UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CCNN Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA.

TRABAJO DE GRADO:

TEOREMAS BÁSICOS DE ANÁLISIS REAL Y SOLUCIÓN DE EJERCICIOS.

PRESENTADO POR:

WILBER EDILBERTO MARTÍNEZ ARGUETA

ELVIS ISAAC RAMÍREZ MORALES

PARA OPTAR AL GRADO DE :

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

DOCENTE DIRECTOR :

LIC. JOSÉ FREDY VÁSQUEZ VÁSQUEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, AGOSTO DE 2020

SAN MIGUEL EL SALVADOR CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

MSC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

RECTOR

PHD. RAÚL ERNESTO AZCÚNAGA LÓPEZ

VICE - RECTOR ACADÉMICO

ING. JUAN ROSA QUINTANILLA

VICE - RECTOR ADMINISTRATIVO

ING. FRANCISCO ALARCÓN

SECRETARIO GENERAL

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN

FISCAL GENERAL

LIC. LUIS ANTONIO MEJÍA LIPE

DEFENSOR DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

LIC. CRISOBAL HERNÁN RIOS BENÍTEZ

DECANO

LIC. OSCAR VILLALOBOS

VICE - DECANO

LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA

SECRETARIO INTERINO

Índice general

Introducción

La matemática es la base fundamental para entender nuestro entorno, además de desarrollar la intuición y el sentido crítico, constituyen un plano insustituible de formación en el rigor, formalismo y razonamiento.

El estudio bibliográfico se inicia con los conceptos básicos de la teoría de conjuntos partiendo de ello, se puede construir todos los sistemas numéricos, funciones, cálculo, y otras áreas de las matemáticas. En las secciones de conceptos básicos de teoría de conjuntos se establecen operaciones entre conjuntos y se proporcionan definiciones precisas de conceptos familiares tales como unión e intersección. Además de las operaciones de conjuntos extendidos y familias indexadas de conjuntos, extenderemos las operaciones de unión e intersección a colecciones de conjuntos y mostrar cómo usar índices para organizar una familia de conjuntos. Con lo anterior se abrirá paso al desarrollo de las relaciones de equivalencia y particiones las cuales nos permiten profundizar el tema de funciones y conjuntos de imágenes.

Ademas se trabaja las funciones y conjuntos de imágenes, y así poder dar apertura a las sucesiones, ya que son la base de la construcción de la prueba de la completitud de los números reales.

Consideramos el conjunto de los números reales como un campo (un conjunto de números con operaciones de suma y multiplicación) que tiene un orden (para que todos los números reales puedan formar una línea) y completo (para que no falten números en cualquier lugar a lo largo de recta numérica .

En la Completitud de $\mathbb{R}$ comenzamos con la idea de que hay tantos números reales y que siempre hay un límite para cada conjunto acotado, ademas se estudian los conceptos de supremo e ínfimo de un subconjunto de $\mathbb{R}$. La sección del Teorema de Heine-Borel como base fundamental el concepto de una vecindad el cual es un conjunto abierto. Ademas conocemos la definición de un conjunto compacto que nos ayuda para la prueba del teorema de Heine-Borel.

Luego para la demostración de la completud de $\mathbb{R}$, se estudia las sucesiones de Cauchy, que ayuda a la demostración del teorema de (Bolzano-Weierstrass). Toda sucesión acotada de números reales posee una subsucesión convergente.

Justificación

Basado en la experiencia adquirida como estudiante de la carrera de licenciatura en Matemática se ha considerado la dificultad en la comprensión de los teoremas básicos de análisis real.

Así el trabajo de tesis se realizara con la finalidad de ofrecer un nuevo documento de apoyo a estudiantes de la carrera de Licenciatura en Matemática, enfocado en el tema Teoremas Básicos de Análisis Real y Solución de Ejercicios que se fundamentan en los números reales, iniciando con una introducción a la teoría de conjuntos. Tras esto se definen los números reales axiomáticamente, o se construye con sucesiones.

Además, se tiene como eje principal explicar detalladamente los Teoremas Básicos de Análisis Real, con sus respectivas demostraciones paso a paso, para aplicarlos en la solución de ejercicios, y así obtener una mejor comprensión del tema.

También se pretende motivar a los estudiantes para que se interesen en el estudio de Análisis Matemático, mediante los Teoremas Básicos de Análisis Real.

Incluso se espera que, con el desarrollo de todos los conceptos, pruebas requeridas por los teoremas, corolarios y definiciones se logre enriquecer el conocimiento matemático de los interesados.

Objetivos

OBJETIVO GENERAL.

Hacer una revisión general de los Teoremas Básicos de Análisis Real.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Mostrar los preliminares básicos para introducir los Teoremas Básicos de Análisis Real.

Resolver ejercicios de cada sección para la mejor comprensión de la teoría.

Notaciones

$\in$	pertenencia de conjuntos.
$\neg$	Negación lógica.
$\forall$	Cuantificador universal.
$\emptyset$	Conjunto vació o conjunto nulo.
$A \subseteq B$	El conjunto A es subconjunto de un conjunto B.
$\mathscr{P}(A)$	El conjunto potencia de A.
U	Conjunto universal.
$A \cup B$	La unión del conjunto A y B.
$A \cap B$	La intersección del conjunto A y B.
$A - B$	La diferencia del conjunto A y B.
A^c	El complemento del conjunto A.
$A \times B$	El producto cruz del conjunto A y el conjunto$B$.
$\mathscr{A}, \mathscr{B}$	Familias de conjuntos.
$a\,R\,b$	La relación de a con b ó a está relacionado con b.
$Dom(R)$	Dominio de la relación R.
$Rang(R)$	Rango de la relación R.
R^{-1}	La relación inversa de R.
$S \circ R$	La composición de la relación R con la relación S.
x/R	Clase de x modulo R.
A/R	Clase de A modulo R.
$\sup(A)$	Supremo del conjunto A.
$\text{ínf}(A)$	Ínfimo del conjunto A.
$f : A \longrightarrow B$	f es una función del conjunto A al conjunto B.
$f\|_A$	La restricción de la función sobre un conjunto A.
$f(X)$	Conjunto de imágenes de X.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Sucesión de números reales.
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$	El campo de los números reales.
$B(a, \delta)$	La $\delta-$vecindad de a.
$intA$	El interior del conjunto A.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos básicos de la teoría de conjuntos

Suponemos que ha tenido cierta experiencia con conjuntos, notaciones de conjuntos y conjuntos comunes de números, como los enteros y los números reales. En general, las letras mayúsculas se utilizarán para denotar conjuntos y letras minúsculas para denotar los elementos en conjuntos. Para designar un conjunto, utilizamos la notación

$$\{x : p(x)\},$$

donde $p(x)$ es una proposición o enunciado sobre el elemento x. En tal caso un elemento x está o pertenece al conjunto si y sólo si la proposición $p(x)$ es verdadera. Por ejemplo, el conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ se puede escribir como

$$\{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ es impar y } x < 14\}.$$

El conjunto de todos los múltiplos enteros de 3 es el conjunto $3\mathbb{Z} = \{3z : z \in \mathbb{Z}\}$, y este conjunto contiene $0,\ 3, -3,\ 6, -6,\ 9, -9$, etc.

Definición 1.1.1. *Sea $\emptyset = \{x : x \neq x\}$. Entonces $\emptyset$ es el conjunto vació o conjunto nulo.*

Podríamos definir otras colecciones vacías, como $B = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ y } x^2 < 0\}$ pero pronto demostraremos que todas esas colecciones son iguales (vea el teorema 1.1.11), por lo que realmente hay un solo conjunto vacío.

Definición 1.1.2. *Se dice que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B y escribimos $A \subseteq B$ si y solo si cada elemento de A es un elemento de B. Si A no es un subconjunto de B, escribimos $A \nsubseteq B$.*

Ejemplo 1.1.3. Para $X = \{2, 4\}, Y = \{2, 3, 4, 5\}$ y $Z = \{2, 3, 6\}, X \subseteq Y$ y $X \nsubseteq Z$.

En símbolos, escribimos la definición de $A \subseteq B$ como $A \subseteq B \iff (\forall x)(x \in A \implies x \in B)$. Por lo tanto, una prueba de la declaración A $\subseteq$ B es a menudo una prueba directa, que toma la forma:

PRUEBA DIRECTA DE $A \subseteq B$

Sea x cualquier objeto.
Suponer que $x \in A$, y a partir de esto, concluir que $x \in B$.
Por lo tanto $A \subseteq B$.

Ejemplo 1.1.4. Sea $A = \{2, -3\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0\}$. Probar que $A \subseteq B$.

Demostración. Supongamos que $x \in A$, entonces $x = 2$ ó $x = -3$.

Para $x = 2$,

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= (2)^3 + 3(2)^2 - 4(2) - 12 \\ &= 8 + 12 - 8 - 12 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para $x = -3$,

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= (-3)^3 + 3(-3)^2 - 4(-3) - 12 \\ &= -27 + 27 + 12 - 12 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $x \in B$.

$\therefore A \subseteq B$. ■

Ejemplo 1.1.5. Sean a y b números enteros y sean $a\mathbb{Z}$ y $b\mathbb{Z}$ los conjuntos de todos los enteros múltiplos de a y b respectivamente. Pruebe que si a divide a b entonces $b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $x \in b\mathbb{Z}$. Como $x \in b\mathbb{Z}$, así $x = bz, z \in \mathbb{Z}$, pero $a \mid b$, de donde $b = ak, k \in \mathbb{Z}$, luego $x = bz = (ak)z = a(kz)$, entonces $x \in a\mathbb{Z}$.

$\therefore b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$. ■

Teorema 1.1.6.

(a) *Para cada conjunto A, se tiene $\emptyset \subseteq A$.*

(b) *Para cada conjunto A, se tiene $A \subseteq A$.*

(c) *Para los conjuntos A, B y C si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.*

Demostración. (a) Sea $x \in \emptyset$ (falso).
$(x \in \emptyset$ (falso) $\Longrightarrow x \in A)$ (Verdadero).

(b) Sea $x \in A$
$x \in A \Longrightarrow x \in A$
$\therefore A \subseteq A$.

(c) "$\subset$"
Supongamos que para los conjuntos A, B y $C, A \subseteq B$ y $B \subseteq C$.
Sea $x \in A$, como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$, dado que $B \subseteq C$ así $x \in C$. Por lo tanto $A \subseteq C$.

■

Definición 1.1.7. *Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos. En símbolos:*

$$A = B \Longleftrightarrow (\forall x) \ \ (x \in A \Longleftrightarrow x \in B) \ \Longleftrightarrow \ A \subseteq B \ \ \wedge \ \ B \subseteq A.$$

Para probar que $A = B$ se hace lo siguiente:

(i) Probar que $A \subseteq B$, y

(ii) Probar que $B \subseteq A$.

Ejemplo 1.1.8. Pruebe que $X = Y$ donde $X = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$ y $Y = \{-1, 1\}$.

Demostración.

(i) Si consideramos a los elementos de Y estos son soluciones de $x^2 - 1 = 0$, así $Y \subseteq X$.

(ii) Se demostrará que $X \subseteq Y$. Sea $t \in X$ por definición de X, t es solución de $x^2 - 1 = 0$ entonces $t^2 - 1 = 0$, se puede escribir como el producto de dos factores lineales, igualándolos a cero, $t - 1 = 0$ ó $t + 1 = 0$ de donde $t = 1$ ó $t = -1$ así podemos afirmar que $t \in Y$.
Por lo tanto $X \subseteq Y$. Por lo tanto $X = Y$.

■

Definición 1.1.9. *El conjunto B es un subconjunto propio del conjunto A si y sólo si $B \subseteq A$ y $A \neq B$. Para denotar que B es subconjunto propio de A se escribe $B \subset A$ ó $B \subsetneq A$.*

Ejemplo 1.1.10. Probar que si $x \notin B$ y $A \subseteq B$, entonces $x \notin A$.

Demostración. Razonemos por contradicción.
Sea $x \notin B$ y $A \subseteq B$.
Suponga que $x \in A$.
$x \in A \Longrightarrow x \in B$ $(\longrightarrow\!\longleftarrow)$.
Esto es una contradicción ya que por hipótesis $x \notin B$. Así lo supuesto es falso, lo cierto es que si $x \notin B$ y $A \subseteq B$, entonces $x \notin A$.

$\blacksquare$

Teorema 1.1.11. *Si A y B son conjuntos que no tienen ningún elemento, entonces $A = B$.*

Demostración. Como A no tiene ningún elemento entonces, decir que $x \in A$, es falso, por lo cual $(\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$ es cierto. Por lo tanto $A \subseteq B$.
De igual forma $(\forall x)(x \in B \Longrightarrow x \in A)$ es cierto, por lo tanto $B \subseteq A$. Por definición de igualdad de conjuntos $A = B$. $\blacksquare$

Teorema 1.1.12. *Para cualesquiera conjuntos A y B, si $A \subseteq B$ y $A \neq \emptyset$, entonces $B \neq \emptyset$.*

Demostración. Como $A \neq \emptyset$, así $\exists\, t \in A$. Además $A \subseteq B$, así $t \in B$, luego $B \neq \emptyset$. $\blacksquare$

Definición 1.1.13. *Sea A un conjunto. El conjunto potencia de A es el conjunto cuyos elementos son subconjuntos de A y se denota por $\mathscr{P}(A)$ por lo tanto*

$$\mathscr{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Ejemplo 1.1.14. Si $A = \{a, b, c\}$, entonces el conjunto potencia de A es

$$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Teorema 1.1.15. *Si A es un conjunto con n elementos, entonces $\mathscr{P}(A)$ es un conjunto con 2^n elementos.*

Demostración. Si $n = 0$, esto es si $A = \emptyset$, entonces $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset\}$, el cual es un conjunto que tiene $2^0 = 1$ elementos. Así para $n = 0$ es cierto el teorema.
Sea $n > 0$. Entonces $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.
Sea B un subconjunto de A. Como $x_i \in A$, existen dos posibilidades $x_i \in B$ ó $x_i \notin B$, así existen $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n-\text{veces}}$ maneras de que B sea subconjunto de A. Así $\mathscr{P}(A)$ tiene 2^n elementos. $\blacksquare$

Teorema 1.1.16. *Sean A y B conjuntos. Entonces $A \subseteq B$ si y sólo si $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$.*

Demostración. "$\Longrightarrow$".
Supongamos que $A \subseteq B$ probaremos que $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$.
Sea $X \in \mathscr{P}(A)$.

$$\begin{aligned} X \in \mathscr{P}(A) &\Longrightarrow X \subseteq A \subseteq B \\ &\Longrightarrow X \subseteq B, \text{ por teorema 1.1.6 inciso c)} \\ &\Longrightarrow X \in \mathscr{P}(B). \end{aligned}$$

$\therefore \mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$.

"$\Longleftarrow$".
Supongamos que $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$. Probemos que $A \subseteq B$.
Sea $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in A. &\Longrightarrow \{x\} \subseteq A \\ &\Longrightarrow \{x\} \in \mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B) \\ &\Longrightarrow \{x\} \in \mathscr{P}(B); \text{ por hipótesis} \\ &\Longrightarrow \{x\} \subseteq B \\ &\Longrightarrow x \in B. \end{aligned}$$

$\therefore A \subseteq B$. ■

Ejemplo 1.1.17. Sean A y B conjuntos. Probar que $A = B$ si y sólo si $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$.

Demostración. "$\Longrightarrow$ "
Mostraremos que para A y B conjuntos tal que $A = B$ implica que $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$.
Asumamos que $A = B$ y sea $X \in \mathscr{P}(A)$. Pero $X \in \mathscr{P}(A)$ implica $X \subseteq A$.
Como $X \subseteq A$ y $A = B$, entonces $X \subseteq B$, así $X \in \mathscr{P}(B)$. Por lo tanto $X \in \mathscr{P}(A)$ implica $X \in \mathscr{P}(B)$. Así $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$.
El razonamiento es similar para el caso en el que $\mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A)$.
Por lo tanto $A = B$ implica que $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$.
"$\Longleftarrow$ "
Ahora mostraremos que para A y B conjuntos con $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$ implica que $A = B$.
Supongamos que $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$. Sea $X \subseteq A$. Como $X \subseteq A$, implica que $X \in \mathscr{P}(A)$, luego como $X \in \mathscr{P}(A)$ y $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$, así $X \in \mathscr{P}(A)$ por lo que $X \subseteq B$. Por lo tanto $A \subseteq B$.
Similarmente podemos probar que $B \subseteq A$.
Así $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$ implica que $A = B$.
Por lo tanto $A = B$ si y sólo si $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$. ■

1.2. Sección de operadores

Definición 1.2.1 (Conjunto Universal)**.** *Es el conjunto de todos los elementos en discusión. También se le llama dominio de discusión o referencial y se denota por U.*

Definición 1.2.2. *Sean A y B conjuntos.*
La unión de A y B es el conjunto $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}$.
La intersección de A y B es el conjunto $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$.
La diferencia de A y B es el conjunto $A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$.

Ejemplo 1.2.3. Sean $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}, B = \{1, 3, 5, 9\}$.

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}, \\ A \cap B &= \{1, 5\}, \\ A - B &= \{2, 4, 7\}, \\ B - A &= \{3, 9\}. \end{aligned}$$

Se dice que dos conjuntos son disjuntos si no tienen elementos en común.

Definición 1.2.4. *Dos conjuntos A y B son disjuntos si y sólo si* $A \cap B = \emptyset$.

Observacion 1.2.5. Cuando se quiere probar que un conjunto es igual al conjunto vació, se sugiere al lector, que razone por contradicción. Suponer que el conjunto no es vació y a partir de ello llegar a una contradicción.
Así como se demostraran a continuación los literales c), j) del siguiente teorema.

Teorema 1.2.6. *Sean A, B, C conjuntos.*

(a) $A \subseteq A \cup B$.

(b) $A \cap B \subseteq A$.

(c) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(d) $A \cup \emptyset = A$.

(e) $A \cap A = A$.

(f) $A \cup A = A$.

(g) $A \cup B = B \cup A$.

(h) $A \cap B = B \cap A$.

(i) $A - \emptyset = A$.

(j) $\emptyset - A = \emptyset$.

(k) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(l) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(m) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(n) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(o) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

(p) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.

(q) $A \subseteq B \Longrightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$.

(r) $A \subseteq B \Longrightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$.

Demostración. (a) Sea $x \in A$.
Como $x \in A$, entonces $x \in A$ ó $x \in B$, así $x \in A \cup B$.
$\therefore A \subseteq A \cup B$.

(b) Sea $x \in A \cap B$. Como $x \in A \cap B$, entonces $x \in A$ y $x \in B$ por lo tanto $x \in A$.
$\therefore A \cap B \subseteq A$.

(c) Supongamos que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$.
Sea $x \in A \cap \emptyset$. Como $x \in A \cap \emptyset$, entonces $x \in A$ y $x \in \emptyset$, pero que x este en el conjunto vació es falso ya que el conjunto vació no tienen elementos. Así lo supuesto es falso.
$\therefore A \cap \emptyset = \emptyset$.

(d) "$\subset$ "
Sea $x \in A \cup \emptyset$. Como $x \in A \cup \emptyset$, entonces $x \in A$ o $x \in \emptyset$, pero $x \in \emptyset$ es falso puesto que el conjunto vacío no tiene elementos. Así $x \in A$.
Por lo tanto $A \cup \emptyset \subseteq A$.
"$\supset$ "
Sea $x \in A$. Como $x \in A$, entonces $x \in A$ o $x \in \emptyset$; porque $\emptyset \subseteq A$. Entonces $x \in A \cup \emptyset$. Por lo tanto $A \cup \emptyset = A$.

(e) "$\subset$"
Sea $x \in A \cap A$. Como $x \in A \cap A$ entonces, $x \in A$ y $x \in A$, entonces $A \cap A \subseteq A$.
"$\supset$"
Sea $x \in A$. Como $x \in A$, entonces $x \in A \cap A$.
$\therefore A \cap A = A$.

(f)

$$\begin{aligned} x \in A \cup A &\iff x \in A \vee x \in A \\ &\iff x \in A. \end{aligned}$$
$$\therefore A \cup A = A.$$

(g)

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff x \in A \vee x \in B \\ &\iff x \in B \vee x \in A \\ &\iff x \in B \cup A. \end{aligned}$$
$$\therefore A \cup B = B \cup A.$$

(h)

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\iff x \in A \wedge x \in B \\ &\iff x \in B \wedge x \in A \\ &\iff x \in B \cap A. \end{aligned}$$
$$\therefore A \cap B = B \cap A.$$

(i) "$\Longrightarrow$"
Sea $x \in A - \emptyset$, por definición de diferencia, $x \in A$ y $x \notin \emptyset$, así $x \in A$. Por lo tanto $A - \emptyset \subseteq A$.

"$\Longleftarrow$"
Sea $x \in A$, como $x \in A$ y $x \notin \emptyset$, así $x \in A - \emptyset$. Por lo tanto $A \subseteq A - \emptyset$.
$\therefore A - \emptyset = A$.

(j) Supongamos que $\emptyset - A \neq \emptyset$.
Como $\emptyset - A \neq \emptyset$. Entonces existe $x \in \emptyset - A$, así $x \in \emptyset$ y $x \notin A$, esto es una contradicción ya que el conjunto vació carece de elementos. Así lo supuesto es falso.
$\therefore \emptyset - A = \emptyset$.

(k)

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cup C) &\iff x \in A \vee x \in (B \cup C) \\
&\iff x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\
&\iff (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\
&\iff x \in (A \cup B) \vee x \in C \\
&\iff x \in (A \cup B) \cup C.
\end{aligned}$$

$\therefore A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(l)

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cap C) &\iff x \in A \wedge x \in (B \cap C) \\
&\iff x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \\
&\iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \\
&\iff x \in (A \cap B) \wedge x \in C \\
&\iff x \in (A \cap B) \cap C.
\end{aligned}$$

$\therefore A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(m)

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(n)

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \vee x \in (B \cap C) \\ &\iff x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\iff x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

$\therefore A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(o) "$\Longrightarrow$"
Supongamos $A \subseteq B$.
i) por literal (a) de este mismo teorema $B \subseteq A \cup B$.
ii) Sea $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ ó $x \in B$, como $A \subseteq B$ así $x \in B$ por lo tanto $A \cup B \subseteq B$ luego por i) y ii) $B = A \cup B$.

"$\Longleftarrow$"
Supongamos que $B = A \cup B$.
Por literal (a) de este mismo teorema $A \subseteq A \cup B = B$, por lo tanto $A \subseteq B$.
$\therefore A \subseteq B$ si y sólo si $A \cup B = B$.

(p) "$\Longrightarrow$"
Supongamos que $A \subseteq B$. Debemos demostrar que $A \cap B = A$.
Supongamos que $x \in A$, por hipótesis $A \subseteq B$, entonces $x \in B$ por lo tanto $x \in A$ y $x \in B$, así que $x \in A \cap B$. Esto muestra que $A \subseteq A \cap B$.
Ademas $A \cap B \subseteq A$ por literal (b) de este teorema. Por lo tanto $A \cap B = A$.

"$\Longleftarrow$"
Supongamos que $A \cap B = A$. Debemos demostrar que $A \subseteq B$, pero por literales (b) y (h) de este teorema $B \cap A \subseteq B$ y $B \cap A = A \cap B$. Por lo tanto $A \cap B \subseteq B$.
Además por hipótesis $A \cap B = A$, así que $A \subseteq B$.
Por lo tanto $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

(q) Supongamos que $A \subseteq B$ y $x \in A \cup C$, entonces $x \in A$ *ó* $x \in C$. Consideremos los dos casos.
Caso 1) Si $x \in A$, entonces $x \in B$ dado que $A \subseteq B$, entonces $x \in B$ *ó* $x \in C$ y entonces $x \in B \cup C$.

Caso 2) Si $x \in C$, entonces $x \in B$ *ó* $x \in C$ y entonces $x \in B \cup C$. En cualquier caso $x \in B \cup C$.
$\therefore A \cup C \subseteq B \cup C$.

(q) Supongamos que $A \subseteq B$ y $x \in A \cup C$, entonces $x \in A$ *ó* $x \in C$. Consideremos los dos casos.
Caso 1) Si $x \in A$, entonces $x \in B$ dado que $A \subseteq B$, entonces $x \in B$ *ó* $x \in C$ y entonces $x \in B \cup C$.

Caso 2) si $x \in C$, entonces $x \in B$ *ó* $x \in C$ y entonces $x \in B \cup C$. En cualquier caso $x \in B \cup C$.
$\therefore A \cup C \subseteq B \cup C$.

(r) Supongamos que $A \subseteq B$.
Sea $x \in A \cap C$, entonces $x \in A$ y $x \in C$.
Entonces $x \in B$ y $x \in C$, ya que $A \subseteq B$. Por lo tanto $x \in B \cap C$.
Por lo tanto $A \cap C \subseteq B \cap C$.

■

Definición 1.2.7. *Sea U el universo y $A \subseteq U$. El complemento de A es el conjunto $A^c = U - A$.*

El conjunto A^c es el conjunto de todos los elementos del universo que no están en A.

Ejemplo 1.2.8. Sea $U = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$. Para el conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$, tenemos: $A^c = \{10, 12, 14, 16, \ldots\}$.
Pero si el universo es el conjunto de los números naturales, es decir, $U = \mathbb{N}$, entonces

$$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, \ldots\}.$$

Observacion 1.2.9. $x \in U - A \Longleftrightarrow x \in U \wedge x \notin A$ *y* $x \notin U - A \Longleftrightarrow x \notin U \vee x \in A$.

Teorema 1.2.10. *Sea U el universo y sean A y B subconjuntos de U. Entonces:*

(a) $(A^c)^c = A$.

(b) $A \cup A^c = U$.

(c) $A \cap A^c = \emptyset$.

(d) $A - B = A \cap B^c$.

(e) $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$.

(f) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(g) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(h) $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^c$.

Demostración. (a) "$\subset$ "
Sea x un elemento de U. Entonces $x \in (A^c)^c$.

$$\begin{aligned} x \in (A^c)^c &\implies x \notin A^c \quad \text{Definición de complemento} \\ &\implies \neg(x \in A^c) \quad \text{Negación} \\ &\implies \neg(x \notin A) \quad \text{Definición de complemento} \\ &\implies \neg\neg(x \in A) \quad \text{Negación} \\ &\implies x \in A \;\; \text{Doble negación.} \end{aligned}$$

"$\supset$ "
Sea $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in A &\implies x \notin U \vee x \in A \\ &\implies x \notin U - A \\ &\implies x \notin A^c \\ &\implies x \in U \wedge x \notin A^c \\ &\implies x \in U - A^c \\ &\implies x \in (A^c)^c. \end{aligned}$$

$\therefore A \subset (A^c)^c$.

$\therefore (A^c)^c = A$.

(b) "$\subset$"
Sea $x \in A \cup A^c$.

$$\begin{aligned} x \in A \cup A^c \quad &\implies \quad x \in A \vee x \in A^c \\ \mathit{Caso}\ 1 \quad &: x \in A, \text{entonces } x \in U \text{ ya que } A \subseteq U. \\ \text{Caso } 2 \quad &: x \in A^c, \text{entonces } x \in U - A, \text{así } x \in U. \end{aligned}$$

$\therefore A \cup A^c \subseteq U$.

"$\supset$ "

Sea $x \in U$.

$$\begin{aligned} x \in U &\implies (x \in U) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \\ &\implies (x \in U \wedge x \in A) \vee (x \in U \wedge x \notin A) \\ &\implies x \in A \vee x \in U - A \\ &\implies x \in A \vee x \in A^c \\ &\implies x \in A \cup A^c \\ &\therefore \quad U \subseteq A \cup A^c. \end{aligned}$$

$\therefore U = A \cup A^c$.

(c) Razonemos por contradicción.
Supongamos que $A \cap A^c \neq \emptyset$, así $A \cap A^c$ tiene por lo menos un elemento.
Sea $x \in A \cap A^c$.

$$\begin{aligned} x \in A \cap A^c &\implies x \in A \wedge x \in A^c \\ &\implies x \in A \wedge x \in U - A \\ &\implies x \in A \wedge (x \in U \wedge x \notin A) \\ &\implies (x \in A \wedge x \in U) \wedge x \notin A \\ &\implies (x \in U \wedge x \in A) \wedge x \notin A \\ &\implies x \in U \wedge (x \in A \wedge x \notin A). \end{aligned}$$

Pero x no puede estar y no estar al mismo tiempo en el conjunto A, esto es una contradicción.
Por lo tanto lo supuesto es falso, lo cierto es que $A \cap A^c = \emptyset$.
$\therefore \ A \cap A^c = \emptyset$.

(d) "$\subset$"
Sea $x \in A - B$.

$$\begin{aligned} x \in A - B &\implies x \in A \wedge x \notin B \\ &\implies x \in A \wedge x \in U - B \\ &\implies x \in A \wedge x \in B^c \\ &\implies x \in A \cap B^c. \end{aligned}$$

$\therefore A - B \subseteq A \cap B^c$.

"$\supset$"
Sea $x \in (A \cap B^c)$.

$$\begin{aligned} x \in A \cap B^c &\implies x \in A \wedge x \in B^c \\ &\implies x \in A \wedge x \in U - B \\ &\implies x \in A \wedge (x \in U \wedge x \notin B) \\ &\implies (x \in A \wedge x \in U) \wedge x \notin B \\ &\implies x \in (A \cap U) \wedge x \notin B \\ &\implies x \in A \wedge x \notin B \\ &\implies x \in A - B. \end{aligned}$$

$$\therefore A \cap B^c \subseteq A - B.$$

$\therefore A - B = A \cap B^c$.

(e) "$\Longrightarrow$"
Para A y B conjuntos se tiene que $A \subseteq B$.
Sea $x \in B^c$.

$$\begin{aligned} x \in B^c &\implies x \in U - B \\ &\implies x \in U \wedge x \notin B \\ &\implies x \in U \wedge x \notin A; \quad \text{por hipótesis, } A \subseteq B \\ &\implies x \in U - A \\ &\implies x \in A^c. \end{aligned}$$

$$\therefore B^c \subseteq A^c.$$

"$\Longleftarrow$"
Para A y B conjuntos se tiene que $B^c \subseteq A^c$.
Sea $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in A &\implies x \notin U - A \\ &\implies x \notin A^c \\ &\implies x \notin B^c; \text{por hipótesis, } B^c \subseteq A^c \\ &\implies x \notin U - B \\ &\implies x \in B. \end{aligned}$$

$$\therefore A \subseteq B.$$

$\therefore A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$.

(f) "$\subset$"
Sea $x \in (A \cup B)^c$.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\implies x \in U - (A \cup B) \\ &\implies x \in U \wedge x \notin (A \cup B) \\ &\implies x \in U \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \\ &\implies (x \in U \wedge x \notin A) \wedge x \notin B \\ &\implies x \in (U - A) \wedge x \in (U - B) \\ &\implies x \in A^c \wedge x \in B^c \\ &\implies x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

$\therefore (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.

"$\supset$"
Sea $x \in A^c \cap B^c$.

$$\begin{aligned} x \in A^c \cap B^c &\implies x \in A^c \wedge x \in B^c \\ &\implies x \in U - A \wedge x \in U - B \\ &\implies (x \in U \wedge x \notin A) \wedge (x \in U \wedge x \notin B) \\ &\implies x \in U \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \\ &\implies x \in U \wedge x \notin (A \cup B) \\ &\implies x \in U - (A \cup B) \\ &\implies x \in (A \cup B)^c. \end{aligned}$$

$\therefore A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$.

$\therefore (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(g) "$\subset$"
Sea $x \in (A \cap B)^c$.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\implies x \in U - (A \cap B) \\ &\implies x \in U \wedge x \notin (A \cap B) \\ &\implies x \in U \wedge x \notin A \vee x \notin B \\ &\implies (x \in U \wedge x \notin A) \vee x \notin B \\ &\implies (x \in U \wedge x \notin A) \vee x \in U - B \\ &\implies x \in U - A \vee x \in U - B \\ &\implies x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\implies x \in A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

$\therefore (A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

"$\supset$"

Sea $x \in A^c \cup B^c$.

$$\begin{aligned} x \in A^c \cup B^c &\Longrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\Longrightarrow x \in U - A \vee x \in U - B \\ &\Longrightarrow x \notin A \vee x \notin B \\ &\Longrightarrow x \notin (A \cap B) \\ &\Longrightarrow x \in U - (A \cap B) \\ &\Longrightarrow x \in (A \cap B)^c. \end{aligned}$$

$\therefore A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.

$\therefore (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(h) "$\Longrightarrow$"
Para A y B conjuntos se tiene que $A \cap B = \emptyset$.
Sea $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in A &\Longrightarrow x \notin B, \text{ ya que } A \cap B = \emptyset \\ &\Longrightarrow x \in U - B \\ &\Longrightarrow x \in B^c. \end{aligned}$$

$\therefore A \subseteq B^c$.

"$\Longleftarrow$"
Razonemos por contradicción.
Dados A y B conjuntos se tiene que $A \subseteq B^c$. Suponga que $A \cap B \neq \emptyset$.
Sea $x \in A \cap B$.

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Longrightarrow x \in A \wedge x \in B \\ &\Longrightarrow x \in B^c \wedge x \in B \text{ ya que } A \subseteq B^c. \end{aligned}$$

Pero x no puede pertenecer a B y a su complemento a la misma vez, por lo que hemos llegado a una contradicción. Así lo supuesto es falso, lo cierto es que $A \cap B = \emptyset$.
$\therefore A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $A \subseteq B^c$.

■

Definición 1.2.11. *Sean A y B conjuntos. El producto (o producto cruz) de A y B es:*

$$A \times B = \{(a, b) : (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

Se lee $A \times B$ como "A cruz B."

El conjunto $A \times B$ es el conjunto de todos los pares ordenados que tienen la abscisa en A y ordenada en B. El producto cruz se llama producto cartesiano de A y B, en honor a René Descartes.

Ejemplo 1.2.12. Si $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 4\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}.$$

Teorema 1.2.13. *Si A,B,C y D son conjuntos, entonces:*

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(c) $A \times \emptyset = \emptyset$.

(d) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(e) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

(f) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$.

Demostración.

(a)

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \cup C) &\iff x \in A \wedge y \in (B \cup C) \\
&\iff x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\
&\iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
&\iff (x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in A \times C \\
&\iff (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C).
\end{aligned}$$

$\therefore (A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

(b)

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \cap C) &\iff x \in A \wedge y \in (B \cap C) \\
&\iff x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C) \\
&\iff (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \\
&\iff (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in (A \times C) \\
&\iff (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C).
\end{aligned}$$

$\therefore (A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$.

(c) Supongamos que $A \times \emptyset \neq \emptyset$.
Como $A \times \emptyset \neq \emptyset$, existe $(x, y) \in A \times \emptyset$, entonces $x \in A$ e $y \in \emptyset$ lo cual es absurdo por que no hay elementos que pertenecen al conjunto vació. Así lo supuesto es falso, lo cierto es que $A \times \emptyset = \emptyset$.
$\therefore A \times \emptyset = \emptyset$.

(d)

$$\begin{aligned}
(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D) &\iff (x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\in(C\times D)\\
&\iff (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in C\wedge y\in D)\\
&\iff (x\in A\wedge x\in C)\wedge(y\in B\wedge y\in D)\\
&\iff x\in(A\cap C)\wedge y\in(B\cap D)\\
&\iff (x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D).
\end{aligned}$$

$\therefore (A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

(e)

$$\begin{aligned}
(x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D). &\iff (x,y)\in(A\cup C)\wedge(x,y)\in(B\cup D)\\
&\iff (x\in A\vee y\in B)\wedge(x\in C\vee y\in D)\\
&\iff (x\in A\wedge x\in B)\vee(y\in C\wedge y\in D)\\
&\iff x\in(A\times B)\vee y\in(C\times D)\\
&\iff (x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D).
\end{aligned}$$

$\therefore (A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$.

(f)

$$\begin{aligned}
(x,y)\in(A\times B)\cap(B\times A) &\iff (x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\in(B\times A)\\
&\iff (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in B\wedge y\in A)\\
&\iff (x\in A\wedge x\in B)\wedge(y\in A\wedge y\in B)\\
&\iff x\in(A\cap B)\wedge y\in(A\cap B)\\
&\iff (x,y)\in(A\cap B)\times(A\cap B).
\end{aligned}$$

$\therefore (A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(A\cap B)$.

■

1.3. Familias de conjuntos y Familias Indexadas de Conjuntos

Definición 1.3.1 (Familia de conjuntos)**.** *Un conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos se denomina familia de conjuntos.*

Observacion 1.3.2. Usaremos letras de la forma $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, para denotar familias de conjuntos.

Ejemplo 1.3.3. $\mathscr{A} = \{\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{3,6\},\{2,3,6,7,9,10\}\}$.
$\mathscr{A}$ es una familia formada por cuatro conjuntos $\{1,2,3\}$, $\{3,4,5\}$,$\{3,6\}$, $\{2,3,6,7,9,10\}$.
Notemos que $5 \in \{3,4,5\}$, y $\{3,4,5\} \in \mathscr{A}$ pero el elemento $5 \notin \mathscr{A}$.
El conjunto $\mathscr{B} = \{(-x,x) : x \in \mathbb{R} \text{ y } x > 0\}$, es una familia de intervalos abiertos, los conjuntos $(-1,1)$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ y $(-5,5)$ son elementos de $\mathscr{B}$.

Definición 1.3.4. *Sea $\mathscr{A}$ una familia de conjuntos. La unión sobre $\mathscr{A}$ es*

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A = \{x : x \in A \text{ para algún } A \in \mathscr{A}\}.$$

Usando esta definición, para cualquier objeto x podemos escribir:

$$x \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \Longleftrightarrow (\exists A \in \mathscr{A})(x \in A).$$

Esta declaración simbólica expresa la relación directa entre la unión sobre una familia y el cuantificador $\exists$ existencial. Para mostrar que un objeto está en la unión de una familia, debemos mostrar la existencia de al menos un conjunto en la familia que contiene el objeto.

Definición 1.3.5. *Sea $\mathscr{A}$ una familia de conjuntos. La Intersección sobre $\mathscr{A}$ es*

$$\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A = \{x : x \in A \text{ para todo } A \in \mathscr{A}\}.$$

Para la intersección sobre una familia, escribimos:

$$x \in \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \Longleftrightarrow (\forall A \in \mathscr{A})(x \in A).$$

Ejemplo 1.3.6. Para la familia $\mathscr{A} = \{\{r,k,s,t,a\},\{k,d,s\}\}$, que esta formada por los dos conjuntos $\{r,k,s,t,a\}$ y $\{k,d,s\}$. Entonces la unión es $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A = \{r,k,s,t,a,d\}$ y la intersección es $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A = \{k,s\}$.

Teorema 1.3.7. *Para cada conjunto B en una familia $\mathscr{A}$ no vacía de conjuntos.*

(a) $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq B$.

(b) $B \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$.

(c) $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$.

Demostración. (a) Sea $\mathscr{A}$ una familia de conjuntos y $B \in \mathscr{A}$.

i) Consideremos el caso cuando $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A = \emptyset$.

Como $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A = \emptyset$, entonces $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq B$; puesto que $\emptyset$ es subconjunto de todo conjunto.

ii) Ahora cuando $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \neq \emptyset$.

Sea $x \in \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$. Como $x \in \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$, entonces $x \in A$; $\forall A \in \mathscr{A}$, pero como $B \in \mathscr{A}$, luego $x \in B$.

Por lo tanto $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq B$.

(b) Dado $\mathscr{A}$ una familia de conjuntos y $B \in \mathscr{A}$.
Sea $x \in B$. Como $x \in B$, entonces $x \in A$ para algún conjunto A en $\mathscr{A}$ (tomando $A = B \in \mathscr{A}$). Así $x \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$, por lo tanto $B \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$.

(c) Como $\mathscr{A}$ es una familia no vacía. Tomaremos un conjunto $C \in \mathscr{A}$.
Probaremos que $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq C \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$.
Del inciso a) de este teorema se sabe que como $C \in \mathscr{A}$ entonces $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq C$.
Ahora como $C \in \mathscr{A}$por el inciso b) de este teorema $C \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$.
Luego $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq C \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$, por lo tanto $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ en virtud del teorema 1.1.6 c).

■

Definición 1.3.8. *Sea Δ un conjunto no vacío tal que para cada $\alpha \in \Delta$ existe un conjunto correspondiente A_α. La familia $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es una familia indexada de conjuntos. El conjunto Δ se llama el conjunto de indexación y cada $\alpha \in \Delta$ es un índice.*

La indexación es un fenómeno común en la vida cotidiana. Supongamos que hay un edificio que tiene seis unidades de alquiler, etiquetadas de la letra A a la F. Hay un conjunto de personas que residen en ese apartamento. Estos conjuntos pueden indexarse por $\Delta = \{A, B, C, D, E, F\}$. Sea P_k el conjunto de personas que viven en el departamento k. Entonces $\mathscr{P} = \{P_k : k \in \Delta\}$ es una familia indexada de conjuntos. Un índice es simplemente una etiqueta que proporciona una forma conveniente de referirse a un determinado conjunto.

Ejemplo 1.3.9. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{n, n+1, 2n\}$. Entonces $A_1 = \{1, 2\}$ ya que se repite el número 2, $A_2 = \{2, 3, 4\}$, $A_3 = \{3, 4, 6\}, \ldots, A_i = \{i, i+1, 2i\}$. Para todo $1 \leq i \leq n$. El conjunto con índice 10 es $A_{10} = \{10, 11, 20\}$. Excepto por el conjunto A_1 cada conjunto de la familia $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ tiene 3 elementos. Para formar la familia de conjuntos para A_2, A_3, A_{10} y A_{15}, podemos cambiar el índice estableciéndolo de la siguiente manera: $\{A_2, A_3, A_{10}, A_{15}\} = \{A_i : i \in \{2, 3, 10, 15\}\}$.

Ejemplo 1.3.10. Para los conjuntos $A_1 = \{1, 2, 4, 5\}$, $A_2 = \{2, 3, 5, 6\}$ y $A_3 = \{3, 4, 5, 6\}$, el conjunto de índices ha sido elegido para ser $\Delta = \{1, 2, 3\}$. La familia $\mathscr{A}$ indexada por Δ es $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, A_3\} = \{A_i : i \in \Delta\}$. La familia $\mathscr{A}$ podría ser indexada por otro conjunto. Ejemplo, si $\Gamma = \{10, 21, \pi\}$, y $A_{10} = \{1, 2, 4, 5\}, A_{21} = \{2, 3, 5, 6\}$, y $A_\pi = \{3, 4, 5, 6\}$, entonces $\{A_i : i \in \Delta\} = \{A_i : i \in \Gamma\}$.

Ejemplo 1.3.11. Sea $\Delta = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y sea $A_x = \{2x+4, 8, 12-2x\}$ para cada $x \in \Delta$. Entonces $A_0 = \{4, 8, 12\}$, $A_1 = \{6, 8, 10\}$, $A_2 = \{8\}$, $A_3 = \{10, 8, 6\}$, $A_4 = \{12, 8, 4\}$. El conjunto de indexación tiene cinco elementos pero la familia indexada $\mathscr{A} = \{A_x : x \in \Delta\}$ tiene solo tres miembros, ya que $A_0 = \{4, 8, 12\} = A_4$ y $A_1 = \{6, 8, 10\} = A_3$.

Por los ejemplos anteriores, una familia indexada puede ser finita o infinita, el número de elementos en los conjuntos de miembros no tiene que ser el mismo y diferente índices no necesitan corresponder a diferentes conjuntos en la familia. Las operaciones de unión e intersección sobre familias de conjuntos se aplican a familias indexadas, aunque la notación es ligeramente diferente para una familia $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$.

Definición 1.3.12. *Sea $\mathscr{A}$ una familia indexada de conjuntos $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ se define $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ y $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A$.*

En otras palabras

$$x \in \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \Longleftrightarrow (\exists \alpha \in \Delta)(x \in A_\alpha).$$

$$x \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \Longleftrightarrow (\forall \alpha \in \Delta)(x \in A_\alpha).$$

Ejemplo 1.3.13. En el ejemplo anterior considera.

$$\Delta = \{0, 1, 2, 3, 4\}, A_\alpha = \{2\alpha + 4, 8, 12 - 2\alpha\}.$$

Para $\alpha \in \Delta$. Entonces $A_0 = \{4, 8, 12\}, A_1 = \{6, 8, 10\}, A_2 = \{8\}, A_3 = \{10, 8, 6\}$ y $A_4 = \{12, 8, 4\}$. La familia indexada es $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$.

La unión es $\bigcup_{A \in \Delta} A_\alpha = \{4, 6, 8, 10, 12\}$ y la intersección es $\bigcap_{A \in \Delta} A_\alpha = \{8\}$.

Ejemplo 1.3.14. Para cada número real x se define $B_x = [x^2, x^2+1]$. Entonces $B_{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$, $B_0 = [0,1]$, $B_{10} = [100, 101]$, así podemos seguir encontrando mas conjuntos B_x con x en los números reales. Ademas en este ejemplo podemos evidenciar que diferentes indices representan el mismo conjunto tales como $B_{-2} = B_2 = [4,5]$. También sucede que cada conjunto tiene elementos mayores o iguales a cero y diferentes.

Por lo tanto $\bigcap\limits_{x\in\mathbb{R}} B_x = \emptyset$ y $\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}} B_x = [0,\infty)$.

Ejemplo 1.3.15. Para $n \in \mathbb{N}$ y $\Delta = \mathbb{N}$, sea $A_n = \{n, n+1, 2n\}$. Entonces $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{2,3,4\}$, $A_3 = \{3,4,6\}$, podemos seguir el proceso hasta $A_n = \{n, n+1, 2n\}$.
Así

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \\
&= \{1,2\} \cup \{2,3,4\} \cup \{3,4,6\} \cup \cdots \cup \{n, n+1, 2n\} \cup A_{n+1} \cup \cdots \\
&= \{1,2,3,4,\cdots, n, n+1, 2n\} \cup A_{n+1} \cup \cdots \\
&= \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

$\therefore \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}.$

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots \\
&= \{1,2\} \cap \{2,3,4\} \cap \{3,4,6\} \cap \cdots \cap \{n, n+1, 2n\} \cap A_{n+1} \cap \cdots \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

$\therefore \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset.$

Observacion 1.3.16. Cuando $\Delta = \mathbb{N}$, así una familia indexada es $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ escribimos $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ en vez de escribir $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ por $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
También $A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \bigcup\limits_{i=2}^{4} A_i$ y $A_{11} \cap A_{12} \cap A_{13} \cap A_{14} \cap A_{15} = \bigcap\limits_{i=11}^{15} A_i$.

Ejemplo 1.3.17. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{n, n+1, n^2\}$ para $\mathscr{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ se tiene que $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{2,3,4\}$, $A_3 = \{3,4,9\}$, $A_4 = \{4,5,16\}$, $A_5 = \{5,6,25\}$, $A_6 = \{6,7,36\}$.

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=2}^{4} A_i &= A_2 \cap A_3 \cap A_4 \\
&= \{2,3,4\} \cap \{3,4,9\} \cap \{4,5,16\}. \\
&= \{4\}.
\end{aligned}$$

$$\therefore \bigcap_{i=2}^{4} A_i = \{4\}.$$

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots \\
&= \{1,2\} \cap \{2,3,4\} \cap \{3,4,9\} \cap \cdots \cap \{n, n+1, n^2\} \cap A_{n+1} \cdots \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

$$\therefore \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset.$$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=4}^{6} A_i &= A_4 \cup A_5 \cup A_6 \\
&= \{4,5,16\} \cup \{5,6,25\} \cup \{6,7,36\}. \\
&= \{4,5,6,7,16,25,36\}.
\end{aligned}$$

$$\therefore \bigcup_{i=4}^{6} A_i = \{4,5,6,7,16,25,36\}.$$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \\
&= \{1,2\} \cup \{2,3,4\} \cup \{3,4,9\} \cup \cdots \cup \{n, n+1, n^2\} \cup A_{n+1} \cdots \\
&= \{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}. \\
&= \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

$$\therefore \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}.$$

Teorema 1.3.18. *Sea* $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ *es una colección indexada de conjuntos. Entonces*

i) $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \subseteq A_\beta$ *para cada* $\beta \in \Delta$.

ii) $A_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ *para cada* $\beta \in \Delta$.

iii) $\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in\Delta} (A_\alpha)^c$.

vi) $\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Delta} (A_\alpha)^c$.

Demostración. i) "$\subset$"
Sea $\beta \in \Delta$ y sea $x \in \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$.

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha &\implies x \in A_\alpha \ \ \forall\alpha \in \Delta \\ &\implies x \in A_\beta. \\ \therefore \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \subseteq A_\beta. \end{aligned}$$

ii)"$\subset$"
Sea $\beta \in \Delta$ y sea $x \in A_\beta$.

$$\begin{aligned} x \in A_\beta &\implies \exists\, \beta \ \in \Delta : x \in A_\beta \\ &\implies \exists\, \alpha = \beta \in \Delta : x \in A_\alpha \\ &\implies x \ \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha. \\ \therefore A_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha. \end{aligned}$$

iii) "$\subset$ "Se probara que $\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Delta} (A_\alpha)^c$.

Sea $x \in \left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c$.

Sabemos que $x \in \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \iff x \in A_\alpha, \forall\alpha \in \Delta$, entonces al negar tenemos:

$$x \notin \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \iff (\exists\alpha \in \Delta), x \notin A_\alpha,$$

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c &\Longrightarrow x \in U \wedge x \notin \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \\
&\Longrightarrow x \in U \ \wedge (\exists\ \alpha \in \Delta)(x \notin A_\alpha) \\
&\Longrightarrow (\exists\ \alpha \in \Delta)(x \in A_\alpha^c) \\
&\Longrightarrow x \ \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} (A_\alpha)^c.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c \ \subseteq \ \bigcup_{\alpha\in\Delta} (A_\alpha)^c$.

"$\supset$ "Se probara que $\bigcup_{\alpha\in\Delta} (A_\alpha)^c \ \subseteq \ \left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c$.

Sea $x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} (A_\alpha)^c$.

$$\begin{aligned}
x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} (A_\alpha)^c &\Longrightarrow \exists\ \alpha \in \Delta : x \in (A_\alpha)^c \\
&\Longrightarrow x \in U \wedge (\exists\ \alpha \in \Delta), x \notin A_\alpha \\
&\Longrightarrow x \in U \wedge x \notin \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \\
&\Longrightarrow x \in \left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bigcup_{\alpha\in\Delta} (A_\alpha)^c \ \subseteq \ \left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c$.

$$\therefore \ \left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in\Delta} (A_\alpha)^c.$$

vi)

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c &\Longleftrightarrow x \notin A_\alpha, \forall\alpha \in \Delta \\
&\Longleftrightarrow x \in A_\alpha^c, \forall\alpha \in \Delta \\
&\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha\in\Delta} {A_\alpha}^c.
\end{aligned}$$

$\therefore \left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Delta} {A_\alpha}^c$. ■

Definición 1.3.19. *La familia indexada de conjuntos* $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ *es disjunta por pares si y sólo si para todo* $\alpha, \beta \in \Delta$, *o bien* $A_\alpha = A_\beta$ *ó* $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$.

Ejemplo 1.3.20. Tomemos $\mathscr{A} = \{B_1, B_2, B_3\}$, donde $B_1 = \{a, c, e\}$, $B_2 = \{d, g\}$ y $B_3 = \{b, f, h\}$. Como los conjuntos B_1, B_2, B_3 no tienen ningún elemento en común, así la familia indexada $\mathscr{A}$ es disjunta por pares.

Ejemplo 1.3.21. Supongamos $A_x = \{-x, x\}$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{D} = \{A_x : x \in \mathbb{R}\}$. Entonces $A_3 = \{-3, 3\} = \{3, -3\} = A_{-3}$ y $A_7 = \{-7, 7\} = \{7, -7\} = A_{-7}$. La familia $\mathscr{D}$ es disjunta por pares ya que si $A_x = A_y$, entonces $|x| = |y|$ y si $A_x \cap A_y = \emptyset$, entonces $|x| \neq |y|$.

Ejercicios resueltos.

Ejercicio 1.3.22. Encuentre la unión e intersección de cada una de las familias o colecciones de indices.

a) Sea $\mathscr{A} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{7, 9, 11, 13\}, \{8, 10, 12\}\}$

b) Para cada número natural.
Sea $A_n = \{5n, 5n + 1, 5n + 2 \ldots, 6n\}$, y sea $\mathscr{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$

c) Para cada número natural. Sea $A_n = (0, \frac{1}{n})$, y sea $\mathscr{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$

d) Para cada $n \in \mathbb{Z}$. Sea $A_n = (-n, \frac{1}{n})$, y sea $\mathscr{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Solución. a) Como la unión es $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A = \{x : x \in A \text{ para algún } A \in \mathscr{A}\}$.

$$\begin{aligned}
\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A &= \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} \cup \{7, 9, 11, 13\} \cup \{8, 10, 12\} \\
&= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigcap_{A \in \mathscr{A}} A &= \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} \cap \{7, 9, 11, 13\} \cap \{8, 10, 12\} \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

b) Sea $A_1 = \{5, 6\}, A_2 = \{10, 11, 12\}, A_3 = \{15, 16, 17, 18\}, A_4 = \{20, 21, 22, 23, 24\}, \ldots$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \ldots \\
&= \{5, 6\} \cup \{10, 11, 12\} \cup \{15, 16, 17, 18\} \cup \{20, 21, 22, 23, 24\} \cup \ldots \\
&= \{5, 6, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq 20\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A &= A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap\dots\\ &= \emptyset. \text{ Ya que los conjuntos no tienen ningún elemnto en común.}\end{aligned}$$

c) Como $A_1=(0,1), A_2=\left(0,\frac{1}{2}\right), A_3=\left(0,\frac{1}{3}\right)$, podemos observar que $A_{n+1}\subseteq A_n\forall n\in\mathbb{N}$. Así

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n &= A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup\dots\\ &= (0,1)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup\dots\\ &= (0,1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n &= A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap\dots\\ &= (0,1)\cap\left(0,\frac{1}{2}\right)\cap\left(0,\frac{1}{3}\right)\cap\left(0,\frac{1}{4}\right)\cap\dots\\ &= \emptyset.\end{aligned}$$

d) Como $A_1=(-1,1), A_2=\left(-2,\frac{1}{2}\right), A_3=\left(-3,\frac{1}{3}\right)$

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n &= A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup\dots\\ &= (-1,1)\cup\left(-2,\frac{1}{2}\right)\cup\left(-3,\frac{1}{3}\right)\cup\left(-4,\frac{1}{4}\right)\cup\dots\\ &= (-\infty,1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n &= A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap\dots\\ &= (-1,1)\cap\left(-2,\frac{1}{2}\right)\cap\left(-3,\frac{1}{3}\right)\cap\left(-4,\frac{1}{4}\right)\cap\dots\\ &= (-1,0].\end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.3.23. Sea $U=\mathbb{R}$ y sea $\mathscr{A}=\{A : A\subseteq\mathbb{R}\}$ una familia vacía, probar que.

a) Probar que $\displaystyle\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A=\emptyset$.

b) Probar que $\displaystyle\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A=\mathbb{R}$.

Demostración. a)
"$\subseteq$"Probemos que $\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq \emptyset$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A} = \{A : A \subseteq \mathbb{R}\} &\implies \emptyset \in \mathscr{A}\\ &\implies \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq \emptyset, \text{ por teorema (1.3.7)}\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq \emptyset$.
"$\supseteq$"Probemos que $\emptyset \subseteq \bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}} A$.
Por definición sabemos que $\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto. Así $\emptyset \subseteq \bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}} A$.
Por lo tanto $\emptyset \subseteq \bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}} A$.
Por lo tanto $\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}} A = \emptyset$.
b) "$\subseteq$"Probemos que $\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq \mathbb{R}$.
Sea $x \in \bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}} A$

$$\begin{aligned}x \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A &\iff \exists x \in A \text{ tal que } A \in \mathscr{A}\\ &\iff x \in \mathscr{A}\\ &\iff x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}} A = \mathbb{R}$. ■

Ejercicio 1.3.24. Sea $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$. Una familia de conjuntos, y sea B un conjunto probar que.

a) $B \cap \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta}(B \cap A_\alpha)$.

b) $B \cup \bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in\Delta}(B \cup A_\alpha)$.

Solución. a) "$\subseteq$ "Probemos que $B \cap \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta}(B \cap A_\alpha)$.

Sea $x \in B \cap \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$.

$$\begin{aligned} x \in B \cap \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha &\Longrightarrow x \in B \wedge x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \\ &\Longrightarrow x \in B \wedge x \in A_\alpha, \forall \alpha \in \Delta \\ &\Longrightarrow x \in (B \cap A_\alpha), \forall \alpha \in \Delta \\ &\Longrightarrow x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} (B \cap A_\alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto $B \cap \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Delta} (B \cap A_\alpha)$.

"$\supseteq$ "Probemos que $\bigcup_{\alpha\in\Delta} (B \cap A_\alpha) \subseteq B \cap \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$.
Sea $x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} (B \cap A_\alpha)$.

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} (B \cap A_\alpha) &\Longrightarrow x \in (B \cap A_\alpha), \forall \alpha \in \Delta \\ &\Longrightarrow x \in B \wedge x \in A_\alpha, \forall \alpha \in \Delta \\ &\Longrightarrow x \in B \wedge x \in A_\alpha, \forall \alpha \in \Delta \\ &\Longrightarrow x \in B \cap x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \end{aligned}$$

.

Por lo tanto $\bigcup_{\alpha\in\Delta} (B \cap A_\alpha) \subseteq B \cap \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$.
Por lo tanto $B \cap \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Delta} (B \cap A_\alpha)$.

b) Sea $x \in B \cup \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$.

$$\begin{aligned} x \in B \cup \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha &\Longleftrightarrow x \in B \vee x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \\ &\Longleftrightarrow x \in B \vee x \in A_\alpha, \forall \alpha \in \Delta \\ &\Longleftrightarrow x \in (B \cup A_\alpha), \forall \alpha \in \Delta \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha\in\Delta} (B \cup A_\alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto $B \cup \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\Delta} (B \cup A_\alpha)$. ■

Ejercicio 1.3.25. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 20\}$. De un ejemplo que cumpla las condiciones.

a) Una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X tal que $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A = \{1\}$ y $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A = X$.

b) Una familia $\mathscr{B}$ de 4 subconjuntos disjuntos de X tal que $\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B = X$.

Solución. a) Sea $A_1 = \{1,2\}$ y $A_2 = X - \{2\}$.

$\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A = A_1 \cap A_2 = \{1,2\} \cap X - \{2\} = \{1\}$

$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A = A_1 \cap A_2 = \{1,2\} \cap X - \{2\} = X.$

b) Sean $B_1 = \{1,2,3,4,5\}$, $B_2 = \{6,7,8,9,10\}$, $B_3 = \{11,12,13,14,15\}$ y
$B_4 = \{16,17,18,19,20\}$.
Entonces $\mathscr{B}$ está formada por 4 subconjuntos disjuntos de X así,

$$\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 = X.$$

■

1.4. Relaciones

Cuando hablamos de una relación en un conjunto, identificamos la noción de “a”está relacionado con “b”con el par ordenado (a,b). Para el conjunto de todas las personas, si Juan y María nacieron en el mismo día del año, entonces la pareja (Juan, María) está en la relación “tiene el mismo cumpleaños que”. Por lo tanto, una relación puede definirse simplemente como un conjunto de pares ordenados.

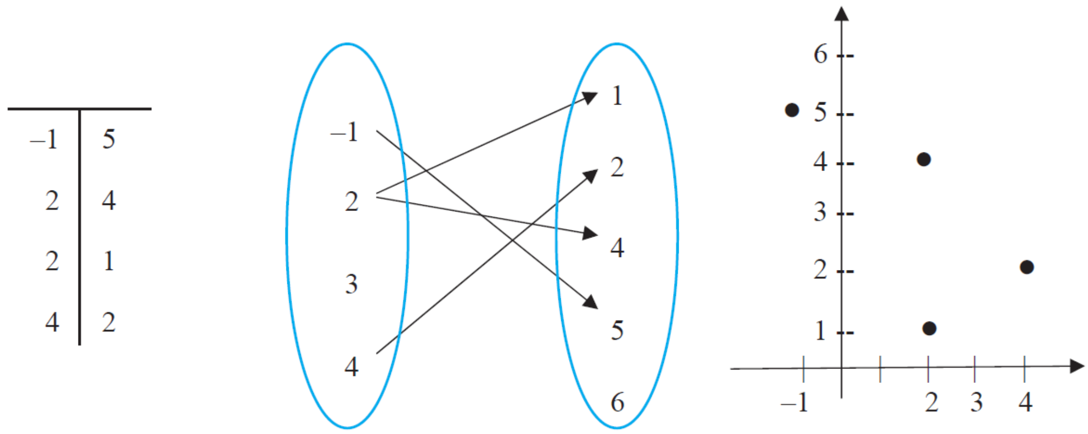
Definición 1.4.1. *Sean A y B conjuntos. R es una relación de A en B si y sólo si R es un subconjunto de $A \times B$. Una relación de A en A es llamada una relación en A.*

Si $(a,b) \in R$, escribimos $a\ R\ b$ y decimos a esta R-relacionado (ó simplemente relacionado) con b. Si $(a,b) \notin R$, escribimos $a \not R\ b$.

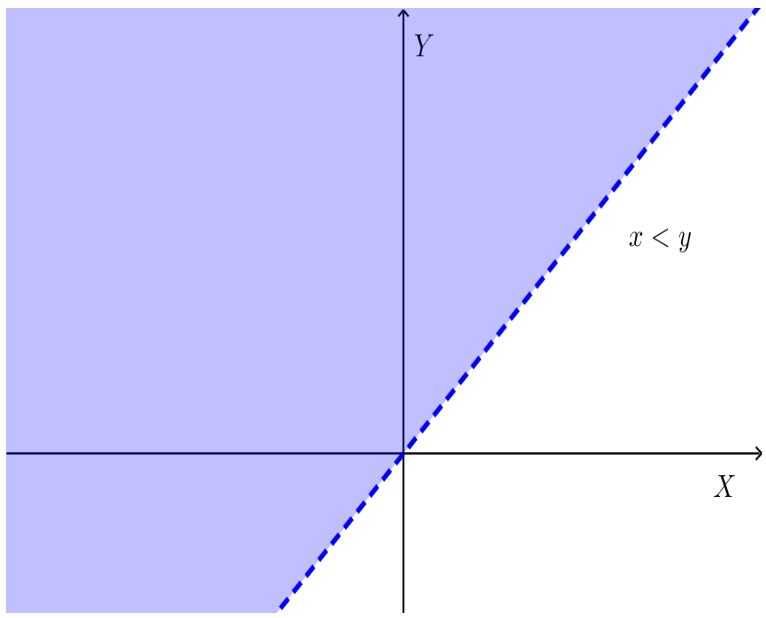
Ejemplo 1.4.2. Si $A = \{-1,2,3,4\}$ y $B = \{1,2,4,5,6\}$, sean
$R = \{(-1,5),(2,4),(2,1),(4,2)\}$, $S = \{(5,2),(4,3),(1,3)\}$ y $T = \{(-1,3),(2,3),(4,4)\}$.

Entonces R es una relación de A en B, S es una relación de B en A y T es una relación en A.

Podríamos describir la relación R escribiendo $-1\ R\ 5$, $2\ R\ 4$, $2\ R\ 1$ y $4\ R\ 2$.



Una ecuación, desigualdad, expresión o gráfico a menudo se usa para describir una relación, especialmente cuando enumerar todos los pares es poco práctico o imposible. Por ejemplo, la relación $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < y\}$ es la familiar relación "menos que"en $\mathbb{R}$, ya que $x\ T\ y$ si y sólo si $x < y$.



Definición 1.4.3. *El dominio de la relación R de A en B es el conjunto*

$$Dom(R) = \{x \in A : \exists\ y \in B : x\ R\ y\}.$$

El rango de la relación R es el conjunto,

$$Rang(R) = \{y \in B : \exists\ x \in A : x\ R\ y\}.$$

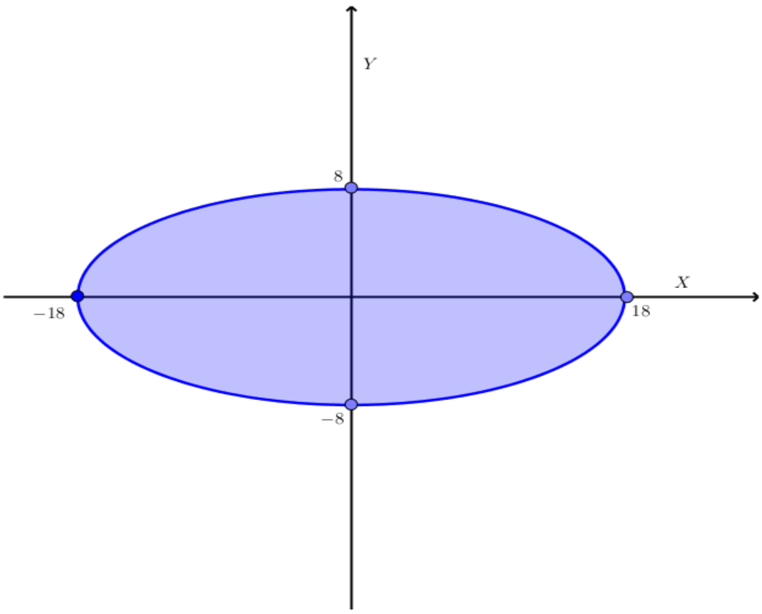
Se cumple $Dom(R) \subseteq A$ y el $Rang(R) \subseteq B$.

Por lo tanto, el dominio de R es el conjunto de todas las primeras coordenadas de pares ordenados en R, y el rango de R es el conjunto de todas las segundas coordenadas. Por definición, $Dom(R) \subseteq A$ y el $Rang(R) \subseteq B$.

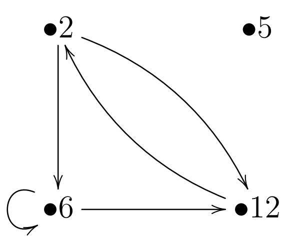
Para la relación $R = \{(-1, 5), (2, 4), (2, 1), (4, 2)\}, Dom(R) = \{-1, 2, 4\}$ y $Rang(R) = \{1, 2, 4, 5\}$.

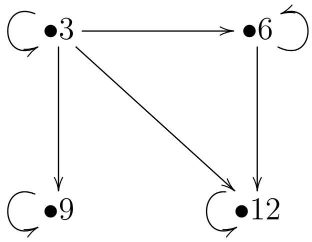
Cada conjunto de pares ordenados es una relación. Si M es cualquier conjunto de pares ordenados, entonces M es una relación de A en B, donde A y B son cualquier conjunto para el cual $Dom(M) \subseteq A$ y el $Rang(M) \subseteq B$.

Ejemplo 1.4.4. Sea $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \frac{x^2}{342} + \frac{y^2}{64} \leq 1\}$. La gráfica de S es el área sombreada en la figura que se muestra a continuación el domino es $[-18, 18]$ y rango $[-8, 8]$.



Podemos usar un gráfico dirigido o un dígrafo para representar una relación R en un pequeño conjunto finito A. Pensamos en los objetos en A como puntos (llamados vértices) y la relación R nos dice qué vértices están conectados por arcos. Los arcos se dibujan como flechas: hay un arco desde el vértice a hasta el vértice b si y sólo si $(a, b) \in \mathbb{R}$. Un arco desde un vértice hacia sí mismo Se llama un bucle. Por ejemplo, sea $A = \{2, 5, 6, 12\}$ y $R = \{(6, 12), (2, 6), (2, 12), (6, 6), (12, 2)\}$ se presenta el gráfico.

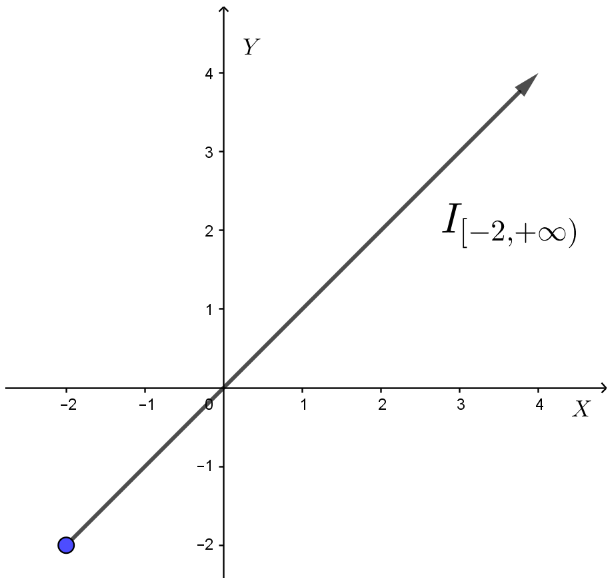




Definición 1.4.5. *Para cualquier conjunto A, la relación $I_A = \{(x, x) : x \in A\}$ es llamada la relación identidad en A.*

Ejemplo 1.4.6. Sean $A = \{-1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ y
$R = \{(-1, 5), (2, 4), (2, 1), (4, 2)\}$, entonces $Dom(R) = \{-1, 2, 4\},\ Rang(R) = \{1, 2, 4, 5\}$.

Ejemplo 1.4.7. Sea $A = \{1, 2, a, b\}$, así $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (a, a), (b, b)\},\ Dom(A) = A$ y $Rang(A) = A$. El gráfico de la relación identidad en $[-2, \infty)$ es.



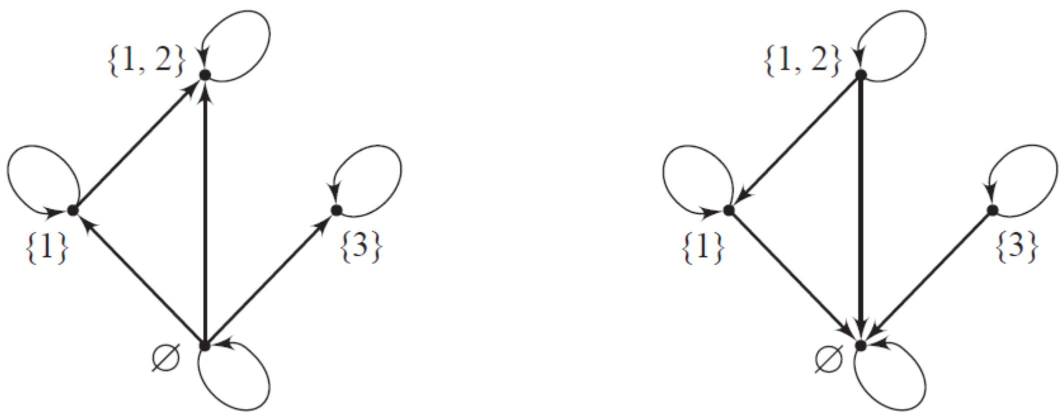
Definición 1.4.8. *Si R es una relación de A en B, entonces el inverso de R es la relación de B en A definida por $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$.*

Observacion 1.4.9. *Si R es una relación de A en B, entonces R^{-1} es una relación de B en A.*

Ejemplo 1.4.10. Sea $R = \{(1, b), (1, c), (2, c)\}$ una relación, entonces el inverso de R es $R^{-1} = \{(b, 1), (c, 1), (c, 2)\}$. Para cualquier conjunto A el inverso de I_A es I_A, ya que basta cambiar las ordenadas de R pasen a ser las abscisas en en R^{-1} y las abscisas de R pasen a ser las ordenadas en R^{-1}. El inverso de la relación "menor que"
$T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < y\}$ es la relación "mayor que "en R porque,

$$\begin{aligned} (x, y) \in T^{-1} &\iff (y, x) \in T \\ &\iff y < x \\ &\iff x > y. \end{aligned}$$

En caso de que R sea una relación sobre A, el dígrafo de R^{-1} se obtiene del dígrafo de R copiando todos los bucles y arcos, pero invirtiendo la dirección de las flechas para los arcos.
Los dígrafos de R y R^{-1}, donde R es la relación $\subseteq$ con el conjunto $\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$.



Teorema 1.4.11. *Sea R una relación de A en B.*

a) $Dom(R^{-1}) = Rang(R)$.

b) $Rang(R^{-1}) = Dom(R)$.

Demostración. a) Utilicemos doble inclusión. "$\subseteq$ "
Sea $b \in Dom(R^{-1})$.

$$\begin{aligned} b \in Dom(R^{-1}) &\implies \exists\, a \in A : bR^{-1}a \\ &\implies \exists\, a \in A : aRb \\ &\implies b \in Rang(R). \end{aligned}$$

$$\therefore Dom(R^{-1}) \subseteq Rang(R).$$

"$\supseteq$ "
Sea $b \in Rang(R)$.

$$\begin{aligned} b \in Rang(R) &\implies \exists\, a \in A : aRb \\ &\implies \exists\, a \in A : bR^{-1}a \\ &\implies b \in Dom(R^{-1}). \end{aligned}$$

$$\therefore Rang(R) \subseteq Dom(R^{-1}).$$

$\therefore Dom(R^{-1}) = Rang(R)$.

(b) "$\subseteq$ "
Sea $a \in Rang(R^{-1})$.

$$\begin{aligned} a \in Rang(R^{-1}) &\implies \exists\, b \in B : bR^{-1}a \\ &\implies \exists\, b \in B : aRb \\ &\implies a \in Dom(R) \end{aligned}$$

$$\therefore Rang(R^{-1}) \subseteq Dom(R).$$

"$\supseteq$ "
Sea $a \in Dom(R)$.

$$\begin{aligned} a \in Dom(R) &\implies \exists\, b \in B : aRb \\ &\implies \exists\, b \in B : bR^{-1}a \\ &\implies a \in Rang(R^{-1}) \end{aligned}$$

$$\therefore Dom(R) \subseteq Rang(R^{-1}).$$

$\therefore Rang(R^{-1}) = Dom(R)$.

■

Dada una relación de A en B y otra de B en C, la composición es un método de construir una relación de A en C.

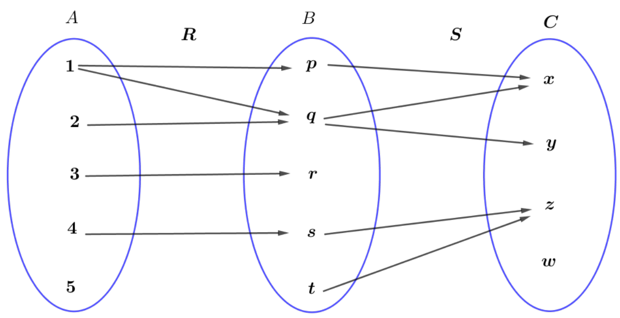
Definición 1.4.12. *Sea R una relación de A en B y sea S una relación de B en C. La composición de R y S es la relación de A en C dada por:*

$$S \circ R = \{(a, c) : \exists\, b \in B : (a, b) \in R \ \wedge \ (b, c) \in S\}.$$

La relación $S \circ R$ es una relación de A en C ya que $S \circ R \subseteq A \times C$. Siempre es verdad $Dom(S \circ R) \subseteq Rang(R)$, pero no siempre es cierto que $(S \circ R) = A \times C$.

Hemos adoptado la notación de derecha a izquierda para $S \circ R$ se usa comúnmente en cursos de análisis. Para determinar $S \circ R$ debes recordar que R es la relación del primer conjunto al segundo y S es la relación del segundo conjunto al tercero.
Por lo tanto, para determinar $S \circ R$, aplicamos la relación R primero y luego S.

Ejemplo 1.4.13. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{p, q, r, s, t\}$, y $C = \{x, y, z, w\}$. Sea R una relación de A en B dada por $R = \{(1, p), (1, q), (2, q), (3, r), (4, s)\}$ y S una relación de B en C dada por $S = \{(p, x), (q, x), (q, y), (s, z), (t, z)\}$.



Un elemento a de A está relacionado con un elemento c de C bajo $S \circ R$ si hay al menos un elemento "intermedio" b de B tal que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in S$. Por ejemplo,$(1, p) \in R$ y $(p, x) \in S$, entonces $(1, x) \in S \circ R$.
Así podemos escribir $S \circ R = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (4, z)\}$.

Si R es una relación de A en B, y S es una relación de B en A, entonces $R \circ S$ y $S \circ R$ ambos están definidos, pero no es cierto que $R \circ S = S \circ R$. Incluso cuando R y S son relaciones en el mismo conjunto, puede suceder que $R \circ S \neq S \circ R$.

Ejemplo 1.4.14. Sean $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x + 1\}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}$, entonces:

$$\begin{aligned} R \circ S &= \{(x, y) : (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y) : z = x^2 \wedge y = z + 1, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y) : y = x^2 + 1\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S \circ R &= \{(x, y) : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y) : z = x + 1 \wedge y = z^2, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x.y) : y = (x + 1)^2\}. \end{aligned}$$

$S \circ R \neq R \circ S$ ya que $x^2 + 1 \neq (x + 1)^2$ en general.

Teorema 1.4.15. *Suponga que A, B, C y D son conjuntos. Sean R una relación de A en B, S una relación de B en C, y T una relación de C en D,entonces:*

a) $(R^{-1})^{-1} = R$.

b) $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$, *así la composición es asociativa.*

c) $I_B \circ R = R$ *y* $R \circ I_A = R$.

d) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Demostración. a) "$\supset$ "
Sea $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R^{-1}$, luego $(x, y) \in (R^{-1})^{-1}$. Por lo tanto $R \subseteq (R^{-1})^{-1}$.
"$\subset$ "
Sea $(x, y) \in (R^{-1})^{-1}$, entonces $(y, x) \in R^{-1}$, luego $(x, y) \in R$. Por lo tanto $R \subseteq (R^{-1})^{-1}$.
$\therefore (R^{-1})^{-1} = R$.

b) Sea $(x, w) \in T \circ (S \circ R)$.

$$\begin{aligned} (x,w) \in T \circ (S \circ R) &\implies \exists z \in C : (x,z) \in (S \circ R) \wedge (z,w) \in T \\ &\implies \exists z \in C \wedge \exists y \in B : [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in S] \wedge (z,w) \in T \\ &\implies \exists z \in C \wedge \exists y \in B : (x,y) \in R \wedge [(y,z) \in S \wedge (z,w) \in T] \\ &\implies \exists y \in B : (x,y) \in R \wedge (y,w) \in (T \circ S) \\ &\implies (x,w) \in (T \circ S) \circ R. \end{aligned}$$

$\therefore T \circ (S \circ R) \subset (T \circ S) \circ R$.

Sea $(x, w) \in (T \circ S) \circ R$.

$$\begin{aligned} (x,w) \in (T \circ S) \circ R &\implies \exists y \in B : (x,y) \in R \wedge (y,w) \in (T \circ S) \\ &\implies \exists y \in B \wedge \exists z \in C : (x,y) \in R \wedge [(y,z) \in S \wedge (z,w) \in T] \\ &\implies \exists y \in B \wedge \exists z \in C : [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in S] \wedge (z,w) \in T \\ &\implies \exists z \in C : (x,z) \in (S \circ R) \wedge (z,w) \in T \\ &\implies (x,w) \in T \circ (S \circ R). \end{aligned}$$

$\therefore (T \circ S) \circ R \subset T \circ (S \circ R)$.

c) Probaremos que $R \circ I_A = R$.
"$\subset$"
Sea $(x, b) \in R \circ I_A$, entonces existe $t \in B$ tal que $(x, t) \in I_A$ y $(t, b) \in R$. Como $(x, t) \in I_A$,

tenemos $x = t$, así $(x, b) \in R$.

"$\supset$"
Supongamos que $(n, n) \in I_A$. Entonces $(m, n) \in \mathbb{R}$, así $(n, m) \in R \circ I_A$.
Por lo tanto $R \circ I_A = R$.

Probaremos que $I_B \circ R = R$.
"$\subset$"
Sea $(x, z) \in I_B \circ R$, entonces existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in I_B$. Como $(y, z) \in I_B$, tenemos $y = z$, así $(x, z) \in R$.

"$\supset$"
Supongamos que $(p, q) \in \mathbb{R}$. Entonces $(q, q) \in I_B$, así $(p, q) \in I_B \circ R$.
Por lo tanto $I_B \circ R = R$.

d) Probaremos por doble inclusión.
"$\subset$ "
Sea $(x, z) \in (S \circ R)^{-1}$

$$\begin{aligned}
(x, z) \in (S \circ R)^{-1} &\Longrightarrow (z, x) \in (S \circ R), \text{ por definicion de relacion inversa} \\
&\Longrightarrow \exists y \in B : (z, y) \in R \land (y, x) \in S \\
&\Longrightarrow \exists y \in B : (y, z) \in R^{-1} \land (x, y) \in S^{-1} \\
&\Longrightarrow \exists y \in B : (x, y) \in S^{-1} \land (y, z) \in R^{-1} \\
&\Longrightarrow (x, z) \in R^{-1} \circ S^{-1}.
\end{aligned}$$

$\therefore (S \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1} \circ S^{-1}$.

"$\supset$ "
Sea $(x, z) \in R^{-1} \circ S^{-1}$.

$$\begin{aligned}
(x, z) \in R^{-1} \circ S^{-1} &\Longrightarrow \exists y \in B : (x, y) \in S^{-1} \land (y, z) \in R^{-1} \\
&\Longrightarrow \exists y \in B : (y, z) \in R^{-1} \land (x, y) \in S^{-1} \\
&\Longrightarrow \exists y \in B : (z, y) \in R \land (y, x) \in S \\
&\Longrightarrow (z, x) \in S \circ R \\
&\Longrightarrow (x, z) \in (S \circ R)^{-1}.
\end{aligned}$$

$\therefore R^{-1} \circ S^{-1} \subseteq (S \circ R)^{-1}$.
$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$. ■

Ejercicios resueltos.

Ejercicio 1.4.16. Encuentre el dominio y el rango de la relación W en $\mathbb{R}$ definido por xWy si y sólo si:

a) $y = 2x + 1$

b) $y = \sqrt{x-1}$

c) $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Solución. a) Observemos que $y = 2x + 1$ no se indefine para ningún valor de x en $\mathbb{R}$, por lo que:
$Dom(W) = \mathbb{R}$. Luego:

$$\begin{aligned} y &= 2x+1 \\ y-1 &= 2x+1-1 \\ y-1 &= 2x \\ \frac{y-1}{2} &= x. \end{aligned}$$

Así $y = \dfrac{x-1}{2} = W^{-1}$. La cual esta definida para todo valor de x en $\mathbb{R}$, por lo tanto:
$Rang(W) = \mathbb{R}$.

b) $y = \sqrt{x-1}$ esta definida cuando $x - 1 \geq 0$.
$x - 1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 1$. Así $Dom(W) = [1, \infty)$.

Luego encontremos el recorrido de W:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x-1} \\ y^2 &= (\sqrt{x-1})^2 \\ y^2 &= x-1 \\ y^2+1 &= x. \end{aligned}$$

Así $y = x^2 + 1 = W^{-1}$. La cual esta definida para todo valor de $\mathbb{R}$, de donde el $Dom(W^{-1}) = \mathbb{R}$.
Encontrando el mínimo valor de W en el intervalo del dominio, sustituyendo $x = 1$ que es el extremo inferior del intervalo, así $y = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0$. Por lo tanto se cumple que $0 \leq y < \infty$, así debemos restringir el dominio de W^{-1} tomando $[0, \infty)$.

Por lo tanto $Dom(W^{-1}) = [0, \infty) = Rang(W)$.

c) Como $y = \dfrac{1}{x^2}$, esta definida para los valores de x tales que $x \neq 0$.
Por lo que $Dom(W) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Luego:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x^2} \\ yx^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{y} \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{\frac{1}{y}} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{y}}. \end{aligned}$$

Así $y = \pm\sqrt{\frac{1}{x}} = W^{-1}$, la cual esta definida cuando $x > 0$. Así $Dom(W^{-1}) = (0, \infty)$ Encontrando el mínimo valor de W en el intervalo del dominio, sustituyendo $x = \infty$ que es el extremo inferior del intervalo, así $y\frac{1}{-\infty^2} = 0$. Por lo tanto se cumple que $0 \leq y < \infty$.

Por lo tanto $Dom(W^{-1}) = (0, \infty) = Rang(W)$.

■

Ejercicio 1.4.17. Sea R una relación de A a B y S una relación de B a C. Probar que,

a) $Dom(S \circ R) \subseteq Dom(R)$.

Demostración. a) Sea $x \in Dom(S \circ R)$

$$\begin{aligned} x \in Dom(S \circ R) &\Longrightarrow \exists\, y \in C \text{ tal que } (x, y) \in S \circ R \\ &\Longrightarrow \exists\, y \in C \wedge \exists\, b \in B \text{ tal que } (x, b) \in R \wedge (b, y) \in S \\ &\Longrightarrow \exists\, b \in B \text{ tal que } (x, b) \in R \\ &\Longrightarrow x \in Dom(R). \end{aligned}$$

Por lo tanto $Dom(S \circ R) \subseteq Dom(R)$.

■

1.5. Relaciones de equivalencias

Las relaciones de equivalencia son un concepto matemático definido sobre un conjunto dado cualquiera. Como tantos otros conceptos matemáticos, está basado en una idea intuitiva, la representación de relaciones del tipo: ciudades en una misma región, alumnos de la misma clase, instrucciones dentro del mismo bloque de código, etc.

Definición 1.5.1. *Una relación R sobre un conjunto A es llamada reflexiva si $(x, x) \in R$ para todo $x \in A$, es decir R es reflexiva si*

$$\forall x \in A,\ x\, R\, x.$$

Definición 1.5.2. *Una relación R sobre un conjunto A es llamada simétrica si para todo $(x, y) \in R$, implica que $(y, x) \in R$, es decir: R es simétrica si*

$$\forall x, y \in A, x\ R\ y \Longrightarrow y\ R\ x.$$

Definición 1.5.3. *Una relación R sobre un conjunto A es llamada transitiva si para toda terna de elementos $x, y, z \in A$, tales que $(x, y) \in A$ y $(y, z) \in A$ se tiene que $(x, z) \in A$,es decir*

$$\forall x, y, z \in A, x\ R\ y \wedge y\ R\ z \Longrightarrow x\ R\ z.$$

Definición 1.5.4. *Una relación sobre un conjunto A se dice que es una relación de equivalencia si cumple ser reflexiva, transitiva, y simétrica.*

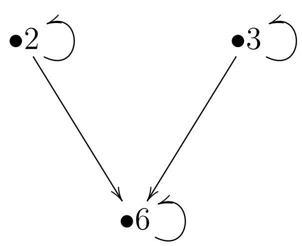
Ejemplo 1.5.5. Usemos como conjunto A una bolsa de lunetas y como relación R: a tiene el mismo color que b. Veamos que efectivamente es una relación de equivalencia:

Reflexiva: toda luneta tiene el mismo color que sí misma.
Simetría: si la luneta a tiene el mismo color que la luneta b, entonces la luneta b tiene el mismo color que la luneta a.
Transitiva: si a tiene el mismo color que b y b el mismo color que c, entonces a tiene el mismo color que c.

Ejemplo 1.5.6. Sea $B = \{2, 5, 6, 7\}$ y $S = \{(2, 5), (5, 6), (2, 6), (7, 7)\}$, $T = \{(2, 6), (5, 6)\}$ relaciones en B.
Como $6 \not S 6$ y $2 \not T 2$, así S y T no son relaciones de equivalencia. S no es simétrica ya que $2\ S\ 5$ pero $5 \not S 2$. De manera similar T no es simétrica ya que $5\ T\ 6$ pero $6 \not T 5$. Pero S y T son relaciones transitivas. Para verificar que S es transitivo, verificamos todos pares (x, y) en S con todos los pares de la forma (y, z), tenemos $(2, 5)$ y $(5, 6)$ en S, así que debe tener $(2, 6)$; tenemos $(7, 7)$ y $(7, 7)$ en S, por lo que debemos tener $(7, 7)$. La relación T es transitivo por alguna razón diferente: no existen x, y, z en B tales que $x\ T\ y$ y $y\ T\ z$. Debido a que su antecedente es falso, la oración condicional si $x\ T\ y$ y $y\ T\ z$, entonces $x\ T\ z$ es verdadera.

Ejemplo 1.5.7. Sea R la relación "es subconjunto de"en $\mathscr{P}(\mathbb{Z})$ el conjunto potencia de $\mathbb{Z}$. R es reflexiva, es transitiva por teorema 1.1.6, inciso c). Note que $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ pero $\{1, 2, 3\} \nsubseteq \{1, 2\}$. Por lo tanto R no es simétrica.

Ejemplo 1.5.8. Sea $A = \{2, 3, 6\}$ y R la relación "divide"en A es decir, $xRy \Longleftrightarrow x|y$, R es reflexiva ya que cada elemento esta relacionado con sigo mismo y transitiva por que hay un arco que va de 3 a 3 y uno de 3 a 6, así que se puede ir directamente de 3 a 6 pero no simétrica. El gráfico dirigido o dígrafo es:



Ejemplo 1.5.9. Sea $A = \{2, 3, 6\}$ y la relación R en A, dada por $xRy \iff x < y$ R no es reflexiva, no es simétrica pero si es transitiva. El gráfico dirigido o dígrafo es:

$$\begin{tikzcd} \bullet 2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bullet 3 \arrow[dl] \\ & \bullet 6 & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.5.10. Sea $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m^2 = n^2\}$, verifiquemos que es una relación de equivalencia.

Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$, arbitrarios y fijos.
Como $x^2 = x^2$, $x\,R\,x$, esto muestra que es reflexiva.
Si $x\,R\,y$, entonces $x^2 = y^2$ luego $y^2 = x^2$, así $y\,R\,x$. Se cumple que es simétrica.
Si $x\,R\,y$ y $y\,R\,z$, entonces $x^2 = y^2$ y $y^2 = z^2$, luego $x^2 = y^2 = z^2$, así $x^2 = z^2$, entonces $x\,R\,z$. Se cumple que es transitiva.

Ejemplo 1.5.11. Verifiquemos si la relación R definida por $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : xy > 0\}$ es de equivalencia. En este ejemplo $x\,R\,x\ \forall x \in \mathbb{Z}$ excepto el entero 0; la relación R no es reflexiva ya que al multiplicar cualquier entero por cero es cero y cero no es mayor que cero.
R es simétrico ya que, si x e y son enteros y $xy > 0$, entonces $yx > 0$.
R es transitiva para verificar esto, asumimos que $x\,R\,y$ y $y\,R\,z$, entonces $xy > 0$ y $yz > 0$. Si y es positivo, entonces x y z son positivas; entonces $xz > 0$. Si y es negativo, entonces x y z son negativas, entonces $xz > 0$. Así en cualquiera caso, $x\,R\,z$. Esta relación no es de equivalencia, del hecho de que es simétrica, transitiva, y no reflexivo en $\mathbb{Z}$.

Supongamos que se afirma que dos enteros están relacionados si y sólo si tienen la misma paridad. Para esta relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y \text{ es par}\}$, vemos que todos los enteros impares son relacionados entre sí (ya que la suma de dos números impares es par) y todos los pares están relacionados entre sí. La relación R es reflexiva en $\mathbb{Z}$, simétrica y transitiva, por lo tanto es una relación de equivalencia.

Para el conjunto P de todas las personas, sea L la relación sobre P dada por xLy si y sólo si x y y tienen el mismo apellido. Tenemos a Lucy Morales L Carlos Morales, Daniela Madison L Gabriela Madison, y así. Si suponemos que todos tienen exactamente un apellido, entonces L es una relación de equivalencia en P.

Definición 1.5.12. *Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Para $x \in A$, la clase de equivalencia de x determinada por R es el conjunto*

$$x/R = \{y \in A : xRy\}.$$

Podemos utilizar la notación $[x]$ y $\overline{x}$ son de uso general en lugar de x/R. Leemos la notación x/R como "la clase de x modulo R", o simplemente "x mod R".
*El conjunto $A/R = \{x/R : x \in A\}$ de toda clase de equivalencia es llamado **A modulo R**.*

Ejemplo 1.5.13. La relación $H = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ es una relación de equivalencia en el conjunto $A = \{1,2,3\}$.
Ademas $[1] = 1/H = \overline{1} = \{1,2\}$, $[2] = 2/H = \overline{2} = \{1,2\}$ y $[3] = 3/H = \{3\}$. Así para $A/H = \{[x] : x \in A\} = \{[1],[2],[3]\} = \{\{1,2\},\{1,2\},\{3\}\}$, así $A/H = \{\{1,2\},\{3\}\}$

Ejemplo 1.5.14. Sea $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 = y^2\}$. S es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$. Tenemos que $\overline{2} = \{2,-2\}$, $[\pi] = \{-\pi,\pi\}$, etc. Ademas $\overline{0} = \{0\}$. En este ejemplo para todo $x \in \mathbb{R}$ las clases de equivalencia de x y las clases de equivalencia de $-x$ son lo mismo. El conjunto de clases $\mathbb{R}$ modulo S es $\mathbb{R}/S = \{\{x,-x\} : x \in \mathbb{R}\}$.

Ejemplo 1.5.15. Para la relación de equivalencia $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y \text{ es par }\}$ en $\mathbb{Z}$, existen solo dos clases de equivalencia: D, el conjunto de todos los enteros impares y E, el conjunto de los enteros pares. Así $\mathbb{Z}/R = \{D, E\}$.

Teorema 1.5.16. *Sea R una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A. Para todo x, y en A,*

a) *$x/R \subseteq A$ y $x \in x/R$. Así toda clase de equivalencia es un subconjunto no vacío de A.*

b) *$x\,R\,y$ si y sólo si $x/R = y/R$. Así los elementos de A están relacionados si y sólo si sus clases de equivalencia son idénticas.*

c) *$x \not R\, y$ si y sólo si $x/R \cap y/R = \emptyset$. Así los elementos de A están relacionados si y sólo si sus clases de equivalencia son disjuntas.*

Demostración. a) Sea R una relación de equivalencia de un conjunto no vació A. Por definición (1.5.12), $x/R \subseteq A$ para todo $x \in A$. Como R es una relación de equivalencia de A, entonces R es reflexiva en A. Así $x\,R\,x$. Por lo tanto $x \in x/R$ y así toda clase de equivalencia es un subconjunto no vacío de A.

b) "$\Longrightarrow$"
Suponga que $x\,R\,y$. Demostraremos que $x/R = y/R$.
"$\subset$"
Sea $z \in x/R$. Como $z \in x/R$, entonces $x\,R\,z$. Ahora de $x\,R\,y$ se tiene por simetría $y\,R\,x$, ya que R es una relación de equivalencia. Luego tenemos $y\,R\,x$ y $x\,R\,z$ entonces por transitividad $y\,R\,z$, así $z \in y/R$. Por lo tanto $x/R \subseteq y/R$.
"$\supset$"
Sea $z \in y/R$. Como $z \in y/R$, entonces $y\,R\,z$, se tiene por simetría $z\,R\,y$ y de $x\,R\,y$ que $y\,R\,x$ ya que R es una relación de equivalencia. Luego tenemos $z\,R\,y$ y $y\,R\,x$ entonces por transitividad $z\,R\,x$, pero por simetría $x\,R\,z$, entonces $z \in x/R$. Así $y/R \subseteq x/R$.
Por lo tanto $x/R = y/R$.
"$\Longleftarrow$"
Suponga que $x/R = y/R$. Como $x/R = y/R$, para $y \in y/R$, entonces $y \in x/R$. Por lo tanto $x\,R\,y$.

c) "$\Longleftarrow$"
Suponga que $x/R \cap y/R = \emptyset$. Como $x/R \cap y/R = \emptyset$, entonces para $y \in y/R$ se tiene que $y \notin x/R$. Por lo tanto $x \not R\, y$.
"$\Longrightarrow$"
Ahora probaremos que $x \not R\ y$ implica que $x/R \cap y/R = \emptyset$. Lo haremos probando el contrarecíproco, es decir ($x/R \cap y/R \neq \emptyset$ implica $x\,R\,y$).
Suponga que $x/R \cap y/R \neq \emptyset$. Como $x/R \cap y/R \neq \emptyset$, entonces existe un elemento k tal que $k \in x/R \cap y/R$, así $x\,R\,k$ y $y\,R\,k$. Por lo que $x\,R\,y$. Esto demuestra lo establecido al inicio de esta implicación. ■

Definición 1.5.17. *Sea m fijo un entero positivo. Para $x, y \in \mathbb{Z}$, decimos que x es congruente a y modulo m si y sólo si m divide a $(x - y)$. Se escribe $x \equiv y(mod\ m)$. El número m es llamado el modulo de congruencia.*

Ejemplo 1.5.18. Usando 3 como modulo, $4 \equiv 1(mod\ 3)$, porque 3 divide a $4 - 1$. Igualmente, $10 \equiv 16(mod\ 3)$, porque 3 divide a $10-16$. Como 3 no divide a $5-(-9) = 14$, tenemos $5 \not\equiv -9(mod\ 3)$. Es fácil ver que 0 es congruente a $0, 3, -3, 6$ y -6, de hecho 0 es congruente modulo 3 a todo múltiplo de 3.

Teorema 1.5.19. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\equiv$ (mod m) es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.*

Demostración. a) Reflexiva. Sea $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0 = 0.m$, así $m|x - x$, de donde $x \equiv x$ (mod m).
$\therefore \equiv$ (mod m) es reflexiva .

b) Simetría. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x \equiv y(\text{mod m})$.

$$
\begin{aligned}
x \equiv y(\text{mod m}) &\Longrightarrow m|x - y \\
&\Longrightarrow x - y = mt; t \in \mathbb{Z} \\
&\Longrightarrow y - x = m(-t) \\
&\Longrightarrow m|y - x \\
&\Longrightarrow y \equiv x(\text{mod m}).
\end{aligned}
$$

$\therefore \equiv$ (mod m) es simétrica.

c) Transitiva. Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tales que $x \equiv y(\text{mod m})$ y $y \equiv z(\text{mod m})$.

$$
\begin{aligned}
x \equiv y(\text{mod m}) \wedge \text{y} \equiv \text{z(mod m)} &\Longrightarrow m|x - y \wedge m|y - z \\
&\Longrightarrow m|x - y + y - z = x - z \\
&\Longrightarrow m|x - z \\
&\Longrightarrow x \equiv z(\text{mod m}).
\end{aligned}
$$

$\therefore \equiv$ (mod m) es transitiva.

■

Definición 1.5.20. *El conjunto de clases de equivalencia para la relación* $\equiv$ *(mod m) se denota por* $\mathbb{Z}_m = \{[x] : x \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{x} : x \in \mathbb{Z}\}$.

Ejemplo 1.5.21. Ahora podemos determinar el conjunto $\mathbb{Z}_3$ de todas las clases de equivalencia módulo 3. Para $x \in \mathbb{Z}$, la clase de equivalencia de x es $\{y \in \mathbb{Z} : x \equiv y \ (mod\ 3)\}$, que ahora denotamos por $[x]$.

Sea $m = 3$, como los enteros congruentes con 0 $(mod\ 3)$ son exactamente los múltiplos de 3, tenemos $[0] = \{\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \cdots\}$.

$$\begin{aligned} [1] &= \{y \in \mathbb{Z} : 1 \equiv \ y\ mod\ 3\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} : 1 - y = 3t, t \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} : y = 1 - 3t, t \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\cdots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \cdots\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2] &= \{y \in \mathbb{Z} : 2 \equiv \ y\ mod\ 3\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} : 3|2 - y\} = \{y \in \mathbb{Z} : 2 - y = 3t, t \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} : y = 2 - 3t, t \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\cdots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \cdots\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [3] &= \{y \in \mathbb{Z} : 3 \equiv \ y\ mod\ 3\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} : 3|3 - y\} = \{y \in \mathbb{Z} : 3 - y = 3t, t \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} : y = 3 - 3t, t \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \cdots\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [4] &= \{y \in \mathbb{Z} : 4 \equiv \ y\ mod\ 3\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} : 3|4 - y\} = \{y \in \mathbb{Z} : 4 - y = 3t, t \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} : y = 4 - 3t, t \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\cdots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \cdots\}. \end{aligned}$$

Así $[0] = [3]$ y $[1] = [4]$, $[2] = [5], [3] = [6]$, luego $[x] = [y]$ si $x \equiv y \ (mod\ 3)$.
Así $\mathbb{Z}_3 = \{[x] : x \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1], [2]\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

Teorema 1.5.22. *Sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces:*

a) *Sean $x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y \ (mod\ m)$ si y sólo si el residuo de x dividido por m es igual al residuo de y dividido por m.*

b) *$\mathbb{Z}_m$ consiste de m distintas clases de equivalencia $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}$.*

Demostración. a) Sean x y y dos números enteros. Por el algoritmo de la división existen enteros q, r, t y s tal que $x = mq + r$, con $0 \leq r < m$ y $y = mt + s$, con $0 \leq s < m$. (Queremos demostrar que si $x \equiv y \ (mod\ m)$ si y sólo si $r = s$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \equiv y \ (mod\ m) &\iff m|x-y \\ &\iff m|(mq+r)-(mt+s) \\ &\iff m|mq+r-mt-s \\ &\iff m|m(q-t)+(r-s) \\ &\iff m|r-s \\ &\iff r-s=0 \\ &\iff r=s \\ &\iff r=s. \text{ Ya que } 0 \leq r < m \text{ y } 0 \leq s < m. \end{aligned}$$

b) Primero mostramos que $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}$.
Para cada k, donde $0 \leq k < m-1$, el conjunto $\overline{k}$ es una clase de equivalencia, así $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}$, es un subconjunto de $\mathbb{Z}_m$.
Supongamos que $\overline{x} \in \mathbb{Z}_m$, donde x es un entero. Por el algoritmo de la división, existen enteros q y r tales que $x = mq + r$, con $0 \leq r < m$. Entonces $x - r = mq$, así m divide a $x - r$. Entonces $x \equiv r \ (mod\ m)$. Por el teorema (1.5.16) inciso b), $\overline{x} = \overline{r}$. Por lo tanto $\overline{x} \in \mathbb{Z}_m$.

■

Ejercicios resueltos.

Ejercicio 1.5.23. Probar que si R es una relación simétrica y transitiva en A y el dominio de R es A, entonces R es reflexiva en A.

Demostración. Sea R es una relación simétrica y transitiva en A tal que el dominio de R es A.
$Dom(R) = A$ implica que para todo $x \in A$, existe $y \in A$ tal que $x\,R\,y$.
Como R es simétrica de $x\,R\,y$ se sigue que $y\,R\,x$, luego por ser R transitiva, si $x\,R\,y$ y $y\,R\,x$ implica que $x\,R\,x$. Así para todo $x \in A$ se tiene que $x\,R\,x$. Por lo tanto R es reflexiva. ■

Ejercicio 1.5.24. Suponga que R y S son relaciones de equivalencia en un conjunto A. Probar que $R \cap S$ es una relación de equivalencia en A.

Demostración. Suponga que R y S son relaciones de equivalencia en un conjunto A. Mostraremos que si R y S son ambas relaciones de equivalencia en A implica que $R \cap S$ es también relación de equivalencia.
Es inmediatamente aparente que como R y S son relaciones de equivalencia entonces:

$$\begin{aligned} x \in A &\Longrightarrow (x\,R\,x) \wedge (x\,S\,x) \\ &\Longrightarrow ((x,x) \in R) \wedge ((x,x) \in S) \\ &\Longrightarrow (x,x) \in R \cap S. \end{aligned}$$

Así $x \in A \Longrightarrow x\,(R \cap S)\,x$ por lo tanto $R \cap S$ es reflexiva.

Ahora suponga que $(x,y) \in R \cap S$, entonces $((x,y) \in R)$ y $((x,y) \in S)$, por definición de intersección de conjuntos. Pero como R y S son simétricos entonces $((y,x) \in R)$ y $((y,x) \in S)$ lo cual implica que $((y,x) \in R \cap S)$.
Así $x\,(R \cap S)\,y$ entonces $y\,(R \cap S)\,x$ por lo tanto $R \cap S$ es simétrica.

Finalmente consideremos $(x,y) \in R \cap S$ y $(y,z) \in R \cap S$, entonces $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$, así $(x,z) \in R$ por que R es transitiva, ademas como $(x,y) \in S$ y $(y,z) \in S$, entonces $(x,z) \in S$ por ser S transitiva.

Así $(x,z) \in R$ y $(x,z) \in S$, luego por definición de intersección de dos conjuntos $(x,z) \in R \cap S$, con esto probamos que $(x,y) \in R \cap S$ y $(y,z) \in R \cap S$ entonces $(x,z) \in R \cap S$. Así $R \cap S$ es transitiva.
Por lo tanto $R \cap S$ es una relación de equivalencia. ■

1.6. Particiones

Esta sección presenta el concepto de particionamiento de un conjunto y describe la estrecha relación entre partición y relación de equivalencia.

Definición 1.6.1. *Sea A un conjunto no vacío. $\mathscr{P}$ es una partición de A si y sólo si $\mathscr{P}$ es un conjunto de subconjuntos de A tal que:*

a) *Si $X \in \mathscr{P}$, entonces $X \neq \emptyset$.*

b) *Si $X \in \mathscr{P}$ y $Y \in \mathscr{P}$, entonces $X = Y$ ó $X \cap Y = \emptyset$.*

c) $\displaystyle\bigcup_{X \in \mathscr{P}} X = A.$

Ejemplo 1.6.2. La familia de dos elementos $\mathscr{P} = \{E, D\}$ donde E son los enteros pares y D son los entero impares, es una partición de $\mathbb{Z}$. También los tres elementos de la colección $\mathscr{K} = \{\mathbb{N}, \{0\}, \mathbb{Z}^-\}$, donde $\mathbb{Z}^-$ es el conjunto de los enteros negativos es ademas una partición de $\mathbb{Z}$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $A_k = \{3k, 3k+1, 3k+2\}$. La familia

$\mathscr{F} = \{A_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es una familia infinita ya que el conjunto de los enteros es infinito, ademas es una partición de $\mathbb{Z}$. Algunos elementos de $\mathscr{F}$ son $A_0 = \{0,1,2\}, A_1 = \{3,4,5\}$ y $A_{-1} = \{-3,-2,-1\}$.

Otras dos particiones de $\mathbb{Z}$ son $\{...,\{-3\},\{-2\},\{-1\},\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},...\}$ y $\{\mathbb{Z}\}$. De hecho, para un conjunto no vacío A, la familia $\{\{x\} : x \in A\}$ y $\{A\}$ son particiones de A.

Ejemplo 1.6.3. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, sea $G_n = [n, n+1)$. La colección $\{G_n : n \in \mathbb{Z}\}$ de intervalos semi-abiertos es una partición de $\mathbb{R}$.
Por definición, una partición de A es una colección disjunta por pares de subconjuntos no vacío de A.

Ejemplo 1.6.4. Para el conjunto $A = \{a,b,c,d,e\}$, la familia $C = \{C_1, C_2, C_3\}$ donde $C_1 = \{b,e\}, C_2 = \{a,c,d\}$ y $C_3 = \{b,e\}$, es una partición de A a pesar de que los conjuntos C_1 y C_3 no son disjuntos. La familia $\{C_1,C_2,C_3\}$ es lo mismo que la familia $\{C_2,C_3\}$ por que $C_1 = C_2$.

Teorema 1.6.5. *Si R es una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A, entonces A/R, el conjunto de las clases de equivalencia para R, es una partición de A.*

Demostración. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A.
Toda clase de equivalencia x/R es un subconjunto de A y es distinto de vacío por que contiene a x, ademas cualesquiera dos clases de equivalencia son iguales o son disjuntas de acuerdo a el (teorema 1.5.16).
Sean $a, b \in A$ y sea la clase de a en R: $[a]$, y la la clase de b en R: $[b]$, tal que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, así existe un elemento $x \in A$ tal que $x\,R\,a$ y $x\,R\,b$ por ser R una relación de equivalencia es simétrica, así $a\,R\,x$. Como $a\,R\,x$ y $x\,R\,b$ por transitividad, entonces $a\,R\,b$. Por lo tanto $[a] = [b]$.

Queremos probar que $\displaystyle\bigcup_{x\in A}[x] = A$.
"$\subset$ "
Sea $A/R = \{[x] : x \in A\}$ el conjunto de clases de A modulo R. Por teorema 1.5.16 todo $[x]$ esta contenido en A, así $\displaystyle\bigcup_{x\in A}[x] \subseteq A$.
"$\supset$ "
Sea $x \in A$. Entonces $x \in [x]$, así $x \in \displaystyle\bigcup_{x\in A}[x]$ por lo tanto $A \subseteq \displaystyle\bigcup_{x\in A}[x]$.
Por lo tanto $A = \displaystyle\bigcup_{x\in A}[x]$. ■

Ejemplo 1.6.6. Sea $A = \{4,5,6,7\}$ y la relación de equivalencia

$$T = \{(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(5,7),(7,5),(7,6),(6,7),(5,6),(6,5)\}.$$

Por el teorema anterior, podemos formar una partición de A al encontrar las clases de de equivalencia de T. Estas son $4/T = \{4\}$, por que 4 esta relacionado con 4, $5\,R\,5$ y

$5\,R\,6$, por transitividad $5\,R\,6$. Ademas $5\,R\,6$ y $5\,R\,7$ por transitividad $5\,R\,7$, de donde $5/T = 6/T = 7/T = \{5, 6, 7\}$. La partición producida por T es $A/T = \{\{4\}, \{5, 6, 7\}\}$.

Teorema 1.6.7. *Sea $\mathscr{P}$ la partición del conjunto no vacío A. Para x y $y \in A$, se define $x\,Q\,y$ si y sólo si existe un $C \in \mathscr{P}$ tal que $x \in C$ y $y \in C$. Luego*

a) *Q es una relación de equivalencia en A.*

b) *$A/Q = \mathscr{P}$.*

Demostración.

a) Probemos que Q cumple las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

i) Reflexiva:
Sea $a \in A$. Ya que $\mathscr{P}$ es una partición de A se cumple, $A = \bigcup\limits_{X \in \mathscr{P}} X$, entonces existe algún $C \in \mathscr{P}$ tal que $a \in C$. Así $a\,Q\,a$.
Por lo tanto Q es reflexivo en A.

ii) Simetría:
Supongamos que $x, y \in A$ tal que $x\,Q\,y$. Por definición de Q, existe $C \in \mathscr{P}$ tal que $x \in C$ y $y \in C$. Ya que $x, y \in C$, entonces $y\,Q\,x$.
Así Q es simétrico en A.

iii) Transitividad:
Sea $x, y, z \in A$, supongamos que $x\,Q\,y$ y $y\,Q\,z$. Entonces existe un conjunto C y D en $\mathscr{P}$ tal que $x, y \in C$ y $y, z \in D$. Como $\mathscr{P}$ es una partición de A, los conjuntos C y D son iguales o disjuntos, pero como y es un elementos de ambos conjuntos, C y D no pueden ser disjuntos. Por lo tanto, tenemos un conjunto $C = D$ que contiene a x y z así $x\,Q\,z$.
Por lo tanto Q es transitiva.

b) "$\subset$"
Demostraremos que $A/Q \subseteq \mathscr{P}$. Sea $x/Q \in A/Q$. Entonces escogemos $B \in \mathscr{P}$ tal que $x \in B$. Se pretende que $x/Q = B$. Si $y \in x/Q$, entonces $x\,Q\,y$. Entonces existe algún $C \in \mathscr{P}$ tal que $x \in C$ e $y \in C$. Como $x \in C \cap B$, $C = B$, así $y \in B$. Por otro lado, si $y \in B$, entonces $x\,Q\,y$, y así $y \in x/Q$. Por lo tanto $A/Q \subseteq \mathscr{P}$.
"$\supset$"
Probemos que $\mathscr{P} \subseteq A/Q$.
Sea $B \in \mathscr{P}$ un elemento de la partición tal que $B \neq \emptyset$. Escojamos un $t \in B$ entonces probaremos que $B = t/Q$. Si $s \in B$, entonces $t\,Q\,s$, así $s \in t/Q$. Por otra parte, si $s \in t/Q$, entonces $t\,Q\,s$ así s y t son elementos de algún miembro de $\mathscr{P}$ el cual debe ser B. Por lo tanto $B = t/Q$, así$\mathscr{P} \subseteq A/Q$.
Por lo tanto $A/Q = \mathscr{P}$. ■

Ejemplo 1.6.8. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathscr{P} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ una partición de A con tres conjuntos. La relación de equivalencia Q asociada con $\mathscr{P}$ es

$$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2)\}.$$

Las tres clases de equivalencia para Q son

$$1/Q = [1] = \{1\}, 2/Q = [2] = 3/Q = [3] = \{2, 3\}$$

Y $4/Q = [4] = \{4\}$. Entonces el conjunto de todas las clases de equivalencia es precisamente $\mathscr{P}$.

Ejemplo 1.6.9. El conjunto $A = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ es una partición de $\mathbb{Z}$, donde

$$\begin{aligned} A_0 &= \{4k : k \in \mathbb{Z}\}. \\ A_1 &= \{4k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}. \\ A_2 &= \{4k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}. \\ A_3 &= \{4k + 3 : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Los enteros x e y están en el mismo conjunto A_i si y sólo si $x = 4n + i$ y $y = 4m + i$ para algún entero n y m, o en otras palabras si y sólo si $x - y$ es un múltiplo de 4. Así la relación de equivalencia asociada con la particion $\mathscr{P}$ es la relación de congruencia modulo 4 y cada A_i es el residuo de las clases de i modulo 4, para $i = 0, 1, 2, 3$.

1.7. Relaciones de Orden

Es familiar las relaciones de orden para los conjuntos de números $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ tales como "menor que ", "mayor que"y "menor o igual que"son básicos para nuestra comprensión de los sistemas numéricos, pero no son relaciones de equivalencia. Por ejemplo, $<$ no es reflexivo en $\mathbb{R}$ porque es falso que $3 < 3$, y no es simétrico porque $2 < \pi$ pero no es cierto que $\pi < 2$. La relación $<$ es transitiva, ya que la conjunción $x < y$ y $y < z$ implica que $x < z$.

Ejemplo 1.7.1. Además de las propiedades transitiva y reflexiva en $\mathbb{R}$, la relación $\leq$ en $\mathbb{R}$, tiene dos propiedades que no hemos considerado anteriormente. La primera de estas propiedades es de comparabilidad: cada dos elementos de $\mathbb{R}$ son comparables. Esto significa que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ o bien $x \leq y$ o $y \leq x$. La otra propiedad es que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.

Ejemplo 1.7.2. En el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, se considera la relación "divide", es decir, para cada par de naturales a y b se cumple $a \leq b \Longleftrightarrow a|b$.
Recordemos que si a y b son naturales cualesquiera, entonces $a|b \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} : b = ak$, verifiquemos que esta relación es reflexiva y transitiva.

Reflexiva. Para cada elemento $a \in \mathbb{N}$, se verifica que $a = a1$, luego, $\exists\, k \in \mathbb{N} : a = ak$ de aquí que $a \leq a$, por lo tanto la relación es reflexiva.

Transitiva. Seana, b y c tres números naturales, entonces. $a \leq b \Longleftrightarrow \exists\, k_1 \in \mathbb{N} : b = ak_1$ y $b \leq c \Longleftrightarrow \exists\, k_2 \in \mathbb{N} : c = bk_2$.

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera, tendremos que $c = ak_1k_2$ tal que $k_1k_2 \in \mathbb{N}$, luego, $a \leq c$. Por lo tanto la relación es transitiva.

Otras dos propiedades de esta relación son, si a divide b y b divide a, entonces $a = b$. Ademas hay elementos en $\mathbb{N}$ que no son comparables, es decir existen números naturales x e y. Por ejemplo $10, 21$ tales que "x divide y "y "y divide x "son falsos.

Ejemplo 1.7.3. Sea A un conjunto y $\mathscr{P}(A)$ su conjunto potencia. Sea R la relación de inclusión $(\subset)$ tal que $A_1 \subset A_2$, cuando A_1 y $A_2 \in \mathscr{P}(A)$, si y sólo si todo elemento de A_1 está en A_2. Esta es también una relación de orden. Además, si $A_1 \subset A_2$ y $A_2 \subset A_1$ entonces $A_1 = A_2$. Mas sin embargo esta relación de orden no establece necesariamente comparación entre dos elementos cualesquiera de $\mathscr{P}(A)$. Por ejemplo sea $A = \{1, 2, 3\}$, entonces $\mathscr{P}(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A, \emptyset\}$.
Evidentemente que si $A_1 = \{3\}$ y $A_2 = \{1, 3\}$ entonces no se pueden dar ninguna de las relaciones que se presentan.
$A_1 \subset A_2$, $A_2 \subset A_1$, $A_1 = A_2$.

Sea Y la relación "tiene la misma edad en años o menos que" en un conjunto fijo P de personas. Entonces Y es reflexivo sobre P y transitivo. Esta relación también tiene la propiedad de que dos elementos de P son comparables. Sin embargo, la relación Y tiene una propiedad que no es deseable para un ordenamiento. Si a y b son dos personas diferentes en P y tanto a como b tienen 20 años, entonces $a\,Y\,b$ y $b\,Y\,a$ pero $a \neq b$.

Definición 1.7.4. *Una relación R en un conjunto A es antisimétrica para todos $x, y \in A$, si $x\,R\,y$ y $y\,R\,x$, entonces $x = y$.*

Ejemplo 1.7.5. Ya hemos notado que la relación "divide"en $\mathbb{N}$, $\leq$ en $\mathbb{R}$ y $\subset$ en $\mathscr{P}(A)$ son antisimétricos. La relación $<$ difiere de la relación $\leq$ en $\mathbb{R}$ por que $<$ no es reflexivo en $\mathbb{R}$. Como $\leq$ la relación $<$ es antisimetrica pero por una razón diferente: la declaración para todo $x, y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ y $y < x$ entonces $x = y$ es cierto porque el antecedente es falso.

La relación "divide"es una relación antisimétrica en $\mathbb{N}$. Sin embargo,la relación "divide"no es una relación antisimétrica en $\mathbb{Z}$. Por ejemplo, 6 divide -6 y -6 divide 6, pero $6 \neq -6$.

Definición 1.7.6. *Una relación R en un conjunto A es un orden parcial para A si R es reflexivo en A, antisimétrico y transitivo. Un conjunto A con orden parcial R se llama conjunto parcialmente ordenado.*

Ejemplo 1.7.7. Sea W la relación en $\mathbb{N}$ dada por $x\,W\,y$ si y sólo si $x + y$ es par y $x \leq y$. Entonces W es de orden parcial. Por ejemplo, $2\,W\,4$, $4\,W\,6$, $6\,W\,8$,$\ldots$, y $1\,W\,3$, $3\,W\,5$,

$5\,W\,7,\ldots$, pero nunca tenemos $m\,W\,n$ donde m y n tienen paridad opuesta. Nosotros verifiquemos que W es un orden parcial.

Demostración. i) Probar que W es reflexivo en $\mathbb{N}$. Sea $x \in \mathbb{N}$, entonces $x + x = 2x$ es par y $x \leq x$, así $x\,W\,x$.

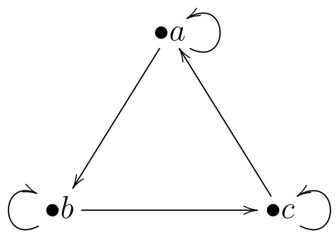
ii) Probar que W es antisimetrico. Supongamos que $x\,W\,y$ y $y\,W\,x$, entonces $x + y$ es par y $x \leq y$ y $y \leq x$ por antisimetría de $\leq$ en $\mathbb{N}$, $x = y$.

iii) Probar que W es transitivo. Supongamos que $x\,W\,y$ y $y\,W\,z$, entonces $y \leq z$, $y + z$ es par, $x \leq y$, $x + y$ es par. Por transitividad de $\leq$ en $\mathbb{N}$ $x \leq z$, $x + y$ es también par $x + z = (x + y) + (y + z) + (-2y)$ es la suma de tres números pares.
Por lo tanto $x\,W\,z$.

Por lo tanto W es un orden parcial. ■

Supongamos que R es un orden parcial en el conjunto A y a, b, c son tres elementos distintos de A. Supongamos que $a\,R\,b$, $b\,R\,c$ y $c\,R\,a$ además que A es una porción del dígrafo de R, se muestra en la figura siguiente. La cadena de relaciones se llama camino cerrado (de longitud 3) en el dígrafo.

El camino está cerrado porque a medida que avanzamos de vértice a vértice a lo largo del camino, podemos comenzar y terminar en el mismo vértice. Para $a\ R\ b$ y $b\ R\ c$ por transitividad tenemos $a\ R\ c$. (El arco de a a c no se muestra en la parte del dígrafo de la Figura), Pero $c\ R\ a$ también es cierto, y esto contradice la propiedad antisimetría de R. Usando este razonamiento, concluimos que el dígrafo de orden parcial puede que nunca contenga una ruta cerrada, excepto los bucles en vértices individuales.



Teorema 1.7.8. *Si R es un orden parcial para un conjunto A y*

$$x\,R\,x_1, x_1\,R\,x_2, x_2\,R\,x_3, \ldots, x_{n-1}\,R\,x_n, x_n\,R\,x$$

entonces $x = x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$

Demostración. Se probara por inducción.
Para $n = 1$, supongamos que $x\,R\,x_1$ y $x_1\,R\,x$. Por antisimetría, concluimos que $x = x_1$.
Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir.

$$x\,R\,x_1, x_1\,R\,x_2, x_2\,R\,x_3, \ldots, x_{k-1}\,R\,x_k, x_k\,R\,x.$$

Entonces $x = x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_k$ y probemos que se cumple para $n = k+1$, entonces $x\,R\,x_1, x_1\,R\,x_2, x_2\,R\,x_3, \ldots, x_k\,R\,x_{k+1}, x_{k+1}\,R\,x$, luego por la propiedad transitiva $x\,R\,x_1$ y

$x_1 \, R \, x_2$ tenemos que $x \, R \, x_2$, siguiendo este proceso hasta $x_k \, R \, x_{k+1}$ y $x_{k+1} \, R \, x$ tenemos que $x_k \, R \, x$. De $x \, R \, x_1, x_1 \, R \, x_2, x_2 \, R \, x_3, \ldots, x_{k-1} \, R \, x_k, x_k \, R \, x$ de la hipótesis de inducción tenemos $x = x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_k$. Ya que $x_k = x$ tenemos que $x \, R \, x_{k+1}$ y $x_{k+1} \, R \, x$. Por antisimetría, concluimos que $x = x_{k+1}$.
Por lo tanto $x = x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{k+1}$. ■

Definición 1.7.9. *Si R es un orden parcial para un conjunto A y sean $a, b \in A$ con $a \neq b$. Entonces a es inmediatamente predecesor de b si y sólo si $a \, R \, b$ y no existe $c \in A$ tal que $a \neq c$, $b \neq c$, $a \, R \, c$ y $c \, R \, b$.*

En otras palabras, a es un predecesor inmediato de b cuando ningún otro elemento se encuentra "entre" a y b.

Ejemplo 1.7.10. Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathscr{P}(A)$ está parcialmente ordenado por la relación inclusión del conjunto $\subseteq$. Para el conjunto {2,3,5}, hay tres predecesores inmediatos en $\mathscr{P}(A)$:$\{2, 3\}, \{2, 5\}$ y $\{3, 5\}$. El conjunto vacío no tiene predecesor inmediato. También $\emptyset$ es el único predecesor inmediato para $\{3\}$. Tenemos $\{4\} \subseteq \{2, 4, 5\}$, pero $\{4\}$ no es un predecesor inmediato de $\{2, 4, 5\}$ por que $\{4\} \neq \{4, 5\}, \{4, 5\} \neq \{2, 4, 5\}, \{4\} \subseteq \{4, 5\}$ y $\{4, 5\} \subseteq \{2, 4, 5\}$.

Definición 1.7.11. *Sea R un orden parcial para A. Sea B un subconjunto de A y $a \in A$. Entonces*
a es una cota superior para B si y sólo si $b \, R \, a$ para cada $b \in B$.
a es una cota inferior para B si y sólo si $a \, R \, b$ para cada $b \in B$.
a es una mínima cota superior para B (o supremo para B) si y sólo si

i) *a es una cota superior para B, y*

ii) *$a \, R \, x$ para cada cota superior x de B.*

a es una máxima cota inferior para B (o ínfimo para B) si y sólo si

i) *a es una cota inferior para B, y*

ii) *$x \, R \, a$ para cada cota inferior x de B.*

Escribiremos $\sup(B)$ *para denotar el supremo de B e* $\inf(B)$ *para denotar el ínfimo de B.*

Definición 1.7.12. *Sea R un orden parcial para un conjunto A. Sea $B \subseteq A$. Si la máxima cota inferior para B existe y es un elemento de B, se denomina el mínimo elemento de B, y se denota por* $\min(B)$. *Si la mínima cota superior para B esta en B, se le llama el máximo elemento de B, y se denota por* $\max(B)$.

Ejemplo 1.7.13. Consideremos los siguientes conjuntos. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, sea $B = \{\{1, 4, 5, 7\}, \{1, 4, 7, 8\}, \{2, 4, 7\}\}$. B es un subconjunto de $\mathscr{P}(A)$. Usando el orden parcial $\subseteq$ para $\mathscr{P}(A)$, vemos que $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ es una cota superior para B porque.

$$\begin{aligned} \{1,4,5,7\} &\subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ \{1,4,7,8\} &\subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, y \\ \{2,4,7\} &\subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8\}. \end{aligned}$$

Otra cota superior para B es $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$.

Verifiquemos que $\sup(B) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

Es evidente que

$$\begin{aligned} \{1,4,5,7\} &\subseteq \{1,2,4,5,7,8\}, \\ \{1,4,7,8\} &\subseteq \{1,2,4,5,7,8\}, \\ \{2,4,7\} &\subseteq \{1,2,4,5,7,8\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ es una cota superior. Sea X una cota superior para B. Como X es una cota superior para B,

$$\begin{aligned} \{1,4,5,7\} &\subseteq X, \\ \{1,4,7,8\} &\subseteq X, \\ \{2,4,7\} &\subseteq X. \end{aligned}$$

De donde $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \subseteq X$. Por lo tanto $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \sup(B)$.

Las cotas inferiores de B son $\emptyset, \{4\}, \{7\}, \{4, 7\}$.
Como $\emptyset \subseteq \{4, 7\}, \{4\} \subseteq \{4, 7\}, \{7\} \subseteq \{4, 7\}$, así el $\text{ínf}\, B = \{4, 7\}$.

Teorema 1.7.14. *Sea A un conjunto no vacío, y B un subconjunto de $\mathscr{P}(A)$. Usando el orden parcial $\subseteq$ en $\mathscr{P}(A)$. Se tiene que:*

a) $\sup(B) = \bigcup_{X \in B} X$,

b) $\text{ínf}(B) = \bigcap_{X \in B} X$.

Demostración. **a)** Probaremos que $\bigcup\limits_{X\in B} X$ es una cota superior de B.
Sea $C \in B$.
Como $C \in B$. Entonces $C \subseteq \bigcup\limits_{X\in B} X$; por Teorema 1.3.7 *b*). Como C es arbitrario en B, se sigue que $\bigcup\limits_{X\in B} X$ es una cota superior para B.
Sea Z una cota superior de B.
Como Z es una cota superior de B, así

$$\forall X \in B, X \subseteq Z \tag{1.1}$$

Sea $x \in \bigcup\limits_{X\in B} X$.

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{X\in B} X &\implies x \in X;\ \text{para algún } X \in B \\ &\implies x \in X \subseteq Z \text{ por (1.1)} \\ &\implies x \in Z. \end{aligned}$$

$\therefore \bigcup\limits_{X\in B} X \subseteq Z$
Como Z es una cota superior arbitraria de B, así $\bigcup\limits_{X\in B} X = \sup(B)$.

b) Probaremos que $\bigcap\limits_{X\in B} X$ es una cota inferior de B.
Sea $D \in B$.
Como $D \in B$. Entonces $\bigcap\limits_{X\in B} X \subseteq D$; por Teorema 1.3.7 *a*). Como D es arbitrario en B, se sigue que $\bigcap\limits_{X\in B} X$ es una cota inferior para B.
Sea W una cota inferior de B.
Como W es una cota inferior de B, así

$$\forall X \in B, W \subseteq X \tag{1.2}$$

Sea $x \in W$.

$$\begin{aligned} x \in W &\implies x \in X\ \forall X \in B \text{ por (1.2)} \\ &\implies x \in \bigcap_{X\in B} X \end{aligned}$$

Por lo tanto $W \subseteq \bigcap\limits_{X\in B} X$.
Luego el ínf $B = \bigcap\limits_{X\in B} X$. ■

Se presenta la mínima cota superior y la máxima cota inferior para algunos subconjuntos de $\mathbb{R}$ con el orden usual $\leq$.

Ejemplo 1.7.15. *Para* $A = [0, 4)$, $\sup(A) = 4$ *e* $\text{ínf}(A) = 0$.

Demostración. Sea $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in A &\implies 0 \leq x < 4 \\ &\implies 0 \leq x \leq 4 \\ &\implies 0 \leq x \text{ y } x \leq 4. \end{aligned}$$

Por lo tanto 0 es una cota inferior de A y 4 es una cota superior de A.
Sea z una cota superior de A.
Entonces $\forall x \in A$, $x \leq z$. (Razonando por contradicción) Supongamos que $4 \nleq z$. Entonces $z < 4$.
Consideremos $a = \frac{z+4}{2}$ (el punto medio entre z y 4), entonces $0 < z < a < 4$, así $a \in A$. Luego $a \leq z$ por ser z cota superior de A. Pero entonces $z < a \leq z$, así $z < z$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $4 \leq z$.
Como z es cota superior arbitraria se sigue que $\sup(A) = 4$.
Sea w una cota inferior de A.
Entonces $\forall x \in A, w \leq x$, como 0 pertenece a A, así $w \leq 0$. Por lo tanto $\text{ínf}(A) = 0$. ■

Ademas el lector puede darse cuenta que el supremo de un conjunto no necesariamente esta en el conjunto, por ejemplo $\sup(A) = 4$, *pero* $4 \notin A$

Sea w *una cota inferior de* A. *Entonces* $\forall x \in A$. *Nótese que* 0 *es un mínimo para* A, *mientras que* 4 *no es máximo.*

Para $B = \{1, 6, 3, 9, 12, -4, 10\}$, $\sup(B) = 12$ *e* $\text{ínf}(B) = -4$.
Para $C = \{2^k : k \in \mathbb{N}\}$, $\sup(C)$ *no existe e* $\text{ínf}(C) = 2$.

Teorema 1.7.16. *Sea* R *un orden parcial para el conjunto* A *y* $B \subseteq A$. *Entonces si* $\sup(B)$ *existe es único. También si* $\text{ínf}(B)$ *existe es único.*

Demostración. Sean $x, y \in A$ tal que x, y son mínimas cotas superiores para B. (Queremos probar que $x = y$). Como x es una cota superior y y es una mínima cota superior tenemos $y\,R\,x$. De igual manera y es una cota superior y x es una mínima cota superior tenemos $x\,R\,y$. Así $x\,R\,y$ y $y\,R\,x$, por propiedad de antisimetría $x = y$. Por lo tanto, si existe, $\sup(B)$ y es único.

Sean $x, y \in A$ tal que x, y son máximas cotas inferiores para B.
(Queremos probar que $x = y$). Como y es una cota inferior y x es una máxima cota inferior tenemos $y\,R\,x$. Así $x\,R\,y$ y $y\,R\,x$, por propiedad de antisimetría $x = y$. Por lo tanto, si existe, $\text{ínf}(B)$ y es único. ■

Definición 1.7.17. *Un orden parcial R en A se le llama orden lineal (u orden total) en A. si para dos elementos cualesquiera x e y en A, o bien $x\,R\,y$ o $y\,R\,x$.*

Definición 1.7.18. *Sea L un orden lineal en un conjunto A. L es un buen orden en A si cada subconjunto no vacío B de A contiene un mínimo.*

Ejemplo 1.7.19. $\mathbb{R}$ con el orden usual $\leq$ es un orden lineal, ya que para cualesquiera dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ o bien $x \leq y$ ó bien $y \leq x$.
Mientras que $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ con la relación de inclusión "$\subseteq$"no es un orden lineal ya que $\{1\} \nsubseteq \{2\}$ ni $\{2\} \nsubseteq \{1\}$

Ejemplo 1.7.20. $\mathbb{R}$ con el orden usual $\leq$ no es un buen orden ya que $(0,1)$ no tiene mínimo, pues $0 = \text{ínf}((0,1))$ pero $0 \notin (0,1)$. Mientras que $\mathbb{N}$ con el orden usual $\leq$ si es un buen orden por que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ posee mínimo.

1.8. Funciones y relaciones

Definición 1.8.1. *Una función (o mapeo) de A en B es una relación f de A en B tal que:*

a) *El dominio de f es A.*

b) *Si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$ entonces $y = z$.*

Se escribe $f : A \longrightarrow B$ y se lee "f es una función de A en B ", o "f es un mapeo de A en B. " El conjunto B es llamado el codominio de f. En el caso donde $B = A$, decimos que f es una función en A.

No se imponen restricciones a los conjuntos A y B. Pueden ser conjuntos de números, conjuntos de pares ordenados e incluso conjuntos de funciones.
La condición para que f sea una función de A en B tiene mucho que decir sobre las primeras coordenadas de los pares ordenados en f:
Condición i) Asegurarse de que todo elemento de A es una primera coordenada de f.
Condición ii) Cada primera coordenada aparece en un solo par ordenado de f.
No hay requisito correspondiente a la segunda coordenada. Puede ser que algunos elementos de B no se usen como segundas coordenadas o algunos elementos de B se utilizan como segundas coordenadas en dos o mas pares ordenados diferentes.

Ejemplo 1.8.2. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. Todos los conjuntos:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,4),(2,5),(3,6),(2,6)\}\\
R_2 &= \{(1,4),(2,6),(3,5)\}\\
R_3 &= \{(1,5),(2,5),(3,4)\}\\
R_4 &= \{(1,4),(3,6)\}.
\end{aligned}$$

Son relaciones de A a B. Como $(2,5)$ y $(2,6)$ son pares ordenados distintos con la misma primer coordenada, R_1 no es función de A a B. R_2 y R_3 satisfacen las condiciones a) y b) y son funciones de A a B. El dominio de R_4 es el conjunto $\{1,3\}$, el cual no es igual a A, así R_4 no es función de A a B. Sin embargo, R_4 satisface la condición b), entonces es correcto decir que R_4 es función de $\{1,3\}$ a B.

El codominio B para una función $f : A \longrightarrow B$ es el conjunto de todos los objetos disponibles para usar como segundas coordenadas (imágenes). Como cualquier relación, el rango de f es: $Rang(f) = \{v \in B : \text{ existe } u \in A \text{ tal que } (u,v) \in f\}$, que es el conjunto de objetos que en realidad se usa como segundas coordenadas. Nótese que el rango de f es siempre subconjunto del codominio.

En los ejemplos anteriores, el rango de R_2 es lo mismo que su codominio, pero el rango de R_3 es $\{4,5\} \neq B$. Decimos que R_3 es una función de A en B, pero también podríamos decir que R_3 también es una función de A a $\{4,5\}$, y R_3 es una función de A a $\{\sqrt{3}, \pi, 4, 5, 8\}$ o cualquier otro conjunto que contenga a 4 y a 5. Una función tiene solo un dominio y un rango, pero muchos posibles codominios, porque cualquier conjunto que incluya el rango puede considerarse un codominio.

Definición 1.8.3. *Sea $f : A \longrightarrow B$. Escribimos $y = f(x)$ cuando $(x,y) \in f$. Decimos que y es el valor de f en x (o la imagen de f en x) y que x es una pre-imagen de y bajo f.*

Ejemplo 1.8.4. Sea $F = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y = x^2\}$. Entonces F es una función con dominio $\mathbb{Z}$ y $F(x) = x^2$. La imagen de 4 es 16, $F(-3) = 9$, $F(t+2) = (t+2)^2$, y el valor de F de 10 es 100. 5 y -5 son ambos pre-imágenes de 25. Como 7 no tiene pre-imagen en $\mathbb{Z}$, 7 no esta en el rango de F. El rango es $Rang(F) = \{0,1,4,9,16,25,36,...\}$.

Ejemplo 1.8.5. Probar que $g = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^3\}$ es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Demostración. Primero observe que g es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
i) Probemos que $Dom(g) = \mathbb{R}$.
"$\subset$"
Suponga que $x \in Dom(g)$. Por definición de g, las primeras coordenadas de los elementos de g son números reales así $x \in \mathbb{R}$, por lo que $Dom(g) \subseteq \mathbb{R}$.
"$\supset$"
Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces $\sqrt[3]{x}$ es un numero real y $x = (\sqrt[3]{x})^3$. Así existe $y \in \mathbb{R}$ (es decir $y = \sqrt[3]{x}$) para el cual $(x,y) \in g$. Así $x \in Dom(g)$. Por lo que $\mathbb{R} \subseteq Dom(g)$.

ii) Probar que f tiene valor único.
Suponga que $(x,u) \in g$ y $(x,v) \in g$. Entonces $x = u^3$ y $x = v^3$. Entonces $u^3 = v^3$, de donde se concluye que $u = v$.
Por la parte i) y ii), g es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. ■

Teorema 1.8.6. *Sea f una relación de A en B, con $Dom(f) = A$. Entonces f es una función de A en B si y sólo si cuando $x = y$ en A implica que $f(x) = f(y)$.*

Demostración. "$\Longrightarrow$"
Supongamos que f es función de A en B. Sean $x = y$ en A. Como el $Dom(f) = A$, así $f(x)$ y $f(y)$ existen de donde $(x, f(x)) \in f$ y $(y, f(y)) \in f$. Pero $x = y$, así $(x, f(x)) \in f$ y $(x, f(y)) \in f$. Pero por la condición ii) de la definición de función se sigue que $f(x) = f(y)$. Por lo tanto $x = y$ en A, entonces $f(x) = f(y)$.
"$\Longleftarrow$"
Supongamos que la condición $x = y$ en A implica que $f(x) = f(y)$ es cierta.
Sea $(x, z), (x, w) \in f$. Hagamos $y = x$, así $(x, z), (y, w) \in f$, por lo cual $f(x) = z$ y $f(y) = w$, pero por hipótesis $f(x) = f(y)$, de donde $z = w$.
Por lo tanto se cumple la condición ii) de la definición de función. ■

Teorema 1.8.7. *Dos funciones f y g son iguales si y sólo si*

(a) *$Dom(f) = Dom(g)$ y*

(b) *Para todo $x \in Dom(g), f(x) = g(x)$.*

Demostración. "$\Longrightarrow$"
Supongamos que $f = g$.

(a) "$\subset$" Sea $x \in Dom(f)$, entonces $(x, y) \in f$ para algún y y dado que $f = g$, entonces $(x, y) \in g$. Así $x \in Dom(g)$. Por lo tanto $Dom(f) \subset Dom(g)$.

"$\supset$" Sea $x \in Dom(g)$, entonces $(x, y) \in g$ para algún y y dado que $f = g$, entonces $(x, y) \in f$. Así $x \in Dom(f)$. Por lo tanto $Dom(g) \subset Dom(f)$.
Por lo tanto $Dom(f) = Dom(g)$.

(b) Sea $x \in Dom(g)$, para algún y entonces $(x, y) \in f$. Como $f = g$, entonces $(x, y) \in g$ así $f(x) = y = g(x)$.

"$\Longleftarrow$"
Supongamos que $Dom(f) = Dom(g)$ y para todo $x \in Dom(g), f(x) = g(x)$.
Sea $(x, y) \in f$. Entonces $x \in Dom(f) = Dom(g)$, sea z tal que $(x, z) \in g$. De donde, $y = f(x) = g(x) = z$, de donde $(x, y) \in g$. Por lo tanto $f \subseteq g$.

Sea $(x, y) \in g$. Entonces $x \in Dom(g) = Dom(f)$, sea z tal que $(x, z) \in f$. De donde $y = g(x) = f(x) = z$, de donde $(x, y) \in f$. Por lo tanto $g \subseteq f$.
Por lo tanto $f = g$ ■

Ejemplo 1.8.8. Supongamos que se ha especificado un universo U, y que $A \subseteq U$. Definimos la función $\chi_A : A \longrightarrow \{0, 1\}$ por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \quad A \\ 0 & \text{si } x \in \quad U - A. \end{cases}$$

Entonces $\chi_A(x)$ se llama la función característica de A. Por ejemplo si $A = [1, 4)$ siendo el universo el conjunto de números reales, entonces $\chi_A(x) = 1$ si y sólo si $1 \leq x < 4$.

Definición 1.8.9. *Una sucesión de números reales es una función*

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Escribiremos x_n *en vez de* $x(n)$ *y* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *para indicar la sucesión.*

Ejemplo 1.8.10. Para la sucesión x dada por $x_n = \dfrac{1}{n+1}$, podemos encontrar el término 63 es $x_{63} = \frac{1}{63+1} = \dfrac{1}{64}$. El rango de x es $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6} \cdots\right\}$.

Ejercicios resueltos.

Ejercicio 1.8.11. Para las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}$. Encontrar el dominio y rango de:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+\pi}}$.

b) $f(x) = \sqrt{5-x}$.

Solución. **a)** Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+\pi}}$.
Esta función se define cuando $\sqrt{x+\pi} > 0$ ademas $x + \pi > 0$.
Así:

$$\begin{aligned} x + \pi > 0 &\implies x > 0 - \pi \\ &\implies x > -\pi \end{aligned}$$

Por lo tanto $Domf(x) = (-\pi, \infty)$. Luego:

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{\sqrt{x+\pi}} \Longrightarrow y^2 &= \frac{1}{x+\pi} \\ y^2(x+\pi) &= 1 \\ y^2x + y^2\pi &= 1 \\ y^2x &= 1 - y^2\pi \\ x &= \frac{1-y^2\pi}{y^2} \end{aligned}$$

$$y = \frac{1-x^2\pi}{x^2} = f^{-1}(x).$$

Se tiene que $f^{-1}(x)$ está definida cuando $x \neq 0$. Así el $Domf^{-1}(x) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Observe que en la función $f(x)$ solo estamos tomando la parte positiva de la raíz. Así restringimos el dominio de $f^{-1}(x)$ tomando solo el intervalo $(0,\infty)$.

Por lo tanto $Rang f(x) = (0,\infty)$.

b) Dada la función $f(x) = \sqrt{5-x}$.
Esta función está definida cuando $5 - x \geq 0$.

$$\begin{array}{rcl} 5 - x \geq 0 \Longrightarrow -x & \geq & -5 \\ x & \leq & 5. \end{array}$$

Así $Dom f(x) = (-\infty, 5]$.

Luego:

$$\begin{array}{rcl} y & = & \sqrt{5-x} \\ y^2 & = & (\sqrt{5-x})^2 \\ y^2 & = & 5 - x \\ y^2 - 5 & = & -x \\ x & = & 5 - y^2 \\ y = 5 - x^2 = f^{-1}(x). & & \end{array}$$

$f^{-1}(x)$ está definida para todo $\mathbb{R}$ de donde $Dom f^{-1}(x) = \mathbb{R}$.

Pero en $f(x)$ solo se esta tomando la parte positiva de la raíz. Así restringimos el dominio de $f^{-1}(x)$ tomando solo el intervalo $[0,\infty)$. Por lo tanto $Rang f(x) = [0,\infty)$.

■

Ejercicio 1.8.12. Pruebe que la relación $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 = y^2\}$ no es una función en $\mathbb{R}$.

Demostración. Probemos que el $Dom\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 = y^2\}$ está en $\mathbb{R}$.
Observe que $x^2 = y^2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{x^2}$.
La cual esta definida para $x > 0$ Así el dominio de $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 = y^2\}$ esta en $\mathbb{R}$.
Probemos que su imagen es única.
De $y = \pm\sqrt{x^2}$ obtenemos:
$y = \sqrt{x^2}$ y $y = -\sqrt{x^2}$, así cada valor de x tiene dos imágenes.
Por lo tanto $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 = y^2\}$ no es una función en $\mathbb{R}$.

■

1.9. Composición de funciones

Definición 1.9.1. *Para una función $F : A \longrightarrow B$, la inversa de F es la relación de B en A:*

$$F^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in F\}.$$

Definición 1.9.2. *Para una función $F : A \longrightarrow B$ y $G : B \longrightarrow C$, la composición de F y G es la relación de A en C:*

$$G \circ F = \{(x, z) \in A \times C : (x, y) \in F \text{ y } (y, z) \in G \text{ para algún } y \in B\}.$$

Ejemplo 1.9.3. Sea $F = \{(x, y) : y = 2x + 1\}$ y $G = \{(x, y) : y = x^2\}$. Luego F y G son mapeos con dominio $\mathbb{R}$ y codominio $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}_0^+$ respectivamente. Las inversas de F y G son,

$$\begin{aligned} F^{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (y, x) \in F\} \\ F^{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = 2y + 1\} \\ F^{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - 1 = 2y\} \\ F^{-1} &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \frac{x - 1}{2}\right\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} G^{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (y, x) \in G\} \\ G^{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2\} \\ G^{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sqrt{x} = \sqrt{y^2}\} \\ G^{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \pm\sqrt{x}\}. \end{aligned}$$

La inversa de F es una función. La inversa de G no es una función ya que, por ejemplo, $(4, 2) \in G^{-1}$ y $(4, -2) \in G^{-1}$
La composición de F y G es:

$$\begin{aligned} G \circ F &= \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x, y) \in F \text{ y } (y, z) \in G\} \\ G \circ F &= \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = 2x + 1 \text{ y } z = y^2\} \\ G \circ F &= \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : z = (2x + 1)^2\}. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F \circ F &= \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x, y) \in F \text{ y } (y, z) \in F\} \\ F \circ F &= \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = 2x + 1 \text{ y } z = 2y + 1\} \\ F \circ F &= \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : z = 2(2x + 1) + 1\} \\ F \circ F &= \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : z = 4x + 3\}. \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
F \circ G &= \{(x,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x,y) \in G \text{ y } (y,z) \in F\} \\
F \circ G &= \{(x,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = x^2 \text{ y } z = 2y+1\} \\
F \circ G &= \{(x,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : z = 2x^2 + 1\}.
\end{aligned}
$$

Este ejemplo muestran que $G \circ F$ y $F \circ G$ no siempre son iguales. Por lo tanto, la composición de funciones no es conmutativa.

Teorema 1.9.4. *Sean A, B y C conjuntos y F, G funciones tales que $F : A \longrightarrow B$ y $G : B \longrightarrow C$. Entonces $G \circ F$ es una función de A en C y el dominio $Dom(G \circ F) = A$.*

Demostración. Sea $a \in A$. Entonces al ser $F : A \longrightarrow B$ una función existe $b \in B$ tal que $f(a) = b$.
Dado que $G : B \longrightarrow C$, para el $b \in B$ recién encontrado existe $c \in C$ tal que $g(b) = c$.
Así $(G \circ F)(a) = G(F(a)) = G(b) = c$.

Luego $\forall\, a \in A, \exists\, c \in C : (G \circ F)(a) = c$, es decir todos los elementos de A tienen imagen mediante $G \circ F$.

Sea $a \in A$ y sean $c_1, c_2 \in C$ tal que $(G \circ F)(a) = c_1$ y $(G \circ F)(a) = c_2$.

Entonces $(G \circ F)(a) = G(F(a)) = G(b) = c_1$ y $(G \circ F)(a) = G(F(a)) = G(b) = c_2$, ya que F es función así existe $b \in B : f(a) = b$. Luego $c_1 = c_2$ por ser G función.
Es decir Para todo $a \in A$ se cumple $(G \circ F)(a) = c_1$ y $(G \circ F)(a) = c_2$ implica que $c_1 = c_2$.

Consecuentemente, la composición de dos funciones es una función.

Luego probaremos que $Dom(G \circ F) = A$.
Por definición 1.4.3 podemos decir que $Dom(G \circ F) \subseteq Dom(F) = A$. Ahora debemos mostrar que $A \subseteq Dom(G \circ F)$.
Sea $a \in A$. Como $A = Dom(F)$, existe $b \in B$ tal que $(a,b) \in F$, ademas $B = Dom(G)$, existe $c \in C$ tal que $(b,c) \in G$. Entonces $(a,c) \in G \circ F$ por lo tanto $a \in Dom(G \circ F)$.
Por lo tanto $A \subseteq Dom(G \circ F)$.
Por lo tanto $Dom(G \circ F) = A$.

■

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "G\circ F"'] & B \arrow[r, "G"] & C
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo 1.9.5. Sea $H(x) = sen(x)$, $K(x) = x^2 + 6$, y $L(x) = e^x$, la composición $H \circ K, K \circ L$ y $L \circ H$ son

$$(H \circ K)(x) = H(K(x)) = H(x^2 + 6) = sen(x^2 + 6),$$

$$(K \circ L)(x) = K(L(x)) = K(e^x) = (e^x)^2 + 6 = e^{2x} + 6, \text{ y}$$

$$(L \circ H)(x) = L(H(x)) = L(sen(x)) = e^{sen(x)}.$$

Definición 1.9.6. *La función $I_X : X \longrightarrow X$, tal que $I_X(x) = x$ para todo $x \in X$ se llama la función identidad en el conjunto X.*

Ejemplo 1.9.7. En este ejemplo se consideran las funciones de el conjunto $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ y $\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}$. Sea $H : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ esta dado por $H(\overline{0}) = [0], H(\overline{1}) = [1], H(\overline{2}) = [2], H(\overline{3}) = [0], H(\overline{4}) = [1], H(\overline{5}) = [2]$.

Sea $K : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ esta dado por $K(\overline{0}) = [0], K(\overline{1}) = [2], K(\overline{2}) = [1]$. Luego

$$(K \circ H)(\overline{0}) = K(H(\overline{0})) = K([0]) = [0],$$
$$(K \circ H)(\overline{4}) = K(H(\overline{4})) = K([1]) = [2],$$

Ademas podemos definir la función $K^{-1} : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$, y se puede afirmar que $K^{-1} = K$. La composición $K^{-1} \circ K$ tiene imágenes,

$$(K^{-1} \circ K)([0]) = K^{-1}(K([0])) = K^{-1}([0]) = [0],$$

$$(K^{-1} \circ K)([1]) = K^{-1}(K([1])) = K^{-1}([2]) = [1], \text{ y}$$
$$(K^{-1} \circ K)([2]) = K^{-1}(K([2])) = K^{-1}([1]) = [2].$$

Así $K^{-1} \circ K$ es la función identidad en $\mathbb{Z}_3$.

Generalmente, cuando usamos la composición de funciones, el dominio de la función compuesta es el dominio de la primera función aplicada. Si sucede que $Rang(F)$ no es un subconjunto de $Dom(G)$, tenemos que ser consientes de que si $F(x)$ no está en el dominio de G, entonces $(G \circ F)(x)$ es indefinida.

Por ejemplo, sea F y G definidas por $F(x) = x^2$ y $G(x) = \dfrac{1}{x-4}$. Luego $2 \in Dom(F)$ pero $F(2) = 4 \notin Dom(G)$. En este ejemplo $Dom(G \circ F)$ no es igual que $Dom(F)$ puesto que $(G \circ F)(2) = G(F(2)) = G(4)$ esta indefinido ya que el denominador se hace cero.

Teorema 1.9.8. *Dadas las funciones $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ y A, B, C y D conjuntos. Entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Es decir, la composición de las funciones es asociativa.*

Demostración. Debemos demostrar que el dominios de $(h \circ g) \circ f$ y el dominio de $h \circ (g \circ f)$ son el mismo y que $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$. Por el (teorema 1.9.4), el dominio de cada función es A. Sea $x \in A$. Así $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$ y $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h((g(f(x)))$.
$\therefore ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$. ■

La relación $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ en el (teorema 1.9.8), está representado en el diagrama de la figura siguiente. Para cualquier $x \in A$ por el diagrama de A en D a lo largo de la trayectoria superior la imagen de x es $((h \circ g) \circ f)(x)$, mientras que la parte inferior la imagen de x es $(h \circ (g \circ f))(x)$. El teorema anterior dice que estas imágenes son siempre la misma y en consecuencia la figura se denomina diagrama conmutativo.
Este teorema nos permite evitar el uso de paréntesis para la composición y para simplemente decir $h \circ g \circ f$ es una función de A en D y la imagen de x es $(h \circ g \circ f)(x)$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B, \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
 & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.9.9. *Sea $f : A \longrightarrow B$. Entonces $f \circ I_A = f$ y $I_B \circ f = f$*

Demostración. $Dom(f \circ I_A) = Dom(I_A) = A = Dom(f)$.
Si $x \in A$, entonces $(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$. Por lo tanto $f \circ I_A = f$.
Probaremos que $I_B \circ f = f$.
Como $f : A \longrightarrow B$, entonces $Dom(f) = A$.
También para cualquier $x \in A$, se tiene la igualdad $(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = f(x)$. Entonces $(I_B \circ f)(x) = f(x)$, por lo tanto $I_B \circ f = f$. ■

Teorema 1.9.10. *Sea $f : A \longrightarrow B$ con $Rang(f) = C \subseteq B$. Si f^{-1} es una función, entonces $f^{-1} \circ f = I_A$ y $f \circ f^{-1} = I_B$.*

Demostración. Supongamos que $f : A \longrightarrow B$ y f^{-1} es una función.
Entonces $Dom(f^{-1} \circ f) = Dom(f)$. Por teorema (1.9.4), así.

$$Dom(f^{-1} \circ f) = A = Dom(I_A).$$

Sea $x \in A$ por el hecho de que $(x, f(x)) \in f$, tenemos $(f(x), x) \in f^{-1}$, por lo tanto tanto la composición $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = I_A(x)$. Así $f^{-1} \circ f = I_A$.

Probar $f \circ f^{-1} = I_C$.
Como $f : A \longrightarrow B$ y $Rang(f) = C$.
$Dom(f \circ f^{-1}) = Dom(f^{-1}) = Rang(f) = C = Dom(I_C)$, ademas para cualquier,
$y \in Rang(f) = C$ existe $x \in A$ tal que.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Longrightarrow f^{-1}(y) = x \\ &\Longrightarrow f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \\ &\Longrightarrow (f \circ f^{-1})(y) = y = I_C(y). \end{aligned}$$

$\therefore f \circ f^{-1} = I_C$. ■

Definición 1.9.11. *Sea $f : A \longrightarrow B$ y sea $D \subseteq A$. La restricción de f a D es la función*

$$f|_D = \{(x, y) : y = f(x) \text{ con } x \in D\}.$$

Si g y h son funciones y g es una restricción de h, decimos que h es una extensión de g.

Ejemplo 1.9.12. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y g es la función $\{(1, a), (2, a), (3, d), (4, c)\}, g|_{\{3\}} = \{(3, d)\}$ y $g|_A = g$.

Ejemplo 1.9.13. Debido a que las funciones son conjuntos (de pares ordenados), es apropiado preguntar sobre uniones e intersecciones de funciones. Si h y g son funciones y $h \cap g$ es una función.
Para las funciones

$$H = \{(1, 2), (2, 6), (3, -9), (5, 7)\}$$
$$G = \{(1, 8), (2, 6), (4, 8), (5, 7), (8, 3)\}$$

$H \cap G$ es $\{(2, 6), (5, 7)\}$, es una función. Note que $Dom(H \cap G) = \{2, 5\}$ es un subconjunto adecuado de $Dom(H) \cap Dom(g) = \{1, 2, 5\}$. Esto se debe a que $1 \in Dom(H)$ y $1 \in Dom(G)$, pero $H(1) \neq G(1)$.

Definición 1.9.14. *Sea f una función en un conjunto de números reales $\mathbb{R}$ cuyo dominio incluye un intervalo I. Decimos que f es creciente si y sólo si $\forall x, y \in I$, si $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$. Ademas f es decreciente si y sólo si $\forall x, y \in I$, si $x < y$, entonces $f(x) > f(y)$.*

Ejemplo 1.9.15. Demostrar que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$
es creciente en el intervalo $[0, 2]$.

Demostración. Sea $x, y \in [0, 2]$ y supongamos que $x < y$. Entonces $g(x) = x^2$ y $g(y) = y^2$, como $x < y$ pero $x \geq 0$, entonces $x^2 \leq xy$. Como $x < y$ y $y > 0$, así $xy < y^2$. Luego $x^2 \leq xy < y^2$, entonces $x^2 < y^2$ así $g(x) < g(y)$. Por lo tanto $f(x)$ es creciente en el intervalo $[0, 2]$. ∎

Ejemplo 1.9.16. Pruebe que $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ es decreciente en el intervalo de $(0, +\infty)$.

Demostración. Supongamos que $0 < x < y$. Como $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ y $f(y) = 2 + \dfrac{1}{y}$. Dado que,

$$\begin{aligned} x < y \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \\ &\Longrightarrow \quad 2 + \frac{1}{x} > 2 + \frac{1}{y} \\ &\Longrightarrow \quad f(x) > f(y). \end{aligned}$$

Luego $x < y$ implica $f(x) > f(y)$.
$\therefore f$ es decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$. ∎

Ejercicios resueltos.

Ejercicio 1.9.17. Encuentre el dominio y rango de $f \circ g$ en las siguientes funciones: $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$, $g(x) = x^2 + 1$.

Solución. Para $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$, $g(x) = x^2 + 1$ tenemos que:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2+1) \\ &= \frac{(x^2+1)+1}{(x^2+1)+2} \\ &= \frac{x^2+2}{x^2+3}. \end{aligned}$$

Llamemos $H(x) = (f \circ g)(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+3}$. Luego la función composición $H(x)$ esta definida cuando $x^2 + 3 \neq 0$. Pero el cuadrado de un número siempre es positivo.
Por lo tanto $DomH(x) = \mathbb{R}$.
Ahora analicemos el rango de la función $H(x)$.

$$\begin{aligned} y = \frac{x^2+2}{x^2+3} &\Longrightarrow y(x^2+3) = x^2+2 \\ &\Longrightarrow yx^2 + 3y = x^2 + 2 \\ &\Longrightarrow yx^2 - x^2 = 2 - 3y \\ &\Longrightarrow x^2(y-1) = 2 - 3y \\ &\Longrightarrow x^2 = \frac{2-3y}{y-1} \\ &\Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2-3y}{y-1}}. \end{aligned}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{2-3x}{x-1}} = h^{-1}(x).$$

Evaluemos los puntos críticos de la función $h^{-1}(x)$.
La función esta definida cuando: $\dfrac{2-3x}{x-1} \geq 0$.

Como es una desigualdad racional los puntos críticos serán los valores que puede tomar la variable x que hacen cero tanto al numerador como el denominador, para el numerador es $x = \dfrac{2}{3}$ y en el denominador es $x = 1$.
Al hacer un cuadro de variación se determina que el intervalo que hace que $\dfrac{2-3x}{x-1} \geq 0$.

es $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$.

Por lo tanto $DomH^{-1}(x) = \left[\frac{2}{3}, 1\right) = RangH(x)$. ■

Ejercicio 1.9.18. Probar que f es creciente en $(-3, \infty)$, donde $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$.

Demostración. Suponga que x y y están en $(-3, \infty)$ y $x < y$.

$$\begin{aligned} x < y &\implies 4x < 4y \\ &\implies 3x + x < 3y + y \\ &\implies 3x - y < 3y - x \\ &\implies xy + 3x - y - 3 < xy + 3y - x - 3 \\ &\implies (x-1)(y+3) < (y-1)(x+3). \end{aligned}$$

Como x y y están en $(-3, \infty)$ sabemos que $x + 3$ y $y + 3$ son positivos. Así dividiendo ambos lados de la ultima desigualdad por $x + 3$ y $y + 3$ se tiene:

$\frac{x-1}{x+3} < \frac{y-1}{y+3}$. Por lo tanto $f(x) < f(y)$. ■

1.10. Función uno a uno

Definición 1.10.1. *Una función $f : A \longrightarrow B$ es sobre B (o es sobreyectiva) si y sólo si $Rang(f) = B$.*

Para $f : A \longrightarrow B$, siempre es el caso que $Rang(f) \subseteq B$, así que una función siempre mapea a su codominio. Decimos f mapea en su codominio cuando el codominio es $Rang(f)$.

Ejemplo 1.10.2. Pruebe que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dónde $f(x) = x + 2$ es sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. Debemos demostrar que por cada $w \in \mathbb{R}$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) = w$
Sea $w \in \mathbb{R}$. Tomemos $t = w - 2 \in \mathbb{R}$, ademas $f(t) = t + 2 = (w - 2) + 2 = w$.
Por lo tanto $w \in Rang(f)$.
Por lo tanto $\mathbb{R} \subseteq Rang(f)$, así $\mathbb{R} = Rang(f)$.
Por lo tanto f es sobreyectiva. ■

Cuando $f : A \longrightarrow B$ y los conjuntos A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, a veces es útil ver en el gráfico de f y aplique esta prueba de línea horizontal a las funciones:
f mapea a B si y sólo si para cada $b \in B$, la linea horizontal $y = b$ intersecta el gráfico de f.

Ejemplo 1.10.3. Sea $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $G(x) = x^2 + 1$. Entonces G no es sobreyectiva en $\mathbb{R}$. Para demostrar esto, definimos un elemento y en el codominio $\mathbb{R}$ que no tiene pre-imagen en el dominio $\mathbb{R}$. Hagamos que y sea igual -2. Como $x^2 + 1 \geq 1$ para todo numero real x, así no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = -2$. Por lo tanto G no es sobreyectiva en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.10.4. Sea $s : (-\infty, 0] \longrightarrow [-4, \infty)$ definido por $s(x) = x^2 - 4$. Probar que es sobre en $[-4, \infty)$.

Demostración. Sea $w \in [-4, \infty)$. Entonces $w \geq -4$, así $w + 4 \geq 0$. Queremos que $w = x^2 - 4$ para algún $x \in (-\infty, 0]$, luego debemos tener lo siguiente

$$\begin{aligned} w &= x^2 - 4 \\ w + 4 &= x^2 \\ \pm\sqrt{w+4} &= x. \end{aligned}$$

Consideremos $x = -\sqrt{w+4}$. (Tenga en cuenta que no elegimos $x = \sqrt{w+4}$ dado que $x \in (-\infty, 0]$). Resulta que $s(x) = (-\sqrt{w+4})^2 - 4 = (w + 4) - 4 = w$.
Por lo tanto, la función f es sobreyectiva en $[-4, \infty)$. ■

Teorema 1.10.5. *Si $f : A \longrightarrow B$ es sobreyectiva, y $g : B \longrightarrow C$ es sobreyectiva, entonces $g \circ f : A \longrightarrow C$ es sobreyectiva.*

Demostración. Queremos demostrar que todo elemento en C tiene al menos una pre-imagen en A. Es decir $\forall c \in C, \exists a \in A$ tal que $(g \circ f)(a) = c$.
Sea $c \in C$.

$$\begin{aligned} c \in C &\implies \exists\, b \in B : g(b) = c \wedge \exists\, a \in A : f(a) = b; \text{ por hipótesis.} \\ &\implies g(b) = g(f(a)) \\ &\implies c = g(f(a)) \\ &\implies (g \circ f)(a) = c. \end{aligned}$$

$\therefore g \circ f$ es sobreyectiva.

■

Teorema 1.10.6. *Si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, y $g \circ f : A \longrightarrow C$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva en C. Es decir cuando el compuesto de dos funciones mapea en un conjunto C, entonces la segunda función aplicada debe mapearse en C.*

Demostración. Probaremos que $C \subseteq Rang(g)$.
Sea $c \in C$.

$$\begin{aligned} c \in C &\implies c = (g \circ f)(a); \text{ ya que } g \circ f \text{ es sobre} \\ &\implies c = g(f(a)) \\ &\implies c \in Rang(g) \end{aligned}$$

$$\therefore C \subseteq Rang(g).$$

Por lo tanto g es sobreyectiva. ■

Definición 1.10.7. *Una función $f : A \longrightarrow B$ es uno a uno (o inyectiva) si y sólo si cuando $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.*

Una prueba directa que $f : A \longrightarrow B$ es uno a uno comienza con la suposición de que x y y son elementos de A y que $f(x) = f(y)$ el resto de la prueba muestra que $x = y$. Una prueba por contrarecíproco se asume que $x \neq y$ y probamos que $f(x) \neq f(y)$. Para probar que f no es uno a uno, es suficiente exhibir dos elementos diferentes de A con la misma imagen.

Ejemplo 1.10.8. Probar que la función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = 2x + 1$ es uno a uno.

Demostración. Ses $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = F(y)$.

$$\begin{aligned} F(x) = F(y) &\Longrightarrow 2x + 1 = 2y + 1 \\ &\Longrightarrow 2x = 2y \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

$\therefore F$ es inyectiva.

■

Ejemplo 1.10.9. La función $r(x) = |x|$ no es uno a uno por que $2 \neq -2$ y $r(2) = r(-2)$.

Ejemplo 1.10.10. Sea $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ dada por $f(x) = x^2$. Probar que f es uno a uno.

Demostración. Suponga que $x, y \in [0, \infty)$ y $f(x) = f(y)$. Entonces $x^2 = y^2$, así $x = y$ o $x = -y$. Como $x \geq 0$ e $y \geq 0$,concluimos que $x = y$. Por lo tanto f es uno a uno. ■

Ejemplo 1.10.11. Sea $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $G(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, intentaremos mostrar que G es una función inyectiva tomando $x, y \in \mathbb{R}$ y asumiendo que $G(x) = G(y)$. Entonces $\dfrac{1}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{y^2 + 1}$.
Por lo tanto, $x^2 + 1 = y^2 + 1$, así $x^2 = y^2$. De esto no podemos decir que $x = y$. Esta prueba insatisfactoria sugiere una forma encontrar números reales distintos con imágenes iguales. Observe que $2^2 = (-2)^2$, y luego calcular $G(2) = G(-2) = \dfrac{1}{5}$. Así G no es inyectiva.

Teorema 1.10.12. *Si $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva y $g : B \longrightarrow C$ es inyectiva, entonces $g \circ f : A \longrightarrow C$ es inyectiva. Es decir, la composición de funciones inyectivas es inyectiva.*

Demostración. Asumamos que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(z)$. Así $g(f(x)) = g(f(z))$. Entonces $f(x) = f(z)$ ya que g es inyectiva. Entonces $x = z$ ya que f es inyectiva. Por lo tanto $g \circ f$ es inyectiva. ■

Teorema 1.10.13. *Si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $g \circ f : A \longrightarrow C$ es inyectiva entonces $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva. Es decir, si la composición de dos funciones es inyectiva, entonces la primera función aplicada debe ser inyectiva.*

Demostración. Supongamos que $g \circ f : A \longrightarrow C$ es inyectiva.
Sea $x, y \in A$ tal que $f(x) = f(y)$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies g(f(x)) = g(f(y)); \text{ ya que } g \text{ es función.} \\ &\implies (g \circ f)(x)) = (g \circ f)(y) \\ &\implies x = y; \ g \circ f \ \text{ es inyectiva.} \end{aligned}$$

$\therefore f : A \longrightarrow B$ es inyectiva. ■

Teorema 1.10.14. *Una restricción de una función inyectiva es inyectiva.*

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función inyectiva y sea $D \subset A$. Debemos probar que $f|_D$ es inyectiva.
Sean $x, y \in D$ tales que $f|_D(x) = f|_D(y)$.

$$\begin{aligned} f|_D(x) = f|_D(y) &\implies f(x) = f(y) \\ &\implies x = y; \text{ ya que } f \text{ es inyectiva.} \end{aligned}$$

Por lo tanto $f|_D$ es inyectiva. ■

Ejercicios resueltos.

Ejercicio 1.10.15. Determinar si las siguientes funciones es uno a uno:

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x + 6$.

b) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f(x) = (x, x)$.

c) $f : [2, 3) \longrightarrow [0, \infty), f(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$.

Solución. **a)** Sea $x, y \in \mathbb{R}$. Suponga que $f(x) = f(y)$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies \frac{1}{2}x + 6 = \frac{1}{2}y + 6 \\ &\implies \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

Por lo tanto $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x + 6$ es uno a uno.

b) Sea $m, n \in \mathbb{N}$. suponga que $f(m) = f(n)$.
$f(m) = f(n) \Longrightarrow (m, m) = (n, n)$, así $m = n$.
Por lo tanto $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f(x) = (x, x)$ es uno a uno.

c) Sea $x, y \in [2,3]$. Suponga que $f(x) = f(y)$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow \frac{x-2}{3-x} = \frac{y-2}{3-x} \\ &\Longrightarrow (x-2)(3-y) = (y-2)(3-x) \\ &\Longrightarrow 3x - xy - 6 + 2y = 3y - xz - 6 + 2x \\ &\Longrightarrow 3x + 2y = 3y + 2x \\ &\Longrightarrow 3x + 2y - 3y - 2x = 0 \\ &\Longrightarrow x - y = 0 \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

Por lo tanto $f : [2,3) \longrightarrow [0.\infty), f(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$ es uno a uno. ■

1.11. Correspondencias uno a uno y funciones inversas.

Definición 1.11.1. *Una función $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*

Ejemplo 1.11.2. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definido por $f(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$. Verificar que f es una función biyectiva.

Demostración. Probaremos que f es una función.
Sean (m,n) y $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Supongamos que $(m,n) = (r,s)$.

$$\begin{aligned} (m,n) = (r,s) &\Longrightarrow m = r \wedge n = s \\ &\Longrightarrow 2^{m-1}(2n-1) = 2^{r-1}(2s-1) \\ &\Longrightarrow f(m,n) = f(r,s). \end{aligned}$$

Por lo tanto f es función.
Probar que f es inyectiva.
Sean (m,n) y $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $f(m,n) = f(r,s)$. Supongamos que $m \neq r$, así $m > r$ ó $m < r$, sin perdida de generalidad supongamos que $m > r$.

$$\begin{aligned} f(m,n) = f(r,s) &\Longrightarrow 2^{m-1}(2n-1) = 2^{r-1}(2s-1) \\ &\Longrightarrow \frac{2^{m-1}}{2^{r-1}}(2n-1) = (2s-1) \\ &\Longrightarrow 2^{m-1-r+1}(2n-1) = (2s-1) \\ &\Longrightarrow 2^{m-r}(2n-1) = (2s-1). \end{aligned}$$

De donde un número par es igual a un impar lo cual es absurdo, por lo cual $m = r$. Luego $2^{m-r} = 2^0 = 1$, así

$$\begin{aligned} 2n - 1 &= 2s - 1 \\ 2n &= 2s \\ n &= s. \end{aligned}$$

Por lo tanto $m = r$ y $n = s$. Así podemos decir que $(m, n) = (r, s)$.
$\therefore f$ es inyectiva.
Probar que f es sobreyectiva.
Sea $s \in \mathbb{N}$. Consideremos los dos casos.
Caso 1 : s es par.

$$\begin{aligned} s \text{ es par} &\Longrightarrow s = 2^k t;\ \text{t es impar} ,k \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow s = 2^k(2N - 1); N \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow s = f(k + 1, N); (k + 1, N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow s \in Rang(f). \end{aligned}$$

Caso 2 : s es impar.

$$\begin{aligned} s \text{ es inpar} &\Longrightarrow s = 2l - 1; l \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow s = f(1, l); (1, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow s \in Rang(f). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{N} = Rang(f)$.
$\therefore f$ es sobreyectiva.
$\therefore f$ es biyectiva. ■

Teorema 1.11.3. *Sea $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva y $g : B \longrightarrow C$ también es biyectiva. Entonces $g \circ f$ es biyectiva.*

Demostración. Como $g \circ f$ es una función de A en C es inyectiva por teorema 1.10.12 y sobreyectiva por teorema 1.10.5, así $g \circ f$ es biyectiva. ■

Teorema 1.11.4. *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función que cumple las siguientes condiciones.*

a) *f^{-1} es una función del $Rang(f)$ en A si y sólo si f es inyectiva.*

b) *Si $f^{-1} : B \longrightarrow A$ es una función entonces f^{-1} es biyectiva.*

Demostración. **a)** "$\Longrightarrow$"
Supongamos que f^{-1} es función.
Sean $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$.

$$\begin{aligned} (x, f(x)), (y, f(y)) \in f &\Longrightarrow (f(x), x), (f(y), y) \in f^{-1} \\ &\Longrightarrow (f(x), x), (f(x), y) \in f^{-1},\ \text{ya que } f(x) = f(y) \\ &\Longrightarrow x = y,\ \text{ya que } f^{-1} \text{ es función.} \end{aligned}$$

Por lo tanto f es inyectiva.

"$\Longleftarrow$"
Supongamos que f es inyectiva y probemos que f^{-1} es función.
Sean $(b,x),(b,y) \in f^{-1}$.

$$\begin{aligned}
(b,x),(b,y) \in f^{-1} &\Longrightarrow (x,b),(y,b) \in f \\
&\Longrightarrow f(x) = b = f(y) \\
&\Longrightarrow f(x) = f(y) \\
&\Longrightarrow x = y; \text{ ya que } f \text{ es inyectiva.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto f^{-1} es función.
b) supongamos que f^{-1} es función.
Sean $y, z \in Rang(f)$ tales que $f^{-1}(y) = f^{-1}(z)$

$$\begin{aligned}
y, z \in Rang(f) &\Longrightarrow \exists a, b \in A : f(a) = y, f(b) = z \\
&\Longrightarrow (a,y),(b,z) \in f \\
&\Longrightarrow (y,a),(z,b) \in f^{-1}
\end{aligned}$$

Pero $(y, f^{-1}(y)), (z, f^{-1}(z)) \in f^{-1}$, y por ser f^{-1} función se tiene que $a = f^{-1}(y)$ y $b = f^{-1}(z)$, pero hemos supuesto que $f^{-1}(y) = f^{-1}(z)$, así $a = b$, luego $f(a) = f(b)$ ya que f es función, de donde $y = z$. Por lo tanto f^{-1} es inyectiva.

Sea $a \in A$

$$\begin{aligned}
a \in A &\Longrightarrow (a, f(a)) \in f \\
&\Longrightarrow (f(a), a) \in f^{-1} \\
&\Longrightarrow f^{-1}(f(a)) = a \\
&\Longrightarrow \exists b = f(a) \in Rang(f) : f^{-1}(b) = a.
\end{aligned}$$

Por lo tanto f^{-1} es sobreyectiva.
Por lo tanto f^{-1} es biyectiva. ■

Corolario 1.11.5. *Si f es una función biyectiva, entonces f^{-1} es una función biyectiva.*

Teorema 1.11.6. *La función f es biyectiva si y sólo si existe una función $g : B \longrightarrow A$ y $f : A \longrightarrow B$ tal que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$.*

Demostración. "$\Longrightarrow$"

Supongamos que $f : A \longrightarrow B$ es una función biyectiva y sea f^{-1} su función inversa. Tomemos $g = f^{-1}$, así tenemos $g : B \longrightarrow A$ tal que $g(b) = a$ si y sólo si $b = f(a)$, para todo $b \in B$.

Pues bien, $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$, entonces la composición $g \circ f : A \longrightarrow A$,

y si $a \in A$, tenemos $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a = I_A(a)$, es decir

$$g \circ f = I_A.$$

Donde $I_A : A \longrightarrow A$ tal que $I_A(a) = a, \forall\, a \in A$ es decir I_A es la identidad en A.

Análogamente , $g : B \longrightarrow A$ y $f : A \longrightarrow B$, entonces la composición $f \circ g : B \longrightarrow B$,

y si $b \in B$, tenemos $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b = I_B(b)$, es decir

$$g \circ f = I_B.$$

Donde $I_B : B \longrightarrow B$ tal que $I_B(b) = b, \forall\, b \in B$ es decir I_B es la identidad en B.

"$\Longleftarrow$"
Supongamos que existe una función $g : B \longrightarrow A$ tal que cumple $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$.

Definamos a $f : A \longrightarrow B$.
Probemos que f es función.
Sean $x, y \in A$, supongamos que $x = y$.

$$\begin{aligned} x = y &\implies I_A(x) = I_A(y) \\ &\implies (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y), \text{ por hipótesis } g \circ f = I_A \\ &\implies g(f(x)) = g(f(y)) \text{ ya que } g \text{ es función} \\ &\implies f(x) = f(y) \end{aligned}$$

Por lo tanto f es función.

Probemos que f es inyectiva. Sean $a, b \in A$, entonces

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies g(f(a)) = g(f(b)) \text{ ya que } g \text{ es función} \\ &\implies (g \circ f)(a) = (g \circ f)(b), \text{ por hipótesis } g \circ f = I_A \\ &\implies I_A(a) = I_A(b) \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

Por lo tanto f es inyectiva. Sea $b \in B$. Entonces $g(b) \in A$, tomando $a = g(b)$ tenemos que $a \in A$ y $f(a) = f(g(b)) = (f \circ g)(b) = I_B(b) = b$ por lo tanto f es sobreyectiva. Como f es inyectiva y sobreyectiva, así es biyectiva. ■

Ejemplo 1.11.7. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{2}$. Probemos que f es una función biyectiva.

Demostración. Calculamos quien es $(g \circ f)$ y $(f \circ g)$: y verifiquemos que g es la inversa de f
$\forall x \in \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = \dfrac{2x+1-1}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$ que es la identidad en $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = 2\left(\dfrac{x-1}{2}\right) + 1 = (x-1)+1 = x$ que es la identidad en $\mathbb{R}$.
Por lo tanto f es biyectiva. ■

1.12. Imágenes de Conjuntos

Definición 1.12.1. *Sea $f : A \longrightarrow B$ y sea $X \subseteq A$ y $Y \subseteq B$. La imagen de X o conjunto de imágenes de X es*

$$f(X) = \{y \in B : y = f(x) \text{ para algún } x \in X\}$$

y la imagen inversa de Y es

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Ejemplo 1.12.2. Sea el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, -1, -2, -3\}$, $B = \{0, 1, 2, 4, 6, 9\}$, $X = \{-1, 3\}$, $Y = \{4, 6\}$ y $f : A \longrightarrow B$ definida por $f(x) = x^2$.

$f(X) = f(\{-1, 3\}) = \{1, 9\}$.
$f(\{-3, 3\}) = \{9\}$.
$f(A) = f(\{0, 1, 2, 3, -1, -2, -3\}) = \{0, 1, 4, 9\}$.
También podemos encontrar $f^{-1}(Y) = f^{-1}(\{4, 6\}) = \{-2, 2\}$.
$f^{-1}(\{6\}) = \emptyset$.

Ejemplo 1.12.3. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, la función definida por $f(x) = x+4$. Entonces tenemos $f(1) = 5$ y $f(2) = 6$, por lo que $f(\{1, 2\}) = \{5, 6\}$. Además, $f(\{10, 11, 12\}) = \{14, 15, 16\}$ y $f(\{x \in \mathbb{N} : x > 20\}) = \{x \in \mathbb{N} : x > 24\}$.
El conjunto de imágenes de $\mathbb{N}$ es $f(\mathbb{N}) = \{5, 6, 7, \ldots\}$, que es el rango de f. Ademas no existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = 2$ ó $f(x) = 3$ y la imagen inversa de $f^{-1}(\{2, 3\}) = \emptyset$, pero $f^{-1}(\{5, 6\}) = \{1, 2\}$ así también para $f^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \{1, 2\}$.
La imagen inversa de $\mathbb{N}$ es $Dom(f) = \mathbb{N}$ que es igual a $f^{-1}(\{x \in \mathbb{N} : x \geq 5\})$.

Ejemplo 1.12.4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = x^2$. Sea $A = [-3, 2]$ y $C = [1, 5]$. Entonces $f(A \cup C) = f([-3, 5]) = [0, 25]$ y $f(A) \cup f(C) = [0, 9] \cup [1, 25] = [0, 25]$. Por lo tanto $f(A \cup C) = f(A) \cup f(C)$.

Por otra parte $f(A \cap C) = f([1, 2]) = [1, 4]$ y $f(A) \cap f(C) = [0, 9] \cap [1, 25] = [1, 9]$. Así podemos afirmar $f(A \cap C) \subseteq f(A) \cap f(C)$. Por lo tanto $f(A \cap C) \neq f(A) \cap f(C)$.

Teorema 1.12.5. *Sea $f : A \longrightarrow B$, C y D subconjuntos de A, y E y F subconjuntos de B. Entonces*

a) $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$.

b) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

c) $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$.

d) $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$.

Demostración. **a)** Sea $y \in f(C \cap D)$. Como $y \in f(C \cap D)$, entonces $y = f(x)$ para algún $x \in C \cap D$. Dado que $x \in C$ y $y = f(x)$, así $y \in f(C)$. Ademas $x \in D$ y $y = f(x)$, así $y \in f(D)$. Por lo tanto $y \in f(C) \cap f(D)$.
$\therefore f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$.

b) Probaremos por doble inclusión.
"$\subseteq$"
Sea $y \in f(C \cup D)$, entonces existe $x \in C \cup D$ tal que $y = f(x)$ lo que implica que $x \in C$ ó $x \in D$. Por lo tanto $y = f(x) \in f(C)$ ó $y = f(x) \in f(D)$. Así $y \in f(C) \cup f(D)$.
$\therefore f(C \cup D) \subseteq f(C) \cup f(D)$.

"$\supseteq$"

Sea $y \in f(C) \cup f(D)$, entonces $y \in f(C)$ ó $y \in f(D)$, así existe $x \in C$ ó $x \in D$ tal que $f(x) = y$ que es equivalente a decir $x \in C \cup D$ tal que $f(x) = y$, así $y \in f(C \cup D)$.
$\therefore f(C) \cup f(D) \subseteq f(C \cup D)$.
c) Probaremos por doble inclusión.
"$\subseteq$"
Sea $x \in f^{-1}(E \cap F)$ entonces $f(x) \in (E \cap F)$ de donde $f(x) \in E$ y $f(x) \in F$. Por lo tanto $x \in f^{-1}(E)$ y $x \in f^{-1}(F)$, así $x \in f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$.
$\therefore f^{-1}(E \cap F) \subseteq f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$.

"$\supseteq$"

Sea $x \in f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$, entonces $x \in f^{-1}(E)$ y $x \in f^{-1}(F)$ así $f(x) \in E$ y $f(x) \in F$, de donde $f(x) \in E \cap F$ por lo tanto $x \in f^{-1}(E \cap F)$.
$\therefore f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$.

d) Probaremos por doble inclusión.
"$\subseteq$"
Sea $x \in f^{-1}(E \cup F)$, entonces $f(x) \in (E \cup F)$ de donde $f(x) \in E$ ó $f(x) \in F$. Por lo tanto $x \in f^{-1}(E)$ ó $x \in f^{-1}(F)$, así $x \in f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$.
$\therefore f^{-1}(E \cup F) \subseteq f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$.

"$\supseteq$"

Sea $x \in f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$, entonces $x \in f^{-1}(E)$ ó $x \in f^{-1}(F)$, así $f(x) \in E$ ó $f(x) \in F$. Por lo tanto $f(x) \in (E \cup F)$, de donde $x \in f^{-1}(E \cup F)$.
$\therefore f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F) \subseteq f^{-1}(E \cup F)$.

■

1.13. Sucesiones.

Definición 1.13.1. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales (revise la definición 1.8.9) y sea L un número real, decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene limite L (o converge a L) si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que si $n \geq N$, entonces $|x_n - L| < \varepsilon$.*
Cuando $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un número real L escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ ó $x_n \longrightarrow L$. Si no existe tal número L decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ no existe.

En la definición $x_n \longrightarrow L$, normalmente pensamos en ε como un número pequeño positivo por lo que la expresión $|x_n - L| < \varepsilon$ significa que la distancia entre x_n y L es mínima.

En símbolos podemos escribir la definición de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ así

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow |x_n - L| < \varepsilon).$$

Ejemplo 1.13.2. Probar que la sucesión $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = 0$.

Demostración. Queremos que $|x_n - L| < \varepsilon$, así $|x_n - 0| < \varepsilon$.
Deseamos que $|x_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} < \varepsilon &\Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n \\ &\Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad nos dice cuanto de grande debe ser n (y por lo tanto nos dice un valor para N) para garantizar que $|x_n - 0| < \varepsilon$.
Sea ε un número real positivo. Sea N cualquier número entero mayor que $\frac{1}{\varepsilon} - 1$. Supongamos $n > N$, entonces $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, por lo que $n + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ lo cual implica $\varepsilon > \dfrac{1}{n+1}$ es decir $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$.
Entonces $|x_n - 0| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, para todo $n > N$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = 0.$ ■

Teorema 1.13.3. *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge entonces su limite es único.*

Demostración. Supongamos que $x_n \longrightarrow L$ y $x_n \longrightarrow M$ y $L \neq M$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{3}|L-M|$. Como $x_n \longrightarrow L$ y $x_n \longrightarrow M$, existen números naturales N_1 y N_2 tal que $n > N_1$, implica que $|x_n - L| < \varepsilon$ y $n > N_2$, implica que $|x_n - M| < \varepsilon$. Sea N el máximo de $\{N_1, N_2\}$,

$$\begin{aligned}
|L-M| &= |(L-x_n)+(x_n-M)| \\
&\leq |L-x_n|+|x_n-M| \\
&= |x_n-L|+|x_n-M| \\
&< \varepsilon+\varepsilon \\
&= 2\varepsilon \\
&= 2\frac{1}{3}|L-M| \\
&= \frac{2}{3}|L-M|.
\end{aligned}$$

La suposición de $L \neq M$, conduce a $|L-M| < \dfrac{2}{3}|L-M|$ lo cual es imposible. Así concluimos que el limite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es único. ■

Ejemplo 1.13.4. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M.

a) Demostrar que $x_n + y_n \longrightarrow L + M$.

b) Demostrar que $x_n - y_n \longrightarrow L - M$.

Demostración. **a)** Como $x_n \longrightarrow L, \exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_1$, entonces $|x_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
También $y_n \longrightarrow M, \exists\, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_2$, entonces $|y_n - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Tomemos a $N = \max\{N_1, N_2\}$.
Así,

$$\begin{aligned}
|(x_n+y_n)-(L+M)| &= |x_n+y_n-L-M| \\
&\leq |x_n-L|+|y_n-M| \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x_n + y_n \longrightarrow L + M$.

b) Como $x_n \longrightarrow L, \exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_1$, entonces $|x_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
También $y_n \longrightarrow M, \exists\, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_2$, entonces $|y_n - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Tomemos a $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$.
Así,

$$\begin{aligned} |(x_n - y_n) - (L - M)| &= |x_n - y_n - L + M| \\ &= |(x_n - L) - (y_n - M)| \leq |x_n - L| + |y_n - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x_n - y_n \longrightarrow L - M$.

■

Ejemplo 1.13.5. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ambas divergen a infinito, entonces $x_n + y_n$ diverge a infinito.

Demostración. Supongamos que $\lim\limits_{x\to\infty}(x_n + y_n) = L$.
Como x_n diverge entonces,

$$\text{existe } \varepsilon_1 > 0 \text{ tal que } \forall N \in \mathbb{N}, \text{ existe } n > N \text{ tal que } x_n \geq \varepsilon_1.$$

Como y_n diverge entonces,

$$\text{existe } \varepsilon_2 > 0 \text{ tal que } \forall N \in \mathbb{N}, \text{ existe } n > N \text{ tal que } y_n \geq \varepsilon_2.$$

Tomemos a $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Entonces para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n > N$.
$x_n + y_n \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geq \varepsilon$.

Por lo tanto $x_n + y_n$ diverge a infinito. ■

Ejemplo 1.13.6. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = \dfrac{3n^2}{n^2+1}$ converge a 3.

Demostración. Debemos mostrar que el límite de la sucesión es 3, demostrando que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que,

$$n > N \text{ implica que } \left|\frac{3n^2}{n^2+1} - 3\right| < \varepsilon.$$

Como $\left|\dfrac{3n^2}{n^2+1} - 3\right| = \left|\dfrac{3n^2 - 3(n^2+1)}{n^2+1}\right| = \left|\dfrac{3n^2 - 3n^2 - 3}{n^2+1}\right| = \left|\dfrac{-3}{n^2+1}\right| = \dfrac{3}{n^2+1}$, necesitamos un número entero N tal que $n > N$ implica que $\dfrac{3}{n^2+1} < \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \frac{3}{n^2+1} < \varepsilon &\iff 3 < \varepsilon(n^2+1) \\ &\iff \frac{3}{\varepsilon} < n^2 + 1 \\ &\iff n^2 + 1 > \frac{3}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Como $n^2+1>n$ así que seleccionando N para que sea cualquier número natural mayor que $\frac{3}{\varepsilon}$, tenemos que $n>N$ implica que $n^2+1>N>\frac{3}{\varepsilon}$.

Sea $\varepsilon>0$. Sea N un número natural mayor que $\frac{3}{\varepsilon}$. Supongamos que $n>N$, entonces $n>\frac{3}{\varepsilon}$ y como $n^2+1>n$, $n^2+1>\frac{3}{\varepsilon}$. Por lo tanto, si $n>N$, entonces $\frac{3}{n^2+1}<\varepsilon$. Así $\left|\frac{3n^2}{n^2+1}-3\right|<\varepsilon$. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+1}=3$. ■

Ejemplo 1.13.7. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n=\frac{7(1-n^2)}{n^2+2}$ converge a -7.

Demostración. Debemos mostrar que el límite de la sucesión es -7, demostrando que, para todo $\varepsilon>0$, existe un número natural N tal que,

$$n>N \text{ implica que } \left|\frac{7(1-n^2)}{n^2+2}-(-7)\right|=\left|\frac{7-7n^2}{n^2+2}+7\right|<\varepsilon.$$

Como $\left|\frac{7-7n^2}{n^2+2}+7\right|=\left|\frac{7-7n^2+7(n^2+2)}{n^2+2}\right|=\left|\frac{7-7n^2+7(n^2+2)}{n^2+2}\right|=\left|\frac{21}{n^2+2}\right|$ $=\frac{21}{n^2+2}$, necesitamos un número entero N tal que $n>N$ implica que $\frac{21}{n^2+2}<\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\frac{21}{n^2+2}<\varepsilon &\iff 21<\varepsilon(n^2+2)\\ &\iff \frac{21}{\varepsilon}<n^2+2\\ &\iff n^2+2>\frac{21}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Como $n^2+2>n$ así que seleccionando N para que sea cualquier número natural mayor que $\frac{21}{\varepsilon}$, tenemos que $n>N$ implica que $n^2+2>N>\frac{21}{\varepsilon}$.

Sea $\varepsilon>0$. Sea N un número natural mayor que $\frac{21}{\varepsilon}$. Supongamos que $n>N$, entonces $n>\frac{21}{\varepsilon}$ y como $n^2+2>n$, $n^2+2>\frac{21}{\varepsilon}$. Por lo tanto, si $n>N$, entonces $\frac{21}{n^2+1}<\varepsilon$. Así $\left|\frac{7(1-n^2)}{n^2+2}-(-7)\right|<\varepsilon$. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7(1-n^2)}{n^2+2}=-7$. ■

Ejemplo 1.13.8. Probar que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n=(-1)^n$ diverge.

Demostración. Razonando por contradicción suponga que L es un número real, sea $\varepsilon=1$. (Mostraremos que para todo $N\in\mathbb{N}$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq N$ y $|x_n-L|\geq 1$, lo cual seria absurdo ya que la convergencia de la sucesión fallaría para $\varepsilon=1$). Sea $N\in\mathbb{N}$. Consideremos loa siguientes casos.
Caso 1. Si $L>0$, consideremos un número entero n impar mayor que N; entonces $x_n=-1$

y $|x_n - L| = |-1 - L| = 1 + L > 1$.

Caso 2. Si $L \leq 0$, elegimos un número entero par n mayor que N; entonces $x_n = 1$ y $|x_n - L| = |1 - L| = 1 - L \geq 1$. En ambos casos hemos demostrado que hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ y $|x_n - L| \geq 1$.
Por lo tanto la sucesión diverge. ∎

Ejemplo 1.13.9. Probar que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = 2n$ diverge.

Demostración. Asumamos que $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = L$ para algún número real L. Sea $\varepsilon = 1$. Entonces para algún $N \in \mathbb{N}$, $|x_n - L| < 1$ para todo $n > N$. Suponga que $n > N$ y $n > \dfrac{1}{2}|L| + 1$. Entonces $2n > |L| + 1$, así $|x_n - L| = |2n - L| \geq 1 = \varepsilon$. Esto es una contradicción. Concluimos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. ∎

Teorema 1.13.10. *Suponga que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números reales tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $a_n \longrightarrow L$ y $c_n \longrightarrow L$, entonces $b_n \longrightarrow L$.*

Demostración. Suponga que $a_n \longrightarrow L$ y $c_n \longrightarrow L$. Sea $\varepsilon > 0$ entonces, existe un numero natural N_1 y N_2 tal que $n > N_1$ implica que $|a_n - L| < \varepsilon$ y $n > N_2$ implica que $|c_n - L| < \varepsilon$. Sea N el mas grande de N_1, N_2. Como $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces $a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L$. Por lo que para $n > N$, $-\varepsilon < a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L < \varepsilon$. Así $|b_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > N$, así $b_n \longrightarrow L$. ∎

Ejemplo 1.13.11. Para ilustrar el teorema anterior, consideremos la sucesión cuyo enésimo termino es $x_n = \dfrac{sen(n)}{n}$.

Como el rango de la función seno es $[-1, 1]$, $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{sen(n)}{n} \leq \dfrac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $-\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$ y $\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$, entonces $\dfrac{sen(n)}{n} \longrightarrow 0$.

Definición 1.13.12. *Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones.*
$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$y_k = x_{n_k} \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Lema 1.13.13. *Si $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, entonces $n_k \geq k \ \forall k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. $n_1 \in \mathbb{N}$, entonces $n_1 \geq 1$.
Como $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, así $n_2 > n_1 \geq 1$, de donde $n_2 > 1$, luego $n_2 \geq 2$, también $n_3 > n_2$, así $n_3 \geq 3$, y así sucesivamente $n_k \geq k \ \forall k \in \mathbb{N}$. ∎

Ejemplo 1.13.14. Consideremos la sucesión $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$, esta sucesión consta de los términos positivos y negativos.

$$x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{5}, \ldots\right).$$

De esta sucesión podemos construir una subsucesión de los números positivos.
Sea $n_k = 2k, k \in \mathbb{N}$, así $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} = (2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots)$ es una sucesión de indices. Entonces

$$x_{n_k} = x_{2k} = (-1)^{2k}\frac{2k}{2k+1} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \ldots,\right)$$

Por lo tanto $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de x_n.

Ejemplo 1.13.15. Sea $x_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$. Describe las subsucesiones x_{2k} y x_{2k-1}.

Solución. Para x_{2k}, se quiere escribir $x_{n_k} = x_{2k}$ con $k \in \mathbb{N}$, así

$$\begin{aligned} x_{n_k} = x_{2k} &= \frac{(-1)^{2k}+1}{2k}, k \in \mathbb{N} \\ &= \left(1, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{8}, \frac{2}{10}, \frac{2}{12}, \ldots\right) \\ &= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto $x_{n_k} = x_{2k}$ es una subsucesión de x_n.

Para x_{2k-1}, se quiere escribir $x_{n_k} = x_{2k-1}$ con $k \in \mathbb{N}$, así

$$\begin{aligned} x_{n_k} = x_{2k-1} &= \frac{(-1)^{2k-1}+1}{2k-1}, k \in \mathbb{N} \\ &= \left(0, \frac{0}{3}, \frac{0}{5}, \frac{0}{7}, \frac{0}{9}, \frac{0}{11}, \ldots\right) \\ &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots). \end{aligned}$$

Por lo tanto x_{n_k} es una subsucesión de x_n.

Teorema 1.13.16. *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en L, entonces por cada $\varepsilon > 0$ existe una subsucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|y_n - L| < \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n \longrightarrow L$, así $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon\ \forall n \geq N$.
Sea $n_k = N + k$. Entonces la sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales.
Sea $y_k = x_{n_k}$.
$n_k = N + k > N\ \forall k \in \mathbb{N}$, así $|x_{n_k} - L| < \varepsilon\ \forall k \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}, |y_k - L| < \varepsilon$. ■

Teorema 1.13.17. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.*

Demostración. Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, así existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $y_k = x_{n_k}\ \forall k \in \mathbb{N}$.
Sea $\varepsilon > 0$.

Como $x_n \longrightarrow L$, así $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon, \forall n \geq N$.
Sea $k \geq N$.

$$\begin{aligned} k \geq N &\implies n_k \geq k \geq N \\ &\implies n_k \geq N \\ &\implies |x_{n_k} - L| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto si $k \geq N$, entonces $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$. Esto es si $k \geq N$, entonces $|y_k - L| < \varepsilon$.
Por lo tanto $y_k \longrightarrow l$ cuando $k \longrightarrow \infty$. ■

Teorema 1.13.18. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene dos subsucesiones $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $y_n \longrightarrow M$ y $z_n \longrightarrow L$ con $M \neq L$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Demostración. Supóngase que $x_n \longrightarrow T, T \in \mathbb{R}$ por teorema 1.13.17 $y_n \longrightarrow T$ y $z_n \longrightarrow T$, y como el limite de una sucesión es único, así $M = T = L$, pero esto es una contradicción ya que $M \neq L$. ■

Ejemplo 1.13.19. La sucesión $x_n = (-1)^n$ ya habíamos probado que diverge. Otra manera de probarlo es considerando las siguientes sucesiones $(x_{2k}) = (1, 1, 1, \ldots)$ y $(x_{2k+1}) = (-1, -1, -1, \ldots)$, así $x_{2k} \longrightarrow 1$ y $x_{2k+1} \longrightarrow -1$. Como $1 \neq -1$, entonces por el teorema anterior $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Ejercicios resueltos.

CRITERIO DE LA RAZÓN PARA LA CONVERGENCIA DE SUCESIONES.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.
Si $\lim\limits_{x\to\infty} \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$ y por lo tanto. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Ejercicio 1.13.20. Determinar si la sucesión $x_n = \dfrac{5^n}{n!}$ es convergente o divergente.

Solución. Aplicando el criterio de la razón para sucesiones convergentes del calculo.

$x_n = \dfrac{5^n}{n!}$ y $x_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!}$, entonces se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{5^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot 5^{n+1}}{5^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot 5^n \cdot 5}{5^n \cdot (n+1) \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1}$$
$$= \frac{5}{\infty + 1} = 0.$$

Por lo tanto la sucesión $x_n = \dfrac{5^n}{n!}$ es convergente. ■

Ejercicio 1.13.21. Determinar si la sucesión $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ es convergente o divergente.

Solución. Aplicando el criterio de la razón para sucesiones convergentes del calculo.

$x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ y $x_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, entonces se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot (n+1)!}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot (n+1) \cdot n!}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Por lo tanto la sucesión $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ es convergente. ∎

Ejercicio 1.13.22. a) Pruebe que si $x_n \longrightarrow L$ y $L \neq 0$, entonces existe un número N tal que $n \geq N$ entonces $|x_n| > \dfrac{L}{2}$.

b) Pruebe que si $x_n \longrightarrow L$ y $x_n \neq 0$, para todo n,$L \neq 0$, y si $y_n \longrightarrow M$, entonces $\dfrac{y_n}{x_n} \longrightarrow \dfrac{M}{L}$.

Demostración. **a)** Como $x_n \longrightarrow L$, aplicando valor absoluto se tiene $|x_n| \longrightarrow |L|$.
Sea $\varepsilon = \dfrac{|L|}{2} > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ así,

$$\begin{aligned}
||x_n| - |L|| < \frac{|L|}{2} \quad &\Longrightarrow \quad -\frac{|L|}{2} < |x_n| - |L| < \frac{|L|}{2} \\
&\Longrightarrow \quad -\frac{|L|}{2} + |L| < |x_n| - |L| + |L| < \frac{|L|}{2} + |L| \\
&\Longrightarrow \quad \frac{|L|}{2} < |x_n| < \frac{3|L|}{2} \\
&\Longrightarrow \quad |x_n| > \frac{|L|}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $|x_n| > \dfrac{|L|}{2}$.

b) Sea $\varepsilon > 0$.

Tomando

$$\begin{aligned}
\left|\frac{y_n}{x_n} - \frac{M}{L}\right| &= \frac{|y_nL - x_nM|}{|x_n||L|} \\
&= \frac{|y_nL - ML + ML - x_nM|}{|x_n||L|} \\
&\leq \frac{|y_nL - ML| + |ML - x_nM|}{|x_n||L|} \\
&= \frac{|L||y_n - M| + |M||x_n - L|}{|x_n||L|} \ (**)
\end{aligned}$$

Por literal a), si $n \geq N$ entonces $|x_n| > \dfrac{L}{2}$, de donde $\dfrac{1}{|x_n|} < \dfrac{2}{|L|}$.

Ademas $y_n \longrightarrow M$ y $x_n \longrightarrow L$, así para $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - M| < \dfrac{\varepsilon|L|}{4}, \forall n \geq N_1$ y $|x_n - L| < \dfrac{\varepsilon|L|^2}{4|M|}, \forall n \geq N_2$.

Retomando (**)

$$\begin{aligned}
&< 2\frac{(|L||y_n - M| + |M||x_n - L|)}{|L||L|} \\
&= \frac{2}{|L|}|y_n - M| + \frac{2|M|}{|L|^2}|x_n - L| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\left|\dfrac{y_n}{x_n} - \dfrac{M}{L}\right| < \varepsilon$.

Por lo tanto $\dfrac{y_n}{x_n} \longrightarrow \dfrac{M}{L}$.

■

Capítulo 2

Conceptos de análisis.

2.1. Completitud de los números reales

Definición 2.1.1. *Un campo $(F, +, \cdot)$ es un conjunto F que tiene las siguientes propiedades:*

(1) *En F hay definida una operación, llamada suma y denotada con el signo $+$, que verifica los siguientes propiedades:*

a) *La suma es cerrada: $x + y \in F$, $\forall\, x, y \in F$.*

b) *La suma es asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall\, x, y, z \in F$.*

c) *Existe un elemento neutro para la suma: $\exists\, e \in F : x + e = x$, $\forall\, x \in F$.*

d) *Para todo $x \in F$ existe un inverso aditivo $-x \in F$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*

e) *La suma es conmutativa: $x + y = y + x$, $\forall\, x, y \in F$.*

(2) *En F hay definida una segunda operación, llamada producto y denotada por $\cdot$ que verifica los siguientes propiedades:*

a) *El producto es asociativo: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall\, x, y, z \in F$.*

b) *Existe una identidad multiplicativa* 1 *tal que* $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$. (Elemento identidad).

c) Para todo $x \in F - \{0\}$ existe un inverso multiplicativo $x^{-1} \in F - \{0\}$ tal que,

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1 \text{ (Inverso aditivo).}$$

d) El producto es conmutativo: $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall\, x, y \in F$.

e) El producto cumple la propiedad distributiva respecto de la suma: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $\forall\, x, y, z \in F$.

Ejemplo 2.1.2. Los números reales junto con la operaciones usuales de adición y multiplicación forman un campo, denominado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Ejemplo 2.1.3. Los números racionales denotado por $\mathbb{Q}$, y definidos como

$$\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{a}{b}, \text{ donde } a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$$

junto con las operaciones usuales de adición y multiplicación forman un campo y se denota $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Ejemplo 2.1.4. El conjunto de los números enteros no tiene inversos respecto al producto no cumple la propiedad c) para el producto. Por lo tanto $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ no es un campo.

Definición 2.1.5. *Un campo $(F, +, \cdot)$ es ordenado si y sólo si existe una relación $<$ en F de modo que para todo $x, y, z \in F$,*

(1) $x \not< x$, (irreflexivo).

(2) Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$. (transitividad).

(3) Se cumple que $x < y$ ó bien $x = y$ ó bien $y < x$ (ley de tricotomía).

(4) Si $x < y$, entonces $x + z < y + z$.

(5) Si $x < y$ y $0 < z$, entonces $x \cdot z < y \cdot z$.

Definición 2.1.6. *Sea A un subconjunto de un campo ordenado F. Entonces $u \in F$ es una cota superior para A si y sólo si $a \leq u$ para cada $a \in A$. Si A tiene una cota superior decimos que A es acotado superiormente.*

$l \in F$ es una cota inferior para A si y sólo si $l \leq a$ para cada $a \in A$. Si A tiene una cota inferior decimos que A es acotado inferiormente.
Si A tiene una cota superior y una cota inferior decimos que A esta acotado.

En $\mathbb{R}$ el intervalo semiabierto $[0, 3)$ tiene 3 como una cota superior. De hecho, $\pi, 18$ y 206 son también cotas superiores para $[0, 3)$. Ambos -0.5 y 0 son cotas inferiores para $[0, 3)$. Observamos que algunas cotas para los conjuntos son elementos del conjunto mientras que otras cotas no lo son.

Definición 2.1.7. *Sea A un subconjunto de un campo F ordenado. Entonces $s \in F$ es la mínima cota superior de A (o supremo para A) si y sólo si*

(a) *s es una cota superior para A y*

(b) *$s \leq x$ para cada cota superior x para A.*

$i \in F$ es una máxima cota inferior para A (o ínfimo para A) si y sólo si

(a) *i es una cota inferior para B, y*

(b) *$x \leq i$ para cada cota inferior x para A.*

Escribiremos $\sup(B)$ *para denotar el supremo de A e* $\text{ínf}(B)$ *para denotar el ínfimo de A.*

Ejemplo 2.1.8. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Pruebe que:

a) Si el $\sup(A)$ existe, entonces es único. Es decir, si x e y son dos mínimas cotas superiores para A, entonces $x = y$.

b) Si el $\text{ínf}(A)$ existe, entonces es único.

Demostración. **a)** Sean x, y mínimas cotas superiores de A. Como $x = \sup(A)$ y ademas y es una cota superior, así por definición $x \leq y$. Así también $y = \sup(A)$ y x es una cota superior por definición $y \leq x$, luego $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$ por la propiedad antisimétrica.
Por lo tanto si el $\sup(A)$ existe, entonces es único.

b) Sean x, y máximas cotas inferiores de A. Como $x = \text{ínf}(A)$ e y es una cota inferior, así por definición $y \leq x$. También $y = \text{ínf}(A)$ y x es una cota inferior, entonces por definición $x \leq y$, luego $y \leq x$ y $x \leq y$, entonces $x = y$ por la propiedad antisimétrica.
Por lo tanto si el $\text{ínf}(A)$ existe, entonces es único. ■

Ejemplo 2.1.9. En el campo ordenado $\mathbb{R}$.

(1) El $\text{ínf}([0, 3)) = 0$ y $\sup([0, 3)) = 3$.

(2) $\text{ínf}(\mathbb{N}) = 1$ sin embargo $\sup(\mathbb{N})$ no existe porque $\mathbb{N}$ no tiene cota superior.

Ejemplo 2.1.10. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Probar que,

(a) Si A es acotado superiormente y $B \subseteq A$ entonces B esta acotado superiormente.

(b) Si A esta acotado inferiormente y $B \subseteq A$ entonces B esta acotado inferiormente.

Demostración. **a)**
Como $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y A es acotado superiormente y $B \subseteq A$, por definición de cota superior, para todo $x \in A$, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq M$. Ahora para todo $y \in B$, tenemos $y \in A$ por ser $B \subseteq A$, entonce $y \leq M$.

Por lo tanto B tiene una cota superior.

b) A esta acotado inferiormente y $B \subseteq A$, entonces existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq x$ $\forall x \in A$, así para cualquier $y \in B$ se tiene $y \in A$ por ser $B \subseteq A$, de donde $m \leq y$.

Por lo tanto B esta acotado inferiormente. ■

Teorema 2.1.11. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces $s = \sup(A)$ si y sólo si*

(a) *Para todo* $\varepsilon > 0$, *si* $x \in A$, *entonces* $x < s + \varepsilon$.

(b) *Para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $y \in A$ *tal que* $y > s - \varepsilon$.

Demostración. "$\Longrightarrow$"
a) Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x \in A$. Como $s = \sup(A)$, así s es una cota superior para A, de donde $x \leq s < s + \varepsilon$, entonces $x < s + \varepsilon$.

b) Sea $\varepsilon > 0$.
$s - \varepsilon < s$, pero s es la mínima cota superior, así $s - \varepsilon$ no puede ser cota superior del conjunto A. Entonces existe $y \in A$ tal que $s - \varepsilon < y$, es decir $y > s - \varepsilon$.
"$\Longleftarrow$"
Probaremos que s es una cota superior de A.
Sea $a \in A$. Debemos probar que $a \leq s$. (Razonando por contradicción), supongamos que $s < a$. Sea $\varepsilon = a - s > 0$ por **(a)**

$$\begin{aligned} a &< s + \varepsilon \\ a &< s + (a - s) \\ a &< a, \text{ pero esto es una contradicción.} \end{aligned}$$

Por lo tanto $a \leq s$.

Sea z una cota superior de A. Debemos probar que $s \leq z$ (razonando por contradicción), supongamos que $z < s$ y tomemos $\varepsilon = s - z > 0$, por **(b)** existe $y \in A$ tal que $y > s - \varepsilon = s - (s - z) = z$. Luego existe $y \in A$ tal que $y > z$, pero esto es absurdo ya que z es cota superior de A.
Por lo tanto $s \leq z$.
Luego $s = \sup(A)$.

■

Ejemplo 2.1.12. Probar que el conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

Demostración. Existen tantos números racionales tales como $\frac{3}{2}$, 1.44 que son cotas superiores para B.

Supongamos que existe un número racional s tal que $s = \sup(B)$.

Verifiquemos que $s < \sqrt{2}$ y $s > \sqrt{2}$ no son verdaderos.
Si $s < \sqrt{2}$, entonces $0 < \sqrt{2} - s$ ó $\sqrt{2} - s > 0$. Tomando un número natural k tal que $\frac{1}{k} < \sqrt{2} - s$ entonces $\frac{1}{k} + s < \sqrt{2}$ pero $\frac{1}{k} + s$ es un número racional ya que es la suma de racionales así $\frac{1}{k} + s \in B$. Lo cual contradice que s es una cota superior para B.

Si $s > \sqrt{2}$, entonces $s - \sqrt{2} > 0$. Tomando un número natural m tal que $\frac{1}{m} < s - \sqrt{2}$, entonces $s - \frac{1}{m} > \sqrt{2}$ y $s - \frac{1}{m}$ es un número racional. Entonces para todo $x \in B$ se

cumple que $x < \sqrt{2} < s - \dfrac{1}{m} < s$, así $s - \dfrac{1}{m}$ es una cota superior para B y que es menor que s. Esto contradice la suposición de que s es una mínima cota superior para B en $\mathbb{Q}$. Como $s < \sqrt{2}$ y $s > \sqrt{2}$ son falsos se concluyen que $s = \sqrt{2}$. Pero esto es imposible ya que s es un número racional.
Por lo tanto $s = \sup(B)$ no existe en $\mathbb{Q}$. ■

La propiedad arquimediana. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0,$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.
Los enunciados siguientes son equivalentes.

a) $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, n \in \mathbb{N} : y < n$.

b) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n \in \mathbb{N} : \varepsilon > \dfrac{1}{n}$.

Ejercicios resueltos.

Ejercicio 2.1.13. Encuentra el supremo e ínfimo, si existen, de cada uno de los siguientes conjuntos.

P_1) $A = \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

P_2) $B = \left\{ \dfrac{n}{n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Demostración. P_1) Es una sucesión decreciente algunos términos son: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$, al aplicar limite tiende a cero.
Así 0 es cota inferior para A y 1 es una cota superior para A.
i) Probemos que 1 es supremo para A, verifiquemos que cumple las condiciones del teorema 2.1.11.

a) Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x \in A$. Como $1 = \sup(A)$, así 1 es una cota superior para A, de donde $x \leq 1 < 1 + \varepsilon$, entonces $x < 1 + \varepsilon$.

b) Sea $\varepsilon > 0$.
$1 - \varepsilon < 1$, pero 1 es la mínima cota superior, así $1 - \varepsilon$ no puede ser cota superior del conjunto A. Entonces existe $y \in A$ tal que $1 - \varepsilon < y$, es decir $y > 1 - \varepsilon$.

Por lo tanto $1 = \sup(A)$.

ii) Comprobemos que 0 cumple las propiedades del ínfimo.
a) 0 es cota inferior de A si $0 \leq x$, para todo $x \in A$. Como los elementos de A son de la forma $\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}$, pero 1 y n son positivos $\forall n \in \mathbb{N}$ así $\dfrac{1}{n}$ es positivo, entonces $\dfrac{1}{n} \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Por lo que 0 es cota inferior de A.

b) Probemos que ningún número positivo puede ser puede ser cota inferior de A.
Sea $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana existe $m \in \mathbb{N} : \varepsilon > \dfrac{1}{m}$, notemos que $1 < m\varepsilon$, así $1 < m\varepsilon \Longleftrightarrow \dfrac{1}{m} < \varepsilon$.

Hemos demostrado que ningún número positivo puede ser cota inferior de A, pues dado cualquiera, hay un elemento en A menor que éste. Por lo tanto, cualquier cota inferior c de A debe cumplir que $c \leq 0$.

De todo lo anterior, concluimos que 0 es el ínfimo de A.

P_2) Es una sucesión creciente algunos términos son: $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{3}, \ldots$

Aplicar el limite cuando n tiende a infinito. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{1+\frac{2}{\infty}} = 1.$

Así $\dfrac{1}{3}$ es cota inferior para B y 1 es una cota superior para B.

i) Probemos que 1 es supremo para B, verifiquemos que cumple las condiciones del teorema 2.1.11.

a) Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x \in B$. Como $1 = \sup(B)$, así 1 es una cota superior para B, de donde $x \leq 1 < 1 + \varepsilon$, entonces $x < 1 + \varepsilon$.

b) Sea $\varepsilon > 0$.
$1 - \varepsilon < 1$, pero 1 es la mínima cota superior, así $1 - \varepsilon$ no puede ser cota superior del conjunto B. Entonces existe $y \in B$ tal que $1 - \varepsilon < y$, es decir $y > 1 - \varepsilon$.

Por lo tanto $1 = \sup(B)$.

ii) Comprobemos que $\dfrac{1}{3}$ cumple las propiedades del ínfimo.
a) $\dfrac{1}{3}$ es cota inferior de B, si $\dfrac{1}{3} \leq x$, para todo $x \in B$. Como los elementos de B son de la forma $\dfrac{n}{n+2} : n \in \mathbb{N}$, entonces $\dfrac{n}{n+2} \geq \dfrac{1}{3}, n \in \mathbb{N}$. Por lo que $\dfrac{1}{3}$ es cota inferior de B.

b) Probemos que ningún número mayor a $\dfrac{1}{3}$ puede ser puede ser cota inferior de B.
Sea $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana existe $m \in \mathbb{N} : \varepsilon > \dfrac{1}{m}$, notemos que $1 < m\varepsilon < m\varepsilon + 2\varepsilon \leq \dfrac{(m+2)\varepsilon}{m}$, así $1 < \dfrac{(m+2)\varepsilon}{m} \Longleftrightarrow \dfrac{m}{m+2} < \varepsilon$.

Hemos demostrado que ningún número mayor que $\dfrac{1}{3}$ puede ser cota inferior de B, pues dado cualquiera, hay un elemento en B menor que éste. Por lo tanto, cualquier cota inferior c de B debe cumplir que $c \leq \frac{1}{3}$.

De todo lo anterior, concluimos que $\frac{1}{3}$ es el ínfimo de B.

■

Ejercicio 2.1.14. Sean $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Probar,

a) Si $\sup(A)$ y $\sup(B)$ ambos existen entonces $\sup(A) \leq \sup(B)$.

b) Si $\inf(A)$ y $\inf(B)$ ambos existen entonces $\inf(A) \geq \inf(B)$.

Demostración. a) Supongamos que el $\sup(A)$ y $\sup(B)$ ambos existen. Sea $x = \sup(A)$ y $y = \sup(B)$. Como $y = \sup(B)$, entonces y es la mínima cota superior para B y $A \subseteq B$, entonces y es una cota superior para A, de donde $x \leq y$, así $\sup(A) \leq \sup(B)$.

b) Supongamos que el $\inf(A)$ y $\inf(B)$ ambos existen. Sea $x = \inf(A)$ y $y = \inf(B)$. Como $y = \inf(B)$, entonces y es la máxima cota inferior de B y $A \subseteq B$. Por lo tanto y es una cota inferior para A, así $y \leq x$ entonces $\inf(B) \leq \inf(A)$.
Por lo tanto $\inf(A) \geq \inf(B)$ ■

Ejercicio 2.1.15. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, si el supremo de A existe. Probar que,

$$\sup(A) = \inf\{u : u \text{ es una cota superior para } A\}.$$

Demostración. Supongamos que el $\sup(A)$ existe. Por definición 2.1.7 u es una cota superior para A, entonces $\sup(A) \leq u$. Así $\sup(A) \leq \inf\{u : u \text{ es una cota superior para } A\}$.

Luego hay que probara $\inf\{u : u \text{ es una cota superior para } A \leq \sup(A)$.

También para $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $Sup(A) - \varepsilon < a$, por teorema 2.1.11 inciso b) el $\sup(A) < a + \varepsilon$, así $a + \varepsilon$ es una cota superior para A.

Entonces $\inf\{u : u \text{ es una cota superior para } A\} \leq a + \varepsilon \leq \sup(A) + \varepsilon$.
Así $\inf\{u : u \text{ es una cota superior para } A\} \leq \sup(A)$.

Por lo tanto $\sup(A) = \inf\{u : u \text{ es una cota superior para } A\}$. ■

2.2. Teorema de Heine-Borel

Definición 2.2.1. *Sean a y δ números reales con $\delta > 0$. La $\delta-$vecindad de a es el conjunto $B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\}$.*

La δ-vecindad de a consiste de todos los puntos x cuya distancia de a es menor que δ. Como $|x - a| < \delta$ es equivalente a $a - \delta < x < a + \delta$, $B(a, \delta)$ es el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$. Intuitivamente resulta mejor pensar en δ como un número pequeño positivo y $B(a, \delta)$ como un intervalo pequeño abierto de radio δ centrado en a.

Definición 2.2.2. *Para un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. El interior de A es el conjunto,*

$$intA = \{a \in \mathbb{R} : \exists\, \varepsilon > 0 \quad (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A\}$$

y sus elementos son puntos interiores de A.

Para el intervalo $[2, 5), 3$ es un punto interior como $B(3, 0.5) = (3 - 0.5, 3 + 0.5) \subseteq [2, 5)$. Ademas 4.9998 es un punto interior porque $B(4.9998, 0.0001) = (4.9998-0.0001, 4.9998+0.0001) \subseteq [2, 5)$.

Corolario 2.2.3. *Para todo conjunto A se satisface que el $intA \subseteq A$.*

Demostración. Si $intA = \emptyset$, no hay nada que probar ya que $\emptyset$ está incluido en todo conjunto.
Sea $x \in intA$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$, y en particular $x \in A$. ■

Definición 2.2.4. *Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es abierto si $A \subseteq intA$. También se sabe que $intA \subseteq A$, de manera que A es abierto si y sólo si $A = intA$.*

Proposición 2.2.5. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Si $A \subseteq B$, entonces $int(A) \subseteq int(B)$.*

Demostración. Sea $x \in int(A)$.

$$\begin{aligned} x \in int(A) &\implies \exists\, \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A \\ &\implies \exists\, \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset B \\ &\implies x \in int(B). \end{aligned}$$

Por lo tanto $int(A) \subseteq int(B)$. ■

Ejemplo 2.2.6. El $int(a, b) = (a, b)$.

Solución. Sea $x \in (a, b)$, así $a < x < b$.
Tomemos $\varepsilon = \text{mín}\{x - a, b - x\}$ así $a = x - (x - a) \leq x - \varepsilon$ y $x + \varepsilon \leq x + (b - x) = b$. De manera que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$. Ademas como x está en el $int(a, b)$, entonces x está en (a, b).
Por lo tanto $int(a, b) = (a, b)$. ■

Ejemplo 2.2.7. Probar que $int[a, b] = (a, b)$.

Demostración. Como $(a, b) \subset [a, b]$ y sabemos por el ejemplo anterior que $int(a, b) = (a, b)$ así $(a, b) \subset int[a, b]$.
Luego verificar que $a, b \notin int[a, b]$. Supongamos que $a \in int[a, b]$, por definición existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq [a, b]$, de manera que $a - \varepsilon \geq a$, lo cual es una contradicción. Luego supongamos que $b \in int[a, b]$, por definición existe $\varepsilon > 0$ tal que $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subseteq [a, b]$, de manera que $b \geq b + \varepsilon$, así se llega a una contradicción. Por lo tanto $a, b \notin int[a, b]$.
Por lo tanto $int[a, b] = (a, b)$. ■

Teorema 2.2.8. *El interior de todo conjunto, es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea X un conjunto arbitrario que esta contenido en $\mathbb{R}$ y sea $A = intX$. Por definición sabemos que $intA \subseteq A$, probaremos que $A \subseteq intA$.
Sea $x \in A$, por definición existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $(x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0) \subseteq X$.
Sea $y \in (x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0)$; como todo intervalo abierto es abierto por el ejemplo 2.2.6, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq (x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0) \subseteq X$, de manera que $y \in A$, así $(x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0) \subseteq A$.
Por lo tanto $x \in intA$.
Por lo tanto $A = intA$. ■

Ejemplo 2.2.9. El intervalo $(2, 5)$ es abierto porque todo punto en $(2, 5)$ es un punto interior de $(2, 5)$. Así el complemento $(-\infty, 2] \cup [5, \infty)$ es un conjunto cerrado. Por otro lado 2 no es un punto interior de $[2, 5)$. Por lo tanto, $[2, 5)$ no es abierto. El intervalo $[2, 5)$ tampoco es cerrado, como su complemento $[2, 5)^c = (-\infty, 2) \cup [5, \infty)$ contiene a 5, pero 5 no es un punto interior de $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$.

Ejemplo 2.2.10. El conjunto $\mathbb{R}$ es abierto ya que para todo $x \in \mathbb{R}, B(x, 1) \subseteq \mathbb{R}$. El conjunto vacío $\emptyset$ también es abierto por la declaración "para todo x, si $x \in \emptyset, x$ es un punto interior de $\emptyset$ "es cierto porque el antecedente es falso. Por lo que los complementos de $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ también son conjuntos cerrados.

Un conjunto es abierto si sobre cada elemento del conjunto hay una $\delta - vecindad$ que se encuentra completamente dentro del conjunto. Esto significa que ningún punto puede estar en el limite o en los bordes exteriores del conjunto.

Teorema 2.2.11. *Todo intervalo abierto de números reales es un conjunto abierto.*

Demostración. Consideremos los siguientes casos.

Caso 1: Por ejemplo 2.2.6, todo intervalo abierto acotado es un conjunto abierto.

Caso 2: Probemos que el intervalo $(a, +\infty)$ es abierto.
Mostrando que $int(a, +\infty) = (a, +\infty)$. Sabemos que $int(a, +\infty) \subseteq (a, +\infty)$, por el corolario 2.2.3.
Probemos que $(a, +\infty) \subseteq int(a, +\infty)$.
Sea $x \in (a, +\infty)$, entonces $a < x$. Sea $\varepsilon = x - a$.
Probemos que $B(x, \varepsilon) \subset (a, +\infty)$.
Sea $z \in B(x, \varepsilon)$.

$$\begin{aligned}
z \in B(x, \varepsilon) &\implies |z - x| < \varepsilon \\
&\implies -\varepsilon < z - x < \varepsilon \\
&\implies -(x - a) < z - x < x - a \\
&\implies -x + a < z - x < x - a \\
&\implies -x + a < z - x \\
&\implies a < z \\
&\implies z \in (a, +\infty).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $B(x,\varepsilon) \subset (a,+\infty)$.
Por lo tanto $x \in int(a,+\infty)$.
Por lo tanto $(a,+\infty)$ es abierto.

Caso 3: Probemos que el intervalo $(-\infty,a)$ es abierto.
Mostrando que $int(-\infty,a) = (-\infty,a)$. Sabemos que $int(-\infty,a) \subseteq (-\infty,a)$, por el corolario 2.2.3.
Probemos que $(-\infty,a) \subseteq int(-\infty,a)$.
Sea $y \in (-\infty,a)$, así tomemos $\varepsilon = a-y$.
Probemos que $B(y,\varepsilon) \subset (-\infty,a)$.
Sea $w \in B(x,\varepsilon)$.

$$\begin{aligned} w \in B(y,\varepsilon) &\implies |w-y| < \varepsilon \\ &\implies -\varepsilon < w-y < \varepsilon \\ &\implies -(a-y) < w-y < a-y \\ &\implies -a+y < w-y < a-y \\ &\implies w-y < a-y \\ &\implies w < a \\ &\implies w \in (-\infty,a). \end{aligned}$$

Por lo tanto $B(y,\varepsilon) \subset (-\infty,a)$.
Por lo tanto $y \in int(-\infty,a)$.
Por lo tanto $(-\infty,a)$ es abierto.

■

Teorema 2.2.12. *Sea $\mathscr{A}$ una colección no vacía de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Entonces*

(a) $\displaystyle\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ *es un conjunto abierto.*

(b) *Si $\mathscr{A}$ es finito,* $\displaystyle\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$ *es un conjunto abierto.*

Demostración. **a)** Supongamos que $x \in \displaystyle\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$, debemos mostrar que x es un punto interior de $\displaystyle\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$. Como x está en la unión sobre la colección, existe $B \in \mathscr{A}$ tal que $x \in B$ como B está en la colección $\mathscr{A}$, B es abierto. Por lo tanto, x es un punto interior de B. Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subseteq B$. Ademas $B \subseteq \displaystyle\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ así $B(x,\delta) \subseteq \displaystyle\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$. Por lo tanto, x es un punto interior de $\displaystyle\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$.

b) Supongamos que $\mathscr{A}$ es finito y $x \in \displaystyle\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$. Entonces $x \in A$ para todo $A \in \mathscr{A}$, y así para cada conjunto abierto $A \in \mathscr{A}$ corresponde un $\delta_A > 0$ tal que $B(x,\delta_A) \subseteq A$.

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_A : A \in \mathscr{A}\}$. Tenga en cuenta que el mínimo de un conjunto finito de números positivos debe ser positivo. Entonces $\delta > 0$ y $B(x,\delta) \subseteq B(x,\delta_A) \subseteq A$ para todo $A \in \mathscr{A}$. Entonces $B(x,\delta) \subseteq \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$. Por lo tanto, x es un punto interior de $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$. ■

Otra forma de probar que $(a,+\infty)$ es abierto es haciendo uso del teorema anterior literal a), así $(a,+\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a, a+n)$ es la unión de abiertos, por lo tanto es un conjunto abierto.
También $(-\infty, a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a-n, a)$ es la unión de abiertos, por lo tanto es un conjunto abierto.

Teorema 2.2.13. *Si A es un subconjunto no vació cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, entonces el* $\sup(A) \in A$ *y* $\inf(A) \in A$.

Demostración. Sea A es un conjunto cerrado y acotado no vació. Sea $s = \sup(A)$. Supongamos que $s \notin A$, entonces $s \in A^c$, donde A^c es abierto ya que A es cerrado. Así $B(s,\delta) \subseteq A^c$ para algún δ positivo, esto implica que $s-\delta$ es una cota superior para A.
Probemos que $s-\delta$ es una cota superior para A, entonces $s-\delta \leq a, \forall a \in A$. (Razonando por contradicción), y supongamos que $a < s-\delta$ tomando $\varepsilon = a - s + \delta > 0$ por teorema 2.1.11 literal **(a)**

$$
\begin{aligned}
a &< s-\delta+\varepsilon \\
a &< s-\delta+(a-s+\delta) \\
a &< a, \text{ pero esto es una contradicción.}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $s-\delta$ es una cota superior para A esto contradice el teorema 2.1.11, por lo tanto $s \in A$. ■

Definición 2.2.14. *Sea A un conjunto de números reales. Una colección $\mathscr{C}$ de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, es una cubierta de A si y sólo si $A \subseteq \bigcup_{c\in\mathscr{C}} C$. Si $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$ y $\mathscr{B}$ es una cubierta de A decimos que $\mathscr{B}$ es una subcubierta de $\mathscr{C}$ para A.*

Ejemplo 2.2.15. Para el conjunto $A = \{2,4,5,6,8,9\}$, la colección de intervalos abiertos $\mathscr{C} = \{(-1,2),(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),(5,9),(6,10),(7,11)\}$ es una cubierta para A ya que $\mathscr{C}$ esta conformado de conjuntos abiertos y $A \subseteq \bigcup_{c\in\mathscr{C}} C = (-1,11)$.
La colección $\mathscr{B} = \{(1,4),(3,6),(4,7),(6,10)\}$ es un subconjunto de $\mathscr{C}$ y también es una cubierta de A como $\bigcup_{c\in\mathscr{B}} C = (1,10)$. Entonces $\mathscr{B}$ es una subcubierta de $\mathscr{C}$ para A.

Definición 2.2.16. *Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es compacto si y sólo si cada cubierta $\mathscr{C}$ de A, tiene una subcubierta finita de $\mathscr{C}$ para A.*

Ejemplo 2.2.17. *Demostrar que el conjunto de los números reales no es compacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} = \{(-\infty, n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Como $(-\infty, n) \subseteq \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, así $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-\infty, n) \subseteq \mathbb{R}$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Sea m un número natural mayor que x, es decir tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $x < m$, así $x \in (-\infty, m) \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-\infty, n)$, de donde $\mathbb{R} \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-\infty, n)$. Por lo tanto $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-\infty, n)$. Luego $\mathscr{C}$ es una cubierta de $\mathbb{R}$.

Por contradicción, si $\mathbb{R}$ fuese compacto entonces existiría una subcubierta finita $F = \{(-\infty, n_1), (-\infty, n_2), ..., (-\infty, n_k)\}$ tal que $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{j=1}^{k}(-\infty, n_j)$.

Sea $N = \max\{n_1, n_2, ..., n_k\}$, así $\bigcup\limits_{j=1}^{k}(-\infty, n_j) = (-\infty, N)$. De donde $\mathbb{R} = (-\infty, N)$ lo cual contradice lo supuesto. ■

Ejemplo 2.2.18. *Demostrar que el conjunto $A = (0,1)$ no es compacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} = \left\{\left(\dfrac{1}{x}, 1\right) : x \in (1, \infty)\right\}$.

Si $x \in (1, \infty)$, entonces $x > 1$, así $1 > \dfrac{1}{x} > 0$. Por lo tanto $\left(\dfrac{1}{x}, 1\right) \subset (0,1)$.

Luego $\bigcup\limits_{x \in (1,\infty)} \left(\dfrac{1}{x}, 1\right) \subset (0,1)$.

Sea $z \in (0,1)$.

$$\begin{aligned} z \in (0,1) &\implies z > 0 \ \wedge \ z < 1 \\ &\implies 1 < \frac{1}{z} \\ &\implies 2 < \frac{2}{z} \\ &\implies \frac{2}{z} \in (1, \infty) \ \ y \ \ \frac{1}{\left(\frac{2}{z}\right)} < 1. \end{aligned}$$

Como $z > \dfrac{z}{2}$, ya que $z > 0$, así $z \in \left(\dfrac{1}{\left(\frac{2}{z}\right)}, 1\right)$, con $\dfrac{1}{\left(\frac{2}{z}\right)} \in (1, \infty)$.

Luego $z \in \left(\dfrac{1}{\left(\frac{2}{z}\right)}, 1\right) \subset \bigcup\limits_{x \in (1,\infty)} \left(\dfrac{1}{x}, 1\right)$, así $(0,1) \subset \bigcup\limits_{x \in (1,\infty)} \left(\dfrac{1}{x}, 1\right)$.

De donde $(0,1) = \bigcup_{x\in(1,\infty)} \left(\frac{1}{x}, 1\right)$. Por lo tanto $\mathscr{C}$ es una cubierta por abiertos de $(0,1)$.
Por contradicción si $(0,1)$ fuese compacto, entonces existiría una subcubierta finita de $\mathscr{C}$, digamos que es:
$F = \left\{\left(\frac{1}{x_1}, 1\right), \left(\frac{1}{x_2}, 1\right), ..., \left(\frac{1}{x_k}, 1\right)\right\}$ y es tal que $(0,1) = \bigcup_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{x_j}, 1\right)$, donde $x_j \in (0,1)$.
Sea $w = \max\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, así $\frac{1}{w} \leq \frac{1}{x_j}$ para todo $j = 1, ..., k$ y $w \in (0,\infty)$.
Luego $\bigcup_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{x_j}, 1\right) = \left(\frac{1}{w}, 1\right)$,pero entonces $(0,1) = \bigcup_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{x_j}, 1\right) = \left(\frac{1}{w}, 1\right)$, por lo que $(0,1) = \left(\frac{1}{w}, 1\right)$ esto es absurdo ya que $\frac{1}{2w} \in (0,1)$ pero $\frac{1}{2w} \notin \left(\frac{1}{w}, 1\right)$.
Por lo tanto $(0,1)$ no es compacto. ∎

Lema 2.2.19. *Sea A un conjunto cerrado y $x \in \mathbb{R}$, si $A \cap B(x,\delta) \neq \emptyset$ $\forall \delta > 0$, entonces $x \in A$.*

Demostración. (Razonando por contradicción). Supongamos que el conjunto A es cerrado y $A \cap B(x,\delta) \neq \emptyset$ $\forall \delta > 0$. Si $x \notin A$,entonces $x \in A^c$, donde A^c es abierto así existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subseteq A^c$. Pero esto implica que $A \cap B(x,\delta) = \emptyset$,que es una contradicción. De donde suponer que $x \in A^c$ fue un error. Por lo tanto $x \in A$. ∎

(Axioma del supremo) Todo conjunto de números reales acotado superiormente tiene un supremo en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.2.20 (El teorema de Heine - Borel). *Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado.*

Demostración. "$\Longrightarrow$"
Supongamos que A es compacto. Se demostrara que A esta acotado, sabemos que

$$A \subseteq \mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n).$$

Definamos $H = \{(-n,n) : n \in \mathbb{N}\}$ que es una cubierta para A. Ademas A es compacto así H tiene una subcubierta finita $\{(-n,n) : n \in \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}\}$.
Si elegimos $N = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, entonces $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (-n_i, n_i) = (-N, N)$. Por lo tanto A esta acotado por encima por N y por debajo $-N$.

A continuación demostrar que A es cerrado. Sea $y \in A^c$, para cada $x \in A$ tenemos $x \neq y$ y por lo que podemos elegir $\delta_x = \frac{1}{2}|x-y|$ es un número positivo. La colección $\{B(x,\delta_x) : x \in A\}$ es una familia de conjuntos abiertos que cubren a A, como A es compacto $A \subseteq B(x_1, \delta_{x_1}) \cup B(x_2, \delta_{x_2}) \cup \ldots \cup B(x_k, \delta_{x_k})$ para algunos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k \in A$.

Tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \delta_{x_3}, \dots, \delta_{x_k}\}$, tenemos $\delta > 0$ y probemos que $B(y,\delta) \subseteq A^c$.

Sea $z \in B(y,\delta)$, entonces $|z-y| < \delta$.
Supongamos que $z \in A$ pero $A \subset B(x_1, \delta_{x_1}) \cup ... \cup B(x_k, \delta_{x_k})$ así $z \in B(x_j, \delta_{x_j})$ para algún j tal que $1 \le j \le k$.

$$|y - x_j| \le |y - z| + |z - x_j| < \delta + \delta_{x_j}.$$

Pero $|y - x_j| = 2\delta_{x_j}$, por lo cual $2\delta_{x_j} < \delta + \delta_{x_j}$, es decir, $\delta_{x_j} < \delta$.
Esto es absurdo. Por lo tanto $z \in A^c$. Así $B(y,\delta) \subseteq A^c$, luego A^c es abierto.
Por lo tanto A es cerrado.

"$\Longleftarrow$"
Supongamos que A es cerrado y acotado.
Sea $\mathscr{C}$ una cubierta de A. Sea $x \in \mathbb{R}$. Definamos $A_x = \{a \in A : a \le x\}$.

$$\text{Sea } D = \{x \in \mathbb{R} : A_x \text{ está contenido en una unión finita de conjuntos de } \mathscr{C}\}.$$

Como A está acotado así el $\text{ínf}(A)$ existe. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que el $x < \text{ínf}(A)$, así $A_x = \emptyset$, por 1.1.6 literal a) $\emptyset$ puede cubrirse por un elemento cualquiera de $\mathscr{C}$, así $x \in D$. Entonces $\emptyset \neq (-\infty, \text{ínf}(A)) \subset D$, luego $D \neq \emptyset$.

Probemos que D no está acotado superiormente. Razonando por contradicción. Supongamos que D tiene cota superior entonces existe $x_0 = \sup(D)$.
Sea $\delta > 0$.

$$\text{Por el teorema 2.1.11 existe } t \in D \text{ tal que, } x_0 - \delta < t \le x_0 \tag{2.1}$$

$$\text{Si } A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \emptyset, \text{ entonces para todo } a \in A, \ x_0 - \delta \ge a \text{ ó } x_0 + \delta \le a. \tag{2.2}$$

Probemos que $A_t = A_{x_0 + \frac{\delta}{2}}$.

Sea $a \in A_t$.

$$\begin{aligned} a \in A_t &\Longrightarrow a \in A \text{ y } a \le t \\ &\Longrightarrow a \le x_0 \text{ ya que } t \le x_0 \\ &\Longrightarrow a \le x_0 + \frac{\delta}{2} \\ &\Longrightarrow a \in A_{x_0 + \frac{\delta}{2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $A_t \subseteq A_{x_0 + \frac{\delta}{2}}$.

Probemos que $A_{x_0 + \frac{\delta}{2}} \subseteq A_t$.
Sea $a \in A_{x_0 + \frac{\delta}{2}}$.

$$a \in A_{x_0 + \frac{\delta}{2}} \Longrightarrow a \in A \text{ y } a \le x_0 + \frac{\delta}{2}.$$

Supongamos que $a > t$, así por (2.1) tenemos $x_0 - \delta < t < a \leq x_0 + \dfrac{\delta}{2} < x_0 + \delta$, de donde $a \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, lo cual es absurdo por (2.2).
Por lo cual $a \leq t$, esto es, $a \in A_t$. En consecuencia $A_{x_0+\frac{\delta}{2}} \subseteq A_t$.
Por lo tanto $A_t = A_{x_0+\frac{\delta}{2}}$.
Hemos probado que si $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \emptyset$ entonces $A_t = A_{x_0+\frac{\delta}{2}}$, como $t \in D$, entonces A_t está cubierta por una unión finita de elementos de $\mathscr{C}$, así $A_{x_0+\frac{\delta}{2}}$ está contenida en la misma unión finita de elementos de $\mathscr{C}$ de donde $x_0 + \dfrac{\delta}{2} \in D$, pero $x_0 = sup(D)$ así $x_0 + \dfrac{\delta}{2} \leq x_0$, pero esto es absurdo. Por lo tanto $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \neq \emptyset, \forall \delta > 0$.

Por el lema 2.2.19 se tiene que $x_0 \in A$ y como $\mathscr{C}$ cubre a A, así existe $C \in \mathscr{C}$ tal que $x_0 \in C$. Como C es abierto, así existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset C$.
Por ser $x_0 = sup(D)$, en virtud de el teorema 2.1.11, existe $x_1 \in D$ tal que

$$x_0 - \varepsilon < x_1 \leq x_0.$$

Como $x_1 \in D$, así A_{x_1} está contenido en la unión de un número finito de elementos de $\mathscr{C}$ digamos que son $C_1, C_2, ...C_n$, esto es, $A_{x_1} \subseteq \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} C_j$.

Sea $x_2 = x_0 + \dfrac{\varepsilon}{2}$, así $x_2 < x_0 + \varepsilon$, de donde $x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset C$ esto es $x_2 \in C$.
Luego $A_{x_2} \subseteq C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n \cup C$.

Por lo tanto $x_2 \in D$ esto es absurdo ya que implicaría que $x_0 + \dfrac{\varepsilon}{2} \in D$ pero x_0 es el supremo de D.
Por lo tanto D no esta acotado superiormente así existe $x \in D$ tal que $x > sup(A)$. Por lo tanto $A_x = A$, pero $x \in D$ así existe $U_1, U_2, ..., U_k \in \mathscr{C}$ tales que
$A = A_x \subseteq U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_k$, luego $\{U_1, U_2, ..., U_k\}$ es una subcubierta finita de $\mathscr{C}$ que cubre a A.
Por lo tanto A es compacto. ■

Ejercicios resueltos.

Ejercicio 2.2.21. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Demuestre que el conjunto de todos los puntos interiores de A es un conjunto abierto.

Demostración. Sea $int(A)$ el conjunto de puntos interiores de A.
Probemos que $int(A)$ es abierto.
Sea $x \in int(A)$ por definición existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq A$.
Pero sabemos que una vecindad es un conjunto abierto, lo que significa que para todo $y \in B(x, \delta)$ y $\gamma > 0$ se cumple que $B(y, \gamma) \subseteq B(x, \delta) \subseteq A$.

Así $B(y, \gamma) \subseteq A$, y como $y \in int(A)$, así $B(x, \delta) \subseteq int(A)$.
Por lo tanto el $int(A)$ es un conjunto abierto. ■

Ejercicio 2.2.22. Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son compactos.

a) $\mathbb{Z}$.

b) $[0,10] \cup [20,30]$.

c) $[\pi, \sqrt{10}\,]$

a) Supongamos que $\mathbb{Z}$ es compacto utilizaremos el teorema de Heine- Borel, verifiquemos que $\mathbb{Z}$ es cerrado y acotado.
Supongamos que $\mathbb{Z}$ es cerrado, entonces $\mathbb{Z}^c$ es abierto.
Ya que $\mathbb{Z}^c = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}(n, n+1)$, se quitan todos los enteros y es la unión de abiertos. Por lo tanto $\mathbb{Z}^c$ es abierto.
Por lo tanto $\mathbb{Z}$ es cerrado.

Pero el conjunto $\mathbb{Z}$ no es acotado ya que es un conjunto infinito.

Por lo tanto $\mathbb{Z}$ no es compacto.

b) Definamos el conjunto $M = [0,10] \cup [20,30]$.
Para probar que M es compacto utilizaremos el teorema de Heine- Borel, verifiquemos que M es cerrado y acotado.
Supongamos que M es cerrado, entonces M^c es abierto. Pero $M^c = (-\infty, 0) \cup (10,20) \cup (30, +\infty)$, por el teorema 2.2.11 el rayo $(-\infty, 0)$ es abierto, el rayo $(10,20)$ es abierto y el rayo $(30+\infty)$ también es abierto, utilizando el teorema 2.2.12 la unión de abiertos es abierto por lo tanto M^c es abierto, así afirmamos que M es cerrado.

Probemos que M es acotado.
Sea $x \in M$.

$$\begin{aligned}
x \in M &\implies x \in [0,10] \cup [20,30] \\
&\implies x \in [0,10] \text{ ó } x \in [20,30] \\
&\implies 0 \leq x \leq 10 \text{ ó } 20 \leq x \leq 30.
\end{aligned}$$

Consideremos los siguientes casos.

i) Cuando $0 \leq x \leq 10$. Entonces 0 es una cota inferior para $[0,10]$ y 10 es una cota superior para $[0,10]$.
Probemos que 10 la mínima cota superior para $[0,10]$.
Sea y una cota superior para $[0,10]$.

Entonces $\forall x \in [0,10]$, $x \leq y$ así $10 \leq y$. (Razonando por contradicción) Supongamos que $10 \nleq y$, entonces $y < 10$.

Consideremos $a = \frac{y+10}{2}$ (el punto medio entre y y 10), entonces $0 \leq y < a \leq 10$, así $a \in [0, 10]$. Luego $a \leq y$ por ser y cota superior de $[0, 10]$. Pero entonces $y < a \leq y$, así $y < y$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $10 \leq y$.
Como y es cota superior arbitraria se sigue que $\sup([0, 10]) = 10$.

Sea s una cota inferior de $[0, 10]$.
Entonces $\forall x \in [0, 10]$, $s \leq x$, como 0 pertenece a $[0, 10]$, así $s \leq 0$. Por lo tanto $\inf([0, 10]) = 0$.

ii) Cuando $20 \leq x \leq 30$. Se puede hacer como el caso anterior, y se llegara a que $\inf([20, 30]) = 20$ y $\sup([20, 30]) = 30$.

Así podemos afirmar que M es acotado.

Por ser M cerrado y acotado, por lo tanto $M = [0, 10] \cup [20, 30]$ es compacto.

c) Definamos el conjunto $A = [\pi, \sqrt{10}\,]$.
Para probar que A es compacto utilizaremos el teorema de Heine- Borel, verifiquemos que A es cerrado y acotado.
Como $A^c = (-\infty, \pi) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$, pero por el teorema 2.2.11 el rayo $(-\infty, \pi)$ es abierto y $(\sqrt{10}, +\infty)$ es abierto utilizando el teorema 2.2.12 la unión de abiertos es abierto por lo tanto A^c es abierto, así afirmamos que A es cerrado.

Probemos que A es acotado.
Sea $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in A &\implies \pi \leq x \leq \sqrt{10} \\ &\implies \pi \leq x \text{ y } x \leq \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Por lo tanto π es una cota inferior para A y $\sqrt{10}$ es una cota superior para A.
Probemos que $\sqrt{10}$ la mínima cota superior para A.
Sea z una cota superior para A.

Entonces $\forall x \in A$, $x \leq z$ así $\sqrt{10} \leq z$. (Razonando por contradicción) Supongamos que $\sqrt{10} \nleq z$, entonces $z < \sqrt{10}$.
Consideremos $a = \frac{z+\sqrt{10}}{2}$ (el punto medio entre z y $\sqrt{10}$), entonces $\pi \leq z < a \leq \sqrt{10}$, así $a \in A$. Luego $a \leq z$ por ser z cota superior de A. Pero entonces $z < a \leq z$, así $z < z$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $\sqrt{10} \leq z$.
Como z es cota superior arbitraria se sigue que $\sup(A) = \sqrt{10}$.

Sea w una cota inferior de A.
Entonces $\forall x \in A, w \leq x$, como π pertenece a A, así $w \leq \pi$. Por lo tanto $\inf(A) = \pi$.
Por ser A cerrado y acotado, por lo tanto $A = [\pi, \sqrt{10}\,]$ es compacto.

Ejercicio 2.2.23. Sean A y B subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Aplicar el teorema de Heine-Borel para probar que $A \cap B$ es compacto.

Demostración. Sabemos por hipótesis que que A y B son compactos, entonces A y B son cerrados y acotados.
Para probar que la intersección de cerrados es cerrado, probemos que su complemento es abierto.
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, por el teorema 1.2.10 literal g). Ademas como A^c y B^c son abiertos y por el teorema 2.2.12 la unión de conjuntos abiertos, es un conjunto abierto.
Por lo tanto $(A \cap B)$ es cerrado.

Como el $\sup(A)$ y el $\sup(B)$ existen, entonces $A \cap B$ está acotado superiormente por $m = \text{mín}\{\sup(A), \sup(B)\}$. Por lo tanto $(A \cap B)$ está acotado superiormente.

Como el $\text{ínf}(A)$ y el $\text{ínf}(B)$ existen, entonces $A \cap B$ está acotado inferiormente por $n = \text{máx}\{\text{ínf}(A), \text{ínf}(B)\}$. Por lo tanto $(A \cap B)$ está acotado inferiormente.

Por lo tanto $(A \cap B)$ está acotado.
Como $(A \cap B)$ es cerrado y acotado, por lo tanto es compacto. ■

Ejercicio 2.2.24.

a) Usar el teorema de Heine- Borel para probar que si $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos compactos, entonces $\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es compacto.

b) Dar un ejemplo de la colección $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ de conjuntos compactos tal que $\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ no es compacto.

Demostración. a) Como la intersección arbitraria de una colección de conjuntos cerrados es cerrado. Por lo tanto cada A_α por ser compacto es cerrado, así $\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es cerrado.

También A_α es acotado, por lo tanto $\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es un subconjunto de conjuntos acotados, así la intersección es acotada.

Como $\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es cerrado y acotado por el teorema de Heine- Borel es compacto.
b) Tomemos el conjunto $\{[0, n] : n \in \mathbb{N}\}$.
$A_1 = [0, 1]$,$A_2 = [0, 2]$, $A_3 = [0, 3]$,$A_4 = [0, 4], \ldots, A_{100} = [0, 100], \ldots$ pero cada $A_n : n \in \mathbb{N}$ es cerrado y acotado, pero

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, n] &= [0, 1] \cup [0, 2] \cup [0, 3] \cup [0, 4] \cup \ldots \cup [0, 100] \cup \ldots \cup [0, \infty) \\
&= [0, \infty), \text{ el cual no es cerrado. Por lo tanto no es compacto.}
\end{aligned}$$

■

2.3. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Definición 2.3.1. *Sea A un conjunto de números reales. El número x es un punto de acumulación para A si y sólo si para todo $\delta > 0, B(x, \delta)$ contiene al menos un punto de A distinto de x.*

La definición dice que si x es un punto de acumulación para el conjunto A, se cumple que para cada $\delta > 0, (B(x, \delta) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Ejemplo 2.3.2. Sea $A = [3, 7)$. Demostrar que el conjunto de puntos de acumulación para A es $[3, 7]$.

Demostración. Consideremos los casos para $x = 3, x = 7$ y los elementos de $(3, 7)$.
i) Sea $x = 3$ y $\delta > 0$. Si $\delta \geq 4$, entonces 5 es un punto de $B(x, \delta)$ que pertenece a A, ademas es distinto de el número 3. Si $\delta < 4$, entonces $3 + \dfrac{\delta}{2}$ es un punto de $B(x, \delta)$ que pertenece a A y distinto de 3. Por lo tanto $x = 3$ es un punto de acumulación para A.

ii) Sea $x = 7$ y tomemos $\delta > 0$, si $\delta > 6$, entonces 5 es un punto que pertenece a $B(x, \delta)$. Así podemos afirmar que $5 \in A$ y que también es diferente de 7.
Consideremos $\delta \leq 6$. Así $7 - \dfrac{\delta}{2}$ es un punto de $B(x, \delta)$ que pertenece a A y es diferente de 7. Por lo tanto $x = 7$ es un punto de acumulación para A.

iii) Sea $x \in (3, 7)$. Supongamos que $\delta > 0$ y el conjunto $(3, 7)$ es abierto, por lo que existe $\beta > 0$ tal que $B(x, \beta) \subseteq (3, 7)$. Sea γ el mas pequeño de δ y β. Entonces $B(x, \gamma) \subseteq (3, 7)$ y $x + \frac{\gamma}{2}$ es un punto de $B(x, \gamma)$ que esta en A y es distinto de x. Por lo tanto x pertenece a $(3, 7)$, x es un punto de acumulación de A.

iv) Sea $x < 3$ y $\delta = 3 - x$, ya que los puntos de $B(x, \delta)$ y de A son disjuntos, por lo que x no es un punto de acumulación para A.

v) Sea $x > 7$ y $\delta = x - 7$, ya que los puntos de $B(x, \delta)$ y de A son disjuntos, por lo que x no es un punto de acumulación para A.

Por lo tanto concluimos que el conjunto de todos los puntos de acumulación para $[3, 7)$ es $[3, 7]$. ∎

Ejemplo 2.3.3. Sea $A = (2, 6) \cup \{9\}$. Demostrar que el conjunto de puntos de acumulación para A es $[2, 6]$.

Demostración. Consideremos los siguientes casos.

i) Verifiquemos para $x = 9$, sea $\delta > 0$ tomemos un $\delta = 0.5$, así $B(x, \delta) = (8.5, 9.5)$ no tiene ningún elemento de A que sea distinto de $x = 9$, por lo que podemos afirmar que $x = 9$ no es un punto de acumulación para A.

ii) Para $x = 2$. Sea $\delta > 0$ si $\delta \geq 3$ entonces 4 es un punto que pertenece a $B(x, \delta)$ y que pertenece a A y ademas distinto de $x = 2$.
Si $\delta < 3$, entonces $2 + \dfrac{\delta}{2}$ es un punto de $B(x, \delta)$ que pertenece a A y es distinto de $x = 2$.
Por lo tanto $x = 2$ es un punto de acumulación para A.

iii) Sea $x \in (2, 6)$. Supongamos que $\delta > 0$ y el conjunto $(2, 6)$ es abierto, por lo que existe $\beta > 0$ tal que $B(x, \beta) \subseteq (2, 6)$. Sea γ el mas pequeño de δ y β. Entonces $B(x, \gamma) \subseteq (2, 6)$ y $x + \dfrac{\gamma}{2}$ es un punto de $B(x, \gamma)$ que esta en A y es distinto de x. Por lo tanto x pertenece a $(2, 6)$, x es un punto de acumulación para A.

iv) Para $x = 6$. Sea $\delta > 0$ si $\delta > 5$, entonces 4 es un punto que pertenece a $B(x, \delta)$ y que pertenece a A y ademas distinto de $x = 6$.
Si $\delta \leq 5$, entonces $6 - \dfrac{\delta}{2}$ es un punto de $B(x, \delta)$ que pertenece a A y es distinto de $x = 6$.
Por lo tanto $x = 6$ es un punto de acumulación para A.

v) Sea $x < 2$ y $\delta = 2 - x$, como los puntos de $B(x, \delta)$ y de A son disjuntos, por lo que x no es un punto de acumulación para A.

Por lo tanto concluimos que el conjunto de todos los puntos de acumulación para A es $[2, 6]$.

■

Vemos en nuestros ejemplos que un punto de acumulación de un conjunto no es necesariamente un elemento del conjunto y a la inversa, un elemento de un conjunto no es necesariamente un punto de acumulación del conjunto.

Teorema 2.3.4. *Un número x es un punto de acumulación de un conjunto A si y sólo si para todo $\delta > 0, B(x, \delta)$ contiene un número infinito de putos de A.*

Demostración. "$\Longrightarrow$".
Ahora supongamos que x es un punto de acumulación de A. Supongamos que $B(x, \delta) \cap A$ es finito para algún $\delta > 0$, entonces existen $x_1, x_2, ..., x_k$ tales que

$$(B(x, \delta) - \{x\}) \cap A = \{x_1, x_2, ..., x_k\}.$$

Sea $\delta_1 = \text{mín}\{|x - x_j| : 1 \leq j \leq k\}$. (Nuestra elección de δ_1 es tan pequeño que $B(x, \delta_1)$ no tendrá ningún punto de A, excepto quizás el propio x.) Luego $(B(x, \delta_1) - \{x\}) \cap A = \emptyset$, lo que contradice la suposición inicial de que x es un punto de acumulación para A. Por lo tanto, cada vecindad de x debe contener un número infinito de puntos de A.
"$\Longleftarrow$".
Si cada vecindad de x contiene un número infinito de puntos de A, entonces cada vecindad ciertamente contiene por lo menos un punto de A distinto de x. Por lo tanto, x es un punto de acumulación. ■

Definición 2.3.5. *Sea A un conjunto de números reales. El conjunto de puntos de acumulación para A se llama el conjunto derivado de A, y se denota por A'.*

Ejemplo 2.3.6. Determinar el conjunto derivado de $A = (3, 5)$.

Solución. Consideremos los siguientes casos:

i) Sea $x = 3$ y $\delta > 0$. Si $\delta \geq 4$, entonces 4 es un punto de $B(x, \delta)$ que pertenece a A, ademas es distinto de el número 3. Si $\delta < 4$, entonces $3 + \dfrac{\delta}{2}$ es un punto de $B(x, \delta)$ que pertenece a A y distinto de 3. Por lo tanto $x = 3$ es un punto de acumulación para A.

ii) Sea $x = 5$ y tomemos $\delta > 0$, si $\delta > 4$ entonces 4 es un punto que pertenece a $B(x, \delta)$. Ademas que pertenece A y que también es diferente de 5.
Consideremos $\delta \leq 4$. Así $5 - \dfrac{\delta}{2}$ es un punto de $B(x, \delta)$ que pertenece a A y es diferente de 5. Por lo tanto $x = 5$ es un punto de acumulación para A.

iii) Sea $x \in (3, 5)$. Supongamos que $\delta > 0$ y el conjunto $(3, 5)$ es abierto, por lo que existe $\beta > 0$ tal que $B(x, \beta) \subseteq (3, 5)$. Sea γ el más pequeño de δ y β. Entonces $B(x, \gamma) \subseteq (3, 5)$ y $x + \frac{\gamma}{2}$ es un punto de $B(x, \gamma)$ que esta en A y es distinto de x. Así x esta en $(3, 5)$, x es un punto de acumulación de A.

iv) Sea $x < 3$ y $\delta = 3 - x$, como los puntos de $B(x, \delta)$ y los puntos de A son disjuntos, por lo que x no es un punto de acumulación para A.

v) Sea $x > 5$ y $\delta = x - 5$, como los puntos de $B(x, \delta)$ y los puntos de A son disjuntos, por lo que x no es un punto de acumulación para A. Por lo tanto concluimos que el conjunto derivado de A es $A' = [3, 5]$. ■

Teorema 2.3.7. *Sea A un conjunto, A es cerrado si y sólo si $A' \subseteq A$.*

Demostración. "$\Longrightarrow$".
Supongamos que A es un conjunto cerrado y sea $x \in A'$. (Razonando por contradicción) supongamos que $x \notin A$, entonces $x \in A^c$ que es un conjunto abierto, entonces x es un punto interior de A^c por definición 2.2.4. Así existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq A^c$, por lo tanto $(B(x, \delta) - \{x\}) \cap A = \emptyset$, entonces x no es un punto de acumulación para A. Como $x \in A^c$, entonces $x \notin A'$, entonces haber supuesto que $x \notin A$ fue un error. Por lo tanto $x \in A$, así $A' \subseteq A$.

"$\Longleftarrow$".
Ahora supongamos que $A' \subseteq A$ y probemos que A es cerrado. Para demostrar que A es cerrado, demostremos que A^c es abierto.(Razonando por contradicción).
Supongamos que A^c no es abierto, hay al menos un $x \in A^c$ que no es un punto interior de A^c. Por lo que no existe ningún δ-vecindad de x que este contenida en A^c; es decir, cada δ-vecindad de x contiene un punto de A. Por lo tanto $x \in A'$, pero $A' \subseteq A$, así $x \in A$, pero x no puede estar en A y A^c. Por lo tanto A es cerrado. ■

Ejemplo 2.3.8. Sean A y B conjuntos de números reales. Probar que si B es cerrado y $A \subseteq B$, entonces $A' \subseteq B$.

Demostración. Suponga que B es cerrado y $A \subseteq B$.
Sea $x \in A'$. Como $x \in A'$ entonces x es un punto de acumulación de A. Por otra parte B es cerrado así por el teorema (2.3.7) B contiene sus puntos de acumulación, luego como $A \subseteq B$ se tiene que $x \in B$. Por lo tanto $A' \subseteq B$. ■

Ejemplo 2.3.9. Sean A y B conjuntos de números reales. Probar que $A \cup A'$ es cerrado.

Demostración. Sea A un conjunto de números reales y sea A' su derivado.
Denotemos $B = A \cup A'$. Así $A \subseteq B$ y $A' \subseteq B$. Luego B contiene sus puntos de acumulación. Por lo tanto del teorema (2.3.7) se tiene que B es cerrado. ■

Teorema 2.3.10 (El Teorema de Bolzano - Weierstrass). *Todo conjunto infinito y acotado de números reales tiene por lo menos un punto de acumulación en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que el conjunto A es acotado e infinito pero no tiene puntos de acumulación.
Como A no tiene puntos de acumulación el conjunto derivado, $A' = \emptyset$, así $A' \subseteq A$, entonces por el teorema (2.3.7) A es cerrado. Como A es cerrado y acotado por el teorema de Heine Borel A es compacto.

Como A no tiene ningún punto de acumulación para cada $x \in A$, existe $\delta_x > 0$ tal que $(B(x, \delta_x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$. Luego consideremos $y \in A$ pero que $x \neq y$ pero esto significa que la familia $\{B(x, \delta_x) : x \in A\}$ es una colección infinita de conjuntos abiertos que cubre a A y no tiene otra subcubierta que ella misma. Por lo tanto, A no tiene una subcubierta finita. Esto contradice el hecho de que A es compacto. Por lo tanto, A debe tener un punto de acumulación. ■

Ejercicios resueltos.

Ejercicio 2.3.11. Si $S = (0, 1]$. Calcular $S' \cap (S^c)'$.

Solución. Consideremos los siguientes casos:

i) Sea $x = 0$ y $\delta > 0$. Si $\delta \geq 0.5$, entonces 0.4 es un punto de $B(x, \delta)$ que pertenece a S, ademas es distinto de el número 0. Si $\delta < 0.5$, entonces $0 + \dfrac{\delta}{2}$ es un punto de $B(x, \delta)$ que pertenece a S y distinto de 0. Por lo tanto $x = 0$ es un punto de acumulación de S.

ii) Sea $x = 1$ y tomemos $\delta > 0$, si $\delta > 0.5$ entonces 0.4 es un punto de $B(x, \delta)$ y que pertenece S, ademas es diferente de 1.
Consideremos $\delta \leq 0.5$, así $1 - \dfrac{\delta}{2}$ es un punto de $B(x, \delta)$ que pertenece a S y es diferente de 1. Por lo tanto $x = 1$ es un punto de acumulación del conjunto S.

iii) Sea $x \in (0,1)$. Supongamos que $\delta > 0$ y el conjunto $(0,1)$ es abierto, por lo que existe $\beta > 0$ tal que $B(x,\beta) \subseteq (0,1)$. Sea γ el más pequeño de δ y β. Entonces $B(x,\gamma) \subseteq (0,1)$ y $x + \frac{\gamma}{2}$ es un punto de $B(x,\gamma)$ que pertenece a S y es distinto de x. Por lo tanto si x pertenece a $(0,1)$, x es un punto de acumulación de S.

iv) Sea $x < 0$ y $\delta = 0 - x$, ya que los puntos de $B(x,\delta)$ y de S son disjuntos, por lo que x no es un punto de acumulación de S.

v) Sea $x > 1$ y $\delta = x - 1$, ya que los puntos de $B(x,\delta)$ y de S son disjuntos, por lo que x no es un punto de acumulación para S.
Por lo tanto concluimos que el conjunto derivado de S es $= [0,1]$.
Luego encontremos quien es el conjunto derivado de S^c.
$S^c = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.

Luego encontremos el conjunto derivado para S^c, considerando los siguientes casos.

i) Como el intervalo de $(-\infty, 0]$ cualquier x que tome a la izquierda de 0, contiene un número infinito de puntos de S^c. Así todos lo puntos a la izquierda de cero son puntos de acumulación.

ii) Consideremos $x = 0$ y tomemos $\delta > 0$, si $\delta > 5$ entonces -1 es un punto que pertenece a $B(x,\delta)$. Ademas que pertenece S^c y que también es diferente de 0.
Consideremos $\delta \leq 5$, así $0 - \dfrac{\delta}{2}$ es un punto de $B(x,\delta)$ que pertenece a S^c y es diferente de 0. Por lo tanto $x = 0$ es un punto de acumulación de S^c.

iii) Sea $x = 1$ y tomemos $\delta > 0$, consideremos $\delta \leq 5$ entonces 1.5 es un punto que pertenece a $B(x,\delta)$. Ademas que pertenece S^c y que también es diferente de $x = 1$.
Por lo tanto $x = 1$ es un punto de acumulación de S^c.

iv) Como el intervalo de $[1, +\infty)$ cualquier x que tome a la derecha de 1, contiene un número infinito de puntos de S^c. Así todos lo puntos a la derecha de uno son puntos de acumulación.
Por lo tanto el conjunto derivado de $S^c = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

Así $S' \cap (S^c)' = [0,1] \cap (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) = \{0, 1\}$.

■

Ejercicio 2.3.12. Probar que si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, entonces $A' \subseteq B'$.

Demostración. Por hipótesis $A \subseteq B$.
Sea $x \in A', \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} x \in A' &\implies (B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \\ &\implies (B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A \subseteq (B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap B; \text{ ya que } A \subseteq B \\ &\implies (B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap B \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Así $x \in B'$. Por lo tanto $A' \subseteq B'$.

$\blacksquare$

Ejercicio 2.3.13. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$.

a) Probar que $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

b) Probar que $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

Demostración. a) Probaremos por doble inclusión. "$\supseteq$"
Como $A \subseteq (A \cup B)$, entonces $A' \subseteq (A \cup B)'$. Ya que sabemos $(A \subseteq B \Longrightarrow A' \subseteq B')$.
También $B \subseteq (A \cup B)$, entonces $B' \subseteq (A \cup B)'$.
Por lo tanto $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.
"$\subseteq$"
Sea $x \in (A \cup B)'$ y sea $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Longrightarrow (B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \\ &\Longrightarrow [(B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A \cup (B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap B] \neq \emptyset \\ &\Longrightarrow (B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \text{ ó } (B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap B \neq \emptyset \\ &\Longrightarrow x \in A' \text{ ó } x \in B' \\ &\Longrightarrow x \in A' \cup B'. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
b) Como $A \cap B \subseteq A$, entonces $(A \cap B)' \subseteq A'$ y $A \cap B \subseteq B$, entonces $(A \cap B)' \subseteq B'$.
Por lo tanto $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

$\blacksquare$

Ejercicio 2.3.14. Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$, probar.

a) $(A^c)' = (A')^c$.

b) $(A - B)' \subseteq A' - B'$.

Demostración. a) Sea $x \in (A')^c$, entonces $x \notin A'$ por lo que existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta)$, no contiene ningún punto de A que no sea x, así que $B(x,\delta) - \{x\}$ está totalmente contenida en A^c.
Tomando cualquier punto de $B(x,\delta) - \{x\}$ que está en A^c por lo que x es un punto de A^c, es decir $x \in (A^c)'$.

Por lo tanto $(A^c)' \subseteq (A')^c$.

Sea $x \in (A^c)'$, así x es un punto de acumulación de A^casí para $\delta >$ de tal manera que $B(x,\delta) - \{x\} \subseteq A^c$. Para $\delta > 0$ se cumple $B(x,\delta) \subseteq A^c$, de donde $B(x,\delta)$ no tiene ningún punto de A entonces $x \notin A'$ por lo que $x \in (A')^c$.
Por lo tanto $(A^c)' \subseteq (A')^c$.

Por lo tanto $(A^c)' = (A')^c$.

b)

$$\begin{aligned} (A-B)' &= (A\cap B^c)';\ \text{por definición de } A-B \\ &\subseteq A'\cap (B^c)';\ \text{por que } (A\cap B)' \subseteq A'\cap B' \\ &\subseteq A'\cap (B')^c;\ \text{como } (B^c)' \subseteq (B')^c \\ &= A'-B'. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(A-B)' \subseteq A'-B'$.

■

2.4. El teorema de la sucesión monótona acotada

Definición 2.4.1. *Para una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales, si existe un número real B tal que $x_n \leq B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esta acotada superiormente por B. Similarmente, si existe un número real B tal que $x_n \geq B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esta acotada inferiormente por B.*
La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada si está acotada superiormente e inferiormente.

Una sucesión es acotada si y sólo si los términos de la sucesión nunca son mas grandes que un número fijo y nunca menor que algún otro número fijo (mas pequeño). Esto es equivalente a decir que el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado, es decir el rango de la función (x_n) es un subconjunto acotado. El acotamiento también puede describirse por el valor absoluto de los términos de la sucesión.

Teorema 2.4.2. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales es acotada si y sólo si existe un número real B tal que $|x_n| \leq B$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. "$\Longrightarrow$"
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales, entonces existe M tal que
$x_n \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$ por ser acotada superiormente y también existe N tal que
$N \leq x_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Sea $B = \text{máx}\{|N|, |M|\}$, así $-B \leq -|N| \leq N \leq x_n \leq M \leq |M| \leq B$.
De donde $-B \leq x_n \leq B$. Por lo tanto $|x_n| \leq B\ \forall n \in \mathbb{N}$.

"$\Longleftarrow$"
Para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, sea $B \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq B$. Por propiedad de valor absoluto $-B \leq x_n \leq B$. Así por la definición anterior $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene cota superior y cota inferior. Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esta acotada. ■

Teorema 2.4.3. *Si una sucesión de números reales converge, entonces es acotada.*

Demostración. Probemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esta acotada.
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a L. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que si $n \geq N$, entonces $|x_n - L| < \varepsilon$.
Tomemos $\varepsilon = 1$ arbitrario, entonces $|x_n - L| < 1, \forall n \geq N$. Entonces

$$|x_n| = |x_n + L - L| = |L + x_n - L| \leq |L| + |x_n - L| < |L| + 1.$$

Por lo tanto $|x_n| < |L| + 1, \forall n \geq N$, es decir, los términos a partir de x_N en adelante están acotados por $|L| + 1$.
También hay que demostrar que los términos anteriores a x_N están acotados.
Sea $M = \{x_i : i < N\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots x_{N-1}\}$, como M es conjunto finito entonces posee un máximo, así M está acotado por $A = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \ldots |x_{N-1}|\}$, entonces

$$|x_n| \leq A, \; \forall n < N.$$

Por lo tanto

$$|x_n| \leq \text{máx}\{A, |L| + 1\}, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

■

Definición 2.4.4. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente si y sólo si para todo $n, m \in \mathbb{N}$, si $n < m$ entonces $x_n \leq x_m$.*
Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente si y sólo si para todo $n, m \in \mathbb{N}$ si $n < m$ entonces $x_n \geq x_m$.
La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona si y sólo si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crece o decrece.

La sucesión $y_n = 2^n$ es creciente ya que $n < m$ implica que $2^n \leq 2^m$.
La sucesión cuyos términos son $z_n = e^{-n}$ es decreciente como el valor de e^{-n} se hace mas pequeño a medida que n se hace mas grande. Una sucesión constante $\{k_n\}$ tal que todo termino $k_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para algún $c \in \mathbb{R}$, es creciente y decreciente. La sucesión alternante $1, -1, 1, -1, 1...$ no es monótona porque sus términos no están en orden creciente ni decreciente.

Ejemplo 2.4.5. *Probar que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ es creciente.*

Demostración. Sea $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n < m$.

$$\begin{aligned} n < m &\implies nm + n < nm + m. \\ &\implies n(m+1) < m(n+1). \\ &\implies \frac{n}{n+1} < \frac{m}{m+1}. \end{aligned}$$

Como $n+1$ y $m+1$ son positivos se tiene que $x_n < x_m$. Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

■

Teorema 2.4.6 (El Teorema de la Sucesión Monótona Acotada). *Para toda sucesión monótona acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe un número real L tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.*

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona acotada. Consideremos los siguientes casos.
Caso 1. Para una sucesión creciente.

a) Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito, entonces definamos a $L = \max\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para algún $N \in \mathbb{N}$ así $x_N = L$ y como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente $x_n = x_N = L$, para todo $n > N$. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

b) Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, ademas por el teorema de Bolzano - Weierstrass el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene al menos un punto de acumulación. Supongamos que L es un punto de acumulación.
Demostremos que $x_n \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (Razonando por contradicción) supongamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N > L$, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces $x_n > L$ para todo $n \geq N$.
Como L es un punto de acumulación de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{x_n : n < N\}$ es finito, L es un punto de acumulación para $\{x_n : n \geq N\}$. Ya que cualquier conjunto abierto que contenga al menos un punto de acumulación L contiene un número infinito de x_n, por lo que la eliminación de un número finito de elementos de la sucesión dejará un número infinito en el conjunto abierto.

Sea $\delta = |x_N - L|$. Entonces $B(L,\delta)$ no contiene ningún punto de $\{x_n : n \geq N\}$. Esto es una contradicción. Así, $x_n \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Probaremos que la sucesión x converge con la L. Sea $\varepsilon > 0$, como L es un punto de acumulación de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ de tal manera que $x_M \in B(L,\varepsilon)$. Así, $L - \varepsilon < x_M$ y así, para $n > M$, $L - \varepsilon < x_M \leq x_n \leq L < L + \varepsilon$. Por lo tanto para $n > M, |x_n - L| < \varepsilon$.
Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

Caso 2. Para una sucesión decreciente.

a) Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito. Sea $L = \min\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, así existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $L = x_N$. Sea $n \geq N$, entonces $L \leq x_n \leq x_N = L$. Luego $x_n = L$, $\forall n \geq N$.
Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

b) Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, ademas por el teorema de Bolzano - Weierstrass el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene al menos un punto de acumulación. Supongamos que L es un punto de acumulación.
Demostremos que $x_n \geq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (Razonando por contradicción) supongamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N < L$, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, así $x_n \leq x_N < L$ $\forall n \geq N$.
Como L es un punto de acumulación de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{x_n : n < N\}$ es finito, L es un punto de acumulación para $\{x_n : n \geq N\}$. Ya que cualquier conjunto abierto que

contenga al menos un punto de acumulación L contiene un número infinito de x_n, por lo que la eliminación de un número finito de elementos de la sucesión dejará un número infinito en el conjunto abierto.

Sea $\delta = |x_N - L|$. Entonces $B(L, \delta)$ no contiene ningún punto de $\{x_n : n \geq N\}$. Esto es una contradicción. Así, $x_n \geq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Probaremos que la sucesión x converge con la L. Sea $\varepsilon > 0$, como L es un punto de acumulación de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ de tal manera que $x_M \in B(L, \varepsilon)$. Así $|x_M - L| < \varepsilon$, para $n > M$, $L - \varepsilon < x_M \leq x_n \leq L < L + \varepsilon$. Por lo tanto para $n > M, |x_n - L| < \varepsilon$.
Por lo tanto $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = L$.

■

Ejercicios resueltos.

Ejercicio 2.4.7. Para cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, determine si está acotada, acotada superiormente o acotada inferiormente.

a) $x_n = \dfrac{10}{n}$.

b) $x_n = 10^{-n}$.

Solución. a) Los términos de la solución son: $10, \dfrac{10}{2}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{4}, \dfrac{10}{5}, \dfrac{10}{6}, \ldots$

Podemos observar que la sucesión es decreciente, así que 10 es una cota superior para x_n ya que $x_n \leq 10$

$$\begin{aligned} x_n &\leq 10 \\ \frac{10}{n} &\leq 10 \\ 10 &\leq 10n, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Se cumple.} \end{aligned}$$

Luego para verificar cual es la cota inferior de x_n.
$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{10}{n} = \dfrac{10}{\infty} = 0$. Así la cota inferior es 0.

Entonces

$$
\begin{aligned}
0 \leq x_n &\leq 10 \\
-10 < 0 \leq \frac{10}{n} &\leq 10 \\
-10 \leq \frac{10}{n} &\leq 10 \\
\left|\frac{10}{n}\right| &\leq 10.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $x_n = \dfrac{10}{n}$ es acotada.

b) Los términos de la solución son: $\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{1,000}, \dfrac{1}{10,000}, \ldots$

Podemos observar que la sucesión es decreciente, así que $\dfrac{1}{10}$ es una cota superior para x_n ya que

$$
\begin{aligned}
x_n &\leq \frac{1}{10} \\
\frac{1}{10^n} &\leq \frac{1}{10} \\
\frac{1}{10^n} - \frac{1}{10} &\leq 0 \\
\frac{10 - 10^n}{10.10^n} &\leq 0, \text{ se cumple. } \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Ademas 0 es una cota inferior para x_n.

■

Ejercicio 2.4.8. Determine si la sucesión es creciente o de creciente.

a) $x_n = \dfrac{n+2}{n}$.

b) $x_n = \dfrac{2n-5}{n+3}$.

Demostración. a) Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $n < m = n+1$.

Tomemos la diferencia entre dos términos consecutivos

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{(n+1)+2}{(n+1)} - \frac{n+2}{n} \\ &= \frac{n+3}{n+1} - \frac{n+2}{n} \\ &= \frac{(n+3)(n) - (n+2)(n+1)}{(n+1)(n)} \\ &= \frac{n^2 + 3n - n^2 - 3n - 2}{(n+1)(n)} \\ &= \frac{-2}{(n+1)(n)} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Así $x_{n+1} - x_n \leq 0$, entonces $-x_n \leq -x_{n+1}$, de donde $x_n \geq x_m$.

Por lo tanto la sucesión $x_n = \dfrac{n+2}{n}$ es decreciente.

b) Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $n < m = n+1$.
Tomemos la diferencia entre dos términos consecutivos

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{2(n+1)-5}{n+1+3} - \frac{2n-5}{n+3} \\ &= \frac{2n+2-5}{n+4} - \frac{2n-5}{n+3} \\ &= \frac{2n-3}{n+4} - \frac{2n-5}{n+3} \\ &= \frac{(2n-3)(n+3) - (2n-5)(n+4)}{(n+4)(n+3)} \\ &= \frac{2n^2 + 6n - 3n - 9 - 2n^2 - 8n + 5n + 20}{(n+4)(n+3)} \\ &= \frac{11}{(n+4)(n+3)} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Así $x_{n+1} - x_n \geq 0$, entonces $x_{n+1} \geq x_n$, de donde $x_m \geq x_n$.

Por lo tanto la sucesión $x_n = \dfrac{2n-5}{n+3}$ es creciente. ■

2.5. Equivalencias de Completitud.

Lema 2.5.1. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones tales que*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = s \ \text{ y } \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0, \ \textit{entonces} \ \lim_{n\to\infty} x_n = s.$$

Demostración. Como $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = s$. Sea $\varepsilon > 0$, existe N_1 tal que $|y_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N_1$.

Ademas $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Existe N_2 tal que $|x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N_2$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, así $|x_n - s| \leq |x_n - y_n| + |y_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ entonces $|x_n - s| < \varepsilon \ \forall n \geq N$. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$. ■

Lema 2.5.2. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$ y t es un número real que cumple, $t < s$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > t, \forall n \geq N$.*

Demostración. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$ y $t < s, t \in \mathbb{R}$. Tomemos $\varepsilon = \frac{s-t}{2} > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon), \forall n \geq N$.

Pero $s - \varepsilon = s - \left(\frac{s-t}{2}\right) = \frac{2s - s + t}{2} = \frac{s+t}{2} > t$.

Como $x_n \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$, entonces $x_n > s-\varepsilon > t, \forall n \geq N$. Por lo tanto $x_n > t, \forall n \geq N$, ■

Definición 2.5.3. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que si $m, n \geq N$, entonces $|x_n - x_m| < \varepsilon$.*

Ejemplo 2.5.4. Demostrar que $x_n = \frac{1}{n}$ es una sucesión de Cauchy.

Demostración. Encontremos un valor para $N \in \mathbb{N}$. Partiendo de $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| < \varepsilon &\implies \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon \\ &\implies \frac{|m-n|}{nm} < \varepsilon, \text{ así para } m > n \\ &\implies \frac{m-n}{nm} < \frac{\cancel{m}}{n\cancel{m}} = \frac{1}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Tomemos a N tal que $\frac{1}{\varepsilon} < N$ (por la propiedad arquimediana literal b). Entonces para todo $m > n \geq N$ se tiene.

$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{m-n}{nm}\right| = \frac{|m-n|}{nm} = \frac{m-n}{nm} < \frac{\cancel{m}}{n\cancel{m}} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$

Ademas consideremos el caso $n > m \geq N$.

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{n-m}{mn}\right| = \frac{|n-m|}{mn} = \frac{n-m}{mn} < \frac{\cancel{n}}{m\cancel{n}} = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por lo tanto $x_n = \dfrac{1}{n}$ es una sucesión de Cauchy. ■

Ejemplo 2.5.5. Demostrar que $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ es una sucesión de Cauchy.

Demostración. La sucesión la podemos reescribir de la siguiente manera.

$$x_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Queremos que $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{m}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{m}}\right| \\
&= \frac{|\sqrt{m}-\sqrt{n}|}{2\sqrt{n}\sqrt{m}}, \text{ consideremos a } m > n \\
&< \frac{\cancel{\sqrt{m}}}{2\sqrt{n}\cancel{\sqrt{m}}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon &\implies 1 < 2\sqrt{n}\varepsilon \\
&\implies \frac{1}{2\varepsilon} < \sqrt{n} \\
&\implies \frac{1}{4\varepsilon^2} < n.
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$, existe por la propiedad arquimediana literal b) un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{4\varepsilon^2} < N$.
Entonces $\forall m > n \geq N$, se tiene:
$|x_n - x_m| < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{N}} < \dfrac{1}{2}\sqrt{4\varepsilon^2} = \dfrac{1}{2}(2\varepsilon) = \varepsilon.$

Para el caso donde $\forall n > m \geq N$ se prueba análogamente.

Por lo tanto $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ es una sucesión de Cauchy. ■

Teorema 2.5.6. *Toda sucesión convergente de números es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente y su limite es L, entonces para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N} : |x_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}\ \forall n > N$.

$\forall n, m > N$ se cumple:

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= |x_n - x_m + L - L| \\
&= |x_n - L - x_m + L| \\
&= |(x_n - L) + (L - x_m)| \\
&\leq |x_n - L| + |L - x_m| \\
&= |x_n - L| + |x_m - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.5.7. *Toda sucesion de Cauchy esta acotada.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesion de Cauchy y $\varepsilon = 1$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < 1$, para todo $n, m \geq N$.
Para $n \geq N$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
|x_n| &= |x_n + 0| \\
&= |x_n - x_N + x_N| \\
&\leq |x_n - x_N| + |x_N| \\
&< 1 + |x_N| \; \forall n \geq N.
\end{aligned}$$

Entonces $|x_n| < 1 + |x_N| \; \forall n \geq N$.
Queda por demostrar que los términos anteriores a x_N también están acotados.
Para $n < N$ se cumple que $|x_n| \leq M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{N-1}|\}$. Ademas para $n \geq N$, la sucesión $|x_n| \leq 1 + |x_N|$.

Luego $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq \max\{M, 1 + |x_N|\}$.
Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotado. ■

Teorema 2.5.8. *Si una sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente, entonces la sucesión converge.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy entonces,
$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N_1 \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n, m \geq N_1$.

Sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists\ M \in \mathbb{N}$: $|x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall k \geq M$ con L el limite de la subsucesión.
Tomemos a $N = \max\{N_1, M\}$. Para $n \geq N$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
|x_n - L| &= |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - L| \\
&\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| \\
&< |x_n - x_{n_k}| + \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)
\end{aligned}$$

Luego para $|x_n - x_{n_k}|$ podemos elegir a N como indice. Ahora por el lema 1.13.13 tenemos que $n_k \geq k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, eligiendo $k \geq N$ se cumple que $n_k \geq k \geq N$, entonces $|x_n - x_{n_k}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Así en (*) $|x_n - x_{n_k}| + \dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ k, n \geq N$.
Así $|x_n - L| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$. Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y converge a L. ∎

Teorema 2.5.9. *(Bolzano-weierstrass): Toda sucesión acotada de números reales posee una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesion acotada.
Sea $A_n = \{x_m : m \geq n\}$.
Probemos que si $n < m$, entonces $A_m \subset A_n$.
Sea $z \in A_m$.

$$\begin{aligned} z \in A_m &\Longrightarrow \exists j \geq m : z = x_j \\ &\Longrightarrow j > n : z = x_j \\ &\Longrightarrow z = x_j \in A_n \end{aligned}$$

Por lo tanto $n < m \Longrightarrow A_m \subset A_n$.

Sea $a_n = sup\ A_n$.
Si $n < m$, entonces $A_m \subset A_n$, aplicando el supremo se obtiene $a_m \leq a_n$.
Por lo tanto $n < m \Longrightarrow a_m \leq a_n$.

Así la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, y como $A_m \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, así A_m está acotada para todo m que esta en $\mathbb{N}$. Por tanto el supremo $a_n = sup(A_n)$ existe por el axioma del supremo.

Ahora probemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente (pues obviamente por ser decreciente a_1 es cota superior) y así $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esta acotada.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, así existe $s = inf(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, esto es $s \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$.
$a_n = sup(A_n) \geq x_n \geq s$. Así $a_n \geq s$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente y acotada.

Luego por Teorema de la Sucesión Monótona Acotada, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Como $a_1 = sup(A_1)$, así para $\varepsilon = 1$ por (2.1.11) existe $n_1 \geq 1$ tal que $a_1 - 1 < x_{n_1} \leq a_1$.
Como $a_{n_1+1} = sup(A_{n_1+1})$, así para $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}$, existe $x_{n_2} \in A_{n_1+1}$ tal que

$$a_{n_1+1} - \frac{1}{2} \leq x_{n_2} \leq a_{m_1+1} \text{ en virtud de (2.1.11).}$$

Como $a_{n_2+1} = sup(A_{n_2+1})$, así para $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{3}$, existe $x_{n_3} \in A_{n_2+1}$ tal que

$$a_{n_2+1} - \frac{1}{3} \leq x_{n_3} \leq a_{n_2+1}.$$

Siguiendo por inducción se tendría que existe $x_{n_k} \in A_{n_{k-1}+1}$ tal que para $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$ se tiene que:

$$a_{n_{k-1}+1} - \frac{1}{k} \leq x_{n_k} \leq a_{n_{k-1}+1}. \quad (*)$$

y como cada $x_{n_k} \in A_{n_{k-1}+1}$, así $n_k \geq n_{k-1} + 1 > n_{k-1}$.
Por lo tanto $n_k \geq n_{k-1}$, es decir $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente por lo cual $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

De igual forma $(a_{n_{k-1}+1})_{k\geq 2}$ es subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pero $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, así por (1.13.17) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_{k-1}+1} = L$.
Luego por (1.13.10) y por (*)

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} a_{n_{k-1}+1} - \frac{1}{k} &\leq \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_{k-1}+1} \\
L - 0 &\leq \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq L \\
L &\leq \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq L.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = L$.

Por lo tanto $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge.

■

Teorema 2.5.10. *Toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada por (2.5.7).
Pero por teorema de Bolzano - Weierstrass toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente, así existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \longrightarrow L \in \mathbb{R}$. Pero por (2.5.8) se debe tener que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. ■

Un espacio métrico M se dice completo, si toda sucesión de Cauchy es convergente.

El ejemplos más conocido de espacio completo, es el espacio $\mathbb{R}$ con la métrica usual, sabemos por el teorema de Bolzano -Weierstrass que, toda sucesión de Cauchy posee

una subsucesión convergente. Ademas si una sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente, entonces la sucesión converge.
Por lo tanto $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo.

Ejercicios resueltos.

Ejercicio 2.5.11. Probar que $\mathbb{Q}$ no es completo.

Demostración. Consideremos la sucesión $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
Demostremos que x_n es convergente.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
Sea $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, entonces aplicando logaritmo a ambos lados de la igualdad se tiene

$$ln(y) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = xln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Aplicando L$'$ Hôpital, y el limite cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Así $\lim\limits_{x\to\infty} ln(y) = \lim\limits_{x\to\infty} ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = 1$. Entonteces $\lim\limits_{x\to\infty}(y) = e^1$.

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$. Como la sucesión es convergente por el teorema 2.5.6 es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto en $\mathbb{Q}$, pero la sucesión no converge en $\mathbb{Q}$, pues el limite en $\mathbb{R}$ no es un racional.

Por lo tanto $\mathbb{Q}$ no es completo.

■

Ejercicio 2.5.12. Probar que $[0,1)$ no es completo.

Demostración. Consideremos la sucesión $x_n = \dfrac{n}{n+1}$.
Probemos que x_n es una sucesión de Cauchy.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Como la sucesión es convergente por el teorema 2.5.6 es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Ademas $x_n \longrightarrow 1 \notin [0,1)$.

Por lo tanto $[0,1)$ no es completo. ■

Bibliografía

[1] Douglas Smith Maurice Eggen. A TRANSITION TO ADVANCED MATHEMATICS.

[2] José Darío Sánchez Hernández. Sucesiones y Series.

[3] Eduardo Espinoza Ramos. Sucesiones y Series.