
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA



Universidad de El Salvador

Hacia la libertad por la cultura

PROYECTO PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO/A EN MATEMÁTICA
TITULADO:

MODELO MATEMÁTICO PARA LA OPTIMIZACIÓN DE LA FLUIDEZ DEL TRÁFICO VEHICULAR EN LA INTERSECCIÓN ENTRE LAS CALLES SAN ANTONIO ABAD, BULEVAR DE LOS HÉROES, 25 AV. NORTE Y AUTOPISTA NORTE.

PRESENTADO POR:

JANNET XIOMARA MARTÍNEZ GUARDADO

IRENE ANDRES JUÁREZ MEJIA

ASESORES DEL TRABAJO:

LIC. MAURICIO HERNÁN LOVO CÓRDOVA.
DR. RIQUELMI SALVADOR CARDONA FUENTES.
DR. WILFREDO IVAN SALAZAR ELIAS.

CIUDAD UNIVERSITARIA, OCTUBRE 2018.

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS

RECTOR:

M.Sc. ROGER ARMANDO ARIAS.

SECRETARIA GENERAL:

M.Sc. CRISTOBAL HERNÁN RIOS.

FISCAL:

LIC. RAFAEL HUMBERTO PENIA MARIN.

DECANO:

LIC. MAURICIO HERNÁN LOVO CORDOVA.

DIRECTOR DE LA ESCUELA DE MATEMÁTICA:

DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES.

Dedicatoria

A nuestros padres Maria Meita Mejía, José Miguel Juárez García y María Emma Guardado, Jose Antonio Martínez Villalta que han sido la base de nuestra formación, ellos han aportado grandes cosas a nuestra vida, y nos han ayudado a enfrentar la gran tarea de encarar a la sociedad. Les agradecemos infinitamente por todo y por ser los principales benefactores del desarrollo de nuestra carrera.

Agradecimientos

- A Dios, a nuestros asesores Dr. Wilfredo Ivan Salazar Elias, Lic. Mauricio Hernán Lovo Córdova y Dr. Riquelmi Salvador Cardona Fuentes por su tiempo, paciencia y apoyo en el desarrollo del trabajo.
- A nuestros seres queridos Lucy, Vilma, Amalia, Marcela, kenya, Ivan, Jairo, Maria Angela Martinez Amaya y Mariano de Jesús Sanchez Abarca que en paz descanse por su ayuda, comprensión, apoyo y palabras de aliento.

INTRODUCCIÓN

El tráfico vehicular es actualmente un factor en crecimiento en los países de América Latina en general y claramente El Salvador no es la excepción, actualmente existe un parque vehicular de más de un millón de vehículos en todo el país, de acuerdo con datos del Vice ministerio de Transporte hasta el 8 de mayo del 2017; ascendiendo los que tienen placas particulares a 722,866. El crecimiento del parque vehicular según estos datos fue de 9.87 % en 2016; esto proyecta un crecimiento acelerado. De continuar esta tendencia, el parque aumentará significativamente año con año.

Claramente, la concentración es mayor en las ciudades principales, como San Salvador y por ende en el escenario donde se desarrolla el presente trabajo; se pretende poner a disposición las herramientas matemáticas necesarias para el abordaje del fenómeno de la congestión en el tráfico vehicular; a través de la utilización de modelos que permitan entender y tomar decisiones para la solución del problema; para ello hacemos uso de un software de simulación del tráfico que nos permite una comprensión más gráfica y práctica del mismo. Proponemos un modelo matemático que describe la intersección entre la Calle San Antonio Abad, el Bulevar de los Héroes, autopista Norte y la calle 25 avenida norte, ubicada frente a la entrada principal de la Universidad de El Salvador.

El presente trabajo contiene una pequeña descripción de los elementos básicos del abordaje del tráfico vehicular; que permite familiarizarse con el tema, y algunas tecnologías y técnicas de recolección de datos más utilizadas del mismo. Se presenta una lista de modelos matemáticos que son utilizados para describir el comportamiento del tráfico vehicular; entre ellos el modelo Lighthill-Whitham-Richards (LWR) que muestra la relación que existe entre la velocidad y la densidad del tráfico; así como también la teoría general de los modelos car-following; además se presenta parte de la base teórica matemática en la que se sustentan los modelos; la descripción matemática general del proceso dinámico en una intersección; un análisis de la ecuación del modelo de seguimiento del líder IDM y las pruebas de las simulaciones de las calles que conforman la intersección, basadas en el modelo propuesto.

En todo el presente trabajo se hace la suposición de que la intersección analizada no se ve afectada por el flujo proveniente de otras calles, pues la idea del modelo será ver como funciona bajo estos supuestos localmente, para facilitar el paso del estudio de fenómenos simples a otros más complejos.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

- Realizar una propuesta de modelo de tráfico vehicular, de las calles que componen la intersección entre las calles San Antonio Abad, el Bulevar de Los Héroes, la 25 av. Norte y la autopista Norte basado en la combinación de los modelos IDM y MOBIL.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar un análisis de la ecuación del modelo microscópico IDM (Intelligent Driver Model), en cada uno de los escenarios del tráfico, que permita categorizarlo como el más apropiado, para utilizarlo en conjunto con el modelo MOBIL, en la descripción del comportamiento del tráfico vehicular, en la intersección entre las calles San Antonio Abad, el Bulevar de Los Héroes, la 25 av. Norte y la autopista Norte.
- Revisar la teoría correspondiente a la descripción matemática general del proceso dinámico en una intersección señalizada, y de los modelos del tipo siguiente al lider.
- Utilizar un software de simulación del tráfico, que permita realizar corridas del modelo propuesto.

METAS

- Describir los escenarios del tráfico con el modelo microscópico IDM(Intelligent Driver Model).
 - Presentar un modelo matemático que permita el abordaje del problema planteado.
 - Simular el tráfico en la intersección señalizada ubicada entre la Calle San Antonio Abad, el Bulevar de Los Héroes, la 25 av. Norte y la autopista Norte.
-

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se ha observado en los últimos años, que en la intersección entre la 25 avenida norte, calle San Antonio Abad, Bulevard de los Héroes y la Autopista Norte; presenta problemas de congestión del tráfico vehicular, en las horas pico de entrada y en en las horas pico de salida de los estudiantes y trabajadores de la Universidad de El Salvador; esto dificulta la movilización de las personas que transitan por dicha zona en esas horas.

Hay varios factores que contribuyen a este fenómeno, uno de ellos es la falta de educación vial de los conductores; quienes hacen paradas no autorizadas para subir y bajar pasajeros en cualquier lugar. Otra situación que genera problema es la entrada de odontología de la Universidad de El Salvador, donde en horas pico se hace una fila de carros para entrar y para subir y bajar pasajeros; más aún, los estudiantes no hacen uso de la pasarela ahí ubicada y en muchas ocasiones se transforman en obstáculo para los conductores. La misma situación que en en la entrada de Odontología se repite en la entrada del centro educativo ubicado al lado de la Universidad de El Salvador; donde en ciertas horas la fila de automóviles que suben y bajan a estudiantes afecta hasta el semáforo de la intersección. Por otra parte existe una parada semi formal de auto buses, cerca de la intersección en cuestión y sobre la calle San Antonio Abad -la cual tiene dos carriles en cada sentido-; que ocupa todo un carril, dejando para el paso de los demás vehículos solo uno, lo que genera embotellamiento en horas pico, y una cola de vehículos en dicha calle.

Además a la Calle 25 av. Norte se le incorporan vehículos de la 27 y 29 calle poniente en dirección a la intersección que se está estudiando que le genera sobre saturación; a esto hay que agregar que en dichas incorporaciones muchos automovilistas realizan maniobras de incorporación indebidas a la 25 av. Norte pero en dirección del redondel de las fuentes luminosas.

Por otra parte los semáforos presentan desperfecto en las horas de la mañana, hay días en que funcionan bien y días en que no; esto provoca un descontrol en los automovilistas que amenaza con generar accidentes viales. Por todo lo anterior es importante encontrar herramientas que simplifiquen el estudio de flujo vehicular en la zona.

Sea P el conjunto de automóviles que ingresan y atraviesan la red de calles, formada por la Calle San Antonio Abad, el Bulevar de Los Héroes, la 25 av. Norte y la autopista Norte, en un periodo de tiempo T . Dichas calles se intersectan en un cruz calle. Entonces aparece asociado el siguiente problema. ¿Existe un modelo matemático que describa el comportamiento dinámico en dicha intersección?, y si fuese así ¿es posible realizar una descripción gráfica del mismo?



Figura 1: Área a modelar

ANTECEDENTES

Durante los años 90 las principales ciudades de América Latina emprendieron grandes programas con el objetivo de mejorar la dinámica del flujo vehicular. Una de las estrategias fue la construcción de grandes autopistas, vías urbanas, sistemas de semaforización, que llevaron a mejorar la infraestructura vial, pero la insuficiencia de los impactos obtenidos a través de esta nueva infraestructura, condujo a que se implementaran nuevas estrategias como el Sistema de Bus Rápido (Bus Rapid Transit BRT), en 1995 se construyó el primer ramal de la ciudad de Quito. Desde el 2000 la instalación y operación de estos sistemas ha registrado una gran expansión, que comprende TransMilenio en la ciudad de Bogotá, (1998); el sistema Interligao Sao pablo, Brasil (2003), el BRT de México (diseñado para complementar el metro), el Megabús de Pereira (2006), en Guayaquil (2006), Guatemala (2007), En el 2009 entró en operación el sistema Masivo Integrado de Occidente (MIO), en Santiago de Cali. También en diciembre de 2009 se puso en funcionamiento, en forma pre-operativa en Bucaramanga, Metrolínea y, por último, el Metroplus el 22 de diciembre de 2011 en la ciudad de Medellín. En estos últimos años, científicos norteamericanos y rumanos han desarrollado un modelo informático basado en información real que atribuye inteligencia a los semáforos para optimizar la gestión del tráfico. De esta forma han comprobado que se reduce un 28 por ciento del tiempo de espera en los cruces en hora punta y un 6,5 por ciento las emisiones de CO₂. Otras estrategias implementadas son las ciclo rutas, puentes peatonales en puntos estratégicos, restricciones sobre el uso de automóviles privados en las horas pico y un gran número de campañas en favor de una mejor cultura cívica. Sin embargo, a pesar de todas estas estrategias, la congestión del tráfico continúa y sigue produciendo una serie de efectos negativos en la población.

En España, la Universidad Politécnica de Catalunya ha realizado un estudio similar al que se pretende aquí; dicho estudio se titula: *ESTUDIO DE REGULACIÓN DEL TRÁNSITO DE VEHÍCULOS Y PEATONES EN LOS ALREDEDORES DE LA AVENIDA PORTUGAL DE SALAMANCA*; tiene como objetivo abordar la problemática relacionada con la regulación de tráfico vehicular en el cruce de la Avenida Portugal con la Avenida Torres Villarroel, y sus alrededores, en Salamanca; dicho estudio toma un modelo matemático que sigue la regla FIFO (First in First out) Primero en llegar, primero en salir. Y utiliza los programas de simulación SIMIO y AIMSUN para su validación.

De acuerdo con datos de la oficina de información del Vice ministerio de Transporte (VMT); hasta el 27 de Junio de 2017 el parque vehicular del país ascendía a 1,048,540; de los cuales 728,660 poseen placas particulares, 6,966 son autobuses, 3,480 micro buses, 229,664 motocicletas, 47,696 camiones y 12,282 poseen placas nacionales. De acuerdo al VMT en el año 2010 el parque era de 712,750; luego en 2015 alcanzo los 925,448 y termino el 2016 con 1,026,797; esto muestra que entre el 2015 y 2016 hubo un incremento del 9.87 % y hasta junio de este año ya había crecido 2.07 % con respecto al año pasado y un 11.74 % desde el 2015.

El departamento de San Salvador es el que posee el mayor parque vehicular del país al tener registrados 425,990 vehiculos; de los que 311,178 tienen placa particular, 2,153 son autobuses, 1,799 micro buses, 15,110 camiones y 76,183 motocicletas. Además solo en el Área Metropolitana de San Salvador posee alrededor del 45 por ciento de la carga vehicular total del país.

Este fenómeno conlleva a que las calles y carreteras por donde transitan grandes cantidades de vehículos colapsen en horas pico. Tal es el caso del Bulevar de los Héroes, la 25 avenida Norte y la Calle San Antonio Abad; que son algunas de las calles en los alrededores de La Universidad de El Salvador. Esto pudimos constatarlo con un monitoreo y una primera toma de datos experimental y preliminar de la carga vehicular de la calle 25 avenida Norte de en el sentido de sur a norte; que realizamos en los días del 17 al 23 de mayo; y en la que se utilizó el conteo vehículo a vehículo que atravesaba el semáforo localizado en dicha intersección. Así como también se contabilizo el numero de vehículos que se incorporaban desde la Calle 25 av. Norte a la autopista norte en sentido de oeste a este. Dicho experimento reflejo que entre las 6:30 am y las 8:00 am transitan por esa vía que solamente posee dos carriles un promedio de 1,071.66 vehículos entre buses, micro buses y vehículos particulares; esto sin tomar en cuenta la cantidad de motos que circulan dicha zona y

que también va en aumento. Además, se observó que la cola de vehículos en espera para atravesar dicho semáforo alcanza hasta los 400 metros y eso va en aumento a medida que crece la carga en todo el país.

Por otra parte, los encargados de planificación vial del VMT, han realizado pruebas piloto para mejorar la fluidez en la intersección; se han realizado pruebas cambiando los tiempos de los semáforos en horas picos y observando como modifica el tráfico.

JUSTIFICACIÓN

A través de los últimos años se ha dado un incremento en la carga vehicular, lo cual, afecta mayormente al área metropolitana del país, especialmente en aquellas zonas de esta, en las que circula una mayor cantidad de personas en horas específicas, como por ejemplo, la intersección entre las calles San Antonio Abad, el Bulevar de Los Héroes, la 25 av Norte y la autopista Norte. Con el fin de encontrar soluciones a dicho problema, se hace necesaria la búsqueda de diversas alternativas de abordaje al problema del tráfico vehicular, que conlleve aun adecuado funcionamiento de las redes de transporte e impacte, de forma positiva en el desarrollo del país.

El uso de modelos matemáticos permite simplificar el análisis del comportamiento del tráfico vehicular, mediante ecuaciones, o sistemas de ecuaciones, es posible representar cada uno de los elementos que conforman el sistema de la intersección y la manera en que se relacionan. Por otra parte, la simulación digital describe graficamente dichas relaciones y a la vez evita, los costos económicos que implica hacer pruebas pilotos en los estudios de mejoras de tráfico vehicular.

En este trabajo se presenta un modelo matemático basado en la combinación del modelo de seguimiento de líder IDM y del modelo de cambio de carril MOBIL; que describe, por separado, el comportamiento del tráfico vehicular en la intersección antes mencionada. Además, se muestra la reproducción gráfica de dicho modelo utilizando el software trafficSimulation, con el cual se realizan corridas optimas a trozos de la intersección, que permitan tomar decisiones sobre cambios de parámetros en la misma, para mejorar el flujo de vehículos en la zona. La prueba de la necesidad de abordar este tema, es la observación del fenómeno.

Índice general

1. Elementos del abordaje del problema del tráfico vehicular	15
1.1. Otros aspectos importantes en el estudio del tráfico.	18
1.2. Variables	20
1.3. Técnicas de recolección de datos del tráfico vehicular	22
1.3.1. Técnica de aforos vehiculares	23
2. Áreas de la matemática involucradas.	28
2.1. Ecuaciones diferenciales	28
2.2. Introducción a la teoría de grafos	29
2.3. Introducción a la teoría de probabilidad	35
2.4. Sistemas dinámicos	41
2.5. Métodos numéricos	42
2.5.1. Método de diferencias finitas	43
2.6. Análisis vectorial	44
3. Descripción matemática del proceso del tráfico en una intersección señalizada.	47
3.1. Conjunto de llegada X	48
3.2. Flujos de llegada	51
3.3. Señales del tráfico	55
3.4. Estados del sistema	56
3.5. Flujos de salida	57
4. Modelos matemáticos para el tráfico vehicular	66
4.1. Modelo de Lighthill-Whitham-Richards (LWR)	67
4.2. Modelos car-following	71
4.3. Análisis del Intelligent driver model (IDM)	78

4.3.1. Modelo MOBIL	87
5. Implementación del modelo	90
5.1. Modelo propuesto	91
5.2. Descripción del modelo	92
5.3. Aplicación del modelo para la simulación	93
5.4. Implementación del modelo	93
5.5. Pruebas y resultados	94

Capítulo 1

Elementos del abordaje del problema del tráfico vehicular

Para comprender de una mejor manera los elementos que intervienen en el abordaje de los problemas de tráfico vehicular; definimos a continuación los más relevantes:

Calle: se denominará la vía urbana limitada en la posición topográfica de Oriente a Poniente para efectos reglamentarios [1].

Calle o Avenida de una sola Vía: es aquella por donde los vehículos podrán circular en una sola dirección aunque esté dividida longitudinalmente.

Calle o Avenida de doble vía: es aquella por donde el tránsito puede realizarse en ambas direcciones.

Calzada: zona de la carretera destinada a la circulación de vehículos.

Acera: es la parte elevada sobre el nivel de las calles o avenidas, que se extiende a ambos lados de las mismas y están destinadas exclusivamente para los peatones.

Avenida: se denomina la vía urbana cuya posición topográfica esté determinada en los rumbos de Norte a Sur [1].

Crucero o Intersección: es el espacio que forman dos vías o más que se entrecruzan.

Intersección vial: Una intersección vial hace referencia aquellos elementos de la infraestructura vial y de transporte donde se cruzan dos o más caminos. Estas infraestructuras permiten a los usuarios el intercambio entre caminos. El cruce de caminos se puede dar con una intersección a nivel o con una intersección a desnivel. Es importante remarcar que este término también puede hacer referencia a elementos de otros sistemas de transporte, como vías férreas o ciclovías.

Centro del Crucero: es el punto de intersección de los ejes de dos o más vías que se cruzan.

Boca-Calle: es la línea imaginaria que separa el crucero de la vía.

Cunetas: son las orillas de las aceras que señalan el límite entre éstas y las vías.

Capacidad: Es la tasa de volumen máximo que puede pasar por una intersección desde un acceso, bajo condiciones prevalecientes.

Semáforo: Los semáforos, también conocidos técnicamente como señales de control de tráfico, son dispositivos de señales que se sitúan en intersecciones viales y otros lugares para regular el tráfico, y por ende, el tránsito peatonal.

Nivel de servicio: Es una medida de la calidad de la circulación, que se traduce en el grado de satisfacción o contrariedad que experimenta quien usa la vía.

Condiciones prevalecientes: Son condiciones existentes que influyen directamente en la capacidad de las vías.

Derecho de Vía: área o superficie de terreno, propiedad del Estado, destinada al uso de una vía pública, con zonas adyacentes utilizadas para todas las instalaciones y obras complementarias. Esta área está limitada a ambos lados por los linderos de las propiedades colindantes.

Vehículo: es un medio de locomoción que permite el traslado de un lugar a otro de personas

o cosas.

Parque Vehicular: Es el conjunto de vehículos que están inscritos o circulan diariamente en una ciudad, población o región determinada.

Transporte: El transporte es una actividad del sector terciario, entendida como el desplazamiento de objetos, animales o personas de un lugar (punto de origen), a otro (punto de destino), en un vehículo (medio), que utiliza una determinada infraestructura.

Clasificación de vehículos:

Según la ley de transporte terrestre, tránsito y seguridad vial; se clasifican de la siguiente manera:

Livianos de pasajeros: Automóviles, Microbuses, Motocicletas, Tricimotos, Cuadrimotos.

Livianos de Carga: Pick-ups y páneces, Camiones hasta de tres toneladas de capacidad.

Pesados de pasajeros: Autobuses de todo tipo y clase.

Tipos de automoviles: Ambulancia, Camioneta, Casa rodante, Compacto, Convertible, Deportivo, Especialidades, Fúnebre, Limusina, Rustico, Sedan, van.

Automóviles pesados:Autobús, Cabezales, Cuadrimoto, Tricimoto, Microbús, Motocicletas, Pick up, Remolques, Camiones.

Conductor: persona que guía un vehículo automotor.

Congestión vehicular: Se refiere, tanto urbana como interurbanamente, a la condición de un flujo vehicular que se ve saturado debido al exceso de demanda de las vías, produciendo incrementos en los tiempos de viaje y atochamientos. Este fenómeno se produce comúnmente en las hora punta u horas pico, y resultan frustrantes para los automovilistas, ya que resultan en pérdidas de

tiempo y consumo excesivo de combustible.

Tráfico: Se define como Tráfico al movimiento constante de algún objeto o persona por un camino determinado.

Flujo de saturación: Vehículos que entrarían en una intersección semaforizada, por un carril o acceso, si el semáforo estuviera siempre en verde y los vehículos no parasen.

Giros protegidos: Son los movimientos vehiculares que se hacen sin conflicto alguno.

Giros permitidos: son los que se permiten cuando hay conflictos con movimientos vehiculares o peatonales, tales como las vueltas a la izquierda en oposición de movimientos de frente opuestos, o las vueltas a la derecha a través de un paso peatonal con derecho a cruzar.

1.1. Otros aspectos importantes en el estudio del tráfico.

En países desarrollados como España, Chile, Ecuador y Estados Unidos, ha surgido una rama de la ingeniería civil que se encarga de la aplicación de conocimientos y principios científicos a la planificación, diseño funcional, operación y manejo de facilidades para cualquier modo de transporte en orden, para proveer seguridad, rapidez, comodidad, oportunidad, económica y ambientalmente compatible con el movimiento de personas y bienes. A esta rama se le denomina Ingeniería de transporte.

Esta ingeniería y sus áreas necesitan auxiliarse, entre otras cosas de las herramientas matemáticas teóricas que sustentan la planificación y proyección del trabajo que realizan.

La ingeniería del tráfico es una sub-área de la Ingeniería de Transporte.

Ingeniería de Tráfico: Según W. R. Blunden, es la ciencia de medir el tráfico y viajes, el estudio de las leyes básicas relativas a la generación de flujo de tráfico, y la aplicación de este conocimiento a la práctica profesional de la planificación, diseño, y operación de sistemas de tráfico para lograr seguridad y eficiencia en el movimiento de personas y bienes.

El análisis del tráfico se puede dividir de la siguiente manera:

i) Estudio de las características del tráfico. Estos estudios son conducidos para obtener datos de transporte y tendencias de tráfico para regiones completas, y condiciones de tráfico para localidades específicas. Los estudios más comunes cubren las siguientes áreas:

- Factores humanos y vehiculares.
- Indicadores del flujo de tráfico (volumen), velocidad, tiempo de viaje y demora.
- Patrones de flujo de peatones.
- Patrones de viaje, factores generadores de viajes, origen y destino.
- Demanda y uso de estacionamientos y facilidades de cargado de camiones.
- Análisis de accidentes.

ii) Planificación de transporte incluye:

- La aplicación de los conocimientos científicos a la planificación.
- Planes para especificar las facilidades de desarrollo o mejoras.
- Estudios de impacto medioambiental.
- Investigación de los factores subyacentes del sistema de transporte y el comportamiento de los usuarios de ese sistema.

iii) Diseño de Geometrías. La aplicación del conocimiento al diseño.

- Diseño de características geométricas para nuevas autopistas, basado en el análisis de la ingeniería de tráfico.
- Rediseño de las carreteras e intersecciones existentes para incrementar sus capacidades.
- Diseño de estacionamientos y terminales.
- Establecimiento de estándares para la subdivisión de diseño de entrada de autos, controles de acceso.

iv) Operación y Control de Tráfico. El control de tráfico se dirige a través de las leyes del tránsito nacionales y ordenanzas locales.

v) Administración

a) Mantener el inventario de la infraestructura de transporte y control de dispositivos.

b) Planificación administrativa, presupuestos, necesidades del personal, estructura organizacional.

Después de conocer los cinco ámbitos de estudio de la ingeniería de tráfico, se puede apreciar que los temas importantes al proyecto están dentro de dos de estos, el estudio de las características del tráfico y el diseño de geometrías. Más puntualmente en:

- Factores humanos y vehiculares.
- Indicadores del flujo de tráfico (volumen), velocidad, tiempo de viaje y demora.
- Rediseño de las carreteras e intersecciones existentes para incrementar sus capacidades.

El objetivo básico del estudio del tráfico es deducir las relaciones existentes entre sus características y el trazado de la red por la que circulan. Para un correcto estudio de las características de la circulación, es preciso sintetizar todas las variables que ejercen algún tipo de influencia en ella, en una serie limitada de factores cuantificables y matemáticamente interpretables.

De todos ellos tres destacan por su interrelación, su facilidad de manejo y su sencilla determinación: la intensidad, composición y velocidad del tráfico.

1.2. Variables

A continuación presentamos una lista de algunas variables que aparecen en el abordaje del problema del tráfico vehicular, con el fin de ir descubriendo más elementos que intervienen en dicho proceso.

Densidad: se define como el número de vehículos que existen sobre una unidad de longitud de carretera.

Intensidad de flujo: Se denomina intensidad o flujo al número de vehículos que atraviesan una determinada sección de la vía en la unidad de tiempo. Para su medición se realizan aforos

en determinados puntos de la carretera, bien de forma manual o utilizando aparatos contadores. Existen una serie de indicadores basados en la intensidad que definen el comportamiento del tráfico y las características funcionales de la vía.

Intensidad hora punta (IHP): Número de vehículos que transitan por una sección de la vía durante la hora de mayor tráfico.

Intensidad simple: Intervalo de tiempo entre el paso de dos vehículos consecutivos (medidos en puntos homólogos).

Velocidad: Relación entre la distancia recorrida en un tramo y el tiempo invertido.

Velocidad local o instantánea: La que posee al atravesar determinada sección de la vía, en un instante determinado.

Velocidad de recorrido (V_r): Definida como el cociente entre la distancia total recorrida en un trayecto determinado y el tiempo transcurrido desde el instante en que el vehículo lo inicia hasta llegar a su destino, incluyendo posibles detenciones y retrasos debido al tráfico.

Velocidad media local (V_t): Velocidad asignada a una sección determinada, calculada hallando la media aritmética de las velocidades de los n vehículos que la atraviesan.

$$V_t = \frac{\sum V_i}{n}$$

Velocidad media en un tramo (V_T): Relación entre la longitud L de un tramo y el tiempo medio empleado por los n vehículos en atravesarlo.

$$V_T = L \cdot \frac{n}{\sum t_i}$$

Velocidad media de recorrido: Análoga a la anterior, solo que computando el tiempo total que tarda en realizar el desplazamiento, es decir, contando detenciones y retrasos. Podría aplicarse, por ejemplo, el tiempo que tarda un autobús de línea en cubrir su recorrido.

Factor de hora punta (FHP): Elemento empleado en vías urbanas y semiurbanas, en las que pueden producirse congestiones en cortos períodos de tiempo. Se define como la relación entre la intensidad hora punta (IHP) y la intensidad máxima producida dentro de la hora punta, en un período de tiempo determinado, generalmente 15 minutos.

$$FHP = \frac{IHP}{\frac{60}{N} \cdot I_n}$$

donde I_n es el intervalo de tiempo y N el número de vehículos.

Tiempo de recorrido: Tiempo invertido en recorrer un tramo de calle.

Espaciamiento simple: Distancia entre dos vehículos consecutivos.

Espaciamiento promedio: Promedio de todos los espaciamientos simples existentes.

Separación (s): Distancia existente entre las partes delanteras de dos vehículos que circulan consecutivamente.

$$s(\text{separación}) = d(\text{intervalo hueco}) + L(\text{longitud del vehículo})$$

Intervalo (h): Es un concepto íntimamente ligado al anterior. Indica el tiempo transcurrido entre el paso de dos vehículos sucesivos por una sección determinada.

1.3. Técnicas de recolección de datos del tráfico vehicular

El análisis eficiente de los problemas de tráfico vehicular que arrojan resultados confiables y realista, requieren de tecnologías apropiadas de levantamiento de datos de las zonas a estudiar; entre más realistas sean los datos que se tienen a disposición, el modelo matemático resultante de la zona será mas adecuado.

En las últimas décadas se han desarrollado herramientas tecnológicas para la recolección de información del tráfico vehicular que optimizan los resultados del análisis. Éstas herramientas tecnológicas se resumen en las llamadas: *Sistemas inteligentes de transporte ITS* por sus siglas en inglés. Se refiere a esfuerzos que aplican tecnologías de información, comunicación y sensores a vehículos e infraestructura de transporte con el fin de proporcionar información en tiempo real a los usuarios

de la carretera y operadores de sistemas de transporte para tomar mejores decisiones. Su objetivo es mejorar la seguridad del tránsito, aliviar la congestión del tráfico, reducir la contaminación del aire, aumentar la eficiencia energética y mejorar la seguridad nacional [2].



Figura 1.1: Un ejemplo de aplicación de vehículos conectados en una intersección [8]

1.3.1. Técnica de aforos vehiculares

AFOROS

Es una de las técnicas más rudimentaria de recolección de datos de tráfico vehicular, y consiste en el recuento manual del flujo de vehículos en una carretera, por parte de un grupo de individuos debidamente capacitados. Para la realización de un aforo se hace uso de las llamadas hojas de aforo, que es la herramienta creada o diseñada por el equipo investigadores y varía según los datos a recolectar. Entre mas preciso sea el aforo, serán mas realistas los datos obtenidos. La Figura 1.2 muestra la manera de recolectar datos mediante un aforo vehicular.

Definiciones importantes:

- Transito Anual (TA), es el número de vehículos que pasan durante un año.
- Transito Mensual (TM), es el número de vehículos que pasan durante un mes.

- Transito Semanal (TS), es el número de vehículos que pasan durante una semana.
- Tránsito Diario (TD), es el número total de vehículos que pasan durante un día.
- Tránsito Horario (TH), es el número de vehículos que pasan durante una hora.
- Volúmenes de Tránsito: Es el número de vehículos que pasa un punto determinado durante un periodo específico de tiempo.
- Densidad de Tránsito: Es el número de vehículos que ocupan una unidad de longitud de carretera en un instante dado. Por lo general se expresa en vehículos por kilómetro.
- Intensidad o Volumen Medio Diario (IMD): Es el volumen total que pasa por una sección transversal o por un segmento de una carretera, en ambos sentidos, durante un año, dividido entre el número de días en el año. Se puede obtener también para un solo sentido.



Figura 1.2: Aforo vehicular

Las características que son objeto de un estudio de aforo son las siguientes:

- Intensidades de circulación.

- Velocidades y tiempos de recorrido de los vehículos.

- Origen, destino y objeto de los viajes realizados.

- Accidentes de circulación.

En las estaciones de aforo, se realizan recuentos manuales para conocer la composición del tráfico, bastando para ello un período de varias horas en un día laborable.

Estudios sobre Volúmenes de Tránsito: Estos estudios se realizan para conocer los volúmenes de tránsito que circulan por una vía, por parte de ella, o por un sistema de ellas y constituyen la fuente primaria de información para distribuir y proyectar volúmenes de tránsito. Existen diferentes tipos de estudios según el lugar donde se realicen y el objeto de estudio, tales como: estudios en lugares aislados, estudios en sistemas de vías rurales, urbanas y estudios en cordones.

Estudios en lugares aislados: Se realizan para obtener información sobre volúmenes de tránsito en un lugar específico. Sus resultados se pueden usar para proyectar vías, hacer análisis sobre su capacidad, establecer las fases de semáforos y para muchos otros fines. Estos estudios se llevan a cabo en los lugares donde se necesite la información y su duración suele ser de 48 horas a una semana si se utilizan contadores automáticos y solamente durante las horas que interesen (como las de volúmenes máximos) cuando los recuentos se efectúan en forma manual, se acostumbra emplear recuentos manuales de 15 minutos.

Métodos para determinar la velocidad

a) Métodos para determinar la Velocidad Instantánea:

Medida del tiempo de recorrido en una distancia fija: Midiendo una distancia sobre la vía, se calcula con un cronómetro el tiempo que emplea el vehículo en recorrerla. La longitud de la línea base se determina por la visibilidad, características físicas de la vía y la velocidad general de los vehículos que se observan.

Cuando el tránsito es muy intenso, no es posible medir la velocidad de cada vehículo y hay que hacer una selección al azar; por ejemplo observando un vehículo cada 2 minutos, 3 minutos, o cada

15 a 20 segundos.

También existen dispositivos mecánicos que ponen en marcha y detienen automáticamente el cronómetro, empleando tubos sobre la calzada para captar las señales del paso del vehículo. Estos dispositivos eliminan los errores por el tiempo de reacción del observador.

Medidores de Velocidad: Existen dos clases, los que usan un motor de velocidad constante y un embrague eléctrico y los electrónicos que emplean un circuito de descarga calibrada. Ambos se activan cuando las ruedas delanteras del vehículo pisan el primer tubo para detenerse cuando cruzan el segundo detector, midiendo la velocidad con la que transcurre el vehículo, siendo necesario ponerlos en cero después de cada observación.

Radar: Se basa en el principio fundamental de una onda de radio reflejada por un objeto en movimiento que experimenta una variación en su frecuencia en función velocidad del objeto. Estos instrumentos son portátiles y cuando se apunta con ellos a un vehículo indican inmediatamente su velocidad en un cuadrante, con una precisión de unos 3 km/h. No tienen elementos que haya que colocar sobre la calzada y trabajan a una distancia de hasta 45 m; pero funcionan mejor a unos 10m de la trayectoria de los vehículos y a un ángulo de 15 grados de ella.

Otros métodos: Existen otros métodos para determinar la velocidad instantánea en un punto, que ofrecen mayor exactitud y número de datos, para realizar investigaciones técnicas, pero el equipo es muy costoso y la obtención de datos toma mucho tiempo. Entre ellos tenemos el procedimiento fotográfico y células fotoeléctricas con instrumentos registradores gráficos.

b) Métodos para determinar la velocidad media:

Estos métodos se emplean generalmente para medir las condiciones de fluidez de una ruta, en las horas de mayor tránsito (horas punta), determinando además el tiempo en que el vehículo no está en movimiento por causas ajenas a la voluntad del conductor (semáforos, paso de peatones, por esperar a otros vehículos detenidos, paso preferencial, etc) denominado demora o retardo.

Método de observaciones a cierta altura: Desde un edificio o en algún punto alto se miden los tiempos de recorrido de los vehículos en la corriente de tránsito sobre un trayecto cuya longitud se ha medido previamente. Con un cronómetro se toma el tiempo que tarda cada vehículo en recorrer la longitud total.

Flotando en el Tránsito: En este método el observador forma parte de la corriente de tránsito; ingresando con su vehículo en la ruta que previamente ha fijado con un punto inicial y uno final, procurando siempre mantener los movimientos normales, personalmente va midiendo su tiempo de recorrido.

Mediciones dentro de la corriente: En este método el observador también forma parte de la corriente de tránsito pero no se mide así mismo, sino que hace el recorrido varias veces y cada vez escoge el vehículo o los vehículos más cercanos a él y va observando sus tiempos.

Capítulo 2

Áreas de la matemática involucradas.

El análisis de los problemas de tráfico vehicular mediante el modelamiento matemático, implica el conocimiento de diversas áreas de la matemática que fundamentan la base teórica de nuestra investigación. A continuación describimos algunas de ellas.

2.1. Ecuaciones diferenciales

La mayoría de modelos matemáticos que describen el tráfico vehicular en una carretera, están representados por medio de ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales; éstas permiten simplificar el análisis de los fenómenos del tráfico vehicular.

Una ecuación diferencial es **lineal** cuando sus soluciones pueden obtenerse a partir de combinaciones lineales de otras soluciones. Si es lineal, la ecuación diferencial tiene sus derivadas con máxima potencia de 1 y no existen términos en donde haya productos entre la función desconocida y/o sus derivadas.[3] Tienen la forma

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

Cualquier función implícita o explícita que satisfaga la ecuación diferencial, se llama **SOLUCIÓN**. La solución de una ecuación diferencial de orden n que contiene n - constantes arbitrarias, se llama **Solución General**; la solución que se obtiene dando valores particulares a las constantes arbitrarias de una solución general se llama **Solución Particular**; la gráfica de las soluciones de una ecuación diferencial son llamadas **Curvas Integrales**.

Problema de valor inicial es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de la variable independiente. Tales condiciones se llaman **Condiciones Iniciales**.

Problema de valor de la frontera es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida especificadas en dos o más valores de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones de frontera o de contorno. Un sistema de ecuaciones diferenciales es un sistema en el que las ecuaciones son diferenciales.

2.2. Introducción a la teoría de grafos

Es frecuente que nos encontremos con situaciones en las que debemos tratar con magnitudes de flujo: fluidos que circulan por un sistema de tuberías, flujos de vehículos, etc; estas situaciones pueden modelizarse mediante un grafo que represente una red de transporte. Los problemas más frecuentes en estos casos consisten en:

- Determinar el flujo máximo que es capaz de circular en el sistema.
- Si conocemos el coste de flujo vehicular por cada uno de los vértices del grafo, puede interesarnos conocer cuánto flujo debe circular por cada arista, para así obtener el flujo a coste mínimo, para un determinado valor de flujo total.

Ambos problemas pueden resolverse por programación lineal.

El inicio de la teoría de grafos se presentó en un artículo de Leonhard Euler en el año 1736. Este trabajo analiza la manera de solucionar el problema de los siete puentes de *königsberg* (prusia oriental). Básicamente se trataba de encontrar la manera de recorrer toda la ciudad atravesando cada puente solo una vez. La imagen muestra un esquema de la ciudad de *königsberg* y sus puentes.

Para resolver este problema, Euler representó las cuatro zonas como cuatro puntos, y los puentes como aristas que unen los puntos, tal y como se muestra en la figura 2.2

En esta representación, intervienen cuatro puntos a, b, c, d ; a los que denominaremos vértices y siete lados que conectan dichos vértices, a los que llamaremos aristas.

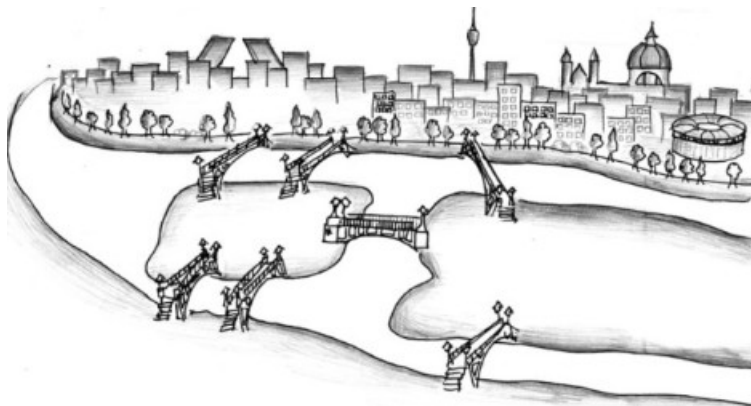
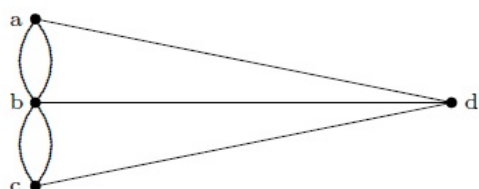
Figura 2.1: Ciudad de *königsberg*

Figura 2.2: Representación de Euler del problema

Definición 2.1. Un grafo G es un par $(V; E)$, donde V y E son conjuntos, junto con una aplicación

$$\gamma_G : E \rightarrow \{\{u, v\} \in V\}$$

Al conjunto V se le llama conjunto de vértices; al conjunto E conjunto de lados o aristas, y a la aplicación γ_G o simplemente γ aplicación de incidencia [4].

Para el caso de la representación de la Figura 2.2, los vértices son $V = \{a, b, c, d\}$ y los lados pueden definirse por $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. De manera que la función evaluada en el lado e_1 representa la arista formada por los vértices $\{a, b\}$. Es decir $\gamma_G(e_1) = \{a, b\}$. Si dos lados son tales que la función evaluada en ellos, representa a la misma arista, se les llama lados paralelos.

Un lado tal que $\gamma_G(e) = \{v\}$ se llama lazo.

Definición 2.2. Un grafo dirigido u orientado es un par $(V; E)$, donde V y E son conjuntos, junto con dos aplicaciones $s; t : E \rightarrow V$. Al conjunto V se le llama conjunto de vértices, al conjunto E conjunto de lados, y a las aplicaciones s y t aplicaciones dominio y condominio ("source" y "target").

Definición 2.3 Sea $G = (V, E)$ un grafo con aplicación de incidencia γ_G . Un subgrafo de G es un nuevo grafo $G' = (V', E')$ donde $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ y se verifica que $\gamma_{G'}(e) = \gamma_G(e)$ para cualquier $e \in E'$.

Si $G' = (V', E')$ es un subgrafo de un grafo $G = (V, E)$, se dice que es un subgrafo completo si dado $e \in E$ tal que $\gamma_G(e) \subseteq V'$ se verifica que $e \in E'$. Dicho de otra forma, si tiene todos los lados que tenía G y que unen vértices de V'

Un subgrafo completo está completamente determinado por el conjunto de vértices. Así, para determinar un subgrafo de un grafo G en ocasiones explicitaremos únicamente el conjunto de vértices de dicho subgrafo, sobreentendiendo que se trata del subgrafo completo con dicho conjunto de vértices.

Definición 2.4 Sea G un grafo. Un camino de longitud n es una sucesión de lados e_1, e_2, \dots, e_n , junto con una sucesión de vértices v_1, v_2, \dots, v_{n+1} tales que $\gamma_G(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$.

En tal caso se dice que el camino $e_1 e_2 \dots e_n$ es un camino del vértice v_1 al vértice v_{n+1} .

Se considera un camino de longitud cero de v a v a aquel cuya sucesión de vértices es v y cuya sucesión de lados es vacía.

Para representar un camino en un grafo, en ocasiones puede darse únicamente la sucesión de vértices, y en ocasiones podría darse la sucesión de lados.

Notar que si $e_1 e_2 \dots e_n$ es un camino de u a v , entonces $e_n e_{n-1} \dots e_1$ es un camino de v a u . Un camino en el que no aparecen lados repetidos se llama recorrido.

Un recorrido en el que no hay vértices repetidos (salvo eventualmente el primero y el último) se llama camino simple.

Un camino en el que coinciden el primer y el último vértice se llama camino cerrado.

Un recorrido que es a la vez camino cerrado se llama circuito. Un circuito que a su vez es camino simple es un ciclo.

Consideremos el siguiente ejemplo mostrado en la figura 2.3. La sucesión $ABDC$ es un camino

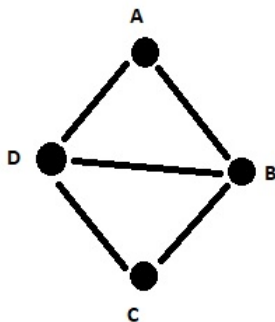


Figura 2.3: Grafo de los vértices A, B, C, D

de longitud 3, que une A con C , es un camino pues ningún lado se repite.

Proposición 2.1. Sea G un grafo. Supongamos que existe un camino de u a v . Entonces existe un camino simple de u a v .

Demostración: Supongamos que el camino es $u = v_1v_2\dots v_n = v$. Si el camino no es simple, debe haber dos vértices repetidos. Sean estos v_i y v_j , con $i < j$. En ta caso se tiene que $v_1\dots v_iv_{j+1}\dots v_n$ es un camino de u a v . Si este camino no fuera simple, repetiríamos el proceso, hasta llegar a un camino simple. Podemos repetir este procedimiento un número finito de veces por que tenemos un número finito de vértices.

Definición 2.5. Sea G un grafo. Se dice que G es conexo, si dados u y v dos vértices de G existe al menos un camino de u a v .

En general, si G es un grafo, podemos definir en el conjunto de vértices la relación:

$$uRv \text{ si existe un camino de } u \text{ a } v$$

Esta relación es de equivalencia, pues:

Es reflexiva ya que todo vértice está unido con él mismo por un camino de longitud cero.

Es simétrica pues si $e_1e_2\dots e_n$ es un camino de u a v entonces $e'_1e'_2\dots e'_m$ es un camino de v a u .

Es transitiva pues si $e_1e_2\dots e_n$ es un camino de u a v y $e'_1e'_2\dots e'_m$ es un camino de v a w , entonces

$e_1 e_2 \dots e_n e'_1 e'_2 \dots e'_m$ es un camino de u a w .

Se tiene entonces que un grafo es conexo si el conjunto cociente por la relación que acabamos de definir tiene un solo elemento. A partir de esta relación, podemos considerar, para cada clase de equivalencia, el subgrafo (completo) determinado por los vértices de dicha clase de equivalencia. Cada uno de estos grafos es lo que se denomina una componente conexa de G . Consideremos el siguiente ejemplo mostrado en la figura 2.4. El grafo tiene dos componentes conexas que son las

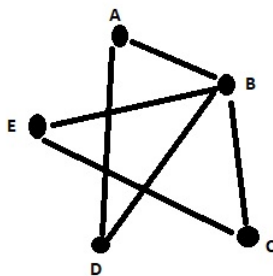


Figura 2.4:

sucesiones ABD y EBC

Matrices asociadas a grafos.

En esta sección vamos a ver como podemos representar los grafos finitos mediante matrices. A partir de estas matrices podremos obtener propiedades sobre los grafos.

Definición 2.6. Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Se define su matriz de adyacencia como la matriz $A \in M_n(\mathbb{N})$ cuyo coeficiente (i, j) es igual al número de lados e que unen v_i con v_j .

ASPECTOS IMPORTANTES.

1. La matriz de adyacencia de un grafo es una matriz simétrica, pues cada lado que une v_i con v_j une también v_j con v_i .
2. Si tomáramos otra ordenación de los vértices, la matriz de adyacencia es diferente. Por tanto, un grafo puede tener varias matrices de adyacencia. En general, si A y C son dos matrices de adyacencia de un mismo grafo, entonces existe una matriz de permutación P tal que $P^{-1}CP = A$ (una matriz de permutación es una matriz que tiene en cada fila y en cada columna un coeficiente

que vale uno el resto toman el valor cero". Es una matriz que se obtiene a partir de la matriz identidad realizando intercambio de filas y/o columnas).

3. La existencia de lados paralelos se traduce en la matriz de adyacencia en la existencia de coeficientes mayores que 1. De la misma forma, la existencia de lazos se traduce en que algún elemento de la diagonal principal de la matriz de adyacencia es distinto de cero.
4. Si tenemos un grafo dirigido, también podemos definir su matriz de adyacencia. En este caso, el coeficiente a_{ij} es el número de lados que verifican que $s(e) = v_i$ y $t(e) = v_j$. En este caso, la matriz no tiene porqué ser simétrica.
5. La matriz de adyacencia de un grafo determina a éste. Además, toda matriz cuadrada con coeficientes en \mathbb{N} es la matriz de adyacencia de un grafo (dirigido o no) finito. Podríamos entonces tomar como definición de grafo la de una matriz cuadrada con coeficientes en \mathbb{N} .

Proposición 2.2. Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y sea A su matriz de adyacencia. Entonces el coeficiente (i, j) de la matriz A^n es igual al número de caminos de longitud n que unen v_i con v_j .

Demostración: Haciendo uso de inducción; para $n = 1$ el resultado se sigue de la definición de matriz de adyacencia.

Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$. Debemos demostrar que se cumple también para n .

Sea entonces $B = A^{n-1}$ y $C = A^n$. Queremos probar que c_{ij} es el número de caminos de longitud n que unen v_i con v_j .

Por otra parte es claro que $c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$. Todos los caminos de longitud n entre v_i y v_j se obtienen añadiendo a un camino de longitud $n - 1$ entre v_i y v el vértice v_j ; y esto podremos hacerlo únicamente cuando tengamos un lado que incide en los vértices v y v_j . Por tanto, para contar los caminos de longitud n entre v_i y v_j necesitamos, para cada vértice $v_k : k = 1, 2, \dots, n$ contar los caminos de longitud $n - 1$ entre v_i y v_k , y por cada uno de estos, contar los lados (caminos de longitud 1) entre v_k y v_j . Luego, realizar la suma de los resultados obtenidos para cada k . Es decir, estamos diciendo que el número de caminos de longitud n entre v_i y v_j es: $b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj} = c_{ij}$ como queríamos demostrar. Este razonamiento es válido aun si el grafo G fuera dirigido.

Definición 2.7. Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y cuyo conjunto de lados es $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Se define la matriz de incidencia del grafo G como una matriz $n \times n$ que tiene en la posición (i, j) un 1 si $v_i \in f(e_j)$ y 0 en otro caso.

ASPECTOS IMPORTANTES.

1. Si tomamos otra ordenación de los vértices y/o lados, la matriz de incidencia puede ser diferente. En este caso, dos matrices de incidencia corresponden al mismo grafo si se puede pasar de una a otra mediante operaciones elementales por filas y/o columnas Tipo I (intercambio de filas y/o columnas).
2. El que un grafo tenga lados paralelos se traduce en que tenga dos columnas iguales en la matriz de incidencia, mientras que los lazos se traducen en filas con un único coeficiente 1.
3. Si el grafo es dirigido, se puede definir también la matriz de incidencia. En este caso, el coeficiente (i, j) puede también tomar el valor -1 (si el lado e_j parte del vértice v_i). En tal caso, el grafo no podría tener lazos.

2.3. Introducción a la teoría de probabilidad

Los flujos de llegada de vehículos a una intersección de carreteras, representan procesos estocásticos, pues estas cantidades son números aleatorios en un momento dado, es decir, definidos por el conjunto de valores que pueden asumir y las probabilidades de tomar estos valores. A continuación se describe la teoría básica de la teoría de probabilidades.

En nuestro diario vivir presenciamos una serie de fenómenos, que podemos clarificarlos en dos grandes grupos:

1. Deterministas: son aquellos fenómenos o experimentos en los que bajo las mismas condiciones, presentan siempre el mismo resultado.
2. Aleatorios: son aquellos fenómenos o experimentos en los que aún bajo las mismas condiciones, no se puede prever el resultado. Sólo se conocen los posibles resultados.

Los fenómenos deterministas se relacionan con el conocimiento de las causas que lo generan; y el control de los factores que determinan ese comportamiento; mientras que los fenómenos aleatorios obedecen a la casualidad o el azar, y de la imposibilidad de controlar estos factores debido al desconocimiento de las causas.

El objetivo de la teoría de probabilidades es proporcionar un modelo matemático adecuado, aplicable a la descripción e interpretación de los fenómenos aleatorios.

Algunos de los conceptos principales en dicha teoría son los siguientes:

Espacio Muestral: Sea γ un fenómeno aleatorio y Ω un conjunto tal que:

1. Todo elemento de Ω representa al menos un posible resultado de γ .
2. Todo resultado de γ tiene asociado uno y sólo un elemento de Ω .

Entonces Ω se llama espacio muestral.

Sea Ω un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y A un conjunto de subconjuntos de Ω , conformado por no más de 2^Ω subconjuntos llamados partes de Ω . A se llamará σ -Álgebra si:

- a. $\emptyset \in A$
- b. Si $\beta \in A \Rightarrow \beta^c \in A$
- c. $\{\beta_i \in A : i \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \beta_i \in A$

Evento

Es todo subconjunto de Ω , que a la vez pertenece a una σ -Álgebra. Sea $E \in \Omega$, $E \in A$ de donde a los elementos de una σ álgebra A se les denomina eventos o sucesos.

ASPECTOS IMPORTANTES:

- Ω : evento seguro.
- \emptyset : evento imposible, nunca ocurre.
- Si α y β son eventos de Ω y si $\alpha \cap \beta = \emptyset$, se dice que α y β son disjuntos.

- Sean n eventos definidos en Ω . Si las intersecciones de dos en dos, de tres en tres, y así sucesivamente de todos los sucesos dan como resultado el evento nulo, entonces los eventos se denominan mutuamente excluyentes.
- Cuando la unión de n eventos en Ω da como resultado Ω se denomina a tales sucesos con el nombre de colectivamente exhaustivos.
- Aquellos grupos de eventos colectivamente exhaustivos y a la vez mutuamente excluyentes se les considera una partición del espacio muestral.
- W Evento elemental: Cada posible resultado que pueda obtenerse en la realización de un experimento aleatorio, que no pueda descomponerse en otros más simples, se denomina un suceso elemental, resultado elemental o punto muestral.

Algebra de eventos

Sea C una colección de eventos A_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ y W el resultado de un experimento aleatorio. Entonces se cumplen las siguientes equivalencias:

- a) A_i ocurre $\Leftrightarrow W \in A_i$
- b) A_i no ocurre $\Leftrightarrow W \notin A_i$, ó $W \in A_i^c$
- c) Ocurre A_1 ó $A_2 \Leftrightarrow W \in (A_1 \cup A_2)$
- d) A_1 y $A_2 \Leftrightarrow W \in (A_1 \cap A_2)$
- e) Ocurre al menos (como mínimo) un $A_i \Leftrightarrow W \in \bigcup_{\forall i} A_i$
- f) Ocurren todos los sucesos $A_i \Leftrightarrow W \in \bigcap_{\forall i} A_i$
- g) Siempre que ocurra A_1 ocurre $A_2 \Leftrightarrow W \in A_1 \subset A_2$
- h) No ocurre al menos un suceso A_i si y sólo si ocurren todos los sucesos contrarios a los respectivos.
 $A_i \Leftrightarrow w \in (\bigcup_{\forall i} A_i)^c = \bigcap_{\forall i} A_i^c$
- i) Ocurre A_1 y no ocurre $A_2 \Leftrightarrow W \in (A_1 - A_2)$
- j) A lo más ocurre un suceso pero no ambos $\Leftrightarrow W \in (A_1 \cap A_2)^c$

Espacio medible: Sea Ω un espacio muestral, A una σ -álgebra. Se llama espacio medible al par (Ω, A) . Si el evento $\alpha \in A$, se dice que α es medible.

Medida de probabilidad

Sea (Ω, A) un espacio medible. Una medida de probabilidad, P , es una función valorada en los reales, cuyo dominio es A . [5]

$$\begin{aligned} P : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longrightarrow P(A) \end{aligned}$$

tal que se cumplen los siguientes axiomas:

- I. $\forall \alpha \in A, P(\alpha) > 0$.
- II. Sea $\{A_i \in A : i \in \mathbb{N}\}$ $A_i \in A$ mutuamente excluyentes; entonces: $P(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$.
- III. $P(\Omega) = 1$.

Sí $\alpha \in A$ se dice que $P(\alpha)$ es la medida de probabilidad de la ocurrencia de α . P también es conocida como FUNCIÓN DE PROBABILIDAD.

Espacio de Probabilidad

Sea (Ω, A) un espacio medible, y P una función de probabilidad definida sobre A . A la terna (Ω, A, P) se le denomina espacio de probabilidad.

Definición: Sea (Ω, A, P) y $A_1, A_2 \in A$. Los eventos A_1 y A_2 son independientes sí y sólo sí $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

Procesos estocásticos

La teoría de los procesos estocásticos se centra en el estudio y modelización de sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo, o del espacio, de acuerdo a unas leyes no deterministas, esto es, de carácter aleatorio.

La primera idea básica es identificar un proceso estocástico con una sucesión de variables aleatorias $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ donde el subíndice indica el instante del tiempo (o espacio) correspondiente.

Una variable aleatoria. $X(s)$ es una función que va desde un espacio muestral S a la recta real, de manera que a cada punto $s \in S$ del espacio muestral se le puede asociar un número de la recta real.

De este modo, la probabilidad de cada suceso de S se puede trasladar a la probabilidad de que un valor de X (variable aleatoria) caiga en un cierto intervalo o conjunto de números reales. Si a todo esto se le añade una dimensión temporal, se obtiene un proceso estocástico.

Proceso Estocástico Dado el espacio de probabilidad (Ω, α, P) de modo que para todo $t \in T \subset \mathbb{R}$ fijo.

$$\begin{aligned} X_t : (\Omega, \alpha, P) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\ w &\longrightarrow X_t(w) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Esto es, X_t es una variable aleatoria y $\forall w \in \Omega$, fijo $X_t(w)$ es una función del tiempo.

Ejemplos.

X_t : número de personas que esperan un autobús en un instante t donde $t \in [9, 10]$

X_t : precio de una acción de una empresa en un día t del mes ($t = 1, 2, 3, \dots, 30$).

Para que un proceso estocástico esté completamente definido hay que determinar completamente las variables aleatorias., es decir, determinar e identificar la distribución de probabilidad asociada a cada una de ellas.

Al conjunto $T \subset \mathbb{R}$ de subíndices se le denomina conjunto paramétrico y puede ser continuo o numerable. De este modo aparece una primera clasificación en procesos estocásticos de parámetro continuo o de parámetro discreto.

Se denomina conjunto de estados E , al conjunto de los posibles valores que pueden tomar las variables aleatorias $\{x_t\}$, $t \in \mathbb{R}$

Proceso estocástico de tiempo discreto En teoría de la probabilidad, un proceso estocástico de tiempo discreto es un proceso estocástico para el que se la variable temporal toma solo valores discretos (usualmente números naturales).

Proceso estocástico de tiempo continuo En teoría de la probabilidad, un proceso estocástico de tiempo continuo (o continuo en el espacio y el tiempo) es un proceso estocástico para el cual el índice temporal t asume un rango continuo (usualmente en los números reales).

En teoría de la probabilidad y estadística, la distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable la probabilidad de que dicho suceso ocurra. La distribución de probabilidad está definida sobre el conjunto de todos los sucesos y cada uno de los sucesos es el rango de valores de la variable aleatoria.

Función de densidad de probabilidad

Una función de densidad de probabilidad caracteriza el comportamiento probable de una población en tanto especifica la posibilidad relativa de que una variable aleatoria continua X tome un valor cercano a x .

Una variable aleatoria X tiene densidad f , siendo f una función no-negativa integrable de Lebesgue, si:

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$$

La distribución uniforme

Supongamos que una variable X puede tomar valores al azar en un rango (a, b) . En este caso, se dice que X tiene una distribución uniforme entre a y b y se escribe

$$X \sim U(a, b).$$

En este caso, la probabilidad de que X caiga en cualquier zona es la misma, y entonces la función de densidad es constante.

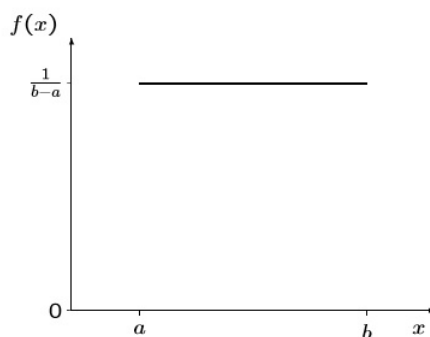


Figura 2.5: Gráfico de la función de distribución uniforme

Función de distribución.

Si $X \sim U(a, b)$. y si $a < x \leq b$

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_a^x \frac{1}{b-a} du \end{aligned}$$

Distribución uniforme Consideremos sucesos *éxitos* que ocurren aleatoriamente a lo largo del tiempo y sea la variable aleatoria $X =$ número de sucesos en el intervalo de tiempo $(0, t)$. La distribución de Poisson de parámetro λ surge en los llamados procesos de Poisson que se presenta en relación con el acontecimiento de éxitos de un tipo particular durante un intervalo continuo de tiempo. Las suposiciones de un proceso de Poisson, durante un intervalo de tiempo que empieza en $t = 0$ son:

- Existe un parámetro λ tal que para cualquier intervalo corto de tiempo Δt , la probabilidad de que ocurra exactamente un éxito es $\lambda \Delta t$
- La probabilidad de que se produzca más de un éxito en el intervalo es $0(\Delta t)$.
- El número de éxitos ocurrido en un intervalo Δt es independiente del número ocurrido antes de este intervalo de tiempo.

Una variable aleatoria X tiene una distribución de Poisson si para algún $\lambda \geq 0$ y $X =$ Numero de éxitos en un intervalo de tiempo si el número promedio es λ

$$\begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}; & \text{Si } k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0; & \text{En otro caso} \end{cases}$$

La Figura 2.5 muestra la gráfica de la distribución uniforme.

2.4. Sistemas dinámicos

Una forma particular de entender lo que sucede en una intersección señalizada, es analizándola como un proceso dinámico, en los que los flujos de entrada de vehículos se transforman en flujos de salida.

Un sistema dinámico es una terna (T, M, ϕ) , donde T es el tiempo, M es un conjunto de posibles estados del sistema y ϕ es una función que verifica:

$$\Phi : T \times M \rightarrow M \begin{cases} \Phi(0, x) = x \\ \Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) = \Phi(t_2 + t_1, x) \end{cases}$$

Esta terna produce una serie de aplicaciones de M en sí mismo. Dada una condición inicial $x_0 = x(0)$ produce una trayectoria determinista, $x(t)$, para cada t en T .

Habitualmente, o bien T es un intervalo de la recta real (y suele llamarse flujo), o bien los números naturales (y suele llamarse mapeado.)

Los sistemas dinámicos que aparece en los fenómenos físicos pueden ser modelados por sistemas de ecuaciones diferenciales. Si x es el vector de estado del sistema dinámico, su evolución temporal queda descrita por un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1)$$

donde $f : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. De acuerdo a estos modelos, x representa el vector de estados del sistema, el cual la dinámica del sistema hace variar con el tiempo, dentro de un espacio euclideo n -dimensional, que constituye el espacio de estados del sistema dinámico.

Un sistema autónomo tiene la forma:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2)$$

En ellos la función f no depende explícitamente de la variable independiente t . Si la función depende explícitamente de la variable independiente t , decimos que el sistema es no autónomo.

Una solución $\varphi(t; t_0, x_0)$ de (1) o de (2) definida para $t \in J$ se llama estable si para cada $\varepsilon(t_0) > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si todas las soluciones $\varphi(t; t_0, y)$ de (1) o de (2) con $|y - x_0| < \delta$ están definidas para $t \in J$ y además $|\varphi(t; t_0, y) - \varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ para $t \in J$ (ver la figura 2.6).

2.5. Métodos numéricos

Muchos de los modelos matemáticos que se utilizan para describir el comportamiento del tráfico vehicular, resultan ser expresiones matemáticas complicadas de resolver y por tanto se requiere de métodos numéricos que nos den aproximaciones de las soluciones de las mismas. Una de los métodos mas utilizadas para aproximar numéricamente las soluciones de ecuaciones diferenciales es el llamado método de las diferencias finitas que se describe a continuación.

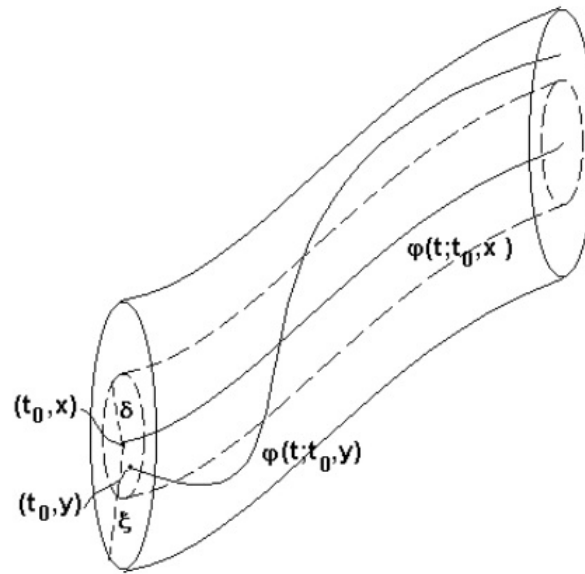


Figura 2.6: Estabilidad

2.5.1. Método de diferencias finitas

Este método para el problema de valor de frontera de orden dos, se desarrolla de la siguiente manera.[6]

$$y''(x) = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

requiere utilizar las aproximaciones del cociente de diferencias para aproximar tanto a y'' como a y' .

Primero, seleccionamos un entero $N > 0$ y dividimos el intervalo $[a, b]$ en $N + 1$ subintervalos iguales cuyos extremos son los puntos de la malla $x_i = a + ih$, para $i = 0, 1, \dots, N + 1$, donde $h = (b - a)/(N + 1)$. Al escoger h de este modo, se facilita la aplicación de un algoritmo matricial con el que se resuelve un sistema lineal que contenga una matriz de $N \times N$.

En los puntos de red del interior, x_i , para $i = 1, 2, \dots, N$, la ecuación diferencial a aproximar es

$$y''(x_i) = p(x_i)y' + q(x_i)y + r(x_i) \quad (1)$$

Al desarrollar y en el tercer polinomio de Taylor alrededor de x_i evaluada en x_{i+1} y x_{i-1} , tenemos, suponiendo que $y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y''''(\xi_i^+)$$

para algún ξ^+ en $[x_i, x_{i+1}]$, y

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y''''(\xi_i^-)$$

para algún ξ^- en $[x_{i-1}, x_i]$, si se suman estas ecuaciones, tenemos

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2y''(x_i) + \frac{h^4}{24}[y^4(\xi_i^+) + y^4(\xi_i^-)].$$

y al despejar $y''(x_i)$ se obtiene

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) - 2y(x_i)}{h^2} - \frac{h^4}{24}[y^4(\xi_i^+) + y^4(\xi_i^-)].$$

Podemos aplicar el teorema del valor medio para simplificar aún mas esta expresión y transformarla en

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) - 2y(x_i)}{h^2} - \frac{h^4}{12}[y^4(\xi_i)].$$

para algún ξ en $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. A esto se le llama fórmula de las diferencias centradas.

De manera semejante se obtiene una fórmula de este tipo para $y'(x_i)$ que da por resultado

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i)$$

Para alguna η_i en (x_{i-1}, x_{i+1})

Ya tenemos el valor aproximado de la primera y segunda derivada. Si lo sustituimos en la ecuación (1) obtendremos una expresión para la ecuación diferencial. Si hacemos $y_1 = \alpha$ y $y_2 = \beta$ y hacemos variar $i = 2, 3, 4, 5$ obtendremos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. Al resolverlo tendríamos la primera aproximación numérica.

2.6. Análisis vectorial

Al realizar el análisis matemático de los sistemas de control del tráfico en una carretera señalizada con semáforos, nos encontramos con que dichas señales se representan mediante funciones vectoriales de tiempo, así como también los conjuntos de llegada de vehículos a la intersección pueden representarse como funciones vectoriales de tiempo. A continuación presentamos las generalidades importantes de las funciones vectoriales.

En matemática, en el área de cálculo vectorial, un **vector** es un segmento de recta orientado,

que depende de un sistema de coordenadas, en el cual se puede llevar un importante número de operaciones matemáticas, como suma, resta, descomposición, ángulo entre dos vectores, etc.

Funciones vectoriales

Definición: Una función vectorial de una variable real en el espacio es una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores del espacio, es decir, es una función del tipo:

$$r : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow V_3$$

$$t \rightarrow r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

donde f, g, h son funciones reales de variable real t , llamadas funciones componentes de r . Nota: Si la función vectorial r describe el movimiento de una partícula, el vector $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ señala su posición en el instante t , en estos casos representa la variable tiempo.

A continuación se definen algunos conceptos importantes del análisis vectorial.

Trayectoria en \mathbb{R}^n es una función $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si σ es diferenciable, decimos que σ es una trayectoria diferenciable.[7]

Si σ es una trayectoria en \mathbb{R}^3 se puede describir

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Vector velocidad: Sea $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una trayectoria de clase C^1 . El vector velocidad en $\sigma(t)$ está dado por:

$$v(t) = \sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

Rapidez

La rapidez de la partícula está dada por

$$S(t) = \|\sigma'(t)\|, \text{ la longitud del vector } \sigma'(t)$$

Dada una partícula moviéndose sobre una trayectoria $\sigma(t)$, es natural definir la tasa de cambio del vector velocidad como aceleración. Así,

$$a(t) = \sigma''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)).$$

Si una partícula de masa m se mueve en \mathbb{R}^3 , la fuerza F que actúa sobre ella en el punto $\sigma(t)$, se relaciona con la aceleración por medio de la segunda ley de Newton:

$$F(\sigma(t)) = ma(t)$$

Capítulo 3

Descripción matemática del proceso del tráfico en una intersección señalizada.

Si deseamos realizar un análisis teórico de flujos de automóviles, en una intersección de carreteras, muchas veces resulta mas sencillo realizar representaciones de éstos mediante grafos; y asignar valores a cada uno de los flujos de cada corriente de tráfico. Sin embargo, antes de adentrarse en ello, es necesario realizar una descripción matemática general del proceso del paso de vehículos a través de una intersección señalizada, que nos brinde la representación de cada elemento que participa en el proceso como una estructura matemática. El presente capitulo muestra dicha descripción, tomando este proceso, como un sistema dinámico, en el que los flujos de entrada de vehículos a la intersección, se transforman en flujos de vehículos saliendo de la misma; en transformaciones de colas de espera para entrar a la intersección, en colas de salida.

Tomando dicho fenómeno como un proceso dinámico, podemos asociar a él los conjuntos de entrada, de estados y de salida que caracterizan a un sistema dinámico, de la siguiente manera:

- Un espacio de entrada X : Conjunto de todos los flujos que entran a la intersección
- Un espacio de salida Y : Conjunto de todos los flujos que salen de la intersección
- Un espacio de estado W : Conjunto de todos los estados intermedios del flujo de vehículos

La propiedad fundamental de un sistema dinámico es que dado cualquier tiempo inicial $t_0 \in T$; cualquier estado inicial $w_0 \in W$, y cualquier entrada $x(\cdot) \in X$, ambos $w(t)$ (el estado resultante

en un momento posterior t) y $y(t)$ (la salida resultante en algún tiempo posterior t) se especifican de forma única. Por lo tanto cada estado $w(t)$ de los vehículos y cada salida $y(t)$ dependen solo de $w_0 = w(t_0)$ y del valor de la entrada $x(\cdot)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Significa que para describir completamente este proceso, definimos estas funciones; y con ello será posible determinar $w(t)$ e $y(t)$ [8].

3.1. Conjunto de llegada X

El conjunto X es un conjunto compuesto por funciones vectoriales de tiempo, es decir, funciones que cambian en el tiempo y que están compuestas por tantas componentes como flujos de automóviles que se aproximan a la intersección existan en la corriente de tráfico que representan. Una corriente de tráfico es una carretera que tiene varios carriles y van en la misma dirección.

Las funciones vectoriales en este conjunto, están definidas en el dominio $T \subseteq \mathbb{R}$ donde $T = (-\infty, \infty)$ o $T = [0, \infty)$ para el caso de funciones de tiempo continuo y $T = \{n\Delta t : n \in \mathbb{N}\}$ en el caso discreto.

Debe notarse que cada elemento del conjunto X, comprende entradas no controladas en el sistema, entradas de tráfico controladas por semáforos por ejemplo, y otro tipo de entradas como las peatonales que influyen en el proceso.

De manera que la entrada puede ser descrita por un conjunto de pares ordenados, de la forma.

$$X = u' \times \Omega$$

en la que cada elemento de ese par es una función vectorial; en esta representación, el conjunto u' es el conjunto de controles de tráfico, es decir vectores que indican cual es la señal en cada carril de la carretera, matemáticamente tiene la forma:

$$u'(\cdot) = (u_1(\cdot)', u_2(\cdot)', u_3(\cdot)', \dots, u_p', \dots, u_P')$$

Podríamos representar este vector de la siguiente manera: $u'(\cdot) = \{u'(t) : t \in T\}$, y se le llama comúnmente control, además este vector es una función de tiempo, periódica, que describe el proceso de cambios de señal de tráfico (verde, anaranjado, rojo). La repetición de este proceso, se denomina: ciclo de control, o más a menudo ciclo, y su duración c se llama la duración del ciclo o tiempo del ciclo.

Las componentes de este vector que se representan por $u'(\cdot)$ son funciones periódicas de tiempo, pues para cada cierto tiempo constante las señales de tráfico vuelven a cambiar; entonces se tiene que:

$$u'_p(t) = u'_p(t + kc); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, p = 1, 2, 3, \dots, P$$

Cada componente del control puede tomar 0 ó 1 de valor, donde cero corresponde a señal rojo y 1 a señal verde. Se omite el valor del control cuando la señal esta en anaranjado para simplificar los resultados y se pasan estos valores a la señal de verde, puesto que los automóviles siguen atravesando la intersección o la señal, estando el semáforo en anaranjado. Cuando determinada componente del control toma el valor 1; entonces el flujo que es representado por esa componente tiene derecho de paso y se desplaza a lo largo del sistema. Recordemos que:

$$u'_p(\cdot) = u'_p(t) : t \in T, p = 1, 2, 3, \dots, P$$

Donde

$$u'_p(t) \in \beta, t \in T \text{ y } \beta \in \{0, 1\}$$

Como se había mencionado anteriormente, el conjunto X , esta compuesto por el conjunto de vectores que representan secuencias de llegada de tráfico en un instante t , además, las corrientes de tráfico se definen en general, por su volumen, velocidad, densidad, intervalo de avance o espaciado, composición, porcentaje de volumen directo o girado a la izquierda y giro a la derecha, y las rutas que utilizan para atravesar la intersección. La característica de flujo de tráfico que más se utiliza para realizar un análisis de flujo optimo es el volumen de flujo de tráfico, es decir, el número de vehículos que pasan un punto dado en una unidad de tiempo; en este caso, es la cantidad de vehículos que llegan en una aproximación de intersección durante una unidad de tiempo.

Existen modelos de flujo de llegada, en los que se supone que los flujos son deterministas, pero estos modelos no son lo suficientemente realistas, excepto en casos muy específicos. Las trayectorias atravesadas por diferentes flujos de tráfico a través de la intersección deben conocerse para determinar si un par de flujos de tráfico puede ganar simultáneamente el derecho de paso, es decir, si las transmisiones son compatibles. En este análisis se hace de vital importancia el uso de la teoría de grafos, para representar la compatibilidad de flujos. Dos flujos son compatibles si pueden tener derecho de paso simultáneo sin ningún conflicto.

A la otra componente del espacio X , el conjunto Ω le corresponde un conjunto α ; de vectores de volumen de flujo $\alpha(\cdot) = (\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot), \dots, \alpha_i(\cdot), \dots, \alpha_I(\cdot))$ cuyos elementos son volúmenes de flujos de tráfico $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ de los diferentes carriles, en un camino principal o corriente de tráfico; y de otros flujos como por ejemplo los flujos peatonales o los flujos de personas en bicicleta. El conjunto de índices

$$i = \{1, 2, 3, \dots, I', \dots, I\}$$

es tal que a los flujos de vehículos se les asignan índices de 1 a I' , y flujos peatonales y otros flujos de $I' + 1$ a I . Por lo tanto, el conjunto de índices correspondientes a los flujos de vehículos es:

$$i = \{1, 2, 3, \dots, I'\}$$

Si deseamos realizar un análisis sólo de flujos vehiculares en la intersección, nos limitaríamos a tomar esos índices.

Pero aquí surge una pregunta interesante: ¿Cómo calculamos la cantidad de vehículos que entran al sistema? Se han utilizado varios modelos para describir los flujos de llegada, el más simple es el modelo de llegadas uniformes; en el que se usa la distribución uniforme de probabilidad para el número de vehículos que llegan a la zona; este modelo es una aproximación bastante buena del proceso real, que es estocástico por naturaleza. Los parámetros de flujo de llegada, como el volumen, la velocidad, la densidad, el espaciado, representan procesos estocásticos, pues estas cantidades son números aleatorios en un momento dado, es decir, definidos por el conjunto de valores que pueden asumir y las probabilidades de tomar estos valores. Las características de estos parámetros, como la expectativa matemática, dispersión, etc no son constantes, cambian durante un día. Sin embargo, se supone que estos procesos son estacionarios en intervalos de tiempo limitados, por ejemplo, los picos de la mañana o de la tarde o entre los picos. Por lo tanto, en un debate posterior, al establecer problemas de control y desarrollar métodos para su solución, se supondrá que consideramos solo los intervalos en los que estos procesos son estacionario.

Los vehículos que se aproximan a una intersección se preparan para realizar una determinada maniobra, es decir, para conducir directamente, girar a la izquierda o girar a la derecha en la intersección. Los vehículos que realizan la misma maniobra y forman la misma cola en una aproximación, en uno o varios carriles, representan un componente de flujo que puede considerarse por

separado de otros componentes de flujo, que realizan otras maniobras. Tal componente de flujo de llegada se denomina flujo de tráfico.

Las corrientes de tráfico en una intersección pueden representar flujos de vehículos de pasajeros, flujos peatonales, flujos de vehículos de transporte público, etc. Las corrientes de tráfico σ_i son componentes del vector: $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_I)$.

La cola formada por un flujo de tráfico vehicular, durante la indicación de señal roja, ocupa uno o más carriles. La señalización horizontal es la misma en todos los carriles usados por una corriente de tráfico. Los vehículos que se unen a la cola pueden elegir cualquier carril en el acercamiento, esperando dejar la cola en el mismo orden que cuando se unen.

Un acercamiento T_i es una parte de la calle, que comprende uno o más carriles, a lo largo de los cuales los vehículos llegan a la intersección y sobre los cuales se forma la cola de una corriente de tránsito en particular.

Anteriormente habíamos mencionado que en este trabajo, las corrientes de tráfico se definirían por el volumen de tráfico; el volumen de la corriente de tráfico es igual al número de vehículos que pasan un punto determinado en una unidad de tiempo. La unidad de volumen de tráfico es (pcu.) Dado que las transmisiones de tráfico están compuestas por varios vehículos, el volumen se expresa como el número promedio de carros pasajeros por unidad de tiempo (pcu /s). Para cada tipo de vehículo, se puede determinar un número equivalente de carros pasajeros. Este número se determina sobre la base del hecho de que varios vehículos necesitan un tiempo diferente para atravesar la intersección. Los vehículos más pesados necesitan más tiempo que los ligeros. Los vehículos del mismo tipo necesitan más tiempo al girar a la izquierda o a la derecha que cuando van en línea recta. El número equivalente es igual al número de autos de pasajeros que pasarían por una intersección en el mismo tiempo que el tipo de vehículo dado. La Tabla 3.1 presenta un ejemplo de unidades de auto de pasajeros equivalentes para algunos vehículos cuando van en línea recta o giran.

3.2. Flujos de llegada

Se han usado varios modelos para describir flujos de tráfico, como ya se mencionó. El modelo más simple es el modelo de flujo uniforme. Una corriente de tráfico es uniforme (con llegadas uniformes) si su volumen de aproximación es constante, $q \frac{pcu}{s}$. El intervalo de espaciado también es constante,

Tipo de Vehículo	Línea recta (pcu/s)	Girando (pcu/s)
Carros livianos	1	1
Bus	1.7	2
Truck pesado	1.7	2

Figura 3.1:

igual a $\frac{1}{q} \frac{s}{pcu}$.

Este modelo es una aproximación del flujo real. Todos los demás modelos utilizados para el modelado de flujo de llegada, se basan en la teoría de los sistemas estocásticos. Las distribución de probabilidad seleccionada, asigna la probabilidad de que lleguen un número de vehículos determinado en un instante dado τ_i , en el carril σ_i ; si N es el número de vehículos que en ese instante τ_i tiene la mayor probabilidad; entonces el volumen de flujo q_i de ese carril, será: $q_i = \frac{N}{\tau}$. Con mayor frecuencia, se supone que los vehículos pertenecientes a las corrientes de tráfico llegan de acuerdo con el proceso de Poisson. El proceso real es más complejo, por lo que se han utilizado otros modelos en los que se eliminaron algunas limitaciones inherentes al proceso de Poisson.

Varios autores señalaron que el proceso estocástico de Poisson podría usarse para modelar llegadas de vehículos en una intersección. Con el flujo de Poisson, la probabilidad de llegada de m_i vehículos de la corriente de tráfico σ_i a la intersección, durante el intervalo de tiempo τ se expresa de la siguiente manera:

$$p_{m_i}(\tau) = \frac{(q_i\tau)^{m_i}}{m_i!} e^{-q_i\tau}$$

Esto es la probabilidad de la llegada de m_i vehículos en el intervalo de tiempo τ ; donde q_i es constante

La esperanza matemática del número de vehículos m_i que llegarán en el intervalo τ es :

$$\begin{aligned} Mm_i &= \bar{m}_i = \sum_{m_i=0}^{\infty} m_i p_{m_i}(\tau) = \sum_{m_i=0}^{\infty} m_i \frac{(q_i\tau)^{m_i}}{m_i!} e^{-q_i\tau} \\ &= (q_i\tau) e^{-q_i\tau} \sum_{m_i=0}^{\infty} m_i \frac{(q_i\tau)^{m_i-1}}{m_i!} = q_i\tau \dots\dots\dots(2.2) \end{aligned}$$

El volumen promedio (intensidad de flujo, o tasa de flujo) del flujo de tráfico σ_i es por lo tanto igual a:

$$\frac{Mm_i}{\tau} = \frac{\bar{m}_i}{\tau} = \frac{q_i\tau}{\tau} = q_i \text{ (pcu/s)}$$

El intervalo de separación, Θ_i , entre dos vehículos consecutivos que pertenecen al flujo σ_i es una variable aleatoria. Si se considera un segmento τ' , cuyo comienzo coincide con el comienzo del intervalo Θ_i , la probabilidad de que en τ' llegue al menos un vehículo es:

$$F_i(\tau') = p_i [\Theta_i < \tau'] = 1 - p_0 \dots (2.4)$$

donde p_0 es la probabilidad de que $m_i = 0$, es decir, que durante τ' no llegue ningún vehículo de transmisión σ_i . Esta probabilidad se obtiene estableciendo $m_i = 0$, en la fórmula (2.1). Entonces nosotros tenemos:

$$p_i^0(\tau') = \frac{(q_i\tau')^0}{0!} e^{-q_i\tau'} = e^{-q_i\tau'}$$

y

$$p_1 [\Theta_i < \tau'] = 1 - e^{-q_i\tau'} \dots (2.5)$$

Esta es, de hecho, la función de distribución de probabilidad de la cantidad aleatoria Θ_i . La densidad de distribución de probabilidad $h_i(\tau')$ de Θ_i se obtiene como la derivada de la función de distribución sobre τ' , es decir:

$$h_i(\tau') = q_i e^{-q_i\tau'}, (\tau' > 0) \dots (2.6)$$

La expectativa matemática del intervalo de espaciado es:

$$M\Theta_i = \bar{\Theta}_i = \int_0^\infty \tau' q_i e^{-q_i\tau'} d\tau' = q_i \int_0^\infty \tau' e^{-q_i\tau'} d\tau' = \frac{1}{q_i} \dots (2.7)$$

Por lo tanto, si la distribución de probabilidad del número de vehículos que llegan durante el segmento de tiempo τ' a un enfoque es la distribución de Poisson, entonces la distribución del intervalo de separación es exponencial negativa.

La probabilidad de que durante un corto intervalo δt llegue un vehículo, $p_i^1(\delta t)$, se da aproximadamente por:

$$p_i^1(\delta t) \approx 1 - p_i^0(\delta t)$$

donde p_i^0 es la probabilidad de que en el intervalo δt no llegue ningún vehículo. Esta probabilidad se determina como:

$$p_i^0(\delta t) \approx \frac{(q_i\delta t)^0}{0!} e^{-q_i\delta t} = e^{-q_i\delta t} \dots (2.8)$$

Por lo tanto

$$p_i^1(\delta t) \approx 1 - e^{-q_i \delta t}$$

El modelo de Poisson es bueno para describir el proceso de llegada real en un enfoque de intersección en el caso en que la relación entre el volumen y la capacidad de aproximación no es alta.

Para flujos de tráfico con volúmenes más grandes, cuando las interacciones entre vehículos no se pueden descuidar, se usan otros modelos, que dan mejores resultados que el simple proceso de Poisson. Algunos de ellos representan ciertas generalizaciones del proceso simple de Poisson.

La generalización del proceso simple de Poisson, es el Proceso de Poisson compuesto. De acuerdo con este proceso, los vehículos de un flujo de tráfico llegan en un acercamiento en grupos. Las llegadas grupales son llegadas de Poisson con intensidad λ , y el número de vehículos en un grupo, z , es una variable aleatoria entera con la función semilla $\phi(z)$. Si $N(T)$ es el número de llegadas en el intervalo de duración T , entonces:

$$M [Z^{N(T)}] = e^{-\lambda T(1-\Phi(z))}$$

El volumen promedio es:

$$q = \lambda \Phi'(1)$$

La esperanza matemática del numero de vehículos que llega es:

$$M [N(t)] = \lambda T$$

Se han utilizado muchos otros modelos, para describir el proceso de llegada de vehículos en un acercamiento. Todos ellos fueron desarrollados para proporcionar un mejor modelo de proceso real que el modelo de Poisson. Sin embargo, la mayoría de ellos son mucho más complejos, y el modelo de Poisson todavía se usa para la mayoría de los propósitos prácticos.

Para cada flujo de tráfico σ_i en una intersección es necesario tener la siguiente información:

- a) En segmento de carretera T_i en el que se acumulan los vehículos perteneciente a la corriente σ_i , con una definición de carriles asignados a la corriente y señales de tráfico que regulan la dirección de movimiento a través de la intersección.
- b) El modelo matemático del proceso aleatorio, que describe las llegadas del vehículo. La característica más importante del modelo es el volumen, expresado en pcu por unidad de tiempo. El proceso de Poisson se usa con mayor frecuencia.

- c) El volumen de llegada promedio de la corriente de tráfico, y si es un flujo multicomponente, luego también los volúmenes promedio de flujos parciales, expresado como porcentajes del volumen de llegada.
- d) El tipo de flujo de tráfico. Las corrientes de tráfico representan diferentes flujos: vehículos, peatones, tranvías, etc.
- e) La trayectoria del flujo de tráfico a través de la intersección. Si la transmisión comprende flujos parciales de tráfico, sus trayectorias deben ser conocidas además.

Las transmisiones de tráfico en una intersección, pueden representarse como componentes de un vector (el vector de llegada fluye o entrada no controlada):

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_I)$$

La entrada no controlada, σ , se transforma, por control, en la salida, es decir, la salida fluye en el intervalo $[t_0, t]$. El vector σ es un elemento del conjunto $\Sigma[t_0, t]$ cuyos elementos son todas las entradas no controladas en el intervalo $[t_0, t]$, e decir, $\sigma \in \Sigma[t_0, t]$

3.3. Señales del tráfico

Introducir un sistema de control de tráfico en una intersección consiste de la instalación de señales que controlarán las corrientes de tráfico por diferentes indicaciones de luz. La intención básica de la introducción de señales de tráfico es, por supuesto, la prevención del movimiento simultáneo de flujos de tráfico incompatibles. El control del tráfico en una intersección consiste en dar y cancelar el derecho de paso a determinadas corrientes de tráfico. Dar / cancelar el derecho de paso se realiza mediante diferentes indicaciones de señal. El significado de las indicaciones es asignado por una convención. Una indicación verde para vehículos significa permitir el paso, mientras que el rojo significa paso prohibido. Una indicación de color ámbar, que aparece después de una indicación verde, así como una luz roja ámbar después de una indicación de color rojo, informa a los conductores que se cambiará el derecho de vía. La duración del ámbar y los intervalos rojo-ámbar en algunos países están determinados por las normas de tráfico, y con mayor frecuencia se especifica como 3 segundos para ámbar y 2 segundos para la indicación de rojo ámbar. Las señales que

controlan las corrientes peatonales generalmente solo tienen dos indicaciones: rojo ("detener") y verde ("caminar")

El control de semáforos, es decir, la formación e implantación de secuencias de señal especificadas, se realiza mediante un dispositivo electrónico, un controlador de tráfico. Un controlador cambia las indicaciones de señal usando secuencia de pulsos. Los cambios de las indicaciones de señal se describen mediante una variable matemática, la llamada variable de control. Las variables de control se pueden asignar a cada flujo de tráfico. Sin embargo, el hecho de que las transmisiones de tráfico compatibles puedan ganar / perder simultáneamente el derecho de paso hace posible que un subconjunto de secuencias de tráfico, que comprende varias transmisiones compatibles, pueda ser controlado por una sola variable de control.

Por lo tanto, uno de los primeros problemas a resolver cuando se introduce el control de semáforos en una intersección es establecer la correspondencia entre secuencias de tráfico y secuencias de señales de tráfico, es decir, las variables de control que controlan estas secuencias de tráfico. La asignación más simple de variables de control a flujos de tráfico es asignar una variable de control a cada flujo de tráfico. Sin embargo, existen algunas razones prácticas que hacen que esta tarea no sea generalmente aplicable.

En la sección anterior se hizo una descripción matemática de los controles de tráfico y su representación en los conjuntos de llegada.

Cada grupo de corrientes de tráfico que tienen derecho de paso simultáneamente, puede ser regido por el mismo control de tráfico a este grupo se le llama: grupo de señales o clics. La siguiente representación del grupo de señales de tres corrientes de tráfico $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_9\}$ nos indica que las corrientes de tráfico 1, 2 y 9 tienen derecho de paso simultáneamente. Existen grupos de señales de 1, 2, 3, ... elementos según sea la cantidad de corrientes de tráfico que son compatibles.

3.4. Estados del sistema

W es el conjunto de estados del sistema. El estado en el tiempo t está descrito por el vector:

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_i(t), \dots, w_I(t))$$

cuyos componentes representan longitudes de cola formadas por flujos de tráfico de llegada. Si en un momento dado t_1 , en el carril 1 no hay ninguna cola formada por vehículos de llegada, entonces el

vector w tendrá el valor de la función temporal cero, es decir $w(t_1) = (0, w_2(t_1), \dots, w_i(t_1), \dots, w_I(t_1))$

El estado se define como la cantidad mínima de información sobre el historial de procesos que es necesaria para determinar el producto y el estado futuro. Cada estado diferente al estado inicial fue determinado por la información del estado anterior, la entrada en ese instante y el tiempo t , mediante la función de transición que se define mas adelante. Un componente del estado del proceso de tráfico dinámico en una intersección es la longitud de la cola del vehículo en un acercamiento a la intersección.

La figura 3.2 muestra el conjunto de corrientes de tráfico que entran σ_i y salen y_i de el cruce de calles.

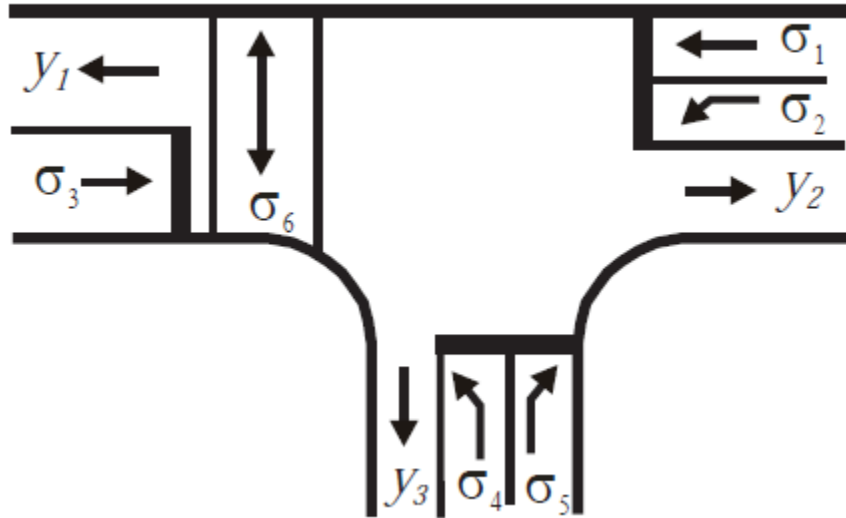


Figura 3.2:

En los carriles $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_5$, en algún instante t_i , el estado sería $w_1(t_i), w_2(t_i), \dots, w_5(t_i)$, y cada uno de estos w_i representan longitudes de colas de vehículos en ese carril. Además, este estado pudo determinarse por el valor de la función vectorial de entrada en ese instante $\dot{u}(t_i) \times \Omega(t_i)$ y la transformación del estado $w_1(t_{i-1}), w_2(t_{i-1}), \dots, w_5(t_{i-1})$ mediante la función de transición.

3.5. Flujos de salida

El conjunto de salidas, Y , es el conjunto de vectores de flujos de salida.

$$y(\cdot) = (y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_h(\cdot), \dots, y_H(\cdot))$$

Al igual que el conjunto X, este conjunto Y, es un conjunto de funciones vectoriales de tiempo y se define en el mismo intervalo. Los flujos de salida se caracterizan, al igual que los flujos de entrada, por volumen, velocidad, etc., y por la superficie utilizada para salir de la intersección. Para cada conjunto de resultados Y, le corresponde un conjunto Q^e conjunto de funciones vectoriales $q^e(\cdot) = (q_1^e(\cdot), q_2^e(\cdot), \dots, q_h^e(\cdot), \dots, q_H^e(\cdot))$, cuyos elementos son volúmenes de elementos de salida $y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots$. El vector $q^e(\cdot)$ representa la función definida por la siguiente expresión:

$$\{q^e(\cdot) = q^e(t) : t \in T\}$$

Donde

$$\{q_h^e(\cdot) = q_h^e(t) : t \in T\}, h=1,2,\dots,H$$

Estos volúmenes representan los volúmenes de flujos de tráfico que se transforman por señales de tráfico o flujos que comprenden varias secuencias de tráfico transformadas. Cada volumen representa además el numero de vehículos por unidad de tiempo que salen de la intersección por cada carril.

La función de transformación de estado (transición) ρ ahora se puede describir con la siguiente expresión:

$$\rho^1 : W_{t_0} \times (Q_{[t_0,t]} \times U_{[t_0,t]})x \mapsto W_t \dots\dots (3.1)$$

En esta expresión

$$u_{[t_0,t]} \in U_{[t_0,t]}$$

Representa la restricción de la función $u'(\cdot)$ al intervalo $[t_0, t] \cap T$; y $q_{[t_0,t]} \in Q_{[t_0,t]}$ representa la restricción de la función $q(\cdot)$ al mismo intervalo.

La expresión (3.1) muestra el hecho de que para determinar el estado en el tiempo t es necesario conocer el estado en un momento anterior t_0 y la entrada, que es un elemento del conjunto $(Q_{[t_0,t]} \times U_{[t_0,t]})$, es decir, el vector de volúmenes de flujo de tráfico y control en cada instante de intervalo $[t_0, t]$.

La función de reacción (lectura o salida), ρ^2 , se puede representar como:

$$\rho^2 : W_t \times (Q_t \times U'_t)x \mapsto Q_t^e \dots\dots (1.8)$$

Donde:

W_t : el conjunto de los estados en el tiempo t .

Q_t : el conjunto de vectores de volúmenes de flujo de tráfico en el tiempo t .

Q_t^e : el conjunto de vectores de volumen de salida en el tiempo t .

U'_t : el conjunto de controles en el tiempo t .

Entre las variables que caracterizan los flujos de salida, es decir, componentes del vector $y(.) \in Y$, las variables que representan los volúmenes de flujo, que son componentes del vector $y(.) \in Y$, se usarán en el modelo matemático del proceso de tráfico. La función de salida (reacción) en este caso, como ya se indicó anteriormente, se puede describir de la siguiente manera, $\varphi^2 : W_t X (Q_t X U'_t) \rightarrow Q_t^e$

La salida del proceso de tráfico en una intersección se representa por los flujos del vehículo que salen de la intersección. Al determinar estos flujos, se debe considerar lo siguiente:

- Los flujos de llegada se transforman por señales de tráfico.
- Los flujos de salida se forman a partir de uno o más flujos de llegada transformados.

Con todo lo anterior podríamos decir que este proceso en una intersección, puede ser definido completamente por la 5-tupla $(X, W, Y, \rho^1, \rho^2)$.

La figura 3.3 muestra la intersección, en la cual se desea analizar los flujos de entrada. Como se ha mencionado anteriormente el flujo puede representarse como componentes de un vector, en particular este flujo se puede representar como:

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma'_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9, \sigma_{10}, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$$

Donde le corresponde un conjunto α de vectores de flujo asociado a cada σ_i respectivamente, los cuales son denotados por:

$$\alpha(\bullet) = (\alpha_1(\bullet), \alpha_2(\bullet), \dots, \alpha_{13}(\bullet))$$

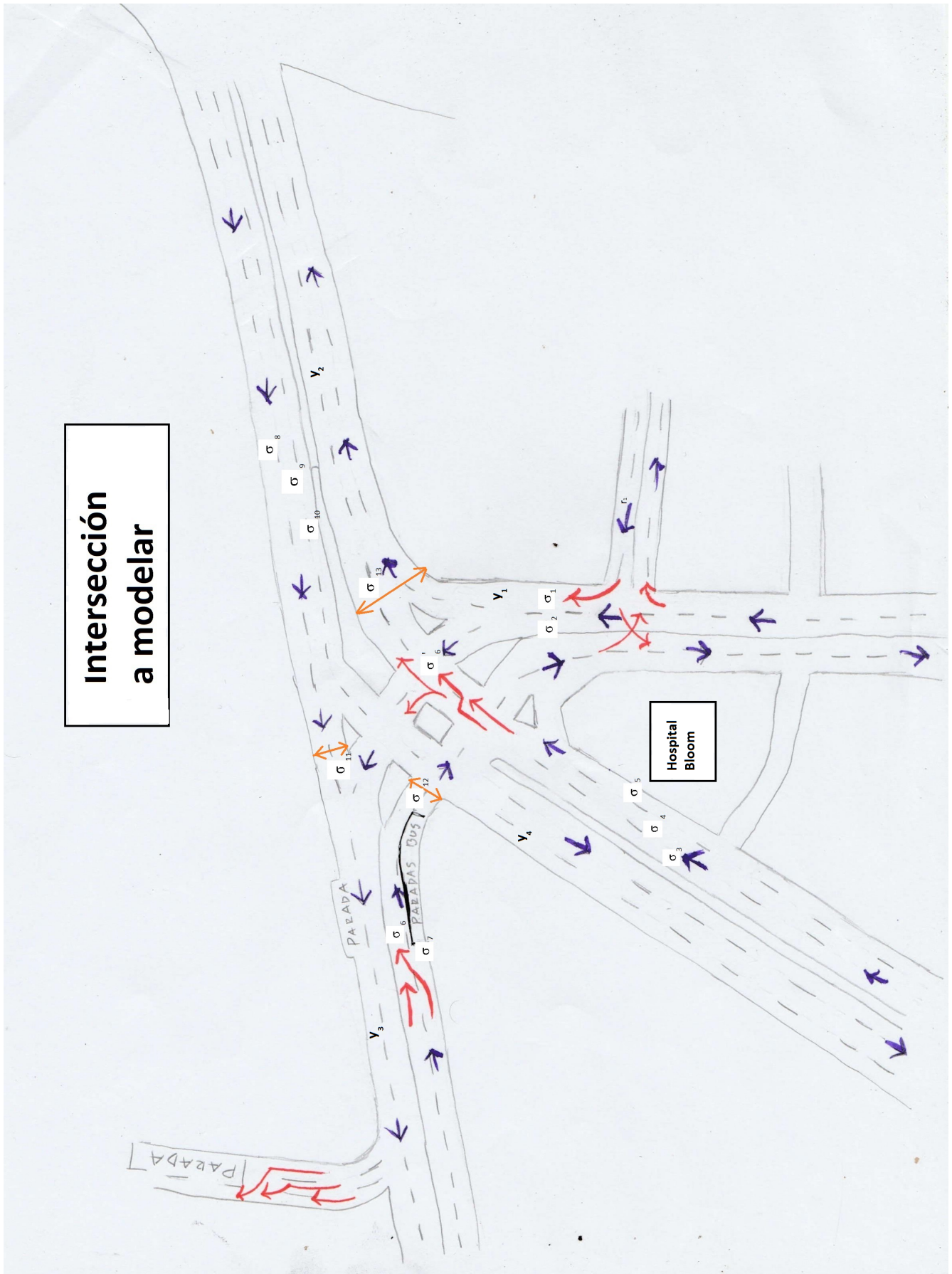


Figura 3.3:

Vale destacar que se ha tomado en cuenta el flujo peatonal y se ha designado como $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$. En esta intersección también se han marcado los flujos de salida, que hemos denotado como y , los cuales tienen un conjunto de vectores de flujo de salida de la siguiente manera.

$$y(\bullet) = (y_1(\bullet), y_2(\bullet), y_3(\bullet), y_4(\bullet))$$

Al analizar la intersección de manera detallada, es decir, analizando los cruces permitidos se ha procedido a encontrar el grafo de compatibilidad el cual se muestra a en la figura 3.4.

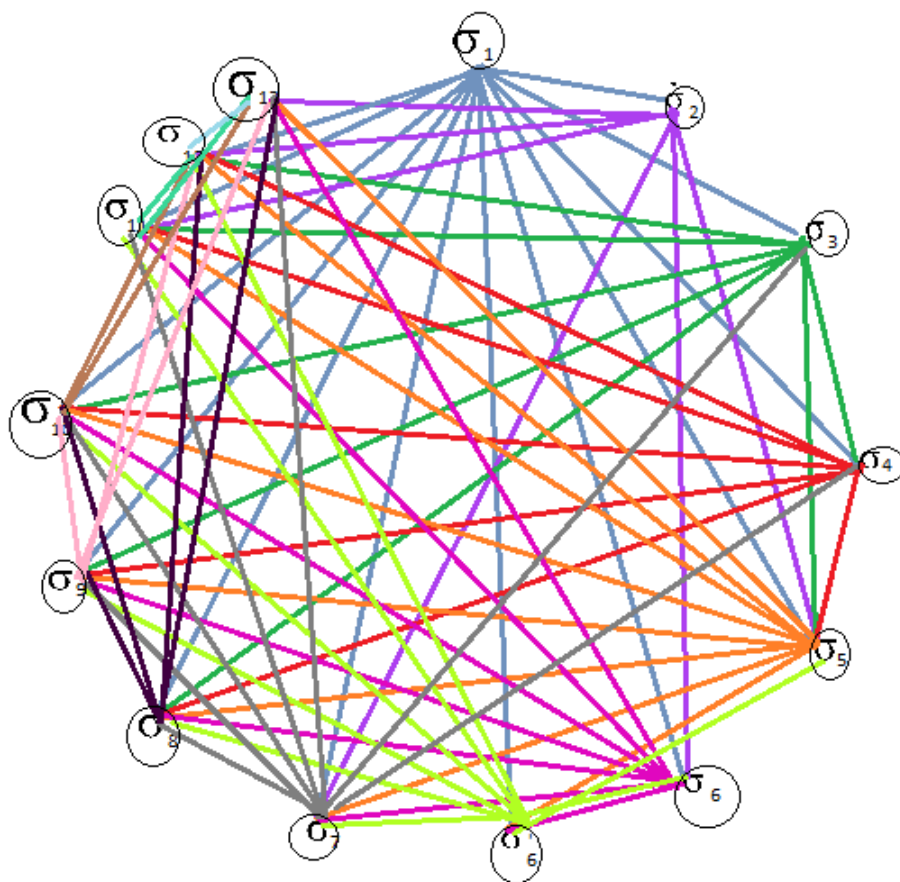


Figura 3.4: Grafo de compatibilidad

La matriz (A) representa la matriz de compatibilidad asociada a la intersección que se está trabajando.

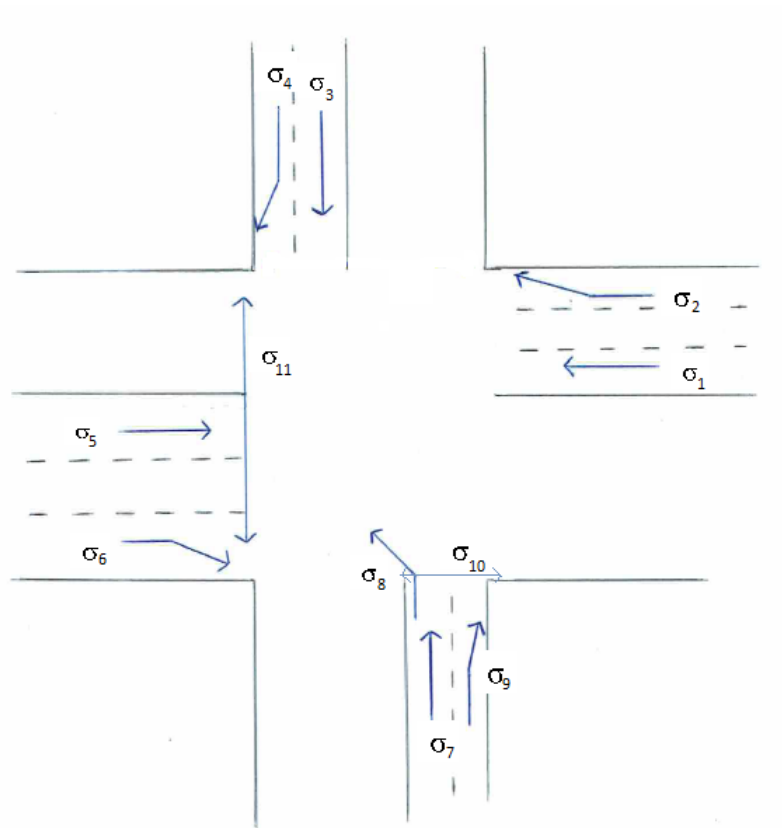
Esta matriz binaria hace la comparación de cada flujo uno a uno, se colocará un 1 si no hay conflicto y 0 si las calles analizadas en ese momento presentan algún problema. Por dicha razón esta matriz es llamada Matriz de compatibilidad.

$$\begin{bmatrix}
 \sigma_i \sigma_j & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 & \sigma'_6 & \sigma_7 & \sigma_8 & \sigma_9 & \sigma_{10} & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\
 \sigma_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 \sigma_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 \sigma_3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 \sigma_4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 \sigma_5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \sigma_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 \sigma'_6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 \sigma_7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 \sigma_8 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 \sigma_9 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 \sigma_{10} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 \sigma_{11} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 \sigma_{12} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \sigma_{13} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{bmatrix} \quad (A)$$

Así como se puede formar la matriz de compatibilidad a partir del grafo mostrado anteriormente, también se puede crear otra matriz binaria cuyas componentes representa los conflictos de los flujos. Esta matriz es llamada Matriz de incidencia y puede observarse en la matriz (B).

$$\begin{matrix}
 \left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \sigma_i \sigma_j & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 & \sigma'_6 & \sigma_7 & \sigma_8 & \sigma_9 & \sigma_{10} & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\
 \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \sigma_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \sigma_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \sigma_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \sigma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sigma_6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \sigma'_6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \sigma_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \sigma_8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \sigma_9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \sigma_{10} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \sigma_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \sigma_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sigma_{13} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{matrix} \tag{B}$$

Los flujos de entrada para la intersección podrían simplificarse y representarse como se muestra en la figura:



A continuación se muestran todos los posibles grupos de señales de la intersección estudiada.

$$\{\sigma_1\} \{\sigma_2\} \{\sigma_3\} \{\sigma_4\} \{\sigma_5\} \{\sigma_6\} \{\sigma_7\} \{\sigma_8\} \{\sigma_9\} \{\sigma_{10}\} \{\sigma_{11}\}$$

$$\{\sigma_1, \sigma_2\} \{\sigma_1, \sigma_5\} \{\sigma_1, \sigma_6\} \{\sigma_1, \sigma_9\} \{\sigma_1, \sigma_{10}\}$$

$$\{\sigma_2, \sigma_5\} \{\sigma_2, \sigma_6\} \{\sigma_2, \sigma_8\} \{\sigma_2, \sigma_9\} \{\sigma_2, \sigma_{10}\}$$

$$\{\sigma_3, \sigma_4\} \{\sigma_3, \sigma_7\} \{\sigma_3, \sigma_9\} \{\sigma_3, \sigma_{11}\}$$

$$\{\sigma_4, \sigma_5\} \{\sigma_4, \sigma_6\} \{\sigma_4, \sigma_7\} \{\sigma_4, \sigma_9\} \{\sigma_4, \sigma_{10}\}$$

$$\{\sigma_5, \sigma_6\} \{\sigma_5, \sigma_{10}\}$$

$$\{\sigma_6, \sigma_7\} \{\sigma_6, \sigma_8\} \{\sigma_6, \sigma_9\} \{\sigma_6, \sigma_{10}\}$$

$$\{\sigma_7, \sigma_8\} \{\sigma_7, \sigma_9\}$$

$$\{\sigma_8, \sigma_9\}$$

$$\{\sigma_9, \sigma_{11}\}$$

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_9\} \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{10}\} \{\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6\} \{\sigma_2, \sigma_4, \sigma_9\} \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5\} \{\sigma_1, \sigma_8, \sigma_9\} \{\sigma_1, \sigma_8, \sigma_9\} \{\sigma_4, \sigma_7, \sigma_9\} \{\sigma_5, \sigma_6, \sigma_9\}$$

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5, \sigma_6\} \{\sigma_3, \sigma_4, \sigma_7, \sigma_9\} \{\sigma_3, \sigma_4, \sigma_9, \sigma_2\} \{\sigma_3, \sigma_7, \sigma_6, \sigma_9\}$$

$$\{\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6, \sigma_9\} \{\sigma_3, \sigma_7, \sigma_6, \sigma_9, \sigma_2\} \{\sigma_4, \sigma_9, \sigma_8, \sigma_6, \sigma_2\}$$

También es posible determinar los grupos de señales utilizando el programa CLIQ [15]. Para el control de tráfico en una intersección, es necesario determinar un conjunto de grupos de señales de tal manera que cada corriente de tráfico pertenezca a uno y solo un grupo de señales. Dicho conjunto de grupos de señales se denomina conjunto completo de grupos de señales. El conjunto completo más común sería el siguiente:

$$\{\sigma_1\} \{\sigma_2\} \{\sigma_3\} \{\sigma_4\} \{\sigma_5\} \{\sigma_6\} \{\sigma_7\} \{\sigma_8\} \{\sigma_9\} \{\sigma_{10}\} \{\sigma_{11}\}$$

y una manera de controlar el tráfico en esta intersección podría ser asignar un control (semáforo) por cada elemento de esa partición. Sin embargo la reducción en el número de variables de control resulta en la simplificación de los problemas de control de tráfico y en la posibilidad de usar menos controladores, más baratos y más simples; y por tanto el problema consiste en encontrar un conjunto completo de grupos de señales con el menor número de elementos. El número de grupos de señales en un conjunto completo, es de hecho, el número de variables utilizadas para el control del tráfico en esa intersección y la complejidad del algoritmo de control depende significativamente del número del grupo de señales. Debido a esas razones se tiende a elegir el número mínimo de grupos de señales, es decir, encontrar todos los vectores x que minimizan la función

$$a_c^T X = \sum_{i=1}^L X_i$$

donde

$$a_c = [1, 1, \dots, 1, \dots, 1]^T$$

y

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_L]^T$$

donde

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_i \in D_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

D_i es el elemento i del conjunto completo de señales de grupo.

Sujeto a las restricciones $EX = b_c$, $b_c = [1, 1, \dots, 1, \dots, 1]^T$ y E es la matriz formada por los conjuntos X .

Para calcular el valor mínimo de esa función objetivo se utiliza el programa MINA [15] el cual se utiliza para determinar conjuntos completos de grupos de señales con número mínimo de elementos.

Capítulo 4

Modelos matemáticos para el tráfico vehicular

A lo largo de la historia, diferentes autores han propuesto numerables ecuaciones para describir el tráfico vehicular; muchos de ellos se han ido perfeccionando con el tiempo, con las observaciones, experimentos en diversos estudios y resolviendo deficiencias de modelos anteriores. En general, el movimiento de vehículos en carreteras o en una red urbana, se puede estudiar en escalas diferentes y dependiendo de la escala escogida tendremos descripciones distintas. Por ejemplo, si vemos el movimiento de los vehículos a gran escala, tendremos una situación en la que se observa el movimiento global y no podemos distinguir cada vehículo individual. Asimismo, cuando observamos el movimiento de cada vehículo, perdemos la vista global de los fenómenos.

De manera general podemos distinguir varias clasificaciones de modelos para el tráfico, dos grandes enfoques para el estudio de dicha dinámica son los siguientes:

Enfoque macroscópico: en este caso el flujo de vehículos en la carretera se concibe como el flujo compresible de un fluido descrito por variables macroscópicas asociadas al comportamiento colectivo del sistema. Para ello, necesitamos un número grande de vehículos circulando en la carretera. De manera que hablar de variables como la densidad, la velocidad promedio y, algunas otras nos proporcione una medida significativa del comportamiento en el flujo. Para trabajar a lo largo de este enfoque se recurre a modelos fenomenológicos que recogen cualitativamente el comportamiento colectivo del flujo y los parámetros que intervienen en la modelación se determinan al comparar con datos empíricos. Existen diferentes tipos de modelos, dependiendo del número de

variables que se usan para la descripción. Cabe notar que algunos modelos macroscópicos pueden extraerse a partir de los modelos cinéticos que detallan un tanto la interacción entre los vehículos. Dentro de los modelos macroscópicos encontramos el modelo básico de Lighthill y Whitham, descrito más adelante.

Enfoque microscópico: desde el punto de vista microscópico, cada vehículo puede seguirse en su trayectoria a lo largo de una carretera y estudiar la dinámica de un conjunto de carros, siguiendo reglas particulares para su movimiento. Este enfoque se conoce como enfoque microscópico y existen una gran cantidad de modelos, donde al especificar las reglas de movimiento individual se tiene una dinámica para el tráfico. Dentro de los modelos microscópicos encontramos los modelos de seguimiento de líder (car- following)

Otra manera de clasificar los modelos para el tráfico vehicular, es según sean de primer orden, de segundo orden o de orden superior. Los modelos que sólo consideran a la densidad como variable relevante se conocen como modelos de primer orden y los que consideran a la densidad y la velocidad promedio se llaman modelos de segundo orden, o modelos tipo Navier-Stokes. Asimismo, los modelos que consideran un número mayor de variables les podemos llamar modelos de orden superior.

En este capítulo se hace una descripción de manera general, de uno de los modelos macroscópicos mas importantes, el modelo Lighthill-Whitham-Richards; y de una serie de modelos que marcaron el inicio de un tipo de modelos especial llamados modelos car-following; esto con el objetivo de comprender las ideas básicas que algunos autores utilizaron para crear sus modelos, y que eso sirva de base para un mejor entendimiento del análisis que se propone en el capítulo 5.

4.1. Modelo de Lighthill-Whitham-Richards (LWR)

La idea principal del modelo LWR es ilustrar la relación fundamental del tráfico que existe entre las variables: densidad, velocidad y flujo.

Supongamos que en una carretera hay automóviles moviéndose a una velocidad constante v_0 , y que en ese tramo hay una densidad constante ρ_0 , de manera que la distancia entre automóviles es también constante. Por tanto, en el tiempo τ cada automóvil se ha movido una distancia igual a $v_0\tau$. Dado que la densidad ρ_0 es el número de vehículos por unidad de distancia y $v_0\tau$ es la

distancia, entonces el flujo viene dado por:

$$\rho_0 v_0 = \frac{N}{s} \frac{s}{\tau} = \frac{N}{\tau} = f.$$

donde N representa el número de vehículos. En otras palabras el flujo viene dado por:

$$f(\rho, v) = \rho(x, t)v(x, t) \quad (4.1)$$

Los fenómenos físicos que permanecen constantes durante todo su desarrollo, se basan en el principio físico de la conservación y se dice que sus cantidades se conservan. En el caso del fenómeno de la entrada y salida de automóviles de un segmento de carretera, se trata de hacer que la cantidad de los que entran sea igual a la cantidad de los que salen, es decir que sus cantidades se conserven. Para ver esto, consideremos un segmento de carretera en la que los automóviles se desplazan de izquierda a derecha. Además, asumamos que en este segmento de carretera, no existen rampas de entrada ni de salida.

El número de carros dentro del intervalo $[x_1, x_2]$ en el instante de tiempo t esta dado por la integral de densidad de tráfico dada por:

$$N = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx. \quad (4.2)$$

Por otra parte, se sabe, a partir de la relación fundamental del tráfico, que el flujo es igual a:

$$f(\rho, v) = \rho(x, t)v(x, t);$$

despejando la densidad

$$\rho(x, t) = \frac{f(x, t)}{v(x, t)};$$

derivando la ecuación (4.2) con respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx$$

sustituyendo el valor de la densidad se obtiene:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(\rho, v)}{v(x, t)} dx$$

y reemplazando la velocidad

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(\rho, v)}{dx/dt} dx;$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} f(\rho, v) dt.$$

luego por el teorema fundamental del cálculo eso es igual a:

$$\frac{dN}{dt} = f_{in}(\rho, v) - f_{out}(\rho, v).$$

es decir, la cantidad de vehículos que entra es igual a la cantidad de vehículos que sale.

Para analizar más sobre esto, considere un volumen V , delimitado por una superficie S que se fija en el espacio. La masa M dentro de la superficie esta dada por:

$$M = \int_v \rho dv \quad (4.3)$$

Supongamos que hay una cantidad de material que esta saliendo del volumen, sobre un diferencial de superficie ds . La tasa de decrecimiento de la cantidad de masa M en el volumen en el tiempo esta dado por:

$$-\frac{d}{dt} \int_v \rho dv \quad (4.4)$$

Utilizando el teorema de Leibniz, se tiene que:

$$-\frac{d}{dt} \int_v \rho dv = \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \quad (4.5)$$

Si se supone que la masa se conserva, entonces la ecuación 4.4 debe ser igual a la tasa total de flujo que sale fuera de V a través de una sección ds .

La tasa de flujo hacia afuera de V a través de la sección ds de S es $\rho v ds$, y su magnitud es igual al área bajo la curva, es decir, la masa que fluye hacia afuera es

$$M' = \int_s \rho v ds. \quad (4.6)$$

Utilizando la formula de Green para convertir la integral a una integral de volumen, con $X = (x, y, z)$ y $V = (u, v, w)$, se obtiene:

$$M' = \int_v \nabla \cdot (\rho v) dv \quad (4.7)$$

donde

$$\nabla \cdot (\rho v) = \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z}$$

es el divergente de ρv

Aplicando esta teoría al flujo vehicular, donde, como se había dicho, la expresión

$$N = \int_{x_1}^{x_2} \rho dx \quad (4.8)$$

es el número de vehículos en el segmento de carretera $[x_1, x_2]$, es decir, viéndolo desde el punto de vista físico, N sería la masa que está utilizando en el sistema. $X = (x, 0, 0)$ pues el flujo vehicular solo toma una dirección (de izquierda a derecha). Entonces suponiendo que los vehículos que entran, N , es igual al número de vehículos que salen del segmento de carretera $[x_1, x_2]$, que se representa por N' (es decir se conservan), se tendrá que :

$$M = M' = N = N'$$

$$\int_v \frac{\partial}{\partial t} \rho dv = \int_v \nabla(\rho v) dv \quad (4.9)$$

$$- \int_v \frac{\partial}{\partial t} \rho dv = \int_v \left(\frac{\partial \rho v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho v}{\partial z} \right) dv \quad (4.10)$$

$$- \int_v \frac{\partial}{\partial t} \rho dv = \int_v \frac{\partial \rho v}{\partial x} dv \quad (4.11)$$

es decir

$$-\rho_t = (\rho v)_x \quad (4.12)$$

$$0 = \rho_t + f(\rho, v)_x \quad (4.13)$$

$$\int \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(\rho, v) \right) dv = 0 \quad (4.14)$$

La ecuación (4.14) puede escribirse como:

$$\rho_t(x, t) + (\rho(x, t)v(x, t))_x = 0 \quad (4.15)$$

donde la notación $(\cdot)_x$ representa $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$. Si se conocen la densidad de tráfico inicial y la velocidad, la ecuación (4.15) puede utilizarse para predecir la densidad de tráfico futura. Entonces podría elegirse la función de velocidad para que el modelo dependa solamente de la densidad, es decir que tenga la forma: $v(\rho)$.

Podemos escribir entonces la ecuación del flujo de la siguiente manera:

$$f(x, t) = \rho(x, t)V(x, t).$$

mientras que la ecuación (4.15) como

$$\rho_t(x, t) + (\rho(x, t)V(x, t))_x = 0,$$

donde $V(x, t)_x$ es la función

$$V\rho = v_f\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right),$$

donde v_f es la velocidad en flujo libre y ρ_m es la máxima densidad [10]. La gráfica de esta función se muestra en la Figura (4.1) Una de las suposiciones básicas en el modelo LWR con respecto a la

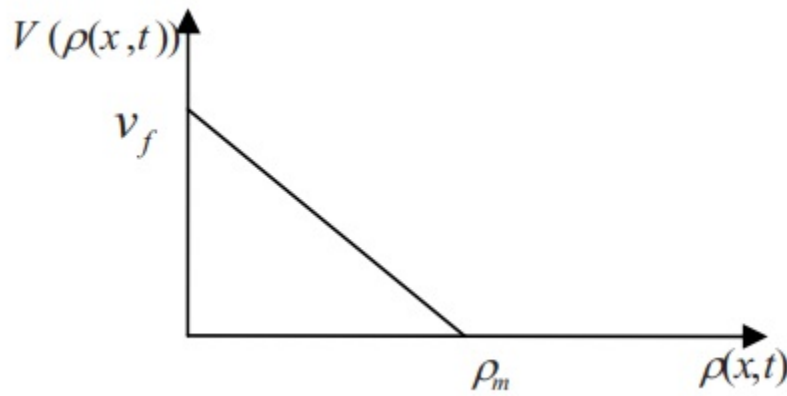


Figura 4.1:

velocidad es su dependencia solo de la densidad. Cualquier cambio en la densidad se reflejará en la velocidad. El inconveniente de esta suposición, es que el tráfico está en equilibrio cuando se utilizan tales funciones de densidad de velocidad, es decir, dada una densidad particular, especialmente para el tráfico ligero, la velocidad será fija y el modelo no reconoce que hay una distribución de las velocidades deseadas entre los vehículos. Por lo tanto, el modelo no puede describir el comportamiento observado en tráfico liviano, aunque se puede argumentar que v_f es una velocidad promedio que podría resolver este problema. Por otro lado, el comportamiento del vehículo se ve afectado principalmente por el automóvil que está adelante.

4.2. Modelos car-following

Otro tipo importante de modelos son los conocidos como modelos car-following; estos modelos describen el comportamiento del vehículo, dependiendo de la velocidad y la distancia con el vehículo

que está justo enfrente. Para entender mas a fondo la descripción de este tipo de modelos comencemos por adoptar la notación común para la posición de los vehículos.

Sea $x_n(t)$ la posición del vehículo; entonces para denotar la posición del vehículo que le sigue (anterior) utilizamos $x_{n+1}(t)$, y x_{n+2} para el anterior a éste; y así sucesivamente. Además recordemos que $x_n(t)$, $\dot{x}_n(t)$ y $\ddot{x}_n(t)$ denotan la posición, velocidad y aceleración del vehículo respectivamente. Como puede observarse en la Figura 4.2, $n = 0$ es el vehículo líder, y $n = 1, 2, 3, \dots$; son los vehículos seguidores. En este caso, decimos que nos encontramos en una fila de vehículos. Los modelos de

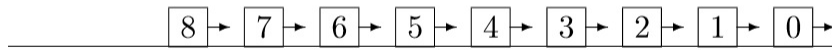


Figura 4.2:

car-following de una sola vía, suponen que hay una alta relación entre los vehículos que están en un rango de separación interarticular de 100 a 125 metros y dan una forma explícita de esta relación. Asumen que el conductor es un agente activo que responde a estímulos sensoriales mediante aceleración-desaceleración del vehículo, dependiendo de sus propias habilidades psicomotoras y condiciones físicas del camino y del vehículo.

El mecanismo de conducir se resume en tres tipos de tareas que son las siguientes:

Percepción. El conductor recaba información, principalmente a través de su campo visual; la información proviene principalmente del vehículo de enfrente y del propio.

Decisión. El conductor interpreta la información y actualiza diversos umbrales de decisión. Usa un catálogo de experiencias previas y conocimiento. Con el tiempo las decisiones se vuelven automáticas, constituyendo lo que conocemos como habilidades de conducir.

Control. El conductor efectúa maniobras de control que se retroalimentan constantemente con la respuestas observadas; es necesario coordinar movimientos y evaluar su intensidad para adaptarse al ambiente cambiante.

La teoría car-following sintetiza el proceso de conducir con la relación siguiente:

$$Respuesta = \lambda Estimulo. \quad (4.16)$$

Bajo la premisa de que el conductor intenta dos cosas principalmente: (a) Evitar colisiones y (b) Acercarse lo más posible el vehículo de enfrente. La función de respuesta se toma como la aceleración, pues es el conductor quien decide si acelerar o desacelerar, según sea lo que se presente en la carretera; dicha función podemos representarla de la siguiente manera:

$$\text{Respuesta}(t) = \dot{x}_{n+1}$$

donde \dot{x}_{n+1} es la velocidad del seguidor.

El primer manual de capacidad de carreteras que se publicó en 1950, enumera una lista de observaciones que fueron encontradas en unos estudios que iban dirigidos a identificar la relación existente entre la velocidad (v) y el espaciamiento entre vehículos (s) [11]. Específicamente la relación que se obtuvo fue la siguiente:

$$S = \alpha + \beta v + \gamma v^2$$

Este modelo describe solamente el comportamiento del tráfico para el caso en que los vehículos mantienen una velocidad constante o casi constante; y en la que cada vehículo intenta mantener una misma distancia con el vehículo delantero. Unos años más tarde, Pipes realizó un trabajo en el que introdujo elementos dinámicos en una línea de vehículos [11]. Pipes centró la atención en el comportamiento de cada par de vehículos (uno detrás del otro) a medida que aceleran y desaceleran, y a medida que uno intenta seguir al de adelante. La fórmula que propuso fue:

$$x_n(t) - x_{n-1}(t) = b + \lambda \dot{x}_{n+1}(t)$$

donde b es la distancia con el vehículo delantero y λ es una constante de sensibilidad del conductor. Este modelo se desarrollo teniendo en cuenta la regla siguiente: *para seguir a otro vehículo a una distancia segura, es necesario permitirse una separación igual a la longitud de un vehículo por cada diez millas por hora que esté viajando.* Al derivar esta ecuación obtenemos la regla básica de los modelos car-following.

$$\ddot{x}_{n+1}(t) = \frac{1}{\lambda}(\dot{x}_n - \dot{x}_{n+1})$$

Por otra parte, las investigaciones llegaron a la conclusión de que había una alta correlación entre el estímulo y la velocidad relativa.

Unos años mas tarde Chandler, Herman y Montroll estudiaron el flujo mediante la aplicación de una teoría que considera la interacción de tres componentes en el sistema del tráfico: la topología

de la carretera, las características del vehículo y el comportamiento del conductor. Con base a los datos experimentales con los que disponían propusieron que la aceleración en el tiempo t de un automóvil que intenta seguir a otro, es proporcional a la diferencia de las velocidades de los dos automóviles en el tiempo $(t + \Delta)$ [11].

$$\ddot{x}_{n+1}(t + \Delta) = \lambda(\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)) \quad (4.17)$$

Esta investigación propuso un valor aproximado de 1.5 segundos para Δ de demora del conductor y un valor aproximado de 0.37 para la constante de proporcionalidad, es decir, consideraban un factor de sensibilidad constante.

Más tarde, en 1959 Gaiz, Herman y Potss intentaron derivar la ecuación macroscópica de Greenberg que describe la velocidad y el flujo utilizando la ecuación microscópica anterior como punto de partida[11]. La falta de correspondencia entre el modelo de Greenberg $v = (v_c) \ln\left(\frac{k_j}{k}\right)$ donde v es la velocidad, v_c es la velocidad máxima, k es la densidad y k_j la densidad máxima; y el modelo 4.17 que le indicó que la fórmula debía modificarse; para evitar tanta disparidad propusieron de sensibilidad es inversamente proporcional al espaciamiento entre los vehículos. El modelo se modificó al siguiente:

$$\ddot{x}_{n+1}(t + \Delta) = \lambda_1 \frac{(\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t))}{(x_n(t) - x_{n+1}(t))} \quad (4.18)$$

Además, experimentos realizados en las pistas de General Motors arrojaron valores aproximados para los parámetros de λ_1 y Δ . La importancia de estas investigaciones es que establecieron una relación entre los modelos macroscópicos y microscópicos.

Años más tarde, Edie observó que aunque los modelos desarrollados anteriormente mostraban un buen ajuste con datos experimentales, se vuelven cada vez menos realistas a medida que el tráfico se hace cada vez mas denso[11]. Explicó que esta pérdida de realismo se debía a la falta de límite superior de la velocidad. Para resolver este problema, propuso una modificación en la sensibilidad de los modelos anteriores. Edie afirma que la sensibilidad del conductor varia con su velocidad absoluta; cuanto más rápido va, mayor es su sensibilidad.

$$\ddot{x}_{n+1}(t + \Delta) = \lambda_2 \dot{x}_{n+1}(t + \Delta) \frac{(\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t))}{(x_n(t) - x_{n+1}(t))^2} \quad (4.19)$$

Esta investigación fue la primera en proponer que se podrían usar dos modelos separados para la descripción del tráfico, uno para tráfico congestionado y otro para tráfico no congestionados (baja

densidad).

Gaiz, Herman y Rothery se dispusieron a analizar mas de cerca el tipo de modelos estímulo-respuesta de la teoría car-following; propusieron que los diversos términos de sensibilidad podrían generalizarse. Entonces el modelo lo generalizaron de la siguiente manera [11].

$$\ddot{x}_{n+1}(t + \Delta) = \lambda_2 \dot{x}_{n+1}^m(t + \Delta) \frac{(\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t))}{(x_n(t) - x_{n+1}(t))^l} \quad (4.20)$$

Newell realizó un estudio que difiere mucho de otros modelos e investigaciones previas, en las que se agrupan la sensibilidad y el estímulo en una sola función. Newell propuso que la velocidad del carro $n+1$ en el tiempo t es una función no lineal de avance en el tiempo $(t - \Delta)$. Él seleccionó una función no lineal de manera que los cambios sean físicamente razonables y representada de manera que la ecuación diferencial se pueda resolver más fácilmente para $\Delta = 0$. También demostró que el modelo seleccionado proporciona todos los resultados de las teorías de seguimiento lineales de automóviles en ciertos casos limitantes y todas las características de las teorías continuas no lineales en otros casos. Por ejemplo, una solución exacta de la ecuación mostró que una pequeña perturbación de amplitud se propaga a través de una serie de automóviles de la manera descrita por las teorías lineales. Newell también notó que su teoría tenía varias deficiencias serias; por ejemplo contiene la implicación de que los conductores se siguen unos a otros en condiciones no estacionarias al adherirse a la misma relación velocidad-avance que elegirían en condiciones estables. Pero se ha encontrado, que si un conductor líder se desplaza a una velocidad constante, luego realiza una maniobra y regresa a su velocidad original, un seguidor no siempre volverá a adquirir el mismo avance que tenía inicialmente. Por lo tanto, la relación entre velocidad y avance no es única. La ecuación propuesta por Newell fue la siguiente:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \dot{x}_c - \dot{x}_c \exp\left(-\frac{\lambda_n(x_n(t - \Delta) - x_{n+1}(t - \Delta) - h_j)}{\dot{x}_c}\right) \quad (4.21)$$

donde \dot{x}_c es la velocidad en carretera libre.

Newell propuso una diagrama triangular, para la relación fundamental del tráfico ($q = kv$) como puede observarse en la Figura 4.3. Este diagrama supone que mientras la densidad sea pequeña, el flujo puede ir creciendo hasta llegar al flujo máximo Q_{max} ; luego de este punto, si seguimos aumentando la densidad más del valor k_c , se irá creando congestión vehicular y el flujo debe decrecer.

Por otra parte recordemos que el espaciamiento entre el automóvil líder y el seguidor (s) y la

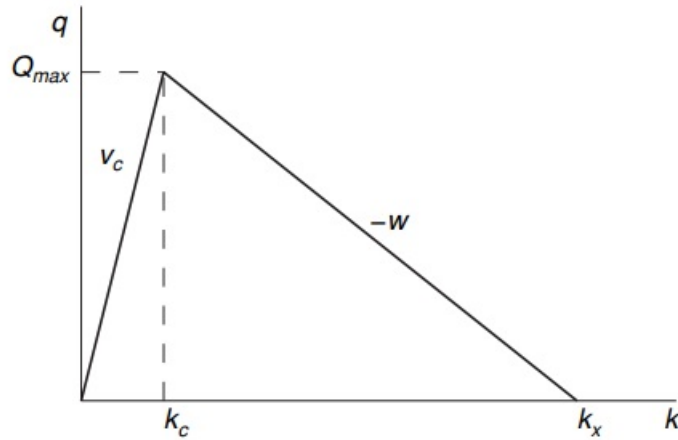


Figura 4.3: Relación flujo densidad

densidad (k) se relacionan de la siguiente manera: $s = \frac{1}{k}$. Por tanto es posible realizar el diagrama velocidad-espaciamiento, el cual, según el análisis de este modelo sería el que se muestra en la Figura 4.4:

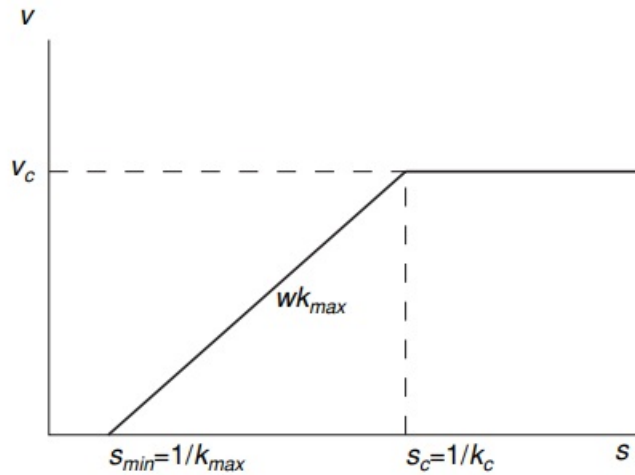


Figura 4.4: Relación velocidad espaciamento

Este modelo propuesto por Newell está libre de colisiones, pero la dependencia inmediata de la velocidad en la densidad de la carretera, lo hace inestable pues conduce a aceleraciones muy altas, por ejemplo sabemos que la aceleración es $\approx \frac{v_0}{T_r}$. Suponiendo una velocidad deseada típica de $30m/s$ y un tiempo de reacción del conductor de $T_r = 1$, esto correspondería a una aceleración de $30m/s^2$, lo que es claramente poco realista.

La Figura 4.5 muestra la gráfica de la ecuación 4.21, propuesta por Newell con una velocidad

dependiendo de la distancia; si la velocidad es cero, significaría que estamos en la distancia de atasco s_0 ; mientras que si aumentamos la distancia entre los vehículos, la velocidad tendría a estabilizarse en la velocidad deseada v_0 . En 1966, otro investigador (Lee) propuso una teoría distinta

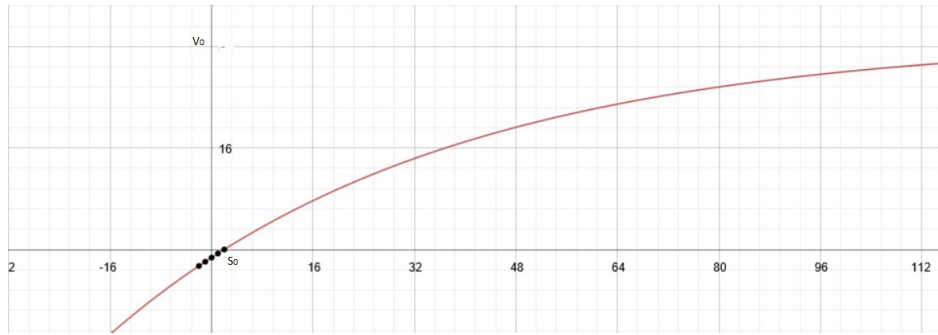


Figura 4.5: Función de velocidad óptima

de modelos car-following, en la que introdujo una función de memoria[11]. Lee determinó que el estímulo debía ser función de las velocidades relativas promedio en instantes anteriores. Su modelo es el siguiente:

$$\ddot{x}_{n+1}(t) = \int_0^t M(t-t^*)[\dot{x}_{n-1}(t^*) - \dot{x}_n(t^*)]dt^*$$

donde M es la función de memoria. Se desarrollaron varios ejemplos de posibles funciones de memoria: exponencial decreciente, onda cuadrada unitaria y otras. Lee mostró que la forma lineal de los modelos que ya estaban desarrollados era un caso especial de su modelo generalizado.

Años mas tarde, M. Bando sugirió un modelo de tráfico dinámico en el que para simplificar sus resultados ignoró la longitud del vehículo y consideró el caso en el que todos los conductores tienen una sensibilidad común. En este modelo se asume que cada vehículo tiene velocidad permitida V y que cada conductor de cada vehículo, responde al estímulo que le genera al vehículo de enfrente. El conductor debe controlar la aceleración y frenando de tal forma que pueda mantener la velocidad de seguridad de acuerdo con el movimiento del vehículo anterior [13]. La ecuación del modelo de M.Bando es la siguiente:

$$\dot{v}_\alpha = \frac{V(s_\alpha) - v_\alpha}{\tau}$$

donde

$$s_\alpha = x_{n+1} - x_n$$

Para cada uno de los vehículos $n = 1, 2, 3, \dots, N$, donde N es el número total de vehículos y a es una constante que representa la sensibilidad, que se asume es independiente del vehículo; y x_n es la coordenada del vehículo n -ésimo. Además, se supone aquí que la velocidad permitida $V(s)$ del vehículo n depende del número de vehículo anterior $n + 1$. Cuando el camino libre se acorta, la velocidad del vehículo debe reducirse y volverse lo suficientemente pequeña para evitar una colisión. Por otro lado, si se maneja en carretera libre, el vehículo aumenta su velocidad sin sobrepasar la velocidad máxima.

De esta manera, V es una función que tiene las siguientes propiedades: 1) Una función monótonamente creciente, y 2) $|V(s)|$ tiene un límite superior $V^{max} \equiv V(s \rightarrow \infty)$, con una función de velocidad óptima algo diferente. Este "modelo de velocidad óptima" ha sido ampliamente utilizado por los físicos debido a su simplicidad, y porque algunos resultados podrían derivarse analíticamente. El comportamiento dinámico no difiere mucho del modelo de Newell, ya que la demora del tiempo de reacción Tr del modelo de Newell se puede comparar con el tiempo de relajación de la velocidad del modelo de velocidad óptima τ . Para los valores típicos de los otros parámetros del modelo de velocidad óptima, los bloqueos solo se evitan si $\tau < 0,9s$, es decir, el tiempo de relajación de la velocidad es del orden del tiempo de reacción, lo que conduce de nuevo a valores demasiado altos de manera irreal $\frac{v_0}{\tau}$ de la aceleración máxima. La razón de este comportamiento inestable, es que los efectos de las diferencias de velocidades se descuidan; y sin embargo juegan un papel estabilizador esencial en el tráfico real, especialmente al acelerar en los atascos.

A pesar de su simplicidad, estos modelos muestran un comportamiento realista del conductor, tienen aceleraciones y desaceleraciones asimétricas y no producen accidentes. Desafortunadamente, pierden sus propiedades realistas en valores límites. En particular, no muestran resultados en inestabilidades de tráfico.

4.3. Análisis del Intelligent drivel model (IDM)

Durante aproximadamente cincuenta años, los investigadores modelan el tráfico de autopistas mediante modelos microscópicos de tiempo continuo (modelos de seguimiento de automóviles). Desde entonces, se han propuesto una gran cantidad de modelos para automóviles, tanto para un solo carril como para tráfico de múltiples carriles.

El intelligent drivel model es un modelo del tipo siguiendo al líder, y presenta muchas ventajas con respecto a los otros tipos de modelos, pues funciona muy bien para variados tipos de escenarios de tráfico; el IDM describe la dinámica de la posición y la velocidad de un vehículo. En este modelo, para el vehículo α , x_α denota la posición en el tiempo t y v_α su velocidad. Para simplificar notaciones, denotaremos a la distancia neta por: $s_\alpha = x_{\alpha-1} - x_\alpha - l_{\alpha-1}$, donde $\alpha - 1$ denota el vehículo de adelante (líder) de α . Y la diferencia de velocidad ó tasa de aproximación se representa por: $\Delta v_\alpha = v_\alpha - v_{\alpha-1}$

La dinámica del vehículo α , está descrita por las siguientes dos ecuaciones diferenciales:

$$v_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt} \quad (4.22)$$

$$\dot{v}_\alpha = \frac{dv_\alpha}{dt} = a \left(1 - \left(\frac{v_\alpha}{v_0} \right)^\delta - \left(\frac{s_0 + v_\alpha T + \frac{v_\alpha \Delta v_\alpha}{2\sqrt{ab}}}{s_\alpha} \right)^2 \right) \quad (4.23)$$

donde los parámetros de la ecuación son los siguientes:

- **Velocidad deseada v_0 :** Velocidad que el vehículo tendría en tráfico libre.
- **Espacio mínimo s_0 :** Distancia mínima deseada. Un carro no puede moverse si la distancia al automóvil del frente, no es al menos s_0 .
- **Tiempo de avance deseado T :** El tiempo mínimo posible para alcanzar al vehículo de enfrente.
- **Aceleración a :** Máxima aceleración del vehículo.
- **Desaceleración de frenado b :** Máximo valor para desacelerar cómodamente.
- **Tasa de aproximación $\Delta v_\alpha = v_\alpha - v_{\alpha-1}$:** Diferencia de velocidad con el vehículo de enfrente.
- **Distancia real s_α :** Distancia bomper a bomper con el carro de adelante.

La ecuación del IDM es difícil de solucionar teóricamente, sin embargo puede resolverse numéricamente para obtener aproximaciones.

Todas estas experiencias y las deficiencias de los modelos car following se han ido mejorando,

y como ya se mencionó, uno de los modelos que se ha propuesto y que describe muy bien muchos de los escenarios del tráfico, es el Intelligent Drivel Model (IDM) representado en la ecuación (4.23)

Esta expresión es una combinación de la tendencia a acelerar en carretera libre, dado por la ecuación

$$a_f(v_\alpha) := a^{(\alpha)} \left[1 - \left(\frac{v_\alpha}{v_0^{(\alpha)}} \right)^\delta \right]$$

y la tendencia a frenar con desaceleración igual a

$$-b_{int}((s_\alpha, v_\alpha, \Delta v_\alpha)) := -a^{(\alpha)} (s^*/s_\alpha)^2.$$

cuando el vehículo α se acerca demasiado al vehículo de enfrente. El término de desaceleración depende de la relación entre la distancia mínima deseada s^* y la distancia real s_α donde el espacio mínimo esta dado por:

$$s^*(v, \Delta v) = s_0^{(\alpha)} + T^\alpha v + \frac{V \Delta v}{2\sqrt{a^{(\alpha)} b^{(\alpha)}}}.$$

Esta ecuación nos garantiza un avance seguro puesto que incluye un término que es la distancia de atasco s_0 , a demás un término que nos garantiza avanzar a una distancia segura $T^\alpha v$ y otro término dependiendo de la velocidad y la tasa de aproximación. Por otra parte, si la tasa de aproximación es cero, pueden suceder dos cosas.

- Los vehículos estan detenidos (atascados) y por lo tanto s^* será igual a la distancia de atasco s_0 , esto es debido a que no existiría distancia a la que se pueda avanzar seguramente $T^\alpha v$.
- Los vehículos se desplazan a la misma velocidad V y la distancia a la que pueden avanzar seguramente es $T^\alpha v$

La parte de acelerar en carretera libre de la ecuación del IDM, surge de la idea de que la velocidad no puede crecer indefinidamente, en un punto debe estabilizarse y entonces la aceleración irá disminuyendo paulatinamente con el tiempo hasta llegar a cero, como puede observarse mas adelante. A continuación se presentan los escenarios del tráfico que son descritos sin problemas por el modelo IDM.[12]

a) Tráfico de vehículos con aceleración cero. este caso del tráfico se llama equilibrado, los conductores tratan de mantener la distancia con el vehículo delantero; esto significa que tratan de mantener una velocidad constante y por tanto se cumple que $\dot{V}_\alpha = 0$, $\Delta V_\alpha = 0$. Partimos de la ecuación (4.23).

$$\dot{v}_\alpha = \frac{dv_\alpha}{dt} = a \left(1 - \left(\frac{v_\alpha}{v_0} \right)^\delta - \left(\frac{s_0 + v_\alpha T + \frac{v_\alpha \Delta v_\alpha}{2\sqrt{ab}}}{s_\alpha} \right)^2 \right)$$

Haciendo las sustituciones $\dot{V}_\alpha = 0$, $\Delta V_\alpha = 0$

$$0 = a^{(\alpha)} \left[1 - \left(\frac{V}{V_0^{(\alpha)}} \right)^\delta - \left[\frac{S_0^{(\alpha)} + T^\alpha V}{S_\alpha} \right]^2 \right] \quad (4.24)$$

como $a^{(\alpha)} \neq 0$

$$0 = 1 - \left(\frac{V}{V_0^\alpha} \right)^\delta - \left(\frac{S_0^\alpha + T^\alpha V}{S_\alpha} \right)^2 \quad (4.25)$$

$$\left(\frac{S_0^\alpha + T^\alpha V}{S_\alpha} \right)^2 = 1 - \left(\frac{V}{V_0^\alpha} \right)^\delta \quad (4.26)$$

$$\frac{S_0^\alpha + T^\alpha V}{S_\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{V_0^\alpha} \right)^\delta} \quad (4.27)$$

$$\frac{S_\alpha}{S_0^\alpha + T^\alpha V} = \left(1 - \left(\frac{V}{V_0^\alpha} \right)^\delta \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.28)$$

$$s_\alpha = (s_0^\alpha + T^\alpha V) \left(1 - \left(\frac{V}{V_0^\alpha} \right)^\delta \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.29)$$

a esta ecuación 4.29 se le conoce como distancia de equilibrio y depende de la velocidad del vehículo. La figura 4.6 muestra la gráfica de dicha función utilizando parámetros realistas del IDM, con distancia de atasco $s_0^\alpha = 2$, velocidad máxima $v_0 = 33,33$ y $\delta = 4$, obteniendo la función:

$$y = (2 + 1,6x) \left(1 - \left(\frac{x}{3,33} \right)^4 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Como puede observarse, cuando la velocidad es cero (hay atasco) entonces la distancia es $s_0 \approx 2$ metros; a medida que el vehículo líder aumenta su velocidad, aumenta la distancia s con el vehículo trasero; sin embargo puesto que se trata de un tráfico equilibrado, la velocidad no puede tomar valores muy altos; si los tomara no se obtendría valores de la distancia en ellos, es decir tiende a infinito.

En la ecuación 4.29 se puede observar también que para un tráfico muy congestionado, v_α es mucho

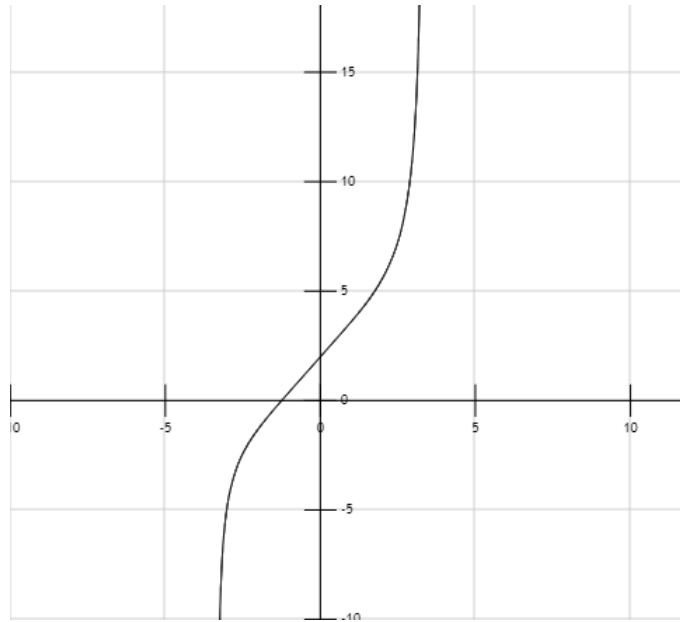


Figura 4.6: función separación de equilibrio

menor que v_0 , es decir $\frac{v_\alpha}{v_0} \rightarrow 0$ y por lo tanto la distancia de equilibrio estará dada por $s_0 + VT$; como lo muestra la gráfica de la Figura 4.7

Debido a que la ecuación 4.29 es una función que depende de la velocidad, y trata de mantener el espaciado equilibrado entonces la denotaremos por $s_e(v)$

Habíamos dicho que en este tráfico equilibrado de densidad arbitraria ($\dot{v}_\alpha = 0, \Delta v_\alpha = 0$), los conductores tienden a mantener una brecha de equilibrio dependiente de la velocidad $s_e(v_e)$ al vehículo delantero dado por

$$s_e(v) = (s_0 + vT) \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Sin embargo es posible también obtener una ecuación de velocidad que dependa de la brecha de

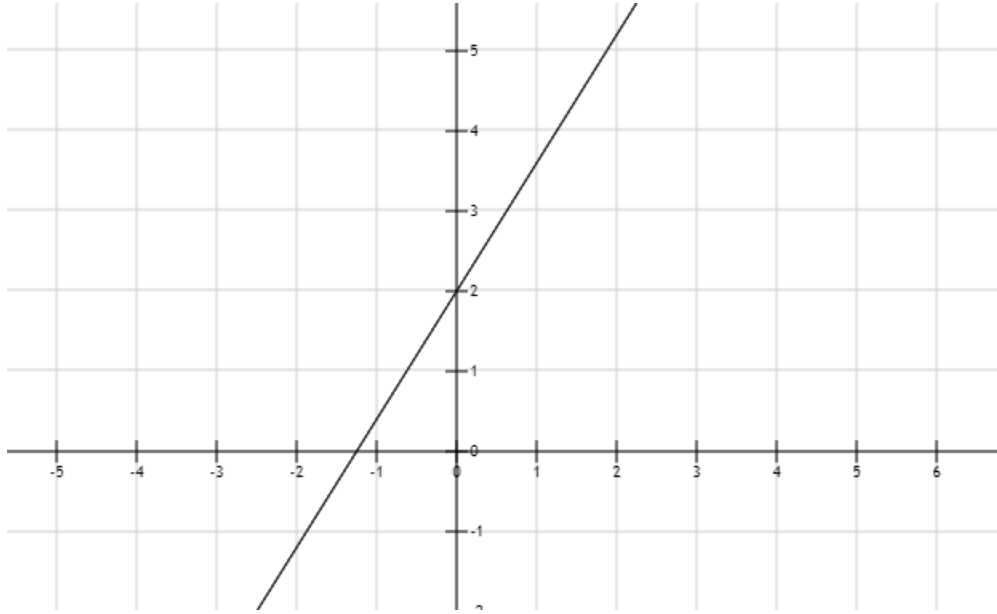


Figura 4.7: función separación de equilibrio para velocidades bajas

separación; por ejemplo analicemos para cuando $s_0 = 0$ y $\delta = 1$ tendríamos lo siguiente:

$$s_e(v) = vT \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.30)$$

$$\frac{s_e}{vT} = \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.31)$$

$$\frac{s_e^2}{v^2 T^2} = \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right) \right]^{-1} \quad (4.32)$$

$$v^2 T^2 = s_e^2(v) - s_e^2(v) \left(\frac{v}{v_0} \right) \quad (4.33)$$

$$v^2 T^2 + \frac{s_e^2(v)v}{v_0} - s_e^2(v) = 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{-\frac{s_e^2(v)}{v_0} \pm \sqrt{\frac{s_e^4(v)}{v_0^2} - 4T^2 s_e^2(v)}}{2T^2} = 0 \quad (4.35)$$

$$\frac{-\frac{s_e^2(v)}{v_0} \pm \sqrt{s_e^2(v) \left[\frac{s_e^2(v)}{v_0^2} - 4T^2 \right]}}{2T^2} = 0 \quad (4.36)$$

$$-\frac{s_e^2(v)}{v_0} \pm s_e(v) \frac{\sqrt{\frac{s_e^2(v)}{v_0^2} - 4T^2}}{2T^2} = 0 \quad (4.37)$$

$$-\frac{s_e^2(v)}{2v_0T^2} \pm \frac{s_e(v)}{2v_0T^2} \sqrt{s_e^2(v) - 4T^2v_0^2} = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{s_e^2(v)}{2v_0T^2} \left[-1 \pm \sqrt{s_e^2(v) + 4T^2v_0^2} \right] = 0 \quad (4.39)$$

$$v_e(s) = \frac{s_e(v)}{2v_0T^2} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4T^2v_0^2}{s_e^2(v)}} \right] \quad (4.40)$$

a esta expresión se le conoce como velocidad de equilibrio.

b) Vehículos acelerando hacia una velocidad deseada Si la densidad del tráfico es muy baja entonces s es grande, y el término de interacción es despreciable y por tanto la aceleración del IDM se reduce a la aceleración de carretera libre:

$$\dot{v} = a \left(1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta \right)$$

que para valores realistas (Figura 4.9) de los parámetros se convertiría en:

$$\dot{v} = 0,73 \left(1 - \left(\frac{v}{33,33} \right)^4 \right)$$

que es una función decreciente de la velocidad para valores positivos, con un valor máximo y mínimo en $\dot{v}(0) = a$ y $\dot{v}(v_0) = 0$.

En la Figura 4.8 se muestra el comportamiento de dicha función, donde el régimen aplica para $t \leq 60s$, el exponente de aceleración δ especifica como la aceleración decrece cuando se aproximan a la velocidad deseada. Podemos observar que cuando el vehículo comienza a moverse frente a una carretera vacía, entonces acelera con la mayor potencia, a medida se acerca a la velocidad deseada la aceleración decrece, puesto que el cambio de velocidad va disminuyendo.

El limite cuando $\delta \rightarrow \infty$ corresponde a una aproximación a v_0 con una aceleración constante a , y $\delta = 1$ corresponde a una aproximación lineal de a .

En este último caso, la aceleración en tráfico libre es equivalente al modelo de velocidad óptima que usa el modelo LWR.

Se espera que el comportamiento mas realista se encuentre dentro de esos limites; luego de mucha experimentación se ha logrado establecer que el valor mas apropiado por arrojar datos mas realistas es $\delta = 4$ [12]

c) Frenado como reacción a altas tasas de aproximación

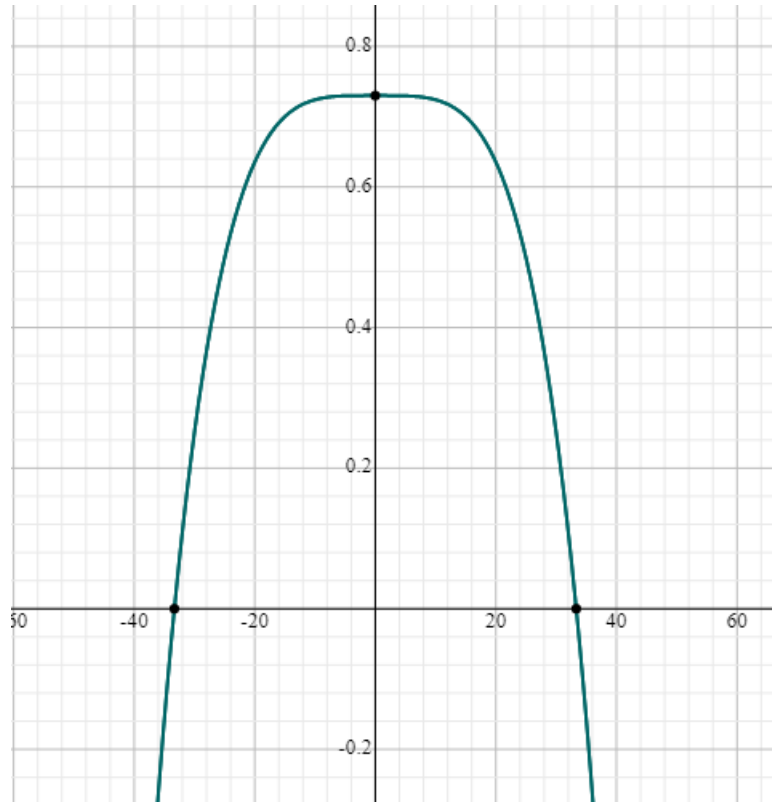


Figura 4.8:

Al acercarse a vehículos más lentos o de atascados, con velocidades de aproximación suficientemente altas $\Delta v > 0$. La parte de equilibrio $s_0 + vT$ de la distancia dinámica deseada s^* , puede ser despreciada con respecto a la parte de no equilibrio, la cual es proporcional a $v\Delta v$. Entonces la parte de la interacción $-a\left(\frac{s^{(*)}}{s}\right)^2$ de la aceleración del IDM, es dada por:

$$b_{int}(s, v, \Delta v) \approx \frac{(v\Delta v)^2}{4bs^2}$$

Esta expresión implementa un comportamiento de frenado inteligente, el cual se analiza ahora para el caso especial de aproximarse a un vehículo detenido (obstáculo $\Delta v = v$) anticipando una desaceleración constante durante todo el proceso de aproximación. La aceleración, entonces, para este tipo de situaciones estará dada por:

$$\dot{v}_\alpha = a \left[1 - \left(\frac{v_\alpha}{v_0} \right)^d \right] - \left(\frac{\frac{av\Delta v}{2\sqrt{ab}}}{s} \right)^2$$

Por otra parte, de las ecuaciones del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA) tenemos que la velocidad es $v = v_0 + at$, y cuando se hace $v = 0$ (el vehículo se ha detenido) se

obtiene la siguiente formula para el tiempo $-\frac{v_0}{a} = t$

También sabemos del MRUA que la formula de la distancia es:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Al sustituir el tiempo en la ecuación anterior se tiene.

$$\Delta x = v_0 \left(-\frac{v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(-\frac{v_0}{a} \right)^2 \quad (4.41)$$

$$\Delta x = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} \quad (4.42)$$

$$\Delta x = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} \quad (4.43)$$

$$a = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\Delta x} \quad (4.44)$$

Esta ultima expresión es la desaceleración necesaria para que un automóvil se detenga. Observemos que en el denominador de la misma, existe el término de variación de distancia. En este análisis, esa distancia es la distancia entre los vehículos s ; por tanto hagamos la desaceleración cinemática mínima para detenerse igual a $b_k = \frac{v^2}{2s}$.

La situación esta bajo control cuando $\frac{b_k}{b} \leq 1$ porque la desaceleración que está experimentando el vehículo, es menor que la desaceleración cómoda. En una situación de emergencia por el contrario tendríamos que $\beta = \frac{b_k}{b} > 1$.

Habíamos dicho que se analizaría el caso de encontrarse con un obstáculo. Entonces se tendría que hacer $\Delta v = v$, resultando la siguiente expresión.

$$b_{int}(s, v, \Delta v) = a \left(\frac{\frac{v^2}{2\sqrt{ab}}}{s} \right)^2 \quad (4.45)$$

$$b_{int}(s, v, \Delta v) = a \frac{v^4}{4abs^2} \quad (4.46)$$

$$b_{int}(s, v, \Delta v) = \frac{v^2 v^2}{2s2sb} \quad (4.47)$$

$$b_{int}(s, v, \Delta v) = \frac{b_k^2}{b} \quad (4.48)$$

$$b_{int}(s, v, \Delta v) = \beta b_k \quad (4.49)$$

Para los casos que no se consideran una emergencia, habíamos dicho que $\frac{b_k}{b} \leq 1$; esto significa que

$$b_{int}(s, v, \Delta v) = \beta b_k \leq b_k \leq b.$$

Es decir, las desaceleraciones en este tipo de situaciones serán menores que la desaceleración cómoda, y por tanto el flujo esta libre de colisiones. Sucede lo mismo para el caso en el que se

tenga una situación de emergencia, pues en este caso, $\beta = \frac{b_k}{b} > 1$. Es decir será una desaceleración muy alta, hasta estabilizar el automóvil.

Esto nos demuestra que para exponente 2 en el termino de interacción del IDM, tendremos un trafico libre de colisiones y estable. Supongamos ahora que dicho exponente es $n > 2$. Entonces

$$b_{int}(s, v, \Delta v) = a \left[\frac{b_k}{\sqrt{ab}} \right]^n = \frac{b_k^n}{a^{\frac{n}{2}-1} b^{\frac{n}{2}}} \quad (4.50)$$

$$b_{int}(s, v, \Delta v) = \frac{b_k^{\frac{n}{2}} b_k^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}-1} b^{\frac{n}{2}}} \quad (4.51)$$

$$\leq \frac{b_k^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}-1}} \quad (4.52)$$

$$b_{int}(s, v, \Delta v) \leq \frac{b^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}-1}} \quad (4.53)$$

donde $n > 2$ y por tanto no podríamos garantizar que su comportamiento sea comparable con el de la desaceleración b .

Para el caso en el que $n < 2$ entonces la aceleración máxima a estaría presente en el numerador de la expresión anterior con algún exponente m

$$a^m b^{\frac{n}{2}}$$

Tampoco podría concluirse que no habrá colisiones con desaceleraciones de este orden.

d) Frenando debido a distancias cortas este escenario tiene lugar, cuando el espacio entre los vehículos es mucho menor que el espacio mínimo deseado, pero los vehículos no se aproximan a altas tasas de velocidad. Aquí la parte de equilibrio $s_0 + vT$ domina sobre la parte dinámica Δv y se desprecia la parte de aceleración en carretera libre. Por tanto la ecuación (4.3.1) se reduce a $\dot{v} \approx \frac{(s_0 + vt)^2}{s^2}$

4.3.1. Modelo MOBIL

Otro de los aspectos fundamentales que se necesita para modelar una carretera multicarril, es la condición que los vehículos necesitan para hacer un cambio de carril de manera segura. A continuación se presenta uno de los modelos que se utiliza para dicho propósito.

Por sus siglas en inglés "Minimizing Overall Braking Induced by Lane Changes" El modelo de cambio de carril es aquel en el que se producen cambios en el carril si el nuevo carril objetivo

potencial es más atractivo, es decir se cumple el criterio "incentivo". El cambio se puede realizar de manera segura, es decir, se cumple el "Criterio de seguridad". En este modelo de Cambio de Carril MOBIL, los criterios en las aceleraciones en los carriles antiguos y los carriles nuevos respectivos, son calculados con el modelo longitudinal IDM.

El criterio de seguridad se satisface si la desaceleración de frenado del IDM impuesta en el vehículo trasero del carril objetivo después de un posible cambio no podrá exceder un cierto límite b_{safe} ; esto significa que el criterio de seguridad

$$\tilde{a}_n \geq -b_{safe}$$

se satisface en esta fórmula el guión de la aceleración, lo que significa "después de un posible cambio" mientras que el guión de la etiqueta del vehículo trasero significa "en el carril objetivo"

Para evaluar el criterio de incentivo, ponderamos la ventaja propia en el carril objetivo, medido por la aceleración incrementada (o reducción de la desaceleración de frenado) frente a la desventaja impuesta de otros conductores medida nuevamente por la disminución de la aceleración o aumento en la desaceleración de frenado para estos conductores. Dado que tendemos a ser egoístas ponderamos la desventaja impuesta a otros conductores con un factor de cortesía P cuyos valores son típicamente inferiores a uno, lo que da resultado al siguiente criterio de incentivo:

$$(\tilde{a}_c - a_c) + P.(\tilde{a}_{new} - a_{new} + \tilde{a}_{old} - a_{old}) > \Delta_{ath},$$

donde

- \tilde{a}_c = es la nueva aceleración del vehículo c después de un cambio de carril.
- a_c = es la aceleración actual.
- $(\tilde{a}_{new} - a_{new})$ = es la desventaja del nuevo vehículo seguidor.
- $(\tilde{a}_{old} - a_{old})$ = ventaja del antiguo seguidor
- P = factor de cortesía

Para evitar maniobras de cambio de carril desencadenadas por ventajas marginales que pueden conducir a un salto de carril frenético, se ha agregado un umbral de cambio de carril adicional a_{thr} al equilibrio de la ecuación anterior.

Ahora se procede a analizar los posibles valores que el parámetro P puede tener, tomando siempre en cuenta que este es un factor de cortesía.

- $P > 1$ Indica un comportamiento muy altruista
- $P \in]0, 0,5[$ Indica un comportamiento realista
- $P = 0$ Indica un comportamiento puramente egoísta. Hay que tomar en cuenta que los conductores egoístas tampoco ignoran el criterio de seguridad.
- $P < 0$ Se considera una personalidad maliciosa que se complace en frustrar a otros conductores incluso a costa de sus propias desventajas.

Existe un caso especial el cual es cuando $P = 1$ y $\Delta_{ath} = 0$. En este caso el cambio de carril ocurre cuando la suma de las aceleraciones de todos los conductores afectados aumenta después del cambio, o equivalentemente, las aceleraciones globales se reducen al mínimo. En resumen el criterio de incentivo se cumple si la ventaja propia, es mayor que la suma ponderada de las desventajas de los nuevos y antiguos sucesores aumentados por el umbral Δ_{ath} .

La tabla 4.9 muestra los valores de los parámetros del IDM más utilizados por los investigadores.

Parámetros	Símbolos	Limites realistas	Valores reales
Velocidad deseada	V_0	[0,11]	3.33(m/s)
Avance de tiempo seguro	T	[1,3]	1.6(s)
Aceleración máxima	α	[0.5,2]	0.73(m/s ²)
Desaceleración comoda	b	[0.5,2]	1.67(m/s ²)
Exponente de aceleración	δ	-	4
Longitud del carro	l	4,5	4(m)
Distancia de atasco lineal	S_0	[0,5]	2(m)
Distancia de atasco no lineal	S_1	[0,5]	3(m)

Figura 4.9: Parámetros asociados al modelo.

Capítulo 5

Implementación del modelo

En el capítulo anterior se han descrito los escenarios del tráfico que pueden ser modelados mediante el IDM y se pueden resumir en cuatro, que son los siguientes:

- Tráfico equilibrado.
- Aceleración en carretera libre.
- Frenado a altas tasas de aproximación.
- Frenado a distancias cortas.

A demás se debe tomar en consideración que dicha ecuación está diseñada para modelar el flujo de vehículos en una carretera de un carril. Por otra parte, es fácil comprobar mediante la observación, que en la mayoría de intersecciones de carreteras ocurren los escenarios descritos por el IDM. Por ejemplo, en las horas pico donde hay un mayor flujo de personas, podría ser descrito como un escenario de frenado a distancias cortas , ya que a mayor flujo de vehículos habrán más atascos, lo que lleva a un alto congestionamiento; también para el caso de flujo en carretera libre, este escenario es aquel en el cual los vehículos puedan avanzar en la intersección sin ningún problema ya que no hay congestiones vehiculares; cuando en la intersección hay una alta congestión de vehículos pero está fluyendo sin inconvenientes se puede decir que es un caso de tráfico equilibrado y finalmente cuando un vehículo se a próxima, a una alta velocidad y repentinamente el semáforo cambia de verde a rojo, se tendrá el caso del frenado a altas tasas de aproximación.

En este capítulo se presenta la implementación del modelo IDM combinado con el modelo MOBIL,

el cual produce una dinámica del flujo del tráfico en la intersección señalizada entre las calles San Antonio Abad, el Bulevar de Los Héroes, la 25 av Norte y la autopista Norte; a demás se muestran las corridas del modelo mediante simulaciones hechas con el software **TrafficSimulation**.

5.1. Modelo propuesto

Antes de describir el modelo, es necesario conocer las características físicas del área a modelar en total la intersección tiene 10 flujos de entrada (en la Figura cada flecha indica flujos de entrada y salida) y 10 flujos de salida. Hay control de flujo para cada uno de ellos. A demás hay al menos cuatro paradas de autobuses cercanas a la intersección, que influyen directamente en el tráfico del lugar.



Figura 5.1: Flujos asociados a la intersección

En este trabajo se presentan extensiones al IDM, de tal manera que pueda reproducir fenómenos del tráfico como los siguientes:

- Escenario multicarril
- Cambio de carril
- Semáforos (Control de tráfico)

- Parada de autobuses
- Flujos de entradas y salidas de una intersección

5.2. Descripción del modelo

El modelo propuesto considera lo siguiente:

- Se tiene cuatro corrientes de tráfico, dos de tres carriles cada uno con una rampa de salida de un carril; uno de dos carriles; y uno de dos carriles con una rampa de salida, todas estas corrientes se acercan a la intersección.
- Cada corrientes de tráfico tiene una tasa de inyección de vehículos, que varía con el tiempo y se calcula de acuerdo a la distribución uniforme de probabilidad.
- Se tiene cuatro corrientes de tráfico, dos de dos carriles y dos de tres carriles que se alejan de la intersección.
- Cada una de las corrientes de tráfico que se alejan de la intersección, tiene una tasa(flujos) de salida de vehículos.
- Densidades máximas fijas para cada corriente de tráfico.
- Parada de autobuses, los automóviles de mayor tamaño se detiene en ciertos lugares que se han designado como paradas de autobuses.
- Se tiene dos tipos de vehículos (automóviles y buses) que tienen tamaños distintos.
- Para cada una de las ocho corrientes de tráfico, en algún momento dado el vehículo puede decidir cambiarse de carril.
- Cada vehículo actualiza su aceleración, velocidad y posición en el tiempo $t + 1$, utilizando el estado en el tiempo t .
- Flujos de tráfico controlados; si el semáforo está en color rojo, los automóviles se detienen, mientras que si se encuentra en verde continúa cruzando la intersección.

5.3. Aplicación del modelo para la simulación

Aspectos importantes que el software realiza para la aplicación del modelo.

1. Para cada uno de los vehículos, el programa hace la discretización numérica de la formula del IDM utilizando el método de las diferencias finitas y se calcula la posición para cada tiempo t .
2. En cada corriente de tráfico arriban vehículos por unidad de tiempo, en base a una distribución uniforme, siempre que se cumpla que la densidad de vehículos en el camino es menor a la densidad máxima.
3. En cada carril de cada corriente de tráfico y para cada valor de tiempo t , se hacen comparaciones de la velocidad y se utiliza el modelo MOBIL para decidir si es conveniente un cambio de carril.
4. Cada carril de cada camino las aceleraciones de todos los vehículos están dadas por la ecuación del IDM para cada instante t .
5. Si el semáforo se encuentra en rojo, entonces en la fórmula del IDM, se considera que el vehículo de tipo bus (grande) tiene como vehículo líder a un automóvil estacionado es decir $v_{\alpha-1} = 0$.
6. En las paradas de autobuses, en la ecuación del IDM se considera que el vehículo de tipo bus (grande) tiene como vehículo líder a un automóvil estacionado $v_{\alpha-1} = 0$.

5.4. Implementación del modelo

Para presentar de manera gráfica los datos del sistema de la intersección estudiada, se utilizó un programa creado en Java llamado TrafficSimulation, que permite manipular una serie de variables y parámetros del IDM. Este programa ya considera todos los numerales del párrafo anterior (Aplicación del modelo para la simulación); y sobre él es posible la manipulación de las variables y parámetros. El software utilizado en este trabajo, unicamente realiza las simulaciones de flujo de vehículos en las calles que se dibujan. La interfaz de dicho programa se muestra en la Figura 5.1.

Por otra parte para garantizar una simulación realista de la intersección, se realizó un aforo vehicular que dio como resultado una base de datos de valores estimados de velocidad promedio y densidad de tráfico y tiempos en semáforo.

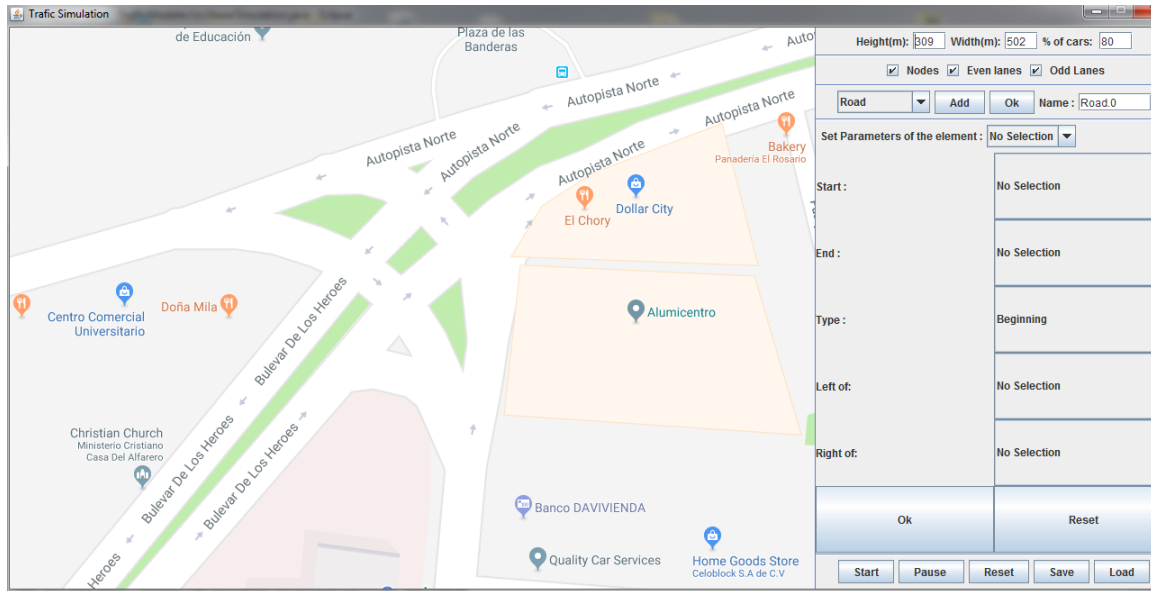


Figura 5.2: Interfaz del software TrafficSimulation

5.5. Pruebas y resultados

La primera prueba que se realizó, es la verificación del funcionamiento del semáforo en el modelo. En el simulador se creó una carretera de un carril, en la que circulan vehículos cuya aceleración se calcula con la fórmula del IDM; se introdujo un semáforo en ella, con un tiempo de luz verde y roja de 30 segundos cada una. Las Figuras 5.2 y 5.3 respectivamente muestran dichas simulaciones. El resultado obtenido fue que al estar el semáforo en rojo los vehículos y autobuses se detenían, y al estar en verde continuaban avanzando. Por lo que se concluye que el modelo describe correctamente dicha dinámica.

Para corroborar el funcionamiento de la parada de autobuses se procedió a hacer una simulación de dos carriles, en uno de los cuales se ubicó una parada de bus; el resultado fue que los autobuses hacían el alto en dicha parada, mientras que los vehículos livianos continuaban avanzando. La Figura 5.4 muestra dicha simulación.

Como anteriormente se han descrito modelos un poco simples, ahora se procederá a describir unos modelos un poco más complejos, estos modelos constan de más de un semáforo y más de un carril. En la Figura 5.5 se muestra la dinámica de flujo vehicular procedente de la calle San Antonio Abad hacia el bulevar de los Héroes y hacia la Autopista Norte. Para verificar que este flujo vehicular pudiera darse exitosamente fue necesario utilizar dos semáforos.

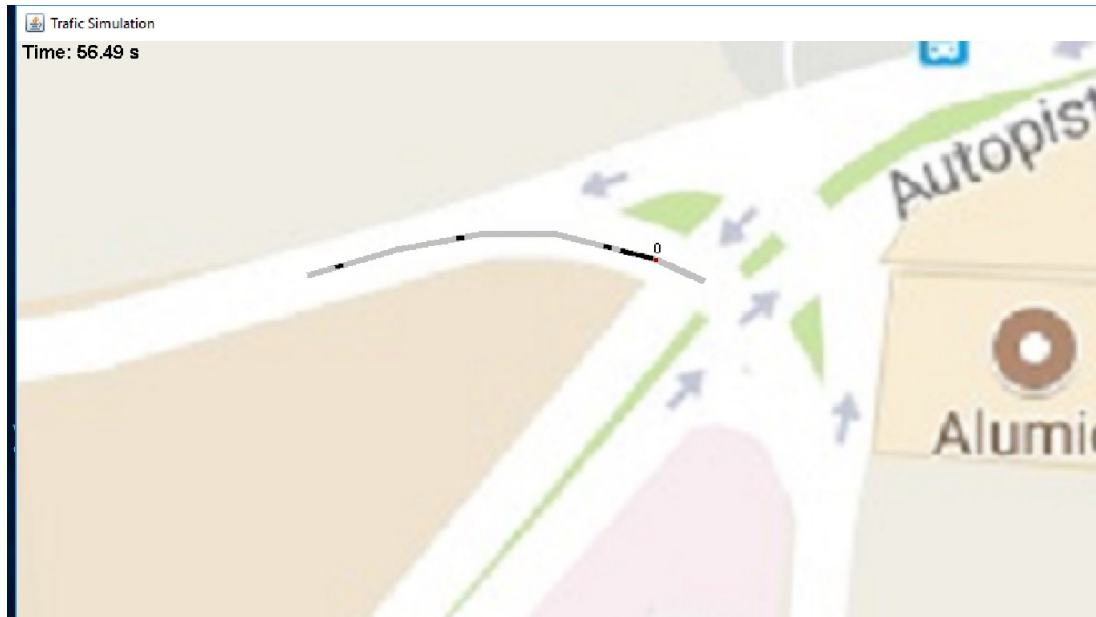


Figura 5.3: Semáforo en rojo



Figura 5.4: Semáforo en verde



Figura 5.5: Parada de autobús

La Figura 5.6 muestra la simulación del flujo vehicular de la calle 25 av. norte que se dirige hacia la calle San Antonio Abad y también su incorporación a la autopista norte. Por su parte la Figura 5.7 muestra la simulación realizada del bulevar de Los Héroes en dirección a la autopista norte y su incorporación a la 25 av. norte; mientras que la Figura 5.8 describe el flujo de la calle San Antonio Abad hacia el bulevar de Los Héroes, de la autopista norte hacia la calle San Antonio Abad y de la calle Autopista Norte hacia el bulevar de Los Héroes. Por último la Figura 5.9 nos muestra la simulación de la intersección completa.

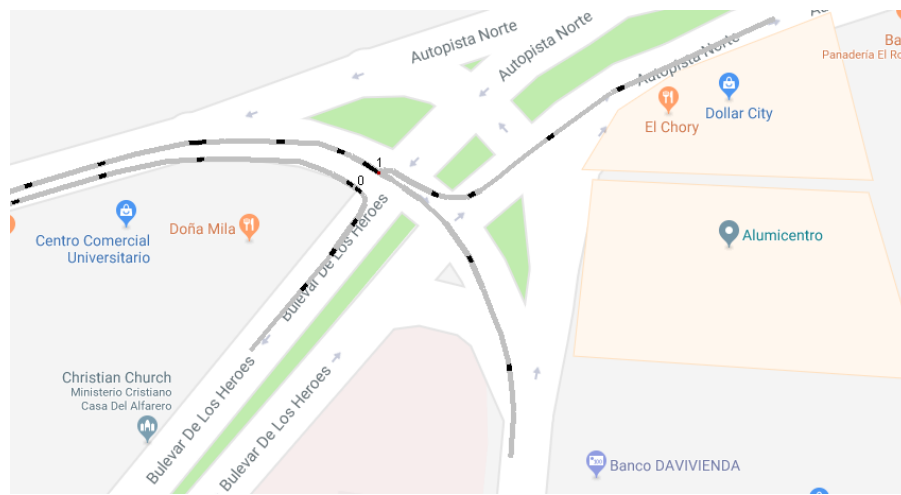


Figura 5.6: Calle San Antonio Abad - Autopista Norte - Blvd Los Héroes

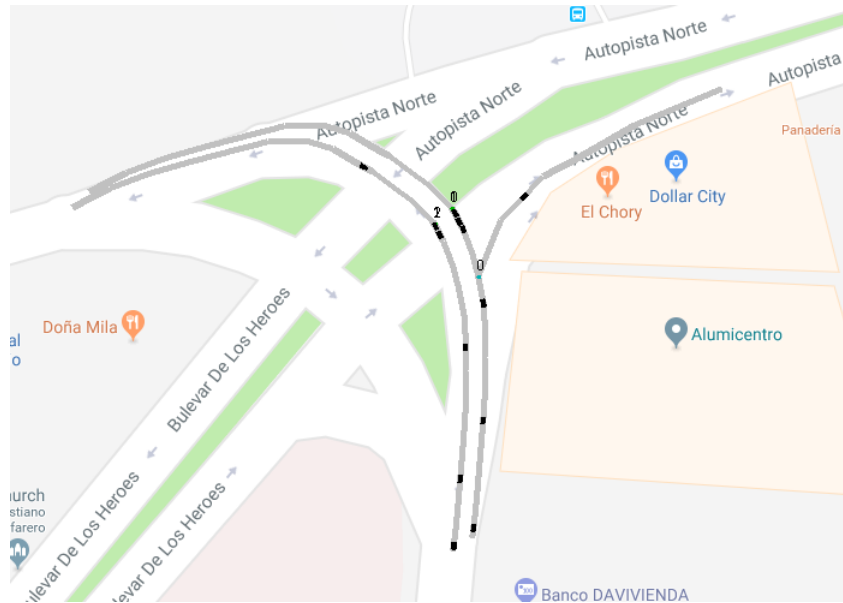


Figura 5.7: Calle 25 av. norte - San Antonio Abad

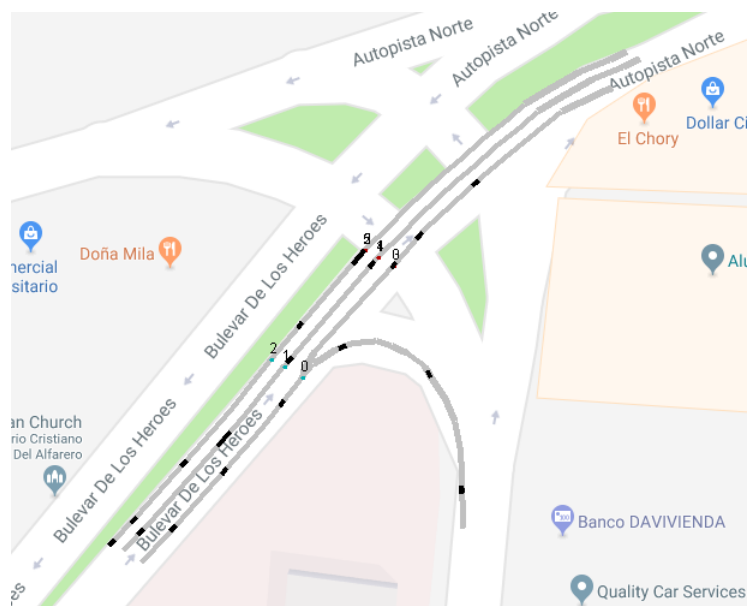


Figura 5.8: Blv de Los Héroes - Autopista Norte

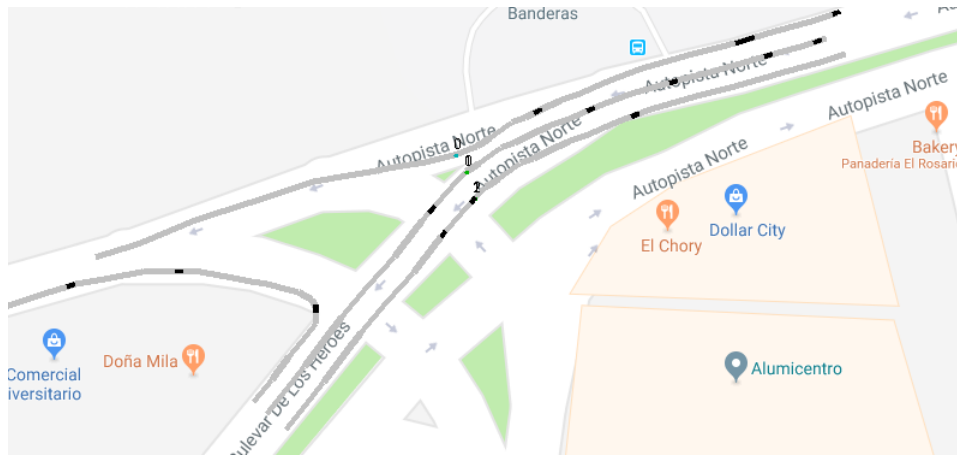


Figura 5.9: Autopista Norte - Bv de Los Héroes

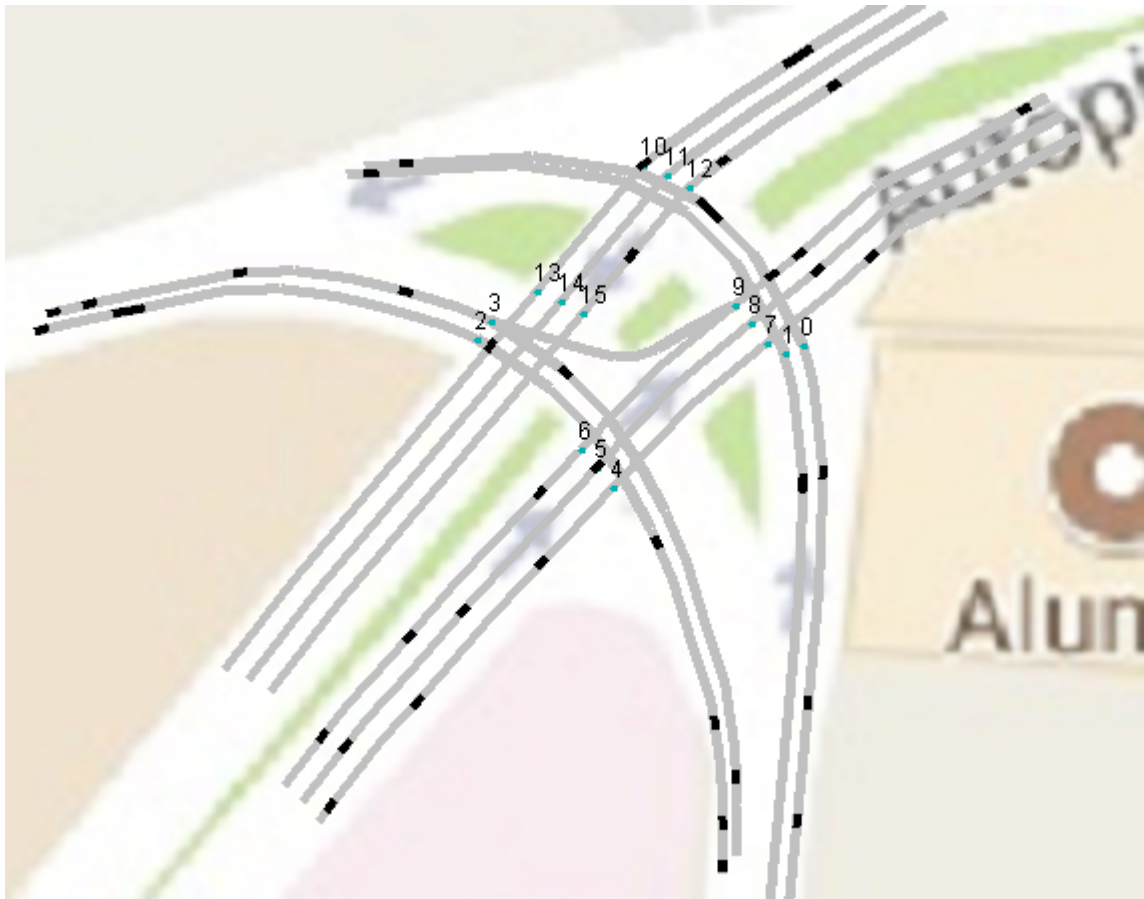


Figura 5.10: Intersección completa

Luego de la realización de todas las pruebas que se hicieron con el simulador, se obtuvo como resultado que el modelo describe correctamente el flujo en carretera multi carril, el cambio de carril en una carretera, la parada de autobuses en un carril, el control de tráfico, las bifurcaciones de una calle, la incorporación de una calle a otra; es decir la intersección estudiada fue posible simularla por partes, mediante el conjunto de simulaciones presentadas en las Figuras 5.2-5.8. Además es posible modelar toda la intersección siempre y cuando no se utilicen paradas de autobuses combinados con más de dos semáforos; esto debido a que el software presenta complicaciones con la sincronización de semáforos y paradas de autobuses simultáneamente.

Conclusiones

- Para realizar un modelo matemático de una intersección de carreteras, es conveniente utilizar, los de tipo car-following microscópicos; en primer lugar, debido a que el tramo de carretera que se analizaría, no sería tan extenso, lo que llevaría a centrar el análisis en la interacción de pequeñas colas de vehículos; y en segundo lugar por que los modelos de este tipo, toman en consideración muchos aspectos del conductor, y les es suficiente para describir patrones de tráfico; algunos de estos aspectos son: el nivel de sensibilidad del conductor y su reacción ante lo que sucede en su entorno; también consideran la dependencia directa de las aceleraciones y desaceleraciones de los vehículos siguientes, de la velocidad del líder y la distancia con él; es decir permiten describir el tráfico sin necesidad de tener una información general del conjunto total de vehículos en la carretera.
- El modelo IDM describe correctamente los siguientes escenarios de tráfico en carreteras de un sólo carril: tráfico equilibrado, aceleración en carretera libre, frenando a altas tasas de aproximación, y frenando a distancias cortas. Todos los escenarios de tráfico de un carril que suceden en una intersección señalizada, pueden incluirse en los descritos por el IDM. Por ejemplo, cuando el semáforo está en verde y en un carril los vehículos se mueven con velocidades constantes, debido a una densidad de tráfico alta; este caso podría incluirse en el tráfico equilibrado del IDM.
- El modelo propuesto para la descripción del sistema de la intersección entre las calles San Antonio Abad, Boulevard de los Héroes, Autopista Norte y 25 av. norte, es la combinación de los modelos IDM con el modelo MOBIL de cambio de carril. Sobre cada carril, de cada calle, que conforma la intersección, las aceleraciones de los automoviles que ahí circulan, se obtienen mediante la ecuación del IDM. Y para cada tiempo t , se utilizan las condiciones del modelo MOBIL y para la aceleración que éste requiere, se usa la del IDM; para que cada vehículo decida si es conveniente o no, realizar un cambio de carril. Para modelar la

parte de los semáforos, se utiliza la fórmula del IDM, sustituyendo la velocidad del vehículo líder por 0, durante un tiempo fijo T . La misma idea se utiliza para el caso de la parada de autobús, con la única diferencia que se pone velocidad de vehículo líder igual a cero, sólo a los vehículos de mayor tamaño (bus). El resultado obtenido fue que el modelo describe la dinámica de entrada y salida de vehículos de la intersección, incluyendo los semáforos y parada de autobuses.

- El programa `trafficSimulation` utilizado para realizar las simulaciones del modelo funcionó correctamente para describir todos los flujos de entrada y salida de vehículos de la intersección por separado; así como también describió correctamente los cambios de carril, el control de tráfico y parada de autobuses en escenarios simples. La simulación completa de la intersección con todos los semáforos sincronizados y todas las paradas de autobuses, no se pudo realizar debido a algunos errores de programación del software.

Bibliografía

- [1] Reglamento General de Transito y Seguridad Vial, Viceministerio de Transporte de El Salvador.
- [2] TRAFFIC FLOW THEORY, Characteristics, experimental methods, and numerical techniques, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Massachusetts, USA.
- [3] Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, cuarta edición, 2009. C. HENRY EDWARDS, DAVID E. PENNEY.
- [4] ANDRÁSFAI, B: Introductory Graph Teory. The Institute of Physics (1978).
- [5] BASIC PROBABILITY THEORY, Robert B. Ash. Department of Mathematics University of Illinois (2008).
- [6] Análisis numérico, séptima edición. Richard L. Burden, J. Douglas Faires.
- [7] Cálculo Vectorial, quinta edición. Anthony J. Tromba, Jerrold E. Marsden, Versión en español, UNAM.
- [8] Optimal Traffic Control, URBAN INTERSECTIONS, Slobodan Guberinic, Gordana Senborn, Bratislav Lazic (2008).
- [9] ANALYSIS OF CONFLICT SITUATIONS IN ROAD TRAFFIC ON ROUNDABOUTS, Vladislav Krivda, Technical University of Ostrava (2013).
- [10] Traffic Flow modeling by conservation laws, Maria Laura Delle Monache, Université Nice Sophia Antipolis, 2014.
- [11] FORMULATIONS, ISSUES, AND COMPARISON OF CAR-FOLLOWING MODELS, Venkata Siva Praveen Pasumarthy, Thesis, Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University.

-
- [12] Congested Traffic States in Empirical Observations and Microscopic Simulations, Martin Treiber, Ansgar Hennecke, and Dirk Helbing II. Institute of Theoretical Physics, University of Stuttgart, Pfaffenwaldring 57, D-70550 Stuttgart, Germany.
- [13] Generalized Force Model of Traffic Dynamics, Dirk Helbing and Benno Tilch II. Institute of Theoretical Physics, University of Stuttgart, 70550 Stuttgart, Germany.
- [14] Modeling Lane-changing decisions with MOBIL, Martin Treiber and Arne Kesting, Technische Universität Dresden, Institute Transport and Economics.
- [15] Optimal Traffic Control, URBAN INTERSECTIONS, Slobodan Guberinić, Gordana Senborn, Bratislav Lazić (2008).Appendix III

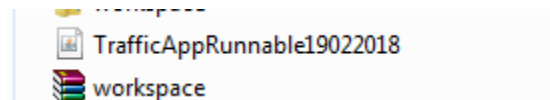
Anexos

Manual

En el presente manual se muestra una pequeña ejecución del programa utilizado en esta tesis.

Paso 1

Lo primero que se debe hacer es buscar el archivo ejecutable en java y abrirlo.



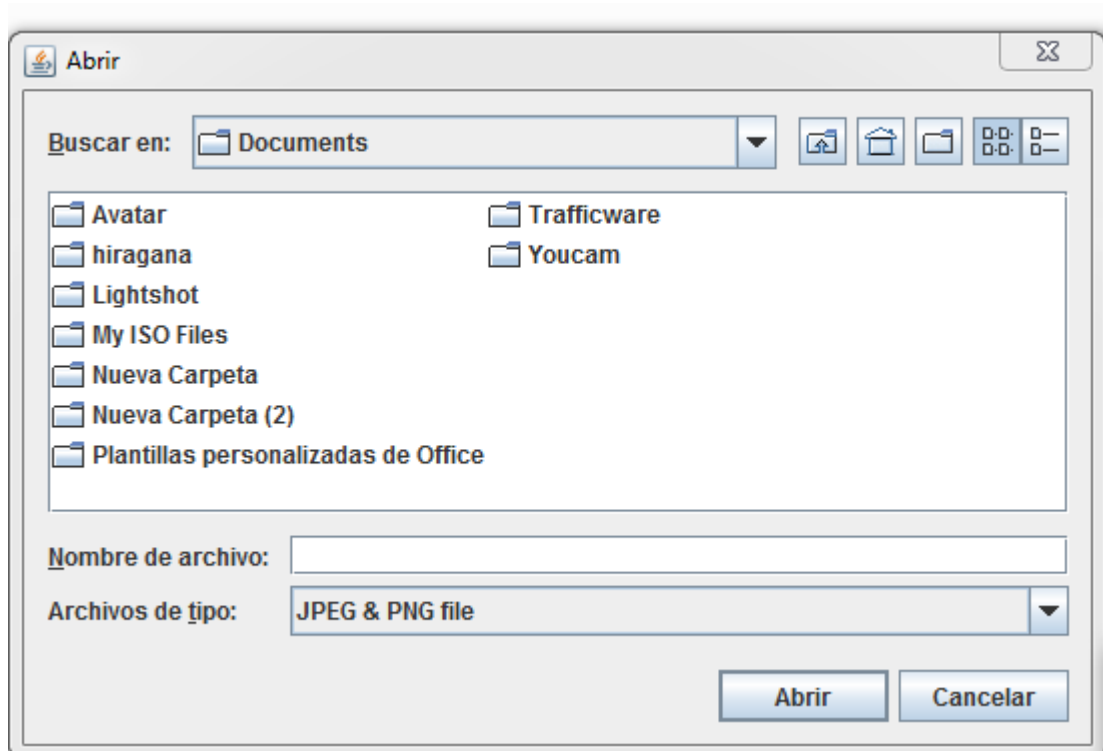
Paso 2

Luego el programa preguntara si deseamos cargar una imagen o dibujar una calle

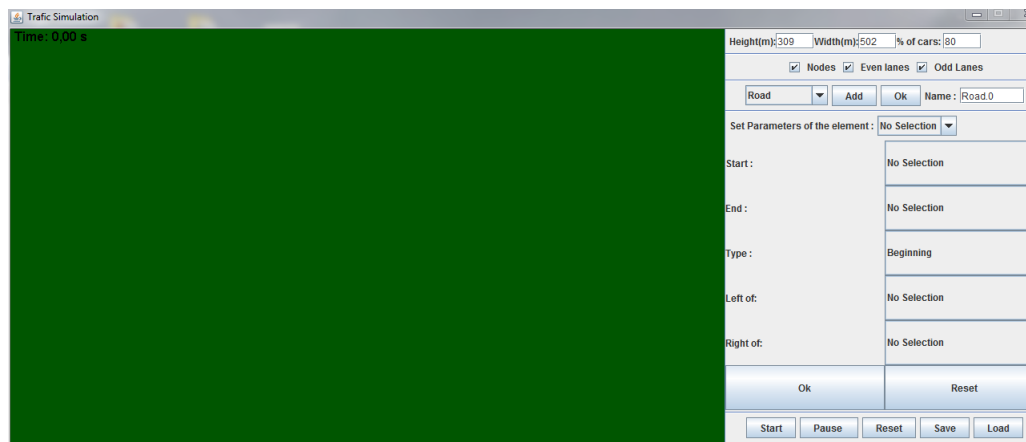


Paso 3

Seleccionaremos cargar una imagen, a la vez se abrirá una ventana para poder buscar la imagen que utilizaremos.



Paso 3.1 Este es el caso en el que no se cargue una imagen, entonces lo primero que pasará es que se abrirá la siguiente ventana.



Dado que no hay una imagen en la cual escribir se procederá a dibujar las callas como si hubiera una imagen, así como se muestra en la figura.

Luego se harán todos los pasos del manual que se han mostrado, dando como resultado lo que se muestra en la figura 5.11.

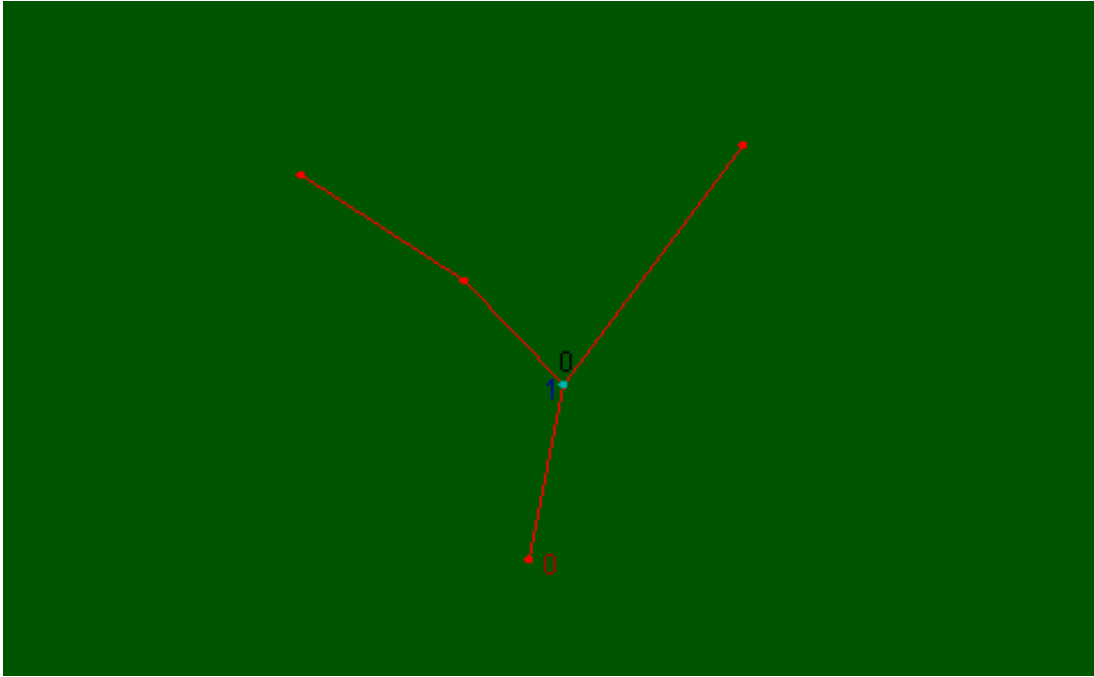


Figura 5.11:

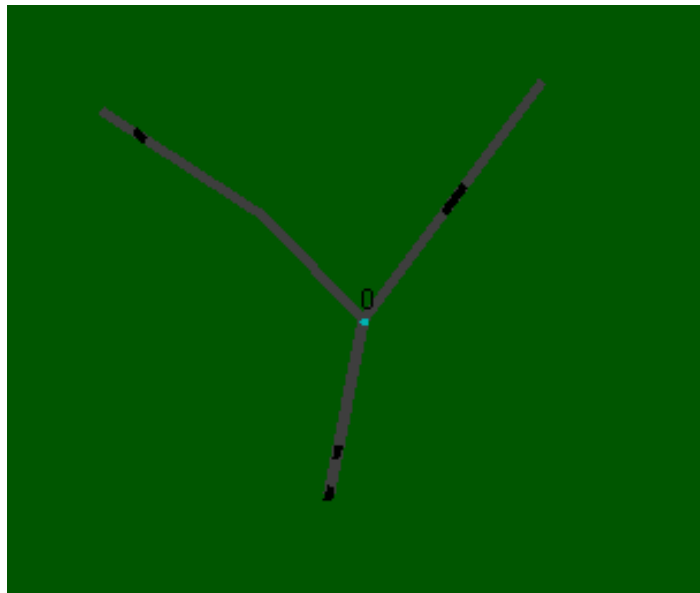
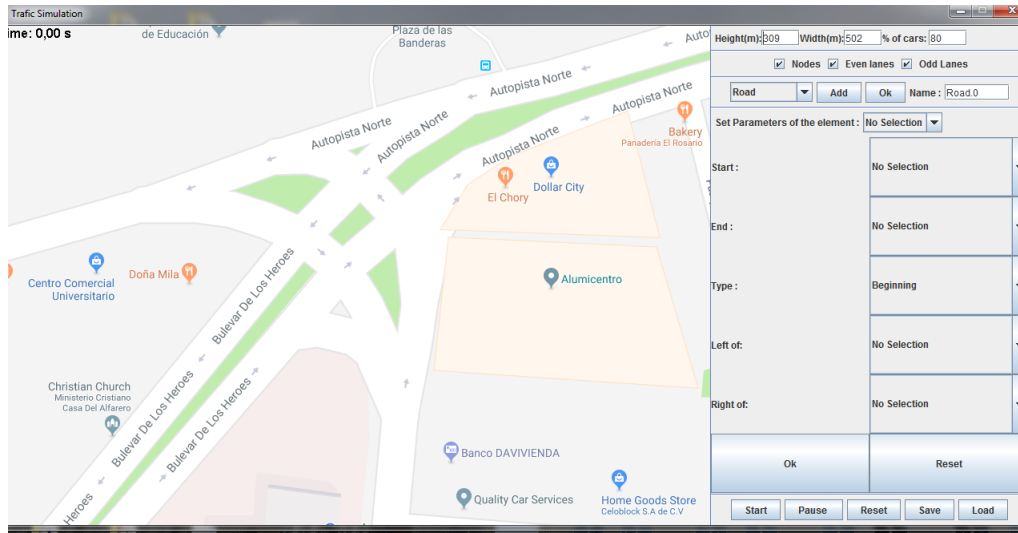


Figura 5.12:

Paso 4

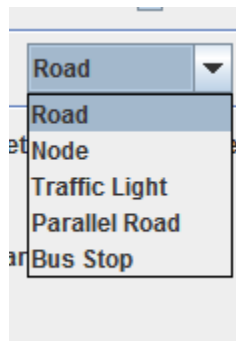
En este paso ya se ha decidido que se cargara una imagen, Para conveniencia de este manual cargaremos una imagen asociada a la intersección que deseamos optimizar. De inmediato se abrirá la siguiente ventana



Paso 5

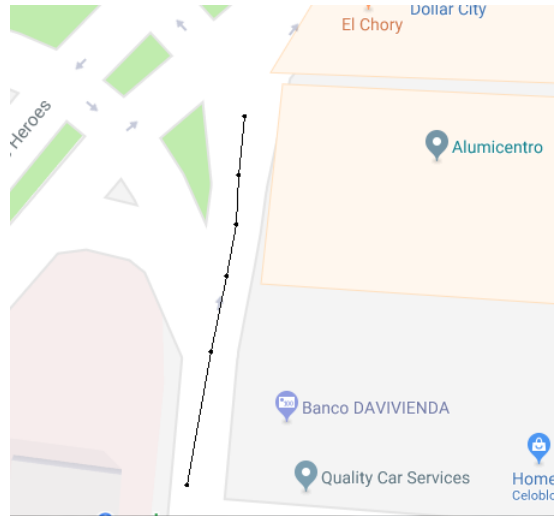
Se comenzará a trabajar sobre la imagen que se ha cargado, el programa tiene cualidades de dibujar calles, nodos, semaforos, calles paralelas y paradas de buses.

Para dibujar una calle seleccionaremos la opción road como se muestra en la figura.

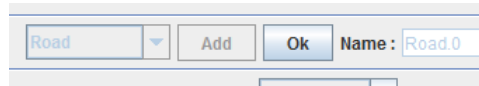


Paso 6

Para dibujar la calle solo se debe seleccionar la opción road y comenzar a trazar puntos sobre la imagen los cuales se irán convirtiendo en una línea.



Cuando se termine de dibujar la calle hay que validarla dando click en el boton ok como se muestra en la figura



Paso 7

Para agregar una calle hay que repetir el paso 5, en este caso agregaremos una calle que salga de la primera que se dibujo,esto con la finalidad de mostrar una pequeña parte de la simulación real. A continuación se muestra la calle que se dibujo ahora aparece roja porque ya esta validada, a partir de esta se comienza a dibujar la segunda calle.

Al agregar la calle se ve en color negro ya que aun no la hemos validado, pero cuando se valide cambiara a rojo de inmediato, como lo muestra la figura 5.12

Paso 8

Ahora se procederá a agregar un nodo;en este contexto se entenderá como nodo al espacio donde convergen una o varias redes de transporte

Nos ubicaremos en la barra donde previamente habíamos agregado las calles, ahora nuevamente damos click en la pestaña y seleccionamos la opción node,es importante aclarar que este nodo debe ser agregado exactamente en un punto donde coincidan las dos calles, como se muestra en la figura 5.13

El nodo aparecerá exactamente en el espacio donde convergen las dos calles de color azul como se muestra en la figura 5.14

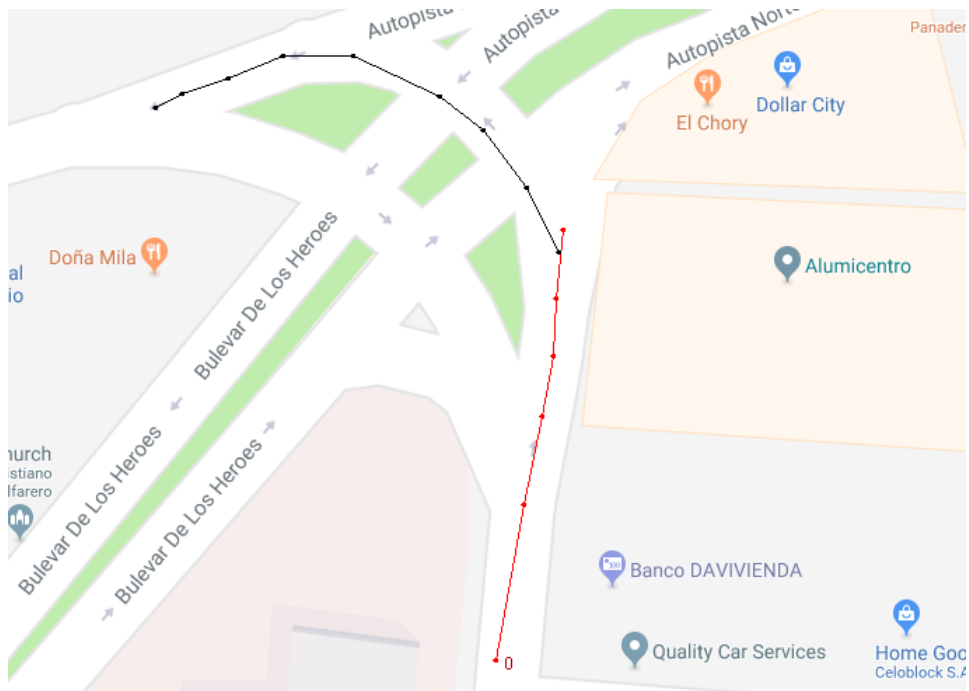
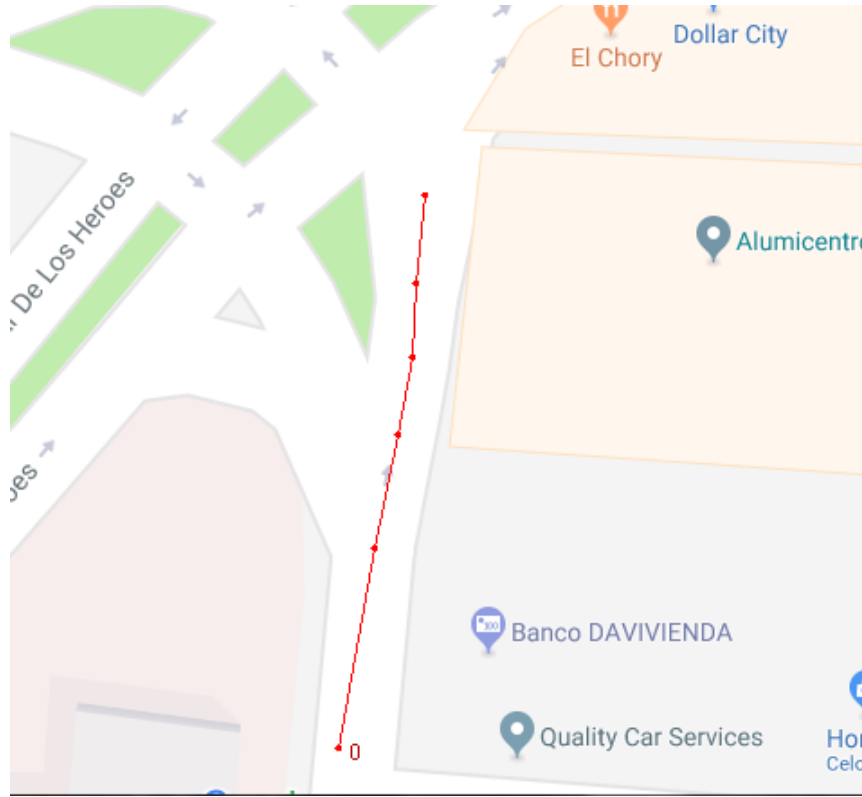


Figura 5.13:

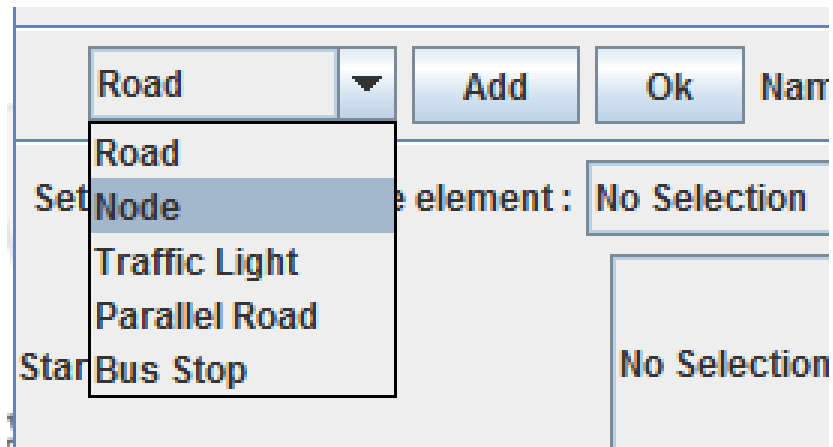


Figura 5.14:

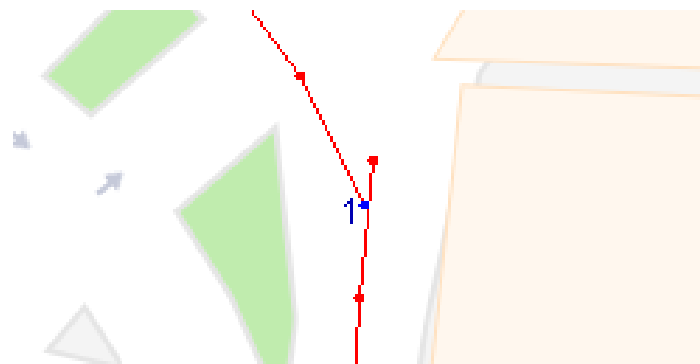
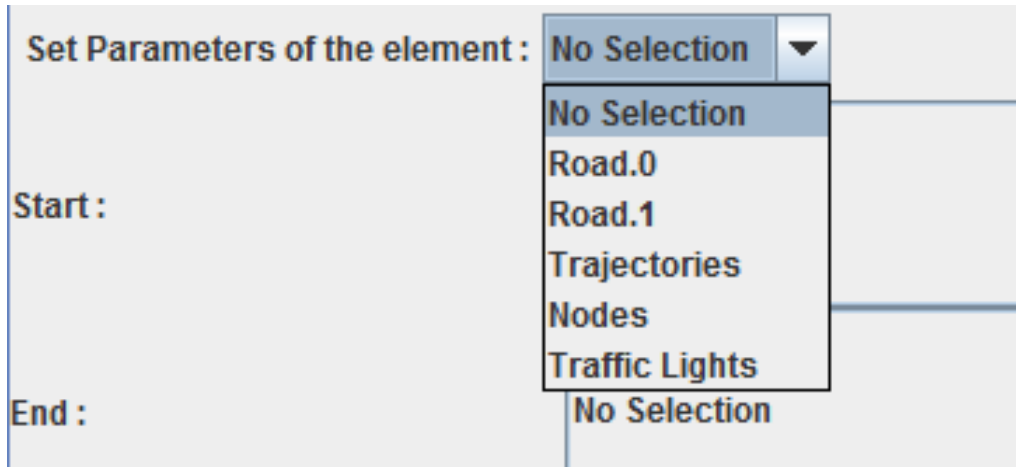


Figura 5.15:

Paso 9 En este paso se procederá a describir el movimiento de los vehículos sobre las calles que se han establecido. Para ellos hay que ir a la opción set parameters the elements (Conjunto de parámetros de los elementos)

En este caso comenzamos a definir la trayectoria de la primera calle, al desplegar la pestaña del



conjunto de parámetros hay que seleccionar road 0 que es como se define la primera calle y lo validamos dando click en ok.

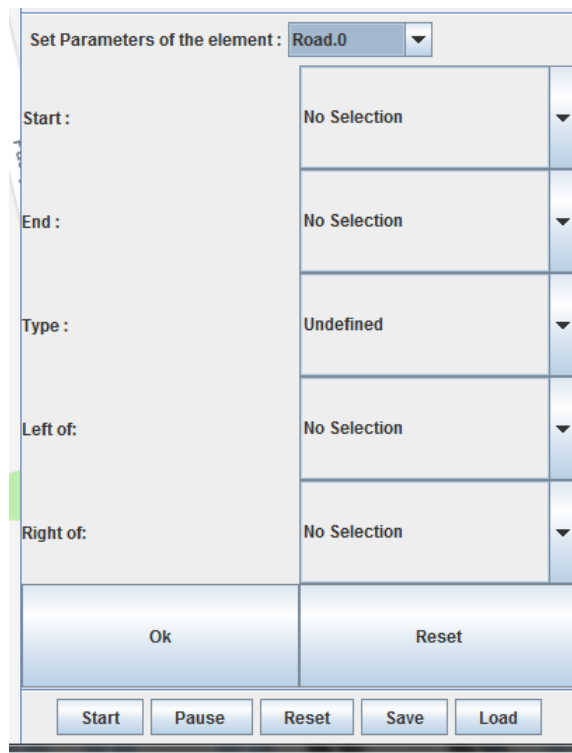


Figura 5.16:

En la siguiente tabla se muestra como se ha definido la trayectoria de road 0, en este caso se

ha definido road 0, como el comienzo de una carretera por esa razón en type se define con un Beginning y lo validamos dando click en ok.

Set Parameters of the element : Road.0	
Start :	Node.0
End :	No Selection
Type :	Beginning
Left of:	No Selection
Right of:	No Selection
<input type="button" value="Ok"/> <input type="button" value="Reset"/>	

Figura 5.17:

Lo mismo pasara cuando se defina la trayectoria de road 1, con la diferencia que el type será un end. Esto se muestra en la figura 5.17

Así como se han definido las trayectorias de las carreteras hay que definir el nodo, validando esta acción con el botón ok. Esto se muestra en la figura 5.18.

Paso 10 Al haber validado las calles y los nodos de click en star y la simulación con las trayectorias establecidas comenzaran a verse en pantalla, como se observa en la figura 5.19.

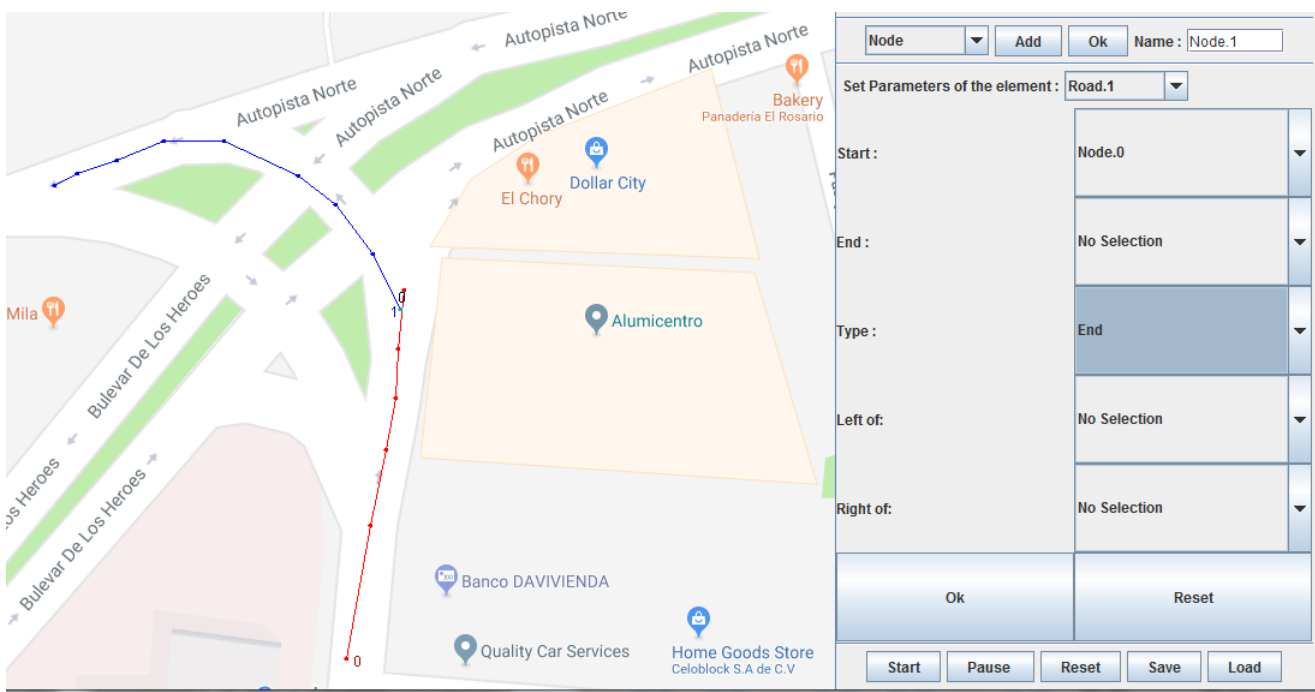


Figura 5.18:

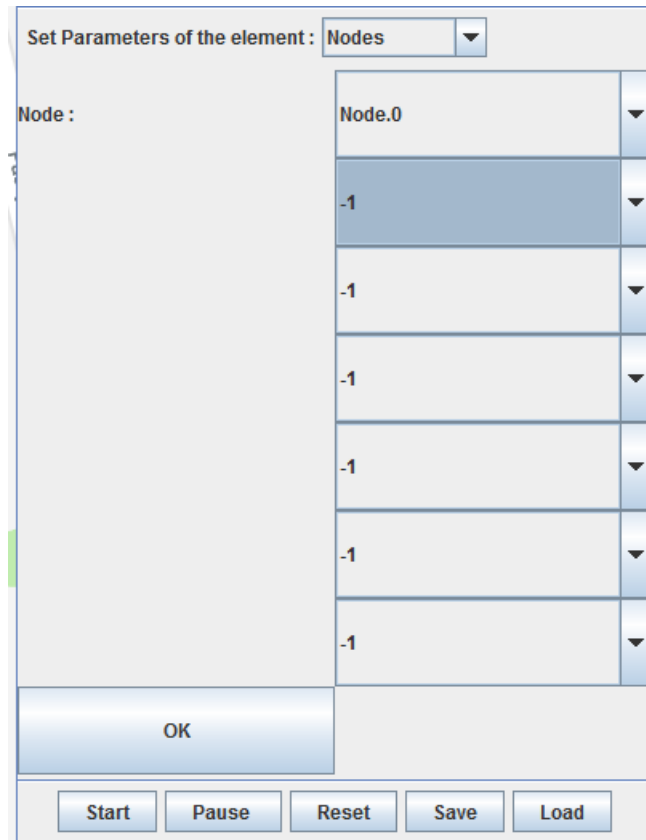


Figura 5.19:

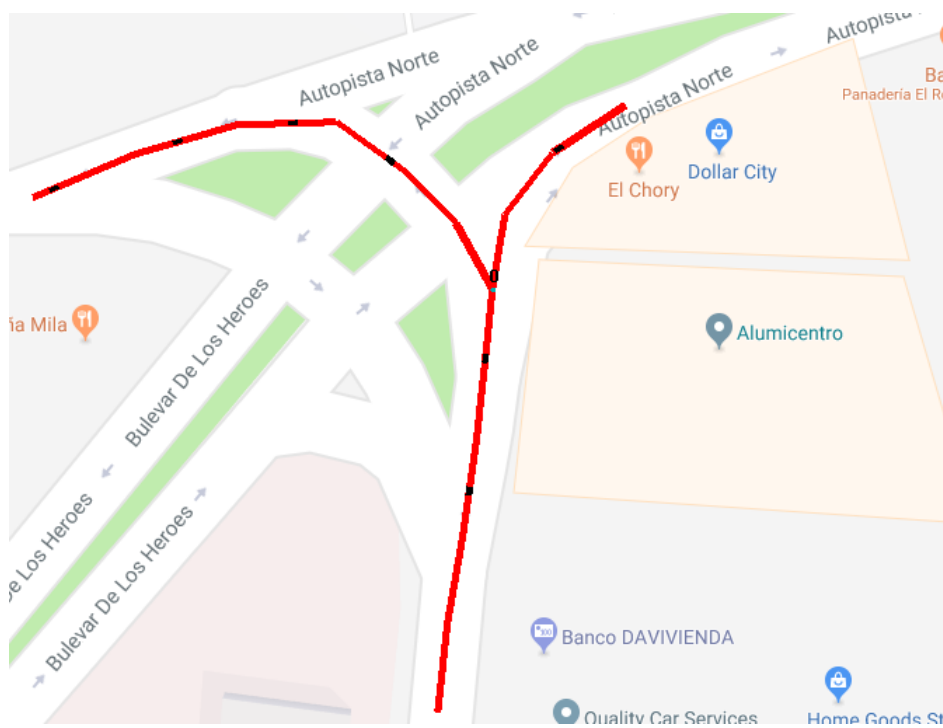


Figura 5.20: