice A. Esto implica que las soluciones

de Nouicer al aplicarse el límite HUP son:

$$f_n(u) = \sqrt{\frac{E_n + mc^2}{2^{n+1}n!\sqrt{m\omega\hbar\pi}E_n}} e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u), \quad (3.18)$$

$$g_n(u) = \sqrt{\frac{E_n - mc^2}{2^n(n-1)!\sqrt{m\omega\hbar\pi}E_n}} e^{-\frac{u^2}{2}} H_{n-1}(u), \quad (3.19)$$

con $u = \frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}$. El cálculo de la aplicación del principio de correspondencia se encuentra en el apéndice C, por tanto, aquí se presentan los resultados inmediatos. La densidad de probabilidad cuántica-relativista viene dada por:

$$\begin{aligned} \rho_n^{RQM}(p) &= \frac{E_n + mc^2}{2^{n+1}n!\sqrt{m\omega\hbar\pi}E_n} \exp\left(-\frac{p^2}{m\hbar\omega}\right) H_n^2\left(\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}p\right) \\ &+ \frac{E_n - mc^2}{2^n(n-1)!\sqrt{m\omega\hbar\pi}E_n} \exp\left(-\frac{p^2}{m\hbar\omega}\right) H_{n-1}^2\left(\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}p\right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

es necesario definir las siguientes cantidades:

$$\alpha = \frac{1}{m\hbar\omega}, \quad |a_n|^2 = \frac{E_n + mc^2}{2^{n+1}n!\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}E_n}, \quad |a'_n|^2 = \frac{E_n - mc^2}{2^n(n-1)!\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}E_n}, \quad (3.21)$$

luego, la ecuación es más simple:

$$\rho_n^{RQM}(p) = |a_n|^2 \exp(-\alpha p^2) H_n^2(\sqrt{\alpha}p) + |a'_n|^2 \exp(-\alpha p^2) H_{n-1}^2(\sqrt{\alpha}p). \quad (3.22)$$

El siguiente paso es aplicar una transformada de Fourier a la ec. (3.22) al espacio k :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\rho_n^{RQM}(p)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [|a_n|^2 \exp(-\alpha p^2) H_n^2(\sqrt{\alpha}p)] e^{-ikp} dp \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [|a'_n|^2 \exp(-\alpha p^2) H_{n-1}^2(\sqrt{\alpha}p)] e^{-ikp} dp, \end{aligned} \quad (3.23)$$

el resultado de esta transformada viene dado por:

$$\rho_n^{RQM}(k) = \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} \exp\left(-\frac{k^2}{4\alpha}\right) L_n\left(\frac{k^2}{2\alpha}\right) + \frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} \exp\left(-\frac{k^2}{4\alpha}\right) L_{n-1}\left(\frac{k^2}{2\alpha}\right), \quad (3.24)$$

donde $L_n(u)$ son los polinomios de Laguerre de orden n , con:

$$|A_n|^2 = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2^n n!}. \quad (3.25)$$

La propuesta metodológica sugiere encontrar el comportamiento asintótico para un $n \gg 1$ en la densidad de probabilidad cuántica-relativista. En el trabajo de Gabor [63] se encuentra el comportamiento asintótico para los polinomios de Laguerre:

$$\begin{aligned} F(u^2) &= e^{-\frac{u^2}{2}} L_n(u^2) \sim J_0(2\sqrt{N}u) \\ &- \frac{\pi}{2} \int_0^u t^3 F(t^2) \left[J_0(2\sqrt{N}u) Y_0(2\sqrt{N}t) - J_0(2\sqrt{N}t) Y_0(2\sqrt{N}u) \right] dt, \end{aligned} \quad (3.26)$$

con $N = n + 1/2$, J_0 y Y_0 son las funciones de Bessel de primera especie y de segunda especie, respectivamente. Luego la densidad de probabilidad en el límite asintótico es:

$$\rho_N^{RQM}(k) = \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} J_0\left(2\sqrt{N_1} \frac{k}{\sqrt{2\alpha}}\right) + \mathcal{O}_1 + \frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} J_0\left(2\sqrt{N_2} \frac{k}{\sqrt{2\alpha}}\right) + \mathcal{O}_2, \quad (3.27)$$

con los siguientes residuos cuánticos-relativistas:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= -\frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{k}{\sqrt{2\alpha}}} t^3 F(t^2) \left[J_0\left(2\sqrt{N_1} \frac{k}{\sqrt{2\alpha}}\right) Y_0(2\sqrt{N_1}t) \right. \\ &- \left. J_0(2\sqrt{N_1}t) Y_0\left(2\sqrt{N_1} \frac{k}{\sqrt{2\alpha}}\right) \right] dt, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_2 &= -\frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{k}{\sqrt{2\alpha}}} t^3 F(t^2) \left[J_0\left(2\sqrt{N_2} \frac{k}{\sqrt{2\alpha}}\right) Y_0(2\sqrt{N_2}t) \right. \\ &- \left. J_0(2\sqrt{N_2}t) Y_0\left(2\sqrt{N_2} \frac{k}{\sqrt{2\alpha}}\right) \right] dt, \end{aligned} \quad (3.29)$$

con $N_1 = n + \frac{1}{2}$ y $N_2 = n - \frac{1}{2}$. El espectro de energía considerado para este caso es $E_n^2 = m^2c^4 + \beta\omega^2\hbar^2n^2m^2c^2 + 2n\omega\hbar mc^2$, en el apéndice D se encuentra la energía del oscilador relativista que viene dada por $E_{RM}^2 = \gamma^2m^2c^4$. Este paso metodológico consiste en igualar ambas energías para poder despejar n , por tanto, al igualar ambas energías se tiene que:

$$n = \frac{(\gamma^2 - 1)mc^2}{\hbar\omega\left(\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2c^2} + 1\right)}, \quad (3.30)$$

este valor es necesario para fijar el valor de la energía cuántica a la energía relativista, en general el argumento de la función de Bessel es:

$$\rho_N^{RQM}(k) \sim \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} J_0(\delta_1 k) + \mathcal{O}_1 + \frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} J_0(\delta_2 k) + \mathcal{O}_2, \quad (3.31)$$

con:

$$\delta_1 = \sqrt{m\hbar\omega(2n+1)}, \quad \delta_2 = \sqrt{m\hbar\omega(2n-1)}, \quad (3.32)$$

esto implica que los argumentos se pueden expresar usando la ec. (3.30):

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sqrt{\frac{2(\gamma^2 - 1)m^2c^2 + m\hbar\omega\left(\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2c^2} + 1\right)}{\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2c^2} + 1}}, \\ \delta_2 &= \sqrt{\frac{2(\gamma^2 - 1)m^2c^2 - m\hbar\omega\left(\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2c^2} + 1\right)}{\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2c^2} + 1}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

El siguiente paso metodológico consistió en aplicar la transformada inversa de Fourier de la ec. (3.31), recuperando la densidad de probabilidad en el espacio de momentos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(\rho_N^{RQM}(k)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} J_0(\delta_1 k) + \mathcal{O}_1 \right] e^{ikp} dk \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} J_0(\delta_2 k) + \mathcal{O}_2 \right] e^{ikp} dk, \end{aligned} \quad (3.34)$$

Esta integral puede ser resuelta utilizando una componente y generalizando para la otra componente. Al realizar este cálculo implica que la densidad de probabilidad cuántica-relativista en el espacio de momentos con un número cuántico $N \gg 1$ y con

cota energética $E_N^{RQM} = E^{RM}$ es:

$$\rho_N^{RQM}(p) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} \frac{1}{\sqrt{\delta_1^2 - p^2}} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} \frac{1}{\sqrt{\delta_2^2 - p^2}} + \mathcal{Q}, \quad (3.35)$$

para los efectos residuales cuánticos se tiene:

$$\mathcal{Q} = \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} \frac{1}{2\pi\delta_1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-\hbar^2}{S_1^2} \right)^j i_j(p, \delta_1) + \frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} \frac{1}{2\pi\delta_2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-\hbar^2}{S_2^2} \right)^j i_j(p, \delta_2), \quad (3.36)$$

con $S_1 = \frac{\pi\delta_1^2}{m\omega}$ y $S_2 = \frac{\pi\delta_2^2}{m\omega}$, siendo S_i la acción clásica con correcciones relativistas-GUP. Las funciones sin dimensión $i_j(p, \delta_k)$ son las mismas que aparecen en ref. [2, 10]. Al aplicar tal límite se obtienen efectos GUP en la densidad de probabilidad clásica. Se aplicó el límite no relativista a las siguientes constantes:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{E_n + mc^2}{E_n} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1 + 2\frac{n\hbar\omega}{mc^2}} + 1}{\sqrt{1 + 2\frac{n\hbar\omega}{mc^2}}}, \quad (3.37)$$

de esta manera, al aplicar $c \rightarrow \infty$, se tiene:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} = \frac{1}{\pi}, \quad (3.38)$$

sin embargo, para la otra componente:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{E_n - mc^2}{E_n} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1 + 2\frac{n\hbar\omega}{mc^2}} - 1}{\sqrt{1 + 2\frac{n\hbar\omega}{mc^2}}}, \quad (3.39)$$

a diferencia de la componente grande, en el caso de la componente pequeña se tiene

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} = 0, \quad (3.40)$$

en cuanto a las δ_1 y δ_2 se tiene en el límite no relativista:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \delta_1 = \lim_{c \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2(\gamma^2 - 1)m^2c^2 + m\hbar\omega\left(\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2c^2} + 1\right)}{\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2c^2} + 1}} \quad (3.41)$$

el cálculo del límite se puede hacer mediante la aproximación $\gamma^2 = 1 + \frac{v_0^2}{c^2}$ y $v_0^2 m^2 \gg m\hbar\omega$, por lo que:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \delta_1 = \sqrt{\frac{2\left(\sqrt{1 + v_0^2 m^2 \beta^2} - 1\right)}{\beta^2}} = \kappa_1, \quad (3.42)$$

al igual que δ_2 . En general, el límite no relativista de la densidad de probabilidad clásica-relativista con efectos GUP, obtenida en la ec. (3.35) y usando los resultados previos de las constantes se tiene:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \rho^{RQM}(p) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\kappa_1^2 - p^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa_1}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-\hbar^2}{S_1^2}\right)^j i_j(p, \kappa_1), \quad (3.43)$$

a este punto, la componente pequeña no aparece, se puede prescindir de los efectos residuales debido a que la constante de Planck es muy pequeña, por lo que se asume:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \rho^{RQM}(p) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\kappa_1^2 - p^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa_1}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-\hbar^2}{S_1^2}\right)^j i_j(p, \kappa_1) \sim \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\kappa_1^2 - p^2}}. \quad (3.44)$$

Al aplicar el límite $\beta \rightarrow 0$ a la ec. (3.44) se tiene la densidad de probabilidad clásica:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \rho^{RQM}(p) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{p_0^2 - p^2}}, \quad (3.45)$$

con $p_0 = mv_0$. Por lo que el resultado coincide con los resultados previos [2, 10, 25].

3.2.2. Principales resultados

La propuesta metodológica para recuperar el límite clásico del oscilador de Dirac con correcciones GUP, presenta diversos límites como el límite no relativista y el límite HUP, sin embargo, la ec. (3.45) demuestra que la metodología es correcta para este problema. La razón entre la densidad de probabilidad clásica-relativista con efectos GUP y la densidad de probabilidad clásica es:

$$R = \frac{\rho(\kappa_1, p)}{\rho(p_0, p)} = \sqrt{\frac{p_0^2 - p^2}{\kappa_1^2 - p^2}}, \quad (3.46)$$

la ec. (3.46) es gráfícada para diferentes valores de κ_1 en la fig. 3.2 y fig. 3.3.

También puede hacerse una comparación entre las densidades de probabilidad en el punto $p = 0$, que físicamente es cuando la partícula tiene un momento igual a cero, en ese caso:

$$\rho^{CL}(0) - \rho^{QPD}(0) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\kappa_1 - p_0}{\kappa_1 p_0} \right], \quad (3.47)$$

en la fig. 3.4, se puede observar esa diferencia en el momento igual a cero.

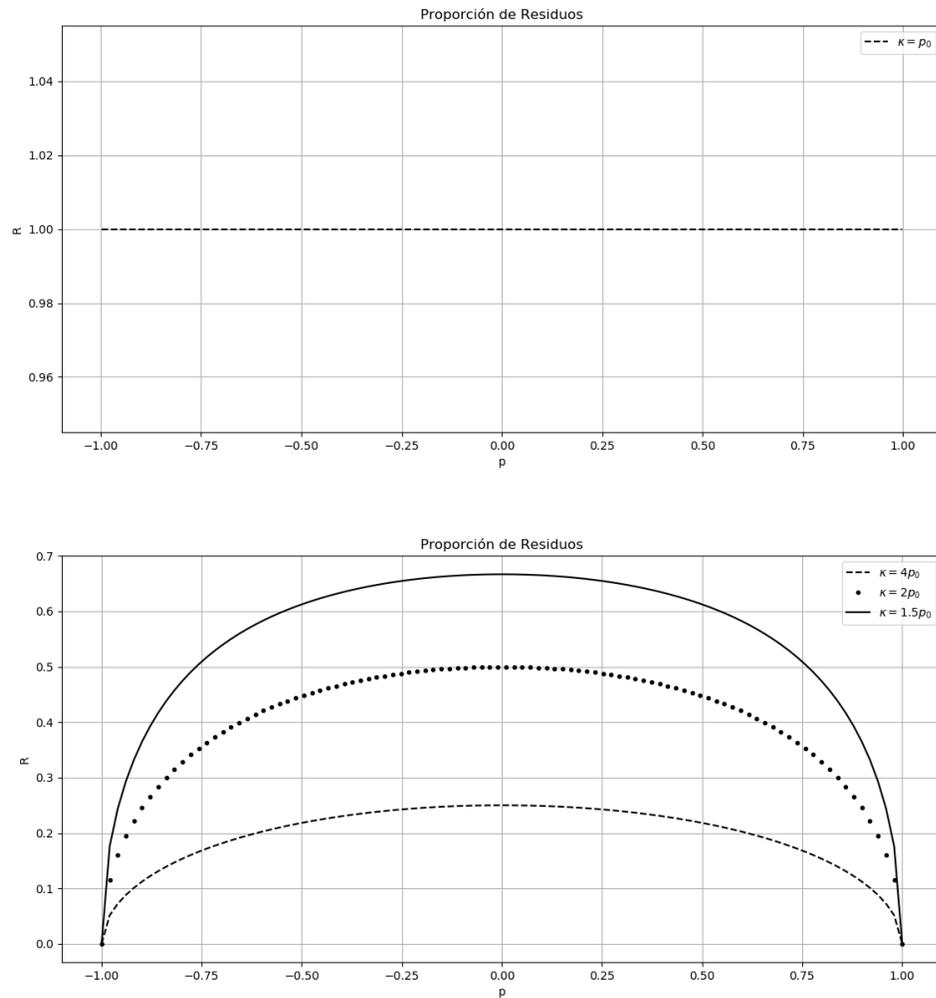


Figura 3.2: Comportamiento de las densidades en términos de residuos cuánticos para diferentes valores de κ con relación al momento inicial p_0 de la partícula en un oscilador armónico simple. Se gráfica para $\kappa \geq p_0$. Aunque este caso es meramente hipotético ya que para que ocurra este sistema β debe ser mucho mayor que el momento clásico.

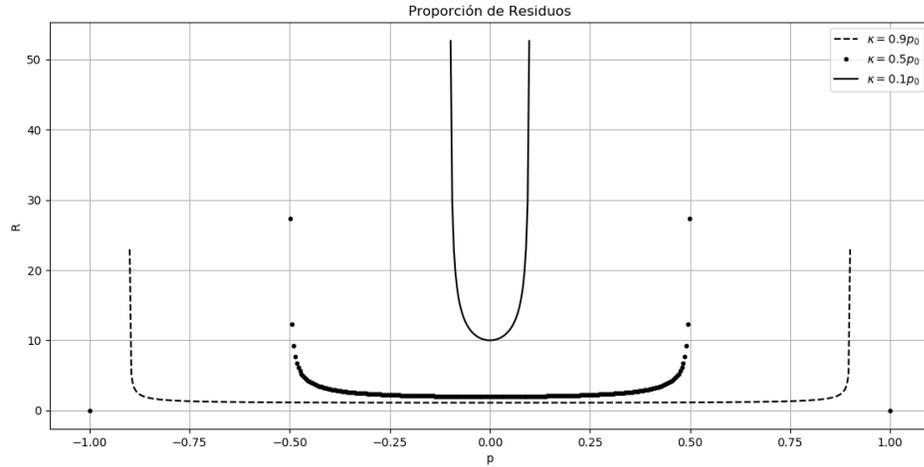


Figura 3.3: Comportamiento de las densidades en términos de residuos cuánticos para diferentes valores de κ con relación al momento inicial p_0 de la partícula en un oscilador armónico simple. Se gráfica para $\kappa < p_0$. Puede notarse que este comportamiento se debe a que en la densidad de probabilidad clásica-GUP presenta una reducción de la amplitud de oscilación.

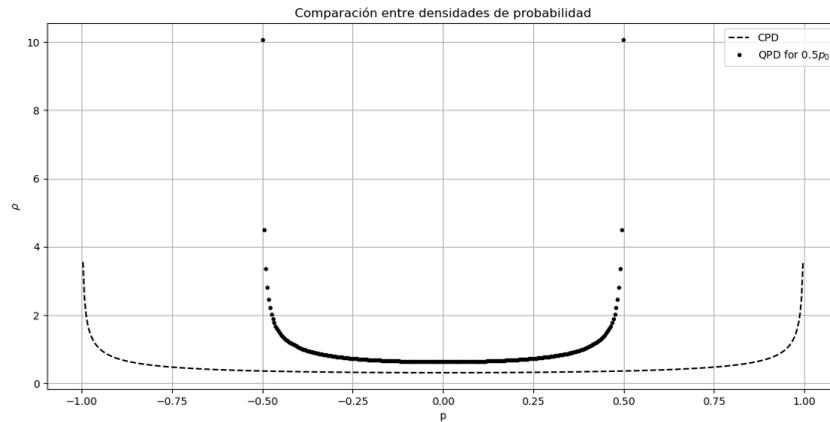


Figura 3.4: Breve comparación entre la densidad de probabilidad clásica y la densidad de probabilidad con correcciones GUP, puede notarse que los efectos GUP simplemente modifican la amplitud del momento inicial, por tanto, el rango de momento es diferente al momento clásico.

Capítulo 4

Conclusiones y recomendaciones

El objetivo principal de este trabajo consiste en aplicar la extensión del principio de correspondencia de Bohr a problemas específicos de la mecánica cuántica y mecánica cuántica relativista, deformadas por la presencia del principio de incertidumbre generalizado GUP. Los problemas a resolver son el pozo infinito no relativista en el espacio de configuraciones y el oscilador de Dirac en el espacio de fase, ambos con correcciones GUP.

La propuesta metodológica para el pozo infinito consiste en la aplicación directa de la extensión del principio de correspondencia a la densidad de probabilidad cuántica. El resultado no coincide con resultados previos debido a la presencia del parámetro de deformación β , sin embargo, en el límite HUP o $\beta \rightarrow 0$, el resultado presentado en la ec. (3.12) es el esperado según ref. [2, 10], lo que implica que para este problema específico se debe incorporar el límite HUP a la propuesta metodológica para recuperar exactamente la densidad de probabilidad clásica de la partícula confinada. El residuo cuántico-GUP es mucho más pequeño que el residuo cuántico obtenido en ref. [2], no obstante, es proporcional a $\mathcal{O}(\hbar, \beta)$, siendo un residuo casi nulo, debido a que la constante de Planck es del orden de 10^{-34} . Se concluye que el límite de la densidad de probabilidad clásica de la partícula confinada en una dimensión es recuperable desde la partícula cuántica con correcciones GUP en una dimensión, mediante la aplicación del nuevo principio de correspondencia y del límite HUP.

El oscilador de Dirac en el espacio de fase con correcciones GUP presentó un reto mayor debido a la poca literatura bibliográfica y complejidad matemática. La poca literatura del oscilador de Dirac en el espacio de fase generó un trabajo extra presentado en el apéndice A. Los polinomios de Gegenbauer son generalizaciones de diversos polinomios como los de *Hermite* o los de *Chebyshev*, por lo que encontrar una transformada de Fourier a un polinomio generalizado presenta dificultades, sin embargo, la aplicación del límite HUP a las soluciones del oscilador de Dirac con

correcciones GUP permite recuperar el oscilador de Dirac sin correcciones GUP presentados en el apéndice B pero manteniendo su espectro energético con correcciones GUP. La aplicación de la extensión del principio de correspondencia implica analizar al oscilador de Dirac sin correcciones GUP en el espacio de momentos. Para encontrar la cota energética se procedió a igualar la energía del oscilador de Dirac a la energía del oscilador simple, de esta manera, la corrección aparece como argumento de la densidad de probabilidad cuántica. El límite HUP y la extensión del principio de correspondencia permiten recuperar una densidad de probabilidad clásica-relativista con correcciones energéticas debido a GUP. Al aplicar el límite no relativista se tiene la densidad de probabilidad clásica con efectos GUP, el resultado de la ec. (3.43) es la densidad de probabilidad clásica con argumento clásico-GUP, además de una serie de residuos crecientes $\mathcal{O}(\hbar, \beta)$, de esta manera, al aplicar el límite HUP se recuperó la densidad de probabilidad clásica presentada en la ec. (3.45) y la serie residual de potencias crecientes de la constante de Planck presentada en la ec. (3.36). Se concluye que la densidad de probabilidad clásica del oscilador armónico simple definido en el espacio de momentos es recuperable desde el oscilador de Dirac con correcciones GUP mediante la propuesta del límite HUP, el nuevo principio de correspondencia y el límite no relativista coincidiendo con resultados previos [2, 10]. Esto es para partículas cuánticas relativistas que obedecen el hamiltoniano del oscilador de Dirac.

La propuesta metodológica de esta tesis ha arrojado primeros resultados del límite clásico de la mecánica cuántica y mecánica cuántica relativista, deformadas por el principio de incertidumbre generalizado, de tal manera que la propuesta de Bernal y otros [2, 10, 25, 26] es extendible a este campo, por lo que el límite clásico puede ser encontrado. No obstante, otro resultado interesante es la presencia del factor β en las densidades de probabilidad clásicas que tiene poca bibliografía en la literatura científica.

En el desarrollo de la metodología se tuvieron ciertos problemas bibliográficos como el desconocimiento del oscilador de Dirac en el espacio de momentos en una dimensión, que fueron desarrollados en el apéndice A siguiendo la metodología de Radoslaw [29], esto debido a que en la ref. [49] no se presenta el resultado correcto del límite $\beta \rightarrow 0$ del oscilador con correcciones GUP, por tanto, el resultado correcto se puede encontrar en el apéndice B.

Otro problema presentado es el desconocimiento de la energía del oscilador relativista, sin embargo, en el apéndice D se desarrolla de una manera similar al autor de la ref. [64].

La propuesta también es analoga, por simetría, al momento mínimo, que aquí se desarrolla en longitud mínima, por lo que se puede extenderse al momento mínimo. En general, es posible medir los efectos GUP con simulación numérica similar a la propuesta de Bernal [10].

Resumiendo, el principio de correspondencia presentado por Bernal y otros [10]

es extendible a la mecánica cuántica y mecánica cuántica-relativista, deformadas por GUP, en conjunto con el límite HUP y el límite no relativista para el oscilador de Dirac, y para el pozo cuántico solo se requiere del límite HUP.

Hay una serie de problemas que se pueden resolver con esta propuesta metodológica de la tesis. Dentro del campo de la mecánica cuántica deformada se recomienda resolver: el oscilador armónico cuántico en 1D y 3D, el átomo de hidrógeno, el pozo esférico y otros. En cuanto al campo de la mecánica cuántica-relativista deformada se recomienda resolver: el oscilador de Klein-Gordon en 1D y 3D, el pozo infinito de Dirac y de Klein-Gordon, el átomo de hidrógeno relativista, etc. Por lo que el campo de investigación no está cerrado.

Referencias bibliográficas

- [1] D. J. Griffiths, *Introduction to quantum mechanics* (Prentice Hall, New Jersey USA 1995).
- [2] A. C. G. Arango, *Sobre los límites de la mecánica cuántica* (2016).
- [3] R. L. Liboff, The correspondence principle revisited, *Physics Today* **37**, 50 (1984).
- [4] L. V. Prokhorov, Limit $\hbar \rightarrow 0$ in quantum field theory, *Phys. Rev.* **183**, 1515 (1969).
- [5] A. J. Makowski and K. J. Górska, Bohr's correspondence principle: The cases for which it is exact, *Phys. Rev. A* **66**, 062103 (2002).
- [6] L. E. Ballentine, Quantum-to-classical limit in a Hamiltonian system, *Phys. Rev. A* **70**, 032111 (2004).
- [7] L. E. Ballentine, Y. Yang, and J. P. Zibin, Inadequacy of Ehrenfest's theorem to characterize the classical regime, *Phys. Rev. A* **50**, 2854 (1994).
- [8] L. E. Ballentine and S. M. McRae, Moment equations for probability distributions in classical and quantum mechanics, *Phys. Rev. A* **58**, 1799 (1998).
- [9] A. J. Bracken and J. G. Wood, Semiquantum versus semiclassical mechanics for simple nonlinear systems, *Phys. Rev. A* **73**, 012104 (2006).
- [10] J. Bernal, A. Martín-Ruíz, and J. C. García-Melgarejo, A simple mathematical formulation of the correspondence principle, *Journal of Modern Physics* **4**, 108 (2013).
- [11] A. J. Makowski, Exact classical limit of quantum mechanics: Central potentials and specific states, *Phys. Rev. A* **65**, 032103 (2002).
- [12] A. J. Makowski, Exact classical limit of quantum mechanics: Noncentral potentials and Ermakov-type invariants, *Phys. Rev. A* **68**, 022102 (2003).

-
- [13] R. Alicki, Quantum mechanical tools in applications to classical dynamical systems, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2040 (1998).
- [14] R. W. Zwanzig, Transition from quantum to classical partition function, *Phys. Rev.* **106**, 13 (1957).
- [15] M. A. Doncheski and R. W. Robinett, Comparing classical and quantum probability distributions for an asymmetric infinite well, *European Journal of Physics* **21**, 227 (2000).
- [16] M. N. Berberan-Santos, E. N. Bodunov, and L. Pogliani, Classical and quantum study of the motion of a particle in a gravitational field, *Journal of Mathematical Chemistry* **37**, 101 (2005).
- [17] J. H. van Vleck, The absorption of radiation by multiply periodic orbits, and its relation to the correspondence principle and the Rayleigh-Jeans law. Part II. calculation of absorption by multiply periodic orbits, *Phys. Rev.* **24**, 347 (1924).
- [18] F. C. Hoyt, Application of the correspondence principle to relative intensities in series spectra, *Phys. Rev.* **26**, 749 (1925).
- [19] J. A. West, Z. D. Gaeta, and C. R. Stroud, Classical limit states of the helium atom, *Phys. Rev. A* **58**, 186 (1998).
- [20] P. Stehle and P. G. DeBaryshe, Quantum electrodynamics and the correspondence principle, *Phys. Rev.* **152**, 1135 (1966).
- [21] G. C. Dente, Classical limit of quantum electrodynamics, *Phys. Rev. D* **12**, 1733 (1975).
- [22] P. W. Ketchum, An extension of Bohr correspondence principle to apply to small quantum numbers, *Phys. Rev.* **24**, 463 (1924).
- [23] B. Gao, Breakdown of Bohr's correspondence principle, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4225 (1999).
- [24] C. Eltschka, H. Friedrich, and M. J. Moritz, Comment on "breakdown of Bohr's correspondence principle", *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2693 (2001).
- [25] A. Martín-Ruíz, J. Bernal, A. Frank, and A. Carbajal-Domínguez, The classical limit of the quantum Kepler problem, *Journal of Modern Physics* **4**, 818 (2013).
- [26] A. Martín-Ruíz, J. Bernal, and A. Carbajal-Domínguez, Macroscopic quantum behavior of periodic quantum systems, *Journal of Modern Physics* **5**, 44 (2014).

-
- [27] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, The Dirac oscillator, *Journal of Physics* **22**, 817 (1989).
- [28] R. P. Martínez, H. N. N. nez Yépez, and A. L. Salas-Brito, Relativistic quantum mechanics of a Dirac oscillator, *European Journal of Physics* **16**, 135 (1995).
- [29] R. Szymtkowski and M. Gruchowski, Completeness of the Dirac oscillator eigenfunctions, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **34**, 4991 (2001).
- [30] V. M. Villalba, Exact solution of the two-dimensional Dirac oscillator, *Phys. Rev. A* **49**, 586 (1994).
- [31] J. Benítez, R. P. Martínez y Romero, H. N. Núñez Yépez, and A. L. Salas-Brito, Solution and hidden supersymmetry of a Dirac oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1643 (1990).
- [32] J. V. M. noz and F. V. Silva, Dinámica del oscilador de Dirac, *Revista de Investigación Física* **19**, 1 (2016).
- [33] J. A. Franco-Villafaña, E. Sadurní, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne, and T. H. Seligman, First experimental realization of the Dirac oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 170405 (2013).
- [34] K. Konishi, G. Paffuti, and P. Provero, Minimum physical length and the generalized uncertainty principle in string theory, *Physics Letters B* **234**, 276 (1990).
- [35] S. Hossenfelder, Minimal length scale scenarios for quantum gravity, *Living Reviews in Relativity* **16**, 2 (2013).
- [36] M. Maggiore, A generalized uncertainty principle in quantum gravity, *Physics Letters B* **304**, 65 (1993).
- [37] A. Bina, S. Jalalzadeh, and A. Moslehi, Quantum black hole in the generalized uncertainty principle framework, *Phys. Rev. D* **81**, 023528 (2010).
- [38] P. B. no, The generalized uncertainty principle as quantum gravitational friction, *Journal of Physics: Conference Series* **574**, 012062 (2015).
- [39] F. Scardigli, G. Lambiase, and E. Vagenas, Quantum corrections to newtonian potential and generalized uncertainty principle, *Journal of Physics: Conference Series* **880**, 012044 (2017).
- [40] A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation, *Phys. Rev. D* **52**, 1108 (1995).

- [41] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations, *Phys. Rev. D* **65**, 125027 (2002).
- [42] M. Pisapia, Modified Quantum Mechanics and Generalized Uncertainty Principle, Ph.D. thesis, FACOLTÁ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI. Università degli Studi di Salerno (2016).
- [43] F. Brau, Minimal length uncertainty relation and the hydrogen atom, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **32**, 7691 (1999).
- [44] G. Blado, C. Owens, and V. Meyers, Quantum wells and the generalized uncertainty principle, *European Journal of Physics* **35**, 065011 (2014).
- [45] S. Das, E. C. Vagenas, and A. F. Ali, Discreteness of space from gup ii: Relativistic wave equations, *Physics Letters B* **690**, 407 (2010).
- [46] S. Moayedi, M. Setare, and H. Moayeri, Quantum gravitational corrections to the real Klein-Gordon field in the presence of a minimal length, *Int J Theor Phys* **49**, 2080 (2010).
- [47] T. Matsuo and Y. Shibusa, Quantization of fields based on generalized uncertainty principle, *Modern Physics Letters A* **21**, 1285 (2006), <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217732306020639>.
- [48] M. Arifuzzaman, M. Moniruzzaman, and S. B. Faruque, An exact solution of the Dirac oscillator problem in the context of generalized uncertainty principle, *International Journal of Research in Engineering and Technology* **2**, 432 (2013).
- [49] K. Nouicer, An exact solution of the one-dimensional Dirac oscillator in the presence of minimal lengths, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **39**, 5125 (2006).
- [50] M. Ara, M. Moniruzzaman, and S. B. Faruque, Exact solution of the Dirac equation with a linear potential under the influence of the generalized uncertainty principle, *Physica Scripta* **82**, 035005 (2010).
- [51] C. Quesne and V. M. Tkachuk, Dirac oscillator with nonzero minimal uncertainty in position, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38**, 1747 (2005).
- [52] T. Lancaster and S. J. Blundell, *Quantum Field theory for The gifted Amateur* (Oxford University Press, New York Usa 2004), 1 edition.

- [53] L. Cohen, Can quantum mechanics be formulated as a classical probability theory?, *Philosophy of Science* **33**, 317 (1966), <https://doi.org/10.1086/288104>.
- [54] R. S. O. de Urbina, Principio de correspondencia, *Eikasia: Revista de Filosofía* pp. 9–30 (2014).
- [55] L. J. Garay, Quantum gravity and minimum length, *Int. J. Mod. Phys.* **A10**, 145 (1995), [gr-qc/9403008](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9403008).
- [56] M. Sprenger, P. Nicolini, and M. Bleicher, Physics on the smallest scales: an introduction to minimal length phenomenology, *European Journal of Physics* **33**, 853 (2012).
- [57] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, S. Rayyan, and T. Takeuchi, Short distance versus long distance physics: The classical limit of the minimal length uncertainty relation, *Phys. Rev. D* **66**, 026003 (2002).
- [58] C. Bambi, A revision of the generalized uncertainty principle, *Classical and Quantum Gravity* **25**, 105003 (2008).
- [59] M. I. Samar and V. M. Tkachuk, Exactly solvable problems in the momentum space with a minimum uncertainty in position, *Journal of Mathematical Physics* **57**, 042102 (2016), <https://doi.org/10.1063/1.4945313>.
- [60] K. Nozari and A. Etemadi, Minimal length, maximal momentum, and Hilbert space representation of quantum mechanics, *Phys. Rev. D* **85**, 104029 (2012).
- [61] M.-S. Ma and R. Zhao, The effect of generalized uncertainty principle on square well, a case study, *Journal of Mathematical Physics* **55**, 082109 (2014), <https://doi.org/10.1063/1.4892102>.
- [62] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press 2015), 8 edition.
- [63] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials* (American Mathematical Society Providence 1975), 4 edition.
- [64] A. S. Soto, *Electromagnetismo* (Ciencia y Tecnología, Editorial Universidad de Antioquia 2009), 1 edition.

Apéndice A

El oscilador de Dirac en el espacio de momentos

El oscilador de Dirac en una dimensión espacial [27, 29] se presenta en la ecuación siguiente:

$$c\alpha\left(\vec{P} - i\beta m\omega\vec{X}\right)\Psi + \beta mc^2\Psi = E\Psi, \quad (\text{A.1})$$

con las siguientes matrices:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Al aplicar las matrices anteriores, el sistema de ecuaciones para la componente grande (f) y pequeña (g) es:

$$c\left(-i\vec{P} + m\omega\vec{X}\right)g = (E - mc^2)f, \quad (\text{A.3})$$

$$c\left(i\vec{P} + m\omega\vec{X}\right)f = (E + mc^2)g, \quad (\text{A.4})$$

en el caso de f , el sistema se puede resolver aplicando el operador siguiente:

$$\begin{aligned} c^2\left(-i\vec{P} + m\omega\vec{X}\right)\left(i\vec{P} + m\omega\vec{X}\right)f &= (E + mc^2)c\left(-i\vec{P} + m\omega\vec{X}\right)g \\ &= (E^2 - m^2c^4)f, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

por tanto, para resolver el lado izquierdo basta con aplicar una multiplicación de operadores:

$$c^2(-i\vec{P} + m\omega\vec{X})(i\vec{P} + m\omega\vec{X}) = c^2[\vec{P}^2 + m^2\omega^2\vec{X}^2 + im\omega[\vec{X}, \vec{P}]], \quad (\text{A.6})$$

en este punto se utiliza el conmutador usual $[\vec{X}, \vec{P}] = i\hbar$, y la ecuación para la componente grande es:

$$c^2[\vec{P}^2 + m^2\omega^2\vec{X}^2 - \hbar m\omega]f = (E^2 - m^2c^4)f. \quad (\text{A.7})$$

Existe poca bibliografía del oscilador de Dirac en el espacio de momentos ¹, por lo que se pretende resolver mediante los siguientes operadores usuales en el espacio de momentos [1], en este espacio se tienen resultados del oscilador de Dirac en el espacio de momentos:

$$P = p, \quad x = i\hbar\frac{d}{dp}, \quad (\text{A.8})$$

con base en este cambio de operadores, la ecuación diferencial para la componente grande a resolver:

$$c^2\left[p^2 - m^2\hbar^2\omega^2\frac{d^2}{dp^2}\right]f = (E^2 - m^2c^4 + mc^2\hbar\omega)f, \quad (\text{A.9})$$

dividiendo por $mc^2\hbar\omega$ se tiene:

$$\frac{1}{m\hbar\omega}p^2f - m\hbar\omega\frac{d^2f}{dp^2} = \frac{E^2 - m^2c^4 + mc^2\hbar\omega}{mc^2\hbar\omega}f, \quad (\text{A.10})$$

es necesario definir una cantidad adimensional $\Theta = \frac{E^2 - m^2c^4 + mc^2\hbar\omega}{mc^2\hbar\omega}$ para simplificar el cálculo:

$$\frac{1}{m\hbar\omega}p^2f - m\hbar\omega\frac{d^2f}{dp^2} = \Theta f, \quad (\text{A.11})$$

definimos $u = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p$ para tener:

$$\frac{d^2f}{du^2} + (\Theta - u^2)f = 0, \quad (\text{A.12})$$

esta ecuación diferencial ya tiene soluciones conocidas, la solución para la componente

¹Se puede encontrar a partir de las soluciones del oscilador de Dirac en el espacio de posición [29], aplicando una transformada de Fourier al espacio de momento.

grande es:

$$f = Ae^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u), \quad (\text{A.13})$$

siendo $H_n(u)$ los polinomios de Hermite de orden n y A una constante de normalización. Luego para encontrar g , basta con usar la ecuación:

$$c \left(ip + i\hbar m\omega \frac{d}{dp} \right) f = (E + mc^2)g, \quad (\text{A.14})$$

haciendo el cambio de variable $u = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p$, se tiene:

$$ci\sqrt{m\hbar\omega} \left(u + \frac{d}{du} \right) f = (E + mc^2)g, \quad (\text{A.15})$$

luego usando la solución de la componente grande:

$$\left(u + \frac{d}{du} \right) Ae^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u) = Ae^{-\frac{u^2}{2}} H'_n(u), \quad (\text{A.16})$$

una propiedad conocida de los polinomios de Hermite es la siguiente identidad: $H'_n(u) = 2nH_{n-1}(u)$, luego g viene dada por:

$$\frac{2Acn\sqrt{m\hbar\omega}}{(E + mc^2)} e^{-\frac{u^2}{2}} H_{n-1}(u) = g. \quad (\text{A.17})$$

La constante de normalización es calculada en el rango de momentos $[-\infty, \infty]$, siendo un intervalo abierto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[f_n^* \left(\frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right) f_n \left(\frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right) + g_n^* \left(\frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right) g_n \left(\frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right) \right] dp = 1. \quad (\text{A.18})$$

Haciendo el cambio de variable de $u = \frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}$, se tiene:

$$\sqrt{m\omega\hbar}A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-u^2} H_n^2(u) + \left(\frac{2cn\sqrt{m\hbar\omega}}{(E + mc^2)} \right)^2 e^{-u^2} H_{n-1}^2(u) \right] du = 1, \quad (\text{A.19})$$

Las condiciones de ortogonalidad de los polinomios de Hermite respecto a la función peso ya son conocidas, por tanto:

$$\sqrt{m\omega\hbar\pi}A^2 \left[2^n n! + \left(\frac{2cn\sqrt{m\hbar\omega}}{(E + mc^2)} \right)^2 2^{n-1}(n-1)! \right] = 1, \quad (\text{A.20})$$

esto implica que la constante de normalización tiene el siguiente resultado:

$$A = \left[\sqrt{m\omega\hbar\pi} \left[2^n n! + \left(\frac{2cn\sqrt{m\hbar\omega}}{(E + mc^2)} \right)^2 2^{n-1}(n-1)! \right] \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.21})$$

El espectro de energía para el oscilador de Dirac viene dado como sigue:

$$\Theta = 2n + 1, \quad (\text{A.22})$$

por tanto, el espectro energético es:

$$E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2n \frac{\hbar\omega}{mc^2}}, \quad (\text{A.23})$$

este espectro admite soluciones positivas y negativas. Luego las soluciones espaciales para energía positiva son:

$$f_n(u) = \sqrt{\frac{E_n + mc^2}{2^{n+1}n!\sqrt{m\omega\hbar\pi}E_n}} e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u), \quad (\text{A.24})$$

$$g_n(u) = \sqrt{\frac{E_n - mc^2}{2^n(n-1)!\sqrt{m\omega\hbar\pi}E_n}} e^{-\frac{u^2}{2}} H_{n-1}(u). \quad (\text{A.25})$$

Apéndice B

Cálculo del límite $\beta \rightarrow 0$ de las soluciones de Nouicer: el oscilador de Dirac con correcciones GUP

Las soluciones de Nouicer para el oscilador de Dirac en presencia de longitud mínima [49] son:

$$f_n(p) = N(1 + \beta p^2)^{-\lambda/2} C_n^\lambda \left(\frac{p\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 + \beta p^2}} \right), \quad (\text{B.1})$$

$$g_n(p) = \frac{2Nc}{\sqrt{\beta}(E_n + mc^2)} (1 + \beta p^2)^{-\lambda-1} C_{n-1}^{\lambda+1} \left(\frac{p\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 + \beta p^2}} \right), \quad (\text{B.2})$$

siendo $\lambda = \frac{1}{m\omega\hbar\beta}$, β el parámetro de deformación, f y g componente grande y pequeña, respectivamente, y C los polinomios de Gegenbauer o ultrasféricos [62]. Con un espectro de energía:

$$E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2n \frac{\omega\hbar}{mc^2} + \beta \frac{\omega^2 \hbar^2 n^2}{c^2}}, \quad n = 0, 1, 2. \quad (\text{B.3})$$

La constante de normalización viene dada por:

$$N = \frac{2^\lambda \beta^{1/4}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\Gamma(2\lambda + n)}{n!(n + \lambda)[\Gamma(\lambda)]^2} + \frac{c^2}{\beta(E_n + mc^2)^2} \frac{\Gamma(2\lambda + n + 1)}{(n - 1)!(n + \lambda)[\Gamma(\lambda + 1)]^2} \right]^{-1/2}, \quad (\text{B.4})$$

donde Γ representa la función gamma. En este punto es necesario aplicar el límite de HUP a las soluciones de Nouicer para recuperar el límite cuántico-relativista de las soluciones del oscilador de Dirac, por tanto, al aplicar el límite $\beta \rightarrow 0$ en la componente grande se tiene que $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_n(p) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[N(1 + \beta p^2)^{-\lambda/2} C_n^\lambda \left(\frac{p\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 + \beta p^2}} \right) \right], \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (1 + \beta p^2)^{-\lambda/2} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[N C_n^\lambda \left(\frac{p\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 + \beta p^2}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

esto se simplifica si se calcula por partes:

■

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (1 + \beta p^2)^{-\lambda/2} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p^2}{m\omega\hbar\lambda} \right)^{-\lambda/2}, \quad (\text{B.6})$$

con el cambio de variable siguiente:

$$u = \frac{m\omega\hbar\lambda}{p^2}, \quad \lambda \rightarrow \infty, u \rightarrow \infty, \quad (\text{B.7})$$

luego:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p^2}{m\omega\hbar\lambda} \right)^{-\lambda/2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^{\frac{-up^2}{2m\omega\hbar}}, \quad (\text{B.8})$$

Al usar la siguiente identidad:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, \quad (\text{B.9})$$

es posible simplificar:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^{\frac{-up^2}{2m\omega\hbar}} = \left[\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^u \right]^{\frac{-p^2}{2m\omega\hbar}} = \exp \left(\frac{-p^2}{2m\omega\hbar} \right), \quad (\text{B.10})$$

■ por el otro lado se tiene:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[NC_n^\lambda \left(\frac{p\sqrt{\beta}}{\sqrt{1+\beta p^2}} \right) \right], \quad (\text{B.11})$$

en términos de λ es:

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{2^\lambda \beta^{1/4} C_n^\lambda \left(\frac{p\sqrt{\beta}}{\sqrt{1+\beta p^2}} \right)}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2} + \frac{c^2}{\beta(E_n+mc^2)^2} \frac{\Gamma(2\lambda+n+1)}{(n-1)!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda+1)]^2} \right]^{-1/2} \right], \\ & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{2^\lambda \left(\frac{1}{m\omega\hbar\lambda} \right)^{1/4} C_n^\lambda \left(\sqrt{\frac{p^2}{m\omega\hbar\lambda+p^2}} \right)}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2} + \frac{c^2}{\frac{1}{m\omega\hbar\lambda}(E_n+mc^2)^2} \frac{\Gamma(2\lambda+n+1)}{(n-1)!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda+1)]^2} \right]^{-1/2} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

luego:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{2^\lambda C_n^\lambda \left(\sqrt{\frac{p^2}{m\omega\hbar\lambda+p^2}} \right)}{(m\omega\hbar)^{1/4} (\lambda)^{1/4} \sqrt{2\pi}} \left[\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2} + \frac{mc^2\hbar\omega}{(E_n+mc^2)^2} \frac{\lambda\Gamma(2\lambda+n+1)}{(n-1)!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda+1)]^2} \right]^{-1/2} \right], \quad (\text{B.13})$$

obteniendo factores comunes:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{2^\lambda C_n^\lambda \left(\sqrt{\frac{p^2}{m\omega\hbar\lambda+p^2}} \right)}{(m\omega\hbar)^{1/4} (\lambda)^{1/4} \sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{n!(n+\lambda)} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{[\Gamma(\lambda)]^2} + \frac{nmc^2\hbar\omega}{(E_n+mc^2)^2} \frac{\lambda\Gamma(2\lambda+n+1)}{[\Gamma(\lambda+1)]^2} \right]^{-1/2} \right], \quad (\text{B.14})$$

es necesario usar propiedades de la función Gamma [62] para reducir:

$$\begin{aligned} \Gamma(2\lambda+n) &= (2\lambda+n-1)(2\lambda+n-2)\dots(2\lambda)\Gamma(2\lambda) = P\Gamma(2\lambda), \\ \Gamma(2\lambda+n+1) &= (2\lambda+n)(2\lambda+n-1)\dots(2\lambda)\Gamma(2\lambda) = P'\Gamma(2\lambda), \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Siendo P y P' los productos anteriores y usando la fórmula doble de Gamma [62]:

$$\Gamma(2\lambda) = \frac{2^{2\lambda-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+1/2), \quad (\text{B.16})$$

se simplifica

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{2^\lambda G_n^\lambda \left(\sqrt{\frac{p^2}{m\omega\hbar\lambda + p^2}} \right)}{(m\omega\hbar)^{1/4} (\lambda)^{1/4} \sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{n!(n+\lambda)} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{P2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+1/2)}{\sqrt{\pi}[\Gamma(\lambda)]^2} + \frac{nmc^2\hbar\omega}{(E_n + mc^2)^2} \frac{\lambda P'2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+1/2)}{\sqrt{\pi}\lambda^2[\Gamma(\lambda)]^2} \right]^{-1/2} \right], \quad (\text{B.17})$$

nuevamente, en esta parte es necesario separar términos:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{P2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)} + \frac{nmc^2\hbar\omega}{(E_n + mc^2)^2} \frac{P'2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda+1/2)}{\sqrt{\pi}\lambda\Gamma(\lambda)} \right]^{-1/2}, \quad (\text{B.18})$$

para este caso, es necesario aplicar la siguiente igualdad [62]:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\lambda+a)}{\Gamma(\lambda)} e^{-a \ln \lambda} = 1, \quad (\text{B.19})$$

luego:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{P2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)} \frac{e^{-1/2 \ln \lambda}}{e^{-1/2 \ln \lambda}} + \frac{nmc^2\hbar\omega}{(E_n + mc^2)^2} \frac{P'2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda+1/2)}{\sqrt{\pi}\lambda\Gamma(\lambda)} \frac{e^{-1/2 \ln \lambda}}{e^{-1/2 \ln \lambda}} \right]^{-1/2}, \quad (\text{B.20})$$

al aplicar el límite a estas componentes queda:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{P2^{2\lambda-1}e^{1/2 \ln \lambda}}{\sqrt{\pi}} + \frac{nmc^2\hbar\omega}{(E_n + mc^2)^2} \frac{P'2^{2\lambda-1}e^{1/2 \ln \lambda}}{\sqrt{\pi}\lambda} \right]^{-1/2}, \quad (\text{B.21})$$

en cuanto a P y P' , se regresa a su variable:

$$P = \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(2\lambda)}, \quad (\text{B.22})$$

se puede resolver con la misma igualdad:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P e^{-n \ln(2\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(2\lambda)} e^{-n \ln(2\lambda)} = 1, \quad (\text{B.23})$$

por tanto, el resultado es:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{n \ln(2\lambda)} 2^{2\lambda-1} e^{1/2 \ln \lambda}}{\sqrt{\pi}} + \frac{nmc^2 \hbar \omega}{(E_n + mc^2)^2} \frac{e^{(n+1) \ln(2\lambda)} 2^{2\lambda-1} e^{1/2 \ln \lambda}}{\sqrt{\pi} \lambda} \right]^{-1/2}, \quad (\text{B.24})$$

simplificando:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{2^{2\lambda+n-1} \lambda^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{nmc^2 \hbar \omega}{(E_n + mc^2)^2} \frac{2^{2\lambda+n} \lambda^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \right]^{-1/2}, \quad (\text{B.25})$$

nuevamente es necesario sacar factores comunes:

$$\left(\frac{2^{n-1}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2^n nmc^2 \hbar \omega}{\sqrt{\pi} (E_n + mc^2)^2} \right)^{-1/2} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [2^{2\lambda} \lambda^{n+1/2}]^{-1/2}, \quad (\text{B.26})$$

Luego, se regresa a la ecuación original:

$$\left(\frac{2^{n-1}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2^n nmc^2 \hbar \omega}{\sqrt{\pi} (E_n + mc^2)^2} \right)^{-1/2} \times \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{2^\lambda C_n^\lambda \left(\sqrt{\frac{p^2}{m\omega \hbar \lambda + p^2}} \right)}{(m\omega \hbar)^{1/4} (\lambda)^{1/4} \sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{n!(n+\lambda)} \right]^{-\frac{1}{2}} [2^{2\lambda} \lambda^{n+1/2}]^{-1/2} \right], \quad (\text{B.27})$$

simplificando:

$$\frac{1}{(m\omega \hbar)^{1/4} \sqrt{2\pi}} \left(\frac{2^{n-1}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2^n nmc^2 \hbar \omega}{\sqrt{\pi} (E_n + mc^2)^2} \right)^{-1/2} \times \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\lambda^{-n/2} C_n^\lambda \left(\sqrt{\frac{p^2}{m\omega \hbar \lambda + p^2}} \right) \left[\frac{\lambda}{n!(n+\lambda)} \right]^{-\frac{1}{2}} \right], \quad (\text{B.28})$$

separando de nuevo:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda}{n!(n+\lambda)} \right]^{-\frac{1}{2}} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\frac{n!n}{\lambda} + n!} \right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{n!}, \quad (\text{B.29})$$

luego se tiene:

$$\frac{\sqrt{n!}}{(m\omega\hbar)^{1/4}\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2^{n-1}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2^n n m c^2 \hbar \omega}{\sqrt{\pi}(E_n + mc^2)^2} \right)^{-1/2} \times \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\lambda^{-n/2} C_n^\lambda \left(\sqrt{\frac{p^2}{m\omega\hbar\lambda + p^2}} \right) \right], \quad (\text{B.30})$$

en este caso, se debe hacer la sustitución $\lambda = \frac{\lambda'}{2}$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\lambda^{-n/2} C_n^\lambda \left(\sqrt{\frac{p^2}{m\omega\hbar\lambda + p^2}} \right) \right] = \lim_{\lambda' \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\lambda'}{2} \right)^{-n/2} C_n^{\frac{\lambda'}{2}} \left(\sqrt{\frac{p^2}{\frac{m\omega\hbar\lambda'}{2} + p^2}} \right) \right], \quad (\text{B.31})$$

sin embargo, en este límite se presenta que:

$$C_n^{\frac{\lambda'}{2}} \left(\sqrt{\frac{p^2}{\frac{m\omega\hbar\lambda'}{2} + p^2}} \right) \sim C_n^{\frac{\lambda'}{2}} \left(\frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}} \sqrt{\frac{2}{\lambda'}} \right), \quad (\text{B.32})$$

aprovechando la identidad [62]:

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \infty} (\lambda')^{-n/2} C_n^{\frac{\lambda'}{2}} \left(u \sqrt{\frac{2}{\lambda'}} \right) = \frac{2^{-n/2}}{n!} H_n(u), \quad (\text{B.33})$$

se puede llegar a:

$$\frac{1}{(m\omega\hbar)^{1/4}\sqrt{n!}\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2^{n-1}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2^n n m c^2 \hbar \omega}{\sqrt{\pi}(E_n + mc^2)^2} \right)^{-1/2} H_n \left(\frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right), \quad (\text{B.34})$$

mediante manipulación algebraica se llega a:

$$\sqrt{\frac{E_n + mc^2}{\sqrt{m\omega\hbar\pi n!} 2^{n+1} E_n}} H_n \left(\frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right), \quad (\text{B.35})$$

en conjunto con la parte exponencial calculada al inicio, la componente grande

de las soluciones de Nouicer en el límite $\beta \rightarrow 0$ es:

$$\sqrt{\frac{E_n + mc^2}{\sqrt{m\omega\hbar\pi n!2^{n+1}E_n}}} H_n\left(\frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{2m\hbar\omega}\right). \quad (\text{B.36})$$

En cuanto a la componente pequeña, el cálculo es similar.

Apéndice C

Aplicación del nuevo principio de correspondencia sobre las soluciones del oscilador de Dirac en el espacio de momentos

Las soluciones del oscilador de Dirac en el espacio de momento para soluciones positivas (apéndice A) son:

$$f_n(u) = \sqrt{\frac{E_n + mc^2}{2^{n+1}n!\sqrt{m\omega\hbar\pi}E_n}} e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u), \quad (\text{C.1})$$

$$g_n(u) = \sqrt{\frac{E_n - mc^2}{2^n(n-1)!\sqrt{m\omega\hbar\pi}E_n}} e^{-\frac{u^2}{2}} H_{n-1}(u), \quad (\text{C.2})$$

con $u = \frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}$. La densidad de probabilidad cuántica-relativista viene dada por:

$$\rho_n^{RQM} = |f_n(p)|^2 + |g_n(p)|^2. \quad (\text{C.3})$$

De esta manera, la densidad de probabilidad es:

$$\begin{aligned} \rho_n^{RQM}(p) &= \frac{E_n + mc^2}{2^{n+1}n!\sqrt{m\omega\hbar\pi}E_n} \exp\left(-\frac{p^2}{m\hbar\omega}\right) H_n^2\left(\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}p\right) \\ &+ \frac{E_n - mc^2}{2^n(n-1)!\sqrt{m\omega\hbar\pi}E_n} \exp\left(-\frac{p^2}{m\hbar\omega}\right) H_{n-1}^2\left(\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}p\right), \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

es necesario definir las siguientes cantidades:

$$\alpha = \frac{1}{m\hbar\omega}, \quad |a_n|^2 = \frac{E_n + mc^2}{2^{n+1}n!\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}E_n}, \quad |a'_n|^2 = \frac{E_n - mc^2}{2^n(n-1)!\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}E_n}, \quad (\text{C.5})$$

luego, la ecuación es más simple:

$$\rho_n^{RQM}(p) = |a_n|^2 \exp(-\alpha p^2) H_n^2(\sqrt{\alpha}p) + |a'_n|^2 \exp(-\alpha p^2) H_{n-1}^2(\sqrt{\alpha}p). \quad (\text{C.6})$$

La propuesta metodológica para obtener el límite clásico implica aplicar la transformada de Fourier directa a un espacio cualquiera, en este caso k :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\rho_n^{RQM}(p)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [|a_n|^2 \exp(-\alpha p^2) H_n^2(\sqrt{\alpha}p)] e^{-ikp} dp \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [|a'_n|^2 \exp(-\alpha p^2) H_{n-1}^2(\sqrt{\alpha}p)] e^{-ikp} dp, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

en este caso se puede hacer el cálculo de la transformada del primer término, de esta manera simplemente se generaliza al segundo término. Es necesario definir cambios de variables que sean lineales:

$$u = \sqrt{\alpha}p, \quad du = \sqrt{\alpha}p, \quad (\text{C.8})$$

además, si $p \rightarrow \pm\infty$ entonces $u \rightarrow \pm\infty$, luego:

$$\frac{|a_n|^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha p^2) H_n^2(\sqrt{\alpha}p) e^{-ikp} dp = \frac{|a_n|^2}{\sqrt{2\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) H_n^2(u) e^{-i\frac{ku}{\sqrt{\alpha}}} du, \quad (\text{C.9})$$

no obstante, se puede explotar la paridad de los polinomios de Hermite:

$$\frac{|a_n|^2}{\sqrt{2\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) H_n^2(u) e^{-i\frac{ku}{\sqrt{\alpha}}} du = \frac{2|a_n|^2}{\sqrt{2\pi\alpha}} \int_0^{\infty} \exp(-u^2) H_n^2(u) \cos\left(\frac{ku}{\sqrt{\alpha}}\right) du, \quad (\text{C.10})$$

En el trabajo de Gradshteyn [62] se puede encontrar que la transformada de Fourier de los polinomios de Hermite es:

$$\frac{2|a_n|^2}{\sqrt{2\pi\alpha}} \int_0^\infty \exp(-u^2) H_n^2(u) \cos\left(\frac{ku}{\sqrt{\alpha}}\right) du = \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} \exp\left(-\frac{k^2}{4\alpha}\right) L_n\left(\frac{k^2}{2\alpha}\right), \quad (\text{C.11})$$

donde $L_n(u)$ son los polinomios de Laguerre de orden n , con:

$$|A_n|^2 = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2^n n!}. \quad (\text{C.12})$$

En general, la densidad de probabilidad cuántica-relativista en el espacio k viene dada por:

$$\rho_n^{RQM}(k) = \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} \exp\left(-\frac{k^2}{4\alpha}\right) L_n\left(\frac{k^2}{2\alpha}\right) + \frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} \exp\left(-\frac{k^2}{4\alpha}\right) L_{n-1}\left(\frac{k^2}{2\alpha}\right). \quad (\text{C.13})$$

La propuesta metodológica sugiere encontrar el comportamiento asintótico para un $n \gg 1$ en la densidad de probabilidad cuántica-relativista. En el trabajo de Gabor [63] se encuentra el comportamiento asintótico para los polinomios de Laguerre:

$$\begin{aligned} F(u^2) &= e^{-\frac{u^2}{2}} L_n(u^2) \sim J_0(2\sqrt{N}u) \\ &- \frac{\pi}{2} \int_0^u t^3 F(t^2) \left[J_0(2\sqrt{N}u) Y_0(2\sqrt{N}t) - J_0(2\sqrt{N}t) Y_0(2\sqrt{N}u) \right] dt, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

donde J_0 y Y_0 son las funciones de Bessel de primer y segunda especie, respectivamente. Luego la densidad de probabilidad en el límite asintótico es:

$$\begin{aligned} \rho_N^{RQM}(k) &= \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} J_0\left(2\sqrt{N_1} \frac{k}{\sqrt{2\alpha}}\right) + \mathcal{O}_1 \\ &+ \frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} J_0\left(2\sqrt{N_2} \frac{k}{\sqrt{2\alpha}}\right) + \mathcal{O}_2, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

con los siguientes residuos cuánticos-relativistas:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= -\frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{k}{\sqrt{2\alpha}}} t^3 F(t^2) \left[J_0 \left(2\sqrt{N_1} \frac{k}{\sqrt{2\alpha}} \right) Y_0 \left(2\sqrt{N_1} t \right) \right. \\ &\quad \left. - J_0 \left(2\sqrt{N_1} t \right) Y_0 \left(2\sqrt{N_1} \frac{k}{\sqrt{2\alpha}} \right) \right] dt, \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_2 &= -\frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{k}{\sqrt{2\alpha}}} t^3 F(t^2) \left[J_0 \left(2\sqrt{N_2} \frac{k}{\sqrt{2\alpha}} \right) Y_0 \left(2\sqrt{N_2} t \right) \right. \\ &\quad \left. - J_0 \left(2\sqrt{N_2} t \right) Y_0 \left(2\sqrt{N_2} \frac{k}{\sqrt{2\alpha}} \right) \right] dt, \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

con $N_1 = n + \frac{1}{2}$ y $N_2 = n - \frac{1}{2}$. El espectro de energía considerado para este caso es:

$$E_n^2 = m^2 c^4 + \beta \omega^2 \hbar^2 n^2 m^2 c^2 + 2n\omega \hbar m c^2, \quad (\text{C.18})$$

y la energía del oscilador relativista:

$$E_{RM}^2 = \gamma^2 m^2 c^4, \quad (\text{C.19})$$

igualando ambas energías:

$$m^2 c^4 + \beta \omega^2 \hbar^2 n^2 m^2 c^2 + 2n\omega \hbar m c^2 = \gamma^2 m^2 c^4, \quad (\text{C.20})$$

se tiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$An^2 + Bn + C = 0, \quad (\text{C.21})$$

con:

$$A = \beta \omega^2 \hbar^2 m^2 c^2, \quad B = 2\omega \hbar m c^2, \quad C = (1 - \gamma^2) m^2 c^4. \quad (\text{C.22})$$

Los valores que puede tener n son:

$$n_{\pm} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (\text{C.23})$$

n tiene la propiedad $n \geq 0$, esto implica no tomar la parte negativa, luego:

$$n = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2 c^2} - 1}{\beta m \hbar \omega}, \quad (\text{C.24})$$

este valor es necesario para fijar el valor de la energía cuántica a la energía relativista, en general, el argumento de la función de Bessel es:

$$\rho_N^{RQM}(k) \sim \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} J_0(\delta_1 k) + \mathcal{O}_1 + \frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} J_0(\delta_2 k) + \mathcal{O}_2, \quad (\text{C.25})$$

con:

$$\delta_1 = \sqrt{m \hbar \omega (2n + 1)}, \quad \delta_2 = \sqrt{m \hbar \omega (2n - 1)}, \quad (\text{C.26})$$

este argumento debe ser modificado introduciendo el valor de n modificado ¹

$$n = \frac{(\gamma^2 - 1)mc^2}{\hbar \omega \left(\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2 c^2} + 1 \right)}, \quad (\text{C.27})$$

esto implica que los argumentos se pueden expresar como sigue:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sqrt{\frac{2(\gamma^2 - 1)m^2 c^2 + m \hbar \omega \left(\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2 c^2} + 1 \right)}{\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2 c^2} + 1}}, \\ \delta_2 &= \sqrt{\frac{2(\gamma^2 - 1)m^2 c^2 - m \hbar \omega \left(\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2 c^2} + 1 \right)}{\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2 c^2} + 1}}. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

El siguiente paso metodológico implica recuperar la información al espacio de momentos, por eso se obtiene la transformada inversa de Fourier a la ecuación (C.25):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left(\rho_N^{RQM}(k) \right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} J_0(\delta_1 k) + \mathcal{O}_1 \right] e^{ikp} dk \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} J_0(\delta_2 k) + \mathcal{O}_2 \right] e^{ikp} dk. \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Esta integral puede ser resuelta utilizando una componente y generalizando para la

¹Algebraicamente se ha trabajado la ecuación (C.24) multiplicando y dividiendo por $\sqrt{1 - (1 - \gamma^2)\beta m^2 c^2} + 1$.

otra componente, sin embargo, se puede aprovechar diversos textos matemáticos [62] y concluir que la transformada inversa de la función de Bessel de orden 0 es:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} \int_0^\infty J_0(\delta_1 k) \cos(kp) dk = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} \frac{1}{\sqrt{\delta_1^2 - p^2}}, \quad (\text{C.30})$$

esto implica que la densidad de probabilidad cuántica-relativista en el espacio de momentos con un número cuántico $N \gg 1$ y con cota energética $E_N^{RQM} = E^{RM}$ es:

$$\rho_N^{RQM}(p) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} \frac{1}{\sqrt{\delta_1^2 - p^2}} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} \frac{1}{\sqrt{\delta_2^2 - p^2}} + \mathcal{Q}, \quad (\text{C.31})$$

con:

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty [\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2] e^{ikp} dk. \quad (\text{C.32})$$

La ec. (C.32) puede ser reescrita en términos iterados [2, 10, 26]:

$$\mathcal{Q} = \frac{|a_n|^2}{|A_n|^2} \frac{1}{2\pi\delta_1} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{-\hbar^2}{S_1^2} \right)^j i_j(p, \delta_1) + \frac{|a'_n|^2}{|A_{n-1}|^2} \frac{1}{2\pi\delta_2} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{-\hbar^2}{S_2^2} \right)^j i_j(p, \delta_2), \quad (\text{C.33})$$

con $S_1 = \frac{\pi\delta_1^2}{m\omega}$ y $S_2 = \frac{\pi\delta_2^2}{m\omega}$.

Apéndice D

Energía del oscilador relativista

El oscilador relativista no posee soluciones analíticas, sin embargo, es posible encontrar la energía de un oscilador con correcciones mínimas [64], la Lagrangiana relativista de este sistema es asociado a un campo escalar ϕ como sigue:

$$L = \frac{1}{2} m u_\nu u^\nu + \frac{\phi}{c} \sqrt{u_\nu u^\nu}, \quad (\text{D.1})$$

la cual equivale a una partícula de masa m en un campo escalar ϕ . El campo escalar asociado a un movimiento de un oscilador es:

$$\phi = -\frac{1}{2} k (x_\sigma - a_\sigma) (x^\sigma - a^\sigma) = \frac{1}{2} k [(\vec{r} - \vec{a})^2 - (\vec{x}_0 - \vec{a}_0)^2], \quad (\text{D.2})$$

con k una constante de proporcionalidad, en el caso que dos relojes que están sincronizados, la parte temporal se anula $(\vec{x}_0 - \vec{a}_0) = 0$, y a la vez el origen de coordenadas se asume en $\vec{a} = 0$, por tanto, el campo escalar para un oscilador es:

$$\phi = \frac{1}{2} k r^2, \quad (\text{D.3})$$

luego la ecuación de movimiento es:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(m + \frac{1}{2} \frac{k r^2}{c^2} \right) u^\nu \right] = -k x^\nu, \quad (\text{D.4})$$

se trabaja en una dimensión por lo que $r = x$, en $\nu = 0$ se tiene:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(m + \frac{1}{2} \frac{k x^2}{c^2} \right) c\gamma \right] = 0, \quad (\text{D.5})$$

esto implica que:

$$E = cte = \frac{mc^2 + \frac{kx^2}{2}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}, \quad (\text{D.6})$$

despejando \dot{x}^2 :

$$\dot{x}^2 = \frac{c^2}{E^2} \left[E^2 - m^2 c^4 - \frac{k^2 x^4}{4} - mkx^2 c^2 \right], \quad (\text{D.7})$$

para el caso que las condiciones iniciales de este sistema son $\dot{x}(0) = v_0$ y $x(0) = 0$ se tiene:

$$v_0^2 = \frac{c^2}{E^2} [E^2 - m^2 c^4] \quad (\text{D.8})$$

de esta manera, se puede encontrar que la energía del oscilador relativista es:

$$E = \gamma mc^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}. \quad (\text{D.9})$$

En el límite no relativista esta energía converge a $E \sim \frac{p_0^2}{2m}$, con $p_0 = mv_0$.