UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

Universidad de El Salvador
Hacia la libertad por la cultura

LÓGICA DIFUSA Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

PRESENTADO POR:
ALBA ALVARENGA QUIJADA.
FIDEL ALFREDO SALAZAR SANTANA.

PARA OPTAR AL GRADO DE:
LICENCIADO/A EN MATEMÁTICA

ASESOR:
DR. AARÓN ERNESTO RAMÍREZ FLORES

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, SEPTIEMBRE DE 2018.

Índice

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS PERIODO 2015 – 2019

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:
Maestro Roger Armando Arias Alvarado
VICERRECTOR ACADÉMICO:
Dr. Manuel de Jesús Joya Ábrego
VICERRECTOR ADMINISTRATIVO:
Ing. Nelson Bernabé Granados
SECRETARIO GENERAL:
Lic. Cristobal Hernán Ríos Benítez
DEFENSORA DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS:
Licda. Claudia María Melgar de Zambrana
FISCAL:
Lic. Rafael Humberto Peña Marín.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:
Lic. Mauricio Hernán Lovo
VICE DECANO:
Lic. Carlos Antonio Quintanilla Aparicio
SECRETARIA:
Lic. Damarys Melany Herrera Turcios

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR:
Dr. José Nerys Funes Torres
SECRETARIA:
MSc. Alba Idalia Córdova Cuéllar.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes y experiencias.

A mis amados padres por el constante apoyo incondicional que me han brindado durante toda mi vida y sobre todo por ser el mejor ejemplo de vida a seguir.

A mi hermana Mary Quijada que ha sido como una segunda madre para mí y a su esposo William López, quien es como mi hermano mayor, por apoyarme incondicionalmente durante mi carrera.

Al Dr. Riquelmi Cardona por ser el mejor esposo que Dios pudo darme y por su paciencia al ayudarnos en este trabajo de tesis.

A nuestro asesor Dr. Aarón Ernesto Flores, por su profesionalismo y entrega al asesorar nuestro trabajo de tesis

A Fidel por haber sido un excelente compañero de tesis y amigo, por haberme tenido la paciencia necesaria y por motivarme a seguir adelante siempre.

Alba Quijada

Agradezco a Dios principalmente, por haberme protegido y permitido llegar hasta este momento, por haber superado conmigo todas las dificultes del camino y darme fuerzas para seguir adelante.

A mis padres y familiares; por los consejos y apoyo incondicional que me brindaron durante toda mi carrera.

A nuestro asesor Dr. Aarón Flores y al Dr. Riquelmi Cardona, por haber dedicado su valioso tiempo al apoyo de nuestro trabajo.

A mi compañera de tesis Alba, por haber sido un motor de motivación y empuje para lograr culminar nuestra investigación. A todos esos amigos que de una u otra forma me brindaron apoyo para lograrlo.

Fidel Salazar

1. Resumen.

La Lógica Difusa es una lógica multivaluada que permite representar matemáticamente la incertidumbre y la vaguedad, proporcionando herramientas formales para su tratamiento. Se basa en la teoría de conjuntos difusos. Se definen también las operaciones de unión, intersección, negación o complemento, y otras operaciones sobre conjuntos, en los que se basa esta lógica. Para cada conjunto difuso existe asociada una función de pertenencia para sus elementos que indican en qué medida el elemento forma parte de ese conjunto.

En resumen, en este trabajo se estudia las propiedades y resultados más importantes de la lógica proposicional y cálculo de predicados Booleano y se extiende esta teoría a la lógica multivalor, es decir, a la lógica que toma valores de verdad (o grados de verdad) en el conjunto $[0, 1]$ esta es la base para introducir la lógica difusa y se concluye con la introducción de algunas aplicaciones en control difuso.

2. Introducción.

La forma en que la gente piensa es inherentemente difusa. La forma en que percibimos el mundo está cambiando continuamente y no siempre se puede definir en términos de sentencias verdaderas o falsas (ver en [5]).

La lógica estudia la noción de consecuencia. Se trata de proposiciones, conjunto de proposiciones y la relación de consecuencia que existe entre ellas. La tarea de la lógica formal es representar todo esto por medio de cálculo lógico bien definido. A menudo un cálculo lógico tiene dos nociones de consecuencia: sintáctico (basado en la noción de *prueba*) y semántico (basado sobre la noción de *verdad*); entonces las preguntas ¿demostrabilidad implica verdad? (solidez) y ¿verdad implica demostrabilidad? (completitud) se presentan de manera natural.

Difuso es imprecisión (vaguedad); una proposición difusa puede ser verdadera en algún grado. La palabra "crisp" se utilizará para indicar que algo no es difuso. Los ejemplos estándar de proposiciones difusas a menudo usan una variable lingüística. Por ejemplo, *edad* es una variable difusa con posibles valores: joven, adulto, viejo; entonces la oración "El paciente es joven" es verdadera para algún grado, es decir cuanto menor es la edad del paciente (medida en años), más verdadera es la oración. El valor de verdad de una proposición difusa es un problema de grado.

Se debe distinguir entre el término difuso e incertidumbre como un grado de verdad. Comparemos la proposición anterior con la proposición "El paciente sobrevivirá la siguiente semana"; esto puede ser considerado como una proposición no difusa la cual es o bien verdadera (absolutamente) o falsa (absolutamente); pero no se sabe cual es el caso. Se puede tener alguna probabilidad de que la oración sea verdadera, pero la probabilidad no es un grado de verdad.

El principal objetivo es elaborar en detalle las propiedades estrictamente lógicas de la lógica multivalor cuyo conjuntos de valores de verdad es el intervalo $[0, 1]$ y se discutirá una aplicación desde el punto de vista lógico.

3. Metodología.

A continuación se describe los aspectos importantes de la metodología de trabajo del presente tema de investigación.

1 Tipo de investigación. Esta investigación es bibliográfica debido a que se ha hecho una recopilación de libros, artículos, y otras fuentes que han permitido obtener información relevante al tema. El objetivo es recopilar de manera sistemática la información mas útil y destacada del tema incluyendo las aplicaciones.

2 Forma de trabajo. Se tendrán reuniones semanales para discutir las dudas y revisar los avances. Los avances se presentarán al asesor cada semana.

3 Exposiciones. Se realizarán exposiciones de avances al asesor, la presentación del perfil y la defensa final.

4. Preliminares.

4.1. Un Estudio de la Lógica Proposicional Boolena

En la Lógica proposicional Booleana, las proposiciones son verdaderas o falsas. Por lo general se denota "verdadero" con el número 1 y "falso" con el número 0 y se trabaja con variables proposicionales $p_1, p_2, p_3, ...$ Una evaluación de verdad es un mapeo e que asigna a cada variable proposicional su valor de verdad $e(p)$. Las *fórmulas* son la equivalencia formal de la noción intuitiva de una proposición; son construidas a partir de las variables proposicionales y las dos constantes proposicionales $\bar{0}$ y $\bar{1}$ usando conectivos: *implicación* $\rightarrow$, *conjunción* $\wedge$, *disyunción* $\vee$, *equivalencia* $\equiv$ y negación $\neg$.

Las variables proposicionales y las constantes proposicionales son *fórmulas*; si ϕ, ψ son fórmulas entonces $(\phi \rightarrow \psi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \equiv \psi), \neg\phi$ son fórmulas.

El *principio de funcionalidad de verdad* dice que los valores de verdad de las partes de una fórmula determinan de manera única el valor de verdad de una fórmula compuesta. Esto se logra al definir las funciones de verdad de los conectivos de la siguiente manera:

	(-)
1	0
0	1

$\Rightarrow$	1	0
1	1	0
0	1	1

$\cap$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\cup$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\Leftrightarrow$	1	0
1	1	0
0	0	1

Usando esto, cada evaluación e extiende de manera única a una evaluación de todas las fórmulas como sigue.

$$
\begin{gathered}
e(\neg\phi) = (-)e(\phi), \\
e(\phi \rightarrow \psi) = (e(\phi) \Rightarrow e(\psi)), \\
e(\phi \wedge \psi) = (e(\phi) \cap e(\psi)), \\
e(\phi \vee \psi) = (e(\phi) \cup e(\psi)), \\
e(\phi \equiv \psi) = (e(\phi) \Leftrightarrow e(\psi))
\end{gathered}
$$

Definición 4.1. Una fórmula ϕ es una tautología si $e(\phi) = 1$ para cada evaluación de ϕ. Las fórmulas ϕ, ψ son semánticamente equivalentes si $e(\phi) =$

$e(\psi)$ para cada e. Nótese que ϕ, ψ son semánticamente equivalentes ssi $\phi \equiv \psi$ es una tautología.

Ejemplo 4.1. Las fórmulas siguientes son tautologías Booleanas, para cada ϕ y ψ

$$\begin{array}{rcl} \neg\phi & \equiv & (\phi \to \bar{0}) \\ \bar{1} & \equiv & (\bar{0} \to \bar{0}) \\ (\phi \wedge \psi) & \equiv & \neg(\phi \to \neg\psi) \\ (\phi \vee \psi) & \equiv & ((\phi \to \psi) \to \psi) \\ (\phi \equiv \psi) & \equiv & ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)) \end{array}$$

Con esto podemos observar que en cálculo proposicional Booleano cada fórmula es semánticamente equivalente a una fórmula construida con variables proposicionales y la constante $\bar{0}$ usando solamente el conectivo $\to$.

Lema 4.1. Las siguientes fórmulas son tautologías Booleanas para cada ϕ, ψ y χ:

$$\phi \to (\psi \to \phi)$$
$$(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$$
$$(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$$

A estas tres fórmulas se les llama $(Bool1)$, $(Bool2)$ y $(Bool3)$ respectivamente y se toman como axiomas del sistema deductivo Bool de la lógica Boleana.
La regla de deducción es *modus ponens*: de ϕ y $\phi \to \psi$ se infiere ψ.

Definición 4.2. Una prueba en Bool es una secuencia $\phi_1, ..., \phi_n$ de fórmulas tales que cada uno es un axioma de Bool o se sigue de algunos ϕ_j, ϕ_k $(j, k < i)$ anteriores, por *modus ponens.*
Una fórmula es demostrable (Notación: $\vdash \phi$) si es el último término de una prueba en Bool.

Lema 4.2 (Solidez.)**.** Cada fórmula demostrable en Bool es una tautología Booleana.

Definición 4.3. Una teoría es un conjunto de fórmulas, llamadas axiomas especiales de la teoría. Una prueba en una teoría T es una sucesión $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ de fórmulas tal que o bien cada ϕ_i es un axioma de Bool o es un axioma especial de T o se sigue de algún procedimiento ϕ_j, ϕ_k $(j, k \leq i)$ por modus ponens. Una evaluación e es un modelo de T si $e(\phi) = 1$ para cada $\phi \in T$.

Lema 4.3 (Solidez fuerte.)**.** Si $T \vdash \phi$ entonces ϕ es verdadero en cada modelo de T.

Teorema 4.1 (Teorema de deducción)**.** Sea T una teoría, ϕ, ψ fórmulas.

$$T \cup \{\phi\} \vdash \psi \text{ ssi } T \vdash (\phi \to \psi)$$

Teorema 4.2 (Completitud.)**.** Para cada fórmula ϕ,

(1) ϕ es demostrable en Bool ssi es una tautología Booleana.

(2) (*Completitud fuerte*) Sea T una teoría, ϕ una fórmula. $T \vdash \phi$ ssi ϕ es verdadero en cada modelo de T.

Ahora se tienen las propiedades de *asociatividad*, y *conmutatividad* que son tautologías Booleanas.

$$\begin{array}{rcll} (\phi \wedge \psi) & \equiv & (\psi \wedge \phi), & (\phi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \phi) \\ (\phi \wedge (\psi \wedge \chi) & \equiv & (\phi \wedge \psi) \wedge \chi, & (\phi \vee (\psi \vee \chi) \equiv (\phi \vee \psi) \vee \chi \end{array}$$

Lema 4.4. Cada fórmula que no contiene ninguna variable proposicional excepto $p_1, ..., p_n$ es semánticamente equivalente a una disjunción de una conjunción elemental finita.

4.2. Cálculo de Predicado Booleano

En cálculo proposicional las fórmulas atómicas no tienen estructura, son solamente variables proposicionales. En cálculo de predicado las fórmulas atómicas tienen estructura: Cada átomo consiste de un predicado y algunos términos que forman los argumentos del predicado. Los objetos variables son términos particulares; las variables pueden ser cuantificadas usando el cuantificador universal $\forall$ ("para todo") y el cuantificador existencial $\exists$("existe").

Definición 4.4. Un *Lenguaje de Predicado* consiste de un conjunto no vacío de *predicados*, cada uno de ellos con un número positivo natural que es la *aridad* y un conjunto de *objetos constantes.* Denotaremos a los predicados por $P, Q, R, ...,$ y las constantes por $c, d, ...$ Los *símbolos lógicos* acá son objetos variables $x, y, ...,$ el conectivo $\to$, las constantes de verdad $\bar{0}, \bar{1}$ y el cuantificador $\forall$. El cuantificador existencial $\exists$ es definido como $\neg\forall\neg$.

Las *fórmulas atómicas* tienen la forma $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ donde P es el predicado de aridad n y t_i son términos. Si ϕ, ψ son fórmulas y x es una variable, entonces $\phi \to \psi, (\forall x)\psi, \bar{0}, \bar{1}$ son fórmulas; cada fórmula resulta de iterar fórmulas atómicas usando esta regla.
Sea $\mathcal{J}$ un lenguaje de predicados. Una *estructura* $\mathbf{M} = \langle M, (r_P)_P, (m_c)_c \rangle$ para $\mathcal{J}$ tiene un dominio M no vacío. Para cada predicado P de aridad n una relación $r_P \subseteq M^n$ de aridad n en M (que asocia a cada n-tupla $(m_1, m_2, ...m_n)$ de elementos de M 0 o 1) y para cada objeto constante c, m_c un elemento de M.

Definición 4.5. Sea $\mathcal{J}$ un lenguaje de predicado y $\mathbf{M}$ una estructura para $\mathcal{J}$. Una $\mathbf{M}$-*evaluación* de objetos variables es un mapeo v asignando a cada x un elemento $v(x) \in M$. Sean v, v' dos evaluaciones, $v \equiv_x v'$ si se cumple que $v(y) = v'(y)$ para cada variable y distinta de x.

El valor de un término dado por M, v es definido como sigue: $\|x\|_{\mathbf{M},v} = v(x)$; $\|c\|_{\mathbf{M},v} = m_c$. Así definimos

$$\begin{gathered}
\|P(t_1, ..., t_n)\|_{\mathbf{M},v} = r_P(\|t_1\|_{\mathbf{M},v}, ..., \|t_n\|_{\mathbf{M},v});\\
\|\phi \to \psi\|_{\mathbf{M},v} = \|\phi\|_{\mathbf{M},v} \Rightarrow \|\psi\|_{\mathbf{M},v};\\
\|\bar{0}\|_{\mathbf{M},v} = 0; \|\bar{1}\|_{\mathbf{M},v} = 1;\\
\|(\forall x)\phi\|_{\mathbf{M},v} = \text{mín}\{\|\phi\|_{\mathbf{M},v'} | v \equiv_x v'\}.
\end{gathered}$$

Esta última línea significa que $\|(\forall x)\phi\|_{\mathbf{M},v}$ es 1 ssi $\forall v' \equiv_x v, \|\phi\|_{\mathbf{M},v'}$ es 1; en otro caso es 0.

Definición 4.6. Las variables libres y acotadas de una fórmula se definen de la manera siguiente:

- Una constante de verdad no es libre ni acotada.
- Si ϕ es una fórmula atómica, digamos $P(t_1, t_2, ..., t_n)$, entonces x es libre en ϕ si x es uno de los t_i; Ninguna variable es acotada en ϕ.
- Una variable x es libre en $\phi \to \psi$ si es libre en ϕ o es libre en ψ; x es acotada en $\phi \to \psi$ si es acotada en ϕ o es acotada en ψ
- Una variable x es acotada pero no libre en la fórmula $(\forall x)\phi$. Para cualquier variable y distinta de x, y es libre/acotada en $(\forall x)\phi$ si es libre/acotada en ϕ.

OBSERVACIONES.

- Por ejemplo, si se toma la fórmula $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists y)P(x,y)$, entonces y es acotada pero no libre, mientras x es acotada y libre.

- Si x no es libre en ϕ entonces el valor de verdad $\|\phi\|_{\mathbf{M},v}$ no depende de $v(x)$, es decir, si $v \equiv_x v'$ entonces $\|\phi\|_{\mathbf{M},v} = \|\phi\|_{\mathbf{M},v'}$. De aquí que si ϕ es una fórmula con variables libres $x, ...y$, $\mathbf{M}$ es un modelo y $a, ...b \in M$ entonces $\|\phi\|_{\mathbf{M}[a,...,b]}$ representa $\|\phi\|_{\mathbf{M},v}$ para algún v tal que $v(x) = a, ..., v(y) = b$.

Definición 4.7. El resultado de sustituir un término t por una variable x en una fórmula se denota por $\phi(x/t)$ y se define de la siguiente manera:

- Si ϕ es una fórmula atómica, entonces $\phi(x/t)$ resulta de ϕ reemplazando todas las ocurrencias de x en ϕ por t. $\bar{0}(x/t) = \bar{0}$, similar para $\bar{1}$.

- $(\phi \to \psi)(x/t)$ es $\phi(x/t) \to \psi(x/t)$

- $[(\forall x)\phi](x/t)$ es $(\forall x)\phi$; para cada variable y distinta de x, $[(\forall y)\phi](x/t)$ es $(\forall y)[\phi(x/t)]$.

De forma similar definimos una subfórmula:

- Cada fórmula ϕ es una subfórmula en si misma.

- Si ϕ es una subfórmula de ψ o de χ entonces ϕ es una subfórmula de $\psi \to \chi$. Si ϕ es una subfórmula de ψ, entonces ϕ es una subfórmula de $(\forall x)\psi$ (x cualquier variable.)

Cuando sustituimos una variable y por x en una fórmula ϕ puede ocurrir que una ocurrencia libre de x se convierta en una ocurrencia acotada de y. Para eliminar estas "patologías"se define lo siguiente.

Definición 4.8. Una variable y es sustituible por x en la fórmula ϕ si no hay una subfórmula de ϕ de la forma $(\forall x)\psi$ que contenga una ocurrencia de x libre en ϕ. Una constante es sustituible por cualquier variable en cualquier fórmula.

Definición 4.9. .

- Sea ϕ una fórmula de un lenguaje $\mathcal{J}$ y sea $\mathbf{M}$ una estructura para $\mathcal{J}$. El valor de verdad de ϕ en $\mathbf{M}$ es

$$\|\phi\|_{\mathbf{M}} = \text{mín}\{\|\phi\|_{\mathbf{M},v} | v \quad \mathbf{M}\text{-evaluación}\}$$

- Una fórmula ϕ de un lenguaje $\mathcal{J}$ es una tautología si $\|\phi\|_{\mathbf{M}} = 1$ para cada estructura $\mathbf{M}$, es decir, $\|\phi\|_{\mathbf{M},\mathbf{v}} = 1$ para cada estructura $\mathbf{M}$ y cada $\mathbf{M}$-evaluación de objetos variables.

Definición 4.10. Los axiomas lógicos del cálculo de predicado booleano son los axiomas del cálculo proposicional booleano más los siguientes axiomas lógicos sobre cuantificadores:

- $(\forall x)\phi(x) \to \phi(t)$ con t sustituible por x en $\phi(x)$
- $(\forall x)(\psi \to \phi) \to (\psi \to (\forall x)\phi)$ con x no libre en ψ

Las reglas de deducción son modus ponens y su generalización. Esto completa la definición de cálculo de predicado booleano; lo cual se nota por $Bool\forall$ Ahora se define la noción de prueba en una teoría.

Definición 4.11. Una prueba en una teoría T es una secuencia $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ de fórmulas tal que para cada i, ϕ_i es un axioma lógico del cálculo de predicado booleano o un axioma de T ó ϕ_i se sigue de algún miembro precedente de la secuencia por una de las reglas de deducción.

Definición 4.12. Sea T una teoría sobre $Bool\forall$, sea $\mathbf{M}$ una estructura para el lenguaje de T. $\mathbf{M}$ es un modelo de T si todos los axiomas de T son ciertos en $\mathbf{M}$; es decir, $\|\phi\|_{\mathbf{M}} = 1$ en cada $\phi \in T$.

Teorema 4.3 (Completitud fuerte de Godel)**.**

- Para cada fórmula ϕ, ϕ es demostrable en $Bool\forall$ si y sólo si ϕ es una tautología.
- Para cada ϕ y cada teoría T, $T \vdash_{Bool} \phi$ (es decir ϕ es demostrable en T sobre $Bool\forall$) si y sólo si $\|\phi\|_{\mathbf{M}} = 1$ para cada modelo de T.

Definición 4.13. Una teoría T es contradictoria si para alguna fórmula ϕ, ϕ y $\neg\phi$ son probables en T. Se dice que T es consistente si no es contradictoria.

Ahora veremos algunos ejemplos (de igualdad y orden) de teorías y sus modelos.

Ejemplo 4.2. La teoría de preorden tiene un predicado binario $\leq$ y los axiomas: reflexividad y transitividad. La teoría del preorden lineal tiene además el axioma de la dicotomía.

Los modelos de la teoría de conjuntos ordenados se llaman conjuntos ordenados. Cada modelo consite en un conjunto M y una relación binaria $r_{\leq}$ que satisface los axiomas . A menudo escribiremos $\leq$ en lugar de $r_{\leq}$; por lo tanto el hecho que $(M, \leq)$ es un preorden significa que $a \leq a$ para cada $a \in M$ y para $a, b, c \in M$ si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$. Linealidad significa que $a \leq b$ ó $b \leq a$ para cada $a, b \in M$.

Los axiomas de igualdad para un predicado binario $=$ son: reflexividad, transitividad y simetría. (M, r) es un modelo de estos axiomas ssi r es una relación de equivalencia. Sea J un lenguaje predicado que contiene el predicado binario $=$, cuyos axiomas de igualdad para J son los mencionados arriba más los siguientes axiomas de congruencia: Para cada predicado n-ario P, $(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge ... \wedge x_n = y_n) \rightarrow (P(x_1, ..., x_n) \equiv P(y_1, ...y_n))$

4.3. Símbolos de funciones

En esta sección se hace un análisis de la lógica de predicado Booleano con símbolos de función (como $+$). En esta lógica tenemos fórmulas como $x + y = y + x$. Esta clase de fórmulas son muy útiles para definir varias clases de álgebras que son muy importantes.

Definición 4.14. Un *Lenguaje de Predicados* $\mathcal{I}$ con *símbolos de funciones* consiste de un conjunto no vacío de predicados $P, Q, ...$ cada cual con su aridad, un conjunto de objetos constantes $c, d, ...$ y un conjunto no vacío de símbolos de funciones $F, G, ...$ cada una de ellas teniendo un entero no negativo como su aridad. Si F es un símbolo de función y $t_1, ..., t_n$ son términos entonces $F(t_1, ..., t_n)$ es un término.

Una estructura para $\mathcal{I}$ tiene la forma

$$\mathbf{M} = \langle M, (r_p)_p \text{predicado}, (m_c)_c \text{constante}, (f_F)_F \text{funct. simb} \rangle,$$

donde cada f_F es una operación n-aria en M es decir $f_F : M^n \rightarrow M$. Dado M y una evaluación v de objetos variables, el valor de $\|t\|_{\mathbf{M},v}$ de t dado por $\mathbf{M}, v$ es definido como sigue:

$\|x\|_{\mathbf{M},v} = v(x)$ para cada variable x,
$\|c\|_{\mathbf{M},v} = m_c$ para cada constante c,
$\|F(t_1, ..., t_n)\|_{\mathbf{M},v} = f_F(\|t_1\|_{\mathbf{M},v}, ..., \|t_n\|_{\mathbf{M},v})$.
Teniendo esto, el valor $\|\phi\|_{\mathbf{M},v}$ de una fórmula ϕ es definido como en la sección anterior.
Tenemos algunas formas de uso más utilizadas.
Primero si F es binaria entonces podemos escribir xFy en lugar de $F(x, y)$. En segundo lugar si tenemos que $t(x_1, ..., x_n)$ es un término que no contiene más variables además de $x_1, ..., x_n$, entonces el valor $\|t\|_{\mathbf{M},v}$ depende sólo de los valores $v(x_1), ..., v(x_n)$ de estas variables. Podemos escribir, para $a_1, ..., a_n \in M$, $t(a_1, ..., a_n)$ para ser el valor de t en $\mathbf{M}$ para cualquier evaluación con $v(x_i) = a_i$ $(i = 1, ...m)$.
Por ejemplo si t es $(x+y)+z$ con $a, b, c \in M$ entonces $(a+b)+c$ es obviamente el valor de t en M para $v(x) = a$, $v(y) = b$ y $v(z) = c$.

Definición 4.15. Los axiomas lógicos son como en la sección anterior con la definición de sustituibilidad modificada como sigue:
Un término t es sustituible por x en ϕ si para cada variable y que ocurre en t no hay una subfórmula de ϕ de la forma $(\forall y)\psi$ que contenga una ocurrencia de x libre en ϕ.

Así por ejemplo $x + y$ no es sustituible por x en $(\exists y)P(x, y)$. También es de notar que para cada ϕ, x es sustituible por x en ϕ.
Tenemos algunos ejemplos en la utilización de símbolos de funciones.

Ejemplo 4.3. La teoría de semigrupos. El lenguaje consiste del predicado binario $=$ y el símbolo de función binario $*$ (donde $*$ es la operación del semigrupo). Los axiomas son axiomas de igualdad para $=, *$ más el axioma de *asociatividad*:

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

Definición 4.16. Las *Álgebras* son estructuras de la forma $\langle M, f_1, ..., f_n\rangle$ donde f_i son operaciones en M. Tal álgebra es una estructura natural para un predicado de lenguaje $\mathcal{I}$ teniendo la igualdad de predicado $=$ y símbolos de funciones $f_1, ..., f_n$ con sus correspondientes aridades. Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebras, entonces un álgebra $\mathbf{A}$ de tipo $\mathcal{F}$, es un par ordenado $(A, \mathcal{F})$ tal que para todo símbolo de función $f \in \mathcal{F}$, existe una operación de aridad igual a la de f en A, es decir existe.

$$f^{\mathbf{A}} : A^n \to A$$

En la práctica no hay problema si se omite $\mathbf{A}$. Si $\mathcal{F}$ es finito entonces $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ y en cuyo caso escribimos $(A, f_1, ..., f_n)$ en lugar de $(A, \mathcal{F})$. Habitualmente aridad $f_1 \geq$aridad $f_2 \geq ... \geq$ aridad f_n.
En general para caracterizar las álgebras diremos que son de tipo $(n_1, n_2, ..., n_m, ...)$ donde n_i es la aridad correspondiente al símbolo de función f_i.

Definición 4.17. Sea $\mathcal{I}$ un lenguaje $(=, f_1, ..., f_n)$ con n funciones, sea $\mathcal{K}$ una clase de estructura para $\mathcal{I}$ (interpretando $=$ como identidad). $\mathcal{K}$ es una *variedad* si existe un conjunto T de identidades (fórmulas atómicas de $\mathcal{I}$) tal que $\mathcal{K}$ es la clase de todas las estructuras $\mathbf{M}$ para $\mathcal{I}$ tal que toda las identidades de T son válidas en $\mathbf{M}$.

Definición 4.18. Sea $M_1 = (M_1, f_1, ..., f_n)$ y $M_2 = (M_2, g_1, ..., g_n)$ estructuras para el lenguaje $\mathcal{I}$ (con identidad absoluta).

(1) M_1 es una subálgebra de M_2 si $M_1 \subset M_2$ y para cada $i = 1, ..., n$ es la restricción de g_i a $M_1^{ar(f_i)}$ (M_1 es cerrado bajo los $g_i's$)

(2) M_1 es una imagen homomórfica de M_2 si existe un mapeo sobreyectivo $h : M_2 \longrightarrow M_2$ que conmuta con las operaciones, es decir, para cada $i = 1, ..., n$ y cualesquieras $a_1, ..., a_k \in M$ $h(f_i(a_1, ..., a_k))$ donde k es la aridad de f_i y g_i.

(3) Sea $I \neq \emptyset$ un conjunto y para cada $\lambda \in I$ sea $M_\lambda = (M_\lambda, f_{1\lambda}, ..., f_{n\lambda})$ una estructura para I. El producto directo $\prod_{\lambda \in I} M_\lambda$ es el álgebra $M = (M, f_1, ..., f_n)$ donde M es el conjunto de todas las funciones a cuyo dominio es I y para cada $\lambda \in I, a(\lambda \in M_\lambda)$, las operaciones están definidas coordenada a coordenada, es decir, para $a_1, ..., a_k \in M$ y f_i de aridad k $f_i(a_1, ..., a_k) = b$ ssi para cada $\lambda \in I, b(\lambda) = f_{i\lambda}(a_1(x), ..., a_k(x))$.

(4) Un álgebra M es un producto subdirecto de un sistema $\{M_\alpha | \lambda \in I\}$ de álgebras si M es una subálgebra de $\prod_{\lambda \in I} M_\lambda$.

4.4. Látices y Álgebras Booleanas

Aquí presentamos nociones importantes sobre látices y álgebras Booleanas y hacemos un estudio de sus propiedades más importantes.

Definición 4.19. Una relación $\leq$ sobre un con junto P se llama un orden parcial si cumple:

- Reflexividad ($\forall x \in P,\ x \leq x$).
- Antisimetría ($\forall x, y \in P,\ x \leq y\ \&\ y \leq x$ entonces $x = y$)
- Transitividad ($\forall x, y, z \in P,\ x \leq y\ \&\ y \leq z$ entonces $x \leq z$).

Dado $P = (P \leq)$ un orden parcial, se define $P^{\partial} = (P, \geq)$.

Principio de dualidad. Si Φ es una expresión cierta en todos los órdenes parciales, entonces Φ^{∂} es cierta en todos los órdenes parciales.

Definición 4.20. Sea P un conjunto ordenado no vacío y sean $x, y \in P$, definimos $x \cap y = \text{ínf}\{x, y\}$ y $x \cup y = \sup\{x, y\}$ (meet y join).

Definición 4.21. Sea P un conjunto parcialmente ordenado y no vacío, decimos que P es un látice si $x \cap y$ y $x \cup y$ existen $\forall x, y \in P$ y se dice que P es completo si $\bigcap S$ y $\bigcup S$ existe $\forall S \subseteq P$.

Teorema 4.4. Sea L un latice. Entonces el $\cap$ y $\cup$ satisfacen lo siguiente $\forall a, b, c \in L$:

- $(L_1): \quad (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$
- $(L_1)^{\partial}: \quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$
- $(L_2): \quad a \cup b = b \cup a$
- $(L_2)^{\partial}: \quad a \cap b = b \cap a$
- $(L_3): \quad a \cup a = a$
- $(L_3)^{\partial}: \quad a \cap a = a$
- $(L_4): \quad a \cup (a \cap b) = a$
- $(L_4)^{\partial}: \quad a \cap (a \cup b) = a$

Demostración. Por el principio de dualidad, si $(L_1)-(L_2)$ se cumple, entonces $(L_1)^{\partial} - (L_2)^{\partial}$ también se cumplirá.

(L_1) Bastará probar que $\{a \cup b, c\}^u = \{a, b, c\}^u$.

$$\begin{aligned} Sea\ s \in \{a \cup b, c\}^u &\Leftrightarrow a \cup b \leq s\ y\ s \geq c \\ &\Leftrightarrow s \geq a, s \geq b, s \geq c \\ &\Leftrightarrow s \in \{a, b, c\}^u \end{aligned}$$

(L_2) $a \cup b = \sup\{a, b\} = \sup\{b, a\} = b \cup a$

(L_3) $a \cup a = a$. En efecto, ya que $a \cup a = a \Leftrightarrow a \leq a$.

(L_4) $a \cup (a \cap b) = a \Leftrightarrow a \cap b \leq a$

$\square$

Ejemplo 4.4. Sea X un conjunto no vacío, $P(X)$ (conjunto potencia de X) es un látice. En efecto, sean $A, B \subseteq P(X)$, entonces:

$$A \,\text{join}\, B = A \cup B \ \ \text{(unión)}$$

y

$$A \,\text{meet}\, B = A \cap B \ \ \text{(intersección)}$$

.

Lema 4.5. Sea $L = (L, \cup, \cap)$ un latice, entonces:

i. $\forall a, b \in L \ \ a \cup b = b$ ssi $a \cap b = a$

ii. Definamos $\leq$ sobre L por $a \leq b$ si $a \cup b = b$. Entonces $\leq$ es una relación de orden.

iii. Con $\leq$ como en ii. $(L; \leq)$ es un latice. Entonces $\forall a, b \in L \ \ a \cup b = \sup\{a, b\}$ y $a \cap b = \text{ínf}\{a, b\}$

Demostración. i. $(\Rightarrow)$
$a = a \cap (a \cup b) = a \cap b$. $(\Leftarrow)$
$b = b \cup (b \cap a) = b \cup (a \cap b) = b \cup a = a \cup b$

ii. Probemos que $\leq$ es una relación de orden.

- Reflexividad
  $a \leq a \Leftrightarrow a \cup a = a$
- Antisimétrico

$$\begin{aligned} a \leq b \; y \; b \leq a &\Rightarrow a \cup b = b \; y \; b \cup a = a \\ &\Rightarrow b \cup a = b \; y \; b \cup a = a \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

- Transitividad
  $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \cup b = b$ y $b \cup c = c$ entonces $c = (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) = a \cup c \Rightarrow a \leq c$.

iii. Probemos que $\sup\{a, b\} = a \cup b$. Primero probemos que $a \cup b \in \{a, b\}^u$

$$\begin{aligned} a \leq a \cup b &\Leftrightarrow a \cup (a \cup b) = a \cup b \\ &\Leftrightarrow (a \cup a) \cup b = a \cup b \\ &\Leftrightarrow a \cup b = a \cup b \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} b \leq a \cup b \Leftrightarrow b \cup (a \cup b) &= a \cup b \\ b \cup (a \cup b) &= b \cup (b \cup a) \\ &= (b \cup b) \cup a \\ &= b \cup a \end{aligned}$$

$\Rightarrow a \cup b \in \{a, b\}^u$

Probemos ahora que $a \cup b$ es la cota superior más pequeña.

$$\begin{aligned} Sea\ d \in \{a, b\}^u &\Rightarrow d \geq a\ y\ d \geq b \\ &\Rightarrow d \cup a = d\ y\ b \cup d = d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d = d \cup d &= (a \cup d) \cup (b \cup d) \\ &= (a \cup d) \cup (d \cup b) \\ &= a \cup (d \cup d) \cup b \\ &= a \cup d \cup b \\ &= a \cup b \cup d \Rightarrow a \cup b \leq d \end{aligned}$$

Por lo tanto $a \cup b$ es la cota más pequeña.

Análogamente se procede con $a \cap b$. $\square$

Definición 4.22. Para cada $L = (L; \cup, \cap)$ el orden $\leq$ del lema anterior es llamado el orden determinado por L o simplemente el orden de L. Entonces identificamos $(L; \cup, \cap)$ con $(L; \cup, \cap, \leq)$.

Lema 4.6. Sea L un latice, entonces para cada $a, b, c, d \in L$ se cumple que:

i. $a \leq b$ y $c \leq d \Rightarrow a \cup c \leq b \cup d$.

ii. $a \leq b$ y $c \leq d \Rightarrow a \cap c \leq b \cap d$

Demostración. i.

$$\begin{aligned} a \leq b \; y \; c \leq d. \; Luego \; b \leq b \cup d &\Rightarrow a \leq b \cup d \\ d \leq b \cup d &\Rightarrow c \leq b \cup d \end{aligned}$$

$\Rightarrow a \cup c \leq b \cup d$.

ii.

$$\begin{aligned} a \cap c \leq a \; y \; a \leq b &\Rightarrow a \cap c \leq b \\ a \cap c \leq c \; y \; c \leq d &\Rightarrow a \cap c \leq d \end{aligned}$$

$\Rightarrow a \cap c \leq b \cap d$.

□

Definición 4.23. Sea L un latice. Decimos que L es distributivo si $\forall x, y, z \in L$ se cumple cualquiera de las siguientes identidades:

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

Observación:

- Si L es un conjunto linealmente ordenado, entonces L es distributivo. Nótese que el latice linealmente ordenado $[0, 1]$ con el orden usual de los reales, juega un papel importante en esta investigación.
- Note que L es linealmente ordenado ssi la fórmula $(x \cap y = x) \vee (x \cap y = y)$ es cierta en L. Esta es una disjunción de dos fórmulas atómicas. Es fácil probar que la linealidad no puede ser expresada por un sistema de fórmulas atómicas (identidades); es decir, la clase de latices linealmente ordenado no es una variedad. Para probar esto sólo observe que el producto de dos latices linealmente ordenados no es necesariamente linealmente ordenado.

Definición 4.24. El lenguaje de álgebras booleanas es la extensión de latices por dos constantes, $0, 1$ (elemento mínimo y máximo respectivamente) y una operación unaria $'$ de complemento. Un álgebra $L = (L; \cup, \cap, 0, 1,')$ es un álgebra booleana si cumple:

i. $(L; \cup, \cap)$ es un latice distributivo

ii. $a \cup 0 = a$, y $a \cap 1 = a$ $\forall a \in L$.

iii. $a \cup a^{'} = 1$ y $a \cap a^{'} = 0$ $\forall a \in L$.

Observaciones:

- Los latices y las álgebras booleanas forman una variedad
- Dado X conjunto no vacío, $P(X)$ es una álgebra booleana, aquí 0 es $\emptyset$, 1 es X y para $Y \subseteq X$ Y^c es $X - Y$.

Definición 4.25. Sea L un latice y $X \subseteq L$ (con X posiblemente infinito). El supremo de X es un elemento $a \in L$ tal que $b \leq a \ \ \forall \ \ b \in X$ y siempre que $b \leq c \ \ \forall \ \ b \in X$ entonces $a \leq c$. Similarmente se define el $\text{ínf}(X)$.

.

Nota: Es probable que X no tenga supremo (o ínfimo), pero si existe es único. Decimos que un latice L es completo si para cada $X \subseteq L$ existe su supremo e ínfimo. Nótese que el intervalo $[0, 1]$ es un latice completo.

4.5. Grupos Abelianos Ordenados

En esta sección se investigará las estructuras que tienen tanto una operación de semigrupo y orden lineal relacionado de alguna forma. Las estructuras de interés final en esta sección son los grupos Abelianos ordenados. Presentaremos su definición y propiedades básicas. Estos grupos jugarán un papel importante en la caracterización de álgebras de algunas lógicas.

Definición 4.26. Un semigrupo $(G, *)$ es abeliano (o conmutativo) si satisface que $x * y = y * x$ $\forall x, y \in G$.

En lo que sigue denotaremos la operación de un grupo abeliano por $+$, entonces denotamos el grupo abeliano por $(G, +)$

Definición 4.27.

- Un semigrupo abeliano ordenado es una estructura $(G, +, \leq)$ tal que $(G, +)$ es un semigrupo abeliano, $(G, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado y para cada $x, y, z \in G$ $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ es cierto en $(G, +, \leq)$
- Un grupo abeliano es una estructura $(G, +, 0, -)$ tal que $(G, +)$ es un semigrupo abeliano con 0 elemento cero y $-$ es la operación de inverso.
- Un grupo abeliano linealmente ordenado (o-grupo) es una estructura $(G, +, 0, -, \leq)$ tal que $(G, +, 0, -)$ es un grupo abeliano y $(G, +, \leq)$ es un semigrupo abeliano linealmente ordenado.

Observación: $(G, +, 0, -, \leq)$ es un o-grupo ssi los siguientes axiomas son ciertos en el:

- $x + (y + z) = (x + y) + z$
- $x + y = y + x$
- $x + 0 = x$
- $x + (-x) = 0$
- $x \leq y$ ó $y \leq x$
- $(x \leq y \quad \text{y} \quad y \leq z) \Rightarrow x \leq z$
- $(x \leq y \quad \text{y} \quad y \leq x) \Rightarrow x = y$
- $x \leq y \Rightarrow (x + z \leq y + z)$

Los cuatro primeros son axiomas de un grupo abeliano, los siguientes tres son axiomas de orden lineal y el último es axioma de monotonocidad.

En lo siguiente denotamos un o-grupo como $(G, +, \leq)$. Sea R_e el conjunto de todos los números reales, $+$ la adición en los reales, $*$ la multiplicación en los reales. Sea N, Z el conjunto de los números naturales y enteros respectivamente. Sea $\leq$ el orden lineal estándar sobre $R_e(N, Z)$. Entonces

- $N = (N, +, \leq)$ es un semigrupo abeliano ordenado con elemento cero 0 pero los elementos distintos de cero no tienen inverso.

- $Z = (Z, +, \leq)$ y $R_e = (R_e, +, \leq)$ son o-grupos, Z es un subgrupo de R_e. Estos grupos son llamados el o-grupo aditivo de enteros y reales respectivamente.

- $(N, *, \leq)$ es un semigrupo abeliano ordenado cuyo elemento cero es 1 y los elementos distintos de 1 no tienen inverso.

Definición 4.28. El cono positivo de un o-grupo $G = (G, +, \leq)$ es $C_{+G} = \{x \in G : 0 \leq x\}$ dotado con las restricciones de $+, \leq$

Lema 4.7. Un semigrupo abeliano linealmente ordenado $S = (S, +, 0, \leq)$ es el cono positivo de un o-grupo ssi satisface lo siguiente:

- Para cada $x \leq y$ existe un único z tal $x + z = y$.

- Ordenación positiva: $x \leq x + y$ para cada x, y.

Definición 4.29. 1. Un o-grupo es discreto si para cada $x \in G$ existe $y \in G$ tal que $x \leq y$.

2. G es denso si $\forall x, y \in G$ tal que $x < y$ existe $z \in G$ tal que $x < z < y$.

Definición 4.30. Un o-grupo $G = (G, +, 0, -, \leq)$ es arquimideano si $\forall x, y \in Z^+$ existe $n \in N$ tal que $nx \geq y$.

Los grupos aditivos de reales y enteros son arquimideanos.

Teorema 4.5. (Teorema de Holder). Un o-grupo G es arquimideano ssi tiene un encajamiento isomorfo en el o-grupo aditivo R_e de reales, es decir, existe un mapeo inyectivo f de G en R_e tal que para cada $x, y \in G$

$$f(x +_G y) = f(x) + f(y)$$

$$x \leq_G y \quad ssi \quad f(x) \leq f(y)$$

Estas dos condiciones implican lo siguiente:

$$f(0_G) = 0$$

$$f(-_G x) = -_G f(x)$$

Definición 4.31. Un o-grupo G es parcialmente encajable en los $\mathbf{R}$ si para cada $X \subseteq G$ subconjunto finito existe $Y \subseteq R$ subconjunto finito y un mapeo f uno a uno de X en Y tal que f es un isomorfismo parcial; es decir, para cada $x, y, z \in G$

$$z = x +_G y \ \ ssi \ \ f(z) = f(x) + f(y)$$

$$x \leq_G y \ \ ssi \ \ f(x) \leq f(y)$$

Teorema 4.6. Cada o-grupo es parcialmente encajable en $\mathbf{R}$.

Este teorema es una consecuencia directa del siguiente teorema.

Teorema 4.7. Sea $\phi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula libre de cuantificadores en el lenguaje de o-grupos. Si la fórmula $(\forall x_1, ..., x_n)\phi(x_1, ..., x_n)$ es verdadera en el o-grupo $\mathbf{R}$ entonces es verdadera en todos los o-grupos.

Demostración. (Teorema 4.6). Sean G un o-grupo y $X \subset G$ un subconjunto finito. Sea $x, y, z \in G$. Tomando $\phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ como la conjunción de todas las fórmulas de la forma $x_i = x_j + z_k$, $\ x_i \leq y_j$, $\ x_i \neq y_j + z_k$, $\ \neg(x_i \leq y_j)$ que son ciertas en G, se tiene que $\exists(x_1, ..., x_n)\phi(x_1, ..., x_n)$ es verdadero en G, por tanto $\forall(x_1, ..., x_n)\neg\phi$ no es cierto en todos los o-grupos, entonces por el teorema anterior, no es cierto en $\mathbf{R}$ y $\exists(x_1, ..., x_n)\phi(x_1, ..., x_n)$ es cierto en $\mathbf{R}$; es decir, existen $b_1, ..., b_n \in \mathbf{R}$ que satisfacen ϕ, digamos, $f(x_i) = b_i$ con $x_i \in X$.

□

5. Cálculo proposicional multivalor.

5.1. T-normas Contínuas y su Resíduo

En esta sección se inicia el trabajo con lógica multivalor. Tomamos el intervalo $[0,1]$ como el conjunto de valores de verdad, 1 representa verdad absoluta y 0 falsedad absoluta. El orden natural $\leq$ de los números reales jugará un papel importante. Por lo tanto nuestro conjunto de valores de verdad es linealmente ordenado, el orden es denso y completo (cada conjunto de valores de verdad tiene ínfimo y supremo). En algunas consideraciones básicas trataremos con la lógica de latices.

La parte principal de este trabajo es el Principio de Funcionalidad de Verdad: trataremos con calculo lógico en el cual cada conectivo c tiene una función de verdad $f_c : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ (por tanto $f_c(x,y) \in [0,1] \quad \forall x, y \in [0,1]$) determinando para cada par de fórmulas ϕ, ψ el grado de verdad de la fórmula compuesta $c(\phi, \psi)$ o $\phi c \psi$ a partir de los grados de verdad de ϕ y ψ (similarmente para los conectivos de otras aridades). Esta es una asumpción muy común y técnicamente útil. Cuando escogemos funciones de verdad de conectivos obedecemos estrictamente el principio diciendo que que cada lógica multivalor debe ser una generalización de la lógica clásica . Por ejemplo, si llamamos un conectivo & conjunción, su función de verdad debe satisfacer, entre otras cosas $1 * 1 = 1 \quad 1 * 0 = 0 * 1 = 0$. Similarmente para otros conectivos de la lógica clásica.

Luego empezamos nuestra investigación de buenos candidatos para ser las funciones de verdad de los conectivos formulando nuestros requerimientos sobre una función de verdad de la conjunción. Veremos que una elección adecuada de la semántica de una conjunción determina un cálculo proposicional completo.

Nuestra comprensión intuitiva de la conjunción es la siguiente: Un grado de verdad alto de $\phi \& \psi$ deberían indicar que el grado de verdad de ϕ y ψ son altos, sin ninguna preferencia entre ϕ y ψ. Por lo tanto es natural asumir que la función de verdad de de la conjunción es no decreciente en ambos argumentos, 1 es el elemento unidad y 0 es el elemento cero.

Estos requisitos se cumplen en la siguiente definición:

Definición 5.1. Una t-norma es una operación binaria $*$ sobre $[0,1]$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $*$ es conmutativa y asociativa, para todo $x, y, z \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} x * y &= y * x \\ (x * y) * z &= x * (y * z) \end{aligned}$$

2. $*$ es monótona creciente en ambas variables, es decir

$$x_1 \leq x_2 \text{ implica } x_1 * y \leq x_2 * y$$

$$y_1 \leq y_2 \text{ implica } x * y_1 \leq x * y_2$$

3. $1 * x = x$ y $0 * x = 0$ $\forall x \in [0, 1]$

$*$ es una t-norma continua si es una t-norma y es un mapeo continuo de $[0, 1]^2$ a $[0, 1]$. Los ejemplos más importante de t-normas que consideraremos en este trabajo son las siguientes:

1. La t-norma de Lukasiewicz: $x * y = \text{máx}(0, x + y - 1)$.
2. La t-norma de Godel: $x * y = \text{mín}(x, y)$
3. La t-norma producto: $x * y = x.y$ este es producto de reales.

La elección de la función correspondiente a la implicación. En lógica de dos valores, la implicación $\varphi \Rightarrow \psi$ es verdadero ssi el valor de verdad, de φ es menor o igual, al valor de verdad de ψ. De manera general, podemos decir que un valor de verdad grande de $\varphi \Rightarrow \psi$, debe indicar que el valor de verdad de φ no es mucho más grande, que el valor de verdad de ψ. Esto requerirá que la función de verdad $x \Rightarrow y$ de implicación debe ser no creciente en x y no decreciente en y. Además necesitaremos la solidez de modus ponens difuso: de (una cota inferior de) el grado de verdad x de φ, y el grado de verdad $x \Rightarrow y$ de $(\varphi \rightarrow \psi)$, nosotros deberíamos ser capaces de calcular una cota inferior del grado de verdad y de ψ. La operación que calcula la cota inferior para y debe ser claramente no decreciente en ambos argumentos y similarmente podemos argumentar que 1 es la unidad y 0 el elemento neutro de la operación en cuestión. Puede ser difícil justificar la conmutatividad o la asociatividad; sin embargo es útil tomar sólo una t-norma $*$, que da

$$\text{SI } a \leq x \text{ y } b \leq x \Rightarrow y, \text{ ENTONCES } a * b \leq y$$

así en particular tomando $a = x$ y escribiendo z en lugar de b nos da

$$\text{SI } z \leq x \Rightarrow y, \text{ ENTONCES } x * z \leq y.$$

Por otra parte, nos gustaría definir $x \Rightarrow y$ lo más grande posible; por tanto siempre que $x * z \leq y$ entonces z es un posible candidato para $x \Rightarrow y$, por lo tanto, podemos requerir, a la inversa,

$$\text{SI } x * z \leq y \text{ ENTONCES } z \leq x \Rightarrow y.$$

y por tanto

$$x * z \leq y \text{ ssi } z \leq x \Rightarrow y.$$

Así tenemos el lema.

Lema 5.1. Sea $*$ una t-norma continua. Entonces hay una única operación satisfaciendo, para todo $x, y, z \in [0, 1]$, la condición $(x * z) \leq y$ ssi $z \leq (x \Rightarrow y)$, denotada por $(x \Rightarrow y) = \text{máx}\{z|x * z \leq y\}$.

Demostración. Sean $x, y, z \in [0, 1]$ y $*$ una t-norma continua. Sabemos que

$$x * z \leq y \;\text{ ssi }\; z \leq x \Rightarrow y \tag{1}$$

Dado que $\forall z \in \{z : x * z) \leq y\}$ se cumple que $z \leq x \Rightarrow y$ entonces $x \Rightarrow y = \sup\{z : x * z) \leq y\}$. Luego, como $x \Rightarrow y \in [0, 1]$ y $x \Rightarrow y \leq x \Rightarrow y$ por (1) se tiene que $x * (x \Rightarrow y) \leq y$, entonces $x \Rightarrow y \in \{z|x * z \leq y\}$, por lo tanto

$$x \Rightarrow y = \text{máx}\{z|x * z \leq y\} \tag{2}$$

Para probar unicidad, supongamos que existe otra operación $\rightsquigarrow$ tal que cumple la condición dada; es decir,

$$x * z \leq y \;\text{ ssi }\; z \leq x \rightsquigarrow y \tag{3}$$

ya que $x \Rightarrow y \in \{z|x * z \leq y\}$ tenemos que $x \Rightarrow y \leq x \rightsquigarrow y$. Ahora, como $x \rightsquigarrow y \leq x \rightsquigarrow y$, por (3) se tiene que $x * (x \rightsquigarrow y) \leq y$, es decir $x \rightsquigarrow y \in \{z|x * z \leq y\}$, entonces por (2) se tiene que $x \rightsquigarrow y = x \Rightarrow y$ □

Definición 5.2. La operación $x \Rightarrow y$ del lema anterior es llamada el residuo de la t-norma

Lema 5.2. Para cada t-norma $*$ y su residuo $\Rightarrow$ tenemos

(i) $x \leq y$ ssi $(x \Rightarrow y) = 1$

(ii) $(1 \Rightarrow x) = x$

Demostración. (i) $\max\{z : x * z \leq y\} = 1 \Leftrightarrow x * 1 \leq y \Leftrightarrow x \leq y$ ya que 1 es la identidad.

(ii) La prueba es evidente.

□

Lema 5.3. (1) Si $x \leq y$, entonces $x = y * (y \Rightarrow x)$

(2) Si $x \leq u \leq y$ y u es idempotente entonces $x * y = x$.

Demostración. (1) Sea $x \leq y$ y sea $f(z) = z * y$; f es continua en $[0, 1]$, $f(0) = 0$ y $f(1) = y$, entonces por el teorema del valor intermedio existe algún z con $0 \leq z \leq 1$, tal que $f(z) = x = z * y$. Así para el máximo z satisfaciendo $x = z * y$ tendremos a $z = y \Rightarrow x$.

(2) Primero asumamos que $u = y$. Entonces por (1) $x = u * (u \Rightarrow x)$,, $x * u = u * (u \Rightarrow x) * u = u * u * (u \Rightarrow x) = u * (u \Rightarrow x) = x$. Ahora sea $u \leq y$. Entonces por propiedad de la t-norma $x = x * u \leq x * y$ y como se cumple que $x * y \leq x$ tendremos que $x * y = x$.

□

Teorema 5.1. La siguientes operaciones son el residuo de las tres t-normas dadas al inicio: Para $x \leq y, x \Rightarrow y = 1$. Para $x \geq y$,

(i) Implicación de Łukasiewicz : $x \Rightarrow y = 1 - x + y$

(ii) Implicación de Gödel: $x \Rightarrow y = y$

(iii) Implicación de Goguen: $x \Rightarrow y = y/x$.

Demostración. Asuma $x > y$.

(i) Entonces de la definición $x * z = y$ ssi $x + z - 1 = y$ ssi $z = 1 - x + y$; así $1 - x + y = \max\{z | x * z \leq y\}$.

(ii) Tenemos que $x * z = y$ ssi $\min(x, z) = y$ ssi $z = y$.

(iii) Similarmente; $x \cdot z = y$ ssi $z = y/x$ (ya que $x > 0$).

□

Definición 5.3. En lo que sigue consideraremos al intervalo unitario $[0,1]$ como un álgebra dotada de operaciones mín y máx, una t-norma $*$ y su residuo $\Rightarrow$, como también los elementos 0,1. Ésta álgebra será denotada por $L(*)$. Usaremos $\cap$ y $\cup$ para denotar mín y máx respectivamente.

Tengamos en cuenta que el orden $\leq$ está definido como: $x \leq y$ ssi $x \cap y = x$. Mostramos que mín y máx son definidos de $*$ y $\Rightarrow$.

Lema 5.4. Para cada t-norma $*$ continua, se tiene que las siguientes identidades son ciertas en $L(*)$.

(i) $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$,

(ii) $x \cup y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$.

Demostración. (i) Si $x \leq y$ entonces $x \Rightarrow y = 1$ por 5.2(i). Así $x * (x \Rightarrow y) = x$. Ahora si $x > y$ entonces $x * (x \Rightarrow y) = y$ por 5.3(1).

(ii) Asumamos que $x \leq y$; entonces $(x \Rightarrow y) = 1$ y $(x \Rightarrow y) \Rightarrow y = (1 \Rightarrow y) = y$. Además, $y \leq (y \Rightarrow x) \Rightarrow x$ ya que $y * (y \Rightarrow x) \leq x$ (por residuación); así $((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) = y \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) = y$. El caso $y \leq x$ es completamente análogo.

□

Definición 5.4. El residuo $\Rightarrow$ define su correspondiente operación unaria de precomplemento $(-)x = (x \Rightarrow 0)$(futura función de verdad de la negación).

Lema 5.5. Las siguientes operaciones son precomplementos de nuestras t-normas distinguidas:

(i) Negación de Łukasiewicz $(-)x = 1 - x$,

(ii) Negación de Gödel $(-)0 = 1, (-)x = 0$ para $x > 0$.

(iii) El precomplemento dado por la implicación de Goguen coincide con la negación de Gödel.

Demostración. (i) Como $x \Rightarrow_L y = 1 - x + y$ entonces $(-)x = x \Rightarrow_L 0 = 1 - x$.

(ii) $x \Rightarrow_G y = y$ entonces $(-)x = x \Rightarrow_G 0 = 0$ para $x > 0$ y $(-)0 = 0 \Rightarrow 0 = 1$.

(iii) El del producto es evidente.

$\square$

En lo que sigue $*$ denotará una t-norma continua; investigaremos el semigrupo ordenado conmutativo $\langle [0.1], *, \leq \rangle$. Recalcamos que un elemento x es *idempotente*, si $x * x = x$. Así ambos 0 y 1 son idempotentes. Un elemento es *nilpotente* si existe un n tal que (n factores) $x * ... * x = 0$. Denotamos x^{*n} por $x * ... * x$ con n factores.

Definición 5.5. Una t-norma continua es Arquimideana si no tiene idempotentes excepto 0 y 1. Una t-norma Arquimideana es estricta si no tiene nilpotentes excepto 0; en otro caso es nilpotente.

Definición 5.6. Diremos que una t-norma $*$ es isomorfa a una operación binaria $\star : [a,b]^2 \to [a,b]$ si existe una función estrictamente creciente $f : [0,1] \to [a,b]$ tal que $f(x * y) = f(x) \star f(y) \ \ \forall x, y \in [0,1]$

Observe que para cada t-norma continua, el conjunto E de todos sus idempotentes es un subconjunto cerrado de $[0,1]$ y por lo tanto su complemento es una unión de un conjunto $\mathcal{I}_{open}(E)$ numerable de intervalos abiertos disjuntos entre sí. Sea $[a,b] \in \mathcal{I}(E)$ ssi $(a,b) \in \mathcal{I}_{open}(E)$. Para $I \in \mathcal{I}(E)$ sea $(*|I)$ la restricción de $*$ a I^2. El siguiente teorema caracteriza a todas las t-normas continuas.

Teorema 5.2. Si $*$, E, $\mathcal{I}(E)$ están definidos como arriba, entonces

(i) para cada $I \in \mathcal{I}(E)$, $(*|I)$ es isomorfo ya sea a la t-norma producto (en [0,1]) ó a la t-norma de Łukasiewicks (en [0,1]).

(ii) Si $x, y \in [0,1]$ son tales que no existe $I \in \mathcal{I}(E)$ con $x, y \in I$, entonces $x * y = \text{mín}(x, y)$.

Demostración. (ii) Sean $x, y \in [0,1] \quad \forall I \in I(E), \{x, y\} \subsetneq I = [a,b] \Rightarrow \{x, y\} \subsetneq (a,b)$.

Si $x = y \in [0,1]$ tal que $x \notin I \quad \forall I \in I(E)$ entonces $x \notin A$ $\forall A \in I_{open}(E) \Rightarrow x \notin \cup I_{open}(E) = E^c \Rightarrow x \in E$. Por lo tanto $x * x = x = \text{mín}(x,x)$.

Si $x \neq y$ podemos suponer sin pérdida de generalidad $x \leq y$:

Caso 1: Sea $x \in I = [a,b] \in I(E) \Rightarrow a \leq x \leq b \leq y$, como b es idempotente, entonces $x * y = x = \text{mín}(x,y)$.

Caso 2: Sea $y \in I = [a,b] \in I(E) \Rightarrow x < a \leq y$, como a es idempotente, entonces $x*y = x = \text{mín}(x,y)$. Por lo tanto $\forall x, y \notin I$ $\forall I \in I(E)$ $\exists a \in E$ tal que $x \leq a \leq y \Rightarrow x * y = x = \text{mín}(x,y)$.

□

Para demostrar (i), será suficiente mostrar que cada $t-$norma continua arquimideana estricta es isomorfa a la $t-$norma producto y cada $t-$norma continua arquimideana nilpotente es isomorfa a la $t-$norma de Lukasiewicz. Para ello, serán necesarios los siguientes lemas.

En adelante asumiremos que $*$ es una t-norma continua arquimideana; es decir, que los únicos elementos idempotentes son 0 y 1.

Lema 5.6. Para cada número positivo $x < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} x^{*n} = 0 \tag{4}$$

Si $*$ es nilpotente entonces cada $x < 1$ es nilpotente. Si $1 > x^{*n} > 0$ entonces $m > n$ implica que $x^{*m} < x^{*n}$.

Demostración. Como $x < 1 \Rightarrow x*x < 1*x = x$, es decir $x^{*2} < x$ y en general $x^{*(n+1)} < x^{*n}$ entonces la secuencia x^{*n} es no creciente (y acotada por 0 por abajo), luego, $\bar{x} = \text{lím}_n x^{*n}$ existe; Además, $\bar{x}$ es idempotente:

$$\bar{x} * \bar{x} = \lim_{n\to\infty} x^{*n} * \lim_{m\to\infty} x^{*m} = \lim_{m,n\to\infty} x^{*(m+n)} = \bar{x} \tag{5}$$

y ya que la t-norma es arquimideana, se tiene que $\bar{x} = 0$.
Ahora, sea $z > 0$ un elemento nilpotente y sea $0 < x < z$, como z es nilpotente también lo es x; si $z < x < 1$ entonces para algún $m > 0$, $x^{*m} \leq z$, ya que $\text{lím}_m^{*m} = 0$. Por tanto, si $z^{*n} = 0$ con $n < m$, entonces $x^{*mn} \leq z^{*n} \Rightarrow x^{*mn} = 0$. Por lo tanto x es nilpotente.

Supongamos que $x^{*n} = x^{*m}$ y sea $y = x^{*n}, \quad z = x^{*(m-n)}$ entonces $y = y * z = y * z^{*k}$ para todo $k \in N$, por lo tanto $y = y * 0 = 0.$, por lo tanto $y = x^{*n} = 0$ lo cual es una contradicción. □

Nota: Este lema puede ser usado para probar que una t-norma $*$ es Arquimideana si y sólo si para cada $0 < x, y < 1$ existe un n tal que $x^{*n} \leq y$. Esto justifica el nombre Arquimideana.

Lema 5.7. Para cada número positivo $x < 1$ y cada entero positivo n, existe un único y tal que $y^{*n} = x$.

Demostración. Asumamos $n > 1$. Sea $f(y) = y^{*n}$ la cual es una función continua, luego $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, entonces por el teorema del valor intermedio $\exists y \in (0,1)$ tal que $f(y) = x$ para $x \in (0,1)$.

Para probar la unicidad, notemos que $y^{*n} = x$ implica que $0 < x < y < 1$, entonces sea $x < z < y$ tal que $z^{*n} = y^{*n}$ por 5.3, $z = y * t$ para algún t, así $y^{*n} = z^{*n} = y^{*n} * t^{*n} = y^{*n} * t^{*(kn)}$ para cada $k > 0$; pero por el lema anterior, $\lim_k t^{*(kn)} = 0$ y, por continuidad, $x = y^{*n} = y^{*n} * 0 = 0$, lo cual es una contradicción ya que $x > 0$. □

Definición 5.7. Para cada $x \in [0,1], x^{*\frac{1}{n}}$ es el único $y \in [0,1]$ con $y^n = x$. Para un número racional $r = \frac{m}{n}$,

$$x^{*r} = (x^{*\frac{1}{n}})^{*m}$$

Lema 5.8. (1) Si $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ entonces $x^{*\frac{m}{n}} = x^{*\frac{m'}{n'}}$.

(2) Sean r, s racionales positivos, entonces $x^{*r} * x^{*s} = x^{*(r+s)}$ $\forall x \in [0,1]$.

(3) Si $x > 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} x^{*\frac{1}{n}} = 1$

Demostración. (1) Asumamos $m' = km$ y $n' = kn$, entonces

$$x^{*\frac{m'}{n'}} = (x^{*\frac{1}{kn}})^{*km} = ((x^{*\frac{1}{kn}})^{*k})^{*m} = (x^{*\frac{1}{n}})^{*m} = x^{*\frac{m}{n}}$$

(2) Sea $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{k}{n}$ entonces $r + s = \frac{m+k}{n}$. Ahora

$$x^{*r} * x^{*s} = (x^{*\frac{1}{n}})^{*m} * (x^{*\frac{1}{n}})^{*k} = (x^{*\frac{1}{n}})^{*m+k} = x^{*(r+s)}$$

.

(3) Si $x > 0$ entonces $\{x^{*\frac{1}{n}}\}_{n\in N}$ es una secuencia creciente ya que $x \in (0,1]$ y su límite es un idempotente, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} x^{*\frac{1}{n}} = 1$

□

Lema 5.9. (1) Si $*$ es estricta, entonces $([0,1],*)$ es isomorfo a $([0,1],*_\pi)$ donde $x *_\pi y = x.y$ (producto).

(2) Si $*$ es nilpotente, entonces $([0,1],*)$ es isomorfo a $([\frac{1}{4},1],*_{CP})$ donde $x *_{CP} y = \text{máx}(\frac{1}{4}, x.y)$ (producto cortado en $\frac{1}{4}$).

Demostración. Ver prueba en [1] pág. 34. □

Lema 5.10. El semigrupo ordenado $([\frac{1}{4},1],*_{CP})$ es isomorfo a $([0,1],*_L)$ donde$*_L$ es la t-norma de Lukasiewicz y $x *_L y = \text{máx}(0, x+y-1)$.

Demostración. Para $x \in [0,1]$ sea $f(x) = 2^{2(x-1)}$ una función que mapea de manera estrictamente creciente $[0,1]$ a $[\frac{1}{4},1]$. veamos primero que $f(x *_L y) = f(x) *_{CP} f(y)$. Si $x + y \leq 1$ entonces $f(x *_L y) = f(0) = \frac{1}{4}$, luego $f(x) *_{CP} f(y) = 2^{2x-2} *_{CP} 2^{2y-2} = \text{máx}(\frac{1}{4}, 2^{2(x+y-2)}) = \frac{1}{4}$. Ahora, si $x+y > 1$, entonces $f(x *_L y) = f(x+y-1) = 2^{2(x+y-2)}$, luego $f(x) *_{CP} f(y) = 2^{2(x-1)} *_{CP} 2^{2(y-1)} = \text{máx}(\frac{1}{4}, 2^{2(x+y-2)}) = 2^{2(x+y-2)}$.

Luego f es inyectiva ya que es estrictamente creciente; además, f es continua, $f(0) = \frac{1}{4}$ y $f(1) = 1$ entonces por el teorema del valor intermedio se tiene la sobreyectividad. Por lo tanto $([\frac{1}{4},1],*_{CP})$ es isomorfo a $([0,1],*_L)$. □

5.2. Lógica básica multivalor.

Si fijamos una t-norma contínua $*$, fijamos un cálculo proposicional (cuyo conjunto de valores de verdad es el intervalo [0,1]). Tomamos $*$ como la función de verdad de la conjunción &, el residuo $\Rightarrow$ de $*$ es la función de verdad de la implicación.

Definición 5.8. El *cálculo proposicional* $PC(*)$ *dado por* $*$ tiene variables proposicionales $p_1, p_2, ...,$ conectivos $\&, \rightarrow$ y la constante de verdad $\bar{0}$ para 0. Cada variable proposicional es una fórmula; $\bar{0}$ es una fórmula; si ϕ, ψ son fórmulas, entonces $\phi\&\psi, \phi \rightarrow \psi$ son fórmulas.

Otros conectivos se definen de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \phi \wedge \psi & es & \phi \,\&\, (\phi \rightarrow \psi) \\ \phi \vee \psi & es & ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi) \\ \neg\phi & es & \phi \rightarrow \bar{0} \\ \phi \equiv \psi & es & (\phi \rightarrow \psi)\&(\psi \rightarrow \phi) \end{array}$$

Una evaluación de variables proposicionales es un mapeo e que asigna a cada variable proposicional p su valor de verdad $e(p) \in [0,1]$. Esto se extiende de manera única a la evaluación de todas las fórmulas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} e(\bar{0}) & = & 0 \\ e(\phi \rightarrow \psi) & = & e(\phi) \Rightarrow e(\psi) \\ e(\phi\&\psi) & = & e(\phi) * e(\psi) \end{array}$$

Lema 5.11. Para cualquiera fórmulas ϕ, ψ

$$\begin{array}{rcl} e(\phi \wedge \psi) & = & \min(e(\phi), e(\psi)) \\ e(\phi \vee \psi) & = & \max(e(\phi), e(\psi)) \end{array}$$

Demostración. Por definición se tiene que $\phi \wedge \psi = \phi \,\&\, (\phi \rightarrow \psi)$, así:

$e(\phi \wedge \psi) = e(\phi \,\&\, (\phi \rightarrow \psi)) = e(\phi) * e(\phi \rightarrow \psi) = e(\phi) * (e(\phi) \Rightarrow e(\psi)) = e(\phi) \cap e(\psi) = \min(e(\phi), e(\psi))$ por el Lema 5.4.

$e(\phi \vee \psi) = e(((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)) = \min(e((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi), e((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)) = \min((e(\phi) \Rightarrow e(\psi)) \Rightarrow e(\psi), (e(\psi) \Rightarrow e(\phi)) \Rightarrow e(\phi)) = \max(e(\phi), e(\psi))$ por el Lema 5.4. $\square$

Definición 5.9. Una fórmula ϕ es una 1-tautología de $PC(*)$ si $e(\phi) = 1$ para cada evaluación e

Una 1-tautología es una fórmula que es absolutamente verdadera bajo cualquier evaluación . En esta sección se escogen algunas fórmulas que son 1-tautologías de cada $PC(*)$ (para cualquier $*$ continua) para ser axiomas y se desarrolla una lógica que es una base común de todas las lógicas de $PC(*)$. Lo primero servirá para demostrar varias fórmulas importantes en esta lógica básica. Cada fórmula demostrable será una 1-tautología de cada $PC(*)$ y por lo tanto una tautología de la lógica clásica de dos valores.

Definición 5.10. Las siguientes fórmulas son axiomas de la lógica básica BL.

$$\begin{array}{ll}
(BL1) & (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) \\
(BL4) & (\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to (\psi \& (\psi \to \varphi)) \\
(BL5a) & (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \to \chi) \\
(BL5b) & ((\varphi \& \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi)) \\
(BL6) & ((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi) \\
(BL7) & \bar{0} \to \varphi
\end{array}$$

La *regla de deducción* de BL es modus ponens.

El axioma $(BL1)$, también llamado sufijo, asegura la transitividad de la implicación. $(BL4)$ asegura la conmutatividad de la conjunción mínima definida por $\wedge$; también se llama el axioma de divisibilidad, ya que junto con los otros axiomas y definiciones asegura la condición de divisibilidad en BL-álgebras. Las implicaciones mutuamente inversas $(BL5a)$ y $(BL5b)$ expresan la condición de residuación. $(BL6)$ es una variante de la prueba por casos: si χ se sigue de $\varphi \to \psi$ entonces si χ también se sigue de $\psi \to \varphi$ entonces χ. Finalmente $(BL7)$ dice que $\bar{0}$ implica todo.

Como se observa en la numeración de axiomas hacen falta dos, que en un principio estaban incluidos en el libro "Methamatemathics of Fuzzy Logic" [1] pero luego se demostró que eran deducidos a partir de los otros. Estos son:

$$(BL2) \quad (\varphi \& \psi) \to \varphi$$
$$(BL3) \quad (\varphi \& \psi) \to (\psi \& \phi)$$

Lema 5.12. Todos los axiomas de BL son 1-tautologías en cada $PC(*)$. Si φ y $(\varphi \to \psi)$ son 1-tautologías de $PC(*)$ entonces ψ también es una 1-tautología de $PC(*)$. Consecuentemente cada fórmula demostrable en BL es una 1-tautología de cada $PC(*)$.

Demostración. Suponiendo que $e(\phi) = x$, $e(\psi) = y$ y $e(\chi) = z$. Si se denota por φ a la fórmula en $(BL1)$; para probar que es 1-tautología se demostrará que $e(\varphi) \leq 1$ y $1 \leq e(\varphi)$. Dado que para cualquier fórmula φ, $e(\varphi) \in [0, 1]$ entonces para probar $(BL1)$ sólo basta probar que:

$$1 \leq (x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z),$$

i.e., usando residuación tendremos

$$(x \Rightarrow y) * 1 \leq (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z), ssi$$
$$(x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) \leq x \Rightarrow z, ssi$$
$$(x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) * x \leq z$$

pero esto se sigue del hecho que $x * (x \Rightarrow y) = \text{mín}(x, y) \leq y$ y de manera similar $y * (y \Rightarrow z) \leq z$. Como todas son equivalencias entonces se cumple la desigualdad.

Para $(BL2)$ tenemos que dado que por propiedad de t-norma $x * y \leq x$, por el Lema 5.2 tendremos que $(x * y) \Rightarrow x = 1$. De igual forma utilizando éste lema se prueba $(BL3)$.

Para $(BL4)$ SPDG asumamos que $x \leq y$ y entonces por Lema 5.3 tendremos que $x = y * (y \Rightarrow x)$ y como $x * (x \Rightarrow y) \leq x$ por el Lema 5.2 tendremos que $x * (x \Rightarrow y) \Rightarrow x = 1$. De manera similar a $(BL1)$ para probar $(BL5)$ basta probar que $1 \leq (x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \Rightarrow ((x * y) \Rightarrow z))$ lo cual por residuación es equivalente a probar que $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \leq (x * y) \Rightarrow z$.

Por residuación lo siguiente es equivalente

$$\begin{gathered} t \leq x \Rightarrow (y \Rightarrow z), \\ t * x \leq (y \Rightarrow z), \\ t * x * y \leq z, \\ t \leq (x * y) \Rightarrow z. \end{gathered}$$

Por lo anterior y debido a que $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \leq (x \Rightarrow (y \Rightarrow z))$ se tiene $(BL5)$.

Para verificar $(BL6)$ debemos probar que $((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \Rightarrow (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z) = 1$, pero antes observar que $(x \Rightarrow y) = 1$ ó $(y \Rightarrow x) = 1$ y que $1 \Rightarrow z = z$ por Lema 5.2.

Así, SPDG supongamos que $(x \Rightarrow y) = 1$, entonces, bastará probar que $1 \leq (z \Rightarrow (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z))$ lo cual por residuación es equivalente a que $z \leq (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z)$ si y sólo si $z * ((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \leq z$ lo cual es cierto por lo que se cumple lo que queríamos.

Luego $(BL7)$ es evidentemente una tautología dado que $0 \leq x, \forall x \in [0,1]$, entonces $0 \Rightarrow x = 1$.

Ahora para lo otro veamos que si $x = 1$ y $x \Rightarrow y = 1$ entonces, dado que $1 \Rightarrow y = y$ (por el Lema 5.2) entonces $y = 1$. Entonces ya que cada prueba en BL se sigue por *Modus Ponens* entonces cada fórmula demostrable será una 1-tautología de cada $PC(*)$. □

Ahora se va enumerar algunas de las fórmulas importantes que son demostrables en ésta lógica, donde se comenta su papel e importancia.

Lema 5.13. En BL se prueban las siguientes propiedades simples de implicación.

(1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$

(3) $\varphi \to \varphi$

(4) $(\varphi \to \psi) \to ((\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi))$

(5) $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$

Demostración. (1) Usando $(BL2)$ se tiene que $(\varphi \& \psi) \to \varphi$, entonces por $(BL5)$ $((\varphi \& \psi) \to \varphi) \to (\varphi \to (\psi \to \varphi))$. Aplicando Modus-Ponens da $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

(2) Ahora para (2) por $(BL5a)$ $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi\&\psi) \to \chi)$ y por $(BL1)$ se tiene que $((\psi\&\varphi) \to (\varphi\&\psi)) \to (((\varphi\&\psi) \to \chi) \to ((\psi\&\varphi) \to \chi))$ de donde se deduce $((\varphi\&\psi) \to \chi) \to ((\psi\&\varphi) \to \chi)$ y de esto último por $(BL5b)$ se tiene $\psi \to (\varphi \to \chi)$.

(3) Por (1) se sabe que $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ y aplicando (2) se obtiene que $\psi \to (\varphi \to \phi)$; por tanto tomando a ψ por cualquier axioma y aplicando Modus-Ponens $\varphi \to \varphi$.

(4) Utilizando $(BL1)$ se obtiene que $(\chi \to \varphi) \to [(\varphi \to \psi) \to (\chi \to \psi)]$. Por tanto aplicando (2) se obtiene (4)

(5) Por (3) se tiene que $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$, entonces $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$ utilizando (2).

□

Continuamos con las propiedades de la conjunción residuada &.

Lema 5.14. En BL se prueban las siguientes propiedades de conjunción residuada.

(6) $(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi$

(7) $\varphi \to (\psi \to (\varphi\&\psi))$

(8) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi\&\chi) \to (\psi\&\chi)$

(9) $((\varphi_1 \to \psi_1)\&(\varphi_2 \to \psi_2)) \to ((\varphi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\psi_2))$

(10) $(\varphi\&\psi)\&\chi \leftrightarrow \varphi\&(\psi\&\chi)$

Demostración. (6) Primero notar que por (3) $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$ y de esto por (2) se tiene que $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$. Aplicando el axioma $(BL5b)$ se tiene que $(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi$

(7) Para (7) notar que $(\varphi\&\psi) \to (\varphi\&\psi)$ por (3) y aplicando $(BL5)$ se tendrá $\varphi \to (\psi \to (\varphi\&\psi))$.

(8) Por (6) $(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi$ y (7) $\psi \to (\chi \to (\psi\&\chi))$; aplicando $(BL1)$ da $(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to (\chi \to (\psi\&\chi))$. Ahora por $(BL5b)$ $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to (\chi \to (\psi\&\chi)))$ y por (2) $\varphi \to (\chi \to ((\varphi \to \psi) \to (\psi\&\chi)))$. Aplicando $(BL5b)$ a esto último $(\varphi\&\chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\psi\&\chi))$ y por (2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi\&\chi) \to (\psi\&\chi))$ con lo que se concluye.

(9) La prueba es sólo utilizar la propiedad anterior. Ver en página 39 en [1].

(10) Para la última propiedad se puede ver que para cuarquier δ, utilizando repetidamente $(BL5)$ se cumplen las siguientes implicaciones $[((\varphi\&\psi)\&\chi) \to \delta] \to [(\varphi\&\psi) \to (\chi \to \delta)] \to [(\varphi \to (\psi \to (\chi \to \delta)))] \to [(\varphi \to ((\psi\&\chi) \to \delta] \to [(\varphi\&(\psi\&\chi)) \to \delta]$. Así cambiando δ por $(\varphi\&\psi)\&\chi$ se tiene que $(\varphi\&(\psi\&\chi)) \to (\varphi\&\psi)\&\chi$. De forma similar se puede probar el recíproco.

□

A continuación se estudian a las propiedades de min-conjunción $\wedge$ y de max-disjunción $\vee$. Notar que la conjunción del mínimo $\wedge$ difiere de la conjunción residuada &; por ejemplo, por su idempotencia. También la comutatividad de $\wedge$ se establece en el axioma $(BL4)$.

Lema 5.15. En BL se prueban las siguientes propiedades de la conjunción del mínimo:

(11) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi,\ (\varphi \wedge \psi) \to \psi,\ (\varphi\&\psi) \to (\varphi \wedge \psi)$

(12) $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi))$

(13) $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$

(14) $\varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \varphi)$

(15) $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$

(16) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \wedge \chi) \to (\psi \wedge \chi))$

(17) $((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))$

Demostración. (11) Para la demostración de $(\varphi\wedge\psi) \to \varphi$ y $(\varphi\wedge\psi) \to \psi$ sólo utilizar la definición de $\wedge$ y el axioma $(BL2)$. Ahora para el otro como $\varphi \wedge \psi = \varphi\&(\varphi \to \psi)$. Por propiedad (1) se tiene que $\psi \to (\varphi \to \psi)$ y utilizando (8) se tendrá $\psi\&\varphi \to (\varphi \to \psi)\&\varphi$, pero por conmutatividad $(BL3)$ y transitividad $(BL1)$ esto da $\varphi\&\psi \to \varphi\&(\varphi \to \psi)$.

(12) Dado que se cumple (11) sólo resta demostrar que $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi))$. Por (3) se tiene que $\varphi\&(\varphi \to \psi) \to \varphi\&(\varphi \to \psi)$, así aplicando BL5 $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \varphi\&(\varphi \to \psi))$. Luego por (2) se tendrá que $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \varphi\&(\varphi \to \psi))$

(13) Es justamente el axioma $(BL4)$.

(14) Solo resta probar que $\varphi \to (\varphi \wedge \varphi)$ pues por (11), $(\varphi \wedge \varphi) \to \varphi$. Para ello se utiliza la propiedad (3), $\varphi \to \varphi$ y por la propiedad (12), $\varphi \to (\varphi \wedge \varphi)$.

(15) Se tiene que $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \to \varphi$. Luego dado que $(\psi \wedge \chi) \to \psi$, entonces $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \to \psi$. De manera similar $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \to \chi$. Usando (17') se tiene que $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \to (\varphi \wedge \psi)$ por lo que $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \to (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$. De manera similar se hace el recíproco.

(17) Por (10) se sabe que $(\psi \to \chi) \to (\psi \to (\psi \wedge \chi))$ y luego como $(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi)$ y por transitividad $\varphi \to (\psi \wedge \chi)$. Con esto se tiene que $(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))$. Así $(\psi \to \chi) \to (17)$ y de manera similar se demuestra que $(\chi \to \psi) \to (17)$. Aplicando BL6 se demuestra (17).

$\square$

Las propiedades en (11) nos permiten obtener (por una doble aplicación de Modus Ponens) una *regla derivada de deducción* de BL llamada $\wedge$-*adjunción*: $\varphi, \psi \vdash_{BL} \varphi \wedge \psi$ (Así en particular: $(\varphi \to \psi), (\psi \to \varphi) \vdash_{BL} (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Lema 5.16. En BL se prueban las siguientes propiedades de max-disjunción.

(18) $\varphi \to (\varphi \vee \psi), \psi \to (\varphi \vee \psi), (\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$

(19) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \psi)$

(20) $\varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \varphi)$

(21) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \vee \chi) \to (\psi \vee \chi))$

(22) $(\varphi \to \psi) \to (\psi \leftrightarrow (\varphi \vee \psi))$

(23) $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

(24) $(\varphi \vee \psi) \vee \chi \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

(25) $((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)$

Demostración. (18) Por definición $\varphi \vee \psi = ((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$ y se sabe por (13) que $\phi \wedge \chi \to \chi \wedge \phi$ y con eso $((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \phi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi) \wedge ((\varphi \to \psi) \to \psi)$ que es equivalente a $\varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$. Para probar $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$ veamos que por propiedad (5) y (2) se cumple $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$ y $\varphi \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$ respectivamente. Así por (13) se tiene que $\varphi \to [((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)]$ con lo que es equivalente a $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$.

(19) Observar que $\varphi \vee \psi \to [(\varphi \to \psi) \to \psi]$ por definición de $\vee$ y aplicando (2) se obtiene $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \psi)$.

(20) Sólo resta probar que $(\varphi \vee \varphi) \to \varphi$, pero por (3) y lo anterior se cumple.

(21) Usando (19) y luego (18) se tiene $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \vee \chi) \to \chi \to (\psi \vee \chi))$

(22) Basta aplicar (18) y luego (1).

(23) Si se usa (17) se tendrá que $(\varphi \to \psi) \to (23)$. También $(\psi \to \varphi) \to (23)$ por lo que al usar BL6 se obtendrá (23).

(24) Se tiene que $\varphi \to \varphi \vee (\psi \vee \chi), \psi \to \varphi \vee (\psi \vee \chi)$ y $\chi \to \varphi \vee (\psi \vee \chi)$. Luego utilizando (25'), $(\varphi \vee \psi) \to \varphi \vee (\psi \vee \chi)$ y por tanto $(\varphi \vee \psi) \vee \chi \to \varphi \vee (\psi \vee \chi)$. De manera análoga se obtiene el recíproco.

(25) Por (19) se tiene $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \psi)$ y dado que $[((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi))] \to (\psi \to \chi)$ se obtiene que $(\varphi \vee \psi) \to \chi$. Con esto $(\varphi \to \psi) \to [((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)]$. De forma similar se demuestra que $(\psi \to \varphi) \to (25)$ y por tanto al usar BL6 se prueba (25).

□

Corolario 5.1. En BL además se prueba

(17') $((\varphi \to \psi) \& (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))$

(25') $((\varphi \to \chi) \& (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)$

Demostración. La demostración es consecuencia directa de (11). □

Lema 5.17. Además en BL se prueban las siguientes leyes distributivas.

(26) $(\varphi \to (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi))$

(27) $(\varphi \to (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi))$

(28) $((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \leftrightarrow ((\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi))$

(29) $((\varphi \vee \psi) \to \chi) \leftrightarrow ((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi))$

(30) $\varphi \& (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ((\varphi \& \psi) \wedge (\varphi \& \chi))$

(31) $\varphi \& (\psi \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \& \psi) \vee (\varphi \& \chi))$

(32) $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$

(33) $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$

Demostración. Las propiedades de $(26) - (29)$ son consecuencia directa de los lemas anteriores. Veamos (26): una implicación $(\leftarrow)$ es justamente (17). Luego como $\varphi \to (\psi \wedge \chi)$ y $(\psi \wedge \chi) \to \psi$, $(\psi \wedge \chi) \to \chi$ se tendrá que $\varphi \to \psi$ y $\varphi \to \chi$. Así $(\varphi \to (\psi \wedge \chi)) \to (\varphi \to \psi)$ y $(\varphi \to (\psi \wedge \chi)) \to (\varphi \to \chi)$ por lo que al aplicar (17) obtenemos $(\varphi \to (\psi \wedge \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi))$. Las propiedades $30 - 33$ están probadas en la página 44 en [1]. $\square$

Observe que las propiedades de monotonicidad probadas para todos los conectivos se pueden usar para probar las propiedades correspondientes de congruencia con respecto a la equivalencia, p. ej.

Lema 5.18. (34) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\chi \to \varphi) \leftrightarrow (\chi \to \psi))$

(35) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\varphi \to \chi) \leftrightarrow (\psi \to \chi))$

(36) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\varphi \& \chi) \leftrightarrow (\psi \& \chi))$

(37) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

Demostración. Las propiedades (34)-(37) son consecuencia inmediata de las propiedades antes probadas. Por ejemplo para probar (36) veamos que por definición $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\varphi \to \psi) \& (\psi \to \varphi))$ y utulizando BL2, (8) y comutatividad de & se tiene que $((\varphi \to \psi) \& (\psi \to \varphi)) \to [((\varphi \& \chi) \to (\psi \& \chi)) \& ((\psi \& \chi) \to (\varphi \& \chi))]$ que por transitividad de la implicación es equivalente a (36). $\square$

Definición 5.11. Entenderemos a $\bar{1}$ por $\bar{0} \to \bar{0}$

Lema 5.19. Las siguientes propiedades de las constantes de verdad $\bar{0}$ y $\bar{1}$ son demostrables en BL:

(38) $(\varphi \& \bar{1}) \leftrightarrow \varphi$

(39) $(\varphi \wedge \bar{1}) \leftrightarrow \varphi$

(40) $(\varphi \& \bar{0}) \leftrightarrow \bar{0}$

(41) $(\varphi \wedge \bar{0}) \leftrightarrow \bar{0}$

(42) $(\bar{1} \to \varphi) \leftrightarrow \varphi$

Demostración. Las demostraciones de estas propiedades llevan la misma idea y son simples de realizar. Para justificarlo veamos que en (38) la primera implicación ya se cumple por BL2 y luego dado que $\bar{1}$ es $\bar{0} \to \bar{0}$, este se cumple por (3). Así por (7) $\bar{1} \to (\varphi \to (\bar{1} \& \varphi))$ pero como $(\bar{1} \& \varphi) \to (\varphi \& \bar{1})$ se tiene que $\varphi \to (\varphi \& \bar{1})$. □

Con estas propiedades se tiene que el $\bar{1}$ es la unidad para los conectivos & y $\wedge$, y el $\bar{0}$ es el anulador de estos, lo cual muestra que no se ha perdido en nada la generalidad de la lógica clásica.

A continuación se da una lista de propiedades de negación residual que son demostrables en BL. Hay que tener en cuenta que las propiedades de negación son más débiles que las conocidas de lógica clásica: de hecho se parecen más a los de la lógica intuicionista; más tarde se muestra que de hecho BL no prueba sus variantes clásicas.

Lema 5.20. En BL tenemos:

(43) $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$, en particular, $\varphi \to \neg\neg\varphi$ y $(\varphi \& \neg\varphi) \to \bar{0}$

(44) $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

(45) $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

(46) $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

Demostración. (43) Hay que recordar que $\neg\varphi$, fue definido como $(\varphi \to \bar{0})$. Por Modus Ponens se tiene que $\varphi \to ((\varphi \to \bar{0}) \to \bar{0})$ y por BL7 $\bar{0} \to \psi$, así $((\varphi \to \bar{0}) \to \psi)$ y por tanto $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$. Además se obtuvo que $\varphi \to (\neg\varphi \to \bar{0})$ que es lo mismo que $(\varphi \to \neg\neg\varphi)$ y aplicando BL5a se tendrá que $((\varphi\&\neg\varphi) \to \bar{0})$.

(44) Sólo utilizar la definición y BL1.

(45) Se sabe que $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$. Así por (44) $(\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi))$. De la misma forma $(\neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi))$ por (25') se tiene que $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$. Para el recíproco por (11), $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi))$ por lo que $(\varphi \to \psi) \to (\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi)$ y debido a que $(\neg\varphi \to (\neg\varphi \vee \neg\psi))$ entonces $(\varphi \to \psi) \to (\neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi))$. De forma análoga se demuestra que $(\psi \to \varphi) \to (\neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi))$. Por lo tanto aplicando BL6 se tiene que $\neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

(46) Se sabe que $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$. Asi $\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi$; análogamente $\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\psi$. Luego por (17') $\neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Para el recíproco ver primero que $[(\neg\varphi \wedge \neg\psi)\&(\varphi \vee \psi)] \to \bar{0}$. En efecto si se supone que $(\varphi \to \psi)$. Entonces por (22) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \psi)$ y usando (44) se tiene $(\varphi \to \psi) \to ((\neg\psi \wedge \neg\varphi) \leftrightarrow \neg\psi)$. Luego al utilizar (36) $(\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \wedge \neg\psi)\&(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi\&\neg\psi)$. De manera análoga se obtiene $(\psi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \wedge \neg\psi)\&(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi\&\neg\varphi)$. Sustituyendo $(\psi\&\neg\psi)$, $\varphi\&\neg\varphi)$ por $\bar{0}$ y usando BL6 se tendrá $(\neg\varphi \wedge \neg\psi)\&(\varphi \vee \psi) \to \bar{0}$. Luego si se tiene que $(\varphi\&\psi) \to \bar{0}$ por (7) $\varphi \to (\psi \to \varphi\&\psi) \to \bar{0}$ es decir, $\varphi \to \neg\psi$. Por tanto, por lo anterior $(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)$.

□

Notar que (45) y (46) son ambas las leyes de De Morgan.

Definición 5.12. Una *teoría* sobre BL es un conjunto de fórmulas. Una *prueba* en una teoría T es una secuencia $\varphi_1, ..., \varphi_n$ de fórmulas las cuales cada miembro es ya sea un axioma de BL o un miembro de T (axioma especial) o se sigue de algunos miembros precedentes de la secuencia usando la regla de deducción modus ponens. $T \vdash \varphi$ indica que φ es demostrable en T, es decir, que es el último miembro de una prueba en T.

EL siguiente es una variante del *teorema de deducción*.

Teorema 5.3. Sea T una teoría y sean φ, ψ fórmulas. $T \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ si y sólo si existe un n tal que $T \vdash (\varphi^n \to \psi)$ (donde de nuevo φ^n es $\varphi\&...\&\varphi$, n factores).

Demostración. Primero notar que se puede imponer cualquier corchete en $\varphi\&...\&\varphi$, gracias a la asociatividad y conmutatividad de &. Veamos que si $n = 1$ estamos justamente en el teorema de deducción de los preliminares. Ahora si suponemos que existe $n > 1$ tal que $T \vdash (\varphi^n \to \psi)$ entonces $T \vdash (\varphi\&\varphi^{n-1} \to \psi)$ y por BL5 $T \vdash (\varphi \to (\varphi^{n-1} \to \psi))$ y por tanto $T \cup \{\varphi\} \vdash (\varphi^{n-1} \to \psi)$. Siguiendo y el mismo proceso se tendrá que $T \cup \{\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi)$ y por tanto $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Recíprocamente asumir que $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ y sean $\gamma_1, ..., \gamma_k$ una correspondiente prueba $(T \cup \{\varphi\})$ de ψ. Se probará por inducción que para cada $j = 1, ..., k$, hay un n_j tal que $T \vdash (\varphi^{n_j} \to \gamma_j)$. Esto se cumple claramente para γ_j que viene de un axioma de BL o de $T \cup \{\varphi\}$. Si γ_j resulta por Modus Ponens de miembros previos $\gamma_i, (\gamma_i \to \gamma_j)$, entonces por hipótesis de inducción existen n, m tal que $T \vdash (\varphi^n \to \gamma_i)$ y $T \vdash \varphi^m \to (\gamma_i \to \gamma_j)$. Usando (9) $T \vdash (\varphi^n\&\varphi^m) \to (\gamma_i\&(\gamma_i \to \gamma_j))$ y así por (6) $T \vdash \varphi^{n+m} \to \gamma_j$ lo cual completa la prueba. □

Nota. Es de notar que en general no se puede probar el teorema de deducción en la forma 7.4 el cual es válido para lógica clásica; debemos ver antes que sólo una de nuestras lógicas (lógica de Gôdel) tendrá el teorema de deducción clásico, donde la fórmula $\varphi^n \to \psi$ será reemplazada por $\varphi \to (\varphi \to ... \to (\varphi \to \psi)...)$ (n copias de φ).

Definición 5.13. Una teoría T es *contradictoria (o incosistente)* si $T \vdash \bar{0}$; en otro caso es *consistente.*

Lema 5.21. T es inconsistente ssi $T \vdash \varphi$ para cada φ.

Demostración. Si T prueba cada fórmula, entonces prueba $\bar{0}$. Recíprocamente, si $T \vdash \bar{0}$ entonces $T \vdash \varphi$ ya que $T \vdash \bar{0} \to \varphi$ (axioma (BL7)). □

Lema 5.22. Si $T \cup \{\varphi\}$ es inconsistente, entonces para algún n, $T \vdash \neg(\varphi^n)$.

Demostración. Si $T \cup \{\varphi\} \vdash \bar{0}$, entonces, por el teorema de deducción existe un n tal que $T \vdash \varphi^n \to \bar{0}$. □

Lema 5.23. En BL se prueba:

(47) $(\varphi \vee \psi)\&(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\varphi\&\varphi) \vee (\psi\&\psi))$ y $(\varphi \wedge \psi)\&(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\varphi\&\varphi) \wedge (\psi\&\psi))$

(48) $(\varphi \rightarrow \psi)^n \vee (\psi \rightarrow \varphi)^n$, para cada n.

Demostración. (47) Se escribe de nuevo φ^2 por $\varphi\&\varphi$; se tiene que probar que $(\varphi \vee \psi)^2 \leftrightarrow (\varphi^2\&\psi^2)$. Ahora por distributividad en (31) se tiene que $(\varphi \vee \psi)^2 \leftrightarrow (\varphi^2 \vee \psi^2 \vee \varphi\&\psi)$, así es suficiente demostrar que $(\varphi\&\psi) \rightarrow (\varphi^2 \vee \psi^2)$ para obtener que $(\varphi^2 \vee \psi^2 \vee \varphi\&\psi) \leftrightarrow \varphi^2 \vee \psi^2$. Esto se hace por casos. En efecto $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi\&\psi \rightarrow \psi^2)$ y así, $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi\&\psi \rightarrow \varphi^2 \vee \psi^2)$, y de forma análoga $(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi\&\psi \rightarrow \varphi^2 \vee \psi^2)$ y por $(BL6)$ se concluye.

(48) Se tiene por (15) que $BL \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$. Entonces por (5) $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow [((\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi))^2]$ es decir, se obtiene que $\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi))^2$ y por (47) se obtiene $(\varphi \rightarrow \psi)^2 \vee (\psi \rightarrow \varphi)^2$. Por inducción sobre n y usando el mismo argumento se demuestra.

□

5.3. Latices residuados; un teorema de completitud.

Para tener más de dos valores para la evaluación de fórmulas, se han hecho muchos intentos para generalizar la lógica clásica. De esta manera, dos estructuras especiales tomaron un papel importante, a saber, latices residuados y álgebras BL. En esta subsección, se verá brevemente las principales propiedades de ellos.

Un latice residuado se puede colocar entre álgebras de Boole y álgebras BL. La lista de sus operaciones contiene, además de las de latices, también dos operaciones adicionales llamadas t-normas y residuo. En el caso de que $L = \{0, 1\}$, estos coinciden con $\wedge, \rightarrow$, respectivamente.

En las dos secciones anteriores estudió a las t-normas continuas como candidatos para ser la función de verdad de la conjunción y su correspondiente residuo como función de verdad de la implicación. Para cada t-norma continua fija $*$ se obtiene un correspondiente cálculo proposicional $PC(*)$. En esta sección se hará una algebraización de BL. ISe introduce una variedad de álgebras llamadas BL-álgebras y se mostrará que,

- Para cada t-norma $*$, el intervalo unitario $[0,1]$ dotado con las funciones de verdad de los conectivos es una BL-álgebra linealmente ordenada.
- Cada fórmula demostrable es una 1-tautología sobre cada latice.
- El conjunto de todas las fórmulas factorizadas por equivalencia demostrable (es decir, el conjunto de clases de fórmulas demostrablemente equivalentes), dotado con operaciones dadas por conectivos es una BL-álgebra (no linealmente ordenada).
- Una fórmula que es una 1-tautología sobre todas las BL-álgebras linealmente ordenadas es una tautología sobre todas las BL-álgebras (linealmente ordenadas o no).

Esto nos dará el teorema de completitud deseado. Definiremos las BL-álgebras como latices residuados particulares.

Definición 5.14. Un latice residuado es un álgebra

$$(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$$

de tipo

$$(2, 2, 2, 2, 0, 0)$$

tal que

- $(L, \cap, \cup, 0, 1)$ es un latice con elemento máximo 1 y elemento mínimo 0 (con respecto al orden $\leq$).
- $(L, *, 1)$ es un semigrupo conmutativo con elemento unidad 1, es decir, $*$ es conmutativo, asociativo, $1 * x = x \ \ \forall x$.
- La operación $\Rightarrow$ es una operación de residuación con respecto a $*$, es decir,
$$z \leq (x \Rightarrow y) \ \ ssi \ \ x * z \leq y \ \ \forall x, y, z$$

Veamos que en comparación con un latice ordinario, esta estructura es enriquecida por un par especial $(\rightarrow, *)$ de operaciones llamado par adjunto. Cabe mencionar que hay varios nombres para latices residuados, por ejemplo: semigrupo Abeliano conmutativo residuado, monoide residuado, entre otros. Algunos ejemplos de latices residuados son los siguientes:

Ejemplo 5.1. Álgebra Booleana para lógica clásica

$$L_B = (\{0,1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$$

Donde $\rightarrow$ es la implicación clásica, es el latice residuado más simple (la *t*-norma $* = \wedge$). En general cada álgebra booleana es un latice residuado cuando escribimos $a \rightarrow b = a' \vee b$.

Ejemplo 5.2. Álgebra de Lukasiewicz

$$L_L = ([0,1], \wedge, \vee, *, \rightarrow_L, 0, 1)$$

Donde $x * y = \max(0, x + y - 1)$ (t-norma de Lukasiewicz)
y $x \Rightarrow_L y = 1 - x + y$ (implicación de Lukasiewickz).

Ejemplo 5.3. Latice residuado de funciones $[0,1]-$valuadas

Sea X un conjunto no vacío. Para cada $f, g \in [0,1]^X$ escribamos

- $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$,
- $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$,
- $(f * g)(x) = f(x) * g(x)$,
- $(f \Rightarrow g)(x) = f(x) \Rightarrow g(x)$

$\forall x \in X$ donde $\wedge, \vee, *, \Rightarrow$ son las correspondientes operaciones del álgebra de Lukasiewicz (ejemplo anterior). Además, sea $\bar{0}, \bar{1}$ las funciones constantes tomando valores de verdad $0, 1$ respectivamente. Entonces

$$L^{fun}(X) = ([0,1]^X, \wedge, \vee, *, 0, 1)$$

es un latice residuado.

Definición 5.15. Un latice residuado $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ es una BL-álgebra ssi se cumplen las siguientes dos identidades $\forall x, y \in L$:

- $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$
- $(x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x) = 1$ (prelinealidad).

Lema 5.24. Sean $x, y, z \in [0,1]$, en cada BL-álgebra se cumple lo siguiente:

(1) $x * (x \Rightarrow y) \leq y$ y $x \leq (y \Rightarrow (x * y))$,

(2) $x \leq y$ implica $x * z \leq y * z$, $(z \Rightarrow x) \leq (z \Rightarrow y)$, $(y \Rightarrow z) \leq (x \Rightarrow z)$,

(3) $x \leq y$ ssi $x \Rightarrow y = 1$,

(4) $(x \cup y) * z = (x * z) \cup (y * z)$,

(5) $x \cup y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$

Demostración. (1) $x * (x \Rightarrow y) \leq y \Leftrightarrow x \Rightarrow y \leq x \Rightarrow y$ por la tercera propiedad de un latice residuado. Similarmente $x \leq (y \Rightarrow (x * y)) \Leftrightarrow y * x \leq x * y = y * x$.

(2) $y \leq z \Rightarrow y * z$ por (1), entonces $x \leq z \Rightarrow y * z$, luego, por la tercera propiedad de un latice residuado, se tiene que $x * z \leq y * z$. Ahora, como, $x \leq y$ se tiene que $z * (z \Rightarrow x) \leq x \leq y$, entonces $z * (z \Rightarrow x) \leq y \Leftrightarrow z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow y$. Por último, si $x \leq y$ entonces $x * (y \Rightarrow z) \leq y * (y \Rightarrow z) \leq z$, entonces $x * (y \Rightarrow z) \leq z \Leftrightarrow y \Rightarrow z \leq x \Rightarrow z$.

(3)

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow 1 * x \leq y \\ &\Leftrightarrow 1 \leq x \Rightarrow y \\ &\Leftrightarrow x \Rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

(4) Ya que $x \leq x \cup y$ entonces $x * z \leq (x \cup y) * z$. Similarmente, $y * z \leq (x \cup y) * z$; por lo tanto $(x * z) \cup (y * z) \leq (x \cup y) * z$. Recíprocamente, $x * z \leq (x * z) \cup (y * z)$, por lo tanto, $x \leq (z \Rightarrow [(x * z) \cup (y * z)])$; similarmente $y \leq (z \Rightarrow [(x * z) \cup (y * z)])$ por lo tanto $(x \cup y) \leq (z \Rightarrow [(x * z) \cup (y * z)])$ entonces, $(x \cup y) * z \leq (x * z) \cup (y * z)$. Por lo tanto se tiene que $(x \cup y) * z = (x * z) \cup (y * z)$

(5) Probaremos que $x \cup y$ es la mayor cota inferior de $\{(x \Rightarrow y) \Rightarrow y, (y \Rightarrow x) \Rightarrow x\}$.
Asi, $(x \Rightarrow y) * (x \cup y) = (x * (x \Rightarrow y)) \cup (y * (x \Rightarrow y)) \leq y \cup y = y$. Entonces $x \cup y \leq (x \Rightarrow y) \Rightarrow y$, similarmente $x \cup y \leq (y \Rightarrow x) \Rightarrow x$ y por tanto, $x \cup y \leq ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$, es decir, $x \cup y \in \{(x \Rightarrow y) \Rightarrow y, (y \Rightarrow x) \Rightarrow x\}^l$. Probemos ahora que es la cota inferior más grande.
Sea $c \in \{(x \Rightarrow y) \Rightarrow y, (y \Rightarrow x) \Rightarrow x\}$, entonces

$$c \leq (x \Rightarrow y) \Rightarrow y \ \textit{implica} \ (x \Rightarrow y) * c \leq y$$

$$c \leq (y \Rightarrow x) \Rightarrow x \ \ implica \ \ (y \Rightarrow x) * c \leq x$$

entonces $[(x \Rightarrow y) * c] \cup [(y \Rightarrow x) * c] \leq x \cup y$ y por 4. tenemos $c * [(x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x)] \leq x \cup y$, luego $c = c * 1 = c * [(x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x) \leq x \cup y$. Por lo tanto $x \cup y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$.

□

Definición 5.16. Un latice residuado $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ es linealmente ordenado si el orden parcial asociado al latice es lineal; es decir, si para cada para x, y $x \cap y = x$ ó $x \cap y = y$ (equivalentemente x, y $x \cup y = x$ ó $x \cup y = y$)

Lema 5.25. Un latice residuado linealmente ordenado L es una BL-álgebra si y sólo si la identidad $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$ es cierta en L.

Demostración. como L es un latice residuado linealmente ordenado, entonces $x \leq y$ ó $y \leq x$ se cumple para cada $x, y \in L$, entonces, si $x \leq y$ implica $x \Rightarrow y = 1$ y $x \cap y = x$, similarmente si $y \leq x$ implica $y \Rightarrow x = 1$ y $x \cap y = y$. □

Observación: cada t-norma continua determina una BL-álgebra sobre el intervalo unitario $[0, 1]$ con su orden lineal estándar.

Definición 5.17. Sea $(L; \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ una BL-álgebra. Definimos una L-evaluación de variables proposicionales como un mapeo e que asigna a cada variable proposicional p un elemento $e(p)$ de L. Esto se extiende de manera obvia a una evaluación de todas las fórmulas usando las operaciones sobre L como funciones de verdad, es decir,

$$\begin{aligned} e(\overline{0}) &= 0 \\ e(\phi \to \psi) &= e(\phi) \Rightarrow e(\psi) \\ e(\phi \mathbin{\&} \psi) &= e(\phi) * e(\psi) \end{aligned}$$

Y por lo tanto $e(\phi \wedge \psi) = e(\phi) \cap e(\psi)$, $e(\phi \vee \psi) = e(\phi) \cup e(\psi)$, $e(\neg\phi) = e(\phi \Rightarrow 0)$

Una fórmula ϕ es una L-tautología si $e(\phi) = 1$ para cada L-evaluación e.

Teorema 5.4. La lógica BL es sólida con respecto a BL-tautologías, es decir, si ϕ es demostrable en BL, entonces ϕ es una L-tautología para cada BL-álgebra L. Más generalmente, si T es una teoría sobre BL y de T se demuestra

ϕ , entonces, para cada BL-álgebra L y cada L-evaluación e de variables proposicionales asignando el valor 1 a todos los axiomas de T tenemos $e(\phi) = 1$.

Demostración. Debemos mostrar que todos los axiomas de BL son $L-$tautologías y que la definición de $x \cup y$ a partir de $\Rightarrow$ es una tautología, pero esto último ya se probó en (5). Probaremos solamente el axioma ($BL6$), el resto de los axiomas se demuestran como en el Lema 5.12:

$$\begin{aligned}
& ((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) * ((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \\
= \;& [((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) * ((y \Rightarrow x) \Rightarrow z)] * ((x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x)) \\
= \;& [((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) * ((y \Rightarrow x) \Rightarrow z)] * (x \Rightarrow y) \cup [((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \\
& *((y \Rightarrow x) \Rightarrow z)] * (y \Rightarrow x) \\
\leq \;& z \cup z = z
\end{aligned}$$

□

Lema 5.26. La clase de todas las $BL-$álgebras forman una variedad de álgebras.

Demostración. De la primera sección de este trabajo sabemos que la clase de todos los latices es una variedad; también las condiciones sobre $0, 1$ se pueden expresar por identidades: $x \cap 1 = x$, $\quad x \cap 0 = 0$. Similarmente las condiciones sobre $*$ (conmutatividad, asociatividad, 1 es el elemento unidad) son identidades. Solo falta verificar que la operación de residuación se puede expresar por medio de las siguientes identidades:

(6) $x \cap (y \Rightarrow (x * y)) = x$,

(7) $((x \Rightarrow y) * x) \cup y = y$,

(8) $(x \Rightarrow (x \cup y)) = 1$,

(9) $((z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow (x \cup y))) = 1$,

(10) $(x \cap y) * z = (x * z) \cap (y * z)$.

Primero, obsérvese que estas cinco identidades son verdaderas en cada $BL-$álgebra: (6) es equivalente a $x \leq y \Rightarrow (x * y)$ y 7 a $y \Rightarrow (x * y) \leq y$ por (1).

para (8), como $x \leq x \cup y$ entonces $(x \Rightarrow (x \cup y)) = 1$ por (3). (9) es un caso particular del hecho que si $y \leq z$ implica $(x \Rightarrow y) \leq (x \Rightarrow z)$ ($\Rightarrow$ es no decreciente en el segundo argumento; en efecto, si $y \leq z$, $u \leq x \Rightarrow y$ implica $x * u \leq y$ implica $x * u \Rightarrow z$ implica $u \leq x \Rightarrow z$). y por último (10) es una de las leyes distributivas y se sigue de la demostrabilidad del lema (5.17) (30).

Ahora probemos la condición de residuación con estas cinco identidades:

(11) $x \leq y$ implica $x * z \leq y * z$; en efecto, si $x \leq y$ entonces $x = x \cap y$ por lo tanto $x * z = (x \cap y) * z = (x * z) \cap (y * z)$ por (10), por lo tanto $x * z \leq y * z$.

(12) $x \leq y$ si y sólo si $x \Rightarrow y = 1$. Por un lado, $x \leq y$ implica $x \cup y = y$, por tanto $x \Rightarrow y = 1$ por (9); por otro lado si $x \Rightarrow y = 1$ entonces $x \cap y = x * (x \Rightarrow y) = x * 1 = x$, por lo tanto $x \leq y$.

(13) $x \leq y$ implica $z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow y$. Esto se sigue directamente de (10) ya que si $x \leq y$ entonces $y = x \cup y$.

(14) $z \leq x \Rightarrow y$ ssi $x * z \leq y$. Usando (11) – (13) tenemos:

($\Leftarrow$) Por (1) $z \leq x \Rightarrow (x * z)$ por lo tanto si $x * z \leq y$, entonces $z \leq x \Rightarrow y$.

($\Rightarrow$) Si $z \leq x \Rightarrow y$ entonces $x * z \leq x * (x \Rightarrow y) \leq y$. por lo tanto $x * z \leq y$.

□

Mostraremos ahora que las clases de fórmulas demostrablemente equivalentes forman una $BL-$álgebra.

Definición 5.18. Álgebra de Lindenbaum-Tarski

Sea T una teoría fija sobre BL. Para cada fórmula ϕ, sea $[\phi]_T = \{\psi | T \vdash \phi \equiv \psi\}$. El álgebra de Lindenbaum-Tarski de la teoría T, denotada por L_T, álgebra con el dominio $\{[\phi]_T | \phi$ es una fórmula de BL$\}$ y las operaciones definidas como siguen:

$$\begin{aligned}
0 &= [\bar{0}]_T \\
1 &= [\bar{1}]_T \\
[[\phi]_T * [\psi]_T] &= [\phi \& \psi]_T \\
[\phi]_T \cap [\psi]_T &= [\phi \wedge \psi]_T \\
[\phi]_T \Rightarrow [\psi]_T &= [\phi \rightarrow \psi]_T \\
[\phi]_T \cup [\psi]_T &= [\phi \vee \psi]_T
\end{aligned}$$

Lema 5.27. L_T es una BL-álgebra.

Demostración. Sean $[\phi]_T, [\psi]_T, [\chi]_T \in L_T$

- **Propiedades de latices**
  - Idempotencia: $[\phi]_T \cap [\phi]_T = [\phi \wedge \phi]_T = [\phi]_T$ por propiedad de mínima conjunción.
  - Conmutatividad: $[\phi]_T \cap [\psi]_T = [\phi \wedge \psi]_T = [\psi \wedge \phi]_T = [\psi]_T \cap [\phi]_T$ por propiedad de mínima conjunción.
  - Asociatividad: $[\phi]_T \cap ([\psi]_T \cap [\chi]_T) = [\phi \wedge (\psi \wedge \chi)]_T = [(\phi \wedge \psi) \wedge \chi]_T = ([\phi]_T \cap [\psi]_T) \cap [\chi]_T$ por la asociatividad de $\wedge$.
  - Absorción $[\phi]_T \cup ([\phi]_T \wedge [\psi]_T = [\phi \vee (\phi \wedge \psi)]_T) = [\phi]_T$.
- **propiedades de semigrupo conmutativo**
  - Conmutatividad: $[\phi]_T * [\psi]_T = [\phi \& \psi]_T = [\psi \& \phi]_T = [\psi]_T * [\phi]_T$ por el tercer axioma de lógica básica BL.
  - Asociatividad: $([\phi]_T * [\psi]_T) * [\chi]_T = [(\phi \& \psi) \& \chi]_T = [\phi \& (\psi \& \chi)]_T = [\phi]_T * ([\psi]_T * [\chi]_T)$ por propiedad (asociativa) de la conjunción fuerte.

Ahora obsérvese que el orden $\leq$ del latice satisface lo siguiente:

$$[\phi]_T \leq [\psi]_T \text{ ssi } T \vdash \phi \rightarrow \psi$$

($\Leftarrow$) Si $T \vdash \phi \rightarrow \psi$ entonces $T \vdash \phi \equiv (\phi \wedge \psi)$, por lo tanto $[\phi]_T = [\phi]_T \cap [\psi]_T$ y $[\phi]_T \leq [\psi]_T$.

($\Rightarrow$) Si $[\phi]_T \leq [\psi]_T$, por lo tanto $T \vdash \phi \equiv (\phi \wedge \psi)$, entonces $T \vdash \phi \to \psi$ ya que sobre BL, $T \vdash \phi \wedge \psi \to \psi$

Probemos ahora la propiedad $iii)$ de un latice residuado: $[\chi]_T \leq [\phi]_T \Rightarrow [\psi]_T$ ssi $T \vdash \chi \to (\phi \to \psi)$ ssi $T \vdash (\chi \& \phi) \to \psi$ ssi $[\chi \& \psi]_T \leq [\psi]_T$. por lo tanto L_T es un latice residuado. Falta probar que L_T cumple con las condiciones de una $BL-$álgebra:

- $[\phi]_T * ([\phi]_T \Rightarrow [\psi]_T) = [\phi \& (\phi \to \psi)]_T = [\phi \wedge \psi]_T = [\phi]_T \cap [\psi]_T$ por la definición de $\wedge$.
- $([\phi]_T \Rightarrow [\psi]_T) \cup ([\psi]_T \Rightarrow [\phi]_T) = [\phi \to \psi]_T \vee [\psi \to \phi]_T = [\bar{1}]_T = 1$ por la propiedad de máxima disyunción (Lema 5.16 (23)).

□

Filtros y congruencias. La teoría de filtros proporciona una de las técnicas algebraicas fundamentales, que hace posible investigar las características principales y profundas de las álgebras subyacentes. Presentamos algunas definiciones básicas y también demostramos una conexión cercana entre filtros y congruencias

Definición 5.19. Sea $L = (L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ un latice residuado. Un filtro sobre L es un conjunto no vacío $F \subseteq L$ tal que para cada $x, y \in L$,

$$a \in F \text{ y } b \in F \text{ implica } a * b \in F$$

$$a \in F \text{ y } a \leq b \text{ implica } b \in F.$$

Decimos que F es un filtro primo si y sólo si para cada $x, y \in L$,

$$(x \Rightarrow y) \in F \text{ o } (y \Rightarrow x) \in F$$

Definición 5.20. Sea L un latice residuado, $\sim$ es una relación de congruencia sobre L si es una relación de equivalencia sobre L y además, si $a, b, c, d \in L$ son tal que si $a \sim c$, $b \sim d$ entonces

$$a \cap b \sim c \cap d, \quad a \cup b \sim c \cup d$$

$$a * b \sim c * d, \quad a \Rightarrow b \sim c \Rightarrow d$$

Lema 5.28. Sea L una $BL-$álgebra y sea F un filtro. Si

$$x \sim_F y \text{ ssi } (x \Rightarrow y) \in F \text{ y } (y \Rightarrow x) \in F$$

entonces

(i) $\sim_F$ es una congruencia y la correspondiente álgebra cociente $L/\sim_F$ es una $BL-$álgebra.

(ii) $L/\sim_F$ es linealmente ordenado si y sólo si F es un filtro primo.

Demostración. (i) Probemos que es una relación de equivalencia, sean $x, y, z \in L$:

- Reflexiva: $x \Rightarrow x = 1$ entonces $x \sim_F x$.
- Simétrica: sea $x \sim_F y$ entonces $x \Rightarrow y \in F$ y $y \Rightarrow x$ por lo tanto $y \sim_F x$
- Transitiva: Ya que la fórmula $(\phi \to \psi)\&(\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)$ es una $1-$tautología sobre L, es decir, $((x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z) = 1$ entonces $((x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z)) \leq (x \Rightarrow z)$ para cada $x, y, z \in L$; si $(x \Rightarrow y), (y \Rightarrow z) \in F$ entonces $(x \Rightarrow z) \in F$. Por lo tanto podemos definir clases de equivalencia $[x]_F = \{y | x \sim_F y\}$.

  Verifiquemos que es una relación de congruencia, es decir que preserva las operaciones. Verifiquemos primero que $[x] \leq [y]$ ssi $x \Rightarrow y \in F$. Obsérvese que $[x \cap y]_F = [x]_F \cap [y]_F = [x]_F$ ssi $[x]_F \leq [y]_F$, entonces

  ($\Rightarrow$) Sea $[x]_F \leq [y]_F \Leftrightarrow [x \cap y]_F = [x]_F$; es decir $x \sim_F x \cap y$, entonces $x \Rightarrow (x \cap y), (x \cap y) \Rightarrow x \in F$, probemos ahora que $x \Rightarrow (x \cap y) \leq (x \Rightarrow y)$

$$\begin{aligned} x \Rightarrow (x \cap y) \leq (x \Rightarrow y) &\Leftrightarrow x * (x \Rightarrow (x \cap y)) \leq y \\ \text{(por Lema 5.24(1))} &\Leftrightarrow x * (x \Rightarrow (x \cap y)) \leq x \cap y \leq y \\ &\Leftrightarrow (x \Rightarrow (x \cap y)) \leq (x \Rightarrow y) \end{aligned}$$

  como $x \Rightarrow (x \cap y) \in F$ entonces $x \Rightarrow y \in F$.

($\Leftarrow$) Si $x \Rightarrow y \in F$ queremos probar que $[x]_F \leq [y]_F$; es decir que $x \Rightarrow (x \cap y),\ \ (x \cap y) \Rightarrow x \in F$. Probemos que $x \Rightarrow y \leq x \Rightarrow (x \cap y)$.

$$\begin{aligned} x \Rightarrow y \leq x \Rightarrow (x \cap y) &\Leftrightarrow x * (x \Rightarrow y) \leq x \cap y \\ &\Leftrightarrow x \cap y \leq x \cap y \end{aligned}$$

Por lo tanto $x \Rightarrow (x \cap y) \in F$. Análogamente se prueba que $(x \cap y) \Rightarrow x \in F$

probemos que si $[x]_F = [y]_F$ entoces:

- $[x \cap z]_F = [y \cap z]_F$. Es decir, queremos probar que $x \cap z \Rightarrow y \cap z,\ \ y \cap z \Rightarrow x \cap z \in F$, entonces

$$\begin{aligned} x \Rightarrow y \leq x \cap z \Rightarrow y \cap z &\Leftrightarrow (x \cap z) * (x \Rightarrow y) \leq y \cap z \\ &= (x * (x \Rightarrow y)) \cap (z * (x \Rightarrow y)) \leq y \cap z \\ &= (x \cap y) \cap (z * (x \Rightarrow y)) \leq b \cap (z * (x \Rightarrow y)) \end{aligned}$$

  Luego $(z * (x \Rightarrow y) \leq z \Leftrightarrow (x \Rightarrow y) \leq z \Rightarrow z = 1$, entonces $x \Rightarrow y \leq 1$. Por lo tanto $x \cap z \Rightarrow y \cap z \in F$. Análogamente se demuestra que $y \cap z \Rightarrow x \cap z \in F$.

- $[x * z]_F = [y * z]_F$. Probemos que $x \Rightarrow y \leq (x * z) \Rightarrow (y * z)$. $x \Rightarrow y \leq (x * z) \Rightarrow (y * z) \Leftrightarrow x * z * (x \Rightarrow y) \leq (y * z)$ luego $x \cap y = x * (x \Rightarrow y) \leq y$ implica $z \leq z$. Por lo tanto $(x * z) \Rightarrow (y * z) \in F$. Análogamente se prueba que $(y * z) \Rightarrow (x * z) \in F$.
- $[x \Rightarrow z]_F = [y \Rightarrow z]_F$. Probemos que $(x \Rightarrow z) \Rightarrow (y \Rightarrow z) \in F$.

$$\begin{aligned} y \Rightarrow x \leq (x \Rightarrow z) \Rightarrow (y \Rightarrow z) &\Leftrightarrow (x \Rightarrow z) * (y \Rightarrow x) \leq (y \Rightarrow z) \\ &\Leftrightarrow (x \Rightarrow z) * y * (y \Rightarrow x) \leq z \end{aligned}$$

  Luego $(x \Rightarrow z) * (y \cap x) \leq (x \Rightarrow z) * x = x \cap z \leq z$. Por lo tanto $(x \Rightarrow z) \Rightarrow (y \Rightarrow z) \in F$. Análogamente se demuestra que $(y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z) \in F$.

- $[z \Rightarrow x]_F = [z \Rightarrow y]_F$. Tenemos que $(x \Rightarrow y) \leq (z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow y)$ ssi $z * (z \Rightarrow x) * (x \Rightarrow y) \leq x * (x \Rightarrow y) = x \cap y \leq y$. Por lo tanto $(z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow y) \in F$. Análogamente se demuestra que $(z \Rightarrow y) \Rightarrow (z \Rightarrow x) \in F$.

Por lo tanto podemos inducir las operaciones $*, \Rightarrow, \cap, \cup$ sobre el conjunto $L/\sim_F$ de clases de equivalencia haciendo $[x * y]_F = [x]_F * [y]_F$, etc; el mapeo que asigna a cada x su clase $[x]_F$ es entonces un homomorfismo y $L/\sim_F$ bajo la operación inducida es una $BL-$álgebra (ya que las $BL-$álgebras forman una variedad y por lo tanto es cerrado bajo homomorfismos y estos preservan la validez de las identidades).

(ii) ($\Leftarrow$) Asumamos que F es un filtro primo y sean $x, y \in L$. Si $(x \Rightarrow y) \in F$, entonces $[x]_F \leq [y]_F$ y, si $(y \Rightarrow x) \in F$ entonces $[y]_F \leq [x]_F$. Por lo tanto $\leq$ es lineal.

($\Rightarrow$) Si $L/\sim_F$ es linealmente ordenado y $x, y \in L$, entonces, o bien $[x]_F \leq [y]_F$ y $(x \Rightarrow y) \in F$ ó $[y]_F \leq [x]_F$ y $(y \Rightarrow x) \in F$. Por lo tanto F es un filtro primo.

□

Lema 5.29. Sea L una $BL-$álgebra contable y sea $a \in L$, $a \neq 1$. Entonces existe un filtro primo F sobre L tal que no contiene a a.

Demostración. Denotemos por $F(a)$ al conjunto de todos los filtros de L que no contienen a a, $F(a) \neq \emptyset$ ya que $F_0 = \{1\} \in F(a)$. Probaremos que si $F \in F(a)$ y $x, y \in L$ tal que $x \Rightarrow y \notin F$ y $y \Rightarrow x \notin F$, entonces existe un filtro $F' \supseteq F$ tal que $a \notin F'$, pero $x \Rightarrow y \in F$ o $y \Rightarrow x \in F$. Nótese que el filtro más pequeño F' que contiene a F es $F' = \{u \mid (\exists v \in F)(\exists n \in N)(v * z^n \leq u)\}$. Probemos que en efecto este conjunto es un filtro y que es el más pequeño que cumple la condición. Sean $u, r \in F'$, entonces existen $v, w \in F$ y $n, m \in \mathbf{N}$ tal que $v * z^n \leq u$ y $w * z^m \leq r$, luego

$$\begin{aligned} (v * z^n) * (w * z^m) &\leq u * r \\ (v * w) * z^{n+m} &\leq u * r \end{aligned}$$

por lo tanto $u * r \in F'$. Ahora, sean $u \in F'$ y $u \leq t$, entonces existe $v \in F$ y $n \in \mathbf{N}$ tal que $v * z^n \leq u \leq t$, entonces $v * z^n \leq t$, por lo tanto $t \in F'$. Por tanto, F' es un filtro. Ahora, sea F'' otro filtro tal que $F \subseteq F''$ y $z \in F''$, y probemos que $F' \subseteq F''$. En efecto, sea $u \in F' \Rightarrow \exists v \in F$ y $n \in \mathbf{N}$ tal que $v * z^n \leq u$, como $v \in F \subseteq F''$ y $z \in F''$ entonces $v * z^n \in F''$ (filtro), entonces $v * z^n \leq u$ implica que $u \in F''$.

Por lo tanto asumamos que $x \Rightarrow y \notin F$ y $y \Rightarrow x \notin F$ y sean F_1, F_2 los filtros más pequeños tal que contienen a F como un subconjunto y $x \Rightarrow$

$y \in F$ y $y \Rightarrow x \in F$ respectivamente como un elemento. Afirmamos que $a \notin F_1$ ó $a \notin F_2$. Asumamos lo contrario, entonces para algún $v \in F$ y n natural $v * (x \Rightarrow y)^n \leq a$ y $v * (y \Rightarrow x)^n \leq a$, por tanto $a \geq v * (x \Rightarrow y)^n \cup v * (y \Rightarrow x)^n = v * ((x \Rightarrow y)^n) \cup (y \Rightarrow x)^n)) = v * 1 = v$, entonces $v \leq a$ lo cual implica que $a \in F$ $(\rightarrow\leftarrow)$. Por lo tanto $a \notin F_1$ ó $a \notin F_2$.

Como L es contable, entonces ordenamos todos los pares $(x, y) \in L^2$ en una secuencia $\{(x_n, y_n) : n \text{ natural}\}$, y pongamos $F_0 = \{1\}$ y habiendo construido F_n tal que $a \notin F_n$ tomamos $F_n \subseteq F_{n+1}$ tal que $a \notin F_{n+1}$ de acuerdo a nuestra construcción; si es posible tomamos F_{n+1} tal que $(x_n \Rightarrow y_n) \in F_{n+1}$, si no tomamos $(y_n \Rightarrow x_n) \in F_{n+1}$. Y así, nuestro filtro primo deseado será

$$\bigcup_n F_n$$

(Unión de filtros es un filtro: en efecto, sean $a, b \in \bigcup_n F_n \Rightarrow a \in F_r, b \in F_s$ para algún $r, s \in \mathbf{N}$ sin pérdida de generalidad, supongamos $r \leq s$ entonces $F_r \subseteq F_s$, como $a \in F_r \subseteq F_s \Rightarrow a * b \in F_s \subseteq \bigcup_n F_n$. Ahora, sea $a \in \bigcup_n F_n$ y $a \leq b$, entonces $a \in F_m$ para algún $m \in \mathbf{N}$, como F_m es un filtro entonces $b \in F_m$, por lo tanto $b \in \bigcup_n F_n$.) □

Lema 5.30. Cada BL-álgebra es una subálgebra del producto directo de un sistema de BL-álgebras linealmente ordenado.

Demostración. Sea L una $BL-$álgebra y U el sistema de todos los filtros primos sobre L. Para $F \in U$ sea $L_F = L/F$ y sea

$$L^* = \prod_{F \in U} L_F$$

L^* es el producto directo de latices residuados linealmente ordenados $\{L_F \mid F \in U\}$ de L^*. Sea $i : L \to L^*$ definida por $i(x) = \{[x]_F \mid F \in U\} \in L^*$ para cada $x \in L$. Claramente este mapeo preserva las operaciones y por tanto es un homomorfismo. Probemos ahora que es inyectivo. Si $x, y \in F$ con $x \neq y$ entonces $x \nleq y$ ó $y \nleq x$ lo cual implica $x \Rightarrow y \neq 1$, entonces por el lema anterior, sea F un filtro primo sobre L tal que $x \Rightarrow y \notin F$; entonces en L/F, $[x]_F \nleq [y]_F$ lo cual implica L/F, $[x]_F \neq [y]_F$ y por lo tanto $i(x) \neq i(y)$. □

Definición 5.21. Asociar con cada fórmula ϕ de BL un término $\phi^\bullet$ del lenguaje de latices residuados reemplazando los conectivos $\rightarrow, \&, \wedge, \vee, \bar{0}, \bar{1}$ por los símbolos de funciones $\Rightarrow, *, \cap, \cup, 0, 1$ respectivamente y reemplazando cada variable proposicional p_i por su respectivo objeto variable x_i.

Lema 5.31. Sea ϕ una fórmula,

(1) Si ϕ es una $L-$tautología para todas las $BL-$álgebras linealmente ordenadas, entonces ϕ es una $L-$tautología para todas las $BL-$álgebras.

(2) ϕ es una $L-$tautología ssi la identidad $\phi^\bullet = 1$ es verdadera en L.

Demostración. (1) Se sigue inmediatamente de (2) y del lema de representación del producto subdirecto.

(2) Se sigue inmediatamente del hecho que el valor del término $\phi^\bullet$ dado por una evaluación e es solo $e_L(\phi)$; es decir, $1 = \phi^\bullet = e_L(\phi)$.

□

Teorema 5.5 (Completitud.)**.** BL es completo; es decir, para cada fórmula ϕ los siguientes son equivalentes:

i) ϕ es probable en BL

ii) Para cada BL-álgebra linealmente ordenada L, ϕ es una L-tautología

iii) Para cada BL-álgebra L ϕ es una L-tautología.

Demostración. La implicación de *i)* a *ii)* se estableció en el Teorema 5.4 y la implicación de *ii)* a *iii)* se estableció en el lema anterior (1). Probemos ahora *iii)* $\Rightarrow$ *i)*. Por el Lema 5.27 se tiene que el el álgebra L_{BL} de clases de fórmulas equivalentes de BL es una $BL-$álgebra. En particular, sea $e(p_i) = [p_i]_{BL}$ para todas las variables proposicional; entonces $e(\phi) = [\phi]_{BL} = [1]_{BL}$, implica, $BL \vdash \phi \equiv 1$, por lo tanto $BL \vdash \phi$. □

Generalizaremos este teorema de siguiente manera:

Definición 5.22.

- Un esquema axiomático dado por una fórmula $\Phi(p_1, ..., p_n)$ es el conjunto de las fórmulas $\Phi(\phi_1, ..., \phi_n)$ que resulta de sustituir ϕ_i por p_i con $i = 1, ..., n$ en $\Phi(\phi_1, ..., \phi_n)$.
- Un cálculo lógico C es una extensión esquemática de BL si resulta de BL agregando algunos esquemas axiomáticos a sus axiomas.
- Sea C una extensión esquemática de BL y sea L una BL-álgebra. L es una C-álgebra si todos los axiomas de C son L-tautologías.

Teorema 5.6 (*Completitud*)**.** . Sea C una extensión esquemática de BL y sea ϕ una fórmula. Los siguientes son equivalentes:
i) C prueba ϕ
ii) Para cada C-álgebra linealmente ordenada L, ϕ es una L-tautología
iii) Para cada C-álgebra L, ϕ es una L-tautología.

Demostración. La prueba es similar a la del teorema de completitud de BL. $\square$

6. Lógica de predicado multivalor.

En esta sección iniciamos con la investigación de lógica de predicado difusa. Se desarrollan lógicas ampliamente análogas a la lógica de predicados clásica; en particular trataremos sólo con dos cuantificadores, $\forall$ y $\exists$. En la primera sección desarrollaremos la contra parte de predicado $BL\forall$ de nuestra lógica proposicional básica BL. En la segunda sección probaremos el teorema de completitud un poco más general para lógica de predicados (con respecto a la semántica sobre latices residuados). En la sección tres discutiremos cálculo de predicado difuso multi-género y en la sección cuatro introduciremos similitud (igualdad difusa.). Esta noción será muy importante en nuestro análisis de control difuso.

6.1. Lógica de Predicado Básico Multivalor

Definición 6.1. Un lenguaje de predicado consiste de un conjunto no vacío de predicados junto con un número natural positivo que es su aridad y un conjunto de objetos constantes (posiblemente vacío). Los predicados se denotan normalmente por $P, Q, S, ...$, las constantes por $c, d, ...$. Los símbolos lógicos son objetos variables $x, y, ...$ conectivos $\&, \rightarrow$, constantes de verdad $\bar{0}, \bar{1}$ y cuantificadores $\forall, \exists$. Otros conectivos como $\wedge, \vee, \neg, \equiv$ los definimos como en las secciones anteriores. Los términos son objetos variables y objetos constantes.

Las fórmulas atómicas tienen la forma $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ donde P es un predicado de aridad n y los t_i son términos. Si ϕ, ψ son fórmulas y x es un objeto variable entonces $\phi \rightarrow \psi$, $\phi\&\psi$, $(\forall x)\psi$, $(\exists x)\phi$, $\bar{0}, \bar{1}$ son fórmulas. Cada fórmula resulta de fórmulas atómicas por el uso iterado de esta regla.

Sea $\mathcal{J}$ un lenguaje de predicado y sea $\mathbf{L}$ una BL-álgebra linealmente ordenada. Una $\mathbf{L}$-estructura $\mathbf{M} = (M, (r_P)_P, (m_c)_c)$ para $\mathcal{J}$ tiene un dominio no vacío M, para cada predicado n-ario P una relación n-aria $\mathbf{L}$-difusa $r_P : M^n \rightarrow \mathbf{L}$ sobre M (asociando a cada n-tupla $(m_1, ..., m_n)$ de elementos de M el grado $r_P(m_1, ..., m_n) \in \mathbf{L}$) y para cada objeto constante c, m_c es un elemento de M.

Definición 6.2. Sea $\mathcal{J}$ un lenguaje de predicado y $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$-estructura para $\mathcal{J}$. Una $\mathbf{M}$-*evaluación de objetos variables* es un mapeo v asignando a cada objeto variable x un elemento $v(x) \in M$. Sea v y v' dos evaluaciones, $v \equiv_x v'$ significa que $v(y) = v'(y)$ para cada $y \neq x$.

El valor de un término dado por $\mathbf{M}, v$ es definido como sigue: $\|x\|_{\mathbf{M},v} = v(x)$; $\|c\|_{\mathbf{M},v} = m_c$. Definimos el valor de verdad de una fórmula ϕ como $\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v}$. Claramente $\Rightarrow$ y $*$ son las operaciones de $\mathbf{L}$.

$$
\begin{aligned}
\|P(t_1, ..., t_n)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} &= r_p(\|t_1\|_{\mathbf{M},v}, ..., \|t_n\|_{\mathbf{M},v}) \\
\|\phi \to \psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} &= \|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} \Rightarrow \|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} \\
\|\phi \& \psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} &= \|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} * \|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} \\
\|\bar{0}\|_{\mathbf{M},v} &= 0; \;\; \|\bar{1}\|_{\mathbf{M},v} = 1 \\
\|(\forall x)\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} &= \text{ínf}\{\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v'} | v \equiv_x v'\} \\
\|(\exists x)\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} &= \sup\{\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v'} | v \equiv_x v'\}
\end{aligned}
$$

siempre que el ínfimo y el supremo existan en el sentido de $\mathbf{L}$, en otro caso el valor de verdad de la fórmula en cuestión no está definida.

La estructura $\mathbf{M}$ es $\mathbf{L}$-segura si $\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v}$ está definida para toda ϕ, v; es decir si todos los ínfimos y supremos necesarios existen.

Definición 6.3. Con estas definiciones se cumple lo siguiente:

- Sea ϕ una fórmula de un lenguaje $\mathcal{J}$ y sea $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$-estructura segura para $\mathcal{J}$. El valor de verdad de ϕ en $\mathbf{M}$ es

$$\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}} = \text{ínf}\{\|\phi\|_{\mathbf{M},v} \mid v \quad \mathbf{M} - \textit{evaluación}\}$$

- Una fórmula ϕ de un lenguaje $\mathcal{J}$ es una $\mathbf{L}$-tautología si $\|\phi\|_{\mathbf{M}} = 1_{\mathbf{L}}$ para cada L-estructura segura M, es decir; $\|\phi\|_{M,v} = 1$ para cada $\mathbf{L}$-estructura segura $\mathbf{M}$ y cada $\mathbf{M}$-evaluación de objetos variables.

Definición 6.4. 1. Los siguientes son axiomas lógicos sobre cuantificadores:

$$\begin{array}{lll}
(\forall 1) & (\forall x)\phi(x) \to \phi(t) & t \text{ sustituible por } x \text{ en } \phi(x) \\
(\exists 1) & \phi(t) \to (\exists x)\phi(x) & t \text{ sustituible por } x \text{ en } \phi(x) \\
(\forall 2) & (\forall x)(\nu \to \phi) \to (\nu \to (\forall x)\phi) & x \text{ no libre en } \nu \\
(\exists 2) & (\forall x)(\phi \to \nu) \to ((\exists x)\phi \to \nu) & x \text{ no libre en } \nu \\
(\forall 3) & (\forall x)(\phi \vee \nu) \to ((\forall x)\phi \vee \nu) & x \text{ no libre en } \nu
\end{array}$$

2. Sea C una extensión esquemática de BL. Asociamos con C el correspondiente cálculo de predicado $C\forall$ tomando como axiomas lógicos:

   - Todas las fórmulas que resultan de los axiomas de C de sustituir de forma arbitraria fórmulas de J por variables proposicionales y
   - los axiomas $(\forall 1)$, $(\forall 2)$, $(\forall 3)$, $(\exists 1)$, $(\exists 2)$ para cuantificadores.

   y tomando como reglas de deducción: modus ponens y modus ponens generalizado.

Lema 6.1. Los axiomas $(\forall 1)$, $(\forall 2)$, $(\forall 3)$, $(\exists 1)$, $(\exists 2)$ son $\mathbf{L}$-tautologías para cada BL-álgebra $\mathbf{L}$ linealmente ordenada.

Demostración. Por definición para demostrar que cualquier fórmula es $\mathbf{L}$-tautología, se debe verificar que $\|\phi\|_{\mathbf{M},v} = 1$, para cada $\mathbf{L}$-estructura segura $\mathbf{M}$ y cada $\mathbf{M}$-evaluación v de objetos variables. Luego se tiene que si y es sustituible por x en ϕ entonces $\|\phi(y)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} = \|\phi(x)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v''}$ donde $v'' \equiv_x v$ y $v''(x) = v(y)$. Para $(\forall 1)$ se debe probar que $\|(\forall x)\phi(x) \to \phi(t)\|_{\mathbf{M},v} = 1$ que es equivalente a demostrar que $\|(\forall x)\phi(x)\|_{\mathbf{M},v} \Rightarrow \|\phi(t)\|_{\mathbf{M},v} = 1$. Por estar en una BL-álgebra basta demostrar que $\|(\forall x)\phi(x)\|_{\mathbf{M},v} \leq \|\phi(t)\|_{\mathbf{M},v}$. Por definición se tiene $\|(\forall x)\phi(x)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} = \text{ínf}_{v' \equiv_x v}\|\phi(x)\|_{\mathbf{M},v'} \leq \|\phi(x)\|_{\mathbf{M},v''} \leq \sup_{v'}\|\phi(x)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v'} = \|(\exists x)\phi(x)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v'}$.

Ahora considere a $(\forall 2)$ donde se debe demostrar que $\|(\forall x)(\nu \to \phi)\|_{\mathbf{M},v} \leq \|(\nu \to (\forall x)\phi)\|_{\mathbf{M},v}$ que por definición es equivalente a demostrar que

$$\text{ínf}_w(\|\nu\|_w \Rightarrow \|\phi(x)\|_w) \leq (\|\nu\|_v \Rightarrow \text{ínf}_w\|\phi(x)\|_w)$$

donde se han omitido los índices $\mathbf{M}, \mathbf{L}$ y w recorre las evaluaciones que cumplen ser $\equiv_x v$. Escribiendo $\|\nu\|_v = \|\nu\|_w = a$ (donde x es no libre en v) y

$\|\phi\|_w = b_w$ se debe probar que $\text{ínf}_w(a \Rightarrow b_w) \leq (a \Rightarrow \text{ínf}_w b_w)$. Acá, incluso se prueba igualdad. Por una parte se sabe por definición que $\text{ínf}_w b_w \leq b_w$ y utilizando (2) en el Lema 5.24 $(a \Rightarrow b_w) \geq (a \Rightarrow \text{ínf}_w b_w)$ para cada w. Así por definición del ínfimo $\text{ínf}_w(a \Rightarrow b_w) \geq (a \Rightarrow \text{ínf}_w b_w)$. Para la otra parte si $z \leq (a \Rightarrow b_w)$ para cada w. Por propiedad de latice residuado esto es $z * a \leq b_w$ y por definición del ínfimo $z * a \leq \text{ínf}_w b_w$, es decir, $z \leq (a \Rightarrow \text{ínf}_w b_w)$. Por tanto $(a \Rightarrow \text{ínf}_w b_w)$ es la mayor de las cotas inferiores de $(a \Rightarrow b_w)$. Así $\text{ínf}_w(a \Rightarrow b_w) = (a \Rightarrow \text{ínf}_w b_w)$. Particularmente se tiene que $\text{ínf}_w(a \Rightarrow b_w) \leq (a \Rightarrow \text{ínf}_w b_w)$.

Ahora para ($\exists$2) haciendo una sustitución análoga se demuestra que $\text{ínf}_w(a_w \Rightarrow b) = (\sup_w a_w \Rightarrow b)$. En efecto, $\sup_w a_w \geq a_w$ y utilizando (2) del Lema 5.24 $(\sup_w a_w \Rightarrow b) \leq (a_w \Rightarrow b)$. Entonces por la definición de ínfimo $(\sup_w a_w \Rightarrow b) \leq \text{ínf}_w(a_w \Rightarrow b)$. Ahora, si $z \leq (a_w \Rightarrow b)$ para cualquier w, entonces, por residuación $z * a_w \leq b$ que es $a_w * z \leq b$ lo que implica que $a_w \leq (z \Rightarrow b)$ para cada w. Así $(z \Rightarrow b)$ es una cota superior para a_w. Entonces $\sup_w a_w \leq (z \Rightarrow b)$ y por residuación $z \leq (\sup_w a_w \Rightarrow b)$. Así $(\sup_w a_w \Rightarrow b)$ es la mayor de las cotas inferiores de $(a_w \Rightarrow b)$, es decir $(\sup_w a_w \Rightarrow b) = \text{ínf}_w(a_w \Rightarrow b)$. En particular, $\text{ínf}_w(a_w \Rightarrow b) \leq (\sup_w a_w \Rightarrow b)$ que es lo que se quería probar.

Finalmente para verificar ($\forall$3), debe demostrarse que $\|(\forall x)(\phi \vee \nu)\|_{\mathbf{M},v} \leq \|(\forall x)\phi \vee \nu\|_{\mathbf{M},v}$. Para ello no es difícil demostrar que para cualesquiera fórmulas ϕ, ν $\|(\phi \vee \nu)\|_{\mathbf{M},v} = \|\phi\|_{\mathbf{M},v} \cup \|\nu\|_{\mathbf{M},v}$. Haciendo un proceso similar al anterior se probará que $\text{ínf}_w(a \cup b_w) = a \cup \text{ínf}_w b_w$.

En efecto por definición $a \leq a \cup b_w$ por lo que $a \leq \text{ínf}_w(a \cup b_w)$. De forma similar $\text{ínf}_w b_w \leq \text{ínf}_w(a \cup b_w)$ y de esto $(a \cup \text{ínf}_w b_w) \leq \text{ínf}_w(a \cup b_w)$. Para la otra parte se debe probar que si $z \leq a \cup b_w$ entonces $z \leq a \cup \text{ínf}_w b_w$.

Caso 1. Sea $a \leq \text{ínf}_w b_w$ entonces $a \cup b_w = b_w$ por lo que $z \leq b_w$ para cada w. Entonces $z \leq \text{ínf}_w b_w$ y por tanto $z \leq (a \cup \text{ínf}_w b_w)$

Caso 2. Si $a > \text{ínf}_w b_w$, entonces para algún w_0, $a \geq b_{w_0}$. Así $z \leq (a \cup b_{w_0}) = a$ y por tanto $z \leq (a \cup \text{ínf}_w b_w)$ con lo que se concluye la prueba.

□

Teorema 6.1. Solidez de las reglas de Deducción

- Para fórmulas arbitrarias ϕ y ψ, L-estructura segura M, y evaluación v

$$\|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} \geq \|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} * \|\phi \to \psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v}$$

Por lo tanto en particular, si $\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} = \|\phi \to \psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} = 1_{\mathbf{L}}$ entonces $\|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} = 1_{\mathbf{L}}$

- En consecuencia
$$\|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}} \geq \|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}} * \|\phi \to \psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}$$
por lo tanto si, ϕ, $\phi \to \psi$ son $1_{\mathbf{L}}$-verdaderos en $\mathbf{M}$.

- $\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}} = \|(\forall x)\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}$; por lo tanto si ϕ es $1_{\mathbf{L}}$-verdadero en $\mathbf{M}$, entonces también lo es $(\forall x)\phi$.

Demostración. Se tiene por definición y propiedad (1) en el Lema 5.24 que $\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} * \|\phi \to \psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} = \|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} * (\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} \Rightarrow \|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v}) \leq \|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v}$.

Así, si $\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} = \|\phi \to \psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} = 1_{\mathbf{L}}$ entonces $1_{\mathbf{L}} * 1_{\mathbf{L}} \leq \|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v}$ y por tanto $\|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} = 1_{\mathbf{L}}$. Para (2) se tiene por definición que $\|\phi \to \psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}} = \inf\{\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} \Rightarrow \|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} \mid v \quad \mathbf{M} - \text{evaluación}\} = \inf_w(\|\phi\|_w \Rightarrow \|\psi\|_w)$ donde se han omitido los índices $\mathbf{M}, \mathbf{L}$ y w es una $\mathbf{M}$-evaluación. De la misma forma $\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} = \inf_w \|\phi\|_w$ y $\|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},v} = \inf_w \|\psi\|_w$. Haciendo el cambio de notación $\|\phi\|_w = a_w$, $\|\psi\|_w$ y $\inf_w a_w = a$ se debe demostrar que $\inf_w(a_w \Rightarrow b_w) \leq (\inf_w a_w \Rightarrow \inf_w b_w)$.

Primero, es de notar que $\inf_w(a_w \Rightarrow b_w) \leq (a_w \Rightarrow b_w) \leq (a \Rightarrow b_w)$. Por definición del ínfimo $\inf_w(a_w \Rightarrow b_w) \leq \inf_w(a \Rightarrow b_w)$. Resta probar que $\inf_w(a \Rightarrow b_w) \leq (a \Rightarrow \inf_w b_w)$ pero se hace por el mismo proceso de la prueba del lema anterior.

Para (3) sólo es de notar que si $x_1, x_2, ..., x_n$ son las variables libres de ϕ entonces $\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}} = \|(\forall x_1)...(\forall x_n)\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}$ □

Definición 6.5. Sea C una extensión esquemática de BL, sea T una teoría sobre C, sea $\mathbf{L}$ una C-álgebra linealmente ordenada y $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$-estructura segura para el lenguaje de T. $\mathbf{M}$ es un $\mathbf{L}$-modelo de T si todos los axiomas de T son $1_{\mathbf{L}}$-verdaderos en $\mathbf{M}$; es decir, $\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{M} = 1_{\mathbf{L}}$ en cada $\phi \in T$.

Teorema 6.2. Solidez de demostrabilidad

Sea C una extensión esquemática de BL, sea T una teoría en el lenguaje de C sobre $C\forall$, sea ϕ una fórmula de T. Si ϕ es demostrable en T, entonces $\|\psi\|^{\mathbf{L}}_{M} = 1_{\mathbf{L}}$ para cada C-álgebra linealmente ordenada $\mathbf{L}$ y cada $\mathbf{L}$-modelo $\mathbf{M}$ de T.

Teorema 6.3. Sea ϕ una fórmula arbitraria, ν una fórmula tal que no contiene a x libremente. Entonces $BL\forall$ prueba lo siguiente:

(1) $(\forall x)(\nu \to \phi) \equiv (\nu \to (\forall x)\phi)$

(2) $(\forall x)(\phi \to \nu) \equiv ((\exists x)\phi \to \nu)$

(3) $(\exists x)\nu \to \phi) \to (\nu \to (\exists x)\phi)$

(4) $(\exists x)\phi \to \nu) \to ((\forall x)\phi \to \nu)$

Demostración. (1) La primera implicación " $\to''$ es justamente el axioma $(\forall 2)$. Para el recíproco se tiene que $(\forall x)\phi \to \phi$ por $(\forall 1)$ y dado que por hipótesis $(\nu \to (\forall x)\phi)$, entonces por transitividad $\nu \to \phi$. Generalizando se tendrá que $(\forall x)[(\nu \to (\forall x)\phi) \to (\nu \to \phi)]$ y dado que x no es libre $(\nu \to (\forall x)\phi)$ utilizando $(\forall 2)$ se tiene que $(\nu \to (\forall x)\phi) \to (\forall x)(\nu \to \phi)$

(2) La parte $\to$ es justamente $(\exists 2)$. Recíprocamente por $(\exists 1)$, $(\phi \to (\exists x)\phi)$. Así, dado que por hipótesis $((\exists)\phi \to \nu)$ entonces por transitividad $((\exists)\phi \to \nu) \to (\phi \to \nu)$. Generalizando y aplicando $(\forall 2)$ se tiene $(\forall x)[((\exists)\phi \to \nu) \to (\phi \to \nu)]$ implica que $[((\exists)\phi \to \nu) \to (\forall x)(\phi \to \nu)]$ dado que x es no libre en $((\exists x)\phi \to \nu)$.

(3) De nuevo por $(\exists 1)$, $\phi \to (\exists x)\phi$ es válido. Así $(\nu \to \phi) \to (\nu \to (\exists x)\phi)$. Generalizando y aplicando $(\exists 2)$ se tiene que

$$(\exists x)(\nu \to \phi) \to (\nu \to (\exists x)\phi)$$

(4) Se sabe que $(\forall x)\phi \to \phi$ entonces $[(\phi \to \nu) \to ((\forall x)\phi \to \nu)]$. Generalizando y aplicando $(\exists 2)$

$$(\exists x)(\phi \to \nu) \to ((\forall x)\phi \to \nu)$$

□

Teorema 6.4. Para fórmulas arbitrarias ϕ, ψ, $BL\forall$ prueba lo siguiente:

(5) $(\forall x)(\phi \to \psi) \to ((\forall x)\phi \to (\forall x)\psi)$

(6) $(\forall x)(\phi \to \psi) \to ((\exists x)\phi \to (\exists x)\psi)$

(7) $((\forall x)\phi \& (\exists x)\psi) \to (\exists x)(\phi \& \psi)$

Demostración. (5) Usando ($\forall 1$) de $(\forall x)(\phi \to \psi) \to (\phi \to \psi)$ y $((\forall x)\phi \to \phi)$ obtenemos que $[(\forall x)(\phi \to \psi) \to ((\forall x)\phi \to \psi)]$. Generalizando y aplicando ($\forall 2$) se tiene $(\forall x)(\phi \to \psi) \to (\forall x)((\forall x)\phi \to \psi)$ y usando nuevamente ($\forall 2$) se tiene $(\forall x)(\phi \to \psi) \to ((\forall x)\phi \to (\forall x)\psi)$

(6) Análogamente de $(\forall x)(\phi \to \psi) \to (\phi \to \psi)$ y $(\psi \to (\exists x)\psi)$ se deduce que $(\forall x)(\phi \to \psi) \to (\phi \to (\exists x)\psi)$. Generalizando y usando ($\forall 2$) se tiene $(\forall x)(\phi \to \psi) \to (\forall x)(\phi \to (\exists x)\psi)$ y por tanto $(\forall x)(\phi \to \psi) \to ((\exists x)\phi \to (\exists x)\psi)$ por ($\exists 2$).

(7) Se tiene que $\phi \to (\psi \to (\phi \& \psi))$. Generalizando y aplicando (5), $[(\forall x)\phi \to (\forall x)(\psi \to (\phi \& \psi))]$ por lo que al usar (6), $[(\forall x)\phi \to ((\exists x)\psi \to (\exists x)(\phi \& \psi))]$. Por tanto $[(\forall x)\phi \& (\exists x)\psi] \to (\exists x)(\phi \& \psi)$ por ($BL5$).

□

Teorema 6.5. Si y es sustituible por x en $\phi(x)$ entonces $BL\forall$ demuestra:

(8) $(\forall x)\phi(x) \equiv (\forall y)\phi(y)$ y $(\exists x)\phi(x) \equiv (\exists y)\phi(y)$

Demostración. Tenemos que $(\forall x)\phi(x) \to \phi(y)$. Así, generalizando y usando ($\forall 2$) $\vdash (\forall y)[(\forall x)\phi(x) \to \phi(y)] \to (\forall x)\phi(x) \to (\forall y)\phi(y)$. De forma análoga de $[(\forall y)\phi(y) \to \phi(x)]$ se obtiene $(\forall y)\phi(y) \to (\forall x)\phi(x)$.

Para la otra parte de $\phi(y) \to (\exists x)\phi(x)$, generalizando y aplicando ($\exists 2$), $(\forall y)\phi(y) \to (\exists x)\phi(x)$. Para el recíproco se hace de forma similar. □

Teorema 6.6. Sea ϕ una fórmula arbitraria y ν tal que $x \notin \nu$ libremente, entonces $BL\forall$ demuestra lo siguiente:

(9) $(\exists x)(\phi \& \nu) \equiv ((\exists x)\phi \& \nu)$,

(10) $(\exists x)(\phi \& \psi) \equiv ((\exists x)\phi \& (\exists x)\phi)$

Demostración. (9) Para la implicación $\to$ se tiene que $(\phi \to (\exists x)\phi) \to (\phi \& \nu \to (\exists x)\phi \& \nu)$. Generalizando y aplicando ($\exists 2$)

$$(\forall x)(\phi \& \nu \to (\exists x)\phi \& \nu) \to ((\exists x)(\phi \& \nu) \to (\exists x)\phi \& \nu)$$

y por tanto $(\exists x)(\phi \& \nu) \to (\exists x)\phi \& \nu$. Recíprocamente, observar que $\vdash (\forall x)(\nu \to \nu)$ da $\vdash (\nu \to (\forall x)\nu)$ por ($\forall 2$). Así $\vdash ((\exists x)\phi \& \nu \to (\exists x)\phi \& (\forall x)\nu)$ y por tanto $(\exists x) \& \nu \to (\exists x)(\phi \& \nu)$ por (7).

(10) Para $\to$ se escribe Φ por $\phi(x) \to (\exists x)\phi(x)$ (utilizando $(\exists 1)$) entonces por Lema 5.14 (9) $\Phi\&\Phi \to (\phi(x)\&\phi(x) \to (\exists x)\phi(x)\&(\exists x)\phi(x))$ y por Modus Ponens generalizado

$$(\forall x)[\phi(x)\&\phi(x) \to ((\exists x)\phi(x)\&(\exists x)\phi(x))]$$

y aplicando $(\exists 2) \vdash (\exists x)(\phi(x)\&\phi(x)) \to ((\exists x)\phi(x)\&(\exists x)\phi(x))$ lo cual se escribe como $(\exists x)\phi^2(x) \to ((\exists x)\phi(x))^2$. Recíprocamente dado que en BL se prueba que $\phi \to (\phi \vee \psi)$ y $\psi \to (\phi \vee \psi)$ entonces $\phi\&\psi \to (\phi \vee \psi)\&(\phi \vee \psi)$ y por Lema 5.23 (47) $\phi\&\psi \to (\phi^2 \vee \psi^2)$. Utilizando esto se tiene $\vdash (\phi(x)\&\phi(y)) \to (\phi^2(x) \vee \phi^2(y))$, y por $(\exists 1)$ $\vdash (\phi(x)\&\phi(y)) \to ((\exists x)\phi^2(x) \vee (\exists y)\phi^2(y))$. Al aplicar (8) se obtiene $\vdash (\phi(x)\&\phi(y)) \to ((\exists z)\phi^2(z) \vee (\exists z)\phi^2(z))$. Así por idempotencia y generalizando, se tiene que $(\forall y)(\forall x)(\phi(x)\&\phi(y) \to (\exists z)\phi^2(z))$, luego por $(BL5) \vdash (\forall y)(\forall x)[\phi(x) \to (\phi(y) \to (\exists z)\phi^2(z))]$ y por, $(\exists 2)$ y $(\forall 2)$ aplicados en ese orden da $(\exists x)\phi(x) \to (\forall y)(\phi(y) \to (\exists z)\phi^2(z))$ y por $(\exists 2)$ $\vdash (\exists x)\phi(x) \to ((\exists y)\phi(y) \to (\exists z)\phi^2(z))$ donde al aplicar de nuevo (8) se obtiene que $\vdash (\exists x)\phi(x) \to ((\exists x)\phi(x) \to (\exists x)\phi^2(x))$ y por tanto $((\exists x)\phi(x))^2 \to (\exists x)\phi^2(x)$ por $BL5$.

$\square$

Nota: Podríamos preguntarnos si la fórmula $(\forall x)(\phi\&\nu) \equiv ((\forall x)\phi\&\nu)$ (donde ν es tal que $x \notin \nu$ libremente) es demostrable en $BL\forall$. Con la teoría desarrollada hasta ahora no puede responderse a esa pregunta, lo que si se prueba a continuación es que la fórmula en cuestión es una 1_L-tautología para cada $BL-$álgebra L linealmente densamente ordenada. Entonces se debe que probar que $\|(\forall x)(\phi\&\nu) \to ((\forall x)\phi\&\nu)\|_{\mathbf{M},v} = 1$ y $\|((\forall x)\phi\&\nu) \to (\forall x)(\phi\&\nu)\|_{\mathbf{M},v} = 1$. Siguiendo la misma idea de la prueba en el Lema 6.1 donde $\|((\forall x)\phi\|_{\mathbf{M},v} = \text{ínf}_w a_w$, $\|v\|_{\mathbf{M},v} = b$. En efecto, sea $\mathbf{L}$ tal que $\text{ínf}_w a_w$ y $\text{ínf}_w(a_w * b)$ existen; obviamente $((\text{ínf}_w a_w) * b) \leq (a_w * b)$ para cada w, así $((\text{ínf}_w a_w) * b) \leq \text{ínf}_w(a_w * b)$. Recíprocamente se puede demostrar que $(\text{ínf}_w a_w) * b$ es el ínfimo de todos los $a_w * b$, es decir si $z \leq a_w * b$ para todo w entonces $z \leq (\text{ínf}_w a_w) * b$. Si se asume $z > (\text{ínf}_w a_w) * b$. Ya que $z \leq a_w * b$ para cualquier w se tiene que $z \leq b$ (notar que acá se asume que el dominio de cada estructura es no vacío) por tanto $z = z \cap b = b * (b \Rightarrow z)$. De esto por lo que se asumió se tiene que $\text{ínf}_w a_w < (b \Rightarrow z$, por tanto para algún w_0 se tiene que $a_{w_0} \leq (b \Rightarrow z)$; así $a_{w_0} * b \leq z$, y dado que también $z \leq a_{w_0} * b$ da que $a_{w_0} * b = z$. Con esto se observa que $\text{ínf}_w(a_w * b) = z$; pero z es arbitrario tal que $(\text{ínf}_w a_w) * b < z < \text{ínf}_w(a_w * b)$. Por tanto si el orden $\leq$ es denso se obtiene una contradicción.

Teorema 6.7. $BL\forall$ demuestra lo siguiente:

(11) $(\exists x)\phi \to \neg(\forall x)\neg\phi$

(12) $\neg(\exists x)\phi \equiv (\forall x)\neg\phi$

Demostración. (11) $BL \vdash (\exists x)\phi \to ((\forall x)\neg\phi \to (\exists x)\phi\&(\forall x)\neg\phi)$ entonces por (7) se tendrá $(\exists x)\phi \to ((\forall x)\neg\phi \to (\exists x)(\phi\&\neg\phi))$; pero $\vdash (\phi\&\neg\phi) \to \bar{0}$, así generalizando $\vdash (\forall x)((\phi\&\neg\phi) \to \bar{0})$ y $\vdash (\exists x)(\phi\&\neg\phi) \to \bar{0}$ y por tanto se prueba $(\exists x)\phi \to ((\forall x)\neg\phi \Rightarrow \bar{0})$

(12) Por $(\exists 1) \vdash \neg(\exists x)\phi(x)\&\phi(x) \to \neg(\exists x)\phi(x)\&(\exists x)\phi(x)$ así se tiene que $\vdash (\neg(\exists x)\phi(x)\&\phi(x)) \to \bar{0}$ es decir $\vdash \neg(\exists x)\phi(x) \to (\phi(x) \to \bar{0})$; generalizando y aplicando $(\forall 2)$ se llega a $\vdash \neg(\exists x)\phi(x) \to (\forall x)(\phi(x) \to \bar{0})$. Recíprocamente por (11) $(\exists x)\phi \to \neg(\forall x)\neg\phi$ y por propiedades de la negación en el Lema 5.20 (44) se tiene $(\forall x)\neg\phi \to \neg(\exists x)\phi$

□

Lema 6.2. Sea ϕ una fórmula arbitraria y ν tal que $x \notin \nu$ libremente, entonces $BL\forall$ demuestra lo siguiente:

(13) $(\exists x)(\nu \wedge \phi) \equiv (\nu \wedge (\exists x)\phi)$,

(14) $(\exists x)(\nu \vee \phi) \equiv (\nu \vee (\exists x)\phi)$,

(15) $(\forall x)(\nu \wedge \phi) \equiv (\nu \wedge (\forall x)\phi)$

Demostración. (13) En $BL\forall$ se tiene que $\nu\wedge\phi \leftrightarrow \nu\&(\nu \to \phi)$; así, utilizando (9) y $(BL2)$ se tendrá $(\exists x)(\nu \wedge \phi) \to \nu\&(\exists x)(\nu \to \phi) \to \nu$. Por otra parte $(\exists x)(\nu \wedge \phi) \to (\exists x)(\nu \to \phi) \to (\nu \to (\exists)\phi)$, entonces $(\exists x)(\nu \wedge \phi) \to (\exists x)\phi$ y por tanto usando el Corolario 5.1 (17') $(\exists x)(\nu \wedge \phi) \to (\nu\wedge(\exists x)\phi)$. Recíprocamente en $BL\forall$ se prueba que $(\nu \to \phi(x)) \to (\nu \to (\nu \wedge \phi(x))) \to (\nu \to (\exists x)(\nu \wedge \phi(x)))$. Dado que $\nu \wedge (\exists x)\phi \to \nu$ entonces $\nu\wedge(\exists x)\phi \to (\exists x)(\nu\wedge\phi)$. Así $(\nu \to \phi(x)) \to ((\nu\wedge(\exists x)\phi) \to (\exists x)(\nu\wedge\phi))$.

Por otra parte $(\phi(x) \to \nu) \to (\phi(x) \to (\nu \wedge \phi(x))) \to (\phi(x) \to (\exists x)(\nu\wedge\phi(x)))$. Generalizando y aplicando $(\exists 2)$ se obtiene $(\exists x)\phi(x) \to (\exists x)(\nu \wedge \phi(x))$. Así $(\nu \wedge (\exists x)\phi(x)) \to (\exists x)(\nu \wedge \phi(x))$. Entonces por la transitividad de las implicaciones se tendrá que $(\phi(x) \to \nu) \to [(\nu \wedge (\exists x)\phi(x)) \to (\exists x)(\nu \wedge \phi(x))]$ y por tanto usando $(BL6)$ se tendrá que $(\nu \wedge (\exists x)\phi(x)) \to (\exists x)(\nu \wedge \phi(x))$

(14) En $BL\forall$ se prueba que $\nu \to (\exists x)(\nu \vee \phi(x))$, generalizando y usando $(\exists 2)$ se tiene que $(\exists x)\phi(x) \to (\exists x)(\nu \vee \phi(x))$. Así por propiedad $(25')$ Corolario 5.1, $(\nu \vee (\exists x)\phi(x)) \to (\exists x)(\nu \vee \phi(x))$. Recíprocamente en $BL\forall$ se tiene que $(\nu \vee \phi(x)) \to (\nu \vee (\exists x)\phi(x))$. Generalizando y aplicando (6), $(\exists x)(\nu \vee \phi(x)) \to (\exists x)(\nu \vee (\exists x)\phi(x)) \to (\nu \vee (\exists x)\phi(x))$.

(15) Es evidente que $BL\forall \vdash (\forall x)(\nu \wedge \phi) \to \nu$, $BL\forall \vdash (\forall x)(\nu \wedge \phi) \to (\forall x)\phi$, así $BL\forall \vdash (\forall x)(\nu \wedge \phi) \to (\nu \wedge \phi)$. Recíprocamente por $(\forall 1)$ se tiene $(\nu \wedge (\forall x)\phi) \to [(\forall x)(\nu \wedge (\forall x)\phi)] \to [(\forall x)(\nu \wedge \phi)]$.

□

Corolario 6.1. $BL\forall$ demuestra lo siguiente:

(16) $(\exists x)(\phi \vee \psi) \equiv ((\exists x)\phi \vee (\exists x)\psi)$

(17) $(\forall x)(\phi \wedge \psi) \equiv ((\forall x)\phi \wedge (\forall x)\psi)$

Demostración. (16) Se tiene que $BL\forall \vdash (\exists x)\phi \to (\exists x)(\phi \vee \psi)$ y $BL\forall \vdash (\exists x)\psi \to (\exists x)(\phi \vee \psi)$ por lo que se obtiene $(\exists x)\phi \vee (\exists x)\psi \to (\exists x)(\phi \vee \psi)$. Recíprocamente por $(\exists 1)$, generalizando y utilizando (6) se obtiene que $[(\exists x)(\phi \vee \psi)] \to (\exists x)(\phi \vee (\exists x)\psi) \to (\phi \vee (\exists x)\psi)$ por (14).

(17) Para la primera implicación "$\to$" se tiene que $(\phi \wedge \psi) \to \phi$ entonces generalizando y por (5) se obtiene que $(\forall x)(\phi \wedge \psi) \to (\forall x)\phi$ y por lo mismo $(\forall x)(\phi \wedge \psi) \to (\forall x)\psi$. Por ello $(\forall x)(\phi \wedge \psi) \to [(\forall x)\phi \wedge (\forall x)\psi]$. Recíprocamente en $BL\forall$ se prueba que $[(\forall x)\phi \wedge (\forall x)\psi] \to (\phi \wedge (\forall x)\psi) \to \phi$. De forma análoga $[(\forall x)\phi \wedge (\forall x)\psi] \to \psi$. Por ello $[(\forall x)\phi \wedge (\forall x)\psi] \to (\phi \wedge \psi)$, por tanto generalizando y por $(\forall 2)$ se cumple $[(\forall x)\phi \wedge (\forall x)\psi] \to (\forall x)(\phi \wedge \psi)$.

□

Para cerrar esta subsección demostramos el teorema de deducción para $C\forall$.

Teorema 6.8. Sea T una teoría y sean ϕ, ψ fórmulas cerradas del lenguaje de T. Entonces $(T \cup \{\phi\}) \vdash \psi$ si y sólo si existe un n tal que $T \vdash \phi^n \to \psi$.

Demostración. La prueba es una extensión de la prueba del teorema análogo al teorema de deducción para lógica proposicional; se va a discutir el caso de la generalización. Así asumiendo $T \vdash \phi^n \to \gamma_j$ y denotamos a $(\forall x)\gamma_j$ por γ_i; entonces generalizando se tiene $T \vdash (\forall x)(\phi^n \to \gamma_j)$ y ya que ϕ es cerrada entonces por definición ϕ^n lo será, es decir ϕ^n no tiene a x libre, así utilizando el axioma $(\forall 2)$ se obtiene $T \vdash \phi^n \to (\forall x)\gamma_j$ y esto es $T \vdash \phi^n \to \gamma_i$.

□

6.2. Completitud

En la sección anterior estudiamos la contra parte $C\forall$ de cada esquema C, ahora estudiaremos la completitud de esa contra parte.

Definición 6.6. Sea T una teoría sobre C.

1. T es consistente si existe una fórmula ϕ que no es demostrable en T.
2. T es completo si para cada par ϕ, ψ de fórmulas cerradas , $T \vdash (\phi \to \psi)$ o $T \vdash (\psi \to \phi)$.
3. T es Henkin si para cada fórmula cerrada de la forma $(\forall x)\phi(x)$ no demostrable en T hay una constante c en el lenguaje de T tal que $\phi(c)$ no es probable en T.

Lema 6.3. T es inconsistente ssi $T \vdash \bar{0}$

Demostración. ($\Rightarrow$) Si T es inconsistente implica que $T \vdash \phi$ para cada ϕ, en particular $T \vdash \bar{0}$

($\Leftarrow$) Si $T \vdash \bar{0}$ entonces $T \vdash \phi$ para cada ϕ, por $(A7)$ $\bar{0} \to \phi$ y modus ponens.

□

Lema 6.4. T es completo ssi para cada par de fórmulas cerradas ϕ, ψ tal que $T \vdash \phi \vee \psi$, T prueba ϕ o T prueba ψ.

Demostración. ($\Leftarrow$) Como la fórmula $(\phi \to \psi) \vee (\psi \to \phi)$ es demostrable en BL entonces se tiene que $T \vdash \phi \to \psi$ ó $T \vdash \psi \to \phi$, por lo tanto T es completo.

($\Rightarrow$) Supongamos que T es completo y que $T \vdash \phi \vee \psi$; si $T \vdash \phi \to \psi$, entonces $T \vdash (\phi \vee \psi) \to \psi$ y por tanto $T \vdash \psi$ y similarmente se demuestra que $T \vdash \phi$.

$\square$

Nota:

- En el caso en que $C\forall$ es el cálculo de predicado Booleano, T es completo en el sentido de la definición ssi para cada fórmula cerrada ϕ, $T \vdash \phi$ ó $T \vdash \neg\phi$. En efecto, si T es completo entonces $T \vdash \phi$ ó $T \vdash \neg\phi$ ya que $T \vdash \phi \vee \neg\phi$; recíprocamente, si para cada fórmula cerrada ϕ, $T \vdash \phi$ ó $T \vdash \neg\phi$, entonces $T \vdash (\phi \to \psi)$ ó $T \vdash \neg(\phi \to \psi)$ lo cual es $T \vdash (\psi \to \phi)$, por lo tanto T es completo.

- Para la lógica clásica y una teoría completa T, la condición para que T sea Henkin es equivalente a lo siguiente: para cada fórmula cerrada de la forma $(\exists x)\phi(x)$, si $T \vdash (\exists x)\phi(x)$ entonces para alguna constante c, $T \vdash \phi(c)$.

Definición 6.7. Para cada teoría T sobre $C\forall$, sea L_T el álgebra de clases de fórmulas cerradas T-equivalentes con las operaciones usuales ($[\phi]_T \Rightarrow [\psi]_T = [\phi \to \psi]_T$, etc). Claramente L_T es una C-álgebra.

Lema 6.5. Sea T una teoría sobre $C\forall$,

(1) Si T es completa entonces L_T es linealmente ordenado.

(2) Si T es Henkin, entonces para cada fórmula $\phi(x)$ con una sola variable x libre,

$$[(\forall x)\phi]_T = \inf_c [\phi(c)]_T$$

$$[(\exists x)\phi]_T = \sup_c [\phi(c)]_T$$

donde c recorre todas las constantes de T.

Demostración. (1) Sean $[\phi]_T, [\psi]_T \in L_T$, el resultado se sigue inmediatamente del hecho que $[\phi]_T \leq [\psi]_T$ ssi $T \vdash \phi \to \psi$.

(2) Veamos que por (1) $[(\forall x)\phi(x)]_T \leq [\phi(c)]_T$ para cada c, (ya que por ($\forall$1) $T \vdash (\forall x)\phi(x) \to \phi(c)$ con c sustituible por x en $\phi(x)$) entonces $[(\forall x)\phi(x)]_T \leq \text{ínf}[\phi(c)]_T$, por tanto se tiene que $[(\forall x)\phi(x)]_T$ es una cota inferior para $[\phi(c)]_T$; probemos que esta es la mayor de las cotas inferiores de $[\phi(c)]_T$, sea $[\gamma]_T \in L_T$ tal que $[\gamma]_T \leq [\phi(c)]_T$ para cada c, queremos probar que $[\gamma]_T \leq [(\forall x)\phi(x)]_T$, supongamos lo contrario; es decir, $[\gamma]_T \nleq [(\forall x)\phi(x)]_T$, entonces, por (1) $T \nvdash \gamma \to (\forall x)\phi(x)$, luego $T \nvdash (\forall x)(\gamma \to \phi(x))$ con x no libre en γ por ($\forall$2), ahora, como T es Henkin se tiene que existe un c en el lenguaje de T, tal que $T \nvdash \gamma \to \phi(c)$, por lo tanto $[\gamma]_T \nleq [\phi(c)]_T$ ($\to\leftarrow$). Por lo tanto $[(\forall x)\phi]_T = \text{ínf}_c[\phi(c)]_T$.

Ahora probemos que $[(\exists x)\phi]_T = \sup_c[\phi(c)]_T$. Obsérvese que por (1) $[\phi(c)]_T \leq [(\exists x)\phi(x)]_T$ para cada c, ya que $T \vdash \phi(c) \to (\exists x)\phi(x)$ con c sustituible por x en $\phi(x)$. Luego probemos que $[(\exists x)\phi(x)]_T$ es la menor de las cotas superiores de $[\phi(c)]_T$. Sea $[\gamma]_T \in L_T$ tal que $[\phi(c)]_T \leq [\gamma]_T \in L_T$ para cada c, queremos probar que $[(\exists x)\phi(x)]_T \leq [\gamma]_T$; en efecto, si $[(\exists x)\phi(x)]_T \nleq [\gamma]_T$, entonces $T \nvdash (\exists x)\phi(x) \to \gamma$ y por ($\exists$2) se tiene que $T \nvdash (\forall x)(\phi(x) \to \gamma)$ con x no libre en γ, entonces para algun c en el lenguaje de T $T \nvdash \phi(c) \to \gamma$, por lo tanto $[\phi(c)]_T \nleq [\gamma]_T \in L_T$ ($\to\leftarrow$). Por lo tanto $[(\exists x)\phi]_T = \sup_c[\phi(c)]_T$.

□

Lema 6.6. Para cada teoría T y cada fórmula cerrada α, si $T \nvdash \alpha$, entonces existe una superteoría $\hat{T}$ Henkin completa de T tal que $\hat{T} \nvdash \alpha$.

Demostración. Primero veamos que si T' es una extensión de T, $T' \nvdash \alpha$ y (ϕ, ψ) son un par de fórmulas cerradas en el lenguaje de T, entonces $T' \cup (\phi \to \psi) \nvdash \alpha$ ó $T' \cup (\psi \to \phi) \nvdash \alpha$. En efecto, si $T', \phi \to \psi \vdash \alpha$ y $T', \psi \to \phi \vdash \alpha$ entonces por el teorema de deducción 6.8 se tiene que existe un n natural tal que $T' \vdash (\phi \to \psi)^n \to \alpha$ y $T' \vdash (\psi \to \phi)^n \to \alpha$ entonces $T' \vdash ((\phi \to \psi)^n \vee (\psi \to \phi)^n) \to \alpha$ y como $(\phi \to \psi)^n \vee (\psi \to \phi)^n$ es demostrable en BL y usando modus ponens se tiene que $T' \vdash \alpha$ ($\to\leftarrow$). Pongamos $T'' = T' \cup (\phi \to \psi)$ en el primer caso y $T'' = T' \cup (\psi \to \phi)$ en el otro.

Construiremos $\hat{T}$ en una cantidad contable de pasos. Primero extendamos el lenguaje J de T a J' agregando nuevas constantes $c_0, c_1, c_2, \ldots$En la construcción tenemos que decidir cada par ϕ, ψ de J'-fórmulas cerradas y asegurar la propiedad Henkin para cada J'-fórmula cerrada de la forma $(\forall x)\chi(x)$. Esta es una cantidad contable de tareas y se pueden numerar con los números naturales.

Pongamos $T_0 = T, \ \ \alpha_0 = \alpha$ entonces $T_0 \nvdash \alpha_0$. Asumamos por inducción que $T_n, \ \ \alpha_n$ han sido construidos de tal manera que T_n es la extensión de $T_{n-1}, \ \ T_n \vdash \alpha_{n-1} \to \alpha_n, \ \ T_n \nvdash \alpha_n$. Construiremos $T_{n+1} \ \ \alpha_{n+1}$ de tal manera que que T_{n+1} es la extensión de $T_n, \ \ T_{n+1} \vdash \alpha_n \to \alpha_{n+1}, \ \ T_{n+1} \nvdash \alpha_{n+1}$ y T_{n+1} cumple con la $n-$ésima tarea.

Caso 1. La $n-$ésima tarea es decidir las fórmulas (ϕ, ψ). Sea T_{n+1} la extensión de T_n tal que decide (ϕ, ψ) y manteniendo $T_{n+1} \nvdash \alpha_n$; pongamos entonces $\alpha_{n+1} = \alpha_n$.

Caso 2. La $n-$ésima tarea es procesar $(\forall x)\chi(x)$. Primero sea c una constante tal que no ocurra en T_n. Queremos construir T_{n+1} de tal forma que cumpla con la propiedad Henkin, entonces tendremos dos subcasos:

Subcaso a. $T_n \nvdash \alpha_n \vee \chi(c)$, como $T_n \nvdash \alpha_n$ entonces $T_n \nvdash \chi(c)$, por lo tanto $T_n \nvdash (\forall x)\chi(x)$. Entonces pongamos $T_{n+1} = T_n$ y $\alpha_{n+1} = \alpha_n \vee \chi(c)$

Subcaso b. $T_n \vdash \alpha_n \vee \chi(c)$, sustituyendo c por una nueva variable x (x libre en χ) en la prueba de $\alpha_n \vee \chi(c)$ se tiene que $T_n \vdash \alpha_n \vee \chi(x)$. Por lo tanto, $T_n \vdash (\forall x)(\alpha_n \vee \chi(x))$ y por el axioma ($\forall 3$) se obtiene que $T_n \vdash \alpha_n \vee (\forall x)\chi(x)$. Luego como, $T_n \nvdash \alpha_n$ entonces $T_n \vdash (\forall x)\chi(x)$, por lo tanto $T_n \cup \{(\forall x)\chi(x) \to \alpha_n\} \vdash \alpha_n$ entonces $T_n \cup \{\alpha_n \to (\forall x)\chi(x)\} \nvdash \alpha_n$. Por lo tanto pongamos $T_{n+1} = T_n \cup \{(\forall x)\chi(x) \to \alpha_n\}$ y $\alpha_{n+1} = \alpha_n$.

Ahora, sea $\hat{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Entonces $\hat{T}$ es completa por lo que se demostró al inicio y $\hat{T} \nvdash \alpha$ ya que $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \hat{T} \nvdash \alpha_n$. Mostremos ahora que $\hat{T}$ es Henkin. Sea $\hat{T} \nvdash (\forall x)\chi(x)$ y sea $(\forall x)\chi(x)$ procesada en el $n-$ésimo paso. Entonces $T_{n+1} \nvdash (\forall x)\chi(x)$, por tanto aplica el caso a. y $\hat{T} \nvdash \alpha_{n+1}$ pero $\alpha_{n+1} = \alpha_n \vee \chi(c)$ entonces $\hat{T} \nvdash \chi(c)$.

$\square$

Lema 6.7. Para cada teoría T Henkin completa y cada fórmula cerrada α que no es demostrable en T existe una $C-$álgebra L linealmente ordenada y un $L-$modelo M de T tal que $\|\alpha\|_M^L < 1_L$.

Demostración. Tomemos a M como el conjunto de todas las constantes del lenguaje de T; $m_c = c$ para cada constante $c \in M$. Sea $\mathbf{L}$ el latices de clases de fórmulas cerradas $T-$equivalentes, es decir, $[\phi]_T = \{\psi | T \vdash \phi \equiv \psi\}$, $[\phi]_T * [\psi]_T = [\phi \& \psi]_T$, $[\phi]_T \Rightarrow [\psi]_T = [\phi \to \psi]$. Usando el mismo método que en el Lema 5.27 se demuestra que L es una $C-$álgebra, luego como T es completa, para cada par de fórmulas ϕ, ψ de fórmulas cerradas se tiene que $T \vdash \phi \to \psi$ y en este caso $[\phi]_T \leq [\psi]_T$ o $T \vdash \psi \to \phi$ y en este caso $[\psi]_T \leq [\phi]_T$. Por lo tanto $\mathbf{L}$ es linealmente ordenado.

Para cada predicado P de aridad n definimos $r_P(c_1, ..., c_n) = [P(c_1, ..., c_n)]_T$; con esto queda definido M. Ahora probemos que $\|\phi\|_M^{\mathbf{L}} = [\phi]_T$ para cada fórmula cerrada ϕ. Para cada axioma $\phi \in T$ se tiene que $\|\phi\|_M^{\mathbf{L}} = [\phi]_T = [1]_T = 1_{\mathbf{L}}$. Pero por hipótesis, $T \nvdash \alpha$, entonces $\|\alpha\|_M^{\mathbf{L}} = [\alpha]_T \neq [1]_T = 1_{\mathbf{L}}$. Por inducción fuerte sobre el número de conectivos y cuantificadores en las fórmulas tenemos: si ϕ es una fórmula atómica entonces $\|\phi\|_M^{\mathbf{L}} = [\phi]_T$ por definición de $\|\phi\|_M^{\mathbf{L}}$. Ahora, asumamos que se cumple para fórmulas cerradas con n conectivos y cuantificadores o menos y probemos para $n+1$. Sea $\phi \to \psi$ una fórmula con $n+1$ conectivos y cuantificadores, entonces ϕ, ψ tienen a lo sumo n conectivos y cuantificadores, entonces $\|\phi \to \psi\|_M^{\mathbf{L}} = \|\phi\|_M^{\mathbf{L}} \Rightarrow \|\psi\|_M^{\mathbf{L}} = [\phi]_T \Rightarrow [\psi]_T = [\phi \to \psi]_T$ aplicando dos veces la hipótesis inductiva, similarmente $\|\phi \& \psi\|_M^{\mathbf{L}} = \|\phi\|_M^{\mathbf{L}} * \|\psi\|_M^{\mathbf{L}} = [\phi]_T * [\psi]_T = [\phi \& \psi]_T$. También trabajamos con fórmulas cerradas de la forma $(\forall x)\phi(x)$ y $(\exists x)\phi(x)$, entonces por hipótesis inductiva y por el Lema 6.5 se tiene que

$$\|(\forall x)\phi(x)\|_M^{\mathbf{L}} = \inf_c \|\phi(c)\|_M^{\mathbf{L}} = \inf_c [\phi(c)]_T = [(\forall x)\phi(x)]_T$$

,

$$\|(\exists x)\phi(x)\|_M^{\mathbf{L}} = \sup_c \|(\phi(c)\|_M^{\mathbf{L}} = \sup_c [\phi(c)]_T = [(\exists x)\phi(x)]_T$$

ya que en M como se ha definido, cada elemento c es el significado de una constante; esto da $\|(\forall x)\phi(x)\|_M^{\mathbf{L}} = \inf_c \|(\phi(c)\|_M^{\mathbf{L}}$, igual para el existencial. por lo tanto $\|\alpha\|_M^{L} < 1_L$. $\square$

Teorema 6.9. (Completitud)

Sea $C\forall$ el cálculo de predicado dado por una extensión esquemática C de BL, sea T una teoría sobre $C\forall$ y sea ϕ una fórmula del lenguaje de T. T demuestra ϕ si y sólo si para cada $C-$álgebra L linealmente ordenada y cada $L-$modelo seguro M de T, $\|\phi\|_M^{L} = 1_L$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Es trivial ya que si $T \vdash \phi$ entonces $\|\phi(x)\|_M^{\mathbf{L}} = 1_{\mathbf{L}}$

($\Leftarrow$) Por contrapositiva, si $T \nvdash \phi$ entonces por el Lema 6.6 existe una extensión $\hat{T}$ de T Henkin completa tal que $\hat{T} \nvdash \phi$, entonces por el lema anterior existe una $C-$álgebra L linealmente ordenada y un $L-$modelo M de $\hat{T}$ tal que $\|\phi\|_M^L < 1_L$.

$\square$

Nota: Note que este teorema da inmediatamente la completitud fuerte de lógica de predicado Booleano, ya que si C es Bool, entonces, la única $C-$álgebra linealmente ordenada no trivial es el álgebra Booleana de dos elementos.

6.3. Cálculo de Predicado Difuso Multi-género

En esta corta sección se describe una modificación no esencial pero muy útil de los sistemas desarrollados. El objetivo es tener un medio para distinguir objetos de varios géneros como puntos y rectas en geometría , temperatura y colores en algún campo aplicado. Se define cuidadosamente todas las nociones necesarias y luego se revisa la parte previa de esta sección, verificando que todo sigue siendo verdadero después de modificaciones muy pequeñas. Haremos un uso sustancial de la lógica multi-género en la siguiente sección cuando analicemos la inferencia difusa.

El lenguaje formal J de la lógica de predicado multi-género consiste de lo siguiente: Un conjunto no vacío y finito Υ de géneros; Cualquier secuencia $s_1, ..., s_n$ de géneros de Υ es llamado un **tipo**; para cada género s_i un conjunto infinito de variables del género s_i, un conjunto no vacío de predicados (posiblemente infinito) y cada uno con un **tipo** y un conjunto de constantes (posiblemente vacío o posiblemente infinito) cada uno con su género. Los términos son las variables y constantes; las fórmulas atómicas tienen la forma $P(t_1, ..., t_n)$ donde P es un predicado de un tipo $(s_1, ..., s_n)$ y cada t_i tiene género s_i. Las fórmulas son construidas de fórmulas atómicas y las constantes de verdad $\bar{0}, \bar{1}$ usando conectivos y cuantificadores por las mismas reglas como en 6.1.
Dado un lenguaje J y una BL-álgebra L, una L-estructura

$$((M_s), (r_P), (m_c))$$

consiste de lo siguiente:

- Para cada género s, un dominio no vacío M_s de objetos de este género,

- Para cada predicado P de un tipo $(s_1, ..., s_n)$ una relación difusa r_P sobre $M_{s1} \times ... \times M_{sn}$; es decir un mapeo r_P asociando con cada tupla $(m_1, ..., m_n)$ tal que $m_i \in M_{si}$ para $i = 1, ..., n$ un valor de verdad $r_P(m_1, ..., m_n) \in L$,
- Para cada constante c de un género s, un elemento $m_c \in M_s$.

Ejemplo 6.1. Sea s el género de los asistentes a un concierto, t el género de compositores de música. $M_s = u, v, w$, $M_t = b, d, h$. Tenemos un predicado *gustar* del tipo (s, t) y la siguiente es la relación r_{gust}:

	b	d	h
u	1.0	0.7	0.9
v	0.3	0.9	0.1
w	0.4	0.5	0.8

Finalmente tendremos una constante c para b. En general, el valor de verdad de una fórmula depende de tres cosas: La interpretación $\mathbf{M}$, la $t-$norma $*$ y una evaluación e de objetos variables y contantes que asigna a cada variable x de género s un elemento $v(x) \in M_s$. Si x_i es una constante c, entonces $e(x_i) = m_c$ (el significado está fijado por $\mathbf{M}$). El valor de verdad de ϕ determinado por $*, \mathbf{M}, e$ se denota por $\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e}$ y se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\|P(x_1, ..., x_n)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} &= r_p(\|x_1\|_{\mathbf{M},e}, ..., \|x_n\|_{\mathbf{M},e}) \\
\|\phi \to \psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} &= \|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} \Rightarrow \|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} \\
\|\phi \& \psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} &= \|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} * \|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} \\
\|(\forall x)\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} &= \inf_{e_x}\{\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e_x}\} \\
\|(\exists x)\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} &= \sup_{e_x}\{\|\phi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e_x}\}
\end{aligned}$$

donde e_x recorre todas las evaluaciones que difieren de e como máximo en el valor para el argumento x. En el ejemplo anterior: Sea x de género s y y, z de género t; cada $e(x) = u, e(y) = h, e(z) = d$. Entonces, $\|\text{gust}(x, c)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} = 1.0$, $\|\text{gust}(x, y)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} = 0.9$, $\|\text{gust}(x, z)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} = 0.7$ independientemente de la $t-$norma; Si $*$ es de Lukasiewicz, entonces, $\|\text{gust}(x, y) \to \text{gust}(x, z)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} = 1-0.9+0.7 = 0.8$, $\|(\exists y)\,\text{gust}(x, y)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} = \sup(1.0, 0.7, 0.9) =$

1, $\|(\forall x)(\exists y)\,\mathrm{gust}(x,y)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} = \mathrm{ínf}(1, 0.9, 0.8) = 0.8$, $\|(\forall x)\,\mathrm{gust}(x,c)\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M},e} = \mathrm{ínf}(1.0, 0.3, 0.4) = 0.3$.

El valor de verdad de las últimas dos fórmulas es independiente de e (todas las variables son acotadas por cuantificadores) y de $*$ (no hay conectivos).

Ahora, modificamos la definición de sustituibilidad de t por x en la fórmula ϕ, agregando la condición de que t y x deben ser del mismo género.

Nota: la definición de una L-tautología es la misma que en 5.3. Los axiomas de $msBL\forall$ son los axiomas de $BL\forall$ (con la nueva noción de fórmula y sustituibilidad). La definición 6.6(3) es trivialmente modificada exigiendo que si $T \nvdash (\forall x)\phi(x)$, entonces existe alguna constante c del mismo género que x tal que $T \nvdash \phi(c)$. En el Lema 6.5, ahora tendremos que c recorre sobre todas las constantes de T que tienen el mismo género que x. Por lo tanto obtenemos el siguiente teorema análogo a los teoremas del $6.6 - 6.9$:

Teorema 6.10. Sea $msC\forall$ un cálculo de predicado dado por una extensión esquemática C de BL y por un lenguaje de predicado multi-género J.

- Para cada teoría T y cada fórmula cerrada α, si $T \nvdash \alpha$, entonces existe una superteoría $\hat{T}$ Henkin completa de T tal que $\hat{T} \nvdash \alpha$.
- Para cada teoría T Henkin completa y cada fórmula cerrada α que no es demostrable en T existe una $C-$álgebra L linealmente ordenada y un $L-$modelo M de T tal que $\|\alpha\|^L_M < 1_L$.
- (Completitud) T demuestra ϕ si y sólo si para cada $C-$álgebra L linealmente ordenada y cada $L-$modelo seguro M de T, $\|\phi\|^L_M = 1_L$.

6.4. Similitud e Igualdad

La similitud es la desigualdad difusa; usaremos el símbolo $\approx$ para similitud y la fórmula $x \approx y$ se lee "x similar a y". Los axiomas que caracterizan la similitud son analogías directas de los axiomas de igualdad.

Definición 6.8. Los siguientes son axiomas de similitud:

$$(\forall x)(x \approx x) \text{ Reflexividad}$$

$$(\forall x, y)(x \approx y \to y \approx x) \text{ Simetría}$$

$$(\forall x, y, z)((x \approx y \& y \approx z) \to x \approx z) \text{ Transitividad}$$

Si (M, r) es un modelo de los axiomas de similitud (sobre una $BL-$álgebra **L**) entonces la relación difusa r es una similitud (o equivalencia difusa), es decir, para toda $a, b, c \in M$,

$$r(a,a) = 1$$

$$r(a,b) = r(b,a)$$

$$r(a,b) * r(b,c) \leq r(a,c)$$

Definición 6.9. 1. El axioma de congruencia (o axioma de extensionalidad) para un predicado P de aridad n con respecto a $\approx$ es la fórmula

$$(x_1 \approx y_1 \& ... \& x_n \approx y_n) \to (P(x_1, ..., x_n) \equiv P(y_1, ..., y_n)).$$

2. Una relación difusa $s : M^n \to [0,1]$ es extensional con respecto a una similitud r sobre M ssi para cada $u_1, ..., u_n, \quad v_1, ..., v_n \in M$,

$$r(u_1, v_1) * ... * r(u_n, v_n) * s(u_1, ..., u_n) \leq s(v_1, ..., v_n)$$

.

7. Inferencia Aproximada.

7.1. Conjuntos Difusos.

Un conjunto crisp (conjunto no difuso) es normalmente definido como una colección de objetos $x \in X$ que puede ser finito, numerable o no numerable. Cada uno de esos elementos puede ya sea pertenecer o no pertenecer a un subconjunto $A \in X$. Así el subconjunto A del conjunto X puede ser definido por su función caraterística.

Así un conjunto clásico puede describirse de muchas formas: si es posible enumerando los elementos que están en el conjunto; describiendo el conjunto analíticamente, por instancia, indicando condiciones de pertenencia; o definiendo los miembros mediante una función característica donde 1 indica pertenencia y 0 no-pertenencia. Para un *conjunto difuso*, la función característica permite varios grados de pertenencia para los elementos de un conjunto dado.

Definición 7.1. Sea X un conjunto no vacío. Un conjunto difuso A en X es caracterizado por su función de pertenencia

$$\mu_A : X \to [0, 1]$$

donde $\mu_A(x)$ es interpretado como el grado de pertenencia del elemento x en el conjunto difuso A para cada $x \in X$. Entonces A queda completamente determinado por el conjunto de tuplas

$$A = \{(x, \mu_A(X))|x \in X\}$$

Nótese que lo términos función de pertenencia y subconjuntos difusos se usan a menudo indistintamente. La familia de todos los (sub)conjuntos difusos se denota por $\mathcal{F}(X)$. Los subconjuntos difusos de la recta real son llamados cantidades difusas. Si $X = x_1, ..., x_n$ y A es un conjunto difuso en X, entonces se usa la notación

$$A = \mu_1/x_1 + ... + \mu_n/x_n$$

donde los términos μ_i/x_i, $i = 1, ..., n$ significa que μ_i es el grado de pertenencia de x_i en A y el signo $+$ representa la unión. Los conjuntos difusos son por lo tanto una generalización de la función característica.

Una característica importante de los conjuntos difusos es que un solo valor puede ser miembro de varios conjuntos difusos a la vez, con el mismo o diferente grado de pertenencia.

Las funciones de pertenencia se pueden clasificar según su simplicidad matemática y su manejabilidad y son: triangular, trapezoidal, gaussiana, gamma, pi, campana etc... En general se definen funciones de pertenencia que se pueden ver en la siguiente figura:

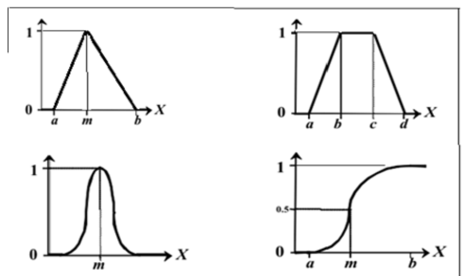

Figura 1: Funciones de pertenencia. a) Triangular b) Trapezoidal c) Gaussiana y d) Sigmoidal

Ejemplo 7.1. Un agente desea clasificar las casas que ofrece a sus clientes. Un indicador de comodidad de esas casas es el número de habitaciones en éstas. Sea $X = 1, 2, 3, 4, ..., 10$ el conjunto de los tipos válidos de casas descritos por $x =$ número de habitaciones en la casa. Entonces el conjunto difuso "tipos de casas confortables para una familia de 4 personas" puede ser descrito como

$$A = \{(1{,}0.2),(2{,}0.5),(3{,}0.8),(4{,}1),(5{,}0.7),(6{,}0.3)\}$$

donde el primer elemento del par ordenado denota el elemento casa y el segundo el grado de pertenencia.

Ejemplo 7.2. Suponga que queremos definir el subconjunto de números naturales que están "cerca de 1". Esto puede ser expresado por

$$A = 0.0/-2 + 0.3/-1 + 0.6/0 + 1.0/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0.0/4$$

donde $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

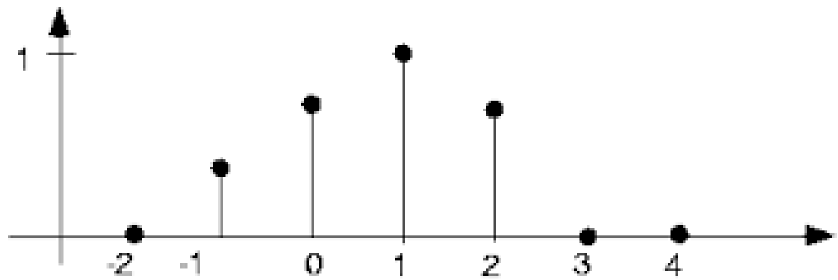

Figura 2: Funciones de pertenencia de pertenencia discreta para "cerca de 1".

7.1.1. Operaciones de Conjuntos Difusos

Las tres operaciones básicas que se definen sobre conjuntos crisp (complemento, unión e intersección), pueden generalizarse de varias formas en conjuntos difusos. No obstante, existe una generalización particular que tiene especial importancia. Cuando se restringe el rango de pertenencia al conjunto [0, 1], estas operaciones "estándar" sobre conjuntos difusos se comportan de igual modo que las operaciones sobre conjuntos crisp. Dichas operaciones se definen del siguiente modo

Unión: Recordando la relación entre unión y disyunción, se puede plantear la unión de conjuntos difusos como una generalización de la unión de conjuntos por medio de su función característica, es decir,

$$\mu_{A\cup B}(x) = \text{máx}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Ejemplo 7.3. Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \frac{0.2}{1} + \frac{0.25}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.75}{4} + \frac{1}{5} \quad B = \frac{0.9}{1} + \frac{0.7}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{1}{5}$

se tiene que

$$\begin{aligned} A \cup B &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\text{máx}\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\}}{u_i} \\ &= \frac{0.9}{1} + \frac{0.7}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.75}{4} + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Intersección: Según la relación entre intersección y la conjunción, la intersección de conjuntos difusos puede ser escrito como la generalización de la intersección de conjuntos a través de su función característica,

$$\mu_{A\cap B}(x) = \text{mín}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Ejemplo 7.4. Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \frac{0.2}{1} + \frac{0.25}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.75}{4} + \frac{1}{5} \quad B = \frac{0.9}{1} + \frac{0.7}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{1}{5}$

se tiene que

$$\begin{aligned} A \cap B &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\text{mín}\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\}}{u_i} \\ &= \frac{0.2}{1} + \frac{0.25}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Complemento: El complemento de un conjunto $A \subset U$, denotado como $\bar{A}$, se define mediante su función característica de manera análoga al caso de los conjuntos clásicos, así

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

En general y en notación de Zadeh, dado $U = \{x_1, x_2, ...\}$ y los conjuntos $A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$, $B = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_B(x_i)}{x_i}$. Las operaciones básicas entre conjuntos difusos se generalizan como:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\text{máx}\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\}}{x_i} \\ A \cap B &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\text{mín}\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\}}{x_i} \\ \bar{A} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1 - \mu_A(x_i)}{x_i} \end{aligned}$$

7.2. La regla composicional de inferencia.

Comenzamos con la noción de una *variable* (en lo que sigue se utilizará este término para referirse a una variable lingüística). Una variable viene dada por su nombre X y su dominio D. X es sólo un símbolo; D es un conjunto no

vacío. Ejemplos son: edad con el dominio de los enteros$\leq$ 120, temperatura con algún dominio, etc. La lógica difusa usa notoriamente expresiones de la forma "X es A" donde A es (el nombre de) un subconjunto difuso de D, por ejemplo, "la edad es alta". Estas expresiones ocurren típicamente en reglas difusas.
No está claro automáticamente cómo ésto encaja en nuestro formalismo de cálculo de predicado, y de hecho, presentaremos dos formas de hacerlo. Procederemos de la siguiente manera: teniendo n variables $(X_1, D_1), \cdots, (X_n, D_n)$ entendemos los $D's$ como dominios de una estructura multi-género interpretando un lenguaje de predicado; los subconjuntos difusos fijos de un dominio interpretan algunos predicados unarios. Además, podemos tener predicados de mayor aridad y su interpretación en nuestra estructura multi-género. La cosa más importante es que el nombre de una variable se toma como un objeto constante, interpretada en cada situación como el valor real de la variable. La expresión "X es A" se convierte en una fórmula cerrada atómica $A(X)$ (una ves más: A es un predicado unario, X es un objeto constante). Una regla típica "SI X es A ENTONCES Y es B"puede ser interpretado como $A(X) \to B(Y)$.

Resumiendo: hemos entendido una n-tupla de variables $(X_i, D_i)_{i=1}^{n}$ como determinando un lenguaje $\mathcal{I}$ con géneros $s_1, s_2, ..., s_n$ y con objetos constantes $X_1, ..., X_n$, X_i del género s_i. Además nuestro lenguaje puede contener predicados arbitrarios de cualquier tipo y cualquiera otros objetos constantes. Cualquier $\mathcal{I}$-estructura

$$\langle (D_i)_i, (r_p)_{Ppred.}, m_{X_i}, \cdots, m_{X_n} \cdots \rangle$$

es entendida como una estructura difusa sobre las variables dadas, con X_i denotando el valor actual de la i-ésima variable.
Mediante el uso de conjuntos difusos es posible dotar de significado matemático a proposiciones como "este coche es pequeño", "Pedro es muy alto" o "el crecimiento es lento" utilizando los modificadores lingüísticos (muy, poco, demasiado, algo, extremadamente, etc.) para adaptar los calificativos a lo que se quiere decir.

Muchas veces, la programación clásica no es suficiente para que un sistema realice funciones complejas. Cuando un sistema no ha sido programado explícitamente para realizar una función y se le pide que la realice, el sistema

tiene que razonar.
Por ejemplo, si el sistema conoce los siguientes hechos: "Estirada es una jirafa", "Las jirafas son mamífero" y le formulamos la pregunta: "¿Es Estirada un mamífero?", el sistema debe razonar para dar una respuesta.
Cuando el número de hechos y reglas aumenta, el sistema tiene que poder verificar gran cantidad de hechos que surgen en las etapas de razonamiento.
A continuación estudiaremos el concepto de Regla Difusa empleada en Razonamiento Aproximado.

La **regla composicional de inferencia** en su formulación tradicional puede establecerse con la observación A de la siguiente manera:

Observación:	X tiene la propiedad A
Relación:	X y Y están en relación R
Conclusión:	Y tiene la propiedad B

$$r_B(v) = \sup_{u \in D_X} (r_A(u) * r_R(u, v))$$

donde $*$ es una t-norma continua. La relación r_B es algunas veces llamada la composición de r_A y r_R, o la imagen de r_A a través de la relación r_R.

Preguntamos: ¿qué significa esto? ¿Qué se infiere? ¿Es esto una deducción?
Primero observe que la regla es semántica: dada cualquier estructura $\mathbb{D}$ de dominios de variables, formula una condición semántica en el conjunto difuso r_B interpretando el predicado B en términos de r_A (conjunto difuso) y r_R (relación difusa). Por lo general, no se da más explicación. La regla se afirma más o menos como evidente por sí mismo.
Pero observe que de hecho la definición de r_B en términos de r_A Y r_R se puede expresar en $BL\forall$: La condición de arriba solo significa que la fórmula $(\forall y)(B(y) \equiv (\exists x)(A(x)\&R(x, y)))$ es $1-$verdadero en $\mathbb{D}$, a esta fórmula se le llama $Comp$ (o $Comp(A, R, B)$ la composición); por lo tanto la regla demanda (asumamos) que $\|Comp\|_{\mathbb{D}} = 1$

Lema 7.1. Bajo la presente notación,

$$BL\forall \vdash Comp \to ((A(X)\&R(X, Y)) \to B(Y)).$$

Consecuentemente, para cada estructura $\mathbb{D}$ tal que $\|Comp\|_{\mathbb{D}} = 1$,
$\|A(X)\&R(X, Y)\|_{\mathbb{D}} \leq \|B(Y)\|_{\mathbb{D}}$.

Demostración. Partiendo de $Comp$ se tiene que
$BL\forall \vdash (\forall y)([(\exists x)(A(x)\&R(x,y)) \to B(y)] \to (\forall x)[(A(x)\&R(x,y)) \to B(y)])$ por 6.3(2) luego, distribuyendo $(\forall y)$ (por 6.4 (5)) se tiene
$BL\forall \vdash ((\forall y)[(\exists x)(A((x\&R(x,y)) \to B(y)] \to (\forall y)(\forall x)[(A(x)\&R(x,y)) \to B(y)]$, entonces
$(\forall y)(\forall x)[(A(x)\&R(x,y)) \to B(y)] \to [(A(X)\&R(X,Y)) \to B(Y)]$

Por lo tanto por la transitividad de la implicación se tiene que

$$BL\forall \vdash Comp \to ((A(X)\&R(X,Y)) \to B(Y)).$$

Ahora, por hipótesis $\|Comp\|_{\mathbb{D}} = 1$, entonces $\|(A(X)\&R(X,Y)) \to B(Y)\|_{\mathbb{D}} = 1$, lo cual implica $\|(A(X)\&R(X,Y))\|_{\mathbb{D}} \Rightarrow \|B(Y)\|_{\mathbb{D}} = 1$,. Por lo tanto $\|A(X)\&R(X,Y)\|_{\mathbb{D}} \leq \|B(Y)\|_{\mathbb{D}}$. □

Mostraremos ahora que $Comp$ es la mejor condición que hace posible la inferencia anterior.

Lema 7.2. Sea B' un predicado unario del mismo género que B, entonces $BL\forall \vdash Comp\&(\forall y)(\forall x)((A(x)\&R(x,y)) \to B'(y)) \to (\forall y)(B(y) \to B'(y))$ (Por lo tanto en cada modelo $\mathbb{D}$, si $Comp$ es verdadero, entonces r_B es el subconjunto difuso más pequeño de D_Y que hace sólida la inferencia de la regla de la composición).

Demostración. Por hipótesis tenemos $Comp$ y $(\forall y)(\forall x)((A(x)\&R(x,y)) \to B'(y))$. Luego
$BL\forall \vdash (\forall y)(\forall x)((A(x)\&R(x,y)) \to B'(y)) \to (\forall y)[(\exists x)((A(x)\&R(x,y)) \to B'(y))]$ por 6.3 (2), pero $(\exists x)((A(x)\&R(x,y)) \equiv B(y)$. Por lo tanto $BL\forall \vdash Comp\&(\forall y)(\forall x)((A(x)\&R(x,y)) \to B'(y)) \to (\forall y)(B(y) \to B'(y))$ □

Ahora, discutiremos dos casos particulares importantes de la regla composicional de inferencia. Para este propósito reemplazamos la fórmula atómica $R(x,y)$ por una fórmula arbitraria $\phi(x,y)$.

Corolario 7.1. Sea $Comp$ la fórmula $(\forall y)(B(y) \equiv (\exists x)(A(x)\&\phi(x,y)))$. Entonces $BL\forall \vdash (Comp\&A(X)\&\phi(X,Y)) \to B(Y)$.

Demostración. La prueba es similar a la anterior. □

Consideraremos Modus Ponens Generalizado de Zadeh como un caso particular de la regla composicional de inferencia. Para este fín, se hace un ligero cambio en notación: se reemplaza A por A^*, B por B^* y se toma $\phi(x, y)$ para ser $A(x) \to B(y)$ para algunos predicados A, B. entonces el Lema 7.1 nos da el siguiente teorema.

Teorema 7.1. Sea $Comp_{MP}$ la fórmula

$$(\forall y)(B^*(y)) \equiv (\exists x)(A^*(x)\&(A(x) \to B(y))).$$

Por lo tanto $BL\forall$ demuestra

$$Comp_{MP}\&(A^*(X)\&(A(X) \to B(Y))) \to B^*(Y).$$

Nota:

1. Esto se puede ver como una regla de deducción:

$$\frac{Comp_{MP}, A^*(X), A(X) \to B(Y)}{B^*(Y)}$$

   Esto se lee: Si $Comp_{MP}, A^*(X), A(X) \to B(Y)$ son $1-$verdadero en una estructura $\mathbb{D}$ dada, entonces $B^*(Y)$ es $1-$verdadero. Pero el teorema anterior da más:

$$\|Comp_{MP}\&A^*(X)\&A(X) \to B(Y)\|_{\mathbb{D}} \leq \|B^*(Y)\|_{\mathbb{D}},$$

   en particular, si $Comp_{MP}$ es $1-$verdadero, $A^*(X)$ es $r-$verdadero y $A(X) \to B(Y)$ es $s-$verdadero entonces $B^*(Y)$ es al menos $r{*}s-$verdadero ($*$ es la función de verdad de $\&$).

2. Observe que puede reemplazarse $\&$ por $\wedge$ en el Teorema 7.1 y hacer las modificaciones obvias, por ejemplo, si $Comp_{MP}$ es $1-$verdadero, $A^*(X)$ es $r-$verdadero y $A(X) \to B(Y)$ es $s-$verdadero entonces $B^*(Y)$ es $\min(r, s)-$verdadero.

3. Se debe mencionar que el uso de A, A^*, B, B^* debería sugerir que $A^* \approx A$ en algún sentido y entonces $Comp_{MP}$ debería decir que $B^* \approx B$ en algún otro sentido. Pero si A, A^*, B, B^* son interpretados como subconjuntos crisp (subconjuntos $0, 1-$valuados) de los respectivos dominios, entonces la interpretación de B^* es también crisp y

(i) ó bien $r_{A^*} \subseteq r_A$ y $r_{A^*} \neq \emptyset$ y $r_{B^*} = r_B$,

(ii) ó $r_{A^*} \subseteq r_A$ y $r_{A^*} = \emptyset$ y $r_{B^*} = \emptyset$,

(iii) ó r_{A^*} no es un subconjunto de r_A y entonces $r_{B^*} = D_Y$.

4. En general, si $Comp_{MP}$ está definido como en Teorema 7.1 entonces $Comp_{MP} \vdash (\forall y)[((\exists x)(A^*(x)\&\neg A(x)) \to B^*(y))]$. Por lo tanto para cada $v \in D_Y$, $r_{B^*}(v) \geq \sup_{u\in D_X}(r_{A^*}(u) * (-)r_A(u))$.

5. Observe que bajo la presente notación, y sobre $BL\forall$,

$$Comp_M P \vdash (\exists x)A^*(x) \to (\forall y)(B(y) \to B^*(y)).$$

En efecto, las siguientes fórmulas son probables en $BL\forall$:

$$B(y) \Rightarrow (A(x) \to B(y)),$$
$$A^*(x)\&B(y) \Rightarrow (A^*(x)\&(A(x) \to B(y)),$$
$$(\exists x)(A^*(x)\&B(y)) \Rightarrow (\exists x)(A^*(x)\&(A(x) \to B(y)),$$
$$(\exists x)(A^*(x)\&B(y)) \Rightarrow B^*(y) \text{ por teorema 7.1}$$
$$[(\exists x)A^*(x)\&B(y)] \Rightarrow B^*(y), \text{ por teorema 6.6 (9)}$$
$$(\exists x)A^*(x) \to (B(y) \to B^*(y)) \text{ por BL5 (b),}$$
$$(\exists x)A^*(x) \to (\forall y)(B(y) \to B^*(y)).$$

Ahora, vamos a tener predicados A, A^* del mismo género, B, B^* del mismo género y tomamos $A(x)\&B(y)$ como $\phi(x, y)$. En lo que sigue se estudia la Regla Conjuntiva Generalizada. El Lema 7.1 nos da lo siguiente.

Teorema 7.2. Sea $Comp_{CR}$ la fórmula

$$(\forall y)(B^*(y)) \equiv (\exists x)(A^*(x)\&(A(x)\&B(y))).$$

Por lo tanto $BL\forall$ demuestra

$$Comp_{CR}\&(A^*(X)\&(A(X)\&B(Y) \to B^*(Y).$$

Nota:

1. Igual que antes, obtenemos una regla de deducción sólida:

$$\frac{Comp_{CR}, A^*(X), A(X)\&B(Y)}{B^*(Y)}$$

solidez significa que para cada estructura de dominio $\mathbb{D}$

$$\|Comp_{CR}, A^*(X)\&A(X)\&B(Y)\|_{\mathbb{D}} \leq \|B^*(Y)\|_{\mathbb{D}}.$$

En el lenguaje de "reglas difusas": de "X es A y Y es B" y "X es A^*" se infiere "Y es B^*". Esta no es una "regla difusa" usada frecuentemente, pero se obtiene de manera natural de la regla composicional.

2. Hay al menos dos casos particulares en el caso clásico. Primero, la regla usual para la conjunción, segundo una regla de contradicción:

$$\frac{A(X)\&B(Y)}{B(Y)} \qquad \frac{\neg A(X), A(X)\&B(Y)}{\neg B(y)\&B(Y)}$$

3. En general, para conjuntos crisp A, B, A^* se tiene que $A^*(x)\&A(x)\&B(y)$

   - O bien $r_A \cup r_{A^*} \neq \emptyset$ (para algún u, $\quad r_A(u) = r_{A^*}(u) = 1$) y $r_B = r_{B^*}$,
   - $r_A \cup r_{A^*} = \emptyset$ y $r_{B^*} = \emptyset$ ($r_{B^*}(v) = 0 \ \ \forall v \in D_Y$).

4. En total generalidad, lo siguiente es demostrable en $BL\forall$ (con el significado de $Comp_{CR}$):

   (i) $Comp_{CR} \vdash (\forall y)(B^*(y) \rightarrow B(y))$

   (ii) $Comp_{CR} \vdash (\forall y)(B^*(y) \rightarrow (\exists x)(A(x)\&A^*(x))$

Ejemplo 7.5. Presentamos un análisis teórico del uso de la regla composicional de inferencia en algún sistema difuso experto como CADIAG-2 ("Computer-Assisted DIAGnosis"). Es un sistema experto diseñado para medicina interna y está destinado a ser un asistente activo del médico en situaciones de diagnóstico. El objetivo de CADIAG-2 puede describirse aproximadamente de la siguiente manera: Sobre la base de un conjunto de síntomas conocidos para algunos pacientes, posiblemente complementados por ciertos diagnósticos ya establecidos, CADIAG-2 se supone que deriva conjeturas sobre la(s) enfermedad(es) del paciente. Aquí se consideran tres conjuntos: M el conjunto de pacientes, S el conjunto de síntomas y D el conjunto de diagnósticos. Además tres relaciones binarias difusas: $P : M \times S \rightarrow [0, 1]$ donde para cada par (p, s) con $p \in M$, $\ s \in S$ expresa, cuántos p tienen el síntoma s, $R : S \times D \rightarrow [0, 1]$ la cual expresa para cada $s \in S$ y $d \in D$

cuántos s confirman d y $P^{'} : M \times D \rightarrow [0,1]$ que expresa cuántos pacientes p tienen el diagnóstico d. Por lo tanto tenemos una estructura con tres dominios M, S, D y tres relaciones binarias $P, R, P^{'}$. Sea $Has, Conf, Has^{'}$ predicados binarios de $P, R, P^{'}$ respectivamente; por lo tanto, $Has(x,s)$ dice "x tiene el síntoma s", similarmente $Has(x,s)^{'}$ y $Conf(s,d)$ dice "s confirma d". Usando la regla composicional de inferencia (para x arbitrario pero fijo) definimos:

$$Diag(x,d) \equiv (\exists s)(Has(x,s) \& Conf(s,d))$$

Esto define la relación $C : P \times D \rightarrow [0,1]$ que expresa para cada par (p,d) cuántos d se han confirmado para p.

Hasta aquí todo esta bien; pero ¿qué significa esto? La respuesta depende de la definición del significado de $Conf$ es decir, de la relación R.

Nota: En CADIAG y en sistemas similares se define R a partir de algunos datos. $R(s,d)$ se toma como la frecuencia relativa $Fr(d|s)$ de la presencia de d entre los objetos (pacientes) que tienen s (por implicidad, síntomas y diagnósticos se toman como conjuntos crisp). Qué significa $Diag(x,d)$ en este caso? Es difícil responder esto; pero una cosa es clara, sea p un paciente y $s_1, ..., s_k$ los síntomas que presenta, nos interesa saber o al menos estimar $F_r(d|s_1, ..., s_k)$ la frecuencia relativa de d entre objetos (pacientes) que tenga los síntomas $s_1, ..., s_k$ como un posible estimado del valor de $Has^{'}(x,d)$. Aunque es más claro decir que $Diag$ no estima esta frecuencia relativa sino que solo define el $\max(Fr(d|s_1), ..., Fr(d|s_k))$. Puede suceder por ejemplo, que si $k = 2$ $Fr(d|s_1) = Fr(d|s_2) = 0.9$ pero $Fr(d|s_1, s_2) = 0.2$. Veamos la siguiente tabla de frecuencia:

s_1	s_2	d	
1	1	1	1
1	0	1	44
0	1	1	44
0	0	1	5
1	1	0	4
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	3

Notemos que esto no permite que el conjunto S contenga conjunciones de síntomas. Aquí ofrecemos una interpretación posible de $Conf$ con propiedades deseables. Asuma que las relaciones $P, P^{'}$ que interpretan a $Has, Has^{'}$

son difusas y sea $Conf(s,d) \equiv (\forall x)(Has(x,s) \rightarrow Has^{'}(x,d))$, por lo tanto el grado de verdad de $Conf(s,d)$ es el mínimo sobre todos los pacientes x de los grados de verdad de la implicación $Has(x,s) \rightarrow Has^{'}(x,d)$. Nota:

7.3. Controladores difusos

El control difuso es aparentemente la aplicación más ampliamente utilizada de lógica difusa. Los sistemas de control difuso utilizan las expresiones difusas para formular las reglas que lo controlan; así, empleando técnicas de razonamiento aproximado es posible controlar sistemas superiores cuando el entorno no se conoce de forma precisa. Dicha característica permite mayor flexibilidad que el control clásico, en el cual se requiere de un alto grado de cálculo matemático para la realización de un controlador. Así, al desarrollar un controlador difuso es posible prescindir de la rigidez matemática y transmitir el raciocinio humano hacia un sistema.

En términos generales un controlador difuso es un dispositivo que es destinado para modelizar algún conocimiento aproximado o describir procesos aproximados.

Considere, por ejemplo un Sistema de calefacción en una habitación. Si la temperatura es *demasiado baja*, entonces probablemente se querría incrementar la potencia de la calefacción *un poco*. Si ahora se quiere controlar la temperatura de la habitación por un controlador difuso, se deben interpretar los términos "demasiado bajo" y "un poco" como términos de variables lingüísticas y escribir *reglas* que vinculen esas variables, por ejemplo:

si temp= "demasiado baja",
entonces cambio de potencia= "incrementar un poco".

Después de que todas las reglas han sido definidas, el proceso de control inicia con el cálculo de las consecuencias de las reglas. Entonces las consecuencias son agregadas en un conjunto difuso que describe las acciones de control posible, las cuales en este caso son diferentes valores del cambio de potencia. Estos cálculos se hacen con un proceso de inferencia. Ya que nuestro sistema de calefacción no entiende una acción de control como *incrementar un poco*, el conjunto difuso correspondiente debe ser difusificado en una acción de control crisp, usando un *método de difusificación*. Este ejemplo ilustra las partes principales de un controlador difuso: la regla base que opera sobre variables lingüísticas, método de fusificación que generan términos como funciones de los valores de entrada crisp (en este caso, temperatura), y la parte de inferencia que genera los términos de las variables de salida como una función de los términos de entrada y las reglas de la regla base. Ya que el proceso controlado debe ser alimentado con una señal crisp (en lugar de: "incrementar un poco" en el ejemplo), el resultado de la parte de inferencia que es un término de una variable lingüística tiene que ser transformado en un valor crisp.

En la actualidad hay diferentes tipos de controladores, sin embargo la base es el *Controlador de Mamdani*. La idea principal del Controlador de Mamdani es describir los estados del proceso mediante variables lingüísticas y usar estas variables como entradas para controlar las reglas. La estructura normalmente utilizada será la siguiente:

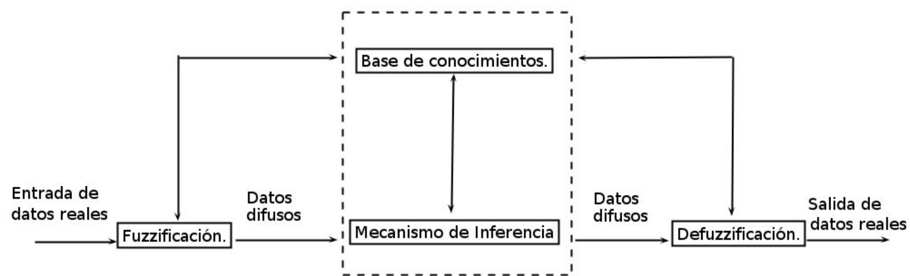

Figura 3: Estructura de un controlador difuso de Mamdani

Se inicia con la asignación de términos a las variables de entrada. La variable base es una variable de entrada que se puede medir o derivar a partir de una señal medida o una variable de salida del controlador. En el ejemplo las posibles variables base son *temperatura de la habitación, cambio de temperatura de la habitación, número de ventanas abiertas, temperatura del aire libre, cambio de energía, etc.* Los términos de las variables lingüísticas son conjuntos difusos con una cierta forma. Comúnmente se usan conjuntos difusos trapezoidales o triangulares debido a la eficiencia computacional, pero hay otras formas posibles. La variable lingüística "Temperatura" podría, por ejemplo, consistir de los términos "muy bajo"(mb), "bajo" (b), "confortable" (c), "alto"(a), "muy alto" (ma) como se muestra en la Figura 4.

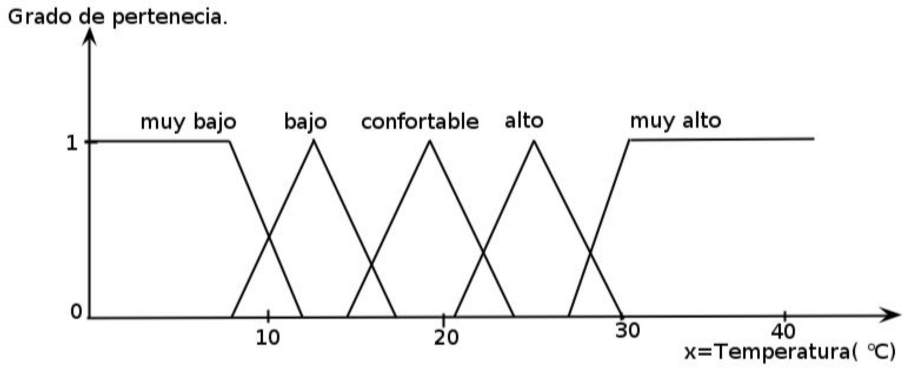

Figura 4: Variable lingüística "Temperatura"

Formalmente, se describen los términos de cada variable lingüística $VL_1, ..., VL_n$ por sus funciones de pertenencia $\mu_i^j(x)$, donde i indica la variable lingüística, $i = 1, ..., n$; j indica el término de la variable lingüística i, $j = 1, ..., m(i)$, y $m(i)$ es el número de términos de la variable lingüística i. El número de variables lingüísticas y el número de términos de ellas determinan el número de posibles reglas.

Con esto es importante mencionar que el proceso de *fusificación* es el que se encarga de transformar el dato o los datos nítidos a un dato o datos difusos, es decir, mediante la función de pertenencia asigna el dato a algún conjunto difuso. Luego en la *base de conocimientos* están todas las reglas que el experto en el sistema definirá, las cuales servirán para la toma de decisiones.

Las reglas conectan las variables de entrada con las variables de salida y están basadas en la descripción del estado difuso que es obtenido por la definición de variables lingüísticas. Se retomará el ejemplo, luego de hacer un análisis matemático de la inferencia en el controlador difuso.
En este análisis, se restringe a una sola variable X de entrada, una generalización para más variables de entrada será fácil. Lo fundamental de este asunto es lo que sigue: se tienen n reglas "SI X es A_i ENTONCES Y es B_i" donde $r_i = 1, \cdots, n$, A_i predicados unarios del mismo género, B_i predicados, todos del mismo género (posiblemente diferente del tipo anterior). Se escriben las reglas como $A_i(x) \to B_i(y)$. Un ejemplo razonable de una regla en el sistema de calefacción es: si la temperatura es baja entonces la potencia es media.

Pasando ahora al proceso de *inferencia* que es el encargado de hacer éstas reglas válidas, se usa A_i y B_i para definir un predicado binario $MAMD$ como

$$(\forall x, y)(\mathrm{MAMD}(x, y) \equiv \bigvee_i (A_i(x) \& B_i(y))) \tag{6}$$

y, dando otro predicado unario A^* del mismo tipo, define un B^* de A^* , vía la regla composicional de inferencia, es decir

$$(\forall y)(B^*(y) \equiv (\exists x)(A^*(x) \& \mathrm{MAMD}(x, y))) \tag{7}$$

Dando un modelo $\mathbf{M} = \langle D_X, D_Y, r_{A_i}, r_{B_i} \rangle$ esto define un funcional asociando a cada conjunto difuso r_{A^*} de D_X el correspondiente subconjunto difuso $r_{B^*} \in D_Y$. Es de notar que esto es usado para definir un mapeo crisp de D_X en D_Y: primero se usa la operación de *fusificación*, asociando a cada $u \in D_X$ un conjunto difuso r_{A^*} ("aproximadamente u"), entonces aplica el funcional para obtener r_{B^*} y finalmente aplica la *defusificación* procediendo en convertir el conjunto difuso r_{B^*} en una salida de una variable crisp v.

Ahora la pregunta acá es: ¿hay alguna lógica aquí? Se intentará dar una respuesta a esto lo más general posible. Para este fin se hará de las fórmulas anteriores axiomas de la teoría de control difuso (FC) por sus siglas en inglés:

Definición 7.2. FC es una teoría de género dos, teniendo predicados unarios $A_1, ..., A_n, A^*$ de género 1, predicados unarios $B_1, ..., B_n, B^*$ de género 2 y un predicado binario $MAMD$ de el tipo $\langle 1, 2 \rangle$. Los axiomas son las fórmulas (6), (7) anteriores (definiendo $MAMD$ de A_i, B_i y definiendo B^* de $A^*, MAMD$). Además, FC tiene dos constantes: X de género 1 y Y de género 2.

Teorema 7.3. En FC se prueba lo siguiente (sobre $BL\forall$):

$$[\bigwedge_i (A_i(X) \to B_i(Y)) \& \bigvee_i (A_i)^2(X)] \to (A^*(X) \to B^*(Y))$$

Demostración. En $BL\forall$ se cumple que $A_i(X) \& (A_i(X) \to B_i(Y)) \to B_i(Y)$, por lo que $A_i^2(X) \& (A_i(X) \to B_i(Y)) \to A_i(X) \& B_i(Y)$. Teniendo en cuenta que $\bigwedge_i (A_i(X) \to B_i(Y)) \to (A_i(X) \to B_i(Y))$ se obtiene
$A_i^2(X) \& \bigwedge_i (A_i(X) \to B_i(Y)) \to A_i(X) \& B_i(Y)$.
Luego dado que $A_i(X) \& B_i(Y) \to \bigvee_i A_i(X) \& B_i(Y)$ sigue

$A_i^2(X) \& \bigwedge_i (A_i(X) \to B_i(Y)) \& A^*(X) \to [A^*(X) \& \,\mathrm{MAMD}(X,Y)]$.
Consecuentemente

$$A_i^2(X) \& \bigwedge_i (A_i(X) \to B_i(Y)) \to [A^*(X) \to A^*(X) \& \,\mathrm{MAMD}(X,Y)].$$

Ahora como $A^*(X) \& \,\mathrm{MAMD}(X,Y) \to (\exists x)(A^*(x) \& \,\mathrm{MAMD}(x,Y))$ se concluye que

$$A_i^2(X) \& \bigwedge_i (A_i(X) \to B_i(Y)) \to [A^*(X) \to (\exists x)(A^*(x) \& \,\mathrm{MAMD}(x,Y))]$$

con lo cual se obtiene el resultado por la definición de B^*. □

Se hará una breve discusión de éste teorema. Dice que bajo los supuestos de cómo se obtiene B^*, si el valor actual de la variable X (denotado por la constante X) se satisface, junto con el valor actual de la variable Y, todas las reglas $A_i(X) \to B_i(Y)$ *y* (remarcado *y*) X satisfacen $\bigvee_i A_i^2(X)$ entonces $A^*(X)$ implica $B^*(Y)$. En particular si se asume que $A_i(X) \to B_i(Y)$ es 1-verdadero en $\mathbf{M}$. Entonces $\|A_i(X)\|_M \leq \|B_i(Y)\|_M$ para todo i y $\|A_i(X)\|_M = 1$ para al menos un i. Con esto $1 \leq \|A^*(X) \to B^*(Y)\|_M$ por lo que $\|A^*(X)\|_M \leq \|B^*(Y)\|_M$.
Pero esto no es todo. Si se asume el valor del antecedente para ser $\geq r$, es decir, las reglas son *suficientemente* verdaderas y X satisface *suficientemente* uno de los $A_i's$. La conclusión es que $\|B^*(Y)\|_M$ no es mucho mayor que $\|A^*(X)\|_M$. Por ejemplo, si las reglas son 1-verdaderas entonces $\|B^*(Y)\|_M \geq \|A^*(X)\|_M * \|\bigvee A_i^2(X)\|_M$ (siendo $*$ la interpretación de &). Volveremos a esta discusión luego.

Ahora hay que ver que pasa si asumimos A^* para ser el equivalente a A_i.

Teorema 7.4. FC demuestra (sobre $BL\forall$) lo siguiente:

i. $[(\forall x)(A^*(x) \equiv A_i(x)) \& (\exists x) A_i^2(x)] \to (\forall y)(B_i(y) \to B^*(y),$

ii. $$[(\forall x)(A^*(x) \equiv A_i(x)) \& (\forall x)(\bigwedge_{i \neq j} \neg(A_i(x) \& A_j(x)))] \to (\forall y)(B^*(y) \to B_i(y))$$

Demostración. Trabajando de manera similar a las pruebas anteriores se tiene

i. FC $\vdash (A_i^2(x)\&(A_i(x) \equiv A^*(x))\&B_i(y)) \to A^*(x)\&A_i(x)\&B_i(y)$, luego sabiendo que $A_i(x)\&B_i(y) \to \bigvee_j (A_j(x)\&B_j(y))$ se obtiene que $(\exists x)(A_i^2(x)\&(A_i(x) \equiv A^*(x))\&B_i(y)) \to (\exists x)(A^*(x)\& \bigvee_j A_j(x)\&B_j(y)$.
Por otra parte
FC $\vdash [(A_i^2(x)\&(\forall x)(A_i(x) \equiv A^*(x))] \to (\exists x)(A_i^2(x)\&(A_i(x) \equiv A^*(x)))$,
y de esto FC $\vdash [(A_i^2(x)\&(\forall x)(A_i(x) \equiv A^*(x))]\&B_i(y) \to$
$\to (\exists x)(A^*(x)\&MAMD(x,y))$.

Por tanto $[(A_i^2(x)\&(\forall x)(A_i(x) \equiv A^*(x))] \to (B_i(y) \to B^*(y))$.

ii. Para probar esto se escribirá $Dsjnt(A_i)$ por $(\forall x) \bigwedge_{j \neq i} \neg(A_i(x)\&A_j(x))$ y $Equiv(A_i, A^*)$ por $(\forall x)(A^*(x) \equiv A_i(x))$. Por la definición de $B^*(y)$ se obtendrá que
FC $\vdash B^*(y)\&Equiv(A^*, A_i) \to (\exists x)(A_i(x)\& \bigvee_j (A_j(x)\&B_j(y)))$,
luego $Dsjnt(A_i) \to [(A_i(x)\& \bigvee_j (A_j(x)\&B_j(y))) \to A_i^2(x)\&B_i(y)]$ (ya que $A_i(x)\&A_j(x)\&B_j(y)$ implica $\bar{0}$ para $i \neq j$), es decir,

$$FC \vdash [Dsjnt(A_i)\&Equiv(A^*, A_i)\&B^*(y)] \to (\exists x)(A_i^2(x)\&B_i(y)),$$

FC $\vdash [Dsjnt(A_i)\&Equiv(A^*, A_i)] \to (B^*(y) \to B_i(y))$, lo cual da el resultado al generalizar para y, y utilizar $(\forall 2)$.

□

Es importante analizar los siguientes puntos:

(1) Al leer de nuevo las fórmulas como verdaderas en un modelo- primero con el antecedente 1-verdadero y luego con el antecedente *suficientemente verdadero*- se puede observar que

(i) Si $A^*(x)$ es suficientemente cercano a A_i y A_i es (suficientemente) no vacío entonces B_i está suficientemente incluido en B^*;

(ii) Si A_i es suficientemente disjunto de todos los A_j's y A^* es suficientemente cercano a A_i entonces B^* está suficientemente incluido en B_i. Obviamente, estas son lecturas difusas; el significado preciso es dado por las fórmulas probadas y puede ser expresado en gran detalle de nuevo como un ejercicio.

(2) Se repite una ves más que en lugar de un antecedente de la forma $A_i(X)$ se podría investigar uno de la forma $A_{i1}(X_1)\&...\&A_{ik}(X_k)$ o $A_{i1}(X_1) \wedge ... \wedge A_{ik}(X_k)$, esto no trae problemas pero es más engorroso.

Retomando el ejemplo del sistema de calefacción, en el cual se consideran dos variables de entrada: temperatura con términos "muy baja" (mb), "baja" (b), "confortable" (c), "alta" (a), "muy alta" (ma) y cambio de temperatura con términos (ver Figura 5) "negativo grande" (ng), "negativo pequeño" (np), "cero" (z), "positivo pequeño" (pp), "positivo grande" (pg). Además, se establecen tres términos de acciones de control para la "potencia": "pequeño" (p), "medio" (m) y "grande" (g).

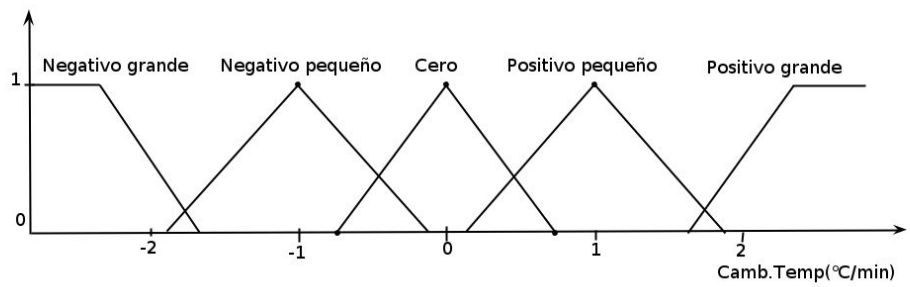

Figura 5: Variable lingüística "Cambio de temperatura"

Una regla razonable es

Si la temperatura es baja y y el cambio de temperatura es negativa pequeña, entonces la potencia es media

La siguiente tabla muestra una posible regla base

Temp / C. de temp	ng	np	z	pp	pg
mb		g	g	m	m
b	g	m	m	p	p
c		m	p	p	
a		p	p	p	
ma	m	p	p		

Cuadro 1: Regla base

Las entradas vacías significan que no hay reglas definidas explícitamente. La primera entrada (mb, ng) en la tabla se refiere a un estado donde la temperatura es muy baja y cae rápidamente. Y a que el sistema de calefacción tiene potencia limitada, incluso la potencia máxima no daría lugar a una temperatura confortable. Una regla que cubra esta situación es por lo tanto superflua. Sin embargo, se debería definir un valor predeterminado que es usado como una salida del controlador si ninguna de las reglas se activa.

La definición de variables lingüísticas y reglas son los principales pasos a diseñar cuando se implementa un controlador de Mamdani. Antes de elaborar el último paso de diseño que es la elección de un procedimiento adecuado de difusificación, se muestra como los valores de entrada desencadenan el cálculo de la acción de control. Los cálculos pueden ser descritos en un proceso de tres pasos que consisten en:

1. Determinación del grado de pertenencia de la entrada en el antecedente de la regla,
2. cálculo de las consecuencias de la regla y
3. agregación de las consecuencias de las reglas al conjunto difuso “acción de control”.

El primer paso es calcular el grado de pertenencia de los valores de entrada en los antecedentes de las reglas. Utilizando el operador mín como un modelo para $\wedge$, se calcula el grado de coincidencia de la regla r como

$$\alpha_r = \min_i \{\mu_i^{j_i}(x_i^{entrada}); \;\; i = 1, ..., n\}$$

Este concepto nos permite obtener la validez de las consecuencias de la regla. Se asume que las reglas con grado bajo de pertenencia en el antecedente también tienen poca validez y por lo tanto recortan los conjuntos difusos de consecuencias a la altura del grado de pertenencia del antecedente. Formalmente,

$$\mu_r^{consec.}(u) = \min\{\alpha_r, \mu^j(u)\}$$

El resultado de este proceso de evaluación se obtiene por agregación de todas las consecuencias, usando el operador máx. Se calcula el conjunto difuso de la acción de control:

$$\mu^{consec.}(u) = \max\{\mu_r^{consec.}(u)\}$$

Este cálculo es un caso especial del proceso de inferencia descrito en esta sección. Es importante notar que el método de Mamdani toma en cuenta todas las reglas en una sola etapa y no se produce ningún encadenamiento. Por lo tanto el proceso de inferencia en control difuso es mucho más simple que en la mayoría de sistemas expertos.

En el ejemplo, se asume que la temperatura actual es de 22°C y que el cambio de temperatura es -0.6°C/min. Por lo tanto obtenemos que la temperatura es confortable con grado 0.4 y alta con grado 0.3 como se puede observar en la figura 4. Una definición similar de las variables lingüísticas en el caso del cambio de temperatura, "negativo pequeño" con grado 0.6 y "cero" con grado 0.2. En cuadro 1. se observa que cuatro reglas tienen un grado de coincidencia mayor que cero:

r10 : si temp= "confortable" y el cambio de temp= "negativo pequeño," entonces la potencia = "media."

r11 : si temp= "confortable" y el cambio de temp= "cero," entonces la potencia = "pequeña."

r13 si temp= "alta" y el cambio de temp= "negativo pequeño," entonces la potencia = "pequeña."

r14 : si temp= "alta" y el cambio de temp= "cero," entonces la potencia = "pequeña."

El grado de pertenencia de los antecedentes de las reglas es

$$\begin{aligned}\alpha_{10} &= \text{mín}\{0.4, 0.6\} = 0.4\\ \alpha_{11} &= \text{mín}\{0.4, 0.2\} = 0.2\\ \alpha_{13} &= \text{mín}\{0.3, 0.6\} = 0.3\\ \alpha_{14} &= \text{mín}\{0.3, 0.2\} = 0.2\end{aligned}$$

Consecuentemente, las consecuencias de las reglas son

$$\begin{aligned}\mu_{10}^{consec.}(u) &= \text{mín}\{0.4, \mu^{med.}(u)\}\\ \mu_{11}^{consec.}(u) &= \text{mín}\{0.3, \mu^{peq.}(u)\}\\ \mu_{13}^{consec.}(u) &= \text{mín}\{0.3, \mu^{peq.}(u)\}\\ \mu_{14}^{consec.}(u) &= \text{mín}\{0.2, \mu^{peq.}(u)\}\end{aligned}$$

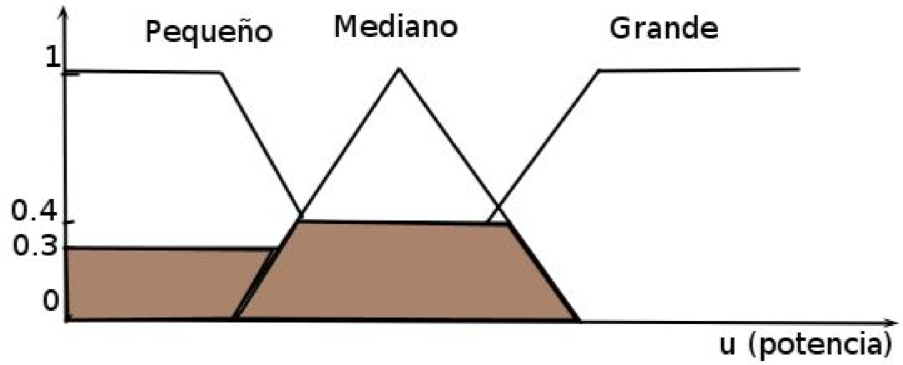

Figura 6: Consecuencias de las reglas den el sistema de calefacción

La gráfica anterior representa el conjunto difuso resultante del acción de control

$$\mu^{consec.}(u) = \max\{\mu_{10}^{consec.}(u), \mu_{11}^{consec.}(u), \mu_{13}^{consec.}(u), \mu_{14}^{consec.}(u)\}$$

Ya que los procesos técnicos requieren acciones de control crisp, se requiere un procedimiento que genere un valor crisp a partir del conjunto difuso dado. Estos métodos de difusificación están basados en ideas heurísticas como "tome la acción que corresponde a la pertenencia máxima," " tomar la acción que está a medio camino entre dos picos o en el centro de la meseta," etc. Uno de los métodos más utilizados y que usaremos en este ejemplo es el método del centro de área, el cual se describe a continuación.

Centro de Área (COA). El método COA elige la acción de control que corresponde al centro del área de pertenencia mayor que cero. El área se pondera con el valor de la función de pertenencia. La idea de este método es agregar la información sobre posibles acciones de control representadas por la función de pertenencia. La solución es un compromiso, debido a la falta de claridad de las consecuencias. Formalmente la acción de control se calcula como sigue

$$u^{COA} = \frac{\int_U u \cdot \mu^{consec}(u)du}{\int_U \mu^{consec}(u)du}$$

El procedimiento puede ser computacionalmente complejo y puede generar resultados no deseados si el conjunto difuso no es unimodal. El resultado de este método de difusificación para el sistema de calefacción se representa en la siguiente figura.

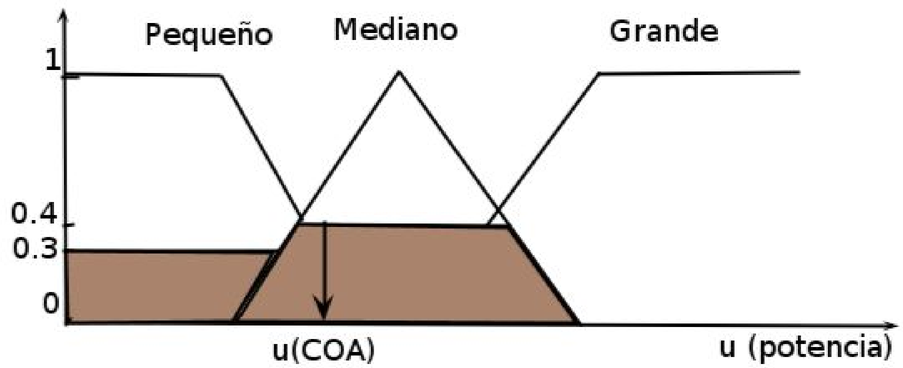

Figura 7: Resultado de defusificación

8. Conclusiones

- En la lógica clásica solo hay dos posibilidades para los valores de verdad de una fórmula: verdadero o falso, por esta razón se dice que esta lógica es bivalente, pero existen otras lógicas que admiten más de dos valores de verdad (lógica multivaluada). La lógica difusa es un tipo de lógica multivaluada y se caracteriza por querer cuantificar la incertidumbre en una fórmula y se basa en el principio de "todo es cuestión de grado".

- La lógica difusa permite extenderse a una escala de valores de verdad que van más allá de verdadero y falso, al igual que una escala de grises permite extender más allá del blanco y negro. Esta nueva forma de pensar requiere la creación de un nuevo conjunto de herramientas como es la lógica difusa de primer orden, inferencia difusa, controladores difusos y otros. En muchos casos es una mejor herramienta para modelar situaciones reales como: Temperaturas, ciclos de lavado, tiempos de cocción, etc.

- La lógica difusa admite un tratamiento similar a la lógica clásica de primer orden, sirviendo como una generalización de esta.

Referencias

[1] Petr Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*, volume 4 of Trends in Logic. Springer, 1998.

[2] Hans-Jürgen, Zimmermann, (1996), $3rd$ edición. *Fuzzy Set Theory -and Its Applications*: Kluwer Academic Publishers.

[3] L.A Zadeh. (1965), Vol. 8, $3rd$ edición , *Fuzzy Sets*: Information and Control.

[4] Petr Cintula, Petr Hájek, Carles Noguera(2011). Studies in Logic (Vol 1). *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic.*

[5] Sancho Caparrini F.(2017) Introducción a la Lógica Difusa. Universidad de Sevilla. Fernando Sancho Caparrini. Disponible en: http://www.cs.us.es/ fsancho/?e=97.