

Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Física



Proyecto de Graduación

**APROXIMACIÓN VARIACIONAL DE VÓRTICES
SOLITÓNICOS ASIMÉTRICOS EN MEDIOS NO
LINEALES NO LOCALES**

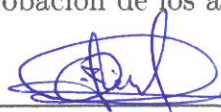
Presentado por:
Oscar Ismael Arce Moreno

Para optar al grado de:
Licenciado en Física

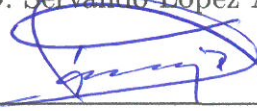
Asesores:
Servando López Aguayo
Rafael Gómez Escoto

Ciudad Universitaria, 21 de mayo de 2019

Aprobación de los asesores:



Ph.D. Servando López Aguayo



Ph.D. Rafael Gómez Escoto

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS

RECTOR:

Maestro Roger Armando Arias

SECRETARIO GENERAL:

Maestro Cristóbal Hernán Ríos Benítez

FISCAL GENERAL :

Lic. Rafael Humberto Peña Marín

DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y
MATEMÁTICA:

Lic. Mauricio Hernán Lovo Córdoba

DIRECTOR DE LA ESCUELA DE FÍSICA:

M.Sc. César Armando Alvarado Batres

Existen varias personas a quienes les dedico mi esfuerzo, a las cuales les debo parte de mi existencia, mi ser y mis ganas de vivir, gracias por simplemente creer en mí.

Agradecimientos

Este trabajo de graduación se realizó en colaboración con la Escuela de Ingeniería y Ciencias del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM).

En primer lugar quiero agradecer a mi asesor y mentor, Servando López, por todo lo que ha hecho por mí durante los últimos 2 años. Sin su conocimiento, estímulo constante y esfuerzo sincero, este trabajo de graduación ciertamente no sería posible. De igual forma, agradecer a mi asesor interno, Rafael Escoto, tuve mucha suerte de haber estudiado con un profesor de su calidad, ha sido un privilegio absoluto.

Agradezco a mis compañeros y amigos de la Escuela de Física; Alexander Larín, Alexis Andrés, Diego Ramos, Josué Quintanilla, Sergio Aguilar, Kevin Hernández, Bryan Jacobo y Ronaldo Guevara, entre otros. Una mención especial merece Victoria Alvarado, a quién le estaré eternamente agradecido por su constancia, su incansable apoyo e impulso, ya que fueron cruciales para poder hacer de mí una mejor persona.

También agradezco al personal académico de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática por la formación recibida y la ayuda obtenida en cada paso de mi carrera. Finalmente, estoy muy agradecido por el apoyo de mi familia.

Índice general

Agradecimientos	II
Índice de figuras	V
Índice de tablas	VI
Resumen	VII
Introducción	XI
1 Óptica no Lineal y Solitones	1
1.1 Solitones ópticos	2
1.2 Solitones espaciales	3
1.2.1 Ley de no linealidad de Kerr	5
1.2.2 No localidad	8
2 Aproximación Variacional	10
2.1 Métodos Variacionales	11
2.1.1 Ecuación de Euler-Lagrange	11
2.1.2 Presencia de más de una variable dependiente	13
2.1.3 Presencia de más de una variable independiente	14
2.1.4 Presencia de más de una variable independiente y dependiente	15
2.2 Principio de Mínima Acción (Hamilton)	16
2.3 Aproximación Variacional en teoría de Solitones	17
3 Métodos Numéricos	21
3.1 Método de Newton-Raphson	22
3.1.1 Método multidimensional de Newton Raphson	22
3.1.2 Método Numérico Variacional	23
3.2 Método Split-Step de Fourier (SSFM)	25
4 Resultados y Discusión	28
4.1 Medio local Kerr	29
4.2 Medio no local	33

5 Conclusiones y Recomendaciones	40
5.1 Conclusiones	41
5.2 Recomendaciones	42
Referencias	43
A Códigos Numéricos	47
A.1 Método Numérico Variacional	47
A.2 Split Step de Fourier	50

Índice de figuras

Figura 1.1 Ilustración esquemática de la analogía de la lente para solitones espaciales.	3
Figura 2.1 Caminos posibles vecinos.	11
Figura 2.2 Comparación entre las soluciones obtenidas utilizando la aproximación variacional y un método numérico.	19
Figura 4.1 Vórtice asimétrico en un medio local Kerr para $\lambda = 60$, $m = 1$ y $\alpha = 0.01$	31
Figura 4.2 Lo mismo que en la Figura 4.1, pero en un despliegue tridimensional.	32
Figura 4.3 Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 60$, $m = 1$, $\alpha = 0.1$ y $\sigma = 1$	34
Figura 4.4 Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 60$, $m = 1$, $\alpha = 0.5$ y $\sigma = 1$	34
Figura 4.5 Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 100$, $m = 1$, $\alpha = 0.5$ y $\sigma = 10$	35
Figura 4.6 Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 150$, $m = 1$, $\alpha = 1$ y $\sigma = 10$	36
Figura 4.7 Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 100$, $m = 1$, $\alpha = 2$ y $\sigma = 1$	36
Figura 4.8 Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 80$, $m = 2$, $\alpha = 0.75$ y $\sigma = 1$	37
Figura 4.9 Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 80$, $m = 2$, $\alpha = 0.3$ y $\sigma = 1$	38
Figura 4.10 Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 80$, $m = 2$, $\alpha = 0.3$ y $\sigma = 5$	38

Índice de tablas

Tabla 4.1	Cantidades conservadas para diferentes perfiles optimizados (en unidades adimensionales normalizadas).	32
Tabla 4.2	Valores optimizados para la propagación del vórtice asimétrico.	39
Tabla 4.3	Valores de las cantidades dinámicas para los parámetros optimizados (en unidades adimensionales normalizadas).	39

Resumen

El objetivo principal del presente trabajo ha sido modelar estructuras en forma de vórtice solitónico que surgen de la ecuación no lineal de Schrödinger en dos dimensiones, así que se ha utilizado una aproximación variacional [Anderson, 1983a] para determinar la dinámica del sistema y el método Split Step de Fourier [Weideman and Herbst, 1986] para simular la propagación.

Las cantidades dinámicas que se determinaron fueron la potencia, el momento lineal, el momento angular y el Hamiltoniano, considerando dos casos: un caso local Kerr y un caso no local general. El caso Kerr se trabajó analíticamente mientras que para el caso no local se implementó la aproximación variacional desarrollada con el método de Newton-Rapson multivariante [Duque et al., 2018]. La función de prueba propuesta ha sido un vórtice solitónico asimétrico, en el cual nos interesamos en encontrar los parámetros óptimos de amplitud y ancho del haz.

La propagación de los resultados obtenidos, al igual que el método variacional, se realizaron numéricamente con el software de cálculo MATLAB. Para la propagación se utilizó el método Split Step de Fourier, obteniendo resultados conocidos para comparar con trabajos de otros autores y nuestro caso de estudio particular. Se presentan los resultados de 10 propagaciones diferentes, con variaciones de los valores de constante de propagación, carga topológica, asimetría y grado de no localidad.

Hemos encontrado, mediante la aproximación variacional, que el vórtice asimétrico propuesto, descrito por el parámetro de asimetría, puede tener un comportamiento de haz auto atrapado bajo cierta combinación de parámetros de no localidad y grado de asimetría. Además, estas estructuras generadas presentan mayor estabilidad en su propagación a mayor grado de no localidad.

Introducción

El presente trabajo de graduación está dedicado al estudio de ondas solitarias en medios ópticos no lineales no locales. Para propósitos de esta introducción y debido a que no existe una definición aceptada de una onda solitaria, el término solitón u onda solitónica se utiliza como sinónimo el uno del otro, así que esa será la línea que se seguirá también en este caso. Cabe mencionar que las ondas solitarias han sido objeto de numerosos estudios teóricos y experimentales en muchos campos de la Física; como Hidrodinámica, Óptica no lineal, Física de Plasma y Biología, entre otros muchos campos [Kivshar and Agrawal, 2003].

La historia de los solitones, inició en 1834, el año en que James Scott Russell observó la propagación de una masa de agua que se propagaba sin distorsión a través de un canal por varios kilómetros. Él reportó sus descubrimientos en 1844, incluyendo el siguiente texto [Russell, 1844]:

“Estaba observando el movimiento de un bote que era arrastrado rápidamente a lo largo de un canal estrecho por un par de caballos, cuando el bote se detuvo repentinamente, la masa de agua en el canal que se había puesto en movimiento no lo hizo; se acumuló alrededor de la proa de la embarcación en un estado de violenta agitación, y luego, repentinamente, dejando atrás el bote, avanzó a gran velocidad, asumiendo la forma de una gran elevación solitaria; redondeada, lisa y bien definida, que continuó su curso a lo largo del canal, aparentemente sin cambio de forma o disminución de la velocidad. La seguí a caballo, y la adelanté a una velocidad de unas ocho o nueve millas por hora, conservando su figura original de unos treinta pies de largo y un pie y medio de altura. Su altura disminuyó gradualmente, y después de una persecución de una o dos millas, la perdí en los devanados del canal. Así, en el mes de agosto de 1834, fue mi primer encuentro casual con ese fenómeno singular y hermoso, que he llamado la Ondas de Traslación.”

Estas ondas fueron llamadas más tarde *ondas solitarias*. Russell estaba tan entusiasmado por este fenómeno que trató de explicar muchas cosas en el universo de la misma forma. Pero lo más importante, fue que hizo experimentos, recreando estas “grandes olas solitarias” en su laboratorio.

Aunque no fue hasta 61 años después, que los teóricos, D. Korteweg y G. de Vries, lograron obtener la descripción matemática que explicaba los experimentos de Russel, así que publicaron una teoría de ondas de agua poco profundas que intentaba explicar los descubrimientos de Scott Russell, produciendo la conocida ecuación de Korteweg-de Vries (ecuación KdV) para un pulso de amplitud u en un medio de tensión superficial T y densidad ρ [Korteweg and de Vries, 1895]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

donde c es la velocidad de propagación del pulso, ε un parámetro dispersivo y γ un parámetro no lineal.

Sin embargo, dicha ecuación, al ser no lineal, representaba también un enorme reto para su análisis durante esa época, por lo que sus propiedades no fueron comprendidas completamente hasta que fueron introducidos modelos matemáticos apropiados. Estas *ondas solitarias* fueron re-bautizadas bajo el término solitones en 1965 por dos investigadores de Princeton, N. Zabusky y M. Kruskal, quienes estudiaban la ecuación KdV, debido a que esta ecuación estaba relacionada con el problema de equipartición de energía de Fermi, Pasta y Ulam; en su artículo de 1965, Zabusky y Kruskal encontraron numéricamente que la ecuación (1) aceptaba la propagación de ondas solitarias que viajaban a distintas velocidades (las ondas más altas viajaban más rápido) y dichas ondas interactuaban entre sí de una forma muy similar a las partículas, de ahí el origen del término solitón [Zabusky and Kruskal, 1965].

Dos años después; Gardner, Greene, Kruskal y Miura publicaron un artículo de gran importancia, en el cual presentaban un método que permitía resolver analíticamente el problema de condiciones iniciales para la ecuación KdV (inverse scattering) [Gardner et al., 1967], básicamente éste método es una especie de transformada de Fourier no lineal.

Por otra parte, en 1971 en la Academia de Ciencias de la URSS, los investigadores Zakarov Vladimir Euguenievich y Shabat Aleksei Borisovich, encontraron que las soluciones a la ecuación que hoy en día se conoce como la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) eran del tipo solitón [Zakharov and Shabat, 1972].

A partir de este punto, se demostró que muchas Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) no lineales que modelaban diversos fenómenos físicos poseían soluciones del tipo solitón, entre las cuales podemos mencionar las variantes de ecuación no lineal de Schrödinger (ecuación de Ginzburg-Landau, ecuación de Ginzburg-Gross-Pitaevskii, etc) [Munteanu and Donescu, 2006].

Por lo tanto, se producen métodos para dar solución a este tipo de problemas no lineales, ya que a pesar que se podían resolver algunos casos simples de la ecuación KdV y NLS, no existía un método analítico que permitiera resolver casos complejos; sin embargo, D. Anderson aplica una aproximación variacional para la ecuación de Schrödinger no lineal en presencia de pérdida y marca un hito en la forma de resolver las ecuaciones diferenciales parciales no lineales. El análisis emplea un procedimiento de optimización de Rayleigh-Ritz en términos de funciones de prueba Gaussianas [Anderson, 1983b].

Generalmente, existe una gran diversidad en la clasificación de los solitones, por ejemplo se pueden clasificar en: brillantes, oscuros, topológicos, solitones de Bragg, solitones vectoriales, solitones tipo vórtice, solitones espacio-temporales (balas de luz), solitones discretos, etc. El interés del presente trabajo está en los solitones tipo vórtices, debido a sus aplicaciones en la Física del Estado Sólido, los Condensados de Bose-Einstein (BECs), Superfluidos, Superconductividad, Cosmología, Dinámica Molecular, entre otras [Lopez-Aguayo et al., 2014].

Se define un vórtice solitónico como una solución de una ecuación de onda definida en un dominio de dos dimensiones caracterizado por la presencia de una singularidad de fase (dislocaciones localizadas). Si el vórtice tiene simetría circular, entonces sólo cuenta con una singularidad localizada en el eje de simetría. Por otro lado, se ha comprobado experimentalmente la existencia de vórtices ópticos con simetría discreta, o vórtices discretos (DVs), en medios periódicos como soluciones solitónicas de una ecuación de onda no lineal como la ecuación NLS [Kivshar and Agrawal, 2003].

El objetivo principal de este trabajo ha sido investigar numérica y analíticamente la dinámica de vórtices solitónicos asimétricos como soluciones de la ecuación NLS, comparando la respuesta de un medio local y uno no local. Para el caso local se tomó el medio Kerr y para el caso no local se consideró una función de respuesta del tipo exponencial Gaussiana, esto se hizo utilizando la aproximación variacional de Rayleigh-Ritz desarrollada por Anderson.

Seguidamente, siendo la aproximación variacional de las coordenadas colectivas no más que un método semi-analítico aplicado a un problema no integrable, el objetivo final fue buscar la confirmación de las soluciones optimizadas predichas a través del análisis de los resultados de un estudio numérico que integre directamente la ecuación NLS correspondiente. Aquí hay que hacer énfasis en que estas soluciones también se fundamentan en aproximaciones, esta vez de índole numérica, la ausencia en ellas de las características y/o limitaciones de una función de prueba sirve para validar, o no, los resultados obtenidos, los cuales están basados en la suposición de la conservación

de la función propuesta, que se definió para este estudio como

$$\psi(r, \theta) = A(z)r^m \exp\left[\frac{-r^2}{B(z)^2}\right] \exp[i(m\theta + i\alpha \cos \theta)],$$

donde ψ es el campo óptico complejo, A es la amplitud del vórtice, B es el ancho, α es un factor de asimetría, m es la carga topológica, r es la coordenada radial y θ es el ángulo azimutal. Aquí, el factor de asimetría nos devuelve un vórtice simétrico en el caso $\alpha = 0$ y nos interesa estudiar su comportamiento para diferentes valores.

El método numérico escogido para el estudio fue el Split-Step de Fourier, dada la inherente relación que guarda con los problemas de naturaleza ondulatoria y la facilidad con la cual todas las ecuaciones NLS se pueden reescribir en forma de operadores.

Estructura del trabajo

- Capítulo 1, Óptica no Lineal y Solitones: En este primer capítulo se explora el concepto de solitón y sus características primordiales, esto junto a los modelos matemáticos de los cuales emerge el término solitón. Además se definen los tipos de entes solitónicos y algunas de sus aplicaciones en distintas ramas de la Física.
- Capítulo 2, Aproximación Variacional: Aquí se presentan las generalidades del método variacional clásico y sus aplicaciones en problemas físicos, así mismo, se muestra la utilidad de utilizar una aproximación variacional a problemas no lineales, en especial para encontrar soluciones optimizadas de la ecuación no lineal de Schrödinger y sus variantes.
- Capítulo 3, Métodos Numéricos: Se presenta el Método Numérico Variacional para la búsqueda de los parámetros de estabilidad de las soluciones de la ecuación no lineal de Schrödinger, también se presenta el método Split-Step de Fourier para el análisis numérico de la propagación de las soluciones optimizadas.
- Capítulo 4, Resultados y Discusión: En este capítulo se presentan los resultados obtenidos y se realiza la discusión de los mismos. Podemos diferenciar la aplicación de la aproximación variacional analíticamente para el caso Kerr y la implementación del Método Numérico Variacional para un caso no local, así mismo obtenemos diversas simulaciones de propagaciones de las soluciones encontradas.
- Capítulo 5, Conclusiones y Recomendaciones: Finalmente, se presentan las principales conclusiones de este Trabajo de Graduación, haciendo énfasis en la comparación entre los resultados aquí obtenidos con los expuestos por otros autores. De igual forma, se proponen algunas recomendaciones para mejorar futuras investigaciones.

Capítulo 1

Óptica no Lineal y Solitones

...Schrödinger y yo teníamos una gran apreciación de la belleza matemática, y esta apreciación dominaba todo nuestro trabajo. Fue una especie de acto de fe suponer que cualquier ecuación que describa las leyes fundamentales de la Naturaleza debe tener tal belleza. Era como una religión para nosotros, una muy rentable, y puede considerarse la base de gran parte de nuestro éxito.

Paul Dirac

Las verdaderas leyes de la naturaleza no pueden ser lineales.

Albert Einstein

1.1 Solitones ópticos

Como primer punto, hay que aclarar que no hay una definición formal del término solitón, se toman ciertas acepciones dependiendo del área de la Física que se esté trabajando. Por simplicidad, definimos a un solitón de forma general como: “una onda solitaria que se propaga en un medio no lineal sin sufrir una deformación considerable durante su evolución temporal”. De aquí que consideremos a un solitón como una onda mecánica que se comporta como partícula al estar bajo ciertas condiciones de no linealidad.

En el contexto de la Óptica no Lineal, los solitones se clasifican como temporales o espaciales, dependiendo de si el confinamiento de la onda electromagnética (en este caso, luz) ocurre en el tiempo o el espacio, durante la propagación. Los solitones temporales representan pulsos ópticos que mantienen su forma, mientras que los solitones espaciales representan haces autoguiados que permanecen confinados en las direcciones transversales ortogonales a la dirección de propagación. Ambos tipos de solitones evolucionan a partir de un cambio no lineal en el índice de refracción de un material óptico inducido por la intensidad del campo eléctrico.

La dependencia de la intensidad del índice de refracción conduce al auto-enfoque espacial (o auto-desenfoque) y a la modulación de auto-fase temporal (SPM), los dos principales efectos no lineales que son responsables de la formación de solitones ópticos. Un solitón espacial se forma cuando la no linealidad contrarresta la difracción y la invarianza del haz es producida en alguna coordenada espacial. Por el contrario, es el SPM el que contrarresta el ensanchamiento inducido por dispersión natural de un pulso óptico y conduce a la formación de un solitón temporal. En ambos casos, el pulso o el haz se propaga a través de un medio sin cambios en su forma y se dice que es auto-localizado o auto-atrapado [Kivshar and Agrawal, 2003].

Los solitones ópticos pueden existir en la forma de objetos en una dimensión (1D) o multi-dimensionales. Los solitones temporales uni-dimensionales en fibras ópticas con una no linealidad cúbica (Kerr) fueron predichos por Hasegawa y Tappert [Hasegawa and Tappert, 1973], y observados experimentalmente por Mollenauer, Stolen, y Gordon [Mollenauer et al., 1980], mientras los solitones estables en el dominio espacial fueron observados por primera vez en guías de ondas planas por Maneuf, Desailly y Froehly [Maneuf et al., 1988]. Las ondas solitarias espaciales en dos dimensiones (2D) fueron observadas por primera vez en cristales fotorrefractivos, que presentan una no linealidad saturable (materiales en los que el índice de refracción cambia de manera proporcional al inverso de la intensidad, por lo que la no linealidad satura en cierto rango de potencia, y no sigue creciendo indefinidamente.) [Duree Jr et al., 1993], y en un medio óptico con una no linealidad cuadrática [Torruellas et al., 1995]. En el presente trabajo nos enfocaremos en solitones espaciales 2D.

1.2 Solitones espaciales

Para comprender por qué los solitones espaciales pueden formarse en un medio no lineal de autoenfoque, consideramos primero cómo la luz está confinada por guías de ondas ópticas. Los haces ópticos tienen una tendencia innata a difractarse a medida que se propagan en cualquier medio homogéneo. Sin embargo, esta difracción puede compensarse utilizando la refracción si el índice de refracción del material aumenta en la región transversal ocupada por el haz. Tal estructura se convierte en una guía de onda óptica y limita la luz a la región de alto índice de refracción al proporcionar un equilibrio entre la difracción y la refracción. La propagación de la luz en una guía de onda óptica se describe mediante una ecuación de onda lineal pero no homogénea cuya solución proporciona un conjunto de modos guiados que son eigen-modos localizados espacialmente del campo óptico en la guía de onda que conservan su forma y satisfacen todas las condiciones de contorno [Kivshar and Agrawal, 2003].

La Figura 1.1 muestra esquemáticamente cómo un haz óptico puede crear su propia guía de onda y ser atrapado por ésta. El haz de entrada se difracta en baja potencia pero forma un solitón espacial cuando su intensidad es lo suficientemente grande para crear una guía de onda autoinducida por el cambio del índice de refracción.

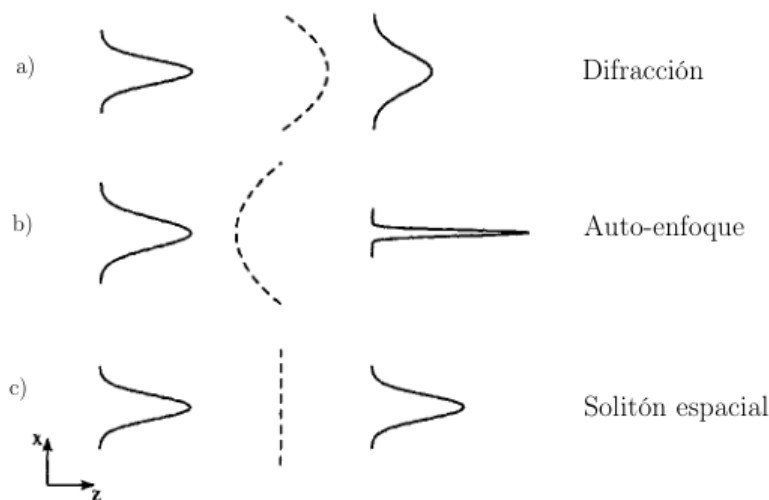


Figura 1.1: Ilustración esquemática de la analogía de la lente para solitones espaciales. a) La difracción actúa como una lente cóncava mientras que b) el medio no lineal actúa como una lente convexa. c) Se forma un solitón cuando las dos lentes se equilibran entre sí de manera que el frente de fase permanece plano. Figura tomada de [Kivshar and Agrawal, 2003].

La principal ecuación que gobierna la evolución de campos ópticos en un medio no lineal es conocida como la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) [Ablowitz et al., 1991]. La forma general de la ecuación NLS para un frente de onda continuo es:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta \nabla_{\perp}^2 \psi + F(|\psi|^2) \psi = 0, \quad (1.1)$$

donde ψ es el frente que se propaga en la dirección z , β representa los efectos de dispersión que el medio de propagación genera, ∇_{\perp}^2 es el operador laplaciano transversal y F es una función que representa la no linealidad del medio con la condición que $F(0) = 0$.

Aquí podemos hacer una división entre la respuesta del medio, esta puede ser local o no local. Para el caso local podemos considerar diferentes tipos de no linealidades, las cuales se pueden modelar matemáticamente como [Biswas and Konar, 2006]:

- Ley de Kerr: el cambio del índice de refracción, fuera de una resonancia, debido a un campo eléctrico de fuerte intensidad resultando en la distorsión de las nubes electrónicas mas ajenas del núcleo, se modela como $F(s) = s$. En este caso, la ecuación NLS es integrable por un método llamado la Dispersión de transformación inversa, muchas de las fibras ópticas disponibles comercialmente obedecen esta ley.
- Ley de Potencias: $F(s) = s^p$, no linealidad exhibida en muchos materiales semiconductores. Aquí, es necesario que se cumpla $0 < p < 2$ para evitar el colapso de las ondas.
- Ley Parabólica: $F(s) = s + \nu s^2$, esta ley también es conocida como la ley de no linealidad cúbica-quinta y es utilizada principalmente para describir la interacción entre ondas de Langmuir¹ y electrones en cristales semiconductores.
- Ley de saturación: $F(s) = \frac{\lambda s}{1 + \lambda s}$, esta ley con $\lambda > 0$ describe con precisión la variación de la constante dieléctrica de los vapores de gas a través de los cuales se propaga un haz láser [Cabrera et al., 2007].

Para los medios no locales, la respuesta del medio en un punto dado no solo depende de la intensidad del pulso óptico en ese punto, sino que también está determinada por la intensidad del pulso óptico en su vecindad [Jia and Lin, 2012].

Según la relación entre la respuesta del medio y el ancho de la intensidad del haz, el grado de no-localidad puede ser dividido en tres tipos:

- Débilmente no local, en este caso encontramos como caso particular la ley de Kerr.
- No localidad general.
- Fuertemente no local, aquí se han propuesto numerosos estudios y se generan los llamados “solitones accesibles” que permiten soluciones lineales del Oscilador Armónico 2D [Snyder and Mitchell, 1997].

¹Oscilaciones de plasma.

La propagación de los haces ópticos en medios no lineales no locales (1 + 2)-dimensiones- se rige por la ecuación no lineal de Schrödinger no local (NNLS) [Yakimenko et al., 2006]:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \beta\nabla_{\perp}^2\Psi + \Psi\int R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|\Psi(\mathbf{r}',z)|^2d^2\mathbf{r}' = 0, \quad (1.2)$$

donde R es la función de respuesta espacial simétrica real normalizada del medio. Para el caso $R(r) = \delta(r)$ obtenemos el caso lineal Kerr.

1.2.1 Ley de no linealidad de Kerr

Las ecuaciones de Maxwell pueden ser usadas para obtener la siguiente ecuación de onda para el campo eléctrico asociado con una propagación de onda óptica en un medio Kerr [Kivshar and Agrawal, 2003]:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0c^2}\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y ε_0 es la permitividad del vacío. La polarización inducida \mathbf{P} consiste de dos partes tales que

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \mathbf{P}_L(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r},t), \quad (1.4)$$

donde la parte lineal \mathbf{P}_L y la parte no lineal \mathbf{P}_{NL} están relacionadas con el campo eléctrico por las relaciones siguientes [Boyd, 2003]

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(1)}(t-t')\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t')dt', \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(3)}(t-t_1,t-t_2,t-t_3) \\ \times\mathbf{E}(\mathbf{r},t_1)\mathbf{E}(\mathbf{r},t_2)\mathbf{E}(\mathbf{r},t_3)dt_1dt_2dt_3 \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde $\chi^{(1)}$ y $\chi^{(3)}$ son los tensores de susceptibilidad de primer y tercer orden, respectivamente. Estas relaciones son válidas en la aproximación dipolar bajo la asunción que la respuesta del medio es local.

En general, la ecuación (1.6) es muy complicada, así que se considera que la respuesta del medio es instantánea, tal que la dependencia de $\chi^{(3)}$ en el tiempo esté dada por el producto de tres funciones delta de la forma $\delta(t-t_1)$, así la ecuación (1.6) se reduce al producto tensorial

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0\chi^{(3)}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t). \quad (1.7)$$

La expresión (1.7) se puede simplificar aún más si el campo óptico mantiene su polarización a largo de la propagación, de manera que una aproximación escalar puede ser usada. Además, se considera al campo óptico como cuasi-monocromático, así que podemos escribir el campo eléctrico en la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{x}}{2} [E(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c.], \quad (1.8)$$

donde ω_0 es la frecuencia portadora, en torno a la cual el espectro de frecuencias presentes en el paquete se encuentra altamente concentrado debido a la condición de monocromaticidad, es decir, $\omega_0 \gg \Delta\omega$, \hat{x} es el vector unitario de polarización, $E(\mathbf{r}, t)$, es una función que varía lentamente con el tiempo, y *c.c.* es el complejo conjugado del campo óptico.

Los componentes de polarización \mathbf{P}_L y \mathbf{P}_{NL} pueden ser expresados en una forma similar. Cuando la ecuación (1.8) se sustituye en la ecuación (1.7) se obtiene

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} E(\mathbf{r}, t), \quad (1.9)$$

donde la contribución no lineal a la constante dieléctrica es definida como

$$\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (1.10)$$

La parte lineal de la polarización puede ser escrita de la ecuación (1.5) como

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \xi_{xx}^{(1)} E. \quad (1.11)$$

De hecho, las partes lineal y no lineal se pueden combinar para obtener una expresión para la constante dieléctrica, que se relaciona con el índice de refracción modificado \tilde{n} y el de absorción $\tilde{\alpha}$ [Agrawal, 2000]

$$\varepsilon(\omega) = \left[\tilde{n}(\omega, |E|) + i \frac{\tilde{\alpha} c}{2\omega} \right]^2, \quad (1.12)$$

donde

$$\tilde{n}(\omega, |E|) = n_0(\omega) + n_2 |E|^2. \quad (1.13)$$

La relación (1.13) viene de la definición del efecto Kerr óptico, en el cual el índice de refracción total del medio \tilde{n} experimenta una variación neta sobre el índice natural y lineal debido a las oscilaciones no armónicas de los electrones ligados del material, lo cual constituye la respuesta no lineal y adiabática (instantánea) del medio a la intensidad del campo aplicado (i.e. proporcional al cuadrado de su módulo), aquí el coeficiente n_2 es conocido como el coeficiente de Kerr, determinado a partir de la susceptibilidad eléctrica de tercer orden del medio [Agrawal, 2000, Kivshar and Agrawal, 2003].

Dependiendo del signo del coeficiente n_2 el haz puede experimentar el efecto de desenfoque de lente ($n_2 < 0$) o enfoque de lente ($n_2 > 0$), en el último caso el haz creará una guía de onda auto inducida en el medio.

La ecuación (1.3) puede resolverse utilizando

$$E = A(X, Y)exp(i\beta_0 Z), \quad (1.14)$$

donde $A(X, Z)$ describe la envolvente de evolución del haz y $\beta_0 = \kappa_0 n_0 = 2\pi n_0/\lambda$ es la constante de propagación en términos de la longitud de onda óptica $\lambda = 2\pi c/\omega_0$; la ecuación (1.3) toma la forma

$$2i\beta_0 \frac{\partial A}{\partial Z} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} \right) + 2\beta_0 \kappa_0 n_2 |E|^2 A = 0, \quad (1.15)$$

en donde la segunda derivada con respecto a Z ha sido despreciada, debido a que la envolvente A se asume que varía con Z en una escala mucho más grande que la longitud de onda λ (aproximación paraxial), es decir

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial Z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial A}{\partial Z} \right|. \quad (1.16)$$

Es conveniente la introducción de variables adimensionales

$$x = X/\omega_0, \quad y = Y/\omega_0, \quad z = Z/L_d, \quad u = (\kappa_0)^{1/2} A, \quad (1.17)$$

donde $L_d = \beta_0 \omega_0^2$ es la longitud de difracción, en términos de estas variables, la ecuación (1.15) toma la forma de la ecuación NLS estándar en (2+1) dimensiones

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \pm \gamma |u|^2 u = 0, \quad (1.18)$$

donde la elección del signo depende del parámetro no lineal $\gamma \propto n_2$. Aquí el problema es que el método de dispersión inversa no es aplicable, por lo tanto se hace uso de métodos semi-analíticos para encontrar soluciones aproximadas.

1.2.2 No localidad

En términos generales, un medio es no local cuando su respuesta a una excitación no es nula en puntos donde la excitación es cero, es decir, la función de respuesta tiene un ancho finito². La no localidad juega un rol importante en muchas áreas de la Física no Lineal, entre ellas la Física de Plasmas [Pecseli and Rasmussen, 1980], Condensados Bose-Einstein [Pedri and Santos, 2005], Mecánica de Fluidos [Ván and Fülöp, 2005] y Óptica [Snyder and Mitchell, 1997]. Una respuesta espacial no local puede afectar en gran medida la propagación de ondas no lineales, por ejemplo la estabilización de haces auto-guados en dos dimensiones o estructuras más complejas (estructuras en 3 dimensiones) [Snyder and Mitchell, 1997, Nikolov et al., 2004].

La naturaleza y el grado de no localidad depende sustancialmente del material de interés, cabe mencionar los materiales fotorrefractivos [Segev et al., 1992] y cristales líquidos [Peccianti et al., 2000]. En óptica no lineal dieléctrica, la excitación es producida por el campo eléctrico y la respuesta es la polarización no lineal \mathbf{P}_{NL} .

Como caso de estudio consideremos la ecuación que gobierna la propagación de un campo eléctrico en un material isotrópico [Alberucci and Assanto, 2007]

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \kappa_0^2 n^2 E = 0, \quad (1.19)$$

donde el índice de refracción n depende de las coordenadas espaciales y de la intensidad, y el número de onda en el vacío se define como $\kappa_0 = 2\pi/\lambda_0$. Considerando una polarización lineal para \mathbf{E} y haciendo $\mathbf{E} = A e^{i\kappa_0 n_0 z} \hat{e}$, donde z es la coordenada de propagación y n_0 el índice de refracción lineal, podemos aplicar una aproximación paraxial [Kivshar and Agrawal, 2003] y obtener

$$2i\kappa_0 n_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 A + \kappa_0^2 (n^2 - n_0^2) A = 0. \quad (1.20)$$

Podemos considerar los términos no lineales como perturbaciones con respecto a los lineales, y definir $(n^2 - n_0^2) \approx 2n_0 \Delta n$, con $\Delta n(\mathbf{r}, I) = n - n_0$. Para un medio homogéneo se puede tomar que Δn no depende explícitamente de las coordenadas espaciales, así la ecuación (1.20) se convierte

$$2i\kappa_0 n_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 A + 2\kappa_0^2 n_0 \Delta n(I) A = 0. \quad (1.21)$$

Podemos introducir las variables adimensionales

$$x = 2X/\kappa_0, \quad y = 2Y/\kappa_0, \quad z = Z/\beta_0, \quad u = (\kappa_0)^{1/2} A,$$

²Este ancho da la medida del grado de no localidad del medio

que hacen a la ecuación (1.21) equivalente a la ecuación NLS para una no linealidad generalizada,

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 u + \Delta n u = 0. \quad (1.22)$$

También podemos asumir que la relación entre la intensidad I y el índice perturbativo Δn es lineal, reformulando Δn como

$$\Delta n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |u(\mathbf{r}', z)|^2 d\mathbf{r}', \quad (1.23)$$

donde z y $\mathbf{r} = (x, y)$ son las distancias de propagación y el vector de posición transversal, respectivamente, y $R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la función de respuesta del medio considerado.

En el límite cuando la función de respuesta es una función delta $R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, la no linealidad es proporcional a la distribución de intensidad y recuperamos el caso límite local, como ya se había mencionado anteriormente.

También se puede considerar otro caso límite, cuando la función de respuesta es mucho más ancha que la distribución de intensidad, entonces la no linealidad es proporcional a la función de respuesta, $F(I) = PR(\mathbf{r})$, donde P es la potencia del haz. Este es el caso altamente no local, donde la ecuación que gobierna la evolución del pulso se vuelve lineal con un potencial dado y podemos trabajarla como un oscilador armónico cuántico, admitiendo soluciones del tipo solitón accesibles, conocidos así por admitir un modelo teórico lineal, sin embargo, esto sólo representa un caso ideal [Snyder and Mitchell, 1997].

Existen muchas posibilidades de funciones de respuesta, en general, depende de la situación física a tratar para elegir una u otra. Esta función debe ser real, simétrica, positiva y monótonamente decauyente.

Capítulo 2

Aproximación Variacional

Cuando estaba en secundaria, mi profesor de física —cuyo nombre era Mr. Bader— me llamó un día después de la clase de física y me dijo: “Te ves aburrido; quiero decirte algo interesante”. Luego me dijo algo que me pareció absolutamente fascinante y, desde entonces, siempre me ha parecido fascinante. Cada vez que surge el tema, trabajo en ello. De hecho, cuando comencé a preparar esta clase me encontré haciendo más análisis sobre el tema. En lugar de preocuparme por la clase, me involucré en un nuevo problema. El tema es este: el principio de mínima acción.

The Feynman Lectures on Physics
Richard Feynman

2.1 Métodos Variacionales

2.1.1 Ecuación de Euler-Lagrange

El cálculo de variaciones implica problemas en los que la cantidad a minimizar (o maximizar) aparece como una integral estacionaria, una funcional ¹, porque una función $y(x, \alpha)$ necesita ser determinada a partir de una clase descrita por un parámetro infinitesimal α . En el caso más simple

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x) dx. \quad (2.1)$$

Aquí J es la cantidad que toma un valor estacionario. Bajo el signo integral, f es una función conocida de las variables x y α indicadas, como son $y(x, \alpha)$, $y_x(x, \alpha) \equiv \partial y(x, \alpha) / \partial x$, pero la dependencia de y en x (y α) todavía no se conoce; es decir, $y(x)$ es desconocida.

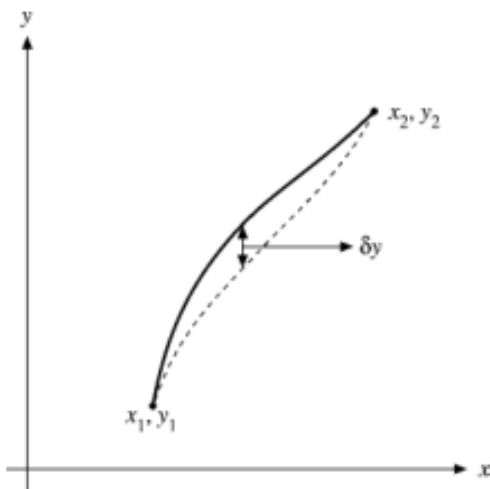


Figura 2.1: Caminos posibles vecinos. Figura tomada de [Arfken and Weber, 2005]

Nuestro propósito es encontrar una función, que es un camino en el plano $x - y$ entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , que hace la funcional $J[y(x)]$ un extremo. En la Figura 2.1 hemos mostrado dos posibles caminos; sin embargo, hay una infinidad de caminos posibles. La diferencia de estos caminos del camino elegido es llamada la variación de y , y se muestra como δy . Como δy depende de la posición, usamos $\eta(x)$ para la dependencia de la posición. Los caminos más cercanos al camino elegido pueden ahora ser parametrizados en términos de α y $\eta(x)$ como:

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (2.2)$$

¹Se llaman funcionales a las magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o varias funciones.

donde $y(x, \alpha = 0)$ es el camino elegido que extremiza la funcional $J[y(x)]$ y $\mathcal{O}(\alpha^2)$ son términos que despreciamos de segundo orden de α .

Podemos ahora, expresar δy como

$$\delta y = y(x, \alpha) - y(x, 0) = \alpha \eta(x), \quad (2.3)$$

y escribir J como una función de α como

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y_x(x, \alpha), x] dx. \quad (2.4)$$

Ahora el extremo de J puede ser encontrado como en el cálculo ordinario, imponiendo la condición

$$\left. \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (2.5)$$

En este análisis asumimos que $\eta(x)$ es una función diferenciable y las variaciones en los puntos finales son cero, esto es,

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \quad (2.6)$$

Ahora la derivada de J con respecto a α es

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y_x}{\partial \alpha} \right] dx. \quad (2.7)$$

Usando la ecuación 2.2 podemos escribir

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x), \quad (2.8)$$

y

$$\frac{\partial y_x(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{d\eta(x)}{dx}. \quad (2.9)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación 2.7 obtenemos

$$\left. \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{d\eta(x)}{dx} \right] dx. \quad (2.10)$$

Integrando el segundo término por partes

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{d\eta(x)}{dx} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y_x} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) dx. \quad (2.11)$$

Usando el hecho que la variación en los puntos finales son cero, podemos escribir la ecuación 2.10 como

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) \eta(x) dx = 0. \quad (2.12)$$

Como la variación $\eta(x)$ es arbitraria, la única manera de satisfacer la ecuación (2.12) es reducir la expresión dentro del paréntesis a cero, esto es,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} = 0. \quad (2.13)$$

Esta es la llamada ecuación de Euler-Lagrange, que puede ser expresada en otras formas. La ecuación de Euler-Lagrange es equivalente a la condición de extremo del funcional, $\delta J = 0$: una implica la otra.

2.1.2 Presencia de más de una variable dependiente

En la integral variacional si la función f depende de más de una variable dependiente

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x), \quad (2.14)$$

y una variable independiente x , entonces la funcional J es escrita como

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_{1x}(x), y_{2x}(x), \dots, y_{nx}(x), x] dx, \quad (2.15)$$

donde $y_{ix} = \frac{\partial y_i}{\partial x}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Podemos ahora escribir pequeñas desviaciones de los caminos elegidos, $y_i(x, 0)$, que hace la funcional J un extremo como

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x, 0) + \alpha \eta_i(x) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.16)$$

donde α es, de nuevo, un pequeño parámetro y la función $\eta_i(x)$ es independiente. Otra vez tomamos la variación en los puntos finales como cero:

$$\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0. \quad (2.17)$$

Tomando la derivada de $J(\alpha)$ con respecto a α y ajustando α a cero, tenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i(x) + \frac{\partial f}{\partial y_{ix}} \frac{d\eta_i(x)}{dx} \right) dx = 0. \quad (2.18)$$

Integrando el segundo término por partes y usando el hecho que en los puntos finales las variaciones son cero, escribimos la ecuación 2.18 como

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_{ix}} \right) \eta_i(x) dx = 0. \quad (2.19)$$

Como las variaciones $\eta_i(x)$ son independientes, esta ecuación se satisface solamente cuando todos los coeficientes de $\eta_i(x)$ se anulan simultáneamente, esto es,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_{ix}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.20)$$

Ahora tenemos un sistema de n ecuaciones de Euler-Lagrange que es resuelto simultáneamente para las n variables dependientes. Un importante ejemplo de este tipo de problemas variacionales es la **formulación Lagrangiana** de la mecánica clásica.

2.1.3 Presencia de más de una variable independiente

Algunas veces el integrando f de la ecuación 2.1 contendrá una función desconocida, u , que es una función de varias variables independientes, $u = u(x, y, z)$, para el caso tridimensional, por ejemplo. Así, la ecuación 2.1 será

$$J = \iiint f[u, u_x, u_y, x, y, z] dx dy dz, \quad (2.21)$$

con $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, y así para las demás. El problema variacional es encontrar la función $u(x, y, z)$ tal que J es un extremo,

$$\delta J = \delta \alpha \left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (2.22)$$

Generalizando la sección 2.1.1, tenemos

$$u(x, y, z, \alpha) = u(x, y, z, \alpha = 0) + \alpha \eta(x, y, z) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (2.23)$$

$$u_x(x, y, z, \alpha) = u_x(x, y, z, 0) + \alpha \eta_x. \quad (2.24)$$

Similarmente para u_y y u_z . Diferenciando la integral de 2.21 con respecto al parámetro α y haciendo $\alpha = 0$, obtenemos

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \iiint \left(\frac{\partial f}{\partial u} \eta + \frac{\partial f}{\partial u_x} \eta_x + \frac{\partial f}{\partial u_y} \eta_y + \frac{\partial f}{\partial u_z} \eta_z \right) dx dy dz = 0. \quad (2.25)$$

Ahora, integrando los términos $(\frac{\partial f}{\partial u_i}) \eta_i$ por partes. La parte integrada se anula en los puntos finales (recordemos las condiciones de frontera impuestas a η) y

$$\iiint \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial u_z} \right) \eta(x, y, z) dx dy dz = 0. \quad (2.26)$$

Ya que la variación $\eta(x, y, z)$ es arbitraria, el término en el paréntesis se establece igual a cero. Esto nos da la ecuación de Euler-Lagrange para tres variables independiente,

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial u_z}. \quad (2.27)$$

2.1.4 Presencia de más de una variable independiente y dependiente

En general, si la función f depende de tres variables dependientes y tres variables independientes como

$$f = f[p, p_x, p_y, p_z, q, q_x, q_y, q_z, r, r_x, r_y, r_z, x, y, z]. \quad (2.28)$$

Procedemos parametrizando la variación en términos de tres parámetros escalares α , β y γ como

$$p(x, y, z; \alpha) = p(x, y, z, \alpha = 0) + \alpha \xi(x, y, z) + \mathcal{O}(\alpha^2),$$

$$q(x, y, z; \beta) = p(x, y, z, \beta = 0) + \beta \eta(x, y, z) + \mathcal{O}(\beta^2),$$

$$r(x, y, z; \gamma) = p(x, y, z, \gamma = 0) + \gamma \psi(x, y, z) + \mathcal{O}(\gamma^2).$$

Ahora, las funciones p , q y r que extremizan $J = \iiint f dx dy dz$ será obtenido de las soluciones del siguiente sistema de tres ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial p_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial p_z} = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial q_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial q_z} = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial r_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial r_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial r_z} = 0. \quad (2.31)$$

Si tenemos más de tres variables dependientes y tres independientes, podemos usar y_i para denotar las variables dependientes y x_j para las variables independientes y escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange como

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial y_{ij}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

donde

$$y_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}.$$

2.2 Principio de Mínima Acción (Hamilton)

La formulación más general de la ley del movimiento de los sistemas mecánicos es el principio de mínima acción (o de Hamilton). Según este principio, todo sistema mecánico está caracterizado por una función definida: $L(q, \dot{q}, t)$, y el movimiento del sistema satisface la siguiente condición: Supongamos que en los instantes $t = t_1$ y $t = t_2$ el sistema ocupa posiciones dadas, caracterizadas por los dos conjuntos de valores de las coordenadas q_1 y q_2 ; el sistema se mueve entre estas posiciones de manera que la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (2.33)$$

tome el menor valor posible.

La función L se llama Lagrangiana del sistema, y la integral (2.33), la acción. La función de Lagrange no contiene más que q y \dot{q} , y no las derivadas superiores, eso es debido al hecho que el estado mecánico de un sistema está completamente definido por sus coordenadas y sus velocidades.

Establezcamos ahora las ecuaciones diferenciales que determinan el mínimo de la integral (2.33). Por simplicidad empecemos suponiendo que el sistema no tiene más que un sólo grado de libertad, de manera que hace falta determinar una sola función $q(t)$. Sea precisamente $q = q(t)$ la función para la cual S es un mínimo. Esto significa que S crece cuando se sustituye $q(t)$ por una función cualquiera

$$q(t) + \delta q(t), \quad (2.34)$$

donde $\delta q(t)$ es una función que es pequeña en todo el intervalo de t_1 a t_2 (se le llama variación de la función $q(t)$). Puesto que para $t = t_1$ y $t = t_2$ todas las funciones (2.34) deben tomar los mismos valores q_1 y q_2 , se tiene:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (2.35)$$

Lo que varía S cuando se reemplaza q por $q + \delta q$ está dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt,$$

El desarrollo en serie de esta diferencia en potencias de δq y $\delta \dot{q}$ comienza por términos de primer orden. La condición necesaria de mínimo (en general extremo) de S es que el conjunto de estos términos se anule; así el principio de mínima acción puede escribirse:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0, \quad (2.36)$$

²Aquí utilizaremos una notación más acorde a los físicos, con el punto indicando derivada con respecto a t .

o, efectuando la variación:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0. \quad (2.37)$$

Teniendo en cuenta que $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q)$, integramos el segundo término por partes y se obtiene:

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt. \quad (2.38)$$

En virtud de las condiciones (2.35), el primer término de esta expresión desaparece. Queda una integral, la cual debe anularse para todo valor de δq . Esto es solamente posible si el integrando es idénticamente nulo, y consecuentemente se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (2.39)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación (2.13) obtenida en la subsección 2.1.1.

Si hay varios grados de libertad, las s funciones diferentes $q_i(t)$ deben variar independientemente. Es evidente que entonces obtenemos s ecuaciones de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2.40)$$

Esta ecuación también fue desarrollada en la subsección 2.1.2. Estas son las ecuaciones diferenciales buscadas (ecuaciones de Euler-Lagrange).

2.3 Aproximación Variacional en teoría de Solitones

Las aproximaciones variacionales (AV) para el estudio de solitones en fibras ópticas fueron introducidas por el trabajo pionero de Anderson [Anderson, 1983b], así mismo, ese artículo fue la base para el rápido desarrollo de métodos analíticos para tratar problemas de la física no lineal basados en aproximaciones variacionales. El método AV se basa en utilizar funciones de prueba (ansatz) y el proceso de optimización Rayleigh-Ritz. Consideremos la reformulación variacional para ecuaciones que modelan la evolución de sistemas no lineales, primero escribimos la ecuación de evolución en forma simbólica

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = P[\psi], \quad (2.41)$$

donde $P[\psi]$ denota un operador de evolución no lineal. En muchas situaciones, la ecuación (2.41) puede ser considerada como la ecuación variacional de Euler-Lagrange correspondiente a la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial z}, \nabla\psi, \dots)$. Esto implica que la ecuación (2.41) es equivalente al problema variacional

$$\delta \int \int \mathcal{L} dz d\mathbf{r} = \int \int \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi} \delta\psi dz d\mathbf{r} = 0. \quad (2.42)$$

De la ecuación (2.42) podemos deducir que $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi} = 0$, por lo que la función que hace estacionaria la funcional variacional es también solución de la correspondiente ecuación de evolución no lineal. Ahora debemos elegir un ansatz $\psi(z, \mathbf{r})$ de forma que esté definido en términos de ciertos parámetros, p_j que caracterizan las propiedades cruciales de la solución, como: amplitud, ancho espacial, variación de la fase, etc. Los parámetros de nuestro ansatz serán funciones de la variable de propagación, es decir $p_j = p_j(z)$. Ahora debemos sustituir nuestra función de prueba en la integral variacional, se realizan las integrales espaciales y se reduce a un problema variacional “reducido” para los parámetros $p_j(z)$:

$$\delta \int \int \mathcal{L} dz d\mathbf{r} = \delta \int L dz. \quad (2.43)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el problema variacional reducido son de la forma

$$\frac{\delta L}{\delta p_j} \equiv \frac{\partial L}{\partial p_j} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \frac{dp_j}{dz}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.44)$$

El conjunto de ecuaciones (2.44), es un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que nos dan una descripción simplificada de la solución. Ahora consideremos la reformulación variacional para la ecuación NLS en un medio Kerr [Anderson et al., 2001]

$$i \frac{\partial\psi}{\partial z} = \beta \nabla_{\perp}^2 \psi + \kappa |\psi|^2 \psi, \quad (2.45)$$

donde β es el término de dispersión y κ es la modulación de fase no lineal. Esta ecuación puede ser resuelta analíticamente en una dimensión para condiciones iniciales arbitrarias usando la técnica de dispersión inversa [Anderson et al., 2001].

La correspondiente densidad Lagrangiana³ de la ecuación (2.45) es

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left(\psi \frac{\partial\psi^*}{\partial z} - \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) - \beta |\nabla\psi|^2 + \frac{\kappa}{2} |\psi|^4. \quad (2.46)$$

Ahora debemos elegir una función de prueba como solución de la ecuación (2.46), así que tomamos una solución de vórtice estacionario en coordenadas cilíndricas como $\psi(x, y, z) = \rho(r) \exp(im\theta - iz)$, donde m denota la carga topológica, al sustituirlo en (2.46) obtenemos

³Densidad Lagrangiana es entendida como la Lagrangiana de los campos del sistema y sus derivadas.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 + \frac{m^2}{2r^2} \rho^2 - \frac{1}{4} (\rho^2 - 1)^2. \quad (2.47)$$

La función de prueba cumple con las condiciones asintóticas que cuando $r \rightarrow 0$ y $r \rightarrow \infty$, entonces $\rho = \tanh^m(ar)$ con a la amplitud. Sin embargo, cuando se introduce esta expresión en la ecuación (2.47), la correspondiente integral de cero a infinito diverge. Este problema se puede solventar al definir un límite superior de corte, llamado R , así

$$L_R = \int_0^R \mathcal{L}(\rho) r dr. \quad (2.48)$$

Tomando $m = 1$ y realizando las operaciones de integración y la variación de L_R con respecto al parámetro a , obtenemos que el valor de la amplitud que optimiza nuestro problema es

$$a = \left(\int_0^\infty x \operatorname{sech}^4(x) dx \right)^2 \approx 0.543. \quad (2.49)$$

Podemos hacer una comparación entre los resultados obtenidos por la aproximación variacional para ρ y los obtenidos numéricamente, esto se ve en la Figura 2.2.

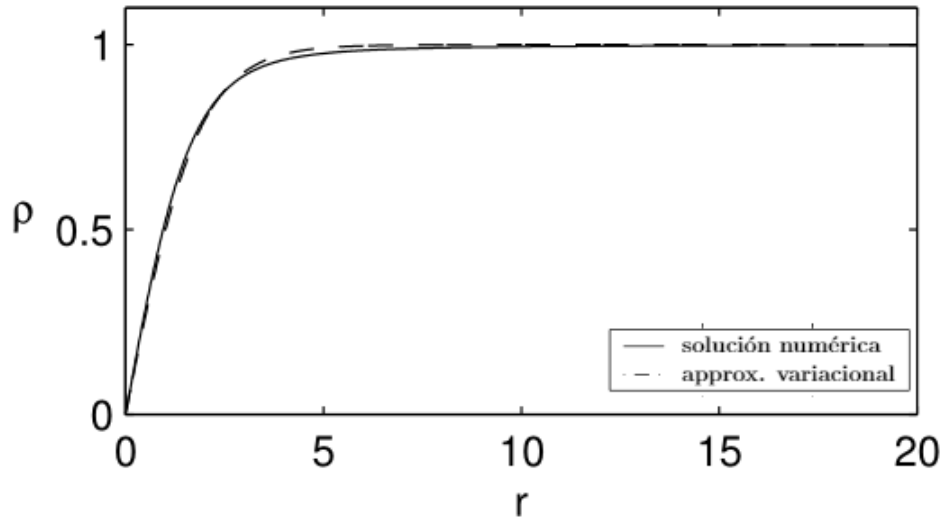


Figura 2.2: Comparación entre las soluciones obtenidas utilizando la aproximación variacional y un método numérico, aquí se puede ver que la aproximación hecha es bastante aceptable. Figura tomada de [Anderson et al., 2001].

Los pasos principales para una aproximación variacional en óptica no lineal se resumen a continuación:

- Derivar una densidad lagrangiana para el sistema de interés.
- Sustituir una función de prueba apropiada en la densidad Lagrangiana y realizar las integrales sobre el dominio de interés.

- Tomar variaciones con respecto a cada uno de los parámetros de la función de prueba en el promedio variacional Lagrangiano y deducir los parámetros de optimización.

Los dos primeros pasos son los empleados en el método clásico aproximado del cálculo de variaciones, el método de Rayleigh-Ritz. El tercer paso está basado en el principio de mínima acción (o de Hamilton) y se ha usado ampliamente en métodos perturbativos para ondas dispersivas no lineales [Whitham, 2011].

La AV siempre se basa, en gran medida, en la intuición física en lugar de argumentos matemáticos rigurosos, y la relevancia de la aplicación de una función de prueba particular a un problema dado solo puede verificarse *a posteriori* comparando los resultados con datos directos. La comparación con simulaciones directas es especialmente necesaria si se trata de un problema de estabilidad: si bien la forma de un solitón estático puede ser fácilmente imitada por una función de prueba elegida razonablemente, la aproximación puede pasar por alto un modo de perturbación específico que conduce a una inestabilidad del solitón; además, la AV puede a veces introducir una falsa inestabilidad que el solitón en realidad no tiene [Malomed, 2002].

A pesar de sus inconvenientes, la AV resulta ser una técnica muy eficiente, ya que es, de hecho, la única aproximación consistente que produce resultados analíticos o semi-analíticos para modelos dinámicos complejos. En cuanto a la necesidad de verificar la validez de los resultados en comparación con las simulaciones directas, esto no devalúa la AV, ya que con frecuencia es suficiente realizar la comparación en unos pocos valores diferentes de los parámetros de control del problema. Si la comparación en varios puntos de referencia corrobora la aplicabilidad de la AV, entonces sus predicciones (semi-) analíticas son lo suficientemente confiables para describir los solitones en regiones paramétricas amplias [Anderson et al., 2001, Malomed, 2002].

Capítulo 3

Métodos Numéricos

Como regla general, los sistemas de software no funcionan bien hasta que se han utilizado, y han fallado repetidamente, en aplicaciones reales.

Dave Parnas

3.1 Método de Newton-Raphson

La idea general de resolver una ecuación mediante un algoritmo iterativo o estimando la solución mediante la adición de un término corrector ha sido empleada por muchas culturas milenarias. Así, se puede clasificar al método de Newton-Raphson como un proceso iterativo que, en condiciones adecuadas, permite aproximar una solución x^* de una ecuación no lineal $f(x)$ (con derivada $f'(x)$). Partiendo de una aproximación inicial x_0 de la raíz x^* , el método de Newton-Raphson define una sucesión [Chapra and Canale, 2007]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

3.1.1 Método multidimensional de Newton Raphson

Dado el sistema de ecuaciones

$$F_1(x, y) = F_1(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.2)$$

$$F_2(x, y) = F_2(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.3)$$

se asume una aproximación de la solución del sistema igual a

$$\mathbf{x}^{(0)} = (x_0, y_0). \quad (3.4)$$

Según el método de Newton, debemos encontrar correcciones $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x, \Delta y)$, definidas para las incógnitas, de modo que el vector

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(0)}, \quad (3.5)$$

sea la solución que se busca. Desarrollando las funciones del lado izquierdo de las ecuaciones (3.2) y (3.3), por medio de una serie de Taylor alrededor del vector conocido $\mathbf{x}^{(0)}$

$$F_1(\mathbf{x}) \approx F_1(\mathbf{x}^{(0)}) + \frac{\partial F_1(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x} \Delta x_0 + \frac{\partial F_1(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial y} \Delta y + \dots \quad (3.6)$$

$$F_2(\mathbf{x}) \approx F_2(\mathbf{x}^{(0)}) + \frac{\partial F_2(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x} \Delta x_0 + \frac{\partial F_2(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial y} \Delta y + \dots \quad (3.7)$$

y sabiendo que \mathbf{x} es la solución de las ecuaciones (3.2) y (3.3), entonces $F_i(\mathbf{x}) = 0$. Luego de aplicar esto y truncar la serie de Taylor dejando sólo los términos lineales, se obtiene

$$\frac{\partial F_1(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x} \Delta x_0 + \frac{\partial F_1(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial y} \Delta y = -F_1(\mathbf{x}^{(0)}), \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial F_2(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x} \Delta x_0 + \frac{\partial F_2(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial y} \Delta y = -F_2(\mathbf{x}^{(0)}). \quad (3.9)$$

esto lo podemos expresar en forma vectorial como

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)}) \cdot \Delta \mathbf{x}^{(0)} = -F(\mathbf{x}^{(0)}). \quad (3.10)$$

Ahora, $\Delta \mathbf{x}^{(0)}$ representa la mejora de la aproximación $\mathbf{x}^{(0)}$ con respecto a la solución \mathbf{x} . Podemos generar un proceso iterativo al repetir la aproximación para $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ hasta $\mathbf{x}^{(k)}$, por lo que obtenemos lo que se conoce como método de Newton multidimensional

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} = -F(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (3.11)$$

donde

$$\Delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}.$$

Al igual que cualquier método de punto fijo, se hace uso de una condición para detener el cálculo computacional, en este caso se define como

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|} < \epsilon, \quad (3.12)$$

donde ϵ es el valor de tolerancia máxima definida para el cálculo.

3.1.2 Método Numérico Variacional

Si tomamos la ecuación (1.1) con $\beta = 1$, tenemos

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 \Psi + F(|\Psi|^2) \Psi = 0. \quad (3.13)$$

Esta ecuación se puede reformular, mediante una aproximación variacional, definiendo la densidad Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial z} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + |\nabla \Psi|^2 + \mathcal{FL}(|\Psi|^2), \quad (3.14)$$

donde $\mathcal{FL}(|\Psi|^2)$ es el término anarmónico de la densidad lagrangiana que viene dado por el último término de la ecuación (3.13). La complicación surge al buscar las ecuaciones de Euler-Lagrange, debido a que resulta difícil de resolver analíticamente.

Una forma de solventar esta dificultad es utilizar el método multivariable de Newton-Raphson, para esto primero definimos los vectores

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n),$$

$$\nabla_{\mathbf{A}} L(\mathbf{A}) = \left(\frac{\partial L(\mathbf{A})}{\partial A_1}, \frac{\partial L(\mathbf{A})}{\partial A_2}, \dots, \frac{\partial L(\mathbf{A})}{\partial A_n} \right),$$

donde A_1, A_2, \dots, A_n son los parámetros variacionales de interés, como la amplitud, el ancho del haz, la frecuencia, etc. Adoptamos la función de prueba $\Psi_{\mathbf{A}}$, seguido de la integración espacial de la ecuación (3.14) para obtener el respectivo lagrangiano efectivo¹, $L(\mathbf{A})$, como función de las variables A_n .

Utilizando la condición $\nabla_{\mathbf{A}}L(\mathbf{A}) = 0$, para encontrar estados estacionarios aproximados de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se deduce que la solución para el método iterativo es

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{(k)} - HL_{(\mathbf{A})}^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{A}}L(\mathbf{A}), \quad (3.15)$$

con $HL_{(\mathbf{A})}$ la matriz Hessiana definida como

$$HL_{(\mathbf{A})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\mathbf{A})}{\partial A_1^2} & \frac{\partial^2 L(\mathbf{A})}{\partial A_2 \partial A_1} & \dots & \frac{\partial^2 L(\mathbf{A})}{\partial A_n \partial A_1} \\ \frac{\partial^2 L(\mathbf{A})}{\partial A_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 L(\mathbf{A})}{\partial A_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 L(\mathbf{A})}{\partial A_n \partial A_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 L(\mathbf{A})}{\partial A_1 \partial A_n} & \frac{\partial^2 L(\mathbf{A})}{\partial A_2 \partial A_n} & \dots & \frac{\partial^2 L(\mathbf{A})}{\partial A_n^2} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Cabe mencionar que ni $\nabla_{\mathbf{A}}L(\mathbf{A})$ o $HL_{(\mathbf{A})}$ pueden ser determinados en una forma analítica explícita. Por lo tanto, se ha desarrollado una manera de sobreponerse a estas limitaciones, notando que para estimar $\nabla_{\mathbf{A}}L(\mathbf{A})$ y $HL_{(\mathbf{A})}$ usamos el método de Newton-Raphson arriba mencionado, así mismo, podemos calcular numéricamente $L(\mathbf{A})$ en múltiples puntos en el espacio de variables A_n , separados por pequeños valores finitos ΔA_n . En particular, las derivadas pueden ser estimadas como

$$\frac{\partial L(\mathbf{A})}{\partial A_n} = \int \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{A})}{\partial A_n} d\mathbf{r} \approx \int \frac{\mathcal{L}(\mathbf{A}+\Delta A_n) - \mathcal{L}(\mathbf{A}-\Delta A_n)}{2\Delta A_n} d\mathbf{r} = \frac{L(\mathbf{A}+\Delta A_n) - L(\mathbf{A}-\Delta A_n)}{2\Delta A_n}, \quad (3.17)$$

y, similarmente,

$$\frac{\partial^2 L(\mathbf{A})}{\partial A_n \partial A_m} \approx \frac{1}{\Delta A_n \Delta A_m} \left(L(\mathbf{A}+\Delta A_n/2+\Delta A_m/2) - L(\mathbf{A}-\Delta A_n/2+\Delta A_m/2) - L(\mathbf{A}+\Delta A_n/2-\Delta A_m/2) + L(\mathbf{A}-\Delta A_n/2-\Delta A_m/2) \right). \quad (3.18)$$

Tenemos libertad de elegir el tamaño de ΔA_n , pero es razonable elegirlo tres ordenes de magnitud más pequeño que la solución estimada A_n [Duque et al., 2018]. Podemos definir un algoritmo a seguir de la siguiente forma

¹También conocido como promedio variacional lagrangiano.

Algoritmo 1 NVM

```
1:  $A^{(k)} \leftarrow A_0$ 
2: for  $i \leftarrow 1$  to  $N$  do
3:    $\nabla L_{A^k} \leftarrow \frac{\partial L(\mathbf{A})}{\partial A_n}$ 
4:    $HL_{A^k} \leftarrow \frac{\partial^2 L(\mathbf{A})}{\partial A_n \partial A_m}$ 
5:    $A^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{A}^{(k)} - HL_{(\mathbf{A})}^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{A}} L(\mathbf{A})$ 
6:   if  $\frac{\|A^{(k+1)} - A^{(k)}\|}{\|A^{(k+1)}\|} < \epsilon$  then
7:     ir al paso 12
8:   else
9:      $A^{(k)} \leftarrow A^{(k+1)}$ 
10:  end if
11: end for
12: return  $A^{(k)}$ 
```

Una desventaja de este algoritmo, y de cualquiera que busque optimizar la ecuación NLS, es que la solución trivial cero también satisface el procedimiento de optimización, por lo que las iteraciones pueden converger a cero en algunos casos. Una forma simple, pero efectiva, de evitar esto es seleccionar un nuevo punto de inicio con valores más altos de A_n . También es necesario notar que, en el caso de la multiestabilidad, el algoritmo puede encontrar diferentes soluciones coexistentes, la convergencia a una específica depende de la elección de la solución inicial [Duque et al., 2018].

3.2 Método Split-Step de Fourier (SSFM)

El SSFM es un método pseudo-espectral que se puede implementar con relativa sencillez para resolver problemas no lineales. Este método se basa en el cálculo de la solución en pequeños pasos, los mismos que son discriminados entre lineales y no lineales, además que hace uso de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) [Guano et al., 2014].

El procedimiento de este algoritmo se basa en los dos siguientes principios [Chen et al., 2012]:

- Encontrar la solución analítica de la parte lineal en el dominio del tiempo.
- Resolver la parte no lineal en el dominio de la frecuencia mediante la FFT.

Para describir este algoritmo de propagación en medios no lineales, es útil reescribir la ecuación (1.1) en forma de operadores [Lopez-Aguayo et al., 2014]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = [\hat{D} + \hat{N}] \psi, \quad (3.19)$$

donde $\hat{D} = i\nabla_{\perp}^2$ es el operador diferencial que representa el efecto de difracción y $\hat{N} = iF(|\psi|^2)$ es el operador que representa la no linealidad del medio donde se propaga el campo, cabe mencionar que hemos tomado $\beta = 1$. Además, se impone como condición inicial

$$\psi_0(x, y) = \psi(x, y, 0), \quad (3.20)$$

A continuación integramos la ecuación (3.19) y obtenemos:

$$\int_z^{z+h} \frac{d\psi}{\psi} = \int_z^{z+h} \hat{D} dz + \int_z^{z+h} \hat{N} dz. \quad (3.21)$$

La solución de dicha ecuación, utilizando notación de operadores, esta dada por:

$$\psi(x, y, z + h) = \left[e^{h\hat{D} + h\hat{N}} \right] \psi(x, y, z), \quad (3.22)$$

en donde \hat{N} y \hat{D} son operadores que no conmutan [Sinkin et al., 2003].

Asumiendo que el paso de propagación h es muy pequeño, los operadores \hat{D} y \hat{N} de la ecuación (3.22) pueden aproximarse por

$$\psi(x, y, z + h) \cong e^{h\hat{D}} \left[e^{h\hat{N}} \psi(x, y, z) \right], \quad (3.23)$$

de tal forma que el operador exponencial $e^{h\hat{N}}$ actúa sobre la función $\psi(x, y, z)$ mientras que el operador $e^{h\hat{D}}$ actúa sobre todo el argumento. Lo hecho anteriormente es equivalente a resolver la NLS tomando en cuenta primero sólo el efecto no lineal, haciendo $\hat{D} = 0$, para luego tomar sólo en cuenta los efectos debidos sólo a la difracción haciendo $\hat{N} = 0$.

Finalmente la ecuación (3.23) se resuelve como:

$$\psi(z + h) \cong F^{-1} \left(e^{-ihk_{x,y}^2} \left\{ F \left[e^{ih\hat{N}} \psi(x, y, z) \right] \right\} \right), \quad (3.24)$$

donde F y F^{-1} representan la transformada y transformada inversa de Fourier respectivamente.

En resumen, al utilizar el método de paso dividido de Fourier, el campo ψ se propaga una distancia pequeña h bajo la influencia únicamente del efecto no lineal, para después considerar únicamente los efectos debidos a la difracción, repitiéndose tal proceso hasta alcanzar la distancia de propagación requerida [Lopez-Aguayo et al., 2014]. Ahora, una implementación del algoritmo es la siguiente:

Algoritmo 2 SSFM

```
1:  $\psi^{(n)} \leftarrow \psi_0$ 
2:  $k_{x,y} \leftarrow \frac{2\pi}{L_{x,y}}(-N/2 : 1 : N/2 - 1)$ 
3: for  $i \leftarrow 1$  to  $M$  do
4:    $\psi^{(n+1/2)} \leftarrow \exp(ih)\psi^{(n)}$ 
5:    $\hat{\psi}^{(n+1/2)} \leftarrow \mathcal{F}\left(\psi^{(n+1/2)}\right)$ 
6:    $\hat{\psi}^{(n+1)} \leftarrow \exp\left(-ih k_{x,y}^2\right)\hat{\psi}^{(n+1/2)}$ 
7:    $\psi^{(n+1)} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\psi}^{(n+1)}\right)$ 
8:    $\psi^{(n)} \leftarrow \psi^{(n+1)}$ 
9: end for
10: return  $\psi^{(n)}$ 
```

La no conmutatividad de los operadores \hat{D} y \hat{N} no es la única fuente de error numérico en el análisis por split-step de Fourier, si bien es la de mayor peso. Un aspecto muy importante en la discusión de la precisión de las predicciones de este método es el relativo a su estabilidad numérica, la cual depende críticamente de un apropiado acondicionamiento del problema a estudiar [Washburn, 2002, Sinkin et al., 2003, Lopez-Aguayo et al., 2014].

En el caso de simulaciones de los problemas que emergen de las variadas formas de la ecuación NLS, el acondicionamiento apropiado de un problema dado se basa principalmente en el uso de valores numéricos de las cantidades físicas involucradas lo más precisos posible, con respecto a sus valores teóricos correspondientes, razón por la cual se utiliza este método en conjunto con la aproximación variacional, para obtener los parámetros que optimicen el pulso solitónico. Estos parámetros definen la estimación apropiada del intervalo espacial de salto h .

Capítulo 4

Resultados y Discusión

Se puede decir: “En la investigación, si sabes lo que estás haciendo, entonces no deberías hacerlo”. En cierto sentido, si la respuesta es exactamente lo que esperabas, entonces no has aprendido nada nuevo, aunque es posible que haya aumentado tu confianza un poco.

Richard Hamming

4.1 Medio local Kerr

Consideremos la ecuación (3.13) para el caso Kerr (véase la Sección 1.2.1)

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2\Psi + |\Psi|^2\Psi = 0, \quad (4.1)$$

donde z es la variable temporal, ∇_{\perp}^2 es el Laplaciano transversal y Ψ determina la evolución del pulso.

Al hacer uso de la forma estándar de la aproximación variacional, aplicado a la teoría de solitones, la ecuación (4.1) se reescribe de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial z} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) + |\nabla_{\perp}\Psi|^2 + \frac{1}{2}|\Psi|^4. \quad (4.2)$$

Si proponemos una solución para la ecuación (4.1) en coordenadas cilíndricas de la forma $\Psi(x, y, z) = \psi(r, \theta)e^{i\lambda z}$ y la sustituimos en (4.2) obtenemos

$$\mathcal{L} = \lambda|\psi|^2 + |\nabla_{\perp}\psi|^2 - \frac{1}{2}|\psi|^4. \quad (4.3)$$

con λ siendo una constante de propagación.

Como se mencionó anteriormente, estamos interesados en la optimización de la siguiente función de prueba:

$$\psi(r, \theta) = A(z)r^m \exp\left[\frac{-r^2}{B(z)^2}\right] \exp[i(m\theta + i\alpha \cos \theta)], \quad (4.4)$$

donde A es la amplitud del haz y B el ancho. Al sustituir (4.4) en (4.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \exp\left(\frac{-2r^2}{B^2}\right) \exp(-2\alpha \cos \theta) \left\{ \lambda A^2 r^{2m} + A^2 m^2 r^{2m-2} - \frac{4r}{B^2} A^2 m r^{2m-1} \right. \\ & \left. + \frac{4r^2}{B^2} A^2 r^{2m} + A^2 r^{2m-2} [m^2 + \alpha^2 \sin^2 \theta] \right\} \\ & - \frac{1}{2} A^4 r^{4m} \exp\left(\frac{-4r^2}{B^2}\right) \exp(-4\alpha \cos \theta). \end{aligned}$$

Tenemos que encontrar $L = \int \int \mathcal{L} r dr d\theta$, así

$$\begin{aligned} L = & \frac{\lambda\pi A^2 B^{2m+2}}{2^{m+1}} I_0(-2\alpha) \Gamma(m+1) + \frac{\pi A^2 B^{2m} m^2}{2^m} I_0(-2\alpha) [2\Gamma(m) \\ & - \frac{1}{m} \Gamma(m+1) + \frac{1}{m^2} \Gamma(m+2) + \frac{\alpha}{2m^2} \frac{I_1(-2\alpha)}{I_0(-2\alpha)} \Gamma(m)] \\ & + \frac{\pi A^4 B^{4m+2}}{2^{4m+3}} I_0(-4\alpha) \Gamma(2m+1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

con $\Gamma(\cdot)$ y $I_n(\cdot)$, como la función Gamma y la función modificada de Bessel de orden n , respectivamente.

De la ecuación (4.5) podemos deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange para los parámetros variacionales $A(z)$ y $B(z)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)} - \frac{\partial L}{\partial A} &= 0 \\ \frac{2\lambda\pi AB^{2m+2}}{2^{m+1}} I_0(-2\alpha)\Gamma(m+1) + \frac{2\pi AB^{2m}m^2}{2^m} I_0(-2\alpha) [2\Gamma(m) \\ &- \frac{1}{m}\Gamma(m+1) + \frac{1}{m^2}\Gamma(m+2) + \frac{\alpha}{2m^2} \frac{I_1(-2\alpha)}{I_0(-2\alpha)}\Gamma(m)] \\ &+ \frac{4\pi A^3 B^{4m+2}}{2^{4m+3}} I_0(-4\alpha)\Gamma(2m+1) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)} - \frac{\partial L}{\partial B} &= 0 \\ \frac{(2m+2)\lambda\pi A^2 B^{2m+1}}{2^{m+1}} I_0(-2\alpha)\Gamma(m+1) + \frac{2\pi A^2 B^{2m-1}m^3}{2^m} I_0(-2\alpha) [2\Gamma(m) \\ &- \frac{1}{m}\Gamma(m+1) + \frac{1}{m^2}\Gamma(m+2) + \frac{\alpha}{2m^2} \frac{I_1(-2\alpha)}{I_0(-2\alpha)}\Gamma(m)] \\ &+ \frac{(4m+2)\pi A^4 B^{4m+1}}{2^{4m+3}} I_0(-4\alpha)\Gamma(2m+1) = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Multiplicando las ecuaciones (4.6) y (4.7) por A y B respectivamente, y después de realizar la operación de resta, obtenemos

$$A^2 = \frac{2^{3m+2}\lambda I_0(-2\alpha)\Gamma(m+1)}{B^{2m} I_0(-4\alpha)\Gamma(2m+1)}. \quad (4.8)$$

Según la ecuación (4.8) los parámetros variacionales de amplitud y ancho están relacionados, así que se debe calcular uno en función del otro, esto muchas veces presenta complicaciones, ya que debemos elegir un valor cercano al “verdadero” para que la solución converja al propagarla y se mantenga estable.

Por el primer teorema de Noether y la invariancia de la acción de la ecuación NLS (4.1) ante translaciones temporales y espaciales, las cantidades conservadas de potencia, momento lineal, momento angular y Hamiltoniano, respectivamente, quedan determinadas por [Malomed, 2002, Faddeev and Takhtajan, 2007]

- Potencia

$$N = \int |\psi|^2 d^2\mathbf{r} = \frac{\pi A^2 B^{2m+2}}{2^{m+1}} \Gamma(m+1) I_0(-2\alpha). \quad (4.9)$$

- Momento lineal

$$\mathbf{p} = Im \left\{ \int \psi^* \nabla \psi d^2 \mathbf{r} \right\} = \frac{\pi A^2 m}{\lambda^{m+1/2}} \Gamma(m + 1/2) I_1(-2\alpha) \hat{\mathbf{y}}. \quad (4.10)$$

- Momento angular

$$\mathbf{M} = Im \left\{ \int \mathbf{r} \times \psi^* \nabla \psi d^2 \mathbf{r} \right\} = \frac{\pi A^2 m}{\lambda^{m+1}} \Gamma(m + 1) I_0(-2\alpha) \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.11)$$

- Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= \int \left(\nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - \frac{1}{2} |\psi|^4 \right) d^2 \mathbf{r} \\ &= \frac{\pi A^2 B^{2m} m^2}{2^m} I_0(-2\alpha) \left[2\Gamma(m) - \frac{1}{m} \Gamma(m + 1) + \frac{1}{m^2} \Gamma(m + 2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2m^2} \frac{I_1(-2\alpha)}{I_0(-2\alpha)} \Gamma(m) \right] + \frac{\pi A^4 B^{4m+2}}{2^{4m+3}} I_0(-4\alpha) \Gamma(2m + 1). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Con todas las variables físicas necesarias ya definidas es posible simular la propagación del vórtice solitónico optimizado. Con la función de prueba (4.4) y la Ecuación (4.8), encontramos que los valores que optimizan el haz para $m = 1$ y $\alpha = 0.01$ son $A = 104.9026$ y $B = 0.3102$, en las Figuras 4.1 y 4.2 podemos ver la propagación hasta $z = 0.5$.

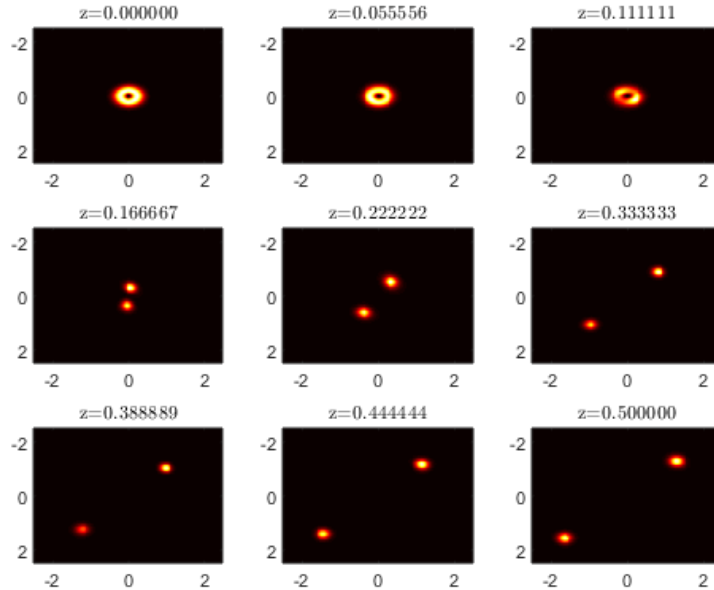


Figura 4.1: Vórtice asimétrico en un medio local Kerr para $\lambda = 60$, $m = 1$ y $\alpha = 0.01$, existe inestabilidad azimutal que produce la ruptura en filamentos del vórtice.

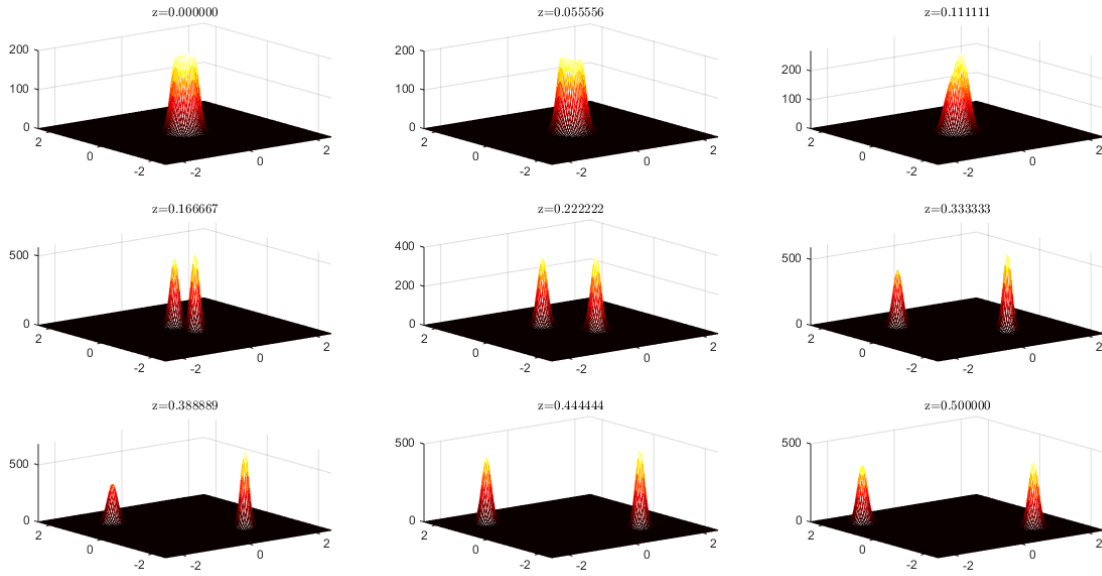


Figura 4.2: Lo mismo que en la Figura 4.1, pero en un despliegue tridimensional.

En la Tabla 4.1 podemos ver los valores encontrados para la potencia, momento lineal, momento angular y Hamiltoniano, con aproximación a dos decimales para los valores óptimos de amplitud y ancho, encontrados utilizando la ecuación (4.8)

Tabla 4.1: Cantidades conservadas para diferentes perfiles optimizados (en unidades adimensionales normalizadas).

A	B	m	α	Potencia	Mom. lineal	Mom. angular	Hamilt.
104.90	0.31	1	0.01	80.03	3.23	830.03	1.02×10^4
167.32	0.25	1	0.2	89.36	87.38	1.42×10^3	3.42×10^4
75.60	0.26	2	0.01	1.57	0.11	3.14	113.64

Como hemos corroborado con nuestras simulaciones numéricas, los vórtices solitónicos asimétricos propuestos son altamente inestables en un medio local Kerr. Por lo anterior, exploramos un mecanismo de estabilización, usando medios no locales.

4.2 Medio no local

Para el caso no local la ecuación (3.13) es de la forma

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2\Psi + \Theta\Psi = 0, \quad (4.13)$$

aquí, Θ es el factor de no linealidad que nos proporciona el grado de no localidad, consideramos el siguiente modelo [Yakimenko et al., 2006]

$$\Theta(r) = \int R(r - r') |\Psi(r')|^2 dr'. \quad (4.14)$$

donde $R(r)$ es determinado por el tipo de interacción no local con el medio, en general presenta formas muy complicadas para diversos fenómenos físicos, sin embargo, en el presente trabajo consideraremos el modelo de exponencial Gaussiana, que se ajusta a fenómenos ideales, la expresión es la siguiente

$$R(r - r') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(r - r')^2}{\sigma^2}\right), \quad (4.15)$$

donde σ es un parámetro de no localidad, cuando $\sigma \rightarrow 0$ regresamos al caso local Kerr.

La función $R(r)$, conocida como función de respuesta del medio, se asume que es real, simétrica y satisface la condición de normalización $\int R(r) dr = 1$. De una forma similar que la Sección 4.1, obtenemos la siguiente densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \lambda|\psi|^2 + |\nabla_{\perp}\psi|^2 - |\psi|^2 \int R(r - r') |\psi(r')|^2 dr'. \quad (4.16)$$

Junto a las ventajas del uso de la aproximación variacional están sus limitaciones técnicas, ya que en muchos casos puede ser problemático realizar una integración analítica del Lagrangiano subyacente con la sustitución de la función elegida, y la subsecuente diferenciación con respecto a los parámetros libres, con el objetivo de derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL). En este trabajo, usamos el algoritmo mostrado en el Capítulo 3 que permite un tratamiento numérico completo de la aproximación variacional basado en la optimización de Rayleigh-Ritz, superando de esta forma las limitaciones implícitas en la forma de la función de respuesta.

Aquí consideramos el vórtice mostrado en la Figura 4.3, para el cual encontramos los valores óptimos de $A = 77.6054$ y $B = 0.5292$ mediante el método variacional numérico, con un porcentaje de error relativo de 4.80×10^{-5} y 2.90×10^{-5} , para la amplitud y el ancho, respectivamente. En $z = 533.33$ podemos ver que inicia la formación de un solitón fundamental.

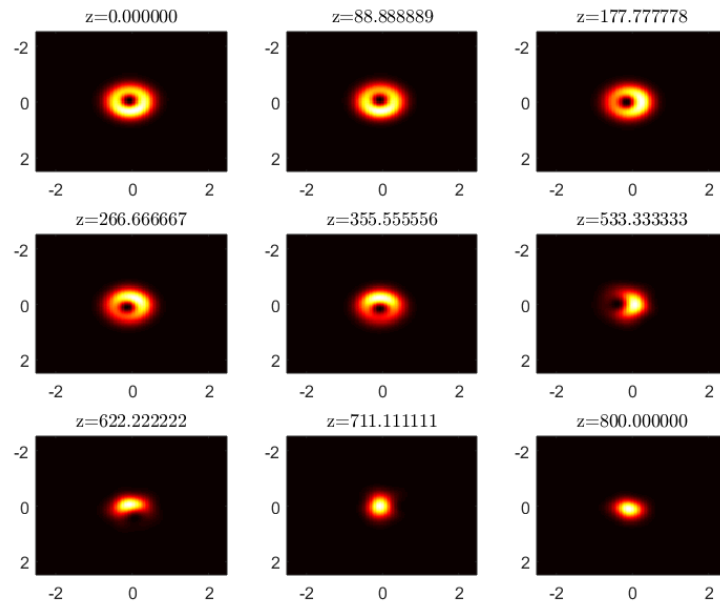


Figura 4.3: Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 60$, $m = 1$, $\alpha = 0.1$ y $\sigma = 1$.

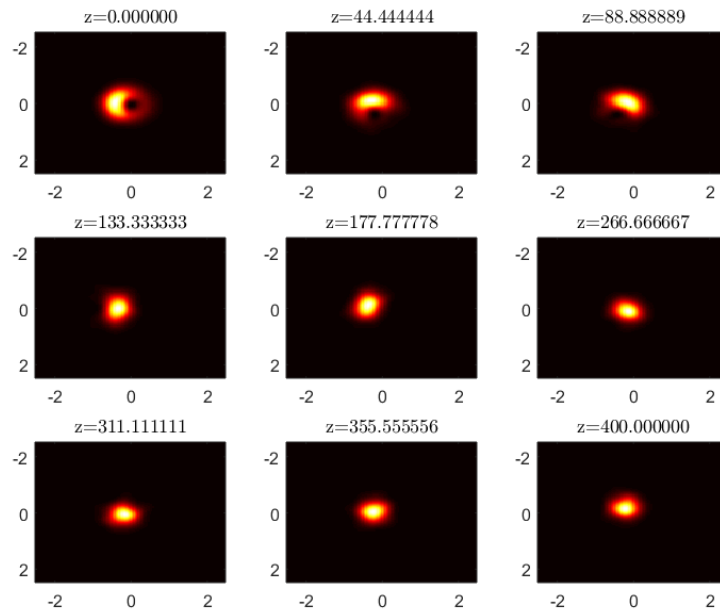


Figura 4.4: Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 60$, $m = 1$, $\alpha = 0.5$ y $\sigma = 1$.

En la Figura 4.4 los valores de los parámetros variacionales son $A = 57.1897$ y $B = 0.5742$, para la amplitud y el ancho, respectivamente y se ha mantenido los valores para λ , m y σ , sólo modificando $\alpha = 0.5$; podemos observar que en $z = 88.88$ se inicia la formación de un solitón fundamental, esto nos demuestra que el valor de α tiene repercusiones en la estabilidad del vórtice, otro aspecto interesante a notar es que sólo se forma un único solitón fundamental, cuando en el caso simétrico se forman dos.

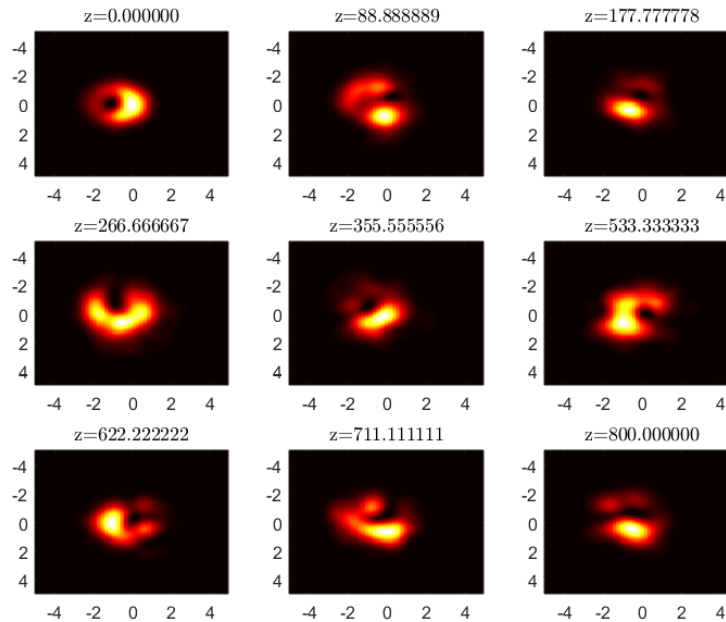


Figura 4.5: Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 100$, $m = 1$, $\alpha = 0.5$ y $\sigma = 10$.

En la Figura 4.5 se ha cambiado el factor de no localidad a $\sigma = 10$ y $\lambda = 100$, y se mantienen los demás parámetros, mostrando una resistencia a formar un solitón fundamental y comportándose como en el caso de un vórtice simétrico que forma dos solitones fundamentales, los valores de los parámetros variacionales utilizados para la simulación son $A = 136.6830$ y $B = 1.1549$.

En las Figura 4.6 volvemos a observar el fenómeno visto en la Figura 4.5, con resistencia a formar un solitón fundamental, esto debido al valor de no localidad, dado por $\sigma = 10$, sin embargo en la Figura 4.7 podemos observar que un valor de asimetría alto obliga a formar un solitón fundamental, aquí con un valor de no localidad de 1. Los valores óptimos de la amplitud y el ancho los podemos ver en la Tabla 4.2.

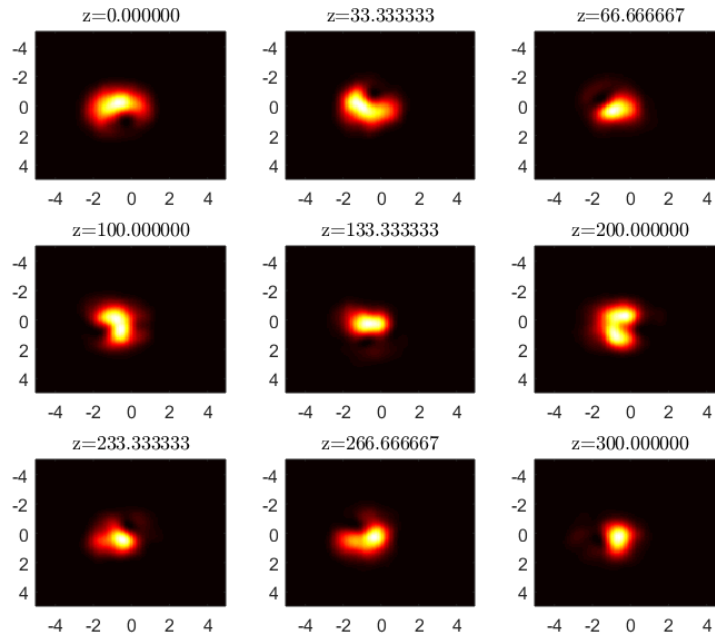


Figura 4.6: Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 150$, $m = 1$, $\alpha = 1$ y $\sigma = 10$.

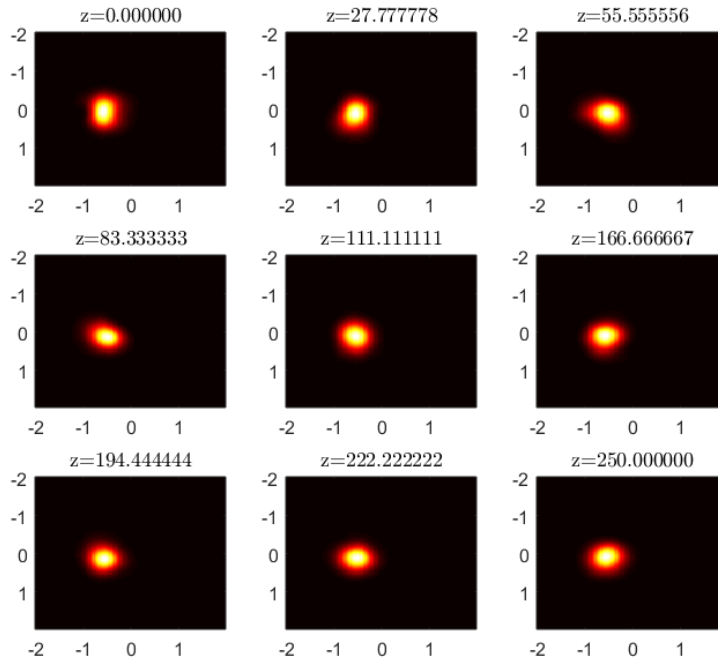


Figura 4.7: Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 100$, $m = 1$, $\alpha = 2$ y $\sigma = 1$.

Haciendo, de nuevo, la constante de propagación en $\lambda = 80$ y tomando $m = 2$, obtenemos los resultados mostrados en las Figuras 4.8 y 4.9, para la primer figura tenemos $A = 221.0663$ y $B = 0.5512$, en cambio para la segunda $A = 203.0222$ y $B = 0.5063$, en ambas figuras podemos apreciar que se forma un vórtice con dos solitones fundamentales, en lugar de cuatro solitones fundamentales como en el caso totalmente simétrico estudiado en [Alberucci and Assanto, 2007] y otros. De nuevo, podemos notar que el factor de asimetría es el responsable de formar los solitones fundamentales a valores de z más pequeños en la Figura 4.8.

En la Figura 4.10 se aumenta el grado de no localidad hasta $\sigma = 5$, manteniendo los valores de $\lambda = 80$, $\alpha = 0.3$ y $m = 2$, aquí vemos que el vórtice se mantiene estable hasta $z = 450$, a diferencia de lo mostrado en la Figura 4.9, esto debido a que se forma una guía de onda por la función no local de respuesta, que mantiene atrapado al vórtice. Otra diferencia notable es en los valores obtenidos para la potencia y el momento lineal asociado en y , esto lo podemos ver en la Tabla 4.3. Los parámetros variacionales encontrados son $A = 64.2502$ y $B = 1.1356$.

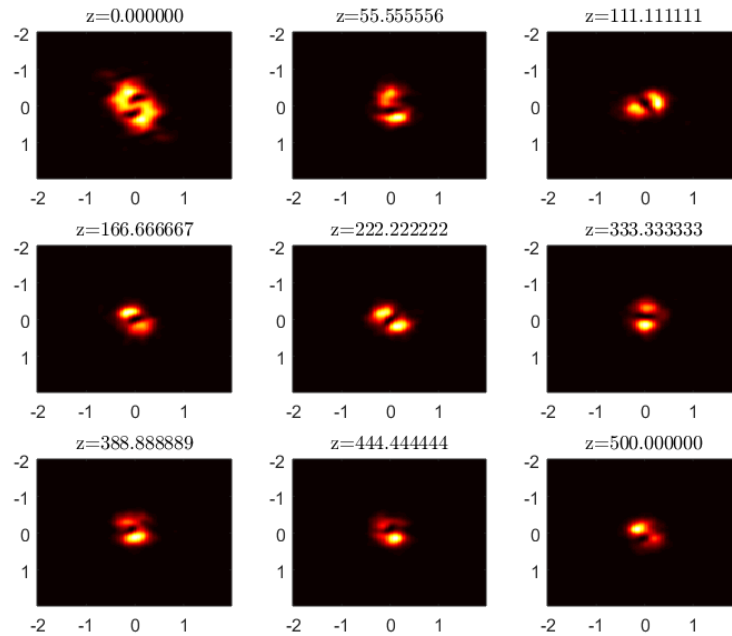


Figura 4.8: Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 80$, $m = 2$, $\alpha = 0.75$ y $\sigma = 1$.

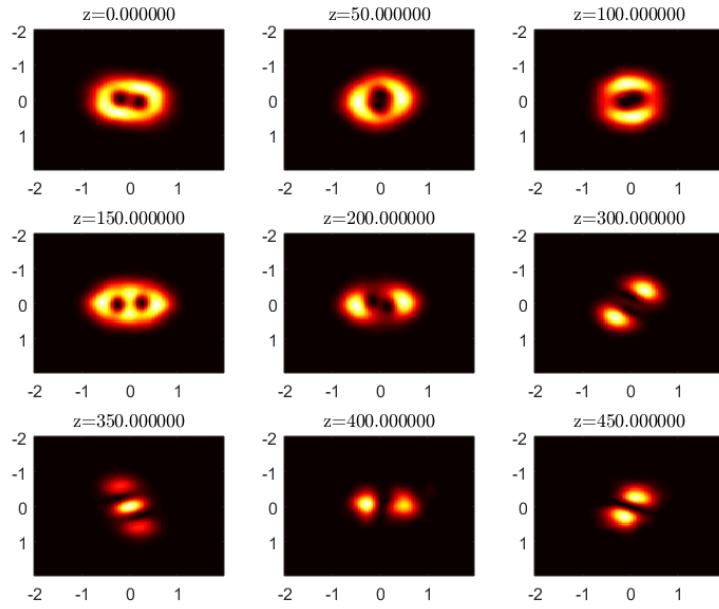


Figura 4.9: Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 80$, $m = 2$, $\alpha = 0.3$ y $\sigma = 1$.

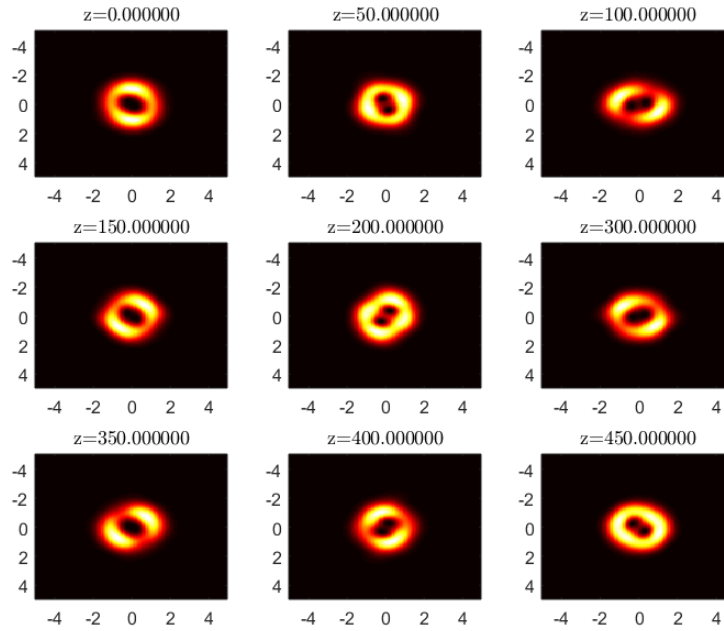


Figura 4.10: Vórtice asimétrico en un medio no local para $\lambda = 80$, $m = 2$, $\alpha = 0.3$ y $\sigma = 5$.

El método iterativo para encontrar los parámetros de amplitud y anchura no provee la conservación de las cantidades invariantes dinámicas como el Hamiltoniano, sin embargo, ese hecho no invalida su aplicabilidad [Duque et al., 2018].

En la Tabla 4.2 se resumen los valores encontrados para cada propagación con el respectivo porcentaje de error relativo, mientras que en la Tabla 4.3 se resumen los valores de potencia, momento lineal y momento angular; cabe mencionar que el momento lineal asociado sólo existe en la coordenada y , por lo tanto, en todas las simulaciones, se agrega un factor de corrección de fase de momento lineal del orden $\frac{L_y}{Pow}$, con L_y y Pow , el momento lineal y potencia, respectivamente; esto para contrarrestar el momento natural del perfil y mantener el punto de interés en el centro de la ventana.

Tabla 4.2: Valores optimizados para la propagación del vórtice asimétrico.

A	B	% error rel. A	% error rel. B	m	σ	α	λ
77.6054	0.5292	4.80×10^{-5}	2.90×10^{-5}	1	1	0.10	60
57.1897	0.5742	2.72×10^{-5}	1.80×10^{-5}	1	1	0.50	60
136.6830	1.1549	7.73×10^{-5}	4.07×10^{-5}	1	10	0.50	100
119.6830	1.1760	9.92×10^{-5}	5.15×10^{-5}	1	10	1	150
15.9255	0.6723	5.60×10^{-5}	3.56×10^{-5}	1	1	2	100
221.0663	0.5512	1.64×10^{-5}	4.49×10^{-6}	2	1	0.75	80
203.0222	0.5063	5.97×10^{-5}	2.24×10^{-5}	2	1	0.3	80
64.2502	1.1356	3.75×10^{-5}	1.29×10^{-5}	2	5	0.3	80

Tabla 4.3: Valores de las cantidades dinámicas para los parámetros optimizados (en unidades adimensionales normalizadas).

A	B	m	α	Potencia	Mom. lineal	Mom. angular
77.6054	0.5292	1	0.10	374.7013	88.3004	1.3380×10^3
57.1897	0.5742	1	0.50	353.5368	344.4655	1.0723×10^3
136.6830	1.1549	1	0.50	3.3070×10^4	1.6020×10^4	2.4778×10^4
119.6830	1.1760	1	1	4.9050×10^4	3.6452×10^4	3.5460×10^4
15.9255	0.6723	1	2	549.9184	740.3743	1.0175×10^3
221.0663	0.5512	2	0.75	1.7226×10^3	3.6041×10^3	2.1170×10^4
203.0222	0.5063	2	0.3	595.4773	635.1669	9.1764×10^3
64.2502	1.1356	2	0.3	7.5933×10^3	3.6110×10^3	1.0370×10^4

Las simulaciones muestran mayor estabilidad en la propagación del haz propuesto al aumentar el grado de no localidad del medio. Así mismo, la estabilidad de la propagación depende también del valor del parámetro de asimetría, para valores pequeños de este parámetro, mayor es la distancia de propagación, esto es evidente en la comparación de las Figuras 4.3 y 4.4.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

La mayoría de la gente dice que es el intelecto lo que hace a un gran científico. Están equivocados, es el carácter.

Albert Einstein

5.1 Conclusiones

El estudio del comportamiento de las soluciones solitónicas de la ecuación no lineal de Schrödinger en dos dimensiones comienza en este trabajo por la identificación de esta ecuación como un modelo matemático universal que emerge en una muy variada gama de sistemas físicos.

Hemos podido corroborar la viabilidad de usar el método variacional para optimizar una función que modela un vórtice solitónico asimétrico, como solución la ecuación no lineal de Schrödinger para el caso no local. A pesar de las dificultades intrínsecas que presenta el método variacional es una herramienta muy útil, que nos provee información de la dinámica del problema; como la potencia, momento lineal, momento angular y el Hamiltoniano. Sin embargo, las ecuaciones de Euler-Lagrange resultantes de la aplicación del método variacional, en muchos casos, son muy difíciles de tratar analíticamente, así que se ha desarrollado una aproximación variacional numérica similar a la mostrada en [Duque et al., 2018].

Cabe mencionar que el método numérico variacional precisa de tener cierto conocimiento del comportamiento del problema a tratar, ya que debemos proveer los valores de la amplitud y el ancho (en nuestro caso), que deben ser «ceranos» a los valores óptimos para que la solución converja.

De igual forma, hemos encontrado que nuestra función de prueba, un vórtice asimétrico, describe un comportamiento bastante aceptable, esto a pesar de no ser solución natural de la ecuación no lineal de Schrödinger, ya que la hemos optimizado para diferentes valores de carga topológica, constante de propagación, asimetría y grado de no localidad.

Como forma de probar nuestro método se han expuesto en este trabajo el caso local Kerr y el no local, utilizando para ambos el método variacional, y comparando para el caso Kerr con resultados analíticos mostrados en el capítulo 4. También, los resultados encontrados ahí concuerdan con los reportados en [Swartzlander Jr and Law, 1992, Towers and Malomed, 2002].

Para simular la propagación de la solución optimizada hemos utilizado el método Split Step de Fourier, muy utilizado para simular la propagación de ondas solitónicas [Krolikowski et al., 2004, Alberucci and Assanto, 2007, Lopez-Aguayo et al., 2014]. Con esto pudimos comprobar el comportamiento de nuestras soluciones para diferentes valores de propagación y considerando la variación de algunos parámetros. Podemos ver que para el caso local Kerr el vórtice no mantiene su forma y rápidamente se convierte en un sólo solitón fundamental, mientras que en el caso de un vórtice simétrico se forman dos solitones fundamentales.

Según nuestras propagaciones, podemos comprobar que el vórtice asimétrico pierde su forma original y termina dividiéndose en filamentos, es decir, existe inestabilidad azimutal, si aumentamos el grado de no localidad provoca una especie de potencial de confinamiento (o guía de onda) y el vórtice mantiene su forma. El número de solitones fundamentales formados, no está solamente determinado por el valor de carga topológica, sino por el grado de no localidad, esto es evidente en las Figuras 4.9 y 4.10. También encontramos que el grado de asimetría produce una rotación en el perfil de intensidad de los vórtices solitónicos.

La generación de vórtices asimétricos, como soluciones estacionarias de la ecuación no lineal de Schrödinger, descritos por el parámetro de asimetría α muestran un comportamiento de haces auto atrapados al ser optimizados con el método variacional, y se encuentra que a mayor grado de no localidad son más estables, con lo que se concluye este estudio teórico, sin embargo, harán falta comprobaciones experimentales a futuro.

5.2 Recomendaciones

Para realizar simulaciones de casos más realistas de los vórtices solitónicos, se recomienda lo siguiente

- La función de respuesta debe modelar un fenómeno físico comprobado experimentalmente.
- Agregar a la ecuación general términos de resonancia, dispersión Raman u otros.
- Montar un clúster de computadoras trabajando en paralelo, esto con el fin de aumentar la velocidad de cálculo, para el caso particular de este trabajo de graduación resultó difícil simular para valores de z mayores que 1000. Una idea sería un clúster de GPU's trabajando con CUDA-MATLAB.
- Igualmente se recomienda mejorar las versiones del Método Variacional Numérico y el Split Step de Fourier utilizados en este trabajo, con el objetivo de poder optimizar y propagar estructuras en 3 dimensiones.

Referencias

- [Ablowitz et al., 1991] Ablowitz, M. J., Ablowitz, M., Clarkson, P., and Clarkson, P. A. (1991). *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, volume 149. Cambridge university press.
- [Agrawal, 2000] Agrawal, G. P. (2000). Nonlinear fiber optics. In *Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century*, pages 195–211. Springer.
- [Alberucci and Assanto, 2007] Alberucci, A. and Assanto, G. (2007). Propagation of optical spatial solitons in finite-size media: interplay between nonlocality and boundary conditions. *JOSA B*, 24(9):2314–2320.
- [Anderson, 1983a] Anderson, D. (1983a). High transmission rate communication systems using lossy optical solitons. *Optics communications*, 48(2):107–112.
- [Anderson, 1983b] Anderson, D. (1983b). Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers. *Physical review A*, 27(6):3135.
- [Anderson et al., 2001] Anderson, D., Lisak, M., and Berntson, A. (2001). A variational approach to nonlinear evolution equations in optics. *Pramana*, 57(5-6):917–936.
- [Arfken and Weber, 2005] Arfken, G. B. and Weber, H. J. (2005). *Mathematical methods for physicists international student edition*. Academic press.
- [Biswas and Konar, 2006] Biswas, A. and Konar, S. (2006). *Introduction to non-Kerr law optical solitons*. Chapman and Hall/CRC.
- [Boyd, 2003] Boyd, R. W. (2003). *Nonlinear optics*. Elsevier.
- [Cabrera et al., 2007] Cabrera, E., González-Pérez-Sandi, S., and Fujioka, J. (2007). From embedded solitons to 4d dynamical systems. *Revista mexicana de física*, 53(1):47–57.
- [Chapra and Canale, 2007] Chapra, S. C. and Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill,.
- [Chen et al., 2012] Chen, G., Cloutier, B., Li, N., Muite, B., and Rigge, P. (2012). Parallel spectral numerical methods.

- [Duque et al., 2018] Duque, E. I., Lopez-Aguayo, S., and Malomed, B. A. (2018). Numerical realization of the variational method for generating self-trapped beams. *Optics express*, 26(6):7451–7459.
- [Duree Jr et al., 1993] Duree Jr, G. C., Shultz, J. L., Salamo, G. J., Segev, M., Yariv, A., Crosignani, B., Di Porto, P., Sharp, E. J., and Neurgaonkar, R. R. (1993). Observation of self-trapping of an optical beam due to the photorefractive effect. *Physical review letters*, 71(4):533.
- [Faddeev and Takhtajan, 2007] Faddeev, L. and Takhtajan, L. (2007). *Hamiltonian methods in the theory of solitons*. Springer Science & Business Media.
- [Gardner et al., 1967] Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D., and Miura, R. M. (1967). Method for solving the korteweg-devries equation. *Physical Review Letters*, 19(19):1095.
- [Guano et al., 2014] Guano, H. A., Molina, P. C., and Jiménez, M. S. (2014). Estudio y simulación de los efectos no lineales scattering estimulado de brillouin (sbs) y scattering estimulado de raman (srs) en una fibra óptica monomodo. *Revista Politécnica*, 33(1).
- [Hasegawa and Tappert, 1973] Hasegawa, A. and Tappert, F. (1973). Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. i. anomalous dispersion. *Applied Physics Letters*, 23(3):142–144.
- [Jia and Lin, 2012] Jia, J. and Lin, J. (2012). Solitons in nonlocal nonlinear kerr media with exponential response function. *Optics express*, 20(7):7469–7479.
- [Kivshar and Agrawal, 2003] Kivshar, Y. S. and Agrawal, G. (2003). *Optical solitons: from fibers to photonic crystals*. Academic press.
- [Korteweg and de Vries, 1895] Korteweg, D. and de Vries, G. (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and a new type of long stationary wave. *Philos. Mag*, 39:422–443.
- [Krolikowski et al., 2004] Krolikowski, W., Bang, O., Nikolov, N. I., Neshev, D., Wyller, J., Rasmussen, J. J., and Edmundson, D. (2004). Modulational instability, solitons and beam propagation in spatially nonlocal nonlinear media. *Journal of optics B: quantum and semiclassical optics*, 6(5):S288.
- [Lopez-Aguayo et al., 2014] Lopez-Aguayo, S., Esparza-Echevarría, M., Lem-Carrillo, G., and Gutiérrez-Vega, J. (2014). Ondas solitarias no lineales: una introducción a los solitones ópticos espaciales. *Revista mexicana de física E*, 60(1):39–50.
- [Malomed, 2002] Malomed, B. A. (2002). Variational methods in nonlinear fiber optics and related fields. *Progress in optics*, 43:71–194.

- [Maneuf et al., 1988] Maneuf, S., Desailly, R., and Froehly, C. (1988). Stable self-trapping of laser beams: observation in a nonlinear planar waveguide. *Optics communications*, 65(3):193–198.
- [Mollenauer et al., 1980] Mollenauer, L. F., Stolen, R. H., and Gordon, J. P. (1980). Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers. *Physical Review Letters*, 45(13):1095.
- [Munteanu and Donescu, 2006] Munteanu, L. and Donescu, S. (2006). *Introduction to soliton theory: applications to mechanics*, volume 143. Springer Science & Business Media.
- [Nikolov et al., 2004] Nikolov, N. I., Neshev, D., Królikowski, W., Bang, O., Rasmussen, J. J., and Christiansen, P. L. (2004). Attraction of nonlocal dark optical solitons. *Optics letters*, 29(3):286–288.
- [Peccianti et al., 2000] Peccianti, M., De Rossi, A., Assanto, G., De Luca, A., Umeton, C., and Khoo, I. (2000). Electrically assisted self-confinement and waveguiding in planar nematic liquid crystal cells. *Applied Physics Letters*, 77(1):7–9.
- [Pecseli and Rasmussen, 1980] Pecseli, H. and Rasmussen, J. J. (1980). Nonlinear electron waves in strongly magnetized plasmas. *Plasma Physics*, 22(5):421.
- [Pedri and Santos, 2005] Pedri, P. and Santos, L. (2005). Two-dimensional bright solitons in dipolar bose-einstein condensates. *Physical review letters*, 95(20):200404.
- [Russell, 1844] Russell, J. S. (1844). *Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*.
- [Segev et al., 1992] Segev, M., Crosignani, B., Yariv, A., and Fischer, B. (1992). Spatial solitons in photorefractive media. *Physical Review Letters*, 68(7):923.
- [Sinkin et al., 2003] Sinkin, O. V., Holzlohner, R., Zweck, J., and Menyuk, C. R. (2003). Optimization of the split-step fourier method in modeling optical-fiber communications systems. *Journal of lightwave technology*, 21(1):61.
- [Snyder and Mitchell, 1997] Snyder, A. W. and Mitchell, D. J. (1997). Accessible solitons. *Science*, 276(5318):1538–1541.
- [Swartzlander Jr and Law, 1992] Swartzlander Jr, G. and Law, C. (1992). Optical vortex solitons observed in kerr nonlinear media. *Physical Review Letters*, 69(17):2503.
- [Torruellas et al., 1995] Torruellas, W. E., Wang, Z., Hagan, D. J., VanStryland, E. W., Stegeman, G. I., Torner, L., and Menyuk, C. R. (1995). Observation of two-dimensional spatial solitary waves in a quadratic medium. *Physical review letters*, 74(25):5036.

- [Towers and Malomed, 2002] Towers, I. and Malomed, B. A. (2002). Stable (2+ 1)-dimensional solitons in a layered medium with sign-alternating kerr nonlinearity. *JOSA B*, 19(3):537–543.
- [Ván and Fülöp, 2005] Ván, P. and Fülöp, T. (2005). Weakly non-local fluid mechanics: the schrödinger equation. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 462(2066):541–557.
- [Washburn, 2002] Washburn, B. R. (2002). *Dispersion and nonlinearities associated with supercontinuum generation in microstructure fibers*.
- [Weideman and Herbst, 1986] Weideman, J. and Herbst, B. (1986). Split-step methods for the solution of the nonlinear schrödinger equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23(3):485–507.
- [Whitham, 2011] Whitham, G. B. (2011). *Linear and nonlinear waves*, volume 42. John Wiley & Sons.
- [Yakimenko et al., 2006] Yakimenko, A., Lashkin, V., and Prikhodko, O. (2006). Dynamics of two-dimensional coherent structures in nonlocal nonlinear media. *Physical Review E*, 73(6):066605.
- [Zabusky and Kruskal, 1965] Zabusky, N. J. and Kruskal, M. D. (1965). Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical review letters*, 15(6):240.
- [Zakharov and Shabat, 1972] Zakharov, V. and Shabat, A. (1972). Zh. é ksp. teor. fiz. 61, 118 1971 sov. phys. *JETP*, 34:62.

Apéndice A

Códigos Numéricos

A.1 Método Numérico Variacional

```
function A=numvar(lambda ,Lx ,p1 ,p2 ,m, alph , medio)
Nl=1;
wm=10000;
lambda=80;
% Tolerancia or error en la estimación %
tol=1e-6;

Ly=Lx; N_int=1024/4;
dx=Lx/N_int; dy=Ly/N_int;
gral_space_x=linspace(-N_int/2,N_int/2-1,N_int);
gral_space_y=linspace(-N_int/2,N_int/2-1,N_int);
X =gral_space_x*dx; Y =gral_space_y*dy;
[x,y]=meshgrid(X,Y);

% Espacio de frecuencias %
dkx = 2*pi/Lx; dky = 2*pi/Ly;
KX= gral_space_x*dkx; KY= gral_space_y*dky;
[kx ,ky]=meshgrid(KX,KY);

r=sqrt(x.^2+y.^2);
th=atan2(y,x);
m=1; alph=0;
U=@(A,l1) A(1,l1)*r.^m.*exp(-r.^2./(A(2,l1)^2)).*exp
(1i*(m*th + i*alph*cos(m*th)));
A_n_number=2;
```

```

% Medio no local Gaussiano
rho=1;
sigma=1;
R=@(wm) exp(-r.^2/sigma.^2)/pi/sigma.^2;
NL=@(U,R) -1/2*rho*abs(U).^2.*real(fftshift(iff2(
    fft2(R).*fft2(abs(U).^2)))*dx*dy;

% Especificar el número de coeficientes a optimizar en el
  Ansatz %
A=zeros(A_n_number,Nl);
A(1,1)=p1;
A(2,1)=p2;

% Diferencias finitas para encontrar L_eff %
dA=zeros(A_n_number,Nl,A_n_number);
for q=1:A_n_number
    dA(q, :, q)=1e-5;
end

% Derivadas en el espacio real %
U_x=@(A,l1) ifft2(fftshift(1i*kx.*fftshift(fft2(U(A,l1)))));
U_y=@(A,l1) ifft2(fftshift(1i*ky.*fftshift(fft2(U(A,l1)))));

%Densidad Lagrangiana para las coordenadas cartesianas %
L=@(wm,A,l1) (lambda*abs(U(A,l1)).^2+a*(abs(U_x(A,l1)).^2+abs(U_y(A,l1)).^2)+b*NL(U(A,l1),R(wm(l1))));

% Integración numérica %
L_eff_f=@(wm,A,l1) Lx*Ly*mean(mean(L(wm,A,l1)));

% Diferencias finitas centradas para L_eff %
d_An_L_eff_f=@(wm,A,l1,dA,n) (L_eff_f(wm,A+dA(:, :, n),l1) -
    L_eff_f(wm,A-dA(:, :, n),l1))/(2*dA(n,1,n));

% Segundas derivadas m,n de L_eff %
d2_An_m_L_eff=@(wm,A,l1,dA,n,m) (L_eff_f(wm,A+1/2*dA(:, :, n)
    +1/2*dA(:, :, m),l1) - L_eff_f(wm,A-1/2*dA(:, :, n)+1/2*dA
    (:, :, m),l1) - L_eff_f(wm,A+1/2*dA(:, :, n)-1/2*dA(:, :, m),
    l1) + L_eff_f(wm,A-1/2*dA(:, :, n)-1/2*dA(:, :, m),l1) )/(dA
    (n,1,n)*dA(m,1,m));

```

```

% Inialización de variables %
l1=1; error=Inf(A_n_number , N1);
N_max=100;
for l1=1:N1
    if l1==2
        A(:, l1)=A(:, l1 -1);
    elseif l1>2
        A(:, l1)=A(:, l1 -1)+(A(:, l1 -1)-A(:, l1 -2));
    end
    N_m=1;
%% Método Newton-Raphson Multivariable con matriz
    Hessiana
while (N_m<=N_max)&&(sum(abs(error(:, l1))>tol))
    L_eff(l1)=L_eff_f(wm,A, l1);
    for m1=1:A_n_number
        for n=m1+1:A_n_number
            H_nm_L_eff(n, m1)=d2_An_m_L_eff(wm,A(:, :), l1 ,dA,
                n, m1);
            H_nm_L_eff(m1, n)=H_nm_L_eff(n, m1);
        end
        H_nm_L_eff(m1, m1)=(L_eff_f(wm,A(:, :)+dA(:, :, m1),
            l1) - 2*L_eff(l1)+L_eff_f(wm,A(:, :)-dA(:, :, m1)
            ), l1))/dA(m1, 1, m1)^2;
        Grad_L_eff(m1, l1)=d_An_L_eff_f(wm,A(:, :), l1 ,dA, m1
            );
    end

    A_dummy(:, l1)=A(:, l1);
    A(:, l1)=A(:, l1)-H_nm_L_eff^-1*Grad_L_eff(:, l1) . ' . ';
    error(:, l1)=(A(:, l1)-A_dummy(:, l1))./A(:, l1);
    N_m=N_m+1;
end
end

save Variation A error lambda wm Lx m alph medio
end

```

A.2 Split Step de Fourier

```
function ssf_tesis_2D(distancia ,tv)

Nx= 2^7;    Ny= 2^7;
Ly=10;     Lx=Ly;
dx = Lx/Nx; dy = Ly/Ny;
dkx = 2*pi/Lx; dky = 2*pi/Ly;
gral_space_x=linspace(-Nx/2,Nx/2-1,Nx); gral_space_y=linspace
    (-Ny/2,Ny/2-1,Ny);
X =gral_space_x*dx;    Y =gral_space_y*dy;
KX= gral_space_x*dkx; KY= gral_space_y*dky;
[x,y]=meshgrid(X,Y);
[kx,ky]=meshgrid(KX,KY);

r=sqrt(x.^2+y.^2);
th=atan2(y,x);

    %Carga archivos del método numérico variacional
load Variation.mat

a=A(1);
b=A(2);

    % Perfil sin corrección del momentum
u=a*r.^m.*exp(-r.^2./b^2).*exp(1i*(m*th + 1i*alph*cos(m*th
    )));

    % Factor de correccion
vv=ly_a/pow_a;

    % Perfil con la corrección de momentum
u=a*r.^m.*exp(-r.^2./b^2).*exp(1i*(m*th + 1i*alph*cos(m*th
    ))).*exp(1i*vv*y);

sigma = 1;
nonlin = @(f) ifftshift( ifft2( ( fft2( exp(-r.^2/sigma^2) ) .*
    fft2( abs(f).^2 ) ) ) / sigma^2 / pi ) * dx * dy;
distancia=20;
dz=dx*dy/4;
```



```

%Número de segmentos a ser usados en el split-step Fourier
:
pasos_totales = ceil(distancia/dz);
capas=100;
J=floor(pasos_totales/capas);

Dop = -1i*(kx.^2+ky.^2);
uact(:, :, 1) = u;
h=1;

for paso = 1:pasos_totales

    %Método Split Step Fourier
    Nop = 1i*nonlin(u);
    u = exp(dz*Nop).*u;
    A = fftshift(fft2(u));
    A = exp(dz * Dop).*A;
    u = ifft2(fftshift(A));
    if mod(paso, J) == 0
        uact(:, :, h) = u;
        if tv==1
            end
        h=1+h;
    end

    if paso==5
        tiempo1=toc;

    end

end

potencia=sum(sum(uact(:, :, capas).^2))*dx*dy;
save propagacion x y uact aviobj distancia Lx Ly potencia
sigma

```