



Universidad de El Salvador

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA



EL CONO DE LUZ Y EL MODELO DEL
HIPERBOLOIDE DE LA GEOMETRÍA
HIPERBÓLICA TRIDIMENSIONAL

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Licenciado en Matemática

PRESENTA:

Br. Víctor Mauricio Ochoa García, OG12002

ASESOR EXTERNO:

Dr. Manuel Cruz López

ASESORES INTERNOS:

Lic. Ernesto Américo Hidalgo Castellanos

Dr. Dimas Noé Tejada Tejada

Ciudad universitaria, 27 de enero de 2019

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

MSc. ROGER ARMANDO ARIAS

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO:

ING. NELSON BERNABÉ GRANADOS

SECRETARIO GENERAL:

MSc. CRISTOBAL HERNAN RÍOS BENITEZ

FISCAL GENERAL:

LICDA. BEATRIZ MÉLENDEZ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

LIC. MAURICIO HERNÁN LOVO CÓRDOVA

VICE-DECANO:

LIC. CARLOS ANTONIO QUINTANILLA APARICIO

SECRETARIA:

LICDA. DAMARIS MELANY HERRERA DE BELTRÁN

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR DE ESCUELA:

DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES

ASESORES:

LIC. ERNESTO AMÉRICO HIDALGO CASTELLANOS

DR. MANUEL CRUZ LÓPEZ

DR. DIMAS NOÉ TEJADA TEJADA

Dedicatoria

A mis padres, fuente de inspiración, que me han inculcado la lucha constante para alcanzar mis sueños y han estado conmigo incluso cuando he fallado.

A mis hermanos, demás familiares y amigos, que de una u otra forma me han apoyado para alcanzar este logro.

Agradecimientos

A mis asesores, Lic. Américo, Dr. Manuel y Dr. Dimas, por haber confiado en que podría echar mano a este trabajo. Por su paciencia ante mis errores, por sus consejos más allá de los temas académicos.

¡Muchas gracias a todos!

Víctor Ochoa.

Índice general

Introducción	2
Metodología	3
1. Geometría hiperbólica	4
1.1. El espacio de Minkowski	4
1.1.1. Ángulo temporal entre vectores temporales	11
1.2. Espacio hiperbólico de dimensión 3	12
1.2.1. Producto cruz lorentziano	13
1.2.2. Geodésicas hiperbólicas	16
1.2.3. Hiperplanos	20
1.2.4. Ángulo espacial entre vectores espaciales	22
1.2.5. Ángulo temporal entre vectores espaciales	23
1.2.6. Ángulo entre vectores espaciales y temporales	24
1.3. Longitud de arco hiperbólico	24
1.4. Relatividad especial de Einstein	27
2. Geometría diferencial de curvas y superficies en \mathbb{R}^3	38
2.1. Curvas	38
2.1.1. Curvas en el espacio	38
2.1.2. Curvas regulares; longitud de arco	39
2.1.3. Triedro de Frenet-Serret	40
2.2. Superficies regulares	42

2.2.1. El plano tangente; la diferencial de una aplicación	43
2.2.2. La primera forma fundamental; área	45
2.3. Geometría de la aplicación de Gauss	48
2.3.1. El teorema de Gauss y las ecuaciones de compatibilidad	53
2.3.2. Transporte paralelo. Geodésicas	54
2.3.3. El teorema de Gauss-Bonnet	59
3. Curvas y superficies en el espacio de Lorentz $\mathbb{R}^{2,1}$	61
3.1. Teoría local de curvas	66
3.2. Curvatura y torsión. Ecuaciones de Frenet	69
3.2.1. Curvas temporales	70
3.2.2. Curvas espaciales	72
3.2.3. Curvas luminosas	74
3.3. Teoría local de superficies	78
3.3.1. La primera forma fundamental de Minkowski	78
3.3.2. Ecuaciones de compatibilidad	83
3.3.3. Direcciones principales	86
3.3.4. Triedro de Darboux	91
3.4. Conjetura de Carathéodory en el espacio $\mathbb{R}^{2,1}$	93
Epílogo	98

Introducción

El ser humano movido por su curiosidad ha intentado en el pasar de los siglos explicar y modelar todo lo que le rodea. La geometría desde sus inicios formales con Euclides ha jugado un papel importante en el desarrollo de la matemática, sirviendo de gran manera para la visualización e intuición de conceptos matemáticos profundos. Durante dos mil años los matemáticos intentaron deducir el quinto postulado de Euclides a partir de los cuatro postulados más simples. En cada caso se redujo la prueba del quinto postulado a la conjunción de los cuatro primeros postulados con un postulado natural que, en efecto, resultó ser equivalente al quinto. Este nuevo postulado dio paso a la creación de una nueva geometría, la *geometría hiperbólica* que para el momento de su postulación representó para los matemáticos ciertos desafíos.

En el presente trabajo hacemos un estudio del modelo del hiperboloide , prestando atención al espacio de *Minkowski* y al espacio de *Lorentz de dimensión 3*.

En el capítulo 1 describiremos los elementos geométricos del modelo del hiperboloide, tales como: la métrica que se induce sobre este espacio, su grupo de transformación, la forma que tienen las geodésicas en este espacio. Además, se explicará la utilidad del este modelo geométrico en la relatividad especial de Einstein.

En el capítulo 2 daremos un breve recorrido sobre la geometría diferencial sobre el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , empezando con la teoría local de curvas, triedro de Frenet para curvas en el espacio \mathbb{R}^3 y la teoría local de superficies, la primera y segunda forma fundamental, aplicación de Gauss, curvatura media y gaussiana, concluyendo con el teorema de Gauss-Bonet.

El tema que se estudia en el capítulo 3 se centra en la teoría local de curvas y superficies en el espacio de Lorentz $\mathbb{R}^{2,1}$, haremos una clasificación causal de las curvas a partir de su vector tangente y podremos apreciar que en este espacio surgen varios tipos de triedros de Frenet. De igual forma, en la teoría local de superficies haremos una clasificación causal de sus puntos a partir del signo de la primera forma fundamental, daremos un análogo de los conceptos vistos en el capítulo 2, mediante las líneas de curvatura y sus direcciones principales estudiaremos la manera en que se definirán los puntos *umbílicos*; para concluir con la *conjetura de Carathéodory* la cual nos asegurará que en una superficie cerrada y convexa en el espacio de Lorentz $\mathbb{R}^{2,1}$ habrán por los menos dos puntos umbílicos y que además todos ellos serán espaciales.

Metodología

Para cumplir los objetivos propuestos en la investigación se realizarán las siguientes etapas:

1. **Revisión bibliográfica:** Se consultarán diferentes fuentes bibliográficas que aborden el tema de investigación con el fin de conocer, comparar y relacionar diversos puntos de vista. Luego se seleccionarán algunas de las fuentes para que sirvan de documentos base.
2. **Demostración de resultados expuestos:** Se demostrarán con claridad los teoremas, lemas y otros resultados, explicando además sus usos en el área de investigación.
3. **Uso de Software especializado para la construcción de ejemplos.**
4. **Exposiciones:** Se realizarán dos defensas
 - Primera defensa: presentación del perfil del trabajo de investigación.
 - Segunda defensa: presentación final del trabajo de investigación.

Capítulo 1

Geometría hiperbólica

Las ideas sobre el espacio y el tiempo que deseo mostrarles hoy descansan en el suelo firme de la física experimental, en la cual yace su fuerza. Son ideas radicales. El espacio y el tiempo por separado están destinados a desvanecerse entre las sombras y tan sólo una unión de ambos puede representar la realidad.

Hermann Minkowski

1.1. El espacio de Minkowski

Si \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores en \mathbb{R}^4 ; el producto interno lorentziano de \mathbf{x} e \mathbf{y} está definido como el número real

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4. \quad (1.1.1)$$

DEFINICIÓN 1.1: Un *producto interior* sobre un espacio vectorial real V es una función de $V \times V$ a \mathbb{R} , denotado por $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L$, tal que para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ y $k \in \mathbb{R}$ se cumple:

- (1) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_L = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_L + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_L$,
- (2) $\langle k\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = k\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L$,
- (3) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_L$.

El espacio \mathbb{R}^4 junto con el producto interno lorentziano es llamado *Espacio lorentziano de dimensión 4* o *Espacio de Minkowski*, y es denotado por $\mathbb{R}^{3,1}$. Por ejemplo, en la teoría de la relatividad especial, $\mathbb{R}^{3,1}$ es un modelo del espacio-tiempo. Las primeras tres coordenadas de

un vector $\mathbf{x} = (x, y, z, t)$ en $\mathbb{R}^{3,1}$ son las coordenadas espaciales, y la última es la coordenada del tiempo.

Definimos el vector $\bar{\mathbf{x}}$ en \mathbb{R}^3 por

$$\bar{\mathbf{x}} = (x, y, z), \quad (1.1.2)$$

es decir $\bar{\mathbf{x}}$ denotará las coordenadas espaciales. Si $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ e $\mathbf{y} = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ son vectores en $\mathbb{R}^{3,1}$, tenemos

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = -t_1 t_2 + \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{y}}. \quad (1.1.3)$$

Sea \mathbf{x} un vector en $\mathbb{R}^{3,1}$. El *módulo* o *norma lorentziana* de \mathbf{x} está definida por el número complejo

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1.4)$$

Aquí \mathbf{x} es positivo, cero o positivo imaginario (exactamente se puede obtener un imaginario positivo puro, esto por la forma en que se ha definido el producto interior lorentziano ya que puede pasar que $t^2 > x^2 + y^2 + z^2$). Si $\|\mathbf{x}\|$ es positivo imaginario, denotamos su valor absoluto (módulo) por $|\widehat{\mathbf{x}}|$. Se tiene entonces

$$\|\mathbf{x}\|^2 = -t^2 + |\bar{\mathbf{x}}|_e^2, \quad (1.1.5)$$

donde $|\bar{\mathbf{x}}|_e$ denotará la norma euclídea de $\bar{\mathbf{x}}$ en \mathbb{R} , es decir, $|\bar{\mathbf{x}}|_e = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

El conjunto de todos los \mathbf{x} en $\mathbb{R}^{3,1}$ tal que $\|\mathbf{x}\| = 0$ es el hipercono C^3 definido por la ecuación $|t| = |\bar{\mathbf{x}}|_e$. El hipercono es llamado el *Cono de luz* de $\mathbb{R}^{3,1}$. (Ver figura 1.1).

En el espacio de Minkowski vamos a distinguir tres tipo de vectores: *luminosos*, *espaciales* y *temporales*

Si $\|\mathbf{x}\| = 0$, \mathbf{x} se dice que es *luminoso*. Un vector luminoso se dice positivo si y sólo si $t > 0$.

Si $\|\mathbf{x}\| > 0$, \mathbf{x} se dice que es *espacial*. Notar que \mathbf{x} es espacial si y sólo si $|t| < |\bar{\mathbf{x}}|_e$. El exterior de C^3 en $\mathbb{R}^{3,1}$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{3,1}$ que consta de todos los vectores espaciales.

Si $\|\mathbf{x}\|$ es imaginario, \mathbf{x} se dice que es *temporal*. Notar que \mathbf{x} es espacial si y sólo si $|t| > |\bar{\mathbf{x}}|_e$. Un vector \mathbf{x} temporal se dice positivo si y sólo si $t > 0$. El interior de C^3 en $\mathbb{R}^{3,1}$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{3,1}$ que consiste de todos los vectores temporales.

Diremos que dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} de $\mathbb{R}^{3,1}$ tienen la misma *paridad* si y sólo si son ambos positivos o ambos negativos.

¹ $|\cdot|_e$ denotará la norma euclídea y $|\cdot|$ el valor absoluto

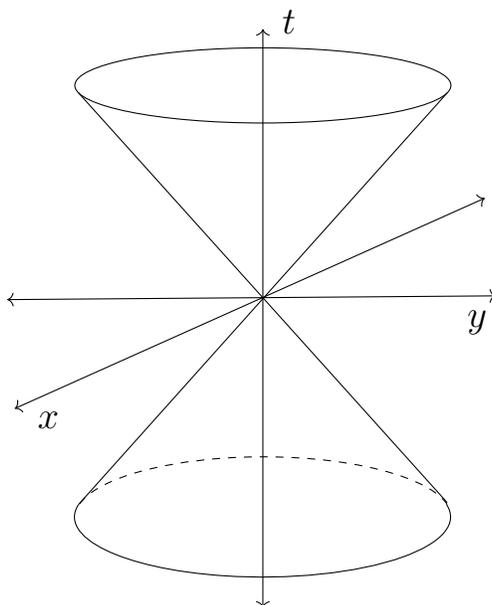


Figura 1.1: Cono de luz C^2 de $\mathbb{R}^{2,1}$.

TEOREMA 1.1: Si \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores diferentes de cero y que no son espaciales en $\mathbb{R}^{3,1}$ con la misma paridad, entonces $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L \leq 0$, la igualdad se dará si y sólo si son vectores luminosos linealmente dependientes.

TEOREMA 1.2: Si \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores que no son espaciales y distintos de cero en $\mathbb{R}^{3,1}$, con la misma paridad, y $k > 0$, entonces

- (1) El vector $k\mathbf{x}$ tiene el mismo tipo y paridad que \mathbf{x} ,
- (2) El vector $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es no espacial con la misma paridad que \mathbf{x} e \mathbf{y} ; además, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es luminoso si y sólo si \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores luminosos linealmente dependientes.

Demostración:

Para demostrar (1) observemos que

- \mathbf{x} es luminoso $\iff \|\mathbf{x}\| = 0$, para demostrar que $k\mathbf{x}$ también es luminoso tenemos que

$$\|k\mathbf{x}\| = k\|\mathbf{x}\| = 0,$$

por tanto $k\mathbf{x}$ es también luminoso .

- \mathbf{x} es temporal $\iff |t| > |\bar{\mathbf{x}}|_e$, para demostrar que $k\mathbf{x}$ también es temporal tenemos que

$$|(kt)| = |kt| = k|t| > k|\bar{\mathbf{x}}|_e = |k\bar{\mathbf{x}}|_e = |\overline{k\mathbf{x}}|_e,$$

por tanto $k\mathbf{x}$ es también temporal.

Para demostrar (2) observemos que:

Como \mathbf{x} e \mathbf{y} son tipo luz o tipo tiempo se tiene que:

- $|t_1| \geq |\bar{\mathbf{x}}|_e \Rightarrow |t_1|^2 \geq |\bar{\mathbf{x}}|_e^2$, luego por ecuación 1.1.5; $0 \geq -|t_1|^2 + |\bar{\mathbf{x}}|_e^2 = \|\mathbf{x}\|^2$; es decir, $\|\mathbf{x}\| \leq 0$
- De igual manera para \mathbf{y} tenemos que $|t_2| \geq |\bar{\mathbf{y}}|_e \Rightarrow |t_2|^2 \geq |\bar{\mathbf{y}}|_e^2$, luego por ecuación 1.1.5, $0 \geq -|t_2|^2 + |\bar{\mathbf{y}}|_e^2 = \|\mathbf{y}\|^2$; es decir, $\|\mathbf{y}\| \leq 0$

Luego aplicando lo anterior y el Teorema 1.1, se tiene

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L + \|\mathbf{y}\|^2 \leq 0.$$

Por lo tanto $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ tiene la misma paridad que \mathbf{x} e \mathbf{y} . La igualdad se da si y sólo si $\|\mathbf{x}\| = 0$, $\|\mathbf{y}\| = 0$ y $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = 0$, aplicando Teorema 1.1 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es luminoso si y sólo si \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores luminosos linealmente dependientes. ■

COROLARIO 1.1: El conjunto de todos los vectores temporales positivos es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^{3,1}$.

Transformaciones de Lorentz.

DEFINICIÓN 1.2: Una función $\phi : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ es una **Transformación de Lorentz** si y sólo si

$$\langle \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}) \rangle_L = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L, \quad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{3,1}$$

Una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ de $\mathbb{R}^{3,1}$ se dice que es *Lorentz Ortonormal* si y sólo si $\langle v_4, v_4 \rangle_L = -1$ y $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle_L = \delta_{ij}$ ² otro caso. Notar que la base estándar $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ de $\mathbb{R}^{3,1}$ es Lorentz ortonormal

TEOREMA 1.3: una función $\phi : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ es una **Transformación de Lorentz** si y sólo si ϕ es lineal y $\{\phi(\mathbf{e}_1), \dots, \phi(\mathbf{e}_4)\}$ es una base Lorentz ortonormal de $\mathbb{R}^{3,1}$

Demostración:

(\implies) Supongamos que ϕ es una transformación Lorentz de $\mathbb{R}^{3,1}$. Entonces tenemos que

$$\langle \phi(\mathbf{e}_4), \phi(\mathbf{e}_4) \rangle_L = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \rangle_L = -1,$$

y

$$\langle \phi(\mathbf{e}_i), \phi(\mathbf{e}_j) \rangle_L = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

² δ_{ij} es la delta de Kronecker

Entonces falta ver que $\phi(\mathbf{e}_1), \phi(\mathbf{e}_2), \phi(\mathbf{e}_3), \phi(\mathbf{e}_4)$ son linealmente independientes, entonces supongamos que

$$c_1\phi(\mathbf{e}_1) + c_2\phi(\mathbf{e}_2) + c_3\phi(\mathbf{e}_3) + c_4\phi(\mathbf{e}_4) = 0.$$

si tomamos el producto interior lorentziano de esta ecuación con cada $\phi(\mathbf{e}_j)$ con $j = 1, 2, 3, 4$, para $j = 1$ obtenemos que

$$\langle c_1\phi(\mathbf{e}_1) + c_2\phi(\mathbf{e}_2) + c_3\phi(\mathbf{e}_3) + c_4\phi(\mathbf{e}_4), \phi(\mathbf{e}_1) \rangle_L = \langle 0, \phi(\mathbf{e}_1) \rangle_L$$

$$c_1 \langle \phi(\mathbf{e}_1), \phi(\mathbf{e}_1) \rangle_L + c_2 \langle \phi(\mathbf{e}_2), \phi(\mathbf{e}_1) \rangle_L + c_3 \langle \phi(\mathbf{e}_3), \phi(\mathbf{e}_1) \rangle_L + c_4 \langle \phi(\mathbf{e}_4), \phi(\mathbf{e}_1) \rangle_L = 0,$$

obteniendo así que $c_1 = 0$, haciendo un proceso análogo para $\phi(\mathbf{e}_2), \phi(\mathbf{e}_3), \phi(\mathbf{e}_4)$ se obtiene que $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, se deduce entonces que $\phi(\mathbf{e}_1), \phi(\mathbf{e}_2), \phi(\mathbf{e}_3), \phi(\mathbf{e}_4)$ son linealmente independientes.

Podemos decir entonces que $\{\phi(\mathbf{e}_1), \phi(\mathbf{e}_2), \phi(\mathbf{e}_3), \phi(\mathbf{e}_4)\}$ es una base Lorentz ortonormal de $\mathbb{R}^{3,1}$.

Falta comprobar que ϕ es lineal, entonces, sea x en $\mathbb{R}^{3,1}$, existen coeficientes c_1, c_2, c_3, c_4 en \mathbb{R} tal que

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^4 c_i \phi(\mathbf{e}_i).$$

Como $\{\phi(\mathbf{e}_1), \phi(\mathbf{e}_2), \phi(\mathbf{e}_3), \phi(\mathbf{e}_4)\}$ es una base Lorentz ortonormal, tenemos

$$-c_4 = \langle \phi(x), \phi(\mathbf{e}_4) \rangle_L = \langle x, \mathbf{e}_4 \rangle_L = -t,$$

y

$$c_1 = \langle \phi(x), \phi(\mathbf{e}_1) \rangle_L = \langle x, \mathbf{e}_1 \rangle_L = x,$$

$$c_2 = \langle \phi(x), \phi(\mathbf{e}_2) \rangle_L = \langle x, \mathbf{e}_2 \rangle_L = y,$$

$$c_3 = \langle \phi(x), \phi(\mathbf{e}_3) \rangle_L = \langle x, \mathbf{e}_3 \rangle_L = z,$$

sustituyendo en la siguiente ecuación se tiene que

$$\phi(x) = \phi(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + t\mathbf{e}_4) = \sum_{i=1}^4 c_i \phi(\mathbf{e}_i) = x\phi(\mathbf{e}_1) + y\phi(\mathbf{e}_2) + z\phi(\mathbf{e}_3) + t\phi(\mathbf{e}_4).$$

Por lo tanto ϕ es lineal.

Recíprocamente, supongamos que ϕ es lineal y que $\{\phi(\mathbf{e}_1), \phi(\mathbf{e}_2), \phi(\mathbf{e}_3), \phi(\mathbf{e}_4)\}$ es una base Lorentz ortonormal de $\mathbb{R}^{3,1}$, entonces sabemos que

$$\langle \phi(\mathbf{e}_4), \phi(\mathbf{e}_4) \rangle_L = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \rangle_L = -1,$$

y

$$\langle \phi(\mathbf{e}_i), \phi(\mathbf{e}_j) \rangle_L = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Así podemos simplificar en la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}) \rangle_L &= \langle \phi(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3 + t_1\mathbf{e}_4), \phi(x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3 + t_2\mathbf{e}_4) \rangle_L \\ &= \langle (x_1\phi(\mathbf{e}_1) + y_1\phi(\mathbf{e}_2) + z_1\phi(\mathbf{e}_3) + t_1\phi(\mathbf{e}_4)), (x_2\phi(\mathbf{e}_1) + y_2\phi(\mathbf{e}_2) + z_2\phi(\mathbf{e}_3) + t_2\phi(\mathbf{e}_4)) \rangle_L \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2 \\ &= \langle x, y \rangle_L. \end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ es una transformación de Lorentz. ■

Una matriz real A de $n \times n$ se dice que es lorentziana si y sólo si la transformación lineal asociada $A : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$, definida por $A = A\mathbf{x}$ es lorentziana. El conjunto de todas las matrices lorentzianas de 4×4 junto con la multiplicación matricial forman un grupo $O(1, 3)$, llamado el *Grupo de Lorentz* de matrices de 4×4 .

TEOREMA 1.4: Sea A una matriz real de 4×4 , y sea J una matriz diagonal de 4×4 definida por

$$J = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$$

entonces lo siguiente es equivalente:

- (1) La matriz A es lorentziana,
- (2) Las columnas de A forman una base Lorentz ortonormal de $\mathbb{R}^{3,1}$,
- (3) La matriz A satisface la ecuación $A^t J A = J$,
- (4) La matriz A satisface la ecuación $A J A^t = J$,
- (5) Las filas de A forman una base Lorentz ortonormal de $\mathbb{R}^{3,1}$.

Sea A una matriz lorentziana. Como $A^t J A = J$, tenemos que $(\det A)^2 = 1$. Así $\det A = \pm 1$. Sea $SO(1, 3)$ el conjunto de todas las matrices A de $O(1, 3)$ tal que $\det A = 1$. Entonces $SO(1, 3)$ es un subgrupo de índice dos en $O(1, 3)$. El grupo $SO(1, 3)$ es llamado *Grupo Especial de Lorentz*.

Sea $PO(1, 3)$ el conjunto de todas las matrices positivas en $O(1, 3)$. Entonces $PO(1, 3)$ es un subgrupo de índice dos en $O(1, 3)$. EL grupo de las matrices positivas de Lorentz $PO(1, 3)$ es llamado el *El Grupo Positivo de Lorentz*. Igualmente, sea $PSO(1, 3)$ el conjunto de todas las matrices positivas en $SO(1, 3)$. Entonces $PSO(1, 3)$ es un subgrupo de índice dos en $SO(1, 3)$. El grupo $PSO(1, 3)$ es llamado *Grupo Especial Positivo de Lorentz*.

DEFINICIÓN 1.3: Dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{3,1}$ son Lorentz ortogonal si y sólo si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = 0$.

TEOREMA 1.5: Sean x e y vectores Lorentz ortogonales diferentes de cero en $\mathbb{R}^{3,1}$. Si x es temporal, entonces y es espacial.

DEFINICIÓN 1.4: Sea V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{3,1}$. Entonces V se dice que es

1. Temporal si y solo si V tiene un vector temporal,
2. Espacial si y solo si todo vector diferente de cero en V es espacial,
3. Luminoso en otro caso.

TEOREMA 1.6: Para cada dimensión m , la acción natural de $PO(1, 3)$ sobre el conjunto de dimensión m del subespacio vectorial temporal de $\mathbb{R}^{3,1}$ es transitivo.

Demostración:

Sea V un subespacio vectorial temporal de dimensión m en $\mathbb{R}^{3,1}$. Identificaremos $\mathbb{R}^{m-1,1}$ con el subespacio de $\mathbb{R}^{3,1}$ abarcado por los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$. Entonces, es suficiente demostrar que existe una matriz $A \in PO(1, 3)$ tal que $A(\mathbb{R}^{m-1,1}) = V$. Elegimos una base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ de $\mathbb{R}^{3,1}$ tal que \mathbf{u}_4 es un vector temporal positivo de V y $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ es una base de V . Aplicaremos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt sobre $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$. Entonces sea $\mathbf{w}_4 = \mathbf{u}_4 / |\widehat{\mathbf{u}_4}|$. Entonces tenemos que $\langle \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_4 \rangle_L = -1$. Luego, por el proceso de Gram-Schmidt sea $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 + \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_4 \rangle_L \mathbf{w}_4$. Entonces \mathbf{v}_3 es un vector diferente de cero, ya que \mathbf{u}_4 y \mathbf{u}_3 son vectores linealmente independientes por ser tomados de la base de $\mathbb{R}^{3,1}$; además

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_4, \mathbf{v}_3 \rangle_L &= \langle \mathbf{w}_4, \mathbf{u}_3 + \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_4 \rangle_L \mathbf{w}_4 \rangle_L \\ &= \langle \mathbf{w}_4, \mathbf{u}_3 \rangle_L + \langle \mathbf{w}_4, \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_4 \rangle_L \mathbf{w}_4 \rangle_L \\ &= \langle \mathbf{w}_4, \mathbf{u}_3 \rangle_L + \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_4 \rangle_L \langle \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_4 \rangle_L \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema 1.1.3 concluimos que \mathbf{v}_3 es un vector espacial. Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 / \|\mathbf{v}_3\|, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_4 \rangle_L \mathbf{w}_4 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_3 \rangle_L \mathbf{w}_3, \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 / \|\mathbf{v}_2\|, \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_4 \rangle_L \mathbf{w}_4 - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_3 \rangle_L \mathbf{w}_3 - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_L \mathbf{w}_2, \\ \mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 / \|\mathbf{v}_1\|. \end{aligned}$$

Hemos construido entonces el conjunto $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ que cumple con ser una base Lorentz ortonormal de $\mathbb{R}^{3,1}$ y $\{\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ es una base para V . Sea A una matriz de 4×4 cuyas columnas son los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$, entonces por el teorema 1.4 A es lorentziana, y $A(\mathbb{R}^{m-1,1}) = V$; además, A es positiva ya que $A\mathbf{e}_4 = \mathbf{w}_4$ es un vector temporal positivo. ■

TEOREMA 1.7: Sea \mathbf{x}, \mathbf{y} vectores temporales positivos de $\mathbb{R}^{3,1}$. Entonces $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ con igualdad si y sólo si \mathbf{x} e \mathbf{y} son linealmente dependientes.

Demostración:

Por teorema 1.6, existe una matriz $A \in PO(1, 3)$ tal que $A\mathbf{x} = k\mathbf{e}_4$, como A es lorentziana entonces la transformación lineal asociada a A es lorentziana, es decir

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle_L,$$

asumamos que $\mathbf{x} = t_1\mathbf{e}_4$, entonces, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = t_1\langle \mathbf{e}_4, \mathbf{y} \rangle_L = -t_1t_2$, así

$$\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 = -t_1^2(-t_2^2 + |\bar{y}|^2) = t_1^2t_2^2 - t_1^2|\bar{y}|^2 \leq t_1^2t_2^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L^2,$$

$$\sqrt{(\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|)^2} \leq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L^2}$$

$$\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \leq |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L|$$

$$-\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \leq -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

Para la siguiente parte

$$\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 = -t_1^2(-t_2^2 + |\bar{y}|^2) = t_1^2t_2^2 - t_1^2|\bar{y}|^2 \leq t_1^2t_2^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L^2,$$

la igualdad se obtendrá si $\bar{y} = \mathbf{0}$, es decir, $\mathbf{y} = t_2\mathbf{e}_4$

$$\frac{1}{t_2}\mathbf{y} = \frac{1}{t_1}\mathbf{x},$$

$$\mathbf{y} = \frac{t_2}{t_1}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ son linealmente dependientes.}$$

Recíprocamente, si $\mathbf{x} = k\mathbf{y}$ con $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L &= \langle k\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_L \\ &= k\|\mathbf{y}\|\|\mathbf{y}\| \\ &= \|k\mathbf{y}\|\|\mathbf{y}\| \\ &= \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

■

1.1.1. Ángulo temporal entre vectores temporales

Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores temporales positivos de $\mathbb{R}^{3,1}$. Por teorema 1.7, existe un número real no negativo $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tal que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.1.6)$$

El *ángulo lorentziano temporal* entre \mathbf{x} e \mathbf{y} es definido por $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Notar que $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si y sólo si \mathbf{x} e \mathbf{y} es uno múltiplo escalar positivo del otro.

1.2. Espacio hiperbólico de dimensión 3

Puesto que una esfera de radio r en \mathbb{R}^4 tiene de curvatura constante igual a $1/r^2$ y el espacio hiperbólico de dimensión 3 tiene curvatura constante negativa, la dualidad entre geometría esférica e hiperbólica sugiere que el espacio hiperbólico de dimensión 3 debería ser una esfera de radio imaginario. Como las longitudes imaginarias son posibles en el espacio lorentziano de dimensión 4, deberíamos tomar como nuestro modelo para el espacio hiperbólico de dimensión 3 la esfera de radio unidad imaginaria

$$F^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3,1} : \|\mathbf{x}\|^2 = -1\}.$$

El único problema es que el conjunto F^3 es desconexo. El conjunto F^3 es un hiperboloide de dos hojas definido por la ecuación $t^2 - |\bar{\mathbf{x}}| = 1$. El de todos los $\mathbf{x} \in F^3$ tal que $t > 0$ ($t < 0$) es llamado la *hoja positiva (negativa)* de F^3 . Solucionaremos este problema identificando vectores antipodales de F^3 o equivalentemente descartando la hoja negativa de F^3 . El *modelo del hiperboloide* \mathbb{H}^3 del espacio hiperbólico de dimensión 3 esta definido por la hoja positiva de F^3 . Ver figura 1.2

Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores en \mathbb{H}^3 y sea $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ el ángulo lorentziano temporal entre \mathbf{x} e \mathbf{y} . La *distancia hiperbólica* entre \mathbf{x} e \mathbf{y} esta definida por el número real

$$d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.2.1)$$

Como $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se tiene la ecuación

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L. \quad (1.2.2)$$

Probaremos luego que $d_{\mathbb{H}}$ es una métrica sobre \mathbb{H}^3 , pero antes necesitamos algunos resultados preliminares concernientes al producto cruz en $\mathbb{R}^{3,1}$.

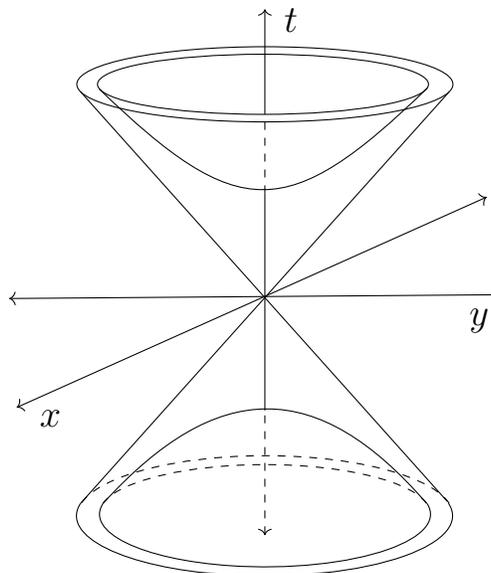


Figura 1.2: El hiperboloide F^2 dentro de C^2 .

1.2.1. Producto cruz lorentziano

Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores en $\mathbb{R}^{2,1}$ y sea J la matriz definida como

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.3)$$

El *producto cruz lorentziano* de \mathbf{x} e \mathbf{y} esta definido por

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = J(\mathbf{x} \times \mathbf{y}). \quad (1.2.4)$$

OBSERVACIÓN 1.1: El vector $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ es Lorentz ortogonal a \mathbf{x} e \mathbf{y} .

OBSERVACIÓN 1.2 (Relación entre el producto vectorial lorentziano y euclídeo):

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = J(\mathbf{y}) \times J(\mathbf{x})$$

TEOREMA 1.8: Si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2,1}$, entonces

$$(1) \quad \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = -\mathbf{y} \otimes \mathbf{x},$$

$$(2) \quad \langle (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle_L = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{vmatrix},$$

$$(3) \quad \mathbf{x} \otimes (\mathbf{y} \otimes \mathbf{z}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L \mathbf{z} - \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle_L \mathbf{y},$$

$$(4) \quad \langle \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}, \mathbf{z} \otimes \mathbf{w} \rangle_L = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle_L & \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_L \\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle_L & \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_L \end{vmatrix}.$$

COROLARIO 1.2: Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2,1}$ son vectores temporales positivos linealmente independientes, entonces $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ es espacial y $\|\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}\| = -\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \sinh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

COROLARIO 1.3: Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2,1}$ son vectores espaciales, entonces

$$(1) \quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L| < \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \text{ si y solo sí } \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \text{ es temporal,}$$

$$(2) \quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \text{ si y solo sí } \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \text{ es luminoso,}$$

$$(3) \quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L| > \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \text{ si y solo sí } \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \text{ es espacial.}$$

DEFINICIÓN 1.5: Una métrica sobre \mathbb{H}^3 es una función $d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{H}^3$

³Distinguiremos el simbolo \otimes para el producto vectorial lorentziano y el simbolo \times para el producto vectorial euclídeo.

- (1) $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ (no negativa);
- (2) $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (no degenerada);
- (3) $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\mathbb{H}}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (simétrica);
- (4) $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_{\mathbb{H}}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (desigualdad triangular)

TEOREMA 1.9: La función distancia hiperbólica $d_{\mathbb{H}}$ es una métrica sobre \mathbb{H}^3 .

Demostración:

La función $d_{\mathbb{H}} = d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es:

- (1) No negativa: ya que $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es un ángulo y nos podemos asegurar de medirlo en sentido positivo.
- (2) No degenerada: por teorema 1.7 y ecuación 1.1.6.
- (3) Simétrica: ya que da igual medir el ángulo de \mathbf{x} a \mathbf{y} que el ángulo de \mathbf{y} a \mathbf{x} .

Solo falta demostrar la desigualdad triangular. Para ello, por teorema 1.6 las transformaciones lorentzianas positivas de $\mathbb{R}^{3,1}$ actúan sobre \mathbb{H}^3 y además preservan las distancias hiperbólicas. Así, podemos transformar libremente los vectores \mathbf{x}, \mathbf{y} y \mathbf{z} mediante una transformación lorentziana positiva. Los tres vectores \mathbf{x}, \mathbf{y} y \mathbf{z} generan un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{3,1}$ de dimensión a lo sumo de dimensión 3. Por teorema 1.6 podemos asumir que \mathbf{x}, \mathbf{y} y \mathbf{z} están en el subespacio de $\mathbb{R}^{3,1}$ generado por los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y \mathbf{e}_3 . En otras palabras, asumiendo que $n = 2$ para simplificar cálculos. Por el corolario 1.2, tenemos

$$\|\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}\| = \sinh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{y} \quad \|\mathbf{y} \otimes \mathbf{z}\| = \sinh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

Como \mathbf{y} es Lorentz ortogonal a $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ y $\mathbf{y} \otimes \mathbf{z}$, el vector \mathbf{y} y $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \otimes (\mathbf{y} \otimes \mathbf{z})$ son linealmente dependientes. Por lo tanto, este último será el vector cero o temporal. Por el corolario 1.3, tenemos

$$|\langle \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} \rangle_L| \leq \|\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}\| \|\mathbf{y} \otimes \mathbf{z}\|.$$

Juntando todos los resultados anteriores tenemos

$$\begin{aligned} \cosh(d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_{\mathbb{H}}(\mathbf{y}, \mathbf{z})) &= \cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \sinh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sinh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_L + \|\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}\| \|\mathbf{y} \otimes \mathbf{z}\| \\ &\geq \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_L + \langle \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} \rangle_L \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_L + (\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_L \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_L - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_L) \\ &= - \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_L \\ &= \cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_{\mathbb{H}}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. ■

La métrica $d_{\mathbb{H}}$ sobre \mathbb{H}^3 es llamado la *métrica hiperbólica*. La métrica topológica de \mathbb{H}^3 determinada por $d_{\mathbb{H}}$ es la misma que la métrica topológica determinada por la métrica euclídea d_E sobre \mathbb{H}^3 definida por

$$d_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (1.2.5)$$

El espacio métrico consistente de \mathbb{H}^3 junto con esta métrica hiperbólica $d_{\mathbb{H}}$ es llamado *espacio hiperbólico de dimensión 3*. De aquí en adelante \mathbb{H}^3 denotará el espacio hiperbólico de dimensión 3.

Una isometría de \mathbb{H}^3 es llamada *isometría hiperbólica*.

TEOREMA 1.10: Toda transformación lorentziana positiva de $\mathbb{R}^{3,1}$ se restringe a una isometría de \mathbb{H}^3 , y toda isometría de \mathbb{H}^3 se extiende a una única transformación lorentziana positiva de $\mathbb{R}^{3,1}$.

Demostración:

Sea $\phi : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ una transformación lorentziana positiva, por definición ϕ preserva el producto interno lorentziano, en consecuencia, podemos afirmar que ϕ es una isometría. Como $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}^{3,1}$ podemos afirmar que ϕ restringida a \mathbb{H}^3 es también una isometría.

Recíprocamente, supongamos que $\phi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una isometría. Asumamos primero que ϕ fija a \mathbf{e}_4 . Sea $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ las componentes de ϕ . Entonces, sea $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^3$

$$\begin{aligned} \phi_4(\mathbf{x}) &= - \langle \phi(\mathbf{x}), \mathbf{e}_4 \rangle_L \\ &= - \langle \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{e}_1) \rangle_L \\ &= - \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_4 \rangle_L \\ &= t_1. \end{aligned}$$

Así

$$\phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \phi_3(\mathbf{x}), t_1).$$

Sea $p : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la función proyección definida por $p(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}$, donde $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$. La función p es una biyección. Definida $\bar{\phi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\bar{\phi}(\mathbf{u}) = (\phi_1(p^{-1}(\mathbf{u})), \phi_2(p^{-1}(\mathbf{u})), \phi_3(p^{-1}(\mathbf{u}))),$$

entonces,

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\bar{\mathbf{x}}) &= (\phi_1(p^{-1}(\bar{\mathbf{x}})), \phi_2(p^{-1}(\bar{\mathbf{x}})), \phi_3(p^{-1}(\bar{\mathbf{x}}))) \\ &= (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \phi_3(\mathbf{x})) \\ &= \overline{\phi(\mathbf{x})}. \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^3$. Como ϕ es una isometría $\langle \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}) \rangle_L = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}) \rangle_L &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L \\ -\phi_4(\mathbf{x})\phi_4(\mathbf{y}) + \overline{\phi(\mathbf{x})} \cdot \overline{\phi(\mathbf{y})} &= -t_1 t_2 + \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{y}} \\ -\phi_4(\mathbf{x})\phi_4(\mathbf{y}) + \overline{\phi(\bar{\mathbf{x}})} \cdot \overline{\phi(\bar{\mathbf{y}})} &= -t_1 t_2 + \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{y}} \\ \overline{\phi(\bar{\mathbf{x}})} \cdot \overline{\phi(\bar{\mathbf{y}})} &= \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

de aquí que $\bar{\phi}$ es una transformación ortogonal. Luego existe una matriz A de 3×3 tal que $A\mathbf{u} = \bar{\phi}(\mathbf{u})$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Sea \hat{A} la matriz

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & A & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces \hat{A} es una matriz lorentziana positiva y $\hat{A}\mathbf{x} = (\overline{\phi(\mathbf{x})}, t_1) = \phi(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^3$

Ahora asumamos que ϕ es una isometría arbitraria de \mathbb{H}^3 . Por teorema 1.6 existe una matriz B en $PO(1, 3)$ tal que $B\phi(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_4$. Como $B\phi$ se extiende a una transformación lorentziana positiva de $\mathbb{R}^{3,1}$, entonces ϕ también se extiende a una transformación lorentziana positiva. Veamos ahora que tal extensión es única, supongamos que C y D son matrices de $PO(1, 3)$ y extienden a ϕ a una transformación lorentziana positiva. Entonces $D^{-1}C$ fija cada punto de \mathbb{H}^3 . Como \mathbb{H}^3 no está contenido en ningún subespacio vectorial propio de $\mathbb{R}^{3,1}$, tenemos que $D^{-1}C$ fija a todo $\mathbb{R}^{3,1}$. Por lo tanto $D = C$. Así, ϕ se extiende a una única transformación lorentziana positiva de $\mathbb{R}^{3,1}$. ■

COROLARIO 1.4: El grupo de las isometrías hiperbólicas $I(\mathbb{H}^3)$ es isomorfo al grupo positivo de Lorentz $PO(1, 3)$.

1.2.2. Geodésicas hiperbólicas

DEFINICIÓN 1.6: Una **línea hiperbólica** de \mathbb{H}^3 es la intersección de \mathbb{H}^3 con un subespacio vectorial temporal bidimensional de $\mathbb{R}^{3,1}$

Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} puntos diferentes de \mathbb{H}^3 . Entonces \mathbf{x} e \mathbf{y} generan un espacio temporal bidimensional $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, y entonces

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{H}^3 \cap V(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

es la única línea hiperbólica que contiene a \mathbf{x} e \mathbf{y} . Notar que $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es una rama de una hipérbola (ver figura 1.3).

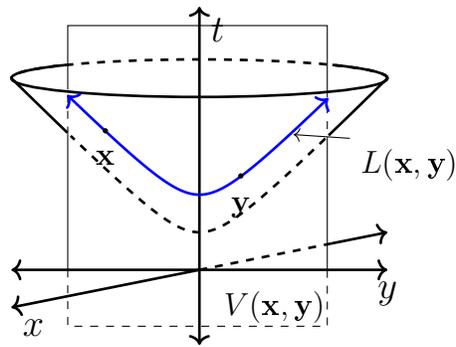


Figura 1.3: línea hiperbólica de \mathbb{H}^2 .

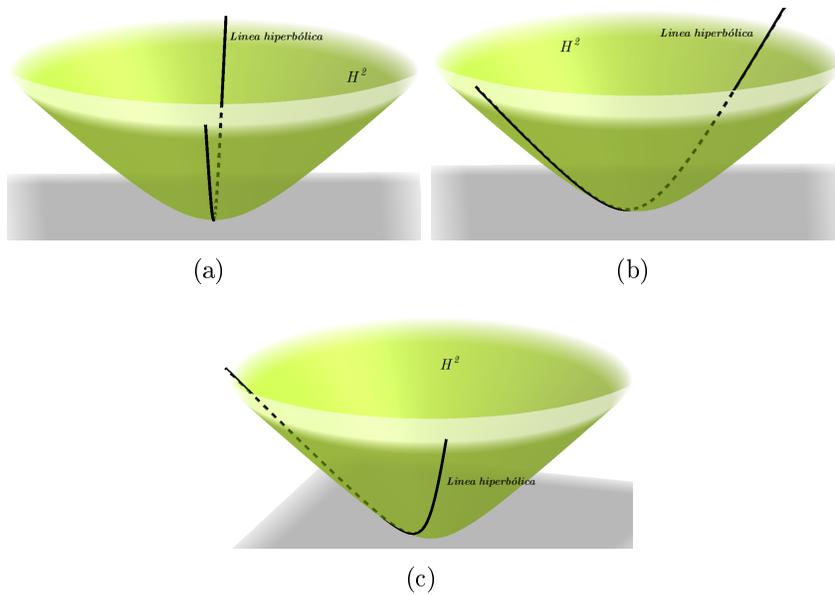


Figura 1.4: Más líneas hiperbólicas en \mathbb{H}^2 .

DEFINICIÓN 1.7: Tres puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{H}^3$ son *hiperbólicamente colineales* si y sólo si existe una línea hiperbólica L de \mathbb{H}^3 que contiene a \mathbf{x}, \mathbf{y} y \mathbf{z} .

LEMA 1.1: Si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ son puntos de \mathbb{H}^3 y

$$d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_{\mathbb{H}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$

entonces $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ son hiperbólicamente colineales.

DEFINICIÓN 1.8: Dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{3,1}$ son **Lorentz ortonormal** si y sólo si $\|\mathbf{x}\|^2 = -1$ y $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = 0$ y $\|\mathbf{y}\|^2 = 1$.

DEFINICIÓN 1.9: Un **arco geodésico** en el espacio métrico \mathbb{H}^3 es una función $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^3$, con $a < b \in \mathbb{R}$ que preserva distancias.

TEOREMA 1.11: Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^3$ una curva. Entonces los siguientes numerales son equivalentes

- (1) La curva α es un arco geodésico,
- (2) Existen vectores Lorentz ortonormales $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{3,1}$ tal que

$$\alpha(t) = (\cosh(t - a))\mathbf{x} + (\sinh(t - a))\mathbf{y},$$

- (3) La curva α satisface la ecuación diferencial $\alpha'' - \alpha = \mathbf{0}$.

Demostración:

Sea A una transformación de Lorentz de $\mathbb{R}^{3,1}$. Entonces $(A\alpha)' = A\alpha'$. En consecuencia α satisface (3) si y sólo si $A\alpha$ la satisface. Por lo tanto, podemos transformar libremente α mediante una transformación de Lorentz.

Supongamos que α es un arco geodésico. Tomamos un t que pertenece al intervalo $[a, b]$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\alpha(a), \alpha(b)) &= b - a \\ &= (t - a) + (b - t) \\ &= d_{\mathbb{H}}(\alpha(a), \alpha(t)) + d_{\mathbb{H}}(\alpha(t), \alpha(b)). \end{aligned}$$

Por el lema 1.1, podemos afirmar que $\alpha(a), \alpha(t), \alpha(b)$ son hiperbólicamente colineales. En consecuencia, la imagen de α está contenida en una línea hiperbólica L de \mathbb{H}^3 .

Asumamos que $n = 1$. Aplicando una transformación de Lorentz de la forma

$$\begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix}.$$

podemos transformar $\alpha(a)$ en \mathbf{e}_2 , y así asumimos que $\alpha(a) = \mathbf{e}_2$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 \cdot \alpha(t) &= -\langle \alpha(a), \alpha(t) \rangle_L \\ &= \cosh d_{\mathbb{H}}(\alpha(a), \alpha(t)) \\ &= \cosh(t - a). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{e}_1 \cdot \alpha(t) = \pm \sinh(t - a)$. Como α es continua, el signo más o el signo menos en la última ecuación se cumple para todo t . Por lo tanto, podemos asumir que

$$\alpha(t) = (\cosh(t - a))\mathbf{e}_2 + (\sinh(t - a))(\pm\mathbf{e}_1).$$

Así (1) implica (2).

Luego, supongamos que existen vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{3,1}$ Lorentz ortonormales tal que

$$\alpha(t) = (\cosh(t-a))\mathbf{x} + (\sinh(t-a))\mathbf{y}.$$

Sean s y t tales que $a \leq s \leq t \leq b$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \cosh d_{\mathbb{H}}(\alpha(a), \alpha(b)) &= -\langle \alpha(s), \alpha(t) \rangle_L \\ &= \cosh(s-a)\cosh(t-a) - \sinh(s-a)\sinh(t-a) \\ &= \cosh((t-a) - (s-a)) \\ &= \cosh(t-s). \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_{\mathbb{H}}(\alpha(a), \alpha(b)) = t - s$. Podemos concluir que α es un arco geodésico. Con esto (2) implica (1).

Supongamos que (2) es cierta, tenemos entonces que

$$\alpha'(t) = (\sinh(t-a))\mathbf{x} + (\cosh(t-a))\mathbf{y},$$

y

$$\alpha''(t) = (\cosh(t-a))\mathbf{x} + (\sinh(t-a))\mathbf{y}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \alpha''(t) - \alpha &= (\cosh(t-a))\mathbf{x} + (\sinh(t-a))\mathbf{y} - ((\cosh(t-a))\mathbf{x} + (\sinh(t-a))\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Así, (2) implica (3). Ahora supongamos que (3) se cumple. Entonce la solución a la ecuación diferencial es

$$\alpha(t) = \cosh(t-a)\alpha(a) + \sinh(t-a)\alpha'(a).$$

ya que $\alpha(t) \in \mathbb{H}^3$ tenemos que $\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle_L = -1$, derivando esta ecuación se tiene

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle'_L &= 0 \\ \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle_L + \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle_L &= 0 \\ \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle_L &= 0, \end{aligned}$$

en particular se tiene que $\langle \alpha(a), \alpha'(a) \rangle_L = 0$, además observemos que

$$\begin{aligned} \|\alpha(t)\|^2 &= \cosh^2(t-a)\|\alpha(a)\| + \sinh^2(t-a)\|\alpha'(a)\| \\ -1 &= -\cosh^2(t-a) + \sinh^2(t-a)\|\alpha'(a)\|. \end{aligned}$$

Entonces la única opción es que $\|\alpha'(a)\| = 1$. Por lo tanto $\alpha(a), \alpha'(a)$ son Lorentz ortonormales. Así (3) implica (2). ■

TEOREMA 1.12: Una función $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una línea geodésica si y sólo si existen vectores Lorentz ortonormales $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{3,1}$ tal que

$$\lambda(t) = (\cosh t)\mathbf{x} + (\sinh t)\mathbf{y}.$$

Demostración:

Supongamos que existen vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{3,1}$ Lorentz ortonormales tal que $\lambda(t) = (\cosh t)\mathbf{x} + (\sinh t)\mathbf{y}$, entonces

$$\lambda'(t) = (\sinh t)\mathbf{x} + (\cosh t)\mathbf{y},$$

y

$$\lambda''(t) = (\cosh t)\mathbf{x} + (\sinh t)\mathbf{y},$$

$$\begin{aligned} \lambda''(t) - \lambda(t) &= (\cosh t)\mathbf{x} + (\sinh t)\mathbf{y} - ((\cosh t)\mathbf{x} + (\sinh t)\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Luego, por teorema 1.11, la restricción de λ a algún intervalo $P[a, b]$, con $a < b$ es un arco geodésico. Así que λ es una línea geodésica.

Recíprocamente, supongamos que λ es una línea geodésica. Por teorema 1.11, la función λ satisface la ecuación diferencial $\lambda'' - \lambda = \mathbf{0}$. En consecuencia, la solución a tal ecuación diferencial nos da

$$\lambda(t) = (\cosh t)\lambda(0) + (\sinh t)\lambda'(0),$$

ya que $\lambda(t) \in \mathbb{H}^3$ tenemos que $\langle \lambda(t), \lambda(t) \rangle_L = -1$, derivando esta ecuación se tiene

$$\begin{aligned} \langle \lambda(t), \lambda(t) \rangle'_L &= 0 \\ \langle \lambda'(t), \lambda(t) \rangle_L + \langle \lambda(t), \lambda'(t) \rangle_L &= 0 \\ \langle \lambda(t), \lambda'(t) \rangle_L &= 0. \end{aligned}$$

en particular se tiene que $\langle \lambda(0), \lambda'(0) \rangle_L = 0$, además observemos que

$$\begin{aligned} \|\lambda(t)\|^2 &= \cosh^2(t)\|\lambda(0)\|^2 + \sinh^2(t)\|\lambda'(0)\|^2 \\ -1 &= -\cosh^2(t) + \sinh^2(t)\|\lambda'(0)\|^2, \end{aligned}$$

entonces la única opción es que $\|\lambda'(0)\| = 1$. Por lo tanto $\lambda(0), \lambda'(0)$ son Lorentz ortonormales. ■

COROLARIO 1.5: Las geodésicas de \mathbb{H}^3 son esas líneas hiperbólicas.

1.2.3. Hiperplanos

DEFINICIÓN 1.10: Un hiperplano hiperbólico de dimensión m de \mathbb{H}^3 es la intersección de \mathbb{H}^3 con un subespacio vectorial temporal de dimensión $m + 1$ de $\mathbb{R}^{3,1}$.

En base a la definición anterior, notar que un hiperplano hiperbólico de dimensión 1 de \mathbb{H}^3 es exactamente una línea hiperbólica de \mathbb{H}^3 . Un hiperplano hiperbólico de dimensión 2 de \mathbb{H}^3 es llamado *plano* de \mathbb{H}^3 .

DEFINICIÓN 1.11: Sea V un espacio vectorial de $\mathbb{R}^{3,1}$ definimos el **complemento lorentziano** como el conjunto V^L tal que

$$V^L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3,1} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = 0 \text{ para todo } \mathbf{y} \in V\}.$$

Sea \mathbf{x} un vector espacial de $\mathbb{R}^{3,1}$. El complemento lorentziano del subespacio vectorial $\langle \mathbf{x} \rangle_L$ generado por \mathbf{x} es un subespacio vectorial temporal tridimensional de $\mathbb{R}^{3,1}$. Por lo tanto, $P = \langle \mathbf{x} \rangle_L^L \cap \mathbb{H}^3$ es un plano de \mathbb{H}^3 . El plano P es llamado **el plano de \mathbb{H}^3 Lorentz ortogonal a \mathbf{x}** .

TEOREMA 1.13: Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores espaciales linealmente independientes de $\mathbb{R}^{3,1}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

- (1) Los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} satisfacen la ecuación $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L| < \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$.
- (2) El subespacio vectorial V generado por \mathbf{x} e \mathbf{y} es espacial.
- (3) Los planos P y Q de \mathbb{H}^3 Lorentz ortogonal a \mathbf{x} e \mathbf{y} respectivamente tienen intersección diferente del vacío.

EJEMPLO 1.1: Consideremos los vectores $\mathbf{x} = (1, 2, 1)$ y $\mathbf{y} = (2, 1, 1)$ en \mathbb{H}^2 , son tales que cumplen el Teorema 1.13. Siendo $P : x + 2y - t = 0$ y $Q : 2x + y - t = 0$.

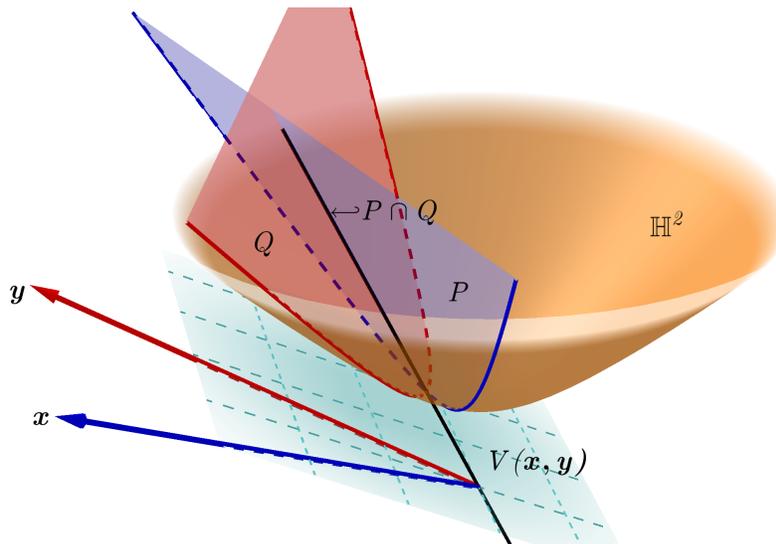


Figura 1.5: \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores de \mathbb{H}^2 generadores de V y Lorentz ortogonales a P y Q respectivamente.

1.2.4. Ángulo espacial entre vectores espaciales

Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores espaciales de $\mathbb{R}^{3,1}$ tales que generan un subespacio vectorial espacial. Entonces por teorema 1.13 tenemos que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L| < \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|,$$

con igualdad si y sólo si \mathbf{x} e \mathbf{y} son linealmente dependientes. Por lo tanto, existe un único número real $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ entre 0 y π tal que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.2.6)$$

El *ángulo lorentziano espacial* entre \mathbf{x} e \mathbf{y} es definido por $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Notar que $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si y sólo si \mathbf{x} e \mathbf{y} son múltiplo escalar positivo uno del otro, $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi/2$ si y sólo si \mathbf{x} e \mathbf{y} son Lorentz ortogonales, y $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi$ si y sólo si \mathbf{x} e \mathbf{y} son múltiplo escalar negativo uno del otro.

Sean $\lambda, \mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ líneas geodésicas tales que $\lambda(0) = \mu(0)$. Entonces $\lambda'(0)$ y $\mu'(0)$ generan un subespacio vectorial espacial de $\mathbb{R}^{3,1}$, ya que por la prueba del teorema 1.12 $\langle \lambda(0), \lambda'(0) \rangle_L = \langle \mu(0), \mu'(0) \rangle_L = 0$, luego por teorema 1.5 $\lambda'(0)$ y $\mu'(0)$ son vectores espaciales. El ángulo hiperbólico entre λ y μ es definido por el ángulo lorentziano espacial entre $\lambda'(0)$ y $\mu'(0)$.

Sea P un plano de \mathbb{H}^3 y sea $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ una línea geodésica tal que $\lambda(0)$ está en P . Entonces la línea hiperbólica $L = \lambda(\mathbb{R})$ se dice que es Lorentz ortogonal a P si P es el plano de \mathbb{H}^3 Lorentz ortogonal a $\lambda'(0)$

TEOREMA 1.14: Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores espaciales linealmente independientes en $\mathbb{R}^{3,1}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (1) Los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} satisfacen la desigualdad $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L| > \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$.
- (2) El subespacio vectorial V generado por \mathbf{x} e \mathbf{y} es temporal.
- (3) Los planos P y Q de \mathbb{H}^3 Lorentz ortogonales a \mathbf{x} e \mathbf{y} respectivamente, son ajenos y tienen en común una línea hiperbólica Lorentz ortogonal.

OBSERVACIÓN 1.3: La prueba del teorema 1.14 demuestra que si P y Q son plano con intersección igual al vacío de \mathbb{H}^3 , con una línea hiperbólica Lorentz ortogonal N en común, entonces N es única; además, si \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores espaciales en $\mathbb{R}^{3,1}$ Lorentz ortogonales a P y Q respectivamente, entonces \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores tangentes de N .

EJEMPLO 1.2: Consideremos los vectores $\mathbf{x} = (3, 2, 1)$ y $\mathbf{y} = (5, 3, 2)$ en \mathbb{H}^2 , son tales que cumplen el Teorema 1.14. Siendo $P : 3x + 2y - t = 0$ y $Q : 5x + 3y - 2z = 0$.

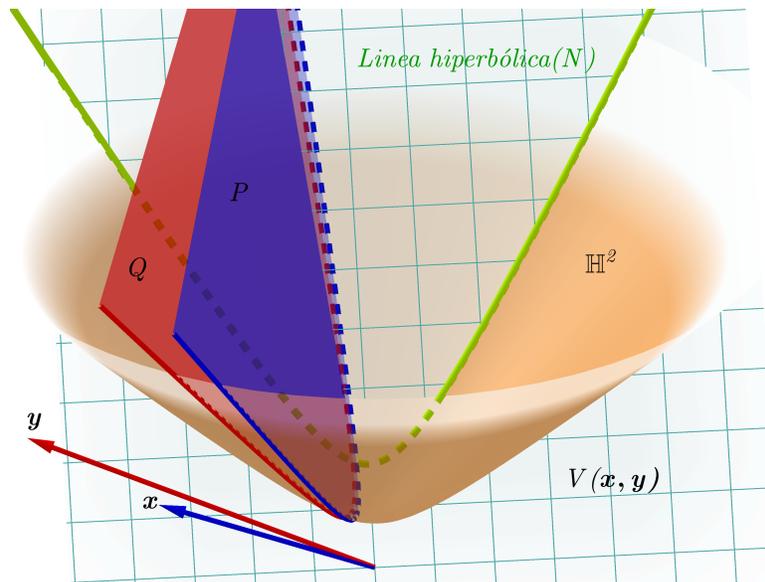


Figura 1.6: \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores de \mathbb{H}^2 generadores de V y Lorentz ortogonales a P y Q respectivamente. N es la línea hiperbólica Lorentz ortogonal a P y Q .

1.2.5. Ángulo temporal entre vectores espaciales

Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores espaciales en $\mathbb{R}^{3,1}$ los cuales generan un subespacio vectorial temporal. Por teorema 1.14, tenemos que $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L| > \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$. Por lo tanto, existe un único número real positivo $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tal que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.2.7)$$

El *ángulo temporal lorentziano* entre \mathbf{x} e \mathbf{y} es definido por $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

TEOREMA 1.15: Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores espaciales en $\mathbb{R}^{3,1}$ los cuales generan un subespacio vectorial temporal, y sean P, Q planos de \mathbb{H}^3 Lorentz ortogonales a \mathbf{x} e \mathbf{y} respectivamente. Entonces $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es la distancia de P a Q medida a lo largo de la línea hiperbólica N Lorentz ortogonal a P y Q . Además, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L < 0$ si y sólo si \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores tangentes de N orientados opuestamente.

DEFINICIÓN 1.12: Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores espaciales en $\mathbb{R}^{3,1}$ y sean P, Q planos de \mathbb{H}^3 Lorentz ortogonales a \mathbf{x} e \mathbf{y} respectivamente. Entonces P y Q se dice que se **cortan en el infinito** si y sólo si $\langle \mathbf{x} \rangle_L^L \cap \langle \mathbf{y} \rangle_L^L$ es luminoso.

Si P y Q se cortan en el infinito, entonces P y Q son ajenos, pero cuando se ven desde el origen parece que se cortan en el punto final ideal positivo del subespacio luminoso unidimensional de $\langle \mathbf{x} \rangle_L^L \cap \langle \mathbf{y} \rangle_L^L$.

TEOREMA 1.16: Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores espaciales linealmente independientes de $\mathbb{R}^{3,1}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (1) Los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} satisfacen la ecuación $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$.
- (2) El subespacio vectorial V generado por \mathbf{x} e \mathbf{y} es luminoso.
- (3) Los planos P y Q de \mathbb{H}^3 Lorentz ortogonales a \mathbf{x} e \mathbf{y} respectivamente se cortan en el infinito.

TEOREMA 1.17: Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores espaciales linealmente independientes de $\mathbb{R}^{3,1}$, tal que el espacio vectorial V generado por \mathbf{x} e \mathbf{y} es luminoso. Entonces $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L < 0$ si y sólo si \mathbf{x} e \mathbf{y} están en el lado opuesto del subespacio luminoso unidimensional de V .

TEOREMA 1.18: Sea \mathbf{y} un punto de \mathbb{H}^3 y sea P un plano de \mathbb{H}^3 . Entonces, existe una única línea hiperbólica N de \mathbb{H}^3 pasando por \mathbf{y} y Lorentz ortogonal a P .

1.2.6. Ángulo entre vectores espaciales y temporales

Sea \mathbf{x} un vector espacial y \mathbf{y} un vector temporal positivo en $\mathbb{R}^{3,1}$. Entonces existe un único número real mayor o igual a cero $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tal que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L| = \|\mathbf{x}\| |\widehat{\mathbf{y}}| \sinh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.2.8)$$

El *ángulo temporal lorentziano* entre \mathbf{x} e \mathbf{y} es definido por $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

TEOREMA 1.19: Sea \mathbf{x} un vector espacial y sea \mathbf{y} un vector temporal en $\mathbb{R}^{3,1}$, sea P el plano de \mathbb{H}^3 Lorentz ortogonal a \mathbf{x} . Entonces $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es la distancia hiperbólica de $\mathbf{y}/|\widehat{\mathbf{y}}|$ a P medida a lo largo de la línea hiperbólica N pasando por $\mathbf{y}/|\widehat{\mathbf{y}}|$ Lorentz ortogonal a P . Además $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L < 0$ si y sólo si \mathbf{x} e \mathbf{y} están en el lado opuesto del plano de $\mathbb{R}^{3,1}$ generado por P .

1.3. Longitud de arco hiperbólico

En esta sección, compararemos la longitud de arco hiperbólica de una curva γ en \mathbb{H}^3 con su longitud lorentziana en $\mathbb{R}^{3,1}$ y se demostrará que ellas son iguales. En el proceso, encontraremos el elemento de longitud de arco hiperbólico de \mathbb{H}^3 .

Sean \mathbf{x}, \mathbf{y} puntos de \mathbb{H}^3 . Por teorema 1.7, tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\geq -2 - 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \\ &= 0. \end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Por lo tanto, la *función distancia lorentziana*

$$d_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad (1.3.1)$$

satisface los tres primeros axiomas para una métrica sobre \mathbb{H}^3 . Desafortunadamente, d_L no satisface la desigualdad triangular. Sin embargo, podemos utilizar a d_L para definir la longitud de una curva en \mathbb{H}^3 .

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^3$ una curva y sea $P = \{t_0, \dots, t_m\}$ una partición de $[a, b]$. La *longitud lorentziana inscrita sobre la partición P* es definida por

$$\ell_L(\gamma, P) = \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|. \quad (1.3.2)$$

DEFINICIÓN 1.13: Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^3$ se dice que es *Lorentz rectificable* si y sólo si existe un número real $\ell(\gamma)$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que si Q es otra partición que cumple $Q \leq P$, entonces

$$|\ell(\gamma) - \ell_L(\gamma, Q)| < \epsilon.$$

Si $\ell(\gamma)$ existe, entonces es único, ya que si P y Q son particiones de $[a, b]$, entonces existe una partición R de $[a, b]$ tal que $R \leq P$ y $R \leq Q$.

La *longitud lorentziana* $\|\gamma\|$ de γ está definida por $\ell(\gamma)$ si γ es Lorentz rectificable o ∞ en otro caso.

TEOREMA 1.20: Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^3$ una curva. Entonces γ es rectificable en \mathbb{H}^3 si y sólo si γ es Lorentz rectificable; además, la longitud hiperbólica y la longitud lorentziana de γ son iguales.

Demostración:

Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores en \mathbb{H}^3 . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= 2(\cosh - 1). \end{aligned}$$

Luego aplicando el teorema de Taylor tenemos que

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 1 + \frac{d_{\mathbb{H}}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| &= \sqrt{2(\cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 1)} \\ &\geq \sqrt{2 \left(1 + \frac{d_{\mathbb{H}}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} - 1 \right)} \\ &= d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Supongamos que γ es Lorentz rectificable. Entonces por definición existe una partición P de $[a, b]$ tal que si $Q \leq P$, entonces

$$|\|\gamma\| - \ell_L(\gamma, Q)| < 1.$$

Como antes habíamos calculado que la distancia lorentziana es mayor que la distancia hiperbólica, es decir $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, tenemos que para todo $Q \leq P$, se cumple

$$\ell_H(\gamma, Q) \leq \ell_L(\gamma, Q) \leq \|\gamma\| + 1.$$

Así; γ es rectificable.

Por teorema de Taylor alrededor de cero tenemos

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 1 + \frac{d_{\mathbb{H}}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} + \frac{d_{\mathbb{H}}^4(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{24} \cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Por lo tanto, si $\cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 12$, tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| &= \sqrt{2(\cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 1)} \\ &\leq \sqrt{2 \left(1 + \frac{d_{\mathbb{H}}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} + \frac{d_{\mathbb{H}}^4(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{24} \cosh d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 1 \right)} \\ &= d_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sqrt{1 + d_{\mathbb{H}}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que γ es rectificable y se $\epsilon > 0$. Entonces existe una partición P de $[a, b]$ tal que

$$|\gamma| - \ell_H(\gamma, P) < \epsilon.$$

Sea $\delta > 0$ y sea el conjunto

$$\mu(\gamma, \delta) = \sup\{d_{\mathbb{H}}(\gamma(s), \gamma(t)) : |s - t| \leq \delta\}.$$

Como γ es uniformemente continua, $\mu(\gamma, \delta)$ tiende a cero con δ . Por lo tanto, existe un δ tal que $\cosh \mu(\gamma, \delta) \leq 12$ y

$$|\gamma|_H \sqrt{1 + \mu^2(\gamma, \delta)} < |\gamma|_H + \epsilon.$$

Asumamos ahora que $|P| \leq \delta$. Entonces para toda $Q \leq P$, tenemos

$$\begin{aligned} |\gamma|_H - \epsilon &< \ell_H(\gamma, Q) \\ &\leq \ell_L(\gamma, Q) \\ &\leq \ell_H(\gamma, Q) \sqrt{1 + \mu^2(\gamma, \delta)} \\ &\leq |\gamma|_H \sqrt{1 + \mu^2(\gamma, \delta)} \\ &< |\gamma|_H + \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto de esta cadena de desigualdades obtenemos que

$$| |\gamma|_H - \ell_L(\gamma, Q) | < \epsilon \quad \text{para todo } Q \leq P.$$

Así; γ es Lorentz rectificable y además $\|\gamma\| = |\gamma|_H$. ■

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^3$ una curva diferenciable. Como $\gamma \in \mathbb{H}^3$ entonces $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle_L = -1$, luego derivando es ecuación se obtiene que $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle_L = 0$, así por teorema 1.5 $\gamma'(t)$ debe ser espacial para todo t .

TEOREMA 1.21: Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^3$ un curva de clase C^1 . Entonces γ es rectificable y la longitud hiperbólica de γ esta dada por la formula

$$\|\gamma\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^3$ una curva. Definimos $d\mathbf{x} = (dx, dy, dz, dt)$ y

$$\|d\mathbf{x}\| = ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (dt)^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3.3)$$

Entonces por definición tenemos

$$\int_{\gamma} \|d\mathbf{x}\| = \|\gamma\|. \quad (1.3.4)$$

Además, si γ es una curva de clase C^1 , por el teorema 1.21, tenemos

$$\int_{\gamma} \|d\mathbf{x}\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (1.3.5)$$

El diferencial $\|d\mathbf{x}\|$ es llamado el *elemento de longitud de arco hiperbólico* de \mathbb{H}^3 .

1.4. Relatividad especial de Einstein

Principio de la relatividad

Puede resultar sorprendente, pero históricamente el Principio de la Relatividad es mucho más antiguo que la Teoría de la Relatividad, incluso más antiguo que la mecánica clásica de Newton. Fue formulado por Galileo Galilei (1564 - 1642) alrededor de 1600, como un argumento en la discusión del heliocentrismo versus el geocentrismo. Los defensores del geocentrismo, que en este momento creían firmemente en la física de Aristóteles (384 A.C. - 322 A.C.) y en la astronomía de Ptolomeo (c. 100 - c. 170), argumentaban que, si fuera verdad que la Tierra se moviera alrededor del Sol y alrededor de su eje, ¿por qué no lo notamos? ¿Por qué una bola que dejamos caer desde una torre alta termina al pie de la torre y no a

cierta distancia hacia el Oeste, debido a la supuesta rotación de la Tierra de Oeste a Este?

Como respuesta a este argumento Galilei introdujo una nueva idea: la inercia. De sus múltiples experimentos con bolas rodando sobre planos inclinados, había llegado a la conclusión de que una masa en movimiento uniforme rectilíneo mantendrá eternamente este movimiento mientras que no actúe ninguna fuerza exterior sobre ella (nótese que esto no es nada menos que la Segunda Ley de Newton, $F = ma$, en forma cualitativa). Como ejemplo, Galilei dijo que si dejamos caer una bola desde la gavia de un barco en movimiento (uniforme), la bola tocará la cubierta en el pie del mástil y no más hacia la popa, puesto que la bola conserva la velocidad uniforme del barco durante su caída. De la misma manera, el argumento de los geocentristas no demostraba necesariamente que la Tierra esté en reposo.

El propio Galilei se dio cuenta de que la formulación inversa también es válida. Imaginémonos un observador que se mueve con la misma velocidad que una masa en movimiento uniforme y rectilíneo. Para este observador la masa estará en reposo. Dado que, por el principio de inercia, sin influencias externas ambos mantendrán su movimiento, para el observador esta masa seguirá en reposo hasta que actúe una fuerza exterior sobre ella.

Por lo tanto la conclusión que sacó Galilei es que un observador no es capaz de determinar si él está en un sistema que está en reposo o en movimiento uniforme y rectilíneo. El observador puede lanzar o dejar caer masas, dejar rodar bolas sobre planos inclinados, medir el periodo de péndulos, los resultados serán los mismos en movimiento (uniforme) que en reposo. Más general, una persona encerrada en una caja, con todos los experimentos mecánicos imaginables a su disposición, no tiene manera alguna de determinar su estado de movimiento, sin mirar por una ventanilla. Este principio se llama el *Principio de la Relatividad*.

Galilei propone su **principio de la relatividad**: “*Es imposible determinar a base de experimentos (mecánicos) si un sistema de referencia está en reposo o en movimiento uniforme y rectilíneo*”. Este principio con el paso del tiempo ha sido modificado.

Para entender bien su importancia, formularemos el Principio de otra manera. Definimos como sistemas inerciales un conjunto de sistemas de referencia que están en reposo o en movimiento uniforme y rectilíneo con respecto a un sistema previamente elegido como inercial.² Ahora, el Principio de la Relatividad es solamente válido dentro de la misma clase de sistemas inerciales (ya que salir de la clase de sistemas inerciales implica aceleraciones, que son medibles a través de experimentos). Sin embargo, dentro de una clase de sistemas inerciales, no hay observadores privilegiados: dentro de la misma clase de sistemas inerciales no se puede determinar qu’*e* sistema está en “reposo absoluto” y cuál en “movimiento absoluto”. Todos los experimentos dan el mismo resultado para cualquier observador y por lo tanto todos los observadores inerciales ven la misma física. Ninguno de ellos tiene un punto de vista privilegiado frente a los otros.

Principio de la Relatividad (formulación de equivalencia): *Todos los sistemas iner-*

ciales son equivalentes, es decir, todos los observadores inerciales ven la misma física.

Einstein lo amplió para todas las leyes físicas, especialmente para el electromagnetismo. El Principio de la Relatividad afirma que no existe ningún experimento físico que sea capaz de distinguir si un observador está en reposo o en movimiento uniforme rectilíneo. Dos observadores que se mueven uno con respecto al otro ven la misma física y, por lo tanto, las leyes de la física deben escribirse de modo que no cambien al pasar de un sistema de referencia a otro.

Nadie se había dado cuenta realmente de la importancia de esta formulación hasta finales del siglo XIX, cuando Henri Poincaré (1854-1912) lo tomó como principio básico y sugirió que hacía falta una nueva formulación de la mecánica, basada en este principio. Aunque Poincaré nunca llegó a dudar de la existencia del éter, sí se hacía serias preguntas sobre el significado de simultaneidad de eventos y derivaba la regla relativista de la suma de velocidades. Sin embargo, no llegó a formular una mecánica relativista completa. Este logro está a nombre de Albert Einstein (1879-1955). El razonamiento de Einstein era que, si todos los sistemas inerciales son equivalentes y todos los observadores inerciales ven la misma física, entonces todos estos observadores inerciales deben llegar a las mismas leyes de la física, si quieren apuntar los resultados de sus experimentos. En otras palabras:

Principio de la Relatividad (formulación de Einstein): *Las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los sistemas inerciales.*

Cono de luz e interpretación física

El cono de luz (ver figura 1.1) como ya vimos antes consta de dos partes: el cono de luz futuro cuando $t > 0$ que representa la historia de un pulso luminoso que viaja hacia el exterior desde un destello inicial localizado con centro en $t = 0$. El cono de luz pasado dado cuando $t < 0$ es la historia de un pulso luminoso que viaja desde el pasado al centro del destello luminoso localizado en $t = 0$. Ver figura 1.7.

Podemos pensar que la luz se propaga como una partícula, la cual es llamada **fotón**. Las líneas generadoras del cono de luz representan las historias individuales de los fotones del destello luminoso. Podemos hacer la misma interpretación para cualquier otro tipo de partícula sin masa ya que todas las partículas viajan a la velocidad de la luz. Sin embargo, una partícula con masa debe viajar siempre a una velocidad menor a la velocidad de la luz, por lo que la historia de una partícula libre que tiene masa emitida en el mismo evento explosivo que produce los fotones, debe moverse sobre una línea recta desde el origen O y permanecerá en el interior del cono de luz futuro.

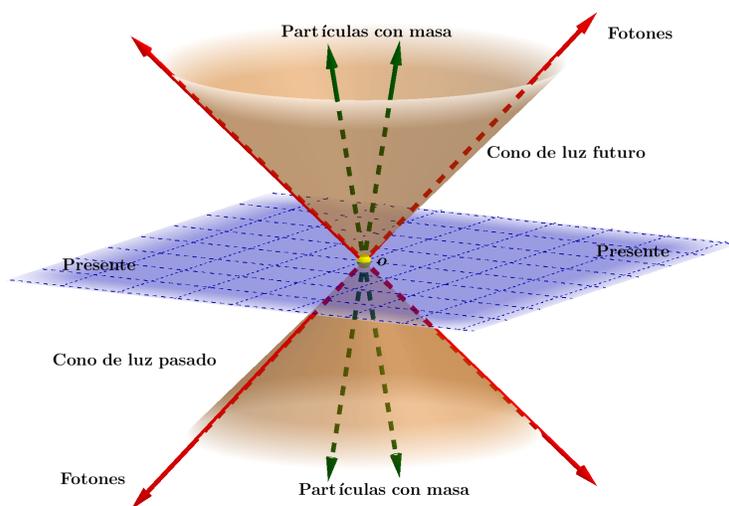


Figura 1.7: Cono de luz pasado y futuro.

Cualquier otra partícula libre, esto es, en movimiento que no es acelerado, debería moverse a lo largo de una línea recta en el espacio de Minkowski. Para una partícula sin masa esta línea debería estar trazada a un ángulo de $\pi/4$ con respecto del eje vertical que modela el tiempo. Para una partícula con masa la trayectoria debería estar trazada con un ángulo menor a $\pi/4$. Una partícula con masa que no está en movimiento libre debería describirse como una curva llamada **la línea del mundo** de la partícula (ver figura 1.8 b) y c)). A esta línea del mundo se le llama temporal. En cada punto de esta línea del mundo se tiene un cono de luz local.

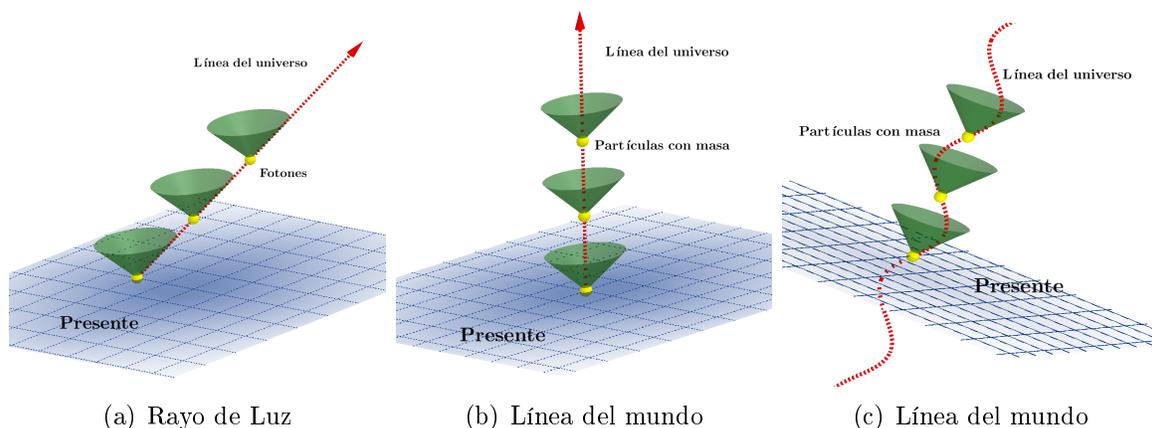


Figura 1.8: Líneas del universo.

El significado de la magnitud de un segmento de línea de mundo medida desde el origen hasta cualquier punto es que mide el intervalo de tiempo experimentado entre los dos puntos,

por un reloj cuya línea del mundo es la trayectoria recta que une esos dos puntos. Estas consideraciones nos llevan a la idea de que la medida de “distancia” es en espacio de Minkowski es el **tiempo**.

Si P y Q son dos puntos en el espacio-tiempo conectados por diferentes líneas temporales, entonces el intervalo de tiempo entre P y Q diferirá, en general, a lo largo de curvas diferentes (ver figura 1.9).

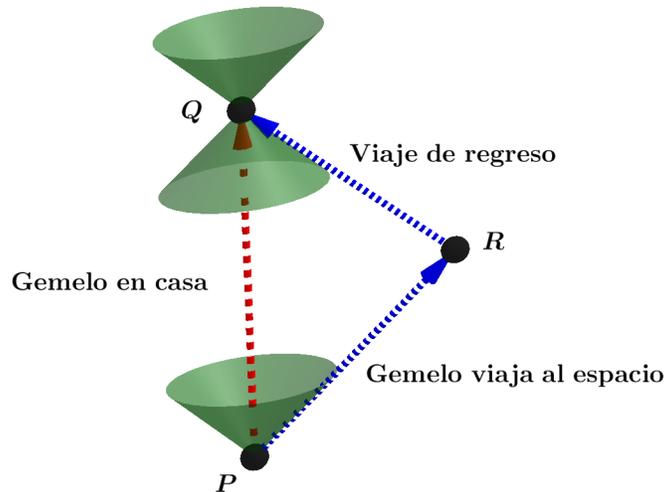


Figura 1.9: Paradoja del reloj.

En la geometría de Minkowski, entre todas las curvas temporales de P a Q , las líneas del mundo rectas (movimientos que no son acelerados) tienen longitud máxima, i.e., intervalo de tiempo máximo.

Las velocidades en la relatividad especial se representan como vectores unitarios de Minkowski apuntando al futuro, esto es, como puntos en la esfera unitaria de Minkowski. La esfera unitaria está dada por el conjunto de puntos P que se encuentran a una distancia de Minkowski 1 del origen O .

La relatividad del espacio y el tiempo

Toda la teoría de la relatividad especial está basada en dos postulados:

1. Todas las leyes de la física son válidas para todos los sistemas inerciales.
2. La velocidad de la luz en el vacío es igual para todos los observadores y tiene un valor de $299,792.458 \text{ km/s}$, independientemente del estado de movimiento de la fuente.

El primer postulado es el Principio de la relatividad formulado por Galilei. Einstein lo amplió para todas las leyes físicas, especialmente para el electromagnetismo. El Principio de la Relatividad afirma que no existe ningún experimento físico que sea capaz de distinguir si un observador está en reposo o en movimiento uniforme rectilíneo. Dos observadores que se mueven uno con respecto al otro ven la misma física y, por lo tanto, las leyes de la física deben escribirse de modo que no cambien al pasar de un sistema de referencia a otro.

El segundo postulado es más sorprendente, pero hay motivos teóricos y experimentales para creerlo. Los motivos experimentales son los experimentos fracasados de Michelson y Morley (1881 y 1887), que querían medir la velocidad de la Tierra con respecto al éter: suponiendo que la velocidad de la luz con respecto al éter es c y la de la Tierra alrededor del Sol es v , la velocidad de la luz medida en la Tierra debería ser $c - v$ o $c + v$, dependiendo de si se mide en la dirección de movimiento de la Tierra, o la dirección opuesta. Los resultados experimentales sin embargo no lograron medir ninguna diferencia de velocidad, obteniendo siempre el mismo valor para c . El motivo teórico es la teoría de Maxwell que afirma la existencia de ondas electromagnéticas (luz), cuya velocidad c es una constante predicha por la teoría. Si se asume que todas las leyes de la física son válidas para todos los observadores, hay que aceptar que c es una constante universal. Llevar estos dos postulados hasta sus últimas consecuencias implica abandonar las ideas intuitivas del espacio y el tiempo. Para una mejor comprensión veamos el siguiente ejemplo:

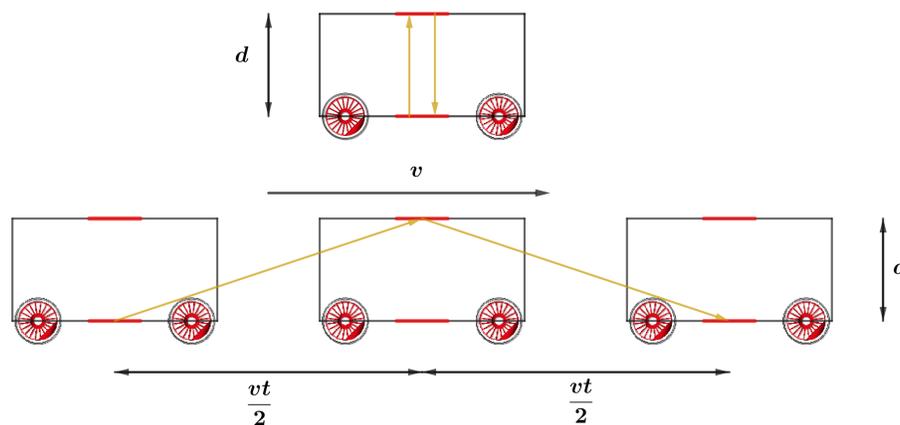


Figura 1.10: EL reloj de luz de un tren en movimiento visto por un observador \mathcal{O}' dentro del tren (arriba) y un observador \mathcal{O} en el andén (abajo).

Considérese un tren que se mueve con velocidad v en movimiento uniforme rectilíneo con respecto al andén de una estación. El pasajero en el tren \mathcal{O}' dispone de un reloj de luz, que consiste en dos espejos colocados uno encima del otro a una altura d y un pulso de luz que

viaja continuamente entre los dos espejos. Por lo tanto, \mathcal{O}' medirá que el tiempo Δt que tarda la luz en subir y bajar entre los dos espejos es:

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}.$$

Un observador \mathcal{O} en el andén verá este mismo fenómeno de manera distinta: para él la luz sale del espejo de abajo, pero llega al espejo de arriba después de un tiempo $\Delta t/2$ cuando el tren se ha desplazado una distancia $v\Delta t/2$ y otra vez al espejo de abajo después de un tiempo total Δt cuando el tren se ha desplazado una distancia total $v\Delta t$ (véase Figura 1.10). Para \mathcal{O} , la luz recorre una trayectoria más larga y, dado que la velocidad de la luz es la misma que para el pasajero, habrá pasado más tiempo entre que la luz saliese y llegase otra vez al espejo de abajo. Concretamente, la distancia que recorre la luz al subir es, por el teorema de Pitágoras

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + d^2,$$

de donde podemos despejar Δt como

$$\Delta t = \frac{2d/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Vemos por lo tanto que el intervalo de tiempo efectivamente ha sido más largo para el observador en el andén que para el pasajero. Este efecto se llama la *dilatación del tiempo* y es completamente general: los relojes en movimiento corren menos rápido que los relojes en reposo. El factor de corrección:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

es una función creciente de v , que siempre es mayor que 1. Obsérvese sin embargo que para velocidades $v \ll$ mucho más pequeñas que la velocidad de la luz, tenemos que $\gamma \approx 1$, de modo que estos efectos relativistas son completamente despreciables en la vida cotidiana. Observando el valor de γ concluimos que la velocidad de la luz surge en la relatividad especial como un límite máximo, que ningún observador, ni ninguna señal puede superar.

La situación anterior es análoga si cambiamos el punto de vista de los observadores; es decir, podemos asumir que el observador \mathcal{O} en el andén este movimiento, mientras que el observador \mathcal{O}' que está en el tren se encuentre en reposo.

Concluimos por lo tanto que cada uno ve el reloj del otro ir más lento que el suyo, puesto que cada uno ve al otro en movimiento. No hay manera de saber cual de los dos “realmente” va más lento, ya que esto depende del punto de vista del observador. Por muy contraintuitiva que pueda parecer, esta situación no lleva a contradicciones, si se toma en cuenta el hecho de que también las distancias son relativas.

Asumimos que el andén tiene una longitud L medida por \mathcal{O} . Este puede escribir $L = v\Delta t$,

donde Δt es el intervalo que necesita el tren para recorrer el andén. Por otro lado, \mathcal{O}' mide una longitud $L' = v\Delta t'$, donde ahora $\Delta t'$ es el tiempo entre que el pasajero pasa por el principio y el final del andén, medido por él.

Dado que los dos observadores no coinciden en cuánto ha durado el intervalo de tiempo, tampoco se pondrán de acuerdo sobre la longitud del andén. Para \mathcal{O}' , el andén mide

$$L' = v\Delta t' = v\Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} = L\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

es decir un factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ más corto que para \mathcal{O} . Este efecto se conoce bajo el nombre de *contracción de Lorentz*: los objetos en movimiento sufren una contracción longitudinal con un factor γ^{-1} . Otra vez la situación es simétrica: O ver´a el tren contraído con respecto a la medición de \mathcal{O}' . La contracción de Lorentz y la dilatación del tiempo conspiran para que el conjunto sea consistente.

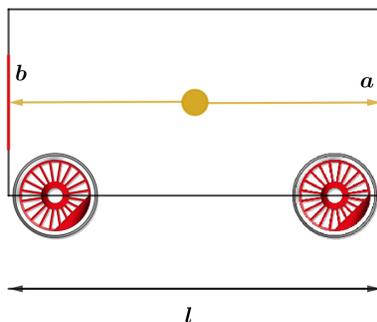


Figura 1.11: La simultaneidad de eventos: una fuente de luz emite señales hacia dos detectores a y b , colocados al principio y al final del tren. Para \mathcal{O}' las dos señales llegan simultáneamente a los detectores, mientras según \mathcal{O} la señal llega primero al detector b y después al detector a .

Nótese que todos los efectos relativistas derivados anteriormente (la dilatación del tiempo, la contracción de Lorentz y la no-simultaneidad de sucesos(ver figura 1.11)) son debidos al segundo postulado: la constancia de la velocidad de la luz. El primer postulado, la equivalencia de los observadores inerciales nos dirá cómo relacionar las mediciones de un observador con las de otro.

Tomamos la siguiente configuración para dos observadores (ver figura 1.12):

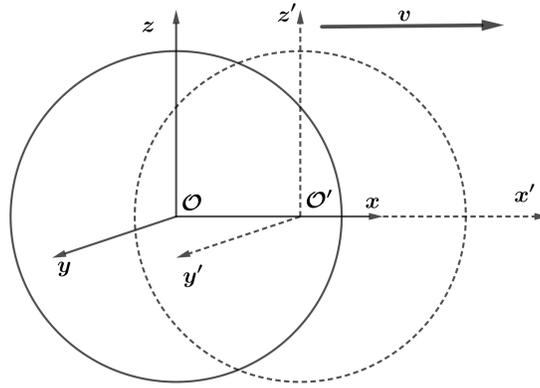


Figura 1.12: Dos sistemas de referencia \mathcal{O} y \mathcal{O}' se mueven con una velocidad relativa v . Los sistemas de referencia están orientados tal que los ejes son paralelos y los relojes están sincronizados tal que en $t = t' = 0$ los orígenes coinciden. Debido a la constancia de la velocidad de la luz, una señal luminosa, emitida en todas las direcciones desde el origen en el momento $t = t' = 0$, sería esférica en ambos sistemas de referencia.

Se calcula que las transformaciones que relacionan \mathcal{O} y \mathcal{O}' vienen dadas por:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.4.1)$$

Estas transformaciones se llaman **transformaciones de Lorentz** y fueron construidas de tal manera que la cantidad

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2.$$

Una transformación de Lorentz relaciona las componentes (x, y, z, ct) de un vector de posición visto por un observador \mathcal{O} con las componentes (x', y', z', ct') des mismo vector por otro observador \mathcal{O}' . Una transformación de Lorentz entonces no es más que un cambio de base dentro del espacio de Minkowski. Ya hemos visto que la trayectoria de \mathcal{O}' es una recta por el origen dentro del cono de luz, donde el ángulo β entre la trayectoria y el eje ct es una medida de la velocidad de \mathcal{O}' : $\tan \beta = v/c$ (ver figura 1.13). El observador \mathcal{O}' tomará esta recta como su eje temporal ct' , puesto que está en reposo con respecto a sí mismo. Dado que para \mathcal{O}' la velocidad de la luz tiene que ser igual que para \mathcal{O} , el eje x' de \mathcal{O}' está orientado de manera simétrica con respecto al cono de luz, es decir el ángulo entre el eje x y x' también es β (ver figura 1.13). Tanto el sistema de referencia (ct, x, y, z) de \mathcal{O} como el sistema (ct', x', y', z') de \mathcal{O}' forman una base completa del espacio de Minkowski, y la diferencia entre ellos es un cambio de base a través de la transformación (1.4.1)

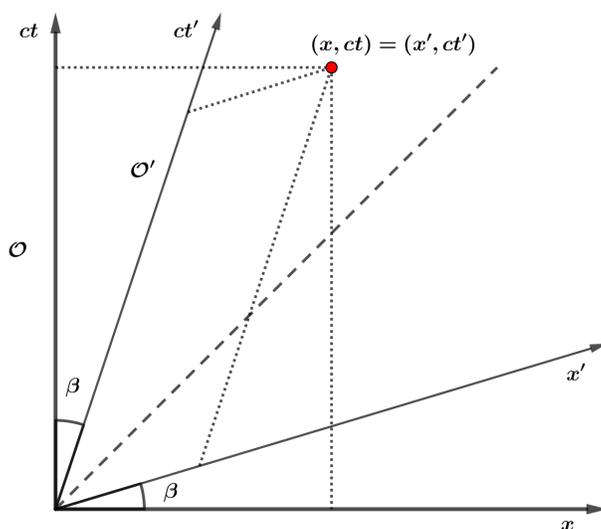


Figura 1.13: Una transformación de Lorentz en el espacio de Minkowski: el mismo suceso tiene coordenadas (ct, x) para el observador \mathcal{O} y coordenadas (ct', x') para el observador \mathcal{O}' . Los dos sistemas de referencia están relacionados a través de una transformación de Lorentz (1.4.1).

Con los diagramas de espacio-tiempo descritos arriba podemos fácilmente derivar efectos como la contracción de Lorentz y la no-simultaneidad de eventos. Una varilla de longitud L' (medida en coordenadas x') que se mueve junto con el observador \mathcal{O}' , barrerá una trayectoria como la dibujada en la Figura 1.14. Del dibujo está claro que \mathcal{O} y \mathcal{O}' no ven la varilla de la misma manera.

Para cada observador dos eventos simultáneos son dos eventos que tienen el mismo valor de la coordenada temporal. Pero como \mathcal{O} y \mathcal{O}' usan cada uno su propia coordenada temporal, no estarán de acuerdo sobre si ciertos eventos coinciden o no. Para \mathcal{O} , los sucesos simultáneos son los que tienen el mismo valor para ct (líneas horizontales en la Figura 1.14), como los puntos a y c a los extremos de la varilla visto por \mathcal{O} . Para \mathcal{O}' , los sucesos simultáneos tienen el mismo valor de ct' (líneas inclinadas en la Figura 1.14), como los puntos a y b a los extremos de la varilla visto por \mathcal{O}' . En otras palabras, para \mathcal{O} en un momento dado la varilla se extiende de a a c , mientras para \mathcal{O}' se extiende de a a b . La varilla vista por \mathcal{O}' en un tiempo dado es un “corte de la varilla visto por \mathcal{O} en distintos momentos”, y viceversa. Por lo tanto no es de extrañar que los observadores tampoco se ponen de acuerdo sobre la longitud de la varilla: \mathcal{O} mide una longitud L (el intervalo $[a, c]$), mientras que \mathcal{O}' sólo mide L' (el intervalo $[a, b]$). La contracción de Lorentz y la no-simultaneidad de eventos van mano en mano.

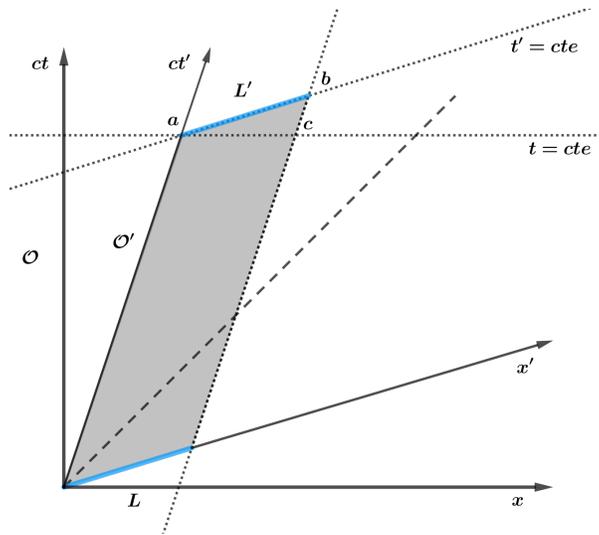


Figura 1.14: La contracción de Lorentz y la no-simultaneidad de eventos en el espacio de Minkowski. Una varilla de longitud L' para un observador en reposo con respecto a la varilla, tiene una longitud $L < L'$ para un observador que ve la varilla moverse. Los eventos que un observador llama simultáneos no lo son para otro.

Capítulo 2

Geometría diferencial de curvas y superficies en \mathbb{R}^3

No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse un día a los fenómenos del mundo real.

Nikolay Lobachevski

2.1. Curvas

2.1.1. Curvas en el espacio

DEFINICIÓN 2.1: Una curva parametrizada diferenciable es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un intervalo $I = (a, b)$ de la recta real \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 .

Denotaremos por $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$ al *vector tangente* (o vector velocidad) de la curva α en t .

EJEMPLO 2.1: La curva diferenciable dada por:

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad a > 0, b > 0$$

tiene como traza en \mathbb{R}^3 una hélice de paso $2\pi b$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Aquí el parámetro t mide el ángulo que forma el eje x con la recta que une al origen O con la proyección del punto $\alpha(t)$ sobre el plano xy , ver figura 2.1

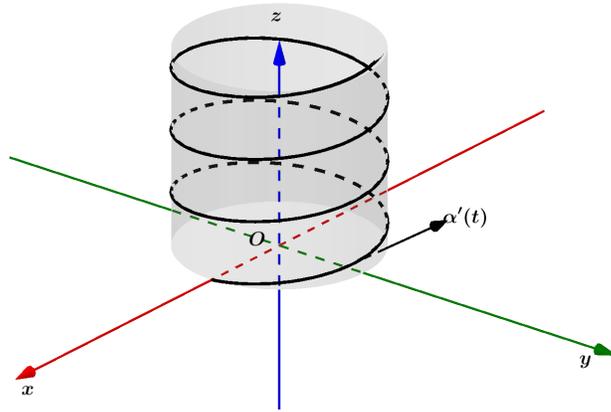


Figura 2.1: Hélice.

2.1.2. Curvas regulares; longitud de arco

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada diferenciable. Para cada $t \in I$ en donde $\alpha'(t) \neq 0$ existe una recta bien definida, que pasa por el punto $\alpha(t)$ y contiene al vector $\alpha'(t)$. Esta recta se denomina *recta tangente* a α en t . Para el estudio de la geometría diferencial de una curva es esencial la existencia de tal recta tangente en cada punto. Por esta razón, llamaremos a cualquier punto t donde $\alpha'(t) = 0$ un *punto singular* de α y se hará el estudio sobre curvas sin puntos singulares.

DEFINICIÓN 2.2: Una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ se denomina regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Dado $t \in I$, la longitud de arco de una curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, desde el punto t_0 , es por definición:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt,$$

donde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2},$$

es la longitud del vector $\alpha'(t)$. Ya que $\alpha'(t) \neq 0$, la longitud de arco s es una función diferenciable de t y $ds/dt = |\alpha'(t)|$.

DEFINICIÓN 2.3: Dada una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, se dirá que está parametrizada por longitud de arco si $|\alpha'(t)| = 1$.

Dada la curva α parametrizada por la longitud de arco $s \in (a, b) \subset I$, podríamos considerar la curva β definida en $(-a, -b)$ por $\beta(s) = \alpha(-s)$, que tiene la misma traza que la primera pero está descrita en sentido contrario. Diremos, entonces, que estas dos curvas se diferencian por un *cambio de orientación*.

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco s . Dado que el vector tangente $\alpha'(s)$ tiene longitud igual a uno, la norma $|\alpha''(s)|$ de la segunda derivada mide la tasa de cambio del ángulo que tangentes próximas forman con la tangente en s . Por esta razón, $|\alpha''(s)|$ proporciona una medida de cuán rápidamente se desvía la curva de la recta tangente en s , en un entorno de s .

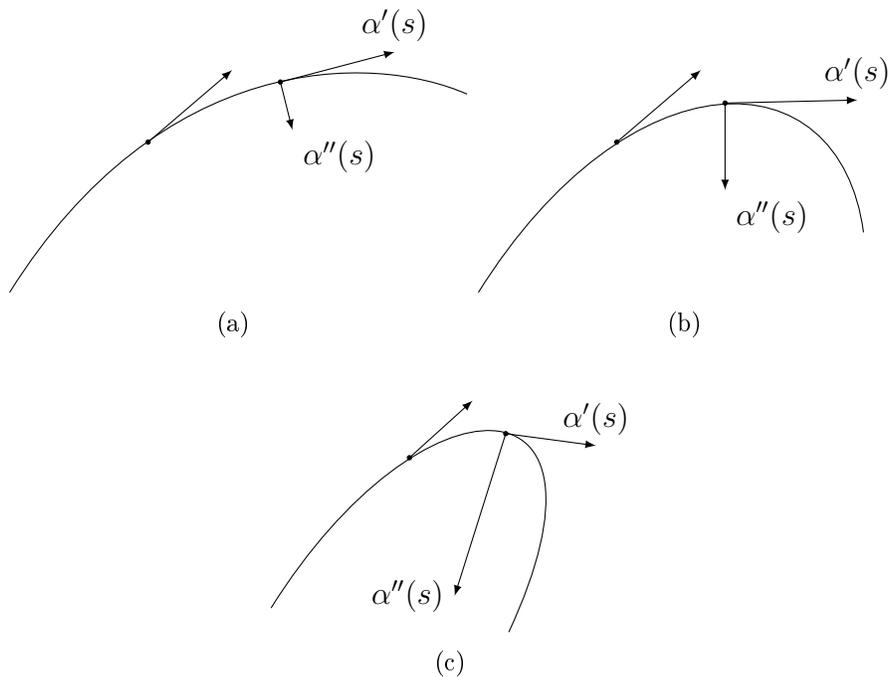


Figura 2.2: Curvatura de α en s .

2.1.3. Triedro de Frenet-Serret

DEFINICIÓN 2.4: Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco $s \in I$. El número $|\alpha''(s)| = k(s)$ se denomina la curvatura de α en s .

En puntos donde $k(s) \neq 0$, está bien definido un vector unitario $n(s)$ en la dirección $\alpha''(s)$ mediante la ecuación $\alpha''(s) = k(s)n(s)$. Más aún, $\alpha''(s)$ es normal a $\alpha'(s)$. Así, $n(s)$ es normal a $\alpha'(s)$ y se denomina el *vector normal* en s . El plano determinado por los vectores unitarios tangente y normal, $\alpha'(s)$ y $n(s)$, se denomina el *plano osculador* en s .

DEFINICIÓN 2.5: Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco s tal

que $\alpha''(s) \neq 0$, $s \in I$. El número $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s)n(s)$ se denomina la *torsión* de α en s .

A cada valor del parámetro s , hemos asociado tres vectores unitarios ortogonales $t(s), n(s), b(s)$, ver figura 2.3. Nos referiremos al triedro así formado como *triedro de Frenet-Serret* en s . Las derivadas $t'(s) = k(s)n(s)$, $b'(s) = \tau(s)n(s)$ de los vectores $t(s)$ y $b(s)$, cuando se expresan en la base $\{t, n, b\}$, generan entidades geométricas (la curvatura k y la torsión τ) que nos proporciona información sobre el comportamiento de α en un entorno de s .

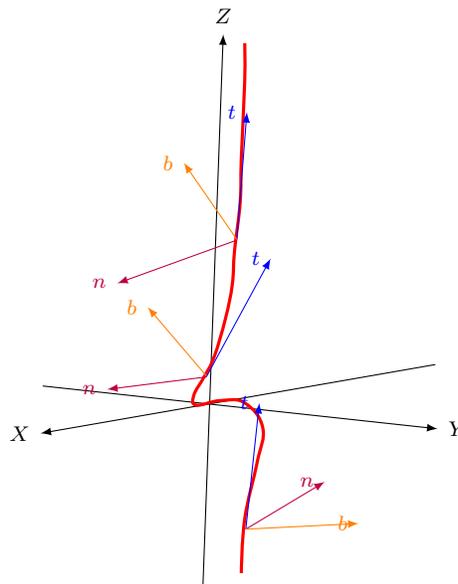


Figura 2.3: Triedro de Frenet-Serret a lo largo de una curva.

DEFINICIÓN 2.6 (Fórmulas de Frenet):

$$\begin{pmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA TEORÍA LOCAL DE CURVAS: Dadas las funciones diferenciables $\kappa(s) > 0$ y $\tau(s)$, $s \in I$, existe una curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que s es la longitud de arco, $\kappa(s)$ es la curvatura y $\tau(s)$ es la torsión de α . Además, cualquier otra curva $\tilde{\alpha}$, satisfaciendo las mismas condiciones difiere de α en un movimiento rígido; esto es, existe una aplicación lineal ortogonal ϱ de \mathbb{R}^3 , con determinante positivo y un vector \mathbf{u} tal que $\tilde{\alpha} = \varrho + \mathbf{u}$.

2.2. Superficies regulares

De manera intuitiva, una superficie regular en \mathbb{R}^3 se obtiene tomando trozos de un plano, deformándolos, y disponiéndolos de forma que la figura resultante carezca de puntos abruptos, bordes o autointersecciones y que tenga sentido hablar de plano tangente en los puntos de la figura.

DEFINICIÓN 2.7: Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si, para cada $p \in S$, existe un entorno V en \mathbb{R}^3 y una aplicación $\varphi : U \rightarrow V \cup S$ de un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

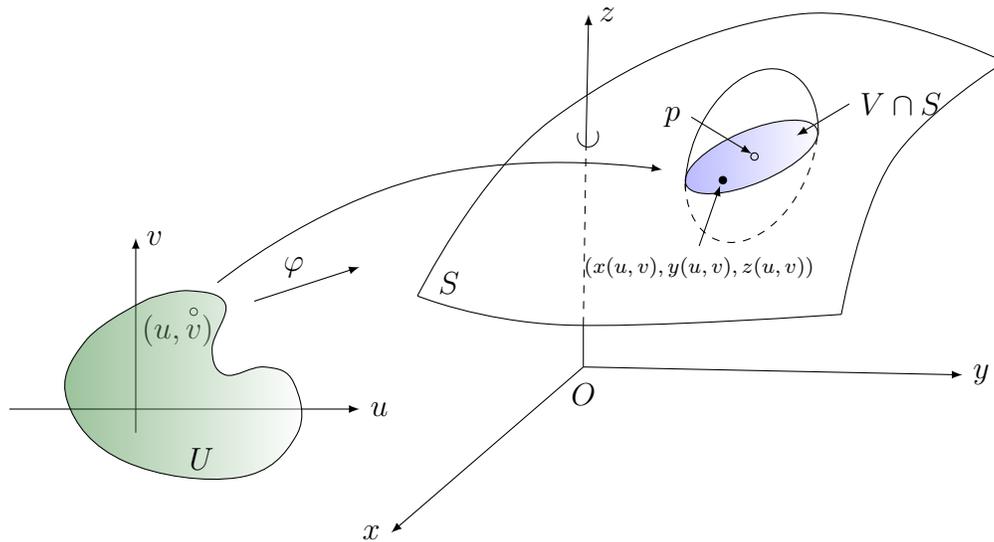


Figura 2.4:

1. φ es *diferenciable*. Esto significa que si escribimos

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

las funciones $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en U .

2. φ es un *homeomorfismo*. Como φ es continua por la condición 1, esto significa que φ admite una inversa $\varphi^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que es continua; es decir, φ^{-1} es la restricción de una función continua $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida sobre un conjunto abierto W que contiene a $V \cap S$.
3. Condición de *regularidad*. Para cada $q \in U$, la diferencial $d\varphi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva

La aplicación φ se denomina una *parametrización* o un sistema (local) de coordenadas en (un entorno) p . El entorno $V \cap S$ se denomina un *entorno coordinado*.

2.2.1. El plano tangente; la diferencial de una aplicación

Por un vector *tangente* a S , en $p \in S$, entendemos al vector tangente $\alpha'(0)$ de una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$.

PROPOSICIÓN 2.1: Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de una superficie regular S y sea $q \in U$. El subespacio vectorial de dimensión 2,

$$d\varphi_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide con el conjunto de los vectores tangentes a S en $\varphi(q)$.

Demostración:

Sea w un vector tangente en $\varphi(q)$, es decir, $w = \alpha'(0)$, donde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ es diferenciable y $\alpha(0) = \varphi(q)$, la curva $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ es diferenciable. Por la definición de diferencial, tenemos $d_{\varphi_q}(\beta'(0)) = w$. De donde, $w \in d_{\varphi_q}(\mathbb{R}^2)$ (ver figura 2.5). Por otra parte,

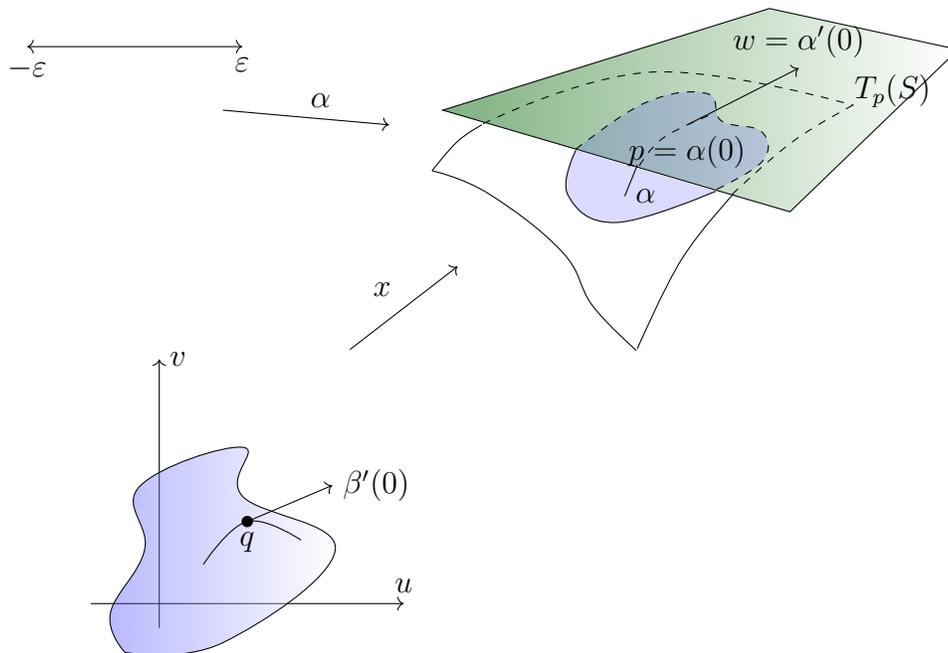


Figura 2.5: Plano tangente

sea $w = d_{\varphi_q}(v)$, donde $V \in \mathbb{R}^2$. Es claro que el vector velocidad de la curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ dada por

$$\gamma(t) = tv + q, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Por la definición de diferencial, $w = \alpha'(0)$, donde $\alpha = \varphi \circ \gamma$. Esto demuestra que w es un vector tangente ■

Debido a la proposición anterior, el plano $d_{\varphi_q}(\mathbb{R}^2)$, que pasa por $\varphi(q) = p$, no depende de la parametrización φ . Este plano se llamará *plano tangente* a S en p y se denotará por $T_p(S)$, denominada la base asociada a φ . Algunas veces es conveniente escribir $\partial\varphi/\partial u = \varphi_u$ y $\partial\varphi/\partial v = \varphi_v$.

Las coordenadas de un vector en $w \in T_p(S)$ en la base asociada a una parametrización φ se determina como sigue, w es el vector velocidad $\alpha'(0)$ de una curva $\alpha = \varphi \circ \beta; (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ se expresa por $\beta(t) = (u(t), v(t))$, con $\beta(0) = q = \varphi^{-1}(p)$. Así,

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}\varphi(u(t), v(t))(0) \\ &= \varphi_u(q)u'(0) + \varphi_v(q)v'(0) = w. \end{aligned}$$

Luego, en la base $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$, w tiene coordenadas $(u'(0), v'(0))$, donde $(u(t), v(t))$ es la expresión en la parametrización φ , de una curva cuyo vector velocidad en $t = 0$ es w .

Con la noción de plano tangente, podemos hablar de diferencial de una aplicación (diferenciable) entre superficies. Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares y sea $\psi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable de un conjunto abierto V de S_1 en S_2 . Si $p \in V$, sabemos que cada vector tangente $w \in T_p(S_1)$ es el vector velocidad $\alpha'(0)$ de una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ con $\alpha'(0) = p$. La curva $\beta = \psi \circ \alpha$ es tal que $\beta(0) = \psi(p)$, y por tanto $\beta'(0)$ es un vector de $T_{\psi(p)}(S_2)$, ver figura 2.6.

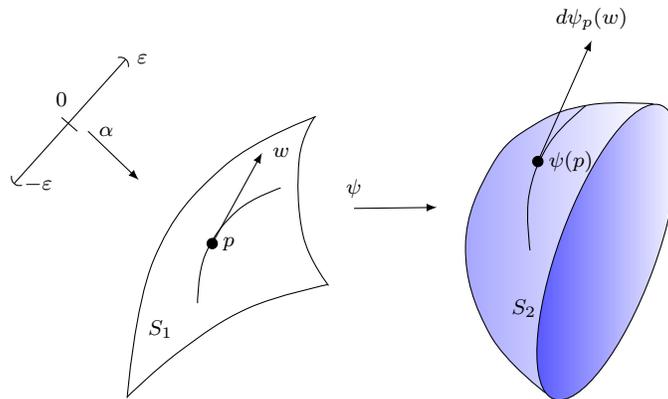


Figura 2.6:

PROPOSICIÓN 2.2: Dado el vector $\beta'(0)$ no depende de la elección de α . La aplicación $d\psi_p : T_p(S_1) \rightarrow T_{\psi(p)}(S_2)$ definida por $d\psi_p(w) = \beta'(0)$ es lineal.

Lo que hemos hecho hasta ahora es extender las nociones del cálculo diferencial de \mathbb{R}^2 a superficies regulares. A fin de cuentas que el cálculo diferencial es una teoría esencialmente local, hemos definido una entidad (la superficie regular) que era localmente como un plano, salvo difeomorfismos, y entonces esta extensión se volvió natural. Debería esperarse por tanto que el teorema básico de la función inversa se extienda a aplicaciones diferenciables entre superficies.

Diremos que una aplicación $\varphi : U \subset S_1 \rightarrow S_2$ es un *difeomorfismo* local en $p \in U$ si existe un entorno $V \subset U$ de p tal que φ restringida a V es un difeomorfismo sobre un conjunto abierto $\varphi(V) \subset S_2$.

2.2.2. La primera forma fundamental; área

El producto interior natural de $\mathbb{R}^3 \supset S$ induce en cada plano tangente $T_p(S)$ de una superficie regular S un producto interior, que se denotará por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Si $w_1, w_2 \in T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$, entonces $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ es igual al producto interior de w_1 y w_2 como vectores de \mathbb{R}^3 . A este producto interior, que es una forma bilineal simétrica, corresponde una forma cuadrática $I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0. \quad (2.2.1)$$

DEFINICIÓN 2.8: La forma cuadrática I_p en $T_p(S)$, definida por la ecuación 2.2.1, se denomina *la primera forma fundamental* de la superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ en $p \in S$.

Por consiguiente, la primera forma fundamental es simplemente la expresión de cómo la superficie S hereda el producto interior natural de \mathbb{R}^3 . Geométricamente, la primera forma fundamental nos permite hacer mediciones sobre la superficie (longitudes de curvas, ángulos entre vectores tangentes, áreas de regiones) sin referirnos al espacio ambiente \mathbb{R}^3 donde se halla la superficie.

Ahora expresemos la primera forma fundamental en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ asociada a la parametrización $\varphi(u, v)$ en p . Como un vector tangente $w \in T_p(S)$ es el vector tangente de una curva parametrizada $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $p = \alpha(0) = \varphi(u_0, v_0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \varphi_u u' + \varphi_v v', \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle_p \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p u'v' + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2. \end{aligned}$$

En donde los valores de la funciones involucradas se evalúan en $t = 0$, y

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p, \\ F(u_0, v_0) &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p, \\ G(u_0, v_0) &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_p, \end{aligned}$$

son los *coeficientes* de la primera forma fundamental en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ de $T_p(S)$. Haciendo a p recorrer el entorno coordenado correspondiente a $\varphi(u, v)$ obtenemos las funciones $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$ que son diferenciables en ese entorno.

EJEMPLO 2.2: El cilindro recto apoyado sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ (ver figura 2.2) admite la parametrización $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sen u, v),$$

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}.$$

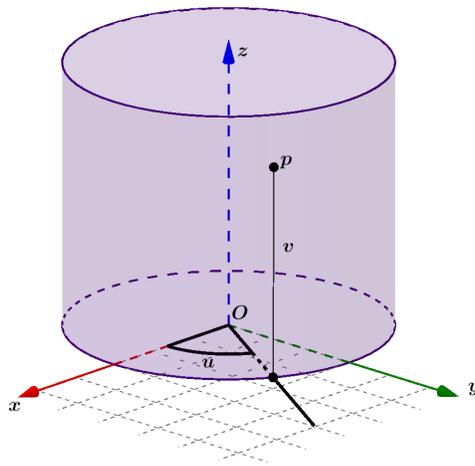


Figura 2.7:

Para calcular la primera forma fundamental, observamos que

$$\varphi_u = (-\sen u, \cos u, 0), \quad \varphi_v = (0, 0, 1),$$

por consiguiente

$$E = \sen^2 u + \cos^2 u = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

La importancia de la primera forma fundamental I_p procede del hecho de que conociéndola podemos tratar cuestiones métricas sobre una superficie regular sin otras referencias al espacio ambiente \mathbb{R}^3 . Así, la longitud de arco s de una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ viene dada por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.$$

En particular, si $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ está contenida en un entorno coordenado correspondiente a la parametrización $\varphi(u, v)$, podemos calcular la longitud de arco de α entre, pongamos

por caso, 0 y t mediante

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt.$$

También, el ángulo θ bajo el que se cortan dos curvas parametrizadas $\alpha : I \rightarrow S$, $\beta : I \rightarrow S$ en $t = 0$ viene dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle_p}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}.$$

En particular, el ángulo ϕ entre las curvas coordenadas de una parametrización $\varphi(u, v)$ es

$$\cos \phi = \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p}{|\varphi_u| |\varphi_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

de donde se deduce que las curvas coordenadas de una parametrización son ortogonales si y sólo si $F(u, v) = 0$ para todo (u, v) . Esta parametrización se denomina *parametrización ortogonal*.

Otra cuestión métrica que puede tratarse con la primera forma fundamental es el cálculo (o la definición) del área de una región acotada de una superficie regular S . Un *dominio* (regular) de S es un subconjunto abierto y conexo de S tal que su frontera es la imagen de un círculo mediante un homeomorfismo diferenciable que es regular (es decir, su diferencial es diferente de cero) excepto en un número finito de puntos. Una *región* de S es la unión de un dominio con su frontera. Una región de $S \subset \mathbb{R}^3$ está *acotada* si está contenida en alguna bola de \mathbb{R}^3 .

Consideremos regiones acotadas de R que estén contenidas en un entorno $\varphi(U)$ de una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. En otras palabras, R es la imagen mediante φ de una región acotada $Q \subset U$. La función $|\varphi_u \times \varphi_v|$, definida en U , mide el área del paralelogramo generado por los vectores φ_u y φ_v .

DEFINICIÓN 2.9: Se $R \subset S$ una región acotada de una superficie regular contenida en el entorno coordenado de una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. El número positivo

$$\int \int_Q |\varphi_u \times \varphi_v| dudv = A(R) \quad Q = \varphi^{-1}(R),$$

se denomina el *área* de R .

Es conveniente observar que

$$|\varphi_u \times \varphi_v|^2 + \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = |\varphi_u|^2 |\varphi_v|^2,$$

lo que prueba que el integrando de $A(R)$ se puede escribir como

$$|\varphi_u \times \varphi_v| = \sqrt{EG - F^2}.$$

2.3. Geometría de la aplicación de Gauss

Dada una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de una superficie regular S en un punto $p \in S$, podemos elegir un vector unitario normal en cada punto de $\varphi(U)$ mediante la regla

$$N(q) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}, \quad q \in \varphi(U).$$

Así, tenemos una aplicación $N : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asocia a cada $q \in \varphi(U)$ un vector unitario normal $N(q)$. Más generalmente, si $V \subset S$ es un conjunto abierto en S y $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable que asocia a cada $q \in V$ un vector normal en q , decimos que N es un *campo diferenciable de vectores unitarios normales* en V .

No todas las superficies admiten un campo diferencial de vectores unitarios normales *definido en la totalidad de la superficie*. De hecho en la banda de Möbius no puede definirse tal campo. Esto puede verificarse intuitivamente recorriendo el círculo medio de la figura 2.8: tras una vuelta, el campo vectorial N se convertiría en $-N$, lo que contradice la continuidad de N . Intuitivamente, uno no puede, sobre la banda de Möbius, efectuar una elección consistente de un “lado” definido; moviéndonos alrededor de la superficie, podemos ir con continuidad al “otro lado” sin abandonar la superficie.

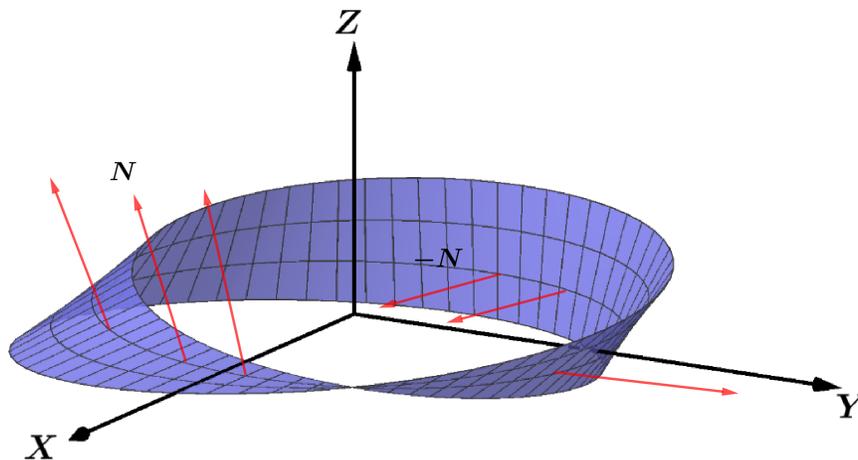


Figura 2.8: Banda de Möbius.

Diremos que una superficie regular es *orientable* si admite un campo diferenciable de vectores unitarios normales definido en la totalidad de la superficie; la elección de un campo N de ese tipo se denomina una *orientación* de S . Cada superficie es orientable localmente, y la orientación es una propiedad global en el sentido de que involucra a la totalidad de la superficie.

Una orientación N en S induce una orientación sobre cada espacio tangente $T_p(S)$, $p \in S$, como sigue. Defínase una base $\{v, w\} \in T_p(S)$ como *positiva* si $\langle v \times w, N \rangle_p$ es positivo. Se ve fácilmente que el conjunto de todas las bases positivas de $T_p(S)$ es una orientación para $T_p(S)$.

DEFINICIÓN 2.10: Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con una orientación N . La aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma valores en la esfera unitaria, ver figura 2.9.

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

La aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ así definida, se denomina la *aplicación de Gauss* de S .

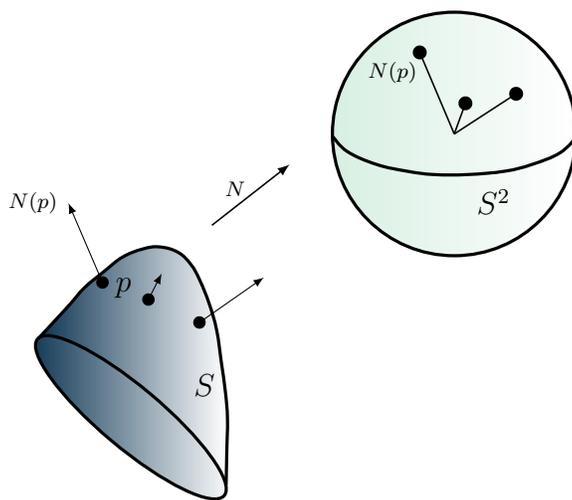


Figura 2.9: Aplicación de Gauss.

La aplicación de Gauss es diferenciable. La diferencial dN_p de N en $p \in S$ es una aplicación lineal de $T_p(S)$ en $T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$. Como $T_p(S)$ y $T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$ son planos paralelos, dN_p puede observarse como una aplicación lineal en $T_p(S)$.

La aplicación lineal $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ opera como sigue. Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ en S con $\alpha(0) = p$, consideremos la curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ en la esfera \mathbb{S}^2 ; esto equivale a restringir el vector normal N a la curva $\alpha(t)$. El vector tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ es un vector de $T_p(S)$, mide la tasa de variación del vector normal N , restringido a la curva $\alpha(t)$, en $t = 0$. Así, dN_p mide como N se aleja de $N(p)$ en un entorno de p . En el caso de curvas, esta medida viene dada por un número, la curvatura. En el caso de superficies, esta medida está caracterizada por la aplicación lineal.

DEFINICIÓN 2.11: Dado un espacio vectorial V y un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$, decimos que la aplicación $A : V \rightarrow V$ es *autoadjunta* si $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ para todo $v, w \in V$.

El hecho de que $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ es una aplicación lineal autoadjunta nos permite asociar a dN_p una forma cuadrática Q en $T_p(S)$, dada por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle_p$, $v \in T_p(S)$. Para obtener una definición geométrica de esta forma cuadrática, necesitamos algunas definiciones. Vamos a utilizar la forma cuadrática $-Q$.

DEFINICIÓN 2.12: La forma cuadrática II_p , definida en $T_p(S)$ por $II_p = -\langle dN_p(v), v \rangle_p$ se denomina la *segunda forma fundamental* de S en p .

DEFINICIÓN 2.13: Sea C una curva regular en S que pasa por $p \in S$, k la curvatura de C en p , y $\cos \theta = \langle n, N \rangle_p$, donde n es el vector normal a C y N es el vector normal a S en p . El número $k_n = k \cos \theta$ se denomina *curvatura normal* de $C \subset S$ en p . Ver figura 2.10.

En otras palabras, k_n es la longitud de la proyección del vector kn sobre la normal a la superficie en p , con un signo dado por la orientación N de S en p .

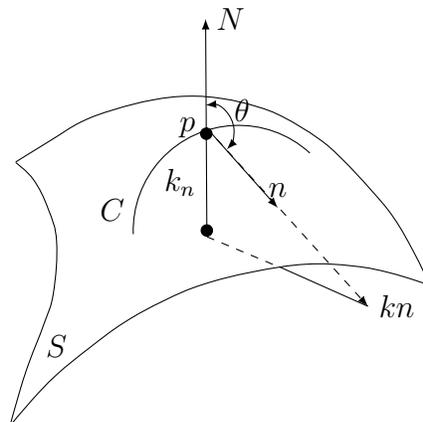


Figura 2.10: Curvatura normal.

OBSERVACIÓN 2.1: La curvatura normal de C no depende de la orientación de C sino que cambia de signo con un cambio de orientación de la superficie.

Para dar una interpretación de la segunda forma fundamental II_p , consideremos una curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$, donde s es la longitud de arco de C , y con $\alpha(0) = p$. Si denotamos por $N(s)$ la restricción del vector normal N a la curva $\alpha(s)$, tenemos $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle_p = 0$. De donde,

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle_p = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle_p.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle_p \\
 &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\
 &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle_p \\
 &= \langle N, kn \rangle_p \\
 &= k_n(p).
 \end{aligned}$$

En otros términos, el valor de la segunda forma fundamental II_p para un vector unitario $v \in T_p(S)$ es igual a la curvatura normal de una curva regular que pasa por p y es tangente a v .

La expresión de la segunda forma fundamental en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ viene dada por

$$\begin{aligned}
 II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle_p = -\langle N_u u' + N_v v', \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle_p \\
 &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2,
 \end{aligned}$$

donde, puesto que $\langle N, \varphi_u \rangle_p = \langle N, \varphi_v \rangle_p = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 e &= \langle N, \varphi_{uu} \rangle_p. \\
 f &= \langle N, \varphi_{uv} \rangle_p. \\
 g &= \langle N, \varphi_{vv} \rangle_p.
 \end{aligned}$$

Donde e, f, g se denominan los *coeficientes de la segunda forma fundamental*.

PROPOSICIÓN 2.3 (Meusnier): Todas las curvas contenidas en S que tienen en un punto dado $p \in S$ la misma recta tangente, tienen en este punto la misma curvatura normal.

Para cada $p \in S$ existe una base ortonormal $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ de $T_p(S)$ tal que $dN_p(\mathbf{e}_1) = -k_1 \mathbf{e}_1$, $dN_p(\mathbf{e}_2) = -k_2 \mathbf{e}_2$. Además, k_1 y k_2 ($k_1 \geq k_2$) son el máximo y el mínimo de la segunda forma fundamental II_p restringida al círculo unidad de $T_p(S)$; es decir, son los valores extremos de la curvatura normal en p .

DEFINICIÓN 2.14: La curvatura normal máxima k_1 y la curvatura normal mínima k_2 se denominan las curvaturas principales en p ; las direcciones correspondientes, es decir, las direcciones dadas por los autovectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ se denominan las direcciones principales en p .

DEFINICIÓN 2.15: Si una curva regular conexa C en S es tal que para todo $p \in C$ la recta tangente de C es una dirección principal en p , entonces se dice que C es una línea de curvatura.

DEFINICIÓN 2.16 (Olinde Rodríguez): Una condición necesaria y suficiente para que una curva regular conexa C en S sea una línea de curvatura de S es que

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t),$$

para cualquier parametrización $\alpha(t)$ de C , donde $N(t) = N \circ \alpha(t)$ y $\lambda(t)$ es una función diferenciable de t . En este caso, $-\lambda(t)$ es la curvatura (principal) a lo largo de $\alpha'(t)$.

Dada una aplicación lineal $A : V \rightarrow V$ de un espacio vectorial de dimensión 2 y dada una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de V , se recuerda que dada una aplicación lineal asociada a la matriz A con entradas $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{3,3}$, el determinante de A es $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, y la traza es $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$, donde (a_{ij}) es la matriz A en la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Se sabe que estos números no dependen de la elección de la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y están, por tanto, asociados a la aplicación lineal A .

En nuestro caso, el determinante de dN es el producto $(-k_1)(-k_2) = k_1k_2$ de las curvaturas principales, y la traza de dN es el opuesto $-(k_1 + k_2)$ de la suma de las curvaturas principales. Si cambiamos la orientación de la superficie, el determinante no varía; sin embargo, la traza, cambia de signo.

DEFINICIÓN 2.17: Sea $p \in S$ y sea $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ la diferencial de la aplicación de Gauss. El determinante de dN_p es la *curvatura gaussiana* K de S en p . El opuesto de la mitad de la traza de dN_p se denomina la *curvatura media* H de S en p .

Podemos escribir, en términos de las curvaturas principales

$$K = k_1k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

DEFINICIÓN 2.18: Un punto de una superficie S se denomina

1. Elíptico si $\det(dN_p) > 0$.
2. Hiperbólico si $\det(dN_p) < 0$.
3. Parabólico si $\det(dN_p) = 0$, con $dN_p \neq 0$.
4. Plano si $dN_p = 0$.

Esta clasificación no depende de la elección de la orientación.

DEFINICIÓN 2.19: Si en $p \in S$, $k_1 = k_2$, entonces se dice que p es un punto *umbílico* de S ; en particular, los puntos planos ($k_1 = k_2 = 0$) son puntos umbílicos.

OBSERVACIÓN 2.2: Todos los puntos de una esfera y de un plano son puntos umbílicos.

PROPOSICIÓN 2.4: Si todos los puntos de una superficie conexa S son puntos umbílicos, entonces S está contenida en una esfera o en un plano.

2.3.1. El teorema de Gauss y las ecuaciones de compatibilidad

Denotamos a S por una superficie regular, orientable y orientada. Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización en la orientación de S . A cada punto de $\varphi(U)$ le podemos asignar un triedro natural definido por los vectores φ_u, φ_v y N .

Al expresar las derivadas de los vectores φ_u, φ_v y N con respecto a la base $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 N, \\
 \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + L_2 N, \\
 \varphi_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + \bar{L}_2 N, \\
 \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_3 N, \\
 N_u &= a_{11} \varphi_u + a_{21} \varphi_v, \\
 N_v &= a_{12} \varphi_u + a_{22} \varphi_v.
 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Donde los a_{ij} vienen dados por

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\
 a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\
 a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\
 a_{22} &= \frac{fF - gG}{EG - F^2}.
 \end{aligned}$$

Los coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ se denominan los *símbolos de Christoffel* de S en la parametrización φ . Como $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, concluimos que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ y $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$; es decir, los *símbolos de Christoffel* son simétricos con respecto a los subíndices.

Efectuando el producto interior de las cuatro primeras relaciones de 2.3.1 con N , obtenemos inmediatamente $L_1 = e$, $L_2 = \bar{L}_2 = f$, $L_3 = g$, donde e, f, g son los coeficientes de la segunda forma fundamental de S .

TEOREMA EGREGIUM (Gauss): La curvatura gaussiana K de una superficie es invariante frente a isometrías locales.

En efecto, si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es una parametrización en $p \in S$ y si $\psi : V \subset S \rightarrow S$, donde $V \subset \varphi(U)$ es un entorno de p , es una isometría local en p , entonces $\omega = \psi \circ \varphi$ es una parametrización de S en $\varphi(p)$. Como φ es una isometría, los coeficientes de la primera forma fundamental de las parametrizaciones φ y ω , en los puntos correspondientes q y $\psi(q)$, $q \in V$,

coinciden; de esta forma, también coinciden los símbolos de Christoffel correspondientes. K puede calcularse en un punto, en función de los símbolos de Christoffel de la parametrización considerada en dicho punto. Se deduce entonces que $K(q) = K(\psi(q))$ para todo $q \in V$.

DEFINICIÓN 2.20: La expresión

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -EK,$$

que expresa el valor de K en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental y de sus derivadas, se conoce como *fórmula de Gauss*.

DEFINICIÓN 2.21: Las ecuaciones

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2,$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2,$$

se le denominan *ecuaciones de Mainardi-Codazzi*

La fórmula de Gauss y las ecuaciones de Mainardi-Codazzi se conocen con el nombre de *ecuaciones de compatibilidad* de la teoría de superficies.

TEOREMA 2.1 (Bonnet): Sean E, F, G, e, f, g funciones diferenciables, definidas en un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^2$, con $E > 0$ y $G > 0$. Admitamos que estas funciones satisfacen formalmente las ecuaciones de Gauss y Mainardi-Codazzi y que $EG - F^2 > 0$. Entonces, para cada $q \in V$ existe un entorno $U \subset V$ de q y un difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^3$ tal que la superficie regular $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^3$ tiene a E, F, G y e, f, g como coeficientes de las formas fundamentales primera y segunda, respectivamente. Además, si U es conexo y si

$$\bar{\varphi} : U \rightarrow \bar{\varphi}(U) \subset \mathbb{R}^3$$

es otro difeomorfismo que satisface las mismas condiciones, entonces existe una traslación T y una transformación ortogonal lineal propia ϱ en \mathbb{R}^3 tal que $\bar{\varphi} = T \circ \varrho \circ \varphi$.

2.3.2. Transporte paralelo. Geodésicas

Un campo vectorial (*tangente*) es un conjunto abierto $U \subset S$ de una superficie regular S es una correspondencia w que asigna a cada $p \in U$ un vector $w(p) \in T_p(S)$. El campo vectorial w es *diferenciable* en p si, para alguna parametrización $\varphi(u, v)$ en p , las componentes a y b de $w = a\varphi_u + b\varphi_v$ con respecto a la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ son funciones diferenciables en cada $p \in U$ entonces w es diferenciable en U .

DEFINICIÓN 2.22: Sea w un campo vectorial diferenciable en un conjunto abierto $U \subset S$ y $p \in U$. Sea $y \in T_p(S)$ consideremos la curva parametrizada

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U,$$

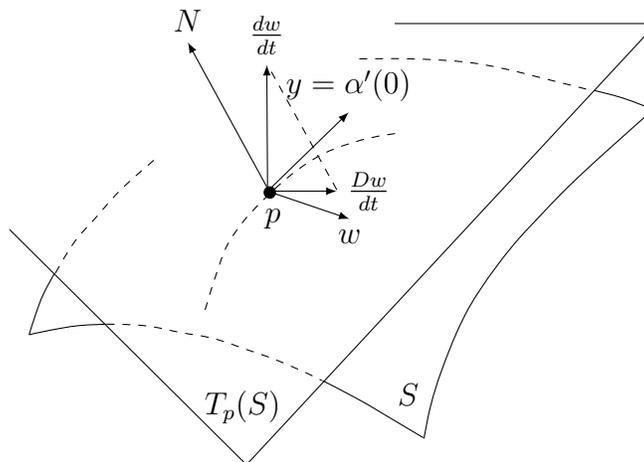


Figura 2.11: Derivada covariante.

con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = y$, y sea $w(t), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la restricción del campo vectorial w a la curva α . El campo vectorial que se obtiene proyectando ortogonalmente $(dw/dt)(0)$ sobre el plano $T_p(S)$ se denomina la *derivada covariante* en p del campo vectorial w con respecto al vector y . La derivada covariante se denota por $(Dw/dt)(0)$ o por $(D_y w)(p)$, ver figura 2.11.

La derivada covariante en términos de la parametrización $\varphi(u, v)$ y los símbolos de Christoffel la podemos definir como

$$\frac{Dw}{dt} = (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv')\varphi_u + (a' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')\varphi_v. \quad (2.3.2)$$

DEFINICIÓN 2.23: Una curva parametrizada $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ es la restricción a $[0, l]$ de una aplicación diferenciable de $(0 - \varepsilon, l + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, en S . Si $\alpha(0) = p$ y $\alpha(l) = q$, decimos que α une p con q . Se dice que α es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, l]$.

DEFINICIÓN 2.24: Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizada en S . Un campo vectorial w a lo largo de α es una correspondencia que asigna a cada $t \in I$ un vector

$$w(t) \in T_{\alpha(t)}(S).$$

El campo vectorial w es diferenciable en $t_0 \in I$, para alguna parametrización $\varphi(u, v)$ en $\alpha(t_0)$, las componentes $a(t), b(t)$ de $w(t) = a\varphi_u + b\varphi_v$, son funciones diferenciables de t en t_0 . Se dice que w es diferenciable en I si es diferenciable en cada punto $t \in I$.

DEFINICIÓN 2.25: Sea w un campo vectorial diferenciable a lo largo de $\alpha : I \rightarrow S$. La expresión 2.3.2 de $(Dw/dt)(t)$, $t \in I$, está bien definida y se denomina la derivada covariante de w en t , ver figura 2.12

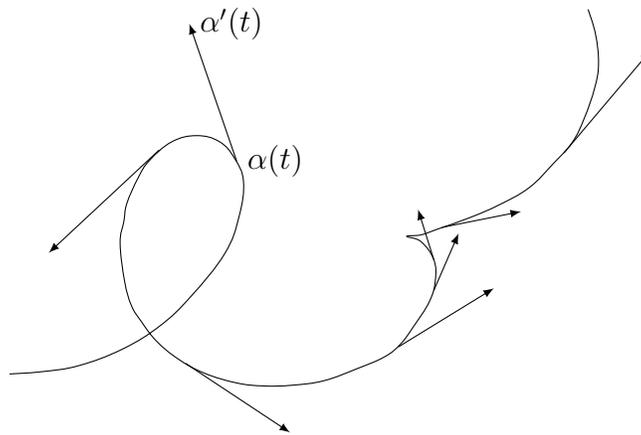


Figura 2.12: El campo de los vectores tangentes a lo largo de la curva α .

Desde el punto de vista externo a la superficie, para obtener la derivada covariante de un campo w a lo largo de $\alpha : I \rightarrow S$ en $t \in I$, efectuamos la derivada usual $(dw/dt)(t)$ de w en t y proyectamos ortogonalmente este valor sobre el plano tangente $T_{\alpha(t)}(S)$. De esto se desprende que, cuando dos superficies son tangentes a lo largo de una curva parametrizada α , la derivada covariante de un campo w a lo largo de α es la misma para ambas superficies.

Si $\alpha(t)$ es una curva sobre S , podemos imaginárnosla como la trayectoria de un punto que se mueve sobre la superficie. Entonces, $\alpha'(t)$ es la velocidad y $\alpha''(t)$ es la aceleración de α . La derivada covariante $D\alpha'/dt$ del campo $\alpha'(t)$ es la componente tangencial de la aceleración $\alpha''(t)$. Intuitivamente, $D\alpha'/dt$ es la aceleración del punto $\alpha''(t)$ observando desde la superficie S .

DEFINICIÓN 2.26: Se dice que un campo vectorial w , a lo largo de una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$, es paralelo si $Dw/dt = 0$ para cada $t \in I$.

DEFINICIÓN 2.27: Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizada y $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}(S)$, $t_0 \in I$. Sea w un campo vectorial paralelo a lo largo de α , con $w(t_1)$, $t_1 \in I$, se denomina *el transporte paralelo* de w_0 a lo largo de α en el punto t_1 .

Aquellas curvas parametrizadas $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de un plano, a lo largo de las cuales el campo tangente $\gamma'(t)$ es paralelo, son precisamente las rectas de dicho plano. Las curvas parametrizadas que satisfacen una condición análoga sobre una superficie se llaman **geodésicas**.

DEFINICIÓN 2.28: Se dice que una curva parametrizada no constante $\gamma : I \rightarrow S$ es geodésica en $t \in I$ si el campo de sus vectores tangentes $\gamma'(t)$ es paralelo a lo largo de γ en t ; es decir,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0.$$

Se dice que γ es una geodésica parametrizada si es geodésica para todo $t \in I$.

DEFINICIÓN 2.29: Se dice que una curva regular conexa C en S es una geodésica si, para cada $p \in C$, la parametrización $\alpha(s)$ de un entorno coordenado de p por la longitud de arco s es una geodésica parametrizada; es decir, $\alpha'(s)$ es un campo paralelo a lo largo de $\alpha(s)$.

Obsérvese que cada recta contenida en una superficie satisface la definición anterior. Desde el punto de vista externo a la superficie S , la definición anterior equivale a decir que $\alpha''(s) = kn$ es normal al plano tangente, es decir, paralelo a la normal de la superficie. En otras palabras, una curva regular $C \subset S$ ($k \neq 0$) es una geodésica si y sólo si su normal principal en cada punto de $p \in C$ es paralela a la normal a S en p .

Siguiendo con la analogía respecto del plano, observamos que las rectas, o sea, las geodésicas del plano, también están caracterizadas como aquellas curvas regulares de curvatura cero. Ahora, la curvatura de una curva plana orientada viene dada por el valor absoluto de la derivada del campo vectorial unitario tangente a la curva, con un signo asociado que denota la concavidad de la curva en relación con la orientación del plano. Para tener en cuenta este signo, es conveniente introducir la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.30: Sea w un campo diferenciable de vectores unitarios a lo largo de una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ sobre una superficie orientada S . Como $w(t)$, $t \in I$, es un campo vectorial unitario, $(dw/dt)(t)$ es normal a $w(t)$ y por tanto

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \times w(t)).$$

El número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado por $[Dw/dt]$, se denomina *el valor algebraico* de la derivada covariante de w en t .

El signo de $[Dw/dt]$ depende de la orientación de S y que $[Dw/dt] = \langle dw/dt, N \times w \rangle_p$.

DEFINICIÓN 2.31: Sea C una curva regular orientada contenida en una superficie orientada S , y sea $\alpha(s)$ una parametrización de C por la longitud de arco s , en un entorno de $p \in S$. El valor algebraico de la derivada covariante $[D\alpha'(s)/ds] = k_g$ de $\alpha'(s)$ en p se denomina la *curvatura geodésica* de C en p .

De esta forma, las geodésicas que sean curvas regulares están caracterizadas como las curvas cuya curvatura geodésica es cero.

Desde un punto de vista externo a la superficie, el valor absoluto de la curvatura geodésica k_g de C en p es el valor absoluto de la componente tangencial del vector $\alpha''(s) = kn$, donde k es la curvatura de C en p y n es el vector normal a C en p . Recordando que el valor absoluto de la componente normal del vector kn es el valor absoluto de la curvatura normal k_n de $C \subset S$ en p , obtenemos inmediatamente que (ver figura 2.13)

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

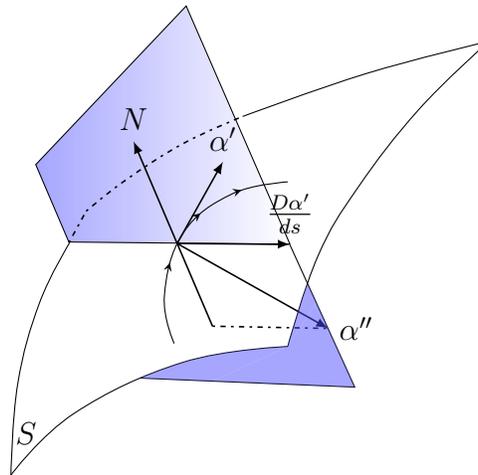


Figura 2.13:

Otra de las consecuencias de esta interpretación externa es que cuando dos superficies son tangentes a lo largo de una curva regular C , el valor absoluto de la curvatura geodésica de C con respecto a cualquiera de las dos superficies es el mismo.

OBSERVACIÓN 2.3: La curvatura geodésica de $C \subset S$ cambia de signo cuando cambia la orientación de C o bien la de S .

PROPOSICIÓN 2.5: Sea $\varphi(u, v)$ una parametrización ortogonal (es decir $F = 0$) de un entorno sobre una superficie orientada S y $w(t)$ un campo diferenciable de vectores unitarios a lo largo de la curva $\varphi(u(t), v(t))$. Entonces

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\theta}{dt},$$

donde el ángulo $\theta(t)$ es el ángulo de φ_u a $w(t)$ en la orientación considerada.

PROPOSICIÓN 2.6 (Liouville): Sea $\alpha(s)$ una curva parametrizada por la longitud de arco, del entorno de un punto $p \in S$ de una curva regular orientada C , contenida en una superficie orientada S . Sea $\varphi(u, v)$ una parametrización ortogonal de S en p y sea $\theta(s)$ el ángulo que forma φ_u con $\alpha'(s)$ en la orientación considerada. Entonces

$$k_g = (k_g)_1 \cos \theta + (k_g)_2 \operatorname{sen} \theta + \frac{d\theta}{dt},$$

donde $(k_g)_1$ y $(k_g)_2$ son, respectivamente, las curvas geodésicas de las curvas coordenadas $v = \text{constante}$ y $u = \text{constante}$.

2.3.3. El teorema de Gauss-Bonnet

El teorema de Gauss-Bonnet es uno de los resultados más profundos de la geometría diferencial de superficies. En líneas generales, éste afirma que el exceso con respecto a π de la suma de los ángulos interiores φ_1 , φ_2 , φ_3 de un triángulo geodésico T es igual a la integral extendida a T de la curvatura gaussiana K ; es decir (ver figura 2.14)

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \int \int_T K d\sigma.$$

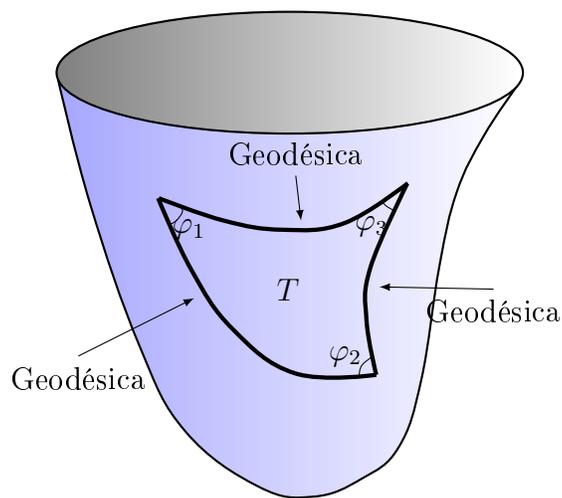


Figura 2.14: Un triángulo geodésico

Por ejemplo, si $K = 0$, obtenemos que $\sum \varphi_i - \pi$, lo cual constituye una extensión a superficies con curvatura cero del teorema de Tales. También, si $K = 1$, obtenemos que $\sum \varphi_i - \pi = \text{área}(T) > 0$. Así sobre la esfera unidad, la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico es mayor que π , y el exceso a π es exactamente el área de T . Análogamente, sobre la pseudoesfera la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico es menos que π .

Sea $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ una aplicación continua del intervalo cerrado $[0, l]$ en una superficie regular S . Decimos que α es una curva *parametrizada, regular a trozos, cerrada y simple* si

1. $\alpha(0) = \alpha(l)$,
2. $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in [0, l]$, implica que $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$,
3. Existe una partición,

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_k < t_{k+1} = l,$$

de $[0, l]$ tal que α es diferenciable y regular en cada $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k$.

TEOREMA 2.2 (GAUSS-BONNET (Local)): Sea $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrización ortogonal (es decir, $F=0$) de una superficie orientada S , donde $U \subset \mathbb{R}^2$ es homeomorfo a un disco abierto y φ es compatible con la orientación de S . Sea $R \subset \varphi(U)$ una región simple de S y sea $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\partial R = \alpha(I)$. Admitamos que φ está orientada positivamente, y está parametrizada por la longitud de arco s , siendo $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$ y $\theta_1, \dots, \theta_k$ los vértices y los ángulos externos de φ , respectivamente. Entonces

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi,$$

donde $k_g(s)$ es la curvatura geodésica de los arcos regulares de α y K es la curvatura gaussiana de S .

Capítulo 3

Teoría local de curvas y superficies inmersas en el espacio de Lorentz $\mathbb{R}^{2,1}$

Es por la lógica que demostramos pero por la intuición que descubrimos.

Henri Poincaré

En este capítulo trataremos la teoría local de curvas y superficies en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$, haciendo una analogía con los conceptos tratados en el capítulo 2. Para finalizar el capítulo analizaremos algunos resultados importantes sobre puntos umbílicos, específicamente demostraremos la conjetura de Carathéodory la cual garantiza que en una superficie cerrada y compacta tenemos al menos dos puntos umbílicos.

A continuación se presenta un breve resumen del espacio de Minkowski y algunas de sus propiedades tratadas en el capítulo 1.

Un vector \mathbf{v} en $\mathbb{R}^{2,1}$ se dice:

- *espacial* si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L > 0$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- *temporal* si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L < 0$,
- *luminoso* si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L = 0$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

El *carácter causal* de un vector es la propiedad de ser espacial, temporal o luminoso.

Un plano es llamado *espacial* (respectivamente temporal, luminoso), si su vector normal es temporal (respectivamente espacial, luminoso).

OBSERVACIÓN 3.1: Caracterizaremos a los plano en $\mathbb{R}^{2,1}$ como:

1. Espacial si el producto interior lorentziano es definido positivo, así todo vector es espacial.
2. Temporal si es un subespacio con producto interior indefinido, es decir, tiene vectores espaciales, temporales y dos direcciones luminosas.
3. Luminoso si es un subespacio con un producto interior degenerado. El vector normal está contenido en el mismo plano. Todos los vectores son espaciales, excepto la dirección del vector normal que es luminoso.

DEFINICIÓN 3.1: Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2,1}$ llamamos norma o módulo al número $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L|}$. Un vector es llamado *unitario* si su norma es igual a 1.

DEFINICIÓN 3.2: Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2,1}$, llamamos *producto vectorial* de \mathbf{u} con \mathbf{v} al único vector denotado por $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ que cumple

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Ya que el producto interior es bilineal y no es degenerado podemos asegurar la existencia y unicidad de este vector. El producto vectorial \otimes tiene las siguientes propiedades:

- a) $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = -\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$,
- b) $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ es ortogonal a \mathbf{u} y \mathbf{v} ,
- c) $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si \mathbf{u} y \mathbf{v} son proporcionales,
- d) El vector $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ es la reflexión de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ respecto el plano $\{z=0\}$ ¹,
- e) $\|\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}\| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ y $|\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$,
- f) $\|\mathbf{u} \otimes (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}\|$.

PROPOSICIÓN 3.1: Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2,1}$ son válidas las siguientes propiedades:

- a) $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ está en el plano generado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} si y sólo si el plano que generan es de luminoso,

¹Aquí \otimes y \times representan el producto cruz lorentziano y euclidiano respectivamente

- b) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_L \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_L \mathbf{v}$,
- c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_L \mathbf{w} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_L \mathbf{v}$,
- d) $\langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \rangle_L = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_L^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_L \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L$,
- e) $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ es luminoso si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es luminoso,
- f) $\|\mathbf{v}\| = |\mathbf{v}| \cos 2\theta^{1/2}$, donde θ es el ángulo entre \mathbf{v} y el plano $\{z = 0\}$,
- g) para \mathbf{u} y \mathbf{v} linealmente independientes, $\langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \rangle_L = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle_L \cos 2\theta$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ (o $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle_L$) y el plano $\{z = 0\}$.

Bases en el espacio de Minkowski

Dada una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \in \mathbb{R}^{2,1}$, será una *base estándar* si dos de sus vectores son espaciales y el otro es un vector temporal. En el espacio de Minkowski podemos identificar otros tipos de bases.

En la siguiente tabla analizamos las posibles bases que pueden formar $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^{2,1}$ tal que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle_L \in \{-1, 0, 1\}$:

\mathbf{v}_1	\mathbf{v}_2	\mathbf{v}_3	$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_L$	$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle_L$	$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle_L$	$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_L$	$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle_L$	$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle_L$
+	+	-	1	1	-1	0	0	0
+	+	0	1	1	0	0	0	1
+	-	0	1	-1	0	0	0	-1
0	0	+	0	0	1	-1	0	0

Tabla 3.1: Tipos de base en $\mathbb{R}^{2,1}$

A la base que está caracterizada en la última fila de la tabla 3 le llamaremos *base nula*, la cual está compuesta por dos vectores luminosos y uno espacial. Apreciaremos a continuación como este tipo de bases deforman el producto interior.

Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base nula y $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3$, $\mathbf{y} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + b_3\mathbf{v}_3$ puntos en $\mathbb{R}^{2,1}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L &= 2a_1b_2\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_L + a_3b_3\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle_L \\ &= a_3b_3 - 2a_1b_2, \end{aligned}$$

este tipo de bases cambian totalmente el producto interior.

PROPOSICIÓN 3.2: Dados los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \in \mathbb{R}^{2,1}$, es posible construirlos de manera que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ forme una base nula.

Demostración:

Dado \mathbf{v}_1 luminoso $\mathbf{v}_1 = (a_1, a_2, \sqrt{a_1^2 + a_2^2})$ construimos el plano luz que contenga a \mathbf{v}_1 . Se toma el vector unitario $\mathbf{w}_1 = (b_1, b_2, b_3)$ sobre el plano luminoso que contiene a \mathbf{v}_1 , así tenemos

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \rangle_L = b_1 a_1 + b_2 a_2 - b_3 \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 0$$

y despejando b_3 se obtiene $b_3 = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$, por lo tanto $\mathbf{w}_1 = \left(b_1, b_2, \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right)$ ortogonal a \mathbf{v}_1 .

Deseamos formar otro plano luminoso que contenga a \mathbf{w}_1 y que el producto interior con \mathbf{v}_1 sea -1. Definamos $\mathbf{u}_1 = (c_1, c_2, \sqrt{c_1^2 + c_2^2})$, entonces

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1 \rangle_L = b_1 c_1 + b_2 c_2 - \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) \sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = 0 \\ \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1 \rangle_L = a_1 c_1 + a_2 c_2 - \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = -1 \end{cases}$$

resolviendo el sistema anterior para c_1 y c_2 tenemos

$$c_1 = \frac{a_1 b_1^2 - a_1 b_2^2 + 2a_2 b_1 b_2}{2(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}, \quad c_2 = \frac{2a_1 b_1 b_2 - a_2 b_1^2 + a_2 b_2^2}{2(a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2)}.$$

Sustituimos en \mathbf{u}_1 los valores de c_1 y c_2 encontrados, así

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{a_1 b_1^2 - a_1 b_2^2 + 2a_2 b_1 b_2}{2(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}, \frac{2a_1 b_1 b_2 - a_2 b_1^2 + a_2 b_2^2}{2(a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2)}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b_1^2 + b_2^2)^2 (a_1^2 + a_2^2)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^4}} \right).$$

Ahora queremos que el vector \mathbf{w}_1 sea unitario, para ello exigiremos que

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle_L = b_1^2 + b_2^2 - \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}{a_1^2 + a_2^2} = 1,$$

resolviendo para b_2 tenemos

$$b_{21} = \frac{a_2 b_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_1}, \quad b_{22} = \frac{a_2 b_1 - \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_1}.$$

Sustituimos b_{11} en \mathbf{w}_2 y \mathbf{u}_1 , por lo tanto

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1 = \left(b_1, \frac{a_2 b_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_1}, \frac{b_1 a_1^2 + a_2^2 b_1 + a_2 \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_1 \sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right)$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 = \left(\frac{b_1^2 - 1}{2a_1}, \frac{a_2 b_1^2 + 2b_1 \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + a_2}{a_1^2}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_1^2 + 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2} a_2 b_1 + a_1^2 + a_2^2)^2}{a_1^4 (a_1^2 + a_2^2)}} \right)$$

Los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ así definidos cumplen que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_L &= 0, \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle_L &= 0, \\ \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle_L &= -1, \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle_L &= 1, \\ \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_L &= 0, \\ \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle_L &= 0, \end{aligned}$$

es decir $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ forman una base nula. Ver figura 3.1

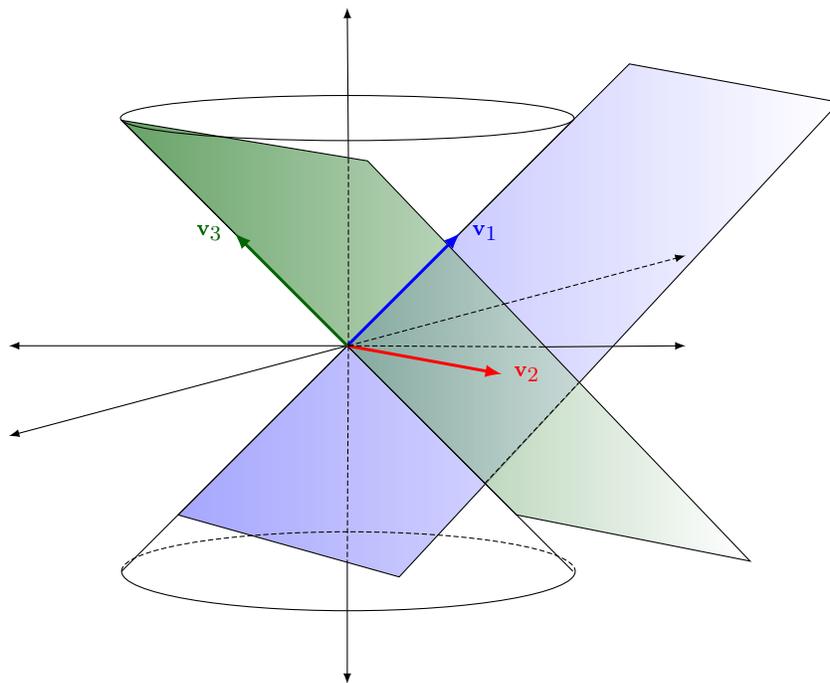


Figura 3.1: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ son vectores luminosos y \mathbf{v}_2 es un vector espacial.

■

3.1. Teoría local de curvas

Una *curva* es una aplicación diferenciable $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ donde I es un intervalo abierto. Dada una curva parametrizada, se dice que es *regular* si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Dada una curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, diremos que su carácter causal es:

a) *espacial* si $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L > 0$,

b) *temporal* si $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L < 0$,

c) *luminosa* si $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = 0$.

DEFINICIÓN 3.3: Se dice que una curva α en $\mathbb{R}^{2,1}$ es *espacial* (respectivamente temporal, luminosa) en t si el vector $\alpha'(t)$ es espacial (respectivamente temporal, luminoso). Una curva α es espacial (respectivamente temporal o luminosa) si es espacial (respectivamente temporal, luminosa) para todo $t \in I$.

Es claro que una curva temporal o espacial siempre será una curva regular.

Puede suceder que una curva en $\mathbb{R}^{2,1}$ no sea temporal, espacial o luminosa. Para ello el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.1: Consideremos la curva

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}, \quad \alpha(t) = \left(\cosh t, \frac{t^2}{2}, \sinh t \right)$$

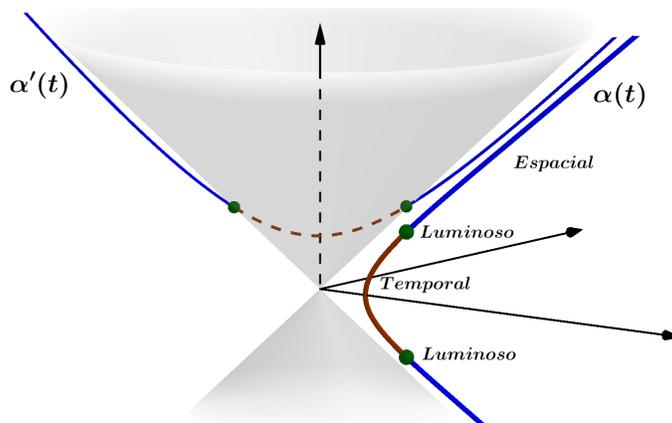


Figura 3.2: α y su carácter causal α' , aquí el color azul, marrón y verde representan el carácter causal espacial, temporal y luminoso, respectivamente.

Ya que $\alpha'(t) = (\sinh t, t, \cosh t)$, α es una curva regular. Como $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = t^2 - 1$, la curva es *espacial* en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, *temporal* en el intervalo $(-1, 1)$ y *luminosa* en los puntos $\{-1, 1\}$ (ver figura 3.2).

EJEMPLO 3.2: Dada la curva

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}, \quad \alpha(t) = (t, t^2, t^3)$$

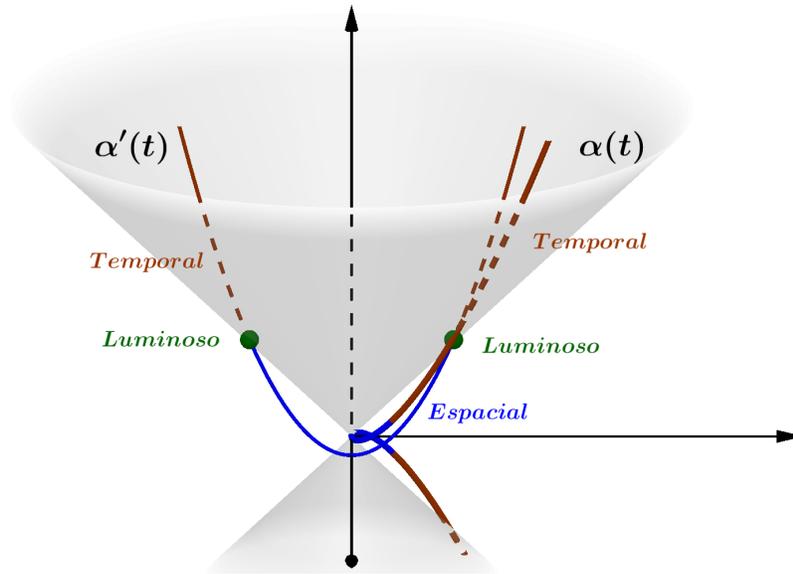


Figura 3.3: α y su carácter causal α' , aquí el color azul, marrón y verde representan el carácter causal espacial, temporal y luminoso, respectivamente.

Ya que $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ es una curva regular. Calculamos $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = -9t^4 + 4t^2 + 1$, por lo tanto, la curva es *espacial* en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{\sqrt{13}+2}}{3}, \frac{\sqrt{\sqrt{13}+2}}{3}\right)$, *temporal* en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{\sqrt{13}+2}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{\sqrt{13}+2}}{3}, \infty\right)$ y *luminosa* en los puntos $\left\{-\frac{\sqrt{\sqrt{13}+2}}{3}, \frac{\sqrt{\sqrt{13}+2}}{3}\right\}$ (ver figura 3.3).

El carácter causal de una curva, específicamente el hecho que sea espacial o temporal, es una propiedad abierta, es decir, si α es una curva espacial (o temporal) en $t_0 \in I$, existe un intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ alrededor de t_0 donde α es espacial (o temporal) si en $t_0 \in I$ tenemos que $\langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle_L \neq 0$. La continuidad asegura la existencia de un intervalo alrededor de t_0 donde $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L$ tiene el mismo signo que en $t = t_0$.

PROPOSICIÓN 3.3: Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ una curva temporal (respectivamente luminosa) y $t_0 \in I$. Existen $\epsilon > 0$ y $f, g : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables tales que: $t = \phi(s)$ y $\beta(s) = \alpha(\phi(s)) = (f(s), g(s), s)$.

Demostración:

Escribamos $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Ya que α es temporal o luminosa

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = x'(t)^2 + y'(t)^2 - z'(t)^2 \leq 0,$$

y $z'(t_0) \neq 0$ para algún $t \in I$. Por el teorema de la función inversa, existe $\delta, \epsilon > 0$ tales que $z : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow (z(t_0) - \epsilon, z(t_0) + \epsilon)$ es un difeomorfismo. Si $J = (z(t_0) - \epsilon, z(t_0) + \epsilon)$ y $\phi = z^{-1}$, entonces la curva $\beta = \alpha \circ \phi$ satisface:

$$\alpha(\phi(s)) = \beta(s) = ((x \circ \phi)(s), (y \circ \phi)(s), s).$$

Tomando $f = x \circ \phi$ y $g = y \circ \phi$ obtenemos lo deseado. ■

Una curva cerrada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ es una curva parametrizada que es periódica. Si la curva es regular, existe un valor mínimo $T > 0$ tal que $\alpha(t + T) = \alpha(t)$.

TEOREMA 3.1: Sea α una curva regular cerrada en $\mathbb{R}^{2,1}$ incluida en un plano P . Si α es espacial, entonces P es un plano espacial.

Demostración:

Ver [3, pág 55, Teorema 2.1]. ■

TEOREMA 3.2: No existen curvas cerradas en $\mathbb{R}^{2,1}$ que sean temporales o luminosas.

Demostración:

Procediendo por contradicción, asumamos que la curva es cerrada y además $z = z(t)$ es periódica. Luego, existe $t = t_0$ tal que $z'(t_0) = 0$

$$\langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle_L = x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2 \leq 0,$$

lo cual constituye una contradicción si α es temporal. Si α es luminosa, $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ con lo cual $\alpha'(t_0) = 0$, que también es una contradicción por el hecho que α es una curva regular. ■

PROPOSICIÓN 3.4: Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ una curva espacial o temporal. Dado $t_0 \in I$, existen $\delta, \epsilon > 0$ y un difeomorfismo $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ tal que la curva $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ dada por $\beta = \alpha \circ \phi$ satisface $\|\beta'(s)\| = 1$ para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Demostración:

Sea $t_0 \in I$. Definimos la aplicación longitud de arco $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Como $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$, la función s es un difeomorfismo local alrededor de $t = t_0$. Porque $s(t_0) = 0$, existen $\delta, \epsilon > 0$ tales que $s : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)$ es un difeomorfismo. Sea $\phi = s^{-1}$ la inversa de s y $\beta = \alpha \circ \phi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ una reparametrización de α y tal que $\|\beta'(s)\| = 1$. ■

Para una curva luminosa, no tiene sentido reparametrizar por longitud de arco, esto radica en el hecho que $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = 0$. Por ello se da el siguiente resultado:

LEMA 3.1: Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ una curva luminosa tal que la traza de α no es una línea recta. Existe una reparametrización de α dada por $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ tal que $\|\beta''(s)\| = 1$. Decimos que α está pseudoparametrizada por longitud de arco.

Demostración:

Sea $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$, entonces. Usando la regla de la cadena

$$\beta''(s) = \phi''(s)\alpha'(t) + \phi'(s)^2\alpha''(t).$$

Luego

$$\begin{aligned} \langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle_L &= \langle \phi''(s)\alpha'(t) + \phi'(s)^2\alpha''(t), \phi''(s)\alpha'(t) + \phi'(s)^2\alpha''(t) \rangle_L \\ &= \langle \phi''(s)\alpha'(t), \phi''(s)\alpha'(t) \rangle_L + 2\langle \phi''(s)\alpha'(t), \phi'(s)^2\alpha''(t) \rangle_L + \langle \phi'(s)^2, \phi'(s)^2\alpha''(t) \rangle_L \\ &= \phi'(s)^4 \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle_L \\ &= \phi'(s)^4 \|\alpha''(t)\|^2. \end{aligned}$$

Tomando a ϕ como la solución de la ecuación diferencial

$$\phi'(s) = \frac{1}{\sqrt{\|\alpha''(\phi(s))\|}},$$

tenemos que $\|\beta''(s)\| = 1$. ■

OBSERVACIÓN 3.2: Si $\alpha = \alpha(t)$ es un curva regular y $\beta = \alpha \circ \phi$ es una reparametrización de α , el carácter causal de α y β coinciden.

3.2. Curvatura y torsión. Ecuaciones de Frenet

Asumamos que una curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ está reparametrizada por longitud de arco o pseudolongitud de arco. Escribimos a $\mathbf{T}(s)$ como el vector velocidad de la curva α . En el espacio de Minkowski aparecen algunos problemas:

- 1) Si la curva es luminosa, $\mathbf{T}(s)$ es un vector luminoso, $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ no es una base ortonormal. En esta situación podemos usar la noción de base nula.
- 2) Asumiendo que $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{2,1}$, el vector binormal \mathbf{B} siempre estará definido por $\mathbf{T} \otimes \mathbf{N}$. Debido a esto la base $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ no tendrá necesariamente orientación positiva, esto pasa por ejemplo si \mathbf{T}, \mathbf{N} son vectores espaciales.
- 3) Lo deseable sería que en el caso que $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ fuese una base ortonormal, esta estuviese orientada hacia el futuro. Esto no siempre se puede asegurar, incluso en el caso de que α sea una curva temporal, $\alpha'(s) = \mathbf{T}(s)$ puede no estar orientada hacia el futuro.

Consideremos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ una curva regular parametrizada por longitud de arco o por pseudolongitud de arco. Llamamos

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s),$$

al vector tangente en s . Ya que $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L$ puede tomar los valores $-1, 1, 0$. Derivando respecto de s podemos deducir que $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}'(s) \rangle_L = 0$, es decir, $\mathbf{T}(s)$ y $\mathbf{T}'(s)$ son ortogonales. Para evitar que las curvas sean líneas rectas, restringiremos las curvas a aquellas que cumplan que $\mathbf{T}'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$ y que $\mathbf{T}'(s)$ no sea proporcional a $\mathbf{T}(s)$ para cada $s \in I$. Dependiendo del carácter causal de la curva haremos tres distinciones, las cuales describiremos a continuación.

3.2.1. Curvas temporales

Ya que el vector $\mathbf{T}(s)$ es temporal, entonces $\mathbf{T}'(s) \neq 0$ es un vector espacial linealmente independiente con $\mathbf{T}(s)$. Definimos la curvatura como

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|.$$

El vector normal $\mathbf{N}(s)$ es definido como:

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\kappa(s)} \Rightarrow \mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s).$$

Además podemos escribir a $\kappa(s)$ como $\kappa(s) = \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L$, ya que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L &= \langle \kappa(s)\mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L \\ &= \kappa(s)\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L \\ &= \kappa(s). \end{aligned}$$

Definimos el vector binormal $\mathbf{B}(s)$ como:

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \otimes \mathbf{N}(s).$$

El vector $\mathbf{B}(s)$ es un vector espacial y unitario. Así, para cada s tenemos que $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{2,1}$ a la cual llamaremos *Triedro de Frenet* de α en s . La base $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ está orientada positivamente; ya que,

$$\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}) = \langle \mathbf{T}(s) \otimes \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = 1 > 0.$$

También podemos definir la torsión τ de α en s como

$$\tau(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L,$$

ya que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L &= \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{T}(s) \otimes \mathbf{N}(s) \rangle_L \\ &= \langle \kappa(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}\mathbf{T}(s) \otimes \mathbf{N}(s) \rangle_L \\ &= \langle \kappa(s)\mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \otimes \mathbf{N}(s) \rangle_L + \tau(s)\langle \mathbf{B}, \mathbf{T}(s) \otimes \mathbf{N}(s) \rangle_L \\ &= \tau(s). \end{aligned}$$

Derivando cada uno de los vectores del triedro de Frenet y escribiendo el resultado en la misma base tenemos que:

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s),$$

$$\mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(s) &= \mathbf{B}(s) \otimes \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}'(s) &= \mathbf{B}'(s) \otimes \mathbf{T}(s) + \mathbf{B}(s) \otimes \mathbf{T}'(s) \\ &= -\tau(s)\mathbf{N}(s) \otimes \mathbf{T}(s) + \kappa(s)\mathbf{B}(s) \otimes \mathbf{N}(s) \\ &= -\tau(s)(-\mathbf{B}(s)) + \kappa(s)\mathbf{T}(s). \end{aligned}$$

Las siguientes ecuaciones son conocidas como *ecuaciones o fórmulas de Frenet*, las cuales de manera simplificada quedan como:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \kappa\mathbf{N}, \\ \mathbf{N}' &= \kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= -\tau\mathbf{N}. \end{aligned}$$

3.2.2. Curvas espaciales

Ya que $\mathbf{T}'(s)$ es ortogonal al vector espacial $\mathbf{T}(s)$ tiene tres posibilidades para su carácter causal: $\mathbf{T}'(s)$ puede ser espacial, temporal o luminoso. Para ser más precisos se analizará cada uno de los casos:

- (1) El vector $\mathbf{T}'(s)$ es *espacial*. Podemos escribir la curvatura κ de α como $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|$, $\mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s)/\kappa(s)$ y $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \otimes \mathbf{N}(s)$, donde \mathbf{N} y \mathbf{B} son los vectores normal y binormal respectivamente. Como $\mathbf{B}(s)$ es un vector temporal, las ecuaciones de Frenet quedan como:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \kappa \mathbf{N}, \\ \mathbf{N}' &= -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= \tau \mathbf{N}.\end{aligned}$$

La torsión de α es $\tau = -\langle \mathbf{N}', \mathbf{B} \rangle_L$. Aquí la base $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ tiene orientación negativa, ya que $\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}) = \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle_L = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle_L = -1 < 0$.

- (2) El vector $\mathbf{T}'(s)$ es *temporal*. Definimos la curvatura como:

$$\kappa = \|\mathbf{T}'(s)\| = \sqrt{-\langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{T}'(s) \rangle_L},$$

y el vector normal como $\mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s)/\kappa(s)$, el vector binormal definido como $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \otimes \mathbf{N}(s)$, el cual es un vector espacial. Las ecuaciones de Frenet quedan escritas como:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \kappa \mathbf{N}, \\ \mathbf{N}' &= \kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= \tau \mathbf{N}.\end{aligned}$$

La torsión de α es $\tau = \langle \mathbf{N}', \mathbf{B} \rangle_L$. La base de Frenet ahora tiene orientación positiva ya que $\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}) = \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle_L = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle_L = 1 > 0$.

- (3) El vector $\mathbf{T}'(s)$ es *luminoso* para todo s . Definimos el vector normal como $\mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s)$, el cual es linealmente independiente con $\mathbf{T}(s)$. Sea $\mathbf{B}(s)$ el único vector luminoso que cumple que $\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -1$ y es ortogonal a $\mathbf{T}(s)$. El vector $\mathbf{B}(s)$ es el vector binormal a α en s . Las ecuaciones de Frenet quedan como:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \mathbf{N}, \\ \mathbf{N}' &= \tau \mathbf{N}, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{T} - \tau \mathbf{B}.\end{aligned}$$

La función τ es llamada la *pseudotorsión* de α y esta es obtenida mediante $\tau = -\langle \mathbf{N}', \mathbf{B} \rangle_L$. Aquí no existe una definición para la curvatura de α ya que $\|\mathbf{T}'(s)\| = 0$ para todo

s. Además, $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ no es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{2,1}$ ya que \mathbf{N} y \mathbf{B} son vectores luminosos. Observamos que $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ es una base nula, por lo cual no se puede saber si su orientación es positiva o no.

OBSERVACIÓN 3.3: Hasta ahora conocemos que $\mathbf{T}'(s)$ puede ser espacial, temporal o luminoso, pero esto no siempre ocurre sobre todo el intervalo I , es decir, el carácter causal de $\mathbf{T}'(s)$ puede cambiar sobre I . Así, en la discusión anterior por casos, asumimos que el carácter causal de $\alpha''(s)$ es el mismo para todo $s \in I$.

EJEMPLO 3.3: Sea

$$\alpha(s) = \left(\cos(s) + s \sin(s), \sin(s) - s \cos(s), \frac{1}{2} \left(s\sqrt{s^2 - 1} - \log(s + \sqrt{s^2 - 1}) \right) \right).$$

Derivando, obtenemos que el vector tangente es

$$\mathbf{T}(s) = \left(s \cos(s), s \sin(s), \sqrt{s^2 - 1} \right),$$

$$\mathbf{T}'(s) = \left(\cos(s) - s \sin(s), \sin(s) + s \cos(s), \frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}} \right),$$

el carácter causal de $\mathbf{T}'(s)$ está dado por el signo de $s^4 - s^2 - 1$, ya que

$$\langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{T}'(s) \rangle_L = \frac{s^4 - s^2 - 1}{s^2 - 1}.$$

Así, $\mathbf{T}'(s)$ es espacial si $s > \sqrt{1 + \sqrt{5}}/\sqrt{2}$ y temporal si $1 < s < \sqrt{1 + \sqrt{5}}/\sqrt{2}$ (ver figura 3.4), en ambos casos, la curvatura y la torsión vienen dadas por:

$$\kappa(s) = \sqrt{\frac{|s^4 - s^2 - 1|}{s^2 - 1}}, \quad \tau(s) = \frac{s^6 - 2s^4 - 2s^2 + 2}{(s^4 - s^2 - 1)\sqrt{s^2 - 1}}.$$

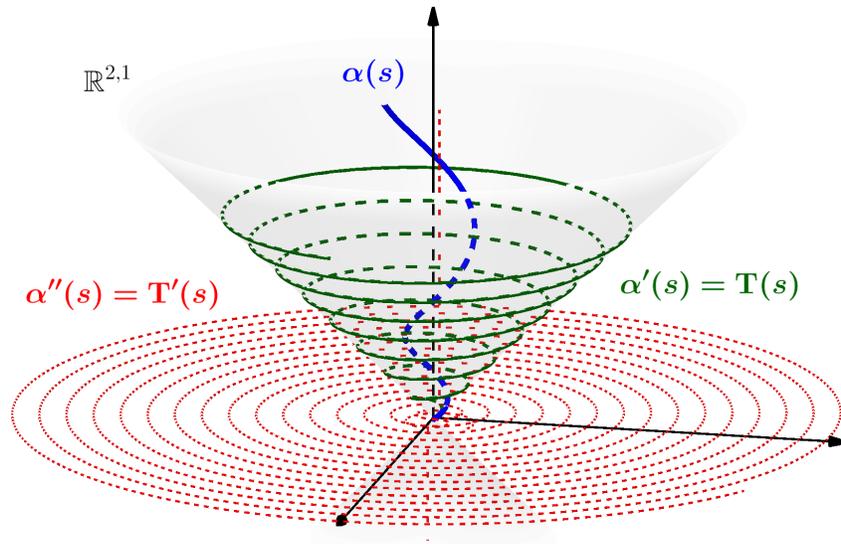


Figura 3.4: $\alpha(s)$ y el carácter causal de $\mathbf{T}(s)$ y $\mathbf{T}'(s)$.

3.2.3. Curvas luminosas

Sea α una curva luminosa parametrizada por pseudolongitud de arco. El vector tangente es $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$. Definimos el vector normal como $\mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s)$, el cual es un vector unitario espacial. El vector binormal es el único vector luminoso que es ortogonal a $\mathbf{N}(s)$ y cumple que $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -1$. Así $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ es una base nula de $\mathbb{R}^{2,1}$. Las ecuaciones de Frenet quedan como:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \mathbf{N}, \\ \mathbf{N}' &= \tau \mathbf{T} + \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= \tau \mathbf{N}.\end{aligned}$$

La *pseudotorsión* de α es $\tau = -\langle \mathbf{N}', \mathbf{B} \rangle_L$. Como en el caso en el cual α es espacial con \mathbf{T}' luminoso, no podemos definir la curvatura de α .

DEFINICIÓN 3.4: Dada una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, si su carácter causal es temporal o espacial y su vector normal es espacial o temporal, α es llamada *curva de Frenet*.

Resumen de las Fórmulas de Frenet

Las expresiones para las ecuaciones o fórmulas de Frenet antes descritas pueden escribirse de manera resumida como sigue:

Para las *curvas de Frenet* las fórmulas de Frenet quedan definidas como:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \kappa \mathbf{T}, \\ \mathbf{N}' &= -\delta \kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= \epsilon \tau \mathbf{N},\end{aligned}$$

donde $\epsilon = \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle_L$ y $\delta = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle_L$. Para estas curvas, la curvatura κ está definida como la función tal que \mathbf{T}' es proporcional a \mathbf{N} . De manera similar, la torsión τ es definida como la tercera coordenada de \mathbf{N}' con respecto a la base de Frenet.

Para *curvas espaciales con vector normal luminoso o curvas luminosas*, las fórmulas de Frenet pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \mathbf{N}, \\ \mathbf{N}' &= \delta \tau \mathbf{T} + \epsilon \tau \mathbf{N} + \delta \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= \epsilon \mathbf{T} + \delta \tau \mathbf{N} - \epsilon \tau \mathbf{B},\end{aligned}$$

donde $\tau(s) = -\epsilon \delta \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L$, $\epsilon = \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle_L$ y $\delta = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle_L$, con $\delta, \epsilon \in \{0, 1\}$ y $\epsilon \neq \delta$.

Curvatura y torsión para curvas con parámetro arbitrario

De manera similar al espacio euclídeo, se pueden encontrar fórmulas para la curvatura y la torsión en el caso que no estén parametrizadas por longitud de arco. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ una curva regular y $\beta = \alpha \circ \phi$ una parametrización por longitud de arco. Definimos

$$\kappa_\alpha = \kappa_\beta \circ \phi^{-1}, \quad \tau_\alpha = \tau_\beta \circ \phi^{-1},$$

asumamos que β es una curva de Frenet. La definición no depende de la reparametrización, excepto quizá el signo de la torsión.

PROPOSICIÓN 3.5: Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ una curva regular que no está parametrizada por longitud de arco y sea $\beta = \alpha \circ \phi^{-1}$ una reparametrización de α por longitud de arco, la curvatura y torsión para α vendrán dadas por las expresiones:

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \otimes \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^2}, \quad \tau_\alpha(t) = -\epsilon\delta \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \otimes \alpha''(t)\|^2}.$$

Demostración:

a) Demostremos que

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \otimes \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^2}.$$

Sea $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$ la función longitud de arco, tenemos que $\frac{ds}{dt} = s'(t) = \|\alpha'(t)\|$, luego

$$1 = \frac{dt}{dt} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dt}{ds} \|\alpha'(t)\|,$$

es decir,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}. \quad (3.2.1)$$

Además

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{ds^2} &= \frac{d}{ds} (\|\alpha'(t)\|^{-1}) \\ &= - \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2} \cdot \frac{d}{ds} (\|\alpha'(t)\|) \\ &= - \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2} \cdot \left(\frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle_L}{\|\alpha'(t)\|^2} \right) \\ &= - \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle_L}{\|\alpha'(t)\|^4}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Ya que β es una reparametrización de α podemos escribir a β como

$$\beta(s) = \alpha(t(s)),$$

se deduce que

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= \alpha'(t) \cdot \frac{dt}{ds}, \\ \beta''(s) &= \alpha''(t) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \alpha'(t) \cdot \frac{d^2t}{ds^2}.\end{aligned}$$

Como β es una parametrización por longitud de arco, la curvatura κ_β se calcula como:

$$\begin{aligned}\kappa_\beta(s) &= \|\beta''(s)\| \\ &= \left\| \alpha''(t) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \alpha'(t) \cdot \frac{d^2t}{ds^2} \right\|, \quad \text{usando ecuaciones 3.2.1 y 3.2.2} \\ &= \left\| \alpha''(t) \left(\frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2} \right) - \alpha'(t) \cdot \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle_L}{\|\alpha'(t)\|^4} \right\| \\ &= \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^4} \|\alpha''(t)\|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t)\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle_L\| \\ &= \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^4} \|\alpha''(t)\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L - \alpha'(t)\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle_L\| \\ &= \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^4} \|\alpha'(t) \otimes (\alpha'(t) \otimes \alpha''(t))\| \\ &= \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^4} \|\alpha'(t)\| \|\alpha'(t) \otimes \alpha''(t)\| \\ &= \frac{\|\alpha'(t) \otimes \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3},\end{aligned}$$

luego

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(s) = \frac{\|\alpha'(t) \otimes \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

b) Para calcular la torsión, ya sabemos que

$$\mathbf{T}(s) = \beta'(s),$$

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \otimes \mathbf{N}(s) = \alpha'(s) \otimes \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\tau_\beta(s) &= \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L \\ &= \left\langle \frac{\beta'''(s)\kappa_\beta(s) - \beta''(s)\kappa'_\beta(s)}{\kappa_\beta(s)^2}, \beta'(s) \otimes \frac{\beta''(s)}{\kappa_\beta(s)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\kappa_\beta(s)^2} \langle \beta'(s) \otimes \beta''(s), \beta'''(s) \rangle_L,\end{aligned}$$

es decir,

$$\tau_\beta(s) = \frac{\langle \beta'(s) \otimes \beta''(s), \beta'''(s) \rangle_L}{\|\kappa_\beta(s)\|^2} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \beta'(s(t)) = \frac{d\beta}{ds}(s(t)) \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d\beta}{ds}(s(t)) \|\alpha'(t)\|, \\ \alpha''(t) &= \beta''(s(t)) = \frac{d^2\beta}{ds^2}(s(t)) \|\alpha'(t)\|^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle_L}{\|\alpha'(t)\|^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'''(t) &= \beta'''(s(t)) = \frac{d^3\beta(s)}{ds^3} \|\alpha'(t)\|^3 + \frac{d^2}{ds^2}\beta(s(t)) \cdot \frac{d}{dt}(\|\alpha'(t)\|^2) \\ &+ \frac{d^2}{ds^2}\beta(s(t)) \|\alpha'(t)\| \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle_L}{\|\alpha'(t)\|^2} + \frac{d}{ds}\beta(s(t)) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle_L}{\|\alpha'(t)\|^2} \right).\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\alpha'(t) \otimes \alpha''(t) &= \beta'(s) \otimes \beta''(s) \\ &= \|\alpha'(t)\|^3 \left(\frac{d\beta(s(t))}{ds} \otimes \frac{d^2\beta(s(t))}{ds^2} \right).\end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\langle \alpha'(t) \otimes \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle_L &= \langle \beta'(t) \otimes \beta''(t), \beta'''(t) \rangle_L \\ &= \|\alpha'(t)\|^6 \left\langle \frac{d\beta(s(t))}{ds} \otimes \frac{d^2\beta(s(t))}{ds^2}, \frac{d^3\beta(s(t))}{ds^3} \right\rangle_L.\end{aligned}$$

Usando las ecuaciones 3.2.3, 3.2.4 y la fórmula de la curvatura demostrada en el literal a) tenemos que

$$\tau_\beta(s(t)) = \frac{\frac{\langle \alpha'(t) \otimes \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle_L}{\|\alpha'(t)\|^6}}{\frac{\|\alpha'(t) \otimes \alpha''(t)\|^2}{\|\alpha'(t)\|^6}}.$$

Así,

$$\tau_\alpha(t) = \tau_\beta(s(t)) = -\epsilon\delta \frac{\langle \alpha'(t) \otimes \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle_L}{\|\alpha'(t) \otimes \alpha''(t)\|^2}.$$

■

3.3. Teoría local de superficies

Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^{2,1}$ la parametrización de una superficie S en el espacio de Minkowski. Tenemos todas las herramientas de geometría diferencial definidas en el espacio euclídeo, como la primera y segunda forma fundamental, vector normal, las curvaturas Gaussiana y Media, entre otras.

3.3.1. La primera forma fundamental de Minkowski

Expresemos la primera forma fundamental $I : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_L$, con $\mathbf{w} \in T_p S$ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ asociada a la parametrización $\varphi(u, v)$ en p . Como el vector tangente $\mathbf{w} \in T_p(S)$ es el vector tangente de una curva parametrizada $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, con $p = \alpha(0) = \varphi(u_0, v)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} I(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_L \\ &= \langle \varphi_u u' + \varphi_v v', \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle_L \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_L (u')^2 + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_L u'v' + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_L (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 3.5: La expresión

$$I = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2,$$

es llamada **la primera forma fundamental de Minkowski** de la superficie regular S donde los coeficientes $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_L$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_L$ y $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_L$ son funciones C^∞ .

DEFINICIÓN 3.6 (Carácter causal de las superficies): Sea S una superficie e I la primera forma fundamental asociada a S , entonces

- S será *espacial* si $\det(I) = EG - F^2 > 0$, es decir, el vector normal \mathbf{N} a la superficie será siempre temporal,
- S será *temporal* si $\det(I) = EG - F^2 < 0$, aquí el vector normal \mathbf{N} a la superficie será espacial,

c) S será *luminosa* si $\det(I) = EG - F^2 = 0$, aquí el vector normal \mathbf{N} a la superficie será luminoso.

EJEMPLO 3.4: Sea $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ una parametrización de la esfera, dada por

$$\varphi(u, v) = (r \cos(u) \sin(v), r \sin(u) \sin(v), r \cos(v)).$$

Calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= (-r \sin(u) \sin(v), r \cos(u) \sin(v), 0), \\ \varphi_v(u, v) &= (r \cos(u) \cos(v), r \sin(u) \cos(v), -r \sin(v)), \\ E(u, v) &= r^2 \sin^2(u) \sin^2(v) + r^2 \cos^2(u) \sin^2(v), \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= r^2 \cos^2(u) \cos^2(v) + r^2 \sin^2(u) \cos^2(v) - r^2 \sin^2(v).\end{aligned}$$

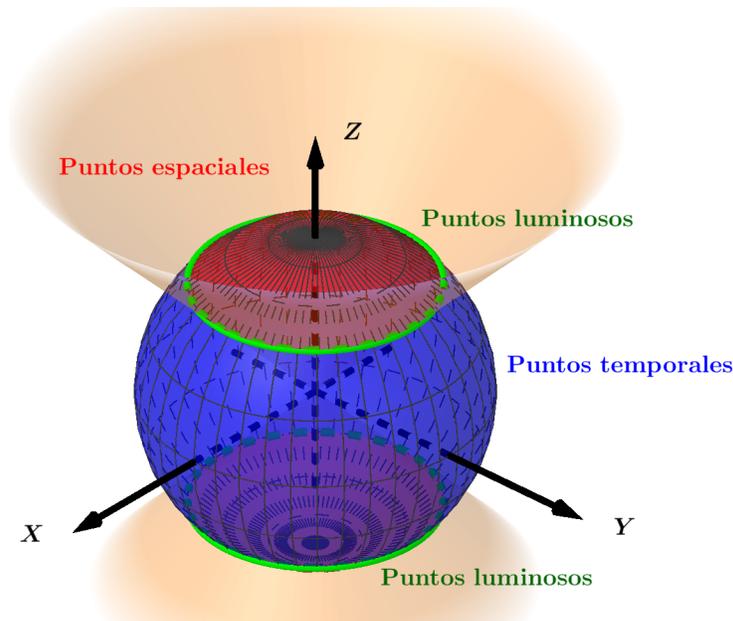


Figura 3.5: Carácter causal de los puntos sobre la esfera.

Luego analizamos el signo de $EG - F^2$. Aquí u queda como variable libre y las soluciones de $EG - F^2$ dependen solo de v , así, la esfera será *temporal* para $v \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, *espacial* para valores de $v \in (0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ y *luminoso* para $v \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$, ver figura 3.5.

EJEMPLO 3.5: Sea $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ una parametrización del toro, dada por:

$$\varphi(u, v) = ((a + r \cos(u)) \cos(v), (a + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u)).$$

Calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental,

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= (-r \sin(u) \cos(v), -r \sin(u) \sin(v), r \cos(u)), \\ \varphi_v(u, v) &= (-(a + r \cos(u)) \sin(v), (a + r \cos(u)) \cos(v), 0), \\ E(u, v) &= r^2 \sin(u)^2 \sin(v)^2 + r^2 \sin(u)^2 \cos(v)^2 - r^2 \cos(u)^2, \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= (a + r \cos(u))^2 \cos(v)^2 + (a + r \cos(u))^2 \sin(v)^2.\end{aligned}$$

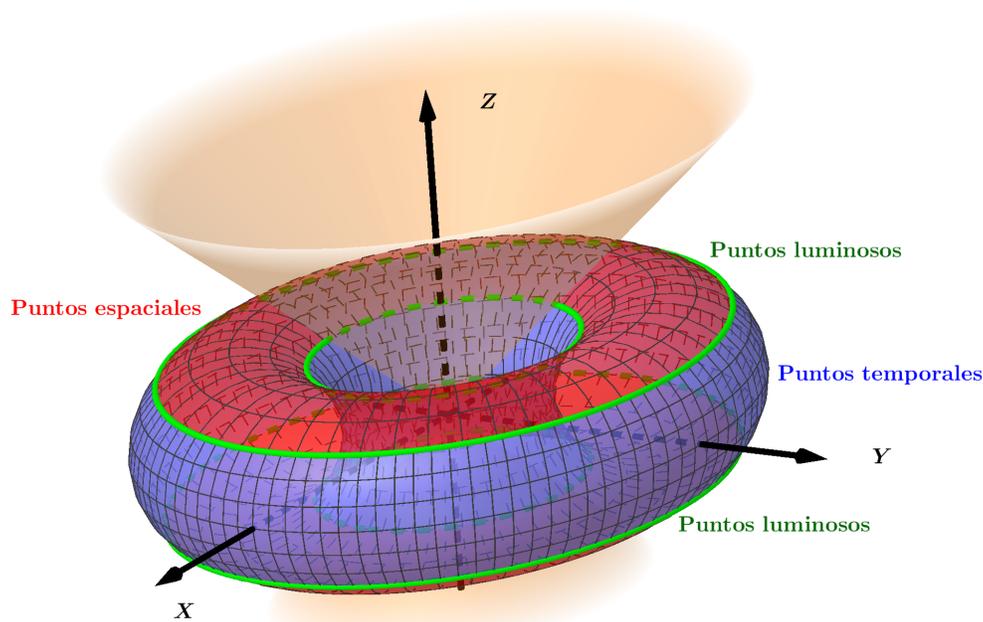


Figura 3.6: Carácter causal de los puntos sobre el toro.

Luego analizamos el signo de $EG - F^2$. Se determina que v queda como una variable libre y el signo de $EG - F^2$ solo dependerá de u , así, el toro será *espacial* para $u \in (0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$, *temporal* para valores de $u \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ y *luminoso* para $u \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$, ver figura 3.6.

EJEMPLO 3.6: Consideremos el elipsoide de revolución $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ con parametrización

$$\varphi(u, v) = (a \cos(u) \sin(v), a \sin(u) \sin(v), c \cos(v)),$$

y coeficientes de la primera forma fundamental dados por:

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= (-a \sin(u) \sin(v), a \cos(u) \sin(v), 0), \\ \varphi_v(u, v) &= (a \cos(u) \cos(v), a \sin(u) \cos(v), -c \sin(v)), \\ E(u, v) &= a^2 \sin(u)^2 \sin(v)^2 + a^2 \cos(u)^2 \sin(v)^2, \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= a^2 \cos(u)^2 \cos(v)^2 + a^2 \sin(u)^2 \cos(v)^2 - c^2 \sin(v)^2.\end{aligned}$$

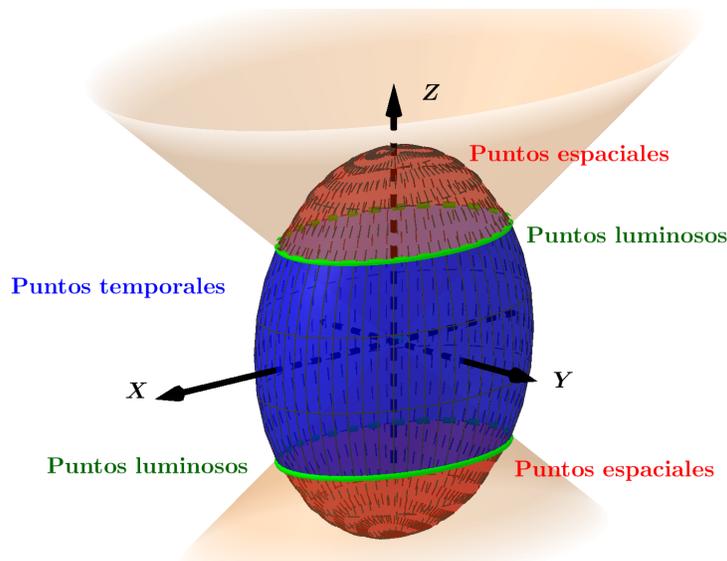


Figura 3.7: Carácter causal de los puntos sobre el elipsoide de revolución.

Podemos decir que, el elipsoide es *espacial* cuando $v \in (\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\frac{a}{c}), \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(\frac{a}{c}))$, *temporal* para $v \in (0, \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\frac{a}{c})) \cup (\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(\frac{a}{c}), \pi)$ y tendrá puntos *luminosos* para $v \in \{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\frac{a}{c}), \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(\frac{a}{c})\}$, ver figura 3.7.

Cuando S es espacial, algún vecindario de algún punto sobre S es la gráfica de una función C^∞ , $z = f(x, y)$. Cuando S es temporal, algún vecindario de algún punto sobre S es la gráfica de una función C^∞ , $x = f(y, z)$.

Tomando a $\varphi_u, \varphi_v \in \mathbb{R}^{2,1}$ se tiene el vector $\varphi_u \otimes \varphi_v$ que es normal a S . Tenemos que $\langle \varphi_u \otimes \varphi_v, \varphi_u \otimes \varphi_v \rangle_L = F^2 - EG = -\det(I)$. Así en la parte espacial o temporal tenemos

$$\|\varphi_u \otimes \varphi_v\| = |\det(I)|^{1/2} \neq 0.$$

El *campo vectorial unitario normal de Minkowski*, se calcula como:

$$\mathbf{N} = \frac{\varphi_u \otimes \varphi_v}{\|\varphi_u \otimes \varphi_v\|},$$

está bien definido y es invariante bajo cambios de coordenadas sobre S . Por la definición de producto vectorial euclidiano y lorentziano se cumple que

$$\mathbf{N} = \frac{(\det(I_e))^{1/2}}{|\det(I)|^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{N}_e.^2 \tag{3.3.1}$$

²El subíndice e significa que se está trabajando con la métrica euclidiana.

Por la proposición 3.1 f), tenemos que

$$|\det(I)| = |\cos 2\theta| \det(I_e), \quad (3.3.2)$$

donde θ es el ángulo euclidiano entre \mathbf{N} (o \mathbf{N}_e) y el plano horizontal $z = 0$. Así

$$|\det(I)| \leq \det(I_e),$$

por lo tanto

$$|\mathbf{N}| \geq |\mathbf{N}_e|,$$

con igualdad si y sólo si \mathbf{N} (o \mathbf{N}_e) es horizontal o vertical. La intuición geométrica de por qué \mathbf{N} parece más grande que \mathbf{N}_e está en la figura 3.8. Como en el caso euclídeo, la definición de \mathbf{N} es invariante bajo cambio de coordenadas sobre S .

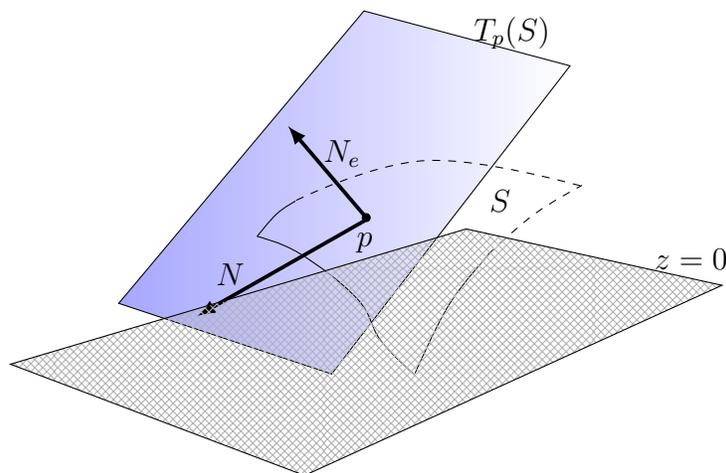


Figura 3.8: Con la norma euclídea, la longitud del vector normal euclidiano es menor que la longitud del vector normal lorentziano.

No existe en el espacio $\mathbb{R}^{2,1}$ el equivalente de esfera unitaria S^2 en \mathbb{R}^3 . En cambio contamos con tres *superficies cuadráticas* $S^{2,1}$, \mathbb{H}_+^2 y \mathbb{H}_-^2 descritas por vectores en $\mathbb{R}^{2,1}$ con longitud de Minkowski igual a 1. La **esfera lorentziana** temporal $S^{2,1}$ en $\mathbb{R}^{2,1}$ es el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ obtenido por la rotación de la hipérbola $x^2 - z^2 = 1$ en el plano $y = 0$ alrededor del eje z . La superficie espacial \mathbb{H}_+^2 (respectivamente \mathbb{H}_-^2) en $\mathbb{R}^{2,1}$ es la componente del hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ en la que $z > 0$ (respectivamente $z < 0$) obtenida mediante la rotación de la rama superior (respectivamente inferior) de la hipérbola $x^2 - z^2 = -1$ en el plano $y = 0$ al rededor del eje z . \mathbb{H}_+^2 y \mathbb{H}_-^2 forman el modelo del hiperboloide, su primera forma fundamental en $\mathbb{R}^{2,1}$ es completa y Riemanniana con curvatura intrínseca igual a -1 . Sobre una superficie espacial S , el campo vectorial normal unitario \mathbf{N} define el **mapeo de Gauss** $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{H}_+^2$ o $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{H}_-^2$ dependiendo de la orientación de S . Sobre una superficie temporal S , el campo vectorial normal unitario define la **aplicación de Gauss** $\mathbf{N} : S \rightarrow S^{2,1}$, (ver figura 3.9).

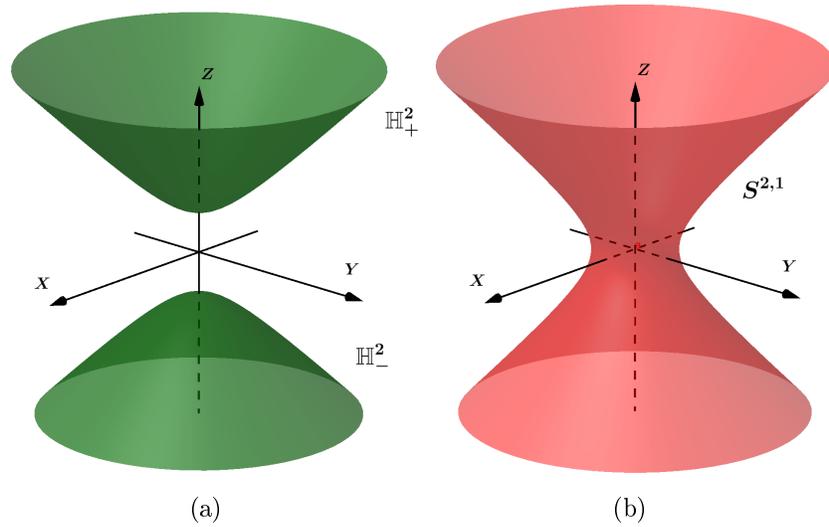


Figura 3.9: Correspondencia del campo vectorial normal unitario.

Si S es una superficie espacial o temporal, $\|\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle_L\| = 1$ derivando esta expresión tenemos que $\langle \mathbf{N}, d\mathbf{N} \rangle_L = 0$. Podemos ver entonces a $d\mathbf{N} = \mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv$ como un campo vectorial sobre S . Esto permite la definición de la **segunda forma fundamental de Minkowski**.

DEFINICIÓN 3.7: La expresión

$$II = -\langle d\varphi, \mathbf{N} \rangle_L = edu^2 + 2fdudv + gdu^2,$$

es llamada la **segunda forma fundamental de Minkowski**, donde los coeficientes

$$\begin{aligned} e &= -\langle \mathbf{N}_u, \varphi_u \rangle_L = \langle \mathbf{N}, \varphi_{uu} \rangle_L, \\ f &= -\langle \mathbf{N}_u, \varphi_v \rangle_L = \langle \mathbf{N}_v, \varphi_u \rangle_L = \langle \mathbf{N}, \varphi_{uv} \rangle_L, \\ g &= -\langle \mathbf{N}_v, \varphi_v \rangle_L = \langle \mathbf{N}, \varphi_{vv} \rangle_L, \end{aligned}$$

son funciones de clase C^∞ .

OBSERVACIÓN 3.4: De la ecuación 3.3.1 se tiene que

$$|\det(I)|^{1/2} II = (\det(I_e))^{1/2} II_e,$$

se deduce que, II tiene el mismo signo que II_e .

3.3.2. Ecuaciones de compatibilidad

Escribiremos a \mathbf{N}_u y \mathbf{N}_v en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ de $T_p S$. Para encontrar los coeficientes a, b, c, d en termino de las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_u &= a\varphi_u + b\varphi_v, \\ \mathbf{N}_v &= c\varphi_u + d\varphi_v.\end{aligned}$$

Realizando el producto interior de cada ecuación anterior con φ_u y φ_v se obtiene que

$$\begin{aligned}-e &= \langle \mathbf{N}_u, \varphi_u \rangle_L = aE + bF, \\ -f &= \langle \mathbf{N}_v, \varphi_u \rangle_L = cE + dF, \\ -f &= \langle \mathbf{N}_u, \varphi_v \rangle_L = aF + bG, \\ -g &= \langle \mathbf{N}_v, \varphi_v \rangle_L = cF + dG,\end{aligned}$$

donde E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$, las relaciones anteriores las podemos expresar en forma matricial como:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Ya que lo que deseamos obtener son expresiones para los coeficientes a, b, c, d tenemos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

En base a los cálculos anteriores se pueden definir las **ecuaciones de Weingarten** como:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_u &= \left(\frac{Ff - Ge}{EG - F^2} \right) \varphi_u + \left(\frac{Fe - Ef}{EG - F^2} \right) \varphi_v, \\ \mathbf{N}_v &= \left(\frac{Fg - Gf}{EG - F^2} \right) \varphi_u + \left(\frac{Ff - Eg}{EG - F^2} \right) \varphi_v.\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

La **curvatura Gaussiana de Minkowski** K y **curvatura media de Minkowski** H se definen como:

$$\begin{aligned}K &= \frac{\det(II)}{\det(I)} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\ H &= \frac{1}{2} \text{tr}(II) = \frac{Eg + Ge + 2Ff}{2(EG + F^2)}.\end{aligned}$$

De la observación 3.4 se deduce que

$$(\det(I))^2 K = \pm (\det(I_e))^2 K_e,\tag{3.3.4}$$

donde \pm es el signo del $\det(I)$, luego utilizando la ecuación 3.3.2, obtenemos que

$$K \cos^2 2\theta = \pm K_e, \quad (3.3.5)$$

donde θ es el ángulo entre \mathbf{N} (o \mathbf{N}_e) con algún plano horizontal. En particular tenemos

$$|K| \geq |K_e|. \quad (3.3.6)$$

Es decir, la curvatura Gaussiana en el espacio lorentziano es mayor que la curvatura Gaussiana en el espacio euclídeo.

Escribimos ahora φ_{uu} , φ_{uv} y φ_{vv} en la base $\{\varphi_u, \varphi_v, \mathbf{N}\}$, es decir

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= a_{11}\varphi_u + a_{12}\varphi_v + a_{13}\mathbf{N}, \\ \varphi_{uv} &= b_{11}\varphi_u + b_{12}\varphi_v + b_{13}\mathbf{N}, \\ \varphi_{vv} &= c_{11}\varphi_u + c_{12}\varphi_v + c_{13}\mathbf{N}. \end{aligned}$$

Luego, haciendo el producto interior lorentziano con cada elemento de la base obtenemos las **ecuaciones de Gauss**:

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v \pm e \mathbf{N}, \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v \pm f \mathbf{N}, \\ \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v \pm g \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

donde \pm es el signo de $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle_L$ y Γ_{jk}^i son los **símbolos de Christoffel** dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u + FE_u - 2FF_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{EE_u + FE_u - 2EF_u}{2(EG - F^2)}. \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - 2FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= -\frac{FE_v - 2EG_u}{2(EG - F^2)}. \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{FG_v + GG_u - 2GF_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v + FG_u - 2FF_v}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Derivando respecto a u y v cada una de las ecuaciones de 3.3.7, obtenemos expresiones para φ_{uuv} , φ_{uvv} , φ_{vuv} y φ_{vvu} las cuales se pueden escribir como combinación lineal de la base $\{\varphi_u, \varphi_v, \mathbf{N}\}$ usando las ecuaciones de Gauss 3.3.7 y las ecuaciones de Weingarten 3.3.4. Como $\varphi_{uuv} = \varphi_{vuv}$ y $\varphi_{uvv} = \varphi_{vvu}$ y el coeficiente de \mathbf{N} en cada ecuación tiene que ser nulo. Se derivan las **ecuaciones de Codazzi-Mainardi** como:

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= \Gamma_{12}^1 e + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ f_v - g_u &= \Gamma_{22}^1 e + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Las ecuaciones de Gauss junto con las ecuaciones de Codazzi-Mainardi son conocidas como **las ecuaciones de compatibilidad**.

De los coeficientes de φ_u (o φ_v) y $\varphi_{uv} - \varphi_{vu} = 0$ se obtiene la *ecuación del teorema de egregium*

$$K(I) = \pm K(I, II),$$

donde $K(I)$ es la curvatura intrínseca inducida por el producto escalar, $K(I, II)$ es la curvatura Gaussiana y $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle_L = \eta = -\text{signo}(\det(I))$. Debe observarse que $\eta = -1$ en la parte espacial y $\eta = 1$ en la parte temporal.

Como el teorema de Egregium es cierto también en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , tenemos que

$$K_e(I_e) = K_e(I_e, II_e),$$

usando la ecuación 3.3.4 tenemos que

$$\text{signo}(K(I, II)) = -\eta \text{signo}(K_e(I_e, II_e)) = -\eta \text{signo}(K_e(I_e)).$$

Así,

$$\text{signo}(K(I)) = -\text{signo}(K_e(I_e)).$$

La primera y segunda forma fundamental determinan la forma de cualquier superficie espacial o temporal en $\mathbb{R}^{2,1}$. Aquí, $Cod(I, II)$ significa que I y II satisfacen las ecuaciones de Codazzi-Mainardi.

TEOREMA 3.3 (Teorema fundamental de las superficies en $\mathbb{R}^{2,1}$): Suponga que

$$I = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2,$$

$$II = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2,$$

son formas cuadráticas de clase C^∞ sobre un conjunto abierto V del plano (u, v) con $EG - F^2 \neq 0$, $Cod(I, II)$ y $\frac{\det(II)}{\det(I)} = -\text{signo}(\det(I))K(I)$. Entonces en alguna vecindad U de algún punto de V existe una parametrización $\varphi : U \subset V \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ describiendo una superficie con primera forma fundamental I y segunda forma fundamental II .

3.3.3. Direcciones principales

En la parte espacial o temporal de φ , el operador $-d\mathbf{N} : T_p S \rightarrow T_p S$ aplica vectores de la forma $\varphi_u(u') + \varphi_v(v)'$ en vectores de la forma $-\mathbf{N}_u(u') - \mathbf{N}(v)'$. La matriz de $-d\mathbf{N}$ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es:

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix}.$$

Definamos las **curvaturas principales** k_1 y k_2 como los valores propios del operador lineal $-d\mathbf{N}$. Entonces, las soluciones de la ecuación

$$\det(-d\mathbf{N} - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right| = 0, \quad (3.3.9)$$

son $\lambda_1 = H - \sqrt{H^2 - K} = k_1$ y $\lambda_2 = H + \sqrt{H^2 - K} = k_2$. Tenemos que

$$K = k_1 k_2 \quad \text{y} \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

por lo tanto k_1 y k_2 satisfacen la ecuación

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0.$$

Cuando k_1 y k_2 son reales, las **direcciones principales** son determinadas por los vectores propios diferentes de cero $\varphi_u(u') + \varphi_v(v') \in T_p S$. Tenemos entonces que

$$-d\mathbf{N} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Así, u' y v' satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{Ge - Ff}{EG - F^2} u' + \frac{Gf - Fg}{EG - F^2} v' &= \lambda u', \\ \frac{Ef - Fe}{EG - F^2} u' + \frac{Eg - Ff}{EG - F^2} v' &= \lambda v'. \end{aligned}$$

Eliminando λ , tenemos

$$(Fg - Gf)(v')^2 + (Eg - Ge)v'u' + (Ef - Fe)(u')^2 = 0, \quad (3.3.10)$$

o de manera equivalente

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -v'u' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

La ecuación 3.3.10 no está definida en la parte luminosa, pero es homogénea en e, f, g . Podemos multiplicar estos coeficientes por $\|\varphi_u \otimes \varphi_v\|$ y sustituir por $\bar{e} = \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \otimes \varphi_v \rangle_L$, $\bar{f} = \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \otimes \varphi_v \rangle_L$ y $\bar{g} = \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \otimes \varphi_v \rangle_L$. Entonces

$$(F\bar{g} - G\bar{f})(v')^2 + (E\bar{g} - G\bar{e})v'u' + (E\bar{f} - F\bar{e})(v')^2 = 0.$$

Si hacemos $L_1 = F\bar{g} - G\bar{f}$, $M_1 = E\bar{g} - G\bar{e}$ y $N_1 = E\bar{f} - F\bar{e}$, obtenemos la **Ecuación de las direcciones principales**

$$L_1(v')^2 + M_1v'u' + N_1(u')^2 = 0. \quad (3.3.11)$$

Fuera de la parte luminosa, las ecuaciones 3.3.10 y 3.3.11 son iguales.

DEFINICIÓN 3.8: Un punto $p \in S$ es **umbílico** si $II = kI$ para alguna constante k , o de forma equivalente, si $p = (u_0, v_0) \in S$ estando fuera de la región luminosa satisface que $L_1(u_0, v_0) = M_1(u_0, v_0) = N_1(u_0, v_0)$. Un umbílico es llamado espacial (respectivamente temporal) si está fuera del cono de luz (respectivamente dentro del cono de luz).

Siendo $\Delta = M_1^2 - 4L_1N_1$ el discriminante de la ecuación 3.3.11 de las direcciones principales, si $\Delta > 0$, habrían dos direcciones principales. Si $\Delta = 0$, en la parte luminosa está caracterizando puntos umbílicos, pero en la parte temporal podemos tener puntos donde $\Delta = 0$ y sin embargo estos puntos podrían no ser umbílicos.

OBSERVACIÓN 3.5: La esfera \mathbb{S}^2 es *totalmente umbílica* en el espacio euclídeo, mientras que en el espacio de Lorentz $\mathbb{R}^{2,1}$ solo tiene *dos puntos umbílicos* y estos son el polo norte y el polo sur, además, las líneas de curvatura son los meridianos y paralelos, ver figura 3.10.

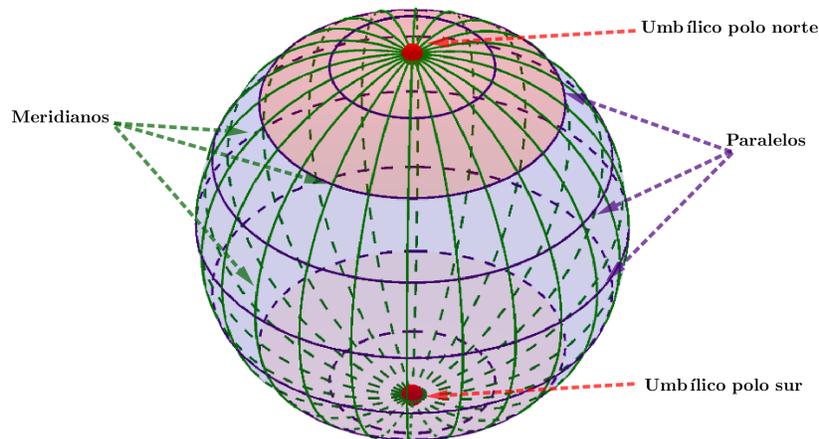


Figura 3.10: Puntos umbílicos y líneas de curvatura de la esfera en el espacio $\mathbb{R}^{2,1}$.

Líneas principales del elipsoide

Diremos que una parametrización es una *carta principal* si $f = F = 0$.

Dado el *elipsoide*:

$$\mathbb{E}_0 = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

con $a > b > 0$ y $c > 0$ tenemos el siguiente lema:

LEMA 3.2: En el elipsoide \mathbb{E}_0 tenemos que:

- a. Las curvas $\{(x, y, z) : x = 0\} \cap \mathbb{E}_0$ y $\{(x, y, z) : z = 0\} \cap \mathbb{E}_0$ son líneas principales.
 b. Tiene cuatro puntos umbílicos espaciales, estos están dados por:

$$\left(\pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}, 0, \pm c \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}} \right).$$

- c. La curva $\{(x, y, z) : y = 0\} \cap \mathbb{E}_0$ es unión de líneas principales.
 d. La parte luminosa está compuesta por dos curvas cerradas con intersección vacía; además, estas curvas son líneas principales.

Demostración:

- a. Consideremos la parametrización

$$\varphi(u, v) = \left(a \cos(u) \sqrt{A \cos^2(v) + \sin^2(v)}, b \sin(u) \sin(v), c \cos(v) \sqrt{B \cos^2(u) + \sin^2(u)} \right), \quad (3.3.12)$$

con $(u, v) \in U_1 = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ o $(u, v) \in U_2 = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, y donde $A = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, $B = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2}$. Esta parametrización no es regular en los vértices del rectángulo U_1 o U_2 (ya que son puntos umbílicos). La ecuación 3.3.11 es:

$$abc(b^2 \cos^2(v) + c^2 \cos^2(v) + a^2 \cos^2(u) - b^2 \cos^2(u) - a^2 - c^2)^4 dudv = 0,$$

por lo tanto, (u, v) define una carta principal. Las líneas principales son $u = \text{constante}$ y $v = \text{constante}$. Así, para $(u, v) \in U_1$ (respectivamente U_2) y $u = \frac{\pi}{2}$ (respectivamente $v = \frac{\pi}{2}$), tenemos que $\{(x, y, z) : x = 0\} \cap \mathbb{E}_0$ (respectivamente $\{(x, y, z) : z = 0\} \cap \mathbb{E}_0$) es línea principal; Ver figura 3.12.

- b. Consideremos la carta

$$\varphi(u, v) = (au, bv, \pm c \sqrt{1 - u^2 - v^2}), \quad (3.3.13)$$

la ecuación 3.3.11 queda

$$-uv(a^2 + c^2)du^2 + (u^2(a^2 + c^2) - v^2(b^2 + c^2) - a^2 + b^2)dudv + uv(b^2 + c^2)dv^2 = 0.$$

Es claro que $L_1 = N_1 = 0$ cuando $u = 0$ o $v = 0$. Si $u = 0$, entonces $M_1 = -v^2(b^2 + c^2) - a^2 + b^2 \neq 0$. Si $v = 0$, tenemos que $m_1 = u^2(a^2 + c^2) - a^2 + b^2$ si y sólo si

$$u_0 = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}.$$

Evaluando en φ tenemos que los puntos umbílicos estarán dados por:

$$\left(\pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}, 0, \pm c \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}} \right),$$

además,

$$(EG - F^2)(u_0, 0) = \frac{b^4(a^2 + c^2)}{b^2 + c^2} > 0,$$

concluimos que estos puntos umbílicos son espaciales, ver figura 3.12.

- c. Tomando la parametrización 3.3.12, las curvas $(0, v), (\pi, v), (u, 0), (u, \pi) \in U_2$ son líneas principales. Así, $\{(x, y, z) : y = 0\} \cap \mathbb{E}_0$ es unión de líneas principales y puntos umbílicos, ver figura 3.11

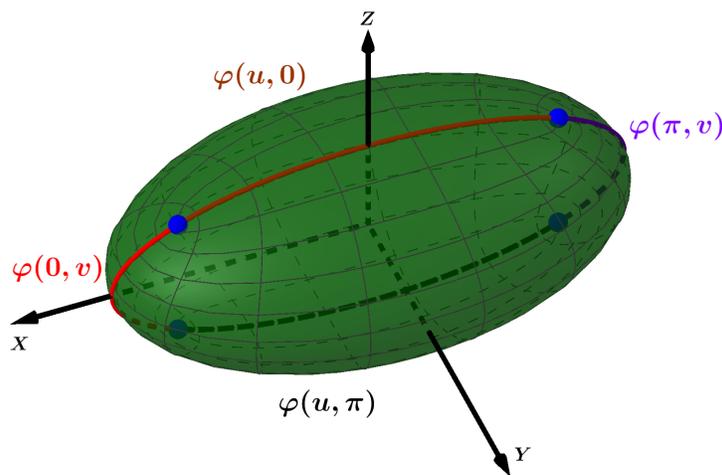


Figura 3.11: $\{(x, y, z) : y = 0\} \cap \mathbb{E}_0$ como unión de líneas principales.

- d. Usamos de nuevo la parametrización 3.3.12 con $(u, v) \in U_1$ tenemos que:

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= ((b^2 + c^2)\cos 2(v) - c^2)((a^2 - b^2)\cos^2(u) - a^2) \\ &\quad ((a^2 - b^2)\cos 2(u) + (b^2 + c^2)\cos^2(v) - a^2 - c^2)^2 = 0, \end{aligned}$$

si y sólo si $v_1 = \arccos\left(\frac{c}{\sqrt{c^2 + b^2}}\right)$ o $v_2 = \arccos\left(-\frac{c}{\sqrt{c^2 + b^2}}\right) = \pi - v_1$.

Concluimos que la parte luminosa esta constituida por curvas cerradas $\alpha_1 = \varphi(u, v_1)$ y $\alpha_2 = (u, v_2)$. Como $v = constante$ y φ es una carta principal, α_1 y α_2 son líneas principales.

■

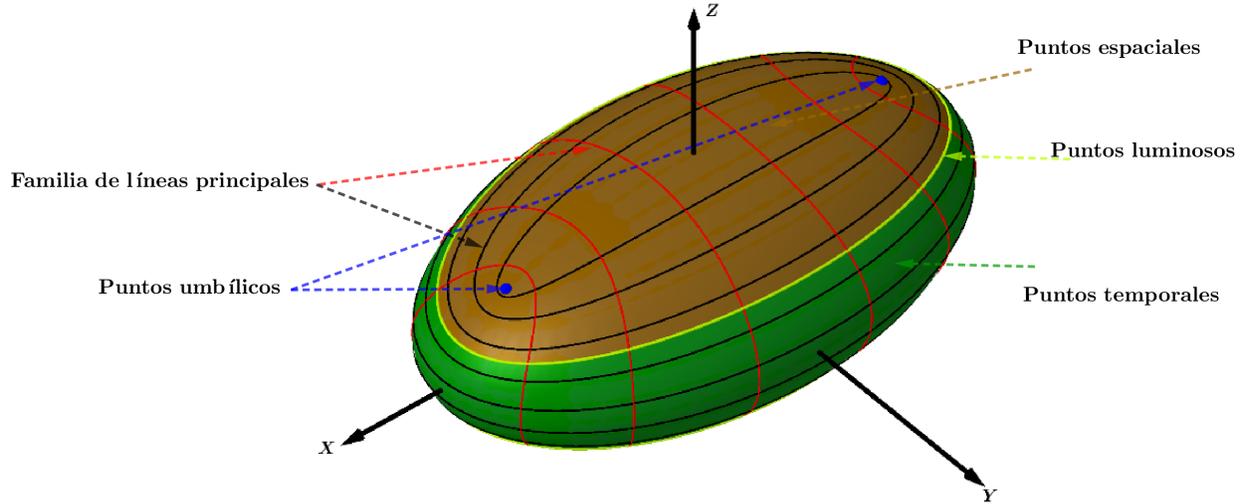


Figura 3.12: Elipsoide.

3.3.4. Triedro de Darboux

Dada una parametrización φ de una superficie S , considere una curva α de tipo espacial o temporal parametrizada por longitud de arco s sobre la región espacial o temporal de S . Definimos $\mathbf{t}(s) = \varphi'(\alpha(s))\alpha'(s)$, $\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}(\alpha(s))$ el vector normal a α , $\mathbf{V}(s) = \mathbf{N}(s) \otimes \mathbf{t}(s)$. Así, los tres vectores $\{\mathbf{t}, \mathbf{V}, \mathbf{N}\}$ forman una base ortonormal. Sean $(\epsilon, \eta) \in \{(1, -1), (1, 1), (-1, 1)\}$, donde $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle_L = \epsilon$ y $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle_L = \eta$, de aquí se obtiene que $\langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle_L = -\epsilon\eta$.

PROPOSICIÓN 3.6: Sea φ una parametrización de S y sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ una curva espacial o temporal parametrizada por longitud de arco s en la región espacial o temporal de S . Entonces la curva α induce un **triedro de Darboux** $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{V}(s), \mathbf{N}(s)\}$ para α , que tiene como ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= k_g(s)\mathbf{V}(s) + \epsilon\eta k_n(s)\mathbf{N}(s), \\ \mathbf{V}'(s) &= \eta k_g(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)\mathbf{N}(s), \\ \mathbf{N}'(s) &= -k_g(s)\mathbf{t}(s) + \epsilon\tau_g(s)\mathbf{V}(s), \end{aligned}$$

donde $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle_L = \epsilon, \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle_L = \eta$ y las funciones $k_g(s) = -\epsilon\eta \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{V}(s) \rangle_L$, $k_n(s) = \epsilon \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L$ y $\tau_g(s) = \eta \langle \mathbf{V}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L$ son: la curvatura geodésica, normal y la torsión geodésica de la curva α respectivamente.

En la región de una superficie S donde la ecuación 3.3.11 tiene discriminante positivo, las direcciones principales definen dos *campos de líneas principales* a las cuales denotaremos por $\mathcal{L}_{1,S}$ y $\mathcal{L}_{2,S}$. Las curvas integrales de estos campos de líneas principales las llamaremos *líneas de curvatura principal*. Así, una curva suave α es una línea principal si satisface la ecuación 3.3.11 y no contiene singularidades, en la figura 3.11 podemos apreciar que una curva cerrada es unión de cuatro curvas principales.

Llamaremos *foliación* $\mathcal{F}_{1,S}$ (respectivamente $\mathcal{F}_{2,S}$) al conjunto de curvas integrales del campo de líneas $\mathcal{L}_{1,S}$ (respectivamente $\mathcal{L}_{2,S}$). El objetivo principal es describir el comportamiento de las líneas principales al rededor de los puntos umbílicos y al rededor de las líneas principales. En ese sentido el triedro de Darboux 3.6 nos ayuda a obtener información del comportamiento de la superficie al rededor de una curva cerrada.

LEMA 3.3: Sea $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ un arco de foliación $\mathcal{F}_{1,S}$ espacial o temporal, parametrizado por longitud de arco s , de longitud l y contenido en la parte espacial o temporal de S . Entonces la expresión:

$$\varphi(s, v) = \varphi(\alpha(s)) + \bar{\eta}v(\mathbf{N} \otimes \mathbf{t})(s) - \bar{\epsilon} \left(\frac{1}{2}k_2(s)v^2 + \frac{1}{6}A(s)v^3 + v^3B(s, v) \right) \mathbf{N}(s),$$

donde $k_2(s)$ es la curvatura principal de $\mathcal{F}_{2,S}$ sobre α , define una carta local (s, v) en el entorno de α .

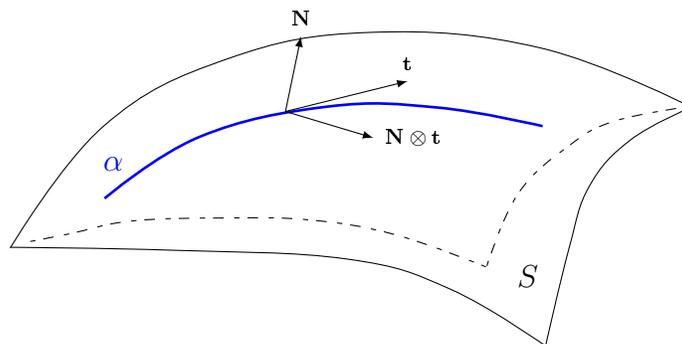


Figura 3.13: Triedro de Darboux sobre una línea principal.

Demostración:

La aplicación

$$\alpha(s, v, w) = \varphi(\alpha(s)) + \bar{\eta}v(\mathbf{N} \otimes \mathbf{t})(s) - \bar{\epsilon}w\mathbf{N}(s),$$

es un difeomorfismo local en un entorno de s . Así, existe una función $w(s, v)$ tal que $\varphi(s, v, w(s, v))$ es una parametrización de un entorno tubular de $\varphi \circ \alpha$.

Para cada s , $w(s, v)$ es la parametrización de una curva formada por la intersección entre S y el plano generado por $\{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{t})(s), \mathbf{N}(s)\}$. El vector $(\mathbf{N} \otimes \mathbf{t})(s)$ es el vector tangente de la curva w en $w(s, 0)$. La curvatura normal de $\beta_s(v) = w(s, v)$ en $v = 0$ es $k_n(\beta_s)(s, 0) = k_2(s)$; esto es, la curvatura principal de la foliación $\mathcal{F}_{2,S}$ sobre la curva α . Así

$$\varphi(s, v) = \varphi(\alpha(s)) + \bar{\eta}v(\mathbf{N} \otimes \mathbf{t})(s) - \bar{\epsilon} \left(\frac{1}{2}k_2(s)v^2 + \frac{1}{6}A(s)v^3 + v^3B(s, v) \right) \mathbf{N}(s),$$

define una carta local. ■

OBSERVACIÓN 3.6: Este lema nos permite definir una parametrización alrededor de una curva principal cerrada. Si la curva es espacial el lema se aplica directamente, si cambia de carácter el lema se aplica a cada arco espacial y temporal. Esto es importante para describir el comportamiento de líneas principales dado que éstas son gobernadas por una ecuación diferencial implícita en una parametrización.

3.4. Conjetura de Carathéodory en el espacio $\mathbb{R}^{2,1}$

En el espacio euclidiano la conjetura de Carathéodory establece que una superficie regular cerrada y convexa tiene al menos dos puntos umbílicos. En el espacio de Lorentz $\mathbb{R}^{2,1}$ también es posible establecer un resultado análogo y además demostrar que los puntos umbílicos de las superficies que cumplen la conjetura de Carathéodory son todos espaciales.

Sea $P_c^{\mathbf{v}} = \{p \in \mathbb{R}^{2,1} : \langle p, \mathbf{v} \rangle_L = c\}$ un plano en $\mathbb{R}^{2,1}$. El *contacto* de la superficie S con $P_c^{\mathbf{v}}$ es medido por las singularidades de la función altura $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$h(p) = \langle p, \mathbf{v} \rangle_L.$$

Decimos que el contacto es de tipo A_1^+ en $p \in S$ si $p \in P_c^{\mathbf{v}}$ y la función altura h tiene una singularidad de Morse de índice 0 o 2 en p , es decir, h puede ser escrita en algún sistema de coordenadas local en p en S en la forma $\pm(u^2 + v^2)$. Para esto, es suficiente y necesario que el polinomio de Taylor de grado 2 de h en p sea una forma cuadrática estrictamente positiva o negativa.

Una superficie S es *localmente convexa* en $p \in S$ si existe un entorno V de p en S tal que V está contenido en uno de los semi espacios determinados por el plano tangente $T_p S$. Una superficie convexa es también una superficie localmente convexa.

Dada una parametrización local $\varphi : U \rightarrow S$ de una superficie S y $q_0 = (u_0, v_0) \in U$, la función altura h a lo largo del “vector normal” $\mathbf{v} = (\varphi_u \otimes \varphi_v)(q_0)$ en q_0 puede ser considerada como una aplicación local $U \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(u, v) = \langle \varphi(u, v), \mathbf{v} \rangle_L$. El polinomio de Taylor de grado 2 de h en $q_0 = (u_0, v_0) \in U$ es dado por

$$\frac{1}{2} (h_{uu}(q_0)(u - u_0)^2 + 2h_{uv}(q_0)(u - u_0)(v - v_0) + h_{vv}(q_0)(v - v_0)^2),$$

y una condición necesaria de S para que sea localmente convexa en $p_0 = \varphi(q_0)$ es que

$$(h_{uv}^2 - h_{uu}h_{vv})(q_0) \leq 0.$$

LEMA 3.4: Los puntos luminosos de una superficie cerrada $S \in \mathbb{R}^{2,1}$ de clase C^1 es la unión de al menos dos subconjuntos ajenos y cerrados de S .

Demostración:

Los puntos luminosos sobre S es el conjunto de puntos donde el plano tangente a S es luminoso, es decir, todo los planos que son tangentes al cono de luz. Cambiamos la métrica en \mathbb{R}^3 y consideramos $S \subset \mathbb{R}^3$ como una superficie \tilde{S} en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . Ya que \tilde{S} es cerrada, la imagen de su aplicación de Gauss $N : \tilde{S} \rightarrow S^2$ es toda la esfera S^2 .

Los vectores normales unitarios a los planos tangentes al cono de luz trazan los dos círculos $z = \pm 1/\sqrt{2}$ sobre S^2 . Los vectores luminosos de S son exactamente las preimágenes de estos dos círculos $z = \pm 1/\sqrt{2}$ mediante la aplicación de Gauss N sobre \tilde{S} . Por lo tanto, los puntos luminosos de S están formados al menos por dos subconjuntos ajenos y diferentes del vacío. ■

LEMA 3.5: Sea S una superficie convexa y cerrada en $\mathbb{R}^{2,1}$ de clase C^3 y $\varphi : U \subset \mathbb{R} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^{2,1}$ una parametrización local de S , se cumple que:

1. Los puntos singulares de $\delta = F^2 - EG$ son puntos umbílicos luminosos,
2. La única dirección principal luminosa en $T_p S$ en los puntos regulares de δ sobre los puntos luminosos es transversal a los puntos luminosos.

Demostración:

Si $E(q) = 0$ o $G(q) = 0$ en $q \in U$ con $\varphi(q)$ punto luminoso, entonces $F(q) = 0$. Por lo tanto, no podemos tener que $E(q) = G(q) = 0$ sobre los puntos luminosos. Asumamos, sin pérdida de generalidad que $G \neq 0$ sobre U .

Las direcciones luminosas en puntos de $\varphi(U)$ son soluciones de la ecuación

$$G(v')^2 + 2Fu'v' + E(u')^2 = 0,$$

y la única dirección luminosa sobre los puntos luz es paralela a $G\varphi_u - F\varphi_v$. Este es un campo vectorial suave sobre $\varphi(U)$, podemos reparametrizar φ_u para que las curvas coordenadas sean las curvas integrales de este campo vectorial. Es decir, podemos elegir una parametrización local de S , la cual seguiremos denotando por φ , tal que la única dirección luminosa sobre los puntos luz esté a lo largo de φ_u . Con esta parametrización, usaremos en el resto de la prueba que $E = F = 0$ sobre los puntos luz.

1. La función δ es singular sobre los puntos luz si y sólo si $(-E_u G, -E_v G) = (0, 0)$. Los coeficientes de la ecuación 3.3.11 se convierten en $(G\bar{m}, G\bar{l}, 0)$ sobre los puntos luz, y en este conjunto también tenemos que $\varphi_u \otimes \varphi_v = \lambda\varphi_u$ para alguna función λ diferente de cero. Por lo tanto

$$\bar{l} = \langle \varphi_u \otimes \varphi_v, \varphi_{uu} \rangle_L = \lambda \langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle_L = \frac{1}{2} \lambda E_u,$$

de manera similar

$$\bar{m} = \langle \varphi_u \otimes \varphi_v, \varphi_{uv} \rangle_L = \lambda \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle_L = \frac{1}{2} \lambda E_v.$$

Así, los coeficientes de la ecuación 3.3.11 sobre los puntos luz son $(\lambda E_v G, \lambda E_u G, 0)$, y estos coeficientes se anulan en algún punto luz q (es decir, q es un punto umbílico tipo luz) si y sólo si δ es singular en q .

2. Supongamos ahora que δ es regular sobre los puntos luz (entonces, los puntos luz forman una curva regular). Entonces tenemos que $E_u \neq 0$ o $E_v \neq 0$ sobre esta curva. Consideremos ahora el contacto de S con su plano tangente $T_{p_0}S$ en $p_0 = \varphi(q_0)$ en los puntos luz de S . El polinomio de Taylor de grado 2 de la función altura $h(u, v)$ dada por $h(u, v) = \langle \varphi(u, v), \varphi_u(q_0) \rangle_L$ a lo largo del “vector normal” luminoso $\varphi_u(q_0)$ en q_0 esta dado por:

$$\frac{1}{2} (h_{uu}(q_0)(u - u_0)^2 + 2h_{uv}(q_0)(u - u_0) + h_{vv}(q_0)(v - v_0)^2),$$

con

$$\begin{aligned} h_{uu}(q_0) &= \langle \varphi_{uu}(q_0), \varphi_u(q_0) \rangle_L = \frac{1}{2} E_u(q_0), \\ h_{uv}(q_0) &= \langle \varphi_{uv}(q_0), \varphi_u(q_0) \rangle_L = \frac{1}{2} E_v(q_0), \\ h_{vv}(q_0) &= \langle \varphi_{vv}(q_0), \varphi_u(q_0) \rangle_L = \left(F_v - \frac{1}{2} G_u \right) (q_0). \end{aligned}$$

La dirección luz $\varphi_u(q_0)$ es tangente a los puntos luz en $p_0 = \varphi(q_0)$ si y sólo si $E_u(q_0) = 0$. Pero como S es convexa,

$$(h_{uv}^2 - h_{uu}h_{vv})(q_0) = \frac{\left(E_v^2 - 2 \left(F_v - \frac{G_u}{2} \right) E_u \right) (q_0)}{4} \leq 0,$$

ya que $E_u(q_0) = 0$ implica que $E_v(q_0) = 0$, en consecuencia la curva regular formada por los puntos luz es singular en q_0 . Por lo tanto, $E_u \neq 0$ en los puntos regulares de δ sobre los puntos luz, quiere decir que, la dirección principal luminosa es transversal a los puntos luz. ■

TEOREMA 3.4: Sea S una superficie cerrada y estrictamente convexa de clase C^3 en $\mathbb{R}^{2,1}$. Entonces

1. S tiene al menos dos puntos umbílicos,
2. Todos los puntos umbílicos están en la parte espacial de S .

Demostración:

1. Consideremos la función de clase C^3 $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(p) = p_3$ para algún $p = (p_1, p_2, p_3) \in S$. Entonces g tiene un mínimo y máximo global p_{mn} y p_{mx} respectivamente (estos puntos no tiene que ser únicos). Los planos tangentes a S en los puntos p_{mn} y p_{mx} pertenecen a la parte espacial de S . Supongamos que estos puntos pertenecen a alguna componente conexa espacial R de s . Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow R$ un camino continuo en R tal que cumple que $\gamma(0) = p_{mn}$ y $\gamma(1) = p_{mx}$, consideremos la aplicación de Gauss $N : \tilde{S} \rightarrow S^2$ tal como se definió en la prueba del lema 3.4. La curva continua $N \circ \gamma$ satisface que $N \circ \gamma(0) = (0, 0, -1)$ y $N \circ \gamma(1) = (0, 0, 1)$, así que existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $N \circ \gamma(t_0)$ pertenece al ecuador $z = 0$ sobre S^2 . Por lo tanto, el espacio tangente a S en $\gamma(t_0)$ es un plano temporal, lo cual constituye una contradicción, ya que habíamos supuesto que R es espacial.

Sea R_1 y R_2 componentes espaciales conexas de S que contienen a p_{mn} y p_{mx} respectivamente, y que además denotamos a sus fronteras como ∂R_1 y ∂R_2 respectivamente. Los conjuntos ∂R_1 y ∂R_2 son parte de los puntos luminosos de S . Se sigue de la prueba del lema 3.4 que ∂R_1 y ∂R_2 son conjuntos ajenos (∂R_1 es parte de la preimagen del círculo $z = -1/\sqrt{2}$ por la aplicación de Gauss N , y ∂R_2 es parte de la preimagen del círculo $z = 1/\sqrt{2}$ por N).

Consideremos las parametrizaciones locales de S en los puntos sobre ∂R_1 y ∂R_2 .

Si $\delta = F^2 - EG$ es singular sobre ∂R_1 y ∂R_2 , entonces esos puntos singulares son puntos umbílicos luminosos (por lema 3.5(1)). Como $\partial R_1 \cap \partial R_2 = \emptyset$, tenemos al menos dos puntos umbílicos sobre S .

Supongamos que δ es regular sobre ∂R_1 (como ∂R_1 es una curva regular; también es una curva cerrada). La superficie S cerrada y estrictamente convexa es homeomorfa a

S^2 . Así ∂R_1 es homeomorfo a un disco. Consideremos el campo de direcciones en ∂R_1 dado por la ecuación 3.3.11 y que coincide con la única dirección luminosa en $T_p S$ para todo $p \in \partial R_1$. Este campo de direcciones es transversal a ∂R_1 (por lema 3.5(2)), así por el teorema de Poincaré-Hopf debe tener al menos una singularidad en ∂R_1 . Esta singularidad es un punto umbílico espacial ya que ∂R_1 esta en la parte espacial de S . Procedemos de manera similar si δ es regular sobre ∂R_2 y damos un segundo punto umbílico de S . Si δ es singular en un punto de ∂R_1 , la singularidad es un punto umbílico luminoso y da un segundo punto umbílico sobre S .

2. Para probar este punto, veamos que sobre la parte temporal de S las líneas de curvatura son distintas y que por lo tanto no habrían puntos umbílicos. Ya que S es una superficie convexa, la curvatura Gaussiana usando la métrica Euclidiana esta dada por

$$K_e = \frac{e_e g_e - f_e^2}{E_e G_e - F_e^2} > 0,$$

como $E_e G_e - F_e^2 > 0$ tenemos que $e_e g_e - f_e^2 > 0$. De la observación 3.4 tenemos que

$$eg - f^2 = \frac{\det(I_e)^{\frac{1}{2}}}{|\det(I)|^{\frac{1}{2}}}(e_e g_e - f_e^2) > 0.$$

Como estamos sobre la parte temporal sabemos que $EG - F^2 < 0$, luego las curvaturas principales son las raíces de la ecuación cuadrática

$$\det(II - \lambda I) = (EG - F^2)\lambda^2 - (Eg + Ge - 2Ff)\lambda + eg - f^2,$$

de la cual podemos concluir que de los valores para $EG - F^2 < 0$ y $eg - f^2$ esta ecuación tendrá dos soluciones distintas, es decir, existirán dos direcciones diferentes, con lo cual no podrían existir puntos umbílicos, tal y como se quería probar.

■

Epílogo

La geometría hiperbólica nace a partir de la negación del quinto postulado de Euclides y se formaliza a partir de 1829 con *Nikolái Ivánovich Lobachevski* (1792-1856), con el paso de los años otros matemáticos de gran importancia propusieron diferentes modelos para esta nueva geometría, tales como: el disco de Poincaré, el disco de Beltrami-Klein y el modelo del hiperboloide. Siendo este último modelo el de relevancia para este documento.

En el primer capítulo estudiamos el *modelo del hiperboloide* definimos el grupo de transformaciones, la forma en que se miden distancias en este espacio. Encontramos que las geodésicas en el modelo del hiperboloide son ramas de hipérbolas y estudiamos algunas características sobre los planos. Además, dedicamos una sección en la cual vimos que el modelo del hiperboloide se aplica a la teoría de la relatividad especial de Einstein.

En el segundo capítulo hicimos un breve resumen de la geometría diferencial de curvas y superficies en el espacio euclídeo. En la teoría local de curvas estudiamos en especial el triedro de Frenet-Serret y vimos que este triedro forma una base para la curva. Revisamos luego la teoría local de superficies, definimos la primera y segunda forma fundamental y la geometría de la aplicación de Gauss, curvatura normal, gaussiana y media, finalizando con el teorema local de Gauss-Bonnet.

En el tercer capítulo estudiamos la teoría local de curvas y superficies en el espacio de Lorentz $\mathbb{R}^{2,1}$. Iniciamos dando algunos resultados importantes sobre las bases en este espacio. En la parte de curvas vimos cómo clasificar las curvas a partir de su carácter causal y vimos que tendremos diferentes formas para el triedro de Frenet, estos diferentes triedros surgen a partir de que la curva sea temporal, espacial o luminosa. Hacemos una clasificación de los puntos sobre una superficie a partir de su vector normal o el determinante de la primera forma fundamental. Estudiamos las líneas de curvatura las cuales están definidas a partir de una ecuación diferencial implícita la cual está definida sobre todos los puntos de la superficie, encontramos que usando el triedro de Darboux podemos analizar el comportamiento de una superficie en un entorno de una línea principal, dimos también una descripción de las líneas principales y puntos umbílicos de un elipsoide.

Finalizamos el capítulo revisando la conjetura de *Carathéodory* en el espacio de Lorentz $\mathbb{R}^{2,1}$, la cual nos asegura la existencia y clasificación de los puntos umbílicos sobre una su-

perficie cerrada y convexa.

Con este trabajo se colocan las bases para emprender un estudio profundo sobre campos de líneas principales en geometría hiperbólica. Esta es una importante y extensa área de investigación en la que existen varios problemas abiertos que se pueden abordar a partir de los conceptos y resultados contenidos en este texto. Particularmente, se puede emprender un estudio de líneas principales de superficies inmersas en dimensiones mayores con la métrica de Lorentz-Minkowski tomando en consideración las dificultades que esto conlleva. También, se puede estudiar líneas principales en superficies a partir de una métrica generada por una forma cuadrática cualquiera, obteniendo generalizaciones de los resultados de este trabajo.

Bibliografía

- [1] M. Cruz López y M. García Campos, *Geometría hiperbólica bidimensional y su grupo de transformaciones*, Enviado para su publicación.
- [2] B. Janssen, *La teoría de la relatividad general*, Universidad de Granada, 2013.
- [3] R. López, *Differential Geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space*, International Electronic Journal of Geometry, 2014.
- [4] J. G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, Springer-Verlag, 2006.
- [5] D. N. Tejada Tejada, *Linhas de Curvaturas Principais e Geodésicas Nulas em Superfícies Imersas no Espaço de Minkowski 3-dimensional*, Goiânia, 2018.
- [6] F. Tari, *Umbilics of surfaces in the Minkowski 3-space*, The Mathematical Society of Japan, 2013.
- [7] T. Weinstein, *An introduction to Lorentz surfaces*, Walter De Gruyter, 1996.